HAL
open science

Space-time mesh refinement for elastodynamic equations

Jerónimo Rodríguez Garcia

To cite this version:

Jerónimo Rodríguez Garcia. Space-time mesh refinement for elastodynamic equations. Mathematics [math]. ENSTA ParisTech, 2004. English. NNT : 2004PA090067 . pastel-00002379

HAL Id: pastel-00002379

https://pastel.hal.science/pastel-00002379

Submitted on 23 Apr 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité

Mathématiques Appliquées

soutenue par

Jerónimo RODRÍGUEZ GARCÍA

le 8 Décembre 2004

Titre

Raffinement de Maillage Spatio-Temporel pour les Équations de l'Élastodynamique

Directeur de thèse : Patrick JOLY

Co-directrice de thèse : Éliane BÉCACHE

Jury

Président :	M.	**Serge**	**PIPERNO**
Rapporteurs :	M.	**Yvon**	**MADAY**
	M.	**Bruno**	**DESPRÉS**
Examinateurs :	M.	**Patrick**	**JOLY**
	Mme.	**Éliane**	**BÉCACHE**
	M.	**Éric**	**SÉRÉ**
Invité :	M.	**Thierry**	**FOUQUET**

“L’Université n’entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses : ces opinions doivent être considèrées comme propres à leurs auteurs.”

Deseo dedicar esta memoria a mi familia y de un modo especial a mis padres y a mi hermano por su continuo apoyo a lo largo de estos tres años.

Remerciements

Maintenant que le moment de la récolte des fruits du travail de ces dernières quatre années en France est arrivé, je m'aperçois de la dette que j'ai envers tous ceux qui, d'une façon ou d'une autre, m'ont aidé.

Je remercie tout d'abord Patrick Joly pour m'avoir accueilli sous sa direction et pour m'avoir donné l'opportunité de faire cette thèse au sein du projet ONDES qu'il dirige. À lui et à Éliane Bécache, co-directrice de ce travail, je suis très reconnaissant de tous les conseils et idées qu'ils ont partagés avec moi pendant ces années. Leur soutien et leur disponibilité m'ont été indispensables pour mener à bien ce travail.

Je remercie Bruno Després et Yvon Maday pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce document et pour leurs remarques et commentaires judicieux qui m'ont été d'une grande utilité.

Merci à Serge Piperno, président du jury, pour l'intérêt qu'il a montré pour le sujet ainsi qu'à Éric Séré pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je tiens à remercier Thierry Fouquet pour avoir partagé avec moi tout son savoir-faire sur le sujet et aussi pour avoir accepté de participer à la soutenance.

Je suis très reconnaissant au groupe SINETICS de la R&D d'EDF pour le financement de la thèse au travers d'un contrat avec l'INRIA. Cela m'a permis de combiner le développement et l'analyse des méthodes numériques avec les exigences d'une application industrielle directe. Je voudrais aussi remercier respectivement "La Fundación La Caixa" et "La Fundación Caixa Galicia" pour leur aide financière pendant la première et troisième années de thèse.

Je tiens aussi à remercier Chrysoula Tsogka et Francis Collino pour toute l'aide et toutes les idées apportées dans de divers aspects de mon travail.

Merci à Alfredo Bermúdez de Castro et à Dolores Gómez Pedreira pour m'avoir mis en contact avec le projet ONDES.

Je me souviendrai toujours des membres des projets ONDES, ESTIME et OTTO pour la bonne ambiance et la bonne humeur qui règnent en permanence dans le bâtiment 13 et qui m'ont beaucoup aidé dans les moments difficiles. Merci.

Il serait impossible de citer tous ceux qui m'ont aidé dans cette étape de ma vie, tant dans le domaine scientifique qu'humaine. À tous, merci beaucoup.

Sommaire

Introduction **xv**

I Raffinement de Maillage Spatio–Temporel pourl'Élastodynamique **1**

1 Un Raffinement de Maillage Espace–Temps $(1, 2)$ Stable pourl'Élastodynamique **3**

1.1 Les Équations de l'Élastodynamique 5
1.2 Un Problème de Transmission. Formulation Variationnelle 6
1.3 Discrétisation en Espace 8
1.3.1 Présentation générale 8
1.3.2 Un Choix Particulier d'Espace d'Approximation pour les Inconnues Volumiques dans le Cas des Maillag
1.3.3 Sur le Choix d'Espace d'Approximation pour le Multiplicateur de Lagrange . . . 11
1.4 Caractère Bien Posé du Problème Semi-Discret 11
1.4.1 Une Condition Suffisante 11
1.4.2 Sur le Choix de l'Espace $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ 12
1.4.2.1 Un Résultat Général 12
1.4.2.2 Des Approximations Conformes dans le Cadre du Problème Modèle . 13
1.4.2.3 Des Approximations Non-Conformes dans le Cadre du Problème Modèle 14
1.5 À Propos de la Convergence du Schéma Semi-Discret 17
1.5.1 Considérations Générales 17
1.5.2 Un Résultat de Convergence pour le Problème Modèle 18
1.5.2.1 Définition et Analyse de la Projection Elliptique 19
1.5.2.2 Estimations sur le Problème d'Évolution 25
1.5.3 Les Cas Plus Généraux : Les Difficultés 27
1.6 Discrétisation en Temps 28
1.6.1 Schéma Intérieur. 28
1.6.2 Équations de Couplage : Conservation d'une Énergie Discrète 30
1.7 Caractère Bien Posé du Problème Discret 32
1.7.1 Algorithme de Calcul 33
1.7.2 Obtention du Système Linéaire Vérifié par J^{2n+1} 33
1.7.3 Sur l'Inversibilité de la Matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ 34
1.8 Stabilité du Schéma 35
1.9 Résultats Numériques 37
1.9.1 Choix de l'Espace du Multiplicateur 37
1.9.2 Expériences avec des raffinements récursifs 45

2 Analyse Fine de la Méthodedans le Cadre 1D **49**
2.1 Le Cas Particulier du Problème 1D . . . 50
2.2 Introduction . . . 53
2.3 Conservative space-time mesh refinement schemes . . . 55
2.3.1 The interior scheme . . . 55
2.3.2 The discrete transmission conditions . . . 56
2.4 Error analysis : the main results . . . 58
2.5 Proof of the error estimates . . . 63
2.5.1 The equations satisfied by the errors . . . 63
2.5.2 Outline of the proof . . . 65
2.5.3 Proof of the $\mathcal{O}(\sqrt{h})$ estimates . . . 66
2.5.4 Proof of estimate (2.41) . . . 71
2.5.4.1 Estimate of coarse discrete derivatives . . . 71
2.5.4.2 The bootstrap argument . . . 74
2.6 Comparison between theory and numerics . . . 79
2.6.1 Fourier analysis results . . . 79
2.6.2 Comparing our results with the Fourier analysis results . . . 80
2.6.3 Numerical results . . . 81
2.7 Rappel des Résultats par Fourier . . . 86
2.7.1 Le cas continu . . . 86
2.7.2 Le cas discret sur le maillage grossier . . . 86
2.7.3 Le cas discret sur le maillage fin . . . 88
2.7.4 Le cas discret sur les deux maillages . . . 91
2.7.5 Détermination des Amplitudes . . . 92
2.7.5.1 Pour le Schéma I . . . 92
2.7.5.2 Pour le Schéma II . . . 93

3 Une Extension de la Méthode. Un Raffinement de MaillageEspace–Temps (q_c, q_f) Stable pour l'Élastodynamiqu
3.1 Présentation de la Méthode . . . 96
3.1.1 Schéma Intérieur . . . 96
3.1.2 Équations de Couplage : Conservation d'une Énergie Discrète . . . 97
3.2 Caractère Bien Posé du Problème Discret . . . 99
3.2.1 Algorithme de Calcul . . . 99
3.2.2 Obtention du Système Linéaire Vérifié par $J^{n+\frac{1}{2}}$ . . . 99
3.2.3 Sur l'Inversibilité de la Matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ . . . 102
3.3 Résultats Numériques. Phénomènes Parasites . . . 107
3.4 Quelques Mots sur le Nombre d'Operations . . . 109
3.5 Analyse Fine de la Méthode dans le Cas 1D . . . 121
3.5.1 Présentation de la Méthode 1D . . . 121
3.5.2 Analyse par Fourier de la Méthode 1D . . . 123
3.5.2.1 Expression des Ondes Planes . . . 123
3.5.2.2 Détermination des Amplitudes . . . 127
3.5.2.3 Interprétation des Résultats . . . 130
3.5.2.4 Ordre de la Méthode . . . 131
3.5.3 Expériences Numériques 1D. Ordre de Convergence Numérique . . . 135

4 Une Amélioration de la Méthode. Un Nouveau Raffinement de Maillage Spatio–Temporel (q_c, q_f) Stable pour l'I
4.1 Post-Traitement en Temps de la Solution. Motivation . . . 144
4.1.1 Le Cas $(q_c, q_f) = (1, 2)$ . . . 144
4.1.2 Le Cas Général . . . 145
4.2 Re-interprétation des Équations. Une Nouvelle Méthode . . . 148
4.3 Résultats Numériques . . . 149
4.4 Analyse Fine de la Nouvelle Méthode dans le Cas 1D . . . 149
4.4.1 Présentation de la Méthode 1D . . . 152
4.4.2 Analyse par Fourier de la Nouvelle Méthode . . . 152
4.4.2.1 Expression des Ondes Planes . . . 153
4.4.2.2 Détermination des Amplitudes . . . 153
4.4.2.3 Interprétation des Résultats . . . 155
4.4.2.4 Ordre de la Méthode . . . 158
4.4.3 Expériences Numériques 1D . . . 159

II Raffinement de Maillage Spatio-Temporel Stable sans Multiplicateur de Lagrange 165

5 Raffinement de Maillage Spatio–Temporel $(1, 2)$ Stable sans Multiplicateur de Lagrange 167
5.1 Une Formulation Variationnelle Abstraite . . . 168
5.2 Semi-discrétisation en Espace . . . 172
5.3 Convergence du Problème Semi-discret . . . 173
5.3.1 Définition et Analyse de la Projection Elliptique . . . 173
5.3.2 Estimations sur le Problème d'Évolution . . . 175
5.4 Discrétisation en Temps . . . 178
5.4.1 Le Schéma Intérieur . . . 179
5.4.2 Les Équations de Couplage : Conservation d'une Énergie . . . 179
5.5 Stabilité du Schéma . . . 180
5.6 Caractère Bien Posé du Problème Discret . . . 183
5.7 Convergence du Problème Discret : Les Résultats Principaux . . . 183
5.8 La Preuve des Estimations d'Erreur . . . 185
5.8.1 Les Équations Satisfaites par l'Erreur . . . 185
5.8.2 Le Plan de la Preuve . . . 187
5.8.3 La Preuve de l'Estimation en $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta t})$ . . . 188
5.8.4 La Preuve de l'Estimation en $\mathcal{O}(\Delta x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2^l}})$ . . . 192
5.8.4.1 Estimations sur les Dérivées Discrètes Grossières . . . 192
5.8.4.2 La Preuve par Récurrence . . . 193
5.8.5 Vérification de l'hypothèse (5.66) . . . 197

6 Raffinement de Maillage Spatio–Temporel (q_c, q_f) Stable sans Multiplicateur de Lagrange 201
6.1 Extension au cas (q_c, q_f) général . . . 201
6.1.1 Schéma intérieur . . . 201
6.1.2 Équations de Couplage : Conservation d'une énergie discrète . . . 202
6.2 Caractère bien posé du Problème Discret . . . 203
6.3 Une Amélioration de la Méthode. Post-Traitement en Temps de la Solution . . . 209

III La Méthode de Domaines Fictifs **211**

7 Introduction et Rappels de la Méthode de Domaines Fictifs **213**
7.1 La Méthode des Domaines Fictifs pour des Problèmes de Diffraction 215
7.1.1 L'Équation des Ondes Scalaire 2D 215
7.1.1.1 Formulation Variationnelle 216
7.1.1.2 Discrétisation en Espace 217
7.1.1.3 Discrétisation en Temps 218
7.1.2 Les Équations de l'Élastodynamique 2D 219
7.1.2.1 Formulation Variationnelle 219
7.1.2.2 Discrétisation en Espace 220
7.1.2.3 Discrétisation en Temps 222
7.2 Condition Inf-Sup. Compatibilité entre les Maillages 222
7.3 Sur la Stabilité de la Méthode 223
7.4 Bilan des Résultats de Convergence dans la Littérature 224

8 Rappels sur l'Élément $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$. Problèmes avec Domaines Fictifs **225**
8.1 Présentation de l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ 226
8.1.1 Application à la Discrétisation de l'Espace $\underline{X}(\Omega) \times M(\Omega)$ 226
8.1.2 Application à la Discrétisation de l'Espace $\underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega) \times \underline{M}(\Omega)$ 227
8.2 Résultats de Convergence Existants en Absence de Domaines Fictifs 228
8.2.1 Pour l'Équation des Ondes Scalaire 229
8.2.2 Pour l'Élastodynamique 229
8.3 Expériences Numériques avec Domaines Fictifs. Difficultés 230
8.3.1 Le Cas Scalaire 231
8.3.2 Le Cas Vectoriel 232
8.3.3 Conclusion 241

9 L'Élément $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ **243**
9.1 Présentation de l'Élément $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ 244
9.1.1 Application à la Discrétisation de l'Espace $\underline{X}(\Omega) \times M(\Omega)$ 244
9.1.2 Application à la Discrétisation de l'Espace $\underline{\underline{X}}(\Omega) \times \underline{M}(\Omega)$ 245
9.2 Expériences Numériques avec Domaines Fictifs 246
9.2.1 Le Cas Scalaire 246
9.2.2 Le Cas Vectoriel 247
9.3 Étude de Dispersion. Modes Parasites 251
9.3.1 Pour l'Équation des Ondes Scalaire 251
9.3.2 Pour le Système Élastodynamique 261
9.4 Amortissement des Composantes Parasites 266
9.4.1 Présentation des Équations avec Amortissement pour l'Acoustique Scalaire . . . 266
9.4.2 Présentation des Équations avec Amortissement pour l'Élastodynamique 269
9.4.3 Quelques Mots sur la Discrétisation en Temps 270
9.5 Analyse de Convergence avec Domaines Fictifs 271
9.5.1 L'Équation des Ondes Scalaire 271
9.5.1.1 Définition et Analyse de la Projection Elliptique 271
9.5.1.2 Estimation sur le Problème d'Évolution 275
9.5.2 Les Équations de l'Élastodynamique. Difficultés 279

10 Généralisation de l'Élément Fini Proposé.L'Élément Fini $\mathcal{Q}_k^{div} \times \mathcal{Q}_k^{*,disc}$ pour l'Élastodynamique 281
10.1 Présentation de l'Élément Fini $\mathcal{Q}_k^{div} \times \mathcal{Q}_k^{*,disc}$ . . . 281
10.2 Analyse de Convergence pour l'Élastodynamique . . . 283

IV Couplage entre Domaines Fictifs et Techniques de Raffinement Espace-Temps 285

11 Construction d'un Couplage Stable entre les Deux Méthodes 287
11.1 Formulation Variationnelle. Difficultés d'analyse fonctionnelle . . . 288
11.2 Discrétisation en Espace . . . 289
11.3 Discrétisation en Temps . . . 294
11.3.1 Schéma Intérieur . . . 294
11.3.2 Équation de Couplage : Conservation d'une Énergie Discrète . . . 294
11.3.3 Première Méthode . . . 295
11.3.3.1 Présentation des Équations . . . 295
11.3.3.2 Caractère Bien Posé du Problème Totalement Discrétisé. . . . 295
11.3.3.3 Post-traitement en Temps de la Solution . . . 296
11.3.4 Deuxième Méthode . . . 297
11.3.4.1 Présentation des Équations . . . 297
11.3.4.2 Post-Traitement en Temps de la Solution . . . 297
11.3.5 Bilan des Avantages et des Inconvénients des Deux Méthodes . . . 298
11.4 Validation Numérique de la Deuxième Méthode . . . 298
11.5 Conclusion . . . 305

12 Une Expérience Numérique Plus Complexe 309

Conclusions et Perspectives 315

Annexes 321

A Proof of Proposition 2.5.1 321

B Implémentation du Raffinement de Maillage Spatio-Temporel $(q_c - q_f)$ avec multiplicateur de Lagrange 325
B.1 Pour la Méthode Conservative Initiale . . . 325
B.1.1 Organisation des Calculs . . . 325
B.1.2 Calcul de la Matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ . . . 327
B.1.3 Une Vérification dans le cas $(q_c, q_f) = (1, 2)$ . . . 327
B.2 Pour la Nouvelle Méthode . . . 328
B.2.1 Organisation des Calculs . . . 328
B.2.2 Calcul de la Matrice $\widetilde{\mathcal{M}}(\Delta t)$ . . . 330

Bibliographie 331

Introduction

Cette thèse se situe dans le **contexte applicatif** des méthodes de **contrôle non-destructif** qui consistent à détecter, voire identifier la présence des défauts, typiquement une fissure au sein d'un matériau solide. Cette détection se fait via l'émission et la détection d'ondes dites ultrasonores dans la pièce à tester : la présence du défaut se manifeste alors par son influence sur la propagation des ondes dans la pièce ; la méthode est dite non-destructive. Cette question intéresse particulièrement EDF (Électricité de France) en vue du contrôle des réacteurs nucléaires pour lesquels il est important de pouvoir détecter la présence et l'évolution d'une fissure. Dans cet objectif, le recours au calcul numérique paraît incontournable. Sans aller jusqu'au problème inverse (la reconstruction d'une fissure à partir des mesures), il est indispensable de pouvoir modéliser et de simuler la propagation d'ondes dans un milieu solide en présence de fissures. C'est dans ce contexte que le **projet ONDES** de l'INRIA et le **département SINETICS** de la section de Recherche et Développement de **EDF** collaborent depuis plusieurs années pour la mise au point de codes de simulation numérique d'expériences de contrôle non-destructif en régime transitoire. De façon plus précise, cette thèse se situe dans le prolongement de celle de Chrysoula Tsogka [80], qui avait développé une méthode originale adaptée au problème consistant à coupler une méthode d'éléments finis mixtes particulière sur des maillage réguliers avec une méthode de domaines fictifs pour la prise en compte des fissures. Plus récemment, Gilles Scarella [77] a étendu cette méthode pour prendre en compte des conditions de contact unilatéral pour modéliser la fissure. La motivation particulière de ce travail repose sur les trois observations suivantes :

- dans de nombreux cas de figure, la fissure ou, de façon plus générale, les détails géométriques du domaine de propagation, représentent une petite partie du domaine de propagation complet,
- la méthode des domaines fictifs, bien que robuste et relativement simple à utiliser, a une précision qui reste limitée si l'on n'utilise pas des maillages suffisamment fins.
- en présence de défauts, la solution recherchée présente des singularités en bout de fissure, singularités qu'une méthode trop fruste ne permettra pas de prendre en compte de façon suffisamment précise.

Ces observations conduisent à penser qu'il est souhaitable de disposer d'un outil de simulation permettant d'utiliser localement une méthode de calcul très précise pour prendre en compte les détails géométriques ou singularités de la solution qu'il faudrait coupler avec des méthodes qui utilisent une discrétisation moins fine mais permettant néanmoins de fournir une précision suffisante sur le reste du domaine de calcul. Il est alors clair qu'une des idées les plus naturelles consiste à utiliser des **méthodes de raffinement local de maillage**. Dans sa thèse, Thierry Fouquet [46], s'est attaqué à ce problème dans le contexte des équations de Maxwell, avec un double objectif :

- être capable de traiter des raccords de maillages non conformes, ce qui est souhaitable en tout état de cause et indispensable dans le cas d'un maillage régulier (voir la figure 1),
- être capable d'utiliser des pas de temps locaux adaptés au maillage spatial (on prendra le pas de

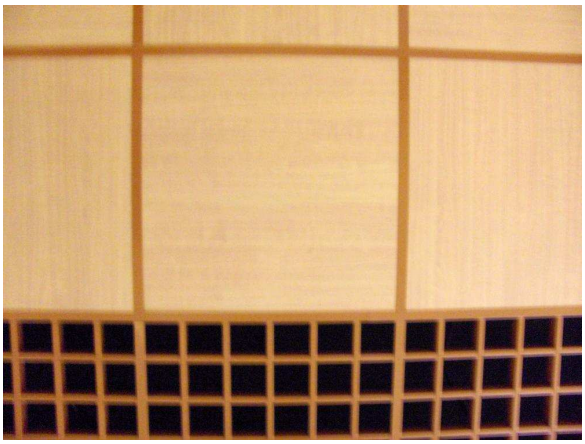


FIG. 1 – Raffinement de maillage non-conforme. Plafond de la cafétéria de l'INRIA-Rocquencourt.

temps Δt petit là où le pas d'espace h est petit) ce qui s'impose naturellement lorsqu'on s'intéresse à des équations de nature hyperbolique.

Lorsqu'on attaque cette question on peut se heurter à des questions délicates de stabilité comme cela peut être le cas avec l'approche classique basée sur des techniques d'interpolation [27, 61, 59, 72, 66]. Dans [46] T. Fouquet a développé une **technique originale de raffinement spatio-temporel** dite **conservative** dont la qualité première est d'assurer a priori la stabilité du schéma sans incidence sur la condition CFL. La méthode se base sur la conservation d'une énergie discrète qui est équivalente à la norme L^2 de la solution discrète.

La mission qui m'a été confiée comporte plusieurs volets :

- adapter les méthodes de raffinement conservatives aux équations de l'élastodynamique linéaire (propagation des ondes dans les solides),
- compléter l'analyse de ces méthodes (questions ouvertes par la thèse de T. Fouquet),
- les étendre à des taux de raffinement (rationnels) quelconques,
- améliorer les méthodes conservatives initiales en termes de précision,
- être en mesure de coupler cette méthode de raffinement espace temps à la méthode des domaines fictifs.

Tel est effectivement le programme que j'ai mené à bien au long de ce travail, qui m'a , en outre, amené à réexplorer, tant du point de vue théorique que pratique, la méthode des domaines fictifs, laquelle peut se révéler inopérante dans certains cas en élastodynamique si on ne prend pas garde à choisir convenablement les éléments finis mixtes utilisés pour la discrétisation volumique. Tout ceci explique que ma thèse comporte quatre parties distinctes, d'importance inégale.

La **première partie**, à mes yeux la plus importante, concerne les méthodes de raffinement espace temps pour l'élastodynamique. Si ce qui concerne le raccord des maillages en espace s'appuie sur les idées des méthodes d'éléments joints développées dans un contexte différent (essentiellement pour les problèmes elliptiques [23, 15, 81]), tout ce qui concerne la discrétisation en temps relève de développements originaux. Le chapitre 1 traite de l'adaptation de la méthode de T. Fouquet dans le cas d'un raffinement $1-2$ (le maillage est deux fois plus fin dans la grille fine que dans la grille grossière) aux équations de l'élastodynamique. Au chapitre 2, nous menons une analyse d'erreur complète et précise de la méthode

qui confirme et complète les résultats obtenus par [38]. Le chapitre 3 constitue une extension du chapitre 1 au cas d'un taux de raffinement rationnel quelconque. Un des points nouveaux est la description fine par l'analyse de Fourier des phénomènes de réflexion transmission d'ondes à travers l'interface grille fine–grille grossière. C'est notamment cette analyse qui a suscité les travaux du chapitre 4 où on propose une nouvelle méthode qui permet de passer d'une méthode en $\mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}})$ a une méthode en $\mathcal{O}(h^2)$. Cette méthode, conçue initialement, comme un post-traitement de la solution donnée par la méthode initiale peut être vue comme une nouvelle méthode de couplage entre la grille fine – grille grossière.

La **partie II** concerne un nouvel aspect des méthodes de raffinement conservatif. Alors, que les algorithmes développés dans la partie un s'appuient sur une vision "éléments joints" avec multiplicateur de Lagrange du couplage spatial, nous proposons une méthode alternative sans multiplicateur de Lagrange, s'appuyant sur une méthode de couplage que nous appelons duale–primale : la méthode numérique utilisée dans la grille fine est duale de celle utilisée dans la grille grossière. Dans ce cas, on peut la présenter dans un contexte abstrait assez général qui dépasse le cas particulier de l'élastodynamique (les équations de Maxwell, de l'acoustique ou le couplage fluide-solide seront mentionnées). On peut aussi mener une analyse de convergence complète, en particulier parce que la méthode permet de s'affranchir de la question délicate liée au choix d'espace du multiplicateur de Lagrange dans le cas de la méthode des éléments joints.

La **troisième partie** est dédiée à la méthode des domaines fictifs. Après en avoir rappelé les principes généraux dans le chapitre 7 nous décrivons, dans le chapitre 8 les problèmes rencontrés avec l'utilisation de l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ introduit par C. Tsogka. Au chapitre 9, nous proposons une solution qui consiste à enrichir l'espace de discrétisation pour le champ de vitesse $\underline{v}$ et introduire ce que nous appelons l'élément $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$. Avec cet élément on peut démontrer la convergence de la méthode des domaines fictifs, au moins dans le cas de l'équation des ondes scalaires, et se convaincre de la convergence dans le cas de l'élastodynamique a travers des simulations numériques. Le chapitre 10 concerne la généralisation de l'élément $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ à l'ordre supérieur.

La **quatrième et dernière partie** de la thèse correspond aux travaux effectués au cours des quatre derniers mois de la thèse sur le couplage entre la méthode des domaines fictifs et les techniques de raffinement de maillage spatio-temporel. Cette partie, est à la fois la plus courte et la moins aboutie du point de vue mathématique mais elle a néanmoins débouché sur des développement du logiciel conséquents et des résultats numériques très satisfaisants. Au chapitre 11 nous proposons deux méthodes de couplage domaines fictifs – raffinement de maillage espace temps qui diffèrent essentiellement au niveau de la discrétisation en temps. Chacune des deux méthodes possède la propriété d'être conservative et par conséquent stable. Au chapitre 12, nous présentons différentes expériences numériques obtenues avec une des ces deux méthodes (la seule à avoir été implementée a ce jour).

Terminons cette introduction **en situant nos travaux** par rapport aux développements récents de **la littérature** sur des sujets similaires, essentiellement sur les questions de raffinement de maillage en hyperbolique linéaire. Il est clair que nos travaux sur le raffinement de maillage en espace ont bénéficié des progrès récents de la méthode des éléments joints. Notamment, afin d'effectuer la discrétisation en temps de notre problème avec un pas de temps local il est intéressant d'interpréter la méthode "mortar" en imposant la continuité à l'interface à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange [15, 81]. Parallèlement à notre travail, on peut citer plusieurs contributions récentes qui relèvent plus ou moins directement de la problématique que nous abordons dans la thèse. Ainsi, les travaux de M. Gander, F. Nataf et L. Halpern [47] sur les méthodes de décomposition de domaine espace-temps pour la résolution de l'équation des ondes, peuvent être exploitées pour faire du raffinement de maillage spatio-temporel. Un avantage de cette méthode réside dans le fait de permettre des pas de discrétisation totalement différents d'un

domaine à l'autre (pas forcément des rapports rationnels entre les différents pas de discrétisation des sous-domaines). Cependant, la mise en oeuvre dans ce cas général peut être relativement complexe. Dans le cas où les maillages en temps sont réguliers et le rapport entre les pas de discrétisation temporels sur la grille fine et la grille grossière est un rationnel, elle mène a un algorithme très similaire (notamment en termes de complexité) à celui qu'on développe dans ce document. Cependant, l'analyse de stabilité et de convergence reste incomplète et, à notre connaissance, il n'y a pas encore d'implémentation de la méthode pour des dimensions supérieures à un. Très récemment, V. Moloney et al. [85] ont présenté une méthode de raffinement de maillage spatio-temporel qui se base sur des techniques d'interpolation plus complexes que celles présentées dans [46]. Dans ce travail, les auteurs développent une analyse de réflexion-transmission 2D à l'aide des ondes planes lorsque le taux de raffinement est égal à deux qui est similaire à celle qui avait été introduite dans [38] dans le cadre 1D et qu'on a généralisée au cas d'un taux de raffinement rationnel quelconque dans ce document. Même si d'après les expériences numériques la méthode semble être stable, l'analyse de stabilité (qui revient à regarder si le coefficient de réflexion obtenu par l'étude de Fourier a un module plus petit que un pour toutes les fréquences) n'est pas totalement convaincante. Dans le but de faire du raffinement de maillage spatio-temporel avec une discrétisation du type Galerkin discontinu, S. Piperno a récemment proposé dans le cadre 1D de nouvelles méthodes de raffinement de maillage spatio-temporel conservatives [71] (au sens où elles conservent une énergie discrète). La différence fondamentale par rapport aux méthodes présentées dans ce document réside dans le caractère totalement explicite du schéma numérique (on signale ici que nos méthodes ont besoin de résoudre un système linéaire de petite taille sur l'interface de couplage à chaque itération). Cependant, le fait d'avoir des équations de couplage qui ne semblent pas consistantes pour tous les pas de temps (mais seulement "en moyenne") fait que la généralisation à des dimensions supérieures n'est pas évidente. En outre, l'analyse de convergence reste, à notre connaissance, incomplète. En suivant une idée similaire à celle utilisée dans la construction de méthodes conservatives, on peut aussi s'intéresser à des méthodes dissipatives où l'énergie discrète de la solution, qui est équivalente à la norme L^2 de la solution sous la condition CFL, diminue. On fait référence à des travaux de B. Després dans la construction de schémas avec cette propriété pour des problèmes hyperboliques linéaires (voir par exemple l'annexe D de la thèse de T. Fouquet [46] pour un schéma de ce type). Finalement nous mentionnons les nombreux travaux qui ont été consacrés à des techniques de raffinement de maillage adaptatif dans la littérature des systèmes hyperboliques et lois de conservation comme par exemple ceux de M. Berger et al. [18, 19, 22, 21] ou, plus récemment, les travaux de M. Postel et al. Une des perspectives à long terme serait d'étendre les techniques présentées dans cette thèse à ce type d'applications.

Première partie

Raffinement de Maillage Spatio–Temporel pour l'Élastodynamique

Chapitre 1

Un Raffinement de Maillage Espace–Temps $(1, 2)$ Stable pour l'Élastodynamique

Sommaire

1.1 Les Équations de l'Élastodynamique 5
1.2 Un Problème de Transmission. Formulation Variationnelle 6
1.3 Discrétisation en Espace 8
1.3.1 Présentation générale 8
1.3.2 Un Choix Particulier d'Espace d'Approximation pour les Inconnues Volumiques dans le Cas des Maillages Rég
1.3.3 Sur le Choix d'Espace d'Approximation pour le Multiplicateur de Lagrange . . 11
1.4 Caractère Bien Posé du Problème Semi-Discret 11
1.4.1 Une Condition Suffisante 11
1.4.2 Sur le Choix de l'Espace $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ 12
1.4.2.1 Un Résultat Général 12
1.4.2.2 Des Approximations Conformes dans le Cadre du Problème Modèle 13
1.4.2.3 Des Approximations Non-Conformes dans le Cadre du Problème Modèle 14
1.5 À Propos de la Convergence du Schéma Semi-Discret 17
1.5.1 Considérations Générales 17
1.5.2 Un Résultat de Convergence pour le Problème Modèle 18
1.5.2.1 Définition et Analyse de la Projection Elliptique 19
1.5.2.2 Estimations sur le Problème d'Évolution 25
1.5.3 Les Cas Plus Généraux : Les Difficultés 27
1.6 Discrétisation en Temps 28
1.6.1 Schéma Intérieur. 28
1.6.2 Équations de Couplage : Conservation d'une Énergie Discrète 30
1.7 Caractère Bien Posé du Problème Discret 32
1.7.1 Algorithme de Calcul 33
1.7.2 Obtention du Système Linéaire Vérifié par J^{2n+1} 33
1.7.3 Sur l'Inversibilité de la Matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ 34
1.8 Stabilité du Schéma 35
1.9 Résultats Numériques 37
1.9.1 Choix de l'Espace du Multiplicateur 37
1.9.2 Expériences avec des raffinements récursifs 45

Dans ce travail on s'intéresse à la résolution des équations de l'élastodynamique linéaire dans des domaines, souvent de grande taille par rapport à la longueur d'onde, et avec une géométrie complexe, notamment en présence de fissures. Étant donné que dans ce type de problèmes non seulement la précision de la méthode est importante, mais aussi la rapidité du calcul, on a fait le choix d'utiliser des schémas explicites en temps. La stabilité est alors reliée à une condition du type CFL :

$$\alpha \;:=\; \frac{\Delta t}{\Delta x} \;\leq\; \mathcal{C}_{cfl}, \tag{1.1}$$

où $\mathcal{C}_{cfl}$ est une constante et le couple $(\Delta t, \Delta x)$ est le pas de temps et le pas d'espace respectivement. Il est clair que, en termes de temps de calcul et pour un Δx fixé, il est convenable de choisir le Δt le plus grand possible. Une analyse de dispersion nous montre que, pour une large famille de schémas (comme celui qu'on utilisera), ce choix est aussi optimal en termes de précision.

Dans certaines régions, si on veut prendre en compte les détails géométriques ou capturer une singularité de la solution, il est tentant d'utiliser des techniques de raffinement de maillage local. Il est clair que si on considère un unique pas de temps sur tout le domaine de calcul, il sera restreint par la condition (1.1) sur la plus petite maille en espace. Ceci implique alors un coût de calcul additionnel important. En outre, la méthode sera assez dispersive sur la grille grossière qui est, dans la pratique, la région la plus grande. Pour éviter ces deux inconvénients, on propose d'utiliser une méthode avec un pas de temps local sur les régions raffinées en espace afin d'avoir le même rapport entre le pas de temps et le pas d'espace partout. Ceci pose de nouvelles difficultés du point de vue numérique et pratique qui sont, en général, plus délicates que celles qu'on peut trouver dans le cas d'un raffinement de maillage seulement en espace.

Les premières solutions, qui ont été suggérées dans la littérature de l'électromagnétisme, se basent principalement sur des techniques d'interpolation (en espace et/ou en temps) en cherchant la consistance du schéma sur l'interface grille grossière-grille fine (voir [61, 59, 72, 27]). Malheureusement, ces méthodes peuvent se révéler instables sous certains configurations [37, 46] et leur analyse, basée sur la théorie GKS [60, 55], est assez complexe. Une autre technique qui a été développée dans [47] utilise les idées de la décomposition de domaine. Cependant, l'analyse de stabilité et convergence reste à compléter.

À ce stade, rappelons que ce travail s'inscrit dans le cadre d'un contrat avec Électricité De France (EDF) qui s'intéresse au contrôle non destructif. Il s'agit en particulier d'inclure un module de raffinement de maillage spatio-temporel dans ATHENA2D, code de simulation de la propagation d'ondes élastiques dans des milieux complexes élastiques (anisotropes, hétérogènes et pouvant contenir des fissures). La discrétisation en espace utilisée se base sur la méthode des éléments finis sous une formulation mixte vitesse-contraintes du système élastodynamique [80, 14]. Pour l'approximation temporelle un schéma du type saute-mouton d'ordre deux a été utilisé. Étant donné qu'il sera important de garder toutes ces caractéristiques, ceci justifie (et impose) de nombreux choix qu'on fera au long du document sur les formulations, espaces d'approximation, schéma en temps, etc, ...

Récemment, un autre type de méthodes qui permettent d'utiliser des pas de temps locaux ont été introduites dans [36, 37, 46]. Ces méthodes, qu'on appellera conservatives, ont été développées pour l'équation des ondes 1D et ensuite généralisés aux équations de Maxwell [46, 39]. Au contraire des méthodes d'interpolation, elles cherchent d'abord la stabilité via la conservation d'une énergie discrète qui est équivalente à la norme L^2 de la solution discrète sous la condition (1.1). C'est pour ceci qu'on a décidé d'adapter cette méthode aux équations de l'élastodynamique. Afin d'introduire la notation et les principes fondamentaux de cette méthode, on traite dans un premier temps le cas où le maillage utilisé sur la grille fine est deux fois plus fin que celui utilisé sur la grille grossière (raffinement de maillage

spatio-temporel $(1-2)$).

Dans les sections 1.1 et 1.2 on présente les équations à résoudre que l'on réécrit comme un problème de transmission entre deux sous-domaines : la région raffinée et la région non raffinée. Alors, les deux équations de raccord seront imposées différemment : une des deux sera traitée de façon faible grâce à l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange tandis que l'autre d'une façon forte. Dans la section 1.3 on présente la discrétisation en espace avec une approche éléments finis de notre problème en spécifiant les espaces de discrétisation utilisés par ATHENA2D sur les inconnues volumiques. La section 1.6 est dédiée à la discrétisation temporelle des équations afin d'obtenir un schéma stable. Dans les sections 1.7 et 1.8 on montre la stabilité et on discute le caractère bien posé du problème totalement discrétisé. Dans la section 1.9.1, on montre des résultats numériques qui nous permettent de choisir parmi les espaces d'approximation pour la nouvelle inconnue, le multiplicateur de Lagrange, qui fournisse la meilleure précision. Finalement, dans la section 1.9.2 on montre des expériences numériques plus réalistes où on effectue plusieurs raffinements de maillage récursifs. Ceci nous permet de comparer en termes de précision et coût de calcul notre méthode avec une méthode similaire qui se sert d'un pas de temps global.

Une partie des résultats de ce chapitre a donnée lieu à la publication [8].

1.1 Les Équations de l'Élastodynamique

On considère la formulation en *vitesse–contraintes* des équations de l'élastodynamique dans un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\left\{\begin{array}{rcrcll} \rho\dfrac{\partial \underline{v}}{\partial t} & - & \underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} & = & \underline{f}, & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} & - & \mathbf{C}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) & = & 0, & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{1.2}$$

où il faut ajouter des conditions initiales et aux limites. Les inconnues de notre problème sont le champ de vitesse $\underline{v}$ et le tenseur de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ tandis que les données sont ρ, la densité du matériel, $\underline{f}$ les forces externes et $\mathbf{C}$, le tenseur d'ordre quatre, appelé tenseur d'élasticité. Nous rappelons que le tenseur de déformations est défini par

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u} + (\underline{\underline{\nabla}}\,\underline{u})^t\right).$$

De cette façon, la première équations de (1.2) est l'équation du mouvement du corps Ω et la deuxième est la loi de comportement qui relie les tenseur de contraintes et de déformations par la loi de Hooke. On suppose que la densité vérifie

$$0 < \rho^- \leq \rho(x) \leq \rho^+ < +\infty,$$

et que le tenseur d'élasticité satisfait les propriétés habituelles de symétrie et positivité, c'est à dire,

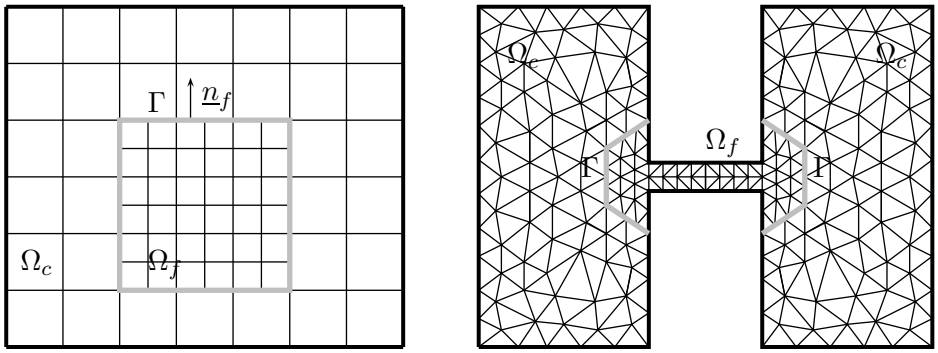
$$\mathbf{C}_{ijkl}(x) = \mathbf{C}_{klij}(x) = \mathbf{C}_{jikl}(x),$$

$$0 < \kappa\,|\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}|^2 \leq \mathbf{C}(x)\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} \leq \nu\,|\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}|^2 \quad \text{pour tout tenseur symétrique } \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}\,,$$

où

$$(\sigma, \tilde{\sigma}) \;:=\; \sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{i,j}\,\tilde{\sigma}_{i,j} \qquad \text{et} \qquad |\sigma|^2 \;:=\; (\sigma, \sigma).$$

Par conséquent, le tenseur $\mathbf{C}$, considéré comme une application de l'ensemble de tenseurs symétriques d'ordre deux dans lui même est inversible. On note $\mathbf{A}$ cet inverse.



(a) Maillage structuré (b) Maillage non-structuré

FIG. 1.1 – Deux possibles configurations de raffinement de maillage non-conforme.

1.2 Un Problème de Transmission. Formulation Variationnelle

Pour faire un raffinement de maillage, on découpe notre domaine de calcul en deux sous-domaines Ω_c et Ω_f tels que

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_c \cup \overline{\Omega}_f, \qquad \Omega_c \cap \Omega_f = \varnothing. \tag{1.3}$$

On appelle Γ la frontière commune. On utilisera sur Ω_f un maillage deux fois plus fin que celui de Ω_c. La méthode consiste à considérer (1.2) comme un problème de transmission. Pour chaque fonction g de la variable spatiale on dénote par g_c (resp. g_f) sa restriction à Ω_c (resp. Ω_f). En utilisant cette notation, on a donc les deux systèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \rho_l \dfrac{\partial \underline{v}_l}{\partial t} & - & \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}_l & = & \underline{f}_l \quad \text{dans } \Omega_l, \\ \mathbf{A}_l \dfrac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_l}{\partial t} & - & \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_l) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega_l, \end{array} \right| , \quad l \in \{f, c\} \tag{1.4}$$

couplés par les conditions de transmission

$$\underline{\underline{\sigma}}_c\, \underline{n}_c = -\underline{\underline{\sigma}}_f\, \underline{n}_f \quad \text{sur } \Gamma, \tag{1.5}$$

$$\underline{v}_c = \underline{v}_f \quad \text{sur } \Gamma, \tag{1.6}$$

où $\underline{n}_l,\ l \in \{f, c\}$ est le vecteur normal unitaire extérieur à $\Omega_l,\ l \in \{f, c\}$ (voir la figure 1.1).

L'étape suivante est la construction d'une formulation variationnelle mixte du problème couplé (1.4)–(1.5). On peut obtenir deux formulations selon le terme qu'on intègre par parties : $< \varepsilon(\underline{v}_l), \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l >$ ou $< \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}_l, \underline{\tilde{v}}_l >$. Étant donné qu'on est intéressé à utiliser les éléments finis introduits dans [14], on a fait le premier choix qui amène à introduire le cadre fonctionnel suivant dans chaque sous-domaine $\Omega_l,\ l \in \{c, f\}$:

$$\left| \begin{array}{l} \underline{M}(\Omega_l) = \left(L^2(\Omega_l)\right)^2 , \\ \underline{X}(\Omega_l) = H(\text{div}, \Omega_l), \\ \underline{\underline{X}}(\Omega_l) = \underline{X}(\Omega_l) \times \underline{X}(\Omega_l), \\ \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega_l) = \left\{ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l \in \underline{\underline{X}}(\Omega_l) \ / \ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l \text{ symétrique} \right\}. \end{array} \right. \tag{1.7}$$

Pour pouvoir donner un sens à la condition de transmission (1.6) on introduit deux multiplicateurs de Lagrange $\underline{j}_l \equiv \underline{v}_{l|\Gamma},\ l \in \{c, f\}$, dans l'espace

$$\underline{\mathcal{J}}(\Gamma) = \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^2, \tag{1.8}$$

qui sont des nouvelles inconnues et peuvent s'interpréter comme la trace du champ de vitesses sur l'interface Γ. Ainsi on a la formulation

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{\underline{\sigma}}_l \in C^1\left([0,T]; \underline{\underline{L}}^2(\Omega_l)\right) \cap C^0\left([0,T]; \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega_l)\right) \\ \qquad (\underline{v}_l, \underline{j}_l) \in C^1\left([0,T]; \underline{M}(\Omega_l)\right) \times C^0\left([0,T]; \underline{\mathcal{J}}(\Gamma)\right) \text{ tels que} \\ \left\{\begin{array}{lllllll} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{\Omega_l} \rho_l \underline{v}_l \cdot \tilde{\underline{v}}_l \ \mathrm{d}x & - & \displaystyle\int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}_l \cdot \tilde{\underline{v}}_l \ \mathrm{d}x & & & = & \displaystyle\int_{\Omega_l} \underline{f}_l \cdot \tilde{\underline{v}}_l \ \mathrm{d}x, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{\Omega_l} \mathbf{A}_l\, \underline{\underline{\sigma}}_l : \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l \ \mathrm{d}x & + & \displaystyle\int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}}\, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l \cdot \underline{v}_l \ \mathrm{d}x & - & \displaystyle\int_{\Gamma} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l\, \underline{n}_l \cdot \underline{j}_l \ \mathrm{d}\gamma & = & 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{1.9}$$

pour tout $(\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l, \tilde{\underline{v}}_l) \in \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega_l) \times \underline{M}(\Omega_l),\ l \in \{c, f\}$. Les conditions de transmission s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{lll} \displaystyle\int_{\Gamma} \underline{\underline{\sigma}}_c \underline{n}_c \cdot \tilde{\underline{j}} \ \mathrm{d}\gamma & = & -\displaystyle\int_{\Gamma} \underline{\underline{\sigma}}_f \underline{n}_f \cdot \tilde{\underline{j}} \ \mathrm{d}\gamma, \qquad \forall\, \tilde{\underline{j}} \in \underline{\mathcal{J}}(\Gamma), \\ \underline{j}_c & = & \underline{j}_f. \end{array}\right. \tag{1.10}$$

On signale que les deux conditions de raccord on été traitées différemment. En effet, la condition (1.5) qui porte sur la continuité de la contrainte normale à été prise en compte de façon faible tandis la continuité du champ de vitesse (1.6) est imposé fortement. La procédure qu'on utilise ici est similaire à la méthode des éléments joints où on introduit aussi un multiplicateur de Lagrange pour imposer la continuité d'une des traces de la solution [15]. Le fait d'avoir introduit deux multiplicateurs de Lagrange j_c et j_f, même s'il peut sembler ici artificiel (on pourrait introduire un seul $\underline{j}$), sera justifié au moment d'effectuer la discrétisation en temps.

Remarque 1.2.1 *En toute rigueur, il faut interpréter les intégrales sur l'interface Γ comme des produits de dualité entre $\underline{\mathcal{J}}(\Gamma)$ et son dual.*

Remarque 1.2.2 *Si on prend $(\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l, \tilde{\underline{v}}_l) = (\underline{\underline{\sigma}}_l, \underline{v}_l),\ l \in \{c, f\}$ dans (1.9), on voit que l'énergie*

$$\mathbf{E}(t) \ = \ \frac{1}{2} \sum_{l \in \{c,f\}} \left\{ \int_{\Omega_l} \mathbf{A}_l\, \underline{\underline{\sigma}}_l : \underline{\underline{\sigma}}_l \ dx + \int_{\Omega_l} \rho_l |\underline{v}_l|^2 \ dx \right\} \tag{1.11}$$

vérifie la relation suivante

$$\frac{d}{dt}\mathbf{E}(t) \ = \ \underbrace{\int_{\Gamma} \left(\underline{\underline{\sigma}}_c\, \underline{n}_c \cdot \underline{v}_c + \underline{\underline{\sigma}}_f\, \underline{n}_f \cdot \underline{v}_f \right) \ d\gamma}_{=0} + \sum_{l \in \{c,f\}}^{2} \int_{\Omega_l} \underline{f}_l \cdot \underline{v}_l \ dx.$$

En particulier, l'énergie se conserve en absence de forces externes.

Remarque 1.2.3 *On aurait pu faire l'intégration par parties dans le terme $< \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}_l, \tilde{\underline{v}}_l >$. Dans ce cas, le cadre fonctionnel adéquat serait*

$$\left.\begin{array}{rcl} \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega_l) & = & \left\{ \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l \in \left(L^2(\Omega_l)\right)^{2\times 2} / \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l \textit{symétrique} \right\}, \\ \underline{M}(\Omega_l) & = & \left(H^1(\Omega_l)\right)^2, \end{array}\right| \quad l \in \{c, f\}$$

Cette fois, il faudrait introduire les multiplicateurs de Lagrange $\underline{j}_l$, $l \in \{c, f\}$ *dans l'espace*

$$\underline{\mathcal{J}}(\Gamma) \quad = \quad \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^2, \quad l \in \{c, f\},$$

et qui peuvent s'interpréter comme la trace normale du tenseur de contraintes sur l'interface Γ *(cf. [45]). On obtiendrait alors une méthode duale de celle que nous allons étudier dans ce travail et qui n'est pas compatible avec l'élément fini mixte qu'on veut utiliser.*

1.3 Discrétisation en Espace

1.3.1 Présentation générale

Pour la discrétisation en espace du problème (1.9)–(1.10) on se donne un maillage $T_{h_c}(\Omega_c)$ de pas h_c du sous-domaine Ω_c et un autre $T_{h_f}(\Omega_f)$, typiquement deux fois plus fin ($h_f = h_c/2$), pour Ω_f. Dans la figure 1.1 on peut voir deux possibles configurations. Ainsi, dans celle qui est à gauche on se sert de maillages structurés à base de rectangles, dans celle qui est à droite on utilise des données non-structurées.
Ceci nous permet de construire des espaces de dimension finie $\underline{M}_{h_l}(\Omega_l) \subset \underline{M}(\Omega_l)$ et $\underline{\underline{X}}^{sym}_{h_l}(\Omega_l) \subset \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega_l)$, $l \in \{c, f\}$ avec les propriétés d'approximation habituelles

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{h>0} \inf\limits_{\tilde{\underline{v}}_l^h \in \underline{M}_{h_l}(\Omega_l)} \left\| \underline{v}_l - \tilde{\underline{v}}_l^h \right\|_{\underline{M}(\Omega_l)} & = & 0, \quad \forall \underline{v}_l \in \underline{M}(\Omega_l), \\ \lim\limits_{h>0} \inf\limits_{\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h \in \underline{\underline{X}}^{sym}_{h_l}(\Omega_l)} \left\| \underline{\underline{\sigma}}_l - \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h \right\|_{\underline{\underline{X}}(\Omega_l)} & = & 0, \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}_l \in \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega_l). \end{array}\right| , \quad l \in \{c, f\}$$

Pour approcher les multiplicateurs de Lagrange on effectue un maillage $\Xi_H(\Gamma)$ de pas H de l'interface Γ. Ainsi, on introduit un espace d'approximation $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \subset (L^2(\Gamma))^2$ qui est censé à approcher l'espace fonctionnel $\underline{\mathcal{J}}(\Gamma)$. Dans le cas où on suit une approche conforme (approximation intérieur), c'est à dire, lorsque

$$\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \quad \subset \quad \underline{\mathcal{J}}(\Gamma), \tag{1.12}$$

on supposera que

$$\lim_{h>0} \inf_{\tilde{\underline{j}}_l^H \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)} \left\| \underline{j}_l - \tilde{\underline{j}}_l^H \right\|_{\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)} \quad = \quad 0, \quad \forall \underline{j}_l \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma).$$

Dorénavant le symbole intégral avec un cercle signifiera que l'intégrale en cours peut être calculée en utilisant de l'intégration numérique (techniques de condensation de masse) ou de façon exacte. On spécifiera quel type d'intégration on utilise lorsque ce sera nécessaire. La formulation approchée s'écrit

(1.13)

Trouver $(\underline{\underline{\sigma}}_l^h, \underline{v}_l^h, \underline{j}_l^H) \in C^1\left([0,T]; \underline{\underline{X}}^{sym}_{h_l}(\Omega_l) \times \underline{M}_{h_l}(\Omega_l) \times \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)\right)$ tels que

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_{\Omega_l} \rho_l \underline{v}_l^h \cdot \tilde{\underline{v}}_l^h \, \mathrm{d}x & - & \displaystyle\int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}_l^h \cdot \tilde{\underline{v}}_l^h \, \mathrm{d}x & = & \displaystyle\int_{\Omega_l} \underline{f}_l \cdot \tilde{\underline{v}}_l^h \, \mathrm{d}x, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_{\Omega_l} \mathbf{A}_l \, \underline{\underline{\sigma}}_l^h : \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h \, \mathrm{d}x & + & \displaystyle\int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}}\, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h \cdot \underline{v}_l^h \, \mathrm{d}x - \int_{\Gamma} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h \, \underline{n}_l \cdot \underline{j}_l^H \, \mathrm{d}\gamma & = & 0, \end{array}\right.$$

pour tout $(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h, \underline{\tilde{v}}_l^h) \in \underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l) \times \underline{M}_{h_l}(\Omega_l),\ l \in \{c, f\}$. Ces deux systèmes sont couplés par les équations

$$(1.14) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Gamma \underline{\underline{\sigma}}_c^h\, \underline{n}_c \cdot \underline{\tilde{j}}^H \ \mathrm{d}\gamma & = & \displaystyle - \int_\Gamma \underline{\underline{\sigma}}_f^h\, \underline{n}_f \cdot \underline{\tilde{j}}^H \ \mathrm{d}\gamma, \qquad \forall\, \underline{\tilde{j}}^H \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma), \\ \underline{j}_c^H & = & \underline{j}_f^H. \end{array} \right.$$

Remarque 1.3.1 *Étant donné que dans la pratique*

$$\underline{\underline{\sigma}}_l^h \ \in\ \underline{\underline{X}}_{h_l}(\Omega_l) \ \Longrightarrow\ \underline{\underline{\sigma}}_l^h\, \underline{n}_{l\,|\Gamma} \ \in\ (L^2(\Gamma))^2,$$

et qu'on suppose que $\underline{\mathcal{J}}(\Gamma) \subset (L^2(\Gamma))^2$, les intégrales sur l'interface Γ dans la formulation variationelle approchée (1.13)–(1.14) ont un sens.

On associe à chaque espace de discrétisation de dimension finie une base (composée par les fonctions de base) qu'on dénotera par

$$(1.15) \qquad \left. \begin{array}{rcl} \mathcal{B}\left(\underline{\underline{X}}_{h_l}(\Omega_l)\right) & = & \left\{\underline{\underline{\sigma}}_l^{h,j}\right\}_{j=1}^{N_{\underline{\underline{\sigma}},l}}, \qquad \mathcal{B}\left(\underline{M}_{h_l}(\Omega_l)\right) \ = \ \left\{\underline{v}_l^{h,j}\right\}_{j=1}^{N_{\underline{v},l}}, \\ \mathcal{B}\left(\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)\right) & = & \left\{\underline{j}_l^{H,j}\right\}_{j=1}^{N_{\underline{j}}}, \end{array} \right| \ l \in \{c, f\},$$

où $N_{\underline{\underline{\sigma}},l} = \dim \underline{\underline{X}}_{h_l}(\Omega_l)$, $N_{\underline{v},l} = \dim \underline{M}_{h_l}(\Omega_l)$ et $N_{\underline{j}} = \dim \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$. À l'aide de ces fonctions on construit les matrices

$$\begin{array}{rcl} (M_{\sigma,l})_{i,j} & = & \displaystyle\oint_{\Omega_l} \mathbf{A}_l\, \underline{\underline{\sigma}}_l^{h,i} : \underline{\underline{\sigma}}_l^{h,j}\ \mathrm{d}x, \quad 1 \le i, j \le N_{\underline{\underline{\sigma}},l}, \\ (M_{v,l})_{i,j} & = & \displaystyle\oint_{\Omega_l} \rho_l\, \underline{v}_l^{h,i} \cdot \underline{v}_l^{h,j}\ \mathrm{d}x, \quad 1 \le i, j \le N_{\underline{v},l}, \\ (D_l)_{i,j} & = & \displaystyle\int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}_l^{h,j} \cdot \underline{v}_l^{h,i}\ \mathrm{d}x, \quad 1 \le i \le N_{\underline{v},l}, \quad 1 \le j \le N_{\underline{\underline{\sigma}},l}, \\ (C_l)_{i,j} & = & \displaystyle\int_\Gamma \underline{\underline{\sigma}}_l^{h,j} \underline{n}_l \cdot \underline{j}_l^{H,i}\ \mathrm{d}\gamma, \quad 1 \le i \le N_{\underline{j}}, \quad 1 \le j \le N_{\underline{\underline{\sigma}},l}. \end{array}$$

Alors, le problème (1.13)–(1.14) est équivalent à une formulation matricielle

$$(1.16) \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\Sigma_l, V_l, J_l) \in C^1\left([0,T]; \mathbb{R}^{N_{\underline{\underline{\sigma}},l}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{v},l}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{j}}}\right) \text{ vérifiant} \\ \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} M_{v,l} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V_l & - & D_l\, \Sigma_l & & & = & F_l, \\ M_{\sigma,l} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Sigma_l & + & D_l^*\, V_l & - & C_l^*\, J_l & = & 0, \end{array} \right. \end{array} \right|, \quad l \in \{c, f\},$$

où les conditions de transmission sont

$$(1.17) \qquad \left| \begin{array}{rcl} C_c\, \Sigma_c & = & -C_f\, \Sigma_f, \\ J_c & = & J_f. \end{array} \right.$$

Maintenant les inconnues sont des vecteurs dans lesquels on a regroupé les coordonnés de la solution discrète du problème (1.13)–(1.14) dans les bases (1.15).

Remarque 1.3.2 *Les matrices qui interviennent dans cette formulation matricielle peuvent s'interpréter comme des les équivalents discrets des opérateurs du problème continu. Ainsi, les matrices D_l et D_l^* s'interprètent comme l'opérateur* $\mathrm{div}(\cdot)$ *et $\varepsilon(\cdot)$ respectivement. Les matrices C_l calculent la trace normale du tenseur de contraintes de chacun des cotés de l'interface. Leurs transposées, les matrices C_l^*, sont chargés d'ajouter la contribution du multiplicateur de Lagrange au tenseur de contraintes. Finalement, on a les matrices de masse $M_{\sigma,l}$ et $M_{v,l}$ associées aux termes de masse du système. Elles sont symétriques et définies positives.*

1.3.2 Un Choix Particulier d'Espace d'Approximation pour les Inconnues Volumiques dans le Cas des Maillages Réguliers

Une fois que la méthode a été introduite dans le cadre général on considère le cas particulier qu'on traitera dans la pratique et qu'on appellera **le problème modèle**. Pour l'approximation du champ de vitesse et le tenseur de contraintes on utilise l'élément fini mixte $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ introduit et analysé dans [14]. On rappelle qu'il s'agit de l'espace d'approximation utilisé par le code ATHENA2D. Il est basé sur l'utilisation d'un maillage régulier composé de rectangles de chaque sous-domaine. On se place alors sous une configuration comme celle de la figure 1.1.(a). Cet élément fini a été spécialement conçu pour être compatible avec des techniques de condensation de masse. Ceci veut dire qu'on peut remplacer les matrices de masse $M_{v,l}$ et $M_{\sigma,l}$ par des matrices qui sont respectivement diagonales et diagonales par blocs en utilisant de l'intégration numérique sans dégrader l'ordre de convergence de la méthode [80, 14]. La seconde propriété principale de l'élément est la prise en compte de la symétrie du tenseur de contraintes au sens fort.

Ainsi, les espaces d'approximation sont définis par (voir [80, 14] ou le chapitre 8 pour avoir plus de détails)

$$\left|\begin{array}{lcl} \underline{\underline{X}}_{h_l}(\Omega_l) & = & \underline{X}_{h_l}(\Omega_l) \times \underline{X}_{h_l}(\Omega_l), \qquad \underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l) \;=\; \underline{\underline{X}}_{h_l}(\Omega_l) \cap \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega_l), \\ \underline{M}_{h_l}(\Omega_l) & = & M_{h_l}^0(\Omega_l) \times M_{h_l}^0(\Omega_l), \end{array}\right. \tag{1.18}$$

où

$$\left|\begin{array}{lcl} \underline{X}_{h_l}(\Omega_l) & = & \left\{\tilde{\underline{v}}_l^h \in \underline{X}(\Omega_l) \;/\; \forall\, K \in T_{h_l}(\Omega_l),\; \tilde{\underline{v}}_{l\,|K}^h \in \mathcal{Q}_1(K) \times \mathcal{Q}_1(K)\right\}, \\ M_{h_l}^0(\Omega_l) & = & \left\{\tilde{p}_l^h \in M(\Omega_l) \;/\; \forall\, K \in T_{h_l}(\Omega_l),\; \tilde{p}_{l\,|K}^h \in \mathcal{Q}_0(K)\right\}. \end{array}\right. \tag{1.19}$$

Remarque 1.3.3 *Dans certains cas qui seront spécifiés plus tard il sera intéressant de modifier l'espace d'approximation du champ de vitesse en prenant*

$$\left|\begin{array}{lcl} \underline{M}_{h_l}(\Omega_l) & = & M_{h_l}^1(\Omega_l) \times M_{h_l}^1(\Omega_l), \\ M_{h_l}^1(\Omega_l) & = & \left\{\tilde{p}_l^h \in M(\Omega_l) \;/\; \forall\, K \in T_{h_l}(\Omega_l),\; \tilde{p}_{l\,|K}^h \in \mathcal{P}_1(K)\right\}. \end{array}\right. \tag{1.20}$$

L'élément fini mixte associé, qu'on appellera $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$, sera présenté et analysé dans le chapitre 9. Étant donné qu'il s'agit des fonctions qui sont discontinues d'un élément à l'autre, la matrice de masse $M_{v,l}$ sera aussi diagonale par blocs (même diagonale si les fonctions de base sont bien choisies). On signale aussi que la technique utilisée pour effectuer le couplage entre les deux sous-domaines nous permet d'utiliser des éléments finis différents sur chaque région.

1.3.3 Sur le Choix d'Espace d'Approximation pour le Multiplicateur de Lagrange

Il ne nous reste plus qu'à déterminer l'espace d'approximation $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ qui interviendra dans le couplage des équations sur Ω_c et Ω_f. Le choix de cet espace, qui aura une influence importante dans le caractère bien posé et la convergence du problème semi-discrétisé, sera discuté le long des sections 1.4.2 et 1.5.2. Les résultats numériques de la section 1.9.1 nous aiderons à sélectionner un espace de discrétisation $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ parmi tous les choix proposés.

1.4 Caractère Bien Posé du Problème Semi-Discret

1.4.1 Une Condition Suffisante

Dans cette section on discute le caractère bien posé du problème algébro-différentiel (1.16)–(1.17). Il est clair que si on est capable d'exprimer le multiplicateur de Lagrange commun (qu'on appellera J dans cette section) en fonction des autres inconnues, alors le problème semi-discrétisé sera bien posé grâce à la théorie classique des ODE. Si on multiplie la deuxième équation de (1.16) par la matrice $C_l(M_{\sigma,l})^{-1}$ et on fait la somme dans l'indice $l \in \{c, f\}$ on obtient que

$$\underbrace{\left[C_c(M_{\sigma,c})^{-1}C_c^* + C_f(M_{\sigma,f})^{-1}C_f^*\right]}_{\widetilde{\mathcal{M}}} J \quad = \quad C_c(M_{\sigma,c})^{-1}D_c^*V_c + C_f(M_{\sigma,f})^{-1}D_f^*V_f$$

où on a utilisé la première équation de raccord de (1.17). Alors, si la matrice $\widetilde{\mathcal{M}}$ est inversible, le problème semi-discrétisé sera bien posé. La proposition suivante caractérise le caractère inversible de la matrice $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Proposition 1.4.1 (Caractère bien posé du problème semi-discret) *La matrice $\widetilde{\mathcal{M}}$ est inversible si et seulement si*

$$\textit{Ker}\ \widetilde{\mathcal{M}} \quad = \quad \textit{Ker}\ C_c^* \ \cap\ \textit{Ker}\ C_f^*. \tag{1.21}$$

Alors, il suffit que l'une de deux matrices C_c^* ou C_f^* soit injective pour que le problème semi-discrétisé soit bien posé.

Preuve: On rappelle que

$$\widetilde{\mathcal{M}} \quad = \quad \widetilde{\mathcal{M}}_c + \widetilde{\mathcal{M}}_f$$

avec

$$\widetilde{\mathcal{M}}_l \quad = \quad C_l(M_{\sigma,l})^{-1}C_l^*, \qquad l \in \{c, f\},$$

qui sont des matrices symétriques et positives. Il est alors clair que

$$\text{Ker}\ \widetilde{\mathcal{M}} \quad = \quad \text{Ker}\ \widetilde{\mathcal{M}}_c \ \cap\ \text{Ker}\ \widetilde{\mathcal{M}}_f \quad = \quad \text{Ker}\ C_c^* \ \cap\ \text{Ker}\ C_f^*.$$

Pour assurer le caractère défini positif de la matrice $\widetilde{\mathcal{M}}$, il suffit que l'une des deux matrices C_c^* ou C_f^* soit injective. □

Par conséquent, on vient de prouver que le caractère bien posé du problème totalement discrétisé est fortement lié aux propriétés des matrices $C_l^*,\ l \in \{c, f\}$, c'est à dire, à des conditions de compatibilité entre les espaces $\underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l),\ l \in \{c, f\}$ et l'espace $\underline{\mathcal{J}}(\Gamma)$. Dans la section suivante on discutera des différents choix possibles pour l'espace du multiplicateur de Lagrange.

1.4.2 Sur le Choix de l'Espace $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$

1.4.2.1 Un Résultat Général

En utilisant (1.21), on sait que l'inversibilité de la matrice $\widetilde{\mathcal{M}}$ est équivalente à

$$\text{Ker } C_c^* \ \cap \ \text{Ker } C_f^* = \{0\},$$

ou encore

$$\forall\, J \quad \text{tel que} \quad C_c^* J = 0 \quad \text{et} \quad C_f^* J = 0 \quad \Longrightarrow \quad J = 0.$$

On peut réécrire cette propriété en utilisant des expressions intégrales en obtenant

$$\forall\, \underline{j}^H \in \underline{\mathcal{J}}(\Gamma), \left[\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Gamma \underline{\underline{\sigma}}_c^h\, \underline{n}_c \cdot \underline{j}^H \, \mathrm{d}\gamma & = & 0, \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}_c^h \in \underline{\underline{X}}_{h_c}^{sym}(\Omega_c) \\ \displaystyle\int_\Gamma \underline{\underline{\sigma}}_f^h\, \underline{n}_f \cdot \underline{j}^H \, \mathrm{d}\gamma & = & 0, \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}_f^h \in \underline{\underline{X}}_{h_f}^{sym}(\Omega_f) \end{array} \right] \Longrightarrow \underline{j}^H = 0.$$

On voit alors que, pour garantir le caractère bien posé du problème totalement discrétisé, il suffit que l'espace $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ satisfasse une propriété de compatibilité (condition de type inf-sup) avec les espaces de traces normales de $\underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l),\ l \in \{c, f\}$ sur l'interface Γ, i.e.,

$$\textbf{Tr}^\Gamma \left(\underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l) \right) \ := \ \left\{ \underline{\eta}_l^h \in \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)^2 \ / \ \exists\, \underline{\underline{\sigma}}_l^h \in \underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym} \ / \ \underline{\underline{\sigma}}_l^h\, \underline{n}_{l|\Gamma} = \underline{\eta}_l^h \right\}, \tag{1.22}$$

où $l \in \{c, f\}$. Ainsi on peut établir un résultat assez général :

Proposition 1.4.2 *Si l'inclusion*

$$\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \ \subset \ \textbf{Tr}^\Gamma \left(\underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l) \right), \tag{1.23}$$

est satisfaite, alors la matrice C_l^* est injective.

Preuve: Soit $\underline{j}^H \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ tel que

$$\int_\Gamma \underline{\underline{\sigma}}_l^h\, \underline{n}_l \cdot \underline{j}^H \, \mathrm{d}\gamma \ = \ 0, \quad \underline{\underline{\sigma}}_l^h \in \underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l).$$

Par hypothèse, il existe un élément $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h \in \underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l)$ tel que $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h\, \underline{n}_{l|\Gamma} = \underline{j}^H$ ce qui implique que

$$\|\underline{j}^H\|_{(L^2(\Gamma))^2} \ = \ 0, \qquad \Longrightarrow \ \underline{j}^H \ = \ 0,$$

c'est à dire, C_l^* est injective. □

Il est clair que, pour satisfaire l'inclusion (1.23) ou même pour vérifier l'injectivité des matrices $C_l,\ l \in \{c, f\}$ avec des autres techniques, il est intéressant d'avoir un maillage de surface $\Xi_H(\Gamma)$ définie par la trace de l'un des deux maillages volumiques $T_{h_l}(\Omega_l),\ l \in \{c, f\}$. On dénotera par

$$\widetilde{\Xi}_{h_l}(\Gamma), \quad l \in \{c, f\},$$

ces deux maillages de surface spéciaux.

Remarque 1.4.1 *Supposons qu'on discrétise le tenseur de contraintes avec l'élément fini présenté dans la section 1.3.2 et que la région raffinée est rectangulaire (comme dans la figure 1.1.(a)). On divise la frontière Γ en quatre morceaux : la frontière d'en haut Γ_N, celle d'en bas Γ_S, celle à droite Γ_E et celle à gauche Γ_W. Alors, si $\underline{\eta}_l^h \in \mathbf{Tr}^\Gamma\left(\underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l)\right)$ on a que*

$$
(1.24) \qquad \left|\begin{array}{lcl}
\underline{\eta}_{l\,|\Gamma_A}^h & \in & \Big\{\underline{\tilde{\eta}}_l^h \in H^1(\Gamma_A)\times L^2(\Gamma_A)\ / \\
& & \qquad \underline{\tilde{\eta}}_{l\,|S}^h \in (\mathcal{P}_1(S))^2\,,\ \forall S \in \widetilde{\Xi}_{h_l}(\Gamma_A)\Big\}\,, \quad A\in\{N,S\}, \\
\underline{\eta}_{l\,|\Gamma_B}^h & \in & \Big\{\underline{\tilde{\eta}}_l^h \in L^2(\Gamma_B)\times H^1(\Gamma_B)\ / \\
& & \qquad \underline{\tilde{\eta}}_{l\,|S}^h \in (\mathcal{P}_1(S))^2\,,\ \forall S \in \widetilde{\Xi}_{h_l}(\Gamma_B)\Big\}\,, \quad B\in\{E,W\}.
\end{array}\right.
$$

Ceci veut dire que les fonctions dans les espaces de traces restreintes aux frontières horizontales (resp. verticales) ont plus de degrés de liberté sur la deuxième (resp. première) composante.

Si on se laisse porter par l'intuition, on voit que le fait de prendre l'espace $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ suffisamment petit fait que le problème semi-discrétisé est bien posé. Cependant, il faut aussi une certaine richesse sur cet espace pour bien imposer les conditions de raccord entre les deux sous-domaines pour obtenir la convergence. Dans les deux sous-sections suivantes on donne plusieurs choix d'espace de discrétisation pour le multiplicateur de Lagrange dans notre problème modèle en discutant l'injectivité des matrices C_l^*. On les a classé en deux groupes : des approximations conformes et des approximations non-conformes.

1.4.2.2 Des Approximations Conformes dans le Cadre du Problème Modèle

On considère dans un premier temps des espaces de discrétisation pour le multiplicateur de Lagrange qui vérifient l'inclusion (1.12), c'est à dire, des approximations conformes de notre problème. Ce type d'espaces est spécialement intéressant lorsqu'on veut obtenir des estimations d'erreur non seulement sur les inconnues volumiques du problème [23, 16] mais aussi sur le multiplicateur de Lagrange [15, 81].

On commence par le choix conforme le plus simple (et "naturel") possible. On propose l'espace défini par

$$
(1.25) \qquad \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \;=\; \Big\{\underline{\tilde{j}}^H \in \underline{\mathcal{J}}(\Gamma)\ /\ \underline{\tilde{j}}^H_{|S} \in (\mathcal{P}_1(S))^2\ \forall\, S \text{ segment dans } \Xi_H(\Gamma)\Big\}\,.
$$

On dénotera par

$$
(1.26) \qquad (\mathcal{P}_1)^2 \textbf{ continu grossier}
$$

le choix donné par (1.25) lorsque le maillage de surface est donné par la trace du maillage grossier à l'interface. De la même façon on appellera

$$
(1.27) \qquad (\mathcal{P}_1)^2 \textbf{ continu fin}
$$

lorsque $\Xi_H(\Gamma) \equiv \widetilde{\Xi}_{h_f}(\Gamma)$. Il est clair que ces deux espaces satisfont les hypothèses de la proposition 1.4.2 et donc le problème totalement discrétisé **est bien posé** (avec le premier choix on aura C_c^* injective, avec le deuxième C_f^*).

On rappel que les fonctions de l'espace $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ sont "testées" contre les fonctions des espaces des traces (1.22). Alors, la remarque 1.4.1 suggère des espaces de discrétisation pour le multiplicateur avec plus

de degrés de liberté sur la deuxième (resp. première) composante sur les frontières horizontales (resp. verticales). Ainsi on peut définir

$$\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \quad = \quad \left\{ \underline{\tilde{j}}^H \in \underline{\mathcal{J}}(\Gamma) \ / \ \text{telle que (1.29) est satisfaite} \right\}, \tag{1.28}$$

où

$$\left. \begin{array}{lll} \underline{\tilde{j}}^h_{|S} & \in \ \mathcal{P}_1(S) \times \mathcal{P}_2(S), \ \ \forall S \in \widetilde{\Xi}_{h_l}(\Gamma_A), & A \in \{N, S\}, \\ \underline{\tilde{j}}^h_{|S} & \in \ \mathcal{P}_2(S) \times \mathcal{P}_1(S), \ \ \forall S \in \widetilde{\Xi}_{h_l}(\Gamma_B), & B \in \{E, W\}, \end{array} \right| , \quad \text{pour } l = c \text{ ou } f. \tag{1.29}$$

On appellera ces espaces

$$\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_1 \ \textbf{continu grossier} \tag{1.30}$$

lorsque $l = c$ et

$$\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_1 \ \textbf{continu fin} \tag{1.31}$$

lorsque $l = f$. Même si l'inclusion (1.23) n'est pas vérifié on a le résultat suivant

Proposition 1.4.3 *Si l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ est donné par (1.28)–(1.29) pour $l \in \{c, f\}$, alors la matrice C_l^* est injective.*

Preuve: La preuve, qu'on omet pour clarté du document, est très semblable à celle de la proposition 1.4.4 de la section suivante. □

On en déduit alors qu'avec ce choix, le problème semi-discrétisé **est bien posé**. Il faut bien noter qu'encore une fois on a supposé que le maillage de surface est donné par $\widetilde{\Xi}_{h_l}(\Gamma)$. Malheureusement, ce choix n'a pas été programmé dans la pratique.

1.4.2.3 Des Approximations Non-Conformes dans le Cadre du Problème Modèle

On présente maintenant quelques exemples d'espaces de discrétisation pour le multiplicateur qui vérifient

$$\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \quad \not\subset \quad \underline{\mathcal{J}}(\Gamma),$$

c'est à dire, des approximations qui ne sont pas internes. Il faut bien noter que, en général, on ne peut appliquer la norme de l'espace $\underline{\mathcal{J}}(\Gamma)$ sur un élément de l'espace discret. Ceci peut compliquer une analyse de convergence qui cherche des estimations sur le multiplicateur.

Le fait de considérer des espaces non-conformes nous permet de proposer

$$\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \quad = \quad \mathbf{Tr}^\Gamma \left(\underline{\underline{X}}_{h_l}(\Omega_l) \right), \ \text{avec } l = c \text{ ou } f, \tag{1.32}$$

qui est l'espace choisi en général dans la littérature des éléments joints [23, 16, 15]. On signale qu'il s'agit d'un choix très intéressant car ils sont "les plus grands espaces" qui vérifient l'inclusion (1.23). Évidement, ceci fait que la matrice C_l^* est injective et, par conséquence, le problème totalement discrétisé **sera bien posé**.

Remarque 1.4.2 *On peut trouver des exemples de problèmes pour lesquels le choix donné par (1.32) fournit une approximation conforme [15].*

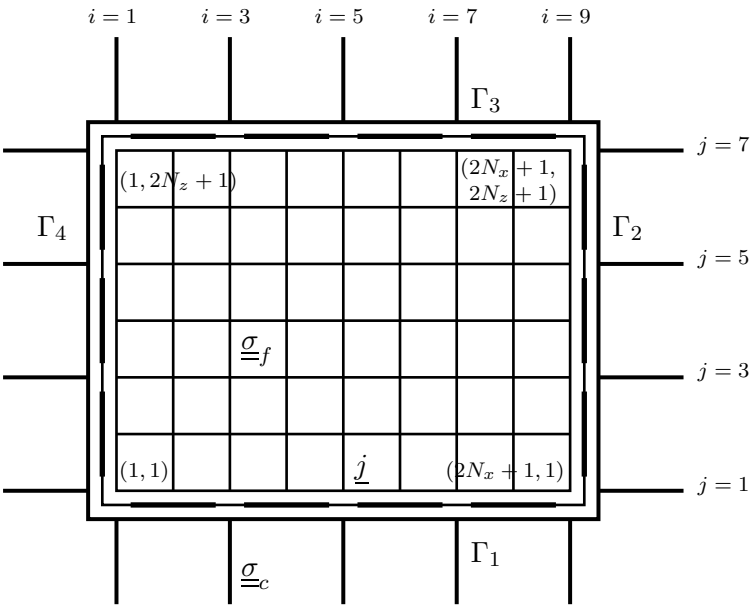


FIG. 1.2 – Schéma avec les inconnues. Multiplicateur dans $(P_0)^2$ sur $\widetilde{\Xi}_{h_c}(\Gamma)$.

Une autre possibilité qu'on considère dans cette section se base sur le maillage $\widetilde{\Xi}_{h_c}(\Gamma)$, c'est à dire, le maillage qui provient du coté grossier. Ainsi, dans la proposition suivante on présente un choix à retenir à cause de sa simplicité du point de vue programmation et qu'on dénotera par

$$(\mathcal{P}_0)^2 \textbf{ grossier.} \tag{1.33}$$

Proposition 1.4.4 *Supposons que*

$$\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \;=\; \left\{ \underline{\tilde{j}}^H \in \underline{L}^2(\Gamma) \,/\, \underline{\tilde{j}}^H \in (\mathcal{P}_0(S))^2 \,,\, \forall\, S \in \widetilde{\Xi}_{h_c}(\Gamma) \right\}. \tag{1.34}$$

Alors la matrice C_f^* est injective et le problème semi-discrétisé **est bien posé**.

Preuve: On suppose que la région raffinée est rectangulaire comme dans la figure 1.2 même si ceci n'est pas une restriction. Alors on a quatre frontières : deux horizontales, qu'on appelle Γ_1 et Γ_3, et deux verticales, Γ_2 et Γ_4. Notons par (voir le chapitre 8 où on présente les degrés de liberté de l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ en détail)

$$(\underline{\underline{\sigma}}^h_{xx})_{i,j}, \quad (\underline{\underline{\sigma}}^b_{xx})_{i,j}, \quad (\underline{\underline{\sigma}}^d_{zz})_{i,j}, \quad (\underline{\underline{\sigma}}^g_{zz})_{i,j}, \quad (\underline{\underline{\sigma}}_{xz})_{i,j},$$
$$i \in \{1, \ldots, 2N_x+1\}, \quad j \in \{1, \ldots, 2N_z+1\},$$

les fonctions de base de l'espace $\underline{\underline{X}}^{sym}_{h_f}(\Omega_f)$ (sur la grille fine avec $(2N_x+1) \times (2N_z+1)$ noeuds) et

$$(\underline{j}^l_s)_{2i}, \quad l \in \{1,3\}, \quad s \in \{x,z\}, \quad i \in \{1, \ldots, N_x\},$$
$$(\underline{j}^l_s)_{2j}, \quad l \in \{2,4\}, \quad s \in \{x,z\}, \quad j \in \{1, \ldots, N_z\},$$

les fonctions de base liées au multiplicateur de Lagrange. Les indices l et s indiquent respectivement la frontière et la composante.

Soit $\underline{j}^H \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ tel que

$$\int_\Gamma \underline{j}^H \cdot \underline{\underline{\sigma}}_f^h \, \underline{n}_f \;=\; 0, \quad \forall\, \underline{\underline{\sigma}}_f^h \in \underline{\underline{X}}_{h_f}^{sym}(\Omega_f). \tag{1.35}$$

On décompose cet élément sur les fonctions de base

$$\underline{j}^H \;=\; \sum_{l\in\{1,3\}} \sum_{s\in\{x,z\}} \sum_{i=1}^{N_x} \alpha_{l,s,i} (\underline{j}_s^l)_{2i} + \sum_{l\in\{2,4\}} \sum_{s\in\{x,z\}} \sum_{j=1}^{N_z} \alpha_{l,s,i} (\underline{j}_s^l)_{2j}. \tag{1.36}$$

Il est facile de montrer que tous les coefficients sont nuls. Menons les calculs pour les coefficients qui concernent la frontière Γ_1. En choisissant $\underline{\underline{\sigma}}_f^h = (\underline{\underline{\sigma}}_{zz}^d)_{2i,1}$ dans (1.35) on a que

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \alpha_{1,z,i} \int_\Gamma (\underline{\underline{\sigma}}_{zz}^d)_{2i,1} \, \underline{n}_f \cdot (\underline{j}_z^1)_{2i} \;\, \mathrm{d}\gamma \\ &=\; \frac{h}{2} \alpha_{1,z,i}, \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{1,z,i} \;=\; 0. \end{aligned}$$

Un calcul similaire en prenant $\underline{\underline{\sigma}}_f^h = (\underline{\underline{\sigma}}_{xz})_{2i,1}$ nous permet de montrer que $\alpha_{1,x,i} \;=\; 0$. Ainsi on montre que $\underline{j}^H \;=\; 0$ ce qui implique que la matrice C_f^* est injective. □

Remarque 1.4.3 *Des calculs similaires à ceux présentés ci-dessus montrent que*

$$\mathit{Ker}\; C_c^* \;=\; < \underline{j}_0^H >,$$

où $\underline{j}_0^H$ a l'expression (1.36) avec (on donne que les coefficients non nulles)

$$\begin{array}{llllll} \alpha_{1,x,1} & = & 1, & \alpha_{1,x,i} & = & -\alpha_{1,x,i-1}, \quad i \in \{2,\dots,N_x\}, \\ \alpha_{2,z,1} & = & -\alpha_{1,x,N_x}, & \alpha_{2,z,j} & = & -\alpha_{2,z,j-1}, \quad j \in \{2,\dots,N_z\}, \\ \alpha_{3,x,N_x} & = & -\alpha_{2,z,N_z}, & \alpha_{3,x,i} & = & -\alpha_{3,x,i+1}, \quad i \in \{N_x-1,\dots,1\}, \\ \alpha_{4,z,N_z} & = & -\alpha_{3,x,1}, & \alpha_{4,z,j} & = & -\alpha_{4,z,j+1}, \quad j \in \{N_z-1,\dots,1\}. \end{array}$$

Étant donné que, vis à vis du problème totalement discrétisé qu'on verra plus tard, il est préférable d'avoir l'injectivité de la matrice C_c^* que celle de C_f^* (voir la remarque 1.7.1), on peut réduire l'espace (1.34) de telle façon que $\underline{j}_0^H$ n'appartienne plus à l'espace. Il suffit de considérer les fonctions de la forme (1.36) telles que

$$\begin{array}{llll} \alpha_{1,x,1} = \alpha_{1,x,2}, & \alpha_{1,x,N_x} = \alpha_{1,x,N_x-1}, \\ \alpha_{2,z,1} = \alpha_{2,z,2}, & \alpha_{2,z,N_z} = \alpha_{2,z,N_z-1}, \\ \alpha_{3,x,1} = \alpha_{3,x,2}, & \alpha_{3,x,N_x} = \alpha_{3,x,N_x-1}, \\ \alpha_{4,z,1} = \alpha_{4,z,2}, & \alpha_{4,z,N_z} = \alpha_{4,z,N_z-1}. \end{array}$$

Le fait de choisir un espace $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ trop grand peut avoir comme conséquence la non-unicité du multiplicateur de Lagrange ou, ce qui est équivalent, le caractère non inversible de la matrice $\widetilde{\mathcal{M}}$. Considérons, par exemple l'espace

$$\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) = \left\{ \underline{\tilde{j}}^H \in \underline{L}^2(\Gamma) \,/\, \underline{\tilde{j}}^H \in (\mathcal{P}_0(S))^2 \,,\, \forall\, S \in \widetilde{\Xi}_{h_f} \right\}, \tag{1.37}$$

qu'on dénotera par

$$(\mathcal{P}_0)^2 \textbf{ fin,} \tag{1.38}$$

et notons par

$$(\underline{j}_s^l)_{i-\frac{1}{2}}, \quad l \in \{1,3\}, \quad s \in \{x,z\}, \quad i \in \{1,\dots,2N_x\},$$
$$(\underline{j}_s^l)_{j-\frac{1}{2}}, \quad l \in \{2,4\}, \quad s \in \{x,z\}, \quad j \in \{1,\dots,2N_z\},$$

ses fonctions de base. Alors, des calculs très simples montrent que l'élément

$$\underline{j}^H = \sum_{l\in\{1,3\}} \sum_{s\in\{x,z\}} \sum_{i=1}^{2N_x} \alpha_{l,s,i} (\underline{j}_s^l)_{i-\frac{1}{2}} + \sum_{l\in\{2,4\}} \sum_{s\in\{x,z\}} \sum_{j=1}^{2N_z} \alpha_{l,s,i} (\underline{j}_s^l)_{j-\frac{1}{2}},$$

avec

$$\begin{aligned}
\alpha_{l,x,i} &= (-1)^{i+\frac{l-1}{2}}, && l \in \{1,3\}, \quad i \in \{1,\dots,2N_x\},\\
\alpha_{l,z,i} &= 0, && l \in \{1,3\}, \quad i \in \{1,\dots,2N_x\},\\
\alpha_{l,x,j} &= 0, && l \in \{2,4\}, \quad j \in \{1,\dots,2N_z\},\\
\alpha_{l,z,j} &= (-1)^{i+\frac{l-2}{2}}, && l \in \{2,4\}, \quad j \in \{1,\dots,2N_z\},
\end{aligned}$$

appartient à

$$\text{Ker } C_c^* \cap \text{Ker } C_f^*.$$

On pourrait utiliser un artifice similaire à celui de la remarque 1.4.3 pour rendre la matrice C_f^* injective et trouver l'inversibilité de $\widetilde{\mathcal{M}}$.

1.5 À Propos de la Convergence du Schéma Semi-Discret

Cette section est dédié à l'étude de convergence du problème semi-discret. On commence par donner quelques considérations générales sur cette analyse. Ensuite on établit et on montre un résultat dans un cas particulier, mais qui est intéressant du point de vue pratique. Finalement on explique les difficultés du cas général.

1.5.1 Considérations Générales

On s'intéresse dans ce paragraphe à la convergence de la solution du problème (1.13)–(1.14) vers la solution de (1.9)–(1.10). Une technique classique pour effectuer ce type d'analyse pour des problèmes d'évolution [44, 49, 12] se divise en deux étapes qui séparent en quelque sorte les aspects évolution et approximation spatiale de l'étude

- Dans un premier temps, en utilisant des techniques d'énergie, on relie les estimations sur le problème d'évolution à des estimations sur la différence entre la solution exacte et une projection discrète soigneusement choisie.
- La seconde étape consiste à obtenir des estimations sur l'erreur commise avec cette projection. Souvent elle est définie comme la solution d'un problème elliptique associé "naturellement" au problème d'évolution. Les termes sources sont définis à l'aide de la solution du problème continu. La deuxième étape se base alors sur l'analyse de convergence de la méthode des éléments joints sur un problème elliptique statique.

La méthode des éléments joints (aussi appelée méthode "mortar") a été introduite dans [23] dans le cadre de la décomposition de domaines. Il s'agit d'une méthode qui permet de diviser le domaine de calcul en plusieurs sous-domaines. Le grand intérêt de la méthode vient du fait que le raccord entre les différentes régions se fait d'une façon faible. On pourra donc, utiliser des maillages non-conformes et/ou de formulations différentes pour chaque sous-domaine. Ceci implique en particulier que, si on considère la solution discrète définie sur tout le domaine de calcul, elle ne sera pas en général dans l'espace fonctionnel utilisé dans la formulation variationnelle définie sur tout le domaine de calcul. Ainsi, la méthode "mortar" est souvent présentée comme une approximation non-conforme du problème continu [23, 16]. L'espace d'approximation global (sur tout le domaine de calcul) est défini avec des fonctions qui appartiennent à des espaces d'approximations locaux (qui eux sont conformes) qui vérifient une continuité faible aux interfaces (en général elles ne seront pas fortement continues). L'analyse s'appuie alors sur le deuxième lemme de Strang[17] : il faut non seulement estimer l'erreur dite de *meilleure approximation* (classique dans les approximations du type élément fini) mais aussi l'erreur dite de *consistance* (qui indique si la non-conformité est acceptable).

Cette méthode peut aussi se présenter, comme on l'a fait dans ce travail, en introduisant un multiplicateur de Lagrange sur les interfaces qui s'interprète comme la dualisation de la contrainte de continuité demandée sur les espaces fonctionnels [15, 81]. Dans ce cas, le problème peut être écrit sous forme d'une formulation mixte. La continuité faible aux interfaces est incluse dans la formulation elle même et non via les espaces fonctionnels. Lorsqu'on suit cette approche on peut aussi s'intéresser à l'obtention des estimations d'erreur sur la nouvelle inconnue, le multiplicateur de Lagrange. L'analyse de convergence repose dans ce cas sur la théorie des éléments finis mixtes [25, 24], en particulier sur une condition du type inf-sup discrète uniforme.

Une autre question qui se pose est le choix d'espace de discrétisation pour le multiplicateur de Lagrange sur l'interface. Des nombreux travaux [16, 15] proposent le choix donné par les traces des fonctions volumiques sur l'un des deux cotés (avec des légères modifications sur les coins). Même si dans certains cas ces espaces sont inclus dans l'espace continu [15], ce n'est en général pas le cas (voir par exemple [16] ou ce travail). Ceci peut compliquer l'analyse dans le cas où on veut fournir des estimations sur le multiplicateur de Lagrange (voir la section 1.4.2.2).

Un programme naturel qui dépasse toutefois le cadre de cette thèse et n'en constitue pas l'aspect central, serait de voir en quelle mesure ces diverses techniques d'analyse s'appliquent aux équations de l'élastodynamique. Nous allons ici nous contenter de présenter un résultat de convergence dans un cas de figure bien particulier exposé dans la section 1.5.2. Dans la section 1.5.3 nous décrivons ensuite les difficultés à surmonter pour étendre ce type de résultat à des configurations plus générales.

1.5.2 Un Résultat de Convergence pour le Problème Modèle

Dans cette section on établit un résultat de convergence du schéma semi-discrétisé pour notre problème modèle. On se place sous certaines hypothèses qui vont simplifier notablement la preuve du résultat mais

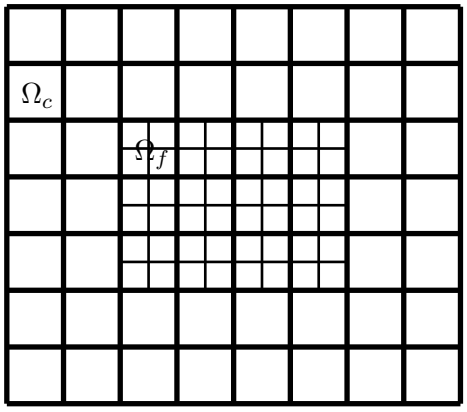


FIG. 1.3 – Le maillage fin est un sous-maillage de l'extension du maillage grossier à tout le domaine

qui restent dans le cadre des expériences numériques qui nous intéressent. Ainsi, on va supposer que le maillage sur la région raffinée est un sous-maillage d'une extension du maillage grossier à tout le domaine de calcul (dans la figure 1.3 on montre une configuration type). Ceci fait que l'estimation de l'erreur de *meilleure approximation* est assez facile à obtenir. On supposera aussi que l'espace d'approximation pour le champ de vitesse est donné par (1.20), espace qui vérifie l'inclusion

$$\text{div}\left(\underline{\underline{X}}^{sym}_{h_l}(\Omega_l)\right) \subset \underline{M}_{h_l}(\Omega_l), \qquad l \in \{f, c\}. \tag{1.39}$$

Ceci nous permettra d'éliminer les inconnues $\underline{v}_l^h,\ l \in \{c, f\}$ et donc de réduire notablement la difficulté du problème à analyser (beaucoup plus standard). Les estimations sur l'inconnue $\underline{v}$ seront ensuite aisément obtenues à l'aide des résultats sur le tenseur de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$. On renvoie le lecteur au chapitre 9 pour avoir plus de détails sur cet élément fini. Finalement, on supposera aussi que les intégrales sur les termes de masse sont calculées de façon exacte.

On s'intéresse alors à la convergence du couple $(\underline{\underline{\sigma}}_l^h, \underline{v}_l^h)$ défini par (1.13)– (1.14) vers $(\underline{\underline{\sigma}}_l, \underline{v}_l)$ défini par (1.9)–(1.10). Dans un premier temps on définira et on analysera la projection elliptique qu'on utilisera par la suite. Ensuite on établira les résultats de convergence du problème d'évolution en utilisant les résultats obtenus sur le problème stationnaire.

1.5.2.1 Définition et Analyse de la Projection Elliptique

On définit l'opérateur projection elliptique par

$$\begin{array}{rccc} \Pi_h : & \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega) \times \underline{M}(\Omega) \times \underline{\mathcal{J}}(\Gamma) & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{l\in\{c,f\}} \underline{\underline{X}}^{sym}_{h_l}(\Omega_l) \times \underline{M}_{h_l}(\Omega_l) \times \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \\ & ((\underline{\underline{\sigma}}_c, \underline{\underline{\sigma}}_f), (\underline{v}_c, \underline{v}_f), \underline{j}) & \mapsto & (\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_c^h}, \widehat{\underline{v}_c^h}, \widehat{\underline{j}_c^H}, \widehat{\underline{\underline{\sigma}}_f^h}, \widehat{\underline{v}_f^h}, \widehat{\underline{j}_f^H}) \end{array} \tag{1.40}$$

où $(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h}, \widehat{\underline{v}_l^h}, \widehat{\underline{j}_l^H})$, $l \in \{c, f\}$ est la solution du problème variationnel

$$
(1.41) \quad \left|
\begin{array}{l}
\text{Trouver } (\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h}, \widehat{\underline{v}_l^h}, \widehat{\underline{j}_l^H}) \in \underline{\underline{X}}_{h_l}(\Omega_l) \times \underline{M}_{h_l}(\Omega_l) \times \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \text{ telles que } (l \in \{c,f\}) \\
\displaystyle\int_{\Omega_l} \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l\right) \cdot \tilde{\underline{v}}_l^h \, \mathrm{d}x \;-\; \int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}} \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\right) \cdot \tilde{\underline{v}}_l^h \, \mathrm{d}x \;=\; 0, \quad \forall\, \tilde{\underline{v}}_l^h \in \underline{M}_{h_l}(\Omega_l), \\
\displaystyle\int_{\Omega_l} \mathbf{A}_l \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\right) : \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h \, \mathrm{d}x \;+\; \int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}}\, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h \cdot \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l^h\right) \mathrm{d}x \;- \\
\qquad\qquad \displaystyle\int_{\Gamma} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h \, \underline{n}_l \cdot \left(\widehat{\underline{j}_l^H} - \underline{j}\right) \mathrm{d}\gamma \;=\; 0, \quad \forall\, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h \in \underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l), \\
\displaystyle\sum_{l \in \{c,f\}} \int_{\Gamma} \widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} \, \underline{n}_l \cdot \tilde{\underline{j}}^H \, \mathrm{d}\gamma \;=\; 0, \qquad \forall\, \tilde{\underline{j}}^H \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma), \qquad \widehat{\underline{j}_c^H} \;=\; \widehat{\underline{j}_f^H}.
\end{array}
\right.
$$

L'analyse de ce type de problèmes (qu'on peut appeler "doublement" mixtes) n'est pas en général évidente. Cependant, on rappelle que la vitesse est discrétisée dans l'espace (1.20) et donc l'inclusion (1.39) est satisfaite. Alors, on a que

$$
(1.42) \qquad \forall\, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h \in \underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l), \qquad \tilde{\underline{v}}_l^h \;:=\; \underline{\mathrm{div}}\, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h \;\in\; \underline{M}_{h_l}(\Omega_l).
$$

Si on injecte la fonction test $\tilde{\underline{v}}_l^h$ donnée par (1.42) dans la première équation de (1.41) on a que

$$
\int_{\Omega_l} \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l\right) \cdot \underline{\mathrm{div}}\, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h \, \mathrm{d}x \;=\; \int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}} \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\right) \cdot \underline{\mathrm{div}}\, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h \, \mathrm{d}x.
$$

En utilisant cette dernière égalité on remarque que le problème (1.41) qui définit la projection elliptique est équivalent au problème

$$
(1.43) \quad \left|
\begin{array}{l}
\text{Trouver } (\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h}, \widehat{\underline{j}_l^H}) \in \underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l) \times \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \text{ telles que} \\
\displaystyle\sum_{l \in \{c,f\}} \left(\int_{\Omega_l} \mathbf{A}_l \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\right) : \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h \, \mathrm{d}x + \int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}} \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\right) \cdot \underline{\mathrm{div}}\, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h \, \mathrm{d}x \right) \;- \\
\qquad\qquad \displaystyle\sum_{l \in \{c,f\}} \int_{\Gamma} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h \, \underline{n}_l \cdot \left(\widehat{\underline{j}_l^H} - \underline{j}_l\right) \mathrm{d}\gamma \;=\; 0, \\
\displaystyle\sum_{l \in \{c,f\}} \int_{\Gamma} \widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} \, \underline{n}_l \cdot \tilde{\underline{j}}^H \, \mathrm{d}\gamma \;=\; 0, \qquad \widehat{\underline{j}_c^H} \;=\; \widehat{\underline{j}_f^H},
\end{array}
\right.
$$

$\forall\, (\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h, \tilde{\underline{j}}_l^H) \in \underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l) \times \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ et ensuite

$$
(1.44) \quad \left|
\begin{array}{l}
\text{Trouver } \widehat{\underline{v}_l^h} \in \underline{M}_{h_l}(\Omega_l) \text{ tel que} \\
\displaystyle\int_{\Omega_l} \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l\right) \cdot \tilde{\underline{v}}_l^h \, \mathrm{d}x \;=\; \int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}} \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\right) \cdot \tilde{\underline{v}}_l^h \, \mathrm{d}x, \quad \forall\, \tilde{\underline{v}}_l^h \in \underline{M}_{h_l}(\Omega_l).
\end{array}
\right.
$$

On a alors montré le

Théorème 1.5.1 *On a le résultat d'équivalence suivant :*

- *Si* $(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h}, \widehat{\underline{v}_l^h}, \widehat{\underline{j}_l^H})$, $l \in \{c, f\}$ *est solution de (1.41), alors* $(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h}, \widehat{\underline{j}_l^H})$, $l \in \{c, f\}$ *est solution de (1.43) et* $\underline{v}_l^h$, $l \in \{c, f\}$ *est solution de (1.44).*

– *Si* $(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h}, \widehat{\underline{j}_l^H})$, $l \in \{c, f\}$ *est solution de (1.43) et* $\widehat{\underline{v}_l^h}$, $l \in \{c, f\}$ *est solution de (1.44), alors* $(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h}, \widehat{\underline{v}_l^h}, \widehat{\underline{j}_l^H})$, $l \in \{c, f\}$ *est solution de (1.41).*

Le problème (1.43) est moins complexe à analyser que la formulation initiale et il nous permettra d'obtenir des estimations sur la quantité $\|\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\|_{\underline{\underline{X}}_l(\Omega_l)}$. Une fois que cette quantité a été estimée, grâce au deuxième problème (1.44) on déduit que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_l} \left|\widehat{\underline{v}_l^h} - \tilde{\underline{v}}_l^h\right|^2 \mathrm{d}x &= \int_{\Omega_l} \operatorname{div}\left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\right) \cdot \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \tilde{\underline{v}}_l^h\right) \mathrm{d}x + \int_{\Omega_l} \left(\underline{v}_l - \tilde{\underline{v}}_l^h\right) \cdot \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \tilde{\underline{v}}_l^h\right) \mathrm{d}x \\
&\leq \left(\left\|\underline{v}_l - \tilde{\underline{v}}_l^h\right\|_{\underline{M}(\Omega_l)} + \left\|\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\right\|_{\underline{\underline{X}}(\Omega_l)}\right) \left\|\widehat{\underline{v}_l^h} - \tilde{\underline{v}}_l^h\right\|_{\underline{M}(\Omega_l)}, \quad \forall \tilde{\underline{v}}_l^h \in \underline{M}_{h_l}(\Omega_l),
\end{aligned}$$

et donc

$$\|\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l\|_{\underline{M}(\Omega_l)} \leq \mathcal{C} \left(\inf_{\tilde{\underline{v}}_l^h \in \underline{M}_{h_l}(\Omega_l)} \|\underline{v}_l - \tilde{\underline{v}}_l^h\|_{\underline{M}(\Omega_l)} + \|\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\|_{\underline{\underline{X}}(\Omega_l)}\right), \tag{1.45}$$

en obtenant aussi des estimations sur la vitesse. Le reste de la section est consacré par conséquent à l'analyse du problème (1.43).

Introduisons quelques notations utiles. On définit les formes bilinéaires

$$\left|\begin{aligned}
a_l(\underline{\underline{\sigma}}_l, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l) &= \int_{\Omega_l} \mathbf{A}_l\, \underline{\underline{\sigma}}_l : \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_l} \frac{1}{\rho_l}\, \underline{\operatorname{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}_l \cdot \underline{\operatorname{div}}\, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l \,\mathrm{d}x, \ \forall\, (\sigma_l, \tilde{\sigma}_l) \in \left(\underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega_l)\right)^2, \\
s_l(\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h, \tilde{\underline{j}}_l) &= \int_\Gamma \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h\, \underline{n}_l \cdot \tilde{\underline{j}} \,\mathrm{d}\gamma, \qquad \forall\, (\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h, \tilde{\underline{j}}_l) \in \underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l) \times \underline{L}^2(\Gamma),
\end{aligned}\right.$$

et les espaces

$$\underline{\underline{\widetilde{X}}}_h^{*,sym}(\Omega) = \underline{\underline{X}}_{h_c}^{sym}(\Omega_c) \times \underline{\underline{X}}_{h_f}^{sym}(\Omega_f) \subset \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega_c) \times \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega_f), \tag{1.46}$$

$$\underline{\underline{X}}_h^{*,sym}(\Omega) = \left\{ (\underline{\underline{\sigma}}_c^h, \underline{\underline{\sigma}}_f^h) \in \underline{\underline{\widetilde{X}}}_h^{*,sym}(\Omega) \,/\, \sum_{l \in \{c,f\}} s_l(\underline{\underline{\sigma}}_l^h, \tilde{\underline{j}}^H) = 0, \ \forall\, \underline{j}^H \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \right\}. \tag{1.47}$$

Les éléments $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l^h$ de ces espaces seront considérés comme des fonctions définies sur tout le domaine de calcul et aussi comme des couples $(\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_c^h, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_f^h)$. Ainsi on peut définir la norme "cassé" suivante

$$\|\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}\|^2_{\underline{\underline{X}}^*(\Omega)} := \sum_{l \in \{c,f\}} \|\underline{\underline{\sigma}}_l\|^2_{\underline{\underline{X}}(\Omega_l)}, \qquad \forall\, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} = (\underline{\underline{\sigma}}_c, \underline{\underline{\sigma}}_f) \in \underline{\underline{X}}(\Omega_c) \times \underline{\underline{X}}(\Omega_f).$$

Alors, la coercivité de la forme bilinéaire $\sum_{l \in \{c,f\}} a_l(\cdot, \cdot)$ dans l'espace $\underline{\underline{X}}_h^{*,sym}(\Omega)$ nous permet d'appliquer le deuxième lemme de Strang qui nous donne la

Proposition 1.5.2 *Pour tout* $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{j}) \in \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega) \times \underline{\mathcal{J}}(\Gamma)$, *la solution* $(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h}, \widehat{\underline{j}_l^h})$, $l \in \{c, f\}$ *du problème*

(1.43) satisfait

$$
(1.48) \qquad \left|
\begin{array}{rcl}
\|\widehat{\underline{\underline{\sigma}}^h} - \underline{\underline{\sigma}}\|_{\underline{\underline{X}}^*(\Omega)} & \leq & \mathcal{C} \inf\limits_{\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \in \underline{\underline{X}}_h^{*,sym}(\Omega)} \|\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h - \underline{\underline{\sigma}}\|_{\underline{\underline{X}}^*(\Omega)} + \\
& & \displaystyle\sum_{s\in\{c,f\}} s_l(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h, \widehat{\underline{j}_l^H} - \underline{j}) \\
& & \mathcal{C} \sup\limits_{\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \in \underline{\underline{X}}_h^{*,sym}(\Omega)} \dfrac{}{\|\widehat{\underline{\underline{\sigma}}^h} - \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h\|_{\underline{\underline{X}}^*(\Omega)}}.
\end{array}
\right.
$$

Preuve: La preuve du résultat est classique. Voir [17]. □

L'estimation donnée dans (1.48) est constituée par deux termes. Le premier parmi eux est l'erreur de meilleure approximation. Il indique l'erreur commise (mesurée dans la norme cassée) lorsqu'on remplace l'espace $\underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega)$ par $\underline{\underline{X}}_h^{*,sym}(\Omega)$. Le deuxième terme, nommé erreur de consistance, mesure l'erreur commise par la non-conformité à l'interface de l'espace d'approximation utilisé. On analyse par la suite chaque terme séparément.

Estimation de l'erreur de meilleure approximation. Il faut signaler que l'inf qu'on considère dans cette expression est pris dans l'ensemble (1.47) (composé par des fonctions qui vérifient la contrainte de continuité faible) et non pas sur l'espace (1.46) (pour lequel on a les propriétés d'approximation). Ceci fait que, en général, donner une estimation pour ce terme ne soit pas évident. Cependant, dans le cadre où on se place, elle est très facile à obtenir. En effet, rappelons qu'on a supposé que le maillage fin est un sous-maillage d'une extension du maillage grossière. Dénotons par $T_{h_c}(\Omega)$ cette extension. On peut alors définir l'espace

$$
(1.49) \qquad \underline{\underline{X}}_{h_c}^{sym}(\Omega) \;=\; \left\{ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \in \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega) \;/\; \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h_{|K} \in (\mathcal{Q}_1(K))^{2\times 2},\ \forall\, K \in T_{h_c}(\Omega) \right\}.
$$

Cet espace n'est rien d'autre que le résultat d'appliquer l'élément $\mathcal{Q}_1^{div}$ (qu'on utilise sur chaque sous-domaine) sur le maillage $T_{h_c}(\Omega)$. Il est clair que

$$
\underline{\underline{X}}_{h_c}^{sym}(\Omega) \;\subset\; \underline{\underline{X}}_h^{*,sym}(\Omega),
$$

car la contrainte normale est continue au sens fort, et par conséquent

$$
\inf_{\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \in \underline{\underline{X}}_h^{*,sym}(\Omega)} \|\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h - \underline{\underline{\sigma}}\|_{\underline{\underline{X}}^*(\Omega)} \;\leq\; \inf_{\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \in \underline{\underline{X}}_{h_c}^{sym}(\Omega)} \|\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h - \underline{\underline{\sigma}}\|_{\underline{\underline{X}}^*(\Omega)}.
$$

Il suffit d'appliquer les résultats d'approximation de cette espace (voir [14]) pour obtenir une estimation sur ce terme. Pour un entier $m \geq 0$ on introduit les espaces

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
H^{m+1,m}(\Omega) & := & \{f \in H^m(\Omega),\ /\ \partial_x f \in H^m(\Omega)\}, \\
H^{m,m+1}(\Omega) & := & \{f \in H^m(\Omega),\ /\ \partial_z f \in H^m(\Omega)\},
\end{array}
\right.
$$

et les semi-normes

$$
|f|_{H^{m+1,m}(\Omega)} \;:=\; |f|_{H^m(\Omega)} + |\partial_x f|_{H^m(\Omega)}, \quad |f|_{H^{m,m+1}(\Omega)} \;:=\; |f|_{H^m(\Omega)} + |\partial_z f|_{H^m(\Omega)},
$$

où $|\cdot|_{H^m(\Omega)}$ dénote la semi-norme dans $H^m(\Omega)$. On définit donc l'espace de tenseurs

$$
(1.50) \qquad \left|
\begin{array}{rcl}
\underline{\underline{\widetilde{H}}}^{m+1,m}(\Omega) & := & \big\{\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} \in \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega) \text{ tel que } \tilde{\sigma}_{xx} \in H^{m+1,m}(\Omega), \\
& & \qquad \tilde{\sigma}_{zz} \in H^{m,m+1}(\Omega),\ \tilde{\sigma}_{xz} \in H^{m+1}(\Omega)\big\},
\end{array}
\right.
$$

et on pose (même s'il ne s'agit pas d'une norme)

$$\|\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}\|_{\underline{\underline{\widetilde{H}^{m+1,m}}}(\Omega)} \quad := \quad |\tilde{\sigma}_{xx}|_{H^{m+1,m}(\Omega)} + |\tilde{\sigma}_{zz}|_{H^{m,m+1}(\Omega)} + |\sigma_{xz}|_{H^{m+1}(\Omega)}.$$

Alors, si $\sigma \in \underline{\underline{\widetilde{H}^{2,1}}}(\Omega)$ on a que

$$\inf_{\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \in \underline{\underline{X}}_{h_c}^{sym}(\Omega)} \|\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h - \underline{\underline{\sigma}}\|^2_{\underline{\underline{X}}^*(\Omega)} \quad \leq \quad \mathcal{C}\, h\, \|\underline{\underline{\sigma}}\|_{\underline{\underline{\widetilde{H}^{2,1}}}(\Omega)}. \tag{1.51}$$

Estimation de l'erreur de consistance. Maintenant on examine le deuxième terme de (1.48). De la deuxième équation de (1.43) on en déduit que $\widehat{\underline{\underline{\sigma}}^h}$ appartient à l'espace donné par (1.47). Il est clair que si $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \in \underline{\underline{X}}_h^{*,sym}(\Omega)$ alors

$$s_l(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h, \widehat{\underline{j}_l^H} - \underline{j}) \quad = \quad s_l(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h, \underline{\tilde{j}}^H - \underline{j}), \qquad \forall\, \underline{\tilde{j}}^H \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma),$$

ce qui implique

$$\sup_{\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \in \underline{\underline{X}}_h^{*,sym}(\Omega)} \frac{\displaystyle\sum_{s\in\{c,f\}} s_l(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h, \widehat{\underline{j}_l^H} - \underline{j})}{\|\widehat{\underline{\underline{\sigma}}^h} - \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h\|_{\underline{\underline{X}}^*(\Omega)}} \quad = \quad \inf_{\underline{\tilde{j}}^H \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)} \sup_{\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \in \underline{\underline{X}}_h^{*,sym}(\Omega)} \frac{\displaystyle\sum_{s\in\{c,f\}} s_l(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h, \underline{\tilde{j}}^H - \underline{j})}{\|\widehat{\underline{\underline{\sigma}}^h} - \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h\|^2_{\underline{\underline{X}}^*(\Omega)}}.$$

C'est à ce stade que la preuve diffère légèrement en fonction de l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange.

– Supposons d'abord que l'inclusion (1.12) est satisfaite. Alors en utilisant le théorème des traces on obtient

$$\begin{aligned} s_l(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h, \underline{j} - \underline{\tilde{j}}^H) \quad &\leq \quad \|\left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h\right) \underline{n}_l\|_{\underline{H^{-\frac{1}{2}}}(\Gamma)}\, \|\underline{j} - \underline{\tilde{j}}^H\|_{\underline{H^{\frac{1}{2}}}(\Gamma)} \\ &\leq \quad \|\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h\|_{\underline{\underline{X}}_l(\Omega_l)}\, \|\underline{j} - \underline{\tilde{j}}^H\|_{\underline{H^{\frac{1}{2}}}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

et donc, l'erreur de consistance est borné par

$$\mathcal{C} \inf_{\underline{\tilde{j}}^H \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)} \|\underline{j} - \underline{\tilde{j}}^H\|_{\underline{H^{\frac{1}{2}}}(\Gamma)},$$

quantité qu'on peut estimer en utilisant des résultats d'interpolation classiques. Par exemple, si on prend $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ donné par (voir la section 1.4.2.2 pour leur définition)

$(\mathcal{P}_1)^2$ **continu grossier**,	(1.26)	$(\mathcal{P}_1)^2$ **continu fin**,	(1.27)
$\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_1$ **continu grossier**,	(1.30)	$\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_1$ **continu fin**,	(1.31)

il est clair que

$$\left|\begin{array}{llll} \inf\limits_{\underline{\tilde{j}}^H \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)} \|\underline{j} - \underline{\tilde{j}}^H\|_{\underline{H^1}(\Gamma)} & \leq \mathcal{C}\, h\, \|\underline{j}\|_{\underline{H^2}(\Gamma)}, & \forall\, \underline{j} \in \underline{H^2}(\Gamma), & (a) \\ \inf\limits_{\underline{\tilde{j}}^H \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)} \|\underline{j} - \underline{\tilde{j}}^H\|_{\underline{L^2}(\Gamma)} & \leq \mathcal{C}\, h^2\, \|\underline{j}\|_{\underline{H^2}(\Gamma)}, & \forall\, \underline{j} \in \underline{H^2}(\Gamma), & (b) \\ \inf\limits_{\underline{\tilde{j}}^H \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)} \|\underline{j} - \underline{\tilde{j}}^H\|_{\underline{L^2}(\Gamma)} & \leq \mathcal{C}\, h\, \|\underline{j}\|_{\underline{H^1}(\Gamma)}, & \forall\, \underline{j} \in \underline{H^1}(\Gamma). & (c) \end{array}\right. \tag{1.52}$$

Alors, en utilisant des résultats d'interpolation [62], on a que si $\underline{j} \in \underline{H^{\frac{3}{2}}}(\Gamma)$ alors (en utilisant (1.52).(a)-(c))

$$\inf_{\underline{\tilde{j}}^H \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)} \|\underline{j} - \underline{\tilde{j}}^H\|_{\underline{H^{\frac{1}{2}}}(\Gamma)} \quad \leq \quad \mathcal{C}\, h\, \|\underline{j}\|_{\underline{H^{\frac{3}{2}}}(\Gamma)}.$$

De la même façon, si $\underline{j} \in \underline{H^2}(\Gamma)$ alors (en utilisant (1.52).(a)-(b))

$$\inf_{\underline{\tilde{j}}^H \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)} \|\underline{j} - \underline{\tilde{j}}^H\|_{\underline{H^{\frac{1}{2}}}(\Gamma)} \quad \leq \quad \mathcal{C}\, h^{\frac{3}{2}}\, \|\underline{j}\|_{\underline{H^2}(\Gamma)}.$$

– Si l'espace $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ n'est pas une approximation interne, on peut néanmoins écrire

$$s_l(\widehat{\underline{\sigma}_l^h} - \underline{\tilde{\sigma}}_l^h, \underline{j} - \underline{\tilde{j}}^H) \quad \leq \quad \| \left(\widehat{\underline{\sigma}_l^h} - \underline{\tilde{\sigma}}_l^h\right) \underline{n}_l\|_{\underline{L^2}(\Gamma)}\, \|\underline{j} - \underline{\tilde{j}}^H\|_{\underline{L^2}(\Gamma)}.$$

Ensuite, en appliquant une inégalité inverse [28] et le théorème de traces, on obtient que

$$\begin{aligned} s_l(\widehat{\underline{\sigma}_l^h} - \underline{\tilde{\sigma}}_l^h, \underline{j} - \underline{\tilde{j}}^H) \quad &\leq \quad \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{h}} \| \left(\widehat{\underline{\sigma}_l^h} - \underline{\tilde{\sigma}}_l^h\right) \underline{n}_l\|_{\underline{H^{-\frac{1}{2}}}(\Gamma)}\, \|\underline{j} - \underline{\tilde{j}}^H\|_{\underline{L^2}(\Gamma)} \\ &\leq \quad \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{h}} \|\widehat{\underline{\sigma}_l^h} - \underline{\tilde{\sigma}}_l^h\|_{\underline{\underline{X}}_l(\Omega_l)}\, \|\underline{j} - \underline{\tilde{j}}^H\|_{\underline{L^2}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

ce qui implique que l'erreur de consistance est borné par

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{h}} \inf_{\underline{\tilde{j}}^H \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)} \|\underline{j} - \underline{\tilde{j}}^H\|_{\underline{L^2}(\Gamma)}.$$

Étant donné que l'espace (voir la section 1.4.2.3)

$$\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) = \mathbf{Tr}^\Gamma \left(\underline{\underline{X}}_{h_l}(\Omega_l)\right), \quad l \in \{f, c\}, \qquad (1.32)$$

satisfait (1.52).(b)-(c), un résultat d'interpolation nous permet d'affirmer que si $\underline{j} \in \underline{H^{\frac{3}{2}}}(\Gamma)$, alors

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{h}} \inf_{\underline{\tilde{j}}^H \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)} \|\underline{j} - \underline{\tilde{j}}^H\|_{\underline{L^2}(\Gamma)} \quad \leq \quad \mathcal{C}\, h\, \|\underline{j}\|_{\underline{H^{\frac{3}{2}}}(\Gamma)}.$$

Remarque 1.5.1 *Si on considère $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ défini par (voir la section 1.4.2.3)*

$$(\mathcal{P}_0)^2 \textbf{ grossier}, \qquad (1.33)$$

on a que l'estimation (1.52).(c) est satisfaite (mais on n'a pas mieux). Alors, si le multiplicateur de Lagrange appartient à $\underline{H^1}(\Gamma)$ on obtient

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{h}} \inf_{\underline{\tilde{j}}^H \in \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)} \|\underline{j} - \underline{\tilde{j}}^H\|_{\underline{L^2}(\Gamma)} \quad \leq \quad \mathcal{C}\, \sqrt{h}\, \|\underline{j}\|_{\underline{H^1}(\Gamma)},$$

ce qui nous donne une approximation moins bonne que pour les autres choix.

Donc, finalement a prouvé le théorème suivant

Théorème 1.5.3 *Soit* $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v}, \underline{j}) \in \underline{\underline{\widetilde{H}^{2,1}}}(\Omega) \times \underline{H^1}(\Omega) \times \underline{H^{\frac{3}{2}}}(\Gamma)$. *Alors la projection elliptique* $\Pi_h(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v}, \underline{j})$ *définie par (1.41) (avec le champ de vitesse approché dans (1.20) et l'espace du multiplicateur approché par (1.26), (1.27), (1.30), (1.31) ou (1.32)) satisfait*

$$\sum_{l\in\{c,f\}} \left(\|\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\|_{\underline{\underline{X}}(\Omega_l)} + \|\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l\|_{\underline{M}(\Omega_l)} \right) \leq \mathcal{C}\, h \left(\|\underline{\underline{\sigma}}\|_{\underline{\underline{\widetilde{H}^{2,1}}}(\Omega)} + \|\underline{v}\|_{\underline{H^1}(\Omega)} + \|\underline{j}\|_{\underline{H^{\frac{3}{2}}}(\Gamma)} \right).$$

Dans la pratique, on appliquera la projection elliptique sur $(\underline{\underline{\sigma}}(t), \underline{v}(t), \underline{j}(t))$ solution du problème variationnel (1.9)–(1.10) au temps t. Dans ce cas, il est facile de montrer que si

$$(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v}, \underline{j}) \in C^k\left([0,T]; \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega) \times \underline{M}(\Omega) \times \underline{\mathcal{J}}(\Gamma)\right),$$

alors

$$\Pi_h(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v}, \underline{j}) \in C^k\left([0,T]; \prod_{l\in\{c,f\}} \underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l) \times \underline{M}_{h_l}(\Omega_l) \times \underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)\right),$$

et

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\Pi_h(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v}, \underline{j}) = \Pi_h(\frac{\partial^k}{\partial t^k}\underline{\underline{\sigma}}, \frac{\partial^k}{\partial t^k}\underline{v}, \frac{\partial^k}{\partial t^k}\underline{j}),$$

c'est à dire, l'opérateur de dérivation en temps commute avec la projecteur elliptique.

Ceci nous permet d'établir le

Corollaire 1.5.4 *Soit*$(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v}, \underline{j}) \in C^k([0,T]; \underline{\underline{\widetilde{H}^{2,1}}}(\Omega) \times \underline{H^1}(\Omega) \times \underline{H^{\frac{3}{2}}}(\Omega))$ *la solution du problème (1.9)–(1.10). Pour tout* $t \leq T$, *sa projection elliptique définie par (1.41) (avec le champ de vitesse approché dans (1.20) et l'espace du multiplicateur approché par (1.26), (1.27), (1.30), (1.31) ou (1.32)) satisfait*

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{l\in\{c,f\}} \left(\|\partial_t^k \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\right)(t)\|_{\underline{\underline{X}}_l(\Omega_l)} + \|\partial_t^k \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l\right)(t)\|_{\underline{M}(\Omega_l)} \right) \\ \qquad \leq \mathcal{C}\, h \left(\|\partial_t^k\, \underline{\underline{\sigma}}(t)\|_{\underline{\underline{\widetilde{H}^{2,1}}}(\Omega)} + \|\partial_t^k\, \underline{v}(t)\|_{\underline{H^1}(\Omega)} + \|\partial_t^k\, \underline{j}(t)\|_{\underline{H^{\frac{3}{2}}}(\Gamma)} \right). \end{array} \right. \tag{1.53}$$

1.5.2.2 Estimations sur le Problème d'Évolution

Finalement on obtient les estimations sur le problème en temps. Soit l'énergie discrète de l'erreur définie par

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_f(t), \tag{1.54}$$

où

$$\mathcal{E}_l(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_l} \mathbf{A}_l \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l^h\right) : \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l^h\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\Omega_l} \rho_l \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l^h\right) \cdot \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l^h\right) \mathrm{d}x.$$

Il est clair que

$$\sqrt{\mathcal{E}(t)} \approx \sum_{l\in\{c,f\}} \left[\|\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l^h\|_{\underline{\underline{L^2}}(\Omega_l)}(t) + \|\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l^h\|_{\underline{M}(\Omega_l)}(t) \right].$$

Notre objectif est de donner une estimation de cette quantité en fonction de l'erreur de la projection elliptique sur la solution exacte.

On commence par faire la différence entre les premières équations de (1.13) et (1.9) pour en déduire que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_l} \rho_l\, \partial_t \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l^h\right) \cdot \underline{\tilde{v}}_l^h \,\mathrm{d}x \;-\; \int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}}\, (\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l^h) \cdot \underline{\tilde{v}}_l^h \,\mathrm{d}x \;=\\ \int_{\Omega_l} \rho_l\, \partial_t \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l\right) \cdot \underline{\tilde{v}}_l^h \,\mathrm{d}x \;-\; \int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}}\, (\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l) \cdot \underline{\tilde{v}}_l^h \,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{1.55}$$

De la même façon, en utilisant les deuxièmes équations de (1.13) et (1.9) on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_l} \mathbf{A}_l\, \partial_t \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l^h\right) : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h \,\mathrm{d}x \;+\; \int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h \cdot (\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l^h) \,\mathrm{d}x \;-\; \int_{\Gamma} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h\, \underline{n}_l \cdot \left(\widehat{\underline{j}_l^H} - \underline{j}_l^H\right) \,\mathrm{d}\gamma \;=\\ \int_{\Omega_l} \mathbf{A}_l\, \partial_t \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\right) : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h \,\mathrm{d}x \;+\; \int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h \cdot (\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l) \,\mathrm{d}x \;-\; \int_{\Gamma} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h\, \underline{n}_l \cdot \left(\widehat{\underline{j}_l^H} - \underline{j}_l\right).\end{aligned} \tag{1.56}$$

Si on additionne l'équation (1.55) en posant $\underline{\tilde{v}}_l^h = \widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l^h$ avec l'équation (1.56) en posant $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h = \widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{v}_l^h$ on obtient que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_l(t) \;=\; & \int_{\Omega_l} \rho_l\, \partial_t \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l\right) \cdot \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l^h\right) \,\mathrm{d}x \;-\; \int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}}\, (\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l) \cdot \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l^h\right) \,\mathrm{d}x \,+\\ & \int_{\Omega_l} \mathbf{A}_l\, \partial_t \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\right) : \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l^h\right) \,\mathrm{d}x \;+\; \int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}}\, \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l^h\right) \cdot (\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l) \,\mathrm{d}x \;-\\ & \int_{\Gamma} \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l^h\right) \underline{n}_l \cdot \left(\widehat{\underline{j}_l^H} - \underline{j}_l\right) \,\mathrm{d}\gamma + \int_{\Gamma} \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l^h\right) \underline{n}_l \cdot \left(\widehat{\underline{j}_l^H} - \underline{j}_l^H\right) \,\mathrm{d}\gamma.\end{aligned}$$

On somme sur l'indice $l \in \{c, f\}$ et on utilise la définition de la projection elliptique pour écrire

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t) \;=\; & \sum_{l\in\{c,f\}} \int_{\Omega_l} \left[\rho_l\, \partial_t \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l\right) - \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l\right)\right] \cdot \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l^h\right) \,\mathrm{d}x \;+\\ & \sum_{l\in\{c,f\}} \int_{\Omega_l} \mathbf{A}_l \left[\partial_t \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\right) - \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\right)\right] : \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l^h\right) \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

En utilisant inégalité de Cauchy-Schwart on établie l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t) \;\leq\; \mathcal{C}\sqrt{\mathcal{E}(t)} \sum_{l\in\{c,f\}} \Big[& \|\partial_t \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l\right)\|_{\underline{M}(\Omega_l)} + \|\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l\|_{\underline{M}(\Omega_l)} +\\ & \|\partial_t \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\right)\|_{\underline{\underline{L}}^2(\Omega_l)} + \|\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\|_{\underline{\underline{L}}^2(\Omega_l)} \Big].\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}\sqrt{\mathcal{E}(t)} \;\leq\; \sqrt{\mathcal{E}(0)} + \mathcal{C} \sum_{l\in\{c,f\}} \int_0^t \Big[& \|\partial_t \left(\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l\right)\|_{\underline{M}(\Omega_l)} + \|\widehat{\underline{v}_l^h} - \underline{v}_l\|_{\underline{M}(\Omega_l)} +\\ & \|\partial_t \left(\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\right)\|_{\underline{\underline{L}}^2(\Omega_l)} + \|\widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} - \underline{\underline{\sigma}}_l\|_{\underline{\underline{L}}^2(\Omega_l)} \Big] \,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{1.57}$$

On utilisera cette inégalité pour montrer le

Théorème 1.5.5 *Soit* $(\underline{\underline{\sigma}}_l^h, \underline{v}_l^h, \underline{j}_l^H)$ *solution du problème (1.16)– (1.17) avec les conditions initiales données par la projection elliptique des données initiales du problème continu (et les espaces d'approximation utilisés dans le théorème 1.5.4). Soit* $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v}, \underline{j})$ *la solution du problème (1.9)–(1.10). Alors*

– *Si* $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v}, \underline{j}) \in C^1([0,T]; \underline{\underline{\widetilde{H}^{2,1}}}(\Omega) \times \underline{H^1}(\Omega) \times \underline{H^{\frac{3}{2}}}(\Gamma))$,

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{l\in\{c,f\}} \left(\|\underline{\underline{\sigma}}_l^h - \underline{\underline{\sigma}}_l\|_{C(0,T;\underline{\underline{L^2}}(\Omega_l))} + \|\underline{v}_l^h - \underline{v}_l\|_{C(0,T;\underline{M}(\Omega_l))} \right) \leq \\ \qquad \mathcal{C}\,(1+T)\ h\ \left(\|\underline{\underline{\sigma}}\|_{C^1(0,T;\underline{\underline{\widetilde{H}^{2,1}}}(\Omega))} + \|\underline{v}\|_{C^1(0,T;\underline{H^1}(\Omega))} + \|\underline{j}\|_{C^1(0,T;\underline{H^{\frac{3}{2}}}(\Omega))} \right). \end{array} \right. \tag{1.58}$$

– *Si* $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v}, \underline{j}) \in C^2([0,T]; \underline{\underline{\widetilde{H}^{2,1}}}(\Omega) \times \underline{H^1}(\Omega) \times \underline{H^{\frac{3}{2}}}(\Gamma))$,

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{l\in\{c,f\}} \|\underline{\underline{\sigma}}_l^h - \underline{\underline{\sigma}}_l\|_{C(0,T;\underline{\underline{X}}(\Omega_l))} \leq \\ \qquad \mathcal{C}\,(1+T)\ h\ \left(\|\underline{\underline{\sigma}}\|_{C^2(0,T;\underline{\underline{\widetilde{H}^{2,1}}}(\Omega))} + \|\underline{v}\|_{C^2(0,T;\underline{H^1}(\Omega))} + \|\underline{j}\|_{C^2(0,T;\underline{H^{\frac{3}{2}}}(\Omega))} \right). \end{array} \right. \tag{1.59}$$

Preuve: On remarque que, lorsque les conditions initiales sont définies par la projection elliptique des conditions initiales du problème continu, l'énergie $\mathcal{E}(0)$ est identiquement nulle. Ainsi l'estimation (1.58) découle de (1.57) et des conclusions du corollaire 1.5.4. On remarque en particulier qu'on a obtenu des bornes que pour la norme L^2 du tenseur de contraintes (quantité qui apparaît naturellement dans l'énergie), mais pas sur la divergence. Pour faire ceci on doit réutiliser les équations vérifiées par l'erreur. En effet, il est clair que

$$\int_{\Omega_l} \rho_l\, \partial_t \left(\underline{v}_l - \underline{v}_l^h \right) \cdot \underline{\tilde{v}}_l^h \,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}} \left(\underline{\underline{\sigma}}_l - \underline{\underline{\sigma}}_l^h \right) \cdot \underline{\tilde{v}}_l^h \,\mathrm{d}x, \qquad \forall \underline{v}_l^h \in \underline{M}(\Omega_l).$$

En utilisant cette dernière égalité avec $\underline{\tilde{v}}_l^h = \underline{\mathrm{div}} \left(\underline{\underline{\sigma}}_l^h - \widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} \right)$ on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_l} \left| \underline{\mathrm{div}} \left(\underline{\underline{\sigma}}_l^h - \widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} \right) \right|^2 \mathrm{d}x \;=\; & \int_{\Omega_l} \rho_l\, \partial_t \left(\underline{v}_l^h - \underline{v}_l \right) \cdot \underline{\mathrm{div}} \left(\underline{\underline{\sigma}}_l^h - \widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} \right) \mathrm{d}x \;+ \\ & \int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}} \left(\underline{\underline{\sigma}}_l - \widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} \right) \cdot \underline{\mathrm{div}} \left(\underline{\underline{\sigma}}_l^h - \widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} \right) \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\left\| \underline{\mathrm{div}} \left(\underline{\underline{\sigma}}_l^h - \underline{\underline{\sigma}}_l \right) \right\|_{\underline{L^2}(\Omega_l)} \;\leq\; \mathcal{C} \left(\|\partial_t \left(\underline{v}_l^h - \underline{v}_l \right)\|_{\underline{M}(\Omega_l)} + \left\| \underline{\mathrm{div}} \left(\underline{\underline{\sigma}}_l - \widehat{\underline{\underline{\sigma}}_l^h} \right) \right\|_{\underline{L^2}(\Omega_l)} \right).$$

Il suffit alors d'utiliser les estimations sur la projection elliptique du corollaire (1.5.4) et l'estimation (1.58) pour finir la preuve de (1.59). □

1.5.3 Les Cas Plus Généraux : Les Difficultés

On signale que la preuve du théorème 1.5.5 a été simplifiée grâce aux hypothèses qu'on a supposées. En effet :

– Le fait de discrétiser le champ de vitesse dans l'espace (1.20) nous a permis de réduire l'étude de la projection elliptique (1.41) à l'étude du problème (1.43) beaucoup plus standard. L'analyse de convergence avec l'espace de discrétisation $\underline{M}_{h_l}(\Omega_l)$ définie dans (1.18) reste un problème ouvert.

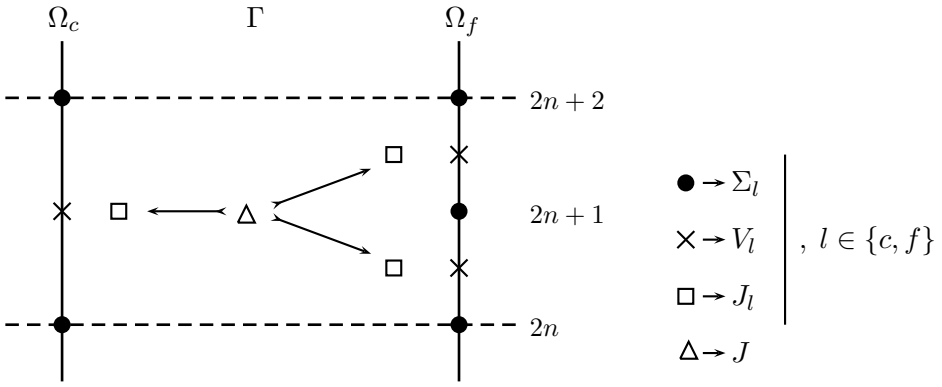


FIG. 1.4 – Distribution temporelle des inconnues et interaction entre les multiplicateurs pour le **schéma I**

- Numériquement on observe un taux de convergence plus élevé que celui qui a été obtenu dans la théorie en $\mathcal{O}(h)$. Ceci peut être lié à l'utilisation des maillages structurés et un phénomène de super-convergence. La preuve d'un résultat de ce type est aussi une question ouverte.
- Dans l'analyse de l'erreur de meilleure approximation on a utilisé fortement que le maillage sur la région raffinée est un sous-maillage d'une extension du maillage grossier à tout le domaine de calcul. On remarque que pour obtenir l'estimation (1.51) (propriété d'approximation de l'espace $\underline{\underline{X}}_{h_c}(\Omega)$) on a eu besoin de la régularité de $\underline{\underline{\sigma}}$ sur tout le domaine de de calcul. Une analyse plus fine nous aurait, peut être, permis d'obtenir un résultat similaire qui demanderait de la régularité seulement sur chaque sous-domaine.
- Le fait d'avoir seulement une région raffinée simplifie la présentation et l'analyse de la méthode. Pour considérer des cas plus généraux avec plusieurs sous-domaines on aurait rencontré des difficultés d'analyse fonctionnel du même type que celles qu'on a rencontrées au chapitre 11 liées aux restrictions de la trace normale. Dans ce cas il faudrait changer l'espace d'approximation du multiplicateur en enlevant des degrés de liberté sur les intersections des frontières communes [15, 16].
- On signale aussi qu'on n'a pas obtenu d'estimations sur le multiplicateur de Lagrange $\underline{j}$. Pour faire ceci il suffirait (mais c'est difficile) de montrer une condition inf-sup discrète uniforme associée à l'opérateur de couplage $\sum_{l\in\{c,f\}} s_l(\cdot,\cdot)$. On renvoie le lecteur à [15, 81] pour une étude similaire.

1.6 Discrétisation en Temps

1.6.1 Schéma Intérieur.

Pour la discrétisation temporelle des systèmes (1.16) on utilise un schéma numérique centré d'ordre deux du type saute-mouton qui calcule le tenseur de contraintes et la vitesse à des instants différents (voir la figure 1.4 pour la distribution temporelle des inconnues). Étant donné qu'on veut garder le rapport entre le pas de temps et d'espace constant sur tout le domaine de calcul on va utiliser un pas de discrétisation temporelle de $\Delta t_c = 2\Delta t$ sur Ω_c et de $\Delta t_f = \Delta t$ sur Ω_f. De cette façon, les équations à l'intérieur de

chaque domaine sont

$$
\left|
\begin{array}{l}
\text{Trouver } (\Sigma_c^{2n}, V_c^{2n+1}, J_c^{2n+1}, \Sigma_f^n, V_f^{n+\frac{1}{2}}, J_f^{n+\frac{1}{2}}) \in \\
\qquad\qquad \mathbb{R}^{N_{\underline{\underline{\sigma}},c}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{v},c}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{j}}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{\underline{\sigma}},c}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{v},c}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{j}}} \text{ vérifiant} \\
\left\{
\begin{array}{rcrcl}
M_{v,c}\dfrac{V_c^{2n+1} - V_c^{2n-1}}{2\Delta t} & - & D_c\,\Sigma_c^{2n} & = & F_c^{2n}, \\
M_{\sigma,c}\dfrac{\Sigma_c^{2n+2} - \Sigma_c^{2n}}{2\Delta t} & + & D_c^*\,V_c^{2n+1} & = & C_c^*\,J_c^{2n+1},
\end{array}
\right. \\
\left\{
\begin{array}{l}
\left\{
\begin{array}{rcrcl}
M_{v,f}\dfrac{V_f^{2n+\frac{1}{2}} - V_f^{2n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} & - & D_f\,\Sigma_f^{2n} & = & F_f^{2n}, \\
M_{\sigma,f}\dfrac{\Sigma_f^{2n+1} - \Sigma_f^{2n}}{\Delta t} & + & D_f^*\,V_f^{2n+\frac{1}{2}} & = & C_f^*\,J_f^{2n+\frac{1}{2}},
\end{array}
\right. \\
\left\{
\begin{array}{rcrcl}
M_{v,f}\dfrac{V_f^{2n+\frac{3}{2}} - V_f^{2n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} & - & D_f\,\Sigma_f^{2n+1} & = & F_f^{2n+1}, \\
M_{\sigma,f}\dfrac{\Sigma_f^{2n+2} - \Sigma_f^{2n+1}}{\Delta t} & + & D_f^*\,V_f^{2n+\frac{3}{2}} & = & C_f^*\,J_f^{2n+\frac{3}{2}}.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
\tag{1.60}
$$

Remarque 1.6.1 *Supposons que les forces externes sont nulles (i. e. $\underline{f} = 0$). Il est bien connu que dans le cas d'un seul domaine, par exemple Ω_f, le schéma numérique donné ci-dessus conserve l'énergie discrète suivante*

$$
\mathbf{E}_f^n \;=\; \frac{1}{2}\left\{(M_{\sigma,f}\Sigma_f^n, \Sigma_f^n) + (M_{v,f}V_f^{n+\frac{1}{2}}, V_f^{n-\frac{1}{2}})\right\}, \tag{1.61}
$$

où $(\cdot,\cdot)$ dénote le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^N$, $N \in \{N_{\underline{\underline{\sigma}},f}, N_{\underline{v},f}\}$. On rappelle que, si on dénote par $(\underline{\underline{\sigma}}_f^h)^n \in \underline{\underline{X}}_{h_f}^{sym}(\Omega_f)$ (resp. $(\underline{v}_f^h)^{n+\frac{1}{2}} \in \underline{M}_{h_f}(\Omega_f)$) la fonction qui a par composantes dans les bases (1.15) le vecteur Σ_f^n (resp. $V_f^{n+\frac{1}{2}}$), on a que

$$
\mathbf{E}_f^n \;=\; \frac{1}{2}\left\{\oint_{\Omega_f} \mathbf{A}_f\,(\underline{\underline{\sigma}}_f^h)^n : (\underline{\underline{\sigma}}_f^h)^n\;dx + \oint_{\Omega_f} \rho_f(\underline{v}_f^h)^{n+\frac{1}{2}} \cdot (\underline{v}_f^h)^{n-\frac{1}{2}}\;dx\right\},
$$

c'est à dire, $\mathbf{E}_f^n$ est un équivalent discret de l'énergie du problème continu sur la grille fine au temps t^n. Cette forme quadratique est équivalente à la norme L^2 de la solution numérique si et seulement si la condition (dite condition CFL)

$$
\text{La matrice } N_f(\Delta t_f) := M_{\sigma,f} - \frac{\Delta t_f^2}{4} D_f^*(M_{v,f})^{-1} D_f \text{ est symétrique définie positive,} \tag{1.62}
$$

est satisfaite (voir la preuve de la proposition 1.8.1 pour avoir plus de détails). Dans ce cas, la méthode numérique est évidement stable. On peut trouver des contrexemples qui montrent que cette condition est aussi nécessaire pour garantir la stabilité.
La condition CFL dans le domaine Ω_c s'écrit

$$
\text{La matrice } N_c(\Delta t_c) := M_{\sigma,c} - \frac{\Delta t_c^2}{4} D_c^*(M_{v,c})^{-1} D_c \text{ est symétrique définie positive.} \tag{1.63}
$$

Remarque 1.6.2 *Un simple calcul montre que la condition (1.62) est équivalente à*

$$\frac{\Delta t_f^2}{4} \sup_{\Sigma_f \neq 0} \frac{\big((M_{v,f})^{-1} D_f \Sigma_f, D_f \Sigma_f\big)}{(M_{\sigma,f}\Sigma_f, \Sigma_f)} \quad < \quad 1.$$

Afin d'écrire cette expression en fonction des opérateurs intégrales, on peut montrer que (voir [6] pour la preuve)

$$\sup_{\Sigma_f \neq 0} \frac{\big((M_{v,f})^{-1} D_f \Sigma_f, D_f \Sigma_f\big)}{(M_{\sigma,f}\Sigma_f, \Sigma_f)} \quad = \quad \sup_{\Sigma_f \neq 0, V_f \neq 0.} \frac{(D_f \Sigma_f, U_f)^2}{(M_{\sigma,f}\Sigma_f, \Sigma_f)\,(M_{v,f}V_f, V_f)},$$

ce qui implique que la condition CFL peut aussi s'écrire

$$\frac{\Delta t_f}{2} \sup_{\substack{\underline{\underline{\sigma}}_h \in \underline{\underline{X}}_{h_f} \\ \underline{\underline{\sigma}}_h \neq 0}} \sup_{\substack{\underline{v}_h \in \underline{M}_{h_f} \\ \underline{v}_h \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{\Omega_f} \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}_f^h \cdot v_f^h \, dx}{\left(\displaystyle\oint_{\Omega_f} \mathbf{A}_f\, \underline{\underline{\sigma}}_f^h : \underline{\underline{\sigma}}_f^h \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\displaystyle\oint_{\Omega_f} \rho_f\, \underline{v}_f^h \cdot \underline{v}_f^h \, dx\right)^{\frac{1}{2}}} \quad < \quad 1. \tag{1.64}$$

Remarque 1.6.3 *Examinons le quotient qui apparaît dans (1.64). Dans le dénominateur on a, approximativement, le produit des normes L^2 de $\underline{\underline{\sigma}}_f^h$ et $\underline{v}_f^h$. Dans le numérateur on a le produit scalaire dans L^2 de $\underline{v}_f^h$ fois un opérateur différentiel du premier ordre (la divergence) appliqué sur $\underline{\underline{\sigma}}_f^h$. Ceci indique que le quotient est de l'ordre de $1/\Delta x$ et suggère que la condition (1.64) est équivalente à une condition du type*

$$\mathcal{C}\, \frac{\Delta t_f}{\Delta x_f} \quad < \quad 1.$$

Lorsqu'on utilise l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ présenté dans (1.18) pour la résolution du système élastodynamique dans un milieu homogène isotrope (avec les coefficients de Lammé λ et μ et une densité ρ) avec un maillage spatio-temporel uniforme infini de pas $(\Delta t_f, \Delta x_f)$ on peut montrer que (voir [80] pour les détails)

$$\mathcal{C} \;=\; \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} \;=\; \frac{1}{V_p}. \tag{1.65}$$

où V_p est la vitesse des ondes de pression.

Pour chaque intervalle de temps $[t^{2n}, t^{2n+2}]$ on a trois valeurs du multiplicateur de Lagrange J, une dans Ω_c et deux dans Ω_f. En plus, les équations de transmission n'ont pas été encore discrétisées. Il faudrait écrire trois équations consistantes avec (1.17) pour compléter le système d'équations (1.60).

1.6.2 Équations de Couplage : Conservation d'une Énergie Discrète

L'idée est de chercher un équivalent discret de la conservation de l'énergie (1.11) en absence de forces externes (voir la remarque 1.2.2). En s'appuyant sur la remarque 1.6.1 on introduit l'énergie discrète totale aux instantes pairs par

$$\mathbf{E}^{2n} \quad := \quad \mathbf{E}_c^{2n} + \mathbf{E}_f^{2n} \tag{1.66}$$

où $\mathbf{E}_f^{2n}$ est définie par (1.61) et $\mathbf{E}_c^{2n}$ par

$$\mathbf{E}_c^{2n} \quad = \quad \frac{1}{2}\left\{(M_{\sigma,c}\Sigma_c^{2n}, \Sigma_c^{2n}) + (M_{v,c}V_c^{2n+1}, V_c^{2n-1})\right\}.$$

Théorème 1.6.1 (Schéma conservatif) *Pour compléter le système (1.60) et obtenir un schéma numérique qui conserve l'énergie* $\mathbf{E}^{2n}$ *en absence des forces externes, les équations additionnelles doivent satisfaire l'égalité de flux suivante :*

$$\begin{aligned}\left(C_f\frac{\Sigma_f^{2n+2}+\Sigma_f^{2n+1}}{4}, J_f^{2n+\frac{3}{2}}\right)+\left(C_f\frac{\Sigma_f^{2n+1}+\Sigma_f^{2n}}{4}, J_f^{2n+\frac{1}{2}}\right)= \\ -\left(C_c\frac{\Sigma_c^{2n+2}+\Sigma_c^{2n}}{2}, J_c^{2n+1}\right).\end{aligned} \tag{1.67}$$

Preuve: On suppose que les forces externes sont nulles. Si on multiplie la deuxième équation de (1.60) par

$$\frac{\Sigma_c^{2n+2}+\Sigma_c^{2n}}{2}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\Delta t}\left\{\left(M_{\sigma,c}\Sigma_c^{2n+2},\Sigma_c^{2n+2}\right)-\left(M_{\sigma,c}\Sigma_c^{2n},\Sigma_c^{2n}\right)\right\} &= \\ -\left(D_c^*V_c^{2n+1},\frac{\Sigma_c^{2n+2}+\Sigma_c^{2n}}{2}\right)+\left(C_c^*J_c^{2n+1},\frac{\Sigma_c^{2n+2}+\Sigma_c^{2n}}{2}\right).\end{aligned} \tag{1.68}$$

De la première équation de (1.60), en utilisant deux instants consécutifs, on en déduit que

$$M_{v,c}\frac{V_c^{2n+3}-V_c^{2n-1}}{4\Delta t} - D_c\frac{\Sigma_c^{2n+2}+\Sigma_c^{2n}}{2} = 0.$$

On multiplie cette égalité par V_c^{2n+1} pour obtenir

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\Delta t}\left\{\left(M_{v,c}V_c^{2n+3},V_c^{2n+1}\right)-\left(M_{v,c}V_c^{2n+1},V_c^{2n-1}\right)\right\} &= \\ \left(D_c^*V_c^{2n+1},\frac{\Sigma_c^{2n+2}+\Sigma_c^{2n}}{2}\right).\end{aligned} \tag{1.69}$$

La somme des expressions (1.68) et (1.69) nous donne la variation de l'énergie discrète grossière entre deux instants pairs,

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(\mathbf{E}_c^{2n+2}-\mathbf{E}_c^{2n}\right) = \left(C_c^*J_c^{2n+1},\frac{\Sigma_c^{2n+2}+\Sigma_c^{2n}}{2}\right). \tag{1.70}$$

Des opérations similaires sur la grille fine nous donnent la variation de l'énergie fine entre les instants pairs,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\Delta t}\left(\mathbf{E}_f^{2n+2}-\mathbf{E}_f^{2n}\right) &= \left(C_f^*J_f^{2n+\frac{1}{2}},\frac{\Sigma_f^{2n+1}+\Sigma_f^{2n}}{2}\right)+ \\ &\left(C_f^*J_f^{2n+\frac{3}{2}},\frac{\Sigma_f^{2n+2}+\Sigma_f^{2n+1}}{2}\right).\end{aligned} \tag{1.71}$$

Finalement, la somme des égalités (1.70) et (1.71) termine la preuve. □

Ce théorème nous donne une famille de schémas stables parmi lesquels on doit sélectionner le plus précis en termes de consistance et convergence. Ainsi, un premier choix pour compléter le système (1.60), consiste à ajouter ces trois équations de couplage

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
C_c \dfrac{\Sigma_c^{2n+2} + \Sigma_c^{2n}}{2} & = & -C_f \dfrac{\Sigma_f^{2n+2} + 2\Sigma_f^{2n+1} + \Sigma_f^{2n}}{4}, \\
J_c^{2n+1} & = & J_f^{2n+\frac{1}{2}} \quad = \quad J_f^{2n+\frac{3}{2}},
\end{array}
\right. \tag{1.72}
$$

qui nous donnent le **schéma I**. On remarque que la continuité de la contrainte normale est imposée une fois tandis que celle du champ de vitesse deux fois. Un deuxième choix possible et, en quelque sorte, dual du précédent est donné par

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
C_c \dfrac{\Sigma_c^{2n+2} + \Sigma_c^{2n}}{2} & = & -C_f \dfrac{\Sigma_f^{2n+2} + \Sigma_f^{2n+1}}{2}, \\
C_c \dfrac{\Sigma_c^{2n+2} + \Sigma_c^{2n}}{2} & = & -C_f \dfrac{\Sigma_f^{2n+1} + \Sigma_f^{2n}}{2}, \\
J_c^{2n+1} & = & \dfrac{J_f^{2n+\frac{3}{2}} + J_f^{2n+\frac{1}{2}}}{2},
\end{array}
\right. \tag{1.73}
$$

et qu'on dénotera **schéma II**. Maintenant on impose deux fois la continuité de la contrainte normale et une seule fois la continuité de la vitesse.

Remarque 1.6.4 *La première équation de (1.72) est centrée et consistante à l'ordre deux avec la première équation de (1.17). Cependant, les deux équations de (1.72) qui imposent la continuité de la vitesse à travers l'interface Γ sont décentrées et consistantes seulement à l'ordre un avec la deuxième équation de (1.17). Toutes les valeurs du multiplicateur de Lagrange du coté grossier et fin dans l'intervalle de temps $[t^{2n}, t^{2n+2}]$ sont égales à une même valeur qu'on appellera J^{2n+1} (voir la figure 1.4).*

On a un comportement similaire pour les équations dans (1.73). Cette fois-ci c'est l'équation qui porte sur le multiplicateur de Lagrange qui est consistante à l'ordre deux avec la deuxième équation de (1.17). Les autres deux équations qui imposent la continuité de la contrainte normale sont consistantes à l'ordre un. De ce point de vue il n'est pas clair qu'un schéma soit plus précis que l'autre. Cependant, on verra dans le chapitre 2 que le **schéma I** *fournit en effet une meilleure approximation (voir aussi la remarque 1.6.5).*

Remarque 1.6.5 *On peut remarquer que le comportement du couplage donné par le* **schéma II** *est étrange. En effet, à partir des deux premières équations dans (1.73) on observe que*

$$
C_f \Sigma_f^{2n} \quad = \quad C_f \Sigma_f^{2n+2},
$$

ce qui veut dire que la contrainte normale sur l'interface Γ du coté fin reste constante aux instants pairs. Ceci implique en particulier que la méthode ne peut pas converger en norme L^∞ (voir le chapitre 2 pour l'analyse 1D de cette méthode).

1.7 Caractère Bien Posé du Problème Discret

Dans le chapitre 2 on verra que la solution obtenue avec le couplage (1.72) est plus précise que celle qu'on obtient avec les équations (1.73). Pour cette raison, on a décidé de présenter le caractère bien posé du problème totalement discrétisé pour le **schéma I**.

1.7.1 Algorithme de Calcul

Supposons que toutes les inconnues jusqu'au temps t^{2n} ont été calculées et voyons comment obtenir les inconnues jusqu'au temps t^{2n+2}.

- Étant donné que les matrices de masse sont symétriques et définies positives, on peut calculer V_c^{2n+1} et $V_f^{2n+\frac{1}{2}}$ à l'aide de la première et troisième équations de (1.60).
- Ensuite on obtient J^{2n+1} (la valeur commune du multiplicateur de Lagrange dans l'intervalle $[t^{2n}, t^{2n+2}]$) d'une façon implicite en résolvant un système linéaire du type

$$\mathcal{M}(\Delta t)J^{2n+1} \quad = \quad B^{2n+1}.$$

  Comme on verra plus tard en détail, le second membre ne dépend que des inconnues qui ont été déjà calculées.
- Une fois qu'on a obtenu la valeur du multiplicateur de Lagrange on obtient Σ_c^{2n+2}, Σ_f^{2n+1}, $V_f^{2n+\frac{3}{2}}$ et Σ_f^{2n+2} avec la deuxième, quatrième, cinquième et sixième équations de (1.60) respectivement.

Finalement, on explique en détail comment obtenir le multiplicateur de Lagrange J^{2n+1}.

1.7.2 Obtention du Système Linéaire Vérifié par J^{2n+1}

La proposition suivante nous donne l'expression du système linéaire à résoudre pour l'obtention du multiplicateur de Lagrange J^{2n+1}.

Proposition 1.7.1 *Si les suites Σ_c^{2n}, Σ_f^{n}, V_c^{2n+1}, $V_f^{n+\frac{1}{2}}$, J^{2n+1} vérifient (1.60)–(1.72) alors*

$$\mathcal{M}(\Delta t)J^{2n+1} \quad = \quad B^{2n+1}, \tag{1.74}$$

où

$$\begin{aligned} B^{2n+1} \quad = \quad & \frac{\Delta t^2}{4} C_f (M_{\sigma,f})^{-1} D_f^* (M_{v,f})^{-1} F_f^{2n+1} - \\ & C_c \left[\Sigma_c^{2n} - \Delta t (M_{\sigma,c})^{-1} D_c^* V_c^{2n+1} \right] - \\ & C_f (M_{\sigma,f})^{-1} N_f(\Delta t_f) \left[\Sigma_f^{2n} - \Delta t (M_{\sigma,f})^{-1} D_f^* V_f^{2n+\frac{1}{2}} \right], \end{aligned} \tag{1.75}$$

$$\mathcal{M}(\Delta t) \quad = \quad \mathcal{M}_c \; + \; \mathcal{M}_f(\Delta t_f), \tag{1.76}$$

$$\mathcal{M}_c \quad = \quad \Delta t \; C_c (M_{\sigma,c})^{-1} C_c^*, \tag{1.77}$$

$$\mathcal{M}_f(\Delta t_f) \quad = \quad \Delta t \; C_f (M_{\sigma,f})^{-1} N_f(\Delta t_f) (M_{\sigma,f})^{-1} C_f^*, \tag{1.78}$$

avec la matrice $N_f(\Delta t_f)$ définie dans (1.62).

Preuve: Notre objectif est d'obtenir un système linéaire vérifié par l'inconnue J^{2n+1} dont le second membre ne fait pas apparaître Σ_f^{2n+2}, Σ_f^{2n+1}, Σ_c^{2n+2} et $V_f^{2n+\frac{3}{2}}$. L'utilisation des équations du schéma intérieur (1.60) et, surtout, de la première équation de (1.72) sont fondamentales pour éliminer ces inconnues. C'est ce qui guide les calculs qui vont suivre.

Si on fait la différence entre la sixième et quatrième équations de (1.60) on a

$$M_{\sigma,f}\frac{\Sigma_f^{2n+2}-2\Sigma_f^{2n+1}+\Sigma_f^{2n}}{\Delta t^2} = -D_f^*\frac{V_f^{2n+\frac{3}{2}}-V_f^{2n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}+C_f^*\frac{J_f^{2n+\frac{3}{2}}-J_f^{2n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}.$$

En utilisant la cinquième équation de (1.60) et les équations de couplage (1.72) on en déduit que

$$M_{\sigma,f}\frac{\Sigma_f^{2n+2}-2\Sigma_f^{2n+1}+\Sigma_f^{2n}}{\Delta t^2} = -D_f^*(M_{v,f})^{-1}D_f\Sigma_f^{2n+1}-D_f^*(M_{v,f})^{-1}F_f^{2n+1}.$$

Il est clair alors que

$$\begin{aligned}
C_f\frac{\Sigma_f^{2n+2}+2\Sigma_f^{2n+1}+\Sigma_f^{2n}}{4} &= C_f(M_{\sigma,f})^{-1}\left[M_{\sigma,f}-\frac{\Delta t^2}{4}D_f^*(M_{v,f})^{-1}D_f\right]\Sigma_f^{2n+1}- \\
&\quad \frac{\Delta t^2}{4}C_f(M_{\sigma,f})^{-1}D_f^*(M_{v,f})^{-1}F_f^{2n+1} \\
&= C_f(M_{\sigma,f})^{-1}N_f(\Delta t_f)\Sigma_f^{2n+1}-\frac{\Delta t^2}{4}C_f(M_{\sigma,f})^{-1}D_f^*(M_{v,f})^{-1}F_f^{2n+1}.
\end{aligned}$$

On utilise la quatrième équation de (1.60) pour développer Σ_f^{2n+1} dans l'expression précédente et obtenir

$$\begin{aligned}
C_f\frac{\Sigma_f^{2n+2}+2\Sigma_f^{2n+1}+\Sigma_f^{2n}}{4} &= C_f(M_{\sigma,f})^{-1}N_f(\Delta t_f)\left[\Sigma_f^{2n}-\Delta t(M_{\sigma,f})^{-1}D_f^*V_f^{2n+\frac{1}{2}}\right]- \\
&\quad \frac{\Delta t^2}{4}C_f(M_{\sigma,f})^{-1}D_f^*(M_{v,f})^{-1}F_f^{2n+1}+ \\
&\quad \Delta t C_f(M_{\sigma,f})^{-1}N_f(\Delta t_f)(M_{\sigma,f})^{-1}C_f^*J^{2n+1}.
\end{aligned} \tag{1.79}$$

D'un autre coté, on se sert de la deuxième équation de (1.60) pour obtenir

$$C_c\frac{\Sigma_c^{2n+2}-\Sigma_c^{2n}}{2\Delta t} = -C_c(M_{\sigma,c})^{-1}D_c^*V_c^{2n+1}+C_c(M_{\sigma,c})^{-1}C_c^*J^{2n+1},$$

ce qui implique

$$C_c\frac{\Sigma_c^{2n+2}+\Sigma_c^{2n}}{2} = C_c\Sigma_c^{2n}-\Delta t C_c(M_{\sigma,c})^{-1}D_c^*V_c^{2n+1}+\Delta t C_c(M_{\sigma,c})^{-1}C_c^*J^{2n+1} \tag{1.80}$$

Pour conclure la preuve il suffit de faire la somme des équations (1.79) et (1.80) et d'utiliser la première équation de (1.72). □

1.7.3 Sur l'Inversibilité de la Matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$

Regardons quand la matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ est inversible.

Théorème 1.7.2 (Caractère bien posé du problème discret) *Sous les hypothèses de la proposition 1.7.1, supposons que*

- *la condition (1.62) est satisfaite (condition CFL habituelle sur Ω_f),*

– *C_c^* est injective ou C_f^* est injective.*

Alors la matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ est symétrique définie positive et le problème discret (1.60)–(1.72) est bien posé.

Preuve: On rappelle que

$$\mathcal{M}(\Delta t) \quad = \quad \mathcal{M}_c(\Delta t_c) + \mathcal{M}_f(\Delta t_f),$$

avec

$$\mathcal{M}_c(\Delta t_c) \quad = \quad \Delta t C_c (M_{\sigma,c})^{-1} C_c^*, \qquad \mathcal{M}_f(\Delta t_f) \quad = \quad \Delta t C_f (M_{\sigma,f})^{-1} N_f(\Delta t_f)(M_{\sigma,f})^{-1} C_f^*,$$

des matrices symétriques positives. Étant donné que

$$\text{Ker}\, \mathcal{M}(\Delta t) \quad = \quad \text{Ker}\, \mathcal{M}_c(\Delta t_c) \cap \text{Ker}\, \mathcal{M}_f(\Delta t_f) \quad = \quad \text{Ker}\, C_c^* \cap \text{Ker}\, C_f^*, \tag{1.81}$$

pour garantir le caractère définie positif de la matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ il suffit qu'une des deux matrices C_c^* ou C_f^* sont injectives.

Une fois prouvée l'inversibilité de la matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$, la proposition 1.7.1 et la section 1.7.1 montrent que le problème discret (1.60)–(1.72) est bien posé. □

Remarque 1.7.1 *On remarque qu'il est préférable que la matrice C_c^* soit injective. En effet, si on prend la valeur de Δt_f de plus en plus proche de la valeur maximal qui garantie la stabilité, la matrice $N_f(\Delta t_f)$ sera de plus en plus singulière. Ceci peut avoir une conséquence dans le caractère définie positive de la matrice $\mathcal{M}_f(\Delta t_f)$ et par conséquence sur l'inversibilité de la matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$.*

1.8 Stabilité du Schéma

On introduit quelques notations qui seront utiles par la suite. Pour chaque matrice symétrique définie positive M on peut définir son produit scalaire et norme associés par

$$(V_1, V_2)_M \quad = \quad (MV_1, V_2), \qquad \|V\|_M^2 \quad = \quad (V, V)_M,$$

où on rappelle que $(\cdot,\cdot)$ est le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^N$. On introduit aussi la notation suivante (voir la remarque 1.6.2 pour une définition équivalente de ces normes en termes d'intégrales)

$$\|D_l\| \quad = \quad \sup_{\widetilde{\Sigma}_l \neq 0} \frac{\|D_l \widetilde{\Sigma}_l\|_{(M_{v,l})^{-1}}}{\|\widetilde{\Sigma}_l\|_{M_{\sigma,l}}}, \qquad \|D_l^*\| \quad = \quad \sup_{\widetilde{V}_l \neq 0} \frac{\|D_l^* \widetilde{V}_l\|_{(M_{\sigma,l})^{-1}}}{\|\widetilde{V}_l\|_{M_{v,l}}}, \qquad l \in \{c, f\}.$$

Théorème 1.8.1 (Stabilité L^2) *Supposons que*

– *les forces externes sont nulles,*
– *$\mathbf{E}^0$ est borné par une constante indépendante du pas de discrétisation,*
– *les conditions (1.62)–(1.63) sont satisfaites (conditions CFL habituelle dans chaque sous-domaine).*

Alors, la norme L^2 de Σ_c^{2n}, V_c^{2n+1}, Σ_f^n et $V_f^{n+\frac{1}{2}}$ obtenus avec les équations (1.60)–(1.72) est bornée par une constante qui ne dépend que des conditions initiales et le rapport $\alpha = \Delta t_c / h_c$.

Preuve: Le schéma numérique qu'on utilise a été construit pour conserver (en absence de forces externes) l'énergie totale $\mathbf{E}^{2n}$, i.e.,

$$\mathbf{E}^0 \quad = \quad \mathbf{E}^{2n}.$$

Il suffira de montrer que cette quantité est équivalente à la norme L^2 de la solution pour compléter la preuve. On a que

$$\begin{aligned}
(V_c^{2n+1}, V_c^{2n-1})_{M_{v,c}} &= \left\| \frac{V_c^{2n+1} + V_c^{2n-1}}{2} \right\|_{M_{v,c}}^2 - \left\| \frac{V_c^{2n+1} - V_c^{2n-1}}{2} \right\|_{M_{v,c}}^2 \\
&= \left\| \frac{V_c^{2n+1} + V_c^{2n-1}}{2} \right\|_{M_{v,c}}^2 - \frac{\Delta t_c^2}{4} \left\| D_2 \Sigma_c^{2n} \right\|_{(M_{v,c})^{-1}}^2
\end{aligned}$$

où on a utilisé la première équation de (1.60). Cette identité nous permet d'écrire (en utilisant la définition de $N_c(\Delta t_c)$)

$$\mathbf{E}_c^{2n} \quad = \quad \frac{1}{2} \left\| \Sigma_c^{2n} \right\|_{N_c(\Delta t_c)}^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{V_c^{2n+1} + V_c^{2n-1}}{2} \right\|_{M_{v,c}}^2 .$$

Des calculs similaires sur la grille fine montrent

$$\mathbf{E}_f^{2n} \quad = \quad \frac{1}{2} \left\| \Sigma_f^{2n} \right\|_{N_f(\Delta t_f)}^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{V_f^{2n+\frac{1}{2}} + V_f^{2n-\frac{1}{2}}}{2} \right\|_{M_{v,f}}^2 ,$$

et donc les quantités Σ_c^{2n}, $(V_c^{2n+1} + V_c^{2n-1})/2$, Σ_f^{2n} et $(V_f^{2n+\frac{1}{2}} + V_f^{2n-\frac{1}{2}})/2$ sont bornées par l'énergie totale à l'instant initial. Si on utilise encore la première équation de (1.60) on obtient

$$V_c^{2n+1} \quad = \quad \frac{V_c^{2n+1} + V_c^{2n-1}}{2} + \frac{\Delta t_c}{2} (M_{v,c})^{-1} D_2 \Sigma_c^{2n},$$

ce qui implique

$$\left\| V_c^{2n+1} \right\|_{M_{v,c}} \quad \leq \quad \left\| \frac{V_c^{2n+1} + V_c^{2n-1}}{2} \right\|_{M_{v,c}} + \frac{\Delta t_c}{2} \|D_c\| \|\Sigma_c^{2n}\|_{M_{\sigma,c}}.$$

Si on se sert des équations sur la grille fine on obtient

$$\left\| V_f^{2n+\frac{1}{2}} \right\|_{M_{v,f}} + \left\| V_f^{2n-\frac{1}{2}} \right\|_{M_{v,f}} \quad \leq \quad 2 \left\| \frac{V_f^{2n+\frac{1}{2}} + V_f^{2n-\frac{1}{2}}}{2} \right\|_{M_{v,f}} + \Delta t_f \left\| D_f \right\| \left\| \Sigma_f^{2n} \right\|_{M_{\sigma,f}} .$$

Ceci veut dire que V_c^{2n+1} et $V_f^{n+\frac{1}{2}}$ sont contrôlées par une constante qui dépend des conditions initiales et du rapport α, car les matrices D_l sont d'ordre $1/h_l$.

Il nous reste à montrer que Σ_f^{2n+1} est aussi borné. En utilisant la quatrième et sixième équations de (1.60)

et l'égalité entre les multiplicateurs $J_f^{2n+\frac{1}{2}}$ et $J_f^{2n+\frac{3}{2}}$ donnée par (1.72) on a

$$\begin{aligned}
\Sigma_f^{2n+1} &= \frac{\Sigma_f^{2n+2}+\Sigma_f^{2n}}{2} + \Delta t_f (M_{\sigma,f})^{-1} D_f^* \left(V_f^{2n+\frac{3}{2}} + V_f^{2n+\frac{1}{2}} \right), \quad \Longrightarrow \\
\left\| \Sigma_f^{2n+1} \right\|_{M_{\sigma,f}} &\leq \frac{1}{2} \left(\left\| \Sigma_f^{2n+2} \right\|_{M_{\sigma,f}} + \left\| \Sigma_f^{2n} \right\|_{M_{\sigma,f}} \right) + \\
&\quad \Delta t_f \|D_1^*\| \left(\left\| V_f^{2n+\frac{3}{2}} \right\|_{M_{v,f}} + \left\| V_f^{2n+\frac{1}{2}} \right\|_{M_{v,f}} \right),
\end{aligned}$$

et la proposition est prouvée. □

Remarque 1.8.1 *Si on considère un matériau homogène et les mêmes éléments finis pour la discrétisation en espace sur les deux domaines, la condition (1.62) est équivalente à (1.63). Ceci est une conséquence du fait d'utiliser le même rapport entre les pas de discrétisation spatial et temporel dans le deux domaines. Aucun des sous-domaines ne va pénaliser l'autre en termes de taille du pas de discrétisation temporel.*

1.9 Résultats Numériques

Dans cette section on présente quelques expériences numériques qui nous permettrons de choisir l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange et de discuter de l'influence du rapport entre le pas de discrétisation temporel et spatial.

1.9.1 Choix de l'Espace du Multiplicateur

Dans cette section on présente des résultats numériques de la méthode présentée dans les sections précédentes qui vont nous permettre de choisir l'espace de discrétisation du multiplicateur de Lagrange. On considère $\Omega = [0,10] \times [0,20]$ un matériau isotrope homogène défini par les coefficients

$$\rho = 1, \qquad \lambda = 3.45, \qquad \mu = 2.04. \tag{1.82}$$

On impose le champ de vitesse nul sur tous les bords. La région raffinée est $\Omega_f = [0,10] \times [10,20]$, ce qui implique que $\Omega_c = [0,10] \times [0,10]$. L'interface Γ est donnée par

$$\Gamma = \{(x,z) \in \Omega \ / \ z = 10\}.$$

Le système est perturbé par une condition initiale sur le champ de vitesse centré sur le point $(x_c, z_c) = (5, 20/3)$

$$\underline{v}((x,z), t=0) = 0.1\, H\left(\frac{r}{r_0}\right) (\underline{e}_r + \underline{e}_\tau), \tag{1.83}$$

où $H(r)$ s'annule à l'extérieur de $[0,1]$ et est définie (pour $r \in [0,1]$) par

$$H(r) = A_0 - A_1 \cos(2\pi r) + A_2 \cos(3\pi r) - A_3 \cos(6\pi r), \tag{1.84}$$

avec $\underline{r} = (x - x_c, z - z_c)^t, \underline{\tau} = (z_c - z, x - x_c)^t,\ r = \|\underline{r}\|,\ \underline{e}_r = \underline{r}/r, \underline{e}_\tau = \underline{\tau}/r,\ r_0 = 1.5$ et

$$A_0 = 0.35875,\ A_1 = 0.48829,\ A_2 = 0.14128,\ A_3 = 0.01168.$$

Le pas de discrétisation sur Ω_c est donné par $\Delta x_c = 1/15$. Étant donné qu'on est intéressé à prendre un pas de discrétisation temporel le plus grand possible on va le prendre de telle sorte que

$$\frac{\Delta t_l}{\Delta x_l} = 0.95\, CFL_{opt}, \qquad l \in \{c, f\},$$

avec CFL_{opt} la valeur maximale du quotient qui assure la stabilité. On va considérer différents espaces d'approximation $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ et étudier sa performance.

$\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \equiv (\mathcal{P}_1)^2$ **continu fin.** On considère $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ défini par (1.25) avec $\widetilde{\Xi}_{h_f}$ comme maillage de surface, choix qui garantit l'inversibilité de la matrice $\mathcal{M}$ dès que la condition CFL est satisfaite car la matrice C_f^* est injective (voir le théorème 1.7.2). Les résultats obtenus pour le multiplicateur de Lagrange et pour les variables volumiques sont bons (voir la figure 1.5). Cependant, le nombre d'inconnues est supérieur à une discrétisation sur le coté grossier. En plus, le caractère inversible de la matrice peut se détériorer lorsque le quotient $\Delta t/\Delta x$ se rapproche de sa valeur maximale qui garantie la stabilité (voir la remarque 1.7.1).

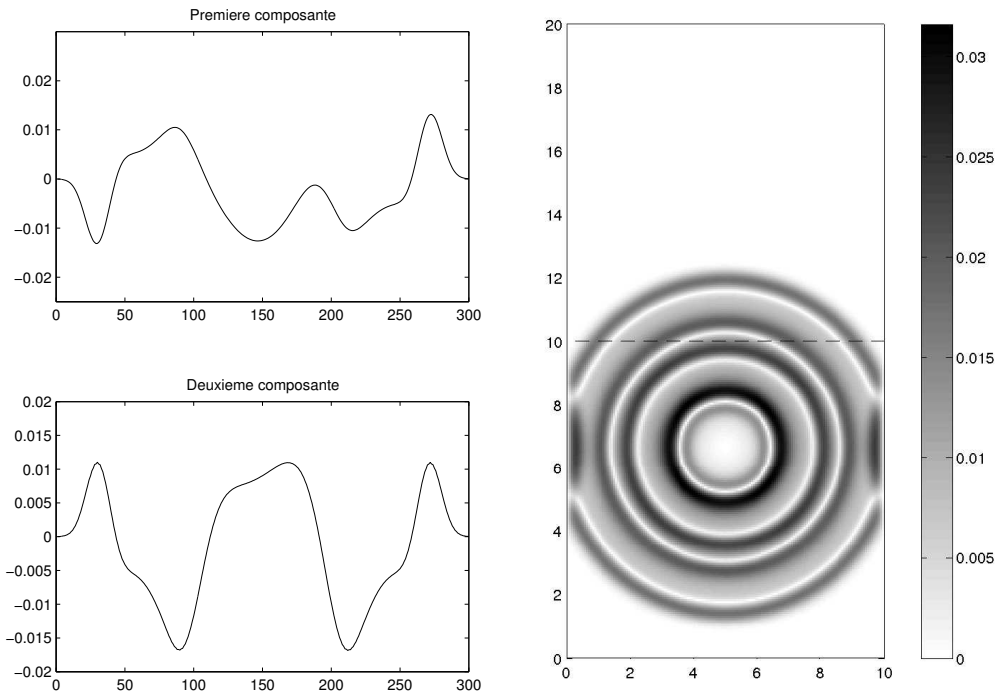
$\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \equiv \mathbf{Tr}^{\Gamma}\left(\underline{\underline{X}}_{h_f}(\Omega_f)\right)$**.** On peut faire les mêmes commentaires pour le choix donné par (1.32). Même si les résultats sont raisonables, la valeur du multiplicateur de Lagrange oscille legèrement sur la première composante (voir la figure 1.6). Le nombre d'inconnues est encore plus élevé que pour le choix précédent. Les oscillations peuvent augmenter lorsque on se rapproche de la CFL habituelle car la matrice $N_f(\Delta t_f)$ devient de plus en plus singulière (voir la remarque 1.7.1).

$\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \equiv (\mathcal{P}_0)^2$ **fin.** Lorsqu'on considère l'espace donné par (1.37) la matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ qu'il faut inverser pour obtenir le multiplicateur de Lagrange est singulière. Dans la pratique, on arrive malgré tout à l'inverser en obtenant la variable J à " un élément du noyau près" (même si on n'a pas vérifié si le second membre appartenait à l'image de la matrice). C'est pour ceci qu'on trouve des fortes oscillations dans la première composante du multiplicateur de Lagrange (voir la figure 1.7), mais pas dans la deuxième (voir la page 17). Les résultats obtenus pour les variables volumiques sont, malgré tout, raisonablement bons.

$\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \equiv (\mathcal{P}_1)^2$ **continu grossier.** On considère $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ défini par (1.25) avec $\widetilde{\Xi}_{h_c}$ comme maillage de surface, choix qui garantit l'inversibilité de la matrice $\mathcal{M}$ dès que la condition CFL est satisfaite car la matrice C_c^* est injective (voir le théorème 1.7.2). Les résultats obtenus pour le multiplicateur de Lagrange et pour les variables volumiques sont assez bons (voir la figure 1.8). En plus, le nombre d'inconnues à l'interface est moins élevé que lorsqu'on considère un maillage de surface construit à partir de la trace du maillage fin.

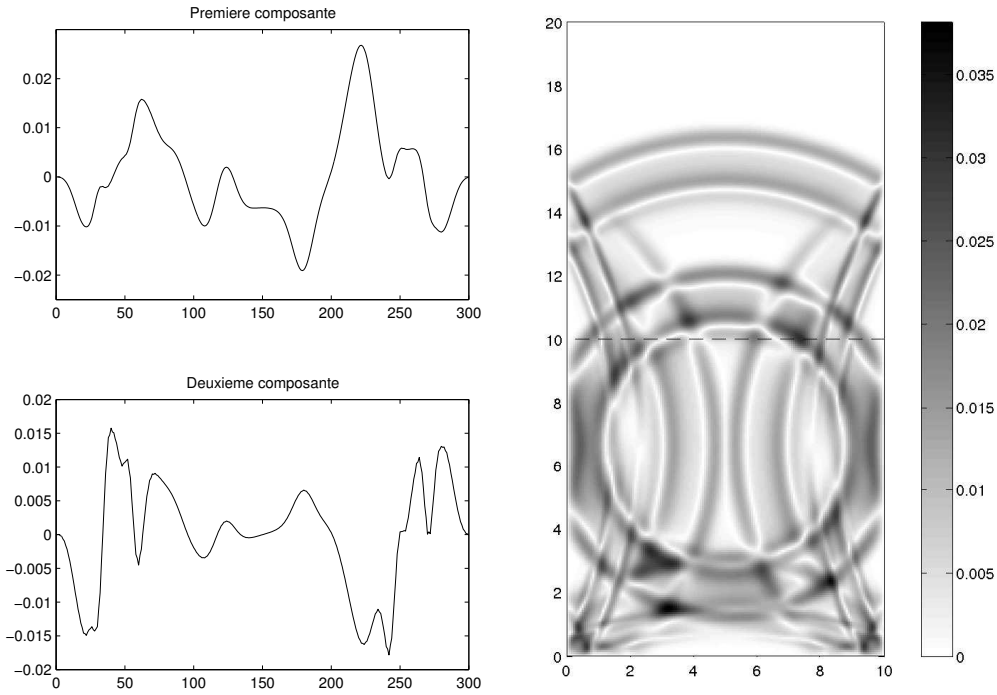
$\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \equiv (\mathcal{P}_0)^2$ **grossier.** Finalement on considère l'espace de discrétisation du multiplicateur donné par (1.34). La matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ est inversible car la matrice C_f^* est injective (voir le théorème 1.7.2). La taille du système linéaire à résoudre est petite, et les résultats obtenus sur les inconnues volumiques et surfaciques sont très bonnes. On pourrait modifier légèrement ce choix comme on indique dans la remarque 1.4.3 afin d'obtenir une méthode plus robuste dont le caractère inversible de la matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ soit moins dépendant du paramètre α (voir aussi la remarque 1.7.1).

Remarque 1.9.1 *Pour tous les choix de multiplicateur considérés et en choisissant $\alpha = CFL_{opt}$ on a un comportement hautement oscillatoire de la solution sur la grille fine (voir la figure 1.10). Malgré*



(a) Multiplicateur sur Γ à $t = 1.6156$

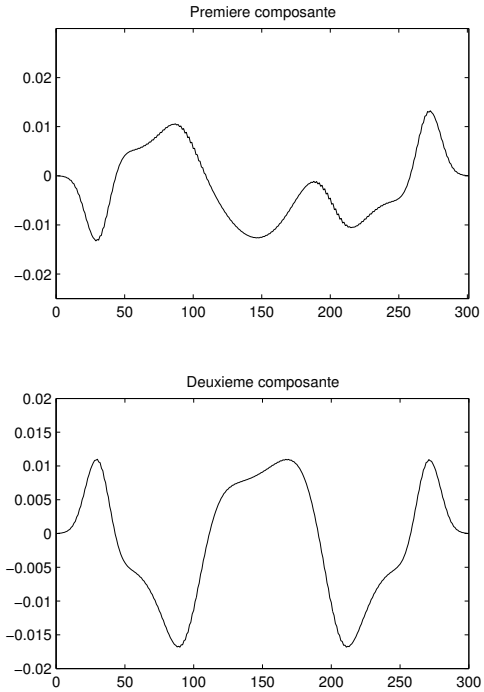
(b) Module de $\underline{v}$ à $t = 1.6156$



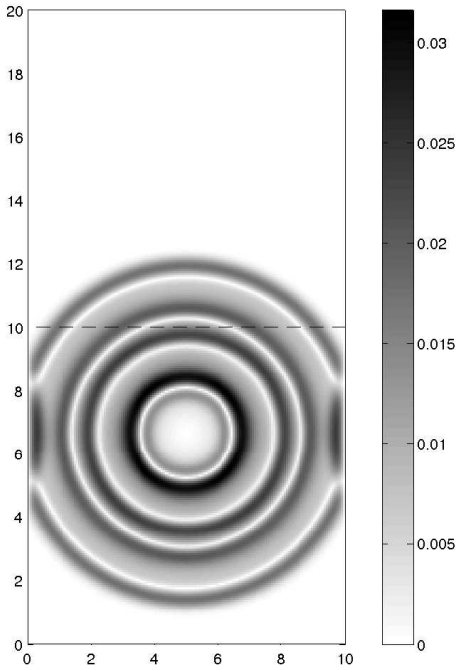
(c) Multiplicateur sur Γ à $t = 3.2312$

(d) Module de $\underline{v}$ à $t = 3.2312$

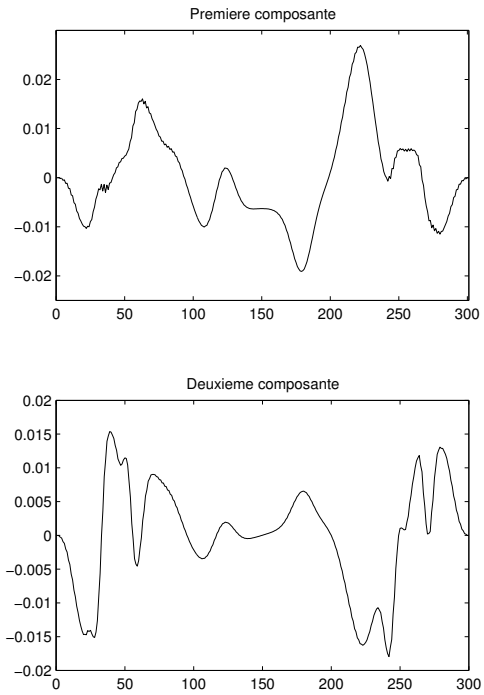
FIG. 1.5 – $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \equiv (\mathcal{P}_1)^2$ **continu fin**. $\Delta x_c = 1/15$. $\alpha = 0.95\ CFL_{opt}$



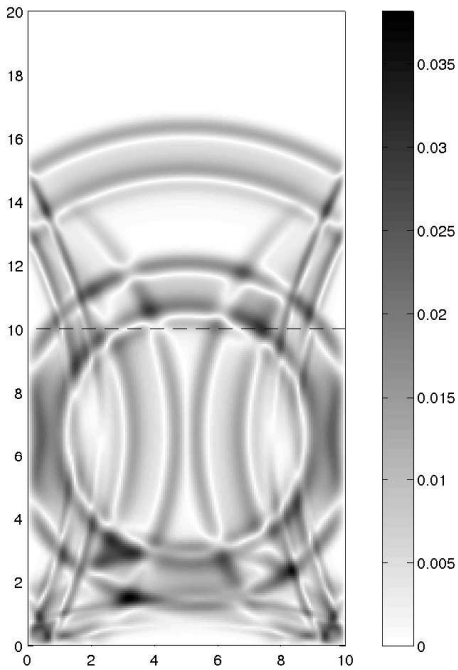
(a) Multiplicateur sur Γ à $t = 1.6156$



(b) Module de $\underline{v}$ à $t = 1.6156$

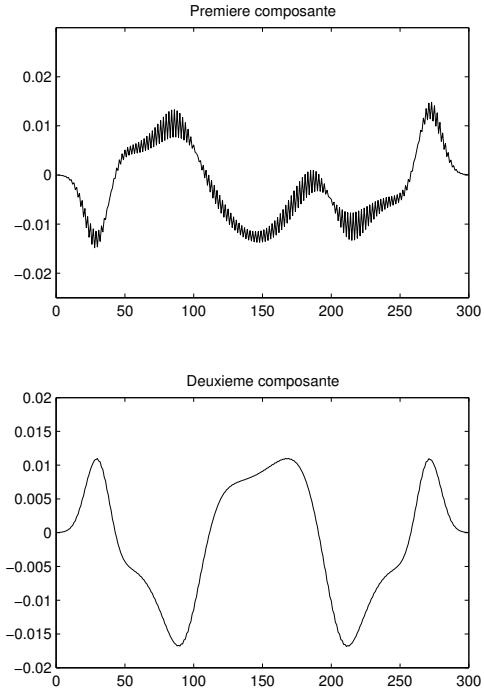


(c) Multiplicateur sur Γ à $t = 3.2312$

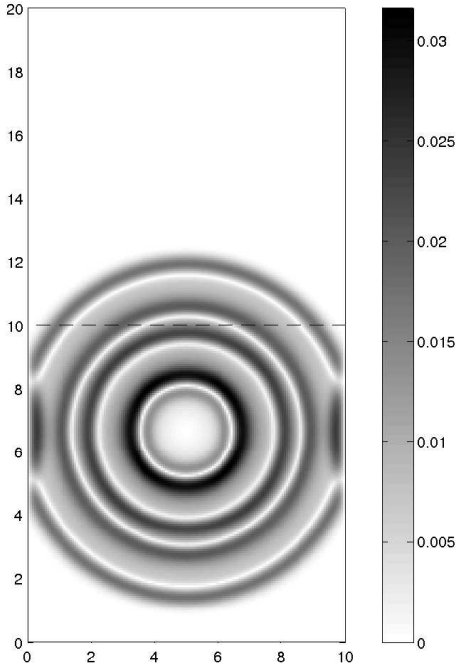


(d) Module de $\underline{v}$ à $t = 3.2312$

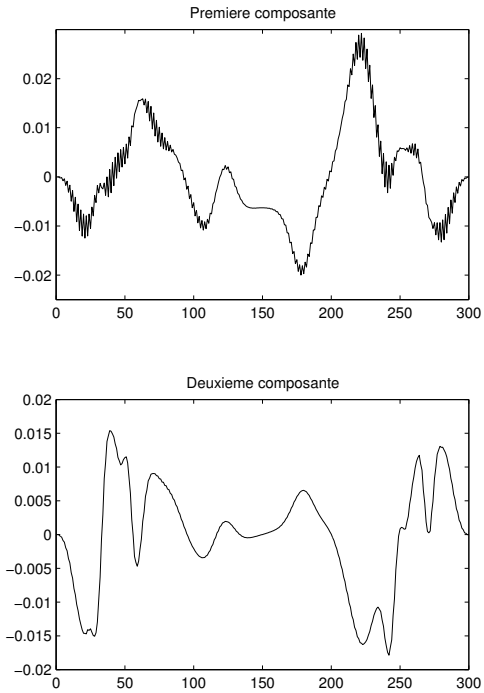
FIG. 1.6 – $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \equiv \mathbf{Tr}^{\Gamma}\left(\underline{\underline{X}}_{h_f}(\Omega_f)\right)$. $\Delta x_c = 1/15$. $\alpha = 0.95\ CFL_{opt}$



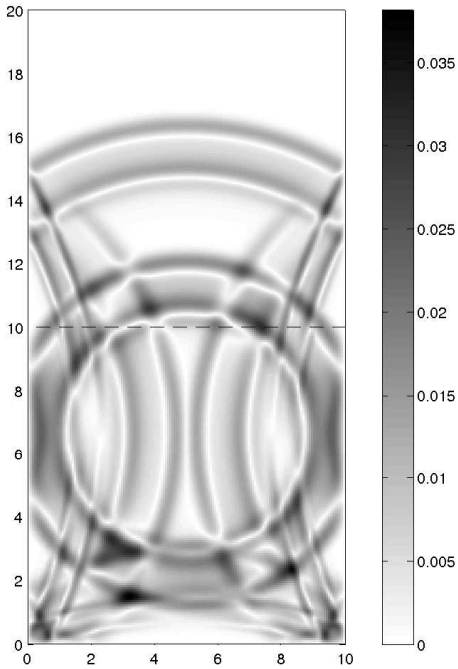
(a) Multiplicateur sur Γ à $t = 1.6156$



(b) Module de $\underline{v}$ à $t = 1.6156$

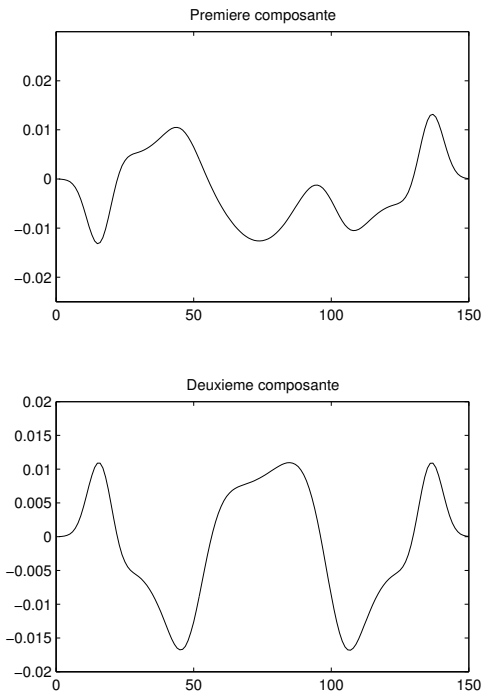


(c) Multiplicateur sur Γ à $t = 3.2312$

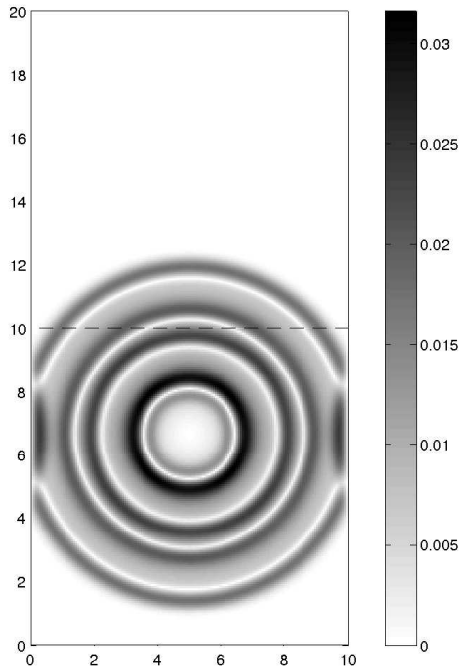


(d) Module de $\underline{v}$ à $t = 3.2312$

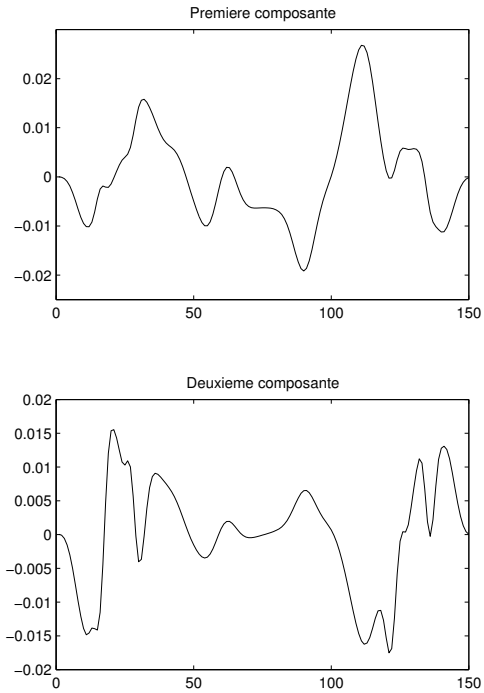
FIG. 1.7 – $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \equiv (\mathcal{P}_0)^2$ **fin**. $\Delta x_c = 1/15$. $\alpha = 0.95\, CFL_{opt}$



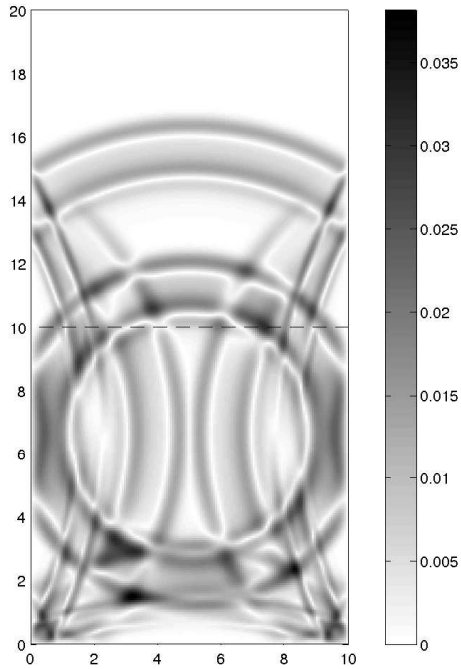
(a) Multiplicateur sur Γ à $t = 1.6156$



(b) Module de $\underline{v}$ à $t = 1.6156$

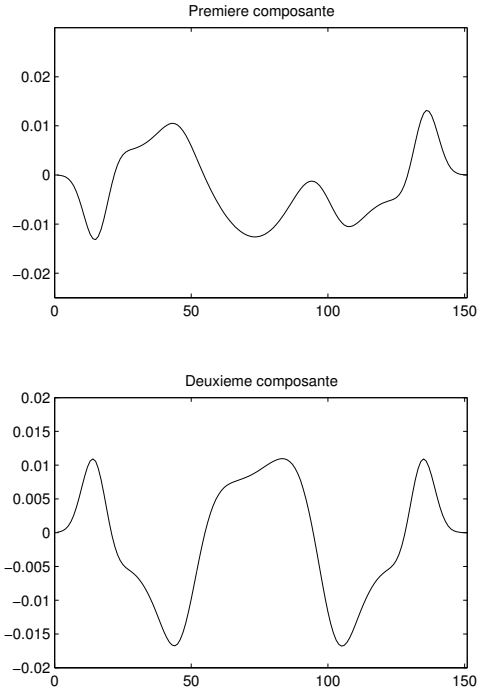


(c) Multiplicateur sur Γ à $t = 3.2312$

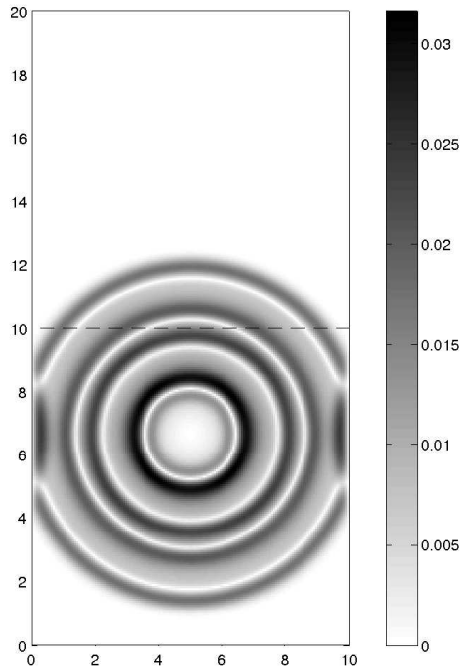


(d) Module de $\underline{v}$ à $t = 3.2312$

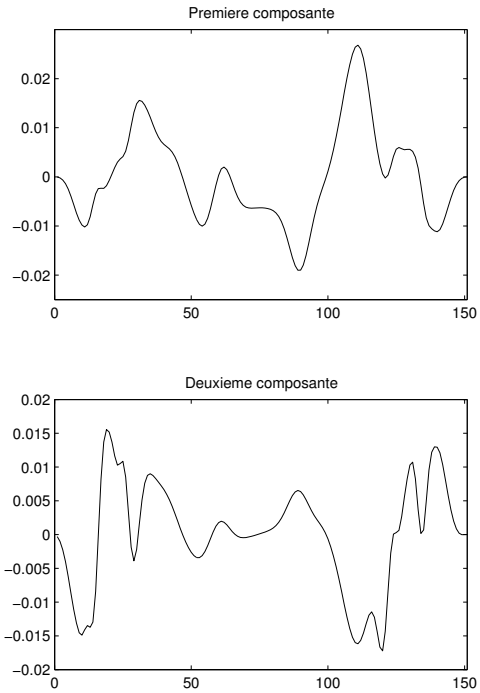
FIG. 1.8 – $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \equiv (\mathcal{P}_1)^2$ **continu grossier**. $\Delta x_c = 1/15$. $\alpha = 0.95\ CFL_{opt}$



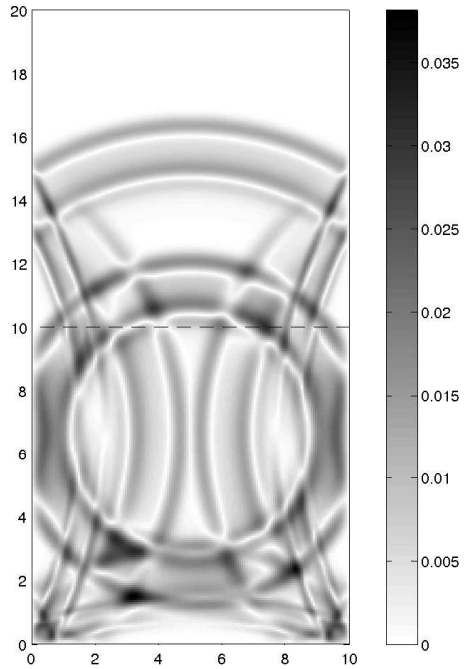
(a) Multiplicateur sur Γ à $t = 1.6156$



(b) Module de $\underline{v}$ à $t = 1.6156$

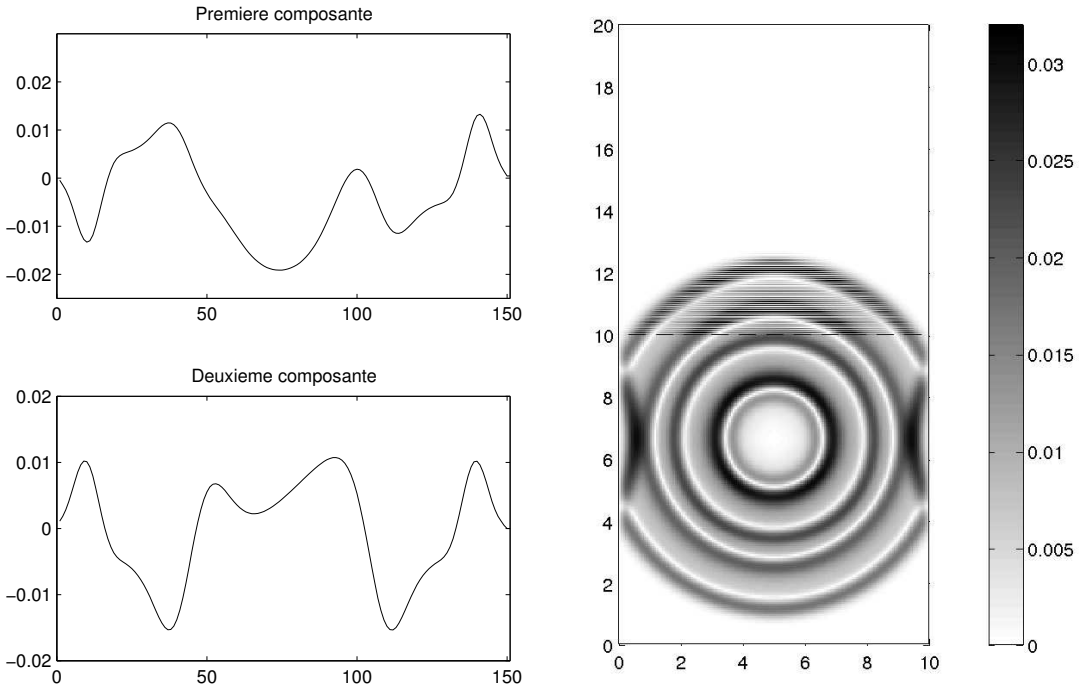


(c) Multiplicateur sur Γ à $t = 3.2312$



(d) Module de $\underline{v}$ à $t = 3.2312$

FIG. 1.9 – $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \equiv (\mathcal{P}_0)^2$ **grossier**. $\Delta x_c = 1/15$. $\alpha = 0.95\, CFL_{opt}$



(a) Multiplicateur sur Γ à $t = 1.7006$

(b) Module de $\underline{v}$ à $t = 1.7006$

FIG. 1.10 – $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma) \equiv (\mathcal{P}_0)^2$ **grossier**. $\Delta x_c = 1/15$. $\alpha = CFL_{opt}$

$\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$	$\text{cond}_2\left(\mathcal{M}(\Delta t)\right)$	Taille de $\mathcal{M}(\Delta t)$
$(\mathcal{P}_1)^2$ **continu fin**	50	$(4N_x+2)^2$
$\mathbf{Tr}^\Gamma\left(\underline{\underline{X}}_{h_f}(\Omega_f)\right)$	25	$(6N_x+1)^2$
$(\mathcal{P}_0)^2$ **fin**	∞	$(4N_x)^2$
$(\mathcal{P}_1)^2$ **continu grossier**	19	$(2N_x+2)^2$
$(\mathcal{P}_0)^2$ **grossier**	9	$(2N_x)^2$

TAB. 1.1 – Conditionement et taille de $\mathcal{M}(\Delta t)$. $\alpha = 0.95$. $\Delta x_c = 1/30$

tout, le multiplicateur de Lagrange semble être bien approché. Il suffit de considérer une valeur de α légèrement inférieure à la valeur maximale pour obtenir des bons résultats.

On peut faire quelques remarques intéressantes sur la matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$:

- On constate numériquement que le conditionement de la matrice reste presque invariant lorsqu'on change les valeurs des paramètres α et Δt (On trouve une deviation d'environ une unité par rapport aux valeurs dans la table 1.1).
- Ce conditionement est plus élévé dans les cas où on choisit une discrétisation qui s'appuie sur le maillage fin de l'interface. Le meilleur conditionnement est donné par le choix (1.34).
- La structure de la matrice est creuse et de taille égale au carré des inconnues surfaciques. De ce point de vue il est préférable de considérer une discrétisation basée sur un maillage basé sur la trace du maillage grossier à l'interface.

En prenant en compte ces remarques et les résultats numériques on va choisir par la suite l'espace $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$ donné par (1.34).

1.9.2 Expériences avec des raffinements récursifs

On présente deux expériences numériques qui montrent la performance de cette technique de raffinement de maillage. Dans un premier temps on décrit les caracteristiques communes des deux. Le domaine de calcul est le rectangle $\Omega = [0, 20] \times [0, 10]$ composé du même materiau homogène isotrope que celui utilisé dans la section precedente. Il est perturbé par une condition initiale sur le champ de vitesse centrée sur le point $(x_c, z_c) = (8, 5)$:

$$v((x,z),t) \quad = \quad 0.1H\left(\frac{r}{r_0}\right)\underline{e}_r$$

avec la fonction H et le vecteur $\underline{e}_r$ définies dans la section 1.9.1. On utilise des couches absorbantes parfaitement adaptées (PML, cf. [41]) pour simuler un domaine non borné sur toutes les frontières sauf sur celle de gauche où on impose la contrainte normale nulle. Le pas de discrétisation spatial sur la grille grossière est de $1/20$ et on effectuera plusieurs raffinements de maillage successifs. Les régions raffinées sont les suivantes : $B_1 = [15.7, 17.3] \times [0.7, 2.3]$, $B_2 = [16, 17] \times [1, 2]$, $B_3 = [3.5, 4.8] \times [5.45, 6.8]$,

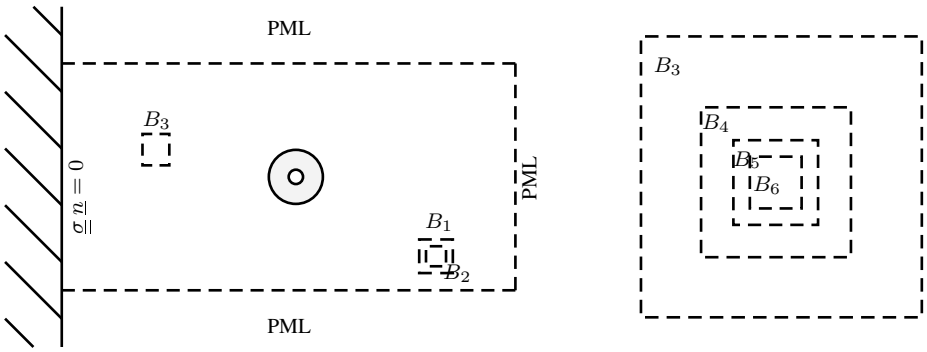
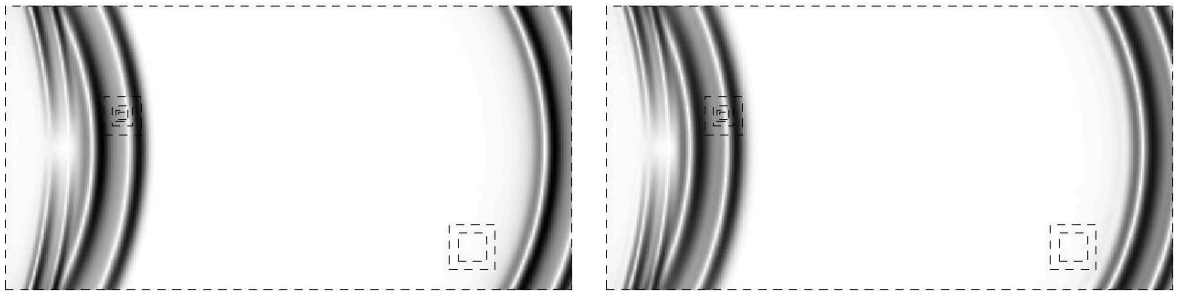


FIG. 1.11 – À gauche : Domaine de calcul. À droite : Zoom au tour de B_3

$B_4 = [3.775, 4.475] \times [5.775, 6.475]$, $B_5 = [3.925, 4.325] \times [5.925, 6.325]$ and $B_6 = [4, 4.25] \times [6, 6.25]$ (voir la figure 1.11). Le rapport entre les pas de discrétisation le plus fin et le plus grossier est de $1/2^4$. Le pas de discrétisation temporel est fixé par le choix de $\alpha = 0.95\ CFL_{opt}$ sur chaque domaine. Dans les figures qui suivront on représente le module du champ de vitesse. L'onde générée par les conditions initiales est une onde de pression. Sa réflexion sur le bord gauche crée des ondes de pression et de cisaillement réfléchies.

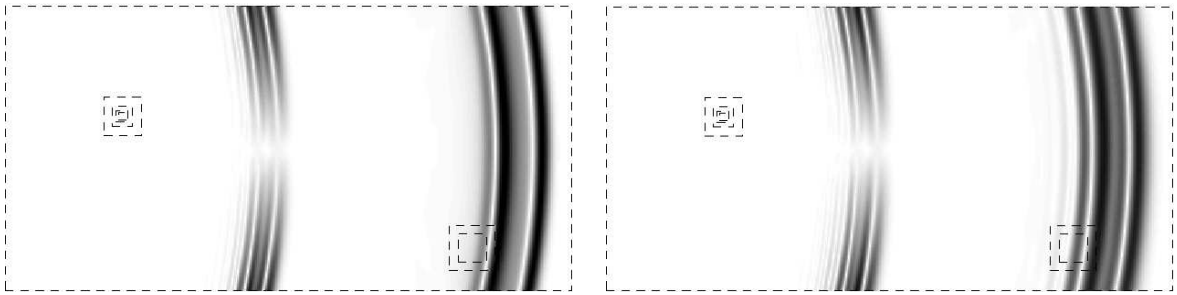
Raffinement spatio-temporel vs. Raffinement spatial. Dans ce paragraphe on présente une comparaison entre la technique de raffinement de maillage présentée dans ce chapitre et une technique qu'on appellera de "raffinement purement en espace". Cette dernière technique consiste en utiliser la méthode des éléments joints décrite dans la section 1.3 et un pas de temps global fixé par la condition CFL sur la plus petite maille. Plus précisément, on compare la même méthode avec ou sans le traitement spécial en temps détaillé dans la section 1.6. Clairement, le coût de calcul avec la deuxième méthode est plus élevé (par exemple, dans la grille grossière, on doit utiliser un pas de temps $1/2^4$ fois plus petit que celui utilisé avec la première méthode). Le gain en temps CPU, qui dépend du niveau de raffinement et de la taille de la région raffinée, est d'environ un facteur neuf pour cette expérience. En plus, l'utilisation d'un rapport entre le pas de discrétisation temporel et spatial trop petit par rapport à la valeur optimale CFL_{opt} fait que la solution obtenue avec le raffinement purement spatial est plus dispersée sur la grille grossière et donc moins précise (voir les figures 1.12 et 1.13). Les résultats obtenus par la première méthode sont très satisfaisants. Il n'y a presque pas de phénomènes parasites dus à la présence d'interfaces artificielles et la non-conformité en temps.

Diffraction par des petits obstacles. Dans la deuxième expérience numérique on montre la diffraction par deux réseaux de petits obstacles carrés placés dans les régions raffinées B_6 (avec 49 unités) et B_2 (avec 25 unités) comme on montre dans la figure 1.14. Chaque obstacle, dont la taille de l'arrête est quatre fois le pas de discrétisation dans la boite courante (beaucoup plus petit que la longueur d'onde), est modélisé par une condition de surface libre. Il est clair qu'il serait impossible de réaliser cette expérience avec le maillage grossier. En plus, si on veut bien prendre en compte la géométrie de notre problème en utilisant un maillage uniforme on devrait utiliser le plus fin. Ceci aurait impliqué un temps de calcul CPU et une quantité de mémoire très grande. La méthode présentée ci-dessus nous permet de capturer les phénomènes produits par les interactions multiples dans les régions très raffinées et de les transmettre à la grille grossière. Dans les figures 1.15 et 1.16 on représente les champs total et diffracté (amplifié d'un facteur deux) à deux instants différents.



(a) Raffinement de maillage spatio-temporel (b) Raffinement de maillage purement spatial

FIG. 1.12 – Module de $\underline{v}$ au temps $t = 4.3275$



(a) Raffinement de maillage spatio-temporel (b) Raffinement de maillage purement spatial

FIG. 1.13 – Module de $\underline{v}$ au temps $t = 9.5205$

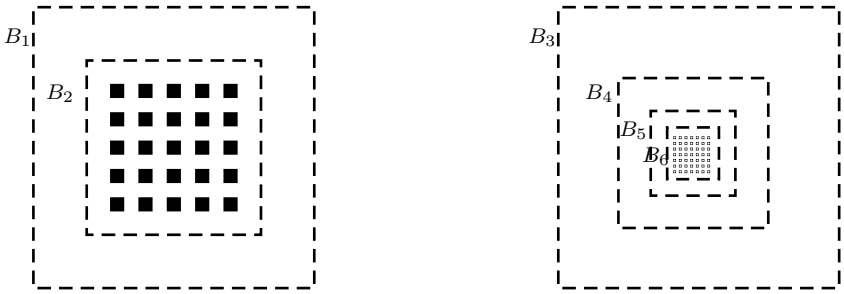
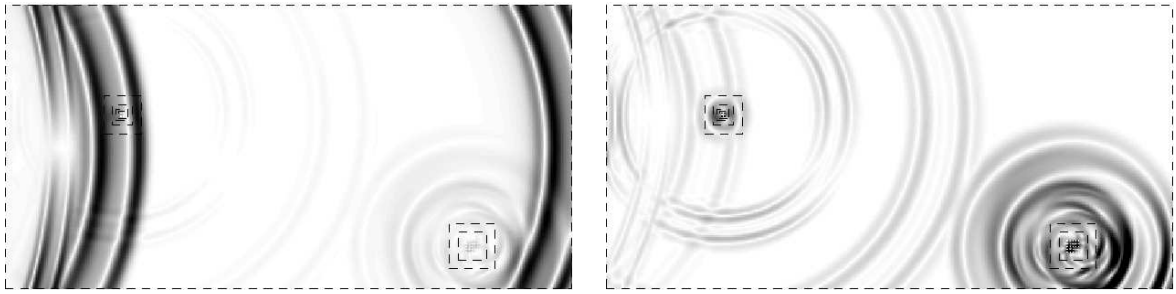
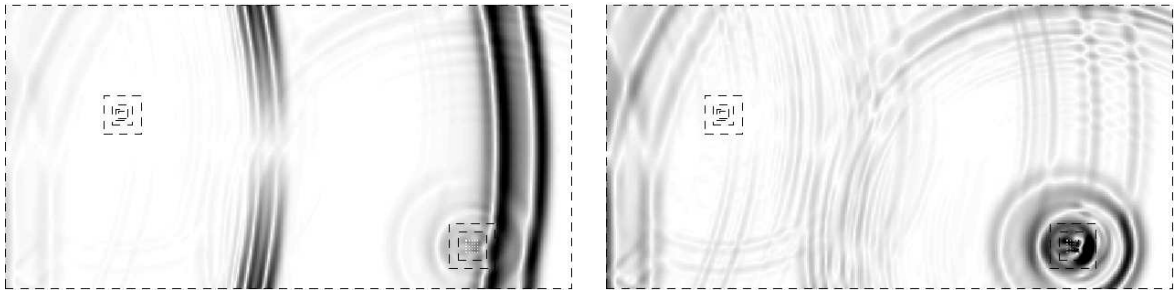


FIG. 1.14 – À gauche : Zoom au tour de B_1. À droite : Zoom au tour de B_3



(a) Module du champ total (b) Module du champ diffracté $\times$ 2

FIG. 1.15 – Diffraction par des petits obstacles. Instantanée à $t = 4.3275$



(a) Module du champ total (b) Module du champ diffracté $\times$ 2

FIG. 1.16 – Diffraction par des petits obstacles. Instantanée à $t = 9.5205$

Chapitre 2

Analyse Fine de la Méthode dans le Cadre 1D

Sommaire

2.1 Le Cas Particulier du Problème 1D **50**
2.2 Introduction **53**
2.3 Conservative space-time mesh refinement schemes **55**
2.3.1 The interior scheme 55
2.3.2 The discrete transmission conditions 56
2.4 Error analysis : the main results **58**
2.5 Proof of the error estimates **63**
2.5.1 The equations satisfied by the errors 63
2.5.2 Outline of the proof 65
2.5.3 Proof of the $\mathcal{O}(\sqrt{h})$ estimates 66
2.5.4 Proof of estimate (2.41) 71
2.5.4.1 Estimate of coarse discrete derivatives 71
2.5.4.2 The bootstrap argument 74
2.6 Comparison between theory and numerics **79**
2.6.1 Fourier analysis results 79
2.6.2 Comparing our results with the Fourier analysis results 80
2.6.3 Numerical results 81
2.7 Rappel des Résultats par Fourier **86**
2.7.1 Le cas continu 86
2.7.2 Le cas discret sur le maillage grossier 86
2.7.3 Le cas discret sur le maillage fin 88
2.7.4 Le cas discret sur les deux maillages 91
2.7.5 Détermination des Amplitudes 92
2.7.5.1 Pour le Schéma I 92
2.7.5.2 Pour le Schéma II 93

Les expériences numériques présentées dans les sections 1.9.1 et 1.9.2 montrent des résultats très prometteurs du point de vue de la précision de la méthode de raffinement de maillage spatio-temporel adoptée (c.f. [46, 37]). On s'intéresse dans ce chapitre à l'analyse de l'erreur commise. Dans ce type de problèmes on peut distinguer deux sources d'erreur :

- La discrétisation en espace et la non conformité en espace entre les deux grilles.
- La discrétisation en temps et le fait d'avoir des pas de temps différents dans chaque sous domaine.

Plusieurs études sur le premier type d'erreur peuvent se trouver dans la littérature. Les techniques utilisées se basent sur la théorie des éléments joints [23, 16] en utilisant le second lemme de Strang [17]. On s'intéresse au deuxième type d'erreur, qui, provenant de la non-conformité des maillages en temps, est plus spécifique à notre problème. Pour l'étudier, on se place dans le cas simplifié monodimensionnel où seulement la non-conformité entre les maillages en temps est présente. Le principal résultat de ce chapitre est alors le théorème de convergence 2.4.1 où on donne des estimations quasi-optimales de la méthode de raffinement de maillage spatio-temporel présenté dans le chapitre précédent appliquée à l'équation des ondes 1D. La preuve du résultat (voir la section 2.5), même si basé sur des techniques d'énergie, utilise des arguments de type boot-strap pas standards ce qui fait qu'elle est intéressante. Les estimations obtenues sont validées avec des expériences numériques 1D et l'analyse faite avec des techniques de Fourier dans [38, 46].

Cette analyse d'erreur a donné lieu à la publication [58] qu'on a inclus directement dans le document même si elle est en anglais (sections 2.2–2.6). Une bref section de transition qui explique la notation adoptée dans l'article a été ajouté (voir la section 2.1). D'un autre coté, on a décidé de rappeler en détail (tout en rajoutant des remarques qui nous semblent intéressantes) l'analyse avec des techniques de Fourier de la méthode qui avait déjà été présenté dans [38, 46]. Nous considérons que, pour la compréhension des sections 3.5.2 et 4.4.2 où on effectuera une analyse par Fourier des méthodes de raffinement de maillage spatio-temporel plus générales que celle ci, il est fondamental d'établir la notation qu'on utilisera.

2.1 Le Cas Particulier du Problème 1D

On considère les équations de l'élastodynamique (1.2) en 1D avec $\rho = 1$ et $\mathbf{C} = I$ sur $\Omega = \mathbb{R}$. Alors le système qu'on veut résoudre est tout simplement l'équation des ondes 1D sous une formulation du premier ordre, c'est à dire,

$$\left\{\begin{array}{lllll} \dfrac{\partial v}{\partial t} & + & \dfrac{\partial u}{\partial x} & = & 0, \qquad\qquad (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} & + & \dfrac{\partial v}{\partial x} & = & 0, \qquad\qquad (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \\ u(x,0) & = & u_0(x), & v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{array}\right. \tag{2.1}$$

où on a remplacé $\underline{\underline{\sigma}}$ par $-u$. Supposons que $\Omega_c = \mathbb{R}^-$ et $\Omega_f = \mathbb{R}^+$. En suivant les mêmes techniques que dans la section 1.2 on pose nos équations dans chacun des domaines :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \dfrac{\partial v_c}{\partial t} & + & \dfrac{\partial u_c}{\partial x} & = & 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^+, \\ \dfrac{\partial u_c}{\partial t} & + & \dfrac{\partial v_c}{\partial x} & = & 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^+, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lllll} \dfrac{\partial v_f}{\partial t} & + & \dfrac{\partial u_f}{\partial x} & = & 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+, \\ \dfrac{\partial u_f}{\partial t} & + & \dfrac{\partial v_f}{\partial x} & = & 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+, \end{array}\right.$$

(où on omet les conditions initiales). Afin d'obtenir une solution du problème global on impose les conditions de transmission habituelles

$$u_c(0,t) = u_f(0,t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \qquad\qquad v_c(0,t) = v_f(0,t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Pour écrire une formulation variationnelle du problème, et pour pouvoir donner un sens à tous les termes de bord on introduit deux multiplicateurs de Lagrange $j_l,\ l \in \{c, f\}$ qui peuvent s'interpréter comme la

trace de l'inconnue v à travers l'interface $\Gamma \equiv \{x = 0\}$. On a alors

$$
(2.2) \quad \left| \begin{array}{l}
\text{Trouver } (u_l, v_l, j_l) \in H^1(\Omega_l) \times L^2(\Omega_l) \times \mathbb{R}, \quad l \in \{c, f\} \\
\left\{ \begin{array}{lllllll}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^-} v_c \tilde{v}_c \,\mathrm{d}x & + & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^-} \frac{\partial u_c}{\partial x} \tilde{v}_c \,\mathrm{d}x & & & = & 0, \quad \forall \tilde{v}_c \in L^2(\Omega_c), \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^-} u_c \tilde{u}_c \,\mathrm{d}x & - & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^-} \frac{\partial \tilde{u}_c}{\partial x} v_c \,\mathrm{d}x & + & \tilde{u}_c(0) j_c & = & 0, \quad \forall \tilde{u}_c \in H^1(\Omega_c),
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{lllllll}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} v_f \tilde{v}_f \,\mathrm{d}x & + & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial u_f}{\partial x} \tilde{v}_f \,\mathrm{d}x & & & = & 0, \quad \forall \tilde{v}_f \in L^2(\Omega_f), \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} u_f \tilde{u}_f \,\mathrm{d}x & - & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial \tilde{u}_f}{\partial x} v_f \,\mathrm{d}x & - & \tilde{u}_f(0) j_f & = & 0, \quad \forall \tilde{u}_f \in H^1(\Omega_f),
\end{array} \right.
\end{array} \right.
$$

avec les conditions de raccord suivantes

$$
(2.3) \qquad u_c(0,t) = u_f(0,t), \qquad j_c(t) = j_f(t).
$$

Notons que dans ce cas, le multiplicateur de Lagrange est seulement fonction du temps. Pour effectuer la discrétisation en espace on se sert des maillages réguliers de pas $2h$ pour Ω_c et h pour Ω_f. L'inconnue u est discrétisée avec des éléments finis $\mathcal{P}_1$ globalement continus tandis que l'inconnue v est approchée dans l'espace des fonctions constantes sur chaque élément. On utilise des techniques de condensation de masse pour avoir des matrices de masse diagonales. Pour la discrétisation en temps, on utilise la méthode expliquée dans la section 1.6 en utilisant un pas de discrétisation temporel de $2\Delta t$ sur Ω_c et Δt sur Ω_f. Avec des notations évidentes, les inconnues de notre problème sont (voir la figure 2.1 où les multiplicateurs de Lagrange n'ont pas été représentés)

$$
\left| \begin{array}{lllll}
(u_c)_{2j}^{2n}, & (v_c)_{2j+1}^{2n+1}, & j_c^{2n+1}, & n \geq 0, & j \leq 0, \\
(u_f)_j^n, & (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, & j_f^{n+\frac{1}{2}}, & n \geq 0, & j \geq 0.
\end{array} \right.
$$

On signale que sur l'interface Γ on a deux valeurs de l'inconnue u. Dans ce cas, les équations du schéma intérieur, où le multiplicateur de Lagrange n'intervient pas, sont données par (2.14)–(2.15), c'est à dire, le schéma de Yee [83] sur chacune des grilles. Sur les noeuds spéciaux qui sont sur l'interface, le schéma utilise les nouvelles inconnues ponctuelles. Ainsi on aura

$$
(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{lllll}
\dfrac{(u_c)_0^{2n+2} - (u_c)_0^{2n}}{2\Delta t} & + & \dfrac{j_c^{2n+1} - (v_c)_{-1}^{2n+1}}{h} & = & 0, \\
\dfrac{(u_f)_0^{2n+1} - (u_f)_0^{2n}}{\Delta t} & + & \dfrac{(v_f)_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} - j_f^{2n+\frac{1}{2}}}{h/2} & = & 0, \\
\dfrac{(u_f)_0^{2n+2} - (u_f)_0^{2n+1}}{\Delta t} & + & \dfrac{(v_f)_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} - j_f^{2n+\frac{3}{2}}}{h/2} & = & 0.
\end{array} \right.
$$

Les conditions de transmission (1.72) qui donnent le **schéma I** deviennent

$$
(2.5) \quad \left| \begin{array}{rcl}
\dfrac{(u_c)_0^{2n+2} + (u_c)_0^{2n}}{2} & = & \dfrac{(u_f)_0^{2n+2} + 2(u_f)_0^{2n+1} + (u_f)_0^{2n}}{4}, \\
j_c^{2n+1} & = & j_f^{2n+\frac{1}{2}} = j_f^{2n+\frac{3}{2}}.
\end{array} \right.
$$

La continuité de la variable v est imposé deux fois tandis que la continuité de u une fois. Dans ce cas particulier, en utilisant les équations (2.4) et (2.5) on peut facilement éliminer les multiplicateurs de Lagrange et réécrire les équations de couplage comme dans (2.21), équations qu'on utilisera au long de l'article. Les équations de couplage (1.73) qui déterminent le **schéma II** s'écrivent

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
\dfrac{(u_c)_0^{2n+2} + (u_c)_0^{2n}}{2} & = & \dfrac{(u_f)_0^{2n+2} + (u_f)_0^{2n+1}}{2}, \\
\dfrac{(u_c)_0^{2n+2} + (u_c)_0^{2n}}{2} & = & \dfrac{(u_f)_0^{2n+1} + (u_f)_0^{2n}}{2}, \\
j_c^{2n+1} & = & \dfrac{j_f^{2n+\frac{3}{2}} + j_f^{2n+\frac{1}{2}}}{2}.
\end{array}
\right. \tag{2.6}
$$

Au contraire qu'avec le **schéma I** on impose deux fois la continuité de u et une fois celle de v. Les multiplicateurs de Lagrange peuvent aussi être éliminés ce qui nous donne les équations (2.22).

AN ERROR ANALYSIS OF CONSERVATIVE SPACE-TIME MESH REFINEMENT METHODS FOR THE 1D WAVE EQUATION

PATRICK JOLY[1] AND JERÓNIMO RODRÍGUEZ[2]

Abstract. We study two space-time mesh refinement methods as the one introduced in [37]. The stability of such methods is guaranteed by construction through the conservation of a discrete energy. In this paper, we show the L^2 convergence of these schemes and provide optimal error estimates. The proof is based on energy techniques and boot-strap arguments. Our results are validated with numerical simulations and compared with results from plane wave analysis [38].

2.2 Introduction

For the numerical solution of time-dependent wave propagation problems, in which one often has to deal with complex geometries in diffraction problems, it is natural to try to use local mesh refinements with non-matching grids. A first idea consists in using only spatial refinement (see [4] for acoustic waves, [16] and [66] for Maxwell's equations). However, with explicit schemes, when a uniform time step is used, it is the finest mesh that imposes the time step because of the stability condition. There are two problems with this. First, the computational cost is increased. Second, the ratio $c\Delta t/h$ (where h is the space step size) in the coarser grid will be much smaller than its optimal value. With standard numerical schemes (such as Yee's scheme for Maxwell's equations) this generates dispersion errors. To avoid these problems, it is useful to be able to work with a local time step in order to keep the ratio $c\Delta t/h$ constant (or almost constant) in the whole computational domain.

The use of local time stepping raises new practical and theoretical problems, especially for hyperbolic equations, that are much more delicate than those raised by a simple spatial refinement.

The solutions suggested in the electromagnetic literature are primarily based on interpolation techniques (in time and/or in space) especially designed to guarantee the consistency of the scheme at the coarse grid / fine grid interface (see [61], [59], [72] and [27]). Unfortunately, the resulting schemes appear to be very difficult to analyze and may suffer from some instability phenomena [35]. Another possible solution for local time stepping is to use a Domain Decomposition approach such as the one recently developed in [47]. However, the stability and convergence analysis of these techniques remain to be completed.

It seems that very few papers in the mathematical literature have been devoted to space-time mesh refinement for the specific case of Maxwell's equations (and more generally for linear wave propagation problems). However, these questions have been treated in many articles in the conservation laws community during the 80's. Let us mention for instance the work of Osher and Sanders [69] based on finite volume methods or, closer to what we are doing here, the works of Berger and her coauthors [18, 19, 22, 20] on finite differences schemes. These works are devoted to various space-time mesh refinement techniques for first order hyperbolic systems. These techniques are mainly based on interpolation type procedures and concern both, overlapping and non-overlapping grids (see [22, 20] for a general presentation). In [18], Berger has developed a stability analysis of such methods in the cases of the 1D linear advection equations using the GKS theory [60, 55]. She was able to establish the results in the case where dissipative interior schemes (typically Lax-Wendroff scheme) were used or when conservative (typically leap-frog) schemes are used provided that overlapping grids are considered. However, it is also mentio-

[1]INRIA Rocquencourt BP 105 Le Chesnay France. Patrick.Joly@inria.fr
[2]INRIA Rocquencourt BP 105 Le Chesnay France. Jeronimo.Rodriguez@inria.fr

ned in [18] that using leap-frog type schemes and non-overlapping grids may lead to instability as has already been mentioned for Maxwell's equations.

Recently, we developed alternative solutions to these interpolation procedures that we call conservative space time mesh refinement methods. These methods, originally invented for the 1D wave equation, have been developed for Maxwell's equations [46] and recently extended to the elastodynamic equations [8]. A general presentation of these kinds of methods can be found in [56]. The main ideas and properties of these methods have been treated in more detail in [36] for the model problem of the 1D wave equation written as the first order system

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} & = & 0, \qquad \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0, \\ u(x,0) & = & u_0(x), \qquad v(x,0) = v_0(x), \end{array}\right. \tag{2.7}$$

when one uses the FDTD Yee [83] scheme as the reference interior scheme in each subdomain

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \dfrac{v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} & = & 0 \quad , \quad j \in \mathbb{Z} \quad , \quad n \geq 0 \\ \dfrac{v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \dfrac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} & = & 0 \quad , \quad j \in \mathbb{Z} \quad , \quad n \geq 0. \end{array}\right. \tag{2.8}$$

In particular the construction of the scheme and stability analysis based on energy conservation properties is presented in [36]. An important fact is that the stability CFL condition, namely in the 1D case

$$\alpha = \frac{\Delta t}{h} < 1 \tag{2.9}$$

is not affected by the mesh refinement process. A plane wave analysis for measuring the accuracy of the method is detailed in [38]. The present article, whose purpose is essentially theoretical, is the sequel to [38]. Our goal is to derive optimal error estimates and to validate them through numerical tests. More precisely, we present a convergence analysis for two different conservative space-time mesh refinement schemes introduced in [37].

We mention that in [19] and more recently in [21] the authors have constructed space-time mesh refinement schemes devoted to the conservation of a discrete equivalent of the integral of the solution of a first order hyperbolic system. Such schemes are also called conservative schemes in the conservation laws community, but they are not necessarily stable (the integral of the solution is not a norm !). However, such conservation properties are highly desirable for the approximation of solutions with shocks.

The outline of the rest of the article is as follows. In section 2, we define our two grids model problem, present the two mesh refinement schemes (I and II) and recall the main stability theorems. In section 3, we state our main convergence theorem 2.4.1. Section 4, devoted to the proof of this theorem, is the main section of this article. We think that one of the contributions of the present paper is precisely the proof that appears rather non standard, although based on energy techniques. Finally, in section 5, the theoretical results are compared to numerical ones and those obtained in [38] by Fourier like techniques. This analysis did not result into rigorous error estimates as did that of theorem 2.4.1, but permitted us to predict the order of convergence that we prove in the present paper. The other interest of the energy proof we develop here is that it can be generalized to spatially variable coefficients and higher space dimensions with only purely technical additional difficulties.

2.3 Conservative space-time mesh refinement schemes

We recall the construction of the method presented in [37]. In order to solve the system (2.7) with a local space-time mesh refinement, the computational domain is split into two half-spaces, $\Omega_c = \{x < 0\}$ and $\Omega_f = \{x > 0\}$. Denoting by (u_c, v_c) and (u_f, v_f) the restrictions of (u, v) to Ω_c and Ω_f respectively, the problem (2.7) can be rewritten as a transmission problem through the interface $x = 0$ as follows

$$\text{(2.10)} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} \dfrac{\partial u_c}{\partial t} & + & \dfrac{\partial v_c}{\partial x} & = & 0, \\ \dfrac{\partial v_c}{\partial t} & + & \dfrac{\partial u_c}{\partial x} & = & 0, \end{array} \right. \text{ in } \Omega_c \qquad \text{(2.11)} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} \dfrac{\partial u_f}{\partial t} & + & \dfrac{\partial v_f}{\partial x} & = & 0, \\ \dfrac{\partial v_f}{\partial t} & + & \dfrac{\partial u_f}{\partial x} & = & 0, \end{array} \right. \text{ in } \Omega_f$$

coupled by the interface conditions

$$\text{(2.12)} \qquad u_c(0,t) = u_f(0,t), \qquad \text{(2.13)} \qquad v_c(0,t) = v_f(0,t),$$

to obtain a solution of the global problem.

2.3.1 The interior scheme

Assume that we have a mesh with step size $(2h, 2\Delta t)$ for Ω_c and a mesh with step size $(h, \Delta t)$ for Ω_f. It is important to notice that the ratio of the time step to the space step is the same in both domains. With the obvious notation, the unknowns of our scheme will be :

– for the coarse grid

$$u_{2j}^{2n}, \quad j \le 0, \quad n \ge 0, \qquad v_{2j+1}^{2n+1}, \quad j \le -1, \quad n \ge 0,$$

– for the fine grid

$$u_j^n, \quad j \ge 0, \quad n \ge 0, \qquad v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, \quad j \ge 0, \quad n \ge 0.$$

At the interior of each sub-domain, the standard Yee scheme [83, 78], is considered. The discrete equations in the coarse and in the fine grids between the instants t^{2n} and t^{2n+2} are the following

$$\text{(2.14)} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} \dfrac{(u_c)_{2j}^{2n+2} - (u_c)_{2j}^{2n}}{2\Delta t} & + & \dfrac{(v_c)_{2j+1}^{2n+1} - (v_c)_{2j-1}^{2n+1}}{2h} & = & 0, \quad j \le -1, \quad n \ge 0, \\ \dfrac{(v_c)_{2j+1}^{2n+1} - (v_c)_{2j+1}^{2n-1}}{2\Delta t} & + & \dfrac{(u_c)_{2j+2}^{2n} - (u_c)_{2j}^{2n}}{2h} & = & 0, \quad j \le -1, \quad n \ge 0, \end{array} \right.$$

$$\text{(2.15)} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} \dfrac{(u_f)_j^{2n+1} - (u_f)_j^{2n}}{\Delta t} & + & \dfrac{(v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} - (v_f)_{j-\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}}}{h} & = & 0, \quad j \ge 1, \quad n \ge 0, \\ \dfrac{(v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} - (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{2n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} & + & \dfrac{(u_f)_{j+1}^{2n} - (u_f)_j^{2n}}{h} & = & 0, \quad j \ge 0, \quad n \ge 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \dfrac{(u_f)_j^{2n+2} - (u_f)_j^{2n+1}}{\Delta t} & + & \dfrac{(v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} - (v_f)_{j-\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}}}{h} & = & 0, \quad j \ge 1, \quad n \ge 0, \\ \dfrac{(v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} - (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} & + & \dfrac{(u_f)_{j+1}^{2n+1} - (u_f)_j^{2n+1}}{h} & = & 0, \quad j \ge 0, \quad n \ge 0, \end{array} \right.$$

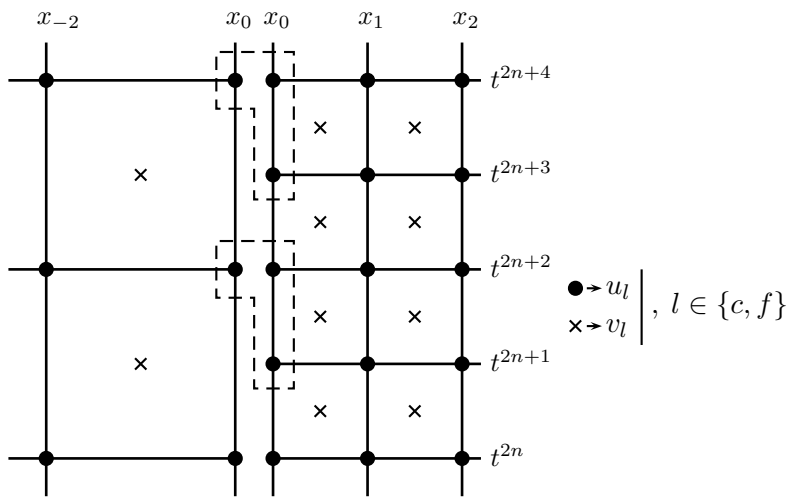


FIG. 2.1 – Distribution of the unknowns over Γ.

completed with discrete initial conditions.

$$
\begin{array}{llll}
(u_c)^0_{2j}, & j \leq 0\,; & (v_c)^1_{2j+1}, & j \leq -1\,; \\
(u_f)^0_j, & j \geq 0\,; & (v_f)^{\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}}, & j \geq 0\,.
\end{array}
\tag{2.16}
$$

As is shown in figure 2.1, two values of the solution are allowed along the interface $\Gamma = \{x = 0\}$ at the even time steps. The continuity of the unknown u is imposed in a weak way : this seems to be useful for guaranting the stability of the scheme [37].

2.3.2 The discrete transmission conditions

For coupling (2.14) and (2.15), the idea is to approximate the transmission conditions ((2.12), (2.13)) in such a way that the stability of the method is ensured a priori. A simple way to do that is to impose a discrete version of the following energy conservation property

$$
E(t) = E(0), \quad \text{where} \quad E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u(x,t)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} v(x,t)^2 dx,
$$

satisfied by the exact solution of (2.7). In our case, it is natural to define the total discrete energy only at the even instants by

$$
E^{2n} \quad = \quad E_c^{2n} + E_f^{2n},
\tag{2.17}
$$

where E_c^{2n} and E_f^{2n} are respectively the coarse grid and fine grid energies :

$$
\begin{aligned}
E_c^{2n} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{j\leq -1} |(u_c)^{2n}_{2j}|^2 \; 2h + \sum_{j\leq -1} (v_c)^{2n+1}_{2j+1} (v_c)^{2n-1}_{2j+1} \; 2h + |(u_c)^{2n}_0|^2 \; h \right), \\
E_f^{n} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{j\geq 1} |(u_f)^{n}_{j}|^2 \; h + \sum_{j\geq 0} (v_f)^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}} (v_f)^{n-\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}} \; h + |(u_f)^{n}_0|^2 \; \frac{h}{2} \right).
\end{aligned}
$$

This is the most natural extension to the "two grids" scheme of the discrete energy which is conserved with the Yee scheme on a single grid. The idea pursued in [37] is to impose the conservation of E^{2n}. To state the main result of [37], it is useful to introduce the following "discrete traces" of u_c, v_c, u_f and v_f

$$\left\{\begin{array}{rcl} (U_c)_0^{2n+1} & = & \frac{1}{2}\left((u_c)_0^{2n+2}+(u_c)_0^{2n}\right), \\ (V_c)_0^{2n+1} & = & (v_c)_{-1}^{2n+1}-h\dfrac{(u_c)_0^{2n+2}-(u_c)_0^{2n}}{2\Delta t}, \end{array}\right. \tag{2.18}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} (U_f)_0^{n+\frac{1}{2}} & = & \frac{1}{2}\left((u_f)_0^{n+1}+(u_f)_0^{n}\right), \\ (V_f)_0^{n+\frac{1}{2}} & = & (v_f)_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}+\dfrac{h}{2}\dfrac{(u_f)_0^{n+1}-(u_f)_0^{n}}{\Delta t}. \end{array}\right. \tag{2.19}$$

Theorem 2.3.1 *Consider a solution of ((2.14),(2.15)), the discrete energy (2.17) is conserved if and only if :*

$$\frac{1}{2}\left((U_f)_0^{2n+\frac{1}{2}}(V_f)_0^{2n+\frac{1}{2}}+(U_f)_0^{2n+\frac{3}{2}}(V_f)_0^{2n+\frac{3}{2}}\right)=(U_c)_0^{2n+1}(V_c)_0^{2n+1}. \tag{2.20}$$

Let us come back to the approximation of the continuity conditions ((2.12),(2.13)) . We first remark that, assuming that the discrete unknowns have been computed up to time t^{2n}, the interior scheme given by (2.14) and (2.15) permits us to obtain all the unknowns up to time t^{2n+2} except the three following values

$$(u_c)_0^{2n+2}, \qquad (u_f)_0^{2n+1}, \qquad (u_f)_0^{2n+2}.$$

So, three additional (linear) equations consistent with the transmission conditions ((2.12),(2.13)) and compatible with the equality (2.20) should be added. A first natural choice consists in imposing the following discrete continuity conditions

$$\left\{\begin{array}{c} (V_f)_0^{2n+\frac{1}{2}}=(V_f)_0^{2n+\frac{3}{2}}=(V_c)_0^{2n+1}, \\ \frac{1}{2}\left((U_f)_0^{2n+\frac{1}{2}}+(U_f)_0^{2n+\frac{3}{2}}\right)=(U_c)_0^{2n+1}. \end{array}\right. \tag{2.21}$$

The scheme given by (2.14), (2.15) and (2.21) will be called **scheme I**. The continuity of u is imposed once and that of v twice. A second possible choice is given by

$$\left\{\begin{array}{c} (U_f)_0^{2n+\frac{1}{2}}=(U_f)_0^{2n+\frac{3}{2}}=(U_c)_0^{2n+1}, \\ \frac{1}{2}\left((V_f)_0^{2n+\frac{1}{2}}+(V_f)_0^{2n+\frac{3}{2}}\right)=(V_c)_0^{2n+1}, \end{array}\right. \tag{2.22}$$

that gives us the **scheme II**. Unlike in the previous scheme, the continuity of u is written twice and that of v once.

Remark 2.3.1 *Using the two first equations of (2.22) we can easily prove that $(u_f)_0^{2n+2}=(u_f)_0^{2n}$ and so the discrete trace of u in the fine side at the even instants is always the same. As a consequence, this scheme can not be L^∞-convergent. However the numerical simulations will show us that scheme II gives a "good" approximation of the solution "except at the interface" and the L^2- convergence will be proven in section 4.*

2.4 Error analysis : the main results

Notation We first introduce some notation for discrete sequences. In order to show the L^2-stability and convergence of both schemes, some discrete norms and spaces must be introduced. Let us define the discrete coarse and fine L^2 spaces for u :

$$\begin{aligned} L^2_{c,u} &= \{u_{c,h} = \{(u_c)_{2j}\}_{j\leq 0} \text{ such that } \sum_{j\leq 0} |(u_c)_{2j}|^2 < +\infty\}, \\ L^2_{f,u} &= \{u_{f,h} = \{(u_f)_j\}_{j\geq 0} \text{ such that } \sum_{j\geq 0} |(u_f)_j|^2 < +\infty\}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

and their natural Hilbert norms :

$$\begin{aligned} \|u_{c,h}\|^2 &= \sum_{j\leq -1} |(u_c)_{2j}|^2 2h + |(u_c)_0|^2\ h, \\ \|u_{f,h}\|^2 &= \sum_{j\geq 1} |(u_f)_j|^2 h + |(u_f)_0|^2\ \frac{h}{2}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

In the same way, we have the discrete coarse and fine L^2 spaces for v :

$$\begin{aligned} L^2_{c,v} &= \{v_{c,h} = \{(v_c)_{2j+1}\}_{j\leq -1} \text{ such that } \sum_{j\leq -1} |(v_c)_{2j+1}|^2 < +\infty\}, \\ L^2_{f,v} &= \{v_{f,h} = \{(v_f)_{j+\frac{1}{2}}\}_{j\geq 0} \text{ such that } \sum_{j\geq 0} |(v_f)_{j+\frac{1}{2}}|^2 < +\infty\}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

and the norms :

$$\begin{aligned} \|v_{c,h}\|^2 &= \sum_{j\leq -1} |(v_c)_{2j+1}|^2\ 2h, \\ \|v_{f,h}\|^2 &= \sum_{j\geq 1} |(v_f)_{j+\frac{1}{2}}|^2\ h. \end{aligned} \tag{2.26}$$

It is immediate to check that our schemes are well posed in these spaces, i. e. that, as soon as the discrete initial data $u^0_{c,h}, v^1_{c,h}, u^0_{f,h}$ and $v^{\frac{1}{2}}_{f,h}$ belong respectively to $L^2_{c,u}$, $L^2_{c,v}$, $L^2_{f,u}$ and $L^2_{f,v}$, then the discrete solution is such that

$$(u^{2n}_{c,h}, v^{2n+1}_{c,h}, u^n_{f,h}, v^{n+\frac{1}{2}}_{f,h}) \in L^2_{c,u} \times L^2_{c,v} \times L^2_{f,u} \times L^2_{f,v}.$$

For the convergence study, we assume that our solution is at least continuous and we introduce the pointwise exact values

$$\tilde{u}^s_r = u(rh, s\Delta t), \quad \tilde{v}^s_r = v(rh, s\Delta t), \quad (r,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

We will assume that the corresponding sequences $\tilde{u}^{2n}_{c,h}, \tilde{v}^{2n+1}_{c,h}, \tilde{u}^n_{f,h}$ and $\tilde{v}^{n+\frac{1}{2}}_{c,h}$ belong respectively to $L^2_{c,u}$, $L^2_{c,v}$, $L^2_{f,u}$ and $L^2_{f,v}$. We then define the pointwise errors :

$$\left| \begin{array}{ll} (e^u_{c,h})^{2n} = \tilde{u}^{2n}_{c,h} - u^{2n}_{c,h}, & (e^u_{f,h})^n = \tilde{u}^n_{f,h} - u^n_{f,h}, \\ \\ (e^v_{c,h})^{2n+1} = \tilde{v}^{2n}_{c,h} - v^{2n}_{c,h}, & (e^v_{f,h})^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{v}^{n+\frac{1}{2}}_{f,h} - v^{n+\frac{1}{2}}_{f,h}. \end{array} \right.$$

We shall denote with a *superscript* h sequences in both discrete space and time. More precisely, we set

$$\begin{cases} u_c^h = \left(u_{c,h}^{2n}\right)_{n\geq 0}, & u_f^h = \left(u_{f,h}^{n}\right)_{n\geq 0}, & u^h = (u_c^h, u_f^h), \\ v_c^h = \left(v_{c,h}^{2n+1}\right)_{n\geq 0}, & v_f^h = \left(v_{f,h}^{n+\frac{1}{2}}\right)_{n\geq 0}, & v^h = (v_c^h, v_f^h), \end{cases}$$

for the discrete solutions and, in the same way,

$$\begin{cases} e_c^{u,h} = \left((e_{c,h}^u)^{2n}\right)_{n\geq 0}, & e_f^{u,h} = \left((e_{f,h}^u)^{n}\right)_{n\geq 0}, & e^{u,h}\ (\equiv u - u^h) = (e_c^{u,h}, e_f^{u,h}), \\ e_c^{v,h} = \left((e_{c,h}^v)^{2n+1}\right)_{n\geq 0}, & e_f^{v,h} = \left((e_{f,h}^v)^{n+\frac{1}{2}}\right)_{n\geq 0}, & e^{v,h}\ (\equiv v - v^h) = (e_c^{v,h}, e_f^{v,h}), \end{cases}$$

for the errors.

For a given $T > 0$, we can introduce the discrete $L^\infty(0,T;L^2)$-norms (that we define here for the errors $e^{u,h} = u - u^h$ and $e^{v,h} = v - v^h$)

$$\text{(2.27)} \qquad \begin{cases} \|e^{u,h}\|_{\infty,2,T}^* &= \displaystyle\sup_{t^{2n+\frac{3}{2}}\leq T} \left(\|(e_{c,h}^u)^{2n}\| + \|(e_{f,h}^u)^{2n}\| \right), \\ \|e^{u,h}\|_{\infty,2,T} &= \|e^{u,h}\|_{\infty,2,T}^* + \displaystyle\sup_{t^{2n+\frac{3}{2}}\leq T} \|(e_{f,h}^u)^{2n+1}\|, \\ \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T} &= \displaystyle\sup_{t^{2n+\frac{3}{2}}\leq T} \left(\|(e_{c,h}^v)^{2n+1}\| + \|(e_{f,h}^v)^{2n+\frac{1}{2}}\| + \|(e_{f,h}^v)^{2n+\frac{3}{2}}\| \right). \end{cases}$$

Remark 2.4.1 *Note that $\|u^h\|_{\infty,2,T}^*$ is only a semi-norm since the odd instants are not concerned. The complete norm is $\|u^h\|_{\infty,2,T}$. The interest of the introduction of the semi-norm $\|u^h\|_{\infty,2,T}^*$ will appear in the proof of theorem 2.4.1 (cf. section 4).*

We also need to introduce some notation for norms in spaces of continuous functions. For any $a > 0$ and any integer $k \geq 0$, we shall denote

$$\text{(2.28)} \qquad \|f\|_{\mathcal{C}_{a,T}^k} = \sup_{x\in[-a,a],\ 0\leq t\leq T} \ \sup_{i+j\leq k} \left| \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial t^j}(x,t) \right|, \quad \forall\ f \in \mathcal{C}^k([-a,a]\times[O,T]),$$

$$\text{(2.29)} \qquad \|(u,v)\|_{\mathcal{C}_{a,T}^k} = \|u\|_{\mathcal{C}_{a,T}^k} + \|v\|_{\mathcal{C}_{a,T}^k}, \quad \forall\ (u,v) \in \mathcal{C}^k([-a,a]\times[O,T])^2.$$

It will also be useful to introduce the class of functions

$$\text{(2.30)} \qquad \mathbf{C}_{a,T}^\infty = \{\ (u,v) \in \mathcal{C}^\infty([-a,a]\times[O,T])^2 \text{ such that (2.31) holds }\}.$$

The property (2.31) expresses in some sense that the successive derivatives of the functions do not increase too quickly with the order of derivation. More precisely, that

$$\text{(2.31)} \qquad |||(u,v)|||_{\mathbf{C}_{a,T}^\infty} \equiv \sup_{k\geq 0} |||(u,v)|||_{\mathcal{C}_{a,T}^k} < +\infty,$$

where, for each integer k

$$|||(u,v)|||_{\mathcal{C}^k_{a,T}} = \|(u,v)\|^{\frac{1}{2^k}}_{\mathcal{C}^k_{a,T}} \prod_{j=1}^{k} \|(u,v)\|^{\frac{1}{2^j}}_{\mathcal{C}^{j+1}_{a,T}} . \tag{2.32}$$

In what follows, if (u,v) is defined for $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ we shall say that $(u,v) \in \mathbf{C}^\infty_{a,T}$ if its restriction to $[-a,a] \times [O,T]$ belongs to $\mathbf{C}^\infty_{a,T}$.

Remark 2.4.2 *The introduction of the set $\mathbf{C}^\infty_{a,T}$ as well as the "norms" $|||(\cdot,\cdot)|||_{\mathcal{C}^k_{a,T}}$ and $|||(\cdot,\cdot)|||_{\mathbf{C}^\infty_{a,T}}$ is rather surprising in such a simple context as the 1D wave equation and we are not sure that it is really necessary (see also the comments that follow the statement of the theorem at the end of this section). However, these notions will naturally appear in the proof of theorem. It is interesting to note here that :*

– *From the remark that*

$$\forall\, k \geq 1, \quad \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^k} = 1, \tag{2.33}$$

it follows that the maps $(u,v) \to |||(u,v)|||_{\mathcal{C}^k_{a,T}}$ and $(u,v) \to ||(u,v)|||_{\mathcal{C}^\infty_{a,T}}$ are homogeneous of degree 1 and that the set $\mathbf{C}^\infty_{a,T}$ is a cone. It also possesses a homogeneity property. *Let (u,v) be defined for all real x and all positive t. For any real $\lambda > 0$, we set*

$$(u_\lambda(x,t), v_\lambda(x,t)) = (u(\lambda x, \lambda t), v(\lambda x, \lambda t)),$$

then

$$(u,v) \in \mathbf{C}^\infty_{a,T} \Longrightarrow (u_\lambda, v_\lambda) \in \mathbf{C}^\infty_{a/\lambda, T/\lambda}.$$

It suffices to remark that, if $\hat{\lambda} = max(1,\lambda)$ then

$$|||(u_\lambda, v_\lambda)|||_{\mathcal{C}^k_{a/\lambda,T/\lambda}} \leq (\ \hat{\lambda}^{\frac{1}{2^k}} \prod_{j=1}^{k} \hat{\lambda}^{\frac{j+1}{2^j}}\ )\ |||(u,v)|||_{\mathcal{C}^k_{a,T}},$$

and that $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \hat{\lambda}^{\frac{1}{2^k}} = 1, \quad \prod_{j=1}^{+\infty} \hat{\lambda}^{\frac{j+1}{2^j}} < +\infty.$

Note also that $|||(u,v)|||_{\mathcal{C}^k_{a,T}} = 0 \Longrightarrow (u,v) = 0.$

– *However, $|||(\cdot,\cdot)|||_{\mathcal{C}^k_{a,T}}$ and $|||(\cdot,\cdot)|||_{\mathcal{C}^\infty_{a,T}}$ are not norms since they do not satisfy the triangular inequality. As a consequence, it is not so clear that the set $\mathbf{C}^\infty_{a,T}$ is a vector set (this point may be interesting but not central to this paper...). Clearly, the fact that u belongs to $\mathbf{C}^\infty_{a,T}$ implies that the successive derivatives of u must not increase too quickly with the order of derivation. It is easy to see that $\mathbf{C}^\infty_{a,T}$ contains some well known functional spaces such as the* Gevrey spaces *$\mathcal{G}^s_{a,T}, s \geq 1$ that can be defined as (see [64] for instance) :*

$$\mathcal{G}^s_{a,T} = \{\ (u,v) \in \mathcal{C}^\infty_{a,T}\ /\ \exists\ (\mathcal{C},\gamma)\ /\ \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^j_{a,T}} \leq \mathcal{C}\ \gamma^j\ (j!)^s\ \}. \tag{2.34}$$

The set $\mathcal{G}^1_{a,T}$ is made up of analytic functions while the set $\mathcal{G}^s_{a,T}$ for $s > 1$ contains functions with compact support such as

$$f(x,t) \quad = \quad e^{\frac{1}{(x-t)^2-\alpha^2}} \chi_{[-\alpha,\alpha]},$$

which is easily shown to belong to $\mathcal{G}^3_{a,T}$.

Let us introduce the spaces

$$H^k(\mathbb{R}) \quad = \quad \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ such that } \partial_x^{\tilde{k}} f \in L^2(\mathbb{R}),\ 0 \le \tilde{k} \le k \right\},$$

equipped by the natural norm (in particular $H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$). Let us also define for any Hilbert space H

$$W^{k,\infty}([0,T],H) \quad = \quad \left\{ w : [0,T] \mapsto H, \text{ such that } \sup_{t\in[0,T]} \|\partial_t^{\tilde{k}} w(t)\|_H \le \infty,\ 0 \le \tilde{k} \le k \right\},$$

also equipped by the natural norm. In that way, we set the space

$$E \quad = \quad W^{3,\infty}([0,T],L^2(\mathbb{R})) \cap W^{0,\infty}([0,T],H^3(\mathbb{R})),$$

and we introduce the following notation

$$\begin{aligned} \|f\|_E &= \max\left\{ \|f\|_{W^{3,\infty}([0,T],L^2(\mathbb{R}))}, \|f\|_{W^{0,\infty}([0,T],H^3(\mathbb{R}))} \right\}, \qquad \forall f \in E, \\ \|(u,v)\|_E &= \|u\|_E + \|v\|_E, \qquad \forall (u,v) \in E^2. \end{aligned}$$

For technical reasons we will assume that that the initial conditions of problem (2.7) are such that

$$\left| \begin{array}{l} (u_0, v_0) \quad \in \quad \left(H^3(\mathbb{R})\right)^2, \\ \\ \text{supp}(u_0,v_0) \cap \{0\} = \varnothing. \end{array} \right. \tag{2.35}$$

so that the exact solution $(u,v) \in E^2$. In particular, this implies that

$$\tilde{u}_{c,h}^{2n} \in L^2_{c,u}, \quad \tilde{v}_{c,h}^{2n+1} \in L^2_{c,v}, \quad u_{f,h}^n \in L^2_{f,u}, \quad v_{f,h}^{n+\frac{1}{2}} \in L^2_{f,v}, \tag{2.36}$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Let us also assume that the discrete initial conditions (2.16) satisfy

$$u_{c,h}^0 \in L^2_{c,u}, \quad v_{c,h}^1 \in L^2_{c,v}, \quad u_{f,h}^0 \in L^2_{f,u}, \quad v_{f,h}^{\frac{1}{2}} \in L^2_{f,v}, \tag{2.37}$$

and that they are a good approximation of the exact initial conditions, for example,

$$\begin{aligned} (u_c)_{2j}^0 &= \frac{1}{2h}\int_{x_{2j-1}}^{x_{2j+1}} u_0(x)\,\mathrm{d}x, \\ (v_c)_{2j+1}^1 &= \frac{1}{2h}\int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} v_0(x)\,\mathrm{d}x - \Delta t \frac{(u_c)_{2j+2}^0 - (u_c)_{2j}^0}{2h}, \\ (u_f)_j^0 &= \frac{1}{h}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u_0(x)\,\mathrm{d}x, \\ (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{h}\int_{x_j}^{x_{j+1}} v_0(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\Delta t}{2}\frac{(u_f)_{j+1}^0 - (u_f)_j^0}{h}, \end{aligned} \tag{2.38}$$

or

$$\begin{aligned} (u_c)_{2j}^0 &= u_0(2jh), \quad (v_c)_{2j+1}^1 = v_0((2j+1)h) - \Delta t \frac{(u_c)_{2j+2}^0 - (u_c)_{2j}^0}{2h}, \\ (u_f)_j^0 &= u_0(jh), \quad (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = v_0((n+\tfrac{1}{2})h) - \frac{\Delta t}{2}\frac{(u_f)_{j+1}^0 - (u_f)_j^0}{h}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Statement of the main results

Theorem 2.4.1 *Assume that the discretization parameters h and Δt are related by the strict CFL condition (2.9) and that the initial condition (u_0, v_0) of the equations (2.7) satisfies (2.35) (so that the exact solution (u, v) belongs to E^2). Let us consider initial data given by (2.38) or (2.39). Then :*

i) The discrete solutions (u^h, v^h) given by the schemes I and II satisfy the following error estimates

$$\left| \begin{array}{rcl} \|u-u^h\|_{\infty,2,T} + \|v-v^h\|_{\infty,2,T} & \leq & \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1}\ T\ h^{\frac{1}{2}}\ \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^1_{a,T}} \\ & + & \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1}\ (1+T)\ h^2\ \|(u,v)\|_E. \end{array} \right. \tag{2.40}$$

ii) If moreover $(u, v) \in \mathcal{C}^{k+1}([-a, a] \times [0, T])$ for some real $a > 0$ and integer $k \geq 1$, the discrete solution given by the scheme I satisfies

$$\left| \begin{array}{rcl} \|u-u^h\|_{\infty,2,T} + \|v-v^h\|_{\infty,2,T} & \leq & \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1}\ T\ h^{(\frac{3}{2}-\frac{1}{2^k})}\ |||(u,v)|||_{\mathcal{C}^k_{a,T}} \\ & + & \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1}\ (1+T)\ h^2\ \|(u,v)\|_E. \end{array} \right. \tag{2.41}$$

iii) If finally $(u, v) \in E^2 \cap \mathbf{C}^\infty_{a,T}$, the discrete solution given by the scheme I satisfies

$$\left| \begin{array}{rcl} \|u-u^h\|_{\infty,2,T} + \|v-v^h\|_{\infty,2,T} & \leq & \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1}\ T\ h^{\frac{3}{2}}\ |||(u,v)|||_{\mathbf{C}^\infty_{a,T}} \\ & + & \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1}\ (1+T)\ h^2\ \|(u,v)\|_E. \end{array} \right. \tag{2.42}$$

Let us complete this theorem by the following comments :

- This theorem expresses the fact that, in the $L^\infty(0, T; L^2)$ norm, scheme I is of order $3/2$ while scheme II is of order $1/2$. In (2.40), (2.41) and (2.42), the right hand side is the sum of two terms : the first one measures the error introduced by the transmission scheme while the second one (of second order) is due to the interior scheme.
- The coefficients appearing in the right hand side of the estimates (2.40) through (2.42) blow up when α goes to 1. This is coherent with what one observes numerically : the two schemes are not strongly convergent for $\alpha = 1$. Nevertheless, as has been explained in [38], good results are obtained with values of α close to 1(see also section 2.6).
- One can define the discrete $L^\infty(0, T; L^\infty)$ norm of the error, namely $\|u - u^h\|_{\infty,T}$ and $\|v - v^h\|_{\infty,T}$, by replacing in the definition (2.27) the discrete L^2 norms $\|u_{f,h}\|$, $\|v_{f,h}\|$, $\|u_{c,h}\|$ and $\|v_{c,h}\|$ by the discrete L^∞ norms :

$$|u_{f,h}|_\infty = \sup_{j\geq 0} |u_j|, \quad |v_{f,h}|_\infty = \sup_{j\geq 0} |v_{j+\frac{1}{2}}|,$$
$$|u_{c,h}|_\infty = \sup_{j\leq 0} |u_{2j}|, \quad |v_{f,h}|_\infty = \sup_{j\leq -1} |v_{2j+1}|.$$

  From the obvious inequality (see also lemma 2.5.4)

$$\|u-u^h\|_{\infty,T} \leq \frac{C}{\sqrt{h}}\ \|u-u^h\|_{\infty,2,T}, \tag{2.43}$$

  we deduce that :

$$\begin{cases} \|u-u^h\|_{\infty,T} + \|v-u^h\|_{\infty,T} = O(h) & \text{with the scheme I.} \\ \|u-u^h\|_{\infty,T} + \|v-u^h\|_{\infty,T} = O(1) & \text{with the scheme II.} \end{cases}$$

- From remark 2.3.1, we already know that scheme II can not be convergent in the (discrete) $L^\infty(0,T;L^\infty)$ space. As a consequence, using (2.43), we deduce that the error estimate (2.40) is sharp (see also section 2.6). We also conjecture that the $O(h^{3/2})$ estimate for scheme I is optimal. This is more or less implicit in the plane wave analysis (see [38] and section 2.6.2) and in good agreement with the numerical results.
- If our results are optimal in terms of powers of h, it is not clear that it is the case concerning the required regularity of the solution, for instance that we need the C^∞ regularity to obtain the $O(h^{3/2})$ error estimate with scheme I. However, the Fourier analysis (see [38]) does suggest that, at least, time regularity is needed. Moreover, the "norms" $|||(u,v)|||_{\mathcal{C}^k_{a,T}}$ naturally appears in the proof of the theorem (see section 2.4.1).
- If the solution of the continuous problem is regular enough, the scheme I is of order $h^{\frac{3}{2}}$ in $L^\infty(0,T;L^2)$-norm. As is strongly suggested by the plane wave reflection-transmission analysis (see [38]) as well as numerical results, (cf. section 2.6), we conjecture that scheme I (resp. scheme II) provides $O(h^2)$ (resp. $O(h)$) errors when these are measured in space regions that do not contain a neighborhood of the origin. The proof of such a result remains an open question for us.
- We have considered here the case of the 1D wave equation with constant coefficients. However, it is not difficult to see that the proofs of section 4 (based on energy methods) can be adapted to the case of the 1D wave equation with spatially variable coefficients.

Remark 2.4.3 *The hypotheses demanded in theorem 2.4.1 can be rewritten in terms of the regularity of the initial condition. In this way*

- *The estimation (2.41) is satisfied since the initial condition satisfies (2.35) and belongs to* $\mathcal{C}^{k+1}((-a-T,a+T))$.
- *We define the class of functions*

$$\mathbf{C}^\infty_b = \{\ (u,v) \in \mathcal{C}^\infty([-b,b])^2 \text{ such that (2.44) holds }\}.$$

where

$$|||(u,v)|||_{\mathbf{C}^\infty_b} \equiv \sup_{k\geq 0} |||(u,v)|||_{\mathcal{C}^k_b} < +\infty, \tag{2.44}$$

with

$$|||(u,v)|||_{\mathcal{C}^k_b} = \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^k_b}^{\frac{1}{2^k}} \prod_{j=1}^{k} \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^{j+1}_b}^{\frac{1}{2^j}},$$

and

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k_b} = \sup_{x\in[-b,b]} \sup_{i+j\leq k} \left| \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial t^j}(x,t) \right|, \quad \forall\ f \in \mathcal{C}^k([-b,b]).$$

Then, the hypothesis demanded in the statement iii) is satisfied since $(u_0,v_0) \in \mathbf{C}^\infty_{a+T}$.

2.5 Proof of the error estimates

2.5.1 The equations satisfied by the errors

The first step of the proof consists, of course, in writing the scheme satisfied by the errors. This is also the opportunity to define some useful notation. We introduce "discrete traces" for the exact solution :

$$\left\{\begin{array}{rcl}(\widetilde{U}_c)_0^{2n+1} & = & \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_0^{2n+2}+\tilde{u}_0^{2n}\right),\\ (\widetilde{V}_c)_0^{2n+1} & = & \tilde{v}_{-1}^{2n+1}-h\frac{\tilde{u}_0^{2n+2}-\tilde{u}_0^{2n}}{2\Delta t},\end{array}\right. \tag{2.45}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}(\widetilde{U}_f)_0^{n+\frac{1}{2}} & = & \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_0^{n+1}+\tilde{u}_0^{n}\right),\\ (\widetilde{V}_f)_0^{n+\frac{1}{2}} & = & \tilde{v}_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}+\frac{h}{2}\frac{\tilde{u}_0^{n+1}-\tilde{u}_0^{n}}{\Delta t},\end{array}\right. \tag{2.46}$$

and for the error

$$\left\{\begin{array}{rcl}(e_c^U)_0^{2n+1} & = & \frac{1}{2}\left((e_c^u)_0^{2n+2}+(e_c^u)_0^{2n}\right),\\ (e_c^V)_0^{2n+1} & = & (e_c^v)_{-1}^{2n+1}-h\frac{(e_c^u)_0^{2n+2}-(e_c^u)_0^{2n}}{2\Delta t},\end{array}\right. \tag{2.47}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}(e_f^U)_0^{n+\frac{1}{2}} & = & \frac{1}{2}\left((e_f^u)_0^{n+1}+(e_f^u)_0^{n}\right),\\ (e_f^V)_0^{n+\frac{1}{2}} & = & (e_f^v)_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}+\frac{h}{2}\frac{(e_f^u)_0^{n+1}-(e_f^u)_0^{n}}{\Delta t}.\end{array}\right. \tag{2.48}$$

The interior equations satisfied by the error are

$$\left\{\begin{array}{rcl}\frac{(e_c^u)_{2j}^{2n+2}-(e_c^u)_{2j}^{2n}}{2\Delta t}+\frac{(e_c^v)_{2j+1}^{2n+1}-(e_c^v)_{2j-1}^{2n+1}}{2h} & = & (\eta_c^u)_{2j}^{2n+1}, \quad j\leq -1,\\ \frac{(e_c^v)_{2j+1}^{2n+1}-(e_c^v)_{2j+1}^{2n-1}}{2\Delta t}+\frac{(e_c^u)_{2j+2}^{2n}-(e_c^u)_{2j}^{2n}}{2h} & = & (\eta_c^v)_{2j+1}^{2n} \quad j\leq -1,\end{array}\right. \tag{2.49}$$

in the coarse grid and

$$\left\{\begin{array}{rcl}\frac{(e_f^u)_j^{2n+1}-(e_f^u)_j^{2n}}{\Delta t}+\frac{(e_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}}-(e_f^v)_{j-\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}}}{h} & = & (\eta_f^u)_j^{2n+\frac{1}{2}}, \quad j\geq 1,\\ \frac{(e_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}}-(e_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{2n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}+\frac{(e_f^u)_{j+1}^{2n}-(e_f^u)_j^{2n}}{h} & = & (\eta_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{2n}, \quad j\geq 0,\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\frac{(e_f^u)_j^{2n+2}-(e_f^u)_j^{2n+1}}{\Delta t}+\frac{(e_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}}-(e_f^v)_{j-\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}}}{h} & = & (\eta_f^u)_j^{2n+\frac{3}{2}}, \quad j\geq 1,\\ \frac{(e_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}}-(e_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}}}{\Delta t}+\frac{(e_f^u)_{j+1}^{2n+1}-(e_f^u)_j^{2n+1}}{h} & = & (\eta_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+1}, \quad j\geq 0,\end{array}\right. \tag{2.50}$$

in the fine grid. In equations ((2.49),(2.50)), the terms on the right hand side are classical *interior truncation errors* that are completely defined from the exact solution : they are nothing but the quantities in the left hand sides of ((2.49),(2.50)) after the substitution

$$(e_c^u)_{2j}^{2n},(e_c^v)_{2j+1}^{2n+1},(e_f^u)_j^n,(e_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \longrightarrow (\tilde{u}_c)_{2j}^{2n},(\tilde{v}_c)_{2j+1}^{2n+1},(\tilde{u}_f)_j^n,(\tilde{v}_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}.$$

The equations on the interface are

$$
(2.51) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl}
(e_c^V)_0^{2n+1} - (e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}} & = & (\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{1}{2}}, \\
(e_c^V)_0^{2n+1} - (e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}} & = & (\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{3}{2}}, \\
(e_c^U)_0^{2n+1} - \dfrac{1}{2}\left((e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}} + (e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}} \right) & = & (\varepsilon_r^u)^{2n+1},
\end{array} \right.
$$

for scheme I and

$$
(2.52) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl}
(e_c^U)_0^{2n+1} - (e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}} & = & (\widetilde{\varepsilon}_r^u)^{2n+\frac{1}{2}}, \\
(e_c^U)_0^{2n+1} - (e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}} & = & (\widetilde{\varepsilon}_r^u)^{2n+\frac{3}{2}}, \\
(e_c^V)_0^{2n+1} - \dfrac{1}{2}\left((e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}} + (e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}} \right) & = & (\widetilde{\varepsilon}_r^v)^{2n+1},
\end{array} \right.
$$

for scheme II. The quantities on the right hand side of (2.51) (resp. (2.52)) are the *interface truncation errors* for scheme I (resp. scheme II). Once again, they are completely defined by the exact solution, as the terms in the left hand side of (2.51) (resp. (2.52)) in which we have made the substitution

$$
(e_c^U)_0^{2n+1}, (e_c^V)_0^{2n+1}, (e_f^U)_0^{n+\frac{1}{2}}, (e_f^V)_0^{n+\frac{1}{2}} \longrightarrow (\widetilde{U}_c)_0^{2n+1}, (\widetilde{V}_c)_0^{2n+1}, (\widetilde{U}_f)_0^{n+\frac{1}{2}}, (\widetilde{V}_f)_0^{n+\frac{1}{2}}.
$$

2.5.2 Outline of the proof

It is clear that, by exploiting the linearity of the equations, the error can be separated into two parts :
- the error due to the *interior truncation errors* and *initial conditions*,
- the error due to the *interface truncation errors*.

Let us formalize this setting

$$
\delta^h := \{ \ (e_c^u)_{2j}^0, (e_c^v)_{2j+1}^1, (e_f^u)_j^0, (e_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ \}, \qquad \text{the } \textit{initial errors,}
$$

$$
\eta^h := \{ \ (\eta_c^u)_{2j}^{2n}, (\eta_c^v)_{2j+1}^{2n+1}, (\eta_f^u)_j^{n+\frac{1}{2}}, (\eta_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^n \ \}, \qquad \text{the } \textit{interior truncation errors,}
$$

$$
\varepsilon_I^h := \{ \ (\varepsilon_r^u), (\varepsilon_r^v) \ \}, \quad \varepsilon_{II}^h := \{ \ (\widetilde{\varepsilon}_r^u), (\widetilde{\varepsilon}_r^v) \ \}, \qquad \text{the } \textit{interface truncation errors.}
$$

It is clear that if $(\delta^h, \eta^h, \varepsilon^h)$ are known, the sequences $(e^{u,h}, e^{v,h})$ are completely characterized by the interior equations and the transmission scheme I or II. In this way, we define two maps $\Phi_l, l = I, II$:

$$
(\delta^h, \eta^h, \varepsilon_l^h) \xrightarrow{\Phi_l} (e^{u,h}, e^{v,h})
$$

which are linear. In particular

$$
((e_c^{u,h}), (e_c^{v,h}), (e_f^{u,h}), (e_f^{v,h})) \quad = \quad \Phi_l(\delta^h, \eta^h, 0) + \Phi_l(0, 0, \varepsilon_l^h).
$$

- The estimate of $\Phi_l(\delta^h, \eta^h, 0)$, due to the *interior truncation errors* and the approximations of *initial data* does not really depend on the *transmission scheme*, provided that this scheme is conservative in the sense of theorem 2.3.1, which is the case for schemes I and II. As a consequence of the centered nature of the scheme, this *error* is $O(h^2)$ provided that the initial conditions are approximated to $O(h^2)$. The precise result is the following :

Proposition 2.5.1 *Let h and Δt be constants such that*

$$\alpha := \frac{\Delta t}{h} < 1$$

and let $T > 0$. Assume that that the initial condition (u_0, v_0) of the equations (2.7) satisfies (2.35) (so that the exact solution (u, v) belongs to E^2). Let us consider initial data given by (2.38) or (2.39). Then, $(e^{u,h}, e^{v,h}) = \Phi_l(\delta^h, \eta^h, 0)$ satisfies the following estimate :

$$\|e^{u,h}\|_{\infty,2,T} + \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T} \quad \leq \quad \mathcal{C}(1-\alpha^2)^{-1}\,(1+T)\,h^2\|(u,v)\|_E. \tag{2.53}$$

The analysis of this error is very similar to the (rather standard) error analysis of the "pure" Yee-scheme (i.e. without any mesh refinement) and, as this point is not central to this paper, we have decided to give its proof in the appendix A.

- The estimate of $\Phi_l(0, 0, \varepsilon_l^h)$ does depend on the *transmission scheme*. The analysis, presented in sections 2.5.3 and 2.5.4, is much less classical and consists in two main steps :
  - For both schemes I and II, a direct analysis combining the use of *energy techniques* (as for the stability analysis), *consistency estimates* for the transmission conditions (*globally* in $O(h)$ - see lemma 2.5.2) and the use of a *discrete trace inequality* (which results in the loss of one half-power of h - see lemma 2.5.4) permits us to show an $O(\sqrt{h})$ estimate for both schemes I and II. This is lemma 2.5.1. The proof stops here for the scheme II.
  - For the scheme I, one can use a *boot-strap* argument to improve iteratively the obtained rate of convergence : the estimate that will lead to (2.41) is proved by *induction* on k (this is lemma 2.5.7) and that leading to (2.42) by passing to the limit when $k \to +\infty$ (this is lemma 2.5.8). This demands a closer look at the structure of the *transmission truncation error* ε_I that has some properties that the error ε_{II} does not.

In summary, estimate (2.40) is obtained by combining Proposition 2.5.1 with lemma 2.5.1, (2.41) is obtained by regrouping Proposition 2.5.1 with lemma 2.5.7, (2.42) is obtained by regrouping Proposition 2.5.1 with lemma 2.5.8.

2.5.3 Proof of the $\mathcal{O}(\sqrt{h})$ estimates

Provided that similar techniques can be applied to the analysis of scheme II, only the estimate for scheme I will be proven. The main difference between the two proofs will be pointed out in remark 2.5.1.

What we are going to derive here is the equivalent of estimate (2.40) for $\Phi_I(0, 0, \varepsilon_l)$. For the sake of simplicity, we shall still denote in this section :

$$\Phi_I(0, 0, \varepsilon_l^h) = ((e_c^{u,h}), (e_c^{v,h}), (e_f^{u,h}), (e_f^{v,h})).$$

We shall also use the notation :

$$e^{u,h} = ((e_c^{u,h}), (e_f^{u,h})), \quad e^{v,h} = ((e_c^{v,h}), (e_f^{v,h})),$$

and refer to definition (2.27) for the discrete norms. Throughout this section we will only use the last two norms of (2.27). The first one (that we call norm-star) will be useful for the proof of (2.41). The estimate we want to prove here is :

Lemma 2.5.1 *If the solution of the continuous problem (2.7) belongs to $\mathcal{C}^1_{a,T}$ for $a > 0$ then*

$$\|e^{u,h}\|_{\infty,2,T} + \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T} \quad \leq \quad \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1}\ T\ h^{\frac{1}{2}}\ \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^1_{a,T}}. \tag{2.54}$$

The rest of this section is devoted to the proof of this lemma. By definition,

$$(e_c^{u,h}), (e_c^{v,h}), (e_f^{u,h}) \text{ and } (e_f^{v,h}),$$

satisfy the *homogeneous* interior equations (2.49) and (2.50) (i.e. with *zero* right hand sides), and we recall below the equations at the interface :

$$\left\{\begin{array}{l} (e_c^V)_0^{2n+1} - (e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}} = (\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{1}{2}}, \\ (e_c^V)_0^{2n+1} - (e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}} = (\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{3}{2}}, \\ (e_c^U)_0^{2n+1} - \dfrac{1}{2}\left((e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}} + (e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}\right) = (\varepsilon_r^u)^{2n+1}, \end{array}\right. \tag{2.55}$$

where the *interface truncation errors* are given by (we indicate the order of magnitude of each term obtained by a Taylor expansion)

$$\begin{array}{rclcl} (\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{1}{2}} & = & (\widetilde{V}_c)_0^{2n+1} - (\widetilde{V}_f)_0^{2n+\frac{1}{2}} & = & \mathcal{O}(\Delta t), \\ (\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{3}{2}} & = & (\widetilde{V}_c)_0^{2n+1} - (\widetilde{V}_f)_0^{2n+\frac{3}{2}} & = & \mathcal{O}(\Delta t), \\ (\varepsilon_r^u)^{2n+1} & = & (\widetilde{U}_c)_0^{2n+1} - \frac{1}{2}\left((\widetilde{U}_f)_0^{2n+\frac{1}{2}} + (\widetilde{U}_f)_0^{2n+\frac{3}{2}}\right) & = & \mathcal{O}(\Delta t^2), \end{array}$$

where the quantities $(\widetilde{U}_c)_0^{2n+1}, (\widetilde{V}_c)_0^{2n+1}, (\widetilde{V}_f)_0^{2n+\frac{1}{2}}, (\widetilde{V}_f)_0^{2n+\frac{1}{2}}$ are defined from the exact solution (u,v) by ((2.45),(2.46)). The following lemma, whose immediate proof is omitted here (it is based on a simple Taylor expansion), gives us the magnitude of these quantities.

Lemma 2.5.2 *Assume that, for some $a > 0$, u and v belong to $\mathcal{C}^1_{a,T}$. Then, provided that $\alpha \leq 1$,*

$$\sup_{t^{2n}\leq T} |(\varepsilon_r^v)^{n+\frac{1}{2}}| \leq \mathcal{C}\ h\ \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^1_{a,T}}, \quad \sup_{t^{2n}\leq T} |(\varepsilon_r^u)^{2n+1}| \leq \mathcal{C}\ \alpha\ h\ \|u\|_{\mathcal{C}^1_{a,T}}. \tag{2.56}$$

If moreover, $(u,v) \in \mathcal{C}^2_{a,T}$ then

$$\sup_{t^{2n}\leq T} |(\varepsilon_r^u)^{2n+1}| \leq \mathcal{C}\ \alpha^2\ h^2\ \|u\|_{\mathcal{C}^2_{a,T}}, \quad \sup_{t^{2n}\leq T} |(\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{1}{2}} + (\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{3}{2}}| \leq \mathcal{C}\ h^2\ \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^2_{a,T}}. \tag{2.57}$$

Next, as for to the discrete energy (2.17), we introduce the discrete energy of the error at even instants :

$$\mathcal{E}^{2n} \quad = \quad \mathcal{E}_c^{2n} + \mathcal{E}_f^{2n}, \tag{2.58}$$

where

$$\left|\begin{array}{rcl} \mathcal{E}_c^{2n} & = & \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j\leq -1} |(e_c^u)_{2j}^{2n}|^2\ 2h + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j\leq -1} (e_c^v)_{2j+1}^{2n+1}(e_c^v)_{2j+1}^{2n-1}\ 2h + \dfrac{1}{2}\ |(e_c^u)_0^{2n}|^2\ h, \\ \mathcal{E}_f^n & = & \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j\geq 1} |(e_f^u)_j^n|^2\ h + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j\geq 0} (e_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(e_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\ h + \dfrac{1}{2}\ |(e_f^u)_0^n|^2\ \dfrac{h}{2}. \end{array}\right.$$

Our goal will be to obtain an estimate for $\sqrt{\mathcal{E}^{2n}}$. This will provide an L^2-estimate for the error with the aid of the following lemma :

Lemma 2.5.3 *Assume that (2.9) holds and that*

$$((e^u_{f,h})^n, (e^v_{f,h})^{n+\frac{1}{2}}) \in L^2_{f,u} \times L^2_{f,v} \text{ and } ((e^u_{c,h})^{2n}, (e^v_{c,h})^{2n+1}) \in L^2_{c,u} \times L^2_{c,v}$$

Then, there exists a positive constant $\mathcal{C}$ independent of Δt , h and α such that for any $n > 0$

$$\|(e^u_{c,h})^{2n}\|^2 + \|(e^v_{c,h})^{2n+1}\|^2 + \|(e^v_{c,h})^{2n-1}\|^2 \leq \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1}\ \mathcal{E}^{2n}_c, \tag{2.59}$$

$$\|(e^u_{f,h})^{2n}\|^2 + \|(e^v_{f,h})^{2n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|(e^v_{f,h})^{2n-\frac{1}{2}}\|^2 \leq \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1}\ \mathcal{E}^{2n}_f, \tag{2.60}$$

$$\|(e^u_{f,h})^{2n+1}\|^2 \leq \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1}\left(\mathcal{E}^{2n} + \mathcal{E}^{2n+2}\right) + \mathcal{C}\ h\ |(\varepsilon^u_r)^{2n+1}|^2. \tag{2.61}$$

Proof: We first prove (2.59). Using the identity $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$, we obtain

$$\left| \begin{aligned} \mathcal{E}^{2n}_c = \frac{1}{2}\left(\sum_{j\leq -1} |(e^u_c)^{2n}_{2j}|^2\ 2h + |(e^u_c)^{2n}_0|^2\ h\right) &+ \frac{1}{2}\sum_{j\leq -1}\left|\frac{(e^v_c)^{2n+1}_{2j+1} + (e^v_c)^{2n-1}_{2j+1}}{2}\right|^2\ 2h \\ &- \frac{1}{2}\sum_{j\leq -1}\left|\frac{(e^v_c)^{2n+1}_{2j+1} - (e^v_c)^{2n-1}_{2j+1}}{2}\right|^2\ 2h. \end{aligned} \right. \tag{2.62}$$

Using the second equation of scheme (2.49), we observe that

$$\left|\frac{(e^v_c)^{2n+1}_{2j+1} - (e^v_c)^{2n-1}_{2j+1}}{2}\right|^2 = \frac{\alpha^2}{4}\ \left|(e^u_c)^{2n}_{2j+2} - (e^u_c)^{2n}_{2j}\right|^2 \leq \frac{\alpha^2}{2}\ \left(\left|(e^u_c)^{2n}_{2j+2}\right|^2 + \left|(e^u_c)^{2n}_{2j}\right|^2\right).$$

We use this in (2.62) to deduce that

$$\mathcal{E}^{2n}_c \geq \frac{1}{2}\ \left\|\frac{(e^v_{c,h})^{2n-1} + (e^v_{c,h})^{2n+1}}{2}\right\|^2 + \frac{1-\alpha^2}{2}\ \left\|(e^u_{c,h})^{2n}\right\|^2, \tag{2.63}$$

which implies in particular

$$\|(e^u_{c,h})^{2n}\|^2 \leq 2\ (1-\alpha^2)^{-1}\ \mathcal{E}^{2n}_c. \tag{2.64}$$

Next, we remark that the second equality of (2.49) can be rewritten as

$$(e^v_c)^{2n\pm 1}_{2j+1} \quad = \quad \frac{(e^v_c)^{2n+1}_{2j+1} + (e^v_c)^{2n-1}_{2j+1}}{2} \mp \frac{\Delta t}{2h}\left((e^u_c)^{2n}_{2j+2} - (e^u_c)^{2n}_{2j}\right).$$

Then, using the inequality $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ twice, we obtain

$$\|(e^v_{c,h})^{2n\pm 1}\|^2 \quad \leq \quad 2\ \|\frac{(e^v_{c,h})^{2n-1} + (e^v_{c,h})^{2n+1}}{2}\|^2 + 2\alpha^2\ \|(e^u_{c,h})^{2n}\|^2.$$

Using now (2.63) and (2.64), we deduce the existence of a constant C such that

$$\|(e^u_{c,h})^{2n}\|^2 + \|(e^v_{c,h})^{2n+1}\|^2 + \|(e^v_{c,h})^{2n-1}\|^2 \leq \mathcal{C}(1-\alpha^2)^{-1}\mathcal{E}^{2n}_c, \tag{2.65}$$

and (2.59) is proven.

If we use techniques similar to those used above, it is easy (we omit the details) to show that, for any integer k

$$\|(e^u_{f,h})^k\|^2 + \|(e^v_{f,h})^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + \|(e^v_{f,h})^{k-\frac{1}{2}}\|^2 \quad \leq \quad \mathcal{C}(1-\alpha^2)^{-1}\mathcal{E}^k_f,$$

which gives (2.60) for $k = 2n$.

If we take $k = 2n+1$, we are only able to bound $\|(e^u_{f,h})^{2n+1}\|$ in terms of $\mathcal{E}^{2n+1}_f$ but not in terms of $\mathcal{E}^{2n}$ and $\mathcal{E}^{2n+2}$ (the conserved energy).

In order to do so, we use the first equality of (2.50) for $j \geq 1$ to obtain

$$|(e^u_f)^{2n+1}_j| \quad \leq \quad |(e^u_f)^{2n}_j| + \alpha\left(|(e^v_f)^{2n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}}| + |(e^v_f)^{2n+\frac{1}{2}}_{j-\frac{1}{2}}|\right).$$

Therefore, using $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ once again

$$\|(e^u_{f,h})^{2n+1}\|^2 \quad \leq \quad \mathcal{C}\left(\|(e^u_{f,h})^{2n}\|^2 + \|(e^v_{f,h})^{2n+\frac{1}{2}}\|^2\right) + \frac{h}{2}\,|(e^u_f)^{2n}_0|^2,$$

which yields, with the aid of (2.60)

$$\|(e^u_{f,h})^{2n+1}\|^2 \leq \mathcal{C}\left(1-\alpha^2\right)^{-1}\mathcal{E}^{2n}_f + \frac{h}{2}|(e^u_f)^{2n+1}_0|^2. \tag{2.66}$$

To conclude we use the third equality of (2.51) rewritten as

$$(e^u_f)^{2n+1}_0 \quad = \quad (e^u_c)^{2n+2}_0 + (e^u_c)^{2n}_0 - \frac{1}{2}\left((e^u_f)^{2n+2}_0 + (e^u_f)^{2n}_0\right) - 2(\varepsilon^u_r)^{2n+1}.$$

This obviously implies that

$$|(e^u_f)^{2n+1}_0|^2 \leq \frac{\mathcal{C}}{h}(\,\|(e^u_{c,h})^{2n+2}\|^2 + \|(e^u_{c,h})^{2n}\|^2 + \|(e^u_{f,h})^{2n+2}\|^2 + \|(e^u_{f,h})^{2n}\|^2) + |(\varepsilon^u_r)^{2n+1}|^2,$$

which yields, using this time (2.59) and (2.60), that

$$\frac{h}{2}\,|(e^u_f)^{2n+1}_0|^2 \leq \mathcal{C}\,(1-\alpha^2)^{-1}\,\left(\mathcal{E}^{2n} + \mathcal{E}^{2n+2}\right) + \mathcal{C}\,h\,|(\varepsilon^u_r)^{2n+1}|^2. \tag{2.67}$$

Finally, (2.61) is a direct consequence of (2.66) and (2.67). □

For the estimation of the energy, we use the following identity which is the equivalent for the error of the estimate of theorem 2.3.1 for the discrete solution :

$$\left|\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{2\Delta t}\left(\mathcal{E}^{2n+2} - \mathcal{E}^{2n}\right) & = & \dfrac{1}{2}\left((e^U_f)^{2n+\frac{1}{2}}_0(e^V_f)^{2n+\frac{1}{2}}_0 + (e^U_f)^{2n+\frac{3}{2}}_0(e^V_f)^{2n+\frac{3}{2}}_0\right) \\ & & -\,(e^U_c)^{2n+1}_0(e^V_c)^{2n+1}_0. \end{array}\right. \tag{2.68}$$

The rest of the proof consists in deducing from (2.68) an appropriate estimate for the energy $\mathcal{E}^{2n}$ and then applying the lemma 2.5.2 to get an estimate of the error. In order to do this, we reorganize the three terms using (2.51) in order to exhibit the consistency errors (see remark 2.5.1 below)

$$\left|\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{2\Delta t}\left(\mathcal{E}^{2n+2} - \mathcal{E}^{2n}\right) & = & -\dfrac{1}{2}\left((e^U_f)^{2n+\frac{1}{2}}_0(\varepsilon^v_r)^{2n+\frac{1}{2}} + (e^U_f)^{2n+\frac{3}{2}}_0(\varepsilon^v_r)^{2n+\frac{3}{2}}\right) \\ & & -\,(\varepsilon^u_r)^{2n+1}(e^V_c)^{2n+1}_0. \end{array}\right. \tag{2.69}$$

According to lemma 2.5.2, the quantities $(\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{1}{2}}$, $(\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{3}{2}}$ and $(\varepsilon_r^u)^{2n+1}$ are small. In order to bound the other terms appearing on the right hand side of (2.69) (and defined in ((2.47),(2.48))) by a function of the error norm, we use a discrete trace lemma.

Lemma 2.5.4 *Under the hypotheses of lemma 2.5.3, there exists a positive constant $\mathcal{C}$ independent of Δt and h such that, for each $n > 0$,*

$$\begin{array}{rclrcl} |(e_f^u)_0^n| & \leq & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h}}\|(e_{f,h}^u)^n\|, & |(e_f^v)_0^{n+\frac{1}{2}}| & \leq & \frac{1}{\sqrt{h}}\|(e_{f,h}^v)^{n+\frac{1}{2}}\|, \\ |(e_c^u)_0^{2n}| & \leq & \frac{1}{\sqrt{h}}\|(e_{c,h}^u)^{2n}\|, & |(e_c^v)_0^{2n+1}| & \leq & \frac{1}{\sqrt{2h}}\|(e_{c,h}^v)^{2n+1}\|. \end{array} \tag{2.70}$$

Proof: The result is trivial. □

For simplicity of exposition, it is useful to introduce a local measure of the error on the time interval $I_{2n+1} = [t^{2n}, t^{2n+2}]$. Thus we set

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \|e^{u,h}\|_{h,I_{2n+1}}^2 & = & \|(e_{c,h}^u)^{2n}\|^2 + \|(e_{c,h}^u)^{2n+2}\|^2 \\ & + & \|(e_{f,h}^u)^{2n}\|^2 + \|(e_{f,h}^u)^{2n+1}\|^2 + \|(e_{f,h}^u)^{2n+2}\|^2, \\ \|e^{v,h}\|_{h,I_{2n+1}}^2 & = & \|(e_{c,h}^v)^{2n+1}\|^2 + \|(e_{f,h}^v)^{2n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|(e_{f,h}^v)^{2n+\frac{3}{2}}\|^2. \end{array} \right. \tag{2.71}$$

Note that these are the quantities appearing in the left hand sides of inequalities (2.59) through (2.61) of lemma 2.5.3. By definition of the discrete $L^\infty(0,T;L^2)$ norm, we have, for $t^{2n+2} \leq T$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \|e^{u,h}\|_{h,I_{2n+1}} \leq C\ \|e^{u,h}\|_{\infty,2,T}, & \|e^{v,h}\|_{h,I_{2n+1}} \leq C\ \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T}, \\ \|e^{u,h}\|_{\infty,2,T} \leq \sup\limits_{t^{2n+2}\leq T} \|e^{u,h}\|_{h,I_{2n+1}}, & \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T} \leq \sup\limits_{t^{2n+2}\leq T} \|e^{v,h}\|_{h,I_{2n+1}}. \end{array} \right. \tag{2.72}$$

Using elementary manipulations on expression (2.69) and lemma 2.5.4 the following inequality can be obtained (note that the factor $1/\alpha$ appearing below comes from the right hand side of the second equation of (2.47))

$$\left| \begin{array}{rcl} \dfrac{\mathcal{E}^{2n+2} - \mathcal{E}^{2n}}{2\Delta t} & \leq & \dfrac{\mathcal{C}}{\sqrt{h}}\ \|e^{u,h}\|_{h,I_{2n+1}}\ \left\{ |(\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{1}{2}}| + |(\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{3}{2}}| \right\} \\ & & +\dfrac{\mathcal{C}}{\alpha\sqrt{h}}\ \left\{ \|e^{u,h}\|_{h,I_{2n+1}} + \alpha\|e^{v,h}\|_{h,I_{2n+1}} \right\}\ |(\varepsilon_r^u)^{2n+1}|. \end{array} \right.$$

Then, by lemma 2.5.2 (inequalities (2.56)) and (2.72)

$$\frac{\mathcal{E}^{2n+2} - \mathcal{E}^{2n}}{2\Delta t} \leq \mathcal{C}\ \sqrt{h}\ \|(u,v)\|_{\mathcal{C}_{a,T}^1} \left(\|e^{u,h}\|_{\infty,2,T} + \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T} \right). \tag{2.73}$$

Adding the above inequalities from $n = 0$ to $m - 1$, for any integer $m > 1$, we obtain ($\mathcal{E}_0 = 0$)

$$\mathcal{E}^{2m} \leq \mathcal{C}\ t^{2m}\ \sqrt{h}\ \|(u,v)\|_{\mathcal{C}_{a,T}^1} \left\{ \|e^{u,h}\|_{\infty,2,T} + \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T} \right\}.$$

Now, using lemma 2.5.3, we can write, for $t^{2n+2} \leq T$,

$$\left| \begin{array}{l} \|e^{u,h}\|_{h,I_{2n+1}}^2 + \|e^{v,h}\|_{h,I_{2n+1}}^2 \leq \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1} \left(\mathcal{E}^{2n} + \mathcal{E}^{2n+2} \right) + \mathcal{C}\ h\ |(\varepsilon_r^u)^{2n+1}|^2 \\ \qquad \leq \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1}\ T\ \sqrt{h}\ \|(u,v)\|_{\mathcal{C}_{a,T}^1} \left\{ \|e^{u,h}\|_{\infty,2,T} + \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T} \right\} + \mathcal{C}\ h^3\ \|(u,v)\|_{\mathcal{C}_{a,T}^1}^2. \end{array} \right.$$

Therefore, taking the supremum over $t^{2n+2} \leq T$, using (2.72) and classical manipulations based on Young's inequality, one proves the final estimate (2.54) (we omit the details).

Remark 2.5.1 *Let us give some details concerning the derivation of (2.69). We start from the identities :*

$$(e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}}(e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}} = (e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}}\left[(e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}} - (e_c^V)_0^{2n+1}\right] + (e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}}(e_c^V)_0^{2n+1},$$

$$(e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}(e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}} = (e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}\left[(e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}} - (e_c^V)_0^{2n+1}\right] + (e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}(e_c^V)_0^{2n+1}.$$

After summation, we obtain, using (2.55)
(2.74)

$$\frac{1}{2}\left\{(e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}}(e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}} + (e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}(e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}}\right\} = (e_c^V)_0^{2n+1}\left[\frac{(e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}} + (e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}}{2}\right]$$
$$- \frac{1}{2}(e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}}(\varepsilon_r^v)_0^{2n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}(\varepsilon_r^v)_0^{2n+\frac{3}{2}}.$$

On the other hand, one has the identity

$$\left|\begin{array}{l} (e_c^U)_0^{2n+1}(e_c^V)_0^{2n+1} = \left[(e_c^U)_0^{2n+1} - \frac{1}{2}\left\{(e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}} + (e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}\right\}\right](e_c^V)_0^{2n+1} \\ \qquad + \frac{1}{2}\left[(e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}} + (e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}\right](e_c^V)_0^{2n+1}, \end{array}\right.$$

that is to say, with the aid of (2.55) :

$$(e_c^U)_0^{2n+1}(e_c^V)_0^{2n+1} = (e_c^V)_0^{2n+1}(\varepsilon_r^u)_0^{2n+1} + \frac{1}{2}\left[(e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}} + (e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}\right](e_c^V)_0^{2n+1}. \tag{2.75}$$

Finally, (2.69) is obtained as the difference between (2.74) and (2.75).

If scheme II is used, we have

$$\frac{\mathcal{E}^{2n+2} - \mathcal{E}^{2n}}{2\Delta t} = -\frac{1}{2}\left((e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}}(\widetilde{\varepsilon}_r^u)^{2n+\frac{1}{2}} + (e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}}(\widetilde{\varepsilon}_r^u)^{2n+\frac{3}{2}}\right) - (\widetilde{\varepsilon}_r^v)^{2n+1}(e_c^U)_0^{2n+1}, \tag{2.76}$$

and the proof of estimate (2.40) is similar to that presented for scheme I.

2.5.4 Proof of estimate (2.41)

Apart from the results of the next subsection 2.5.4.1, which are essentially generalizations of the estimate (2.40), what we do in this section is only valid when we use scheme I to do the coupling. The real novelty in the proof will appear in section 2.5.4.2. The main differences between scheme I and scheme II will be explained in remark 2.5.3.

2.5.4.1 Estimate of coarse discrete derivatives

Our goal in this paragraph is to derive estimates similar to (2.40) for which we shall call the successive *coarse time discrete derivatives* of the error $(e^{u,h}, e^{v,h})$. The proof is essentially a repetition of the proof of section 2.5.3 but the statement of the precise result requires some notation.

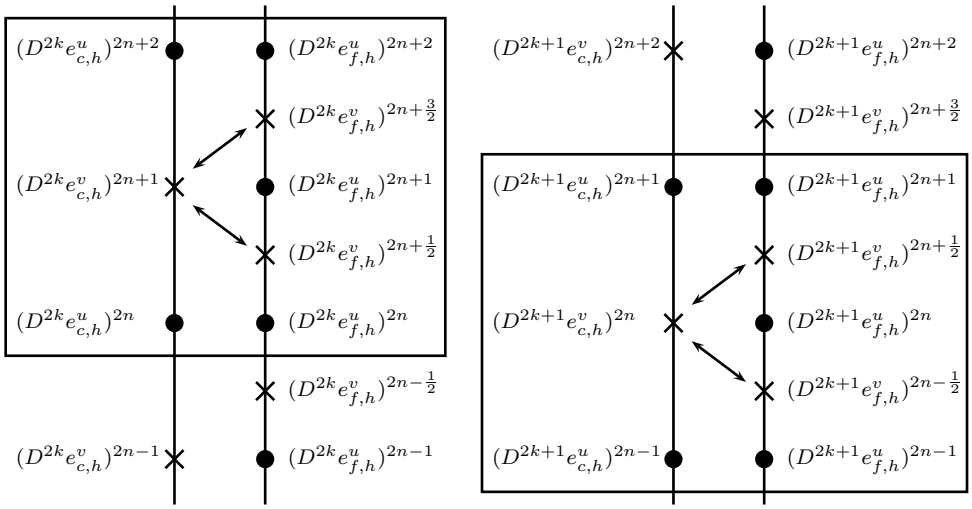


FIG. 2.2 – Time distribution of the unknowns

We define the *coarse discrete derivative* operator D by defining its action on a sequence $w^h = (w)_s^t$ (where t and s are integers or integers plus one half - negative indices t are allowed) :

$$(Dw)_s^{t+1} := \frac{(w)_s^{t+2} - (w)_s^t}{2\Delta t}.$$

We also define D^m as the mth successive power of D :

$$D^m w^h = D\,(D^{m-1}w^h).$$

We shall now write the numerical scheme satisfied by the mth discrete derivative of $e^{u,h}$ and $e^{v,h}$ (these sequences are implicitly extended by 0 for negative times). Note that the sequences $D^m e^{u,h}$ and $D^m e^{v,h}$ are naturally defined on a grid shifted by $m\Delta t$ (the initial grid is supposed to contain negative discrete instants), so that the fine grids differ depending whether m is odd or even. As the scheme ((2.49),(2.50),(2.51)) is "invariant" under a translation by $2\Delta t$, it is easy to see that the *odd* discrete coarse derivative of the sequences $(e_c^{u,h})$, $(e_c^{v,h})$, $(e_f^{u,h})$ and $(e_f^{v,h})$,namely

$$(D^{2q+1}e_c^{u,h}), (D^{2q+1}e_c^{v,h}), (D^{2q+1}e_f^{u,h}) \text{ and } (D^{2q+1}e_f^{v,h}),$$

satisfy a similar but different set of equations. More precisely, at the instants at which the odd discrete derivative are defined, the only change concerns the coarse grid and corresponds to the substitutions $e^u_{c,h} \leftrightarrow D^{2q+1}e^v_{c,h}$ and $e^v_{c,h} \leftrightarrow D^{2q+1}e^u_{c,h}$. Other than this change, the scheme for the time intervale $[t^{2n-1}, t^{2n+1}]$ for the odd coarse discrete derivative is the same as that satisfied by $e^{u,h}$ and $e^{v,h}$ in the time intervale $[t^{2n}, t^{2n+2}]$. This is illustrated by figure 2.2 in which the arrows represents the discrete transmission conditions. We shall find two types of schemes that are easily deduced from each other. In order to avoid repetition, it is useful to introduce

$$\overline{m} = 1, \quad \text{if } m \text{ is odd}, \quad \overline{m} = 0, \quad \text{if } m \text{ is even}.$$

Then the equations of the scheme in a characteristic interval $[t^{2n-\overline{m}}, t^{2n+2-\overline{m}}]$ are

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{(D^m e_c^u)_{2j}^{2n+2-\overline{m}} - (D^m e_c^u)_{2j}^{2n-\overline{m}}}{2\Delta t} + \dfrac{(D^m e_c^v)_{2j+1}^{2n+1-\overline{m}} - (D^m e_c^v)_{2j-1}^{2n+1-\overline{m}}}{2h} & = & 0, \\ \dfrac{(D^m e_c^v)_{2j+1}^{2n+1-\overline{m}} - (D^m e_c^v)_{2j+1}^{2n-1-\overline{m}}}{2\Delta t} + \dfrac{(D^m e_c^u)_{2j+2}^{2n-\overline{m}} - (D^m e_c^u)_{2j}^{2n-\overline{m}}}{2h} & = & 0, \end{array}\right. \tag{2.77}$$

on the coarse grid (i.e. for $j \leq -1$), and

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{(D^m e_f^u)_j^{2n+1} - (D^m e_f^u)_j^{2n}}{\Delta t} + \dfrac{(D^m e_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} - (D^m e_f^v)_{j-\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}}}{h} & = & 0, \quad j \geq 1, \\ \dfrac{(D^m e_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} - (D^m e_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{2n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \dfrac{(D^m e_f^u)_{j+1}^{2n} - (D^m e_f^u)_j^{2n}}{h} & = & 0, \quad j \geq 0, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{(D^m e_f^u)_j^{2n+2} - (D^m e_f^u)_j^{2n+1}}{\Delta t} + \dfrac{(D^m e_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} - (D^m e_f^v)_{j-\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}}}{h} & = & 0, \quad j \geq 1, \\ \dfrac{(D^m e_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} - (D^m e_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \dfrac{(D^m e_f^u)_{j+1}^{2n+1} - (D^m e_f^u)_j^{2n+1}}{h} & = & 0, \quad j \geq 0, \end{array}\right. \tag{2.78}$$

on the fine grid. Finally the discrete transmission conditions read :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (D^m e_c^V)_0^{2n+1-\overline{m}} - (D^m e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}-\overline{m}} & = & (D^m \varepsilon_r^v)^{2n+\frac{1}{2}-\overline{m}}, \\ (D^m e_c^V)_0^{2n+1-\overline{m}} - (D^m e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}-\overline{m}} & = & (D^m \varepsilon_r^v)^{2n+\frac{3}{2}-\overline{m}}, \\ (D^m e_c^U)_0^{2n+1-\overline{m}} - \dfrac{1}{2}\left((D^m e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}-\overline{m}} + (D^m e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}-\overline{m}}\right) & = & (D^m \varepsilon_r^u)^{2n+1-\overline{m}}. \end{array}\right. \tag{2.79}$$

If we assume that the exact solution (u, v) belongs to $\mathcal{C}_{a,T}^{m+1}$, using to a Taylor-Lagrange expansion, it is easy to show that the truncation errors appearing on the right hand side of (2.79) satisfy (this is the analogue of (2.56) of lemma 2.5.2)

$$\sup_{t^{2n} \leq T} |(D^m \varepsilon_r^u)^{2n+1}| \leq \mathcal{C}\ \alpha\ h\ \|u\|_{\mathcal{C}_{a,T}^{m+1}}, \qquad \sup_{t^{2n} \leq T} |(D^m \varepsilon_r^v)^{n+\frac{1}{2}}| \leq \mathcal{C}\ h\ \|(u,v)\|_{\mathcal{C}_{a,T}^{m+1}}. \tag{2.80}$$

If we define the discrete $L^\infty(0,T;L^2)$ norms of the discrete coarse derivatives as

$$\left|\begin{array}{rcl} \|D^m e^{u,h}\|_{\infty,2,T}^* & = & \sup\limits_{t^{2n+\frac{3}{2}} \leq T} \left(\|(D^m e_{c,h}^u)^{2n-\overline{m}}\| + \|(D^m e_{f,h}^u)^{2n-\overline{m}}\| \right) \\ \|D^m e^{u,h}\|_{\infty,2,T} & = & \|D^m e^{u,h}\|_{\infty,2,T}^* + \sup\limits_{t^{2n+\frac{3}{2}} \leq T} \|(D^m e_{f,h}^u)^{2n+1-\overline{m}}\| \\ \|D^m e^{v,h}\|_{\infty,2,T} & = & \sup\limits_{t^{2n+\frac{3}{2}} \leq T} \Big(\|(D^m e_{c,h}^v)^{2n+1-\overline{m}}\| \\ & & \qquad + \|(D^m e_{f,h}^v)^{2n+\frac{1}{2}-\overline{m}}\| + \|(D^m e_{f,h}^v)^{2n+\frac{3}{2}-\overline{m}}\| \Big), \end{array}\right. \tag{2.81}$$

we can apply the proof of section 2.5.3 to prove the following lemma :

Lemma 2.5.5 *If the solution of the continuous problem (2.7) belongs to $\mathcal{C}_{a,T}^{m+1}$ for $a > 0$ then*

$$\|D^m e^{u,h}\|_{\infty,2,T} + \|D^m e^{v,h}\|_{\infty,2,T} \leq \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1}\ T\ h^{\frac{1}{2}}\ \|(\partial_t^m u, \partial_t^m v)\|_{\mathcal{C}_{a,T}^1}. \tag{2.82}$$

2.5.4.2 The bootstrap argument

Step 1 : Derivation of an $\mathcal{O}(h)$ estimate In order to improve estimate (2.54), we note that the equations (2.55) can be rewritten as

$$\left\{\begin{array}{rcl} (e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}} - (e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}} &=& (\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{1}{2}} - (\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{3}{2}} &=& \mathcal{O}(\Delta t) \\ 2(e_c^V)_0^{2n+1} - \left((e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}} + (e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}}\right) &=& (\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{1}{2}} + (\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{3}{2}} &=& \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ (e_c^U)_0^{2n+1} - \dfrac{1}{2}\left((e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}} + (e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}\right) &=& (\varepsilon_r^u)^{2n+1} &=& \mathcal{O}(\Delta t^2). \end{array}\right. \tag{2.83}$$

Now, we reorganize the right hand side of (2.68) in a clever way so that the left hand sides of (2.83) appear (see remark 2.5.2)

$$\left|\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathcal{E}^{2n+2} - \mathcal{E}^{2n}}{2\Delta t} &=& -\dfrac{1}{2}\ (\varepsilon_r^u)^{2n+1}\left((e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}} + (e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}}\right) \\ && -\dfrac{1}{2}\left((\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{1}{2}} + (\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{3}{2}}\right)(e_c^U)_0^{2n+1} \\ && +\dfrac{1}{4}\left((\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{3}{2}} - (\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{1}{2}}\right)\left((e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}} - (e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}}\right). \end{array}\right.$$

Let us analyze the equality in detail. In order to bound the terms appearing on the right hand side by an L^2 norm of the error, we first point out that from ((2.47),(2.48)) it follows that

$$\left\{\begin{array}{rcl} (e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}} + (e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}} &=& (e_f^v)_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} + (e_f^v)_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} + h\dfrac{(e_f^u)_0^{2n+2} - (e_f^u)_0^{2n}}{2\Delta t}, \\ (e_c^U)_0^{2n+1} &=& \dfrac{1}{2}\left((e_c^u)_0^{2n+2} + (e_c^u)_0^{2n}\right), \\ (e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}} - (e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}} &=& \dfrac{1}{2}\left((e_f^u)_0^{2n+2} - (e_f^u)_0^{2n}\right). \end{array}\right. \tag{2.84}$$

It is important to notice that the quantity $(e_f^u)_0^{2n+1}$ does not appear in the expression (2.84). This fact allows us to work with the norm $\|e^{u,h}\|_{\infty,2,T}^*$ that uses only the even time steps of the error of u. This will permit us to use only inequalities (2.59) and (2.60) of lemma 2.5.3. Obtaining an estimate using the norm-star yields a similar estimate for the other norm because of the following lemma :

Lemma 2.5.6 *Assume the hypothesis of lemma 2.5.3. Then*

$$\sup_{t^{2n+\frac{3}{2}}\leq T} \|(e_{f,h}^u)^{2n+1}\|_{\infty,2,T} \leq \mathcal{C}\left(\|e^{u,h}\|_{\infty,2,T}^* + \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T} + h^{\frac{5}{2}}\|(u,v)\|_{\mathcal{C}_{a,T}^2}\right). \tag{2.85}$$

Proof: Using the first equality of (2.50) for $j \geq 1$ we get

$$(e_f^u)_j^{2n+1} = (e_f^u)_j^{2n} - \alpha\left((e_f^v)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} - (e_f^v)_{j-\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}}\right),$$

and in this way we also get

$$\|(e_{f,h}^u)^{2n+1}\|^2 \leq \mathcal{C}\left(\|(e_{f,h}^u)^{2n}\|^2 + \|(e_{f,h}^v)^{2n+\frac{1}{2}}\|^2\right) + \frac{h}{2}|(e_f^u)_0^{2n+1}|^2. \tag{2.86}$$

In order to estimate the last term we use the last equation in (2.51) to obtain

$$(e_f^u)_0^{2n+1} \;=\; -2(\varepsilon_r^u)^{2n+1} + (e_c^u)_0^{2n} + (e_c^u)_0^{2n+2} - \left((e_f^u)_0^{2n} + (e_f^u)_0^{2n+2}\right)/2.$$

Thus it is clear that

$$\frac{h}{2}|(e_f^u)_0^{2n+1}|^2 \;\leq\; \mathcal{C}\left(\|(e_{f,h}^u)^{2n}\|^2 + \|(e_{f,h}^u)^{2n+2}\|^2 + \|(e_{c,h}^u)^{2n}\|^2 + \|(e_{c,h}^u)^{2n+2}\|^2 + h|(\varepsilon_r^u)^{2n+1}|^2\right).$$

Introducing this inequality in (2.86) and using (2.57) of lemma 2.5.2 we obtain

$$\|(e_{f,h}^u)^{2n+1}\|^2 \;\leq\; \mathcal{C}\left({\|e^{u,h}\|_{\infty,2,T}^*}^2 + \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T}^2 + h^5\|(u,v)\|_{\mathcal{C}_{a,T}^2}^2\right),$$

which easily implies (2.85). □

Returning to (2.84), we use successively the trace lemma 2.5.4 and the inequalities (2.57) of lemma 2.5.2 to obtain

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|(e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}} + (e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}}\right| \left|(\varepsilon_r^u)^{2n+1}\right| + \frac{1}{2}\left|(e_c^U)_0^{2n+1}\right| \left|(\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{1}{2}} + (\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{3}{2}}\right| \leq \\
&\qquad \leq \frac{\mathcal{C}}{\alpha\sqrt{h}}\left(\|e^{u,h}\|_{\infty,2,T}^* + \alpha\|e^{v,h}\|_{\infty,2,T}\right)|(\varepsilon_r^u)^{2n+1}| + \\
&\qquad\quad \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{h}}\left(|(\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{1}{2}} + \|e^{u,h}\|_{\infty,2,T}^*(\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{3}{2}}|\right)\|e^{u,h}\|_{\infty,2,T}^* \\
&\qquad \leq \mathcal{C}\, h^{\frac{3}{2}}\, \|(u,v)\|_{\mathcal{C}_{a,T}^2}\left(\|e^{u,h}\|_{\infty,2,T}^* + \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T}\right).
\end{aligned} \tag{2.87}$$

The third term of the right hand side of (2.84) is more complicated to treat, and this is where we need the result on *coarse discrete derivatives*. Indeed, we can write, using estimate (2.56) of lemma 2.5.2 and the discrete trace lemma 2.5.4

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}|(\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{1}{2}} - (\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{3}{2}}|\;|(e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}} - (e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}}| \\
&\qquad = \frac{\Delta t}{4}|(\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{1}{2}} - (\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{3}{2}}|\;|(De_f^u)_0^{2n+1}| \\
&\qquad \leq \mathcal{C}\, h^{\frac{3}{2}}\, \|(u,v)\|_{\mathcal{C}_{a,T}^1}\, \|De^{u,h}\|_{\infty,2,T}^*.
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Substituting (2.87) and (2.88) into (2.84) and using inequalities (2.54) and (2.82) (for $m = 1$) from lemmas 2.5.1 and 2.5.5 we finally obtain

$$\frac{\mathcal{E}^{2n+2} - \mathcal{E}^{2n}}{2\Delta t} \leq \mathcal{C}\,(1-\alpha^2)^{-1}\, T\, h^2\, \|(u,v)\|_{\mathcal{C}_{a,T}^2}\, \|(u,v)\|_{\mathcal{C}_{a,T}^1}. \tag{2.89}$$

As a consequence, after summation over n, we have

$$\mathcal{E}^{2n} \;\leq\; \mathcal{C}\,(1-\alpha^2)^{-1}\, T^2\, h^2\, \|(u,v)\|_{\mathcal{C}_{a,T}^2}\, \|(u,v)\|_{\mathcal{C}_{a,T}^1},$$

and similar computations to those of the previous section lead to

$$\|e^{u,h}\|_{\infty,h,T}^* + \|e^{v,h}\|_{\infty,h,T} \;\leq\; \mathcal{C}_1\,(1-\alpha^2)^{-1}\, T\, h\, \|(u,v)\|_{\mathcal{C}_{a,T}^2}^{\frac{1}{2}}\, \|(u,v)\|_{\mathcal{C}_{a,T}^1}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.90}$$

That is, using (2.90), (2.85) and the proposition 2.5.1 we obtain the estimate (2.41) for $k = 1$; i.e. the scheme is of order h.

To initiate the recurrence that will be the object of step 2 of the proof, we shall also need similar estimates for the successive discrete coarse derivatives of the error $(e^{u,h}, e^{v,h})$ (where we assume more regularity for the exact solution). Such estimates are easily obtained along the same lines as (2.90). Clearly, if the exact solution belongs to $\mathcal{C}^{2+m}_{a,T}$ we have that

$$\begin{aligned} &\sup_{t^{2n}\leq T} |(D^m \varepsilon_r^u)^{2n+1-\overline{m}}| \;\leq\; \mathcal{C}\; \alpha^2\; h^2\; \|\partial_t^k u\|_{\mathcal{C}^2_{a,T}}, \\ &\sup_{t^{2n}\leq T} |(D^m \varepsilon_r^v)^{2n+\frac{1}{2}-\overline{m}} + (D^m \varepsilon_r^v)^{2n+\frac{3}{2}-\overline{m}}| \;\leq\; \mathcal{C}\; h^2\; \|(\partial_t^k u, \partial_t^k v)\|_{\mathcal{C}^2_{a,T}}, \end{aligned} \tag{2.91}$$

and so we can apply in the case of the mth discrete coarse derivatives $(D^m e^{u,h}, D^m e^{v,h})$ a proof similar to the one used for proving (2.90) and obtain

$$\begin{aligned} \|D^m e^{u,h}\|^*_{\infty,2,T} + \|D^m e^{v,h}\|_{\infty,2,T} \;&\leq\; \mathcal{C}\; (1-\alpha^2)^{-1}\; T\; h\times \\ &\qquad \|(\partial_t^m u, \partial_t^m v)\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{C}^2_{a,T}} \|(\partial_t^m u, \partial_t^m v)\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{C}^1_{a,T}}. \end{aligned} \tag{2.92}$$

Step 2 : The recurrence proof Assume by induction that

Assumption $\mathcal{R}_k$: If (u,v) belongs to $\mathcal{C}^{m+k+1}_{a,T}$, for $m \geq 0$:

$$\left| \begin{aligned} \|D^m e^{u,h}\|^*_{\infty,h,T} + \|D^m e^{v,h}\|_{\infty,h,T} \;&\leq\; \mathcal{C}_k\; (1-\alpha^2)^{-1}\; T\; h^{p_k}\; \times \\ &\qquad \|(\partial_t^m u, \partial_t^m v)\|^{\frac{1}{2^k}}_{\mathcal{C}^k_{a,T}} \prod_{j=1}^{k} \|(\partial_t^m u, \partial_t^m v)\|^{\frac{1}{2^j}}_{\mathcal{C}^{j+1}_{a,T}}. \end{aligned} \right.$$

In the sequel, the constant $\mathcal{C}$ should change from one line to another, but it is always independent of k. From (2.84), using (2.87) and (2.88) we obtain

$$\left| \begin{aligned} \frac{\mathcal{E}^{2n+2} - \mathcal{E}^{2n}}{2\Delta t} \;&\leq\; \mathcal{C}\; h^{\frac{3}{2}}\; \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^2_{a,T}} \Big(\|e^{u,h}\|^*_{\infty,h,T} + \|e^{v,h}\|_{\infty,h,T} \Big) + \\ &\qquad \mathcal{C}\; h^{\frac{3}{2}} \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^1_{a,T}} \Big(\|De^{u,h}\|^*_{\infty,h,T} + \|De^{v,h}\|_{\infty,h,T} \Big). \end{aligned} \right. \tag{2.93}$$

We assume that $(u,v) \in \mathcal{C}^{k+2}_{a,T}$. Using assumption $\mathcal{R}_k$ for $m=0$ and for $m=1$, we obtain

$$\left| \begin{aligned} \frac{\mathcal{E}^{2n+2} - \mathcal{E}^{2n}}{2\Delta t} \leq \mathcal{C}\; \mathcal{C}_k\; (1-\alpha^2)^{-1}\; T\; h^{p_k+\frac{3}{2}} \; \Bigg(&\|(u,v)\|_{\mathcal{C}^2_{a,T}}\; \|(u,v)\|^{\frac{1}{2^k}}_{\mathcal{C}^k_{a,T}} \prod_{j=1}^{k} \|(u,v)\|^{\frac{1}{2^j}}_{\mathcal{C}^{j+1}_{a,T}} + \\ &+ \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^1_{a,T}}\; \|(u,v)\|^{\frac{1}{2^k}}_{\mathcal{C}^{k+1}_{a,T}} \prod_{j=1}^{k} \|(u,v)\|^{\frac{1}{2^j}}_{\mathcal{C}^{j+2}_{a,T}} \Bigg). \end{aligned} \right.$$

From the inequalities

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{C}^2_{a,T}} \geq \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^1_{a,T}},\; \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^k_{a,T}} \leq \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^{k+1}_{a,T}} \text{ and } \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^{j+1}_{a,T}} \leq \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^{j+2}_{a,T}}\;,$$

we deduce that

$$\frac{\mathcal{E}^{2n+2} - \mathcal{E}^{2n}}{2\Delta t} \leq \mathcal{C}\; \mathcal{C}_k\; (1-\alpha^2)^{-1}\; T\; h^{p_k+\frac{3}{2}} \; \left(\|(u,v)\|_{\mathcal{C}^2_{a,T}}\; \|(u,v)\|^{\frac{1}{2^k}}_{\mathcal{C}^{k+1}_{a,T}} \prod_{j=1}^{k} \|(u,v)\|^{\frac{1}{2^j}}_{\mathcal{C}^{j+2}_{a,T}} \right).$$

Summing over n, we obtain after some manipulations (including a shift of index in the product) :

$$\mathcal{E}^{2n} \leq \mathcal{C}\ \mathcal{C}_k\ (1-\alpha^2)^{-1}\ T^2\ h^{p_k+\frac{3}{2}} \left(\|(u,v)\|_{\mathcal{C}^{k+1}_{a,T}}^{\frac{1}{2^k}} \prod_{j=1}^{k+1} \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^{j+1}_{a,T}}^{\frac{1}{2^{j-1}}} \right).$$

To conclude, it suffices to use once again inequalities (2.59) and (2.60) of lemma 2.5.3, that give

$$\|e^{u,h}\|^*_{\infty,h,T} + \|e^{v,h}\|_{\infty,h,T} \leq (\mathcal{C}\ \mathcal{C}_k)^{\frac{1}{2}}\ (1-\alpha^2)^{-1}\ T\ h^{\frac{p_k}{2}+\frac{3}{4}} \left(\|(u,v)\|_{\mathcal{C}^{k+1}_{a,T}}^{\frac{1}{2^{k+1}}} \prod_{j=1}^{k+1} \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^{j+1}_{a,T}}^{\frac{1}{2^j}} \right),$$

which is what we wanted to prove with

$$p_{k+1} = \frac{p_k}{2} + \frac{3}{4}, \quad C_{k+1} = (\mathcal{C}\ \mathcal{C}_k)^{\frac{1}{2}}.$$

In order to finish the recurrence proof we should obtain similar estimates for the mth discrete coarse derivative of the error assuming more regularity of the solution. Suppose that $(u,v) \in \mathcal{C}^{m+k+2}_{a,T}$. Using similar techniques to those used in the present section (and using $\mathcal{R}_k$ with m and $m+1$) it is easy to show that

$$\left| \begin{array}{rcl} \|D^m e^{u,h}\|^*_{\infty,h,T} + \|D^m e^{v,h}\|_{\infty,h,T} & \leq & \mathcal{C}_k\ (1-\alpha^2)^{-1}\ T\ h^{p_{k+1}} \times \\ & \times & \|(\partial_t^m u, \partial_t^m v)\|_{\mathcal{C}^{k+1}_{a,T}}^{\frac{1}{2^{k+1}}} \prod_{j=1}^{k+1} \|(\partial_t^m u, \partial_t^m v)\|_{\mathcal{C}^{j+1}_{a,T}}^{\frac{1}{2^j}}. \end{array} \right.$$

Since the result of step 1, namely estimates (2.90) and (2.92), is nothing but assumption $\mathcal{R}_1$, we see easily that

$$p_k = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^k}, \quad \mathcal{C}_k = \mathcal{C}\ \ (\mathcal{C}_1/\mathcal{C})^{\frac{1}{2^{k-1}}}\ .$$

As the sequence $\mathcal{C}_k$ is convergent, it is in particular bounded. Finally we obtain the following estimate :

$$\|e^{u,h}\|^*_{\infty,2,T} + \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T} \leq \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1}\ T\ h^{(\frac{3}{2}-\frac{1}{2^k})}\ |||(u,v)|||_{\mathcal{C}^k_{a,T}} \tag{2.94}$$

and using lemma 2.5.6 we complete the proof of the following lemma

Lemma 2.5.7 *If the solution of the continuous problem (2.7) belongs to $\mathcal{C}^k_{a,T}$ for $a > 0$, then*

$$\|e^{u,h}\|_{\infty,2,T} + \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T} \leq \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1}\ \ T\ h^{(\frac{3}{2}-\frac{1}{2^k})}\ |||(u,v)|||_{\mathcal{C}^k_{a,T}} + \mathcal{C}\ h^{\frac{5}{2}}\ \|(u,v)\|_{\mathcal{C}^2_{a,T}}. \tag{2.95}$$

Step 3 : case $(u,v) \in \mathbf{C}^\infty_{a,T}$ Under this hypothesis, and using the previous part of the proof, we have that

$$\begin{array}{rcl} \|e^{u,h}\|^*_{\infty,2,T} + \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T} & \leq & \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1}\ T\ h^{(\frac{3}{2}-\frac{1}{2^k})}\ |||(u,v)|||_{\mathcal{C}^k_{a,T}} \\ & \leq & \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1}\ T\ h^{(\frac{3}{2}-\frac{1}{2^k})}\ |||(u,v)|||_{\mathbf{C}^\infty_{a,T}} \end{array}$$

for all $k \in \mathbb{N}$. Passing to the limit when $k \to +\infty$ and using lemma 2.5.6, we get

Lemma 2.5.8 *If the solution of the continuous problem (2.7) belongs to* $\mathbf{C}^{\infty}_{a,T}$ *for* $a > 0$ *then*

$$\|e^{u,h}\|_{\infty,2,T} + \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T} \leq \mathcal{C}\,(1-\alpha^2)^{-1}\,T\,h^{\frac{3}{2}}\,|||(u,v)|||_{\mathbf{C}^{\infty}_{a,T}} + \mathcal{C}\,h^{\frac{5}{2}}\,\|(u,v)\|_{\mathcal{C}^2_{a,T}}. \tag{2.96}$$

Remark 2.5.2 *To see how (2.84) can be derived, we start from the two following identities*

$$\begin{aligned}(e_f^U)_0^{2n+1\pm\frac{1}{2}}(e_f^V)_0^{2n+1\pm\frac{1}{2}} &= (e_f^V)_0^{2n+1\pm\frac{1}{2}}\left[\frac{(e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}}+(e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}}{2}-(e_c^U)_0^{2n+1}\right]+\\ &\quad (e_f^V)_0^{2n+1\pm\frac{1}{2}}\left[(e_c^U)_0^{2n+1}\pm\frac{(e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}-(e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}}}{2}\right].\end{aligned}$$

Adding and identifying the consistence errors we obtain

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left((e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}}(e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}}+(e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}(e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}}\right) &= -\frac{1}{2}(\varepsilon_r^u)^{2n+1}\left((e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}}+(e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}}\right)+\\ &\quad \frac{1}{2}(e_c^U)_0^{2n+1}\left((e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}}+(e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}}\right)+\\ &\quad \frac{1}{4}\left((\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{3}{2}}-(\varepsilon_r^v)^{2n+\frac{1}{2}}\right)\left((e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}-(e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}}\right).\end{aligned}$$

Finally substracting the term $(e_c^U)_0^{2n+1}(e_c^V)_0^{2n+1}$ *we obtain the desired expression.*

Remark 2.5.3 *Let us explain why we can not use the same proof for scheme II. Following the same steps as for scheme I we rewrite the transmission conditions (2.52) in the following way*

$$\left\{\begin{aligned}(e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}-(e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}} &= (\tilde{\varepsilon}_r^u)^{2n+\frac{1}{2}}-(\tilde{\varepsilon}_r^u)^{2n+\frac{3}{2}} &&= \mathcal{O}(\Delta t)\\ 2(e_c^U)_0^{2n+1}-\left((e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}+(e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}}\right) &= (\tilde{\varepsilon}_r^u)^{2n+\frac{1}{2}}+(\tilde{\varepsilon}_r^u)^{2n+\frac{3}{2}} &&= \mathcal{O}(\Delta t^2)\\ (e_c^V)_0^{2n+1}-\frac{1}{2}\left((e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}}+(e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}}\right) &= (\tilde{\varepsilon}_r^v)^{2n+1} &&= \mathcal{O}(\Delta t^2),\end{aligned}\right. \tag{2.97}$$

in order to have two consistence errors of order two and only one of first order. We rewrite (2.76) using this last truncation errors obtaining

$$\left|\begin{aligned}\frac{1}{2\Delta t}\left(\mathcal{E}^{2n+2}-\mathcal{E}^{2n}\right) &= -\frac{1}{2}\left((e_f^U)_0^{2n+\frac{1}{2}}+(e_f^U)_0^{2n+\frac{3}{2}}\right)(\tilde{\varepsilon}_r^v)^{2n+1}\\ &\quad -\frac{1}{2}(e_c^V)_0^{2n+1}\left((\tilde{\varepsilon}_r^u)^{2n+\frac{1}{2}}+(\tilde{\varepsilon}_r^u)^{2n+\frac{3}{2}}\right)\\ &\quad +\frac{1}{4}\left((\tilde{\varepsilon}_r^u)^{2n+\frac{1}{2}}-(\tilde{\varepsilon}_r^u)^{2n+\frac{3}{2}}\right)\left((e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}}-(e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}}\right),\end{aligned}\right.$$

that is an analogue of (2.84) for the scheme II. The term that is most complicated to treat is, as for scheme I, the last one. However, its expression in this case is not as easy as for scheme I because

$$(e_f^V)_0^{2n+\frac{3}{2}}-(e_f^V)_0^{2n+\frac{1}{2}} = (e_f^v)_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}}-(e_f^v)_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}+\frac{h}{2}\frac{(e_f^u)_0^{2n+2}-2(e_f^u)_0^{2n+1}+(e_f^u)_0^{2n}}{\Delta t}.$$

In fact we can not use similar arguments as before to estimate the last term. We recall that for scheme I we had an simpler expression (third equation of (2.84)).

2.6 Comparison between theory and numerics

The results obtained in section 2.4 are compared in subsection 2.6.2 to those obtained in [38] using the Fourier technique (see subsection 2.6.1 for a brief recap of these results) and with some numerical results in subsection 2.6.3.

2.6.1 Fourier analysis results

This study is based on the behavior of plane wave solutions in the presence of a space-time mesh refinement. More precisely, we study the reflection and transmission through the artificial interface between the coarse grid and the fine grid of an incident wave in Ω_c, of amplitude 1 and frequency ω. One reflected wave and one transmitted wave each of frequency ω and of amplitude R_c (reflection coefficient) and T_c (transmission coefficient) respectively are generated in the coarse and fine grids respectively. Due to the aliasing phenomena (namely that the frequencies ω and $\omega + \frac{\pi}{\Delta t}$ coincide in the coarse grid but are distinct in the fine grid - see figure 2.3) a parasitic transmitted wave of frequency $\omega + \frac{\pi}{\Delta t}$ is generated in the fine grid. If ωh is small enough and α is less than 1, this parasitic wave is highly oscillatory in space (with space frequency $\frac{\pi}{h}$) and evanescent (i.e. decaying exponentially with distance from the interface) with a penetration depth $l(h,\alpha)$ which satisfies

$$l(h,\alpha) = \frac{h}{2\text{argch}(1/\alpha)} + \mathcal{O}(h^3). \tag{2.98}$$

The amplitude of this parasitic wave at the interface is given by a coefficient T_c^p, the parasitic transmission coefficient. The particular solution one looks for is thus given by the following expressions for u (the wave numbers k_c and k_f appearing in the formula below depend on α and h and are deduced from the dispersion relation on each grids - see [38] or section 2.7 for more details)

$$\begin{cases} (u_c)_{2j}^{2n} = e^{i(k_c x_{2j} - \omega t^{2n})} + R_c\, e^{i(-k_c x_{2j} - \omega t^{2n})}, & j \le 0, \\ (u_f)_j^n = T_c\, e^{i(k_f x_j - \omega t^n)} + T_c^p\, (-1)^{j+n}\, e^{-i\omega t^n}\, e^{-\frac{x_j}{l(h,\alpha)}}, & j \ge 0. \end{cases}$$

The expressions for v are similar. The unknown coefficients R_c, T_c and T_c^p can be determined from the coupling equations (2.21) or (2.22). As the interface $x = 0$ is purely artificial, if we consider the continuous case, we should find

$$R_c = 0, \qquad T_c = 1, \qquad T_c^p = 0,$$

the *physical values* of the parameters. In the discrete case the coefficients R_c, T_c and T_c^p depend only on ωh and α, and, for fixed $0 < \alpha < 1$, their Taylor expansions for small ωh are given by

$$\begin{aligned} R_c(\omega h,\alpha) &= \frac{1}{16}\left(\alpha^2 - 3\right)(\omega h)^2 + \mathcal{O}((\omega h)^3), \\ T_c(\omega h,\alpha) &= 1 - \frac{3}{16}\left(\alpha^2 + 1\right)(\omega h)^2 + \mathcal{O}((\omega h)^3), \\ T_c^p(\omega h,\alpha) &= \frac{1}{2}\frac{i\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}(\omega h) + \mathcal{O}((\omega h)^3), \end{aligned} \tag{2.99}$$

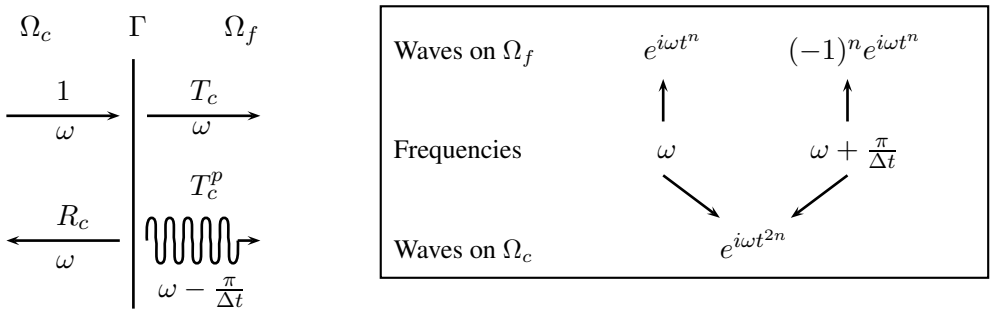


FIG. 2.3 – Schematic representation of the aliasing phenomena

if scheme I is used and

$$
\begin{aligned}
R_c(\omega h, \alpha) &= -\frac{i\sqrt{1-\alpha^2}}{4}(\omega h) + \mathcal{O}(\omega^2 h^2), \\
T_c(\omega h, \alpha) &= 1 - \frac{i\sqrt{1-\alpha^2}}{4}(\omega h) + \mathcal{O}(\omega^2 h^2), \\
T_c^p(\omega h, \alpha) &= -1 + \frac{i\sqrt{1-\alpha^2}}{4}(\omega h) + \mathcal{O}(\omega^2 h^2),
\end{aligned}
\tag{2.100}
$$

if scheme II is used.

Remark 2.6.1 *When one considers the limit case $\alpha = 1$, one can show that the parasitic wave becomes propagative ($l(h, \alpha)$ tends to infinity when α tends to one) and we have for both schemes*

$$
R_c = 0, \qquad T_c = 1 + \mathcal{O}(\omega^2 h^2), \qquad T_c^p = -1 + \mathcal{O}(\omega^2 h^2).
$$

2.6.2 Comparing our results with the Fourier analysis results

Let us summarize the main information provided by the Fourier analysis. First of all we consider scheme I with $\alpha < 1$. In this case

- the discrete reflection and transmission coefficients are second order approximations of the physical ones. The contribution to the error is of order two in the L^∞ and $L^p,\ p > 1$, norms.
- The L^∞ norm of the error coming from the parasitic transmitted wave is approximately (for h small enough)

$$
\frac{\alpha^2 \omega h}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \tag{2.101}
$$

that is, the method should be first order accurate for this norm. Due to the exponential decay of this wave, the L^p error is approximately

$$
\left(\int_0^\infty \frac{(\alpha^2 \omega h)^p}{(1-\alpha^2)^{\frac{p}{2}}}\, e^{-\frac{2px\,\mathrm{argch}(\alpha^{-1})}{h}}\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \approx \frac{h^{\frac{p+1}{p}}}{(1-\alpha)^{\frac{p+1}{2p}}}, \qquad (\alpha \longrightarrow 1). \tag{2.102}
$$

Taking $p = 2$ we remark that the order of convergence is in conformity with that given by theorem 2.4.1 and the comments following it. It seems that the Fourier techniques allow to obtain a sharper estimate for the dependence on $1 - \alpha$ when α goes to 1. The best estimate is obtained in the L^1-norm, where the error should be of order two.

– We also remark that this last error is localized at the artificial interface. In effect, computing the L^∞ and $L^p,\ p \geq 1$, norms on the complement of a neighborhood of the artificial interface, this error is exponentially decreasing with the space step. The method should be of order two in these norms.

Concerning scheme II with $\alpha < 1$, the Fourier analysis allows us to make the following conclusions :

– the error coming from the reflected and (not parasitic) transmitted waves is of order one in the L^∞ and $L^p,\ p \geq 1$, norms.

– the amplitude of the parasitic transmitted wave does not go to zero when the discretization parameters go to zero. This means that the method does not converge in the L^∞ norm. Due to the exponential decay of this wave, a simple computation allows us to estimate its L^p error

$$\frac{h^{\frac{1}{p}}}{\operatorname{argch}^{\frac{1}{p}}(\alpha^{-1})} \approx \frac{h^{\frac{1}{p}}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{2p}}}, \qquad (\alpha \longrightarrow 1).$$

Again, the results obtained for $p = 2$ are coherent with those of theorem 2.4.1 and the comments given later on. The L^1 error should be of order one. The estimate for the dependence on $1 - \alpha$ seems to be more precise with the Fourier techniques.

– As for scheme I, this last error is localized. If we consider the L^∞ and $L^p,\ p \geq 1$, norms on the complement of a neighborhood of the point $x = 0$, the method should be of first order, because the error provided by the transmitted parasitic wave is exponentially decreasing.

For $\alpha = 1$, the amplitude of the transmitted parasitic wave does not tend to zero and the wave is not evanescent. Neither method should be strongly convergent.

2.6.3 Numerical results

In this section we will obtain numerically the orders of convergence of schemes I and II for several norms to compare them with the theoretical ones provided by theorem 2.4.1 and the Fourier analysis. We consider the 1-D wave equation

$$\left\{\begin{array}{lllll} \dfrac{\partial u}{\partial t} & + & \dfrac{\partial v}{\partial x} & = & 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} & + & \dfrac{\partial u}{\partial x} & = & 0 \end{array}\right., \ (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \quad \left\{\begin{array}{lll} u(x,t=0) & = & u_0(\frac{x-x_0}{L}) \\ v(x,t=0) & = & 0 \end{array}\right., \ x \in \mathbb{R}, \tag{2.103}$$

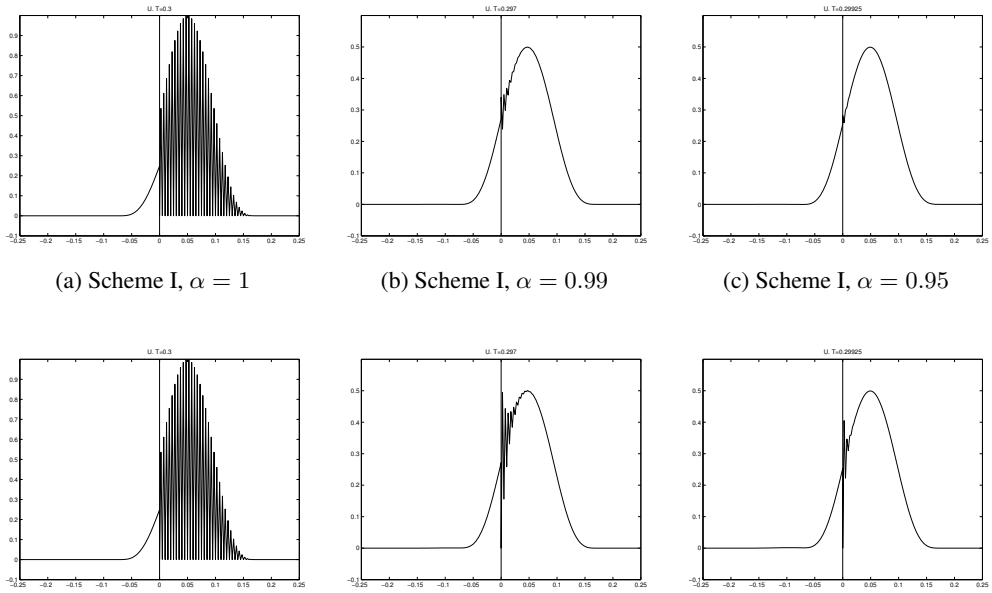
where $x_0 = -0.25$, $L = 0.25$ and

$$u_0(x) = \left\{\begin{array}{ll} 256(x-1/2)^4(x+1/2)^4 & \text{if } x \in [-1/2, 1/2], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{array}\right.$$

The exact solution of the problem is given by

$$\left|\begin{array}{lll} u(x,t) & = & \frac{1}{2}u_0\left((x-x_0-t)/L\right) + \frac{1}{2}u_0\left((x-x_0+t)/L\right), \\ v(x,t) & = & \frac{1}{2}u_0\left((x-x_0-t)/L\right) - \frac{1}{2}u_0\left((x-x_0+t)/L\right). \end{array}\right. \tag{2.104}$$

The computational domain for the numerical resolution of the equations is the interval $\Omega = [-0.5, 0.5]$. We use transparent boundary conditions to simulate the unbounded domain. A space step of size h is used in $\Omega_c = [-0.5, 0]$ and of size $h/2$ in $\Omega_f = [0, 0.5]$. We recall that both schemes also depend on the parameter $\alpha = \Delta t/h$ that we must choose in the interval $(0, 1)$ to ensure the stability of the method. In practice, it is interesting to choose α to be as large as possible to reduce the computational costs. The



(a) Scheme I, $\alpha = 1$ (b) Scheme I, $\alpha = 0.99$ (c) Scheme I, $\alpha = 0.95$

(d) Scheme II, $\alpha = 1$ (e) Scheme II, $\alpha = 0.99$ (f) Scheme II, $\alpha = 0.95$

FIG. 2.4 – Dependence on α of u^h. $T \approx 0.3$. Zoom around $x = 0$

problem is that all the error and stability estimates given in section 2.4 blow up when α tends to 1. In figures 2.4 and 2.5 we can notice this phenomenon as well. For $\alpha = 1$ both schemes give us similar results. A high frequency wave appears when the waves cross the artificial boundary (see figures 2.4(a) and 2.4(d)). Even though, the method seems to be L^2 stable. Taking $\alpha < 1$ most of oscillatory parasitic waves become evanescent and we obtain a good solution if we remove the behavior near $x = 0$. The penetration depth of the transmitted parasitic wave increases as α goes to the limit value 1. As we can see in figures 2.4(c) and 2.4(f), $\alpha = 0.95$ is sufficient to obtain a good result. We can also see that the amplitude of the parasitic wave is higher for the scheme II than for scheme I (see figure 2.5). In particular, scheme II does not converge in the L^∞ norm (see remark 2.3.1).

In order to measure the error between the exact solution (u, v) and the numerical solution (u^h, v^h) we consider the discrete equivalent of the norms :

$$\begin{aligned} &L^\infty_t([0,T], L^p_x(\Omega)), \quad L^\infty_t([0,T], L^\infty_x(\Omega)), \\ &L^\infty_t([0,T], L^p_x(\Omega^\star)), \quad L^\infty_t([0,T], L^\infty_x(\Omega^\star)), \end{aligned} \tag{2.105}$$

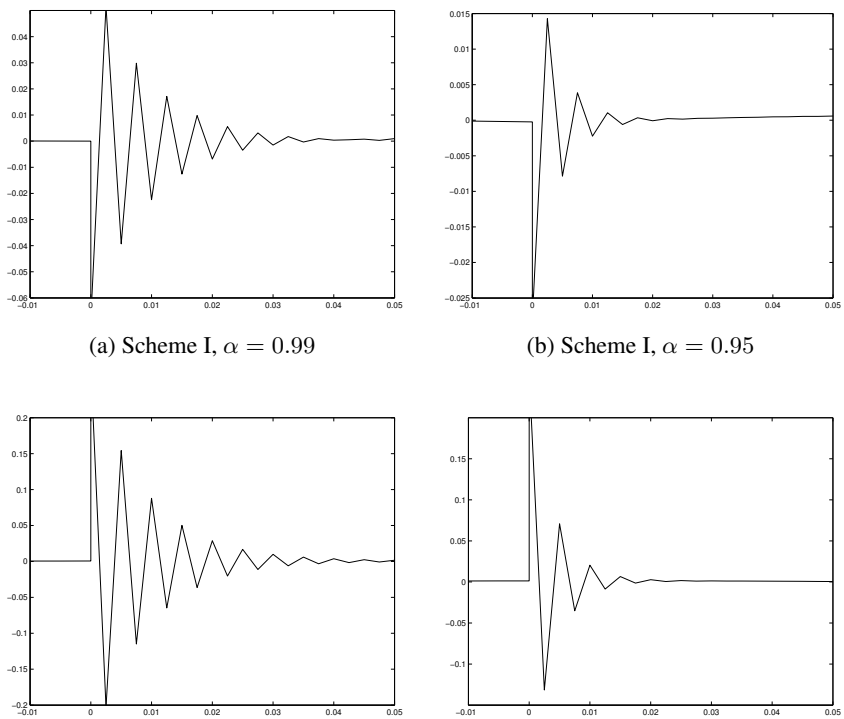
(with $\Omega^\star = \Omega \setminus [0, 0.1]$, and $p \in \mathbb{N}$) that we will denote by

$$\|e^h\|_{\infty,p,T}, \qquad \|e_h\|_{\infty,T}, \qquad \|e_h\|^\star_{\infty,p,T}, \qquad \|e_h\|^\star_{\infty,T}.$$

Let us assume that the error has approximately the form

$$\|e_h\| \approx \mathcal{C}(u,v)(1-\alpha)^{-k_2} h^{k_1}. \tag{2.106}$$

Fixing a value of the parameter α and computing the different norms at $T = 0.5$ (where the wave has already crossed the artificial interface) for $h = 0.005$, $0.00\hat{3}$, 0.0025 and 0.002 we obtain the value of k_1



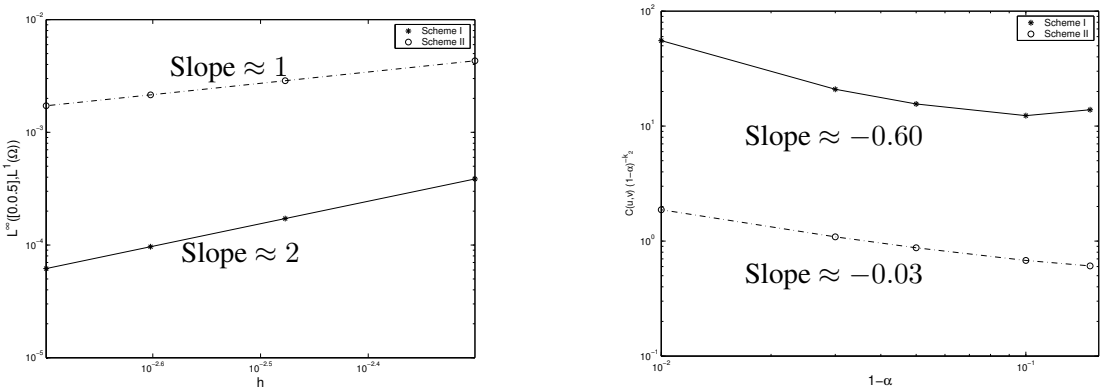
(a) Scheme I, $\alpha = 0.99$

(b) Scheme I, $\alpha = 0.95$

(c) Scheme II, $\alpha = 0.99$

(d) Scheme II, $\alpha = 0.95$

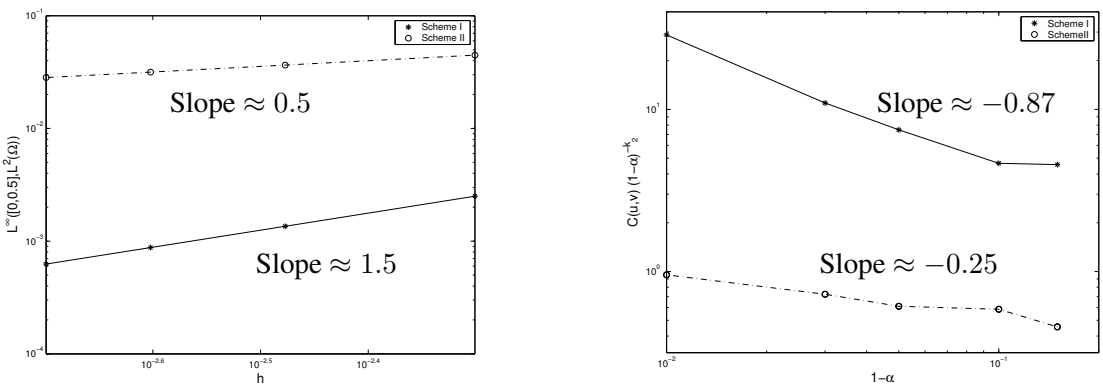
FIG. 2.5 – Dependence on α of $u^h - u$. $T \approx 0.3$. Zoom around $x = 0$



(a) Norm of the error

(b) Dependence on $1-\alpha$

FIG. 2.6 – $L^\infty(0,T,L^1(\Omega))$ norm with $\alpha = 0.95$



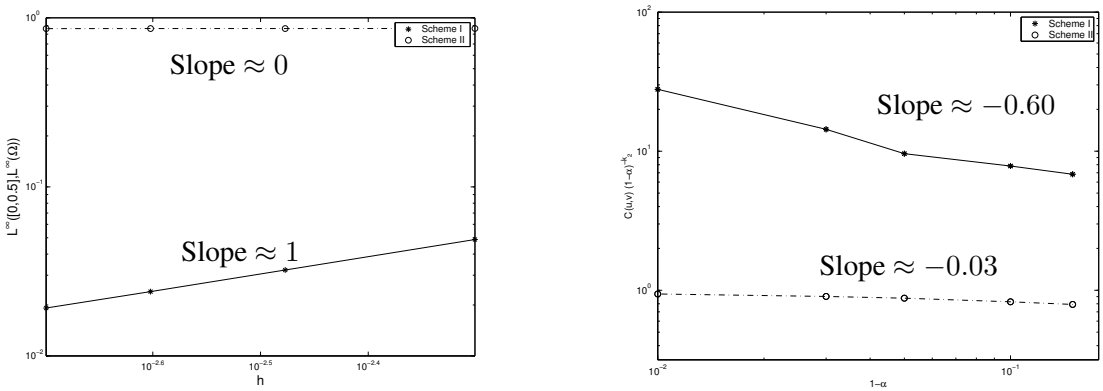
(a) Norm of the error

(b) Dependence on $1-\alpha$

FIG. 2.7 – $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$ norm with $\alpha = 0.95$

for each norm. The results for $\alpha = 0.95$, using the discrete $L^\infty_t([0,T],L^1_x(\Omega))$, $L^\infty_t([0,T],L^2_x(\Omega))$, and $L^\infty_t([0,T],L^\infty_x(\Omega))$ norms are plotted in figures 2.6(a), 2.7(a) and 2.8(a), respectively. We can see that the slopes are coherent with the estimates predicted in section 2.4 and subsection 2.6.2. As we pointed out in section 2.6.2, the most important part of the error is localized at the interface as we can see in figure 2.9, where the $L^\infty_t([0,T],L^2_x(\Omega^\star))$ and $L^\infty_t([0,T],L^p_x(\Omega^\star))$ errors have been computed.

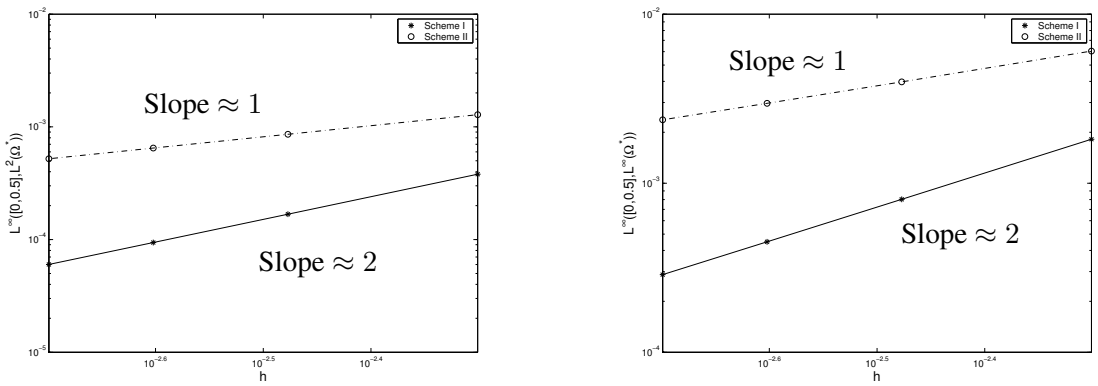
The same computations have been done with $\alpha = 0.85, 0.9, 0.97$ and 0.99 and the same orders of convergence have been obtained (see table 2.1). This allows us to compute the dependence on α of the method when this parameter goes to 1. In figures 2.6(b), 2.7(b) and 2.8(b), we represent the results obtained for the $L^\infty_t([0,T],L^1_x(\Omega))$, $L^\infty_t([0,T],L^2_x(\Omega))$, and $L^\infty_t([0,T],L^\infty_x(\Omega))$ norms that are in correspondence with the Fourier analysis (that gives sharper estimates) and in consequence, also with theorem 2.4.1. We have also noticed that the hypotheses demanded in theorem 2.4.1 concerning the smoothness of the exact solution of (2.7) are in practice too strong. We have observed the same rates of convergence for initial conditions that are $\mathcal{C}_2(\mathbb{R}\times[0,T])^2$.



(a) Norm of the error

(b) Dependence on $1-\alpha$

FIG. 2.8 – $L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))$ norm with $\alpha = 0.95$



(a) $L^\infty(0,T,L^2(\Omega^*))$ norm of the error

(b) $L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega^*))$ norm of the error

FIG. 2.9 – Convergence of both schemes with $\alpha = 0.95$

	$\|e_h\|_{L^1}$	$\|e_h\|_{L^2}$	$\|e_h\|_{L^\infty}$	$\|e_h\|_{L^2_*}$	$\|e_h\|_{L^\infty_*}$
Scheme I	2	1.5	1	2	2
Scheme II	1	0.5	n.c.	1	1

TAB. 2.1 – Observed orders of convergence

2.7 Rappel des Résultats par Fourier

Dans cette section on rappelle l'analyse du schéma I par des techniques de Fourier présentée dans [38, 46] qui sera généralisée dans la section 3.5.2. On presente aussi l'étude pour le schéma II. Il s'agit d'étudier le comportement d'un certain type de solutions, qu'on appellera des ondes planes.

2.7.1 Le cas continu

Pour une fréquence $\omega \in \mathbb{R}$ donnée on considère des solutions du système (7.14) sous la forme

$$u(x,t) = U\, e^{\mathbf{i}(kx-\omega t)}, \qquad v(x,t) = V\, e^{\mathbf{i}(kx-\omega t)}. \tag{2.107}$$

En introduisant (2.107) dans (7.14) on obtient

$$\begin{pmatrix} \omega & -k \\ -k & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour avoir une solution différente de la solution triviale, le déterminant de cette matrice doit s'annuler, c'est à dire, k et ω doivent satisfaire la relation de dispersion

$$\omega^2 = k^2. \tag{2.108}$$

Ainsi, on a deux possibilités :

- soit $k(\omega) = \omega$ avec $U = V$, ce qui correspond à une onde qui se propage vers la droite,
- soit $k(\omega) = -\omega$ avec $U = -V$, ce qui correspond à une onde qui se propage vers la gauche.

2.7.2 Le cas discret sur le maillage grossier

Dans le cas discret, et sur le maillage grossier, étant donné que le schéma numérique est invariant pour un pas de temps Δt_c, pour une fréquence $\omega \in \mathbb{R}$ donné on pose

$$(u_c)_{2j}^{2n} = U\, e^{\mathbf{i}(kx_{2j}-\omega t^{2n})}, \qquad (v_c)_{2j+1}^{2n+1} = V\, e^{\mathbf{i}(kx_{2j+1}-\omega t^{2n+1})}. \tag{2.109}$$

Cette expression est une solution de (3.52) si et seulement si

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2}{\Delta t_c}\sin\left(\dfrac{\omega\Delta t_c}{2}\right) & -\dfrac{2}{\Delta x_c}\sin\left(\dfrac{k\Delta x_c}{2}\right) \\ -\dfrac{2}{\Delta x_c}\sin\left(\dfrac{k\Delta x_c}{2}\right) & \dfrac{2}{\Delta t_c}\sin\left(\dfrac{\omega\Delta t_c}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour avoir une solution différente de la solution triviale, il faut que le déterminant de la matrice soit nul, c'est à dire, il faut que k et ω vérifient la relation de dispersion discrète

$$\frac{4}{\Delta t_c^2}\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t_c}{2}\right) = \frac{4}{\Delta x_c^2}\sin^2\left(\frac{k\Delta x_c}{2}\right). \tag{2.110}$$

Grâce à la périodicité des fonctions trigonométriques qui interviennent dans l'expression, il est clair que les fréquences $\omega_p = \omega + \frac{2\pi}{\Delta t_c}p$ avec $p \in \mathbb{Z}$ nous donnent les mêmes solutions que ω (voir la figure 2.10). C'est pour ceci qu'on peut restreindre notre étude à

$$-\frac{\pi}{\Delta t_c} \leq \omega \leq \frac{\pi}{\Delta t_c},$$

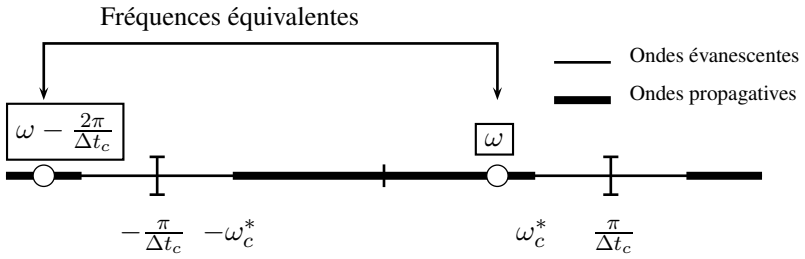


FIG. 2.10 – Schéma des fréquences sur un maillage uniforme

qui sont les fréquences représentables par le maillage grossier. De la même façon le vecteur d'onde k est définie modulo $\frac{2\pi}{\Delta x_c}$. Dans le cadre discret on doit distinguer deux cas selon la valeur de la fréquence ω

– *Des ondes propagatives :* Supposons que

$$\left|\alpha^{-1}\sin\left(\frac{\omega\Delta t_c}{2}\right)\right| \leq 1,$$

c'est à dire,

$$\begin{aligned}\omega &\in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\omega^* + \frac{2\pi k}{\Delta t_c}, \omega^* + \frac{2\pi k}{\Delta t_c}\right] \\ &\equiv [-\omega_c^*, \omega_c^*] + \frac{2\pi}{\Delta t_c}\mathbb{Z},\end{aligned}$$

où la fréquence critique pour le maillage grossier ω_c^* est donnée par

$$\omega_c^* = \frac{2}{\Delta t_c}\arcsin(\alpha). \tag{2.111}$$

Alors, les solutions de (2.110) sont réelles et données par l'expression

$$\left\{\begin{aligned} k &= \pm\, k^{prop}_{\Delta x_c,\Delta t_c}(\omega) + \frac{2\pi}{\Delta x_c}p, \quad p\in\mathbb{Z}, \\ k^{prop}_{\Delta x_c,\Delta t_c}(\omega) &= \frac{2}{\Delta x_c}\arcsin\left(\alpha^{-1}\sin\left(\frac{\omega\Delta t_c}{2}\right)\right),\end{aligned}\right. \tag{2.112}$$

avec $U = \pm V$. Dans ce cas on aura des ondes propagatives vers la droite ou vers la gauche dépendant du signe choisi.

– *Des ondes évanescentes :* Dans l'autre cas on a

$$\left|\alpha^{-1}\sin\left(\frac{\omega\Delta t_c}{2}\right)\right| > 1,$$

ce qui est équivalent à

$$\omega \notin [-\omega_c^*, \omega_c^*] + \frac{2\pi}{\Delta t_c}\mathbb{Z}.$$

Par conséquent, les solutions de (2.110) sont complexes et données par l'expression

$$\left\{\begin{aligned} k &= \pm\, k^{evan}_{\Delta x_c,\Delta t_c} + \frac{2\pi}{\Delta x_c}p, \quad p\in\mathbb{Z}, \\ k^{evan}_{\Delta x_c,\Delta t_c}(\omega) &= \frac{\pi}{\Delta x_c}\mathrm{sign}(\omega) + \mathbf{i}\,\xi_{\Delta x_c}(\omega\,\Delta t_c), \\ \xi_{\Delta x_c}(\omega\,\Delta t_c) &= \frac{2}{\Delta x_c}\mathrm{argch}\left(\alpha^{-1}\sin\left(\frac{\omega\Delta t_c}{2}\right)\right),\end{aligned}\right. \tag{2.113}$$

avec $U = \pm V$. Les ondes associées auront un comportement exponentiellement décroissant dans la direction $x > 0$ ou $x < 0$ selon le signe qu'on considère.

Remarque 2.7.1 *Étant donné qu'on s'intéresse à des solutions bornées, ce type d'ondes n'ont un sens que dans le demi-espace où elles sont décroissantes. Sa profondeur de pénétration est donnée par*

$$l_{\Delta x_c}(\omega\ \Delta t_c) \quad = \quad \xi_{\Delta x_c}(\omega\ \Delta t_c)^{-1}$$

et son comportement est hautement oscillatoire étant donné que la partie réelle du nombre d'onde k est $2\pi/\Delta x_c$. Elles joueront un rôle important lorsqu'on considère le problème avec deux maillages avec des pas de discrétisation différents.

Ainsi, on définit le nombre d'onde associé à une fréquence $\omega \in [-\frac{\pi}{\Delta t_c}, \frac{\pi}{\Delta t_c}]$ par

$$k^{\pm}_{c,\Delta x_c}(\omega) \quad = \quad \begin{cases} \pm\, k^{prop}_{\Delta x_c,\Delta t_c}(\omega), & \text{si } |\omega| \leq \omega_c^* \\ \pm\, k^{evan}_{\Delta x_c,\Delta t_c}(\omega), & \text{si } \omega_c^* \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta t_c} \end{cases} \tag{2.114}$$

Ainsi, les ondes associées à $k^{+}_{c,\Delta x_c}$ sont

- propagatives vers la droite si $|\omega| \leq \omega_c^*$,
- exponentiellement décroissantes dans la direction $x > 0$ si $\omega_c^* < |\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta t_c}$.

Si on considère $k^{-}_{c,\Delta x_c}$ on a

- des ondes qui se propagent vers la gauche si $|\omega| \leq \omega_c^*$,
- des ondes exponentiellement décroissantes dans la direction $x < 0$ si $\omega_c^* < |\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta t_c}$.

Pour effectuer l'étude avec les deux maillages, il est utile de définir le vecteur d'onde sur $\mathbb{R}$ tout entier par

$$k^{\pm}_{c,\Delta x_c}(\omega) \quad = \quad \frac{2\pi}{\Delta x_c} + k^{\pm}_{c,\Delta x_c}(\omega - \frac{2\pi}{\Delta t_c}). \tag{2.115}$$

Remarque 2.7.2 *Notons que le nombre d'onde ainsi défini est une fonction complexe continue (dans la figure 2.11 on peut voir sa partie réelle en noir et sa partie imaginaire en gris pour $\alpha = 0.9$). Sa partie réelle et imaginaire admettent un développement de Taylor classique autour de toute fréquence ω dans l'ensemble*

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\, \omega_c^* + \frac{2\pi l}{\Delta t_c},\ l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Autour de ces points spéciaux cette fonction admet deux développements différents (selon qu'on se rapproche vers la droite ou vers la gauche) en utilisant des puissances demi-entières.

2.7.3 Le cas discret sur le maillage fin

Sur le maillage fin, le schéma numérique n'est pas invariant pour le pas de temps fin Δt_f, mais toujours pour le pas de temps grossier Δt_c (voir les équations de couplage (3.41)). Pour cette raison, pour une fréquence ω donnée, on doit considérer des ondes planes du type

$$\begin{aligned} (u_f)_j^{2n} &= U^P\ e^{\mathbf{i}(kx_j - \omega t^{2n})}, & (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} &= V^P\ e^{\mathbf{i}(kx_{j+\frac{1}{2}} - \omega t^{2n+\frac{1}{2}})}, \\ (u_f)_j^{2n+1} &= U^I\ e^{\mathbf{i}(kx_j - \omega t^{2n+1})}, & (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} &= V^I\ e^{\mathbf{i}(kx_{j+\frac{1}{2}} - \omega t^{2n+\frac{3}{2}})}. \end{aligned} \tag{2.116}$$

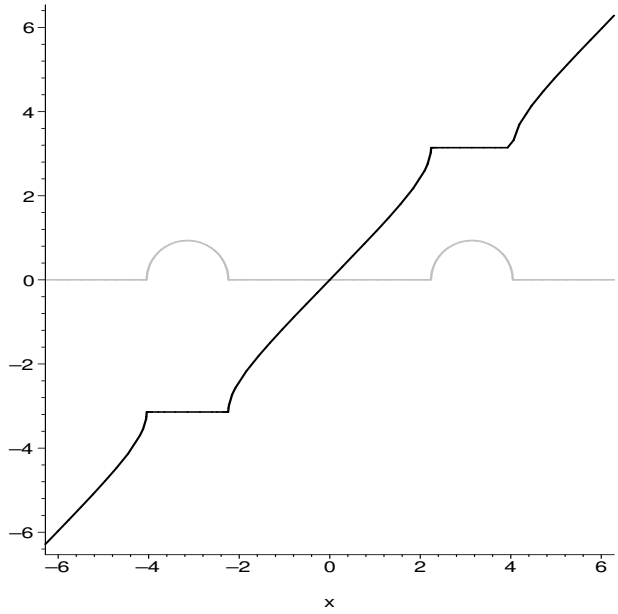


FIG. 2.11 – Partie réelle (en noir) et imaginaire (en gris) du nombre d'onde $k^{+}_{c,\Delta x_c}$ pour différentes fréquences et $\alpha = 0.9$

On introduit ces expressions dans (3.53) pour étudier les relations que doivent satisfaire le nombre d'onde k et le vecteur $[U^P, V^P, U^I, V^I]$. On a

$$\begin{pmatrix} -e^{\mathbf{i}\frac{\omega\Delta t_f}{2}} & 2\mathbf{i}\alpha\sin\left(\frac{k\Delta x_f}{2}\right) & e^{-\mathbf{i}\frac{\omega\Delta t_f}{2}} & 0 \\ 2\mathbf{i}\alpha\sin\left(\frac{k\Delta x_f}{2}\right) & e^{-\mathbf{i}\frac{\omega\Delta t_f}{2}} & 0 & -e^{\mathbf{i}\frac{\omega\Delta t_f}{2}} \\ e^{-\mathbf{i}\frac{\omega\Delta t_f}{2}} & 0 & -e^{\mathbf{i}\frac{\omega\Delta t_f}{2}} & 2\mathbf{i}\alpha\sin\left(\frac{k\Delta x_f}{2}\right) \\ 0 & -e^{\mathbf{i}\frac{\omega\Delta t_f}{2}} & 2\mathbf{i}\alpha\sin\left(\frac{k\Delta x_f}{2}\right) & e^{-\mathbf{i}\frac{\omega\Delta t_f}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^P \\ V^P \\ U^I \\ V^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Pour avoir une solution non-triviale, il faut que le déterminant de la matrice soit nul, c'est à dire,

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\alpha^2\sin^2\left(\frac{k\Delta x_f}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t_f}{2}\right)\right]\left[\alpha^2\sin^2\left(\frac{k\Delta x_f}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\omega\Delta t_f}{2}\right)\right] \\ &= \left[\alpha^2\sin^2\left(\frac{k\Delta x_f}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t_f}{2}\right)\right]\left[\alpha^2\sin^2\left(\frac{k\Delta x_f}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\left(\omega - \frac{2\pi}{\Delta t_c}\right)\Delta t_f}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Pour continuer l'étude et en reprenant les calculs faits sur le maillage grossier, on définit les fonctions $k^{\pm}_{f,\Delta x_f}(\omega)$ comme les fonctions $k^{\pm}_{c,\Delta x_c}(\omega)$ en remplaçant les indices c par f (et donc en particulier Δx_c par Δx_f et Δt_c par Δt_f). Alors, il y a quatre possibilités :

$$\left|\begin{aligned} k &= k^{+}_{f,\Delta x_f}(\omega), \\ [U^P, V^P, U^I, V^I] &= [\,W\,,\,W\,,\,W\,,\,W\,], \end{aligned}\right.$$

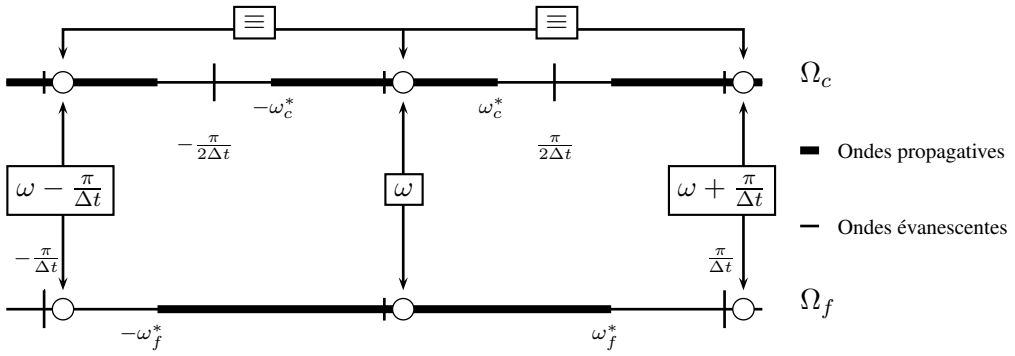


FIG. 2.12 – Fréquences équivalentes sur Ω_c qui sont différentes sur Ω_f

$$\left|\begin{array}{rcl} k & = & k^-_{f,\Delta x_f}(\omega), \\ [U^P, V^P, U^I, V^I] & = & [\, W \,,\, -W \,,\, W \,,\, -W \,], \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{rcl} k & = & k^+_{f,\Delta x_f}(\omega - \frac{2\pi}{\Delta t_c}), \\ [U^P, V^P, U^I, V^I] & = & [\, W \,,\, \mathbf{i}\, W \,,\, -W \,,\, -\mathbf{i}\, W \,] \\ & = & [\, W\, e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{\Delta t_c} t^{2n}} \,,\, W\, e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{\Delta t_c} t^{2n+\frac{1}{2}}} \,,\, W\, e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{\Delta t_c} t^{2n+1}} \,,\, W\, e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{\Delta t_c} t^{2n+\frac{3}{2}}} \,], \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{rcl} k & = & k^-_{f,\Delta x_f}(\omega - \frac{2\pi}{\Delta t_c}), \\ [U^P, V^P, U^I, V^I] & = & [\, W \,,\, -\mathbf{i}\, W \,,\, -W \,,\, \mathbf{i}\, W \,] \\ & = & [\, W\, e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{\Delta t_c} t^{2n}} \,, -W\, e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{\Delta t_c} t^{2n+\frac{1}{2}}} \,,\, W\, e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{\Delta t_c} t^{2n+1}} \,, -W\, e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{\Delta t_c} t^{2n+\frac{3}{2}}} \,]. \end{array}\right.$$

Il suffit d'introduire ces expressions dans (2.116) pour se rendre compte que le fait d'avoir un pas de temps deux fois plus petit sur Ω_f que sur Ω_c nous oblige à introduire une nouvelle fréquence $\omega - \frac{2\pi}{\Delta t_c}$ sur la région fine pour pouvoir exprimer la solution. Notons que les fréquences ω et $\omega - \frac{2\pi}{\Delta t_c}$ sont équivalentes sur le maillage grossier, mais différentes sur le fin. Ce phénomène est expliqué dans la figure 2.12 où on représente l'ensemble de fréquences $\mathbb{R}$ vu depuis le maillage grossier et fin. L'ensemble de fréquences représentables sur Ω_f (l'intervalle $[-\frac{\pi}{\Delta t_f}, \frac{\pi}{\Delta t_f}]$) est deux fois plus grand que l'analogue sur Ω_c.

Remarque 2.7.3 *On remarque que, en particulier, on a la relation*

$$k^{\pm}_{f,\Delta x_f}(\omega) \;=\; \frac{\Delta x_c}{\Delta x_f}\, k^{\pm}_{c,\Delta x_c}\left(\frac{\omega \Delta x_f}{\Delta x_c}\right).$$

Sur le maillage fin, l'ensemble de fréquences représentables est

$$-\frac{\pi}{\Delta t_f} \;\leq\; \omega \;\leq\; \frac{\pi}{\Delta t_f}$$

et la fréquence critique est donnée par

$$\omega_f^* \;=\; \tfrac{\Delta t_c}{\Delta t_f}\, \omega_c^* \;=\; \frac{2}{\Delta t_f} \arcsin(\alpha).$$

2.7.4 Le cas discret sur les deux maillages

Une fois qu'on a déterminé la forme de la solution sur chaque maillage on est en mesure d'effectuer l'étude par ondes planes de notre méthode de raffinement de maillage spatio-temporel. On considère notre problème comme une analyse de réflexion-transmission dans un milieu bi-couche (le maillage grossier et le maillage fin). Ainsi, supposons qu'on envoie une onde incidente de fréquence ω et d'amplitude 1 du coté grossier (le cas d'une onde incidente provenant du coté fin est basé sur les mêmes principes). L'onde diffractée sera une combinaison d'ondes réfléchies et transmises par l'interface $x = 0$. Grâce à l'étude qu'on vient de faire dans les sections précédentes, on sait qu'on aura :

- une onde réfléchie de fréquence ω et d'amplitude $R_{\Delta x}(\omega)$,
- une onde transmise de fréquence ω et d'amplitude $T_{\Delta x}(\omega)$,
- une onde transmise de fréquence $\omega - \frac{2\pi}{\Delta t_c}$ et d'amplitude $T^{par}_{\Delta x}(\omega)$.

L'expression de la solution sur Ω_c est alors

$$\left|\begin{array}{rcll} (u_c)^{2n}_{2j} & = & e^{\mathbf{i}\left(k^+_{c,\Delta x_c}(\omega)x_{2j}-\omega t^{2n}\right)} + R_{\Delta x}(\omega)\, e^{\mathbf{i}\left(k^-_{c,\Delta x_c}(\omega)x_{2j}-\omega t^{2n}\right)}, & j \leq 0, \\ (v_c)^{2n+1}_{2j+1} & = & e^{\mathbf{i}\left(k^+_{c,\Delta x_c}(\omega)x_{2j+1}-\omega t^{2n+1}\right)} - R_{\Delta x}(\omega)\, e^{\mathbf{i}\left(k^-_{c,\Delta x_c}(\omega)x_{2j+1}-\omega t^{2n+1}\right)}, & j < 0. \end{array}\right. \tag{2.117}$$

Du coté fin on a

$$\left|\begin{array}{rcll} (u_f)^n_j & = & T_{\Delta x}(\omega)\, e^{\mathbf{i}\left(k^+_{f,\Delta x_f}(\omega)x_j-\omega t^n\right)} + & \\ & & T^{par}_{\Delta x}(\omega)\, e^{\mathbf{i}\left(k^+_{f,\Delta x_f}(\omega-\frac{2\pi}{\Delta t_c})x_j-\left(\omega-\frac{2\pi}{\Delta t_c}\right)t^n\right)}, & j \geq 0, \\ (v_f)^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}} & = & T_{\Delta x}(\omega)\, e^{\mathbf{i}\left(k^+_{f,\Delta x_f}(\omega)x_{j+\frac{1}{2}}-\omega t^{n+\frac{1}{2}}\right)} + & \\ & & T^{par}_{\Delta x}(\omega)\, e^{\mathbf{i}\left(k^+_{f,\Delta x_f}(\omega-\frac{2\pi}{\Delta t_c})x_{j+\frac{1}{2}}-\left(\omega-\frac{2\pi}{\Delta t_c}\right)t^{n+\frac{1}{2}}\right)}, & j \geq 0. \end{array}\right. \tag{2.118}$$

Pour obtenir complètement l'expression de notre solution il nous reste à déterminer

- le coefficient de réflexion $R_{\Delta x}(\omega)$,
- le coefficient de transmission $T_{\Delta x}(\omega)$,
- et le coefficient de transmission parasite $T^{par}_{\Delta x}(\omega)$.

Étant donné que l'interface $x = 0$ est purement artificielle, les valeurs de référence (qu'on aurait obtenu dans le cas continu) sont

$$R = 0, \qquad T = 1, \qquad T^{par} = 0.$$

Remarque 2.7.4 *Supposons que la fréquence ω et le paramètre α ne dépendent pas du pas de discrétisation. Alors l'expression (2.111) nous indique que l'onde incidente et réfléchie seront propagatives pour un Δt assez petit. Étant donné que la fréquence critique sur Ω_f est plus grande que sur Ω_c, on en déduit aussi le même nature pour l'onde transmise de fréquence ω. L'onde transmise parasite sera évanescente dès que*

$$\begin{array}{rcll} \omega - \dfrac{2\pi}{\Delta t_c} & \notin & [-\frac{2}{\Delta t_f}\arcsin(\alpha), \frac{2}{\Delta t_f}\arcsin(\alpha)] + \dfrac{2\pi}{\Delta t_f}\mathbb{Z}, & \Longleftrightarrow \\ \omega & \in & [-\frac{2}{\Delta t_f}\arccos(\alpha), \frac{2}{\Delta t_f}\arccos(\alpha)] + \dfrac{2\pi}{\Delta t_f}\mathbb{Z}. & \end{array}$$

Alors on a que
- *si $\alpha = 1$ l'onde transmise parasite est toujours propagative,*
- *si $\alpha < 1$ l'onde transmise parasite est évanescente pour un Δt assez petit.*

De plus, le longueur de pénétration de l'onde est

$$l_{\Delta x_f}\left(\left(\omega + \tfrac{2\pi}{\Delta t_c}\right)\Delta t_f\right) \simeq \frac{\Delta x_f}{2\,\mathrm{argch}(1/\alpha)} + \mathcal{O}(\omega^2 \Delta x_f^3).$$

2.7.5 Détermination des Amplitudes

2.7.5.1 Pour le Schéma I

Pour obtenir les amplitudes inconnues on se sert des équations de couplage de notre schéma. On plonge les expressions (2.117) et (2.118) dans le **schéma I** donné par (2.21) pour obtenir (après avoir fait quelques manipulations algébriques) le système linéaire suivante

$$\mathcal{M}(\alpha, \omega\Delta x)\left[\, T_{\Delta x}(\omega)\ ,\ T^{par}_{\Delta x}(\omega)\ ,\ R_{\Delta x}(\omega)\,\right]^t = \mathcal{B}(\alpha, \omega\Delta x) \tag{2.119}$$

avec $\mathcal{M}(\alpha, \omega\Delta t)$ donnée par

$$\begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\omega\Delta t_f}{2}\right) & -\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t_f}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\omega\Delta t_c}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\omega\Delta t_f}{2}\right)\cos\left(\frac{k^+_{f,\Delta x_f}(\omega)\Delta x_f}{2}\right) & \cos\left(\frac{\omega\Delta t_f}{2}\right)\cos\left(\frac{k^+_{f,\Delta x_f}(\omega-\frac{2\pi}{\Delta t_c})\Delta x_f}{2}\right) & 0 \\ \cos\left(\frac{\omega\Delta t_f}{2}\right)\cos\left(\frac{k^+_{f,\Delta x_f}(\omega)\Delta x_f}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\omega\Delta t_f}{2}\right)\cos\left(\frac{k^+_{f,\Delta x_f}(\omega-\frac{2\pi}{\Delta t_c})\Delta x_f}{2}\right) & \cos\left(\frac{k^-_{c,\Delta x_c}(\omega)\Delta x_c}{2}\right) \end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{B}(\alpha, \omega\Delta t) = \left[\cos\left(\frac{\omega\Delta t_c}{2}\right)\ ,\ 0\ ,\ \cos\left(\frac{k^-_{c,\Delta x_c}(\omega)\Delta x_c}{2}\right)\right]^t.$$

Étant donné que la matrice et le second membre ne dépendent que de α et $\omega\Delta x$ la solution de notre système satisfait aussi cette propriété. On s'intéresse alors au comportement asymptotique des ces amplitudes pour un α fixé et $\omega\Delta x$ petit. Supposons que $0 < \alpha < 1$, alors on a

$$\left|\begin{aligned} T_{\Delta x}(\omega) &= 1 - \frac{3\left(1+\alpha^2\right)}{16}(\omega\Delta x)^2 + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^3, \\ T^{par}_{\Delta x}(\omega) &= \frac{\mathbf{i}\,\alpha^2}{2\sqrt{1-\alpha^2}}(\omega\Delta x) + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^3, \\ R_{\Delta x}(\omega) &= \frac{\left(\alpha^2-3\right)}{16}(\omega\Delta x)^2 + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^3. \end{aligned}\right. \tag{2.120}$$

On rappelle que dans ce cas, l'onde parasite est évanescente pour un Δx assez petit (voir la remarque 2.7.4). Dans ce cas
- les coefficients de réflexion et de transmission discrets sont des approximations d'ordre deux des valeurs physiques. La contribution à l'erreur est d'ordre deux dans les normes L^∞ et $L^p,\ p \in \mathbb{N}$.
- L'erreur en norme L^∞ qui provient de l'onde transmise parasite, est de l'ordre (pour Δx petit)

$$\frac{\alpha^2\omega\Delta x}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \tag{2.121}$$

ce qui veut dire que la méthode devrait être d'ordre un pour cette norme. Due au caractère exponentiellement décroissante de cette onde (voir la remarque 2.7.4), l'erreur en norme L^p est approximativement

$$\left(\int_0^\infty \frac{(\alpha^2\omega\Delta x)^p}{(1-\alpha^2)^{\frac{p}{2}}} e^{-\frac{2px\ argch(\alpha^{-1})}{\Delta x}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \simeq \frac{\Delta x^{\frac{p+1}{p}}}{(1-\alpha)^{\frac{p+1}{2p}}}, \qquad (\alpha \mapsto 1). \tag{2.122}$$

Si on prend $p = 2$ on remarque que l'ordre de convergence est cohérent avec celui obtenu dans le théorème 2.4.1 et les commentaires faits après. Il paraît que les techniques de Fourier nous donnent une dépendance en $1-\alpha$ lorsque α tends vers 1 plus précise. La meilleure estimation est obtenue avec la norme L^1, norme pour laquelle la méthode devrait être d'ordre deux.

– On remarque aussi que l'erreur est confinée à l'interface artificielle. En effet, si on calcule les normes L^∞ et $L^p,\ p \in \mathbb{Z}$ sur une région où on enlève un voisinage de l'interface, cette erreur est exponentiellement décroissante avec le pas de discrétisation spatial. La méthode devrait être d'ordre deux dans ces normes.

Dans le cas où $\alpha = 1$ on a

$$\left|\begin{array}{rcccl} T_{\Delta x}(\omega) & = & \cos(\omega\Delta x) & = & 1 - \dfrac{(\omega\Delta x)^2}{2} + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^3 \\ T^{par}_{\Delta x}(\omega) & = & -\cos(\omega\Delta x) & = & -1 + \dfrac{(\omega\Delta x)^2}{2} + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^3 \\ R_{\Delta x}(\omega) & = & 0. & & \end{array}\right. \tag{2.123}$$

Étant donné que l'onde transmise parasite est propagative (voir la remarque 2.7.4) et son amplitude ne tend pas vers zéro, on en déduit que la méthode ne devrait pas converger fortement.

2.7.5.2 Pour le Schéma II

Si on se sert du **schéma II** donné par (2.22) pour faire le couplage, le système (2.119) est caractérisé par la matrice $\mathcal{M}(\alpha, \omega\Delta t)$

$$\begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\omega\Delta t_f}{2}\right) & -\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t_f}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\omega\Delta t_c}{2}\right) \\ 1 & 1 & 0 \\ \cos\left(\frac{\omega\Delta t_f}{2}\right)\cos\left(\frac{k^+_{f,\Delta x_f}(\omega)\Delta x_f}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\omega\Delta t_f}{2}\right)\cos\left(\frac{k^+_{f,\Delta x_f}(\omega-\frac{2\pi}{\Delta t_c})\Delta x_f}{2}\right) & \cos\left(\frac{k^-_{c,\Delta x_c}(\omega)\Delta x_c}{2}\right) \end{pmatrix},$$

et le second membre

$$\mathcal{B}(\alpha, \omega\Delta t) = \left[\cos\left(\frac{\omega\Delta t_c}{2}\right),\ 0,\ \cos\left(\frac{k^-_{c,\Delta x_c}(\omega)\Delta x_c}{2}\right)\right]^t.$$

Supposons que $0 < \alpha < 1$, alors les amplitudes admettent le développement suivant

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
T_{\Delta x}(\omega) & = & 1 - \dfrac{\mathbf{i}\sqrt{1-\alpha^2}}{4}(\omega\Delta x) \ + \ \mathcal{O}(\omega\Delta x)^2, \\[2ex]
T_{\Delta x}^{par}(\omega) & = & -1 + \dfrac{\mathbf{i}\sqrt{1-\alpha^2}}{4}(\omega\Delta x) \ + \ \mathcal{O}(\omega\Delta x)^2, \\[2ex]
R_{\Delta x}(\omega) & = & -\dfrac{\mathbf{i}\sqrt{1-\alpha^2}}{4}(\omega\Delta x) \ + \ \mathcal{O}(\omega\Delta x)^2.
\end{array}
\right. \tag{2.124}
$$

Ceci implique que

- l'erreur provenant des ondes réfléchie et transmise (pas parasite) devrait être d'ordre un en norme L^∞ et $L^p,\ p \in \mathbb{Z}$,
- l'amplitude de l'onde transmise parasite ne tends pas vers zéro avec le pas de discrétisation. La méthode ne converge pas en norme L^∞. Grâce à la nature exponentiellement décroissante de l'onde, un calcul simple nous donne une estimation pour l'erreur en norme $L^p,\ p \in \mathbb{N}$

$$
\frac{\Delta x^{\frac{1}{p}}}{\operatorname{argch}^{\frac{1}{p}}(\alpha^{-1})} \ \simeq \ \frac{\Delta x^{\frac{1}{p}}}{(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2p}}}, \quad (\alpha \mapsto 1).
$$

  Encore une fois les résultats obtenus pour $p = 2$ sont cohérents avec ceux énoncés dans le théorème 2.4.1 et les commentaires faits plus loin. L'erreur en norme L^1 devrait être d'ordre un. Les estimations dans la dépendance du paramètre α semblent être plus précises avec des techniques de Fourier.
- De la même façon que pour le **schéma I**, ce type d'erreur est localisé à l'interface. En considérant des normes L^∞ et $L^p,\ p \in \mathbb{N}$ qui ne prennent pas en compte le comportement de la solution dans un voisinage de l'interface artificielle, la méthode se comporte à l'ordre un.

Pour $\alpha = 1$ et dans cette configuration (onde incidente du coté grossier) les deux méthodes coïncident, en obtenant (2.123). Par conséquent la méthode ne converge pas fortement pour cette valeur de α.

Chapitre 3

Une Extension de la Méthode. Un Raffinement de Maillage Espace–Temps (q_c, q_f) Stable pour l'Élastodynamique

Sommaire

3.1 Présentation de la Méthode 96
3.1.1 Schéma Intérieur 96
3.1.2 Équations de Couplage : Conservation d'une Énergie Discrète 97
3.2 Caractère Bien Posé du Problème Discret 99
3.2.1 Algorithme de Calcul 99
3.2.2 Obtention du Système Linéaire Vérifié par $J^{n+\frac{1}{2}}$ 99
3.2.3 Sur l'Inversibilité de la Matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ 102
3.3 Résultats Numériques. Phénomènes Parasites 107
3.4 Quelques Mots sur le Nombre d'Operations 109
3.5 Analyse Fine de la Méthode dans le Cas 1D 121
3.5.1 Présentation de la Méthode 1D 121
3.5.2 Analyse par Fourier de la Méthode 1D 123
3.5.2.1 Expression des Ondes Planes 123
3.5.2.2 Détermination des Amplitudes 127
3.5.2.3 Interprétation des Résultats 130
3.5.2.4 Ordre de la Méthode 131
3.5.3 Expériences Numériques 1D. Ordre de Convergence Numérique 135

Même si la récursivité de la méthode présentée dans le chapitre 1 nous permet d'effectuer des raffinements avec des taux élevés ($\Delta t_f/\Delta t_c = 1/2^k$ si on fait k raffinements de maillage $1-2$ consécutifs) il serait intéressant de généraliser la méthode pour pouvoir appliquer des raffinements plus généraux. Ceci pourrait simplifier sensiblement la programmation de la méthode et également réduire le nombre de calculs implicites sur les interfaces artificielles.

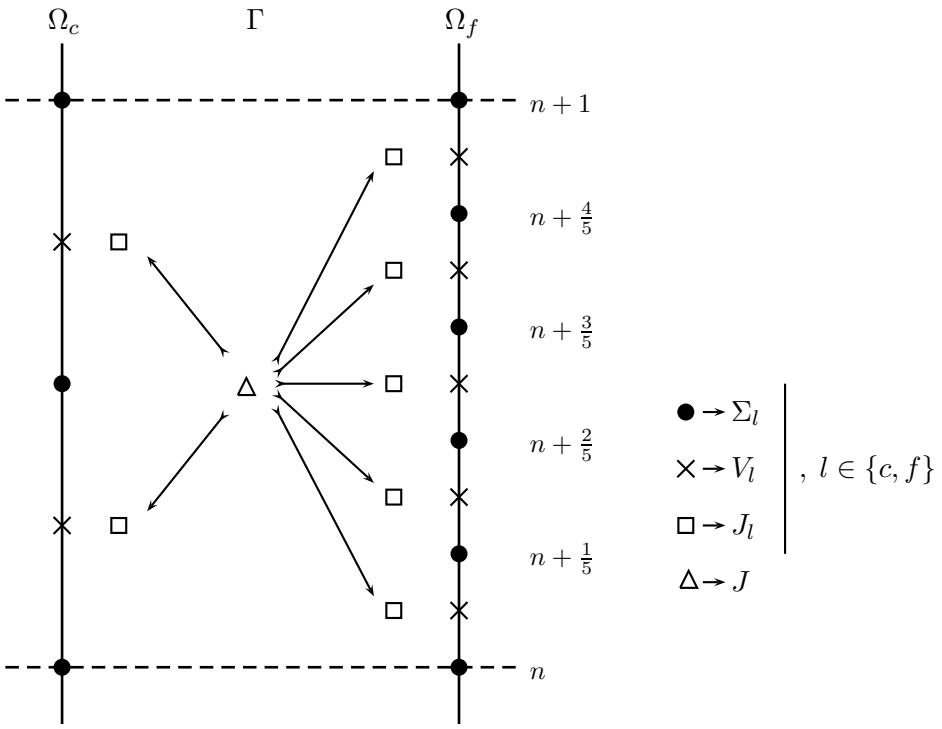


FIG. 3.1 – Distribution temporelle des inconnues. Raffinement (2,5)

Dans ce chapitre on étend la méthode présentée dans le chapitre 1 au cas où on utilise un pas de discrétisation spatio-temporel $(h_l, \Delta t_l) = (h/q_l, \Delta t/q_l),\ l \in \{c, f\}$ ce qui nous permettra de faire des raffinements avec des taux supérieurs à deux. Dans les deux premières sections on présente les équations du problème totalement discrétisé et on explique une technique d'implémentation de la méthode. Ensuite, on montre des résultats numériques dans le cas 1D et 2D qui exhibent des phénomènes parasites haute fréquence. Une analyse avec des techniques de Fourier dans le cas simplifié 1D révèle la nature de cette erreur.

3.1 Présentation de la Méthode

3.1.1 Schéma Intérieur

On suppose que la discrétisation en espace sur chaque sous-domaine a été construite en utilisant des maillages de pas $h_l = h/q_l,\ l \in \{c, f\}$. Donc, notre point de départ est la formulation matricielle du problème semi-discrétisée donnée par (1.16)–(1.17). Pour la discrétisation en temps on utilise dans chaque sous-domaine le même schéma centré d'ordre deux présenté dans la section 1.6 du chapitre 1. La distribution temporelle des inconnues qu'on a choisie est représentée dans la figure 3.1. Pour garder le même nombre de Courant $\alpha = \Delta t_l/h_l,\ l \in \{c, f\}$ constant sur tout le domaine de calcul, on va utiliser un pas de discrétisation temporelle de $\Delta t_l = \Delta t/q_l$ sur $\Omega_l,\ l \in \{c, f\}$.

$$
(3.1)\qquad \left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } (\Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}, V_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}}, J_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}});\ l \in \{c,f\}, \text{ vérifiant} \\
\left\{\begin{array}{rcrcl}
M_{v,l}\dfrac{V_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} - V_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}}}{\Delta t_l} & - & D_l\,\Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}} & = & F_l^{n+\frac{k}{q_l}}, \\
M_{\sigma,l}\dfrac{\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} - \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}}{\Delta t_l} & + & D_l^*\,V_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} & = & C_l^*\,J_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}},
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

où $k \in \{0,\dots,q_l-1\}$. Sur chaque intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$ les $q_c + q_f$ valeurs des multiplicateurs de Lagrange sont inconnues. On utilisera les équations (1.17) pour les déterminer.

3.1.2 Équations de Couplage : Conservation d'une Énergie Discrète

En suivant la même idée que dans la section 1.6 du chapitre 1 on cherche la conservation d'une énergie discrète pour garantir la stabilité de la méthode. On définit cette fois-ci l'énergie totale aux instants entiers par

$$
(3.2)\qquad \mathbf{E}^n = \mathbf{E}_c^n + \mathbf{E}_f^n
$$

où l'énergie locale dans chaque sous-domaine est donnée sur les instantes locales

$$
\mathbf{E}_l^{n+\frac{k}{q_l}} = \frac{1}{2}\left\{\left(M_{\sigma,l}\Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}, \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}\right) + \left(M_{v,l}V_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}, V_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}}\right)\right\},
$$

avec $k \in \{0,\dots,q_l\},\ l \in \{c,f\}$. Ainsi on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.1.1 (Schéma conservatif) *Pour compléter le système (3.1) et obtenir un schéma numérique qui conserve l'énergie (3.2) en absence de forces externes, les équations additionnelles doivent satisfaire l'égalité de flux suivante :*

$$
(3.3)\qquad \left|\ \sum_{k=0}^{q_c-1}\left(C_c^* J_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}}, \frac{\Sigma_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} + \Sigma_c^{n+\frac{k}{q_c}}}{2q_c}\right) = -\sum_{k=0}^{q_f-1}\left(C_f^* J_f^{n+\frac{2k+1}{2q_f}}, \frac{\Sigma_f^{n+\frac{k+1}{q_f}} + \Sigma_f^{n+\frac{k}{q_f}}}{2q_f}\right)\right. .
$$

Preuve: Supposons que les forces externes sont nulles. En multipliant la première équation de (3.1) par

$$
\frac{\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} + \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}}{2},
$$

on obtient

$$
(3.4)\qquad \begin{array}{l}
\dfrac{1}{2\Delta t_l}\left(\left(M_{\sigma,l}\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}}, \Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}}\right) - \left(M_{\sigma,l}\Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}, \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}\right)\right) = \\
-\left(D_l^* V_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}, \dfrac{\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} + \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}}{2}\right) + \left(C_l^* J_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}, \dfrac{\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} + \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}}{2}\right).
\end{array}
$$

Par ailleurs, si on utilise la seconde équation de (3.1) en utilisant deux instants consécutifs, on en déduit

$$
M_{v,l}\frac{V_l^{n+\frac{2k+3}{2q_l}} - V_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}}}{\Delta t_l} - D_l\frac{\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} + \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}}{2} = 0,
$$

On multiplie cette dernière expression par $V_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}$ et on obtient

$$\frac{1}{2\Delta t_l}\left(\left(M_{v,l}V_l^{n+\frac{2k+3}{2q_l}}, V_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}\right) - \left(V_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}, V_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}}\right)\right) = \left(D_l^* V_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}, \frac{\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} + \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}}{2}\right). \tag{3.5}$$

Ainsi, lorsqu'on somme (3.4) et (3.5), on observe que les énergies locales satisfont la relation

$$\frac{q_l}{\Delta t}\left(\mathbf{E}_l^{n+\frac{k+1}{l}} - \mathbf{E}_l^{n+\frac{k}{l}}\right) = \left(C_l^* J_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}, \frac{\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} + \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}}{2}\right),$$

ce qui implique

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\mathbf{E}_l^{n+1} - \mathbf{E}_l^{n}\right) = \sum_{k=0}^{q_l-1}\left(C_l^* J_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}, \frac{\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} + \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}}{2q_l}\right). \tag{3.6}$$

Finalement, de (3.6) on en déduit

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^{n}\right) = \sum_{l\in\{c,f\}}\sum_{k=0}^{q_l-1}\left(C_l \frac{\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} + \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}}{2q_l} \cdot J_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}\right),$$

en obtenant le résultat voulu. □

Alors, en généralisant le schéma proposé dans [46] on propose les équations suivantes pour approcher les conditions de transmission (1.17) et compléter (3.1)

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{q_c-1} C_c \frac{\Sigma_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} + \Sigma_c^{n+\frac{k}{q_c}}}{2q_c} = -\sum_{k=0}^{q_f-1} C_f \frac{\Sigma_f^{n+\frac{k+1}{q_f}} + \Sigma_f^{n+\frac{k}{q_f}}}{2q_f}, & (a) \\ J_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}} = J_f^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}}, \quad (k,\tilde{k}) \in \{0,\dots,q_c-1\}\times\{0,\dots,q_f-1\}, & (b) \end{cases} \tag{3.7}$$

parmi lesquelles il y a $q_c + q_f$ qui sont linéairement indépendantes. Il est clair que l'égalité (3.3) du théorème 3.1.1 est satisfaite, et donc, l'énergie discrète (3.2) serait conservée.

La première équation dans (3.7) est centrée et consistante à l'ordre deux avec la première équation de (1.17). Cependant, presque toutes les autres équations de (3.7) (qui portent sur les multiplicateurs de Lagrange) sont décentrées, et par conséquent, consistantes à l'ordre un avec la deuxième équation de (1.17). En fait, de la même façon que dans le cas $(q_c, q_f) = (1, 2)$ traité dans le chapitre 1, tous le multiplicateurs de Lagrange

$$J_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}},\ k \in \{0,\dots,q_l-1\},\ l \in \{c,f\},$$

dans l'intervalle $[t^n, t^{n+1}]$ sont égaux à une même valeur qu'on dénotera par $J^{n+\frac{1}{2}}$. Dans la figure 3.1 on montre cette interaction dans le cas particulier où $(q_c, q_f) = (2, 5)$.

3.2 Caractère Bien Posé du Problème Discret

Dans cette section on montre l'existence et unicité de solution du problème totalement discrétisé sous certaines hypothèses qui seront spécifiées.

3.2.1 Algorithme de Calcul

Supposons qu'on a calculé toutes les inconnues jusqu'au temps t^n et calculons les inconnues jusqu'au temps t^{n+1}.

- En utilisant la première équation de (3.1) avec $k = 0,\ l \in \{c, f\}$ on peut calculer $V_l^{n+\frac{1}{2q_l}},\ l \in \{c, f\}$.
- Comme il sera expliqué plus tard, le multiplicateur de Lagrange $J^{n+\frac{1}{2}}$ peut être obtenu d'une façon implicite en résolvant un système linéaire de petite taille. Le second membre ne dépendra que des inconnues déjà calculées.
- Une fois que le multiplicateur de Lagrange à été obtenu, les systèmes dans (3.1) sont découplés par domaine et on peut calculer les inconnues en Σ et en V d'une façon alternée jusqu'au temps t^{n+1}. De plus, les calculs sont explicites si les matrices de masse sont diagonales ou diagonales par bloques.

Ensuite on obtient l'expression de la matrice qu'on doit inverser pour le calcul du multiplicateur de Lagrange et on étudie ses propriétés.

3.2.2 Obtention du Système Linéaire Vérifié par $J^{n+\frac{1}{2}}$

L'objectif est de trouver un système linéaire vérifié par le multiplicateur de Lagrange $J^{n+\frac{1}{2}}$ dont le second membre ne dépend que des inconnues déjà calculées. L'équation de transmission (3.7)-(a) motive alors le lemme suivant

Lemme 3.2.1 *Supposons que les inconnues* $(\Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}, V_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}, J^{n+\frac{1}{2}})$ *satisfont les équations (3.1)–(3.7)-(b). La relation suivante est satisfaite*

$$
\left|\begin{array}{rcl}
0 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{q_l-1} C_l \left(\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} + \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}\right) - 2C_l P_{q_l}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))\Sigma_l^n + \\
& & \Delta t_l C_l Q_{q_l}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1}\left(D_l^* V_l^{n+\frac{1}{2q_l}} - C_l^* J^{n+\frac{1}{2}}\right) + \\
& & \Delta t_l^2 C_l \displaystyle\sum_{k=0}^{q_l-1} Q_k(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} D_l^* (M_{v,l})^{-1} F_l^{n+\frac{q_l-k}{q_l}},
\end{array}\right. \tag{3.8}
$$

où

$$
\widetilde{N}_l(\Delta t_l) \ := \ I - \frac{\Delta t_l^2}{4}(M_{\sigma,l})^{-1} D_l^* (M_{v,l})^{-1} D_l, \tag{3.9}
$$

et les polynômes $P_k(N)$ *et* $Q_k(N)$, $k \in \{0, \ldots, q_l\}$ *sont définies par la récurrence*

$$
\left|\begin{array}{rcl}
P_{k+1}(N) & = & 2Q_k(N)(N - I) + P_k(N) + I, \\
Q_{k+1}(N) & = & Q_k(N)(4N - 3I) + 2P_k(N) + I, \\
P_1(N) = I, & & Q_1(N) = I, \qquad (Q_0(N) = 0)\,.
\end{array}\right. \tag{3.10}
$$

Preuve: On rappelle que, étant donné qu'on suppose que nos inconnues satisfont (3.7.(b)), tous les multiplicateurs de Lagrange dans l'intervalle $[t^n, t^{n+1}]$ sont égaux à $J^{n+\frac{1}{2}}$. On montrera par induction que pour tout $k_0 \in \{1, \ldots, q_l\}$ on a

$$(3.11) \qquad (HR) \left| \begin{array}{rcl} 0 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{k_0-1} C_l \left(\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} + \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}} \right) - 2C_l P_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))\Sigma_l^n + \\ & & \Delta t_l C_l Q_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} \left(D_l^* V_l^{n+\frac{1}{2q_l}} - C_l^* J^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ & & \displaystyle\Delta t_l^2 C_l \sum_{k=0}^{k_0-1} Q_k(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} D_l^* (M_{v,l})^{-1} F_l^{n+\frac{k_0-k}{q_l}}, \\ & & \text{en utilisant les équations (3.1) avec } \tilde{k} \in \{0, \ldots, k_0 - 1\}. \end{array} \right.$$

– En utilisant les équations (3.1) avec $\tilde{k} = 0$ il est clair que

$$(3.12) \quad \left| \; 0 = C_l \left(\Sigma_l^{n+\frac{1}{q_l}} + \Sigma_l^n \right) - 2C_l \Sigma_l^n + \Delta t_l C_l (M_{\sigma,l})^{-1} \left(D_l^* V_l^{n+\frac{1}{2q_l}} - C_l^* J^{n+\frac{1}{2}} \right) \right. ,$$

et donc on a l'hypothèse de récurrence (HR) pour $k_0 = 1$ avec les valeurs qui conviennent.

– Supposons que pour un $k_0 \in \{2, \ldots, q_l - 1\}$ on a l'hypothèse de récurrence (3.11) en utilisant les équations (3.1) avec $\tilde{k} \in \{0, \ldots, k_0 - 1\}$. Alors, il est clair qu'en utilisant (3.1) avec $\tilde{k} \in \{1, \ldots, k_0\}$ on aura aussi

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{k_0} C_l \left(\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} + \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}} \right) - 2C_l P_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))\Sigma_l^{n+\frac{1}{q_l}} + \\ & & \Delta t_l C_l Q_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} \left(D_l^* V_l^{n+\frac{3}{2q_l}} - C_l^* J^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ & & \displaystyle\Delta t_l^2 C_l \sum_{k=0}^{k_0-1} Q_k(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} D_l^* (M_{v,l})^{-1} F_l^{n+\frac{k_0-k+1}{q_l}}. \end{array}$$

En utilisant la première équation de (3.1) avec $\tilde{k} = 1$ pour écrire $V_l^{n+\frac{3}{2q_l}}$ en fonction de l'inconnue $\Sigma_l^{n+\frac{1}{q_l}}$ et des termes source on obtient

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{k_0} C_l \left(\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} + \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}} \right) - \\ & & 2C_l \left(P_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l)) - \dfrac{\Delta t_l^2}{2} Q_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} D_l^* (M_{v,l})^{-1} D_l \right) \Sigma_l^{n+\frac{1}{q_l}} + \\ & & \Delta t_l C_l Q_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} \left(D_l^* V_l^{n+\frac{1}{2q_l}} - C_l^* J^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ & & \displaystyle\Delta t_l^2 C_l \sum_{k=0}^{k_0} Q_k(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} D_l^* (M_{v,l})^{-1} F_l^{n+\frac{k_0-k+1}{q_l}}. \end{array}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} P_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l)) - \frac{\Delta t^2}{2} Q_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} D_l^*(M_{v,l})^{-1} D_l = \\ Q_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l)) \left(I - \frac{\Delta t_l^2}{2}(M_{\sigma,l})^{-1} D_l^*(M_{v,l})^{-1} D_l \right) + P_{k_0} - Q_{k_0} = \\ 2Q_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l)) \left(\widetilde{N}_l(\Delta t_l) - I \right) + P_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l)), \end{aligned}$$

et en utilisant encore une fois la deuxième équation de (3.1) avec $\tilde{k} = 0$

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \sum_{k=1}^{k_0} C_l \left(\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{l}} + \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}} \right) - \\ & 2C_q \left(2Q_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l)) \left(\widetilde{N}_l(\Delta t_l) - I \right) + P_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l)) \right) \Sigma_l^n + \\ & \Delta t_l C_q \left(Q_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l)) + 2 \left(2Q_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l)) \left(\widetilde{N}_l(\Delta t_l) - I \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. P_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l)) \right) \right) (M_{\sigma,l})^{-1} \left(D_l^* V_l^{n+\frac{1}{2q_l}} - C_l^* J^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ & \Delta t_l^2 C_l \sum_{k=0}^{k_0} Q_k(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} D_l^*(M_{v,l})^{-1} F_l^{n+\frac{k_0-k+1}{q_l}}. \end{aligned}$$

En ajoutant (3.12) à cette dernière égalité on trouve

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \sum_{k=0}^{k_0} C_l \left(\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} + \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}} \right) - \\ & 2C_l \left(2Q_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l)) \left(\widetilde{N}_l(\Delta t_l) - I \right) + P_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l)) + I \right) \Sigma_l^n + \\ & \Delta t_l C_l \left(\left(4\widetilde{N}_l(\Delta t_l) - 3I \right) Q_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l)) + 2P_{k_0}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l)) + I \right) (M_{\sigma,l})^{-1} \\ & \left(D_l^* V_l^{n+\frac{1}{2q_l}} - C_l^* J^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ & \Delta t_l^2 C_l \sum_{k=0}^{k_0} Q_k(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} D_l^*(M_{v,l})^{-1} F_l^{n+\frac{k_0-k+1}{q_l}}, \end{aligned}$$

où on a utilisé les équations (3.1) avec $\tilde{k} \in \{0, \ldots, q_l\}$ et on obtient l'hypothèse de récurrence pour $k_0 + 1$.

L'égalité obtenue en prenant $k_0 = q_l$ dans (HR) montre le théorème. □

Remarque 3.2.1 *La matrice $\widetilde{N}_l(\Delta t_l)$ peut se réécrire comme $\widetilde{N}_l(\Delta t_l) = (M_{\sigma,l})^{-1} N_l(\Delta t_l)$ où*

$$N_l(\Delta t_l) \;:=\; M_{\sigma,l} - \frac{\Delta t_l^2}{4} D_l^*(M_{v,l})^{-1} D_l.$$

Cette matrice est symétrique définie positive dès qu'on satisfait la condition CFL habituelle sur le domaine $\Omega_l,\ l \in \{f, c\}$.

Le lemme precedent et l'équation de transmission (3.7)-(a) nous permet d'établir le théorème suivant qui nous donne le système linéaire satisfait par le multiplicateur de Lagrange.

Théorème 3.2.1 *Supposons que les inconnues* $(\Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}, V_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}, J^{n+\frac{1}{2}})$ *satisfont les équations (3.1)–(3.7). Alors le multiplicateur de Lagrange* $J^{n+\frac{1}{2}}$ *satisfait le système linéaire suivant*

$$\left|\begin{array}{rcl} \mathcal{M}(\Delta t)\, J^{n+\frac{1}{2}} & = & -\displaystyle\sum_{l\in\{f,c\}} \Bigg[\frac{1}{q_l} C_l P_{q_l}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))\Sigma_l^n - \\ & & \dfrac{\Delta t_l}{2q_l} C_l Q_{q_l}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} D_l^* V_l^{n+\frac{1}{2q_l}} - \\ & & \dfrac{\Delta t_l^2}{2q_l} C_l \displaystyle\sum_{k=0}^{q_l-1} Q_l(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} D_l^* (M_{v,l})^{-1} F_l^{n+\frac{q_l-k}{q_l}} \Bigg], \end{array}\right. \tag{3.13}$$

où

$$\left|\begin{array}{rcl} \mathcal{M}(\Delta t) & = & \mathcal{M}_f(\Delta t_f) + \mathcal{M}_c(\Delta t_c) \\ \mathcal{M}_l(\Delta t_l) & = & \dfrac{\Delta t_l}{2q_l} C_l Q_{q_l}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} C_l^*, \quad l \in \{f, c\}, \end{array}\right. \tag{3.14}$$

et les polynômes $P_k(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))$ *et* $Q_k(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))$ *sont donnés par (3.10).*

Preuve: Si on divise l'égalité (3.8) par $2q_l$ on obtient

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{q_l-1} C_l \frac{\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} + \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}}{2q_l} - \frac{1}{q_l} C_l P_{q_l}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))\Sigma_l^n + \\ & & \dfrac{\Delta t_l}{2q_l} C_l Q_{q_l}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} \left(D_l^* V_l^{n+\frac{1}{2q_l}} - C_l^* J^{n+\frac{1}{2}} \right) + \\ & & \dfrac{\Delta t_l^2}{2q_l} C_l \displaystyle\sum_{k=0}^{q_l-1} Q_k(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} D_l^* (M_{v,l})^{-1} F_l^{n+\frac{q_l-k}{q_l}}. \end{array}$$

Il suffit alors de faire la somme sur l'indice l et utiliser (3.7.(a)) pour conclure. □

3.2.3 Sur l'Inversibilité de la Matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$

Ensuite on s'intéresse à l'inversibilité de la matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ en étudiant les polynômes $Q_k(\widetilde{N})$ plus en détail.

Lemme 3.2.2 *Les polynômes* Q_k *définis dans (3.10) sont caractérisés par la relation de récurrence à deux niveaux suivante*

$$\left|\begin{array}{rcl} Q_{k+1}(\widetilde{N}) & = & Q_k(\widetilde{N})(4\widetilde{N} - 2) - Q_{k-1}(\widetilde{N}) + 2I, \\ & & Q_1(\widetilde{N}) = I, \qquad Q_0(\widetilde{N}) = 0. \end{array}\right. \tag{3.15}$$

Preuve: Dans (3.10), on fait la différence entre la deuxième équation et la première équation multipliée par deux pour obtenir

$$Q_{k+1}(\widetilde{N}) - 2P_{k+1}(\widetilde{N}) = Q_k(\widetilde{N}) - I \tag{3.16}$$

ce qui nous donne le polynôme P_k en fonction de Q_k et Q_{k-1}. On utilise cette identité dans la deuxième équation de (3.10) pour en déduire

$$\begin{aligned} Q_{k+1}(\widetilde{N}) &= Q_k(\widetilde{N})(4\widetilde{N}-3) + Q_k(\widetilde{N}) - Q_{k-1}(\widetilde{N}) + 2I \\ &= Q_k(\widetilde{N})(4\widetilde{N}-2) - Q_{k-1}(\widetilde{N}) + 2I \end{aligned}$$

De (3.16) avec $k = 0$ on a que $Q_0(\widetilde{N}) = 0$ comme on voulait montrer. □

Une fois qu'on connait la relation de recurrence satisfaite par les polynomes on peut calculer son expression à l'aide des deux lemmes suivants

Lemme 3.2.3 *Les polynômes Q_k sont donnés par l'expression suivante*

$$Q_k(x) = \frac{1 - \cos\left(k \arccos\left(2x-1\right)\right)}{2(1-x)}, \qquad \forall\, x \in (0,1),\ k \geq 0. \tag{3.17}$$

Preuve: Dans cette preuve on considère les polynômes comme fonction de la variable réele x. Alors on doit résoudre la récurrence

$$Q_{k+1}(x) = (4x-2)Q_k(x) - Q_{k-1}(x) + 2.$$

Une solution particulière est donnée par

$$Q_k^p(x) = \frac{1}{2(1-x)}.$$

On cherche la solution générale de l'équation homogène sous la forme

$$Q_k^h(x) = e^{i\theta(x)k}.$$

En introduisant cette expression dans la relation de récurrence on voit que

$$2(\cos\theta - 1) = 4(x-1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos\theta = 2x - 1.$$

Alors, on a que pour $x \in (0,1)$,

$$\theta(x) = \arccos(2x-1),$$

et donc la solution générale de l'équation homogène s'écrit

$$Q_k^h(x) = \mathcal{A}\cos(k\arccos(2x-1)) + \mathcal{B}\sin(k\arccos(2x-1)).$$

On se sert des conditions initiales pour déterminer les constantes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$

$$Q_0(x) = \frac{1}{2(1-x)} + \mathcal{A} = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A} = -\frac{1}{2(1-x)}.$$

De la même façon on a

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= \frac{1-(2x-1))}{2(1-x)} + \mathcal{B}\sin(\arccos(2x-1)) \\ &= 1 + 2\mathcal{B}\left(x(1-x)\right)^{\frac{1}{2}} = 1, \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B} = 0. \end{aligned}$$

comme on voulait montrer. □

Lemme 3.2.4 *Les polynômes $Q_k(x)$ s'écrivent*

$$\left| \begin{aligned} Q_1(x) &= 1, \\ Q_{2n+1}(x) &= 4^{2n}\prod_{l=1}^{n}\left(x-\cos^2\left(\frac{\pi l}{2n+1}\right)\right)^2, \\ Q_{2n}(x) &= 4^{2n-1}x\prod_{l=1}^{n-1}\left(x-\cos^2\left(\frac{\pi l}{2n}\right)\right)^2, \end{aligned} \right. \tag{3.18}$$

où $n > 0$.

Preuve: Q_0 et Q_1 étant de degré 0, il est clair que $Q_k(x)$ est un polynôme de degré $k-1$. On cherche ses racines. On a que

$$1-\cos(k\arccos(2x-1)) = 0 \iff x = \frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi l}{k}\right)\right] = \cos^2\left(\frac{\pi l}{k}\right),$$

où $l \in \{0, \ldots, k-1\}$. De l'expression (3.17) on en déduit que

$$Q_k(x) = \mathcal{C}\prod_{l=1}^{k-1}\left(x-\cos^2\left(\frac{\pi l}{k}\right)\right)$$

Étant donné que le coefficient principal du polynôme est 4^{k-1} on en déduit facilement le résultat. □

Maintenant qu'on connait l'expression des polynômes $Q_k(\cdot)$ on peut donner une expression pour les matrices $\mathcal{M}_l(\Delta t_l)$.

Lemme 3.2.5 *Les matrices $\mathcal{M}_l(\Delta t_l)$, $l \in \{f, c\}$ données par (3.14) sont symétriques et peuvent se réécrire de la façon suivante selon la valeur de q_l :*

• *si $q_l = 1$*

$$\mathcal{M}_l(\Delta t_l) = \frac{\Delta t_l}{2} C_l (M_{\sigma,l})^{-1} C_l^*, \tag{3.19}$$

• *si $q_l = 2$*

$$\mathcal{M}_l(\Delta t_l) = \Delta t_l C_l (M_{\sigma,l})^{-1} N_l(\Delta t_l)(M_{\sigma,l})^{-1} C_l^*, \tag{3.20}$$

• *si $q_l > 1$ et impair*

(3.21)

$$\mathcal{M}_l(\Delta t_l) = \frac{4^{q_l-1}\Delta t_l}{2q_l} C_l \left\{ \prod_{k=1}^{\frac{q_l-1}{2}} \left[(M_{\sigma,l})^{-1}\left(N_l(\Delta t_l) - \cos^2\left(\frac{\pi k}{q_l}\right) M_{\sigma,l}\right)\right]^2 \right\} (M_{\sigma,l})^{-1} C_l^*,$$

• *si $q_l > 2$ et pair*

$$\mathcal{M}_l(\Delta t_l) = \frac{4^{q_l-1}\Delta t_l}{2q_l} C_l \left\{ \left[(M_{\sigma,l})^{-1} N_l(\Delta t_l)\right] \times \right. \tag{3.22}$$
$$\left. \prod_{k=1}^{\frac{q_l}{2}-1} \left[(M_{\sigma,l})^{-1}\left(N_l(\Delta t_l) - \cos^2\left(\frac{\pi k}{q_l}\right) M_{\sigma,l}\right)\right]^2 \right\} (M_{\sigma,l})^{-1} C_l^*.$$

Preuve: Étant donné que $Q_{q_l}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))$ est un polynôme dans la variable $\widetilde{N}_l(\Delta t_l) = (M_{\sigma,l})^{-1}\, N_l(\Delta t_l)$ (avec $N_l(\Delta t_l)$ symétrique), il existe des scalaires $a_m^{q_l},\ m \in \{0, \cdot, q_l - 1\}$ tel que

$$Q_{q_l}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} = \left[\sum_{m=0}^{q_l-1} a_m^{q_l}((M_{\sigma,l})^{-1}\, N_l(\Delta t_l))^m\right] (M_{\sigma,l})^{-1},$$

ce qui implique que $Q_{q_l}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1}$ est symétrique, et donc $\mathcal{M}_l(\Delta t_l)$ (donnée par (3.14)) l'est aussi.

De l'expression (3.14) et du fait que

$$Q_1(\widetilde{N}_l(\Delta t_l)) = I \quad \text{et} \quad Q_2(\widetilde{N}_l(\Delta t_l)) = 4\widetilde{N}_l(\Delta t_l) = 4(M_{\sigma,l})^{-1} N_l(\Delta t_l),$$

on en déduit les expression (3.19) et (3.20). Supposons $q_l > 1$ et impair. Du lemme 3.2.4 on sait que

$$\begin{aligned} Q_{q_l}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma,l})^{-1} &= 4^{q_l-1}\left\{\prod_{k=1}^{\frac{q_l-1}{2}} \left[\widetilde{N}_l(\Delta t_l) - \cos^2\left(\frac{\pi k}{q_l}\right)\right]^2\right\} (M_{\sigma,l})^{-1} \\ &= 4^{q_l-1}\left\{\prod_{k=1}^{\frac{q_l-1}{2}} \left[(M_{\sigma,l})^{-1}\left(N_l(\Delta t_l) - \cos^2\left(\frac{\pi k}{q_l}\right) M_{\sigma,l}\right)\right]^2\right\} (M_{\sigma,l})^{-1}. \end{aligned}$$

Alors, il suffit d'utiliser (3.14) pour obtenir (3.21). La preuve pour le cas $q_l > 2$ et pair est similaire. □

Remarque 3.2.2 *Les expressions (3.21) et (3.22) on un sens car les facteurs qui sont entre crochets dans les produits entre accolades conmutent.*

Lemme 3.2.6 *On a que*

- *si q_l est impair, la matrice $\mathcal{M}_l(\Delta t_l)$ est positive.*
- *si q_l est pair et la matrice*

$$N_l(\Delta t_l) := M_{\sigma,l} - \frac{\Delta t_l^2}{4} D_l^* M_{v,l}^{-1} D_l, \tag{3.23}$$

est positive (condition CFL habituelle dans le sous-domaine Ω_l), alors la matrice $\mathcal{M}_l(\Delta t_l)$ est positive.

Preuve: Si $q_l = 1$, le résultat découle de (3.19). Si $q_l > 1$ et impair, on réécrit (3.21) sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_l(\Delta t_l) &= \frac{4^{q_l-1}\Delta t_l}{2q_l} C_l (M_{\sigma,l})^{-1} \left(N_l(\Delta t_l) - \cos^2\left(\frac{\pi(q_l-1)}{2q_l}\right) M_{\sigma,l} \right) \\
&\quad (M_{\sigma,l})^{-1} \left(N_l(\Delta t_l) - \cos^2\left(\frac{\pi(q_l-2)}{2q_l}\right) M_{\sigma,l} \right) \dots \\
&\quad (M_{\sigma,l})^{-1} \left(N_l(\Delta t_l) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2q_l}\right) M_{\sigma,l} \right) \\
&\quad (M_{\sigma,l})^{-1} \left(N_l(\Delta t_l) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2q_l}\right) M_{\sigma,l} \right) (M_{\sigma,l})^{-1} \dots \\
&\quad \left(N_l(\Delta t_l) - \cos^2\left(\frac{\pi(q_l-1)}{2q_l}\right) M_{\sigma,l} \right) (M_{\sigma,l})^{-1} C_l^*,
\end{aligned}$$

d'où on en déduit que la matrice $\mathcal{M}_l(\Delta t_l)$ est positive. Le cas pair est traité identiquement. □

Finalement, on est en mesure d'énoncer deux théorèmes qui établissent des conditions suffisantes pour avoir l'inversibilité de la matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ et, par conséquent, le caractère bien posé du problème totalement discrétisé. Le premier résultat traite le cas où on effectue un raffinement du type $(q_c, q_f) = (1, p)$ tandis que le deuxième (dans lequel on suppose des hypothèses plus restrictives) traite le cas plus général.

Théorème 3.2.2 (Le cas $q_c = 1$) *Supposons que*
- $q_c = 1$,
- C_c^* *est injective,*
- *les matrices*

$$N_l(\Delta t_l) := M_{\sigma,l} - \frac{\Delta t_l^2}{4} D_l^* M_{v,l}^{-1} D_l, \qquad l \in \{c, f\}, \tag{3.24}$$

sont positives (condition CFL habituelle sur $\Omega_l,\ l \in \{c, f\}$*).*

Alors, la matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ *définie dans (3.14) est symétrique définie positive, et donc, le problème (3.1)–(3.7)* **est bien posé**.

Preuve: Des deux propositions précédentes on conclue que les matrices $\mathcal{M}_l(\Delta t_l),\ l \in \{f, c\}$ sont symétriques et positives. Comme C_c^* est injective on en déduit de (3.19) que $\mathcal{M}_c(\Delta t_c)$ est, en plus, définie positive. Ceci implique que $\mathcal{M}(\Delta t)$ est symétrique définie positive comme somme de deux matrices symétriques, une positive et l'autre définie positive. □

Théorème 3.2.3 (Le cas général) *Soit* $l_0 \in \{c, f\}$. *Supposons que*
- *les matrices* $N_l(\Delta t_l),\ l \in \{c, f\}$ *données dans (3.24) sont positives,*
- *la matrice*

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{\max\{2, q_{l_0}\}}\right) M_{\sigma,l_0} - \frac{\Delta t_{l_0}^2}{4} D_{l_0}^* M_{v,l_0}^{-1} D_{l_0}, \tag{3.25}$$

est définie positive (condition CFL qui est en générale plus forte que l'habituelle sur Ω_{l_0}*),*
- $C_{l_0}^*$ *est injective.*

Alors, la matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ définie dans (3.14) est symétrique définie positive, et donc, le problème (3.1)–(3.7) **est bien posé**.

Preuve: Si $q_{l_0} = 1$ on est sous les hypothèses du théorème precedent. Supposons que $q_{l_0} \geq 2$. Étant donné que la condition CFL est satisfaite par hypothèse on a que les matrices $\mathcal{M}_l(\Delta t_l),\ l \in \{c, f\}$ sont symétriques et positives. Mais, comme

$$N_{l_0}(\Delta t_{l_0}) - \cos^2\left(\frac{\pi k}{q_{l_0}}\right) M_{\sigma,l_0} \quad = \quad \sin^2\left(\frac{\pi k}{q_{l_0}}\right) M_{\sigma,l_0} - \frac{\Delta t_{l_0}^2}{4} D_{l_0}^* M_{v,l_0}^{-1} D_{l_0},$$

où $k \in \{1, \ldots, q_{l_0} - 1\}$ sont définies positives par hypothèse, en utilisant les expressions du lemme 3.2.5 on conclue que la matrice

$$Q_{q_{l_0}}(\widetilde{N}_{l_0}(\Delta t_{l_0}))(M_{\sigma,l_0})^{-1}$$

est, en fait, définie positive. Finalement, l'injectivité de la matrice $C_{q_{l_0}}^*$ fait que la matrice $\mathcal{M}_{l_0}(\Delta t_{l_0})$ est aussi définie positive ce qui conclut la preuve. □

Remarque 3.2.3 *La condition CFL demandée dans la proposition 3.2.3 est en général plus forte que la condition CFL habituelle, demandée dans la proposition 3.2.2. Dans le cas où $q_{l_0} = 2$ les deux coïncident.*

Remarque 3.2.4 *Cette condition CFL plus restrictive apparaît aussi dans l'étude avec des techniques du type Fourier de la méthode 1D. On conclura que, si (3.25) est satisfaite, alors, pour un Δt suffisamment petit, toutes les ondes parasites haute fréquence sur Ω_{l_0} seront évanescentes (voir la section 3.5.2).*

Remarque 3.2.5 *Les hypothèses du théorème 3.2.3 sont des conditions suffisantes pour le caractère bien posé du problème totalement discrétisé. Cependant, dans la pratique, on a remarqué numériquement que la matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ est aussi inversible dans certaines cas où on ne satisfait pas ces hypothèses.*

3.3 Résultats Numériques. Phénomènes Parasites

Une fois que la méthode a été introduite on s'intéresse à étudier numériquement sa précision en fonction des valeurs du taux de raffinement et du paramètre $\alpha = \Delta t/\Delta x$. Pour faire ceci on effectuera plusieurs raffinements de maillage purement artificiels à fin d'exhiber le comportement. Il est clair alors que la solution du problème continu n'est pas perturbée par les régions raffinées qui sont artificielles.

Le domaine de calcul est le carré $\Omega = [0, 10] \times [0, 10]$ composé du matériau homogène isotrope considéré dans la section 1.9.1. On utilise des couches absorbantes parfaitement adaptées sur toutes les frontières pour simuler la sortie des ondes. Le milieu est perturbé par une condition initiale sur le champ de vitesse centrée au point $(x_c, z_c) = (5, 5)$ et donnée par l'expression (1.83).

On effectuera quatre raffinements de maillage spatio-temporel $(q_c, q_f) = (1, q)$ avec différentes valeurs de q pour pouvoir comparer les résultats obtenus en fonction du taux de raffinement. Les régions raffinées sont les suivantes (voir la partie gauche de la figure 3.2)

- $B_1 = [4, 6] \times [1.5, 3]$ avec un taux de raffinement $q = 2$,
- $B_2 = [7, 8.5] \times [4, 6]$ avec un taux de raffinement $q = 3$,
- $B_3 = [4, 6] \times [7, 8.5]$ avec un taux de raffinement $q = 5$,
- $B_4 = [1.5, 3] \times [4, 6]$ avec un taux de raffinement $q = 10$.

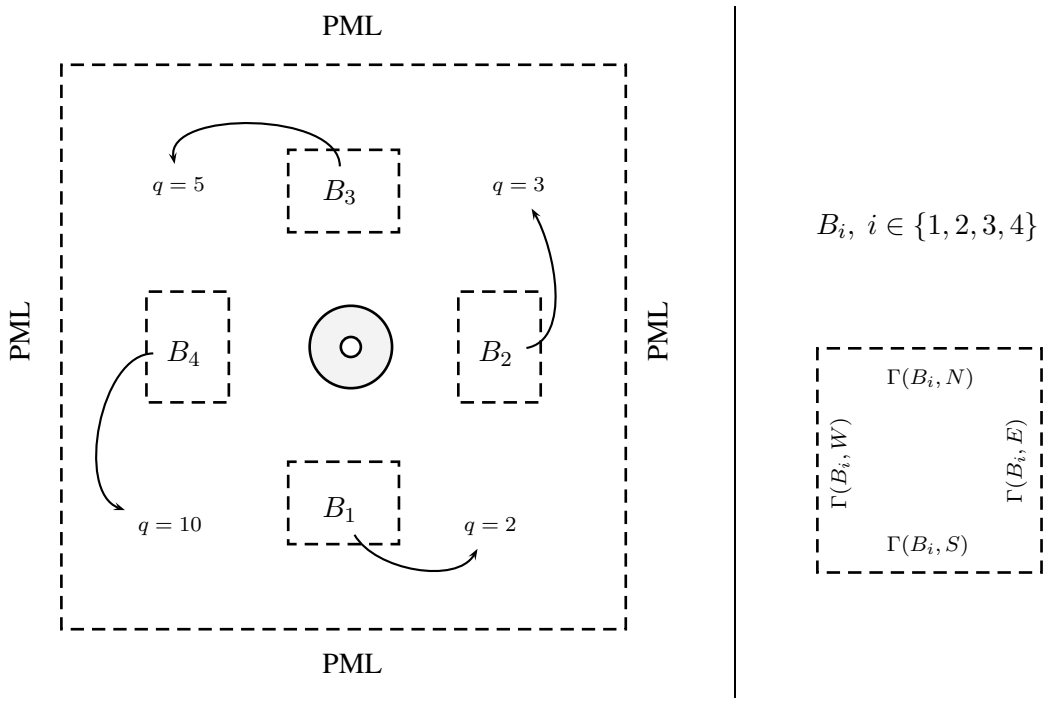


FIG. 3.2 – Géométrie de l'expérience. $(q_c, q_f) = (1, q)$

Le pas de discrétisation spatio-temporel sur $\Omega_c = \Omega \setminus \left\{\overline{B_1} \cup \overline{B_2} \cup \overline{B_3} \cup \overline{B_4}\right\}$ (qui fixe aussi les pas de discrétisation sur le reste du domaine) est $(\Delta x_c, \Delta t_c) = (1/15, 0.95\, CFL_{opt}\, \Delta x_c)$ ce qui est "presque" optimal au niveau coût de calcul. Étant donné que les raffinements effectués sont purement artificiels, les ondes de pression et de cisaillement générées par la condition initiale devraient traverser les boites sans observer des phénomènes parasites importants. Dans les figures 3.3 – 3.5 on représente

- dans la sous-figure (a), le module du champ de vitesse,
- dans les sous-figures (b), (c), (d) et (e) les deux composantes du multiplicateur de Lagrange et son module sur ∂B_1, ∂B_2, ∂B_3 et ∂B_4 respectivement. La première partie du graphe correspond avec la frontière sud $\Gamma(B_i, S)$, la deuxième avec la frontière est $\Gamma(B_i, E)$, la troisième avec celle du nord $\Gamma(B_i, N)$ et la quatrième avec celle du ouest $\Gamma(B_i, W)$ (voir la partie droite de la figure 3.2). On rappelle que cette inconnue peut être interprétée comme la trace du champ de vitesse à travers ces interfaces artificielles.

Finalement, dans la figure 3.6 on représente le module du champ de vitesse au centre de chaque boite raffinée au cours du temps. Ensuite on analyse les résultats obtenus.

Le cas $(q_c, q_f) = (1, 2)$**.** Les résultats obtenus pour un taux de raffinement égal à deux (comme on avait déjà observé dans le chapitre 1) sont très satisfaisants. Le champ de vitesse et le multiplicateur de Lagrange sont bien approchés. Dans le signal temporel enregistré au centre de la boite on n'observe pas de phénomènes parasites haute fréquence importants (voir la figure 3.6.a).

Le cas $(q_c, q_f) = (1, q);\ q > 2$**.** Lorsque le taux de raffinement augmente, les résultats deviennent moins bons. Dans les figures 3.3.a – 3.5.a on voit que, dès que l'onde incidente entre dans les régions

raffinées, une onde parasite pollue la solution numérique. Une fois que le front d'onde est passé et la solution dans les boites devrait être presque nulle, on trouve des ondes qui restent piégées dans les régions raffinées B_2, B_3 et B_4. Dans les figures 3.6.(b),(c),(d) on observe le caractère hautement oscillant en temps de ces ondes parasites. Malgré tout, l'approximation des multiplicateurs de Lagrange, même si elle se dégrade lorsque q augmente, semble être raisonnable si on le compare avec les résultats obtenus pour $q = 2$ (assez semblables à une translation ou une symétrie près).

La précision de la solution dans ces boites où on utilise un taux de raffinement supérieur à deux est visiblement moins bonne que celle obtenue avec le taux égal à deux. En raffinant globalement le maillage, la méthode semble converger à l'ordre un sur ces régions.

Remarque 3.3.1 *Lorsqu'on considère une valeur du paramètre α plus petite, les phénomènes parasites sont sensiblement réduits. Par exemple, en prenant $\alpha = 0.7125$ on voit dans la figure 3.7 que l'erreur haute fréquence est disparue de la boite B_2 en obtenant des résultat assez semblables à ceux obtenus dans B_1. Cependant les résultats sur les boites où on effectue des raffinements plus élevés continuent à être pollués. Si on diminue encore la valeur de α, par exemple $\alpha = 0.2375$ dans la figure 3.8, les oscillations disparaissent de toutes les boites. On verra dans la section 3.5.2 que, effectivement, le paramètre α joue un rôle important à ce niveau (voir la remarque 3.5.3). En effet, dès qu'on satisfait la condition (plus restrictive que la CFL habituelle si $q > 2$)*

$$\alpha \quad < \quad CFL_{opt} \sin\left(\frac{\pi}{q}\right), \tag{3.26}$$

les ondes parasites hautes fréquences deviennent évanescentes pour un Δt assez petit et donc, elles resteront localisées au voisinage de l'interface.

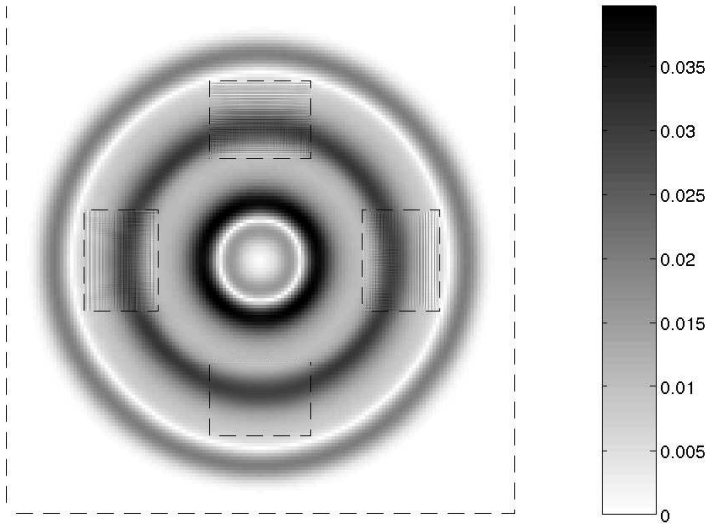
Raffinement seulement en espace. Afin d'exhiber que ces phénomènes sont liés à la non-conformité des maillages en temps on montre les résultats obtenus sur la même expérience avec la même méthode qui à été présentée dans ce chapitre, mais en utilisant un pas de temps global sur tout le domaine de calcul. Le pas de discrétisation en espace sur la région grossière est encore $\Delta x_c = 1/15$ et le pas de temps est fixé par $\Delta t = 0.95\, CFL_{opt}\, \Delta x_c/10$ (presque la CFL optimale sur B_4) pour assurer la stabilité de la méthode. Sur les figures 3.9 – 3.11 on montre le module du champ de vitesse et les multiplicateurs de Lagrange sur les différentes boites à plusieurs instants différents. Les résultats obtenus, mêmes s'ils se détériorent lorsque le taux de raffinement augmente, sont assez bons. Sur la figure 3.12, où on représente l'évolution au cours du temps de la solution au centre de chaque boite, on ne voit pas des phénomènes parasites haute fréquence comme dans le cas du raffinement espace-temps.

3.4 Quelques Mots sur le Nombre d'Operations

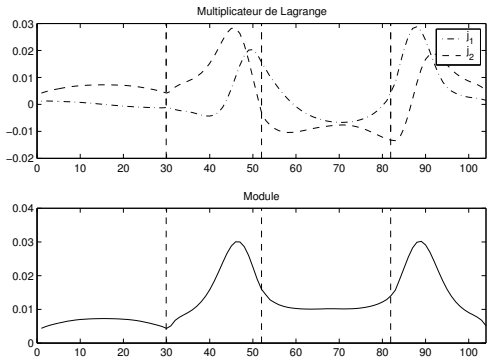
Il est intéressant de savoir dans quelles situations le raffinement de maillage spatio-temporel est rentable par rapport au raffinement seulement en espace lorsqu'on considère le même pas de discrétisation en espace. Supposons que Ω_c (discrétisé avec un pas $\Delta x_c = \Delta x$) et Ω_f (discrétisé avec un pas $\Delta x_f = \Delta x/q$) sont des carrés de coté d_c et d_f. Le nombre de noeuds est approximativement

$$\left(d_c^2 - d_f^2\right)/\Delta x^2, \quad \text{sur } \Omega_c, \qquad q^2\, d_f^2/\Delta x^2, \quad \text{sur } \Omega_f.$$

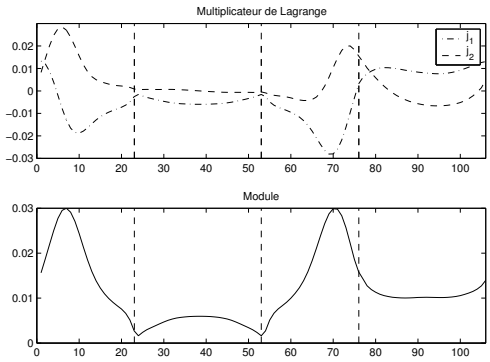
Supposons qu'on veut faire une simulation jusqu'au temps T. On considère trois cas :



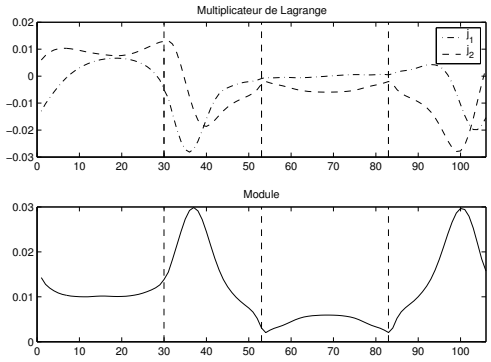
(a) Module du champ de vitesse



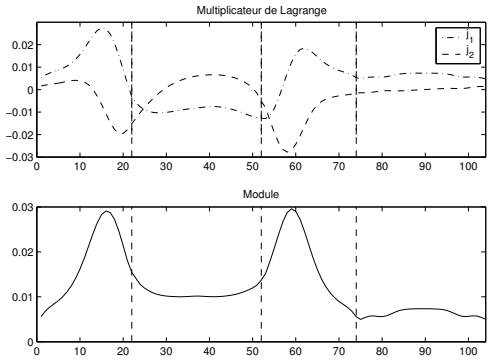
(b) Multiplicateur sur B_1



(c) Multiplicateur sur B_2

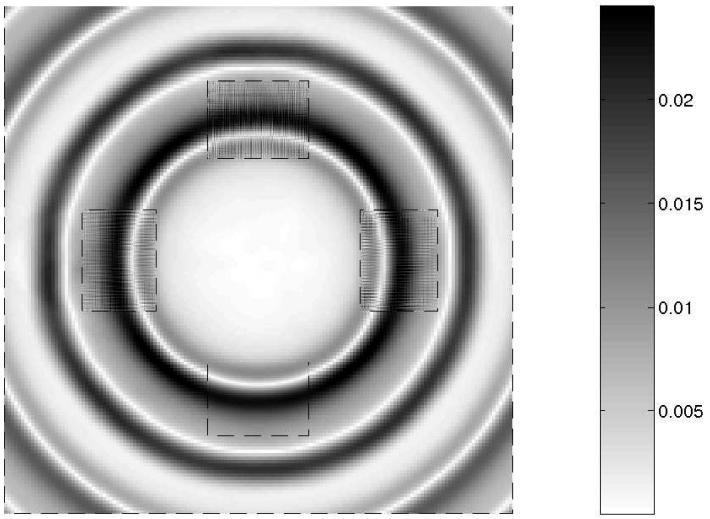


(d) Multiplicateur sur B_3

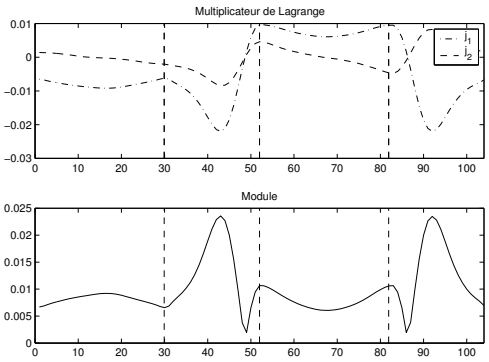


(e) Multiplicateur sur B_4

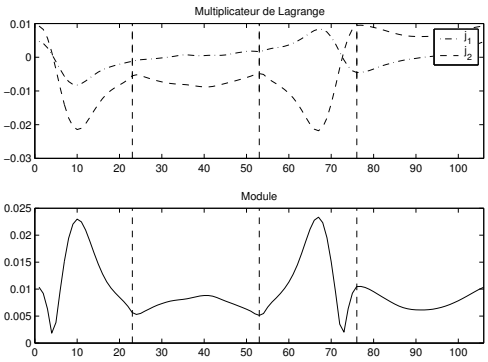
FIG. 3.3 – $\alpha = 0.95\ CFL_{opt}$, $\Delta x_c = 1/15$, $t = 1.1540$



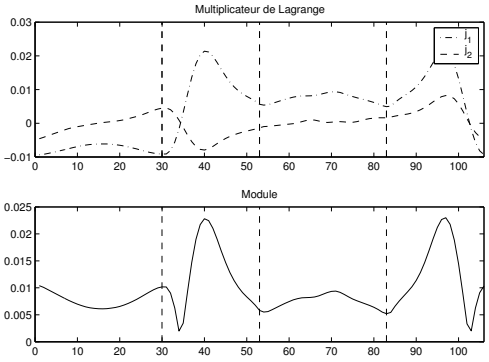
(a) Module du champ de vitesse



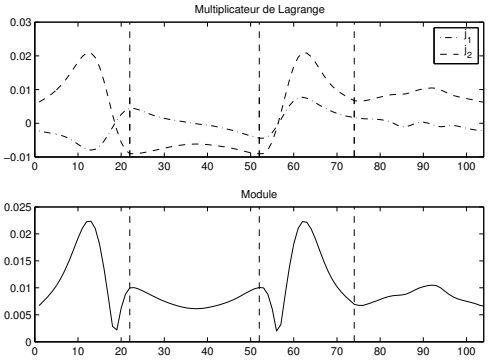
(b) Multiplicateur sur B_1



(c) Multiplicateur sur B_2

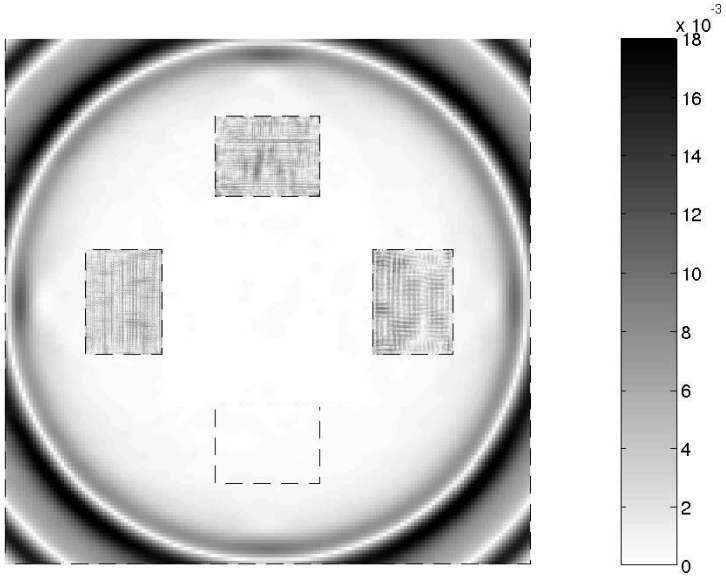


(d) Multiplicateur sur B_3

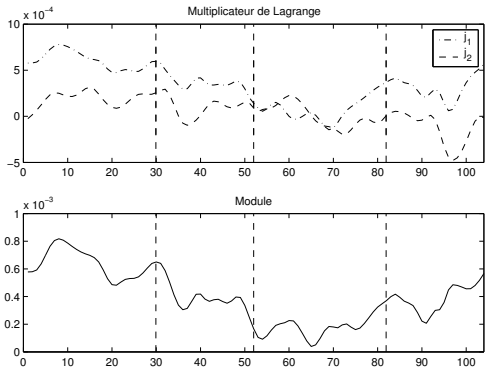


(e) Multiplicateur sur B_4

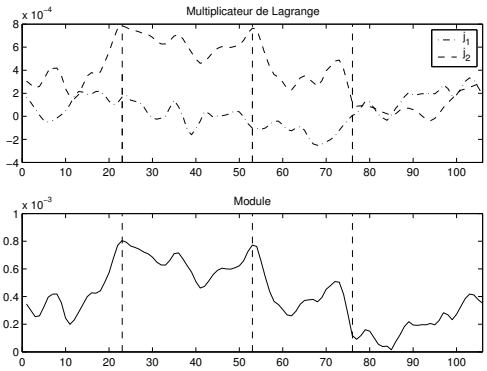
FIG. 3.4 – $\alpha = 0.95\ CFL_{opt}$, $\Delta x_c = 1/15$, $t = 2.3080$



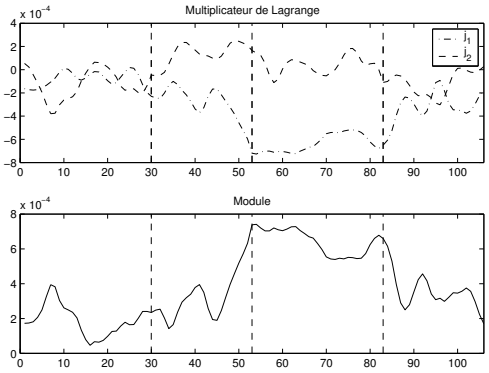
(a) Module du champ de vitesse



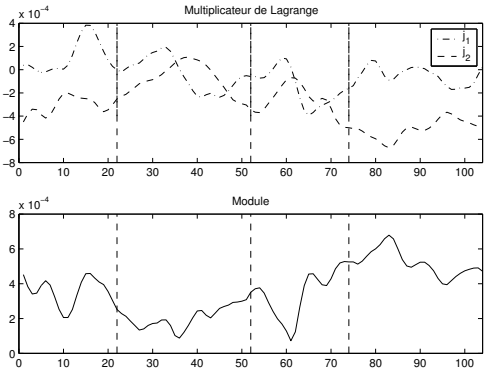
(b) Multiplicateur sur B_1



(c) Multiplicateur sur B_2

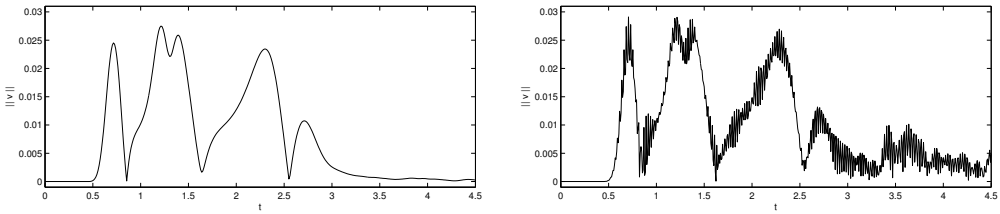


(d) Multiplicateur sur B_3



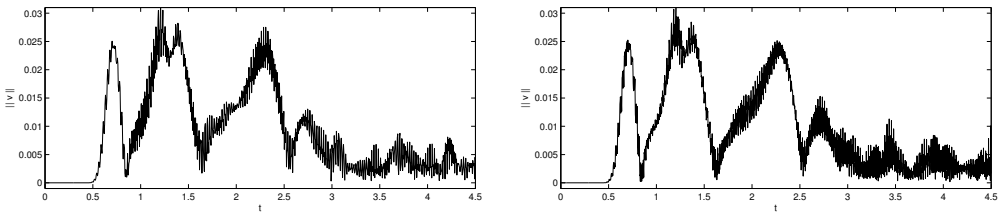
(e) Multiplicateur sur B_4

FIG. 3.5 – $\alpha = 0.95\ CFL_{opt}$, $\Delta x_c = 1/15$, $t = 4.0390$



(a) $(x_0, z_0) = (5, 2.25)$. Centre de B_1

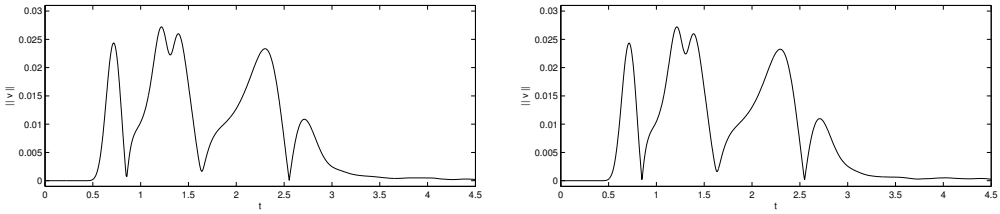
(b) $(x_0, z_0) = (8.25, 5)$. Centre de B_2



(c) $(x_0, z_0) = (5, 8.25)$. Centre de B_3

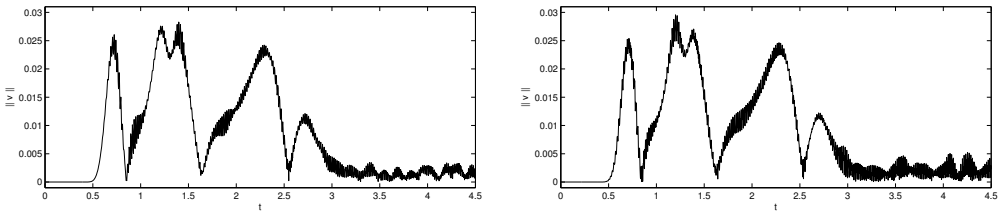
(d) $(x_0, z_0) = (2.25, 5)$. Centre de B_4

FIG. 3.6 – $|\underline{v}|((x_0, z_0), t), \quad \alpha = 0.95\, CFL_{opt}, \Delta x_c = 1/15$



(a) $(x_0, z_0) = (5, 2.25)$. Centre de B_1

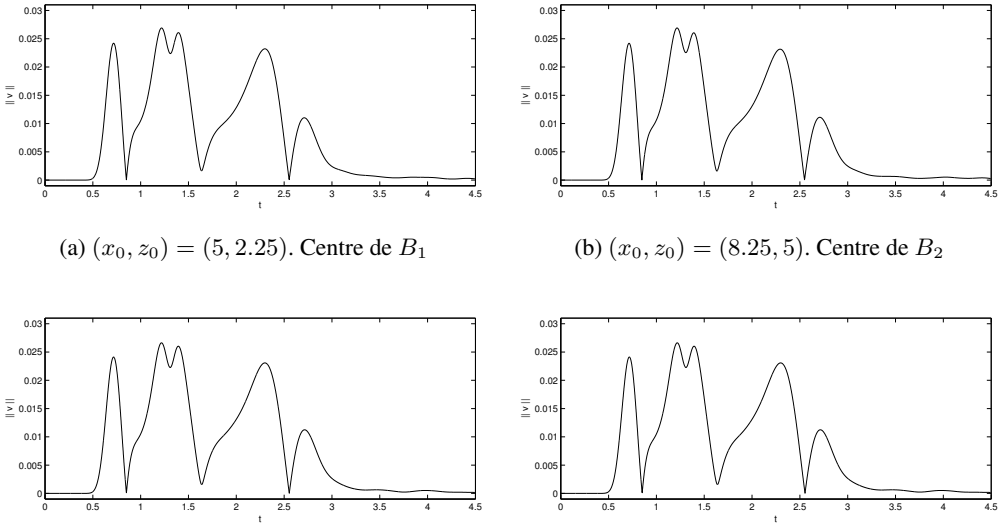
(b) $(x_0, z_0) = (8.25, 5)$. Centre de B_2



(c) $(x_0, z_0) = (5, 8.25)$. Centre de B_3

(d) $(x_0, z_0) = (2.25, 5)$. Centre de B_4

FIG. 3.7 – $|\underline{v}|((x_0, z_0), t), \quad \alpha = 0.7125\, CFL_{opt}, \Delta x_c = 1/15$



(a) $(x_0, z_0) = (5, 2.25)$. Centre de B_1

(b) $(x_0, z_0) = (8.25, 5)$. Centre de B_2

(c) $(x_0, z_0) = (5, 8.25)$. Centre de B_3

(d) $(x_0, z_0) = (2.25, 5)$. Centre de B_4

FIG. 3.8 – $|\underline{v}|((x_0, z_0), t), \quad \alpha = 0.2375\, CFL_{opt}, \Delta x_c = 1/15$

1. *Raffinement seulement en espace avec un pas de temps optimal sur la grille fine*. La précision du calcul est assez bonne comme on vient de voir. Cependant, la méthode est assez dispersive sur la grille grossière. Le pas de temps sera fixé par la condition CFL sur la grille fine : $\Delta t_c = \Delta t_f = CFL_{opt}\Delta x/q$. Le nombre total d'itérations sur chaque grille est alors

$$T/\Delta t_c = qT/(CFL_{opt}\Delta x).$$

Si on néglige les calculs faits à l'interface (pas très coûteux par rapport aux calculs volumiques, voir la remarque 3.4.1) on obtient que le nombre total d'opérations est de l'ordre de

$$COUT_{espace} \quad = \quad \frac{T\ q\ \left(d_c^2 + d_f^2\ (\ q^2\ -\ 1)\right)}{\Delta x^3\ CFL_{opt}}, \qquad \text{sur } \Omega_c \cup \Omega_f.$$

2. *Raffinement de maillage spatio-temporel avec la condition CFL restrictive (3.26)*. La précision du calcul est aussi assez bonne. Le pas de temps est donné par

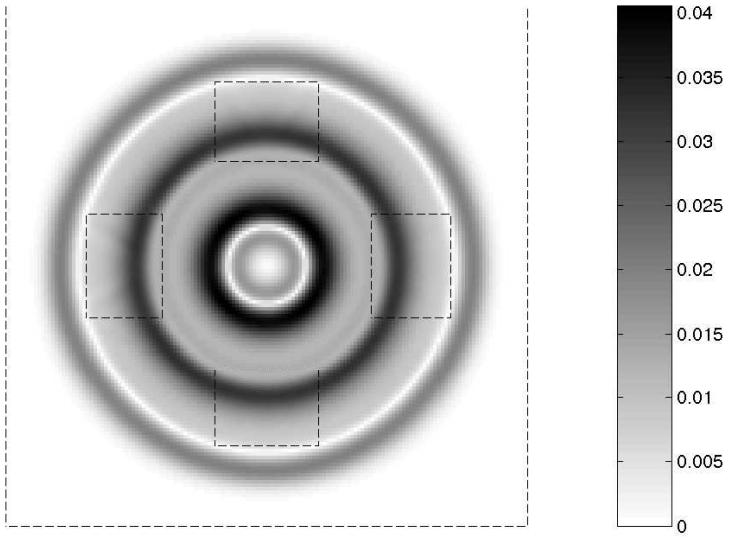
$$\Delta t_c = CFL_{opt} \sin(\pi/q)\Delta x, \quad \text{sur } \Omega_c, \qquad \Delta t_f = CFL_{opt} \sin(\pi/q)\Delta x/q, \quad \text{sur } \Omega_f.$$

Le nombre total d'itérations sur chaque grille est

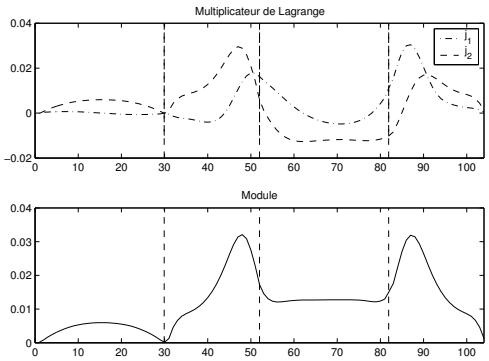
$$T/(CFL_{opt} \sin(\pi/q)\Delta x), \quad \text{sur } \Omega_c, \qquad qT/(CFL_{opt} \sin(\pi/q)\Delta x), \quad \text{sur } \Omega_f.$$

Ceci implique un coût total de calcul approché de

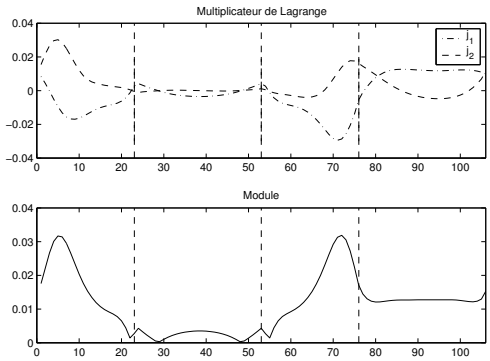
$$COUT_{temps,restr} \quad = \quad \frac{T\ \left(d_c^2 + d_f^2\ (q^3 - 1)\ \right)}{\Delta x^3\ CFL_{opt} \sin(\pi/q)}, \qquad \text{sur } \Omega_c \cup \Omega_f.$$



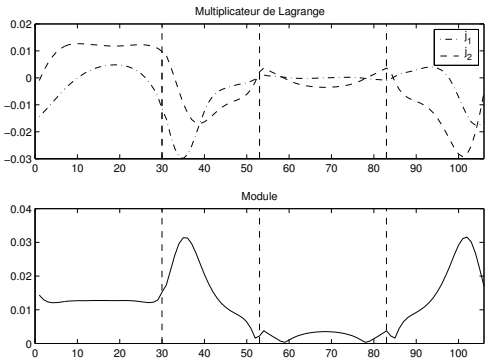
(a) Module du champ de vitesse



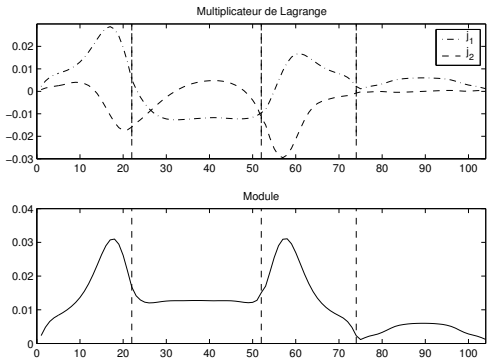
(b) Multiplicateur sur B_1



(c) Multiplicateur sur B_2

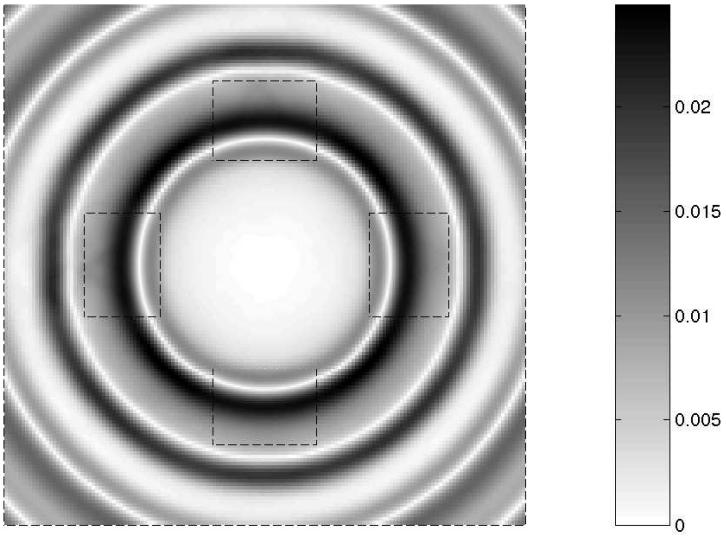


(d) Multiplicateur sur B_3

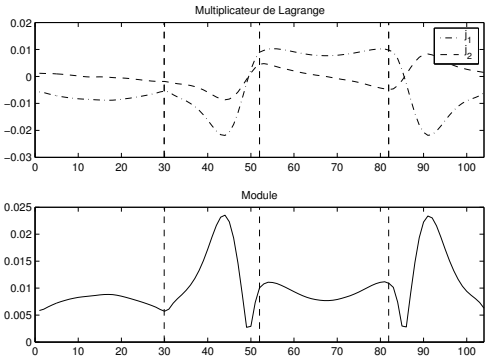


(e) Multiplicateur sur B_4

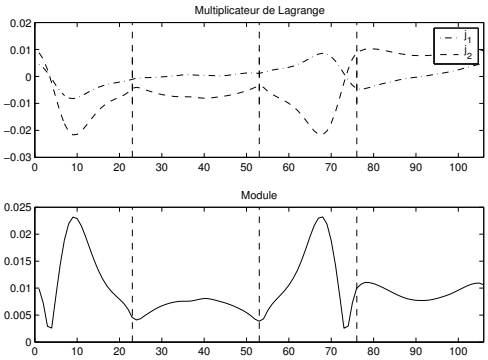
FIG. 3.9 – $\alpha = 0.95\ CFL_{opt}$ sur B_4, $\Delta x_c = 1/15$, $t = 1.1540$. Raffinement de maillage seulement en espace



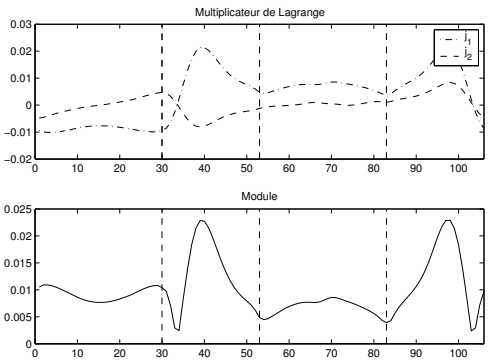
(a) Module du champ de vitesse



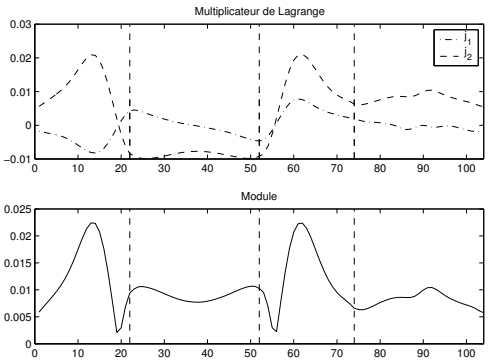
(b) Multiplicateur sur B_1



(c) Multiplicateur sur B_2

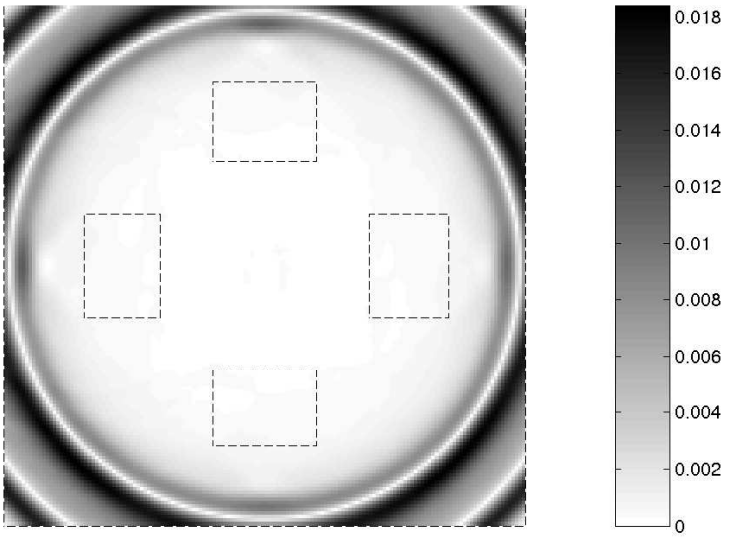


(d) Multiplicateur sur B_3

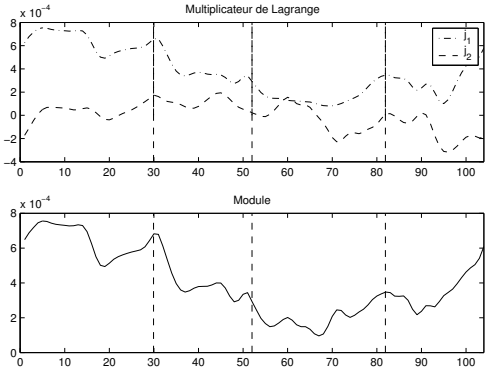


(e) Multiplicateur sur B_4

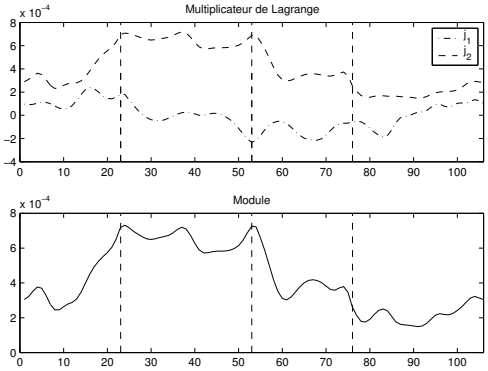
FIG. 3.10 – $\alpha = 0.95\ CFL_{opt}$ sur B_4, $\Delta x_c = 1/15$, $t = 2.3080$. Raffinement de maillage seulement en espace



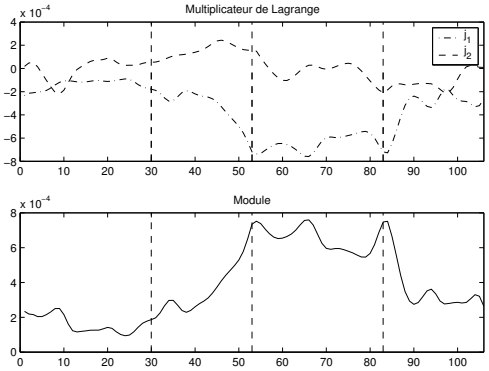
(a) Module du champ de vitesse



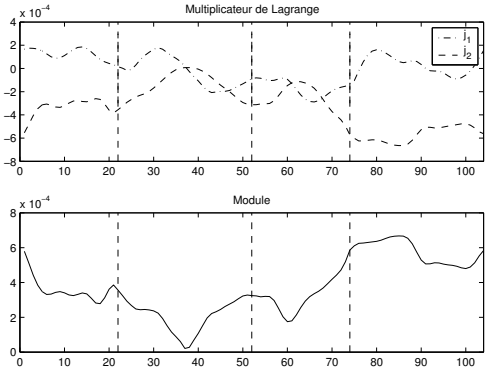
(b) Multiplicateur sur B_1



(c) Multiplicateur sur B_2

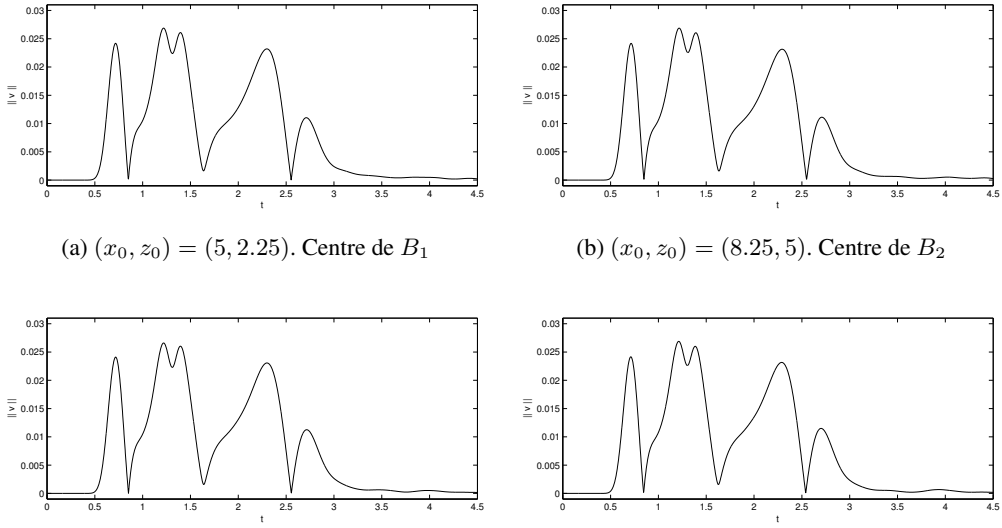


(d) Multiplicateur sur B_3



(e) Multiplicateur sur B_4

FIG. 3.11 – $\alpha = 0.95\ CFL_{opt}$ sur B_4, $\Delta x_c = 1/15$, $t = 4.0390$. Raffinement de maillage seulement en espace



(a) $(x_0, z_0) = (5, 2.25)$. Centre de B_1

(b) $(x_0, z_0) = (8.25, 5)$. Centre de B_2

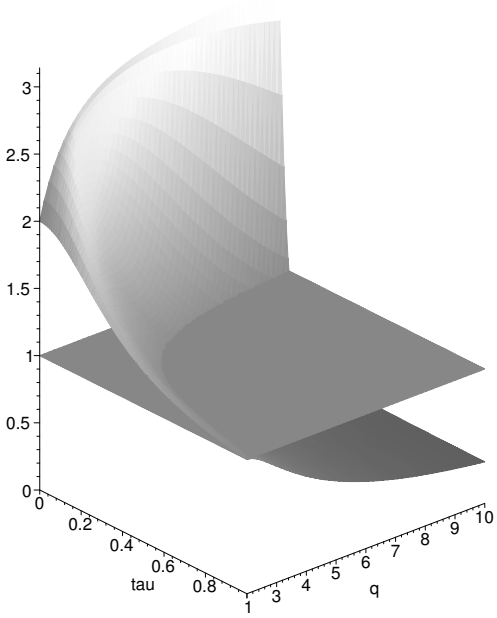
(c) $(x_0, z_0) = (5, 8.25)$. Centre de B_3

(d) $(x_0, z_0) = (2.25, 5)$. Centre de B_4

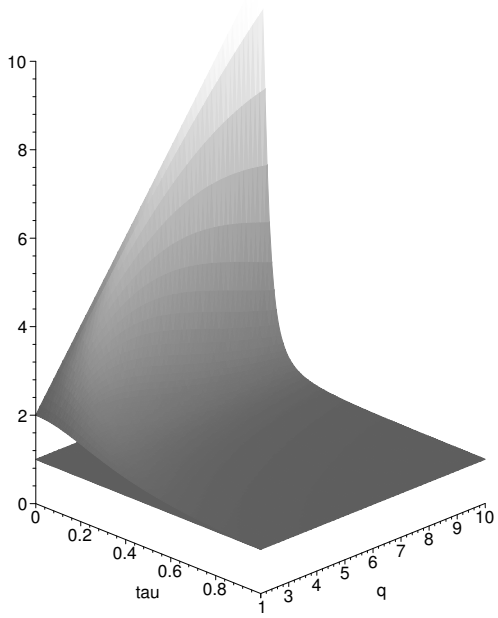
FIG. 3.12 – $|\underline{v}|((x_0, z_0), t)$, $\alpha = 0.95\ CFL_{opt}$ sur B_4, $\Delta x_c = 1/15$. Raffinement de maillage seulement en espace

3. *Raffinement de maillage spatio-temporel avec la CFL habituelle*. La précision est bonne pour $q = 2$, mais elle se détériore lorsqu'on considère un taux de raffinement supérieur. Le pas de temps est
$$\Delta t_c = CFL_{opt}\Delta x, \quad \text{sur } \Omega_c, \qquad \Delta t_f = CFL_{opt}\Delta x/q, \quad \text{sur } \Omega_f,$$
et donc, le nombre total d'itérations sur chaque grille est
$$T/(CFL_{opt}\Delta x), \quad \text{sur } \Omega_c, \qquad qT/(CFL_{opt}\Delta x), \quad \text{sur } \Omega_f.$$
Le coût total de calcul (si on néglige les calculs à l'interface, voir la remarque 3.4.1) est
$$COUT_{temps,opt} \quad = \quad \frac{T\ \left(d_c^2 + d_f^2\ (q^3 - 1)\ \right)}{\Delta x^3\ CFL_{opt}}, \qquad \text{sur } \Omega_c \cup \Omega_f.$$

Afin de comparer ces méthodes on pose
$$\tau \quad = \quad \frac{d_f}{d_c} \quad < \quad 1.$$
On commence avec une comparaison entre la **première** et la **deuxième** technique. On obtient
$$GAIN_1(q, \tau) \quad := \quad \frac{COUT_{espace}}{COUT_{temps,restr}} \quad = \quad \frac{q\sin(\pi/q)\left(1 + \tau^2(q^2 - 1)\right)}{1 + \tau^2(q^3 - 1)}. \tag{3.27}$$
Ce quotient est plus grand que un si et seulement si (dans la figure 3.13.a, la partie du graphe au dessus du plan $z = 1$)
$$\tau \quad < \quad 1/f(q), \qquad \text{avec} \quad f(q) \quad = \quad \sqrt{\frac{q^3 - 1 - q(q^2 - 1)\sin(\pi/q)}{q\sin(\pi/q) - 1}}. \tag{3.28}$$



(a) $GAIN_1(q,\tau),\ (q,\tau) \in (2,10) \times (0,1)$



(b) $GAIN_2(q,\tau),\ (q,\tau) \in (2,10) \times (0,1)$

FIG. 3.13 – Régions où le gain en complexité de calcul (par rapport au raffinement seulement en espace) est supérieur à un.

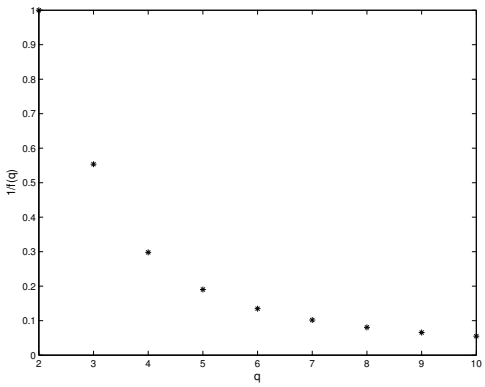


FIG. 3.14 – $1/f(q)$ en fonction de q

Donc le raffinement de maillage spatio-temporel avec la condition CFL restrictive (3.26) est rentable si la région raffinée est suffisamment petite. Le gain maximal se trouve lorsqu'on fait tendre τ vers zéro :

$$\lim_{\tau \mapsto 0} GAIN_1(q,\tau) \quad = \quad \frac{\sin(\pi/q)}{1/q}$$

fonction croissante qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[2, \pi)$ pour $q \in [2, \infty)$. On remarque en particulier qu'on ne peut pas gagner plus d'un facteur π. Dans le cas $q = 2$ la condition (3.28) est automatiquement vérifiée. Dans la figure 3.14 on représente la fonction $1/f(\cdot)$ pour les premiers taux de raffinement. Cette condition CFL restrictive est très contraignante pour des valeurs de q élevés.

Ensuite on compare le **raffinement seulement en espace** avec le **raffinement spatio-temporel avec la CFL optimale**. On obtient

$$GAIN_2(q,\tau) \quad := \quad \frac{COUT_{espace}}{COUT_{temps,opt}} \quad = \quad \frac{q(1+\tau^2(q^2-1))}{1+\tau^2(q^3-1)}, \tag{3.29}$$

expression qui est évidement supérieur à un (voir la figure 3.13.b). Le gain maximal est obtenu encore une fois lorsque la taille de la région raffinée tend vers zéro (en pratique τ est très petit)

$$\lim_{\tau \mapsto 0} GAIN_2(q,\tau) \quad = \quad q$$

Alors, lorsqu'on fait un raffinement de taux q, le gain peut varier de 1 à q. Même si dans la région grossière la technique de raffinement spatio-temporel serait moins dispersive que le raffinement seulement en espace (on utilise la CFL optimale) on rappelle que si le taux de raffinement est plus grand que deux, une onde haute fréquence pollue la région raffinée. Il serait très intéressant de réduire ces phénomènes parasites pour pouvoir utiliser une CFL proche de l'optimale et, en même temps, être precis (voir le chapitre 4).

Remarque 3.4.1 *On a remarqué numériquement que le sur-coût supplémentaire de la résolution des systèmes linéaires sur les interfaces artificielles est presque négligeable par rapport aux calculs volumiques effectués. On rappelle que les matrices à inverser sont de petite taille (nombre de degrés de liberté à l'interface), symétriques définies positives, très bien conditionnées (voir la remarque 3.4.2) et creuses. Le nombre de systèmes linéaires à résoudre au long d'une expérience est*

- *$qT/(CFL_{opt}\Delta x)$ pour la technique de raffinement purement en espace avec pas de temps optimal sur la grille fine,*
- *$T/(CFL_{opt}\sin(\pi/q)\Delta x)$ pour la technique de raffinement spatio-temporel avec la condition CFL (3.26),*
- *$T/(CFL_{opt}\Delta x)$ pour la technique de raffinement spatio-temporel avec la condition CFL optimale.*

Remarque 3.4.2 *Une étude numérique du conditionnement (en norme deux) de la matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ (associée à la technique de raffinement spatio-temporel) montre que*

- *pour un α donné et Δt qui tend vers zéro, il se stabilise autour des valeurs indiquées sur le tableau 3.1.*
- *pour un Δx fixé, il ne dépend pas beaucoup de la valeur du paramètre α.*
- *pour α et Δx fixés, il semble diminuer lorsque le taux de raffinement augmente.*

En général, ce conditionnement varie dans l'intervalle $[2.5, 12]$ ce qui veut dire que la matrice sera facile à inverser.

	$\alpha = 0.95\, CFL_{opt}$	$\alpha = 0.7125\, CFL_{opt}$	$\alpha = 0.2375\, CFL_{opt}$
$q = 2$	9.57	10.44	11.4
$q = 3$	5.81	5.91	7.35
$q = 5$	4.76	4.06	5.03
$q = 10$	4.24	3.89	2.95

TAB. 3.1 – Conditionnement de $\mathcal{M}(\Delta t)$. $\Delta x_c = 1/15$. $(q_c, q_f) = (1, q)$

3.5 Analyse Fine de la Méthode dans le Cas 1D

Dans la section précédente on a constaté que

- on obtient des meilleurs résultats lorsque $(q_c, q_f) = (1, 2)$,
- si $q_f > 2$, l'ordre de convergence de la méthode semble changer lorsqu'on fait varier la valeur du paramètre α (voir la remarque 3.3.1),
- la méthode semble être d'ordre deux sur Ω_c lorsque $q_c = 1$,
- les phénomènes parasites haute fréquence dans les boites raffinées observés dans les figures 3.3 – 3.5 sont dus plutôt à la non-conformité des maillages en temps et pas à la non-conformité en espace.

C'est pour ceci qu'on se place dans le cadre simplifié 1D où seule la non-conformité des maillages en temps se reproduit. Dans ce cas on sera capable de mener une étude qui nous permettra de mieux comprendre tous ces phénomènes et qui nous donnera des idées pour les réduire. On commencera par introduire le schéma 1D et donner des exemples numériques où on observera des comportements similaires à ceux montrés dans la section 3.3. Ensuite on analysera la méthode à l'aide des techniques de Fourier.

3.5.1 Présentation de la Méthode 1D

Nous rappelons que les équations qu'on veut résoudre dans ce cas simplifié 1D sont données par les équations (2.2). Notons que dans ce cas, le multiplicateur de Lagrange est seulement fonction du temps. Pour effectuer la discrétisation en espace on se sert des maillages réguliers de pas $\Delta x_l = \Delta x / q_l$ sur $\Omega_l,\ l \in \{c, f\}$. L'inconnue u est discrétisée avec des éléments finis P^1 globalement continus tandis que l'inconnue v est approchée dans les espaces des fonctions constantes sur chaque élément. On utilise des techniques de condensation de masse pour avoir des matrices de masse diagonales. Pour la discrétisation en temps, on utilise la méthode expliquée dans la section 3.1 en utilisant un pas de discrétisation temporel $\Delta t_l = \Delta t / q_l$ sur $\Omega_l,\ l \in \{c, f\}$. Avec des notations évidentes, les inconnues de notre problème sont (voir la figure 3.15 pour le cas $(q_c, q_f) = (2, 5)$)

$$\left|\begin{array}{llll} (u_c)^{\frac{m}{q_c}}_{\frac{j}{q_c}}, & (v_c)^{\frac{2m+1}{2q_c}}_{\frac{2j-1}{2q_c}}, & m \geq 0, & j \leq 0 \\ (u_f)^{\frac{m}{q_f}}_{\frac{j}{q_f}}, & (v_f)^{\frac{2m+1}{2q_f}}_{\frac{2j+1}{2q_f}}, & m \geq 0, & j \geq 0 \\ & j^{n+\frac{1}{2}}, & & n \geq 0. \end{array}\right.$$

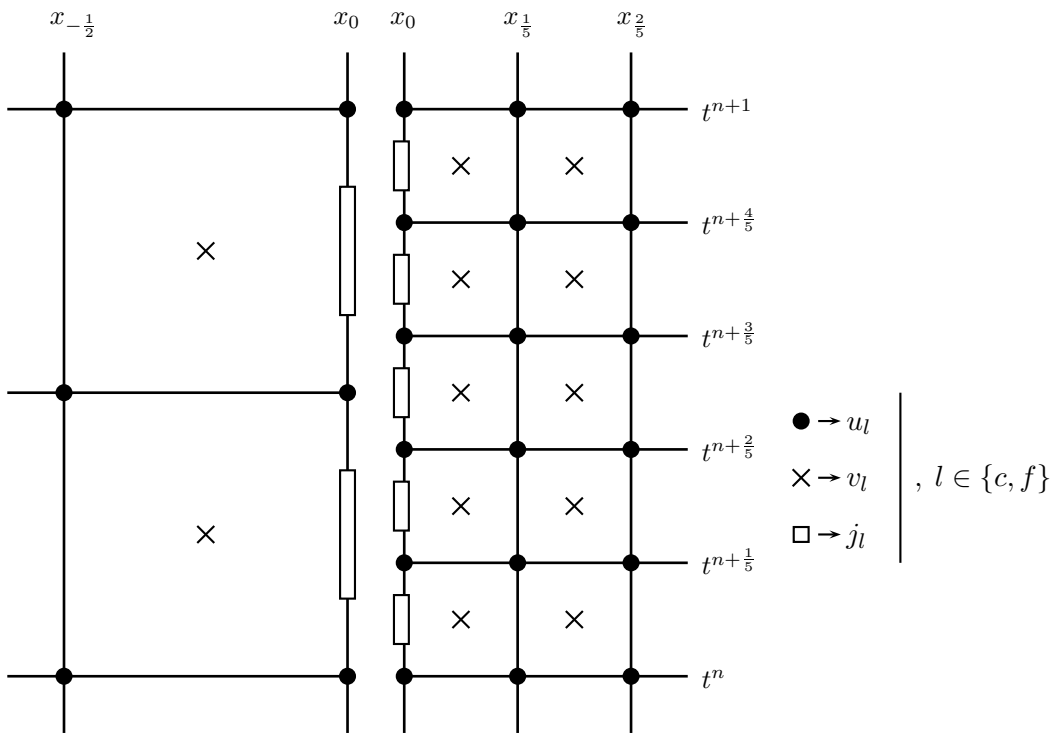


FIG. 3.15 – Distribution spatio-temporelle des inconnues du problème 1D. Raffinement $(2, 5)$

Dans ce cas, le schéma intérieur n'est rien d'autre que le schéma de Yee [83]

$$
\left|
\begin{array}{lllll}
\dfrac{(v_c)_{\frac{2j+1}{2q_c}}^{\frac{2m+1}{2q_c}} - (v_c)_{\frac{2j+1}{2q_c}}^{\frac{2m-1}{2q_c}}}{\Delta t_c} & + & \dfrac{(u_c)_{\frac{j+1}{q_c}}^{\frac{m}{q_c}} - (u_c)_{\frac{j}{q_c}}^{\frac{m}{q_c}}}{\Delta x_c} & = & 0, \quad m > 0, \quad j < 0, \\
\dfrac{(u_c)_{\frac{j}{q_c}}^{\frac{m+1}{q_c}} - (u_c)_{\frac{j}{q_c}}^{\frac{m}{q_c}}}{\Delta t_c} & + & \dfrac{(v_c)_{\frac{2j+1}{2q_c}}^{\frac{2m+1}{2q_c}} - (v_c)_{\frac{2j-1}{2q_c}}^{\frac{2m+1}{2q_c}}}{\Delta x_c} & = & 0, \quad m \geq 0, \quad j < 0,
\end{array}
\right. \tag{3.30}
$$

$$
\left|
\begin{array}{lllll}
\dfrac{(v_f)_{\frac{2j+1}{2q_f}}^{\frac{2m+1}{2q_f}} - (v_f)_{\frac{2j+1}{2q_f}}^{\frac{2m-1}{2q_f}}}{\Delta t_f} & + & \dfrac{(u_f)_{\frac{j+1}{q_f}}^{\frac{m}{q_f}} - (u_f)_{\frac{j}{q_f}}^{\frac{m}{q_f}}}{\Delta x_f} & = & 0 \quad m > 0, \quad j \geq 0, \\
\dfrac{(u_f)_{\frac{j}{q_f}}^{\frac{m+1}{q_f}} - (u_f)_{\frac{j}{q_f}}^{\frac{m}{q_f}}}{\Delta t_f} & + & \dfrac{(v_f)_{\frac{2j+1}{2q_f}}^{\frac{2m+1}{2q_f}} - (v_f)_{\frac{2j-1}{2q_f}}^{\frac{2m+1}{2q_f}}}{\Delta x_f} & = & 0 \quad m \geq 0, \quad j > 0.
\end{array}
\right. \tag{3.31}
$$

Les équations de transmission s'écrivent

$$
(3.32)\qquad \left|\begin{array}{rcl}
\displaystyle\sum_{k=0}^{q_c-1} \frac{(u_c)_0^{n+\frac{k+1}{q_c}} + (u_c)_0^{n+\frac{k}{q_c}}}{2q_c} & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{q_f-1} \frac{(u_f)_0^{n+\frac{k+1}{q_f}} + (u_f)_0^{n+\frac{k}{q_f}}}{2q_f}, \\
(v_c)_{-\frac{1}{2q_c}}^{n+\frac{2k+1}{2q_c}} - \dfrac{1}{2\alpha}\left((u_c)_0^{n+\frac{k+1}{q_c}} - (u_c)_0^{n+\frac{k}{q_c}}\right) & = & j^{n+\frac{1}{2}}, \quad k \in \{0, \dots q_c - 1\}, \\
(v_f)_{-\frac{1}{2q_f}}^{n+\frac{2k+1}{2q_f}} + \dfrac{1}{2\alpha}\left((u_f)_0^{n+\frac{k+1}{q_f}} - (u_f)_0^{n+\frac{k}{q_f}}\right) & = & j^{n+\frac{1}{2}}, \quad k \in \{0, \dots q_f - 1\},
\end{array}\right.
$$

où $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

3.5.2 Analyse par Fourier de la Méthode 1D

Dans cette section on généralise l'étude par ondes planes présenté dans la section 2.7 au schéma numérique de raffinement de maillage spatio-temporel (q_c, q_f) donné par (3.30)–(3.32). Afin de ne pas trop alourdir les calculs et de faciliter la compression des phénomènes existants on fera une présentation assez intuitive. On va supposer qu'on envoie une onde plane de fréquence ω et d'amplitude I_c^0 depuis le domaine Ω_c et on considère notre problème comme une analyse de réflexion transmission entre un domaine bi-couche. Il s'agit notamment d'obtenir l'expression de l'onde diffractée par l'interface artificielle $\Gamma = \{x \equiv 0\}$.

3.5.2.1 Expression des Ondes Planes

On commence par en déduire l'expression des ondes planes qu'il faudra utiliser sur chaque sous-domaine $\Omega_l,\ l \in \{c, f\}$ pour faire l'étude. On rappelle que (sauf dans le cas où $q_l = 1$) le schéma numérique en temps n'est pas invariant pour le pas de temps $\Delta t_l = \Delta t / q_l$ mais pour le pas de temps Δt sur lequel on effectue le couplage. Alors, les expressions des ondes planes qu'on doit considérer sont de la forme

$$
\left.\begin{array}{rcl}
(u_l)_{\frac{j}{q_l}}^{n+\frac{k}{q_l}} & = & U_k\, e^{\mathbf{i}(k\frac{j}{q_l}\Delta x - \omega(n+\frac{k}{q_l})\Delta t)} \\
(v_l)_{\frac{2j+1}{2q_l}}^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} & = & V_k\, e^{\mathbf{i}(k\frac{2j+1}{2q_l}\Delta x - \omega(n+\frac{2k+1}{2q_l})\Delta t)}
\end{array}\right| , \quad k \in \{0, \dots, q_l - 1\}.
$$

Lorsqu'on plonge cette expression dans le schéma intérieur on obtient la relation à vérifier par les amplitudes $(U_k, V_k),\ k \in \{0, \dots, q_l - 1\}$ et par le nombre d'onde k. Cette relation de dispersion nous donne $2q_l$ solutions différentes. Un raisonnement similaire à celui mené dans la section 2.7.3 nous permet d'exprimer cet ensemble de solutions en utilisant le nombre d'onde $k^{\pm}_{l,\Delta x_l}$ introduit dans la section 2.7 et en considerant pas seulement la fréquence ω mais les fréquences[1]

$$
(3.33)\qquad \omega + \frac{2\pi k}{\Delta t}, \qquad k \in \left\{ -\left[\frac{q_l}{2}\right], \dots, \left[\frac{q_l - 1}{2}\right] \right\}.
$$

Remarque 3.5.1 *Ce phénomène d'aliasing est schématisé sur la figure 3.16 où on considère un pas de discrétisation spatio-temporel sur Ω_l de $(\Delta x_l, \Delta t_l) = (\Delta x/3, \Delta t/3)$, c'est à dire, $q_l = 3$. En*

[1] Les crochets dans cette expression dénotent la partie entière d'un nombre réel x, c'est à dire, le plus grand entier plus petit ou égal à x.

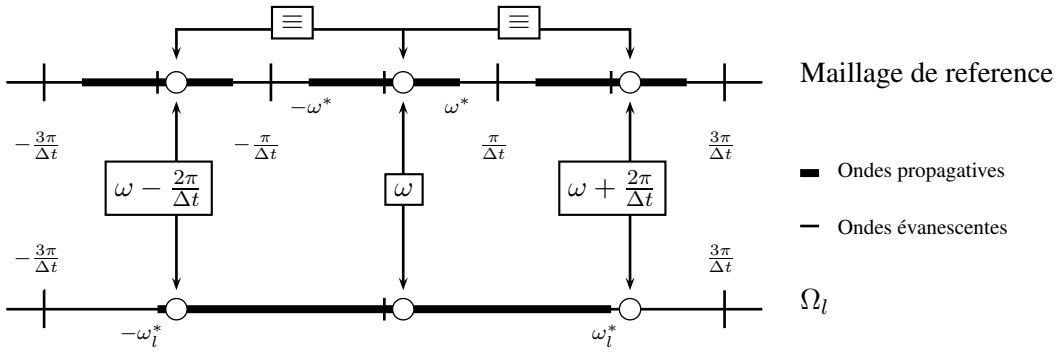


FIG. 3.16 – Fréquences équivalentes sur le maillage de référence qui sont différentes sur Ω_l. Cas $q_l = 3$

haut, on représente une fenêtre de fréquences "vue" depuis un maillage de pas $(\Delta x, \Delta t)$ qu'on appellera "maillage de référence" (on rappelle que le schéma est invariant pour ce pas de temps). L'intervalle des fréquences représentables est $[-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]$. Les fréquences comprises dans le sous-intervalle $[-\frac{2}{\Delta t}\arcsin(\alpha), \frac{2}{\Delta t}\arcsin(\alpha)]$ génèrent des ondes propagatives. Le comportement pour le reste des fréquences peut s'en déduire par périodicité de $\frac{2\pi}{\Delta t}$. En bas, on représente la même fenêtre de fréquences, mais cette fois-ci "vue" depuis le maillage sur Ω_l. Il est clair que l'intervalle de fréquences représentables donné par $[-\frac{3\pi}{\Delta t}, \frac{3\pi}{\Delta t}]$ est trois fois plus grand que son homologue sur le maillage de référence. Par conséquent, pour chaque fréquence donnée $\omega \in \mathbb{R}$ on aura trois fréquences différentes sur Ω_l : la fréquence choisie ω, et deux autres fréquences, $\omega \pm \frac{2\pi}{\Delta t}$. Ces deux dernières fréquences vont générer des ondes parasites qui vont osciller très rapidement et qui peuvent être propagatives ou évanescentes. Dans cet exemple particulier, les ondes associées à $\omega - \frac{2\pi}{\Delta t}$ seront propagatives tandis que celles associées à $\omega + \frac{2\pi}{\Delta t}$ seront évanescentes.

L'onde totale est donc composée par (voir la figure 3.17) :

- q_c ondes incidentes de fréquences $\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t}$ et d'amplitudes $I_c^k,\ k \in \left\{-\left[\frac{q_c}{2}\right], \ldots, \left[\frac{q_c-1}{2}\right]\right\}$,
- q_c ondes réfléchies de fréquences $\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t}$ et d'amplitudes $R_c^k,\ k \in \left\{-\left[\frac{q_c}{2}\right], \ldots, \left[\frac{q_c-1}{2}\right]\right\}$,
- q_f ondes transmises de fréquences $\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t}$ et d'amplitudes $T_f^k,\ k \in \left\{-\left[\frac{q_f}{2}\right], \ldots, \left[\frac{q_f-1}{2}\right]\right\}$.

Remarque 3.5.2 *Le fait de n'avoir des ondes incidentes que du coté Ω_c n'est pas une restriction car on peut inverser les rôles de q_c et q_f.*

Ainsi, l'expression de la solution sur la grille grossière est

$$
\begin{aligned}
(u_c)_{\frac{j}{q_c}}^{\frac{m}{q_c}} \quad = \quad & \sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} I_c^s \, e^{\mathbf{i}(k^+_{c,\Delta x_c}(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{j}{q_c}\Delta x - (\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{m}{q_c}\Delta t)} + \\
& \sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} R_c^s \, e^{\mathbf{i}(k^-_{c,\Delta x_c}(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{j}{q_c}\Delta x - (\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{m}{q_c}\Delta t)}, \qquad j \leq 0,
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

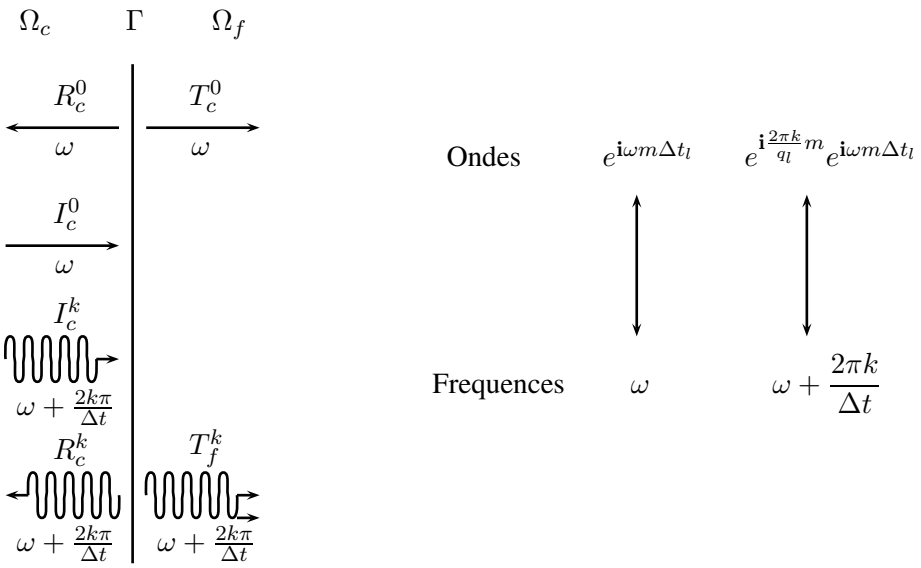


FIG. 3.17 – Schéma du phénomène d'aliasing. Cas général. Onde incidente sur Ω_c

$$
\begin{aligned}
(v_c)_{\frac{2j+1}{2q_c}}^{\frac{2m+1}{2q_c}} \quad = \quad & \sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} I_c^s \, e^{\mathbf{i}(k^+_{c,\Delta x_c}(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{2j+1}{2q_c}\Delta x-(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{2m+1}{2q_c}\Delta t)} - \\
& \sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} R_c^s \, e^{\mathbf{i}(k^-_{c,\Delta x_c}(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{2j+1}{2q_c}\Delta x-(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{2m+1}{2q_c}\Delta t)}, \qquad j<0,
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

et sur la grille fine

$$
(u_f)_{\frac{j}{q_f}}^{\frac{m}{q_f}} \quad = \quad \sum_{s=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]} T_f^s \, e^{\mathbf{i}(k^+_{f,\Delta x_f}(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{j}{q_f}\Delta x-(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{m}{q_f}\Delta t)}, \qquad j \geq 0, \tag{3.36}
$$

$$
(v_f)_{\frac{2j+1}{2q_f}}^{\frac{2m+1}{2q_f}} \quad = \quad \sum_{s=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]} T_f^s \, e^{\mathbf{i}(k^+_{f,\Delta x_f}(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{2j+1}{2q_f}\Delta x-(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{2m+1}{2q_f}\Delta t)}, \qquad j \geq 0, \tag{3.37}
$$

où les fonctions $k^{\pm}_{l,\Delta x_l}(\cdot)$ ont été définies dans la section 2.7. Pour le multiplicateur de Lagrange on considère l'expression suivante

$$
j^{n+\frac{1}{2}} \quad = \quad J \, e^{-\mathbf{i}\omega(n+\frac{1}{2})\Delta t}. \tag{3.38}
$$

Remarque 3.5.3 *On appellera les ondes associées aux fréquences différentes de ω des ondes parasites. Il est clair qu'elles sont une source d'erreur importante. Pour cette raison il est intéressant d'étudier sous quelle condition elles sont évanescentes (pour une valeur de Δt assez petit). Dans ce cas, même si leur amplitude est importante, l'erreur restera localisée au voisinage de l'interface artificielle sans se propager sur le domaine de calcul grâce à son comportement exponentiellement décroissante en espace. Alors, les ondes associées aux fréquences $\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t}$, $k \in \left\{-\left[\frac{q_l}{2}\right], \ldots, \left[\frac{q_l-1}{2}\right]\right\} \setminus \{0\}$ seront évanescentes si et seulement si*

$$\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t} \quad \notin \quad [-\omega_l^*, \omega_l^*] + \frac{2\pi}{\Delta t_l}\mathbb{Z}.$$

Pour un $\omega > 0$ fixé et Δt assez petit, ceci est équivalent à

$$\left|\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t}\right| \quad > \quad \omega_l^*, \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\omega \quad > \quad \omega_l^* - \frac{2\pi|k|}{\Delta t} \quad = \quad \frac{2q_l}{\Delta t}\left[\arcsin(\alpha) - \frac{\pi|k|}{q_l}\right].$$

Ceci est seulement possible si la condition CFL restrictive

$$\alpha \quad < \quad \sin\left(\frac{\pi|k|}{q_l}\right),$$

est satisfaite. Dans ce cas, la profondeur de pénétration de ces ondes est

$$\begin{aligned} l_{\Delta x_l}((\omega + \tfrac{2\pi k}{\Delta t})\Delta t_l) \quad &= \quad \xi_{\Delta x_l}((\omega + \tfrac{2\pi k}{\Delta t})\Delta t_l)^{-1} \\ &\approx \quad \frac{\Delta x_l}{2 \operatorname{argch}\left(\sin\left(\frac{\pi k}{q_l}\right)/\alpha\right)} + \mathcal{O}(\omega \Delta x_l^2). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Pour avoir un comportement évanescent de toutes les ondes parasites il faut que

$$\alpha \quad < \quad \sin\left(\frac{\pi}{q_l}\right), \tag{3.40}$$

condition qu'on a aussi rencontrée dans le théorème 3.2.3.

Remarque 3.5.4 *Dans le cas particulier où $\alpha = \sin\left(\frac{\pi k}{q_l}\right)$, $k \in \left\{-\left[\frac{q_l}{2}\right], \ldots, \left[\frac{q_l-1}{2}\right]\right\} \setminus \{0\}$, pour un ω fixé et Δt assez petit, les ondes associés à la fréquence $\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t}$ seront propagatives si $\omega k \leq 0$ et évanescentes si $\omega k > 0$. Dans ce dernier cas, la profondeur de pénétration cette fois admet un développement du type*

$$l_{\Delta x_l}((\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t})\Delta t_l) \quad \approx \quad \frac{\sqrt{\Delta x_l}}{2\sqrt{\cos\left(\frac{\pi k}{q_l}\right)\omega}} + \mathcal{O}(\omega^{\frac{1}{2}}\Delta x_l^{\frac{3}{2}}). \tag{3.41}$$

Il est clair que, par construction, les suites données par (3.34)–(3.37) vérifient le schéma intérieur (3.30)–(3.31). Maintenant on doit déterminer les valeurs des amplitudes

$$R_c^k, \qquad T_f^k, \qquad \text{et} \qquad J,$$

pour obtenir l'expression de l'onde diffractée.

3.5.2.2 Détermination des Amplitudes

Pour obtenir les valeurs de ces amplitudes on utilisera les conditions de raccord (3.32) de notre schéma. Notons qu'on a le même nombre d'équations à satisfaire que d'inconnues. Afin de simplifier les expressions qu'on va manipuler, on introduit la notation suivante pour exprimer (3.32) :

$$\left|\begin{array}{rcl} U_c^{n+\frac{1}{2}} & = & U_f^{n+\frac{1}{2}}, \\ V_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} & = & j^{n+\frac{1}{2}}, \qquad k \in \{0, \dots q_l - 1\}, \qquad l \in \{c, f\}. \end{array}\right. \tag{3.42}$$

Pour faire les calculs, on réécrit les équations de couplage d'une façon plus centrée par rapport au temps $t^{n+\frac{1}{2}}$. La première des équations est déjà totalement centrée. Le reste d'équations deviennent[2]

$$\left|\begin{array}{rcll} \frac{1}{2}\left(V_l^{n+1-\frac{2k+1}{2q_l}} + V_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}\right) & = & j^{n+\frac{1}{2}}, & k \in \left\{0, \dots, \left[\frac{q_l-1}{2}\right]\right\}, \qquad l \in \{c, f\}, \\ V_l^{n+1-\frac{2k+1}{2q_l}} - V_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} & = & 0, & k \in \left\{0, \dots, \left[\frac{q_l}{2}\right] - 1\right\}, \qquad l \in \{c, f\}, \end{array}\right. \tag{3.43}$$

Lorsqu'on considère une solution du type (3.34)– (3.38) on obtient

$$U_c^{n+\frac{1}{2}} e^{\mathbf{i}\,\omega(n+\frac{1}{2})\Delta t} = \sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} [I_c^s \; + \; R_c^s] \; F_c(\omega\Delta t, s),$$

$$\frac{V_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}} + V_c^{n+1-\frac{2k+1}{2q_c}}}{2\, e^{-\mathbf{i}\,\omega(n+\frac{1}{2})\Delta t}} = \sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} [I_c^s \; - \; R_c^s]\, G_c(\omega\Delta t, \alpha, k, s),$$

$$\frac{V_c^{n+1-\frac{2k+1}{2q_c}} - V_c^{n-\frac{2k+1}{2q_c}}}{-2\, i\, e^{-\mathbf{i}\,\omega(n+\frac{1}{2})\Delta t}} = \sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} [I_c^s \; - \; R_c^s]\, H_c(\omega\Delta t, \alpha, k, s),$$

$$U_f^{n+\frac{1}{2}} e^{\mathbf{i}\,\omega(n+\frac{1}{2})\Delta t} = \sum_{s=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]} T_f^s \; F_f(\omega\Delta t, s),$$

$$\frac{V_f^{n+\frac{2k+1}{2q_f}} + V_f^{n+1-\frac{2k+1}{2q_f}}}{2\, e^{-\mathbf{i}\,\omega(n+\frac{1}{2})\Delta t}} = \sum_{s=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]} T_f^s \; G_f(\omega\Delta t, \alpha, k, s),$$

$$\frac{V_f^{n+1-\frac{2k+1}{2q_f}} - V_f^{n-\frac{2k+1}{2q_f}}}{-2\, i\, e^{-\mathbf{i}\,\omega(n+\frac{1}{2})\Delta t}} = \sum_{s=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]} T_f^s \; H_f(\omega\Delta t, \alpha, k, s),$$

[2]Lorsque $\left[\frac{q_l}{2}\right] - 1$ est négative, on considère que l'ensemble $\left\{0, \dots, \left[\frac{q_l}{2}\right] - 1\right\}$ est vide.

où on a posé, pour $l \in \{c, f\}$

$$F_l(\omega\Delta t, s) = \frac{1}{q_l}\left(\cos\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) + (-1)^s \frac{\sin\left(\left(\omega + \frac{2\pi s}{\Delta t}\right)\frac{q_l - 1}{2q_l}\Delta t\right)}{\sin\left(\left(\omega + \frac{2\pi s}{\Delta t}\right)\frac{\Delta t}{2q_l}\right)}\right), \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} G_l(\omega\Delta t, \alpha, k, s) &= (-1)^s \cos\left(\left(\omega + \frac{2\pi s}{\Delta t}\right)\frac{q_l - 2k - 1}{2q_l}\Delta t\right) \\ &\quad \cos\left(k^+_{l,\Delta x_l}\left(\omega + \frac{2\pi s}{\Delta t}\right)\frac{\Delta x}{2q_l}\right), \end{aligned} \tag{3.45}$$

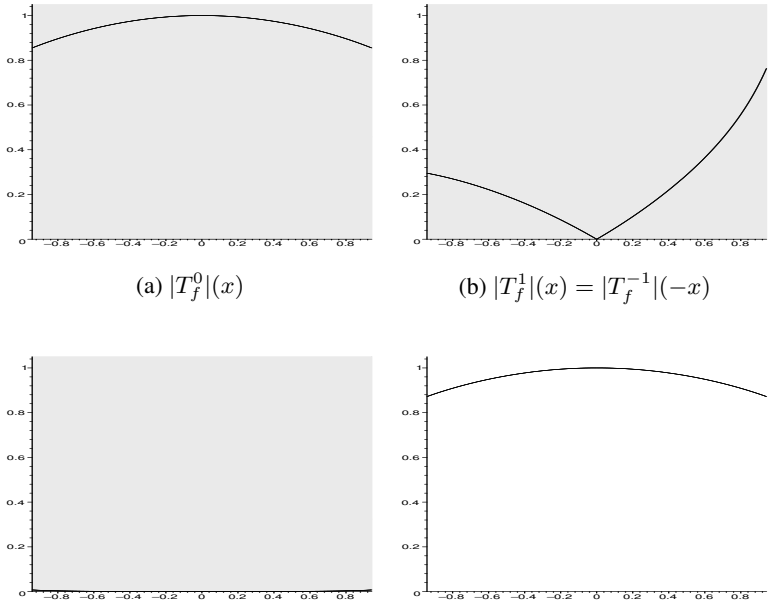
$$\begin{aligned} H_l(\omega\Delta t, \alpha, k, s) &= (-1)^s \sin\left(\left(\omega + \frac{2\pi s}{\Delta t}\right)\frac{q_l - 2k - 1}{2q_l}\Delta t\right) \\ &\quad \cos\left(k^+_{l,\Delta x_l}\left(\omega + \frac{2\pi s}{\Delta t}\right)\frac{\Delta x}{2q_l}\right). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Ainsi, le système linéaire à résoudre pour obtenir les amplitudes est donné par

(3.47)

$$\left|\begin{array}{lllll}
\displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} R_c^s\, F_c(s) & - & \displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]} T_f^s\, F_f(s) & = & \displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} -I_c^s\, F_c(s), \\[2ex]
\displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} R_c^s\, G_c(k,s) & + & J & = & \displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} I_c^s\, G_c(k,s), \quad k \in \left\{0, \ldots, \left[\frac{q_c-1}{2}\right]\right\}, \\[2ex]
\displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} R_c^s\, H_c(k,s) & & & = & \displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} I_c^s\, H_c(k,s), \quad k \in \left\{0, \ldots, \left[\frac{q_c}{2}\right] - 1\right\}, \\[2ex]
\displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]} T_f^s\, G_f(k,s) & - & J & = & 0, \quad k \in \left\{0, \ldots, \left[\frac{q_f-1}{2}\right]\right\}, \\[2ex]
\displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]} T_f^s\, H_f(k,s) & & & = & 0, \quad k \in \left\{0, \ldots, \left[\frac{q_f}{2}\right] - 1\right\},
\end{array}\right.$$

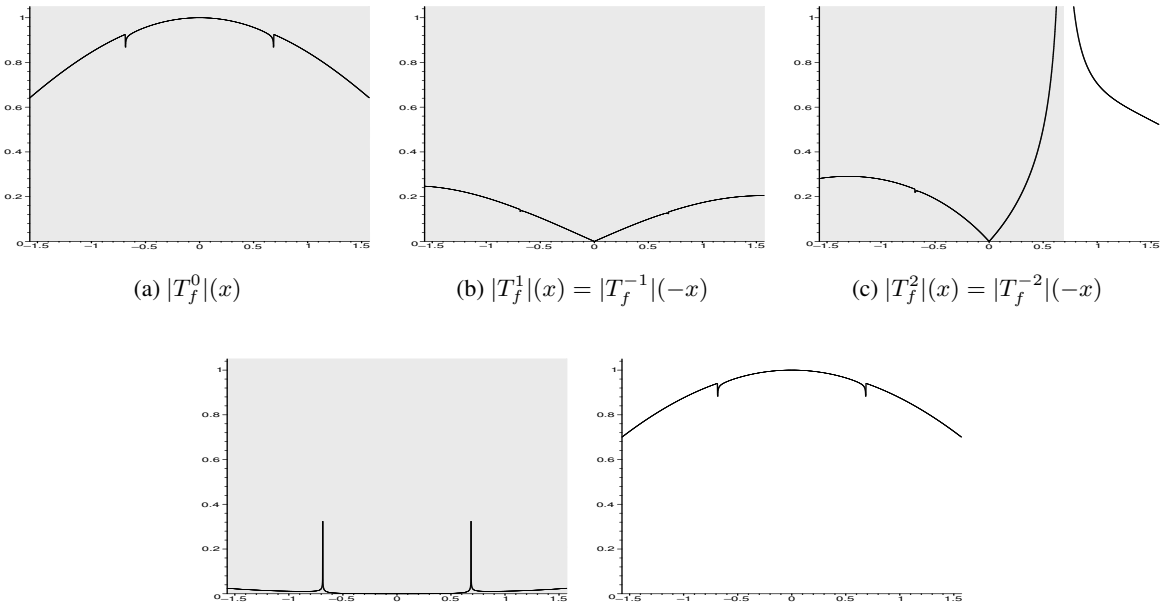
qui coïncide avec celui donné par 2.119 lorsque $(q_c, q_f) = (1, 2)$.
On a décidé de présenter les résultats que pour une onde incidente qui provient du coté grossier avec une fréquence ω et une amplitude $I_c^0 = 1$. Dans les autres cas (ondes incidentes avec des fréquences parasites) les résultats sont similaires.



(a) $|T_f^0|(x)$ (b) $|T_f^1|(x) = |T_f^{-1}|(-x)$

(c) $|R_c^0|(x)$ (d) $|J|(x)$

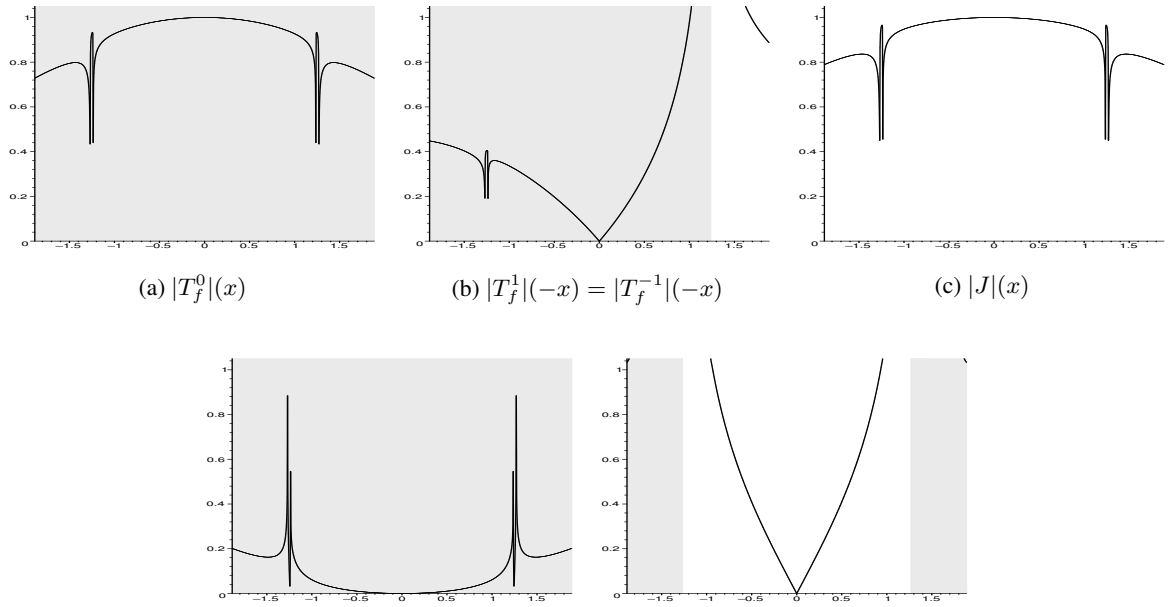
FIG. 3.18 – $(q_c, q_f) = (1, 3),\ \alpha = 0.95,\ I_c^0 = 1$. Module des amplitudes. $x = \omega\Delta t$



(a) $|T_f^0|(x)$ (b) $|T_f^1|(x) = |T_f^{-1}|(-x)$ (c) $|T_f^2|(x) = |T_f^{-2}|(-x)$

(d) $|R_c^0|(x)$ (e) $|J|(x)$

FIG. 3.19 – $(q_c, q_f) = (1, 5),\ \alpha = 0.97,\ I_c^0 = 1$. Module des amplitudes. $x = \omega\Delta t$



(a) $|T_f^0|(x)$ (b) $|T_f^1|(-x) = |T_f^{-1}|(-x)$ (c) $|J|(x)$

(d) $|R_c^0|(x)$ (e) $|R_c^{-1}|(x)$

FIG. 3.20 – $(q_c, q_f) = (2, 3),\ \alpha = 0.95,\ I_c^0 = 1$. Module des amplitudes. $x = \omega\Delta t$

3.5.2.3 Interprétation des Résultats

Pour étudier le comportement et l'ordre de convergence de la méthode de raffinement de maillage presentée on doit prendre en compte deux facteurs :

- La vitesse de convergence des amplitudes numériques obtenues avec notre méthode vers les amplitudes du problème physique. Dans le cas qu'on traite on devrait observer un comportement du type

$$\left|\begin{array}{llllll} T_f^0 & \mapsto & 1, & T_f^k & \mapsto & 0, \quad k \in \left\{-\left[\frac{q_f}{2}\right], \ldots, \left[\frac{q_f-1}{2}\right]\right\} \setminus \{0\}, \\ J & \mapsto & 1, & R_c^k & \mapsto & 0, \quad k \in \left\{-\left[\frac{q_c}{2}\right], \ldots, \left[\frac{q_c-1}{2}\right]\right\}. \end{array}\right. \tag{3.48}$$

- La nature des ondes numériques pour un $\omega\Delta x$ assez petit. Ainsi on a que
  - les ondes de fréquence ω sont toujours propagatives,
  - la nature des ondes parasites haute fréquence dépend de la valeur du paramètre α. Pour α assez petit elles deviennent évanescentes (voir la remarque 3.5.3) et donc, elles resteront localisées dans un voisinage de l'interface artificiel.

Dans les figures 3.18–3.20 on représente les modules des amplitudes des différentes ondes en fonction de $\omega\Delta x$ pour plusieurs valeurs de (q_c, q_f) et du paramètre α. Dans la région grisée on représente les $\omega\Delta x$ qui vont générer des ondes propagatives. Dans les autres régions, les ondes associées sont évanescentes. Étant donné que le cas $(q_c, q_f) = (1, 2)$ a été étudié en détail dans la section 2.7 on traitera des taux de raffinement supérieurs.

$(q_c, q_f) = (1, 3),\ \alpha = 0.95$**.** Les amplitudes du multiplicateur de Lagrange et des ondes réfléchie et transmise de fréquence ω sont approchées à l'ordre deux (voir les figures 3.18(a),(c),(d)). Cependant, les coefficients $T_f^{\pm 1}$ ne sont que des approximations d'ordre un de zéro (voir la figure 3.18(b)). Étant donné que le paramètre α a été choisi assez proche de la valeur maximale ($\alpha = 0.95 > \sin(\pi/3)$), toutes les ondes parasites transmises sont asymptotiquement propagatives. Ceci implique que la partie prépondérante de l'erreur viendra de ces termes : la méthode sera d'ordre un sur Ω_f et d'ordre deux sur Ω_c.

$(q_c, q_f) = (1, 5),\ \alpha = 0.97$**.** Dans le cas où le taux de raffinement est égal à cinq on a un comportement similaire. Comme dans l'exemple précédent, les coefficients des transmission des quatre ondes parasites haute fréquence sont des approximations d'ordre un de zéro (voir les figures 3.19(b),(c)). Toutes les autres amplitudes sont des approximations quadratiques des valeurs physiques (voir les figures 3.19(a),(d),(e)). Encore une fois, toutes les ondes sont propagatives pour un $\omega\Delta x$ assez petit, car le paramètre α a été choisi très proche de 1 (voir les zones grisées). La méthode sera globalement d'ordre un (même si elle est d'ordre deux sur Ω_c).

$(q_c, q_f) = (2, 3),\ \alpha = 0.95$**.** Finalement on traite un cas où $q_c \neq 1$. Les coefficients T_f^0, R_c^0 et J sont des approximations de second ordre les valeurs physiques. Maintenant on aura des ondes haute fréquence pas seulement sur Ω_f mais aussi sur Ω_c. Elles sont des approximations d'ordre un de zéro (voir les figures 3.20(b),(e)). Ainsi, la méthode sera d'ordre un en norme L^∞ sur chacune des grilles. La particularité de cette exemple est que, étant donné que

$$\sin(\pi/3) \quad < \quad \alpha \quad = \quad 0.95 \quad < \quad \sin(\pi/2)\,,$$

les ondes parasites sur Ω_c auront une tendance à être évanescentes tandis que celles sur Ω_f seront propagatives. Ceci fait que la méthode est d'ordre $\Delta x^{\frac{3}{2}}$ sur Ω_c et d'ordre Δx sur Ω_f si on considère la norme L^2.

Des expériences numériques pour des autres valeurs de q_c, q_f et α ont été faites en trouvant (presque) toujours un comportement similaire : ordre un sur les ondes parasites haute fréquence et ordre deux pour les autres ondes. Cependant, on a aussi remarqué que la méthode est moins performante pour certaines valeurs ponctuelles du rapport $\alpha = \Delta t/\Delta x$. Dans la section suivante on mène une étude qui nous permet de comprendre tous ces phénomènes.

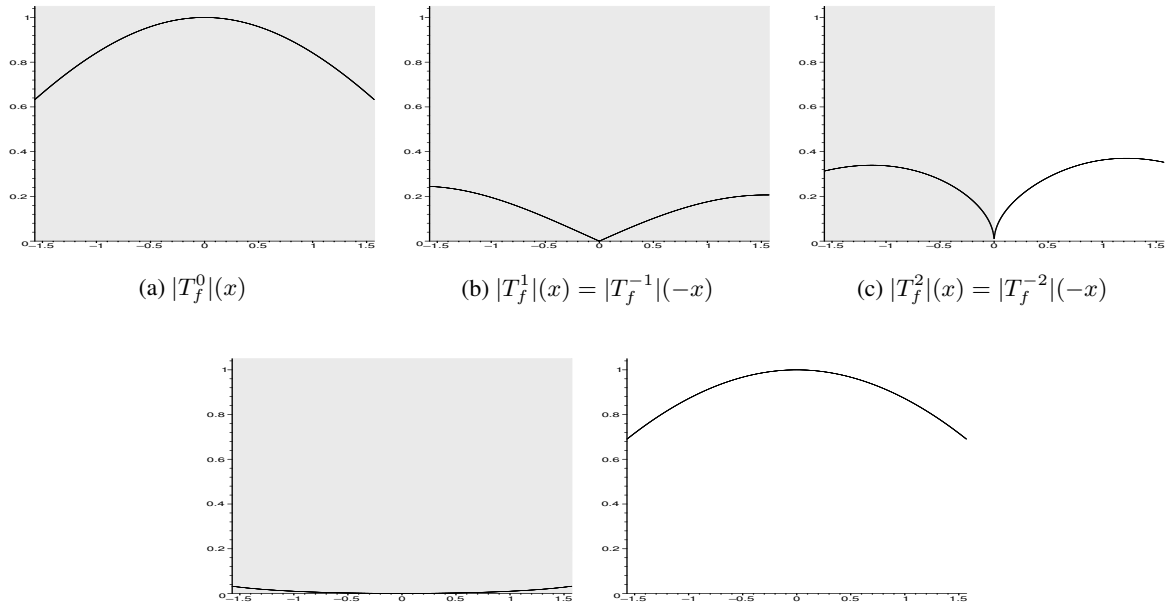
3.5.2.4 Ordre de la Méthode

Les courbes présentées dans la section précédente semblent montrer que les amplitudes des ondes transmise et réfléchie de fréquence ω sont approchées à l'ordre deux tandis que les amplitudes des ondes parasites haute fréquence sont des approximations du premier ordre de zéro (voir les figures 3.18–3.20). Cependant, on remarque que lorsque le paramètre α se rapproche de

$$\sin\left(\frac{\pi|k|}{q_l}\right), \quad k \in \left\{-\left[\frac{q_l}{2}\right], \ldots, \left[\frac{q_l - 1}{2}\right]\right\} \setminus \{0\}\,, \tag{3.49}$$

l'approximation se détériore. En fait, pour ces valeurs (qu'on appellera *valeurs critiques*), la méthode semble être d'ordre $\Delta x^{\frac{1}{2}}$.

Remarque 3.5.5 *Par exemple, dans la figure 3.21 on montre les modules des amplitudes lorsqu'on fait un raffinement de taux cinq et on considère* $\alpha = \sin(2\pi/5)$*. On peut vérifier numériquement que, dans ce cas,* T_f^0*,* R_c^0 *et* J *sont des approximations d'ordre* $\Delta x^{\frac{3}{2}}$ *des valeurs physiques. Les amplitudes des*



(a) $|T_f^0|(x)$ (b) $|T_f^1|(x) = |T_f^{-1}|(-x)$ (c) $|T_f^2|(x) = |T_f^{-2}|(-x)$

(d) $|R_c^0|(x)$ (e) $|J|(x)$

FIG. 3.21 – $(q_c, q_f) = (1, 5),\ \alpha = \sin(2\pi/5)\,,\ I_c^0 = 1$. Module des amplitudes. $x = \omega\Delta t$

ondes parasites sont des approximations d'ordre un de zéro sauf $T_f^{\pm 2}$ qui sont en $\Delta x^{\frac{1}{2}}$ (voir le profile des amplitudes dans la figure 3.21(c)).

Dans cette section on discute l'ordre de la méthode pour différentes valeurs du paramètre α. Pour effectuer ce calcul on réécrit le système linéaire (3.47) sous la forme matricielle suivante

$$M(\alpha, \omega\Delta x)\ X(\alpha, \omega\Delta x) \quad = \quad B(\alpha, \omega\Delta x), \tag{3.50}$$

où toutes les inconnues de notre problème sont inclues dans le vecteur X, c'est à dire,

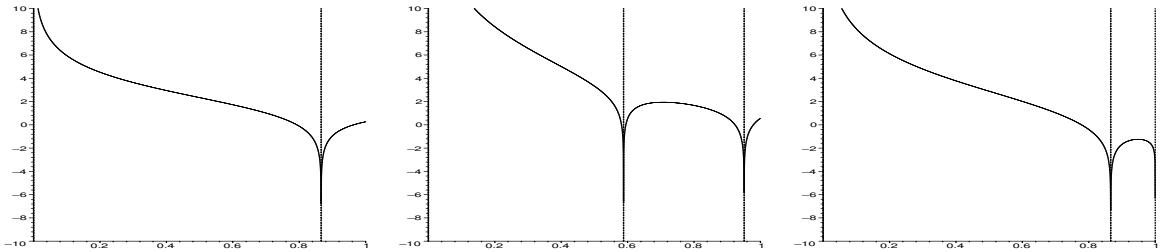
$$X(\alpha, \omega\Delta x) \quad = \quad \left[\left\{ R_c^k(\alpha, \omega\Delta x) \right\}_{k=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]}, \left\{ T_f^k(\alpha, \omega\Delta x) \right\}_{k=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]}, J(\alpha, \omega\Delta x) \right].$$

Les expressions de la matrice $M(\alpha, \omega\Delta x)$ et du second membre $B(\alpha, \omega\Delta x)$ peuvent s'en déduire de (3.47).

Lorsque α est différent des valeurs critiques. Dans le cas où α est différent des valeurs dans (3.49) on peut montrer que la matrice M et le second membre B admettent un développement de Taylor classique

$$\left| \begin{array}{rcl} M(\alpha, \omega\Delta x) & = & M_0(\alpha) + (\omega\Delta x) M_1(\alpha) + (\omega\Delta x)^2 M_2(\alpha) + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^3, \\ B(\alpha, \omega\Delta x) & = & B_0(\alpha) + (\omega\Delta x) B_1(\alpha) + (\omega\Delta x)^2 B_2(\alpha) + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^3, \end{array} \right. \tag{3.51}$$

avec la matrice M_0 inversible. Dans la figure 3.22 on représente le logarithme de la valeur absolu du déterminant de cette matrice pour les différentes valeurs de α ce qui nous permet de voir pour quelles



(a) $(q_c, q_f) = (1, 3)$ (b) $(q_c, q_f) = (1, 5)$ (c) $(q_c, q_f) = (2, 3)$

FIG. 3.22 – $\log(|\det(M_0(\alpha))|)$

valeurs le déterminant est nul. On omet les expressions de la matrice $M_k(\alpha)$ et du second membre $B_k(\alpha)$ pour alléger la lecture du document. La solution peut s'écrire alors sous la forme

$$X(\alpha, \omega\Delta x) = \sum_{j=0}^{2} (\omega\Delta x)^j X_j(\alpha) + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^3. \tag{3.52}$$

où on pose

$$X_n(\alpha) = \left[\left\{ R^k_{c,n}(\alpha) \right\}_{k=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]}, \left\{ T^k_{f,n}(\alpha) \right\}_{k=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]}, J_n(\alpha) \right], \qquad n \in \{0, \ldots, 2\}.$$

Si on introduit (3.52) et (3.51) dans (3.50) et on identifie les termes avec des puissances égales de $\omega\Delta x$ on obtient

$$M_0(\alpha)\, X_j(\alpha) = B_j(\alpha) - \sum_{k=1}^{j} M_k(\alpha) X_{j-k}(\alpha), \quad \forall j \in \{0, 1, 2\}.$$

Ces équations nous permettent de calculer les coefficients d'ordre zéro, un et deux de nos amplitudes approchées. Dans les figures 3.23–3.25, on représente les modules de ces coefficients pour chacune des amplitudes des ondes transmises, réfléchies et pour le multiplicateur de Lagrange avec α compris entre 0 et 1 (valeurs pour lesquelles la méthode est stable). Le module du coefficient d'ordre zéro est en noir, celui d'ordre un est en gris foncé et celui d'ordre deux est en gris pâle. On représente en gris les régions où l'onde considérée est propagative pour un $\omega\Delta x$ assez petit. Ainsi on remarque que :

- les termes d'ordre zéro coïncident toujours (pour tout α) avec la valeur physique donnée dans ce cas par (3.48) (on suppose que l'onde incidente provient du coté grossier).
- les coefficients qui déterminent l'ordre un des ondes de fréquence ω (transmise et réfléchie) et du multiplicateur de Lagrange sont toujours zéro. Ceci veut dire que l'approximation sur ces amplitudes est au moins d'ordre un.
  Les courbes analogues pour les ondes parasites d'haute fréquence :
  $$R^k_{c,1}, \quad k \in \left\{ -\left[\frac{q_c}{2}\right], \ldots, \left[\frac{q_c - 1}{2}\right] \right\} \setminus \{0\}, \qquad T^k_{f,1}, \quad k \in \left\{ -\left[\frac{q_f}{2}\right], \ldots, \left[\frac{q_f - 1}{2}\right] \right\} \setminus \{0\},$$
  ne sont pas nulles. En plus, elles tendent vers l'infini lorsque α tend vers $\sin(\pi|k|/q_l)$, $l \in \{c, f\}$. On en déduit que ces amplitudes sont approchées à l'ordre un sauf pour les valeurs spéciales de α.
- On trouve un comportement similaire pour les coefficients d'ordre deux des ondes de fréquence ω et du multiplicateur de Lagrange. Les courbes montrent que ces amplitudes sont approchées à l'ordre deux pour tout α sauf pour les valeurs critiques (ou ces courbes tendent vers l'infini).

Lorsque α est égal aux valeurs critiques. Lorsque α atteint une des valeurs dans (3.49), la matrice $M(\alpha, \omega\Delta x)$ et le second membre $B(\alpha, \omega\Delta x)$ ne peuvent plus s'exprimer avec des puissances entières de $\omega\Delta x$. Quelques éléments admettent deux développements (différents selon le signe de ω) en puissances demi-entières. Pour simplifier les calculs, on supposera que ω est positive. Ainsi, dans ce cas spécial, on aura les expression suivantes

$$\left|\begin{array}{rcl} M(\alpha,\omega\Delta x) & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{4}(\omega\Delta x)^{\frac{j}{2}}M_{\frac{j}{2}}(\alpha)+\mathcal{O}(\omega\Delta x)^{\frac{5}{2}}, \\ B(\alpha,\omega\Delta x) & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{4}(\omega\Delta x)^{\frac{j}{2}}B_{\frac{j}{2}}(\alpha)+\mathcal{O}(\omega\Delta x)^{\frac{5}{2}}, \\ X(\alpha,\omega\Delta x) & = & \displaystyle\sum_{j=j_0}^{4}(\omega\Delta x)^{\frac{j}{2}}X_{\frac{j}{2}}(\alpha)+\mathcal{O}(\omega\Delta x)^{\frac{5}{2}}. \end{array}\right.$$

Si on introduit ceci dans (3.50) et on identifie les puissances égales on obtient

$$M_0(\alpha)\, X_{\frac{j}{2}}(\alpha) \;=\; B_{\frac{j}{2}}(\alpha) - \sum_{k=1}^{j-j_0} M_{\frac{k}{2}}(\alpha) X_{\frac{j-k}{2}}(\alpha), \quad \forall j \in \{j_0, \ldots, 4\}. \tag{3.53}$$

où $B_{\frac{j}{2}} \equiv 0,\ \forall j < 0$. Même si pour cette valeur de α la matrice M_0 n'est pas pas inversible, ces équations nous permettent de calculer les coefficients avec l'algorithme qu'on présente par la suite. Clairement on peut supposer que $j_0 < 0$.

- On commence par calculer $X_{\frac{j_0}{2}}$. En prenant $j = j_0$ dans (3.53), il est clair que le second membre (identiquement nul) appartient à l'image de M_0. Ceci nous permet d'obtenir $X_{\frac{j_0}{2}}$ à élément du noyau de M_0 prés. Ensuite, on prend $j = j_0 + 1$ dans (3.53). Pour continuer les calculs, le second membre

$$B_{\frac{j_0+1}{2}}(\alpha) - M_{\frac{1}{2}}(\alpha) X_{\frac{j_0}{2}}$$

  doit appartenir à l'image de M_0, condition qui nous permettra de déterminer $X_{\frac{j_0}{2}}$ de façon unique.
- Supposons l'hypothèse de récurrence (H) :

$$\left|\begin{array}{l} \text{Les amplitudes } X_{\frac{j}{2}},\ j \in \{j_0, \ldots, \tilde{j}\} \text{ on été calculées et} \\ B_{\frac{\tilde{j}+1}{2}}(\alpha) - \displaystyle\sum_{k=1}^{\tilde{j}-j_0+1} M_{\frac{k}{2}}(\alpha) X_{\frac{\tilde{j}-k+1}{2}}(\alpha) \in \mathrm{Im}(M_0). \end{array}\right. \tag{3.54}$$

  Alors, l'équation (3.53) avec $j = \tilde{j} + 1$ nous permet de calculer $X_{\frac{\tilde{j}+1}{2}}$ à élément du noyau de M_0 prés. Finalement, le fait d'imposer que le second membre de (3.53) avec $j = \tilde{j} + 2$ appartienne à $\mathrm{Im}(M_0)$ nous permet de déterminer l'hypothèse de récurrence au pas suivante.

On a appliqué cette méthode dans le cas où $(q_c, q_f) = (1, 3)$ et $\alpha = \sin(\pi/3)$ en obtenant

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
R_c^0(\alpha, \omega\Delta x) & = & \frac{\sqrt{6}}{144}(1+\mathbf{i})(\omega\Delta x)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^2, \\
T_f^{-1}(\alpha, \omega\Delta x) & = & -\frac{1}{\sqrt{6}}(\omega\Delta x)^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{6}}{144}(\omega\Delta x)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^2, \\
T_f^0(\alpha, \omega\Delta x) & = & 1 - \frac{\sqrt{6}}{144}(1+\mathbf{i})(\omega\Delta x)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^2, \\
T_f^1(\alpha, \omega\Delta x) & = & \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{6}}(\omega\Delta x)^{\frac{1}{2}} - \frac{\mathbf{i}\sqrt{6}}{144}(\omega\Delta x)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^2, \\
J(\alpha, \omega\Delta x) & = & 1 - \frac{\sqrt{6}}{144}(1+\mathbf{i})(\omega\Delta x)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^2.
\end{array}
\right. \tag{3.55}
$$

L'onde parasite associée au coefficient T_f^1 est, dans ce cas, évanescente avec une profondeur de pénétration donnée par (3.41). Ceci implique que l'erreur en norme L^2 qu'elle va générer est, approximativement

$$
\left(\int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{\Delta x}}{\sqrt{6}} e^{-\frac{2\sqrt{cos(\pi/3)\omega}}{\sqrt{\Delta x}}x} \right)^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\Delta x^{\frac{3}{4}}}{2\sqrt{6}\,(\cos(\pi/3)\omega)^{\frac{1}{4}}}.
$$

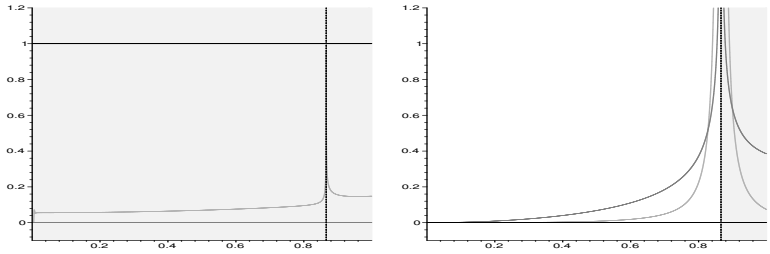
L'erreur en norme L^∞ devrait être d'ordre $\Delta x^{\frac{1}{2}}$. L'erreur due à l'autre onde parasite (d'amplitude T_f^{-1}) est d'ordre $\Delta x^{\frac{1}{2}}$ dans les deux normes car elle est propagative. Ceci montre que la méthode est moins performante dans ces cas limites. On pourrait interpréter ceci comme un phénomène de résonance entre les deux maillages lorsqu'on utilise ces valeurs spéciales du paramètre α.

Donc finalement l'ordre de la méthode semble dépendre du paramètre α. Clairement la partie prépondérante de l'erreur provient des ondes parasites haute fréquence. Ainsi, on a que :

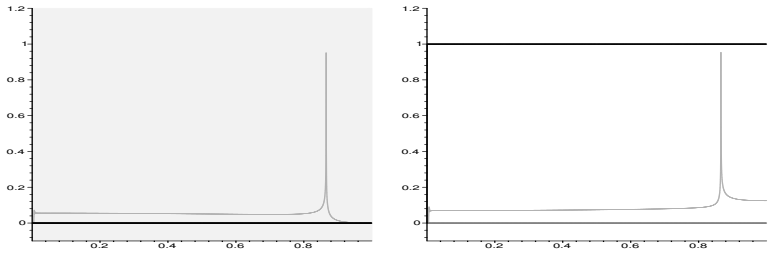
- si α est égal à une des valeurs dans (3.49), une des amplitudes des ondes parasites est d'ordre $(\omega\Delta x)^{\frac{1}{2}}$ et l'onde associée devient propagative. L'erreur devrait être alors proportionnelle à $(\omega\Delta x)^{\frac{1}{2}}$ en norme L^2 et L^∞.
- si $\alpha < \sin\left(\frac{\pi}{\max(q_c, q_f)}\right)$ toutes les ondes parasites deviennent évanescentes et elles ont une amplitude d'ordre $\omega\Delta x$. Étant donné que le profondeur de pénétration est de l'ordre de Δx un simple calcul nous montre que la méthode est d'ordre $(\omega\Delta x)^{\frac{3}{2}}$ en norme L^2 dans ce cas. Par contre, la méthode est d'ordre 1 en norme L^∞. La plus part de l'erreur reste localisée à l'interface. Ainsi, la méthode est d'ordre deux dans les deux normes si on ne considère pas un voisinage de l'interface.
- pour n'importe quelle autre valeur de α compris entre zéro et un, les ondes parasites sont approchées au premier ordre et en plus il y a, au moins, une qui est propagative. Ceci implique que notre technique est dans ce cas d'ordre $\omega\Delta x$ dans les normes L^2 et L^∞.

3.5.3 Expériences Numériques 1D. Ordre de Convergence Numérique

Dans cette section on montre des résultats numériques de la méthode présenté ci dessus à fin d'étudier numériquement l'ordre de convergence pour différentes valeurs du paramètre α et différents taux de raffinement. Ceci nous permettra aussi de comparer ces résultats avec les résultats théoriques fournis par l'étude par ondes planes de la section 3.5.2. L'expérience numérique choisie est la même qu'on a introduit dans la section 2.6.3 pour le raffinement de maillage avec $(q_c, q_f) = (1, 2)$. Alors, les équations à résoudre sont (2.103). On rappelle que la solution exacte est donné par (2.104). Notre domaine de calcul

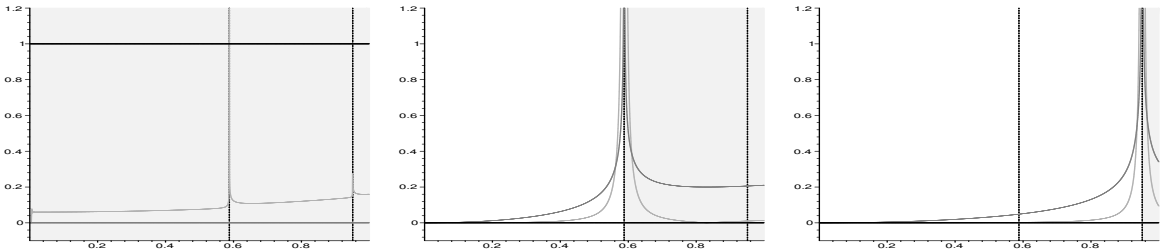


(a) $|T^0_{f,n}|(\alpha)$ (b) $|T^1_{f,n}|(\alpha) = |T^{-1}_{f,n}|(\alpha)$

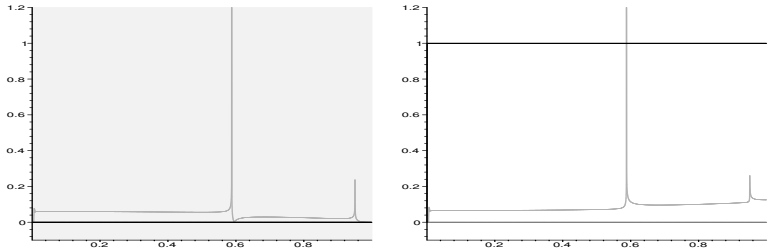


(c) $|R^0_{c,n}|(\alpha)$ (d) $|J_n|(\alpha)$

FIG. 3.23 – $(q_c, q_f) = (1, 3)$. L'ordre zéro ($n = 0$ en noir), l'ordre un ($n = 1$ en gris foncé) et l'ordre deux ($n = 2$ en gris pâle) des modules des amplitudes pour $\alpha \in (0, 1)$

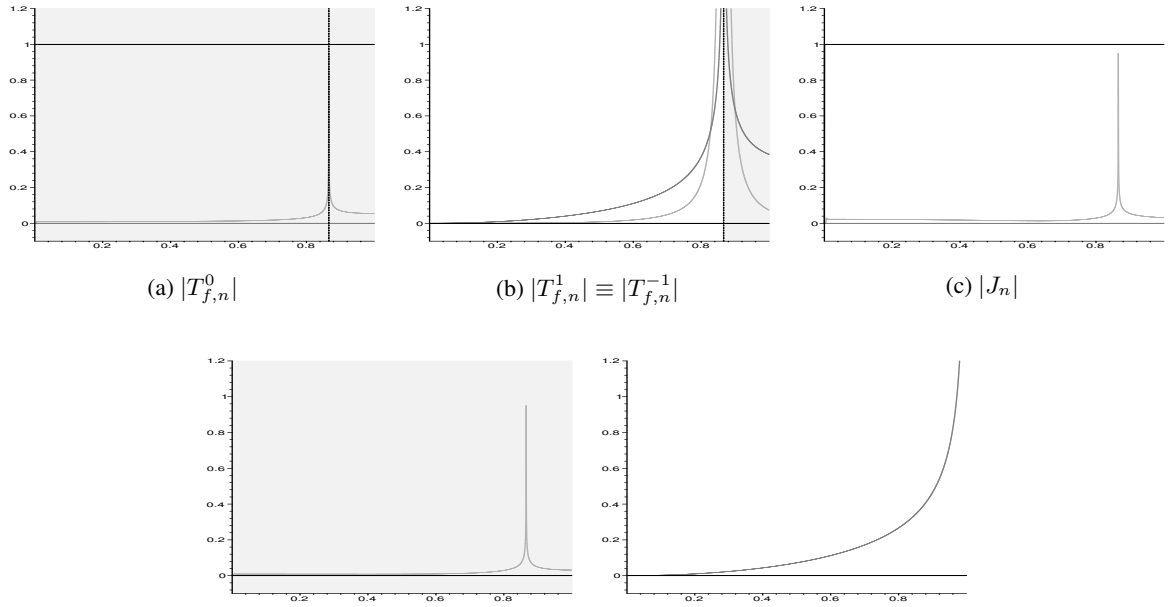


(a) $|T^0_{f,n}|(\alpha)$ (b) $|T^1_{f,n}|(\alpha) = |T^{-1}_{f,n}|(\alpha)$ (c) $|T^2_{f,n}|(\alpha) = |T^{-2}_{f,n}|(\alpha)$



(d) $|R^0_{c,n}|(\alpha)$ (e) $|J_n|(\alpha)$

FIG. 3.24 – $(q_c, q_f) = (1, 5)$. L'ordre zéro ($n = 0$ en noir), l'ordre un ($n = 1$ en gris foncé) et l'ordre deux ($n = 2$ en gris pâle) des modules des amplitudes pour $\alpha \in (0, 1)$



(a) $|T^0_{f,n}|$ (b) $|T^1_{f,n}| \equiv |T^{-1}_{f,n}|$ (c) $|J_n|$

(d) $|R^0_{c,n}|$ (e) $|R^{-1}_{c,n}|$

FIG. 3.25 – $(q_c, q_f) = (2, 3)$. L'ordre zéro ($n = 0$ en noir), l'ordre un ($n = 1$ en gris foncé) et l'ordre deux ($n = 2$ en gris pâle) des modules des amplitudes pour $\alpha \in (0, 1)$

est l'intervalle $\Omega = [-0.5, 0.5]$ avec des conditions aux limites transparentes pour simuler le caractère non-borné. Sur le sous-domaine $\Omega_c = [-0.5, 0]$ on se sert d'un maillage spatial de pas $\Delta x_c = h/q_c$ tandis que sur la région raffinée $\Omega_f = [0, 0.5]$ on utilise $\Delta x_f = h/q_f$. Le pas de temps sera fixé par le choix du quotient $\alpha = \Delta t_c/\Delta x_c = \Delta t_f/\Delta x_f$ qui doit appartenir à l'intervalle $(0, 1)$ pour assurer la stabilité de la méthode. Une fois que les paramètres q_c, q_f et α ont été choisis, on mesure l'erreur commis dans les normes

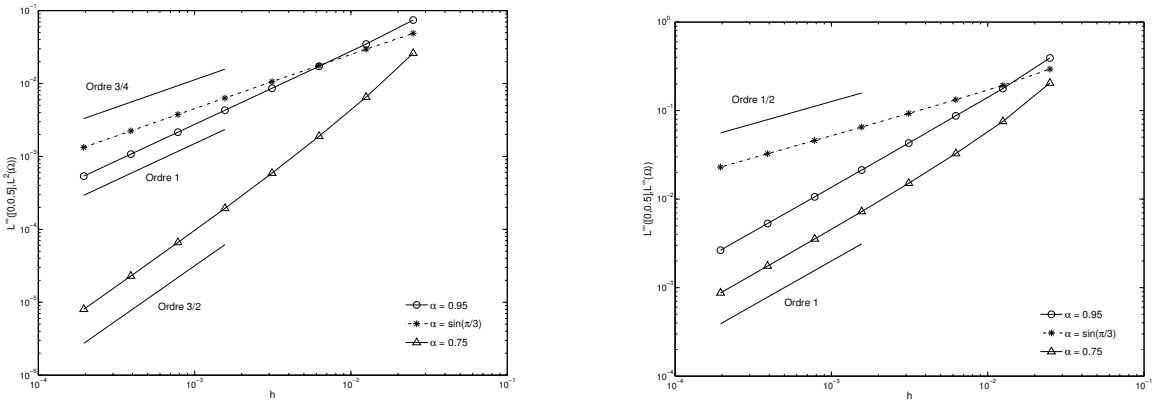
$$L^\infty([0, T], L^2(\Omega)), \qquad \text{et} \qquad L^\infty([0, T], L^\infty(\Omega)),$$

pour $h = \frac{0.025}{2^k}$, $k \in \{0, \ldots, 7\}$. Le temps final est $T = 0.5$ où l'onde incidente a déjà traversée l'interface artificielle. Ceci nous permet de tracer des courbes de convergence dont la pente indique l'ordre de la méthode. On traite les cas qu'on a montré dans les section 3.5.2.4 et 3.5.2.3, c'est à dire, $(q_c, q_f) = (1, 3)$, $(q_c, q_f) = (1, 5)$ et $(q_c, q_f) = (2, 3)$. Pour d'autres taux de raffinement on trouve des résultats similaires.

$(q_c, q_f) = (1, 3)$**.** Dans les figures 3.26.(a) et 3.26.(b) on représente les courbes d'erreur pour les deux normes citées et différentes valeurs de α ($\alpha = 0.95, \sin(\pi/3), 0.75$) lorsque le maillage sur Ω_f est trois fois plus fin que celui sur Ω_c. En effet, on remarque que l'ordre de convergence dépend de la valeur de ce paramètre (voir aussi le tableau 3.2). Les meilleurs résultats ont été obtenus lorsque

$$\alpha < \sin\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

où la méthode est d'ordre $h^{\frac{3}{2}}$ (resp. d'ordre h) en norme L^2 (resp. en norme L^∞). Pour les valeurs supérieures à la valeur critique, les ondes parasites qui se propagent font que la méthode est d'ordre h dans les deux normes. Finalement, et comme il avait été prévu par l'analyse de Fourier, les résultats les



(a) $L^\infty\left((0,T), L^2(\Omega)\right)$ (b) $L^\infty\left((0,T), L^\infty(\Omega)\right)$

FIG. 3.26 – Ordres de convergence. $\alpha \in \left\{0.95, \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 0.75\right\}$. $(q_c, q_f) = (1,3)$

	$L^\infty([0,0.5], L^2(\Omega))$	$L^\infty([0,0.5], L^\infty(\Omega))$
$\alpha = 0.95$	1.0001	1.0014
$\alpha = \sin(\pi/3)$	0.7495	0.5032
$\alpha = 0.75$	1.5149	1.0077

TAB. 3.2 – Ordres de convergence observés. $(q_c, q_f) = (1,3)$

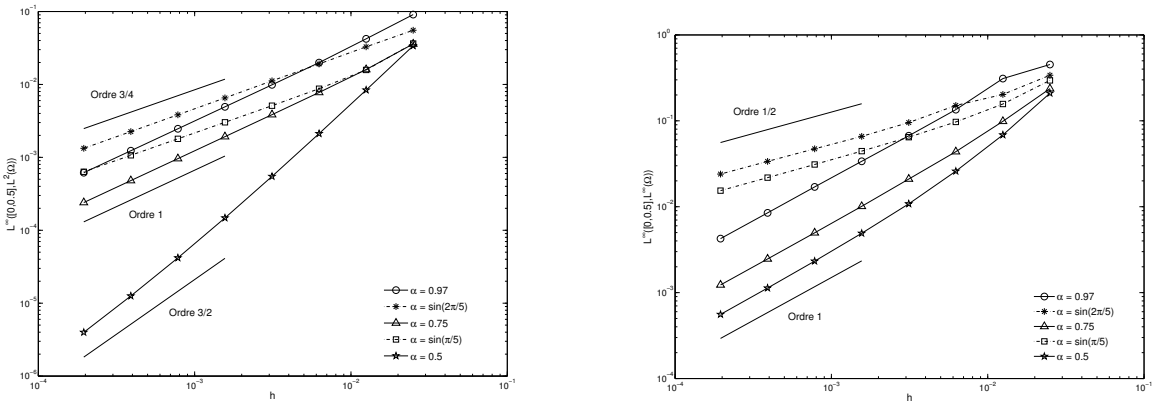
moins bons sont obtenus par la valeur critique où la méthode semble être d'ordre $h^{\frac{3}{4}}$ (d'ordre $h^{\frac{1}{2}}$) en norme L^2 (en norme L^∞ (voir les lignes pointillées dans les figures 3.26.(a),(b)).

$(q_c, q_f) = (1,5)$**.** On montre les résultats pour un taux de raffinement égal à cinq dans les figures 3.27(a)-(b) et dans le tableau 3.3 (on montre les résultats pour $\alpha = 0.97, \sin(2\pi/5), 0.75, \sin(\pi/5), 0.5$). Encore une fois, les meilleurs résultats sont obtenus lorsque $\alpha < \sin(\pi/5)$. La méthode est d'ordre $h^{\frac{3}{2}}$ (d'ordre h) en norme L^2 (en norme L^∞). Pour les valeurs critiques

$$\sin(\pi/5) \qquad \text{et} \qquad \sin(2\pi/5)$$

la méthode semble être d'ordre $h^{\frac{3}{4}}$ en norme L^2 et d'ordre $h^{\frac{1}{2}}$ en norme L^∞ (voir les lignes pointillées dans les figures 3.27.(a),(b)). Pour les autres valeurs de α, la méthode est du premier ordre dans les deux normes.

$(q_c, q_f) = (2,3)$**.** Finalement, on montre des résultats pour un cas où $q_c \neq 1$ (voir les figures 3.28(a)-(b) et le tableau 3.4). Ainsi, la méthode est d'ordre $\Delta x^{\frac{3}{2}}$ (d'ordre Δx) en norme L^2 (en norme L^∞) pour



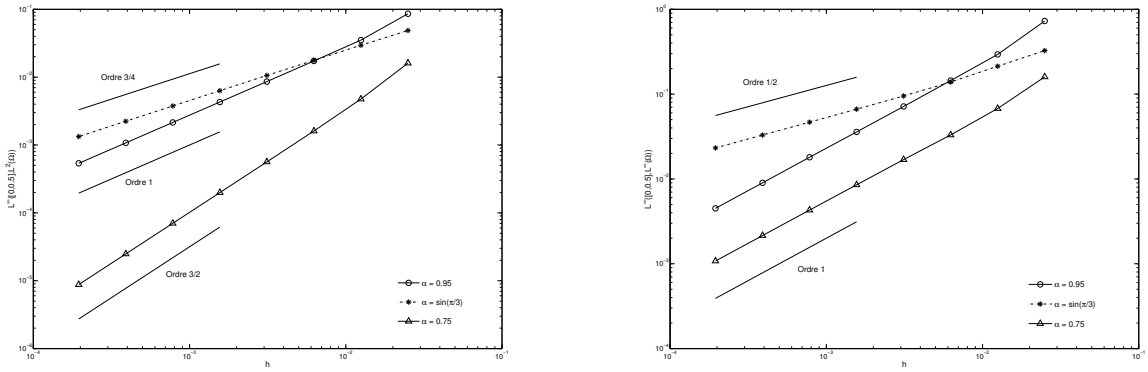
(a) $L^\infty\left((0,T),L^2\left(\Omega\right)\right)$

(b) $L^\infty\left((0,T),L^\infty\left(\Omega\right)\right)$

FIG. 3.27 – Ordres de convergence. $\alpha \in \left\{0.97, \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right), 0.75, \sin\left(\frac{\pi}{5}\right), 0.5\right\}$. $(q_c, q_f) = (1, 5)$

	$L^\infty([0,0.5],L^2(\Omega))$	$L^\infty([0,0.5],L^\infty(\Omega))$
$\alpha = 0.97$	1.0000	0.9960
$\alpha = \sin(2\pi/5)$	0.7612	0.4897
$\alpha = 0.75$	1.0001	1.0056
$\alpha = \sin(\pi/5)$	0.7504	0.5014
$\alpha = 0.5$	1.6567	1.0203

TAB. 3.3 – Ordres de convergence observés. $(q_c, q_f) = (1, 5)$



(a) $L^\infty\left((0,T), L^2(\Omega)\right)$ (b) $L^\infty\left((0,T), L^\infty(\Omega)\right)$

FIG. 3.28 – Ordres de convergence. $\alpha \in \left\{0.95, \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 0.75\right\}$. $(q_c, q_f) = (2, 3)$

	$L^\infty([0,0.5], L^2(\Omega))$	$L^\infty([0,0.5], L^\infty(\Omega))$
$\alpha = 0.95$	1.0001	0.9997
$\alpha = \sin(\pi/3)$	0.7496	0.5040
$\alpha = 0.75$	1.5003	0.9979

TAB. 3.4 – Ordres de convergence observés. $(q_c, q_f) = (2, 3)$

un $\alpha < \sin(\pi/3)$. Si $\alpha = \sin(\pi/3)$ la méthode est d'ordre $\Delta x^{\frac{3}{4}}$ (d'ordre $\Delta x^{\frac{1}{2}}$) en norme L^2 (en norme L^∞). Pour les autres valeurs du paramètre la méthode est d'ordre un dans les deux normes.

Remarque 3.5.6 *Lorsque le paramètre α est différent des valeurs dans (3.49), les résultats numériques exhibés sont complètement en conformité avec l'analyse par des techniques de Fourier qu'on a fait dans la section précédente. Pour les valeurs critiques du paramètre, on retrouve bien l'ordre qu'on avait prévu en norme L^∞ ; la méthode est en $\Delta x^{\frac{1}{2}}$. Cependant, la nature des ces ondes parasites semblerait être évanescente, ce qui nous donne un ordre de convergence en norme L^2 en $\Delta x^{\frac{3}{4}}$ (voir le paragraphe dans page 134). Il faut bien noter que l'analyse par Fourier a été fait pour des signaux avec une seule fréquence avec une structure très particulière et assez différente par rapport au signal qu'on a envoyé dans les expérience numériques.*

Donc finalement, on confirme qu'il vaut mieux éviter les valeurs de α dans l'ensemble (3.49) et que les meilleurs résultats sont obtenus lorsque $\alpha < \sin(\pi/\max(q_c, q_f))$ car les ondes parasites haute fréquence deviennent évanescentes. Cependant, cette valeur de α (qui peut être très petite pour des taux de raffinement importants) pénalise fortement le temps de calcul ... (voir la section 3.4).

Remarque 3.5.7 *On a remarqué que, dans les exemples qu'on a montré, la plus part de l'erreur numérique vient de la grille fine. Ceci est aussi en conformité avec la théorie. Dans les deux premiers cas, le fait de ne pas avoir des ondes parasites sur Ω_c fait que la méthode soit d'ordre deux sur cette grille (sauf pour les valeurs critiques du paramètre α). Dans le dernier exemple, la seule onde parasite sur Ω_c est toujours évanescente pour un Δx assez petit ce qui fait que la méthode soit toujours d'ordre $\Delta x^{\frac{3}{2}}$ sur ce domaine.*

Chapitre 4

Une Amélioration de la Méthode. Un Nouveau Raffinement de Maillage Spatio–Temporel (q_c, q_f) Stable pour l'Élastodynamique

Sommaire

4.1 Post-Traitement en Temps de la Solution. Motivation 144
4.1.1 Le Cas $(q_c, q_f) = (1, 2)$ 144
4.1.2 Le Cas Général 145
4.2 Re-interprétation des Équations. Une Nouvelle Méthode 148
4.3 Résultats Numériques 149
4.4 Analyse Fine de la Nouvelle Méthode dans le Cas 1D 149
4.4.1 Présentation de la Méthode 1D 152
4.4.2 Analyse par Fourier de la Nouvelle Méthode 152
4.4.2.1 Expression des Ondes Planes 153
4.4.2.2 Détermination des Amplitudes 153
4.4.2.3 Interprétation des Résultats 155
4.4.2.4 Ordre de la Méthode 158
4.4.3 Expériences Numériques 1D 159

L'analyse à l'aide des ondes planes développée dans la section 3.5.2 montre que les ondes parasites hautes fréquences créées par la non-conformité entre les maillages en temps jouent un rôle très important car elles génèrent la partie prépondérante de l'erreur. Une façon de réduire cet effet parasite est de satisfaire la condition CFL donnée par (3.26) qui fait que, si Δt est assez petit, toutes ces ondes auront un comportement exponentiellement décroissant en espace, et donc l'erreur restera localisée à l'interface. Cependant, le fait de considérer une CFL tellement restrictive limite l'intérêt du raffinement spatio-temporel pour $(q_c, q_f) \neq (1, 2)$ (voir la section 3.4).

Dans les expériences numériques, on a remarqué que lorsque $q_c = 1$, l'approximation obtenue sur Ω_c par la technique de raffinement présentée dans le chapitre 3 est d'ordre deux, c'est à dire, du même ordre que le schéma intérieur utilisé (voir la remarque 3.5.7). Ceci veut dire que, même si l'ordre de convergence

sur la grille fine semble être moins bon, l'*information* sur la grille fine est préservée à l'ordre deux. On peut espérer alors l'existence d'un post-traitement de la solution obtenue sur Ω_f qui nous permette de récupérer une approximation qui soit globalement d'ordre deux.

Dans la section 4.1 on présente un post-traitement en temps de la solution et on montre que la solution ainsi obtenue est plus précise que celle donnée par la méthode originale. Dans la section 4.2 on réécrit nos équations en fonction des nouvelles inconnues ce qui nous permet d'obtenir une nouvelle méthode de raffinement de maillage spatio-temporel stable avec des conditions de raccord consistantes à l'ordre deux. Les résultats numériques de la section 4.3 et 4.4.3 et l'analyse par des techniques de Fourier du modèle 1D de la section 4.4.2 confirment que la méthode ainsi obtenue est d'ordre deux pour un taux de raffinement arbitraire et pour (presque) toute valeur du paramètre α.

La présentation et analyse de cette méthode de raffinement de maillage spatio-temporel d'ordre deux dans le cadre de l'équation des ondes scalaire a donnée lieu à la publication [76].

4.1 Post-Traitement en Temps de la Solution. Motivation

Tout au long de cette section on considère le problème modèle 1D présenté dans la section 3.5. On suit la notation introduite dans cette section. On suppose qu'on envoie une onde incidente de fréquence ω et d'amplitude 1 depuis Ω_c. Dans ce qui suit on donne une motivation de l'intérêt de faire un post-traitement en temps de la solution afin d'obtenir une approximation plus précise.

4.1.1 Le Cas $(q_c, q_f) = (1, 2)$

Considérons le cas où $(q_c, q_f) = (1, 2)$. Dans l'analyse par ondes planes présentée dans la section 3.5.2 du chapitre 3 on avait conclu que la partie prépondérante de l'erreur provient de l'onde parasite. Étudions en détail cette onde qu'on notera par $u_f^{par,-1}$ (le indice -1 vient du fait que cette onde parasite est associée à la fréquence $\omega + 2\pi k/\Delta t$ avec $k = -1$). On a (voir la section 3.5.2 pour plus de détails)

$$\begin{aligned}(u_f^{par,-1})_{\frac{j}{2}}^{\frac{n}{2}} &:= T_f^{-1}\, e^{\mathbf{i}(k_{f,\Delta x_f}^{+}(\omega-\frac{2\pi}{\Delta t})x_{\frac{j}{2}}-(\omega-\frac{2\pi}{\Delta t})t^{\frac{n}{2}})} \\ &= (-1)^n\, T_f^{-1}\, e^{\mathbf{i}(k_{f,\Delta x_f}^{+}(\omega-\frac{2\pi}{\Delta t})x_{\frac{j}{2}}-\omega t^{\frac{n}{2}})}.\end{aligned}$$

On en déduit que cette onde parasite a un comportement hautement oscillatoire en temps (elle oscille avec la plus grande fréquence admise par le maillage). On pourrait ainsi espérer que l'amplitude de cette onde soit diminuée si on considère la demi-somme de deux pas de temps consécutifs. En effet, un simple développement de Taylor nous permet de montrer que

$$\begin{aligned}(\tilde{u}_f^{par,-1})_{\frac{j}{2}}^{\frac{2n+1}{4}} &:= \frac{(u_f^{par,-1})_{\frac{j}{2}}^{\frac{n+1}{2}} + (u_f^{par,-1})_{\frac{j}{2}}^{\frac{n}{2}}}{2} \\ &= \boxed{T_f^{-1}\left[-\alpha\frac{\omega\Delta x}{4} + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^3\right]}\, e^{\mathbf{i}(k_{f,\Delta x_f}^{+}(\omega-\frac{2\pi}{\Delta t})x_{\frac{j}{2}}-(\omega-\frac{2\pi}{\Delta t})t^{\frac{2n+1}{4}})}.\end{aligned}$$

En utilisant l'expression de T_f^{-1} établie dans la section 2.7.5.1 (on signale qu'on avait utilisé $\Delta t_c = 2\Delta t$ tandis que dans cette section on a $\Delta t_c = \Delta t$)

$$T_f^{-1} = \frac{i\alpha^2}{4\sqrt{1-\alpha^2}}(\omega\Delta x) + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^3,$$

on en obtient que l'amplitude de l'onde parasite, une fois que le post-traitement a été fait, devient

$$\widetilde{T}_f^{-1} = \frac{-i\alpha^3}{16\sqrt{1-\alpha^2}}(\omega\Delta x)^2 + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^4,$$

qui est d'ordre deux. On peut encore faire mieux. Si on considère la combinaison linéaire suivante :

$$(4.1) \qquad (\bar{u}_f^{par,-1})_{\frac{j}{2}}^{\frac{n}{2}} := \frac{(u_f^{par,-1})_{\frac{j}{2}}^{\frac{n+1}{2}} + 2(u_f^{par,-1})_{\frac{j}{2}}^{\frac{n}{2}} + (u_f^{par,-1})_{\frac{j}{2}}^{\frac{n-1}{2}}}{4}$$

$$= \boxed{T_f^{-1}\left[\alpha^2\frac{(\omega\Delta x)^2}{16} + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^4\right]} e^{\mathbf{i}(k_{f,\Delta x_f}^{+}(\omega-\frac{2\pi}{\Delta t})x_{\frac{j}{2}} - (\omega-\frac{2\pi}{\Delta t})t^{\frac{n}{2}})}.$$

Dans ce cas on en déduit que l'amplitude de l'onde parasite dans les variables post-traitées est

$$\overline{T}_f^{-1} = \frac{\mathbf{i}\alpha^4}{64\sqrt{1-\alpha^2}}(\omega\Delta x)^3 + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^5,$$

approximation d'ordre trois. Étant donné que ces moyennes sont centrées, les amplitudes des ondes réfléchie et transmise de fréquence ω continueront a être d'ordre deux et donc, l'erreur due aux ondes parasites sera négligeable.

Remarque 4.1.1 *Notons que la combinaison linéaire proposée dans (4.1) pour effectuer le post-traitement est aussi présente dans la première équation de couplage de notre méthode (voir les équations (3.32)).*

4.1.2 Le Cas Général

Dans le cas général la partie prépondérante de l'erreur sur chaque sous-domaine vient des $q_l - 1$ ondes parasites de fréquence $\omega + \frac{2\pi k}{\Delta t}$, $k \in \left\{-\left[\frac{q_l}{2}\right], \ldots, \left[\frac{q_l-1}{2}\right]\right\} \setminus \{0\}$ qu'on dénotera $(u_l^{par,k})$. Étudions plus en détail l'expression de ces ondes haute fréquence. Sans perte de généralité on considère celles du coté fin :

$$(u_f^{par,k})_{\frac{j}{q_f}}^{\frac{n}{q_f}} := T_f^k\, e^{\mathbf{i}(k_{f,\Delta x_f}^{+}(\omega+\frac{2\pi k}{\Delta t})x_{\frac{j}{q_f}} - (\omega+\frac{2\pi k}{\Delta t})t^{\frac{n}{q_f}})}$$

$$= e^{-\mathbf{i}\frac{2\pi k}{q_f}n}\, T_f^k\, e^{\mathbf{i}(k_{f,\Delta x_f}^{+}(\omega+\frac{2\pi}{\Delta t})x_{\frac{j}{q_f}} - \omega t^{\frac{n}{q_f}})}.$$

De la même façon que dans la section précédente on en déduit un comportement hautement oscillatoire de chacune des ondes. Cependant, il est clair que le post-traitement présenté dans la section précédente ne serait pas suffisant pour atténuer les amplitudes de toutes les ondes parasites. Il faudra considérer des combinaisons plus complexes. En s'appuyant sur la remarque 4.1.1 on va considérer sur chaque grille le post-traitement suggéré par la première équation de (3.32), c'est à dire,

$$(\overline{u}_f^{par,k})_{\frac{j}{q_f}}^{\frac{n}{q_f}+\frac{1}{2}} := \sum_{m=0}^{q_f-1} \frac{(u_f^{par,k})_{\frac{j}{q_f}}^{\frac{n+m+1}{q_f}} + (u_f^{par,k})_{\frac{j}{q_f}}^{\frac{n+m}{q_f}}}{2q_f}.$$

Ensuite on étudie l'expression des nouvelles amplitudes des ondes parasites. Étant donné que les calculs dépendent de la parité de q_f on considère deux cas :

Lorsque q_f est pair. Un simple développement de Taylor montre que dans ce cas

$$(\bar{u}_f^{par,k})_{\frac{j}{q_f}}^{\frac{n}{q_f}+\frac{1}{2}} = \boxed{T_f^k\, C(k,q_f)}\, e^{\mathbf{i}(k^+_{f,\Delta x_f}(\omega+\frac{2\pi k}{\Delta t})x_{\frac{j}{q_f}} - (\omega+\frac{2\pi k}{\Delta t})t^{\frac{n}{q_f}+\frac{1}{2}})}, \tag{4.2}$$

avec

$$\begin{aligned} C(k,q_f) &= \left[\frac{1}{q_f}\left(1+(-1)^k\right) + \frac{2}{q_f}\sum_{m=1}^{\frac{q_f}{2}-1}\cos\left(\frac{2\pi k\, m}{q_f}\right)\right] - \frac{2\alpha\,(\omega\Delta x)}{q_f^2}\sum_{m=1}^{\frac{q_f}{2}-1} m\sin\left(\frac{2\pi k\, m}{q_f}\right) + \\ &\left[\frac{(-1)^{k+1}}{8q_f} - \frac{1}{q_f^3}\sum_{m=1}^{\frac{q_f}{2}-1} m^2\cos\left(\frac{2\pi k\, m}{q_f}\right)\right]\alpha^2(\omega\Delta x)^2 + \\ &\frac{\alpha^3(\omega\Delta x)^3}{3q_f^4}\sum_{m=1}^{\frac{q_f}{2}-1} m^3\sin\left(\frac{2\pi k\, m}{q_f}\right) + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^4. \end{aligned}$$

En calculant les sommes ci-dessus on obtient

$$\begin{aligned} C(k,q_f) &= \frac{(-1)^k\alpha}{2q_f}\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi k}{q_f}\right)(\omega\Delta x) - \frac{(-1)^k\alpha^2}{4q_f^2\sin^2\left(\frac{\pi k}{q_f}\right)}(\omega\Delta x)^2 + \\ &\frac{(-1)^k\alpha^3}{48q_f^3}\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi k}{q_f}\right)\left[\frac{6}{\sin^2\left(\frac{\pi k}{q_f}\right)} - q_f^2\right](\omega\Delta x)^3 + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^4. \end{aligned} \tag{4.3}$$

et ainsi, lorsqu'on considère les variables post-traitées, les amplitudes des ondes parasites seront réduites d'un ordre, ce qui veut dire que la méthode sera plus précise.

Remarque 4.1.2 *On rappelle que $k \in \left\{-\frac{q_f}{2},\ldots,\frac{q_f-2}{2}\right\}\setminus\{0\}$ et donc tous les membres dans (4.3) ont un sens. Lorsqu'on fait le post-traitement de l'onde transmise de fréquence ω (la fréquence incidente)*

$$(u_f^{phys})_{\frac{j}{q_f}}^{\frac{n}{q_f}} := T_f^0\, e^{\mathbf{i}(k^+_{f,\Delta x_f}(\omega)\, x_{\frac{j}{q_f}} - \omega t^{\frac{n}{q_f}})},$$

on obtient

$$\begin{aligned} (\overline{u}_f^{phys})_{\frac{j}{q_f}}^{\frac{n}{q_f}+\frac{1}{2}} &:= \sum_{m=0}^{q_f-1}\frac{(u_f^{phys})_{\frac{j}{q_f}}^{\frac{n+m+1}{q_f}} + (u_f^{phys})_{\frac{j}{q_f}}^{\frac{n+m}{q_f}}}{2q_f} \\ &= \boxed{T_f^0\, C(0,q_f)}\, e^{\mathbf{i}(k^+_{f,\Delta x_f}(\omega)\, x_{\frac{j}{q_f}} - \omega t^{\frac{n}{q_f}+\frac{1}{2}})}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

avec

$$
\begin{aligned}
C(0,q_f) &= 1+\left[\frac{-1}{8q_f}+\frac{1}{q_f^3}\sum_{m=1}^{\frac{q_f}{2}-1} m^2\right]\alpha^2(\omega\Delta x)^2+\mathcal{O}(\omega\Delta x)^4 \\
&= 1+\left[\frac{-1}{8q_f}+\frac{(q_f-2)(q_f-1)}{24q_f^2}\right]\alpha^2(\omega\Delta x)^2+\mathcal{O}(\omega\Delta x)^4. \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Il est alors clair que la nouvelle amplitude obtenue après le post-traitement est aussi une approximation d'ordre deux de la valeur physique.

Lorsque q_f est impair. L'expression des ondes parasites pour $k \in \left\{-\frac{q_f-1}{2},\ldots,\frac{q_f-1}{2}\right\}\setminus\{0\}$ est alors donné par (4.2) avec

$$
\begin{aligned}
C(k,q_f) = &\left[\frac{(-1)^k}{q_f}+\frac{2}{q_f}\sum_{m=1}^{\frac{q_f-1}{2}}\cos\left(\frac{2\pi k\,(2m-1)}{2q_f}\right)\right]- \\
&\frac{2\alpha\,(\omega\Delta x)}{q_f^2}\sum_{m=1}^{\frac{q_f-1}{2}}\frac{2m-1}{2}\sin\left(\frac{2\pi k\,(2m-1)}{2q_f}\right)+ \\
&\left[\frac{(-1)^{k+1}}{8q_f}-\frac{1}{q_f^3}\sum_{m=1}^{\frac{q_f-1}{2}}\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi k\,(2m-1)}{2q_l}\right)\right]\alpha^2(\omega\Delta x)^2+ \\
&\frac{\alpha^3(\omega\Delta x)^3}{3q_f^4}\sum_{m=1}^{\frac{q_f-1}{2}}\left(\frac{2m-1}{2}\right)^3\sin\left(\frac{2\pi k\,(2m-1)}{2q_f}\right)+\mathcal{O}(\omega\Delta x)^4.
\end{aligned}
$$

Lorsqu'on calcule les sommes dans cette expression, on obtient encore une fois (4.3) et donc on peut en tirer les mêmes conclusions que dans le cas où q_f était pair.

Remarque 4.1.3 *Si on fait un calcul similaire pour l'onde transmise de fréquence ω on obtient (4.4) où $C(0,q_f)$ est donné par l'expression (4.5). Par conséquent, l'approximation sur ces ondes continue à être du même ordre que lorsqu'on ne fait pas du post-traitement.*

Alors, l'étude menée dans les deux derniers paragraphes justifient l'introduction du post-traitement en temps suivant dans chacune de grilles :

$$
\left|
\begin{aligned}
\overline{R}_l^{\frac{n}{q_f}+\frac{1}{2}} &:= \sum_{m=0}^{q_f-1}\frac{R_l^{\frac{n+m+1}{q_l}}+R_l^{\frac{n+m}{q_l}}}{2q_l}, && R\in\{\Sigma,F\}, \\
\overline{Q}_l^{\frac{2n+1}{2q_l}+\frac{1}{2}} &:= \sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{Q_l^{\frac{2n+2m+3}{2q_l}}+Q_l^{\frac{2n+2m+1}{2q_l}}}{2q_l}, && Q\in\{V,J\},
\end{aligned}
\qquad (4.6)
$$

où $l\in\{c,f\}$.

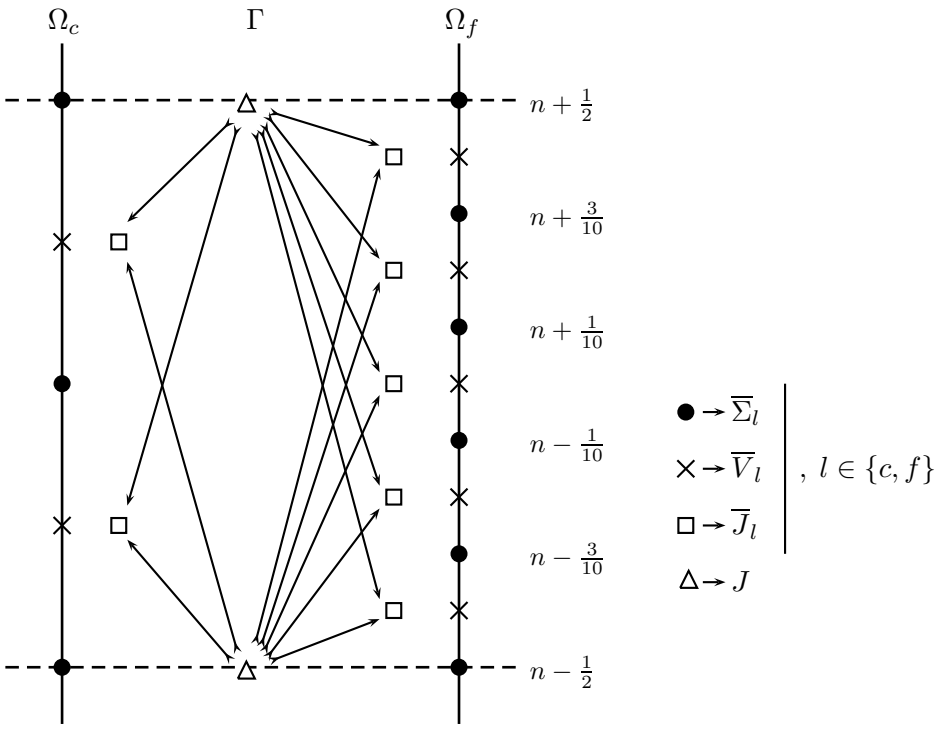


FIG. 4.1 – Distribution temporelle des inconnues. Raffinement (2,5). Nouveau schéma

4.2 Re-interprétation des Équations. Une Nouvelle Méthode

Pour des raisons évidentes de place mémoire et de performance, on souhaite avoir un schéma qui calcule directement cette solution post-traitée. Si on considère les nouvelles inconnues définies par (4.6), on observe qu'elles vérifient le schéma intérieur suivant,

$$
\text{(4.7)} \qquad \left|
\begin{array}{l}
\text{Trouver } (\overline{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}}, \overline{V}_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}-\frac{1}{2}}, \overline{J}_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}-\frac{1}{2}}); \ l \in \{c, f\}, \text{ vérifiant} \\
\left\{
\begin{array}{rcrcl}
M_{v,l} \dfrac{\overline{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} - \overline{V}_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_l} & - & D_l \, \overline{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}} & = & \overline{F}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}}, \\
M_{\sigma,l} \dfrac{\overline{\Sigma}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}-\frac{1}{2}} - \overline{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_l} & + & D_l^* \, \overline{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} & = & C_l^* \, \overline{J}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}},
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

où $k \in \{0, \ldots, q_l - 1\}$. Les équations de raccord (3.7) deviennent

$$
\text{(4.8)} \qquad \left|
\begin{array}{rcl}
C_f \overline{\Sigma}_f^{n+\frac{1}{2}} & = & -C_c \overline{\Sigma}_c^{n+\frac{1}{2}}, \\
\overline{J}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} & = & \left(1 - \dfrac{2k+1}{2q_l}\right) J^{n-\frac{1}{2}} + \dfrac{2k+1}{2q_l} J^{n+\frac{1}{2}}, \qquad k \in \{0, \ldots, q_l - 1\},
\end{array}
\right.
$$

où $l \in \{c, f\}$. Le nouveau schéma, qui est clairement stable, est donc donné par (4.7)–(4.8). La différence fondamentale entre les deux méthodes réside dans la discrétisation des équations de raccord. La première équation de (4.8) est consistante à tout ordre avec la première équation de (1.17). Maintenant, et à différence avec la méthode conservative présentée dans le chapitre 3, tout le reste des équations dans (4.8)

sont consistantes à l'ordre deux avec la deuxième équation de (1.17). Pour obtenir la valeur du multiplicateur de Lagrange au temps $t^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}},\ k \in \{0,\dots,q_l-1\},\ l \in \{c,f\}$ on fait une moyenne pondérée et consistante à l'ordre deux des multiplicateurs $J^{n-\frac{1}{2}}$ (qui est dans le passé) et $J^{n+\frac{1}{2}}$ (qui est dans le future). Ceci est représenté schématiquement sur la figure 4.1 dans le cas particulier où $(q_c, q_f) = (2, 5)$.

4.3 Résultats Numériques

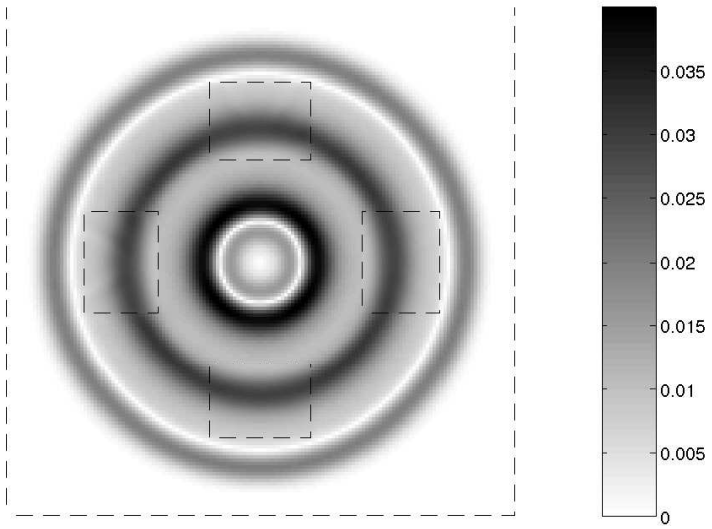
Afin de comparer en termes de précision dans le cas 2D la méthode conservative et la méthode avec le post-traitement en temps de la solution, on refait l'expérience numérique présentée dans la section 3.3 en utilisant la nouvelle méthode. On rappelle qu'il s'agit d'une expérience purement académique où on fait plusieurs raffinements artificiels avec des taux différents (voir la section 3.3 pour les caractéristiques exactes de l'expérience). Dans les figures 4.2–4.4 on représente le module du champ de vitesse à différents instants. Dans la figure 4.5 on montre l'évolution au cours du temps de cette même quantité mesurée au centre de chaque boite raffinée. Analysons les résultats obtenus.

Avec le nouveau schéma numérique les résultats numériques sont meilleurs. Les phénomènes parasites haute fréquence dus à la non-conformité entre les maillages en temps sont visiblement réduits. Dans les figures 4.2 et 4.3 on voit, respectivement, les ondes de pression et de cisaillement créées par la condition initiale qui traversent les régions raffinées. Les ondes qu'avec la méthode conservative restaient piégées dans les régions avec un taux de raffinement supérieur à deux (voir la figure 3.5) sont presque totalement disparues comme on peut voir dans la figure 4.4. Malgré tout, les résultats se détériorent lorsque le taux de raffinement augmente (voir l'onde qui sort de la boite B_4 où on raffine d'un facteur dix dans la figure 4.4). Ce comportement, qui est lié à la discrétisation en espace, pourrait se réduire en enrichissant l'espace $\underline{\mathcal{J}}_H(\Gamma)$. Finalement, dans les figures 4.5.(a),(b),(c),(d) on montre le comportement de la solution au cours du temps dans le centre de chaque région raffinée. Cette fois, les quatre réponses sont très semblables. Le comportement hautement oscillatoire qu'on avait sur les figures 3.6.(b),(c),(d) est notablement réduit. Même les résultats sur la boite B_1, où on effectue un raffinement de taux égal à deux, sont meilleures avec la nouvelle méthode.

Remarque 4.3.1 *Les résultats sur le multiplicateur de Lagrange qu'on utilise pour imposer la continuité du champ de vitesse à travers les interfaces artificielles n'ont pas été représentés car ils sont identiques à ceux obtenus avec la méthode conservative. On rappelle que l'inconnue $J^{n+\frac{1}{2}}$ est commune aux deux méthodes.*

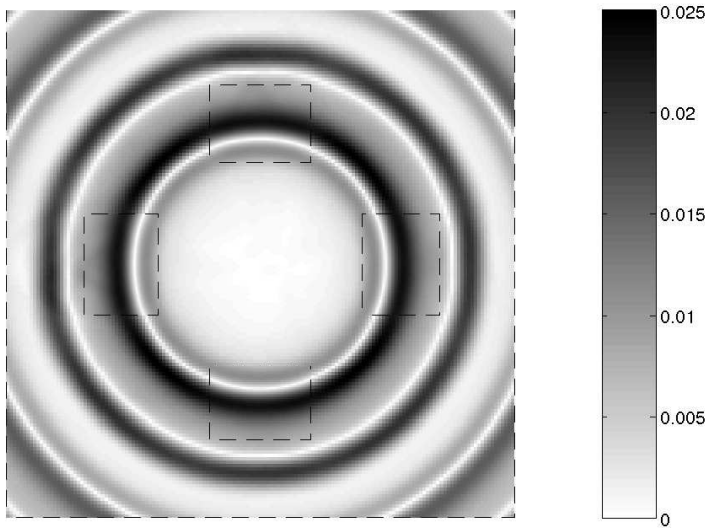
4.4 Analyse Fine de la Nouvelle Méthode dans le Cas 1D

Dans cette section on applique l'analyse effectuée dans la section 3.5 à la nouvelle méthode post-traitée afin de pouvoir les comparer en termes de précision. On rappelle que le problème à résoudre est celui introduit dans la section 2.7. Au long de cette section, on utilisera une notation similaire à celle introduite dans la section 3.5.



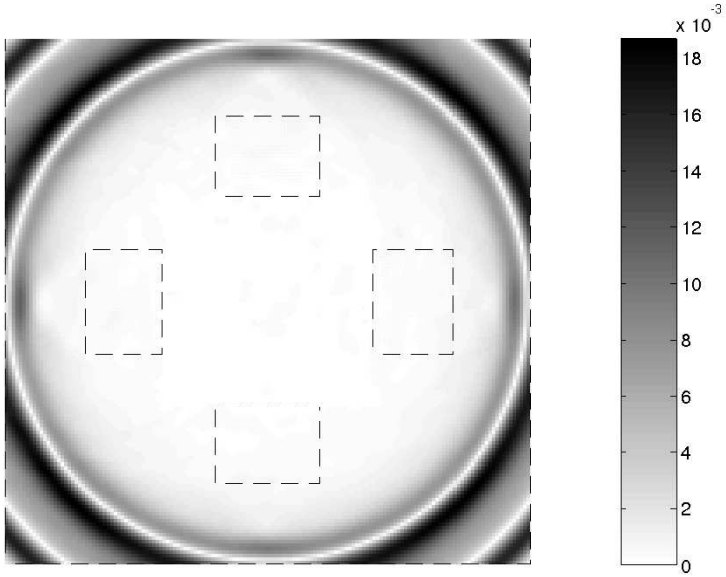
(a) Module du champ de vitesse

FIG. 4.2 – $\alpha = 0.95\ CFL_{opt}$, $\Delta x_c = 1/15$, $t = 1.1540$



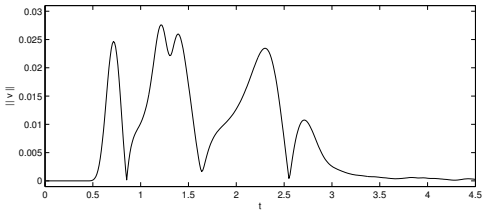
(a) Module du champ de vitesse

FIG. 4.3 – $\alpha = 0.95\ CFL_{opt}$, $\Delta x_c = 1/15$, $t = 2.3080$

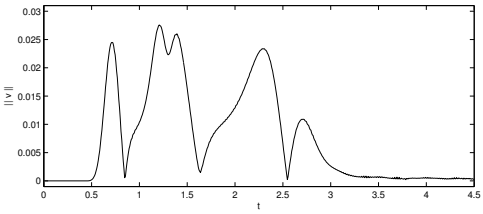


(a) Module du champ de vitesse

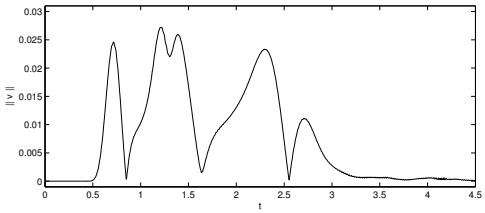
FIG. 4.4 – $\alpha = 0.95\ CFL_{opt}$, $\Delta x_c = 1/15$, $t = 4.0390$



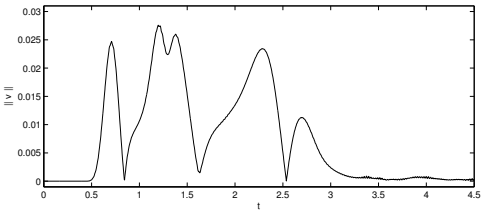
(a) $(x_0, z_0) = (5, 2.25)$. Centre de B_1



(b) $(x_0, z_0) = (8.25, 5)$. Centre de B_2



(c) $(x_0, z_0) = (5, 8.25)$. Centre de B_3



(d) $(x_0, z_0) = (2.25, 5)$. Centre de B_4

FIG. 4.5 – $|\underline{v}((x_0, z_0), t)|, \quad \alpha = 0.95\ CFL_{opt}$, $\Delta x_c = 1/15$

4.4.1 Présentation de la Méthode 1D

Les inconnues du nouveau schéma numérique dans le cas 1D sont les suivantes

$$\left|\begin{array}{llll} (\bar{u}_c)_{\frac{j}{q_c}}^{\frac{m}{q_c}-\frac{1}{2}}, & (\bar{v}_c)_{\frac{2j-1}{2q_c}}^{\frac{2m+1}{2q_c}-\frac{1}{2}}, & m \geq 0, & j \leq 0 \\ (\bar{u}_f)_{\frac{j}{q_f}}^{\frac{m}{q_f}-\frac{1}{2}}, & (\bar{v}_f)_{\frac{2j+1}{2q_f}}^{\frac{2m+1}{2q_f}-\frac{1}{2}}, & m \geq 0, & j \geq 0 \\ & j^{n+\frac{1}{2}}, & & n \geq 0. \end{array}\right.$$

On en déduit que le schéma intérieur est donné par

$$\left|\begin{array}{lllll} \dfrac{(\bar{v}_c)_{\frac{2j+1}{2q_c}}^{\frac{2m+1}{2q_c}-\frac{1}{2}} - (\bar{v}_c)_{\frac{2j+1}{2q_c}}^{\frac{2m-1}{2q_c}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_c} & + & \dfrac{(\bar{u}_c)_{\frac{j+1}{q_c}}^{\frac{m}{q_c}-\frac{1}{2}} - (\bar{u}_c)_{\frac{j}{q_c}}^{\frac{m}{q_c}-\frac{1}{2}}}{\Delta x_c} & = & 0, \quad m > 0, \quad j < 0, \\ \dfrac{(\bar{u}_c)_{\frac{j}{q_c}}^{\frac{m+1}{q_c}-\frac{1}{2}} - (\bar{u}_c)_{\frac{j}{q_c}}^{\frac{m}{q_c}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_c} & + & \dfrac{(\bar{v}_c)_{\frac{2j+1}{2q_c}}^{\frac{2m+1}{2q_c}-\frac{1}{2}} - (\bar{v}_c)_{\frac{2j-1}{2q_c}}^{\frac{2m+1}{2q_c}-\frac{1}{2}}}{\Delta x_c} & = & 0, \quad m \geq 0, \quad j < 0, \end{array}\right. \tag{4.9}$$

$$\left|\begin{array}{lllll} \dfrac{(\bar{v}_f)_{\frac{2j+1}{2q_f}}^{\frac{2m+1}{2q_f}-\frac{1}{2}} - (\bar{v}_f)_{\frac{2j+1}{2q_f}}^{\frac{2m-1}{2q_f}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_f} & + & \dfrac{(\bar{u}_f)_{\frac{j+1}{q_f}}^{\frac{m}{q_f}-\frac{1}{2}} - (\bar{u}_f)_{\frac{j}{q_f}}^{\frac{m}{q_f}-\frac{1}{2}}}{\Delta x_f} & = & 0 \quad m > 0, \quad j \geq 0, \\ \dfrac{(\bar{u}_f)_{\frac{j}{q_f}}^{\frac{m+1}{q_f}-\frac{1}{2}} - (\bar{u}_f)_{\frac{j}{q_f}}^{\frac{m}{q_f}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_f} & + & \dfrac{(\bar{v}_f)_{\frac{2j+1}{2q_f}}^{\frac{2m+1}{2q_f}-\frac{1}{2}} - (\bar{v}_f)_{\frac{2j-1}{2q_f}}^{\frac{2m+1}{2q_f}-\frac{1}{2}}}{\Delta x_f} & = & 0 \quad m \geq 0, \quad j > 0. \end{array}\right. \tag{4.10}$$

Les nouvelles conditions de transmission s'écrivent

$$\left|\begin{array}{l} (u_c)_0^{n+\frac{1}{2}} = (u_f)_0^{n+\frac{1}{2}}, \\ (\bar{v}_c)_{-\frac{1}{2q_c}}^{n+\frac{2k+1}{2q_c}-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2\alpha}\left((\bar{u}_c)_0^{n+\frac{k+1}{q_c}-\frac{1}{2}} - (\bar{u}_c)_0^{n+\frac{k}{q_c}-\frac{1}{2}}\right) = \\ \qquad \left(1 - \dfrac{2k+1}{2q_c}\right) j^{n-\frac{1}{2}} + \dfrac{2k+1}{2q_c} j^{n+\frac{1}{2}}, \quad k \in \{0, \dots q_c - 1\}, \\ (\bar{v}_f)_{-\frac{1}{2q_f}}^{n+\frac{2k+1}{2q_f}-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2\alpha}\left((\bar{u}_f)_0^{n+\frac{k+1}{q_f}-\frac{1}{2}} - (\bar{u}_f)_0^{n+\frac{k}{q_f}-\frac{1}{2}}\right) = \\ \qquad \left(1 - \dfrac{2k+1}{2q_f}\right) j^{n-\frac{1}{2}} + \dfrac{2k+1}{2q_f} j^{n+\frac{1}{2}}, \quad k \in \{0, \dots q_f - 1\}, \end{array}\right. \tag{4.11}$$

où on rappelle la notation $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

4.4.2 Analyse par Fourier de la Nouvelle Méthode

Dans cette section on analyse la nouvelle méthode avec la même technique utilisée dans la section 3.5.2. On rappelle qu'il s'agissait d'étudier le comportement des solutions du type ondes planes lorsqu'on envoie une onde incidente depuis le domaine $\Omega_c = \mathbb{R}^-$.

4.4.2.1 Expression des Ondes Planes

On se base dans l'étude menée dans la section 3.5.2.1 pour en déduire que les expression de la solution sur la grille grossière sont

$$
\begin{aligned}
(\bar{u}_c)^{\frac{m}{q_c}-\frac{1}{2}}_{\frac{j}{q_c}} &= \sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} I_c^s\, e^{\mathbf{i}(k^+_{c,\Delta x_c}(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{j}{q_c}\Delta x-(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{2m-q_c}{2q_c}\Delta t)} + \\
&\quad \sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} \bar{R}_c^s\, e^{\mathbf{i}(k^-_{c,\Delta x_c}(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{j}{q_c}\Delta x-(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{2m-q_c}{2q_c}\Delta t)}, \qquad j \leq 0,
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{v}_c)^{\frac{2m+1}{2q_c}-\frac{1}{2}}_{\frac{2j+1}{2q_c}} &= \sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} I_c^s\, e^{\mathbf{i}(k^+_{c,\Delta x_c}(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{2j+1}{2q_c}\Delta x-(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{2m+1-q_c}{2q_c}\Delta t)} - \\
&\quad \sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} \bar{R}_c^s\, e^{\mathbf{i}(k^-_{c,\Delta x_c}(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{2j+1}{2q_c}\Delta x-(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{2m+1-q_c}{2q_c}\Delta t)}, \qquad j < 0.
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

La première partie se correspond avec l'onde incidente tandis que la deuxième est l'onde réfléchie par l'interface artificielle. Sur la grille fine on a

$$
(\bar{u}_f)^{\frac{m}{q_f}-\frac{1}{2}}_{\frac{j}{q_f}} = \sum_{s=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]} \bar{T}_f^s\, e^{\mathbf{i}(k^+_{f,\Delta x_f}(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{j}{q_f}\Delta x-(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{2m-q_f}{2q_f}\Delta t)}, \qquad j \geq 0, \tag{4.14}
$$

$$
(\bar{v}_f)^{\frac{2m+1}{2q_f}-\frac{1}{2}}_{\frac{2j+1}{2q_f}} = \sum_{s=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]} \bar{T}_f^s\, e^{\mathbf{i}(k^+_{f,\Delta x_f}(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{2j+1}{2q_f}\Delta x-(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t})\frac{2m+1-q_f}{2q_f}\Delta t)}, \qquad j \geq 0, \tag{4.15}
$$

qui s'interprète comme l'onde transmise. On rappelle que le nombre d'onde $k^{\pm}_{l,\Delta x_l}(\cdot)$ a été introduit dans la section 2.7. L'expression du multiplicateur de Lagrange est donnée par 3.38. Il nous reste calculer les amplitudes de ces ondes pour déterminer l'expression de l'onde diffractée.

4.4.2.2 Détermination des Amplitudes

Pour déterminer ces coefficients on se sert des équations de couplage de la nouvelle méthode. Afin de simplifier les calculs on exprime les équations (4.11) sous la forme suivante

$$
\left|
\begin{aligned}
\bar{U}_c^{n+\frac{1}{2}} &= \bar{U}_f^{n+\frac{1}{2}}, \\
\bar{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} &= \left(1-\frac{2k+1}{2q_l}\right) j^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2k+1}{2q_l} j^{n+\frac{1}{2}}, \qquad k \in \{0,\dots q_l-1\},
\end{aligned}
\right. \tag{4.16}
$$

où $l \in \{c, f\}$ et la notation suivie s'en déduit facilement des expressions dans (4.11). Finalement, on réécrit ces équations de raccord sur V d'une façon plus centrée par rapport au temps t^n. On a

(4.17)
$$\left|\begin{array}{lcll} \frac{1}{2}\left(\bar{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} + \bar{V}_l^{n-\frac{2k+1}{2q_l}+\frac{1}{2}}\right) & = & \frac{1}{2}\left(j^{n+\frac{1}{2}} + j^{n-\frac{1}{2}}\right), & k \in \left\{0, \ldots, \left[\frac{q_l-1}{2}\right]\right\}, \\ \frac{1}{2}\left(\bar{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} - \bar{V}_l^{n-\frac{2k+1}{2q_l}+\frac{1}{2}}\right) & = & \frac{2k+1-q_l}{2q_l}\left(j^{n+\frac{1}{2}} - j^{n-\frac{1}{2}}\right), & k \in \left\{0, \ldots, \left[\frac{q_l}{2}\right]-1\right\}, \end{array}\right.$$

où $l \in \{c, f\}$. Lorsqu'on considère une solution du type (4.12)–(4.15)

$$\bar{U}_c^{n+\frac{1}{2}} e^{\mathbf{i}\,\omega(n+\frac{1}{2})\Delta t} = \sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} \left[I_c^s + \bar{R}_c^s\right] \bar{F}_c(\omega\Delta t, s),$$

$$\frac{\bar{V}_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}-\frac{1}{2}} + \bar{V}_c^{n-\frac{2k+1}{2q_c}+\frac{1}{2}}}{2\, e^{-\mathbf{i}\,\omega n\Delta t}} = \sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} \left[I_c^s - \bar{R}_c^s\right] \bar{G}_c(\omega\Delta t, \alpha, k, s),$$

$$\frac{\bar{V}_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}-\frac{1}{2}} - \bar{V}_c^{n-\frac{2k+1}{2q_c}+\frac{1}{2}}}{2\, i\, e^{-\mathbf{i}\,\omega n\Delta t}} = \sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} \left[I_c^s - \bar{R}_c^s\right] \bar{H}_c(\omega\Delta t, \alpha, k, s),$$

$$\bar{U}_f^{n+\frac{1}{2}} e^{\mathbf{i}\,\omega(n+\frac{1}{2})\Delta t} = \sum_{s=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]} \bar{T}_f^s\, \bar{F}_f(\omega\Delta t, s),$$

$$\frac{\bar{V}_f^{n+\frac{2k+1}{2q_f}-\frac{1}{2}} + \bar{V}_f^{n-\frac{2k+1}{2q_f}+\frac{1}{2}}}{2\, e^{-\mathbf{i}\,\omega n\Delta t}} = \sum_{s=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]} \bar{T}_f^s\, \bar{G}_f(\omega\Delta t, \alpha, k, s),$$

$$\frac{\bar{V}_f^{n+\frac{2k+1}{2q_f}-\frac{1}{2}} - \bar{V}_f^{n-\frac{2k+1}{2q_f}+\frac{1}{2}}}{2\, i\, e^{-\mathbf{i}\,\omega n\Delta t}} = \sum_{s=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]} \bar{T}_f^s\, \bar{H}_f(\omega\Delta t, \alpha, k, s),$$

où on a posé, pour $l \in \{c, f\}$

(4.18)
$$\bar{F}_l(\omega\Delta t, s) = (-1)^s,$$

(4.19)
$$\begin{aligned} \bar{G}_l(\omega\Delta t, \alpha, k, s) = {} & \cos\left(\left(\omega + \frac{2\pi s}{\Delta t}\right)\frac{q_l - 2k - 1}{2q_l}\Delta t\right) \\ & \cos\left(k^+_{l,\Delta x_l}\left(\omega + \frac{2\pi s}{\Delta t}\right)\frac{\Delta x}{2q_l}\right), \end{aligned}$$

$$\bar{H}_l(\omega\Delta t,\alpha,k,s) = \sin\left(\left(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t}\right)\frac{q_l-2k-1}{2q_l}\Delta t\right) \cos\left(k^+_{l,\Delta x_l}\left(\omega+\frac{2\pi s}{\Delta t}\right)\frac{\Delta x}{2q_l}\right). \tag{4.20}$$

Ainsi, le système linéaire à résoudre pour obtenir les amplitudes est donné par

(4.21)

$$\left|\begin{array}{lllll}
\displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} \bar{R}_c^s\,\bar{F}_c(s) & - & \displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]} \bar{T}_f^s\,\bar{F}_f(s) & = & \displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} -I_c^s\,\bar{F}_c(s), \\[2ex]
\displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} \bar{R}_c^s\,\bar{G}_c(k,s) & + & \cos\left(\dfrac{\omega\Delta t}{2}\right)J & = & \displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} I_c^s\,\bar{G}_c(k,s), \quad k\in\left\{0,\dots,\left[\frac{q_c-1}{2}\right]\right\}, \\[2ex]
\displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} \bar{R}_c^s\,\bar{H}_c(k,s) & + & \frac{q_c-2k-1}{q_c}\sin\left(\dfrac{\omega\Delta t}{2}\right)J & = & \displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_c}{2}\right]}^{\left[\frac{q_c-1}{2}\right]} I_c^s\,\bar{H}_c(k,s), \quad k\in\left\{0,\dots,\left[\frac{q_c}{2}\right]-1\right\}, \\[2ex]
\displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]} \bar{T}_f^s\,\bar{G}_f(k,s) & - & \cos\left(\dfrac{\omega\Delta t}{2}\right)J & = & 0, \quad k\in\left\{0,\dots,\left[\frac{q_f-1}{2}\right]\right\}, \\[2ex]
\displaystyle\sum_{s=-\left[\frac{q_f}{2}\right]}^{\left[\frac{q_f-1}{2}\right]} \bar{T}_f^s\,\bar{H}_f(k,s) & - & \frac{q_f-2k-1}{q_f}\sin\left(\dfrac{\omega\Delta t}{2}\right)J & = & 0, \quad k\in\left\{0,\dots,\left[\frac{q_f}{2}\right]-1\right\}.
\end{array}\right.$$

On a décidé de montrer les résultats pour des ondes incidentes de fréquences ω et d'amplitude $I_c^0 = 1$. Les résultats avec des ondes incidentes avec des fréquences parasites sont similaires.

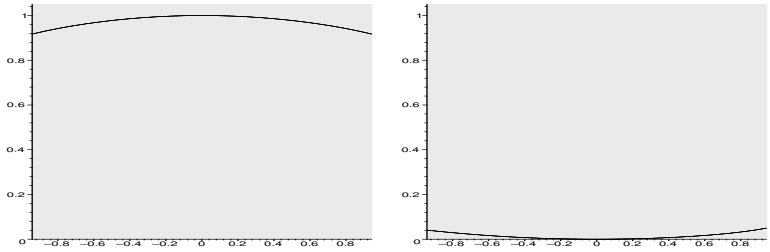
4.4.2.3 Interprétation des Résultats

On rappelle que pour étudier l'ordre de convergence de la méthode il faut analyser la nature des ondes et la convergence des coefficients

$$\bar{R}_c^s,\ k\in\left\{-\left[\tfrac{q_c}{2}\right],\dots,\left[\tfrac{q_c-1}{2}\right]\right\},\quad \bar{T}_f^s,\ k\in\left\{-\left[\tfrac{q_f}{2}\right],\dots,\left[\tfrac{q_f-1}{2}\right]\right\},\quad J,$$

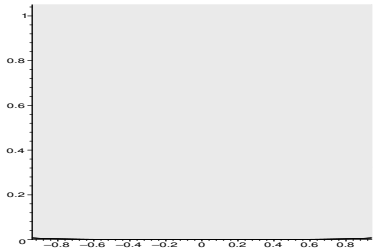
vers les valeurs *physiques* données dans ce cas par les limites dans (3.48), c'est à dire, les amplitudes des ondes transmises parasites et de la totalité des ondes réflechies égales à zéro, et une amplitude pour l'onde transmise physique égal à celle de l'onde incidente.

Le cas $(q_c, q_f) = (1, 2)$**.** On commence par comparer les deux méthodes dans le cas particulier où le taux de raffinement est égal à deux. Étant donné que la solution du système ne depend que des paramètres

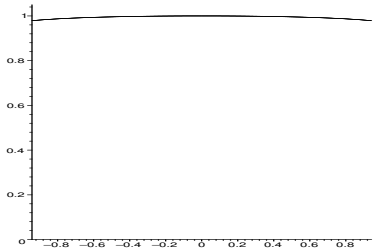


(a) $|T_f^0|(x)$

(b) $|T_f^1|(x) = |T_f^{-1}|(-x)$

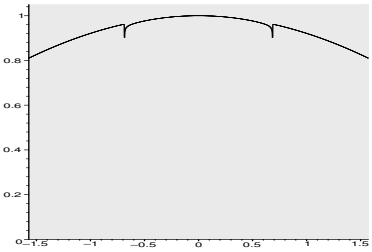


(c) $|R_c^0|(x)$

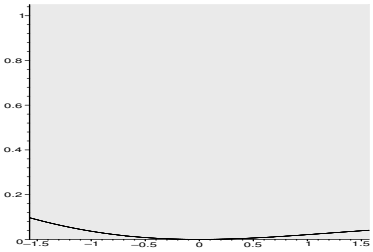


(d) $|J|(x)$

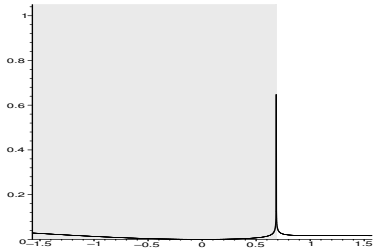
FIG. 4.6 – $(q_c, q_f) = (1, 3),\ \alpha = 0.95,\ I_c^0 = 1$. Module des amplitudes. $x = \omega\Delta t$



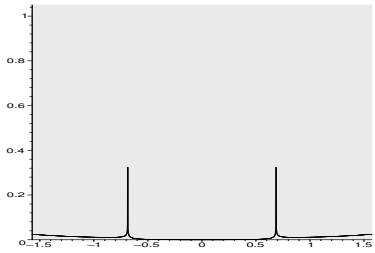
(a) $|T_f^0|(x)$



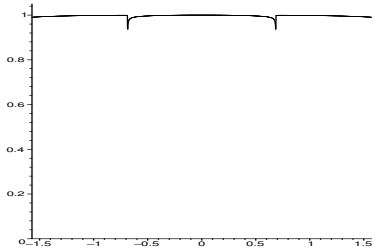
(b) $|T_f^1|(x) = |T_f^{-1}|(-x)$



(c) $|T_f^2|(x) = |T_f^{-2}|(-x)$

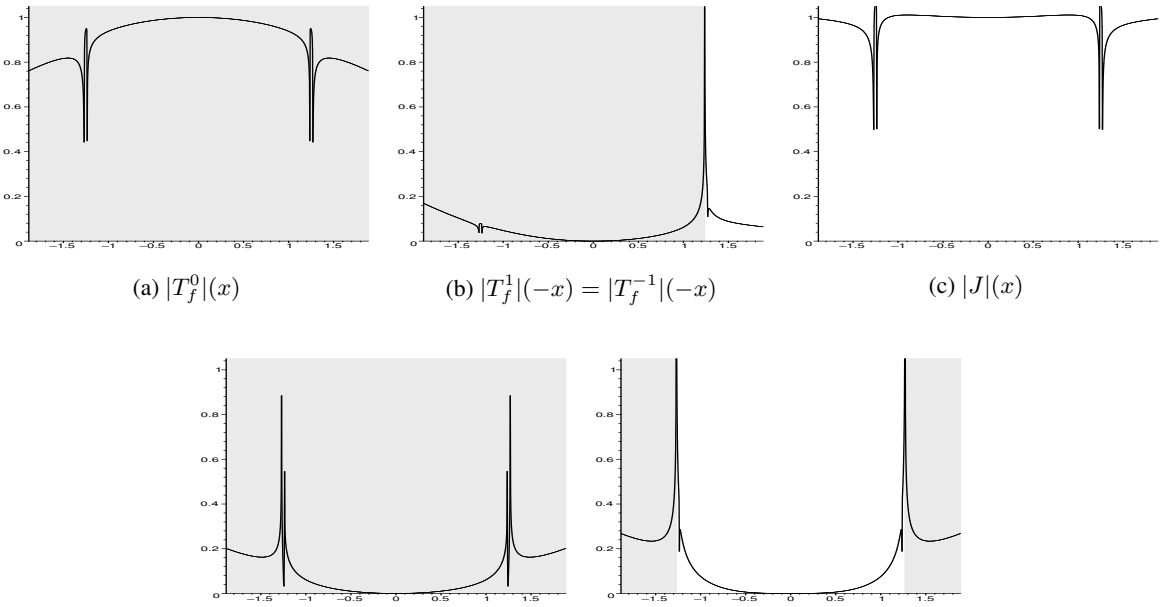


(d) $|R_c^0|(x)$



(e) $|J|(x)$

FIG. 4.7 – $(q_c, q_f) = (1, 5),\ \alpha = 0.97,\ I_c^0 = 1$. Module des amplitudes. $x = \omega\Delta t$



(a) $|T_f^0|(x)$ (b) $|T_f^1|(-x) = |T_f^{-1}|(-x)$ (c) $|J|(x)$

(d) $|R_c^0|(x)$ (e) $|R_c^{-1}|(x)$

FIG. 4.8 – $(q_c, q_f) = (2, 3),\ \alpha = 0.95,\ I_c^0 = 1$. Module des amplitudes. $x = \omega\Delta t$

α et Δx, on s'intéresse au comportement des amplitudes pour un α fixé et $\omega\Delta x$ petit. Supposons que $0 < \alpha < 1$, alors un simple developpement de Taylor nous donne les expressions suivantes

$$\left|\begin{array}{rcl} T_f^0(\alpha, \omega\Delta x) & = & 1 - \dfrac{1}{64}\left(\alpha^2 - 3\right)(\omega\Delta x)^2 + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^3, \\ T_f^{-1}(\alpha, \omega\Delta x) & = & \dfrac{\mathbf{i}\,\alpha^4}{64\sqrt{1-\alpha^2}}(\omega\Delta x)^3 + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^5, \\ R_c^0(\alpha, \Delta x) & = & \dfrac{1}{64}\left(\alpha^2 - 3\right)(\omega\Delta x)^2 + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^3, \end{array}\right. \tag{4.22}$$

où le multiplicateur de Lagrange a été éliminé. Tous les coefficients sont des approximations (au moins) d'ordre deux des quantités physiques. Ceci veut dire que la méthode sera d'ordre deux dans les normes L^∞ et $L^p,\ p \in \mathbb{N}$. L'onde parasite, qui pour la méthode conservative originale était d'ordre un, devient d'ordre trois et donc négligeable par rapport au reste de l'erreur.

Si $\alpha = 1$ on obtient

$$\left|\begin{array}{rcccl} T_f^0(\alpha, \omega\Delta x) & = & \cos^2\left(\dfrac{\omega\Delta t}{4}\right) & = & 1 - \dfrac{\alpha^2}{16}(\omega\Delta x)^2 + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^4, \\ T_f^{-1}(\alpha, \omega\Delta x) & = & -\sin^2\left(\dfrac{\omega\Delta t}{4}\right) & = & -\dfrac{\alpha^2}{16}(\omega\Delta x)^2 + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^4, \\ R_c^0(\alpha, \Delta x) & = & 0. & & \end{array}\right. \tag{4.23}$$

Dans ce cas limite, à différence de la méthode conservative originale, la méthode avec le post-traitement est toujours convergente à l'ordre deux.

Le cas général. Pour un taux de raffinement arbitraire on est capable de représenter à α fixé les amplitudes des ondes en fonction de $\omega\Delta x$ au voisinage de l'origine (voir les figures 4.6, 4.7 et 4.8 pour $(q_c, q_f) = (1, 3)$ avec $\alpha = 0.95$, $(q_c, q_f) = (1, 5)$ avec $\alpha = 0.97$ et $(q_c, q_f) = (2, 3)$ avec $\alpha = 0.95$ respectivement). Les ondes générées par les fréquences représentées dans les régions grisées seront, pour un $\omega\Delta x$ assez petit, propagatives. Dans les autres régions, on aura des ondes évanescentes.

$(q_c, q_f) = (1, 3),\ \alpha = 0.95$**.** Avec la nouvelle méthode toutes les amplitudes sont des approximations d'ordre deux des coefficients physiques donnés par (3.48) (voir les figures 4.6(a)–(d)). Même si les ondes parasites sont propagatives (car $\alpha > \sin(\pi/3)$) leur amplitude est du même ordre que le reste de l'erreur.

$(q_c, q_f) = (1, 5),\ \alpha = 0.97$**.** On obtient des résultats similaires pour un taux de raffinement égal à cinq. Tous les coefficients sont des approximations quadratiques des valeurs physiques (voir les figures 4.7(a)–(e)). L'erreur globale de la méthode devrait être en Δx^2.

$(q_c, q_f) = (2, 3),\ \alpha = 0.95$**.** Finalement on considère un cas où on a des ondes parasites des deux cotés. Leurs amplitudes sont encore une fois approchées à l'ordre deux (voir les figures 4.8(b),(e)). Les amplitudes des ondes de fréquence ω et du multiplicateur de Lagrange sont, comme avec la méthode conservative originale, des approximations quadratiques.

Donc, finalement on peut conclure que les résultats fournis par la nouvelle méthode sont plus satisfaisantes que ceux obtenus avec la méthode conservative (comparer les figures de cette section avec celles de la section 3.5.2.3). Les amplitudes des ondes transmise et réfléchie de fréquence ω ainsi comme celle du multiplicateur de Lagrange semblent être encore des approximations de second ordre des valeurs physiques. La différence fondamentale se trouve dans les amplitudes des ondes parasites haute fréquence. Maintenant, elles sont aussi des approximations d'ordre deux de zéro. Ceci est en conformité avec les expériences numériques obtenues dans la section 4.3 où les phénomènes parasites avaient été notablement réduits. Dans la section suivante on analyse plus en détail l'ordre de la méthode pour les différentes valeurs du paramètre α.

4.4.2.4 Ordre de la Méthode

Dans cette section on effectue une analyse similaire à celui présenté dans la section 3.5.2.4. Ainsi, le système linéaire (4.21) peut s'écrire sous la forme (3.50) où toutes les amplitudes inconnues sont inclues dans le vecteur X.

Lorsque α est différent des valeurs critiques dans (3.49). Il est facile à montrer que pour des α différents des valeurs de (3.49) la matrice M et le second membre B (et par conséquent la solution du système) admettent un développement de Taylor classique en puissances entières de $\omega\Delta x$ comme dans (3.51). En identifiant les termes avec des puissances égales on peut calculer les termes d'ordre zéro, un et deux des amplitudes. Dans les figures 4.9–4.11 on montre les modules de ces coefficients pour $\alpha \in (0, 1)$. Le module du coefficient d'ordre zéro est en noir, celui d'ordre un est en gris foncé, et celui d'ordre deux en gris pâle. On a grisé les régions où l'onde considérée est propagative pour un $\omega\Delta x$ assez petit. On en déduit les conclusions suivantes

- le terme d'ordre zéro coïncide toujours avec les valeurs du problème continu, données dans ce cas par (3.48).
- Les termes d'ordre un sont identiquement nuls pour toutes les amplitudes. Ceci veut dire que la méthode est au moins d'ordre un.
- Les coefficients d'ordre deux sont tous différents de zéro et en plus ils ont un comportement singulier lorsque α tend vers les valeurs dans (3.49). Alors, la méthode sera d'ordre deux sauf pour ces valeurs spéciales.

Lorsque α est égal aux valeurs critiques dans (3.49). La matrice $M(\alpha, \omega\Delta x)$ et le second membre $B(\alpha, \omega\Delta x)$ n'admettent pas un développement de Taylor lorsque α atteint une des valeurs dans (3.49). Dans ce cas, on doit utiliser des puissances demi-entières pour développer quelque termes. On peut mener un calcul analogue à celui qu'on a présenté dans la page 134 pour obtenir le développement de la solution. Dans le cas où $(q_c, q_f) = (1, 3)$ et $\alpha = \sin(\pi/3)$ en supposant que $\omega > 0$ on obtient les expressions suivantes

$$
\left|
\begin{aligned}
R_c^0(\alpha, \omega\Delta x) &= \tfrac{\sqrt{6}}{144}(1+\mathbf{i})(\omega\Delta x)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^2, \\
T_f^{-1}(\alpha, \omega\Delta x) &= -\tfrac{\sqrt{6}}{72}(\omega\Delta x)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^2, \\
T_f^0(\alpha, \omega\Delta x) &= 1 - \tfrac{\sqrt{6}}{144}(1+\mathbf{i})(\omega\Delta x)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^2, \\
T_f^1(\alpha, \omega\Delta x) &= -\tfrac{\mathbf{i}\sqrt{6}}{72}(\omega\Delta x)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^2, \\
J(\alpha, \omega\Delta x) &= 1 - \tfrac{\sqrt{6}}{144}(1+\mathbf{i})(\omega\Delta x)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(\omega\Delta x)^2.
\end{aligned}
\right. \tag{4.24}
$$

L'onde parasite d'amplitude T_f^1 est évanescente avec une profondeur de pénétration donné par (3.41). Un simple calcul nous montre que l'erreur en norme L^2 due à cette onde est alors environs

$$
\left(\int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{6}\Delta x^{\frac{3}{2}}}{72} e^{-\frac{2\sqrt{cos(\pi/3)\omega}}{\sqrt{\Delta x}}x} \right)^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}\Delta x^{\frac{7}{4}}}{144\,(\cos(\pi/3)\omega)^{\frac{1}{4}}}.
$$

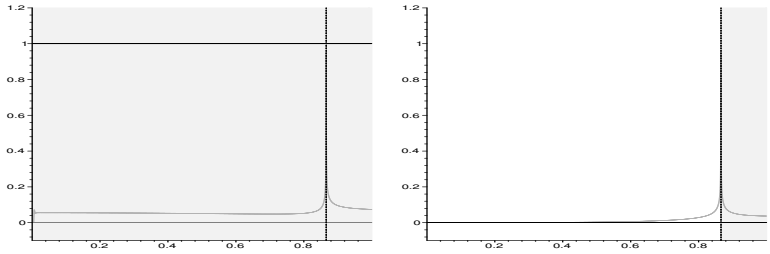
Par contre, l'erreur en norme L^∞ est en $\Delta x^{\frac{3}{2}}$. La nature propagative de l'autre onde parasite nous fournit un erreur d'ordre $\Delta x^{\frac{3}{2}}$ dans les deux normes.

De la même façon qu'avec la méthode conservative originale, l'ordre de convergence dépend de la valeur du rapport entre le pas de discrétisation en espace et en temps. Ainsi on a que

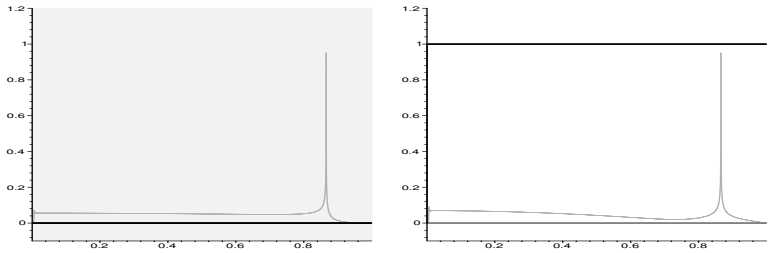
- si α coïncide avec une des valeurs dans (3.49), la méthode devrait être d'ordre $(\omega\Delta x)^{\frac{3}{2}}$ en norme L^2 et L^∞.
- dans les autres cas, la méthode nous fournit une approximation d'ordre deux dans les deux normes.

4.4.3 Expériences Numériques 1D

Maintenant on vérifie numériquement la cohérence des résultats obtenus avec les techniques de Fourier de la section précédente. Pour faire ceci, on effectue une étude numérique de convergence (identique à celui de la section 3.5.3) sur la nouvelle méthode numérique. Afin de pouvoir comparer la méthode conservative avec la méthode post-traitée on réalise cette étude pour les mêmes taux de raffinement et valeurs de α que dans la section citée.

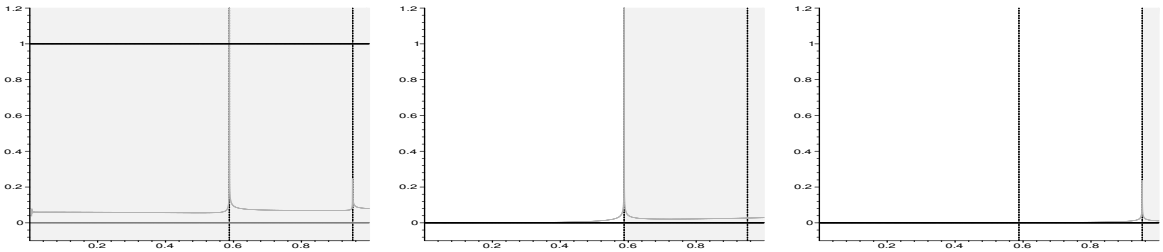


(a) $|T^0_{f,n}|(\alpha)$ (b) $|T^1_{f,n}|(\alpha) = |T^{-1}_{f,n}|(\alpha)$

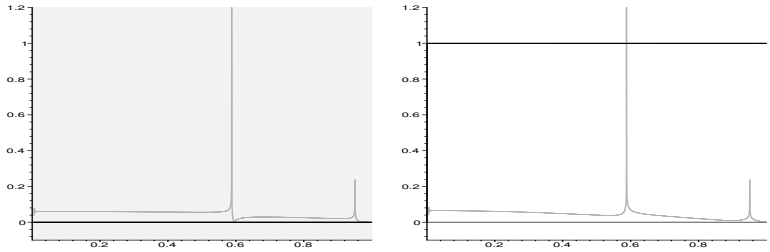


(c) $|R^0_{c,n}|(\alpha)$ (d) $|J_n|(\alpha)$

FIG. 4.9 – $(q_c, q_f) = (1, 3)$. L'ordre zéro ($n = 0$ en noir), l'ordre un ($n = 1$ en gris foncé) et l'ordre deux ($n = 2$ en gris pâle) des modules des amplitudes pour $\alpha \in (0, 1)$

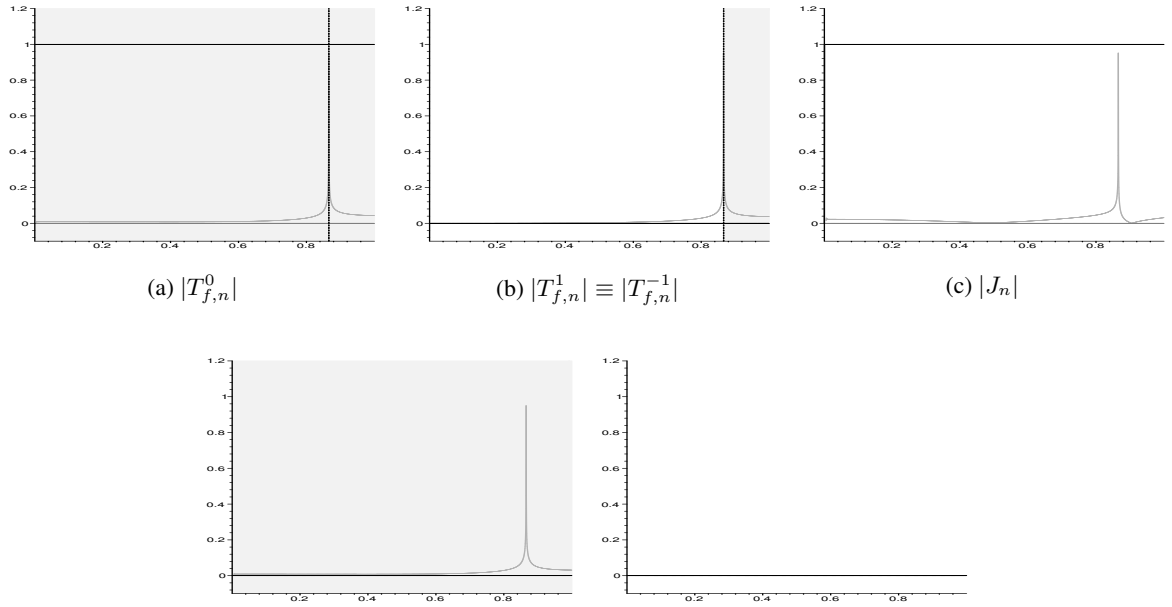


(a) $|T^0_{f,n}|(\alpha)$ (b) $|T^1_{f,n}|(\alpha) = |T^{-1}_{f,n}|(\alpha)$ (c) $|T^2_{f,n}|(\alpha) = |T^{-2}_{f,n}|(\alpha)$



(d) $|R^0_{c,n}|(\alpha)$ (e) $|J_n|(\alpha)$

FIG. 4.10 – $(q_c, q_f) = (1, 5)$. L'ordre zéro ($n = 0$ en noir), l'ordre un ($n = 1$ en gris foncé) et l'ordre deux ($n = 2$ en gris pâle) des modules des amplitudes pour $\alpha \in (0, 1)$



(a) $|T^0_{f,n}|$ (b) $|T^1_{f,n}| \equiv |T^{-1}_{f,n}|$ (c) $|J_n|$

(d) $|R^0_{c,n}|$ (e) $|R^{-1}_{c,n}|$

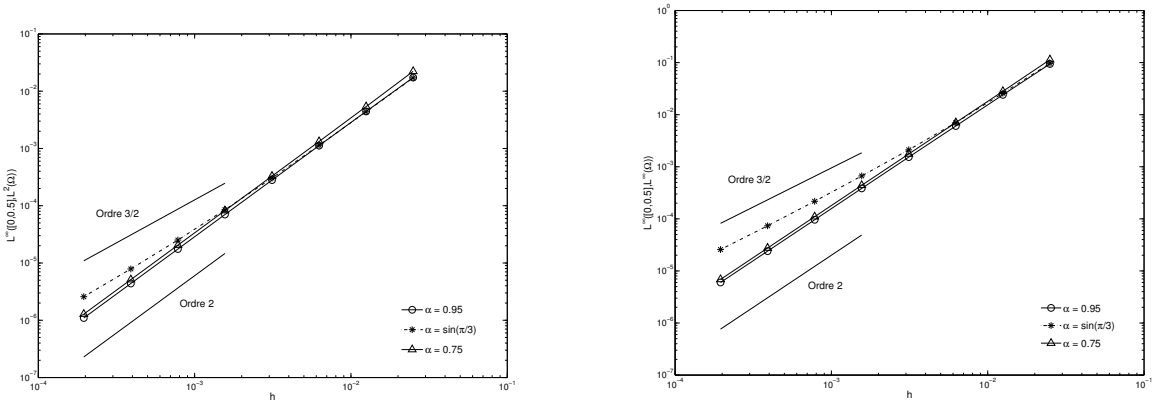
FIG. 4.11 – $(q_c, q_f) = (2, 3)$. L'ordre zéro ($n = 0$ en noir), l'ordre un ($n = 1$ en gris foncé) et l'ordre deux ($n = 2$ en gris pâle) des modules des amplitudes pour $\alpha \in (0, 1)$

$(q_c, q_f) = (1, 3)$**.** On commence par un raffinement de taux trois. Dans les figures 4.12(a) et 4.12(b) on montre les courbes d'erreur (dont ses pentes nous indiquent l'ordre de la méthode) en norme L^2 et L^∞ pour des différentes valeurs du quotient $\alpha = \Delta t_c/\Delta x_c$. De la même façon que pour la méthode conservative, l'ordre de la méthode dépend de ce paramètre. Lorsque $\alpha = \sin(\pi/3)$, la méthode semble être d'ordre $h^{\frac{3}{2}}$ en norme L^2 et L^∞. Cette fois, pour toutes les autres valeurs la méthode est de second ordre. On peut voir ce comportement dans le tableau 4.1.

$(q_c, q_f) = (1, 5)$**.** On trouve un comportement similaire lorsqu'on fait un raffinement de taux égal à cinq. La méthode est moins performante lorsque $\alpha = \sin(k\pi/5),\ k \in \{1, 2\}$. Dans ce cas on obtient un ordre de convergence $h^{\frac{7}{4}}$ en norme L^2 et $h^{\frac{3}{2}}$ en norme L^∞. Encore une fois, la méthode est d'ordre deux pour les autres valeurs du paramètre pour les deux normes (voir le tableau 4.2).

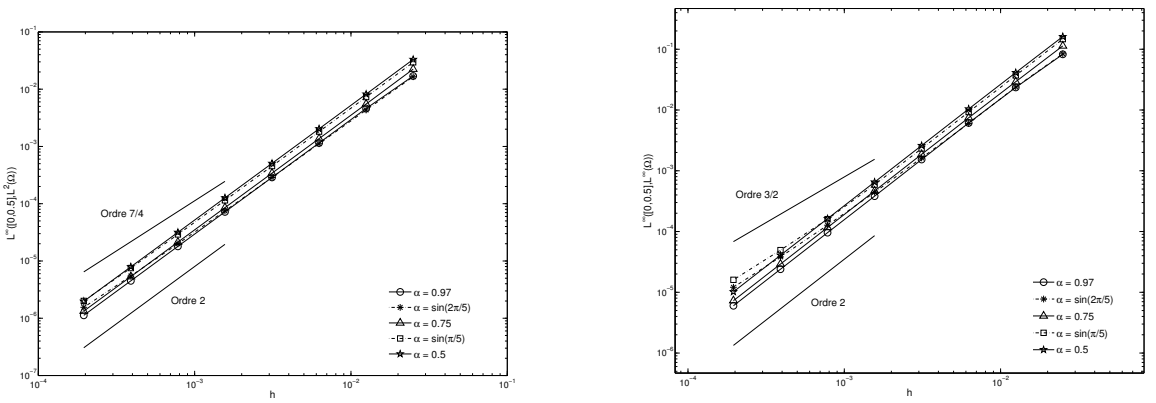
	$L^\infty([0, 0.5], L^2(\Omega))$	$L^\infty([0, 0.5], L^\infty(\Omega))$
$\alpha = 0.95$	2.0000	1.9997
$\alpha = \sin(\pi/3)$	1.6111	1.5128
$\alpha = 0.75$	2.0003	2.0003

TAB. 4.1 – Ordres de convergence observés. $(q_c, q_f) = (1, 3)$



(a) $L^\infty\left((0,T), L^2(\Omega)\right)$ (b) $L^\infty\left((0,T), L^\infty(\Omega)\right)$

FIG. 4.12 – Ordres de convergence. $\alpha \in \left\{0.95, \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 0.75\right\}$. $(q_c, q_f) = (1, 3)$



(a) $L^\infty\left((0,T), L^2(\Omega)\right)$ (b) $L^\infty\left((0,T), L^\infty(\Omega)\right)$

FIG. 4.13 – Ordres de convergence. $\alpha \in \left\{0.97, \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right), 0.75, \sin\left(\frac{\pi}{5}\right), 0.5\right\}$. $(q_c, q_f) = (1, 5)$

	$L^\infty([0,0.5],L^2(\Omega))$	$L^\infty([0,0.5],L^\infty(\Omega))$
$\alpha = 0.97$	2.0000	1.9972
$\alpha = \sin(2\pi/5)$	1.8136	1.6610
$\alpha = 0.75$	2.0001	1.9998
$\alpha = \sin(\pi/5)$	1.9063	1.6242
$\alpha = 0.5$	2.0001	2.0001

TAB. 4.2 – Ordres de convergence observés. $(q_c, q_f) = (1, 5)$

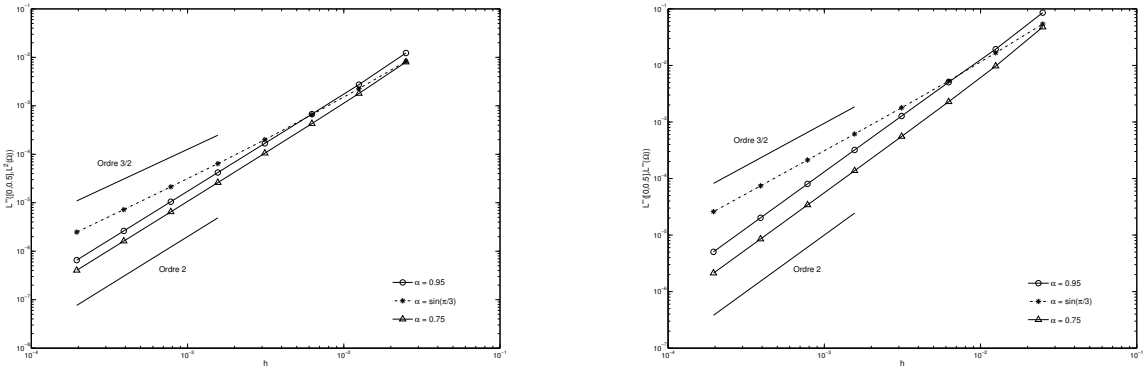
	$L^\infty([0,0.5],L^2(\Omega))$	$L^\infty([0,0.5],L^\infty(\Omega))$
$\alpha = 0.95$	2.0002	1.9954
$\alpha = \sin(\pi/3)$	1.5403	1.5127
$\alpha = 0.75$	2.0017	2.0018

TAB. 4.3 – Ordres de convergence observés. $(q_c, q_f) = (2, 3)$

$(q_c, q_f) = (2, 3)$**.** Finalement on montre un cas où $q_c > 1$ (voir les figures 4.14(a),(b) et le tableau 4.3). Lorsque le paramètre α est égal à la valeur critique $\sin(\pi/3)$, la méthode est d'ordre $\Delta x^{\frac{3}{2}}$ dans les deux normes. Dans les autres cas, la méthode est d'ordre deux.

Remarque 4.4.1 *Tous les ordres de convergence qu'on a obtenus pour des α différents des valeurs dans (3.49) sont en conformité avec l'analyse par des techniques de Fourier faite dans la section précédente. Pour les valeurs critiques, le seul ordre de convergence qui n'est pas tout à fait cohérent avec la théorie est celui en norme L^2 pour $(q_c, q_f) = (1, 5)$. Les ondes parasites qui génèrent la plupart de l'erreur (qui ont une amplitude en $\Delta x^{\frac{3}{2}}$) semblent être évanescentes en obtenant un ordre $\Delta x^{\frac{7}{4}}$ légèrement meilleur à celui qui avait été prévu (voir le paragraphe dans la page 159).*

Les ordres de convergence numériques sont cohérents avec les résultats donnés par les techniques de Fourier. Avec la nouvelle méthode, il faut tout simplement prendre un α qui ne soit pas dans l'ensemble (3.49) pour avoir une méthode d'ordre deux. Dans ce cas, toutes les courbes de convergence sont très proches les unes des autres, ce qui implique que la dépendance en α est moins importante. On remarque aussi que la courbe qui nous donne les meilleurs résultats (dans la plupart des cas) est celle qui correspond à l'α le plus grand (voir les figures 4.12 et 4.13). Ceci est très intéressant car, pour un maillage en espace fixé, plus on prend α grand moins la méthode est coûteuse.



(a) $L^\infty\left((0,T), L^2(\Omega)\right)$

(b) $L^\infty\left((0,T), L^\infty(\Omega)\right)$

FIG. 4.14 – Ordres de convergence. $\alpha \in \left\{0.95, \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 0.75\right\}$. $(q_c, q_f) = (2, 3)$

Deuxième partie

Raffinement de Maillage Spatio-Temporel Stable sans Multiplicateur de Lagrange

Chapitre 5

Raffinement de Maillage Spatio–Temporel $(1,2)$ Stable sans Multiplicateur de Lagrange

Sommaire

5.1 Une Formulation Variationnelle Abstraite . . . 168
5.2 Semi-discrétisation en Espace . . . 172
5.3 Convergence du Problème Semi-discret . . . 173
5.3.1 Définition et Analyse de la Projection Elliptique . . . 173
5.3.2 Estimations sur le Problème d'Évolution . . . 175
5.4 Discrétisation en Temps . . . 178
5.4.1 Le Schéma Intérieur . . . 179
5.4.2 Les Équations de Couplage : Conservation d'une Énergie . . . 179
5.5 Stabilité du Schéma . . . 180
5.6 Caractère Bien Posé du Problème Discret . . . 183
5.7 Convergence du Problème Discret : Les Résultats Principaux . . . 183
5.8 La Preuve des Estimations d'Erreur . . . 185
5.8.1 Les Équations Satisfaites par l'Erreur . . . 185
5.8.2 Le Plan de la Preuve . . . 187
5.8.3 La Preuve de l'Estimation en $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta t})$ . . . 188
5.8.4 La Preuve de l'Estimation en $\mathcal{O}(\Delta x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2^l}})$ . . . 192
5.8.4.1 Estimations sur les Dérivées Discrètes Grossières . . . 192
5.8.4.2 La Preuve par Récurrence . . . 193
5.8.5 Vérification de l'hypothèse (5.66) . . . 197

Les méthodes de raffinement de maillage introduites dans la partie I ont besoin de l'introduction d'une variable auxiliaire sur l'interface, le multiplicateur de Lagrange, pour effectuer le couplage. Comme on a vu dans la section 1.4.2 le choix d'espace de discrétisation pour cette variable n'est pas toujours évident. Tout au long de cette deuxième partie, et en particulier dans ce chapitre, on va présenter une autre technique qui nous permettra de faire du raffinement de maillage spatio-temporel sans l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange. Elle se base sur une méthode de couplage que nous dénotons primale-duale : la formulation utilisée sur la grille fine est duale de celle qu'on utilisera sur la

grille grossière. Cette méthode peut alors être présentée dans un cadre plus général comme une technique de couplage de problèmes de propagation d'ondes. Elle sera aussi compatible avec le fait d'avoir des maillages non-conformes à l'interface entre les deux sous-domaines et du pas de temps local. Ainsi, on suppose qu'on a deux domaines $\Omega_l,\ l \in \{c, f\}$ sur lesquels on a un couple d'inconnues $(u_l, p_l) \in \mathbb{R}^{m_l} \times \mathbb{R}^{n_l},\ l \in \{c, f\}$ (qui dépendent de l'espace et du temps) qui vérifient

$$\left| \begin{array}{rcrcl} \mathcal{A}_l \dfrac{\partial u_l}{\partial t} & + & \mathcal{D}_l^* \, p_l & = & g_l, \\ \mathcal{B}_l \dfrac{\partial p_l}{\partial t} & - & \mathcal{D}_l \, u_l & = & f_l, \end{array} \right. \tag{5.1}$$

où $\mathcal{A}_l$ et $\mathcal{B}_l$ sont des matrices symétriques qui peuvent dépendre de la variable en espace et où $\mathcal{D}_l$ et $\mathcal{D}_l^*$ sont des opérateurs différentiels d'ordre un en espace et adjoints l'un de l'autre au sens des distributions, c'est-à-dire, que pour toutes fonctions test φ_l et ψ_l indéfiniment dérivables à support compact dans Ω_l on a

$$\int_{\Omega_l} \mathcal{D}_l \, \varphi \, \psi \, \mathrm{d}x \quad = \quad \int_{\Omega_l} \mathcal{D}_l^* \, \psi \, \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Ces systèmes sont couplés par la continuité de deux traces définies sur l'interface Γ commune aux deux domaines, qui dépendent de la nature du problème et qui relient les inconnues (u_c, p_c) avec (u_f, p_f). Dans ce chapitre on traitera le cas où le pas de discrétisation temporelle sur Ω_c est **deux fois plus grand** que celui utilisé sur Ω_f.

5.1 Une Formulation Variationnelle Abstraite

On commence par introduire le cadre fonctionnel sur lequel on va travailler. On introduit les espaces de Hilbert suivants

$$\left. \begin{array}{rcl} H_l & := & \left[L^2(\Omega_l)\right]^{m_l}, \qquad V_l \ := \ \left[L^2(\Omega_l)\right]^{n_l}, \\ X_l & := & \{\tilde{u}_l \in H_l \ / \ \mathcal{D}_l \, u_l \in V_l\}, \end{array} \right| \quad , l \in \{c, f\}. \tag{5.2}$$

Les deux premiers sont munis des produits scalaires et normes habituelles tandis que le dernier est muni du produit scalaire et de la norme suivants

$$\left| \begin{array}{rcll} (u_l, \tilde{u}_l)_{X_l} & := & (u_l, \tilde{u}_l)_{H_l} + (\mathcal{D}_l \, u_l, \mathcal{D}_l \, \tilde{u}_l)_{V_l}, & \forall \, (u_l, \tilde{u}_l) \in X_l \times X_l, \\ \|\tilde{u}_l\|_{X_l}^2 & := & \|\tilde{u}_l\|_{H_l}^2 + \|\mathcal{D}_l \, \tilde{u}_l\|_{V_l}^2, & \forall \, \tilde{u}_l \in X_l. \end{array} \right. \tag{5.3}$$

Il sera aussi utile de définir les espaces produit

$$H \ := \ H_c \times H_f, \qquad V \ := \ V_c \times V_f, \qquad X \ := \ X_c \times X_f, \tag{5.4}$$

munis des normes

$$\left| \begin{array}{rcll} \|(u_c, u_f)\|_H^2 & := & \|u_c\|_{H_c}^2 + \|u_f\|_{H_f}^2, & \forall (u_c, u_f) \in H_c \times H_f, \\ \|(p_c, p_f)\|_V^2 & := & \|p_c\|_{V_c}^2 + \|p_f\|_{V_f}^2, & \forall (p_c, p_f) \in V_c \times V_f, \\ \|(u_c, u_f)\|_X^2 & := & \|u_c\|_{X_c}^2 + \|u_f\|_{X_f}^2, & \forall (u_c, u_f) \in X_c \times X_f. \end{array} \right. \tag{5.5}$$

Ainsi, la formulation variationnelle abstraite à laquelle on s'intéresse est la suivante

$$
(5.6)\quad \left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } (u_c, u_f) \in C^1([0,T];H) \cap C^0([0,T];X) \text{ et } (p_c, p_f) \in C^1([0,T];V) \text{ satisfaisant} \\
\begin{array}{lllllll}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{A}_c\, u_c, \tilde{u}_c)_{H_c} & + & (\mathcal{D}_c\, \tilde{u}_c, p_c)_{V_c} & - & c(\tilde{u}_c, u_f) & = & (g_c, \tilde{u}_c)_{X_c' \times X_c}, \quad \forall \tilde{u}_c \in X_c, \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{B}_c\, p_c, \tilde{p}_c)_{V_c} & - & (\mathcal{D}_c\, u_c, \tilde{p}_c)_{V_c} & & & = & (f_c, \tilde{p}_c)_{V_c' \times V_c}, \quad \forall \tilde{p}_c \in V_c, \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{A}_f\, u_f, \tilde{u}_f)_{H_f} & + & (\mathcal{D}_f\, \tilde{u}_f, p_f)_{V_f} & + & c(u_c, \tilde{u}_f) & = & (g_f, \tilde{u}_f)_{X_f' \times X_f}, \quad \forall \tilde{u}_f \in X_f, \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{B}_f\, p_f, \tilde{p}_f)_{V_f} & - & (\mathcal{D}_f\, u_f, \tilde{p}_f)_{V_f} & & & = & (f_f, \tilde{p}_f)_{V_f' \times V_f}, \quad \forall \tilde{p}_f \in V_f,
\end{array}
\end{array}\right.
$$

système qu'il faut compléter avec des conditions initiales et des conditions aux limites qu'on omettra pour simplifier la présentation. L'opérateur bilinéaire

$$
(5.7)\quad \left|\begin{array}{lll}
c: & X_c \times X_f & \longrightarrow \mathbb{R} \\
 & (\tilde{u}_c, \tilde{u}_f) & \mapsto c(\tilde{u}_c, \tilde{u}_f),
\end{array}\right.
$$

couple les deux formulations et on va supposer qu'il est continu, c'est-à-dire,

$$
(5.8)\qquad c(\tilde{u}_c, \tilde{u}_f) \;\leq\; \|c\|\, \|\tilde{u}_c\|_{X_c} \|\tilde{u}_f\|_{X_f}, \qquad \forall\, (u_c, u_f) \in X_c \times X_f.
$$

On supposera aussi que les opérateurs définis par les matrices symétriques $\mathcal{A}_l$ et $\mathcal{B}_l$ appartiennent respectivement à $\mathcal{L}(H_l, H_l)$ et $\mathcal{L}(V_l, V_l)$ et qu'il existe une constante $\mathcal{C}$ telle que

$$
(5.9)\quad \left|\begin{array}{l}
\forall\, \tilde{u}_l \in H_l, \quad (\mathcal{A}_l\, \tilde{u}_l, \tilde{u}_l)_{H_l} \;\geq\; \mathcal{C}\|\tilde{u}_l\|^2_{H_l}, \\
\forall\, \tilde{p}_l \in V_l, \quad (\mathcal{B}_l\, \tilde{p}_l, \tilde{p}_l)_{V_l} \;\geq\; \mathcal{C}\|\tilde{p}_l\|^2_{V_l}.
\end{array}\right.
$$

Remarque 5.1.1 *Si dans le problème (5.6) on prend* $(\tilde{u}_c, \tilde{u}_f) = (u_c, u_f)$ *et* $(\tilde{p}_c, \tilde{p}_f) = (p_c, p_f)$ *on remarque que*

$$
(5.10)\qquad \frac{d\mathbf{E}}{dt} \;=\; \sum_{l \in \{c,f\}} \left\{ (g_l, u_l)_{X_c' \times X_c} + (f_l, p_l)_{V_c' \times V_c} \right\}
$$

avec

$$
(5.11)\quad \left|\begin{array}{lll}
\mathbf{E}(t) & = & \mathbf{E}_c(t) + \mathbf{E}_f(t), \\
\mathbf{E}_l(t) & = & \dfrac{1}{2}\left((\mathcal{A}_l\, u_l, u_l)_{H_l} + (\mathcal{B}_l\, p_l, p_l)_{V_l} \right), \qquad l \in \{c, f\}.
\end{array}\right.
$$

En particulier, en absence de forces externes, l'énergie définie ci-dessus se conserve.

Remarque 5.1.2 *Les inconnues* $u_l,\ l \in \{c, f\}$ *(qu'on appellera les variables régulières) possèdent plus de régularité en espace que les inconnues* $p_l,\ l \in \{c.f\}$ *(qu'on appellera singulières). On signale que le couplage entre les deux systèmes, qui est fait à l'aide de l'opérateur* $c(\cdot,\cdot)$*, ne fait intervenir que les variables régulières.*

Exemples d'application :

1. *Raffinement de maillage pour l'acoustique en dimension d* :

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_c & \equiv & \underline{v}_c, & \text{(le champ de vitesse sur } \Omega_c,\, m_c = d), \\ p_c & \equiv & p_c, & \text{(la pression sur } \Omega_c,\, n_c = 1), \\ \mathcal{A}_c & \equiv & \underline{\underline{A}}_c, & \text{(le tenseur d'anisotropie sur } \Omega_c), \\ \mathcal{B}_c & \equiv & \rho_c, & \text{(densité du fluide sur } \Omega_c), \\ \mathcal{D}_c & \equiv & \text{div}\,(\cdot), & \mathcal{D}_c^* \;\equiv\; -\underline{\nabla}(\cdot), \end{array}\right. \tag{5.12}$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_f & \equiv & p_f, & \text{(la pression sur } \Omega_f,\, m_f = 1), \\ p_f & \equiv & \underline{v}_f, & \text{(le champ de vitesse sur } \Omega_f,\, n_f = d), \\ \mathcal{A}_f & \equiv & \rho_f, & \text{(densité du fluide sur } \Omega_f), \\ \mathcal{B}_f & \equiv & \underline{\underline{A}}_f, & \text{(tenseur d'anisotropie sur } \Omega_f), \\ \mathcal{D}_f & \equiv & \underline{\nabla}\,(\cdot), & \mathcal{D}_f^* \;\equiv\; -\text{div}\,(\cdot), \end{array}\right. \tag{5.13}$$

$$c(u_c, u_f) \;\equiv\; < \underline{v}_c \cdot \underline{n}\,,\; p_f >_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\,. \tag{5.14}$$

2. *Raffinement de maillage pour les équations de Maxwell en dimension trois* :

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_c & \equiv & \underline{E}_c, & \text{(le champ électrique sur } \Omega_c,\, m_c = 3), \\ p_c & \equiv & \underline{H}_c, & \text{(le champ magnétique sur } \Omega_c,\, n_c = 3), \\ \mathcal{A}_c & \equiv & \varepsilon_c, & \text{(permitivité diélectrique sur } \Omega_c), \\ \mathcal{B}_c & \equiv & \mu_c, & \text{(permeabilité magnétique sur } \Omega_c), \\ \mathcal{D}_c & \equiv & -\underline{\text{rot}}\,(\cdot), & \mathcal{D}_c^* \;\equiv\; -\underline{\text{rot}}\,(\cdot), \end{array}\right. \tag{5.15}$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_f & \equiv & \underline{H}_f, & \text{(le champ magnétique sur } \Omega_f,\, m_f = 3), \\ p_f & \equiv & \underline{E}_f, & \text{(le champ électrique } \Omega_f,\, n_f = 3), \\ \mathcal{A}_f & \equiv & \mu_f, & \text{(permeabilité magnétique sur } \Omega_f), \\ \mathcal{B}_f & \equiv & \varepsilon_f, & \text{(permitivité diélectrique sur } \Omega_f), \\ \mathcal{D}_f & \equiv & \underline{\text{rot}}\,(\cdot), & \mathcal{D}_f^* \;\equiv\; \underline{\text{rot}}\,(\cdot), \end{array}\right. \tag{5.16}$$

$$c(u_c, u_f) \;\equiv\; < \underline{H}_f \wedge \underline{n}\,,\; \underline{n} \wedge (\underline{E}_c \wedge \underline{n}) >_{\underline{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \underline{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)}, \tag{5.17}$$

où l'espace $\underline{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ et son espace dual $\underline{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ ont été définis dans [26]. On signale que cette application est spécialement intéressante car les formulations duale et primale sont presque identiques.

3. *Raffinement de maillage pour l'élastodynamique en dimension d.* Dans ce cas on doit changer légèrement les espaces H_c et V_f pour imposer la symétrie du tenseur de contraintes :

$$\left|\begin{array}{lcl} H_c & := & \left\{\underline{\underline{\sigma}}_c \in \left[L^2(\Omega_c)\right]^{d\times d} \ / \ \underline{\underline{\sigma}}_c \text{ est symétrique}\right\}, \\ V_f & := & \left\{\underline{\underline{\sigma}}_f \in \left[L^2(\Omega_f)\right]^{d\times d} \ / \ \underline{\underline{\sigma}}_f \text{ est symétrique}\right\}. \end{array}\right. \tag{5.18}$$

Ainsi on a

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_c & \equiv & \underline{\underline{\sigma}}_c, & \text{(le tenseur de contraintes sur } \Omega_c,\ m_c = d^2\ (= d\times d)), \\ p_c & \equiv & \underline{v}_c, & \text{(le champ de vitesse sur } \Omega_c,\ n_c = d), \\ \mathcal{A}_c & \equiv & \mathbf{A}_c, & \text{(l'inverse du tenseur d'élasticité sur } \Omega_c), \\ \mathcal{B}_c & \equiv & \rho_c, & \text{(densité du matériau sur } \Omega_c), \\ \mathcal{D}_c & \equiv & \underline{\text{div}}\,(\cdot), & \mathcal{D}_c^* \ \equiv \ -\underline{\underline{\varepsilon}}\,(\cdot), \end{array}\right. \tag{5.19}$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_f & \equiv & \underline{v}_f, & \text{(le champ de vitesse } \Omega_f,\ m_f = d), \\ p_f & \equiv & \underline{\underline{\sigma}}_f, & \text{(le tenseur de contraintes sur } \Omega_f,\ n_f = d^2\ (= d\times d)), \\ \mathcal{A}_f & \equiv & \rho_f, & \text{(densité du matériau sur } \Omega_f), \\ \mathcal{B}_f & \equiv & \mathbf{A}_f, & \text{(l'inverse du tenseur d'élasticité sur } \Omega_f), \\ \mathcal{D}_f & \equiv & \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\cdot), & \mathcal{D}_f^* \ \equiv \ -\underline{\text{div}}\,(\cdot), \end{array}\right. \tag{5.20}$$

$$c(u_c, u_f) \ \equiv \ < \underline{\underline{\sigma}}_c\, \underline{n}\ ,\ \underline{v}_f >_{\underline{H^{-\frac{1}{2}}}(\Gamma),\underline{H^{\frac{1}{2}}}(\Gamma)}\ . \tag{5.21}$$

Remarque 5.1.3 *La symétrie sur les espaces H_c et V_f doit être imposée pour assurer que l'opérateur $\mathcal{D}_c$ est l'adjoint de $\underline{\underline{\varepsilon}}(\cdot)$ et aussi pour pouvoir inverser le tenseur d'élasticité.*

4. *Couplage fluide-solide en dimension d.* Dans ce cas on va aussi imposer la symétrie de l'espace V_f donnée dans (5.18). Alors on a

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_c & \equiv & p_c, & \text{(la pression sur } \Omega_c,\ m_c = 1), \\ p_c & \equiv & \underline{v}_c, & \text{(le champ de vitesse sur } \Omega_c,\ n_c = d), \\ \mathcal{A}_c & \equiv & \rho_c, & \text{(densité du fluide sur } \Omega_c), \\ \mathcal{B}_c & \equiv & \underline{\underline{A}}_c, & \text{(tenseur d'anisotropie sur } \Omega_c), \\ \mathcal{D}_c & \equiv & \underline{\nabla}\,(\cdot), & \mathcal{D}_c^* \ \equiv \ -\text{div}\,(\cdot), \end{array}\right. \tag{5.22}$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_f & \equiv & \underline{v}_f, & \text{(la champ de vitesse } \Omega_f,\ m_f = d), \\ p_f & \equiv & \underline{\underline{\sigma}}_f, & \text{(le tenseur de contraintes sur } \Omega_f,\ n_f = d^2\ (= d\times d)), \\ \mathcal{A}_f & \equiv & \rho_f, & \text{(densité du matériau sur } \Omega_f), \\ \mathcal{B}_f & \equiv & \mathbf{A}_f, & \text{(l'inverse du tenseur d'élasticité sur } \Omega_f), \\ \mathcal{D}_f & \equiv & \underline{\underline{\varepsilon}}\,(\cdot), & \mathcal{D}_f^* \ \equiv \ -\underline{\text{div}}\,(\cdot), \end{array}\right. \tag{5.23}$$

$$c(u_c, u_f) \equiv \int_\Gamma \underline{v}_f \cdot \underline{n}\, p_c \, \mathrm{d}\gamma. \tag{5.24}$$

Pour avoir plus de détails sur cette application on envoi le lecteur à [43].

Dans les quatre exemples, la continuité de l'opérateur $c(\cdot,\cdot)$ peut être montrée avec des théorèmes de traces adaptés à chaque cas. On supposera que l'interface Γ est assez régulière pour pouvoir les appliquer.

5.2 Semi-discrétisation en Espace

On va suivre une approche du type Galerkin pour effectuer la discrétisation en espace du problème (5.6). De cette façon on construit des espaces de dimension finie

$$\left| \begin{array}{lllllll} X_{l,h} & \subset & X_l, & V_{l,h} & \subset & V_l, & l \in \{c,f\}, \\ X_h & := & X_{c,h} \times X_{f,h}, & V_h & := & V_{c,h} \times V_{f,h}, & \end{array} \right. \tag{5.25}$$

(h est un paramètre de discrétisation) qui satisfont les propriétés d'approximation habituelles

$$\left| \begin{array}{lll} \lim\limits_{h\to 0} \inf\limits_{\tilde{u}_l^h \in X_{l,h}} \left\| u_l - \tilde{u}_l^h \right\|_{X_l} & = & 0, \quad \forall\, u_l \in X_l, \\ \lim\limits_{h\to 0} \inf\limits_{\tilde{p}_l^h \in V_{l,h}} \left\| p_l - \tilde{p}_l^h \right\|_{V_l} & = & 0, \quad \forall\, p_l \in V_l, \end{array} \right| , l \in \{c,f\}. \tag{5.26}$$

On supposera qu'il existe des espaces (typiquement des espaces de fonctions régulières)

$$\left| \begin{array}{lllllll} Y_l & \subset & X_l, & W_l & \subset & V_l, & l \in \{c,f\}, \\ Y & := & Y_c \times Y_f, & W & := & W_c \times W_f, & \end{array} \right. \tag{5.27}$$

équipés des normes $\|\cdot\|_{Y_l}$, $\|\cdot\|_{W_l}$ et

$$\left| \begin{array}{lllll} \|(u_c,u_f)\|_Y^2 & := & \|u_c\|_{Y_c}^2 + \|u_f\|_{Y_f}^2, & \forall\, (u_c,u_f) \in Y, \\ \|(p_c,p_f)\|_W^2 & := & \|p_c\|_{W_c}^2 + \|p_f\|_{W_f}^2, & \forall\, (p_c,p_f) \in W, \end{array} \right.$$

tels que

$$\left| \begin{array}{lll} \inf\limits_{\tilde{u}_l^h \in X_{l,h}} \left\| u_l - \tilde{u}_l^h \right\|_{X_l} & \leq & \mathcal{C}\, h^k \, \|u_l\|_{Y_l}, \quad \forall\, u_l \in Y_l, \\ \inf\limits_{\tilde{p}_l^h \in V_{l,h}} \left\| p_l - \tilde{p}_l^h \right\|_{V_l} & \leq & \mathcal{C}\, h^k \, \|p_l\|_{W_l}, \quad \forall\, p_l \in W_l, \end{array} \right| , l \in \{c,f\}, \tag{5.28}$$

avec $k \geq 1/2$.

Le problème semi-discret s'écrit alors

$$
(5.29)\qquad \left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } (u_c^h, u_f^h) \in C^1\left([0,T]; X_h\right) \text{ et } (p_c^h, p_f^h) \in C^1\left([0,T]; V_h\right) \text{ satisfaisant} \\
\begin{array}{lclclcl}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{A}_c\, u_c^h, \tilde{u}_c^h)_{H_c} & + & (\mathcal{D}_c\, \tilde{u}_c^h, p_c^h)_{V_c} & - & c(\tilde{u}_c^h, u_f^h) & = & (g_c, \tilde{u}_c^h)_{X_c' \times X_c}, \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{B}_c\, p_c^h, \tilde{p}_c^h)_{V_c} & - & (\mathcal{D}_c\, u_c^h, \tilde{p}_c^h)_{V_c} & & & = & (f_c, \tilde{p}_c^h)_{V_c' \times V_c}, \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{A}_f\, u_f^h, \tilde{u}_f^h)_{H_f} & + & (\mathcal{D}_f\, \tilde{u}_f^h, p_f^h)_{V_f} & + & c(u_c^h, \tilde{u}_f^h) & = & (g_f, \tilde{u}_f^h)_{X_f' \times X_f}, \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{B}_f\, p_f^h, \tilde{p}_f^h)_{V_f} & - & (\mathcal{D}_f\, u_f^h, \tilde{p}_f^h)_{V_f} & & & = & (f_f, \tilde{p}_f^h)_{V_f' \times V_f}, \\
 & & & & \multicolumn{3}{r}{\forall\, ((\tilde{u}_c^h, \tilde{u}_f^h), (\tilde{p}_c^h, \tilde{p}_f^h)) \in X_h \times V_h.}
\end{array}
\end{array}\right.
$$

Remarque 5.2.1 *Il est clair qu'en absence de forces externes, l'énergie semi-discrète*

$$
(5.30)\qquad \left|\begin{array}{rcl}
\mathbf{E}_h(t) & = & \mathbf{E}_{c,h}(t) + \mathbf{E}_{f,h}(t), \\
\mathbf{E}_{l,h}(t) & = & \dfrac{1}{2}\Big((\mathcal{A}_l\, u_l^h, u_l^h)_{H_l} + (\mathcal{B}_l\, p_l^h, p_l^h)_{V_l}\Big), \qquad l \in \{c, f\},
\end{array}\right.
$$

se conserve.

5.3 Convergence du Problème Semi-discret

Afin d'étudier la convergence de la solution du problème semi-discrétisé vers la solution du problème continu on doit supposer des propriétés de compatibilité entre les espaces X_l et V_l. Un cas particulier (considéré par exemple dans [65, 67]) est de supposer que

$$
(5.31)\qquad \mathcal{D}_l\, X_{l,h} \;\subset\; V_{l,h},
$$

hypothèse qui est souvent vérifiée dans la pratique. Ceci nous permettra d'éliminer les inconnues $p_l,\ l \in \{c, f\}$ et donc de simplifier notablement les preuves. On signale qu'il s'agit d'une **propriété de compatibilité** entre les espaces définis sur chaque sous-domaine. A priori on n'impose **pas de conditions supplémentaires à l'interface**. L'analyse d'erreur qu'on présente, comme on a déjà expliqué dans la section 1.5.1, se divise en deux étapes : dans un premier temps on utilise des techniques d'énergie pour donner des estimations sur le problème d'évolution en fonction des estimations entre la solution exacte et une projection elliptique ; ensuite on analyse le problème stationnaire elliptique qui définit la projection. L'étude présentée dans cette section peut être sautée en première lecture car il est très similaire (et plus simple) que celles qu'on a présentées le long des sections 1.5.2 et 9.5.1.

5.3.1 Définition et Analyse de la Projection Elliptique

On définit l'opérateur de projection elliptique par

$$
(5.32)\qquad \begin{array}{rccc}
\Pi_h : & X \times V & \longrightarrow & X_h \times V_h \\
 & ((u_c, u_f), (p_c, p_f)) & \mapsto & ((\widehat{u_c^h}, \widehat{u_f^h}), (\widehat{p_c^h}, \widehat{p_f^h})),
\end{array}
$$

où les $((\widehat{u_c^h},\widehat{u_f^h}),(\widehat{p_c^h},\widehat{p_f^h}))$ sont définies par

$$
(5.33)\quad \left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } ((\widehat{u_c^h},\widehat{u_f^h}),(\widehat{p_c^h},\widehat{p_f^h})) \in X_h\times V_h \text{ satisfaisant}\\
(\mathcal{A}_c\,(\widehat{u_c^h}-u_c),\tilde{u}_c^h)_{H_c} + (\mathcal{D}_c\,\tilde{u}_c^h,\widehat{p_c^h}-p_c)_{V_c} - c(\tilde{u}_c^h,\widehat{u_f^h}-u_f) = 0,\\
(\widehat{p_c^h}-p_c,\tilde{p}_c^h)_{V_c} - (\mathcal{D}_c\,(\widehat{u_c^h}-u_c),\tilde{p}_c^h)_{V_c} = 0,\\
(\mathcal{A}_f\,(\widehat{u_f^h}-u_f),\tilde{u}_f^h)_{H_f} + (\mathcal{D}_f\,\tilde{u}_f^h,\widehat{p_f^h}-p_f)_{V_f} + c(\widehat{u_c^h}-u_c,\tilde{u}_f^h) = 0,\\
(\widehat{p_f^h}-p_f,\tilde{p}_f^h)_{V_f} - (\mathcal{D}_f\,(\widehat{u_f^h}-u_f),\tilde{p}_f^h)_{V_f} = 0,\\
\qquad\qquad \forall\,((\tilde{u}_c^h,\tilde{u}_f^h),(\tilde{p}_c^h,\tilde{p}_f^h))\in X_h\times V_h.
\end{array}\right.
$$

Ce problème se simplifie notablement grâce à l'hypothèse (5.31). En effet,

$$\forall\,\tilde{u}_l^h\in X_{l,h},\qquad \tilde{p}_l^h := \mathcal{D}_l\,\tilde{u}_l^h \in V_{l,h},$$

et donc,

$$(\widehat{p_l^h}-p_l,\mathcal{D}_l\,\tilde{u}_l^h)_{V_l} = (\mathcal{D}_l\,(\widehat{u_l^h}-u_l),\mathcal{D}_l\,\tilde{u}_l^h)_{V_l}.$$

Il est clair alors que le problème (5.33) est équivalent aux deux problèmes suivants

$$
(5.34)\quad \left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } (\widehat{u_c^h},\widehat{u_f^h}) \in X_h \text{ satisfaisant}\\
(\mathcal{A}_c\,(\widehat{u_c^h}-u_c),\tilde{u}_c^h)_{H_c} + (\mathcal{D}_c\,(\widehat{u_c^h}-u_c),\mathcal{D}_c\,\tilde{u}_c^h)_{V_c} - c(\tilde{u}_c^h,\widehat{u_f^h}-u_f) = 0,\\
(\mathcal{A}_f\,(\widehat{u_f^h}-u_f),\tilde{u}_f^h)_{H_f} + (\mathcal{D}_f\,(\widehat{u_f^h}-u_f),\mathcal{D}_f\,\tilde{u}_f^h)_{V_f} + c(\widehat{u_c^h}-u_c,\tilde{u}_f^h) = 0,\\
\qquad\qquad \forall\,(\tilde{u}_c^h,\tilde{u}_f^h)\in X_h,
\end{array}\right.
$$

et ensuite

$$
(5.35)\quad \left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } \widehat{p_l^h} \in V_{l,h} \text{ satisfaisant}\\
(\widehat{p_l^h}-p_l,\tilde{p}_l^h)_{V_l} = (\mathcal{D}_l\,(\widehat{u_l^h}-u_l),\tilde{p}_l^h)_{V_l},\quad \forall\,\tilde{p}_l^h\in V_{l,h},
\end{array}\right|,\quad l\in\{c,f\}.
$$

On commencera alors par effectuer l'analyse du problème (5.34) pour ensuite obtenir des estimations sur les variables $p_l,\ l\in\{c,f\}$ avec les équations (5.35). Alors on a la proposition suivante dont la démonstration repose sur le lemme de Céa

Proposition 5.3.1 *Pour tout* $((u_c,u_f),(p_c,p_f))\in X\times V$*, la projection elliptique* $\Pi_h((u_c,u_f),(p_c,p_f))\in X_h\times V_h$ *définie par (5.33) satisfait l'estimation suivante*

$$
(5.36)\quad \left|\begin{array}{c}
\|(\widehat{u_c^h}-u_c,\widehat{u_f^h}-u_f)\|_X + \|(\widehat{p_c^h}-p_c,\widehat{p_f^h}-p_f)\|_V \le\\
\mathcal{C}\left[\inf\limits_{(\tilde{u}_c^h,\tilde{u}_f^h)\in X_h}\|(\tilde{u}_c^h-u_c,\tilde{u}_f^h-u_f)\|_X + \inf\limits_{(\tilde{p}_c^h,\tilde{p}_f^h)\in V_h}\|(\tilde{p}_c^h-p_c,\tilde{p}_f^h-p_f)\|_V\right].
\end{array}\right.
$$

Si de plus $((u_c,u_f),(p_c,p_f))\in Y\times W$ *alors*

$$
(5.37)\quad \left|\ \|(\widehat{u_c^h}-u_c,\widehat{u_f^h}-u_f)\|_X + \|(\widehat{p_c^h}-p_c,\widehat{p_f^h}-p_f)\|_V \le \mathcal{C}h^k\left[\|(u_c,u_f)\|_Y + \|(p_c,p_f)\|_W\right],\right.
$$

où k *désigne l'ordre d'erreur d'interpolation défini en (5.28).*

Preuve: On commence par analyser l'erreur commise sur l'inconnue u_l. Étant donné que $(\widehat{u_c^h}, \widehat{u_f^h})$ est solution de (5.34) on en déduit (en appliquant le lemme de Céa[28]) que

$$\|(\widehat{u_c^h} - u_c, \widehat{u_f^h} - u_f)\|_X \;\leq\; \mathcal{C} \inf_{(\tilde{u}_c^h, \tilde{u}_f^h) \in X_h} \|(\tilde{u}_c^h - u_c, \tilde{u}_f^h - u_f)\|_X. \tag{5.38}$$

Ensuite on obtient une estimation sur les inconnues p_l en utilisant l'équation (5.35) qui nous donne (5.36) (voir les sections 1.5.2 et 9.5.1 pour une preuve similaire plus détaillée). Finalement, pour obtenir (5.37) il suffit d'utiliser les hypothèses (5.28) sur les espaces de discrétisation. □

Dans les estimations sur le problème d'évolution on appliquera la projection elliptique sur la solution du problème (5.6). Il est simple de montrer que si

$$((u_c, u_f), (p_c, p_f)) \;\in\; C^m([0,T]; X \times V),$$

alors

$$\Pi_h((u_c, u_f), (p_c, p_f)) \;\in\; C^m([0,T]; X_h \times V_h),$$

et

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} \Pi_h((u_c, u_f), (p_c, p_f)) \;=\; \Pi_h((\frac{\partial^m}{\partial t^m} u_c, \frac{\partial^m}{\partial t^m} u_f), (\frac{\partial^m}{\partial t^m} p_c, \frac{\partial^m}{\partial t^m} p_f)).$$

Ainsi on peut énoncer un corollaire immédiat de la proposition 5.3.1

Corollaire 5.3.2 *Soit* $((u_c, u_f), (p_c, p_f)) \;\in\; C^l([0,T]; Y \times W)$ *la solution de (5.6). Alors, pour tout* $t < T$*, sa projection elliptique définie par (5.33) satisfait*

$$\begin{aligned} &\|\partial_t^m(\widehat{u_c^h} - u_c, \widehat{u_f^h} - u_f)(t)\|_X + \|\partial_t^m(\widehat{p_c^h} - p_c, \widehat{p_f^h} - p_f)(t)\|_V \;\leq \\ &\qquad\qquad \mathcal{C}h^k \left[\|\partial_t^m(u_c, u_f)(t)\|_Y + \|\partial_t^m(p_c, p_f)(t)\|_W\right]. \end{aligned} \tag{5.39}$$

avec $0 \leq m \leq l$.

5.3.2 Estimations sur le Problème d'Évolution

Maintenant on obtient les estimations sur le problème d'évolution. On définit l'énergie discrète de l'erreur par

$$\mathcal{E}_h(t) \;:=\; \mathcal{E}_{c,h}(t) + \mathcal{E}_{f,h}(t), \tag{5.40}$$

où

$$\mathcal{E}_{l,h}(t) \;:=\; \frac{1}{2}(\mathcal{A}_l\,(\widehat{u_l^h} - u_l^h), \widehat{u_l^h} - u_l^h)_{H_l} \;+\; \frac{1}{2}(\mathcal{B}_l\,(\widehat{p_l^h} - p_l^h), \widehat{p_l^h} - p_l^h)_{V_l}.$$

Notre objectif est de borner cette quantité en fonction de l'erreur de projection elliptique sur la solution exacte car

$$\sqrt{\mathcal{E}_{l,h}(t)} \;\approx\; \mathcal{C}\left(\|\widehat{u_l^h} - u_l^h\|_{H_l} \;+\; \|\widehat{p_l^h} - p_l^h\|_{V_l}\right). \tag{5.41}$$

Proposition 5.3.3 *L'énergie discrète de l'erreur satisfait l'identité*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{E}_h(t) \;=\; \sum_{l \in \{c,f\}} \Big[&\left(\mathcal{B}_l\,\partial_t(\widehat{p_l^h} - p_l), \widehat{p_l^h} - p_l^h\right)_{V_l} \;-\; \left(\widehat{p_l^h} - p_l, \widehat{p_l^h} - p_l^h\right)_{V_l} \;+ \\ &\left(\mathcal{A}_l\,\partial_t(\widehat{u_l^h} - u_l), \widehat{u_l^h} - u_l^h\right)_{H_l} \;-\; \left(\mathcal{A}_l\,(\widehat{u_l^h} - u_l), \widehat{u_l^h} - u_l^h\right)_{H_l} \Big]. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Preuve: Des premières équations de (5.6) et (5.29) on déduit que

$$\begin{aligned}\Big(\mathcal{A}_c\,\partial_t(\widehat{u_c^h}-u_c^h),\tilde{u}_c^h\Big)_{H_c}+(\mathcal{D}_c\,\tilde{u}_c^h,\widehat{p_c^h}-p_c^h)_{V_c}-c(\tilde{u}_c^h,\widehat{u_f^h}-u_f^h)\;=\\ \Big(\mathcal{A}_c\,\partial_t(\widehat{u_c^h}-u_c),\tilde{u}_c^h\Big)_{H_c}+(\mathcal{D}_c\,\tilde{u}_c^h,\widehat{p_c^h}-p_c)_{V_c}-c(\tilde{u}_c^h,\widehat{u_f^h}-u_f).\end{aligned} \tag{5.43}$$

De façon analogue, en utilisant les deuxièmes équations de (5.6) et (5.29) on a que

$$\begin{aligned}\Big(\mathcal{B}_c\,\partial_t(\widehat{p_c^h}-p_c^h),\tilde{p}_c^h\Big)_{V_c}+(\mathcal{D}_c\,(\widehat{u_c^h}-u_c^h),\tilde{p}_c^h)_{V_c}\;=\\ \Big(\mathcal{B}_c\,\partial_t(\widehat{p_c^h}-p_c),\tilde{p}_c^h\Big)_{V_c}+(\mathcal{D}_c\,(\widehat{u_c^h}-u_c),\tilde{p}_c^h)_{V_c}.\end{aligned} \tag{5.44}$$

De la même manière, mais en utilisant les équations sur la grille fine on déduit

$$\begin{aligned}\Big(\mathcal{A}_f\,\partial_t(\widehat{u_f^h}-u_f^h),\tilde{u}_f^h\Big)_{H_f}+(\mathcal{D}_f\,\tilde{u}_f^h,\widehat{p_f^h}-p_f^h)_{V_f}+c(\widehat{u_c^h}-u_c^h,\tilde{u}_f^h)\;=\\ \Big(\mathcal{A}_f\,\partial_t(\widehat{u_f^h}-u_f),\tilde{u}_f^h\Big)_{H_f}+(\mathcal{D}_f\,\tilde{u}_f^h,\widehat{p_f^h}-p_f)_{V_f}+c(\widehat{u_c^h}-u_c,\tilde{u}_f^h).\end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned}\Big(\mathcal{B}_f\,\partial_t(\widehat{p_f^h}-p_f^h),\tilde{p}_f^h\Big)_{V_f}+(\mathcal{D}_f\,(\widehat{u_f^h}-u_f^h),\tilde{p}_f^h)_{V_f}\;=\\ \Big(\mathcal{B}_f\,\partial_t(\widehat{p_f^h}-p_f),\tilde{p}_f^h\Big)_{V_f}+(\mathcal{D}_f\,(\widehat{u_f^h}-u_f),\tilde{p}_f^h)_{V_f}.\end{aligned} \tag{5.46}$$

On fait la somme des quatre dernières égalités en prenant $\tilde{u}_l^h=\widehat{u_l^h}-u_l^h$ et $\tilde{p}_l^h=\widehat{p_l^h}-p_l^h$ avec $l\in\{c,f\}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_h(t)\;=\;\sum_{l\in\{c,f\}}\Bigg[&\Big(\mathcal{A}_c\,\partial_t(\widehat{u_c^h}-u_c),\widehat{u_c^h}-u_c^h\Big)_{H_c}+(\mathcal{D}_c\,(\widehat{u_c^h}-u_c^h),\widehat{p_c^h}-p_c)_{V_c}+\\ &\Big(\mathcal{B}_c\,\partial_t(\widehat{p_c^h}-p_c),\widehat{p_c^h}-p_c^h\Big)_{V_c}+(\mathcal{D}_c\,(\widehat{u_c^h}-u_c),\widehat{p_c^h}-p_c^h)_{V_c}\Bigg]-\\ &c(\widehat{u_c^h}-u_c^h,\widehat{u_f^h}-u_f)+c(\widehat{u_c^h}-u_c,\widehat{u_f^h}-u_f^h).\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la définition de la projection elliptique (5.33) on montre la proposition. □

Ensuite on donne une borne de l'énergie de l'erreur en fonction de l'énergie à l'instant initial et de l'erreur sur la projection elliptique.

Proposition 5.3.4 *L'énergie de l'erreur satisfait l'estimation suivante*

$$\begin{aligned}\sqrt{\mathcal{E}_h(t)}\;\le\;\sqrt{\mathcal{E}_h(0)}\;+\;\mathcal{C}\sum_{l\in\{c,f\}}\int_0^T\Big(&\|\partial_t(\widehat{u_l^h}-u_l)\|_{H_l}\;+\;\|\partial_t(\widehat{p_l^h}-p_l)\|_{V_l}+\\ &\|\widehat{u_l^h}-u_l\|_{H_l}\;+\;\|\widehat{p_l^h}-p_l\|_{V_l}\Big)\;ds,\quad\forall\,t\le T,\end{aligned} \tag{5.47}$$

où $\mathcal{C}$ est une constante indépendante du pas de discrétisation h.

Preuve: On se sert de (5.41) et de la proposition 5.3.3 pour écrire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_h(t) \;\leq\; \mathcal{C}\sqrt{\mathcal{E}_h(t)} \sum_{l\in\{c,f\}} \Big(\|\partial_t(\widehat{u_l^h} - u_l)\|_{H_l} + \|\partial_t(\widehat{p_l^h} - p_l)\|_{V_l} + \|\widehat{u_l^h} - u_l\|_{H_l} \;+\; \|\widehat{p_l^h} - p_l\|_{V_l} \Big).$$

Il suffit d'utiliser le lemme de Gronwall pour conclure. □

Donc, finalement on peut énoncer le théorème de convergence suivant

Théorème 5.3.5 *Soit $m \geq 0$ et supposons que $((u_c, u_f), (p_c, p_f)) \in C^{m+1}([0,T]; Y \times W)$ est la solution du problème (5.6). Soit $((u_c^h, u_f^h), (p_c^h, p_f^h))$ la solution de (5.29) avec les conditions initiales données par $\Pi_h((u_c(0), u_f(0)), (p_c(0), p_f(0)))$. Alors on a l'estimation d'erreur suivante*

$$\left| \begin{array}{l} \|\partial_t^m(u_c - u_c^h, u_f - u_f^h)\|_{C^0([0,T];H)} + \|\partial_t^m(p_c - p_c^h, p_f - p_f^h)\|_{C^0([0,T];V)} \;\leq \\ \qquad\qquad \mathcal{C}(1+T)h^k \left(\|\partial_t^m(u_c, u_f)\|_{C^1([0,T];Y)} + \|\partial_t^m(p_c, p_f)\|_{C^1([0,T];W)} \right). \end{array} \right. \tag{5.48}$$

Si de plus $((u_c, u_f), (p_c, p_f)) \in C^{m+2}([0,T]; Y \times W)$ alors

$$\left| \begin{array}{l} \|\partial_t^m(u_c - u_c^h, u_f - u_f^h)\|_{C^0([0,T];X)} \;\leq \\ \qquad\qquad \mathcal{C}(1+T)h^k \left(\|\partial_t^m(u_c, u_f)\|_{C^2([0,T];Y)} + \|\partial_t^m(p_c, p_f)\|_{C^2([0,T];W)} \right). \end{array} \right. \tag{5.49}$$

Preuve: Avec les conditions initiales considérées on a que $\mathcal{E}_h(0) = 0$. En utilisant la proposition précédente on déduit que

$$\begin{array}{l} \|(\widehat{u_c^h} - u_c^h, \widehat{u_f^h} - u_f^h)\|_H \;+\; \|(\widehat{p_c^h} - p_c^h, \widehat{p_f^h} - p_f^h)\|_V \;\leq \\ \qquad\qquad \mathcal{C}\,T \sum_{l\in\{c,f\}} \Big(\|\widehat{u_l^h} - u_l\|_{C^1([0,T];H_l)} + \|\widehat{p_l^h} - p_l\|_{C^1([0,T];V_l)} \Big). \end{array} \tag{5.50}$$

L'estimation (5.48) pour $m = 0$ est alors obtenue en utilisant le corollaire 5.3.2, une majoration brutale de la norme $\|\cdot\|_{H_l}$ par la norme $\|\cdot\|_{X_l}$ et l'inégalité triangulaire. Une preuve similaire à celle-ci nous permet de montrer la même estimation pour les dérivées successives en supposant de la régularité supplémentaire en temps sur la solution du problème continu.

Maintenant on obtient l'estimation en norme X. On utilise les équations dans (5.6) et (5.29) pour obtenir

$$(\mathcal{D}_l\,(u_l^h - u_l), \tilde{p}_l^h)_{V_l} \;=\; (\mathcal{B}_l\,\partial_t(p_l^h - p_l), \tilde{p}_l^h)_{V_l}, \quad \forall\, \tilde{p}_l^h \in V_h.$$

On se sert de la dernière égalité avec $\tilde{p}_l^h = \mathcal{D}_l\,(u_l^h - \widehat{u_l^h})$ (ce qui est possible grâce à (5.31)) pour écrire

$$\|\mathcal{D}_l\,(u_l^h - \widehat{u_l^h})\|_{V_l}^2 \;=\; (\mathcal{B}_l\,\partial_t(p_l^h - p_l), \mathcal{D}_l\,(u_l^h - \widehat{u_l^h}))_{V_l} + (\mathcal{D}_l\,(u_l - \widehat{u_l^h}), \mathcal{D}_l\,(u_l^h - \widehat{u_l^h}))_{V_l},$$

et par conséquent,

$$\|\mathcal{D}_l\,(u_l^h - u_l)\|_{V_l} \;\leq\; \mathcal{C}\left(\|\partial_t(p_l^h - p_l)\|_{V_l} + \|\mathcal{D}_l\,(u_l - \widehat{u_l^h})\|_{V_l} \right).$$

On utilise l'estimation (5.48) avec $m = 1$ et (5.39) pour obtenir (5.49) pour $m = 0$. Un preuve analogue nous permet de montrer le même résultat pour les dérivées successives si la solution exacte est plus régulière. □

Remarque 5.3.1 *On signale que la preuve de convergence du problème semi-discrétisé pour cette méthode est plus simple que celle qu'on avait faite pour la technique avec le multiplicateur de Lagrange dans la section 1.5.2. En effet, l'analyse de la projection elliptique repose tout simplement sur le lemme de Céa. On rappelle que le choix de l'espace d'approximation pour le multiplicateur de Lagrange pouvait avoir une influence dans la convergence des inconnues volumiques. Évidement, ce problème n'est plus présent lorsqu'on fait le couplage avec la méthode présentée dans ce chapitre.*

5.4 Discrétisation en Temps

Pour effectuer la discrétisation en temps il est utile de réécrire le problème semi-discret (5.29) à l'aide des matrices (comme il est classique dans la littérature des éléments finis). On associe à chaque espace de dimension finie une base (composée par les fonctions de base) qu'on notera

$$\mathcal{B}\left(X_{l,h}\right) = \left\{u_l^{h,j}\right\}_{j=1}^{N_{u,l}}, \quad \mathcal{B}\left(V_{l,h}\right) = \left\{p_l^{h,j}\right\}_{j=1}^{N_{p,l}}, \Bigg| \quad l \in \{c,f\}, \tag{5.51}$$

où $N_{u,l} = \dim X_{l,h}$ et $N_{p,l} = \dim V_{l,h}$. À l'aide de ces fonctions on construit les matrices

$$\begin{aligned}
(M_{u,l})_{i,j} &= (\mathcal{A}_l\, u_l^{h,i}, u_l^{h,j})_{H_l}, \quad 1 \le i,j \le N_{u,l},\\
(M_{p,l})_{i,j} &= (\mathcal{B}_l\, p_l^{h,i}, p_l^{h,j})_{V_l}, \quad 1 \le i,j \le N_{p,l},\\
(D_l)_{i,j} &= (\mathcal{D}_l\, u_l^{h,j}, p_l^{h,i})_{V_l}, \quad 1 \le i \le N_{p,l},\ 1 \le j \le N_{u,l},\\
(C)_{i,j} &= c(u_c^{h,i}, u_f^{h,j}), \qquad 1 \le i \le N_{u,c},\ 1 \le j \le N_{u,f}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le problème (5.29) est équivalent à

$$\left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } (U_c, U_f, P_c, P_f) \text{ tels que}\\
\left\{\begin{array}{lllllll}
M_{u,c}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_c & + & D_c^* P_c & - & CU_f & = & G_c,\\
M_{p,c}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_c & - & D_c U_c & & & = & F_c,
\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{lllllll}
M_{u,f}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_f & + & D_f^* P_f & + & C^* U_c & = & G_f,\\
M_{p,f}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_f & - & D_f U_f & & & = & F_f.
\end{array}\right.
\end{array}\right. \tag{5.52}$$

Lorsqu'on travaille avec des vecteurs, on notera par $(\cdot,\cdot)$ le produit euclidien usuel sur $\mathbb{R}^N$, avec N le nombre de composantes des vecteurs. Il est clair que si on identifie les vecteurs à ses composantes

$$\begin{array}{lllllll}
u_l^h & \mapsto & U_l, & \qquad & \tilde{u}_l^h & \mapsto & \widetilde{U}_l,\\
p_l^h & \mapsto & P_l, & \qquad & \tilde{p}_l^h & \mapsto & \widetilde{P}_l,
\end{array}$$

alors on a

$$\begin{aligned}
(M_{u,l}\, U_l, \widetilde{U}_l) &= (\mathcal{A}_l\, u_l^h, \tilde{u}_l^h)_{H_l}, \qquad & (M_{p,l}\, P_l, \widetilde{P}_l) &= (\mathcal{B}_l\, p_l^h, \tilde{p}_l^h)_{V_l},\\
(D_l\, U_l, P_l) &= (\mathcal{D}_l\, u_l^h, p_l^h)_{V_l}, \qquad & (C\, U_f, U_c) &= c(u_c^h, u_f^h).
\end{aligned}$$

5.4.1 Le Schéma Intérieur

Pour discrétiser le système différentiel (5.52) on se sert d'un schéma centré d'ordre deux qui calcule les inconnues U et P à des instants différents. Dans ce qui suit, on considère un pas de temps $2\Delta t$ dans Ω_c et Δt dans Ω_f. De cette façon les équations qui vont définir le schéma intérieur sont

$$
\text{(5.53)} \quad \left| \begin{array}{l}
\text{Trouver } (U_c^{2n}, U_f^n, P_c^{2n+1}, P_f^{n+\frac{1}{2}}) \text{ tels que} \\
\left\{ \begin{array}{lllll}
M_{u,c}\dfrac{U_c^{2n+2}-U_c^{2n}}{2\Delta t} & + & D_c^* P_c^{2n+1} & - & C[U_f]^{2n+1} & = & G_c^{2n+1}, \\
M_{p,c}\dfrac{P_c^{2n+1}-P_c^{2n-1}}{2\Delta t} & - & D_c U_c^{2n} & & & = & F_c^{2n},
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{lllll}
M_{u,f}\dfrac{U_f^{n+1}-U_f^n}{\Delta t} & + & D_f^* P_f^{n+\frac{1}{2}} & + & C^*[U_c]^{n+\frac{1}{2}} & = & G_f^{n+\frac{1}{2}}, \\
M_{p,f}\dfrac{P_f^{n+\frac{1}{2}}-P_f^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} & - & D_f U_f^n & & & = & F_f^n,
\end{array} \right.
\end{array} \right.
$$

où $[U_f]^{2n+1}$ et $[U_c]^{n+\frac{1}{2}}$ sont respectivement des approximations de $U_f(t^{2n+1})$ et $U_c(t^{n+\frac{1}{2}})$ qui doivent être déterminées. On signale que pour chaque intervalle de temps $[t^{2n}, t^{2n+2}]$ on a trois de ces quantités entre crochets. Alors il faudra écrire trois équations linéairement indépendantes pour les calculer et coupler les deux systèmes.

5.4.2 Les Équations de Couplage : Conservation d'une Énergie

De la même façon qu'avec la méthode avec multiplicateur, l'idée est de chercher un équivalent discret de la conservation de l'énergie (5.30). Ainsi, on définit l'énergie discrète totale aux temps pairs par

$$
\text{(5.54)} \qquad \mathbf{E}^{2n} \;:=\; \mathbf{E}_c^{2n} + \mathbf{E}_f^{2n},
$$

où

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_c^{2n} &:= \frac{1}{2}\left\{(M_{u,c}U_c^{2n}, U_c^{2n}) + (M_{p,c}P_c^{2n+1}, P_c^{2n-1})\right\}, \\
\mathbf{E}_f^{n} &:= \frac{1}{2}\left\{(M_{u,f}U_f^{n}, U_f^{n}) + (M_{p,f}P_f^{n+\frac{1}{2}}, P_f^{n-\frac{1}{2}})\right\},
\end{aligned}
$$

et on établit le résultat

Théorème 5.4.1 (Schéma Conservatif) *Pour compléter le système (5.53) et obtenir un schéma conservatif pour l'énergie $\mathbf{E}^{2n}$, les équations additionnelles doivent être compatibles avec l'expression suivante*

$$
\text{(5.55)} \quad \left| \begin{array}{c}
\left(C^*[U_c]^{2n+\frac{1}{2}}, \dfrac{U_f^{2n+1}+U_f^{2n}}{4}\right) + \left(C^*[U_c]^{2n+\frac{3}{2}}, \dfrac{U_f^{2n+2}+U_f^{2n+1}}{4}\right) = \\
\left(\dfrac{U_c^{2n+2}+U_c^{2n}}{2}, C[U_f]^{2n+1}\right).
\end{array} \right.
$$

Preuve: La preuve est similaire à celle du théorème 1.6.1. □

De cette façon on propose les équations suivantes pour compléter (5.53) tout en conservant l'énergie

$$
(5.56) \qquad \left|\begin{array}{lcl}
[U_f]^{2n+1} & := & \dfrac{U_f^{2n+2}+2U_f^{2n+1}+U_f^{2n}}{4}, \\
[U_c]^{2n+\frac{1}{2}} & := & \dfrac{U_c^{2n+2}+U_c^{2n}}{2}, \\
[U_c]^{2n+\frac{3}{2}} & := & \dfrac{U_c^{2n+2}+U_c^{2n}}{2}.
\end{array}\right.
$$

Remarque 5.4.1 *Les inconnues*

$$(U_c^{2n}, U_f^n, P_c^{2n+1}, P_f^{n+\frac{1}{2}}),$$

du problème totalement discrétisé (5.53)-(5.56) sont des vecteurs qui contiennent les composantes des fonctions qu'on dénotera par

$$((u_c^h)^{2n}, (u_f^h)^n, (p_c^h)^{2n+1}, (p_f^h)^{n+\frac{1}{2}}),$$

dans les bases (5.51). Dans certaines situations il sera plus intéressant d'utiliser ces fonctions et la notation opérationnelle que les vecteurs et la notation matricielle.

5.5 Stabilité du Schéma

Pour chaque matrice définie positive M on définit le produit scalaire et la norme associée par

$$(V_1, V_2)_M \;:=\; (MV_1, V_2), \qquad \|V\|_M^2 \;:=\; (V,V)_M.$$

Alors on peut énoncer la proposition suivante

Proposition 5.5.1 (Stabilité L^2) *Supposons que*

- *les forces externes sont nulles,*
- $\mathbf{E}^0$ *est bornée par une constante indépendante du pas de discrétisation,*
- *Le pas de discrétisation temporel est tel que les matrices symétriques*

$$
(5.57) \qquad \left|\begin{array}{lcl}
N_c(\Delta t) & := & M_{u,c} - \Delta t^2 D_c^*(M_{p,c})^{-1} D_c, \\
N_f(\Delta t) & := & M_{u,f} - \dfrac{\Delta t^2}{4} D_f^*(M_{p,f})^{-1} D_f,
\end{array}\right.
$$

satisfont la condition CFL abstraite

$$(5.58) \qquad \Upsilon_l^2 (N_l(\Delta t)\, U_l, U_l) \;\geq\; \|U_l\|_{M_u,l}^2, \qquad \forall\, U_l, \quad l \in \{c, f\},$$

avec Υ_l une constante qui ne dépend pas des pas de discrétisation.

Alors, il existe une constante $\mathcal{C}$ indépendante des pas de discrétisation telle $(U_c^{2n}, U_f^n, P_c^{2n+1}, P_f^{n+\frac{1}{2}})$ solution de (5.53)–(5.56) satisfait

$$
(5.59) \qquad \left|\begin{array}{l}
\|U_c^{2n}\|_{M_{u,c}} + \|P_c^{2n+1}\|_{M_{p,c}} \;\leq\; \mathcal{C}\Upsilon_c\sqrt{\mathbf{E}^0}, \\[2ex]
\|U_f^n\|_{M_{u,f}} + \|P_f^{n+\frac{1}{2}}\|_{M_{p,f}} \;\leq\; \mathcal{C}\Upsilon_f\sqrt{\mathbf{E}^0}.
\end{array}\right.
$$

Ceci implique que le schéma numérique est stable.

Remarque 5.5.1 *Il est clair que les constantes $\Upsilon_l,\ l \in \{c, f\}$ doivent être supérieures à un (voir la définition des matrices $N_l(\Delta t),\ l \in \{c, f\}$ dans (5.57)). Il sera utile par la suite de réécrire les conditions CFL abstraites (5.58) de différentes façons. On fait les calculs pour les matrices sur Ω_f.*

De la définition de la matrice $N_f(\Delta t)$ on déduit que la condition CFL sur Ω_f est équivalente à satisfaire

$$\frac{\Delta t^2}{4} \sup_{U_f \neq 0} \frac{\|D_f U_f\|^2_{(M_{p,f})^{-1}}}{\|U_f\|^2_{M_{u,f}}} \leq 1 - \frac{1}{\Upsilon_f^2}. \tag{5.60}$$

Ainsi, on remarque que si Υ_f est proche de un, cette condition nous oblige à prendre un pas de discrétisation temporel très petit. Avec des arguments similaires à ceux présentés dans la remarque 1.6.2 on montre que (voir aussi [6])

$$\sup_{U_f \neq 0} \frac{\|D_f U_f\|^2_{(M_{p,f})^{-1}}}{\|U_f\|^2_{M_{u,f}}} = \sup_{U_f \neq 0} \sup_{P_f \neq 0} \frac{(D_f\, U_f, P_f)^2}{\|U_f\|^2_{M_{u,f}} \|P_f\|^2_{M_{p,f}}} = \sup_{P_f \neq 0} \frac{\|D_f^* P_f\|^2_{(M_{u,f})^{-1}}}{\|P_f\|^2_{M_{p,f}}}, \tag{5.61}$$

et donc la CFL abstraite sur Ω_f peut aussi s'écrire

$$\frac{\Delta t^2}{4} \sup_{P_f \neq 0} \frac{\|D_f^* P_f\|^2_{(M_{u,f})^{-1}}}{\|P_f\|^2_{M_{p,f}}} \leq 1 - \frac{1}{\Upsilon_f^2}. \tag{5.62}$$

Finalement, si on se sert de (5.61) on obtient encore une écriture équivalente en utilisant cette fois la notation opérationnelle du problème

$$\frac{\Delta t}{2} \sup_{u_f^h \neq 0} \sup_{p_f^h \neq 0} \frac{(\mathcal{D}_f\, u_f^h, p_f^h)_{V_f}}{\sqrt{(\mathcal{A}_f\, u_f^h, u_f^h)_{H_f}} \sqrt{(\mathcal{B}_f\, p_f^h, p_f^h)_{V_f}}} \leq \sqrt{1 - \frac{1}{\Upsilon_f^2}}. \tag{5.63}$$

Étant donné que $\mathcal{D}_f$ est un opérateur différentiel du premier ordre en espace, l'expression (5.63) est équivalente à une condition du type

$$\mathcal{C} \frac{\Delta t}{h} \leq \sqrt{1 - \frac{1}{\Upsilon_f^2}}. \tag{5.64}$$

Remarque 5.5.2 *On signale que si on veut prendre le pas de discrétisation temporel Δt proche de la plus grande valeur qui garantit la stabilité, alors les constantes $\Upsilon_l,\ l \in \{c, f\}$ tendent vers l'infini et les estimations dans (5.59) se détériorent. Ce facteur est l'équivalent de $(1-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ (où $\alpha = \Delta t/\Delta x$) qu'on avait trouvé dans l'analyse faite dans la section 2.4 du chapitre 2 pour la méthode avec multiplicateur dans le cas 1D.*

Preuve: On rappelle que le schéma a été construit de telle sorte que, en absence de forces externes,

$$\mathbf{E}^{2n} = \mathbf{E}^0.$$

Il suffit alors de montrer que cette quantité est équivalente à la norme L^2 de la solution discrète pour compléter la preuve. On a que

$$\begin{aligned}
(P_c^{2n+1}, P_c^{2n-1})_{M_{p,c}} &= \left\| \frac{P_c^{2n+1} + P_c^{2n-1}}{2} \right\|^2_{M_{p,c}} - \left\| \frac{P_c^{2n+1} - P_c^{2n-1}}{2} \right\|^2_{M_{p,c}} \\
&= \left\| \frac{P_c^{2n+1} + P_c^{2n-1}}{2} \right\|^2_{M_{p,c}} - \Delta t^2 \|D_c U_c^{2n}\|_{(M_{p,c})^{-1}},
\end{aligned}$$

où on a utilisé la deuxième équation de (5.53). Ceci nous permet d'écrire

$$\mathbf{E}_c^{2n} = \frac{1}{2}\|U_c^{2n}\|_{N_c}^2 + \frac{1}{2}\left\|\frac{P_c^{2n+1}+P_c^{2n-1}}{2}\right\|_{M_{p,c}}^2 .$$

On se sert de la définition de Υ_c et de la dernière égalité pour écrire

$$\begin{aligned}
\|U_c^{2n}\|_{M_{u,c}} &\leq \sup_{\widetilde{U}_c\neq 0}\frac{\|\widetilde{U}_c\|_{M_{u,c}}}{\|\widetilde{U}_c\|_{N_c}}\|U_c^{2n}\|_{N_c} \\
&\leq \sqrt{2}\,\Upsilon_c\,\sqrt{\mathbf{E}_c^{2n}}, \\
\left\|\frac{P_c^{2n+1}+P_c^{2n-1}}{2}\right\|_{M_{p,c}} &\leq \sqrt{2}\,\sqrt{\mathbf{E}_c^{2n}}.
\end{aligned}$$

Si on utilise encore la deuxième égalité de (5.53) on déduit que

$$P_c^{2n\pm 1} = \frac{P_c^{2n+1}+P_c^{2n-1}}{2} \pm \Delta t (M_{p,c})^{-1} D_c U_c^{2n},$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\|P_c^{2n\pm 1}\|_{M_{p,c}} &\leq \left\|\frac{P_c^{2n+1}+P_c^{2n-1}}{2}\right\|_{M_{p,c}} + \Delta t\|(M_{p,c})^{-1}D_cU_c^{2n}\|_{M_{p,c}} \\
&\leq \left\|\frac{P_c^{2n+1}+P_c^{2n-1}}{2}\right\|_{M_{p,c}} + \|U_c^{2n}\|_{M_{u,c}} \qquad \text{(positivité de } N_c(\Delta t)) \\
&\leq 2\sqrt{2}\,\Upsilon_c\,\sqrt{\mathbf{E}_c^{2n}}.
\end{aligned}$$

En utilisant la même démarche avec les équations sur la grille fine on montre que

$$\begin{aligned}
\|U_f^n\|_{M_{u,f}} &\leq \sqrt{2}\,\Upsilon_f\,\sqrt{\mathbf{E}_f^n}, \\
\|P_f^{n+\frac{1}{2}}\|_{M_{p,f}} + \|P_f^{n-\frac{1}{2}}\|_{M_{p,f}} &\leq 4\sqrt{2}\,\Upsilon_f\,\sqrt{\mathbf{E}_f^n}.
\end{aligned}$$

La deuxième inégalité permet d'obtenir l'estimation voulue pour P_f à tout instant. Par contre, la première inégalité nous donne une information uniquement pour les temps pairs car seule l'énergie aux temps pairs est conservée. On doit donc encore obtenir une estimation sur U_f^{2n+1} en fonction de l'énergie $\mathbf{E}^{2n}$. Si on utilise les deux dernières équations de (5.56) et la troisième équation de (5.53) pour deux pas de temps consécutifs on obtient

$$U_f^{2n+1} = \frac{U_f^{2n+2}+U_f^{2n}}{2} + \frac{\Delta t}{2}(M_{u,f})^{-1}D_f^*\left(P_f^{2n+\frac{3}{2}} - P_f^{2n+\frac{1}{2}}\right),$$

et donc

$$\begin{aligned}
\|U_f^{2n+1}\|_{M_{u,f}} &\leq \frac{1}{2}\left(\|U_f^{2n+2}\|_{M_{u,f}} + \|U_f^{2n}\|_{M_{u,f}}\right) + \frac{\Delta t}{2}\left\|D_f^*\left(P_f^{2n+\frac{3}{2}} - P_f^{2n+\frac{1}{2}}\right)\right\|_{(M_{u,f})^{-1}} \\
&\overset{(5.62)}{\leq} \frac{1}{2}\left(\|U_f^{2n+2}\|_{M_{u,f}} + \|U_f^{2n}\|_{M_{u,f}}\right) + \mathcal{C}\left(\|P_f^{2n+\frac{3}{2}}\|_{M_{p,f}} + \|P_f^{2n+\frac{1}{2}}\|_{M_{p,f}}\right) \\
&\leq \mathcal{C}\,\Upsilon_f\,\left(\sqrt{\mathbf{E}_f^{2n}} + \sqrt{\mathbf{E}_f^{2n+2}}\right).
\end{aligned}$$

Étant donné que $\mathbf{E}_l^{2k} \leq \mathbf{E}^0,\ l\in\{c,f\},\ k\in\mathbb{N}$ on conclue la preuve. □

5.6 Caractère Bien Posé du Problème Discret

On rappelle que le caractère bien posé de la méthode avec multiplicateur de Lagrange (voir le chapitre 1) était fortement lié au choix d'espace de discrétisation du multiplicateur. On verra dans cette section que le schéma discret introduit dans ce chapitre sera toujours bien posé (si on satisfait la condition CFL sur chaque sous-domaine).

Supposons que toutes les inconnues jusqu'au temps t^{2n} ont été calculées. Alors

- Étant donné que les matrices de masse sont inversibles on peut facilement obtenir P_c^{2n+1} et $P_f^{n+\frac{1}{2}}$ avec le schéma intérieur.
- Supposons qu'on peut calculer

$$C[U_f]^{2n+1} \quad = \quad C\frac{U_f^{2n+2} + 2U_f^{2n+1} + U_f^{2n}}{4},$$

  d'une façon implicite en utilisant des valeurs qui ont été déjà obtenues (on expliquera cette étape plus tard).
- On peut alors utiliser le schéma intérieur pour calculer U_c^{2n+2} et donc on peut aussi obtenir $C[U_c]^{2n+\frac{1}{2}} = C[U_c]^{2n+\frac{3}{2}}$.
- Finalement on obtient les inconnues U_f^{2n+1}, $P_f^{2n+\frac{3}{2}}$ et U_f^{2n+2} avec le schéma intérieur sur la grille fine.

En faisant quelques manipulations algébriques on peut montrer que $C[U_f]^{2n+1}$ satisfait le système linéaire suivant

$$\mathcal{M}(\Delta t)\, C[U_f]^{2n+1} \quad = \quad SM(U_c^{2n}, U_f^{2n}, V_c^{2n+1}, V_f^{2n+\frac{1}{2}}, F, G)$$

où

$$\left|\begin{array}{rcl} \mathcal{M}(\Delta t) & = & I + A(\Delta t)B, \\ A(\Delta t) & = & \Delta t^2 C(M_{u,f})^{-1} N_f(\Delta t)(M_{u,f})^{-1} C^*, \\ B & = & (M_{u,c})^{-1}. \end{array}\right.$$

et le second membre SM ne dépend que des valeurs qui peuvent être calculées préalablement. Si on suppose que Δt est tel que $N_f(\Delta t)$ est définie positive (condition CFL habituelle sur Ω_f) alors la matrice $A(\Delta t)$ est symétrique et définie positive. Par conséquent, la matrice $M(\Delta t)$ est inversible en vertu du lemme 6.2.1 et le schéma numérique **est bien posé**.

5.7 Convergence du Problème Discret : Les Résultats Principaux

Dans cette section on étudie la convergence de la solution du problème totalement discrétisé vers la solution du problème semi-discrétisé. Pour obtenir des estimations sur le problème totalement discrétisé par rapport au problème continu il suffira de combiner les résultats qu'on obtiendra dans cette section avec ceux qu'on a établis dans la section 5.3.

La nature des résultats et techniques de démonstration sont similaires à ceux présentés dans le chapitre 2 dans le cadre 1D pour la méthode avec multiplicateur de Lagrange. La différence fondamentale réside dans le fait que dans ce cas on est capable de mener la preuve dans le cadre multidimensionnel.

Afin de pouvoir effectuer la preuve dans un cadre assez général on supposera que les deux hypothèses suivantes sont satisfaites :

(5.65) $\quad$ Il existe une constante $\mathcal{C} > 0$ telle que $\quad \forall\, u_l^h \in X_{l,h}, \quad \|u_l^h\|_{X_l} \leq \dfrac{\mathcal{C}}{h}\, \|u_l^h\|_{H_l},$

(5.66) Il existe une constante $\mathcal{C} > 0$ telle que

$$\begin{cases} \forall (u_c, u_f^h) \in Y_c \times X_{f,h}, \quad c(u_c, u_f^h) \leq \dfrac{\mathcal{C}}{\sqrt{h}} \|u_c\|_{Y_c} \|u_f^h\|_{H_f}, & (a) \\ \forall (u_c^h, u_f) \in X_{c,h} \times Y_f, \quad c(u_c^h, u_f) \leq \dfrac{\mathcal{C}}{\sqrt{h}} \|u_c^h\|_{H_c} \|u_f\|_{Y_f}. & (b) \end{cases}$$

La première des hypothèses (5.65) peut être vue comme une **inégalité inverse**. Étant donné que les opérateurs différentiels $\mathcal{D}_l,\ l \in \{c, f\}$ sont du premier ordre en espace, la définition de la norme $\|\cdot\|_{X_l}$ donnée dans (5.3) fait que (5.65) est satisfaite si les maillages de chaque sous-domaine sont **uniformément réguliers**. La deuxième hypothèse jouera un rôle similaire aux inégalités du lemme 2.5.4 (qu'on avait appelé le "**lemme de traces discrètes**") dans la preuve de convergence de la méthode avec multiplicateur dans le cadre 1D. On verra par la suite qu'en général pour la satisfaire il faudra tout simplement supposer que les fonctions dans les espaces $Y_l,\ l \in \{c, f\}$ sont "assez régulières" (voir la section 5.8.5).

On commence par introduire quelques notations. Étant donné que la solution du problème semi-discrétisé est continue comme fonction du temps, on peut définir l'erreur ponctuelle par

$$\begin{aligned} e_{u,c}^{2n} &:= u_c^h(t^{2n}) - (u_c^h)^{2n}, & e_{u,f}^{n} &:= u_f^h(t^n) - (u_f^h)^n, \\ e_{p,c}^{2n+1} &:= p_c^h(t^{2n+1}) - (p_c^h)^{2n+1}, & e_{p,f}^{n+\frac{1}{2}} &:= p_f^h(t^{n+\frac{1}{2}}) - (p_f^h)^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On dénote les suites en temps de l'erreur par

$$\begin{cases} e_{u,c} := (e_{u,c}^{2n})_{n\in\mathbb{N}}, & e_{u,f} := (e_{u,f}^{n})_{n\in\mathbb{N}}, \\ e_{p,c} := (e_{p,c}^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}, & e_{p,f} := (e_{p,f}^{n+\frac{1}{2}})_{n\in\mathbb{N}}, \end{cases} \tag{5.67}$$

et pour chaque $T > 0$ on introduit les normes de l'erreur suivantes

$$\begin{cases} \|(e_{u,c}, e_{u,f})\|_{\infty,H,T} = \sup\limits_{t^{2n+\frac{3}{2}} \leq T} \left(\|e_{u,c}^{2n}\|_{H_c} + \|e_{u,f}^{2n}\|_{H_f} \right) + \sup\limits_{t^{2n+\frac{3}{2}} \leq T} \left\| e_{u,f}^{2n+1} \right\|_{H_f}, \\ \|(e_{p,c}, e_{p,f})\|_{\infty,V,T} = \sup\limits_{t^{2n+\frac{3}{2}} \leq T} \left(\|e_{p,c}^{2n+1}\|_{V_c} + \left\| e_{p,f}^{2n+\frac{1}{2}} \right\|_{V_f} + \left\| e_{p,f}^{2n+\frac{3}{2}} \right\|_{V_f} \right). \end{cases} \tag{5.68}$$

On introduit aussi quelques notations pour les espaces des fonctions continues qu'on utilisera plus tard. Pour $((u_c, u_f), (p_c, p_f)) \in C^{3+l}([0,T], Y \times W)$ avec $l \geq 1$ on pose

$$\begin{aligned} &|||((u_c, u_f), (p_c, p_f))|||_{C^{2+l}([0,T],Y\times W)} = \\ &\qquad \|((u_c, u_f), (p_c, p_f))\|_{C^{2+l}([0,T],Y\times W)}^{\frac{1}{2^l}} \prod_{j=1}^{l} \|((u_c, u_f), (p_c, p_f))\|_{C^{3+j}([0,T],Y\times W)}^{\frac{1}{2^j}}. \end{aligned} \tag{5.69}$$

Pour des raisons techniques liées à la nature de la preuve on supposera que les conditions initiales sont nulles et que les forces externes sont assez régulières et vérifient

$$\sup\left[((f_c, f_f), (g_c, g_f))\right] \subset (0,T) \times (\Omega_c \cup \Omega_f). \tag{5.70}$$

Ainsi, on peut établir le résultat suivant

Théorème 5.7.1 *Supposons que*

- *les paramètres de discrétisation ont été choisis de telle façon que les matrices* $N_l(\Delta t),\ l \in \{c, f\}$ *définies dans (5.57) satisfont (5.58) (condition CFL stricte),*
- *les conditions initiales sont nulles,*
- *les forces externes* $((f_c, f_f), (g_c, g_f))$ *sont assez régulières et qu'elles vérifient (5.70),*
- *la solution du problème continu* $((u_c, u_f), (p_c, p_f))$ *appartient à l'espace* $C^4([0, T], Y \times W)$.

Alors

i) La solution du problème totalement discrétisé satisfait l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \|(e_{u,c}, e_{u,f})\|_{\infty,H,T} + \|(e_{p,c}, e_{p,f})\|_{\infty,V,T} \ \leq\ & \mathcal{C}\ \Upsilon^2\,[1+T] \\ & \Big[\,\big[1+T\ h^k\big]\ h^2 \|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^4([0,T],Y\times W)} + \\ & \Big[1+T\ h^{k-\frac{1}{2}}\Big]\ \sqrt{h}\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^3([0,T],Y\times W)}\Big]\,. \end{aligned} \tag{5.71}$$

où k *désigne l'ordre d'erreur d'interpolation défini en (5.28).*

ii) Si de plus $((u_c, u_f), (p_c, p_f)) \in C^{3+l}([0, T + l\Delta t], Y \times W)$ *avec* $l \geq 1$ *et*

$$\sup\,[((f_c, f_f), (g_c, g_f))]\ \subset\ (l\Delta t, T) \times (\Omega_c \cup \Omega_f), \tag{5.72}$$

on a l'estimation

$$\begin{aligned} \|(e_{u,c}, e_{u,f})\|_{\infty,H,T} + \|(e_{p,c}, e_{p,f})\|_{\infty,V,T} \ \leq\ & \mathcal{C}\ \Upsilon^2\,[1+T^*] \\ & \Big[\,\big[1+T\ h^k\big]\ h^2 \|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^4([0,T],Y\times W)} + \\ & \Big[1+T^*\ h^{k-\frac{1}{2}}\Big]\ h^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2^l}}\ |||((u_c,u_f),(p_c,p_f))|||_{C^{2+l}([0,T^*],Y\times W)}\Big]\,. \end{aligned} \tag{5.73}$$

où $T^* = T + l\Delta t$, k *a été définie dans (5.28) et* $|||\cdot|||_{C^{2+l}([0,T^*],Y\times W)}$ *a été introduit dans (5.69).*

Remarque 5.7.1 *Dans les deux estimations (5.71) et (5.73) on peut distinguer deux termes. Le premier qui est en* h^2 *provient de l'erreur due au schéma intérieur tandis que le deuxième terme vient du raccord. Pour ce dernier terme, dans un premier temps, en supposant une régularité* $C^3([0, T], Y \times W)$ *sur la solution, on obtient l'estimation (5.71) en* $\sqrt{h}$ *(voir la section 5.8.3). Ensuite, grâce à un argument du type boot-strap qu'on développe dans la section 5.8.4, on obtient des estimations meilleures en demandant de la régularité additionnelle.*

5.8 La Preuve des Estimations d'Erreur

5.8.1 Les Équations Satisfaites par l'Erreur

On commence par écrire les équations satisfaites par l'erreur sous forme variationnelle. Il est clair que

$$\left\{\begin{aligned} & (\mathcal{A}_c\ \frac{e_{u,c}^{2n+2} - e_{u,c}^{2n}}{2\Delta t}, \tilde{u}_c^h)_{H_c} \ +\ (\mathcal{D}_c\ \tilde{u}_c^h, e_{p,c}^{2n+1})_{V_c} \ - \\ & \qquad c(\tilde{u}_c^h, \frac{e_{u,f}^{2n+2} + 2e_{u,f}^{2n+1} + e_{u,f}^{2n}}{4}) \ =\ (\mathcal{A}_c\ \eta_c^{2n+1}, \tilde{u}_c^h)_{H_c} \ -\ c(\tilde{u}_c^h, \varepsilon_f^{2n+1}), \\ & (\mathcal{B}_c\ \frac{e_{p,c}^{2n+1} - e_{p,c}^{2n-1}}{2\Delta t}, \tilde{p}_c^h)_{V_c} \ +\ (\mathcal{D}_c\ e_{u,c}^{2n}, \tilde{p}_c^h)_{V_c} \ =\ (\mathcal{B}_c\ \xi_c^{2n}, \tilde{u}_c^h)_{V_c}, \end{aligned}\right. \tag{5.74}$$

$$
(5.75)\qquad \left\{
\begin{array}{lllll}
(\mathcal{A}_f\ \dfrac{e_{u,f}^{2n+1}-e_{u,f}^{2n}}{\Delta t},\tilde{u}_f^h)_{H_f} & + & (\mathcal{D}_f\ \tilde{u}_f^h, e_{p,f}^{2n+\frac{1}{2}})_{V_f} & - & c(\dfrac{e_{u,c}^{2n+2}+e_{u,c}^{2n}}{2},\tilde{u}_f^h) \\
 & = & (\mathcal{A}_f\ \eta_f^{2n+\frac{1}{2}},\tilde{u}_f^h)_{H_f} & - & c(\varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}},\tilde{u}_f^h), \\
(\mathcal{B}_f\ \dfrac{e_{p,f}^{2n+\frac{1}{2}}-e_{p,f}^{2n-\frac{1}{2}}}{\Delta t},\tilde{p}_f^h)_{V_f} & + & (\mathcal{D}_f\ e_{u,f}^{2n},\tilde{p}_f^h)_{V_f} & = & (\mathcal{B}_f\ \xi_f^{2n},\tilde{u}_f^h)_{V_f},
\end{array}
\right.
$$

$$
(5.76)\qquad \left\{
\begin{array}{lllll}
(\mathcal{A}_f\ \dfrac{e_{u,f}^{2n+2}-e_{u,f}^{2n+1}}{\Delta t},\tilde{u}_f^h)_{H_f} & + & (\mathcal{D}_f\ \tilde{u}_f^h, e_{p,f}^{2n+\frac{3}{2}})_{V_f} & - & c(\dfrac{e_{u,c}^{2n+2}+e_{u,c}^{2n}}{2},\tilde{u}_f^h) \\
 & = & (\mathcal{A}_f\ \eta_f^{2n+\frac{3}{2}},\tilde{u}_f^h)_{H_f} & - & c(\varepsilon_c^{2n+\frac{3}{2}},\tilde{u}_f^h), \\
(\mathcal{B}_f\ \dfrac{e_{p,f}^{2n+\frac{3}{2}}-e_{p,f}^{2n+\frac{1}{2}}}{\Delta t},\tilde{p}_f^h)_{V_f} & + & (\mathcal{D}_f\ e_{u,f}^{2n+1},\tilde{p}_f^h)_{V_f} & = & (\mathcal{B}_f\ \xi_f^{2n+1},\tilde{u}_f^h)_{V_f},
\end{array}
\right.
$$

où les seconds membres sont donnés par l'erreur de troncature définie en fonction de la solution du problème semi-discret par

$$
(5.77)\qquad \left|
\begin{array}{lllllll}
\eta_c^{2n+1} & = & \dfrac{u_c^h(t^{2n+2})-u_c^h(t^{2n})}{2\Delta t} & - & \dfrac{\partial u_c^h}{\partial t}(t^{2n+1}), & \approx & \mathcal{O}(\Delta t^2), \\
\xi_c^{2n} & = & \dfrac{p_c^h(t^{2n+1})-p_c^h(t^{2n-1})}{2\Delta t} & - & \dfrac{\partial p_c^h}{\partial t}(t^{2n}), & \approx & \mathcal{O}(\Delta t^2), \\
\eta_f^{n+\frac{1}{2}} & = & \dfrac{u_f^h(t^{n+1})-u_f^h(t^{n})}{\Delta t} & - & \dfrac{\partial u_f^h}{\partial t}(t^{n+\frac{1}{2}}), & \approx & \mathcal{O}(\Delta t^2), \\
\xi_f^{n} & = & \dfrac{p_f^h(t^{n+\frac{1}{2}})-p_f^h(t^{n-\frac{1}{2}})}{\Delta t} & - & \dfrac{\partial p_f^h}{\partial t}(t^{n}), & \approx & \mathcal{O}(\Delta t^2).
\end{array}
\right.
$$

et

$$
(5.78)\qquad \left|
\begin{array}{lllll}
\varepsilon_f^{2n+1} & = & \dfrac{u_f^h(t^{2n+2})+2u_f^h(t^{2n+1})+u_f^h(t^{2n})}{4} - u_f^h(t^{2n+1}), & \approx & \mathcal{O}(\Delta t^2), \\
\varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}} & = & \dfrac{u_c^h(t^{2n+2})+u_c^h(t^{2n})}{2} - u_c^h(t^{2n+\frac{1}{2}}), & \approx & \mathcal{O}(\Delta t), \\
\varepsilon_c^{2n+\frac{3}{2}} & = & \dfrac{u_c^h(t^{2n+2})+u_c^h(t^{2n})}{2} - u_c^h(t^{2n+\frac{3}{2}}), & \approx & \mathcal{O}(\Delta t).
\end{array}
\right.
$$

Dans certaines parties de la preuve il sera plus utile d'utiliser la notation matricielle du problème satisfait par l'erreur. Ainsi, si on note par

$$(E_{u,c}^{2n}, E_{u,f}^{n}, E_{p,c}^{2n+1}, E_{p,f}^{n+\frac{1}{2}}),$$

les vecteurs des composantes des erreurs

$$(e_{u,c}^{2n}, e_{u,f}^{n}, e_{p,c}^{2n+1}, e_{p,f}^{n+\frac{1}{2}}),$$

dans les bases (5.51) on a

$$
(5.79)\qquad \begin{cases} M_{u,c}\dfrac{E_{u,c}^{2n+2}-E_{u,c}^{2n}}{2\Delta t} + D_c^*\,E_{p,c}^{2n+1} - C\,\dfrac{E_{u,f}^{2n+2}+2E_{u,f}^{2n+1}+E_{u,f}^{2n}}{4} = \\ \qquad\qquad M_{u,c}\,\eta_c^{2n+1} - C\,\varepsilon_f^{2n+1}, \\ M_{p,c}\dfrac{E_{p,c}^{2n+1}-E_{p,c}^{2n-1}}{2\Delta t} - D_c\,E_{u,c}^{2n} = M_{p,c}\,\xi_c^{2n}, \end{cases}
$$

$$
(5.80)\qquad \begin{cases} M_{u,f}\dfrac{E_{u,f}^{2n+1}-E_{u,f}^{2n}}{\Delta t} + D_f^*\,E_{p,f}^{2n+\frac{1}{2}} + C^*\,\dfrac{E_{u,c}^{2n+2}+E_{u,c}^{2n}}{2} = \\ \qquad\qquad M_{u,f}\,\eta_f^{2n+\frac{1}{2}} + C^*\,\varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}}, \\ M_{p,f}\dfrac{E_{p,f}^{2n+\frac{1}{2}}-E_{p,f}^{2n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_f\,E_{u,f}^{2n} = M_{p,f}\,\xi_f^{2n}, \end{cases}
$$

$$
(5.81)\qquad \begin{cases} M_{u,f}\dfrac{E_{u,f}^{2n+2}-E_{u,f}^{2n+1}}{\Delta t} + D_f^*\,E_{p,f}^{2n+\frac{3}{2}} + C^*\,\dfrac{E_{u,c}^{2n+2}+E_{u,c}^{2n}}{2} = \\ \qquad\qquad M_{u,f}\,\eta_f^{2n+\frac{3}{2}} + C^*\,\varepsilon_c^{2n+\frac{3}{2}}, \\ M_{p,f}\dfrac{E_{p,f}^{2n+\frac{3}{2}}-E_{p,f}^{2n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_f\,E_{u,f}^{2n+1} = M_{p,f}\,\xi_f^{2n+1}, \end{cases}
$$

où les seconds membres sont donnés par les composantes des erreurs de troncature (5.77) et (5.78) dans les bases (5.51). On signale que pour simplifier la présentation et en faisant un abus de notation on a noté les erreurs de troncature et leurs composantes de la même façon.

5.8.2 Le Plan de la Preuve

Il est clair que grâce à la linéarité des équations, l'erreur peut être séparée en deux parties :

- l'erreur due au schéma intérieur,
- l'erreur provenant des équations de couplage.

Le premier type d'erreur, ne dépend pas vraiment des équations de couplage. La nature centrée du schéma intérieur fait que cette erreur est en $\mathcal{O}(\Delta t^2)$. Ainsi on peut préciser le résultat dans la proposition suivante

Proposition 5.8.1 *Supposons que*

- *les paramètres de discrétisation ont été choisis de telle façon que les matrices $N_l(\Delta t),\ l \in \{c, f\}$ définies dans (5.57) satisfont (5.58) (condition CFL stricte),*
- *les forces externes $((f_c, f_f), (g_c, g_f))$ sont assez régulières et qu'elles vérifient (5.70),*
- *les conditions initiales sont nulles,*
- *la solution du problème continu $((u_c, u_f), (p_c, p_f))$ appartient à l'espace $C^4([0,T], Y \times W)$.*

Alors on a l'estimation suivante

$$
(5.82)\qquad \begin{aligned} &\|(e_{u,c}, e_{u,f})\|_{\infty,H,T} + \|(e_{p,c}, e_{p,f})\|_{\infty,V,T} \le \mathcal{C}\,\Upsilon^2\,[1+T] \\ &\qquad\qquad \left[1 + T\,h^k\right] h^2 \|((u_c, u_f), (p_c, p_f))\|_{C^4([0,T],Y\times W)}. \end{aligned}
$$

Étant donné que l'analyse de cette erreur est assez standard (similaire à celui du schéma saute-mouton en absence de raffinement) on a décidé de ne pas la présenter dans le document.

L'analyse de l'erreur qui provient des équations de transmission qu'on développera le long des sections 5.8.3 et 5.8.4 est moins classique et comporte deux étapes :

- Une analyse directe qui combine des techniques d'énergie, les erreurs de troncature (globalement du premier ordre) et une sorte d'inégalité de traces discrètes (qui nous fait perdre un facteur $\mathcal{O}(\sqrt{h})$) nous permet de montrer une estimation en $\mathcal{O}(\sqrt{h})$. On effectue cette analyse dans la section 5.8.3.
- Une analyse plus fine nous permet d'obtenir itérativement un taux de convergence de plus en plus proche de $\mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}})$ en demandant de la régularité en temps de la solution. Ceci demande un traitement spécial des erreurs de troncature. Les idées fondamentales de cette analyse sont exposées le long de la section 5.8.4.

5.8.3 La Preuve de l'Estimation en $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta t})$

Dans cette section on analyse exclusivement l'erreur qui provient des équations de transmission. Les équations satisfaites par l'erreur sont alors (5.74)–(5.76) où on suppose que les erreurs de troncature données dans (5.77) sont identiquement nulles.

Ainsi le résultat qu'on veut montrer est le suivant

Lemme 5.8.1 *Supposons que $((u_c,u_f),(p_c,p_f)) \in C^3([0,T],Y\times W)$, les forces externes $((f_c,f_f),(g_c,g_f))$ sont assez régulières et qu'elles vérifient (5.70). Alors*

$$\left|\begin{array}{l} \|(e_{u,c},e_{u,f})\|_{\infty,H,T} + \|(e_{p,c},e_{p,f})\|_{\infty,V,T} \;\leq \\ \qquad\qquad \mathcal{C}\;[1+T]\left[1+T\;h^{k-\frac{1}{2}}\right]\;\Upsilon^2\;\sqrt{h}\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^3([0,T],Y\times W)}, \end{array}\right. \tag{5.83}$$

où $\Upsilon = \max\{\Upsilon_c,\Upsilon_f\}$.

Le reste de la section est consacré à la preuve de ce lemme. On définit l'énergie discrète de l'erreur par

$$\mathcal{E}^{2n} \;:=\; \mathcal{E}_c^{2n} + \mathcal{E}_f^{2n}, \tag{5.84}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c^{2n} \;&:=\; \frac{1}{2}(\mathcal{A}_c\;e_{u,c}^{2n},e_{u,c}^{2n})_{H_c} + \frac{1}{2}(\mathcal{B}_c\;e_{p,c}^{2n+1},e_{p,c}^{2n-1})_{V_c}, \\ \mathcal{E}_f^{n} \;&:=\; \frac{1}{2}(\mathcal{A}_f\;e_{u,f}^{n},e_{u,f}^{n})_{H_f} + \frac{1}{2}(\mathcal{B}_f\;e_{p,f}^{n+\frac{1}{2}},e_{p,f}^{n-\frac{1}{2}})_{V_f}. \end{aligned}$$

Notre objectif est alors donner des estimations sur $\sqrt{\mathcal{E}^{2n}}$. Ceci nous fournira des estimations en norme L^2 de l'erreur grâce au lemme suivant

Lemme 5.8.2 *Supposons que la condition CFL dans chaque sous-domaine (5.58) est satisfaite et que $((u_c,u_f),(p_c,p_f)) \in C^3([0,T];Y\times W)$. Alors, il existe une constante $\mathcal{C}>0$ indépendante de Δt et h telle que pour tout n tel que $t^{2n}\leq T$*

$$\|e_{u,c}^{2n}\|_{H_c} + \|e_{p,c}^{2n+1}\|_{V_c} + \|e_{p,c}^{2n-1}\|_{V_c} \;\leq\; \mathcal{C}\;\Upsilon_c\;\sqrt{\mathcal{E}_c^{2n}}, \tag{5.85}$$

$$\|e_{u,f}^{2n}\|_{H_f} + \|e_{p,f}^{2n+\frac{1}{2}}\|_{V_f} + \|e_{p,f}^{2n-\frac{1}{2}}\|_{V_f} \;\leq\; \mathcal{C}\,\Upsilon_f\,\sqrt{\mathcal{E}_f^{2n}}, \tag{5.86}$$

$$\begin{aligned} \|e_{u,f}^{2n+1}\|_{H_f} \;&\leq\; \mathcal{C}\,\Upsilon_f\,\left(\sqrt{\mathcal{E}_f^{2n}} + \sqrt{\mathcal{E}_f^{2n+2}}\right) + \\ &\mathcal{C}\left[1 + T\,h^{k-\frac{1}{2}}\right]\,h^{\frac{3}{2}}\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^3([0,T],Y\times W)}. \end{aligned} \tag{5.87}$$

Preuve: La preuve des deux premières inégalités (5.85) et (5.86) est similaire à celle qui a été présentée dans la proposition 5.5.1. La difficulté se trouve maintenant dans l'estimation de $\|e_{u,f}^{2n+1}\|_{H_f}$ en fonction de l'énergie de l'erreur aux instants pairs. Pour estimer cette quantité on utilisera la notation opérationnelle du problème. Ainsi, en faisant la différence des premières équations de (5.75) et (5.76) on en déduit

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_f\,e_{u,f}^{2n+1},\tilde{u}_f^h)_{H_f} \;&=\; (\mathcal{A}_f\,\frac{e_{u,f}^{2n+2}+e_{u,f}^{2n}}{2},\tilde{u}_f^h)_{H_f} \;+\; \frac{\Delta t}{2}(\mathcal{D}_f\,\tilde{u}_f^h, e_{p,f}^{2n+\frac{3}{2}} - e_{p,f}^{2n+\frac{1}{2}})_{V_f} \\ &\frac{\Delta t}{2}c(\varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}} - \varepsilon_c^{2n+\frac{3}{2}},\tilde{u}_f^h). \end{aligned}$$

En prenant $\tilde{u}_f^h \;=\; e_{u,f}^{2n+1}$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient

$$\begin{aligned} \|e_{u,f}^{2n+1}\|_{H_f}^2 \;&\leq\; \mathcal{C}\left[\left\|\frac{e_{u,f}^{2n+2}+e_{u,f}^{2n}}{2}\right\|_{H_f}\|e_{u,f}^{2n+1}\|_{H_f} \;+\; \frac{\Delta t}{2}\|\mathcal{D}_f\,e_{u,f}^{2n+1}\|_{V_f}\|e_{p,f}^{2n+\frac{3}{2}} - e_{p,f}^{2n+\frac{1}{2}}\|_{V_f} + \right. \\ &\left.\frac{\Delta t}{2}\,|c(\varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}} - \varepsilon_c^{2n+\frac{3}{2}}, e_{u,f}^{2n+1})|\right]. \end{aligned}$$

Ce qui implique, en utilisant l'hypothèse (5.65), que

$$\left|\begin{aligned} \|e_{u,f}^{2n+1}\|_{H_f}^2 \;&\leq\; \mathcal{C}\left[\left\|\frac{e_{u,f}^{2n+2}+e_{u,f}^{2n}}{2}\right\|_{H_f} \;+\; \|e_{p,f}^{2n+\frac{3}{2}} - e_{p,f}^{2n+\frac{1}{2}}\|_{V_f}\right]\|e_{u,f}^{2n+1}\|_{H_f} + \\ &\mathcal{C}\Delta t\,|c(\varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}} - \varepsilon_c^{2n+\frac{3}{2}}, e_{u,f}^{2n+1})|. \end{aligned}\right.$$

Ensuite on analyse le dernier terme. On définit l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{T}:\;\; C^0([0,T];Z) \;&\longrightarrow\; C^0([\Delta t, T-\Delta t];Z) \\ z(t) \;&\mapsto\; z(t+\Delta t) - z(t-\Delta t). \end{aligned}$$

Il est clair que si $z(\cdot) \in C^1([0,T],Z)$, alors

$$\|\mathcal{T}\,z\|_{C^0([\Delta t,T-\Delta t];Z)} \;\leq\; \Delta t\,\|\partial_t z\|_{C^0([0,T],Z)}, \tag{5.88}$$

et on remarque que, d'après (5.78), on a

$$\varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}} - \varepsilon_c^{2n+\frac{3}{2}} \;=\; u_c^h(t^{2n+\frac{3}{2}}) - u_c^h(t^{2n+\frac{1}{2}}) \;=\; \mathcal{T}(u_c^h)(t^{2n+1}).$$

On commence par obtenir l'inégalité suivante

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
|c(\varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}} - \varepsilon_c^{2n+\frac{3}{2}}, e_{u,f}^{2n+1})| & \leq & |c(\mathcal{T}(u_c)(t^{2n+1}) - \mathcal{T}(u_c^h)(t^{2n+1}), e_{u,f}^{2n+1})| + \\
& & |c(\mathcal{T}(u_c)(t^{2n+1}), e_{u,f}^{2n+1})| \\
& \leq & \mathcal{C}\left[\|\mathcal{T}(u_c)(t^{2n+1}) - \mathcal{T}(u_c^h)(t^{2n+1})\|_{X_c}\, \|e_{u,f}^{2n+1}\|_{X_f} + \right. \\
& & \left. \frac{1}{\sqrt{h}}\|\mathcal{T}(u_c)(t^{2n+1})\|_{Y_c}\|e_{u,f}^{2n+1}\|_{H_f}\right],
\end{array}
\right. \tag{5.89}
$$

où on a utilisé la continuité de l'opérateur $c(\cdot,\cdot)$ et l'hypothèse (5.66).(a). Traitons dans un premier temps le premier terme du second membre de (5.89). Si on se sert de (5.88) et de la première hypothèse (5.65) on obtient

$$
\|\mathcal{T}(u_c)(t^{2n+1}) - \mathcal{T}(u_c^h)(t^{2n+1})\|_{X_c}\, \|e_{u,f}^{2n+1}\|_{X_f} \leq \mathcal{C}\frac{\Delta t}{h}\|\partial_t(u_c^h - u_c)\|_{C^0([0,T],X_c)}\|e_{u,f}^{2n+1}\|_{H_f}.
$$

On utilise alors le corollaire 5.3.5 (estimations sur le problème semi-discret) pour en déduire que

$$
\left|
\begin{array}{l}
\|\mathcal{T}(u_c)(t^{2n+1}) - \mathcal{T}(u_c^h)(t^{2n+1})\|_{X_c}\, \|e_{u,f}^{2n+1}\|_{X_f} \leq \\
\qquad \mathcal{C}\,(1+T)\, h^k\|e_{u,f}^{2n+1}\|_{H_f}\|\partial_t((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^2([0,T],Y\times W)}.
\end{array}
\right. \tag{5.90}
$$

Pour traiter le second terme on utilise (5.88) pour écrire

$$
\|\mathcal{T}(u_c)(t^{2n+1})\|_{Y_c} \leq \Delta t\, \|\partial_t u_c\|_{C^0([0,T],Y_c)}. \tag{5.91}
$$

On introduit les inégalités (5.90) et (5.91) dans (5.89) pour obtenir

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
\Delta t\, |c(\varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}} - \varepsilon_c^{2n+\frac{3}{2}}, e_{u,f}^{2n+1})| & \leq & \mathcal{C}\left[1 + T\, h^{k-\frac{1}{2}}\right] h^{\frac{3}{2}}\, \|e_{u,f}^{2n+1}\|_{H_f} \\
& & \|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^3([0,T],Y\times W)}.
\end{array}
\right. \tag{5.92}
$$

Finalement, on utilise (5.86) et cette dernière estimation dans (5.88) pour montrer (5.87). □

Pour obtenir des estimations d'erreur, il nous reste donc à estimer l'énergie. Le point de départ est alors l'expression suivante qui fait intervenir les erreurs de troncature (5.78)

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
\dfrac{1}{2\Delta t}\left(\mathcal{E}^{2n+2} - \mathcal{E}^{2n}\right) & = & c\left(\varepsilon_c^{2n+\frac{3}{2}}, \dfrac{e_{u,f}^{2n+2} + e_{u,f}^{2n+1}}{4}\right) + c\left(\varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}}, \dfrac{e_{u,f}^{2n+1} + e_{u,f}^{2n}}{4}\right) - \\
& & c\left(\dfrac{e_{u,c}^{2n+2} + e_{u,c}^{2n}}{2}, \varepsilon_f^{2n+1}\right).
\end{array}
\right. \tag{5.93}
$$

On utilisera le lemme suivant pour obtenir des bornes sur le second membre de cette égalité

Lemme 5.8.3 *Supposons $((u_c,u_f),(p_c,p_f)) \in C^3([0,T];Y\times W)$ est la solution du problème (5.6). Alors on a les estimations suivantes :*

$$
\left|
\begin{array}{l}
c\left(\dfrac{e_{u,c}^{2n+2} + e_{u,c}^{2n}}{2}, \varepsilon_f^{2n+1}\right) \leq \\
\qquad \mathcal{C}\left\|\dfrac{e_{u,c}^{2n+2} + e_{u,c}^{2n}}{2}\right\|_{H_c}\left[1 + T\, h^{k-\frac{1}{2}}\right]\, \sqrt{h}\, \|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^3([0,T],Y\times W)},
\end{array}
\right. \tag{5.94}
$$

$$
(5.95) \quad \left| \begin{array}{l} c\left(\varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}+m}, \dfrac{e_{u,f}^{2n+1+m}+e_{u,f}^{2n+m}}{4}\right) \leq \\ \qquad \mathcal{C}\left\|\dfrac{e_{u,f}^{2n+1+m}+e_{u,f}^{2n+m}}{4}\right\|_{H_f}\left[1+T\,h^{k-\frac{1}{2}}\right]\,\sqrt{h}\,\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^3([0,T],Y\times W)}, \end{array}\right.
$$

où $m \in \{0,1\}$.

Preuve: La preuve est très similaire à celle présentée pour prouver (5.92) dans le lemme 5.8.2. □

Pour simplifier la présentation, il est utile d'introduire l'erreur sur l'intervalle $I_{2n+1} = [t^{2n}, t^{2n+2}]$. On pose

$$
(5.96) \quad \left| \begin{array}{rcl} \|(e_{u,c},e_{u,f})\|_{I_{2n+1}}^2 & = & \|e_{u,c}^{2n}\|_{H_c}^2+\|e_{u,c}^{2n+2}\|_{H_c}^2+\|e_{u,f}^{2n}\|_{H_f}^2+\|e_{u,f}^{2n+2}\|_{H_f}^2+\|e_{u,f}^{2n+1}\|_{H_f}^2, \\ \|(e_{p,c},e_{p,f})\|_{I_{2n+1}}^2 & = & \|e_{p,c}^{2n+1}\|_{V_c}^2+\|e_{p,f}^{2n+\frac{1}{2}}\|_{V_f}^2+\|e_{p,f}^{2n+\frac{3}{2}}\|_{V_f}^2. \end{array}\right.
$$

On signale que ces quantités apparaissent dans le lemme 5.8.2. Les expressions suivantes nous permettent de passer des normes sur les intervalles I_{2n+1} à la norme totale en temps

$$
(5.97) \quad \left| \begin{array}{rcl} \|(e_{u,c},e_{u,f})\|_{I_{2n+1}} & \leq & \mathcal{C}\,\|(e_{u,c},e_{u,f})\|_{\infty,H,T}\,, \\ \|(e_{p,c},e_{p,f})\|_{I_{2n+1}} & \leq & \mathcal{C}\,\|(e_{p,c},e_{p,f})\|_{\infty,V,T}\,, \\ \|(e_{u,c},e_{u,f})\|_{\infty,H,T} & \leq & \sup\limits_{t^{2n+2}\leq T}\|(e_{u,c},e_{u,f})\|_{I_{2n+1}}, \\ \|(e_{p,c},e_{p,f})\|_{\infty,V,T} & \leq & \sup\limits_{t^{2n+2}\leq T}\|(e_{p,c},e_{p,f})\|_{I_{2n+1}}. \end{array}\right.
$$

Le lemme 5.8.3 nous permet d'affirmer que

$$
(5.98) \quad \left| \begin{array}{rcl} \dfrac{1}{2\Delta t}\left(\mathcal{E}^{2n+2}-\mathcal{E}^{2n}\right) & \leq & \mathcal{C}\ \|(e_{u,c},e_{u,f})\|_{\infty,H,T}\left[1+T\,h^{k-\frac{1}{2}}\right]\,\sqrt{h} \\ & & \|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^3([0,T],Y\times W)}, \end{array}\right.
$$

et donc, pour tout $m > 0$ tel que $t^{2m} \leq T$,

$$
(5.99) \quad \left| \begin{array}{rcl} \sqrt{\mathcal{E}^{2m}} & \leq & \mathcal{C}\ \|(e_{u,c},e_{u,f})\|_{\infty,H,T}^{\frac{1}{2}}\,\sqrt{T}\left[1+T\,h^{k-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\ h^{\frac{1}{4}} \\ & & \|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^3([0,T],Y\times W)}^{\frac{1}{2}}. \end{array}\right.
$$

Maintenant on utilise les inégalités du lemme 5.8.2 et (5.99) pour obtenir

$$
\begin{array}{l} \|(e_{u,c},e_{u,f})\|_{I_{2n+1}}+\|(e_{p,c},e_{p,f})\|_{I_{2n+1}} \leq \\ \qquad \mathcal{C}\,\Upsilon\ \|(e_{u,c},e_{u,f})\|_{\infty,H,T}^{\frac{1}{2}}\,\sqrt{T}\left[1+T\,h^{k-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\ h^{\frac{1}{4}}\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^3([0,T],Y\times W)}^{\frac{1}{2}}+ \\ \qquad \mathcal{C}\ \left[1+Th^{k-\frac{1}{2}}\right]\ h^{\frac{3}{2}}\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^3([0,T],Y\times W)}. \end{array}
$$

Finalement, si on prend le supremum sur cette expression pour les $t^{2n} \leq T$, on utilise (5.97) et l'inégalité de Young, on obtient (5.83).

5.8.4 La Preuve de l'Estimation en $\mathcal{O}(\Delta x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2^l}})$

La preuve de l'estimation (5.73) qui nous donne un taux de convergence en $\mathcal{O}(\Delta x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2^l}})$ se fait par récurrence et en supposant plus de régularité sur la solution du problème continue. Cette preuve, qui sera présentée dans la section 5.8.4.2 a besoin des estimations sur ce qu'on appellera les dérivées discrètes de la solution. On commence par établir ces résultats.

5.8.4.1 Estimations sur les Dérivées Discrètes Grossières

L'objectif de cette section est d'obtenir un résultat similaire à celui du lemme 5.8.1 pour ce qu'on dénotera les dérivées successives de l'erreur $((e_{u,c}, e_{u,f}), (e_{p,c}, e_{p,f}))$. Même si la preuve du résultat est identique à celle qu'on a présentée dans la section 5.8.3 on doit introduire quelques notations pour établir le résultat précis.

On définit l'opérateur *dérivée discrète grossière* ∂ en donnant son action sur une suite $w = (w^t)$ (où t est un entier ou un demi-entier qui peut être éventuellement négatif) :

$$(\partial w)^{t+1} := \frac{w^{t+2} - w^t}{2\Delta t}.$$

On définit aussi l'opérateur *m-ième dérivée discrète grossière* ∂^m comme la m-ième puissance successive de l'opérateur ∂ :

$$\partial^m w := \partial(\partial^{m-1} w).$$

Étant donné que le schéma numérique satisfait par l'erreur (5.79)–(5.81) est *invariant* par une translation de $2\Delta t$ on remarque que les dérivées successives de l'erreur vont satisfaire un schéma similaire. Plus précisément, si on introduit la notation

$$\bar{m} = 1, \quad \text{si } m \text{ est impair}, \qquad \bar{m} = 0, \quad \text{si } m \text{ est pair},$$

les équations satisfaites par les dérivées sont (on utilise la formulation matricielle)

$$\text{(5.100)} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{u,c} \dfrac{(\partial^m E_{u,c})^{2n+2-\bar{m}} - (\partial^m E_{u,c})^{2n-\bar{m}}}{2\Delta t} + D_c^* \, (\partial^m E_{p,c})^{2n+1-\bar{m}} - \\ C \, \dfrac{(\partial^m E_{u,f})^{2n+2-\bar{m}} + 2(\partial^m E_{u,f})^{2n+1-\bar{m}} + (\partial^m E_{u,f})^{2n-\bar{m}}}{4} = -C \, (\partial^m \varepsilon_f)^{2n+1-\bar{m}}, \\ M_{p,c} \dfrac{(\partial^m E_{p,c})^{2n+1-\bar{m}} - (\partial^m E_{p,c})^{2n-1-\bar{m}}}{2\Delta t} - D_c \, (\partial^m E_{u,c})^{2n-\bar{m}} = 0, \end{array} \right.$$

$$\text{(5.101)} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{u,f} \dfrac{(\partial^m E_{u,f})^{2n+1-\bar{m}} - (\partial^m E_{u,f})^{2n-\bar{m}}}{\Delta t} + D_f^* \, (\partial^m E_{p,f})^{2n+\frac{1}{2}-\bar{m}} + \\ \qquad C^* \, \dfrac{(\partial^m E_{u,c})^{2n+2-\bar{m}} + (\partial^m E_{u,c})^{2n-\bar{m}}}{2} = C^* \, (\partial^m \varepsilon_c)^{2n+\frac{1}{2}-\bar{m}}, \\ M_{p,f} \dfrac{(\partial^m E_{p,f})^{2n+\frac{1}{2}-\bar{m}} - (\partial^m E_{p,f})^{2n-\frac{1}{2}-\bar{m}}}{\Delta t} - D_f \, (\partial^m E_{u,f})^{2n-\bar{m}} = 0, \end{array} \right.$$

$$\text{(5.102)} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{u,f} \dfrac{(\partial^m E_{u,f})^{2n+2-\bar{m}} - (\partial^m E_{u,f})^{2n+1-\bar{m}}}{\Delta t} + D_f^* \, (\partial^m E_{p,f})^{2n+\frac{3}{2}-\bar{m}} + \\ \qquad C^* \, \dfrac{(\partial^m E_{u,c})^{2n+2-\bar{m}} + (\partial^m E_{u,c})^{2n-\bar{m}}}{2} = C^* \, (\partial^m \varepsilon_c)^{2n+\frac{3}{2}-\bar{m}}, \\ M_{p,f} \dfrac{(\partial^m E_{p,f})^{2n+\frac{3}{2}-\bar{m}} - (\partial^m E_{p,f})^{2n+\frac{1}{2}-\bar{m}}}{\Delta t} - D_f \, (\partial^m E_{u,f})^{2n+1-\bar{m}} = 0. \end{array} \right.$$

Les nouvelles erreurs de troncature qui apparaissent dans ces équations sont des dérivées discrètes successives (centrées) des erreurs de troncature originalles. Ceci implique que, en supposant plus de régularité sur la solution du problème continu, une preuve similaire à celle qu'on a présentée dans la section 5.8.1 nous permet de montrer le lemme suivant

Lemme 5.8.4 *Supposons que* $((u_c, u_f), (p_c, p_f)) \in C^{3+l}([0, T + l\Delta t], Y \times W)$*, les forces externes* $((f_c, f_f), (g_c, g_f))$ *sont assez régulières et qu'elles vérifient (5.72). Alors pour tout* $0 \leq m \leq l$

$$\left| \begin{array}{l} \|\partial^m(e_{u,c}, e_{u,f})\|_{\infty,H,T} + \|\partial^m(e_{p,c}, e_{p,f})\|_{\infty,V,T} \;\leq\; \mathcal{C}\;[1 + T^*] \\ \qquad \left[1 + T^*\, h^{k-\frac{1}{2}}\right]\; \Upsilon^2\, \sqrt{h}\|((u_c, u_f), (p_c, p_f))\|_{C^{3+m}([0,T^*],Y\times W)}, \end{array} \right. \tag{5.103}$$

où $T^* = T + m\Delta t$.

Preuve: La preuve est très similaire à celle du lemme 5.8.1. La seule différence repose sur le fait d'avoir besoin de plus de régularité sur la solution du problème continu pour estimer l'erreur de troncature. L'hypothèse sur le support des forces externes est purement technique et elle nous permet de bien définir le schéma satisfait par les dérivées successives de l'erreur et d'affirmer que les conditions initiales sont nulles. □

5.8.4.2 La Preuve par Récurrence

Première étape : Dérivation d'une estimation en $\mathcal{O}(h)$. Pour améliorer l'estimation (5.83) on signale que les erreurs de troncature définies dans (5.78) peuvent se réécrire comme

$$\left| \begin{array}{rcll} \varepsilon_f^{2n+1} & = & \dfrac{u_f^h(t^{2n+2}) + 2u_f^h(t^{2n+1}) + u_f^h(t^{2n})}{4} \;-\; u_f^h(t^{2n+1}), & \approx\; \mathcal{O}(\Delta t^2), \\ \varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}} + \varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}} & = & u_c^h(t^{2n+2}) + u_c^h(t^{2n}) \;-\; u_c^h(t^{2n+\frac{1}{2}}) \;-\; u_c^h(t^{2n+\frac{3}{2}}), & \approx\; \mathcal{O}(\Delta t^2), \\ \varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}} - \varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}} & = & u_c^h(t^{2n+\frac{3}{2}}) \;-\; u_c^h(t^{2n+\frac{1}{2}}) & \approx\; \mathcal{O}(\Delta t). \end{array} \right.$$

Maintenant on réorganise le second membre de (5.93) de telle façon à faire apparaître une somme de termes tous centrés en t^{2n+1}

$$\left| \begin{array}{rcl} \dfrac{1}{2\Delta t}\left(\mathcal{E}^{2n+2} - \mathcal{E}^{2n}\right) & = & c\left(\dfrac{\varepsilon_c^{2n+\frac{3}{2}} - \varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}}}{2}, \dfrac{e_{u,f}^{2n+2} - e_{u,f}^{2n}}{4}\right) + \\ & & c\left(\dfrac{\varepsilon_c^{2n+\frac{3}{2}} + \varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}}}{2}, \dfrac{e_{u,f}^{2n+2} + 2e_{u,f}^{2n+1} + e_{u,f}^{2n}}{4}\right) - \\ & & c\left(\dfrac{e_{u,c}^{2n+2} + e_{u,c}^{2n}}{2}, \varepsilon_f^{2n+1}\right). \end{array} \right. \tag{5.104}$$

On utilisera un lemme similaire au lemme 5.8.3 pour obtenir des bornes sur le second membre de cette égalité

Lemme 5.8.5 *Supposons $((u_c,u_f),(p_c,p_f)) \in C^4([0,T];Y\times W)$ est la solution du problème (5.6). Alors on a les estimations suivantes :*

$$\left|\begin{array}{l} c\left(\dfrac{e_{u,c}^{2n+2}+e_{u,c}^{2n}}{2},\varepsilon_f^{2n+1}\right) \leq \\ \qquad \mathcal{C}\left\|\dfrac{e_{u,c}^{2n+2}+e_{u,c}^{2n}}{2}\right\|_{H_c}\left[1+T\,h^{k-\frac{1}{2}}\right]\,h^{\frac{3}{2}}\,\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^4([0,T],Y\times W)}, \end{array}\right. \tag{5.105}$$

$$\left|\begin{array}{l} c\left(\dfrac{\varepsilon_c^{2n+\frac{3}{2}}+\varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}}}{2},\dfrac{e_{u,f}^{2n+2}+2e_{u,f}^{2n+1}+e_{u,f}^{2n}}{4}\right) \leq \\ \mathcal{C}\left\|\dfrac{e_{u,f}^{2n+2}+2e_{u,f}^{2n+1}+e_{u,f}^{2n}}{4}\right\|_{H_f}\left[1+T\,h^{k-\frac{1}{2}}\right]\,h^{\frac{3}{2}}\,\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^4([0,T],Y\times W)}, \end{array}\right. \tag{5.106}$$

$$\left|\begin{array}{l} c\left(\dfrac{\varepsilon_c^{2n+\frac{3}{2}}-\varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}}}{2},\dfrac{e_{u,f}^{2n+2}-e_{u,f}^{2n}}{4}\right) \leq \\ \qquad \mathcal{C}\left\|(\partial\, e_{u,f})^{2n+1}\right\|_{H_f}\left[1+T\,h^{k-\frac{1}{2}}\right]\,h^{\frac{3}{2}}\,\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^3([0,T],Y\times W)}. \end{array}\right. \tag{5.107}$$

Preuve: La preuve des deux premières estimations est analogue à celle du lemme 5.8.3. La seule différence est que dans ce cas les erreurs de troncature, avec la régularité qu'on a par hypothèse, sont en $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ et pas en $\mathcal{O}(\Delta t)$ ce qui nous fait gagner une puissance de h.

La preuve de la dernière estimation (5.107) fait intervenir la définition de la dérivée discrète de l'erreur introduite dans la section 5.8.4.1. En effet, une preuve analogue à celle du lemme 5.8.3 nous permet de montrer que

$$\left|\begin{array}{l} c\left(\dfrac{\varepsilon_c^{2n+\frac{3}{2}}-\varepsilon_c^{2n+\frac{1}{2}}}{2},\dfrac{e_{u,f}^{2n+2}-e_{u,f}^{2n}}{4}\right) \leq \\ \qquad \mathcal{C}\left\|\dfrac{e_{u,f}^{2n+2}-e_{u,f}^{2n}}{4}\right\|_{H_f}\left[1+T\,h^{k-\frac{1}{2}}\right]\,\sqrt{h}\,\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^3([0,T],Y\times W)}. \end{array}\right. \tag{5.108}$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\frac{e_{u,f}^{2n+2}-e_{u,f}^{2n}}{4} = \frac{\Delta t}{2}\,\frac{e_{u,f}^{2n+2}-e_{u,f}^{2n}}{2\Delta t} = \frac{\Delta t}{2}\,(\partial\, e_{u,f})^{2n+1},$$

ce qui nous donne (5.107). □

Du lemme 5.8.5 on en déduit que

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{2\Delta t}(\mathcal{E}^{2n+2}-\mathcal{E}^{2n}) & \leq & \mathcal{C}\left[1+T\,h^{k-\frac{1}{2}}\right]\,h^{\frac{3}{2}} \\ & & \Big[\|(e_{u,c},e_{u,f})\|_{\infty,H,T}\;\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^4([0,T],Y\times W)}+ \\ & & \|\partial(e_{u,c},e_{u,f})\|_{\infty,H,T}\;\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^3([0,T],Y\times W)}\Big], \end{array} \tag{5.109}$$

et par conséquent, pour tout $m > 0$ tel que $t^{2m} \leq T$

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{\mathcal{E}^{2m}} \leq \mathcal{C}\sqrt{T}\left[1+T\,h^{k-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\ h^{\frac{3}{4}} \\ \qquad \left[\|(e_{u,c},e_{u,f})\|^{\frac{1}{2}}_{\infty,H,T}\ \|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2}}_{C^4([0,T],Y\times W)} + \right. \\ \qquad \left. \|\partial(e_{u,c},e_{u,f})\|^{\frac{1}{2}}_{\infty,H,T}\ \|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2}}_{C^3([0,T],Y\times W)}\right]. \end{array} \right. \tag{5.110}$$

En suite on utilise le lemme 5.8.2 et cette dernière inégalité pour obtenir

$$\begin{aligned} \|(e_{u,c},e_{u,f})\|_{I_{2n+1}} + \|(e_{p,c},e_{p,f})\|_{I_{2n+1}} \leq\ & \mathcal{C}\ \sqrt{T}\left[1+T\ h^{k-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\ \Upsilon\ h^{\frac{3}{4}} \\ & \left[\|(e_{u,c},e_{u,f})\|^{\frac{1}{2}}_{\infty,H,T}\ \|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2}}_{C^4([0,T],Y\times W)} + \right. \\ & \left. \|\partial(e_{u,c},e_{u,f})\|^{\frac{1}{2}}_{\infty,H,T}\ \|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2}}_{C^3([0,T],Y\times W)}\right] + \\ & \mathcal{C}\ \left[1+Th^{k-\frac{1}{2}}\right]\ h^{\frac{3}{2}}\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|_{C^3([0,T],Y\times W)}. \end{aligned}$$

Finalement on utilise les résultats de convergence (5.83) et (5.103) (avec $m = 1$) pour écrire

$$\begin{aligned} \|(e_{u,c},e_{u,f})\|_{I_{2n+1}} + \|(e_{p,c},e_{p,f})\|_{I_{2n+1}} \leq\ & \mathcal{C}\ [1+T+\Delta t]\left[1+(T+\Delta t)\ h^{k-\frac{1}{2}}\right]\ \Upsilon^2\ h \\ & \|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2}}_{C^3([0,T+\Delta t],Y\times W)}\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2}}_{C^4([0,T+\Delta t],Y\times W)}. \end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser les inégalités (5.97) pour montrer le lemme

Lemme 5.8.6 *Supposons que* $((u_c,u_f),(p_c,p_f)) \in C^4([0,T+\Delta t],Y\times W)$ *et que les forces externes* $((f_c,f_f),(g_c,g_f))$ *sont assez régulières et que leur support est inclus dans* $(\Delta t,T)\times(\Omega_c\cup\Omega_f)$. *Alors*

$$\left| \begin{array}{l} \|(e_{u,c},e_{u,f})\|_{\infty,H,T} + \|(e_{p,c},e_{p,f})\|_{\infty,V,T} \leq \mathcal{C}\ [1+T^*]\left[1+T^*\ h^{k-\frac{1}{2}}\right] \\ \qquad \Upsilon^2\ h\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2}}_{C^3([0,T^*],Y\times W)}\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2}}_{C^4([0,T^*],Y\times W)}, \end{array} \right. \tag{5.111}$$

où $T^* = T + \Delta t$.

Ceci nous fournit une estimation d'ordre $\mathcal{O}(h)$ pour l'erreur qui vient du couplage. Pour initialiser la récurrence qu'on montrera dans le paragraphe suivant on doit donner des estimations similaires pour les dérivées discrètes grossières successives. On peut adapter la preuve qu'on vient de effectuer pour montrer le lemme

Lemme 5.8.7 *Supposons que* $((u_c,u_f),(p_c,p_f)) \in C^{3+l}([0,T+l\Delta t],Y\times W)$, $l \geq 1$ *et que les forces externes* $((f_c,f_f),(g_c,g_f))$ *sont assez régulières et que leur support est inclus dans* $(l\Delta t,T)\times(\Omega_c\cup\Omega_f)$. *Alors pour* $0 \leq m \leq l-1$,

$$\left| \begin{array}{l} \|\partial^m(e_{u,c},e_{u,f})\|_{\infty,H,T} + \|\partial^m(e_{p,c},e_{p,f})\|_{\infty,V,T} \leq \mathcal{C}\ [1+T^*] \\ \qquad \left[1+T^*\ h^{k-\frac{1}{2}}\right]\ \Upsilon^2\ h\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2}}_{C^{3+m}([0,T^*],Y\times W)} \\ \qquad\qquad \|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2}}_{C^{4+m}([0,T^*],Y\times W)}, \end{array} \right. \tag{5.112}$$

où $T^* = T + (m+1)\Delta t$.

Deuxième Étape : Dérivation d'une estimation en $\mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2^l}})$. Supposons par l'hypothèse de récurrence suivante

Hypothèse $\mathcal{R}_{l_0}$: Si $((u_c,u_f),(p_c,p_f)) \in C^{3+l}([0,T],Y\times W)$ avec $l \geq 1$ et les forces externes $((f_c,f_f),(g_c,g_f))$ sont assez régulières et que leur support est inclus dans $(l\Delta t,T)\times(\Omega_c\cup\Omega_f)$ alors pour tout $0\leq m\leq l-l_0$

$$
\left|
\begin{array}{l}
\|\partial^m(e_{u,c},e_{u,f})\|_{\infty,H,T}+\|\partial^m(e_{p,c},e_{p,f})\|_{\infty,V,T} \;\leq\; \mathcal{C}_{l_0}\;\Upsilon^2\,[1+T^*]\left[1+T^*\;h^{k-\frac{1}{2}}\right]h^{p_{l_0}} \\
\qquad \|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2^{l_0}}}_{C^{2+l_0+m}([0,T^*],Y\times W)}\displaystyle\prod_{j=1}^{l_0}\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2^j}}_{C^{3+j+m}([0,T^*],Y\times W)},
\end{array}
\right. \tag{5.113}
$$

où $T^*=T+(m+l_0)\Delta t$.

Si on utilise l'hypothèse de récurrence sur l'inégalité (5.110) on obtient (où $T^*=T+(l_0+1)\Delta t$)

$$
\begin{array}{rcl}
\sqrt{\mathcal{E}^{2m}} & \leq & \mathcal{C}\,\mathcal{C}_{l_0}^{\frac{1}{2}}\,[1+T^*]\left[1+T^*\;h^{k-\frac{1}{2}}\right]\;\Upsilon\;\;h^{\frac{p_{l_0}}{2}+\frac{3}{4}} \\
& & \Bigg[\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2^{l_0+1}}}_{C^{2+l_0}([0,T^*],Y\times W)}\displaystyle\prod_{j=1}^{l_0}\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2^{j+1}}}_{C^{3+j}([0,T^*],Y\times W)} \\
& & \|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2}}_{C^{4}([0,T^*],Y\times W)}+ \\
& & \|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2^{l_0+1}}}_{C^{3+l_0}([0,T^*],Y\times W)}\displaystyle\prod_{j=1}^{l_0}\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2^{j+1}}}_{C^{4+j}([0,T^*],Y\times W)} \\
& & \|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2}}_{C^{3}([0,T^*],Y\times W)}\Bigg],
\end{array}
$$

et donc, en faisant quelques majorations simples on trouve que

$$
\begin{array}{rcl}
\sqrt{\mathcal{E}^{2m}} & \leq & \mathcal{C}\mathcal{C}_{l_0}^{\frac{1}{2}}\,[1+T^*]\left[1+T^*\;h^{k-\frac{1}{2}}\right]\;\Upsilon\;\;h^{\frac{p_{l_0}}{2}+\frac{3}{4}} \\
& & \left[\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2^{l_0+1}}}_{C^{3+l_0}([0,T^*],Y\times W)}\displaystyle\prod_{j=1}^{l_0+1}\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2^{j}}}_{C^{3+j}([0,T^*],Y\times W)}\right].
\end{array}
$$

En utilisant cette dernière inégalité et le lemme 5.8.2 on obtient que

$$
\left|
\begin{array}{l}
\|(e_{u,c},e_{u,f})\|_{\infty,H,T}+\|(e_{p,c},e_{p,f})\|_{\infty,V,T} \;\leq\; \mathcal{C}\mathcal{C}_{l_0}^{\frac{1}{2}}\;\Upsilon^2\,[1+T^*]\left[1+T^*\;h^{k-\frac{1}{2}}\right]h^{\frac{p_{l_0}}{2}+\frac{3}{4}} \\
\qquad \|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2^{l_0}}}_{C^{3+l_0}([0,T^*],Y\times W)}\displaystyle\prod_{j=1}^{l_0+1}\|((u_c,u_f),(p_c,p_f))\|^{\frac{1}{2^{j}}}_{C^{3+j}([0,T],Y\times W)},
\end{array}
\right. \tag{5.114}
$$

qui est l'hypothèse de récurrence pour $m=0$ au pas l_0+1 avec

$$
p_{l_0+1} \;=\; \frac{p_{l_0}}{2}+\frac{3}{4}, \qquad\qquad \mathcal{C}_{l_0+1} \;=\; \mathcal{C}\mathcal{C}_{l_0}^{\frac{1}{2}}. \tag{5.115}
$$

Pour finir la preuve on doit obtenir des estimations similaires sur les dérivées m-ièmes de l'erreur. Une preuve tout à fait analogue à celle qu'on vient de présenter nous permet de montrer que pour tout $0\leq$

$m \leq l - (l_0 + 1)$ on a

$$
\left|
\begin{array}{l}
\|\partial^m(e_{u,c}, e_{u,f})\|_{\infty,H,T} + \|\partial^m(e_{p,c}, e_{p,f})\|_{\infty,V,T} \ \leq \\
\mathcal{C}\mathcal{C}_{l_0}^{\frac{1}{2}} \, \Upsilon^2 \, [1 + T^*] \left[1 + T^* \, h^{k-\frac{1}{2}}\right] h^{\frac{p_{l_0}}{2}+\frac{3}{4}} \\
\|((u_c, u_f), (p_c, p_f))\|_{C^{3+l_0+m}([0,T^*],Y\times W)}^{\frac{1}{2^{l_0}}} \prod_{j=1}^{l_0+1} \|((u_c, u_f), (p_c, p_f))\|_{C^{3+j+m}([0,T],Y\times W)}^{\frac{1}{2^j}}.
\end{array}
\right. \tag{5.116}
$$

et donc on a l'hypothèse de récurrence pour $l_0 + 1$. Étant donné que l'étape première de la preuve était l'hypothèse de récurrence pour $l_0 = 1$ on en déduit que

$$
p_{l_0} \ = \ \frac{3}{2} - \frac{1}{2^{l_0}}, \qquad \mathcal{C}_{l_0} \ = \ \mathcal{C}^{s(l_0)} \mathcal{C}_1^{\frac{1}{2^{l_0-1}}}, \quad \text{avec} \quad s(l_0) \ = \ \sum_{n=0}^{l_0-2} \frac{1}{2^n}.
$$

La suite $\mathcal{C}_{l_0}$ est convergente et, par conséquent, elle est bornée. La récurrence nous donne alors le lemme suivant

Lemme 5.8.8 *Supposons que* $((u_c, u_f), (p_c, p_f)) \in C^{3+l}([0, T + l\Delta t = T^*], Y \times W)$*,* $l \geq 1$ *et que les forces externes* $((f_c, f_f), (g_c, g_f))$ *sont assez régulières et que leur support est inclus dans* $(l\Delta t, T) \times (\Omega_c \times \Omega_f)$*. Alors on a l'estimation suivante*

$$
\left|
\begin{array}{l}
\|(e_{u,c}, e_{u,f})\|_{\infty,H,T} + \|(e_{p,c}, e_{p,f})\|_{\infty,V,T} \ \leq \ \mathcal{C} \, \Upsilon^2 \, [1 + T^*] \left[1 + T^* \, h^{k-\frac{1}{2}}\right] h^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2^l}} \\
\qquad \|((u_c, u_f), (p_c, p_f))\|_{C^{2+l}([0,T^*],Y\times W)}^{\frac{1}{2^l}} \prod_{j=1}^{l} \|((u_c, u_f), (p_c, p_f))\|_{C^{3+j}([0,T^*],Y\times W)}^{\frac{1}{2^j}}.
\end{array}
\right. \tag{5.117}
$$

5.8.5 Vérification de l'hypothèse (5.66)

Dans cette section on vérifie l'hypothèse (5.66).(b) qu'on a supposée pour effectuer la preuve des résultats de convergence des deux sections précédentes. Étant donnée la symétrie du problème, les techniques pour la vérification de l'hypothèse (5.66).(a) sont similaires. Dans la pratique, la forme bilinéaire $c(\cdot, \cdot)$ est un opérateur qui fait intervenir les traces (dans un sens général du terme) des fonctions dans $X_l, \ l \in \{c, f\}$ sur l'interface Γ commune aux deux sous-domaines. Notons par

$$
\begin{array}{rccl}
\gamma_\Gamma^l : & X_l & \longrightarrow & \gamma_\Gamma^l \, (X_l) \\
& u_l & \mapsto & \gamma_\Gamma^l(u_l),
\end{array} \tag{5.118}
$$

ces opérateurs de traces généralisés. Alors on aura une expression du type

$$
c(u_c, u_f) \ = < \gamma_\Gamma^c(u_c), \gamma_\Gamma^f(u_f) >,
$$

où le crochet $< \cdot, \cdot >$ dénote un certain produit de dualité dans les espaces adéquats. Le lecteur peut vérifier que dans les applications données dans la section 5.1, en effet, tous les opérateurs $c(\cdot, \cdot)$ ont une expression de ce type. En général, lorsque les traces $\gamma_\Gamma^c(u_c)$ et $\gamma_\Gamma^f(u_f)$ sont plus régulières, ce produit de dualité peut s'écrire comme le produit scalaire $L^2(\Gamma)$ habituelle, c'est-à-dire,

$$
c(u_c, u_f) \ = \ \int_\Gamma \gamma_\Gamma^c(u_c) \, \gamma_\Gamma^f(u_f) \, \mathrm{d}\gamma.
$$

Par ailleurs, il est clair que dans la pratique on a que

$$\forall\, u_c^h \in X_{c,h}, \qquad \gamma_\Gamma^c(u_c^h) \in L^2(\Gamma), \tag{5.119}$$

c'est-à-dire, les traces des fonctions discrètes appartiennent à l'espace $L^2(\Gamma)$. Ensuite on choisi un espace de fonctions $Y_f \subset X_f$ tel que

$$\forall\, u_f \in Y_f, \quad \gamma_\Gamma^f(u_f) \in L^2(\Gamma) \quad \text{et} \quad \|\gamma_\Gamma^f(u_f)\|_{L^2(\Gamma)} \;\leq\; \mathcal{C}\|u_f\|_{Y_f}. \tag{5.120}$$

En général ceci est possible grâce à la régularité dans Y_f. Pour les applications qu'on avait données dans la section 5.1 on a :

1. *Raffinement de maillage pour l'acoustique en dimension d* :

$$\left\{\begin{array}{lll} \gamma_\Gamma^c(u_c) & \equiv & \underline{v}_c \cdot \underline{n}, \qquad \text{(opérateur trace normale)}, \\ \gamma_\Gamma^f(u_f) & \equiv & p_f, \qquad \text{(opérateur trace)}, \\ X_f \;\equiv\; H^1(\Omega_f), & & \gamma_\Gamma^f(X_f) \;\equiv\; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \;\subset\; L^2(\Gamma), \end{array}\right. \tag{5.121}$$

   Dans ce cas on peut prendre $Y_f \;\equiv X_f$.

2. *Raffinement de maillage pour Maxwell en dimension trois* :

$$\left\{\begin{array}{lll} \gamma_\Gamma^c(u_c) & \equiv & \underline{n} \wedge (\underline{E}_c \wedge \underline{n}), \qquad \text{(opérateur trace tangentielle)}, \\ \gamma_\Gamma^f(u_f) & \equiv & \underline{H}_f \wedge \underline{n}, \qquad \text{(opérateur trace tangentielle)}, \\ X_f \;\equiv\; \underline{H}(\underline{\text{rot}}, \Omega_f), & & \gamma_\Gamma^f(X_f) \;\equiv\; \underline{H}_{\|}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma), \end{array}\right. \tag{5.122}$$

   Il suffira de prendre

$$Y_f \;=\; \underline{H^1}(\underline{\text{rot}}, \Omega_f)$$

   pour pouvoir donner aux traces un sens $\underline{L^2}(\Gamma)$.

3. *Raffinement de maillage pour l'élastodynamique en dimension d* :

$$\left\{\begin{array}{lll} \gamma_\Gamma^c(u_c) & \equiv & \underline{\sigma}_c\, \underline{n}, \qquad \text{(opérateur trace normale)}, \\ \gamma_\Gamma^f(u_f) & \equiv & \underline{v}_f, \qquad \text{(opérateur trace)}, \\ X_f \;\equiv\; \underline{H^1}(\Omega_f), & & \gamma_\Gamma^f(X_f) \;\equiv\; \underline{H^{\frac{1}{2}}}(\Gamma) \;\subset\; L^2(\Gamma), \end{array}\right. \tag{5.123}$$

   Dans ce cas on peut aussi prendre $Y_f \equiv X_f$.

4. *Couplage fluide-solide en dimension d* :

$$\left\{\begin{array}{lll} \gamma_\Gamma^c(u_c) & \equiv & p_c\, \underline{n}, \qquad \text{(opérateur trace multiplié par la normale)}, \\ \gamma_\Gamma^f(u_f) & \equiv & \underline{v}_f, \qquad \text{(opérateur trace)}, \\ X_f \;\equiv\; \underline{H^1}(\Omega_f), & & \gamma_\Gamma^f(X_f) \;\equiv\; \underline{H^{\frac{1}{2}}}(\Gamma) \;\subset\; L^2(\Gamma), \end{array}\right. \tag{5.124}$$

   Dans ce cas on peut aussi prendre $Y_f \equiv X_f$.

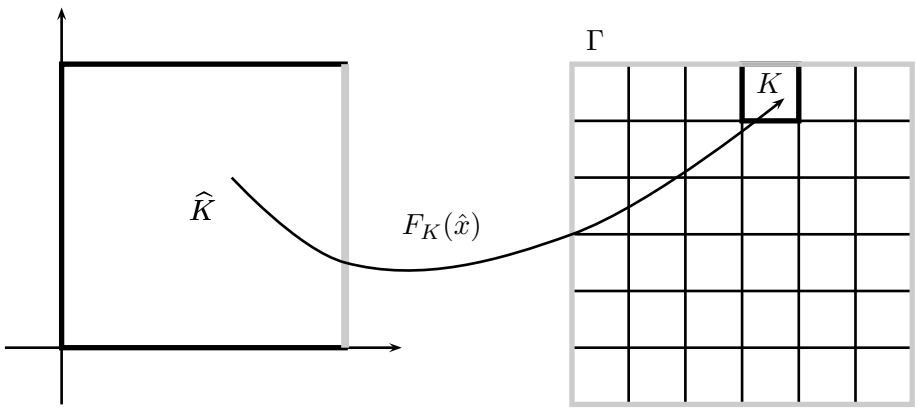


FIG. 5.1 – Transformation de l'élément de référence vers l'élément courant. Cas des quadrilatères

Alors, dans ce cas on aura

$$
(5.125) \qquad \left| \begin{array}{lll} \forall\, (u_c^h, u_f) \in X_{c,h} \times Y_f, & c(u_c^h, u_f) & = \displaystyle\int_\Gamma \gamma_\Gamma^c(u_c^h)\, \gamma_\Gamma^f(u_f)\, \mathrm{d}x \\ & & \leq \|\gamma_\Gamma^c(u_c^h)\|_{L^2(\Gamma)}\, \|\gamma_\Gamma^f(u_f)\|_{L^2(\Gamma)} \\ & & \leq \mathcal{C}\, \|\gamma_\Gamma^c(u_c^h)\|_{L^2(\Gamma)}\, \|u_f\|_{Y_f}. \end{array} \right.
$$

Donc, pour montrer que (5.66).(b) est satisfaite il suffit de montrer que

$$
(5.126) \qquad \left| \; \exists\, \mathcal{C} \quad \text{telle que} \quad \forall\, u_c^h \in X_{c,h}, \qquad \|\gamma_\Gamma^c(u_c^h)\|_{L^2(\Gamma)} \;\leq\; \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{h}}\, \|u_c^h\|_{H_c}. \right.
$$

On rappelle que la norme $\|\cdot\|_{H_c}$ est une norme du type $L^2(\Omega_c)$ et, par conséquent, la propriété (5.126) est l'extension à dimensions supérieures du lemme 2.5.4 utilisé dans l'analyse 1D de la méthode avec multiplicateur. Cette propriété sera vérifié si les maillages utilisés ont la propriété d'être uniformément réguliers. On détaille par la suite ce point.

On dénotera par $T_h(\Omega_c)$ le maillage qu'on utilise sur Ω_c pour la construction des espaces d'approximation $X_{c,h}$ et $V_{c,h}$ et par $\Xi_h(\Gamma)$ le maillage de l'interface Γ induit par $T_h(\Omega_c)$. Pour chaque élément $K \in T_h(\Omega_c)$ on construit l'application

$$
\left| \begin{array}{lccl} F_K : & \widehat{K} & \longrightarrow & K \\ & \hat{x} & \mapsto & F_K(\hat{x}) = x, \end{array} \right.
$$

qui envoi l'élément de référence dans l'élément courant (voir la figure 5.1). Si on pose

$$
JF_K(\hat{x}) \;=\; \det D_{\hat{x}} F_K(\hat{x}),
$$

on supposera que cette application vérifie la propriété suivante :

$$
\left|
\begin{array}{l}
\text{Il existent } \mathcal{C}_1 \text{ et } \mathcal{C}_2 \text{ telles que} \\
\qquad\qquad \dfrac{1}{\mathcal{C}_1}\, h^d \;\leq\; |JF_K(\hat{x})| \;\leq\; \mathcal{C}_2\, h^d, \\
\dfrac{1}{\mathcal{C}_1}\, h^{d-1} \;\leq\; |JF_K(\hat{x})|\, \left|D_{\hat{x}} F_K^{-t}\, \hat{n}(\hat{x})\right| \;\leq\; \mathcal{C}_2\, h^{d-1},
\end{array}
\right. \tag{5.127}
$$

qui sera satisfaite si les maillages sont uniformément réguliers. Étant donné que la trace généralisée $\gamma_\Gamma^c(u_c^h)$ est une combinaison linéaire de la restriction de u_c^h à l'interface Γ on a que

$$
\begin{aligned}
\|\gamma_\Gamma^c(u_c^h)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad &\leq \quad \mathcal{C}\, \|u_{c\,|\Gamma}^h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \;=\; \mathcal{C} \int_\Gamma |u_{c\,|\Gamma}^h(x(s))|^2\, \mathrm{d}\gamma(s) \\
&= \quad \mathcal{C} \sum_{S\in\Xi(\Gamma)} \int_S |u_{c\,|\Gamma}^h(x(s))|^2\, \mathrm{d}\gamma(s) \\
&= \quad \mathcal{C} \sum_{S\in\Xi(\Gamma)} \int_{\widehat{S}} |u_{c\,|\Gamma}^h \circ F_K(\hat{x}(\hat{s}))|^2 \\
&\qquad\qquad |JF_K(\hat{x}(\hat{s}))|\, \left|D_{\hat{x}} F_K^{-t}\, \hat{n}(\hat{x}(\hat{s}))\right|\, \mathrm{d}\gamma(\hat{s}) \\
&\overset{(5.127)}{\leq} \quad \mathcal{C}\, \mathcal{C}_2\, h^{d-1} \sum_{S\in\Xi(\Gamma)} \int_{\widehat{S}} |u_{c\,|\Gamma}^h \circ F_K(\hat{x}(\hat{s}))|^2\, \mathrm{d}\gamma(\hat{s}).
\end{aligned}
$$

Il est clair qu'il existe une constante $\mathcal{C}$ indépendante du pas de discrétisation telle que

$$
\int_{\widehat{S}} |u_{c\,|\Gamma}^h \circ F_K(\hat{x}(\hat{s}))|^2\, \mathrm{d}\gamma(\hat{s}) \;\leq\; \mathcal{C} \int_{\widehat{K}} |u_c^h \circ F_K(\hat{x})|^2\, \mathrm{d}\hat{x}.
$$

Par conséquent,

$$
\left|
\begin{aligned}
\|\gamma_\Gamma^c(u_c^h)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad &\leq \quad \mathcal{C}\, \mathcal{C}_2\, h^{d-1} \sum_{K\in T_h(\Omega_c)} \int_{\widehat{K}} |u_c^h \circ F_K(\hat{x})|^2\, \mathrm{d}\hat{x} \\
&\overset{(5.127)}{\leq} \quad \mathcal{C}\, \mathcal{C}_2\, \mathcal{C}_1\, \frac{1}{h} \sum_{K\in T_h(\Omega_c)} \int_{\widehat{K}} |u_c^h \circ F_K(\hat{x})|^2\, |JF_K(\hat{x}(\hat{s}))|\, \mathrm{d}\hat{x} \\
&= \quad \mathcal{C}\, \mathcal{C}_2\, \mathcal{C}_1\, \frac{1}{h} \sum_{K\in T_h(\Omega_c)} \int_{\widehat{K}} |u_c^h(x)|^2\, \mathrm{d}x \\
&= \quad \mathcal{C}\, \mathcal{C}_2\, \mathcal{C}_1\, \frac{1}{h}\, \|u_c^h\|_{H_c}^2,
\end{aligned}
\right. \tag{5.128}
$$

et donc (5.126) est satisfaite.

Chapitre 6

Raffinement de Maillage Spatio–Temporel (q_c, q_f) Stable sans Multiplicateur de Lagrange

Sommaire

6.1 Extension au cas (q_c, q_f) général 201

6.1.1 Schéma intérieur 201

6.1.2 Équations de Couplage : Conservation d'une énergie discrète 202

6.2 Caractère bien posé du Problème Discret 203

6.3 Une Amélioration de la Méthode. Post-Traitement en Temps de la Solution 209

Etant donné que la méthode présenté dans la section précédente se sert de deux formulations différentes dans chacune des régions, le fait de pouvoir faire que des raffinements avec un taux deux est un grand inconvénient. C'est pour ceci qu'on étend dans cette section la méthode au cas plus général où on utilise un maillage de pas spatio-temporel $(\Delta t_l, h_l) = (\Delta t/q_l, \Delta x/q_l)$ sur chaque domaine $\Omega_l,\ l \in \{c, f\}$. Cette méthode aura des phénomènes parasites haute fréquence de nature similaires à ceux observés dans la technique présentée dans le chapitre 3. On utilisera un post-traitement de la solution comme celui présenté dans le chapitre 4 afin d'améliorer la précision.

6.1 Extension au cas (q_c, q_f) général

6.1.1 Schéma intérieur

On utilise le schéma présenté dans 3.1.1 comme schéma intérieur avec un pas de temps $\Delta t_l = \Delta t/q_l,\ l \in \{c, f\}$ pour avoir le même rapport entre le pas d'espace et le pas de temps sur tout le domaine de calcul.

Ainsi on aura

$$
(6.1)\quad \left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } (U_c^{n+\frac{k}{q_c}}, P_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}}, U_f^{n+\frac{k}{q_f}}, P_f^{n+\frac{2k+1}{2q_f}}) \text{ vérifiant} \\
\left\{\begin{array}{lllllll}
M_{p,c}\dfrac{P_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}} - P_c^{n+\frac{2k-1}{2q_c}}}{\Delta t_c} & - & D_c U_c^{n+\frac{k}{q_c}} & & & = & F_c^{n+\frac{k}{q_c}}, \\
M_{u,c}\dfrac{U_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} - U_c^{n+\frac{k}{q_c}}}{\Delta t_c} & + & D_c^* P_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}} & - & C\,[U_f]^{n+\frac{2k+1}{2q_c}} & = & G_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}},
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{lllllll}
M_{p,f}\dfrac{P_f^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}} - P_f^{n+\frac{2\tilde{k}-1}{2q_f}}}{\Delta t_f} & - & D_f U_f^{n+\frac{\tilde{k}}{q_f}} & & & = & F_f^{n+\frac{\tilde{k}}{q_f}}, \\
M_{u,f}\dfrac{U_f^{n+\frac{\tilde{k}+1}{q_f}} - U_f^{n+\frac{\tilde{k}}{q_f}}}{\Delta t_f} & + & D_f^* P_f^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}} & + & C^*\,[U_c]^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}} & = & G_f^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}},
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

où $k \in \{0, \ldots, q_c - 1\}$, $\tilde{k} \in \{0, \ldots, q_f - 1\}$, et les quantités entre crochets sont à déterminer.

6.1.2 Équations de Couplage : Conservation d'une énergie discrète

De la même façon qu'on a fait dans le cas du raffinement de maillage avec multiplicateur de Lagrange, on va imposer la conservation d'une énergie discrète en absence de forces externes. Ceci nous permettra assurer la stabilité de la méthode sous une condition de type CFL sous laquel l'énergie sera équivalente a la norme L^2 de la solution. Ainsi, on définit l'énergie discrète totale aux instantes paires par

$$
(6.2)\qquad \mathbf{E}^n \;=\; \mathbf{E}_c^n + \mathbf{E}_f^n,
$$

où l'énergie locale dans chaque sous-domaine est donné par

$$
\mathbf{E}_l^{n+\frac{k}{q_l}} \;:=\; \frac{1}{2}\left\{\left(M_{u,l}U_l^{n+\frac{k}{q_l}}, U_l^{n+\frac{k}{q_l}}\right) + \left(M_{p,l}P_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}, P_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}}\right)\right\},
$$

avec $k \in \{0, \ldots, q_l - 1\},\ l \in \{c, f\}$. Ainsi on peut énoncer le théorème suivant

Théorème 6.1.1 (Schéma conservatif) *Pour compléter le système (6.1) et obtenir un schéma numérique qui conserve l'énergie (6.2) en absence de forces externes, les quantités* $[U_f]^{n+\frac{2k+1}{2q_c}}$ *et* $[U_c]^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}}$ *doivent satisfaire*

$$
(6.3)\sum_{k=0}^{q_c-1}\left(C\,[U_f]^{n+\frac{2k+1}{2q_c}}, \frac{U_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} + U_c^{n+\frac{k}{q_c}}}{2q_c}\right) \;=\; \sum_{\tilde{k}=0}^{q_f-1}\left(C^*\,[U_c]^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}}, \frac{U_f^{n+\frac{\tilde{k}+1}{q_f}} + U_f^{n+\frac{\tilde{k}}{q_f}}}{2q_f}\right).
$$

Preuve: La preuve est similaire à celle du théorème 3.1.1. □

En généralisant le choix fait dans (5.56) on pose

$$
(6.4)\quad \left\{\begin{array}{lll}
[U_f]^{n+\frac{2k+1}{2q_c}} & = & \displaystyle\sum_{\tilde{k}=0}^{q_f-1}\frac{U_f^{n+\frac{\tilde{k}+1}{q_f}} + U_f^{n+\frac{\tilde{k}}{q_f}}}{2q_f}, \quad \forall k \in \{0, \ldots, q_c - 1\}, \qquad (a) \\
[U_c]^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}} & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{q_c-1}\frac{U_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} + U_c^{n+\frac{k}{q_c}}}{2q_c}, \quad \forall \tilde{k} \in \{0, \ldots, q_f - 1\}, \qquad (b)
\end{array}\right.
$$

qui est clairement consistant avec les équations de raccord et conserve l'énergie. Donc finalement, le schéma numérique est complètement définit avec les équations (6.1) et (6.4). Pour simplifier la notation on définit

$$
(6.5) \qquad \left|
\begin{aligned}
[\![U_f]\!]^{n+\frac{1}{2}} &:= \sum_{\tilde{k}=0}^{q_f-1} \frac{U_f^{n+\frac{\tilde{k}+1}{q_f}} + U_f^{n+\frac{\tilde{k}}{q_f}}}{2q_f}, \\
[\![U_c]\!]^{n+\frac{1}{2}} &:= \sum_{k=0}^{q_c-1} \frac{U_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} + U_c^{n+\frac{k}{q_c}}}{2q_c}.
\end{aligned}
\right.
$$

Remarque 6.1.1 *Presque toutes les équations dans (6.4) sont consistantes à l'ordre un.*

6.2 Caractère bien posé du Problème Discret

Étudions sous quelles hypothèses notre problème a une et une seule solution. Supposons que l'on a déjà calculé toutes les inconnues jusqu'au temps t^n :

- À l'aide de la première équation de (6.1) avec $k = 0$ (et avec la troisième équation de (6.1) avec $\tilde{k} = 0$) on peut calculer $P_c^{n+\frac{1}{2q_c}}$ (et $P_f^{n+\frac{1}{2q_f}}$ respectivement).
- En suite, on peut calculer d'une façon implicite les quantités $C\,[\![U_f]\!]^{n+\frac{1}{2}}$ et $C^*\,[\![U_c]\!]^{n+\frac{1}{2}}$ en résolvant un système linéaire dont le second membre ne dépend que des inconnues déjà calculées. (Ceci est l'objet des prochaines propositions qui exhibent les expressions de la matrice à inverser et du second membre).
- Finalement les systèmes dans (6.1) sont découplés par sous-domaine et on peut calculer U_l en fonction de P_l (et viceversa) pour $l \in \{c, f\}$ et jusqu'au temps t^{n+1} en utilisant les équations dans (6.1).

Par conséquent, le caractère bien posé du problème reste conditionné à l'inversibilité des matrices qui nous permettront de calculer les valeurs à l'interface.

Proposition 6.2.1 *Supposons que* $(U_c^{n+\frac{k}{q_c}}, P_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}}, U_f^{n+\frac{\tilde{k}}{q_f}}, P_l^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}})$ *satisfont les équations (6.1)–(6.4). Alors on a*

$$
(6.6) \qquad \left|
\begin{aligned}
0 \;=\; & \sum_{k=0}^{q_c-1} C^* \left(U_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} + U_c^{n+\frac{k}{q_c}} \right) - 2C^* P_{q_c}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) U_c^n + \\
& \Delta t_c\, C^*\, Q_{q_c}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))(M_{u,c})^{-1} \left(D_c^* P_c^{n+\frac{1}{2q_c}} - C\,[\![U_f]\!]^{n+\frac{1}{2}} \right) - \\
& \Delta t_c\, C^* \sum_{k=0}^{q_c-1} \left(2P_{k+1}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) - I \right) (M_{u,c})^{-1} G_c^{n+\frac{2(q_c-k)-1}{2q_c}} + \\
& \Delta t_c^2\, C^* \sum_{k=0}^{q_c-1} Q_k(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))(M_{u,c})^{-1} D_c^* (M_{p,c})^{-1} F_c^{n+\frac{q_c-k}{q_c}}.
\end{aligned}
\right.
$$

et

$$
(6.7)\quad \left|\begin{array}{rcl}
0 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{q_f-1} C\left(U_f^{n+\frac{k+1}{q_f}} + U_f^{n+\frac{k}{q_f}}\right) - 2CP_{q_f}(\widetilde{N}_f(\Delta t_f))U_f^n + \\
& & \Delta t_f\, C\, Q_{q_f}(\widetilde{N}_f(\Delta t_f))(M_{u,f})^{-1}\left(D_f^* P_f^{n+\frac{1}{2q_f}} + C^*\,[\![U_c]\!]^{n+\frac{1}{2}}\right) - \\
& & \Delta t_f\, C \displaystyle\sum_{k=0}^{q_f-1}\left(2P_{k+1}(\widetilde{N}_f(\Delta t_f)) - I\right)(M_{u,f})^{-1} G_f^{n+\frac{2(q_f-k)-1}{2q_f}} + \\
& & \Delta t_f^2\, C \displaystyle\sum_{k=0}^{q_f-1} Q_k(\widetilde{N}_f(\Delta t_f))(M_{u,f})^{-1} D_f^*(M_{p,f})^{-1} F_f^{n+\frac{q_f-k}{q_f}}.
\end{array}\right.
$$

où les matrices $\widetilde{N}_l(\Delta t_l)$ sont données par

$$
\widetilde{N}_l(\Delta t_l) \;:=\; I - \frac{\Delta t_l^2}{4}(M_{u,l})^{-1} D_l^*(M_{p,l})^{-1} D_l, \qquad l \in \{c, f\},
$$

et les polynômes $P_k(N)$ et $Q_k(N)$ sont donnés par (3.10).

Preuve: On commence par montrer (6.6). On rappelle que, étant donné qu'on suppose que nos inconnues satisfont (6.4) toutes les inconnues $[CU_f]^{n+\frac{2k+1}{2q_c}}$ dans l'intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$ sont égales à $C\,[\![U_f]\!]^{\frac{1}{2}}$. On prouvera par induction que pour tout $k_0 \in \{1, \ldots, q_c\}$ on a

$$
(6.8)\qquad (HR)\quad \left|\begin{array}{rcl}
0 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{k_0-1} C^*\left(U_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} + U_c^{n+\frac{k}{q_c}}\right) - 2C^* P_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))U_c^n + \\
& & \Delta t_c\, C^*\, Q_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))(M_{u,c})^{-1}\left(D_c^* P_c^{n+\frac{1}{2q_c}} - C\,[\![U_f]\!]^{n+\frac{1}{2}}\right) - \\
& & \Delta t_c\, C^* \displaystyle\sum_{k=0}^{k_0-1}\left(2P_{k+1}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) - I\right)(M_{u,c})^{-1} G_c^{n+\frac{2(k_0-k)-1}{2q_c}} + \\
& & \Delta t_c^2\, C^* \displaystyle\sum_{k=0}^{k_0-1} Q_k(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))(M_{u,c})^{-1} D_c^*(M_{p,c})^{-1} F_c^{n+\frac{k_0-k}{q_c}},
\end{array}\right.
$$

en utilisant les deux premières équations de (6.1) avec $\tilde{k} \in \{0, \ldots, k_0 - 1\}$.

– En utilisant la deuxième équation de (6.1) pour $\tilde{k} = 0$ il est clair que

$$
(6.9)\quad \left|\begin{array}{rcl}
0 & = & C^*\left(U_c^{n+\frac{1}{q_c}} + U_c^n\right) - 2C^* U_c^n + \\
& & \Delta t_c C^*(M_{u,c})^{-1}\left(D_c^* P_c^{n+\frac{1}{2q_c}} - C\,[\![U_f]\!]^{n+\frac{1}{2}}\right) - \Delta t_c C^*(M_{u,c})^{-1} G_c^{n+\frac{1}{2q_c}},
\end{array}\right.
$$

et donc on a l'hypothèse de récurrence (HR) pour $k_0 = 1$ avec les valeurs qui conviennent.

– Supposons que pour un $k_0 \in \{2, \ldots, q_c - 1\}$ on a l'hypothèse de récurrence (6.8) (en utilisant les deux premières équations de (6.1) avec $\tilde{k} \in \{0, \ldots, k_0 - 1\}$), alors, il est clair qu'en utilisant les

mêmes équations mais avec $\tilde{k} \in \{1, \ldots, k_0\}$ on aura

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \sum_{k=1}^{k_0} C^* \left(U_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} + U_c^{n+\frac{k}{q_c}} \right) - 2C^* P_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) U_c^{n+\frac{1}{2q_c}} + \\
& \Delta t_c C^* Q_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))(M_{u,c})^{-1} \left(D_c^* P_c^{n+\frac{3}{2q_c}} - C \left[\!\left[U_f \right]\!\right]^{n+\frac{1}{2}} \right) - \\
& \Delta t_c C^* \sum_{k=0}^{k_0-1} \left(2P_{k+1}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) - I \right) (M_{u,c})^{-1} G_c^{n+\frac{2(k_0-k)+1}{2q_c}} + \\
& \Delta t_c^2 C^* \sum_{k=0}^{k_0-1} Q_k(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))(M_{u,c})^{-1} D_c^* (M_{p,c})^{-1} F_c^{n+\frac{k_0-k+1}{q_c}}.
\end{aligned}
$$

Ensuite on utilise la première équation de (6.1) avec $\tilde{k} = 1$ pour écrire $P_c^{n+\frac{3}{2q_c}}$ en fonction de $U_c^{n+\frac{1}{q_c}}$ et les termes sources en obtenant,

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \sum_{k=1}^{k_0} C^* \left(U_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} + U_c^{n+\frac{k}{q_c}} \right) - \\
& 2C^* \left(P_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) - \frac{\Delta t_c^2}{2} Q_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))(M_{u,c})^{-1} D_c^* (M_{p,c})^{-1} D_c \right) U_c^{n+\frac{1}{q_c}} + \\
& \Delta t_c C^* Q_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))(M_{u,c})^{-1} \left(D_c^* P_c^{n+\frac{1}{2q_c}} - C \left[\!\left[U_f \right]\!\right]^{n+\frac{1}{2}} \right) - \\
& \Delta t_c C^* \sum_{k=0}^{k_0-1} \left(2P_{k+1}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) - I \right) (M_{u,c})^{-1} G_c^{n+\frac{2(k_0-k)+1}{2q_c}} + \\
& \Delta t_c^2 C^* \sum_{k=0}^{k_0} Q_k(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))(M_{u,c})^{-1} D_c^* (M_{p,c})^{-1} F_c^{n+\frac{k_0-k+1}{q_c}}.
\end{aligned}
$$

On remarque que

$$
\begin{aligned}
P_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) - \frac{\Delta t_c^2}{2} Q_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))(M_{u,c})^{-1} D_c^* (M_{p,c})^{-1} D_c \;=& \\
2Q_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) \left(\widetilde{N}_c(\Delta t_c) - I \right) + P_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)),&
\end{aligned}
$$

et en utilisant la deuxième équation de (6.1) avec $\tilde{k} = 0$ on obtient

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \sum_{k=1}^{k_0} C^* \left(U_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} + U_c^{n+\frac{k}{q_c}} \right) - \\
& 2C^* \left(2Q_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) \left(\widetilde{N}_c(\Delta t_c) - I \right) + P_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) \right) U_c^n + \\
& \Delta t_c C^* \left(\left(4\widetilde{N}_c(\Delta t_c) - 3I \right) Q_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) + 2P_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) \right) (M_{u,c})^{-1} \\
& \left(D_c^* P_c^{n+\frac{1}{2q_c}} - C \left[\!\left[U_f \right]\!\right]^{n+\frac{1}{2}} \right) - \\
& \Delta t_c C^* \sum_{k=0}^{k_0-1} \left(2P_{k+1}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) - I \right) (M_{u,c})^{-1} G_c^{n+\frac{2(k_0-k)+1}{2q_c}} - \\
& \Delta t_c C^* \left(4Q_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))(\widetilde{N}_c(\Delta t_c) - I) + 2P_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) \right) (M_{u,c})^{-1} G_c^{n+\frac{1}{2q_c}} + \\
& \Delta t_c^2 C^* \sum_{k=0}^{k_0} Q_k(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) (M_{u,c})^{-1} D_c^* (M_{p,c})^{-1} F_c^{n+\frac{k_0-k+1}{q_c}}.
\end{aligned}
$$

Si on ajoute (6.9) à la dernière égalité on trouve

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \sum_{k=0}^{k_0} C^* \left(U_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} + U_c^{n+\frac{k}{q_c}} \right) - \\
& 2C^* \left(2Q_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) \left(\widetilde{N}_c(\Delta t_c) - I \right) + P_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) + I \right) U_c^n + \\
& \Delta t_c C^* \left(\left(4\widetilde{N}_c(\Delta t_c) - 3I \right) Q_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) + 2P_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) + I \right) (M_{u,c})^{-1} \\
& \left(D_c^* P_c^{n+\frac{1}{2q_c}} - C \left[\!\left[U_f \right]\!\right]^{n+\frac{1}{2}} \right) - \\
& \Delta t_c C^* \sum_{k=0}^{k_0-1} \left(2P_{k+1}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) - I \right) (M_{u,c})^{-1} G_c^{n+\frac{2(k_0-k)+1}{2q_c}} - \\
& \Delta t_c C^* \left(4Q_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))(\widetilde{N}_c(\Delta t_c) - I) + 2P_{k_0}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) + I \right) (M_{u,c})^{-1} G_c^{n+\frac{1}{2q_c}} + \\
& \Delta t_c^2 C^* \sum_{k=0}^{k_0} Q_k(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) (M_{u,c})^{-1} D_c^* (M_{p,c})^{-1} F_c^{n+\frac{k_0-k+1}{q_c}}.
\end{aligned}
$$

où on a utilisé les deux premières de (6.1) avec $\tilde{k} \in \{0, \ldots, q_c\}$ et on obtient l'hypothèse de récurrence pour $k_0 + 1$.

L'égalité (6.6) du théorème est obtenue en prenant $k_0 = q_c$ dans (HR). La preuve de (6.7) est similaire. □

Proposition 6.2.2 *Sous les hypothèses de la proposition 6.2.1 les expressions suivantes sont satisfaites*

$$\left|\begin{array}{lllll} C\,[\![U_f]\!]^{n+\frac{1}{2}} & + & \dfrac{\Delta t_f}{2q_f} C Q_{q_f}(\widetilde{N}_f(\Delta t_f))(M_{u,f})^{-1} C^* \,[\![U_c]\!]^{n+\frac{1}{2}} & = & (SM_1)^{n+\frac{1}{2}}, \\ C^*\,[\![U_c]\!]^{n+\frac{1}{2}} & - & \dfrac{\Delta t_c}{2q_c} C^* Q_{q_c}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))(M_{u,c})^{-1} C\,[\![U_f]\!]^{n+\frac{1}{2}} & = & (SM_2)^{n+\frac{1}{2}}, \end{array}\right. \tag{6.10}$$

avec

$$\begin{aligned} (SM_1)^{n+\frac{1}{2}} \;=\; & \tfrac{1}{q_f} C P_{q_f}(\widetilde{N}_f(\Delta t_c)) U_f^n - \tfrac{\Delta t_f}{2q_f} C Q_{q_f}(\widetilde{N}_f(\Delta t_f))(M_{u,f})^{-1} D_f^* P_f^{n+\frac{1}{2q_f}} + \\ & \tfrac{\Delta t_f}{2q_f} C \sum_{k=0}^{q_f-1} \Big(2P_{k+1}(\widetilde{N}_f(\Delta t_f)) - I\Big)(M_{u,f})^{-1} G_f^{n+\frac{2(q_f-k)-1}{2q_f}} - \\ & \tfrac{\Delta t_f^2}{2q_f} C \sum_{k=0}^{q_f-1} Q_k(\widetilde{N}_f(\Delta t_f))(M_{u,f})^{-1} D_f^* (M_{p,f})^{-1} F_f^{n+\frac{q_f-k}{q_f}}, \end{aligned} \tag{6.11}$$

et

$$\begin{aligned} (SM_2)^{n+\frac{1}{2}} \;=\; & \tfrac{1}{q_c} C^* P_{q_c}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) U_c^n - \tfrac{\Delta t_c}{2q_c} C^* Q_{q_c}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))(M_{u,c})^{-1} D_c^* P_c^{n+\frac{1}{2q_c}} + \\ & \tfrac{\Delta t_c}{2q_c} C^* \sum_{k=0}^{q_c-1} \Big(2P_{k+1}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c)) - I\Big)(M_{u,c})^{-1} G_c^{n+\frac{2(q_c-k)-1}{2q_c}} - \\ & \tfrac{\Delta t_c^2}{2q_c} C^* \sum_{k=0}^{q_c-1} Q_k(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))(M_{u,c})^{-1} D_c^* (M_{p,c})^{-1} F_c^{n+\frac{q_c-k}{q_c}}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Preuve: Il suffit de diviser les expressions (6.6) et (6.7) par $1/2q_l,\ l \in \{c, f\}$ respectivement et d'utiliser (6.5) pour obtenir les résultats. □

Corollaire 6.2.3 *Sous les hypothèses de la proposition 6.2.1 on a*

$$\widetilde{\mathcal{M}}_c(\Delta t) C\,[\![U_f]\!]^{n+\frac{1}{2}} \;=\; (SM_1)^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t_f}{2q_f} C Q_{q_f}(\widetilde{N}_f(\Delta t_f))(M_{u,f})^{-1}(SM_2)^{n+\frac{1}{2}}, \tag{6.13}$$

où

$$\widetilde{\mathcal{M}}_c(\Delta t) \;=\; I + \frac{\Delta t_f \Delta t_c}{4q_f q_c} C Q_{q_f}(\widetilde{N}_f(\Delta t_f))(M_{u,f})^{-1} C^* Q_{q_c}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))(M_{u,c})^{-1}. \tag{6.14}$$

et les expressions de $(SM)_1$ et $(SM)_2$ sont donnés par (6.11) et (6.12).

Preuve: Il suffit d'éliminer l'inconnue $C^*\,[\![U_c]\!]^{n+\frac{1}{2}}$ du système (6.10). □

Remarque 6.2.1 *Une fois qu'on a calculé l'inconnue $C\,[\![U_f]\!]^{n+\frac{1}{2}}$ on peut obtenir toutes les inconnues sur Ω_c jusqu'au temps t^{n+1} et donc, on peut aussi calculer $C^*\,[\![U_c]\!]^{n+\frac{1}{2}}$ avec la deuxième équation de (6.5). Finalement, on peut aussi calculer toutes les inconnues du coté fin jusqu'au temps t^{n+1}.*

Finalement on s'intéresse au caractère inversible de la matrice (6.14). On utilisera le lemme suivant

Lemme 6.2.1 *Toute matrice $\widetilde{\mathcal{M}}$ de la forme*

$$\widetilde{\mathcal{M}} = I + AB, \tag{6.15}$$

avec A et B des matrices symétriques et positives, est inversible.

Preuve: Supposons dans un premier temps que la matrice A est définie positive. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
(I + AB)\, x &= \lambda x, && \Longleftrightarrow \\
x + A^{\frac{1}{2}} \left(A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}} \right) A^{-\frac{1}{2}} x &= \lambda x, && \Longleftrightarrow \\
A^{-\frac{1}{2}} x + \left(A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}} \right) A^{-\frac{1}{2}} x &= \lambda A^{-\frac{1}{2}} x, && \Longleftrightarrow \\
\left(I + A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}} \right) y &= \lambda y.
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\sigma\,(I + AB) = \sigma \left(I + A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}} \right) \subset [1, \infty)$$

(car la matrice $A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}}$ est symétrique et positive) et donc la matrice $\widetilde{\mathcal{M}}$ est inversible. Si la matrice A est simplement positive, on construit A_ε, approximation de A telle que

$$A_\epsilon \text{ symétrique définie positive}, \quad A_\varepsilon \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} A.$$

Ainsi on montre que

$$\sigma\,(I + A_\varepsilon B) \subset [1, \infty),$$

et donc, en passant à la limite on montre que 0 n'est pas valeur propre de la matrice $I + AB$, c'est à dire, $\widetilde{\mathcal{M}}$ est inversible. □

Théorème 6.2.4 (Caractère bien posé) *Supposons que les matrices $N_l(\Delta t_l)$, $l \in \{c, f\}$ donnés par (3.23) sont définies positives (condition CFL habituelle dans chaque domaine). Alors la matrice $\widetilde{\mathcal{M}}_c(\Delta t)$ est inversible et le problème (6.1)–(6.4) est bien posé.*

Preuve: Grâce aux hypothèses on a que les matrices

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\Delta t_f \Delta t_c}{4 q_f q_c} C Q_{q_f}(\widetilde{N}_f(\Delta t_f))(M_{u,f})^{-1} C^* \\
B &= Q_{q_c}(\widetilde{N}_c(\Delta t_c))(M_{u,c})^{-1}
\end{aligned}$$

sont symétriques et positives (voir le lemme 3.2.6). Le lemme précédent nous dit que la matrice $\widetilde{\mathcal{M}}_c(\Delta t)$ est inversible et donc le problème totalement discrétisé est bien posé. □

6.3 Une Amélioration de la Méthode. Post-Traitement en Temps de la Solution

Ensuite, on fait un post-traitement en temps de la solution (comme dans le chapitre 4) afin de réduire les phénomènes parasites liés à la non-conformité entre les grilles en temps. On pose

$$
(6.16)\qquad \left|\begin{array}{lcll}
\bar{R}_l^{\frac{n}{q_f}+\frac{1}{2}} & := & \displaystyle\sum_{m=0}^{q_f-1} \frac{R_l^{\frac{n+m+1}{q_l}} + R_l^{\frac{n+m}{q_l}}}{2q_l}, & R \in \{U, F\}\,, \\[2ex]
\bar{Q}_l^{\frac{2n+1}{2q_l}+\frac{1}{2}} & := & \displaystyle\sum_{m=0}^{q_l-1} \frac{Q_l^{\frac{2n+2m+3}{2q_l}} + Q_l^{\frac{2n+2m+1}{2q_l}}}{2q_l}, & Q \in \{P, G\},
\end{array}\right.
$$

où $l \in \{c, f\}$. Il est évidement intéressant d'avoir une méthode qui fournisse la solution post-traitée directement. On exprime alors la méthode conservative originale en termes des nouvelles inconnues. Ainsi, le schéma intérieur devient

(6.17)

Trouver $(\bar{U}_c^{n+\frac{k}{q_c}-\frac{1}{2}}, \bar{P}_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}-\frac{1}{2}}, \bar{U}_f^{n+\frac{k}{q_f}-\frac{1}{2}}, \bar{P}_f^{n+\frac{2k+1}{2q_f}-\frac{1}{2}})$ vérifiant

$$
\left\{\begin{array}{lcl}
M_{p,c}\dfrac{\bar{P}_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}-\frac{1}{2}} - \bar{P}_c^{n+\frac{2k-1}{2q_c}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_c} - D_c\bar{U}_c^{n+\frac{k}{q_c}-\frac{1}{2}} & = & \bar{F}_c^{n+\frac{k}{q_c}-\frac{1}{2}} \\[2ex]
M_{u,c}\dfrac{\bar{U}_c^{n+\frac{k+1}{q_c}-\frac{1}{2}} - \bar{U}_c^{n+\frac{k}{q_c}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_c} + D_c^*\bar{P}_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}-\frac{1}{2}} - C\left[\bar{U}_f\right]^{n+\frac{2k+1}{2q_c}-\frac{1}{2}} & = & \bar{G}_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}-\frac{1}{2}}
\end{array}\right.
$$

$$
\left\{\begin{array}{lcl}
M_{p,f}\dfrac{\bar{P}_f^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}-\frac{1}{2}} - \bar{P}_f^{n+\frac{2\tilde{k}-1}{2q_f}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_f} - D_f\bar{U}_f^{n+\frac{\tilde{k}}{q_f}-\frac{1}{2}} & = & \bar{F}_f^{n+\frac{\tilde{k}}{q_f}-\frac{1}{2}} \\[2ex]
M_{u,f}\dfrac{\bar{U}_f^{n+\frac{\tilde{k}+1}{q_f}-\frac{1}{2}} - \bar{U}_f^{n+\frac{\tilde{k}}{q_f}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_f} + D_f^*\bar{P}_f^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}-\frac{1}{2}} + C^*\left[\bar{U}_c\right]^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}-\frac{1}{2}} & = & \bar{G}_f^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}-\frac{1}{2}}
\end{array}\right.
$$

où

$$
(6.18)\qquad \left|\begin{array}{lcl}
\left[\overline{U}_f\right]^{n+\frac{2k+1}{2q_c}-\frac{1}{2}} & := & \displaystyle\sum_{m=0}^{q_c-1} \frac{[U_f]^{n+\frac{2k+2m+1}{2q_c}} + [U_f]^{n+\frac{2k+2m-1}{2q_c}}}{2q_c}, \\[2ex]
\left[\overline{U}_c\right]^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}-\frac{1}{2}} & := & \displaystyle\sum_{m=0}^{q_f-1} \frac{[U_c]^{n+\frac{2\tilde{k}+2m+1}{2q_f}} + [U_c]^{n+\frac{2\tilde{k}+2m-1}{2q_f}}}{2q_f}.
\end{array}\right.
$$

et $k \in \{0, \ldots, q_c - 1\}$, $\tilde{k} \in \{0, \ldots, q_f - 1\}$. Le second membre des équations de raccord (6.4) se simplifie notablement en obtenant

$$
\left|\begin{array}{lclcll}
[U_f]^{n+\frac{2k+1}{2q_c}} & = & \bar{U}_f^{n+\frac{1}{2}} & = & \left(\llbracket U_f \rrbracket^{n+\frac{1}{2}}\right), & \forall k \in \{0, \ldots, q_c - 1\}, \\[2ex]
[U_c]^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}} & = & \bar{U}_c^{n+\frac{1}{2}} & = & \left(\llbracket U_c \rrbracket^{n+\frac{1}{2}}\right), & \forall \tilde{k} \in \{0, \ldots, q_f - 1\}.
\end{array}\right.
$$

Par conséquent, si on exprime ces expressions en utilisant que les nouvelles inconnues on trouve

$$
(6.19) \quad \left| \begin{array}{lcl} \left[\overline{U}_f\right]^{n+\frac{2k+1}{2q_c}-\frac{1}{2}} & = & \dfrac{2k+1}{2q_c}\,\bar{U}_f^{n+\frac{1}{2}} + \left(1-\dfrac{2k+1}{2q_c}\right)\,\bar{U}_f^{n-\frac{1}{2}}, \quad k \in \{0,\ldots,q_c-1\}, \\ \left[\overline{U}_c\right]^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}-\frac{1}{2}} & = & \dfrac{2\tilde{k}+1}{2q_f}\,\bar{U}_c^{n+\frac{1}{2}} + \left(1-\dfrac{2\tilde{k}+1}{2q_f}\right)\,\bar{U}_c^{n-\frac{1}{2}}, \quad \tilde{k} \in \{0,\ldots,q_f-1\}. \end{array} \right.
$$

Le nouveau schéma, qui est clairement stable, est donné par (6.17) et (6.19).

Remarque 6.3.1 *Les nouvelles équations de raccord dans (6.19) sont consistantes à l'ordre deux avec les équations de transmission continues.*

Troisième partie

La Méthode de Domaines Fictifs

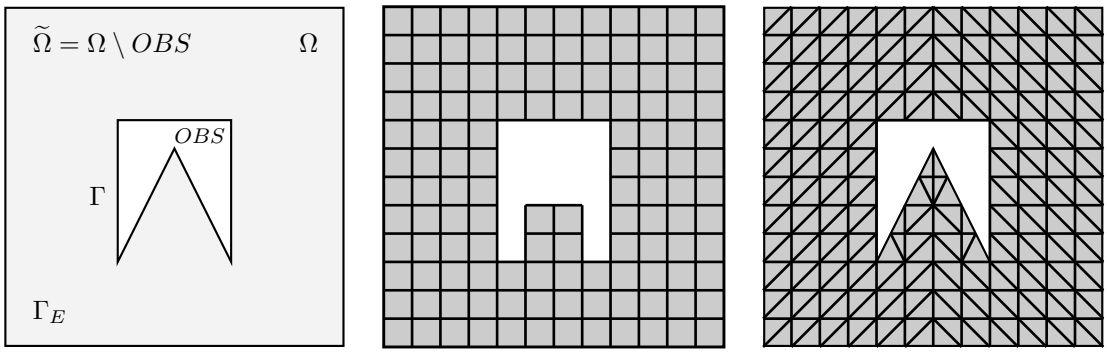
Chapitre 7

Introduction et Rappels de la Méthode de Domaines Fictifs

Sommaire

7.1 La Méthode des Domaines Fictifs pour des Problèmes de Diffraction 215
7.1.1 L'Équation des Ondes Scalaire 2D 215
7.1.1.1 Formulation Variationnelle 216
7.1.1.2 Discrétisation en Espace 217
7.1.1.3 Discrétisation en Temps 218
7.1.2 Les Équations de l'Élastodynamique 2D 219
7.1.2.1 Formulation Variationnelle 219
7.1.2.2 Discrétisation en Espace 220
7.1.2.3 Discrétisation en Temps 222
7.2 Condition Inf-Sup. Compatibilité entre les Maillages 222
7.3 Sur la Stabilité de la Méthode 223
7.4 Bilan des Résultats de Convergence dans la Littérature 224

Notre objectif est la résolution de problèmes de diffraction d'ondes sur un domaine qui peut être de géométrie complexe (typiquement on aura des fissures dans l'application à l'élas-to-dy-namique). Afin de prendre en compte numériquement les conditions aux limites, plusieurs méthodes numériques peuvent être utilisées. Une méthode possible, qui a été très utilisée dans la littérature de l'electromagnétisme, est la méthode de différences finies [83, 78, 82, 84, 70, 31]. Elle est très attractive à cause du caractère structuré des données et du caractère explicite du problème totalement discrétisé. Cependant l'approximation de la frontière (par des marches d'escalier) est en générale assez mauvaise (voir la figure 7.1.b)). Ceci crée des diffractions parasites qui font que la méthode converge assez lentement. La méthode des éléments finis [63, 29, 30] élimine cet inconvénient. Le maillage s'adapte cette fois (presque) parfaitement à la géométrie (voir la figure 7.1.c)). Cependant, sa construction peut être complexe (surtout dans le cas 3D) et le coût en termes de place mémoire est assez élevé. La construction de méthodes explicites en temps peut être compliquée (techniques de condensation de masse [32, 29, 33, 10, 14]), voire impossible. De plus, le maillage en espace peut contenir des mailles de très petite taille ce qui oblige à prendre un pas de temps très réduit (pour satisfaire la condition CFL sur tout le domaine) et pénalise donc le temps de calcul.



a) Géométrie du problème b) Différences Finies c) Éléments Finis

FIG. 7.1 – Géométrie exacte et ses approximations avec D.F. et E.F.

La méthode des domaines fictifs a été introduite dans un premier temps pour la résolution de problèmes stationnaires avec des géométries complexes [3, 1, 50, 2, 51, 53] et ensuite généralisée à des problèmes d'évolution [40, 48, 13, 74, 42, 9, 52, 80, 5]. Il s'agit d'une méthode qui essaie de garder le caractère structuré des données, principal avantage de la méthode des différences finies, tout en gardant une bonne approximation de la frontière des obstacles. L'idée fondamentale de la méthode est la suivante. On remplace le problème de départ par un problème équivalent qui est formulé sur un domaine de géométrie très simple (typiquement un rectangle en 2D ou un parallélépipède en 3D). La condition aux limites sur les bords de l'obstacle est alors prise en compte d'une façon faible à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange défini sur l'interface physique. Cette nouvelle inconnue peut aussi s'interpréter comme la dualisation de la contrainte d'égalité qui provient de la condition aux limites (essentielle) lorsqu'on considère la formulation variationnelle comme un problème de minimisation.

L'avantage fondamental de la méthode est que la géométrie du problème n'apparaît que sur l'espace fonctionnel du multiplicateur de Lagrange. Ceci nous permet de créer un maillage régulier du domaine de géométrie simple pour la discrétisation des espaces fonctionnels "volumiques" et un autre maillage de la surface de l'obstacle de géométrie complexe (a priori indépendants l'un de l'autre, voir la figure 7.2). Ainsi on peut garder l'efficacité des différences finies avec une bonne approximation de la géométrie. La condition CFL de la méthode totalement discrétisée ne se verra pas affectée par les détails géométriques.

L'analyse mathématique du problème (continu et discret) repose essentiellement sur la théorie de problèmes de point selle [24, 25] et, par conséquent, sur la vérification d'une condition du type inf-sup (voir la section 7.2). Cette condition, dans le cas discret, se traduit par une condition de compatibilité entre les espaces d'éléments finis des inconnues volumiques et surfaciques, en particulier, une condition de compatibilité entre les deux maillages (voir la section 7.4).

Cette méthode de domaines fictifs est utilisée par le code ATHENA2D pour la prise en compte des conditions aux limites du type surface libre (contrainte normale nulle) sur des obstacles de géométrie complexe, typiquement des fissures. Récemment, on a remarqué que, sur des certaines configurations et lorsqu'on utilise l'élément fini présenté dans la section 1.3.2 (qu'on appellera $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$), la méthode peut ne pas converger vers la solution du problème continu même sous des hypothèses raisonnables sur les maillages volumique et surfacique. On rappelle que cet élément fini se construit comme un produit tensoriel d'espaces plus simples (voir les formules (1.18) et (1.19)). Ces espaces peuvent eux mêmes être appliqués à des problèmes de propagation d'ondes moins complexes que le système élastodynamique comme l'équation des ondes scalaire en formulation *vitesse–pression* avec des conditions aux limites du type vitesse normale nulle. On peut alors se demander si ce défaut de convergence, lorsqu'on utilise la

méthode des domaines fictifs, est aussi présent dans le cas simplifié (qui est beaucoup plus facile à analyser). Ceci peut, en plus, nous aider à comprendre comment modifier l'élément fini de telle sorte qu'on puisse assurer la convergence.

Ce chapitre doit être vu comme une introduction aux deux suivants. Ainsi, dans le chapitre 8 on présente l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ introduit dans [80, 14, 12] (et utilisé jusqu'à présent dans le code ATHENA2D) appliqué aux équations de l'acoustique et de l'élastodynamique, et on rappelle les principaux résultats de convergence obtenus. Des expériences numériques montrent que, sur certaines configurations de la géométrie de l'obstacle, la méthode ne converge pas vers la solution du problème continu. Ensuite, dans le chapitre 9, on introduit une modification de l'élément fini précédent, qu'on appellera $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$, avec l'objectif de régler ces problèmes de convergence. Des expériences numériques montrent que, cette fois, la solution donnée par la méthode converge vers la bonne solution du problème (pour l'acoustique et l'élastodynamique). Finalement, nous présentons quelques résultats théoriques sur la convergence de l'élément fini proposé sur le problème acoustique et on discute les difficultés qui nous empêchent d'établir un résultat similaire dans le cas élastodynamique.

La structure de ce chapitre est la suivante. Dans la section 7.1 on présente en détail la méthode de domaines fictifs. Ainsi, dans la sous-section 7.1.1 on montre une application à la prise en compte des conditions aux limites du type vitesse normale nulle sur l'équation des ondes scalaire. La section 7.1.2 est consacrée à la présentation du problème qui nous intéresse vraiment, les équations de l'élastodynamique avec des conditions aux limites de surface libre sur les fissures. Ensuite, dans la section 7.2 on discute le caractère bien posé du problème discret et finalement, dans la section 7.4, on fera un bilan des résultats théoriques qu'on peut trouver dans la littérature.

7.1 La Méthode des Domaines Fictifs pour des Problèmes de Diffraction

7.1.1 L'Équation des Ondes Scalaire 2D

On commence avec la présentation de la méthode des domaines fictifs appliquée à l'acoustique avec des conditions aux limites du type vitesse normale nulle. Ce problème peut être considéré comme un problème modèle assez proche de celui qui nous intéresse et pour lequel les difficultés liées à la symétrie du tenseur de contraintes ne sont pas présentes.

On considère la diffraction d'une onde acoustique par un obstacle OBS avec une condition aux limites du type Neumann sur la pression sur la frontière Γ de l'obstacle. Le domaine de propagation est dénoté par $\widetilde{\Omega}$ avec une frontière extérieure Γ_E (voir la figure 7.1.a)) et on suppose que $\Omega = \widetilde{\Omega} \cup OBS$ est un domaine de géométrie simple, typiquement un rectangle. On suppose aussi que le milieu est anisotrope et que la pression satisfait l'équation des ondes scalaire. Afin d'appliquer la méthode des domaines fictifs à ce type de condition aux limites, on formule notre problème comme un système du premier ordre en

vitesse-pression (voir [80])

$$
(7.1) \qquad \left\{
\begin{array}{rcrcll}
\rho \dfrac{\partial p}{\partial t} & - & \mathrm{div}\underline{v} & = & f, & \text{dans } \widetilde{\Omega}, \\
\underline{\underline{A}} \dfrac{\partial \underline{v}}{\partial t} & - & \underline{\nabla}\, p & = & 0, & \text{dans } \widetilde{\Omega}, \\
\underline{v} \cdot \underline{n} & & & = & 0, & \text{sur } \Gamma, \\
p & & & = & 0, & \text{sur } \Gamma_E, \\
p(t=0) & & & = & p_0, & \\
\underline{v}(t=0) & & & = & v_0, &
\end{array}
\right.
$$

où les inconnues p et $\underline{v}$ dénotent la pression et le champ de vitesse et les données sont ρ la densité du matériau, f les forces extérieures et $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}}^{-1}$ est l'inverse du tenseur de raideur. On suppose que la densité vérifie les propriétés de positivité habituelles

$$0 < \rho^- \leq \rho(x) \leq \rho^+ < +\infty,$$

et que $\underline{\underline{C}}$ est un tenseur d'ordre deux, symétrique tel que

$$0 < \kappa |\underline{w}|^2 \leq \underline{\underline{C}}(x)\underline{w} \cdot \underline{w} \leq \nu |\underline{w}|^2, \qquad \forall \underline{w} \neq 0.$$

7.1.1.1 Formulation Variationnelle

Dans les formulations variationnelles standard de ce problème les espaces fonctionnels utilisés dépendent de la forme de l'obstacle. Lorsqu'on utilise la méthode de domaines fictifs, les conditions aux limites sont prises en compte faiblement à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange défini sur la frontière du domaine (et qui peut s'interpréter comme la trace de la pression sur l'interface). C'est dans l'espace de cette nouvelle inconnue qu'on trouve toute l'information sur la géométrie. La formulation s'écrit alors

$$
(7.2) \qquad \left\{
\begin{array}{l}
\text{Trouver } \underline{v} \in C^1\left([0,T]; \underline{L^2}(\Omega)\right) \cap C^0\left([0,T]; \underline{X}(\Omega)\right), \\
\qquad (p,\lambda) \in C^1\left([0,T]; M(\Omega)\right) \times C^0([0,T]; \mathcal{G}(\Gamma)) \text{ satisfaisant} \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_v(\underline{v}, \underline{\tilde{v}}) + d(\underline{\tilde{v}}, p) - b(\underline{\tilde{v}}, \lambda) = 0, \qquad \forall \underline{\tilde{v}} \in \underline{X}(\Omega), \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_p(p, \tilde{p}) - d(\underline{v}, \tilde{p}) = (f, \tilde{p}), \qquad \forall \tilde{p} \in M(\Omega), \\
b(\underline{v}, \tilde{\lambda}) = 0, \qquad \forall \tilde{\lambda} \in \mathcal{G}(\Gamma), \\
(\underline{v}, p)_{|t=0} = (\underline{v}_0, p_0)
\end{array}
\right.
$$

où les espaces fonctionnels sont

$$(7.3) \qquad \underline{X}(\Omega) = H(\mathrm{div}, \Omega), \quad M(\Omega) = L^2(\Omega), \quad \mathcal{G}(\Gamma) = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

et les formes bilinéaires

$$
(7.4)\qquad \left|\begin{array}{rcll}
m_v(\underline{v},\tilde{\underline{v}}) & = & \displaystyle\int_\Omega \underline{\underline{A}}\,\underline{v}\cdot\tilde{\underline{v}}\,\mathrm{d}x, & \forall(\underline{v},\tilde{\underline{v}})\in\underline{X}(\Omega)\times\underline{X}(\Omega),\\
m_p(p,\tilde{p}) & = & \displaystyle\int_\Omega \rho\,p\,\tilde{p}\,\mathrm{d}x, & \forall(p,\tilde{p})\in M(\Omega)\times M(\Omega),\\
d(\tilde{\underline{v}},\tilde{p}) & = & \displaystyle\int_\Omega \mathrm{div}(\tilde{\underline{v}})\,\tilde{p}\,\mathrm{d}x, & \forall(\tilde{\underline{v}},\tilde{p})\in\underline{X}(\Omega)\times M(\Omega),\\
b(\tilde{\underline{v}},\tilde{\lambda}) & = & \displaystyle\int_\Gamma \tilde{\lambda}\,\tilde{\underline{v}}\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}\gamma, & \forall(\tilde{\underline{v}},\tilde{\lambda})\in\underline{X}(\Omega)\times\mathcal{G}(\Gamma).
\end{array}\right.
$$

Remarque 7.1.1 *Dans le cas où l'obstacle est une fissure le multiplicateur de Lagrange peut s'interpréter comme le saut de pression. L'espace fonctionnel associé est alors* $\mathcal{G}(\Gamma)=H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma)$.

7.1.1.2 Discrétisation en Espace

Pour la discrétisation en espace on construit un maillage $T_h(\Omega)$ du rectangle Ω de pas h (qui peut être régulier étant donné la géométrie simple du domaine fictif) et un maillage $\Theta_H(\Gamma)$ de la frontière Γ de pas H (voir la figure 7.2). Ceci nous permet d'introduire des espaces de dimension finie $\underline{X}_h(\Omega)\subset\underline{X}(\Omega)$, $M_h(\Omega)\subset M(\Omega)$ et $\mathcal{G}_H(\Gamma)\subset\mathcal{G}(\Gamma)$. On suppose que ces espaces vérifient les propriétés habituelles d'approximation, c'est à dire,

$$
(7.5)\qquad \left|\begin{array}{rcll}
\displaystyle\lim_{h>0}\inf_{\tilde{\underline{v}}^h\in\underline{X}_h(\Omega)}\|\underline{v}-\tilde{\underline{v}}^h\|_{\underline{X}} & = & 0, & \forall\underline{v}\in\underline{X}(\Omega),\\
\displaystyle\lim_{h>0}\inf_{\tilde{p}^h\in M_h(\Omega)}\|p-\tilde{p}^h\|_M & = & 0, & \forall p\in M(\Omega),\\
\displaystyle\lim_{h>0}\inf_{\tilde{\lambda}^H\in\mathcal{G}_H(\Gamma)}\|\lambda-\tilde{\lambda}^H\|_{\mathcal{G}} & = & 0, & \forall\lambda\in\mathcal{G}(\Gamma).
\end{array}\right.
$$

On définit les formes bilinéaires approchées

$$
(7.6)\qquad \left|\begin{array}{rcll}
m_v^h(\underline{v}^h,\tilde{\underline{v}}^h) & = & \displaystyle\oint_\Omega \underline{\underline{A}}\,\underline{v}^h\cdot\tilde{\underline{v}}^h\,\mathrm{d}x, & \forall(\underline{v}^h,\tilde{\underline{v}}^h)\in\underline{X}_h(\Omega)\times\underline{X}_h(\Omega),\\
m_p^h(p^h,\tilde{p}^h) & = & \displaystyle\oint_\Omega \rho\,p^h\,\tilde{p}^h\,\mathrm{d}x, & \forall(p^h,\tilde{p}^h)\in M_h(\Omega)\times M_h(\Omega),
\end{array}\right.
$$

où le symbole intégrale utilisé indique qu'on peut utiliser de l'intégration numérique ou de l'intégration exacte. Ainsi, le problème semi-discret s'écrit

$$
(7.7)\qquad \left\{\begin{array}{lcccccll}
\multicolumn{8}{l}{\text{Trouver } (\underline{v}^h,p^h,\lambda^H)\in C^1\left([0,T];\underline{X}_h(\Omega)\times M_h(\Omega)\times\mathcal{G}_H(\Gamma)\right) \text{ satisfaisant}}\\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_v^h(\underline{v}^h,\tilde{\underline{v}}^h) & + & d(\tilde{\underline{v}}^h,p^h) & - & b(\tilde{\underline{v}}^h,\lambda^H) & = & 0, & \forall\tilde{\underline{v}}^h\in\underline{X}_h(\Omega),\\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_p^h(p^h,\tilde{p}^h) & - & d(\underline{v}^h,\tilde{p}^h) & & & = & (f,\tilde{p}^h), & \forall\tilde{p}^h\in M_h(\Omega),\\
b(\underline{v}^h,\tilde{\lambda}^H) & & & & & = & 0, & \forall\tilde{\lambda}^H\in\mathcal{G}_H(\Gamma),\\
(\underline{v}^h,p^h)_{|t=0} & & & & & = & (\underline{v}_0^h,p_0^h) &
\end{array}\right.
$$

où $(\underline{v}_0^h,p_0^h)\in\underline{X}_h(\Omega)\times M_h(\Omega)$ est une approximation de la condition initiale. Pour chaque espace de discrétisation de dimension finie on introduit une base

$$
(7.8)\qquad \begin{array}{rcl}
\mathcal{B}\left(\underline{X}_h(\Omega)\right) & = & \left\{\underline{v}^{h,j}\right\}_{j=1}^{N_{\underline{v}}}, \qquad \mathcal{B}\left(M_h(\Omega)\right) = \left\{p^h\right\}_{j=1}^{N_p},\\
\mathcal{B}\left(\mathcal{G}_H(\Gamma)\right) & = & \left\{\lambda^{H,j}\right\}_{j=1}^{N_\lambda},
\end{array}
$$

où $N_{\underline{v}} = \dim \underline{X}_h(\Omega)$, $N_p = \dim M_h(\Omega)$ et $N_\lambda = \dim \mathcal{G}_H(\Gamma)$. À l'aide de ces fonctions on construit les matrices

$$\begin{aligned}
(M_v)_{i,j} &= m_v^h(\underline{v}^{h,i}\ ,\ \underline{v}^{h,j}), \quad 1 \le i,j \le N_{\underline{v}},\\
(M_p)_{i,j} &= m_p^h(p^{h,i}\ ,\ p^{h,j}), \quad 1 \le i,j \le N_p,\\
(D)_{i,j} &= d(\underline{v}^{h,j}\ ,\ p^{h,i}), \quad 1 \le i \le N_p, \quad 1 \le j \le N_{\underline{v}},\\
(B)_{i,j} &= b(\underline{v}^{h,j}\ ,\ \lambda^{H,i}), \quad 1 \le i \le N_\lambda, \quad 1 \le j \le N_{\underline{v}}.
\end{aligned}$$

Alors, comme il est classique, le problème variationnel approché (7.7) est équivalent à la formulation matricielle suivante

$$\text{(7.9)} \qquad \left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } (V,P,\Lambda) \in C^1\left([0,T];\mathbb{R}^{N_{\underline{v}}} \times \mathbb{R}^{N_p} \times \mathbb{R}^{N_\lambda}\right) \text{ vérifiant}\\
\left\{\begin{array}{lllllll}
M_p \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P & - & D\,V & & & = & F,\\
M_v \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V & + & D^*\,P & - & B^*\,\Lambda & = & 0,
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

où la condition aux limites écrite au sens faible s'écrit

$$\text{(7.10)} \qquad \left|\ B\,V \ = \ 0.\right.$$

Remarque 7.1.2 *La matrice B, qui peut s'interpréter comme un opérateur qui calcule la trace normale de la vitesse sur la frontière, contient toute l'information provenant de la géométrie des obstacles. Pour calculer chacun des ses termes il faudrait calculer d'abord les intersections entre le maillage volumique et surfacique pour pouvoir après effectuer les intégrales sur la frontière.*

Remarque 7.1.3 *Le maillage de surface $\Theta_H(\Gamma)$ est composé par N segments S_j de taille H_j et soit $H = \sup_j H_j$. On supposera toujours qu'il est uniformément régulier, c'est à dire,*

$$\text{(7.11)} \qquad \exists\, \nu > 0,\ 0 < \nu \le 1, \ \text{ tel que } \ H_j \ge \nu H, \quad \forall\, j \in \{1,\dots,N\}.$$

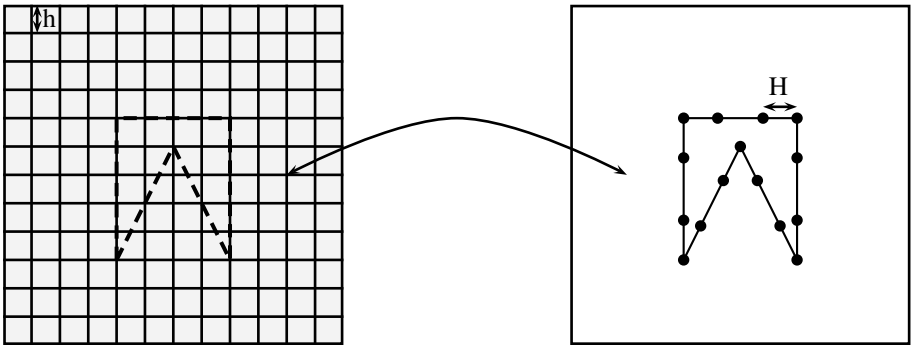
7.1.1.3 Discrétisation en Temps

Pour l'approximation en temps du système différentiel (7.9)-(7.10) on utilise un schéma saute mouton d'ordre deux classique. Ainsi on obtient les expressions du problème totalement discrétisé

$$\text{(7.12)} \qquad \left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } (V^n, P^{n+\frac{1}{2}}, \Lambda^{n+\frac{1}{2}}) \in \mathbb{R}^{N_{\underline{v}}} \times \mathbb{R}^{N_p} \times \mathbb{R}^{N_\lambda} \text{ vérifiant}\\
\left\{\begin{array}{lllllll}
M_p \dfrac{P^{n+\frac{1}{2}} - P^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} & - & D\,V^n & & & = & F^n,\\
M_v \dfrac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} & + & D^*\,P^{n+\frac{1}{2}} & - & B^*\,\Lambda^{n+\frac{1}{2}} & = & 0,
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

avec les conditions aux limites

$$\text{(7.13)} \qquad \left|\ B\,V^n \ = \ 0.\right.$$



a) Maillage Volumique $T_h(C)$ b) Maillage Surfacique $\Theta_H(\Gamma)$

FIG. 7.2 – La méthode de domaines fictifs.

7.1.2 Les Équations de l'Élastodynamique 2D

Le deuxième problème auquel on s'intéresse est la résolution des équations de l'élastodynamique (1.2) sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ qui est composé d'un rectangle Ω moins un obstacle qu'on dénotera par OBS (qui peut avoir l'intérieur vide dans le cas d'une fissure). Sur la frontière $\Gamma = \delta(OBS)$ on imposera une condition aux limites du type surface libre, i.e., la contrainte normale nulle,

$$\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma. \tag{7.14}$$

À tout cela il faut ajouter les conditions initiales

$$\underline{v}(0) = 0, \qquad \underline{\underline{\sigma}}(0) = 0,$$

et les conditions aux limites sur la frontière Γ_E qu'on supposera données par

$$\underline{v} = 0, \qquad \text{sur } \Gamma_E, \tag{7.15}$$

pour simplifier.

Remarque 7.1.4 *La condition aux limites sur la frontière extérieur Γ_E considérée peut être remplacée par d'autres conditions afin de, par exemple, simuler des domaines non bornés.*

7.1.2.1 Formulation Variationnelle

Comme dans le cas scalaire, la formulation en domaines fictifs de notre problème se base sur la prise en compte d'une façon faible de la condition aux limites sur Γ à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange $\underline{\lambda}$ (qui pourrait s'interpréter comme la trace de la vitesse sur la frontière). Ceci nous permet de définir des espaces fonctionnels des inconnues $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{v}$ qui ne dépendent pas de la géométrie du domaine. Ainsi, on

aura

$$
(7.16)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\text{Trouver } \underline{\underline{\sigma}} \in C^1\left([0,T];\underline{\underline{L}}^2(\Omega)\right) \cap C^0\left([0,T];\underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega)\right), \\
\qquad (\underline{v},\underline{\lambda}) \in C^1\left([0,T];\underline{M}(\Omega)\right) \times C^0([0,T];\underline{\mathcal{G}}(\Gamma)) \text{ satisfaisant} \\
\begin{array}{lclclcll}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_\sigma(\underline{\underline{\sigma}},\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}) & + & d(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}},\underline{v}) & - & b(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}},\underline{\lambda}) & = & 0, & \forall \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} \in \underline{\underline{X}}(\Omega), \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_v(\underline{v},\underline{\tilde{v}}) & - & d(\underline{\underline{\sigma}},\underline{\tilde{v}}) & & & = & (\underline{f},\underline{\tilde{v}}), & \forall \underline{\tilde{v}} \in \underline{M}(\Omega), \\
b(\underline{\underline{\sigma}},\underline{\tilde{\lambda}}) & & & & & = & 0, & \forall \underline{\tilde{\lambda}} \in \underline{\mathcal{G}}(\Gamma), \\
(\underline{\underline{\sigma}},\underline{v})_{|t=0} & & & & & = & (\underline{\underline{\sigma}}_0,\underline{v}_0). &
\end{array}
\end{array}
\right.
$$

où les espaces fonctionnels $\underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega)$ et $\underline{M}(\Omega)$ on été définies dans (1.7) et

$$
\underline{\mathcal{G}}(\Gamma) \;=\; \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^2.
$$

Les formes bilinéaires sont

$$
(7.17)\quad \left|
\begin{array}{rcll}
m_\sigma(\underline{\underline{\sigma}},\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}) & = & \displaystyle\int_\Omega \mathbf{A}\,\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}\,\mathrm{d}x, & \forall(\underline{\underline{\sigma}},\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}) \in \underline{\underline{X}}(\Omega)\times\underline{\underline{X}}(\Omega), \\
m_v(\underline{v},\underline{\tilde{v}}) & = & \displaystyle\int_\Omega \rho\,\underline{v}\cdot\underline{\tilde{v}}\,\mathrm{d}x, & \forall(\underline{v},\underline{\tilde{v}}) \in \underline{M}(\Omega)\times\underline{M}(\Omega), \\
d(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}},\underline{\tilde{v}}) & = & \displaystyle\int_\Omega \underline{\mathrm{div}}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}})\cdot\underline{\tilde{v}}\,\mathrm{d}x, & \forall(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}},\underline{\tilde{v}}) \in \underline{\underline{X}}(\Omega)\times\underline{M}(\Omega), \\
b(\tilde{s},\underline{\tilde{\lambda}}) & = & \displaystyle\int_\Gamma \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}\,\underline{n}\cdot\underline{\tilde{\lambda}}\,\mathrm{d}\gamma, & \forall(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}},\underline{\tilde{\lambda}}) \in \underline{\underline{X}}(\Omega)\times\underline{\mathcal{G}}(\Gamma).
\end{array}
\right.
$$

Il faut bien noter que toute l'information sur la géométrie du problème est dans le dernier opérateur qui couple les fonctions de l'espace $\underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega)$ avec les fonctions dans $\underline{\mathcal{G}}(\Gamma)$.

Remarque 7.1.5 *Dans le cas où l'obstacle est une fissure, le multiplicateur de Lagrange, qui s'interprète comme le saut de la vitesse, appartient à l'espace* $\underline{\mathcal{G}}(\Gamma) = \left(H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma)\right)^2$.

7.1.2.2 Discrétisation en Espace

De façon analogue au cas scalaire, pour effectuer la discrétisation en espace on fait une approximation du type Galerkin de la formulation variationnelle (7.16). Pour faire ceci, on se donne un maillage $T_h(\Omega)$ de pas h du domaine Ω (qui peut être un maillage régulier) et un autre $\Theta_H(\Gamma)$ de la frontière de l'obstacle de pas H (voir la figure 7.2). Ainsi, on peut construire des espaces de dimension finie $\underline{\underline{X}}^{sym}_h(\Omega) \subset \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega)$, $\underline{M}_h(\Omega) \subset \underline{M}(\Omega)$ et $\underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma) \subset \underline{\mathcal{G}}(\Gamma)$ avec les propriétés habituelles d'approximation.

On introduit les formes bilinéaires approchées

$$
(7.18)\quad \left|
\begin{array}{rcll}
m^h_\sigma(\underline{\underline{\sigma}}^h,\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h) & = & \displaystyle\oint_\Omega \mathbf{A}\,\underline{\underline{\sigma}}^h : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h\,\mathrm{d}x, & \forall\,(\underline{\underline{\sigma}}^h,\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h) \in \underline{\underline{X}}_h(\Omega)\times\underline{\underline{X}}_h(\Omega), \\
m^h_v(\underline{v}^h,\underline{\tilde{v}}^h) & = & \displaystyle\oint_\Omega \rho\,\underline{v}^h\cdot\underline{\tilde{v}}^h\,\mathrm{d}x, & \forall\,(\underline{v}^h,\underline{\tilde{v}}^h) \in \underline{M}_h(\Omega)\times\underline{M}_h(\Omega),
\end{array}
\right.
$$

où on peut éventuellement utiliser de l'intégration numérique. Alors, le problème approché est le suivant

$$
(7.19)\qquad \begin{cases}
\text{Trouver } (\underline{\underline{\sigma}}^h, \underline{v}^h, \underline{\lambda}^H) \in C^1\left([0,T]; \underline{\underline{X}}_h^{sym}(\Omega) \times \underline{M}_h(\Omega) \times \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma)\right) \text{ satisfaisant} \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_\sigma^h(\underline{\underline{\sigma}}^h, \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h) \;+\; d(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h, \underline{v}^h) \;-\; b(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h, \underline{\lambda}^H) \;=\; 0, \qquad \forall \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \in \underline{\underline{X}}_h(\Omega), \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_v^h(\underline{v}^h, \underline{\tilde{v}}^h) \;-\; d(\underline{\underline{\sigma}}^h, \underline{\tilde{v}}^h) \;=\; (\underline{f}, \underline{\tilde{v}}^h), \qquad \forall \underline{\tilde{v}}^h \in \underline{M}_h(\Omega), \\
b(\underline{\underline{\sigma}}^h, \underline{\tilde{\lambda}}^H) \;=\; 0, \qquad \forall \underline{\tilde{\lambda}}^H \in \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma), \\
(\underline{\underline{\sigma}}^h, \underline{v}^h)_{|t=0} \;=\; (\underline{\underline{\sigma}}_0^h, \underline{v}_0^h).
\end{cases}
$$

Comme dans la section précédente, on associe une base à chaque espace de dimension finie qu'on dénotera par

$$
(7.20)\qquad \begin{aligned}
\mathcal{B}\left(\underline{\underline{X}}_h(\Omega)\right) &= \left\{\underline{\underline{\sigma}}^{h,j}\right\}_{j=1}^{N_{\underline{\underline{\sigma}}}}, \qquad \mathcal{B}\left(\underline{M}_h(\Omega)\right) = \left\{\underline{v}^h\right\}_{j=1}^{N_{\underline{v}}}, \\
\mathcal{B}\left(\underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma)\right) &= \left\{\underline{\lambda}^{H,j}\right\}_{j=1}^{N_{\underline{\lambda}}},
\end{aligned}
$$

où $N_{\underline{\underline{\sigma}}} = \dim \underline{\underline{X}}_h(\Omega)$, $N_{\underline{v}} = \dim \underline{M}_h(\Omega)$ et $N_{\underline{\lambda}} = \dim \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma)$. Ceci nous permet de construire les matrices

$$
\begin{aligned}
(M_\sigma)_{i,j} &= m_\sigma^h(\underline{\underline{\sigma}}^{h,i}\,,\, \underline{\underline{\sigma}}^{h,j}), \quad 1 \le i,j \le N_{\underline{\underline{\sigma}}}, \\
(M_v)_{i,j} &= m_v^h(\underline{v}^{h,i}\,,\, \underline{v}^{h,j}), \quad 1 \le i,j \le N_{\underline{v}}, \\
(D)_{i,j} &= d(\underline{\underline{\sigma}}^{h,j}\,,\, \underline{v}^{h,i}), \quad 1 \le i \le N_{\underline{v}}, \quad 1 \le j \le N_{\underline{\underline{\sigma}}}, \\
(B)_{i,j} &= b(\underline{\underline{\sigma}}^{h,j}\,,\, \underline{\lambda}^{H,i}), \quad 1 \le i \le N_{\underline{\lambda}}, \quad 1 \le j \le N_{\underline{\underline{\sigma}}},
\end{aligned}
$$

et donc, la formulation variationnelle du problème semi-discrétisé en espace est équivalente à

$$
(7.21)\qquad \left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } (\Sigma, V, \Lambda) \in C^1\left([0,T]; \mathbb{R}^{N_{\underline{\underline{\sigma}}}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{v}}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{\lambda}}}\right) \text{ vérifiant} \\
\begin{cases}
M_v \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V \;-\; D\,\Sigma \;=\; F, \\
M_\sigma \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Sigma \;+\; D^*\,V \;-\; B^*\,\Lambda \;=\; 0,
\end{cases}
\end{array}\right.
$$

où les conditions aux limites s'écrivent

$$
(7.22)\qquad \Big|\; B\,\Sigma \;=\; 0.
$$

Remarque 7.1.6 *La matrice B calcule la trace normale de l'approximation du tenseur de contraintes. Notons que tous les autres opérateurs ne font pas intervenir la géométrie des obstacles.*

7.1.2.3 Discrétisation en Temps

Pour la discrétisation temporelle on utilise le même schéma numérique que celui qu'on a utilisé dans la section 7.1.1.3. Donc, le problème totalement discrétisé est

$$
(7.23) \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\Sigma^n, V^{n+\frac{1}{2}}, \Lambda^{n+\frac{1}{2}}) \in \mathbb{R}^{N_{\underline{\underline{\sigma}}}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{v}}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{\lambda}}} \text{ vérifiant} \\ \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} M_v \dfrac{V^{n+\frac{1}{2}} - V^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} & - & D\,\Sigma^n & & & = & F^n, \\ M_\sigma \dfrac{\Sigma^{n+1} - \Sigma^n}{\Delta t} & + & D^*\,V^{n+\frac{1}{2}} & - & B^*\,\Lambda^{n+\frac{1}{2}} & = & 0, \end{array} \right. \end{array} \right.
$$

avec les conditions aux limites

$$
(7.24) \qquad \Big| \; B\,\Sigma^n \;=\; 0.
$$

7.2 Condition Inf-Sup. Compatibilité entre les Maillages

Dans cette section on va discuter du caractère bien posé du problème totalement discrétisé d'une façon générale. Étant donné que cette étude est très similaire pour les deux applications présentées dans la section précédente, on se place dans le cas des équations de l'élastodynamique.

Supposons qu'on a calculé toutes les inconnues jusqu'au temps t^n. Voyons comment mener le calcul jusqu'au temps t^{n+1} :

- Grâce à l'inversibilité de la matrice de masse M_v, la première équation de (7.23) nous permet de calculer $V^{n+\frac{1}{2}}$.
- Si on multiplie par $B\,(M_\sigma)^{-1}$ la deuxième équation de (7.23) et on utilise (7.24) on remarque que le multiplicateur de Lagrange satisfait le système linéaire

  $$B\,(M_\sigma)^{-1}\,B^*\,\Lambda^{n+\frac{1}{2}} \;=\; B\,(M_\sigma)^{-1}\,D^*\,V^{n+\frac{1}{2}}.$$

  Supposons pour l'instant que la matrice à gauche est inversible de telle façon que l'inconnue $\Lambda^{n+\frac{1}{2}}$ peut être obtenue.
- Finalement, avec la deuxième équation de (7.23) on calcul Σ^{n+1}.

Donc, le caractère bien posé du problème totalement discrétisé est lié à l'inversibilité de la matrice $B\,(M_\sigma)^{-1}\,B^*$ ou ce qui est équivalent

$$
\text{Ker}B^* \;=\; \{0\}, \qquad \Longleftrightarrow
$$

$$
\forall\;\Lambda \text{ tel que } B^*\,\Lambda \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad \Lambda \;=\; 0.
$$

On peut aussi réécrire cette propriété en utilisant les opérateurs bilinéaires en obtenant

$$
(7.25) \qquad \forall\,\underline{\lambda}^H \in \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma),\ \text{tel que } \left[\int_\Gamma \underline{\underline{\sigma}}^h\,\underline{n}\cdot\underline{\lambda}^H\,\mathrm{d}\gamma \;=\; 0, \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}\right] \Longrightarrow \underline{\lambda}^H \;=\; 0,
$$

$$
\Longleftrightarrow \quad \exists\,k_{h,H} \;>\; 0,\ \text{tel que} \quad \inf_{\underline{\lambda}^H \in \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma)}\ \sup_{\underline{\underline{\sigma}}^h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Gamma \underline{\underline{\sigma}}^h\,\underline{n}\cdot\underline{\lambda}^H\,\mathrm{d}\gamma}{\|\underline{\lambda}^H\|_{\underline{\mathcal{G}}}\,\|\underline{\underline{\sigma}}^h\|_{\underline{\underline{X}}}} \geq k_{h,H},
$$

propriété qu'on appellera condition inf-sup discrète. Il est clair alors que les espaces $\underline{\underline{X}}_h^{sym}(\Omega)$ et $\underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma)$ doivent être compatibles dans un certain sens.

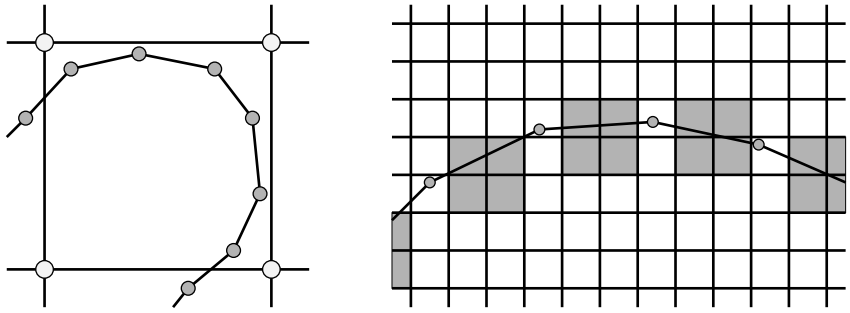


FIG. 7.3 – (a) $H \approx \frac{1}{3}h$. (b) $H \approx 3h$.

Remarque 7.2.1 *Cette condition inf-sup est aussi une condition de compatibilité entre le maillage volumique et le maillage surfacique. Ainsi on remarque que :*

– *Le maillage surfacique ne peut pas être trop fin par rapport au maillage volumique. En effet, soit* $\underline{\lambda}^H \in \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma)$ *tel que*

$$\int_\Gamma \underline{\underline{\sigma}}^h \, \underline{n} \cdot \underline{\lambda}^H \, d\gamma \; = \; 0, \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}.$$

On peut interpréter ceci comme un système linéaire où les inconnues sont les degrés de liberté du multiplicateur de Lagrange. Il y aura autant d'équations que de fonctions $\underline{\underline{\sigma}}^h$ *qui interagissent avec* $\underline{\lambda}^H$ *(et peut être celles-ci ne sont pas linéairement indépendantes). Si le maillage surfacique est beaucoup plus fin que son homologue volumique, le système n'aura pas une unique solution (*$\underline{\lambda}^H = 0$*) et le problème serait mal posé (voir par exemple la configuration représentée dans la figure 7.3.(a)).*

– *Il existe une constante* R *telle que si*

$$H \; > \; Rh, \tag{7.26}$$

le problème totalement discrétisé est bien posé. Dénotons par N_S *le nombre de fonctions de base de l'espace du multiplicateur dont le support intersecte* S *(un segment du maillage surfacique). S'il existe* N_S *fonctions de base* $\underline{\underline{\sigma}}_i^h$, $i \in \{1, \ldots, N_S\}$ *dans l'espace* $\underline{\underline{X}}_h(\Omega)$ *telles que*

$$\left| \begin{array}{ll} \mathrm{supp}(\underline{\underline{\sigma}}_i^h) \cap \Gamma \subset S, & \\ \displaystyle\int_\Gamma \underline{\underline{\sigma}}_i^h \, \underline{n} \cdot \underline{\lambda}^H \, d\gamma \; = \; 0, \; i \in \{1, \ldots, N_S\} & \text{nous fournissent } N_S \text{ équations} \\ & \text{linéairement indépendantes,} \end{array} \right.$$

alors la propriété (7.25) est évidemment satisfaite. Ceci est en général possible si la constante R *est assez grande. Par exemple, si on utilise les éléments finis qu'on présentera dans la section 8.1 et 9.1, il est facile de vérifier qu'une configuration comme celle de la figure 7.3.(b) vérifie cette condition (on a grisé les support des fonctions de base qui satisfont cette dernière condition).*

7.3 Sur la Stabilité de la Méthode

Une propriété très intéressante de la méthode c'est que le terme associé aux conditions aux limites ne modifie pas la condition de stabilité CFL qu'on avait en absence de domaines fictifs. Ainsi, si on définit

un équivalent discret de l'énergie conservée par le modèle continu par l'expression

$$\mathbf{E}^n = \frac{1}{2}\Big\{(M_\sigma \Sigma^n, \Sigma^n) + (M_v V^{n+\frac{1}{2}}, V^{n-\frac{1}{2}})\Big), \tag{7.27}$$

on peut établir la proposition suivante

Proposition 7.3.1 (Stabilité ℓ^2) *Supposons que*
- *les forces externes sont nulles,*
- $\mathbf{E}^0$ *est finie,*
- *la condition CFL habituelle*

$$\text{La matrice } N(\Delta t) = M_\sigma - \frac{\Delta t^2}{4} D^*(M_v)^{-1} D \text{ est symétrique définie positive.} \tag{7.28}$$

est satisfaite.

Alors, la norme ℓ^2 de Σ^n et $V^{n+\frac{1}{2}}$ obtenues avec le schéma (7.23)–(7.24) est bornée par une constante qui ne dépend que des conditions initiales et du rapport $\alpha = \Delta t/\Delta x$.

Preuve: On montre d'abord que l'énergie discrète (7.27) (qui ne dépend pas de la géométrie des obstacles) se conserve, c'est à dire, que

$$\mathbf{E}^{n+1} = \mathbf{E}^n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

En effet, si on multiplie la deuxième équation de (7.23) par $(\Sigma^{n+1} + \Sigma^n)/2$ on obtient

$$\frac{1}{2\Delta t}\left\{(M_\sigma \Sigma^{n+1}, \Sigma^{n+1}) - (M_\sigma \Sigma^n, \Sigma^n)\right\} = (B^* \Lambda^{n+\frac{1}{2}} - D^* V^{n+\frac{1}{2}}, (\Sigma^{n+1} + \Sigma^n)/2). \tag{7.29}$$

Ensuite, on utilise la première équation de (7.23) sur deux pas de temps consécutifs pour avoir

$$M_v \frac{V^{n+\frac{3}{2}} - V^{n-\frac{1}{2}}}{2\Delta t} - D\frac{\Sigma^{n+1} + \Sigma^n}{2} = 0$$

expression qu'on multiplie par $V^{n+\frac{1}{2}}$ pour avoir

$$\frac{1}{2\Delta t}\left\{(M_v V^{n+\frac{3}{2}}, V^{n+\frac{1}{2}}) - (M_v V^{n+\frac{1}{2}}, V^{n-\frac{1}{2}})\right\} = (V^{n+\frac{1}{2}}, D(\Sigma^{n+1} + \Sigma^n)/2). \tag{7.30}$$

Il suffit de sommer (7.29) et (7.30) et d'utiliser les conditions aux limites (7.24) pour obtenir la conservation de l'énergie discrète. Une fois ceci démontré, une démarche similaire à celle du théorème 1.8.1 nous permet de finir la preuve. □

7.4 Bilan des Résultats de Convergence dans la Littérature

Les principaux résultats qu'on peut trouver dans la littérature sur la convergence de la méthode de domaines fictifs [50, 57, 3] montrent que (une fois que les espaces de discrétisation ont été bien choisis) une condition du type (7.26) est suffisante pour obtenir la convergence de la méthode. Cette compatibilité entre les maillages surfacique et volumique permet, en général, de montrer une condition du type inf-sup discrète uniforme. La théorie des éléments finis mixtes (c.f. [25, 24]) donne ensuite un résultat de convergence. En ce qui concerne la valeur de la constante R, dans [50], une valeur explicite, sûrement pessimiste, a été donnée. Par contre, le résultat donné dans [57] affirme l'existence d'une telle constante, mais elle n'est pas connue explicitement. Du point de vue numérique plusieurs auteurs ont remarqué que $R = 3/2$ est une valeur raisonnable pour cette constante.

Chapitre 8

Rappels sur l'Élément $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$. Problèmes avec Domaines Fictifs

Sommaire

8.1 Présentation de l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ 226

8.1.1 Application à la Discrétisation de l'Espace $\underline{X}(\Omega) \times M(\Omega)$ 226

8.1.2 Application à la Discrétisation de l'Espace $\underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega) \times \underline{M}(\Omega)$ 227

8.2 Résultats de Convergence Existants en Absence de Domaines Fictifs 228

8.2.1 Pour l'Équation des Ondes Scalaire 229

8.2.2 Pour l'Élastodynamique 229

8.3 Expériences Numériques avec Domaines Fictifs. Difficultés 230

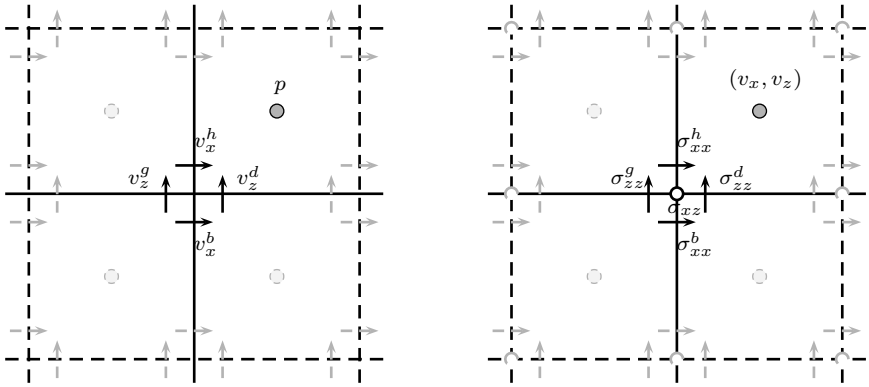
8.3.1 Le Cas Scalaire 231

8.3.2 Le Cas Vectoriel 232

8.3.3 Conclusion 241

Une fois la méthode de domaines fictifs introduite, on doit spécifier les espaces d'approximation à utiliser. Dans ce chapitre on présentera l'élément fini mixte $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ introduit dans [80, 12, 14]. On commencera dans la sous-section 8.1.1 avec l'application à l'équation de l'acoustique qui peut être vue comme un problème modèle simplifié dans lequel les difficultés liées à la symétrie du tenseur de contraintes ne sont pas présentes. Ce problème nous aidera à introduire dans la sous-section 8.1.2 l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ appliqué aux équations de l'élastodynamique. On rappelle que cet élément fini est utilisé par le code ATHENA2D pour la discrétisation du couple tenseur de contraintes–champ de vitesse.

Quelques expériences numériques mettront en évidence que, sur certains configurations avec des obstacles traités avec domaines fictifs, la méthode ne converge pas vers la bonne solution du problème. On rappellera aussi les principaux résultats de convergence (en absence de domaines fictifs) qui ont été obtenus [14, 12, 80] ainsi que les difficultés dans cette analyse. Ceci nous permettra de comparer cet élément fini avec la modification qu'on propose dans le chapitre suivant afin de régler ce défaut de convergence.



(a) Équation des ondes scalaire (b) Système élastodynamique

FIG. 8.1 – Degrés de liberté pour l'élément fini mixte $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$

8.1 Présentation de l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$

8.1.1 Application à la Discrétisation de l'Espace $\underline{X}(\Omega) \times M(\Omega)$

Nous rappelons que dans la section 7.1.1 du chapitre précédent, on a présenté la méthode des domaines fictifs appliquée à l'équation de l'acoustique scalaire sous une formulation du premier ordre dite vitesse-pression. La formulation variationnelle du problème semi-discrétisé, dans laquelle il restait à spécifier les espaces d'approximations, est donnée par (7.2). On commence par la définition des espaces des inconnues volumiques, c'est à dire, $\underline{X}_h(\Omega)$ et $M_h(\Omega)$. Ainsi, nous avons choisi l'élément fini mixte $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ introduit dans [80, 12] pour la discrétisation du couple $(\underline{v}, p)$. Cet élément, qui se base sur la deuxième famille de Nédelec [68], s'appuie sur un maillage régulier $T_h(\Omega)$ du rectangle Ω. Il est compatible avec des techniques de condensation de masse, ce qui permet la construction des schémas numériques explicites en temps. De cette façon, le champ de vitesse et la pression appartiennent respectivement aux espaces

$$
\left|
\begin{array}{lcl}
\underline{X}_h(\Omega) & := & \left\{ \underline{\tilde{v}}^h \in \underline{X}(\Omega) \ / \ \forall\, K \in T_h(\Omega), \underline{\tilde{v}}^h_{|K} \in \mathcal{Q}_1(K) \times \mathcal{Q}_1(K) \right\}, \\
M_h(\Omega) & := & M_h^0(\Omega) \qquad\qquad \text{avec,} \\
M_h^0(\Omega) & := & \left\{ \tilde{p}^h \in M(\Omega) \ / \ \forall\, K \ \in T_h(\Omega), \tilde{p}^h_{|K} \in \mathcal{Q}_0(K) \right\}.
\end{array}
\right. \tag{8.1}
$$

Le champ de vitesse est bilinéaire par composante et par élément et il appartient à l'espace $\underline{X}(\Omega)$. Ceci veut dire que la composante $\underline{v}_x$ (resp. $\underline{v}_z$) peut être discontinue dans la direction des axes z (resp. dans la direction des axes x). Les degrés de liberté seront définis sur les noeuds par (voir aussi la figure 8.1.(a))

$$
\left.
\begin{array}{lcl}
(v_x^h)_{i,j} & \longrightarrow & \text{valeur d'en haut de } v_x \\
(v_x^b)_{i,j} & \longrightarrow & \text{valeur d'en bas de } v_x \\
(v_z^d)_{i,j} & \longrightarrow & \text{valeur à droite de } v_z \\
(v_z^g)_{i,j} & \longrightarrow & \text{valeur à gauche de } v_z
\end{array}
\right| , \quad \text{(quatre ddl par noeud).}
$$

La pression est constante sur chaque élément. Les degrés de liberté sont définis au centre de la maille par (voir aussi la figure 8.1.(a))

$$
p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \quad \longrightarrow \quad \text{valeur de } p \text{ au centre de la maille} \ \Big| , \quad \text{(un ddl par maille).}
$$

Lorsqu'on applique des techniques de condensation de masse (en utilisant sur chaque maille la formule de quadrature qui se sert des quatre sommets), on a que la matrice M_v est diagonale par blocs 4×4 (nombre de degrés de liberté par noeud) et la matrice M_p sera tout simplement diagonale.

Quelques Propriétés de l'Élément Présenté. À cette étape on introduit quelques propriétés de l'élément fini présenté qu'on utilisera par la suite (voir [80, 12] pour avoir plus de détails). Si on note

$$\mathcal{P}_{m,n} \;=\; \left\{ q(x,z) \;/\; q(x,z) = \sum_{i \le m, j \le n} a_{i,j}\; x^i\; z^j \right\},$$

alors, il est clair que

$$\underline{X}_h^s(\Omega) \;\subset\; \underline{X}_h(\Omega), \tag{8.2}$$

où

$$\underline{X}_h^s(\Omega) \;:=\; \left\{ \underline{\tilde{v}}^h \in \underline{X}(\Omega) \;/\; \forall\, K \in T^h, \underline{\tilde{v}}^h_{|K} \in \mathcal{P}_{10}(K) \times \mathcal{P}_{01}(K) \right\}, \tag{8.3}$$

est l'élément fini de Raviart-Thomas de plus bas degré [73, 75]. Par conséquent, on peut décomposer notre espace comme

$$\underline{X}_h(\Omega) \;=\; \underline{X}_h^s(\Omega) \;\oplus\; \underline{X}_h^r(\Omega), \tag{8.4}$$

où $\underline{X}_h^r(\Omega)$ est le complément orthogonal de $\underline{X}_h^s(\Omega)$ dans $\underline{X}_h(\Omega)$ pour le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. Ceci implique que

$$\left| \begin{array}{ll} & \forall\, \underline{v}^h \in \underline{X}_h(\Omega), \quad \underline{v}^h \;=\; \underline{v}^{h,s} \;+\; \underline{v}^{h,r}, \\ \text{avec} & (\underline{v}^{h,s}, \underline{v}^{h,r}) \in \underline{X}_h^s(\Omega) \times \underline{X}_h^r(\Omega), \quad (\underline{v}^{h,s}, \underline{v}^{h,r})_{L^2(\Omega)} \;=\; 0, \end{array} \right. \tag{8.5}$$

où on note $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ le produit scalaire $L^2(\Omega)$ habituel. On rappelle aussi que

$$\forall\, \underline{v}^{h,s} \;\in\; \underline{X}_h^s(\Omega), \quad \text{div}\, \underline{v}^{h,s} \;\in\; M_h^0(\Omega), \tag{8.6}$$

et que l'espace div$(\underline{X}_h^r(\Omega))$ est orthogonal à $M_h^0(\Omega)$, i.e.,

$$\forall\, p^h \in M_h^0(\Omega),\; \forall \underline{v}^{h,r} \in \underline{X}_h^r(\Omega), \quad (\text{div}\, \underline{v}^{h,r}, p^h)_{L^2(\Omega)} \;=\; 0. \tag{8.7}$$

8.1.2 Application à la Discrétisation de l'Espace $\underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega) \times \underline{M}(\Omega)$

Pour l'approximation des équations de l'élastodynamique, on peut définir une extension de l'élément fini présenté précédemment pour approcher les espaces $\underline{\underline{X}}(\Omega) \times \underline{M}(\Omega)$. Par ailleurs, dans ce cas, le tenseur de contraintes doit également satisfaire une propriété de symétrie. Ainsi on a définit

$$\left| \begin{array}{lllllll} \underline{\underline{X}}_h(\Omega) & := & \underline{X}_h(\Omega) \times \underline{X}_h(\Omega), & \underline{\underline{X}}_h^{sym}(\Omega) & := & \underline{\underline{X}}_h(\Omega) \cap \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega), \\ \underline{M}_h(\Omega) & := & \underline{M}_h^0(\Omega), & \underline{M}_h^0(\Omega) & := & M_h^0(\Omega) \times M_h^0(\Omega). \end{array} \right. \tag{8.8}$$

De par les propriétés de l'élément fini scalaire (présenté dans la section précédente), il est clair qu'ici aussi cet élément est compatible avec les techniques de condensation de masse. Notons que c'est cet

élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ qui a été implémenté dans le code ATHENA2D.

Le tenseur de contraintes approché est bilinéaire par composante et par élément avec les conditions de continuité nécessaires pour appartenir à l'espace $\underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega)$. Ceci implique que la composante σ_{xx} (resp. σ_{zz}) peut être discontinue sur les arrêtes horizontales (resp. verticales). La symétrie du tenseur implique que la composante σ_{xz} est globalement continue (voir la figure 8.1.(b)). Les degrés de liberté sont définis sur les noeuds par

$$\left.\begin{array}{lcc} (\sigma_{xx}^h)_{i,j} & \longrightarrow & \text{valeur d'en haut de } \sigma_{xx} \\ (\sigma_{xx}^b)_{i,j} & \longrightarrow & \text{valeur d'en bas de } \sigma_{xx} \\ (\sigma_{zz}^d)_{i,j} & \longrightarrow & \text{valeur à droite de } \sigma_{zz} \\ (\sigma_{zz}^g)_{i,j} & \longrightarrow & \text{valeur à gauche de } \sigma_{zz} \\ (\sigma_{xz})_{i,j} & \longrightarrow & \text{valeur de } \sigma_{xz} \end{array}\right| , \quad \text{(cinq ddl par noeud).}$$

Le champ de vitesse est constant par élément et par composante (voir la figure 8.1.(b)). Ses degrés de liberté sont définis au centre de la maille par

$$\left.\begin{array}{lcc} (v_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & \longrightarrow & \text{valeur de } v_x \text{ au centre de la maille} \\ (v_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & \longrightarrow & \text{valeur de } v_z \text{ au centre de la maille} \end{array}\right| , \quad \text{(deux ddl par maille).}$$

Si on effectue de l'intégration numérique sur les matrices de masse (en utilisant sur chaque maille la formule de quadrature qui se sert des quatre sommets) on aura que M_σ est diagonale par blocs 5×5 (nombre de degrés de liberté sur chaque sommet) et la matrice M_v est diagonale. Donc, le schéma numérique totalement discrétisé en absence de domaines fictifs est explicite.

Quelques Propriétés de l'Élément Fini Présenté. De la définition (8.8) des espaces de discrétisation, il est clair qu'on aura des propriétés similaires à celles qu'on a présenté pour l'élément du cas scalaire (voir [80, 14] pour avoir plus de détails). Ainsi, on aura

$$\underline{\underline{X}}_h = \underline{\underline{X}}_h^s \oplus \underline{\underline{X}}_h^r, \tag{8.9}$$

avec

$$\underline{\underline{X}}_h^s = \underline{X}_h^s \times \underline{X}_h^s, \quad \text{et}, \quad \underline{\underline{X}}_h^r = \underline{X}_h^r \times \underline{X}_h^r.$$

On a aussi que

$$\forall\, \underline{\underline{\sigma}}^{h,s} \in \underline{X}_h^s(\Omega), \quad \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}^{h,s} \in \underline{M}_h^0(\Omega), \tag{8.10}$$

et

$$\forall\, \underline{v}^h \in \underline{M}_h^0(\Omega),\ \forall\, \underline{\underline{\sigma}}^{h,r} \in \underline{X}_h^r(\Omega), \qquad (\underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}^{h,r}, \underline{v}^h)_{\underline{L^2}(\Omega)} = 0, \tag{8.11}$$

où on note $(\cdot,\cdot)_{\underline{L^2}(\Omega)}$ le produit scalaire $(L^2(\Omega))^2$ habituel.

8.2 Résultats de Convergence Existants en Absence de Domaines Fictifs

Dans cette section on rappelle quelques résultats de convergence pour l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ en absence de domaines fictifs qui ont été obtenus dans [12, 14]. Par conséquent, on supposera tout au long de cette section que le terme qui fait intervenir les domaines fictifs (l'opérateur $b(\cdot,\cdot)$ et le multiplicateur de Lagrange) n'est pas présent.

8.2.1 Pour l'Équation des Ondes Scalaire

L'élément fini présenté ci-dessus n'entre pas dans la théorie classique des éléments finis mixtes [25, 24] ce qui fait que son analyse de convergence n'est pas standard. En effet, si on introduit les opérateurs linéaires

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}: \ \underline{X}(\Omega) & \longrightarrow & M(\Omega)' \\ \underline{\tilde{v}} & \mapsto & \mathcal{D}(\underline{\tilde{v}}): \ M(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \qquad \tilde{p} \mapsto \ < \mathcal{D}(\underline{\tilde{v}}), \tilde{p} > = \ d(\underline{\tilde{v}}, \tilde{p}), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_h: \ \underline{X}_h(\Omega) & \longrightarrow & M_h(\Omega)' \\ \underline{\tilde{v}}^h & \mapsto & \mathcal{D}_h(\underline{\tilde{v}}^h): \ M_h(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \qquad \tilde{p}^h \mapsto \ < \mathcal{D}_h(\underline{\tilde{v}}^h), \tilde{p}^h > = \ d(\underline{\tilde{v}}^h, \tilde{p}^h), \end{array}$$

il est facile de vérifier que l'inclusion

$$\text{Ker}(\mathcal{D}_h) \ \subset \ \text{Ker}(\mathcal{D}), \tag{8.12}$$

n'est pas satisfaite. Ceci entraîne que la forme bilinéaire $m_v(\cdot,\cdot)$ (définie dans (7.4)) n'est pas coercive sur Ker$(\mathcal{D}_h)$ (même si elle l'est sur Ker$(\mathcal{D})$). Malgré tout, il a été possible d'établir un résultat de convergence du type

$$\|\underline{v} - \underline{v}^{h,s}\|_{\underline{X}(\Omega)}(t) + \|\underline{v}^{h,r}\|_{\underline{L^2}(\Omega)}(t) + \|p - p^h\|_{M(\Omega)}(t) \ \leq \ \mathcal{C}(\underline{v}, p, T)\, h, \quad \forall\, t \leq T, \tag{8.13}$$

sous une certaine régularité de la solution du problème continu. Des résultats d'approximation sur l'espace $\underline{X}_h^s(\Omega)$ (inclus dans $\underline{X}_h(\Omega)$) on été utilisés. On renvoie le lecteur à [12] pour l'énoncé précis et la preuve détaillée du résultat.

Remarque 8.2.1 *On peut remarquer que dans l'estimation (8.13), la vitesse discrète a été décomposée :*

$$\underline{v}^h \ = \ \underline{v}^{h,s} + \underline{v}^{h,r}, \qquad (\underline{v}^{h,s}, \underline{v}^{h,r}) \ \in \ \underline{X}_h^s(\Omega) \times \underline{X}_h^r(\Omega).$$

C'est la projection sur l'espace de Raviart-Thomas, $\underline{v}^{h,s}$, qui converge vers la vitesse continue en norme $H(div, C)$, tandis que la partie qui reste tend vers zéro en norme $(L^2(\Omega))^2$. Cette dernière partie a été introduite afin de pouvoir appliquer des techniques de condensation de masse.

On signale qu'il n'a pas été possible d'étendre la preuve de ce résultat au cas où on se sert de la méthode des domaines fictifs.

8.2.2 Pour l'Élastodynamique

De la même façon que pour le cas scalaire, l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ appliqué aux équations de l'élastodynamique n'entre pas dans la théorie classique des éléments finis mixtes. On remarque facilement que, si on définit les opérateurs linéaires

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}: \ \underline{\underline{X}}(\Omega) & \longrightarrow & \underline{M}(\Omega)' \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} & \mapsto & \mathcal{D}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}): \ \underline{M}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \qquad \underline{\tilde{v}} \mapsto \ < \mathcal{D}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}), \underline{\tilde{v}} > = \ d(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}, \underline{\tilde{v}}), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_h: \ \underline{\underline{X}}_h(\Omega) & \longrightarrow & \underline{M}_h(\Omega)' \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h & \mapsto & \mathcal{D}_h(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h): \ \underline{M}_h(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \qquad \underline{\tilde{v}}^h \mapsto \ < \mathcal{D}_h(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h), \underline{\tilde{v}}^h > = \ d(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h, \underline{\tilde{v}}^h), \end{array}$$

l'inclusion

$$\text{Ker}(\mathcal{D}_h) \quad \subset \quad \text{Ker}(\mathcal{D}), \tag{8.14}$$

n'est pas satisfaite. Ceci fait que la forme bilinéaire $m_\sigma(\cdot,\cdot)$ (définie dans (7.17)) n'est pas coercive sur Ker($\mathcal{D}_h$) (même si elle l'est sur Ker($\mathcal{D}$)). À ce fait il faut ajouter la difficulté qui provient de la symétrie du tenseur de contraintes qui fait qu'on ne peut pas se ramener au résultat de convergence obtenu pour la version scalaire de l'élément fini (voir la remarque 8.2.2). Malgré tout, il a été possible d'établir un résultat de convergence du type

$$\|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^h\|_{\underline{\underline{L^2}}(\Omega)}(t) + \|\underline{v} - \underline{v}^h\|_{\underline{M}(\Omega)}(t) \;\leq\; \mathcal{C}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v}, T)\, h, \qquad \forall\, t \leq T, \tag{8.15}$$

sous certaines hypothèses de régularité sur la solution du problème continu. On envoie au lecteur à [14, 80] pour les détails.

Remarque 8.2.2 *Une différence importante par rapport au cas scalaire est que l'estimation sur l'inconnue tensorielle est donnée en norme $(L^2(\Omega))^{2\times 2}$. Dans ce cas, un effet de verrouillage numérique dû à la symétrie du tenseur de contraintes fait que l'espace*

$$\underline{\underline{X}}_h^s(\Omega) \cap \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega),$$

n'approche pas bien l'espace $\underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega)$ (voir [80, 14]). Ceci fait qu'on ne peut pas appliquer la théorie développée pour le cas scalaire.

Cependant, les mêmes auteurs dans [11] ont aussi été capables d'établir un résultat similaire à celui du cas scalaire :

$$\|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^{h,s}\|_{\underline{\underline{X}}(\Omega)}(t) + \|\underline{\underline{\sigma}}^{h,r}\|_{\underline{\underline{L^2}}(\Omega)}(t) + \|\underline{v} - \underline{v}^h\|_{\underline{M}(\Omega)}(t) \;\leq\; \mathcal{C}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v}, T)\, h, \qquad \forall\, t \leq T, \tag{8.16}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}^{h,s}$ (resp. $\underline{\underline{\sigma}}^{h,r}$) est la projection $\underline{\underline{L^2}}(\Omega)$ de $\underline{\underline{\sigma}}^h$ (considéré comme un élément de $\underline{\underline{X}}_h(\Omega)$) sur l'espace $\underline{\underline{X}}_h^s(\Omega)$ (resp. $\underline{\underline{X}}_h^r(\Omega)$). Il faut bien noter que cette projection a été faite dans un espace de tenseurs qui peuvent ne pas être symétriques. La preuve du résultat se sert d'une formulation équivalente du problème semi-discrétisé qui impose la symétrie du tenseur de contraintes au sens faible ce qui permet d'utiliser l'espace $\underline{\underline{X}}(\Omega)$ qui est bien approché par $\underline{\underline{X}}^s(\Omega)$. On renvoie le lecteur à [11] pour l'énoncé précis et la preuve détaillée (très technique) du résultat.

Encore une fois, il n'a pas été possible d'adapter la preuve de ce résultat au cas où on utilise les domaines fictifs.

8.3 Expériences Numériques avec Domaines Fictifs. Difficultés

Dans les sections précédentes on a vu que l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ fournit des bons résultats lorsqu'on l'applique à des problèmes de propagation d'ondes comme l'acoustique ou l'élastodynamique. L'analyse de convergence s'avère compliquée car il n'entre pas dans la théorie classique des éléments finis mixtes. Dans cette section on exhibe son comportement lorsqu'on le couple avec la méthode des domaines fictifs pour la prise en compte des obstacles.
Ainsi, pour chaque problème (l'acoustique et l'élastodynamique) on présente d'abord l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange, puis on montre quelques expériences numériques avec différentes configurations de fissures. On verra que, la méthode semble fournir une bonne solution pour des fissures horizontales (et verticales), mais, par contre, elle ne converge pas vers la bonne solution dans le cas d'un défaut en diagonale.

8.3.1 Le Cas Scalaire

Pour la discrétisation du multiplicateur de Lagrange on considère

$$\mathcal{G}_H(\Gamma) \quad = \quad \left\{ \tilde{\lambda}^H \in \mathcal{G}(\Gamma) \ / \ \tilde{\lambda}^H_{|S} \in \mathcal{P}_1(S) \ \forall \ S \in \Theta_H(\Gamma) \right\}, \tag{8.17}$$

qui est clairement une approximation interne (choix conforme).

Le domaine de calcul est le carré $\Omega = [0, 10] \times [0, 10]$ composé d'un matériau homogène isotrope avec $\rho = 1$ et $\underline{A} = \underline{I}$. Il est perturbé par une condition initiale sur la pression centrée au point $(x_c, z_c) = (5, 5)$ et donnée par l'expression

$$p((x, z), t = 0) \quad = \quad 0.1H\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

où $r_0 = 1.5$ et $H(r)$ est définie par (1.84). On utilise un maillage uniforme de pas $\Delta x = \Delta z = 0.025$. Le pas de discrétisation temporel est choisi tel que le rapport $\Delta t/\Delta x$ soit égal à la valeur maximale qui assure la stabilité. On utilise des couches absorbantes parfaitement adaptées pour simuler le caractère non borné de notre domaine. Pour la discrétisation des différents obstacles on a construit des maillages surfaciques uniformes avec un pas $H = R\Delta x$.

Une fissure horizontale. Dans la première expérience on considère une fissure horizontale donnée par

$$(x, z) \quad = \quad (5 + 2\sqrt{2}(2s - 1), 5 - 2\sqrt{2}), \qquad s \in [0, 1]. \tag{8.18}$$

La méthode converge en donnant des bons résultats lorsqu'on utilise des valeurs raisonnables pour le rapport des pas R (dans l'intervalle $[0.75, 3.5]$). Dans la première colonne de la figure 8.2 on représente la valeur absolue de la pression pour $R = 1.2$. Au début, l'onde est totalement réfléchie par le défaut. Lorsque le front d'onde arrive aux extrémités de la fissure, deux ondes diffractées sont créées.

On constate que le multiplicateur de Lagrange (qui peut s'interpréter comme le saut de la pression à travers l'interface Γ) est bien approché sauf aux extrémités de la fissure où la solution est singulière. Dans la première colonne de la figure 8.3 on représente la valeur absolue du multiplicateur à plusieurs instants pour $R = 1.2$. Par exemple, au temps $t = 3.54$ (figure du milieu) il serait raisonnable de faire du raffinement de maillage aux bouts de la fissure pour pouvoir bien capturer le comportement de la solution.

Une fissure diagonale. Défaut de convergence. Dans la seconde expérience on traite le cas d'une fissure donné par

$$(x, z) \quad = \quad (5 + 4\tilde{s}, 1 + 4\tilde{s}), \qquad \tilde{s} \in [0, 1], \tag{8.19}$$

c'est à dire, le même obstacle que dans le paragraphe précédent avec une rotation de $\pi/4$ radians par rapport au point (x_c, z_c), le centre de la condition initiale. Étant donné que le milieu est isotrope, la solution du problème continu est aussi une rotation de celle obtenue lorsqu'on considère l'obstacle horizontal.

La solution approchée obtenue par le code ne semble pas converger vers la bonne solution pour des valeurs du paramètre R dans l'intervalle $[0.75, 3.5]$. Dans la seconde colonne de la figure 8.2 on voit la valeur absolue de la pression à des instants différents pour $R = 1.2$. Une partie importante de l'onde incidente passe à travers l'obstacle. Clairement, la solution ainsi obtenue n'est pas une rotation de la solution calculé pour la fissure horizontale.

On peut faire des remarques similaires pour l'approximation du multiplicateur de Lagrange. Dans la seconde colonne de la figure 8.3 on représente la valeur absolue du multiplicateur le long de la fissure pour plusieurs instants et $R = 1.2$. On remarque que ces graphes sont très différents de ceux obtenus dans le cas de la fissure horizontale alors qu'ils devraient se ressembler.

On pourrait penser que ce défaut de convergence lorsqu'on considère une fissure en diagonale (qu'on a mis en évidence dans les figures 8.2 et 8.3) est dû au fait de prendre le pas de discrétisation de la fissure H trop petit par rapport à Δx. Cependant, les résultats pour des valeurs de R plus grandes sont similaires (voir la figure 8.4 avec $R = 3.1$).

Remarque 8.3.1 *Le défaut de convergence ne semble pas être dû au choix de l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange. D'autres espaces (conformes et non-conformes) ont été considérés et donnent des résultats similaires.*

8.3.2 Le Cas Vectoriel

Pour le cas vectoriel, on a choisi l'espace

$$\underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma) \;=\; \left\{ \tilde{\underline{\lambda}}^H \in \underline{\mathcal{G}}(\Gamma) \;/\; \tilde{\underline{\lambda}}^H_{|S} \in (\mathcal{P}_1(S))^2 \;\forall\, S \in \Theta_H(\Gamma) \right\}, \tag{8.20}$$

pour discrétiser le multiplicateur de Lagrange. Ensuite on présente les expériences numériques considérés.

Le domaine de calcul est le carré $\Omega = [0, 10] \times [0, 10]$ composé d'un matériau homogène isotrope défini par les coefficients (1.82). On considère deux types de conditions initiales centrées au point $(x_c, z_c) = (5, 5)$ sur le champ de vitesse données par les expressions suivantes

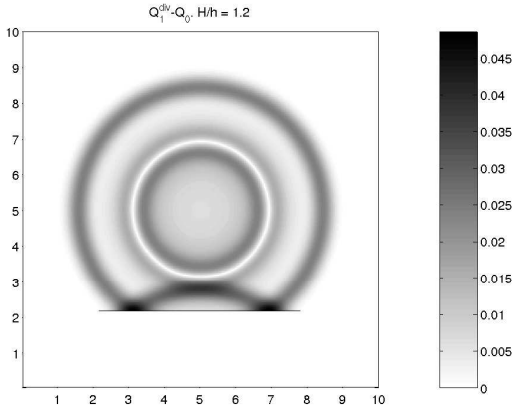
$$\bullet \quad \underline{v}((x,z), t=0) \;=\; 0.1\, H\left(\frac{r}{r_0}\right) \underline{e}_r, \tag{8.21}$$

$$\bullet \quad \underline{v}((x,z), t=0) \;=\; 0.1\, H\left(\frac{r}{r_0}\right) \underline{e}_\tau. \tag{8.22}$$

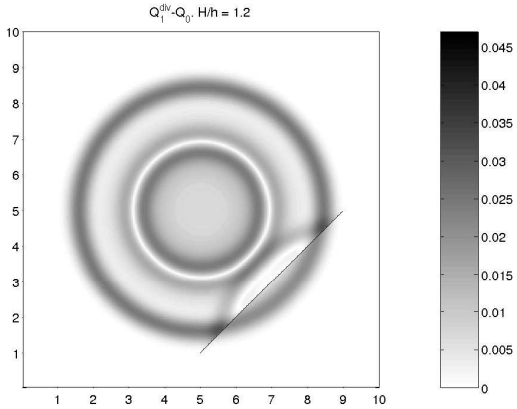
avec $r_0 = 1.5$ et $H(r)$, $\underline{e}_r$ et $\underline{e}_\tau$ définies dans la section 1.9.1. La première parmi elles va générer une onde de pression (onde P), tandis que la deuxième une onde de cisaillement (onde S). On utilise un maillage volumique uniforme de pas $\Delta x = \Delta z = 0.025$. Le pas de discrétisation temporelle est choisi tel que $\Delta t / \Delta x = 0.95\, \mathcal{C}_{cfl}$. On utilise des couches absorbantes parfaitement adaptées pour simuler le caractère non borné de notre domaine. Pour la discrétisation des fissures on construit des maillages surfaciques aussi uniformes avec un pas $H = R\, \Delta x$.

Une fissure horizontale. La première fissure considérée est décrite par (8.18). Comme dans le cas scalaire, la méthode semble converger lorsqu'on utilise des valeurs raisonnables du paramètre R (dans l'intervalle $[0.75, 3.5]$).

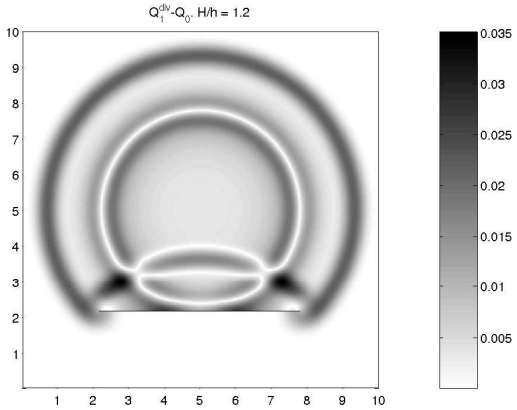
Dans la première colonne des figures 8.5 et 8.6 on représente respectivement le module du champ de vitesse et les multiplicateurs de Lagrange sur la fissure pour $R = 1.2$ lorsqu'on utilise la première condition initiale. L'onde de pression incidente est réfléchie par l'obstacle en générant des ondes de pression et cisaillement réfléchies et diffractées. Encore une fois, l'approximation du multiplicateur de Lagrange est assez correcte sauf aux bouts de la fissure où la singularité de la solution produit des oscillations (par



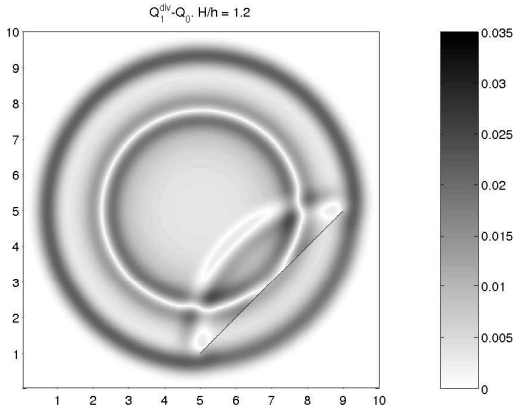
(a) $|p|$ au temps $t = 2.65$



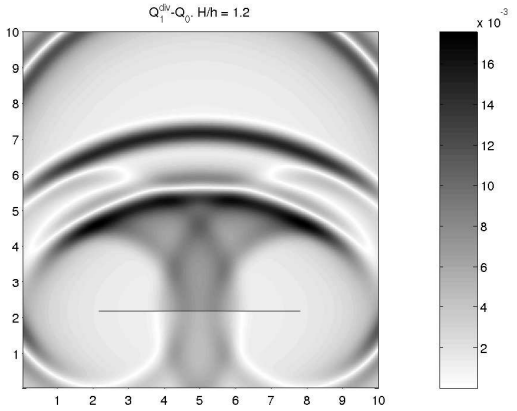
(b) $|p|$ au temps $t = 2.65$



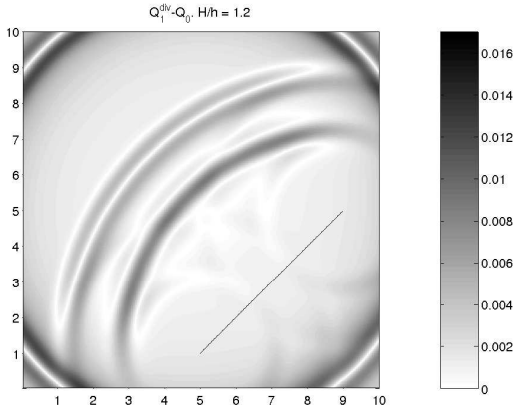
(c) $|p|$ au temps $t = 3.54$



(d) $|p|$ au temps $t = 3.54$

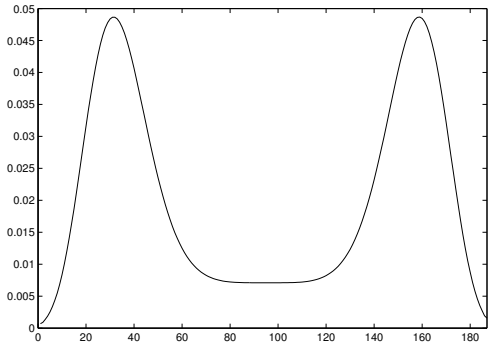


(e) $|p|$ au temps $t = 7.07$

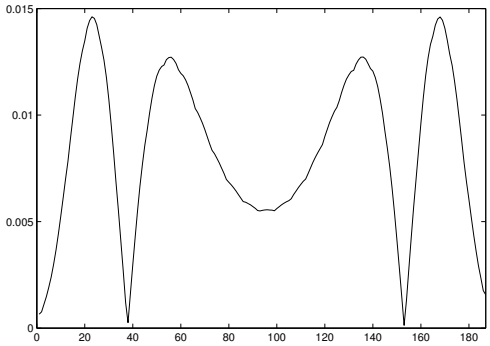


(f) $|p|$ au temps $t = 7.07$

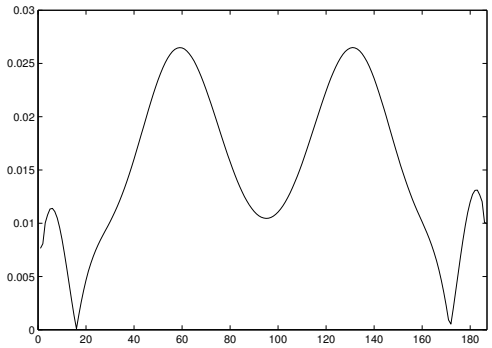
FIG. 8.2 – $\mathcal{Q}_1^{div} - \mathcal{Q}_0$. Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.2$



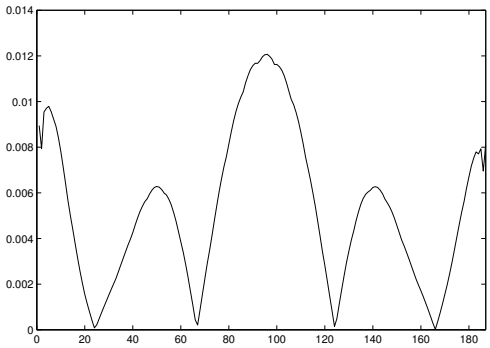
(a) $|\lambda|$ au temps $t = 2.65$



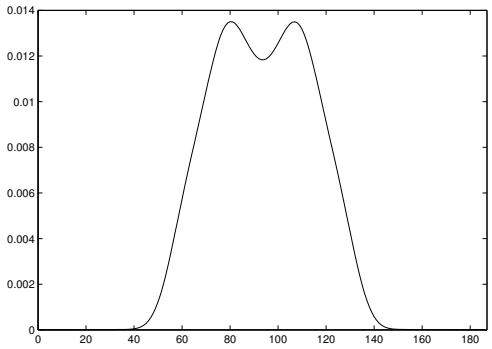
(b) $|\lambda|$ au temps $t = 2.65$



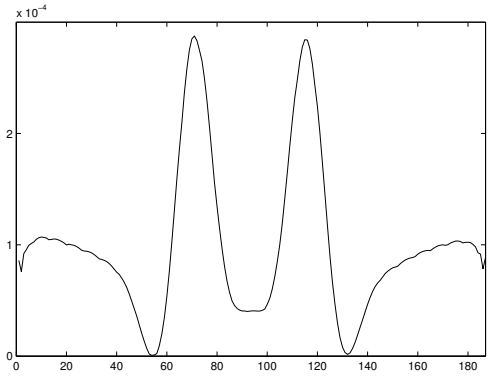
(c) $|\lambda|$ au temps $t = 3.54$



(d) $|\lambda|$ au temps $t = 3.54$

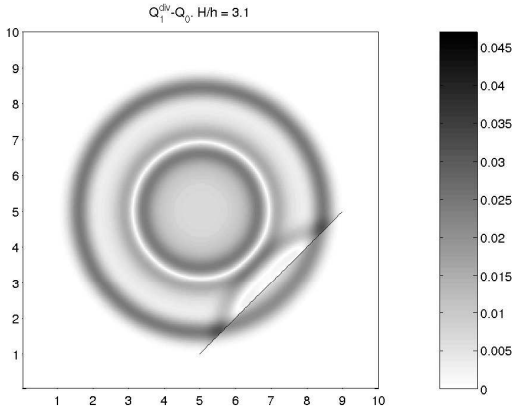


(e) $|\lambda|$ au temps $t = 7.07$

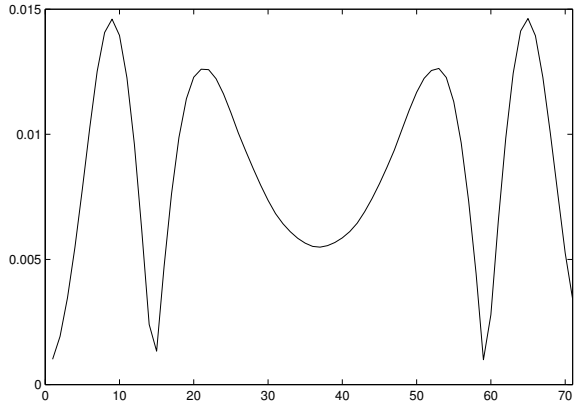


(f) $|\lambda|$ au temps $t = 7.07$

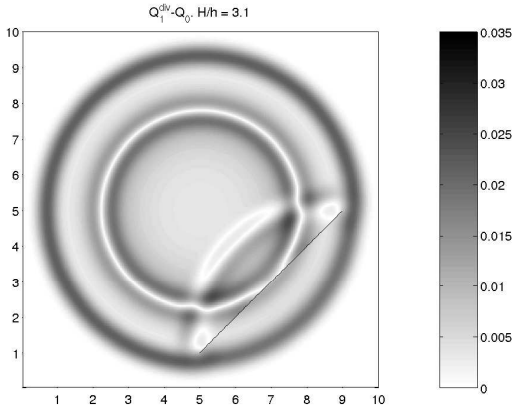
FIG. 8.3 – $\mathcal{Q}_1^{div} - \mathcal{Q}_0$. Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.2$



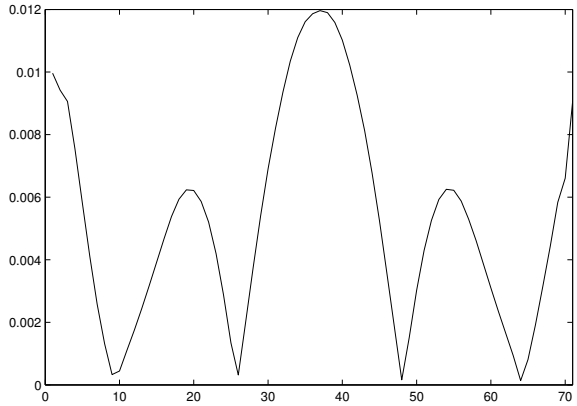
(a) $|p|$ au temps $t = 2.65$



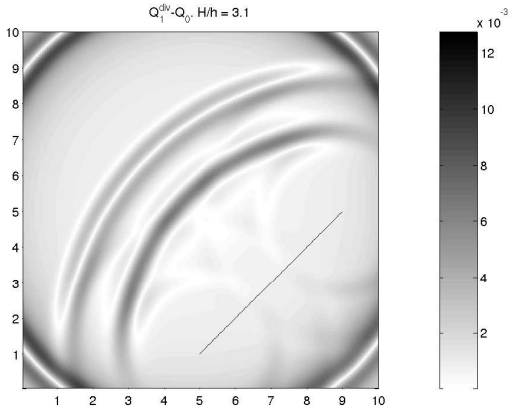
(b) $|\lambda|$ au temps $t = 2.65$



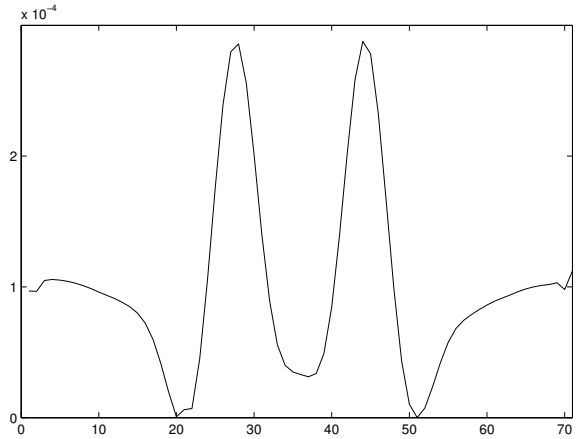
(c) $|p|$ au temps $t = 3.54$



(d) $|\lambda|$ au temps $t = 3.54$



(e) $|p|$ au temps $t = 7.07$



(f) $|\lambda|$ au temps $t = 7.07$

FIG. 8.4 – $\mathcal{Q}_1^{div} - \mathcal{Q}_0$. Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 3.1$

exemple au temps $t = 1.7310$ dans la figure 8.6.c). Il est clair qu'un raffinement de maillage à ce niveau serait fortement recommandé.

On peut en déduire des conclusions similaires lorsqu'on perturbe le système avec la deuxième condition initiale (voir la première colonne des figures 8.7 et 8.8 pour le module du champ de vitesse et les multiplicateurs de Lagrange sur la fissure respectivement). Cette fois-ci c'est l'onde de cisaillement incidente qui génère des ondes de pression (pas très visibles) et de cisaillement réfléchies et diffractées au contact avec la fissure.

Une fissure en diagonale. Défaut de convergence. Dans la deuxième expérience on traite le cas de la fissure en diagonale d'équation (8.19). On rappelle qu'il s'agit de la même fissure que celle du paragraphe précédent avec une rotation de $\pi/4$ radians par rapport au centre de la condition initiale. On remarque que la condition initiale vérifie

$$v((x,z),t=0) \;=\; Q\, v((\tilde{x},\tilde{z}),t=0),$$

avec

$$(\tilde{x},\tilde{z})^t \;=\; Q^t\,(x-x_c, z-z_c)^t \;+\; (x_c,z_c)^t,$$

$$Q \;=\; \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}.$$

Étant donné que le matériau est isotrope, la solution de ce problème, qu'on dénote par

$$(\underline{\underline{\sigma}}_{diag}, \underline{v}_{diag}, \underline{\lambda}_{diag}),$$

et la solution du problème avec la fissure horizontale, qu'on dénote par

$$(\underline{\underline{\sigma}}_{hor}, \underline{v}_{hor}, \underline{\lambda}_{hor}),$$

vérifient

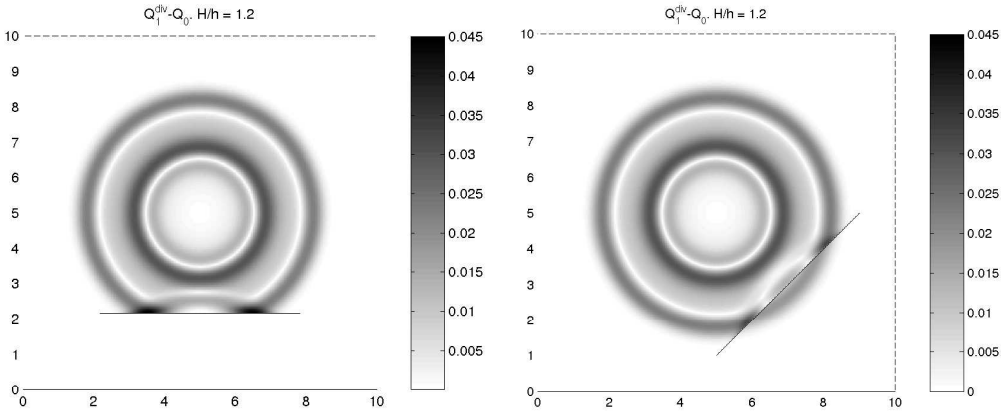
$$\underline{v}_{hor}(x,z) \;=\; Q\,\underline{v}_{diag}(\tilde{x},\tilde{z}). \tag{8.23}$$

Ceci implique en particulier que

$$\left|\begin{array}{rcl} |\underline{v}_{hor}|(x,z) & = & |\underline{v}_{diag}|(\tilde{x},\tilde{z}), \\ \underline{\lambda}_{hor}(s) & = & Q\,\underline{\lambda}_{diag}(s), \\ |\underline{\lambda}_{hor}|(s) & = & |\underline{\lambda}_{diag}|(s), \end{array}\right. \tag{8.24}$$

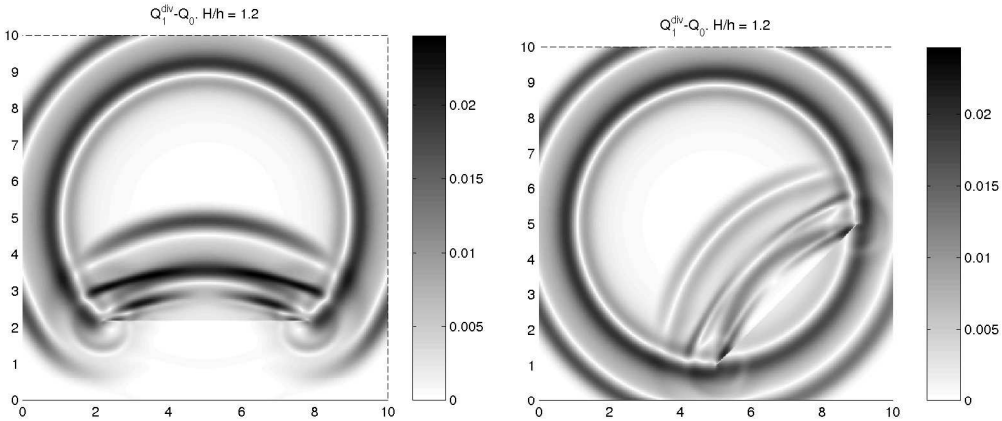
où s sont les coordonnées curvilinéaires de chacune des fissures.

Cependant, la solution approchée ne converge pas vers la solution du problème continu lorsqu'on choisit des valeurs du paramètre R dans l'intervalle $[0.75, 3.5]$. Les ondes incidentes ne sont pas totalement réfléchies par l'obstacle comme on peut voir dans la deuxième colonne des figures 8.5 et 8.7 où on représente le module du champ de vitesse à trois instants différents pour les expériences avec les deux type de conditions initiales et $R = 1.2$. La valeur du multiplicateur de Lagrange représentée dans la deuxième colonne des figures 8.6 et 8.8 ne sont pas bien approchées non plus. On ne retrouve pas les relations (8.23) et (8.24).



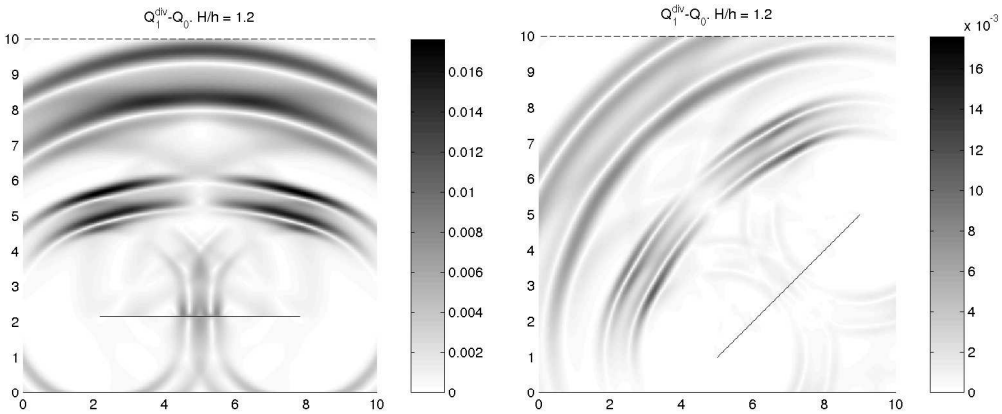
(a) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 0.8655$

(b) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 0.8655$



(c) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 1.7310$

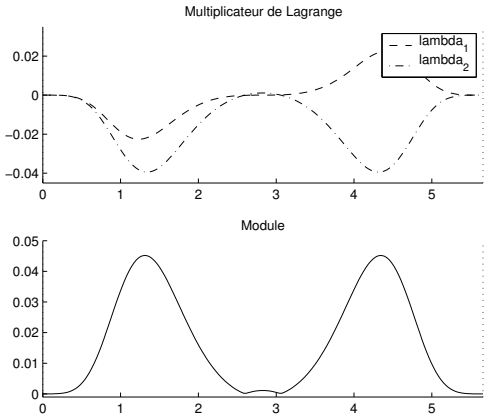
(d) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 1.7310$



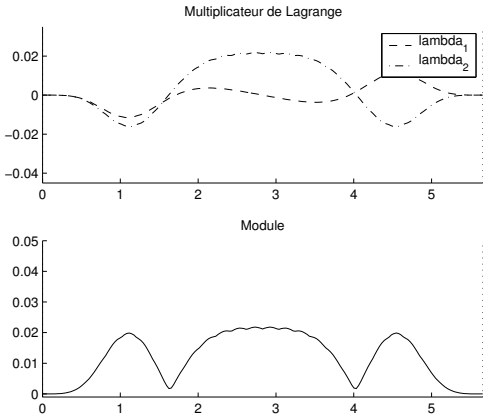
(e) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 3.4620$

(f) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 3.4620$

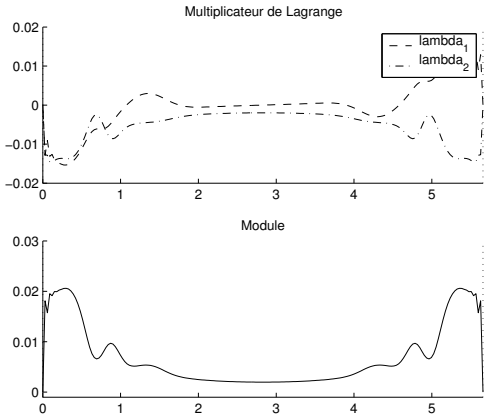
FIG. 8.5 – $\mathcal{Q}_1^{div} - \mathcal{Q}_0$. Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.2$. Onde P incidente



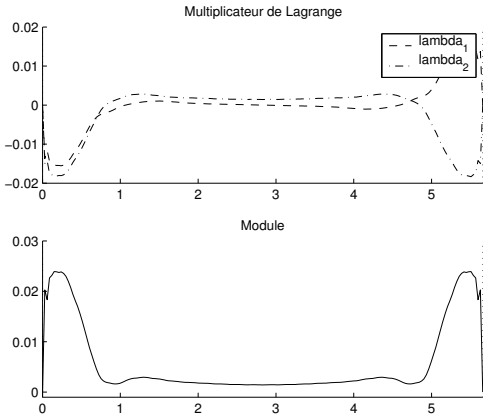
(a) $\underline{\lambda}(s)$ et $|\underline{\lambda}|(s)$ au temps $t = 0.8655$



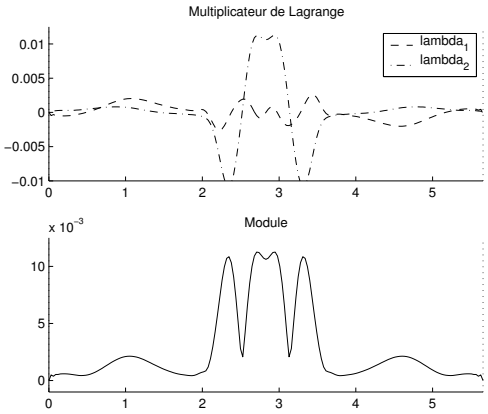
(b) $Q\ \underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 0.8655$



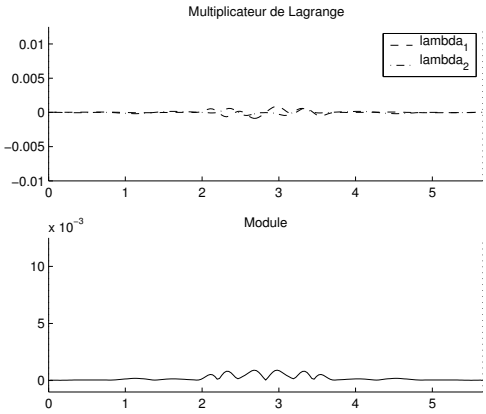
(c) $\underline{\lambda}(s)$ et $|\underline{\lambda}|(s)$ au temps $t = 1.7310$



(d) $Q\ \underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 1.7310$

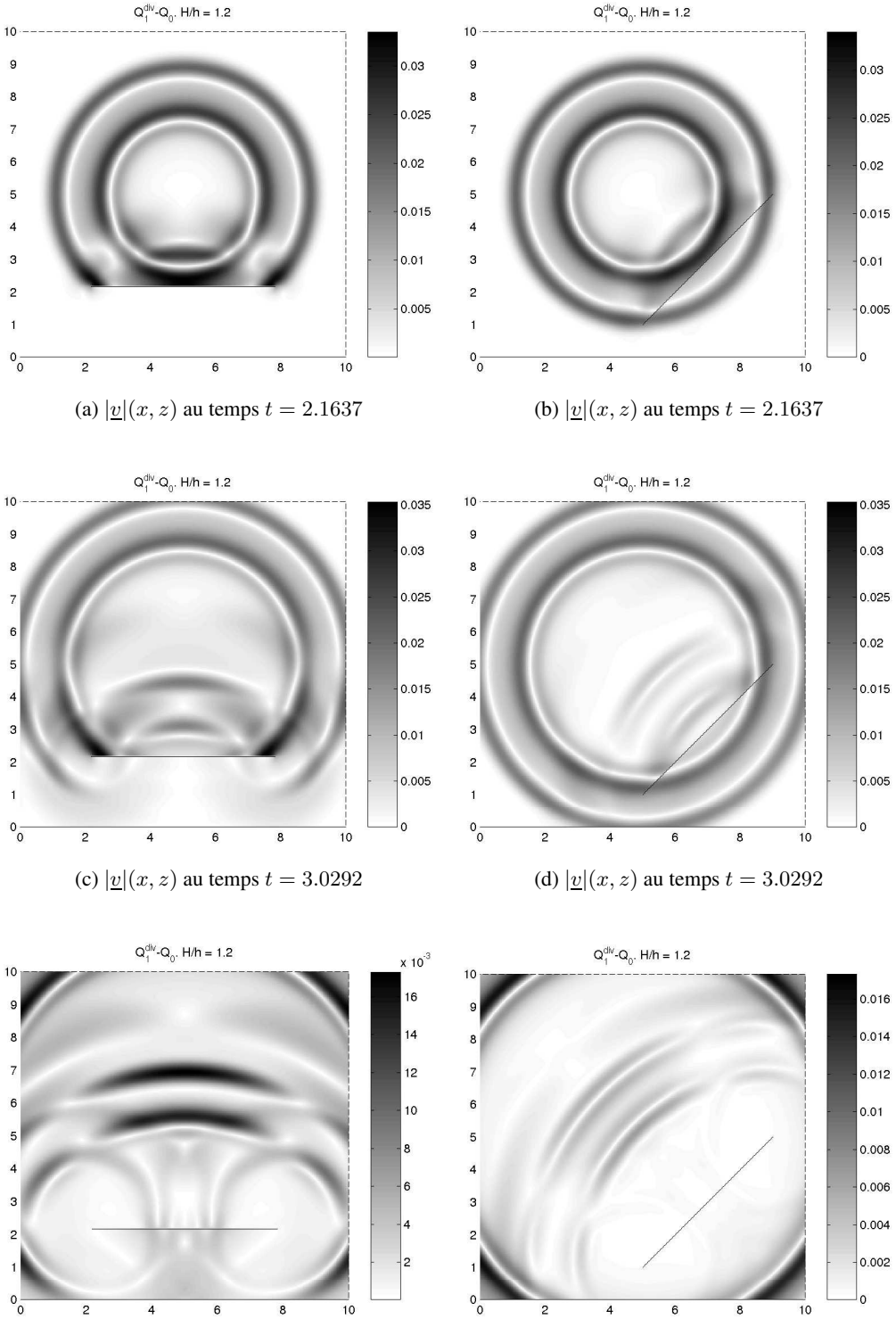


(e) $\underline{\lambda}(s)$ et $|\underline{\lambda}|(s)$ au temps $t = 3.4620$



(f) $Q\ \underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 3.4620$

FIG. 8.6 – $\mathcal{Q}_1^{div} - \mathcal{Q}_0$. Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.2$. Onde P incidente



(a) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 2.1637$

(b) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 2.1637$

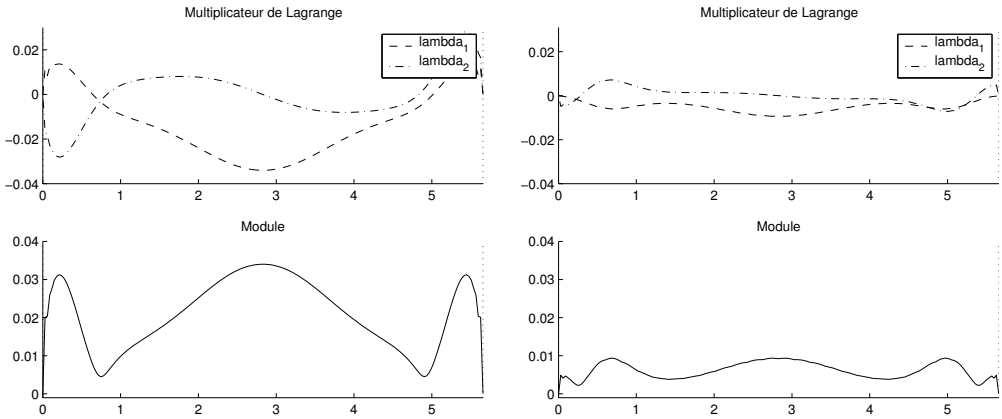
(c) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 3.0292$

(d) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 3.0292$

(e) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 4.7602$

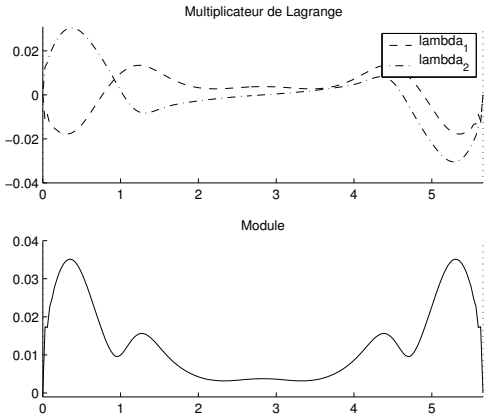
(f) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 4.7602$

FIG. 8.7 – $\mathcal{Q}_1^{div} - \mathcal{Q}_0$. Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.2$. Onde S incidente

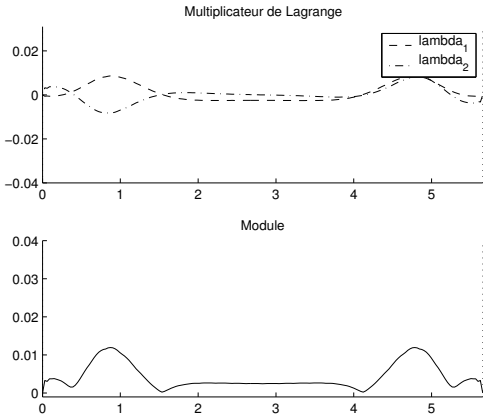


(a) $\underline{\lambda}(s)$ et $|\underline{\lambda}|(s)$ au temps $t = 2.1637$

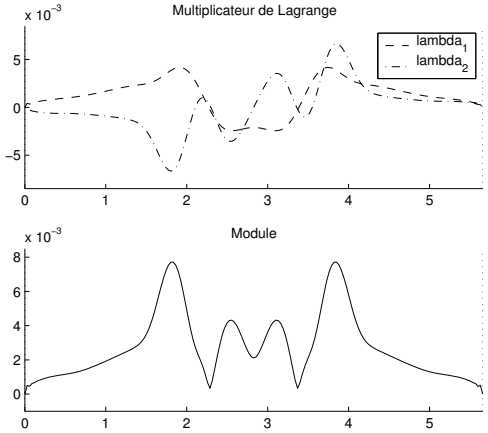
(b) $Q\ \underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 2.1637$



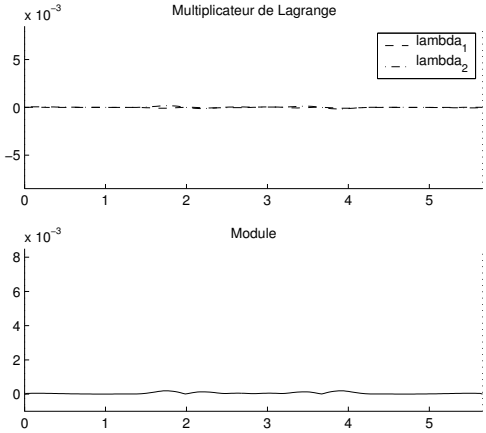
(c) $\underline{\lambda}(s)$ et $|\underline{\lambda}|(s)$ au temps $t = 3.0292$



(d) $Q\ \underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 3.0292$



(e) $\underline{\lambda}(s)$ et $|\underline{\lambda}|(s)$ au temps $t = 4.7602$



(f) $Q\ \underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 4.7602$

FIG. 8.8 – $\mathcal{Q}_1^{div} - \mathcal{Q}_0$. Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.2$. Onde S incidente

8.3.3 Conclusion

L'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ ne semble donc pas converger lorsqu'on l'utilise avec la méthode des domaines fictifs, et ce, quelque soit l'espace choisi pour le multiplicateur. Par ailleurs, aucune démonstration de convergence (ou de non convergence) n'a pu être obtenue. Nous nous sommes alors demandé s'il était possible de modifier cet élément de façon à assurer la convergence avec domaines fictifs, tout en préservant les bonnes propriétés existantes comme la symétrie forte du tenseur de contraintes ou la condensation de masse.

Chapitre 9

L'Élément $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$

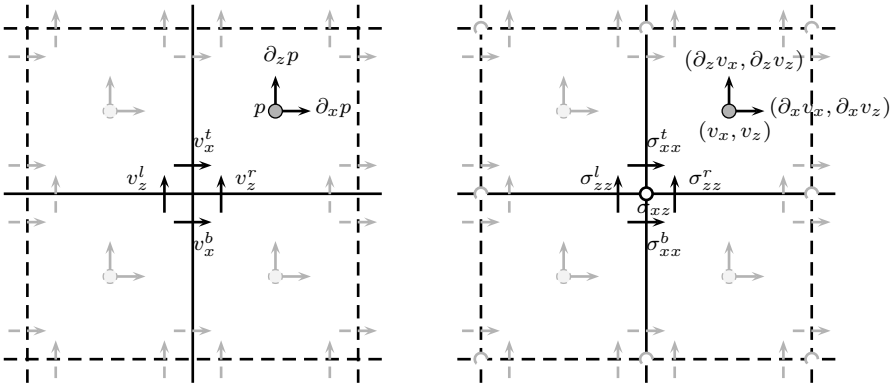
Sommaire

9.1 Présentation de l'Élément $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ 244
9.1.1 Application à la Discrétisation de l'Espace $\underline{X}(\Omega) \times M(\Omega)$ 244
9.1.2 Application à la Discrétisation de l'Espace $\underline{\underline{X}}(\Omega) \times \underline{M}(\Omega)$ 245
9.2 Expériences Numériques avec Domaines Fictifs 246
9.2.1 Le Cas Scalaire 246
9.2.2 Le Cas Vectoriel 247
9.3 Étude de Dispersion. Modes Parasites 251
9.3.1 Pour l'Équation des Ondes Scalaire 251
9.3.2 Pour le Système Élastodynamique 261
9.4 Amortissement des Composantes Parasites 266
9.4.1 Présentation des Équations avec Amortissement pour l'Acoustique Scalaire . . 266
9.4.2 Présentation des Équations avec Amortissement pour l'Élastodynamique . . . 269
9.4.3 Quelques Mots sur la Discrétisation en Temps 270
9.5 Analyse de Convergence avec Domaines Fictifs 271
9.5.1 L'Équation des Ondes Scalaire 271
9.5.1.1 Définition et Analyse de la Projection Elliptique 271
9.5.1.2 Estimation sur le Problème d'Évolution 275
9.5.2 Les Équations de l'Élastodynamique. Difficultés 279

Nous proposons un élément fini modifié qui va permettre d'assurer la convergence de la méthode des domaines fictifs. Avant de le présenter en détail, dans le cas scalaire et vectoriel, expliquons d'où vient l'idée de la modification. Nous avons vu que les difficultés de l'analyse de convergence venaient du fait que l'inclusion (8.14) n'était pas satisfaite. L'idée est alors d'enrichir l'espace de discrétisation $\underline{M}_h(\Omega)$ de telle sorte que

$$\underline{\text{div}}\left(\underline{\underline{X}}_h(\Omega)\right) \quad \subset \quad \underline{M}_h(\Omega), \tag{9.1}$$

ce qui implique l'inclusion désirée et pourrait simplifier l'analyse de convergence (sans et avec domaines fictifs).



(a) Équation des ondes scalaire (b) Système élastodynamique

FIG. 9.1 – Degrés de liberté pour l'élément fini mixte $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$

9.1 Présentation de l'Élément $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$

9.1.1 Application à la Discrétisation de l'Espace $\underline{X}(\Omega) \times M(\Omega)$

On commence par présenter la modification de l'élément fini pour le cas scalaire. Étant donné que l'espace d'approximation pour la vitesse reste le même on se concentre sur la définition de l'espace $M_h(\Omega)$. Dans ce cas on est intéressé à vérifier l'inclusion div $(\underline{X}_h(\Omega)) \subset M_h(\Omega)$ ce qui implique (8.12). Pour cette raison on introduit

$$\left| \begin{array}{lcll} M_h(\Omega) & := & M_h^1(\Omega) & \text{avec,} \\ M_h^1(\Omega) & := & \left\{ \tilde{p}^h \in M(\Omega) \ / \ \forall \ K \ \in T_h(\Omega), \tilde{p}^h_{|K} \in \mathcal{P}_1(K) \right\}. \end{array} \right. \tag{9.2}$$

Ainsi, la pression est affine par élément sans aucune contrainte de continuité d'un élément à l'autre. Les degrés de liberté sont définis au centre de la maille par (voir la figure 9.1.(a))

$$\left. \begin{array}{rcl} p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & \longrightarrow & \text{valeur de } p \text{ au centre de la maille} \\ (\partial_x p)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & \longrightarrow & \text{valeur de } \frac{\partial p}{\partial x} \text{ au centre de la maille} \\ (\partial_z p)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & \longrightarrow & \text{valeur de } \frac{\partial p}{\partial z} \text{ au centre de la maille} \end{array} \right| , \quad \text{(trois ddl par maille).}$$

Les fonction de base sur les nouveaux degrés de liberté sont prises à moyenne nulle. Ainsi, on obtient une matrice de masse M_p qui est diagonale.

Remarque 9.1.1 *Il faut bien noter qu'avec l'élément $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ on a trois inconnues par élément sur la pression. Ainsi, ce choix est plus cher que l'élément $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ du point de vue place mémoire et temps de calcul. Cependant, le passage d'un élément à l'autre ne demande presque aucun effort du point de vue informatique. Par exemple, nous rappelons que les fonctions de base de l'espace $M_h(\Omega)$ n'interagissent pas avec les termes provenant des domaines fictifs.*

Quelques Propriétés de l'Élément Présenté. L'espace modifié $M_h^1(\Omega)$ peut se décomposer comme

$$M_h^1(\Omega) \quad = \quad M_h^0(\Omega) \oplus M_h^r(\Omega), \tag{9.3}$$

où on rappelle que $M_h^0(\Omega)$ est l'espace de fonctions constantes par éléments et $M_h^r(\Omega)$ est sont complément orthogonal sur $M_h^1(\Omega)$ pour le produit scalaire en $L^2(\Omega)$. L'espace $M_h^r(\Omega)$ est composé de fonctions $\mathcal{P}_1$ globalement discontinues à moyenne nulle sur chaque élément. En utilisant (8.6) on remarque

$$\forall\, \underline{v}^{h,s} \in \underline{X}_h^s(\Omega), \quad \forall\, p^{h,r} \in M_h^r(\Omega), \qquad (\text{div}\, \underline{v}^{h,s}, p^{h,r})_{L^2(\Omega)} \;=\; 0. \tag{9.4}$$

9.1.2 Application à la Discrétisation de l'Espace $\underline{\underline{X}}(\Omega)\times \underline{M}(\Omega)$

De façon analogue à l'acoustique, le nouvel espace d'approximation pour la vitesse proposé est le suivant

$$\left| \begin{array}{lcl} \underline{M}_h(\Omega) & := & \underline{M}_h^1(\Omega), \qquad \text{avec,} \\ \underline{M}_h^1(\Omega) & := & M_h^1(\Omega) \times M_h^1(\Omega), \end{array} \right. \tag{9.5}$$

espace avec lequel l'inclusion (9.1) est trivialement satisfaite. Maintenant, le champ de vitesse est affine par composante et par élément sans aucune contrainte de continuité d'une maille à l'autre. Les degrés de liberté sont aussi définis au centre de la maille par (voir la figure 9.1.(b))

$$\left| \begin{array}{rcl} (v_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & \longrightarrow & \text{valeur de } v_x \text{ au centre de la maille} \\ (v_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & \longrightarrow & \text{valeur de } v_z \text{ au centre de la maille} \\ (\partial_x v_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & \longrightarrow & \text{valeur de } \frac{\partial v_x}{\partial x} \text{ au centre de la maille} \\ (\partial_z v_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & \longrightarrow & \text{valeur de } \frac{\partial v_z}{\partial z} \text{ au centre de la maille} \\ (\partial_x v_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & \longrightarrow & \text{valeur de } \frac{\partial v_z}{\partial x} \text{ au centre de la maille} \\ (\partial_z v_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & \longrightarrow & \text{valeur de } \frac{\partial v_x}{\partial z} \text{ au centre de la maille} \end{array} \right| , \quad \text{(six ddl par maille).}$$

Les fonctions de base associées aux quatre derniers degrés de liberté seront choisies à moyenne nulle.

Remarque 9.1.2 *Il est clair que l'espace proposé est plus cher que l'espace utilisé jusqu'à présent, on a quatre degrés de liberté supplémentaires par élément sur le champ de vitesse. Cependant, les modifications pertinentes du point de vue algorithmique ne sont pas très importantes. On rappelle que l'inconnue* $\underline{v} \in \underline{L}^2(\Omega)$ *n'interagit qu'avec le tenseur de contraintes.*

Remarque 9.1.3 *Lorsqu'on considère l'espace de discrétisation* $\underline{M}_h^1(\Omega)$ *et on suppose que la densité est constante sur chaque élément on a que*

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \;\in\; \underline{\underline{X}}_h(\Omega) \;\Longrightarrow\; \underline{\tilde{v}}^h \;:=\; \frac{1}{\rho}\, \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \;\in\; \underline{M}_h^1(\Omega).$$

Si on introduit cette fonction test particulière dans la deuxième équation de (7.19) (en faisant les intégrales de façon exacte) on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_C \underline{v}^h \cdot \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h\, dx \;-\; \int_C \frac{1}{\rho}\, \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}^h \cdot \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h\, dx \;=\; \int_C \frac{1}{\rho}\, \underline{f} \cdot \underline{\text{div}}\, \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h\, dx.$$

Alors, si on dérive par rapport au temps la première et troisième équations de (7.19) et on utilise cette dernière expression on en déduit que le problème variationnel approché (7.19) implique la formulation de second ordre suivante

$$
(9.6) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\textit{Trouver } (\underline{\underline{\sigma}}^h(t), \underline{\lambda}'^H(t)) \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}(\Omega) \times \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma) \textit{ telles que } \forall (\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h, \underline{\tilde{\lambda}}^H) \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}(\Omega) \times \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma) \\
\dfrac{d^2}{dt^2} \displaystyle\int_C \mathbf{A}\underline{\underline{\sigma}}^h : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \, dx \quad + \quad \int_C \frac{1}{\rho} \, \underline{\mathrm{div}} \, \underline{\underline{\sigma}}^h \cdot \underline{\mathrm{div}} \, \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \, dx \quad - \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \displaystyle\int_\Gamma \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \underline{n} \cdot \underline{\lambda}'^H \, d\gamma \qquad = \; - \displaystyle\int_C \frac{1}{\rho} \, \underline{f} \cdot \underline{\mathrm{div}} \, \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \, dx, \\
\qquad \displaystyle\int_\Gamma \underline{\underline{\sigma}}^h \underline{n} \cdot \underline{\tilde{\lambda}}^H \, d\gamma \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \; 0,
\end{array} \right.
$$

où $\underline{\lambda}'^H(t) = \frac{\partial \underline{\lambda}^H}{\partial t}$. La nature de ce système est plus proche de celle des problèmes analysés dans la littérature [50, 57]. On peut espérer alors qu'une condition du type (7.26) soit suffisante pour montrer la convergence de la méthode.

Quelque Propriétés de l'Élément Présenté. De la même façon que dans le cas scalaire, l'espace de discrétisation du champ de vitesse peut se décomposer comme

$$
(9.7) \qquad \underline{M}_h^1(\Omega) \;=\; \underline{M}_h^0(\Omega) \oplus \underline{M}_h^r(\Omega),
$$

avec

$$
\underline{M}_h^r(\Omega) \;=\; M_h^r(\Omega) \times M_h^r(\Omega).
$$

Les fonctions dans l'espace $\underline{M}_h^r(\Omega)$ sont des fonctions affines à moyenne nulle par composante et par élément globalement discontinues.

9.2 Expériences Numériques avec Domaines Fictifs

Dans cette section, et avant de montrer les résultats de convergence sur les deux problèmes considérés (acoustique et élastodynamique) pour le nouvel élément fini, on a décidé de présenter quelques expériences numériques qui montreront ses performances.

9.2.1 Le Cas Scalaire

Dans cette section on montre les résultats numériques obtenus avec la méthode de domaines fictifs lorsqu'on utilise l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$. Afin de faire une comparaison avec l'élément $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ présenté précédemment, on considère les mêmes expériences numériques que dans la section 8.3.1. On rappelle que l'espace de discrétisation pour le multiplicateur de Lagrange est donné par (8.17).

Une fissure horizontale. On commence par l'obstacle défini par (8.18). Les résultats obtenus avec $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ sont similaires à ceux donnés par $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$. La méthode semble converger lorsque la valeur du paramètre R est compris dans l'intervalle $[0.75, 3.5]$. Dans la première colonne de la figure 9.2 on représente la valeur absolue de la pression à des instants différents pour $R = 1.2$. Le multiplicateur de Lagrange semble aussi être bien approché sauf aux extrémités de la fissure (voir la première colonne de la figure 9.3).

Fissure en diagonale. On rappelle que la fissure considérée dans la deuxième expérience est une rotation par rapport au centre de la condition initiale de l'obstacle du paragraphe précédent. À la différence des résultats obtenus avec l'ancien élément, ceux obtenus avec $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ semblent converger vers la solution du problème continu pour des valeurs raisonnables de R. Dans la seconde colonne des figures 9.2 et 9.3 on montre la valeur absolue de la pression et du multiplicateur de Lagrange respectivement pour $R = 1.2$. Cette fois, les résultats obtenus avec les deux types d'obstacles sont cohérents entre eux.

Même lorsqu'on considère une valeur du paramètre R très élevée ($R = 3.1$ dans la figure 9.4) la solution approchée converge. Dans ce cas, l'approximation du multiplicateur (qui a moins de degrés de liberté) est moins précise ce qui fait que la singularité provoquée par les extrémités de la fissure n'est pas très bien prise en compte (voir la figure 9.4.d). Des techniques de raffinement de maillage local seraient intéressantes.

9.2.2 Le Cas Vectoriel

On considère les mêmes expériences numériques que dans la section 8.3.2 pour faire une comparaison entre les éléments finis $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ et $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ lorsqu'on utilise la méthode de domaines fictifs. On rappelle qu'on traite deux cas : une fissure horizontale et une fissure en diagonale. Pour chacune des configurations on perturbe le système avec deux types de conditions initiales (une onde P et une onde S) données par les expressions (8.21) et (8.22). On rappelle que l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange est donné par (8.20).

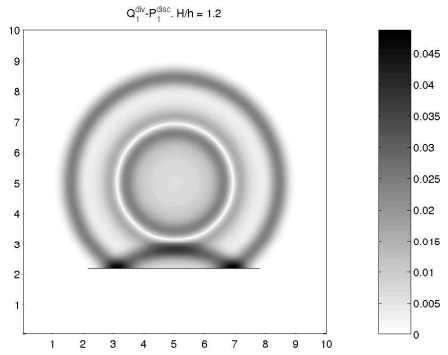
Fissure horizontale. Dans cette configuration, les résultats obtenus avec les deux éléments finis se ressemblent beaucoup. On constate numériquement que la méthode converge pour des valeurs du paramètre R dans l'intervalle $[0.75, 3.5]$.

Dans la première colonne des figures 9.5 et 9.6 on représente le module du champ de vitesse et le multiplicateur de Lagrange au long de la fissure avec la première condition initiale (onde P) et $R = 1.2$. Il faut remarquer que l'approximation du multiplicateur de Lagrange se détériore aux extrémités de la fissure où il faudrait raffiner pour bien prendre en compte la singularité. Un comportement similaire est observé lorsqu'on considère l'onde de cisaillement comme condition initiale (dans la première colonne des figures 9.7 et 9.8 on montre le module du champ de vitesse et le multiplicateur de Lagrange avec $R = 1.2$).

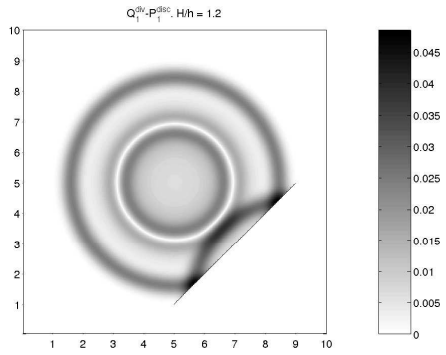
Fissure diagonale. De la même façon que dans le cas scalaire, la méthode de domaines fictifs avec le nouvel élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ semble converger vers la solution du problème continu lorsqu'on utilise de valeurs raisonnables du paramètre de discrétisation R.

Dans la deuxième colonne des figures 9.5 et 9.6 on montre le module du champ de vitesse et $Q\ \underline{\lambda}$ le long de la fissure dans le cas d'une onde incidente de pression et $R = 1.2$. Il suffit de comparer ce résultats avec ceux obtenus dans le cas horizontal (premières colonnes) pour remarquer que maintenant la méthode converge aussi avec cette configuration. On continue à avoir un comportement oscillatoire du multiplicateur de Lagrange aux extrémités de la fissure qu'on pourrait réduire en raffinant le maillage. Les résultats pour la deuxième condition initiale sont similaires. La méthode fournit des résultats tout à fait cohérents avec ceux obtenus avec la fissure en horizontale (voir la deuxième colonne des figures 9.7 et 9.8 avec $R = 1.2$).

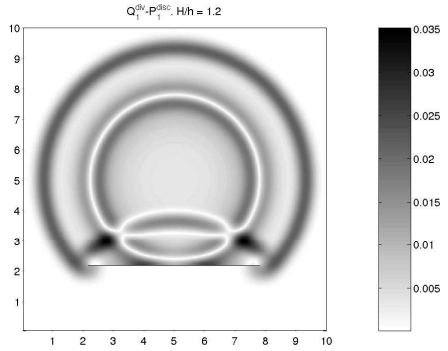
Remarque 9.2.1 *Le multiplicateur de Lagrange aux bouts des fissures est singulier. Le comportement de chacune de ses composantes à ces endroits est proportionnel à la racine carré de la distance à l'extrémité [54]. L'approximation qu'on a proposée dans (8.20), qui se sert de fonctions polynômiales de degré*



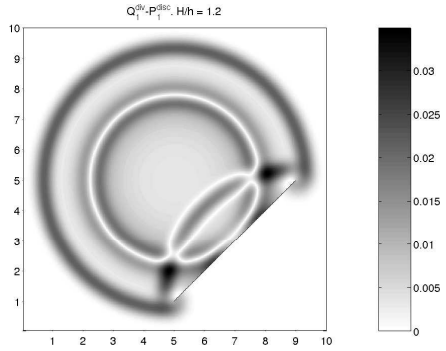
(a) $|p|$ au temps $t = 2.65$



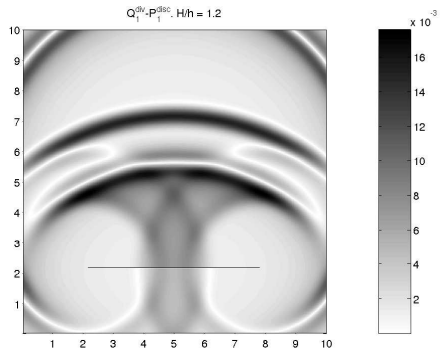
(b) $|p|$ au temps $t = 2.65$



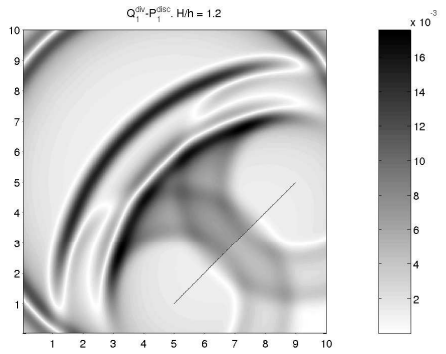
(c) $|p|$ au temps $t = 3.54$



(d) $|p|$ au temps $t = 3.54$

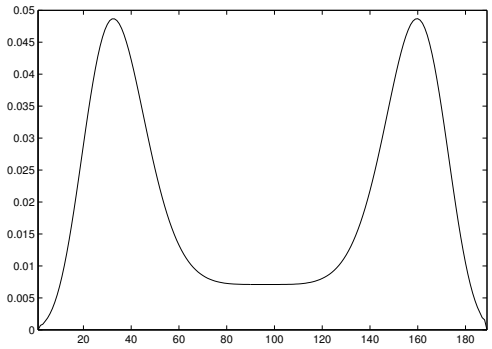


(e) $|p|$ au temps $t = 7.07$

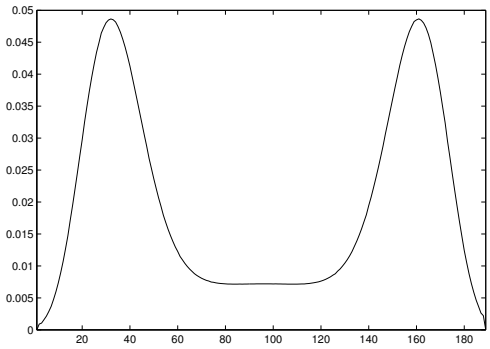


(f) $|p|$ au temps $t = 7.07$

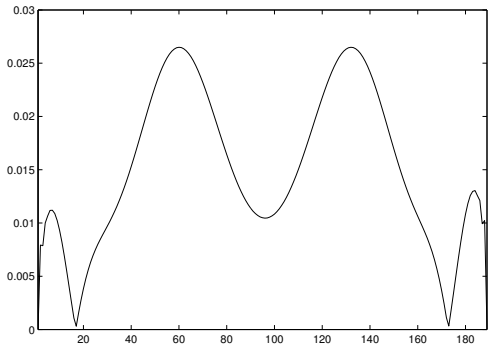
FIG. 9.2 – $\mathcal{Q}_1^{div} - \mathcal{P}_1^{disc}$. Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.2$



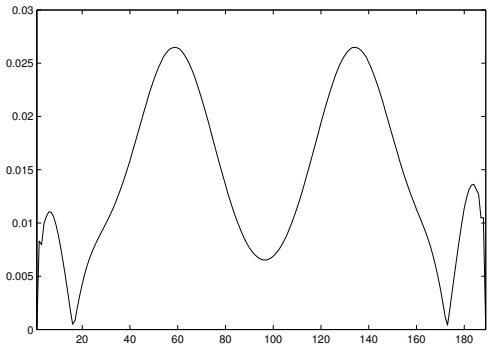
(a) $|\lambda|$ au temps $t = 2.65$



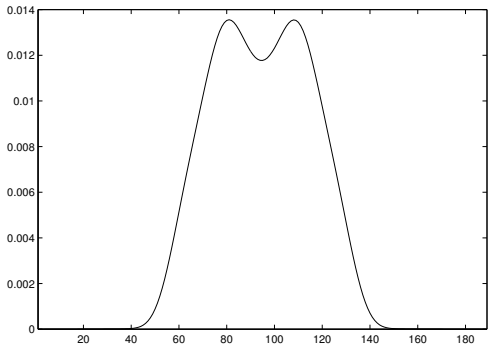
(b) $|\lambda|$ au temps $t = 2.65$



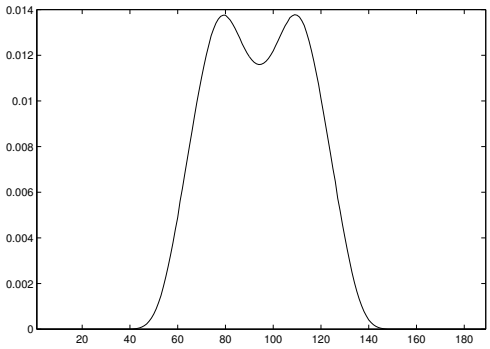
(c) $|\lambda|$ au temps $t = 3.54$



(d) $|\lambda|$ au temps $t = 3.54$

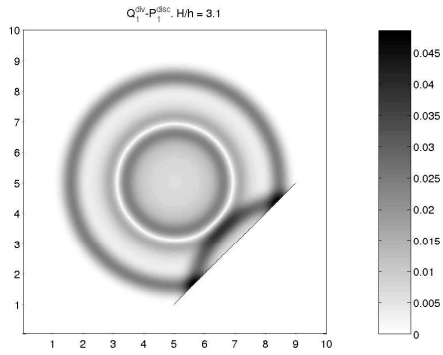


(e) $|\lambda|$ au temps $t = 7.07$

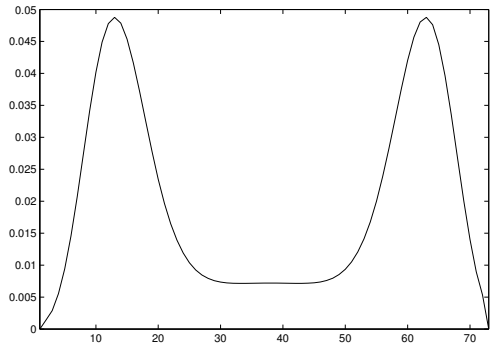


(f) $|\lambda|$ au temps $t = 7.07$

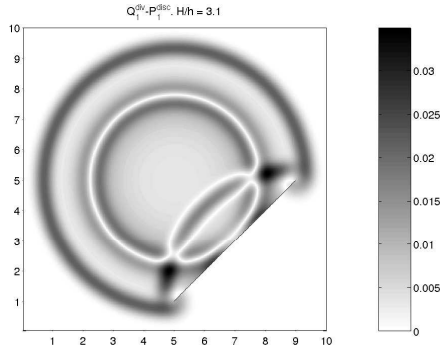
FIG. 9.3 – $\mathcal{Q}_1^{div} - \mathcal{P}_1^{disc}$. Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.2$



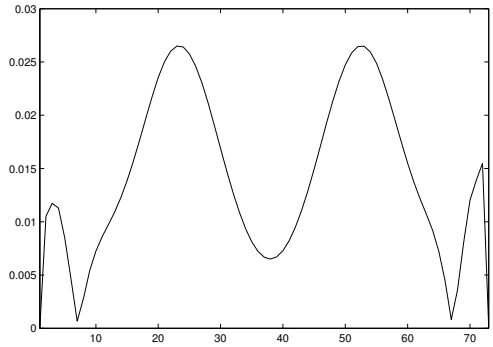
(a) $|p|$ au temps $t = 2.65$



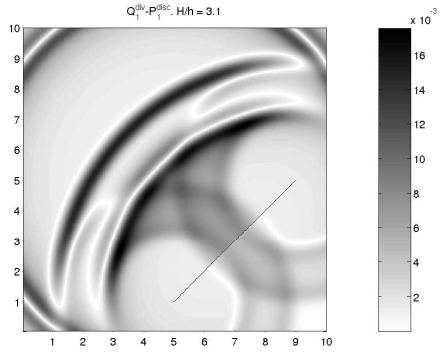
(b) $|\lambda|$ au temps $t = 2.65$



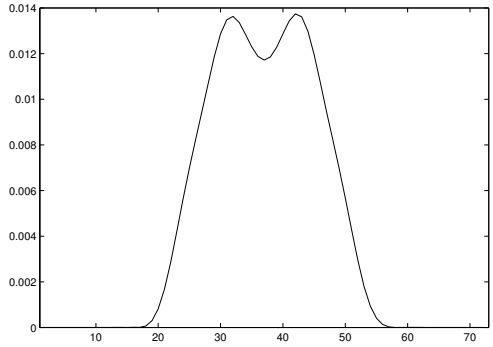
(c) $|p|$ au temps $t = 3.54$



(d) $|\lambda|$ au temps $t = 3.54$



(e) $|p|$ au temps $t = 7.07$



(f) $|\lambda|$ au temps $t = 7.07$

FIG. 9.4 – $\mathcal{Q}_1^{div} - \mathcal{P}_1^{disc}$. Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 3.1$

un, ne semble pas fournir une approximation très précise. On a testé numériquement une modification de cet espace qui remplace les première et dernière fonctions de base (qui sont linéaires) par des fonctions en $\sqrt{r}$. Cependant, les oscillations continuent à se produire. On aura besoin alors des techniques de raffinement de maillage local pour la prise en compte de la singularité.

Remarque 9.2.2 *Le fait d'avoir enrichi l'espace d'approximation du champ de vitesse en prenant $M_h^1(\Omega)$ à la place de $M_h^0(\Omega)$ introduit des effets parasites qu'on peut voir par exemple dans la figure 9.7.(f). En effet, si on multiplie l'échelle par un facteur quatre (voir la figure 9.15.(a)) on observe au voisinage de la fissure des ondes de nature non physique qui se propagent à une vitesse inférieure à celle des ondes de cisaillement. Même si l'amplitude de ces ondes tend vers zéro lorsqu'on raffine le maillage, on est intéressé à bien les caractériser pour pouvoir les amortir. Ceci motive l'analyse de dispersion qu'on effectue dans la section suivante.*

9.3 Étude de Dispersion. Modes Parasites

Dans cette section on s'intéresse à caractériser les phénomènes parasites qu'on a observés dans les expériences numériques effectuées avec le nouvel élément fini (voir la remarque 9.2.2). Pour faire ceci on mène une étude de dispersion du schéma numérique semi-discrétisé en absence de domaines fictifs. Il s'agit d'observer le comportement des solutions particulières de notre schéma numérique, dites ondes planes (cf. [32, 34, 80, 79]). On commence par l'analyse pour le cas de l'équation de l'acoustique anisotrope homogène. Ensuite on fait l'analyse pour l'élastodynamique dans le cas isotrope homogène.

9.3.1 Pour l'Équation des Ondes Scalaire

Supposons que notre domaine de calcul est $\Omega = \mathbb{R}^2$ composé d'un matériau homogène et supposons qu'on utilise une grille uniforme à base de carrés de coté Δx. Les degrés de liberté du champ de vitesse sont placés aux sommets du maillage, c'est à dire, sur les points $(x_i, z_j) = (i\Delta x, j\Delta x)$ (voir la figure 9.1.(a)). Ainsi, on a

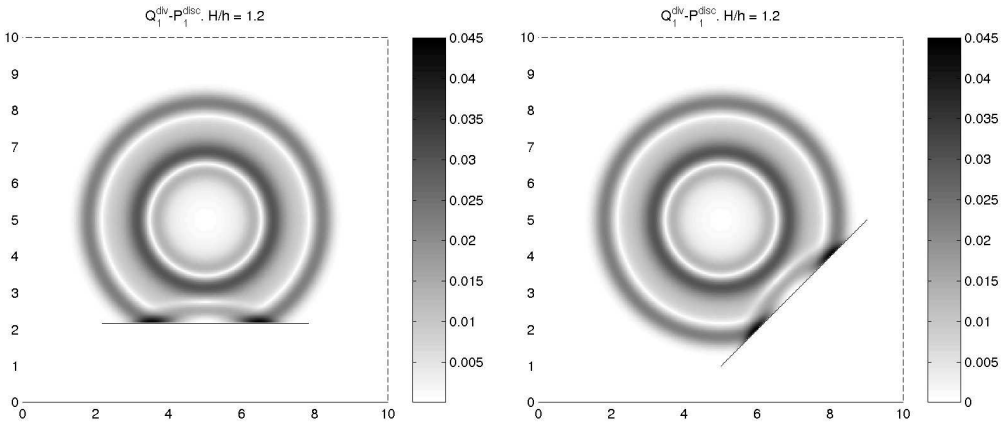
$$(v_x^t)_{i,j}, \qquad (v_x^b)_{i,j}, \qquad (v_z^r)_{i,j}, \qquad (v_z^l)_{i,j}, \qquad (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Les degrés de liberté pour la pression sont définis au centre des mailles sur les points $(x_{i+\frac{1}{2}}, z_{j+\frac{1}{2}}) = ((i+1/2)\Delta x, (j+1/2)\Delta x)$. Les inconnues correspondantes sont

$$(p)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \qquad (\partial_x p)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \qquad (\partial_z p)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \qquad (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

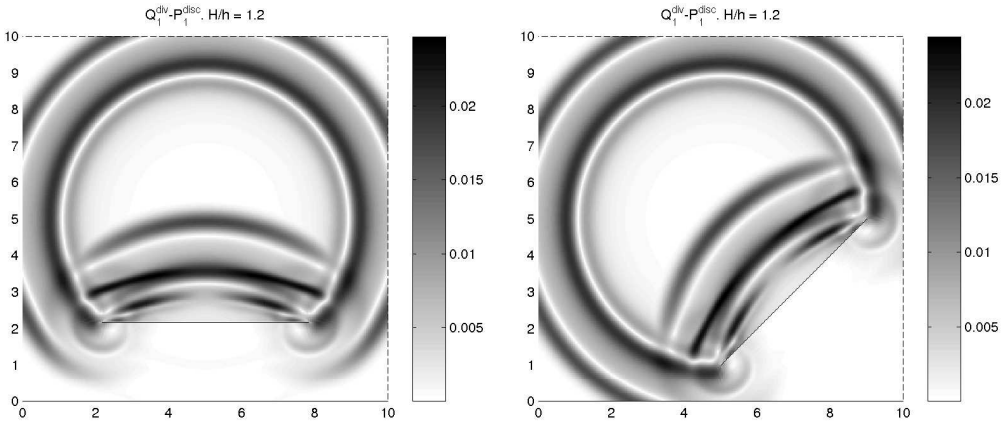
Ainsi, les équations du système semi-discrétisé donné par (7.9) s'écrivent dans ce cas particulier

$$\left|\begin{array}{rcl}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & = & \dfrac{1}{2\rho\Delta x}\left\{(v_x^t)_{i+1,j} - (v_x^t)_{i,j} + (v_x^b)_{i+1,j+1} - (v_x^b)_{i,j+1}\right\} + \\
 & & \dfrac{1}{2\rho\Delta x}\left\{(v_y^r)_{i,j+1} - (v_y^r)_{i,j} + (v_y^l)_{i+1,j+1} - (v_y^l)_{i+1,j}\right\}, \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\partial_x p)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & = & \dfrac{1}{\sqrt{12}\rho\Delta x}\left\{(v_y^l)_{i+1,j+1} - (v_y^l)_{i+1,j} - (v_y^r)_{i,j+1} + (v_y^r)_{i,j}\right\}, \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\partial_z p)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & = & \dfrac{1}{\sqrt{12}\rho\Delta x}\left\{(v_x^b)_{i+1,j+1} - (v_x^b)_{i,j+1} - (v_x^t)_{i+1,j} + (v_x^t)_{i,j}\right\},
\end{array}\right.$$



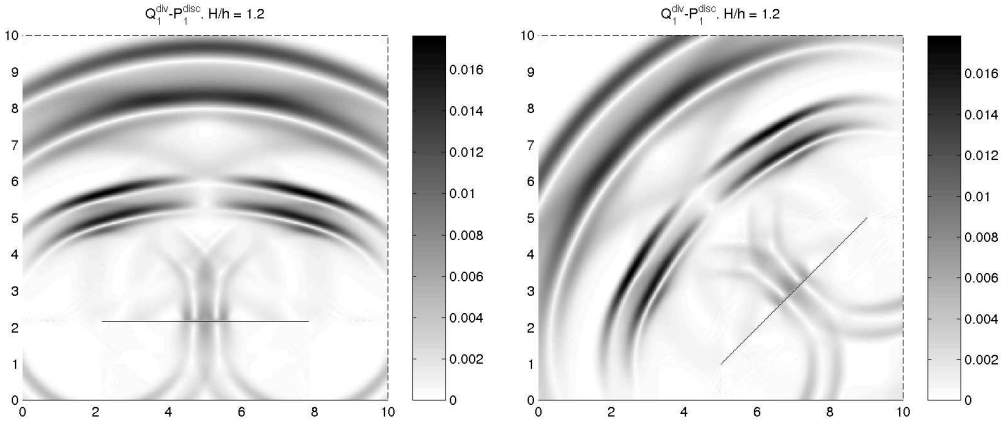
(a) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 0.8655$

(b) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 0.8655$



(c) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 1.7310$

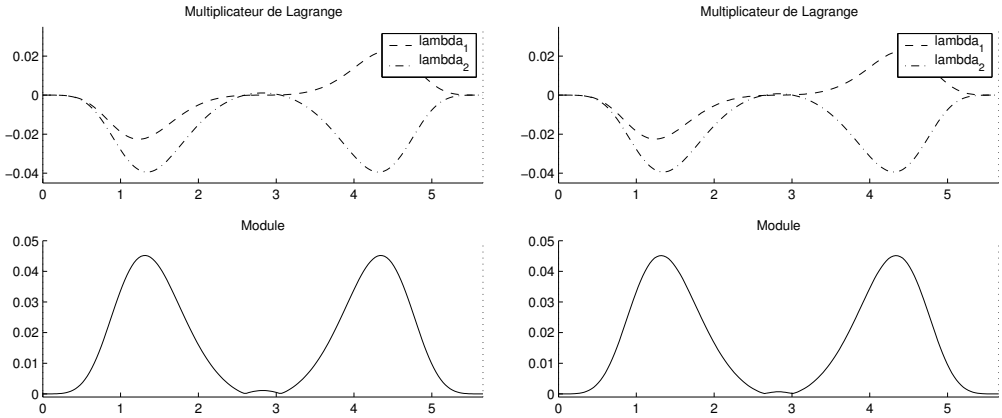
(d) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 1.7310$



(e) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 3.4620$

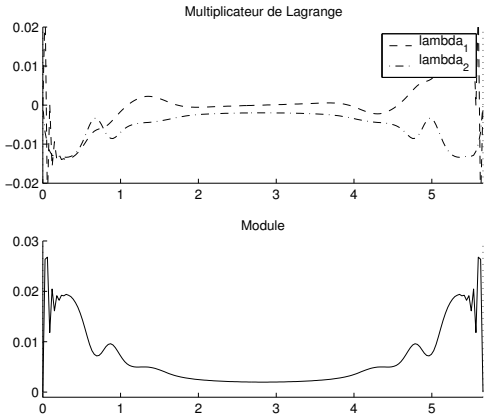
(f) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 3.4620$

FIG. 9.5 – $\mathcal{Q}_1^{div} - \mathcal{P}_1^{disc}$. Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.2$. Onde P incidente

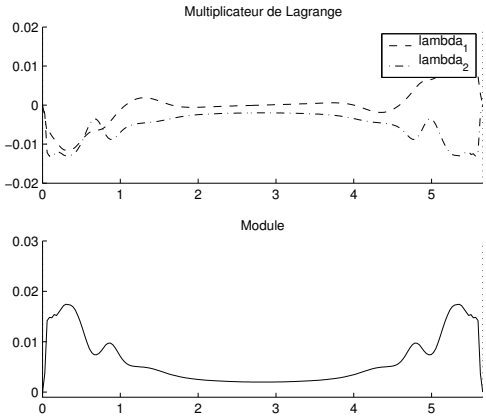


(a) $\underline{\lambda}(s)$ et $|\underline{\lambda}|(s)$ au temps $t = 0.8655$

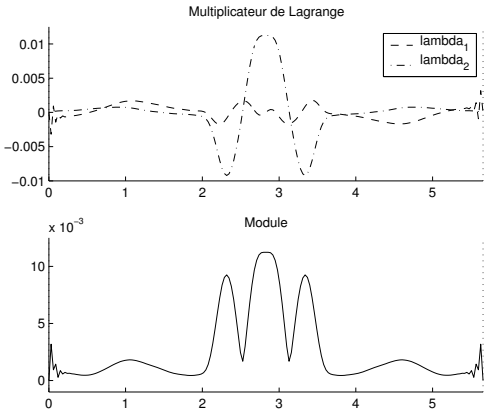
(b) $Q\ \underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 0.8655$



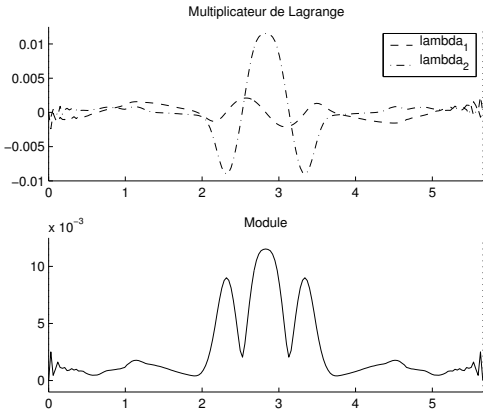
(c) $\underline{\lambda}(s)$ et $|\underline{\lambda}|(s)$ au temps $t = 1.7310$



(d) $Q\ \underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 1.7310$

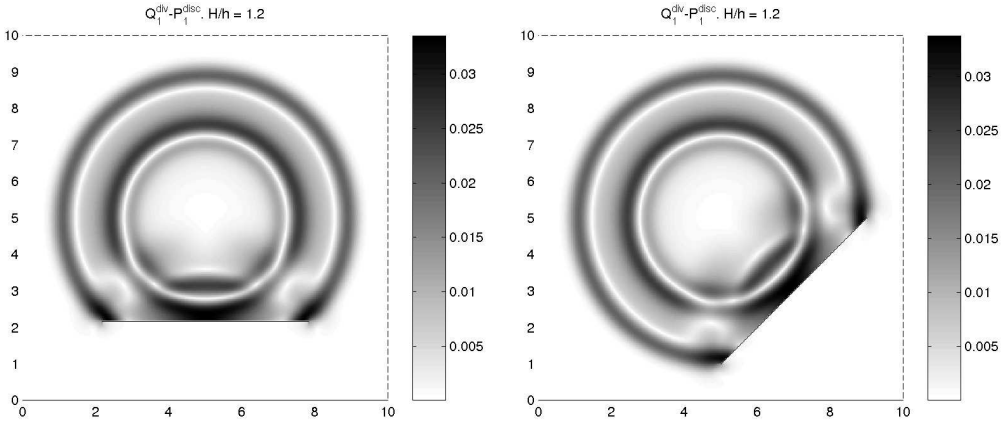


(e) $\underline{\lambda}(s)$ et $|\underline{\lambda}|(s)$ au temps $t = 3.4620$



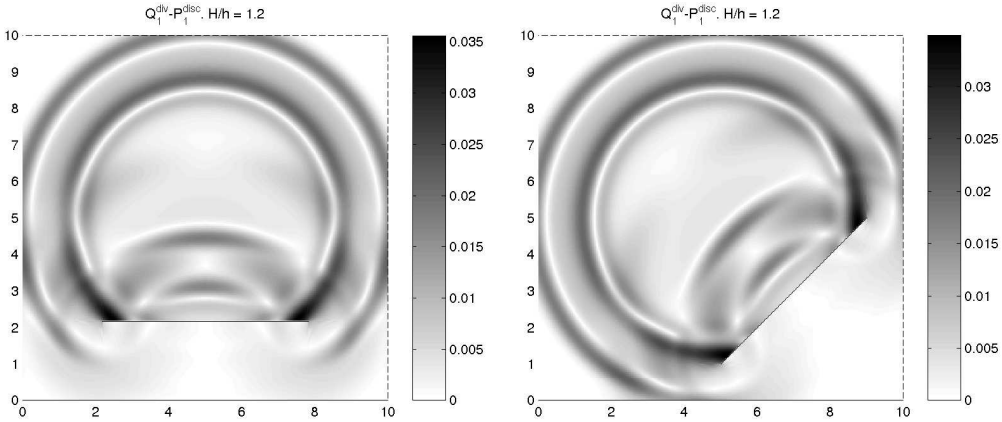
(f) $Q\ \underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 3.4620$

FIG. 9.6 – $\mathcal{Q}_1^{div} - \mathcal{P}_1^{disc}$. Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.2$. Onde P incidente



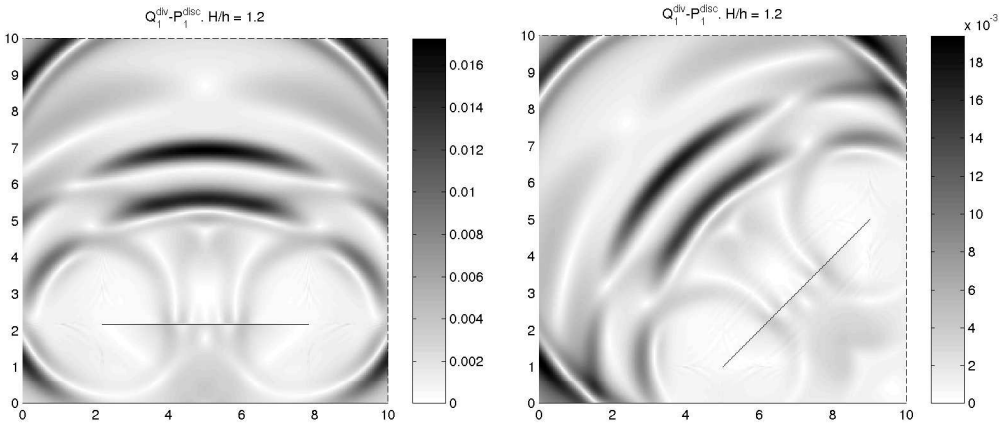
(a) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 2.1637$

(b) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 2.1637$



(c) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 3.0292$

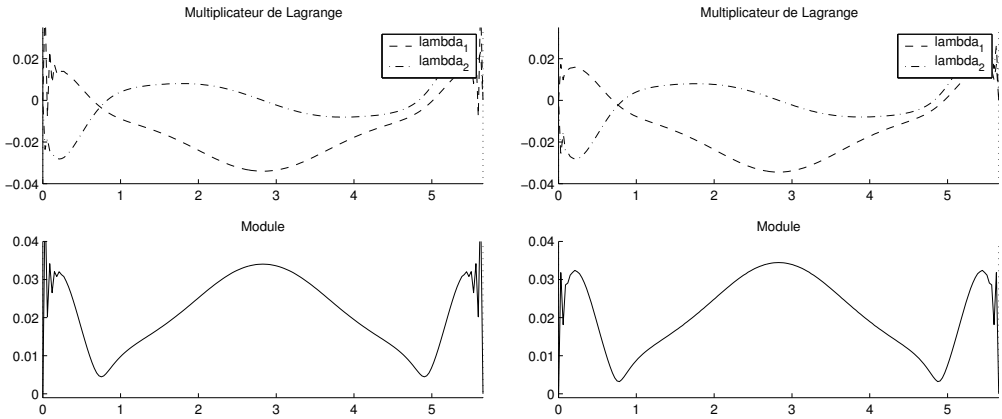
(d) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 3.0292$



(e) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 4.7602$

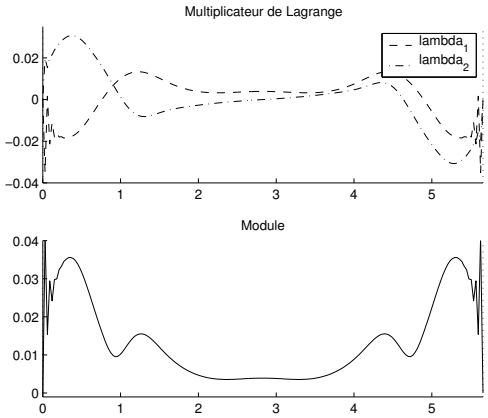
(f) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 4.7602$

FIG. 9.7 – $\mathcal{Q}_1^{div} - \mathcal{P}_1^{disc}$. Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.2$. Onde S incidente

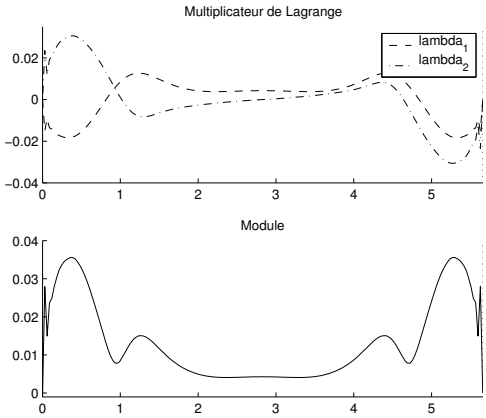


(a) $\underline{\lambda}(s)$ et $|\underline{\lambda}|(s)$ au temps $t = 2.1637$

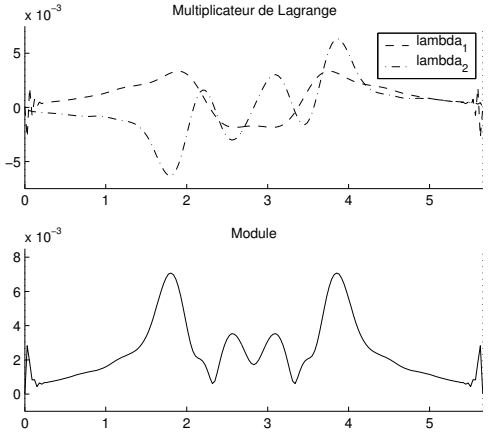
(b) $Q\ \underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 2.1637$



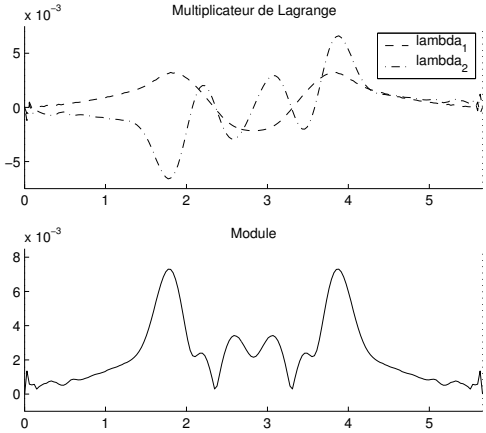
(c) $\underline{\lambda}(s)$ et $|\underline{\lambda}|(s)$ au temps $t = 3.0292$



(d) $Q\ \underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 3.0292$



(e) $\underline{\lambda}(s)$ et $|\underline{\lambda}|(s)$ au temps $t = 4.7602$



(f) $Q\ \underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 4.7602$

FIG. 9.8 – $\mathcal{Q}_1^{div} - \mathcal{P}_1^{disc}$. Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.2$. Onde S incidente

$$\begin{bmatrix} \frac{A_{1,1}}{2} & 0 & \frac{A_{1,2}}{4} & \frac{A_{1,2}}{4} \\ 0 & \frac{A_{1,1}}{2} & \frac{A_{1,2}}{4} & \frac{A_{1,2}}{4} \\ \frac{A_{1,2}}{4} & \frac{A_{1,2}}{4} & \frac{A_{2,2}}{2} & 0 \\ \frac{A_{1,2}}{4} & \frac{A_{1,2}}{4} & 0 & \frac{A_{2,2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x^t)_{i,j} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x^b)_{i,j} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_z^r)_{i,j} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_z^l)_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (B_1)_{i,j} \\ (B_2)_{i,j} \\ (B_3)_{i,j} \\ (B_4)_{i,j} \end{bmatrix},$$

où

$$\left| \begin{array}{rcl} (B_1)_{i,j} & = & \frac{1}{2\Delta x}\left((p)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (p)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{12}\Delta x}\left((\partial_z p)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (\partial_z p)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right), \\ (B_2)_{i,j} & = & \frac{1}{2\Delta x}\left((p)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (p)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{12}\Delta x}\left((\partial_z p)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (\partial_z p)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right), \\ (B_3)_{i,j} & = & \frac{1}{2\Delta x}\left((p)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (p)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{12}\Delta x}\left((\partial_x p)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (\partial_x p)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right), \\ (B_4)_{i,j} & = & \frac{1}{2\Delta x}\left((p)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (p)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{12}\Delta x}\left((\partial_x p)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (\partial_x p)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\right). \end{array} \right.$$

Il est possible d'éliminer les inconnues sur le champ de vitesse en écrivant un système d'équations en utilisant les inconnues $(p, \partial_x p, \partial_z p)$. Ensuite, on considère une onde plane de fréquence ω et vecteur d'onde $\underline{k} = (k_x, k_z) = (k\cos(\theta), k\sin(\theta))$ solution de notre système semi-discrétisé

$$\left| \begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} (p)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \\ (\partial_x p)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \\ (\partial_z p)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} & = & \mathbf{P}\exp\left[i\left(ct - (\cos(\theta)x_{i+\frac{1}{2}} + \sin(\theta)z_{j+\frac{1}{2}})\right)\right], \\ \mathbf{P} & = & [\,\mathbf{p}\,,\,\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{p}\,,\,\partial_{\mathbf{z}}\mathbf{p}\,]^t, \end{array} \right. \tag{9.8}$$

où $c = \frac{\omega}{k}$ est la vitesse de phase et $\mathbf{P}$ est le vecteur d'amplitude. En introduisant cette expression dans le schéma numérique on s'aperçoit que le couple $(\omega^2, \mathbf{P})$ doivent satisfaire

$$\mathcal{K}_{\Delta x}\,\mathbf{P} = \frac{\omega^2}{k^2}\,\mathbf{P}, \tag{9.9}$$

où la matrice hermicienne $\mathcal{K}_{\Delta x}$ ne dépend que de $(k\Delta x, \theta)$ et est donnée par

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{1,1} &= \frac{1}{\rho(k\Delta x)^2}\left(2\mathcal{A}\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) + 2\mathcal{C}\sin^2\left(\frac{k_z\Delta x}{2}\right) + 2\mathcal{E}\sin(k_x\Delta x)\sin(k_z\Delta x) + \right.\\
&\qquad \left. 2\mathcal{B}\cos(k_z\Delta x)\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) + 2\mathcal{D}\cos(k_x\Delta x)\sin^2\left(\frac{k_z\Delta x}{2}\right)\right),\\
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{1,2} &= \frac{-1}{\rho(k\Delta x)^2}\left(\frac{2\,\mathbf{i}\,\mathcal{E}}{\sqrt{3}}\sin(k_z\Delta x)\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) + \frac{2\,\mathbf{i}\,\mathcal{D}}{\sqrt{3}}\sin(k_x\Delta x)\sin^2\left(\frac{k_z\Delta x}{2}\right)\right),\\
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{1,3} &= \frac{-1}{\rho(k\Delta x)^2}\left(\frac{2\,\mathbf{i}\,\mathcal{E}}{\sqrt{3}}\sin(k_x\Delta x)\sin^2\left(\frac{k_z\Delta x}{2}\right) - \frac{2\,\mathbf{i}\,\mathcal{B}}{\sqrt{3}}\sin(k_z\Delta x)\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)\right),\\
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{2,2} &= \frac{1}{\rho(k\Delta x)^2}\left(\frac{2\mathcal{C}}{3}\sin^2\left(\frac{k_z\Delta x}{2}\right) - \frac{2\mathcal{D}}{3}\cos(k_x\Delta x)\sin^2\left(\frac{k_z\Delta x}{2}\right)\right),\\
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{2,3} &= \frac{4\mathcal{E}}{3\rho(k\Delta x)^2}\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{k_z\Delta x}{2}\right),\\
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{3,3} &= \frac{1}{\rho(k\Delta x)^2}\left(\frac{2\mathcal{A}}{3}\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) - \frac{2\mathcal{B}}{3}\cos(k_z\Delta x)\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)\right),
\end{aligned}
$$

avec les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ définis par

$$
\left|
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{2A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}^2}{A_{1,1}(A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}^2)} &&= \frac{2C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}^2}{C_{2,2}},\\
\mathcal{C} &= \frac{2A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}^2}{A_{2,2}(A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}^2)} &&= \frac{2C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}^2}{C_{1,1}},\\
\mathcal{B} &= \frac{A_{1,2}^2}{A_{1,1}(A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}^2)} &&= \frac{C_{1,2}^2}{C_{2,2}},\\
\mathcal{D} &= \frac{A_{1,2}^2}{A_{2,2}(A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}^2)} &&= \frac{C_{1,2}^2}{C_{1,1}},\\
\mathcal{E} &= \frac{-A_{1,2}}{A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}^2} &&= C_{1,2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Clairement, la fréquence ω et le vecteur d'onde $\underline{k}$ doivent satisfaire la relation de dispersion discrète suivante

$$
\det\left(\mathcal{K}_{\Delta x} - \frac{\omega^2}{k^2}I\right) = 0. \tag{9.10}
$$

On s'intéresse à obtenir le développement de Taylor des valeurs et des vecteurs propres $(\lambda_{\Delta x,i}, X_{\Delta x,i})$, $i \in \{1,2,3\}$ de la matrice $\mathcal{K}_{\Delta x}$.

Pour faire ceci, on suppose qu'on a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\Delta x} &= \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1\,(k\Delta x) + \mathcal{O}(k\Delta x)^2,\\
\lambda_{\Delta x,i} &= \lambda_{0,i} + \lambda_{1,i}\,(k\Delta x) + \mathcal{O}(k\Delta x)^2, \qquad i \in \{1,2,3\},\\
X_{\Delta x,i} &= X_{0,i} + X_{1,i}\,(k\Delta x) + \mathcal{O}(k\Delta x)^2, \qquad i \in \{1,2,3\}.
\end{aligned}
$$

ce qui implique

$$\mathcal{K}_0 X_{0,i} = \lambda_{0,i} X_{0,i}, \tag{9.11}$$

$$(\mathcal{K}_0 - \lambda_{0,i} I)\, X_{1,i} = -\,(\mathcal{K}_1 - \lambda_{1,i} I)\, X_{0,i}. \tag{9.12}$$

Pour obtenir l'ordre zéro du développement des valeurs et vecteurs propres il suffit de résoudre le problème aux valeurs propres (9.11). Dans ce cas, la matrice $\mathcal{K}_0$ est diagonale et donc on obtient

$$\begin{aligned}
(\lambda_{0,1}, X_{0,1}) &= \left(\frac{\cos^2(\theta) C_{1,1} + \sin^2(\theta) C_{2,2} + 2C_{1,2}\sin(\theta)\cos(\theta)}{\rho}, [1,0,0]^t \right), \\
(\lambda_{0,2}, X_{0,2}) &= \left(\frac{\sin^2(\theta)\left(C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}^2\right)}{3\rho C_{1,1}}, [0,1,0]^t \right), \\
(\lambda_{0,3}, X_{0,3}) &= \left(\frac{\cos^2(\theta)\left(C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}^2\right)}{3\rho C_{2,2}}, [0,0,1]^t \right).
\end{aligned}$$

En faisant le produit scalaire de l'équation (9.12) avec $X_{0,i}$ on en déduit aisément l'expression

$$\lambda_{1,i} = \frac{(K_1 X_0, X_0)}{(X_0, X_0)}.$$

Étant donné que la matrice $\mathcal{K}_1$ est antisymétrique et définie par (on indique que les éléments non nuls)

$$\begin{aligned}
(\mathcal{K}_1)_{1,2} &= \frac{-\,\mathbf{i}\, C_{1,2}\sin(\theta)\cos(\theta)\,(C_{1,1}\cos(\theta) + C_{1,2}\sin(\theta))}{2\sqrt{3}\rho C_{1,1}}, \\
(\mathcal{K}_1)_{1,3} &= \frac{-\,\mathbf{i}\, C_{1,2}\sin(\theta)\cos(\theta)\,(C_{1,2}\cos(\theta) + C_{2,2}\sin(\theta))}{2\sqrt{3}\rho C_{2,2}},
\end{aligned}$$

on a que $\lambda_{1,i} = 0,\ i \in \{1,2,3\}$. Finalement, pour obtenir $X_{1,i}$, on normalise le vecteur propre $X_{\Delta x,i}$ de telle façon à avoir $(X_{\Delta x,i}, \overline{X_{\Delta x,i}}) = 1$ (ceci est possible pour $k\Delta x$ assez petit car $X_{0,i}$ est réel). Ceci nous oblige aussi à choisir $X_{0,i}$ tel que $(X_{0,i}, \overline{X_{0,i}}) = \|X_{0,i}\|^2 = 1$ et implique en particulier (facile à vérifier)

$$(X_{1,i}, X_{0,i}) = 0 \iff X_{1,i} \in [\mathrm{Ker}\,(\mathcal{K}_2 - \lambda_{2,i} I)]^{\perp}. \tag{9.13}$$

Il est clair qu'alors (9.12) et (9.13) déterminent d'une façon unique $X_{1,i}$

$$\begin{aligned}
X_{1,1} &= \left[0, \frac{(\mathcal{K}_1)_{1,2}}{\lambda_{0,2} - \lambda_{0,1}}, \frac{(\mathcal{K}_1)_{1,3}}{\lambda_{0,3} - \lambda_{0,1}}\right]^t \\
X_{1,2} &= \left[\frac{(\mathcal{K}_1)_{1,2}}{\lambda_{0,2} - \lambda_{0,1}}, 0, 0\right]^t \\
X_{1,3} &= \left[\frac{(\mathcal{K}_1)_{1,3}}{\lambda_{0,3} - \lambda_{0,1}}, 0, 0\right]^t
\end{aligned}$$

et donc finalement on a trois type d'ondes planes discrètes données par l'expression (9.8) avec des vitesses de phase $c = c_{\Delta x,i}, i \in \{1,2,3\}$ et des vecteurs d'amplitude $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathbf{\Delta x,i}}, i \in \{1,2,3\}$ qui

satisfont les expressions

$$\left|\begin{array}{rcl} c_{\Delta x,1} := \sqrt{\lambda_{\Delta x,1}} & = & \sqrt{\dfrac{\cos^2(\theta)C_{1,1}+\sin^2(\theta)C_{2,2}+2C_{1,2}\sin(\theta)\cos(\theta)}{\rho}}+\mathcal{O}(k\Delta x)^2, \\ \mathbf{P_{\Delta x,1}} & = & [\,1\,,\,0\,,\,0\,]^t + \\ & & \left[\,0\,,\,\dfrac{(\mathcal{K}_1)_{1,2}}{\lambda_{0,2}-\lambda_{0,1}}\,,\,\dfrac{(\mathcal{K}_1)_{1,3}}{\lambda_{0,3}-\lambda_{0,1}}\,\right]^t (k\Delta x)+\mathcal{O}(k\Delta x)^2, \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{rcl} c_{\Delta x,2} = \sqrt{\lambda_{\Delta x,2}} & = & \sqrt{\dfrac{\sin^2(\theta)\left(C_{1,1}C_{2,2}-C_{1,2}^2\right)}{3\rho C_{1,1}}}+\mathcal{O}(k\Delta x)^2, \\ \mathbf{P_{\Delta x,2}} & = & [\,0\,,\,1\,,\,0\,]^t + \\ & & \left[\,\dfrac{(\mathcal{K}_1)_{1,2}}{\lambda_{0,2}-\lambda_{0,1}}\,,\,0\,,\,0\,\right]^t (k\Delta x)+\mathcal{O}(k\Delta x)^2, \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{rcl} c_{\Delta x,3} = \sqrt{\lambda_{\Delta x,3}} & = & \sqrt{\dfrac{\cos^2(\theta)\left(C_{1,1}C_{2,2}-C_{1,2}^2\right)}{3\rho C_{2,2}}}+\mathcal{O}(k\Delta x)^2, \\ \mathbf{P_{\Delta x,3}} & = & [\,0\,,\,0\,,\,1\,]^t + \\ & & \left[\,\dfrac{(\mathcal{K}_1)_{1,3}}{\lambda_{0,3}-\lambda_{0,1}}\,,\,0\,,\,0\,\right]^t (k\Delta x)+\mathcal{O}(k\Delta x)^2. \end{array}\right.$$

On remarque que la vitesse de phase de la première onde plane discrète (qu'on appellera l'onde physique) est une approximation d'ordre deux de la vitesse des ondes du problème continu. Les deux autres ondes ont une vitesse de phase qui est toujours inférieure à celle des ondes physiques (pour $k\Delta x$ assez petit).

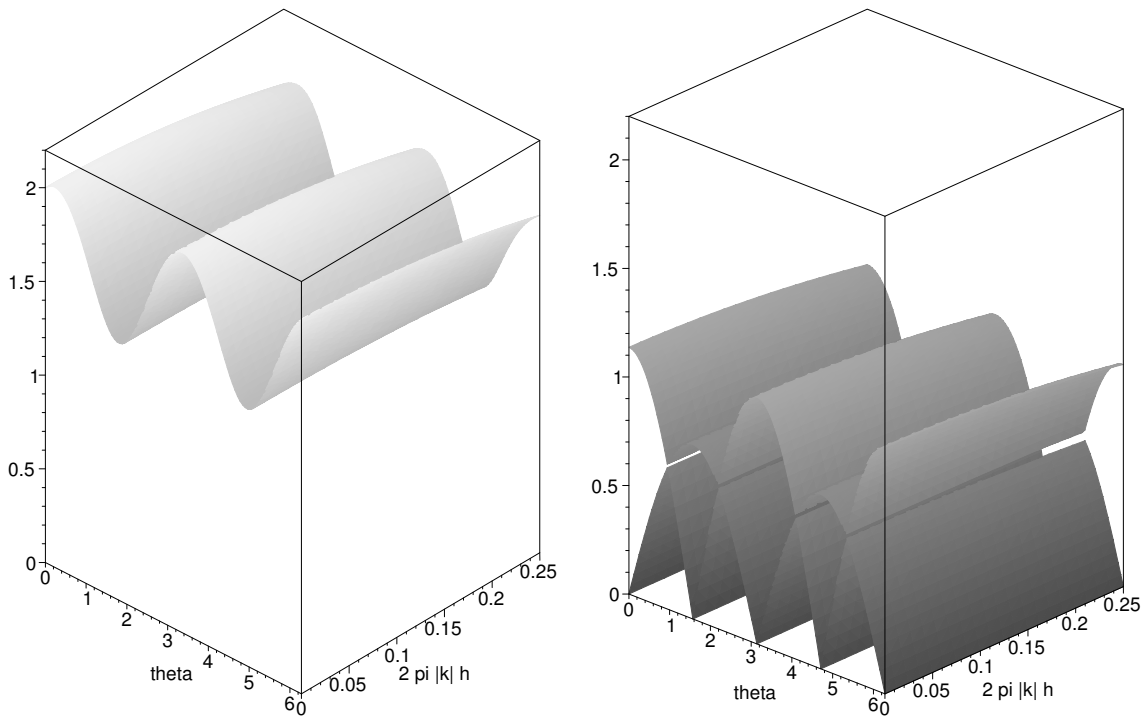
Ces quantités $c_{\Delta x,i},\ i = \{1,2,3\}$, qui dépendent de $|k|h$ et de l'angle θ du vecteur d'onde, peuvent se représenter pour un milieu de propagation donné. Ainsi, supposons qu'on a le matériau anisotrope donné par les coefficients

$$C_{1,1} = 3, \qquad C_{2,2} = 2, \qquad C_{1,2} = 0.5, \qquad \rho = 1.$$

Dans la figure 9.9 on montre la vitesse de phase des ondes numériques pour tous les angles possibles et pour $2\pi|k|h \in (0, 0.25)$. Dans la figure 9.10 on montre la même quantité en coordonnées polaires pour tous le angles et $2\pi|k|h = 1/10$. Finalement, dans la figure 9.11 on a représenté la vitesse de phase pour l'angle $\theta = \pi/6$ et pour $2\pi|k|h \in (0, 0.25)$. Le profil parabolique de ces dernières courbes est en conformité avec les développements obtenus ci-dessus.

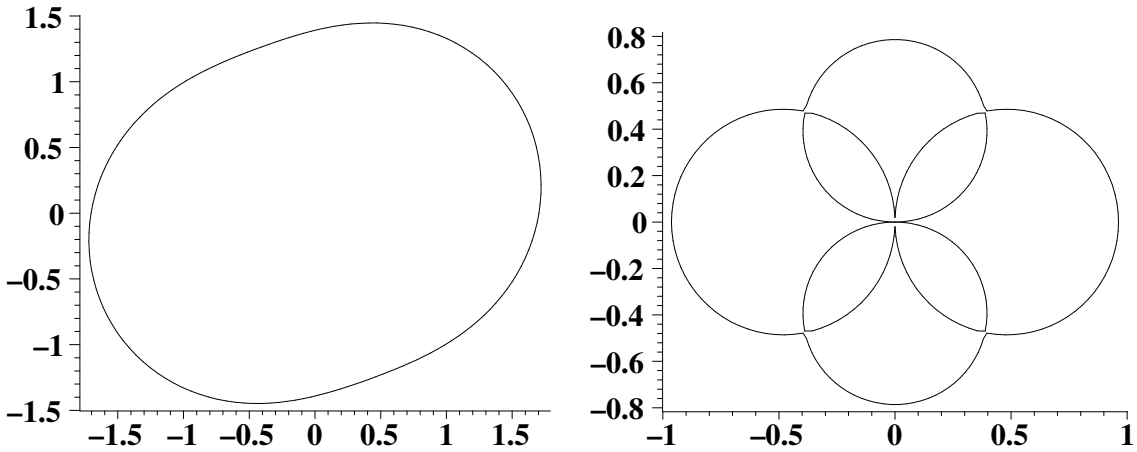
Il est important de signaler que la partie prépondérante de l'onde physique numérique est sur la première composante (partie plus visible de la solution). Par contre, l'amplitude des ondes parasites est concentrée sur la deuxième et troisième composantes (associées à des degrés de liberté dont les fonctions de base sont à moyenne nulle). Pour atténuer les effets parasites provoqués par ces modes parasites on pourrait alors mettre un amortissement sur ces deux composantes, c'est à dire, sur la projection de la pression sur l'espace $M_h^r(\Omega)$.

Remarque 9.3.1 *Lorsqu'on utilise l'élément $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ on a un seul type d'onde plane avec une vitesse de phase qui est aussi une approximation d'ordre deux de la vitesse de phase des ondes du modèle continu [80]. Cet élément fini mixte n'a pas de modes parasites.*



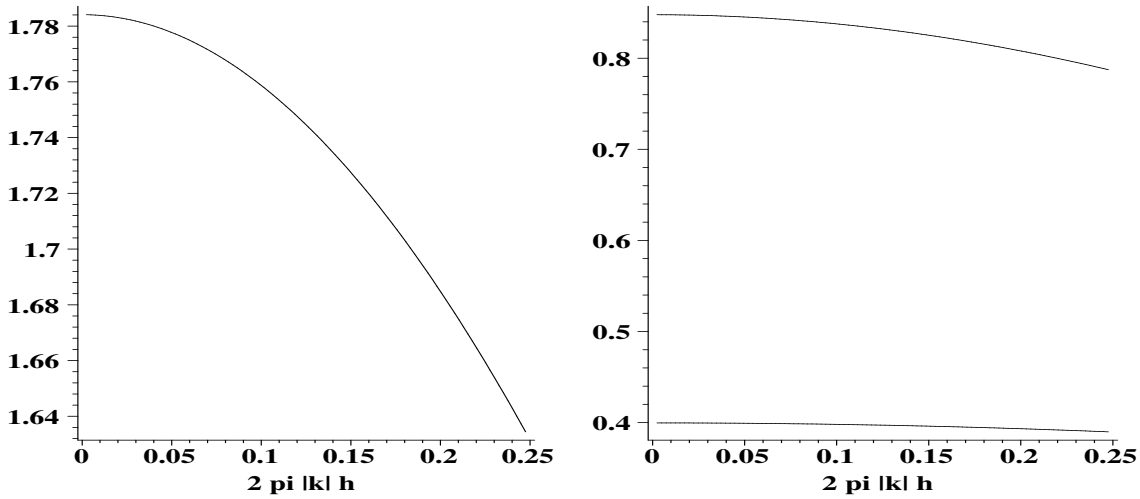
(a) $c_{\Delta x,1}$ (b) $c_{\Delta x,2}$ et $c_{\Delta x,3}$

FIG. 9.9 – Vitesses de phase numériques en fonction de θ et $|k|h$. $C_{1,1} = 3, C_{1,2} = 0.5, C_{2,2} = 2,\ \rho = 1$



(a) $c_{\Delta x,1}$ (b) $c_{\Delta x,2}$ et $c_{\Delta x,3}$

FIG. 9.10 – Vitesses de phase numériques en fonction de θ (coordonnées polaires) pour $2\pi|k|h = 0.1$. $C_{1,1} = 3, C_{1,2} = 0.5, C_{2,2} = 2,\ \rho = 1$



(a) $c_{\Delta x,1}$ (b) $c_{\Delta x,2}$ et $c_{\Delta x,3}$

FIG. 9.11 – Vitesses de phase numériques en fonction de $|k|h$ pour $\theta = \pi/6$. $C_{1,1} = 2, C_{1,2} = 0.5, C_{2,2} = 2,\ \rho = 1$

9.3.2 Pour le Système Élastodynamique

Comme dans le cas acoustique on suppose que notre domaine de calcul est $\Omega = \mathbb{R}^2$ composé d'un matériau homogène et supposons aussi qu'on utilise une grille uniforme à base de carrés de coté Δx. On dénote par (voir la figure 9.1.(b))

$$(\sigma^t_{xx})_{i,j}, \qquad (\sigma^b_{xx})_{i,j}, \qquad (\sigma^r_{zz})_{i,j}, \qquad (\sigma^l_{zz})_{i,j}, \qquad (\sigma_{xz})_{i,j}, \qquad (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

les degrés de liberté associés au tenseur de contraintes et par

$$\begin{array}{llll} (v_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, & (\partial_x v_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, & (\partial_z v_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, & (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \\ (v_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, & (\partial_x v_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, & (\partial_z v_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, & (i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \end{array}$$

Ainsi, le schéma numérique s'écrit

$$\left|\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & = & \dfrac{1}{2\rho\Delta x}\Big\{(\sigma^h_{xx})_{i+1,j} - (\sigma^h_{xx})_{i,j} + (\sigma^b_{xx})_{i+1,j+1} - (\sigma^b_{xx})_{i,j+1} + \\ & & \qquad (\sigma_{xz})_{i+1,j+1} - (\sigma_{xz})_{i+1,j} + (\sigma_{xz})_{i,j+1} - (\sigma_{xz})_{i,j}\Big\}, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\partial_x v_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & = & \dfrac{1}{\sqrt{12}\rho\Delta x}\left\{(\sigma_{xz})_{i+1,j+1} + (\sigma_{xz})_{i,j} - (\sigma_{xz})_{i+1,j} - (\sigma_{xz})_{i,j+1}\right\}, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\partial_z v_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & = & \dfrac{1}{\sqrt{12}\rho\Delta x}\left\{(\sigma^b_{xx})_{i+1,j+1} + (\sigma^t_{xx})_{i,j} - (\sigma^t_{xx})_{i+1,j} - (\sigma^b_{xx})_{i,j+1}\right\}, \end{array}\right.$$

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & = & \dfrac{1}{2\rho\Delta x}\left\{(\sigma_{xz})_{i+1,j} - (\sigma_{xz})_{i,j} + (\sigma_{xz})_{i+1,j+1} - (\sigma_{xz})_{i,j+1} + \right. \\
& & \left. (\sigma_{zz}^d)_{i,j+1} - (\sigma_{zz}^d)_{i,j} + (\sigma_{zz}^g)_{i+1,j+1} - (\sigma_{zz}^g)_{i+1,j}\right\}, \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\partial_x v_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & = & \dfrac{1}{\sqrt{12}\rho\Delta x}\left\{(\sigma_{zz}^l)_{i+1,j+1} + (\sigma_{zz}^r)_{i,j} - (\sigma_{zz}^l)_{i+1,j} - (\sigma_{zz}^r)_{i,j+1}\right\}, \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\partial_z v_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} & = & \dfrac{1}{\sqrt{12}\rho\Delta x}\left\{(\sigma_{xz})_{i+1,j+1} + (\sigma_{xz})_{i,j} - (\sigma_{xz})_{i+1,j} - (\sigma_{xz})_{i,j+1}\right\}.
\end{array}
\right.
$$

$$
\begin{bmatrix}
\dfrac{A_{1,1}}{2} & 0 & \dfrac{A_{1,2}}{4} & \dfrac{A_{1,2}}{4} & \dfrac{A_{1,3}}{2} \\
0 & \dfrac{A_{1,1}}{2} & \dfrac{A_{1,2}}{4} & \dfrac{A_{1,2}}{4} & \dfrac{A_{1,3}}{2} \\
\dfrac{A_{1,2}}{4} & \dfrac{A_{1,2}}{4} & \dfrac{A_{2,2}}{2} & 0 & \dfrac{A_{2,3}}{2} \\
\dfrac{A_{1,2}}{4} & \dfrac{A_{1,2}}{4} & 0 & \dfrac{A_{2,2}}{2} & \dfrac{A_{2,3}}{2} \\
\dfrac{A_{1,3}}{2} & \dfrac{A_{1,3}}{2} & \dfrac{A_{2,3}}{2} & \dfrac{A_{2,3}}{2} & A_{3,3}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sigma_{xx}^h)_{i,j} \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sigma_{xx}^b)_{i,j} \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sigma_{zz}^d)_{i,j} \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sigma_{zz}^g)_{i,j} \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sigma_{xz})_{i,j}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
(B_1)_{i,j} \\ (B_2)_{i,j} \\ (B_3)_{i,j} \\ (B_4)_{i,j} \\ (B_5)_{i,j}
\end{bmatrix}
$$

avec

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
(B_1)_{i,j} & = & \dfrac{1}{2\Delta x}\left((v_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (v_x)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}((\partial_z v_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (\partial_z v_x)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})\right), \\
(B_2)_{i,j} & = & \dfrac{1}{2\Delta x}\left((v_x)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (v_x)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}((\partial_z v_x)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (\partial_z v_x)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})\right), \\
(B_3)_{i,j} & = & \dfrac{1}{2\Delta x}\left((v_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (v_z)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}((\partial_x v_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (\partial_x v_z)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})\right), \\
(B_4)_{i,j} & = & \dfrac{1}{2\Delta x}\left((v_z)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (v_z)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}((\partial_x v_z)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (\partial_x v_z)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})\right), \\
(B_5)_{i,j} & = & \dfrac{1}{2\Delta x}((v_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (v_x)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + (v_x)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (v_x)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) + \\
& & \dfrac{1}{2\Delta x}((v_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (v_z)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (v_z)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (v_z)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) + \\
& & \dfrac{1}{\sqrt{12}\Delta x}((\partial_x v_x)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (\partial_x v_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (\partial_x v_x)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (\partial_x v_x)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) + \\
& & \dfrac{1}{\sqrt{12}\Delta x}((\partial_z v_z)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (\partial_z v_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (\partial_z v_z)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (\partial_z v_z)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}).
\end{array}
\right.
$$

Pour simplifier on restreint notre étude au cas isotrope, c'est à dire, on suppose que

$$
\begin{pmatrix}
A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\
A_{1,2} & A_{2,2} & A_{2,3} \\
A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\dfrac{2\mu+\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)} & -\dfrac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)} & 0 \\
-\dfrac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)} & \dfrac{2\mu+\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)} & 0 \\
0 & 0 & \dfrac{1}{\mu}
\end{pmatrix}, \tag{9.14}
$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau. Une fois qu'on a éliminé les inconnues associées au tenseur de contraintes, on considère une onde plane de fréquence ω et vecteur d'onde $\underline{k} = (k_x, k_z) =$

$(k\cos(\theta), \sin(\theta))$ de la forme

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
\begin{pmatrix} (v_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \\ (v_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \\ (\partial_x v_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \\ (\partial_z v_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \\ (\partial_x v_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \\ (\partial_z v_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} & = & \mathbf{V} \exp\left[i \left(ct - (\cos(\theta) x_{i+\frac{1}{2}} + \sin(\theta) z_{j+\frac{1}{2}}) \right) \right], \\
\mathbf{V} & = & [\, \mathbf{v_x} \,,\, \mathbf{v_z} \,,\, \partial_\mathbf{x}\mathbf{v_x} \,,\, \partial_\mathbf{z}\mathbf{v_z} \,,\, \partial_\mathbf{x}\mathbf{v_z} \,,\, \partial_\mathbf{z}\mathbf{v_x} \,]^t \,,
\end{array}
\right. \tag{9.15}
$$

où $c = \frac{\omega}{k}$ est la vitesse de phase et $\mathbf{V}$ est le vecteur d'amplitude. Lorsqu'on plonge cette expression dans le schéma numérique, on voit que le couple $(\omega^2, \mathbf{V})$ doit satisfaire (1.55) où cette fois les éléments non nuls de la matrice hermicienne $\mathcal{K}_{\Delta x}$ sont

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{1,1} &= \frac{2}{\rho(k\Delta x)^2} \left(\mathcal{A} \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) + \mathcal{B} \cos(k_z \Delta x) \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) + \right. \\
&\qquad \left. 2\mathcal{D} \cos^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \sin^2\left(\frac{k_z \Delta x}{2}\right) \right), \\
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{1,2} &= \frac{-2\,\mathbf{i}\,\mathcal{D}}{\sqrt{3}\rho(k\Delta x)^2} \sin(k_x \Delta x) \sin^2\left(\frac{k_z \Delta x}{2}\right), \\
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{1,3} &= \frac{-2\,\mathbf{i}\,\mathcal{B}}{\sqrt{3}\rho(k\Delta x)^2} \sin(k_z \Delta x) \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right), \\
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{1,4} &= \frac{\mathcal{C} + \mathcal{D}}{\rho(k\Delta x)^2} \sin(k_x \Delta x) \sin(k_z \Delta x), \\
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{1,5} &= \frac{-2\,\mathbf{i}\,\mathcal{C}}{\sqrt{3}\rho(k\Delta x)^2} \sin(k_z \Delta x) \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right), \\
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{1,6} &= \frac{-2\,\mathbf{i}\,\mathcal{D}}{\sqrt{3}\rho(k\Delta x)^2} \sin(k_x \Delta x) \sin^2\left(\frac{k_z \Delta x}{2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{2,2} &= \frac{4\mathcal{D}}{3\rho(k\Delta x)^2} \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \sin^2\left(\frac{k_z \Delta x}{2}\right), \\
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{2,4} &= \frac{2\,\mathbf{i}\,\mathcal{D}}{\sqrt{3}\rho(k\Delta x)^2} \sin(k_z \Delta x) \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right), \\
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{2,6} &= \frac{4\mathcal{D}}{3\rho(k\Delta x)^2} \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \sin^2\left(\frac{k_z \Delta x}{2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{3,3} &= \frac{2}{3\rho(k\Delta x)^2}\left(\mathcal{A}\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) - \mathcal{B}\cos(k_z\Delta x)\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)\right),\\
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{3,4} &= \frac{2\,\mathbf{i}\,\mathcal{C}}{\sqrt{3}\rho(k\Delta x)^2}\sin(k_x\Delta x)\sin^2\left(\frac{k_z\Delta x}{2}\right),\\
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{3,5} &= \frac{-4\mathcal{C}}{3\rho(k\Delta x)^2}\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{k_z\Delta x}{2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{4,4} &= \frac{2}{\rho(k\Delta x)^2}\left(\mathcal{A}\sin^2\left(\frac{k_z\Delta x}{2}\right) + \mathcal{B}\cos(k_x\Delta x)\sin^2\left(\frac{k_z\Delta x}{2}\right) + \right.\\
&\qquad \left. 2\mathcal{D}\cos^2\left(\frac{k_z\Delta x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)\right),\\
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{4,5} &= \frac{-2\,\mathbf{i}\,\mathcal{B}}{\sqrt{3}\rho(k\Delta x)^2}\sin(k_x\Delta x)\sin^2\left(\frac{k_z\Delta x}{2}\right),\\
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{4,6} &= \frac{-2\,\mathbf{i}\,\mathcal{D}}{\sqrt{3}\rho(k\Delta x)^2}\sin(k_z\Delta x)\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{5,5} = \frac{2}{3\rho(k\Delta x)^2}\left(\mathcal{A}\sin^2\left(\frac{k_z\Delta x}{2}\right) - \mathcal{B}\cos(k_x\Delta x)\sin^2\left(\frac{k_z\Delta x}{2}\right)\right),
$$

$$
(\mathcal{K}_{\Delta x})_{6,6} = \frac{4\mathcal{D}}{3\rho(k\Delta x)^2}\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{k_z\Delta x}{2}\right),
$$

où les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont donnés par

$$
\left|
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{8\mu^2 + 8\lambda\mu + \lambda^2}{2\mu + \lambda},\\
\mathcal{B} &= \frac{\lambda^2}{2\mu + \lambda},\\
\mathcal{C} &= \lambda,\\
\mathcal{D} &= \mu.
\end{aligned}
\right.
$$

Une étude similaire à celle menée dans la section 9.3.1 nous montre l'existence de six types d'ondes planes données par (9.15) avec des vitesses de phase $c = c_{\Delta x,i}, i \in \{1,\ldots,6\}$ et des vecteurs d'amplitude $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\mathbf{\Delta x,i}}, i \in \{1,\ldots,6\}$ satisfaisant

$$
\left|
\begin{aligned}
c_{\Delta x,1} &= \sqrt{\lambda_{\Delta x,1}} = \underbrace{\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}}_{V_P} + \mathcal{O}(k\Delta x)^2,\\
\mathbf{V}_{\mathbf{\Delta x,1}} &= [\,\cos\theta\,,\ \sin\theta\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0\,]^t + \mathcal{O}(k\Delta x),
\end{aligned}
\right. \tag{9.16}
$$

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
c_{\Delta x,2} & = & \sqrt{\lambda_{\Delta x,2}} \;=\; \underbrace{\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}}_{V_S} + \mathcal{O}(k\Delta x)^2, \\[2ex]
\mathbf{V_{\Delta x,2}} & = & [\,-\sin\theta\,,\,\cos\theta\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,]^t \;+\; \mathcal{O}(k\Delta x),
\end{array}
\right. \tag{9.17}
$$

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
c_{\Delta x,3} & = & \sqrt{\lambda_{\Delta x,3}} \;=\; \mathcal{O}(k\Delta x), \\
\mathbf{V_{\Delta x,3}} & = & [\,0\,,\,0\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,]^t \;+\; \mathcal{O}(k\Delta x),
\end{array}
\right. \tag{9.18}
$$

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
c_{\Delta x,4} & = & \sqrt{\lambda_{\Delta x,4}} \;=\; \mathcal{O}(k\Delta x), \\
\mathbf{V_{\Delta x,4}} & = & [\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,1\,,\,0\,,\,0\,]^t \;+\; \mathcal{O}(k\Delta x),
\end{array}
\right. \tag{9.19}
$$

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
c_{\Delta x,5} & = & \sqrt{\lambda_{\Delta x,5}} \;=\; \sqrt{\dfrac{4\sin^2(\theta)(\lambda+\mu)\mu}{3\rho(\lambda+2\mu)}} + \mathcal{O}(k\Delta x)^2, \\[2ex]
\mathbf{V_{\Delta x,5}} & = & [\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,1\,,\,0\,]^t \;+\; \mathcal{O}(k\Delta x),
\end{array}
\right. \tag{9.20}
$$

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
c_{\Delta x,6} & = & \sqrt{\lambda_{\Delta x,6}} \;=\; \sqrt{\dfrac{4\cos^2(\theta)(\lambda+\mu)\mu}{3\rho(\lambda+2\mu)}} + \mathcal{O}(k\Delta x)^2, \\[2ex]
\mathbf{V_{\Delta x,6}} & = & [\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,1\,]^t \;+\; \mathcal{O}(k\Delta x).
\end{array}
\right. \tag{9.21}
$$

On remarque que les vitesses de phase des deux premières ondes planes discrètes, qu'on appellera physiques, sont, respectivement, des approximations d'ordre deux des vitesses des ondes de pression et de cisaillement du problème continu. Étant donné que

$$
\sqrt{\frac{4\,\mu\,(\lambda+\mu)}{3\,\rho\,(\lambda+2\mu)}} \;\leq\; \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \;<\; V_s \;<\; V_p,
$$

il est clair que les quatre autres ondes (qu'on appellera parasites), pour h assez petit, ont une vitesse de phase inférieure que celle des ondes physiques.

Ces quantités $c_{\Delta x,i},\ i \in \{1,\ldots,6\}$, qui dépendent de $|k|h$ et de l'angle θ, peuvent être représentées pour un milieu de propagation donné. Ainsi si on considère le matériau caractérisé par

$$
V_P \;=\; 3, \qquad V_S \;=\; 2, \qquad \rho \;=\; 1,
$$

on montre sur la figure 9.12 la vitesse des ondes numériques pour tous les angles et $2\pi|k|h \in (0, 0.25)$. On remarque en particulier que, au voisinage de $2\pi|k|h \;=\; 0$, la vitesse de l'onde de pression (resp.

de cisaillement) est bien approchée par $c_{\Delta x,1}$ (resp. par $c_{\Delta x,2}$) (on rappelle que le matériau est isotrope ce qui implique que les vitesses du problème continu sont indépendantes de l'angle θ). Dans la figure 9.13 on montre en coordonnées polaires la variation par rapport à l'angle des vitesses de phase pour $2\pi|k|h = 0.1$. Finalement, dans la figure 9.14 on représente les même quantités pour $\theta = \pi/6$ et $2\pi|k|h$ compris dans l'intervalle $(0, 0.25)$.

De la même façon qu'on avait fait dans le cas scalaire, l'espace de vecteurs d'amplitude (i.e. $\mathbb{R}^6$) peut se décomposer en deux sous-espace : la projection sur les deux premières composantes (qui sont associées aux degrés de liberté dont les fonctions de base sont des constantes) et la projection sur les autres quatre composantes (associées à des fonctions de base à moyenne nulle). Ainsi, on voit que :

- La partie prépondérante des deux premières ondes planes est sur les deux premières composantes. Si on ne s'intéresse qu'à la projection sur ces composantes on trouve un vecteur qui est "presque" parallèle (resp. orthogonal) au vecteur d'onde pour la première (resp. deuxième) onde discrète. Ceci est en conformité avec les vecteurs d'amplitude du problème continu.
- La partie prépondérante des autres ondes (qu'on appellera parasites) est sur les quatre dernières composantes.

Ainsi, afin d'atténuer les effets parasites provenant de ces modes parasites, on pourrait amortir la partie de la solution sur ces composantes, ce qui équivaut à amortir la projection de la vitesse discrète sur l'espace $\underline{M}_h^r(\Omega)$.

Remarque 9.3.2 *Lorsqu'on fait une analyse du même type pour l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ [80] on remarque qu'il y a seulement deux types d'ondes planes (comme dans le cas continu). Les vitesses de phase de ces ondes sont une approximation d'ordre deux des vitesses physiques des ondes de pression et cisaillement. De même, les vecteurs d'amplitude correspondent aussi à des approximations des vecteurs d'amplitude du problème continu, parallèle (resp. orthogonal) au vecteur d'onde pour les ondes P (resp. pour les ondes S).*

Remarque 9.3.3 *On a remarqué que l'utilisation de l'élément fini mixte $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ pour l'élastodynamique dans les PML's introduit des instabilités même dans les cas où le modèle PML continu a été montré stable [7]. Ce comportement pourrait être lié aux modes parasites qu'on a introduit pour enrichir l'élément fini. Afin d'éviter ce type de problèmes (en attendant une meilleure solution) on utilise l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ (qui n'a pas de modes parasites) dans les PML's, même si les modes parasites ne sont pas amortis.*

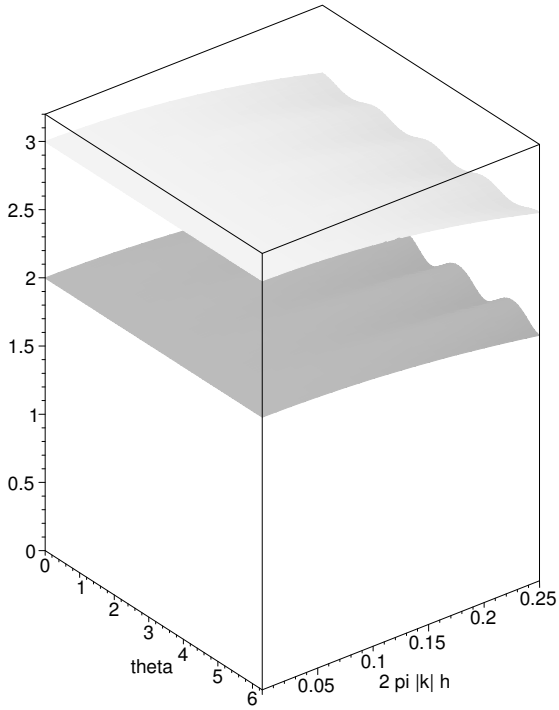
9.4 Amortissement des Composantes Parasites

Comme on vient de voir dans la section précédente et dans la remarque 9.2.2 l'élément fini modifié crée des modes parasites. Dans cette section on propose une façon d'amortir ces modes sans trop perturber la partie "physique" de la solution approchée.

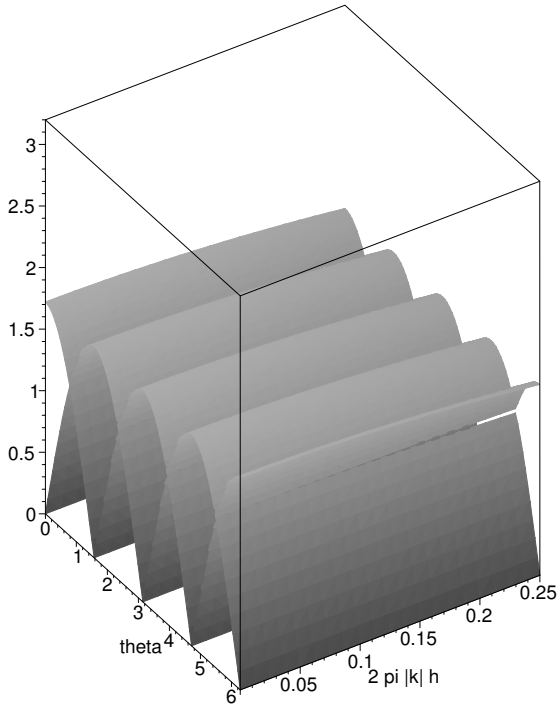
9.4.1 Présentation des Équations avec Amortissement pour l'Acoustique Scalaire

L'analyse de dispersion qu'on a menée dans le section 9.3.1 nous montre que la partie principale des modes parasites appartient à l'espace $M_h^r(\Omega)$. Afin d'amortir ces modes, on introduit la projection orthogonale $L^2(\Omega)$ sur l'espace $M_h^r(\Omega)$, qu'on dénotera par $P_{M_h^r}$, définie pour chaque $p^h \in M_h(\Omega)$ par

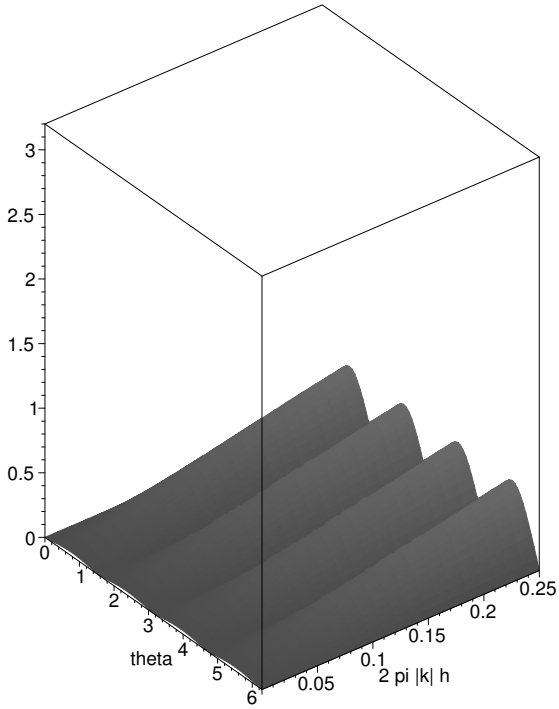
$$P_{M_h^r}(p^h) \in M_h^r(\Omega) \quad \text{et} \qquad (P_{M_h^r}(p^h), \tilde{p}^{h,r})_{L^2(\Omega)} \;=\; (p^h, \tilde{p}^{h,r})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \tilde{p}^{h,r} \in M_h^r(\Omega).$$



(a) $c_{\Delta x,1}$ et $c_{\Delta x,2}$

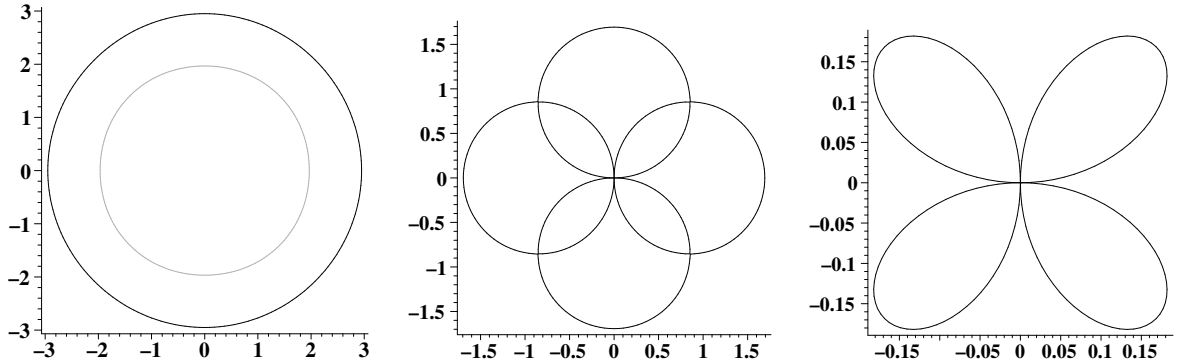


(b) $c_{\Delta x,5}$ et $c_{\Delta x,6}$



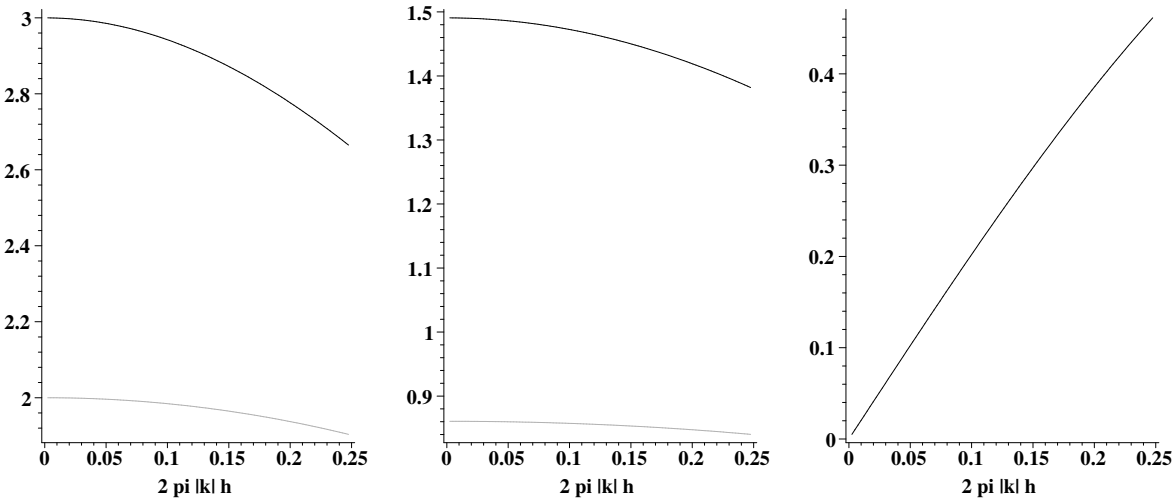
(c) $c_{\Delta x,3}$ et $c_{\Delta x,4}$

FIG. 9.12 – Vitesses de phase numériques en fonction de θ et $|k|h$. $V_P = 3,\ V_S = 2,\ \rho = 1$



(a) $c_{\Delta x,1}$ et $c_{\Delta x,2}$ (b) $c_{\Delta x,3}$ et $c_{\Delta x,4}$ (c) $c_{\Delta x,5}$ et $c_{\Delta x,6}$

FIG. 9.13 – Vitesses de phase numériques en fonction de θ (coordonnées polaires) pour $2\pi|k|h = 0.1$. $V_P = 3,\ V_S = 2,\ \rho = 1$



(a) $c_{\Delta x,1}$ et $c_{\Delta x,2}$ (b) $c_{\Delta x,3}$ et $c_{\Delta x,4}$ (c) $c_{\Delta x,5}$ et $c_{\Delta x,6}$

FIG. 9.14 – Vitesses de phase numériques en fonction de $|k|h$ pour $\theta = \pi/6$. $V_P = 3,\ V_S = 2,\ \rho = 1$

Ainsi, le problème approché avec amortissement s'écrit

$$
(9.22)\quad \begin{cases}
\text{Trouver } (\underline{v}^h, p^h, \lambda^H) \in C^1\left([0,T]; \underline{X}_h(\Omega) \times M_h(\Omega) \times \mathcal{G}_H(\Gamma)\right) \text{ satisfaisant} \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_v^h(\underline{v}^h, \underline{\tilde{v}}^h) + d(\underline{\tilde{v}}^h, p^h) - b(\underline{\tilde{v}}^h, \lambda^H) = 0, \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_p^h(p^h, \tilde{p}^h) + (\beta P_{M_h^r}(p^h), \tilde{p}^h)_{L^2(\Omega)} - d(\underline{v}^h, \tilde{p}^h) = (f, \tilde{p}^h), \\
b(\underline{v}^h, \tilde{\lambda}^H) = 0, \\
(\underline{v}^h, p^h)_{|t=0} = (\underline{v}_0^h, p_0^h)
\end{cases}
$$

$\forall\ (\underline{\tilde{v}}^h, \tilde{p}^h, \tilde{\lambda}^H) \in \underline{X}_h(\Omega) \times M_h(\Omega) \times \mathcal{G}_H(\Gamma)$, où les formes bilinéaires ont été introduites dans (7.4). Dans le système (9.22), le paramètre β est un coefficient d'amortissement positif. Le cas $\beta = 0$ redonne les équations sans amortissement tandis le cas d'un β strictement positif fournit un schéma dissipatif. Du point de vue numérique, il reste à déterminer la valeur optimale de ce coefficient.

9.4.2 Présentation des Équations avec Amortissement pour l'Élastodynamique

De façon analogue au cas scalaire, l'étude de dispersion effectuée dans la sous-section 9.3.2 montre que la partie prépondérante des modes parasites est sur l'espace $\underline{M}_h^r(\Omega)$. Ainsi, si on définit pour chaque $\underline{v}^h \in \underline{M}_h(\Omega)$ sa projection $\underline{L}^2(\Omega)$ sur $\underline{M}_h^r(\Omega)$ par

$$
P_{\underline{M}_h^r}(\underline{v}^h) \in \underline{M}_h^r(\Omega) \quad \text{et} \qquad (P_{\underline{M}_h^r}(\underline{v}^h), \underline{\tilde{v}}^{h,r})_{\underline{L}^2(\Omega)} = (\underline{v}^h, \underline{\tilde{v}}^{h,r})_{\underline{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \underline{\tilde{v}}^{h,r} \in \underline{M}_h^r(\Omega).
$$

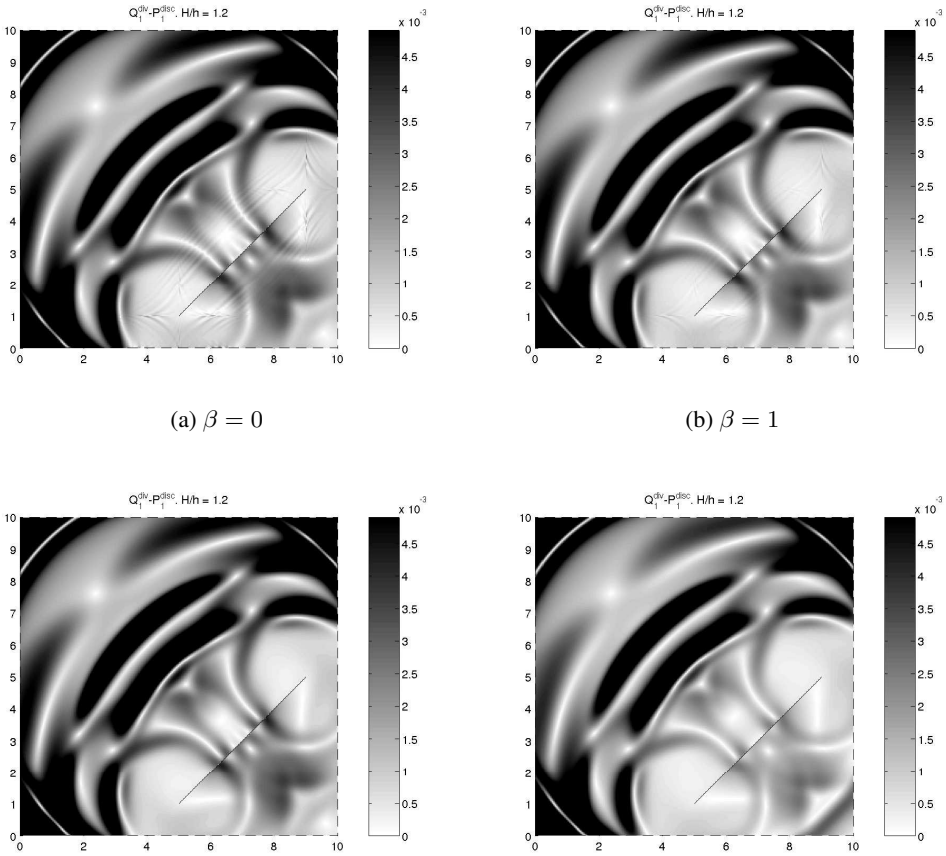
la formulation du problème approché avec amortissement est la suivante

(9.23)

$$
\begin{cases}
\text{Trouver } (\underline{\underline{\sigma}}^h, \underline{v}^h, \underline{\lambda}^H) \in C^1\left([0,T]; \underline{\underline{X}}_h^{sym}(\Omega) \times \underline{M}_h(\Omega) \times \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma)\right) \text{ satisfaisant} \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_\sigma^h(\underline{\underline{\sigma}}^h, \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h) + d(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h, \underline{v}^h) - b(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h, \underline{\lambda}^H) = 0, \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_v^h(\underline{v}^h, \underline{\tilde{v}}^h) + (\beta P_{\underline{M}_h^r}(\underline{v}^h), \underline{\tilde{v}}^{h,r})_{\underline{L}^2(\Omega)} - d(\underline{\underline{\sigma}}^h, \underline{\tilde{v}}^h) = (\underline{f}, \underline{\tilde{v}}^h), \\
b(\underline{\underline{\sigma}}^h, \underline{\tilde{\lambda}}^H) = 0, \\
(\underline{\underline{\sigma}}^h, \underline{v}^h)_{|t=0} = (\underline{\underline{\sigma}}_0^h, \underline{v}_0^h).
\end{cases}
$$

$\forall\ (\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h, \underline{\tilde{v}}^h, \underline{\tilde{\lambda}}^H)) \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}(\Omega) \times \underline{M}_h(\Omega) \times \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma)$ où on rappelle que les formes bilinéaires sont définies dans (7.17). Le paramètre β dans la formulation est un coefficient d'amortissement qui doit être choisi positif (et qui peut être éventuellement fonction de l'espace). Si $\beta = 0$ on retrouve le système sans amortissement. Dans l'autre cas ($\beta > 0$) on a un schéma dissipatif. Le choix de ce coefficient, qui dépend fortement du milieu de propagation, reste un problème ouvert.

Remarque 9.4.1 *On a refait l'expérience numérique montrée dans la section 9.2.2 (dont les résultats avaient été montrés dans la seconde colonne de la figure 9.7) avec différentes valeurs de β pour montrer le rôle que joue ce paramètre d'amortissement. Dans la figure 9.15 on montre le module du champ de vitesse (multiplié par quatre pour saturer l'échelle de l'image) au temps $t = 4.7602$ pour $\beta = 0,\ 1,\ 6$ et 100. On remarque que les ondes parasites très présentes dans la sous-figure (a) disparaissent progressivement lorsque la valeur de β augmente. Cependant, la performance de la méthode des domaines fictifs semble se détériorer pour des valeurs trop élevées. Ainsi, dans la sous-figure (d) on remarque que dans*



(a) $\beta = 0$ (b) $\beta = 1$

(c) $\beta = 6$ (d) $\beta = 100$

FIG. 9.15 – $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ avec amortissement. $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 4.7602$. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.2$. Onde S incidente. Échelle saturée par un facteur quatre

le coin à droite en bas, une partie importante de l'onde incidente a été transmise. Dans ce cas $\beta = 6$ semble être un bon compromis.

9.4.3 Quelques Mots sur la Discrétisation en Temps

Le système semidiscrétisé (9.23) peut se réécrire sous la forme

$$
\left|
\begin{array}{l}
\text{Trouver } (\Sigma, V, \Lambda) \in C^1([0,T], \mathbb{R}^{N_{\underline{\sigma}}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{v}}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{\lambda}}}) \\
M_v \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \quad + \quad A_\beta V \quad - \quad D\Sigma \qquad\qquad = \quad F \\
M_\sigma \dfrac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}t} \qquad\qquad + \quad D^* V \quad - \quad B^*\Lambda \quad = \quad 0,
\end{array}
\right.
\tag{9.24}
$$

où, en suivant la notation introduite dans la section 7.1.2.2 la matrice A_β est définie par

$$
(A_\beta)_{i,j} \quad = \quad (\beta P_{\underline{M}_h^r}(\underline{v}^{h,i}), \underline{v}^{h,j})_{\underline{L}^2(\Omega)}, \quad 1 \leq i,j \leq N_{\underline{v}}.
$$

On discrétise le système différentiel à l'aide de d'un schéma numérique centré d'ordre deux en temps qui nous donne

$$
(9.25) \qquad \left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } (\Sigma^n, V^{n+\frac{1}{2}}, \Lambda^{n+\frac{1}{2}}) \in \mathbb{R}^{N_{\underline{\sigma}}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{v}}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{\lambda}}} \\
M_\sigma \dfrac{\Sigma^{n+1} - \Sigma^n}{\Delta t} + D^* V^{n+\frac{1}{2}} - B^* \Lambda^{n+\frac{1}{2}} = 0, \\
M_v \dfrac{V^{n+\frac{1}{2}} - V^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + A_\beta \dfrac{V^{n+\frac{1}{2}} + V^{n-\frac{1}{2}}}{2} - D\Sigma^n = F^n,
\end{array}\right.
$$

avec les conditions aux limites écrites au sens faible

$$
(9.26) \qquad \left| \; B\Sigma^n = 0. \right.
$$

On signale que, pour obtenir un schéma numérique centré on a écrit le terme qui intervient dans l'amortissement comme la demi-somme de deux pas consécutifs. Étant donné que la matrice A_β est diagonale, le caractère "presque" explicite de la méthode ne change pas si on utilise des techniques de condensation de masse pour le calcul de M_σ.

9.5 Analyse de Convergence avec Domaines Fictifs

Cette section est consacrée à l'analyse de convergence du problème semi-discrétisé. On commencera par l'étude du cas acoustique où on a été capable d'établir un résultat de convergence de la solution de la formulation approchée avec domaines fictifs et amortissement des modes parasites (9.22) vers la solution du problème continu (7.2) (voir la section 9.5.1). Ensuite, dans la section 9.5.2 on expliquera les difficultés qui nous empêchent d'établir un résultat du même type pour le système élastodynamique (la solution du problème continu ne sera pas assez régulière) et on établira un résultat de convergence en absence de domaines fictifs. Tout le long de cette section on supposera que les intégrales sur les termes de masse sont faites de façon exacte.

Une technique souvent utilisée pour l'analyse de ce type de problèmes d'évolution [44, 12, 14] (comme on avait déjà expliqué dans la section 1.5.2) se décompose en deux étapes . Dans un premier temps, en utilisant des techniques d'énergie, on donnera des estimations sur le problème d'évolution en fonction de l'erreur commise entre la solution exacte de notre problème et une projection elliptique (qu'on choisira intelligemment). La deuxième étape consiste à analyser l'erreur due à la projection elliptique.

9.5.1 L'Équation des Ondes Scalaire

9.5.1.1 Définition et Analyse de la Projection Elliptique

On définit l'opérateur de projection elliptique par

$$
(9.27) \qquad \begin{array}{rccl}
\Pi_h : & \underline{X}(\Omega) \times M(\Omega) \times \mathcal{G}(\Gamma) & \longrightarrow & \underline{X}_h(\Omega) \times M_h(\Omega) \times \mathcal{G}_H(\Gamma) \\
& (\underline{v}, p, \lambda) & \mapsto & \Pi_h(\underline{v}, p, \lambda) := (\widehat{\underline{v}^h}, \widehat{p^h}, \widehat{\lambda^H}),
\end{array}
$$

où $(\widehat{\underline{v}^h}, \widehat{p^h}, \widehat{\lambda^H})$ est défini comme la solution du problème variationnel

$$(9.28)\quad \left|\begin{array}{l} \text{Trouver } (\widehat{\underline{v}^h}, \widehat{p^h}, \widehat{\lambda^H}) \in \underline{X}_h(\Omega) \times M_h(\Omega) \times \mathcal{G}_H(\Gamma) \text{ satisfaisant} \\ m_v(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}, \tilde{\underline{v}}^h) \quad + \quad d(\tilde{\underline{v}}^h, \widehat{p^h} - p) \quad - \quad b(\tilde{\underline{v}}^h, \widehat{\lambda^H} - \lambda) \quad = \quad 0, \\ (\widehat{p^h} - p, \tilde{p}^h)_{L^2(\Omega)} \quad - \quad d(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}, \tilde{p}^h) \quad = \quad 0, \\ b(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}, \tilde{\lambda}^H) \quad = \quad 0. \end{array}\right.$$

$\forall\ (\tilde{\underline{v}}^h, \tilde{p}^h, \tilde{\lambda}^H) \in \underline{X}_h(\Omega) \times M_h(\Omega) \times \mathcal{G}_H(\Gamma)$. L'analyse de ce type de problèmes (qu'on peut appeler "doublement" mixte) n'est pas en général évidente. Cependant, étant donné que

$$\text{div}(\underline{X}_h(\Omega)) \subset M_h(\Omega) \equiv M_h^1(\Omega),$$

on peut montrer que ce problème est équivalent à

$$(9.29)\quad \left|\begin{array}{l} \text{Trouver } (\widehat{\underline{v}^h}, \widehat{\lambda^H}) \in \underline{X}_h(\Omega) \times \mathcal{G}_H(\Gamma) \text{ satisfaisant} \\ m_v(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}, \tilde{\underline{v}}^h) \quad + \quad (\text{div}(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}), \text{div}\, \tilde{\underline{v}}^h)_{L^2(\Omega)} \quad - \quad b(\tilde{\underline{v}}^h, \widehat{\lambda^H} - \lambda) \quad = \quad 0, \\ b(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}, \tilde{\lambda}^H) \quad = \quad 0. \end{array}\right.$$

et après

$$(9.30)\quad \left|\begin{array}{l} \text{Trouver } \widehat{p^h} \in M_h(\Omega) \text{ satisfaisant} \\ (\widehat{p^h} - p, \tilde{p}^h)_{L^2(\Omega)} \quad = \quad d(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}, \tilde{p}^h), \quad \forall\, \tilde{p}_h \in M_h(\Omega). \end{array}\right.$$

Ceci se résume dans le

Théorème 9.5.1 *On a le résultat d'équivalence suivant :*
- *Si $(\widehat{\underline{v}^h}, \widehat{p^h}, \widehat{\lambda^H})$ est solution de (9.28), alors $(\widehat{\underline{v}^h}, \widehat{\lambda^H})$ est solution de (9.29) et $\widehat{p^h}$ est solution de (9.30),*
- *Si $(\widehat{\underline{v}^h}, \widehat{\lambda^H})$ est solution de (9.29) et $\widehat{p^h}$ est solution de (9.30), alors le triplet $(\widehat{\underline{v}^h}, \widehat{p^h}, \widehat{\lambda^H})$ est solution de (9.28).*

Preuve: On peut adapter la preuve appliqué dans la section 1.5.2. □

Remarque 9.5.1 *On signale que la projection elliptique dépend de la solution exacte du problème et donc, elle dépend aussi du temps. Ainsi, il est facile de montrer que si*

$$(\underline{v}, p, \lambda) \ \in \ C^k\left([0,T]; \underline{X}(\Omega) \times M(\Omega) \times \mathcal{G}(\Gamma)\right),$$

alors

$$\Pi_h(\underline{v}, p, \lambda) \ \in \ C^k\left([0,T]; \underline{X}_h(\Omega) \times M_h(\Omega) \times \mathcal{G}_H(\Gamma)\right),$$

et

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\Pi_h(\underline{v}, p, \lambda) \ = \ \Pi_h\left(\frac{\partial^k \underline{v}}{\partial t^k}, \frac{\partial^k p}{\partial t^k}, \frac{\partial^k \lambda}{\partial t^k}\right).$$

Maintenant la démarche sera la suivante :

- Dans un premier temps on analysera le problème (9.29) beaucoup plus standard que le problème initial. Il s'agit d'une formulation mixte qui pourra être traitée avec la théorie classique des éléments finis mixtes [25, 24]. Ceci nous permettra de donner des estimations sur $\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}$ et $\widehat{\lambda^H} - \lambda$.
- Ensuite, le problème (9.30) nous fournira les estimations sur $\widehat{p^h} - p$.

Pour analyser le premier problème il est bien connu que la convergence de $(\widehat{\underline{v}^h}, \widehat{\lambda^H})$ vers $(\underline{v}, \lambda)$ est liée a une condition du type inf-sup discrète uniforme. On a le résultat suivant :

Lemme 9.5.1 (Condition inf-sup discrète uniforme) *Supposons que le maillage de surface est uniformément régulier (i.e. il satisfait (7.11)). Alors, il existe une constante R telle que si $H > Rh$, la condition inf-sup discrète uniforme*

$$\left|\begin{array}{l} \exists \quad C > 0, \quad \text{indépendant de } h \text{ tel que} \\ \forall\, \tilde{\lambda}^H \in \mathcal{G}_H(\Gamma),\ \exists\, \tilde{\underline{v}}^h \in \underline{X}_h(\Omega), \quad b(\tilde{\underline{v}}^h, \tilde{\lambda}^H) \ \geq\ \mathcal{C}\|\underline{v}^h\|_{\underline{X}(\Omega)}\|\tilde{\lambda}^H\|_{\mathcal{G}(\Gamma)}, \end{array}\right. \tag{9.31}$$

est satisfaite pour les espace $(\underline{X}_h(\Omega), \mathcal{G}_H(\Gamma))$ définies par (8.1) et (8.17).

Preuve: Le résultat a été prouvé dans [57] pour le couple d'espaces $(\underline{X}_h^s(\Omega), \mathcal{G}_H(\Gamma))$. L'inclusion (8.2) nous fournit alors le résultat. □

Une fois que cette condition est satisfaite, on peut appliquer la théorie classique des éléments finis mixtes [25] pour obtenir l'estimation suivante sur la projection elliptique :

Théorème 9.5.2 *Supposons les hypothèses du lemme 9.5.1. Alors le problème (9.28) admet un solution unique $\Pi_h(\underline{v}, p, \lambda) = (\widehat{\underline{v}^h}, \widehat{p^h}, \widehat{\lambda^H}) \in \underline{X}_h(\Omega) \times M_h(\Omega) \times \mathcal{G}_H(\Gamma)$ qui satisfait*

$$\left|\begin{array}{l} \|\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}\|_{\underline{X}(\Omega)} + \|\widehat{\lambda^H} - \lambda\|_{\mathcal{G}(\Gamma)} \ \leq \\ \qquad \mathcal{C}\left(\inf\limits_{\tilde{\underline{v}}^h \in \underline{X}_h(\Omega)} \|\tilde{\underline{v}}^h - \underline{v}\|_{\underline{X}(\Omega)} + \inf\limits_{\tilde{\lambda}^H \in \mathcal{G}_H(\Gamma)} \|\tilde{\lambda}^H - \lambda\|_{\mathcal{G}(\Gamma)}\right), \end{array}\right. \tag{9.32}$$

$$\left|\begin{array}{l} \|\widehat{p^h} - p\|_{M(\Omega)} \ \leq \\ \mathcal{C}\left(\inf\limits_{\tilde{\underline{v}}^h \in \underline{X}_h(\Omega)} \|\tilde{\underline{v}}^h - \underline{v}\|_{\underline{X}(\Omega)} + \inf\limits_{\tilde{p}^h \in M_h(\Omega)} \|\tilde{p}^h - p\|_{M(\Omega)} + \inf\limits_{\tilde{\lambda}^H \in \mathcal{G}_H(\Gamma)} \|\tilde{\lambda}^H - \lambda\|_{\mathcal{G}(\Gamma)}\right), \end{array}\right. \tag{9.33}$$

$$\left|\begin{array}{l} \|P_{M_h^0}(\widehat{p^h}) - p\|_{M(\Omega)} + \|P_{M_h^r}(\widehat{p^h})\|_{M(\Omega)} \ \leq \\ \mathcal{C}\left(\inf\limits_{\tilde{\underline{v}}^h \in \underline{X}_h(\Omega)} \|\tilde{\underline{v}}^h - \underline{v}\|_{\underline{X}(\Omega)} + \inf\limits_{\tilde{p}_0^h \in M_h^0(\Omega)} \|\tilde{p}_0^h - p\|_{M(\Omega)} + \inf\limits_{\tilde{\lambda}^H \in \mathcal{G}_H(\Gamma)} \|\tilde{\lambda}^H - \lambda\|_{\mathcal{G}(\Gamma)}\right). \end{array}\right. \tag{9.34}$$

Preuve: L'estimation sur $(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}, \widehat{\lambda^H} - \lambda)$ découle de la théorie classique de Babuvska-Brezzi [25]. Pour montrer (9.33) on se sert de l'équation (9.29) qui implique

$$\|\widehat{p^h} - \tilde{p}^h\|_{M(\Omega)} \ \leq\ \|\tilde{p}^h - p\|_{M(\Omega)} + \|\text{div}\,(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v})\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall\, \tilde{p}^h \in M_h(\Omega),$$

et donc

$$\|\widehat{p^h} - p\|_{M(\Omega)} \ \leq\ 2 \inf_{\tilde{p}^h \in M_h(\Omega)} \|\tilde{p}^h - p\|_{M(\Omega)} + \|\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}\|_{\underline{X}(\Omega)},$$

qui entraîne l'estimation.
Pour prouver le dernier résultat on se sert encore de l'équation (9.29) en utilisant des fonctions test dans $M_h^0(\Omega)$. Ainsi, on a que tous les termes sur $M_h^r(\Omega)$ disparaissent et donc

$$(P_{M_h^0}(\widehat{p_h}) - p, \tilde{p}_0^h)_{L^2(\Omega)} \quad = \quad d(\widehat{\underline{v}^h} - v, \tilde{p}_0^h), \qquad \tilde{p}_0^h \in M_h^0(\Omega).$$

On se sert alors des arguments utilisés ci-dessus pour déduire que

$$\|P_{M_h^0}(\widehat{p_h}) - p\|_{M(\Omega)} \quad \leq \quad \|\widehat{\underline{v}^h} - v\|_{\underline{X}(\Omega)} + \inf_{\tilde{p}_0^h \in M_h^0(\Omega)} \|\tilde{p}_0^h - p\|_{M(\Omega)}.$$

Il suffit de combiner cette inégalité avec (9.33) pour montrer (9.34). □

Il sera utile aussi d'obtenir des estimations sur la dérivée de la projection elliptique :

Corollaire 9.5.3 *Supposons que la solution $(\underline{v}, p, \lambda)$ du problème (7.2) appartient à*

$$\mathcal{C}^k\left([0,T]; \underline{X}(\Omega) \times M(\Omega) \times \mathcal{G}(\Gamma)\right),$$

et qu'on se place sous les hypothèses du lemme 9.5.1. Alors

$$\begin{aligned} &\|\partial_t^k(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v})\|_{\underline{X}(\Omega)} + \|\partial_t^k(\widehat{\lambda^H} - \lambda)\|_{\mathcal{G}(\Gamma)} \ \leq \\ &\mathcal{C}\left(\inf_{\tilde{\underline{v}}^h \in \underline{X}_h(\Omega)} \|\tilde{\underline{v}}^h - \partial_t^k \underline{v}\|_{\underline{X}(\Omega)} + \inf_{\tilde{\lambda}^H \in \mathcal{G}_H(\Gamma)} \|\tilde{\lambda}^H - \partial_t^k \lambda\|_{\mathcal{G}(\Gamma)}\right), \end{aligned} \tag{9.35}$$

$$\begin{aligned} \|\partial_t^k\left(\widehat{p^h} - p\right)\|_{M(\Omega)} \ \leq \ \mathcal{C}\Bigg(&\inf_{\tilde{\underline{v}}^h \in \underline{X}_h(\Omega)} \|\tilde{\underline{v}}^h - \partial_t^k \underline{v}\|_{\underline{X}(\Omega)} + \\ &\inf_{\tilde{p}^h \in M_h(\Omega)} \|\tilde{p}^h - \partial_t^k p\|_{M(\Omega)} + \inf_{\tilde{\lambda}^H \in \mathcal{G}_H(\Gamma)} \|\tilde{\lambda}^H - \partial_t^k \lambda\|_{\mathcal{G}(\Gamma)}\Bigg), \end{aligned} \tag{9.36}$$

$$\begin{aligned} \|P_{M_h^0}(\partial_t^k \widehat{p^h}) - \partial_t^k p\|_{M(\Omega)} + \|P_{M_h^r}(\widehat{p^h})\|_{M(\Omega)} \ \leq \ \mathcal{C}\Bigg(&\inf_{\tilde{\underline{v}}^h \in \underline{X}_h(\Omega)} \|\tilde{\underline{v}}^h - \partial_t^k \underline{v}\|_{\underline{X}(\Omega)} + \\ &\inf_{\tilde{p}_0^h \in M_h^0(\Omega)} \|\tilde{p}_0^h - \partial_t^k p\|_{M(\Omega)} + \inf_{\tilde{\lambda}^H \in \mathcal{G}_H(\Gamma)} \|\tilde{\lambda}^H - \partial_t^k \lambda\|_{\mathcal{G}(\Gamma)}\Bigg). \end{aligned} \tag{9.37}$$

Preuve: Il suffit d'appliquer le théorème précédent sur la dérivée k-ième de la solution exacte et utiliser la commutativité de la projection elliptique et de l'opérateur de dérivation en temps. □

Finalement on utilise les propriétés d'approximation des éléments finis pour donner les estimations en fonction des puissances de h.

Corollaire 9.5.4 *Supposons que*

$$(\underline{v}, p, \lambda) \ \in \ \mathcal{C}^k\left([0,T]; H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\text{div}, C) \times H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega) \times H^{1-\varepsilon}(\Gamma)\right),$$

et qu'on se place sous les hypothèses du lemme 9.5.1. Alors on a les estimations suivantes sur la projection elliptique

$$\begin{aligned} &\|\partial_t^k(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v})\|_{\underline{X}(\Omega)} + \|\partial_t^k(\widehat{\lambda^H} - \lambda)\|_{\mathcal{G}(\Gamma)} \ \leq \\ &\qquad \mathcal{C}\left(h^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\|\partial_t^k \underline{v}\|_{H_{div}^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)} \ + \ H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\|\partial_t^k \lambda\|_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma)}\right), \end{aligned} \tag{9.38}$$

$$
\left|
\begin{array}{l}
\|P_{M_h^0}(\partial_t^k \widehat{p^h}) - \partial_t^k p\|_{M(\Omega)} + \|P_{M_h^r}(\widehat{p^h})\|_{M(\Omega)} \ \leq \\
\qquad \mathcal{C}\left(h^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \left(\|\partial_t^k \underline{v}\|_{H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}_{div}(\Omega)} + \|\partial_t^k p\|_{H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)} \right) + H^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \|\partial_t^k \lambda\|_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma)} \right).
\end{array}
\right. \tag{9.39}
$$

Remarque 9.5.2 *On signale que, en général, la régularité en espace de la partie volumique de la solution sera, au plus*

$$\underline{v}(t) \ \in \ H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathrm{div}, C), \quad p(t) \in H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega), \qquad \varepsilon > 0.$$

Ceci vient du fait d'avoir considéré ces inconnues définies sur tout C sans prendre en compte la géométrie de l'obstacle. Par ailleurs, on remarque que le multiplicateur de Lagrange (dans le cas d'une frontière ouverte) n'est pas, en général, plus régulier que

$$\lambda(t) \in H^{1-\varepsilon}(\Gamma), \qquad \varepsilon > 0.$$

Ceci est lié au comportement singulier de cette inconnue aux extrémités de la fissure [54] (comportement en $\sqrt{r}$). De plus, on peut montrer que si les conditions initiales, les forces externes et l'obstacle sont assez réguliers alors la solution du problème (7.2) appartient aux espaces donnés ci-dessus.

9.5.1.2 Estimation sur le Problème d'Évolution

L'estimation pour le problème d'évolution, qui est assez standard, se base sur des techniques d'énergie. On définit l'énergie discrète de l'erreur par

$$\mathcal{E}_h(t) \ = \ \frac{1}{2}\, m_v(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}^h, \widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}^h) + \frac{1}{2}\, m_p(\widehat{p^h} - p^h, \widehat{p^h} - p^h). \tag{9.40}$$

Il est clair qu'elle est équivalente à la norme

$$\|\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}^h\|^2_{\underline{L}^2(\Omega)} + \|\widehat{p^h} - p^h\|^2_{L^2(\Omega)},$$

et donc, notre objectif sera de borner cette quantité. On commence par prouver l'identité d'énergie suivante :

Proposition 9.5.5 *L'énergie discrète de l'erreur (9.40) satisfait l'identité*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_h(t) + \int_C \beta |P_{M_h^r}(\widehat{p^h} - p^h)|^2 \, dx \ = \ F, \tag{9.41}$$

où

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
F & = & m_v\left(\partial_t(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}), \widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}^h\right) + m_p\left(\partial_t(\widehat{p^h} - p), \widehat{p^h} - p^h\right) - \\
& & m_v(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}, \widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}^h) \ - (\widehat{p^h} - p, \widehat{p^h} - p^h)_{L^2(\Omega)} + \\
& & \displaystyle\int_C \beta P_{M_h^r}(\widehat{p^h}) P_{M_h^r}(\widehat{p^h} - p^h) \, dx.
\end{array}
\right. \tag{9.42}
$$

Preuve: La différence entre les premières équations de (7.2) et (9.22) nous donne

$$
\begin{array}{l}
m_v\left(\partial_t(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}^h), \tilde{\underline{v}}^h\right) + d(\tilde{\underline{v}}^h, \widehat{p^h} - p^h) - b(\tilde{\underline{v}}^h, \widehat{\lambda^H} - \lambda^H) = \\
\qquad m_v\left(\partial_t(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}), \tilde{\underline{v}}^h\right) + d(\tilde{\underline{v}}^h, \widehat{p^h} - p) - b(\tilde{\underline{v}}^h, \widehat{\lambda^H} - \lambda).
\end{array} \tag{9.43}
$$

De la même façon, en utilisant la deuxième équation de (7.2) et (9.22) on obtient

$$\begin{aligned} m_p\left(\partial_t(\widehat{p^h}-p^h),\tilde{p}^h\right)+(\beta P_{M_h^r}(\widehat{p^h}-p^h),\tilde{p}^h)_{L^2(\Omega)}-d(\widehat{\underline{v}^h}-\underline{v}^h,\tilde{p}^h)= \\ m_p\left(\partial_t(\widehat{p^h}-p),\tilde{p}^h\right)+(\beta P_{M_h^r}(\widehat{p^h}),\tilde{p}^h)_{L^2(\Omega)}-d(\widehat{\underline{v}^h}-\underline{v},\tilde{p}^h). \end{aligned} \tag{9.44}$$

Si on additionne l'équation (9.43) avec $\tilde{\underline{v}}^h=\widehat{\underline{v}^h}-\underline{v}^h$ avec l'équation (9.44) avec $\tilde{p}^h=\widehat{p^h}-\underline{v}^h$

$$\begin{aligned} m_v\left(\partial_t(\widehat{\underline{v}^h}-\underline{v}^h),\widehat{\underline{v}^h}-\underline{v}^h\right)+m_p\left(\partial_t(\widehat{p^h}-p^h),\widehat{p^h}-p^h\right)+(\beta P_{M_h^r}(\widehat{p^h}-p^h),\widehat{p^h}-p^h)_{L^2(\Omega)} \\ =m_v\left(\partial_t(\widehat{\underline{v}^h}-\underline{v}),\widehat{\underline{v}^h}-\underline{v}^h\right)+d(\widehat{\underline{v}^h}-\underline{v}^h,\widehat{p^h}-p)-b(\widehat{\underline{v}^h}-\underline{v}^h,\widehat{\lambda^H}-\lambda)+ \\ m_p\left(\partial_t(\widehat{p^h}-p),\widehat{p^h}-p^h\right)+(\beta P_{M_h^r}(\widehat{p^h}),\widehat{p^h}-p^h)_{L^2(\Omega)}-d(\widehat{\underline{v}^h}-\underline{v},\widehat{p^h}-p^h). \end{aligned}$$

On remarque que le terme à gauche de cette dernière égalité est égal au terme à gauche dans (9.41). Il suffit alors d'utiliser la définition de la projection elliptique pour transformer les termes à droite et obtenir (9.41). □

La proposition suivante nous donne une borne de l'énergie de l'erreur en termes de l'erreur sur la projection elliptique.

Proposition 9.5.6 *L'énergie discrète de l'erreur satisfait l'estimation suivante*

$$\left|\begin{aligned} \sup_{t'\le T}\mathcal{E}_h^{\frac12}(t') \;\le\; \mathcal{C}\,\mathcal{E}_h^{\frac12}(0)+\mathcal{C}\int_0^T\Big(\|\partial_t(\widehat{p^h}-p)\|_{M(\Omega)}+\|\partial_t(\widehat{\underline{v}^h}-\underline{v})\|_{\underline{L^2}(\Omega)}+ \\ \|\widehat{p^h}-p\|_{M(\Omega)}+\|\widehat{\underline{v}^h}-\underline{v}\|_{\underline{L^2}(\Omega)}\Big)\,ds+\mathcal{C}\left[\int_0^T\|\sqrt{\beta}P_{M_h^r}(\widehat{p^h})\|^2_{M(\Omega)}\,ds\right]^{\frac12}, \end{aligned}\right. \tag{9.45}$$

où $\mathcal{C}$ est une constante qui est indépendante de h et de β.

Preuve: Cette preuve se base sur l'égalité (9.41) satisfaite par l'énergie discrète de l'erreur. On commence par transformer le dernier terme dans (9.42). On utilise l'inégalité de Young pour avoir

$$\int_C\left|\beta P_{M_h^r}(\widehat{p^h})P_{M_h^r}(\widehat{p^h}-p^h)\right|\,\mathrm{d}x \;\le\; \int_C\beta\left|P_{M_h^r}(\widehat{p^h}-p^h)\right|^2\,\mathrm{d}x+\int_C\frac{\beta}{4}\left|P_{M_h^r}(\widehat{p^h})\right|^2\,\mathrm{d}x.$$

Des simples manipulations sur les autres termes de (9.42) nous donnent alors

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_h(t) \;\le\; \mathcal{C}\|\widehat{p^h}-p^h\|_{M(\Omega)}\left(\|\partial_t(\widehat{p^h}-p)\|_{M(\Omega)}+\|\widehat{p^h}-p\|_{M(\Omega)}\right)+ \\ \mathcal{C}\|\widehat{\underline{v}^h}-\underline{v}^h\|_{\underline{L^2}(\Omega)}\left(\|\partial_t(\widehat{\underline{v}^h}-\underline{v})\|_{\underline{L^2}(\Omega)}+\|\widehat{\underline{v}^h}-\underline{v}\|_{\underline{L^2}(\Omega)}\right)+\frac14\|\sqrt{\beta}P_{M_h^r}(\widehat{p^h})\|^2_{M(\Omega)}, \end{aligned}$$

et donc, si on intègre en temps, une majoration dans les termes qui sont dans le second membre nous donne ($\forall\, t\le T$)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h(t) \;\le\; \mathcal{E}_h(0)+\mathcal{C}\sup_{t'\le T}\mathcal{E}_h^{\frac12}(t')\int_0^T\Big(\|\partial_t(\widehat{p^h}-p)\|_{M(\Omega)}+\|\partial_t(\widehat{\underline{v}^h}-\underline{v})\|_{\underline{L^2}(\Omega)}+ \\ \|\widehat{p^h}-p\|_{M(\Omega)}+\|\widehat{\underline{v}^h}-\underline{v}\|_{\underline{L^2}(\Omega)}\Big)\,\mathrm{d}s+\frac14\int_0^T\|\sqrt{\beta}P_{M_h^r}(\widehat{p^h})\|^2_{M(\Omega)}\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Ensuite on prend le maximum sur $t \leq T$ et on applique l'inégalité de Young sur le premier terme intégral pour obtenir

$$\begin{aligned}\sup_{t' \leq T} \mathcal{E}_h(t') \quad &\leq \quad \mathcal{C}\, \mathcal{E}_h(0) + \mathcal{C} \left[\int_0^T \Big(\|\partial_t(\widehat{p^h} - p)\|_{M(\Omega)} + \|\partial_t(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v})\|_{\underline{L}^2(\Omega)} + \right. \\ &\qquad \left. \|\widehat{p^h} - p\|_{M(\Omega)} + \|\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}\|_{\underline{L}^2(\Omega)} \Big)\, \mathrm{d}s \right]^2 + \mathcal{C} \int_0^T \|\sqrt{\beta} P_{M_h^r}(\widehat{p^h})\|^2_{M(\Omega)}\, \mathrm{d}s,\end{aligned}$$

qui entraîne facilement (9.45). □

Donc, on peut établir le théorème suivant

Théorème 9.5.7 *Soit* $(\underline{v}, p, \lambda)$ *la solution du problème (7.2) avec des conditions initiales* $(\underline{v}_0, p_0, \lambda_0 = 0)$. *On suppose que*

$$\text{supp}(\underline{v}_0) \cup \text{supp}(p_0) \subset C \setminus \Gamma, \quad \bigcup_{t \leq T} \text{supp}(f(t)) \subset C \setminus \Gamma.$$

Soit $(\underline{v}^h, p^h, \lambda^h)$ *la solution de (9.22) avec les conditions initiales données par* $\Pi_h(\underline{v}_0, p_0, \lambda_0)$. *Alors on a l'estimation d'erreur suivante*

$$\begin{aligned}&\|\underline{v}^h - \underline{v}\|_{C^0([0,T];\underline{L}^2(\Omega))} + \|p^h - p\|_{C^0([0,T];M(\Omega))} \leq \\ &\qquad \mathcal{C}(1+T) \Big(\|\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}\|_{C^1([0,T];\underline{L}^2(\Omega))} + \|\widehat{p^h} - p\|_{C^1([0,T];M(\Omega))} \Big) + \\ &\qquad \mathcal{C}\, \sqrt{T}\, \|\sqrt{\beta}\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|P_{M_h^r}(\widehat{p^h})\|_{C^0([0,T];M(\Omega))}.\end{aligned} \tag{9.46}$$

Si de plus, $(\underline{v}, p) \in C^2\left([0,T]; \underline{L}^2(\Omega) \times M(\Omega)\right)$ *alors*

$$\begin{aligned}&\|\underline{v}^h - \underline{v}\|_{C^0([0,T];\underline{X}(\Omega))} \leq \mathcal{C}\, \|\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}\|_{C^0([0,T];\underline{X}(\Omega))} + \\ &\qquad \mathcal{C}\, (1+T)(1 + \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}) \Big(\|\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}\|_{C^2([0,T];\underline{L}^2(\Omega))} + \|\widehat{p^h} - p\|_{C^2([0,T];M(\Omega))} \Big) + \\ &\qquad \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)} (1 + \sqrt{T}\, \|\sqrt{\beta}\|_{L^\infty})\, \|P_{M_h^r}(\widehat{p^h})\|_{C^1([0,T];M(\Omega))},\end{aligned} \tag{9.47}$$

$$\begin{aligned}&\|\lambda^H - \lambda\|_{C^0([0,T];\mathcal{G}(\Gamma))} \leq \mathcal{C}\, \|\widehat{\lambda^H} - \lambda\|_{C^0([0,T];\mathcal{G}(\Gamma))} + \\ &\qquad \mathcal{C}\, (1+T) \Big(\|\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}\|_{C^2([0,T];\underline{L}^2(\Omega))} + \|\widehat{p^h} - p\|_{C^2([0,T];M(\Omega))} \Big) + \\ &\qquad \mathcal{C}\, \sqrt{T}\, \|\sqrt{\beta}\|_{L^\infty}\, \|P_{M_h^r}(\widehat{p^h})\|_{C^1([0,T];M(\Omega))}.\end{aligned} \tag{9.48}$$

Preuve: On commence par signaler qu'avec le choix de condition initiale qu'on a fait $\mathcal{E}_h(0)$ est nulle. Alors, l'inégalité (9.45) implique facilement (9.46). Il est aussi clair que si on a un cran de régularité en temps en plus, on aura

$$\begin{aligned}&\|\partial_t(\underline{v}^h - \underline{v})\|_{C^0([0,T];\underline{L}^2(\Omega))} + \|\partial_t(p^h - p)\|_{C^0([0,T];M(\Omega))} \leq \\ &\qquad \mathcal{C}(1+T) \Big(\|\partial_t(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v})\|_{C^1([0,T];\underline{L}^2(\Omega))} + \|\partial(\widehat{p^h} - p)\|_{C^1([0,T];M(\Omega))} \Big) + \\ &\qquad \mathcal{C}\, \sqrt{T}\, \|\sqrt{\beta}\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|P_{M_h^r}(\partial_t \widehat{p^h})\|_{C^0([0,T];M(\Omega))}.\end{aligned} \tag{9.49}$$

L'estimation obtenue prend en compte seulement la norme L^2 de l'erreur sur la vitesse. Voyons comment donner une estimation en norme $\underline{X}(\Omega)$. En faisant la différence entre la deuxième équation de (9.22) et la deuxième équation de (7.2) on obtient

$$(\mathrm{div}(\underline{v}^h - \underline{v}), \tilde{p}^h)_{L^2(\Omega)} \;=\; m_p(\partial_t(p^h - p), \tilde{p}^h) \;+\; (\beta P_{M_h^r}(p^h), \tilde{p}^h)_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall\, \tilde{p}^h \in M_h(\Omega).$$

Ceci implique que (on rappelle que $\mathrm{div}(\underline{v}^h - \widehat{\underline{v}^h}) \in M_h(\Omega)$)

$$\|\mathrm{div}(\underline{v}^h - \widehat{\underline{v}^h})\|_{L^2(\Omega)} \;\leq\; \mathcal{C}\left(\|\partial_t(p^h - p)\|_{M(\Omega)} \;+\; \|\mathrm{div}(\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v})\|_{L^2(\Omega)} \;+\; \|\beta P_{M_h^r}(p^h)\|_{M(\Omega)}\right)$$

et par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\|\mathrm{div}(\underline{v}^h - \underline{v})\|_{L^2(\Omega)} \;\leq\; & \mathcal{C}\left(\|\partial_t(p^h - p)\|_{C^0([0,T];M(\Omega))} \;+\; \|\widehat{\underline{v}^h} - \underline{v}\|_{C^0([0,T];\underline{X}(\Omega))}\right) \;+ \\ & \mathcal{C}\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\|\widehat{p^h} - p\|_{M(\Omega)} \;+\; \|p^h - p\|_{M(\Omega)} \;+ \right. \\ & \left. \|P_{M_h^r}(\widehat{p^h})\|_{C^0([0,T];M(\Omega))}\right).\end{aligned}$$

Il suffit d'appliquer (9.46) et (9.49) sur cette dernière inégalité pour obtenir l'estimation (9.47). Finalement on obtient l'estimation sur le multiplicateur de Lagrange. Grâce à la condition inf-sup discrète uniforme (9.31) on a qu'il existe $\underline{\tilde{v}}^h \in \underline{X}_h(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\|\lambda^H - \widehat{\lambda^H}\|_{\mathcal{G}(\Gamma)}\, \|\tilde{v}^h\|_{\underline{X}(\Omega)} \;\leq\; & b(\tilde{v}^h, \lambda^H - \widehat{\lambda^H}) \\ =\; & b(\tilde{v}^h, \lambda^H - \lambda) \;+\; b(\tilde{v}^h, \lambda - \widehat{\lambda^H}) \\ =\; & m_v(\partial_t(\underline{v}^h - \underline{v}), \underline{\tilde{v}}^h) \;+\; d(\underline{\tilde{v}}^h, p^h - p) \;+\; b(\tilde{v}^h, \lambda - \widehat{\lambda^H}).\end{aligned}$$

Ceci entraîne que

$$\|\lambda^H - \lambda\|_{\mathcal{G}(\Gamma)} \;\leq\; \mathcal{C}\left(\|\lambda - \widehat{\lambda^H}\|_{\mathcal{G}(\Gamma)} \;+\; \|\partial_t(\underline{v}^h - \underline{v})\|_{\underline{L^2}(\Omega)} \;+\; \|p^h - p\|_{M(\Omega)}\right),$$

et par conséquent, en utilisant (9.46) et (9.49) on montre l'estimation (9.48). □

Finalement on établit un résultat de convergence en fonction du pas de discrétisation :

Théorème 9.5.8 *On se place sous les hypothèses du théorème 9.5.7. Alors on a que*

– *si* $(\underline{v}, p, \lambda) \in C^1\left([0,T]; H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathrm{div}, C)) \times H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)) \times H^{1-\varepsilon}(\Gamma)\right)$

(9.50)
$$\begin{aligned}&\|\underline{v}^h - \underline{v}\|_{C^0([0,T];\underline{L^2}(\Omega))} + \|p^h - p\|_{C^0([0,T];M(\Omega))} \;\leq\; \mathcal{C}\left(h^{\frac{1}{2}-\varepsilon} + H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right) \\ &\quad\left[(1+T)\left(\|\underline{v}\|_{C^1([0,T];H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}_{div}(\Omega))} + \|p\|_{C^1([0,T];H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega))} + \|\lambda\|_{C^1([0,T];H^{1-\varepsilon}(\Gamma))}\right) + \right. \\ &\quad\left.\sqrt{T}\|\sqrt{\beta}\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\|\underline{v}\|_{C^0([0,T];H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}_{div}(\Omega))} + \|p\|_{C^0([0,T];H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega))} + \|\lambda\|_{C^0([0,T];H^{1-\varepsilon}(\Gamma))}\right)\right],\end{aligned}$$

– *si* $(\underline{v}, p, \lambda) \in C^2\left([0,T]; H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathrm{div}, C)) \times H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega)) \times H^{1-\varepsilon}(\Gamma)\right)$

$$
\left|
\begin{array}{l}
\|\underline{v}^h - \underline{v}\|_{C^0([0,T];\underline{X}(\Omega))} \;\leq\; \mathcal{C}\left(h^{\frac{1}{2}-\varepsilon} + H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right)(1+T)\left(1+\|\beta^{\frac{3}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \\
\qquad \left(\|\underline{v}\|_{C^2([0,T];H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}_{div}(\Omega))} + \|p\|_{C^2([0,T];H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega))} + \|\lambda\|_{C^2([0,T];H^{1-\varepsilon}(\Gamma))}\right),
\end{array}
\right. \tag{9.51}
$$

(9.52)

$$
\left|
\begin{array}{l}
\|\lambda^H - \lambda\|_{C^0([0,T];\mathcal{G}(\Gamma))} \;\leq\; \mathcal{C}\left(h^{\frac{1}{2}-\varepsilon} + H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right) \\
\qquad \left[(1+T)\left(\|\underline{v}\|_{C^2([0,T];H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}_{div}(\Omega))} + \|p\|_{C^2([0,T];H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega))} + \|\lambda\|_{C^2([0,T];H^{1-\varepsilon}(\Gamma))}\right) + \right. \\
\left. \sqrt{T}\|\sqrt{\beta}\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\|\underline{v}\|_{C^1([0,T];H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}_{div}(\Omega))} + \|p\|_{C^1([0,T];H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Omega))} + \|\lambda\|_{C^1([0,T];H^{1-\varepsilon}(\Gamma))}\right)\right].
\end{array}
\right.
$$

Preuve: Il suffit d'utiliser les estimations sur le problème d'évolution obtenues dans le théorème 9.5.7 et les combiner avec celles qui portent sur la projection elliptique du corollaire 9.5.4. □

9.5.2 Les Équations de l'Élastodynamique. Difficultés

On a essayé d'adapter la preuve présentée ci-dessus au long de la section (9.5.1) au cas élastique. Cependant, il n'est pas évident d'établir l'équivalent du lemme 9.5.1 (condition inf-sup discrète uniforme) lorsqu'on utilise l'élément fini $\underline{\underline{X}}_h^{sym}(\Omega)$ pour approcher l'espace $\underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega)$. On explique la raison par la suite.

La preuve du lemme 9.5.1 repose sur le résultat d'approximation suivant satisfait par l'élément fini de Raviart-Thomas $\underline{X}_h^s(\Omega)$ (voir [57] pour avoir plus de détails)

Lemme 9.5.2 *Pour tout* $0 \leq s \leq 1$, *il existe une constante* $K_s > 0$ *telle que*

$$
\forall\, \underline{v} \in H^s(\mathrm{div}, C), \qquad \|\underline{v} - \widetilde{\Pi}_h(\underline{v})\|_{H_{div}(\Omega)} \;\leq\; K_s h^s \|\underline{v}\|_{H^s_{div}(\Omega)},
$$

où $\widetilde{\Pi}_h \in \mathcal{L}(\underline{X}(\Omega), \underline{X}_h^s(\Omega))$ *est l'opérateur de projection orthogonale* $H(\mathrm{div}, C)$ *dans* $\underline{X}_h^s(\Omega)$.

Étant donné que $\underline{X}_h^s(\Omega) \subset \underline{X}_h(\Omega)$, notre élément fini pour le problème acoustique satisfait aussi ce lemme. Il faut bien noter que la régularité supplémentaire demandée pour obtenir le résultat est très faible.

Dans le cas élastique, la symétrie du tenseur de contraintes nous oblige à utiliser directement les propriétés d'approximation de notre élément (sans pouvoir utiliser celles de l'élément fini de Raviart-Thomas) qui demande une régularité du type $\underline{H^{s+1,s}}(\Omega) \times \underline{H^{s,s+1}}(\Omega)$. Cette régularité n'est pas bien adaptée (et elle est trop forte) pour pouvoir adapter la preuve présenté dans [57] au cas élastique.

Même si on n'a pas été capable d'établir un résultat de convergence avec domaines fictifs pour le cas élastique, les résultats numériques semblent montrer que la solution discrète est une bonne approximation de la solution du problème continu.

Par ailleurs, il est possible d'établir le théorème de convergence suivant en absence de domaines fictifs :

Théorème 9.5.9 *Soient* $(\underline{\underline{\sigma}}^h, \underline{v}^h)$ *et* $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v})$ *les solutions des problèmes en absence de domaines fictifs (9.23) et (7.16) respectivement. Alors :*

– *si* $\underline{\underline{\sigma}} \in C^1\left([0,T]; \underline{\underline{\widetilde{H}}}^{2,1}(\Omega)\right)$ *et* $\underline{v} \in C^1\left([0,T]; \underline{H^1}(\Omega)\right)$ *alors*

$$
\left|
\begin{array}{l}
\|\underline{\underline{\sigma}}^h - \underline{\underline{\sigma}}\|_{C^0([0,T];\underline{\underline{L^2}}(\Omega))} + \|\underline{v}^h - \underline{v}\|_{C^0([0,T];\underline{M}(\Omega))} \leq \\
\qquad \mathcal{C}\, h \left[(1+T) \left(\|\underline{\underline{\sigma}}\|_{C^1([0,T];\underline{\underline{\widetilde{H}}}^{2,1}(\Omega))} + \|\underline{v}\|_{C^1([0,T];\underline{H^1}(\Omega))} \right) + \right. \\
\qquad \left. \sqrt{T} \|\sqrt{\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\|\underline{\underline{\sigma}}\|_{C^0([0,T];\underline{\underline{\widetilde{H}}}^{2,1}(\Omega))} + \|\underline{v}\|_{C^0([0,T];\underline{H^1}(\Omega))} \right) \right],
\end{array}
\right. \tag{9.53}
$$

– *si* $\underline{\underline{\sigma}} \in C^2\left([0,T];\underline{\underline{\widetilde{H}}}^{2,1}(\Omega)\right)$ *et* $\underline{v} \in C^2\left([0,T];\underline{H^1}(\Omega)\right)$ *alors*

$$
\left|
\begin{array}{l}
\|\underline{\underline{\sigma}}^h - \underline{\underline{\sigma}}\|_{C^0([0,T];\underline{\underline{X}}(\Omega))} \leq \mathcal{C}\, h\, (1+T) \left(1 + \|\beta^{\frac{3}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\
\qquad \left(\|\underline{\underline{\sigma}}\|_{C^2([0,T];\underline{\underline{\widetilde{H}}}^{2,1}(\Omega))} + \|\underline{v}\|_{C^2([0,T];\underline{H^1}(\Omega))} \right).
\end{array}
\right. \tag{9.54}
$$

Preuve: La preuve est similaire à celles des théorèmes 9.5.8 et 1.5.5. □

Chapitre 10

Généralisation de l'Élément Fini Proposé. L'Élément Fini $\mathcal{Q}_k^{div} \times \mathcal{Q}_k^{*,disc}$ pour l'Élastodynamique

Sommaire

10.1 Présentation de l'Élément Fini $\mathcal{Q}_k^{div} \times \mathcal{Q}_k^{*,disc}$ 281

10.2 Analyse de Convergence pour l'Élastodynamique 283

La modification de l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ proposée dans le chapitre précédent rend les preuves de convergence plus simples. En outre, les résultats obtenus sont plus forts (on obtient directement la convergence du tenseur de contraintes en norme $\underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega)$). On rappelle que la propriété fondamentale du nouvel élément réside sur l'inclusion

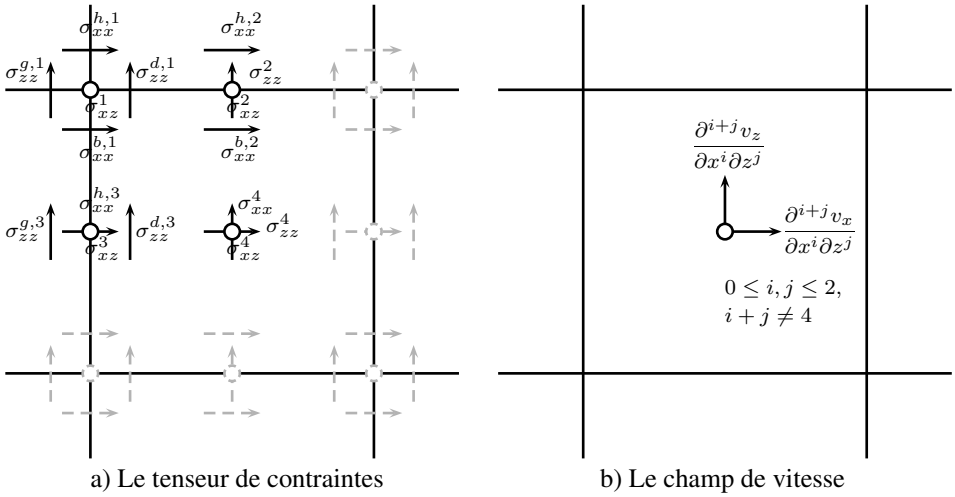
$$\underline{\text{div}}\left(\underline{\underline{X}}_h^{sym}(\Omega)\right) \subset \underline{M}_h(\Omega). \tag{10.1}$$

Dans [14, 80] une généralisation de l'élément fini original avait été introduite : l'élément $\mathcal{Q}_k^{div} \times \mathcal{Q}_{k-1}$. Il est facile de vérifier que l'inclusion souhaitée n'est jamais vérifiée. Dans ce chapitre on étend la modification présentée dans le chapitre 9 à cette famille. Ainsi, on obtiendra une autre famille d'éléments finis mixtes d'ordre élevé dont l'analyse de convergence s'avère assez simple.

10.1 Présentation de l'Élément Fini $\mathcal{Q}_k^{div} \times \mathcal{Q}_k^{*,disc}$

L'élément fini $\mathcal{Q}_k^{div} \times \mathcal{Q}_{k-1}$ appliqué à la discrétisation des espaces $\underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega) \times \underline{M}(\Omega)$ s'appuie sur un maillage régulier à base de rectangles $T_h(\Omega)$ du domaine de calcul Ω. Il possède deux propriétés fondamentales et qu'on veut conserver : il est compatible avec des techniques de condensation de masse (ce qui nous permettra d'obtenir des schémas numériques explicites après discrétisation en temps) et il impose la symétrie du tenseur de contraintes de façon forte. Pour cette raison on a décidé de se limiter à faire la modification sur l'espace d'approximation des vitesses. Ainsi, on propose

$$\left|\begin{array}{rcl} \underline{\underline{X}}_h^{sym}(\Omega) & = & \left\{\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}^h \in \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega) \,/\forall\, K \in T_h(\Omega),\ \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}^h_{|K} \in \mathcal{Q}_k^{2\times 2}(K)\right\}, \\ \underline{M}_h(\Omega) & = & \left\{\tilde{\underline{v}} \in \underline{M}(\Omega) \,/\, \forall\, K \in T_h(\Omega),\ \tilde{\underline{v}}_{|K} \in \mathcal{Q}_k^*(K) \times \mathcal{Q}_k^*(K)\right\}, \end{array}\right. \tag{10.2}$$



a) Le tenseur de contraintes b) Le champ de vitesse

FIG. 10.1 – Degrés de liberté pour l'élément fini mixte $\mathcal{Q}_2^{div} \times \mathcal{Q}_2^{*,disc}$ pour l'élastodynamique

avec l'espace de polynômes $\mathcal{Q}_k^*$ défini par

$$\mathcal{Q}_k^* \quad = \quad \left\{ q(x,z) \ / \ q(x,z) = \sum_{i \leq k, j \leq k}^{i+j \neq 2k} a_{i,j} \ x^i z^j \right\}.$$

Un simple calcul montre que (10.1) est vérifiée.

Chaque composante du tenseur des contraintes est un polynôme de $\mathcal{Q}_k^*$ sur chaque élément avec les conditions nécessaires pour appartenir à l'espace $\underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega)$. On a alors que la composante σ_{xx} (resp. σ_{zz}) peut être discontinue sur les arrêtes horizontales (resp. verticales). La composante σ_{xz} est globalement continue. Afin d'appliquer des techniques de condensation de masse on définit les degrés de liberté (sur chaque élément) sur les points de quadrature de Gauss-Lobatto (donnés par le produit tensoriel des zéros des polynômes de Legendre de degré $k+1$). On a alors quatre cas selon la position du point (voir la figure 10.1.(a) où on représente les degrés de liberté de $\mathcal{Q}_2^{div}$) :

– si le point est un sommet d'un élément on a cinq degrés de liberté donnés par

$$\left.\begin{array}{ccc} \sigma_{xx}^h & \longrightarrow & \text{valeur d'en haut de } \sigma_{xx} \\ \sigma_{xx}^b & \longrightarrow & \text{valeur d'en bas de } \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz}^d & \longrightarrow & \text{valeur à droite de } \sigma_{zz} \\ \sigma_{zz}^g & \longrightarrow & \text{valeur à gauche de } \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} & \longrightarrow & \text{valeur de } \sigma_{xz} \end{array}\right| ,$$

– s'il appartient à l'intérieur d'une arrête horizontale on a quatre degrés de liberté définis par

$$\left.\begin{array}{ccc} \sigma_{xx}^h & \longrightarrow & \text{valeur d'en haut de } \sigma_{xx} \\ \sigma_{xx}^b & \longrightarrow & \text{valeur d'en bas de } \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} & \longrightarrow & \text{valeur de } \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} & \longrightarrow & \text{valeur de } \sigma_{xz} \end{array}\right| ,$$

– d'une façon analogue, s'il appartient à l'intérieur d'une arrête verticale on a aussi quatre degrés de liberté donnés par

$$\left.\begin{array}{ccc} \sigma_{xx} & \longrightarrow & \text{valeur de } \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz}^{d} & \longrightarrow & \text{valeur à droite de } \sigma_{zz} \\ \sigma_{zz}^{g} & \longrightarrow & \text{valeur à gauche de } \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} & \longrightarrow & \text{valeur de } \sigma_{xz} \end{array}\right| ,$$

– finalement si le point est à l'intérieur de l'élément on aura seulement trois degrés de liberté qui se correspondent avec

$$\left.\begin{array}{ccc} \sigma_{xx} & \longrightarrow & \text{valeur de } \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} & \longrightarrow & \text{valeur de } \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} & \longrightarrow & \text{valeur de } \sigma_{xz} \end{array}\right| .$$

Avec ce choix et en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Lobatto pour l'obtention la matrice de masse sur $\underline{\underline{\sigma}}$ on obtient que M_σ peut être remplacée (sans perdre l'ordre de précision) par une matrice diagonale par blocs. La taille des blocs coïncide avec le nombre de degrés de liberté sur chaque point de quadrature (donc, au maximum 5×5).

On place les degrés de liberté du champ de vitesse au centre de la maille définis par

$$\left.\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial^{i+j} v_x}{\partial x^i \partial z^j} & \longrightarrow & \text{valeur de } \dfrac{\partial^{i+j} v_x}{\partial x^i \partial z^j} \\ \dfrac{\partial^{i+j} v_z}{\partial x^i \partial z^j} & \longrightarrow & \text{valeur de } \dfrac{\partial^{i+j} v_z}{\partial x^i \partial z^j} \end{array}\right| , \qquad 0 \;\leq\; i, j \;\leq\; k, \quad i + j \neq 2k.$$

Étant donné qu'il n'y a aucune contrainte de continuité d'un élément à l'autre, la matrice de masse sur $\underline{v}$ (même en faisant de l'intégration exacte) sera diagonale par blocs. On peut choisir les fonctions de base de telle sorte à avoir une matrice de masse diagonale.

Remarque 10.1.1 *On signale que*

$$\text{dim } \mathcal{Q}_k^* \;=\; \text{dim } \mathcal{Q}_k \;-\; 1 \;=\; (k+1)^2 \;-\; 1 \;>\; k^2 \;=\; \text{dim } \mathcal{Q}_{k-1}, \qquad \forall k \;>\; 1.$$

Ceci veut dire que l'espace d'approximation $\mathcal{Q}_k^{div} \times \mathcal{Q}_k^{*,disc}$ présenté ci-dessus est visiblement plus coûteux que l'élément $\mathcal{Q}_k^{div} \times \mathcal{Q}_{k-1}$ (voir [14, 80] pour sa présentation détaillée).

10.2 Analyse de Convergence pour l'Élastodynamique

Étant donné que l'inclusion (10.1) est satisfaite, on peut facilement établir un résultat de convergence de la même nature que celui qu'on avait établit pour l'élément de plus bas degré. On supposera que les matrices de masse sont calculées de façon exacte. Ainsi on a

Théorème 10.2.1 *Soit k en entier positif. Soient $(\underline{\underline{\sigma}}^h, \underline{v}^h)$ et $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{v})$ les solutions des problèmes en absence de domaines fictifs (9.23) et (7.16)) respectivement. Alors :*

– *si $\underline{\underline{\sigma}} \in C^1\left([0,T]; \underline{\underline{\widetilde{H}}}^{k+1,k}(\Omega)\right)$ et $\underline{v} \in C^1\left([0,T]; \underline{H}^k(\Omega)\right)$ alors*

$$\left|\begin{array}{l} \|\underline{\underline{\sigma}}^h - \underline{\underline{\sigma}}\|_{C^0([0,T];\underline{\underline{L}}^2(\Omega))} + \|\underline{v}^h - \underline{v}\|_{C^0([0,T];\underline{M}(\Omega))} \;\leq \\ \qquad\qquad \mathcal{C}\; h^k\; (1+T) \left(\|\underline{\underline{\sigma}}\|_{C^1([0,T];\underline{\underline{\widetilde{H}}}^{k+1,k}(\Omega))} + \|\underline{v}\|_{C^1([0,T];\underline{H}^k(\Omega))} \right), \end{array}\right. \tag{10.3}$$

– *si* $\underline{\underline{\sigma}} \in C^2\left([0,T]; \underline{\underline{\widetilde{H}}}^{k+1,k}(\Omega)\right)$ *et* $\underline{v} \in C^2\left([0,T]; \underline{H}^k(\Omega)\right)$ *alors*

$$\left| \; \|\underline{\underline{\sigma}}^h - \underline{\underline{\sigma}}\|_{C^0([0,T];\underline{\underline{X}}(\Omega))} \;\leq\; \mathcal{C}\; h^k \;\; (1+T) \left(\|\underline{\underline{\sigma}}\|_{C^2([0,T];\underline{\underline{\widetilde{H}}}^{k+1,k}(\Omega))} + \|\underline{v}\|_{C^2([0,T];\underline{H}^k(\Omega))} \right). \tag{10.4}$$

Preuve: La preuve de ce théorème est très similaire à celle du théorème 9.5.9. □

Quatrième partie

Couplage entre Domaines Fictifs et Techniques de Raffinement Espace-Temps

Chapitre 11

Construction d'un Couplage Stable entre les Deux Méthodes

Sommaire

11.1 Formulation Variationnelle. Difficultés d'analyse fonctionnelle 288
11.2 Discrétisation en Espace 289
11.3 Discrétisation en Temps 294
11.3.1 Schéma Intérieur 294
11.3.2 Équation de Couplage : Conservation d'une Énergie Discrète 294
11.3.3 Première Méthode 295
11.3.3.1 Présentation des Équations 295
11.3.3.2 Caractère Bien Posé du Problème Totalement Discrétisé. 295
11.3.3.3 Post-traitement en Temps de la Solution 296
11.3.4 Deuxième Méthode 297
11.3.4.1 Présentation des Équations 297
11.3.4.2 Post-Traitement en Temps de la Solution 297
11.3.5 Bilan des Avantages et des Inconvénients des Deux Méthodes 298
11.4 Validation Numérique de la Deuxième Méthode 298
11.5 Conclusion 305

La méthode de domaines fictifs présentée dans les chapitres précédents semble fournir une bonne approximation de la solution et nous permet d'effectuer les calculs sur les variables volumiques sur un maillage régulier. Les résultats obtenus sur le multiplicateur de Lagrange sont aussi très prometteurs sauf aux extrémités du défaut où on observe un comportement fortement oscillant. Ceci est lié à la singularité de la solution exacte aux extrémités de la fissure. Afin de pouvoir bien capturer ce phénomène on peut penser à raffiner le maillage surfacique. Cependant, on rappelle que pour assurer la convergence (et même l'existence et unicité de la solution du problème discret), le rapport entre le pas de discrétisation surfacique H et volumique h doit être supérieur à une certaine constante R. En outre, la solution volumique est également singulière. Ceci nous oblige alors a aussi raffiner le maillage volumique pour pouvoir satisfaire cette propriété sur tout le domaine de calcul.

Si on se place dans un cas où la fissure considérée est d'une taille très réduite par rapport au domaine de calcul, une première idée serait d'inclure la totalité de l'obstacle dans une région raffinée. On pourrait alors se servir de la technique de raffinement de maillage spatio-temporel introduite dans le chapitre 4 et utiliser les domaines fictifs à l'intérieur de cette région. Dans cette configuration, le multiplicateur de Lagrange qui assure la continuité de la solution entre les sous-domaines et le multiplicateur qu'on utilise

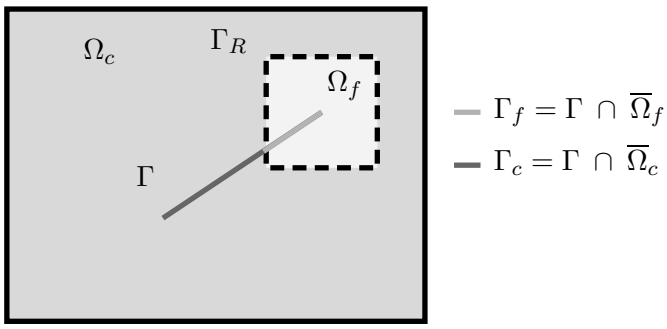


FIG. 11.1 – Configuration de notre problème

pour la prise en compte des conditions aux limites n'interagissent pas entre eux. Cependant, lorsque la taille de la fissure est "grande" il sera intéressant de raffiner seulement dans un voisinage des extrémités. Il est alors clair que les maillages surfaciques (celui pour la fissure et celui pour l'interface grille fine / grille grossière) vont se couper, et, par conséquent, les deux inconnues surfaciques seront, en quelque sorte, couplées.

Dans ce chapitre on présente deux algorithmes de couplage entre la méthode des domaines fictifs et les techniques de raffinement de maillage spatio-temporel présentées dans le chapitre 4. Plus en détail, dans la section 11.1 on présente une formulation variationnelle du problème en signalant les difficultés du point de vue de l'analyse fonctionnelle. Dans la section 11.2 on présente une discrétisation en espace de notre problème et dans la section 11.3 on effectue la discrétisation en temps. En utilisant des arguments de conservation d'une énergie discrète (qui garantit la stabilité de la méthode sous la CFL habituelle) on propose deux méthodes de couplage. Un de ces deux schémas sera sélectionné pour l'implémentation. Dans la section 11.4 on montre des résultats numériques obtenus avec le schéma sélectionné.

11.1 Formulation Variationnelle. Difficultés d'analyse fonctionnelle

On rappelle qu'on s'intéresse à résoudre les équations de l'élastodynamique dans un milieu anisotrope hétérogène fissuré. On va supposer que notre domaine de propagation est un rectangle Ω auquel on enlève une fissure qu'on appellera Γ. Pour certaines raisons (par exemple pour faire du raffinement de maillage), on veut décomposer le rectangle Ω en deux sous domaines Ω_f et $\Omega_c = \Omega \setminus \Omega_f$ avec une interface commune Γ_R. On supposera aussi que Ω_f a une géométrie simple, typiquement rectangulaire. On peut voir dans la figure 11.1 une configuration modèle. Notre objectif est alors d'utiliser la méthode des domaines fictifs présentée dans la section 7.1.2 pour prendre en compte les conditions aux limites sur la fissure et, en même temps, d'appliquer les techniques de raffinement de maillage spatio-temporel des chapitres 3 et 4 pour pouvoir discrétiser la solution avec des pas de discrétisation spatio-temporels différents sur chaque sous domaine. Notre premier objectif est alors d'établir une formulation variationnelle de notre problème qui soit similaire à (1.9) et qui fasse intervenir la méthode des domaines fictifs.

Le fait que la fissure Γ puisse couper l'interface artificielle Γ_R pose des difficultés sur l'obtention d'une formulation variationnelle qui utilise des sous domaines. Pour expliquer ceci, il est utile d'introduire quelques notations. On décompose la fissure Γ en deux parties :

$$\Gamma_l = \Gamma \cap \overline{\Omega}_l, \quad l \in \{c, f\}.$$

On introduit alors les espaces fonctionnels suivants

$$\widetilde{\underline{H}}^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_l) \quad := \quad \left\{ \tilde{\underline{\eta}} \in \underline{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_l) \ / \ \exists \, \tilde{\underline{j}} \in \underline{H}^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma), \ \tilde{\underline{j}}_{|\Gamma_l} = \tilde{\underline{\eta}} \right\}.$$

On signale qu'en général (par exemple dans la configuration de la figure 11.1)

$$\underline{H}^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_l) \ \subsetneq \ \widetilde{\underline{H}}^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_l) \ \subsetneq \ \underline{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_l).$$

Pour avoir une formulation variationnelle similaire à (1.9) mais avec le terme de domaines fictifs, on pourrait être tenté de remplacer la deuxième équation de (1.9) par

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_l} \mathbf{A}_l \, \underline{\underline{\sigma}}_l : \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l \ \mathrm{d}x \quad + \quad \int_{\Omega_l} \underline{\mathrm{div}} \, \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l \cdot \underline{v}_l \ \mathrm{d}x \quad - \quad \int_{\Gamma} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l \, \underline{n} \cdot \underline{\lambda}_{|\Gamma_l} \ \mathrm{d}\gamma \quad - \quad \int_{\Gamma_R} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_l \, \underline{n}_l \cdot \underline{j}_l \ \mathrm{d}\gamma \quad = \quad 0,$$

et d'ajouter les conditions aux limites

$$\int_{\Gamma_l} \underline{\underline{\sigma}}_l \, \underline{n} \cdot \tilde{\underline{\lambda}} \, \mathrm{d}\gamma \quad = \quad 0,$$

ce qui, en général n'a pas de sens. En effet, si on note $\underline{\underline{\sigma}} \in \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega)$ la fonction qui sur Ω_l vaut $\underline{\underline{\sigma}}_l$ on a que

$$\underline{\underline{\sigma}} \, \underline{n} \quad \in \quad \left(\underline{H}^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma) \right)'.$$

Sa restriction $(\underline{\underline{\sigma}} \, \underline{n})_{\Gamma_l}$ est alors définie sur l'espace

$$\left(\underline{H}^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_l) \right)', \quad \text{et pas sur} \quad \left(\widetilde{\underline{H}}^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_l) \right)',$$

comme il faudrait car $\underline{\lambda}_l \in \widetilde{\underline{H}}^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_l)$.

Pour contourner ce problème on considère la formulation en domaines fictifs (7.16) (sans décomposer le domaine Ω) comme notre point de départ. Ensuite on proposera un espace d'approximation non conforme pour les inconnues volumiques dans lequel on prendra en compte la décomposition du domaine pour effectuer du raffinement de maillage. On signale que dans le cadre discret toutes les traces ont un sens dans $\underline{L}^2(\Gamma)$ et, par conséquent, il n'y a pas les soucis de définition des restrictions.

11.2 Discrétisation en Espace

On rappelle que le problème à discrétiser est la formulation variationnelle (7.16). On signale alors que, dans le problème continu, il n'y aucune décomposition du domaine de géométrie simple Ω. C'est au moment d'effectuer la discrétisation en espace qu'on fera apparaître les différents sous domaines. On commence par la construction de l'espace d'approximation des inconnues volumiques. Pour chaque région de géométrie simple $\Omega_l, \ l \in \{c, f\}$ on construit un maillage régulier $T_{h_l}(\Omega_l), \ l \in \{c, f\}$ avec un pas de discrétisation $h_l = h/q_l, \ l \in \{c, f\}$. Ceci nous permet de construire les espaces de dimension finie suivants

$$\underline{\underline{X}}^{sym}_{h_l}(\Omega_l) \quad \text{défini dans (8.8)}, \qquad\qquad \underline{M}_{h_l}(\Omega_l) \quad \text{défini dans (9.5)}.$$

On peut alors définir les espaces globaux suivants

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\widetilde{X}}}_h^{sym}(\Omega) &= \left\{ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \in \underline{\underline{L}}^2(\Omega) \,/\, \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h_{|\Omega_l} \equiv \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h_l \in \underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l),\ l \in \{c, f\} \right\}, \\
\underline{M}_h(\Omega) &= \left\{ \underline{\tilde{v}}^h \in \underline{L}^2(\Omega) \,/\, \underline{\tilde{v}}_{|\Omega_l} \in \underline{M}_{h_l}(\Omega_l),\ l \in \{c, f\} \right\}.
\end{aligned}$$

L'espace $\underline{M}_h(\Omega)$ ainsi construit est une bonne approximation de l'espace $\underline{M}(\Omega)$. Cependant, on doit imposer une sorte de continuité à travers l'interface Γ_R aux éléments de l'espace $\underline{\underline{\widetilde{X}}}_h^{sym}(\Omega)$ pour obtenir une bonne approximation qui sera non conforme de $\underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega)$. Pour faire ceci on construit un maillage $\Xi_{H_R}(\Gamma_R)$ de pas H_R de Γ_R, et on définit sur ce maillage un espace de dimension finie $\underline{\mathcal{J}}_{H_R}(\Gamma_R)$ (voir la section 1.4.2). Ainsi, on définit notre espace d'approximation pour le tenseur de contraintes par

$$\underline{\underline{X}}_h^{sym}(\Omega) = \left\{ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h \in \underline{\underline{\widetilde{X}}}_h^{sym}(\Omega) \,/\, \int_{\Gamma_R} (\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h_c - \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h_f)\, \underline{n} \cdot \underline{\tilde{j}}^{H_R}\, \mathrm{d}\gamma = 0,\ \forall\, \underline{\tilde{j}}^{H_R} \in \underline{\mathcal{J}}_{H_R}(\Gamma_R) \right\}. \tag{11.1}$$

Afin de discrétiser l'inconnue $\underline{\lambda}$ (le multiplicateur de Lagrange associé à la méthode des domaines fictifs), on construit un autre maillage $\Theta_H(\Gamma)$ de la fissure de pas H qui est, a priori, indépendant des autres maillages. Ceci nous permet de construire un espace d'approximation $\underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma)$ de l'espace $\underline{\mathcal{G}}(\Gamma)$ (pas forcément conforme). Une fois qu'on définit les espaces d'approximation on peut dériver la formulation variationnelle approchée de notre problème

$$\left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } (\underline{\underline{\sigma}}^h, \underline{v}^h, \underline{\lambda}^H) \in C^1([0,T], \underline{\underline{X}}_h^{sym}(\Omega) \times \underline{M}_h(\Omega) \times \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma)) \text{ tels que} \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_\Omega \mathbf{A}\, \underline{\underline{\sigma}}^h : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h\, \mathrm{d}x + \displaystyle\int_\Omega \underline{v}^h \cdot \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h\, \mathrm{d}x - \int_\Gamma \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h\, \underline{n} \cdot \underline{\lambda}^H\, \mathrm{d}\gamma = 0, \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_\Omega \rho\, \underline{v}^h \cdot \underline{\tilde{v}}^h\, \mathrm{d}x - \displaystyle\int_\Omega \underline{\tilde{v}}^h \cdot \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}^h\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \underline{f} \cdot \underline{\tilde{v}}^h\, \mathrm{d}x, \\
\displaystyle\int_\Gamma \underline{\underline{\sigma}}^h\, \underline{n} \cdot \underline{\tilde{\lambda}}^H\, \mathrm{d}\gamma = 0, \qquad \forall\, (\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h, \underline{\tilde{v}}^h, \underline{\tilde{\lambda}}^H) \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}(\Omega) \times \underline{M}_h(\Omega) \times \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma),
\end{array}\right. \tag{11.2}$$

où les intégrales avec un cercle peuvent éventuellement être calculées avec de l'intégration numérique. Maintenant, les produits de dualité entre $\underline{H}_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et son dual qui sont dans la formulation peuvent s'interpréter comme des intégrales entre des fonctions $\underline{L}^2(\Gamma)$ et donc on peut réécrire (11.2) comme

$$\left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } ((\underline{\underline{\sigma}}^h_c, \underline{\underline{\sigma}}^h_f), (\underline{v}^h_c, \underline{v}^h_f), \underline{\lambda}^H) \in C^1([0,T], \underline{\underline{X}}_h^{sym}(\Omega) \times \underline{M}_h(\Omega) \times \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma)) \text{ tels que} \\
\displaystyle\sum_{l \in \{c,f\}} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_{\Omega_l} \mathbf{A}_l\, \underline{\underline{\sigma}}^h_l : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h_l\, \mathrm{d}x + \int_{\Omega_l} \underline{v}^h_l \cdot \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h_l\, \mathrm{d}x - \int_{\Gamma \cap \Omega_l} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h_l\, \underline{n} \cdot \underline{\lambda}^H_{|\Gamma \cap \Omega_l}\, \mathrm{d}\gamma \right\} = 0, \\
\displaystyle\sum_{l \in \{c,f\}} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_{\Omega_l} \rho\, \underline{v}^h_l \cdot \underline{\tilde{v}}^h_l\, \mathrm{d}x - \int_{\Omega_l} \underline{\tilde{v}}^h_l \cdot \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}^h_l\, \mathrm{d}x \right\} = \sum_{l \in \{c,f\}} \int_\Omega \underline{f}_l \cdot \underline{\tilde{v}}^h_l\, \mathrm{d}x, \\
\displaystyle\sum_{l \in \{c,f\}} \int_{\Gamma \cap \Omega_l} \underline{\underline{\sigma}}^h_l\, \underline{n} \cdot \underline{\tilde{\lambda}}^H_{|\Gamma \cap \Omega_l}\, \mathrm{d}\gamma = 0,
\end{array}\right. \tag{11.3}$$

$\forall\, ((\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h_c, \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^h_f), (\underline{\tilde{v}}^h_c, \underline{\tilde{v}}^h_f), \underline{\tilde{\lambda}}^H) \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}(\Omega) \times \underline{M}_h(\Omega) \times \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma)$.

Finalement, on obtient une formulation qui fait intervenir explicitement dans la formulation variation-

nelle de couplage entre les différents sous-domaines. Supposons que le problème variationnel

$$
(11.4)\quad \left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } (\underline{\underline{\sigma}}_l^h, \underline{v}_l^h, \underline{j}_l^{H_R}) \in C^1([0,T], \underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l) \times \underline{M}_{h_l}(\Omega_l) \times \underline{\mathcal{J}}_{H_R}(\Gamma_R)),\\
\qquad\qquad \underline{\lambda}^H \in C^1([0,T], \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma)) \text{ tels que } (l \in \{c,f\})\\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_{\Omega_l} \mathbf{A}_l\, \underline{\underline{\sigma}}_l^h : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h \,\mathrm{d}x \;+\; \displaystyle\int_{\Omega_l} \underline{v}_l^h \cdot \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h \,\mathrm{d}x \;-\; \int_{\Gamma\cap\Omega_l} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h\, \underline{n} \cdot \underline{\lambda}^H_{|\Gamma\cap\Omega_l} \,\mathrm{d}\gamma \;-\\
\qquad\qquad \displaystyle\int_{\Gamma_R} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h\, \underline{n}_l \cdot \underline{j}_l^{H_R} \,\mathrm{d}\gamma \;=\; 0, \qquad \forall\, \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h \in \underline{\underline{X}}_{h_l}^{sym}(\Omega_l)\ ,\\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_{\Omega_l} \rho\, \underline{v}_l^h \cdot \underline{\tilde{v}}_l^h \,\mathrm{d}x \;-\; \displaystyle\int_{\Omega_l} \underline{\tilde{v}}_l^h \cdot \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}}_l^h \,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\Omega} \underline{f}_l \cdot \underline{\tilde{v}}_l^h \,\mathrm{d}x, \quad \forall \underline{\tilde{v}}_l^h \in M_{h_l}(\Omega_l),
\end{array}\right.
$$

avec les conditions aux limites et conditions de transmission

$$
(11.5)\quad \left|\begin{array}{l}
\displaystyle\int_{\Gamma\cap\Omega_c} \underline{\underline{\sigma}}_c^h\, \underline{n} \cdot \underline{\tilde{\lambda}}^H_{|\Gamma\cap\Omega_c} \,\mathrm{d}\gamma \;+\; \int_{\Gamma\cap\Omega_f} \underline{\underline{\sigma}}_f^h\, \underline{n} \cdot \underline{\tilde{\lambda}}^H_{|\Gamma\cap\Omega_f} \,\mathrm{d}\gamma \;=\; 0\ , \quad \forall\, \underline{\tilde{\lambda}}^H \in \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma),\\
\displaystyle\int_{\Gamma_R} \underline{\underline{\sigma}}_c^h\, \underline{n} \cdot \underline{\tilde{j}}_c^{H_R} \,\mathrm{d}\gamma \;=\; -\int_{\Gamma_R} \underline{\underline{\sigma}}_f^h\, \underline{n} \cdot \underline{\tilde{j}}_f^{H_R} \,\mathrm{d}\gamma\ , \qquad \forall\, \underline{\tilde{j}}_l^{H_R} \in \underline{\mathcal{J}}_{H_R}(\Gamma_R),\\
\underline{j}_c^{H_R} \;=\; \underline{j}_f^{H_R},
\end{array}\right.
$$

est bien posé. Cette propriété est par exemple vérifiée si les espaces d'approximation satisfont la "double" condition inf-sup discrète

$$
\left|\begin{array}{l}
\exists\, k_h \;>\; 0, \ \text{ tel que } \forall\, (\underline{\tilde{j}}^{H_R}, \underline{\tilde{\lambda}}^H) \in \underline{\mathcal{J}}_{H_R}(\Gamma_R) \times \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma),\\
\qquad\qquad \exists\, (\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_c^h, \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_f^h) \in \underline{\underline{X}}_{h_c}(\Omega_c) \times \underline{\underline{X}}_{h_f}(\Omega_f) \ \text{ tel que}\\
\displaystyle\sum_{l\in\{c,f\}} \left[\int_{\Gamma_R} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h\, n_l \cdot \underline{\tilde{j}}_l^{H_R} \,\mathrm{d}\gamma + \int_{\Gamma\cap\Omega_l} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h\, n_l \cdot \underline{\tilde{\lambda}}_l^H \,\mathrm{d}\gamma\right] \;\geq\\
\qquad\qquad k_h \left(\|\underline{\tilde{j}}_l^{H_R}\|_{\underline{\mathcal{J}}(\Gamma_R)} + \|\underline{\tilde{\lambda}}^H\|_{\underline{\mathcal{G}}(\Gamma)}\right) \left(\sum_{l\in\{c,f\}} \|\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_l^h\|_{\underline{\underline{X}}(\Omega_l)}\right).
\end{array}\right.
$$

Si on dénote par

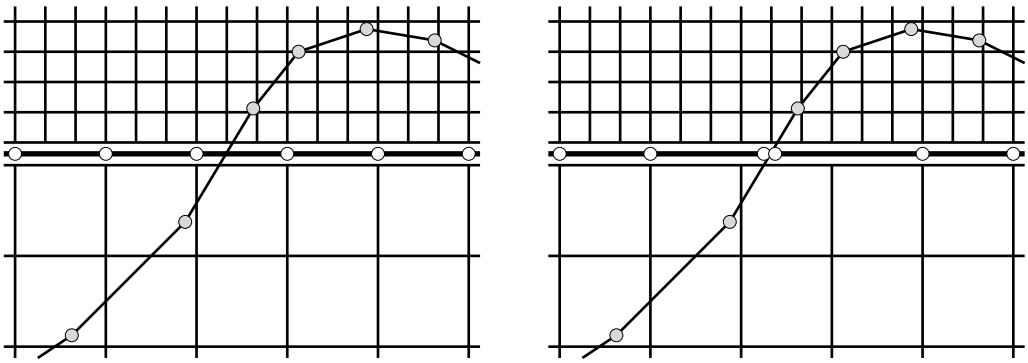
$$
((\underline{\underline{\sigma}}_c^h, \underline{\underline{\sigma}}_f^h), (\underline{v}_c^h, \underline{v}_f^h), (\underline{j}_c^{H_R}, \underline{j}_f^{H_R}), \underline{\lambda}^H),
$$

la solution de (11.4)–(11.5), il est clair que

$$
((\underline{\underline{\sigma}}_c^h, \underline{\underline{\sigma}}_f^h), (\underline{v}_c^h, \underline{v}_f^h), \underline{\lambda}^H),
$$

est solution du problème (11.3). Alors, pour effectuer la discrétisation temporelle du problème, il sera intéressante de s'appuyer sur la formulation (11.4)–(11.5).

Remarque 11.2.1 *On rappelle que les inconnues $\underline{j}_l$, $l \in \{c,f\}$ peuvent s'interpréter comme la trace de $\underline{v}_l$, $l \in \{c,f\}$ sur l'interface Γ_R. Dans le cas où $\Gamma \cap \Gamma_R \neq \varnothing$, l'espace $\underline{\mathcal{J}}_{H_R}(\Gamma_R)$ devrait approcher l'espace continu $\underline{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_R \setminus (\Gamma \cap \Gamma_R))$. En effet, le saut de la vitesse sur Γ peut être différent de zéro. Ceci fait qu'il est intéressant de respecter aussi la géométrie de Γ avec le maillage de l'interface artificielle et que les fonctions de l'espace $\underline{\mathcal{J}}_{H_R}(\Gamma_R)$ puissent être discontinues à cet endroit. Ainsi, dans une configuration comme celle de la figure 11.2.(a) il sera avantageux de adapter le maillage surfacique $\Xi_{H_R}(\Gamma_R)$ de telle sorte à respecter la géométrie de Γ comme dans la figure 11.2.(b).*



$\Xi_H(\Gamma_R)$ ne respecte pas la géométrie de Γ $\Xi_H(\Gamma_R)$ respecte la géométrie de Γ

FIG. 11.2 – Différentes maillages de la frontière Γ_R dans un raffinement $(q_c, q_f) = (1, 3)$

Cependant, ceci pose encore un problème conceptuel lorsqu'on essaie d'aller vers le problème continu. La trace normale du tenseur de contraintes appartient au dual de $\underline{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_R)$ et donc, on ne pourrait pas à priori "l'appliquer" à une fonction de $\underline{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_R \setminus (\Gamma \cap \Gamma_R))$.

Remarque 11.2.2 *Dans le cas où on satisfait les deux hypothèses suivantes (voir la figure 11.3.(b))*

(11.6) *le maillage de la fissure respecte l'interface Γ_R, c'est à dire, si l'intersection entre le maillage $\Theta_H(\Gamma)$ et l'interface Γ_R coïncide forcement avec un noeud de ce dernier maillage,*

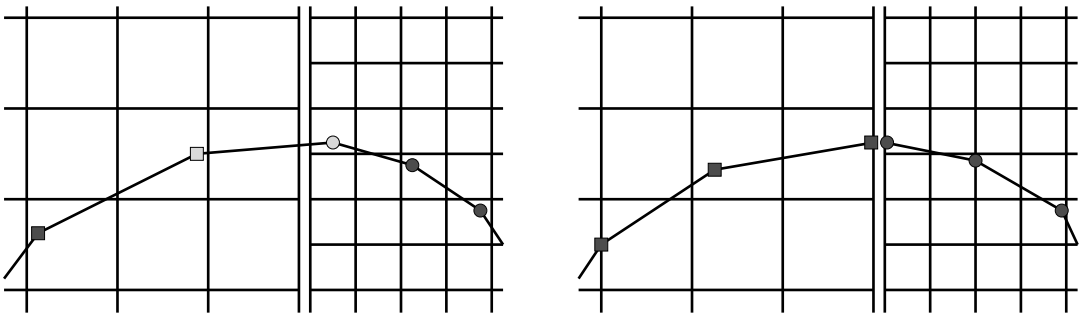
(11.7) *les fonctions de l'espace d'approximation $\underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma)$ sont discontinues à cet endroit,*

alors, la première équation de (11.5) (condition aux limites) est équivalente à

$$\int_{\Gamma\cap\Omega_l} \underline{\sigma}_l^h \, \underline{n} \cdot \tilde{\underline{\lambda}}^H_{|\Gamma\cap\Omega_l} \, d\gamma \quad = \quad 0, \quad \forall \, \tilde{\underline{\lambda}}^H \in \underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma), \quad l \in \{c, f\}. \tag{11.8}$$

Ceci nous permettra d'imposer les conditions aux limites "par sous domaines" et à des instants différents. De plus, on peut décomposer le multiplicateur de Lagrange $\underline{\lambda}^H$ en deux ; $\underline{\lambda}^H_l := \underline{\lambda}^H_{|\Gamma\cap\Omega_l}$, $l \in \{c, f\}$, ce qui est avantageux.

Remarque 11.2.3 *Étant donné que la fissure qu'on traite avec la méthode des domaines fictifs peut couper l'interface Γ_R on utilise l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ dans les deux sous-domaines. Il est clair alors qu'on peut ajouter un facteur d'amortissement sur les modes parasites de la vitesse comme on a présenté dans la section 9.4.2. Pour simplifier l'écriture des équations on a décidé d'omettre ce terme, même si dans les expériences numériques qu'on montrera dans la section 11.4, il sera inclus.*



a) Première configuration b) Seconde configuration

FIG. 11.3 – Différentes configurations pour le couplage

En suivant les techniques et notations des sections 1.3 et 7.1.2.2 on peut reintérpreter ces équations à l'aide de matrices et on obtient le système différentiel suivant

$$
(11.9) \qquad \left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } (\Sigma_l, V_l, J_l) \in C^1([0,T], \mathbb{R}^{N_{\underline{\sigma}},l} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{v},l}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{j}}}), \\
\qquad\qquad \Lambda \in C^1([0,T], \mathbb{R}^{N_{\underline{\lambda}}}) \text{ vérifiant} \\
\left\{\begin{array}{lllllll}
M_{\sigma,l}\dfrac{\mathrm{d}\Sigma_l}{\mathrm{d}t} & + & D_l^* V_l & - & B_l^*\Lambda & - & C_l^* J_l & = & 0, \\
M_{v,l}\dfrac{\mathrm{d}V_l}{\mathrm{d}t} & - & D_l \Sigma_l & & & & & = & F_l,
\end{array}\right.
\end{array}\right|, \quad l \in \{c, f\}
$$

avec les conditions de transmission

$$
(11.10) \qquad \left|\begin{array}{rcl}
C_c\Sigma_c & = & -C_f\Sigma_f, \\
J_c & = & J_f,
\end{array}\right.
$$

et les conditions aux limites

$$
(11.11) \qquad \left| \; B_c\Sigma_c \;+\; B_f\Sigma_f \;=\; 0. \right.
$$

Remarque 11.2.4 *Si on considère les équations posées sur l'un des deux domaines Ω_l, seulement une partie des degrés de liberté du multiplicateur de Lagrange $\underline{\lambda}^H$, qu'on appellera $\widetilde{\Lambda}_l$, vont intervenir. Ces degrés de liberté sont associées à des fonctions de base dont le support intersecte Ω_l. On signale que l'ensemble*

$$
\widetilde{\Lambda}_{c\cap f} \;:=\; \widetilde{\Lambda}_c \cap \widetilde{\Lambda}_f,
$$

est non vide en général. Par exemple, dans la configuration donnée dans la figure 11.3.(a), les degrés de liberté associés aux noeuds en gris pâle sont inclus dans cet ensemble. Si les hypothèses (11.6)–(11.7) sont satisfaites, alors cette intersection est vide et (11.11) peut être remplacée par

$$
(11.12) \qquad \left| \; B_l\Sigma_l \;=\; 0, \quad l \in \{c, f\}. \right.
$$

ce qui vis à vis de la discrétisation temporelle à pas variable est intéressant.

11.3 Discrétisation en Temps

11.3.1 Schéma Intérieur

Comme d'habitude, on va utiliser un schéma de différences finies d'ordre deux, dit saute-mouton, pour la discrétisation en temps à l'intérieur de chaque sous-domaine. On utilisera un pas de discrétisation $\Delta t_l = \Delta t/q_l$ sur $\Omega_l,\ l \in \{c, f\}$ afin d'avoir le même rapport entre le pas de discrétisation temporel et spatial sur tout le domaine de calcul. Étant donné que la fissure peut couper l'interface entre les deux sous-domaines, on doit traiter d'une façon spécial l'inconnue Λ. En effet, parmi ses degrés de liberté on peut distinguer trois types qu'on peut voir dans la figure 11.3.(a) : ceux qui n'interagissent qu'avec les degrés de liberté de Σ_c (les carrés gris foncé), ceux qui n'interagissent qu'avec les degrés de liberté de Σ_f (les cercles gris foncé) et ceux qui interagissent avec les deux (les degrés de liberté gris pâle). Donc, dans un premier temps, même s'il peut sembler un peu artificiel, on va dédoubler ce multiplicateur de Lagrange en deux, $\Lambda_l,\ l \in \{c, f\}$. Ces inconnues sont définies sur toute la fissure et sur les pas de temps locaux à chaque grille. A priori, on peut croire qu'il y aura alors trop d'inconnues à déterminer. Malgré tout, on a préféré de laisser cette liberté quitte à après décider si on a besoin et/ou si on est capable de calculer tout ces inconnues. Ainsi le schéma intérieur s'écrit

$$
(11.13)\quad \left|\begin{array}{l}
\text{Trouver } (\Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}, V_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}, \Lambda_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}, J_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}) \in \mathbb{R}^{N_{\underline{\underline{\sigma}},l}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{v},l}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{\lambda}}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{j}}} \text{ vérifiant} \\
M_{\sigma,l}\dfrac{\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} - \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}}}{\Delta t_l} + D_l^* V^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} - \\
\qquad\qquad B_l^* \Lambda_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} - C_l^* J_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} = 0, \\
M_{v,l}\dfrac{V^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} - V^{n+\frac{2k-1}{2q_l}}}{\Delta t_l} - D_l \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}} = F^{n+\frac{k}{q_l}}.
\end{array}\right.
$$

avec $k \in \{0, \ldots, q_l - 1\},\ l \in \{c, f\}$. Il nous reste à déterminer la valeur des multiplicateurs de Lagrange

$$
\Lambda_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}},\ J_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}, \quad k \in \{0, \ldots, q_l - 1\}, \quad l \in \{c, f\}.
$$

Pour faire ceci on utilisera les équations de transmission (11.10) et les conditions aux limites (11.11).

11.3.2 Équation de Couplage : Conservation d'une Énergie Discrète

Pour écrire les équations qui compléteront le système (11.13) on suit la même idée que dans la section 3.1.2 ; on imposera la conservation de l'énergie (3.2).

Théorème 11.3.1 *Pour compléter le système (11.13) et obtenir un schéma numérique qui conserve l'énergie discrète (3.2) en absence de forces externes, les équations additionnelles doivent satisfaire l'égalité*

$$
(11.14)\quad \left|\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{k=0}^{q_c-1} \left(\frac{\Sigma_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} + \Sigma_c^{n+\frac{k}{q_c}}}{2q_c}, C_c^* J_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}} + B_c^* \Lambda_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}} \right) = \\
\displaystyle -\sum_{k=0}^{q_f-1} \left(\frac{\Sigma_f^{n+\frac{k+1}{q_f}} + \Sigma_f^{n+\frac{k}{q_f}}}{2q_f}, C_f^* J_f^{n+\frac{2k+1}{2q_f}} + B_f^* \Lambda_f^{n+\frac{2k+1}{2q_f}} \right).
\end{array}\right.
$$

Preuve: La preuve est similaire à celle du théorème (3.1.1). □

Pour discrétiser les équations de transmission, en suivant les études faites dans la section 3.1.2, on propose les équations

(11.15)
$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{q_c-1} C_c \frac{\Sigma_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} + \Sigma_c^{n+\frac{k}{q_c}}}{2q_c} = -\sum_{k=0}^{q_f-1} C_f \frac{\Sigma_f^{n+\frac{k+1}{q_f}} + \Sigma_f^{n+\frac{k}{q_f}}}{2q_f}, & (a) \\ J_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}} = J_f^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}} \equiv J^{n+\frac{1}{2}}, \quad (k,\tilde{k}) \in \{0,\dots,q_c-1\} \times \{0,\dots,q_f-1\}. & (b) \end{cases}$$

Avec ce choix, l'égalité (11.14) devient

$$\sum_{k=0}^{q_c-1} \left(\frac{\Sigma_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} + \Sigma_c^{n+\frac{k}{q_c}}}{2q_c}, B_c^* \Lambda_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}} \right) = -\sum_{k=0}^{q_f-1} \left(\frac{\Sigma_f^{n+\frac{k+1}{q_f}} + \Sigma_f^{n+\frac{k}{q_f}}}{2q_f}, B_f^* \Lambda_f^{n+\frac{2k+1}{2q_f}} \right). \tag{11.16}$$

Alors, il ne nous reste plus qu'à écrire des équations pour discrétiser les conditions aux limites qui soient consistantes avec (11.16) pour conserver l'énergie discrète (3.2) ce qui nous donnera la stabilité.

11.3.3 Première Méthode

11.3.3.1 Présentation des Équations

Une première possibilité est de poser les équations

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{q_c-1} B_c \frac{\Sigma_c^{n+\frac{k+1}{q_c}} + \Sigma_c^{n+\frac{k}{q_c}}}{2q_c} + \sum_{k=0}^{q_f-1} B_f \frac{\Sigma_f^{n+\frac{k+1}{q_f}} + \Sigma_f^{n+\frac{k}{q_f}}}{2q_f} = 0, \\ \Lambda_c^{n+\frac{2k+1}{2q_c}} = \Lambda_f^{n+\frac{2\tilde{k}+1}{2q_f}}, \quad (k,\tilde{k}) \in \{0,\dots,q_c-1\} \times \{0,\dots,q_f-1\}. \end{cases} \tag{11.17}$$

Donc, pour chaque intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$ on n'aura qu'une valeur du multiplicateur de Lagrange associé à la condition aux limites qu'on appellera $\Lambda^{n+\frac{1}{2}}$. Cette façon de discrétiser la condition aux limites est similaire à celle qu'on a utilisée pour discrétiser les conditions de transmission. Donc finalement, le schéma numérique est donné par (11.13)–(11.15)–(11.17).

Remarque 11.3.1 *Supposons qu'on a seulement le domaine Ω_f et que, malgré tout, on discrétise les conditions aux limites sur Γ avec l'algorithme proposé ci-dessus avec $q_f \geq 2$. Alors on remarque que la solution obtenue ne coïncidera pas avec celle qu'on pourrait obtenir avec la méthode des domaines fictifs habituelle (7.23)–(7.24). Le nouveau schéma numérique n'est pas invariant pour chaque pas de temps mais pour chaque q_f pas de temps. Ceci peut créer des phénomènes parasites du même type que ceux montrés dans la section 3.3.*

11.3.3.2 Caractère Bien Posé du Problème Totalement Discrétisé.

Étant donné que la preuve du caractère bien posé du problème totalement discrétisé est très semblable à celle qu'on a fait dans la section 3.2 on va se limiter à donner quelques idées. La seule difficulté se trouve dans l'obtention de $J^{n+\frac{1}{2}}$ et $\Lambda^{n+\frac{1}{2}}$ en fonction des inconnues à des instants inférieurs ou égaux au

temps $t^{n+\frac{1}{2q_l}}$, $l \in \{c, f\}$ (qui peuvent être calculés précédemment sans aucun soucis). Il suffit d'adapter le théorème 3.2.1 pour montrer que les multiplicateurs le Lagrange satisfont le système linéaire suivant

$$\sum_{l\in\{c,f\}} \underbrace{\frac{\Delta t_l}{2q_l}\begin{bmatrix} C_l A_l(\Delta t_l) C_l^*, & C_l A_l(\Delta t_l) B_l^* \\ B_l A_l(\Delta t_l) C_l^*, & B_l A_l(\Delta t_l) B_l^* \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}_l^{\text{couplage}}} \begin{bmatrix} J^{n+\frac{1}{2}} \\ \Lambda^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \sum_{l\in\{c,f\}} \begin{bmatrix} C_l G_l \\ B_l G_l \end{bmatrix} \tag{11.18}$$

où on a posé

$$A_l(\Delta t_l) \;:=\; Q_{q_l}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))(M_{\sigma_l})^{-1}, \tag{11.19}$$

et les polynômes $Q_{q_l}(\widetilde{N}_l(\Delta t_l))$ ont été définis dans la proposition 3.2.1. Le second membre (qu'on omet pour la clarté du document) ne dépend que des valeurs qui peuvent se calculer avant. On signale que, sous la condition CFL habituelle sur chaque sous domaine, la matrice à inverser est symétrique et positive (car les matrices $A_l(\Delta t_l)$ satisfont cette propriété ; voir la section 3.2). En général, le caractère inversible dépendra du caractère injectif des matrices $C_l,\ l \in \{c, f\}$, du rapport entre Δt et Δx et du rapport entre le pas de discrétisation du maillage de Γ et ceux de $\Omega_l,\ l \in \{c, f\}$.

Remarque 11.3.2 *On signale que, en général, les matrices $\mathcal{M}_l^{\text{couplage}}$ ne sont pas définies positives (à la différence du cas avec seulement du raffinement de maillage où c'était souvent le cas). La différence fondamentale réside dans le fait que maintenant il y a des degrés de liberté du multiplicateur de Lagrange Λ dont sont support intersecte un seule sous-domaine.*

11.3.3.3 Post-traitement en Temps de la Solution

Il est clair que, de la même manière que dans le cas où on avait seulement du raffinement de maillage, la non-conformité entre les grilles en temps va créer des oscillations parasites haute fréquence (voir la section 3.3). Étant donné que les équations de couplage et conditions aux limites discrètes (3.7)–(11.17) sont consistantes à l'ordre un avec (11.10)–(11.11), on peut s'attendre à ce que l'amplitude de ces oscillations soit du premier ordre. Alors, afin de réduire ces phénomènes, on appliquera le post-traitement de la solution (4.6) proposé dans le chapitre 4. Le nouveau schéma proposé s'écrit donc

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } (\bar{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}}, \bar{V}_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}-\frac{1}{2}}) \in \mathbb{R}^{N_{\underline{\sigma},l}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{v},l}};\ l \in \{c, f\} \text{ et} \\ \qquad (\Lambda^{n+\frac{1}{2}}, J^{n+\frac{1}{2}}) \in \mathbb{R}^{N_{\underline{\lambda}}} \times \mathbb{R}^{N_{\underline{j}}} \text{ vérifiant} \\ \left\{\begin{array}{l} M_{v,l}\dfrac{\bar{\Sigma}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}-\frac{1}{2}} - \bar{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_l} \quad + \quad D_l^*\, \bar{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} \quad - \\ (1-\dfrac{2k+1}{2q_l})\left(B_l^*\,\Lambda^{n-\frac{1}{2}} + C_l^*\,J^{n-\frac{1}{2}}\right) \;-\; \dfrac{2k+1}{2q_l}\left(B_l^*\,\Lambda^{n+\frac{1}{2}} + C_l^*\,J^{n+\frac{1}{2}}\right) \;=\; 0, \\ M_{v,l}\dfrac{\bar{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} - \bar{V}_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_l} \quad - \quad D_l\,\bar{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}} \quad = \quad \bar{F}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}}, \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{11.20}$$

où $k \in \{0, \ldots, q_l - 1\},\ l \in \{c, f\}$ avec les équations de raccord et conditions aux limites

$$\left|\; C_c\Sigma_c^{n+\frac{1}{2}} \;=\; -C_f\Sigma_f^{n+\frac{1}{2}}, \qquad B_c\Sigma_c^{n+\frac{1}{2}} \;+\; B_f\Sigma_f^{n+\frac{1}{2}} \;=\; 0. \right. \tag{11.21}$$

On signale que toutes les équations du schéma sont consistantes à l'ordre deux avec (11.9)–(11.10)–(11.11).

11.3.4 Deuxième Méthode

11.3.4.1 Présentation des Équations

On rappelle que pour discrétiser notre problème en temps on avait dédoublé le multiplicateur de Lagrange en deux : $\Lambda_l,\ l \in \{c, f\}$. On avait aussi supposé qu'ils étaient définis sur la fissure toute entière (pour nous donner plus de liberté). Cependant, il est clair alors que, pour un $l_0 \in \{c, f\}$, il ne serait (en général) pas possible de déterminer les degrés de liberté de Λ_{l_0} qui n'interagissent pas avec les inconnues Σ_{l_0} (qui sont dans l'autre domaine). Le premier choix contourne ce problème en disant que tous les multiplicateurs Λ_l des deux cotés et sur tout l'intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$, sont égaux à une seule valeur. Lorsqu'on veut discrétiser ces inconnues sur les pas de temps locaux, on doit supposer que l'ensemble des degrés de liberté dont le fonctions de base ont un support qui intersecte les deux domaines est vide (comme dans la figure 11.3.(b)). Ceci veut dire qu'on se placera sur les hypothèses (11.6)–(11.7).

Sous ces hypothèses on sera plutôt consistant avec (11.12) qu'avec (11.11). On rappelle que dans ce cas, les multiplicateurs définis sur la fissure peuvent se décomposer en deux morceaux : une partie avec les degrés de liberté inclus dans Ω_c et une autre avec les degrés de liberté inclus dans Ω_f. Lorsqu'on considère le multiplicateur Λ_l il est clair que seulement ses degrés de liberté inclus dans Ω_l, qu'on dénotera par $\widetilde{\Lambda}_l$, vont intervenir dans les équations. De plus, les opérateurs $B_l,\ l \in \{c, f\}$ qui interagissent avec le multiplicateur entier peuvent être remplacés par $\widetilde{B}_l,\ l \in \{c, f\}$, ses restrictions aux degrés de liberté sur $\Omega_l, \underline{l} \in \{c, f\}$. Alors on imposera

$$\left| \ \widetilde{B}_l \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}} \ = \ 0, \quad k \in \{1, \ldots, q_l\}, \quad q_l \in \{c, f\}, \right. \tag{11.22}$$

pour compléter (11.13)–(11.15).

Remarque 11.3.3 *Il est clair que dans le cas où on a un seul sous-domaine, la méthode présentée ci-dessus est équivalente à la méthode des domaines fictifs (7.23)–(7.24).*

11.3.4.2 Post-Traitement en Temps de la Solution

Comme pour la première méthode, on applique le post-traitement en temps de la solution proposé dans (4.6) où il faut ajouter

$$\left| \ \overline{\Lambda}_l^{\frac{2n+1}{2q_l}+\frac{1}{2}} \ := \ \sum_{m=0}^{q_l-1} \frac{\widetilde{\Lambda}_l^{\frac{2n+2m+3}{2q_l}} + \widetilde{\Lambda}_l^{\frac{2n+2m+1}{2q_l}}}{2q_l}, \qquad l \in \{c, f\}. \right. \tag{11.23}$$

Ainsi, le schéma totalement discrétisé est le suivant

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\bar{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}}, \bar{V}_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}-\frac{1}{2}}, \bar{\Lambda}_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}-\frac{1}{2}});\ l \in \{c, f\} \text{ et } J^{n+\frac{1}{2}} \text{ vérifiant} \\ \left\{ \begin{array}{l} M_{v,l} \dfrac{\bar{\Sigma}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}-\frac{1}{2}} - \bar{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_l} \ + \ D_l^* \, \bar{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} \ - \\ \widetilde{B}_l^* \bar{\Lambda}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} \ - \ C_l^* \left((1 - \dfrac{2k+1}{2q_l}) J^{n-\frac{1}{2}} \ + \ \dfrac{2k+1}{2q_l} J^{n+\frac{1}{2}} \right) \ = \ 0, \\ M_{v,l} \dfrac{\bar{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} - \bar{V}_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_l} \ - \ D_l \, \bar{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}} \ = \ \bar{F}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}}, \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{11.24}$$

où $k \in \{0, \ldots, q_l - 1\}$, avec les équations de raccord et conditions aux limites

$$\left| \ C_c \Sigma_c^{n+\frac{1}{2}} \ = \ -C_f \Sigma_f^{n+\frac{1}{2}}, \qquad \widetilde{B}_l \Sigma_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}} \ = \ 0, \quad k \in \{1, \ldots, q_l\}, \quad l \in \{c, f\}. \right. \tag{11.25}$$

Toutes les équations sont consistantes à l'ordre deux avec (11.9)–(11.10)–(11.12).

11.3.5 Bilan des Avantages et des Inconvénients des Deux Méthodes

Afin de choisir une des deux méthodes pour la mise en oeuvre, on énonce les avantages et les inconvénients principaux des deux méthodes :

- La première méthode semble être plus générale car l'espace d'approximation $\underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma)$ ne doit pas forcément satisfaire les hypothèses (11.6)–(11.7) qui sont obligatoires pour la deuxième.
- D'un autre coté, la première méthode couple les inconnues sur les multiplicateurs de Lagrange sur Γ et Γ_R, et donc, on peut s'attendre à une meilleure prise en compte des conditions aux limites sur le point critique $\Gamma \cap \Gamma_R$. Ceci est aussi un inconvénient car le système linéaire à résoudre est plus grand et moins facile à manipuler.
- L'avantage fondamentale de la deuxième méthode réside dans le fait d'avoir des structures de données plus faciles à gérer du point de vue informatique. On rappelle que le multiplicateur de Lagrange associé à la condition aux limites est divisé en deux de telle sorte que chacune des parties vont interagir seulement avec les inconnues définies sur le domaine $\Omega_l,\ l \in \{c, f\}$. Le prix à payer est le fait que la continuité de $\underline{\lambda}$ sur le point $\Gamma \cap \Gamma_R$ sera garantie seulement à l'aide du multiplicateur $\underline{j}$ de façon faible.

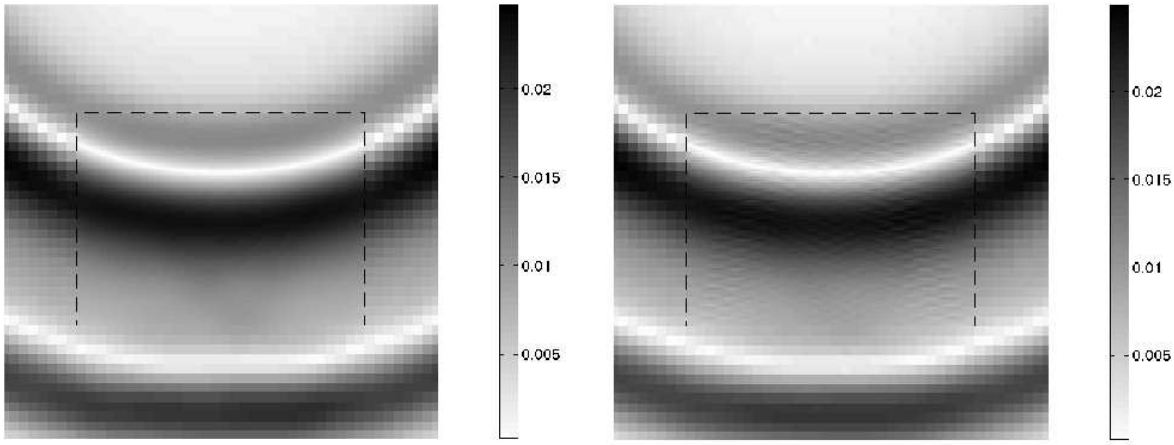
C'est pour cette raison que nous avons choisi dans cette thèse d'implémenter et tester la deuxième méthode.

Remarque 11.3.4 *On rappelle que dans le chapitre 1 on avait choisi l'espace $\underline{\mathcal{J}}_{H_R}(\Gamma_R)$ donné par (1.33) pour assurer la continuité de la trace normale du tenseur de contraintes à travers de Γ_R. Ce choix avait été fait (entre autres raisons) en fonction de l'efficacité numérique et lorsqu'on utilise l'élément fini mixte $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$. L'élément fini modifié $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ proposé dans le chapitre 9 pour régler les problèmes existants avec la méthode des domaines fictifs (voir le chapitre 8) n'avait pas encore été introduit. Par conséquent, l'analyse menée dans la section 1.5.2 du problème semi-discrétisé n'avait pas été faite non plus au moment du choix.*

Une des conclusions de cette étude était que le couplage fait avec l'espace (1.33) lorsqu'on utilise l'élément $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ pour discrétiser les inconnues volumiques, ne fournit pas des résultats très bons (voir la remarque 1.5.1). On avait conclu qu'il valait mieux utiliser un espace $\underline{\mathcal{J}}_{H_R}(\Gamma_R)$ plus riche (voir la section 1.5.2 pour les détails). On remarque que cette analyse théorique est en conformité avec les résultats numériques. Dans la figure 11.4 on compare les résultats obtenus avec $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ (à gauche) et $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ (à droite) lorsqu'on utilise l'espace $\underline{\mathcal{J}}_{H_R}(\Gamma_R)$ donné par (1.33) pour effectuer un raffinement de maillage de taux 5. L'expérience a été faite avec un pas de temps global sur tout le domaine de calcul pour montrer que les effets parasites présents sur la boite raffinée à droite proviennent de la discrétisation en espace. Ces phénomènes sont légèrement réduits lorsqu'on introduit de l'amortissement sur les modes parasites (voir la section 9.4.2). Cependant, il est conseillé de considérer des autres choix pour l'espace $\underline{\mathcal{J}}_{H_R}(\Gamma_R)$.

11.4 Validation Numérique de la Deuxième Méthode

Dans cette section on présente quelques résultats numériques pour montrer les performances et limitations de la deuxième méthode de couplage entre domaines fictifs et les techniques de raffinement de maillage. Afin de pouvoir comparer les résultats sans et avec raffinement local on a décidé d'appliquer la méthode à des expériences qui ont déjà été présentées dans le chapitre 9.2.2. Alors, on considère le



(a) $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ (b) $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$

FIG. 11.4 – Raffinement de maillage spatial de rapport cinq avec $\underline{\mathcal{J}}_{H_R}(\Gamma_R) \equiv \mathcal{P}_0$ **grossier**. Des effets parasites avec $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$.

domaine de calcul $\Omega = [0,10] \times [0,10]$ composé d'un matériau homogène isotrope défini par (1.82) et excité par une condition initiale sur le champ de vitesse centrée au point $(x_c, z_c) = (5,5)$ et donnée par (8.22). Le milieu comportera une fissure, et on effectuera un raffinement de maillage local spatio-temporel autour des extrémités. Le maillage pour la discrétisation des inconnues volumiques sur Ω_c (région non raffinée) est uniforme avec un pas $\Delta x_c = \Delta z_c = 0.05$, c'est à dire, deux fois plus grossier que celui qu'on avait utilisé dans la section 9.2.2. Le pas de discrétisation spatial sur la région raffinée Ω_f sera alors fixé par le taux de raffinement, et le pas de discrétisation temporelle sur chaque sous-domaine, a été choisi de telle sorte que $\Delta t_l / \Delta x_l = 0.95\, \mathcal{C}_{cfl},\ l \in \{c, f\}$. On utilise l'espace $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ avec un paramètre d'amortisement $\beta = 6$ pour l'approximation des inconnues volumiques sur chaque sous-domaine. L'espace $\underline{\mathcal{J}}_{H_R}(\Gamma)$ utilisé est donné par (1.33). On se sert des couches absorbantes parfaitement adaptées pour simuler le caractère non-borné du domaine.

On rappelle que la méthode choisie suppose que l'espace d'approximation $\underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma)$ vérifie les hypothèses (11.6)–(11.7). On construira alors un maillage surfacique uniforme $\Theta_{H_l}(\Gamma_l)$ pour chaque partie de fissure $\Gamma_l,\ l \in \{c, f\}$ avec un pas $H_l = 1.5\, \Delta x_l,\ l \in \{c, f\}$. On signale que le maillage sur la fissure est plus fin sur la région raffinée avec un taux de raffinement égal à son homologue sur le maillage volumique. L'espace d'approximation pour le multiplicateur de Lagrange est alors défini par

$$\underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma) \;=\; \left\{ \underline{\tilde{\lambda}}^H \in \underline{L}^2(\Gamma) \;/\; \underline{\tilde{\lambda}}^H_{|\Gamma_l} \in \underline{\mathcal{G}}_{H_l}(\Gamma_l),\ l \in \{c, f\} \right\}, \tag{11.26}$$

avec

$$\underline{\mathcal{G}}_{H_l}(\Gamma_l) \;=\; \left\{ \underline{\tilde{\lambda}}^H_l \in \underline{\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}_{00}}(\Gamma_l) \;/\; \underline{\tilde{\lambda}}^H_{l\,|S} \in (\mathcal{P}_1(S))^2\ \forall S \in \Theta_{H_l}(\Gamma_l) \right\}, \qquad l \in \{c, f\}. \tag{11.27}$$

Une fissure horizontale. Dans la première expérience on considère la fissure donnée par (8.18), c'est à dire, un défaut qui est parallèle au maillage volumique du domaine. Les régions raffinées sont

$$B_1 = [2, 2.5] \times [1.8, 2.4], \qquad \text{avec un taux de raffinement } p = 2,$$

$$B_2 = [7.5, 8] \times [1.8, 2.4], \qquad \text{avec un taux de raffinement } p = 10.$$

Dans la première colonne de la figure 11.5 on montre le module du champ de vitesse à différents instants. Les résultats sont visiblement moins bons que ceux de la première colonne de la figure 9.7. Ceci ne vient pas seulement du fait d'avoir utilisé un maillage sur $\Omega \setminus (B_1 \cup B_2)$ deux fois plus grossier que celui utilisé dans la section 9.2.2. La méthode de couplage semble avoir des difficultés sur le point d'intersection entre les maillage de surface. Sur la deuxième colonne de la figure 11.5 on montre le comportement du multiplicateur de Lagrange. Les différentes parties de la fissure on été séparées par des lignes pointillés. Si on compare ces résultats aux images de la première colonne de la figure 9.8 on remarque des fortes oscillations au voisinage des intersections. Ce comportement est lié à deux faits :

- L'espace de discrétisation $\underline{\mathcal{G}}_H(\Gamma)$ donné par (11.26) est discontinu sur les intersections entre les maillages de surface (aucune contrainte de continuité n'a été imposée sur ces points).
- Le maillage $\Xi_{H_R}(\Gamma_R)$ ne respecte pas la géométrie de Γ. Sur la figure 11.6 on représente le multiplicateur $\underline{j}$ sur l'interface Γ_R pour chacune des régions raffinées (on a fait une représentation similaire à celle de la section 3.3). On remarque que la discontinuité sur cette variable (qui s'interprète comme la trace de la vitesse) sur le point d'intersection n'est pas non plus bien approchée. Une adaptation locale de ce maillage afin de vérifier cette propriété pourrait améliorer les résultats (voir la remarque 11.2.1).

Lorsqu'on raffine tous les maillages la méthode semble converger mais très lentement à cause des oscillation sur ces points.

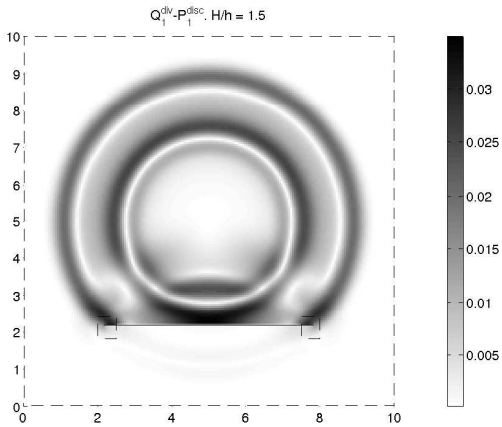
On a refait cette expérience en décalant légèrement la fissure et la condition initiale (l'expérience physique est exactement la même) de telle sorte que le maillage $\Xi_{H_R}(\Gamma_R)$ respecte la géométrie de la fissure. Les résultats sont sur la figure 11.7 où on représente le module du champ de vitesse à gauche et le multiplicateur de Lagrange $\underline{\lambda}$ à droite. Maintenant les résultats sont meilleurs. Les oscillations sur les intersections entre les maillages ont diminué. On remarque aussi qu'on a mieux pris en compte les singularités du multiplicateur aux bouts de la fissure (surtout sur celle qui est à l'intérieur de B_2 où on a fait un raffinement de taux 10). Les multiplicateurs de Lagrange qui assurent les conditions de transmission entre les sous-domaines semblent être bien discrétisées. Les discontinuités sur les points d'intersection sont bien capturées (voir la figure 11.8).

Une fissure diagonale. Le deuxième obstacle considéré est la fissure oblique définie par (8.19). On raffine le maillage sur les régions suivantes

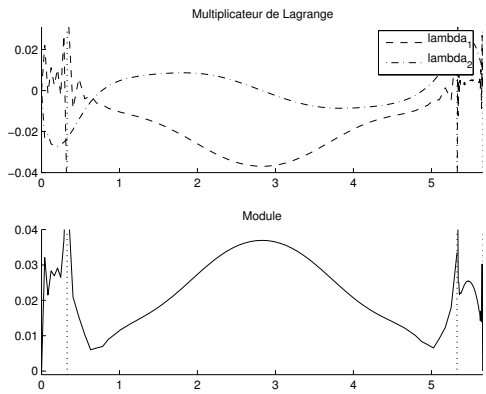
$$B_1 = [4.75, 5.5] \times [0.75, 1.5], \qquad \text{avec un taux de raffinement } p = 2,$$

$$B_2 = [8.5, 9.25] \times [4.5, 5.25], \qquad \text{avec un taux de raffinement } p = 10.$$

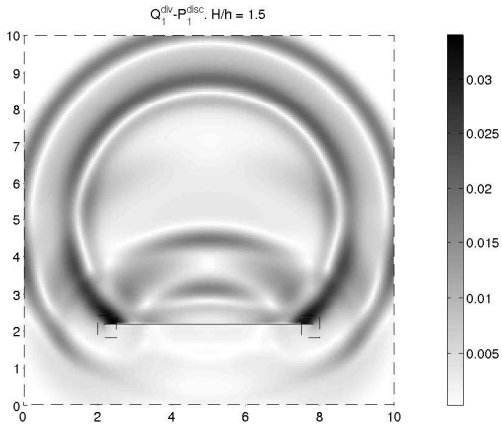
On signale que cette fois-ci, le maillage $\Xi_{H_R}(\Gamma_R)$ respecte la géométrie Γ. On représente sur la première colonne de la figure 11.9 le module du champ de vitesse à différents instants. Les résultats obtenus sont très semblables à ceux de la deuxième colonne de la figure 9.7, même si sur la plupart du domaine de calcul on avait utilisé un maillage deux fois plus fin. Sur la deuxième colonne de la figure 11.9 on montre le multiplicateur de Lagrange qui a été obtenu avec cette méthode de couplage. Si on compare ces résultats avec les images de la deuxième colonne de la figure 9.8 on remarque que les singularités



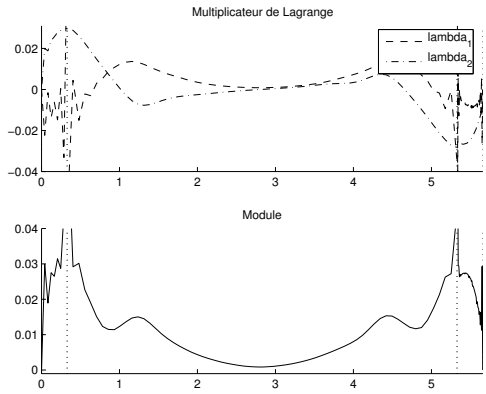
(a) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 2.1637$



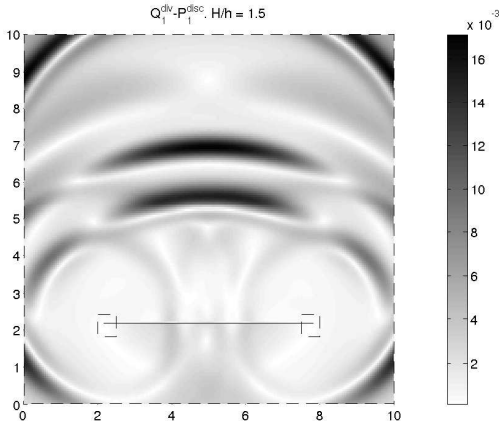
(b) $\underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 2.1637$



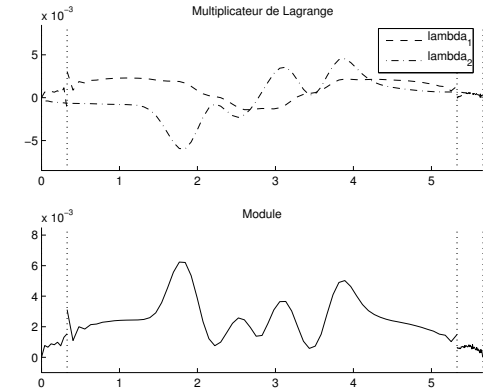
(c) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 3.0292$



(d) $\underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 3.0292$

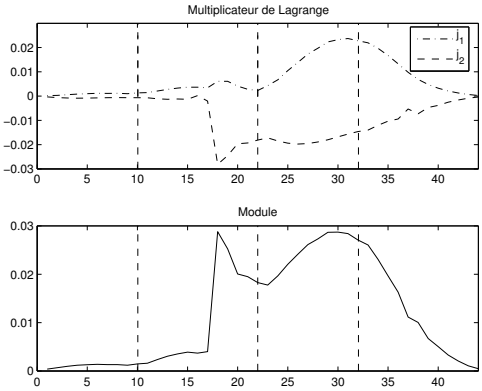


(e) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 4.7602$

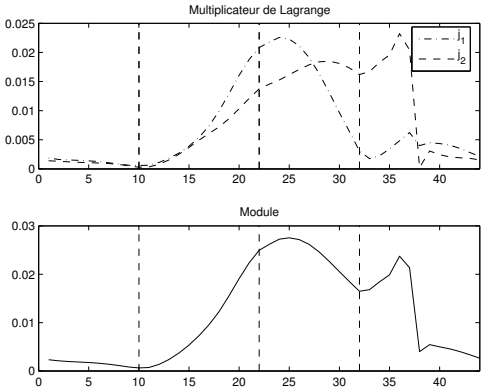


(f) $\underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 4.7602$

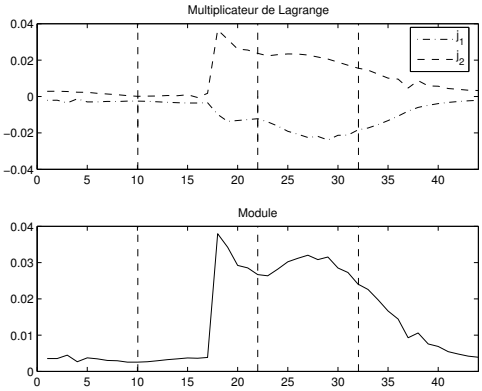
FIG. 11.5 – Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.5$. Onde S incidente



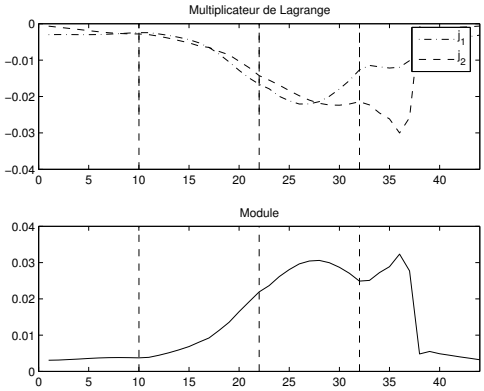
(a) $\underline{j}$ sur B_1 $(p = 2)$ au temps $t = 2.1637$.



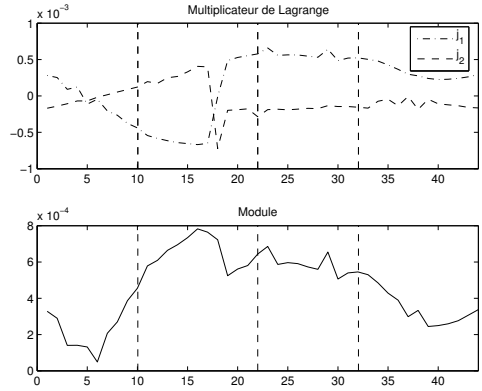
(b) $\underline{j}$ sur B_2 $(p = 10)$ au temps $t = 2.1637$



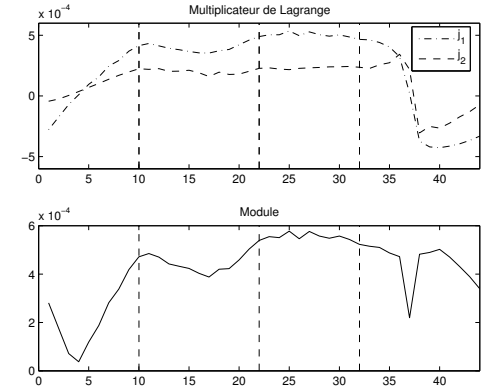
(c) $\underline{j}$ sur B_1 $(p = 2)$ au temps $t = 3.0292$



(d) $\underline{j}$ sur B_2 $(p = 10)$ au temps $t = 3.0292$

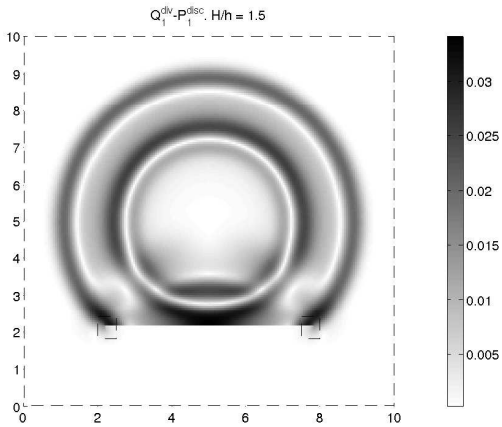


(e) $\underline{j}$ sur B_1 $(p = 2)$ au temps $t = 4.7602$

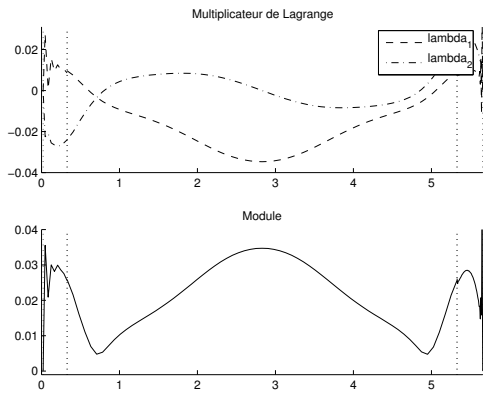


(f) $\underline{j}$ sur B_2 $(p = 10)$ au temps $t = 4.7602$

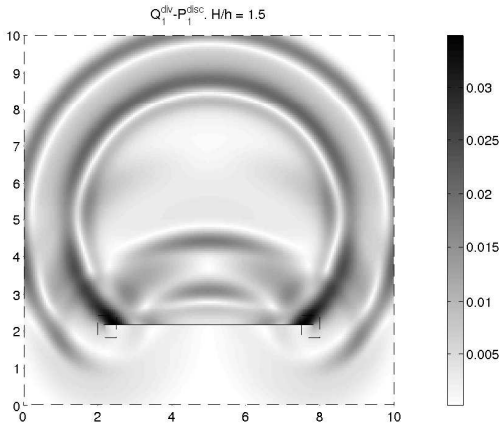
FIG. 11.6 – Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.5$. Onde S incidente



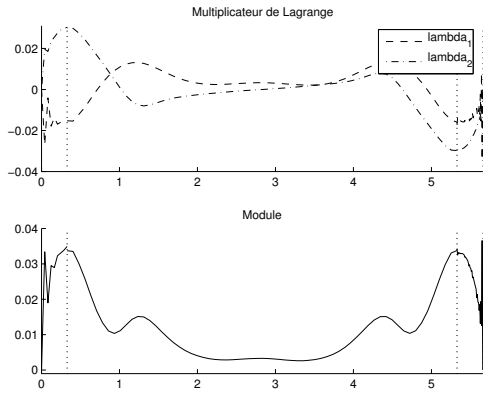
(a) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 2.1637$



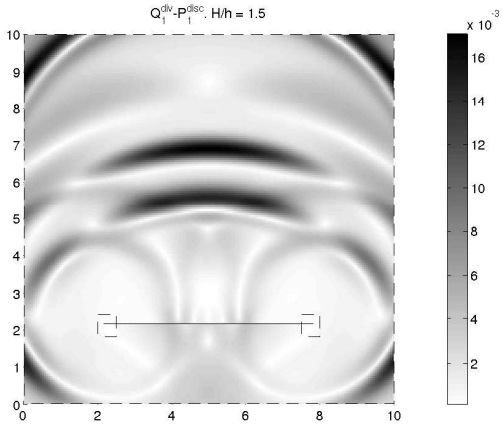
(b) $\underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 2.1637$



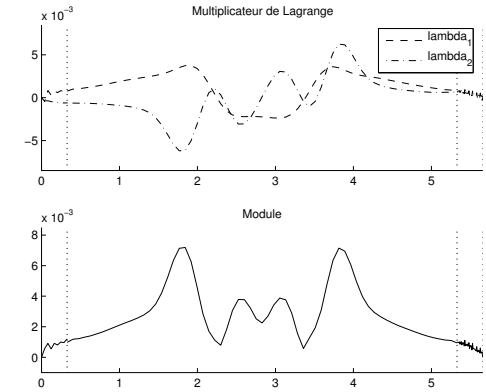
(c) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 3.0292$



(d) $\underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 3.0292$

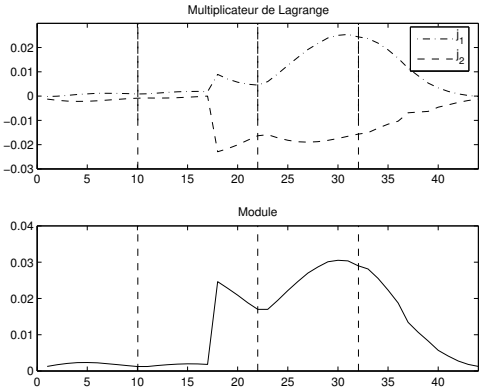


(e) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 4.7602$

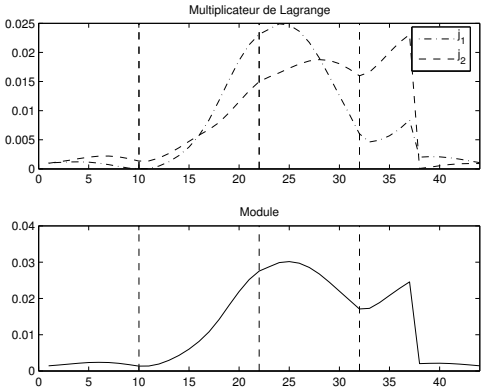


(f) $\underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 4.7602$

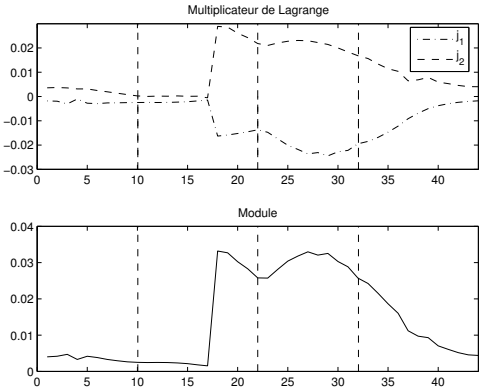
FIG. 11.7 – Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.5$. Onde S incidente



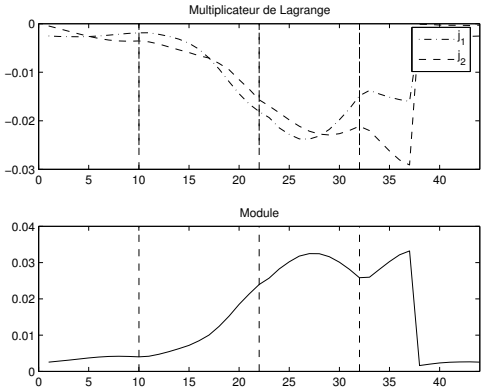
(a) $\underline{j}$ sur B_1 $(p = 2)$ au temps $t = 2.1637$.



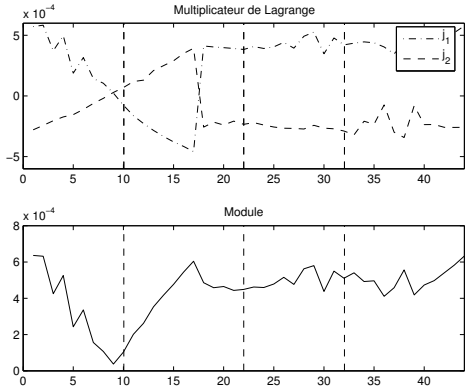
(b) $\underline{j}$ sur B_2 $(p = 10)$ au temps $t = 2.1637$



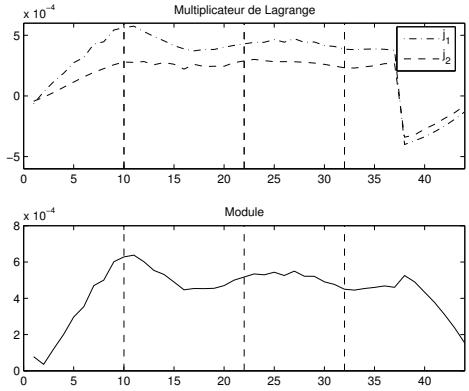
(c) $\underline{j}$ sur B_1 $(p = 2)$ au temps $t = 3.0292$



(d) $\underline{j}$ sur B_2 $(p = 10)$ au temps $t = 3.0292$



(e) $\underline{j}$ sur B_1 $(p = 2)$ au temps $t = 4.7602$



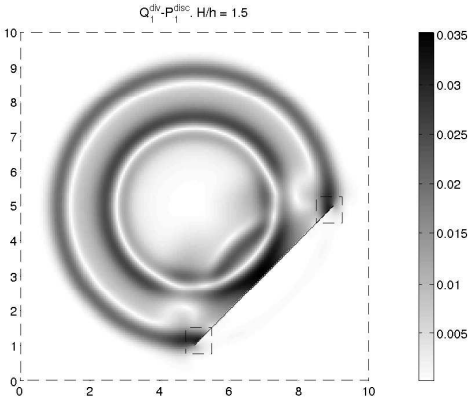
(f) $\underline{j}$ sur B_2 $(p = 10)$ au temps $t = 4.7602$

FIG. 11.8 – Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.5$. Onde S incidente

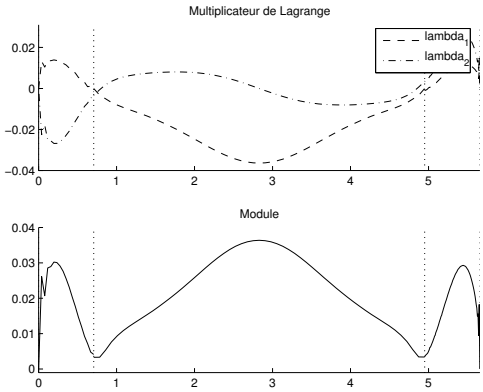
aux extrémités ont été mieux prises en compte (surtout celle qui est à droite où on a fait un raffinement de taux 10). Finalement, dans la figure 11.10 on représente le multiplicateur $\underline{j}$ sur les frontières des régions raffinées. La discontinuité sur les points où les frontières se coupent semble être bien approchée.

11.5 Conclusion

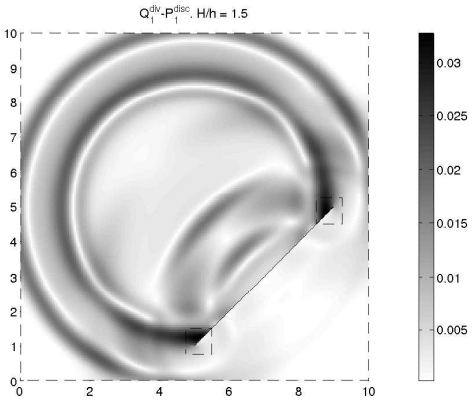
Dans ce chapitre on a étudié le couplage entre la méthode de raffinement de maillage présentée le long des chapitres 3 et 4 et la méthode de domaines fictifs. Les difficultés d'analyse fonctionnelle issues du problème ont été contournées en discrétisant la formulation continue donnée par domaines fictifs avec un espace d'approximation volumique non-conforme qui prend en compte les régions raffinées. Ainsi on a proposé deux algorithmes qui ont la propriété d'être stables sous la condition CFL habituelle grâce à la conservation d'une énergie discrète. Une de ces deux méthodes a été implémentée et on a remarqué que, sous certaines hypothèses entre les maillages $\Xi_{H_R}(\Gamma_R)$ et $\Theta_H(\Gamma)$, elle fournit des résultats assez bons. Elle nous permet, en outre, de raffiner localement le maillage de la fissure aux extrémités et, ainsi, de mieux approcher les singularités du multiplicateur de Lagrange $\underline{\lambda}$ à ces endroits. Cependant, on a remarqué que si le maillage de l'interface Γ_R ne respecte pas la géométrie de Γ des oscillations sur l'approximation de $\underline{\lambda}$ au voisinage des points d'intersection entre les interfaces peuvent se développer. On a laissé en perspective l'implémentation de l'autre méthode de couplage qui pourrait atténuer ces phénomènes.



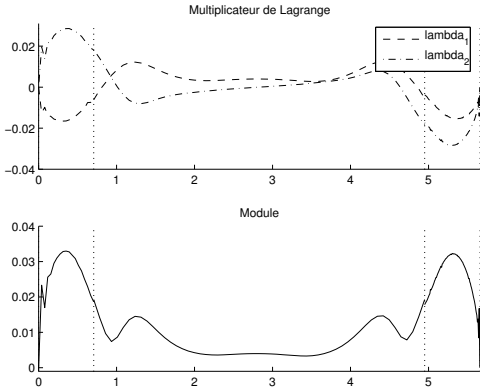
(a) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 2.1637$



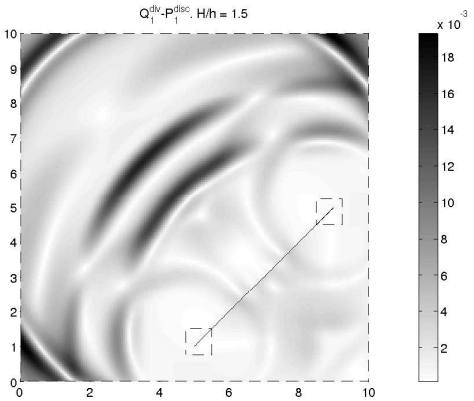
(b) $Q\ \underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 2.1637$



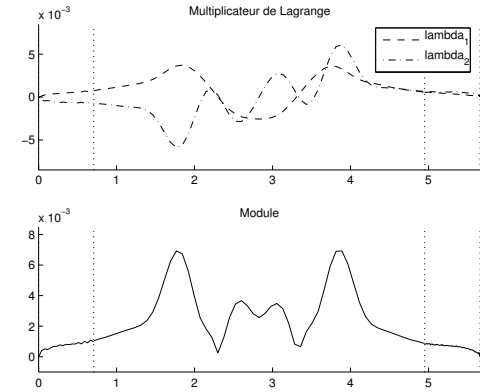
(c) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 3.0292$



(d) $Q\ \underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 3.0292$

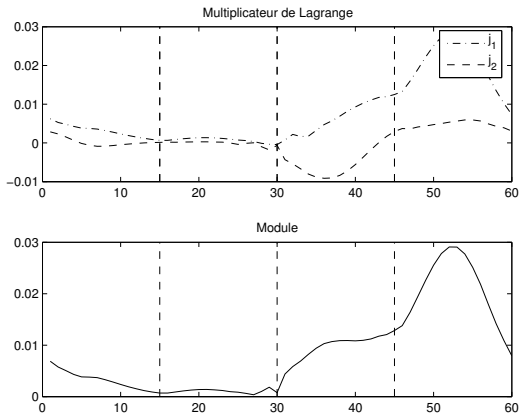


(e) $|\underline{v}|(x,z)$ au temps $t = 4.7602$

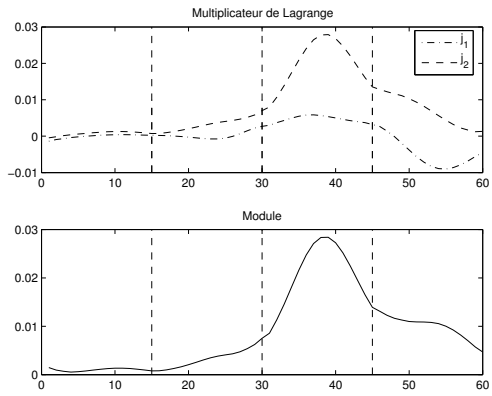


(f) $Q\ \underline{\lambda}(\tilde{s})$ et $|\underline{\lambda}|(\tilde{s})$ au temps $t = 4.7602$

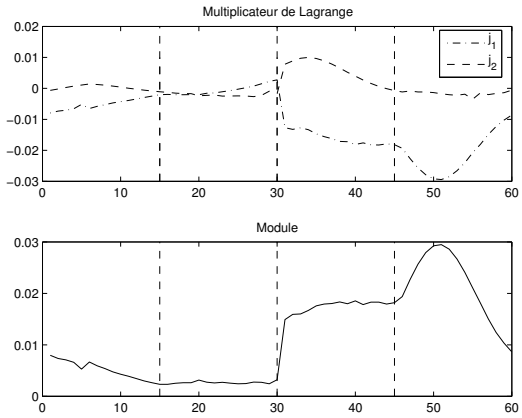
FIG. 11.9 – Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.5$. Onde S incidente



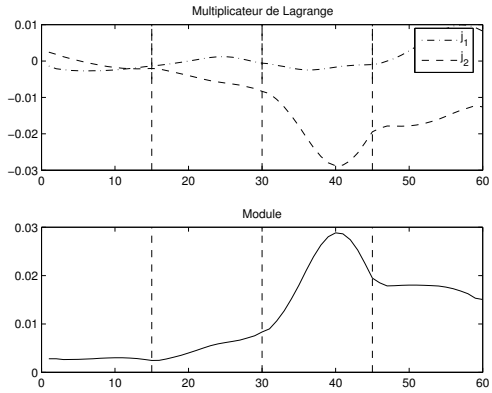
(a) $\underline{j}$ sur B_1 $(p = 2)$ au temps $t = 2.1637$.



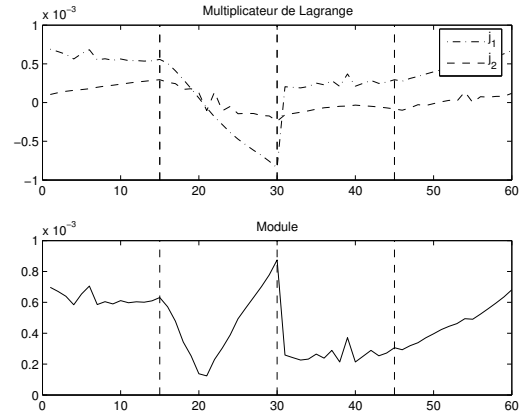
(b) $\underline{j}$ sur B_2 $(p = 10)$ au temps $t = 2.1637$



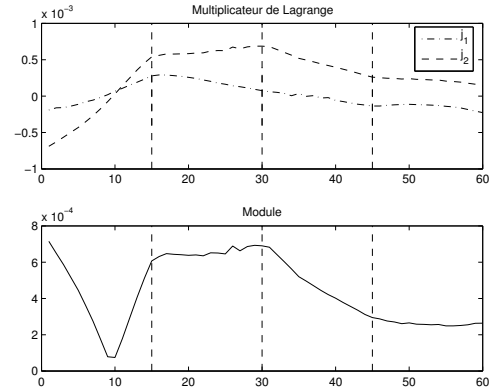
(c) $\underline{j}$ sur B_1 $(p = 2)$ au temps $t = 3.0292$



(d) $\underline{j}$ sur B_2 $(p = 10)$ au temps $t = 3.0292$



(e) $\underline{j}$ sur B_1 $(p = 2)$ au temps $t = 4.7602$



(f) $\underline{j}$ sur B_2 $(p = 10)$ au temps $t = 4.7602$

FIG. 11.10 – Matériau isotrope. $\Delta x = 0.025$. $R = 1.5$. Onde S incidente

Chapitre 12

Une Expérience Numérique Plus Complexe

Les méthodes qu'on a développées durant les trois premières parties de la thèse on été validées sur des cas test simples. Dans ce chapitre on montre une expérience numérique plus complexe qui nous permettra d'exhiber l'intérêt des techniques de raffinement de maillage spatio-temporel couplées avec la méthode des domaines fictifs.

On s'intéresse alors à la modélisation de la propagation et diffraction d'ondes dans des milieux fissurés. Dans ce type d'expériences qu'on peut trouver dans le contrôle non-destructif, la taille des défauts du matériau est souvent très petite par rapport à la taille du domaine de calcul ce qui fait que les techniques de raffinement sont spécialement intéressantes.

Ainsi, on considère que notre domaine de calcul est donné par le rectangle $\Omega = [0, 20] \times [0, 10]$ composé d'un matériau homogène caractérisé par les coefficients donnés dans (1.82) (voir la figure 12.1). On imposera la contrainte normale nulle sur le bord gauche tandis qu'on supposera que le domaine est non-borné sur les autres frontières (on utilisera des PML's sur ces bords). Le milieu est perturbé par une condition initiale sur le champ de vitesse centré sur le point $(x_c, z_c) = (10, 7.5)$ et donnée par (8.21). Le matériau est fissuré à deux endroits :

- le premier défaut est une fissure courbe décrite dans la figure 12.2.(b) avec des extrémités sur les points $(x_1, z_1) = (15.75, 2.5)$ et $(x_2, z_2) = (16.25, 3.5)$.
- le deuxième obstacle est une fissure droite de $(x_3, z_3) = (4.75, 5.25)$ à $(x_4, z_4) = (5.25, 4.75)$ (voir la figure 12.2.(a)).

Le pas de discrétisation en espace pour les inconnues volumiques sur le maillage grossier (qui comportera presque la totalité du domaine de calcul) est de $1/20$. Sur les régions

$$B_1 = [15.5, 16.5] \times [2.25, 3.75] \quad \text{et} \quad B_2 = [4.5, 5.5] \times [4.5, 5.5],$$

qui entourent les fissures, on fera un raffinement de taux quatre. Ainsi, là où on va utiliser la méthode de domaines fictifs on aura un nombre de points par longueur d'onde assez important. Finalement on effectue encore un raffinement de taux égal à quatre sur les sous-domaines

$$B_3 = [15.6, 15.9] \times [2.4, 2.75], \qquad B_4 = [16.1, 16.4] \times [3.25, 3.6],$$
$$B_5 = [4.6, 4.9] \times [5.1, 5.4], \qquad B_6 = [5.1, 5.4] \times [4.6, 4.9].$$

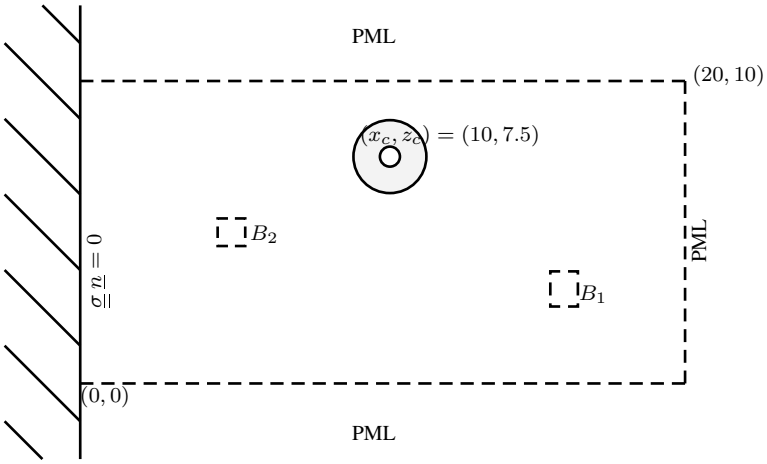
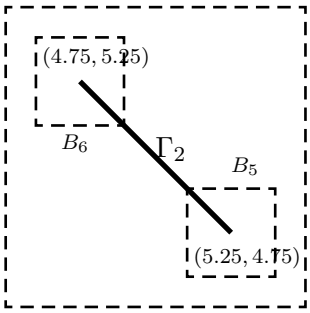
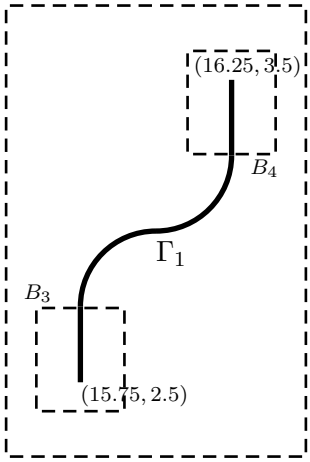


FIG. 12.1 – Domaine de calcul de l'expérience avec deux fissures



a) Zoom au tour de B_2



b) Zoom au tour de B_1

FIG. 12.2 – Les deux fissures de l'expérience

On signale que le maillage volumique utilisé sur les extrémités des fissures est donc 16 fois plus fin que le maillage grossier. Le pas de discrétisation temporel a été choisi de telle sorte que $\Delta t/\Delta x = 0.95CFL_{opt}$ sur tout le domaine de calcul. Le pas de discrétisation surfacique pour la discrétisation des obstacles est approximativement égal à deux fois le pas de discrétisation volumique et, par conséquent, raffiné d'un facteur quatre sur les extrémités. On a utilisé l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ sur le maillage le plus grossier (où on ne se sert pas de la méthode des domaines fictifs) et l'élément fini $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ avec un coefficient d'amortissement des modes parasites $\beta = 10$ sur toutes les régions raffinées. La technique de raffinement adoptée est celle qui a été introduite dans le chapitre 4. Pour la coupler à la méthode des domaines fictifs, on utilise l'algorithme présenté dans la section 11.3.4 du chapitre 11. On signale que les maillages des interfaces artificielles qui coupent les fissures respectent la géométrie de celles-ci.

Dans la première colonne de la figure 12.3 on représente le module du champ de vitesse à différents instants. L'onde de pression généré par la condition initiale interagit avec les défauts du matériau et avec la frontière gauche en créant des ondes de pression et de cisaillement. Dans la deuxième colonne de la même figure on montre un zoom du champ de vitesse autour de la région raffinée B_1 qui contient la fissure courbe. On signale que la méthode des domaines fictifs couplée avec les techniques de raffinement de maillage spatio-temporel nous permettent de bien prendre en compte l'interaction entre les ondes et l'obstacle. On transmet ensuite les ondes diffractées et réfléchies au domaine grossier où elles sont propagées sur un maillage moins coûteux du point de vue du temps de calcul. Le fait d'avoir un rapport entre le pas de discrétisation temporel et spatial très proche de la valeur maximale CFL_{opt} sur tout le domaine de calcul fait que la méthode n'est pas très dispersive.

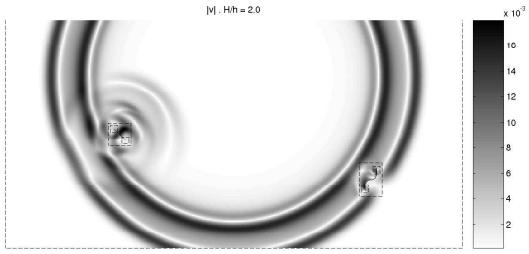
Pour pouvoir interpréter les résultats plus facilement on a représenté dans la figure 12.4 des approximations des quantités

$$
\begin{aligned}
|\text{div } \underline{v}| &= \left| \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|, \qquad \text{sur la première colonne,} \\
|\text{rot } \underline{v}| &= \left| \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right|, \qquad \text{sur la deuxième colonne,}
\end{aligned}
$$

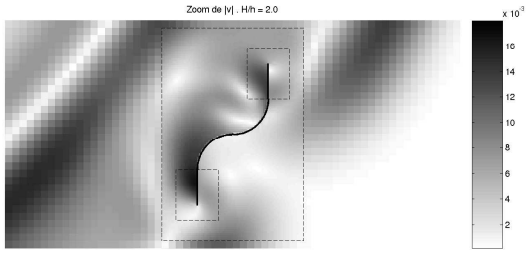
obtenues à l'aide des différences finis centrées d'ordre deux (on rappelle que nos inconnues volumiques sont définies sur un maillage régulier). Étant donné que le matériau considéré est isotrope, ceci nous permet de séparer les ondes de pression (associées à la divergence du champ de vitesse) et les ondes de cisaillement (associées à son rotationnel). Ainsi on peut analyser les conversions d'ondes lorsqu'il y a une interaction d'une onde avec une fissure. Ceci nous permet aussi de mieux apprécier la différence de vitesse des deux types d'ondes.

Remarque 12.0.1 *Dans la section 1.9.2 on avait présenté une expérience similaire à celle-ci en utilisant la méthode de raffinement du chapitre 3. On rappelle que cette technique ne fournit des bons résultats que lorsque* $(q_c, q_f) = (1, 2)$. *En effectuant quatre raffinements successifs, on avait réussi à effectuer un raffinement de taux égal à* 16. *Cependant, il est clair que la technique utilisée dans l'expérience ci-dessus (qui a été introduite dans le chapitre 4) est nettement plus performante. En effet :*

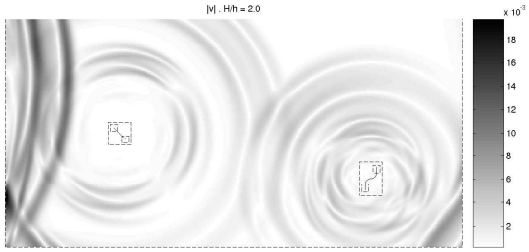
- *Étant donné qu'elle fournit des bons résultats avec des taux de raffinement supérieurs à deux on a plus de liberté pour appliquer le raffinement souhaité.*
- *Cette propriété nous permet aussi de réduire de temps de calcul et la mémoire utilisé. Par exemple, pour effectuer un raffinement de taux* 16 *sur une certaine région, avec l'ancienne méthode on doit faire* 4 *raffinements récursifs de taux égal à deux. Alors, pour chaque pas de temps grossier on doit résoudre quinze systèmes linéaires sur les interfaces (un sur la frontière de la région raffinée plus à l'extérieur, deux sur la suivante, ... et huit sur la frontière de la région plus raffinée). Avec la nouvelle méthode on pourrait faire deux raffinements récursifs avec un taux* 4 *chacun. Le maillage*



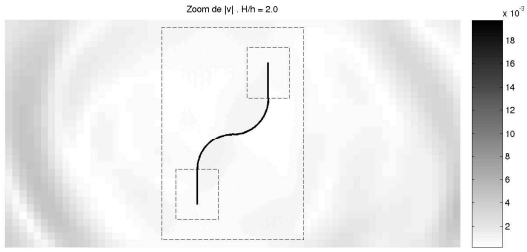
(a) $|\underline{v}|$ au temps $t = 2.5965$



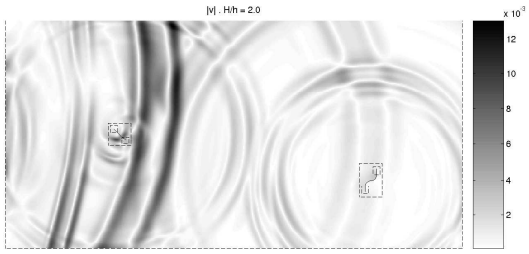
(b) Zoom de $|\underline{v}|$ au temps $t = 2.5965$



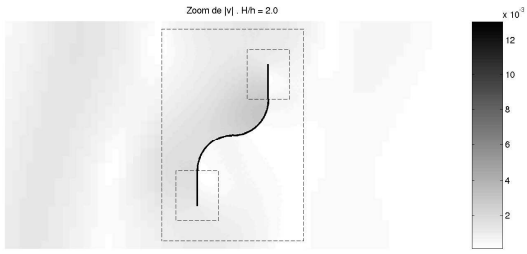
(c) $|\underline{v}|$ au temps $t = 4.3275$



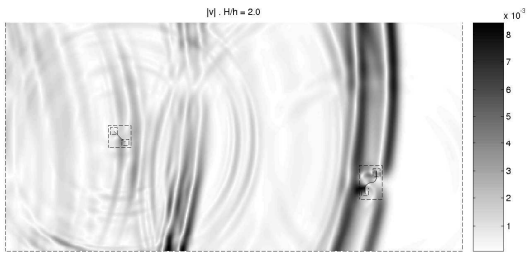
(d) Zoom de $|\underline{v}|$ au temps $t = 4.3275$



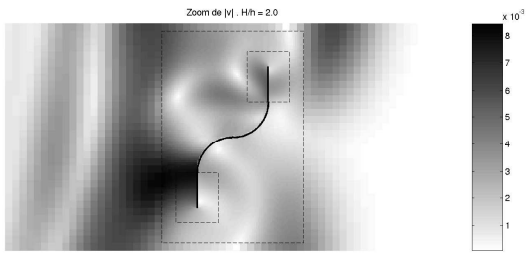
(e) $|\underline{v}|$ au temps $t = 6.0585$



(f) Zoom de $|\underline{v}|$ au temps $t = 6.0585$

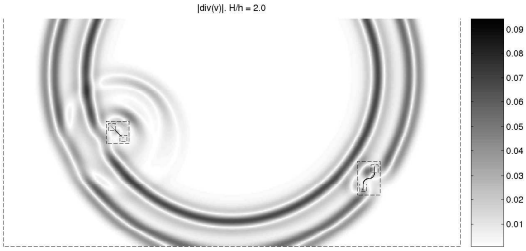


(g) $|\underline{v}|$ au temps $t = 9.5205$

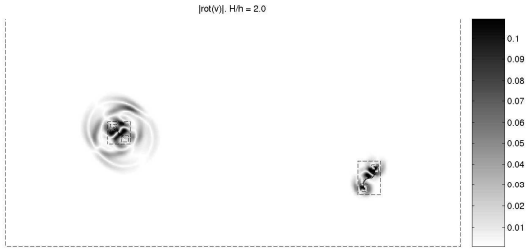


(h) Zoom de $|\underline{v}|$ au temps $t = 9.5205$

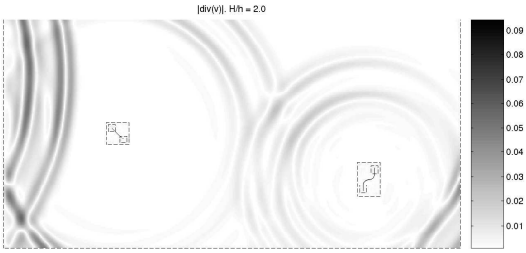
FIG. 12.3 – Diffraction par deux fissures. Module de champ de vitesse



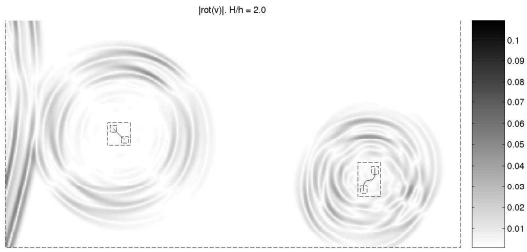
(a) $|\text{div } \underline{v}|$ au temps $t = 2.5965$



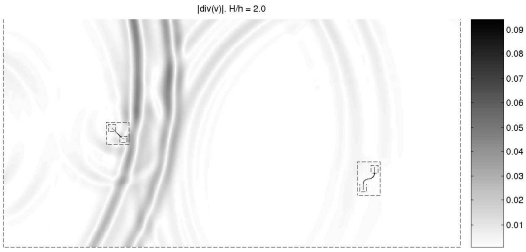
(b) $|\text{rot } \underline{v}|$ au temps $t = 2.5965$



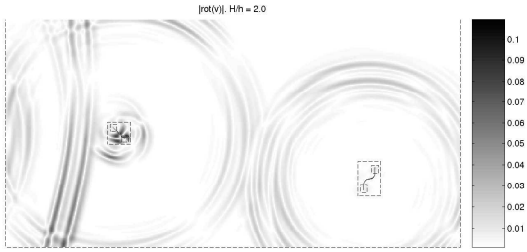
(c) $|\text{div } \underline{v}|$ au temps $t = 4.3275$



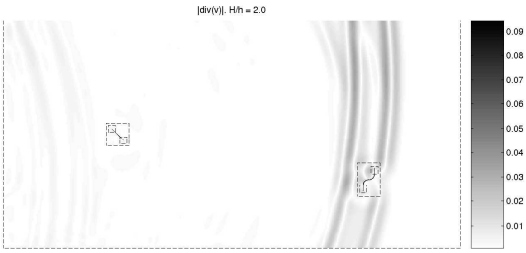
(d) $|\text{rot } \underline{v}|$ au temps $t = 4.3275$



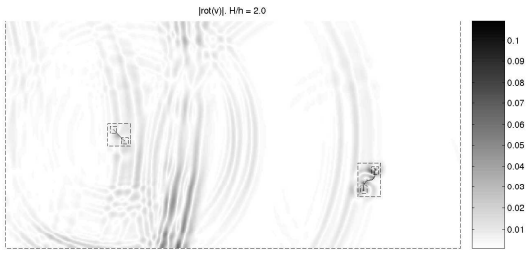
(e) $|\text{div } \underline{v}|$ au temps $t = 6.0585$



(f) $|\text{rot } \underline{v}|$ au temps $t = 6.0585$



(g) $|\text{div } \underline{v}|$ au temps $t = 9.5205$



(h) $|\text{rot } \underline{v}|$ au temps $t = 9.5205$

FIG. 12.4 – Diffraction par deux fissures. Ondes de pression (resp. de cisaillement) à gauche (resp. à droite)

sur la région la plus fine sera identique et on aurait juste besoin de résoudre cinq systèmes linéaires sur les interfaces.

– *Finalement, l'analyse par ondes planes et l'étude de convergence numérique faite pour les deux schémas montrent que la nouvelle méthode est plus précise (comparer les résultats des sections 3.5.2 et 3.5.3 avec ceux qui ont été obtenus dans les sections 4.4.2 et 4.4.3).*

Conclusions et Perspectives

Le long de cette thèse on s'est intéressé à la simulation des phénomènes de propagation et diffraction d'ondes dans un milieu élastique anisotrope hétérogène fissuré à l'aide des méthodes numériques explicites àfin de simuler des expériences de contrôle non-destructif. Dans ce type d'applications, la présence de détails géométriques de petite taille et des singularités de la solution (par exemple aux extrémités des fissures) est une motivation pour appliquer des techniques de raffinement de maillage. Adapter le pas de temps localement au pas d'espace, permet en même temps de diminuer la dispersion numérique dans la grille grossière et de gagner en temps de calcul.

Dans la première partie de la thèse, on a proposé des techniques de raffinement qui nous permettent de raccorder des grilles non-conformes en espace et en temps avec un rapport rationnel quelconque entre le pas de discrétisation sur chaque maillage tout en utilisant le même schéma intérieur dans chaque sous-domaine. Le raccord est ainsi effectué à l'aide d'une inconnue supplémentaire définie sur l'interface commune aux deux sous-domaines (région grossière et région raffinée). Ces méthodes ont la propriété de conserver une énergie discrète ce qui garantit la stabilité par construction dès que la condition de stabilité CFL habituelle est satisfaite. On a proposé aussi des nouvelles analyses d'erreur de ce type de méthodes dans le cas unidimensionnel : en utilisant des techniques énergétiques lorsque le taux de raffinement est égal à deux, avec des technique de Fourier dans le cas général. Cette dernière analyse ainsi que des expériences numériques nous permettent d'exhiber que la précision de ce type de méthodes conservatives est limitée lorsqu'on considère un taux de raffinement supérieur à deux à cause de phénomènes parasites haute fréquence liés à la non-conformité entre les maillages en temps. L'étude détaillée de ce type de comportement a motivé l'introduction d'un nouveau schéma (construit à partir d'un post-traitement en temps) qui est globalement d'ordre deux (c'est-à-dire du même ordre que le schéma intérieur employé) pour un taux de raffinement rationnel arbitraire.

Le travail effectué sur ce sujet nous a ouvert des nouveaux horizons pour des études futures. Du point de vue de l'analyse mathématique, il nous paraît intéressant de pousser plus loin l'analyse de convergence de ce type de méthodes avec des techniques énergétiques : étendre l'étude aux cas multidimensionnels ou au cas d'un taux de raffinement supérieur à deux pour les méthodes conservatives initiales, analyser la méthode construite avec le post-traitement en temps de la solution, ... Du côté développement des méthodes de raffinement de maillage spatio-temporel, il nous paraît important de construire des méthodes de raccord plus précises qui pourraient nous permettre d'utiliser des schémas intérieurs d'ordre élevé (supérieur à deux). De même, pour certaines applications, il apparaît intéressant de créer des méthodes capables de conserver non seulement une énergie discrète mais aussi d'autres quantités-propriétés (comme la conservation de la charge pour les équations de Maxwell). Finalement, affronter l'implémentation de ce type de techniques dans le cadre de l'élastodynamique 3D est un défi sans doute intéressant.

Dans la deuxième partie on a développé une autre technique de raffinement de maillage spatio-temporel qui utilise des formulations variationnelles différentes (duales l'une de l'autre) dans chaque sous-domaine. Cela fait que le couplage entre la region raffinée et la région grossière ne nécessite pas l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange à l'interface, ce qui est avantageux. Le prix à payer est que le schéma

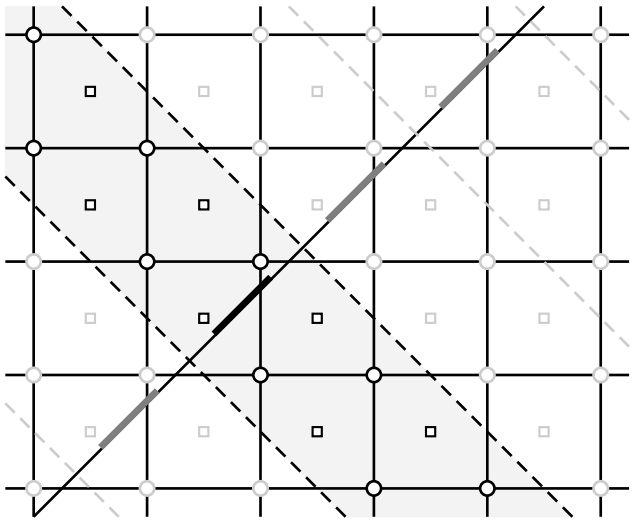


FIG. 13.5 – Une possible configuration pour l'analyse de Fourier de domaines fictifs

intérieur dans chacune des régions est différent. Cette méthode satisfait aussi une propriété de conservation d'énergie de telle sorte qu'elle est stable par construction. Elle a été analysée par des techniques énergétiques dans le cas multidimensionnel pour un taux de raffinement égal à deux. La même stratégie de post-traitement en temps de la solution discrète proposée dans la première partie a été utilisée dans ce cadre ce qui nous a permis de réduire les phénomènes parasites haute fréquence et d'introduire une autre méthode de raffinement de maillage avec une précision à l'ordre deux. Ce type de techniques peuvent aussi s'utiliser pour coupler des problèmes de propagation d'ondes comme l'interaction fluide-solide [43] en utilisant des maillages non-conformes en espace et en temps. L'implémentation de cette méthode dans le cadre du raffinement de maillage spatio-temporel n'a pas été encore faite et peut être spécialement intéressante dans le cas des équations de Maxwell où la formulation primale et duale sont presque identiques.

La troisième partie de la thèse a été dédiée à la méthode de domaines fictifs appliquée à la prise en compte des conditions aux limites du type Neumann dans des problèmes de propagation d'ondes. Après avoir remarqué numériquement un défaut de convergence de cette méthode lorsqu'on utilise l'élément $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{Q}_0$ pour la discrétisation des inconnues volumiques [80, 14, 12] on a proposé un nouvel élément fini noté $\mathcal{Q}_1^{div} \times \mathcal{P}_1^{disc}$ (modification de l'élément fini existant) qui assure la convergence de la méthode. Une preuve de convergence a été fournie dans le cas de l'acoustique scalaire 2D. La preuve d'un résultat analogue pour les équations de l'élastodynamique est un problème ouvert jusqu'à présent à cause de difficultés liées à la prise en compte de la symétrie du tenseur des contraintes. Une autre analyse qui pourrait être intéressante est de s'intéresser à comprendre le défaut de convergence de la méthode lorsqu'on utilise l'ancien élément et que pour l'instant on se limite à constater numériquement. Une étude avec des techniques de Fourier sur des configurations comme celle de la figure 13.5 pourrait répondre à ces questions.

Finalement, dans la quatrième partie (sans doute la moins aboutie du point de vue mathématique) on a traité le couplage entre la méthode des domaines fictifs et les techniques de raffinement de maillage spatio-temporel avec multiplicateur de Lagrange introduites dans la première partie. Il est clair que dans le cas où la fissure est complètement incluse dans un des deux sous-domaines, aucun problème ne se pose. Par contre, lorsque l'interface artificielle liée au raffinement intersecte la fissure on trouve des difficultés

d'analyse fonctionnelle pour écrire une formulation variationnelle du problème continu en considérant une décomposition des domaines. Malgré tout on a été capable de construire deux méthodes de couplage stables qui gardent la même propriété de conservation d'une énergie discrète que les techniques de raffinement et domaines fictifs satisfont séparément. Une de ces deux méthodes a été implémentée en obtenant des résultats très satisfaisants.

Annexes

Annexe A

Proof of Proposition 2.5.1

In this appendix we present the proof of proposition 2.5.1. Our goal is to give an estimate of the error coming from the initial conditions and the interior scheme assuming that the there is no error on the coupling equations. As the computations are very similar for both schemes, we present here the proof only for the scheme I.

For the sake of clarity, we introduce some notation that will be useful for the sequel. The discrete spaces $L^2_{c,u}$ and $L^2_{f,u}$ defined of (2.23) are equipped with the semi-norms (that derive from a pre-hilbertian product that we will denote by $< \cdot, \cdot >_{u,*}$)

$$\begin{aligned} \|u_{c,h}\|^2_{u,*} &= \sum_{j\leq -1} |(u_c)_{2j}|^2 2h, \\ \|u_{f,h}\|^2_{u,*} &= \sum_{j\geq 1} |(u_f)_j|^2 h, \end{aligned} \tag{A.1}$$

and with their natural Hilbert norms

$$\begin{aligned} \|u_{c,h}\|^2_{u} &= \|u_{c,h}\|^2_{u,*} + |(u_c)_0|^2\ h, \\ \|u_{f,h}\|^2_{u} &= \|u_{f,h}\|^2_{u,*} + |(u_f)_0|^2\ \frac{h}{2}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

In the same way, the discrete spaces $L^2_{c,v}$ et $L^2_{f,v}$ defined in (2.25) are equipped with the following Hilbert norms (we will denote by $< \cdot, \cdot >_v$ the associated scalar product)

$$\begin{aligned} \|v_{c,h}\|^2_{v} &= \sum_{j\leq -1} |(v_c)_{2j+1}|^2\ 2h, \\ \|v_{f,h}\|^2_{v} &= \sum_{j\geq 1} |(v_f)_{j+\frac{1}{2}}|^2\ h. \end{aligned} \tag{A.3}$$

For all $p \in \mathbb{Z}$ we define the shift operators

$$\begin{aligned} sh_{c,u} : L^2_{c,u} &\mapsto L^2_{c,u} \\ u_{c,h} &\longrightarrow sh_{c,u}(u_{c,h}), \quad (sh_{c,u}(u_{c,h}))_{2j} = (u_c)_{2j+2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sh_{f,u} : L^2_{f,u} &\mapsto L^2_{f,u} \\ u_{f,h} &\longrightarrow sh_{f,u}(u_{f,h}), \quad (sh_{f,u}(u_{f,h}))_{j} = (u_f)_{j+1}. \end{aligned}$$

We begin by recalling the equations satisfied by the error $\Phi_l(\delta^h, \eta^h, 0)$ that we will still denote by $(e^{u,h}, e^{v,h})$. The interior scheme is given by the equations ((2.49),(2.50)). At the interface, the error satisfies the homogeneous coupling equations (2.51), that is, with zero right hand sides. The following lemma, whose immediate proof is omitted here (it is based on a simple Taylor expansion with integral reminder), gives us the magnitude of these quantities.

Lemma A.0.1 *Assume that the initial conditions of the problem (2.7) belongs to* $\left(H^3(\mathbb{R})\right)^2$ *(so that the exact solution* $(u, v) \in E^2$*). Then,*

$$\begin{array}{rclrcl} \sup\limits_{t^{2n+1}\leq T} \left\|(\eta^u_{c,h})^{2n+1}\right\|_{u,*} & \leq & \mathcal{C}h^2\|(u,v)\|_E, & \sup\limits_{t^{2n}\leq T} \left\|(\eta^v_{c,h})^{2n}\right\|_{v} & \leq & \mathcal{C}h^2\|(u,v)\|_E, \\ \sup\limits_{t^{n+\frac{1}{2}}\leq T} \left\|(\eta^u_{f,h})^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{u,*} & \leq & \mathcal{C}h^2\|(u,v)\|_E, & \sup\limits_{t^{n}\leq T} \left\|(\eta^v_{f,h})^{n}\right\|_{v} & \leq & \mathcal{C}h^2\|(u,v)\|_E. \end{array} \tag{A.4}$$

The proof of the proposition 2.5.1 is rather standard and is composed by two steps :

- First, we give an estimate for the discrete energy of the error defined by (2.58).
- Second, we bound the norm of the error by the energy and we use the lemma A.0.1 in order to obtain the convergence.

Step 1 : For the first part of the proof, we use the equations satisfied by the error to obtain the following expression

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t}\left(\mathcal{E}^{2n+2} - \mathcal{E}^{2n}\right) \;=\; & < \frac{(e^u_{c,h})^{2n+2} + (e^u_{c,h})^{2n}}{2}, (\eta^u_{c,h})^{2n+1} >_{u,*} + \\ & < \frac{(\eta^v_{c,h})^{2n+2} + (\eta^v_{c,h})^{2n}}{2}, (e^v_{c,h})^{2n+1} >_{v} + \\ & \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{1} < \frac{(e^u_{f,h})^{2n+1+m} + (e^u_{f,h})^{2n+m}}{2}, (\eta^u_{f,h})^{2n+m+\frac{1}{2}} >_{u,*} + \\ & \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{1} < \frac{(\eta^v_{f,h})^{2n+1+m} + (\eta^v_{f,h})^{2n+m}}{2}, (e^v_{f,h})^{2n+m+\frac{1}{2}} >_{v} . \end{aligned} \tag{A.5}$$

Of course, the energy of the error is not conserved. However, the quantities on the right hand side are expected to be small. Using several times the Cauchy-Schwartz inequality and the lemma A.0.1 we have

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(\mathcal{E}^{2n+2} - \mathcal{E}^{2n}\right) \;\leq\; \mathcal{C}h^2\|(u,v)\|_{\mathcal{C}^3}\left(\|e^{u,h}\|_{\infty,2,T} + \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T}\right). \tag{A.6}$$

Adding the above inequalities from $n = 0$ to $m - 1$, for any integer $m > 1$, we obtain

$$\mathcal{E}^{2m} \;\leq\; \mathcal{C}h^2\|(u,v)\|_E\left(1 + t^{2m}\right)\left(\|e^{u,h}\|_{\infty,2,T} + \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T}\right), \tag{A.7}$$

where we have used a trivial estimate from $\mathcal{E}^0$ when the initial data is given by (2.38) or (2.39).

Step 2 : The second part of the proof consists on bounding the L^2 norm of the error by the energy. The main result is stated in the following

Lemma A.0.2 *Assume that (2.9) is satisfied and that*

$$((e^u_{f,h})^n, (e^v_{f,h})^{n+\frac{1}{2}}) \in L^2_{f,u} \times L^2_{f,v}, \qquad ((e^u_{c,h})^{2n}, (e^v_{c,h})^{2n+1}) \in L^2_{c,u} \times L^2_{c,v}.$$

Then, there exists a positive constant $\mathcal{C}$ independent of Δt, h and α such that for any $n > 0$

$$\begin{aligned} &\|(e^u_{c,h})^{2n}\|^2_u + \|(e^v_{c,h})^{2n+1}\|^2_v + \|(e^v_{c,h})^{2n-1}\|^2_v \ \leq \\ &\mathcal{C}(1-\alpha^2)^{-1}\left(\mathcal{E}^{2n}_c + \Delta t^2\|(\eta^v_{c,h})^{2n}\|^2_v - h < (\eta^v_{c,h})^{2n}, sh^1_{c,u}(e^u_{c,h})^{2n} - (e^u_{c,h})^{2n} >_v\right), \end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned} &\|(e^u_{f,h})^{2n}\|^2_u + \|(e^v_{f,h})^{2n+\frac{1}{2}}\|^2_v + \|(e^v_{f,h})^{2n-\frac{1}{2}}\|^2_v \ \leq \\ &\mathcal{C}(1-\alpha^2)^{-1}\left(\mathcal{E}^{2n}_f + \Delta t^2\|(\eta^v_{f,h})^{2n}\|^2_v - h < (\eta^v_{f,h})^{2n}, sh^1_{f,u}(e^u_{f,h})^{2n} - (e^u_{f,h})^{2n} >_v\right), \end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned} &\|(e^u_{f,h})^{2n+1}\|^2_u \ \leq \ \mathcal{C}(1-\alpha^2)^{-1}\sum_{m=0}^{1}\left(\mathcal{E}^{2n+2m}_f + \Delta t^2\|(\eta^v_{f,h})^{2n+2m}\|^2_v - \right. \\ &\left. h < (\eta^v_{f,h})^{2n+2m}, sh^1_{f,u}(e^u_{f,h})^{2n+2m} - (e^u_{f,h})^{2n+2m} >_v\right) + \mathcal{C}\Delta t^2\|(\eta^u_{f,h})^{2n+\frac{1}{2}}\|^2_{u,*}. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Proof: In order to prove (A.8) we first remark that

$$\mathcal{E}^{2n}_c \ = \ \frac{1}{2}\|(e^u_c)^{2n}\|^2_u + \frac{1}{2}\left\|\frac{(e^v_c)^{2n+1} + (e^v_c)^{2n-1}}{2}\right\|^2_v - \frac{1}{2}\left\|\frac{(e^v_c)^{2n+1} - (e^v_c)^{2n-1}}{2}\right\|^2_v. \tag{A.11}$$

Developing the last term in this equality using the second equation of (2.49) we have

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{2n}_c \ \geq \ &\frac{1-\alpha^2}{2}\|(e^u_c)^{2n}\|^2_u + \frac{1}{2}\left\|\frac{(e^v_c)^{2n+1} + (e^v_c)^{2n-1}}{2}\right\|^2_v - \\ &\Delta t^2\|(\eta^v_{c,h})^{2n}\|^2_v + h < (\eta^v_{c,h})^{2n}, sh^1_{c,u}(e^u_{c,h})^{2n} - (e^u_{c,h})^{2n} >_v, \end{aligned} \tag{A.12}$$

that implies, in particular, that

$$\begin{aligned} &\|(e^u_{c,h})^{2n}\|^2_u \ \leq \\ &2(1-\alpha^2)^{-1}\left(\mathcal{E}^{2n}_c + \Delta t^2\|(\eta^v_{c,h})^{2n}\|^2_v - h < (\eta^v_{c,h})^{2n}, sh^1_{c,u}(e^u_{c,h})^{2n} - (e^u_{c,h})^{2n} >_v\right), \end{aligned} \tag{A.13}$$

Then we use again the second equality of (2.49) rewritten as

$$(e^v_c)^{2n\pm1}_{2j+1} \ = \ \frac{(e^v_c)^{2n+1}_{2j+1} + (e^v_c)^{2n-1}_{2j+1}}{2} \mp \frac{\Delta t}{2h}\left((e^u_c)^{2n}_{2j+2} - (e^u_c)^{2n}_{2j}\right),$$

which leads to

$$\|(e^v_{c,h})^{2n\pm1}\|^2 \ \leq \ 2\,\|\frac{(e^v_{c,h})^{2n-1} + (e^v_{c,h})^{2n+1}}{2}\|^2 + 2\alpha^2\,\|(e^u_{c,h})^{2n}\|^2.$$

Finally, (A.8) is a direct consequence of (A.12) and (A.13).

Using similar techniques we can show that

$$\begin{aligned} &\|(e^u_{f,h})^k\|^2_u + \|(e^v_{f,h})^{k+\frac{1}{2}}\|^2_v + \|(e^v_{f,h})^{k-\frac{1}{2}}\|^2_v \ \leq \\ &\mathcal{C}(1-\alpha^2)^{-1}\left(\mathcal{E}^k_f + \Delta t^2\|(\eta^v_{f,h})^k\|^2_v - h < (\eta^v_{f,h})^k, sh^1_{f,u}(e^u_{f,h})^k - (e^u_{f,h})^k >_v\right), \end{aligned} \tag{A.14}$$

which gives (A.9) for $k = 2n$.

Taking $k = 2n+1$ in the last inequality allows us to obtain a bound for $\|(e^u_{f,h})^{2n+1}\|^2_u$ in terms of $\mathcal{E}^{2n+1}_f$ but not in terms of $\mathcal{E}^{2n}_f$ and $\mathcal{E}^{2n+2}_f$ (the energies that satisfy the estimate (A.7)).

In order to do so, we use the first equality of (2.50) for $j \geq 1$ to obtain

$$|(e^u_f)^{2n+1}_j| \quad \leq \quad |(e^u_f)^{2n}_j| + \alpha \left(|(e^v_f)^{2n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}}| + |(e^v_f)^{2n+\frac{1}{2}}_{j-\frac{1}{2}}| \right) + \Delta t |(\eta^u_f)^{2n+\frac{1}{2}}_j|,$$

and then using $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ we deduce

$$\|(e^u_{f,h})^{2n+1}\|^2_{u,*} \quad \leq \quad \mathcal{C} \left(\|(e^u_{f,h})^{2n}\|^2_u + \|(e^v_{f,h})^{2n+\frac{1}{2}}\|^2_v + \Delta t^2 \|(\eta^u_{f,h})^{2n+\frac{1}{2}}\|^2_{u,*} \right).$$

To conclude, we use the first two equations of (2.51) (we recall that the right hand sides are zero) to obtain

$$(e^u_f)^{2n+1}_0 \quad = \quad \frac{(e^u_f)^{2n+2}_0 + (e^u_f)^{2n}_0}{2} + \alpha \left((e^v_f)^{2n+\frac{3}{2}}_{\frac{1}{2}} - (e^v_f)^{2n+\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} \right),$$

which implies (using the two last expressions)

$$\begin{aligned} \|(e^u_{f,h})^{2n+1}\|^2_u \quad \leq \quad & \mathcal{C} \Big(\|(e^u_{f,h})^{2n}\|^2_u + \|(e^u_{f,h})^{2n+2}\|^2_u + \|(e^v_{f,h})^{2n+\frac{1}{2}}\|^2_v + \\ & \|(e^v_{f,h})^{2n+\frac{3}{2}}\|^2_v + \Delta t^2 \|(\eta^u_{f,h})^{2n+\frac{1}{2}}\|^2_{u,*} \Big). \end{aligned}$$

Finally, (A.10) is obtained using (A.9) in the last inequality. □

Using this lemma we are able to estimate the norm of the error over the time intervale $I_{2n+1} = [t^{2n}, t^{2n+2}]$ (we recall that this norm has been introduced in (2.71)). Adding the inequalities ((A.8),(A.9)) using two consecutif time steps and (A.10) (and applying the lemma A.0.1) we obtain

$$\begin{aligned} \|e^{u,h}\|^2_{h,I_{2n+1}} + \|e^{v,h}\|^2_{h,I_{2n+1}} \quad \leq \quad & \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1} \left(\mathcal{E}^{2n} + \mathcal{E}^{2n+2} + \Delta t^2 \|(u,v)\|^2_E h^4 + \right. \\ & \left. h^3 \|(u,v)\|_E \|e^{u,h}\|_{\infty,2,T} \right). \end{aligned}$$

Then we use (A.7) in this last inequality which leads to

$$\begin{aligned} \|e^{u,h}\|^2_{h,I_{2n+1}} + \|e^{v,h}\|^2_{h,I_{2n+1}} \quad \leq \quad & \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1}(1+T)\|(u,v)\|_E h^2 \left(\|e^{u,h}\|_{\infty,2,T} + \|e^{v,h}\|_{\infty,2,T} \right) + \\ & \mathcal{C}\ (1-\alpha^2)^{-1} h^4 \|(u,v)\|^2_E. \end{aligned}$$

Therefore, taking the supremum over $t^{2n+2} \leq T$ and applying Young's inequality we conclude the proof of the proposition 2.5.1.

Annexe B

Implémentation du Raffinement de Maillage Spatio-Temporel $(q_c - q_f)$ avec multiplicateur de Lagrange

Sommaire

Dans cette annexe on présente comment programmer les techniques de raffinement de maillage spatio-temporel présentées dans la partie I. Pour chacune des deux méthodes, la méthode conservative initiale et la méthode obtenue avec un post-traitement, on expliquera comment organiser les calculs, comment calculer le multiplicateur de Lagrange qui permet d'effectuer le couplage et finalement comment obtenir la matrice de couplage.

B.1 Pour la Méthode Conservative Initiale

On rappelle que notre objectif est de calculer toutes les inconnues

$$\Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}}, \quad V_l^{\frac{2k+1}{2q_l}}, \quad J_l^{\frac{2k+1}{2q_l}}, \quad k \in \{0, \ldots, q_l - 1\},\ l \in \{c, f\},$$

solution du système (3.1)–(3.7) en supposant que toutes les inconnues jusqu'au temps t^n ont été préalablement calculées.

B.1.1 Organisation des Calculs

Dans la pratique, en utilisant le caractère linéaire des équations, on effectuera ce calcul en quatre étapes :

– **Étape 1 :** On commence par calculer

$$\widetilde{\Sigma}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}}, \quad \widetilde{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}, \quad k \in \{0, \ldots, q_l - 1\},\ l \in \{c, f\},$$

solution du problème sans multiplicateur

$$\text{(B.1)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcl} M_{v,l} \dfrac{\widetilde{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} - \widetilde{V}_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}}}{\Delta t_l} & - & D_l\, \widetilde{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}} & = & F_l^{n+\frac{k}{q_l}}, \\ M_{\sigma,l} \dfrac{\widetilde{\Sigma}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} - \widetilde{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}}}{\Delta t_l} & + & D_l^*\, \widetilde{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} & = & 0, \end{array} \right.$$

avec les données initiales

$$\widetilde{\Sigma}_l^n = \Sigma_l^n, \qquad \widetilde{V}_l^{n-\frac{1}{2q_l}} = V_l^{n-\frac{1}{2q_l}}, \qquad l \in \{c, f\}.$$

– **Étape 2 :** On calcule le vecteur

$$\text{(B.2)} \qquad b^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{l\in\{c,f\}} \sum_{k=0}^{q_l-1} C_l \frac{\widetilde{\Sigma}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} + \widetilde{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}}}{2q_l},$$

et on obtient le multiplicateur de Lagrange $J^{n+\frac{1}{2}}$ solution du problème

$$\mathcal{M}(\Delta t) J^{n+\frac{1}{2}} = b^{n+\frac{1}{2}},$$

où la matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ est donnée par l'expression (3.14). La preuve que le vecteur $b^{n+\frac{1}{2}}$ coïncide avec le second membre de l'équation (3.13) est similaire à celle du lemme (3.2.1).

– **Étape 3 :** On obtient

$$\widehat{\Sigma}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}}, \quad \widehat{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}, \quad k \in \{0, \ldots, q_l - 1\},\ l \in \{c, f\},$$

solution du problème

$$\text{(B.3)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcl} M_{v,l} \dfrac{\widehat{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} - \widehat{V}_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}}}{\Delta t_l} & - & D_l\, \widehat{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}} & = & 0, \\ M_{\sigma,l} \dfrac{\widehat{\Sigma}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} - \widehat{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}}}{\Delta t_l} & + & D_l^*\, \widehat{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} & = & C_l^*\, J^{n+\frac{1}{2}}, \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales nulles

$$\widehat{\Sigma}_l^n = 0, \qquad \widehat{V}_l^{n-\frac{1}{2q_l}} = 0, \qquad l \in \{c, f\}.$$

– **Étape 4 :** Finalement, la solution du problème (3.1)–(3.7) est donnée par l'expression

$$\left. \begin{array}{rcrcl} \Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} & = & \widetilde{\Sigma}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}} & + & \widehat{\Sigma}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}}, \\ V_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} & = & \widetilde{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} & + & \widehat{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}}, \\ J_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}} & = & J^{n+\frac{1}{2}}, & & \end{array} \right| , \quad k \in \{0, \ldots, q_l - 1\},\ l \in \{c, f\}.$$

Remarque B.1.1 *On remarque que les inconnues volumiques sont calculées en résolvant deux sous-problèmes grâce à la linéarité des équations :*

- *Dans le premier calcul (étape 1) on a obtenu la solution du problème (3.1) en imposant une condition de type champ de vitesse nul sur l'interface artificielle Γ et les vraies conditions initiales. Ainsi, les systèmes posés sur le maillage fin et sur le maillage grossier sont totalement découplés.*
- *Ensuite (étape 3) on résout un problème similaire en considérant le multiplicateur comme un terme source avec les conditions initiales nulles. Grâce à la propriété de propagation numérique à vitesse finie on remarque que ce deuxième calcul peut être fait au voisinage de l'interface Γ et donc il ne sera pas très coûteux.*

B.1.2 Calcul de la Matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$

Dans la pratique on n'utilisera pas l'expression (3.14) pour obtenir la matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$. Avant d'entrer dans la boucle en temps, on utilisera le schéma intérieur pour son calcul. Supposons que le vecteur d'inconnues associées au multiplicateur de Lagrange J a N_J composantes. On notera alors par $J^i,\ i \in \{1,\dots,N_J\}$ le vecteur associé à la fonction de base qui vaut un dans le degré de liberté i et qui s'annule partout ailleurs. Alors, on s'intéresse à la résolution du problème suivant

$$\text{(B.4)} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\widehat{\Sigma}_l^{\frac{k+1}{q_l}}, \widehat{V}_l^{\frac{2k+1}{2q_l}}),\ k \in \{0,\dots,q_l-1\},\ l \in \{c,f\}, \text{ vérifiant} \\ \left\{ \begin{array}{rcrcl} M_{v,l}\dfrac{\widehat{V}_l^{\frac{2k+1}{2q_l}} - \widehat{V}_l^{\frac{2k-1}{2q_l}}}{\Delta t_l} & - & D_l\,\widehat{\Sigma}_l^{\frac{k}{q_l}} & = & 0, \\ M_{\sigma,l}\dfrac{\widehat{\Sigma}_l^{\frac{k+1}{q_l}} - \widehat{\Sigma}_l^{\frac{k}{q_l}}}{\Delta t_l} & + & D_l^*\,\widehat{V}_l^{\frac{2k+1}{2q_l}} & = & C_l^*\,J^i, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

avec des conditions initiales nulles

$$\widehat{\Sigma}_l^0 = 0, \qquad \widehat{V}_l^{-\frac{1}{2q_l}} = 0, \qquad l \in \{c,f\}.$$

On peut montrer que la matrice $\mathcal{M}(\Delta t)$ est donnée par l'expression suivante

$$\text{(B.5)} \qquad \{\mathcal{M}(\Delta t)\}_{i,j} = \left(\sum_{l\in\{c,f\}} \sum_{k=0}^{q_l-1} C_l \frac{\widehat{\Sigma}_l^{\frac{k+1}{q_l}} + \widehat{\Sigma}_l^{\frac{k}{q_l}}}{2q_l}, J^j \right), \qquad (i,j) \in \{1,\dots,N_J\}^2.$$

La preuve est similaire à celle du lemme (3.2.1). Dans la section suivante on détaillera le résultat dans le cas où le taux de raffinement est égal à deux.

Remarque B.1.2 *Encore une fois, la vitesse de propagation finie des ondes numériques fait que les calculs dans (B.4) peuvent se faire très localement (autour du support de la fonction de base associée au vecteur J^i) et donc le coût sera négligeable par rapport au coût totale de l'expérience numérique.*

B.1.3 Une Vérification dans le cas $(q_c, q_f) = (1, 2)$

Dans cette section on montrera dans le cas particulier où $(q_c, q_f) = (1, 2)$ que les matrices obtenues avec les expressions (3.14) et (B.5) coïncident. Dans ce cas, la définition (3.14) nous donne

$$\mathcal{M}(\Delta t) := \frac{\Delta t_c}{2} C_c (M_{\sigma,c})^{-1} C_c^* + \Delta t_f C_f (M_{\sigma,f})^{-1} N_f(\Delta t_f)(M_{\sigma,f})^{-1} C_f^*,$$

où

$$N_f(\Delta t_f) \quad = \quad M_{\sigma,f} - \frac{\Delta t_f^2}{4} D_f^*(M_{v,f})^{-1} D_f.$$

De l'autre coté, la définition (B.5) nous dit que cette matrice est celle qui est associée à l'opérateur $\mathbb{M}$

$$J \quad \mapsto \quad \mathbb{M}(J) = C_c \, \frac{\widehat{\Sigma}_c^0 + \widehat{\Sigma}_c^1}{2} \; + \; C_f \, \frac{\widehat{\Sigma}_f^0 + 2\widehat{\Sigma}_f^{\frac{1}{2}} + \widehat{\Sigma}_f^1}{4},$$

avec $\widehat{\Sigma}_c^0, \widehat{\Sigma}_c^1, \widehat{\Sigma}_f^0, \widehat{\Sigma}_f^{\frac{1}{2}}$ et $\widehat{\Sigma}_f^1$ la solution du problème (B.4) avec conditions initiales nulles et où on a remplacé J^i par J. Un simple calcul en utilisant les équations (B.4) montre que

$$\left|\begin{array}{rcl}
\widehat{\Sigma}_c^0 & = & 0, \qquad \widehat{\Sigma}_f^0 \;=\; 0, \\
\widehat{\Sigma}_c^1 & = & \Delta t_c (M_{\sigma,c})^{-1} C_c^* J, \\
\widehat{\Sigma}_f^{\frac{1}{2}} & = & \Delta t_f (M_{\sigma,f})^{-1} C_f^* J, \\
\widehat{\Sigma}_f^1 & = & \widehat{\Sigma}_f^{\frac{1}{2}} \; - \; \Delta t_f (M_{\sigma,f})^{-1} \, D_f^* \, V_f^{\frac{3}{4}} \; + \; \Delta t_f (M_{\sigma,f})^{-1} \, C_f^* \, J \\
 & = & 2\Delta t_f (M_{\sigma,f})^{-1} C_f^* J \; - \; \Delta t_f^3 (M_{\sigma,f})^{-1} \, D_f^* \, (M_{v,f})^{-1} \, D_f \, (M_{\sigma,f})^{-1} \, C_f^* \, J,
\end{array}\right.$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(J) \quad = \quad & \Bigg[\frac{\Delta t_c}{2} C_c \, (M_{\sigma,c})^{-1} C_c^* + \\
& \Delta t_f C_f \left[(M_{\sigma,f})^{-1} - \frac{\Delta t_f^2}{4} (M_{\sigma,f})^{-1} D_f^* (M_{v,f})^{-1} D_f (M_{\sigma,f})^{-1} \right] C_f^* \Bigg] J \\
= \quad & \left[\frac{\Delta t_c}{2} C_c (M_{\sigma,c})^{-1} C_c^* + \Delta t_f C_f (M_{\sigma,f})^{-1} N_f(\Delta t_f) (M_{\sigma,f})^{-1} C_f^* \right] J,
\end{aligned}$$

comme on voulait montrer. Des calculs très similaires montrent que le vecteur $b^{n+\frac{1}{2}}$ défini par (B.2) coïncide avec le second membre de l'expression (3.13).

B.2 Pour la Nouvelle Méthode

Lorsqu'on utilise la nouvelle méthode on s'intéresse à calculer les inconnues

$$\overline{\Sigma}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}-\frac{1}{2}}, \quad \overline{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}}, \quad \overline{J}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}}, \quad k \in \{0, \ldots, q_l - 1\}, \; l \in \{c, f\},$$

solution du système (4.7)–(4.8) en supposant que toutes les inconnues jusqu'au temps $t^{n-\frac{1}{2}}$ ont été calculées précédemment.

B.2.1 Organisation des Calculs

En suivant la même démarche que pour la méthode conservative initiale et en utilisant le caractère linéaire des équations, on effectuera ce calcul en quatre étapes :

– **Étape 1 :** On obtient les valeurs

$$\widetilde{\Sigma}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}-\frac{1}{2}}, \quad \widetilde{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}}, \quad k \in \{0,\dots,q_l-1\},\ l \in \{c,f\},$$

solution du problème sans multiplicateur

$$\text{(B.6)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcl} M_{v,l}\dfrac{\widetilde{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} - \widetilde{V}_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_l} & - & D_l\,\widetilde{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}} & = & \overline{F}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}}, \\ M_{\sigma,l}\dfrac{\widetilde{\Sigma}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}-\frac{1}{2}} - \widetilde{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_l} & + & D_l^*\,\widetilde{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} & = & 0, \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales données par

$$\widetilde{\Sigma}_l^{n-\frac{1}{2}} = \overline{\Sigma}_l^{n-\frac{1}{2}}, \qquad \widetilde{V}_l^{n-\frac{1}{2q_l}-\frac{1}{2}} = \overline{V}_l^{n-\frac{1}{2q_l}-\frac{1}{2}}, \qquad l \in \{c,f\}.$$

– **Étape 2 :** Ensuite on calcule le vecteur

$$b^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{l\in\{c,f\}} C_l\,\widetilde{\Sigma}_l^{n+\frac{1}{2}},$$

et on obtient le multiplicateur de Lagrange $J^{n+\frac{1}{2}}$ solution du problème

$$\widetilde{\mathcal{M}}(\Delta t)J^{n+\frac{1}{2}} = b^{n+\frac{1}{2}},$$

où la matrice $\widetilde{\mathcal{M}}(\Delta t)$ sera calculée dans la section suivante.

– **Étape 3 :** On obtient

$$\widehat{\Sigma}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}-\frac{1}{2}}, \quad \widehat{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}}, \quad k \in \{0,\dots,q_l-1\},\ l \in \{c,f\},$$

solution du problème

$$\text{(B.7)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcl} M_{v,l}\dfrac{\widehat{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} - \widehat{V}_l^{n+\frac{2k-1}{2q_l}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_l} & - & D_l\,\widehat{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}} & = & 0, \\ M_{\sigma,l}\dfrac{\widehat{\Sigma}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}-\frac{1}{2}} - \widehat{\Sigma}_l^{n+\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_l} & + & D_l^*\,\widehat{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} & = & C_l^*\,\widehat{J}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}}, \end{array} \right.$$

où

$$\widehat{J}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{2k+1}{2q_l}\right)J^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2k+1}{2q_l}J^{n+\frac{1}{2}}, \quad k \in \{0,\dots,q_l-1\},\ l \in \{c,f\},$$

en prenant des conditions initiales nulles

$$\widehat{\Sigma}_l^{n-\frac{1}{2}} = 0, \qquad \widehat{V}_l^{n-\frac{1}{2q_l}-\frac{1}{2}} = 0, \qquad l \in \{c,f\}.$$

– **Étape 4 :** La solution du problème (4.7)–(4.8) est donnée par l'expression

$$\left. \begin{array}{rcrcl} \Sigma_l^{n+\frac{k+1}{q_l}-\frac{1}{2}} & = & \widetilde{\Sigma}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}-\frac{1}{2}} & + & \widehat{\Sigma}_l^{n+\frac{k+1}{q_l}-\frac{1}{2}}, \\ V_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} & = & \widetilde{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} & + & \widehat{V}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}}, \\ J_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} & = & \widehat{J}_l^{n+\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}}, & & \end{array} \right| \quad k \in \{0,\dots,q_l-1\},\ l \in \{c,f\}.$$

B.2.2 Calcul de la Matrice $\widetilde{\mathcal{M}}(\Delta t)$

De la même façon que pour la méthode conservative initiale, cette matrice sera construite avant d'entrer dans la boucle en temps et en utilisant le schéma intérieur. Notons par $J^i,\ i \in \{1,\dots,N_J\}$ le vecteur associé à la fonction de base qui vaut un dans le degré de liberté i et qui s'annule ailleurs. Alors, on résout le problème suivant

$$\text{(B.8)} \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\widehat{\Sigma}_l^{\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}}, \widehat{V}_l^{\frac{2k-1}{2q_l}-\frac{1}{2}}),\ k \in \{0,\dots,q_l-1\},\ l \in \{c,f\}, \text{ vérifiant} \\ \left\{ \begin{array}{rcrcl} M_{v,l}\dfrac{\widehat{V}_l^{\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} - \widehat{V}_l^{\frac{2k-1}{2q_l}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_l} & - & D_l\,\widehat{\Sigma}_l^{\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}} & = & 0, \\ M_{\sigma,l}\dfrac{\widehat{\Sigma}_l^{\frac{k+1}{q_l}-\frac{1}{2}} - \widehat{\Sigma}_l^{\frac{k}{q_l}-\frac{1}{2}}}{\Delta t_l} & + & D_l^*\,\widehat{V}_l^{\frac{2k+1}{2q_l}-\frac{1}{2}} & = & C_l^*\,\dfrac{2k+1}{2q_l}\,J^i, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales nulles

$$\widehat{\Sigma}_l^{-\frac{1}{2}} = 0, \qquad \widehat{V}_l^{-\frac{1}{2q_l}-\frac{1}{2}} = 0, \qquad l \in \{c,f\}.$$

La matrice de couplage $\widetilde{\mathcal{M}}(\Delta t)$ est alors définie par

$$\left\{\widetilde{\mathcal{M}}(\Delta t)\right\}_{i,j} = \left(\sum_{l\in\{c,f\}} C_l\,\widehat{\Sigma}_l^{\frac{1}{2}}, J^j \right), \qquad (i,j) \in \{1,\dots,N_J\}^2.$$

Le calcul fait dans (B.8) peut être fait localement grâce à la propagation à vitesse finie des ondes numériques.

Bibliographie

[1] G. P. ASTRAHANCEV, *The method of fictitious domains for a second order elliptic equation with natural boundary conditions*, vZ. Vyvcisl. Mat. i Mat. Fiz., 18 (1978), pp. 118–125, 269.

[2] C. ATAMIAN AND P. JOLY, *Une analyse de la méthode des domaines fictifs pour le problème de Helmholtz extérieur*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., 27 (1993), pp. 251–288.

[3] I. BABUVSKA, *The finite element method with Lagrangian multipliers*, Numer. Math., 20 (1972/73), pp. 179–192.

[4] A. BAMBERGER, R. GLOWINSKI, AND Q. H. TRAN, *A domain decomposition method for the acoustic wave equation with discontinuous coefficients and grid change*, SIAM J. Numer. Anal., 34 (1997), pp. 603–639.

[5] E. BÉCACHE, A. CHAIGNE, G. DERVEAUX, AND P. JOLY, *Time-domain simulation of a guitar i : Model and method*, Submitted, (2003).

[6] E. BÉCACHE, A. EZZIANI, AND P. JOLY, *A mixed finite element approach for viscoelastic wave propagation*, Computational Geosciences, (to appear).

[7] E. BÉCACHE, S. FAUQUEUX, AND P. JOLY, *Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves*, J. Comput. Phys., 188 (2003), pp. 399–433.

[8] E. BÉCACHE, P. JOLY, AND J. RODRÍGUEZ, *Space-time mesh refinement for elastodynamics. numerical results*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 194 (2005), pp. 355–366.

[9] E. BÉCACHE, P. JOLY, AND G. SCARELLA, *A fictitious domain method for unilateral contact problems in non-destructive testing*, in Computational fluid and solid mechanics, Vol. 1, 2 (Cambridge, MA, 2001), Elsevier, Amsterdam, 2001, pp. 65–67.

[10] E. BÉCACHE, P. JOLY, AND C. TSOGKA, *Éléments finis mixtes et condensation de masse en élastodynamique linéaire. I. Construction*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 325 (1997), pp. 545–550.

[11] E. BÉCACHE, P. JOLY, AND C. TSOGKA, *Mixed finite elements, strong symmetry and mass lumping for elastic waves*, Tech. Rep. 3717, INRIA, 1999.

[12] ——, *An analysis of new mixed finite elements for the approximation of wave propagation problems*, SIAM J. Numer. Anal., 37 (2000), pp. 1053–1084 (electronic).

[13] ——, *Fictitious domains, mixed finite elements and perfectly matched layers for 2-D elastic wave propagation*, J. Comput. Acoust., 9 (2001), pp. 1175–1201. Ultrasonic field synthesis and modeling (Trieste, 1999).

[14] ——, *A new family of mixed finite elements for the linear elastodynamic problem*, SIAM J. Numer. Anal., 39 (2002), pp. 2109–2132 (electronic).

[15] F. BEN BELGACEM, *The mortar finite element method with Lagrange multipliers*, Numer. Math., 84 (1999), pp. 173–197.

[16] F. BEN BELGACEM, A. BUFFA, AND Y. MADAY, *The mortar finite element method for 3D Maxwell equations : first results*, SIAM J. Numer. Anal., 39 (2001), pp. 880–901 (electronic).

[17] A. BERGER, R. SCOTT, AND G. STRANG, *Approximate boundary conditions in the finite element method*, in Symposia Mathematica, Vol. X (Convegno di Analisi Numerica, INDAM, Rome, 1972), Academic Press, London, 1972, pp. 295–313.

[18] M. J. BERGER, *Stability of interfaces with mesh refinement*, Math. Comp., 45 (1985), pp. 301–318.

[19] ——, *On conservation at grid interfaces*, SIAM J. Numer. Anal., 24 (1987), pp. 967–984.

[20] M. J. BERGER AND P. COLELLA, *Local adaptative mesh refinement for shock hydrodynamics*, J. Comput. Phys., 82 (1989), pp. 64–84.

[21] M. J. BERGER AND R. J. LEVEQUE, *Adaptive mesh refinement using wave-propagation algorithms for hyperbolic systems*, SIAM J. Numer. Anal., 35 (1998), pp. 2298–2316 (electronic).

[22] M. J. BERGER AND J. OLIGER, *Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations*, J. Comput. Phys., 53 (1984), pp. 484–512.

[23] C. BERNARDI, Y. MADAY, AND A. T. PATERA, *A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method*, in Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. XI (Paris, 1989–1991), vol. 299 of Pitman Res. Notes Math. Ser., Longman Sci. Tech., Harlow, 1994, pp. 13–51.

[24] F. BREZZI, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers*, Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge, 8 (1974), pp. 129–151.

[25] F. BREZZI AND M. FORTIN, *Mixed and hybrid finite element methods*, vol. 15 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991.

[26] A. BUFFA AND P. CIARLET, JR., *On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. I. An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra*, Math. Methods Appl. Sci., 24 (2001), pp. 9–30.

[27] M. W. CHEVALIER AND R. J. LUEBBERS, *FDTD local grid with material traverse*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 45 (1997), pp. 411–421.

[28] P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, vol. 40 of Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002.

[29] G. COHEN AND S. FAUQUEUX, *Mixed finite elements with mass-lumping for the transient wave equation*, J. Comput. Acoust., 8 (2000), pp. 171–188. Finite elements for wave problems (Trieste, 1999).

[30] G. COHEN AND S. FAUQUEUX, *Mixed Spectral Finite Elements for the Linear Elasticity System in Unbounded Domains*, SIAM J. Sci. Comput., (To appear).

[31] G. COHEN AND P. JOLY, *Construction analysis of fourth-order finite difference schemes for the acoustic wave equation in nonhomogeneous media*, SIAM J. Numer. Anal., 33 (1996), pp. 1266–1302.

[32] G. COHEN, P. JOLY, J. E. ROBERTS, AND N. TORDJMAN, *Higher order triangular finite elements with mass lumping for the wave equation*, SIAM J. Numer. Anal., 38 (2001), pp. 2047–2078 (electronic).

[33] G. COHEN AND P. MONK, *Gauss point mass lumping schemes for Maxwell's equations*, Numer. Methods Partial Differential Equations, 14 (1998), pp. 63–88.

[34] G. C. COHEN, *Higher-order numerical methods for transient wave equations*, Scientific Computation, Springer-Verlag, Berlin, 2002. With a foreword by R. Glowinski.

[35] F. COLLINO, T. FOUQUET, AND P. JOLY, *Analyse numérique d'une méthode de raffinement de maillage espace-temps pour l'équation des ondes*, Tech. Rep. 3474, INRIA, 1998.

[36] ——, *Une méthode de raffinement de maillage espace-temps pour le système de Maxwell en dimension un*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 328 (1999), pp. 263–268.

[37] F. COLLINO, T. FOUQUET, AND P. JOLY, *A conservative space-time mesh refinement method for the 1-D wave equation. I. Construction*, Numer. Math., 95 (2003), pp. 197–221.

[38] ——, *A conservative space-time mesh refinement method for the 1-D wave equation. II. Analysis*, Numer. Math., 95 (2003), pp. 223–251.

[39] F. COLLINO, T. FOUQUET, AND P. JOLY, *Conservative space time mesh refinement methods for the fdtd solution of maxwell's equations*, Submitted, (2004).

[40] F. COLLINO, P. JOLY, AND F. MILLOT, *Fictitious domain method for unsteady problems : application to electromagnetic scattering*, J. Comput. Phys., 138 (1997), pp. 907–938.

[41] F. COLLINO AND C. TSOGKA, *Application of the pml absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media*, Geophysics, 66 (2001), pp. 294–307.

[42] G. DERVEAUX, *Modélisation numérique de la guitare acoustique*, PhD thesis, École Polytechnique, 2002.

[43] J. DIAZ, *Approches analytiques et numériques de problèmes de transmission en propagation d'ondes en régime transitoire. Application au couplage fluide-structure et aux méthodes de couches parfaitement adaptées*, PhD thesis, Université Paris 6, 2005.

[44] T. DUPONT, *L^2-estimates for Galerkin methods for second order hyperbolic equations*, SIAM J. Numer. Anal., 10 (1973), pp. 880–889.

[45] S. FAUQUEUX, *Élements finis spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d'ondes élastiques en régime transitoire*, PhD thesis, Université de Dauphine, Paris, 2003.

[46] T. FOUQUET, *Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de Maxwell*, PhD thesis, Université Paris IX Dauphine, June 2000.

[47] M. J. GANDER, L. HALPERN, AND F. NATAF, *Optimal Schwarz waveform relaxation for the one dimensional wave equation*, SIAM J. Numer. Anal., 41 (2003), pp. 1643–1681 (electronic).

[48] S. GARCÉS, *Application des méthodes de domaines fictifs à la modélisation des structures rayonnantes tridimensionnelles*, PhD thesis, ENSAE, 1998.

[49] T. GEVECI, *On the application of mixed finite element methods to the wave equations*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., 22 (1988), pp. 243–250.

[50] V. GIRAULT AND R. GLOWINSKI, *Error analysis of a fictitious domain method applied to a Dirichlet problem*, Japan J. Indust. Appl. Math., 12 (1995), pp. 487–514.

[51] R. GLOWINSKI, T.-W. PAN, AND J. PÉRIAUX, *A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 111 (1994), pp. 283–303.

[52] ——, *A fictitious domain method for external incompressible viscous flow modeled by Navier-Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 112 (1994), pp. 133–148. Finite element methods in large-scale computational fluid dynamics (Minneapolis, MN, 1992).

[53] ——, *A Lagrange multiplier/fictitious domain method for the Dirichlet problem—generalization to some flow problems*, Japan J. Indust. Appl. Math., 12 (1995), pp. 87–108.

[54] P. GRISVARD, *Problèmes aux limites dans les polygones. Mode d'emploi*, EDF.

[55] B. GUSTAFSSON, H.-O. KREISS, AND A. SUNDSTRÖM, *Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems. II*, Math. Comp., 26 (1972), pp. 649–686.

[56] P. JOLY, *Variational methods for time-dependent wave propagation problems*, in Topics in Computational Wave Propagation. Direct and Inverse Problems., vol. 31 of Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer, 2003, pp. 201–264.

[57] P. JOLY AND L. RHAOUTI, *Domaines fictifs, éléments finis* $\mathrm{H}(\mathrm{div})$ *et condition de Neumann : le problème de la condition inf-sup*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 328 (1999), pp. 1225–1230.

[58] P. JOLY AND J. RODRÍGUEZ, *An error analysis of conservative space-time mesh refinement methods for the 1d wave equation*, Submitted, (2004).

[59] I. S. KIM AND W. J. R. HOEFER, *A local mesh refinement algorithm for the time-domain finite-difference method to solve maxwell's equations*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 38 (1990), pp. 812–815.

[60] H.-O. KREISS, *Stability theory for difference approximations of mixed initial boundary value problems. I*, Math. Comp., 22 (1968), pp. 703–714.

[61] K. S. KUNZ AND L. SIMPSON, *A technique for increasing the resolution of finite-difference solutions to the maxwell equations*, IEEE Trans. Electromagn. Compat., EMC-23 (1981), pp. 419–422.

[62] J. LIONS AND E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, 1968.

[63] C. G. MAKRIDAKIS, *On mixed finite element methods for linear elastodynamics*, Numer. Math., 61 (1992), pp. 235–260.

[64] R. MANFRIN AND F. TONIN, *On the Gevrey regularity for weakly hyperbolic equations with space-time degeneration of Oleinik type*, Rend. Mat. Appl. (7), 16 (1996), pp. 203–231.

[65] P. MONK, *Analysis of a finite element method for maxwell's equations*, SIAM J. Numer. Anal., 29 (1992), pp. 714–729.

[66] P. MONK, *Sub-gridding FDTD schemes*, ACES Journal, 11 (1996), pp. 37–46.

[67] P. MONK AND O. VACUS, *Error estimates for a numerical scheme for ferromagnetic problems*, SIAM J. Numer. Anal., 36 (1999), pp. 696–718.

[68] J.-C. NÉDÉLEC, *A new family of mixed finite elements in* $\mathbf{R}^3$, Numer. Math., 50 (1986), pp. 57–81.

[69] S. OSHER AND R. SANDERS, *Numerical approximations to nonlinear conservation laws with locally varying time and space grids*, Math. Comp., 41 (1983), pp. 321–336.

[70] P. G. PETROPOULOS, *Fourth-order accurate staggered finite difference schemes for the time-dependent Maxwell equations*, in Ordinary and partial differential equations, Vol. V (Dundee, 1996), vol. 370 of Pitman Res. Notes Math. Ser., Longman, Harlow, 1997, pp. 85–107.

[71] S. PIPERNO, *Schémas en éléments finis discontinus localement raffinés en espace et en temps pour les équations de maxwell 1d*, Tech. Rep. RR-4986, INRIA, 2003.

[72] D. T. PRESCOTT AND N. V. SHULEY, *A method for incorporating different sized cells into the finite-difference time-domain analysis technique*, IEEE Microwave Guided Wave Lett., 2 (1992), pp. 434–436.

[73] P.-A. RAVIART AND J. M. THOMAS, *A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems*, in Mathematical aspects of finite element methods (Proc. Conf., Consiglio Naz. delle Ricerche (C.N.R.), Rome, 1975), Springer, Berlin, 1977, pp. 292–315. Lecture Notes in Math., Vol. 606.

[74] L. RHAOUTI, *Domaines fictifs pour la modélisation d'un problème d'interaction fluide-structure : Simulation de la timbale*, PhD thesis, Paris Dauphine, 1999.

[75] J. E. ROBERTS AND J.-M. THOMAS, *Mixed and hybrid methods*, in Handbook of numerical analysis, Vol. II, Handb. Numer. Anal., II, North-Holland, Amsterdam, 1991, pp. 523–639.

[76] J. RODRÍGUEZ, *Une nouvelle méthode de raffinement de maillage spatio-temporel pour l'équation des ondes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 339 (2004).

[77] G. SCARELLA, *Étude théorique et numérique de la propagation d'ondes en présence de contact unilatéral dans un milieu fissuré*, PhD thesis, Univ. Paris IX, 2004.

[78] A. TAFLOVE, *Computational electrodynamics*, Artech House Inc., Boston, MA, 1995. The finite-difference time-domain method, With contributions by Stephen D. Gedney, Faiza S. Lansing, Thomas G. Jurgens, Gregory W. Saewert, Melinda J. Piket-May, Eric T. Thiele and Stephen T. Barnard.

[79] N. TORDJMAN, *Eléments finis d'ordre élevé avec condensation de masse pour l'équation des ondes*, PhD thesis, Univ. Paris IX, 1995.

[80] C. TSOGKA, *Modélisation mathématique et numérique de la propagation des ondes élastiques tridimensionnelles dans des millieux fissurés*, PhD thesis, Univ. Paris IX, 2000.

[81] B. I. WOHLMUTH, *A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier*, SIAM J. Numer. Anal., 38 (2000), pp. 989–1012 (electronic).

[82] Z. XIE, C.-H. CHAN, AND B. ZHANG, *An explicit fourth-order staggered finite-difference time-domain method for Maxwell's equations*, J. Comput. Appl. Math., 147 (2002), pp. 75–98.

[83] K. YEE, *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media*, IEEE Trans. on Antennas and propagation, (1966), pp. 302–307.

[84] A. YEFET AND P. G. PETROPOULOS, *A staggered fourth-order accurate explicit finite differences scheme for the time-domain Maxwell's equations*, J. Comput. Phys., 168 (2001), pp. 286–315.

[85] A. R. ZAKHARIAN, M. BRIO, AND J. V. MOLONEY, *Fdtd based second-order accurate local mesh refinement method for maxwell's equations in two space dimensions*, Comm. Math. Sci., 2 (2004), pp. 497–513.

Résumé

Cette thèse porte sur la simulation de la propagation et diffraction d'ondes dans un milieu élastique anisotrope hétérogène fissuré à l'aide de méthodes numériques explicites. L'objectif est de développer une méthode numérique performante capable de prendre en compte les détails géométriques ou singularités de la solution de manière précise. Les deux premières parties sont consacrées à des méthodes de raffinement de maillage spatio-temporel. Adapter le pas de temps localement au pas d'espace permet en même temps de diminuer la dispersion numérique dans la grille grossière et de gagner en temps de calcul. Les méthodes proposées sont conservatives, ce qui garantit la stabilité des schémas numériques. La géométrie des fissures est prise en compte par la méthode des domaines fictifs. La troisième partie présente un nouvel élément fini qui garantit la convergence de cette méthode. La dernière partie décrit le couplage entre les techniques de raffinement et la méthode de domaines fictifs.

Mots clés : raffinement de maillage, pas de temps local, stabilité, conservation d'énergie, domaines fictifs, éléments finis mixtes, estimation d'erreur, propagation et diffraction d'ondes, élastodynamique linéaire.

Abstract

This work deals with the simulation of wave scattering in elastic, anisotropic and heterogeneous media with cracks using explicit schemes. Our goal is the development of an efficient numerical method to capture the geometrical details or the singularities of the solution in an accurate way. In the first two parts we present space-time mesh refinement methods. Adapting the time step locally to the spatial discretization allows us to diminish the CPU time and the numerical dispersion on the coarse grid. These methods are conservative, a property that ensures the stability of the numerical scheme. The cracks are taken into account using the fictitious domain method. In the third part of this work we present a new mixed finite element that ensures the convergence of this method. Finally, the last part describes the coupling between conservative space-time mesh refinement techniques and the fictitious domain method.

Key words : mesh refinement, local time stepping, stability, energy conservation, fictitious domain method, mixed finite elements, error estimates, wave propagation problems, linear elastodynamics.