Autour des déformations de Rankin-Cohen.

Yi-Jun Yao

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

YAO Yi-Jun

pour obtenir

le grade de : Docteur de l'École Polytechnique

Spécialité : Mathématiques

AUTOUR DES DÉFORMATIONS DE RANKIN-COHEN

Thèse présentée le 31 janvier 2007 devant la commission d'examen :

Jean-Pierre	BOURGUINON	Président du jury
Henri	COHEN	Rapporteur
Paula	COHEN	Rapportrice(absente)
Alain	CONNES	Directeur de thèse
Henri	MOSCOVICI	Rapporteur (absent)
Pierre	PANSU	Examinateur
Georges	SKANDALIS	Examinateur

A mes parents

Remerciements

Mes remerciements vont d'abord naturellement à mon directeur de thèse, *Alain CONNES*. Sept ans durant, j'ai pu bénéficié de son énormé savoir mathématique et ses encouragements constants. Même si je suis toujours stressé devant lui au point d'avoir oublié (presque) chaque fois certains des questions que je souhaitais lui poser, et que certaines de ses instructions étaient “difficiles à digérér” au début, le temps prouve leur valeur et je lui en suis très reconnaissant.

Je dois aussi un grand merci à *Jean Pierre BOURGUIGNON*, qui fut d'abord mon tuteur à l'Ecole, peu après mon arrivé. C'est lui qui m'a dirigé vers Alain ; et tout au long de ces années il m'a toujours apporté son soutien. Ce qu'il m'a appris en mathématiques et dans la vie comptent beaucoup pour moi.

Merci à *Georges SKANDALIS* dont le soutien moral et scientifique m'a accompagné du début de ma thèse, jusqu'à la fin. Les mots me manquent pour remercier tout ce qu'il m'a appris et tout ce qu'il a fait pour moi.

Je remercie également *Henri COHEN*, *Henri MOSCOVICI* et *Paula COHEN* d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. La présence de Henri COHEN (dont le titre de la thèse porte son nom) dans le jury est un grand honneur pour moi. Je voudrais exprimer en particulier ma gratitude envers Henri MOSCOVICI, sans l'appui duquel ma collaboration avec P. Bieliavsky et X. Tang aurait probablement pas pu commencer.

Je souhaite remercier *Pierre PANSU* d'avoir accept de faire partie de mon jury, ainsi que tout ce que j'ai appris de lui pendant les trois ans de monitorat sous sa responsabilité à Orsay, .

Je remercie mes collaborateurs *Pierre BIELIAVSKY* et *TANG Xiang*, pour les discussions enrichissantes que nous avons eues ensembles. Je remercie également Frédéric PAUGAM, François MARTIN et Jean-Pierre LABESSE de m'avoir aidé sur un point important (Section III.1).

Je suis venu en France grâce à M. *LI Ta-Tsien*, à qui je dois, à lui aussi, d'un soutien constant. J'ai bénéficié également du soutien et de l'aide de M.*CHEN Xiaoman*. Je voudrais les remercier, ainsi que tous les professeurs que j'ai eus à l'Université de Fudan à Shanghai.

Pendant ces nombreuses (et parfois un peu longues) années en France, j'ai eu la chance et l'honneur de suivre des cours dispensés par des mathématiciens et physiciens, à l'Ecole où dans les universités parisiennes. Je tiens à remercier ici (dans l'ordre chronologique) *Jean-Louis BASDEVANT, Jean BARGE, François LAUDENBACH, Jean-Michel BONY, Jean LANNES, Gilles LEBEAU, Guennadi HENKIN, Christophe MARGERIN, Jean-Michel BISMUT, Don ZAGIER*, pour leur enseignement, leur soutien et leurs aide.

Merci au personnel du CMLS et de l'IHES qui m'ont fourni des environnements d'étude et de recherche excellents. Merci aussi à la DRE de Polytechnique et ses directeurs, Roland SENEOR

et Elisabeth CREPON, pour, entre autres, de m'avoir recruté et de financer l'impression de cette thèse.

Depuis des années, j'ai reçu un accueil très chaleureux de la part des membres du GdR "Algèbres d'Opérateurs et Géométrie Non Commutative". J'ai commencé à connaitre cette grande famille par un "séminaire des jeunes" où j'ai élargi beaucoup le cercle de mes connaissances grâce à l'organisation et la participation de *Stéphane VASSOUT, Frédric CADET, Roland VERGNIOUX, Benoît COLLINS, Franck LESIEUR, Kroum TZANEV*. Je voudrais également exprimer mes reconnaissances à tous les autres, en particulier, *Etienne BLANCHARD, Pierre-Yves LE GALL, Nicolas LOUVET*, et *Jean RENAULT*. Merci à Kroum, Etienne et Pierre-Yves de m'avoir aidé pendant la préparation de la soutenance.

Merci à mes camarades de la Promotion X1997, notamment *FU Baohua, Pascal GRANGE, JIANG Donghua, François BRUNAULT, Alice PATOU, SZABO Szilard, NGO Dac Tuan*. Merci aussi à *Dimitri PANOV, Herbert GANGL, Lorenzo RAMERO*. Tous m'ont aidé à un moment ou un autre.

Etant un étudiant chinois, j'ai eu l'occasion de parler de mathématiques et bien d'autres choses avec de nombreux mathématiciens d'origine chinoise, je suis particulièrement reconnaissant envers *YU Guoliang, YU Jiu-Kang, ZHANG Weiping*.

Je remercie en particulier *MA Xiaonan*, qui est pour moi comme un grand frère bien gentil. Je remercie également YE Dong, GE Yuxin, JIAO Ying, GONG Zheng, ZHOU Guodong, CHEN Huayi, ZHENG Cengbo, WANG Zhiren, pour les connaissances qu'ils ont partagées avec moi et pour leurs amitiés.

Merci aussi à tous mes amis en Chine, en France, ou ailleurs.

Cette thèse n'aurait jamais pu voir le jour sans le soutien constant de ma famille, surtout mes parents, qui ont fait beaucoup de sacrifice pour moi. Cette thèse leur est dédiée.

Introduction

Soit Γ un sous-groupe de congruence de $PSL(2,\mathbb{Z})$. Une forme modulaire de poids $2k$ est une fonction f qui satisfait aux conditions suivantes :

– (holomorphie) Elle est holomorphe sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$.

– (modularité) Pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ et $z \in \mathbb{H}$, $f\Big|_{2k}\gamma = f$, où

$$\left(f\Big|_{2k}\gamma\right)(z) = (cz+d)^{-2k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right), \tag{1}$$

(cela signifie l'invariance de la forme $f\,dz^k$).

– (condition de croissance au bord) On demande que $|f(z)|$ soit majorée par un polynôme en $\max\{1, \mathrm{Im}(z)^{-1}\}$.

On note $\mathcal{M}(\Gamma)$ l'algèbre graduée (par le poids) des formes modulaires par rapport à ce groupe.

Dans les années 50 Rankin a initié l'étude des opérateurs bi-différentiels sur $\mathcal{M}(\Gamma)$ produisant de nouvelles formes modulaires. Et, vingt ans plus tard Henri Cohen a donné une réponse complète (cf. [4]) en démontrant que tous ces opérateurs sont des combinaisons linéaires des crochets

$$[f,g]_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n+2k-1}{n-r}\binom{n+2l-1}{r} f^{(r)} g^{(n-r)} \in \mathcal{M}_{2k+2l+2n}(\Gamma), \tag{2}$$

où $f \in \mathcal{M}_{2k}$ et $g \in \mathcal{M}_{2l}$ sont deux formes modulaires, et $f^{(r)} = \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}\right)^r f$.

Ces crochets ont intéréssé plusieurs auteurs. En particulier, au début des années 90, P. Cohen, Yu. Manin et Don Zagier ont établi une propriété nouvelle des crochets de Rankin-Cohen : grâce à une correspondance bijective entre les formes modulaires et les opérateurs pseudo-différentiels formels invariants, ils montrent que la formule suivante (après extension linéaire) définit un produit associatif sur $\mathcal{M}(\Gamma)[[\hbar]]$: pour deux formes modulaires $f \in \mathcal{M}_{2k}$, $g \in \mathcal{M}_{2l}$,

$$\mu^{\kappa}(f,g) := \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{\kappa}(k,l)[f,g]_n, \tag{3}$$

où les coefficients $t_n^{\kappa}(k,l)$ sont définis par la formule :

$$t_n^\kappa(k,l) = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \sum_{j\geq 0} \binom{n}{2j} \frac{\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{\kappa-\frac{3}{2}}{j}\binom{\frac{1}{2}-\kappa}{j}}{\binom{-k-\frac{1}{2}}{j}\binom{-l-\frac{1}{2}}{j}\binom{n+k+l-\frac{3}{2}}{j}}. \tag{4}$$

On souligne ici que dans la démonstration de l'associativité, la preuve d'une certaine identité combinatoire n'était pas explicitée.

Inspirés par ce travail, Connes et Moscovici ont développé une théorie de crochets de Rankin-Cohen généralisés RC_n à l'aide de l'action d'une algèbre de Hopf canonique, notée $\mathcal{H}_1$, qui est une analogue quantique du groupe de difféomorphismes formel, sur l'algèbre de Hecke modulaire $\mathcal{A}(\Gamma)$ (où Γ est un sous-groupe de congruence du groupe modulaire), qui est le produit croisé de l'algèbre des formes modulaires avec l'anneau de Hecke (réduit ensuite par un projecteur). Ils utilisent la formulation de Zagier (cf. Section I.2) des crochets pour élucider le rôle d'un élément Ω dans l'agèbre $\mathcal{A}$ tel que

$$\delta_2'(a) = \Omega\, a - a\,\Omega\,,\ \forall a \in \mathcal{A} \tag{5}$$

où l'on suppose aussi $\delta_k(\Omega) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (et les δ_k sont des générateurs de $\mathcal{H}_1$, cf. Annexe A).

Plus généralement, Connes et Moscivici ont étudié la situation où l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$ agit sur une algèbre involutive $\mathcal{A}$ avec un tel élément Ω (ils appellent cela une *structure projective*). Leur théorème principal, qui utilise le résultat de Cohen-Manin-Zagier sur l'associativité des produits déformés pour avoir une théorie de déformation à la Rankin-Cohen, est le suivant :

Théorème. *Le foncteur RC_* appliqué à toute algèbre $\mathcal{A}$ munie d'une structure projective donne une famille de déformations formelles associatives de $\mathcal{A}$, dont les produits déformés sont donnés par*

$$f \star g = \sum RC_n(f,g)\hbar^n. \tag{6}$$

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux questions suivantes :

1. Y a-t-il d'autres interprétations pour ces crochets ?

2. Quelles sont les propriétés de ces déformations formelles ?

3. Donner une démonstration de l'identité combinatoire manquante.

Dans le Chapitre I on donne un exposé des théories existantes concernant ces crochets de Rankin-Cohen, notamment la présentation de Zagier (la notion d'algèbre de Rankin-Cohen canonique), et les travaux de Cohen-Manin-Zagier et d'Eholzer sur les produits déformés qui sont définis sur l'algèbre des séries formelles à coefficients dans les formes modulaires. A la fin on présente brièvement la théorie de Connes-Moscovici qui généralise celle de Cohen-Manin-Zagier à l'action de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$ sur l'algèbre de Hecke modulaire, puis à toute action de $\mathcal{H}_1$ munie d'une structure projective.

Le Chapitre II donne un point de vue assez différent par rapport à ceux décrits plus haut sur les produits déformés. Il s'agit d'une collaboration avec P.Bieliavsky et X.Tang, qui constitue une réponse à la Question 2. ci-dessus. On se place dans le contexte d'une variété symplectique et on utilise la théorie de quantification de Fedosov pour construire une réalisation des produits déformés à la Rankin-Cohen. Les étapes sont les suivantes :

1. D'abord on cherche à comprendre une version simplifiée de ces déformations, c'est à dire, les formules de déformations universelles pour l'algèbre de Lie résoluble de dimension 2, notée h_1. On établit l'équivalence entre ces déformations et le produit de Moyal sur le demi-plan, d'une part par un argument via la méthode des orbites (plus précisément un théorème de S.Gutt), et d'autre part par une formule explicite ; on obtient en particulier l'équivalence entre la Formule de Déformation Universelle(UFD) de Giaquinto-Zhang avec le même produit de Moyal.
2. Ensuite on construit, sur le demi-plan, un produit déformé pour l'algèbre de Weyl selon la méthode de Fedosov, et on retrouve la même relation de récurrence que Connes et Mosvocivi utilisent dans leur définition des crochets de Rankin-Cohen généralisés ; on parvient en plus à donner une interpretation géométrique de la projectivité de l'action de $\mathcal{H}_1$.
3. On démontre aussi, dans le cadre de l'action de $\mathcal{H}_1$, l'injectivité totale, qui implique l'associativité pour le produit sur $\mathcal{H}_1[[t]]$.
4. A la fin on remarque que jusqu'à l'ordre 2 il est possible d'avoir les conditions d'associativité encore valables sans l'hypothese de projectivité.

Le chapitre suivant (III) comprend deux parties : d'abord, on donne une interprétation des crochets de Rankin-Cohen à l'aide de la théorie de représentations de $SL_2(\mathbb{R})$. Le résultat principal* s'écrit sous la forme suivante : [1]

Théorème. *Soient $f \in \mathcal{M}_{2k}, g \in \mathcal{M}_{2l}$ deux formes modulaires. Soient $\pi_f \cong \pi_{\deg f}, \pi_g \cong \pi_{\deg g}$ les représentations associées qui sont des séries discrètes du groupe $SL_2(\mathbb{R})$. Le produit tensoriel de ces deux représentations se décompose en une somme directe des séries discrètes,*

$$\pi_f \otimes \pi_g = \bigoplus_{n=0} \pi_{\deg f + \deg g + 2n}. \tag{7}$$

Le crochet de Rankin-Cohen $[f,g]_n$ donne (à un scalaire près) les vecteurs de K-poids minimal dans l'espace de représentation de la composante $\pi_{\deg f+\deg g+2n}$.

Ces représentations sont construites de la façon suivante : soit $f \in \mathcal{M}_{2k}(\Gamma)$ une forme modulaire ; on lui associe une fonction $\sigma_{2k} f$ sur $\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{R})$ grâce à l'application suivante :

$$(\sigma_{2k}f)(g) = f_{|_k g}(i) = (ci+d)^{-2k} f\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right), \quad \text{pour } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}). \tag{8}$$

Cette fonction appartient à

$$C^\infty(\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{R}), 2k) = \{F \in C^\infty(\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{R})), F(gr_\theta) = \exp(i2k\theta)F(g)\}.$$

[1] Ce fait est certainement connu des spécialistes, comme le montre une remarque de Deligne en 1973(cf. ci-dessous Remarque 29), mais je n'ai pas pu trouvé une présentation détaillée et complète.

En tenant compte de l'action naturelle à droite de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $C^\infty(\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{R}))$:

$$(\pi(h)F)(g) = F(gh), \tag{9}$$

on obtient une représentation de $SL_2(\mathbb{R})$ et donc de l'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ en prenant le plus petit sous espace invariant qui contient l'orbite de $\sigma_{2k}f$. On démontre que cette représentation est une série discrète de poids $2k$. A la fin, on ramène les vecteurs de base de l'espace de représentation à un sous-espace de $C^\infty(\mathbb{H})$ en utilisant l'inverse des $\sigma_{2(k+n)}, n \geq 0$.

Puis, en utilisant cette interprétation issue de la théorie des représentations, nous étudions certaines propriétés des produits déformés. On obtient notamment les deux énoncés suivants :

Théorème. *Cohen-Manin-Zagier ont trouvé tous les produits déformés formels associatifs* $*$: $\tilde{\mathcal{M}}[[\hbar]] \times \tilde{\mathcal{M}}[[\hbar]] \to \tilde{\mathcal{M}}[[\hbar]]$ *définis par la linéarité et la formule*

$$f * g \quad = \quad \sum \frac{A_n(\deg f, \deg g)}{(\deg f)_n (\deg g)_n} [f,g]_n \hbar^n, \tag{10}$$

où $\tilde{\mathcal{M}}$ *est l'espace des fonctions qui satisfont la condition de modularité, et la notation* $(\alpha)_n := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$. *On demande en plus* $A_0 = 1$ *et* $A_1(x,y) = xy$.

Proposition. *Soit* Γ *un sous groupe de congruence de* $SL_2(\mathbb{Z})$ *tel que* $\mathcal{M}(\Gamma)$ *admet la propriété d'unique factorisation (par exemple* $SL_2(\mathbb{Z})$ *lui-même), soient* $F_1, F_2, G_1, G_2 \in \mathcal{M}(\Gamma)$ *telles que*

$$RC(F_1, G_1) = RC(F_2, G_2), \tag{11}$$

en tant que séries formelles dans $\mathcal{M}(\Gamma)[[\hbar]]$*, alors il existe une constante* C *telle que*

$$F_1 = CF_2, G_2 = CG_1. \tag{12}$$

A la fin de ce chapitre on donne une démonstration de l'associativité du produit d'Eholzer (celui que généralisent Connes et Moscovici).

Le Chapitre IV contient une réponse à la Question 3 : la démonstration (absente dans la littérature) de l'identité combinatoire annoncée dans l'article de Cohen-Manin-Zagier, qui est centrale pour l'associativité du produit déformé :

$$\frac{(-4)^n}{\binom{2x}{n}} \sum_{r+s=n} \frac{\binom{y}{r}\binom{y-a}{r}}{\binom{2y}{r}} \frac{\binom{z}{s}\binom{z+a}{s}}{\binom{2z}{s}} = \sum_{j\geq 0} \binom{n}{2j} \frac{\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{a-\frac{1}{2}}{j}\binom{-a-\frac{1}{2}}{j}}{\binom{x-\frac{1}{2}}{j}\binom{y-\frac{1}{2}}{j}\binom{z-\frac{1}{2}}{j}} \tag{13}$$

où $n \geq 0$ et les variables a, x, y, z satisfont $x + y + z = n - 1$.

Bien qu'il soit plausible qu'une telle identité résulte par exemple de propriétés des fonctions hypergéométriques, nous avons choisi d'en donner une démonstration directe, n'utilisant guère plus que les propriétés de base des coefficients binomiaux.

La stratégie de la démonstration consiste à spécialiser la variable a à des valeurs spécifiques $a \in \left\{k+\frac{1}{2}, -\left[\frac{n}{2}\right]-1 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right]\right\}$ (il y a donc un nombre supérieur à n de valeurs spécifiques de a, alors que les polynômes qui interviennent sont de degré au plus n en a), puis à procéder de la manière suivante :

– Réduction des deux côtés au même dénominateur, ce qui ramène à démontrer l'identité

$$\begin{aligned}
&(-4)^n \sum_{r=0}^{n} \binom{y}{r}\binom{y-a}{r}\binom{2y-r}{n-r}\binom{z}{n-r}\binom{z+a}{n-r}\binom{2z-n+r}{r}(r!(n-r)!)^2 \\
= \;& \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{((n-2j)!)^2(j!)^6 2^{6j}}{(2j)!}\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{a-\frac{1}{2}}{j}\binom{-a-\frac{1}{2}}{j} \\
& \binom{n-y-z-1}{j}\binom{2n-2y-2z-2-2j}{n-2j}\binom{y}{j}\binom{2y-2j}{n-2j}\binom{z}{j}\binom{2z-2j}{n-2j};
\end{aligned}$$

– Elimination d'un facteur commun à gauche et à droite ;
– Travail sur l'expression des termes obtenus à gauche pour d'abord démontrer la symétrie en $(y, z) \mapsto (z, y)$ par une première décomposition et une première ressommation des termes ; puis deuxième décomposition et deuxième regroupement des termes pour enfin obtenir les termes de droite en calculant la somme de chaque groupe.

Ce texte comporte aussi trois annexes : L'Annexe A donne brièvement les notions et propriétés de base de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$, dont une grande partie est prise de l'article de Connes et Moscovici [10]. Dans l'Annexe B on reproduit d'abord deux sections de la thèse d'Alain Valette qui contiennent une présentation courte de la théorie de représentations unitaires du groupe $SL_2(\mathbb{R})$, et on donne aussi le théorème principal de la thèse de Joe Repka. L'Annexe C consiste en des expressions explicites des deux polynômes calculés par Mathematica, évoquées dans le Chapitre III.

Table des matières

Chapitre I

Résultats Antérieurs

Dans ce chapitre nous présentons l'origine de la quesiton traitée dans cette thèse et de résultats antérieurs à 2003.

I.1 Formes Modulaires et Rankin-Cohen

Le qualificatif "modulaire" a pour origine l'identification du quotient du demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z > 0\}$ par $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ avec l'espace des modules des courbes complexes (ou surfaces de Riemann) de genre 1. Une telle courbe s'identifie à un quotient de la forme $\mathbb{C}/\Lambda$ où $\Lambda \subset \mathbb{C}$ est un réseau. Deux réseaux Λ_1 et Λ_2 donnent la même courbe si $\Lambda_2 = \lambda\Lambda_1$ pour une certaine constante $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Une *fonction modulaire* associe à un réseau Λ un nombre complexe $F(\Lambda)$, avec $F(\Lambda_1) = F(\Lambda_2)$ si $\Lambda_2 = \lambda\Lambda_1$. Comme tout réseau $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ est équivalent à un réseau de la forme $\mathbb{Z}z + \mathbb{Z}$ avec $z(=\omega_1/\omega_2)$ un nombre complexe non réel, la fonction F est complètement déterminée par les valeurs $f(z) = F(\mathbb{Z}z + \mathbb{Z})$ avec z dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, ou, comme $f(z) = f(-z)$, avec z dans le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$. Le fait que le réseau Λ est préservé par la transformation $(\omega_1, \omega_2) \mapsto (a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2)(a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = \pm 1)$ se traduit par la propriété d'*invariance modulaire* :

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(z). \tag{I.1}$$

La condition $z \in \mathbb{H}$ équivaut à dire que l'on considère uniquement les bases $\{\omega_1, \omega_2\}$ orientées (i.e. telles que $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$) et les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant 1. L'ensemble de ces matrices forme un groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ et son quotient par $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ sera noté Γ_1, et appelé le *groupe modulaire*. Mais en général cette condition (I.1) est trop restrictive. Souvent, les objets que l'on étudie sont des fonctions sur les réseaux qui satisfont l'identité $F(\Lambda_1) = \lambda^{2k} F\Lambda_2$ lorsque $\Lambda_2 = \lambda\Lambda_1$ pour un entier $2k$, appelé le *poids*. Une fois de plus la fonction F est complètement déterminée par sa restriction $f(z)$ aux réseaux de la forme $\mathbb{Z}z + \mathbb{Z}$ avec $z \in \mathbb{H}$, mais maintenant f doit satisfaire la *propriété de modularité* :

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{2k} f(z). \tag{I.2}$$

En général, quand on parle des *formes modulaires*, on rajoute aussi une condition de croissance et on demande que les fonctions concernées soient holomorphes. Donc on a

Définition 1 *(cf.[19]) Soit Γ un sous-groupe de congruence de $PSL(2,\mathbb{Z})$, une forme Γ-modulaire de poids $2k$ est une fonction f qui satisfait :*
- *(holomorphie) Elle est holomorphe sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$.*
- *(modularité) Pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ et $z \in \mathbb{H}$, f vérifie (I.2).*
- *(condition de croissance au bord) On demande que $|f(z)|$ soit majorée par un polynôme de* $\max\{1, \mathrm{Im}(z)^{-1}\}$.

Une première opération naturelle est la *multiplication* : le produit d'une forme modulaire de poids $2k$ et une forme modulaire de poids $2l$ est une forme modulaire de poids $2k+2l$. On note par $\mathcal{M}(\Gamma)$ l'algèbre des formes Γ-modulaires pour le produit. $\mathcal{M}(\Gamma)$ admet ainsi une graduation naturelle. Dans le cas où $\Gamma = \Gamma_1$, on obtient l'algèbre commutative libre sur $\mathbb{C}$ avec deux générateurs

$$E_4(z) = \frac{1}{2\zeta(4)} \sum_{(m,n)}{}' \frac{1}{(mz+n)^4} \quad , \quad E_6(z) = \frac{1}{2\zeta(6)} \sum_{(m,n)}{}' \frac{1}{(mz+n)^6}, \tag{I.3}$$

où $\sum'_{(m,n)}$ indique que l'on somme sur tous les couples d'entiers relatifs $(m,n) \neq (0,0)$.

En général, l'anneau gradué des formes modulaires sur Γ n'est pas une algèbre libre, mais il y a toujours un nombre fini de générateurs. On souligne aussi que $\mathcal{M}(\Gamma)$ contient $\mathcal{M}(\Gamma_1)$ comme un sous-anneau, donc il est un module sur $\mathcal{M}(\Gamma_1)$. C'est toujours un module libre à n générateurs, où n est l'indice de Γ dans Γ_1((cf.[19])).

Dans cette thèse, le point de départ est une autre façon pour obtenir une nouvelle forme modulaire à partir des deux formes modulaires connues. La question a été posée par R.A. Rankin dans les années 50(cf. [27]), qui demande quelles sont les formes modulaires obtenues à partir de deux formes modulaires et de leurs dérivées (il a traité lui-même le cas où les nouvelles formes modulaires sont des fonctions rationnelles d'une seule forme modulaire et de ses dérivées). La réponse que H. Cohen a fournit en 1977 est la suivante : les combinaisons bilinéaires de deux formes modulaires et de leurs dérivées qui sont encore modulaires sont de la forme suivante $\lambda[f,g]_n$ où λ est un scalaire et

$$[f,g]_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n+2k-1}{n-r} \binom{n+2l-1}{r} f^{(r)} g^{(n-r)}, \tag{I.4}$$

où n est un nombre entier positif, et $f^{(r)} = \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}\right)^r f$. De plus, $[f,g]_n \in \mathcal{M}_{2k+2l+2n}(\Gamma)$. Nous allons d'abord démontrer ce fait(cf.[4], [19], [34]).

Soit $f \in \mathcal{M}_{2k}(\Gamma)$, alors pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ et tout $n \geq 0$, on a

Lemme 2 *Soit f une forme modulaire de poids $2k$, alors*

$$f^{(n)}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!(2k+n-1)!}{i!(n-i)!(2k+i-1)!}c^{n-i}(cz+d)^{2k+n+i}f^{(i)}(z). \qquad \text{(I.5)}$$

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur n. L'énoncé est évidemment valable pour $n=0$. Le passage de n à $n+1$ se fait en observant que :

$$\begin{aligned}
& f^{(n+1)}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\\
= \; & \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\partial}{\partial z}f^{(n)}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right)\Big/\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right)\\
= \; & \frac{1}{2\pi i}(cz+d)^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{n!(2k+n-1)!}{i!(n-i)!(2k+i-1)!}\frac{c^{n-i}}{(2\pi i)^{n-i}}(cz+d)^{2k+n+i}f^{(i)}(z)\right)\\
= \; & \frac{1}{2\pi i}(cz+d)^2\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{n!(2k+n-1)!}{i!(n-i)!(2k+i-1)!}\frac{c^{n-i}}{(2\pi i)^{n-i-1}}(cz+d)^{2k+n+i}f^{(i+1)}(z)\right.\\
& \qquad \left.+\sum_{i=0}^{n}\frac{n!(2k+n-1)!}{i!(n-i)!(2k+i-1)!}(2k+n+i)\frac{c^{n-i+1}}{(2\pi i)^{n-i}}(cz+d)^{2k+n+i-1}f^{(i)}(z)\right]\\
= \; & \frac{1}{2\pi i}(cz+d)^2\left[(2\pi i)(cz+d)^{2k+2n}f^{(n+1)}(z)+\right.\\
& \quad \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n!(2k+n-1)!}{(i-1)!(n-i+1)!(2k+i-2)!}\right.\\
& \qquad \left.\left.+\frac{n!(2k+n-1)!}{i!(n-i)!(2k+i-1)!}(2k+n+i)\right)\frac{c^{n-i+1}}{(2\pi i)^{n-i}}(cz+d)^{2k+n+i-1}f^{(i)}(z)\right]\\
= \; & \frac{1}{2\pi i}(cz+d)^2\left[(2\pi i)(cz+d)^{2k+2n}f^{(n+1)}(z)+\right.\\
& \quad \sum_{i=0}^{n}\frac{n!(2k+n-1)!}{i!(n+1-i)!(2k+i-1)!}\\
& \qquad \left.[i(2k+i-1)+(n+1-i)(2k+n+i)]\frac{c^{n-i+1}}{(2\pi i)^{n-i}}(cz+d)^{2k+n+i-1}f^{(i)}(z)\right]\\
= \; & \frac{1}{2\pi i}(cz+d)^2\left[(2\pi i)(cz+d)^{2k+2n}f^{(n+1)}(z)+\right.\\
& \quad \left.\sum_{i=0}^{n}\frac{(n+1)!(2k+n)!}{i!(n+1-i)!(2k+i-1)!}\frac{c^{n-i+1}}{(2\pi i)^{n-i}}(cz+d)^{2k+n+i-1}f^{(i)}(z)\right]\\
= \; & \sum_{i=0}^{n+1}\frac{(n+1)!(2k+n)!}{i!(n+1-i)!(2k+i-1)!}\frac{c^{n-i+1}}{(2\pi i)^{n-i+1}}(cz+d)^{2k+n+1+i}f^{(i)}(z).
\end{aligned}$$

Le lemme est donc démontré. □

Remarque 3 *Pour que (I.5) soit vrai, il suffit de supposer la modularité de f, on n'a besoin ni d'holomorphie, ni de la condition de croissance au bord.*

Une autre façon d'écrire ces formules de transformation est de dire que la fonction génératrice

$$\tilde{f}(z,X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2k-1)!} f^{(n)}(z) X^n, \quad z \in \mathbb{H}, X \in \mathbb{C}, \tag{I.6}$$

satisfait

$$\tilde{f}\left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{X}{(cz+d)^2}\right) = (cz+d)^{2k} e^{cX/(cz+d)} \tilde{f}(z,X), \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma. \tag{I.7}$$

Ecrivons la même formule pour $g \in \mathcal{M}_{2l}$, on trouve que le produit

$$\tilde{f}(z,X)\tilde{g}(z,-X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i)^n}{(n+2k-1)!(n+2l-1)!} [f,g]_n(z) X^n, \tag{I.8}$$

est multiplié par $(cz+d)^{2k+2l}$ quand z et X sont remplacés par $\dfrac{az+b}{cz+d}$ et $\dfrac{X}{(cz+d)^2}$, et cela démontre la modularité de $[f,g]_n$.

I.2 Zagier

Dans son article [34], Zagier introduit le point de vue suivant : soit Γ un sous-groupe de congruence de $PSL(2,\mathbb{Z})$, on définit une dérivation $X : \mathcal{M}_{2k} \to \mathcal{M}_{2k+2}$ par la formule :

$$Xf = \frac{1}{2\pi i}\frac{df}{dz} - \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}(\log \eta^4) \cdot kf. \tag{I.9}$$

(historiquement ceci est dû à Ramanujan) et deux séries d'éléments par récurrence :

$$f_{r+1} = \partial f_r + r(r+2k-1)\Phi f_{r-1} \ , \ g_{s+1} = \partial g_s + s(s+2l-1)\Phi g_{s-1}, \tag{I.10}$$

où $\Phi = \dfrac{1}{144} E_4$. Zagier démontre que

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n+2k-1}{n-r} \binom{n+2l-1}{r} f_r g_{n-r} = [f,g]_n, \tag{I.11}$$

ce qui rend évident la modularité du résultat car les fonctions f_r et g_{n-r} sont modulaires.

Il montre de plus que, pour toute algèbre associative $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{N}$) graduée ayant une dérivation qui augmente le degré de 2, et tout élément Φ de degré 4, la formule (I.11) définit une structure d'*algèbre de Rankin-Cohen canonique.*

Remarque 4 *Quand $\Phi = 0$, la situation se réduit à ce que Zagier appelle* algèbre de Rankin-Cohen standard.

I.3 Cohen-Manin-Zagier, Eholzer

P. Cohen, Yu. Manin et Don Zagier proposent en 1995 ([5]) la construction suivante : soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$. L'action de γ sur le demi-plan $\mathbb{H}$ s'écrit

$$\gamma.z = \frac{az+b}{cz+d},$$

Elle induit une action de $SL(2,\mathbb{C})$ sur $C(\mathbb{H})$ donnée par la forme : $\forall\gamma \in SL(2,\mathbb{C})$, $\xi \in C(\mathbb{H})$

$$(W_\gamma \xi)(z) = \xi(\gamma.z). \tag{I.12}$$

Donc la dérivation ordinaire $\partial = \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial z}$ se transforme par

$$\left(W_\gamma^* \partial W_\gamma \xi\right)(z) = (cz+d)^2 \partial \xi(\gamma.z). \tag{I.13}$$

Maintenant on étend formellement la règle de Leibnitz pour obtenir la formule suivante à toute indice $w \in \mathbb{N}$:

$$W_\gamma^* \partial^w W_\gamma = [(cz+d)^2\partial]^w = \sum_{n=0}^{\infty} n! \binom{w}{n} \binom{w-1}{n} c^n (cz+d)^{2w-n} \partial^{w-n}. \tag{I.14}$$

A partir d'une forme modulaire $f \in \mathcal{M}_{2k}(\Gamma)$, on construit un *opérateur pseudo-différentiel formel*

$$\mathcal{D}_{-k}(f,\partial) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{-k}{n}\binom{-k-1}{n}}{\binom{-2k}{n}} f^{(n)} \partial^{-k-n} \tag{I.15}$$

Il admet l'invariance suivante par rapport à l'action du groupe Γ :

$$\mathcal{D}_{-k}(f|_{2k}\gamma, \partial) = W_\gamma^* \mathcal{D}_{-k}(f,\partial) W_\gamma, \tag{I.16}$$

pour tout $\gamma \in SL_2(\mathbb{C})$.

Cohen, Manin et Zagier affirment d'abord l'existence d'un isomorphisme entre l'espace des séries formelles à coefficients dans les formes modulaires et l'espace des opérateurs pseudo-différentiels formels invariants.

On s'intéresse ensuite à la composition de deux tels opérateurs. Dans leur article, la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels formels $\sum_n g_n(z)\partial^{w_1-n}$ et $\sum_m h_m(z)\partial^{w_2-m}$ est *définie* par la formule

$$\left(\sum_n g_n(z)\partial^{w_1-n}\right)\left(\sum_m h_m(z)\partial^{w_2-m}\right) = \sum_{n,m}\sum_{r\geq 0} \binom{w_1-n}{r} g_n \partial^r(h_m) \partial^{w_1+w_2-n-m-r}, \tag{I.17}$$

qui étend formellement la règle de Leibnitz. Mais en réalité, nous pouvons obtenir cette relation en utilisant l'identité suivante :

$$\begin{aligned}
\partial^{-1}h &= h\partial^{-1} + [\partial^{-1}, h] \\
&= h\partial^{-1} - \partial^{-1}[\partial, h]\partial^{-1} \\
&= h\partial^{-1} - \partial^{-1}(\partial h)\partial^{-1} \\
&= h\partial^{-1} - (\partial h)\partial^{-2} - [\partial^{-1}, \partial h]\partial^{-1} \\
&= h\partial^{-1} - (\partial h)\partial^{-2} + \partial^{-1}[\partial, \partial h]\partial^{-1}\partial^{-1} \\
&= h\partial^{-1} - (\partial h)\partial^{-2} + (\partial^2 h)\partial^{-3} + [\partial^{-1}, \partial^2 h]\partial^{-2} \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\sim \sum_{n=0}(-1)^n \partial^n h \partial^{-n-1},
\end{aligned} \tag{I.18}$$

modulo les opérateur d'ordre $-\infty$.

Maintenant en faisant la composition de $\mathcal{D}_{-k}(f, \partial)$(pour $f \in \mathcal{M}_{2k}$) avec $\mathcal{D}_{-l}(g, \partial)$(pour $g \in \mathcal{M}_{2l}$), on obtient un opérateur qui a la même invariance sous l'action de groupe. Les coefficients sont des combinaisons bilinéaires de f, g et de leurs dérivées. Donc d'après l'isomorphisme mentionné plus haut, il existe une série formelle à coefficients dans les formes modulaires que l'on notera $\mu(f, g)$ qui correspond à cet opérateur. Autrement dit, il existe une unique suite de formes modulaires $h_n \in \mathcal{M}_{2k+2l+2n}$ telle que $\mathcal{D}_{-k}(f, \partial)\mathcal{D}_{-l}(g, \partial) = \sum \mathcal{D}_{-k-l-n}(h_n)$, et bien évidemment chaque h_n s'expriment comme une combinaison bilinéaire de f, g et de leurs dérivées. D'après le résultat de H. Cohen, on conclut que h_n est un multiple de $[f, g]_n$, et, plus précisément on a,

$$\mu(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n(k, l)[f, g]_n \tag{I.19}$$

où les coefficients

$$t_n(k, l) = \frac{1}{\binom{-2l}{n}} \sum_{r+s=n} \frac{\binom{-k}{r}\binom{-k-1}{r}}{\binom{-2k}{r}} \frac{\binom{n+k+l}{s}\binom{n+k+l-1}{s}}{\binom{2n+2k+2l-2}{s}}. \tag{I.20}$$

Selon cette formulation il est facile de voir que $\mu(f, g)$ définit un produit **associatif** sur les séries formelles à coefficients dans les formes modulaires.

Ensuite ils conjecturent que ces coefficients s'écrivent sous la forme :

$$t_n(k, l) = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \sum_{j \geq 0} \frac{\binom{-\frac{3}{2}}{j}\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{\frac{1}{2}}{j}}{\binom{-k-\frac{1}{2}}{j}\binom{-l-\frac{1}{2}}{j}\binom{n+k+l-\frac{3}{2}}{j}}. \tag{I.21}$$

De plus Eholzer a vérifié pour les premiers termes que l'égalité

$$f \star g := \sum_{n=0}^{\infty} [f, g]_n. \tag{I.22}$$

définit un produit associatif.

Pour avoir une formule qui contient à la fois les deux cas, Cohen, Manin et Zagier généralisent la notion d'opérateur pseudodifférentiel formel invariant en introduisant un paramètre κ : on définit l'action de γ sur les fonctions ξ par

$$(W_\gamma^\kappa \xi)(z) = \xi(\gamma.z)(cz+d)^\kappa, \tag{I.23}$$

et on obtient

$$\left(W_\gamma^{\kappa *} \partial W_\gamma^\kappa \xi\right)(z) = (cz+d)^2 \frac{1}{2\pi i}\xi'(\gamma.z) + \kappa(cz+d)\xi(\gamma.z).$$

On peut donc définir

$$\mathcal{D}^\kappa_{-k}(f,\partial) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{-k}{n}\binom{-k+\kappa-1}{n}}{\binom{-2k}{n}} f^{(n)}\partial^{-k-n}, \tag{I.24}$$

et vérifier que les opérateurs $\mathcal{D}^\kappa_{-k}(f,\partial)$ satisfont $\mathcal{D}^\kappa_{-k}(f|_{2k}\gamma,\partial) = W_\gamma^{\kappa *}\mathcal{D}^\kappa_{-k}(f,\partial)W_\gamma^\kappa$. Comme ci-dessus, la composition de deux opérateurs de ce type donne un produit associatif

$$\mu^\kappa(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^\kappa(k,l)[f,g]_n, \tag{I.25}$$

où les coefficients sont

$$t_n^\kappa(k,l) = \frac{1}{\binom{-2l}{n}} \sum_{r+s=n} \frac{\binom{-k}{r}\binom{-k+\kappa-1}{r}}{\binom{-2k}{r}} \frac{\binom{n+k+l-\kappa}{s}\binom{n+k+l-1}{s}}{\binom{2n+2k+2l-2}{s}}. \tag{I.26}$$

A nouveau, ces coefficients sont conjecturés égaux à

$$t_n^\kappa(k,l) = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \sum_{j\geq 0} \binom{n}{2j} \frac{\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{\kappa-\frac{3}{2}}{j}\binom{\frac{1}{2}-\kappa}{j}}{\binom{-k-\frac{1}{2}}{j}\binom{-l-\frac{1}{2}}{j}\binom{n+k+l-\frac{3}{2}}{j}}. \tag{I.27}$$

La démonstration de l'égalité des deux séries de coefficients n'est pas fournie. Il est tout simplement indiqué que ceci est une situation simplifiée de l'identité combinatoire

$$\frac{(-4)^n}{\binom{2x}{n}} \sum_{r+s=n} \frac{\binom{y}{r}\binom{y-a}{r}}{\binom{2y}{r}} \frac{\binom{z}{s}\binom{z+a}{s}}{\binom{2z}{s}} = \sum_{j\geq 0}\binom{n}{2j} \frac{\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{a-\frac{1}{2}}{j}\binom{-a-\frac{1}{2}}{j}}{\binom{x-\frac{1}{2}}{j}\binom{y-\frac{1}{2}}{j}\binom{z-\frac{1}{2}}{j}} \tag{I.28}$$

où $n \geq 0$ et les variables a, x, y, z satisfont $x+y+z=n-1$.

La démonstration de cette dernière identité devrait faire partie d'un article([36]) que Zagier n'a pas encore publié.

Nous donnons dans le Chapitre IV une démonstration de cette dernière identité qui implique en particulier l'équivalence des coefficients.

Remarque 5 *On souligne que pour définir les objets ci-dessus, seule la modularité de la fonction f est utilisée. On peut donc généraliser au cas d'une fonction non holomorphe.*

I.4 Connes-Moscovici

Soit

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})\,; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod N \right\}, \tag{I.29}$$

et

$$\mathcal{M}(\Gamma(N)) := \Sigma^{\oplus} \mathcal{M}_{2k}(\Gamma(N))\,, \quad \text{resp.} \quad \mathcal{M}^0(\Gamma(N)) := \Sigma^{\oplus} \mathcal{M}^0_{2k}(\Gamma(N))\,, \tag{I.30}$$

on pose

$$\mathcal{M} := \varinjlim_{N\to\infty} \mathcal{M}(\Gamma(N))\,, \quad \text{resp.} \quad \mathcal{M}^0 := \varinjlim_{N\to\infty} \mathcal{M}^0(\Gamma(N))\,. \tag{I.31}$$

On définit l'algèbre modulaire de Hecke ([12]) comme l'algèbre des *formes de Hecke opératorielles de niveau* Γ. Une telle forme est une application

$$\begin{array}{rcl} F : \Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q}) & \to & \mathcal{M}\,, \\ \Gamma_\alpha & \mapsto & F_\alpha \in \mathcal{M}\,, \end{array} \tag{I.32}$$

à support fini, qui vérifie *la condition de covariance* :

$$F_{\alpha\gamma}(z) = F_\alpha|\gamma(z) = F_\alpha(\gamma.z)\,, \quad \forall \alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q}), \gamma \in \Gamma, z \in \mathbb{H}\,. \tag{I.33}$$

Le produit est défini comme

$$(F^1 * F^2)_\alpha := \sum_{\beta \in \Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} F^1_\beta \cdot F^2_{\alpha\beta^{-1}}\Big|\beta. \tag{I.34}$$

La Proposition 2 de [12] montre que l'on obtient ainsi une structure d'algèbre associative, notée $\mathcal{A}(\Gamma)$.

On construit ensuite une action(explicite) de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$(cf. Annexe A pour les définitions) sur $\mathcal{A}(\Gamma)$. Commençons par rappeler deux dérivations de $\mathcal{M}$:

$$X := \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{12\pi i}\frac{\partial}{\partial z}(\log \Delta) \cdot Y = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}(\log \eta^4) \cdot Y\,, \tag{I.35}$$

où

$$\Delta(z) \;=\; (2\pi)^{12}\,\eta^{24}(z) \;=\; (2\pi)^{12}\,q\,\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}\,,\quad q=e^{2\pi i z} \tag{I.36}$$

est la forme parabolique de poids 12, donnée en terme de la fonction η de Dedekind, alors que Y est l'opérateur d'Euler

$$Y(f) = k\cdot f\,,\quad \forall\, f\in\mathcal{M}_{2k}\,. \tag{I.37}$$

Définissons ensuite pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL^+(2,\mathbb{Q})$,

$$\mu_\gamma\,(z) = \frac{1}{2\,\pi^2}\left(G_2^*|\gamma\,(z) - G_2^*(z) + \frac{2\pi i\,c}{cz+d}\right) \tag{I.38}$$

où

$$G_2^*(z) = 2\zeta(z) + 2\sum_{m\geq 1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(mz+n)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2\sum_{m,n\geq 1} m e^{2\pi i m n z}. \tag{I.39}$$

Notons ici $\mu_\alpha\equiv 0$ si $\alpha\in SL_2(\mathbb{Z})$,

Maintenant pour un élément $F\in\mathcal{A}(\Gamma)$, on définit

$$\begin{array}{lcll} Y(F)_\alpha & := & Y(F_\alpha)\,, & \forall\, F\in\mathcal{A}(\Gamma)\,,\alpha\in G^+(\mathbb{Q})\,, \\ X(F)_\alpha & := & X(F_\alpha)\,, & \\ \delta_n(F)_\alpha & := & \mu_{n,\alpha}\cdot F_\alpha\,, & \end{array} \tag{I.40}$$

où

$$\mu_{n,\,\alpha} \;:=\; X^{n-1}(\mu_\alpha)\,,\quad \forall n\in\mathbb{N}\,. \tag{I.41}$$

L'algèbre $\mathcal{A}(\Gamma)$ est graduée par le poids des formes modulaires, i.e. par l'opérateur Y. La sous-algèbre de poids 0 est l'algèbre de Hecke standard associée à Γ.

On remarque le fait suivant : quand on se restreint aux formes modulaires, on voit sans difficulté l'action de X et Y, mais on ne voit pas l'action des δ_n. Ceux-ci n'agissent que dans la direction complémentaire (du groupe $GL_2^+(\mathbb{Q})$).

Nous avons le théorème de Connes et Moscovici :

Théorème 6 *Soit Γ un sous groupe de congruence.*

1^0. *Les formules (I.40) définissent une action de Hopf de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$ sur l'algèbre $\mathcal{A}(\Gamma)$.*

2^0. *La dérivation de Schwarz $\delta_2' = \delta_2 - \frac{1}{2}\delta_1^2$ est intérieure et est implémentée par un élément de degré 4, $\omega_4\in\mathcal{A}(\Gamma)$.*

L'égalité $\omega_4 = -\frac{1}{72}E_4$ suggère une relation avec l'algèbre de Rankin-Cohen *Canonique* que Zagier avait définie. Connes et Moscovici proposent alors une généralisation des crochets de Rankin-Cohen dans le cadre général des actions de $\mathcal{H}_1$ sur une algèbre quelconque qui sont projectives au sens suivant :

Supposons que nous avons une action de $\mathcal{H}_1$ sur une algèbre $\mathcal{A}$ et que la dérivation δ_2' est intérieure et implementée par un élément $\Omega \in \mathcal{A}$ tel que,

$$\delta_2'(a) = \Omega\, a - a\, \Omega\,,\ \forall a \in \mathcal{A} \tag{I.42}$$

où l'on suppose, d'après la commutativité de δ_k,

$$\delta_k(\Omega) = \ 0\,,\ \forall k \in \mathbb{N} \tag{I.43}$$

Il s'en suit que

$$\delta_k(X^j(\Omega)) = \ 0\,,\ \forall k\,,\ j \in \mathbb{N}. \tag{I.44}$$

On dit que l'action de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{A}$ est munie d'une *structure projective* et on définit A_n et B_n par les relations de récurrence,

$$A_{n+1} := S(X)\, A_n - n\,\Omega^o \left(Y - \frac{n-1}{2}\right) A_{n-1}, \tag{I.45}$$

$$B_{n+1} := X\, B_n - n\,\Omega \left(Y - \frac{n-1}{2}\right) B_{n-1}, \tag{I.46}$$

où $A_{-1} := 0$, $A_0 := 1$ et $B_0 := 1$, $B_1 := X$. On définit

$$RC_n(a,b) := \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{k!}\, (2Y+k)_{n-k}(a)\ \frac{B_{n-k}}{(n-k)!}\, (2Y+n-k)_k(b). \tag{I.47}$$

Dans le cas de l'algèbre modulaire de Hecke , cela reproduit exactement les crochets de Rankin-Cohen sur les formes modulaires.

Maintenant, en tenant compte des travaux de Cohen-Manin-Zagier et d'Eholzer, notamment (I.22), Connes et Moscovici obtiennent, en utilisant le fait que l'algèbre de Hecke modulaire est un produit croisé de $\mathcal{M}$ par une action de $GL^+(2,\mathbb{R})$ (réduite par un projecteur e_Γ), que le foncteur

$$RC := \sum RC_n \tag{I.48}$$

appliqué sur $\mathcal{A}(\Gamma)$ définit une déformation formelle. De plus, en démontrant l'injectivité complète, nous pouvons utiliser l'associativité du produit déformé des formes modulaires pour démontrer l'associativité au niveau de l'algèbre de Hopf, puis celle sur la déformation d'une algèbre quelconque (munie d'une structure projective). On a ([13])

Théorème 7 *Le foncteur RC_* appliqué à toute algèbre $\mathcal{A}$ munie d'une structure projective donne une famille de déformations formelles associatives de $\mathcal{A}$, dont les produits déformés sont donnés par*

$$f \star g = \sum RC_n(f,g)\hbar^n. \tag{I.49}$$

Chapitre II

Rankin-Cohen via Fedosov

Nous présentons ici un autre point de vue qui donne l'associativité au niveau d'action d'algèbre de Hopf avec une structure projective. Il s'agit d'une collaboration avec Pierre Bieliavsky et Xiang Tang([2]).

II.1 La construction de Fedosov

Rapelons pour commencer la construction de quantification par déformation de Fedosov pour une variété symplectique :

Soit (M,ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Pour chaque fibre T_xM du fibré tangent, qui est également une variété symplectique, on définit une algèbre associative unifère W_x sur $\mathbb{C}$ que l'on appelle l'algèbre de Weyl, dont les éléments sont des séries formelles de la forme

$$a(y,\hbar) = \sum_{k,|\alpha|\geq 0} \hbar^k a_{k,\alpha} y^\alpha,$$

où $\hbar$ est un paramètre formel et $y = (y^1,\dots,y^{2n}) \in T_xM$ un vecteur tangent, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_{2n})$ un multi-indice, $y^\alpha = (y^1)^{\alpha_1}\cdots(y^{2n})^{\alpha_{2n}}$.

Le produit de deux éléments $a, b \in W_x$ est donné par :

$$\begin{aligned} a\circ b &= \exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\omega^{ij}\frac{\partial}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial z^j}\right) a(y,\hbar)b(z,\hbar)|_{z=y} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^k \frac{1}{k!}\omega^{i_1j_1}\cdots\omega^{i_kj_k}\frac{\partial^k a}{\partial y^{i_1}\cdots\partial y^{i_k}}\frac{\partial^k b}{\partial y^{j_1}\cdots\partial y^{j_k}}. \end{aligned} \tag{II.1}$$

Nous considérons le fibré des algèbres de Weyl W sur (M,ω) dont la fibre en chaque point x est W_x, et notons par $C^\infty(W)$ l'algèbre des sections lisses de W . Pour introduire la connexion de Fedosov, nous prenons l'algèbre $\Gamma^\infty(W\otimes\bigwedge) = \oplus_{q=0}^{2n}\Gamma^\infty(W\otimes\bigwedge^q)$, où $\bigwedge^q$ est l'ensemble des q-formes lisses.

On définit quelques opérations sur $\Gamma^\infty(W\otimes\bigwedge)$.

1. le commutateur : $[a,b] = a \circ b - (-1)^{\deg(a)\deg(b)} b \circ a$, où $\circ$ est la multiplication point par point.
2. $\delta,\ \delta^* :\ \Gamma^\infty(W \otimes \bigwedge) \to \Gamma^\infty(W \otimes \bigwedge)$,

$$\delta a = dx^k \wedge \frac{\partial a}{\partial y^k}, \qquad \delta^* a = y^k i\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) a.$$

Quand on fixe un champ de base e_i du fibré tangent, une connexion ∇ est déterminée par les identités

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k, \tag{II.2}$$

où les Γ_{ij}^k sont appelés les *symboles de Christoffel*.Une connexion symplectique ∇ sur M est dite *sans torsion* si elle vérifie

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \tag{II.3}$$

Une *connexion abélienne (de Fedosov)* sur le fibré en algèbres de Weyl W est une application linéaire $D : \Gamma^\infty(W \otimes \bigwedge) \to \Gamma^\infty(W \otimes \bigwedge)$ qui satisfait la règle de Leibnitz telle que, pour toute section $a \in \Gamma^\infty(W \otimes \bigwedge)$,

$$D^2 a = 0.$$

Dans [15], sous l'hypothèse d'existence d'une connexion sans torsion, Fedosov démontre qu'il est toujours possible de construire une connexion abélienne D sur W définie par la formule

$$D = -\delta + \partial + \frac{i}{\hbar}[r, \cdot], \tag{II.4}$$

où $\partial a := da + \frac{i}{\hbar}[\Gamma, a]$, avec $\Gamma = \frac{1}{2}\Gamma_{ijk} y^i y^j dx = \frac{1}{2}\sum_\mu \Gamma_{ij}^\mu \omega_{\mu k} y^i y^j dx$, et où r est une 1-forme locale à valeurs dans W.

On regarde la sous-algèbre $W_D \subset \Gamma^\infty(W)$ des sections plates pour D. Le théorème principal que l'on utilise est le suivant(Theorem 5.3.3, Page 153 dans [15]) :

Théorème 8 *Pour tout $a_0 \in C^\infty(M)[[\hbar]]$, il existe une unique section $a \in W_D$, notée par $\sigma^{-1}(a_0)$, telle que $\sigma(a) = a_0$, où $\sigma(a)$ désigne la projection sur le centre : $\sigma(a) = a(x, 0, h)$.*

Cela implique dans un tout premier temps qu'il y a une correspondence bijective entre W_D et $C^\infty(M)[[\hbar]]$. Nous pouvons alors définir sur $C^\infty(M)[[\hbar]]$ un produit associatif

$$a \star b = \sigma(\sigma^{-1}(a) \circ \sigma^{-1}(b)). \tag{II.5}$$

II.2 Déformation Universelle de h_1

On s'intéresse à la situation où nous avons une action de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$ sur une algèbre $\mathcal{A}$ (cf. Annexe A pour les notations). Dans le cas où tous les δ_n agissent trivialement, l'algèbre de Lie H_1 est réduite à h_1, l'algèbre de Lie du groupe "ax+b" ; et l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$ se réduit à l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(h_1)$ pour h_1. Maintenant $RC_{red} := \sum RC_{n,red}\hbar^n$ est une formule de déformation universelle pour h_1(ce qui veut dire qu'il existe un élément $F \in \mathcal{U}(h_1) \otimes \mathcal{U}(h_1)[[\hbar]]$ tel que $((\Delta \otimes 1)F)(F \otimes 1) = ((1 \otimes \Delta)F)(1 \otimes F))$, où $RC_{n,red}$ est une version réduite de (I.47) :

$$RC_{n,red}(a,b) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{(-1)^k}{k!} X^k (2Y+k)_{n-k}(a) \, \frac{1}{(n-k)!} X^{n-k} (2Y+n-k)_k(b) \right], \qquad \text{(II.6)}$$

où $X, Y \in h_1$ sont tels que $[Y, X] = X$, $(\alpha)_k \overset{def}{=} \alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)$, et $a, b \in A$.

Nous étudions dans cette section cette déformation universelle.

II.2.a La Formule de Déformation Universelle de Giaquinto-Zhang

Dans leur article de 1993(publié en 1998), Giaquinto et Zhang ([18][Thm 2.20]) ont proposé une formule de déformation universelle(FDU) pour h_1 : étant donnés deux éléments X et Y avec $[Y, X] = X$, la formule suivante donne une FDU pour l'algèbre de Hopf associée à h_1

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} F_n = 1 \times 1 + \hbar X \wedge Y + \frac{\hbar^2}{2!} \left(X^2 \otimes Y_2 - 2XY_1 \otimes XY_1 + Y_2 \otimes X^2 \right) + \cdots, \qquad \text{(II.7)}$$

où F_n est définie par $F_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} X^{n-r} Y_r \otimes X^r Y_{n-r}$.

Proposition 9 *L'élément F peut être réalisé comme le produit de Moyal standard :*

$$\exp\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y} \right) = \sum_n \sum_r \frac{(-1)^r}{r!(n-r)!} \frac{\partial^{n-r}}{\partial x^{n-r}} \frac{\partial^r}{\partial y^r} \otimes \frac{\partial^r}{\partial x^r} \frac{\partial^{n-r}}{\partial y^{n-r}} \qquad \text{(II.8)}$$

Démonstration. Nous considérons l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ sur lequel X et Y agissent par $Y = -y\dfrac{\partial}{\partial y}$, et $X = \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial}{\partial x}$. Il est évident que l'action de X et Y sur $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ est injective.

En vertu des identités,

$$\begin{aligned} X^r &= X^r = \frac{1}{y^r} \frac{\partial^r}{\partial x^r}, \\ Y_r &= Y(Y+1)\cdots(Y+r-1) = (-y)^r \frac{\partial^r}{\partial y^r}. \end{aligned}$$

Il en résulte tout de suite que F pour cette représentation est égal au produit de Moyal. □

II.2.b Déformation de Rankin-Cohen pour h_1

Nous devons souligner que la formule de déformation universelle (II.7) pour h_1 n'est pas égale à RC_{red} dans l'équation (II.6). Néanmoins nous allons voir que les deux sont équivalentes.

On fixe les notations $(V, \omega) := \big(\mathbb{R}^2 = \{(p,q)\}, dp \wedge dq\big)$ et on note par $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(V,\omega) := V \times \mathbb{R}$ l'algèbre de Heisenberg associée. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $SL_2(\mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \mathtt{span}_{\mathbb{R}}\{H, E, F\}$, $([H,E] = 2E,\ [H,F] = -2F,\ [E,F] = H)$, on forme le produit semi-direct naturel $\tilde{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$. Ad-équivariante).

De façon assez explicite, en notant les champs de vecteurs de la base par $A^\star_x := \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp(-tA)\cdot x \quad A \in \tilde{\mathfrak{g}}$, on a

$$H^\star = -p\partial_p + q\partial_q; E^\star = -q\partial_p; F^\star = -p\partial_q; P^\star = -\partial_p; Q^\star = -\partial_q;$$

On note $\lambda : \tilde{\mathfrak{g}} \to C^\infty(V)$ l'application de moment correspondante(cette application est telle que $d(\lambda(X))$ soit égal à la contraction de X^* avec la forme symplectique) :

$$\lambda_H = pq; \lambda_E = \frac{1}{2}q^2; \lambda_F = -\frac{1}{2}p^2; \lambda_P = q; \lambda_Q = -p.$$

Nous avons $[A^\star, B^\star] = [A,B]^\star$ et $\lambda_{[A,B]} = \{\lambda_A, \lambda_B\}$ où le crochet de Poisson $\{u,v\} = \partial_p u \partial_q v - \partial_p v \partial_q u$, et $A, B \in \tilde{\mathfrak{g}}$.

Soit $S := AN = \exp(\mathtt{span}\{H,E\})$ la composante d'Iwasawa dans $SL_2(\mathbb{R})$, qui n'est autre que le groupe "$ax+b$". On considère l'orbite $\mathcal{O} \overset{\text{déf}}{=} S \cdot (0,1)$ dans V, qui est égale à l'ensemble $\{q > 0\}$. Comme S agit simplement transitivement sur $\mathcal{O}$, on a l'identification ϕ de S dans $\mathcal{O}$ définie par $g \mapsto g \cdot (1,0)$. On utilise la même notation pour l'application de moment restreinte transportée λ de $\tilde{\mathfrak{g}}$ dans $C^\infty(S)$ définie par :

$$\lambda_A := \phi^\star \left(\lambda_A\Big|_{\mathcal{O}}\right) \qquad (A \in \tilde{\mathfrak{g}}). \tag{II.9}$$

Lemme 10 *Soit* $\tilde{X}_g := \frac{d}{dt}\Big|_0 g\exp(tX)$ *le champ de vecteurs invariant à gauche associé à* $X \in h_1 = $ *Lie* (S)*, alors :*

(i) $\tilde{H} \,.\, \lambda_{X+v} \;=\; (-2)\,\lambda_X \;+\; (-1)\,\lambda_v$ *pour* $X \in \mathfrak{g}$ *et* $v \in V$*;*

(ii) $\tilde{E}^r \,.\, \lambda_X \;=\; 0$ *pour* $r \geq 3$*, pour tout* $X \in \mathfrak{g}$ *;*

(iii) $\tilde{E}^r \,.\, \lambda_v \;=\; 0$ *pour* $r \geq 2$*, pour tout* $v \in V$*.*

Démonstration. Une paramétrisation convenable pour la variété de groupe S est donnée par :

$$\mathbb{R}^2 \to S : (a, \ell) \mapsto \exp(aH)\exp(\ell E).$$

Pour ces coordonnées, la loi de groupe s'écrit comme $(a,\ell)\cdot(a',\ell') = (a+a', e^{-2a'}\ell + \ell')$. On en déduit des expressions pour les champs de vecteurs invariants à gauche :

$$\tilde{H} = \partial_a - 2\ell\partial_\ell \;;\; \tilde{E} = \partial_\ell.$$

L'atlas correspondant sur l'orbite $\mathcal{O} \simeq S$ est donné par

$$p = e^a \ell \ ; \ q = e^{-a}.$$

On souligne que $da \wedge d\ell = \pm \phi^\star \omega|_{\mathcal{O}}$ (c'est la définition d'une application de Darboux). L'application de moment (incomplète) est donc

$$\lambda_H = \ell \ ; \ \lambda_E = \frac{1}{2} e^{-2a} \ ; \ \lambda_F = -\frac{1}{2} \ell^2 e^{2a} \ ; \ \lambda_P = e^{-a} \ ; \ \lambda_Q = -e^a \ell.$$

Les trois énoncés du lemme résultent alors d'un calcul direct. □

Dans (II.6), pour toute action de $\mathcal{U}(h_1)$ à gauche sur une algèbre $\mathcal{A}$, les crochets de Rankin-Cohen sur $\mathcal{U}(h_1)$ sont définis par,

$$RC_{n,red}(a,b) := \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{(-1)^k}{k!} X^k (2Y+k)_{n-k}(a) \ \frac{1}{k!} X^{n-k} (2Y+n-k)_k(b) \right],$$

où X et $Y \in h_1$ sont tels que $[Y,X] = X$, $(\alpha)_k$ $stackreldef{=}\alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)$, et a et b appartenant à $\mathcal{A}$.

Puisque h_1 agit comme champ de vecteurs invariants à gauche sur S, l'algèbre $\mathcal{U}(h_1)$ agit comme opérateurs différentiels invariants à gauche sur $C^\infty(S)$, et $RC_{n,red}$, un élément de $\mathcal{U}(h_1) \otimes \mathcal{U}(h_1)$, agit comme un opérateur bi-différentiel invariant à gauche sur $C^\infty(S)$. Comme $[H,E] = 2E$, on note

$$Y = \frac{1}{2} \tilde{H} \quad \text{et} \quad X = \tilde{E}. \tag{II.10}$$

Lemme 11 *Pour tout A dans $\tilde{\mathfrak{g}}$, nous avons*

$$[\lambda_A \ , \ u]_n \stackrel{déf}{=} RC_{n,red}(\lambda_A \ , \ u) - RC_{n,red}(u \ , \ \lambda_A) \ = \ 0 \quad pour \quad n \neq 1. \tag{II.11}$$

Démonstration. Pour $X \in \mathfrak{g}$ et $v \in V$, le Lemme 10 implique que $X^k(2Y+r)_s.\lambda_{X+v} = (-2+r)_s X^k \lambda_X + (-1+r)_s X^k \lambda_v = 0$ si $k > 2$. Par conséquent, dans l'expression (II.6) de $RC_{n,red}(\lambda_{X+v}, u)$ seuls les trois premiers termes correspondant à $k = 0, 1, 2$ ont une contribution non nulle. Dans ces termes les facteurs suivants apparaissent :

- pour $k = 0$: $(-2)_n \lambda_X + (-1)_n \lambda_v$; (II.12)
- pour $k = 1$: $\tilde{E}.[(-1)_{n-1}\lambda_X + (0)_{n-1}\lambda_v]$; (II.13)
- pour $k = 2$: $\tilde{E}^2.[(0)_{n-2}\lambda_X + (1)_{n-2}\lambda_v]$. (II.14)

1. La première expression (II.12) s'annule dès que $n \geq 3$. En effet, une fois $n-1 \geq 2$, $(-2)_n = (-2)(-2+1)(-2+2)...(-2+n-1)$ est nul ; et par le même argument $(-1)_n$ s'annule si $n-1 \geq 1$;
2. Toujours par le même argument, la deuxième expression (II.13) s'annule pour $n-2 \geq 1$, et donc si $n \geq 3$;

3. A la fin, la troisième expression (II.14) est égale à $(n-2)!\tilde{E}^2(\lambda_v)$ qui est identiquement nulle d'après le Lemme 10 (iii). On en conclut donc par la simple observation que RC_0 et RC_2 sont symmétriques. □

En vertu de ce Lemme 11, la forme réduite (II.6) de la déformation de Rankin-Cohen (I.47) définit un star produit $\tilde{\mathfrak{g}}$ invariant sur (V, ω). Dans le Corollaire 2, Section 2.7 de [17], S. Gutt a montré qu'il existe un unique star produit $\tilde{\mathfrak{g}}$-invariant sur (V, ω), qui est le produit de Moyal standard. On conclut donc que la déformation de Rankin-Cohen sur $C^\infty(S)$ est identique au produit de Moyal. On obtient donc

Proposition 12 *La déformation de Rankin-Cohen réduite realisée sur $\mathcal{O} \subset V$ coïncide avec la restriction sur $\mathcal{O}$ du produit de Moyal standard sur (V, Ω).*

Pour généraliser la construction de la Proposition 12, on explique sa relation avec la théorie de quantification par déformation des variétés symplectiques de Fedosov.

L'action naturelle du groupe $S \simeq$ "$ax+b$" sur $\mathbb{R}$,

$$\exp(aH + nE) \cdot x_1 := e^{2a} x_1 + n e^a,$$

se relève à $T^\star(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ par la formule

$$\exp(aH + nE) \cdot (x_1, x_2) := (e^{2a} x_1 + n e^a, e^{-2a} x_2).$$

La S-orbite $\tilde{\mathcal{O}}$ du point $\tilde{o} := (0,1) = dx_1|_0 \in T^\star(\mathbb{R}^2)$ est alors naturellement isomorphe à l'espace S-homogène $\mathcal{O} \subset V$; notamment on a l'identification :

$$\varphi : \mathcal{O} \to \tilde{\mathcal{O}} : g \cdot e_2 \mapsto g \cdot \tilde{o}.$$

Si l'on passe aux coordonnées (p, q) sur $\mathcal{O}$, cela devient :

$$\varphi(p, q) = \left(\frac{p}{2q} \ , \ q^2 \right).$$

En identifiant $\tilde{\mathcal{O}}$ avec S (via $\varphi \circ \phi$), on obtient des expressions pour les champs de vecteurs invariants à gauche :

$$\tilde{H} = -2x_2 \partial_{x_2} \ ; \ \tilde{E} = \frac{1}{x_2} \partial_{x_1}.$$

En particulier, on fixe les notations

$$\tilde{H} = 2Y \text{ et } \tilde{E} = X.$$

En écrivant $\nabla^{\mathcal{O}}$ la restriction à $\mathcal{O}$ de la connexion standard plate symmétrique sur V ($\nabla^{\mathcal{O}}_{\partial_p} \partial_p = \nabla^{\mathcal{O}}_{\partial_q} \partial_p = \nabla^{\mathcal{O}}_{\partial_q} \partial_q = 0$), et en prenant

$$\nabla^{\tilde{\mathcal{O}}} := \varphi(\nabla^{\mathcal{O}}),$$

on obtient une connexion symplectique sur $\tilde{\mathcal{O}}$,

$$\nabla^{\tilde{\mathcal{O}}}_{\partial_{x_1}} \partial_{x_1} = 0 \ ; \ \nabla^{\tilde{\mathcal{O}}}_{\partial_{x_1}} \partial_{x_2} = \frac{1}{2x_2} \partial_{x_1} \ ; \ \nabla^{\tilde{\mathcal{O}}}_{\partial_{x_2}} \partial_{x_2} = -\frac{1}{2x_2} \partial_{x_2}. \tag{II.15}$$

On identifie $\tilde{\mathcal{O}}$ avec $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, et on utilise $\nabla^{\tilde{\mathcal{O}}}$ pour construire une quantification par déformation de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \omega \overset{\text{déf}}{=} dx \wedge dy)$ comme décrite dans la Section II.1.

Corollaire 13 *La déformation de Rankin-Cohen réduite sur $\tilde{\mathcal{O}}$ est identique à la construction des star produits de Fedosov sur $(\tilde{\mathcal{O}}, \omega)$ en utilisant la connexion $\nabla^{\tilde{\mathcal{O}}}$.*

II.2.c Rankin-Cohen réduite–méthode explicite

Ici on donne un calcul explicite qui montre l'identification du produit de Rankin-Cohen réduit avec la restriction du produit de Moyal. Comme dans II.2.a, on garde le même espace géométrique $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ sur lequel X et Y agissent comme $Y = -\frac{1}{2}\left(y\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial x}\right)$, et $X = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}$.

Nous avons d'abord

$$X^n(2Y+n)(2Y+n+1)\cdots(2Y+n+m-1) = \frac{(-1)^m}{y^n}\left(\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}x^r\frac{\partial^r}{\partial x^r}y^{m-r}\frac{\partial^{m-r}}{\partial y^{m-r}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n. \quad \text{(II.16)}$$

Ceci est à démontrer par récurrence sur m et n. Le résultat est évident pour $m = 0$, et si l'égalité a lieu pour m et n, on a pour $m+1$ et n,

$$\begin{aligned}
& X^n(2Y+n)(2Y+n+1)\cdots(2Y+n+m) \\
= \; & X^n(2Y+n)(2Y+n+1)\cdots(2Y+n+m-1)(2Y+n+m) \\
= \; & \frac{(-1)^m}{y^n}\left(\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}x^r\frac{\partial^r}{\partial x^r}y^{m-r}\frac{\partial^{m-r}}{\partial y^{m-r}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\left(-y\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial x} + n + m\right) \\
= \; & \frac{(-1)^m}{y^n}\left(\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}x^r\frac{\partial^r}{\partial x^r}\left[-(m-r)y^{m-r}\frac{\partial^{m-r}}{\partial y^{m-r}} - y^{m-r+1}\frac{\partial^{m-r+1}}{\partial y^{m-r+1}}\right]\right)(\frac{\partial}{\partial x})^n \\
& + \frac{(-1)^m}{y^n}\left(\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}x^r\frac{\partial^r}{\partial x^r}y^{m-r}\frac{\partial^{m-r}}{\partial y^{m-r}}\right)\left(-n(\frac{\partial}{\partial x})^n - x(\frac{\partial}{\partial x})^{n+1}\right) \\
& + \frac{(-1)^m}{y^n}\left(\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}x^r\frac{\partial^r}{\partial x^r}y^{m-r}\frac{\partial^{m-r}}{\partial y^{m-r}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n(n+m) \\
= \; & \frac{(-1)^m}{y^n}\left(\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}x^r\frac{\partial^r}{\partial x^r}\left[ry^{m-r}\frac{\partial^{m-r}}{\partial y^{m-r}} - y^{m-r+1}\frac{\partial^{m-r+1}}{\partial y^{m-r+1}}\right]\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \\
& + \frac{(-1)^m}{y^n}\left(\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}x^r\frac{\partial^r}{\partial x^r}y^{m-r}\frac{\partial^{m-r}}{\partial y^{m-r}}\right)\left(-x\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n+1}\right) \\
= \; & \frac{(-1)^{m+1}}{y^n}\left(\sum_{r=0}^{m+1}\binom{m+1}{r}x^r\frac{\partial^r}{\partial x^r}y^{m+1-r}\frac{\partial^{m+1-r}}{\partial y^{m+1-r}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n.
\end{aligned} \quad \text{(II.17)}$$

Alors d'après le calcul ci-dessous,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}X^k(2Y+k)(2Y+k+1)\cdots(2Y+p-1) \\
& \otimes X^{p-k}(2Y+p-k)(2Y+p-k+1)\cdots(2Y+p-1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\left[\frac{(-1)^{p-k}}{y^k}\left(\sum_{r=0}^{p-k}\binom{p-k}{r}x^r\frac{\partial^r}{\partial x^r}y^{p-k-r}\frac{\partial^{p-k-r}}{\partial y^{p-k-r}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\right] \\
& \qquad \otimes\left[\frac{(-1)^k}{y^{p-k}}\left(\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}x^s\frac{\partial^s}{\partial x^s}y^{k-s}\frac{\partial^{k-s}}{\partial y^{k-s}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p-k}\right] \\
= & \sum_{t=r+s=0}\left(\frac{x}{y}\right)^t\sum_{k=0}^{p}\sum_{r+s=t}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}\binom{p-k}{r}\binom{k}{s} \\
& \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k+r}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-k-r}\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p-k+s}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-s} \\
= & \sum_{t=r+s=0}\left(\frac{x}{y}\right)^t\sum_{k=0}^{p}\sum_{r+s=t}(-1)^{p-k}\frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{(p-k)!}{r!(p-k-r)!}\frac{k!}{s!(k-s)!} \\
& \qquad \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k+r}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-k-r}\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p-k+s}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-s}\right] \\
= & \sum_{t=r+s=0}\left(\frac{x}{y}\right)^t\sum_{k=0}^{p}\sum_{r+s=t}\frac{p!}{t!(p-t)!}(-1)^r\frac{t!}{r!s!}(-1)^{p-k-r}\frac{(p-t)!}{(p-k-r)!(k-s)!} \\
& \qquad \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k+r}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-k-r}\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p-k+s}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-s}\right] \\
= & \sum_{t=r+s=0}\left(\frac{x}{y}\right)^t\frac{p!}{t!(p-t)!}\sum_{k=s}^{p-r}(-1)^{p-k-r}\frac{(p-t)!}{(p-k-r)!(k-s)!}\sum_{r+s=t}(-1)^r\frac{t!}{r!s!} \\
& \qquad \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k+r}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-k-r}\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p-k+s}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-s}\right] \\
= & \sum_{t=r+s=0}\left(\frac{x}{y}\right)^t\frac{p!}{t!(p-t)!}\sum_{k=s}^{p-r}(-1)^{p-k-r}\frac{(p-t)!}{(p-k-r)!(k-s)!}(1-1)^t \\
& \qquad \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k+r}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-k-r}\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p-k+s}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-s}\right] \\
= & \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-k}\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p-k}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k. \qquad \text{(II.18)}
\end{aligned}
$$

On retrouve donc le produit de Moyal.

II.3 Construction exacte générale

Sur le demi-plan supérieur, on regarde la connexion suivante :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\frac{\partial}{\partial x_1}=\mu(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_2},\qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\frac{\partial}{\partial x_2}=\frac{1}{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} = -\frac{1}{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{II.19}$$

Ici μ est une fonction sur $\mathbb{R}$ dont on précisera le rôle plus tard.

Dans la suite, on étudie l'influence de cette connexion (II.19) sur le produit (II.5).

Lemme 14 *La connexion ∇ (II.19) est plate si et seulement si $\mu(x_1, x_2) = x_2\nu(x_1)$, où $\nu(x_1)$ est une fonction lisse quelconque sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration On calcule directement la courbure de ∇ et obtient

$$\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \left(\frac{1}{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \left(\mu(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&= \frac{1}{2x_2}\left(\mu(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial \mu}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} - \mu(x_1,x_2)\left(-\frac{1}{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&= \left(\frac{\mu}{x_2} - \frac{\partial \mu}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_2} \\
R\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \left(-\frac{1}{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \left(\frac{1}{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \\
&= -\frac{1}{2x_2}\frac{1}{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} - \left(-\frac{1}{2x_2^2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{2x_2}\frac{1}{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{II.20}$$

Il en résulte que $R = 0$ si et seulement si $\dfrac{\mu}{x_2} - \dfrac{\partial \mu}{\partial x_2} = 0$. La solution de cette équation aux dérivées partielles du premier ordre est $\mu = x_2\nu(x_1)$, où $\nu(x_1)$ est une fonction lisse quelconque sur $\mathbb{R}$. □

On suppose désormais que la connexion (II.19) est plate. On déforme ($\tilde{\mathcal{O}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $\omega = dx_1 \wedge dx_2$) en utilisant cette connexion. Nous fixons comme base canonique de cette variété symplectique $e_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$, $e_2 = \dfrac{\partial}{\partial x_2}$

D'après (II.19), les symboles de Christoffel pour $\nabla^{\tilde{\mathcal{O}}}$ sont calculés comme suit,

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^1_{22} = 0\ ,\ \Gamma^2_{11} = \mu\ ,\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{2x_2}\ ,\ \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{2x_2}.$$

Prenons la Formule (5.1.8) de [15] avec les mêmes notations, on trouve

$$\begin{array}{ll}
\Gamma_{111} = \omega_{11}\Gamma^1_{11} + \omega_{12}\Gamma^2_{11} = \omega_{12}\mu, & \Gamma_{211} = \omega_{21}\Gamma^1_{11} + \omega_{22}\Gamma^2_{11} = 0, \\
\Gamma_{112} = \omega_{11}\Gamma^1_{12} + \omega_{12}\Gamma^2_{12} = 0, & \Gamma_{121} = \omega_{11}\Gamma^1_{21} + \omega_{12}\Gamma^2_{21} = 0, \\
\Gamma_{212} = \omega_{21}\Gamma^1_{12} + \omega_{22}\Gamma^2_{12} = \dfrac{1}{2x_2}\omega_{21}, & \Gamma_{221} = \omega_{21}\Gamma^1_{21} + \omega_{22}\Gamma^2_{21} = \dfrac{1}{2x_2}\omega_{21}, \\
\Gamma_{122} = \omega_{11}\Gamma^1_{22} + \omega_{12}\Gamma^2_{22} = -\dfrac{1}{2x_2}\omega_{12}, & \Gamma_{222} = \omega_{21}\Gamma^1_{22} + \omega_{22}\Gamma^2_{22} = 0.
\end{array}$$

On peut écrire $\Gamma,\ a,\ \Gamma \circ a,\ a \circ \Gamma$, et $[\Gamma, a]$ sous la forme.

$$\Gamma = \frac{1}{2}\omega_{21}\left\{\left[-\mu(u^1)^2 + \frac{1}{2x_2}(u^2)^2\right]dx_1 + \frac{1}{2x_2}2u^1u^2dx_2\right\},$$

$$a = \sum a_{m,n}(u^1)^m(u^2)^n,$$

où les $a_{m,n}$ sont des séries formelles en $\hbar$.

$$\begin{aligned}
\Gamma \circ a \quad = \quad & \Gamma a + \left(\frac{-ih}{2}\right)\frac{1}{1!}\Bigg[\omega^{12}\left(\frac{\omega_{21}}{2}\left(-\mu 2u^1dx_1 + \frac{1}{2x_2}2u^2dx_2\right)\right)\sum a_{m,n}(u^1)^m n(u^2)^{n-1} \\
& \qquad + \omega^{21}\frac{\omega_{21}}{2}\frac{1}{2x_2}(2u^2dx_1 + 2u^1dx_2)\sum a_{m,n}m(u^1)^{m-1}(u^2)^n\Bigg] \\
& + \left(\frac{-ih}{2}\right)^2\frac{1}{2!}\Bigg[(\omega^{12})^2\left(\frac{\omega_{21}}{2}(-2\mu)dx_1\right)\sum a_{m,n}(u^1)^m n(n-1)(u^2)^{n-2} \\
& \qquad + 2\omega^{12}\omega^{21}\left(\frac{\omega_{21}}{2}\frac{2}{2x_2}dx_2\right)\sum a_{m,n}m(u^1)^{m-1}n(u^2)^{n-1} \\
& \qquad + (\omega^{21})^2\left(\frac{\omega_{21}}{2}\frac{2}{2x_2}dx_1\right)\sum a_{m,n}m(m-1)(u^1)^{m-2}(u^2)^n\Bigg],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a \circ \Gamma \quad = \quad & a\Gamma + \left(\frac{-ih}{2}\right)\frac{1}{1!}\Bigg[\omega^{12}\frac{\omega_{21}}{2}\frac{1}{2x_2}(2u^2dx_1 + 2u^1dx_2)\sum a_{m,n}m(u^1)^{m-1}(u^2)^n \\
& \qquad + \omega^{21}\left(\frac{\omega_{21}}{2}\left(-\mu 2u^1dx_1 + \frac{1}{2x_2}2u^2dx_2\right)\right)\sum a_{m,n}(u^1)^m n(u^2)^{n-1}\Bigg] \\
& + \left(\frac{-ih}{2}\right)^2\frac{1}{2!}\Bigg[(\omega^{12})^2\left(\frac{\omega_{21}}{2}(-2\mu)dx_1\right)\sum a_{m,n}(u^1)^m n(n-1)(u^2)^{n-2} \\
& \qquad + 2\omega^{12}\omega^{21}\left(\frac{\omega_{21}}{2}\frac{2}{2x_2}dx_2\right)\sum a_{m,n}m(u^1)^{m-1}n(u^2)^{n-1} \\
& \qquad + (\omega^{21})^2\left(\frac{\omega_{21}}{2}\frac{2}{2x_2}dx_1\right)\sum a_{m,n}m(m-1)(u^1)^{m-2}(u^2)^n\Bigg],
\end{aligned}$$

et nous avons

$$\begin{aligned}\frac{i}{h}[\Gamma, a] &= \sum \left(\frac{1}{2}(-\mu) 2a_{m,n}(u^1)^m n (u^2)^{n-1} - \frac{1}{4x_2} 2a_{m,n} m (u^1)^{m-1}(u^2)^{n+1} \right) dx_1 \\ &\quad + \frac{1}{4x_2}(2a_{m,n}(u^1)^m n(u^2)^n - 2a_{m,n} m (u^1)^m (u^2)^n) dx_2.\end{aligned}$$

Lorsque $\mu = x_1\nu(x_2)$, ∇^2 est nulle, donc en vertu du Théorème 8, pour toute $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)[[\hbar]]$, il y a une unique solution de l'équation $Da = 0$ telle que $a_{0,0} = f$. Dans la suite, on calcule l'expression explicite de a.

D'abord, pour Da,

$$\begin{aligned} Da &= \partial a - \delta a = -\delta a + da + \frac{i}{h}[\Gamma, a] \\ &= -\sum a_{m,n} m (u^1)^{m-1}(u^2)^n dx_1 - \sum a_{m,n}(u^1)^m n (u^2)^{n-1} dx_2 \\ &\quad + \sum \frac{\partial a_{m,n}}{\partial x_1}(u^1)^m (u^2)^n dx_1 + \sum \frac{\partial a_{m,n}}{\partial x_2}(u^1)^m(u^2)^n dx_2 \\ &\quad + [-\mu \sum a_{m,n} n (u^1)^{m+1}(u^2)^{n-1} - \sum \frac{a_{m,n}}{2x_2} m (u^1)^{m-1}(u^2)^{n+1}] dx_1 \\ &\quad + \sum \frac{a_{m,n}}{2x_2}(n-m)(u^1)^m(u^2)^n dx_2. \end{aligned}$$

L'équation $Da = 0$ donne le système des équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned} -a_{m+1,n}(m+1) + \frac{\partial a_{m,n}}{\partial x_1} - (n+1)\mu a_{m-1,n+1} - \frac{a_{m+1,n-1}}{2x_2}(m+1) &= 0, \\ -a_{m,n+1}(n+1) + \frac{\partial a_{m,n}}{\partial x_2} + \frac{a_{m,n}}{2x_2}(n-m) &= 0. \end{aligned}$$

Etant donné $a_{0,0} = f$, il est possible de résoudre le système par récurrence.

$$\begin{aligned} a_{m,0} &= \frac{1}{m}\left(\frac{\partial a_{m-1,0}}{\partial x_1} - \mu a_{m-2,1} \right) = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial a_{m-1,0}}{\partial x_1} - \mu \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{m-2}{2x_2} \right) a_{m-2,0} \right), \\ a_{m,n} &= \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{m}{2x_2} \right) \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{n-m-1}{2x_2} \right) a_{m,0}. \end{aligned}$$

Si l'on écrit

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}, \\ Y &= -x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \end{aligned} \tag{II.21}$$

nous pouvons considérer les quantités suivantes

$$\begin{aligned} A_{m+1} &= -XA_m - m\frac{\mu}{x_2^3}\left(Y - \frac{m-1}{2} \right) A_{m-1}, \\ B_{m+1} &= XB_m - m\frac{\mu}{x_2^3}\left(Y - \frac{m-1}{2} \right) B_{m-1}. \end{aligned} \tag{II.22}$$

L'intérêt de ce calcul, c'est qu'il confuit aux relations ci-dessous :

$$\begin{aligned} a_{m,n} &= \frac{x_2^{m-n}}{n!}\frac{A_m}{m!}(2Y+m)\cdots(2Y+m+n-1)a, \\ b_{n,m} &= \frac{x_2^{n-m}}{m!}\frac{B_n}{n!}(2Y+n)\cdots(2Y+m+n-1)b. \end{aligned} \tag{II.23}$$

Les expressions de A_m et B_m ici sont identiques aux relations de récurrences dans (2.9) de [13] avec $-X$, et $\frac{\mu}{x_2^3} = \frac{\nu}{x_2^2}$ jouant respectivement les rôles de $S(X)$ et de Ω. On obtient ainsi un produit associatif selon Fedosov qui est un analogue de celui de Connes-Moscovici, dont la construction fait intervenir deux dérivations X et Y telles que $[Y, X] = X$, et un élément Ω.

II.4 Structure Projective

Pour reconstruire la déformation de Rankin-Cohen à la Connes-Moscovici, on a besoin de mieux comprendre la signification géométrique d'une structure projective, dont la définition précise est donnée ici :

Définition 15 ([13]) *Supposons que nous avons une action de $\mathcal{H}_1$ sur une algèbre $\mathcal{A}$. Cette action est dite projective si $\delta_2' \overset{déf}{=} \delta_2 - \frac{1}{2}\delta_1^2$ est donnée de façon intérieure par un élément $\Omega \in \mathcal{A}$, i.e.,*

$$\delta_2'(a) = [\Omega, a], \qquad \forall a \in A,$$

et

$$\delta_k(\Omega) = 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

II.4.a Le cas plat

On regarde la connexion ∇ définie par

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1} &= 0, & \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{1}{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{1}{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}, & \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} &= -\frac{1}{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned} \tag{II.24}$$

Proposition 16 *Cette connexion $\nabla^{\tilde{O}}$ (II.24) est invariante sous le difféomorphisme local ϕ : $x_1 \mapsto \tilde{x_1} \overset{déf}{=} \phi(x_1), x_2 \mapsto \tilde{x_2} \overset{déf}{=} \frac{x_2}{\phi'(x_1)}$ si et seulement si $\delta_2'(\phi) = 0$.*

Démonstration. Nous avons les règles de transformation de champs de vecteurs suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} &= \frac{1}{\phi'(x_1)}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} &= \phi'\frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}
\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) &= \phi'(x_1)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} - \frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2},\\
\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) &= \left(\frac{1}{\phi'}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\right).
\end{aligned}$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned}
\nabla_{\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)}\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) &= \nabla_{\phi'(x_1)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} - \frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}}\left(\phi'(x_1)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} - \frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\right)\\
&= \phi'^2\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} + \phi'\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}(\phi')\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}\\
&\quad -\frac{\phi''}{\phi'}x_2\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} - \phi'\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}(\frac{\phi''}{\phi'^2}x_2)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\\
&\quad -\frac{\phi''}{\phi'}x_2\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} - \frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}(\phi')\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}\\
&\quad +\left(\frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\right)^2\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\left(\frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\\
&= 0 + \phi'\frac{1}{\phi'}(\phi'')\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}\\
&\quad -\phi'\frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\frac{1}{2\tilde{x}_2}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} - \phi'\left[\frac{1}{\phi'}\frac{\phi'''\phi'^2 - 2\phi''^2\phi'}{(\phi'^2)^2}x_2 + \left(\frac{\phi''}{\phi'^2}\right)^2 x_2\right]\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\\
&\quad -\phi'\frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\frac{1}{2\tilde{x}_2}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} + 0 + \left(\frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\right)^2\frac{1}{2\tilde{x}_2}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\phi'\frac{\phi''}{\phi'^2}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\\
&= -\frac{\phi'''\phi' - \frac{3}{2}\phi''^2}{\phi'^3}x_2\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}, \qquad \text{(II.25)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)}\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) &= \nabla_{\phi'(x_1)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} - \frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}}\left(\frac{1}{\phi'}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\right)\\
&= \phi'\frac{1}{\phi'}\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} + \phi'\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}\left(\frac{1}{\phi'}\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\\
&\quad -\frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\frac{1}{\phi'}\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} - \frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\left(\frac{1}{\phi'}\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\\
&= \frac{1}{2\tilde{x}_2}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} + \phi'\frac{1}{\phi'}\left(-\frac{\phi''}{\phi'^2}\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} - \frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\frac{1}{\phi'}\left(-\frac{1}{2\tilde{x}_2}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\right) - 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\tilde{x}_2}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_1} - \frac{1}{2}\frac{\phi''}{\phi'^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_2} \\
&= \phi_*\left(\frac{1}{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \qquad \text{(II.26)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)}\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) &= \nabla_{\frac{1}{\phi'}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_2}}\left(\frac{1}{\phi'}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_2}\right) \\
&= \frac{1}{\phi'^2}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_2}}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_2}\right) + \frac{1}{\phi'}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_2}\left(\frac{1}{\phi'}\right)\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_2} \\
&= \frac{1}{\phi'^2}\left(-\frac{1}{2\tilde{x}_2}\right)\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_2} + 0 \\
&= \phi_*\left(\frac{1}{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\Big|_{(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)}. \qquad \text{(II.27)}
\end{aligned}
$$

On voit donc que la condition d'invariance de la connexion sous ϕ est équivalente à $\phi'''\phi' - \frac{3}{2}\phi''^2 = 0$, i.e. $\delta_2'(\phi) = 0$. $\square$

II.4.b Le cas général

Dans le cas où δ_2' n'est plus trivial, on regarde la connexion suivante,

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \mu(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}, \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{1}{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}}\frac{\partial}{\partial x_2} = -\frac{1}{2x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}. \qquad \text{(II.28)}
\end{aligned}
$$

Où μ est une fonction à laquelle on imposera certaines conditions précises.

Théorème 17 *Soit Γ un pseudo-groupe engendré par des difféomorphismes locaux sur $\mathbb{R}$ agissant sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ par $\phi : x_1 \mapsto \phi(x_1), x_2 \mapsto \frac{x_2}{\phi'(x_1)}$, $\forall\phi\in\Gamma$. Supposons aussi que la dimension de l'ensemble des points fixes de chaque élément $\phi\in\Gamma$ est inférieure où égale à 1. La connexion ∇ dans (II.28) est invariante par rapport à l'action de Γ si et seulement si l'action de $\mathcal{H}_1$ sur l'algèbre de groupoïde correspondante $\Gamma\ltimes C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ est projective.*

Démonstration. Etant donné un difféomorphisme local ϕ, nous avons les quantités suivantes qui sont différentes de celles qui apparaissent dans la démonstration de la Proposition 16. Les autres termes sont les mêmes.

$$
\nabla_{\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)}\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \nabla_{\phi'(x_1)\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_1} - \frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_2}}\left(\phi'(x_1)\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_1} - \frac{\phi''}{\phi'^2}x_2\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_2}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \phi'^2 \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} + \phi' \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}(\phi') \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \\
&\quad - \frac{\phi''}{\phi'} x_2 \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} - \phi' \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}(\frac{\phi''}{\phi'^2} x_2) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \\
&\quad - \frac{\phi''}{\phi'} x_2 \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} - \frac{\phi''}{\phi'^2} x_2 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}(\phi') \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \\
&\quad + (\frac{\phi''}{\phi'^2} x_2)^2 \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\phi''}{\phi'^2} x_2 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}(\frac{\phi''}{\phi'^2} x_2) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \\
&= \phi'^2 \mu(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} + \phi' \frac{1}{\phi'}(\phi'') \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \\
&\quad - \phi' \frac{\phi''}{\phi'^2} x_2 \frac{1}{2\tilde{x}_2} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} - \phi' \left[\frac{1}{\phi'} \frac{\phi''' \phi'^2 - 2\phi''^2 \phi'}{(\phi'^2)^2} x_2 + \left(\frac{\phi''}{\phi'^2} \right)^2 x_2 \right] \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \\
&\quad - \phi' \frac{\phi''}{\phi'^2} x_2 \frac{1}{2\tilde{x}_2} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} + 0 \\
&\quad + \left(\frac{\phi''}{\phi'^2} x_2 \right)^2 \frac{1}{2\tilde{x}_2} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\phi''}{\phi'^2} x_2 \phi' \frac{\phi''}{\phi'^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \\
&= \left[\phi'^2 \mu(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - \frac{\phi''' \phi' - \frac{3}{2} \phi''^2}{\phi'^3} x_2 \right] \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}.
\end{aligned}
\tag{II.29}
$$

D'après l'invariance de ∇, nous avons

$$
\left[\phi'^2 \mu(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - \frac{\phi''' \phi' - \frac{3}{2} \phi''^2}{\phi'^3} x_2 \right] \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} = \phi_* \left(\mu(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = \mu(x_1, x_2) \frac{1}{\phi'} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2},
$$

et

$$
\frac{\phi''' \phi' - \frac{3}{2} \phi''^2}{\phi'^3} x_2 = \phi'^2 \mu \left(\phi(x_1), \frac{x_2}{\phi'} \right) - \frac{1}{\phi'} \mu(x_1, x_2). \tag{II.30}
$$

Cette équation (II.30) nous montre que

$$
\frac{\phi''' \phi' - \frac{3}{2} \phi''^2}{\phi'^2} x_2^2 = \phi'^4 \tilde{x}_2 \mu \left(\phi(x_1), \frac{x_2}{\phi'} \right) - x_2 \mu(x_1, x_2). \tag{II.31}
$$

1. $\Rightarrow$. Soit ϕ un élément de Γ.

   On introduit la notation $\nu = \dfrac{\mu(x_1, x_2)}{x_2}$, et l'équation (II.31) est équivalente à

$$
\frac{\phi''' \phi' - \frac{3}{2} \phi''^2}{\phi'^2} = \phi'^2 \nu \left(\phi(x_1), \frac{x_2}{\phi'} \right) - \nu(x_1, x_2).
$$

   Notons $o(x_1, x_2) = \nu \left(x_1, \dfrac{1}{x_2} \right)$, et nous avons

$$
\frac{\phi''' \phi' - \frac{3}{2} \phi''^2}{\phi'^2} = \phi'^2 \nu \left(\phi(x_1), \frac{x_2}{\phi'} \right) - \nu(x_1, x_2) = \phi'^2 o \left(\phi(x_1), \frac{\phi'}{x_2} \right) - o \left(x_1, \frac{1}{x_2} \right).
$$

Ecrivons maintenant $y = \dfrac{1}{x_2}$, l'équation ci-dessus donne

$$\frac{\phi'''\phi' - \frac{3}{2}\phi''^2}{\phi'^2} = \phi'^2 o(\phi(x_1), \phi' y) - o(x, y). \tag{II.32}$$

Enfin, prenons $\Omega(x, y) = y^2 o(x, y),\ x_1 = x$, on voit alors que l'équation (II.32) implique

$$\frac{\phi'''\phi' - \frac{3}{2}\phi''^2}{\phi'^2} y^2 = \phi'^2 y^2 o(\phi(x_1), \phi' y) - o(x, y) y^2 = (\phi^{-1})^*(\Omega)(x, y) - \Omega(x, y).$$

Le côté gauche est égal à l'expression de $\delta_2'(\phi^{-1})$. Cette identité montre alors que δ_2' est intérieure quand on considère l'action de $\mathcal{H}_1$ sur le groupoïde de feuilletage $FX \rtimes \mathcal{G}$ comme expliquée plus haut.

2. $\Leftarrow$. Supposons que l'action de $\mathcal{H}_1$ sur $\Gamma \ltimes C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ soit projective.
On montre d'abord que si l'action de $\mathcal{H}_1$ est la projection sur $\Gamma \ltimes C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, le support de Ω est nécessairement contenu dans l'espace des unités. On écrit $\Omega = \sum_{\alpha \in \Gamma} \Omega_\alpha U_\alpha$ et $\delta_2'(U_\phi) U_\phi = [\Omega, U_\phi]$, alors les observations suivantes sont faciles à obtenir.
   (a) Comme $\delta_i(\Omega) = 0,\ \forall i > 0$, on obtient que $\delta_i(U_\alpha)\Omega_\alpha = 0, \forall \alpha$.
   (b) Comme $\delta_i(f) = 0$ pour tout $f \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, on voit que $[\Omega, f] = \sum_{\alpha \in \Gamma}(\alpha^*(f) - f)\Omega_\alpha U_\alpha$. Ainsi $(\alpha^*(f) - f)\Omega_\alpha = 0$, pour tout $\alpha \in \Gamma$.

   Pour un $\alpha \in \Gamma$ donné différent de l'identité, nous avons $\delta_i(U_\alpha)\Omega_\alpha = 0,\ \forall i > 0$ et $(\alpha^*(f) - f)\Omega_\alpha = 0$. S'il existe $x_0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ tel que $\Omega_\alpha(x_0) \neq 0$, alors il existe un voisinage N de x_0 sur lequel $\delta_i(U_\alpha) = 0$. En particulier $\delta_1(U_\alpha) = \log((\alpha^{-1})')' = 0$. En résolvant cette équation différentielle, on voit que l'action de α sur N est nécessairement donnée par $\alpha : (x_1, x_2) \mapsto (ax_1 + b, ax_2)$. D'après le fait que $(\alpha^*(f) - f)\Omega_\alpha(x_0) = 0$ sur N, pour toute fonction lisse, on a $\alpha(x_0) = x_0$. Le même argument montre que tout $x \in N$ doit être point fixe pour α, parce que $\Omega_\alpha(x) \neq 0$. Mais cela contredit notre hypothèse que l'ensemble des points fixes de α est de dimension au plus 1. Donc $\Omega_\alpha = 0$.
   On conclut que le support de Ω est contenu dans l'espace des unités, la condition de projectivité se traduisant par

$$\delta_2(\phi^{-1}) = y^2 \frac{\phi'''\phi' - \frac{3}{2}\phi''^2}{\phi'^2} U_\phi = (\Omega - \phi^*(\Omega)) U_\phi.$$

   D'après (II.32) et la transformation là-bas, on sait que l'existence de Ω implique l'existence d'une connexion invariante comme (II.19). $\square$

Remarque 18 *Ici, pour alléger les notations dans les calculs, on a identifié le fibré des repères $F\mathbb{R}$ avec le fibré cotangent $T^*\mathbb{R}$ par $\tau : (x, y) \mapsto (x, \frac{1}{y})$. La connexion ∇ est définie sur $T^*\mathbb{R}$ et par la transformation τ, elle est aussi définie sur $F\mathbb{R}$.*

Dans le Théorème 17, l'hypothèse "la dimension de l'ensemble de points fixes pour tout élément de Γ est au plus 1" n'est utilisée que dans la partie "suffisante" de la démonstration. En général, Ω est à support dans l'ensemble des points fixes $B^{(0)}$ de Γ, qui est $\{(\gamma, x) |\ \gamma \in \Gamma, \gamma(x) =$

$x\}$. Le groupe Γ agit sur $B^{(0)}$ par conjugaison. Le résultat similaire du Théorème 17 est étendu à cette situation générale sans effort supplémentaire.

Théorème 17' *Soit* Γ *un pseudo-groupe engendré par des difféomorphismes locaux sur* $\mathbb{R}$ *et soit* $B^{(0)} = \{(\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ | \gamma \cdot x = x\}$ *l'ensemble des points fixes. Une action projective* (ρ, Ω) *de* $\mathcal{H}_1$ *sur* $\Gamma \ltimes C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ *correspond de façon bijective à une connexion* Γ*-invariante* ∇ *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ *de la forme (II.19) et à une fonction lisse* f *sur* $\Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$*, qui est à support dans* $B^{(0)} - \{(id, x) | x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$ *et invariante sous l'action de* Γ *par conjugaison.*

II.5 Injectivité Complète

Nous avons vu plus haut que la quantification par déformation de la structure symplectique standard du demi-plan supérieur par rapport à la connexion (II.19) avec $\mu(x_1, x_2) = x_2 \nu(x_1)$ donne quelque chose de très proches de la déformation de Rankin-Cohen pour l'algèbre des formes modulaires. Pour généraliser cela à toute action de $\mathcal{H}_1$ munie d'une structure projective, nous adaptons l'argument de Connes et Moscovici [13][Sec. 3] à notre situation.

On rappelle l'argument de Connes et Moscovici :

D'abord, nous introduisons une algèbre abélienne libre $\mathcal{P}$ avec un ensemble de générateurs indexé par $\mathbb{N}$, $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n, \ldots$. On définit une action de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{P}$ par

$$Y(Z_j) \overset{\text{déf}}{=} (j+2) Z_j \ , \ X(Z_j) \overset{\text{déf}}{=} Z_{j+1} \ , \ \delta_k(p) = 0 \ , \forall p \in P, \ j \geq 0, \tag{II.33}$$

et on étend X et Y comme dérivation. Ensuite, on considère le bi-produit croisé $\tilde{\mathcal{H}_1} \overset{\text{déf}}{=} P \rtimes \mathcal{H}_1 \ltimes P$, qui s'identifie à $P \otimes \mathcal{H}_1 \otimes P$ en tant qu'espace vectoriel. Le produit est défini par

$$P \rtimes h \ltimes Q \cdot P' \rtimes h' \ltimes Q' := \sum_{(h)} P h_{(1)}(P') \rtimes h_{(2)} h' \ltimes h_{(3)}(Q') Q, \tag{II.34}$$

où $P, Q, P', Q' \in \mathcal{P}$ et $h, h' \in \mathcal{H}_1$.

Connes et Moscovici définissent sur $\tilde{\mathcal{H}_1}$ une structure d'algèbre de Hopf étendue sur $\mathcal{P}$. Ils la rendent un $\mathcal{P}$-bimodule (libre), à l'aide des homomorphismes *source* et *but* : $\alpha, \beta : P \to \tilde{\mathcal{H}_1}$ définis par

$$\alpha(p) = p \rtimes 1 \ltimes 1, \qquad \beta(q) = 1 \rtimes 1 \ltimes q, \quad \forall p, q \in \mathcal{P}. \tag{II.35}$$

On a donc

$$P \rtimes h \ltimes Q = \alpha(P) \cdot \beta(Q) \cdot h \ , \quad P, Q \in \mathcal{P} \ , \ \ h \in \mathcal{H}_1, \tag{II.36}$$

et la structure de module à gauche est définie par la multiplication à gauche par $\beta(\cdot)$, la structure de module à droite définie par la multiplication à gauche par $\alpha(\cdot)$.

On peut maintenant considérer le coproduit $\Delta : \tilde{\mathcal{H}_1} \to \tilde{\mathcal{H}_1} \otimes_{\mathcal{P}} \tilde{\mathcal{H}_1}$ défini par

$$\Delta(P \rtimes h \ltimes Q) := \sum_{(h)} P \rtimes h_{(1)} \ltimes 1 \otimes 1 \rtimes h_{(2)} \ltimes Q. \tag{II.37}$$

Il satisfait à toutes les propriétés de la Proposition 6 de [10]. En particulier, même si le produit de deux éléments dans $\tilde{\mathcal{H}_1} \otimes_{\mathcal{P}} \tilde{\mathcal{H}_1}$ n'est pas défini en général, le fait que Δ soit multiplicative, c'est à dire,

$$\Delta(h_1 \cdot h_2) = \Delta(h_1) \cdot \Delta(h_2) \ , \quad \forall h_1, h_2 \in \tilde{\mathcal{H}_1},$$

a toujours un sens parce que la propriété

$$\Delta(h) \cdot (\beta(Q) \otimes 1 - 1 \otimes \alpha(Q)) = 0, \ \ \forall Q \in \mathcal{P}, h \in \tilde{\mathcal{H}_1},$$

ne fait usage que de l'action à droite de $\tilde{\mathcal{H}_1} \otimes \tilde{\mathcal{H}_1}$ sur $\tilde{\mathcal{H}_1} \otimes_{\mathcal{P}} \tilde{\mathcal{H}_1}$ par la multiplication à droite(cf. [13]).

La co-unité $\epsilon : \tilde{\mathcal{H}_1} \to \mathcal{P}$ est définie par

$$\epsilon(P \rtimes h \ltimes Q) := P\epsilon(h)Q, \ \ P, Q \in \mathcal{P}, \ \ h \in \mathcal{H}_1,$$

et satisfait aux conditions de la Proposition 7 de [10].

Enfin, la formule pour l'antipode est

$$S(P \rtimes h \ltimes Q) := S(h)_{(1)}(Q) \rtimes S(h)_{(2)} \ltimes S(h)_{(3)}(P) = S(h) \cdot \alpha(Q) \cdot \beta(P).$$

Dans le même esprit, une algèbre $\mathcal{A}$ est appelée une algèbre-module sur $\tilde{\mathcal{H}_1}|P$ si : elle est dotée d'un homomorphisme d'algèbres $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{A}$ (jouant le rôle d'application d'unité sur $\mathcal{P}$), qui rend $\mathcal{A}$ un $\mathcal{P}$-bimodule via les multiplications à gauche et à droite de l'image de ρ ; Elle est munie d'une action $H \otimes a \mapsto H(a)$, $H \in \tilde{\mathcal{H}_1}$, $a \in \mathcal{A}$ qui satisfait, outre les règles d'action usuelles

$$\begin{array}{rcll} (H \cdot H')(a) & = & H(H'(a)), & , H, H' \in \tilde{\mathcal{H}_1}, \\ 1(a) & = & a, & a \in \mathcal{A}, \end{array} \tag{II.38}$$

aux règles de compatibilité,

$$\begin{array}{rcll} H(a_1 a_2) & = & \sum\limits_{(H)} H_{(1)}(a_1) H_{(2)}(a_2), & a_1, a_1 \in \mathcal{A}, \\ H(1) & = & \rho(\epsilon(H)), & H \in \tilde{\mathcal{H}_1}. \end{array} \tag{II.39}$$

En particulier, pour tout $P \in \mathcal{P}$,

$$\alpha(P)(a) = \rho(P)a, \ \text{ resp. } \beta(P)(a) = a\rho(P), \ \ a \in \mathcal{P}, \tag{II.40}$$

et donc, plus généralement, pour tout monôme $H = P \rtimes h \ltimes Q \in \tilde{\mathcal{H}_1}$ on a

$$P \rtimes h \ltimes Q(a) = \rho(P)h(a)\rho(Q). \tag{II.41}$$

Maintenant, pour prendre en compte la structure projective, on définit

$$\tilde{\delta_2'} \overset{\text{déf}}{=} \delta_2 - \frac{1}{2}\delta_1^2 - \alpha(Z_0) + \beta(Z_0), \tag{II.42}$$

et on observe d'abord qu'il est un élément primitif dans $\tilde{\mathcal{H}}_1$:

$$
\begin{aligned}
\Delta(\tilde{\delta_2'}) &= \Delta(\delta_2') - \frac{1}{2}\Delta(\delta_1^2) - \Delta(\alpha(Z_0)) + \Delta(\beta(Z_0)) \\
&= \quad \delta_2 \otimes 1 + 1 \otimes \delta_1 + \delta_1 \otimes \delta_1 \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\delta_1^2 \otimes 1 + 1 \otimes \delta_1^2 + 2\delta_1 \otimes \delta_1\right) \\
&\quad -Z_0 \rtimes 1 \ltimes 1 \otimes 1 \rtimes 1 \ltimes 1 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +1 \rtimes 1 \ltimes 1 \otimes 1 \rtimes 1 \ltimes Z_0 \\
&= \quad \delta_2 \otimes 1 \qquad\qquad\qquad\quad + 1 \otimes \delta_1 \\
&\quad -\frac{1}{2}\delta_1^2 \otimes 1 \qquad\qquad\quad - \frac{1}{2} 1 \otimes \delta_1^2 \\
&\quad -Z_0 \rtimes 1 \ltimes 1 \otimes 1 \rtimes 1 \ltimes 1 - 1 \rtimes 1 \ltimes 1 \otimes Z_0 \rtimes 1 \ltimes 1 \\
&\quad +1 \rtimes 1 \ltimes Z_0 \otimes 1 \rtimes 1 \ltimes 1 + 1 \rtimes 1 \ltimes 1 \otimes 1 \rtimes 1 \ltimes Z_0 \\
&= \tilde{\delta_2'} \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{\delta_2'}.
\end{aligned} \tag{II.43}
$$

On note par $\tilde{\mathcal{H}}_s$ le quotient de $\tilde{\mathcal{H}}_1$ par l'idéal engendré par $\tilde{\delta_2}'$. D'après (II.43), ce dernier est aussi un co-idéal. Donc $\tilde{\mathcal{H}}_s$ est muni d'une structure d'algèbre de Hopf étendue sur $\mathcal{P}$. Il est clair qu'une action de $\tilde{\mathcal{H}}_1|P$ sur une algèbre $\mathcal{A}$ avec une structure projective descend aussi à une action de $\tilde{\mathcal{H}}_s$ sur $\mathcal{A}$.

Fixons-nous maintenant une fonction $\mu(x_1, x_2)$; considérons alors une action du pseudo-groupe Γ sur $\mathbb{R}$ dont le relevé à $T^*\mathbb{R}$ préserve la connexion ∇ (II.19) définie par μ. D'après le Théorème 17, l'action correspondante de $\mathcal{H}_1$ sur l'algèbre de groupoïde $\mathcal{A}_{\mu,\Gamma} \overset{\text{déf}}{=} \Gamma \ltimes C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ est projective avec Ω définie comme dans la démonstration.

On définit $\rho_{\mu,\Gamma} : P \to \mathcal{A}_{\mu,\Gamma}$ par $\rho(Z_k) = X^k(\Omega)$. Ceci fait de $\mathcal{A}_{\mu,\Gamma}$ une algèbre-module sur $\tilde{\mathcal{H}}_1|P$ par

$$\chi_{\mu,\Gamma}(p \rtimes h \rtimes q)(U_\gamma f) \overset{\text{déf}}{=} \rho_{\mu,\Gamma}(p) h(U_\gamma f) \rho_{\mu,\Gamma}(q).$$

L'algèbre $\mathcal{A}_{\mu,\Gamma}$ devient une algèbre-module sur $\tilde{\mathcal{H}}_s|P$ parce que $\tilde{\delta_2'}$ agit trivialement quand l'action de $\mathcal{H}_1$ est projective.

On définit l'action $\chi^{(n)}_{\mu,\Gamma}$,

$$\chi^{(n)}_{\mu,\Gamma} : \underbrace{\tilde{\mathcal{H}}_s \otimes_P \cdots \otimes \tilde{\mathcal{H}}_s}_{n} \to \mathcal{L}(\underbrace{\mathcal{A}_{\mu,\Gamma} \otimes \cdots \mathcal{A}_{\mu,\Gamma}}_{n}, \mathcal{A}_{\mu,\Gamma})$$

par son action sur chaque composante, où $\mathcal{L}$ désigne l'ensemble des applications linéaires.

Pour $\mu = x_2\nu(x_1)$, Nous avons la proposition suivante, analogue de [13][Prop. 12].

Proposition 19 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{\nu(x_1),\Gamma} Ker\chi^{(n)}_{x_2\nu(x_1),\Gamma} = 0$.

Démonstration. Par la définition des $\chi^{(n)}_{\mu,\Gamma}$, il nous suffit de présenter ici la démonstration pour $n = 1$.

Suivant la preuve de [13][Prop. 12], un élément quelconque de $\tilde{\mathcal{H}}_s$ s'écrit de façon unique comme une somme finie

$$H = \sum_{j,k,l,m} \alpha(p_{jklm})\beta(q_{jklm})\delta_1^j X^k Y^l,$$

où p et q appartenant à $\mathcal{P}$.

Soit $\chi_{x_2\nu(x_1),\Gamma}(H) = 0$, pour tout $\nu(x_1)$ et tout pseudo-groupe Γ préservant la connexion définie par $x_2\nu(x_1)$, d'après la démonstration du Théorème 17, nous savons qu'ici, $\Omega = x_2^2\nu(x_1)$.

Si $U_\gamma f \in \mathcal{A}_{x_2\nu(x_2),\Gamma}$, alors

$$\sum_{j,k,l,m} \rho_{x_1\nu(x_2),\Gamma}(p_{jklm})\gamma^*(\rho_{x_1\nu(x_2)}(q_{jklm}))\delta_1(\gamma)^j X^k Y^l(f) = 0.$$

On tient compte aussi du fait que f est une fonction lisse quelconque sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, et que $X^k Y^l = x_2^{m+l} \dfrac{d^k}{dx_1^m} \dfrac{d^l}{dx_2^l}$. Cela implique que

$$\sum_{j,m} \rho_{x_1\nu(x_2),\Gamma}(p_{jklm})\gamma^*(\rho_{x_1\nu(x_2)}(q_{jklm}))\delta_1(\gamma)^j = 0,$$

pour tout l et m.

Pour terminer la démonstration, on considère la famille des algèbres, $\mathcal{A}_{x_2\nu(x_2),\Gamma}$.

Fixons un difféomorphisme ϕ_{O_1,O_2} d'un ensemble ouvert $O_1 \subset \mathbb{R}$ à un autre ensemble ouvert $O_2 \subset \mathbb{R}$, avec O_1 disjoint à O_2. Cette propriété topologique fait de l'ensemble $\Gamma_\phi \overset{\text{déf}}{=} \{id|_{\mathbb{R}}, id|_{O_1}, id|_{O_2}, \phi, \phi^{-1},\}$ un pseudo-groupe. A partir d'une connexion ∇_1 quelconque de la forme (II.19) avec $\mu = x_2\nu(x_1)$ sur O_1, nous faisons d'abord le poussé en avant de cette connexion à O_2 par ϕ, et étendons des connexions définies sur O_1 et O_2 en une connexion globale $\tilde{\nabla}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. L'extension existe bien parce que O_1 et O_2 sont disjoints. Elle est Γ_ϕ invariante par définition. Selon notre construction, nous avons l'action de $\tilde{\mathcal{H}_s}$ sur l'algèbre de groupoïde correspondante $\mathcal{A}_{\phi_{O_1,O_2},\tilde{\nabla}}$.

Maintenant pour tout $x \in \mathbb{R}$, on fixe O_1 contenant x, et on fait varier O_2, ϕ et ∇_1. Si H s'annule sur cette famille d'algèbres, $\mathcal{A}_{\phi_{O_1,O_2},\tilde{\nabla}}$, et comme il ne contient qu'un nombre fini de termes, il est donc polynômial pour la variable $\dfrac{\phi^{-1''}}{\phi^{-1'}}$(cf. (A.1). Nous voyons que H s'annule en x, grâce au très grand degré de libertés pour cette famille d'algèbres. On en déduit que H est égal à 0. $\square$

D'après la Proposition 19, on conclut que RC peut être tiré en arrière à $\tilde{\mathcal{H}_s}$ et définit une déformation associative universelle pour toute action projective de $\mathcal{H}_1$.

Remarque 20 *Pour la déformation (I.47), on avait comme hypothèse la projectivité de l'action. On peut se demander s'il est possible d'aller au-delà. On cherche une approximation d'ordre 1 de la déformation générale et démontre que RC_1 définit une structure de Poisson non commutative sans aucune hypothèse complémentaire. En d'autres termes, il existe un cocycle P tel que la condition d'associativité au degré 2 soit vérifiée :*

Définition-Proposition 21 *Pour une action de* $\mathcal{H}_1$ *sur une algèbre* A*,* $RC_1 = -X \otimes 2Y + 2Y \otimes X + \delta_1 Y \otimes 2Y$ *définit une structure de Poisson non commutative sur* A*, il existe un élément* P *dans* $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$*, tel que pour tous* $a, b, c \in A$*,*

$$aP(b,c) - P(ab,c) + P(a,bc) - P(a,b)c = RC_1(RC_1(a,b),c) - RC_1(a, RC_1(b,c)). \tag{II.44}$$

Démonstration. La démonstration est assez calculatoire. Afin de trouver un tel P, on cherche d'abord dans le cas spécial où l'action d'algèbre de Hopf est projective. Ici, l'associativité de la formule de déformation universelle de $\mathcal{H}_1$ de Connes-Moscovici suggère que RC_2 est un choix approximatif pour P.

Pour une action de $\mathcal{H}_1$ en général, on considère d'abord le terme suivant

$$P' = S(X)^2 \otimes Y(2Y+1) + S(X)(2Y+1) \otimes X(2Y+1) + Y(2Y+1) \otimes X^2.$$

Nous devons calculer la différence entre les cobords de Hochschild pour P' et le côté droit de (II.44), en utilisant la primitivité de Y et $\delta_2' = \delta_2 - \frac{1}{2}\delta_1^2$. L'astuce que l'on utilise est la suivante : nous savons déjà que cette différence est zero si $\delta_2' = 0$, il nous suffit donc de calculer la somme des termes qui contiennent δ_2'. Dans notre cas, la seule manière dont δ_2' apparaît est quand on a un X devant un δ_1 dans le calcul et une commutation entre les deux donne, outre que le terme normalisé $\delta_1 X$, le terme δ_2, et *a fortiori* δ_2'. Nous avons donc comme préparation,

$$\begin{aligned}
S(X)^2 &= X^2 - \delta_1 X(2Y+1) + \delta_1^2 Y\left(Y + \frac{1}{2}\right) - \delta_2' Y \\
XS(X) &= -X^2 + \delta_1 XY + \frac{1}{2}\delta_1^2 Y + \delta_2' Y, \\
P' &= \left[X^2 - \delta_1 X(2Y+1) + \delta_1^2 Y\left(Y + \frac{1}{2}\right) - \delta_2' Y\right] \otimes Y(2Y+1) \\
&\quad + (-X + \delta_1 Y) \otimes X(2Y+1) + Y(2Y+1) \otimes X^2, \\
\Delta(X)^2 &= (X \otimes 1 + 1 \otimes X + \delta_1 \otimes Y)^2 \\
&= X^2 \otimes 1 + 2X \otimes X + 1 \otimes X^2 + \delta_1^2 \otimes Y^2 \\
&\quad + (X\delta_1 + \delta_1 X) \otimes Y + \delta_1 \otimes (XY + YX) \\
&= X^2 \otimes 1 + 2X \otimes X + 1 \otimes X^2 + \delta_1^2 \otimes Y\left(Y + \frac{1}{2}\right) \\
&\quad + 2\delta_1 X \otimes Y + \delta_2' \otimes Y + \delta_1 \otimes X(2Y+1).
\end{aligned}$$

Pour $b(P') = 1 \otimes P' - (\Delta \otimes 1)P' + (1 \otimes \Delta)P' - P' \otimes 1$, nous observons :
- dans $1 \otimes P'$ la contribution en δ_2' est : $-1 \otimes \delta_2' Y \otimes Y(2Y+1)$;
- pour $-(\Delta \otimes 1)P'$, on a le développement :

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes 1)P' = &\Big[\Delta(X)^2 - \Delta(\delta_1)\Delta(X)(2\Delta(Y)+1) + \\
&\quad \Delta(\delta_1)^2\Delta(Y)\left(\delta(Y) + \frac{1}{2}\right) - \Delta(\delta_2')\Delta(Y)\Big] \otimes Y(2Y+1) \\
&+ (-\Delta(X) + \Delta(\delta_1)\Delta(Y)) \otimes X(2Y+1) + \Delta(Y)(2\Delta(Y)+1) \otimes X^2,
\end{aligned}$$

la contribution en δ_2' est : $-[\delta_2' \otimes Y - \Delta(\delta_2')\Delta(Y)] \otimes Y(2Y+1)$;

– pour $+(1\otimes\Delta)P'$, on a le développement :

$$\begin{aligned}(1\otimes\Delta)P' &= \left[X^2-\delta_1X(2Y+1)+\delta_1^2Y\left(Y+\frac{1}{2}\right)-\delta_2'Y\right]\otimes\Delta(Y)(2\Delta(Y)+1)\\ &\quad+(-X+\delta_1Y)\otimes\Delta(X)(2\Delta(Y)+1)+Y(2Y+1)\otimes\Delta(X)^2,\end{aligned}$$

la contribution en δ_2' est : $-\delta_2'Y\otimes\Delta(Y)(2\Delta(Y)+1)+Y(2Y+1)\otimes\delta_2'\otimes Y$;

– dans $-P'\otimes 1$ la contribution en δ_2' est : $\delta_2'Y\otimes Y(2Y+1)\otimes 1$.

De même, dans le calcul de $[RC_1,RC_1]=((\Delta\otimes 1)RC_1)(RC_1\otimes 1)-((1\otimes\Delta)RC_1)(1\otimes RC_1)$, on observe :

– Dans

$$\begin{aligned}&((\Delta\otimes 1)RC_1)(RC_1\otimes 1)\\ =\;&[(-\Delta(X)+\Delta(\delta_1)\Delta(Y))\otimes 2Y+2\Delta(Y)\otimes X][((-X+\delta_1Y)\otimes 2Y+2Y\otimes X)\otimes 1],\end{aligned}$$

la contribution en δ_2' est : $-\delta_2'Y\otimes 2Y\otimes 2Y=-4\delta_2'Y\otimes Y\otimes Y$;

– Dans

$$\begin{aligned}&-((1\otimes\Delta)RC_1)(1\otimes RC_1)\\ =\;&-[(-X+\delta_1Y)\otimes 2\Delta(Y)+2Y\otimes\Delta(X)][1\otimes((-X+\delta_1Y)\otimes 2Y+2Y\otimes X)],\end{aligned}$$

la contribution en δ_2' est : $-2Y\otimes\delta_2'Y\otimes 2Y=-4Y\otimes\delta_2'Y\otimes Y$.

En sommant ensemble ces termes qui contiennent δ_2' , on trouve

$$\begin{aligned}&-1\otimes\delta_2'Y\otimes Y(2Y+1)-[\delta_2'\otimes Y-\Delta(\delta_2')\Delta(Y)]\otimes Y(2Y+1)\\ &-\delta_2'Y\otimes\Delta(Y)(2\Delta(Y)+1)+Y(2Y+1)\otimes\delta_2'\otimes Y-\delta_2'Y\otimes Y(2Y+1)\otimes 1\\ &+4\delta_2'Y\otimes Y\otimes Y+4Y\otimes\delta_2'Y\otimes Y\\ =\;&(\delta_2'\otimes Y+Y\otimes\delta_2')\otimes Y(2Y+1)-\delta_2'Y\otimes 4Y\otimes Y+Y(2Y+1)\otimes\delta_2'\otimes Y\\ &+4\delta_2'Y\otimes Y\otimes Y+4Y\otimes\delta_2'Y\otimes Y\\ =\;&2Y^2\otimes\delta_2'\otimes Y+2Y\otimes\delta_2'\otimes Y^2+2Y\otimes\delta_2'\otimes Y+4Y\otimes\delta_2'Y\otimes Y.\end{aligned}\tag{II.45}$$

C'est à dire

$$(b(P')-[RC_1,RC_1])(a,b,c)=2Y^2a\delta_2'bYc+2Ya\delta_2'bY^2c+2Ya\delta_2'bYc+4Ya\delta_2'YbYc.\tag{II.46}$$

Les identités suivantes résultent d'un calcul direct.

$$\begin{aligned}b(\delta_2'Y\otimes Y^2)(a,b,c)\;&=a\delta_2'YbY^2c-\delta_2'Y(ab)Y^2c+\delta_2'YaY^2(bc)-\delta_2'Ya(Y^2b)c\\ &=-\delta_2'aYbY^c-Ya\delta_2'bY^2c+2\delta_2'YaYbYc,\\ b(\delta_2'Y^2\otimes Y)(a,b,c)\;&=a\delta_2'Y^2bYc-\delta_2'Y^2(ab)Yc+\delta_2'Y^2aY(bc)-\delta_2'Y^2a(Yb)c\\ &=-\delta_2'aY^2bYc-Y^2a\delta_2'bYc-2\delta_2'YaYbYc-2Ya\delta_2'YbYc,\\ b(\delta_2'\otimes Y^3)(a,b,c)\;&=a\delta_2'bY^3c-\delta_2'(ab)Y^3c+\delta_2'aY^3(bc)-\delta_2'a(Y^3b)c\\ &=3\delta_2'aY^2bYc+3\delta_2'aYbY^2c,\\ b(\delta_2'Y\otimes Y)(a,b,c)\;&=a\delta_2'YbYc-\delta_2'Y(ab)Yc+\delta_2'YaY(bc)-\delta_2'Ya(Yb)c\\ &=-\delta_2'aYbYc-Ya\delta_2'bYc,\\ b(\delta_2'\otimes Y^2)(a,b,c)\;&=a\delta_2'bY^2c-\delta_2'(ab)Y^2c+\delta_2'aY^2(bc)-\delta_2'aY^2bc\\ &=2\delta_2'aYbYc.\end{aligned}$$

On y voit alors la nécessité d'introduire $P'' = -2\delta'_2 Y \otimes Y^2 - 2\delta'_2 Y^2 \otimes Y - \dfrac{2}{3}\delta'_2 \otimes Y^3 - 2\delta'_2 Y \otimes Y - \delta'_2 \otimes Y^2$ et $P = P' + P''$. Donc nous avons

$$b(P)(a,b,c) = b(P' + P'')(a,b,c) = RC_1(RC_1(a,b),c) - RC_1(a, RC_1(b,c)).\square$$

Chapitre III

Rankin-Cohen via la Théorie des Représentations

Dans ce chapitre, exposons une autre interprétation des crochets de Rankin-Cohen au moyen de la théorie des représentations unitaires (de dimension infinie) de $SL_2(\mathbb{R})$, et nous utilisons ensuite les résultats obtenus pour étudier des propriétés du produit déformé, et démontrer notamment son associativité.

III.1 Crochets de Rankin-Cohen et $SL_2(\mathbb{R})$

III.1.a Des formes modulaires aux séries discrètes

Dans la suite nous allons suivre en partie l'argument qui m'a été indiqué par Jean-Pierre Labesse [24]) :

Soit $f \in \mathcal{M}_{2k}(\Gamma)$ une forme modulaire de poids $2k$ par rapport à un sous groupe arithmétique (c'est à dire de congruence) Γ de $SL_2(\mathbb{Z})$. On lui associe une fonction Γ-invariante sur $\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{R})$.

$$(\sigma_{2k}f)(g) = f\Big|_k g(i) = (ci+d)^{-2k} f\,(g.i) = (ci+d)^{-2k} f\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right), \tag{III.1}$$

pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$. Cette fonction est invariante par translation à gauche des éléments du groupe Γ : soit $\gamma \in \Gamma$, $f|_k\gamma g = (f|_k\gamma)|_k g = f|_k g$.

On vérifie aussi que pour

$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}), \tag{III.2}$$

on a

$$gr_\theta = \begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta & a\sin\theta + b\cos\theta \\ c\cos\theta - d\sin\theta & c\sin\theta + d\cos\theta \end{pmatrix},$$

et $(c\cos\theta - d\sin\theta)i + (c\sin\theta + d\cos\theta) = (ci+d)(\cos\theta - i\sin\theta)$, $r_\theta(i) = i$. Cela implique

$$(\sigma_{2k}f)(gr_\theta) \quad = \quad \exp(i2k\theta)(\sigma_{2k}f)(g). \tag{III.3}$$

En particulier notons que pour $\theta = \pi$, on obtient la fonction $\sigma_{2k}f$ elle-même.

En effet, σ_{2k} donne une bijection entre

$$C^\infty(\Gamma\backslash\mathbb{H}, 2k) = \left\{F \in C^\infty(\mathbb{H}), f(\gamma.z) = (cz+d)^{2k}f(z), \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma\right\}. \tag{III.4}$$

et

$$C^\infty(\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{R}), 2k) = \{F \in C^\infty(\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{R})), F(gr_\theta) = \exp(i2k\theta)F(g)\}. \tag{III.5}$$

Prenons l'espace des fonctions lisses $C^\infty(\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{R}))$, on considère l'action naturelle à droite de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{R})$: pour $F \in C^\infty(\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{R}))$,

$$(\pi(h)F)(g) = F(gh). \tag{III.6}$$

On regarde le plus petit sous-espace invariant sous l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ qui contient l'orbite de $\sigma_{2k}f$ pour une forme $f \in \mathcal{M}_{2k}$, et on s'intéresse à l'action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ sur cet espace. On adopte les notations que S. Lang utilise dans son livre [23](cf. Annexe B). Une base de cette algèbre de Lie est

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{III.7}$$

Nous allons considérer aussi sa complexifiée $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, dont une base est donnée par

$$E_+ = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \; E_- = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}, \; W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{III.8}$$

On a

$$\begin{aligned}
\exp(tV) \quad &= \quad \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \exp(tH) = \begin{pmatrix} \exp t & 0 \\ 0 & \exp(-t) \end{pmatrix}, \\
\exp(tE_+) \quad &= \quad \begin{pmatrix} 1+t & it \\ it & 1-t \end{pmatrix}, \exp(tE_-) = \begin{pmatrix} 1+t & -it \\ -it & 1-t \end{pmatrix}, \\
\exp(tW) \quad &= \quad \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{III.9}$$

Soit ξ une fonction holomorphe sur le demi-plan $\mathbb{H}$, pour *tout* k, on définit

$$(F_k\xi)(g) := (\sigma_{2k}\xi)(g).$$

On calcule d'abord l'action des éléments des bases définies ci-dessus sur $F_k\xi$ en utilisant la formule habituelle

$$L_X F := \lim_{t\to 0} \frac{\exp(tX)-1}{t} F, \tag{III.10}$$

pour toute fonction $F \in C^\infty(\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{R}))$ et $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$(ou $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$). On trouve les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}(L_V F_k\xi)(g) &= (-2k)\frac{di+c}{ci+d}(\sigma_{2k}\xi)(g) + 2\left(\sigma_{2k+2}\frac{d\xi}{dz}\right)(g)\\ &= (-2k)\frac{di+c}{ci+d}(F_k\xi)(g) + 2\left(F_{k+1}\frac{d\xi}{dz}\right)(g),\\ (L_H F_k\xi)(g) &= (-2k)\frac{ci-d}{ci+d}(\sigma_{2k}\xi)(g) + 2i\left(\sigma_{2k+2}\frac{d\xi}{dz}\right)(g)\\ &= (-2k)\frac{ci-d}{ci+d}(F_k\xi)(g) + 2i\left(F_{k+1}\frac{d\xi}{dz}\right)(g),\end{aligned} \tag{III.11}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} L_{E_+}(F_k\xi)(g) &= (L_H+iL_V)(\sigma_{2k}\xi)(g) = 2(L_H)(F_k\xi)(g)\\ &= 2\left[(-2k)\frac{ci-d}{ci+d}(F_k\xi)(g) + 2i\left(F_{k+1}\frac{d\xi}{dz}\right)(g)\right],\\ L_{E_-}(F_k\xi)(g) &= (L_H - iL_V)(F_k\xi)(g) = 0.\end{aligned} \tag{III.12}$$

Et on a aussi

$$(L_W F_k\xi)(g) = 2ki(\sigma_{2k}\xi)(g) = 2ki(F_k\xi)(g). \tag{III.13}$$

D'autre part, d'après le calcul suivant

$$L_V\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right) = 2\frac{(d^2-c^2)i}{(ci+d)^2}, L_H\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right) = 2\frac{2cdi}{(ci+d)^2},$$

c'est à dire

$$L_{E_+}\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right) = -2\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^2, L_{E_-}\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right) = 2;$$

et

$$L_W\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right) = 2i\frac{ci-d}{ci+d},$$

on voit facilement que

$$\begin{aligned}&L_W L_{E_+}(F_k\xi)(g)\\ =\ & 2\left[(-2k)L_W\left(\frac{ci-d}{ci+d}(F_k\xi)(g)\right) + 2iL_W\left(F_{k+1}\frac{d\xi}{dz}\right)(g)\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left[(-2k)L_W\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)(F_k\xi)(g) + (-2k)\frac{ci-d}{ci+d}L_W\left((F_k\xi)(g)\right) + 2iL_W\left(F_{k+1}\frac{d\xi}{dz}\right)(g)\right] \\
&= 2\left[(-2k)2i\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)(F_k\xi)(g) + (-2k)\frac{ci-d}{ci+d}2ki(F_k\xi)(g) + 2i(2k+2)i(F_{k+1}\frac{d\xi}{dz}(g)\right] \\
&= (2k+2)i(L_{E_+}F_k\xi)(g).
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
L_{E_-}L_{E_+}(F_k\xi)(g) &= 2\left[(-2k)L_{E_-}\left(\frac{ci-d}{ci+d}(F_k\xi)(g)\right) + 2iL_{E_-}\left(F_{k+1}\frac{d\xi}{dz}\right)(g)\right] \\
&= 2(-2k)L_{E_-}\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)(F_k\xi)(g) \\
&= 8k(F_k\xi)(g).
\end{aligned}
$$

Ainsi par récurrence, on obtient,

Lemme 22 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

1. $(L_{E_+})^n(F_k\xi) = 2^n \sum_{t=0}^{n}(-1)^{n-t}\frac{n!}{t!}\binom{2k+n-1}{n-t}\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t}(2i)^t\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g)$;
2. $L_W(L_{E_+})^n(F_k\xi)(g) = (2k+2n)i(L_{E_+})^n(F_k\xi)(g)$;
3. $L_{E_-}(L_{E_+})^n(F_k\xi)(g) = -4n(2k+n-1)(L_{E_+})^{n-1}(F_k\xi)(g)$.

Démonstration. Nous avons,

$$
\begin{aligned}
&L_{E_+}(L_{E_+})^n(F_k\xi)(g) \\
= \;& 2^n\sum_{t=0}^{n}(-1)^{n-t}\frac{n!}{t!}\binom{2k+n-1}{n-t}\left[L_{E_+}\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t}(2i)^t\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g)\right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t}(2i)^t L_{E_+}\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g)\right] \\
= \;& 2^n\sum_{t=0}^{n}(-1)^{n-t}\frac{n!}{t!}\binom{2k+n-1}{n-t}\left[(n-t)(-2)\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t+1}(2i)^t\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g)\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t}(2i)^t 2\left[(-2k-2t)\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g) + 2i\left(F_{k+t+1}\frac{d^{t+1}\xi}{dz^{t+1}}\right)(g)\right]\right] \\
= \;& 2^{n+1}\sum_{t=0}^{n}(-1)^{n-t}\frac{n!}{t!}\binom{2k+n-1}{n-t}\left[(-2k-n-t)\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t+1}(2i)^t\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g)\right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t}(2i)^t 2i\left(F_{k+t+1}\frac{d^{t+1}\xi}{dz^{t+1}}\right)(g)\right] \\
= \;& 2^{n+1}\sum_{t=0}\left[(-1)^{n-t}\frac{n!}{t!}\binom{2k+n-1}{n-t}(-2k-n-t) + (-1)^{n-t-1}\frac{n!}{(t-1)!}\binom{2k+n-1}{n-t+1}\right]
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t+1}(2i)^t\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g),$$

Mais comme

$$\begin{aligned}
&(-1)^{n-t}\frac{n!}{t!}\binom{2k+n-1}{n-t}(-2k-n-t)+(-1)^{n-t-1}\frac{n!}{(t-1)!}\binom{2k+n-1}{n-t+1}\\
=\;&(-1)^{n-t+1}\left[\frac{n!}{t!}\binom{2k+n-1}{n-t}(2k+t-1)+\frac{n!}{t!}\binom{2k+n-1}{n-t}(n+1)+\frac{n!}{(t-1)}\binom{2k+n-1}{n-t+1}\right]\\
=\;&(-1)^{n-t+1}\left[\frac{n!}{t!}\binom{2k+n-1}{n+1-t}(n+1-t)+\frac{n!}{t!}\binom{2k+n-1}{n-t}(n+1)+\frac{n!}{t!}\binom{2k+n-1}{n-t+1}t\right]\\
=\;&(-1)^{n-t+1}\frac{n!}{t!}\left[\binom{2k+n-1}{n+1-t}(n+1)+\binom{2k+n-1}{n-t}(n+1)\right]\\
=\;&(-1)^{n-t+1}\frac{(n+1)!}{t!}\left[\binom{2k+n-1}{n+1-t}+\binom{2k+n-1}{n-t}\right]\\
=\;&(-1)^{n-t+1}\frac{(n+1)!}{t!}\binom{2k+n+1-1}{n+1-t},
\end{aligned}$$

on obtient que

$$\begin{aligned}
&L_{E_+}(L_{E_+})^n(F_k\xi)(g)\\
=\;&2^{n+1}\sum_{t=0}(-1)^{n-t+1}\frac{(n+1)!}{t!}\binom{2k+n+1-1}{n+1-t}\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n+1-t}(2i)^t\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g).
\end{aligned}$$

Les deux autres relations sont obtenues par les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
&L_W(L_{E_+})^n(F_k\xi)(g)\\
=\;&2^n\sum_{t=0}^{n}(-1)^{n-t}\frac{n!}{t!}\binom{2k+n-1}{n-t}\left[L_W\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t}(2i)^t\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g)\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t}(2i)^tL_W\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g)\right]\\
=\;&2^n\sum_{t=0}^{n}(-1)^{n-t}\frac{n!}{t!}\binom{2k+n-1}{n-t}\left[2(n-t)i\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t}(2i)^t\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g)\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t}(2i)^t2(k+t)i\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g)\right]\\
=\;&2^n\sum_{t=0}^{n}[2(n-t)i+2(k+t)i](-1)^{n-t}\frac{n!}{t!}\binom{2k+n-1}{n-t}\\
&\qquad\left[\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t}(2i)^t\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g)+\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t}(2i)^t\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g)\right]\\
=\;&(2k+2n)i(L_{E_+})^n(F_k\xi)(g).
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
& L_{E_-}(L_{E_+})^n(F_k\xi)(g) \\
= \; & 2^n \sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t}\frac{n!}{t!}\binom{2k+n-1}{n-t}\left[L_{E_-}\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t}(2i)^t\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g)\right. \\
& \qquad \left. + \left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t}(2i)^t L_{E_-}\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g)\right] \\
= \; & 2^n \sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t}\frac{n!}{t!}\binom{2k+n-1}{n-t}\left[(n-t)2\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t-1}(2i)^t\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g)\right] \\
= \; & -2^n 2n(2k+n-1) \\
& \qquad \sum_{t=0}(-1)^{n-1-t}\frac{(n-1)!}{t!}\binom{2k+n-1-1}{n-1-t}\left(\frac{ci-d}{ci+d}\right)^{n-t-1}(2i)^t\left(F_{k+t}\frac{d^t\xi}{dz^t}\right)(g) \\
= \; & -4n(2k+n-1)(L_{E_+})^{n-1}(F_k\xi)(g).\square
\end{aligned}
$$

Ensuite on s'intéresse à l'opérateur de Casimir défini par

$$\omega = V^2 + H^2 - W^2 = \frac{1}{2}(E_+E_- + E_-E_+) - W^2. \tag{III.14}$$

Le calcul ci-dessus nous montre que pour, chaque vecteur $(L_{E_+})^n F_k\xi$, de

$$
\begin{aligned}
\omega(L_{E_+})^n F_k\xi &= \frac{1}{2}[-4n(2k+n-1) - 4(n+1)(2k+n)](L_{E_+})^n F_k\xi + (2k+2n)^2(L_{E_+})^n F_k\xi \\
&= 4k(k-1)(L_{E_+})^n F_k\xi.
\end{aligned} \tag{III.15}
$$

On conclut donc que l'opérateur de Casimir agit sur l'espace engendré par les $(L_{E_+})^n F_k\xi$ comme multiplication par une constante.

Si l'on part maintenant d'une forme modulaire f(donc une fonction holomorphe) de poids $2k$ et forme un espace vectoriel engendré par les fonctions $(L_{E_+})^n F_k f$. La discussion ci-dessus montre donc $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ agit dessus et en plus le Casimir agit comme la multiplication par la constante $4k^2 - 4k$. On obtient ainsi une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

On démontre maintenant son irréductibilité : pour tout opérateur T qui commute avec la représentation, $[T, E_-] = 0$ implique que pour le vecteur de poids mininal $F_k f$, $TF_k f$ est encore un vecteur de poids minimal(puisqu'il est annulé par E_-), donc il existe une constante λ telle que $TF_k f = \lambda F_k f$. De même, d'après $E_-T(E_+F_k f) = TE_-(E_+F_k f) = T(8kF_k f) = 8k\lambda T_k f$, on obtient $T(E_+F_k f) = \lambda E_+F_k f$. Ainsi par récurrence on démontre que T agit par constante, la représentation est donc irréductible. La théorie des représentations de $SL_2(\mathbb{R})$ implique (cf. [23], [33]) :

Proposition 23 *Ce que l'on a construit est la représentation irréductible de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ qui est la version infinitésimale de la série discrète du groupe $SL_2(\mathbb{R})$ de poids $2k$.*

Quand on ramène ces fonctions dans $C^\infty(SL_2(\mathbb{R}))$ à l'espace $C^\infty(\mathbb{H})$ grâce à la bijectivité des applications σ_{2k+2n}, on obtient une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, notée par π_f. On écrit par E_+, E_-, W les opérateurs qui correspondent aux L_{E_+}, L_{E_-}, L_W.

On a d'abord besoin de l'expression de E_+. En fait, d'après

$$\begin{aligned}
(\sigma_{2k+2}E_+f)(g) &= L_{E_+}(\sigma_{2k}f)(g)\\
&= 2\left[(-2k)\frac{ci-d}{ci+d}(\sigma_{2k}f)(g) + 2i\left(\sigma_{2k+2}\frac{df}{dz}\right)(g)\right]\\
&= 2\left[(-2k)(ci-d)(ci+d)\sigma_{2k+2}f + 2i\sigma_{2k+2}\frac{df}{dz}\right](g)\\
&= 2\left[2k\frac{1}{\frac{1}{c^2+d^2}}\sigma_{2k+2}f + 2i\sigma_{2k+2}\frac{df}{dz}\right](g)\\
&= 2\left[2k\frac{1}{\operatorname{Im}\frac{ai+b}{ci+d}}\sigma_{2k+2}f + 2i\sigma_{2k+2}\frac{df}{dz}\right](g),
\end{aligned} \tag{III.16}$$

on peut définir

$$\tilde{X}f := -\frac{1}{8\pi}(E_+)f = \frac{1}{2\pi i}\frac{df}{dz} - \frac{2kf}{4\pi y}, \tag{III.17}$$

En effet nous pouvons vérifier directement que

Lemme 24 *Soit f une fonction dérivable qui satisfait*

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{2k}f(z),$$

nous avons,

$$\tilde{X}f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{2k+2}\tilde{X}f(z).$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\cdot\frac{c\bar{z}+d}{c\bar{z}+d}\right) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}. \tag{III.18}$$

Et le résultat énoncé s'obtient par le calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\tilde{X}f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}\left(f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right)\Big/\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - \frac{2k}{4\pi\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[(cz+d)^{2k}\frac{df}{dz} + 2k(cz+d)^{2k-1}f(z)\right](cz+d)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{2k}{4\pi}\frac{(cz+d)(c\bar{z}+d)}{\operatorname{Im} z}(cz+d)^{2k}f(z) \\
= \ & (cz+d)^{2k+2}\frac{1}{2\pi i}\frac{df}{dz} + (cz+d)^{2k+1}\left[\frac{2k}{2\pi i} - \frac{2k}{4\pi}\frac{(c\bar{z}+d)}{\operatorname{Im} z}\right] f(z) \\
= \ & (cz+d)^{2k+2}\frac{1}{2\pi i}\frac{df}{dz} + (cz+d)^{2k+1}\frac{2k}{4\pi \operatorname{Im} z}\left[-2i\operatorname{Im} z - (c\bar{z}+d)\right] f(z) \\
= \ & (cz+d)^{2k+2}\frac{1}{2\pi i}\frac{df}{dz} + (cz+d)^{2k+1}\frac{2k}{4\pi \operatorname{Im} z}(cz+d)f(z) \\
= \ & (cz+d)^{2k+2}\tilde{X}f(z).\square
\end{aligned}
$$

En itérant cette opération, on établit le tableau suivant :

$$
\begin{array}{rcl}
\sigma_{2k}f & \leftrightarrow & f, \\
\left(-\frac{1}{8\pi}\right)\frac{1}{2k}(E_+)f & \leftrightarrow & \frac{1}{2k}\tilde{X}f = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{df}{dz} - \frac{kf}{2\pi y}\right), \\
\left(-\frac{1}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{2k(2k+1)}(E_+)^2 f & \leftrightarrow & \frac{1}{2k(2k+1)}\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{k+1}{2\pi y}\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{k}{2\pi y}\right) f \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \leftrightarrow & \cdots\cdots \\
\left(-\frac{1}{8\pi}\right)^n \frac{1}{2k\cdots(2k+n-1)}(E_+)^n f & \leftrightarrow & \frac{1}{2k\cdots(2k+n-1)}\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{Y}{2\pi y}\right)^n f.
\end{array}
\tag{III.19}
$$

où $Yf = kf$ est l'opérateur d'Euler. D'après la théorie des représentations de $SL_2(\mathbb{R})$, nous pouvons choisir les vecteurs de la colonne de droite comme les vecteurs de la base. Plus précisément, on note par

$$
\varphi_n = \frac{1}{2k\cdots(2k+n-1)}\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{Y}{2\pi y}\right)^n f, \tag{III.20}
$$

pour $n \in \mathbb{N}$. L'action des éléments de la base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est donnée par

$$
\begin{aligned}
E_+\varphi_n &= (-8\pi)(2k+n)\varphi_{n+1}, && \text{(III.21)} \\
E_-\varphi_n &= \frac{n}{2\pi}\varphi_{n-1}, && \text{(III.22)} \\
W\varphi_n &= 2ni\varphi_n. && \text{(III.23)}
\end{aligned}
$$

On introduit aussi un opérateur $\tilde{\partial}$ tel que $\tilde{\partial}\varphi_n = \varphi_{n+1}$, alors

$$
\varphi_n = \tilde{\partial}^n \varphi_0 = \tilde{\partial}^n f. \tag{III.24}
$$

Et en plus nous avons

Lemme 25 *Soit f une fonction lisse qui satisfait la condition de modularité de poids $2k$, alors,*

$$
f^{(m)} := \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f = m! \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{(4\pi y)^r}\frac{\tilde{X}^{m-r}}{(m-r)!}\binom{2k+m-1}{r} f. \tag{III.25}
$$

Démonstration. En effet, on a d'abord

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{i}{2y^2}.$$

Donc si on prend $d = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}$, on aura

$$d\frac{1}{4\pi y} = \left(\frac{1}{4\pi y}\right)^2.$$

L'égalité (III.25) se démontre alors par simple récurrence. Pour $m = 1$, c'est la définition de $\tilde{X}$. Et si elle est valable pour m, on a

$$\begin{aligned}
& f^{(m+1)} = df^{(m)} \\
= \;& m!\sum_{r=0}^{m}\left\{d\left(\frac{1}{(4\pi y)^r}\right)\frac{\tilde{X}^{m-r}}{(m-r)!}\binom{2k+m-1}{r}f\right. \\
& \left. + \frac{1}{(4\pi y)^r}\frac{\tilde{X}^{m+1-r}}{(m-r)!}\binom{2k+m-1}{r}f + \frac{1}{(4\pi y)^r}\frac{(2k+2m-2r)\tilde{X}^{m-r}}{(4\pi y)(m-r)!}\binom{2k+m-1}{r}f\right\} \\
= \;& m!\sum_{r=0}^{m}\left\{\frac{r}{(4\pi y)^{r+1}}\frac{\tilde{X}^{m-r}}{(m-r)!}\binom{2k+m-1}{r}f\right. \\
& \left. + \sum_{r=0}^{m}\frac{1}{(4\pi y)^r}\frac{\tilde{X}^{m+1-r}}{(m-r)!}\binom{2k+m-1}{r}f + \sum_{r=0}^{m}\frac{2k+2m-2r}{(4\pi y)^{r+1}}\frac{\tilde{X}^{m-r}}{(m-r)!}\binom{2k+m-1}{r}f\right\} \\
= \;& m!\sum_{r=0}^{m+1}\left\{\frac{(r-1+2k+2m-2r+2)}{(4\pi y)^r}\frac{\tilde{X}^{m-r+1}}{(m-r+1)!}\binom{2k+m-1}{r-1}f\right. \\
& \qquad\qquad\qquad \left. + \frac{1}{(4\pi y)^r}\frac{\tilde{X}^{m+1-r}}{(m-r)!}\binom{2k+m-1}{r}f\right\} \\
= \;& m!\sum_{r=0}^{m+1}\frac{(2k+m-1)!\tilde{X}^{m-r+1}f}{(4\pi y)^r(m-r+1)!}\left[\frac{2k+2m-r+1}{(r-1)!(2k+m-r)!} + \frac{m-r+1}{r!(2k+m-r-1)!}\right] \\
= \;& m!\sum_{r=0}^{m+1}\frac{(2k+m-1)!\tilde{X}^{m-r+1}f}{(4\pi y)^r(m-r+1)!}\frac{(2k+2m-r+1)r+(m-r+1)(2k+m-r)}{r!(2k+m-r)!} \\
= \;& m!\sum_{r=0}^{m+1}\frac{(2k+m-1)!\tilde{X}^{m-r+1}f}{(4\pi y)^r(m-r+1)!}\frac{(m+1)(2k+m)}{r!(2k+m-r)!} \\
= \;& (m+1)!\sum_{r=0}^{m+1}\frac{\tilde{X}^{m-r+1}}{(4\pi y)^r(m+1-r)!}\binom{2k+(m+1)-1}{r}f. \quad \square
\end{aligned} \tag{III.26}$$

Précisément cela implique

$$[f,g]_n = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\tilde{X}^r\binom{2k+n-1}{n-r}f\tilde{X}^{n-r}\binom{2l+n-1}{r}g, \tag{III.27}$$

pour $f \in \mathcal{M}_{2k}, g \in \mathcal{M}_{2l}$, parce que

$$\begin{aligned}
[f,g]_n &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n+2k-1}{n-r}\binom{n+2l-1}{r} f^{(r)} g^{(n-r)} \\
&= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n+2k-1}{n-r}\binom{n+2l-1}{r} \\
&\quad \left(r! \sum_{s=0}^{r} \frac{1}{(4\pi y)^s} \binom{2k+r-1}{s} \frac{\tilde{X}^{r-s}}{(r-s)!} f \right) \\
&\quad \left((n-r)! \sum_{t=0}^{n-r} \frac{1}{(4\pi y)^t} \binom{2l+n-r-1}{t} \frac{\tilde{X}^{n-r-t}}{(n-r-t)!} g \right) \\
&= \sum_{s,t} \frac{1}{(4\pi y)^{s+t}} \left(\sum_{r=s}^{n-t} (-1)^r \binom{n+2k-1}{n-r}\binom{n+2l-1}{r} \frac{r!}{(r-s)!} \frac{(n-r)!}{(n-r-t)!} \right. \\
&\quad \left. \binom{2k+r-1}{s}\binom{2l+n-r-1}{t} \tilde{X}^{r-s} f \tilde{X}^{n-r-t} g \right) \qquad \text{(III.28)}
\end{aligned}$$

Bien évidemment, lorsque $u = s+t$ et $v = r-s$ (et par conséquent $n-r-t = n-u-v$) sont tous fixés, le coefficient devant $\tilde{X}^v f \tilde{X}^{n-u-v} g$ est

$$\begin{aligned}
&\sum_s (-1)^{s+v} \binom{n+2k-1}{n-v-s}\binom{n+2l-1}{v+s} \\
&\quad \frac{(v+s)!}{v!} \frac{(n-v-s)!}{(n-v-u)!} \binom{2k+v+s-1}{s}\binom{2l+n-v-s-1}{u-s} \\
= \; & (-1)^v \sum_s (-1)^s \frac{(n+2k-1)!}{(2k+v+s-1)!(n-v-s)!} \frac{(n+2l-1)!}{(2l+n-v-s-1)!(v+s)!} \\
&\quad \frac{(v+s)!}{v!} \frac{(n-v-s)!}{(n-v-u)!} \frac{(2k+v+s-1)!}{s!(2k+v-1)!} \frac{(2l+n-v-s-1)!}{(u-s)!(2l+n-u-v-1)!} \\
= \; & (-1)^v \sum_s (-1)^s \frac{(n+2k-1)!(n+2l-1)!}{(2k+v-1)!v!(n-v-u)!(2l+n-u-v-1)!} \frac{1}{s!(u-s)!} \\
= \; & (-1)^v \frac{(n+2k-1)!(n+2l-1)!}{(2k+v-1)!v!(n-v-u)!(2l+n-u-v-1)!u!} \sum_s (-1)^s \frac{u!}{s!(u-s)!},
\end{aligned}$$

qui est non nul si et seulement si $u = 0$, i.e., $s = t = 0$. On a donc le résultat. □

Le paragraphe qui suit donne une explication plus conceptuelle de cette identité.

III.1.b Construction des Crochets

Rappelons d'abord la classification de Bargman des représentations unitaires du groupe $G = SL_2(\mathbb{R})$ (cf. [23], ou l'Annexe B) :

Théorème 26 *Le dual $\hat{G}$ est formé des éléments suivants :*

1. *Les représentations $\pi_{0,s}(s \in i\mathbb{R})$: série principale paire ;*
2. *Les représentations $\pi_{1,s}(s \in i\mathbb{R}\backslash\{0\})$: série principale impaire ;*
3. *Les représentations $\pi_{0,s}(s \in]-1,1[\backslash\{0\})$: série complémentaire ; Pour ces trois séries, on a la relation $\pi_{\varepsilon,s} \cong \pi_{\varepsilon,-s}$.*
4. *Les représentations π_0^+ et π_0^- : "fausse" série discrète ;*
5. *Les représentations $\pi_n^{\pm}(n \geq 1)$: série discrète ;*
6. *La représentation triviale 1_G.*

Le calcul du produit tensoriel de ces représentations sont donné par J. Repka dans sa thèse (cf. [28], ou l'Annexe B), ce qui nous sera utile dans la suite est :

Théorème 27 *Nous avons, pour deux séries discrètes de $SL_2(\mathbb{R})$, la décomposition suivante :(pour $m, n \geq 1$)*

$$\pi_m^{\pm} \otimes \pi_n^{\pm} \cong \pi_{m+n}^{\pm} \oplus \pi_{m+n+2}^{\pm} \oplus \pi_{m+n+4}^{\pm} \oplus \cdots \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} \pi_{n+m+2k}^{\pm}. \tag{III.29}$$

Chaque représentation du groupe de Lie correspond à une représentation de l'algèbre de Lie associée. On traduit ce théorème à la situation du produit tensoriel de deux représentations de l'algèbre de Lie, on s'intéresse en même temps à la décomposition des espaces de représentations. Plus précisément,

Proposition 28 *Etant données deux formes modulaires $f \in \mathcal{M}_{2k}$ et $g \in \mathcal{M}_{2l}$, alors dans la décomposition*

$$\pi_f \otimes \pi_g = \bigoplus_{n=0} \pi_{\deg f + \deg g + 2n}, \tag{III.30}$$

un vecteur de K-poids minimal de $\pi_{\deg f + \deg g + 2n}$ s'écrit comme

$$\frac{1}{n!}\sum_{r=0}(-1)^r\binom{n}{r}\tilde{\partial}^r f \otimes \tilde{\partial}^{n-r} g = \frac{1}{(2k)_n(2l)_n}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\tilde{X}^r\binom{2k+n-1}{n-r} f \otimes \tilde{X}^{n-r}\binom{2l+n-1}{r} g. \tag{III.31}$$

Sous l'application définie par le produit :

$$\mathrm{M} : f \otimes g \longmapsto fg, \tag{III.32}$$

cela correspond à une forme modulaire de poids $2k+2l+2n$ qui est

$$\frac{1}{2k(2k+1)\cdots(2k+n-1)2l(2l+1)\cdots(2l+n-1)}[f,g]_n = \frac{1}{(2k)_n(2l)_n}[f,g]_n. \tag{III.33}$$

Preuve. La première partie résulte du fait que l'espace des vecteurs de K-poids minimal est exactement le noyau pour l'opérateur $\Delta E_- = E_- \otimes 1 + 1 \otimes E_-$, nous avons

$$\begin{aligned}
& \Delta E_- \left(\sum_{r=0} (-1)^r \binom{n}{r} \tilde{\partial}^r f \otimes \tilde{\partial}^{n-r} g \right) \\
= & \sum_{r=0} (-1)^r \binom{n}{r} \left(E_-(\tilde{\partial}^r f) \otimes \tilde{\partial}^{n-r} g + \tilde{\partial}^r f \otimes E_-(\tilde{\partial}^{n-r} g) \right) \\
= & \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0} (-1)^r \binom{n}{r} \left(r \tilde{\partial}^{r-1} f \otimes \tilde{\partial}^{n-r} g + (n-r) \tilde{\partial}^r f \otimes \tilde{\partial}^{n-r-1} g \right) \\
= & \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0} \left((-1)^r \binom{n}{r} (n-r) + (-1)^{r+1} \binom{n}{r+1} (r+1) \right) \tilde{\partial}^r f \otimes \tilde{\partial}^{n-r-1} g \\
= & \ 0.
\end{aligned}$$

Quant à la deuxième moitié, c'est exactement (III.27). L'opérateur M est en effet un opérateur d'entrelacement entre la sous-représentation dans le produit tensoriel et la représentation construite à partir de $[f, g]_n$. □

N.B. Dans cette construction, on ne voit de possibilité de fixer les coefficients constants qu'à une constante multiplicative près.

D'ailleurs, la formulation des crochets de Rankin-Cohen à l'aide de l'opérateur $\tilde{X}$ s'étend naturellement à tout couple de fonctions $(f, g) \in \tilde{\mathcal{M}}^2$, où

$$\tilde{\mathcal{M}}(\Gamma) := \bigoplus_k \tilde{\mathcal{M}}_{2k}(\Gamma) := \bigoplus_k \left\{ f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, f \Big|_{2k} \gamma = f, \ \forall \gamma \in \Gamma \right\} \tag{III.34}$$

est l'espace des fonctions complexes lisses défnies sur le demi-plan qui satisfont (seulement) la condition de modularité.

Mais dans ce cas général nous ne bénéficions pas d'interprétation par les séries discrètes comme ci-dessus.

Remarque 29 *1) En fait, le lien entre les produits tensoriels des représentations séries discrètes et les crochets de Rankin-Cohen est déjà observé par P.Deligne en 1973 [14] : il y parle des séries discrètes pour* $GL(2)$ *:*

"Remarque 2.1.4. L'espace $F(G, GL(2,\mathbb{Z}))$ *ci-dessus est stable par produit. D'autre part,* $D_{k-1} \otimes D_{l-1}$ *contient les* $D_{k+l+2m} (m \geq 0)$ *. Pour* $m = 0$*, ceci correspond au fait que le produit* fg *d'une forme modulaire holomorphe de poids* k *par une de poids* l*, en est une de poids* $k + l$ *. Pour* $m = 1$*, en coordonnées (1.5.2) (remarque : cela devrait être 1.1.5.2), on trouve que* $l \dfrac{\partial f}{\partial z}.g - kf.\dfrac{\partial g}{\partial z}$ *est modulaire holomorphe de poids* $k + l + 2$*, et ainsi de suite. De même dans le cadre adélique."*

En effet, ce que l'on obtient est la modularité de $\dfrac{1}{k}\dfrac{\partial f}{\partial z}.g - f.\dfrac{1}{l}\dfrac{\partial g}{\partial z}$.

2) D. Zagier avait indiqué dans son article [34] la possiblité de "plonger l'algèbre des formes modulaires avec Rankin-Cohen dans une algèbre de Rankin-Cohen Standard."

3) A la fin, nous remarquons qu'il y a aussi une interpretation de ces crochets de Rankin-Cohen qui passe par la théorie de transvectants. On peut citer les auteurs comme Lecomte, Ovsienko, etc.

III.2 Applications à la Déformation Formelle

Dans cette section, on considère l'algèbre tensorielle

$$\tilde{\mathcal{M}}(\Gamma)^{\otimes} = \sum_n \tilde{\mathcal{M}}(\Gamma)^{\otimes n}, \tag{III.35}$$

et on définit

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{M} : \tilde{\mathcal{M}}(\Gamma)^{\otimes} & \to & \tilde{\mathcal{M}}(\Gamma), \\ f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n & \mapsto & f_1 f_2 \cdots f_n. \end{array} \tag{III.36}$$

On prolonge $\tilde{X}$ à $\tilde{\mathcal{M}}(\Gamma)^{\otimes}$ par

$$\tilde{X}(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n) = \sum_{i=1}^{n} f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes \tilde{X} f_i \otimes \cdots \otimes f_n, \tag{III.37}$$

et le degré par

$$\deg(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n) = \sum_{i=1}^{n} \deg f_i. \tag{III.38}$$

Nous nous intéressons à deux produits formels. Le premier est $\star : \tilde{\mathcal{M}}(\Gamma)^{\otimes}[[\hbar]] \times \tilde{\mathcal{M}}(\Gamma)^{\otimes}[[\hbar]] \to \tilde{\mathcal{M}}(\Gamma)^{\otimes}[[\hbar]]$ défini par extension linéaire et la formule suivante :

$$f \star g = \sum \frac{A_n(\deg f, \deg g)}{(\deg f)_n (\deg g)_n} \left(\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \tilde{X}^r \binom{\deg f + n - 1}{n - r} f \otimes \tilde{X}^{n-r} \binom{\deg g + n - 1}{r} g \right) \hbar^n, \tag{III.39}$$

où $f, g \in \tilde{\mathcal{M}}^{\otimes}$. Le deuxième produit est sa restriction à $\tilde{\mathcal{M}}(\Gamma) \subset \tilde{\mathcal{M}}(\Gamma)^{\otimes}$ composée avec l'application M définie ci-dessus (III.32). Il s'agit donc de $* : \tilde{\mathcal{M}}(\Gamma)[[\hbar]] \times \tilde{\mathcal{M}}(\Gamma)[[\hbar]] \to \tilde{\mathcal{M}}(\Gamma)[[\hbar]]$ défini par extension linéaire et la formule :

$$\begin{aligned} f * g &= \mathrm{M}(f \star g) \\ &= \sum \frac{A_n(\deg f, \deg g)}{(\deg f)_n (\deg g)_n} \left(\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \tilde{X}^r \binom{2k + n - 1}{n - r} f \tilde{X}^{n-r} \binom{2l + n - 1}{r} g \right) \hbar^n \\ &= \sum \frac{A_n(\deg f, \deg g)}{(\deg f)_n (\deg g)_n} [f, g]_n \hbar^n, \end{aligned} \tag{III.40}$$

où $f, g \in \tilde{\mathcal{M}}$.

Nous allons étudier leur associativité, dont on appelle celle du premier produit *associativité forte*, et celle du deuxième *associativité faible*. Nous prenons comme hypothèse $A_0 = 1$ et $A_1(x,y) = xy$.

Nous nous posons la question suivante : déterminer tous les produits associatifs de cette forme.

Notre démarche pour étudier l'associativité forte est la suivante : pour trois fonctions f, g et h appartenant à $\tilde{\mathcal{M}}$, les objets $(f \star g) \star h$ et $f \star (g \star h)$ sont des éléments de l'espace vectoriel

$$H_{f,g,h} := \bigoplus_n H_{n;f,g,h} := \bigoplus_n \left\langle \tilde{X}^r f \otimes \tilde{X}^s g \otimes \tilde{X}^t h \ \hbar^{r+s+t}, r+s+t = n \right\rangle. \tag{III.41}$$

L'espace vectoriel $H_{n;f,g,h}$ est de dimension $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Il est donc naturel de vérifier l'identification des coefficients pour la base canonique consistuée des $\tilde{X}^r f \otimes \tilde{X}^s g \otimes \tilde{X}^t h \ \hbar^{r+s+t}$ $(r+s+t=n)$. Cette approche présente le problème suivant : elle conduit à considérer, pour $H_{n;f,g,h}$, $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-r} \sum_{t=0}^{n-r-s} 1 = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ équations.

Pour réduire le nombre d'équations à vérifier, on va essayer de déterminer un sous-espace dans lequel $(f \star g) \star h$ et $f \star (g \star h)$. On sait par exemple que si f et g sont holomorphes, alors $f \star g$ est une série qui s'écrit comme une somme (avec coefficients) des $\hbar^n \sum (-1)^r \binom{n}{r} \tilde{\partial}^r f \otimes \tilde{\partial}^{n-r} g$, et ces derniers constituent une base du noyau de l'opérateur $\hbar^{-1} \Delta E_- = \hbar^{-1}(E_- \otimes 1 + 1 \otimes E_-)$. Ceci conduit au lemme qui suit :

Lemme 30 *Soient f, g et h trois fonctions holomorphes appartenant à $\tilde{\mathcal{M}}$. On définit un opérateur $\mathcal{E} : H_{f,g,h} \to H_{f,g,h}$ par la formule suivante :*

$$\mathcal{E} \quad = \quad \hbar^{-1}(E_- \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes E_- \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes E_-). \tag{III.42}$$

le noyau de $\mathcal{E}$ est engendré par les vecteurs $(0 \leq p \leq n)$

$$\xi_{n,p} \quad = \quad \hbar^n \sum_{s=0}^{p} (-1)^s \binom{p}{s} \frac{\tilde{X}^s}{(2k+2l+2n)_s} \left(\sum_{r=0}^{n-p} \binom{n-p}{r} \tilde{\partial}^{n-p-r} f \otimes \tilde{\partial}^r g \right) \otimes \tilde{\partial}^{p-s} h.$$

Démonstration 1) En effet, $H_{n;f,g,h}$ est un espace vectoriel de dimension $\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$. On établit d'abord le fait que l'application $\mathcal{E}$ est surjective : pour chaque vecteur $\hbar^{n-1} \tilde{\partial}^r f \otimes \tilde{\partial}^s g \otimes \tilde{\partial}^t h$ avec $r+s+t = n-1$, on a

$$\mathcal{E}\Bigg(\hbar^n \sum_{i=0}^{n-1-r} \frac{(-1)^i i!}{\prod_{u=0}^{i}(r+1+u)} \left[\sum_{j=0}^{i} \binom{s}{i-j} \binom{t}{j} \tilde{\partial}^{r+1+i} f \otimes \tilde{\partial}^{s-i+j} g \otimes \tilde{\partial}^{t-j} h \right] \Bigg)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\hbar^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1-r}\frac{(-1)^i i!}{\prod_{u=0}^{i}(r+1+u)}\left[\sum_{j=0}^{i}\binom{s}{i-j}\binom{t}{j}\right.\\
&\qquad\Big((r+1+i)\tilde\partial^{r+i}f\otimes\tilde\partial^{s-i+j}g\otimes\tilde\partial^{t-j}h\\
&\qquad\quad+(s-i+j)\tilde\partial^{r+1+i}f\otimes\tilde\partial^{s-i+j-1}g\otimes\tilde\partial^{t-j}h\\
&\qquad\quad\left.+(t-j)\tilde\partial^{r+1+i}f\otimes\tilde\partial^{s-i+j}g\otimes\tilde\partial^{t-j-1}h\Big)\right]\\
&= \frac{1}{2\pi}\hbar^{n-1}\sum_{i,j}\left[\frac{(-1)^i i!}{\prod_{u=0}^{i}(r+1+u)}\binom{s}{i-j}\binom{t}{j}(r+1+i)\right.\\
&\qquad+\frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{\prod_{u=0}^{i-1}(r+1+u)}\binom{s}{i-j-1}\binom{t}{j}(s-i+j+1)\\
&\qquad\left.+\frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{\prod_{u=0}^{i-1}(r+1+u)}\binom{s}{i-j}\binom{t}{j-1}(t-j+1)\right]\\
&\qquad\qquad\tilde\partial^{r+i}f\otimes\tilde\partial^{s-i+j}g\otimes\tilde\partial^{t-j}h\\
&= \frac{1}{2\pi}\hbar^{n-1}\sum_{i,j}\left[\frac{(-1)^i i!}{\prod_{u=0}^{i-1}(r+1+u)}\binom{s}{i-j}\binom{t}{j}\right.\\
&\qquad+\frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{\prod_{u=0}^{i-1}(r+1+u)}\binom{s}{i-j}\binom{t}{j}(i-j)\\
&\qquad\left.+\frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{\prod_{u=0}^{i-1}(r+1+u)}\binom{s}{i-j}\binom{t}{j}j\right]\\
&\qquad\qquad\tilde\partial^{r+i}f\otimes\tilde\partial^{s-i+j}g\otimes\tilde\partial^{t-j}h\\
&= \frac{1}{2\pi}\hbar^{n-1}\sum_{i,j}\left[\frac{(-1)^i i!}{\prod_{u=0}^{i-1}(r+1+u)}\binom{s}{i-j}\binom{t}{j}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{\prod_{u=0}^{i-1}(r+1+u)}\binom{s}{i-j}\binom{t}{j}i\right]\\
&\qquad\qquad\tilde\partial^{r+i}f\otimes\tilde\partial^{s-i+j}g\otimes\tilde\partial^{t-j}h\\
&= \frac{1}{2\pi}\hbar^{n-1}\tilde\partial^{r}f\otimes\tilde\partial^{s}g\otimes\tilde\partial^{t}h.
\end{aligned}
$$

Comme la dimension en degré $n-1$ est $\frac{1}{2}n(n+1)$, cela implique que la dimension de ce noyau en degré n est $n+1$.

Les vecteurs $\xi_{n,p}$ sont dans le noyau de $\mathcal{E}$: on vérifie d'abord que pour deux fonctions f et g dans le noyau de E_-, nous avons

$$
\begin{aligned}
(E_-\otimes 1+1\otimes E_-)\tilde X(f\otimes g) &= (E_-\otimes 1+1\otimes E_-)(\tilde Xf\otimes g+f\otimes\tilde Xg)\\
&= E_-\tilde Xf\otimes g+f\otimes E_-\tilde Xg\\
&= 4\deg f f\otimes g+4\deg g f\otimes g\\
&= 4(\deg f+\deg g)f\otimes g\\
&= 4\deg(f\otimes g)f\otimes g.
\end{aligned}
$$

Donc par simple récurrence, nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned}
&(E_- \otimes 1 + 1 \otimes E_-) \frac{\tilde{X}^s}{(2k+2l+2n)_s} \left(\sum_{r=0}^{n-p} \binom{n-p}{r} \tilde{\partial}^{n-p-r} f \otimes \tilde{\partial}^r g \right) \\
= \quad & \frac{\tilde{X}^{s-1}}{(2k+2l+2n)_{(s-1)}} \left(\sum_{r=0}^{n-p} \binom{n-p}{r} \tilde{\partial}^{n-p-r} f \otimes \tilde{\partial}^r g \right), \qquad \text{(III.43)}
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\xi_{n,p} \quad = \quad & \frac{1}{2\pi} \hbar^{n-1} \Bigg[\sum_{s=0}^{p} (-1)^s \binom{p}{s} s \tilde{\partial}^{s-1} \left(\sum_{r=0}^{n-p} \binom{n-p}{r} \tilde{\partial}^{n-p-r} f \otimes \tilde{\partial}^r g \right) \otimes \tilde{\partial}^{p-s} h \\
& + \sum_{s=0}^{p} (-1)^s \binom{p}{s} E_- \tilde{\partial}^s \left(\sum_{r=0}^{n-p} \binom{n-p}{r} \tilde{\partial}^{n-p-r} f \otimes \tilde{\partial}^r g \right) \otimes (p-s) \tilde{\partial}^{p-s-1} h \Bigg] \\
= \quad & 0.
\end{aligned}$$

En plus, on projete $\xi_{n,p}$ en deuxième composante sur g et on trouve

$$\tilde{\partial}^{n-p} f \otimes g \otimes \tilde{\partial}^p h. \qquad \text{(III.44)}$$

Ces derniers sont linéairement indépendants. Cela montre que les $(n+1)$ $\xi_{n,p}$ forment une base du noyau de $\mathcal{E}$ en degré n. □

Les séries formelles $(f \star g) \star h$ et $f \star (g \star h)$ appartiennent à ce noyau.

Soit f un élélment quelconque de $\tilde{\mathcal{M}}^{\otimes}$. On peut définir, dans l'espace vectoriel engendré par la base $\{\varphi_n = \frac{1}{(\deg f)_n} \tilde{X}^n f,\ n \in \mathbb{N}\}$, un opérateur $\tilde{\partial}$ par les formules $\tilde{\partial}\varphi_n = \varphi_{n+1}$. La formule (III.31) est encore valable dans ce cas. On définit un opérateur $\mathcal{E} : H_{f,g,h} \to H_{f,g,h}$ par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\tilde{\partial}^r f \otimes \tilde{\partial}^s g \otimes \tilde{\partial}^t h\ \hbar^{r+s+t}) \quad = \quad & (r\tilde{\partial}^{r-1} f \otimes \tilde{\partial}^s g \otimes \tilde{\partial}^t h + s\tilde{\partial}^r f \otimes \tilde{\partial}^{s-1} g \otimes \tilde{\partial}^t h \\
& + t\tilde{\partial}^r f \otimes \tilde{\partial}^s g \otimes \tilde{\partial}^{t-1} h)\hbar^{r+s+t-1}, \qquad \text{(III.45)}
\end{aligned}$$

Alors l'argument ci-dessus marche sans aucune modification. Les séries formelles $(f \star g) \star h$ et $f \star (g \star h)$ appartiennent aussi au noyau de cet opérateur.

Il suffit maintenant d'identifier les coefficients de $\hbar^n \tilde{\partial}^p f \otimes g \otimes \tilde{\partial}^{n-p} h$ pour obtenir l'associativité forte. Pour $(f \star g) \star h$, il s'agit d'une somme qui a pour $n - r \geq p$, un terme qui vaut

$$\frac{(-1)^r A_r(2k,2l)}{(2k)_r} \binom{n-r}{p} \frac{(-1)^{p-r} A_{n-r}(2k+2l+2r,2m)}{(2k+2l+2r)_{n-p}(2m)_p}.$$

Pour $f \star (g \star h)$, il s'agit d'une somme qui a pour $s \leq p$, un terme qui vaut

$$\frac{(-1)^p A_{n-s}(2k, 2l+2m+2s)}{(2k)_{n-p}(2l+2m+2s)_p}\binom{n-s}{n-p}\frac{A_s(2l, 2m)}{(2m)_s}$$

Donc finalement ce que nous devons démontrer est l'égalité suivante, pour $p = 0, 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}\binom{n-r}{p}\frac{A_{n-r}(2k+2l+2r, 2m)A_r(2k, 2l)}{(2k+2l+2r)_{n-p-r}(2m)_p(2k)_r} \\ = \; & \sum_{s=0}\binom{n-s}{n-p}\frac{A_{n-s}(2k, 2l+2m+2s)A_s(2l, 2m)}{(2k)_{n-p}(2l+2m+2s)_{p-s}(2m)_s}. \end{aligned} \tag{III.46}$$

Examinons d'abord le cas le plus simple, l'identification du coefficent de $\hbar$ dans $(f \star g) \star h$ et $f \star (g \star h)$. Il revient à vérifier

$$\begin{aligned} & A_1(2k+2l, 2m)\left(\frac{1}{2k+2l}(f_{2k+2}g_{2l}h_{2m} + f_{2k}g_{2l+2}h_{2m}) - f_{2k}g_{2l}\frac{1}{2m}h_{2m+2}\right) \\ & +A_1(2k, 2l)\left(\frac{1}{2k}f_{2k+2}g_{2l}h_{2m} - f_{2k}\frac{1}{2l}g_{2l+2}h_{2m}\right) \\ = \; & A_1(2k, 2l+2m)\left(\frac{1}{2k}f_{2k+2}g_{2l}h_{2m} - \frac{1}{2l+2m}(f_{2k}g_{2l+2}h_{2m} + f_{2k}g_{2l}h_{2m+2})\right) \\ & +A_1(2l, 2m)\left(f_{2k}\frac{1}{2l}g_{2l+2}h_{2m} - f_{2k}g_{2l}\frac{1}{2m}h_{2m+2}\right). \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k+2l}A_1(2k+2l, 2m) + \frac{1}{2k}A_1(2k, 2l) &= \frac{1}{2k}A_1(2k, 2l+2m), \\ \frac{1}{2k+2l}A_1(2k+2l, 2m) - \frac{1}{2l}A_1(2k, 2l) &= \frac{1}{2l}A_1(2l, 2m) - \frac{1}{2l+2m}A_1(2k, 2l+2m), \\ -\frac{1}{2m}A_1(2k+2l, 2m) &= -\frac{1}{2l+2m}A_1(2k, 2l+2m) - \frac{1}{2m}A_1(2l, 2m). \end{aligned}$$

Il est évident que $A_1(2k, 2l) = 2k \cdot 2l$ vérifie bien ces équations.

Quand on passe à l'étape suivante, l'identification des coefficients de $\hbar^2$ demande

$$\begin{aligned} \frac{A_2(2k+2l, 2m)}{2m(2m+1)} &= \frac{A_2(2k, 2l+2m)}{(2l+2m)(2l+2m+1)} \\ &\quad +4kl + \frac{A_2(2l, 2m)}{2m(2m+1)}, \\ \frac{A_2(2k+2l, 2m)}{(2k+2l)2m} + (2k+2l+2)2l &= \frac{A_2(2k, 2l+2m)}{2k(2l+2m)} + (2l+2m+2)2l, \\ \frac{A_2(2k+2l, 2m)}{(2k+2l)(2k+2l+1)} + 4lm + \frac{A_2(2k, 2l)}{2k(2k+1)} &= \frac{A_2(2k, 2l+2m)}{2k(2k+1)}. \end{aligned} \tag{III.47}$$

Ce système a d'abord une solution spécifique :

$$A_2(2k,2l) = \frac{1}{2}2k(2k+1)2l(2l+1), \tag{III.48}$$

il nous reste à résoudre le système homogène :

$$\begin{aligned}
\frac{A_2(2k+2l,2m)}{2m(2m+1)} &= \frac{A_2(2k,2l+2m)}{(2l+2m)(2l+2m+1)} + \frac{A_2(2l,2m)}{2m(2m+1)},\\
\frac{A_2(2k+2l,2m)}{(2k+2l)2m} &= \frac{A_2(2k,2l+2m)}{2k(2l+2m)},\\
\frac{A_2(2k+2l,2m)}{(2k+2l)(2k+2l+1)} + \frac{A_2(2k,2l)}{2k(2k+1)} &= \frac{A_2(2k,2l+2m)}{2k(2k+1)}.
\end{aligned} \tag{III.49}$$

Posons $\tilde{A}(2k,2l) = \frac{2k+2l+1}{4kl}A(2k,2l)$. Les équations sont transformées en :

$$\begin{aligned}
&\tilde{A}_2(2k+2l,2m)\left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2k+2l+2m+1}\right)\\
= \ &\tilde{A}_2(2k,2l+2m)\left(\frac{1}{2l+2m+1} - \frac{1}{2k+2l+2m+1}\right)\\
&\qquad +\tilde{A}_2(2l,2m)\left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2l+2m+1}\right),\\
&\tilde{A}_2(2k+2l,2m) = \tilde{A}_2(2k,2l+2m),\\
&\tilde{A}_2(2k+2l,2m)\left(\frac{1}{2k+2l+1} - \frac{1}{2k+2l+2m+1}\right)\\
&\qquad +\tilde{A}_2(2k,2l)\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2l+1}\right)\\
= \ &\tilde{A}_2(2k,2l+2m)\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2l+2m+1}\right).
\end{aligned} \tag{III.50}$$

Les deux premières équations impliquent d'abord $\tilde{A}_2(2l,2m) = \tilde{A}_2(2k+2l,2m)$ pour tout $(2k,2l,2m)$, et en utilisant à nouveau la deuxième équation, on obtient $\tilde{A}_2(2l,2m) = \tilde{A}_2(2k+2l,2m) = \tilde{A}_2(2k,2l+2m)$, i.e., $\tilde{A}$ est une fonction constante. On en conclut donc que nous bénificions en effet d'un degré de liberté, donc que dans la forme générale de A_2 on peut introduire un paramètre c :

$$A_2(2k,2l) = \frac{1}{2}2k(2k+1)2l(2l+1) + c\frac{2k2l}{2k+2l+1}. \tag{III.51}$$

Nous cherchons désormais à expliciter les conditions nécessaires et suffisantes sur une suites A_n pour qu'elle définisse un produit fortement associativif. Nous établirons l'existence d'une telle suite dans la section suivante.

Lemme 31 *Pour tout $n \geq 3$, la condition d'associativité forte et la donnée des $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ déterminent A_n*

Démonstration. Notre but est de déterminer la valeur de $A_n(2x,2y)$ pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ($(0,0)$ est exclu parce que dans ce cas, pour tout $n \geq 1$, $[f,g]_n = 0$). L'idée est très simple : pour procéder à l'identification des coefficients de $\hbar^n$, nous avons $n+1$ équations, indexées par p, en considérant $2k, 2l$ et $2m$ comme des constantes et supposons que les $A_i (i < n)$ sont déjà connues.

Si $l > 0$, il y a, dans ces équations, (au plus) quatre inconnues : $A_n(2k,2l)$, $A_n(2l,2m)$, $A_n(2k+2l,2m)$ et $A_n(2k,2l+2m)$. Les deux premières n'apparaissent qu'une fois chacune : $p = 0$ pour $A_n(2k,2l)$ et $p = n$ pour $A_n(2l,2m)$. Lorsque $n \geq 3$, prenons les deux équations avec $p = 1$ et 2. Le déterminant pour le système d'équations linéaires avec $A_n(2k+2l,2m)$ et $A_n(2k,2l+2m)$ comme inconnues est

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} \binom{n}{1}\frac{1}{(2k+2l)_{n-1}(2m)_1} & \binom{n}{n-1}\frac{1}{(2k)_{n-1}(2l+2m)_1} \\ \binom{n}{2}\frac{1}{(2k+2l)_{n-2}(2m)_2} & \binom{n}{n-2}\frac{1}{(2k)_{n-2}(2l+2m)_2} \end{pmatrix} \\
= \;& \binom{n}{n-1}\binom{n}{n-2}\frac{1}{(2k+2l)_{n-2}(2m)_1(2k)_{n-2}(2l+2m)_1} \\
&\left(\frac{1}{(2k+2l+n-2)(2l+2m+1)} - \frac{1}{(2m+1)(2k+n-2)}\right) \\
= \;& \binom{n}{n-1}\binom{n}{n-2}\frac{1}{(2k+2l)_{n-2}(2m)_1(2k)_{n-2}(2l+2m)_1} \\
&\frac{-(2l)^2-(2l)(2k+2m+n-1)}{(2k+2l+n-2)(2l+2m+1)(2m+1)(2k+n-2)}.
\end{aligned} \tag{III.52}$$

Il est non nul compte tenu du fait que $l > 0$, $n > 2$, k et m sont tous entiers positifs.

Nous pouvons ainsi obtenir la valeur de $A_n(2x,2y)$ pour un couple $(2x,2y)$ exprimable comme $(2k+2l,2m)$ ou $(2k,2l+2m)$ pour un certain $l > 0$ sans aucune ambiguïté. Le lemme est donc établi.□

Ensuite, on obtient le lemme suivant par une récurrence :

Lemme 32 *Nous avons* $A_n(2k,2l) = A_n(2l,2k)$ *et* $A_n(2k,0) = 0$.

Démonstration. Nous avons déjà obtenu $A_n(2k,2l) = A_n(2l,2k)$ et $A_n(2k,0) = 0$ pour $n = 0, 1$ et 2. Supposons maintenant que cela soit valable pour $0, 1, \ldots, n-1$. Quand on regarde l'associativé pour trois fonctions $f \in \tilde{\mathcal{M}}_{2m}$, $g \in \tilde{\mathcal{M}}_{2l}$ et $h \in \tilde{\mathcal{M}}_{2k}$, la formule (III.46) devient, pour tout n et p fixes,

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}\binom{n-r}{p}\frac{A_{n-r}(2m+2l+2r,2k)A_r(2m,2l)}{(2m+2l+2r)_{n-p-r}(2k)_p(2m)_r} \\
= \;& \sum_{s=0}\binom{n-s}{n-p}\frac{A_{n-s}(2m,2l+2k+2s)A_s(2l,2k)}{(2m)_{n-p}(2l+2k+2s)_{p-s}(2k)_s}.
\end{aligned}$$

Si l'on échange la place des indices r et s, et remplace p par $n-p$, on obtient,

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0} \binom{n-s}{n-p} \frac{A_{n-s}(2m+2l+2s,2k)A_s(2m,2l)}{(2m+2l+2s)_{p-s}(2k)_{n-p}(2m)_s} \\
= &\sum_{r=0} \binom{n-r}{p} \frac{A_{n-r}(2m,2l+2k+2r)A_r(2l,2k)}{(2m)_p(2l+2k+2r)_{n-p-r}(2k)_r}.
\end{aligned}$$

Pour $0 < p < n$, par rapport à (III.46), la seule différence, compte tenu de l'hypothèse de récurrence, est que nous remplaçons $A_n(2k,2l+2m)$(resp. $A_n(2k+2l,2m)$) par $A_n(2l+2m,2k)$(resp. $A_n(2m,2k+2l)$). Cela implique, entre autres choses, que $A_n(2l+2m,2k)$ et $A_n(2m,2k+2l)$ satisfont le même système des équations linéaires que $A_n(2k,2l+2m)$ et $A_n(2k+2l,2m)$. Le lemme précédent dicte donc $A_n(2x,2y) = A_n(2y,2x)$.

Quand on prend la valeur $l = 0$ avec de plus $k, m \neq 0$ dans (III.46), l'égalité pour $p = 0$ se simplifie comme

$$\sum_{r=0} \frac{A_{n-r}(2k+2r,2m)A_r(2k,0)}{(2k+2r)_{n-p-r}(2m)_p(2k)_r} = \frac{A_n(2k,2m+2s)}{(2k)_n},$$

i.e.

$$\frac{A_n(2k,2m)}{(2k)_n} + \frac{A_n(2k,0)}{(2k)_n} = \frac{A_n(2k,2m)}{(2k)_n},$$

on a donc $A_n(2k,0) = 0$ et le lemme est établi.$\square$

Quand on écrit A_n comme polynôme de $2k, 2l$ et c, alors, dû au fait que A_0, A_1 sont tous de degré 0 en c, on conclut par le raisonnement ci-dessus que

Lemme 33 *A_n est un polynôme de degré $\left[\frac{n}{2}\right]$ en c.*

Bien évidemment, si la suite A_n définit un produit $\star$ qui est associatif au sens fort, la même suite définit un produit $*$ au sens faible. En fait la réciproque est également vraie : Nous allons démontrer que l'associativité faible implique l'associativité forte :

Proposition 34 *Si les A_n donnent un produit associatif au sens faible, alors ils définissent aussi un produit associatif au sens fort.*

Démonstration. Supposons que nous avons pour trois fonction $f_0, g_0, h_0 \in \tilde{\mathcal{M}}$,

$$(f_0 * g_0) * h_0 = f_0 * (g_0 * h_0), \tag{III.53}$$

mais

$$(f_0 \star g_0) \star h_0 \neq f_0 \star (g_0 \star h_0).$$

Il existe donc un n tel que le coefficient de $\hbar^n$ dans $(f_0 \star g_0) \star h_0$ diffère de celui de $\hbar^n$ dans $f_0 \star (g_0 \star h_0)$ mais leur différence est envoyée en 0 par l'application M. Cela implique que (III.53) est équivalente à une *équation différentielle* de f_0, g_0, h_0 dont les coefficients (qui dépendent de $\deg f_0, \deg g_0, \deg_0 h$, que nous supposons désormais fixés) ne sont pas tous nuls, et elle est satisfaite par tous les $f \in \mathcal{M}_{\deg f_0}, g \in \mathcal{M}_{\deg g_0}, h \in \mathcal{M}_{\deg h_0}$. Plus précisément, quand on revient à l'écriture initiale des crochets de Rankin-Cohen (cf. (I.4)), on obtient une combinaison linéaire des $\frac{\partial^r f}{\partial z^r}\frac{\partial^s g}{\partial z^s}\frac{\partial^t h}{\partial z^t}$, et il y a au moins un triplet d'indices (r_0, s_0, t_0) tel que le coefficient devant $\frac{\partial^{r_0} f}{\partial z^{r_0}}\frac{\partial^{s_0} g}{\partial z^{s_0}}\frac{\partial^{t_0} h}{\partial z^{t_0}}$ soit non nul.

Maintenant la seule contrainte posée sur ces fonctions est l'invariance par rapport à l'action de Γ, ce qui implique que nous avons la liberté de modifier les fonctions à *l'intérieur* d'un domaine fondamental. Donc dans un petit ouvert contenu dans le domaine fondamental, nous pouvons modifier les fonctions f, g, h pour que $\frac{\partial^r f}{\partial z^r} = \frac{\partial^s g}{\partial z^s} = \frac{\partial^t h}{\partial z^t} = 0$, $0 \leq r, s, t \leq n$, $r \neq r_0, s \neq s_0, t \neq t_0$; et

$$\frac{\partial^{r_0} f}{\partial z^{r_0}} \neq 0,\ \frac{\partial^{s_0} g}{\partial z^{s_0}} \neq 0,\ \frac{\partial^{t_0} h}{\partial z^{t_0}} \neq 0.$$

Mais cela nous conduit à une contradiction. La proposition est démontrée. □

Dans [5], leur construction utilise uniquement la modularité pour construire les opérateurs pseudo-différentiels formels invariants. Ainsi un produit $*$ associatif au sens faible peut être défini sur $\widetilde{\mathcal{M}}[[\hbar]]$ au lieu de $\mathcal{M}[[\hbar]]$. Ce qu'ils ont obtenu est une famille à un paramètre de produits formels(cf. (I.25)). D'après la proposition ci-dessus, les mêmes coefficients définissent un produit $\star$ associatif au sens fort. Mais le Lemme 33 nous dit qu'il y a exactement un paramètre à utiliser pour obtenir tous les produits formels $\star$ associatifs au sens fort. On conclut donc

Théorème 35 *Il n'y a pas d'autres produits formels associatifs de la forme (III.40) que ceux construit par Cohen-Manin-Zagier.*

Remarque 36 *On souligne deux faits :*

1. *numériquement, le paramètre c introduit dans (III.51) vaut $-3 + 4\kappa - \kappa^2$ pour le κ dans (I.25) ;*
2. *quand on restreint sur les formes modulaires classiques, en chaque degré l'espace $\mathcal{M}_{2k}$ est de dimension finie. Notre argument ci-dessus ne marchera plus, et donc il n'est pas exclu que d'autres produits formels définis à l'aide des crochets de Rankin-Cohen existent.*

Pour terminer cette section, on donne une proposition qui révèle que la structure de multiplication définie par le produit d'Eholzer (de Rankin-Cohen pour Connes-Moscovici) est beaucoup plus "fine" que celle définie par le produit usuel. En effet, nous avons

Proposition 37 *Soit Γ un sous-groupe de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $\mathcal{M}(\Gamma)$ admet la propriété d'unique factorisation, soient F_1, F_2, G_1 et $G_2 \in \mathcal{M}(\Gamma)$ telles que*

$$RC(F_1, G_1) = RC(F_2, G_2), \tag{III.54}$$

en tant que séries formelles dans $\mathcal{M}(\Gamma)[[\hbar]]$. Alors il existe une constante C telle que

$$F_1 = CF_2, G_2 = CG_1. \tag{III.55}$$

Notons tout d'abord qu'un exemple de tel groupe est $SL_2(\mathbb{Z})$ lui-même. On démontre d'abord

Lemme 38 *Soient $f \in \mathcal{M}_{2k}, g \in \mathcal{M}_{2l}, h \in \mathcal{M}_{2m}$ trois formes modulaires telles que $[fg,h]_n = [f,gh]_n$ pour tout n. Alors $l=0$, et, donc, g est une fonction constante .*

Démonstration du lemme. Nos données satisfont automatiquement à $[fg,h]_0 = [f,gh]_0$. En ce qui concerne le cas $n=1$, on a

$$(2k+2l)fg\frac{dh}{dz} - 2m\frac{d(fg)}{dz}h = 2kf\frac{d(gh)}{dz} - (2l+2m)\frac{df}{dz},$$

ce qui implique

$$(2k+2m)\frac{1}{g}\frac{dg}{dz} = 2l\left(\frac{1}{f}\frac{df}{dz} + \frac{1}{h}\frac{dh}{dz}\right),$$

autrement dit

$$g^{k+m} = C(fh)^l, \tag{III.56}$$

pour une constante C non nulle. Maintenant on écrit les développements de Fourier pour ces trois formes modulaires :

$$\begin{aligned} f &= \alpha_0 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \cdots, \\ g &= \beta_0 + \beta_1 q + \beta_2 q^2 + \cdots, \\ h &= \gamma_0 + \gamma_1 q + \gamma_2 q^2 + \cdots. \end{aligned} \tag{III.57}$$

avec $q = \exp(2\pi i z)$. Comme $q\dfrac{d}{dq} = \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial z}$, nous avons

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f &= 0^n\alpha_0 + 1^n\alpha_1 q + 2^n\alpha_2 q^2 + \cdots, \\ \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}\right)^n g &= 0^n\beta_0 + 1^n\beta_1 q + 2^n\beta_2 q^2 + \cdots, \\ \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}\right)^n h &= 0^n\gamma_0 + 1^n\gamma_1 q + 2^n\gamma_2 q^2 + \cdots. \end{aligned} \tag{III.58}$$

Cela implique, dans un premier temps, que dans le calcul de $[fg,h]_n$ et de $[f,gh]_n (n \geq 1)$, il n'y a que deux termes (parmi les $n+1$ à sommer) qui contiennent le terme de degré 1 en q : le premier et le dernier dans la formule de définition. Nous avons alors pour tout n,

$$\begin{aligned} &\binom{2k+2l+n-1}{n}\alpha_0\beta_0\gamma_1 + (-1)^n\binom{2m+n-1}{n}(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)\gamma_0 \\ = &\binom{2k+n-1}{n}\alpha_0(\beta_0\gamma_1 + \beta_1\gamma_0) + (-1)^n\binom{2l+2m+n-1}{n}\alpha_1\beta_0\gamma_0. \end{aligned} \tag{III.59}$$

Nous devons ensuite distinguer plusieurs cas différents :

1) $l=0$, c'est à dire, $g=\beta_0$. Alors (III.59) est valable automatiquement, et c'est exactement l'énoncé du lemme.

2) $l>0$, il y a deux possibilités :

a) $\beta_0 \neq 0$. Alors d'après (III.56) nous avons $\alpha_0 \neq 0$ et $\gamma_0 \neq 0$(puisque le terme constant de $(fh)^{k+m}$ est non nul).En utilisant la bilinéarité des crochets, il est donc possible de supposer $\alpha_0=\beta_0=\gamma_0=1$. L'expression (III.59) devient, pour tout n,

$$\begin{aligned} & \binom{2k+2l+n-1}{n}\gamma_1+(-1)^n\binom{2m+n-1}{n}(\beta_1+\alpha_1) \\ = & \binom{2k+n-1}{n}(\gamma_1+\beta_1)+(-1)^n\binom{2l+2m+n-1}{n}\alpha_1. \end{aligned} \tag{III.60}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $m \geq k$ (sinon on considère $[hg,f]_n=[h,gf]_n$). Alors les variables α_1, β_1 et γ_1 satisfont aux équations (pour tout n)

$$A_{n1}\alpha_1+A_{n2}\beta_1+A_{n3}\gamma_1=0 \tag{III.61}$$

où

$$\begin{aligned} A_{n1} &= (-1)^n(2m)_n-(-1)^n(2l+2m)_n, \\ A_{n2} &= (-1)^n(2m)_n-(2k)_n, \\ A_{n3} &= (2k+2l)_n-(2k)_n, \end{aligned} \tag{III.62}$$

et en particulier,

$$\begin{aligned} A_{11} &= 2l, \\ A_{12} &= -2k-2m, \\ A_{13} &= 2l, \\ A_{21} &= -(2m+2m+1)2l-(2l)^2=-(4m+2l+1)(2l), \\ A_{22} &= 2m(2m+1)-2k(2k+1)=(2m-2k)(2m+2k+1), \\ A_{23} &= (4k+2l+1)(2l), \\ A_{31} &= (2l)^3+3(2m+1)(2l)^2+(3(2m)^2+6(2m)+2)(2l), \\ A_{32} &= -2m(2m+1)(2m+2)-2k(2k+1)(2k+2), \\ A_{33} &= (2l)^3+3(2k+1)(2l)^2+(3(2k)^2+6(2k)+2)(2l). \end{aligned} \tag{III.63}$$

Le déterminant du système des équations linéaires est alors

$$\begin{aligned} & \det A_{1\leq i,j\leq 3} \\ = & \det\begin{pmatrix} 2l & -2k-2m & 2l \\ -(4m+2l+1)(2l) & (2m-2k)(2m+2k+1) & (4k+2l+1)(2l) \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2l)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & -2k-2m & 1 \\ -(4m+2l+1) & (2m-2k)(2m+2k+1) & (4k+2l+1) \\ A_{31}/(2l) & A_{32} & A_{33}/(2l) \end{pmatrix} \\
&= (2l)^2 \det \begin{pmatrix} 0 & -2k-2m & 1 \\ -(4k+4l+4m+2) & (2m-2k)(2m+2k+1) & (4k+2l+1) \\ 6(2m-2k)(k+l+m+1) & A_{32} & A_{33}/(2l) \end{pmatrix} \\
&= (2l)^2 \det \begin{pmatrix} -(4k+4l+4m+2) & (2m-2k)+(2m+2k)(2k+2l+2m+1) \\ & \\ 6(2m-2k)(k+l+m+1) & (2k+2m)(2k+2l)(4k+2l+3) \\ & +2m(2k-2m)(2k+2m+3) \end{pmatrix} \\
&= (2l)^2 \Big[-(4k+4l+4m+2)\Big((2k+2m)(2k+2l)(4k+2l+3) \\
&\qquad\qquad +2m(2k-2m)(2k+2m+3)\Big) \\
&\quad -6(2m-2k)(k+l+m+1)\Big((2m-2k)+(2m+2k)(2k+2l+2m+1)\Big)\Big] \\
&= (2l)^2 \Big\{ -6(k+l+m+1)(2m-2k)^2 + \Big[2m(4k+4l+4m+2)(2k+2m+3) \\
&\qquad -6(2m+2k)(2k+2l+2m+1)(k+l+m+1)\Big](2m-2k) \\
&\qquad -(4k+4l+4m+2)(2k+2m)(2k+2l)(4k+2l+3)\Big\} \\
&= (2l)^2 \Big\{ -6(k+l+m+1)(2m-2k)^2 \\
&\quad +(2k+2l+2m+1)\Big[4m(2k+2m+3)-6(2m+2k)(k+l+m+1)\Big](2m-2k) \\
&\quad -(4k+4l+4m+2)(2k+2m)(2k+2l)(4k+2l+3)\Big\} \\
&= (2l)^2 \Big\{ -6(k+l+m+1)(2m-2k)^2 \\
&\quad +(2k+2l+2m+1)\Big[-(2k+2m)(6k+6l+2m)-12k\Big](2m-2k) \\
&\quad -(4k+4l+4m+2)(2k+2m)(2k+2l)(4k+2l+3)\Big\} \\
&< 0. \qquad\qquad (\mathrm{III}.64)
\end{aligned}
$$

Comme $m \geq k$ et k, l et m sont tous entiers positifs avec de plus $l \geq 1$, les trois termes de la somme sont tous négatifs. Donc ce déterminant est strictement négatif.

On en conclut donc que $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$. Le même argument s'applique alors quand on compare les coefficients de q^2, et on obtient un système d'équations linéaires pour α_2, β_2 et γ_2 avec la même matrice de coeffients, donc $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$, ainsi de suite. On arrive à une contradiction.

b) $\beta_0 = 0$. Le même argument par (III.56) nous conduit à $\alpha_0 = 0$ ou $\gamma_0 = 0$.

Et on peut alors supposer que les premiers termes non nuls sont respectivement $\alpha_r q^r$, $\beta_s q^s$ et $\gamma_t q^t$ ($r, s, t \geq 0$). On considère maintenant le terme non nul de degré le plus bas en q, soit $r+s+t$ dans l'identité $[fg, h]_n = [f, gh]_n$, on obtient, pour tout n,

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} (2k+2l+p)_{n-p} (2m+n-p)_p (r+s)^p t^{n-p} \alpha_r \beta_s \gamma_t$$

$$= \sum_{q=0}^{n}(-1)^q\binom{n}{q}(2k+q)_{n-1}(2l+2m+n-q)_q r^q(s+t)^{n-q}\alpha_r\beta_s\gamma_t. \qquad \text{(III.65)}$$

Comme les α_r, β_s et γ_t sont non nuls, en divisant les deux côtés par $\alpha_r\beta_s\gamma_t$ cela devient

$$\begin{aligned}&\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}(2k+2l+p)_{n-p}(2m+n-p)_p(r+s)^p t^{n-p}\\ = &\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\binom{n}{q}(2k+q)_{n-q}(2l+2m+n-q)_q r^q(s+t)^{n-q}. \qquad \text{(III.66)}\end{aligned}$$

Pour $n = 1$, on retrouve,

$$(k+m)s = l(r+t).$$

En tenant compte de cette relation, on obtient, en remplaçant s par $\dfrac{l(r+t)}{k+m}$(si k et m sont tous nuls, alors d'après (III.56), l est lui aussi nul, ce qui est une contradiction) pour chaque $n \geq 2$ une équation homogène de degré n en r et t. Pour $n = 2$, cette équation est

$$\begin{aligned}
0 = & [(2m)_2 - (2l+2m)_2]r^2 - 2[(2k+2l+1)(2m+1) - (2k+1)(2l+2m+1)]rt\\
& +[(2k+2l)_2 - (2k)_2]t^2 + 2[(2m)_2 + (2k+1)(2l+2m+1)]rs\\
& -2[(2k+2l+1)(2m+1) + (2k)_2]st + [(2m)_2 - (2k)_2]s^2\\
= & r^2\Big\{[(2m)_2 - (2l+2m)_2] + 2[(2m)_2 + (2k+1)(2l+2m+1)]\frac{l}{k+m}\\
& \qquad +[(2m)_2 - (2k)_2]\left(\frac{l}{k+m}\right)^2\Big\}\\
& +rt\Big\{-2[(2k+2l+1)(2m+1) - (2k+1)(2l+2m+1)]\\
& \qquad +2\Big[[(2m)_2 + (2k+1)(2l+2m+1)] - [(2k+2l+1)(2m+1) + (2k)_2]\Big]\frac{l}{k+m}\\
& \qquad +2[(2m)_2 - (2k)_2]\left(\frac{l}{k+m}\right)^2\Big\}\\
& +t^2\Big\{[(2k+2l)_2 - (2k)_2] + 2[(2k)_2 + (2m+1)(2l+2k+1)]\frac{l}{k+m}\\
& \qquad +[(2m)_2 - (2k)_2]\left(\frac{l}{k+m}\right)^2\Big\}\\
= & \frac{2l}{(k+m)^2}\Big\{[(k+3m)(k+l+m) + (k+m)]\,r^2\\
& \qquad +(2m-2k)(k+l+m)rt - [(3k+m)(k+l+m) + (k+m)]\,t^2\Big\}.
\end{aligned}$$

On voit d'abord que r et t sont tous nuls ou tous non nuls, parce que les coefficients des termes r^2 et t^2 sont tous strictement non nuls (dû au fait que k, l et m sont entiers positifs, $l > 0$, k et m ne peuvent pas s'annuler simultanément). Le cas où $r = t = 0$ est déjà fait plus haut, on suppose désormais $r, s, t > 0$. La dernière expression a comme facteur $r + t$, i.e.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{2l}{(k+m)^2}\Big\{ [(k+3m)(k+l+m)+(k+m)]\, r^2 \\
&\quad +(2m-2k)(k+l+m)rt - [(3k+m)(k+l+m)+(k+m)]\, t^2\Big\} \\
&= \frac{2l}{(k+m)^2}(r+t)\Big\{[(k+3m)(k+l+m)+(k+m)]r \\
&\qquad -[(3k+m)(k+l+m)+(k+m)]t\Big\}. \qquad \text{(III.67)}
\end{aligned}$$

Cela implique qu'il existe une constante positive μ telle que

$$\begin{aligned}
t &= \mu[(k+3m)(k+l+m)+(k+m)], \\
r &= \mu[(3k+m)(k+l+m)+(k+m)], \\
s &= \mu l[4(k+l+m)+2]. \qquad \text{(III.68)}
\end{aligned}$$

On calcule ensuite l'équation pour $n = 3$. La différence des deux côtés est, en tenant compte de (III.56),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(k+m)^3}\Big\{(2k+2l)(2k+2l+1)(2k+2l+2)t^3(k+m)^3 \\
&\quad -3(2k+2l+1)(2k+2l+2)(2m+2)[(k+m)r+l(r+t)]t^2(k+m)^2 \\
&\quad +3(2k+2l+2)(2m+1)(2m+2)[(k+m)r+l(r+t)]^2 t(k+m) \\
&\quad -2m(2m+1)(2m+2)[(k+m)r+l(r+t)]^3 \\
&\quad -2k(2k+1)(2k+2)[l(r+t)+t(k+m)]^3 \\
&\quad +3(2k+1)(2k+2)(2l+2m+2)[l(r+t)+t(k+m)]^2 r(k+m) \\
&\quad -3(2k+2)(2l+2m+1)(2l+2m+2)[l(r+t)+t(k+m)]r^2(k+m)^2 \\
&\quad +(2l+2m)(2l+2m+1)(2l+2m+2)r^3(k+m)^3\Big\} \qquad \text{(III.69)}
\end{aligned}$$

On note P_3 la quantité en accolade, que l'on considère comme un polynôme à coefficients entiers en k, l, m, r et t. Prenons maintenant les valeurs de r et t comme dans (III.68), et nous obtenons alors un polynôme en k, l et m dont les coefficients sont tous **positifs** (cf. Annexe C pour les expressions explicites), ce qui implique qu'il ne peut pas avoir un triple racine en k, l, m sous le contraint qu'ils sont tous entiers positifs. Cette possibilité est donc exclue. □

Démonstration de la proposition 37. Nous faisons d'abord une simplification : Soient

$$F_1 = f_{1,2k} + f_{1,2k+2} + f_{1,2k+4} + \cdots \; ; \; G_1 = g_{1,2l} + g_{1,2l+2} + g_{1,2l+4} + \cdots;$$

$$F_2 = f_{2,2k'} + f_{2,2k'+2} + f_{2,2k'+4} + \cdots \; ; \; G_2 = g_{2,2l'} + g_{2,2l'+2} + g_{2,2l'+4} + \cdots;$$

la graduation naturelle de ces formes modulaires. Alors quand on regarde, pour chaque degré en $\hbar$, le terme dont le coefficient est une forme modulaire de plus petit poids, on trouve les termes $[f_{1,2k}, g_{1,2l}]_n \hbar^n$ et $[f_{1,2k'}, g_{1,2l'}]_n \hbar^n$. Nous avons donc

$$RC(f_{1,2k}, g_{1,2l}) = RC(f_{2,2k'}, g_{2,2l'}).$$

Autrement dit, $[f_{1,2k}, g_{1,2l}]_n = [f_{2,2k'}, g_{2,2l'}]_n$ pour tout n. On a pris comme hypothèse que l'algèbre des formes modulaires en question admet une théorie de factorisation unique. Ceci permet de définir le plus grand diviseur commun de $f_{1,2k}$ et $f_{2,2k'}$(resp. $g_{1,2l}$ et $g_{2,2l'}$), noté par f_0(resp. g_0). Le même principe montre qu'il est possible d'ajuster par la multiplication d'une constante pour avoir

$$\begin{aligned} \frac{f_{1,2k}}{f_0} = \frac{g_{2,2l'}}{g_0} &= A, \\ \frac{f_{2,2k'}}{f_0} = \frac{g_{1,2l}}{g_0} &= B. \end{aligned} \tag{III.70}$$

Nous avons alors $[f_0A, Bg_0]_i = [f_0B, Ag_0]_i$ pour tout i. En plus, A et B sont premiers entre eux en tant que polynômes des générateurs . On utilise

Lemme 39 *Soient $f \in \mathcal{M}_{2k}$, $A \in \mathcal{M}_{2l}$, $B \in \mathcal{M}_{2m}$ et $g \in \mathcal{M}_{2n}$ quatre formes modulaires telles que*

– *pour tout i, $[fA, Bg]_i = [fB, Ag]_i$;*

A et B sont premiers entre eux en tant que polynômes des générateurs.

Alors soit $A = 1$, soit $B = 1$.

Démonstration du lemme. Pour $i = 1$, d'après la définition,

$$(k+l)fA\frac{d(Bg)}{dz} - \frac{d(fA)}{dz}(m+n)Bg = (k+m)fB\frac{d(Ag)}{dz} - \frac{d(fB)}{dz}(l+n)Ag, \tag{III.71}$$

donc

$$\begin{aligned} & (k+l)fA\left(\frac{dB}{dz}g + B\frac{dg}{dz}\right) - \left(\frac{df}{dz}A + f\frac{dA}{dz}\right)(m+n)Bg \\ = \;& (k+m)fB\left(\frac{dA}{dz}g + A\frac{dg}{dz}\right) - \left(f\frac{dB}{dz} + \frac{df}{dz}B\right)(l+n)Ag. \end{aligned} \tag{III.72}$$

On divise tous les termes par $fABg$ pour obtenir

$$(l-m)\left(\frac{1}{f}\frac{df}{dz} + \frac{1}{g}\frac{dg}{dz}\right) = (k+2m+n)\frac{1}{A}\frac{dA}{dz} - (k+2l+n)\frac{1}{B}\frac{dB}{dz}, \tag{III.73}$$

et donc que

$$(fg)^{l-m} = \frac{A^{k+2m+n}}{B^{k+2l+n}}. \tag{III.74}$$

Si $l \geq m$, alors le côté gauche est un polynôme pour les générateurs. Vu que A et B sont premiers entre eux, on obtient $B = 1$. Si $l \leq m$ on obtient $A = 1$. Le lemme est démontré. $\square$

On résume les deux lemmes précédents comme suit :

Lemme 40 *Soient $f_1 \in \mathcal{M}_{2l}$, $g_1 \in \mathcal{M}_{2k}$, $f_2 \in \mathcal{M}_{2l'}$, $g_2 \in \mathcal{M}_{2k'}$ quatre formes modulaires non nulles, telles que pour tout n :*

$$[f_1, g_1]_n = [f_2, g_2]_n. \tag{III.75}$$

Alors $k = k'$, $l = l'$, et il existe une constante non nulle C telle que

$$f_1 = Cf_2, \quad Cg_1 = g_2. \tag{III.76}$$

suite de la démonstration de la proposition 37. En appliquant lemme 40, on obtient $k = k'$ et $l = l'$, ainsi que l'existence d'une constante C telle que

$$f_{1,2k} = Cf_{2,2k}, \;\; g_{2,2l} = Cg_{1,2l}.$$

Ensuite on passe au degré suivant, qui dans le développement de $RC(F_1, G_1) = RC(F_2, G_2)$ est, pour chaque $\hbar^n$, le deuxième terme selon l'ordre croissant de poids dans le coefficient(qui est un élément dans $\mathcal{M}(\Gamma)$). Outre $f_{1,2k} = Cf_{2,2k}$ et $Cg_{1,2l} = g_{2,2l}$, les termes dans le développement de F_1, G_1, F_2 et G_2 concernés sont, $f_{1,2k+2}$, $f_{2,2k+2}$, $g_{1,2l+2}$ et $g_{2,2l+2}$. Nous avons, pour tout n,

$$[f_{1,2k}, g_{1,2l+2}]_n + [f_{1,2k+2}, g_{1,2l}]_n = [f_{2,2k}, g_{2,2l+2}]_n + [f_{2,2k+2}, g_{2,2l}]_n.$$

c'est à dire,

$$[f_{1,2k}, Cg_{1,2l+2} - g_{2,2l+2}]_n = [f_{1,2k+2} - Cf_{2,2k+2}, g_{1,2l}]_n,$$

pour tout n et la même constante C. Si $f_{1,2k+2} - Cf_{2,2k+2} \in \mathcal{M}_{2k+2}$ et $Cg_{1,2l+2} - g_{2,2l+2} \in \mathcal{M}_{2l+2}$ sont non nulles, on applique à nouveau le lemme 40 pour obtenir une contradiction. Donc la seule possibilité qui nous reste est que

$$f_{1,2k+2} = Cf_{2,2k+2} \;\text{ et }\; g_{2,2l+2} = Cg_{1,2l+2}.$$

Le reste se démontre par récurrence. Si nous avons $f_{1,2k+2i} = Cf_{2,2k+2i}, g_{2,2l+2i} = Cg_{1,2l+2i}$ pour $0 \leq i \leq p-1$, alors quand nous considérons dans $RC(F_1, G_1) = RC(F_2, G_2)$ le terme qui appartient à $\mathcal{M}_{2k+2l+2n+2p}\hbar^n$, nous obtenons une égalité

$$\sum_i [f_{1,2k+2i}, g_{1,2l+2p-2i}]_n = \sum_i [f_{2,2k+2i}, g_{2,2l+2p-2i}]_n. \tag{III.77}$$

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, elle se simplifie en

$$[f_{1,2k}, g_{1,2l+2p}]_n + [f_{1,2k+2p}, g_{1,2l}]_n = [f_{2,2k}, g_{2,2l+2p}]_n + [f_{2,2k+2p}, g_{2,2l}]_n, \tag{III.78}$$

ou, de façon équivalente,

$$[f_{1,2k}, Cg_{1,2l+2p} - g_{2,2l+2p}]_n = [f_{1,2k+2p} - Cf_{2,2k+2p}, g_{1,2l}]_n,$$

pour tout n (avec la même constante C). Si $f_{1,2k+2p} - Cf_{2,2k+2p} \in \mathcal{M}_{2k+2p}$ et $Cg_{1,2l+2p} - g_{2,2l+2p} \in \mathcal{M}_{2l+2p}$ sont non nulles, le lemme 40 donne lieu à une contradiction. Il nous est possible de conclure que

$$f_{1,2k+2p} = Cf_{2,2k+2p}, \; g_{2,2l+2p} = Cg_{1,2l+2p}.$$

La proposition est donc établie.□

III.3 Associativité du Produit d'Eholzer

Il est un peu gênant de remarquer que jusqu'ici, l'associativité du produit étudié par Cohen-Manin-Zagier , et par conséquent celui de Connes-Moscovici, repose sur l'identité (I.28), dont la démonstration n'est pas encore publiée. Nous proposons l'argument suivant pour donner démonstration dans le cas que Connes et Moscovici utilisent (et dont nous aurons besoin par la suite), i.e., c'est le cas traité par Eholzer qui a annoncé que le produit

$$f * g = \sum_{n=0}^{\infty} [f,g]_n \hbar^n$$

est associatif. D'après la Proposition 34, cette associativité est équivalente à l'associativité forte du produit

$$f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(2k)_n (2l)_n \left(\sum_{r=0} (-1)^r \binom{n}{r} \tilde{\partial}^r f \otimes \tilde{\partial}^{n-r} g \right) \hbar^n.$$

Autrement dit(d'après la proposition 28), on veut démontrer (III.46) pour

$$A_n(2k,2l) = \frac{1}{n!}(2k)_n (2l)_n, \tag{III.79}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0} \binom{n-r}{p} \frac{\frac{1}{r!}(2k)_r (2l)_r}{(2k)_r} \frac{\frac{1}{(n-r)!}(2k+2l+2r)_{n-r}(2m)_{n-r}}{(2k+2l+2r)_{n-p-r}(2m)_p} \\ = \; & \sum_{s=0} \binom{n-s}{n-p} \frac{\frac{1}{s!}(2l)_s (2m)_s}{(2m)_s} \frac{\frac{1}{(n-s)!}(2k)_{n-s}(2l+2m+2s)_{n-s}}{(2l+2m+2s)_{p-s}(2k)_{n-p}}. \end{aligned} \tag{III.80}$$

On a, pour le côté gauche,

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0} \binom{n-r}{p} \frac{\frac{1}{r!}(2k)_r (2l)_r}{(2k)_r} \frac{\frac{1}{(n-r)!}(2k+2l+2r)_{n-r}(2m)_{n-r}}{(2k+2l+2r)_{n-p-r}(2m)_p} \\ = \; & \sum_{r=0} \frac{(n-r)!}{p!(n-r-p)!} \frac{1}{r!} \frac{(2k)_r (2l)_r}{(2k)_r} \frac{1}{(n-r)!} \frac{(2k+2l+2r)_{n-r}(2m)_{n-r}}{(2k+2l+2r)_{n-p-r}(2m)_p} \\ = \; & \sum_{r=0} \frac{(2l)_r}{r!} \frac{(2k+2l+2r)_{n-r}}{(2k+2l+2r)_{n-p-r} p!} \frac{(2m)_{n-r}}{(2m)_p (n-r-p)!} \end{aligned}$$

$$= \sum_{r=0} \binom{2l+r-1}{r}\binom{2k+2l+n+r-1}{p}\binom{2m+n-r-1}{n-p-r}, \tag{III.81}$$

Gardons l'idée que, n et p étant fixés, ce qui est à vérifier est un polynôme en $2k, 2l$ et $2m$. Lorsque $2l$ est un entier négatif, en utilisant les deux relations combinatoires suivantes :

$$\begin{aligned} \binom{X+n-1}{n} &= (-1)^n\binom{-X}{n}, \ n \text{ positif}, \\ \sum_i \binom{X}{i}\binom{Y}{n-i} &= \binom{X+Y}{n}, \end{aligned}$$

on obtient que :

$$\begin{aligned} \binom{2l+r-1}{r} &= (-1)^r\binom{-2l}{r}, \\ \binom{2k+2l+n+r-1}{p} &= \sum_u \binom{2k+2l+n-1}{p+2l+u}\binom{r}{-2l-u}, \\ \binom{2m+n-r-1}{n-p-r} &= \sum_v \binom{2l+2m+n-1}{n-p+2l+v}\binom{-2l-r}{-2l-r-v}, \end{aligned}$$

(III.81) devient donc

$$\begin{aligned} &= \sum_{r=0}(-1)^r\binom{-2l}{r}\left[\sum_u \binom{2k+2l+n-1}{p+2l+u}\binom{r}{-2l-u}\right] \\ &\qquad \left[\sum_v \binom{2l+2m+n-1}{n-p+2l+v}\binom{-2l-r}{-2l-r-v}\right] \\ &= \sum_{u,v}\binom{2k+2l+n-1}{p+2l+u}\binom{2l+2m+n-1}{n-p+2l+v} \\ &\qquad \left[\sum_r (-1)^r\binom{-2l}{r}\binom{r}{-2l-u}\binom{-2l-r}{-2l-r-v}\right]. \end{aligned}$$

On simplifie la quantité entre les crochets par

$$\begin{aligned} &\sum_r (-1)^r\binom{-2l}{r}\binom{r}{-2l-u}\binom{-2l-r}{-2l-r-v} \\ &= \sum_r (-1)^r \frac{(-2l)!}{r!(-2l-r)!}\frac{r!}{(-2l-u)!(r+2l+u)!}\frac{(-2l-r)!}{(-2l-r-v)!v!} \\ &= \frac{(-2l)!}{(-2l-u)!v!}\sum_r (-1)^r \frac{1}{(r+2l+u)!(-2l-r-v)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-2l)!}{(-2l-u)!v!}\frac{1}{(u-v)!}\sum_r (-1)^r \frac{(u-v)!}{(r+2l+u)!(-2l-r-v)!} \\
&= \frac{(-2l)!}{(-2l-u)!v!}\frac{1}{(u-v)!}\sum_r (-1)^r \binom{u-v}{-2l-r-v} \\
&= \frac{(-2l)!}{(-2l-u)!v!}\frac{1}{(u-v)!}(1-1)^{u-v}(-1)^{-2l-v} \\
&= \frac{(-2l)!}{(-2l-u)!v!}(-1)^{-2l-v}\delta_{u,v},
\end{aligned} \tag{III.82}$$

où $\delta_{x,y}$ est le symbole de Kronecker ($\delta_{x,y}=1$ si $x=y$, et est nul sinon) ; on a finalement,

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}\binom{n-r}{p}\frac{\frac{1}{r!}(2k)_r(2l)_r}{(2k)_r}\frac{\frac{1}{(n-r)!}(2k+2l+2r)_{n-r}(2m)_{n-r}}{(2k+2l+2r)_{n-p-r}(2m)_p} \\
&= \sum_{u=v=-2l-t}\binom{2k+2l+n-1}{p+2l+u}\binom{2l+2m+n-1}{n-p+2l+v}\frac{(-2l)!}{(-2l-u)!v!}(-1)^{-2l-v} \\
&= \sum_t \binom{2k+2l+n-1}{p-t}\binom{2l+2m+n-1}{n-p-t}(-1)^t\binom{-2l}{t}.
\end{aligned} \tag{III.83}$$

Pour le côté droit, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}\binom{n-s}{n-p}\frac{\frac{1}{s!}(2l)_s(2m)_s}{(2m)_s}\frac{\frac{1}{(n-s)!}(2k)_{n-s}(2l+2m+2s)_{n-s}}{(2l+2m+2s)_{p-s}(2k)_{n-p}} \\
&= \sum_{s=0}\frac{(n-s)!}{(n-p)!(p-s)!}\frac{1}{s!}\frac{(2l)_s(2m)_s}{(2m)_s}\frac{1}{(n-s)!}\frac{(2k)_{n-s}(2l+2m+2s)_{n-s}}{(2k)_{n-p}(2l+2m+2s)_{p-s}} \\
&= \sum_{s=0}\binom{2l+s-1}{s}\binom{2k+n-s-1}{p-s}\binom{2l+2m+s+n-1}{n-p}.
\end{aligned} \tag{III.84}$$

donc par la même méthode,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s-0}(-1)^s\binom{-2l}{s}\left[\sum_v \binom{2k+2l+n-1}{p+2l+v}\binom{-2l-s}{-2l-s-v}\right] \\
&\qquad \left[\sum_u \binom{2l+2m+n-1}{n-p+2l+u}\binom{s}{-2l-u}\right] \\
&= \sum_{u,v}\binom{2k+2l+n-1}{p+2l+v}\binom{2l+2m+n-1}{n-p+2l+u} \\
&\qquad \left[\sum_{s-0}(-1)^s\binom{-2l}{s}\binom{-2l-s}{-2l-s-v}\binom{s}{-2l-u}\right]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{u=v=-2l-t} \binom{2k+2l+n-1}{p+2l+v}\binom{2l+2m+n-1}{n-p+2l+u}\frac{(-2l)!}{(-2l-u)!v!}(-1)^{-2l-v}$$
$$= \sum_{t} \binom{2k+2l+n-1}{p-t}\binom{2l+2m+n-1}{n-p-t}(-1)^t\binom{-2l}{t} \qquad \text{(III.85)}$$

ce qui donne la même quantité. On obtient alors

Proposition 41 *Le produit d'Eholzer est associatif.*

Remarque 42 *Si on veut montrer directement l'associativité forte du produit $\star$ qui correspond à celui d'Eholzer en faisant l'identification des coefficients de chaque $d^u f d^v g d^w h$, ce que nous devons démontrer est à chaque triplet d'indice (l_1, l_2, l_3), l'identité combinatoire suivante :*

$$\sum_{r=0}^{l_1}\sum_{s=0}^{l_2}\sum_{t=0}^{l_3}(-1)^{l_1+l_2-s}\binom{E+l_1+s+l_3-t-1}{l_3-t}\binom{E+r+s-1}{s}f$$
$$\binom{E+l_2+r+t-1}{t}\binom{E+r+s-1}{r}g$$
$$\binom{E+l_1-r+l_2-s+l_3-1}{l_1-r}\binom{E+l_3+l_2-s-1}{l_2-s}h$$
$$= \sum_{r=0}^{l_1}\sum_{s=0}^{l_2}\sum_{t=0}^{l_3}(-1)^{l_1+l_2-s}\binom{E+l_1+s+l_3-t-1}{l_3-t}\binom{E+l_1+s-1}{s}f$$
$$\binom{E+l_2-s+t-1}{t}\binom{E+l_2+t+r-1}{r}g$$
$$\binom{E+l_1-r+l_2-s+l_3-1}{l_1-r}\binom{E+t+l_2-s-1}{l_2-s}h,$$

où E est l'opérateur d'Euler. En d'autres termes, nous avons démontré l'identité algébrique

$$\sum_{r=0}^{l_1}\sum_{s=0}^{l_2}\sum_{t=0}^{l_3}(-1)^{l_1+l_2-s}\binom{X+l_1+s+l_3-t-1}{l_3-t}\binom{X+r+s-1}{s}$$
$$\binom{Y+l_2+r+t-1}{t}\binom{Y+r+s-1}{r}$$
$$\binom{Z+l_1-r+l_2-s+l_3-1}{l_1-r}\binom{Z+l_3+l_2-s-1}{l_2-s}$$
$$= \sum_{r=0}^{l_1}\sum_{s=0}^{l_2}\sum_{t=0}^{l_3}(-1)^{l_1+l_2-s}\binom{X+l_1+s+l_3-t-1}{l_3-t}\binom{X+l_1+s-1}{s}$$
$$\binom{Y+l_2-s+t-1}{t}\binom{Y+l_2+t+r-1}{r}$$
$$\binom{Z+l_1-r+l_2-s+l_3-1}{l_1-r}\binom{Z+t+l_2-s-1}{l_2-s}.$$

Chapitre IV

Une Identité Combinatoire

Dans ce chapitre nous voulons démontrer

$$\frac{(-4)^n}{\binom{2x}{n}} \sum_{r+s=n} \frac{\binom{y}{r}\binom{y-a}{r}}{\binom{2y}{r}} \frac{\binom{z}{s}\binom{z+a}{s}}{\binom{2z}{s}} = \sum_{j\geq 0} \binom{n}{2j} \frac{\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{a-\frac{1}{2}}{j}\binom{-a-\frac{1}{2}}{j}}{\binom{x-\frac{1}{2}}{j}\binom{y-\frac{1}{2}}{j}\binom{z-\frac{1}{2}}{j}} \tag{IV.1}$$

où $n \geq 0$ et les variables a, x, y et z satisfont à $x+y+z=n-1$.

On procède d'abord à quelques transformations. Notre but est d'éliminer les coefficients binomiaux dans le dénominateur de chaque côté. Posons tout d'abord la notation ${}_nX = \prod_{i=0}^{n-1}(X-i)$. Les coefficients binomiaux s'écrivent alors :

$$\binom{X}{n} = \frac{{}_nX}{n!}. \tag{IV.2}$$

On utilise ensuite

$$\frac{1}{\binom{X}{r}} = \frac{r!}{{}_rX} = \frac{{}_{(n-r)}(X-r)}{{}_nX} \frac{n!}{(n-r)!} \frac{r!(n-r)!}{n!} = \frac{\binom{X-r}{n-r}}{\binom{X}{n}} \frac{r!(n-r)!}{n!}, \tag{IV.3}$$

pour simplifier le membre de gauche, ce qui donne

$$\begin{aligned} &\frac{(-4)^n}{\binom{2x}{n}} \sum_{r=0}^{n} \frac{\binom{y}{r}\binom{y-a}{r}}{\binom{2y}{r}} \frac{\binom{z}{n-r}\binom{z+a}{n-r}}{\binom{2z}{n-r}} \\ = \; &\frac{(-4)^n}{\binom{2x}{n}} \sum_{r=0}^{n} \frac{\binom{y}{r}\binom{y-a}{r}\binom{2y-r}{n-r}}{\binom{2y}{n}} \frac{\binom{z}{n-r}\binom{z+a}{n-r}\binom{2z-n+r}{r}}{\binom{2z}{n}} \frac{(r!(n-r)!)^2}{(n!)^2}. \end{aligned}$$

(IV.4)

Le coté droit, quant à lui, se simplifie grâce à l'identité

$$\begin{aligned}\frac{1}{\binom{Y-\frac{1}{2}}{j}} &= \frac{j!}{{}_j(Y-\frac{1}{2})} = \frac{j!2^j}{(2Y-2j+1)(2Y-2j+3)\cdots(2Y-1)} \\ &= \frac{(2Y-2j+2)(2Y-2j+4)\cdots 2Y}{{}_{(2j)}2Y}j!2^j \\ &= \frac{{}_jY2^j}{{}_{(2j)}2Y}j!2^j = \frac{{}_jY}{j!}\frac{(2j)!}{{}_{(2j)}2Y}\frac{(j!)^2 4^j}{(2j)!} = \frac{\binom{Y}{j}}{\binom{2Y}{2j}}\frac{(j!)^2 4^j}{(2j)!},\end{aligned} \tag{IV.5}$$

ou de façon équivalente :

$$\binom{2Y}{2j} = \binom{Y-\frac{1}{2}}{j}\binom{Y}{j}\frac{(j!)^2 4^j}{(2j)!}. \tag{IV.6}$$

On a la transformation suivante :

$$\begin{aligned}&\sum_{j\geq 0}\binom{n}{2j}\frac{\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{a-\frac{1}{2}}{j}\binom{-a-\frac{1}{2}}{j}}{\binom{x-\frac{1}{2}}{j}\binom{y-\frac{1}{2}}{j}\binom{z-\frac{1}{2}}{j}} \\ = &\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2j}\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{a-\frac{1}{2}}{j}\binom{-a-\frac{1}{2}}{j}\frac{\binom{x}{j}4^j(j!)^2}{\binom{2x}{2j}(2j)!}\frac{\binom{y}{j}4^j(j!)^2}{\binom{2y}{2j}(2j)!}\frac{\binom{z}{j}4^j(j!)^2}{\binom{2z}{2j}(2j)!} \\ = &\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2j}\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{a-\frac{1}{2}}{j}\binom{-a-\frac{1}{2}}{j}\left[\frac{4^j(j!)^2(n-2j)!}{n!}\right]^3 \\ &\frac{\binom{x}{j}\binom{2x-2j}{n-2j}}{\binom{2x}{n}}\frac{\binom{y}{j}\binom{2y-2j}{n-2j}}{\binom{2y}{n}}\frac{\binom{z}{j}\binom{2z-2j}{n-2j}}{\binom{2z}{n}},\end{aligned} \tag{IV.7}$$

où $[\mu]$ signifie le plus grand entier inférieur ou égal à μ.

En combinant (IV.4) et (IV.7) on pourra donc multiplier les deux côtés de (IV.1) par le dénominateur commun $\binom{2x}{n}\binom{2y}{n}\binom{2z}{n}$. On note le polynôme obtenu du côté gauche par $P_n(y,z,a)$:

$$
\begin{aligned}
P_n(y,z,a) \quad &:= \quad (-4)^n \sum_{r=0}^{n} \binom{y}{r}\binom{y-a}{r}\binom{2y-r}{n-r} \\
&\qquad \binom{z}{n-r}\binom{z+a}{n-r}\binom{2z-n+r}{r}(r!(n-r)!)^2, \qquad \text{(IV.8)}
\end{aligned}
$$

et celui à droite par $Q_n(y,z,a)$(on remplace x par $n-y-z-1$) :

$$
\begin{aligned}
Q_n(y,z,a) \quad &:= \quad \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{((n-2j)!)^2(j!)^6 2^{6j}}{(2j)!}\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{a-\frac{1}{2}}{j}\binom{-a-\frac{1}{2}}{j} \\
&\qquad \binom{n-y-z-1}{j}\binom{2n-2y-2z-2-2j}{n-2j} \\
&\qquad \binom{y}{j}\binom{2y-2j}{n-2j}\binom{z}{j}\binom{2z-2j}{n-2j}. \qquad \text{(IV.9)}
\end{aligned}
$$

On observe dans un premier temps que $Q_n(y,z,a)$ bénéficie de la symétrie suivante :

$$Q_n(z,y,a) = Q_n(y,z,a) = Q_n(y,z,-a), \qquad \text{(IV.10)}$$

alors que pour $P_n(y,z,a)$, il n'y a que la symétrie *apparente* suivante :

$$P_n(y,z,a) = P_n(z,y,-a). \qquad \text{(IV.11)}$$

Nous avons :

Lemme 43 *1. $P_n(y,z,a)$ est un polynôme de degré $\leq 2n$ en y, $\leq 2n$ en z, et $\leq n$ en a ;*

2. $Q_n(y,z,a)$ est un polynôme de degré $\leq 2n$ en y, $\leq 2n$ en z, et $\leq n$ en a ;

Démonstration. Pour P_n, le terme à sommer qui correspond à r est de degré $r+r+(n-r) = n+r$ en y, de degré $(n-r)+(n-r)+r = 2n-r$ en z, et de degré $n-r+r = n$ en a.

Pour $Q_n(y,z,a)$, la situation est semblable : pour le terme à sommer qui correspond à j, le degré en y est $j+(n-2j)+j+(n-2j) = 2n-2j$, celui en z est aussi $j+(n-2j)+j+(n-2j) = 2n-2j$, et celui en a est $j+j = 2j \leq n$ par hypothèse. $\square$

On cherche donc à égaler ces deux polynômes, i.e., à démontrer

$$P_n(y,z,a) = Q_n(y,z,a). \qquad \text{(IV.12)}$$

On veut démontrer d'abord pour $a = k + \dfrac{1}{2}$ où $k \in \mathbb{N}$, $2k \leq n$. Sous cette hypothèse, le côté droit est une somme finie de $k+1$ termes. En tant que polynômes en y et z, en remplaçant les $\binom{X}{n}$ par $\dfrac{{}_nX}{n!}$, on obtient que pour tout $j \leq k$,

$$\begin{aligned}
\binom{y}{j}\binom{2y-2j}{n-2j} &= \frac{({}_jy)}{j!}\frac{({}_{(n-2j)}(2y-2j))}{(n-2j)!} \\
&= \frac{({}_ky)({}_{(n-2k)}(2y-2j))\prod_{t=j}^{k-1}(2y-2t-1)}{j!(n-2j)!} \\
&= \binom{y}{k}\binom{2y-2k}{n-2k}\frac{k!(n-2k)!\prod_{t=j}^{k-1}(2y-2t-1)}{j!(n-2j)!},
\end{aligned}$$

a comme facteur $\binom{y}{k}\binom{2y-2k}{n-2k}$. De même,

$$\binom{z}{j}\binom{2z-2j}{n-2j} = \binom{z}{k}\binom{2z-2k}{n-2k}\frac{k!(n-2k)!\prod_{t=j}^{k-1}(2z-2t-1)}{j!(n-2j)!}.$$

En d'autres termes, nous avons

Lemme 44 *$Q_n(y,z,a)$ est divisible par* $\binom{y}{k}\binom{2y-2k}{n-2k}\binom{z}{k}\binom{2z-2k}{n-2k}$.

Notre idée est donc de diviser d'abord $P_n(y,z,a)$ par cette quantité pour simplifier encore l'égalité à démontrer.

Le reste de ce chapitre est organisé de la façon suivante, après une première section qui démontre le cas $k=0$ (et donc redémontre l'associativé du produit d'Eholzer), on a une section qui contient essentiellement une proposition technique, puis une dernière section assez longue pour traiter le cas général, qui est décomposée en 4 étapes (α à δ).

IV.1 le cas $k = 0$

Dans le cas le plus simple, i.e., $a = \frac{1}{2}$, l'identité à démontrer s'écrit :

$$\begin{aligned}
& (-4)^n\sum_{r=0}^{n}\binom{y}{r}\binom{y-\frac{1}{2}}{r}\binom{2y-r}{n-r}\binom{z}{n-r}\binom{z+\frac{1}{2}}{n-r}\binom{2z-n+r}{r}(r!(n-r)!)^2 \\
= \; & (n!)^2\binom{2n-2y-2z-2}{n}\binom{2y}{n}\binom{2z}{n}. \qquad \text{(IV.13)}
\end{aligned}$$

On transforme le terme de gauche en utilisant (IV.6), l'égalité à démontrer est équivalente à (on divise les deux côtés par $(n!)^2$) :

$$\begin{aligned}(-1)^n \sum_{r=0}^{n} \binom{2y}{2r}\binom{2y-r}{n-r}\binom{2z+1}{2(n-r)}\binom{2z-n+r}{r}\frac{(2r)!(2(n-r))!}{(n!)^2}& \\ = \binom{2n-2y-2z-2}{n}\binom{2y}{n}\binom{2z}{n}.&\end{aligned} \tag{IV.14}$$

IV.1.a Simplification

Nous avons, toujours d'après (IV.2),

$$\begin{aligned}\frac{\binom{2y}{2r}\binom{2y-r}{n-r}(2r)!}{n!} &= \frac{({}_{(2r)}2y)({}_{(n-r)}(2y-r))(2r)!}{(2r)!(n-r)!n!} \\ &= \frac{({}_{(n)}2y)({}_{(r)}(2y-r))}{(n-r)!n!} = \binom{2y}{n}\binom{2y-r}{r}\frac{r!}{(n-r)!},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\binom{2z+1}{2(n-r)}\binom{2z-n+r}{r}(2(n-r)!)}{n!} = \frac{({}_{2(n-r)}(2z+1))({}_r(2z-n+r))}{n!r!} \\ &= \frac{(2z+1)({}_{2(n-r)-1}(2z))({}_r(2z-n+r))}{n!r!} \\ &= \frac{({}_n(2z))({}_{n-r-1}(2z-n+r))[(2z-2n+2r+1)+2(n-r)]}{n!r!} \\ &= \binom{2z}{n}\frac{[({}_{n-r}(2z-n+r))+2(n-r)({}_{n-r-1}(2z-n+r))]}{r!} \\ &= \binom{2z}{n}\left[\binom{2z-n+r}{n-r}+2\binom{2z-n+r}{n-r-1}\right]\frac{(n-r)!}{r!}.\end{aligned}$$

Après division des deux côtés par le facteur commun $\binom{2y}{n}\binom{2z}{n}$, (IV.14) devient

$$(-1)^n \sum_{r=0}^{n} \binom{2y-r}{r}\left[\binom{2z-n+r}{n-r}+2\binom{2z-n+r}{n-r-1}\right] = \binom{2n-2y-2z-2}{n}. \tag{IV.15}$$

Et en utilisant

$$\binom{2n-2y-2z-2}{n} = (-1)^n\binom{2y+2z-n+1}{n},$$

cela est transformé en

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{2y-r}{r}\left[\binom{2z-n+r}{n-r}+2\binom{2z-n+r}{n-r-1}\right] = \binom{2y+2z-n+1}{n}. \tag{IV.16}$$

IV.1.b Les sommes $S_0(n;A,B)$ et $S(n;X)$

On étudie la somme

$$S_0(n;A,B) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+A}{n-k}\binom{n-k+B}{k}. \tag{IV.17}$$

D'abord nous avons $S_0(0;A,B)=1$, et, comme $\binom{X+1}{n} = \binom{X}{n} + \binom{X}{n-1}$,

$$\begin{aligned}
S_0(n+1;A,B) &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{k+A}{n+1-k}\binom{n+1-k+B}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{k+A-1}{n-k} + \binom{k+A-1}{n+1-k}\right]\binom{n+1-k+B}{k} \\
&= S_0(n;A-1,B+1) + S_0(n+1;A-1,B).
\end{aligned} \tag{IV.18}$$

De même, $S_0(n+1;A,B) = S_0(n;A+1,B-1) + S_0(n+1;A,B-1)$.

D'autre part, on définit maintenant

$$S(n;X) = \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{X+n-1-2p}{n-2p}. \tag{IV.19}$$

Les coefficients ainsi définis ont les propriétés suivantes :

$$S_0(0;X) = 1; \tag{IV.20}$$

$$S(n+1;X) = S(n+1;X-1) + S(n;X); \tag{IV.21}$$

$$S(n,X-1) + 2S(n-1,X) = \binom{X+n}{n}. \tag{IV.22}$$

En effet :

– (IV.20) est immédiat ;

– (IV.21) se déduit de l'identité

$$\begin{aligned}
S(n+1;X) &= \sum_{p=0}^{[\frac{n+1}{2}]} \binom{X+n-2p}{n+1-2p} = \sum_{p=0}^{[\frac{n+1}{2}]} \left[\binom{X+n-1-2p}{n+1-2p} + \binom{X+n-1-2p}{n-2p}\right] \\
&= S(n+1;X-1) + S(n;X).
\end{aligned}$$

– Enfin on déduit () des calculs qui suivent :

$$\begin{aligned}
S(n,X-1) + 2S(n-1,X) &= S(n;X) + S(n-1;X) \\
&= \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{X+n-1-2p}{n-2p} + \sum_{p=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{X+n-2-2p}{n-1-2p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{n} \binom{X+n-1-s}{n-s} = \sum_{i=0}^{n} \binom{X-1+i}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{-X}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left[\binom{-X-1}{i} + \binom{-X-1}{i-1} \right] \\
&= (-1)^n \binom{-X-1}{n} = \binom{X+n}{n}.
\end{aligned}$$

Nous déduisons de ce qui précède le lemme qui suit :

Lemme 45 $S_0(n; A, B) = S(n; A+B)$.

Démonstration. Nous démontrons ce lemme par récurrence sur n. Quand $n = 0$, l'égalité est évidente. Si l'énoncé est valable pour $0, 1, \cdots, n$, alors d'après les deux relations de récurrence ci-dessus,

$$\begin{aligned}
& S_0(n+1; A, B) - S(n+1; A+B) \\
= \;& (S_0(n+1; A, B-1) + S_0(n; A+1, B-1)) - (S(n+1; A+B-1) + S(n; A+B)) \\
= \;& (S_0(n+1; A, B-1) - S(n+1; A+B-1)) + (S_0(n; A+1, B-1) - S(n; A+B)) \\
= \;& S_0(n+1; A, B-1) - S(n+1; A+B-1).
\end{aligned}$$

De même, cette différence est aussi égale à $S_0(n+1; A-1, B) - S(n+1; A+B-1)$. On peut conclure qu'elle a la même valeur pour tout couple $(A, B) \in \mathbb{N}^2$. Mais on observe que, par définition :

$$S(n+1; 0, 0) - S(n+1; 0) = \begin{cases} 0 - 0 = 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 1 - 1 = 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Nous avons donc l'égalité pour tout n et tout couple $(A, B) \in \mathbb{N}^2$. Mais ce que nous voulons démontrer est une identité polynomiale en A et B(pour n fixé), par conséquent il est valable pour tous les (A, B).

IV.1.c Resommation

Théorème 46 *L'identité (IV.16) est vraie.*

Démonstration. En fait, grâce à (IV.1.b), on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^{n} \binom{2y-r}{r} \left[\binom{2z-n+r}{n-r} + 2\binom{2z-n+r}{n-r-1} \right] \\
= \;& [S_0(n; 2z-n, 2y-n) + 2S_0(n-1; 2z-n, 2y-n+1)] \\
= \;& [S(n; 2y+2z-2n) + 2S(n-1; 2y+2z-2n+1)] \\
= \;& \binom{2y+2z-n+1}{n}.
\end{aligned}$$

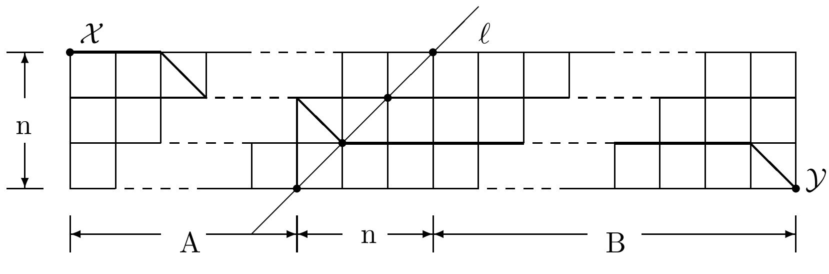
Corollaire 47 *L'associativité du produit d'Eholzer correspond exactement au cas où* $a = \frac{1}{2}$ *dans (IV.1). Ainsi on obtient une autre démonstration de ce fait.*

IV.1.d Interprétation Combinatoire

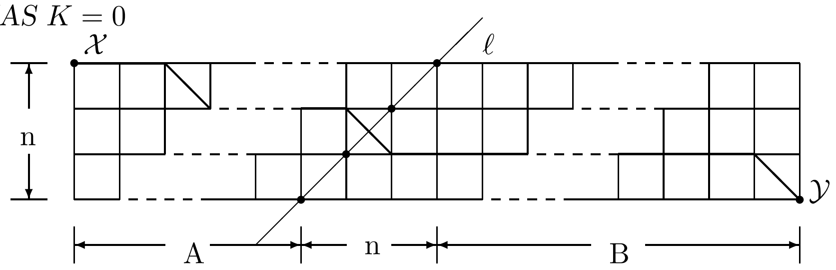
On donne maintenant une interprétation combinatoire du Lemme 45. D'abord on a la formule suivante pour $S(n;X)$:

$$\begin{aligned}
S(n;X) &= \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{X+n-1-2p}{n-2p} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{X+n-1-i}{n-i} - \sum_{p=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{X+n-1-1-2p}{n-1-2p} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{X+n-1-i}{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{X+n-1-1-i}{n-1-i} + \sum_{p=0}^{[\frac{n-2}{2}]} \binom{X+n-1-2-2p}{n-2-2p} \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sum_{i=0}^{n-j} \binom{X+n-1-j-i}{n-j-i} \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{X+n-j}{n-j}. \qquad \text{(IV.23)}
\end{aligned}$$

Puis on regarde le diagramme ci-dessous :



Dans un tel diagramme de taille $n \times (A+n+B)$, on considère des chemins entre $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, composés uniquement de segments horizontaux et de segments inclinés nord-ouest sud-est. On en distingue deux catégories : ceux qui traversent la droite ℓ en un point "entier" comme par exemple celui montré dans la figure ci-dessus, dits de la première catégorie, dont le nombre sera noté $N_1(n;A,B)$; et les autres, ceux qui traversent ℓ au milieu d'une case, comme celui montré dans la figure ci-dessous, dits de la deuxième catégorie, dont le nombre sera noté $N_2(n;A,B)$.



Observons d'abord que $N_1(n; A,\ B) + N_2(n; A,\ B)$ est le nombre total des chemins qui relient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, ce qui implique

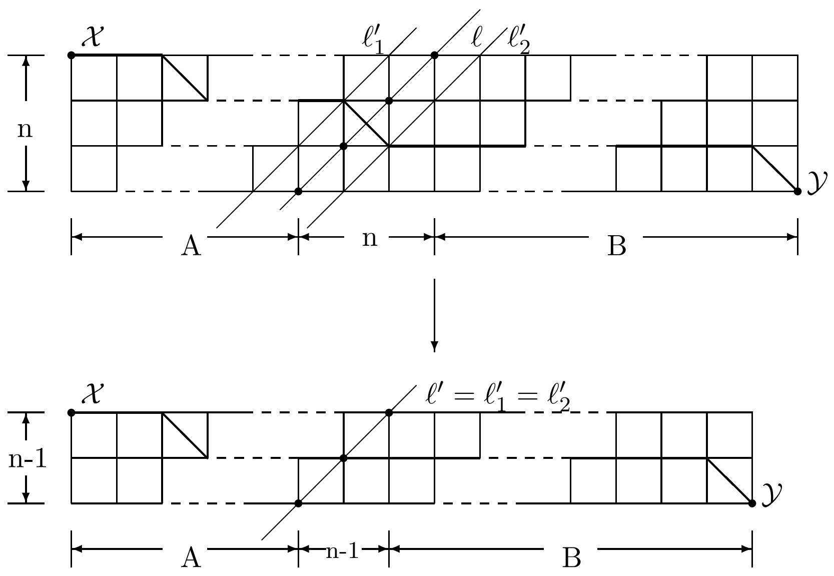
$$N_1(n; A,\ B) + N_2(n; A,\ B) = \binom{n + A + B}{n}. \tag{IV.24}$$

Ensuite, constatons d'une part qu'en faisant un comptage selon le "point de passage" de la droite ℓ, on a

$$N_1(n; A,\ B) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k + A}{n - k}\binom{n - k + B}{k} = S_0(n; A,\ B); \tag{IV.25}$$

et d'autre part la transformation des figures suivantes montre tout de suite

$$N_2(n;\ A,\ B) = N_1(n - 1;\ A,\ B). \tag{IV.26}$$



Donc si

$$S_0(n-1;\, A,\, B) = S(n-1;\, A+B) = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \binom{A+B+n-1-j}{n-1-j},$$

on a

$$\begin{aligned}
S_0(n;\, A,\, B) &= N_1(n;\, A,\, B) = \binom{A+B+n}{n} - N_2(n;\, A,\, B) \\
&= \binom{A+B+n}{n} - N_1(n-1;\, A,\, B) = \binom{A+B+n}{n} - S(n-1;\, A+B) \\
&= \binom{A+B+n}{n} - \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \binom{A+B+n-1-j}{n-1-j} \\
&= \binom{A+B+n}{n} - \sum_{j':=j+1=1}^{n}(-1)^{j'-1} \binom{A+B+n-j'}{n-j'} \\
&= \sum_{j'=0}^{n}(-1)^{j'} \binom{A+B+n-j'}{n-j'} = S(n;\, A+B). \qquad \text{(IV.27)}
\end{aligned}$$

La condition initiale étant facile à vérifier, on démontre ainsi le Lemme 45 sans beaucoup de calcul.

IV.2 Les sommes $S_m(n; A,\, B)$

Avant de continuer avec les m, on s'intéresse à la somme

$$S_m(n; A, B) := \sum_{k=0}^{n} \binom{k+A}{n-k} \binom{n-k+B}{k} \binom{k}{m}. \qquad \text{(IV.28)}$$

pour tout m entier positif. On cherche à exprimer cette somme comme une combinaison linéaire des $S(n; A+B)$. Nous allons démontrer

Proposition 48 *Pour $m \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned}
&S_m(n, A, B) \\
= &\sum_{p=0}^{n-m}(-1)^p \left[\binom{p+m-1}{m-1} \binom{B+n-m-p}{m} \right. \qquad \text{(IV.29)} \\
&\left. - \binom{p+m-1}{m} \binom{B+n-m-p}{m-1} \right] S(n-m-p; A+B).
\end{aligned}$$

En utilisant, pour tout (n, A, B, p) :

$$\binom{p+m-1}{m-1} \binom{B+n-m-p}{m} - \binom{p+m-1}{m} \binom{B+n-m-p}{m-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{p+m-1}{m-1}\frac{B+n-2m-p+1}{m}\binom{B+n-m-p}{m-1} \\
&\qquad -\frac{p}{m}\binom{p+m-1}{m-1}\binom{B+n-m-p}{m-1} \\
&= \frac{1}{m}\binom{p+m-1}{m-1}\binom{B+n-m-p}{m-1}(B+n-2m+1-2p), \qquad \text{(IV.30)}
\end{aligned}$$

il nous suffit de démontrer

Proposition 49 *Pour $m \geq 1$, $n \geq m$, on a*

$$\begin{aligned}
S_m(n;\, A,\, B) &= \sum_{p=0}^{n-m} \frac{1}{m}(-1)^p \binom{p+m-1}{m-1}\binom{B+n-m-p}{m-1} \\
&\qquad (B+n-2m+1-2p)S(n-m-p;\, A+B). \qquad \text{(IV.31)}
\end{aligned}$$

La relation de récurrence à utiliser est

Lemme 50 *Pour $m \geq 1$, $n \geq m$,*

$$S_m(n; A, B) = \frac{n-m+B}{m} S_{m-1}(n-1; A+1, B-1) - S_m(n-1; A+1, B-1). \qquad \text{(IV.32)}$$

Démonstration du Lemme.

$$\begin{aligned}
S_m(n; A, B) &= \sum_{r=0}^{n} \binom{r+A}{n-r}\binom{n-r+B}{r}\binom{r}{m} \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{r+A}{n-r}\binom{n-r+B-1}{r-1}\frac{n-r+B}{r}\frac{r}{m}\binom{r-1}{m-1} \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{r+A}{n-r}\binom{n-r+B-1}{r-1}\frac{n-r+B}{m}\binom{r-1}{m-1} \\
&= \frac{n-m+B}{m}\sum_{r=0}^{n} \binom{r+A}{n-r}\binom{n-r+B-1}{r-1}\binom{r-1}{m-1} \\
&\qquad -\sum_{r=0}^{n} \frac{r-m}{m}\binom{r+A}{n-r}\binom{n-r+B-1}{r-1}\binom{r-1}{m-1} \\
&= \frac{n-m+B}{m}\sum_{r=0}^{n} \binom{(A+1)+(r-1)}{(n-1)-(r-1)}\binom{(n-1)-(r-1)+(B-1)}{r-1}\binom{r-1}{m-1} \\
&\qquad -\sum_{r=0}^{n} \binom{(A+1)+(r-1)}{(n-1)-(r-1)}\binom{(n-1)-(r-1)+(B-1)}{r-1}\binom{r-1}{m} \\
&= \frac{n-m+B}{m} S_{m-1}(n-1; A+1, B-1) - S_m(n-1; A+1, B-1). \quad \square
\end{aligned}$$

Démonstration de la Proposition 49. On démontre la proposition par une double récurrence, d'abord en m, puis en n :

1. On démontre d'abord la Proposition pour $m = 1$: c'est vrai pour $n = 0$ parce que les deux côtés s'annulent. Ensuite si l'énoncé est vrai pour $0, 1, \ldots, n-1$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p(B+n-1-2p)S(n-1-p;A+B)\\
&\qquad+\sum_{p=0}^{n-2}(-1)^p(B+n-3-2p)S(n-2-p;A+B)\\
=&\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p(B+n-1-2p)S(n-1-p;A+B)\\
&\qquad-\sum_{p'=p+1=1}^{n-1}(-1)^{p'}(B+n-1-2p')S(n-1-p';A+B)\\
=&\;(B+n-1)S(n-1;\,A+B). \qquad \text{(IV.33)}
\end{aligned}$$

i.e., $$\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p(B+n-1-2p)S(n-1-p;A+B)+S_1(n-1;A+1,B-1)$$
$$=(B+n-1)S(n;A+B). \qquad \text{(IV.34)}$$

Le cas est démontré en vertu du lemme ci-dessus.

2. L'énoncé est valable pour $n < m$, puisque les expressions (IV.28) et (IV.31) s'annulent toutes les deux ;
3. Supposons que l'énoncé soit valable pour $0, 1, \ldots, m-1$ et aussi pour les (i, m), tels que $0 \le i < n$. Alors d'après les hypothèses de récurrence,

$$\begin{aligned}
&\frac{n-m+B}{m}S_{m-1}(n-1;A+1,B-1)-S_m(n-1;A+1,B-1)\\
=&\frac{n-m+B}{m}\sum_{p=0}^{n-m}\frac{(-1)^p}{m-1}\binom{p+m-2}{m-2}\binom{B-1+n-1-m+1-p}{m-2}\\
&\qquad(B-1+n-1-2(m-1)+1-2p)S(n-m-p;A+B)\\
&-\sum_{p=0}^{n-m-1}\frac{(-1)^p}{m}\binom{p+m-1}{m-1}\binom{B-1+n-1-m-p}{m-1}\\
&\qquad(B-1+n-1-2m+1-2p)S(n-m-1-p;A+B)\\
=&\frac{n-m+B}{m}\frac{1}{m-1}\binom{B+n-m-1}{m-2}(B+n-2m+1)S(n-m;A+B)\\
&+\frac{n-m+B}{m}\sum_{p'=0}^{n-m-1}\frac{(-1)^{1+p'}}{m-1}\binom{p'+m-1}{m-2}\binom{B+n-m-2-p'}{m-2}\\
&\qquad(B+n-2m-1-2p')S(n-m-1-p';A+B)\\
&+\sum_{p=0}^{n-m-1}\frac{(-1)^{p+1}}{m}\binom{p+m-1}{m-1}\binom{B+n-m-2-p}{m-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad (B+n-2m-1-2p)S(n-m-1-p;A+B)\\
=\;& \frac{1}{m}\binom{B+n-m}{m-1}(B+n-2m+1)S(n-m;A+B)\\
&+\sum_{p=0}^{n-m-1}\frac{(-1)^{p+1}}{m}\Bigg[\frac{p+1}{m-1}\binom{p+m-1}{m-2}\binom{B+n-m-2-p}{m-2}\\
&\quad+\frac{n-m+B-p-1}{m-1}\binom{p+m-1}{m-2}\binom{B+n-m-2-p}{m-2}\\
&\qquad+\binom{p+m-1}{m-1}\binom{B+n-m-2-p}{m-1}\Bigg]\\
&\qquad\qquad (B+n-2m-1-2p)S(n-m-1-p;A+B)
\end{aligned}
$$

La quantité entre crochets se simplifie :

$$
\begin{aligned}
&\frac{p+1}{m-1}\binom{p+m-1}{m-2}\binom{B+n-m-2-p}{m-2}\\
&\quad+\frac{n-m+B-p-1}{m-1}\binom{p+m-1}{m-2}\binom{B+n-m-2-p}{m-2}\\
&\qquad+\binom{p+m-1}{m-1}\binom{B+n-m-2-p}{m-1}\\
=\;& \binom{p+m-1}{m-1}\binom{B+n-m-2-p}{m-2}\\
&+\binom{p+m-1}{m-2}\binom{B+n-m-1-p}{m-1}+\binom{p+m-1}{m-1}\binom{B+n-m-2-p}{m-1}\\
=\;& \binom{p+m-1}{m-1}\left[\binom{B+n-m-2-p}{m-2}+\binom{B+n-m-2-p}{m-1}\right]\\
&+\binom{p+m-1}{m-2}\binom{B+n-m-1-p}{m-1}\\
=\;& \binom{p+m-1}{m-1}\binom{B+n-m-1-p}{m-1}+\binom{p+m-1}{m-2}\binom{B+n-m-1-p}{m-1}\\
=\;& \binom{p+m}{m-1}\binom{B+n-m-1-p}{m-1},
\end{aligned}
$$

Le calcul peut donc continuer comme suit,

$$
\begin{aligned}
&\frac{n-m+B}{m}S_{m-1}(n-1;A+1,B-1)-S_m(n-1;A+1,B-1)\\
=\;& \frac{1}{m}\binom{B+n-m}{m-1}(B+n-2m+1)S(n-m;A+B)\\
&+\sum_{p=0}^{n-m-1}\frac{(-1)^{p+1}}{m}\binom{p+m}{m-1}\binom{B+n-m-1-p}{m-1}\\
&\qquad\qquad (B+n-2m-1-2p)S(n-m-1-p;A+B)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{m}\binom{B+n-m}{m-1}(B+n-2m+1)S(n-m;A+B) \\
&\quad + \sum_{p':=p+1=1}^{n-m} \frac{(-1)^{p'}}{m}\binom{p'+m-1}{m-1}\binom{B+n-m-p'}{m-1} \\
&\qquad\qquad (B+n-2m+1-2p')S(n-m-p';A+B) \\
&= \sum_{p'=0}^{n-m} \frac{1}{m}(-1)^{p'}\binom{p'+m-1}{m-1}\binom{B+n-m-p'}{m-1} \\
&\qquad\qquad (B+n-2m+1-2p')S(n-m-p';A+B).\square
\end{aligned}
$$

IV.3 le cas général

On passe finalement au cas général. Soit k un nombre entier strictement positif tel que, $2k \leq n$. On décompose la démonstration en plusieurs étapes :

[α] Nous pouvons d'abord dégager un facteur qui ne dépend pas de r dans chaque terme de $Q_n\left(y,\, z,\, k+\frac{1}{2}\right)$ grâce au Lemme 44 :

Proposition 51 $Q_n\left(y,\, z,\, k+\frac{1}{2}\right)$

$$= [2^k({}_k y)({}_{(n-2k)}(2y-2k))][2^k({}_k z)({}_{(n-2k)}(2z-2k))]\tilde{Q}_n\left(y,\, z,\, k+\frac{1}{2}\right), \tag{IV.35}$$

où

$$\tilde{Q}_n\left(y,\, z,\, k+\frac{1}{2}\right) = \sum_{j=0}^{k} \Sigma_j, \tag{IV.36}$$

et

$$
\begin{aligned}
\Sigma_j &= (-1)^j (j!)^2 2^{2j}\binom{k}{j}\binom{-k-1}{j}\binom{n-y-z-1}{j}\binom{2n-2y-2z-2j-2}{n-2j} \\
&\quad [(2y-2j-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2j-1)\cdots(2z-2k+1)] \\
&= 2^{2j}(2j)!\binom{k+j}{2j}\binom{n-y-z-1}{j}\binom{2n-2y-2z-2j-2}{n-2j} \\
&\quad [(2y-2j-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2j-1)\cdots(2z-2k+1)] \\
&= (-1)^{n-j}2^{2j}(2j)!\binom{k+j}{2j}\binom{y+z-n+j}{j}\binom{2y+2z-n+1}{n-2j} \\
&\quad [(2y-2j-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2j-1)\cdots(2z-2k+1)].
\end{aligned} \tag{IV.37}
$$

Nous voudrions ensuite faire la même chose pour $P_n\left(y,\, z,\, k+\frac{1}{2}\right)$: dans chaque terme à sommer dans (IV.8), on sépare les facteurs qui contiennent y et z ; après avoir dégagé le facteur $2^k({}_k y)({}_{(n-2k)}(2y-2k))$ pour y (resp. $2^k({}_k z)({}_{(n-2k)}(2z-2k))$ pour z), on décompose chaque quotient en une somme. Et on arrive à

Proposition 52 $P_n\left(y,\, z,\, k+\frac{1}{2}\right)$

$$= [2^k({}_ky)({}_{(n-2k)}(2y-2k))][2^k({}_kz)({}_{(n-2k)}(2z-2k))]\tilde{P}_n\left(y,\, z,\, k+\frac{1}{2}\right), \tag{IV.38}$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_n\left(y,z,k+\frac{1}{2}\right) &= (-1)^n\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{k}\sum_{r=0}^{n}A_{r,p}(2y-2p-1)\cdots(2y-2k+1)\\
&\qquad B_{r,q}(2z-2q-1)\cdots(2z-2k+1),\\
A_{r,p} &= (-1)^p2^p\binom{k}{p}\binom{r}{p}p!\binom{2y-r}{r}, \qquad\qquad (\text{IV.39})\\
B_{r,q} &= (-1)^q\frac{(2q)!2^q}{q!}\binom{k+q}{2q}\left[\sum_{u=0}^{k+1-q}\binom{k+1-q}{u}2^u\binom{2z-n+r}{n-2q-r-u}\right].
\end{aligned}$$

La démonstration de cette proposition est donnée dans la Section IV.3.b.

Ainsi, on obtient une simplification de (IV.12), sous la forme

$$\tilde{P}_n\left(y,z,k+\frac{1}{2}\right) = \tilde{Q}_n\left(y,z,k+\frac{1}{2}\right). \tag{IV.40}$$

[β] Prenons le terme dans la définition de $\tilde{P}_n\left(y,z,k+\frac{1}{2}\right)$ (cf. (IV.39)) pour chaque couple (p,q), et sommons le par rapport à r. On obtient une quantité $D_{p,q} = \sum_r A_{r,p}B_{r,q}$,

$$\begin{aligned}
D_{p,q} &= \sum_{r=0}^{n}A_{r,p}B_{r,q}\\
&= (-1)^{p+q}\frac{2^{p+q}(2q)!p!}{q!}\binom{k}{p}\binom{k+q}{2q}\\
&\qquad \sum_{u=0}^{n-2q}\binom{k+1-q}{u}2^uS_p(n-2q-u;2z-n,2y-n+2q+u).
\end{aligned}$$

Si $p\geq 1$, en faisant usage de (IV.19), on trouve que :

$$\begin{aligned}
D_{p,q} &= (-1)^{p+q}\frac{2^{p+q}(2q)!p!}{q!}\binom{k}{p}\binom{k+q}{2q}\sum_{u=0}^{k+1-q}\binom{k+1-q}{u}2^u\\
&\qquad \sum_{v=0}^{n-2q-u-p}(-1)^v\left[\binom{v+p-1}{p-1}\binom{2y-p-v}{p}-\binom{v+p-1}{p}\binom{2y-p-v}{p-1}\right]\\
&\qquad S(n-2q-u-p-v;2y+2z-2n+2q+u). \qquad\qquad (\text{IV.41})
\end{aligned}$$

Si $p=0$, d'après le Lemme 45,

$$D_{0,q} = (-1)^q \frac{2^q(2q)!}{q!} \binom{k+q}{2q} \sum_{u=0}^{k+1-q} \binom{k+1-q}{u} 2^u S(n-2q-u; 2y+2z-2n+2q+u). \tag{IV.42}$$

On obtient l'expression $\tilde{P}_n\left(y, z, k+\frac{1}{2}\right)$

$$= (-1)^n \sum_{p=0}^{k} \sum_{q=0}^{k} D_{p,q}(2y-2p-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2q-1)\cdots(2z-2k+1), \tag{IV.43}$$

[γ] On introduit la notation, pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2, b \le n$:

$$S_{a,b}^{(n)}(X) := \sum_{i=a}^{n-b} (-1)^i \binom{i}{a} \binom{X-n-i}{n-b-i}. \tag{IV.44}$$

Alors en écrivant, pour $p \ge 1$, $w \le p$,

$$\begin{aligned} D_{p,q,w} &= (-1)^{q+w+1} \frac{2^{p+q}(2q)!p!}{q!(p-w)!} \binom{k}{p} \binom{k+q}{2q} \\ &\quad \sum_{l=0}^{p-w} 2^{-l} \binom{p-w}{l} \binom{w-l+p}{p} (-1)^{k-q} S_{w-l+p-k+q-1,k+q+1}^{(n)}(2y+2z), \end{aligned} \tag{IV.45}$$

nous avons

$$D_{p,q} = \sum_{w=0}^{p} D_{p,q,w}(2y-2w-1)\cdots(2y-2p+1), \tag{IV.46}$$

qui sera démontrée dans la Section IV.3.d.

Cela nous permet alors de procéder à une première resommation :

$$\begin{aligned} & (-1)^n \sum_{p=0}^{k} \sum_{q=0}^{k} D_{p,q}(2y-2p-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2q-1)\cdots(2z-2k+1) \\ = \; & (-1)^n \sum_{p,q=0}^{k} \sum_{w=0}^{p} D_{p,q,w}(2y-2w-1)\cdots(2y-2p+1)(2y-2p-1)\cdots(2y-2k+1) \\ & \qquad (2z-2q-1)\cdots(2z-2k+1) \\ = \; & (-1)^n \sum_{p,q=0}^{k} \sum_{w=0}^{p} D_{p,q,w}(2y-2w-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2q-1)\cdots(2z-2k+1) \\ = \; & (-1)^n \sum_{q,w=0}^{k} \left(\sum_{p=w}^{k} D_{p,q,w} \right) (2y-2w-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2q-1)\cdots(2z-2k+1) \end{aligned}$$

$$= \quad (-1)^n \sum_{q,w=0}^{k} C_{w,q}(2y-2w-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2q-1)\cdots(2z-2k+1), \qquad \text{(IV.47)}$$

où la quantité $C_{w,q} = \sum_p D_{p,q,w}$ admet une autre expression qui est symétrique en $(y,z) \mapsto (z,y)$(cf. Section IV.3.e) : Si $w+q \geq 1$,

$$C_{w,q} \quad = \quad -\frac{2^{q+w}(2q)!(2w)!}{q!w!}\binom{k+q}{2q}\binom{k+w}{2w}S^{(n)}_{w+q-1,w+q+1}(2y+2z). \qquad \text{(IV.48)}$$

Si $w=q=0$, $C_{w,q} = \Sigma_0$.
On peut alors réécrire $\tilde{P}_n\left(y,z,k+\frac{1}{2}\right)$ sous la forme suivante :

$$\tilde{P}_n\left(y,z,k+\frac{1}{2}\right) = (-1)^n \sum_{q,w=0}^{k} C_{w,q}(2y-2w-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2q-1)\cdots(2z-2k+1), \quad \text{(IV.49)}$$

et surtout cela montre que

Lemme 53

$$\tilde{P}_n\left(y,z,k+\frac{1}{2}\right) = \tilde{P}_n\left(z,y,k+\frac{1}{2}\right), \qquad \text{(IV.50)}$$

i.e.,

$$P_n\left(y,z,k+\frac{1}{2}\right) = P_n\left(z,y,k+\frac{1}{2}\right). \qquad \text{(IV.51)}$$

[δ] Finalement on écrit, pour $(w,q) \in \mathbb{N}^2, (w,q) \neq (0,0)$,

$$C_{w,q,j} = -\frac{2^{q+w}(2j)!}{(2j-q-w)!}\binom{k+j}{2j}\binom{w+q}{j}\binom{2j-w-q}{j-w}S_{w+q-1,w+q+1}(2y+2z), \quad \text{(IV.52)}$$

dont les termes sont non nuls lorsque $\max\{w,q\} \leq j \leq \min\{w+q,k\}$.
D'un côté nous allons obtenir dans la Section IV.3.f

$$C_{w,q} \quad = \quad \sum_{j=0}^{k} C_{w,q,j}, \qquad \text{(IV.53)}$$

et, de l'autre, comme sera prouvée à la fin de ce chapitre(cf. Section IV.3.g),

$$(-1)^n \sum_{w,q=0}^{k} C_{w,q,j}(2y-2w+1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2q+1)\cdots(2z-2k+1) = \Sigma_j. \quad \text{(IV.54)}$$

On démontre donc (IV.40).

En combinant avec le résultat de la Section IV.1, nous parvenons ainsi à démontrer l'identité (IV.12) pour tout $a = k + \frac{1}{2}$, où l'entier k satisfait $0 \leq k \leq \dfrac{n}{2}$. D'autre part, (IV.51) implique que, pour tout (y, z) :

$$\begin{aligned} P_n\left(y, z, -k - \frac{1}{2}\right) &= P_n\left(z, y, k + \frac{1}{2}\right) = P_n\left(y, z, k + \frac{1}{2}\right) \\ &= Q_n\left(y, z, k + \frac{1}{2}\right) = Q_n\left(y, z, -k - \frac{1}{2}\right), \end{aligned} \tag{IV.55}$$

i.e., (IV.12) est valable pour tout triplet (y, z, a) où $a = \pm\left(k + \dfrac{1}{2}\right)$, k un entier compris entre 0 et $\dfrac{n}{2}$. Si n est un entier pair, il y a $\dfrac{n}{2} + 1$ différentes valeurs de k, et donc $n + 2$ différentes valeurs de a ; si n est un entier positif impair, il y a $\dfrac{n+1}{2}$ différentes valeurs de k, et donc $n + 1$ différentes valeurs de a. Mais comme nous l'avons vu au début de ce chapitre(cf. Lemme 43), P_n, Q_n sont deux polynômes dont le degré en a est au plus n, donc $P_n \equiv Q_n$, i.e.,

Théorème 54 *L'identité (IV.1) est valable.*

Nous ne disposons à ce jour (fin novembre 2006) d'aucune information sur la méthode par laquelles Cohen, Manin et Zagier ont démontré cette identification de coefficients.

Les détails nécessaires sont fournis ci-dessous.

IV.3.a Quelques lemmes techniques

Avant de donner les détails de la démonstration du théorème 54, nous présentons quelques lemmes techniques qui nous seront utiles dans la suite.

Proposition 55 *Pour $m \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} &2^m({}_m(n-r))\prod_{v=1}^{m-1}(2z - 2n + 2r + 2v) \\ = &\sum_{j=0}^{m} \frac{\binom{-\frac{1}{2}}{j} 2^j j!}{\prod_{t=0}^{j-1}(2z - 2t - 1)} \sum_{q=0}^{j}\left[\sum_{s=0}^{j-1}\binom{j-s}{q-s}\binom{m}{2j-s}\binom{j-1}{s}\right] \\ &\qquad 2^{m+q}({}_{(m+q)}(n-r))({}_{(m-q-1)}(2z - 2n + 2r + 2m - 1)). \end{aligned} \tag{IV.56}$$

Démonstration. On introduit les notations suivantes :

$$C_{j,q,m} = \binom{-\frac{1}{2}}{j} 2^j j! \left[\sum_{s=0}^{j}\binom{j-s}{q-s}\binom{m}{2j-s}\binom{j-1}{s}\right], \tag{IV.57}$$

on observe d'abord que $C_{(0,0,1)} = 1$(et $C_{(j,q,1)} = 0$ pour tous les autres j, q). On va démontrer

Lemme 56 *Les $C_{j,q,m}$ satisfont la relation de récurrence suivante :*

$$C_{j,q,m+1} = C_{j,q,m} - (m+q)\sum_{i<j}\prod_{l=i}^{j-2}(m+q-2l-1)C_{i,q,m} - (m+q-1)\sum_{i<j}\prod_{l=i}^{j-2}(m+q-2-2l)C_{i,q-1,m}. \tag{IV.58}$$

Autrement dit, nous allons démontrer l'identité

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^j(2j)!}{j!2^j}\sum_{s=0}^{j}\binom{j-s}{q-s}\binom{m+1}{2j-s}\binom{j-1}{s}\\
= \ &\frac{(-1)^j(2j)!}{j!2^j}\sum_{s=0}^{j}\binom{j-s}{q-s}\binom{m}{2j-s}\binom{j-1}{s}\\
&-(m+q)\sum_{i<j}\prod_{l=i}^{j-2}(m+q-2l-1)\frac{(-1)^i(2i)!}{i!2^i}\sum_{s=0}^{j}\binom{i-s}{q-s}\binom{m}{2i-s}\binom{i-1}{s}\\
&-(m+q-1)\sum_{i<j}\prod_{l=i}^{j-2}(m+q-2l-2)\frac{(-1)^i(2i)!}{i!2^i}\sum_{s=0}^{j}\binom{i-s}{q-1-s}\binom{m}{2i-s}\binom{i-1}{s}
\end{aligned} \tag{IV.59}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^j(2j)!}{j!2^j}\sum_{s=0}^{j}\binom{j-s}{q-s}\binom{m}{2j-s-1}\binom{j-1}{s}\\
= \ &-(m+q)\sum_{i<j}\prod_{l=i}^{j-2}(m+q-2l-1)\frac{(-1)^i(2i)!}{i!2^i}\sum_{s=0}^{j}\binom{i-s}{q-s}\binom{m}{2i-s}\binom{i-1}{s}\\
&-(m+q-1)\sum_{i<j}\prod_{l=i}^{j-2}(m+q-2l-2)\frac{(-1)^i(2i)!}{i!2^i}\sum_{s=0}^{j}\binom{i-s}{q-1-s}\binom{m}{2i-s}\binom{i-1}{s},
\end{aligned} \tag{IV.60}$$

Démonstration du Lemme. La démonstration se décompose en trois étapes :
1. D'abord (IV.60) est vrai pour $j = 0$ puisque les deux côtés sont nuls.
2. Elle est vraie aussi pour $q = 0$. La démonstration de ce fait nécéssite une récurrence en j : si nous avons déjà

$$\frac{(-1)^j(2j)!}{j!2^j}\binom{m}{2j-1} = -m\sum_{i<j}\prod_{l=i}^{j-2}(m-2l-1)\frac{(-1)^i(2i)!}{i!2^i}\binom{m}{2i},$$

alors

$$\begin{aligned}
& \frac{(-1)^{j+1}(2(j+1))!}{(j+1)!2^{j+1}}\binom{m}{2(j+1)-1} \\
= \quad & \frac{(-1)^{j+1}(2(j+1))!}{(j+1)!2^{j+1}}\frac{{}_{(2j+1)}m}{(2j+1)!} \\
= \quad & \frac{(-1)^{j+1}(2(j+1))!}{(j+1)!2^{j+1}}(m-2j)\frac{{}_{(2j)}m}{(2j+1)!} \\
= \quad & m\frac{(-1)^{j+1}(2(j+1))!}{(j+1)!2^{j+1}}\frac{{}_{(2j)}m}{(2j+1)(2j)!} - 2j\frac{(-1)^{j+1}(2(j+1))!}{(j+1)!2^{j+1}}\frac{{}_{(2j)}m}{(2j+1)(2j)!} \\
= \quad & -m\frac{(-1)^{j}(2j)!}{j!2^{j}}\frac{{}_{(2j)}m}{(2j)!} + \frac{(-1)^{j}(2j)!}{j!2^{j}}\frac{{}_{(2j)}m}{(2j-1)!} \\
= \quad & -m\frac{(-1)^{j}(2j)!}{j!2^{j}}\binom{m}{2j} + (m-2j+1)\frac{(-1)^{j}(2j)!}{j!2^{j}}\binom{m}{2j-1} \\
= \quad & -m\frac{(-1)^{j}(2j)!}{j!2^{j}}\binom{m}{2j} - (m-2j+1)m\sum_{i<j}\prod_{l=i}^{j-2}(m-2l-1)\frac{(-1)^{i}(2i)!}{i!2^{i}}\binom{m}{2i} \\
= \quad & -m\sum_{i<j+1}\prod_{l=i}^{j+1-2}(m-2l-1)\frac{(-1)^{i}(2i)!}{i!2^{i}}\binom{m}{2i},
\end{aligned}$$

On voit donc qu'elle est vrai pour tout (j,q,m) avec $q=0$.
3. Ensuite on utilise une double récurrence en j et q. Si on note

$$S_{j,q,m} = \sum_{i<j}\prod_{l=i}^{j-2}(m+q-2l-1)\frac{(-1)^{i}(2i)!}{i!2^{i}}\sum_{s=0}^{j}\binom{i-s}{q-s}\binom{m}{2i-s}\binom{i-1}{s}, \tag{IV.61}$$

on remarque tout d'abord que l'on peut réécrire (IV.60) comme

$$\frac{(-1)^{j}(2j)!}{j!2^{j}}\sum_{s=0}^{j}\binom{j-s}{q-s}\binom{m}{2j-s-1}\binom{j-1}{s} = -(m+q)S_{j,q,m} - (m+q-1)S_{j,q-1,m}. \tag{IV.62}$$

L'hypothèse de récurrence pour $(j,q-1,m)$ nous donne

$$\begin{aligned}
& -(m+q-1)S_{j,q-1,m} \\
= \quad & (-(m+q-1)S_{j,q-1,m} - (m+q-2)S_{j,q-2,m}) \\
& -(-(m+q-2)S_{j,q-2,m} - (m+q-3)S_{j,q-3,m}) \\
& + \cdots + (-1)^{q-1}(-mS_{j,0,m}) \\
= \quad & \sum_{\zeta=0}^{q-1}\frac{(-1)^{j}(2j)!}{j!2^{j}}\sum_{s=0}^{j}(-1)^{\zeta}\binom{j-s}{q-1-\zeta-s}\binom{m}{2j-s-1}\binom{j-1}{s} \\
= \quad & \frac{(-1)^{j}(2j)!}{j!2^{j}}\sum_{s=0}^{j}\sum_{\zeta=0}^{q-1}(-1)^{\zeta}\left[\binom{j-s-1}{q-1-\zeta-s} + \binom{j-s-1}{q-1-\zeta-s-1}\right]\binom{m}{2j-s-1}\binom{j-1}{s}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^j(2j)!}{j!2^j}\sum_{s=0}^{j}\binom{j-s-1}{q-1-s}\binom{m}{2j-s-1}\binom{j-1}{s}, \tag{IV.63}$$

et (IV.62) devient alors

$$\begin{aligned}
-(m+q)S_{j,q,m} &= \frac{(-1)^j(2j)!}{j!2^j}\sum_{s=0}^{j}\left[\binom{j-s}{q-s}-\binom{j-s-1}{q-s-1}\right]\binom{m}{2j-s-1}\binom{j-1}{s}\\
&= \frac{(-1)^j(2j)!}{j!2^j}\sum_{s=0}^{j}\binom{j-s-1}{q-s}\binom{m}{2j-s-1}\binom{j-1}{s}\\
&= \frac{(-1)^j(2j)!}{j!2^j}\sum_{s=0}^{j}\frac{{}_{(q-s)}(j-s-1)}{(q-s)!}\binom{m}{2j-s-1}\frac{{}_{s}(j-1)}{s!}\\
&= \frac{(-1)^j(2j)!}{j!2^j}\sum_{s=0}^{j}\frac{q!}{(q-s)!s!}\binom{m}{2j-s-1}\frac{({}_{(q-s)}(j-s-1))({}_{s}(j-1))}{q!}\\
&= \frac{(-1)^j(2j)!}{j!2^j}\sum_{s=0}^{j}\binom{q}{s}\binom{m}{2j-s-1}\binom{j-1}{q}\\
&= \frac{(-1)^j(2j)!}{j!2^j}\binom{m+q}{2j-1}\binom{j-1}{q}. \qquad \text{(IV.64)}
\end{aligned}$$

D'autre part, par définition,

$$\begin{aligned}
S_{j,q,m} &= \frac{(-1)^{j-1}(2(j-1))!}{(j-1)!2^{j-1}}\sum_{s=0}^{j-1}\binom{j-1-s}{q-s}\binom{m}{2(j-1)-s}\binom{j-1-1}{s}\\
&\quad +\sum_{i<j-1}\prod_{l=i}^{j-2}(m+q-2l-1)\frac{(-1)^i(2i)!}{i!2^i}\sum_{s=0}^{j-1}\binom{i-s}{q-s}\binom{m}{2i-s}\binom{i-1}{s}\\
&= \frac{(-1)^{j-1}(2(j-1))!}{(j-1)!2^{j-1}}\sum_{s=0}^{j-1}\binom{j-1-s}{q-s}\binom{m}{2(j-1)-s}\binom{j-1-1}{s}\\
&\quad +(m+q-2j+3)\sum_{i<j-1}\prod_{l=i}^{j-3}(m+q-2l-1)\frac{(-1)^i(2i)!}{i!2^i}\\
&\qquad \sum_{s=0}^{j-1}\binom{i-s}{q-s}\binom{m}{2i-s}\binom{i-1}{s}\\
&= \frac{(-1)^{j-1}(2(j-1))!}{(j-1)!2^{j-1}}\sum_{s=0}^{j-1}\binom{j-1-s}{q-s}\binom{m}{2(j-1)-s}\binom{j-1-1}{s}\\
&\quad +(m+q-2j+3)S_{j-1,q,m}, \qquad \text{(IV.65)}
\end{aligned}$$

On utilise l'hypothèse pour $(j-1,q,m)$, la formule à établir se réduit à la démonstration de l'identité :

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^j(2j)!}{j!2^j}\binom{m+q}{2j-1}\binom{j-1}{q} \\
= \quad & -(m+q)\frac{(-1)^{j-1}(2(j-1))!}{(j-1)!2^{j-1}}\sum_{s=0}^{j-1}\binom{j-1-s}{q-s}\binom{m}{2(j-1)-s}\binom{j-1-1}{s} \\
&+\frac{(-1)^{j-1}(2(j-1))!}{(j-1)!2^{j-1}}\binom{m+q}{2(j-1)-1}\binom{j-1-1}{q},
\end{aligned} \tag{IV.66}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
&(m+q)\sum_{s=0}^{j-1}\binom{j-1-s}{q-s}\binom{m}{2(j-1)-s}\binom{j-1-1}{s} \\
= \quad & (m+q)\sum_{s=0}^{j-1}\binom{j-1-s}{q-s}\binom{m}{2(j-1)-s}\binom{j-1-1}{s} \\
= \quad & (2j-1)\binom{m+q}{2j-1}\binom{j-1}{q}+(m+q-2j+3)\binom{m+q}{2(j-1)-1}\binom{j-1-1}{q} \\
= \quad & \binom{m+q}{2j-2}\left[(m+q)\binom{j-1}{q}-(2j-2)\binom{j-2}{q-1}\right].
\end{aligned} \tag{IV.67}$$

Cette dernière identité est facile à démontrer :

$$\begin{aligned}
&(m+q)\sum_{s=0}^{j-1}\binom{j-1-s}{q-s}\binom{m}{2(j-1)-s}\binom{j-1-1}{s} \\
= \quad & (m+q)\sum_{s=0}^{j-1}\frac{(j-1-s)!(j-2)!}{(q-s)!(j-q-1)!s!(j-s-2)!}\binom{m}{2(j-1)-s} \\
= \quad & (m+q)\sum_{s=0}^{j-1}\frac{(j-1-s)(j-2)!}{(q-s)!(j-q-1)!s!}\binom{m}{2(j-1)-s} \\
= \quad & (m+q)\sum_{s=0}^{j-1}\frac{(j-1)!-s(j-2)!}{(q-s)!(j-q-1)!s!}\binom{m}{2(j-1)-s} \\
= \quad & (m+q)\sum_{s=0}^{j-1}\binom{j-1}{q}\binom{q}{s}\binom{m}{2(j-1)-s}-(m+q)\sum_{s=0}^{j-1}\binom{j-2}{q-1}\binom{q-1}{s-1}\binom{m}{2(j-1)-s} \\
= \quad & (m+q)\binom{m+q}{2j-2}\binom{j-1}{q}-(m+q)\binom{j-2}{q-1}\binom{m+q-1}{2j-3} \\
= \quad & \binom{m+q}{2j-2}\left[(m+q)\binom{j-1}{q}-(2j-2)\binom{j-2}{q-1}\right].
\end{aligned} \tag{IV.68}$$

Le lemme est donc établi.□

La suite de la Démonstration de la Proposition 55. On note ensuite

$$I(m; n-r, 2z-2n+2r) = 2^m({}_m(n-r)) \prod_{v=1}^{m-1}(2z-2n+2r+2v). \tag{IV.69}$$

Nous voulons démontrer

$$\begin{aligned} I(m; n-r, 2z-2n+2r) \quad = \quad & \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\prod_{t=0}^{j-1}(2z-2t-1)} \sum_{q=0}^{j} C_{j,q,m} \\ & 2^{m+q}({}_{(m+q)}(n-r))({}_{(m-q-1)}(2z-2n+2r+2m-1)). \end{aligned}$$

On procède par une récurrence sur m. Le cas $m=1$ est évident car les deux côtés sont égaux à $2(n-r)$. Si l'identité est valable pour m, alors, pour $m+1$ on a

$$\begin{aligned} & I(m+1; n-r, 2z-2n+2r) \\ = \quad & 2^{m+1}({}_m(n-r)) \prod_{v=1}^{m}(2z-2n+2r+2v) \\ = \quad & 2(n-r)(2z-2n+2r+2)2^m({}_m(n-r-1)) \prod_{v=0}^{m-1}(2z-2n+2r+2+2v) \\ = \quad & 2(n-r)(2z-2n+2r+2)I(m; n-r-1, 2z-2n+2r+2) \\ = \quad & 2(n-r)(2z-2n+2r+2) \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\prod_{t=0}^{j-1}(2z-2t-1)} \sum_{q=0}^{j} C_{j,q,m} \\ & 2^{m+q}({}_{(m+q)}(n-r-1))({}_{(m-q-1)}(2z-2n+2r+2m+1)). \end{aligned}$$

Selon la relation $({}_a(X-1))X = {}_{(a+1)} X$, on peut continuer comme suit :

$$\begin{aligned} = \quad & \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\prod_{t=0}^{j-1}(2z-2t-1)} \sum_{q=0}^{j} C_{j,q,m} 2^{m+q+1}({}_{(m+1+q)}(n-r)) \\ & [(2z-2n+2r+m+q+2)-(m+q)]({}_{(m-q-1)}(2z-2n+2r+2m+1)) \\ = \quad & \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\prod_{t=0}^{j-1}(2z-2t-1)} \sum_{q=0}^{j} C_{j,q,m} 2^{m+q+1}({}_{(m+1+q)}(n-r))({}_{(m-q)}(2z-2n+2r+2m+1)) \\ & -(m+q) \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\prod_{t=0}^{j-1}(2z-2t-1)} \\ & \sum_{q=0}^{j} C_{j,q,m} 2^{m+q+1}({}_{(m+1+q)}(n-r))({}_{(m-q-1)}(2z-2n+2r+2m+1)) \end{aligned}$$

On multiplie ensuite la dernière somme par la quantité

$$1 = \frac{2(n-r-m-q-1)+(2z-2n+2r+m+q+2)+(m+q-2j-1)}{2z-2j-1},$$

et on trouve

$$
\begin{aligned}
= \ & \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\prod_{t=0}^{j-1}(2z-2t-1)} \sum_{q=0}^{j} C_{j,q,m} 2^{m+q+1} ({}_{(m+1+q)}(n-r))({}_{(m-q)}(2z-2n+2r+2m+1)) \\
& -(m+q) \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\prod_{t=0}^{j-1}(2z-2t-1)} \\
& \qquad \sum_{q=0}^{j} C_{j,q,m} 2^{m+q+1} ({}_{(m+1+q)}(n-r))({}_{(m-q-1)}(2z-2n+2r+2m+1)) \\
& \quad \frac{2(n-r-m-q-1)+(2z-2n+2r+m+q+2)+(m+q-2j-1)}{2z-2j-1} \\
= \ & \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\prod_{t=0}^{j-1}(2z-2t-1)} \sum_{q=0}^{j} C_{j,q,m} 2^{m+q+1} ({}_{(m+1+q)}(n-r))({}_{(m-q)}(2z-2n+2r+2m+1)) \\
& -(m+q) \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\prod_{t=0}^{j}(2z-2t-1)} \\
& \qquad \sum_{q=0}^{j} C_{j,q,m} 2^{m+q+2} ({}_{(m+2+q)}(n-r))({}_{(m-q-1)}(2z-2n+2r+2m+1)) \\
& \qquad -(m+q) \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\prod_{t=0}^{j}(2z-2t-1)} \\
& \qquad\qquad \sum_{q=0}^{j} C_{j,q,m} 2^{m+q+1} ({}_{(m+1+q)}(n-r))({}_{(m-q)}(2z-2n+2r+2m+1)) \\
& \qquad -(m+q) \sum_{j=0}^{m} (m+q-2j-1) \frac{1}{\prod_{t=0}^{j}(2z-2t-1)} \\
& \qquad\quad \sum_{q=0}^{j} C_{j,q,m} 2^{m+q+1} ({}_{(m+1+q)}(n-r))({}_{(m-q-1)}(2z-2n+2r+2m+1)).
\end{aligned}
$$

Quand on réitère cette procèdure en utilisant les relations algébrique

$$2(n-r-m-q-1)+(2z-2n+2r+m+q+2)+(m+q-2j-2l-1) = 2z-2(j+l)-1, \quad \text{(IV.70)}$$

on obtient l'égalité suivante :

$$
\begin{aligned}
& I(m+1; n-r, 2z-2n+2r) \\
= \ & \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\prod_{t=0}^{j-1}(2z-2t-1)} \\
& \sum_{q=0}^{j} \Bigg[C_{j,q,m} - (m+q) \sum_{i<j} \prod_{j=i}^{j-2} (m+q-2l-1) C_{i,q,m} -
\end{aligned}
$$

$$(m+q-1)\sum_{i<j}\prod_{l=i}^{j-2}(m+q-2-2l)C_{i,q-1,m}\Bigg] \tag{IV.71}$$
$$2^{m+1+q}(_{(m+1+q)}(n-r))(_{(m+1-q-1)}(2z-2n+2r+2(m+1)-1)).$$

Il nous suffit maintenant d'utiliser le lemme 56 pour conclure la démonstration. □

Proposition 57 *Soient k, j et p trois entiers positifs. La quantité définie par*

$$N_{j,p} := \sum_{q=0}^{2j+p}\binom{k+1}{2j+p-q}\left[\sum_{s=0}^{j}\binom{j-s}{q-s}\binom{2j+p-q}{2j-s}\binom{j-1}{s}\right], \tag{IV.72}$$

satisfait à l'égalité

$$N_{j,p} = \binom{k+j}{2j}\binom{k+1-j}{p}. \tag{IV.73}$$

Démonstration. On fait d'abord un changement de variable $s' = q - s$:

$$\begin{aligned}
N_{j,p} &= \sum_{q=0}^{2j+p}\binom{k+1}{2j+p-q}\left[\sum_{s=0}^{j}\binom{j-s}{q-s}\binom{2j+p-q}{2j-s}\binom{j-1}{s}\right] \\
&= \sum_{q=0}^{2j+p}\sum_{s':=q-s=0}^{q}\binom{k+1}{2j+p-q}\binom{j-q+s'}{s'}\binom{2j+p-q}{2j-q+s'}\binom{j-1}{q-s'} \\
&= \sum_{q=0}^{2j+p}\sum_{s'=0}^{q}\binom{k+1}{2j+p-q}\binom{j-q+s'}{s'}\binom{2j+p-q}{p-s'}\frac{(j-1)!}{(q-s')!(j-q+s'-1)!} \\
&= \sum_{q=0}^{2j+p}\binom{k+1}{2j+p-q}\frac{(j-1)!}{q!(j-q+p-1)!} \\
&\quad \left[\sum_{s'=0}^{q}\binom{j-q+s'}{s'}\binom{2j+p-q}{p-s'}\frac{q!}{(q-s')!}\frac{(j-q+p-1)!}{(j-q+s'-1)!}\right].
\end{aligned} \tag{IV.74}$$

Nous devons démontrer que cette somme est égale à $\binom{k+j}{2j}\binom{k+1-j}{p}$.

Lemme 58

$$\begin{aligned}
& p!\left[\sum_{s'=0}^{q}\binom{j-q+s'}{s'}\binom{2j+p-q}{p-s'}\frac{q!}{(q-s')!}\frac{(j-q+p-1)!}{(j-q+s'-1)!}\right], \\
= \; & j(j-q+1)_{p-1}\sum_{\lambda=0}^{p}\left(\binom{p-1}{\lambda}-\binom{p-1}{\lambda-1}\right)(_{(p-\lambda)}(2j+p-q))(_{\lambda}q).
\end{aligned} \tag{IV.75}$$

Démonstration du Lemme. On note $M(p,q)$ la quantité du côté gauche. On démontre cette identité par récurrence sur p. D'abord pour $p=1$ un calcul direct donne $M(1,q)=(2j-q+1)(j-q)+(j-q+1)q=j(2j-2q+1)=j[(2j+1)-q]$.

Il existe une relation de récurrence

$$\begin{aligned}
& M(p+1,q) \\
= \;& (p+1)!\left[\sum_{s'=0}^{q}\binom{j-q+s'}{s'}\binom{2j+p+1-q}{p+1-s'}\frac{q!}{(q-s')!}\frac{(j-q+p)!}{(j-q+s'-1)!}\right] \\
= \;& p!\left[\sum_{s'=0}^{q}(s'+p+1-s')\binom{j-q+s'}{s'}\binom{2j+p+1-q}{p+1-s'}\frac{q!}{(q-s')!}\frac{(j-q+p)!}{(j-q+s'-1)!}\right] \\
= \;& p!\left[\sum_{s'=0}^{q}(p+1-s')\binom{j-q+s'}{s'}\binom{2j+p+1-q}{p+1-s'}\frac{q!}{(q-s')!}\frac{(j-q+p)!}{(j-q+s'-1)!}\right] \\
& +p!\left[\sum_{s'=0}^{q}s'\binom{j-q+s'}{s'}\binom{2j+p+1-q}{p+1-s'}\frac{q!}{(q-s')!}\frac{(j-q+p)!}{(j-q+s'-1)!}\right] \\
= \;& p!\left[\sum_{s'=0}^{q}\binom{j-q+s'}{s'}(2j+p+1-q)\binom{2j+p-q}{p-s'}\frac{q!}{(q-s')!}\frac{(j-q+p)(j-q+p-1)!}{(j-q+s'-1)!}\right] \\
& +p!\left[\sum_{s'=0}^{q}(j-q+1)\binom{j-q+s'}{s'-1}\binom{2j+p+1-q}{p+1-s'}\frac{q(q-1)!}{(q-s')!}\frac{(j-q+p)!}{(j-q+s'-1)!}\right] \\
= \;& (j-q+p)(2j-q+p+1)p!\left[\sum_{s'=0}^{q}\binom{j-q+s'}{s'}\binom{2j+p-q}{p-s'}\frac{q!}{(q-s')!}\frac{(j-q+p-1)!}{(j-q+s'-1)!}\right] \\
& +q(j-q+1)p!\left[\sum_{s'':=s'-1=0}^{q-1}\binom{j-q+s''+1}{s''}\binom{2j+p-q+1}{p-s''}\frac{(q-1)!}{(q-s''-1)!}\frac{(j-q+p)!}{(j-q+s'')!}\right] \\
= \;& (j-q+p)(2j-q+p+1)M(p,q)+q(j-q+1)M(p,q-1).
\end{aligned} \tag{IV.76}$$

et on vérifie

$$\begin{aligned}
& (j-q+p)(2j-q+p+1)j(j-q+1)_{p-1} \\
& \qquad \sum_{\lambda=0}^{p}\left(\binom{p-1}{\lambda}-\binom{p-1}{\lambda-1}\right)\left({}_{(p-\lambda)}(2j+p-q)\right)\left({}_{\lambda}q\right) \\
& +q(j-q+1)j(j-q+2)_{p-1} \\
& \qquad \sum_{\lambda'=0}^{p}\left(\binom{p-1}{\lambda'}-\binom{p-1}{\lambda'-1}\right)\left({}_{(p-\lambda')}(2j+p-q+1)\right)\left({}_{\lambda'}(q-1)\right) \\
= \;& \qquad j(j-q+1)_p\sum_{\lambda=0}^{p}\left(\binom{p-1}{\lambda}-\binom{p-1}{\lambda-1}\right)\left({}_{(p+1-\lambda)}(2j+p-q+1)\right)\left({}_{\lambda}q\right) \\
& +j(j-q+1)_p\sum_{\lambda'=0}^{p}\left(\binom{p-1}{\lambda'}-\binom{p-1}{\lambda'-1}\right)\left({}_{(p-\lambda')}(2j+p-q+1)\right)\left({}_{(\lambda'+1)}q\right) \\
= \;& j(j-q+1)_p\sum_{\lambda=0}^{p}\left[\left(\binom{p-1}{\lambda}-\binom{p-1}{\lambda-1}\right)\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad + \left(\binom{p-1}{\lambda-1} - \binom{p-1}{\lambda-2} \right) \Bigg] ({}_{(p+1-\lambda)}(2j+p-q+1))({}_{\lambda}q) \\
= \;& j(j-q+1)_p \sum_{\lambda=0}^{p} \left(\binom{p}{\lambda} - \binom{p}{\lambda-1} \right) ({}_{(p+1-\lambda)}(2j+p-q+1))({}_{\lambda}q).
\end{aligned}
$$

Le lemme est donc établi. $\square$

Suite de la Démonstration de la Proposition 57 Maintenant on utilise

$$
\begin{aligned}
& \sum_{q=0}^{j+p-1} \binom{k+1}{2j+p-q} \frac{(j-1)!}{q!(j-q+p-1)!} j(j-q+1)_{p-1}({}_{(p-\lambda)}(2j+p-q))({}_{\lambda}q) \\
= \;& \sum_{q=0}^{j+p-1} \frac{({}_{(2j+p-q)}(k+1))}{(2j+p-q)!} \frac{(j-1)!}{q!(j-q+p-1)!} j(j-q+1)_{p-1}({}_{(p-\lambda)}(2j+p-q))({}_{\lambda}q) \\
= \;& \sum_{q=0}^{j+p-1} \frac{({}_{(2j+p-q)}(k+1))}{(2j+\lambda-q)!} \frac{j!}{(q-\lambda)!(j-q)!} \\
= \;& \sum_{q=0}^{j+p-1} \frac{({}_{(p-\lambda)}(k+1))({}_{(2j+\lambda-q)}(k+1-p+\lambda))}{(2j+\lambda-q)!} \frac{({}_{\lambda}j)(j-\lambda)!}{(q-\lambda)!(j-q)!} \\
= \;& ({}_{(p-\lambda)}(k+1))({}_{\lambda}j) \sum_{q=\lambda}^{2j+\lambda} \binom{k+1-p+\lambda}{2j+\lambda-q} \binom{j-\lambda}{q-\lambda} \\
= \;& ({}_{(p-\lambda)}(k+1))({}_{\lambda}j) \binom{k+j+1-p}{2j}, \qquad \text{(IV.77)}
\end{aligned}
$$

pour obtenir

$$
\begin{aligned}
N_{j,p} = \;& \sum_{q=0}^{j+p-1} \binom{k+1}{2j+p-q} \frac{(j-1)!}{q!(j-q+p-1)!} \\
& \qquad \left[\sum_{s'=0}^{q} \binom{j-q+s'}{s'} \binom{2j+p-q}{p-s'} \frac{q!}{(q-s')!} \frac{(j-q+p-1)!}{(j-q+s'-1)!} \right] \\
= \;& \sum_{q=0}^{j+p-1} \binom{k+1}{2j+p-q} \frac{(j-1)!}{q!(j-q+p-1)!} \\
& \qquad j(j-q+1)_{p-1} \frac{1}{p!} \sum_{\lambda=0}^{p} \left(\binom{p-1}{\lambda} - \binom{p-1}{\lambda-1} \right) ({}_{(p-\lambda)}(2j+p-q))({}_{\lambda}q) \\
= \;& \frac{1}{p!} \sum_{\lambda=0}^{p} \left(\binom{p-1}{\lambda} - \binom{p-1}{\lambda-1} \right) \\
& \quad \sum_{q=0}^{j+p-1} \binom{k+1}{2j+p-q} \frac{(j-1)!}{q!(j-q+p-1)!} j(j-q+1)_{p-1}({}_{(p-\lambda)}(2j+p-q))({}_{\lambda}q)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{k+j-p+1}{2j}\frac{1}{p!}\sum_{\lambda=0}^{p}\left(\binom{p-1}{\lambda}-\binom{p-1}{\lambda-1}\right)({}_{(p-\lambda)}(k+1))({}_{\lambda}j)\\
&= \binom{k+j-p+1}{2j}\frac{1}{p!}\left[\sum_{\lambda=0}^{p}\binom{p-1}{\lambda}({}_{(p-\lambda)}(k+1))({}_{\lambda}j)-\sum_{\lambda=0}^{p}\binom{p-1}{\lambda-1}({}_{(p-\lambda)}(k+1))({}_{\lambda}j)\right]\\
&= \binom{k+j-p+1}{2j}\frac{(p-1)!}{p!}\left[\sum_{\lambda=0}\frac{({}_{(p-\lambda)}(k+1))}{(p-1-\lambda)!}\frac{({}_{\lambda}j)}{\lambda!}-\sum_{\lambda=1}^{p}\frac{({}_{(p-\lambda)}(k+1))!}{(p-1-\lambda)!}\frac{({}_{\lambda}j)!}{(\lambda-1)!}\right]\\
&= \binom{k+j-p+1}{2j}\frac{(p-1)!}{p!}\left[(k+1)\sum_{\lambda=0}\binom{k}{p-1-\lambda}\binom{j}{\lambda}-j\sum_{\lambda=1}^{p}\binom{k+1}{p-1-\lambda}\binom{j-1}{\lambda-1}\right]\\
&= \binom{k+j-p+1}{2j}\frac{(p-1)!}{p!}\left[(k+1)\binom{k+j}{p-1}-j\binom{k+j}{p-1}\right]\\
&= \binom{k+j-p+1}{2j}\frac{k+1-j}{p!}({}_{(p-1)}(k+j))=\frac{({}_{(2j)}(k+j-p+1))}{(2j)!}\frac{k+1-j}{p!}({}_{(p-1)}(k+j))\\
&= \frac{({}_{(2j+p-1)}(k+j))}{(2j)!}\frac{k+1-j}{p!}=\frac{({}_{(2j)}(k+j))}{(2j)!}\frac{({}_{(p-1)}(k-j))(k+1-j)}{p!}\\
&= \binom{k+j}{2j}\binom{k+1-j}{p}.
\end{aligned} \tag{IV.78}$$

Ceci achève la démonstration. □

Lemme 59 *Il existe une décomposition de* $\binom{2y-v-q}{p}$ *comme une somme des multiples de* $\left(y-q+\frac{1}{2}\right)_t$, $t=0,1,\cdots,q$, *donnée par la formule :*

$$\begin{aligned}
\binom{2y-v-q}{q} &= \sum_{l=0}^{[\frac{q}{2}]}(-1)^l\binom{y-\frac{1}{2}-q+l}{l}\sum_{i=0}^{q-2l}(-1)^i 2^{q-2l-i}\binom{y-l-i-\frac{1}{2}}{q-i-2l}\binom{v}{i}\\
&= \sum_{l,i}(-1)^{l+i}2^{q-2l-i}\binom{y-l-i-\frac{1}{2}}{q-i-l}\binom{q-i-l}{l}\binom{v}{i}.
\end{aligned} \tag{IV.79}$$

Démonstration. On traite de façon légèrement distincte le cas $q=2s$ et le cas $q=2s+1$, $s\in\mathbb{N}$

[a] Si $q=2s$ alors

$$\binom{2Y-2s}{2s} = \frac{{}_{(2s)}(2Y-2s)}{(2s)!}=\frac{\prod_{u=0}^{s-1}(2Y-2s-1-2u)}{(2s)!}2^s s!\binom{Y-s}{s},$$

et on procède à deux réécritures :

$$\frac{\prod_{u=0}^{s-1}(2Y-2s-1-2u)}{(2s)!} = \frac{2^s({}_s(Y-s-\frac{1}{2}))}{(2s)!},$$

$$\begin{aligned}\binom{Y-s}{s} &= (-1)^s\binom{2s-Y-1}{s}\\ &= (-1)^s\sum_j\binom{s-Y-\frac12}{s-j}\binom{s-\frac12}{j}\\ &= (-1)^s\sum_j(-1)^{s-j}\binom{Y-j-\frac12}{s-j}\binom{s-\frac12}{j}.\end{aligned}$$

La quantité à décomposer devient :

$$\begin{aligned}\binom{2Y-2s}{2s} &= \frac{2^s({}_s(Y-s-\frac12)}{(2s)!}2^s s!(-1)^s\sum_{j=0}^{s}(-1)^{s-j}\binom{Y-j-\frac12}{s-j}\binom{s-\frac12}{j}\\ &= \sum_{j=0}^{s}(-1)^j\frac{({}_s(Y-s-\frac12)({}_{(s-j)}(Y-j-\frac12)}{(s-j)!}\frac{2^{2s}s!}{(2s)!}\frac{({}_j(s-\frac12))}{j!}.\end{aligned}$$

Et à la fin on utilise

$$\begin{aligned}\frac{({}_j(s-\frac12))}{j!} &= \frac{(2s-2j+1)(2s-2j+3)\cdots(2s-1)}{2^j j!}\\ &= \frac{(2s-2j+1)(2s-2j+2)\cdots(2s)}{(2s-2j+2)(2s-2j+4)\cdots(2s)2^j j!}\\ &= \frac{(2s)!}{(2s-2j)!(s-j+1)(s-j+2)\cdots s2^{2j}j!}=\frac{(2s)!(s-j)!}{(2s-2j)!s!j!2^{2j}},\end{aligned}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}\binom{2Y-2s}{2s} &= \sum_{j=0}^{s}(-1)^j\binom{Y-j-\frac12}{2s-j}\frac{(2s-j)!}{(s-j)!}\frac{2^{2s}s!}{(2s)!}\frac{(2s)!(s-j)!}{(2s-2j)!s!j!2^{2j}}\\ &= \sum_{j=0}^{s}(-1)^j 2^{q-2j}\binom{Y-j-\frac12}{q-j}\binom{q-j}{j}.\end{aligned}$$

[b] De même, si $q=2s+1$ alors

$$\binom{2Y-2s-1}{2s+1} = \frac{{}_{(2s+1)}(2Y-2s-1)}{(2s+1)!}=\frac{\prod_{u=0}^{s}(2Y-2s-1-2u)}{(2s+1)!}2^s s!\binom{Y-s-1}{s}.$$

Nous avons

$$\frac{\prod_{u=0}^{s}(2Y-2s-1-2u)}{(2s+1)!}=\frac{2^{s+1}({}_{(s+1)}(Y-s-\frac12))}{(2s+1)!},$$

et

$$\begin{aligned}
\binom{Y-s-1}{s} &= (-1)^s\binom{2s-Y}{s} \\
&= (-1)^s\sum_{j=0}^{s}\binom{s-Y-\frac{1}{2}}{s-j}\binom{s+\frac{1}{2}}{j} \\
&= (-1)^s\sum_{j=0}^{s}(-1)^{s-j}\binom{Y-j-\frac{1}{2}}{s-j}\binom{s+\frac{1}{2}}{j}.
\end{aligned}$$

La quantité à décomposer devient

$$\begin{aligned}
\binom{2Y-2s-1}{2s+1} &= \frac{2^{s+1}({}_{(s+1)}(Y-s-\frac{1}{2}))}{(2s+1)!}2^s s!(-1)^s\sum_{j=0}^{s}(-1)^{s-j}\binom{Y-j-\frac{1}{2}}{s-j}\binom{s+\frac{1}{2}}{j} \\
&= \sum_{j}(-1)^j\frac{({}_{(s+1)}(Y-s-\frac{1}{2}))({}_{(s-j)}(Y-j-\frac{1}{2}))}{(s-j)!}\frac{2^{2s+1}s!}{(2s+1)!}\frac{({}_j(s-\frac{1}{2}))}{j!}.
\end{aligned}$$

Et comme ci-dessus, on a l'égalité

$$\begin{aligned}
\frac{({}_j(s+\frac{1}{2}))}{j!} &= \frac{(2s-2j+3)(2s-2j+5)\cdots(2s+1)}{2^j j!} = \frac{(2s-2j+2)(2s-2j+3)\cdots(2s+1)}{(2s-2j+2)(2s-2j+4)\cdots(2s)2^j j!} \\
&= \frac{(2s+1)!}{(2s-2j+1)!(s-j+1)(s-j+2)\cdots s2^{2j}j!} = \frac{(2s+1)!(s-j)!}{(2s-2j+1)!s!j!2^{2j}}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
\binom{2Y-2s-1}{2s+1} &= \sum_{j=0}^{s}(-1)^j\binom{Y-j-\frac{1}{2}}{2s+1-j}\frac{(2s+1-j)!}{(s-j)!}\frac{2^{2s+1}s!}{(2s+1)!}\frac{(2s+1)!(s-j)!}{(2s+1-2j)!s!j!2^{2j}} \\
&= \sum_{j=0}^{s}(-1)^j 2^{q-2j}\binom{Y-j-\frac{1}{2}}{q-j}\binom{q-j}{j}.
\end{aligned}$$

[c] En général, nous avons

$$\begin{aligned}
\binom{2y-v-q}{q} &= (-1)^q\binom{2q-2y-1+v}{q} \\
&= (-1)^q\sum_{i=0}^{q}\binom{2q-2y-1}{q-i}\binom{v}{i} \\
&= (-1)^q\sum_{i=0}^{q}\binom{2(q-i)-2(y-i)-1}{q-i}\binom{v}{i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\binom{2(y-i)-(q-i)}{q-i}\binom{v}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sum_{l=0}^{\left[\frac{q-i}{2}\right]}(-1)^l 2^{q-i-2l}\binom{y-i-l-\frac{1}{2}}{q-i-l}\binom{q-i-l}{l}\binom{v}{i}.
\end{aligned}
$$

Le lemme est établi.□

Lemme 60 *On introduit les notations suivantes :*

$$
\begin{aligned}
G(k,g) &= \frac{2^{n-r-g}}{g!}\prod_{\beta=0}^{g-1}(2z+2k+1-2\beta)(_{(n-r)}(2z-n+r)), \\
R(k,g) &= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-r}{2}\right]}(-1)^j\prod_{t=j}^{n-r-1}(2z-2t-1)\frac{2^j}{j!} \\
&\quad \left[\sum_{p=0}^{n-r-2j}\frac{(2j+p)!}{p!}\binom{k+j}{2j+p-(n-r)+g}2^p\right. \\
&\quad \left.\left(\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p}+2\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p-1}\right)\right].
\end{aligned}
$$

On a

$$
G(k,g)=R(k,g). \tag{IV.80}
$$

Démonstration du Lemme. On procède par une récurrence sur g.

1. pour $g=0$, on doit prouver (compte tenu du fait qu'il faut avoir $n-r-2j-p=0$ pour obtenir des termes non nuls) que :

$$
\begin{aligned}
G(k,0) &= (n-r)!2^{n-r}\binom{2z-n+r}{n-r}, \\
R(k,0) &= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-r}{2}\right]}(-1)^j\prod_{t=j}^{n-r-1}(2z-2t-1)\frac{2^j}{j!}\frac{(n-r)!}{(n-r-2j)!}2^{(n-r)-2j} \\
&= (n-r)!2^{n-r}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-r}{2}\right]}(-1)^j 2^{(n-r)-2j}\binom{z-j-\frac{1}{2}}{n-r-j}\frac{(n-r-j)!}{j!(n-r-2j)!},
\end{aligned}
\tag{IV.81}
$$

l'égalité de ces deux quantités résulte du Lemme 59 ci-dessus (en remplaçant Y par z, q par $n-r$).

2. On démontre maintenant par récurrence sur g que

$$G\left(-z-\frac{1}{2},g\right)=R\left(-z-\frac{1}{2},g\right). \tag{IV.82}$$

pour tout $g \geq 1$.
En effet, d'une part nous avons bien évidemment

$$G\left(-z-\frac{1}{2},g\right)=\frac{2^{n-r-g}}{g!}\prod_{\beta=0}^{g-1}(-2\beta)({}_{(n-r)}(2z-n+r))=0,$$

et, de l'autre,

$$\begin{aligned}
R\left(-z-\frac{1}{2},g\right) &= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-r}{2}\right]}(-1)^j\prod_{t=j}^{n-r-1}(2z-2t-1)\frac{2^j}{j!}\\
&\quad\left[\sum_{p=0}^{n-r-2j}\frac{(2j+p)!}{p!}\binom{-z-\frac{1}{2}+j}{2j+p-(n-r)+g}2^p\right.\\
&\quad\left.\left(\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p}+2\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p-1}\right)\right]\\
&= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-r}{2}\right]}(-1)^j(-1)^{n-r-j}2^{n-r-j}\prod_{\delta=0}^{n-r-j-1}((n-r)-\frac{1}{2}-z-\delta)\frac{2^j}{j!}\\
&\quad\left[\sum_{p=0}^{n-r-2j}\frac{(2j+p)!}{p!}\binom{-z-\frac{1}{2}+j}{2j+p-(n-r)+g}2^p\right.\\
&\quad\left.\left(\binom{2z-n+r+1}{n-r-2j-p}+\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p-1}\right)\right]\\
&= (-1)^{n-r}2^{n-r}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-r}{2}\right]}\sum_{p=0}^{n-r-2j}\binom{(n-r)-\frac{1}{2}-z}{j+p+g}\frac{(j+p+g)!}{(2j+p-(n-r)+g)!}\frac{1}{j!}\\
&\quad\left[\frac{(2j+p)!}{p!}2^p\left(\binom{2z-n+r+1}{n-r-2j-p}+\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p-1}\right)\right]\\
&= 0.
\end{aligned}$$

3. Les relations de récurrence à utiliser sont :

$$\begin{aligned}
&G(k+1,g)-G(k,g)\\
&= \frac{2^{n-r-g}}{g!}\left[\prod_{\beta=0}^{g-1}(2z+2k+3-2\beta)-\prod_{\beta=0}^{g-1}(2z+2k+1-2\beta)\right]({}_{(n-r)}(2z-n+r))
\end{aligned}$$

$$= \frac{2^{n-r-g}}{g!}2g\prod_{\beta=0}^{g-2}(2z+2k+2+1-2\beta)({}_{(n-r)}(2z-n+r)) = G(k,g-1), \qquad \text{(IV.83)}$$

$$\begin{aligned}
&R(k+1,g)-R(k,g)\\
=\ & \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-r}{2}\right]}(-1)^j\prod_{t=j}^{n-r-1}(2z-2t-1)\frac{2^j}{j!}\Bigg[\sum_{p=0}^{n-r-2j}\frac{(2j+p)!}{p!}\\
&\quad\left[\binom{k+1+j}{2j+p-(n-r)+g}-\binom{k+j}{2j+p-(n-r)+g}\right]2^p\\
&\quad\quad\left(\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p}+2\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p-1}\right)\Bigg]\\
=\ & \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-r}{2}\right]}(-1)^j\prod_{t=j}^{n-r-1}(2z-2t-1)\frac{2^j}{j!}\\
&\quad\Bigg[\sum_{p=0}^{n-r-2j}\frac{(2j+p)!}{p!}\binom{k+j}{2j+p-(n-r)+g-1}2^p\\
&\quad\quad\left(\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p}+2\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p-1}\right)\Bigg]\\
=\ & R(k,g-1). \qquad \text{(IV.84)}
\end{aligned}$$

Donc si (IV.80) est vraie pour tout couple (k,g) avec $g<g_0$, on obtient

$$\begin{aligned}
G\left(-z-\frac{1}{2}+m,g_0\right) &= G\left(-z-\frac{1}{2},g_0\right)+\sum_{k'=0}^{m-1}G(-z-\frac{1}{2}+k',g_0-1)\\
&= R\left(-z-\frac{1}{2},g_0\right)+\sum_{k'=0}^{m-1}R(-z-\frac{1}{2}+k',g_0-1)=R(k,g_0),
\end{aligned}$$

pour tout entier positif m en combinant (IV.82) et (IV.83). La relation (IV.80) est donc valable pour une infinité de valeurs de k. Or g,z,n et r fixés, $G(k,g)$ et $R(k,g)$ sont tous les deux des polynômes en k, on conclut donc que (IV.80) a lieu pour tout couple (k,g). □

IV.3.b Démonstration de la Proposition 52

On dégage d'abord le facteur $2^k({}_k y)({}_{(n-2k)}(2y-2k))$ (resp. $2^k({}_k z)({}_{(n-2k)}(2z-2k))$) dans la quantité $\binom{y}{r}\binom{y-\frac{2k+1}{2}}{r}\binom{2y-r}{n-r}$ $\left(\text{resp. } \binom{z}{n-r}\binom{z+\frac{k+1}{2}}{n-r}\binom{2z-n+r}{r}\right)$. Pour les facteurs qui contiennent y :

Lemme 61 *Nous avons*

(a) pour $i\le k$,

$$(2y-2i-1)\cdots(2y-2k+1) = \sum_{t=0}^{k-i} 2^t \binom{k-i}{t} t!(2y-2i-3-2t)\cdots(2y-2k-1), \qquad \text{(IV.85)}$$

(b) pour tout k,

$$I(k) := \prod_{s=1}^{k}[(2y-2s+1)-2r] = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i 2^i \binom{k}{i}\binom{r}{i} i! \prod_{s=i+1}^{k}(2y-2s+1). \quad \text{(IV.86)}$$

(c) pour $0 \le r \le n, 2k \le n$,

$$\begin{aligned} & 2^{2r}\binom{y}{r}\binom{y-\frac{2k+1}{2}}{r}\binom{2y-r}{n-r} r!(n-r)! \\ = \; & \left\{2^k ({}_k y)({}_{(n-2k)}(2y-2k))\right\} \qquad \text{(IV.87)} \\ & \left\{\binom{2y-r}{r}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i 2^i \binom{k}{i}\binom{r}{i} i! \prod_{s=i+1}^{k}(2y-2s+1)\right\}. \end{aligned}$$

Démonstration. 1. (IV.85) se démontre comme suit,

$$\begin{aligned} & (2y-2i-1)\cdots(2y-2k+1) \\ = \; & [(2y-2k-1)+2(k-i)](2y-2i-3)\cdots(2y-2k+1) \\ = \; & (2y-2i-3)\cdots(2y-2k+1)(2y-2k-1)+2(k-i)(2y-2i-3)\cdots(2y-2k+1) \\ = \; & (2y-2i-3)\cdots(2y-2k+1)(2y-2k-1) \\ & \quad +2(k-i)[(2y-2k-1)+2(k-i-1)](2y-2i-5)\cdots(2y-2k+1) \\ = \; & (2y-2i-3)\cdots(2y-2k+1)(2y-2k-1) \\ & \quad +2(k-i)(2y-2i-5)\cdots(2y-2k+1)(2y-2k-1) \\ & \qquad +2^2(k-i)(k-i-1)(2y-2i-5)\cdots(2y-2k+1) \\ = \; & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ = \; & \sum_{t=0}^{k-i} 2^t\binom{k-i}{t} t!(2y-2i-3-2t)\cdots(2y-2k-1). \end{aligned}$$

2. Cette égalité est obtenue par récurrence sur k. Elle est valable pour $k=0$. Si elle est valable pour $0, 1, \ldots, k$, alors

$$\begin{aligned} I(k+1) \; = \; & I(k)[(2y-2k-1)-2r] \\ = \; & \sum_{i=0}^{k}(-1)^i 2^i\binom{k}{i}\binom{r}{i} i!\,[(2y-2i-1)\cdots(2y-2k+1)(2y-2k-1)] \\ & \quad -\sum_{i=0}^{k}(-1)^i 2^{i+1}\binom{k}{i}\binom{r}{i} ri!(2y-2i-1)\cdots(2y-2k+1). \end{aligned}$$

on obtient, en utilisant (IV.85),

$$\begin{aligned} I(k+1) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i 2^i \binom{k}{i}\binom{r}{i} i!\,[(2y-2i-1)\cdots(2y-2k+1)(2y-2k-1)] \\ &\quad -\sum_{i=0}^{k}(-1)^i 2^{i+1}\binom{k}{i}\binom{r}{i} ri!\left[\sum_{t=0}^{s-1} 2^t\binom{k-i}{t} t!(2y-2i-3-2t)\cdots(2y-2k-1)\right]. \end{aligned}$$

On regroupe les termes avec les mêmes facteurs en y, cela devient

$$\begin{aligned} I(k+1) &= \sum_{s=0}^{k+1}\Bigg((-1)^s 2^s\binom{k}{s}\binom{r}{s} s! \\ &\quad -\sum_{t=0}^{s-1} 2^t(-1)^{s-t-1}2^{s-t}\binom{k}{s-t-1}\binom{r}{s-t-1} r\binom{k-s+t+1}{t} t!(s-t-1)!\Bigg) \\ &\qquad (2y-2s-1)\cdots(2y-2k+1)(2y-2k-1). \end{aligned}$$

Mais, d'autre part, la quantité entre les parenthèses se simplifie comme suit :

$$\begin{aligned} & (-1)^s 2^s\binom{k}{s}\binom{r}{s} s! \\ & \quad -\sum_{t=0}^{s-1} 2^t(-1)^{s-t-1}2^{s-t}\binom{k}{s-t-1}\binom{r}{s-t-1} r\binom{k-s+t+1}{t} t!(s-t-1)! \\ = \; & (-1)^s 2^s\left(\binom{k}{s}\binom{r}{s} s! + \sum_{t=0}^{s-1}\binom{k}{s-1}(s-1)!(-1)^t\binom{r}{s-t-1} r\right) \\ = \; & (-1)^s 2^s\left(\binom{k}{s}\binom{r}{s} s! + \binom{k}{s-1}(s-1)!\binom{r-1}{s-1} r\right) \\ = \; & (-1)^s 2^s\left(\binom{k}{s}\binom{r}{s} s! + \binom{k}{s-1} s!\binom{r}{s}\right) \\ = \; & (-1)^s 2^s\binom{k+1}{s}\binom{r}{s} s!, \end{aligned}$$

ce qui réduit l'expression à

$$I(k+1) = \sum_{s=0}^{k+1}(-1)^s 2^s\binom{k+1}{s}\binom{r}{s} s!(2y-2s-1)\cdots(2y-2k+1)(2y-2k-1).$$

Et achève la démonstration de l'identité énoncée.

3. Le côté gauche s'écrit sous la forme suivante

$$
\begin{aligned}
& 2^{2r}\binom{y}{r}\binom{y-\frac{2k+1}{2}}{r}\binom{2y-r}{n-r}r!(n-r)! \\
= \ & \frac{1}{r!}\prod_{\alpha=0}^{r-1}(2y-2\alpha)\prod_{\beta=0}^{r-1}(2y-2k-1-2\beta)(_{(n-r)}(2y-r)) \\
= \ & \frac{1}{r!}\prod_{\alpha=0}^{r-1}(2y-2\alpha)\prod_{\beta=0}^{r-1}(2y-2k-1-2\beta)(_{(n-2k)}(2y-2k))(_{(2k-2r)}(2y-2r))(_{r}(2y-r)) \\
= \ & \frac{1}{r!}\prod_{\alpha=0}^{r-1}(2y-2\alpha)\prod_{\beta=0}^{r-1}(2y-2k-1-2\beta)(_{(n-2k)}(2y-2k)) \\
& \prod_{\alpha=r}^{k-1}(2y-2\alpha)\prod_{t=0}^{k-r-1}(2y-2r-1-2t)(_{r}(2y-r)).
\end{aligned}
$$

Son quotient par $2^k(_{k}y)(_{(n-2k)}(2y-2k))\binom{2y-r}{r} = \frac{1}{r!}\prod_{\alpha=0}^{k-1}(2y-2\alpha)(_{(n-2k)}(2y-2k))(_{r}(2y-r))$ n'est autre que $\prod_{s=1}^{k}[(2y-2s+1)-2r]$. Il nous suffit d'utiliser 2. pour conclure. □

Nous avons aussi, pour les facteurs qui contiennent z :

Lemme 62 *Pour $0 \le r \le n$,*

$$
\begin{aligned}
& 2^{2(n-r)}\binom{z}{n-r}\binom{z+\frac{k+1}{2}}{n-r}\binom{2z-n+r}{r}r!(n-r)! \\
= \ & \left\{2^k(_{k}z)(_{(n-2k)}(2z-2k))\right\} \qquad \text{(IV.88)} \\
& \left\{\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\prod_{t=j}^{k-1}(2z-2t-1)\frac{(2j)!2^j}{j!}\binom{k+j}{2j}\left[\sum_{p=0}^{n-r-2j}\binom{k+1-j}{p}2^p\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Démonstration. L'expression du quotient de la quantité à gauche par la première quantité en accolade à droite dépendant de $(k, n-r)$, il nous faut donc distinguer plusieurs cas :

Cas 1. $n-r=0$, le quotient vaut

$$\frac{(_{n}(2z))}{2^k(_{k}z)(_{(n-2k)}(2z-2k))} = \prod_{t=0}^{k-1}(2z-2t-1),$$

qui est bien évidemment le seul terme non nul dans la deuxième quantité en accolade au côté droit de (IV.88)($j=p=0$) ;

Cas 2. $n-r=1$, le quotient vaut

$$\frac{2z(2z+2k+1)(_{(n-1)}(2z-1))}{2^k(_{k}z)(_{(n-2k)}(2z-2k))} = (2z+2k+1)\prod_{t=0}^{k-1}(2z-2t-1)$$

$$= \prod_{t=0}^{k-1}(2z-2t-1)\left[\binom{2z-1}{1-0}+2^1\binom{k+1}{1}\right],$$

nous obtenons ainsi de nouveau la deuxième quantité en accolade au côté droit de (IV.88)(les seuls termes non nuls sont $j=0$, $p=0,1$) ;

Cas 3. $2 \leq n-r$, $2k < n-r$, le quotient dans ce cas est,

$$U_3(z) = \frac{1}{(n-r)!}\prod_{\alpha=0}^{k-1}(2z-2\alpha-1)\prod_{\beta=0}^{k}(2z+2\beta+1)\prod_{\gamma=0}^{k-1}(2z-2n+2r+2\gamma+2)\prod_{\delta=0}^{n-r-2k-2}(2z-n+r-\delta)$$

Nous voudrions démontrer qu'il est égal à

$$V(z) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\prod_{t=j}^{k-1}(2z-2t-1)\frac{(2j)!2^j}{j!}\binom{k+j}{2j}\left[\sum_{p=0}^{n-r-2j}\binom{k+1-j}{p}2^p\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p}\right],$$

i.e., le réécrire comme une combinaison linéaire des $\prod_{\alpha=A}^{k-1}(2z-2\alpha-1)\prod_{\beta=0}^{B}(2z-n+r-\delta)$ où nous nous permettons de manipuler les bords A et B des indices. Divisons les deux polynômes U_3 et V par la même quantité $\dfrac{1}{(n-r)!}\displaystyle\prod_{\alpha=0}^{k-1}(2z-2\alpha-1)$ et utilisons la relation

$$\binom{-\frac{1}{2}}{j} = (-1)^j\frac{1\cdot 3\cdots(2j-1)}{j!} = (-1)^j\frac{(2j)!}{2^j j!j!}$$

pour écrire les deux quotients sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_3(z) &= \prod_{\beta=0}^{k}(2z+2\beta+1)\prod_{\gamma=0}^{k-1}(2z-2n+2r+2\gamma+2)\prod_{\delta=0}^{n-r-2k-2}(2z-n+r-\delta),\\
\tilde{V}_3(z) &= \sum_{j=0}^{k}\frac{j!2^{2j}\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{k+j}{2j}}{\prod_{t=0}^{j-1}(2z-2t-1)}\sum_{p=0}\binom{k+1-j}{p}2^p\left({}_{(2j+p)}(n-r)\right)\\
&\qquad\qquad\prod_{\delta=0}^{n-r-2j-p-1}(2z-n+r-\delta).
\end{aligned}$$

Nous voulons démontrer $\tilde{U}_3(z) = \tilde{V}_3(z)$. Cette identité est obtenue grâce à l'identité (IV.56) : en fait, comme

$$\prod_{\beta=0}^{k}(2z+2\beta+1)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{k+1}\left({}_{(k+1)}\left(z-n+r+k+\frac{1}{2}+(n-r)\right)\right)\\
&= 2^{k+1}(k+1)!\binom{z-n+r+k+\frac{1}{2}+(n-r)}{k+1}\\
&= 2^{k+1}(k+1)!\sum_{m=0}^{k+1}\binom{n-r}{m}\binom{z-n+r+k+\frac{1}{2}}{k-m+1}\\
&= 2^{k+1}\sum_{m=0}^{k+1}\binom{k+1}{m}({}_m(n-r))\prod_{v=0}^{k-m}(z-n+r+\frac{1}{2}+m+v)\\
&= \sum_{m=0}^{k+1}\binom{k+1}{m}2^m({}_m(n-r))\prod_{v=0}^{k-m}(2z-2n+2r+2m+2v+1), \qquad \text{(IV.89)}
\end{aligned}
$$

nous avons,

$$
\begin{aligned}
&\prod_{\beta=0}^{k}(2z+2\beta+1)\prod_{\gamma=0}^{k-1}(2z-2n+2r+2\gamma+2)\\
&= \sum_{m=0}^{k+1}\binom{k+1}{m}2^m({}_m(n-r))\prod_{v=0}^{k-m}(2z-2n+2r+2m+2v+1)\prod_{\gamma=0}^{k-1}(2z-2n+2r+2\gamma+2)\\
&= \sum_{m=0}^{k+1}\binom{k+1}{m}2^m({}_m(n-r))\prod_{\gamma=1}^{m-1}(2z-2n+2r+2\gamma)\prod_{w=2m}^{2k+1}(2z-2n+2r+w)\\
&= \sum_{m=0}^{k+1}\binom{k+1}{m}\sum_{j=0}^{k}\frac{\binom{-\frac{1}{2}}{j}2^j j!}{\prod_{t=0}^{j-1}(2z-2t-1)}\sum_{q=0}^{j}\left[\sum_{s=0}\binom{j-s}{q-s}\binom{m}{2j-s}\binom{j-1}{s}\right]\\
&\qquad 2^{m+q}({}_{(m+q)}(n-r-u))\prod_{v=1}^{m-q-1}(2z-2n+2r+2m-v)\prod_{w=2m}^{2k+1}(2z-2n+2r+w)\\
&= \sum_{m=0}^{k+1}\binom{k+1}{m}\sum_{j=0}^{k}\frac{\binom{-\frac{1}{2}}{j}2^j j!}{\prod_{t=0}^{j-1}(2z-2t-1)}\sum_{q=0}^{j}\left[\sum_{s=0}\binom{j-s}{q-s}\binom{m}{2j-s}\binom{j-1}{s}\right]\\
&\qquad 2^{m+q}({}_{(m+q)}(n-r-u))\prod_{w=m+q+1}^{2k+1}(2z-2n+2r+w). \qquad \text{(IV.90)}
\end{aligned}
$$

c'est à dire,

$$
\tilde{U}_3(z) = \prod_{\beta=0}^{k}(2z+2\beta+1)\prod_{\gamma=0}^{k-1}(2z-2n+2r+2\gamma+2)\prod_{\delta=0}^{n-r-2k-2}(2z-n+r-\delta)
$$

$$= \sum_{m=0}^{k+1}\binom{k+1}{m}\sum_{j=0}^{k}\frac{\binom{-\frac{1}{2}}{j}2^j j!}{\prod_{t=0}^{j-1}(2z-2t-1)}\sum_{q=0}^{j}\left[\sum_{s=0}\binom{j-s}{q-s}\binom{m}{2j-s}\binom{j-1}{s}\right]$$
$$2^{m+q}(_{(m+q)}(n-r-u))\prod_{w=m+q+1}^{2k+1}(2z-2n+2r+w)\prod_{\delta=0}^{n-r-2k-2}(2z-n+r-\delta)$$
$$= \sum_{m=0}^{k+1}\binom{k+1}{m}\sum_{j=0}^{k}\frac{\binom{-\frac{1}{2}}{j}2^j j!}{\prod_{t=0}^{j-1}(2z-2t-1)}\sum_{q=0}^{j}\left[\sum_{s=0}^{j}\binom{j-s}{q-s}\binom{m}{2j-s}\binom{j-1}{s}\right]$$
$$2^{m+q}(_{(m+q)}(n-r-u))(_{(n-r-m-q)}(2z-n+r)). \tag{IV.91}$$

Donc le coefficient pour

$$\frac{2^j\binom{-\frac{1}{2}}{j}j!}{\prod_{t=0}^{j-1}(2z-2t-1)}2^{m+q}(_{(m+q)}(n-r-u))(_{(n-r-m-q)}(2z-n+r))$$

(avec j et $m+q=2j+p$ fixés) est

$$\sum_{q=0}^{2j+p}\binom{k+1}{2j+p-q}\left[\sum_{s=0}^{j}\binom{j-s}{q-s}\binom{2j+p-q}{2j-s}\binom{j-1}{s}\right], \tag{IV.92}$$

Donc égal à $N_{j,p}$ défini dans la Proposition 59. On conclut donc que : il est $\binom{k+j}{2j}\binom{k+1-j}{p}$.

Cas 4. $2 \leq n-r$, $k < n-r \leq 2k$, le quotient vaut

$$U_4(z) = \frac{1}{(n-r)!}\prod_{\alpha=0}^{n-r-k-2}(2z-2\alpha-1)\prod_{\beta=0}^{k}(2z+2\beta+1)$$
$$\prod_{\gamma=0}^{n-r-k-1}(2z-2n+2r+2\gamma+2)\prod_{\delta=0}^{2k-n+r-1}(2z-n+r-\delta).$$

Ce terme très semblable à celui du cas précédent, et nous le traitons de même : d'après (IV.89), nous pouvons écrire

$$\prod_{\beta=0}^{k}(2z+2\beta+1)\prod_{\gamma=0}^{n-r-k-1}(2z-2n+2r+2\gamma+2)$$

$$= \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} 2^m ({}_m(n-r)) \prod_{v=0}^{k-m} (2z-2n+2r+2m+2v+1) \prod_{\gamma=0}^{n-r-k-1} (2z-2n+2r+2\gamma+2).$$

Mais

$$\begin{aligned}
&\prod_{\alpha=0}^{n-r-k-2} (2z-2\alpha-1) \prod_{v=0}^{k-m} (2z-2n+2r+2m+2v+1) \\
&\qquad \prod_{\gamma=0}^{n-r-k-1} (2z-2n+2r+2\gamma+2) \prod_{\delta=0}^{2k-n+r-1} (2z-n+r-\delta) \\
&= \prod_{\alpha=0}^{k-1} (2z-2\alpha-1) \prod_{\gamma=0}^{m-2} (2z-2n+2r+2\gamma+2) \prod_{\delta=0}^{(n-r)-2m} (2z-n+r-\delta) \\
&= \prod_{\alpha=0}^{k-1} (2z-2\alpha-1) \prod_{\gamma':=\gamma+1=1}^{m-1} (2z-2n+2r+2\gamma') \prod_{\delta=0}^{(n-r)-2m} (2z-n+r-\delta),
\end{aligned} \tag{IV.93}$$

en utilisant (IV.56), on transforme ainsi le quotient à la forme suivante :

$$\begin{aligned}
U_4(z) &= \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} 2^m ({}_m(n-r)) \prod_{\alpha=0}^{k-1} (2z-2\alpha-1) \\
&\qquad \prod_{\gamma':=\gamma+1=1}^{m-1} (2z-2n+2r+2\gamma') \prod_{\delta=0}^{(n-r)-2m} (2z-n+r-\delta) \\
&= \prod_{\alpha=0}^{k-1} (2z-2\alpha-1) \\
&\qquad \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} 2^m ({}_m(n-r)) \prod_{\gamma':=\gamma+1=1}^{m-1} (2z-2n+2r+2\gamma') \\
&\qquad\qquad \prod_{\delta=0}^{(n-r)-2m} (2z-n+r-\delta) \\
&= \prod_{\alpha=0}^{k-1} (2z-2\alpha-1) \\
&\qquad \sum_{j=0}^{k} \frac{\binom{-\frac{1}{2}}{j} 2^j j!}{\prod_{t=0}^{j-1} (2z-2t-1)} \sum_{q=0}^{j} \left[\sum_{s=0}^{j} \binom{j-s}{q-s} \binom{m}{2j-s} \binom{j-1}{s} \right] \\
&\qquad\qquad 2^{m+q} ({}_{(m+q)}(n-r)) ({}_{(m-q-1)}(2z-2n+2r+2m-1))
\end{aligned}$$

$$\prod_{0}^{(n-r)-2m}(2z-n+r-\delta)$$

$$= \prod_{0}^{k-1}(2z-2\alpha-1)$$

$$\sum_{j=0} \frac{\binom{-\frac{1}{2}}{j}2^j j!}{\prod_{t=0}^{j-1}(2z-2t-1)} \sum_{q=0}^{j}\left[\sum_{s=0}\binom{j-s}{q-s}\binom{m}{2j-s}\binom{j-1}{s}\right]$$

$$2^{m+q}(_{(m+q)}(n-r))(_{((n-r)-m-q)}(2z-n+r))$$

La fin de la démonstration est alors identique au Cas 3.

Cas 5. $2 \leq n-r \leq k$, le quotient s'écrit

$$\begin{aligned} U_5(z) &= \frac{\frac{1}{(n-r)!}\prod_0^{n-r-1}(2z-2\alpha)\prod_0^{n-r-1}(2z+2k+1-2\beta)(_r(2z-n+r))}{2^k(_kz)(_{(n-2k)}(2z-2k))} \\ &= \frac{1}{(n-r)!}\prod_{n-r}^{k-1}(2z-2\alpha-1)\prod_{\beta=0}^{n-r-1}(2z+2k+1-2\beta)(_{(n-r)}(2z-n+r)). \end{aligned}$$

Nous devons démontrer que $U_5(z) = V(z)$, et considérons les quotients des deux côtés de cette égalité par le facteur commum $\prod_{n-r}^{k-1}(2z-2\alpha-1)$. Nous allons donc montrer que les deux quantités qui suivent sont égales :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_5(z) &= \frac{1}{(n-r)!}\prod_{\beta=0}^{n-r-1}(2z+2k+1-2\beta)(_{(n-r)}(2z-n+r)), \\ \tilde{V}_5(z) &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\prod_{t=j}^{n-r-1}(2z-2t-1)\frac{(2j)!2^j}{j!}\binom{k+j}{2j}\left[\sum_{p=0}^{n-r-2j}\binom{k+1-j}{p}2^p\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p}\right] \\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\prod_{t=j}^{n-r-1}(2z-2t-1)\frac{(2j)!2^j}{j!}\binom{k+j}{2j} \\ &\quad \left[\sum_{p=0}^{n-r-2j}\left(\binom{k-j}{p}+\binom{k-j}{p-1}\right)2^p\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p}\right] \\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\prod_{t=j}^{n-r-1}(2z-2t-1)\frac{(2j)!2^j}{j!}\binom{k+j}{2j} \\ &\quad \left[\sum_{p=0}^{n-r-2j}\binom{k-j}{p}2^p\left(\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p}+2\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p-1}\right)\right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \prod_{t=j}^{n-r-1}(2z-2t-1)\frac{2^j}{j!}$$
$$\left[\sum_{p=0}^{n-r-2j} \frac{(2j+p)!}{p!}\binom{k+j}{2j+p}2^p\left(\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p}+2\binom{2z-n+r}{n-r-2j-p-1}\right)\right].$$

Mais cette identité est exactement l'identité $G(k,n-r)=R(k,n-r)$, démontrée dans le Lemme 60.

La proposition est démontrée.□

IV.3.c Les sommes $S_{a,b}^{(n)}$

Pour la quantité :

$$S_{a,b}^{(n)}(X) := \sum_{i=a}^{n-b}(-1)^i\binom{i}{a}\binom{X-n-i}{n-b-i},$$

(avec $a \geq 0$ et $b \leq n$) nous avons les deux relations de récurrence pour les $S_{a,b}^{(n)}$ (avec $a \geq 1$) :

$$S_{a-1,b+1}^{(n)}(X) = -S_{a,b}^{(n)}(X) - 2S_{a,b+1}^{(n)}(X), \tag{IV.94}$$

(parce que

$$\begin{aligned}
& S_{a-1,b+1}^{(n)} + S_{a,b}^{(n)} + 2S_{a,b+1}^{(n)} \\
= & \sum_{i=a-1}^{n-b}(-1)^i\left[\binom{i}{a-1}\binom{X-n-i}{n-b-1-i}\right. \\
& \qquad \left. +\binom{i}{a}\binom{X-n-i}{n-b-i}+2\binom{i}{a}\binom{X-n-i}{n-b-1-i}\right] \\
= & \sum_{i=a-1}^{n-b}(-1)^i\left[\left(\binom{i}{a-1}+\binom{i}{a}\right)\binom{X-n-i}{n-b-1-i}\right. \\
& \qquad \left. +\binom{i}{a}\left(\binom{X-n-i}{n-b-i}+\binom{X-n-i}{n-b-1-i}\right)\right] \\
= & \sum_{i=a-1}^{n-b}(-1)^i\binom{i+1}{a}\binom{X-n-i}{n-b-1-i}+\sum_{i=a-1}^{n-b}(-1)^i\binom{i}{a}\binom{X-n-i+1}{n-b-i} \\
= & \sum_{i=a-1}^{n-b-1}(-1)^i\binom{i+1}{a}\binom{X-n-i}{n-b-1-i}-\sum_{i':=i-1=a-1}^{n-b-1}(-1)^{i'}\binom{i'+1}{a}\binom{X-n-i'}{n-b-1-i'} \\
= & \ 0.)
\end{aligned}$$

et

$$S_{a,b}^{(n)}(X) = \frac{1}{a}\left[(n-a-b+1)S_{a-1,b}^{(n)} - (X-2n+b+1)S_{a-1,b+1}^{(n)}\right] \tag{IV.95}$$

(parce que

$$\begin{aligned}
S_{a,b}^{(n)}(X) &= \sum_{i=a}^{n-b}(-1)^i\binom{i}{a}\binom{X-n-i}{n-b-i} \\
&= \frac{1}{a}\sum_{i=a-1}^{n-b}(i-a+1)(-1)^i\binom{i}{a-1}\binom{X-n-i}{n-b-i} \\
&\quad \Big(\text{on utilise ici } i-a+1 = (n-a-b+1)-(n-b-i)\Big) \\
&= \frac{1}{a}\Bigg[(n-a-b+1)\sum_{i=a-1}^{n-b}(-1)^i\binom{i}{a-1}\binom{X-n-i}{n-b-i} \\
&\qquad - \sum_{i=a-1}^{n-b}(n-b-i)(-1)^i\binom{i}{a-1}\binom{X-n-i}{n-b-i}\Bigg] \\
&= \frac{1}{a}\Bigg[(n-a-b+1)\sum_{i=a-1}^{n-b}(-1)^i\binom{i}{a-1}\binom{X-n-i}{n-b-i} \\
&\qquad -(X-2n+b+1)\sum_{i=a-1}^{n-b-1}(-1)^i\binom{i}{a-1}\binom{X-n-i}{n-b-1-i}\Bigg] \\
&= \frac{1}{a}\left[(n-a-b+1)S_{a-1,b}^{(n)} - (X-2n+b+1)S_{a-1,b+1}^{(n)}\right].)
\end{aligned}$$

Elles impliquent notamment la relation (valable pour $a \geq 1$)

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}2^jS_{a,b+j}^{(n)} = \sum_{j=0}^{k}\left[\binom{k-1}{j}+\binom{k-1}{j-1}\right]2^jS_{a,b+j}^{(n)} \\
=\;& \sum_{j=0}^{k}\binom{k-1}{j}2^jS_{a,b+j}^{(n)} + \sum_{j':=j-1=0}^{k-1}\binom{k-1}{j'}2^{j'+1}S_{a,b+j'+1}^{(n)} \\
=\;& \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}2^j\left(S_{a,b+j}^{(n)}+2S_{a,b+j+1}^{(n)}\right) \\
=\;& \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}2^j\left(\sum_{i=a}^{n-b-j}(-1)^i\binom{i}{a}\left(\binom{X-n-i}{n-b-j-i}+2\binom{X-n-i}{n-b-j-1-i}\right)\right) \\
=\;& \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}2^j\left(\sum_{i=a}^{n-b-j}(-1)^i\binom{i}{a}\left(\binom{X-n-i+1}{n-b-j-i}+\binom{X-n-i}{n-b-j-1-i}\right)\right) \\
=\;& \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}2^j\Bigg(\sum_{i':=i-1=a-1}^{n-b-j-1}(-1)^{i'+1}\binom{i'+1}{a}\binom{X-n-i'}{n-(b+j+1)-i'}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \qquad + \sum_{i=a}^{n-b-j-1} (-1)^i \binom{i}{a} \binom{X-n-i}{n-(b+j+1)-i} \Bigg) \Bigg) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} 2^j \left(\sum_{i=a-1}^{n-b-j-1} (-1)^i \left(-\binom{i+1}{a} + \binom{i}{a} \right) \binom{X-n-i}{n-(b+j+1)-i} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} 2^j \left(- \sum_{i=a-1}^{n-b-j-1} (-1)^i \binom{i}{a-1} \binom{X-n-i}{n-(b+j+1)-i} \right) \\
&= -\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} 2^j S^{(n)}_{a-1,b+1+j}. \qquad \text{(IV.96)}
\end{aligned}
$$

En itérant cette procèdure (et en tenant compte de la restriction $a \geq 1$), nous pouvons éventuellement (si $a \geq k$ et $b + k \geq n$) avoir :

$$
\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 2^j S^{(n)}_{a,b+j} = (-1)^k S^{(n)}_{a-k,b+k}. \qquad \text{(IV.97)}
$$

Nous avons aussi (pour $a \geq 1$) :

$$
\begin{aligned}
S^{(n)}_{a,b}(X) &= -\frac{1}{2}(S^{(n)}_{a,b-1} + S^{(n)}_{a-1,b}) \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}[(n-a-b+2)S^{(n)}_{a-1,b-1} - (X-2n+b)S^{(n)}_{a-1,b}] + S^{(n)}_{a-1,b}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{a}(n-a-b+2)S^{(n)}_{a-1,b-1} + \frac{X-2n+b-a}{2a}S^{(n)}_{a-1,b} \qquad \text{(IV.98)} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{a}(n-a-b+2)S^{(n)}_{a-1,b-1} - \frac{1}{2}\frac{X-2n+b-a}{2a}(S^{(n)}_{a-2,b} + S^{(n)}_{a-1,b-1}) \\
&= -\frac{X-b-3a+4}{4a}S^{(n)}_{a-1,b-1}(X) - \frac{X-2n+b-a}{4a}S^{(n)}_{a-2,b}(X).
\end{aligned}
$$

Proposition 63 *Soit j un entier strictement positif, alors*

$$
(-1)^{j+1} \sum_{s=0}^{j} \frac{(j+s)!}{j!s!} \binom{\frac{X}{2}-j-s}{j-s} S^{(n)}_{j+s-1,j+s+1}(X) = \binom{\frac{X}{2}-n+j}{j} \binom{X-n+1}{n-2j}. \qquad \text{(IV.99)}
$$

Démonstration. Nous démontrons ceci par récurrence sur j. Avec les notations $S^{(n)}_{A,b}$ définies plus haut, le cas $j = 1$ revient à démontrer

$$
\binom{\frac{X}{2}-1}{1} S^{(n)}_{0,2} + 2S^{(n)}_{1,3} = \left(\frac{X}{2} - n + 1\right) \binom{X-n+1}{n-2}.
$$

Pour ceci nous pouvons utiliser les relations de récurrence (IV.94) et (IV.95) pour calculer

$$
\binom{\frac{X}{2}-1}{1} S^{(n)}_{0,2} + 2S^{(n)}_{1,3}
$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{\frac{X}{2}-1}{1} S_{0,2}^{(n)} + 2\frac{1}{2}[-S_{1,2}^{(n)} - S_{0,3}^{(n)}] \\
&= \binom{\frac{X}{2}-1}{1} S_{0,2}^{(n)} - [(n-2)S_{0,2}^{(n)} - (X-2n+3)S_{0,3}^{(n)}] - S_{0,3}^{(n)} \\
&= \left(\frac{X}{2} - n + 1\right) S_{0,2}^{(n)} + (X-2n+2)S_{0,3}^{(n)} \\
&= \left(\frac{X}{2} - n + 1\right) \left[\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i \binom{X-n-i}{n-2-i} + 2\sum_{i=0}^{n-3}(-1)^i \binom{X-n-i}{n-3-i}\right] \\
&= \left(\frac{X}{2} - n + 1\right) \left[\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i \binom{X-n-i+1}{n-2-i} + \sum_{i'=i+1=1}^{n-2}(-1)^{i'+1} \binom{X-n-i'+1}{n-2-i'}\right] \\
&= \left(\frac{X}{2} - n + 1\right) \binom{X-n+1}{n-2}.
\end{aligned}$$

Supposons ensuite l'énoncé valable pour j. Alors pour $j+1$, d'après l'hypothèse de récurrence, nous transformons d'abord le côté droit de (IV.99) en

$$\begin{aligned}
&\binom{\frac{X}{2} - n + j + 1}{j+1} \binom{X-n+1}{n-2(j+1)} \\
&= \frac{1}{j+1}\left(\frac{X}{2} - n + 1\right) \binom{(\frac{X}{2}-1)-(n-2)+j}{j} \binom{2(\frac{X}{2}-1)-(n-2)+1}{n-2-2j} \\
&= \frac{1}{j+1}\left(\frac{X}{2} - n + 1\right) (-1)^j \sum_{s=0}^{j} \frac{(j+s)!}{j!s!} \binom{\frac{X}{2}-1-j-s}{j-s} \\
&\qquad \sum_{p=j+s-1}^{n-3-j-s} (-1)^p \binom{p}{j-1+s} \binom{X-n-p}{n-3-j-s-p} \\
&= \frac{(-1)^j}{j+1}\left(\frac{X}{2} - n + 1\right) \sum_{s=0}^{j} \frac{(j+s)!}{j!s!} \binom{\frac{X}{2}-1-j-s}{j-s} S_{j+s-1,j+s+3}^{(n)}. \qquad \text{(IV.100)}
\end{aligned}$$

Nous allons terminer la preuve en itérant plusieurs fois la relation de récurrence (IV.98). Nous avons

$$\begin{aligned}
&(-1)^{j+1} \sum_{s=0}^{j+1} \frac{(j+s+1)!}{(j+1)!s!} \binom{\frac{X}{2}-j-s-1}{j+1-s} \sum_{p=j+s}^{n-2-j-s} (-1)^p \binom{p}{j+s} \binom{X-n-p}{n-2-j-s-p} \\
= \;&(-1)^{j+1} \sum_{s=0}^{j} \frac{(j+s+1)!}{(j+1)!s!} \binom{\frac{X}{2}-j-s-1}{j+1-s} S_{j+s,j+s+2}^{(n)} + (-1)^{j+1} \frac{(2j+2)!}{(j+1)!(j+1)!} S_{2j+1,2j+3}^{(n)} \\
= \;&(-1)^{j+1} \sum_{s=0}^{j} \frac{(j+s+1)!}{(j+1)!s!} \binom{\frac{X}{2}-j-s-1}{j+1-s} S_{j+s,j+s+2}^{(n)} \\
&+(-1)^{j+1} \frac{(2j+2)!}{(j+1)!(j+1)!} \left[- \frac{X-(2j+3)-3(2j+1)+4}{4(2j+1)} S_{2j,2j+2}^{(n)} \right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \left. - \frac{X-2n+2}{4(2j+1)} S^{(n)}_{2j-1,2j+3} \right] \\
= \ & (-1)^{j+1} \sum_{s=0}^{j-1} \frac{(j+s+1)!}{(j+1)!s!} \binom{\frac{X}{2}-j-s-1}{j+1-s} S^{(n)}_{j+s,j+s+2} \\
& + (-1)^{j+1} \frac{(2j+1)!}{(j+1)!j!} \binom{\frac{X}{2}-2j-1}{1} S^{(n)}_{2j,2j+2} \\
& - (-1)^{j+1} \left(\frac{X}{2}-4j-1\right) \frac{(2j)!}{(j+1)!j!} S^{(n)}_{2j,2j+2} - (-1)^{j+1} \frac{1}{j+1} \left(\frac{X}{2}-n+1\right) \frac{(2j)!}{j!j!} S^{(n)}_{2j-1,2j+3} \\
= \ & (-1)^{j+1} \sum_{s=0}^{j-1} \frac{(j+s+1)!}{(j+1)!s!} \binom{\frac{X}{2}-j-s-1}{j+1-s} S^{(n)}_{j+s,j+s+2} \\
& + (-1)^{j+1} \left[(2j+1)\binom{\frac{X}{2}-2j-1}{1} - \left(\frac{X}{2}-4j-1\right)\right] \frac{(2j)!}{(j+1)!j!} S^{(n)}_{2j,2j+2} \\
& + \frac{(-1)^{j+2}}{j+1} \left(\frac{X}{2}-n+1\right) \frac{(2j)!}{j!j!} S^{(n)}_{2j-1,2j+3} \\
= \ & (-1)^{j+1} \sum_{s=0}^{j-1} \frac{(j+s+1)!}{(j+1)!s!} \binom{\frac{X}{2}-j-s-1}{j+1-s} S^{(n)}_{j+s,j+s+2} \\
& + (-1)^{j+1} \left[(2j)\left(\frac{X}{2}-2j\right)\right] \frac{(2j)!}{(j+1)!j!} \\
& \left[- \frac{X-(2j+2)-3(2j)+4}{4(2j)} S^{(n)}_{2j-1,2j+1} - \frac{X-2n+2}{4(2j)} S^{(n)}_{2j-2,2j+2} \right] \\
& + \frac{(-1)^{j+2}}{j+1} \left(\frac{X}{2}-n+1\right) \frac{(2j)!}{j!j!} S^{(n)}_{2j-1,2j+3} \\
= \ & (-1)^{j+1} \sum_{s=0}^{j-1} \frac{(j+s+1)!}{(j+1)!s!} \binom{\frac{X}{2}-j-s-1}{j+1-s} S^{(n)}_{j+s,j+s+2} \\
& - (-1)^{j+1} \left[(2j)\left(\frac{X}{2}-2j\right)\right] \frac{(2j)!}{(j+1)!j!} \frac{X-(2j+2)-3(2j)+4}{4(2j)} S^{(n)}_{2j-1,2j+1} \\
& + \frac{(-1)^{j+2}}{j+1} \left(\frac{X}{2}-n+1\right) \frac{(2j-1)!}{(j-1)!j!} \binom{\frac{X}{2}-2j}{1} S^{(n)}_{2j-2,2j+2} \\
& + \frac{(-1)^{j+2}}{j+1} \left(\frac{X}{2}-n+1\right) \frac{(2j)!}{j!j!} S^{(n)}_{2j-1,2j+3} \\
= \ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
= \ & (-1)^{j+1} \sum_{s=0}^{u} \frac{(j+s+1)!}{(j+1)!s!} \binom{\frac{X}{2}-j-s-1}{j+1-s} S^{(n)}_{j+s,j+s+2} \\
& + \frac{(-1)^{j+1}}{2} \frac{(j+u)!}{(j+1)!u!} \binom{\frac{X}{2}-1-j-u}{j-u} S^{(n)}_{j+u+1,j+u+3} \\
& + \frac{(-1)^{j+2}}{j+1} \left(\frac{X}{2}-n+1\right) \sum_{s=u+1}^{j} \frac{(j+s)!}{j!s!} \binom{\frac{X}{2}-1-j-s}{j-s} S^{(n)}_{j+s-1,j+s+3}.
\end{aligned}
$$

On réitère cette procédure et on obtient tous les termes à droite dans (IV.100) multipliés par $(-1)^{j+1}$. La proposition est donc démontrée. □

Dans la suite on écrit simplement $S_{a,b}^{(n)}$ pour désigner $S_{a,b}^{(n)}(2y+2z)$.

IV.3.d Démonstration de (IV.46)

Pour obtenir une démonstration de (IV.46), on peut utiliser le Lemme 59 pour réécrire

$$\begin{aligned}
&\left[\binom{v+p-1}{p-1}\binom{2y-p-v}{p}-\binom{v+p-1}{p}\binom{2y-p-v}{p-1}\right]\\
=\;&\sum_{l=0}^{[\frac{p}{2}]}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{i+l}2^{p-2l-i}\binom{y-l-i-\frac{1}{2}}{p-l-i}\binom{p-l-i}{l}\\
&\qquad\left[\binom{v}{i}\binom{v+p-1}{p-1}+\binom{v-1}{i-1}\binom{v+p-1}{p}\right]
\end{aligned}$$

La quantité entre les crochets à droite se simplifie :

$$\begin{aligned}
&\binom{v}{i}\binom{v+p-1}{p-1}+\binom{v-1}{i-1}\binom{v+p-1}{p}\\
=\;&\frac{v!}{i!(v-i)!}\frac{(v+p-1)!}{v!(p-1)!}+\frac{(v-1)!}{(i-1)!(v-i)!}\frac{(v+p-1)!}{(v-1)!p!}\\
=\;&\frac{(v+p-1)!}{i!(v-i)!(p-1)!}+\frac{(v+p-1)!}{(i-1)!(v-i)!p!}\\
=\;&\frac{(v+p-1)!}{(v-i)!(i+p-1)!}\frac{(i+p-1)!}{i!p!}(i+p)\\
=\;&\binom{v+p-1}{i+p-1}\binom{i+p}{p}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc l'égalité suivante,

$$\begin{aligned}
&\left[\binom{v+p-1}{p-1}\binom{2y-p-v}{p}-\binom{v+p-1}{p}\binom{2y-p-v}{p-1}\right]\\
=\;&\sum_{l=0}^{[\frac{p}{2}]}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{i+l}2^{p-2l-i}\binom{y-l-i-\frac{1}{2}}{p-l-i}\binom{p-l-i}{l}\binom{v+p-1}{i+p-1}\binom{i+p}{p}\\
=\;&\sum_{l=0}^{[\frac{p}{2}]}\sum_{w:=i+l=l}^{l+v}(-1)^{w}2^{p-w-l}\binom{y-w-\frac{1}{2}}{p-w}\binom{p-w}{l}\binom{v+p-1}{w-l+p-1}\binom{w-l+p}{p}\\
=\;&\sum_{l=0}^{[\frac{p}{2}]}\sum_{w=l}^{l+v}(-1)^{w}2^{-l}\binom{p-w}{l}\binom{v+p-1}{w-l+p-1}\binom{w-l+p}{p}\frac{(2y-2w-1)\cdots(2y-2p+1)}{(p-w)!},
\end{aligned}$$

et nous pouvons décomposer $D_{p,q}$ comme

$$D_{p,q} = \sum_{i=0}^{p} D_{p,q,w}(2y-2w-1)\cdots(2y-2p+1).$$

où chaque

$$\begin{aligned}
D_{p,q,w} &= (-1)^{p+q}\frac{2^{p+q}(2q)!p!}{q!}\binom{k}{p}\binom{k+q}{2q}\sum_{u=0}^{k+1-q}\binom{k+1-q}{u}2^u \\
&\quad \sum_{v=0}^{n}(-1)^v\sum_{l=0}^{[\frac{p}{2}]}\frac{(-1)^w 2^{-l}}{(p-w-l)!l!}\binom{v+p-1}{w-l+p-1}\binom{w-l+p}{p} \\
&\qquad S(n-2q-u-p-v;2y+2z-2n+2q+u) \\
&= (-1)^{p+q+w}\frac{2^{p+q}(2q)!p!}{q!(p-w)!}\binom{k}{p}\binom{k+q}{2q}\sum_{v=0}^{n}(-1)^v \\
&\quad \sum_{l=0}^{w}2^{-l}\binom{p-w}{l}\binom{v+p-1}{w-l+p-1}\binom{w-l+p}{p} \\
&\qquad \sum_{u=0}^{k+1-q}\binom{k+1-q}{u}2^u S(n-2q-u-p-v;2y+2z-2n+2q+u) \\
&= (-1)^{p+q+w}\frac{2^{p+q}(2q)!p!}{q!(p-w)!}\binom{k}{p}\binom{k+q}{2q}\sum_{v=0}^{n}(-1)^v \\
&\quad \sum_{l=0}^{w}2^{-l}\binom{p-w}{l}\binom{v+p-1}{w-l+p-1}\binom{w-l+p}{p} \\
&\qquad \sum_{u=0}^{k-q}\binom{k-q}{u}2^u\binom{2y+2z-n-p-v+1}{n-2q-u-p-v}.
\end{aligned}$$

On peut encore simplifier la triple somme dans l'expression de $D_{p,q,w}$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{v=0}^{n}(-1)^v\sum_{l=0}^{w}2^{-l}\binom{p-w}{l}\binom{v+p-1}{w-l+p-1}\binom{w-l+p}{p} \\
&\quad \sum_{u=0}^{k-q}\binom{k-q}{u}2^u\binom{X-n-p-v+1}{n-2q-u-p-v} \\
&= \sum_{l=0}^{p-w}2^{-l}\binom{p-w}{l}\binom{w-l+p}{p}\sum_{u=0}^{k-q}\binom{k-q}{u}2^u \\
&\qquad (-1)^{p-1}\sum_{v=0}(-1)^{v+p-1}\binom{v+p-1}{w-l+p-1}\binom{2y+2z-n-p-v+1}{n-2q-u-p-v} \\
&= \sum_{l=0}^{p-w}2^{-l}\binom{p-w}{l}\binom{w-l+p}{p}(-1)^{p-1}\sum_{u=0}^{k-q}\binom{k-q}{u}2^u S^{(n)}_{w-l+p-1,2q+u+1}
\end{aligned}$$

$$= (-1)^{p-1} \sum_{l=0}^{p-w} 2^{-l} \binom{p-w}{l} \binom{w-l+p}{p} (-1)^{k-q} S^{(n)}_{w-l+p-k+q-1,k+q+1}. \tag{IV.101}$$

Et on arrive donc à

$$\begin{aligned} D_{p,q,w} &= (-1)^{p+q+w} \frac{2^{p+q}(2q)!p!}{q!(p-w)!} \binom{k}{p} \binom{k+q}{2q} \\ &\quad (-1)^{p-1} \sum_{l=0}^{p-w} 2^{-l} \binom{p-w}{l} \binom{w-l+p}{p} (-1)^{k-q} S^{(n)}_{w-l+p-k+q-1,k+q+1} \\ &= (-1)^{k+w+1} \frac{2^{p+q}(2q)!p!}{q!(p-w)!} \binom{k}{p} \binom{k+q}{2q} \\ &\quad \sum_{l=0}^{p-w} 2^{-l} \binom{p-w}{l} \binom{w-l+p}{p} S^{(n)}_{w-l+p-k+q-1,k+q+1}. \end{aligned} \tag{IV.102}$$

(IV.46) est donc vraie.

IV.3.e Démonstration de (IV.48)

La démonstration de (IV.48) s'obtient de la façon suivante,

$$\begin{aligned} C_{w,q} &= \sum_{p=w}^{k} D_{p,q,w} \\ &= \sum_{p=w}^{k} (-1)^{q+w+1} \frac{2^{p+q}(2q)!p!}{q!(p-w)!} \binom{k}{p} \binom{k+q}{2q} \\ &\quad \sum_{l=0}^{p-w} 2^{-l} \binom{p-w}{l} \binom{w-l+p}{p} (-1)^{k-q} S^{(n)}_{w-l+p-k+q-1,k+q+1} \\ &= (-1)^{k+w+1} \frac{2^{q}(2q)!}{q!} \binom{k+q}{2q} \\ &\quad \sum_{p=w}^{k} \frac{2^p p!}{(p-w)!} \binom{k}{p} \sum_{l=0}^{k-w} 2^{-l} \binom{p-w}{l} \binom{w-l+p}{p} S^{(n)}_{w-l+p-k+q-1,k+q+1}, \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} &\sum_{p=w}^{k} \frac{2^p p!}{(p-w)!} \binom{k}{p} \sum_{l=0}^{p-w} 2^{-l} \binom{p-w}{l} \binom{w-l+p}{p} S^{(n)}_{w-l+p-k+q-1,k+q+1} \\ &= \sum_{p=w}^{k} \sum_{l=0}^{k-w} \left[\binom{k}{p} \frac{2^{p-l}p!}{(p-w)!} \frac{(p-w)!}{((p-l)-w)!(p-(p-l))!} \right. \end{aligned}$$

$$\left.\frac{(w+(p-l))!}{p!(w-p+(p-l))!}S^{(n)}_{w-l+p-k+q-1,k+q+1}\right]$$
$$= \sum_{p=w}^{k}\sum_{l=0}^{p-w}\left[\binom{k}{p}\frac{2^{p-l}(2w)!}{w!}\frac{w!}{(w-p+(p-l))!(p-(p-l))!}\right.$$
$$\left.\frac{(w+(p-l))!}{(2w)!((p-l)-w)!}S^{(n)}_{w-l+p-k+q-1,k+q+1}\right]$$
$$= \sum_{l':=p-l=0}^{k}\sum_{p=w}^{k}\binom{k}{p}\binom{w}{w+l'-p}\frac{2^{l'}(2w)!}{w!}\binom{w+l'}{2w}S^{(n)}_{w+l'-k+q-1,k+q+1}$$
$$= \sum_{l'=w}^{k}\binom{k+w}{w+l'}\frac{2^{l'}(2w)!}{w!}\binom{w+l'}{2w}S^{(n)}_{w+l'-k+q-1,k+q+1}$$
$$= \frac{(2w)!}{w!}\sum_{l'=w}^{k}\frac{(k+w)!}{(k-l')!(w+l')!}\frac{(w+l')!}{(l'-w)!(2w)!}2^{l'}S^{(n)}_{w+l'-k+q-1,k+q+1},$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
C_{w,q} &= (-1)^{k+w+1}\frac{2^q(2q)!(2w)!}{q!w!}\binom{k+q}{2q} \\
&\quad \sum_{l'=w}^{k}\frac{(k+w)!}{(k-l')!(w+l')!}\frac{(w+l')!}{(l'-w)!(2w)!}2^{l'}S^{(n)}_{w+l'-k+q-1,k+q+1} \\
&= (-1)^{k+w+1}\frac{2^q(2q)!(2w)!}{q!w!}\binom{k+q}{2q}\frac{(k+w)!}{(2w)!}\sum_{l'=w}^{k}\frac{1}{(k-l')!(l'-w)!}2^{l'}S^{(n)}_{w+l'-k+q-1,k+q+1} \\
&= (-1)^{k+w+1}\frac{2^q(2q)!(2w)!}{q!w!}\binom{k+q}{2q}\binom{k+w}{2w}\sum_{l'=w}^{k}\frac{(k-w)!}{(k-l')!(l'-w)!}2^{l'}S^{(n)}_{w+l'-k+q-1,k+q+1}.
\end{aligned}$$

On utilise ensuite la relation (IV.96) pour simplifier la dernière somme

$$\sum_{l'}\frac{(k-w)!}{(k-l')!(l'-w)!}2^{l'}S^{(n)}_{w+l'-k+q-1,k+q+1} = \sum_{l'}\binom{k-w}{l'-w}2^{l'}S^{(n)}_{w+l'-k+q-1,k+q+1}$$
$$= \sum_{l'':=l'-w=0}\binom{k-w}{l''}2^{l''+w}S^{(n)}_{2w+l''-k+q-1,k+q+1} = (-1)^{k-w}2^wS^{(n)}_{w+q-1,w+q+1},$$

pour conclure à l'identité :

$$\begin{aligned}
C_{w,q} &= (-1)^{k+w+1}\frac{2^q(2q)!(2w)!}{q!w!}\binom{k+q}{2q}\binom{k+w}{2w}(-1)^{k-w}2^wS^{(n)}_{w+q-1,w+q+1} \\
&= -\frac{2^{q+w}(2q)!(2w)!}{q!w!}\binom{k+q}{2q}\binom{k+w}{2w}S^{(n)}_{w+q-1,w+q+1}. \qquad \text{(IV.103)}
\end{aligned}$$

IV.3.f Démonstration de (IV.53)

Afin de prouver (IV.53), on compare l'expression des $C_{w,q}$ et des $C_{w,q,j}$ et on constate qu'il suffit de démontrer la proposition suivante :

Proposition 64 *Soient w, q, k trois entiers positifs avec $k \geq w, q$. On introduit la quantité*

$$K_{w,q,j} = \sum_{j=\max\{w,q\}}^{\min\{k,w+q\}} \frac{(2j)!}{(2j-q-w)!} \binom{k+j}{2j} \binom{2j-q-w}{j-q} \binom{w+q}{j}. \tag{IV.104}$$

Alors nous avons

$$K_{w,q,j} = \frac{(2q)!(2w)!}{q!w!} \binom{k+q}{2q} \binom{k+w}{2w}. \tag{IV.105}$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose que $w \geq q$. On peut donc réécrire $K_{w,q,j}$ sous la forme

$$\begin{aligned} K_{w,q,j} &= \sum_{j=w}^{\min\{k,w+q\}} \frac{(2j)!}{(2j-q-w)!} \binom{k+j}{2j} \binom{2j-q-w}{j-q} \binom{w+q}{j} \\ &= \sum_{j=w}^{\min\{k,w+q\}} \frac{(2j)!}{(2j-q-w)!} \frac{(k+j)!}{(k-j)!(2j)!} \frac{(2j-q-w)!}{(j-w)!(j-q)!} \binom{w+q}{j} \\ &= \sum_{j=w}^{\min\{k,w+q\}} \frac{(k+j)!}{(k-j)!(j-w)!(j-q)!} \binom{w+q}{j} \\ &= \sum_{j':=j-w=0}^{\min\{k-w,q\}} \frac{(k+w+j')!}{(k-w-j')!j'!(j'-q+w)!} \frac{(w+q)!}{(w+j')!(q-j')!}, \end{aligned}$$

et on divise les deux côtés de (IV.105) par $\dfrac{(2w)!}{q!w!}\dbinom{k+w}{2w}$ afin de transformer l'identité à démontrer en

$$\frac{K_{w,q,j}}{\frac{(2w)!}{q!w!}\binom{k+w}{2w}} = \sum_{j'=0}^{\min\{k-w,q\}} \frac{q!}{j'!(q-j')!} \frac{(k+w+j')!}{(k+w)!} \frac{(k-w)!}{(k-w-j')!} \frac{(w+q)!}{(w+j')!} \frac{w!}{(j'-q+w)!} = \frac{(k+q)!}{(k-q)!}. \tag{IV.106}$$

Cette identité est démontrée par récurrence sur q. Elle est vraie pour $q = 0$, et pour passer de q à $q+1$(si $q+1 \leq w \leq k$) :

$$\frac{(k+q+1)!}{(k-q-1)!} = \frac{(k+q)!}{(k-q)!}(k+q+1)(k-q)$$

$$= \left\{ \sum_{j'=0}^{\min\{k-w,q\}} \binom{q}{j'} \frac{(k+w+j')!}{(k+w)!} \frac{(k-w)!}{(k-w-j')!} \frac{(w+q)!}{(w+j')!} \frac{w!}{(j'-q+w)!} \right\} (k^2+k-q^2-q)$$

$$= \sum_{j'=0}^{\min\{k-w,q\}} \binom{q}{j'} \frac{(k+w+j')!}{(k+w)!} \frac{(k-w)!}{(k-w-j')!} [(k+w+j'+1)(k-w-j')$$

$$+(w+j')(w+j'+1) - q(q+1)] \frac{(w+q)!}{(w+j')!} \frac{w!}{(j'-q+w)!}$$

$$= \sum_{j'=0}^{\min\{k-w,q\}} \frac{(k+w+j'+1)!}{(k+w)!} \frac{(k-w)!}{(k-w-j'-1)!} \binom{q}{j'} \frac{(w+q)!}{(w+j')!} \frac{w!}{(j'-q+w)!}$$

$$+ \sum_{j'=1}^{\min\{k-w,q\}} \frac{(k+w+j')!}{(k+w)!} \frac{(k-w)!}{(k-w-j')!} \binom{q}{j'}$$

$$\frac{(w+q)!}{(w+j')!} \frac{w!}{(j'-q+w)!} [(w+j')(w+j'+1) - q(q+1)]$$

$$+(w+q+1)(w-q) \frac{(w+q)!}{w!} \frac{w!}{(w-q)!}$$

On simplifie la deuxième somme comme suit :

$$\sum_{j'=1}^{\min\{k-w,q\}} \frac{(k+w+j')!}{(k+w)!} \frac{(k-w)!}{(k-w-j')!} \binom{q}{j'}$$

$$\frac{(w+q)!}{(w+j')!} \frac{w!}{(j'-q+w)!} [(w+j')(w+j'+1) - q(q+1)]$$

$$= \sum_{j'':=j'-1=0}^{\min\{k-w,q\}-1} \frac{(k+w+j''+1)!}{(k+w)!} \frac{(k-w)!}{(k-w-j''-1)!} \binom{q}{j''+1}$$

$$\frac{(w+q)!}{(w+j''+1)!} \frac{w!}{(j''-q+w+1)!} [(w+j''+1)(w+j''+2) - q(q+1)]$$

$$= \sum_{j''=0}^{\min\{k-w,q\}-1} \frac{(k+w+j''+1)!}{(k+w)!} \frac{(k-w)!}{(k-w-j''-1)!} \binom{q}{j''+1}$$

$$\frac{(w+q)!}{(w+j''+1)!} \frac{w!}{(j''-q+w+1)!} (w+j''+1-q)(w+j''+2+q)$$

$$= \sum_{j''=0}^{\min\{k-w,q\}-1} \frac{(k+w+j''+1)!}{(k+w)!} \frac{(k-w)!}{(k-w-j''-1)!} \frac{(w+q)!}{(w+j'')!}$$

$$\frac{w!}{(j''-q+w)!} \binom{q}{j''+1} \frac{w+j''+q+2}{w+j''+1}.$$

On a maintenant

$$\begin{aligned}\frac{(k+q+1)!}{(k-q-1)!} \quad = \quad & \sum_{j'=0}^{\min\{k-w,q\}-1} \frac{(k+w+j'+1)!}{(k+w)!} \frac{(k-w)!}{(k-w-j'-1)!} \frac{(w+q)!}{(w+j')!} \frac{w!}{(j'-q+w)!} \\ & \left[\binom{q}{j'} + \binom{q}{j'+1} \frac{w+j'+q+2}{w+j'+1}\right] \\ & + \frac{(w+q+1)!}{w!} \frac{w!}{(w-q-1)!},\end{aligned}$$

dont on simplifie le membre de droite en utilisant l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & \binom{q}{j'} + \binom{q}{j'+1} \frac{w+j'+q+2}{w+j'+1} = \binom{q}{j'} + \binom{q}{j'+1} + \binom{q}{j'+1} \frac{q+1}{w+j'+1} \\ = \quad & \binom{q+1}{j'+1} + \binom{q+1}{j'+1} \frac{q-j'}{w+j'+1} = \binom{q+1}{j'+1} \frac{w+q+1}{w+j'+1},\end{aligned}$$

et on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{(k+q+1)!}{(k-q-1)!} \\ = \quad & \sum_{j'=0}^{\min\{k-w,q\}-1} \frac{(k+w+j'+1)!}{(k+w)!} \frac{(k-w)!}{(k-w-j'-1)!} \binom{q+1}{j'+1} \frac{w+q+1}{w+j'+1} \frac{(w+q)!}{(w+j')!} \frac{w!}{(j'-q+w)!} \\ & + \frac{(w+q+1)!}{w!} \frac{w!}{(w-q-1)!} \\ = \quad & \sum_{j'=0}^{\min\{k-w,q\}-1} \frac{(k+w+j'+1)!}{(k+w)!} \frac{(k-w)!}{(k-w-j'-1)!} \binom{q+1}{j'+1} \frac{(w+q+1)!}{(w+j'+1)!} \frac{w!}{(j'-q+w)!} \\ & + \frac{(w+q+1)!}{w!} \frac{w!}{(w-q-1)!} \\ = \quad & \sum_{j:=j'+1=1}^{\min\{k-w,q\}} \frac{(k+w+j)!}{(k+w)!} \frac{(k-w)!}{(k-w-j)!} \binom{q+1}{j} \frac{(w+q+1)!}{(w+j)!} \frac{w!}{(j-1-q+w)!} \\ & + \frac{(w+q+1)!}{w!} \frac{w!}{(w-q-1)!} \\ = \quad & \sum_{j=0}^{\min\{k-w,q\}} \binom{q+1}{j} \frac{(k+w+j)!}{(k+w)!} \frac{(k-w)!}{(k-w-j)!} \frac{(w+q+1)!}{(w+j)!} \frac{w!}{(w-q-1+j)!}. \end{aligned} \tag{IV.107}$$

La proposition est donc démontrée. Elle fournit la décomposition souhaitée.□

IV.3.g Démonstration de (IV.54)

A la fin, pour démontrer (IV.54), on étudie

$$\begin{aligned}
&\sum_{w,q=0}^{k} C_{w,q,j}(2y-2w-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2q-1)\cdots(2z-2k+1)\\
= \quad & -\sum_{w,q=0}^{k} \frac{2^{q+w}(2j)!}{(2j-q-w)!}\binom{k+j}{2j}\binom{w+q}{j}\binom{2j-w-q}{j-w}\\
&\quad S^{(n)}_{w+q-1,w+q+1}(2y-2w-1)\cdots(2y-2j+1)(2z-2q-1)\cdots(2z-2j+1)\\
&\quad [(2y-2j-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2j-1)\cdots(2z-2k+1)].
\end{aligned}$$

Le coefficient de $[(2y-2j-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2j-1)\cdots(2z-2k+1)]$ se simplifie comme suit

$$\begin{aligned}
& -\sum_{w,q=0}^{k} \frac{2^{q+w}(2j)!}{(2j-q-w)!}\binom{k+j}{2j}\binom{w+q}{j}\binom{2j-w-q}{j-w}\\
&\quad S^{(n)}_{w+q-1,w+q+1}(2y-2w-1)\cdots(2y-2j+1)(2z-2q-1)\cdots(2z-2j+1)\\
= \quad & -(2j)!\binom{k+j}{2j}\sum_{s=0}^{j}\frac{2^{j+s}}{(j-s)!}\binom{j+s}{j}S^{(n)}_{j+s-1,j+s+1}\\
&\quad \sum_{w+q=j+s}\frac{(j-s)!}{(j-w)!(j-q)!}(2y-2w-1)\cdots(2y-2j+1)(2z-2q-1)\cdots(2z-2j+1)\\
= \quad & -(2j)!\binom{k+j}{2j}\sum_{s=0}^{j}\frac{2^{j+s}}{(j-s)!}\binom{j+s}{j}(j-s)!S^{(n)}_{j+s-1,j+s+1}\\
&\quad \sum_{w+q=j+s}(-1)^{j-s}2^{j-s}\binom{j-y-\frac{1}{2}}{j-w}\binom{j-z-\frac{1}{2}}{j-q}\\
= \quad & -(2j)!\binom{k+j}{2j}2^{2j}\sum_{s=0}^{j}\binom{j+s}{j}S^{(n)}_{j+s-1,j+s+1}(-1)^{j-s}\binom{2j-y-z-1}{j-s}\\
= \quad & -(2j)!\binom{k+j}{2j}2^{2j}\sum_{s=0}^{j}\binom{j+s}{j}S^{(n)}_{j+s-1,j+s+1}\binom{\frac{X}{2}-j-s}{j-s},
\end{aligned}$$

on obtient donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{w,q=0}^{k} C_{w,q,j}(2y-2w-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2q-1)\cdots(2z-2k+1)\\
= \quad & -(2j)!\binom{k+j}{2j}2^{2j}\sum_{s=0}^{j}\binom{j+s}{j}S^{(n)}_{j+s-1,j+s+1}\binom{y+z-j-s}{j-s}\\
&\quad [(2y-2j-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2j-1)\cdots(2z-2k+1)]. \qquad \text{(IV.108)}
\end{aligned}$$

La Proposition 63 permet ensuite de simplifier les coefficients :

$$(-1)^{j+1}\sum_{s=0}^{j}\frac{(j+s)!}{j!s!}\binom{y+z-j-s}{j-s}S^{(n)}_{j+s-1,j+s+1}(2y+2z)=\binom{y+z-n+j}{j}\binom{2y+2z-n+1}{n-2j}.$$

On conclut donc que

$$\begin{aligned}
&(-1)^n\sum_{w,q}C_{w,q,j}(2y-2w+1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2q+1)\cdots(2z-2k+1)\\
= \;& (-1)^n\Bigg(-(2j)!\binom{k+j}{2j}2^{2j}\sum_{s=0}^{j}\binom{j+s}{j}S^{(n)}_{j+s-1,j+s+1}\binom{y+z-j-s}{j-s}\\
&\qquad [(2y-2j-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2j-1)\cdots(2z-2k+1)]\Bigg)\\
= \;& (-1)^{n+1}(2j)!\binom{k+j}{2j}2^{2j}\sum_{s=0}^{j}\binom{j+s}{j}S^{(n)}_{j+s-1,j+s+1}\binom{y+z-j-s}{j-s}\\
&\qquad [(2y-2j-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2j-1)\cdots(2z-2k+1)]\\
= \;& (-1)^{n+1}(2j)!\binom{k+j}{2j}2^{2j}(-1)^{j+1}\binom{y+z-n+j}{j}\binom{2y+2z-n+1}{n-2j}\\
&\qquad [(2y-2j-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2j-1)\cdots(2z-2k+1)]\\
= \;& (-1)^{n-j}(2j)!\binom{k+j}{2j}2^{2j}\binom{y+z-n+j}{j}\binom{2y+2z-n+1}{n-2j}\\
&\qquad [(2y-2j-1)\cdots(2y-2k+1)(2z-2j-1)\cdots(2z-2k+1)]\\
= \;& \Sigma_j.
\end{aligned} \tag{IV.109}$$

Annexe A

Algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$

Dans cette partie nous présentons l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$ et ses cocycles cycliques de Hopf qui correspondent respectivement à la classe de Godbillon-Vey, à la dérivation Schwarzienne, et à la classe fondamentale transversale. On suit essentiellement la présentation de Connes et Moscovici dans leur série d'articles sur le sujet([9], [10]).

Pour un feuilletage lisse au rang constant sur M, on choisit une transversale plate complète X. On considère le fibré de repères orientés FX de X avec l'action correspondante du groupoïde d'holonomie de feuilletage, qui définit un groupoïde étale $\mathcal{G} \rightrightarrows FX$. Connes et Moscovici ont trouvé une algèbre de Hopf $\mathcal{H}_k$ agissant sur l'algèbre lisse de groupoïde $C_c^\infty(\mathcal{G})$, où k est la codimension du feuilletage. Dans cette annexe on se limite au cas $k = 1$.

Dans ce cas-là, la transversale complète X est une variété plate de dimension 1, et FX est isomorphe à $X \times \mathbb{R}^+$ en fixant une connexion plate sur $FX \to X$. On introduit les coordonnées y sur la composante X et y_1 sur la composante $\mathbb{R}^+$. Soit Γ un pseudogroupe associé au feuilletage agissant sur X. L'action de Γ sur FX est

$$(y, y_1) \mapsto (\phi(y), \phi'(y)y_1), \qquad \forall \phi \in \Gamma.$$

Par définition le groupoïde $FX \rtimes \Gamma \rightrightarrows FX$ est un groupoïde étale munie d'une forme symplectique naturelle $\omega = \dfrac{\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y_1}{y_1^2}$.

Sur FX, on considère les champs de vecteurs $X = y_1 \dfrac{\partial}{\partial y}$ et $Y = y_1 \dfrac{\partial}{\partial y_1}$. On a d'abord

$$\phi'(y)y_1 \frac{\frac{\partial}{\partial y_1}}{\frac{\partial}{\partial y_1}(\phi'(y)y_1)} = y_1 \frac{\partial}{\partial y_1},$$

ce qui veut dire que Y est invariant sous l'action de Γ. Mais ce n'est pas le cas pour X, qui satisfait à la relation de commutation suivante :

$$U_\phi X U_\phi^{-1} = X - y_1 \frac{{\phi^{-1}}''(y)}{{\phi^{-1}}'(y)} Y.$$

On introduit maintenant les opérateurs suivants sur $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} X(fU_\phi) &= X(f)U_\phi, \\ Y(fU_\phi) &= Y(f)U_\phi, \\ \delta_1(fU_\phi) &= \mu_{\phi^{-1}} fU_\phi, \\ \delta_n(fU_\phi) &= X^{n-1}(\mu_{\phi^{-1}}) fU_\phi, \end{aligned} \tag{A.1}$$

où $\mu_{\phi^{-1}}(y, y_1) = y_1 \dfrac{\phi^{-1\prime\prime}(y)}{\phi^{-1\prime}(y)}$.

Leurs relations de commutation sont

$$[Y, X] = X \,,\ [Y, \delta_n] = n\,\delta_n \,,\ [X, \delta_n] = \delta_{n+1} \,,\ [\delta_k, \delta_\ell] = 0 \,, \quad n, k, \ell \geq 1 \,. \tag{A.2}$$

Ces opérateurs $X, Y, \delta_n,\ n \in \mathbb{N}$ forment une algèbre de Lie de dimension infinie H_1, et l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$ est définie en tant qu'algèbre comme son algèbre enveloppante universelle.

Pour faire de $\mathcal{H}_1$ une algèbre de Hopf, il faut définir le coproduit, la co-unité et l'antipode. Ils sont donnés par :

1. le coproduit $\Delta : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$. Il est déterminé par

$$\Delta Y = Y \otimes 1 + 1 \otimes Y \,, \quad \begin{aligned} \Delta X &= X \otimes 1 + 1 \otimes X + \delta_1 \otimes Y \\ \Delta \delta_1 &= \delta_1 \otimes 1 + 1 \otimes \delta_1 \end{aligned} \tag{A.3}$$

et la propriété de multiplicativité

$$\Delta(h^1\, h^2) = \Delta h^1 \cdot \Delta h^2 \,, \quad h^1, h^2 \in \mathcal{H}_1 \ ; \tag{A.4}$$

2. la co-unité est

$$\varepsilon(h) = \text{le terme constant de} \quad h \in \mathcal{H}_1 \,. \tag{A.5}$$

3. L'antipode S. Elle est donnée par

$$S(Y) = -Y \,,\ S(X) = -X + \delta_1 Y \,,\ S(\delta_1) = -\delta_1 \tag{A.6}$$

et la propriété d'anti-isomorphisme

$$S(h^1\, h^2) = S(h^2)\, S(h^1) \,, \quad h^1, h^2 \in \mathcal{H}_1 \ ; \tag{A.7}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $(\mathcal{H}_1, \cdot, \Delta, S, \epsilon, id)$ définit une algèbre de Hopf.
Le rôle de $\mathcal{H}_1$ comme ¡¡symétrie dans la géométrie transverse¿¿ vient de son action naturelle sur les produits croisés ([9]). Etant donné une variété M^1 de dimension 1 et un sous-groupe discret $\Gamma \subset \mathrm{Diff}^+(M^1)$, $\mathcal{H}_1$ agit sur l'algèbre de produit croisé

$$\mathcal{A}_\Gamma = C_c^\infty(J_+^1(M^1)) \rtimes \Gamma \,,$$

par une action de Hopf, où $J^1_+(M^1)$ est le fibré orienté des 1-jets sur M^1. On utilise les coordonnées dans $J^1_+(M^1)$ définies par le développement de Taylor,

$$j(s) = y + s\, y_1 + \cdots \,, \qquad y_1 > 0\,,$$

et supposons que des difféomorphismes agissent de la manière fonctorielle évidente sur les 1-jets,

$$\varphi(y, y_1) = (\varphi(y),\, \varphi'(y) \cdot y_1)\,.$$

L'action de $\mathcal{H}_1$ s'écrit comme ci-dessus :

$$Y(fU^*_\varphi) = y_1\, \frac{\partial f}{\partial y_1}\, U^*_\varphi \quad , \qquad X(fU^*_\varphi) = y_1\, \frac{\partial f}{\partial y}\, U^*_\varphi\,, \tag{A.8}$$

$$\delta_n(fU^*_\varphi) \;=\; y_1^n\, \frac{d^n}{dy^n} \left(\log \frac{d\varphi}{dy} \right) fU^*_\varphi\,, \tag{A.9}$$

où nous avons fait l'identification $J^1_+(M^1) \simeq M^1 \times \mathbb{R}^+$ et noté par (y, y_1) les coordonnées sur ce dernier.

La forme de volume $\dfrac{dy \wedge dy_1}{y_1^2}$ sur $J^1_+(M^1)$ est invariante sous $\mathrm{Diff}^+(M^1)$ et donne la trace suivante $\tau : \mathcal{A}_\Gamma \to \mathbb{C}$,

$$\tau(fU^*_\varphi) \;=\; \begin{cases} \displaystyle\int_{J^1_+(M^1)} f(y, y_1)\, \frac{dy \wedge dy_1}{y_1^2} & \text{if } \varphi = 1\,, \\ 0 & \text{if } \varphi \neq 1\,. \end{cases} \tag{A.10}$$

Cette trace est ν-invariante par rapport à l'action $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{A}_\Gamma \to \mathcal{A}_\Gamma$ et avec le caractère modulaire $\nu \in \mathcal{H}_1^*$, déterminé par

$$\nu(Y) = 1, \quad \nu(X) = 0, \quad \nu(\delta_n) = 0\,;$$

Cette invariance sécrit comme l'identité

$$\tau(h(a)) = \nu(h)\, \tau(a)\,, \qquad \forall \quad h \in \mathcal{H}_1\,. \tag{A.11}$$

Le fait que

$$S^2 \neq Id\,,$$

est corrigé automatiquement en tordant avec ν. En effet, $\widetilde{S} = \nu * S$ satisfait la propriété involutive

$$\widetilde{S}^2 = Id\,. \tag{A.12}$$

On a

$$\widetilde{S}(\delta_1) \;=\; -\delta_1\,, \quad \widetilde{S}(Y) = -Y + 1\,, \quad \widetilde{S}(X) = -X + \delta_1 Y\,. \tag{A.13}$$

L'équation (A.12) montre que la paire $(\nu, 1)$ donnée par le caractère ν de $\mathcal{H}_1$ et l'élément de groupe $1 \in \mathcal{H}_1$ est un couple modulaire en involution, i.e. un élément de type groupe et un caractère tels que le carré de l'antipode doublement tordue correspondante est l'identité. Cela permet de définir la cohomologie cyclique $HC^*_{\text{Hopf}}(\mathcal{H}_1)$ (cf. [9], [10]).

En fait, étant donnée une algèbre de Hopf munie d'un couple modulaire en involution (ν, σ), dans le cas spécial $\sigma = 1$ (cf. [9]), on a les définitions suivantes (Pour le cas plus général, on peut consulter [10]) :

Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf, ν un caractère de $\mathcal{H}$ tel que l'antipode tordu $\widetilde{S} = \nu * S$ satisfait la propriété involutive

$$\widetilde{S}^2 = Id .$$

Les groupes de cohomologie cyclique $HC^*_{\text{Hopf}}(\mathcal{H})$ sont définis à l'aide des modules cycliques associée à l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ comme suit. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $C^n(\mathcal{H}) = \mathcal{H}^{\otimes n}$; les opérateurs de "face" $\partial_i : C^{n-1}(\mathcal{H}) \to C^n(\mathcal{H}), \quad 0 \leq i \leq n$, sont

$$\begin{aligned}
\partial_0(h^1 \otimes \ldots \otimes h^{n-1}) &= 1 \otimes h^1 \otimes \ldots \otimes h^{n-1}, \\
\partial_j(h^1 \otimes \ldots \otimes h^{n-1}) &= h^1 \otimes \ldots \otimes \Delta h^j \otimes \ldots \otimes h^{n-1}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\
\partial_n(h^1 \otimes \ldots \otimes h^{n-1}) &= h^1 \otimes \ldots \otimes h^{n-1} \otimes 1 ;
\end{aligned}$$

Les opérateurs de dégénéréscence $\sigma_i : C^{n+1}(\mathcal{H}) \to C^n(\mathcal{H}), \quad 0 \leq i \leq n$, sont

$$\sigma_i(h^1 \otimes \ldots \otimes h^{n+1}) = h^1 \otimes \ldots \otimes \varepsilon(h^{i+1}) \otimes \ldots \otimes h^{n+1} ;$$

Les oprérateurs cycliques $\tau_n : C^n(\mathcal{H}) \to C^n(\mathcal{H})$ sont donnés par

$$\tau_n(h^1 \otimes \ldots \otimes h^n) = (\Delta^{n-1}\widetilde{S}(h^1)) \cdot h^2 \otimes \ldots \otimes h^n \otimes 1 .$$

La cohomologie cyclique de Hopf est calculée à partir du bicomplexe normalisé $(CC^{*,*}(\mathcal{H}), b, B)$, où :

$$\begin{aligned}
CC^{p,q}(\mathcal{H}) &= \bar{C}^{q-p}(\mathcal{H}), \quad q \geq p, \\
CC^{p,q}(\mathcal{H}) &= 0, \quad q < p ;
\end{aligned}$$

avec

$$\bar{C}^n(\mathcal{H}) = \cap \operatorname{Ker} \sigma_i , \quad \forall n \geq 1, \qquad \bar{C}^0(\mathcal{H}) = \mathbb{C};$$

L'opérateur

$$b : \bar{C}^{n-1}(\mathcal{H}) \to \bar{C}^n(\mathcal{H}), \qquad b = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i$$

a comme expression explicite

$$\begin{aligned} b(h^1 \otimes \ldots \otimes h^{n-1}) &= 1 \otimes h^1 \otimes \ldots \otimes h^{n-1} \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \sum_{(h_j)} h^1 \otimes \ldots \otimes h^j_{(1)} \otimes h^j_{(2)} \otimes \cdots \otimes h^{n-1} \\ &+ (-1)^n h^1 \otimes \ldots \otimes h^{n-1} \otimes 1, \end{aligned}$$

alors que pour $n = 0$, $b(\mathbb{C}) = 0$.

L'opérateur $B : \bar{C}^{n+1}(\mathcal{H}) \to \bar{C}^n(\mathcal{H})$ est défini par la formule

$$B = A \circ B_0\,, \quad n \geq 0\,,$$

où $B_0 : \bar{C}^{n+1}(\mathcal{H}) \to \bar{C}^n(\mathcal{H})$ est l'opérateur

$$\begin{aligned} B_0(h^1 \otimes \ldots \otimes h^{n+1}) &= (\Delta^{n-1}\widetilde{S}(h^1)) \cdot h^2 \otimes \ldots \otimes h^{n+1} \\ &= \sum_{(h^1)} S(h^1_{(n)}) h^2 \otimes \ldots \otimes S(h^1_{(2)}) h^n \otimes \widetilde{S}(h^1_{(1)}) h^{n+1}, \\ B_0(h) &= \nu(h), \ h \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

et

$$A = 1 + (-1)^n \tau_n + \ldots + (-1)^{n^2} {\tau_n}^n\,.$$

Les groupes $HC^n_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H})$ sont calculés à partir du premier quadrant du complexe total $(TC^*(\mathcal{H}),\, b+B)$,

$$TC^n(\mathcal{H}) = \sum_{p=0}^{n} CC^{p,n-p}(\mathcal{H})\,,$$

alors que les groupes périodiques ($\mathbb{Z}/2$–gradués) $PHC^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H})$ sont calculés à partir du complexe total $(PTC^*(\mathcal{H}),\, b+B)$,

$$PTC^n(\mathcal{H}) = \sum_{p} CC^{p,n-p}(\mathcal{H})\,.$$

La formule

$$\chi_\tau(h^1 \otimes \ldots \otimes h^n)(a^0, \ldots, a^n) \;=\; \tau(a^0\, h^1(a^1) \ldots h^n(a^n))\,, \tag{A.14}$$

où $h^1, \ldots, h^n \in \mathcal{H}_1$ et $a^0, a^1, \ldots, a^n \in \mathcal{A}_\Gamma$, induit un homomorphisme caractéristique

$$\chi^*_\tau \;:\; HC^*_{\mathrm{Hopf}}\,(\mathcal{H}_1) \;\to\; HC^*\,(\mathcal{A}_\Gamma)\,.$$

Dans [9] Connes et Moscovici ont construit un isomorphisme

$$\kappa^*_1 \;:\; H^*(\mathfrak{a}_1, \mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} PHC^*_{\mathrm{Hopf}}\,(\mathcal{H}_1)\,,$$

entre la cohomologie de Gelfand-Fuchs de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_1 = \mathbb{R}[[x]]\partial_x$ des champs de vecteurs formels sur $\mathbb{R}^1$ et la cohomologie cyclique périodique de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$.

Proposition 65 *L'élément $\delta_1 \in \mathcal{H}_1$ est un cocycle cyclique de Hopf, qui donne une classe non triviale*

$$[\delta_1] \in HC^1_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_1).$$

En plus, $[\delta_1]$ est un générateur pour $PHC^{\mathrm{odd}}_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_1)$ et corréspond à la classe de Godbillon-Vey dans l'isomorphisme κ_1^* avec la cohomologie de Gelfand-Fuchs.

Démonstration. En effet, le fait que δ_1 est un 1-cocycle est facile à vérifier :

$$b(\delta_1) = 1 \otimes \delta_1 - \Delta\delta_1 + \delta_1 \otimes 1 = 0,$$

alors que

$$\tau_1(\delta_1) = \widetilde{S}(\delta_1) = S(\delta_1) = -\delta_1 .$$

D'autre part, son image sous l'application caractéristique ci-dessus,

$$\chi_\tau^*([\delta_1]) \in HC^1(\mathcal{A}_\Gamma),$$

est précisément la 1-trace non abélienne de [7] (cf. aussi [8, III. 6. γ]), et ce dernier est connu pour donner une classe non triviale sur le fibré de repères transversales aux feuilletages de codimension 1. Le reste est démontré dans [12] Appendix B .

Nous allons maintenant décrire un autre 1-cocycle cyclique qui correspond à la dérivée Schwarzienne $\{y\,;x\}$, dont l'expression est

$$\{y\,;x\} := \frac{d^2}{dx^2}\left(\log\frac{dy}{dx}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\left(\log\frac{dy}{dx}\right)\right)^2 . \tag{A.15}$$

Proposition 66 *L'élément $\delta_2' := \delta_2 - \frac{1}{2}\delta_1^2 \in \mathcal{H}_1$ est un cocycle cyclique de Hopf, dont l'action sur l'algèbre de produit croisé $\mathcal{A}_\Gamma = C_c^\infty(J_+^1(M^1)) \rtimes \Gamma$ est donnée par la dérivée Schwarzienne*

$$\delta_2'(fU_\varphi^*) = y_1^2\,\{\varphi(y)\,;y\}\,fU_\varphi^*$$

et la classe

$$[\delta_2'] \in HC^1_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_1)$$

est égale à $B(c)$, où c est le 2-cocycle de Hochschild suivant,

$$c := \delta_1 \otimes X + \frac{1}{2}\,\delta_1^2 \otimes Y .$$

Démonstration. Nous donnons ici le calcul en détail. On calcule $b(c)$:

$$\begin{aligned} b(\delta_1 \otimes X) \;&=\; 1 \otimes \delta_1 \otimes X - (\delta_1 \otimes 1 + 1 \otimes \delta_1) \otimes X + \\ &\quad \delta_1 \otimes (X \otimes 1 + 1 \otimes X + \delta_1 \otimes Y) - \delta_1 \otimes X \otimes 1 = \delta_1 \otimes \delta_1 \otimes Y \end{aligned} \tag{A.16}$$

et

$$\begin{aligned} b(\delta_1^2 \otimes Y) \;&=\; 1 \otimes \delta_1^2 \otimes Y - (\delta_1^2 \otimes 1 + 2\delta_1 \otimes \delta_1 + 1 \otimes \delta_1^2) \otimes Y + \\ &\quad \delta_1^2 \otimes (Y \otimes 1 + 1 \otimes Y) - \delta_1^2 \otimes Y \otimes 1 = -2\delta_1 \otimes \delta_1 \otimes Y \end{aligned} \tag{A.17}$$

Cela signifie que

$$b(c) \;=\; 0\,,$$

donc c est un cocycle de Hochschild.

On passe au calcul de $B(c)$. D'abord, on rappelle que

$$B_0(h^1 \otimes h^2) = \widetilde{S}(h^1)h^2\,.$$

Comme $\widetilde{S}(\delta_1) \;=\; -\delta_1$, on a

$$B_0(c) = -\delta_1\, X + \frac{1}{2}\delta_1^2\, Y\,.$$

Comme $\widetilde{S}(Y) = -Y + 1$ et $\widetilde{S}(X) = -X + \delta_1 Y$, il en suit que

$$\begin{aligned} \widetilde{S}(B_0 c) \;&=\; \widetilde{S}(X)\delta_1 + \frac{1}{2}\widetilde{S}(Y)\delta_1^2 \\ &=\; (-X + \delta_1 Y)\delta_1 + \frac{1}{2}(-Y + 1)\delta_1^2 \\ &=\; -X\delta_1 + \delta_1^2 Y + \delta_1^2 - \frac{1}{2}(\delta_1^2 Y + \delta_1^2) \\ &=\; -X\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_1^2 Y + \frac{1}{2}\delta_1^2\,. \end{aligned} \tag{A.18}$$

Donc que

$$\begin{aligned} B(c) \;=\; B_0 c - \widetilde{S}(B_0 c) \;&=\; \\ -\delta_1\, X + \frac{1}{2}\delta_1^2\, Y - (-X\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_1^2 Y + \frac{1}{2}\delta_1^2) \;&=\; \delta_2'\,, \end{aligned} \tag{A.19}$$

ce qui montre que la classe de δ_2' est triviale dans la cohomologie cyclique périodique $PHC^*_{\rm Hopf}(\mathcal{H}_1)$.

On conclut cette annexe en notant qu'un générateur de $PHC^{\rm even}_{\rm Hopf}(\mathcal{H}_1)$ est la classe du 2-cocycle cyclique

$$F := X \otimes Y - Y \otimes X - \delta_1\, Y \otimes Y\,, \tag{A.20}$$

qui, dans le contexte de feuilletage, représente la 'classe fondamentale transverse'.

Annexe B

Rappel de quelques résultats concernant $SL_2(\mathbb{R})$

Nous rappelons dans cette annexe des notions et des résultats nécessaires de la théorie des représentations (unitaires, des dimension infinie) du groupe de Lie $SL_2(\mathbb{R})$. La première section est une partie de la Section 4.2 de la thèse d'Alain Valette (cf. [32]), je le remercie vivement de m'avoir autorisé à la reproduire ici.

Le groupe $G = SL_2(\mathbb{R})$ est intéressant, vu sa petite dimension, comme exemple de groupe où tous les calculs peuvent se faire explicitement. D'autre part, c'est un des quelques groupes semi-simples dont on connaisse le dual complet $\hat{G}$. Du point de vue des algèbres d'opérateurs, on a donc une description non seulement la C^*-algèbre réduite, mais aussi la C^*-algèbre maximale.

Dans la représentation standard de G, on spécifie d'abord quelques sous groupes :

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}, \qquad A = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$
$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \tag{B.1}$$

Nous avons la décomposition d'Iwasawa $G = KAN$, et $P = MAN$ est un sous-groupe parabolique minimal. Nous appellerons ici *représentation de G* un homomorphisme π fortement continu de G dans le groupe des opérateurs inversibles d'un espace de Hilbert, et tel que $\pi|_K$ est unitaire.

Notons $\lambda_s (s \in \mathbb{C})$ le caractère de A donné par

$$\lambda_s \left(\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \right) = e^{st}$$

et notons $\varepsilon = 0$ (resp. $\varepsilon = 1$) le caractère trivial (resp. non trivial) de M. On forme la représentation

$$\pi_{\varepsilon,s} = Ind_P^G \otimes \lambda_s \otimes 1.$$

où Ind_P^G est la représentation induite. La fonction modulaire de P est donnée par $\Delta_P(man) = e^{2t}$.

B.1 Description de $\hat{G}$

Maintenant nous passons en revue les différentes représentations unitaires irréductibles de $SL_2(\mathbb{R})$; classifiées en 1947 par Bargmann.

Pour les représentations $\pi_{\varepsilon,s}$ introduites ci-dessus, identifions K avec S^1 par

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mapsto e^{i\theta},$$

et posons $\varphi_n(\theta) = e^{in\theta}(n \in \mathbb{Z})$. On réalise $\pi_{0,s}$(resp. $\pi_{1,s}$ sur le sous-espace $\mathcal{H}^0$(resp. $\mathcal{H}^1$) de $L^2(S^1)$ engendré par les φ_n avec n pair (resp. n impair). Soit alors

$$E_+ = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix},\ E_- = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix},\ W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.2}$$

la base usuelle de l'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ de G. Par [23], p.119, cette base agit dans l'espace de $\pi_{\varepsilon,s}$ par

$$\pi_{\varepsilon,s}(W)\varphi_n = -in\varphi_n,$$

$$\pi_{\varepsilon,s}(E_+)\varphi_n = (s+1-n)\varphi_{n-2},$$

$$\pi_{\varepsilon,s}(E_-)\varphi_n = (s+1+n)\varphi_{n+2}.$$

En utilisant ceci, on montre ([23], pp.119-121) que $\pi_{\varepsilon,s}$ est irréductible si s n'est pas un entier, ou si s est un entier tel que $s \equiv \varepsilon(\mathrm{mod}2)$. De plus, dans ce cas, l'application

$$\varphi_{2n} \mapsto \prod_{k=1}^{|n|} \frac{2k-1-s}{2k+1+s}\varphi_{2n}\ (n \in \mathbb{Z}),$$

$$\varphi_{2n+1} \mapsto \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-s}{2k+s}\varphi_{2n+1}\ (n \in \mathbb{N}),$$

$$\varphi_{-(2n+1)} \mapsto \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-s}{2k+s}\varphi_{-(2n+1)}\ (n \in \mathbb{N})$$

réalise l'équivalence entre $\pi_{\varepsilon,s}$ et $\pi_{\varepsilon,-s}$(cf. [30]. p. 197). Dans tous les cas, les représentations $\pi_{\varepsilon,s}$ et $\pi_{\varepsilon,-s}$ sont duales l'une à l'autre ([23], p.45).

Considérons les cas réductibles. Pour $k \in \mathbb{N}$, la représentation $\pi_{2k,1}$ contient deux sous-espaces irréductibles de dimension infinie

$$\bigoplus_{n\leq -(2k+1), n \text{impair}} \mathbb{C}\varphi_n \text{ et } \bigoplus_{n\geq 2k+1, n \text{impair}} \mathbb{C}\varphi_n$$

qui fournissent des représentations notées respectivement π_{2k}^- et π_{2k}^+. Pour $\pi_{0,2k-1}$, on a une situation semblable : les sous-espaces

$$\bigoplus_{n\leq -2k, n \text{pair}} \mathbb{C}\varphi_n \text{ et } \bigoplus_{n\geq 2k, n \text{pair}} \mathbb{C}\varphi_n$$

donnent des représentations irréductibles notées π_{2k-1}^- et π_{2k-1}^+ respectivement.

Les arguments de [30], §2 montrent que toute représentation unitaire irréductible non triviale de G est infinitésimalement équivalente à l'une des représentations données ci-dessus, i.e., qu'il existe un isomorphisme $\mathfrak{g}$-équivariant entre les espaces de vecteurs K-finis.

Par [23], p. 109, deux représentations unitaires irréductibles de G sont infinitésimalement équivalentes si et seulement si elles sont unitairement équivalentes. Il suffit donc de voir quelles sont les représentations ci-dessus qui sont unitarisables, i.e., infinitésimalement équivalentes à une représentation unitaire. La discussion faite en [23], pp. 121-124 montre que, si s n'est pas un entier et si $\pi_{\varepsilon,s}$ est unitarisable, alors

$$\begin{array}{lll} s \in & i\mathbb{R} \cup [-1,1] & \text{si} \quad \varepsilon = 0, \\ s \in & i\mathbb{R} & \text{si} \quad \varepsilon = 1. \end{array}$$

La représentation $\pi_n^{\pm}(n \geq 1)$ peut être unitarisée comme suit ([23], pp. 181-185) : soit $\mathcal{H}_n^+$ (resp. $\mathcal{H}_n^-$) l'espace des fonctions holomorphes (resp. anti-holomorphes) f sur le demi-plan supérieur, telles que $\int_{y>0} |f(x,y)| y^{n+1} \dfrac{dxdy}{y^2} < \infty$.

Un élément $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ de G agit sur $\mathcal{H}_n^{\pm}$ par

$$(\pi_n^+(g)f)(z) = (\alpha - \gamma z)^{-n-1} f(g^{-1}.z),$$

$$(\pi_n^-(g)f)(z) = (\alpha - \gamma \hat{z})^{-n-1} f(g^{-1}.z),$$

Une base orthonormée de vecteurs K-finis pour $\mathcal{H}_n^{\pm}$ est donnée par, respectivement

$$\xi_m = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^m (z+i)^{-n-1} \ \ (m \in \mathbb{N})$$

et

$$\xi_m = \left(\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i}\right)^m (\bar{z}-i)^{-n-1} \ \ (m \in \mathbb{N})$$

On vérifie (cf. [30], p. 203) que la fonction

$$t \mapsto \left\langle \pi_n \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \xi_0, \xi_0 \right\rangle$$

est équivalent à $Ce^{-(n+1)t}$ pour une certaine constante C lorsque t tend vers $+\infty$. A partir de la formule intégrale par rapport à la décomposition de Cartan $G = KAK$ ([23], p.139) :

$$dg = \sinh 2t \; dk_1 dt dk_2,$$

on déduit le résultat suivant :

Lemme 67 *Pour $n \geq 1$, la représentation $\pi_n^\pm$ est de carré intégrable. Pour $n \geq 2$, elle est intégrable.*

Au contraire, les représentations $\pi_0^\pm$ ne sont pas de carré intégrable.

Si χ désigne le caractère de base de K, donné par $\chi \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = e^{i\theta}$, on voit que

$$\pi_n^+(k)\varphi_{n+1} = \chi^{n+1}(k)\varphi_{n+1},$$

$$\pi_n^-(k)\varphi_{-n-1} = \chi^{-n-1}(k)\varphi_{-n-1}, \; (n \geq 1)$$

de sorte que le poids minimal(resp. dominant) de π_n^+ (resp. π_n^-) est $n+1$ (resp. $-n-1$).

En résumé, on a la description suivante de $\hat{G}$:

Théorème 68 *Le dual $\hat{G}$ est formé des éléments suivants :*

1. *Les représentations $\pi_{0,s}(s \in i\mathbb{R})$: série principale paire ;*
2. *Les représentations $\pi_{1,s}(s \in i\mathbb{R}\backslash\{0\})$: série principale impaire ;*
3. *Les représentations $\pi_{0,s}(s \in]-1,1[\backslash\{0\})$: série complémentaire ; Pour ces trois séries, on a la relation $\pi_{\varepsilon,s} \cong \pi_{\varepsilon,-s}$.*
4. *Les représentations π_0^+ et π_0^- : "fausse" série discrète ;*
5. *Les représentations $\pi_n^\pm(n \geq 1)$: série discrète ;*
6. *La représentation triviale 1_G.*

B.2 Théorème de Repka

On présente ici le théorème principal de la thèse de J. Repka [28]

Théorème 69 *Le produit tensoriel de deux représentations unitaires irréductibles de $SL(2,\mathbb{R})$ admet la décomposition suivante :*

1. *Pour deux séries principales unitaires nous avons*

$$\pi_{\varepsilon,r} \otimes \pi_{\varepsilon',s} \cong 2\left(\int_{\mathbb{R}^+} \pi_{\varepsilon\varepsilon',it}\, dt\right) \oplus \left(\bigoplus_{|k|\geq 2, k\equiv\varepsilon\varepsilon'} \pi_k\right), \tag{B.3}$$

où $r, s \in i\mathbb{R}$; l'intégrale directe est sur tous les séries principales, π_k sont des séries discretes, et la somme directe est sur tous les k pairs si $\varepsilon\varepsilon'$ est trivial et sur tous les k impairs si $\varepsilon\varepsilon'$ est non trivial.

2. *Pour le produit tensoriel d'une série complémentaire et une série discrète nous avons*

$$\pi_{0,s} \otimes \pi_n \approx \left(\int_{\mathbb{R}^+} \pi_{\varepsilon\varepsilon',it} dt \right) \oplus (\oplus \pi_m). \tag{B.4}$$

3. *En cas de deux séries discrètes, on a (pour $m, n \geq 1$)*

$$\pi_m^{\pm} \otimes \pi_n^{\pm} \cong \pi_{m+n}^{\pm} \oplus \pi_{m+n+2}^{\pm} \oplus \pi_{m+n+4}^{\pm} \oplus \cdots \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} \pi_{n+m+2k}^{\pm}, \tag{B.5}$$

on a également (ε est trivial si $n - m$ est paire)

$$\pi_m^{-} \otimes \pi_n^{+} \cong Ind_K^G \chi_{n-m} \cong \int_{\mathbb{R}^+} \pi_{\varepsilon,it} dt \oplus \left(\bigoplus_{k \equiv n-m, 2 \leq |k| \leq |n-m|} \pi_k \right). \tag{B.6}$$

4. *Soit ε le caractère non trivial,*
(i) Pour un couple (ε', r) ($r \in i\mathbb{R}$; ou $r \in (-1, 0)$ et $\varepsilon' = 0$) ;

$$\pi_1 \otimes \pi_{\varepsilon',r} \approx \left(\int_{\mathbb{R}^+} \pi_{\varepsilon\varepsilon',it} dt \right) \bigoplus \bigoplus_{m \equiv \varepsilon\varepsilon', m \geq 2} \pi_m, \tag{B.7}$$

$$\pi_{-1} \otimes \pi_{\varepsilon',r} \approx \left(\int_{\mathbb{R}^+} \pi_{\varepsilon\varepsilon',it} dt \right) \bigoplus \bigoplus_{m \equiv \varepsilon\varepsilon', m \leq -2} \pi_m; \tag{B.8}$$

(ii)

$$\pi_1 \otimes \pi_1 \approx \bigoplus_{m=1}^{\infty} \pi_{2m}, \tag{B.9}$$

$$\pi_{-1} \otimes \pi_{-1} \approx \bigoplus_{m=1}^{\infty} \pi_{-2m}, \tag{B.10}$$

$$\pi_1 \otimes \pi_{-1} \approx \int_{\mathbb{R}} \pi_{it,\varepsilon\varepsilon'} dt; \tag{B.11}$$

(iii) si $m \geq 2$, ε' est le caractère trivial (resp. non) si m est pair (resp. impair), on a

$$\pi_1 \otimes \pi_m \approx \bigoplus_{k=0}^{\infty} \pi_{m+1+2k}, \tag{B.12}$$

$$\pi_{-1} \otimes \pi_{-m} \approx \bigoplus_{k=0}^{\infty} \pi_{-(m+1+2k)}, \tag{B.13}$$

$$\pi_1 \otimes \pi_{-m} \approx \left(\int_{\mathbb{R}^+} \pi_{it,\varepsilon\varepsilon'} dt \right) \bigoplus \bigoplus_{k \equiv m+1, 2 \leq k < m} \pi_{-k}; \tag{B.14}$$

$$\pi_1 \otimes \pi_{-m} \approx \left(\int_{\mathbb{R}^+} \pi_{it,\varepsilon\varepsilon'} dt \right) \bigoplus \bigoplus_{k \equiv m+1, 2 \leq k < m} \pi_{-k}. \tag{B.15}$$

Annexe C

La valeur de P_3

Ce sont les résultats des calculs de Mathematica.

$$\begin{aligned}
& P_3(k,l,m,r,t) \\
= \;& 4l(r+t)(-3k^2r^2-2k^3r^2+3klr^2+2kl^2r^2-6kmr^2-15k^2mr^2-3k^3mr^2+3lmr^2 \\
& \quad --9klmr^2-6k^2lmr^2 3kl^2mr^2-3m^2r^2-24km^2r^2-15k^2m^2r^2-9lm^2r^2 \\
& \quad -24klm^2r^2-9l^2m^2r^2-11m^3r^2-21km^3r^2-18lm^3r^2-9m^4r^2+12k^2rt+17k^3rt \\
& \quad +3k^4rt+6klrt+21k^2lrt+6k^3lrt+4kl^2rt+3k^2l^2rt+24kmrt+51k^2mrt+24k^3mrt \\
& \quad +6lmrt+42klmrt+42k^2lmrt+4l^2mrt+18kl^2mrt+12m^2rt+51km^2rt+42k^2m^2rt \\
& \quad +21lm^2rt+42klm^2rt+3l^2m^2rt+17m^3rt+24km^3rt+6lm^3rt+3m^4rt-3k^2t^2 \\
& \quad -11k^3t^2-9k^4t^2+3klt^2-9k^2lt^2-18k^3lt^2+2kl^2t^2-9k^2l^2t^2-6kmt^2-24k^2mt^2 \\
& \quad -21k^3mt^2+3lmt^2-9klmt^2-24k^2lmt^2+2l^2mt^2-3kl^2mt^2-3m^2t^2-15km^2t^2 \\
& \quad -15k^2m^2t^2-6klm^2t^2-2m^3t^2-3km^3t^2+2l^2mr^2).
\end{aligned}$$

En prenant les valeurs $t=\mu[(k+3m)(k+l+m)+(k+m)], r=\mu[(3k+m)(k+l+m)+(k+m)]$, on obtient

$$\begin{aligned}
& P_3(k,l,m,\mu[(3k+m)(k+l+m)+(k+m)],\mu[(3k+m)(k+l+m)+(k+m)]) \\
= \;& \mu^3(48k^5l+320k^6l+720k^7l+672k^8l+256k^9l+96k^4l^2+960k^5l^2+2976k^6l^2+3552k^7l^2 \\
& \quad +1536k^8l^2+640k^4l^3+3792k^5l^3+6624k^6l^3+3584k^7l^3+1536k^4l^4+5280k^5l^4 \\
& \quad +4096k^6l^4+1536k^4l^5+2304k^5l^5+512k^4l^6+240k^4lm+1920k^5lm+5232k^6lm \\
& \quad +5760k^7lm+2304k^8lm+384k^3l^2m+4800k^4l^2m+18240k^5l^2m+26016k^6l^2m \\
& \quad +12288k^7l^2m+2560k^3l^3m+19152k^4l^3m+40896k^5l^3m+25088k^6l^3m+6144k^3l^4m \\
& \quad +26784k^4l^4m+24576k^5l^4m+6144k^3l^5m+11520k^4l^5m+2048k^3l^6m+480k^3lm^2 \\
& \quad +4800k^4lm^2+16080k^5lm^2+21120k^6lm^2+9216k^7lm^2+576k^2l^2m^2+9600k^3l^2m^2 \\
& \quad +46176k^4l^2m^2+80352k^5l^2m^2+43008k^6l^2m^2+3840k^2l^3m^2+38496k^3l^3m^2 \\
& \quad +103968k^4l^3m^2+75264k^5l^3m^2+9216k^2l^4m^2+53952k^3l^4m^2+61440k^4l^4m^2 \\
& \quad +9216k^2l^5m^2+23040k^3l^5m^2+3072k^2l^6m^2+480k^2lm^3+6400k^3lm^3+27120k^4lm^3 \\
& \quad +43392k^5lm^3+21504k^6lm^3+384kl^2m^3+9600k^2l^2m^3+61824k^3l^2m^3+135840k^4l^2m^3 \\
& \quad +86016k^5l^2m^3+2560kl^3m^3+38496k^2l^3m^3+139392k^3l^3m^3+125440k^4l^3m^3 \\
& \quad +6144kl^4m^3+53952k^2l^4m^3+81920k^3l^4m^3+6144kl^5m^3+23040k^2l^5m^3 \\
& \quad +2048kl^6m^3+240klm^4+4800k^2lm^4+27120k^3lm^4+54720k^4lm^4+256lm^9 \\
& \quad +32256k^5lm^4+96l^2m^4+4800kl^2m^4+46176k^2l^2m^4+135840k^3l^2m^4 \\
& \quad +107520k^4l^2m^4+640l^3m^4+19152kl^3m^4+103968k^2l^3m^4+125440k^3l^3m^4 \\
& \quad +1536l^4m^4+26784kl^4m^4+61440k^2l^4m^4+1536l^5m^4+11520kl^5m^4+512l^6m^4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+48lm^5 + 1920klm^5 + 16080k^2lm^5 + 43392k^3lm^5 + 32256k^4lm^5 + 960l^2m^5\\
&+18240kl^2m^5 + 80352k^2l^2m^5 + 86016k^3l^2m^5 + 3792l^3m^5 + 40896kl^3m^5\\
&+75264k^2l^3m^5 + 5280l^4m^5 + 24576kl^4m^5 + 2304l^5m^5 + 320lm^6 + 5232klm^6\\
&+21120k^2lm^6 + 21504k^3lm^6 + 2976l^2m^6 + 26016kl^2m^6 + 43008k^2l^2m^6\\
&+6624l^3m^6 + 25088kl^3m^6 + 4096l^4m^6 + 720lm^7 + 5760klm^7 + 9216k^2lm^7\\
&+3552l^2m^7 + 12288kl^2m^7 + 3584l^3m^7 + 672lm^8 + 2304klm^8 + 1536l^2m^8).
\end{aligned}
$$

Bibliographie

[1] Bayen, F. ; Flato, M. ; Fronsdal, C. ; Lichnerowicz, A. ; Sternheimer, D. Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures. Ann. Physics 111 (1978), no. 1, 61–110.

[2] Bieliavsky, Pierre ;Tang, Xiang ; Yao, Yi-Jun Rankin-Cohen brackets and quantization of foliation, Part I : formal quantization, math.QA/0506506, à paraitre dans *Advances in Mathematics*

[3] Bröcker, Theodor ; tom Dieck, Tammo Representations of compact Lie groups. Translated from the German manuscript. Corrected reprint of the 1985 translation. Graduate Texts in Mathematics, 98. Springer-Verlag, New York, 1995. x+313 pp. ISBN : 0-387-13678-9

[4] Cohen, H., Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters, *Math. Ann.* **217** (1975), 271-285.

[5] Cohen, Paula Beazley ; Manin, Yuri ; Zagier, Don, Automorphic pseudodifferential operators. Algebraic aspects of integrable systems, 17–47, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 26, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.

[6] Connes, Alain Noncommutative differential geometry. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 62 (1985), 257–360.

[7] Connes, A., Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation. In **Geometric methods in operator algebras**, pp. 52–144, *Pitman Res. Notes in Math.* **123**, Longman, Harlow, 1986.

[8] Connes, Alain Noncommutative geometry. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994. xiv+661 pp. ISBN : 0-12-185860-X ftp ://ftp.alainconnes.org/book94bigpdf.pdf

[9] Connes, A. and Moscovici, H., Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem, *Commun. Math. Phys.* **198** (1998), 199-246.

[10] Connes, A. and Moscovici, H., Cyclic cohomology and Hopf algebra symmetry, *Letters Math. Phys.* **52** (2000), 1-28.

[11] Connes, Alain ; Moscovici, Henri Differentiable cyclic cohomology and Hopf algebraic structures in transverse geometry. Essays on geometry and related topics, Vol. 1, 2, 217–255, Monogr. Enseign. Math., 38, Enseignement Math., Geneva, 2001.

[12] Connes, Alain ; Moscovici, Henri, Modular Hecke algebras and their Hopf symmetry. Mosc. Math. J. 4 (2004), no. 1, 67–109, 310.

[13] Connes, Alain ; Moscovici, Henri, Rankin-Cohen brackets and the Hopf algebra of transverse geometry. Mosc. Math. J. 4 (2004), no. 1, 111–130, 311.

[14] Deligne, P. Formes modulaires et représentations de GL(2). (French) Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 55–105. Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer, Berlin, 1973.

[15] Fedosov, Boris Deformation quantization and index theory. Mathematical Topics, 9. Akademie Verlag, Berlin, 1996. 325 pp. ISBN : 3-05-501716-1

[16] Gracia-Bondía, José M. ; Várilly, Joseph C. ; Figueroa, Héctor Elements of noncommutative geometry. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks] Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001. xviii+685 pp. ISBN : 0-8176-4124-6

[17] Gutt, S., *Déformations formelles de l'algèbre des fonctions différentiables sur une variété sympletique*, thesis, Universite Libre de Bruxelles, 1983.

[18] Giaquinto, A., and Zhang, J., Bialgebra actions, twists, and universal deformation formulas, *J. Pure Appl. Algebra* 128 (1998), no. 2, 133–151.

[19] From number theory to physics. Papers from the Meeting on Number Theory and Physics held in Les Houches, March 7–16, 1989. Edited by M. Waldschmidt, P. Moussa, J. M. Luck and C. Itzykson. Springer-Verlag, Berlin, 1992. xiv+690 pp. ISBN 3-540-53342-7

[20] Kirillov, A. Eléments de la théorie des représentations. (French) Traduit du russe par A. Sossinsky [A. B. Sosinskiĭ]. Editions Mir, Moscow, 1974. 347 pp.

[21] Knapp, Anthony W. Representation theory of semisimple groups. An overview based on examples. Reprint of the 1986 original. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. xx+773 pp. ISBN : 0-691-09089-0

[22] Kravchenko, Olga How to calculate the Fedosov star–product (Exercices de style), math.SG/0008157

[23] Lang, Serge $\mathrm{SL}_2(R)$. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1975. xvi+428 pp.

[24] Labesse, Jean-Pierre, Communication Personnelle, 2005.

[25] S.A. Merkulov, The Moyal product is the matrix product, math-ph/0001039.

[26] Moyal, J. E. Quantum mechanics as a statistical theory. Proc. Cambridge Philos. Soc. 45, (1949). 99–124.

[27] Rankin, R. A. The construction of automorphic forms from the derivatives of a given form. J. Indian Math. Soc. (N.S.) 20 (1956), 103–116.

[28] Repka, Joe Tensor products of unitary representations of $\mathrm{SL}_2(R)$. Amer. J. Math. 100 (1978), no. 4, 747–774.

[29] Serre, J.-P. A course in arithmetic. Translated from the French. Graduate Texts in Mathematics, No. 7. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. viii+115 pp.

[30] Schmid, W. Representations of semi-simple Lie groups, dans : Representation theory of Lie groups, London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 34 (1979), Cambridge Univ. Press.

[31] Sugiura, Mitsuo Unitary representations and harmonic analysis. An introduction. Kodansha Ltd., Tokyo ; Halstead Press [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1975. xii+402 pp.

[32] Valette, Alain, K-Théorie pour Certaines C^*-algèbres Associées aux Groupes de Lie, Thèse, Université Libre de Bruxelles, 1983.

[33] Vogan, David A., Jr. Representations of real reductive Lie groups. Progress in Mathematics, 15. Birkhäuser, Boston, Mass., 1981. xvii+754 pp. ISBN : 3-7643-3037-6

[34] Zagier, D., Modular forms and differential operators. K. G. Ramanathan memorial issue, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* 104 (1994), no. 1, 57–75.

[35] Zagier, D., Formes modulaires et Opérateurs différentiels, *Cours 2001-2002 au Collège de France.*

[36] Zagier, D., Some combinatorial identities occuring in the theory of modular forms, en préparation.