

Modeling of drying for a saturated deformable porous media: taking into account the liquid pressure

Gustavo Ernesto Caceres Salazar

▶ **To cite this version:**

Gustavo Ernesto Caceres Salazar. Modeling of drying for a saturated deformable porous media: taking into account the liquid pressure. Engineering Sciences [physics]. Arts et Métiers ParisTech, 2006. English. NNT : 2006ENAM0012 . pastel-00002350

HAL Id: pastel-00002350
https://pastel.hal.science/pastel-00002350

Submitted on 7 May 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2006-12 ECOLE DOCTORALE 432

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Centre de Bordeaux

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR

de

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE

D'ARTS ET MÉTIERS

Spécialité : Mécanique

par

Gustavo Ernesto CÁCERES SALAZAR

MODÉLISATION DU SÉCHAGE D'UN MILIEU POREUX SATURÉ DÉFORMABLE : PRISE EN COMPTE DE LA PRESSION DU LIQUIDE

Soutenue le 04 Mai 2006, devant le jury d'examen

MM.	J.-C.	BATSALE	Professeur à l'ENSAM, Bordeaux	Président
	J.	BREARD	Professeur à l'Université du Havre	Rapporteur
	R.	PECZALSKI	Maître de Conférences à l'IUTB/UCBL	Rapporteur
	D.	BRUNEAU	Maître de Conférences à l'ENSAM, Bordeaux	
	D.	FLICK	Professeur à l'INAPG, Paris	
	W.	JOMAA	Maître de Conférences à l'Université Bordeaux 1	

L'ENSAM est un Grand Etablissement dépendant du Ministère de l'Education Nationale, composé de huit centres :
AIX-EN-PROVENCE ANGERS BORDEAUX CHÂLONS-EN-CHAMPÄGNE CLUNY LILLE METZ PARIS

Ce travail de thèse a été effectué au TREFLE (Transferts Ecoulements Fluides Energetique), laboratoire rattaché à l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers et à l'Université de Bordeaux, et par ailleurs Unité Mixte de Recherche 8508 du CNRS.

Je tiens à remercier spécialement les différentes personnes qui ont rendu possible l'aboutissement de ce travail :

J.-R. PUIGGALI et E. ARQUIS, pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire.

J.-C. BATSALE, pour son grand soutient avant, pendant et après mon travail, et aussi, pour m'avoir fait l'honneur d'être le président de mon jury.

W. JOMAA, qui a dirigé ma thèse avec rigueur et passion pour le sujet, en m'apportant de nouvelles connaissances scientifiques, principalement dans le domaine du séchage.

D. BRUNEAU, mon co-directeur de thèse, pour son apport théorique et son aide notamment dans la partie mathématique.

R. PECZALSKI et J. BREARD pour avoir accepté d'être les rapporteurs de mon travail et D. FLICK, pour avoir accepté de faire partie du jury.

S. BOYA et M. BORE, pour leur grande volonté et leur gentillesse.

Je veux remercier, en général, tous les thésards et membres du TREFLE, pour ces trois années et cinq mois de séjour très convivial.

Quand on fait une thèse, on ne fait pas seulement « de la science », on a tout un nouveau monde à découvrir et particulièrement des amis qui nous aident, d'une façon ou une autre, à faire de cette période une époque pleine de bons souvenirs, alors je tiens à remercier :

Vincent BLANCHARD (lui-même), mon grand ami Franco-Québécois, de forte personnalité, qui m'a aidé à connaître la France profonde, son idiosyncrasie et son histoire (avec Napoléon bien sur) ; ainsi que la beauté de Québec au travers de sa musique, de photos et d'histoires.

Fabrice POURCEL, pour m'avoir secouru dans ma première année de thèse, en m'éclaircissant une grande partie de ce monde complexe appelé « séchage ».

Valeri BUBNOVICH, grand copain et chercheur de l'USACH au Chili, pour m'avoir aidé à passer ces instants très difficiles où la recherche refuse (obstinément !) d'avancer.

Andrzej KUSIAK, la recherche des mamasitas ne s'arrête pas, vive la « Polska » et merci pour le résume de ma thèse en Polonais (voir la fin de la thèse).

J. M. ROZOT, pour les super moments sportifs et les discutions scientifiques.

Jean-Luc. DAUVERGNE (« le plus beau II») et BOOOM !!! (J. LOPEZ), Rock'n roll et alcool, une bonne solution quand la science ne veut pas avancer.

Matthieu BAMFORT (l'anglais-parisien–français), pour son grand dynamisme.

Sadoth. SANDOVAL, viva Mexico !!!

Vanessa HO KON TIAT, pour sa sympathie et sa bonne cuisine.

Geoffroy ROUSSEAUX, pour son bon humour et sa motivation pour s'amuser.

Frédéric PITIE, pour les grands moments vécus en colocation avec l'oiseau qui chante.

Emmanuelle (Manue), pour avoir été avec moi et de m'avoir soutenu pendant la fin de mon travail.

Adeline, Thomas et Eric (MURKY ZONE), pour les beaux instants musicaux que nous avons passés ensemble.

Un merci spécial à toutes mes amies, Isabelle Lucas, Roxane Dasté, Monika Kowalczuk, Chantale Morin, Caroline Davis, Ana Belén, Teresa Vicario, Katarzyna Kwiatkowska, Gabriela Wieckowska, Goska Stankiewicz et Hanna, qu'ont toujours cru en moi et m'ont encouragé pour arriver jusqu'à la fin de ma thèse.

Finalement, je veux dédier ma thèse aux deux êtres qui me sont les plus chers et dont le soutient m'a toujours aidé à réussir dans la vie…

A mes parents

SOMMAIRE

1 INTRODUCTION 1

2 THEORIE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE DU SECHAGE 5

2.1 Modèle capillaro-poreux (milieu non déformable) 6
2.1.1 Modélisation d'un milieu capillaro-poreux 7
2.1.1.1 Equations de conservation de la masse 10
2.1.1.2 Équations de conservation de la teneur en eau 11
2.1.1.3 Équations de conservation de l'air sec 13
2.1.1.4 Équation de conservation de l'énergie (modèle à une température) 14
2.1.1.5 Conditions aux limites associées 15
2.1.2 Commentaires sur l'obtention des coefficients de perméabilité 16

2.2 Modèle de type diffusif et milieu déformable 18
2.2.1 Modèle de type diffusif appliqué aux milieux non déformables 19
2.2.1.1 Equation de conservation de la masse 20
2.2.1.2 Équation de conservation de l'énergie 20
2.2.1.3 Conditions aux limites associées 21
2.2.2 Modèle de type diffusif appliqué aux milieux déformables 21
2.2.2.1 Modélisation avec prise en compte de la vitesse du retrait 21
2.2.2.2 Modélisation sans prise en compte de la vitesse du retrait 23
2.2.3 Détermination du coefficient de transport diffusif effectif 26
2.2.3.1 Coefficient de transport diffusif dans un milieu déformable 26
2.2.4 Commentaires sur les modèles de transport diffusif dans le séchage 27

2.3 Analyse de la théorie de consolidation de Biot 28
2.3.1 Hypothèses de Biot 29
2.3.2 Représentation de contraintes dans le milieu 29
2.3.3 Relation déformation-contraintes et pression de l'eau. 30
2.3.4 Interprétation physique des valeurs constantes. 32
2.3.5 Système des équations qui gouvernent le phénomène de consolidation. 33
2.3.6 Théorie simplifié pour les milieux saturés 34
2.3.7 Commentaires sur la théorie de Biot 35

2.4 Conclusion 37

3 MODÉLISATION D'UN MILIEU DIPHASIQUE DÉFORMABLE 39

3.1 Prise de moyenne : définitions et théorèmes 40
3.1.1 Prise de moyenne appliquée aux équations de transport 41
3.1.2 Influence du caractère déformable du V.E.R 44
3.1.2.1 Définition du champ de vitesse de retrait à l'échelle local 44
3.1.2.2 Application à l'équation de conservation de la masse 45

3.2 Equations de conservation de la masse liquide et solide 48
3.2.1 Écriture de l'équation de conservation de masse liquide (eau libre) 49
3.2.1.1 Prise en compte de la loi de Darcy 49
3.2.1.2 Prise en compte la compressibilité du liquide : loi d'état du liquide 49
3.2.2 Ecriture de l'équation de conservation de la masse totale 52
3.2.2.1 Ecriture de l'équation de conservation de masse solide 52
3.2.2.2 Somme des équations de conservation de la masse solide et liquide 52

3.3 Équation de la quantité de mouvement 54
3.3.1 Équilibre de contraintes 54
3.3.2 Application du principe de contraintes effectives de Terzaghi 54
3.3.3 Tenseur de déformations totales pour grandes déformations 56

3.4 Équation de conservation de l'énergie 58
3.4.1 Modèle à une température 58
3.4.2 Mise sous forme conservative 59

3.5 Conclusion 60

4 RÉSOLUTION NUMÉRIQUE LORS D'UN SÉCHAGE DE TYPE CONVECTIF 63

4.1 Validation du modèle 63
4.1.1 Configuration expérimentale 63
4.1.2 Configuration et paramètres de la simulation 65
4.1.2.1 Paramètres tensoriels 66
4.1.2.2 Conditions aux limites 70
4.1.3 Résolution numérique et comparaison avec les résultats expérimentaux 72
4.1.3.1 Choix de résolution numérique 72
4.1.3.2 Comparaison entre la simulation et l'expérience 73
4.1.4 Comportement de la pression liquide 75
4.1.5 Comportement des contraintes mécaniques 78

4.2 Sensibilité du modèle 80
4.2.1 Variation du coefficient de Poisson 80
4.2.2 Variation du module de Young 85
4.2.3 Variation de la perméabilité 88
4.2.4 Rapport de forme 92
4.2.5 Terme transitoire associé à la compressibilité du liquide 96

4.3 Conclusion 98

5 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES 101

5.1 Conclusions 101

5.2 Perspectives 103

NOMENCLATURE 105

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES 109

ANNEXE 1 : Relation retrait volumique du V.E.R et vitesse de déformation du milieu 117

ANNEXE 2 : Analyse de la divergence de la moyenne du terme convectif de l'équation de conservation de masse d'une phase π 119

ANNEXE 3 : Analyse des ordres de grandeur dans l'équation de conservation de masse liquide 125

ANNEXE 4 : Détermination de la condition limite de l'équation de conservation de la masse d'une phase π 127

ANNEXE 5 : Contrainte effective 131

ANNEXE 6 : Changement d'espace d'Euler à Lagrange 133

ANNEXE 7 : Champs de pression intrinsèque et fraction volumique du liquide 137

1 INTRODUCTION

L'objectif de cet travail est l'étude du séchage des milieux poreux déformables saturés. Il a pour but la mise en place d'une description physique fine du fort couplage hydromécanique qui se produit au sein de ses milieux.

Avant d'aborder le thème principal de notre travail, il est important d'avoir une idée générale de ce qu'est une opération de séchage, ceci de façon à pouvoir envisager les applications possibles de notre travail de recherche. Nous pouvons définir le séchage comme l'extraction de solvant d'un produit par apport d'énergie thermique à celui-ci ; Selon le type de produits séchés et le type de procédé de séchage, les problématiques rencontrées peuvent être d'ordre énergétique (consommation d'énergie, choix de sources d'énergie, coût énergétique…), d'ordre purement financier (coût de stockage, coût de transport,…) et/ou d'ordre qualité du produit séché. Les procédés de séchage interviennent dans divers secteurs d'activités comme les industries du bois, minière, papetière, de l'alimentation, de l'agriculture, pharmaceutique, de la construction de bâtiments, etc. L'obtention d'une bonne qualité du produit séché ainsi que l'optimisation des procédés employés sont, même si le coût énergétique reste une préoccupation, les deux principaux objectifs que les utilisateurs de procédés de séchage cherchent généralement à atteindre. L'objet des études scientifiques approfondies menées sur les processus mis en œuvre lors d'une opération de séchage et sur l'étude des principaux procédés de séchage vise à donner des éléments physiques objectifs permettant d'atteindre ces objectifs.

Plusieurs problématiques spécifiques et qui sont généralement très couplées, se présentent habituellement dans le processus de séchage :

1. La cinétique de séchage (et au travers de celle-ci, le temps du séchage). Par exemple, dans l'industrie quand la demande d'un produit est trop élevée, la tendance immédiate est d'accélérer le processus de séchage, pour pouvoir la satisfaire dans le temps imparti. Il est alors indispensable de connaître le temps optimal du séchage afin d'obtenir un milieu avec des caractéristiques souhaitées telles que, par exemple, sa teneur en eau finale (par exemple, dans l'alimentaire, l'excès d'eau peut favoriser la dégradation biologique de tout le produit).
2. La forme finale du produit (déformation). La forme finale a une influence directe dans l'utilisation du produit, ainsi que sur son esthétique ; cette dernière peut intervenir fondamentalement dans le prix de vente du produit.

3. La structure interne (porosité, surface spécifique, fissuration) et de surface (fissuration) du produit, ainsi que les qualités mécaniques de celui-ci qui en découlent ; les fissures fragilisent le produit, ainsi un contrôle de l'apparition de celles-ci au cours du séchage (par minimisation des contraintes internes prenant place au cours du séchage) s'avère important.

Dans ce travail, nous proposons un modèle physique dont l'objectif est d'aider à solutionner les 3 problématiques généralement fortement couplées, énoncées précédemment. Le modèle mis en œuvre est diphasique ; il prend en compte la nature du produit (caractéristiques thermophysiques et rhéologiques) ainsi que son état initial (forme, teneur en eau) ; son originalité réside dans la prise en compte du gradient de pression comme terme moteur de transport du solvant (loi de Darcy) ; à cette originalité s'ajoute la prise en compte du caractère éventuellement compressible du liquide. Cette modélisation du transport convectif de la phase liquide sous l'effet du gradient de pression (au travers de la loi de Darcy) a pour avantage de ne pas avoir à utiliser de modèle de transport de type diffusif, et donc de ne pas avoir à recourir à des expériences de détermination d'un coefficient de transport effectif. Il a aussi l'avantage d'être physique (le gradient de pression du liquide est effectivement le moteur de transport ce liquide) et il permet de ce fait, une description mathématique autorisant à terme d'envisager un passage continu entre la description de l'évacuation d'un solvant d'un milieu diphasique (solide et liquide) et la description de l'évacuation d'un solvant d'un milieu triphasique (solide, liquide et gaz). La prise en compte du caractère compressible du liquide, outre le fait qu'elle facilite la résolution numérique du modèle mis en œuvre dans ce travail, permettra a priori d'envisager à terme la prise en compte d'autre phénomènes tels que la vaporisation interne au produit.

On peut trouver un grand nombre d'études de séchage des milieux poreux. Le chapitre 2 est alors consacré à l'analyse de la bibliographie traitant de la modélisation du séchage. Nous centrerons notre attention sur trois modèles en particulier : capillaro-poreux, de type diffusif et de consolidation de Biot. Ces trois modèles donnent la principale base théorique sur laquelle sera développée notre modèle. En effet les modèles capillaro-poreux ont comme caractéristique fondamentale une description plutôt convective pour décrire le transport fluide (utilisation des gradients de pression du liquide), les modèles de type diffusifs sont très utilisés pour faire des couplages entre la déformation du milieu et le transport du fluide ; et finalement la théorie de Biot donne un bon couplage hydromécanique (solide-liquide) appliquée aux phénomènes de consolidation.

Une fois les bases théoriques établies, la modélisation est abordée (Chapitre 3). Elle démarre par un changement d'échelle des équations de transport au travers de la théorie de la prise de moyenne. Nous nous intéressons en particulier à l'influence que peut avoir un V.E.R déformable sur les équations de transport de masse, car l'hypothèse classique le considère fixe même si le milieu change sa géométrie. Les équations à l'échelle locale seront, donc, écrites à l'échelle macroscopique. Dans cette partie de l'étude seront introduites, dans le modèle, la loi de Darcy et la compressibilité du liquide. Le couplage hydromécanique sera fermé en utilisant la théorie de contraintes effectives de Terzaghi, qui nous amène à tenir compte d'une loi phénoménologique et du comportement rhéologique du matériau pour pouvoir définir la vitesse de déplacement du solide. Le tenseur de déformations est écrit sous l'hypothèse des grandes déformations, parce que dû au changement de géométrie du milieu, nous avons choisi le changement d'espace de Euler à Lagrange et ceci nous oblige à calculer les déplacements par rapport à l'instant initial.

L'énergie que fournie l'environnement de séchage au milieu, sera considérée à travers de l'équation classique de conservation d'énergie (modèle à une température) sous sa forme conservative. Dans notre cas il n'est pas indispensable de faire une étude approfondie sur cette équation, parce que nous savons a priori que l'influence de la température, au sein du milieu, est très faible. Ceci sera constaté dans le chapitre 4 (validation du modèle).

Les résultats du modèle (Chapitre 4), seront donc obtenus par une simulation numérique 2D avec la méthode des éléments finis et un changement de variables d'espace (Euler-Lagrange). La validation du modèle sera faite en comparant les résultats issus de la simulation avec ceux obtenus par l'expérience d'un séchage convectif d'un gel d'alumine, qui a comme avantage d'être un milieu fortement déformable et qui reste principalement diphasique tout au long du processus de séchage.

Finalement, une étude de sensibilité sera faite pour montrer l'influence des paramètres rhéologiques, de la perméabilité et du rapport de forme sur les variables de transport (fraction volumique du liquide et pression intrinsèque du liquide) et la déformation du milieu (vitesse de déformation du solide). La relation déformation et transport du fluide (couplage hydromécanique) sera aussi étudiée dans cette dernière partie.

2 THEORIE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE DU SECHAGE

Comme nous l'avons déjà expliqué en introduction, le séchage est un processus qui permet d'extraire le solvant du produit ; dans l'agriculture, par exemple, l'opération de séchage permet de déshydrater un produit jusqu'à atteindre l'équilibre hygroscopique permettant ainsi une stabilisation de l'aliment. Alors, pour toutes les applications ou méthodes de séchage, le principe reste le même.

Les opérations de séparation liquide-solide peuvent être classées en trois types :

-La déshydratation mécanique : les techniques de séparation mécanique ignorent les effets thermiques. Ces techniques de séparation liquide-solide se classent en trois grandes familles :

a) Décantation = séparation sous l'effet de la gravitation,
b) Centrifugation = séparation sous l'effet d'une force centrifuge, la phase fluide s'évacuant en écoulement libre (décantation centrifuge) ou au travers d'un milieu poreux (essorage),
c) Filtration = séparation par écoulement de la phase fluide au travers d'un milieu poreux, l'écoulement étant assuré par une force de pression.

-Le séchage chimique : le milieu sèche au contact d'un élément chimique hydrophile, ce dernier absorbe et retient l'eau.

-Le séchage thermique : l'eau du produit s'évapore grâce au transfert de chaleur, l'apport d'énergie se fait selon trois modes différents :

a) Séchage par conduction : l'énergie thermique nécessaire au chauffage est apportée par contact avec une paroi chauffée ; les vapeurs dégagées par le produit durant le séchage sont aspirées ou entraînées par un gaz de balayage,
b) Séchage par convection : il consiste à mettre en contact un gaz chaud avec le produit.
c) Séchage par rayonnement : l'énergie est apportée au produit à sécher par des ondes électromagnétiques. Les rayonnements utilisés sont du type infrarouges, hautes fréquences ou micro-ondes.

L'enlèvement d'humidité depuis des solides, soit pour des fins de préservation, soit pour diminuer les coûts de transport, soit pour adapter la teneur en humidité pour des processus spécifiques, est dans chacun des cas effectué en minimisant la possible détérioration du matériau, et en respectant des coûts attrayants tout en minimisant l'impact environnemental.

Luikov est un des premiers scientifiques qui s'est intéressé au séchage, ses principales études datent de l'année 1966 et ses modèles sont encore utilisés dans les analyses des milieux capillaro-poreux (Irudayarj and Wu, 1996 ; Eduardo et al., 2003 ; Oliveira et Lima, 2003). Il a divisé les matériaux humides en trois types, selon leurs propriétés colloïdales physiques de base :

a) Milieux colloïdaux typiques : pendant le séchage leur changement de taille (rétrécissement) est significatif mais ils conservent leurs propriétés élastiques (gélatine, pâte serrée de farine).
b) Milieux capillaro-poreux : pendant que l'humidité est retirée ils deviennent fragiles, toujours incompressibles, et peuvent être transformés en poudre (sable, charbon de bois).
c) Milieux capillaro-poreux colloïdaux : ils possèdent les propriétés des deux premiers types (ils incluent la majorité des matériaux qui sont soumis au séchage).

Pour mieux comprendre l'état de l'art du séchage, il faut connaître les deux grandes tendances de sa modélisation : les modèles capillaro-poreux et les modèles de type diffusifs. Afin d'inclure le cas particulier des milieux déformables, il est par ailleurs important de s'intéresser à la théorie de consolidation de Biot qui donne de très bonnes bases théoriques dans le couplage hydromécanique de milieux poreux déformables. La présentation de ces modèles est proposée ici dans le but d'avoir une meilleur compréhension du modèle que nous présenterons par la suite de notre travail.

2.1 Modèle capillaro-poreux (milieu non déformable)

Depuis les modèles phénoménologiques, Whitaker propose une nouvelle façon d'écrire les équations de transfert de chaleur et masse dans les milieux poreux (Whitaker, 1977). Il démarre avec un système d'équations de conservation (chaleur et masse) pour les trois phases contenues dans le milieu (solide, liquide et gaz) et ensuite il applique pour chacune des phases la prise de moyenne en prenant un volume élémentaire représentatif (V.E.R) a l'échelle du pore ; ces paramètres moyennés permettent de considérer le milieu poreux comme un milieu continu équivalent. Tout ceci peut être considéré comme le point de départ de plusieurs discussions dans les équations modernes du séchage.

Dans la suite du document, nous allons expliquer ou développer tous les modèles en prenant en compte cette théorie de la prise de moyenne, et les notations suivantes seront adoptées.

Soit ζ un paramètre ou fonction quelconque, nous écrivons alors :

a) $\langle \zeta_\pi \rangle$ moyenne apparente de ζ de la phase π.

b) $\langle \zeta_\pi \rangle^\pi$ moyenne intrinsèque de ζ de la phase π.

Le modèle dit « capillaro-poreux » est issu des travaux précédents. Ce modèle prend en compte le caractère hygroscopique du matériau par la fraction massique de vapeur d'eau et décrit de manière précise les transferts de chaleur et masse dans le milieu, tout en tenant compte de la vitesse du fluide en utilisant la loi de Darcy Généralisée dont le terme moteur est le gradient de pression. Cette modélisation est très utile dans l'étude de séchage de milieux poreux triphasiques (Figure 2.1) car elle utilise la notion de pression capillaire (Couture, 1995 ; Prat, 2002 ; Plourde et Prat, 2003 ; Dantas et al., 2003), quantité accessible par la mesure.

2.1.1 Modélisation d'un milieu capillaro-poreux

Une connaissance basique de certains concepts ou relations est requise avant d'aborder la modélisation d'un milieu capillaro-poreux.

Dans la plupart des études, les modèles physiques décrivant le transfert d'humidité sont basés sur l'existence de deux régions différentes désignées sous le nom de « région non-hygroscopique » et « région hygroscopique ». Cette dernière région est caractérisée par la présence dominante de l'eau liée (Perré and Degiovanni, 1990 ; Goyeneche et al., 2001). Dans la région non-hygroscopique, l'eau libre occupe la partie principale des pores dans le milieu et est maintenue par les forces capillaires. Dans les deux régions, l'eau liée (Figure 2.2) est physiquement adsorbée sur les parois de la structure par des forces du type Van der Waals ou forces électrostatiques sous la forme de couches multimoléculaires.

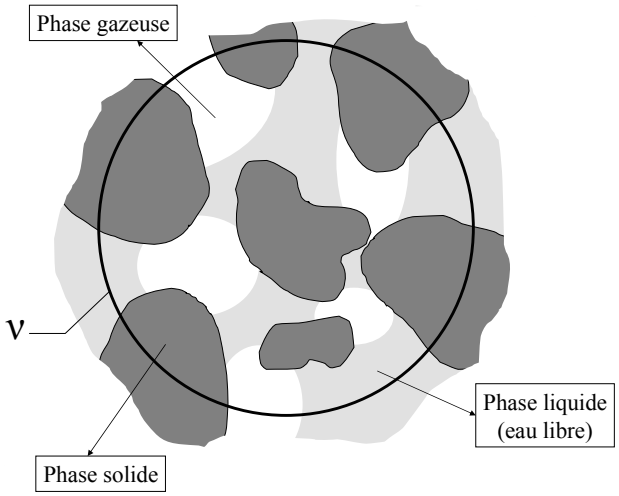


Figure 2.1 *Phase liquide, gazeuse et solide dans le V.E.R. (ν).*

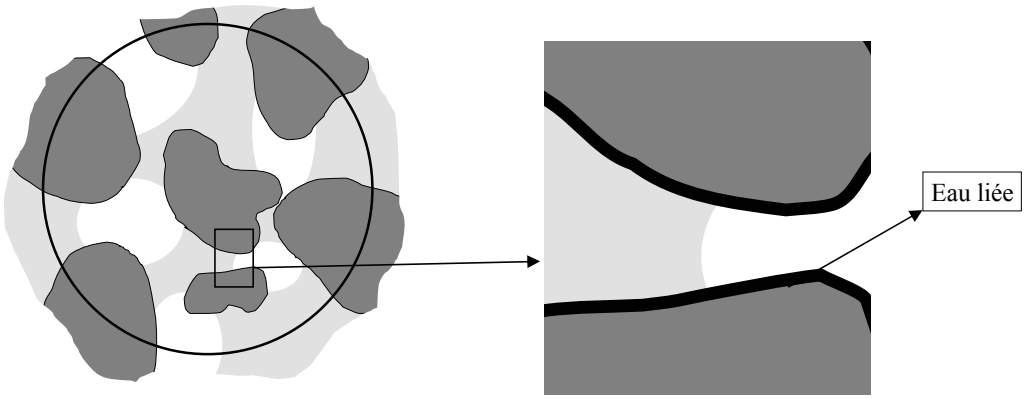


Figure 2.2 *Eau liée dans les pores.*

Pour estimer la teneur en eau titrable dans un milieu, nous employons habituellement la teneur en eau base sèche (W) définie avec la relation suivante :

$$W = \frac{m_t - m_{sec}}{m_{sec}} \tag{2.1}$$

où m_t est la masse totale du produit et m_{sec} est la masse du produit sec, donc W est la masse d'eau par rapport à la masse du produit sec. En outre, on emploie également la saturation de l'eau S, qui représente localement le volume d'eau libre par rapport au volume de pores.

$$S = \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon} \tag{2.2}$$

où ε_l est la fraction volumique du liquide et ε est la porosité du milieu.

Pendant le séchage, l'eau libre est d'abord éliminée grâce à l'action des forces capillaires jusqu'à ce que la saturation locale tombe à zéro. A ce moment il n'existe plus d'eau libre localement mais la structure entière est encore saturée avec l'eau liée. Le contenu d'eau liée est réellement à sa valeur maximum, W_{psf}, correspondant au point de saturation de la matrice complète. Au-dessous de ce point de saturation le retrait de l'eau liée commence.

Avant d'aller plus loin dans la description de ce type de modèle, il est important d'expliquer le concept de pression capillaire qui va servir à la description du transport de fluide dans les pores.

Pression capillaire

La capillarité est un phénomène qui dépend de la tension superficielle des liquides et qu'on observe dans des conduits très fins (tubes capillaires ou une section de pore) où le liquide s'élève au-dessus du niveau hydrostatique.

Quand deux fluides non miscibles sont en contact avec un solide, les forces de tension superficielle surgissent en raison de l'énergie requise pour former une interface. Au point où une interface fluide-fluide rencontre un solide, un angle de contact θ, est défini par les plans tangents à l'interface fluide-fluide et fluide-solide (Figure 2.3). Quand les forces de tension superficielle sont équilibrées un angle statique de contact est obtenu :

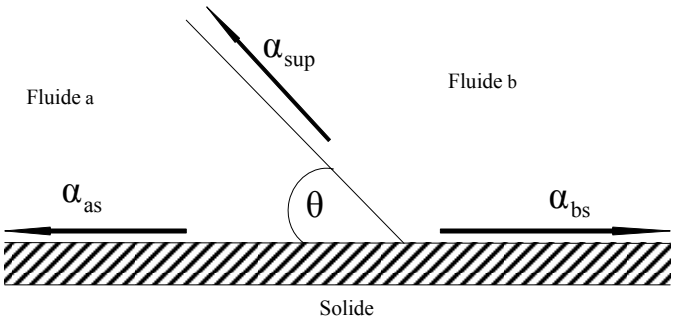


Figure 2.3 *Tensions de surface fluide-fluide et fluide-solide (θ angle de contact)*

L'angle statique de contact est obtenu en faisant un bilan des tensions de surface :

$$\alpha_{bs} - \alpha_{as} = \alpha_{sup} \cos(\theta) \tag{2.3}$$

où α_{sup} est la tension superficielle entre les deux fluides, α_{as} , α_{bs} sont les tensions de surface entre le solide et les fluides a et b respectivement. Les forces de tension superficielle créent également une différence de pression ΔP à travers l'interface entre deux fluides non miscibles. Cette différence de pression est décrite par la loi de Laplace :

$$\Delta P = \alpha_{sup}\, \kappa \tag{2.4}$$

où κ est la courbure moyenne de l'interface. Pour une interface fixe, qui forme approximativement un chapeau sphérique, dans un tube du rayon r, cette différence de pression (2.4) peut être décrite par la relation suivante :

$$\Delta P = \frac{2\,\alpha_{sup} \cos(\theta)}{r} \tag{2.5}$$

Cette différence de pression ΔP s'appelle « Pression Capillaire » (P_c) et c'est une grandeur mesurable au sein du milieu poreux et évolue en fonction de la saturation en eau libre.

Nous pouvons maintenant présenter les grandes lignes du modèle capillaro-poreux dans un milieu triphasique non déformable. Dans ce paragraphe, nous choisissons d'exprimer les équations de conservation de masse du fluide et de l'énergie à l'aide de grandeurs moyennées (Whitaker, 1997) qui nous permettront aisément de faire le lien avec la modélisation du milieu diphasique déformable. Les variables du modèle sont :

- $\langle P_l \rangle^l$: Pression moyenne intrinsèque de la phase liquide
- $\langle T \rangle$ ou $\langle H \rangle = \langle \rho C_P T \rangle$: Température moyenne ou enthalpie moyenne
- W : Teneur en eau

Nous avons fait ce choix de variables (pression du liquide, température et teneur en eau), car se sont des variables qui peuvent intervenir aussi dans la modélisation d'un milieu poreux saturé déformable. Ce choix nous donnera alors la possibilité d'établir de façon explicite le passage continu entre un milieu diphasique déformable et un milieu triphasique non déformable. Dans le cas de l'emploi de la teneur en eau, un autre avantage est observé, il s'agit du regroupement de trois variables (masse volumique de liquide, de vapeur d'eau et de l'eau liée) dans une seule variable (W) comme est remarqué dans l'expression (2.10).

Les trois grandes hypothèses qui interviennent dans cette modélisation sont :

- Une matrice solide non déformable,
- l'existence de trois phases (liquide, gaz et solide),
- le choix des gradients de pression des fluides comme termes moteurs principaux par la loi de Darcy pour décrire la quantité de mouvement de ces fluides (Whitaker, 1986).

2.1.1.1 Equations de conservation de la masse

Pour les modèles capillaro-poreux il existe une équation pour chaque phase (Couture, 1995) :

Air sec :

$$\frac{\partial \langle \rho_a \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\langle \rho_a \rangle^g \langle \overrightarrow{V_a} \rangle \right) = 0 \tag{2.6}$$

Vapeur d'eau :

$$\frac{\partial \langle \rho_v \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\langle \rho_v \rangle^g \langle \overrightarrow{V_v} \rangle \right) = K + K_b \tag{2.7}$$

Eau libre :

$$\frac{\partial \langle \rho_l \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\langle \rho_l \rangle \langle \vec{V}_l \rangle^l \right) = -K \tag{2.8}$$

Eau liée :

$$\frac{\partial \langle \rho_b \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\langle \rho_v \overrightarrow{V_b} \rangle \right) = -K_b \tag{2.9}$$

Dans les équations K et K_b sont les taux de changement de phase (évaporation) de l'eau libre et de l'eau liée respectivement.

2.1.1.2 Équations de conservation de la teneur en eau

En définissant la teneur en eau base sèche W comme suit

$$W = \frac{\langle \rho_l \rangle + \langle \rho_v \rangle + \langle \rho_b \rangle}{\langle \rho_s \rangle} \tag{2.10}$$

et en additionnant les équations (2.7), (2.8), et (2.9), il vient

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\langle \rho_v \rangle + \langle \rho_l \rangle + \langle \rho_b \rangle\right) = -\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\langle \rho_v \rangle^g \langle \overrightarrow{V_v} \rangle\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\langle \rho_l \rangle^l \langle \overrightarrow{V_l} \rangle\right) + \vec{\nabla}\cdot\langle \rho_b \overrightarrow{V_b} \rangle\right]$$

soit :

$$\langle \rho_s \rangle \frac{\partial W}{\partial t} = -\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\langle \rho_v \rangle^g \langle \overrightarrow{V_v} \rangle + \langle \rho_l \rangle^l \langle \overrightarrow{V_l} \rangle + \langle \rho_b \overrightarrow{V_b} \rangle\right)\right] \tag{2.11}$$

Dans l'équation précédente interviennent les flux de vapeur, de l'eau libre et de l'eau liée. Ceux-ci sont modélisés comme suit :

- *Flux d'eau libre* (loi de Darcy généralisée)

$$\langle \rho_l \rangle^l \langle \overrightarrow{V_l} \rangle = -\langle \rho_l \rangle^l \frac{k k_{rl}}{\mu_l}\left(\vec{\nabla}\langle P_l \rangle^l - \langle \rho_l \rangle^l \vec{g}\right) \tag{2.12}$$

où k est la perméabilité intrinsèque du milieu (a déterminer expérimentalement) et k_{rl} est la perméabilité relative au liquide. Plusieurs corrélations, fonctions de la saturation en eau libre S, sont données dans la littérature pour k_{rl} qui peut être aussi défini par ajustement sur des profils de teneur en eau expérimentaux.

Nous considérons que $\langle \rho_l \rangle^l = \rho_l = cte$ pour le développement de toutes nos équations dans ce chapitre.

- *Flux de vapeur*

La vapeur est considérée comme étant un gaz parfait, nous avons alors

$$\langle \rho_v \rangle^g = \frac{m_v \langle P_v \rangle^g}{R \langle T \rangle} \tag{2.13}$$

En admettant l'équilibre thermodynamique local (Moyne, 1987), on peut écrire :

$$\langle P_v \rangle^g = a_w\left(w,\langle T\rangle\right) P_{v_{sat}}\left(\langle T\rangle\right)$$

où $a_w\left(w,\langle T\rangle\right)$ est l'activité de l'eau.

La loi de Darcy généralisée permet d'écrire pour le gaz :

$$\left\langle \overrightarrow{V_g} \right\rangle = -\frac{k k_{rg}}{\mu_g}\left(\vec{\nabla}\langle P_g\rangle^g - \langle \rho_g \rangle^g \vec{g}\right) \tag{2.14}$$

où k_{rg} est la perméabilité relative au gaz.

La vitesse de la vapeur d'eau est définie par :

$$\langle \rho_v \rangle^g \left\langle \overrightarrow{V_v} \right\rangle = \langle \rho_v \rangle^g \left\langle \overrightarrow{V_g} \right\rangle - \langle \rho_g \rangle^g \overline{\overline{D}}_{v_{eff}} \cdot \vec{\nabla} C \tag{2.15}$$

où $C = \dfrac{\langle \rho_v \rangle^g}{\langle \rho_g \rangle^g}$ est la fraction massique de vapeur.

Afin de faire apparaître les variables du problème dans cette équation, l'équation (2.15) nécessite d'être développée :

$$\left\langle \vec{V}_v \right\rangle = \left\langle \vec{V}_g \right\rangle - \left[\frac{m_a \langle P_a \rangle^g}{m_v \langle P_v \rangle^g} + 1\right] \overline{\overline{D}}_{eff} \cdot \vec{\nabla} C \tag{2.16}$$

or $\langle P_a \rangle^g = \langle P_g \rangle^g - \langle P_v \rangle^g$ et $\langle P_g \rangle^g = \langle P_l \rangle^l + P_c$

on a donc :

$$\langle P_a \rangle^g = \langle P_l \rangle^l + P_c - \langle P_v \rangle^g$$

la relation (2.14) devient alors :

$$\left\langle \overrightarrow{V_g} \right\rangle = -\frac{k k_{rg}}{\mu_g}\left(\vec{\nabla}\left(\langle P_l \rangle^l + P_c\right) - \left(\langle \rho_a \rangle^g + \langle \rho_v \rangle^g\right)\vec{g}\right) \tag{2.17}$$

L'hypothèse de gaz parfait sur le mélange air sec et vapeur peut s'écrire :

$$\langle \rho_a \rangle^g + \langle \rho_v \rangle^g = \frac{m_v \langle P_v \rangle^g + m_a\left(\langle P_l \rangle^l + P_c - \langle P_v \rangle^g\right)}{R\langle T \rangle}$$

La relation (2.16) peut en définitif s'écrire

$$\left\langle \vec{V}_v \right\rangle = -\frac{k\, k_{rg}}{\mu_g}\left[\vec{\nabla}\left(\langle P_l \rangle^l + P_c\right) - \frac{m_v \langle P_v \rangle^g + m_a\left(\langle P_l \rangle^l + P_c - \langle P_v \rangle^g\right)}{R\langle T \rangle}\vec{g}\right]$$
$$-\left[\frac{m_a\left(\langle P_l \rangle^l + P_c - \langle P_v \rangle^g\right)}{m_v \langle P_v \rangle^g} + 1\right] \overline{\overline{D}}_{eff} \cdot \vec{\nabla} C$$

On a alors :

$$\langle\rho_v\rangle^g\left\langle\vec{V}_v\right\rangle=\frac{m_v a_w(w,\langle T\rangle)P_{vsat}(\langle T\rangle)}{R\langle T\rangle}\left\{\begin{array}{l}-\frac{kk_{rg}}{\mu_g}\left[\vec{\nabla}\left(\langle P_l\rangle^l+P_c\right)-\frac{m_v\langle P_v\rangle^g+m_a\left(\langle P_l\rangle^l+P_c-\langle P_v\rangle^g\right)}{R\langle T\rangle}\vec{g}\right]\\-\left[\frac{m_a\left(\langle P_l\rangle^l+P_c-\langle P_v\rangle^g\right)}{m_v\langle P_v\rangle^g}+1\right]\overline{\overline{D}}_{eff}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{m_v\langle P_v\rangle^g}{m_v\langle P_v\rangle^g+m_a\left(\langle P_l\rangle^l+P_c-\langle P_v\rangle^g\right)}\right)\end{array}\right\} \tag{2.18}$$

La saturation (S) peut être reliée à la teneur en eau W par la relation suivante :

$$S=\frac{\langle\rho_s\rangle}{\varepsilon\langle\rho_l\rangle^l}\left(W-W_{psat}\right)$$

où P_c est fonction de S. Ainsi $P_c(S)$ est à déterminer expérimentalement et $P_{v_{sat}}(\langle T\rangle)$ est la pression de vapeur saturante fonction uniquement de la température ($\langle T\rangle$). L'activité de l'eau dans le milieu $a_w(W,\langle T\rangle)$ est déduite des isothermes de sorption expérimentales.

$\overline{\overline{D}}_{v_{eff}}=D_v\overline{\overline{B}}(m)$ où D_v est le coefficient de diffusion de la vapeur dans l'air et $\overline{\overline{B}}(m)$ est un paramètre de pondération permettant la prise en compte de la tortuosité du matériau (Couture, 1995)

- *Flux de l'eau liée*

Le flux d'eau liée est classiquement modélisé comme suit :

$$\left\langle\rho_b\overrightarrow{V_b}\right\rangle=-\langle\rho_s\rangle\overline{\overline{D}}_b\cdot\vec{\nabla}W_b-\langle\rho_s\rangle\overline{\overline{D}}_{bt}\cdot\vec{\nabla}\langle T\rangle \tag{2.19}$$

où

$\overline{\overline{D}}_b$ est le coefficient diffusion de l'eau liée que nous pouvons trouver expérimentalement et $\overline{\overline{D}}_{bt}$ terme qui est souvent négligé (Couture, 1995).

2.1.1.3 Équations de conservation de l'air sec

C'est l'équation (2.6) qui nous donne la conservation d'air sec, son développement peut être effectué en tenant compte des développements précédents :

- *Flux d'air sec*

$$\langle\rho_a\rangle^g\left\langle\overrightarrow{V_a}\right\rangle=\langle\rho_a\rangle^g\left\langle\overrightarrow{V_g}\right\rangle-\langle\rho_g\rangle^g\overline{\overline{D}}_{v_{eff}}\cdot\vec{\nabla}C \tag{2.20}$$

où :

$$\left\langle \overrightarrow{V_g} \right\rangle = -\frac{k k_{rg}}{\mu_g}\left[\vec{\nabla}\left(\left\langle P_l \right\rangle^l + P_c \right) - \frac{m_v \left\langle P_v \right\rangle^g + m_a \left(\left\langle P_l \right\rangle^l + P_c - \left\langle P_v \right\rangle^g \right)}{R\left\langle T \right\rangle} \vec{g} \right]$$

$$\left\langle \rho_a \right\rangle^g = \frac{m_a \left(\left\langle P_l \right\rangle^l + P_c - \left\langle P_v \right\rangle^g \right)}{R\left\langle T \right\rangle}$$

$$\left\langle \rho_g \right\rangle^g = \frac{m_v \left\langle P_v \right\rangle^g + m_a \left(\left\langle P_l \right\rangle^l + P_c - \left\langle P_v \right\rangle^g \right)}{R\left\langle T \right\rangle}$$

- *Terme transitoire de conservation de la masse d'air sec*

Pour obtenir la valeur de $\left\langle \rho_a \right\rangle$ à partir de l'équation de conservation d'air sec (2.6) nous avons de plus la relation suivante :

$$\frac{\partial \left\langle \rho_a \right\rangle}{\partial t} = \varepsilon \left[\frac{\partial (1-S) \left\langle \rho_a \right\rangle^g}{\partial t} \right]$$

2.1.1.4 Équation de conservation de l'énergie (modèle à une température)

Une équation faite en adoptant l'équilibre thermique local, sera suffisante pour exprimer l'influence de la température dans le milieu. En prenant l'écriture de Quintard (Quintard et Whitaker, 1995) nous avons le bilan d'énergie résumé à une équation à une seule température :

$$\begin{aligned} &\left\langle \rho C_p \right\rangle \frac{\partial \left\langle T \right\rangle}{\partial t} + \left[\rho_l \left\langle \overrightarrow{V_l} \right\rangle C_{p_l} + \left\langle \rho_b \overrightarrow{V_b} \right\rangle C_{p_l} + \left\langle \rho_a \right\rangle^g \left\langle \overrightarrow{V_a} \right\rangle C_{p_a} + \left\langle \rho_v \right\rangle^g \left\langle \overrightarrow{V_v} \right\rangle C_{p_v} \right] \cdot \vec{\nabla} \left\langle T \right\rangle \\ &- \left\langle \rho_b \overrightarrow{V_b} \right\rangle \cdot \vec{\nabla} h_b + h_v K + (h_v + h_b) K_b - \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\lambda}} \cdot \vec{\nabla} \left\langle T \right\rangle) = 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

où

$$\left\langle \rho C_p \right\rangle = \left\langle \rho_s \right\rangle C_{p_s} + (\left\langle \rho_l \right\rangle + \left\langle \rho_b \right\rangle) C_{p_l} + \left\langle \rho_v \right\rangle C_{p_v} + \left\langle \rho_a \right\rangle C_{p_a} \tag{2.22}$$

$C_{p_s}, C_{p_l}, C_{p_v}, C_{p_a}$ sont les chaleurs spécifiques du solide, du liquide, de la vapeur et de l'air ; h_v, h_b sont des chaleurs latentes d'évaporation et de sorption.

- *Mise sous forme conservative*

Nous prenons la forme conservative, avec le changement de variable $\left\langle H \right\rangle = \left\langle \rho C_p T \right\rangle$ (Turner and Ferguson, 1995) pour écrire l'équation de l'énergie, parce que la nouvelle

variable nous permettra d'effacer deux termes (K et K_b) que nous devions calculer dans l'équation (2.21).

En prenant l'écriture de Couture (Couture, 1995) l'équation de l'énergie s'écrit alors :

$$\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\begin{bmatrix}\left(\rho_l\left\langle\vec{V_l}\right\rangle C_{p_l}+\left\langle\rho_b\vec{V_b}\right\rangle C_{p_l}+\langle\rho_a\rangle^g\left\langle\vec{V_a}\right\rangle C_{p_a}+\langle\rho_v\rangle^g\left\langle\vec{V_v}\right\rangle C_{p_v}\right)\langle T\rangle\\ +h_{v_0}\langle\rho_v\rangle^g\left\langle\vec{V_v}\right\rangle+h_b\left(\rho_l\left\langle\vec{V_l}\right\rangle+\langle\rho_v\rangle^g\left\langle\vec{V_v}\right\rangle\right)-\bar{\bar{\lambda}}\cdot\vec{\nabla}\langle T\rangle\end{bmatrix} \tag{2.23}$$
$$=\Phi$$

où

$$\Phi=\left(\rho_l\left\langle\vec{V_l}\right\rangle+\langle\rho_v\rangle^g\left\langle\vec{V_v}\right\rangle+\left\langle\rho_b\vec{V_b}\right\rangle\right)\cdot\vec{\nabla}h_b \tag{2.24}$$

est considéré comme un terme source et $\bar{\bar{\lambda}}$ est le coefficient effectif de conduction de la chaleur.

2.1.1.5 Conditions aux limites associées

- *Fluide*

$$\langle P_l\rangle^l=P_\infty-P_c \tag{2.25}$$

$$\left(\langle\rho_v\rangle^g\left\langle\vec{V_v}\right\rangle+\langle\rho_l\rangle^l\left\langle\vec{V_l}\right\rangle+\left\langle\rho_b\vec{V_b}\right\rangle\right)\cdot\vec{n}=h_m\left[\frac{m_v\langle P_v\rangle}{R\langle T\rangle}-\rho_{v_\infty}\right]=F_m \tag{2.26}$$

- *Energie*

$$\begin{bmatrix}\left(\rho_l\left\langle\vec{V_l}\right\rangle C_{p_l}+\left\langle\rho_b\vec{V_b}\right\rangle C_{p_l}+\langle\rho_a\rangle^g\left\langle\vec{V_a}\right\rangle C_{p_a}+\langle\rho_v\rangle^g\left\langle\vec{V_v}\right\rangle C_{p_v}\right)\langle T\rangle\\ +h_{v_0}\langle\rho_v\rangle^g\left\langle\vec{V_v}\right\rangle+h_b\left(\rho_l\left\langle\vec{V_l}\right\rangle+\langle\rho_v\rangle^g\left\langle\vec{V_v}\right\rangle\right)-\bar{\bar{\lambda}}\cdot\vec{\nabla}\langle T\rangle\end{bmatrix}\cdot\vec{n}=$$
$$Q+\left(h_{v_0}+h_b+C_{p_v}\right)F_m+\left(\langle\rho_a\rangle^g\left\langle\vec{V_a}\right\rangle C_{p_a}\langle T\rangle\right)\cdot\vec{n} \tag{2.27}$$

où

$$Q=\left(-h_v\left(\rho_l\left\langle\vec{V_l}\right\rangle+\left\langle\rho_b\vec{V_b}\right\rangle\right)-h_b\left\langle\rho_b\vec{V_b}\right\rangle-\bar{\bar{\lambda}}\cdot\vec{\nabla}\langle T\rangle\right)\cdot\vec{n}$$

$$F_m=\left(\rho_l\left\langle\vec{V_l}\right\rangle+\langle\rho_v\rangle\left\langle\vec{V_v}\right\rangle+\left\langle\rho_b\vec{V_b}\right\rangle\right)\cdot\vec{n}$$

En conclusion nous pouvons observer que nous avons un système de trois équations à trois inconnues qui sont W, $\langle P_l\rangle^l$ et $\langle H\rangle$. La variable $\langle H\rangle$ ne représente pas de problème pour un passage entre un milieu diphasique et un milieu triphasique parce qu'elle représente la

température moyenne de toutes les phases, la présence ou non de la phase gazeuse ne change rien à la nature de l'équation de conservation de l'énergie.

2.1.2 Commentaires sur l'obtention des coefficients de perméabilité.

Avec cette modélisation, il y a quelques problèmes comme la prise en compte d'une hypothèse de la matrice solide non déformable (ce qui est dans la réalité rarement le cas) et la connaissance des coefficients de perméabilités relatives indispensables pour résoudre les équations de transfert dans les milieux non saturés, les relations entre les perméabilités relatives et la saturation est de type hystérétique et dépend des différents chemins de drainage ou d'humidification et aussi de l'histoire des contraintes subies par le milieu. La détermination expérimentale d'un coefficient de perméabilité intrinsèque dans un milieu est devenue relativement courante, mais elle présente un certain nombre de difficultés qui seront exprimées dans ce paragraphe.

Obtention expérimentale des coefficients de perméabilité

Comme nous avons déjà remarqué dans la modélisation d'un milieu triphasique, nous utilisons trois coefficients de perméabilité : l'intrinsèque k et les relatives $k_{rl}(S)$ et $k_{rg}(S)$ (les relatives sont fonction de la saturation S).

Le coefficient k représente simplement la résistance à l'écoulement de l'eau liquide dans le milieu. Sa mesure sera faite dans un milieu saturé, son obtention expérimentale ne représente donc pas un grand problème et ses valeurs sont habituellement satisfaisantes.

L'obtention des coefficients de perméabilités relatives k_{rl} et k_{rg} est en général difficile parce que dans les milieux triphasiques nous avons une vraie boîte noire. En effet, nous ne connaissons pas l'échange ou distribution des phases dans le milieu ; les études issues de la littérature sont généralement faites pour chaque matériau et pour chaque phase (liquide ou gaz) indépendamment : les effets de l'autre phase (qui est à l'intérieur) sont négligés.

Deux méthodes de mesure sont très suivant utilisées (Barreau, 1996) :

1) *Méthodes stationnaires*. Ces méthodes supposent l'écoulement simultané des phases à travers l'échantillon. Un régime permanent est établi en imposant des conditions de pression ou de débit aux extrémités de l'échantillon de façon que la concentration dans le milieu soit constante. Il est alors possible de relier les vitesses dans les deux phases aux gradients de pression afin d'obtenir les perméabilités relatives pour la saturation

correspondante. Il faut adapter certaines hypothèses dans l'utilisation de ces méthodes :

- Les perméabilités relatives seront obtenues par simple application de la loi de Darcy.
- Il est supposé une mesure précise des débits et de la pression différentielle à travers l'échantillon, dans chacune des phases.
- L'établissement du régime stationnaire peut prendre un temps non négligeable (par fois il s'agit d'attendre un jour ou plus).
- Il faut connaître l'état de saturation du milieu.

2) *Méthodes instationnaires :* une phase est déplacée par une autre. La mesure des perméabilités relatives par méthode instationnaire est plus rapide que par méthode stationnaire. Nous avons aussi des considérations à faire pour l'utilisation de cette méthode :

- L'écoulement s'effectue à débit ou pression constant.
- Le milieu est supposé homogène.
- Les effets capillaires sont négligés (une augmentation, de la vitesse de déplacement du fluide tend à augmenter l'effet des forces visqueuses, et à partir d'un certain seuil les forces capillaires sont négligeables).

Finalement il est important de signaler trois effets qui se produisent en triphasique et qui peuvent perturber fortement le modèle de Darcy et par conséquence l'obtention de la valeur du coefficient de perméabilité relative :

- Effet Klinkenberg : dans un milieux poreux de perméabilité relativement faible, nous observons souvent que la perméabilité au gaz est nettement supérieure à la perméabilité absolue attendue, donc cette valeur (perméabilité du gaz) sera surestimée car les effets du flux effusif et diffusif sont du même ordre de grandeur (Kewen, 1999).
- Effet Inertiel : ll s'agit d'un effet qui occasionne une non linéarité très forte dans la perméabilité relative à cause de la haute vitesse d'écoulement où les forces visqueuses deviennent négligeables devant les forces inertielles (Geertsma, 1974). Forchheimer propose d'ajouter un tenseur de correction dans l'équation de Darcy pour donner une approche théorique de l'effet inertiel (Whitaker, 1996).

- Effet d'extrémité : l'eau s'accumule à la sortie de l'échantillon avant de s'écouler. Le profil de saturation est affecté par cet effet d'extrémité sur une longueur d'autant plus grande que le débit est faible (Barreau, 1996).

2.2 Modèle de type diffusif et milieu déformable

Dans les études sur le séchage, une nouvelle problématique apparaît, la déformation de la matrice solide au cours du séchage. Les deux grands besoins qui existent, sont tout d'abord de pouvoir obtenir la forme souhaitée du milieu à la fin du processus et surtout de ne pas avoir un milieu abîmé par la fissuration due aux contraintes internes.

Pour résoudre ce problème de déformation, nous trouvons aussi, parmi les travaux qui suivront le développement de la théorie du séchage, de nombreux modèles mathématiques qui décrivent le séchage d'un milieu poreux déformable diphasique au travers d'une loi phénoménologique. Ces modèles utilisent une équation de diffusion pour décrire le transport de la phase fluide (Jomaa, 1991 ; Datta and Zhang, 2001 ; Zagrouba et al., 2002 ; Augier et al., 2002 ; Pourcel, 2003), car cette modélisation permet de travailler de façon simple avec la déformation du solide en prenant en compte le couplage liquide-solide.

Nous montrerons alors, de façon résumée, le passage d'une modélisation capillaro-poreuse à une modélisation de type diffusive dans un milieu non déformable, car ce déroulement nous aidera à mieux comprendre les modèles de type diffusifs appliqués aux milieux déformables que nous développerons par la suite et qui seront d'un grand intérêt pour notre travail.

Pour commencer, rappelons la définition de diffusion donnée par Fick car les « modèles de type diffusifs » utilisent ce concept comme principe de base pour pouvoir modéliser la physique de transport dans le milieu.

Loi de Fick

La diffusion est un phénomène physique qui consiste en un mouvement des molécules présentes dans un milieu à haute concentration vers un milieu de basse concentration. La diffusion est aussi un phénomène qui peut se produire lorsque deux corps sont en présence et qu'il existe un gradient de concentration entre eux. Cette définition est bien modélisée par la Loi de Fick : le flux de diffusion est proportionnel au gradient de concentration (cette loi est similaire à la loi de Fourier sur la conduction de la chaleur).

Mathématiquement, cette loi s'exprime de la manière suivante (Baehr and Stephan, 1998) : soit un milieu quelconque dans lequel se trouve une espèce chimique i et soit une

surface unitaire A. Si nous appelons $\vec{J}$ le flux de i à travers A, c'est-à-dire la quantité d'espèce qui traverse A par unité de temps (mol/m^2 s), et si Θ_i est la concentration molaire de i en un point donné, alors la première partie de la loi de Fick donne :

$$\vec{J}_i = -D\,\vec{\nabla}\cdot\Theta_i \tag{2.28}$$

En appliquant la loi de la conservation des espèces (la variation de la quantité d'espèces dans un volume est égal au bilan des flux entrant et sortant), on déduit de l'équation (2.28) l'expression de la loi de Fick :

$$\frac{\partial\Theta_i}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_i = 0 \tag{2.29}$$

Nous observons que dans le terme de flux existe un coefficient D (équation (2.28)) Ce coefficient dépend de la nature du matériau mais également des paramètres thermodynamiques. Il s'agit donc d'un coefficient devant être déterminé à partir de données expérimentales comme la teneur en eau dans le cas du séchage (Crank, 1975) ou la température et viscosité de la substance (milieu) si nous utilisons par exemple la loi de Stokes-Einstein (McCarty et al., 2001), etc.

Nous appelons modèles de type diffusifs, tous les modèles dont l'équation de transport de fluide est de la même forme mathématique que la loi de Fick. Cela signifie qu'il y a toujours dans le terme de flux $\vec{J}_i$ le gradient de la grandeur à laquelle nous nous intéressons (teneur en eau, saturation, masse volumique, concentration, etc.) et un coefficient de transport qui en général doit être déterminé a partir des données expérimentales (Basmadjian, 2003). Le choix de ce type de modélisation est fait pour sa simplicité en terme de résolution numérique.

2.2.1 Modèle de type diffusif appliqué aux milieux non déformables

La description traditionnelle se fonde sur les approches phénoménologiques, dans lesquelles le milieu poreux est un continuum, et où les variables dépendantes comme la teneur en eau, sont des quantités moyennes et la relation des flux avec ses gradients est faite par des coefficients empiriques (Van Brakel, 1980; Waananen et al., 1993; Whitaker 1980). De telles approches ignorent essentiellement l'effet de la microstructure des pores qui est d'importance principale pour un arrangement quantitatif du processus.

2.2.1.1 Equation de conservation de la masse

Dans le cas d'un milieu non déformable, il est possible de passer du modèle capillaro-poreux à un modèle diffusif en considérant un certain nombre d'hypothèses (Puiggali et Quintard, 1992) :

- Dans le cas du séchage à basse température les gradients de pression sont négligés.
- Il existe seulement deux gradients moteurs : température et teneur en eau W.
- L'effet de la gravité peut être négligé.
- L'évaporation d'eau a lieu à la surface extérieur du milieu.
- Les effets de compressibilité du gaz sont négligeables.
- La partie convective de la phase liquide est écrite avec la loi de Darcy généralisée :

$$\left\langle \vec{V}_l \right\rangle = -\frac{k_{rl}\, k}{\mu_l} \vec{\nabla} P_c \tag{2.30}$$

où $\vec{\nabla} P_c = \left(\frac{\partial P_c}{\partial W} \vec{\nabla} W + \frac{\partial P_c}{\partial \langle T \rangle} \vec{\nabla} \langle T \rangle \right)$ (2.31)

- Le flux de la phase gazeuse $\vec{J}_v$ est représenté comme un phénomène de transfert de type diffusif :

$$\vec{J}_v = -\langle \rho_g \rangle^g \overline{\overline{D}}_{v_{eff}} \cdot \vec{\nabla} C \tag{2.32}$$

Sous ces hypothèses, l'équation de conservation de masse (2.11) est transformée en une équation de type diffusif

$$\frac{\partial \left(\langle \rho_s \rangle W \right)}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \left(\langle \rho_s \rangle \overline{\overline{D}}_W \cdot \vec{\nabla} W + \langle \rho_s \rangle \overline{\overline{D}}_T \cdot \vec{\nabla} \langle T \rangle \right) = 0 \tag{2.33}$$

où les coefficients $\overline{\overline{D}}_W$ et $\overline{\overline{D}}_T$ tiennent compte des transports de liquide, de vapeur et de l'eau liée.

2.2.1.2 Équation de conservation de l'énergie

De façon similaire à la détermination de l'équation de conservation de masse (2.33), l'équation de l'énergie est alors déterminée en négligeant la masse thermique de la vapeur et de l'air sec. L'équation (2.21) est donc écrite dans sa forme de type diffusif (Puiggali et Quintard, 1992) :

$$\rho C_P \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + C_{Pl} \left(\langle \rho_s \rangle \overline{\overline{D}}_W \cdot \vec{\nabla} W + \langle \rho_s \rangle \overline{\overline{D}}_T \cdot \vec{\nabla} \langle T \rangle \right) \cdot \vec{\nabla} \langle T \rangle = \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \cdot \vec{\nabla} \langle T \rangle \right) + \Phi \tag{2.34}$$

2.2.1.3 Conditions aux limites associées

- *Fluide*

$$\left(\left\langle \rho_s \right\rangle \overline{\overline{D}}_W \cdot \vec{\nabla} W + \left\langle \rho_s \right\rangle \overline{\overline{D}}_T \cdot \vec{\nabla}\left\langle T \right\rangle\right) \cdot \vec{n} = h_m \rho_\infty \left(C_{surf} - C_\infty\right) \tag{2.35}$$

- *Energie*

$$\begin{bmatrix} -\lambda \cdot \vec{\nabla}\left\langle T \right\rangle - \left(\left\langle \rho_s \right\rangle \overline{\overline{D}}_{bW} \cdot \vec{\nabla} W + \left\langle \rho_s \right\rangle \overline{\overline{D}}_{bT} \cdot \vec{\nabla}\left\langle T \right\rangle\right) H_b \\ -\left(\left\langle \rho_s \right\rangle \left(\overline{\overline{D}}_{lW} + \overline{\overline{D}}_{bW}\right) \cdot \vec{\nabla} W + \left\langle \rho_s \right\rangle \left(\overline{\overline{D}}_{lT} + \overline{\overline{D}}_{bT}\right) \cdot \vec{\nabla}\left\langle T \right\rangle\right) \Delta H_v \end{bmatrix} \cdot \vec{n} = h_T \left(T_{surf} - T_\infty\right) \tag{2.36}$$

où C_{surf} est la fraction massique de vapeur d'eau à la surface du milieu, C_∞ est la fraction massique de vapeur d'eau à l'extérieur du milieu, h_m est le coefficient de transfert de masse (déduit, par exemple, de la théorie de couche limite) ; h_T est le coefficient de transfert de chaleur convectif, T_{surf} et T_∞ sont la température à la surface et à l'extérieur du milieu respectivement. Les coefficients $\overline{\overline{D}}_{bW}, \overline{\overline{D}}_{bT}, \overline{\overline{D}}_{lW}$ et $\overline{\overline{D}}_{lT}$ sont déterminés en utilisant les corrélations des grandeurs physiques issues d'expériences.

2.2.2 Modèle de type diffusif appliqué aux milieux déformables

Il existent parmi les chercheurs, deux courants très intéressants à considérer dans la modélisation de type diffusif : ceux qui préfèrent étudier et représenter le couplage solide-liquide de façon explicite (par exemple à travers de la vitesse de retrait) afin d'améliorer la connaissance par rapport au champ de contraintes dans le milieu ; et ceux qui préfèrent seulement exprimer un retrait volumique (sans donner beaucoup d'importance aux contraintes) en regroupant tous les effets de déformation solide et de transport de fluide dans un seul coefficient de diffusion effective. L'objectif fondamental de notre étude se trouvant justement dans l'analyse et modélisation de séchage des milieux poreux saturés déformables, nous présentons ci-dessous ces deux courants de modélisation.

2.2.2.1 Modélisation avec prise en compte de la vitesse du retrait

En prenant en compte la modélisation de type diffusif, la théorie de consolidation et la prise de moyenne, Jomaa (Jomaa, 1991) a modélisé le séchage dans les milieux poreux saturés déformables, en faisant le couplage entre la matrice solide et le fluide au travers de la vitesse de déformation du solide. Les équations suivantes issues de son travail montrent, de façon précise, comment peut être modélisé un milieu déformable à l'aide d'un coefficient de transport diffusif en déployant explicitement le couplage solide-liquide.

- *Transport de masse*

$$\frac{\partial\langle\rho_l\rangle}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\langle\rho_l\rangle\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\overline{\overline{D}}_{eff}\cdot\vec{\nabla}\langle\rho_l\rangle\right)=0 \qquad (2.37)$$

où $\overline{\overline{D}}_{eff}=\dfrac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\dfrac{\partial\langle P_l\rangle^l}{\partial\langle\rho_l\rangle}$

Condition à la limite : $-\left(\overline{\overline{D}}_{eff}\cdot\vec{\nabla}\langle\rho_l\rangle\right)\cdot\vec{n}=h_m\left(C_{surf}-C_\infty\right)$

Pour obtenir le valeur de $\overline{\overline{D}}_{eff}$, il est nécessaire de déterminer le valeur de $\overline{\overline{k}}$ expérimentalement, ainsi que l'expression de $\langle P_l\rangle^l$ en fonction de la variable $\langle\rho_l\rangle$ (celle-ci n'est pas nécessairement bien définie). Ce coefficient $\overline{\overline{D}}_{eff}$ peut être lié à l'état hydrique et la température du matériau.

Nous pouvons remarquer que dans cette équation (2.37) le choix d'inconnue est $\langle\rho_l\rangle$ et non pas W ; ce choix a était fait pour avoir une meilleure représentation de la réalité : le transport d'eau libre est en effet fonction du volume occupé par cette eau, donc de $\langle\rho_l\rangle$.

Un autre choix de variable pour modéliser le transport de liquide peut être fait dans les milieux saturés, il s'agit d'utiliser la variable porosité ε où la fraction volumique du liquide ε_l, car sous cette hypothèse se produit l'égalité suivante : $\varepsilon=\varepsilon_l$ et nous savons aussi que $\langle\rho_l\rangle=\varepsilon_l\langle\rho_l\rangle^l$; donc si la compressibilité du liquide est négligée, le changement de variable se fait sans aucune problème, étant donné que $\langle\rho_l\rangle$ est directement proportionnelle à ε_l, la constante de proportionnalité reste évidement la masse volumique intrinsèque de l'eau ($\langle\rho_l\rangle^l$). Ce changement donne alors une équation qui a la même structure que l'équation (2.37).

- *Vitesse de déplacement du solide*

Dans la détermination d'une relation entre le déplacement du solide et transport d'eau, divers considérations ont été utilisées :

a) L'équation de conservation de la masse solide.
b) Le matériau est diphasique.
c) Les particules solides et d'eau sont incompressibles.
d) La densité du solide est liée à W par la relation suivante :

$$\langle \rho_s \rangle = \langle \rho_s \rangle^s \left(1 - \frac{\langle \rho_l \rangle}{\langle \rho_l \rangle^l} \right)$$

L'équation de la vitesse de la phase solide reste alors

$$\left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s = \frac{1}{\langle \rho_l \rangle^l} \overline{\overline{D}}_{eff} \cdot \vec{\nabla} \langle \rho_l \rangle + \text{rot } \vec{A} \tag{2.38}$$

Le nouveau paramètre vectoriel $\vec{A}$ est obtenu d'une formulation comportementale (rhéologique) du milieu.

- *Transport d'énergie*

Un analyse du transfert de chaleur dans les matériaux déformables a été fait par Jomaa (Jomaa et al., 1991) où la détermination de l'équation d'énergie suivante (2.39) est bien détaillée.

$$\langle \rho C_p \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \left(\langle \rho C_p \rangle \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s - C_{pl} \overline{\overline{D}}_{eff} \cdot \vec{\nabla} \langle \rho_l \rangle \right) \cdot \vec{\nabla} \langle T \rangle = \vec{\nabla} \cdot \left(\overline{\overline{\lambda}}_{eff} \cdot \vec{\nabla} \langle T \rangle \right) \tag{2.39}$$

Condition à la limite : $\left(\overline{\overline{\lambda}}_{eff} \cdot \vec{\nabla} \langle T \rangle - \Delta h_v \overline{\overline{D}}_{eff} \cdot \vec{\nabla} \langle \rho_l \rangle \right) \cdot \vec{n} = -h_T \left(T_{surf} - T_\infty \right)$

où $\overline{\overline{D}}_{eff} \vec{\nabla} \langle \rho_l \rangle = -\langle \rho_l \rangle \left(\left\langle \vec{V}_l \right\rangle^l - \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s \right)$

Il est important de signaler que l'équation (2.37) n'est pas totalement diffusive, car dans l'expression de flux de masse se trouve un terme convectif lié a la vitesse du solide, ce qui fait que sa résolution est un peu plus complexe que lors d'une écriture purement diffusive ; elle a néanmoins l'avantage de donner plus d'information lors de l'étude de la déformation et des contraintes dans le milieu poreux.

2.2.2.2 Modélisation sans prise en compte de la vitesse du retrait

Pour éviter la complexité due au terme convectif dans les équations de conservation de masse d'un milieu déformable, certains scientifiques (Alvarez et Legües, 1988 ; Mujumdar, 2000 ; Pel et al., 2002 ; Lei et al., 2003 ; Islam et Mujumdar, 2003 ; Benboudjema et al., 2005) acceptent aussi de décrire le transport de masse avec une équation absolument diffusive.

- *Changement de repère Euler-Lagrange*

Un changement de repère d'Euler à Lagrange est alors nécessaire afin de pouvoir enlever le terme convectif de l'équation de transport (2.37). On effectue alors le changement de variables suivant (Ketelaars, 1992 ; Jomaa, 1994 ; Ketelaars et al., 1994) :

Soit

$$d\,\vartheta = \psi_s\, d\,v\,, \quad \text{avec} \quad \psi_s = \frac{\rho_s}{\rho_s^0} \tag{2.40}$$

Dans ces relations ϑ est le volume en coordonnées de Lagrange, v est le volume en coordonnées d'Euler et ρ_s^0 est la masse volumique du solide dans son état initiale t=0. Si le retrait est parfaitement isotrope, ce changement de variables peut être écrit explicitement :

$$\left(\rho_s^0\right)^{1/3} d\varsigma_i = \left(\rho_s\right)^{1/3} dx_i$$

où x est la coordonnée d'espace dans un système d'Euler, ς est la coordonnée dans le repère de Lagrange qui est liée à la masse solide. Les coordonnées de Lagrange permettent de définir tous les paramètres par rapport à la géométrie initiale du milieu, ainsi, l'équation de transport de la phase liquide au travers de la matrice solide déformable ne fait pas apparaître le terme convectif parce que le matériau est, dans le système de Lagrange, comme s'il était indéformable (Jomaa, 1991 ; Ketelaars, 1992).

- *Transport de masse*

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{\nabla}_\varsigma \cdot \left(D_{eff}\, \vec{\nabla}_\varsigma W\right) = 0 \tag{2.41}$$

avec $D_{eff} = D\left(\psi_s\right)^{2/3}$

où D est le coefficient de diffusion intrinsèque au matériau, ψ_s est connue comme le facteur de retrait (Ketelaars, 1994), « $\vec{\nabla}_\varsigma \cdot$ » et « $\vec{\nabla}_\varsigma$ » sont les opérateurs divergence et gradient dans l'espace de Lagrange respectivement.

L'équation (2.41) utilise la variable W pour représenter le transfert de masse. Nous avons choisi de faire cette écriture avec W parce qu'elle est la plus courant dans la littérature, mais cette variable W peut aussi être remplacé directement par $\langle \rho_l \rangle$, car dans un milieu considéré comme indéformable, W et $\langle \rho_l \rangle$ se confondent à une constante près.

Condition à la limite : $-\left(\rho_s^0 \left(\psi_s\right)^{4/3} D\, \vec{\nabla} W\right) \cdot \vec{n} = h_m \left(C_{surf} - C_\infty\right)$

- *Transport d'énergie*

L'équation de transport de chaleur est déterminée simplement en faisant un bilan d'énergie au sein du milieu poreux. La chaleur est transportée dans le cas de séchage convectif, par conduction et convection à l'intérieur du milieu (Quintard et al., 1997). L'équation de conservation de l'énergie est donc écrite de la forme suivante (Pourcel, 2003) :

$$\langle \rho C_P \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} - \left(C_{Pl} D_{eff} \vec{\nabla} W \right) \cdot \vec{\nabla} \langle T \rangle = \psi \, \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda_{eff} \vec{\nabla} \langle T \rangle \right) \tag{2.42}$$

avec $\lambda_{eff} = \lambda (\psi)^{-1/3}$

où λ est le coefficient de conduction de chaleur intrinsèque du milieu.

Condition à la limite : $(\psi)^{2/3} \left(\psi \lambda_{eff} \vec{\nabla} \langle T \rangle - \Delta h_v D_{eff} \vec{\nabla} W \right) \cdot \vec{n} = -h_T \left(T_{surf} - T_\infty \right)$

- *Quantité de mouvement du solide*

L'équation suivante représente l'équilibre de contraintes mécaniques du milieu (Whitaker, 1977) :

$$\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\sigma}} = 0$$

Condition à la limite : $\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{0}$

Remarque :

L'équation (2.41) a exactement la même forme que l'équation (2.29) de la loi de Fick et elle utilise aussi un coefficient de diffusion dit effectif. Ce type de modélisation peut être appliqué pour différentes formes géométriques, conditions initiales et de limites (Crank, 1975). Les formes géométriques couramment rencontrées sont la plaque, le cylindre et la sphère. Dans la littérature, ce type de modèle diffusif est habituellement utilisé avec les hypothèses suivantes qui aident en même temps à simplifier beaucoup la modélisation du séchage :

a) Le teneur en eau initiale dans le produit est uniforme
b) Il n'existe pas une forte résistance extérieure au transfert de chaleur et masse, donc il est considéré que la surface du produit reste en équilibre avec le milieu externe. Cette condition n'est pas réelle pendant tout le temps de séchage, mais est une simplification typique dans ce type de modélisation (Alvarez et Legües, 1988).
c) Les conditions externes ne changent pas au cours du séchage.

d) La modélisation est toujours faite dans l'axe de symétrie géométrique.

e) Le coefficient $\overline{\overline{D}}_{eff}$ intègre les effets de la déformation du solide et de transport du fluide.

2.2.3 Détermination du coefficient de transport diffusif effectif

Comme nous avons déjà expliqué, le coefficient de diffusion effective $\overline{\overline{D}}_{eff}$ doit être déterminé à partir de données expérimentales. Dans ce paragraphe divers exemples seront donnés afin d'avoir une idée générale de la manière dont nous pouvons obtenir ce coefficient.

2.2.3.1 Coefficient de transport diffusif dans un milieu déformable

Il existe plusieurs relations qui permettent d'obtenir cette valeur. En général pour les milieux déformables, différentes approches ont été faites en prenant en compte les profils de teneur en eau et en faisant l'analyse en une dimension (1D). Ensuite nous montrons plusieurs exemples d'approches de ce type :

a) La relation suivante (2.43) prend en compte les profiles de teneur en eau W et la variation de géométrie par milieu de la coordonné x (Pel, 2002) :

$$D_{eff}(W) = \frac{\int_{L}^{x} \frac{\partial W}{\partial t} dx}{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_x} \tag{2.43}$$

où L est une dimension quelconque fixe de l'échantillon.

b) La relation (2.44) utilise les courbes de teneur en eau réduite W^* et la déformation est prise en compte par la variation de la dimension caractéristique de l'échantillon en fonction du temps H(t) (Pourcel, 2003) :

$$D_{eff}(t) = \frac{Ln\left(W^*(t)\frac{4}{\pi^2}H(t)^2\right)}{t} \tag{2.44}$$

où

$$W^* = \frac{W_0 - W}{W_0 - W_{eq}} \tag{2.45}$$

c) La transformation de Boltzmann (2.46) permet aussi d'avoir une relation qui tienne en compte les profils de saturation et le retrait du milieu dans l'axe x (Crank, 1975 ; Sakata, 1983 ; Tumidajski, 1996)

Soit :

$$\Psi = \frac{x}{2\sqrt{t}} \tag{2.46}$$

Alors le coefficient D_{eff} sera déterminé avec la relation (2.47)

$$D_{eff}\left(W^*\right) = 2\left(\frac{d\Psi}{dW^*}\right)_W \int_{W^*}^{1} \Psi \, dW^* \tag{2.47}$$

2.2.4 Commentaires sur les modèles de transport diffusif dans le séchage

Après avoir présenté les modèles diffusifs, nous pouvons alors faire quelques commentaires à ce type de modèles appliqués à l'analyse du séchage dans les milieux poreux :

- Ils permettent d'obtenir de bons résultats dans un cas particulier : il s'agit du séchage à basse température (séchage très lent) où les effets de pression et ses gradients peuvent être négligés (Nadeau et Puiggali, 1995).
- Les équations de type diffusif donnent un grand avantage de stabilité dans la résolution numérique.
- En étant une simplification du modèle capillaro-poreux, il nous donne moins d'informations par rapport à la déformation du milieu car il regroupe plusieurs paramètres dans un seul coefficient dit « coefficient de transport diffusif ».
- Le coefficient de transport ($\overline{\overline{D}}_{eff}$) nécessite une caractérisation expérimentale pour chaque type de matériau dans différentes conditions de séchage.
- Si nous voulons analyser l'état de contraintes du milieu, il est meilleur d'utiliser la modélisation avec la prise en compte de la vitesse du solide car le couplage liquide-solide est fait de façon explicite, par contre si notre intérêt est seulement la connaissance de la cinétique de séchage, la résolution d'un modèle sans la prise en compte de la vitesse du solide sera largement suffisant (même si le milieu est déformable).

2.3 Analyse de la théorie de consolidation de Biot

La réduction progressive de volume d'un milieu poreux sous l'effet d'une surcharge ou de vibrations est connue sous le nom de « phénomène de consolidation ».

Dans des époques proches où Lewis (Lewis, 1921), Sherwood (Sherwood, 1929) et Luikov (Luikov, 1966) élaborent la théorie du séchage, d'autres scientifiques commencent à s'intéresser à la mécanique des sols. Ce sujet est très lié à la physique du séchage car il étudie les milieux poreux, leur déformation et son interaction avec les fluides. La première publication notable sur cette recherche a été faite par Terzaghi en 1925. Dans son travail fondamental il apporte une grande importance à l'identification et formulation des contraintes, et sur l'analyse de la perméabilité et de l'érosion des sols, ainsi qu'à la théorie de consolidation (Terzaghi, 1943). Vers la même époque Maurice Biot, commence à se consacrer à l'étude des milieux poreux déformables humides. Son important travail (Biot, 1941), donne une loi de consolidation des argiles dans un espace à trois dimensions. Cette loi qui lie les déformations aux contraintes dans un milieu isotrope en élasticité linéaire renferme deux coefficients dits de Lamé ou leurs équivalents. Biot montre la nécessité d'introduire deux coefficients supplémentaires pour décrire un milieu poreux. Ce sont les coefficients de Biot comme on les désigne généralement.

Aussitôt, tous le travaux de recherche de Terzaghi et Biot sont utilisés dans les études des milieux poreux saturés et déformables. En 1991, Coussy (Coussy, 1991) fait une formalisation de ces théories en utilisant la mécanique des milieux continus. Il présente une formulation expliquant que la contrainte mécanique admet une contribution de la pression du fluide ainsi qu'une contribution du comportement mécanique du réseau solide.

La déformation d'un milieu poreux saturé affecte l'écoulement du fluide à travers les pores et la pression du liquide influe sur le comportement mécanique de la matrice solide. Puisque la charge sur une structure poreuse est soutenue par toute la matrice et le fluide dans les pores, l'accouplement de contraintes dans le solide dû à la pression du fluide joue un rôle primordial. Il implique la dilatation ou la contraction de la matrice déformable et la diffusion du champ de pression du fluide dans les pores. Dans le processus classique de consolidation, une charge est partagée avec le fluide dans les pores, et le solide ; avec le temps la pression du liquide relaxe et la charge est de plus en plus supportée par la matrice solide. Pour les charges plus lentement appliquées, la réponse du milieu ne semble pas très forte, puisque le fluide a relativement plus de temps pour se redistribuer et relaxer ses gradients de pression. Réciproquement, les dilatations de la matrice modifient aussi la porosité et peuvent augmenter

le flux de fluide. Le modèle classique de Biot de ce processus a été développé en 1941 (Biot, 1941). Il a été considérablement utilisé et affiné dans des nombreux domaines distincts comme les études de propagation d'ondes dans les milieux poreux, la géophysique, le séchage, etc. Nous présentons dans la suite un résumé du développement de la théorie de Biot suivi de quelques commentaires sur ce modèle, car comme nous l'avons déjà expliqué, cette théorie est très importante pour l'étude des milieux poreux saturés déformables.

2.3.1 Hypothèses de Biot

1) Matériau isotrope.
2) Reversivilité des relations contraintes-déformation avec les conditions finales d'équilibre.
3) Relation linéaire entre déformation et contrainte.
4) Petites déformations.
5) Eau incompressible.
6) L'eau peut contenir des bulles d'air (pour créer une compressibilité de la phase fluide).
7) La vitesse du fluide est décrite par la Loi de Darcy.

Les hypothèses 2) et 3) sont issues de la théorie de Terzaghi sur laquelle Biot a basé une partie de son travail.

2.3.2 Représentation de contraintes dans le milieu

Les contraintes dans le milieu sont représentées comme une distribution uniforme de forces dans un élément infinitésimal cubique (Figure 2.4**)**

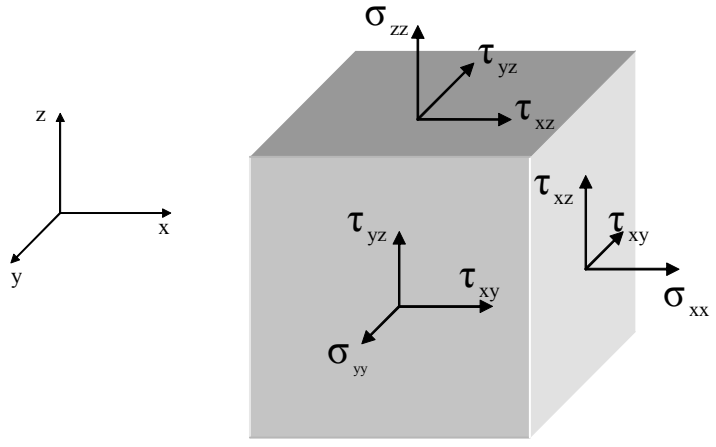


Figure 2.4 *Représentation de contraintes dans un cube différentiel.*

Le tenseur de contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ s'écrit

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

et pour la condition d'équilibre, on a :

$$\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{2.48}$$

Physiquement les contraintes sont composées de deux parties :

a) La pression hydrostatique de l'eau dans les pores.

b) Les contraintes internes au squelette (contraintes propres de la matrice solide).

2.3.3 Relation déformation-contraintes et pression de l'eau.

Le tenseur $\overline{\overline{\varepsilon}}$ de déformation s'écrit :

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

Si ℓ_x, ℓ_y et ℓ_z sont les déplacements du solide dans les directions x, y et z respectivement, les déformations s'écrivent

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \ell_x}{\partial x};\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial \ell_y}{\partial y};\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \ell_z}{\partial z} \\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial \ell_y}{\partial x} + \frac{\partial \ell_x}{\partial y};\ \gamma_{xz} = \frac{\partial \ell_z}{\partial x} + \frac{\partial \ell_x}{\partial z};\ \gamma_{yz} = \frac{\partial \ell_z}{\partial y} + \frac{\partial \ell_y}{\partial z} \end{aligned} \tag{2.50}$$

Pour la suite de ce travail nous noterons $\Delta\varepsilon_l$ comme la variation de la fraction volumique du liquide et $\langle P_l \rangle^l$ exprimera l'incrément de la pression moyenne intrinsèque de l'eau (pression du liquide).

Biot a fait le choix de proposer des relations de type linéaires entre déformations et incrément de fraction volumique du liquide ε_l d'une part, et, contraintes et incrément de

pression du liquide $\langle P_l \rangle^l$ d'autre part. Afin d'effectuer ces hypothèses de linéarité, Biot suppose que les variations de fraction volumique ε_l et de déformations sont petites.

En prenant en compte l'écriture classique de la Loi de Hooke et en considérant que $\langle P_l \rangle^l$ agit seulement dans les trois directions normales aux surfaces du cube différentiel (Figure 2.4**)**, la loi de comportement s'écrit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\upsilon}{E}\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) + \frac{1}{H}\frac{\langle P_l \rangle^l}{3} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\upsilon}{E}\left(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\right) + \frac{1}{H}\frac{\langle P_l \rangle^l}{3} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\upsilon}{E}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) + \frac{1}{H}\frac{\langle P_l \rangle^l}{3} \\
\gamma_{yz} &= \tau_{yz}/G \\
\gamma_{xz} &= \tau_{xz}/G \\
\gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G
\end{aligned} \tag{2.51}$$

où $G = \dfrac{E}{2(1+\upsilon)}$, E (module de Young), υ (coefficient de Poisson) et H qui relie la variation de volume à la variation de pression, sont des constantes physiques à déterminer.

En négligeant les effets de cisaillement et en considérant un matériau isotrope, la relation suivante est proposée pour $\Delta\varepsilon_l$:

$$\Delta\varepsilon_l = \frac{1}{3H_1}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) + \frac{1}{R}\langle P_l \rangle^l \tag{2.52}$$

H_1 et R sont deux constantes physiques.

Pour démontrer que H_1 est égale à H, Biot a utilisé l'idée d'un potentiel d'énergie, qui pour des conditions quasi statiques est indépendant du chemin parcouru. Il s'est placé dans le cas particulier où $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_1$ et $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, donc la relation (2.52) devient :

$$\Delta\varepsilon_l = \frac{1}{3H}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) + \frac{1}{R}\langle P_l \rangle^l \tag{2.53}$$

Finalement la transformation de (2.51) donne alors :

$$\sigma_{xx} = 2G\left(\varepsilon_{xx} + \frac{\upsilon \in}{1-2\upsilon}\right) - \alpha\langle P_l\rangle^l$$
$$\sigma_{yy} = 2G\left(\varepsilon_{yy} + \frac{\upsilon \in}{1-2\upsilon}\right) - \alpha\langle P_l\rangle^l$$
$$\sigma_{zz} = 2G\left(\varepsilon_{zz} + \frac{\upsilon \in}{1-2\upsilon}\right) - \alpha\langle P_l\rangle^l \qquad (2.54)$$
$$\tau_{yz} = \gamma_{yz} G$$
$$\tau_{xz} = \gamma_{xz} G$$
$$\tau_{xy} = \gamma_{xy} G$$

où $\alpha = \frac{2(1+\upsilon)}{3(1-2\upsilon)}\frac{G}{H}$ (constante à déterminer) et $\in = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ (variation volumique)

la variation de fraction volumique du liquide s'exprime alors :

$$\Delta\varepsilon_l = \alpha \in + \frac{1}{Q}\langle P_l\rangle^l \qquad (2.55)$$

avec $\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H}$

Les équations précédentes (2.54) et (2.55) représentent le système des équations de base de la théorie de Biot et tout son travail postérieur sera donc basé sur ces équations. Ensuite, il est important de savoir la signification physique de toutes les constantes ou coefficients qui se trouvent dans ces équations.

2.3.4 Interprétation physique des valeurs constantes.

Les valeurs E, G et υ sont respectivement le module de Young, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson.

Pour l'interprétation de R et H, Biot a supposé un milieu étanche sous forces extérieures nulles. H et R sont définis alors par les expressions suivantes :

- Le coefficient 1/Q est la mesure de la quantité d'eau pouvant être introduite sous l'effet de la pression à volume constant.
- La variation de $\Delta\varepsilon_l$ dû uniquement au changement de pression $\langle P_l\rangle^l$ (si on applique une dépression sur le liquide, ce dernier va sortir du milieu poreux):

$$\Delta\varepsilon_l = \frac{1}{R}\langle P_l\rangle^l$$

- Le changement volumique du milieu :

$$\in = \frac{1}{H}\langle P_l\rangle^l$$

Le coefficient 1/R représente donc la variation de fraction volumique du liquide due à la variation de pression ($\langle P_l \rangle^l$) et 1/H représente la compressibilité du milieu diphasique.

Le coefficient α qui se trouve dans (2.55), exprime $\Delta\varepsilon_l$ en fonction de la variation de volume du matériau $\in$, pour un milieu soumis à un test de compression drainée (ce test considère que $\langle P_l \rangle^l = 0$).

Une étude plus approfondie des coefficients utilisés par Biot, ses interprétations physiques et déterminations à niveau expérimental a été faite par Biot en 1957 (Biot and Willis, 1957).

2.3.5 Système des équations qui gouvernent le phénomène de consolidation.

En utilisant la Loi de Darcy pour représenter la vitesse du liquide de la forme

$$\langle \vec{V}_l \rangle = -k\,\vec{\nabla}\langle P_l \rangle^l \tag{2.56}$$

La conservation de la masse pour la phase liquide s'exprime :

$$\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\langle \vec{V}_l \rangle = 0 \tag{2.57}$$

Le système d'équations représentant le phénomène de consolidation de façon transitoire, est alors obtenu en supposant que les paramètres α et Q sont constants :

- *Équation pour la pression du liquide*

$$k\,\nabla^2 \cdot \langle P_l \rangle^l = \alpha \frac{\partial \in}{\partial t} + \frac{1}{Q}\frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial t} \tag{2.58}$$

- *Équations pour les déplacements* ℓ_x, ℓ_y et ℓ_z

Le développement du système (2.48) en fonction des composantes du vecteur déplacement donne :

$$\begin{aligned}
G\,\nabla^2 \ell_x + \frac{G}{1-2\upsilon}\frac{\partial \in}{\partial x} - \alpha \frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial x} = 0 \\
G\,\nabla^2 \ell_y + \frac{G}{1-2\upsilon}\frac{\partial \in}{\partial y} - \alpha \frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial y} = 0 \\
G\,\nabla^2 \ell_z + \frac{G}{1-2\upsilon}\frac{\partial \in}{\partial z} - \alpha \frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial z} = 0
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Les équations (2.58) et (2.59) sont les équations qui gouvernent l'écoulement du liquide et le champ de contraintes dans le milieu.

L'expression du retrait volumique $\in$ (retrait idéal), doit être étudiée cas par cas, comme par exemple dans le cas des argiles saturés. Ensuite, la présentation de ce cas est très importante dans notre travail de recherche, car Biot a développé un modèle de transport de type diffusif pour les milieux saturés déformables, ce qui revient à mettre en place une relation entre la fraction volumique ε_l et la pression intrinsèque du liquide $\langle P_l \rangle^l$.

2.3.6 Théorie simplifié pour les milieux saturés

Dans le cas d'un milieu saturé en liquide à volume total constant, il est clair qu'il n'est pas possible de lui ajouter plus de liquide et le volume de liquide qui sort sera égal à la variation de volume du milieu. Par conséquence le paramètre 1/Q sera nul, α sera égal à l'unité et le changement volumique du milieu est égal à la variation de fraction volumique du liquide ($\in = \Delta\varepsilon_l$). En prenant ces dernières valeurs les équations (2.58) et (2.59) peuvent être récrites :

$$k\nabla^2 \langle P_l \rangle^l = \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} \tag{2.60}$$

Pour la détermination de l'équation finale qui fait le couplage entre la déformation du milieu et la variation de fraction volumique ($\in = \Delta\varepsilon_l$), Biot prend les équations de déplacement du solide (2.59) et les dérivent par rapport aux coordonnées x, y et z respectivement :

$$G\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 \ell_x + \frac{G}{1-2\upsilon}\frac{\partial^2 \in}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \langle P_l \rangle^l}{\partial x^2} = 0$$

$$G\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 \ell_y + \frac{G}{1-2\upsilon}\frac{\partial^2 \in}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \langle P_l \rangle^l}{\partial y^2} = 0$$

$$G\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 \ell_z + \frac{G}{1-2\upsilon}\frac{\partial^2 \in}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \langle P_l \rangle^l}{\partial z^2} = 0$$

Ensuite les trois équations du système sont additionnées :

$$2G\nabla^2\varepsilon_l + \frac{2\upsilon}{1-2\upsilon}G\nabla^2\varepsilon_l - \nabla^2\langle P_l \rangle^l = 0$$

or, en regroupant les termes

$$\frac{2(1-\upsilon)}{1-2\upsilon}G\nabla^2\varepsilon_l - \nabla^2\langle P_l \rangle^l = 0 \tag{2.61}$$

L'équation (2.60) est alors additionnée, pour finalement arriver à écrire l'expression suivante :

$$\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(c \, \vec{\nabla} \varepsilon_l \right) \tag{2.62}$$

où c = k / a , avec a = (1-2υ)/(2G (1- υ)).

Nous pouvons remarquer que l'équation précédente (2.62) a la même structure qu'une équation de transport de type diffusif où la grandeur à déterminer est ε_l. Ici le coefficient de transport c apparaît comme un coefficient de diffusion effectif. Le modèle de Biot appliqué aux milieux saturés, se ramène donc à un simple modèle diffusif où le coefficient de transport c dépend de la rigidité et de la perméabilité de la structure.

En résumé les équations (2.59) et (2.62) représentent le système des équations fondamental qui gouvernent le processus de consolidation des milieux saturés.

2.3.7 Commentaires sur la théorie de Biot

1) Les constantes qui apparaissent dans (2.52), sont phénoménologiques et ajoutées pour avoir une relation linéaire entre $\Delta\varepsilon_l$ et $\overline{\overline{\sigma}}$.
2) L'idée de base de Biot est d'introduire une composante de la contrainte liée à la pression de la phase fluide dans le milieux poreux. Cette composante est précédée d'un coefficient α dénommé « coefficient de Biot ». Cette écriture basée sur la théorie de Terzaghi, présuppose la décomposition de la contrainte totale, en la somme de la contrainte effective du solide et la contrainte liquide.
3) Biot justifie la compressibilité de la phase liquide en ajoutant une autre hypothèse qui accepte que l'eau puisse contenir des bulles d'air qui peut se comprimer, donc la phase liquide pourra changer son volume.
4) La vitesse du liquide $\left\langle \vec{V}_l \right\rangle$ utilisée pour exprimer la loi de Darcy (2.56), est en fait la vitesse relative par rapport à la phase solide : $\left\langle \vec{V}_l \right\rangle = \varepsilon_l \left(\left\langle \vec{V}_l \right\rangle^l - \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s \right)$
5) Nous pouvons remarquer que l'équation (2.55) peut être écrite de la façon suivante :

$$\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} = \alpha \vec{\nabla} \cdot \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s + \frac{1}{Q} \frac{\partial \left\langle P_l \right\rangle^l}{\partial t} \tag{2.63}$$

Cette équation est de intérêt d'analyse, parce que si nous considérons le milieu saturé, (2.63) nous dit que la variation de la fraction volumique du liquide par rapport au temps est directement proportionnel à la variation de la vitesse du solide dans l'espace.

$$\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s .$$

6) E, G et υ correspondent à des propriétés mécaniques appelées « drainées », c'est-à-dire que pendant l'expérience de caractérisation l'eau a le temps de s'évacuer du matériau, la pression de la phase liquide $\left\langle P_l \right\rangle^l$ es alors constante et égale à la pression atmosphérique.
7) Le paramètre α tient en compte du caractère non saturé du matériau et est égal à 1 quand celui-ci est saturé.
8) L'équation (2.62) des milieux saturés peut être réécrite de la façon suivante :

$$\frac{2(1-\upsilon)}{1-2\upsilon} G \frac{k}{\mu_l} \nabla^2 \varepsilon_l - \frac{k}{\mu_l} \nabla^2 \left\langle P_l \right\rangle^l = 0$$

or, si on regroupe $\frac{2(1-\upsilon)}{1-2\upsilon} G \frac{k}{\mu_l}$ dans un seul coefficient de type diffusif dit diffusion effectif D_{eff}, et on utilise la loi de Darcy (3.27), l'expression précédente devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\varepsilon_l \left(\left\langle \vec{V}_l \right\rangle^l - \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s \right) + D_{eff} \vec{\nabla} \varepsilon_l \right] = 0 \qquad (2.64)$$

L'importance de l'écriture précédente, est que nous pouvons remarquer la similarité que existe entre le modèle proposé par Biot et la modélisation de type diffusif prise en compte de la vitesse du retrait de la matrice solide (équation 2.37) où le couplage solide-liquide est fait à travers de la vitesse de déformation du solide et le coefficient D_{eff}.

La différence entre ces deux modèles se trouve dans l'obtention du coefficient de diffusion D_{eff}. Traditionnellement dans la littérature (Jomaa, 1991 ; Jomaa et Puiggali, 1991 ; Mercier, 1996) la détermination de ce coefficient demande la connaissance de $\left\langle P_l \right\rangle^l$ en fonction de la fraction volumique du liquide ($\left\langle P_l \right\rangle^l = F(\varepsilon_l)$) car $D_{eff} = \frac{k}{\mu_l} \left(\frac{\partial \left\langle P_l \right\rangle^l}{\partial \varepsilon_l} \right)$; mais dans le modèle de Biot, on doit plutôt connaître les propriétés rhéologiques du matériau $D_{eff} = \left(\frac{2(1-\upsilon)}{1-2\upsilon} G \right) \frac{k}{\mu_l}$. Le point commun entre

les deux coefficient est clairement que les deux ont besoin de la détermination de la perméabilité du milieu (k) et de la viscosité du liquide (μ_l).

9) Biot a négligé, dans le développement d'un modèle simplifié dédié aux argiles saturées (2.62) la vitesse de déformation du solide parce que il considère des petites perturbations. L'équation de transport de la phase liquide devient alors de type diffusif où le coefficient c doit être déterminé à partir des données expérimentales.

2.4 Conclusion

Le séchage est un processus très commun ; beaucoup de scientifiques travaillent dans sa modélisation. Sa physique est très complexe et il n'existe pas un seul modèle qui peut le décrire totalement.

Les modèles existants, qui décrivent le transport de masse dans les milieux poreux déformables et non déformables, sont en général écrits à l'aide de coefficients qui doivent être déterminés expérimentalement. Dans le cas particulier des modèles de type diffusif, le coefficient dit de diffusion effective absorbe beaucoup de paramètres et ne permet pas d'observer de façon claire le fort couplage existant entre la matrice solide et le liquide. Les modèles de type capillaro-poreux ont l'avantage de prendre en compte les gradients de pression de la phase fluide, mais ils ne donnent pas d'information par rapport à la déformation du milieu car leurs applications sont généralement effectuées dans le séchage des milieux triphasiques où la déformation de la matrice solide est négligée.

La théorie de consolidation de Biot est un excellente approche de l'interaction solide-liquide qui peut être appliquée aussi au phénomène du séchage ; mais malgré ses résultats corrects, elle prend la forme d'un modèle de transport diffusif dans le cas simplifié des milieux saturés. Comme nous avons expliqué dans ce travail, le coefficient c qui se trouve dans l'équation de transport (2.62) doit être déterminé expérimentalement et l'influence de la déformation du solide et de son caractère rhéologique lors de son identification. L'influence de la déformation du milieu sera introduite indirectement dans (2.62) via le coefficient c. Le modèle de transport diffusif, contenant ce coefficient c dont la détermination expérimentale amène à obtenir une valeur intégrant non pas uniquement le transport convectif mais aussi la rhéologie du milieu, n'est, à notre avis, pas très bien adapté à une bonne prise en compte du couplage hydromécanique.

Il faudrait alors avoir un modèle qui prend en compte la physique réelle du séchage des milieux saturés déformables, plus précis, qui nous permettrait de mieux connaître l'interaction

liquide-solide et qui nous donne la possibilité d'avoir le passage continu entre un milieu diphasique et un milieu triphasique. Nous pensons que la construction d'un modèle qui tiendra compte des gradients de pression et de la compressibilité du fluide à l'intérieur du milieu nous donnerait une très bonne approche de la physique du séchage dans ce type de milieux. La construction d'un modèle fait l'objet du paragraphe suivant.

3 MODÉLISATION D'UN MILIEU DIPHASIQUE DÉFORMABLE

La modélisation du transport dans les milieux poreux diphasiques déformables, requiert une analyse détaillée des phénomènes de transport concerné. Ces phénomènes sont décrits au travers d'équations issues de la mécanique des milieux continus pour chaque phase. Une première difficulté se trouve alors dans l'application de ces équations quand les milieux ne sont pas homogènes, car ses propriétés changent dans toutes les directions de l'espace. La morphologie peut nous donner des discontinuités des phases dans certains endroits et par conséquence la détermination du comportement mathématique d'une variable devient parfois délicate. Les techniques d'homogénéisation des milieux aident fortement à simplifier toutes ces problématiques. Une des ces techniques est la prise de moyenne volumique. Celle-ci sera détaillée au début de ce chapitre avec un traitement spécial et original dans son application sur les milieux déformables, par lesquels les volumes élémentaires représentatifs V.E.R (Figure 3.1) sont variables dans le temps du fait du caractère déformable du milieu.

A la suite de la détermination d'une écriture des équations de conservation moyennées, qui considèrent le milieu initial cette fois comme un milieu équivalent homogène, d'autres hypothèses sont posées afin d'aborder l'analyse du phénomène physique auquel nous nous sommes intéressé dans ce travail : le séchage d'un milieu déformable diphasique et le couplage séchage-retrait-contraintes mécaniques.

Comme nous avons déjà expliqué dans le chapitre précédent, le processus de séchage des milieux fortement déformables est très complexe ; pour cette raison les scientifiques cherchent en général à écrire des modèles plus simples qui peuvent être résolus avec de moindres difficultés numériques. Les choix d'hypothèses correspondantes, les obligent parfois à masquer l'influence de certains paramètres dans les modèles en se servant de coefficients qui regroupent une ou plusieurs variables physiquement indépendantes.

Nous proposons ici un modèle, issu des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement moyennées, qui soit capable de prendre en compte de façon claire la physique réelle qui prend place lors du séchage d'un milieu saturé déformable ; ceci dans le but de faire apparaître des paramètres physiques pertinents intervenant dans ce processus hydromécanique qu'est le séchage d'un matériau saturé déformable.

Les hypothèses les plus importantes choisies pour arriver à ce but, sont le flux de la phase liquide modélisé par la loi de Darcy (considération des gradients de pression du fluide) et, dans une moindre mesure comme nous le verrons dans la suite de notre travail, la compressibilité du liquide prise en compte par une loi d'état thermodynamique en condition

isotherme, cette dernière hypothèse est suivant utilisée dans les études de propagation d'ondes dans les milieux poreux saturés (Silin, 2004). L'explication de ce choix d'hypothèses est simple. En effet, un écoulement fluide est généré par un gradient de pression fluide. Deux facteurs (liés) sont succeptibles de modifier localement cette pression fluide : 1) la contrainte locale appliquée au milieu diphasique (solide-fluide) et donc en particulier au fluide, 2) le caractère éventuellement compressible de ce fluide.

L'équation, qui sera proposée ici pour décrire la mécanique du solide, est en fait l'équation d'équilibre mécanique issue de la théorie de Terzaghi, théorie fortement recommandée dans la littérature par des auteurs reconnus pour leurs travaux concernant le couplage hydromécanique dans des milieux saturés, telles que Biot (Biot, 1941) et Coussy (Coussy, 1991). Dans notre modèle, le couplage hydromécanique est généré au travers de cette équation d'équilibre mécanique par la vitesse de déformation du milieu $\left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s$ et de la pression du liquide $\left\langle P_l \right\rangle^l$.

3.1 Prise de moyenne : définitions et théorèmes

Les changements d'échelles sont des méthodes mathématiques qui servent à simplifier la modélisation et résolution de problèmes physiques. Dans la littérature on peut trouver divers travaux qui font la comparaison entre les méthodes de changement d'échelle existantes (Moyne et al., 2000 ; Cushman et al., 2002 ; Berryman, 2005). Cette bibliographie peut nous approcher de la réponse à la question suivante : quelle méthode choisir ?. Dans la plupart des cas, il est habituel que les résultats lors de l'utilisation d'une méthode ne varient pas beaucoup par rapport à une autre méthode ; le choix d'une méthode est alors souvent guidé, par une connaissance correcte de telle ou telle méthode.

Nous avons choisie la théorie de la prise de moyenne (Whitaker, 1977) car c'est une théorie très utilisée par les auteurs qui travaillent dans les études de transfert de masse et chaleur en milieux poreux (Whitaker, 1977 ; Whitaker, 1986 ; Jomaa, 1991 ; Quintard and Whitaker, 1995 ; Couture, 1995 ; Quintard et al., 1997 ; Quintard and Whitaker, 1998 ; Wood and Whitaker, 1998 ; Wood and Whitaker, 2000 ; Wood et al., 2000 ; Moyne et al., 2000 ; Naterer, 2003 ; Poiroux et al., 2004 ; Zabaras and Deep, 2004 ; Delmi et al., 2005) et qui d'après la littérature, nous assure des résultats acceptables dans une échelle où la longueur caractéristique du rayon R_0 du V.E.R (Figure 3.1) se trouve entre 10^{-1}m et 10^{-7}m, ce qui s'ajuste parfaitement à notre cas.

En général les équations de transport ramenées à une moyenne doivent être complétées par des relations constitutives qui décrivent des caractéristiques morphologiques et les interactions entre les phases. La théorie de la prise de moyenne montre comment surgissent les divers termes dans les équations macroscopiques et comment les variables macroscopiques résultantes sont liées aux variables microscopiques correspondantes.

En définitif, cette théorie nous permettra d'obtenir des équations reliant les variables moyennées à partir des équations de la mécanique des milieux continus écrites à l'échelle du pore.

3.1.1 Prise de moyenne appliquée aux équations de transport

Nous allons présenter ici la méthode de la prise de moyenne (Whitaker, 1977) appliquée aux équations de transport, dans le but de préparer l'application de cette méthode qui est présente tout au long de notre travail.

Pour commencer, il faut d'abord avoir un volume élémentaire représentatif V.E.R (Figure 3.1). Il est généralement défini tels que l'échelle qu'il représente est assez petite pour capturer le mouvement global du fluide, du solide et le transfert thermique, mais assez grand pour lisser les complexités morphologiques. Le V.E.R doit respecter nécessairement les conditions suivantes (Whitaker, 1977):

-R_0 très petit devant la taille du milieu étudié.

-$l_f << R_0 << L$, où L est la dimension caractéristique de l'ensemble du matériau et l_f la taille caractéristique de la porosité.

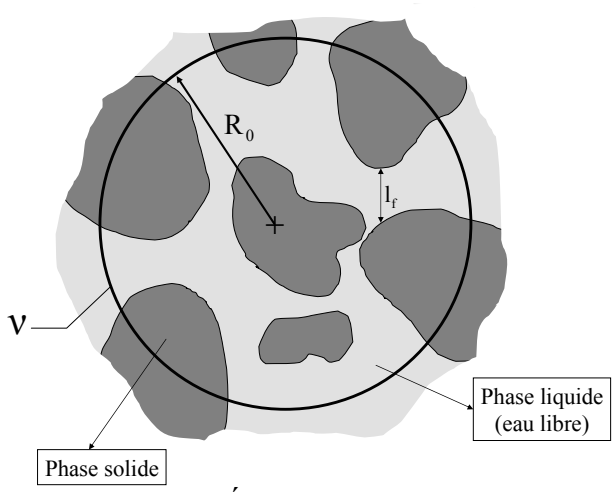


Figure 3.1 *Schéma du V.E.R (Volume Élémentaire Représentatif) d'un milieu poreux saturé utilisé par la prise de moyenne.*

Les équations de transport de masse, énergie et quantité de mouvement microscopique, présentent habituellement la forme suivante pour chaque phase π :

$$\frac{\partial \zeta_\pi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\zeta_\pi \vec{V}_\pi \right) = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{J}_\pi + \Phi_\pi \tag{3.1}$$

Le premier terme à gauche de l'égalité est la variation dans le temps (terme transitoire) de ζ qui est la variable (grandeur scalaire ou vectoriel) d'étude ; **J** peut représenter dans certains cas un terme de flux diffusif (conduction de chaleur ; diffusion de masse) ou un tenseur de contraintes si on étude la quantité de mouvement ; et Φ est un terme qui apparaît généralement du fait de l'action d'une force volumique ou d'une réaction chimique (terme source). Le terme où intervient $\vec{V}_\pi$, est connu comme le flux convectif et représente le transport d'une grandeur ζ comme résultante du déplacement de la phase π.

Dans la suite, nous emploierons une fonction moyenne apparente et une fonction moyenne intrinsèque afin de trouver l'expression générale d'une équation de transport moyennée. Toujours en référence au V.E.R illustré dans la Figure 3.1, la moyenne d'une variable ζ est définie comme suit :

$$\langle \zeta \rangle = \frac{1}{\nu} \int_\nu \zeta \, d\nu \tag{3.2}$$

où ν est le volume du V.E.R.

La moyenne apparente de ζ dans la phase π s'écrit :

$$\langle \zeta_\pi \rangle = \frac{1}{\nu} \int_{\nu_\pi} \zeta_\pi \, d\nu \tag{3.3}$$

où ν_π est la partie du volume ν occupée par la phase π.

La moyenne intrinsèque dans la phase π est définie par :

$$\langle \zeta_\pi \rangle^\pi = \frac{1}{\nu_\pi} \int_{\nu_\pi} \zeta_\pi \, d\nu \tag{3.4}$$

La relation entre la moyenne apparente et la moyenne intrinsèque est

$$\langle \zeta_\pi \rangle = \varepsilon_\pi \langle \zeta_\pi \rangle^\pi \tag{3.5}$$

où $\varepsilon_\pi = \frac{\nu_\pi}{\nu}$, est la fraction volumique de la phase π. (3.6)

La composante de fluctuation $\tilde{\zeta}_\pi$ est généralement introduite pour représenter la déviation de ζ_π par rapport à la moyenne intrinsèque

$$\tilde{\zeta}_\pi = \zeta_\pi - \langle \zeta_\pi \rangle^\pi \tag{3.7}$$

Dans la phase π, la déviation $\tilde{\zeta}_\pi$ est égale à zéro uniquement si ζ_π a une distribution uniforme.

Le théorème de la prise de moyenne appliqué aux opérateurs mathématiques divergence et gradient permettant d'écrire les théorèmes suivants (Whitaker, 1977) :

Divergence :

$$\left\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{\zeta}_\pi \right\rangle = \vec{\nabla} \cdot \left\langle \vec{\zeta}_\pi \right\rangle + \frac{1}{\nu} \int_{A_{\pi\wp}} \vec{\zeta}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi\wp} \, dA \tag{3.8}$$

Gradient :

$$\left\langle \vec{\nabla} \zeta_\pi \right\rangle = \vec{\nabla} \langle \zeta_\pi \rangle + \frac{1}{\nu} \int_{A_{\pi\wp}} \zeta_\pi \, \vec{n}_{\pi\wp} \, dA \tag{3.9}$$

où $A_{\pi\wp}$ est la surface de l'interphase entre π et la phase $\wp$, $\vec{n}_{\pi\wp}$ est le vecteur normal sortant de la surface $A_{\pi\wp}$.

Finalement en intégrant sur le V.E.R l'expression (3.1) et en appliquant le théorème de la prise de moyenne, la forme générale d'une équation de transport moyennée s'écrit :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \langle \zeta_\pi \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \varepsilon_\pi \langle \zeta_\pi \rangle^\pi \left\langle \vec{V}_\pi \right\rangle^\pi = \vec{\nabla} \cdot \langle J_\pi \rangle + \langle \Phi_\pi \rangle \\ &\underbrace{-\vec{\nabla} \cdot \left\langle \tilde{\zeta}_\pi \tilde{V}_\pi \right\rangle}_{[1]} + \underbrace{\frac{1}{\nu} \int_{A_{\pi\wp}} \vec{n}_{\pi\wp} \cdot J_\pi \, dA}_{[2]} + \underbrace{\frac{1}{\nu} \int_{A_{\pi\wp}} \vec{n}_{\pi\wp} \cdot \zeta_\pi \left(\vec{w} - \vec{V}_\pi \right) dA}_{[3]} \end{aligned} \tag{3.10}$$

où w est la vitesse d'interface $A_{\pi\wp}$.

Les trois derniers termes a gauche de l'égalité [1], [2] et [3] doivent être étudies cas par cas.

A l'échelle microscopique dans un milieu diphasique il existe communément des espèces, champs de température et gradients de vitesse, mais la littérature nous dit que le terme [1] est souvent négligé quand on résout le problème de fermeture (Whitaker, 1977 ; Whitaker, 1986 ; Jomaa et al., 1991 ; Quintard and Whitaker, 1998 ; Poiroux et al., 2004), ce qui nous laisse généralement deux termes d'analyse : le terme [2] qui représente le phénomène d'échange par diffusion entre les phases dans le V.E.R et [3] qui représente le transfert interfacial dû au changement de phase.

Notons ici que l'équation de transport moyennée (3.10) a été obtenue par prise de moyenne sur un V.E.R fixe au cours du temps. Pour un matériau déformable, ce V.E.R se

déforme au cours du temps car il suit a priori le mouvement du milieu déformable considéré (retrait prenant place lors du séchage). Il est donc légitime de s'intéresser au caractère déformable de ce V.E.R, et de l'influence éventuelle de ce caractère sur l'équation (3.10).

3.1.2 Influence du caractère déformable du V.E.R

Habituellement dans les études de prise de moyenne le V.E.R est considéré toujours fixe autour d'un point et indéformable, c'est avec cette hypothèse que la forme générale de l'équation de transport moyennée (3.10) a été déduite.

Il est très logique d'avoir l'inquiétude sur la problématique du V.E.R déformable, car comme nous avons déjà exprimé, ce travail de recherche s'intéresse à la modélisation (couplage hydromécanique) dans un milieu déformable. Notre préoccupation dans ce paragraphe, est alors centrée autour de l'écriture des équations de conservation avec un V.E.R qui peut se déformer ou se déplacer et de pouvoir constater s'il existe ou non des différences avec l'écriture classique des équations de conservation de masse moyennées présentée au paragraphe précédent.

Dans la suite, la notation $\nu(t)$ sera utilisée pour représenter le volume variable au cours du temps du V.E.R déformable.

3.1.2.1 Définition du champ de vitesse de retrait à l'échelle local

Tout d'abord, afin de mener notre démarche de prise de moyenne sur un V.E.R déformable, il nous faut définir le champ de vitesse de retrait local $\vec{V}_r(t)$. Nous choisissons de définir la vitesse de retrait local $\vec{V}_r(t)$ comme un champ vectoriel qui vérifie les conditions suivantes :

$$\vec{V}_r(t) = \begin{cases} \vec{V}_s(t) & \text{dans } \nu_s(t), \text{ sur } A_s(t) \text{ et } A_{sl}(t) \\ \vec{V}_\beta(t) & \text{dans } \nu_l(t) \text{ et } A_l(t) \end{cases} \tag{3.11}$$

où $\nu_s(t)$ est le volume de la phase solide, $\vec{V}_s(t)$ est la vitesse de déformation de cette phase solide, $\nu_l(t)$ est le volume qui entoure la phase liquide, $A_{sl}(t)$ est la surface de l'interface solide-liquide, $A_s(t)$ et $A_l(t)$ sont les surfaces des volumes $\nu_s(t)$ et $\nu_l(t)$ respectivement. Il faut remarquer que la vitesse $\vec{V}_\beta(t)$ n'est pas la vitesse du liquide $\vec{V}_l(t)$, c'est en fait un champ vectoriel qui vérifie la condition suivant :

$$\vec{V}_\beta(t) = \vec{V}_s(t) \quad \text{sur} \quad A_{sl}(t) \tag{3.12}$$

ceci de façon à assurer une continuité de la vitesse locale de retrait sur l'ensemble du V.E.R.

Le champ de vecteur $\vec{V}_r(t)$ ainsi définit (3.11) étant la vitesse locale de retrait, il doit vérifier la relation suivante :

$$\frac{1}{\nu(t)}\int_{\nu(t)} \vec{V}_r(t)\, d\nu = \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s \tag{3.13}$$

où par définition $\left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s = \frac{1}{\nu_s(t)}\int_{\nu_s(t)} \vec{V}_s(t)\, d\nu$ (3.14)

Considérant le caractère diphasique du milieu déformable considéré ($\nu(t) = \nu_l(t) + \nu_s(t)$), l'expression (3.13) se récrit comme suit :

$$\frac{1}{\nu(t)}\left[\int_{\nu_l(t)} \vec{V}_\beta(t)\, d\nu + \int_{\nu_s(t)} \vec{V}_s(t)\, d\nu\right] = \frac{1}{\nu_s(t)}\int_{\nu_s(t)} \vec{V}_s(t)\, d\nu \ ,$$

soit, en regroupant les termes de vitesse du solide sous la même intégrale

$$\frac{\nu_l(t)}{\nu_l(t)}\frac{1}{\nu(t)}\int_{\nu_l(t)} \vec{V}_\beta(t)\, d\nu = \left(1 - \frac{\nu_s(t)}{\nu(t)}\right)\frac{1}{\nu_s(t)}\int_{\nu_s(t)} \vec{V}_s(t)\, d\nu \ ,$$

c'est à dire, en utilisant la définition de la fraction volumique (3.6)

$$\varepsilon_l(t)\frac{1}{\nu_l(t)}\int_{\nu_l(t)} \vec{V}_\beta(t)\, d\nu = \left(1 - \varepsilon_s(t)\right)\frac{1}{\nu_s(t)}\int_{\nu_s(t)} \vec{V}_s(t)\, d\nu \tag{3.15}$$

La somme des fractions volumiques de toutes les phases est égale à l'unité ($\varepsilon_l + \varepsilon_s = 1$), il vient :

$$\frac{1}{\nu_l}\int_{\nu_l(t)} \vec{V}_\beta(t)\, d\nu = \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s \tag{3.16}$$

Ainsi la moyenne de phase, dans la phase liquide, de la vitesse locale de retrait (définie par l'équation (3.11)), doit être de plus égale à la vitesse de retrait macroscopique intrinsèque du solide $\left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s$. Les équations (3.12) et (3.16) constituent les deux seules contraintes auxquelles le champ de vecteur $\vec{V}_\beta(t)$ doit se soumettre de façon à ce que l'équation (3.11) définisse correctement un champ de vitesse locale de retrait cohérent.

3.1.2.2 Application à l'équation de conservation de la masse

Une équation de conservation de masse d'une phase π a la forme d'une équation classique de transport (3.1) où les termes **J** et Φ sont nuls. Le but du développement suivant sera donc de pouvoir déterminer s'il existe ou non une différence entre l'écriture d'une

équation de conservation de la masse obtenue par prise de moyenne classique sur un V.E.R non déformable (c.f. 3.1.1) et l'écriture d'une équation de conservation de la masse obtenue par prise de moyenne sur un V.E.R déformable.

Prenons la conservation de la masse de la phase π à l'échelle du pore :

$$\frac{\partial \widehat{\rho}_\pi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\widehat{\rho}_\pi \vec{V}_\pi \right) = 0 \tag{3.17}$$

Dans ce qui précède, la quantité $\widehat{\rho}_\pi$ est une distribution qui est égale à ρ_π dans la phase π et qui est nulle dans l'autre phase dénommée $\wp$.

La prise de moyenne appliquée à l'équation (3.17) donne :

$$\frac{1}{v(t)} \int_{v(t)} \left(\frac{\partial \widehat{\rho}_\pi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\widehat{\rho}_\pi \vec{V}_\pi \right) \right) dv = 0 \tag{3.18}$$

En appliquant le théorème de la dérivée particulaire d'une intégrale sur un domaine $v(t)$ qui se déforme au cours du temps pour le terme transitoire $\frac{\partial \widehat{\rho}_\pi}{\partial t}$ et le théorème de la divergence pour le terme convectif $\vec{\nabla} \cdot \left(\widehat{\rho}_\pi \vec{V}_\pi \right)$, l'équation (3.18) devient :

$$\frac{1}{v(t)} \left[\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\int_{v(t)} \widehat{\rho}_\pi \, dv \right)}_{[1]} - \underbrace{\int_{A(t)} \widehat{\rho}_\pi \left(\vec{V}_r(t) \cdot \vec{n} \right) dA}_{[2]} \right] + \frac{1}{v(t)} \underbrace{\int_{A(t)} \widehat{\rho}_\pi \vec{V}_\pi \cdot \vec{n} \, dA}_{[3]} = 0 \tag{3.19}$$

où [1] est l'accroissement du fait de la variation de $\widehat{\rho}_\pi$ au cours du temps, [2] est le flux au bord du fait de la déformée (retrait) et [3] est le flux au bord du fait du mouvement du fluide.

On voit aussi apparaître dans l'expression précédente (3.19), la vitesse de la déformée de la surface du V.E.R au cours du temps, soit par définition $\vec{V}_r(t)$.

L'équation (3.19), en utilisant l'expression de la dérivée d'un produit de fonctions et en regroupant les termes [2] et [3] devient :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{v(t)} \int_{v(t)} \widehat{\rho}_\pi \, dv \right] + \frac{1}{v^2(t)} \frac{dv(t)}{dt} \int_{v(t)} \widehat{\rho}_\pi \, dv}_{[1]} + \underbrace{\frac{1}{v(t)} \int_{v(t)} \left[\vec{\nabla} \cdot \widehat{\rho}_\pi \left(\vec{V}_\pi - \vec{V}_r(t) \right) \right] dv}_{[2]+[3]} = 0 \tag{3.20}$$

Le théorème de prise de moyenne appliqué à la divergence d'une fonction (équation (3.8)) permet d'exprimer le terme convectif ([2] + [3]) comme suit :

$$\frac{1}{\nu(t)}\int_{\nu(t)}\left[\vec{\nabla}\cdot\hat{\rho}_\pi\left(\vec{V}_\pi-\vec{V}_r(t)\right)\right]d\nu = \vec{\nabla}\cdot\left[\frac{1}{\nu(t)}\int_{\nu(t)}\left[\hat{\rho}_\pi\left(\vec{V}_\pi-\vec{V}_r(t)\right)\right]d\nu\right]+\int_{A_{\pi\wp}}\hat{\rho}_\pi\left(\vec{V}_\pi-\vec{V}_r(t)\right)\cdot\vec{n}_{\pi\wp}\,dA \tag{3.21}$$

Dans un milieu diphasique, π peut représenter la phase liquide ou la phase solide, $\wp$ représentant l'autre phase dans le V.E.R déformable. D'autre part, par définition (c.f. éq. (3.11)) de la vitesse de retrait $\vec{V}_r(t)$, l'intégrale de surface dans l'expression (3.21) est toujours nulle, car sur $A_{\pi\wp}$ toutes les vitesses sont égales ($\vec{V}_\pi(t)=\vec{V}_\wp(t)=\vec{V}_r(t)$).

Ainsi, la prise de moyenne, sur un V.E.R déformable, de l'équation (3.17) de conservation de la masse à l'échelle microscopique amène donc à

$$\frac{d\langle\rho_\pi\rangle}{dt}+\frac{1}{\nu(t)}\frac{d\nu(t)}{dt}\langle\rho_\pi\rangle+\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{1}{\nu(t)}\int_{\nu_\pi(t)}\hat{\rho}_\pi\left(\vec{V}_\pi-\vec{V}_r(t)\right)d\nu\right]=0 \tag{3.22}$$

Plusieurs remarques permettent alors de simplifier l'expression (3.22). En effet, on peut démontrer que :

1. Le terme $\frac{1}{\nu(t)}\frac{d\nu(t)}{dt}$ n'est autre que la divergence de la vitesse moyenne de retrait (c.f. Annexe 1) :

$$\frac{1}{\nu(t)}\frac{d\nu(t)}{dt}=\vec{\nabla}\cdot\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s$$

2. Du fait de la faible compressibilité des liquides et pour un solide considéré incompressible (c. f. Annexe 2), on peut écrire que :

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{1}{\nu(t)}\int_{\nu_\pi(t)}\hat{\rho}_\pi\left(\vec{V}_\pi-\vec{V}_r(t)\right)d\nu\right]=\vec{\nabla}\cdot\left(\langle\rho_\pi\rangle\left\langle\vec{V}_\pi\right\rangle^\pi-\langle\rho_\pi\rangle\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s\right)$$

Les deux considérations précédentes permettent de réécrire l'équation (3.22) comme suit :

$$\frac{d\langle\rho_\pi\rangle}{dt}+\langle\rho_\pi\rangle\vec{\nabla}\cdot\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s+\vec{\nabla}\cdot\left(\langle\rho_\pi\rangle\left\langle\vec{V}_\pi\right\rangle^\pi-\langle\rho_\pi\rangle\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s\right)=0 \tag{3.23}$$

Dans l'équation précédente la vitesse intervenant dans la dérivée particulaire ($\frac{d}{dt}$) n'est autre que la vitesse moyenne de retrait $\left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s$. Ainsi il vient :

$$\frac{\partial \langle \rho_\pi \rangle}{\partial t} + \underbrace{\left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s \vec{\nabla} \langle \rho_\pi \rangle}_{[1]} + \underbrace{\langle \rho_\pi \rangle \vec{\nabla} \cdot \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s}_{[2]} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\langle \rho_\pi \rangle \left\langle \vec{V}_\pi \right\rangle^\pi - \langle \rho_\pi \rangle \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s \right)}_{[3]} = 0$$

Le regroupement des termes [1] et [2] et la séparation en deux termes du terme [3] amène alors à :

$$\frac{\partial \langle \rho_\pi \rangle}{\partial t} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\langle \rho_\pi \rangle \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s \right)}_{[1]+[2]} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\langle \rho_\pi \rangle \left\langle \vec{V}_\pi \right\rangle^\pi \right) - \vec{\nabla} \cdot \left(\langle \rho_\pi \rangle \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s \right)}_{[3]} = 0$$

Finalement, après avoir fait toutes les considérations précédentes, l'expression (3.23) abouti à l'équation de conservation de la masse moyennée classique suivante :

$$\frac{\partial \langle \rho_\pi \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\langle \rho_\pi \rangle \left\langle \vec{V}_\pi \right\rangle^\pi \right) = 0 \tag{3.24}$$

En conclusion, nous observons que la prise en compte du caractère déformable du V.E.R ne modifie en rien la forme de l'équation moyenne de conservation de masse obtenue classiquement par prise de moyenne sur un V.E.R non déformable.

3.2 Equations de conservation de la masse liquide et solide

Nous commençons par écrire l'équation de conservation de masse (3.24) dans les deux phases. Ceci nous amène à trouver des équations qui prennent en compte les deux variables qui font le couplage hydromécanique : la pression intrinsèque du liquide $\langle P_l \rangle^l$ et la vitesse intrinsèque du solide $\left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s$ qui est déterminée à partir de la déformation de la matrice solide.

L'originalité du modèle proposé réside alors dans les deux points suivants :

1. *Le flux de la phase liquide, par rapport à la phase solide est modélisé par la loi de Darcy ; sont moteur est le gradient de pression liquide.*
2. *Une loi d'état de la phase liquide est considérée afin de fermer le système d'équation (compressibilité du fluide).*

Les équations de conservation de la masse pour chaque phase sont :

Solide :

$$\frac{\partial \langle \rho_s \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\langle \rho_s \rangle \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s \right) = 0 \tag{3.25}$$

Liquide :

$$\frac{\partial\langle\rho_l\rangle}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\langle\rho_l\rangle\left\langle\vec{V}_l\right\rangle^l\right)=0 \tag{3.26}$$

3.2.1 Écriture de l'équation de conservation de masse liquide (eau libre)

Dans cette partie l'équation de conservation de la masse liquide est développée, dans laquelle est introduite la loi de Darcy et la loi d'état du liquide afin de faire apparaître de façon explicite les variables pression du liquide $\langle P_l\rangle^l$ et vitesse du solide $\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s$.

3.2.1.1 Prise en compte de la loi de Darcy

La loi de Darcy (équation de la quantité de mouvement du fluide) a été établie par un milieu non déformable, mais elle est aussi valable dans un cas où le milieu se déforme lentement (quasi statique) (Whitaker, 1986) :

Loi de Darcy :

$$\left\langle\vec{V}_l\right\rangle^l-\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s=-\frac{\bar{\bar{k}}}{\varepsilon_l\mu_l}\left(\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l-\langle\rho_l\rangle^l\vec{g}\right) \tag{3.27}$$

où $\bar{\bar{k}}$ est le tenseur de perméabilité du milieu , il est considéré comme diagonale (milieu isotrope).

L'équation de la conservation de la masse liquide (3.26), associée à l'équation de conservation de la quantité de mouvement de ce liquide (loi de Darcy), dévient :

$$\frac{\partial\langle\rho_l\rangle}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\langle\rho_l\rangle\left(\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\frac{\bar{\bar{k}}}{\varepsilon_l\,\mu_l}\left(\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l-\langle\rho_l\rangle^l\vec{g}\right)\right)\right)=0$$

c'est à dire

$$\frac{\partial\langle\rho_l\rangle}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\langle\rho_l\rangle\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\langle\rho_l\rangle^l\frac{\bar{\bar{k}}}{\mu_l}\left(\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l-\langle\rho_l\rangle^l\vec{g}\right)\right)=0 \tag{3.28}$$

3.2.1.2 Prise en compte la compressibilité du liquide : loi d'état du liquide

L'équation d'état du liquide peut être écrite sous la forme :

$$\frac{d\langle\rho_l\rangle^l}{\langle\rho_l\rangle^l}=\chi\, d\langle P_l\rangle^l \tag{3.29}$$

L'équation de conservation de la masse du liquide (3.28), exprimée en fonction de la fraction volumique du liquide ε_l (équation (3.5)), devient :

$$\frac{\partial\left(\varepsilon_l\langle\rho_l\rangle^l\right)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_l\langle\rho_l\rangle^l\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\langle\rho_l\rangle^l\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\left(\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l-\langle\rho_l\rangle^l\vec{g}\right)\right)=0 \tag{3.30}$$

soit en négligeant l'effet de la pesanteur (Puiggali et Quintard, 1992) et en développant le terme transitoire :

$$\frac{\varepsilon_l}{\langle\rho_l\rangle^l}\frac{\partial\langle\rho_l\rangle^l}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_l}{\partial t}+\frac{1}{\langle\rho_l\rangle^l}\vec{\nabla}\cdot\left[\langle\rho_l\rangle^l\left(\varepsilon_l\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l\right)\right]=0 \tag{3.31}$$

L'équation précédente fait apparaître une variation temporelle de la masse volumique intrinsèque du liquide. Celle-ci peut être exprimée à l'aide de l'équation d'état (3.29) en fonction d'une variation temporelle de la pression fluide, d'où :

$$\varepsilon_l\,\chi\frac{\partial\langle P_l\rangle^l}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_l}{\partial t}+\frac{1}{\langle\rho_l\rangle^l}\vec{\nabla}\cdot\left[\langle\rho_l\rangle^l\left(\varepsilon_l\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l\right)\right]=0 \tag{3.32}$$

Le terme de flux (dans l'opérateur divergence) fait apparaître également la grandeur $\langle\rho_l\rangle^l$. Il peut être développé comme suit :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\langle\rho_l\rangle^l}\vec{\nabla}\cdot\left[\langle\rho_l\rangle^l\left(\varepsilon_l\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l\right)\right]=\\&\left(\varepsilon_l\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l\right)\cdot\frac{\vec{\nabla}\langle\rho_l\rangle^l}{\langle\rho_l\rangle^l}+\frac{\langle\rho_l\rangle^l}{\langle\rho_l\rangle^l}\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_l\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l\right)\end{aligned} \tag{3.33}$$

soit en reportant l'équation d'état du liquide (3.29)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\langle\rho_l\rangle^l}\vec{\nabla}\cdot\left[\langle\rho_l\rangle^l\left(\varepsilon_l\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l\right)\right]=\\&\left(\varepsilon_l\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l\right)\cdot\chi\,\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l+\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_l\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l\right)\end{aligned} \tag{3.34}$$

Le report de l'expression de ce terme de flux dans l'équation de conservation de la masse fluide écrite sous sa forme (3.32) :

$$\underbrace{\varepsilon_l\chi\left[\frac{\partial\langle P_l\rangle^l}{\partial t}+\left(\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\frac{\overline{\overline{k}}}{\varepsilon_l\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l\right)\cdot\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l\right]}_{[1]}+\underbrace{\frac{\partial\varepsilon_l}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_l\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l\right)}_{[2]}=0 \tag{3.35}$$

on peut distinguer dans l'équation précédente deux termes distincts : [1] un terme de transport de masse par variation de densité intrinsèque (il peut aussi être interprété comme un terme de transport de pression) et [2] un terme de transport de masse liquide en accord avec la loi de Darcy. Ces deux effets superposés vont participer au transport de la masse liquide.

Nous montrons en annexe 3 que, quand on s'intéresse à un séchage convectif d'un milieu diphasique, l'équation (3.35) peut être approximée comme suit :

$$\varepsilon_l \chi \frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_l \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s - \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right) = 0 \qquad (3.36)$$

Nous retenons par la suite cette équation (3.36) pour mener notre résolution numérique.

Remarque :

Le terme transitoire $\varepsilon_l \chi \frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial t}$ est gardé, même si son ordre de grandeur physique nous permettrait de le négliger. Ce choix à été fait dans le seul but d'avoir une équation facile à résoudre numériquement. L'avantage de garder ce terme dans l'équation de conservation de la masse liquide, tant comme dans la résolution de l'équation de conservation de la masse totale (voir équation 3.42 ci-après), où ce terme aidera à obtenir une stabilité numérique. En effet, plusieurs chercheurs (Jouëtte et. al., 2002 ; Guignard et. al., 2001 ; Agrawal et. al., 2001 ; Nourgaliev et. al., 2004) vis-à-vis de cette problématique d'instabilité numérique, proposent d'ajouter une compressibilité artificiel de la phase étudié à l'équation de transport, afin de pouvoir avoir ce terme transitoire, qui peut éventuellement, relaxer fortement sa résolution numérique. Cette manipulation numérique est appelée la méthode de la pseudo-compressibilité (pseudo-compressibility method). Nous n'avons pas besoin de l'ajouter artificiellement, car elle apparaît naturellement dans notre équation.

L'équation précédente (3.35) permet de déterminer la valeur de la fraction volumique du liquide ε_l, mais il restent encore deux variables à déterminer qui se trouvent dans cette équation : la vitesse de déformation $\left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s$ qui sera calculée à partir de l'équation d'équilibre mécanique (conservation de quantité de mouvement du milieu) et la pression intrinsèque du liquide $\langle P_l \rangle^l$ qui sera obtenue à partir l'équation de conservation de la masse totale (3.41).

La condition à la limite associée à l'équation (3.36) est déterminée par l'écriture d'un bilan de matière entre le milieu et son extérieur (c.f Annexe 4) :

$$\langle \rho_l \rangle^l \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \cdot \vec{n} = F_m \tag{3.37}$$

où F_m est le flux masse de fluide à la surface du matériau exprimé en kg/(m^2 s).

Dans cette condition limite (3.37), on observe que le flux de masse à la surface de milieu est directement liée aux gradients de pression du liquide en dessous de cette surface. Dans le cas où on s'intéresse au séchage, c'est donc ce flux de masse fluide à la surface du matériau qui génère les gradients de pression dans le matériau, et donc le transport de cette phase fluide.

3.2.2 Ecriture de l'équation de conservation de la masse totale

3.2.2.1 Ecriture de l'équation de conservation de masse solide

En considérant la relation entre la masse volumique apparente et la masse volumique intrinsèque (3.5), l'équation de conservation de masse solide (3.25) devient :

$$\varepsilon_s \frac{\partial \langle \rho_s \rangle^s}{\partial t} + \langle \rho_s \rangle^s \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_s \langle \rho_s \rangle^s \langle \vec{V}_s \rangle^s \right) = 0 \tag{3.38}$$

soit en considérant que la matrice solide est incompressible

$$\langle \rho_s \rangle^s \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \langle \rho_s \rangle^s \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_s \langle \vec{V}_s \rangle^s \right) = 0$$

c'est à dire :

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_s \langle \vec{V}_s \rangle^s \right) = 0 \tag{3.39}$$

3.2.2.2 Somme des équations de conservation de la masse solide et liquide

L'équation de conservation de la masse solide (3.39) asociée à la condition $\varepsilon_s = 1 - \varepsilon_l$ qui traduit le caractère diphasique du milieu considéré amène à :

$$-\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[(1 - \varepsilon_l) \langle \vec{V}_s \rangle^s \right] = 0 \tag{3.40}$$

soit, après combinaison avec l'équation de conservation de masse liquide (3.35) :

$$\varepsilon_l \chi \left[\frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial t} + \left(\langle \vec{V}_s \rangle^s - \frac{\overline{\overline{k}}}{\varepsilon_l \mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right) \cdot \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right] - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right)$$
$$\underbrace{+ \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t}}_{[a]} + \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{V}_s \rangle^s \underbrace{- \vec{\nabla} \cdot \varepsilon_l \langle \vec{V}_s \rangle^s + \vec{\nabla} \cdot \varepsilon_l \langle \vec{V}_s \rangle^s}_{[b]} = 0$$

c'est à dire

$$\underbrace{\varepsilon_l \chi \left[\frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial t} + \left(\langle \vec{V}_s \rangle^s - \frac{\overline{\overline{k}}}{\varepsilon_l \mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right) \cdot \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right]}_{[1]} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\langle \vec{V}_s \rangle^s - \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right)}_{[2]} = 0 \qquad (3.41)$$

Le terme [1] de cette équation (3.41) est identique au terme [1] de l'équation (3.35). Pour des raisons identiques à celles envisagées pour cette équation (3.35) (terme [1] négligeable devant le terme [2]) nous retenons par la suite l'équation suivante pour mener notre solution numérique :

$$\varepsilon_l \chi \frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\langle \vec{V}_s \rangle^s - \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right) = 0 \qquad (3.42)$$

Le terme transitoire $\varepsilon_l \chi \frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial t}$ est peut être aussi négligeable, mais on le garde pour les mêmes raisons de stabilité numérique qui ont été déjà exprimées dans l'obtention de conservation de la masse liquide (3.35).

La condition limite associée à l'équation de conservation de la masse totale apparaît de façon naturelle. En effet, l'équation (3.41) étant la somme des deux équations de conservation de la masse (solide et liquide), sa condition à la limite est logiquement la somme des conditions limites de ces équations de conservation (c.f. Annexe 4). D'où :

$$\underbrace{\langle \rho_l \rangle^l \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \cdot \vec{n}}_{[C.L.l]} + \underbrace{\langle \rho_s \rangle \left(\langle \vec{V}_s \rangle^s - \langle \vec{V}_s \rangle^s \right) \cdot \vec{n}}_{[C.L.s]} = F_m + F_{ms}$$

Le terme [C.L.l] (condition à la limite liquide) est l'apport de flux de masse liquide que on trouve dans la condition limite (3.37), le terme [C.L.s] (condition à la limite solide) est l'expression de flux de masse de la phase solide obtenue à partir d'un bilan de masse solide sur la surface du milieu (c.f. Annexe 4). F_m (flux de masse liquide) est le même que celui qui intervient dans la condition limite (3.37) associée à la conservation de masse liquide et F_{ms} est le flux de masse solide sortant ou entrant dans le milieu. Puisque le domaine considéré par l'écriture de l'équation (3.42) est solidaire a la matrice solide, il est claire que $F_{ms} = 0$, car on a pas de masse solide qui entre ou qui sorte de ce domaine. Il faut remarquer que le terme [C.L.s] devient nul pour la même raison.

Ainsi, la condition limite associée à l'équation de conservation de la masse totale (3.42), prend la même forme que la condition limite de la conservation de masse liquide (c.f. Annexe 4) :

$$\langle \rho_l \rangle^l \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \cdot \vec{n} = F_m \tag{3.43}$$

3.3 Équation de la quantité de mouvement

3.3.1 Équilibre de contraintes

La phase solide est considérée incompressible et l'hypothèse d'un milieu quasi statique nous permet de négliger les termes d'inertie. L'effet de la gravité sera considéré aussi négligeable sur le mouvement du solide. Ces hypothèses (Coussy, 1991) nous permettent d'écrire l'équation de conservation de mouvement du milieu sous sa forme d'équilibre statique ou d'équilibre de contraintes :

$$\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\sigma}} = \vec{0} \tag{3.44}$$

Le tenseur de contraintes totale $\overline{\overline{\sigma}}$ admet une contribution de la pression du fluide $\langle P_l \rangle^l$ (si le milieu est diphasique) ainsi qu'une contribution du comportement mécanique propre du solide :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \varepsilon_s \overline{\overline{\sigma}}_s - \varepsilon_l \langle P_l \rangle^l \overline{\overline{I}} \tag{3.45}$$

$\overline{\overline{\sigma}}_s$ correspond ici aux interactions entre les particules solides.

Les interactions entre le liquide et le solide disparaissent de cette équation car elles s'annulent mutuellement.

Ainsi l'équation (3.44) peut se réécrire de la forme suivant :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_s \overline{\overline{\sigma}}_s \right) - \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_l \langle P_l \rangle^l \overline{\overline{I}} \right) = \vec{0} \tag{3.46}$$

Cette équation est généralement abandonnée car l'accès à $\overline{\overline{\sigma}}_s$ est difficile. On préférera parler de contrainte effective qui est la contrainte responsable de la déformation du réseau solide dans son ensemble.

3.3.2 Application du principe de contraintes effectives de Terzaghi

Basée sur la démarche suivie par Biot dans sa théorie de consolidation (c.f Chapitre 2) et par Coussy (Coussy, 1991), l'utilisation d'une relation de type phénoménologique, pour l'analyse de contraintes, est possible si on utilise le principe de contraintes effectives proposé

par Terzaghi. Cette contrainte effective est obtenue à partir d'un bilan de forces sur le réseau solide (c.f Annexe 5) :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}_{eff} - \langle P_l \rangle^1 \overline{\overline{I}} \quad \text{ou} \quad \overline{\overline{\sigma}}_{eff} = \overline{\overline{\sigma}} + \langle P_l \rangle^1 \overline{\overline{I}} \tag{3.47}$$

$\overline{\overline{\sigma}}$ représente le tenseur de contraintes totales, $\overline{\overline{\sigma}}_{eff}$ le tenseur de contraintes effectives de la phase solide (c.f Annexe 5), $\langle P_l \rangle^1$ la pression intrinsèque du liquide et $\overline{\overline{I}}$ est le tenseur identité. Cette expression (3.47) fait apparaître explicitement la pression intrinsèque du liquide $\langle P_l \rangle^1$ et convient beaucoup à notre modèle, car elle nous permettra d'obtenir de façon explicite, le fort couplage existant entre la déformation de la matrice solide et le transfert phase liquide.

Loi de Comportement

Afin de fermer le problème on a besoin d'une loi de comportement qui exprime la relation qui existe entre la contrainte et le déplacement. Dans notre cas particulier nous avons besoin d'une loi reliant $\overline{\overline{\sigma}}_{eff}$ au déplacement du réseau.

Au cours d'une expérience de caractérisation mécanique nous avons généralement accès à la contrainte totale correspondant au chargement extérieur sur le milieu. Si cette expérience est conduite très lentement autorisant ainsi le liquide à être évacué (expérience drainée), la pression de la phase liquide peut être considérée nulle et la contrainte totale est par conséquent égale à la contrainte effective. Si le comportement du réseau solide peut être considéré comme élastique, on peut alors écrire la relation de Hooke entre $\overline{\overline{\sigma}}_{eff}$ et le tenseur de déformation totale du réseau solide :

Loi de Hooke :

$$\overline{\overline{\sigma}}_{eff} = \overline{\overline{E}}\,\overline{\overline{\varepsilon}} \tag{3.48}$$

En prenant en compte les hypothèses qui nous amènent à écrire l'équation de conservation de mouvement sous sa forme d'équilibre statique (3.44), nous arrivons à écrire finalement l'équation d'équilibre de contraintes qui ferme notre modélisation de séchage d'un milieu poreux saturé et déformable :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\overline{\overline{E}}\,\overline{\overline{\varepsilon}} \right) - \vec{\nabla} \cdot \left(\langle P_l \rangle^1 \overline{\overline{I}} \right) = \vec{0} \tag{3.49}$$

La condition à la limite de l'équation précédente est la suivante :

$$\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{F} \Leftrightarrow \overline{\overline{E}}\,\overline{\overline{\varepsilon}} + \langle P_l \rangle^l \overline{\overline{I}} = \vec{F}$$

où $\vec{F}$ est la projection perpendiculaire à la surface de la charge par unité de surface exercée à la limite.

Dans le cas du séchage d'un milieu déformable il n'y a pas de forces extérieures qui agissent sur le milieu, la condition à la limite est écrite logiquement de la forme suivant:

$$\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

L'équation d'équilibre de contraintes (3.49) relie la rhéologie de la matrice solide à la pression du liquide. Sa résolution amène à connaître le tenseur des déformations $\overline{\overline{\varepsilon}}$ et ainsi la vitesse de retrait $\langle \vec{V}_s \rangle^s$; elle assure la fermeture de notre modèle.

Afin de détailler la relation qui existe entre le tenseur des déformations totales $\overline{\overline{\varepsilon}}$ et la vitesse de retrait, nous proposons de rappeler quelques définitions dans le paragraphe suivant.

3.3.3 Tenseur de déformations totales pour grandes déformations

Dans la littérature (Jomaa, 1991 ; Pourcel, 2003 ; Sarmento et al., 2004 ; Porras, 2005), le tenseur de déformations totale peut être décomposé de la forme suivante :

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{\varepsilon}}_m + \overline{\overline{\varepsilon}}_{ri} \tag{3.50}$$

où $\overline{\overline{\varepsilon}}_m$ est considérée comme un tenseur de déformation lié au comportement mécanique du matériau (généralement élastique ou viscoélastique), $\overline{\overline{\varepsilon}}_{ri}$ est le tenseur des déformations lié au retrait isotrope et qui selon la littérature, ne produit pas de contraintes dans le milieu.

La détermination expérimentale de la contrainte effective $\overline{\overline{\sigma}}_{eff}$ est fait à l'échelle macroscopique, donc logiquement la valeur du tenseur $\overline{\overline{E}}$ est obtenue en prenant en compte la déformation totale du milieu. Alors, la décomposition classique du tenseur de déformations totales (3.50), que l'on trouve généralement dans les études du séchage des milieux poreux diphasiques déformables n'est pas nécessaire. Nous pouvons travailler, par conséquence, directement avec les déformations totales du milieu ($\overline{\overline{\varepsilon}}$).

L'hypothèse de grandes déformations géométriques est faite parce que la résolution numérique du modèle sera effectuée avec le changement d'espace Euler-Lagrange (c.f Annexe 6), ceci veut dire que tous les déplacements seront calculés en fonction ou par rapport à la position initiale.

Les rappels que nous ferons en suite ont été basés sur le travail de Coirier (Coirier, 1997), et il s'agit de plusieurs définitions ou relations mathématiques utilisés au cours de ce travail.

- *Définition du tenseur des déformations de Green-Lagrange*

Soit $\vec{f}$ la transformation reliant les coordonnées d'un point matériel $\vec{r}(t, x, y, z)$ à une instant t à celles de ce point $\vec{r_0}(t, x_0, y_0, z_0)$ à un instant $t = t_0$.

$$\vec{r} = \vec{f}(t, \vec{r}_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = f_x(t, x_0, y_0, z_0) \\ y = f_y(t, x_0, y_0, z_0) \\ z = f_z(t, x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

Nous définissons le tenseur gradient de la transformation $\vec{f}$ comme suit :

$$\overline{\overline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x_0} & \frac{\partial f_x}{\partial y_0} & \frac{\partial f_x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x_0} & \frac{\partial f_y}{\partial y_0} & \frac{\partial f_y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x_0} & \frac{\partial f_z}{\partial y_0} & \frac{\partial f_z}{\partial z_0} \end{bmatrix}$$

Par définition, le tenseur des déformations de Green-Lagrange en grande déformation s'écrit :

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left({}^{T}\overline{\overline{F}} \cdot \overline{\overline{F}} - \overline{\overline{I}} \right)$$

Soit

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left[\left(\overline{\overline{F}} - \overline{\overline{I}}\right) + {}^{T}\left(\overline{\overline{F}} - \overline{\overline{I}}\right) + {}^{T}\left(\overline{\overline{F}} - \overline{\overline{I}}\right)\left(\overline{\overline{F}} - \overline{\overline{I}}\right) \right] \qquad (3.51)$$

- *Expression du tenseur de déformation en fonction de la vitesse de déformation*

Si on considère $\vec{\ell}$ comme le vecteur déplacement ($\vec{\ell} = \vec{f}(t, \vec{r_0}) - \vec{r_0}$), le tenseur $\overline{\overline{\varepsilon}}$ (3.51) peut s'exprimer :

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{\ell} + {}^{T}\vec{\nabla}\vec{\ell} + {}^{T}\vec{\nabla}\vec{\ell}\,\vec{\nabla}\vec{\ell} \right)$$

or $\vec{\ell} = \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^{s} dt$

Finalement le tenseur de déformation (3.51) est représenté en fonction uniquement de la vitesse de déformation du solide

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla} \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s dt + {}^T\vec{\nabla} \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s dt + {}^T\vec{\nabla} \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s dt \, \vec{\nabla} \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s dt \right) \tag{3.52}$$

Cette représentation du tenseur de déformations $\overline{\overline{\varepsilon}}$ montre que la variable qui est déterminée par l'équation d'équilibre de contraintes (3.49) avec l'équation (3.41), est précisément la vitesse intrinsèque de déformation du solide $\left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s$.

3.4 Équation de conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie moyennée avec la technique de la prise de moyenne volumique, est très souvent utilisée dans les études qui considèrent les écoulements dans les milieux poreux ; et nous donne en général des résultats satisfaisants. Pour cette raison, nous l'avons choisie afin de tenir compte des effets de la température dans notre modèle. Nous ne changeons pas l'écriture déjà proposé par la littérature (Whitaker, 1977 ; Jomaa et. al., 1991 ; Jomaa, 1991 ; Quintard et. al., 1997 ; Pourcel, 2003 ; Sarmento et al., 2004 ; Porras, 2005). Nous proposons seulement une réécriture du modèle classique à une température, dans le seul but de pouvoir tenir compte des paramètres qui interviennent dans notre modèle et faire ainsi un bon couplage avec les équations de conservation de masse et d'équilibre mécanique.

3.4.1 Modèle à une température

La démarche suivie pour obtenir le modèle à une température (équation de conservation d'énergie à une température), qui tient compte de l'hypothèse de l'équilibre thermique local qui suppose l'égalité entre la température moyenne intrinsèque $\left\langle T_l \right\rangle^l$ (phase liquide) et $\left\langle T_s \right\rangle^s$ (phase solide), a été largement expliquée par des auteurs spécialisées dans le maniement de la prise de moyenne volumique sur l'équation d'énergie, entre autres, telles que Whitaker (Whitaker, 1977), Quintard (Quintard et al., 1997) et Jomaa (Jomaa et al., 1991). D'après la littérature (Whitaker, 1997 ; Jomaa et al., 1991 ; Sarmento et al., 2004 ; Porras, 2005), la conservation de l'énergie dans un milieux poreux diphasique déformable s'écrit :

$$\left\langle \rho C_p \right\rangle \frac{\partial \left\langle T \right\rangle}{\partial t} + \left[\left(\rho C_p \right)_l \left\langle \vec{V}_l \right\rangle + \left(\rho C_p \right)_s \left\langle \vec{V}_s \right\rangle \right] \vec{\nabla} \left\langle T \right\rangle = \vec{\nabla} \cdot \left(\overline{\overline{\lambda}}_{eff} \vec{\nabla} \left\langle T \right\rangle \right) \tag{3.53}$$

où $\langle T \rangle$ est la température moyenne dans le V.E.R issue de l'hypothèse de l'équilibre thermique ($\langle T \rangle = \langle T_s \rangle^s = \langle T_l \rangle^l$) et $\overline{\overline{\lambda}}_{eff}$ est le coefficient de conduction effectif qui dépend des caractéristiques thermiques intrinsèques de chaque phase et de leur répartition géométrique.

A l'aide des définitions suivantes,

$$\langle \overrightarrow{V_l} \rangle = \varepsilon_l \langle \overrightarrow{V_l} \rangle^l \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{V_s} \rangle = \varepsilon_s \langle \overrightarrow{V_s} \rangle^s$$

le deuxième terme de (3.53) est modifié en :

$$(\rho C_p)_l \langle \overrightarrow{V_l} \rangle + (\rho C_p)_s \langle \overrightarrow{V_s} \rangle = \varepsilon_l (\rho C_p)_l \left(\langle \overrightarrow{V_l} \rangle^l - \langle \overrightarrow{V_s} \rangle^s \right) + \langle \rho C_p \rangle \langle \overrightarrow{V_s} \rangle^s$$

où $\langle \rho C_p \rangle = \varepsilon_l (\rho C_p)_l + \varepsilon_s (\rho C_p)_s$

De plus la loi de Darcy (en négligeant l'effet de la pesanteur) permet d'écrire :

$$(\rho C_p)_l \langle \overrightarrow{V_l} \rangle + (\rho C_p)_s \langle \overrightarrow{V_s} \rangle = -(\rho C_p)_l \left(\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right) + \langle \rho C_p \rangle \langle \overrightarrow{V_s} \rangle^s \tag{3.54}$$

Ainsi l'équation de l'énergie (3.53) devient finalement :

$$\langle \rho C_p \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \left[\langle \rho C_p \rangle \langle \overrightarrow{V_s} \rangle^s - (\rho C_p)_l \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right] \vec{\nabla} \langle T \rangle = \vec{\nabla} \cdot \left(\overline{\overline{\lambda}}_{eff} \vec{\nabla} \langle T \rangle \right) \tag{3.55}$$

3.4.2 Mise sous forme conservative

L'écriture de l'équation de conservation de l'énergie sous forme conservative est ici amenée de façon à assurer une continuité formelle de l'équation de l'énergie pour un milieu diphasique avec celle que nous avons déjà écrit pour un milieu triphasique. Cette écriture sous forme conservative qui favorise aussi la résolution numérique est (Couture, 1995) :

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\langle \rho C_p \rangle_l \langle \overrightarrow{V_l} \rangle + (\rho C_p)_s \langle \overrightarrow{V_s} \rangle \right) \langle T \rangle - \overline{\overline{\lambda}}_{eff} \cdot \vec{\nabla} \langle T \rangle \right] = 0 \tag{3.56}$$

où $\langle H \rangle = \langle \rho C_p T \rangle$ est l'enthalpie moyenne du milieu.

L'introduction de l'expression (3.54) (loi de Darcy) dans le terme de flux de l'équation précédente, amène à l'écriture de l'équation d'énergie sous sa forme conservative et qui considère les variables d'intérêt dans notre travail :

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\langle \rho C_p \rangle \langle \overrightarrow{V_s} \rangle^s - (\rho C_p)_l \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right) \langle T \rangle - \overline{\overline{\lambda}}_{eff} \cdot \vec{\nabla} \langle T \rangle \right] = 0 \tag{3.57}$$

- *Condition à la limite*

La forme conservative de l'équation d'énergie aide à trouver la condition à la limite naturelle associe à cette équation :

$$\left(\left\langle \rho C_p \right\rangle \left\langle \overrightarrow{V_s} \right\rangle^s - \left(\rho C_p\right)_l \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \left\langle P_l \right\rangle^l \right) \left\langle T \right\rangle \cdot \vec{n} - \overline{\overline{\lambda}} \cdot \vec{\nabla} \left\langle T \right\rangle \cdot \vec{n} = h_T \left(T_{surf} - T_\infty\right) - F_m \, \Delta H_v \qquad (3.58)$$

où h_T est le coefficient de transfert de chaleur déterminé à partir de la théorie de la couche limite, ΔH_v est l'enthalpie d'évaporation, T_{surf} et T_∞ sont la température a la surface du milieu et de l'environnement de séchage respectivement.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté un modèle qui exprime explicitement, le fort couplage existant entre le comportement mécanique d'un milieu poreux déformable saturé et le transport de la phase fluide en son sein.

Pour réussir la construction de ce modèle, nous avons tout d'abord mené l'homogénéisation du milieu au travers d'une prise de moyenne des équations de conservation locales relevant de la mécanique des milieux continus (masse, quantité de mouvement, énergie), ceci en considérant l'influence du caractère déformable du V.E.R. Le résultat de cette homogénéisation nous a donné les mêmes équations de conservation moyennées que celles déduites classiquement sans prise en compte du caractère déformable du V.E.R.

Dans un deuxième temps, l'écriture de l'équation de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement de la phase fluide ont été considérées. Dans celles-ci, l'inertie de la phase fluide est négligée, la compressibilité de la phase fluide est prise en compte et le terme moteur retenu pour décrire le transport de la phase fluide est le gradient de pression de ce fluide. L'écriture du caractère diphasique du milieu et l'utilisation de la loi de Darcy (tout comme Sarmento et al., 2004 ; Porras, 2005) pour exprimer la vitesse de filtration de la phase fluide viennent remplacer respectivement l'équation de la conservation de la masse solide et l'équation de la conservation de la quantité de mouvement du fluide.

L'utilisation du gradient de pression liquide comme terme moteur et l'utilisation du formalisme de Terzaghi pour décomposer le tenseur de contraintes du milieu diphasique amène à obtenir un système de trois équations couplées (transport de masse fluide, transport de masse totale et équilibre de contraintes) exprimées en fonction des inconnues suivantes : la fraction volumique du fluide ε_l, la pression intrinsèque du liquide $\left\langle P_l \right\rangle^l$ et la vitesse

intrinsèque du réseau solide $\left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s$. Le couplage entre transport fluide et contraintes mécaniques est ainsi explicitement exprimé (couplage hydromécanique).

La prise en compte du caractère compressible du liquide n'a pas d'influence notable, en terme d'ordre de grandeur, sur le transport fluide pour un procédé de séchage « doux » ou de déshydratation mécanique « doux ». Par contre, elle permettra à terme d'envisager la prise en compte de phénomènes de vaporisation interne ou de fluctuation de contraintes fortes imposées aux limites du milieu poreux considéré. De plus, d'un point de vue purement numérique, nous avons choisi de garder la partie instationnaire du terme apportée (du fait de la prise en compte de la compressibilité du fluide) à l'équation de la masse fluide ; en effet ce terme instationnaire a l'avantage d'assurer une convergence plus rapide et une stabilité du schéma numérique utilisé ; ce constat numérique a été déjà observé par les auteurs suivants : Jouëtte (Jouëtte et. al., 2002), Guignard (Guignard et. al., 2001), Agrawal (Agrawal et. al., 2001) et Nourgaliev (Nourgaliev et. al., 2004).

Dans l'équation de conservation de la masse liquide, nous pouvons observer que le seul paramètre à déterminer expérimentalement est le tenseur de perméabilité $\overline{\overline{k}}$, ceci nous libère de la détermination de paramètres ou fonctions supplémentaires classiques des modèles qui utilisent des coefficients de type diffusifs (c.f Chapitre 2), comme la détermination de la pression du liquide en fonction de la fraction volumique ($\left\langle P_l \right\rangle^l = F(\varepsilon_l)$), que nous trouvons dans le coefficient $\overline{\overline{D}}_{eff}$ de l'équation (2.37) et qui a été largement étudié dans la littérature (Jomaa, 1991 ; Jomaa et Puiggali, 1991 ; Mercier, 1996).

Par rapport à l'étude de contraintes dans le milieu, une approche phénoménologique issue du principe de contraintes effectives de Terzaghi, a été choisie pour la modélisation. L'avantage de ce choix en ce qui concerne d'autres modèles (Jomaa, 1991 ; Pourcel, 2003 ; Sarmento et al., 2004 ; Porras, 2005), est que nous n'avons pas la nécessité de faire la décomposition typique du tenseur de déformations totales ($\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{\varepsilon}}_m + \overline{\overline{\varepsilon}}_{ri}$).

L'équation de conservation de l'énergie est l'équation classiquement décrite par les modèles connus en thermique (Whitaker, 1997 ; Jomaa et al., 1991 ; Sarmento et al., 2004 ; Porras, 2005), elle est introduite à notre modèle dans le but de tenir compte de tous les paramètres qui influencent un processus de séchage et pour assurer un passage continue vers un modèle triphasique.

En résumé, le modèle présenté dans ce chapitre semble faire un bon couplage thermo-hydro-mécanique et les variables intervenantes ($\varepsilon_l, \langle P_l \rangle^l, \langle \vec{V}_s \rangle^s$ et $\langle H \rangle$) donnent la possibilité d'avoir un passage continu vers une modélisation triphasique (c.f. Chapitre 2 ; éq. (2.11) et éq. (2.23)).

Dans la suite de ce travail, une analyse numérique sera présentée afin d'avoir une idée de la qualité du modèle, et d'établir ses différences avec les autres types de modélisation.

4 RÉSOLUTION NUMÉRIQUE LORS D'UN SÉCHAGE DE TYPE CONVECTIF

Le modèle mathématique obtenu dans le chapitre précédent (c.f. Chapitre 3), est un système d'équations qui est capable de décrire en particulier le phénomène d'un séchage convectif, pour un milieu poreux saturé fortement déformable, à l'échelle du processus.

Le séchage convectif est une phénomène de séparation solide-liquide où l'énergie doit être fournie afin d'enlever l'eau de la surface du milieu. Cette énergie est apportée par un gaz de balayage qui évapore le liquide a la surface. Le gradient de concentration en vapeur entre la surface du matériau et son environnement définit le potentiel de tel séchage.

4.1 Validation du modèle

La validation du modèle proposé dans ce travail, est fait en comparant nos résultats issus de la simulation numérique (obtenues a l'aide de FEMLAB) du séchage convectif du gel d'alumine, avec ceux obtenus expérimentalement par Pourcel (Pourcel, 2003) au sein du laboratoire TREFLE. Nous avons choisi ce gel comme matériau d'étude, parce que il est un milieu poreux fortement déformable qui reste diphasique pendant presque tout le processus d'un séchage convectif.

Dans la suite, toutes les conditions de séchage ainsi que les propriétés du matériau (Tableau 4.2) sont prises du travail de Pourcel (Pourcel, 2003).

4.1.1 Configuration expérimentale

Le dispositif expérimental que a été mis en œuvre est basé sur une boucle de séchage convectif où les propriétés de l'air (température T_∞, humidité relative HR_∞ et vitesse de circulation de l'air V_{air}) peuvent être contrôlées et la masse de l'échantillon peut aussi être mesurée à chaque instant (Figure 4.1).

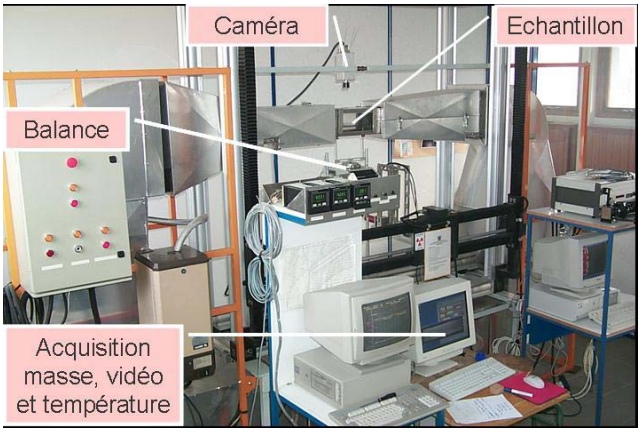


Figure 4.1 *Vue d'ensemble de la boucle de séchage utilisée par Pourcel (Pourcel, 2003) au sein du laboratoire TREFLE.*

L'échantillon du gel d'alumine, utilisée pour l'expérience de séchage et la simulation, a une géométrie rectangulaire (Figure 4.2) de longueur L =80 mm et d'épaisseur e =20 mm.

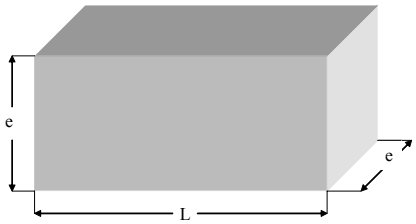


Figure 4.2 *Géométrie de l'échantillon de gel d'alumine utilisé par les expériences et simulations.*

Cet échantillon est enduit de graisse à vide sur les faces latérales et inférieure, ensuite il est posé sur une plaque en aluminium et finalement il sera soumis à des conditions environnementales de séchage imposées (T_∞, HR_∞, V_{air}) dans la boucle de séchage. Le gel sera alors soumis aux conditions de séchage très spécifiques (Figure 4.3). La graisse sur les surfaces latérales induit un flux de masse qui traverse uniquement la face supérieure. Pour le flux thermiques, la résistance thermique liée à la graisse est négligée. Les surfaces latérales sont alimentées par un flux convectif et dans la surface supérieure il faut ajouter une absorption de chaleur par évaporation. Dans la surface inférieure, il existe au début du séchage un contact avec la plaque d'aluminium qui a une grande conductivité thermique et une faible épaisseur. Malgré ce contact avec la plaque, nous considérons plutôt un flux de chaleur convectif qui se produit à cause de la déformation du milieu ; la déformation amène à l'existence d'une distance de séparation entre les deux surfaces, qui permet d'avoir (sur la surface inférieure du milieu) l'influence d'un flux convectif d'air. Il est important de signaler que, les forces surfaciques qui pourraient s'ajouter par l'action de la couche de graisse sont négligeables et les surfaces sont libres dans leur mouvement.

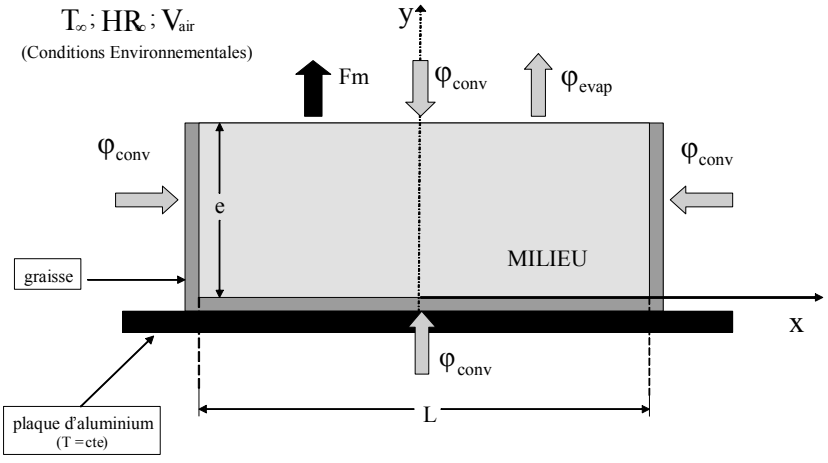


Figure 4.3 *Schéma 2D des conditions de séchage suivies par le milieu (φ_{conv} =flux de chaleur convectif ; φ_{evap} =flux de chaleur par évaporation).*

4.1.2 Configuration et paramètres de la simulation

En ce qui concerne la simulation numérique, les conditions de séchage sont les mêmes que celles de l'expérience, la seule différence est que l'on prend en compte de la symétrie existante suivant l'axe y (c.f. Figure 4.3). Donc, la simulation est faite dans une géométrie rectangulaire 2D qui considère uniquement la moitié de l'échantillon (Figure 4.4).

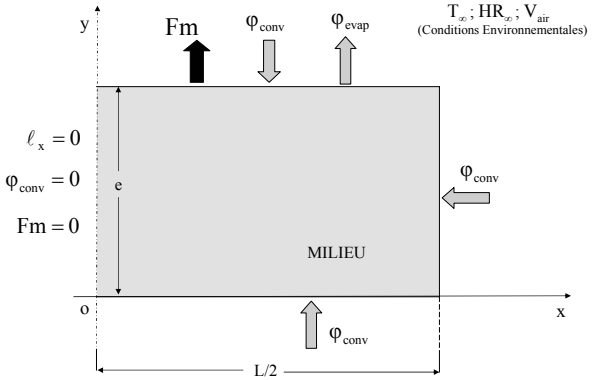


Figure 4.4 *Schéma des conditions utilisées dans la simulation de séchage convectif (φ_{conv} =flux de chaleur convectif ; φ_{evap} =flux de chaleur par évaporation).*

Le système d'équations qui permet de résoudre ce problème de séchage a été déjà déterminé dans le chapitre précédent (c.f. Chapitre 3) et il est représenté dans le tableau suivant :

PHÉNOMÉNE PHYSIQUE	**ÉQUATION**
Conservation de la masse liquide	$\varepsilon_l \chi \frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_l \langle \vec{V}_s \rangle^s - \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right) = 0$ (3.36)
Conservation de la masse totale	$\varepsilon_l \chi \frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\langle \vec{V}_s \rangle^s - \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right) = 0$ (3.42)
Équilibre mécanique	$\vec{\nabla} \cdot \left(\overline{\overline{E}}\, \overline{\overline{\varepsilon}} \right) - \vec{\nabla} \cdot \left(\langle P_l \rangle^l \overline{\overline{I}} \right) = \vec{0}$ (3.49)
Conservation de l'énergie	$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\langle \rho C_p \rangle \langle \vec{V}_s \rangle^s - (\rho C_p)_l \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right) \langle T \rangle - \overline{\overline{\lambda}} \cdot \vec{\nabla} \langle T \rangle \right] = 0$ (3.57)

Tableau 4.1 *Système d'équations qui décrit le séchage d'un milieux poreux diphasique.*

Comme le système d'équations est appliqué dans un gel d'alumine, dans le tableau suivant sont présentées certaines de ses propriétés, qui jouent un rôle très important dans l'étude du couplage hydromécanique lors du séchage d'un milieu déformable, ainsi que dans la résolution numérique des équations :

PROPRIÉTÉ	VALEUR
Masse volumique intrinsèque de la phase solide du gel	$\langle \rho_s \rangle^s = 2000 \left(\frac{kg}{m^3} \right)$
Coefficient de Poisson du gel sec	$\upsilon_{sec} \approx 0.3$
Module de Young en fonction de la teneur en eau (W)	$E = E(W) = E_0 \exp(-3.8W)\,(Pa)$ où $E_0 = 6.7 \text{x} 10^8$
Coefficient effectif de transport de type diffusif	$D_{eff} \approx 5 \text{ x } 10^{-09} \left(\frac{m^2}{s} \right)$

Tableau 4.2 *Propriétés du gel d'alumine (Pourcel, 2003).*

Le module de Young E(W) a été obtenu par des essais mécaniques de compression drainée et le coefficient de transport diffusif effectif D_{eff} a été obtenu à partir d'expériences de séchage convectif. Ces propriétés ont une forte influence sur des paramètres tensoriels tels que la perméabilité $\overline{\overline{k}}$ et le tenseur d'élasticité $\overline{\overline{E}}$.

Dans le cas du module de Young, ainsi que pour tous les paramètres qui dépendent de la teneur en eau, on peut affirmer que $E=E(W)=E(\varepsilon_l)$ parce que la teneur en eau est liée à la fraction volumique du liquide au travers de la relation directe suivante :

$$W = \frac{\varepsilon_l \langle \rho_l \rangle^l}{(1-\varepsilon_l)\langle \rho_s \rangle^s} \tag{4.1}$$

4.1.2.1 Paramètres tensoriels

Tenseur de perméabilité

Pour un milieu isotrope le tenseur de perméabilité peut s'écrire comme :

$\overline{\overline{k}} = k\,\overline{\overline{I}}$

où k est le coefficient de perméabilité intrinsèque du milieu. En général sa mesure est faite par un test de drainage 1D dans un milieu non déformable. Dans le cas de gels l'obtention de cette perméabilité (k), en fonction des paramètres physiques intervenant dans le séchage, reste très difficile dû à son caractère fortement déformable et pour chacun d'eux il existe une relation phénoménologique différente. En effet, dans la littérature il n'existe pas de mesures de l'évolution de la perméabilité en fonction de la fraction volumique. Certains auteurs, qui ont travaillé avec d'autres gels, nous donnent une idée de la forme que peut

prendre cette relation phénoménologique et nous montrent les paramètres possibles intervenant dans celle-ci : (i) la fraction volumique du liquide ε_l (Sarmento, 2004 ; Porras, 2005), ou (ii) la taille moyenne des pores (Grattoni et al., 2001), ou (iii) la concentration (Grattoni et al., 2001), ou (iv) la taille des fibres (Antovic et al., 2005).

Nous pouvons adapter à notre matériau une de ces fonctions de perméabilité trouvées dans la littérature, mais pour faire une validation correcte, nous avons choisi d'identifier l'évolution de la perméabilité en fonction du coefficient de diffusion effectif (4.2) déterminé à partir de la théorie de consolidation de Biot (c.f. Chapitre 2) et qui donne l'avantage de pouvoir travailler avec une perméabilité variable en fonction uniquement des propriétés du gel d'alumine (Tableau 4.2) :

$$k = k\left(D_{eff}, E, \upsilon\right) = D_{eff}\frac{\left(1-2\upsilon\right)\mu_l}{2\left(1-\upsilon\right)G} \tag{4.2}$$

où le module de cisaillement G est égale à : $G = \dfrac{E}{2\left(1+\upsilon\right)}$; et le coefficient de Poisson υ est une fonction approximative obtenue en faisant une estimation du paramètre avec des valeurs de référence de notre matériau et d'autres gels, comme le gel d'agar (Porras, 2005) et les aérogels (Phalippou et. al., 2002) ; car pour notre matériau la littérature nous donne très peu des données sur ce paramètre la mesure étant très délicate. Pourcel (Pourcel, 2003) a réussi à mesurer ce coefficient pour le gel sec.

La fonction approximative ou estimée du coefficient de Poisson par rapport à la fraction volumique ε_l du liquide du gel d'alumine, est :

$$\upsilon = \upsilon(\varepsilon_l) = \frac{1}{2}\left[\left(\upsilon_o - \upsilon_{sec}\right)\left(\mathrm{Tanh}\left(10\varepsilon_{lo}\left(\varepsilon_l - \frac{\varepsilon_{lcri}}{2}\right)\right)+1\right)\right] + \upsilon_{sec} \tag{4.3}$$

où υ_o et υ_{sec} sont les valeurs du coefficient de Poisson pour les conditions initiales du séchage et du produit sec respectivement ; ε_{lo} est la fraction volumique initial et ε_{lcri} est la fraction volumique critique correspondant à la fin de la première phase de séchage.

Dans notre cas les valeurs estimées pour υ_o, se trouvent dans l'intervalle $0.43 \le \upsilon_o < 0.5$.

Pour avoir une meilleure idée du comportement général des paramètres k et υ dans un séchage convectif du gel d'alumine, sur les figures suivantes sont présentés les allures typiques de l'évolution de ces paramètres en fonction de la variation de la fraction volumique du liquide.

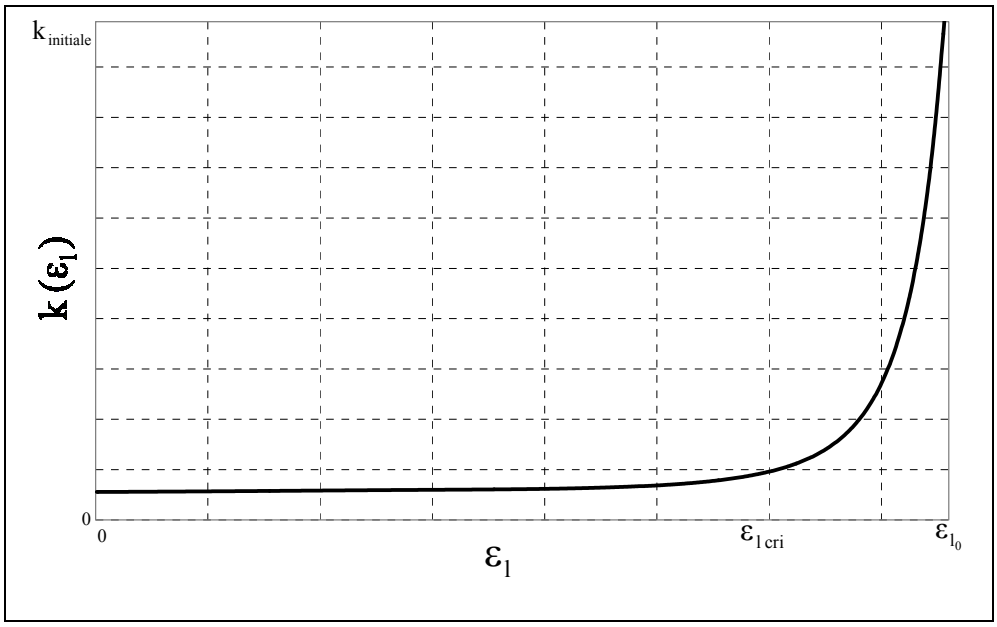


Figure 4.5 Variation de la perméabilité (*k*) en fonction de la fraction volumique du liquide (ε_l).

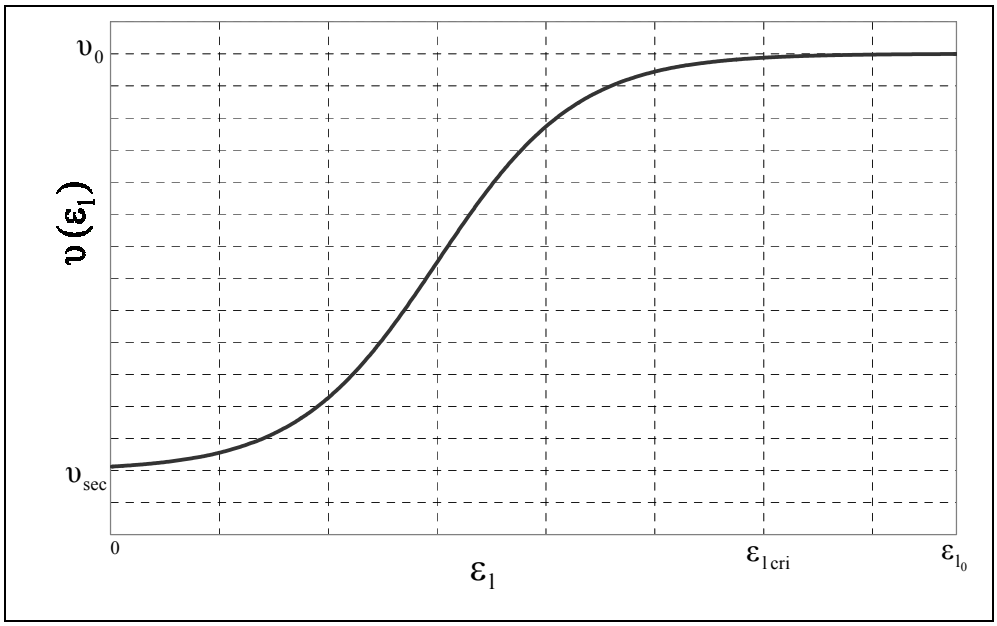


Figure 4.6 *Variation du coefficient de Poisson (υ) en fonction de la fraction volumique du liquide (ε_l).*

Tenseur d'élasticité

Le tenseur d'élasticité $\overline{\overline{E}}$ a été choisi pour le cas classique de déformations planes (2D) :

$$\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{E}}(\varepsilon_l) = \frac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} & 0 \\ \frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\upsilon}{2(1-\upsilon)} \end{bmatrix}$$

où $E = E(\varepsilon_l)$ et $\upsilon = \upsilon(\varepsilon_l)$.

Tenseur de grandes déformations

Comme nous avons déjà expliqué dans le chapitre 3 le tenseur de déformations $\overline{\overline{\varepsilon}}$ pour des grandes déformations s'écrit :

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{\ell} + {}^{t}\vec{\nabla}\vec{\ell} + {}^{t}\vec{\nabla}\vec{\ell}\,\vec{\nabla}\vec{\ell}\right)$$

Dans le cas 2D les termes $\vec{\nabla}\vec{\ell}$, ${}^{t}\vec{\nabla}\vec{\ell}$ et ${}^{t}\vec{\nabla}\vec{\ell}\,\vec{\nabla}\vec{\ell}$ deviennent :

$$\vec{\nabla}\vec{\ell} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ell_x}{\partial x} & \frac{\partial \ell_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \ell_y}{\partial x} & \frac{\partial \ell_y}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad {}^{t}\vec{\nabla}\vec{\ell} \begin{bmatrix} \frac{\partial \ell_x}{\partial x} & \frac{\partial \ell_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \ell_x}{\partial y} & \frac{\partial \ell_y}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad {}^{t}\vec{\nabla}\vec{\ell}\,\vec{\nabla}\vec{\ell} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \ell_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ell_y}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial \ell_x}{\partial x}\frac{\partial \ell_x}{\partial y} + \frac{\partial \ell_y}{\partial x}\frac{\partial \ell_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \ell_x}{\partial x}\frac{\partial \ell_x}{\partial y} + \frac{\partial \ell_y}{\partial x}\frac{\partial \ell_y}{\partial y} & \left(\frac{\partial \ell_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ell_y}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix}$$

Tenseur de conductivité thermique

Comme pour le cas de la perméabilité, le tenseur de conductivité thermique $\overline{\overline{\lambda}}$ dans un milieu isotrope s'écrit :

$$\overline{\overline{\lambda}} = \lambda \overline{\overline{I}}$$

La conductivité thermique λ est un paramètre qui varie par rapport à la fraction volumique du liquide à travers de la fonction suivante :

$$\lambda = \lambda(\varepsilon_l) = a\left(\varepsilon_l \langle \rho_l \rangle^{l} C_{pl} + (1-\varepsilon_l)\langle \rho_s \rangle^{s} C_{ps}\right)$$

où a est la diffusivité thermique du gel, C_{pl} est la chaleur massique du liquide (eau) et C_{ps} la chaleur massique apparente du solide sec (gel sec). Pour le cas du gel d'alumine la diffusivité thermique mesurée par Pourcel (Pourcel, 2003) est quasiment indépendante de la teneur en eau. Dans notre cas ces paramètres ont les valeurs suivantes :

$$a = 1.6\text{x}10^{-7}\left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right); \text{C}_{\text{pl}} = 4180\left(\frac{\text{J}}{\text{kg K}}\right); \text{C}_{\text{ps}} = 1100\left(\frac{\text{J}}{\text{kg K}}\right)$$

4.1.2.2 Conditions aux limites

Un bref rappel des conditions limites presentées dans le chapitre 3 est fait dans le tableau ci-dessous :

PHÉNOMÉNE PHYSIQUE	**CONDITION Á LA LIMITE**
Conservation de la masse liquide	$\langle\rho_l\rangle^l \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l \cdot \vec{n} = F_m$
Conservation de la masse totale	$\langle\rho_l\rangle^l \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l \cdot \vec{n} = F_m$
Équilibre mécanique	$\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{0}$
Conservation de l'énergie	$\left(\langle\rho C_p\rangle\langle\vec{V_s}\rangle^s - (\rho C_p)_l \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l\right)\langle T\rangle \cdot \vec{n} - \overline{\overline{\lambda}} \cdot \vec{\nabla}\langle T\rangle \cdot \vec{n} = h_T(T_{surf} - T_\infty) - F_m\,\Delta H_v$

Tableau 4.3 *Conditions à la limite du système d'équations.*

Le flux de masse F_m peut être obtenu expérimentalement, dans le cas où on s'intéresse au séchage, par mesure de la masse du produit au cours de temps.

Il peut être aussi modélisé, si on connaît les conditions de l'environnement du séchage, de la façon suivante :

$$F_m = \rho_{air}\, h_m(W_{surf} - W_\infty)$$

où ρ_{air} est la masse volumique de l'air, h_m est le coefficient d'échange de masse entre le produit et son environnement, W_{surf} est la concentration de vapeur à la surface du matériau ; caractérisée au travers des courbes d'isothermes de sorption et W_∞ est la concentration de vapeur de l'air de séchage environnant.

L'isotherme de désorption du gel d'alumine peut être décrite à l'aide d'un modèle GAB :

$$a_w = a_w(W, T_\infty) = \frac{(C_g - 2) - \frac{0.26 C_g}{W} + \sqrt{\left(\frac{0.26 C_g}{W} - (C_g - 2)\right)^2 + 4(C_g - 1)}}{2K_g(C_g - 1)}$$

où $C_g = 1.4_x10^{-3}\exp\left(\frac{17000}{8.31T_\infty}\right)$ est la constante de Guggenheim et $K_g = 2.7\exp\left(-\frac{3500}{8.31T_\infty}\right)$ est le facteur de correction du modèle GAB.

Les coefficients de transfert de masse (h_m) et de chaleur (h_T), sont obtenus à partir des bilans et relations thermodynamiques à la surface du produit (théorie de la couche limite) dans la phase isenthalpe du séchage. La procédure utilisée pour déterminer ces coefficients est largement expliquée dans la littérature (Nadeau et al., 1995 ; Pourcel, 2003 ; Incropera et al., 1996 ; Sacadura, 1982) et les valeurs estimées pour différentes conditions de séchage de notre produit sont :

HR (%)	Température (°C)	Vitesse de l'air ($m.s^{-1}$)	Température de bulbe humide (°C)	Température calculée (°C)	h_T calculé ($W.m^{-2}.K^{-1}$)	h_M calculé ($m.s^{-1}$)
50	30	2,0	*21*	*25*	*44*	*0,037*
60	30	2,0	*23*	*26*	*39*	*0,033*
70	**30**	**2,0**	***25***	***27***	***45***	***0,038***
60	25	2,0	*19*	*22*	*43*	*0,035*
60	30	2,0	*23*	*26*	*39*	*0,033*
60	35	2,0	*28*	*30*	*38*	*0.032*
60	40	2,0	*32*	*34*	*49*	*0.042*
60	50	2,0	*41*	*43*	*46*	*0,040*
60	30	1,0	*23*	*26*	*33*	*0,027*
60	30	2,0	*23*	*26*	*39*	*0,033*
60	30	3,0	*23*	*26*	*51*	*0.042*
60	30	5,0	*23*	*26*	*57*	*0,048*

Tableau 4.4 *Estimation des coefficients de transfert pour différentes conditions environnementales de séchage (Pourcel, 2003).*

Une fois que toutes les conditions et paramètres de séchage sont établis, nous pouvons aborder la résolution ou simulation numérique, de notre problème, avec les conditions aux limite suivantes (Figure 4.3) :

Conservation de la masse liquide et totale

$$\langle \rho_l \rangle^l \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \cdot \vec{n} = F_m \qquad \textit{(Surface de séchage)}$$

$$\langle \rho_l \rangle^l \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \cdot \vec{n} = 0 \qquad \textit{(Surface isolée et surface de symétrie)}$$

Equilibre mécanique

$\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{0}$ *(Surface de séchage et surface isolée)*

$\ell_x = 0$ *(Surface de symétrie)*

Conservation de l'énergie

$$\left(\langle \rho C_p \rangle \langle \overline{V_s} \rangle^s - (\rho C_p)_l \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right) \langle T \rangle \cdot \vec{n} - \overline{\overline{\lambda}} \cdot \vec{\nabla} \langle T \rangle \cdot \vec{n} = h_T (T_{surf} - T_\infty) - F_m \, \Delta H_v$$

(Surface de séchage)

$$\left(\langle \rho C_p \rangle \langle \overline{V_s} \rangle^s - (\rho C_p)_l \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right) \langle T \rangle \cdot \vec{n} - \overline{\overline{\lambda}} \cdot \vec{\nabla} \langle T \rangle \cdot \vec{n} = h_T (T_{surf} - T_\infty)$$

(Surfaces latéral et inférieure)

$$\left(\langle \rho C_p \rangle \langle \overline{V_s} \rangle^s - (\rho C_p)_l \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right) \langle T \rangle \cdot \vec{n} - \overline{\overline{\lambda}} \cdot \vec{\nabla} \langle T \rangle \cdot \vec{n} = 0$$ *(Surface de symétrie)*

4.1.3 Résolution numérique et comparaison avec les résultats expérimentaux

4.1.3.1 Choix de résolution numérique

Le système d'équations est résolu numériquement par la méthode des éléments finis. Dans l'étude des milieux déformables cette méthode est capable de suivre l'évolution de la géométrie du matériau au cours du séchage, mais cette capacité de la méthode ne suffit pas assez pour alléger le calcul numérique. Nous dévions, en plus, surpasser la problématique d'avoir des équations fortement couplées et non linéaires.

La solution choisie est d'éviter le problème du domaine mobile avec un changement de variables de l'espace permettant de passer de l'espace Eulérien à l'espace Lagrangien (c.f. Annexe 6). Les équations sont ainsi résolues dans un espace fixe correspondant à la géométrie initiale du matériau.

Ils existent aussi, pour la problématique de fort couplage, plusieurs alternatives ou choix de type numérique qui aident à simplifier un peu la résolution de notre système, mais ses implémentations deviennent parfois difficiles, les algorithmes proposés sont généralement très sophistiqués et requièrent une écriture extrêmement ouvragée. En résumé notre système d'équations a une grande complexité dans sa programmation et sa résolution.

Alors, vis-à-vis de cette complexité, nous avons choisi de résoudre le système d'équations à l'aide d'un solveur commercial (FEMLAB) qui travaille avec la méthode des

éléments finis et qui est capable de tenir compte de toutes les exigences que notre modèle demande pour sa résolution numérique. Une autre raison qui justifie ce choix, est le fait que l'objectif principal de notre travail est de mieux comprendre la physique du séchage d'un milieu poreux déformable et non d'approfondir les méthodes de résolution numérique.

4.1.3.2 Comparaison entre la simulation et l'expérience

Dans cette partie du travail, une comparaison entre les cinétiques de séchage obtenues par la simulation et l'expérience sera fait avec trois conditions de séchage différentes :

$$\text{Condition1} \Rightarrow T_{\infty} = 30°C\,;\, HR_{\infty} = 60\%\,;\, V_{air} = 2\text{m/s}$$

$$\text{Condition2} \Rightarrow T_{\infty} = 30°C\,;\, HR_{\infty} = 70\%\,;\, V_{air} = 2\text{m/s}$$

$$\text{Condition3} \Rightarrow T_{\infty} = 30°C\,;\, HR_{\infty} = 60\%\,;\, V_{air} = 3\text{m/s}$$

Avec les courbes de la figure 4.7 on peut observer que le modèle proposé est capable de prédire une cinétique de séchage. Les écarts entre les résultas expérimentaux et ceux obtenus par la simulation, son dus à la non connaissance exacte des certains paramètres telles que le tenseur d'élasticité $\overline{\overline{E}}$ et de perméabilité $\overline{\overline{k}}$. Comme cela sera montré dans l'étude de sensibilité, le fort couplage qui existe entre les équations amène à un modèle très sensible à la variation de n'importe quelle variable, ceci nous oblige à avoir les fonctions phénoménologiques et les données exactes des paramètres intervenants. Une autre raison qui peut produire un écart entre l'expérience et la simulation, est le fait que notre modèle résout le problème uniquement pour un milieu saturé.

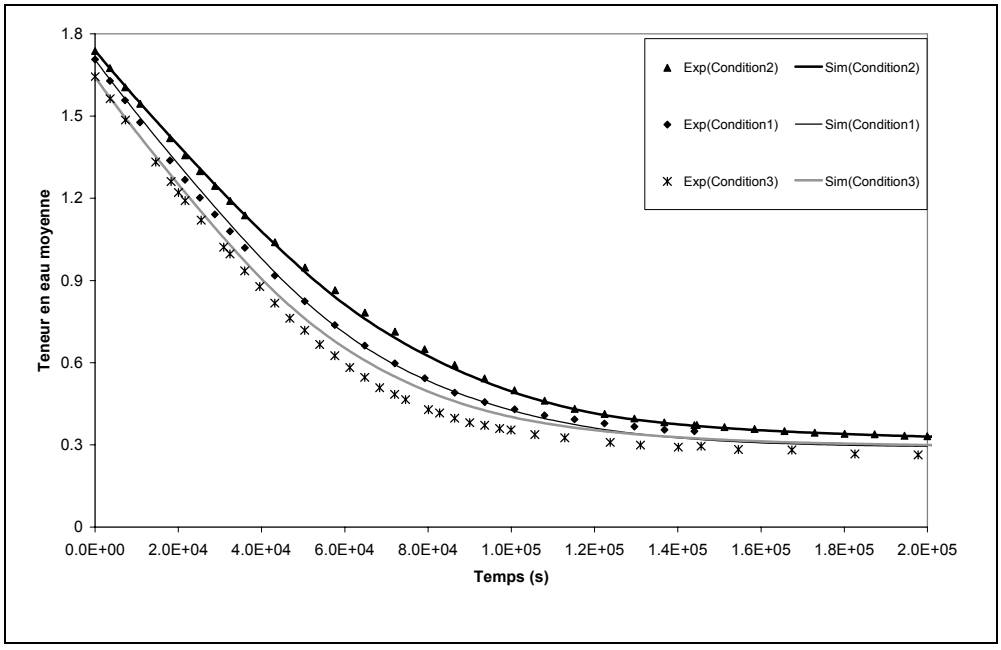


Figure 4.7 *Comparaison de la simulation (*Sim*) avec l'expérience (*Exp*) des cinétiques de séchage.*

La figure 4.8 compare les profils de teneur en eau et le retrait du matériau. Le retrait du matériau, dans la simulation, est pris en compte à travers du déplacement du point central de la surface supérieur, car pour nos conditions de séchage ce point va se déplacer uniquement sur l'axe vertical y (déplacement 1D), par conséquence il peut représenter une bonne approche du retrait volumique du milieu et présente l'avantage que on peut le suivre tout au long du processus du séchage.

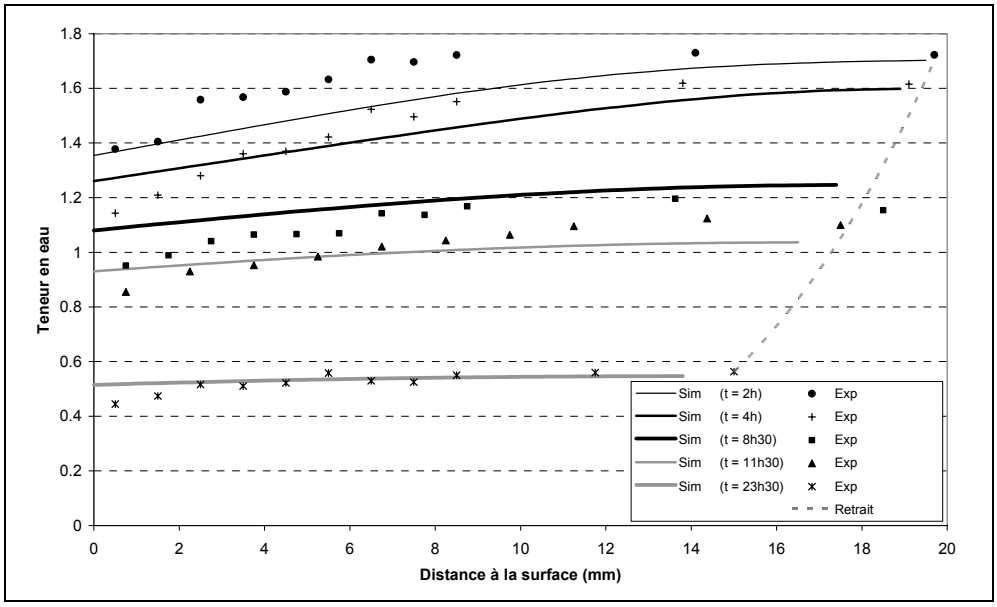


Figure 4.8 *Comparaison de la simulation (Sim) avec l'expérience (Exp) des profils de teneur en eau et du retrait pour la Condition1 de séchage.*

Les écarts observés entre les courbes expérimentales et celles issues de la simulation dans la figure précédente ont la même explication que ceux qui se produisent pour les cinétiques (Figure 4.7), mais cette fois on peut remarquer aussi que les simulations nous donnent un retrait plus élevé que celui déterminé par l'expérience. Cet écart est lié à la modélisation 2D qui affecte toute la variation de volume à la section considérée alors que le retrait réel s'effectue dans les 3 directions.

Finalement, la tendance des courbes expérimentales et théoriques reste la même et les écarts maximaux sont : 12% pour la teneur en eau trouvé pour la Condition3 de séchage et 8% si on regarde le retrait issu de la figure 4.8 à l'instant t= 23h 30.

Par rapport à l'évolution de la température nous trouvons un comportement classique. La figure 4.9 montre les profils de température, obtenus par simulation, dans trois points du milieu (Figure 4.15) et les résultats sont ceux que l'on peut attendre : 1) Une montée de la température dans la phase de chauffage, 2) stabilisation de températures pendant le phase isenthalpe du au fait que l'énergie apportée par l'environnement de séchage est dégagée du milieu en grand partie pour le flux de vapeur sortant a la surface, 3) après la phase isenthalpe

la température augmente à cause de la baisse de flux de masse à la surface, 4) le milieu arrive à avoir globalement une température proche a celle de l'environnement du séchage quand il atteint l'équilibre hygroscopique et 5) plus on s'approche de la surface de séchage et plus la température baisse ; ceci s'explique aussi pour le même phénomène de flux de masse à la surface et de l'apport de chaleur assurée par la face inférieure du matériau.

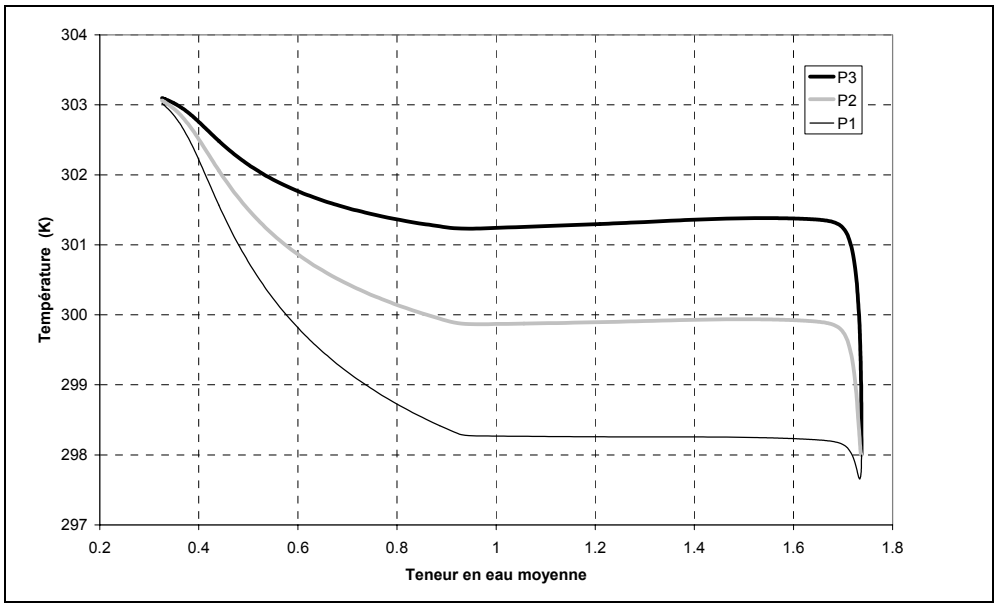


Figure 4.9 *Evolution de la température par rapport a la teneur en eau moyenne dans le points P1, P2 et P3 du milieu (c.f. Figure 4.15).*

Nous pouvons affirmer, à partir des analyses précédentes, que malgré les différences observées entre les courbes expérimentales et théoriques, le modèle proposé reste valide en ce qui concerne l'étude de la cinétique de séchage, de retrait du milieu et de l'évolution des températures dans un processus de séchage convectif.

4.1.4 Comportement de la pression liquide

Généralement, lors du séchage convectif, les milieux fortement déformables telles que les argiles et les gels peuvent être considérés comme saturés tout au long du séchage. L'hypothèse d'un milieu toujours saturé est très forte, parce que selon la littérature (Nadeau et Puiggali, 1995) à partir de la fin de la phase isenthalpe les milieux risquent hautement d'avoir l'apparition d'un troisième phase (phase gazeuse), car pour assurer un flux de masse constante à la surface, toute le volume d'eau retiré doit être occupé instantanément par la phase solide, ce qui ne donne pas la possibilité de l'apparition de la phase gazeuse dans le milieu. Dans notre cas, nous verrons des fortes chutes dans les valeurs de la pression $\langle P_l \rangle^l$, parce que si nous faisons un bilan de forces sur le liquide à la surface du milieu, on a comme résultat que pour maintenir cette hypothèse depuis la phase isenthalpe, nous sommes obligés d'avoir une

très forte tension superficielle et une pression capillaire infiniment grande ce qui nous amène à des pressions $\langle P_l \rangle^1$ très négatives. D'ailleurs, dans ce chapitre quand nous parlons d'augmentation de la pression, nous faisons référence à l'augmentation dans son sens négatif.

Par exemple pour la Condition2 de séchage, nous pouvons observer dans les champs de pression (Figure 4.10) ce phénomène de chute de pression. Les valeurs de la pression du liquide $\langle P_l \rangle^1$ sont liées directement à l'aptitude du milieu à se déformer, c'est-à-dire qu'ils sont fortement dépendants des paramètres intervenant dans le tenseur d'élasticité $\overline{\overline{E}}$ telles que le module de Young (E) et le coefficient de Poisson (υ). Par contre, les gradients de pression et ses évolutions, n'ont pas de forte liaison avec le déformation du milieu, ils sont liés plutôt à la facilité avec laquelle le fluide peut s'écouler dans le milieu ; cette facilité d'écoulement est représentée par le tenseur de perméabilité ($\overline{\overline{k}}$).

Dans l'étude de sensibilité, l'influence de chacun de ses paramètres sur la pression du liquide sera analysée en détail.

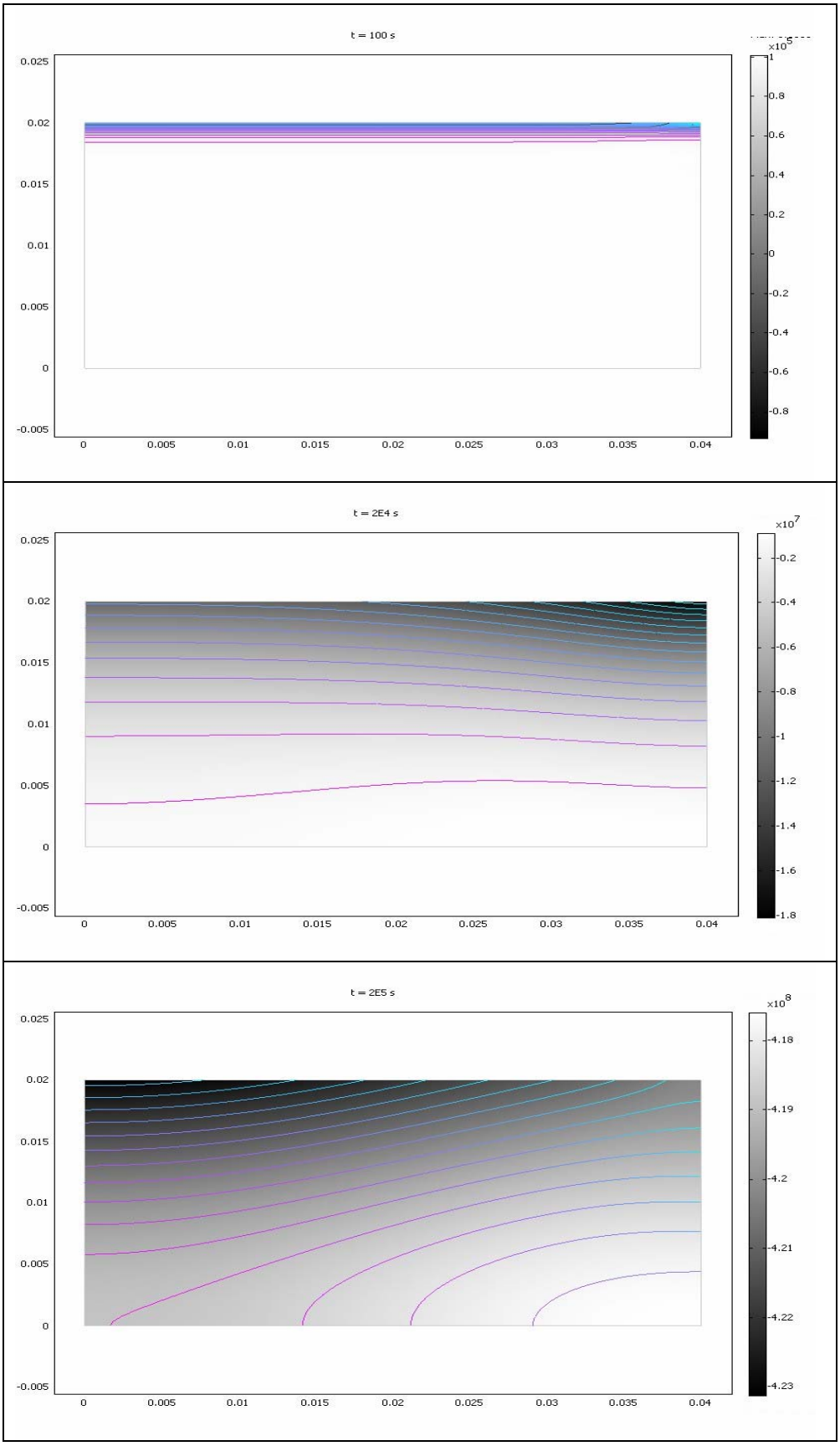


Figure 4.10 *Champs de pression du liquide* $\langle P_l \rangle^l$ *(*Pa*) projetés sur la géométrie initiale du milieu pour différents instants du séchage (les axes vertical et horizontal représentent les coordonnées* x *et* y*).*

4.1.5 Comportement des contraintes mécaniques

L'intérêt principal d'étudier les contraintes mécaniques est de pouvoir établir un critère de fissuration. Les résultats des simulations prouvent que les plus grandes contraintes se produisent dans les sections parallèles à la surface de séchage, dans notre cas ces grandes contraintes se produisent toujours suivant l'axe x et pour cette raison nous montrons sur la (Figure 4.11) les champs de contraintes selon l'axe x (σ_{xx}).

Dans ces champs, nous pouvons observer l'évolution et la distribution de σ_{xx} pendant un séchage convectif (condition2 de séchage). Nous remarquons que les plus grandes contraintes se trouvent, des le début de séchage, sur la surface supérieure du milieu. Ceci est du au fait que précisément sur la surface de séchage se produisent les plus grandes déformations, car ici le matériau à besoin de se déformer rapidement afin de pouvoir remplir instantanément le même volume d'eau qui lui est enlevé. Donc, la contrainte maximale doit se produire obligatoirement dans la surface de séchage, mais en plus elle doit se trouver exactement dans le point où l'axe de symétrie croise cette surface, car dans cet axe la déformation du milieu est entièrement produite en la direction y comme nous pouvons le constater en regardant la déformation macroscopique du milieu. Le phénomène est alors le même que celui qui se produit dans une poutre cantilever, plus la section perpendiculaire à l'axe x (dans notre cas) est petite et plus augmentent les contraintes selon x surtout dans le point le plus éloigné de l'axe où les contraintes sont nulles (dans l'analyse des poutres cet axe est généralement connu comme l'axe de symétrie de contraintes).

Finalement, pour toutes les raisons déjà exprimées, nous avons choisi de montrer dans l'étude de sensibilité uniquement les contraintes maximales selon x ($\sigma_{xx_{max}}$) que se trouvent à ce point particulier.

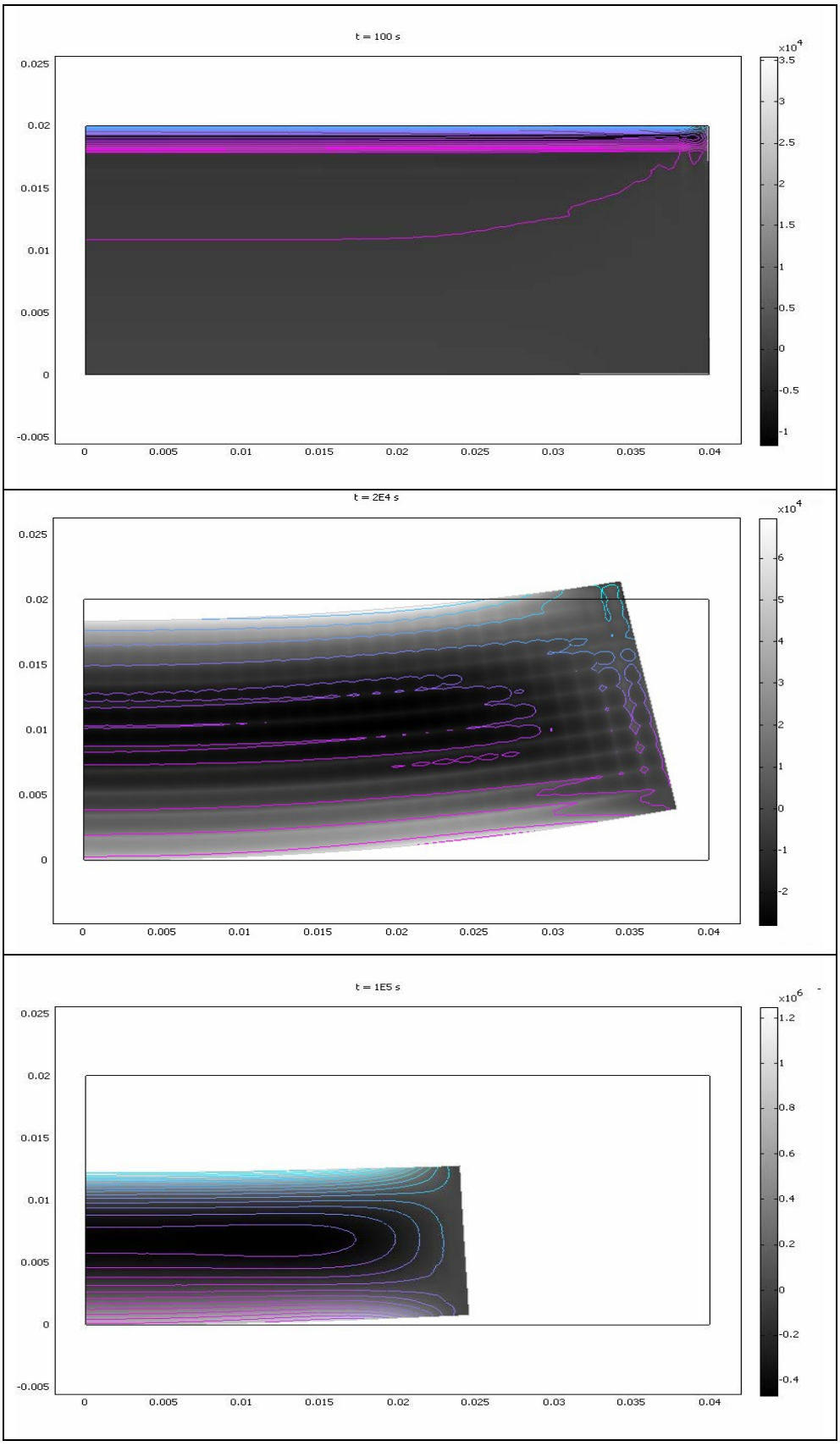


Figure 4.11 *Champs de contraintes* σ_{xx} *(*Pa*) dans le milieu avec sa déformation macroscopique pour différents instants du séchage.*

4.2 Sensibilité du modèle

Pour l'étude de sensibilité, la configuration physique et toutes les valeurs utilisées dans la validation pour la condition2 de séchage ($T_\infty = 30°C\,; HR_\infty = 70\%\,; V_{air} = 2m/s$) seront utilisées comme les valeurs de références. Dans les analyses des courbes nous ferons souvent référence aux phases du séchage. Pour notre condition de référence les phases du séchage sont identifies par rapport au temps (Pourcel, 2003) : a) la phase de chauffage qui démarre au début du séchage et finit vers les milles secondes ($t \approx 1000\,s$), b) la phase isenthalpe qui s'arrête vers les soixante mille secondes (phase isenthalpe $1000\,s < t \leq 60000\,s$), c)le premier ralentissement commence après la phase isenthalpe et a une durée approximativement de 80000 s (premier ralentissement $60000\,s < t \leq 140000\,s$) et d) la deuxième phase de ralentissement qui va jusqu'à la fin de la période de séchage (deuxième ralentissement $140000\,s < t \leq$ fin du temps du séchage).

La sensibilité sera étudiée en considérant les conditions de référence et en faisant varier certains paramètres du gel : perméabilité, module de Young et coefficient de Poisson ; ce qui peut se traduire aussi comme une mesure de la sensibilité du modèle du à un changement de milieu. La procédure pour étudier la sensibilité sera classique : on fait varier l'ordre de grandeur du paramètre d'étude et les autres restent avec les mêmes fonctions ou valeurs de référence.

La variation de la géométrie initiale du milieu sera aussi considérée avec le changement du rapport de forme.

Finalement, une étude de l'influence du terme transitoire associé à la compressibilité du liquide ($\varepsilon_l \chi \frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial t}$) sur les résultats physiques et les temps de résolution numérique est effectuée.

4.2.1 Variation du coefficient de Poisson

L'influence de la variation du coefficient de Poisson (υ), sera étudiée en faisant varier ses valeurs initiales (υ_0). Cette variation à une influence sur l'allure de la courbe obtenue par sa fonction approximative (Figure 4.12). On observe que la pente diminue de façon directement proportionnelle à la diminution de υ_0. D'un point de vu purement numérique l'influence est directe, parce que les fonctions qui ont de pentes douces, réduisent les problèmes de divergence.

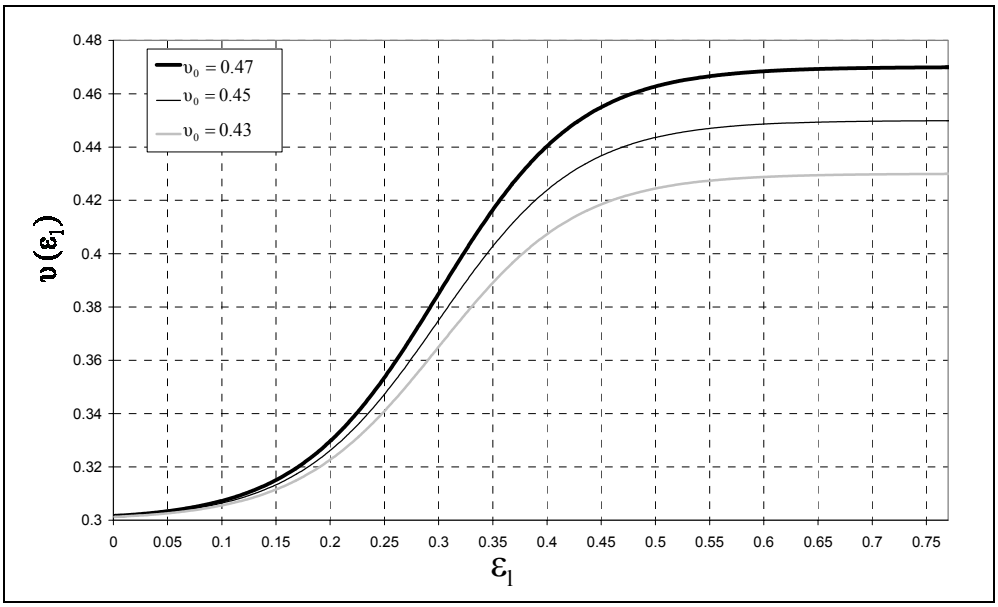


Figure 4.12 *Evolution du coefficient de Poisson (υ) en fonction de la fraction volumique du liquide (ε_l) pour différentes valeurs initiales υ_0 .*

Les valeurs de υ_0 choisies pour cette étude sont : $\upsilon_0 = 0.47$ (valeur de référence), $\upsilon_0 = 0.45$ et $\upsilon_0 = 0.43$.

L'étude commence par une analyse de son influence sur la cinétique de séchage qui est représentée dans la courbe suivante :

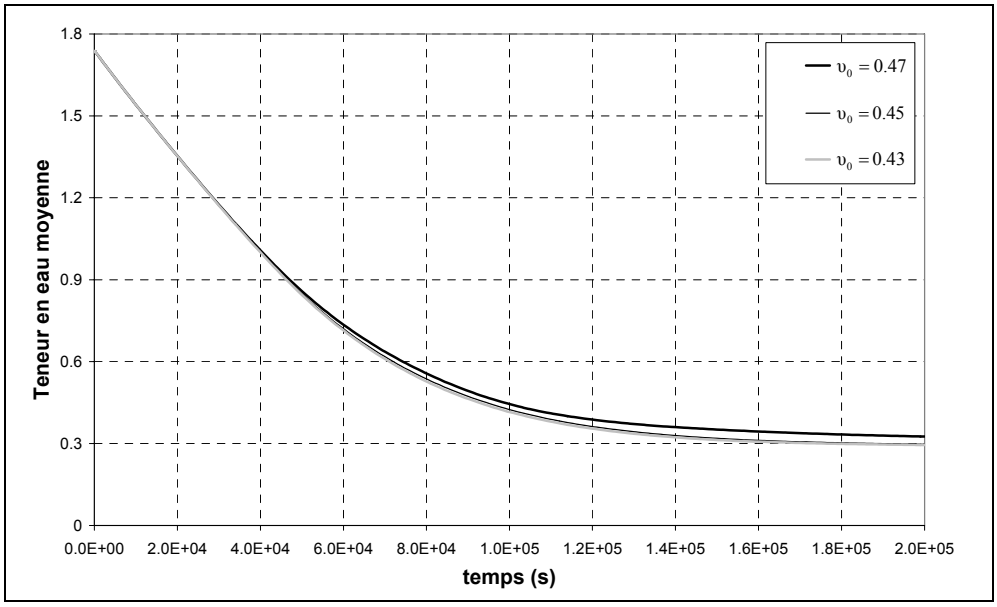


Figure 4.13 *Influence de la variation des valeurs initiales du coefficient de Poisson (υ) dans la cinétique de séchage.*

Nous observons ici qu'une variation des valeurs initiales de υ ne produit pas de grands écarts sur les courbes de cinétique. Les valeurs dans les phases de chauffage et isenthalpe restent quasi identiques, c'est après la phase de ralentissement que les écarts se produisent. On

remarque aussi que pour des valeurs plus faibles que celle de référence, l'influence de sa variation est négligeable.

La figure 4.14 montre la forte incidence de la variation du coefficient de Poisson sur les courbes des contraintes maximales dans la direction de l'axe x. Cette forte influence sur les contraintes s'explique par le fait que υ intervient directement sur l'équilibre mécanique à travers du tenseur d'élasticité $\overline{\overline{E}}$. On voit alors, dans les courbes, cette relation directe entre υ et les contraintes : plus élevé est la valeur de υ_0 et plus élevées sont les contraintes, la cause de cette effet est logique parce que pour des valeurs de υ très proches de 0.5 le milieu a la tendance à se comporter comme un matériau plutôt incompressible. Les écarts s'observent après la phase isenthalpe, les valeurs maximales des contraintes s'obtiennent toujours dans la première phase de ralentissement mais dépendant de la valeur de υ, ces maximums seront trouvés pour des temps différents.

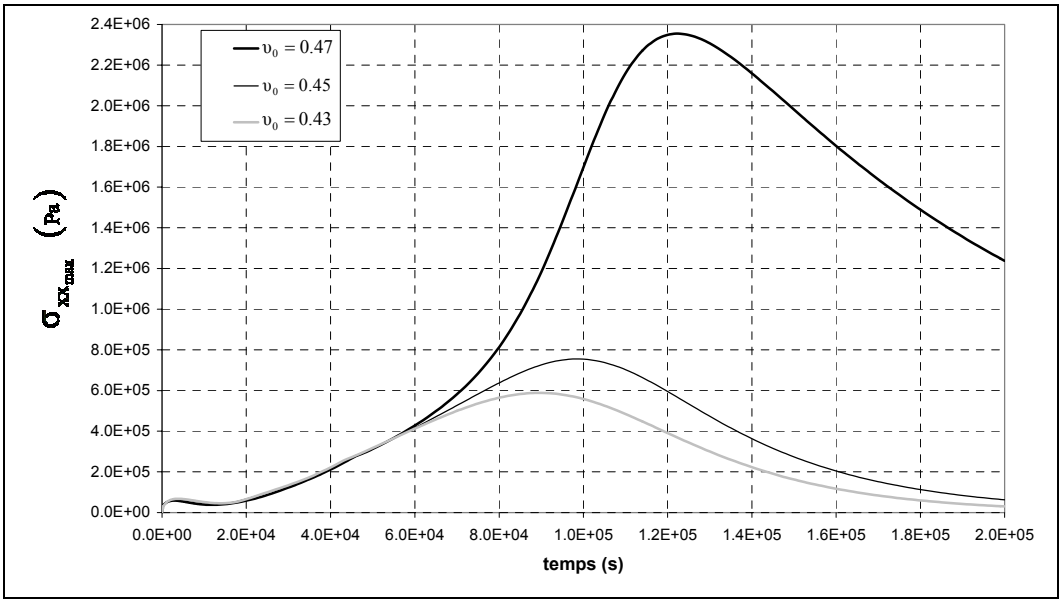


Figure 4.14 *Influence de la variation des valeurs initiales du coefficient de Poisson (υ) sur la contrainte maximale selon la direction x ($\sigma_{xx_{max}}$)*

Numériquement, des valeurs hors de l'intervalle $0.42 \leq \upsilon_0 \leq 0.48$ produisent de fortes divergences et les résultats obtenus ne représentent pas une réalité physique.

Le coefficient de Poisson, ainsi que les autres paramètres (k et E), aurait aussi une certaine répercussion sur la variation des autres variables du modèle proposé telles que la pression intrinsèque et la fraction volumique du liquide. Les figures A7.1 et A7.2 (c.f. Annexe 7) montrent que les plus grands gradients de ces variables se produisent dans la direction de l'axe vertical y. Pour cette raison nous avons choisi trois points (P1, P2 et P3) dans le milieu avec des coordonnées qui varient uniquement dans le sens vertical (Figure 4.15). Ce choix

nous permet une meilleur visualisation de l'influence de υ et des autres paramètres sur les profils de $\langle P_l \rangle^l$ et ε_l.

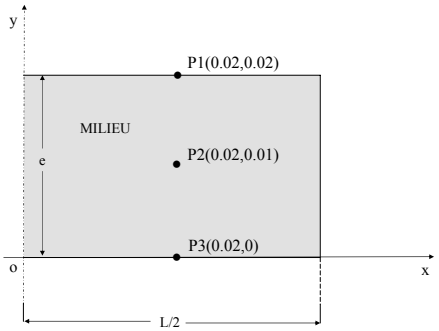


Figure 4.15 *Points utilisés dans la géométrie initiale du milieu, pour obtenir les courbes théoriques des variables du modèle.*

Les figures suivantes présentent (Figure 4.16 et 4.17), les évolution des profils de pression intrinsèque du liquide $\langle P_l \rangle^l$ et fraction volumique ε_l pour les distincts υ_0.

Pour la pression $\langle P_l \rangle^l$, l'influence de υ_0 n'est visible qu'après la phase isenthalpe. Nous observons que dans la première phase de ralentissement, les écarts entre les courbes deviennent de plus en plus fortes et depuis le deuxième ralentissement les gradients de pression se diminuent pour toutes les valeurs de υ_0. Pour la même phase on voit que les coefficients de Poisson plus faibles que celui de référence, amènent à un milieu plus déformable que offre moins de difficulté à la relaxation de la pression dans le temps.

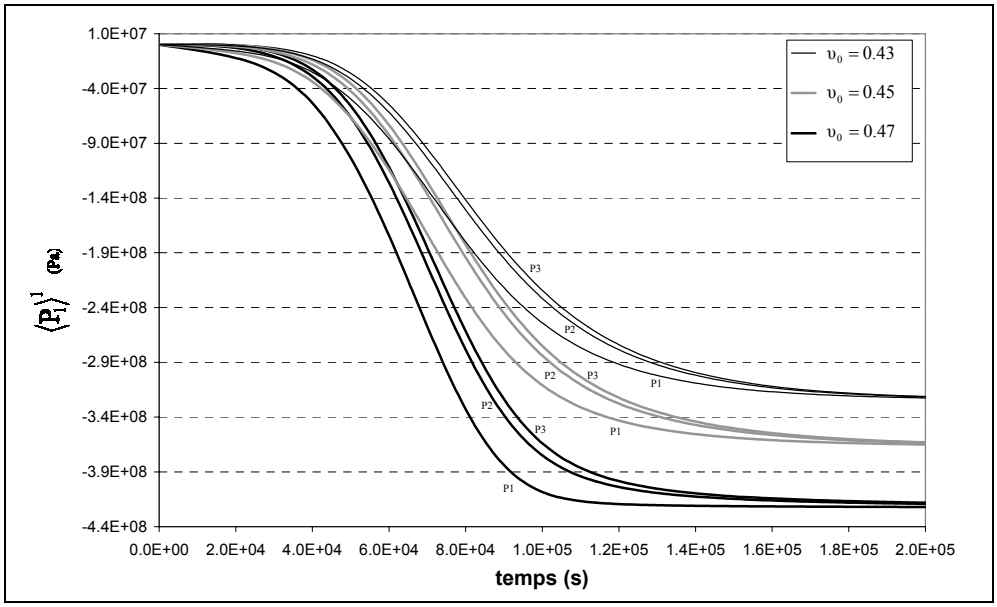


Figure 4.16 *Influence la variation des valeurs initiales du coefficient de Poisson (υ) sur l'évolution de la pression intrinsèque du liquide $\langle P_l \rangle^l$ dans trois points du milieu (P1, P2, P3).*

Dans la figure 4.17, les profils de fraction volumique du liquide montrent que jusqu'à la phase de ralentissement, ses valeurs restent les mêmes dans chaque point et pour toutes les valeurs de υ_0. Dans le premier ralentissement, les écarts se produisent pour s'annuler ou non en fin de séchage. On peut estimer ici que les écarts sont globalement non significatifs.

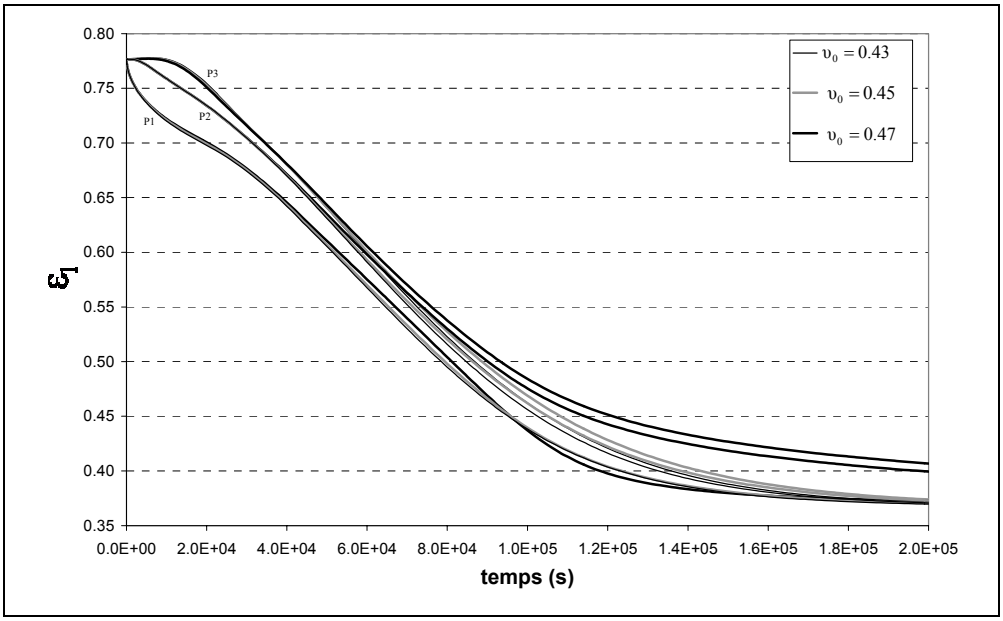


Figure 4.17 *Influence de la variation des valeurs initiales du coefficient de Poisson (*υ*) sur l'évolution de la fraction volumique du liquide* ε_1 *dans trois points du milieu (*P1, P2, P3*).*

Comme on a déjà observé, dans les figures précédentes (Figure 4.16 et 4.17), sur certaines parties des graphiques l'influence du coefficient de Poisson n'est pas clair. Alors dans la suite de notre travail nous avons choisi le point P2, qui se trouve à l'intérieur du milieu, comme point représentatif des tendances des variables de notre modèle, de cette façon la sensibilité du modèle restera davantage explicite, comme le montrent les graphiques de la figure 4.18.

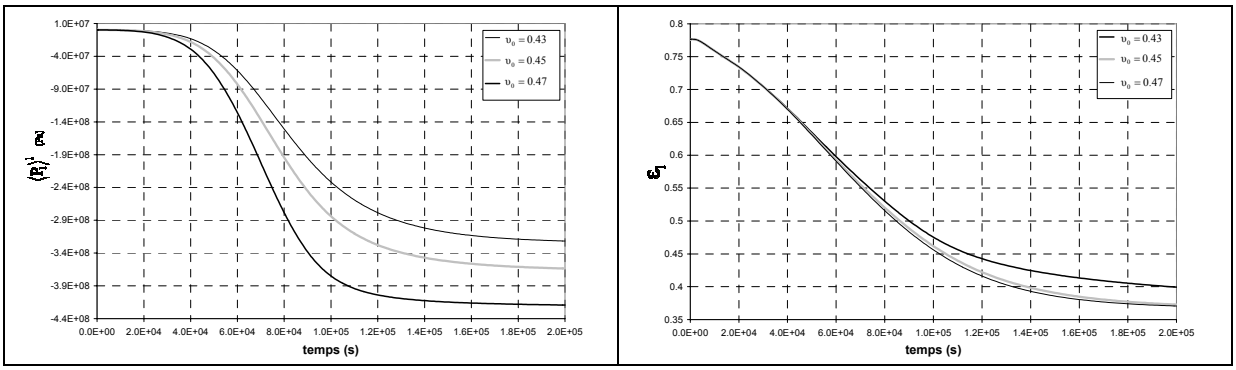


Figure 4.18 *Évolution de la pression intrinsèque du liquide* $\langle P_1 \rangle^1$ *(graphique droite) et de la fraction volumique du liquide* ε_1 *(graphique gauche) dans le point* P2 *du milieu.*

En résumé, le coefficient de Poisson a une forte influence sur l'évolution de la pression dans le milieu et une minime influence sur la fraction volumique ε_l pour des valeurs de υ_0 plus faibles que celle de référence.

4.2.2 Variation du module de Young

Un autre paramètre qui est issu de la rhéologie et qui intervient principalement dans l'équation d'équilibre de contraintes et dans la perméabilité, est le module de Young (E). Les valeurs du module de Young seront variées en changeant ses valeurs initiales E_0 dans sa fonction phénoménologique (Tableau 4.2) : $E_0 = 6.7x10^7$ (Pa), $E_0 = 6.7x10^8$ (Pa) (valeur de référence) et $E_0 = 6.7x10^9$ (Pa).

L'incidence du module de Young dans la fonction de perméabilité (4.2) est reflétée dans les courbes de la cinétique de séchage (Figure 4.19). Une montée de l'ordre de grandeur de E produit une baisse de la perméabilité du même ordre de grandeur, qui amène à une réduction de la vitesse de séchage du milieu. Pour des ordres de grandeurs de E plus bas que celui de référence, les courbes de teneur en eau deviennent similaires.

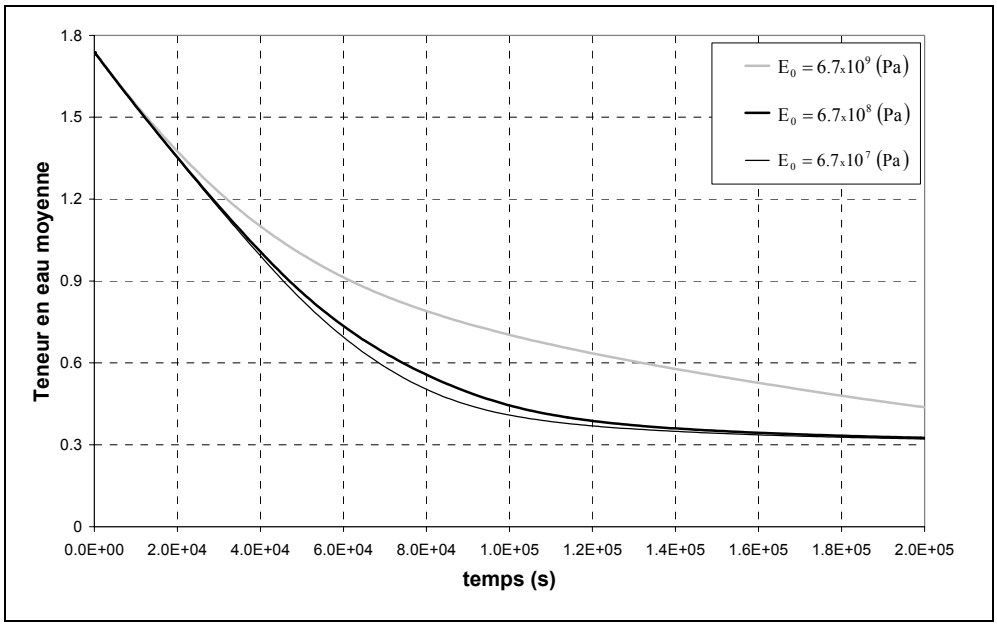


Figure 4.19 *Influence la variation des ordres de grandeur du module de Young (*E*) dans la cinétique de séchage*

Le module de Young est un paramètre qui exprime la proportionnalité qui existe entre les contraintes et les déformations. Une augmentation du module de Young signifie avoir un matériau moins déformable, c'est-à-dire que pour avoir une très petite déformation il faut appliquer une grande force sur le milieu. Dans le séchage, le même phénomène doit se produire mais dans le sens inverse : une très petite déformation doit produire une grande

contrainte. Donc, les courbes de contraintes (Figure 4.20) ne font que vérifier le phénomène et en plus nous observons aussi que la relation entre la variation des ordres de grandeurs des contraintes et celles du module de Young (E) est directement proportionnelle.

Dans la phase de premier ralentissement on s'attend à avoir, comme pour tous les autres paramètres, le commencement de la relaxation de contraintes, puisque les déformations baissent à cause de la baisse du flux de masse. Pour la valeur $E_0 = 6.7x10^9$ (Pa) nous observons que cette baisse n'existe pas. L'explication se trouve dans la courbe de la cinétique de séchage (Figure 4.19), car cette courbe indique que le milieu est encore loin d'arriver à l'équilibre hygroscopique, alors il continue son séchage et par conséquence sa déformation est toujours dans son étape d'augmentation.

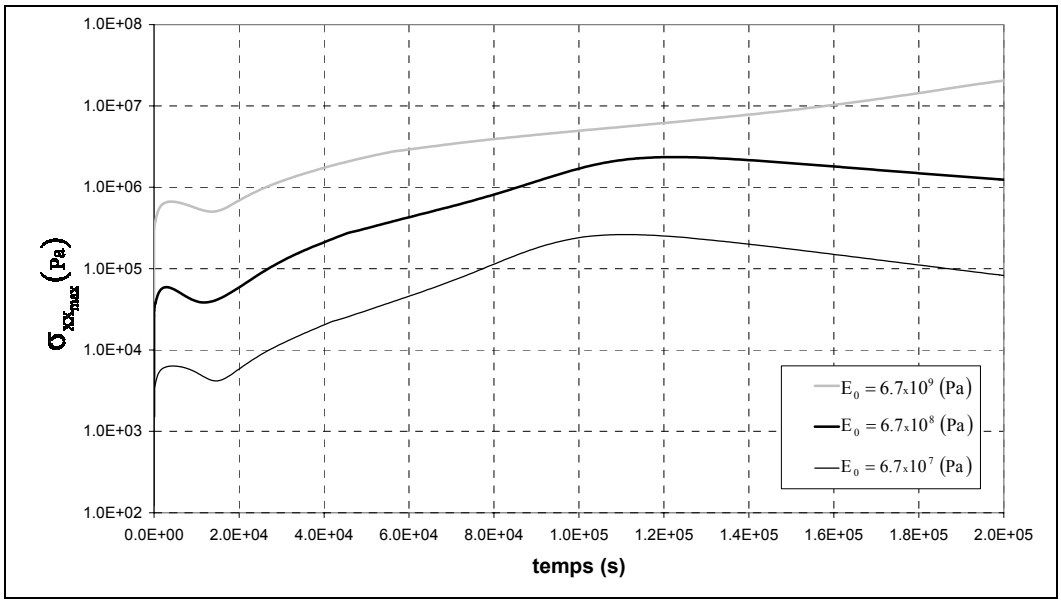


Figure 4.20 *Influence la variation des ordres de grandeur du module de Young (*E*) sur la contrainte maximale selon la direction* x *(*$\sigma_{xx_{max}}$*).*

La pression intrinsèque du liquide est aussi une contrainte principale, donc elle a une influence directe sur les contraintes totales selon la direction x et y du milieu (contraintes totales σ_{xx} et σ_{yy}), alors on peut espérer que si la contrainte maximale augmente la pression du liquide $\langle P_l \rangle^l$ augmente à une vitesse similaire. Cette augmentation de $\langle P_l \rangle^l$ dans le milieu est reproduite par les courbes de la figure 4.21 avec des écarts, dans les ordres de grandeur, comparables à celles des contraintes maximales ($\sigma_{xx_{max}}$).

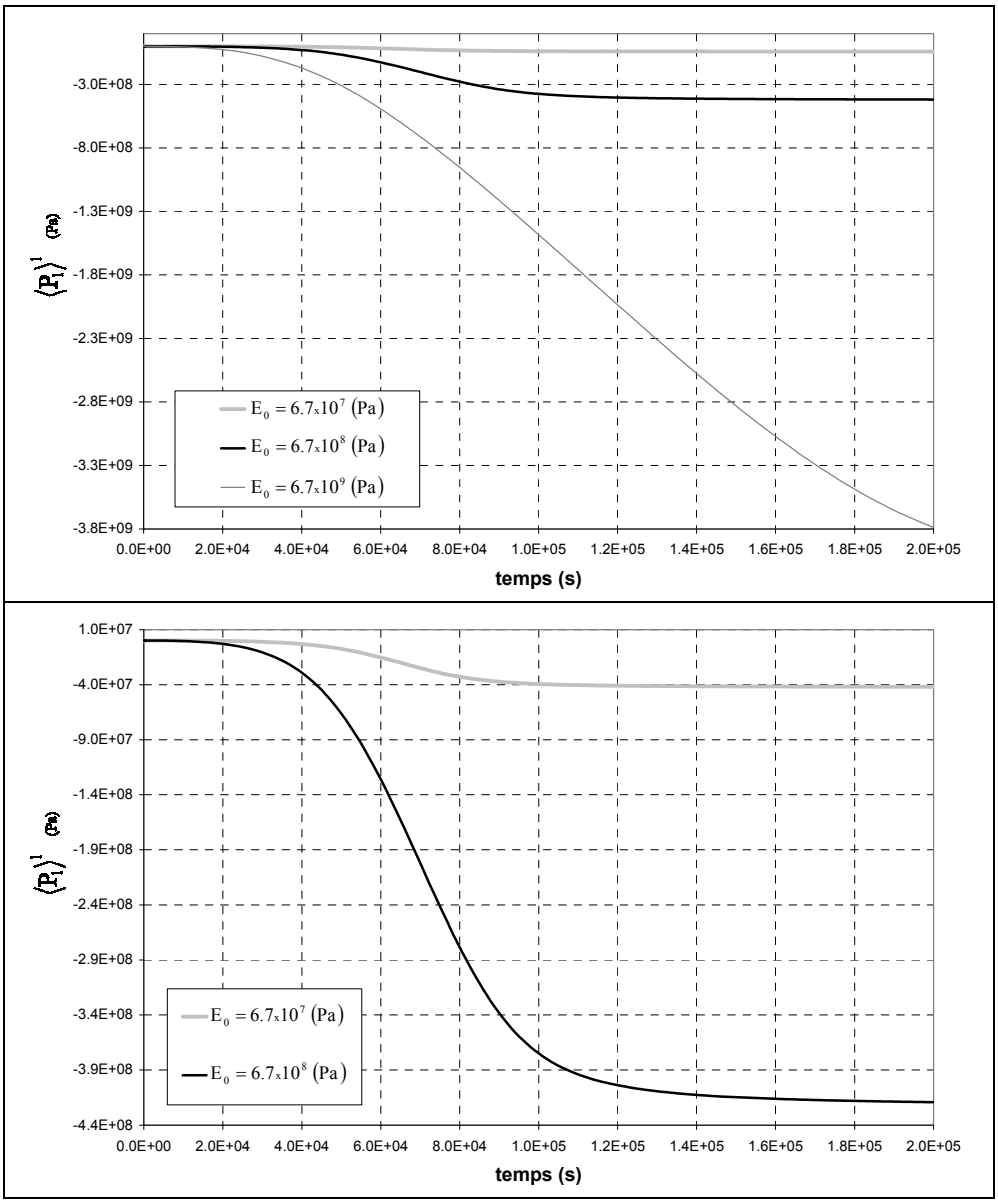


Figure 4.21 *Influence de la variation du module de Young sur l'évolution de la pression intrinsèque du liquide* $\langle P_l \rangle^l$ *dans le point* P2 *du milieu.*

Auparavant on a expliqué comment est affectée la perméabilité (k) par le module de Young et en plus on sait que ce paramètre k est lié directement à la pression du liquide par la loi de Darcy ; alors le fait d'avoir une croissance de la pression liquide associée à une croissance de E est vérifié aussi dans les profils où on étude la sensibilité du modèle par rapport à la variation de k (Figure 4.25).

L'évolution de la fraction volumique du liquide dans un point (Figure 4.22), reste avec une tendance similaire à celle du comportement global de la teneur en eau dans le milieu et l'influence du module de Young sur cette variable a la même explication que pour les courbes de la figure 4.19 (cinétique de séchage).

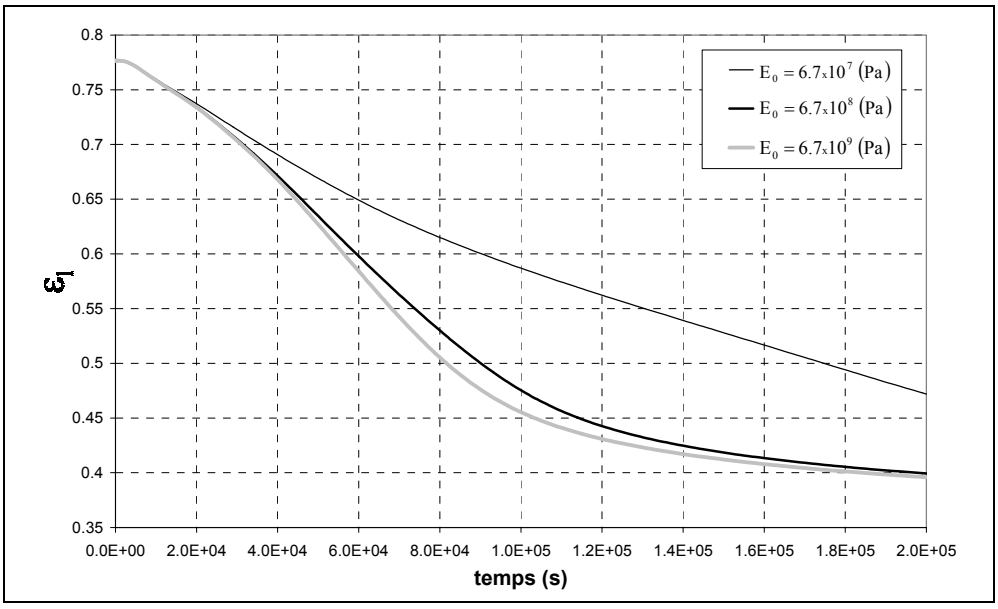


Figure 4.22 *Influence de la variation des ordres de grandeur du module de Young (*E*) sur l'évolution de la fraction volumique du liquide* ε_l *dans le point* P2 *du milieu.*

Pour finir il faut remarquer le fait que malgré la forte influence que fournit la variation du module de Young (E) aux variables du modèle, c'est le paramètre qui présente le moins de difficultés pour la résolution numérique si nous changeons son ordre de grandeur.

4.2.3 Variation de la perméabilité

La valeur de la perméabilité sera variée en changeant le valeur ou ordre de grandeur du coefficient de diffusion effectif du milieu, car il est le seul paramètre qui est lié uniquement, dans notre modèle, à la perméabilité.

Alors, dans l'expression (4.2) le coefficient D_{eff} aurait les valeurs suivantes : $D_{eff} = 5x10^{-09}\,m^2/s$ (valeur de référence), $D_{eff} = 5x10^{-08}\,m^2/s$ et $D_{eff} = 5x10^{-07}\,m^2/s$.

Pour des valeurs d'ordre de grandeur plus faibles que celle de référence, la résolution numérique s'avère très difficile avec la configuration de maillage choisie, car nous n'utilisons pas un maillage assez fin qui nous permettrait de contrôler mieux les divergences numériques causées par des forts gradients.

Une augmentation de D_{eff} implique une augmentation de la perméabilité, dans les courbes de cinétique (Figure 4.23) cette relation est vérifiée, car pour des valeurs de D_{eff} plus grands que celui de référence on observe que le milieu sèche plus rapidement.

On observe que depuis une augmentation de dix fois l'ordre de grandeur de référence, l'influence sur le comportement globale du séchage est négligeable.

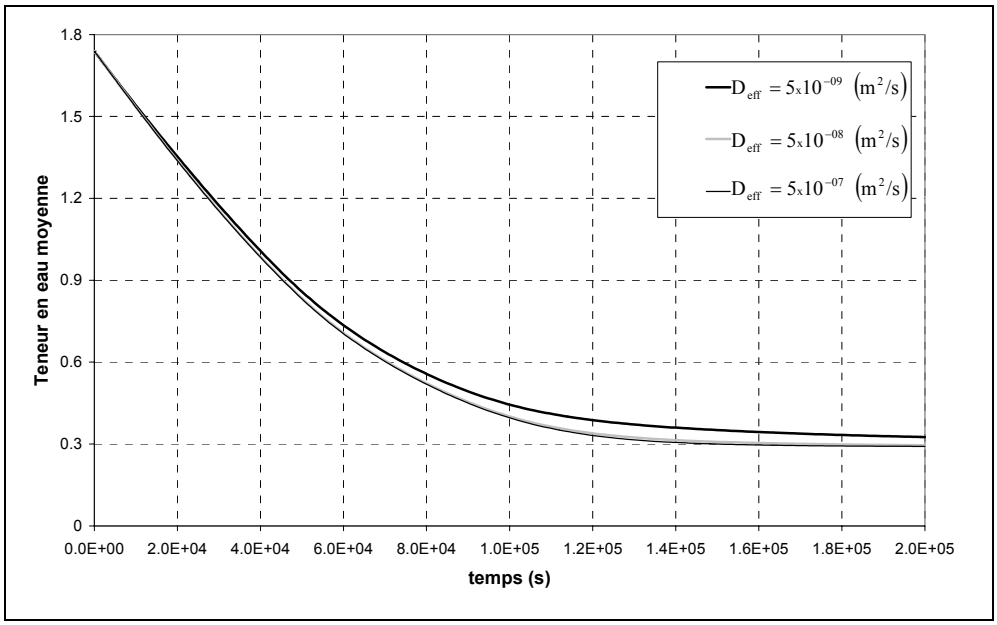


Figure 4.23 *Influence de la variation de la perméabilité (*k*) dans la cinétique de séchage.*

Dans le cas des contraintes maximales selon l'axe x, nous remarquerons que l'incidence de la perméabilité est directe et qu'elle affecte les contraintes de la même façon que le fait le changement du module d'élasticité (E). Par contre à partir de ces courbes (Figure 4.24), nous pouvons assurer que la perméabilité une des causantes principales des forts écarts entre les contraintes. L'explication à cette affirmation vient du fait que les ordres de grandeur et les tendances des courbes de contraintes trouvées pour les deux paramètres (k et E) sont similaires.

Explication plus détaillée de l'affirmation précédente : k est un paramètre qui dépend de la valeur de E, au contraire de E qui est indépendant de k. Si on garde E égale à sa fonction de référence et nous faisons varier seulement les ordres de grandeurs de k de manière indépendante de E, nous trouvons des résultats similaires à celles trouvés dans l'analyse de sensibilité pour le module de Young (Figure 4.20). Alors comme c'est la perméabilité k qui a changé dans les deux cas (étude de sensibilité de E et k), il reste l'option que k soit aussi la causant d'avoir ces profils de contraintes maximales.

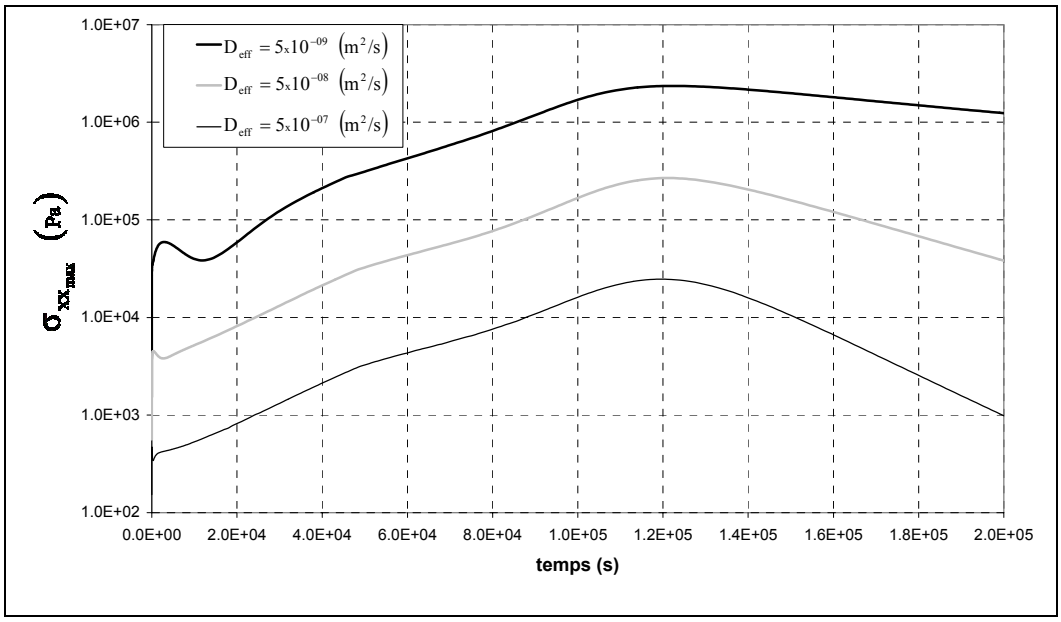


Figure 4.24 *Influence de la variation de la perméabilité (*k*) sur la contrainte maximale selon la direction* x *(*$\sigma_{xx_{max}}$*).*

On observe, dans profils de la pression intrinsèque du liquide $\langle P_l \rangle^l$ (Figure 4.25), que l'effet de la perméabilité se produit, comme pour tous les autres paramètres, vers la moitié de la phase isenthalpe, les grands écarts se produisent dans la première phase de ralentissement, mais à différence des paramètres υ et E, dans le deuxième ralentissement la pression $\langle P_l \rangle^l$ devient quasi égale pour les trois valeurs de perméabilité ; la faible incidence que l'on observe dans la cinétique de séchage (Figure 4.23) pour des grandes valeurs de perméabilité, est trouvé également dans l'évolution de la pression. Les grandes perméabilités permettent un écoulement du fluide plus facile, ceci amène à avoir rapidement un équilibre dans les champs de pressions (c.f. Annexe 7) et comme les conditions de l'environnement de séchage ne changent pas il est clair que la pression, dans les trois cas, doit s'équilibrer vers la même valeur.

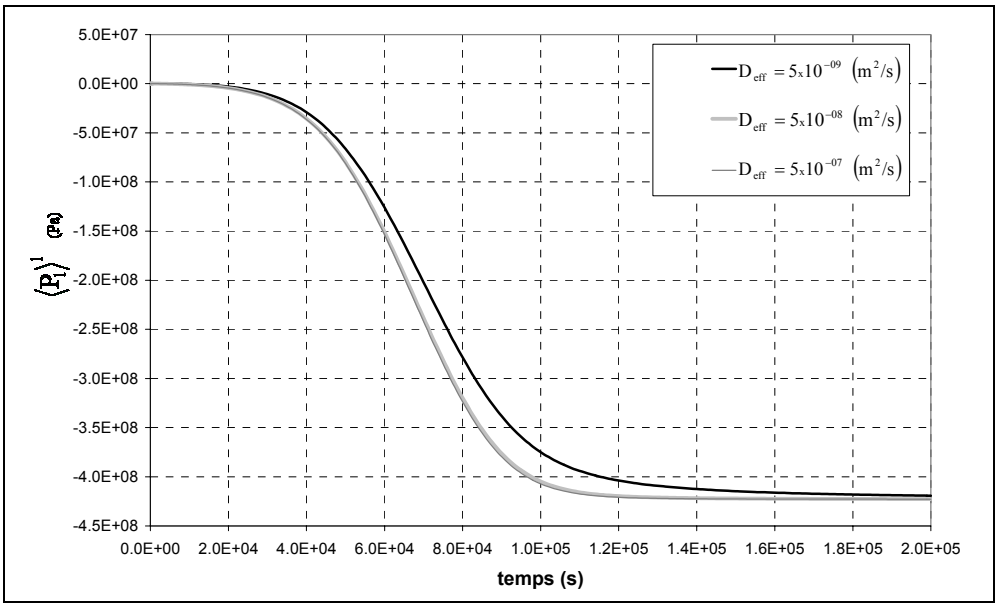


Figure 4.25 *Influence la variation de la perméabilité (*k*) sur l'évolution de la pression intrinsèque du liquide* $\langle P_l \rangle^l$ *dans le point* P2 *du milieu.*

La figure (Figure 4.26) met en évidence, encore une fois, que la variation de la fraction volumique du liquide ε_l, suive une évolution similaire à celle du comportement global du séchage du milieu.

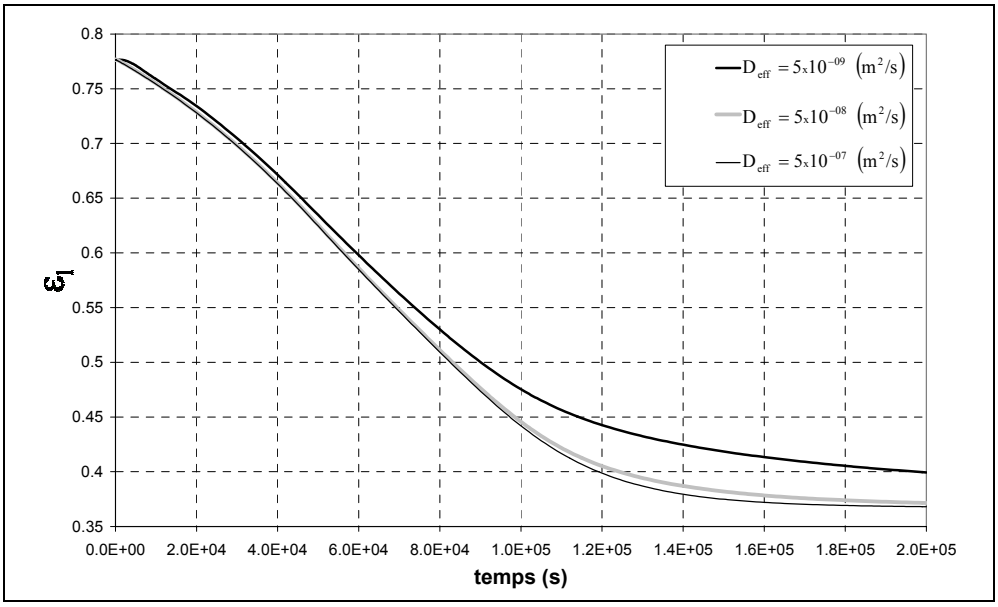


Figure 4.26 *Influence la variation de la perméabilité (*k*) sur l'évolution de la fraction volumique du liquide* ε_l *dans le point* P2 *du milieu.*

Alors une conclusion valide, pour toutes les paramètres, peut être obtenue à ce niveau du travail : Toutes les écarts et tendances des courbes d'évolution de ε_l, pour toutes les variations et valeurs des différents paramètres, ont les mêmes explications que celles du comportement global du séchage (cinétique du séchage), car comme nous pouvons le

remarquer dans la relation (4.1), la teneur en eau W est une fonction de la fraction volumique du liquide ε_l ($W(\varepsilon_l)$).

4.2.4 Rapport de forme

Dans cette partie du travail les propriétés du matériau ne seront pas changées, l'unique changement introduit est le rapport entre la longueur (L) et l'épaisseur (e) dans la géométrie initiale du milieu (c.f. Figure 4.2). Nous le ferons changer une seule fois en égalisant la longueur (L) à l'épaisseur (e) ; ceci nous permettra d'avoir deux géométries initiales différents (Figure 4.27).

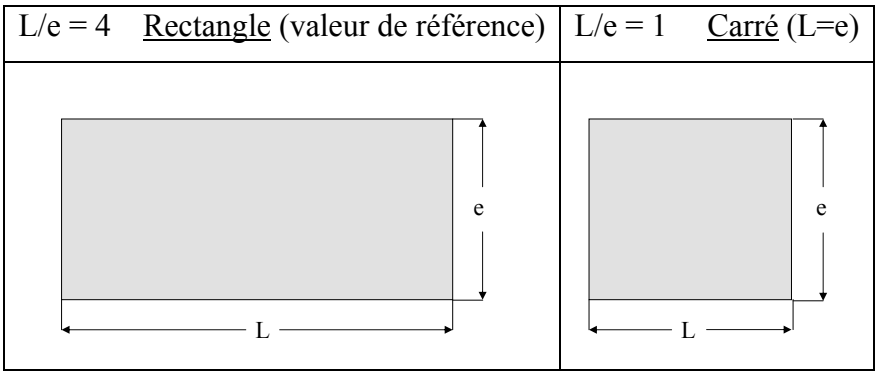


Figure 4.27 *Géométries initiales du milieu associées au rapport de forme (*L/e*).*

Les courbes de cinétique (Figure 4.28) donnent comme information qu'un changement du rapport de forme peut induire à un changement de la vitesse de séchage. Dans notre cas le changement nous amène à un séchage plus rapide. Ceci est du au fait que nous n'avons pas pour ces configurations le même rapport entre le volume et la surface d'échange.

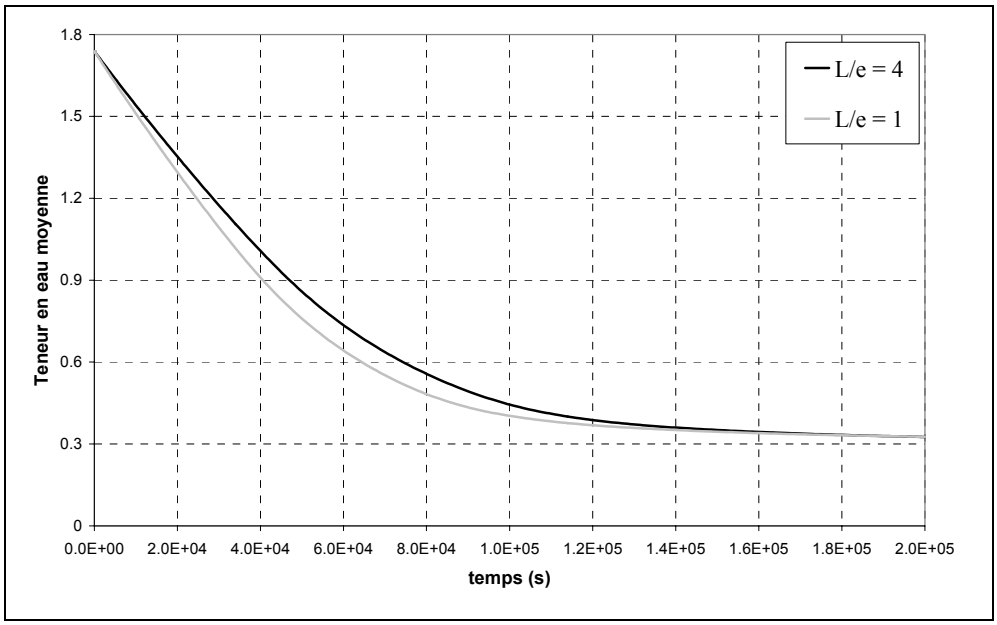


Figure 4.28 *Influence de la variation du rapport de forme (*L/e*) dans la cinétique de séchage.*

Par rapport aux valeurs des contraintes maximales (Figure 4.29), les écarts produits ne sont pas très importants si nous les comparons aux écarts observés pour le changements des paramètres υ, k et E. Les contraintes restent les mêmes vers la phase isenthalpe, la contrainte pour le milieu L/e = 1 va s'écarter avant la fin de la phase isenthalpe du milieu de référence parce que ce premier est séché plus rapidement, cette même vitesse de séchage oblige le milieu à avoir une vitesse de retrait plus important et par conséquence les contraintes seront aussi plus élevées. L'arrêt prématuré de l'augmentation de contraintes, du milieu de géométrie initiale carré (L/e =1), a l'explication dans les courbes de cinétique de séchage (Figure 4.28), car ici on peut remarquer que le milieu arrive avant auprès de l'équilibre hygroscopique (vers t = 1.0E05 s) ; en ce moment la vitesse de retrait ralentit et commence la relaxation des contraintes.

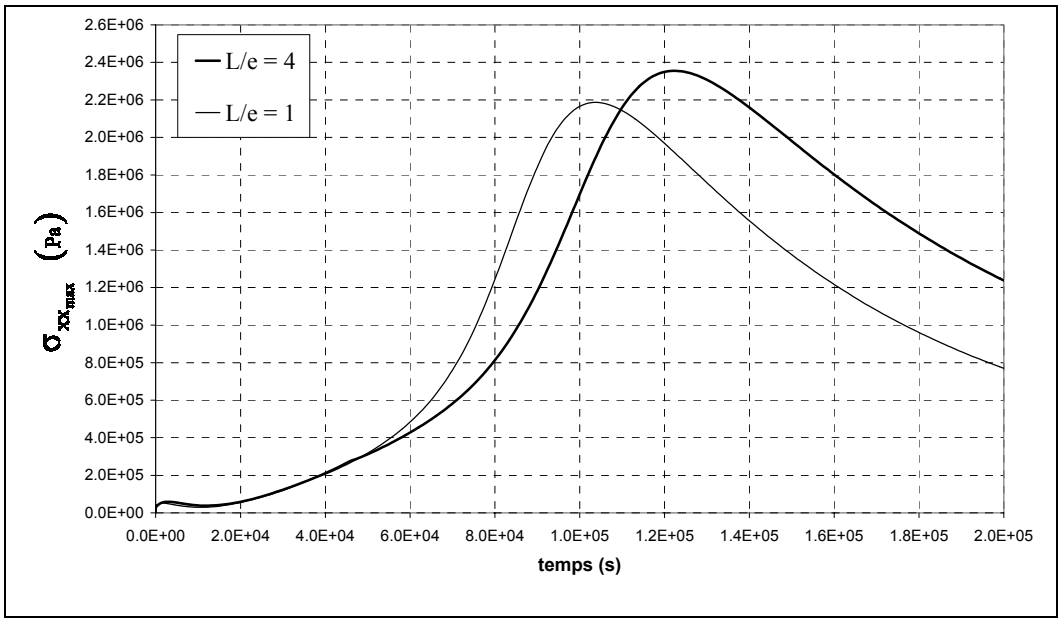
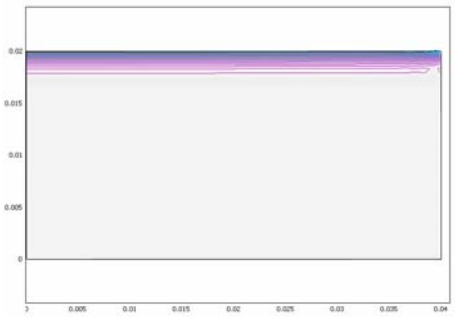
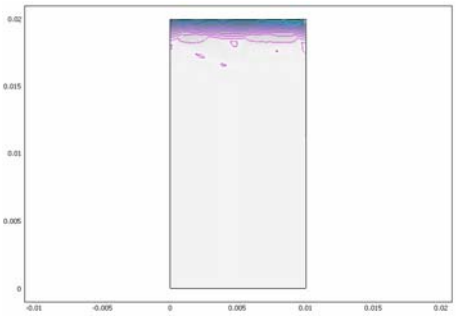
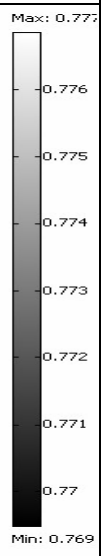
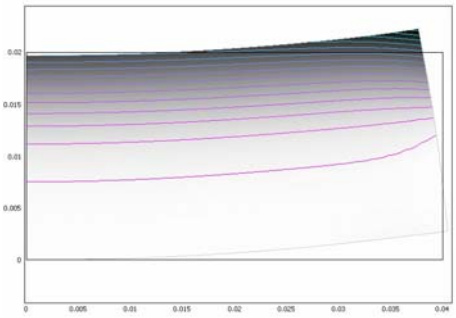
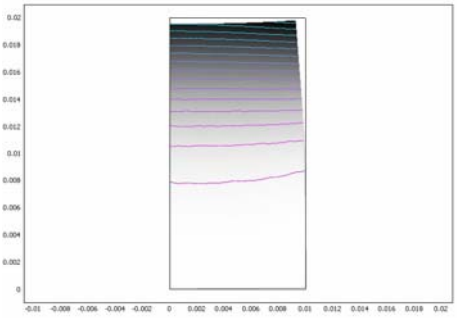
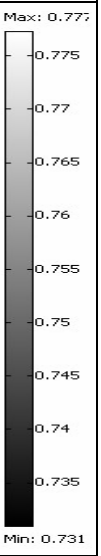
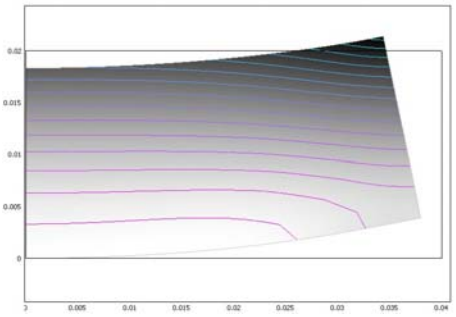
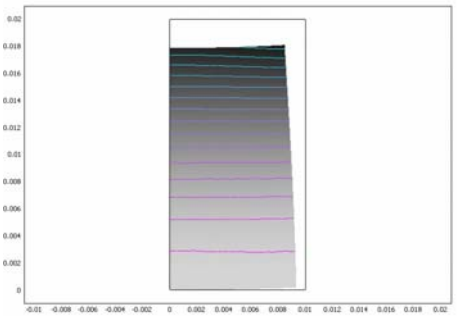
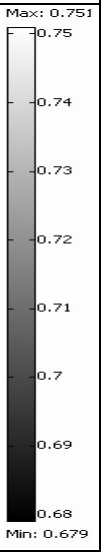


Figure 4.29 *Influence de la variation du rapport de forme (*L/e*) sur la contrainte maximale selon la direction x ($\sigma_{xx_{max}}$).*

Nous avons parlé précédemment que le changement de rapport de forme induit un séchage plus rapide. Nous pouvons confirmer cela par une visualisation des champs de fraction volumique du liquide ε_l (Figure 4.30).

Les gradients de ε_l, qui sont marqués par les lignes d'isovaleurs, nous montrent que dans le milieu avec L/e = 1 le mouvement prédominant du liquide est de type convectif. Les mouvements de type convectif du fluide sont plus rapides que celles de type diffusif, donc le milieu carré doit avoir un transfert de masse plus importante que celle rectangulaire parce que ce dernier présente des mouvements plutôt diffusifs dans les endroits éloignés de la surface de

séchage (plus on s'approche à la surface de séchage et plus le mouvement convectif prédomine)

temps (s)	L/e = 4	L/e = 1	
100			
3.6E3			
2E4			

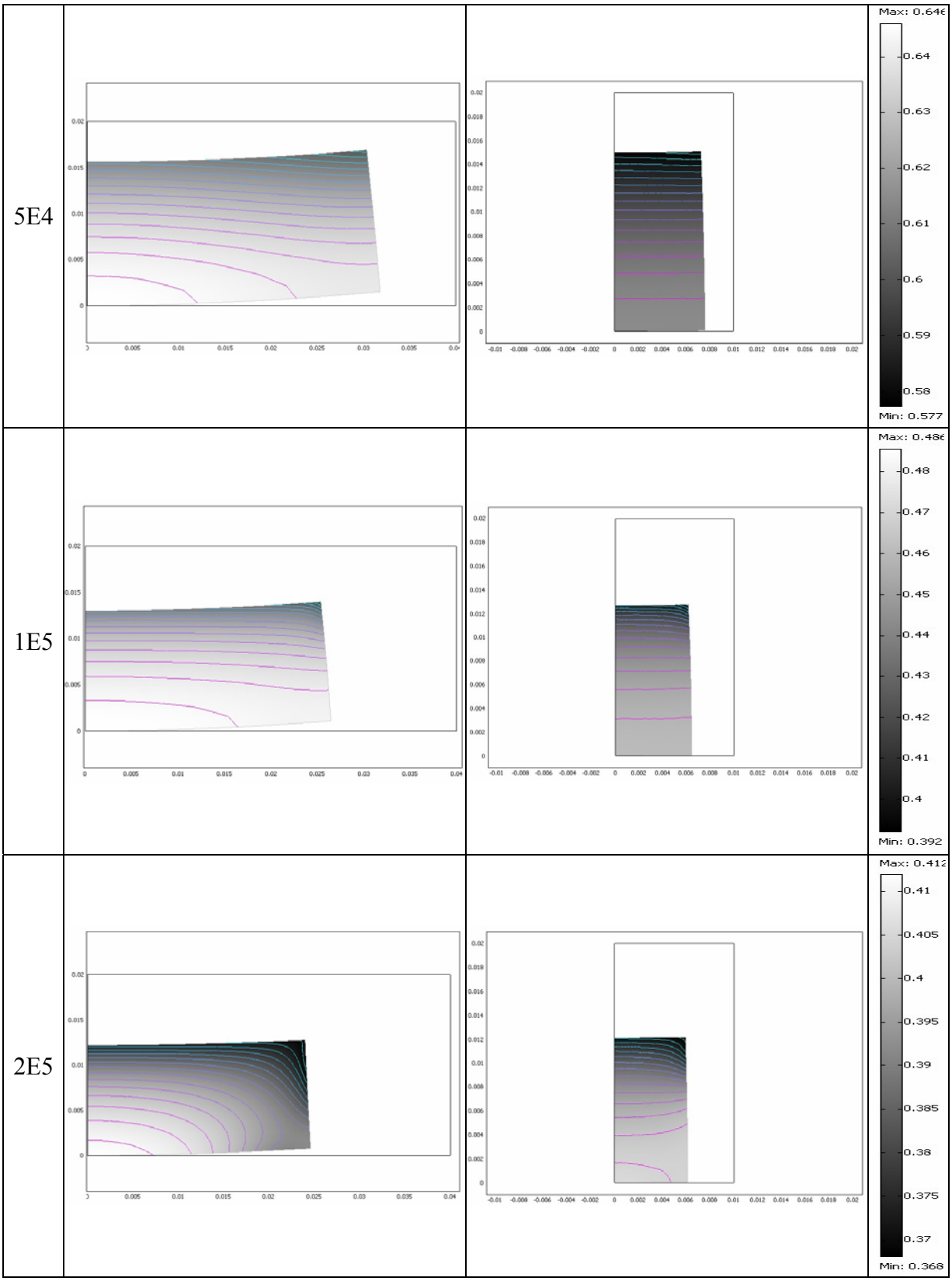


Figure 4.30 *Influence de la variation du rapport de forme (*L/e*) sur les champs de fraction volumique du liquide* ε_l *et la déformation macroscopique du milieu (les axes vertical et horizontal représentent le coordonnées* x *et* y *dans le système de référence fixe ou initial).*

Dans la déformation macroscopique du milieu on voit que, pour le rapport de forme L/e = 4, les surfaces supérieure et inférieure se fléchissent plus que les surfaces latérales au contraire de L/e = 1, où la flexion est plus grande dans les surfaces latérales.

A partir de la moitié de la phase isenthalpe, les deux milieux (L/e = 1 et L/e = 4) cessent de se courber fortement et essaient de retourner à une géométrie des surfaces non courbes. Ce phénomène se produit à cause du modèle mécanique du type élastique et ne considère pas les déformations plastiques.

Finalement on remarque aussi que dans les milieux fortement déformables, sous l'hypothèse qu'ils restent toujours saturés, le retrait volumique est présent jusqu'à la fin du processus de séchage.

4.2.5 Terme transitoire associé à la compressibilité du liquide

Nous avons discuté dans le chapitre précédent (Chapitre 3) l'importance que peut avoir dans les équations de conservation de masse le terme transitoire $\varepsilon_l \chi \frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial t}$. Deux questions ont été posés : 1) A-t-il une importance physique ? et 2) Quelle est sa véritable influence d'un point de vu numérique ?.

La réponse à la première question reste absolument en évidence dans les études de la cinétique de séchage (Figure 4.31), où la valeur du coefficient de compressibilité de l'eau est $\chi = 4.5 \text{x} 10^{-9} \left(1/\text{Pa}\right)$ et sont obtention est fait par une expérience de compression de l'eau en condition isotherme. L'absence de ce terme amène à un décalage, par rapport a la simulation de référence et à l'expérience (Exp(Condition2)), dans la phase de ralentissement où les paramètres rhéologiques ainsi que la perméabilité ont généralement une incidence considérable. Dans un modèle de transfert où le terme moteur de transport liquide sont les gradients de pression liquide (modèle proposé ou modèle convectif), il est raisonnable de penser qu'une petite incidence sur la variable $\langle P_l \rangle^l$, pour plus faible que elle soit, puisse avoir une répercussion sur la transfert de masse, surtout quand on n'a pas besoin des forts gradients pour induire un écoulement du fluide (Voir les champs de pression dans l'annexe 7).

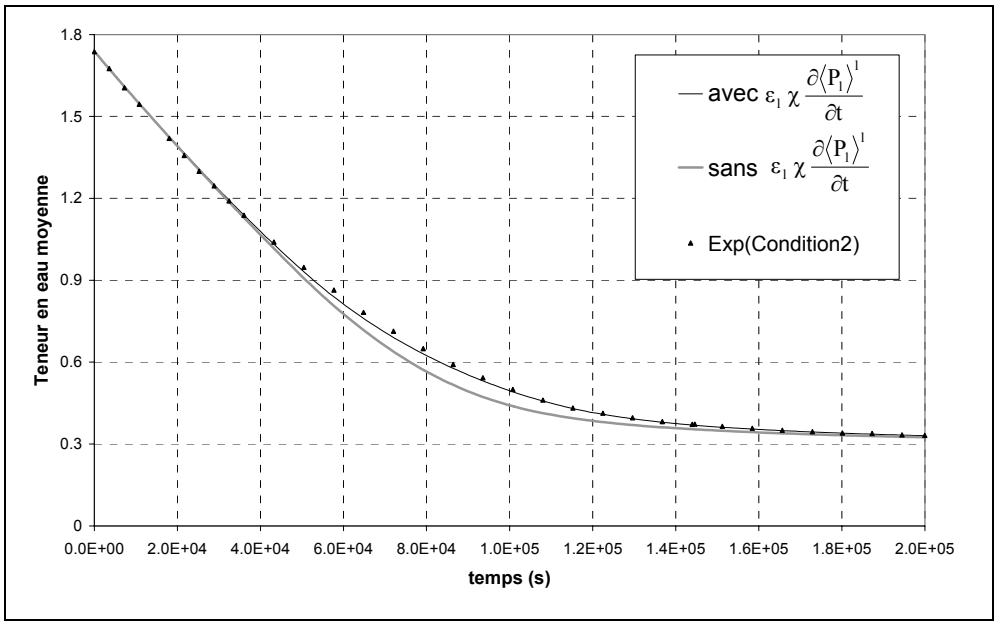


Figure 4.31 *Influence du terme transitoire associé à la compressibilité du liquide* ($\varepsilon_l \chi \frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial t}$) *dans la cinétique de séchage.*

Dans la figure suivante on observe un écart, sur les valeurs de contraintes maximales selon la direction x, à partir de la phase isenthalpe jusqu'à la fin du processus. Cet écart n'est pas très important si on regarde les ordres de grandeur des contraintes, car la différence maximale entre les valeurs des deux courbes ne dépasse pas 10%.

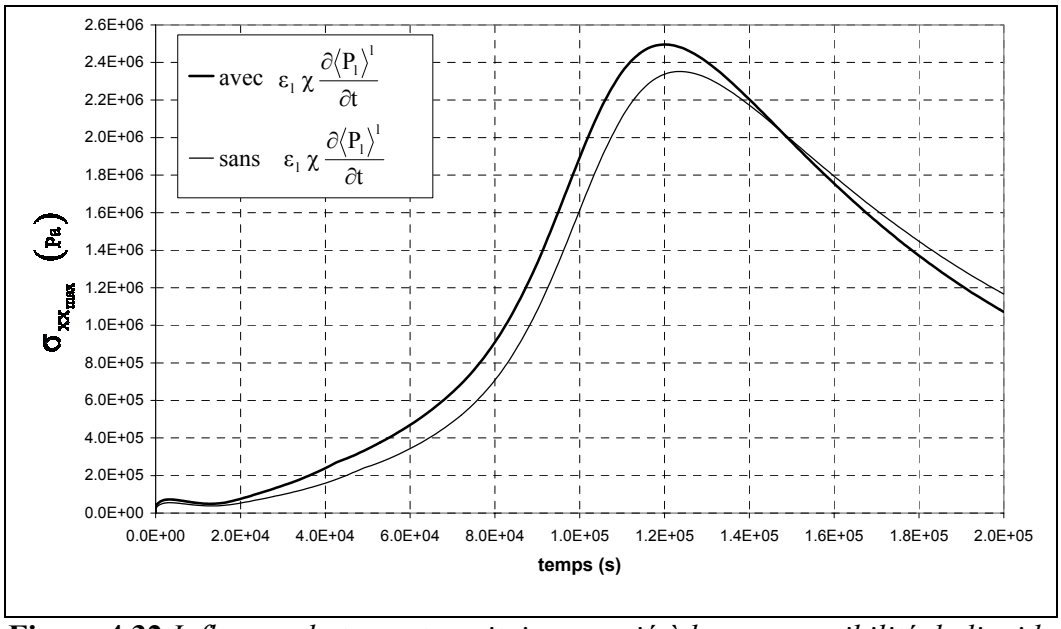


Figure 4.32 *Influence du terme transitoire associé à la compressibilité du liquide* ($\varepsilon_l \chi \frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial t}$) *sur la contrainte maximale selon la direction* x ($\sigma_{xx_{max}}$).

En résume d'un point de vu physique ce terme transitoire ($\varepsilon_l \chi \frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial t}$) à une influence plausible mais pas très importante dans l'analyse de séchage d'un milieu déformable.

Pour répondre à la deuxième question, son influence dans la convergence numérique est très importante, car pour plusieurs comparaisons de temps de résolution pour différents conditions de séchage, on a observé un gain généralement entre 14% et 20% de temps si nous utilisons le terme transitoire associé à la compressibilité du liquide, c'est-à-dire qu'on arrive à avoir de convergences plus rapidement. Dans certains cas, où les conditions de séchage sont très fortes (par exemple notre Condition3 de séchage), l'existence de ce terme dans les équations de conservation de masse peut devenir capital, parce que si on le néglige les divergences numériques deviennent tellement incontrôlables que le problème n'arrive pas à être résolu jusqu'à la fin du processus.

4.3 Conclusion

Pour finaliser ce chapitre, il faut rappeler que des fortes considérations on été faites dans le modèle proposé, telles que la prise en compte de la pression du liquide, l'hypothèse du milieu diphasique tout au long du processus du séchage et un modèle mécanique de type élastique. Toutes ces considérations ont une influence sur les résultats présentés dans cette partie.

Dans la validation du modèle, le gel d'alumine a été choisi parce que il s'agit d'un milieu qui est fortement déformable (il peut se rétrécir de 3 à 4 fois son volume initial) et principalement diphasique. La validation montre qu'il existent des décalages entre l'expérience et la simulation, ces différences sont dues à la non connaissance précise des propriétés du milieu, ou comme nous les avons appelé, des paramètre tensoriels telles que le tenseur de perméabilité ($\overline{\overline{k}}$) et le tenseur d'élasticité ($\overline{\overline{E}}$), ainsi que la non considération de la troisième dimension (axe z) qui est visible surtout dans les courbes de retrait où se produisent les plus grands écarts. Nous pouvons malgré tout affirmer que le modèle ainsi mis en place est capable de répondre correctement pour la prédiction du comportement au séchage de matériaux fortement déformables.

Nous avons vu dans l'étude de sensibilité, la forte influence des propriétés du matériau (E, υ et k) sur le comportement mécanique et de transfert de matière. L'étude de sensibilité vérifie la tendance générale que la physique prévoit par rapport à l'analyse des déformations, contraintes, pression du liquide et cinétique du séchage. Les résultats de simulations nous montrent, de façon générale, que :

a. Pour les milieux moins déformables (E grand et υ proche de 0.5) et peu perméables, la vitesse de séchage est plus faible et les contraintes sont plus fortes.
b. Les milieux très déformables et très perméables amènent à des contraintes plus faibles et à des plus fortes vitesses de séchage. On peut remarquer que si le module d'Young devient très faibles ou si la perméabilité devient trop élevée, leur influence sur la cinétique de séchage devient négligeable.
c. Par rapport a la pression du liquide $\langle P_l \rangle^l$ dans les milieux qui sont moins déformables, la monté de la valeur de pression est très forte, car pour conserver la condition diphasique à la surface du milieu, la pression capillaire doit monter énormément. Pour le cas contraire (milieux très déformables) la monté de la pression $\langle P_l \rangle^l$ est évidemment plus faible. En résumé, la capacité de se déformer du milieu a une forte influence sur les valeurs de $\langle P_l \rangle^l$. On peut observer les mêmes phénomènes si on s'intéresse à la perméabilité; plus le milieu est perméable et moins la pression liquide va augmenter.

Il faut remarquer que toutes les observations précédentes on été possibles grâce à la capacité du modèle de donner un accès facile à des quantités non mesurables telles que les champs de contraintes à l'intérieur du milieu et de pression intrinsèque du liquide.

Nous avons de plus observé l'effet du rapport de forme qui peut changer le caractère de l'écoulement du fluide à l'intérieur du milieu (il peut être plus ou moins convectif), ainsi que la déformation macroscopique du milieu. Finalement, il faut dire que l'influence du rapport de forme sur les contraintes maximales et la cinétique de séchage reste faible.

Comme dernier commentaire, si on regarde les champs de fraction volumique du liquide (Figure 4.30), il est clair que dans notre étude le transport de masse est dominé par la convection, ceci implique avoir une très forte instabilité numérique et ce pourquoi le terme transitoire associé à la compressibilité du liquide ($\varepsilon_l \chi \frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial t}$) joue un rôle capital. D'abord il nous donne une meilleure exactitude dans les résultats (c.f. Figure 4.31) et en plus il nous aide à améliorer la convergence numérique en nous évitent d'intervenir sur notre modèle avec des termes ou coefficients artificiels. Ces coefficients sont utilisés dans le seul but de faire converger numériquement le système, mais ils ajoutent le risque d'affecter fortement la réalité physique des résultats.

5 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

5.1 Conclusions

Un modèle de transfert qui tient compte des couplages thermo-hydro-mécaniques existant dans le processus de séchage convectif d'un milieu poreux saturé fortement déformable a été proposé dans ce travail. Afin d'obtenir le modèle proposé nous avons suivi une démarche spécifique, à partir de la quelle nous pouvons extraire les conclusions les plus importantes.

Une étude des différents types de modélisations de séchage (modèle capillaro-poreux et modèle de type diffusif) ainsi que de la théorie de consolidation de Biot, a été essentielle, pour vérifier que la modélisation qui donne les meilleures bases théoriques afin de tenir compte, du très fort couplage hydromécanique qui se produit dans les conditions physiques que nous avons étudié, est la théorie de Biot. Cette conclusion est la même que celle des scientifiques qui travaillent en général dans la mécanique des sols et les propagations d'ondes à travers des milieux poreux.

Le modèle de Biot est présenté habituellement comme un modèle plutôt de type diffusif et si on veut considérer explicitement le mouvement convectif du fluide, il faut faire intervenir dans l'équation de transport de fluide les propriétés rhéologiques du milieu telles que le module d'Young et le coefficient de Poisson. Cela oblige à considérer encore plus de paramètres variables dans cette équation qui est déjà très difficile à résoudre numériquement du fait de son caractère convectif.

Dans le chapitre 3 certaines hypothèses et considérations ont été proposées permettant d'avoir une amélioration dans l'analyse physique et résolution numérique par rapport aux modèles existantes. Pour atteindre l'objectif, nous avons tout d'abord tenu compte des équations classiques de transfert de masse à l'échelle locale (échelle du pore), ensuite nous avons utilisé la théorie de la prise de moyenne volumique, avec un V.E.R déformable, pour homogénéiser le milieu et obtenir des équations moyennées qui sont applicables dans tous les points du milieu. Les équations obtenues sont les mêmes que celles que l'on obtient avec l'hypothèse classique d'un V.E.R non déformable. Ce résultat, nous a permis de prendre en compte l'équation de quantité de mouvement du liquide (Navier-Stokes classique) moyennée, en négligeant les effets visqueux du liquide et de la pesanteur, ce qui nous amène à la loi de Darcy, de façon à introduire le terme moteur réel du transport liquide qui est le gradient de pression liquide. La loi de Darcy ajoute une variable de plus à considérer dans la phase liquide, il s'agit évidemment de la pression du liquide. Afin de clore le problème une équation

supplémentaire est ajoutée en se servant de la conservation de masse totale. Notons par ailleurs que le modèle ne tient pas compte explicitement du transport de l'eau liée et que l'hypothèse de compressibilité du liquide a été prise en compte dans l'équation de conservation de masse. Les équations résultantes sont alors de type convectives et montrent explicitement la forte dépendance du transport liquide avec la déformation du solide ; car au cours de la modélisation de ces équations, une variable qui dépend du changement de géométrie du solide apparaît de façon naturelle, il s'agit de la vitesse intrinsèque de la déformation du solide ($\left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s$).

En suivant la démarche de la théorie de consolidation de Biot, nous avons choisi pour obtenir les valeurs de la déformation du milieu, une approche phénoménologique issue du principe de contraintes effectives de Terzaghi. Dans cette approche, on a considéré uniquement le comportement élastique du milieu à travers la loi de Hooke, parce que dans le cas test considéré (gel d'alumine), ce comportement est prédominant.

Le choix d'une approche du type Terzaghi permet par ailleurs:

1. d'éviter la décomposition classique du tenseur de déformation en une partie liée au départ de l'eau et une partie liée au comportement mécanique du matériau,
2. d'expliciter les couplages entre transferts et déformations au travers de la pression de la phase liquide, cette pression apparaît ainsi clairement comme le terme moteur du transport et de la déformation du matériau

D'une autre part, la prise en compte de l'hypothèse des grandes déformations, dans l'écriture du tenseur $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est ici capitale car la résolution numérique du système a été effectuée avec un changement des variables d'espace Euler-Lagrange.

Le modèle a été fermé avec l'écriture classique de l'équation de l'énergie, dans sa forme conservative, en adoptant l'hypothèse classique de l'équilibre thermique local (modèle à une température). Ainsi tous les paramètres intervenants au sein du milieu dans le processus de séchage on été pris en compte ($\varepsilon_l, \langle P_l \rangle^l, \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s$ et $\langle H \rangle$).

Un modèle physique doit être toujours validé par rapport à la réalité. Dans le chapitre 4 cette validation a été effectuée dans le cas d'un séchage convectif. Le milieu choisi a été le gel d'alumine, car c'est un milieu fortement déformable et qui peut être considéré comme étant principalement diphasique tout au long du séchage.

Dans la validation de n'importe quelle modèle physique, une seule question est vraiment importante : est-ce que le modèle est capable de représenter une réalité physique ?

Dans notre cas (séchage convectif d'un milieu diphasique déformable) la réponse est claire : le modèle proposé est absolument capable de représenter la réalité physique et toutes les différences observées entre la simulation et l'expérience, sont dues soit au manque de précision sur les paramètres physiques inclus dans la simulation, soit au fait de considérer le milieu toujours élastique, soit au fait que la résolution est effectuée uniquement en 2 dimensions alors que la déformation du matériau se trouve dans toutes les directions,. L'étude de sensibilité montre par ailleurs que le modèle est très sensible à la variation de n'importe quel paramètre, mais en particulier à deux paramètres que sont le tenseur d'élasticité $\overline{\overline{E}}$ et le tenseur de perméabilité $\overline{\overline{k}}$. Ceci est particulièrement logique puisque ces paramètres gouvernent le transport et la déformation et donc leur couplage. Le modèle ainsi proposé oblige à avoir une très bonne caractérisation du matériau si on veut lui attribuer un caractère prédictif. Notons que les paramètres en question évoluent au cours de l'opération de séchage ce qui rend leur détermination encore plus délicate.

Notons en plus que l'hypothèse d'un milieu toujours saturé a une très forte influence sur la pression du liquide. Les fortes chutes de pression observées dans les résultats numériques sont liées à cette hypothèse. En effet le fait de supposer le milieu comme étant diphasique (pas de possibilité d'entrée de gaz) est synonyme d'une pression capillaire infinie, la pression liquide peut alors tendre vers l'infini (en négatif).

Finalement, l'observation des champs de pression et de fraction volumique du liquide, montre qu'il n'y a pas de corrélation directe entre les deux et on peut constater que le transport de masse liquide est effectivement dominé par la convection. Cette convection dominante produit généralement des fortes oscillations numériques. La prise en compte à ce titre de la compressibilité du liquide est entièrement justifiée car le terme non stationnaire qui en découle permet de stabiliser les équations et de garantir ainsi une meilleure convergence.

5.2 Perspectives

Vis-à-vis des résultats, nous pouvons prévoir une amélioration et continuation de ce travail, d'un point de vu théorique et numérique, en considérant certaines points comme :

1. La transition vers le milieu triphasique (solide, liquide et gaz). Cette transition doit être assurée au moment où la pression liquide dépasse (en valeur absolue) la valeur déduite de la pression capillaire. Afin de mener à bien cette transition il semble intéressant de garder la variable $\langle P_l \rangle^l$ comme inconnue tout au long du processus, la

pression de la phase gazeuse est quand à elle déduite de la pression capillaire. Ce choix de variable est différent des modèles triphasiques classiques où l'inconnue est la pression de la phase gazeuse, la pression liquide étant déduite de la pression capillaire. Il demeure malgré tout un point fondamental non résolu concernant l'écriture de la contrainte effective dans un milieu triphasique. A ce titre, dans le cas d'un comportement élastique, l'approche la plus simple semble être celle proposée par Coussy (1991) permettant d'écrire la contrainte effective en fonction des pressions du liquide et du gaz.

2. L’introduction d’un comportement rhéologique plus complexe afin de pouvoir décrire le comportement plastique et viscoplastique du milieu.
3. La prise en compte de la troisième dimension dans la simulation, afin d'avoir une meilleure prédiction du retrait.
4. Une extension du modèle pour sa possible application à d’autres cas physiques telles que la déshydratation mécanique assistée ou non thermiquement. Le terme moteur de la déformation est dans ce cas lié au chargement extérieur,
5. L'intégration d'un critère de rupture du matériau permettra ainsi de valider expérimentalement les ordres de grandeur des contraintes mécaniques simulées.

NOMENCLATURE

A	Surface ou aire
C	Fraction massique
C_P	Chaleur spécifique à pression constante
C_v	Chaleur spécifique à volume constante
D	Coefficient de diffusion
E	Module de Young
F	Force
F_m	Flux massique
HR	Humidité relative
H	Enthalpie
h_T	Coefficient de transfert de chaleur convective
h_m	Coefficient de transfert de masse
I	Matrice identité
K	Taux de changement de phase
k	Perméabilité intrinsèque
k_r	Perméabilité relative
Le	Nombre de Lewis
m	Masse
n	normal
P	Pression
R	Constante universel du gaz (R=8.32 J $mole^{-1}K^{-1}$)
S	Saturation
T	Température
$T_{b.h}$	Température de bulbe humide
t	Temps
V	Vitesse
V_r	Vitesse de retrait
V_{air}	Vitesse de l'air
W	Teneur en eau
W^*	Teneur en eau réduite

Symboles

Θ_i	Concentration molaire de l'espèce i
θ	Angle de contact
α	Coefficient de Biot
α_{sup}	Tension superficielle
χ	Coefficient de compressibilité du liquide
ΔH_v	Enthalpie de vaporisation
λ	Conductivité thermique
φ_{conv}	flux de chaleur convectif
φ_{evap}	flux de chaleur par évaporation
ν	Volume
ς	Espace de Lagrange
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Déformation
ε_m	Déformation par retrait mécanique
ε	Porosité
ε_π	Fraction volumique de la phase π
κ	Courbure
$\in$	Retrait volumique (théorie de Biot)
μ	Viscosité dynamique
σ	Contrainte
υ	Coefficient de Poisson
ℓ	Déplacement
ρ	Masse volumique
ζ	Fonction quelconque

Indices Inférieurs

a	Air sec
b	Eau liée
c	Capillaire
eff	Effective

g	Gaz
l	Liquide
t	total
psf	Point de saturation de fibre
ri	Retrait idéal
s	Solide
sec	Sec ou sèche
surf	Surface
v	Vapeur
∞	Environnement extérieur au produit
0	Initial ou de référence
π	Phase quelconque
ς	Espace de Lagrange
x,y,z	Coordonnées spatiales (système orthonormal)

Indices Supérieurs

g	Gaz
l	Liquide
s	Solide
t	Temps

Symboles et opérateurs Mathématiques

$\vec{\zeta}$	Vecteur ζ
$\langle\ \rangle$	Moyenne
$\vec{\nabla}$	Gradient
$\vec{\nabla}\bullet$	Divergence
$\overline{\overline{\zeta}}$	Tenseur de second ordre ζ

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AGRAWAL L., MANDAL J. C., MARATHE A. G., 2001

Computations of Laminar and Turbulent Mixed Convection in a Driven Cavity Using Pseudo-Compressibility Approach, Computers and Fluids, Vol. 30, pp. 607-620.

ANTOVIC A., PERNEBY C., EKMAN G. J., WALLEN H. N., HJEMDAHL P., BLOMBACK M. and SHU HE., 2005

Marked Increase of Fibrin Gel Permeability with Very Low Dose ASA Treatment, Thrombosis Research, Vol. 116, pp.509-517.

ALVAREZ P.I et LEGUES P., 1988

Deshidratación de Agroproductos: Desarrollo de un Modelo Matemático para la Interpretación de las Curvas de Secado, Contribuciones Cientificas y Tecnologicas, Universidad de Santiago de Chile, pp.31-41.

AUGIER F., COUMANS W. J., HUGGET A., KAASSCHIIETER E. F., 2002

On the Risk of Cracking in Clay Drying, Chemical Engineering Journal, 86, pp. 133-138.

BAHER H. D. and STEPHAN K., 1998

Heat and Mass Transfer, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K.

BARREAU P., 1996

Modifications des Propiétés d'un Milieu Poreux en Présence d'une Couche de Polymère Adsorbé: Etudes Expérimentale et Numérique, Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers.

BASMADJIAN D., 2003

Mass Transfer: Principles and Application, CRC Press.

BENBOUDJEMA F., MEFTAH F., TORRENTI J. M., 2005

Interaction Between Drying, Shrinkage, Creep and Cracking Phenomena in Concrete, Engineering Structures, Vol. 27, pp. 239-250.

BERRYMAN J. G., 2005

Comparison of Upscaling Methods in Poroelasticity and Its Generalizations, J. Eng. Mech., Vol. 131, Issue 9, pp. 928-936.

BIOT M. A., 1941

General Theory of Three-Dimensional Consolidation, Journal of Applied Physics, vol. 12, pp. 155-164.

BIOT M. A., WILLIS D. G., 1957

The elastic coefficients of the theory of consolidation, Journal of Applied Mechanical, vol. 24, pp. 594-601.

CHANDLER N., 2004

Developing Tools for Excavation Design at Canada's Undergorund Research Laboratory, International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, Vol. 41, pp. 1229-1249.

COIRIER J., 1997
Mécanique des Milieux Continus (Concepts de Base), Dunod, Paris.

COUSSY O., 1991
Mécanique des Milieux Poreux, Editions Technip, Paris.

COUTURE F., 1995
Modélisation Fine d'un Probléme de Séchage (Développement d'outils adaptés), Thése de l'Université de Bordeaux I.

CUSHMAN J. H., BENNETHUM L. S., HU B. X., 2002
A Primer on Upscaling Tools for Porous Media, Advances in Water Resources, Vol. 25, pp. 1043-1067.

CRANK J., 1975
The Mathematics of Diffusion. Second Edition, Oxford University Press, New York.

DATTA A. K. and ZHANG J., 2001
Porous Media Approach to Heat and Mass Transfer in Solid Foods, Department of Agric. and Biol. Engineering, Cornell University.

DANTAS L. B., ORLANDE H. R. B., COTTA R. M., 2003
An Inverse Problem of Parameter Estimation for Heat and Mass Transfer in Capillary Porous Media, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 46, pp.1587-1598.

DELMI M. M. Y., AIT-MOKHTAR and AMIRI O., 2005
Modelling the Coupled Evolution of Hydration and Porosity of Cement-Based Materials, Construction and Building Materials, pp. 1-11.

EDUARDO A., SANTILLAN M., and DOMINGO A. T., 2003
Exact Solutions for Drying with Coupled Phase-Change in a Porous Medium with a Heat flux Condition on the surface, Computational and Applied Mathematics, Vol. 22, pp. 293-311.

EUVARARD D., 1994
Résolution Numérique des Equations aux Dérivées Partielles, 3 édition, Masson, Paris.

GEERTSMA J., 1974
Estimating the Coefficient of Inertial Resistance in Fluid Flow Through Porous Media, SPE Journal, pp 415-450.

GRATTONI C. A., AL-SHARJI H.H., YANG C., MUGGERIDE A. H. and ZIMMERMAN R.W., 2001
Rheology and Permeability of Crosslinked Polycrylamide Gel, Journal of Colloid and Interface Science, Vol. 240, pp. 601-607.

GUIGNARD S., MARCER R., REY V., KHARIF C., FRAUNIE P., 2001
Solitary Wave Breaking on Sloping Beaches : 2-D Two Phase Flow Numerical Simulation dy SL-VOF Method, Eur. J. Mech., B-Fluids vol.20, pp 57-74, éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS.

INCROPERA F.P., DeWITT D.P., 1996
Introduction to Heat Transfer, Third Edition, John Wiley and Sons, U.S.A.

IRUDAYARAJ J. and WU Y., 1966
Analysis and Application of Luikov's Heat, Mass and Pressure Transfer Model to a Capillary Porous Media, Drying Technology, Vol. 14, Issue 3-4, pp. 803-824.

ISLAM R. Md. and MUJUMDAR A. S., 2003
Role of Product Shrinkage in Drying Rate Predictions Using a Liquid Diffusion Model, Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol. 30, No 3, pp. 391-400.

JOMAA W., 1991
Séchage de Matériaux Fortement Déformables (prise en compte de la vitesse de retrait), Thèse de l'Université de Bordeaux I, France.

JOMAA W., 1994
Couplage entre propriétés de transport et caractéristiques mécaniques, Cahier de l'AFSIA (Association Française de Séchage dans l'Industrie et l'agriculture), No. 9 (Séchage des Milieux Fortement Déformables), pp.25-40.

JOMAA W. et PUIGGALI J. R., 1991
Drying of Shrinking Materials : Modeling With Shrinkage Velocity, Drying Technology, Vol. 9, Num. 5, pp. 1271-1293.

JOMAA W., PUIGGALI J. R., WITHAKER S., 1991
Transfert de Chaleur Lors du Séchage de Matériaux Fortement Déformables, 5éme J.I.T.H, 22-26 Avril, Monastir, France.

JOUETTE C., LAGET O., LE GOUEZ J. M., VIVIAND H., 2002
A Dual Time Stepping Method for Fluid-Structure Interaction Problems, Computers and Fluids, Vol. 31, pp. 509-537.

KANTOROVICH, KRYLOV, 1964
Approximate Methods of Higher Analysis, P. Noordhoff, Ltd., Groningen, The Nederlands.

KETELAARS A. A. J., 1992
Drying Deformable Media, Kinetics, Shrinkage and Stresses, PhD (thesis) Technische Universiteit Eindhoven.

KETELAARS A. A. J., KAASSCHITIER E. F., COUMANS W. J., KERKHOF P., 1994
The Influence of Shrinkage on Drying Behaviour of Clays, Drying Technology, Vol. 12, N° 7, pp. 1561-1574.

KOCHUPILLAI J., GANESAN N., PADMANABHAN C., 2005
A New Finite Element Formulation Based on the Velocity of Flow for Water Hammer Problems, International Journal of Pressure Vessels and Piping, vol. 82, pp 1-14, Elsevier.

LEWIS K., 1921
The rate of Drying of Solid Materials, Ind. Eng. Chem. 13, pp. 427-432.

LI X, YORTSOS Y. C., 1995
Theory of Multiple Bubble Growth in Porous Media by Solute Diffusion, Chemical Engineering Science, 50, pp. 1247-1271.

LEI H., LORRAINE F. F., GERBERICH W. W., SCRIVEN L. E., 2003
Stress Development in Drying Fibers and Spheres, Journal of Applied Polymer Science, Vol. 90, pp. 3934-3944.

LUIKOV A. V., 1966
Heat and Mass Transfer in Capillary Porous Bodies, Pergamon Press, Oxford.

LUIKOV A. V., 1975
Systems of Differential Equations of Heat and Mass Transfer in Capillary-porous Bodies, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 18, Issue 1, pp. 1-14.

McCARTHY M.R., VANDEGRIFF K. D., WINSLOW R. M., 2001
The Role of Facilitated Diffusion in Oxygen Transport by Cell-Free Hemoglobins: Implications for the Design of Hemoglobin-Based Oxygen Carriers, Biophysical Chemestry, Vol. 92, pp. 103-117.

McCUTCHEN C. W., 1998
Consolidation theory Derived Without Invoking Porosity, Int. J. Solids Structures, Vol 35, pp. 69-81.

MERCIER F., 1996
Séchage de Gel d'Alumine : Maîtrise de la Texture de Supports de Catalyseurs, Thèse de Doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour, Pau, France.

MOYNE C., 1987
Transferts Couplés Chaleur-Masse Lors du Séchage : Prise en Compte du Mouvement de la Phase Gazeuse, Thèse d'Etat, Nancy.

MOYNE C., DIDIERJEAN S., SOUTO H. P. A., SILVEIRA O. T., 2000
Thermal Dispertion in Porous Media : One-Equation Model, Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 43, pp. 3853-3867.

MUJUMDAR A., 2000
Drying Technology in Agriculture and Food Sciences, Chapter Two.

NADEAU J. P. et PUIGGALI J. R., 1995
Séchage des Processus Physiques aux Procédés Industriels, Technique et Documentation-Lavoisier, Paris.

NATERER G. F., 2003
Dispersed Multiphase Flow With Air-Driven Runback of a Liquid Layer at a Moving Boundary, International Journal of Multiphase Flow, 29, pp. 1833-1856.

NOURAGALIEV R.R., DINH T.N., THEOFANOUS T.G., 2004
A Pseudocompressibility Method for Numerical Simulation of Incompressible Multifluid Flows, International Journal of Multiphase Flow, vol. 30, pp 901-937, Elsevier.

OBEID W., MOUNAJED G., ALLICHE A., 2001
Mathematical Formulation of Thermo-Hygro-Mechanical Coupling Problem in on Non-Saturated Porous Media, Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, pp 5105-5122, Elsevier Science B. V.

OLIVEIRA P. C. et LIMA J. L., 2003
Esquema de Discretição Flux-Spline Aplicado à Secagem, em Meio Poroso Capilar, Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental, Vol. 7, N° 1, pp. 135-140.

PEL L., LANDAMAN K. A., KAASSCHIETER E. F., 2002
Analytic Solution for the Non-Linear Drying Problem, International Journal of Heat and Mass Transfer, 45, pp 3173-3180.

PERRE P., and DEGIOVANNI A., 1990
Simulations par Volumes Finis des Transferts Couplés en Milieu Poreux Anisotropes: Séchage du Bois à Basse et Haute Température, Int. J. Heat Mass Transfer Vol. 11, 33, pp. 2463–2478.

PHALIPPOU J., WOIGNIER T., SEMPERE R., DIEUDONNE P., 2002
Highly Porous Aereogels of Very Low Permeability, Materials Science, Vol. 20, N°1.

PLOURDE F. et PRAT M., 2003
Pore Network Simulations of Drying of Capillary Porous Media. Influence of Thermal Gradients, International Journal of Heat and Mass Transfer, 46, pp. 1293-1307.

PORRAS G. O., 2005
Modélisation des Phénomènes de Transports en Milieu Diphasique Déformable (solide-liquide binaire): Simulation 2D du Séchage Convectif, Thèse de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour, France.

POURCEL F., 2003
Séchage de Gel d'Alumine : Mise en Evidence et Définition d'un Critère de Fissuration, Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, France.

PRAT M., 2002
Recent Advances in Pore-Scale Models for Drying of Porous Media, Chemical Engineering Journal, Vol. 86, pp. 153-164.

PUIGGALI J. R. et QUINTARD M., 1992
Propiertes and simplifying assumptions for classical drying models. Advances in Drying, vol. 5, Hemisphere Publishing Corporation, New York.

PUIROX N., PRAT M. and QUINTARD M., 2004
Non-equilibrium Theories for Macroscale Heat Transfer : Ablative Composite Layer Systems, International Journal of Thermal Sciences, Vol. 43, pp. 541-554.

QUINTARD M., KAVIANY M. and WHITAKER S., 1997
Two-medium Treatment of Heat transfer in Porous Media: Numerical Results for Effective Properties, Advances in Water Resources, Vol. 20, N° 2-3, pp. 77-94.

QUINTARD M. and WHITAKER S., 1994
Transport in Ordered and Disordered Media I: Cellular Averaged and the Use of Weighting Functions, Transport in Porous Media, 14, pp. 179-206

QUINTARD M. and WHITAKER S., 1995
Local Thermal Equilibrium for Transient Heat Conduction: Theory and Comparison With Numerical Experiments, International Journal of Heat Transfer, N° 15, pp. 2779-2796.

QUINTARD M. and WHITAKER S., 1998
Transport in Chemically and Mechanically Heterogeneous Porous Media IV: Large-Scale Mass Equilibrium for Solute Transport with Adsorption.

SACADURA J.F., 1982
Initiation aux Transferts Thermiques, Technique et documentation (Lavoisier), Paris.

SAKATA K., 1983
A Study on Moisture Diffusion in Drying and Drying Shrinkage of Concrete, Cement and Concrete Research, Vol. 13, No. 2, pp. 216-224.

SALENÇON J., 1988
Mécanique des Milieux Continus, vol. I Concepts généraux, Ed. Ellipses, Paris.

SANDER A., SKANSI D. and BOLF N., 2003
Heat and Mass Transfer Models in Convection Drying of Clay Slabs, Ceramics International, vol. 29, pp 641-653.

SARMENTO André L. S. C., COUTURE F., LAURENT S. and ROQUES M. A. , 2004
Modeling of Heat and Mass Transport in Two-Phase Media by Considering Liquid Pressure, Drying Technology, vol. 22, Num.1 &.2, pp.81-90.

SHANGYAN H., BARBOUR S. L and FREDLUND D. G., 1998
Development and Verification of a Coefficient of Permeability Function for a Deformable Unsaturated Soil, Can. Geotech. J., Vol. 35, pp. 411-425.

SHERWOOD T. K., 1929
The drying of Solids I, Int. Eng. Chem., 21, pp 976-980.

SIH G. C., MICHOPOLUS J. G., CHOU S. C., 1986
Hygrothermoelasticity, Kluwert Academic Publisher, Dordrecht.

SILIN D. B., KORNEEV V.A., GOLOSHUBIN G.M., and PATZEK T.W., 2004
A Hydrologic View on Boit's Theory of Poroelasticity, Lawrence Berkeley National Laboratory, Paper LBNL 54459, Scholarship Repository, University of California.

TERZAGHI K., 1943
Theoretical Soil Mechanics, John Wiley and Sons, New York

TUMIDAJSKI P. J., CHAN G. W., FELDMAN R. F. and STRATHDEE G., 1996
A Reply to a Discussion by S.Chatterji of the Paper "A Boltzmann-Matano Analysis of Chloride Diffusion", Cement and Concrete Research, Vol. 26, No. 5, pp. 817-819.

TURNER I. W. and FERGUSON W. J., 1995
An Unstructured Mesh Cell-Centred Control Volume Method fro Simulating Heat and Mass Transfer in Porous Media: Application to Softwood Drying, Part I: The Isotropic Model, Appl. Math. Modelling, Vol. 19, pp.654-667.

VAN BRAKEL J., 1980
Mass Transfer in Convective Drying, Advances Drying, 1, pp. 212-267

WAANANEN K. M., LITCHFIELD J. B. and OKOS M. R., 1993
Classification of Drying Models for Porous Solids, Drying Technology, 11, pp. 1-40.

WHITAKER S., 1980
Heat and Mass Transfer in Granular Porous Media, Advances Drying, 1, pp. 23-61.

WHITAKER S., 1977
Simultaneous heat, mass, and momentum transfer in porous media: a theory of drying. Advances in heat transfer, 13, pp 119-203.

WHITAKER S., 1986
Flow in Porous Media III: Deformable Media. Transport in Porous Media, 1, pp 127-154.

WHITAKER S., 1996
The Forchheimer Equation: A Theoretical Development, Department of Chemical Engineering and Material Science, University of California at Davis, Davis, CA 95616, U.S.A.

WOOD B. D., QUINTARD M. and WHITAKER S., 2000
Jump Conditions at Non-uniform Boundaries: The catalytic Surface, Chemical Engineering Sciences, 55, pp. 5231-5245.

WOOD B. D. and WHITAKER S., 1998
Diffusion and reaction in Biofilms, Chemical Engineering Science, Vol. 53, No. 3, pp. 397-425.

WOOD B. D. and WHITAKER S., 2000
Multi-species Diffusion and Reaction in Biofilms and Cellular Media, Chemical Engineering Science, Vol. 55, pp. 3397-3418.

YIOTIS A. G., STUBOS A. K., BOUDOUVIS A. G., YORTSOS Y. C., 2001
A 2-D Pore-Network Model of the Drying of Single-Component Liquids in Porous Media, Advances in Water Resources, 24, pp. 439-460.

ZABARAS N. and SAMANTA D., 2004
A Stabilized Volume-Averaging Finite Element Method for Flow in Porous Media and Binary Alloy Solidification Processes, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 60/5, pp. 1-38.

ZAGROUBA F., MIHOUBI D., BELLAGI A., 2002
Drying of Clay**.** II : Rheological Modelisation and Simulation of Physical Phenomena. Drying Technology, vol. 20, No. 10, pp. 1895-1917.

ANNEXE 1 :
Relation retrait volumique du V.E.R et vitesse de déformation du milieu

Avant de commencer notre développement, il est nécessaire faire quelques rappels sur la vitesse locale de retrait $\vec{V}_r(t)$, afin de nous faciliter la compréhension de ce paragraphe.

Rappels :

$$\vec{V}_r(t) = \begin{cases} \vec{V}_s(t) & \text{dans } \nu_s(t),\ \text{sur } A_s(t) \text{ et } A_{sl}(t) \\ \vec{V}_\beta(t) & \text{dans } \nu_l(t) \text{ et } A_l(t) \end{cases}$$

Par définition on a :

$$\frac{1}{\nu(t)}\int_{\nu(t)} \vec{V}_r(t)\, d\nu = \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s \ ;\ \frac{1}{\nu_s(t)}\int_{\nu_s(t)} \vec{V}_s(t)\, d\nu = \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s \ ;\ \frac{1}{\nu_l(t)}\int_{\nu_l(t)} \vec{V}_\beta(t)\, d\nu = \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^s .$$

L'écriture dans une forme intégrale d'un V.E.R déformable :

$$\nu(t) = \int_{\nu(t)} 1\, d\nu \tag{A1.1}$$

Le théorème de la dérivée particulaire d'une intégrale sur un domaine $\nu(t)$ nous permet alors d'écrire :

$$\frac{d\nu(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\int_{\nu(t)} 1\, d\nu\right] = \int_{\nu(t)} \frac{\partial(1)}{\partial t}\, d\nu + \int_{A(t)} \left(\vec{V}_r(t)\cdot\vec{n}\right) dA \tag{A1.2}$$

Sous l'intégrale de volume, nous trouvons la dérivée d'une fonction constante, donc l'expression précédente est tout de suite réduite à

$$\frac{d\nu(t)}{dt} = \int_{A(t)} \left(\vec{V}_r(t)\cdot\vec{n}\right) dA \tag{A1.3}$$

or en appliquant le théorème de la divergence, on a

$$\int_{A(t)} \left(\vec{V}_r(t)\cdot\vec{n}\right) dA = \int_{\nu(t)} \vec{\nabla}\cdot\vec{V}_r(t)\, d\nu \tag{A1.4}$$

En remplaçant (A1.4) dans (A1.3) et en considérant le milieu diphasique ($\nu(t) = \nu_l(t) + \nu_s(t)$):

$$\frac{1}{\nu(t)}\frac{d\nu(t)}{dt} = \frac{1}{\nu(t)}\int_{\nu_l(t)} \vec{\nabla}\cdot\vec{V}_r(t)\, d\nu + \frac{1}{\nu(t)}\int_{\nu_s(t)} \vec{\nabla}\cdot\vec{V}_r(t)\, d\nu \tag{A1.5}$$

soit en remémorant la définition du champ de vitesse de retrait local $\vec{V}_r(t)$

$$\frac{1}{v(t)}\frac{dv(t)}{dt}=\frac{1}{v(t)}\int_{v(t)}\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_{\beta}(t)\,dv+\frac{1}{v(t)}\int_{v(t)}\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_{s}(t)\,dv \tag{A1.6}$$

Le théorème de la prise de moyenne appliqué à l'opérateur divergence permet de réécrire chacun des deux termes de l'équation précédente :

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{v(t)}\int_{v(t)}\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_{\beta}(t)\,dv&=\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{1}{v(t)}\int_{v_1(t)}\vec{V}_{\beta}(t)\,dv\right]+\frac{1}{v(t)}\int_{A_{ls}(t)}\left(\vec{V}_{\beta}(t)\cdot\vec{n}_{ls}\right)dA\\ \frac{1}{v(t)}\int_{v(t)}\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_{s}(t)\,dv&=\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{1}{v(t)}\int_{v_s(t)}\vec{V}_{s}(t)\,dv\right]+\frac{1}{v(t)}\int_{A_{sl}(t)}\left(\vec{V}_{s}(t)\cdot\vec{n}_{sl}\right)dA\end{aligned}\right\} \tag{A1.7}$$

Ensuite, si nous prenons en compte le rappel 2 de cette annexe et la définition de la fraction volumique, les expressions suivantes son trouvées à partir de (A1.7) :

$$\frac{1}{v(t)}\int_{v(t)}\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_{\beta}(t)\,dv=\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_1\left\langle\vec{V}_{s}\right\rangle^{s}\right)+\frac{1}{v(t)}\int_{A_{ls}(t)}\left(\vec{V}_{\beta}(t)\cdot\vec{n}_{ls}\right)dA \tag{A1.8}$$

et

$$\frac{1}{v(t)}\int_{v(t)}\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_{s}(t)\,dv=\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_s\left\langle\vec{V}_{s}\right\rangle^{s}\right)+\frac{1}{v(t)}\int_{A_{sl}(t)}\left(\vec{V}_{s}(t)\cdot\vec{n}_{sl}\right)dA \tag{A1.9}$$

Donc, en remplaçant (A1.8) et (A1.9) dans (A1.6), l'égalité (A1.5) est récrire de la forme suivante :

$$\frac{1}{v(t)}\frac{dv(t)}{dt}=\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\varepsilon_s+\varepsilon_1\right)\left\langle\vec{V}_{s}\right\rangle^{s}\right]+\frac{1}{v(t)}\int_{A_{ls}(t)}\left(\vec{V}_{\beta}(t)-\vec{V}_{s}(t)\right)\cdot\vec{n}_{ls}\,dA \tag{A1.10}$$

En diphasique la somme des fractions volumiques est toujours égale à l'unité et en plus toutes les vitesses sur l'interface $A_{ls}(t)$ sont égales ($\vec{V}_{\beta}(t)=\vec{V}_{s}=\vec{V}_{l}$). Ce-ci nous permet, finalement, d'écrire la relation définitive entre le retrait du V.E.R et la vitesse de déformation du milieu :

$$\frac{1}{v(t)}\frac{dv(t)}{dt}=\vec{\nabla}\cdot\left\langle\vec{V}_{s}\right\rangle^{s} \tag{A1.11}$$

ANNEXE 2 :
Analyse de la divergence de la moyenne du terme convectif de l'équation de conservation de masse d'une phase π

Le terme de divergence $\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{1}{v(t)}\int_{v_\pi(t)}\widehat{\rho}_\pi\left(\vec{V}_\pi-\vec{V}_r(t)\right)dv\right]$ qui se trouve dans l'équation de conservation de la masse (3.22) est étudié dans cette annexe.

D'abord, dans le terme de la divergence nous considérons la définition de déviation d'une fonction (3.7), pour pouvoir écrire la relation suivante :

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{1}{v(t)}\int_{v_\pi(t)}\widehat{\rho}_\pi\left(\vec{V}_\pi-\vec{V}_r(t)\right)dv\right]=\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{1}{v(t)}\int_{v_\pi(t)}\left(\langle\rho_\pi\rangle^\pi+\widetilde{\rho}_\pi\right)\left(\vec{V}_\pi-\vec{V}_r(t)\right)dv\right] \qquad (A2.1)$$

Si on considère que la phase π est la phase liquide ($\pi=l$), nous pouvons démontrer que la contribution du terme de déviation de la masse volumique du liquide $\widetilde{\rho}_l$, est négligeable devant la contribution du terme de masse volumique intrinsèque du liquide $\langle\rho_l\rangle^l$. Pour faire cette démonstration, nous aurons besoin d'écrire d'abord une fonction analytique ($\langle\rho_l\rangle^l$ en fonction de $\langle P_l\rangle^l$) à partir de l'équation d'état du liquide (3.29), car elle nous faciliterais beaucoup l'analyse des ordres de grandeurs. Alors, l'équation d'état du liquide est :

$$\frac{d\langle\rho_l\rangle^l}{\langle\rho_l\rangle^l}=\chi\, d\langle P_l\rangle^l$$

soit en intégrant avec les valeurs de référence de la masse volumique intrinsèque du liquide $\langle\rho_{lo}\rangle^l$ et de la pression intrinsèque du liquide $\langle P_{lo}\rangle^l$

$$\int_{\langle\rho_{lo}\rangle^l}^{\langle\rho_l\rangle^l}\frac{1}{\langle\rho_l\rangle^l}\,d\langle\rho_l\rangle^l=\chi\int_{\langle P_{lo}\rangle^l}^{\langle P_l\rangle^l}d\langle P_l\rangle^l$$

c'est à dire

$$\langle\rho_l\rangle^l=\langle\rho_{lo}\rangle^l\exp\left[\chi\left(\langle P_l\rangle^l-\langle P_{lo}\rangle^l\right)\right]$$

La fonction exponentielle peut être développée en série de Maclaurin. Dû faits de très faibles valeurs de la de compressibilité des liquides en général, un développement limité aux deux premiers ordres de cette série sera suffisant pour avoir des valeurs correctes de la fonction :

$$\langle \rho_l \rangle^l = \langle \rho_{lo} \rangle^l + \langle \rho_{lo} \rangle^l \chi \left(\langle P_l \rangle^l - \langle P_{lo} \rangle^l \right) \qquad \text{(A2.2)}$$

- ***Analyse d'ordre de grandeur du terme de déviation de la masse volumique de la phase liquide*** $\tilde{\rho}_l$

En effet, en considérant l'équation d'état du liquide (A2.2) et du fait de la très faible compressibilité des liquides ($\chi << 1$) le terme $\chi \langle \rho_{lo} \rangle^l \left(P_l - P_{lo} \right)$ est négligeable devant $\langle \rho_{lo} \rangle^l$.

Les ordres de grandeurs rencontrés dans un processus classique de séchage sont :

$$\langle \rho_{lo} \rangle^l = O(1x10^3) \; ; \; \left(\langle P_l \rangle^l - \langle P_{lo} \rangle^l \right) \approx O(1x10^5) \; ; \; \chi = O(1x10^{-10})$$

d'où

$$\chi \langle \rho_{lo} \rangle^l \left(\langle P_l \rangle^l - \langle P_{lo} \rangle^l \right) \approx O(1x10^{-2})$$

et donc $\chi \langle \rho_{lo} \rangle^l \left(\langle P_l \rangle^l - \langle P_{lo} \rangle^l \right) << \langle \rho_{lo} \rangle^l$

Ainsi l'expression (A2.2) nous amène à écrire finalement :

$$\langle \rho_l \rangle^l \approx \langle \rho_{lo} \rangle^l \qquad \text{(A2.3)}$$

En conclusion, comme est exprimé dans l'expression (A2.3), la masse volumique du liquide à une variation très faible, donc on peut considérer que elle aurait une distribution dans le V.E.R presque uniforme et par conséquent sa déviation peut être négligée ($\tilde{\rho}_l \approx 0$).

<u>*Remarque :*</u>

Dans le cas de la phase solide, le terme de déviation de la masse volumique du solide est nul ($\tilde{\rho}_s = 0$) car la phase solide est considérée incompressible, donc elle a une distribution uniforme dans le V.E.R.

Ainsi, que la phase π représente la phase liquide ou la phase solide l'équation (A2.1) devient :

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{1}{\nu(t)}\int_{\nu_\pi(t)}\widehat{\rho}_\pi\left(\vec{V}_\pi-\vec{V}_r(t)\right)d\nu\right]=\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{1}{\nu(t)}\int_{\nu_\pi(t)}\langle\rho_\pi\rangle^\pi\left(\vec{V}_\pi-\vec{V}_r(t)\right)d\nu\right] \tag{A2.4}$$

En développant le terme à gauche de l'égalité

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\langle\rho_\pi\rangle^\pi\frac{1}{\nu(t)}\int_{\nu_\pi(t)}\left(\vec{V}_\pi-\vec{V}_r(t)\right)d\nu\right]=$$
$$\langle\rho_\pi\rangle^\pi\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{1}{\nu(t)}\int_{\nu_\pi(t)}\vec{V}_\pi\,d\nu-\varepsilon_\pi(t)\frac{1}{\nu_\pi(t)}\int_{\nu_\pi(t)}\vec{V}_r(t)\,d\nu\right]$$
$$+\vec{\nabla}\langle\rho_\pi\rangle^\pi\cdot\left[\frac{1}{\nu(t)}\int_{\nu_\pi(t)}\vec{V}_\pi\,d\nu-\varepsilon_\pi(t)\frac{1}{\nu_\pi(t)}\int_{\nu_\pi(t)}\vec{V}_r(t)\,d\nu\right]$$

Si nous appliquons la définition de la prise de moyenne aux termes qui contiennent les vitesses et la définition (3.13) qui nous permet d'écrire $\frac{1}{\nu_\pi(t)}\int_{\nu_\pi(t)}\vec{V}_r(t)\,d\nu=\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s$ l'expression précédente devient

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\langle\rho_\pi\rangle^\pi\frac{1}{\nu(t)}\int_{\nu_\pi(t)}\left(\vec{V}_\pi-\vec{V}_r(t)\right)d\nu\right]=$$
$$\langle\rho_\pi\rangle^\pi\left[\vec{\nabla}\cdot\left\langle\vec{V}_\pi\right\rangle-\varepsilon_\pi(t)\vec{\nabla}\cdot\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\underbrace{\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s\cdot\vec{\nabla}\left(\varepsilon_\pi(t)\right)}_{[1]}+\underbrace{\frac{\vec{\nabla}\langle\rho_\pi\rangle^\pi}{\langle\rho_\pi\rangle^\pi}\left(\left\langle\vec{V}_\pi\right\rangle-\varepsilon_\pi(t)\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s\right)}_{[2]}\right] \tag{A2.5}$$

Si la phase π est la phase solide ($\pi=s$), $\vec{\nabla}\langle\rho_\pi\rangle^\pi=\vec{\nabla}\langle\rho_s\rangle^s=0$ et donc le terme [2] de l'équation (A2.5) est nul.

Par contre, si π représente la phase liquide il faut regarder les ordres de grandeurs pour savoir si on peut négliger le terme [2] de (A2.5).

- ***Comparaison d'ordre de grandeur entre le terme*** [1] ***et le terme*** [2] ***de l'expression*** (A2.5) ***pour la phase liquide (*** $\pi=1$***)***

Dans le terme [1] de l'équation (A2.5), le gradient de fraction volumique a l'ordre de grandeur suivant :

$$\vec{\nabla}\left(\varepsilon_l(t)\right) \approx O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{v(t)}}\right)$$

Si on considère dans le terme [2] de l'équation (A2.5) la loi d'état de la phase liquide, le terme qui contient le gradient de masse volumique du liquide a l'ordre de grandeur suivant :

$$\frac{\vec{\nabla}\left\langle\rho_l\right\rangle^l}{\left\langle\rho_l\right\rangle^l} = O\left(\chi\frac{dP_l}{\sqrt[3]{v(t)}}\right)$$

Ainsi, du fait de la très faible compressibilité des liquides et des valeurs de pression pendant un processus de séchage, on peut écrire :

$$\frac{\vec{\nabla}\left\langle\rho_l\right\rangle^l}{\left\langle\rho_l\right\rangle^l} << \vec{\nabla}\left(\varepsilon_l(t)\right) \tag{A2.6}$$

Le terme [2] de l'expression (A2.5) est alors négligeable par rapport au terme [1].

Ainsi, pour une phase π quelconque, l'expression (A2.5) devient :

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\left\langle\rho_\pi\right\rangle^\pi\frac{1}{v(t)}\int_{v_\pi(t)}\left(\vec{V}_\pi-\vec{V}_r(t)\right)dv\right] =$$
$$\left\langle\rho_\pi\right\rangle^\pi\left[\vec{\nabla}\cdot\left\langle\vec{V}_\pi\right\rangle-\varepsilon_\pi(t)\vec{\nabla}\cdot\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s\cdot\vec{\nabla}\left(\varepsilon_\pi(t)\right)\right]$$

soit en regroupant les termes dans la divergence

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\left\langle\rho_\pi\right\rangle^\pi\frac{1}{v(t)}\int_{v_\pi(t)}\left(\vec{V}_\pi-\vec{V}_r(t)\right)dv\right] = \left\langle\rho_\pi\right\rangle^\pi\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\left\langle\vec{V}_\pi\right\rangle-\varepsilon_\pi(t)\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s\right)\right]$$

Nous arrivons, alors, à une nouvelle écriture de l'expression (A2.1) :

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{1}{v(t)}\int_{v_\pi(t)}\widehat{\rho}_\pi\left(\vec{V}_\pi-\vec{V}_r(t)\right)dv\right] = \left\langle\rho_\pi\right\rangle^\pi\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\left\langle\vec{V}_\pi\right\rangle-\varepsilon_\pi(t)\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s\right)\right] \tag{A2.7}$$

Il a déjà été démontré dans cet annexe, que pour une phase quelconque π d'un milieu diphasique, la masse volumique intrinsèque $\left\langle\rho_\pi\right\rangle^\pi$ peut être considérée comme approximativement uniforme dans l'espace, c'est-à-dire que :

$$\left\langle\rho_\pi\right\rangle^\pi\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\left\langle\vec{V}_\pi\right\rangle-\varepsilon_\pi(t)\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s\right)\right] \cong \vec{\nabla}\cdot\left[\left\langle\rho_\pi\right\rangle^\pi\left(\left\langle\vec{V}_\pi\right\rangle-\varepsilon_\pi(t)\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s\right)\right]$$

ensuite en appliquant la relation entre la moyenne intrinsèque et la moyenne apparente d'une fonction (3.5), (A2.8) devient

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\langle\rho_\pi\rangle^\pi\left(\left\langle\vec{V}_\pi\right\rangle-\varepsilon_\pi(t)\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s\right)\right]=\vec{\nabla}\cdot\left(\langle\rho_\pi\rangle\left\langle\vec{V}_\pi\right\rangle^\pi-\langle\rho_\pi\rangle\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s\right) \qquad \text{(A2.8)}$$

Les expressions (A2.7) (A2.8) permettent de proposer l'écriture suivant de la divergence de la moyenne du terme convectif de l'équation de conservation de masse d'une phase π :

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{1}{\nu(t)}\int_{\nu_\pi(t)}\widehat{\rho}_\pi\left(\vec{V}_\pi-\vec{V}_r(t)\right)d\nu\right]=\vec{\nabla}\cdot\left(\langle\rho_\pi\rangle\left\langle\vec{V}_\pi\right\rangle^\pi-\langle\rho_\pi\rangle\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s\right) \qquad \text{(A2.9)}$$

ANNEXE 3 :
Analyse des ordres de grandeur dans l'équation de conservation de masse liquide

Reprenons l'écriture de l'équation de conservation de masse liquide (3.35) :

$$\varepsilon_l \chi \left[\frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial t} + \left(\langle \vec{V}_s \rangle^s - \frac{\overline{\overline{k}}}{\varepsilon_l \mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right) \cdot \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right] + \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_l \langle \vec{V}_s \rangle^s - \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right) = 0 \quad \text{(A3.1)}$$

L'analyse de l'ordre de grandeur s'effectue à partir de la réécriture suivante de cette équation (A3.1) :

$$\varepsilon_l \chi \frac{\partial \langle P_l \rangle^l}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} + \underbrace{\left(\varepsilon_l \langle \vec{V}_s \rangle^s - \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right) \cdot \chi \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l + \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_l \langle \vec{V}_s \rangle^s - \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \right)}_{[F]} = 0 \quad \text{(A3.2)}$$

où [F] est le terme de flux de masse liquide.

Par la suite de cette annexe, l'analyse d'ordre de grandeur est fait uniquement dans ce terme de flux [F]. Alors en déployant [F] nous avons :

$$\varepsilon_l \langle \vec{V}_s \rangle^s \chi \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l - \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \cdot \chi \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l + \varepsilon_l \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{V}_s \rangle^s + \langle \vec{V}_s \rangle^s \cdot \vec{\nabla} \varepsilon_l - \vec{\nabla} \cdot \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l$$

ensuite un regroupement des termes nos donne

$$\varepsilon_l \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{V}_s \rangle^s + \underbrace{\langle \vec{V}_s \rangle^s \cdot \vec{\nabla} \varepsilon_l}_{[1]} + \underbrace{\chi \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \left(\varepsilon_l \langle \vec{V}_s \rangle^s \right)}_{[2]} - \underbrace{\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \chi \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l}_{[3]} - \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l}_{[4]}$$

On voit immédiatement que les termes [3] et [4] se ressemblant, donc une comparaison d'ordre de grandeur entre eux est envisageable.

- ***Comparaison d'ordre de grandeur entre les termes*** [3] ***et*** [4]

Les ordres de grandeurs de [3] et [4] sont

$$\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l \chi \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l = O\left(\chi \frac{k}{\mu_l} \frac{d^2 \langle P_l \rangle^l}{\nu^{2/3}} \right) \text{ et } \vec{\nabla} \cdot \frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^l = O\left(\frac{k}{\mu_l} \frac{d \langle P_l \rangle^l}{\nu^{2/3}} \right)$$

où $\nu^{1/3}$ est un longueur caractéristique obtenue à partir du volume ν du V.E.R.

Un premier regard à ces ordres de grandeurs, nous amène tout de suite à faire la supposition suivante :

$$O\left(\chi\frac{k}{\mu_l}\frac{d^2\langle P_l\rangle^l}{\nu^{2/3}}\right)<<O\left(\frac{k}{\mu_l}\frac{d\langle P_l\rangle^l}{\nu^{2/3}}\right)\Rightarrow\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l\chi\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l<<\vec{\nabla}\cdot\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l$$

Cette inégalité est possible grâce à la a valeur très faible de la compressibilité des liquides χ, nous avons alors :

$$\chi\frac{k}{\mu_l}\frac{d^2\langle P_l\rangle^l}{\nu^{2/3}}<<\frac{k}{\mu_l}\frac{d\langle P_l\rangle^l}{\nu^{2/3}}$$

En faisant une simple simplification algébrique, l'inégalité précédente devient :

$$\chi\, d\langle P_l\rangle^l<<1 \qquad \text{(A3.3)}$$

Cette condition (A3.3), a été déjà vérifie dans l'annexe 2 et nous permette d'affirmer que le terme [3] est effectivement négligeable devant le terme [4].

Il a été aussi démontré dans l'annexe 2, que dû à la faible compressibilité des liquides ($\chi\, d\langle P_l\rangle^l<<1$) le terme [2] est négligeable devant le terme [1].

En résumé, les termes [2] et [3] sont négligeables à cause de la très faible compressibilité des liquides et le terme de flux [F] est alors réduit à l'expression suivante :

$$\underbrace{\left(\varepsilon_l\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l\right)\cdot\chi\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l+\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_l\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l\right)}_{[F]}=\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_l\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l\right)$$

ce qui nous amène, finalement, à pouvoir réécrire l'équation de conservation de la masse liquide (A3.1) dans sa forme simplifiée :

$$\varepsilon_l\chi\frac{\partial\langle P_l\rangle^l}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_l}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_l\left\langle\vec{V}_s\right\rangle^s-\frac{\overline{\overline{k}}}{\mu_l}\vec{\nabla}\langle P_l\rangle^l\right)=0 \qquad \text{(A3.4)}$$

ANNEXE 4 :
Détermination de la condition limite de l'équation de conservation de la masse d'une phase π

La variation de la masse totale de la phase π (m_π) dans un volume $v(t)$ du milieu déformable :

$$\frac{dm_\pi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{v(t)} \langle \rho_\pi \rangle \, dv \tag{A4.1}$$

Le théorème de la dérivée particulaire appliquée à une intégrale de volume permet de développer le second membre de l'équation précédente et d'écrire :

$$\frac{dm_\pi(t)}{dt} = \int_{v(t)} \frac{\partial \langle \rho_\pi \rangle}{\partial t} dv + \int_{A(t)} \langle \rho_\pi \rangle \vec{w} \cdot \vec{n} \, dA \tag{A4.2}$$

où $A(t)$ est la frontière du volume $v(t)$, $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à $A(t)$ et sortant de $v(t)$, $\vec{w}$ est la vitesse de déplacement de la frontière $A(t)$ (dans notre cas $\vec{w} = \langle \vec{V}_s \rangle^s$), dA et dv sont respectivement les différentielles de surface et de volume.

On peut de plus relier la variation au cours de temps $\frac{dm_\pi(t)}{dt}$ au flux de masse F_{m_π} de cette phase sortant du volume $v(t)$:

$$\frac{dm_\pi(t)}{dt} = \int_{A(t)} F_{m_\pi} \, dA \tag{A4.3}$$

En reportant l'équation (A4.3) dans l'équation (A4.2), il vient :

$$\underbrace{\int_{v(t)} \frac{\partial \langle \rho_\pi \rangle}{\partial t} dv}_{[1]} + \int_{A(t)} \langle \rho_\pi \rangle \langle \vec{V}_s \rangle^s \cdot \vec{n} \, dA = \int_{A(t)} F_{m_\pi} \, dA \tag{A4.4}$$

La forme générale de l'équation de conservation de la masse d'une phase π s'écrit (c.f. équation (3.24)) :

$$\int_{v(t)} \frac{\partial \langle \rho_\pi \rangle}{\partial t} dv + \int_{v(t)} \vec{\nabla} \cdot \left(\langle \rho_\pi \rangle \langle \vec{V}_\pi \rangle^\pi \right) dv = 0$$

soit en appliquant le théorème de la divergence

$$\int_{v(t)} \frac{\partial \langle \rho_\pi \rangle}{\partial t} dv = -\int_{A(t)} \left(\langle \rho_\pi \rangle \langle \vec{V}_\pi \rangle^\pi \right) \cdot \vec{n} \, dA \tag{A4.5}$$

En reportant l'équation (A4.5) dans l'expression (A4.4), il vient

$$\int_{A(t)} F_{m_\pi}\, dA = -\int_{A(t)} \left(\langle \rho_\pi \rangle \left\langle \vec{V}_\pi \right\rangle^{\pi} \right) \cdot \vec{n}\, dA + \int_{A(t)} \langle \rho_\pi \rangle \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^{s} \cdot \vec{n}\, dA$$

L'équation précédente est valable quelque soit la frontière A(t) d'un volume $\nu(t)$ se déformant au cours du temps. On peut écrire :

$F_{m_\pi} = -\langle \rho_\pi \rangle \left\langle \vec{V}_\pi \right\rangle^{\pi} \cdot \vec{n} + \langle \rho_\pi \rangle \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^{s} \cdot \vec{n}$, pour tout point appartenant à A(t).

La condition limite de l'équation de conservation de masse d'une phase π, pour un milieu poreux diphasique déformable, s'obtient en considérant que A(t) est la frontière de ce milieu poreux déformable. Elle s'écrit donc :

$$F_m = \langle \rho_\pi \rangle \left(\left\langle \vec{V}_s \right\rangle^{s} - \left\langle \vec{V}_\pi \right\rangle^{\pi} \right) \cdot \vec{n} \qquad \text{(A4.6)}$$

- ***Condition limite pour la conservation de la masse liquide***

La condition limite (A4.6) appliquée à la phase liquide ($\pi = l$) est :

$$F_{ml} = \langle \rho_l \rangle \left(\left\langle \vec{V}_s \right\rangle^{s} - \left\langle \vec{V}_l \right\rangle^{l} \right) \cdot \vec{n} \qquad \text{(A4.7)}$$

L'équation à la limite précédente associée à la loi de Darcy exprimée dans l'équation (3.27) amène, quand l'effet de la pesanteur est négligée, à :

$$F_{ml} = \frac{\langle \rho_l \rangle}{\varepsilon_l} \frac{\bar{\bar{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^{l} \cdot \vec{n}$$

Les masses volumiques intrinsèques et apparentes étant reliées entre elles par la relation $\langle \rho_l \rangle = \varepsilon_l \langle \rho_l \rangle^{l}$, la condition à la limite de la conservation de masse liquide s'écrit finalement :

$$F_{ml} = \langle \rho_l \rangle^{l} \frac{\bar{\bar{k}}}{\mu_l} \vec{\nabla} \langle P_l \rangle^{l} \cdot \vec{n} \qquad \text{(A4.8)}$$

- ***Condition limite pour la conservation de la masse solide***

La condition limite (A4.6) appliquée à la phase solide ($\pi = s$) est :

$$F_{ms} = \langle \rho_s \rangle \left(\left\langle \vec{V}_s \right\rangle^{s} - \left\langle \vec{V}_s \right\rangle^{s} \right) \cdot \vec{n} = \vec{0} \cdot \vec{n} \qquad \text{(A4.9)}$$

c'est à dire

$$F_{ms} = 0 \qquad \text{(A4.10)}$$

F_{ms} est le flux de masse de la phase solide. Cette relation exprime simplement qu'il n'y a pas de perte de masse solide.

ANNEXE 5 :
Contrainte effective

L'idée d'une contrainte effective, est déduite à partir d'un bilan de forces sur des grains solides (phase solide), qui se trouvent à l'intérieur d'un volume V soumis à une charge extérieur P normale a la surface extérieure du milieu (Figure A5.1). Les forces de cisaillement sont négligées dans cette approche phénoménologique ; toutes les forces considérées sont normales à la surface solide.

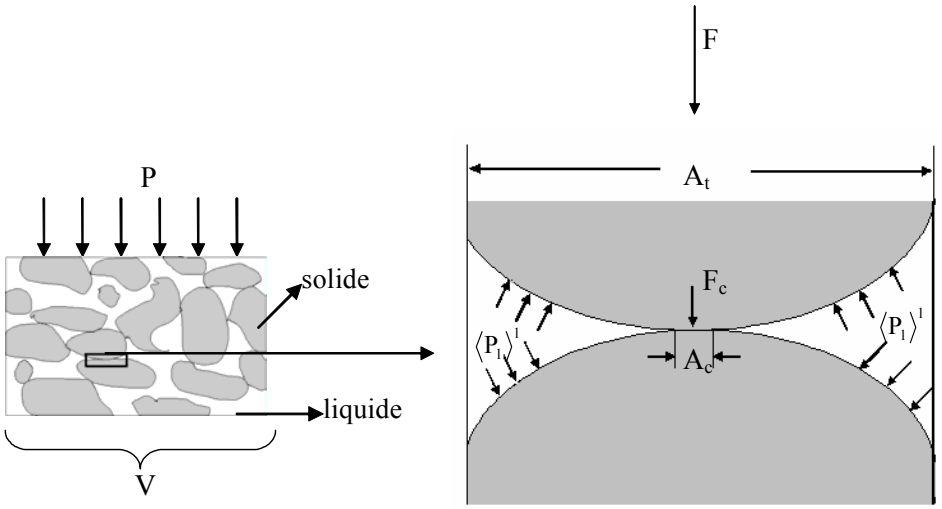


Figure A5.1 *Représentation des forces appliquées sur la phase solide à l'intérieur d'un volume V soumis à une charge extérieur P.*

Si on applique une charge P sur un volume V d'un milieu diphasique et si on fait une analyse de forces à l'échelle de grains (Figure A5.1), on peut écrire un bilan de forces sur chaque grain, comme suit :

$$F = F_c - \langle P_l \rangle^l \left(A_t - A_c \right) \tag{A5.1}$$

où F est la force normale totale, F_c est la force normale de contact entre les grains ou force intergranulaire, $\langle P_l \rangle^l$ est la pression intrinsèque de la phase liquide (dans cette type d'analyse, $\langle P_l \rangle^l$ est appelé aussi pression interstitielle ou pression de pores), A_t et A_c sont respectivement l'aire totale de la portion de volume considérée et l'aire de contact entre les grains (Figure A5.1).

L'équation précédente se réécrit :

$$\frac{F}{A_t} = \frac{F_c}{A_t} - \langle P_l \rangle^l \left(\frac{A_t}{A_t} - \frac{A_c}{A_t} \right) = \frac{F_c}{A_t} - \langle P_l \rangle^l \left(1 - \frac{A_c}{A_t} \right) \tag{A5.2}$$

A_c étant généralement très petit devant A_t ($\frac{A_c}{A_t} << 1$) l'équation précédente peut être approximée par :

$$\frac{F}{A_t} = \frac{F_c}{A_t} - \langle P_l \rangle^l \tag{A5.3}$$

La définition classique de contrainte nous permet d'exprimer les termes suivants :

$$\frac{F}{A_t} = \sigma \quad \text{et} \quad \frac{F_c}{A_t} = \sigma_{eff}$$

où σ est clairement la contrainte totale et σ_{eff} est la contrainte due uniquement à l'effet de l'interaction entre les grains solides. Cette contrainte σ_{eff} est habituellement appelée « contrainte effective » et représente les contraintes propres ou intrinsèques du réseau solide.

L'équation (A5.3) nous aide à écrire finalement une des équations de plus utilisées dans la mécanique des sols. Il s'agit de l'expression qui détermine la contrainte effective dans un milieu poreux soumis à une charge quelconque :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}_{eff} - \langle P_l \rangle^l \bar{\bar{I}} \quad \text{ou} \quad \bar{\bar{\sigma}}_{eff} = \bar{\bar{\sigma}} + \langle P_l \rangle^l \bar{\bar{I}} \tag{A5.4}$$

ANNEXE 6 :
Changement d'espace d'Euler à Lagrange

Les méthodes qui donne la relation entre une description d'Euler et une description de Lagrange sont brièvement rappelées par (Coirier, 1997) et (Salençon, 1988)

- ***Description de Lagrange :***

Chaque particule est repérée par un vecteur lieu dépendant du temps et du lieu occupée à l'instant initial t_o.

C'est-à-dire lieu à l'instant t : $\vec{r} = \vec{f}\left(t, \vec{r}_0\right)$ avec $\vec{r}_0$ lieu à l'instant t_o.

Soit si nous appelons x, y, z les coordonnées de $\vec{r}$ et f_x, f_y, f_z les composantes de $\vec{f}$.

$$\begin{cases} x = f_x(t, x_0, y_0, z_0) \\ y = f_y(t, x_0, y_0, z_0) \\ z = f_z(t, x_0, y_0, z_0) \end{cases} \qquad \text{(A6.1)}$$

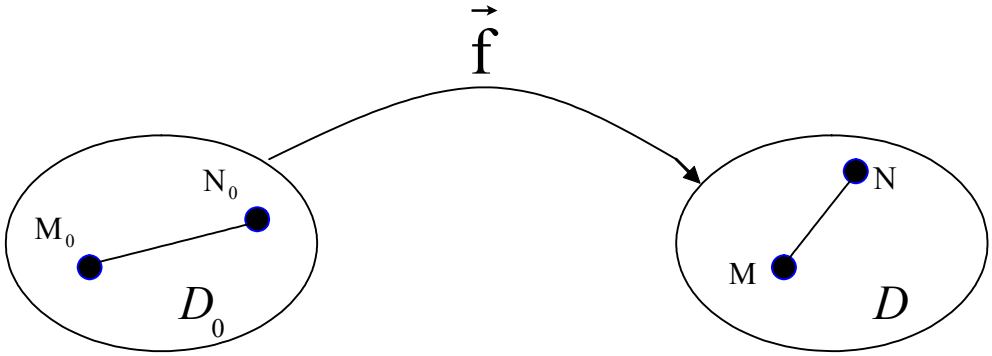


Figure A6.1 *Configuration initiale et actuelle d'un domaine matériel D*

Soit respectivement $\overrightarrow{M}$ et $\overrightarrow{N}$ les vecteurs positions des particules M et N, la distance entre les deux particules peut être s'exprimer par rapport à l'instant initial (Figure A6.1) de la façon suivante :

$$\overrightarrow{N} - \overrightarrow{M} = \overline{\overline{F}}\left(\overrightarrow{M}_0, t\right)\left(\overrightarrow{N}_0 - \overrightarrow{M}_0\right) + \left\|\overrightarrow{N}_0 - \overrightarrow{M}_0\right\| \vec{\alpha}\left(\overrightarrow{N}_0 - \overrightarrow{M}_0, t\right) \qquad \text{(A6.2)}$$

où

$$\overline{\overline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial M_{0_{x_0}}} & \frac{\partial f_x}{\partial M_{0_{y_0}}} & \frac{\partial f_x}{\partial M_{0_{z_0}}} \\ \frac{\partial f_y}{\partial M_{0_{x_0}}} & \frac{\partial f_y}{\partial M_{0_{y_0}}} & \frac{\partial f_y}{\partial M_{0_{z_0}}} \\ \frac{\partial f_z}{\partial M_{0_{x_0}}} & \frac{\partial f_z}{\partial M_{0_{y_0}}} & \frac{\partial f_z}{\partial M_{0_{z_0}}} \end{bmatrix}$$

Le tenseur $\overline{\overline{F}}$ est aussi connu comme le tenseur gradient de la transformation, ainsi

$$\overline{\overline{F}} = \vec{\nabla}\left(\vec{f}(\overrightarrow{M_0}, t)\right) \tag{A6.3}$$

et $\vec{\alpha}$ est une fonction à valeurs vectorielles tendant vers $\vec{0}$ si $\overrightarrow{N_0}$ tends vers $\overrightarrow{M_0}$.

- ***Hypothèse de petites distances entre les particules***

Dans le cas qu'il existe petites distances entre les particules, nous pouvons exprimer la relation (A6.2) sous une forme différentielle comme suive :

$$d\vec{r} = \overline{\overline{F}}\, d\overrightarrow{r_0} \tag{A6.4}$$

ou

$$d\vec{r} = \vec{\nabla}\left(\vec{f}(\overrightarrow{M_0}, t)\right) d\overrightarrow{r_0} \tag{A6.5}$$

Soit $\overline{\overline{H}}$ le tenseur gradient du déplacement, nous pouvons exprimer le tenseur $\overline{\overline{F}}$ par rapport aux déplacements des particules avec la relation

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{H}} + \overline{\overline{I}} \tag{A6.6}$$

où

$\overline{\overline{H}} = \vec{\nabla}\,\vec{\ell}$ avec $\vec{\ell}$ comme vecteur déplacement et ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z ses coordonnées dans l'espace.

En remplaçant (A6.6) en (A6.4)

$$d\vec{r} = \left(\vec{\nabla}\,\vec{\ell} + \overline{\overline{I}}\right) d\overrightarrow{r_0} \tag{A6.7}$$

en développant plus l'équation (A6.7) nous avons

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{\partial \ell_x}{\partial x_0} & \frac{\partial \ell_x}{\partial y_0} & \frac{\partial \ell_x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \ell_y}{\partial x_0} & 1+\frac{\partial \ell_y}{\partial y_0} & \frac{\partial \ell_y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \ell_z}{\partial x_0} & \frac{\partial \ell_z}{\partial y_0} & 1+\frac{\partial \ell_z}{\partial z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{bmatrix} \tag{A6.8}$$

L'écriture générale des relations existant entre les opérateurs dérivés exprimés dans les coordonnées de Lagrange et celles d'Euler s'écrivent alors :

En ce qui concerne à l'espace et en utilisant la définition de la dérivée partielle d'un fonction ϑ quelconque, nous avons:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial x} \tag{A6.9}$$

nous développerons plus ce cas $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ car les autres dérivées partielles par rapport à y et z seront trouves de la même façon. Ce qui nous intéresse est de trouver les termes $\frac{\partial x_0}{\partial x}$, $\frac{\partial y_0}{\partial x}$, $\frac{\partial z_0}{\partial x}$ et pour les déterminer nous dévions regarder l'équation suivant

$$\begin{bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \tag{A6.10}$$

où les termes α_{ij} (i=1,2,3 et j=1,2,3) appartiennent au tenseur $\overline{\overline{F}}$ inversé (matrice $\alpha = \left(\overline{\overline{F}}\right)^{-1}$). A partir de l'équation précédente nous pouvons exprimer

$$\begin{cases} dx_0 = \alpha_{11}dx + \alpha_{12}dy + \alpha_{13}dz \\ dy_0 = \alpha_{21}dx + \alpha_{22}dy + \alpha_{23}dz \\ dz_0 = \alpha_{31}dx + \alpha_{32}dy + \alpha_{33}dz \end{cases} \tag{A6.11}$$

ainsi

$$\frac{\partial x_0}{\partial x} = \alpha_{11};\ \frac{\partial y_0}{\partial x} = \alpha_{21};\ \frac{\partial z_0}{\partial x} = \alpha_{31}$$

Finalement nous pouvons écrire notre dérivée partielle comme suive :

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x}=\frac{1}{\det\left(\overline{\overline{F}}\right)}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_0}\left[\left(1+\dfrac{\partial \ell_y}{\partial y_0}\right)\left(1+\dfrac{\partial \ell_z}{\partial z_0}\right)-\dfrac{\partial \ell_y}{\partial z_0}\dfrac{\partial \ell_z}{\partial y_0}\right]-\dfrac{\partial \vartheta}{\partial y_0}\left[\dfrac{\partial \ell_x}{\partial y_0}\left(1+\dfrac{\partial \ell_z}{\partial z_0}\right)-\dfrac{\partial \ell_x}{\partial z_0}\dfrac{\partial \ell_z}{\partial y_0}\right] \\ +\dfrac{\partial \vartheta}{\partial z_0}\left[\dfrac{\partial \ell_x}{\partial y_0}\dfrac{\partial \ell_y}{\partial z_0}-\dfrac{\partial \ell_x}{\partial z_0}\left(1+\dfrac{\partial \ell_y}{\partial y_0}\right)\right]\end{array}\right\} \tag{A6.12}$$

même pour les autres dérivées

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=\frac{\partial \vartheta}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial y}+\frac{\partial \vartheta}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial y}+\frac{\partial \vartheta}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=\frac{1}{\det\left(\overline{\overline{F}}\right)}\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_0}\left[\dfrac{\partial \ell_y}{\partial x_0}\left(1+\dfrac{\partial \ell_z}{\partial z_0}\right)-\dfrac{\partial \ell_y}{\partial z_0}\dfrac{\partial \ell_z}{\partial x_0}\right]+\dfrac{\partial \vartheta}{\partial y_0}\left[\left(1+\dfrac{\partial \ell_x}{\partial x_0}\right)\left(1+\dfrac{\partial \ell_z}{\partial z_0}\right)-\dfrac{\partial \ell_x}{\partial z_0}\dfrac{\partial \ell_z}{\partial x_0}\right] \\ -\dfrac{\partial \vartheta}{\partial z_0}\left[\left(1+\dfrac{\partial \ell_x}{\partial x_0}\right)\dfrac{\partial \ell_y}{\partial z_0}-\dfrac{\partial \ell_x}{\partial z_0}\dfrac{\partial \ell_y}{\partial x_0}\right]\end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z}=\frac{\partial \vartheta}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial z}+\frac{\partial \vartheta}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial z}+\frac{\partial \vartheta}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z}=\frac{1}{\det\left(\overline{\overline{F}}\right)}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_0}\left[\dfrac{\partial \ell_y}{\partial x_0}\dfrac{\partial \ell_z}{\partial y_0}-\left(1+\dfrac{\partial \ell_y}{\partial y_0}\right)\dfrac{\partial \ell_z}{\partial x_0}\right]-\dfrac{\partial \vartheta}{\partial y_0}\left[\left(1+\dfrac{\partial \ell_x}{\partial x_0}\right)\dfrac{\partial \ell_z}{\partial y_0}-\dfrac{\partial \ell_x}{\partial y_0}\dfrac{\partial \ell_z}{\partial x_0}\right] \\ +\dfrac{\partial \vartheta}{\partial z_0}\left[\left(1+\dfrac{\partial \ell_x}{\partial x_0}\right)\left(1+\dfrac{\partial \ell_y}{\partial y_0}\right)-\dfrac{\partial \ell_x}{\partial y_0}\dfrac{\partial \ell_y}{\partial x_0}\right]\end{array}\right\}$$

où

$$\begin{aligned}\det\left(\overline{\overline{F}}\right)=&\left(1+\frac{\partial \ell_x}{\partial x_0}\right)\left[\left(1+\frac{\partial \ell_y}{\partial y_0}\right)\left(1+\frac{\partial \ell_z}{\partial z_0}\right)-\frac{\partial \ell_y}{\partial z_0}\frac{\partial \ell_z}{\partial y_0}\right]-\frac{\partial \ell_x}{\partial y_0}\left[\frac{\partial \ell_y}{\partial x_0}\left(1+\frac{\partial \ell_z}{\partial z_0}\right)-\frac{\partial \ell_y}{\partial z_0}\frac{\partial \ell_z}{\partial x_0}\right] \\ &+\frac{\partial \ell_x}{\partial z_0}\left[\frac{\partial \ell_y}{\partial x_0}\frac{\partial \ell_z}{\partial y_0}-\left(1+\frac{\partial \ell_y}{\partial y_0}\right)\frac{\partial \ell_z}{\partial x_0}\right]\end{aligned}$$

et par rapport au temps

$$\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right|_r=\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right|_{r_0}-\left\langle \vec{V}_s\right\rangle^s\cdot\vec{\nabla}\vartheta \tag{A6.13}$$

ANNEXE 7 :
Champs de pression intrinsèque et fraction volumique du liquide

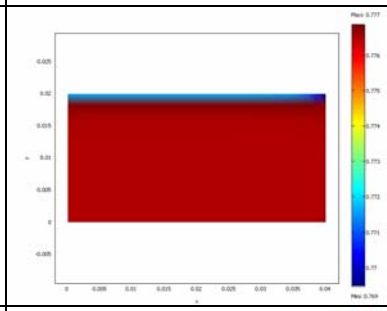
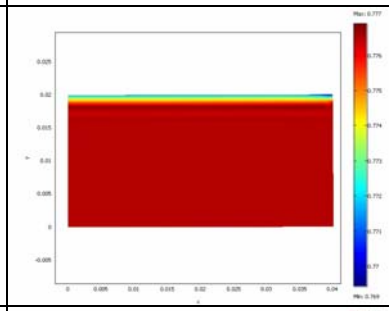
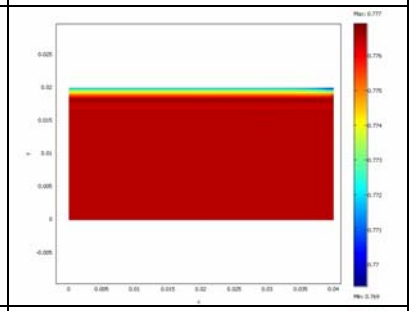
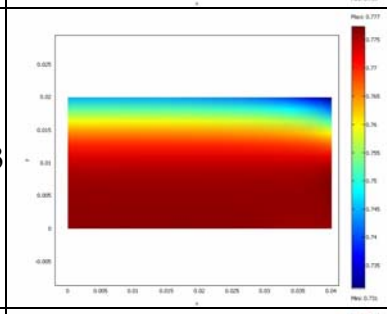
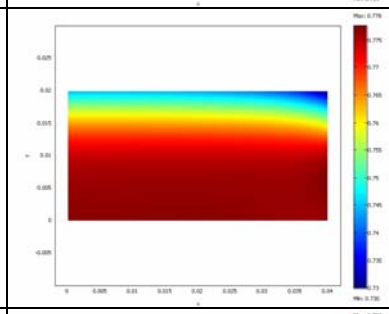
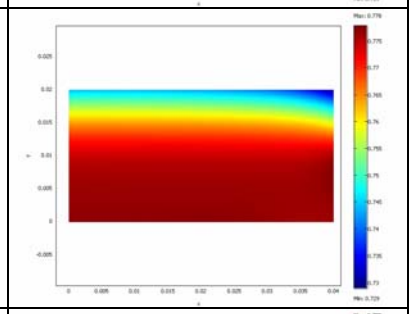
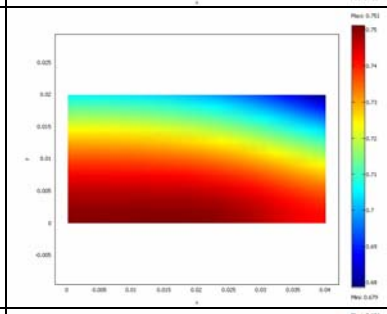
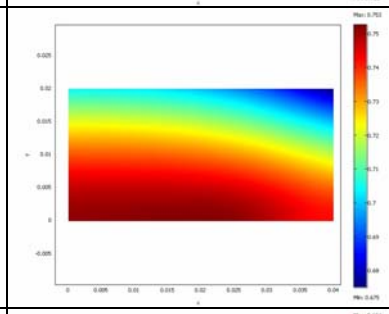
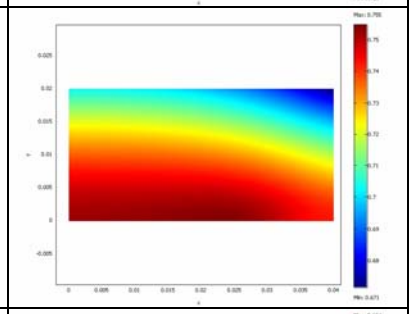
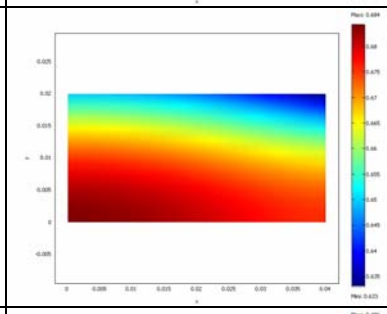
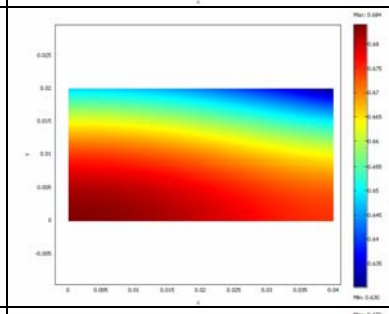
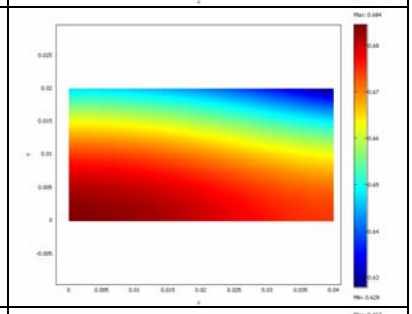
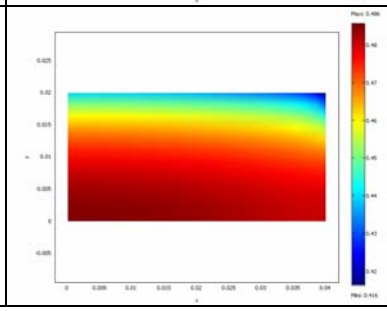
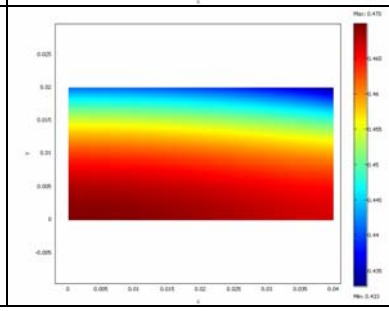
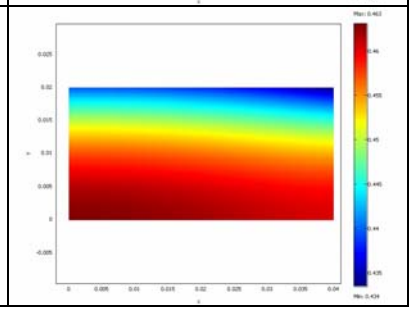
temps (s)	$\upsilon(\upsilon_0 = 0.47)$	$\upsilon(\upsilon_0 = 0.45)$	$\upsilon(\upsilon_0 = 0.43)$
100			
3.6E3			
2E4			
4E4			
1E5			

Figure A7.1 *Influence la variation des valeurs initiales du coefficient de Poisson (υ) sur les champs de pression intrinsèque du liquide* $\langle P_l \rangle^1$.

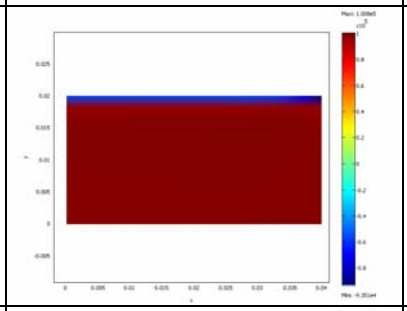
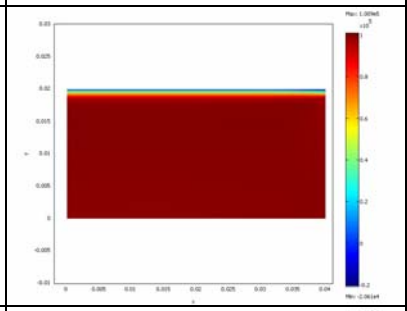
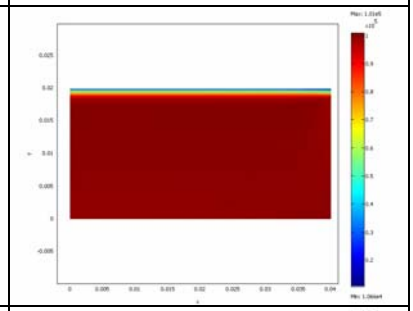
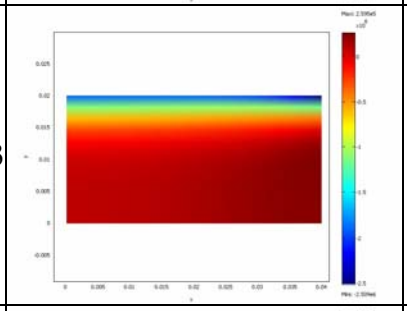
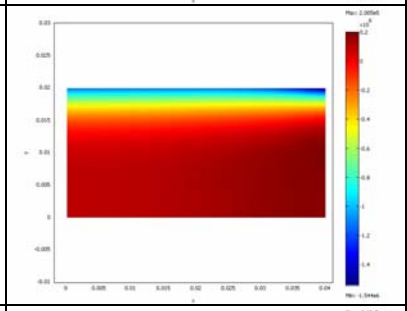
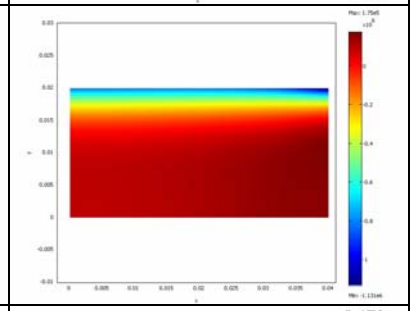
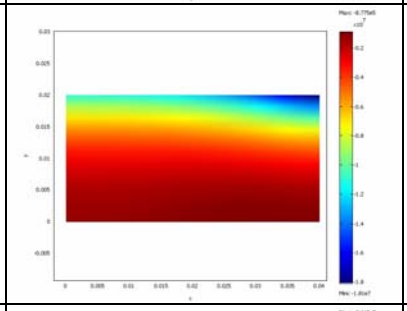
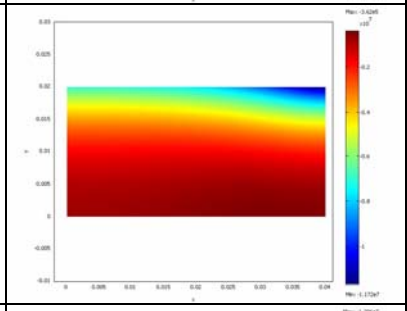
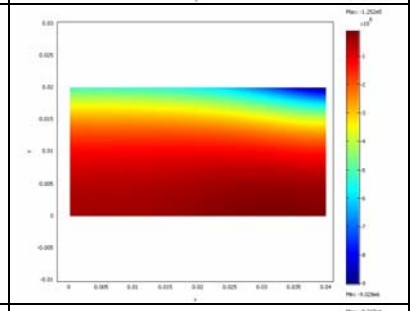
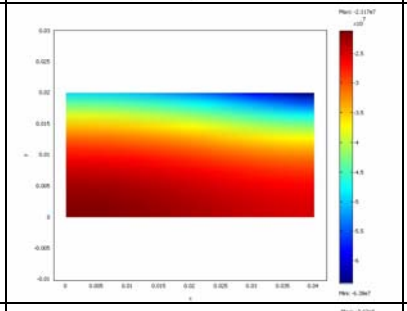
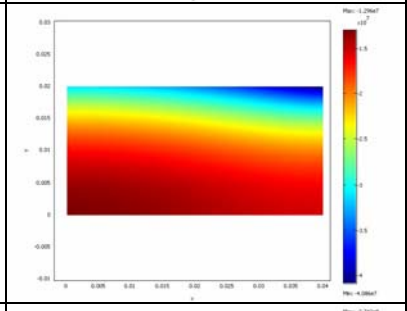
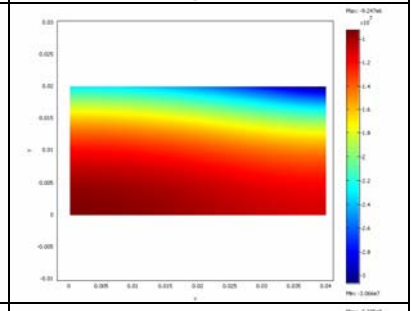
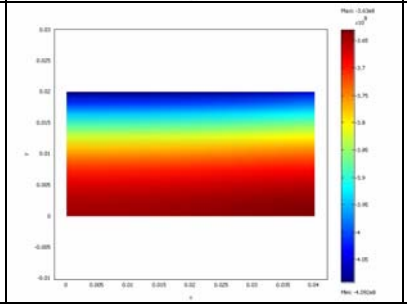
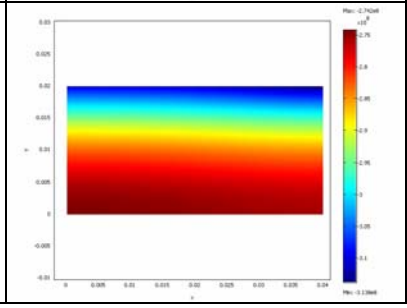
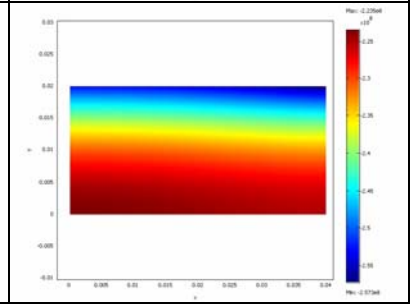
temps (s)	$\upsilon(\upsilon_0 = 0.47)$	$\upsilon(\upsilon_0 = 0.45)$	$\upsilon(\upsilon_0 = 0.43)$
100			
3.6E3			
2E4			
4E4			
1E5			

Figure A7.2 *Influence la variation des valeurs initiales du coefficient de Poisson (υ) sur les champs de fraction volumique du liquide* ε_l.

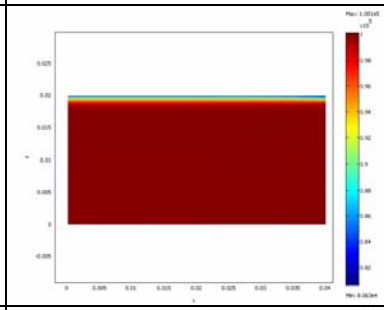
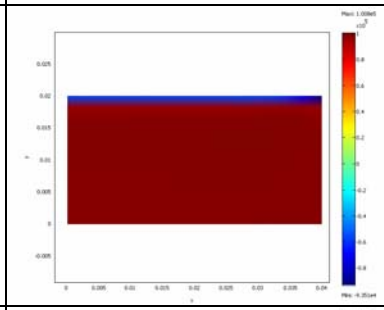
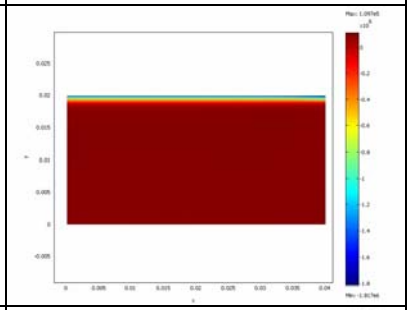
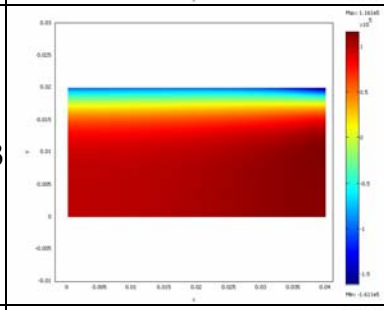
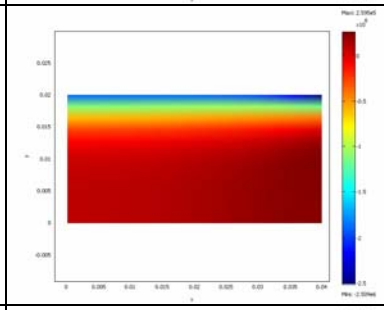
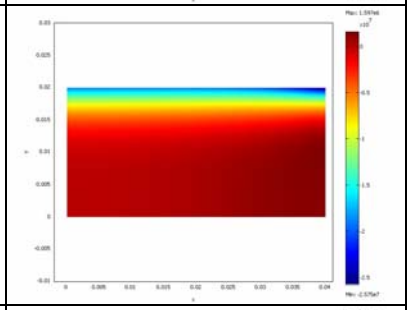
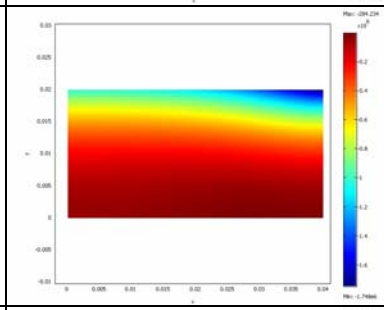
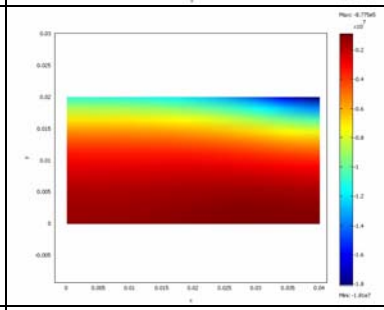
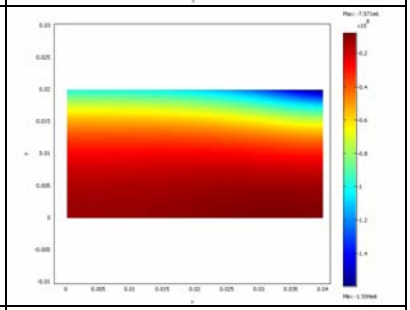
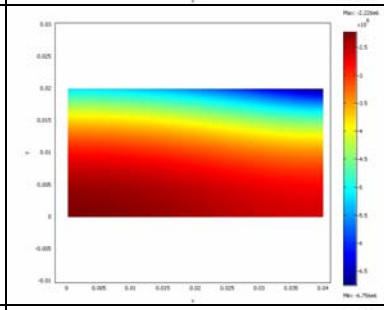
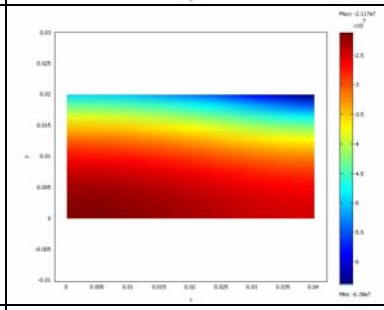
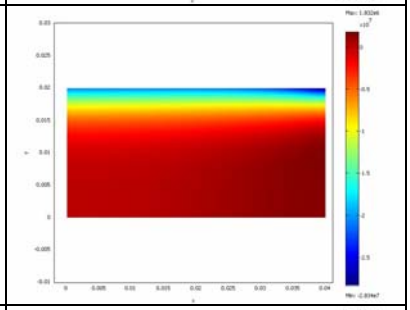
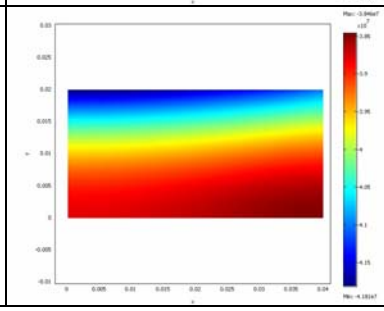
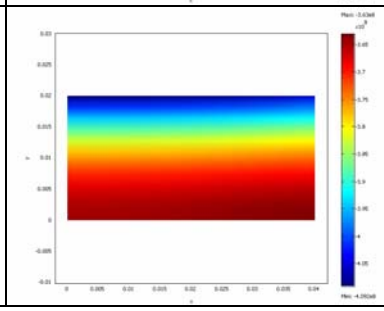
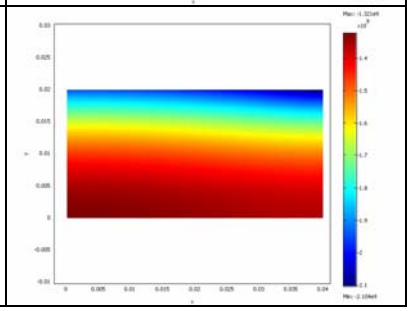
temps (s)	$E(E_0 = 6.7x10^7\ Pa)$	$E(E_0 = 6.7x10^8\ Pa)$	$E(E_0 = 6.7x10^9\ Pa)$
100			
3.6E3			
2E4			
4E4			
1E5			

Figure A7.3 *Influence la variation des ordres de grandeur du module de Young (*E*) sur les champs de pression intrinsèque du liquide* $\langle P_l \rangle^1$.

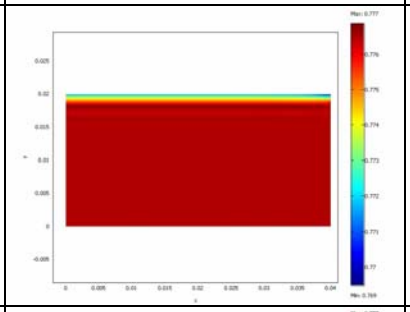
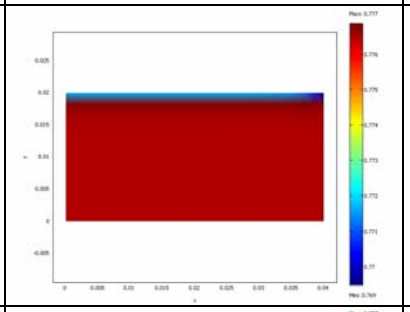
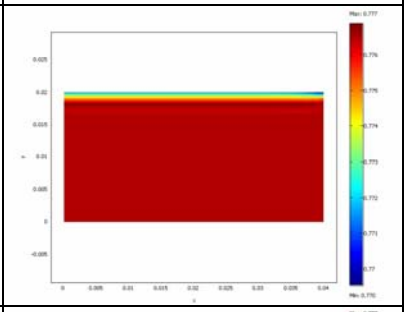
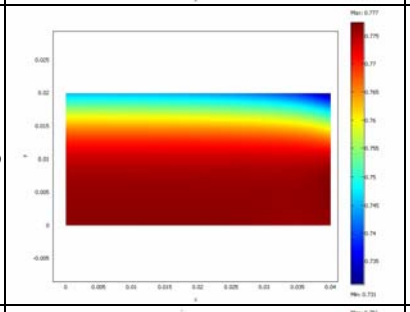
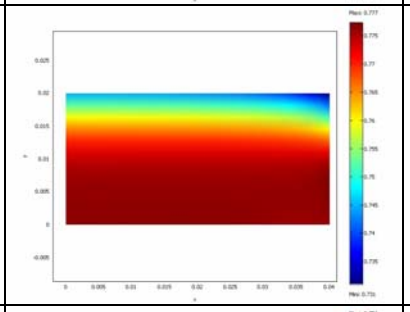
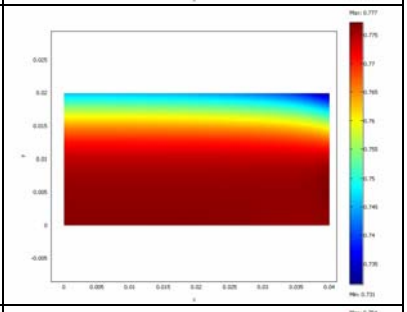
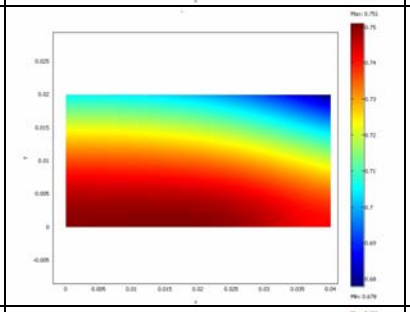
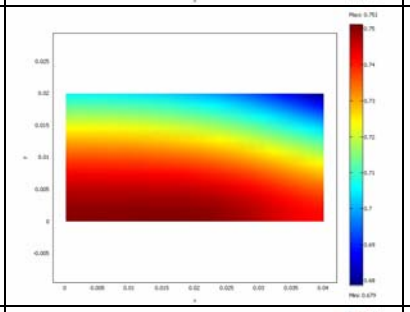
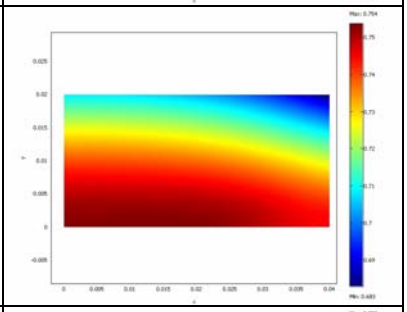
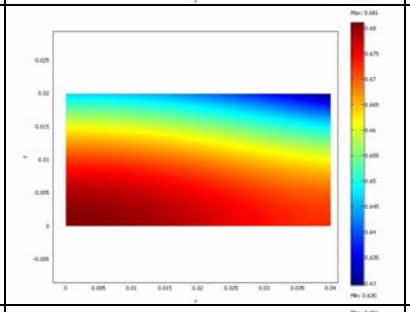
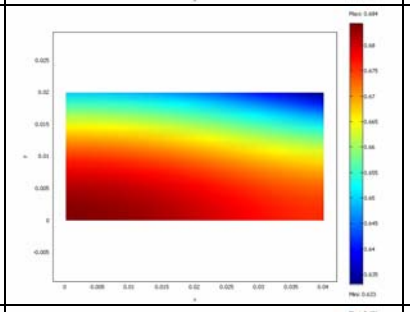
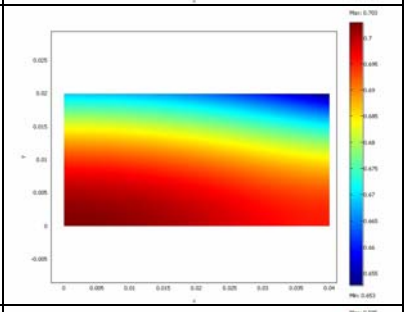
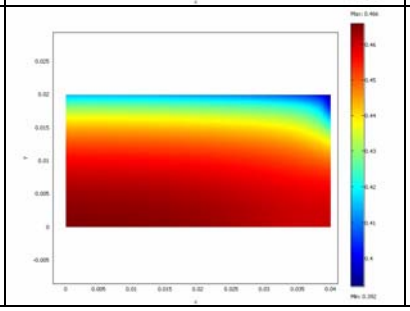
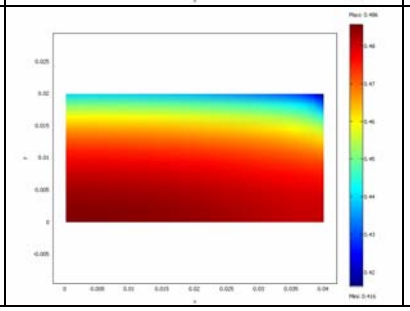
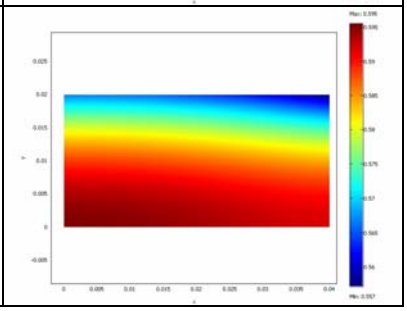
temps (s)	E($E_0 = 6.7x10^7$ Pa)	E($E_0 = 6.7x10^8$ Pa)	E($E_0 = 6.7x10^9$ Pa)
100			
3.6E3			
2E4			
4E4			
1E5			

Figure A7.4 *Influence de la variation des ordres de grandeur du module de Young (*E*) sur les champs de fraction volumique du liquide* ε_l.

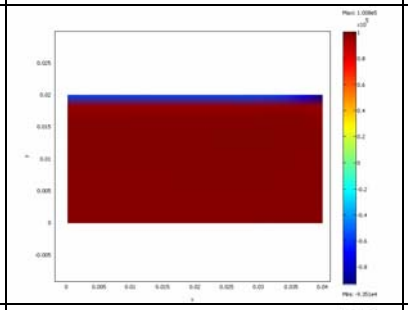
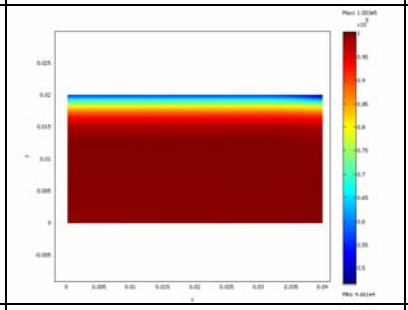
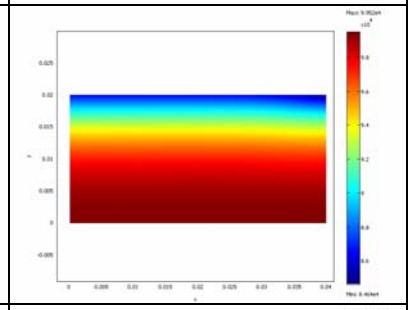
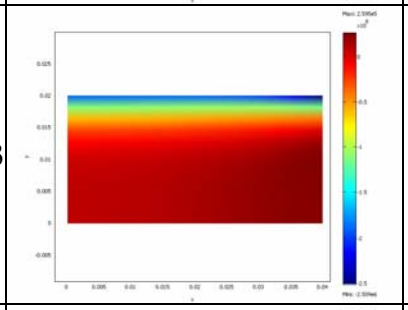
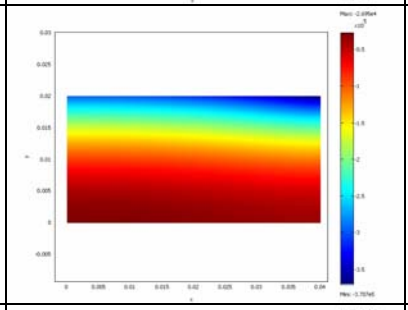
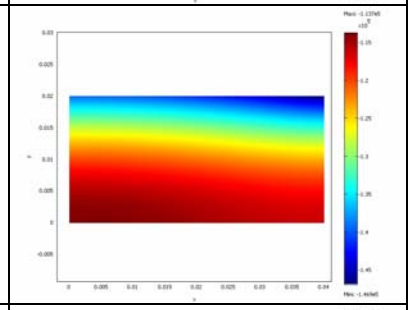
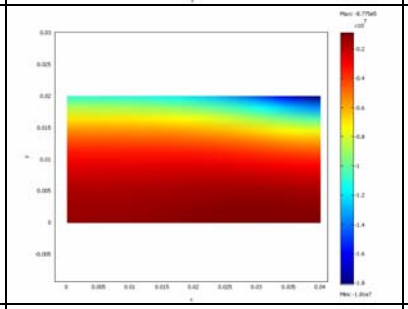
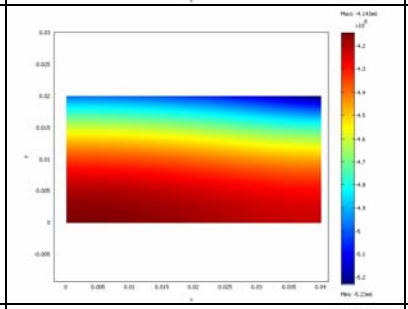
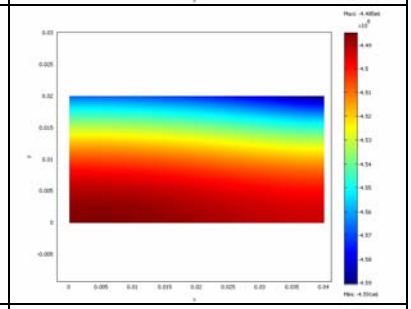
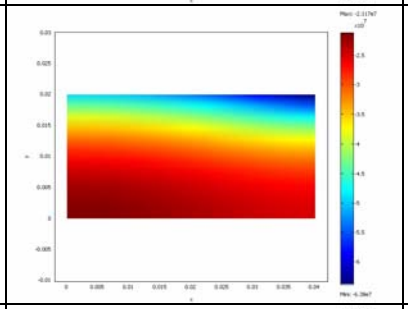
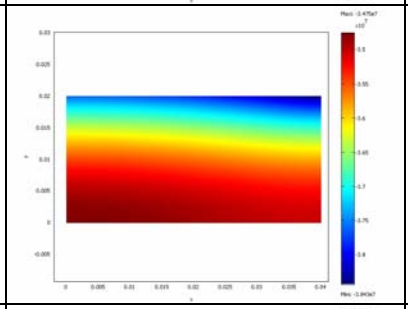
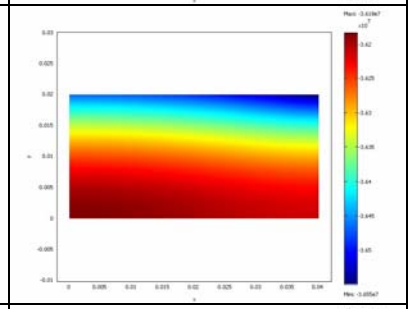
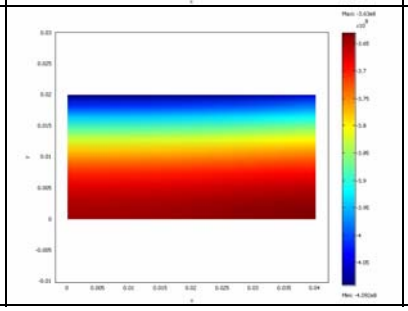
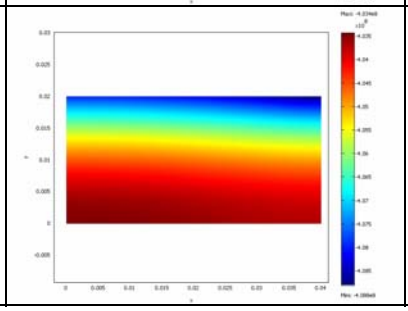
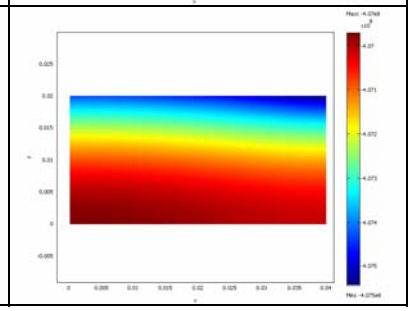
temps (s)	k($D_{eff} = 5x10^{-09} m^2/s$)	k($D_{eff} = 5x10^{-08} m^2/s$)	k($D_{eff} = 5x10^{-07} m^2/s$)
100			
3.6E3			
2E4			
4E4			
1E5			

Figure A7.5 *Influence de la variation de la perméabilité (*k*) sur les champs de pression intrinsèque du liquide* $\langle P_l \rangle^l$.

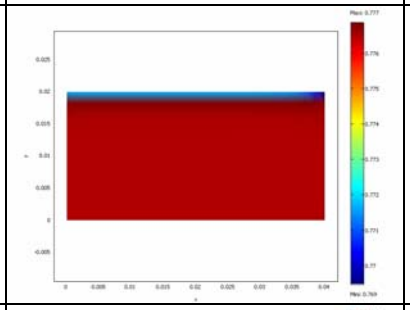
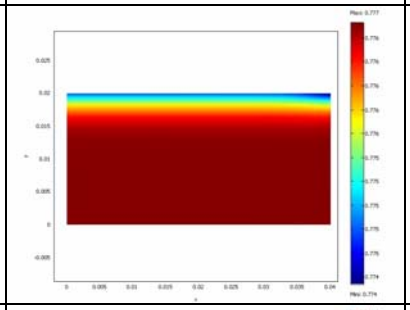
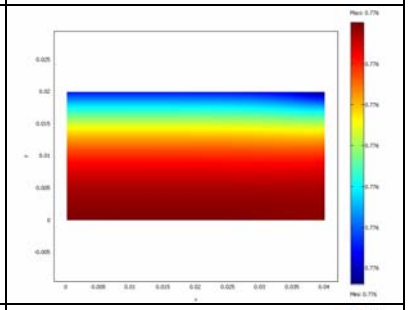
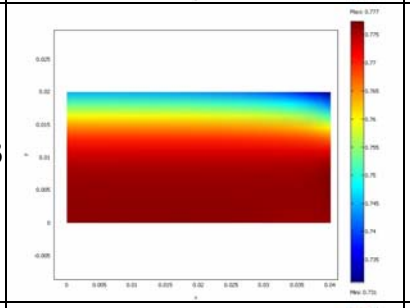
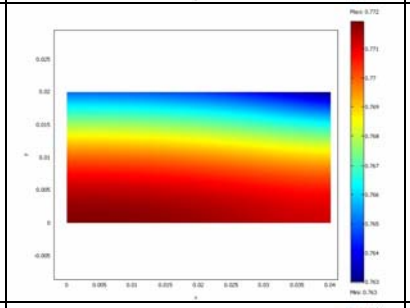
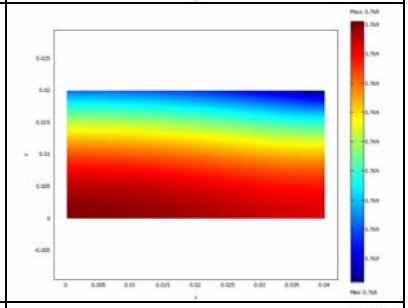
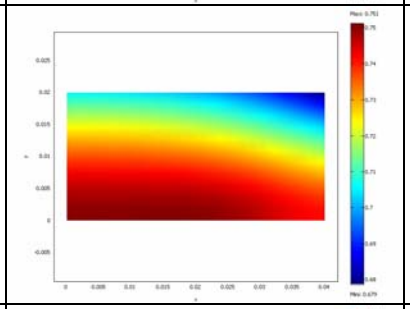
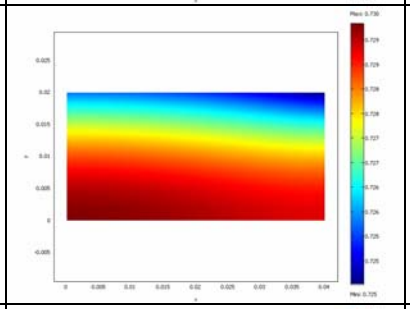
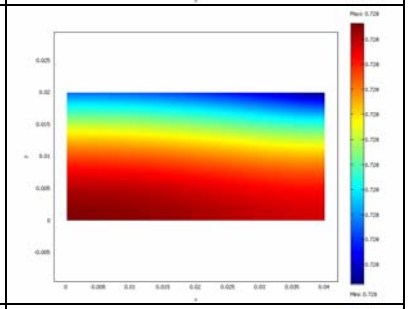
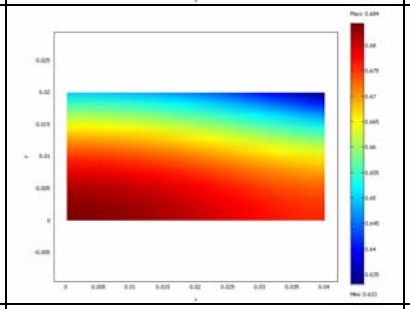
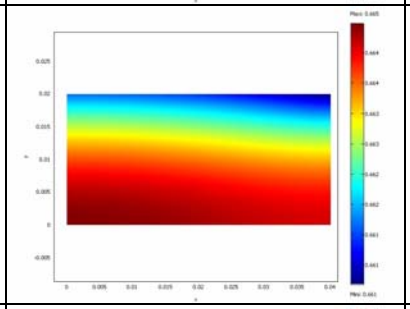
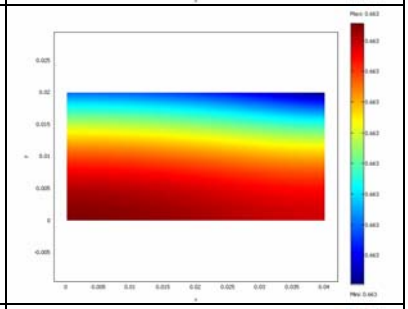
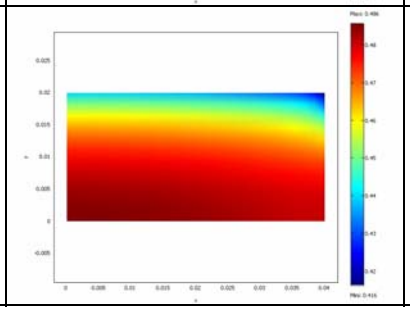
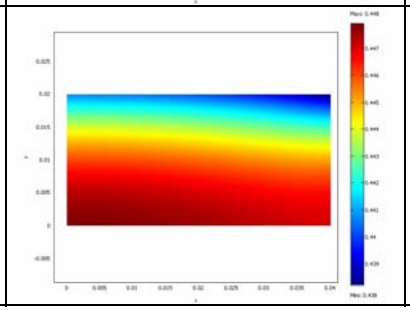
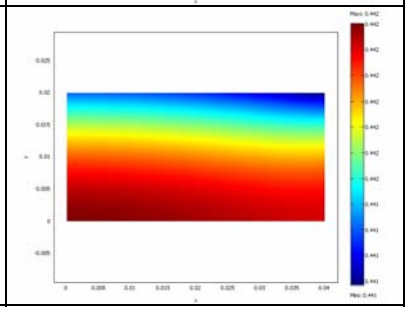
temps (s)	k($D_{eff} = 5x10^{-09} m^2/s$)	k($D_{eff} = 5x10^{-08} m^2/s$)	k($D_{eff} = 5x10^{-07} m^2/s$)
100			
3.6E3			
2E4			
4E4			
1E5			

Figure A7.6 *Influence de la variation de la perméabilité (*k*) sur les champs de fraction volumique du liquide* ε_1

MODELOWANIE PROCESU SUSZENIA MATERIALU POROWATEGO NASYCONEGO Z WZIECIEM POD UWAGE CISNIENIA PLYNU

STRESZCZENIE: Praca dotyczy modelowania procesu suszenia materialu porowatego nasyconego (faza stala – plyn). W modelowaniu tym wziete sa pod uwage: natura materialu oraz warunki poczatkowe takie jak jego wilgotnosc i forma poczatkowa. Celem pracy jest determinacja naprezen mechanicznych, kontrola odksztalcen i wilgotnosci materialu podczas procesu suszenia. Elementem oryginalnym pracy jest model suszenia bioracy pod uwage gradient cisnienia jako rzeczywisty mechanizm transportu poprzez prawo Darcy, w ktorym jest wzieta pod uwage scisliwosc cieczy. Glowna zaleta takiej formulacji jest mozliwosc unikniecia efektywnego wspolczynnika transportu, ktory zazwyczaj jest okreslany poprzez specyficzne eksperymenty. Formulacja taka pozwoli rowniez w przyszlosci powiazac zachowanie ukladu dwufazowego z ukladem trojfazowym (faza stala, plyn, gaz). Uzyskany uklad rownan wynika z metody sredniej objetosciowej gdzie elementarna reprezentatywna objetosc jest uwazana za odksztalcalna. Opis fizyczny silnego hydro-mechanicznego zwiazku wystepujacego w suszonym materiale jest zaprezentowany poprzez teorie konsolidacji Biot'a i adaptacje naprezen efektywnych Terzaghi. Zmienne opisujace ten zwiazek sa to : szybkosc deformacji fazy stalej oraz cisnienie plynu. Numeryczne rozwiazanie ukladu rownan jest uzyskane poprzez metode elementow skonczonych przy duzych deformacjach oraz zmiane przestrzeni Euler-Langrange. Model zostal zweryfikowany na przykladzie zelu aluminowego (alumina gel) suszonego w roznych warunkach. Analiza czulosci modelu prezentuje silny wplyw przepuszczalnosci materialu jak rowniez jego wlasciwosci reologicznych na proces suszenia.
Slowa kluczowe: *suszenie, material porowaty nasycony, cisnienie plynu, naprezenia mechaniczne, naprezenia efektywne, odksztalcenie, prawo Darcy, scisliwosc plynu, zwiazek hydromechaniczny.*

MODELISACIÓN DEL SECADO DE UN MEDIO POROSO SATURADO Y DEFORMABLE: CONSIDERANDO LA PRESION DEL LIQUIDO

RESUMEN: Este estudio tiene como objetivo la modelización del secado de los medios porosos saturados (sólido-liquido) deformables. Esta modelización considera tanto la naturaleza del producto como sus condiciones iniciales, por ejemplo el contenido de agua y la geometría. La finalidad es poder determinar las tensiones mecánicas que aparecen dentro del material durante el secado, controlar la deformación del producto y su contenido de agua. El modelo propuesto tiene como originalidad que considera el gradiente de la presión de líquido, a través de la ley de Darcy, como la fuerza motora real del transporte de masa a la cual se adjunta la hipótesis de la compresibilidad del líquido. La ventaja principal de esta formulación es que evita la necesidad de utilizar un coeficiente de transporte efectivo, identificado a menudo por experimentos específicos, y además entrega la posibilidad de poder visualizar un modelo continuo que podrá conectar el comportamiento del secado de un medio en su estado bifásico (sólido-liquido) con el secado en su estado trifásico (líquido, sólido y gas). Las ecuaciones que describen los balances de calor, masa y cantidad de movimiento se obtienen con el método del volumen promedio, donde el volumen elemental representativo (volumen de control elemental) se considera deformable. La descripción física de la fuerte interacción hidromecánica que existe dentro del material, es considerada a través de la teoría de consolidación de Biot que toma como base el principio tensiones efectivas de Terzaghi. Las variables que representan esta interacción son velocidad de deformación del sólido y la presión intrínseca del líquido. La solución numérica del modelo es realizada utilizando el método de los elementos finitos, considerando el medio con grandes deformaciones y realizando la transformación espacial "Euler-Lagrange". Los resultados numéricos son validados con un gel alúmina en diferentes condiciones de secado. Un estudio de sensibilidad demuestra la fuerte influencia de la permeabilidad y de las propiedades reológicas en el proceso de secado y deformación del material.
Palabras claves: *secado, medio poroso saturado, presión del líquido, tensiones mecánicas, tensiones efectivas, deformación, ley de Darcy, líquido compresible, interacción hidromecánica.*