ÉCOLE POLYTECHNIQUE

THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Mécanique

par

Wael ZAKI

Sujet de thèse :

Comportement thermo-mécanique des matériaux à mémoire de forme

modélisation macroscopique, chargement cyclique et fatigue

Soutenue le 5 octobre 2006 devant le jury composé de

Président :	M. Quoc Son NGUYEN
Rapporteurs :	M. Michel FRÉMOND
	M. Yves LEROY
Examinateurs :	M. Gilbert HÉNAFF
	M. Bogdan RANIECKI
Invité :	M. Huy Duong BUI
Directeur :	M. Ziad MOUMNI

Cette thèse a été préparée à l'UME–MS de l'École Nationale Supérieure de Techniques Avancées.

ENSTA

À mes parents

Remerciements

Je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Mes remerciements vont, en premier, à mon directeur de thèse Monsieur Ziad MOUMNI pour son encouragement et sa disponibilité malgré son emploi de temps chargé.

Je remercie, pareillement, Messieurs Michel FRÉMOND et Yves LEROY pour leurs remarques et leurs conseils.

Monsieur Bogdan RANIECKI a accepté de faire le voyage de Varsovie à Paris pour siéger à ma soutenance. Qu'il trouve ici un témoignage de ma gratitude.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs Huy Duong BUI, Gilbert HÉNAFF et Quoc Son NGUYEN pour leur participation active à mon jury de thèse.

Pour sa lecture minutieuse de mon manuscrit et pour les nombreuses corrections qu'elle a suggérées, je remercie Madame Nizha CHATAR-MOUMNI.

Merci également à Monsieur Antoine CHAIGNE, directeur de l'Unité de Mécanique de l'ENSTA, qui a accepté de m'accueillir au sein de ses équipes.

Finalement, j'adresse mes remerciements les plus chaleureux à mes parents ; à Jad, Rachad et Nana ; à Alia, Josette, Mazen, Igor, Thuy et à tous les collègues et les amis qui m'ont accordé leur soutien pendant les trois années que j'ai investies dans la recherche et dans la rédaction de ce manuscrit.

Table des matières

Introduction générale **1**

1 À propos des matériaux à mémoire de forme **5**
1.1 Introduction 5
1.2 Transformation martensitique 5
1.3 Diagramme d'état 6
1.4 Propriétés des matériaux à mémoire de forme 7
1.4.1 Autoaccommodation de la martensite 7
1.4.2 Orientation de la martensite 7
1.4.3 Effet mémoire simple sens 8
1.4.4 Effet superthermique 8
1.4.5 Pseudoélasticité 9
1.4.6 Éducation et effet mémoire double sens 9
1.4.7 Effet caoutchoutique 10
1.5 Synthèse bibliographique 10
1.6 Applications 14
1.6.1 Applications biomédicales 14
1.6.2 Applications aérospatiales et militaires 14
1.6.3 Applications en génie civil 15
1.6.4 Diverses autres applications 15

2 Cadre théorique de la modélisation **25**
2.1 Introduction 25
2.2 Méthode des deux potentiels 25
2.2.1 Cas des variables d'état indépendantes 26
2.2.2 Cas des variables d'état dépendantes 27
2.2.3 Exemple d'application : modèle Moumni–Nguyen 28
2.3 Conclusion 30

3 Un premier modèle unidimensionnel unifié **33**
3.1 Introduction 33
3.2 Modèle de comportement des MMF 33
3.2.1 Variables d'état et énergie libre 33
3.2.2 Liaisons internes et lagrangien 34
3.2.3 Lois d'état 35
3.2.4 Pseudo-potentiel de dissipation 36
3.2.5 Fonctions critères et lois complémentaires 37
3.2.6 Procédure d'identification des paramètres 38

3.3 Modélisation des différents phénomènes 42
3.3.1 Pseudoélasticité 42
3.3.2 Autoaccommodation de la martensite 43
3.3.3 Orientation de la martensite autoaccommodante 44
3.3.4 Effet mémoire simple sens (EMSS) 45
3.3.5 Effet superthermique 45
3.3.6 Réponse à un chargement thermomécanique quelconque . . . 47
3.4 Simulation numérique et validation du modèle 49
3.4.1 Identification des paramètres du modèle 51
3.4.2 Validation expérimentale 55
3.4.3 Simulation de l'autoaccommodation 58
3.4.4 Simulation de l'effet mémoire simple sens 59
3.4.5 Simulation de l'effet superthermique 60
3.4.6 Simulation de la pseudoélasticité anisotherme 61
3.5 Conclusion 62

4 Généralisation 3D : cas des chargements proportionnels 65
4.1 Introduction 65
4.2 Variables d'état et énergie libre 66
4.3 Loi de comportement et fonctions critères 67
4.4 Lois complémentaires 68
4.4.1 Pseudoélasticité 70
4.4.2 Autoaccommodation de la martensite 70
4.4.3 Orientation de la martensite autoaccommodante 71
4.4.4 Effet mémoire simple sens 71
4.4.5 Effet superthermique 72
4.4.6 Réponse à un chargement thermomécanique quelconque . . . 73
4.5 Simulation numérique 76
4.5.1 Exemple 1 : calcul d'une barre en MMF 77
4.5.2 Exemple 2 : calcul d'un cylindre creux 82
4.6 Conclusion 84

5 Un nouveau modèle 3D unifié : cas des chargements non proportionnels 87
5.1 Introduction 87
5.2 Modèle de comportement des MMF 88
5.2.1 Variables d'état et énergie libre 88
5.2.2 Liaisons internes et lagrangien 89
5.2.3 Lois d'état 91
5.2.4 Pseudo-potentiel de dissipation 91
5.2.5 Fonctions critères et lois complémentaires 92
5.2.6 Procédure d'identification des paramètres 95
5.3 Modélisation des différents phénomènes 99
5.3.1 Pseudoélasticité 100
5.3.2 Autoaccommodation de la martensite 102
5.3.3 Orientation de la martensite autoaccommodante 103
5.3.4 Effet mémoire simple sens 104
5.3.5 Effet superthermique 104
5.3.6 Réponse à un chargement thermomécanique quelconque . . . 106
5.4 Simulation numérique et validation du modèle 108
5.4.1 Identification des paramètres du modèle 108

5.4.2 Validation expérimentale 110
5.4.3 Simulation de l'autoaccommodation 113
5.4.4 Simulation de l'effet mémoire simple sens 114
5.4.5 Simulation de l'effet superthermique 115
5.4.6 Simulation de la pseudoélasticité anisotherme 116
5.4.7 Comportement d'un stent pseudoélastique 117
5.5 Conclusion 119

6 Extension au comportement cyclique et à la fatigue 123
6.1 Introduction 123
6.2 Observations expérimentales 124
6.3 Modélisation du comportement cyclique des MMF 126
6.3.1 Variables d'état et énergie libre 126
6.3.2 Liaisons internes et lagrangien 127
6.3.3 Lois d'état 128
6.3.4 Fonctions critères et lois complémentaires 129
6.3.5 Procédure d'identification des paramètres 135
6.4 Simulation numérique et validation du modèle 142
6.4.1 Simulation de la pseudoélasticité cyclique 142
6.4.2 Simulation de l'effet mémoire double sens 146
6.4.3 Simulation de l'effet superthermique cyclique 147
6.4.4 Réponse à un chargement cyclique quelconque 149
6.5 Ébauche d'un modèle de fatigue des MMF 150
6.5.1 Étude expérimentale 150
6.5.2 Résultats et interprétations 151
6.6 Conclusion 155

Conclusion générale 159

ANNEXES 161

A Calculs relatifs au chapitre 4 161
A.1 Lois d'état 161
A.2 Pseudo-potentiel de dissipation et fonctions critères 163
A.3 Lois complémentaires 166
A.4 Procédure d'identification des paramètres 169
A.4.1 Essai d'orientation 169
A.4.2 Essai de traction–décharge dans le domaine pseudoélastique . 170

B Calculs relatifs au chapitre 6 173
B.1 Lois d'état 173
B.2 Lois complémentaires 175
B.3 Procédure d'identification des paramètres 181
B.3.1 Essai d'orientation 182
B.3.2 Essai de traction répétée dans le domaine pseudoélastique . . 183

Introduction générale

Depuis la découverte de l'effet mémoire de forme dans les années 50, l'intérêt porté à l'étude des matériaux pouvant manifester cet effet ne cesse de croître. D'abord considérés comme des « curiosités de laboratoire », les matériaux à mémoire de forme, ou MMF, ont revêtu un intérêt pratique avec la découverte par Buehler, en 1961, de l'effet mémoire au sein d'un alliage en Nickel–Titane qu'il a baptisé « Nitinol ». Le Nitinol, supérieur aux alliages classiques de par ses propriétés mécaniques, a attiré l'attention de la compagnie « Raychem » qui l'a utilisé pour la fabrication d'éléments de raccordement pour les tuyauteries des avions F–14 de la marine américaine. L'usage du Nitinol s'est ensuite étendu à d'autres secteurs de l'industrie militaire, mais aussi à des applications civiles technologiquement avancées, notamment dans le domaine aérospatial. Les qualités du Nitinol ne se limitent cependant pas à ses remarquables propriétés mécaniques. Cet alliage possède, en effet, une bonne biocompatibilité qui permet son utilisation pour des applications biomédicales, en particulier pour la fabrication de stents. Utilisés d'abord en tant qu'endoprothèses vasculaires, les stents ont ensuite été adaptés à l'usage de la chirurgie des voies respiratoires. En même temps, d'autres applications biomédicales ont vu le jour, on en cite notamment des implants variés et des agrafes ainsi que nombreux outils chirurgicaux : cathéters, fils orthodontiques, aiguilles de suture, etc.

La particularité du Nitinol, et des MMF en général, est due en grande partie à un changement de phase à l'état solide appelé « transformation martensitique », caractérisé à l'échelle microscopique par une transition de la structure cristallographique du matériau d'une configuration symétrique dite « austénitique » vers une autre moins symétrique dite « martensitique ». Cette transition permet l'accommodation de larges déformations recouvrables par simple chauffage.

La transformation martensitique, pouvant être induite sous diverses conditions de chargement thermomécanique, est largement influencée par des facteurs tels que la composition du matériau et les conditions de sa mise en oeuvre : autant d'éléments qui compliquent la compréhension des mécanismes inhérents à cette transformation, aussi bien sur le plan expérimental que sur le plan théorique, mais qui motivent en contrepartie des travaux de recherche toujours plus nombreux. Parmi ces travaux, certains concernent l'élaboration de MMF moins coûteux, plus faciles à mettre en oeuvre et plus performants, d'autres, comme c'est le cas dans ce mémoire, portent sur la modélisation du comportement de ces matériaux et la prédiction de leur tenue pour diverses conditions d'utilisation.

Les modèles de comportement proposés dans la littérature se limitent souvent à la description d'un nombre réduit de phénomènes associés aux MMF. Ils peuvent être classés en fonction de leur niveau de complexité et de leur intérêt en plusieurs catégories :

– les nombreux modèles permettant la description du comportement pseudoélastique unidimensionnel ;
– les modèles unidimensionnels capables de simuler d'autres types de comportement, en particulier l'orientation de la martensite, et dont l'intérêt est généralement d'ordre qualitatif ;
– les modèles tridimensionnels qui s'appliquent au cas des chargements mécaniques multiaxiaux proportionnels. Ces modèles sont peu nombreux et leur capacité à décrire le comportement de structures en MMF est généralement explorée à l'aide d'exemples simples faisant souvent appel aux seuls chargements uniaxiaux ;
– les modèles applicables au calcul de structures en MMF soumises à des chargements thermomécaniques complexes multiaxiaux non nécessairement proportionnels. Ces rares modèles font souvent intervenir des paramètres difficiles à identifier. Leur utilisation dans des codes de calcul se limite essentiellement à des exemples simples, souvent unidimensionnels.

Notre travail établit un nouveau modèle de comportement des MMF qui se distingue par son caractère « complet » et « unifié » : complet, parce qu'il permet la description des principaux phénomènes caractéristiques des matériaux à mémoire de forme ; unifié, parce qu'il s'appuie sur une même loi de comportement et sur les mêmes lois complémentaires. Notre modèle ne fait pas l'hypothèse des chargements mécaniques proportionnels, souvent adoptée dans la littérature ; ceci nous permet de réaliser des calculs de structures soumises à des chargements complexes, comme le montre l'exemple proposé au chapitre 5 concernant la modélisation du comportement d'un stent pseudoélastique. En outre, nous proposons une généralisation du modèle permettant la prise en compte des chargements cycliques et ouvrant la voie vers la modélisation de la fatigue des MMF. Dans ce cadre, en opérant une analogie entre la réponse pseudoélastique cyclique des matériaux à mémoire de forme et la réponse élastoplastique cyclique des aciers, nous proposons un critère énergétique permettant la détermination de la durée de vie d'un MMF pseudoélastique. Nous montrons d'ailleurs, en s'appuyant sur des résultats d'essais, que les prédictions du modèle ainsi que celles du critère sont satisfaisantes.

La thèse est répartie en six chapitres complétés par deux annexes. Le développement des arguments suit un enchaînement progressif qui part d'un modèle unidimensionnel simple, mais polyvalent, pour aboutir à un modèle complet associé à un critère de calcul de durée de vie à la fatigue des structures en MMF.

Le contenu est organisé de la manière suivante :

– le premier chapitre introduit la transformation martensitique et les propriétés qu'elle confère aux matériaux à mémoire de forme. Cette introduction est suivie d'une synthèse bibliographique et de quelques exemples d'application des MMF. L'étude bibliographique, sans prétendre à l'exhaustivité, constitue une description comparative générale des modèles existants, permettant de justifier le choix de notre démarche de modélisation ;
– le deuxième chapitre présente le cadre théorique des matériaux standards généralisés dans le cas où les variables définissant l'état local du matériau sont indépendantes ainsi que dans le cas, plus général, où ces variables sont liées. Un exemple d'application est proposé sous forme de la loi de comportement Moumni–Nguyen, permettant une description qualitative de l'effet pseudoélastique associé aux MMF ;
– le troisième chapitre propose une généralisation du modèle Moumni–Nguyen améliorant la modélisation de la pseudoélasticité et offrant la possibilité de si-

muler divers autres phénomènes tels que l'autoaccommodation de la martensite, l'orientation de la martensite autoaccommodante, l'effet mémoire simple sens et l'effet superthermique. La généralisation proposée considère des transformations à trois phases : l'austénite et deux variantes martensitiques, où la température peut varier et où les modules élastiques de l'austénite et de la martensite ne sont pas nécessairement égaux.
Notre modèle généralisé est validé en comparant ses prédictions à des résultats d'essais tirés de la littérature. Nous montrons ainsi que ce modèle permet une description quantitative satisfaisante du comportement unidimensionnel des matériaux à mémoire de forme. Une procédure simple d'identification des paramètres matériels est décrite en détail ;

– le quatrième chapitre est consacré à la généralisation du modèle 1D du chapitre précédent afin de permettre le calcul de structures soumises à des chargements multiaxiaux en 3D. Si la généralisation est immédiate, dans le sens où elle s'obtient directement en substituant des quantités tensorielles à certains scalaires, elle se limite aux seuls chargements proportionnels ;
– Au cinquième chapitre, nous proposons un nouveau modèle, *complet* et *unifié*, du comportement des MMF. Ce modèle est développé, en 3D, dans un cadre similaire à celui de l'élastoplasticité classique. Plus précisément, l'orientation de la martensite est décrite à l'aide d'un tenseur variable de déformation inélastique locale dont le module définit le niveau d'orientation et les composantes permettent de déterminer les directions selon lesquelles s'alignent les variantes martensitiques sous l'effet de la contrainte. Notre modèle est validé dans le cas des chargements uniaxiaux et sa capacité à simuler la réponse de structures en MMF à des chargements multiaxiaux non proportionnels est illustrée à l'aide d'un exemple ;
– Nous nous intéressons, dans le dernier chapitre au comportement sous chargement cyclique et à la fatigue en régime pseudoélastique des structures en MMF.
Le chargement cyclique peut induire un changement de phase répété entraînant une stabilisation des propriétés thermomécaniques d'un MMF, conduisant ainsi à l'« éducation » du matériau. Nous simulons la réponse cyclique en faisant dépendre les paramètres matériels d'une fraction cumulée de martensite permettant de décrire l'évolution du comportement avec le nombre de cycles, cette approche nous permet en même temps de modéliser l'« effet mémoire double sens » caractérisant le passage réversible d'un MMF, sous l'effet d'un chargement thermique uniquement, d'un état austénitique à un état martensitique déformé.
Le modèle obtenu est validé dans le cas d'une traction répétée dans le domaine pseudoélastique faisant apparaître une succession de boucles d'hystérésis qui se stabilisent après un certains nombre de cycles. Ce comportement rappelle le phénomène d'accommodation dans le cas des matériaux élastoplastiques usuels. De ce fait, en s'appuyant sur un travail existant concernant la fatigue oligocyclique des aciers, nous proposons d'utiliser l'énergie dissipée associée à la boucle stabilisée afin d'estimer la durée de vie à la fatigue des MMF pseudoélastiques. Nous validons le critère dans le cas des chargements cycliques en traction.
– enfin, dans deux annexes, nous détaillons les calculs ayant permis d'établir les modèles de comportement des chapitres 3 et 6. Tous les résultats énoncés à travers les différents chapitres peuvent être retrouvés à l'aide de ces calculs.

Par souci de clarté, puisque la procédure de modélisation subit peu de modifications tout au long du présent mémoire, nous avons organisé de la même manière les chapitres 3 à 6.

CHAPITRE 1

À propos des matériaux à mémoire de forme

1.1 Introduction

L'appellation « matériaux à mémoire de forme », ou MMF, désigne une classe de métaux ainsi que quelques plastiques (Gandhi et Thompson, 1992), céramiques (Uchino, 1999) et polymères (Irie, 1999) pouvant être déformés inélastiquement jusqu'à plusieurs pourcents (Buehler et coll., 1963 ; Wayman et Otsuka, 1999 ; Shaw, 2002) et retrouver leur forme initiale moyennant un chargement thermomécanique approprié. Autrement dit, le matériau agit comme s'il mémorisait son état avant déformation, d'où son nom. La particularité du comportement des MMF est due à un changement de phase, appelé « transformation martensitique », affectant leur structure cristallographique à l'état solide.

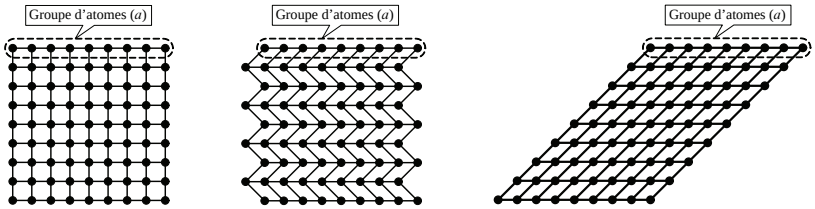
1.2 Transformation martensitique

La transformation martensitique désigne un changement de phase particulier à l'état solide. Elle possède les propriétés suivantes (Otsuka, 2001 ; Ahluwalia et coll., 2004 ; Van Humbeeck, 1993) :

- elle est « displacive », ce qui veut dire que les atomes de la configuration cristallographique initiale (figure 1.1.a) se déplacent solidairement lors de la transformation. Le déplacement des groupes d'atomes se fait selon des plans cristallographiques bien définis (figures 1.1.b et 1.1.c) de telle sorte que le déplacement relatif des atomes reste inférieur aux distances inter-atomiques ;
- elle s'effectue sans diffusion d'atomes, affectant le degré de symétrie du réseau cristallographique sans modifier la concentration des atomes au sein du cristal ;
- c'est une transformation de premier ordre. C'est-à-dire que lors de la transition d'une phase à l'autre, l'énergie de Gibbs est identique pour les deux phases à la température de transition mais ses dérivées par rapport à la température et à la pression sont discontinues (International Union of Pure and Applied Chemistry, 1997) ;

– le changement de phase est associé, comme en plasticité classique, à un cisaillement des plans atomiques. Le changement de volume résultant est souvent considéré négligeable (Lexcellent et coll., 2000).

La transformation martensitique conduit à une transition d'une configuration cristallographique symétrique d'une phase mère, stable à haute température, dite « austénite », vers une phase produit, moins symétrique, appelée « martensite » (McNaney et coll., 2003 ; Müller et Seelecke, 2001 ; Shaw et Kyriakides, 1995). La perte de symétrie permet la formation de plusieurs variantes martensitiques à partir d'une même phase mère (Wayman et Otsuka, 1999).



1.1.a – Réseau non déformé d'un cristal de matériau à mémoire de forme.

1.1.b – Réseau déformé au niveau microscopique, à déformation macroscopique nulle.

1.1.c – Réseau déformé au niveau microscopique, à déformation macroscopique non nulle.

FIG. 1.1 – Exemple d'un cristal de matériau à mémoire de forme subissant une transformation martensitique.

Le mécanisme de la transformation martensitique ressemble à celui de la déformation plastique dans les aciers. La différence principale est l'absence du changement de phase dans le cas de la plasticité classique (Guillet et Poupeau, 1973).

Les plans séparant les variantes martensitiques de l'austénite sont dits « plans limites » ou « d'habitat » et sont généralement considérés comme invariants lors du changement de phase (Wechsler et coll., 1953 ; Bowles et Mackenzie, 1954 ; Ball et James, 1987). Les variantes martensitiques, au nombre de 24 (Lim et McDowell, 2002), peuvent être définies par leurs orientations relatives par rapport à un plan limite. L'identification de ces orientations n'est cependant pas facile, surtout dans le cas des polycristaux (Guillet et Poupeau, 1973).

1.3 Diagramme d'état

En fonction de l'état de contrainte au sein du cristal ainsi que de sa température, on arrive à situer l'état du matériau soit dans le domaine austénitique, soit dans le domaine martensitique, ou encore dans une zone de mélange. Le diagramme d'état sert à délimiter ces domaines dans un espace température–contrainte (figure 1.2). Sur le diagramme d'état de la figure 1.2, M_s^0 et M_f^0 représentent respectivement les températures de début et de fin de la transformation dite « directe » de l'austénite en martensite à contrainte nulle. A_s^0 et A_f^0 sont les températures de début et de fin de la transformation « inverse » de la martensite en austénite.

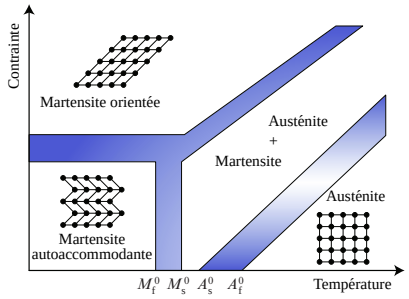


FIG. 1.2 – Diagramme d'état schématique d'un matériau à mémoire de forme.

1.4 Propriétés des matériaux à mémoire de forme

Un réseau cristallin qui a subi une transformation martensitique peut retrouver son état initial non déformé (Guillet et Poupeau, 1973). C'est le cas pour les matériaux à mémoire de forme où plusieurs types de comportements peuvent être distingués.

1.4.1 Autoaccommodation de la martensite

À haute température, dans le cas d'un chargement mécanique nul, un MMF se trouve à l'état austénitique (figure 1.2). Si l'austénite, monovariante, est refroidie, elle se transforme en martensite à partir d'une température–seuil caractéristique du matériau. En l'absence de contraintes au sein du MMF, aucune orientation particulière du réseau cristallographique n'est favorisée. La conséquence est la formation d'agglomérations de variantes martensitiques avec une déformation macroscopique moyenne nulle (Bhattacharya, 1992 ; Madangopal, 1998) (figure 1.1.b).

1.4.2 Orientation de la martensite

La martensite autoaccommodante peut être orientée sous l'effet d'un chargement mécanique. La contrainte créée au sein du matériau privilégie dans ce cas la formation des variantes martensitiques compatibles avec son orientation (Liu et coll., 1999). Ceci entraîne des déformations macroscopiques importantes, de l'ordre de 10 % dans le cas d'un alliage à mémoire de forme de type Nickel–Titane par exemple (Buehler et coll., 1963). Ces déformations persistent après la décharge (figure 1.3).

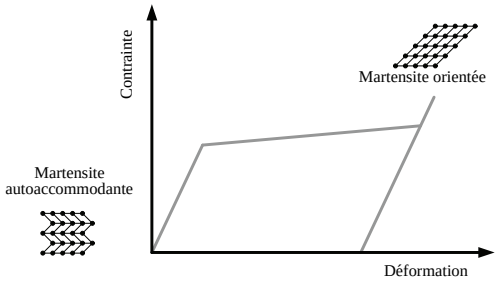


FIG. 1.3 – Orientation en traction d'une éprouvette en MMF.

1.4.3 Effet mémoire simple sens

Un MMF, déformé à l'état martensitique, peut retrouver sa forme initiale par chauffage au-delà d'une température seuil qui dépend notamment de l'état de contrainte au sein du matériau (figure 1.2). Le chauffage conduit, au niveau cristallographique, à une transformation dite « inverse » entraînant la transition de l'état déformé basse température vers un état austénitique haute température plus symétrique de sorte que la déformation macroscopique observée à l'état martensitique disparaît (figure 1.4).

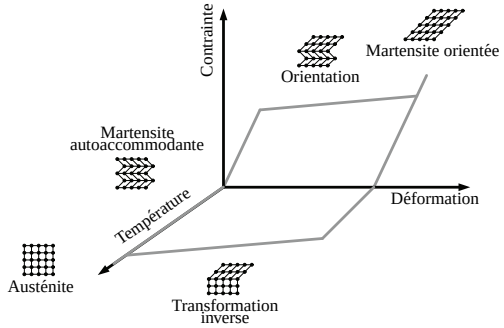


FIG. 1.4 – Courbe température–contrainte–déformation représentant l'effet mémoire simple sens. Le MMF, après avoir été refroidi et déformé, retrouve sa forme initiale suite à la transformation inverse de la martensite en austénite.

1.4.4 Effet superthermique

Cet effet est provoqué par un chargement thermique à contrainte constante. L'austénite, refroidie, se transforme en martensite orientée sous l'effet de la contrainte. La déformation résultante peut être recouvrée, comme dans le cas de l'effet mémoire simple sens, par chauffage de la martensite au-delà de la température de fin de changement de phase inverse.

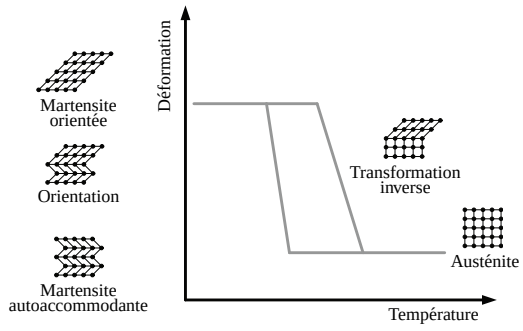


FIG. 1.5 – Transformation de l'austénite en martensite orientée par refroidissement sous un chargement mécanique constant. La transformation inverse se produit en chauffant suffisamment le matériau pour qu'il retrouve sa forme austénitique initiale.

1.4.5 Pseudoélasticité

Il est possible de déformer, de manière réversible [1], une structure en MMF lors d'un cycle de chargement mécanique à haute température. Le changement de phase direct se produit dans ce cas à partir d'un niveau de contrainte dépendant de la température du matériau et entraîne la formation de martensite orientée. La transformation inverse se produit lors de la décharge, ramenant le matériau à sa forme austénitique initiale (Chen et coll., 2001 ; Duerig et Pelton, 1994).

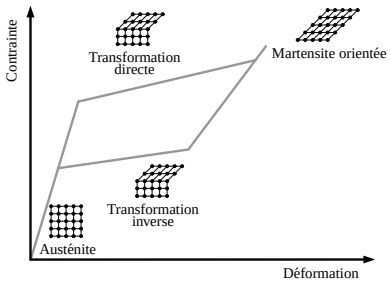


FIG. 1.6 – Réponse pseudoélastique en traction d'un MMF.

1.4.6 Éducation et effet mémoire double sens

À partir d'un certain niveau de contrainte (Wayman et Otsuka, 1999), la transformation martensitique est accompagnée d'une génération de défauts irréversibles par glissement au niveau des plans limites (Abeyaratne et Joo Kim, 1997).

Un chargement thermomécanique cyclique peut entraîner la stabilisation des défauts et la création au sein du matériau d'un champ de contraintes résiduelles associé, provoquant une orientation de la martensite lors d'une transformation directe (figure 1.7). Suite à cette « éducation », une structure en MMF peut transiter entre deux formes, austénitique et martensitique, sous l'effet d'un chargement purement thermique. L'effet mémoire double sens désigne cette aptitude d'un MMF éduqué à se souvenir, simultanément, d'une forme à haute température et d'une autre forme à basse température.

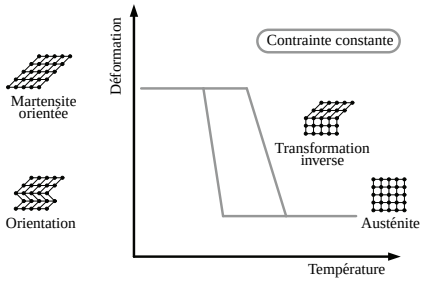


FIG. 1.7 – Effet mémoire double sens. L'austénite se transforme en martensite orientée par refroidissement en l'absence de chargement mécanique.

1. La transformation martensitique est un processus dissipatif. Elle est cependant réversible au niveau cristallographique.

1.4.7 Effet caoutchoutique

Le mouvement relatif des interfaces inter-variantes au sein de la martensite empêche un comportement parfaitement élastique, même quand le niveau de contrainte au sein du matériau n'est pas suffisant pour orienter les variantes martensitiques (figure 1.3). Ce mouvement produit, en effet, une dissipation par frottement interne dans le MMF (Van Humbeeck et Stalmans, 1999 ; Berveiller et Patoor, 1993), donc un comportement inélastique à l'origine de l'effet caoutchoutique (figure 1.8).

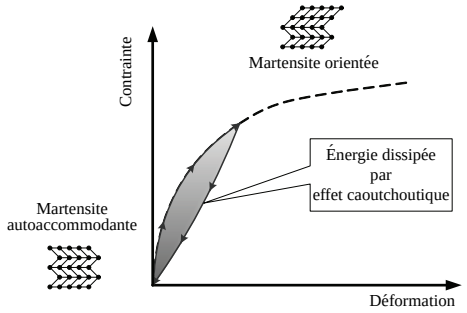


FIG. 1.8 – Dissipation d'énergie par effet caoutchoutique. Le mouvement relatif des interfaces entre les variantes est à l'origine de cette dissipation.

1.5 Synthèse bibliographique

Outre sa complexité sur le plan théorique, la modélisation des MMF se heurte à certaines difficultés d'ordre physique et expérimental :

- certains phénomènes physiques inhérents aux MMF ne sont toujours pas bien expliqués (Van Humbeeck et Stalmans, 1999) ;
- les résultats expérimentaux ne sont pas suffisamment nombreux (Liu et coll., 1999), et peuvent parfois être contradictoires (Tanaka et coll., 1995).

Les lois de comportement existant aujourd'hui ne permettent pas une prise en compte de tous les phénomènes associés aux MMF. La validité de la plupart de ces lois se limite d'ailleurs à des conditions de chargements mécaniques unidimensionnels ou bien tridimensionnels proportionnels (Lim et McDowell, 2002 ; Govindjee et Kasper, 1999 ; Helm et Haupt, 2003 ; Brinson et coll., 2004 ; Abeyaratne et Joo Kim, 1997).

D'une manière générale, on peut classer les modèles de comportement des MMF en trois grandes catégories : les modèles à l'échelle microscopique, les modèles phénoménologiques à l'échelle macro et les modèles micro–macro.

- dans le cadre de la micromécanique, Falk (Falk, 1980) a proposé un modèle phénoménologique unidimensionnel anisotherme basé sur une énergie libre à plusieurs puits. L'énergie du cristal est développée en série de puissances de la température et de la déformation. La stabilité des minima de cette série dépend donc de la température. Plusieurs autres travaux ont été proposés depuis, dans le contexte des théories de Landau et de Landau–Ginzburg, dont quelques-uns ont été généralisés pour des calculs 2D et 3D (Barsch et Krumhansl, 1984 ; Saxena et coll., 1998 ; Ahluwalia et coll., 2004). Ces modèles s'intéressent surtout aux

phénomènes se manifestant à une échelle microscopique au sein d'un MMF, tels que la nucléation et de la propagation des plaquettes martensitiques. Les paramètres de ces modèles sont généralement difficiles à déterminer expérimentalement. Abeyaratne et Vedantam ont, eux aussi, étudié l'évolution des frontières inter-variantes à l'intérieur d'un cristal en MMF (Abeyaratne et Vedantam, 2003 ; Vedantam et Abeyaratne, 2005).

L'étude de l'orientation des plans limites et de la structure des variantes martensitiques au sein d'un cristal en MMF a aussi fait l'objet de plusieurs théories, telles que la théorie phénoménologique de la cristallographie martensitique de Wechsler, Lieberman et Read (Wechsler et coll., 1953) et de Bowles et Mackenzie (Bowles et Mackenzie, 1954) et la théorie cristallographique de la martensite de Ball et James (Ball et James, 1987). Ces théories font l'hypothèse du plan limite invariant au cours du changement de phase. Récemment, l'invariance du plan limite a été contestée (Xiangyang et coll., 2000) suite à des observations expérimentales (Sun et coll., 1997, 1999).

Les modèles précédents permettent de décrire la microstructure du MMF, mais ne conviennent pas au calcul de structures.

– les modèles microscopiques avec passage micro–macro partent d'une étude du comportement matériel à l'échelle des grains austénitiques et martensitiques. La transition micro–macro s'effectue ensuite en deux étapes, d'abord pour modéliser un monocristal et ensuite pour modéliser le matériau polycristallin (Huang et coll., 2000).

  Comme exemple des modèles de cette catégorie, on peut citer le travail de Patoor (Patoor et coll., 1988). Ce modèle est multivariant, l'interaction entre les variantes est quantifiée à l'aide d'une matrice constante $\mathbf{H}$ telle que l'expression de l'énergie d'interaction au niveau d'un volume élémentaire représentatif est proportionnelle à $z_i \mathbf{H}_{ij} z_j$. z_i est la fraction de la phase i. La matrice $\mathbf{H}$ est déterminée expérimentalement.

  Un autre exemple des modèles micro–macro est proposé par Tanaka (Tanaka et coll., 2002). Le MMF est traité comme un composite ou un système matrice–inclusions où les inclusions représentent la martensite. Ces inclusions, réparties en agrégats distribués au sein de la matrice, sont cachées à l'état austénitique. Le chargement thermomécanique nécessaire à l'orientation d'une inclusion est fonction notamment de son orientation et la déformation macroscopique de transformation est obtenue par moyennation, selon la théorie d'Eshelby, des déformations individuelles des inclusions sur un volume représentatif.

  Les modèles obtenus par passage micro–macro font généralement intervenir des paramètres difficiles à identifier expérimentalement. D'ailleurs, l'utilisation de ces modèles pour le calcul de structures nécessite souvent des moyens de calcul considérables, à cause d'un nombre important de degrés de liberté.

– les modèles à l'échelle macroscopique ont l'avantage de la simplicité comparés aux modèles utilisant l'approche micro–macro. Ils sont généralement plus faciles à identifier et à utiliser pour le calcul de structures en MMF.

  Le modèle unidimensionnel de Tanaka (Tanaka et Nagaki, 1982 ; Tanaka, 1986) décrit l'état cristallographique du MMF à l'aide d'une variable interne représentant la fraction volumique de la martensite, les autres variables d'état étant la déformation et la température. Ce modèle propose une évolution exponentielle de la fraction martensitique avec la contrainte et la température. Il est simple à identifier, mais son domaine d'application est restreint à cause de sa nature unidimensionnelle et sa limitation à une description qualitative de la pseudoélasticité

des MMF. Brinson et Huang (Brinson et Huang, 1996) montrent que la loi de comportement de Tanaka peut être dérivée à partir d'un modèle phénoménologique où l'austénite et la martensite sont disposées en parallèle. Le modèle est modifié par Liang et Rogers pour permettre une meilleure description quantitative de la pseudoélasticité unidimensionnelle (Liang et Rogers, 1990). Tanaka et coll. (Tanaka et coll., 1995) ont proposé une extension du même modèle permettant de simuler la réponse d'un MMF à un chargement thermomécanique cyclique en 1D. Pour cela deux variables d'état supplémentaires ont été introduites, représentant la déformation et la contrainte résiduelle résultant du processus d'éducation.

Ivshin et Pence (Ivshin et Pence, 1994) ont proposé un modèle phénoménologique où l'on considère deux phases, austénitique et martensitique, disposées en série. La fraction volumique de l'austénite est prise comme variable d'état. Un modèle équivalent est développé par Moumni et Nguyen (Nguyen et Moumni, 1998 ; Moumni, 1995). Il prévoit deux variantes martensitiques en 1D : l'une favorisée en cas de chargement en traction et l'autre en cas de compression. Le matériau est considéré comme standard généralisé (Halphen et Nguyen, 1974) et les lois de comportement ainsi que les cinétiques sont dérivées dans ce cadre. Le modèle Moumni–Nguyen n'est pas le seul à avoir adopté cette description de la martensite comme un mélange de deux phases à orientations opposées, on retrouve cette idée par exemple dans les travaux de Müller (Müller et Seelecke, 2001) qui propose de dériver les lois relatives au comportement du MMF à partir d'une expression de l'énergie de déformation ayant trois minima : deux d'entre eux correspondent aux deux martensites et sont stables tandis que le troisième est métastable et correspond à l'austénite. Le modèle est développé dans le cadre de la thermodynamique statistique.

Un autre modèle qui adhère au formalisme des matériaux standards généralisés est celui de Frémond (Frémond, 1987, 2001, 1998). Ce modèle, tridimensionnel, utilise deux fractions volumiques pour étudier le cas où deux variantes martensitiques M^+ et M^- existent dans le cas 1D. Savi et coll. (Savi et coll., 2002) ont ensuite ajouté une troisième fraction pour décrire l'autoaccommodation de la martensite. La démarche utilisée pour la modélisation est caractérisée par la prise en compte des contraintes matérielles internes à l'aide de fonctions indicatrices, dans le cadre de l'analyse convexe. Le travail de Frémond sert de base à plusieurs autres modèles (Shimperna et Stefanelli ; Baêta-Neves et coll., 2004 ; Shirakawa et Stefanelli, 2004 ; Laurençot et coll., 2002 ; Bonetti, 2001 ; Pagano et Alart, 1999 ; Colli, 1995 ; Paiva et coll., 2005).

Le modèle R_L de Raniecki et Lexcellent (Raniecki et coll., 1992) considère la fraction volumique de la martensite comme variable interne. L'évolution de cette variable est compatible avec les cinétiques semi-empiriques de type Koistinen–Marburger (Koistinen et Marburger, 1959) utilisées dans le cas des aciers. Ce modèle a été repris plusieurs fois (Boubakar et coll., 1998 ; Bouvet et coll., 2004 ; Leclerq et Lexcellent, 1996 ; Lexcellent et Bourbon, 1996 ; Lexcellent et coll., 2000 ; Raniecki et Lexcellent, 1998 ; Raniecki et coll., 1992, 2001) pour permettre la prise en compte d'un nombre croissant de phénomènes associés au comportement des MMF. Les cinétiques initiales de la loi R_L sont remplacées par des lois d'évolution dérivées de fonctions critères, comme dans le cas de l'élastoplasticité classique, et les interactions à l'échelle mésoscopique sont prises en compte à l'échelle macro moyennant des termes introduits dans l'expression de l'énergie et exprimant l'interaction entre l'austénite et la martensite.

Abeyaratne, Kim et Knowles (Abeyaratne et Joo Kim, 1997 ; Abeyaratne et coll., 1994 ; Abeyaratne et Knowles, 1993) ont proposé un modèle thermoélastique unidimensionnel simplifié du comportement des MMF. Aucune fraction volumique n'est introduite. Seule la déformation de transformation maximale est nécessaire pour la modélisation. L'intérêt de ce modèle est essentiellement qualitatif.
Toujours à l'échelle macroscopique, Boyd et Lagoudas (Bo et Lagoudas, 1999b ; Lagoudas et Bo, 1999a,b ; Bo et Lagoudas, 1999a) ont développé un modèle décrivant la plupart des phénomènes associés aux MMF. La martensite est représentée par une fraction massique et un tenseur de déformation dont l'évolution ressemble à celle de la déformation plastique dans le cas d'un matériau élastoplastique usuel. Ce modèle a été étendu ensuite par Lagoudas et Shu (Lagoudas et Shu, 1999), de sorte que la martensite est représentée à l'aide de trois variantes au lieu d'une seule dans le modèle initial. Ces variantes correspondent aux martensites autoaccommodante, orientée à partir de la phase mère et orientée à partir de la martensite autoaccommodante. Le modèle a été amélioré (Lagoudas et Entchev, 2004) en considérant notamment que la transformation martensitique est accompagnée de l'apparition de déformations plastiques dépendant d'une fraction cumulée de martensite.
Dans le même cadre de plasticité généralisée, Auricchio a proposé des modèles ayant plusieurs niveaux de complexité en fonction de la nature et du nombre des phénomènes qu'on cherche à reproduire (Auricchio, 1995). Un modèle 1D fait intervenir une seule variante martensitique pour modéliser la pseudoélasticité ou deux variantes pour pouvoir aussi décrire l'effet mémoire simple sens. Ces deux modèles ont été généralisés pour des calculs 3D en introduisant une variable supplémentaire tensorielle permettant de simuler l'orientation de la martensite. Le comportement des MMF sous chargement cyclique est abordé dans des travaux plus récents (Auricchio et Sacco, 2001 ; Auricchio et coll., 2003).
Bekker et Brinson (Bekker et Brinson, 1998, 1997) ont utilisé une approche différente. Le comportement thermomécanique unidimensionnel des MMF est modélisé à l'aide de deux variables d'état représentant les fractions volumiques des martensites autoaccommodante et orientée. Les équations d'évolution de ces variables sont dérivées à partir du diagramme d'état. Un trajet de chargement thermomécanique est décomposé dans le plan contrainte–température en une suite de segments, délimités par des « points de commutation », qui interviennent dans la modélisation. Ce modèle a été ensuite repris et généralisé (Brocca et coll., 2002 ; Gao et Brinson, 2002 ; Gao et coll., 2000 ; Huang et coll., 2000) pour prendre en compte le comportement tridimensionnel des MMF. La réponse 3D du matériau est obtenue par superposition des réponses unidimensionnelles sur un ensemble de « microplans », c'est-à-dire des plans orientés au sein du matériau. Pour appuyer cette démarche, il est signalé que les modèles s'inspirant de l'élastoplasticité, tels que ceux de Lagoudas et d'Auricchio, ne décrivent pas correctement le mécanisme de la transformation martensitique faisant intervenir plusieurs variantes à la fois. D'autre part, les schémas de moyennation utilisés dans les modèles meso–macro supposent généralement un grand nombre d'inclusions martensitiques au sein de la matrice austénitique, ce qui n'est pas le cas des cristaux de MMF où un seul plan limite se forme au sein d'un cristal.
La plupart des modèles à l'échelle macroscopique se limitent à la description unidimensionnelle d'un nombre réduit d'effets caractéristiques des MMF. Des modèles 3D existent, mais ne permettent pas, pour la plupart, de simuler le com-

portement sous chargement non proportionnel.

En plus des travaux précédents, certains chercheurs, notamment Silling (Silling, 1992), Shaw et Kyriakides (Shaw et Kyriakides, 1997, 1995 ; Shaw, 2002) et Li et Sun (Li et Sun, 2002 ; Sun et Li, 2002), ont étudié le problème de propagation des fronts de changement de phase dans les MMF et plus particulièrement dans certains types de structures simples. La transformation martensitique est traitée comme une instabilité qui se propage, ce qui est conforme à plusieurs résultats expérimentaux (Li et Sun, 2002 ; Tan et coll., 2004 ; Orgéas et coll., 1998).

1.6 Applications

L'effet mémoire de forme a été observé dès 1951 (Wayman et Otsuka, 1999 ; Bekker et Brinson, 1997), mais ce n'est que plus tard, après la découverte de l'effet mémoire dans des alliages de type Nickel-Titane par Buehler (Buehler et coll., 1963), que des applications réussies ont fait intervenir les MMF (Gandhi et Thompson, 1992).

Les alliages à mémoire de forme en Nickel–Titane, ou Nitinol (**NiTi N**aval **O**rdnance **L**aboratory, du nom du laboratoire américain où Buehler travaillait), ont des propriétés mécaniques supérieures aux autres alliages manifestant un comportement mémoire de forme (Stöckel, 2001 ; Otsuka et Ren, 2005). Les prix généralement élevés des MMF, ainsi que la difficulté de leur mise en œuvre, sont parmi les raisons qui restreignent leurs utilisations à des domaines technologiques de pointe.

1.6.1 Applications biomédicales

La biocompatibilité du Nitinol (Duerig et coll., 1999) en fait l'alliage à mémoire de forme par excellence pour les applications biomédicales. Ces applications incluent :

- les stents, structures tubulaires aux parois sous forme de treillis fin, sont généralement produits par découpage au laser ou par gravure. Ils sont souvent utilisés comme endoprothèses coronaires (Duerig et coll., 2000). Les stents servent aussi à la prévention de l'occlusion des conduits respiratoires ;
- les agrafes, utilisées surtout pour la fixation de fragments d'os suite à une fracture, par exemple dans le cadre de la chirurgie maxillo-faciale. Les agrafes ont une forme pré-programmée en position fermée à haute température. Le chirurgien fait refroidir l'agrafe, la ramène en position ouverte, avant de l'introduire à l'endroit voulu. La température du corps agit ensuite de façon à refermer l'agrafe en lui « rappelant » sa forme haute température. Ceci fait rapprocher progressivement les fragments osseux sous l'action d'une force presque constante.

D'autres applications biomédicales du Nitinol incluent des fils orthodontiques, des filtres et des systèmes d'occlusion artérielle, des aiguilles et des fils de suture, des prothèses de fémur, etc.

1.6.2 Applications aérospatiales et militaires

On peut citer :

- les mécanismes de déploiement de certaines structures dans l'espace. Le déploiement des panneaux solaires du télescope Hubble de la NASA a été réalisé à l'aide d'un dispositif en MMF ;

– des manchons en NiTi ont servi de joints de raccordement étanches pour les tuyauteries difficiles à souder des avions F–14 de l'armée américaine (Gandhi et Thompson, 1992) ;
– Des ailes d'avion à forme variable et des dispositifs de contrôle de l'inclinaison des pals du rotor de certains hélicoptères ;
– Des actionneurs contrôlés par chauffage électrique et des fusibles réarmables. À titre d'exemple, un mécanisme de dégagement de gaz en MMF était intégré à l'analyseur de gaz miniature de la sonde Rosetta de l'agence spatiale européenne (ESA). Un dispositif en MMF équipait aussi le véhicule–robot Sojourner de la sonde Mars Pathfinder de la NASA.

1.6.3 Applications en génie civil

Des composants en MMF sont utilisés comme inclusions anti-séismiques dans les bâtiments et autres constructions du génie civil. Cette utilisation des MMF est motivée par la capacité de ce genre de matériaux à dissiper une grande quantité d'énergie par unité de masse lors d'un changement de phase (Van Humbeeck, 1999).

1.6.4 Diverses autres applications

Notamment des films protecteurs en Nitinol, hautement résistants à l'érosion, ainsi que des valves hydrauliques et pneumatiques.

Les MMF entrent aussi dans la fabrication d'une classe de matériaux intelligents. Dans ce cas, des fibres en MMF sont souvent introduits dans une matrice constituée d'un autre matériau afin de pouvoir contrôler la forme du composite résultant en agissant sur celle des fibres. Ceci est en général réalisé par chauffage électrique.

La liste des applications citées jusqu'ici n'est en aucun cas exhaustive. Elle peut être élargie et inclure des interrupteurs thermiques, des montures de lunettes résistant à la déformation, des actionneurs de mini-robots simulant le fonctionnement des muscles et contrôlés électriquement, certaines œuvres d'art, etc.

Bibliographie

R. ABEYARATNE ET J. KNOWLES, « A continuum model of a thermoelastic solid capable of undergoing phase transitions », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 41, p. 541–571, 1993.

R. ABEYARATNE ET S. JOO KIM, « Cyclic effects in shape-memory alloys: a one-dimensional continuum model », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 34, p. 3273–3289, 1997.

R. ABEYARATNE ET S. VEDANTAM, « A lattice-based model of the kinetics of twin boundary motion », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 51, p. 1675–1700, 2003.

R. ABEYARATNE, S. KIM ET J. KNOWLES, « A one-dimensional continuum model for shape-memory alloys », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, p. 2229–2249, 1994.

R. AHLUWALIA, T. LOOKMAN, A. SAXENA ET R. ALBERS, « Landau theory for shape memory polycrystals », *Acta Materialia*, vol. 52, p. 209–218, 2004.

F. AURICCHIO, S. MARFIA ET E. SACCO, « Modelling of SMA materials: training and two way memory effect », *Computers and Structures*, vol. 81, p. 2301–2317, 2003.

F. AURICCHIO, *Shape-memory alloys: applications, micromechanics, macromodelling and numerical simulations*, Thèse de doctorat, University of California at Berkeley, 1995.

F. AURICCHIO ET E. SACCO, « Thermo-mechanical modelling of a superelastic shape-memory wire under cyclic stretching–bending loadings », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, p. 6123–6145, 2001.

A. BAÊTA-NEVES, M. SAVI ET P. PACHECO, « On the Fremond's constitutive model for shape memory alloys », *Mechanics research communications*, vol. 31, p. 677–688, 2004.

J. M. BALL ET R. D. JAMES, « Fine phase mixtures as minimizers of energy », *Arch. Rational. Mech. Anal.*, vol. 100, p. 13–52, 1987.

G. BARSCH ET J. KRUMHANSL, « Twin boundaries in ferroelastic media without interface dislocations », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 53, p. 1069–1072, 1984.

A. BEKKER ET L. BRINSON, « Temperature-induced phase transformation in a shape memory alloy: phase diagram based kinetics approach », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 45, n° 6, p. 949–988, 1997.

A. BEKKER ET L. BRINSON, « Phase diagram based description of the hysteresis behavior of shape memory alloys », *Acta Mater.*, vol. 46, p. 3649–3665, 1998.

M. BERVEILLER ET E. PATOOR, Comportement thermomécanique des matériaux usuels et des alliages à mémoire de forme, dans *Technologie des Alliages à Mémoire de Forme*, chap. 2, p. 43–62, HERMES, 1993.

K. BHATTACHARYA, « Self-accommodation in martensite », *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 120, p. 201–244, 1992.

Z. BO ET D. LAGOUDAS, « Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, part III: evolution of plastic strains and two-way shape memory effect », *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, p. 1175–1203, 1999a.

Z. BO ET D. LAGOUDAS, « Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, part I: theoretical derivations », *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, p. 1089–1140, 1999b.

E. BONETTI, « Global solution to a Frémond model for shape memory alloys with thermal memory », *Nonlinear Analysis*, vol. 46, p. 535–565, 2001.

M. BOUBAKAR, S. MYNE, C. LEXCELLENT ET P. BOISSE, « Analyse et prédiction 3D du comportement de structures en alliages à mémoire de forme à grandes déformations pseudoélastiques », *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. 7, n° 8, p. 91–110, 1998.

C. BOUVET, S. CALLOCH ET C. LEXCELLENT, « A phenomenological model for pseudoelasticity of shape memory alloys under multiaxial proportional and nonproportional loadings », *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 23, p. 37–61, 2004.

J. BOWLES ET J. MACKENZIE, « The crystallography of martensitic transformations », *Acta Metallurgica*, vol. 2, p. 129–147, 1954.

L. BRINSON, I. SCHMIDT ET R. LAMMERING, « Stress-induced transformation behavior of a polycrystalline NiTi shape memory alloy: micro and macromechanical investigations via in situ optical microscopy », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 52, p. 1549–1571, 2004.

L. BRINSON ET M. HUANG, « Simplifications and comparisons of shape memory alloy constitutive models », *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 7, p. 108–114, 1996.

M. BROCCA, L. BRINSON ET Z. BAŽANT, « Three-dimensional constitutive model for shape memory alloys based on microplane model », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 50, p. 1051–1077, 2002.

W. BUEHLER, J. GILFRICH ET R. WILEY, « Effect of low-temperature phase changes on the mechanical properties of alloys near composition TiNi », *Journal of Applied Physics*, vol. 34, p. 1475–1477, 1963.

W. CHEN, Q. WU, J. KANG ET N. WINFREE, « Compressive superelastic behavior of a NiTi shape memory alloy at strain rates of 0.001–750 s^{-1} », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, p. 8989–8998, 2001.

P. COLLI, « Global existence for the three-dimensional Frémond model of shape memory alloys », *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, vol. 24, p. 1565–1579, 1995.

T. DUERIG, A. PELTON ET D. STÖCKEL, « An overview of nitinol medical applications », *Materials Science and Engineering A*, vol. 273, p. 149–160, 1999.

T. DUERIG ET A. PELTON, TiNi shape memory alloys, dans *Materials properties handbook: Titanium alloys*, p. 1035–1048, ASM International, 1994.

T. DUERIG, D. TOLOMEO ET M. WHOLEY, « An overview of superelastic stent design », *Min Invas Ther & Allied Tehnol*, vol. 9, p. 235–246, 2000.

F. FALK, « Model free energy, mechanics, and thermodynamics of shape memory alloys », *Acta Metallurgica*, vol. 28, p. 1773–1780, 1980.

M. FRÉMOND, Matériaux à mémoire de forme, C.R. Académie des Sciences, Paris, Tome 34, s.II, n.7, p. 239–244, 1987.

M. FRÉMOND, « L'éducation des alliages à mémoire de forme », *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. 7, n° 8, p. 35–46, 1998.

M. FRÉMOND, *Non Smooth Thermomechanics*, Springer, 2001.

M. GANDHI ET B. THOMPSON, *Smart Materials and Structures*, Chapman & Hall, 1992.

X. GAO ET L. BRINSON, « A simplified multivariant SMA model based on invariant plane nature of martensitic transformation », *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 13, p. 795–810, 2002.

X. GAO, M. HUANG ET L. BRINSON, « A multivariant micromechanical model for SMAs part 1. Crystallographic issues for single crystal model », *International Journal of Plasticity*, vol. 16, p. 1345–1369, 2000.

S. GOVINDJEE ET E. KASPER, « Computational aspects of one-dimensional shape memory alloy modeling with phase diagram », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 171, p. 309–326, 1999.

L. GUILLET ET P. POUPEAU, *Transformations à l'état solide des matériaux et alliages métalliques*, Dunod, 1973.

B. HALPHEN ET Q. NGUYEN, « Plastic and visco-plastic materials with generalized potential », *Mechanical Research Communications*, vol. 1, p. 43–47, 1974.

D. HELM ET P. HAUPT, « Shape memory behaviour: modelling within continuum thermomechanics », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, p. 827–849, 2003.

M. HUANG, X. GAO ET L. BRINSON, « A multivariant micromechanical model for SMAs part 2. Polycrystal model », *International Journal of Plasticity*, vol. 16, p. 1371–1390, 2000.

INTERNATIONAL UNION OF PURE AND APPLIED CHEMISTRY, IUPAC compendium of chemical terminology, 1997.

M. IRIE, *Shape Memory Materials*, chap. 9, p. 203–219, Cambridge University Press, 1999.

Y. IVSHIN ET T. PENCE, « A thermomechanical model for a one variant shape memory material », *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 5, p. 455–473, 1994.

D. KOISTINEN ET R. MARBURGER, « A general equation prescribing the extent of the austenite-martensite transformation in pure iron-carbon alloys and plain carbon steels », *Acta Metallurgica*, vol. 7, p. 59–60, 1959.

D. LAGOUDAS ET Z. BO, « Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, part IV: modeling of minor hysteresis loops », *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, p. 1205–1249, 1999a.

D. LAGOUDAS ET Z. BO, « Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, part II: material characterization and experimental results for a stable transformation cycle », *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, p. 1141–1173, 1999b.

D. LAGOUDAS ET P. ENTCHEV, « Modeling of transformation-induced plasticity and its effects on the behavior of porous shape memory alloys. Part I: constitutive model for fully dense SMAs », *Mechanics of materials*, vol. 36, p. 865–892, 2004.

D. LAGOUDAS ET S. SHU, « Residual deformation of active structures with SMA actuators », *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 41, p. 595–619, 1999.

P. LAURENÇOT, G. SCHIMPERNA ET U. STEFANELLI, « Global existence of a strong solution to the one-dimensional full model for irreversible phase transitions », *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 271, p. 426–442, 2002.

S. LECLERQ ET C. LEXCELLENT, « A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 44, n° 6, p. 953–980, 1996.

C. LEXCELLENT ET G. BOURBON, « Thermodynamical model of cyclic behaviour of Ti–Ni and Cu–Zn–Al shape memory alloys under isothermal undulated tensile tests », *Mechanics of Materials*, vol. 24, p. 59–73, 1996.

C. LEXCELLENT, S. LECLERQ, B. GABRY ET G. BOURBON, « The two way shape memory effect of shape memory alloys: an experimental study and a phenomenological model », *International Journal of Plasticity*, vol. 16, p. 1155–1168, 2000.

Z. LI ET Q. SUN, « The initiation and growth of macroscopic martensite band in nanograined NiTi microtube under tension », *International Journal of Plasticity*, vol. 18, p. 1481–1498, 2002.

C. LIANG ET C. ROGERS, « One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials », *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 1, p. 207–234, 1990.

T. LIM ET D. MCDOWELL, « Cyclic thermomechanical behavior of a polycrystalline pseudoelastic shape memory alloy », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 50, p. 651–676, 2002.

Y. LIU, Z. XIE, J. VAN HUMBEECK ET L. DELAEY, « Some results on the detwinning process in NiTi shape memory alloys », *Scripta Materialia*, vol. 41, n° 12, p. 1273–1281, 1999.

K. MADANGOPAL, « The self accommodating martensitic microstructure of Ni–Ti shape memory alloys », *Acta Materialia*, vol. 46, p. 1439–1457, 1998.

J. MCNANEY, V. IMBENI, Y. JUNG, P. PAPADOPOULOS ET R. RITCHIE, « An experimental study of the superelastic effect in a shape-memory Nitinol alloy under biaxial loading », *Mechanics of Materials*, vol. 35, p. 969–986, 2003.

Z. MOUMNI, *Sur la modélisation du changement de phase à l'état solide*, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Ponts et Chaussées, 1995.

I. MÜLLER ET S. SEELECKE, « Thermodynamic aspects of shape memory alloys », *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 34, p. 1307–1355, 2001.

Q. NGUYEN ET Z. MOUMNI, « Modélisation théorique et calcul numérique du changement de phase dans les solides », *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 7, n° 8, p. 47–68, 1998.

L. ORGÉAS, D. FAVIER ET G. RIO, « Déformation superélastique non homogène d'une éprouvette de traction NiTi. Expérience et modélisation numérique », *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. 7, n° 8, p. 111–136, 1998.

K. OTSUKA, « Perspective of research on martensitic transformations: present and future », *Journal de Physique IV*, vol. 11, p. 3–9, 2001.

K. OTSUKA ET X. REN, « Physical metallurgy of Ti-Ni-based shape memory alloys », *Progress in Materials Science*, vol. 50, p. 511–678, 2005.

S. PAGANO ET P. ALART, « Solid-solid phase transition modelling: relaxation procedures, configurational energies and thermomechanical behaviours », *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, p. 1821–1840, 1999.

A. PAIVA, M. SAVI, A. BARBOSA BRAGA ET P. PACHECO, « A constitutive model for shape memory alloys considering tensile–compressive asymmetry and plasticity », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, p. 3439–3457, 2005.

E. PATOOR, A. EBERHARDT ET M. BERVEILLER, « Thermomechanical behavior of shape memory alloys », *Archives of Mechanics*, vol. 40, p. 775–794, 1988.

B. RANIECKI ET C. LEXCELLENT, « Thermodynamics of isotropic pseudoelasticity in shape memory alloys », *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 17, p. 185–205, 1998.

B. RANIECKI, C. LEXCELLENT ET K. TANAKA, « Thermodynamic models of pseudoelastic behaviour of shape memory alloys », *Archives of Mechanics*, vol. 44, p. 261–284, 1992.

B. RANIECKI, J. REJZNER ET C. LEXCELLENT, « Anatomization of hysteresis loops in pure bending of ideal pseudoelastic SMA beams », *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 43, p. 1339–1368, 2001.

M. SAVI, A. PAIVA, A. BAÊTA-NEVES ET P. PACHECO, « Phenomenological modeling and numerical simulation of shape memory alloys: a thermo-plastic–phase transformation coupled model », *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 3, p. 261–273, 2002.

A. SAXENA, A. BISHOP, S. SHENOY ET T. LOOKMAN, « Computer simulation of martensitic textures », *Computational Materials Science*, vol. 10, p. 16–21, 1998.

J. A. SHAW ET S. KYRIAKIDES, « On the nucleation and propagation of phase transformation fronts in a NiTi alloy », *Acta Materialia*, vol. 45, n° 2, p. 683–700, 1997.

J. SHAW, « A thermomechanical model for a 1-D shape memory alloy wire with propagating instabilities », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, p. 1275–1305, 2002.

J. A. SHAW ET S. KYRIAKIDES, « Thermomechanical aspects of NiTi », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 43, n° 8, p. 1243–1281, 1995.

G. SHIMPERNA ET U. STEFANELLI, « Positivity of the temperature for phase transitions with micro-movements », *Nonlinear analysis: real world applications*, Accepté le 29 août 2005.

K. SHIRAKAWA ET U. STEFANELLI, « Structure result for steady-state solutions of a one-dimensional Frémond model of SMA », *Physica D*, vol. 190, p. 190–212, 2004.

S. SILLING, « Dynamic growth of martensitic plates in an elastic material », *journal of Elasticity*, vol. 28, p. 143–164, 1992.

D. STÖCKEL, « Nitinol medical devices and implants », Rapport technique, Cordis Corporation - Nitinol Devices & Components, 2001.

Q. SUN ET Z. LI, « Phase transformation in superelastic NiTi polycrystalline microtubes under tension and torsion –from localization to homogeneous deformation », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, p. 3797–3809, 2002.

Q. SUN, X. ZHANG ET T. XU, « Some recent advances in experimental study of shape memory alloys », dans *Proceedings of IUTAM Symposium on Micro- and Macrostructural Aspects of Thermoplasticity*, p. 407–416, Bochum, Germany, 1997.

Q. SUN, X. ZHANG ET T. XU, « On the deformation of A–M interfaces in single crystal shape memory alloys and some related issues », *J. Eng. Mater. Technol.*, vol. 121, p. 38–43, 1999.

G. TAN, Y. LIU, P. SITTNER ET M. SAUNDERS, « Lüder-like deformation associated with stress-induced martensitic transformation in NiTi », *Scripta Materialia*, vol. 50, p. 193–198, 2004.

K. TANAKA ET S. NAGAKI, « A thermomechanical description of materials with internal variables in the process of phase transitions », *Ingenieur-Archiv*, vol. 51, p. 287–299, 1982.

K. TANAKA, F. NISHIMURA, T. HAYASHI, H. TOBUSHI ET C. LEXCELLENT, « Phenomenological analysis on subloops and cyclic behavior in shape memory alloys under mechanical and/or thermal loads », *Mechanics of Materials*, vol. 19, p. 281–292, 1995.

K. TANAKA, D. OHNAMI, T. WATANABE ET J. KOSEGAWA, « Micromechanical simulations of thermomechanical behavior in shape memory alloys: transformation conditions and thermomechanical hysteresis », *Mechanics of Materials*, vol. 34, p. 279–298, 2002.

T. TANAKA, « A thermomechanical sketch of shape memory effect: one-dimensional tensile behavior », *Res Mechanica*, vol. 18, p. 251–263, 1986.

K. UCHINO, *Shape Memory Materials*, chap. 8, p. 184–202, Cambridge University Press, 1999.

J. VAN HUMBEECK, La transformation martensitique, dans *Technologie des Alliages à Mémoire de Forme*, chap. 3, p. 63–88, HERMES, 1993.

J. VAN HUMBEECK ET R. STALMANS, *Shape memory alloys*, chap. 7, p. 149–183, Cambridge University Press, 1999.

J. VAN HUMBEECK, « Non-medical applications of shape memory alloys », *Materials Science and Engineering A*, vol. 273–275, p. 134–148, 1999.

S. VEDANTAM ET R. ABEYARATNE, « A Helmholtz free-energy function for a Cu–Al–Ni shape memory alloy », *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 40, p. 177–193, 2005.

C. WAYMAN ET K. OTSUKA (coordinateurs), *Shape Memory Alloys*, Cambridge University Press, 1999.

M. WECHSLER, D. LIEBERMAN ET T. READ, « On the theory of the formation of martensite », *Trans. AIME*, vol. 197, p. 1503–1515, 1953.

Z. XIANGYANG, S. QINGPING ET Y. SHOUWEN, « A non-invariant plane model for the interface in CuAlNi single crystal shape memory alloys », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 48, p. 2163–2182, 2000.

CHAPITRE 2

Cadre théorique de la modélisation

2.1 Introduction

Dans la suite de ce mémoire, nous abordons le problème de la modélisation du comportement des matériaux à mémoire de forme. La démarche adoptée utilise la méthode des deux potentiels en présence de variables d'état liées, nous avons donc trouvé intéressant de consacrer une partie de ce deuxième chapitre à un rappel du cadre théorique que fournit cette méthode. Le reste du chapitre présente, à titre d'exemple, le modèle Moumni–Nguyen (Moumni, 1995 ; Nguyen et Moumni, 1995) décrivant la pseudoélasticité des MMF en 1D.

2.2 Méthode des deux potentiels

Le postulat de l'état local considère que l'état thermodynamique d'un point matériel est complètement défini à un instant donné par la donnée en ce point et à cet instant des valeurs d'un ensemble fini de variables indépendantes. Ces variables sont appelées « variables d'état ».

Dans le cadre de ce chapitre, l'ensemble des variables d'état inclut le tenseur de déformation macroscopique $\boldsymbol{\varepsilon}$, la température T, ainsi que des variables internes $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ décrivant respectivement des phénomènes dissipatifs et non dissipatifs.

La méthode des deux potentiels consiste à dériver les lois de comportement d'un matériau à partir des expressions d'une énergie libre $\mathcal{W}$ et d'un pseudo-potentiel de dissipation $\mathcal{D}$.

$\mathcal{W}$ est fonction de l'ensemble des variables d'état, c'est-à-dire

$$\mathcal{W} = W(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \tag{2.1}$$

tandis que $\mathcal{D}$ est fonction des variables dissipatives $\boldsymbol{\alpha}$ et de leurs dérivées $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$. Le pseudo-potentiel $\mathcal{D}$ est positif, convexe par rapport à $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, semi-continu inférieurement et nul en $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0}$. Comme il est rappelé plus tard, ces propriétés de $\mathcal{D}$ permettent de définir facilement des lois d'évolution qui satisfont le deuxième principe de la thermodynamique.

2.2.1 Cas des variables d'état indépendantes

Une loi de comportement doit vérifier les principes de la thermodynamique. Si $\mathcal{W}$ est la densité d'énergie en un point matériel donné, $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur contrainte de Cauchy et s la densité d'entropie, l'inégalité de Clausius–Duhem traduisant les premier et deuxième principes s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - s\dot{T} - \dot{\mathcal{W}} \geqslant 0, \tag{2.2}$$

ce qui donne après développement

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left(s + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial T}\right)\dot{T} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\beta}}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} \geqslant 0, \quad \forall\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{T}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}\right). \tag{2.3}$$

En supposant que :

1. $\mathcal{W}$ dépend uniquement de la température T et des variables $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$;
2. L'énergie interne $\mathcal{U}$ dépend uniquement de la densité d'entropie s et des variables $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$;

le terme $s + \dfrac{\partial \mathcal{W}}{\partial T}$ dans l'équation (2.3) devient nul à cause de la relation

$$\mathcal{U} = \mathcal{W} + Ts \tag{2.4}$$

définissant l'énergie interne à partir de l'énergie libre. En faisant par ailleurs l'hypothèse que $\left(\boldsymbol{\sigma} - \dfrac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)$, $\dfrac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$ et $\dfrac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\beta}}$ sont indépendantes de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ et $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, on déduit de (2.3) les lois d'état

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}. \tag{2.5}$$

Si l'on note $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ la quantité $-\dfrac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$, l'inégalité (2.2) se réduit à

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}} \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Une manière de vérifier (2.6) consiste à se servir du formalisme des matériaux standards généralisés (Halphen et Nguyen, 1974). Pour un matériau standard généralisé, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est choisi comme un sous-différentiel de $\mathcal{D}$ par rapport à $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \partial_{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}\mathcal{D}. \tag{2.7}$$

Si $\mathcal{D}^\star$ est la transformée de Legendre–Fenchel de $\mathcal{D}$ définie par

$$\mathcal{D}^\star = \sup_{\dot{\boldsymbol{\alpha}}} \left(\boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \mathcal{D}\right), \tag{2.8}$$

$\mathcal{D}^\star$ a les mêmes propriétés de $\mathcal{D}$ et on a les équivalences suivantes :

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \partial_{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}\mathcal{D} \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\alpha}} \in \partial_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\mathcal{D}^\star \Leftrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathcal{D} + \mathcal{D}^\star. \tag{2.9}$$

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^\star$ étant positifs, la positivité de la dissipation $\boldsymbol{\mathcal{A}}\cdot\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ est assurée. L'inégalité de Clausius–Duhem est automatiquement vérifiée.

2.2.2 Cas des variables d'état dépendantes

La méthode des deux potentiels s'applique aussi dans le cas où des liaisons existent entre les variables d'état (Frémond, 1987, 1998, 2001 ; Moumni, 1995 ; Nguyen et Moumni, 1998 ; Auricchio et Petrini, 2002). La méthode des multiplicateurs de Lagrange peut être utilisée pour prendre en compte ces liaisons. En effet, en supposant que les variables $\boldsymbol{\varepsilon}$, T, $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ vérifient des liaisons parfaites bilatérale et unilatérale données respectivement par

$$g = 0 \quad \text{et} \quad h \geqslant 0, \tag{2.10}$$

où

$$g = \hat{g}(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad \text{et} \quad h = \hat{h}(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \tag{2.11}$$

on démontre (Germain, 1986) qu'il existe un potentiel $\mathcal{W}_l$ dont dérivent les relations (2.10). L'expression de $\mathcal{W}_l$ est donnée par

$$\mathcal{W}_l = -\lambda g - \mu h, \quad \text{où} \quad \mu h = 0 \text{ et } \mu \geqslant 0. \tag{2.12}$$

Dans (2.12), λ et μ sont des multiplicateurs de Lagrange.

L'énergie libre du matériau, compte tenu de l'ensemble des liaisons, s'écrit

$$\mathcal{L} = \mathcal{W} + \mathcal{W}_l \tag{2.13}$$

et les lois d'état sont données par

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad s = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}. \tag{2.14}$$

D'autre part, la force thermodynamique $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ associée à la variable dissipative $\boldsymbol{\alpha}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{A}} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\alpha}} - \mu \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\alpha}}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

et la positivité de la dissipation est assurée—comme dans le cas des variables d'état indépendantes—en choisissant la force thermodynamique $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ parmi les sous-gradients d'un pseudo-potentiel de dissipation $\mathcal{D}$.

Il est intéressant de remarquer que si g et h ne dépendent que de la variable dissipative $\boldsymbol{\alpha}$ et si $\boldsymbol{\alpha}$ est scalaire ($\alpha \overset{\text{déf}}{=} \boldsymbol{\alpha}$ et $\mathcal{A} \overset{\text{déf}}{=} \boldsymbol{\mathcal{A}}$), la force thermodynamique $\mathcal{A}$ peut s'écrire indépendamment de g et de h quand α évolue, tant que g, h et μ restent dérivables. Dans ce cas, les équations

$$g = 0 \quad \text{et} \quad \mu h = 0 \tag{2.16}$$

donnent

$$\dot{g} = 0 \tag{2.17}$$

et

$$\dot{\mu} h + \mu \dot{h} = 0. \tag{2.18}$$

L'équation (2.17) s'écrit

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = 0, \tag{2.19}$$

ce qui entraîne $\dfrac{\partial g}{\partial \alpha} = 0$ dans l'expression de $\mathcal{A}$ pour $\dot{\alpha} \neq 0$. De la même manière, quand la liaison unilatérale définie par $h \geqslant 0$ est effective, c'est-à-dire quand $h = 0$, (2.18) se réduit à

$$\mu \frac{\partial h}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = 0. \tag{2.20}$$

L'expression $\mu \dfrac{\partial h}{\partial \alpha}$ est donc nulle pour $\dot{\alpha} \neq 0$ quand $h = 0$. Elle l'est aussi pour $h > 0$ car, dans ce cas, $\mu = 0$ d'après (2.16), d'où

$$\mu \frac{\partial h}{\partial \alpha} = 0 \quad \forall \dot{\alpha} \neq 0. \tag{2.21}$$

En conclusion, lorsque la variable dissipative évolue, si cette variable est scalaire, il n'est pas nécessaire de prendre en compte les liaisons ne dépendant que de cette variable dans l'expression de la force thermodynamique associée tant que ces liaisons et les multiplicateurs de Lagrange associés sont dérivables.

2.2.3 Exemple d'application : modèle Moumni–Nguyen

Le modèle Moumni–Nguyen (Nguyen et Moumni, 1998 ; Moumni, 1995) fournit une description qualitative simplifiée du comportement pseudoélastique des MMF à l'échelle macroscopique. Il sert de base au premier des deux modèles développés dans le cadre de cette thèse.

La modélisation est fondée sur un modèle rhéologique de Reuss représentant l'austénite A et deux variantes martensitiques M^+ et M^- en série (figure 2.1). Un chargement mécanique en traction privilégie la formation de M^+ tandis que M^- est favorisée lors d'une compression.

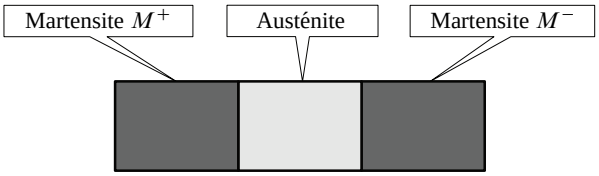


FIG. 2.1 – Modèle rhéologique d'un matériau à mémoire de forme. L'austénite et deux variantes martensitiques sont en série.

Dans le cas de la pseudoélasticité, on démontre que les deux variantes martensitiques ne peuvent pas se former simultanément à partir de l'austénite. Par conséquent, la modélisation est simplifiée en considérant le matériau comme un mélange de deux phases : l'austénite et la martensite M^+. L'ensemble des variables choisies pour la description de l'état local comprend les déformations locales de l'austénite et de la martensite M^+, respectivement e et m, ainsi que la fraction volumique z de la martensite et la déformation macroscopique ε. La température intervient en tant que paramètre constant lors du changement de phase.

En suivant la démarche décrite au paragraphe 2.2.2, on définit une densité d'énergie

$$\mathcal{W} = (1 - z)U(e) + zW(m) + I(z), \tag{2.22}$$

où $U(e)$ et $W(m)$ représentent respectivement les densités des énergies libres individuelles de l'austénite et de la martensite M^+. Elles sont données par

$$U(e) = \frac{1}{2}Ke^2 \quad \text{et} \quad W(m) = \frac{1}{2}K(m-\varepsilon_0)^2 + C(T), \tag{2.23}$$

où K est le module élastique supposé le même pour l'austénite et la martensite, et $C(T)$ une chaleur latente de changement de phase. $I(z)$ est une énergie d'interaction.

$$I(z) = \frac{P\varepsilon_0^2}{2\left(1-\dfrac{P}{K}\right)} z(z-1). \tag{2.24}$$

P et ε_0 sont des paramètres du matériau. En particulier, ε_0 représente la déformation inélastique maximale pouvant survenir suite à un changement de phase.

Les relations reliant les variables d'état sont données par

$$(1-z)e + zm - \varepsilon = 0, \tag{2.25}$$

$$1 - z \geqslant 0, \tag{2.26}$$

$$z \geqslant 0. \tag{2.27}$$

Ces liaisons dérivent du potentiel

$$\mathcal{W}_l = -\lambda((1-z)e + zm - \varepsilon) - \lambda_1(1-z) - \lambda_2 z. \tag{2.28}$$

Les équations (2.13) et (2.14) permettent d'établir la loi de comportement

$$\sigma = K(\varepsilon - z\varepsilon_0). \tag{2.29}$$

La loi d'évolution de la fraction volumique z dérive d'un pseudo-potentiel de dissipation

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \left[-I'(z) + I'(0)\right]\dot{z} & \text{si } \dot{z} > 0 \text{ et } 0 \leqslant z < 1, \\ \left[-I'(z) + I'(1)\right]\dot{z} & \text{si } \dot{z} < 0 \text{ et } 0 < z \leqslant 1. \end{cases} \tag{2.30}$$

Cette loi est donnée par

$$\dot{z} = \begin{cases} 0 & \text{en l'absence de changement de phase,} \\ \dfrac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_0} & \text{au cours d'un changement de phase.} \end{cases} \tag{2.31}$$

Il est intéressant de noter qu'en vertu des équations (2.29) et (2.31), le changement de phase dans le cadre du modèle Moumni–Nguyen se fait toujours à contrainte constante (figure 2.2). En effet

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= K(\dot{\varepsilon} - \dot{z}\varepsilon_0) \\ &= 0 \quad \text{pour } \dot{z} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

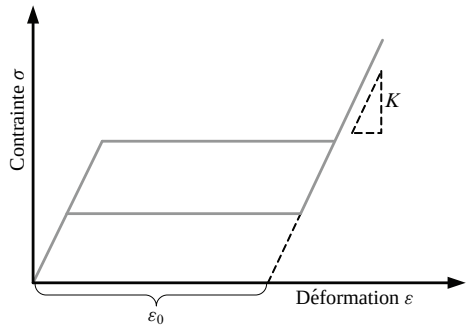


FIG. 2.2 – Modèle Moumni–Nguyen de la pseudoélasticité. Le changement de phase s'effectue à contrainte constante.

2.3 Conclusion

La méthode des deux potentiels, dans le cas où des liaisons existent entre les variables d'état, offre un cadre théorique robuste et élégant pour le développement de lois de comportement vérifiant les principes de la thermodynamique. Un exemple d'application est fourni par le modèle Moumni–Nguyen qui permet de décrire l'effet pseudoélastique. Cette méthode est utilisée dans la suite de cette thèse pour le développement de nouveaux modèles plus élaborés pouvant servir au calcul de structures en MMF.

Bibliographie

F. AURICCHIO ET L. PETRINI, « Improvements and algorithmical considerations on a recent three-dimensional model describing stress-induced solid phase transformations », *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 55, p. 1255–1284, 2002.

M. FRÉMOND, Matériaux à mémoire de forme, C.R. Académie des Sciences, Paris, Tome 34, s.II, n.7, p. 239–244, 1987.

M. FRÉMOND, « L'éducation des alliages à mémoire de forme », *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. 7, n° 8, p. 35–46, 1998.

M. FRÉMOND, *Non Smooth Thermomechanics*, Springer, 2001.

P. GERMAIN, *Mécanique*, vol. 1, École Polytechnique, 1986.

B. HALPHEN ET Q. NGUYEN, « Plastic and visco-plastic materials with generalized potential », *Mechanical Research Communications*, vol. 1, p. 43–47, 1974.

Z. MOUMNI, *Sur la modélisation du changement de phase à l'état solide*, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Ponts et Chaussées, 1995.

Q. NGUYEN ET Z. MOUMNI, Sur une modélisation du changement de phases solides, C.R. Académie des Sciences, Paris, Tome 321, s.IIb, p. 87–92, 1995.

Q. NGUYEN ET Z. MOUMNI, « Modélisation théorique et calcul numérique du changement de phase dans les solides », *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 7, n° 8, p. 47–68, 1998.

CHAPITRE 3

Un premier modèle unidimensionnel unifié

3.1 Introduction

On développe dans ce chapitre un modèle de comportement des matériaux à mémoire de forme en généralisant la loi Moumni–Nguyen (Moumni, 1995).

La modélisation proposée s'inscrit dans le cadre des matériaux standards généralisés en présence de liaisons internes entre les variables d'état. Les différences par rapport à la loi Moumni–Nguyen sont essentiellement dues à des choix différents de l'énergie d'interaction et du pseudo-potentiel de dissipation.

Le présent modèle prend en compte les transformations à trois phases, telles que la transformation simultanée de l'austénite en deux variantes martensitiques. Il permet une simulation unifiée des principaux phénomènes caractéristiques du comportement des MMF, notamment : la pseudoélasticité, la formation de la martensite autoaccommodante, l'orientation, l'effet superthermique et l'effet mémoire simple sens.

Le déroulement des calculs est rapporté de manière simplifiée dans les paragraphes suivants. Pour plus de détails, le lecteur intéressé est invité à consulter l'annexe A.

3.2 Modèle de comportement des MMF

On considère pour la modélisation le même modèle rhéologique utilisé par Moumni et Nguyen, c'est-à-dire un arrangement en série de l'austénite A et de deux variantes martensitiques M^- et M^+. L'austénite se transforme préférentiellement en martensite M^+ sous l'effet d'une traction et en M^- sous l'effet d'une compression.

3.2.1 Variables d'état et énergie libre

L'ensemble des variables d'état retenues pour la modélisation comporte
- la déformation macroscopique ε et la température T ;
- les fractions volumiques de l'austénite, de la martensite M^+ et de la martensite M^-, respectivement z_1, z_2 et z_3 ;
- et les déformations locales correspondantes ε_1, ε_2 et ε_3.

On considère que seul le changement de phase est un processus dissipatif, les variables dissipatives sont donc les fractions volumiques z_1, z_2 et z_3.

Puisque l'austénite est une phase élastique, on lui associe la densité d'énergie libre

$$\mathcal{W}_1 \overset{\text{déf}}{=} W_1(\varepsilon_1) = \frac{1}{2} K_{\text{A}} \varepsilon_1^2, \tag{3.1}$$

où K_{A} est le module élastique de l'austénite.

Les densités d'énergie des variantes martensitiques M^+ et M^- dépendent de la température. On leur associe les expressions respectives

$$\mathcal{W}_2 \overset{\text{déf}}{=} W_2(\varepsilon_2, T) = \frac{1}{2} K_{\text{M}} (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)^2 + C(T) \tag{3.2}$$

et

$$\mathcal{W}_3 \overset{\text{déf}}{=} W_3(\varepsilon_3, T) = \frac{1}{2} K_{\text{M}} (\varepsilon_3 + \varepsilon_0)^2 + C(T). \tag{3.3}$$

K_{M} est le module élastique supposé être le même pour les deux variantes martensitiques tandis que $C(T)$ est une chaleur latente de changement de phase et ε_0 est la déformation non-élastique maximale que peut engendrer la transformation de l'austénite en martensite. ε_0 est positive.

La densité d'énergie libre $\mathcal{W}$ du MMF s'écrit naturellement comme la somme des contributions de chacune des trois phases [1] et d'une énergie $\mathcal{I} \overset{\text{déf}}{=} I(z_1, z_2, z_3)$ représentant l'interaction entre ces phases.

$$\mathcal{W} \overset{\text{déf}}{=} W(\varepsilon, T, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, z_1, z_2, z_3) = z_1 \mathcal{W}_1 + z_2 \mathcal{W}_2 + z_3 \mathcal{W}_3 + \mathcal{I}. \tag{3.4}$$

D'après la littérature (Müller et Seelecke, 2001 ; Raniecki et Lexcellent, 1998 ; Berveiller et Patoor, 1993), $\mathcal{I}$ est une fonction des fractions volumiques. On lui associe l'expression

$$\mathcal{I} \overset{\text{déf}}{=} I(z_1, z_2, z_3) = G z_1 (z_2 + z_3) + H z_2 z_3, \tag{3.5}$$

où G quantifie l'interaction de l'austénite avec chacune des deux variantes martensitiques et H quantifie l'interaction au sein de la martensite entre les variantes M^+ et M^-.

3.2.2 Liaisons internes et lagrangien

Les variables d'état proposées pour la description du comportement des MMF doivent obéir à certaines contraintes physiques, notamment :

– le modèle rhéologique retenu est un modèle en série, la déformation macroscopique ε au niveau du volume élémentaire de référence est donc égale à la somme des déformations dues à chacune des phases, d'où

$$\sum_{i=1}^{3} z_i \varepsilon_i - \varepsilon = 0\,; \tag{3.6}$$

1. En réalité M^+ et M^- ne sont pas deux phases différentes mais deux variantes de la même phase martensitique. On acceptera cependant cet abus de langage tant qu'il ne prête pas à confusion.

– le matériau est uniquement constitué des trois phases de fractions volumiques z_1, z_2 et z_3, sans qu'il y ait interpénétration entre ces phases. La somme des fractions volumiques est donc identiquement égale à l'unité.

$$\sum_{i=1}^{3} z_i - 1 = 0\,; \tag{3.7}$$

– les fractions volumiques ne peuvent pas être négatives. Il en résulte les liaisons unilatérales

$$z_i \geqslant 0 \quad \forall i \in \{1,2,3\}\,. \tag{3.8}$$

Si l'on admet que les liaisons précédentes, indépendantes du temps réel, sont parfaites [2], on démontre (Moumni, 1995) que ces liaisons dérivent d'un potentiel $\mathcal{W}_l$ tel que

$$\mathcal{W}_l = -\lambda\left(\sum_{i=1}^{3} z_i\varepsilon_i - \varepsilon\right) - \nu\left(\sum_{i=1}^{3} z_i - 1\right) - \sum_{i=1}^{3}\lambda_i z_i. \tag{3.9}$$

λ, ν et λ_i, pour tout i dans $\{1,2,3\}$, sont des multiplicateurs de Lagrange. Les multiplicateurs λ_i associés aux liaisons unilatérales doivent satisfaire les conditions (Germain, 1986)

$$\forall i \in \{1,2,3\}, \quad \lambda_i \geqslant 0 \text{ et } \lambda_i z_i = 0. \tag{3.10}$$

Le lagrangien $\mathcal{L}$ est la somme de l'énergie libre et du potentiel $\mathcal{W}_l$.

$$\mathcal{L} = \mathcal{W} + \mathcal{W}_l. \tag{3.11}$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &\overset{\text{déf}}{=} L(\varepsilon, T, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, z_1, z_2, z_3) \\
&= z_1\left(\frac{1}{2}K_{\mathrm{A}}\varepsilon_1^2\right) \\
&\quad + z_2\left[\frac{1}{2}K_{\mathrm{M}}(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)^2 + C(T)\right] + z_3\left[\frac{1}{2}K_{\mathrm{M}}(\varepsilon_3 + \varepsilon_0)^2 + C(T)\right] \\
&\quad + Gz_1(z_2 + z_3) + Hz_2z_3 \\
&\quad - \lambda\left(\sum_{i=1}^{3} z_i\varepsilon_i - \varepsilon\right) - \nu\left(\sum_{i=1}^{3} z_i - 1\right) - \sum_{i=1}^{3}\lambda_i z_i,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

avec

$$\forall i \in \{1,2,3\}, \quad \lambda_i \geqslant 0 \text{ et } \lambda_i z_i = 0. \tag{3.13}$$

3.2.3 Lois d'état

On considère que le changement de phase, caractérisé par l'évolution des fractions volumiques z_1, z_2 et z_3, est le seul mécanisme dissipatif. Si $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ sont les forces

2. Les liaisons sont parfaites lorsque la puissance virtuelle des efforts de liaison, pour tout mouvement virtuel compatible avec ces liaisons, est non négative (Germain, 1986).

thermodynamiques duales des fractions volumiques, les équations d'état qui découlent de l'inégalité de Clausius–Duhem s'écrivent

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon} = \sigma \quad \Rightarrow \quad \lambda = \sigma, \tag{3.14}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1(K_{\mathrm{A}}\varepsilon_1 - \lambda) = 0, \tag{3.15}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_2\left[K_{\mathrm{M}}(\varepsilon_2 - \varepsilon_0) - \lambda\right] = 0, \tag{3.16}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_3\left[K_{\mathrm{M}}(\varepsilon_2 - \varepsilon_0) - \lambda\right] = 0, \tag{3.17}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1} = \mathcal{A}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_1 = -\frac{1}{2}K_{\mathrm{A}}\varepsilon_1^2 - \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial z_1} + \lambda\varepsilon_1 + \nu + \lambda_1, \tag{3.18}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_2} = \mathcal{A}_2 \quad \Rightarrow \quad -\left[\frac{1}{2}K_{\mathrm{M}}(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)^2 + C(T)\right] - \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial z_2} + \lambda\varepsilon_2 + \nu + \lambda_2 = \mathcal{A}_2, \tag{3.19}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_3} = \mathcal{A}_3 \quad \Rightarrow \quad -\left[\frac{1}{2}K_{\mathrm{M}}(\varepsilon_3 + \varepsilon_0)^2 + C(T)\right] - \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial z_3} + \lambda\varepsilon_3 + \nu + \lambda_3 = \mathcal{A}_3, \tag{3.20}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1\varepsilon_1 + z_2\varepsilon_2 + z_3\varepsilon_3 = \varepsilon, \tag{3.21}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 + z_2 + z_3 = 1. \tag{3.22}$$

Ces équations permettent d'établir la loi de comportement du matériau

$$\sigma = K\left[\varepsilon - (z_2 - z_3)\varepsilon_0\right], \tag{3.23}$$

où K représente le module élastique équivalent du matériau. K est donné par

$$K = \left(\frac{z_1}{K_{\mathrm{A}}} + \frac{1 - z_1}{K_{\mathrm{M}}}\right)^{-1}. \tag{3.24}$$

Il est intéressant de signaler que le module K ainsi défini rappelle l'expression du module élastique équivalent d'un arrangement en série de ressorts. Ce résultat est directement lié à la nature du modèle rhéologique choisi pour la modélisation.

3.2.4 Pseudo-potentiel de dissipation

Le changement de phase étant un processus dissipatif, les forces thermodynamiques associées ne sont pas nulles. En effet, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ représentent des quantités inconnues qui nécessitent l'introduction de nouvelles relations afin que le comportement du matériau soit complètement déterminé. Dans le cadre des matériaux standards généralisés (Halphen et Nguyen, 1974), ces nouvelles relations, appelées aussi « lois complémentaires », dérivent d'un pseudo-potentiel de dissipation $\mathcal{D} \overset{\text{déf}}{=} D(\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3)$. $\mathcal{D}$ est convexe, positif, nul à l'origine et semi-continu inférieurement.

On propose l'expression suivante de $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = \alpha\dot{z}_1 + \beta\dot{z}_2 + \gamma\dot{z}_3, \tag{3.25}$$

où α, β et γ sont définis par

$$\alpha = a(z_2 + z_3)\,\mathrm{sign}\,\dot{z}_1, \tag{3.26}$$
$$\beta = (b_1 z_1 + b_2 z_3)\,\mathrm{sign}\,\dot{z}_2, \tag{3.27}$$
$$\gamma = (b_1 z_1 + b_2 z_2)\,\mathrm{sign}\,\dot{z}_3. \tag{3.28}$$

a, b_1 et b_2 sont des constantes du matériau. Il suffit que ces constantes soient positives pour que le choix proposé de $\mathcal{D}$ soit acceptable.

3.2.5 Fonctions critères et lois complémentaires

Les fonctions critères associées aux différentes transformations possibles au sein du matériau s'obtiennent naturellement en écrivant que les forces thermodynamiques sont des sous-gradients du pseudo-potentiel de dissipation $\mathcal{D}$ par rapport aux dérivées temporelles des variables dissipatives associées. On rappelle que, dans le cadre des matériaux standards généralisés, $\mathcal{D}$ doit être convexe, positif, semi-continu inférieurement et nul à l'origine.

Les relations

$$\mathcal{A}_i \in \partial_{\dot{z}_i}\mathcal{D} \quad \forall i \in \{1,2,3\} \tag{3.29}$$

sont équivalentes à l'ensemble des inégalités

$$\mathcal{F}_j^i \leqslant 0, \tag{3.30}$$

où $\mathcal{F}_j^i$, pour tout $i \in \{1,2,3\}$ et $j \in \{1,2\}$, est une fonction critère dépendant de la force thermodynamique $\mathcal{A}_i$, associée à la phase i, et des fractions volumiques z_1, z_2 et z_3. $j = 1$ correspond à un accroissement de la fraction z_i tandis que $j = 2$ correspond à une diminution de z_i. Les fonctions critères $\mathcal{F}_j^i$ sont données par

$$\mathcal{F}_1^1 = -\frac{1}{2}K_{\mathrm{A}}\varepsilon_1^2 + \sigma\varepsilon_1 + \nu - (G+a)(z_2+z_3), \tag{3.31}$$
$$\mathcal{F}_2^1 = \frac{1}{2}K_{\mathrm{A}}\varepsilon_1^2 - \sigma\varepsilon_1 - \nu + (G-a)(z_2+z_3), \tag{3.32}$$
$$\mathcal{F}_1^2 = -\frac{1}{2}K_{\mathrm{M}}(\varepsilon_2-\varepsilon_0)^2 - C(T) + \sigma\varepsilon_2 + \nu - (G+b_1)z_1 - (H+b_2)z_3, \tag{3.33}$$
$$\mathcal{F}_2^2 = \frac{1}{2}K_{\mathrm{M}}(\varepsilon_2-\varepsilon_0)^2 + C(T) - \sigma\varepsilon_2 - \nu + (G-b_1)z_1 + (H-b_2)z_3, \tag{3.34}$$
$$\mathcal{F}_1^3 = -\frac{1}{2}K_{\mathrm{M}}(\varepsilon_3+\varepsilon_0)^2 - C(T) + \sigma\varepsilon_3 + \nu - (G+b_1)z_1 - (H+b_2)z_2, \tag{3.35}$$
$$\mathcal{F}_2^3 = \frac{1}{2}K_{\mathrm{M}}(\varepsilon_3+\varepsilon_0)^2 + C(T) - \sigma\varepsilon_3 - \nu + (G-b_1)z_1 + (H-b_2)z_2. \tag{3.36}$$

Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, l'évolution de la fraction volumique z_i est déterminée à partir de la condition de charge appropriée :

– si z_i croît, alors $\mathcal{F}_1^i$ est nulle nécessairement et l'expression de $\dot{z}_i$ est donnée par la condition de consistance $\dot{\mathcal{F}}_1^i = 0$;

– si z_i décroît, alors $\mathcal{F}_2^i$ est nulle nécessairement et l'expression de $\dot{z}_i$ est donnée par la condition de consistance $\dot{\mathcal{F}}_2^i = 0$.

3.2.6 Procédure d'identification des paramètres

L'ensemble des paramètres à identifier comprend :
– les modules élastiques respectifs de l'austénite et de la martensite, K_{A} et K_{M} ;
– la déformation de transformation maximale en traction, ε_0 ;
– a, b_1, b_2, G, H, ξ et κ qui seront interprétés dans la suite, quand le problème de l'identification expérimentale des paramètres sera traité.

K_{A} et K_{M} peuvent être déterminés à partir d'un seul essai de traction suivi d'une décharge dans le domaine pseudoélastique.

Si l'on suppose que $C(T)$ est une fonction linéaire de la température donnée par

$$C(T) = \xi\left(T - A_{\mathrm{f}}^0\right) + \kappa, \tag{3.37}$$

la détermination complète des paramètres nécessite en plus un essai d'orientation de la martensite autoaccommodante suivie d'une décharge ainsi qu'un essai de calorimétrie à balayage différentiel. La forme de $C(T)$ donnée par (3.37) permet d'obtenir, conformément aux résultats expérimentaux, une évolution presque linéaire des contraintes seuils de changement de phase avec la température.

L'essai de calorimétrie à balayage différentiel

L'essai de calorimétrie à balayage différentiel (ou DSC, pour Differential Scanning Calorimetry) permet en particulier la détermination des températures de changement de phase pour un matériau sous contrainte nulle (Wang et coll., 2004 ; Uchil et coll., 2001, 1998b).

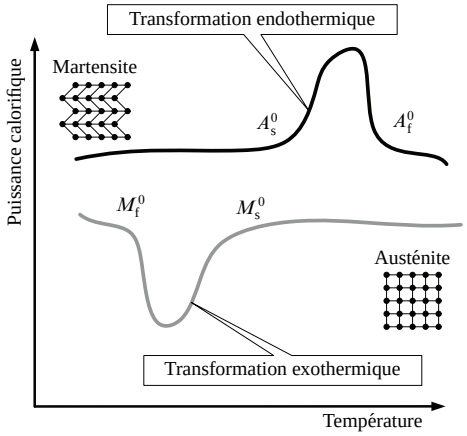


FIG. 3.1 – Essai de calorimétrie à balayage différentiel (DSC). Les températures M_{s}^0, M_{f}^0, A_{s}^0 et A_{f}^0 sont les températures respectives de début et de fin des transformations martensitiques directe et inverse.

L'essai consiste à mesurer le flux de chaleur, en fonction de la température qu'on fait varier, entre une capsule contenant un échantillon du matériau étudié et une capsule

de référence. La capsule de référence est identique à celle qui contient le matériau, mais elle est généralement vide. Une bonne conduction calorifique est assurée entre les capsules afin de maintenir une différence de température minimale ; la température peut ainsi être considérée comme paramètre de contrôle. En même temps, le faible écart de température entre les capsules permet de calculer à tout moment le flux de chaleur dû principalement à l'inertie thermique du matériau, ainsi qu'à toute transformation au sein du matériau nécessitant ou bien engendrant de la chaleur.

Dans le cas de la transformation martensitique, la perte de symétrie cristallographique lors de la transformation de l'austénite en martensite est accompagnée d'un dégagement de chaleur qui peut être mesuré par DSC. Ceci permet la détermination des températures–seuils de début et de fin de la transformation directe, respectivement M_{s}^0 et M_{f}^0 (voir figure 3.1). Les températures de début et de fin de la transformation inverse, respectivement A_{s}^0 et A_{f}^0, sont déterminées de la même manière, la transformation inverse étant un processus endothermique.

L'essai d'orientation

En l'absence de l'austénite, la martensite est autoaccommodante si $z_2 = z_3 = \dfrac{1}{2}$. Lors d'un essai de traction, la variante M^- se transforme progressivement en M^+, entraînant l'apparition d'une déformation inélastique importante dite « déformation de transformation ». La déformation de transformation atteint ε_0 quand la transformation de M^- en M^+ est complète, c'est-à-dire quand la fraction z_2 devient égale à l'unité (voir figure 3.2).

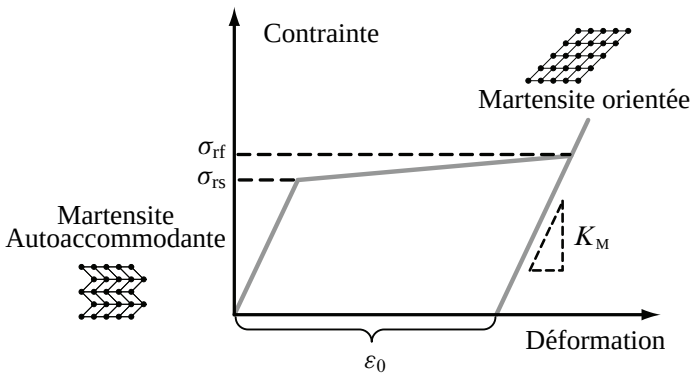


FIG. 3.2 – Essai de traction conduisant à l'orientation de la martensite autoaccommodante. L'essai permet notamment de déterminer le module élastique K_{M} de la martensite et la déformation de transformation maximale ε_0.

L'essai d'orientation permet de déterminer directement le module élastique K_{M} de la martensite ainsi que la déformation de transformation maximale ε_0. D'autre part, au cours de l'orientation, les fonctions critères $\mathcal{F}_2^3$ et $\mathcal{F}_1^2$ restent nulles. Ceci se traduit par la relation

$$2\sigma\varepsilon_0 = 2b_1 z_1 - (H - b_2)z_2 + (H + b_2)z_3. \tag{3.38}$$

Si σ_{rs} et σ_{rf} sont les contraintes de début $\left(z_2 = z_3 = \frac{1}{2}\right)$ et de fin ($z_2 = 1$ et $z_3 = 0$) de l'orientation, la relation (3.38) donne

$$b_2 = 2\sigma_{rs}\varepsilon_0, \tag{3.39}$$
$$H = 2(\sigma_{rs} - \sigma_{rf})\varepsilon_0. \tag{3.40}$$

b_2 contrôle donc la valeur–seuil de la contrainte à partir de laquelle commence l'orientation de la martensite autoaccommodante tandis que la pente de la courbe contrainte–déformation lors de l'orientation est contrôlée par H et ε_0. Ceci est logique puisque H mesure l'interaction entre les variantes M^+ et M^-.

L'essai pseudoélastique

L'obtention de l'effet pseudoélastique nécessite le maintien de la température du matériau à une valeur constante T_0 supérieure à A_f^0. Dans ce cas, en l'absence de chargement mécanique, le matériau est à l'état austénitique caractérisé par $z_1 = 1$.

Si l'on fait subir au matériau une traction suffisamment importante, la transformation directe de l'austénite en martensite M^+ commence pour une valeur σ_{ms} de la contrainte et pour une fraction volumique de l'austénite z_1 égale à l'unité. La fin de la transformation est caractérisée par $\sigma = \sigma_{mf}$, $z_2 = 1$ et une déformation inélastique égale à ε_0 quand l'austénite se transforme complètement en martensite M^+. De même, la transformation inverse commence pour $\sigma = \sigma_{as}$ et $z_2 = 1$, et s'achève pour $\sigma = \sigma_{af}$ et $z_1 = 1$ (figure 3.3).

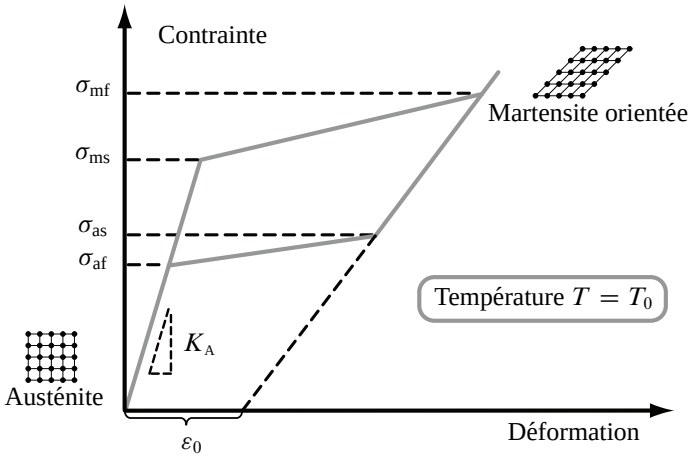


FIG. 3.3 – Essai pseudoélastique. L'essai est réalisé à une température T_0 supérieure à A_f^0. σ_{ms}, σ_{mf}, σ_{as} et σ_{af} représentent respectivement les contraintes de début et de fin des transformations directe et inverse à la température T_0.

La transformation directe étant gouvernée par les conditions $\mathcal{F}_2^1 = 0$ et $\mathcal{F}_1^2 = 0$ et

la transformation inverse par $\mathcal{F}_2^2 = 0$ et $\mathcal{F}_1^1 = 0$, on a les relations

$$\frac{\sigma_{\mathrm{ms}}^2}{2}\left(\frac{1}{K_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{A}}}\right) + \sigma_{\mathrm{ms}}\varepsilon_0 - C(T_0) - (G + b_1) = 0, \tag{3.41}$$

$$\frac{\sigma_{\mathrm{mf}}^2}{2}\left(\frac{1}{K_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{A}}}\right) + \sigma_{\mathrm{mf}}\varepsilon_0 - C(T_0) + (G - a) = 0, \tag{3.42}$$

$$-\frac{\sigma_{\mathrm{as}}^2}{2}\left(\frac{1}{K_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{A}}}\right) - \sigma_{\mathrm{as}}\varepsilon_0 + C(T_0) - (G + a) = 0, \tag{3.43}$$

$$-\frac{\sigma_{\mathrm{af}}^2}{2}\left(\frac{1}{K_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{A}}}\right) - \sigma_{\mathrm{af}}\varepsilon_0 + C(T_0) + (G - b_1) = 0. \tag{3.44}$$

Ce système de quatre équations permet de déterminer les quatre inconnues a, b_1, G et $C(T_0)$.

$$a = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_{\mathrm{mf}}^2 - \sigma_{\mathrm{as}}^2}{2}\left(\frac{1}{K_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{A}}}\right) + (\sigma_{\mathrm{mf}} - \sigma_{\mathrm{as}})\varepsilon_0\right], \tag{3.45}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_{\mathrm{ms}}^2 - \sigma_{\mathrm{af}}^2}{2}\left(\frac{1}{K_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{A}}}\right) + (\sigma_{\mathrm{ms}} - \sigma_{\mathrm{af}})\varepsilon_0\right], \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned} G = \frac{-1}{4}\Bigg[&\frac{\sigma_{\mathrm{as}}^2 - \sigma_{\mathrm{af}}^2}{2}\left(\frac{1}{K_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{A}}}\right) + (\sigma_{\mathrm{as}} - \sigma_{\mathrm{af}})\varepsilon_0 \\ &+ \frac{\sigma_{\mathrm{mf}}^2 - \sigma_{\mathrm{ms}}^2}{2}\left(\frac{1}{K_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{A}}}\right) + (\sigma_{\mathrm{mf}} - \sigma_{\mathrm{ms}})\varepsilon_0\Bigg], \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned} C(T_0) = \frac{1}{4}\Bigg[&\frac{\sigma_{\mathrm{as}}^2 + \sigma_{\mathrm{af}}^2}{2}\left(\frac{1}{K_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{A}}}\right) + (\sigma_{\mathrm{as}} + \sigma_{\mathrm{af}})\varepsilon_0 \\ &+ \frac{\sigma_{\mathrm{mf}}^2 + \sigma_{\mathrm{ms}}^2}{2}\left(\frac{1}{K_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{A}}}\right) + (\sigma_{\mathrm{mf}} + \sigma_{\mathrm{ms}})\varepsilon_0\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.48}$$

a et b_1, intervenant dans l'expression du pseudo-potentiel de dissipation $\mathcal{D}$, contrôlent la largeur de la boucle d'hystérésis tandis que G, une mesure de l'interaction entre austénite et martensite, dépend des pentes de la courbe contrainte–déformation lors des transformations directe et inverse. Il est intéressant de signaler que les valeurs de a, b_1 et b_2 sont toujours positives ; ceci assure la positivité de $\mathcal{D}$.

L'essai pseudoélastique peut servir aussi à la détermination de la déformation de transformation maximale ε_0 atteinte quand la fraction volumique z_2 de la variante martensitique M^+ devient égale à l'unité à la fin de la transformation pseudoélastique directe.

La connaissance des valeurs de $C(T_0)$ et de A_{f}^0 permet de compléter l'identification des paramètres du modèle. En effet, κ égale $C\left(A_{\mathrm{f}}^0\right)$ d'après (3.37). Or, $C\left(A_{\mathrm{f}}^0\right)$ n'est autre que la valeur de $C(T)$ à la fin d'une transformation inverse sous contrainte nulle. Les conditions sur les fonctions critères dans ce cas, à savoir $\mathcal{F}_2^2 = 0$ et $\mathcal{F}_1^1 = 0$ pour $\sigma = 0$, $T = A_{\mathrm{f}}^0$ et $z_1 = 1$, donnent

$$\kappa = b_1 - G. \tag{3.49}$$

Connaissant les valeurs de $C(T)$ pour $T = A_f^0$ et pour $T = T_0$, on détermine ξ par

$$\xi = \frac{C(T_0) - \kappa}{T_0 - A_f^0}. \tag{3.50}$$

3.3 Modélisation des différents phénomènes

On établit dans les paragraphes suivants les expressions des lois complémentaires associées à divers phénomènes caractéristiques des matériaux à mémoire de forme, notamment la pseudoélasticité, la formation de la martensite autoaccommodante, l'orientation de la martensite autoaccommodante, l'effet mémoire simple sens et l'effet superthermique. Les lois complémentaires expriment l'évolution des fractions volumiques z_1, z_2 et z_3 lors d'un changement de phase et permettent, en conjonction avec les lois d'état établies au paragraphe 3.2.3, de définir complètement le comportement du matériau.

3.3.1 Pseudoélasticité

On considère un essai de traction à une température T_{pe} constante et supérieure à A_f^0 pour que le matériau soit initialement à l'état austénitique. La composition de départ du MMF correspond donc à $z_1 = 1$, ce qui entraîne $\varepsilon_1 = \varepsilon$ tandis que les déformations ε_2 et ε_3 sont indéterminées. L'indétermination de ε_2 et de ε_3 est normale dans ce cas puisque les variantes M^+ et M^- sont inexistantes.

Dans le cas de la pseudoélasticité, la formation de la martensite à partir de l'austénite est contrôlée par les fonctions critères $\mathcal{F}_2^1$, $\mathcal{F}_1^2$ et $\mathcal{F}_1^3$ de la manière suivante :

- si l'austénite se transforme en martensite M^+, les relations $\mathcal{F}_2^1 = 0$ et $\mathcal{F}_1^2 = 0$ donnent

$$\begin{aligned} \sigma\varepsilon_0 + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right) = C\left(T_{pe}\right) &+ (G + b_1)z_1 \\ &- (G - a)z_2 \\ &- \left[(G - a) - (H + b_2)\right] z_3 \,; \end{aligned} \tag{3.51}$$

- si l'austénite se transforme en martensite M^-, les relations $\mathcal{F}_2^1 = 0$ et $\mathcal{F}_1^3 = 0$ donnent

$$\begin{aligned} -\sigma\varepsilon_0 + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right) = C\left(T_{pe}\right) &+ (G + b_1)z_1 \\ &- \left[(G - a) - (H + b_2)\right] z_2 \\ &- (G - a)z_3. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Pour une température T_{pe} assez élevée, une seule de ces deux transformations peut se produire. L'austénite se transforme, soit en martensite M^+ uniquement sous l'effet d'une traction, soit en martensite M^- uniquement sous l'effet d'une compression.

Les lois d'évolution des fractions volumiques lorsque la transformation $A \to M^+$

est effective peuvent être déduites des conditions de consistance $\dot{\mathcal{F}}_2^1 = 0$ et $\dot{\mathcal{F}}_1^2 = 0$.

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{2G - a + b_1}\left[\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right)\sigma\dot{\sigma} + \dot{\sigma}\varepsilon_0\right], \tag{3.53}$$

$$\dot{z}_2 = -\dot{z}_1, \tag{3.54}$$

$$\dot{z}_3 = 0. \tag{3.55}$$

Dans le cas d'une transformation de l'austénite en M^- uniquement, ces lois s'écrivent

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{2G - a + b_1}\left[\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right)\sigma\dot{\sigma} - \dot{\sigma}\varepsilon_0\right], \tag{3.56}$$

$$\dot{z}_2 = 0, \tag{3.57}$$

$$\dot{z}_3 = -\dot{z}_1. \tag{3.58}$$

De manière analogue, la transformation inverse de la martensite en austénite est contrôlée par les fonctions critères $\mathcal{F}_2^2$, $\mathcal{F}_2^3$ et $\mathcal{F}_1^1$:

– si la martensite M^+ se transforme en austénite, on a

$$\begin{aligned}\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right) + \sigma\varepsilon_0 = C\left(T_{pe}\right) &+ (G - b_1)z_1 \\ &- (G + a)z_2 \\ &+ \left[(H - b_2) - (G + a)\right]z_3\end{aligned} \tag{3.59}$$

et les lois d'évolution établies à partir des conditions de consistance sont données par

$$\dot{z}_1 = \frac{-1}{2G + a - b_1}\left[\left(\frac{1}{K_A} - \frac{1}{K_M}\right)\sigma\dot{\sigma} - \dot{\sigma}\varepsilon_0\right], \tag{3.60}$$

$$\dot{z}_2 = -\dot{z}_1, \tag{3.61}$$

$$\dot{z}_3 = 0\,; \tag{3.62}$$

– si c'est M^- qui se transforme en austénite, $\mathcal{F}_2^3 = 0$ et $\mathcal{F}_1^1 = 0$ impliquent

$$\begin{aligned}\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right) - \sigma\varepsilon_0 = C\left(T_{pe}\right) &+ (G - b_1)z_1 \\ &+ \left[(H - b_2) - (G + a)\right]z_2 \\ &- (G + a)z_3\end{aligned} \tag{3.63}$$

et les lois d'évolution correspondantes sont telles que

$$\dot{z}_1 = \frac{-1}{2G + a - b_1}\left[\left(\frac{1}{K_A} - \frac{1}{K_M}\right)\sigma\dot{\sigma} + \dot{\sigma}\varepsilon_0\right], \tag{3.64}$$

$$\dot{z}_2 = 0, \tag{3.65}$$

$$\dot{z}_3 = -\dot{z}_1. \tag{3.66}$$

3.3.2 Autoaccommodation de la martensite

Sous contrainte nulle, les seuils de changement de phase associés aux deux transformations directes $A \rightarrow M^+$ et $A \rightarrow M^-$ sont atteintes en même temps quand

l'austénite est refroidie. En effet, quand $\sigma = 0$ au début de la transformation directe et quand le matériau est initialement à l'état austénitique caractérisé par $z_1 = 1$, les conditions $\mathcal{F}_2^1 = 0$, $\mathcal{F}_1^2 = 0$ et $\mathcal{F}_1^3 = 0$ sont satisfaites simultanément pour

$$C(T) = -(G + b_1). \tag{3.67}$$

La solution de (3.67) définit la température de début de la transformation de l'austénite A en martensite M^+ et en martensite M^- à la fois. Les cinétiques de cette transformation sont solution du système

$$\dot{\mathcal{F}}_2^1 = 0, \quad \dot{\mathcal{F}}_1^2 = 0 \quad \text{et } \dot{\mathcal{F}}_1^3 = 0. \tag{3.68}$$

Elles sont données par

$$\dot{z}_1 = \frac{-2\dot{C}(T)}{2(G + b_1) + 2(G - a) - (H + b_2)}, \tag{3.69}$$

$$\dot{z}_2 = \frac{\dot{C}(T)}{2(G + b_1) + 2(G - a) - (H + b_2)}, \tag{3.70}$$

$$\dot{z}_3 = \dot{z}_2. \tag{3.71}$$

La déformation de transformation $(z_2 - z_3)\varepsilon_0$ est nulle dans ce cas, puisque des quantités égales de M^+ et de M^- sont formées à partir de l'austénite. La martensite obtenue à la fin de la transformation est donc autoaccommodante ; elle est caractérisée par $z_2 = z_3 = \dfrac{1}{2}$.

3.3.3 Orientation de la martensite autoaccommodante

À la fin du processus d'autoaccommodation, le matériau à mémoire de forme est caractérisé par des fractions volumiques telles que $z_2 = z_3 = \dfrac{1}{2}$. Si une traction est appliquée au matériau, la variante M^- se transforme progressivement en M^+ entraînant l'orientation de la martensite. L'orientation est contrôlée par les fonctions critères $\mathcal{F}_2^3$ et $\mathcal{F}_1^2$.

Quand la transformation de M^- en M^+ est effective, les conditions $\mathcal{F}_2^3 = 0$ et $\mathcal{F}_1^2 = 0$ conduisent à la relation

$$2\sigma\varepsilon_0 = 2b_1 z_1 - (H - b_2)z_2 + (H + b_2)z_3. \tag{3.72}$$

Les conditions de consistance $\dot{\mathcal{F}}_2^3 = 0$ et $\dot{\mathcal{F}}_1^2 = 0$ permettent d'établir les lois d'évolution des fractions volumiques.

$$\dot{z}_1 = 0, \tag{3.73}$$

$$\dot{z}_2 = -\frac{\dot{\sigma}\varepsilon_0}{H}, \tag{3.74}$$

$$\dot{z}_3 = -\dot{z}_2. \tag{3.75}$$

La décharge s'effectue élastiquement, conduisant à une déformation macroscopique égale à ε_0 quand la contrainte s'annule.

3.3.4 Effet mémoire simple sens (EMSS)

L'effet mémoire simple sens caractérise la réponse d'un matériau à mémoire de forme à une suite de chargements thermomécaniques entraînant successivement

- la formation de la martensite autoaccommodante par refroidissement de l'austénite à contrainte nulle ;
- l'orientation de la martensite autoaccommodante sous l'effet d'un chargement mécanique ;
- la transformation inverse de la martensite orientée en austénite par simple chauffage.

L'autoaccommodation de la martensite et l'orientation de la martensite autoaccommodante sont modélisées séparément aux paragraphes 3.3.2 et 3.3.3. Il suffit alors, pour une modélisation complète de l'effet mémoire simple sens, de modéliser la transformation inverse à contrainte nulle.

Lors de la transformation de la martensite M^+ en austénite, les fonctions critères $\mathcal{F}_2^2$ et $\mathcal{F}_1^1$ s'annulent. Il en résulte, pour $\sigma = 0$, la relation

$$C(T) = -(G - b_1)z_1 + (G + a)z_2 - [(H - b_2) - (G + a)]\, z_3. \tag{3.76}$$

Les lois d'évolution qui en découlent sont données par

$$\dot{z}_1 = \frac{-\dot{C}(T)}{2G + a - b_1}, \tag{3.77}$$

$$\dot{z}_2 = -\dot{z}_1, \tag{3.78}$$

$$\dot{z}_3 = 0. \tag{3.79}$$

Si la martensite orientée est obtenue par compression, la transformation inverse concerne la variante M^-. Lorsque cette transformation est effective, $\mathcal{F}_2^3$ et $\mathcal{F}_1^1$ sont nulles, ce qui entraîne pour $\sigma = 0$

$$C(T) = -(G - b_1)z_1 - [(H - b_2) - (G + a)]\, z_2 + (G + a)z_3. \tag{3.80}$$

Les lois d'évolution correspondantes sont telles que

$$\dot{z}_1 = \frac{-\dot{C}(T)}{2G + a - b_1}, \tag{3.81}$$

$$\dot{z}_2 = 0, \tag{3.82}$$

$$\dot{z}_3 = -\dot{z}_1. \tag{3.83}$$

Suite à une transformation inverse complète, la fraction volumique de l'austénite devient égale à l'unité et la déformation inélastique $(z_2 - z_3)\varepsilon_0$ s'annule. Le matériau à mémoire de forme retrouve donc sa forme haute température non déformée.

3.3.5 Effet superthermique

L'effet superthermique se manifeste sous l'effet d'un chargement thermique à contrainte constante.

Le matériau à mémoire de forme, initialement à l'état austénitique caractérisé par $z_1 = 1$, est d'abord refroidi sous une contrainte $\sigma = \sigma_0$. Si la transformation martensitique directe résultant entraîne la formation de la variante M^+, la nullité des fonctions

critères $\mathcal{F}_2^1$ et $\mathcal{F}_1^2$ permet d'établir la relation

$$\begin{aligned} C(T) = \frac{\sigma_0^2}{2}\left(\frac{1}{K_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{A}}}\right) + \sigma_0\varepsilon_0 \\ - (G + b_1)z_1 + (G - a)z_2 + [(G - a) - (H + b_2)]\, z_3. \end{aligned} \tag{3.84}$$

Pour qu'il y ait formation simultanée de la martensite M^- sous la même contrainte σ_0, les conditions $\mathcal{F}_2^1 = 0$ et $\mathcal{F}_1^3 = 0$ doivent être satisfaites. Ceci conduit à

$$\begin{aligned} C(T) = \frac{\sigma_0^2}{2}\left(\frac{1}{K_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{A}}}\right) - \sigma_0\varepsilon_0 \\ - (G + b_1)z_1 + [(G - a) - (H + b_2)]\, z_2 + (G - a)z_3. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Les relations (3.84) et (3.85) permettent de constater que pour une valeur positive de σ_0 l'austénite va commencer à se transformer en martensite M^+ et non pas M^-. La formation de M^- n'est possible que lorsque la fraction volumique z_2 de la martensite M^+ atteint une valeur $z_2^{(0)}$ pour laquelle (3.84) et (3.85) sont vérifiées simultanément. Cette valeur correspond à

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{-(H + b_2)z_2^{(0)}}{2\varepsilon_0} \\ &= (2\sigma_{\mathrm{rs}} - \sigma_{\mathrm{rf}})z_2^{(0)}. \end{aligned} \tag{3.86}$$

La valeur de $z_2^{(0)}$ étant positive, on déduit qu'il ne peut y avoir formation simultanée de M^+ et de M^- que si σ_{rf} est supérieure à $2\sigma_{\mathrm{rs}}$.

Sous contrainte négative, la formation de M^- est favorisée :

– dans le cas d'une transformation de l'austénite en martensite M^+ uniquement,

$$\dot{z}_1 = \frac{-\dot{C}(T)}{2G - a + b_1}, \tag{3.87}$$

$$\dot{z}_2 = -\dot{z}_1, \tag{3.88}$$

$$\dot{z}_3 = 0\,; \tag{3.89}$$

– dans le cas d'une transformation de l'austénite en martensite M^- uniquement,

$$\dot{z}_1 = \frac{-\dot{C}(T)}{2G - a + b_1}, \tag{3.90}$$

$$\dot{z}_2 = 0, \tag{3.91}$$

$$\dot{z}_3 = -\dot{z}_1\,; \tag{3.92}$$

– dans le cas d'une transformation simultanée de l'austénite en M^+ et en M^-, les lois d'évolution sont identiques à celles obtenues dans le cas de l'autoaccommodation de la martensite, à savoir

$$\dot{z}_1 = \frac{-2\dot{C}(T)}{2(G + b_1) + 2(G - a) - (H + b_2)}, \tag{3.93}$$

$$\dot{z}_2 = \frac{\dot{C}(T)}{2(G + b_1) + 2(G - a) - (H + b_2)}, \tag{3.94}$$

$$\dot{z}_3 = \dot{z}_2. \tag{3.95}$$

D'après les expressions précédentes des lois d'évolution, on constate que, dans le cas d'une formation simultanée de M^+ et de M^-, ces deux variantes se forment à quantités égales.

À la fin de la transformation superthermique, la déformation de transformation est nulle pour une valeur nulle de σ_0. Si la contrainte σ_{rf} est supérieure ou égale à σ_{rs}, cette déformation atteint ε_0 pour une contrainte σ_0 strictement positive, et $-\varepsilon_0$ si σ_0 est négative.

3.3.6 Réponse à un chargement thermomécanique quelconque

Le présent modèle est capable de simuler la réponse d'un MMF à un chargement caractérisé par une évolution simultanée de la température et de la contrainte, comme celui de la figure 3.4. Les résultats obtenus montrent un comportement semblable à la pseudoélasticité dans le plan déformation–contrainte et à l'effet superthermique dans le plan température–déformation.

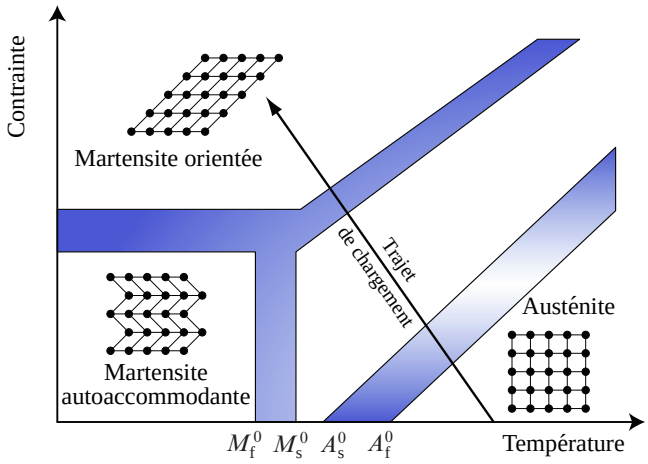


FIG. 3.4 – Exemple d'un trajet de chargement où la température et la contrainte varient en même temps.

Changement de phase direct

L'austénite peut se transformer en martensite M^+ ou M^- uniquement, mais aussi en ces deux variantes simultanément :

– si l'austénite se transforme en martensite M^+ uniquement, $\mathcal{F}_2^1 = 0$ et $\mathcal{F}_1^2 = 0$ impliquent

$$\begin{aligned}\sigma\varepsilon_0 + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{K_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{A}}}\right) = C(T) &+ (G + b_1)z_1 \\ &- (G - a)z_2 \\ &- [(G - a) - (H + b_2)]\, z_3.\end{aligned} \tag{3.96}$$

Les lois d'évolution correspondantes sont telles que

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{2G - a + b_1}\left[\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right)\sigma\dot{\sigma} + \dot{\sigma}\varepsilon_0 - \dot{C}(T)\right], \tag{3.97}$$

$$\dot{z}_2 = -\dot{z}_1, \tag{3.98}$$

$$\dot{z}_3 = 0\,; \tag{3.99}$$

– si l'austénite se transforme en martensite M^- uniquement, $\mathcal{F}_2^1 = 0$ et $\mathcal{F}_1^3 = 0$ entraînent

$$\begin{aligned} -\sigma\varepsilon_0 + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right) = C(T) &+ (G + b_1)z_1 \\ &- [(G - a) - (H + b_2)]\,z_2 \\ &- (G - a)z_3. \end{aligned} \tag{3.100}$$

Les lois d'évolution sont données par

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{2G - a + b_1}\left[\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right)\sigma\dot{\sigma} - \dot{\sigma}\varepsilon_0 - \dot{C}(T)\right], \tag{3.101}$$

$$\dot{z}_2 = 0, \tag{3.102}$$

$$\dot{z}_3 = -\dot{z}_1\,; \tag{3.103}$$

– si les deux transformations $A \to M^+$ et $A \to M^-$ sont effectives en même temps, alors les relations (3.96) et (3.100) sont simultanément vérifiées.
Les lois d'évolution vérifient à la fois $\dot{\mathcal{F}}_2^1 = 0$, $\dot{\mathcal{F}}_1^2 = 0$ et $\dot{\mathcal{F}}_1^2 = 0$.

$$\dot{z}_1 = \frac{2}{2(G + b_1) + 2(G - a) - (H + b_2)}\left[\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right)\sigma\dot{\sigma} - \dot{C}(T)\right], \tag{3.104}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = &-\frac{\dot{\sigma}\varepsilon_0}{H + b_2} \\ &- \frac{1}{2(G + b_1) + 2(G - a) - (H + b_2)}\left[\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right)\sigma\dot{\sigma} - \dot{C}(T)\right], \end{aligned} \tag{3.105}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = &\frac{\dot{\sigma}\varepsilon_0}{H + b_2} \\ &- \frac{1}{2(G + b_1) + 2(G - a) - (H + b_2)}\left[\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right)\sigma\dot{\sigma} - \dot{C}(T)\right]. \end{aligned} \tag{3.106}$$

Changement de phase inverse

Se situent dans ce cadre la transformation en austénite de chacune des deux variantes martensitiques à part et la transformation simultanée de M^+ et de M^- en austénite :

– si seule la martensite M^+ se transforme en austénite, alors les égalités $\mathcal{F}_2^2 = 0$ et $\mathcal{F}_1^1 = 0$ sont vérifiées simultanément. Ceci permet d'établir la relation

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right) + \sigma\varepsilon_0 = C\left(T_{pe}\right) &+ (G - b_1)z_1 \\ &- (G + a)z_2 \\ &+ [(H - b_2) - (G + a)]\,z_3. \end{aligned} \tag{3.107}$$

Les lois d'évolution correspondantes sont données par

$$\dot{z}_1 = \frac{-1}{2G + a - b_1}\left[\left(\frac{1}{K_{\mathrm{A}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{M}}}\right)\sigma\dot{\sigma} - \dot{\sigma}\varepsilon_0\right], \tag{3.108}$$

$$\dot{z}_2 = -\dot{z}_1, \tag{3.109}$$

$$\dot{z}_3 = 0\,; \tag{3.110}$$

– si c'est la martensite M^- seule qui se transforme en austénite, alors $\mathcal{F}_2^3 = 0$ et $\mathcal{F}_1^1 = 0$ donnent

$$\dot{z}_1 = \frac{-1}{2G + a - b_1}\left[\left(\frac{1}{K_{\mathrm{A}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{M}}}\right)\sigma\dot{\sigma} + \dot{\sigma}\varepsilon_0\right], \tag{3.111}$$

$$\dot{z}_2 = 0, \tag{3.112}$$

$$\dot{z}_3 = -\dot{z}_1\,; \tag{3.113}$$

– finalement, si M^+ et M^- se transforment simultanément en austénite, alors les égalités $\mathcal{F}_2^2 = 0$, $\mathcal{F}_2^3 = 0$ et $\mathcal{F}_1^1 = 0$ sont vérifiées en même temps. Il en résulte les lois d'évolution

$$\dot{z}_1 = \frac{2}{2(G - b_1) + 2(G + a) - (H - b_2)}\left[\left(\frac{1}{K_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{A}}}\right)\sigma\dot{\sigma} - \dot{C}(T)\right], \tag{3.114}$$

$$\dot{z}_2 = -\frac{\dot{\sigma}\varepsilon_0}{H - b_2} - \frac{1}{2(G - b_1) + 2(G + a) - (H - b_2)}\left[\left(\frac{1}{K_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{A}}}\right)\sigma\dot{\sigma} - \dot{C}(T)\right], \tag{3.115}$$

$$\dot{z}_3 = \frac{\dot{\sigma}\varepsilon_0}{H - b_2} - \frac{1}{2(G - b_1) + 2(G + a) - (H - b_2)}\left[\left(\frac{1}{K_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{K_{\mathrm{A}}}\right)\sigma\dot{\sigma} - \dot{C}(T)\right]. \tag{3.116}$$

D'autres transformations sont prises en compte par le modèle. On cite, par exemple, la transformation simultanée de l'austénite et et de la martensite M^- en M^+, la transformation de M^+ en austénite et en M^- simultanément, etc. Voir l'annexe A pour les différentes lois d'évolution.

3.4 Simulation numérique et validation du modèle

L'identification des paramètres du modèle proposé dans ce chapitre est réalisée à partir de résultats expérimentaux obtenus par Shaw et Kyriakides (1995). Le matériau à mémoire de forme étudié est un alliage quasi-équiatomique de Nickel–Titane. L'accent est mis sur l'étude du comportement pseudoélastique unidimensionnel en traction du NiTi et de l'effet de la température sur ce comportement. Les résultats des essais sont suffisants pour une détermination complète des paramètres du modèle et pour une validation expérimentale de sa capacité à simuler l'orientation de la martensite et la pseudoélasticité du NiTi.

En 1D, le modèle est programmé en utilisant Matlab®, selon l'algorithme 3.1. L'exposant $^{\text{test}}$ indique un résultat obtenu à l'itération $n + 1$ en considérant les valeurs des variables z_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, à l'itération n.

Entrées : paramètres du modèle, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{T}$, $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$.
Sorties : $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2$, $\boldsymbol{z}_3$.
début
- discrétiser le trajet de chargement en p intervalles ;
- initialiser un compteur : $n \leftarrow 0$;
- $z_3^{(0)} \leftarrow 1 - z_1^{(0)} - z_2^{(0)}$.
- **tant que** $n < p$ **faire**
  - $\Delta\sigma^{(n)} \leftarrow \sigma^{(n+1)} - \sigma^{(n)}$;
  - $\Delta T^{(n)} \leftarrow T^{(n+1)} - T^{(n)}$.
  - **pour** $i = 1$ **à** 3 **faire**
    - **pour** $j = 1$ **à** 3 **faire**
      - **si** $j \neq i$ **alors**
        - calculer $F_{i\to j}^{(n)} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_2^{i,\,(n)} + \mathcal{F}_1^{j,\,(n)}$;
        - calculer $F_{i\to j}^{(n+1),\,\text{test}} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_2^{i,\,(n+1),\,\text{test}} + \mathcal{F}_1^{j,\,(n+1),\,\text{test}}$;
        - **si** $F_{i\to j}^{(n)} > 0$ **et** $F_{i\to j}^{(n+1),\,\text{test}} - F_{i\to j}^{(n)} > 0$ **et** $z_i^{(n)} > 0$ **et** $1 - z_j^{(n)} > 0$ **alors**
          - la phase i se transforme en la phase j.
  - a, b et c désignent les trois phases.
  - **suivant** les transformations actives **faire**
    - **cas où** a se transforme en b
      - $\left\{\dot{\mathcal{F}}_2^a + \dot{\mathcal{F}}_1^b = 0 \text{ et } \dot{z}_a + \dot{z}_b = 0\right\}$ donnent $\Delta z_a^{(n)}$ et $\Delta z_b^{(n)}$;
      - $\Delta z_c^{(n)} = 0$.
    - **cas où** a se transforme en b et c simultanément
      - $\left\{\dot{\mathcal{F}}_2^a + \dot{\mathcal{F}}_1^b = 0,\ \dot{\mathcal{F}}_2^a + \dot{\mathcal{F}}_1^c = 0 \text{ et } \dot{z}_a + \dot{z}_b + \dot{z}_c = 0\right\}$ donnent $\Delta z_a^{(n)}$, $\Delta z_b^{(n)}$ et $\Delta z_c^{(n)}$.
    - **cas où** a et b se transforment simultanément en c
      - $\left\{\dot{\mathcal{F}}_2^a + \dot{\mathcal{F}}_1^c = 0,\ \dot{\mathcal{F}}_2^b + \dot{\mathcal{F}}_1^c = 0 \text{ et } \dot{z}_a + \dot{z}_b + \dot{z}_c = 0\right\}$ donnent $\Delta z_a^{(n)}$, $\Delta z_b^{(n)}$ et $\Delta z_c^{(n)}$.
    - **cas où** aucune transformation n'est active
      - $\Delta z_a^{(n)} = 0$, $\Delta z_b^{(n)} = 0$ et $\Delta z_c^{(n)} = 0$.
    - **autres cas**
      - transformation inattendue : arrêt du calcul.
  - $z_1^{(n+1)} \leftarrow z_1^{(n)} + \Delta z_1^{(n)}$;
  - $z_2^{(n+1)} \leftarrow z_2^{(n)} + \Delta z_2^{(n)}$;
  - $z_2^{(n+1)} \leftarrow z_2^{(n)} + \Delta z_2^{(n)}$;
  - $n \leftarrow n + 1$.
- post-traitement.

fin

ALGORITHME 3.1 : algorithme utilisé pour simuler le comportement des MMF en 1D.

3.4.1 Identification des paramètres du modèle

La procédure d'identification des paramètres, telle qu'elle est décrite au paragraphe 3.2.6, nécessite trois essais : un essai de calorimétrie à balayage différentiel ou DSC, un essai d'orientation et un essai pseudoélastique. La figure 3.5 représente la courbe DSC du NiTi étudié par Shaw et Kyriakides.

Il est intéressant de remarquer que la courbe de la transformation directe comporte deux creux :

– le premier creux, s'étendant sur une plage de températures allant de 20 °C à 70 °C approximativement, est dû à la formation d'une phase intermédiaire à partir de l'austénite. L'apparition de cette phase, appelée généralement « phase R » à cause de sa symétrie cristallographique rhomboédrique, n'est pas systématique ; elle dépend notamment du type de matériau à mémoire de forme et du traitement qu'il a subi (Wayman, 1997 ; Uchil et coll., 1998a ; Wang et coll., 2005). La formation de la structure rhomboédrique ne sera pas prise en compte pour la modélisation ;

– le deuxième creux, visible pour des températures entre −70 °C et 0 °C, est lié à la formation de la martensite à partir de l'austénite à contrainte nulle.

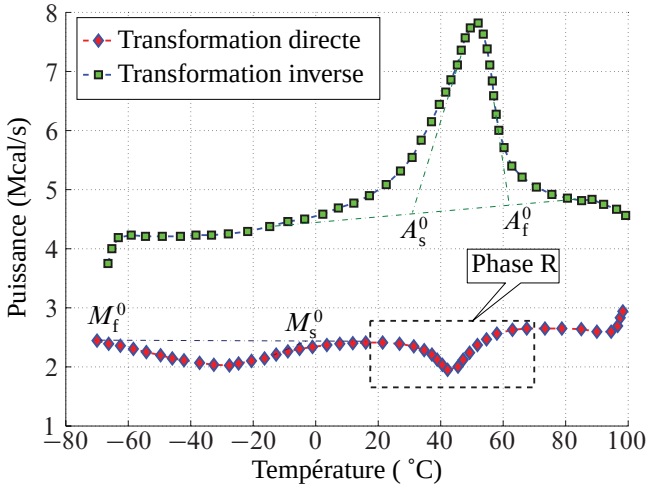


FIG. 3.5 – Courbe DSC d'après Shaw et Kyriakides (1995). La courbe représente l'évolution avec la température de la puissance calorifique fournie au matériau. On remarque l'existence d'une transformation directe intermédiaire de l'austénite en phase R précédant l'apparition de la martensite.

La courbe DSC de la figure 3.5 permet de définir les températures de début et de fin des transformations directe et inverse.

$$M_f^0 = -70\ °C, \quad M_s^0 = -1\ °C, \quad A_s^0 = 29{,}5\ °C \quad \text{et} \quad A_f^0 = 62\ °C. \tag{3.117}$$

Pour une température T_0 égale à 70 °C, le comportement pseudoélastique du matériau étudié est représenté par la figure 3.6. La figure montre que la variation de la contrainte est à peu près nulle lors des changements de phase direct et inverse. Par conséquent, au niveau du diagramme d'état, si l'on suppose que le début et la fin d'une transformation directe ou inverse correspondent à des courbes–seuils parallèles, la distance entre ces courbes doit être nulle.

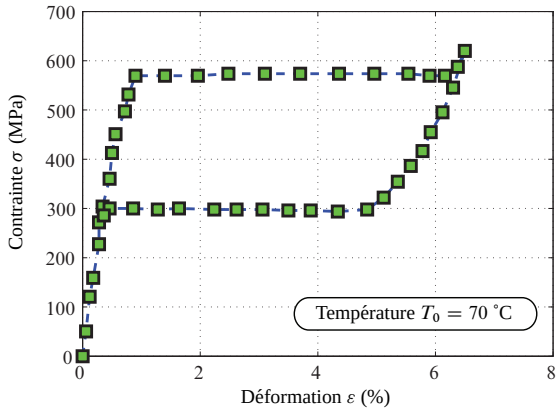
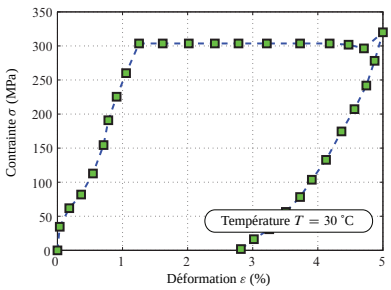
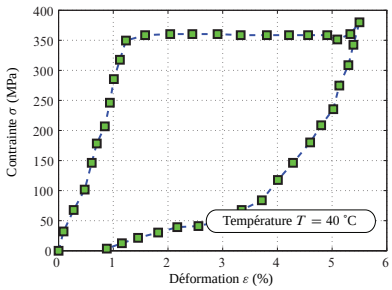


FIG. 3.6 – Courbe représentant le comportement pseudoélastique d'un NiTi d'après Shaw et Kyriakides (1995).

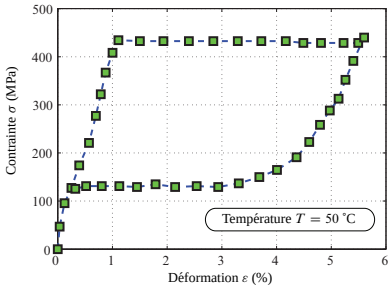
En particulier, les températures de changement de phase à contrainte nulle, M_s^0 et M_f^0, doivent être égales ainsi que les températures A_s^0 et A_f^0. Les valeurs de M_s^0, M_f^0, A_s^0 et A_f^0 déterminées à partir de la courbe DSC n'obéissant pas à cette condition, le choix de la température A_f^0 à utiliser dans le modèle pose un problème. Pour résoudre ce problème, on examine l'évolution de la courbe pseudoélastique expérimentale avec la température. Les figures 3.7.a, 3.7.b et 3.7.c représentent la réponse du NiTi à des essais de traction–décharge pour des valeurs respectives de la température T égales à 30 °C, 40 °C et 50 °C.



3.7.a – Température = 30 °C.



3.7.b – Température = 40 °C.



3.7.c – Température = 50 °C.

FIG. 3.7 – Évolution du comportement en traction isotherme du NiTi.

On remarque que pour une température égale à 50 °C, le matériau est à l'état d'austénite après décharge (figure 3.7.c). Ceci veut dire que la température A_f^0 de fin du changement de phase inverse à contrainte nulle est inférieure à 50 °C, température à laquelle le matériau est déjà complètement austénitique. D'autre part, en examinant la figure 3.7.a, on déduit que A_f^0 est nécessairement supérieure à 30 °C. En effet, la figure montre que le comportement à 30 °C n'est pas pseudoélastique : une déformation inélastique persiste après une décharge complète. Finalement, la figure 3.7.b permet de conclure que la température A_f^0, située nécessairement entre 30 °C et 50 °C, est proche de 40 °C. En effet, les déformations résiduelles après décharge sont faibles à cette température. Le matériau est donc essentiellement austénitique.

En raison des remarques précédentes, A_f^0 est choisie égale à 40 °C. Il est intéressant de noter que cette température se situe près du milieu de l'intervalle de température de changement de phase inverse tel qu'il est défini par l'essai de calorimétrie de la figure 3.5.

Les modules élastiques K_A et K_M de l'austénite et de la martensite sont déterminés à partir de l'essai pseudoélastique à 70 °C.

$$K_A \approx 61\,500 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad K_M \approx 24\,000 \text{ MPa}. \tag{3.118}$$

La valeur maximale ε_0 de la déformation de transformation est approximativement égale à 4 % et les valeurs des contraintes σ_{ms}, σ_{mf}, σ_{as} et σ_{af} correspondant respectivement au début et à la fin des transformations martensitiques directe et inverse sont données par

$$\sigma_{ms} = 570 \text{ MPa}, \sigma_{mf} = 575 \text{ MPa}, \sigma_{as} = 305 \text{ MPa et } \sigma_{af} = 300 \text{ MPa}. \tag{3.119}$$

Les paramètres a, b_1 et G sont calculés en utilisant les relations (3.45), (3.46) et (3.47).

$$a = 6{,}909 \text{ MPa}, \quad b_1 = 6{,}892 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad G = -0{,}127 \text{ MPa}. \tag{3.120}$$

Le même essai pseudoélastique permet de déterminer $C(T_0)$ en utilisant (3.48).

$$C(T_0) = 20{,}163 \text{ MPa}. \tag{3.121}$$

L'apparition de la phase R dans le cas des essais de Shaw et Kyriakides complique l'identification des autres paramètres. En effet, cette phase peut s'orienter plus facilement que la martensite mais les déformations qu'elle peut accommoder sont moins importantes. Par conséquent, la réponse du matériau à un essai de traction à basse température a une forme en escalier qui ne permet pas de distinguer clairement une contrainte de début d'orientation de la martensite. Pour pallier ce problème, on va considérer l'approximation de la courbe expérimentale représentée par la figure 3.8. Cette approximation ne tient pas compte de la formation de la phase R.

L'orientation de la martensite, suite à l'approximation adoptée, commence à partir d'une valeur σ_{rs} de la contrainte proche de 110 MPa.
D'autre part, la déformation inélastique devient égale à 3 % pour une valeur de la contrainte égale à 195 MPa. L'orientation n'est donc pas complète, parce que la déformation de transformation n'atteint pas sa valeur maximale ε_0 et on n'a pas accès à la contrainte de fin d'orientation de la martensite. Les équations du modèle permettent cependant d'utiliser les informations disponibles pour calculer σ_{rf}. En effet, pour que la déformation de transformation définie par $(z_2 - z_3)\varepsilon_0$ soit égale à 3 %, il faut que $(z_2 - z_3)$ soit égale à 0,75. Ceci correspond à $z_2 = 0{,}875$ et $z_3 = 0{,}125$ quand le matériau est à l'état martensitique, c'est-à-dire quand $z_1 = 0$.

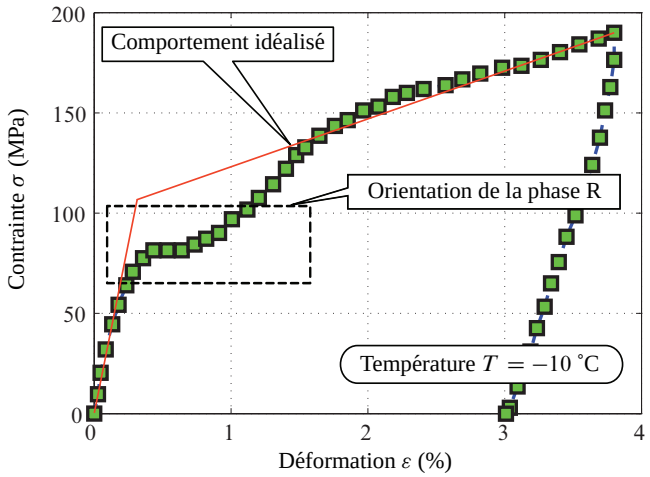


FIG. 3.8 – Orientation de la martensite autoaccommodante au sein du NiTi (Shaw et Kyriakides, 1995). L'orientation conduit à la formation d'une déformation inélastique importante qui persiste après décharge.

Par ailleurs, les fonctions critères $\mathcal{F}_1^2$ et $\mathcal{F}_2^3$ doivent être nulles quand la contrainte atteint 195 MPa parce que l'orientation de la martensite est toujours effective pour cette valeur de la contrainte d'après la figure 3.8. En utilisant les valeurs des paramètres déterminés jusqu'ici, on trouve

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{F}_1^2 = 0 \text{ et } \mathcal{F}_2^3 = 0 \\ z_2 = 0{,}875 \text{ et } z_3 = 0{,}125 \\ \sigma = 195 \text{ MPa} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\text{rf}} \approx 225 \text{ MPa}. \tag{3.122}$$

Les paramètres b_2 et H peuvent être déterminés en se servant des relations (3.39) et (3.40).

$$b_2 = 8{,}800 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad H = -9{,}200 \text{ MPa}. \tag{3.123}$$

Les paramètres restant, ξ et κ, sont donnés par (3.49) et (3.50).

$$\xi = 0{,}438 \text{ MPa/°C} \quad \text{et} \quad \kappa = 7{,}019 \text{ MPa}. \tag{3.124}$$

Le tableau 3.1 regroupe les valeurs des différents paramètres.

Les paramètres du modèle			
K_{A}	61 500 MPa	a	6,909 MPa
K_{M}	24 000 MPa	b_1	6,892 MPa
ε_0	4 %	b_2	8,800 MPa
G	-0,127 MPa	ξ	0,438 MPa/ °C

(à suivre)

TAB. 3.1 – (suite)

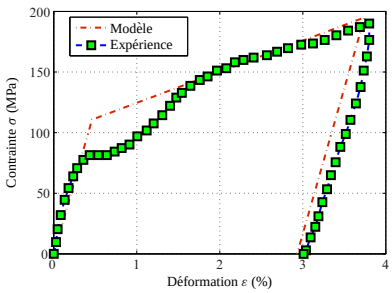
Les paramètres du modèle			
H	-9,200 MPa	κ	7,019 MPa
A_f^0	40 °C		

TAB. 3.1 – Paramètres déterminés à partir des essais de Shaw et Kyriakides (1995).

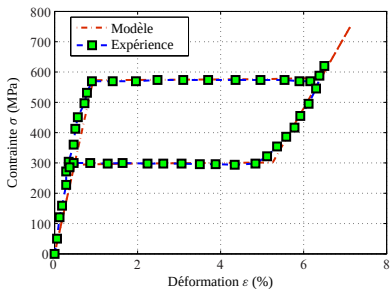
3.4.2 Validation expérimentale

La validation expérimentale est réalisée en comparant les résultats numériques aux résultats des essais de Shaw et Kyriakides.

Les figures 3.9.a et 3.9.b représentent une comparaison des résultats numériques et expérimentaux dans le cas des essais à -10 °C et à 70 °C qui ont servi à l'identification des paramètres.



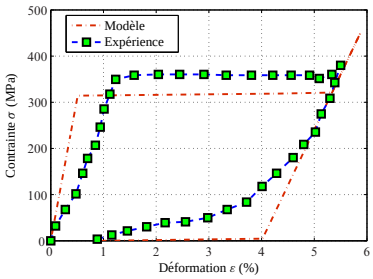
3.9.a – Température $T = -10$ °C.



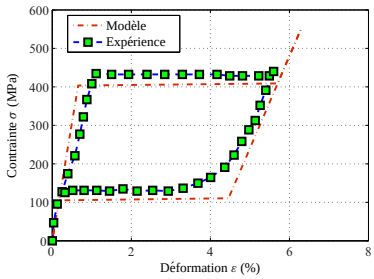
3.9.b – Température $T = 70$ °C.

FIG. 3.9 – Comparaison des résultats expérimentaux et numériques. Cas de l'orientation à -10 °C et de la pseudoélasticité à 70 °C.

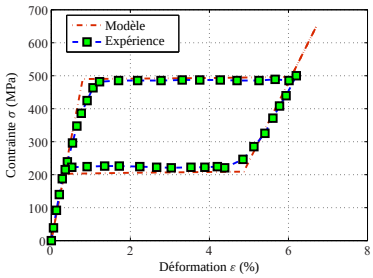
Quand la température est supérieure à 40 °C, le comportement du NiTi étudié est pseudoélastique. Les figures 3.10.a à 3.10.f montrent une comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour des températures allant de 40 °C à 100 °C.



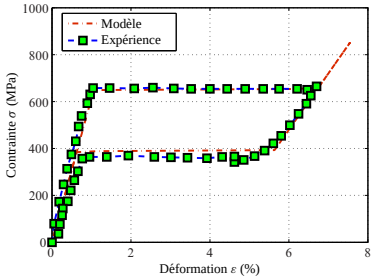
3.10.a – Température $T = 40$ °C.



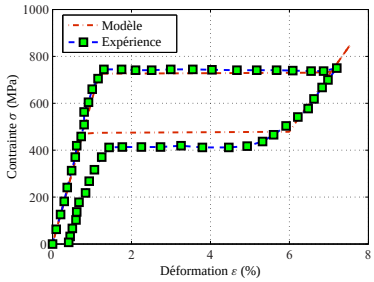
3.10.b – Température $T = 50$ °C.



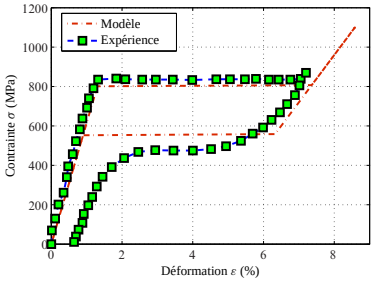
3.10.c – Température $T = 60$ °C.



3.10.d – Température $T = 80$ °C.



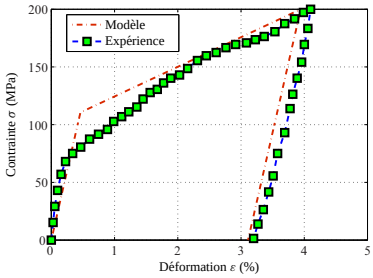
3.10.e – Température $T = 90$ °C.



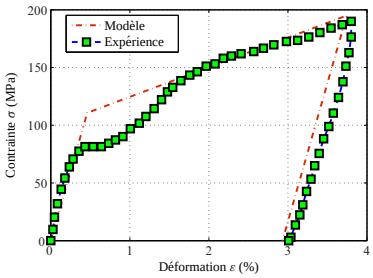
3.10.f – Température $T = 100$ °C.

FIG. 3.10 – Comparaison des résultats expérimentaux et numériques. Essais pseudoélastiques pour des températures allant de 40 °C à 100 °C.

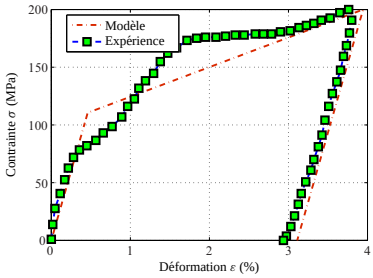
Pour des températures plus basses, le comportement du NiTi correspond à l'orientation de la phase R et de la martensite (figures 3.11.a à 3.11.f).



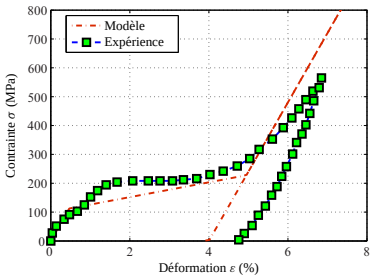
3.11.a – Température $T = -17{,}6$ °C.



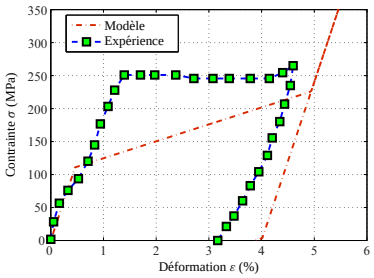
3.11.b – Température $T = -10$ °C.



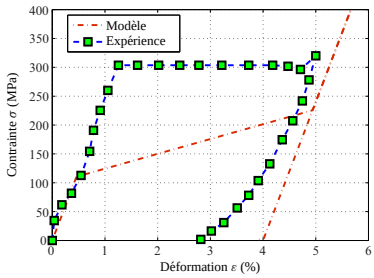
3.11.c – Température $T = 0$ °C.



3.11.d – Température $T = 10$ °C.



3.11.e – Température $T = 20$ °C.



3.11.f – Température $T = 30$ °C.

FIG. 3.11 – Comparaison des résultats expérimentaux et numériques. Essais d'orientation de la martensite pour des températures allant de $-17{,}6$ °C à 40 °C. On note le décalage important des calculs par rapport aux essais pour les températures 10 °C, 20 °C et 30 °C.

L'accord des résultats de la modélisation de l'orientation avec les essais est moins bon pour les températures situées entre 10 °C et 30 °C. Le matériau présente en réalité une transition plus douce, par rapport au modèle, du comportement correspondant à l'orientation de la martensite vers le comportement pseudoélastique.

On peut utiliser les résultats précédents pour construire le diagramme d'état du NiTi étudié. On commence par déterminer les contraintes de début et de fin d'orientation de la martensite, ainsi que les contraintes de début et de fin des transformations pseudoélastiques directe et inverse. Le diagramme d'état représente l'évolution de ces contraintes–seuils avec la température (figure 3.12). Il est important de préciser que les contraintes de début d'orientation de la martensite sont déterminées en considérant une réponse approchée, similaire à celle de la figure 3.8, qui ne tient pas compte de la formation de la phase R.

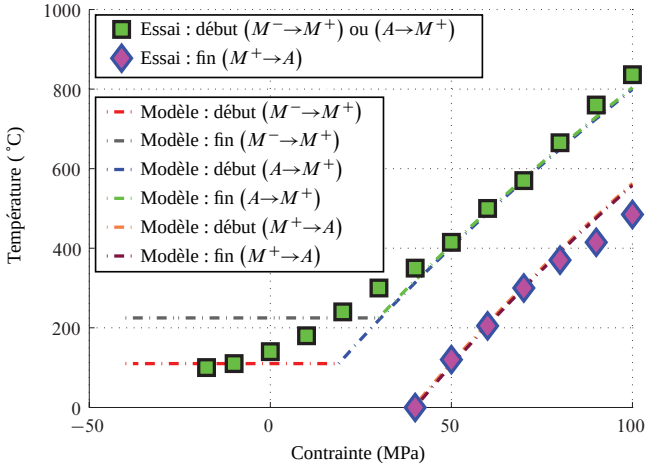


FIG. 3.12 – Diagramme d'état du NiTi étudié. L'accord modèle–essai est bon pour les températures inférieures à 10 °C ou supérieures à 40 °C

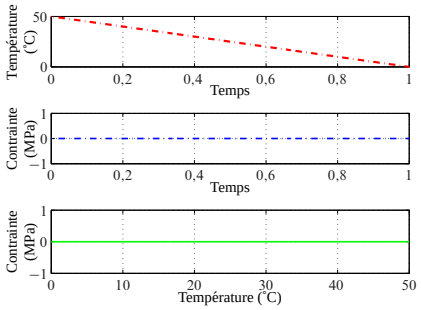
En conclusion, le modèle reproduit de manière acceptable le comportement du NiTi observé par Shaw et Kyriakides (1995). Le décalage le plus important par rapport aux

résultats expérimentaux se manifeste pour des valeurs intermédiaires de la température situées entre 10 °C et 30 °C. Un décalage plus léger est aussi constaté dans le cas des essais réalisés à 90 °C et à 100 °C s'accompagnant d'une déformation plastique du matériau qui persiste après décharge complète. Il est intéressant de noter que, dans la littérature, les modèles validés sur une large plage de température sont rares.

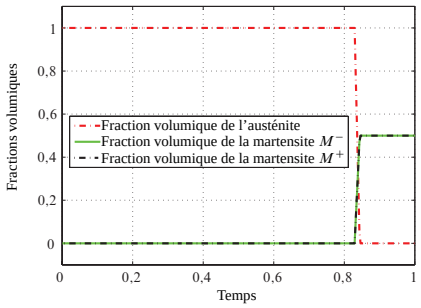
3.4.3 Simulation de l'autoaccommodation

Le matériau est initialement à l'état austénitique non déformé. L'état cristallographique initial est donc défini par $z_1 = 1$.

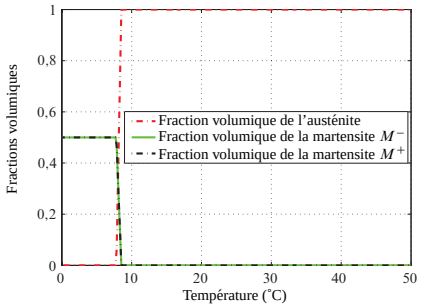
Ce matériau est refroidi sous contrainte nulle de 50 °C à 0 °C. La martensite formée est autoaccommodante, c'est-à-dire que le refroidissement entraîne la formation de quantités égales de M^+ et de M^- ; ceci se traduit par une déformation inélastique macroscopique nulle. Les figures 3.13.a à 3.13.d montrent les résultats obtenus.



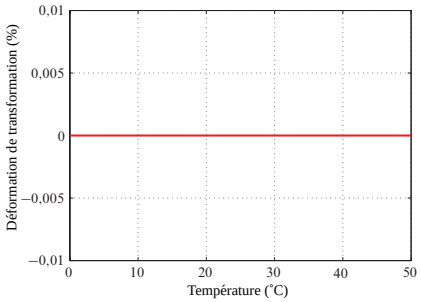
3.13.a – Chargement thermomécanique. Le NiTi est refroidi sous contrainte nulle.



3.13.b – Évolution temporelle des fractions volumiques. Les variantes M^+ et M^- sont formées à égales quantités.



3.13.c – Évolution des fractions volumiques avec la température du NiTi. À basse température, les quantités de M^+ et de M^- sont égales.



3.13.d – Évolution de la déformation de transformation avec la température. L'autoaccommodation de la martensite entraîne une déformation inélastique nulle.

FIG. 3.13 – Modélisation de l'autoaccommodation. Le refroidissement du matériau à mémoire de forme à partir de l'état austénitique conduit à la transformation de l'austénite en martensite autoaccommodante.

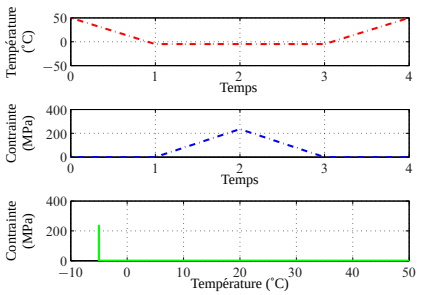
3.4.4 Simulation de l'effet mémoire simple sens

La température initiale du NiTi est de 50 °C et le matériau n'est soumis à aucun chargement mécanique. Sous ces conditions, la structure cristallographique initiale du matériau est austénitique. L'état initial est donc défini par $z_1 = 1$.

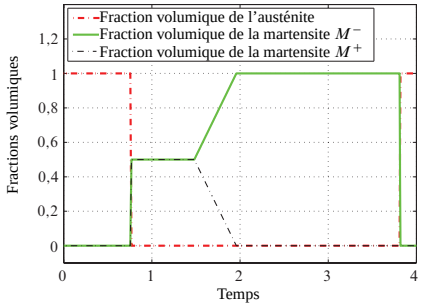
Le matériau est soumis au trajet de chargement suivant :

- de l'instant $t = 0$ à l'instant $t = 1$, on refroidit le matériau sous contrainte nulle. La martensite autoaccommodante est obtenue suite à cette opération ;
- entre $t = 1$ et $t = 2$, le matériau subit une traction isotherme qui oriente la martensite. M^- se transforme en M^+ ;
- de $t = 2$ jusqu'à $t = 3$, on effectue une décharge qui ramène la contrainte à zéro. Une déformation inélastique due à la présence de la martensite orientée persiste ;
- enfin, le matériau est réchauffé entre $t = 3$ et $t = 4$ pour induire un changement de phase inverse lui permettant de retrouver sa forme initiale non déformée.

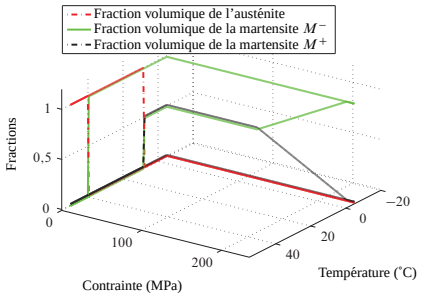
Les résultats de la simulation numérique correspondent aux figures 3.14.



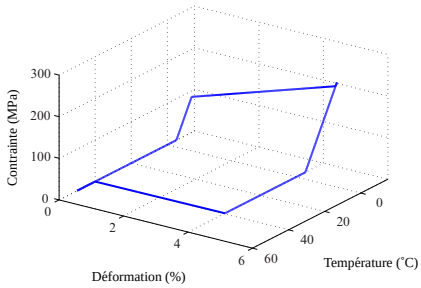
3.14.a – Chargement thermomécanique permettant de produire l'effet mémoire simple sens.



3.14.b – Évolution temporelle des fractions volumiques. À la fin du trajet de chargement, le matériau retrouve son état austénitique initial.



3.14.c – Évolution des fractions volumiques avec la contrainte et la température. L'état initial correspond à une fraction volumique de l'austénite égale à l'unité.



3.14.d – Courbe température–déformation–contrainte. Après avoir été déformé à basse température, le matériau retrouve sa forme non déformée après chauffage

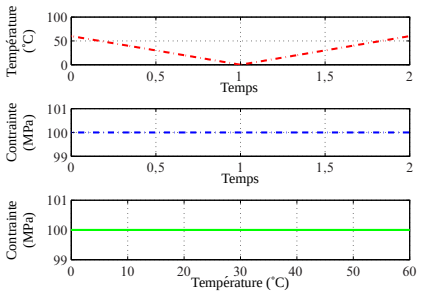
FIG. 3.14 – Modélisation de l'effet mémoire simple sens. Le matériau « se souvient » de sa forme non déformée à haute température.

3.4.5 Simulation de l'effet superthermique

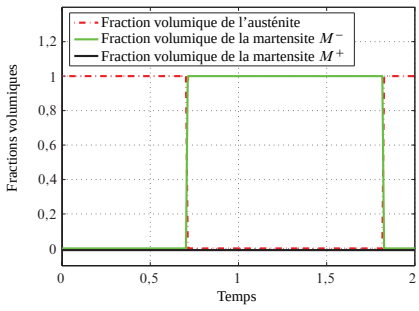
Le NiTi, initialement à l'état austénitique, est soumis à une contrainte constante de 100 MPa et au programme suivant de chargement thermique :

- de $t = 0$ à $t = 1$, le NiTi est refroidi de 60 °C à 0 °C ;
- de $t = 1$ à $t = 2$, la température du matériau croît de nouveau, jusqu'à atteindre 60 °C.

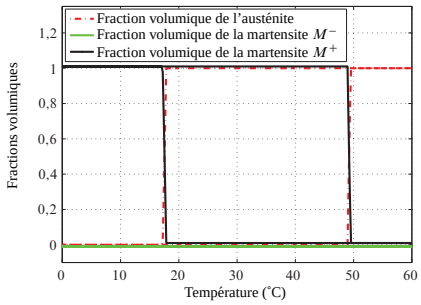
La présence de la contrainte positive favorise la formation de la martensite M^+ et conduit à l'apparition d'une déformation de transformation égale à ε_0 à la fin de la transformation martensitique directe. Une augmentation de la température est suffisante pour rendre au matériau sa forme initiale suite à un changement de phase inverse (figure 3.15).



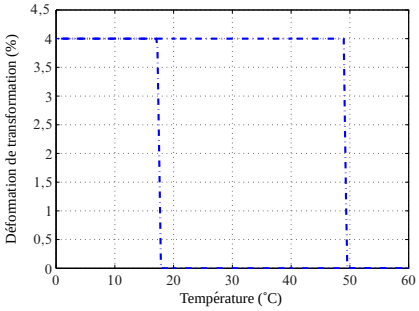
3.15.a – Chargement thermomécanique. Le NiTi est refroidi sous une contrainte constante de 100 MPa.



3.15.b – Évolution temporelle des fractions volumiques. L'austénite se transforme en M^+ qui se transforme de nouveau en austénite à la fin du trajet de chargement.



3.15.c – Évolution des fractions volumiques avec la température. Le cycle de chargement thermique entraîne la suite de transitions : Austénite $\rightarrow$ M^+ $\rightarrow$ austénite.



3.15.d – Évolution de la déformation de transformation avec la température. Cette déformation, due à la formation de M^+ quand la température diminue, peut disparaître par simple chauffage.

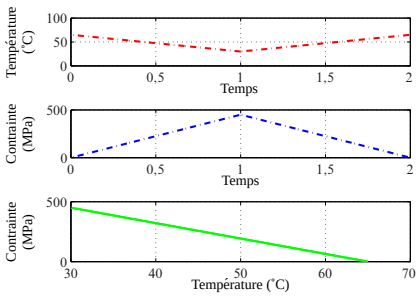
FIG. 3.15 – Modélisation de l'effet superthermique. Le matériau se déforme considérablement par refroidissement à contrainte constante. Il retrouve ensuite, par chauffage, sa forme initiale non déformée.

3.4.6 Simulation de la pseudoélasticité anisotherme

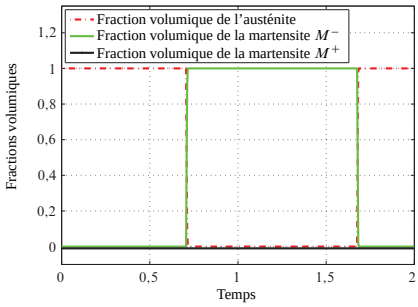
On considère le cas d'une transformation martensitique induite par action combinée de la température et du chargement mécanique.

Le matériau, initialement à l'état austénitique, est soumis au chargement défini par la figure 3.16.a :

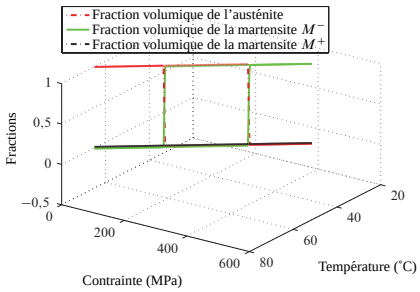
- à l'instant $t = 0$, la température du matériau est de 65 °C et le chargement mécanique est nul. Sous ces conditions, seule l'austénite existe ;
- de $t = 0$ à $t = 1$, la température décroît de 35 °C à 30 °C et la contrainte croît en même temps jusqu'à 450 MPa. L'effet de ce chargement thermomécanique est la transformation de l'austénite en martensite M^+ ;
- la température et la contrainte sont ramenées à leurs valeurs initiales de $t = 1$ jusqu'à $t = 2$. Un changement de phase inverse se produit, à la suite duquel le matériau retrouve sa forme austénitique non déformée.



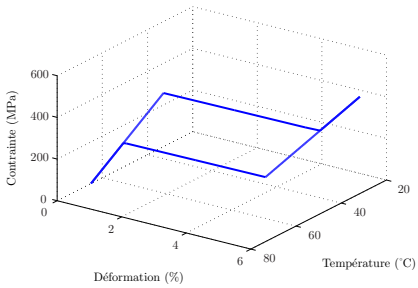
3.16.a – Chargement thermomécanique. Le NiTi est refroidi sous une contrainte croissante.



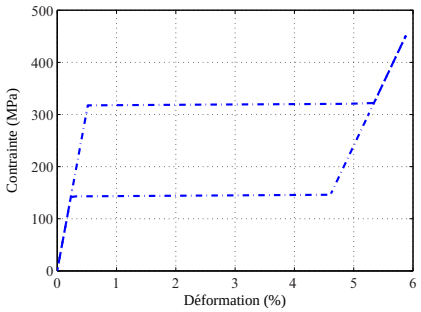
3.16.b – Évolution temporelle des fractions volumiques. L'austénite se transforme en M^+ qui se transforme de nouveau en austénite à la fin du trajet de chargement.



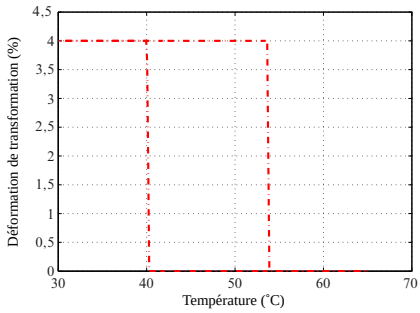
3.16.c – Évolution des fractions volumiques avec la température et la contrainte. Le changement de phase est induit par refroidissement accompagné d'une traction.



3.16.d – Courbe température–déformation–contrainte. Le comportement du matériau présente une boucle d'hystérésis qui ressemble à celle qui caractérise la pseudoélasticité isotherme.



3.16.e – Courbe déformation–contrainte. Le comportement est pseudoélastique.



3.16.f – Courbe température–déformation de transformation. Le matériau présente un effet superthermique.

FIG. 3.16 – Modélisation de la pseudoélasticité anisotherme. Le comportement du matériau est simultanément pseudoélastique et superthermique comme le montrent les figures 3.16.e et 3.16.f.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle de comportement unidimensionnel des matériaux à mémoire de forme a été développé. Ce modèle constitue une généralisation directe d'un travail antérieur de Moumni (1995) qui s'inscrit dans le cadre du formalisme des matériaux standards généralisés en présence de liaisons internes entre les variables d'état.

L'identification des paramètres du modèle est simple et une corrélation satisfaisante avec les résultats expérimentaux de Shaw et Kyriakides (1995) a été mise en évidence dans le cas d'un alliage à mémoire de forme de type NiTi.

Le chapitre suivant traite le problème de la généralisation du présent modèle pour permettre le calcul des structures tridimensionnelles en matériaux à mémoire de forme soumises à des chargements mécaniques proportionnels.

Bibliographie

M. BERVEILLER ET E. PATOOR, Comportement thermomécanique des matériaux usuels et des alliages à mémoire de forme, dans *Technologie des Alliages à Mémoire de Forme*, chap. 2, p. 43–62, HERMES, 1993.

P. GERMAIN, *Mécanique*, vol. 1, École Polytechnique, 1986.

B. HALPHEN ET Q. NGUYEN, « Plastic and visco-plastic materials with generalized potential », *Mechanical Research Communications*, vol. 1, p. 43–47, 1974.

Z. MOUMNI, *Sur la modélisation du changement de phase à l'état solide*, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Ponts et Chaussées, 1995.

I. MÜLLER ET S. SEELECKE, « Thermodynamic aspects of shape memory alloys », *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 34, p. 1307–1355, 2001.

B. RANIECKI ET C. LEXCELLENT, « Thermodynamics of isotropic pseudoelasticity in shape memory alloys », *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 17, p. 185–205, 1998.

J. A. SHAW ET S. KYRIAKIDES, « Thermomechanical aspects of NiTi », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 43, n° 8, p. 1243–1281, 1995.

J. UCHIL, K. MOHANCHANDRA, G. K. ET K. MAHESH, « Study of critical dependence of stable phases in Nitinol on heat treatment using electrical resistivity probe », *Materials Science and Engineering A*, vol. 251, p. 58–63, 1998a.

J. UCHIL, K. MOHANCHANDRA, K. MAHESH ET K. GANESH KUMARA, « Thermal and electrical characterization of R-phase dependence on heat-treat temperature in Nitinol », *Physica B*, vol. 253, p. 83–89, 1998b.

J. UCHIL, K. MAHESH ET K. GANESH KUMARA, « Calorimetric study of the effect of linear strain on the shape memory properties of Nitinol », *Physica B*, vol. 305, p. 1–9, 2001.

Z. WANG, X. ZU, X. FENG, H. MO ET J. ZHOU, « Calorimetric study of multiple-step transformation in TiNi shape memory alloy with partial transformation cycle », *Materials letters*, vol. 58, p. 3141–3144, 2004.

Z. WANG, X. ZU ET Y. FU, « Study of incomplete transformations of near equiatomic TiNi shape memory alloys by DSC methods », *Materials Science and Engineering A*, vol. 390, p. 400–403, 2005.

C. WAYMAN, « Shear transformations and microstructure », *Materials Characterization*, vol. 39, p. 235–260, 1997.

CHAPITRE 4

Généralisation 3D : cas des chargements proportionnels

4.1 Introduction

L'idée qui motive le choix des deux variantes martensitiques M^+ et M^- pour représenter le comportement unidimensionnel de la martensite trouve facilement sa justification physique. Ces deux variantes tiennent, en effet, compte des deux orientations possibles de la martensite en 1D :

- si l'état de contrainte au sein du volume élémentaire représentatif du MMF correspond à une traction, l'ensemble des variantes martensitiques va s'arranger de manière compatible avec cette traction, ce qui se manifeste à l'échelle macroscopique par une déformation inélastique positive. Cette déformation positive est prise en compte au niveau du modèle par l'introduction de la variante M^+ dont la partie mécanique de la densité d'énergie libre est une forme quadratique de $(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)$, où ε_2 est la déformation locale de la martensite M^+ et ε_0 est une déformation inélastique positive ;
- si le matériau subit une compression, la déformation inélastique macroscopique due à l'orientation de la martensite est négative. Elle est prise en compte au niveau du modèle moyennant une expression de l'énergie libre de la variante M^- où figure une forme quadratique de $(\varepsilon_3 + \varepsilon_0)$, ε_3 représentant la déformation locale de M^-.

En l'absence d'une sollicitation mécanique, les variantes M^+ et M^- se forment à égales quantités. Aucune évolution de la déformation inélastique macroscopique n'est observée dans ce cas. La présence simultanée des deux variantes M^+ et M^- permet en particulier la modélisation du phénomène de l'autoaccommodation de la martensite.

Dans le cas d'un chargement multiaxial, cependant, les orientations possibles des variantes martensitiques dépendent simultanément des six composantes du tenseur de contrainte. Une manière de généraliser le modèle 1D serait donc de considérer que la réponse 3D du matériau peut être obtenue par superposition de plusieurs réponses 1D calculées dans des plans ayant différentes orientations ; cette idée est à la base du modèle à « microplans » développé par Brocca et coll. (2002) pour modéliser le comportement des MMF. L'approche de Brocca et coll. pose cependant quelques problèmes. Par exemple, le nombre de microplans dont on peut tenir compte est limité, pour des considérations d'ordre numérique.

Il est utile de signaler que l'idée de représenter le comportement 3D comme une superposition de réponses unidimensionnelles n'est pas nouvelle, elle a été proposé en 1938 par Taylor comme moyen de décrire le comportement des matériaux polycristallins et a été régulièrement reprise depuis.

Toutefois, dans le cas particulier d'un chargement mécanique proportionnel, le tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ dépend d'un seul paramètre t.

$$\boldsymbol{\sigma} = \phi(t)\boldsymbol{\sigma}_0, \tag{4.1}$$

où $\boldsymbol{\sigma}_0$ est un tenseur constant. Par conséquent, il est raisonnable de penser que les variantes martensitiques vont être orientées selon $\boldsymbol{\sigma}_0$ si $\phi(t) > 0$, ou bien selon $-\boldsymbol{\sigma}_0$ si $\phi(t) < 0$. Il devient alors possible de représenter la phase martensitique par un mélange de deux variantes M^+ et M^-, comme dans le cas du modèle 1D, et d'envisager une généralisation 3D immédiate de ce modèle. Cette généralisation fait l'objet de ce chapitre.

4.2 Variables d'état et énergie libre

Les variables d'état du modèle sont les suivantes :
- la déformation macroscopique $\boldsymbol{\varepsilon}$ et la température T ;
- les fractions volumiques de l'austénite, de la martensite M^+ et de la martensite M^-, respectivement z_1, z_2 et z_3 ;
- les déformations locales correspondantes $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_3$.

Ces variables obéissent à des liaisons internes données par

$$\sum_{i=1}^{3} z_i\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad \text{à cause du modèle rhéologique en série,} \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{3} z_i - 1 = 0 \quad \text{car le matériau comporte uniquement trois phases,} \tag{4.3}$$

$$\forall i \in \{1,2,3\}, \quad z_i \geqslant 0. \tag{4.4}$$

Le potentiel dont dérivent ces liaisons est défini par

$$\mathcal{W}_l = -\boldsymbol{\lambda} : \left(\sum_{i=1}^{3} z_i\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}\right) - \nu_0\left(\sum_{i=1}^{3} z_i - 1\right) - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i z_i, \tag{4.5}$$

où $\boldsymbol{\lambda}$, ν_0 et λ_i, pour tout i dans $\{1,2,3\}$, sont des multiplicateurs de Lagrange devant satisfaire les conditions

$$\forall i \in \{1,2,3\}, \quad \lambda_i \geqslant 0 \text{ et } \lambda_i z_i = 0. \tag{4.6}$$

Les énergies libres respectives de l'austénite, de la martensite M^+ et de la martensite M^- sont telles que

$$\mathcal{W}_1 \overset{\text{déf}}{=} W_1(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1 : \boldsymbol{K}_{\text{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_1, \tag{4.7}$$

$$\mathcal{W}_2 \overset{\text{déf}}{=} W_2(\boldsymbol{\varepsilon}_2, T) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\text{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + C(T), \tag{4.8}$$

$$\mathcal{W}_3 \overset{\text{déf}}{=} W_3(\boldsymbol{\varepsilon}_3, T) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\text{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) + C(T), \tag{4.9}$$

$\boldsymbol{K}_{\mathrm{A}}$ et $\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}}$ étant les tenseurs élastiques respectifs de l'austénite et de la martensite. $C(T)$ représente la densité d'énergie latente de changement de phase.

L'énergie libre du matériau s'écrit naturellement

$$\mathcal{W} \overset{\text{déf}}{=} W(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, z_1, z_2, z_3) = z_1\mathcal{W}_1 + z_2\mathcal{W}_2 + z_3\mathcal{W}_3 + \mathcal{I}, \tag{4.10}$$

où l'énergie d'interaction $\mathcal{I}$ est donnée par

$$\mathcal{I} \overset{\text{déf}}{=} I(z_1, z_2, z_3) = Gz_1(z_2 + z_3) + Hz_2z_3, \tag{4.11}$$

G et H étant des paramètres du matériau.

Le lagrangien est la somme de la densité d'énergie libre du matériau et du potentiel dont dérivent les liaisons.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &\overset{\text{déf}}{=} L(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, z_1, z_2, z_3) \\
&= z_1\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1 : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_1\right) + z_2\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + C(T)\right] \\
&\quad + z_3\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) + C(T)\right] \\
&\quad + Gz_1(z_2 + z_3) + Hz_2z_3 \\
&\quad - \boldsymbol{\lambda} : \left(\sum_{i=1}^{3} z_i\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}\right) - \nu_0\left(\sum_{i=1}^{3} z_i - 1\right) - \sum_{i=1}^{3}\lambda_i z_i,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

avec

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \lambda_i \geqslant 0 \text{ et } \lambda_i z_i = 0.$$

4.3 Loi de comportement et fonctions critères

Les lois d'état sont obtenues en écrivant que l'inégalité de Clausius–Duhem doit être vérifiée à tout moment. La loi de comportement résultante s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{K} : [\boldsymbol{\varepsilon} - (z_2 - z_3)\boldsymbol{\varepsilon}_0], \tag{4.13}$$

où $\boldsymbol{K}$ est un tenseur élastique équivalent.

$$\boldsymbol{K} = \left[z_1\boldsymbol{K}_{\mathrm{A}}^{-1} + (1 - z_1)\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}}^{-1}\right]^{-1}. \tag{4.14}$$

Les critères de changement de phase sont donnés par

$$\mathcal{A}_i \in \partial_{\dot{z}_i}\mathcal{D} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}. \tag{4.15}$$

$\mathcal{A}_i$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, est la force thermodynamique duale de la fraction volumique z_i et $\mathcal{D}$ est un pseudo-potentiel de dissipation.

$$\mathcal{D} = \alpha\dot{z}_1 + \beta\dot{z}_2 + \gamma\dot{z}_3, \tag{4.16}$$

où α, β et γ sont tels que

$$\alpha = a(z_2 + z_3)\operatorname{sign}\dot{z}_1, \tag{4.17}$$

$$\beta = (b_1z_1 + b_2z_3)\operatorname{sign}\dot{z}_2, \tag{4.18}$$

$$\gamma = (b_1z_1 + b_2z_2)\operatorname{sign}\dot{z}_3. \tag{4.19}$$

a, b_1 et b_2 sont des constantes positives du matériau.

Comme dans le cas du modèle 1D, les critères peuvent s'écrire sous forme d'un ensemble d'inégalités

$$\mathcal{F}_i^j \leqslant 0, \quad (i,j) \in \{1,2\} \times \{1,2,3\}, \tag{4.20}$$

où les fonctions $\mathcal{F}_i^j$ sont données par

$$\mathcal{F}_1^1 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1 : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \nu_0 - (G+a)(z_2+z_3), \tag{4.21}$$

$$\mathcal{F}_2^1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1 : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \nu_0 + (G-a)(z_2+z_3), \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1^2 = &-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \\ &- C(T) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \nu_0 - (G+b_1)z_1 - (H+b_2)z_3,\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2^2 = &\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \\ &+ C(T) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_2 - \nu_0 + (G-b_1)z_1 + (H-b_2)z_3,\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1^3 = &-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) \\ &- C(T) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_3 + \nu_0 - (G+b_1)z_1 - (H+b_2)z_2,\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2^3 = &\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) \\ &+ C(T) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_3 - \nu_0 + (G-b_1)z_1 + (H-b_2)z_2.\end{aligned} \tag{4.26}$$

4.4 Lois complémentaires

Les lois d'évolution associées aux différentes transformations possibles au sein d'un MMF s'obtiennent à partir des conditions de consistance correspondantes. Si la phase i se transforme en la phase j, les fonctions critères $\mathcal{F}_2^i$ et $\mathcal{F}_1^j$ s'annulent. $\dot{z}_i$ et $\dot{z}_j$ sont alors solutions du système

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{F}}_2^i = 0, \\ \dot{\mathcal{F}}_1^j = 0, \\ \dot{z}_i + \dot{z}_j = 0. \end{cases} \tag{4.27}$$

Dans la suite, on établit les lois complémentaires associées à chacun des principaux phénomènes relatifs au comportement des MMF sous chargement proportionnel. Les notations du tableau 4.1 sont utilisées. L'austénite et la martensite sont supposées homogènes et isotropes, ayant le même coefficient de Poisson ν.

Notation	Signification	Expression
E_{A}	Module de Young de l'austénite	

(à suivre)

(suite)

Notation	Signification	Expression
E_{M}	Module de Young de la martensite	
E_{eq}	Module de Young du MMF	$\left(\frac{z_1}{E_{\mathrm{A}}}+\frac{1-z_1}{E_{\mathrm{M}}}\right)^{-1}$
ν	Coefficient de Poisson du MMF	
El_{A}		$\frac{1+\nu}{E_{\mathrm{A}}}$
El_{M}		$\frac{1+\nu}{E_{\mathrm{M}}}$
P_{A}		$\frac{-\nu}{E_{\mathrm{A}}}$
P_{M}		$\frac{-\nu}{E_{\mathrm{M}}}$
El_{MA}		$El_{\mathrm{M}}-El_{\mathrm{A}}$
P_{MA}		$P_{\mathrm{M}}-P_{\mathrm{A}}$
$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{M}$	Trace du tenseur symétrique $\boldsymbol{M}$	$\sum_i \boldsymbol{M}_{ii}$
$\mathrm{dev}\,\boldsymbol{M}$	Déviateur de $\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{M}-\frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{M})\mathbf{I}$
$\boldsymbol{s}$	Tenseur déviateur de contrainte	$\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\sigma}$
$\boldsymbol{s}_0$	Tenseur déviateur de $\boldsymbol{\sigma}_0$	$\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\sigma}_0$
σ_{VM}	Contrainte équivalente de Mises	$\sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}}$
μ_{A}	Module de cisaillement de l'austénite	$\frac{E_{\mathrm{A}}}{2(1+\nu)}$
μ_{M}	Module de cisaillement de la martensite	$\frac{E_{\mathrm{M}}}{2(1+\nu)}$
μ_{eq}	Module de cisaillement du MMF	$\frac{E_{\mathrm{eq}}}{2(1+\nu)}$
$\boldsymbol{s}_{\mathrm{el}}$		$2\mu_{\mathrm{eq}}\,\mathrm{dev}\,\boldsymbol{\varepsilon}$
$\boldsymbol{\varepsilon}_0$		$\varepsilon_0\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{s}_0}{\sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{s}_0:\boldsymbol{s}_0}}$

TAB. 4.1 – Notations utilisées dans ce chapitre.

4.4.1 Pseudoélasticité

Lors de la transformation de l'austénite en martensite M^+ uniquement, $\mathcal{F}_2^1$ et $\mathcal{F}_1^2$ sont nécessairement nulles. Il en résulte la relation

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}El_{\mathrm{MA}}\sigma_{\mathrm{VM}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}El_{\mathrm{MA}} + P_{\mathrm{MA}}\right)(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 + \sigma_{\mathrm{VM}}\varepsilon_0 \operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)\\ = C\left(T_{\mathrm{pe}}\right) + (G+b_1)z_1 - (G-a)z_2 - [(G-a)-(H+b_2)]\,z_3\end{aligned} \tag{4.28}$$

pour toutes les valeurs de z_1 et z_2 strictement comprises dans l'intervalle $(0,1)$.

Les lois d'évolution correspondantes sont solutions du système formé de

$$\begin{aligned}&-\left\{2\mu_{\mathrm{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\mathrm{M}}}-\frac{1}{\mu_{\mathrm{A}}}\right)(z_2-z_3)\varepsilon_0\left[El_{\mathrm{MA}}\sigma_{\mathrm{VM}}\operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G+b_1)\right\}\dot{z}_1\\ &-\left\{2\mu_{\mathrm{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\mathrm{MA}}\sigma_{\mathrm{VM}}\operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]-(G-a)\right\}\dot{z}_2\\ &=-El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}}-\left(\frac{1}{3}El_{\mathrm{MA}}+P_{\mathrm{MA}}\right)\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\,\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{el}}-\frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}}}{\sigma_{\mathrm{VM}}}\operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)\end{aligned} \tag{4.29}$$

et

$$\dot{z}_1+\dot{z}_2=0. \tag{4.30}$$

D'autre part, le changement de phase inverse de la martensite M^+ en austénite est régi par $\mathcal{F}_2^2=0$ et $\mathcal{F}_1^1=0$. Quand la transformation $M^+\to A$ est en cours, la somme $\dot{z}_1+\dot{z}_2$ est nulle et la condition de consistance entraîne

$$\begin{aligned}&\left\{2\mu_{\mathrm{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\mathrm{M}}}-\frac{1}{\mu_{\mathrm{A}}}\right)(z_2-z_3)\varepsilon_0\left[El_{\mathrm{MA}}\sigma_{\mathrm{VM}}\operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G-b_1)\right\}\dot{z}_1\\ &+\left\{2\mu_{\mathrm{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\mathrm{MA}}\sigma_{\mathrm{VM}}\operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]-(G+a)\right\}\dot{z}_2\\ &=El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}}+\left(\frac{1}{3}El_{\mathrm{MA}}+P_{\mathrm{MA}}\right)\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\,\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{el}}+\frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}}}{\sigma_{\mathrm{VM}}}\operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0),\end{aligned} \tag{4.31}$$

ce qui permet de déterminer $\dot{z}_1$ et $\dot{z}_2$.

Pour les lois d'évolution dans le cas d'une transformation pseudoélastique faisant intervenir la martensite M^-, le lecteur est invité à consulter l'annexe A.

4.4.2 Autoaccommodation de la martensite

En l'absence d'un chargement mécanique, l'austénite peut se transformer en martensite autoaccommodante. Dans ce cas, les fonctions critères $\mathcal{F}_2^1$, $\mathcal{F}_1^2$ et $\mathcal{F}_1^3$ s'annulent simultanément et on obtient, comme dans le cas 1D,

$$C(T) = -(G+b_1). \tag{4.32}$$

Les lois d'évolution sont aussi identiques.

$$\dot{z}_1 = \frac{-2\dot{C}(T)}{2(G+b_1)+2(G-a)-(H+b_2)}, \tag{4.33}$$

$$\dot{z}_2 = \frac{\dot{C}(T)}{2(G+b_1)+2(G-a)-(H+b_2)}, \tag{4.34}$$

$$\dot{z}_3 = \dot{z}_2. \tag{4.35}$$

4.4.3 Orientation de la martensite autoaccommodante

Sous l'effet d'une traction, la variante M^- d'un mélange martensitique autoaccommodant se transforme en M^+. Cette transformation est active quand les deux fonctions critère $\mathcal{F}_2^3$ et $\mathcal{F}_1^2$ s'annulent ainsi que leurs dérivées $\dot{\mathcal{F}}_2^3$ et $\dot{\mathcal{F}}_1^2$. Par conséquent,

$$2\sigma_{\text{VM}}\varepsilon_0 \,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0) - 2b_1 z_1 + (H-b_2)z_2 - (H+b_2)z_3 = 0 \tag{4.36}$$

et $\dot{z}_2$ et $\dot{z}_3$ vérifient

$$-\Big[6\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0^2 - (H-b_2)\Big]\dot{z}_2 + \Big[6\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0^2 - (H+b_2)\Big]\dot{z}_3 = -3\varepsilon_0 \frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}}{\sigma_{\text{VM}}} \,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0). \tag{4.37}$$

Compte tenu de l'égalité $\dot{z}_2 + \dot{z}_3 = 0$, les lois d'évolution s'écrivent

$$\dot{z}_1 = 0, \tag{4.38}$$

$$\dot{z}_2 = \left(\frac{1}{6\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0^2 - H}\right)\frac{3}{2}\varepsilon_0 \frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}}{\sigma_{\text{VM}}} \,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0), \tag{4.39}$$

$$\dot{z}_3 = -\dot{z}_2. \tag{4.40}$$

Il est facile de démontrer que les équations (4.38) à (4.40) peuvent s'écrire aussi

$$\dot{z}_1 = 0, \tag{4.41}$$

$$\dot{z}_2 = -\frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{\varepsilon}_0}{H}, \tag{4.42}$$

$$\dot{z}_3 = -\dot{z}_2, \tag{4.43}$$

en généralisation directe des expressions obtenues dans le cas du modèle unidimensionnel.

4.4.4 Effet mémoire simple sens

La modélisation de l'autoaccommodation de la martensite et de l'orientation de la martensite autoaccommodante fait l'objet des paragraphes 4.4.2 et 4.4.3. Reste à considérer la transformation inverse de la martensite orientée en austénite, à contrainte nulle, sous l'effet de la température. Dans ce cas, les lois d'évolution sont identiques à leurs homologues dans le cas 1D :

– quand M^+ se transforme, seule, en austénite,

$$C(T) = -(G-b_1)z_1 + (G+a)z_2 - [(H-b_2) - (G+a)]\,z_3. \tag{4.44}$$

L'évolution des fractions volumiques est telle que

$$\dot{z}_1 = \frac{-\dot{C}(T)}{2G + a - b_1}, \tag{4.45}$$

$$\dot{z}_2 = -\dot{z}_1, \tag{4.46}$$

$$\dot{z}_3 = 0\,; \tag{4.47}$$

– quand M^- se transforme, seule, en austénite,

$$C(T) = -(G-b_1)z_1 - [(H-b_2) - (G+a)]\,z_2 + (G+a)z_3. \tag{4.48}$$

Les lois d'évolution correspondantes vérifient

$$\dot{z}_1 = \frac{-\dot{C}(T)}{2G + a - b_1}, \tag{4.49}$$

$$\dot{z}_2 = 0, \tag{4.50}$$

$$\dot{z}_3 = -\dot{z}_1\,; \tag{4.51}$$

– quand M^+ et M^- se transforment simultanément en austénite, l'évolution des fractions volumiques vérifie les conditions de consistance $\dot{\mathcal{F}}_2^2 = 0$, $\dot{\mathcal{F}}_2^3 = 0$ et $\dot{\mathcal{F}}_1^1 = 0$ (voir annexe A).

4.4.5 Effet superthermique

On suppose que le tenseur de contrainte au sein du matériau est constant et vaut $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$.

Si l'austénite se transforme en martensite M^+, $\mathcal{F}_2^1$ et $\mathcal{F}_1^2$ s'annulent. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}El_{\text{MA}}\left(\sigma_{\text{VM}}^{(0)}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}} + P_{\text{MA}}\right)\left(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}^{(0)}\right)^2 + \sigma_{\text{VM}}\varepsilon_0 \operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0) \\ = C(T) + (G + b_1)z_1 + (G - a)z_2 - [(G - a) - (H + b_2)]\,z_3.\end{aligned} \tag{4.52}$$

Les lois d'évolution associées sont données par

$$\dot{z}_1 = \frac{-\dot{C}(T)}{2G - a + b_1}, \tag{4.53}$$

$$\dot{z}_2 = -\dot{z}_1, \tag{4.54}$$

$$\dot{z}_3 = 0. \tag{4.55}$$

Si l'austénite se transforme en M^-, $\mathcal{F}_2^1 = 0$ et $\mathcal{F}_1^3 = 0$ donnent

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}El_{\text{MA}}\left(\sigma_{\text{VM}}^{(0)}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}} + P_{\text{MA}}\right)\left(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}^{(0)}\right)^2 - \sigma_{\text{VM}}\varepsilon_0 \operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0) \\ = C(T) - [(G - a) - (H + b_2)]\,z_2 + (G + b_1)z_1 + (G - a)z_3.\end{aligned} \tag{4.56}$$

Les expressions de $\dot{z}_1$ et $\dot{z}_3$ sont identiques à celles obtenues dans le cas unidimensionnel.

$$\dot{z}_1 = \frac{-\dot{C}(T)}{2G - a + b_1}, \tag{4.57}$$

$$\dot{z}_2 = 0, \tag{4.58}$$

$$\dot{z}_3 = -\dot{z}_1. \tag{4.59}$$

Dans le cas d'une transformation simultanée de l'austénite en M^+ et en M^-

$$\dot{z}_1 = \frac{-2\dot{C}(T)}{2(G + b_1) + 2(G - a) - (H + b_2)}, \tag{4.60}$$

$$\dot{z}_2 = \frac{\dot{C}(T)}{2(G + b_1) + 2(G - a) - (H + b_2)}, \tag{4.61}$$

$$\dot{z}_3 = \dot{z}_2. \tag{4.62}$$

4.4.6 Réponse à un chargement thermomécanique quelconque

On considère au cours de ce paragraphe le problème de changement de phase sous l'effet d'un chargement thermique–mécanique combiné, comme celui de la figure 4.1.

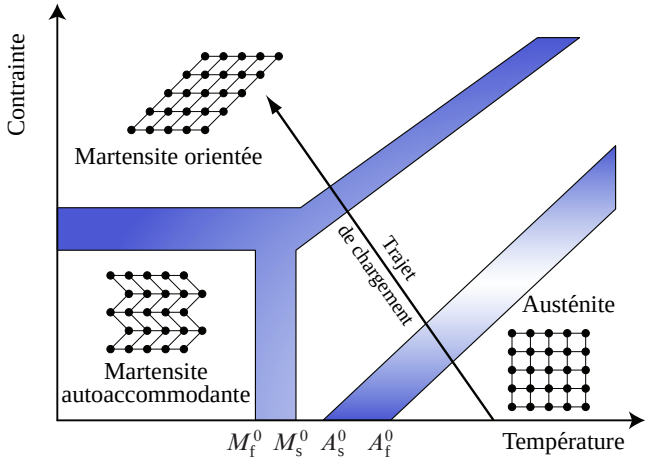


FIG. 4.1 – Exemple d'un trajet de chargement où la température et la contrainte varient en même temps.

Changement de phase direct

Différentes transformations sont possibles :

– austénite en martensite M^+ uniquement. Dans ce cas, $\mathcal{F}_2^1 = 0$ et $\mathcal{F}_1^2 = 0$ impliquent

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}El_{\mathrm{MA}}\sigma_{\mathrm{VM}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}El_{\mathrm{MA}} + P_{\mathrm{MA}}\right)(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 + \sigma_{\mathrm{VM}}\varepsilon_0 \operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0) \\ = C(T) + (G+b_1)z_1 - (G-a)z_2 - [(G-a)-(H+b_2)]z_3.\end{aligned} \tag{4.63}$$

$\dot{z}_1$ et $\dot{z}_2$ sont tels que

$$\begin{aligned}&-\left\{2\mu_{\mathrm{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\mathrm{M}}}-\frac{1}{\mu_{\mathrm{A}}}\right)(z_2-z_3)\varepsilon_0\left[El_{\mathrm{MA}}\sigma_{\mathrm{VM}}\operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G+b_1)\right\}\dot{z}_1 \\ &-\left\{2\mu_{\mathrm{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\mathrm{MA}}\sigma_{\mathrm{VM}}\operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]-(G-a)\right\}\dot{z}_2 \\ &=-El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}}-\left(\frac{1}{3}El_{\mathrm{MA}}+P_{\mathrm{MA}}\right)\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{el}}-\frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}}}{\sigma_{\mathrm{VM}}}\operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\dot{C}(T).\end{aligned} \tag{4.64}$$

– austénite en martensite M^- uniquement.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}El_{\mathrm{MA}}\sigma_{\mathrm{VM}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}El_{\mathrm{MA}} + P_{\mathrm{MA}}\right)(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 - \sigma_{\mathrm{VM}}\varepsilon_0 \operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0) \\ = C(T) + (G+b_1)z_1 - [(G-a)-(H+b_2)]z_2 - (G-a)z_3.\end{aligned} \tag{4.65}$$

Les lois d'évolution vérifient

$$
\begin{aligned}
&-\left\{2\mu_{\text{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\text{M}}}-\frac{1}{\mu_{\text{A}}}\right)(z_2-z_3)\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G+b_1)\right\}\dot{z}_1\\
&+\left\{2\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G-a)\right\}\dot{z}_3 \qquad (4.66)\\
&=-El_{\text{MA}}\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}-\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}}+P_{\text{MA}}\right)\text{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\text{tr}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{el}}+\frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}}{\sigma_{\text{VM}}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\dot{C}(T).
\end{aligned}
$$

– finalement, si l'austénite se transforme simultanément en martensite M^+ et M^-, le changement de phase est régi simultanément par (4.63) et (4.65). L'évolution des différentes fractions volumiques obéit à

$$
\begin{aligned}
&-\left\{2\mu_{\text{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\text{M}}}-\frac{1}{\mu_{\text{A}}}\right)(z_2-z_3)\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G+b_1)\right\}\dot{z}_1\\
&-\left\{2\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]-(G-a)\right\}\dot{z}_2 \qquad (4.67)\\
&+\left\{2\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G-a)-(H+b_2)\right\}\dot{z}_3\\
&=-El_{\text{MA}}\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}-\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}}+P_{\text{MA}}\right)\text{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\text{tr}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{el}}-\frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}}{\sigma_{\text{VM}}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\dot{C}(T)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&-\left\{2\mu_{\text{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\text{M}}}-\frac{1}{\mu_{\text{A}}}\right)(z_2-z_3)\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G+b_1)\right\}\dot{z}_1\\
&-\left\{2\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]-(G-a)+(H+b_2)\right\}\dot{z}_2 \qquad (4.68)\\
&+\left\{2\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G-a)\right\}\dot{z}_3\\
&=-El_{\text{MA}}\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}-\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}}+P_{\text{MA}}\right)\text{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\text{tr}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{el}}+\frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}}{\sigma_{\text{VM}}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\dot{C}(T).
\end{aligned}
$$

Changement de phase inverse

Il s'agit de la transformation de la martensite en austénite sous l'effet d'un chargement thermomécanique approprié :

– si M^+ uniquement se transforme en austénite, $\mathcal{F}_2^2=0$ et $\mathcal{F}_1^1=0$. Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3}El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}}+P_{\text{MA}}\right)(\text{tr}\,\boldsymbol{\sigma})^2+\sigma_{\text{VM}}\varepsilon_0\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0) \qquad (4.69)\\
&\qquad=C(T)+(G-b_1)z_1-(G+a)z_2-[(G+a)-(H-b_2)]\,z_3
\end{aligned}
$$

et l'évolution des fractions volumiques est décrite par les équations $\dot{z}_1+\dot{z}_2=0$,

$\dot{z}_3 = 0$ et

$$\begin{aligned}
&\left\{2\mu_{\text{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\text{M}}}-\frac{1}{\mu_{\text{A}}}\right)(z_2-z_3)\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G-b_1)\right\}\dot{z}_1\\
&+\left\{2\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]-(G+a)\right\}\dot{z}_2 \qquad (4.70)\\
&=El_{\text{MA}}\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}+\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}}+P_{\text{MA}}\right)\text{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\text{tr}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{el}}+\frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}}{\sigma_{\text{VM}}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\dot{C}(T)\,;
\end{aligned}$$

– si la martensite M^- se transforme, seule, en austénite,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}}+P_{\text{MA}}\right)(\,\text{tr}\,\boldsymbol{\sigma})^2-\sigma_{\text{VM}}\varepsilon_0\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0) \qquad (4.71)\\
&\qquad =C(T)+(G-b_1)z_1-[(G+a)-(H-b_2)]\,z_2-(G+a)z_3
\end{aligned}$$

et les lois d'évolution correspondantes vérifient

$$\begin{aligned}
&\left\{2\mu_{\text{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\text{M}}}-\frac{1}{\mu_{\text{A}}}\right)(z_2-z_3)\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G-b_1)\right\}\dot{z}_1\\
&-\left\{2\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G+a)\right\}\dot{z}_3 \qquad (4.72)\\
&=El_{\text{MA}}\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}+\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}}+P_{\text{MA}}\right)\text{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\text{tr}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{el}}-\frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}}{\sigma_{\text{VM}}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\dot{C}(T)\,;
\end{aligned}$$

– si M^+ et M^- se transforment simultanément en austénite, alors les relations (4.69) et (4.71) sont vraies. L'évolution des fractions volumiques z_1, z_2 et z_3 vérifient les conditions de consistance.

$$\begin{aligned}
&\left\{2\mu_{\text{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\text{M}}}-\frac{1}{\mu_{\text{A}}}\right)(z_2-z_3)\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G-b_1)\right\}\dot{z}_1\\
&+\left\{2\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]-(G+a)\right\}\dot{z}_2 \qquad (4.73)\\
&-\left\{2\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G+a)-(H-b_2)\right\}\dot{z}_3\\
&=El_{\text{MA}}\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}+\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}}+P_{\text{MA}}\right)\text{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\text{tr}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{el}}+\frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}}{\sigma_{\text{VM}}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\dot{C}(T)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left\{2\mu_{\text{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\text{M}}}-\frac{1}{\mu_{\text{A}}}\right)(z_2-z_3)\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G-b_1)\right\}\dot{z}_1\\
&+\left\{2\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]-(G+a)+(H-b_2)\right\}\dot{z}_2 \qquad (4.74)\\
&-\left\{2\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G+a)\right\}\dot{z}_3\\
&=El_{\text{MA}}\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}+\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}}+P_{\text{MA}}\right)\text{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\text{tr}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{el}}-\frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}}{\sigma_{\text{VM}}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\dot{C}(T).
\end{aligned}$$

4.5 Simulation numérique

On utilise le code de calcul par éléments finis « Castem » afin de montrer que le modèle développé au cours du présent chapitre est capable de simuler qualitativement le comportement de structures en MMF.

Un nouveau modèle de comportement « MEMOIREDEFORME » est programmé en utilisant la version de développement de Castem 2002. Les grandes étapes de la programmation sont les suivantes (Kichenin et Charras, 2003) :

- déclaration du modèle de comportement « MEMOIREDEFORME » et des variables internes nécessaires au niveau de la procédure « PASAPAS » dédiée au calcul incrémental ;
- déclaration du modèle « MEMOIREDEFORME » au niveau de la procédure existante « INCREME » qui calcule les incréments des différentes variables à chaque pas de temps ;
- rattachement de « MEMOIREDEFORME » aux formulations « MECANIQUE » et « ELASTIQUE » prédéfinis dans Castem ;
- l'écoulement est géré par la nouvelle procédure « ECOUFORM ».

Pour chaque incrément du chargement :

1. Le moteur de calcul de Castem détermine d'abord la solution élastique ;
2. Le résultat est transmis à la procédure « ECOUFORM » qui détermine une solution vérifiant les critères de changement de phase et les liaisons entre les fractions volumique ;
3. La solution est retransmise à Castem :
   - si le déséquilibre induit par cette solution est au dessous d'une certaine tolérance, elle est acceptée,
   - dans le cas contraire, une nouvelle itération : $2 \rightarrow 3$ est effectuée.

Pour chaque itération (n), le calcul est effectué par « ECOUFORM » selon l'algorithme 4.1.

Entrées : $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$, $\boldsymbol{\sigma}^{(n+1),\,\text{test}}$, $T^{(n)}$, $T^{(n+1)}$, $z_1^{(n)}$, $z_2^{(n)}$.
Sorties : $\boldsymbol{\sigma}^{(n+1),\,\text{a.}}$, $z_1^{(n+1),\,\text{a.}}$, $z_2^{(n+1),\,\text{a.}}$.
pour $i = 1$ **à** 3 **faire**
  pour $j = 1$ **à** 2 **faire**
    calculer les fonctions critères $\mathcal{F}_j^{i,\,(n)}$;
    calculer les valeurs–tests correspondants, $\mathcal{F}_j^{i,\,(n+1),\,\text{test}}$;
    vérifier les liaisons unilatérales ;
    déterminer les transformations actives.
suivant les transformations actives **faire**
  calculer $z_1^{(n+1),\,\text{a.}}$;
  calculer $z_2^{(n+1),\,\text{a.}}$;
calculer $\boldsymbol{\sigma}^{(n+1),\,\text{a.}}$

ALGORITHME 4.1 : algorithme simplifié de la procédure « ECOUFORM ».

La température T est considérée comme un paramètre et la déformation de transformation $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ est déterminée en chaque point de la structure à partir d'une solution purement élastique. Au niveau de l'algorithme, les exposants $^{\text{test}}$ et $^{\text{a.}}$ désignent respectivement une solution qui vérifie l'équilibre et une solution qui vérifie les différents critères et les liaisons internes.

L'algorithme de « ECOUFORM » montre que, connaissant le trajet de chargement et l'état initial du MMF, le modèle est capable de simuler le comportement du matériau, sans supposer, *a priori*, un comportement particulier (pseudoélasticité, etc.).

Dans la suite on présente quelques exemples de calculs de structures tridimensionnelles simples en MMF soumises à des chargements mécaniques proportionnels. On considère que les différentes phases ont le même module élastique afin de réduire la non-linéarité des problèmes.

4.5.1 Exemple 1 : calcul d'une barre en MMF

On considère une barre parallélipipédique (figure 4.2) qui a les dimensions suivantes :

- hauteur de la section rectangulaire $h = 5$ mm ;
- largeur de la section rectangulaire $l = 7$ mm ;
- longueur de la barre $L = 30$ mm.

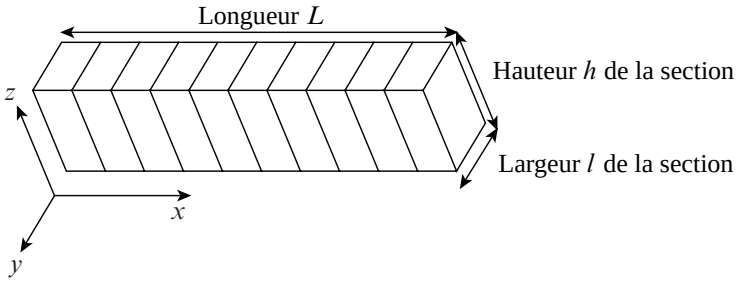


FIG. 4.2 – Maillage d'une barre rectangulaire en MMF.

Le tableau 4.2 regroupe les caractéristiques du matériau constitutif de la barre ainsi que les valeurs des paramètres du modèle 3D.

Paramètres du modèle 3D			
K_{A}	15 000 MPa	a	4,53 MPa
K_{M}	15 000 MPa	b_1	6,45 MPa
ε_0	6 %	b_2	9,04 MPa
G	-2,35 MPa	ξ	0,052 MPa/ °C
H	-8,96 MPa	κ	8,81 MPa
A_{f}^0	11 °C	ν	0,3

TAB. 4.2 – Caractéristiques du MMF et valeurs des paramètres du modèle 3D.

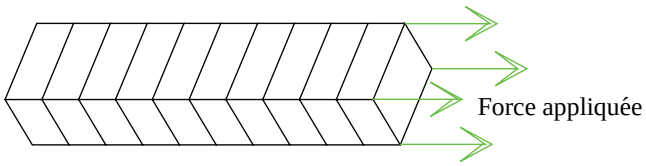
Les conditions aux limites de la barre sont telles que :
- en $x = 0$ tout déplacement le long de l'axe des x est empêché ;
- en $x = L$ une traction est appliquée ;
- les autres faces sont libres de contrainte : $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$, où $\mathbf{n}$ est un vecteur unitaire normal sortant.

Les déplacements rigidifiants sont empêchés et la température de la structure est supposée uniforme à tout moment. La réponse du matériau est la même en tout point de la barre.

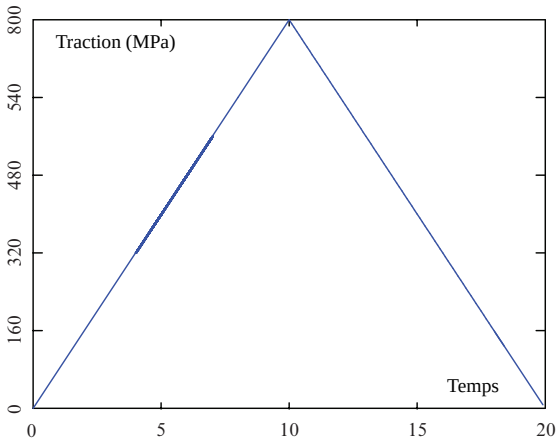
Aux sous-paragraphes suivants, le comportement local est étudié au centre de la face $x = L$.

Simulation de la pseudoélasticité

La température de la barre, initialement austénitique, est supposée constante et égale en tout point à 60 °C. Une traction est appliquée au niveau de la face $x = L$ (figures 4.3.a et 4.3.b), de manière que :
- la contrainte selon l'axe des x croît de 0 à 800 MPa entraînant un changement de phase de l'austénite en M^+ et l'apparition, par conséquent, d'une déformation inélastique importante ;
- un changement de phase inverse se produit lors de la décharge, ramenant le matériau à son état austénitique initial et conduisant à la disparition de la déformation de transformation (figures 4.4 et 4.5).

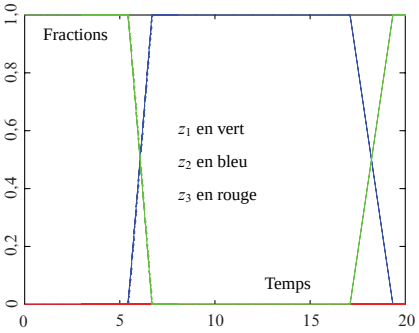


4.3.a – Force de traction appliquée sur la face $x = L$ de la barre.

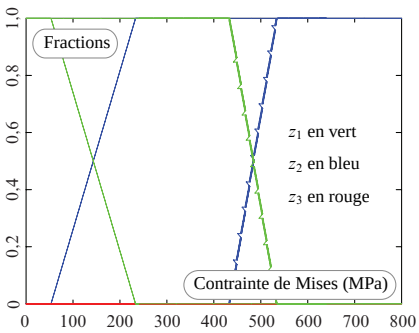


4.3.b – Évolution en fonction du temps cinématique de la contrainte de traction.

FIG. 4.3 – Chargement mécanique appliqué à la barre. Ce chargement provoque la transformation de l'austénite en martensite orientée.



4.4.a – Évolution des fractions volumiques avec le temps cinématique.



4.4.b – Évolution des fractions volumiques avec la contrainte.

FIG. 4.4 – Pseudoélasticité. La traction provoque un changement de phase direct de l'austénite en martensite M^+. Cette martensite se transforme de nouveau en austénite lors d'une décharge.

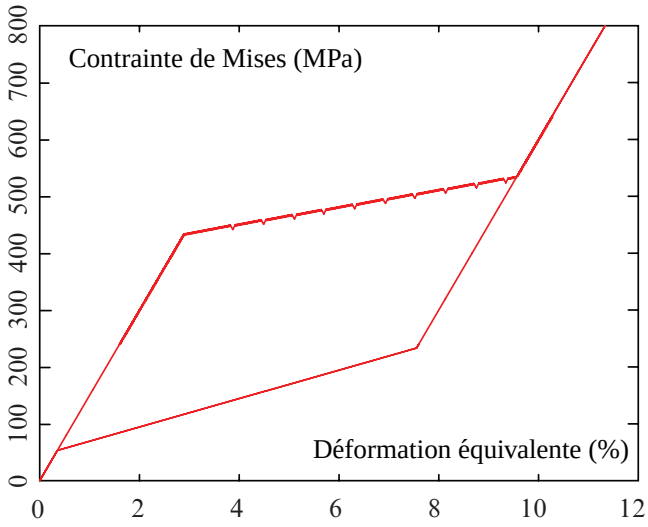
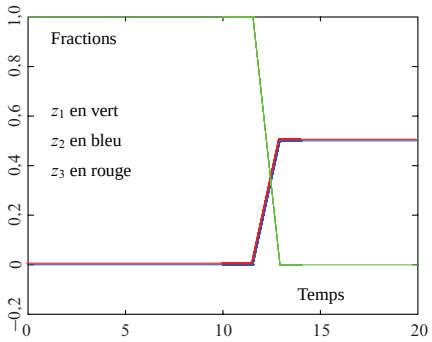


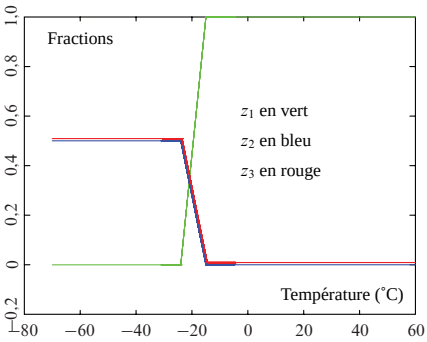
FIG. 4.5 – Modélisation de la pseudoélasticité. La transformation de l'austénite en martensite orientée entraîne l'apparition d'une déformation inélastique de transformation. Cette déformation disparaît suite à une décharge provoquant le changement de phase inverse $M^+ \rightarrow A$.

Simulation de l'autoaccommodation

La barre n'est soumise à aucun chargement mécanique. La température décroît de 60 °C à −80 °C, puis croît de nouveau à 60 °C. Les figures 4.6.a et 4.6.b représentent l'évolution des fractions volumiques, en fonction d'un temps cinématique et en fonction de la température respectivement, au centre de la section définie par $x = L$. Initialement, la barre est à l'état austénitique caractérisé par $z_1 = 1$.



4.6.a – Évolution des fractions volumiques avec le temps cinématique.

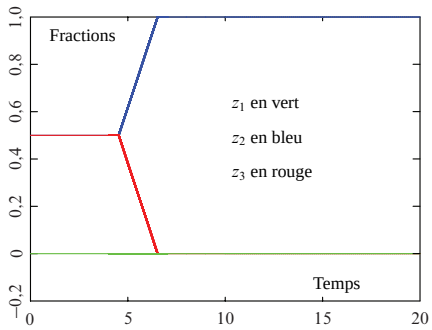


4.6.b – Évolution des fractions volumiques avec la température.

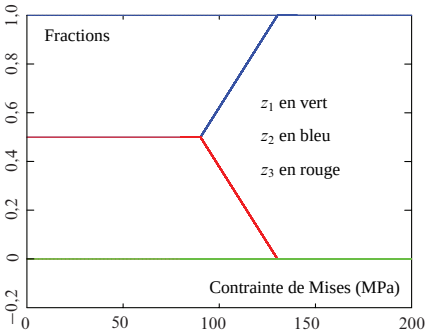
FIG. 4.6 – Autoaccommodation de la martensite. Le MMF, initialement austénitique à 60 °C, se transforme en quantités égales de martensite M^+ et de martensite M^- quand la température diminue suffisamment.

Simulation de l'orientation

La barre de la figure 4.2 est maintenue à une température égale à -30 °C. Le chargement mécanique est un cycle de traction–décharge atteignant une contrainte maximale en traction égale à 200 MPa. La martensite M^- se transforme, sous l'effet de la contrainte, en martensite M^+. Une orientation complète est réalisée quand la traction atteint son maximum (figures 4.7.a et 4.7.b) et la déformation inélastique qui en résulte persiste après décharge (figure 4.8).



4.7.a – Évolution des fractions volumiques avec le temps cinématique.



4.7.b – Évolution des fractions volumiques en fonction de la contrainte équivalente de Mises.

FIG. 4.7 – Orientation de la martensite autoaccommodante. La traction favorise la formation de la variante M^+ à partir de la martensite M^-. L'orientation est complète quand la fraction z_2 de M^+ atteint une valeur égale à l'unité.

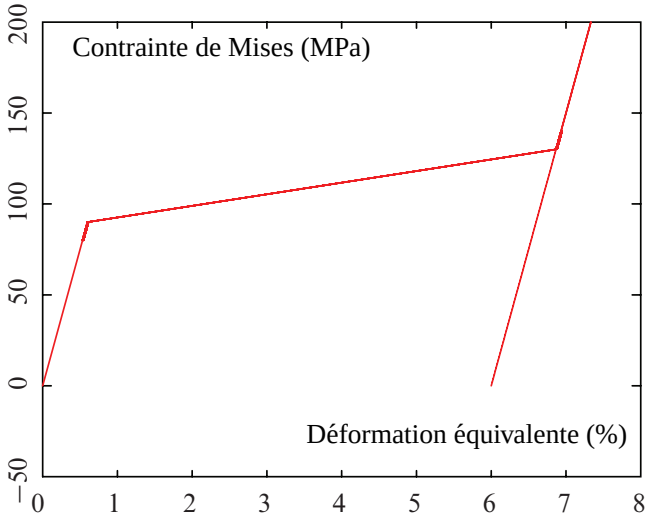
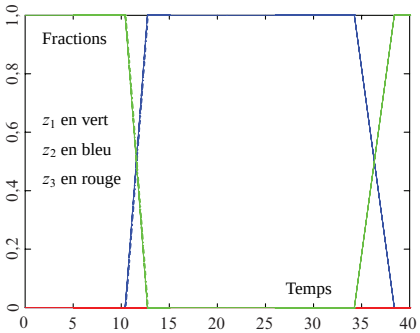


FIG. 4.8 – Orientation de la martensite. La déformation inélastique due à l'orientation de la martensite persiste après décharge.

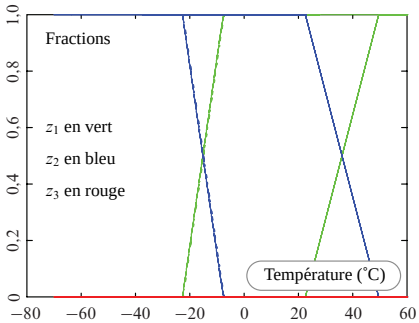
Simulation de l'effet superthermique

La barre est soumise à un chargement mécanique constant équivalent à une traction de 100 MPa le long de son axe x.
On fait varier la température de manière uniforme selon le cycle suivant :

- le matériau, initialement austénitique à 60 °C, est refroidi jusqu'à atteindre une température de -80 °C. Ceci entraîne la formation de la martensite orientée et l'apparition d'une déformation inélastique importante sous l'effet de la contrainte constante de traction ;
- le matériau retrouve sa forme austénitique initiale par chauffage à 60 °C, une température supérieure à A_f^0 (figures 4.9 et 4.10).



4.9.a – Évolution des fractions volumiques avec le temps cinématique.



4.9.b – Évolution des fractions volumiques en fonction de la température.

FIG. 4.9 – Modélisation de l'effet superthermique. Le refroidissement du MMF entraîne la formation, à partir de l'état austénitique initial, d'une martensite orientée sous l'effet du chargement mécanique constant. Le matériau retrouve son état initial par simple chauffage.

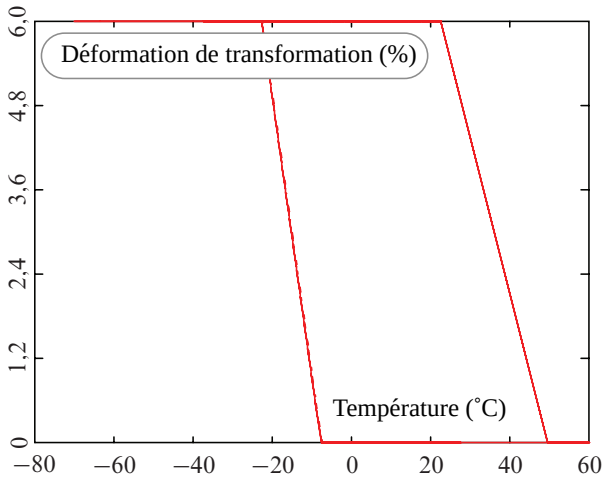


FIG. 4.10 – Effet superthermique. La martensite formée par refroidissement de l'austénite est orientée à cause de la traction, il en résulte une déformation inélastique importante recouvrable par chauffage.

4.5.2 Exemple 2 : calcul d'un cylindre creux

On considère un cylindre en MMF dont le matériau constitutif est le même que celui de la barre du paragraphe précédent.

Le cylindre présente les dimensions suivantes :

– longueur $L = 300$ mm ;
– rayon interne $R_1 = 35$ mm ;
– rayon externe $R_2 = 50$ mm.

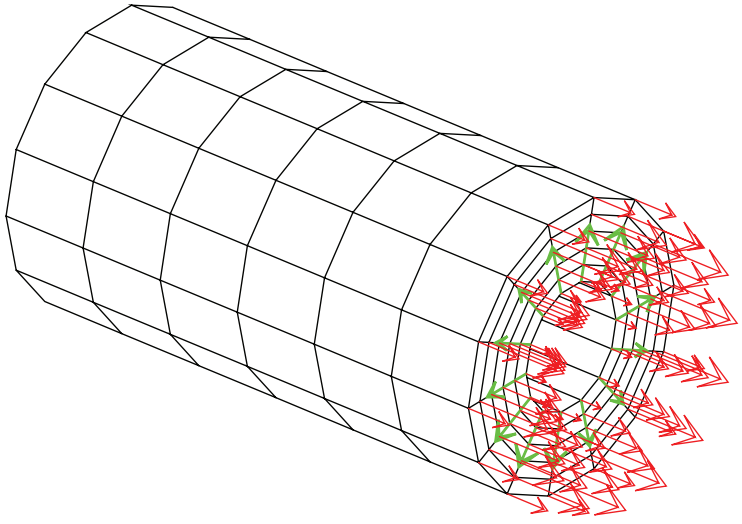
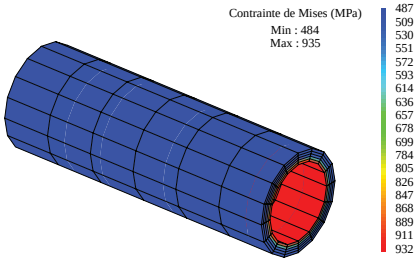


FIG. 4.11 – Maillage du cylindre en MMF et chargement appliqué.

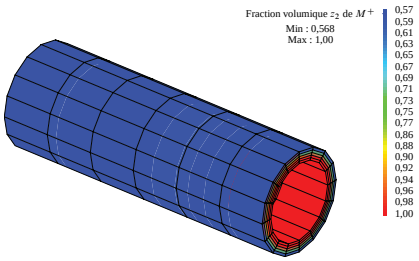
Il est soumis simultanément à une traction le long de son axe et à une pression interne

(figure 4.11). La traction correspond à une contrainte qui croît de zéro jusqu'à une valeur maximale de 400 MPa avant de décroître de nouveau. La pression interne évolue proportionnellement à la traction appliquée et atteint un maximum de 200 MPa. Le cylindre est initialement à l'état austénitique et sa température est constante et égale à 50 °C.

Sous l'effet du chargement mécanique, l'austénite se transforme en martensite M^+ qui commence à se former au niveau de la surface interne et se propage de façon radiale vers l'extérieur comme le montre les figures 4.12.a et 4.12.b.



4.12.a – Distribution volumique de la contrainte de Mises.



4.12.b – Distribution volumique de la fraction z_2 de M^+.

FIG. 4.12 – Modélisation d'un cylindre creux en MMF. Sous l'effet combiné de la traction et de la pression interne, la martensite M^+ commence à se former au niveau de la surface interne et se propage de façon radiale vers l'extérieur.

La figure 4.13 représente la réponse locale du matériau au chargement mécanique imposé en un point situé à mi-longueur du cylindre, sur sa surface externe.

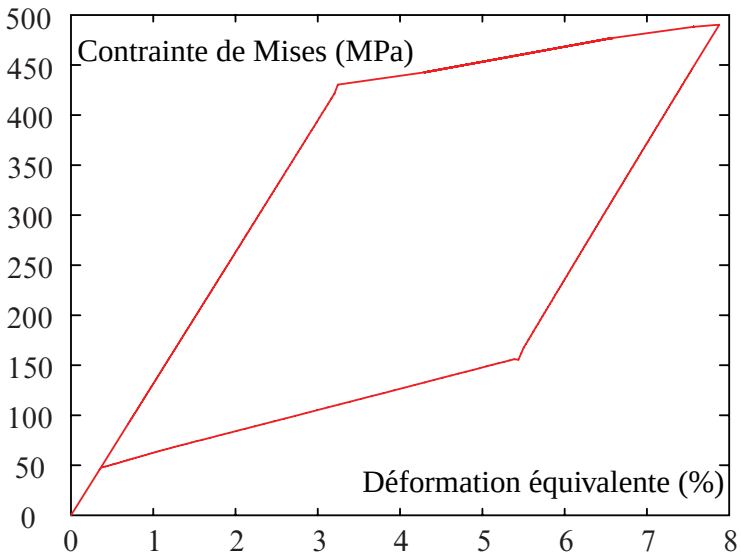


FIG. 4.13 – Réponse locale en un point situé à mi-longueur du cylindre, sur sa surface externe.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle de comportement 3D des MMF a été présenté. Le modèle constitue une généralisation directe de la version 1D proposée au chapitre précédent.

La généralisation est presque immédiate : un remplacement de quelques scalaires par leurs équivalents tensoriels est suffisant pour passer du cadre unidimensionnel au cadre tridimensionnel. Le modèle conserve les avantages de son homologue 1D, notamment la facilité de l'identification des paramètres, mais présente quelques limitations, en particulier la prise en compte des chargements proportionnels uniquement ; ceci est fortement restrictif si l'objectif est de calculer des structures en MMF pouvant fonctionner dans un régime de chargement mécanique non-proportionnel. Une autre limitation évidente héritée de la version 1D est la suivante : l'effet superthermique conduit généralement à une orientation complète de la martensite quel que soit le niveau de chargement mécanique, non nul, auquel est soumis le matériau. Ceci n'est pas en accord avec les observations expérimentales (Leclerq et Lexcellent, 1996 ; Lagoudas et Bo, 1999). Le chapitre suivant est consacré au développement d'un nouveau modèle de comportement 3D des MMF n'ayant pas ces limitations. Le modèle prend en compte les chargements mécaniques non-proportionnels en décrivant l'orientation de la martensite à l'aide d'un tenseur de déformation inélastique variable ; il offre, en outre, une meilleure représentation de l'effet superthermique.

Bibliographie

M. BROCCA, L. BRINSON ET Z. BAŽANT, « Three-dimensional constitutive model for shape memory alloys based on microplane model », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 50, p. 1051–1077, 2002.

J. KICHENIN ET T. CHARRAS, *CAST3M – Implantation d'une nouvelle loi d'évolution / loi de comportement mécanique*, SEMT/LM2S – CEA, 2003.

D. LAGOUDAS ET Z. BO, « Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, part II: material characterization and experimental results for a stable transformation cycle », *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, p. 1141–1173, 1999.

S. LECLERQ ET C. LEXCELLENT, « A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 44, n° 6, p. 953–980, 1996.

G. TAYLOR, « Plastic strain in metals », *Journal of the Institute of Metals*, vol. 62, p. 307–324, 1938.

CHAPITRE 5

Un nouveau modèle 3D unifié : cas des chargements non proportionnels

5.1 Introduction

Comme indiqué au chapitre précédent, la généralisation directe de la loi 1D inspirée des travaux de Moumni (Moumni, 1995) et de Nguyen et Moumni (Nguyen et Moumni, 1998) présente quelques limites. En effet, la description de la transformation martensitique à l'aide de deux variantes caractérisées par des déformations de transformation locales ayant des orientations opposées mais fixes ne peut être suffisante : l'orientation de la martensite se fait en réalité de manière compatible avec l'état de contrainte qui peut avoir des orientations quelconques, en 3D, au sein du MMF. Pour que le modèle puisse tenir compte de ces orientations, deux approches sont souvent utilisées dans la littérature :

- la première consiste à prendre en considération toutes les variantes pouvant se former lors d'une transformation martensitique ; ce genre d'approche est fidèle à la description physique de la transformation martensitique à l'échelle des microstructures cristallographiques. On peut placer dans ce contexte les travaux de Gao et coll. (2000) ; Gao et Brinson (2002) ; Thamburaja (2005) ; Siredey et coll. (1999) ; Patoor et Berveiller (1993) et Tanaka et coll. (2002) ;
- la deuxième considère la phase martensitique comme un milieu homogène dont l'orientation peut être décrite à l'échelle macroscopique dans un cadre similaire à celui de la plasticité classique. Dans ce cas, le modèle part du fait que le mécanisme gouvernant la transformation martensitique à l'échelle microscopique ressemble à celui de la déformation plastique. La déformation de transformation associée à l'orientation de la martensite est alors décrite à l'aide d'un tenseur de déformation inélastique représentant une moyennation de l'amplitude et de l'orientation de la déformation de transformation de la phase martensitique au sein d'un volume élémentaire du MMF. Plusieurs modèles de comportement qui rentrent dans ce cadre sont proposés par Boyd et Lagoudas (1996) ; Lagoudas et coll. (2006) ; Bo et Lagoudas (1999a,b) ; Lagoudas et Bo (1999b,a) ; Lagoudas et Entchev (2004) ; Raniecki et coll. (1992) ; Raniecki et Lexcellent (1998) ; Leclerq et Lexcellent (1996) ; Lexcellent et coll. (2000) ; Lexcellent et Bourbon (1996) ; Auricchio (2001) et Auricchio et Sacco (2001).

En adoptant cette deuxième approche, on développe au cours de ce chapitre un modèle de comportement des matériaux à mémoire de forme ne faisant pas l'hypothèse de chargement mécanique proportionnel. Le modèle présente d'ailleurs, par rapport à celui du chapitre précédent, l'avantage d'une meilleure prédiction du comportement superthermique, dans le sens où le niveau d'orientation de la martensite à la fin de la transformation directe au cours d'un cycle superthermique dépend du niveau du chargement mécanique appliqué.

La modélisation unifiée proposée constitue une description complète des divers effets exhibés par les MMF. Son cadre théorique est toujours celui des matériaux standards généralisés en présence de liaisons entre les variables d'état. Le changement de phase est pris en compte à l'aide de la fraction volumique z de la martensite dont l'orientation est décrite par un tenseur variable de déformation inélastique locale $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$. Le module de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$ constitue une mesure du niveau d'orientation des plaquettes martensitiques tandis que les diverses composantes indiquent les directions selon lesquelles ces plaquettes sont orientées.

5.2 Modèle de comportement des MMF

On considère un mélange de deux phases, l'austénite A et la martensite M, disposées en série. Le comportement de l'austénite est supposé élastique, tandis que la martensite peut être le siège de déformations inélastiques dues à l'orientation de ses variantes. On s'appuie sur un modèle rhéologique en série, comme dans le cas du modèle 1D du chapitre 3.

5.2.1 Variables d'état et énergie libre

On considère pour la modélisation les variables d'état suivantes où les tenseurs sont représentés en caractères gras :

- la déformation macroscopique $\boldsymbol{\varepsilon}$ et la température T ;
- la fraction volumique z de la martensite ;
- les déformations locales des deux phases : $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}}$ pour l'austénite et $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}$ pour la martensite ;
- la déformation de transformation locale au sein de la martensite, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$.

Les variables z et $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$ sont les seules à décrire des phénomènes dissipatifs. On désigne par $\mathcal{A}_z$ et $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{tr}}$ les forces thermodynamiques associées à ces deux variables.

La densité d'énergie libre $\mathcal{W}_{\mathrm{A}}$ de l'austénite, élastique, est donnée par

$$\mathcal{W}_{\mathrm{A}} \overset{\text{déf}}{=} W_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}}, \tag{5.1}$$

$\boldsymbol{K}_{\mathrm{A}}$ étant le tenseur élastique associé à l'austénite.

L'expression de la densité d'énergie libre de la martensite fait intervenir la déformation inélastique locale $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$ et la température T.

$$\mathcal{W}_{\mathrm{M}} = W_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}, T) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}) + C(T), \tag{5.2}$$

où $\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}}$ est le tenseur élastique de la martensite et $C(T)$ est une densité de chaleur latente associée au changement de phase au cours de la transformation martensitique.

L'interaction entre austénite et martensite affecte l'énergie libre du matériau. L'expression de la densité d'énergie due à cette interaction est supposée être

$$\mathcal{I} = I(z, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}) = G\frac{z^2}{2} + \frac{z}{2}\left[\alpha z + \beta(1-z)\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right). \tag{5.3}$$

G, α et β sont des paramètres matériels qui peuvent être interprétés physiquement :

- l'expression $\alpha\dfrac{z^2}{2}\left(\dfrac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right)$ correspond à l'interaction entre les variantes de la martensite orientée ; elle est inspirée de l'élastoplasticité classique. En remarquant que la déformation de transformation moyenne à l'échelle d'un volume élémentaire de référence est égale à $z\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$, cette expression est similaire à l'énergie libre associée à un écrouissage cinématique linéaire de module α. α contrôle, en particulier, la pente de la courbe contrainte–déformation lors d'une orientation de la martensite ;
- l'expression $\beta\dfrac{z(1-z)}{2}\left(\dfrac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right)$ représente l'interaction entre l'austénite de fraction volumique $(1-z)$ et la martensite de fraction volumique z. Dans la littérature (Leclerq et Lexcellent, 1996 ; Lexcellent et Bourbon, 1996 ; Raniecki et coll., 1992 ; Patoor et Berveiller, 1993, etc.), cette expression est proportionnelle au produit des fractions volumiques des diverses phases mises en jeu. Elle est d'ailleurs proportionnelle au niveau de la déformation inélastique au sein de la martensite, parce qu'on considère que l'interaction entre austénite et martensite augmente avec l'orientation de la martensite. β détermine la manière dont la contrainte appliquée à un MMF initialement austénitique affecte l'orientation de la martensite qui se forme pendant un changement de phase ;
- finalement, $G\dfrac{z^2}{2}$ mesure l'interaction au sein de la martensite autoaccommodante. Pour interpréter G, on considère la phase martensitique au sein d'un volume élémentaire de référence du MMF comme étant une structure. L'interaction au sein de cette structure existe parce que, physiquement, la martensite est composée de plusieurs variantes. L'action de la quantité z de martensite sur chaque élément de volume dz est supposée être proportionnelle à G, ce qui permet d'établir que l'interaction au sein de la martensite est une intégrale de $Gzdz$ sur tout le volume z occupé par la martensite. Elle est donc, à une constante près, égale à $G\dfrac{z^2}{2}$. L'effet de G sur le processus de changement de phase sera discuté ultérieurement.

La densité d'énergie libre du matériau est la somme d'énergies dues à chacune des phases et de la densité d'énergie due à l'interaction entre ces phases.

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &\overset{\text{déf}}{=} W(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}, z, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}) \\ &= (1-z)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}}\right) + z\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}) + C(T)\right] \\ &\quad + G\frac{z^2}{2} + \frac{z}{2}\left[\alpha z + \beta(1-z)\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right).\end{aligned} \tag{5.4}$$

5.2.2 Liaisons internes et lagrangien

Les variables d'état retenues pour la modélisation sont soumises à certaines contraintes physiques dépendant du modèle rhéologique de base ainsi que de quelques

spécificités relatives au comportement des matériaux à mémoire de forme :

– le modèle rhéologique étant en série, la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ est égale à la somme des déformations de chacune des phases.

$$(1-z)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} + z\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon} = 0\,; \tag{5.5}$$

– la fraction volumique z de la martensite ne peut être inférieure à zéro ni supérieure à l'unité.

$$z \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (1-z) \geqslant 0\,; \tag{5.6}$$

– le niveau de la déformation inélastique due à l'orientation de la martensite ne peut dépasser une certaine limite caractéristique du MMF. Si cette limite, en traction, est égale à ε_0, alors la déformation de transformation équivalente $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}$ ne doit pas dépasser ε_0.

$$\varepsilon_0 - \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}} \geqslant 0. \tag{5.7}$$

Les liaisons (5.5) à (5.7) sont supposées parfaites. Par conséquent, elles dérivent d'un potentiel $\mathcal{W}_l$ tel que

$$\mathcal{W}_l = -\boldsymbol{\lambda} : [(1-z)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} + z\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}] - \mu\left(\varepsilon_0 - \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}\right) - \nu_1 z - \nu_2(1-z). \tag{5.8}$$

$\boldsymbol{\lambda}$, μ, ν_1, ν_2 et μ sont des multiplicateurs de Lagrange. ν_1 et ν_2, associés aux liaisons unilatérales, doivent obéir aux conditions

$$\nu_1 \geqslant 0,\ \nu_1 z = 0, \quad \nu_2 \geqslant 0,\ \nu_2(1-z) = 0 \quad \text{et} \quad \mu \geqslant 0,\ \mu\left(\varepsilon_0 - \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}\right) = 0. \tag{5.9}$$

Connaissant l'expression de l'énergie libre $\mathcal{W}$ du MMF ainsi que l'expression du potentiel $\mathcal{W}_l$ dont dérivent les liaisons entre les variables d'état, on construit le lagrangien $\mathcal{L}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{W} + \mathcal{W}_l \overset{\text{déf}}{=} L(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}, z, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}) \qquad (5.10)\\
&= (1-z)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}}\right)\\
&\quad + z\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}) + C(T)\right]\\
&\quad + G\frac{z^2}{2} + \frac{z}{2}\left[\alpha z + \beta(1-z)\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right)\\
&\quad - \boldsymbol{\lambda} : [(1-z)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + z\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}] - \mu\left(\varepsilon_0 - \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}\right) - \nu_1 z - \nu_2(1-z),
\end{aligned}$$

avec

$$\nu_1 \geqslant 0,\ \nu_1 z = 0\,;\ \nu_2 \geqslant 0,\ \nu_2(1-z) = 0 \text{ et } \mu \geqslant 0,\ \mu\left(\varepsilon_0 - \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}\right) = 0. \tag{5.11}$$

5.2.3 Lois d'état

Les seules forces thermodynamiques non nulles sont $\mathcal{A}_z$ et $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\text{tr}}$, associées respectivement aux mécanismes dissipatifs de changement de phase et d'orientation des plaquettes martensitiques. Les équations d'état s'écrivent

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \tag{5.12}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{A}}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (1-z)(\boldsymbol{K}_{\text{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{A}} - \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}, \tag{5.13}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad z\,[\boldsymbol{K}_{\text{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}})] - \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \mathcal{A}_z \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_z = {} & \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{A}} : \boldsymbol{K}_{\text{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{A}} - (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}) : \boldsymbol{K}_{\text{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}})\right] \\ & - C(T) - Gz - \left[(\alpha - \beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right) \\ & - \boldsymbol{\lambda} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}}), \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\text{tr}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\text{tr}} = {} & z\left\{\boldsymbol{K}_{\text{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}) - \frac{2}{3}\left[\alpha z + \beta(1-z)\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right\} \\ & - \frac{2\mu}{3}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (1-z)\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{A}} + z\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}} - \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}. \tag{5.17}$$

Ce système permet notamment de déterminer la loi de comportement du matériau :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{K} : (\boldsymbol{\varepsilon} - z\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}). \tag{5.18}$$

$\boldsymbol{K}$ est le tenseur élastique équivalent du MMF, il est donné par

$$\boldsymbol{K} = \left[(1-z)\boldsymbol{K}_{\text{A}}^{-1} + z\boldsymbol{K}_{\text{M}}^{-1}\right]^{-1}. \tag{5.19}$$

5.2.4 Pseudo-potentiel de dissipation

On se donne l'expression suivante du pseudo-potentiel $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\overset{\text{déf}}{=} D(\dot{z}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{tr}}) \\ &= P(z, \dot{z})\dot{z} + R(z)\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{tr}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{tr}}}, \end{aligned} \tag{5.20}$$

où $P(z, \dot{z})$ et $R(z)$ sont tels que

$$P(z, \dot{z}) = [a(1-z) + bz]\ \text{sign}\,\dot{z} \tag{5.21}$$

et

$$R(z) = z^2 Y. \tag{5.22}$$

a, b et Y sont des constantes matérielles. La positivité de ces constantes, et par conséquent celle du pseudo-potentiel $\mathcal{D}$, sera démontrée lorsque le problème de l'identification expérimentale des paramètres du modèle sera abordé.

5.2.5 Fonctions critères et lois complémentaires

On considère que les forces thermodynamiques sont des sous-gradients du pseudo-potentiel de dissipation. Ceci se traduit par

$$\mathcal{A}_z \in \partial_{\dot{z}} \mathcal{D}, \tag{5.23}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{tr}} \in \partial_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{tr}}} \mathcal{D}. \tag{5.24}$$

Le système (5.23) et (5.24) implique les inégalités

$$\mathcal{F}_z^1 \leqslant 0, \quad \mathcal{F}_z^2 \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{\mathrm{tr}} \leqslant 0, \tag{5.25}$$

où $\mathcal{F}_z^1$, $\mathcal{F}_z^2$ et $\mathcal{F}_{\mathrm{tr}}$ sont des fonctions critères associées respectivement au changement de phase direct, au changement de phase inverse et à l'orientation des plaquettes martensitiques. Elles sont données par

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_z^1 &= \mathcal{A}_z - a(1-z) - bz \\
&= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}})\right] - C(T) \\
&\quad - (G+b)z - a(1-z) - \left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right) - \boldsymbol{\lambda} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}),
\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_z^2 &= -\mathcal{A}_z - a(1-z) - bz \\
&= -\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}})\right] + C(T) \\
&\quad + (G-b)z - a(1-z) + \left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right) + \boldsymbol{\lambda} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}),
\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\mathcal{F}_{\mathrm{tr}} = \|\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{tr}}\|_{\mathrm{VM}} - z^2 Y \tag{5.28}$$

Pour des valeurs de z strictement comprises entre zéro et un, les déformations locales $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}$ peuvent être calculées en fonction de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et de la déformation de transformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$. En effet, le système des équations (5.12) à (5.17) permet d'établir les relations suivantes :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{\sigma}, \tag{5.29}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{M}} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}, \tag{5.30}$$

où $\boldsymbol{S}_{\mathrm{A}}$ et $\boldsymbol{S}_{\mathrm{M}}$ sont les tenseurs de souplesse respectifs de l'austénite et de la martensite.

Pour la suite du calcul, on considère que l'austénite et la martensite sont homogènes et isotropes et qu'elles ont le même coefficient de Poisson.

$$\nu_{\mathrm{A}} = \nu_{\mathrm{M}} \overset{\text{déf}}{=} \nu. \tag{5.31}$$

On utilise les notations du tableau 5.1.

Notation	Signification	Expression
E_{A}	Module de Young de l'austénite	
E_{M}	Module de Young de la martensite	

(à suivre)

(suite)

Notation	Signification	Expression
E_{eq}	Module de Young du MMF	$\left(\frac{1-z}{E_{\text{A}}}+\frac{z}{E_{\text{M}}}\right)^{-1}$
ν	Coefficient de Poisson du MMF	
El_{A}		$\frac{1+\nu}{E_{\text{A}}}$
El_{M}		$\frac{1+\nu}{E_{\text{M}}}$
P_{A}		$\frac{-\nu}{E_{\text{A}}}$
P_{M}		$\frac{-\nu}{E_{\text{M}}}$
El_{MA}		$El_{\text{M}}-El_{\text{A}}$
P_{MA}		$P_{\text{M}}-P_{\text{A}}$
$\text{tr}\,\boldsymbol{M}$	Trace du tenseur symétrique $\boldsymbol{M}$	$\sum_i \boldsymbol{M}_{ii}$
$\text{dev}\,\boldsymbol{M}$	Déviateur de $\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{M}-\frac{1}{3}(\text{tr}\,\boldsymbol{M})\mathbf{I}$
M_{VM}	Une norme de $\text{dev}\,\boldsymbol{M}$	$\sqrt{\frac{3}{2}\,\text{dev}\,\boldsymbol{M}:\text{dev}\,\boldsymbol{M}}$
$\|\|\boldsymbol{M}\|\|_{\text{VM}}$	Identique à M_{VM}	
$\boldsymbol{s}$	Tenseur déviateur de contrainte	$\text{dev}\,\boldsymbol{\sigma}$
σ_{VM}	Contrainte équivalente de Mises	$\sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}}$
μ_{A}	Module de cisaillement de l'austénite	$\frac{E_{\text{A}}}{2(1+\nu)}$
μ_{M}	Module de cisaillement de la martensite	$\frac{E_{\text{M}}}{2(1+\nu)}$
μ_{eq}	Module de cisaillement du MMF	$\frac{E_{\text{eq}}}{2(1+\nu)}$
λ_{eq}	Coefficient de Lamé du MMF	$\frac{\nu E_{\text{eq}}}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

TAB. 5.1 – Notations utilisées dans ce chapitre.

Les relations (5.29) et (5.30) peuvent alors s'écrire

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{A}} = El_{\text{A}}\boldsymbol{\sigma} + P_{\text{A}}(\text{tr}\,\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}, \tag{5.32}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}} = El_{\text{M}}\boldsymbol{\sigma} + P_{\text{M}}(\text{tr}\,\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}. \tag{5.33}$$

Si l'on considère que la déformation de transformation n'entraîne aucun changement de volume, l'expression de la loi de comportement du MMF devient

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu_{\text{eq}}(\boldsymbol{\varepsilon} - z\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}) + \lambda_{\text{eq}}(\text{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}. \tag{5.34}$$

Les expressions des fonctions critères, pour $0 < z < 1$, peuvent être simplifiées. On obtient

$$\mathcal{F}_z^1 = \left\{\frac{1}{3}El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}} + P_{\text{MA}}\right)(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 - C(T)\right\} \tag{5.35}$$
$$+ \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - (G+b)z - a(1-z) - \left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right),$$

$$\mathcal{F}_z^2 = -\left\{\frac{1}{3}El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}} + P_{\text{MA}}\right)(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 - C(T)\right\} \tag{5.36}$$
$$- \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} + (G-b)z - a(1-z) + \left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right),$$

$$\frac{\mathcal{F}_{\text{tr}}}{z} = \left\|\boldsymbol{\sigma} - \frac{2}{3}\left[\alpha z + \beta(1-z)\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - \frac{2\mu}{3z}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}}\right\|_{\text{VM}} - zY. \tag{5.37}$$

Une fonction critère unique, $\mathcal{F}_{\text{ori}} \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{\mathcal{F}_{\text{tr}}}{z}$, contrôle l'orientation de la martensite. Le changement de phase peut, lui aussi, être associé à une seule fonction critère $\mathcal{F}_z = |\mathcal{A}_z| - [a(1-z) + bz]$; on garde cependant $\mathcal{F}_z^1$ et $\mathcal{F}_z^2$ pour mieux distinguer entre changement de phase direct et changement de phase inverse.

Il est intéressant de noter que si le module $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}$ est inférieur à ε_0, le multiplicateur de Lagrange μ associé à la liaison unilatérale (5.7) s'annule. Dans ce cas, l'expression de $\mathcal{F}_{\text{ori}}$ ressemble à celle de la fonction critère d'écoulement plastique d'un matériau élastoplastique de Mises à écrouissage cinématique linéaire, la différence étant la dépendance par rapport à z du module d'écrouissage ainsi que de la contrainte–seuil.

Les lois complémentaires associées au changement de phase vérifient les propriétés suivantes :

– si $\mathcal{F}_z^1 < 0$ et $\mathcal{F}_z^2 < 0$, aucun changement de phase ne se produit. Par conséquent,

$$\dot{z} = 0\,; \tag{5.38}$$

– si le seuil de changement de phase direct est atteint, $\mathcal{F}_z^1$ est nulle. Dans ce cas la valeur de $\dot{z}$ est nulle si $\dot{\mathcal{F}}_z^1 < 0$; dans le cas contraire, elle est donnée par la condition de consistance $\dot{\mathcal{F}}_z^1 = 0$;

– si le seuil de changement de phase inverse est atteint, $\mathcal{F}_z^2$ est nulle. Dans ce cas la valeur de $\dot{z}$ est nulle si $\dot{\mathcal{F}}_z^2 < 0$; dans le cas contraire, elle est donnée par la condition de consistance $\dot{\mathcal{F}}_z^2 = 0$.

L'évolution de la variable $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ associée à l'orientation de la martensite obéit à la règle de normalité. Si l'on note

$$\boldsymbol{X} \overset{\text{déf}}{=} \boldsymbol{s} - \frac{2}{3}\left[\alpha z + \beta(1-z)\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - \frac{2\mu}{3z}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}}, \tag{5.39}$$

la fonction critère $\mathcal{F}_{\text{ori}}$ associée à l'orientation des plaquettes martensitiques peut s'écrire

$$\mathcal{F}_{\text{ori}} = X_{\text{VM}} - zY. \tag{5.40}$$

La loi d'évolution de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ obéit à la règle de normalité

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{tr}} &= \eta \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{ori}}}{\partial \boldsymbol{X}} \\ &= \frac{3}{2}\eta \frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}},\end{aligned} \tag{5.41}$$

où η est un scalaire positif satisfaisant les conditions de Kuhn–Tucker :

$$\eta \geqslant 0, \quad \mathcal{F}_{\text{ori}} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \eta \mathcal{F}_{\text{ori}} = 0. \tag{5.42}$$

5.2.6 Procédure d'identification des paramètres

Les paramètres du modèle sont les suivants :
- les modules de Young de l'austénite et de la martensite, respectivement E_{A} et E_{M} ;
- le coefficient de Poisson ν, supposé le même pour les deux phases ;
- la déformation de transformation maximale en traction, ε_0 ;
- a et b, dépendant de la largeur de la boucle pseudoélastique pour $z = 0$ et pour $z = 1$;
- Y, définissant la contrainte de début d'orientation de la martensite ;
- G, affectant, entre autres, le centre du domaine de température dans lequel aucun changement de phase ne se produit à contrainte nulle (paragraphe 5.3.2) ;
- α et β, caractérisant l'évolution de la déformation de transformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ avec la contrainte, respectivement pour $z = 1$ et pour $z = 0$;
- ξ, déterminant l'effet d'une variation de la température sur les contraintes seuils de changement de phase ;
- κ, égal à $C(T)$ pour $T = A_{\text{f}}^0$;
- A_{f}^0, température de fin de changement de phase inverse.

En supposant que la densité de chaleur latente, $C(T)$, est une fonction linéaire de la température donnée par

$$C(T) = \xi\left(T - A_{\text{f}}^0\right) + \kappa, \tag{5.43}$$

la détermination des paramètres du modèle, à l'exception de ν, nécessite un essai de traction suivie d'une décharge dans le domaine pseudoélastique, un essai d'orientation de la martensite autoaccommodante suivie d'une décharge et un essai de calorimétrie à balayage différentiel (DSC).

L'essai de calorimétrie à balayage différentiel

L'essai de calorimétrie à balayage différentiel, qui a été décrit au chapitre 3, permet la détermination des températures M_{s}^0, M_{f}^0, A_{s}^0 et A_{f}^0 correspondant au début et à la fin des transformations martensitiques directe et inverse à contrainte nulle. Seule la valeur de A_{f}^0 intervient dans le cadre du présent modèle, elle figure dans l'expression de la chaleur latente de changement de phase $C(T)$.

L'essai d'orientation

L'essai consiste à solliciter en traction une éprouvette en matériau à mémoire de forme dont la microstructure initiale correspond à celle de la martensite autoaccommodante. La martensite autoaccommodante peut être obtenue par un refroidissement suffisant de l'austénite à contrainte nulle.

Dans le cadre du modèle proposé dans ce chapitre, l'autoaccommodation de la martensite est caractérisée par une déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ nulle. La fraction volumique z devient égale à l'unité partout où la transformation martensitique directe est complète, c'est-à-dire là où l'austénite s'est complètement transformée en martensite.

L'essai d'orientation permet de déterminer directement le module élastique E_{M} de la martensite ainsi que la déformation de transformation maximale en traction ε_0 (figure 5.1).

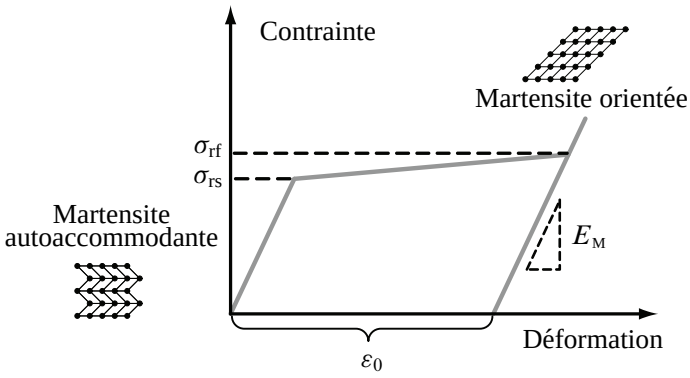


FIG. 5.1 – Essai de traction conduisant à l'orientation de la martensite autoaccommodante. L'essai permet notamment de déterminer le module élastique E_{M} de la martensite et la déformation de transformation maximale en traction ε_0.

Au cours de l'orientation de la martensite, la fonction critère $\mathcal{F}_{\text{ori}}$ s'annule. Pour $z = 1$, il en résulte

$$\left\| \boldsymbol{\sigma} - \frac{2}{3}\alpha\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - \frac{2\mu}{3}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}} \right\|_{\text{VM}} - Y = 0. \tag{5.44}$$

Le début de l'orientation est caractérisé par une contrainte–seuil égale à σ_{rs} et une déformation inélastique $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ nulle. Le multiplicateur μ, lui aussi, est nul dans ce cas, parce que la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ n'atteint pas sa limite en traction ε_0. Par conséquent, l'équation (5.44) s'écrit

$$\sigma_{\text{rs}} = Y. \tag{5.45}$$

Le paramètre Y représente donc le seuil de début de l'orientation de la martensite autoaccommodante en traction simple.

Vers la fin de l'orientation, la déformation inélastique équivalente tend vers son maximum ε_0. Le multiplicateur μ reste nul tant que la limite ε_0 n'est pas atteinte, en particulier quand $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}$ s'approche indéfiniment de ε_0 par valeurs inférieures. Il vient alors

$$\left\| \boldsymbol{\sigma} - \frac{2}{3}\alpha\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} \right\|_{\text{VM}} - Y = 0. \tag{5.46}$$

Si la traction s'effectue selon une direction définie par un vecteur unitaire $\boldsymbol{e}_{\text{x}}$ associé à un référentiel cartésien $(\boldsymbol{e}_{\text{x}}, \boldsymbol{e}_{\text{y}}, \boldsymbol{e}_{\text{z}})$, le tenseur de déformation déviatorique $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ est tel

que

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} = \varepsilon_0 \left(\boldsymbol{e}_{\mathrm{x}} \otimes \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{e}_{\mathrm{y}} \otimes \boldsymbol{e}_{\mathrm{y}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} \otimes \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} \right). \tag{5.47}$$

Si σ_{rf} représente la contrainte de fin d'orientation de la martensite, le tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est donné par

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{\mathrm{rf}} \, (\boldsymbol{e}_{\mathrm{x}} \otimes \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}}). \tag{5.48}$$

L'équation (5.46) permet alors d'écrire

$$| \, \sigma_{\mathrm{rf}} - \alpha \varepsilon_0 | = Y. \tag{5.49}$$

Par conséquent, compte tenu de (5.45), le paramètre α est donné par

$$\alpha = \frac{\sigma_{\mathrm{rf}} - \sigma_{\mathrm{rs}}}{\varepsilon_0}. \tag{5.50}$$

α contrôle donc la pente de la courbe contrainte–déformation lors de l'orientation de la martensite. Il est l'équivalent d'un module d'écrouissage dans le cas d'un matériau élastoplastique usuel ayant un comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire.

L'essai d'orientation permet aussi la détermination du paramètre β. Pour ce faire, on fait l'hypothèse suivante : lors de la transformation martensitique directe, la martensite formée à partir de l'austénite, en traction, est complètement orientée si la transformation a lieu à un niveau de contrainte supérieur ou égal à σ_{rf}. Cette hypothèse suppose simplement que la contrainte minimale nécessaire pour orienter complètement la martensite est la même, que la martensite orientée s'obtient à partir de la martensite autoaccommodante ou bien à partir de l'austénite. Sous l'hypothèse précédente, pour $z = 0$, on trouve (voir annexe B)

$$\beta = \frac{\sigma_{\mathrm{rf}}}{\varepsilon_0}. \tag{5.51}$$

β détermine donc le niveau d'orientation, caractérisé par la valeur de la déformation équivalente $\sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}$, de la martensite obtenue à partir de l'austénite sous l'effet d'un chargement mécanique.

L'essai pseudoélastique

Il s'agit d'un essai de traction suivi d'une décharge à une température T_0 supérieure à la température A_{f}^0 de fin de transformation inverse à contrainte nulle. Pour faciliter l'identification, on considère que T_0 est suffisamment élevée pour que la contrainte–seuil σ_{ms} de début de la transformation martensitique directe (figure 5.2) soit supérieure à la contrainte de fin d'orientation de la martensite autoaccommodante σ_{rf}. Ceci permet d'obtenir de la martensite complètement orientée, c'est-à-dire pour lequel $\sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}} = \varepsilon_0$, dès le début de la transformation directe.

La contrainte–seuil de début de la transformation pseudoélastique directe est notée σ_{ms}. Quand ce seuil est atteint, $\mathcal{F}_z^1$ s'annule pour une valeur nulle de z correspondant à l'état austénitique initial. On obtient,

$$\left(\frac{1}{E_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{E_{\mathrm{A}}} \right) \frac{\sigma_{\mathrm{ms}}^2}{2} - C(T_0) + \sigma_{\mathrm{ms}} \varepsilon_0 - a - \frac{\beta}{2} \varepsilon_0^2 = 0. \tag{5.52}$$

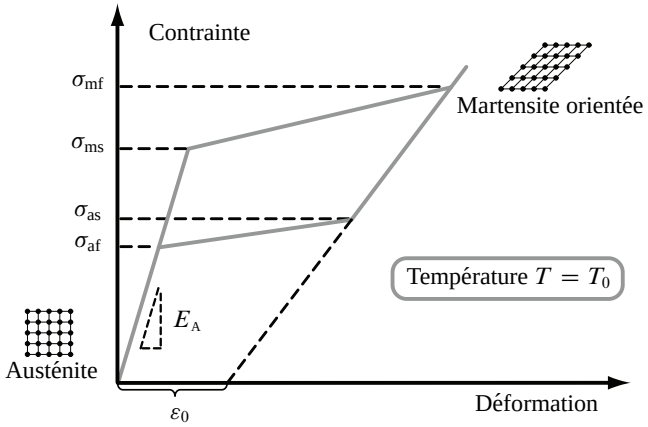


FIG. 5.2 – Essai pseudoélastique. L'essai est réalisé à une température T_0 supérieure à A_f^0. σ_{ms}, σ_{mf}, σ_{as} et σ_{af} représentent respectivement les contraintes de début et de fin des transformations directe et inverse à la température T_0.

À la fin de la transformation directe, la fraction volumique z devient égale à l'unité. Si σ_{mf} désigne la contrainte de fin de la transformation directe, l'équation (5.35) s'écrit

$$\left(\frac{1}{E_M}-\frac{1}{E_A}\right)\frac{\sigma_{mf}^2}{2}-C(T_0)+\sigma_{mf}\varepsilon_0-(G+b)-\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\varepsilon_0^2=0. \tag{5.53}$$

Pendant la décharge, le changement de phase inverse est régi par la fonction–critère $\mathcal{F}_z^2$. La fraction volumique z commence à décroître à partir d'une valeur égale à l'unité quand la contrainte devient égale à σ_{as} jusqu'à atteindre zéro pour une valeur–seuil σ_{af} de la contrainte. Par conséquent,

$$-\left(\frac{1}{E_M}-\frac{1}{E_A}\right)\frac{\sigma_{as}^2}{2}+C(T_0)-\sigma_{as}\varepsilon_0+(G-b)+\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\varepsilon_0^2=0 \tag{5.54}$$

et

$$-\left(\frac{1}{E_M}-\frac{1}{E_A}\right)\frac{\sigma_{af}^2}{2}+C(T_0)-\sigma_{af}\varepsilon_0-a+\frac{\beta}{2}\varepsilon_0^2=0. \tag{5.55}$$

Les quatre équations (5.50) à (5.55) permettent de déterminer les expressions des paramètres a, b et G.

$$a=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{E_M}-\frac{1}{E_A}\right)\frac{\sigma_{ms}^2-\sigma_{af}^2}{2}+(\sigma_{ms}-\sigma_{af})\varepsilon_0\right], \tag{5.56}$$

$$b=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{E_M}-\frac{1}{E_A}\right)\frac{\sigma_{mf}^2-\sigma_{as}^2}{2}+(\sigma_{mf}-\sigma_{as})\varepsilon_0\right], \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned}G=\frac{1}{2}\Bigg[&\left(\frac{1}{E_M}-\frac{1}{E_A}\right)\frac{\sigma_{mf}^2-\sigma_{ms}^2+\sigma_{as}^2-\sigma_{af}^2}{2}\\&+(\sigma_{mf}-\sigma_{ms}+\sigma_{as}-\sigma_{af})\varepsilon_0-2(\alpha-\beta)\varepsilon_0^2\Bigg].\end{aligned} \tag{5.58}$$

Les paramètres a et b caractérisent la largeur de la boucle d'hystérésis. En effet, a influe directement le décalage entre la contrainte de début de la transformation directe σ_{ms} et la contrainte de fin de la transformation inverse σ_{af} tandis que b contrôle la différence entre la contrainte de fin de la transformation directe σ_{mf} et la contrainte de début de la transformation inverse σ_{as}. Le paramètre G, dépendant de l'interaction au sein de la martensite, affecte naturellement les pentes de la courbe contrainte–déformation lors des transformations pseudo-élastiques directe et inverse. Il dépend aussi de la contrainte–seuil de début d'orientation de la martensite autoaccommodante via les paramètres α et β.

L'essai pseudoélastique permet, d'autre part, de déterminer la valeur de la densité de chaleur latente, $C(T)$, à la température T_0.

$$C(T_0) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{E_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{E_{\mathrm{A}}}\right)\frac{\sigma_{\mathrm{ms}}^2 + \sigma_{\mathrm{af}}^2}{2} + (\sigma_{\mathrm{ms}} + \sigma_{\mathrm{af}})\varepsilon_0 - \beta\varepsilon_0^2\right]. \tag{5.59}$$

$C(T)$ étant une fonction linéaire de la température T, il suffit alors de déterminer sa valeur en A_{f}^0 par exemple pour compléter l'identification des paramètres κ et ξ. En effet, A_{f}^0 caractérise la fin de la transformation martensitique inverse sous contrainte nulle. Si cette transformation inverse s'effectue à partir de martensite complètement orientée, $\mathcal{F}_z^2 = 0$ pour $z = 0$, $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}} = \varepsilon_0$ et $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$, d'où

$$C\left(A_{\mathrm{f}}^0\right) = a - \beta\frac{\varepsilon_0^2}{2}. \tag{5.60}$$

On en déduit

$$\kappa = a - \beta\frac{\varepsilon_0^2}{2}. \tag{5.61}$$

Finalement, le paramètre ξ est donné par

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{C(T_0) - C\left(A_{\mathrm{f}}^0\right)}{T_0 - A_{\mathrm{f}}^0} \\ &= \frac{C(T_0) - \kappa}{T_0 - A_{\mathrm{f}}^0}.\end{aligned} \tag{5.62}$$

La température A_{f}^0 est déterminée à partir de l'essai de calorimétrie à balayage différentiel tel qu'il est décrit au paragraphe 5.2.6.

5.3 Modélisation des différents phénomènes

La donnée de la loi de comportement (5.34) et des fonctions critères avec les lois complémentaires associées au paragraphe 5.2.5 est suffisante pour la modélisation des principaux phénomènes associés au comportement des matériaux à mémoire de forme. C'est dans ce sens que le modèle est « unifié ». Aux sous-paragraphes suivants, on s'intéresse à la modélisation de chacun des phénomènes suivants :

- la pseudoélasticité ;
- l'autoaccommodation de la martensite ;
- l'orientation de la martensite autoaccommodante ;

– l'effet mémoire simple sens ;
– l'effet superthermique ;
– le changement de phase sous l'effet d'un chargement combiné thermique–mécanique.

5.3.1 Pseudoélasticité

L'application d'un chargement mécanique à température suffisamment élevée entraîne la transformation de l'austénite en martensite orientée. Le changement de phase direct est régi par la fonction critère $\mathcal{F}_z^1$ tandis que l'orientation de la martensite formée dépend de la fonction critère $\mathcal{F}_{\text{ori}}$.

Si l'on note T_{pe} la température à laquelle le cycle pseudoélastique est réalisé, le changement de phase obéit à

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{1}{3}El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}}+P_{\text{MA}}\right)(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2-C\left(T_{\text{pe}}\right)\right\}\\&\quad+\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}-(G+b)z-a(1-z)-\left[(\alpha-\beta)z+\frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right)=0.\end{aligned}\tag{5.63}$$

Les variantes martensitiques formées sont orientées en deux étapes. La première correspond à une augmentation du module $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}$ de la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ jusqu'à saturation pour $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}=\varepsilon_0$, la deuxième est caractérisée par la possibilité d'évolution des composantes de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ à déformation équivalente $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}$ constante et égale à ε_0 :

– tant que la déformation de transformation équivalente $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}$ n'a pas atteint sa limite ε_0, le multiplicateur de Lagrange μ dans l'expression de la fonction critère $\mathcal{F}_{\text{ori}}$ est nul. Le comportement dans ce cas vérifie l'égalité

$$\left\|\boldsymbol{\sigma}-\frac{2}{3}\alpha\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right\|_{\text{VM}}-Y=0.\tag{5.64}$$

Les lois d'évolution obéissent aux conditions de consistance $\dot{\mathcal{F}}_{\text{ori}}=0$ et $\dot{\mathcal{F}}_z^1=0$. Elles sont solutions des équations

$$\begin{aligned}&\left[(G+b)-a+\frac{2}{3}(\alpha-\beta)\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}+2\frac{\mu_{\text{eq}}^2}{\mu_{\text{A}}}(El_{\text{MA}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}):\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right]\dot{z}\\&-\left\{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}-2\left[(\alpha-\beta)z+\frac{\beta}{2}\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}-3\mu_{\text{eq}}z(El_{\text{MA}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}):\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}\right\}\eta\\&=(El_{\text{MA}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}):\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}+\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}}+P_{\text{MA}}\right)\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{el}}\end{aligned}\tag{5.65}$$

et

$$\begin{aligned}&\left[Y+\left(3\frac{\mu_{\text{eq}}^2}{\mu_{\text{A}}}+\alpha-\beta\right)\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}\right]\dot{z}\\&\qquad+\left[\alpha z+\beta(1-z)+3\mu_{\text{eq}}z\right]\eta=\frac{3}{2}\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}\,;\end{aligned}\tag{5.66}$$

– si $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}$ atteint ε_0 et si on continue à augmenter le chargement mécanique, le multiplicateur μ n'est plus nul. En effet, dans ce cas

$$\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}} = \varepsilon_0 \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{tr}} = 0. \tag{5.67}$$

Or, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{tr}}$ est parallèle à $\boldsymbol{X}$ d'après (5.41), d'où

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{X} = 0 \Rightarrow \frac{\mu}{z} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left\{\boldsymbol{s}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - \varepsilon_0^2\left[\alpha z + \beta(1-z)\right]\right\}. \tag{5.68}$$

Il en résulte l'expression suivante de $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{s} - \frac{2}{3\varepsilon_0^2}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}})\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}. \tag{5.69}$$

Par conséquent, la condition $\dot{\mathcal{F}}_{\text{ori}} = 0$ s'écrit

$$Y\dot{z} + \left(\frac{1}{\varepsilon_0^2}\boldsymbol{s}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} + 3\mu_{\text{eq}}z\right)\eta = \frac{3}{2}\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}. \tag{5.70}$$

Les lois d'évolution sont solutions du système des équations (5.65) et (5.70).

Le changement de phase inverse de la martensite en austénite se produit au cours d'une décharge. L'évolution de la fraction volumique z vérifie la condition de consistance $\dot{\mathcal{F}}_z^2 = 0$ qui s'écrit

$$\begin{aligned}
&\left[(G-b) + a + \frac{2}{3}(\alpha-\beta)\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} + 2\frac{\mu_{\text{eq}}^2}{\mu_{\text{A}}}(El_{\text{MA}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}):\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right]\dot{z} \\
&-\left[\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}} - 2\left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}} - 3\mu_{\text{eq}}z(El_{\text{MA}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}):\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}\right]\eta \\
&= (El_{\text{MA}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}):\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}} + \left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}} + P_{\text{MA}}\right)\text{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\ \text{tr}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{el}}.
\end{aligned} \tag{5.71}$$

La détermination de $\dot{z}$ et de η dans (5.71) nécessite la donnée d'une équation supplémentaire :

– si $\mathcal{F}_{\text{ori}} < 0$ ou si $\mathcal{F}_{\text{ori}} = 0$ et $\dot{\mathcal{F}}_{\text{ori}} < 0$,

$$\eta = 0\,; \tag{5.72}$$

– si $\mathcal{F}_{\text{ori}} = 0$ et $\dot{\mathcal{F}}_{\text{ori}} = 0$ et si la déformation équivalente $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}$ reste inférieure à ε_0, l'évolution de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ vérifie (5.66) ;

– si $\mathcal{F}_{\text{ori}} = 0$ et $\dot{\mathcal{F}}_{\text{ori}} = 0$ et si $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}$ tend à dépasser ε_0, l'équation supplémentaire est donnée par (5.70).

Lorsque la fraction z devient de nouveau nulle et que l'on continue à décharger, la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$, associée à une phase qui n'existe plus au sein du matériau, perd son sens physique. Ceci signifie que le matériau « oublie » toute l'histoire de chargement dès qu'il est ramené à l'état austénitique où il redevient purement élastique.

5.3.2 Autoaccommodation de la martensite

En l'absence de contrainte au sein du MMF, la déformation inélastique $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ n'évolue pas et la déformation macroscopique $z\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ reste nulle si le matériau est initialement austénitique. Cependant, le changement de phase de l'austénite en martensite est possible. La loi d'évolution de la fraction volumique z se déduit de la condition $\dot{\mathcal{F}}_z^1 = 0$:

$$\dot{z} = -\frac{\dot{C}(T)}{G + b - a}. \tag{5.73}$$

À la fin de la transformation martensitique directe, l'austénite se transforme entièrement en martensite caractérisée par $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} = \mathbf{0}$ et donc autoaccommodante.

Le changement de phase inverse est associé à la fonction critère $\mathcal{F}_z^2$. La loi d'évolution de z quand la température croît vérifie $\dot{\mathcal{F}}_z^2 = 0$.

$$\dot{z} = -\frac{\dot{C}(T)}{G - b + a}. \tag{5.74}$$

Il est facile de démontrer que les dénominateurs dans (5.73) et (5.74) sont positifs. En effet, compte tenu des expressions de a, b et G données par les équations (5.56), (5.57) et (5.58),

$$G + b - a = \left(\frac{1}{E_{\text{M}}} - \frac{1}{E_{\text{A}}}\right)\frac{\sigma_{\text{mf}}^2 - \sigma_{\text{ms}}^2}{2} + (\sigma_{\text{mf}} - \sigma_{\text{ms}})\varepsilon_0 + \sigma_{\text{rs}}\varepsilon_0, \tag{5.75}$$

$$G - b + a = \left(\frac{1}{E_{\text{M}}} - \frac{1}{E_{\text{A}}}\right)\frac{\sigma_{\text{as}}^2 - \sigma_{\text{af}}^2}{2} + (\sigma_{\text{as}} - \sigma_{\text{af}})\varepsilon_0 + \sigma_{\text{rs}}\varepsilon_0. \tag{5.76}$$

Or, $\sigma_{\text{mf}} \geqslant \sigma_{\text{ms}}$, $\sigma_{\text{as}} \geqslant \sigma_{\text{af}}$, $\sigma_{\text{rs}} > 0$, $E_{\text{A}} \geqslant E_{\text{M}}$ et $\varepsilon_0 > 0$; d'où la positivité de $G+b-a$ et de $G-b+a$. L'évolution de la fraction z est donc logique d'un point de vue qualitatif : z croît quand le MMF est refroidi et décroît quand il est chauffé.

Il est intéressant de regarder le rôle du paramètre G dans le changement de phase à contrainte et à déformation de transformation nulles. Dans ce cas :

– le critère de changement de phase direct, $\mathcal{F}_z^1 = 0$, s'écrit

$$-C(T) - Gz \leqslant bz + a(1 - z)\,; \tag{5.77}$$

– le critère de changement de phase inverse, $\mathcal{F}_z^2 = 0$, s'écrit

$$C(T) + Gz \leqslant bz + a(1 - z). \tag{5.78}$$

Les relations (5.77) et (5.78) sont équivalentes à

$$|-C(T) - Gz| \leqslant bz + a(1 - z). \tag{5.79}$$

(5.79) montre que G fait déplacer le centre du domaine de température, de largeur $2\,[bz + a(1 - z)]$, où aucun changement de phase ne se produit au sein du MMF. Il joue le même rôle qu'un coefficient d'écrouissage cinématique linéaire d'un matériau élastoplastique usuel, pour lequel la contrainte s'identifie à $-C(T)$ et la déformation plastique à z.

5.3.3 Orientation de la martensite autoaccommodante

La martensite autoaccommodante est caractérisée par une déformation inélastique locale $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ nulle. L'application d'un chargement mécanique permet de faire évoluer $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ et de décrire ainsi l'orientation de la martensite, associée à une valeur nulle de la fonction critère $\mathcal{F}_{\text{ori}}$ et à une valeur constante de la fraction volumique z égale à l'unité. Par conséquent,

$$\left\| \boldsymbol{\sigma} - \frac{2}{3}\alpha\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - \frac{2\mu}{3}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}} \right\|_{\text{VM}} - Y = 0. \tag{5.80}$$

Tant que $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}$ n'a pas atteint sa limite maximale ε_0, le multiplicateur μ est nul. La relation (5.80) permet de constater, dans ce cas, un comportement similaire à l'élastoplasticité classique avec écrouissage cinématique linéaire.

$$\left\| \boldsymbol{\sigma} - \frac{2}{3}\alpha\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} \right\|_{\text{VM}} - Y = 0. \tag{5.81}$$

La loi d'évolution de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ associée est telle que

$$\eta = \frac{3}{2\alpha}\dot{\boldsymbol{s}} : \frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}, \tag{5.82}$$

où

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{s} - \frac{2}{3}\alpha\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} \tag{5.83}$$

et

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{tr}} = \frac{3}{2}\eta\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}. \tag{5.84}$$

Cependant, quand $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}$ atteint ε_0 et que l'on continue à charger, le multiplicateur μ cesse d'être nul. L'expression de $\boldsymbol{X}$ devient

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{s} - \frac{2}{3\varepsilon_0^2}(\boldsymbol{s} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}})\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}. \tag{5.85}$$

Il en résulte

$$\eta = \frac{3\varepsilon_0^2}{2\boldsymbol{s} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}\dot{\boldsymbol{s}} : \frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}. \tag{5.86}$$

Ceci permet de modéliser la réorientation de la martensite. En effet, l'orientation des plaquettes martensitiques au sein du matériau à mémoire de forme peut être modifiée même après une orientation complète de la martensite. Par exemple, si l'orientation complète de la martensite est provoquée par une traction et que l'on continue à augmenter le chargement mécanique en induisant en même temps un cisaillement au sein du MMF, les plaquettes martensitiques vont logiquement se réorienter de manière compatible avec le nouveau chargement.

La décharge s'effectue de manière élastique. En effet, lors de la décharge, la fonction critère $\mathcal{F}_{\text{ori}}$ associée à l'orientation de la martensite redevient négative et la déformation inélastique $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ persiste après décharge complète (figure 5.1).

5.3.4 Effet mémoire simple sens

La modélisation de l'autoaccommodation de la martensite et de l'orientation de la martensite autoaccommodante est abordée aux paragraphes 5.3.2 et 5.3.3. Il suffit donc, pour une modélisation complète de l'effet mémoire simple sens, de prendre en compte la transformation inverse de la martensite orientée en austénite par chauffage sous contrainte nulle.

La fonction critère $\mathcal{F}_z^2$ reste nulle au cours de la transformation de la martensite en austénite. Il en résulte, à contrainte nulle,

$$C(T) = -(G-b)z + a(1-z) - \left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\varepsilon_{\text{tr}}^{(0)}\right)^2, \tag{5.87}$$

où $\varepsilon_{\text{tr}}^{(0)}$ est la valeur, constante dans ce cas, de $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}$ due à l'orientation de la martensite. L'évolution de la fraction volumique z vérifie la condition de consistance $\dot{\mathcal{F}}_{\text{ori}} = 0$.

$$\dot{z} = -\frac{\dot{C}(T)}{G - b + a + (\alpha-\beta)\left(\varepsilon_{\text{tr}}^{(0)}\right)^2}. \tag{5.88}$$

Compte tenu des expressions de G, a, b, α et β,

$$\begin{aligned} G - b + a + (\alpha-\beta)\left(\varepsilon_{\text{tr}}^{(0)}\right)^2 \\ = \left(\frac{1}{E_{\text{M}}} - \frac{1}{E_{\text{A}}}\right)\frac{\sigma_{\text{as}}^2 - \sigma_{\text{af}}^2}{2} + (\sigma_{\text{as}} - \sigma_{\text{af}})\varepsilon_0 + \frac{\sigma_{\text{rs}}}{\varepsilon_0}\left(\varepsilon_{\text{tr}}^{(0)}\right)^2. \end{aligned} \tag{5.89}$$

Le dénominateur dans (5.88) est donc positif. Par conséquent, z diminue quand la température augmente au-delà d'une certaine valeur–seuil jusqu'à transformation complète de la martensite en austénite. La déformation inélastique macroscopique $z\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ à la fin de la transformation martensitique inverse est nulle, le matériau retrouve donc sa forme austénitique non déformée.

5.3.5 Effet superthermique

La modélisation de l'effet superthermique est nettement améliorée par rapport au modèle proposé aux chapitres 3 et 4. En effet, le présent modèle permet de mieux tenir compte de l'effet du chargement mécanique sur le niveau d'orientation de la martensite obtenue par refroidissement de l'austénite.

Lors du changement de phase direct, la fonction critère $\mathcal{F}_z^1$ s'annule. Sous contrainte constante $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$; la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ n'évolue pas, compte tenu de l'expression de $\mathcal{F}_{\text{ori}}$. On obtient

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{1}{3}El_{\text{MA}}\left(\sigma_{\text{VM}}^{(0)}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}} + P_{\text{MA}}\right)\left(\text{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(0)}\right)^2 - C(T)\right\} \\ &\quad + \boldsymbol{\sigma}^{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}^{(0)} - (G+b)z - a(1-z) - \left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}^{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}^{(0)}\right) = 0 \end{aligned} \tag{5.90}$$

Au début de la transformation, quand z est infiniment proche de zéro par valeurs positives, le critère d'orientation de la martensite, $X_{\text{VM}} - zY \leqslant 0$, s'écrit

$$X_{\text{VM}} \leqslant 0. \tag{5.91}$$

On en déduit :

$$X_{\mathrm{VM}} = 0, \tag{5.92}$$

car le module X_{VM} est nécessairement positif. D'où :

– si le niveau de contrainte n'est pas suffisant pour orienter complètement la martensite qui se forme à partir de l'austénite,

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{s}}{\beta}\,; \tag{5.93}$$

– si le niveau de contrainte est suffisant pour une orientation complète,

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{s} = \frac{2}{3}\beta\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} + \frac{2\mu}{3}\left(\frac{1}{0^+}\right)\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_0}. \tag{5.94}$$

Puisque les paramètres β et μ sont positifs, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$ présente la même orientation que le tenseur déviateur de contrainte $\boldsymbol{s}$ et $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}} = \varepsilon_0$, d'où

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} = \frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}}{\sigma_{\mathrm{VM}}}. \tag{5.95}$$

En particulier, quand le chargement mécanique est constant,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}^{(0)} = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\dfrac{\boldsymbol{s}^{(0)}}{\beta} & \text{si } \sigma_{\mathrm{VM}}^{(0)} \leqslant \sigma_{\mathrm{rf}}, \\ \dfrac{3}{2}\varepsilon_0\dfrac{\boldsymbol{s}^{(0)}}{\sigma_{\mathrm{VM}}^{(0)}} & \text{si } \sigma_{\mathrm{VM}}^{(0)} \geqslant \sigma_{\mathrm{rf}}. \end{cases} \tag{5.96}$$

Il est facile de démontrer que $\sigma_{\mathrm{VM}} = \sigma_{\mathrm{rf}}$ est le seuil en contrainte au-delà duquel la martensite formée à partir de l'austénite est complètement orientée. En effet, quand ce seuil est atteint par valeurs inférieures de la contrainte de Mises, on a à la fois

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{F}_{\mathrm{ori}} = 0 \\ z = 0^+ \\ \mu = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{s} = \frac{2}{3}\beta\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}}. \tag{5.97}$$

Or, le paramètre β est égal à $\dfrac{\sigma_{\mathrm{rf}}}{\varepsilon_0}$ d'après (5.51). D'où, $\sigma_{\mathrm{VM}} = \sigma_{\mathrm{rf}}$ est le seuil en contrainte au-delà duquel la martensite formée à partir de l'austénite est complètement orientée, c'est-à-dire que cette martensite est caractérisée par une déformation inélastique locale $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$ telle que $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}} = \varepsilon_0$.

L'évolution de la fraction volumique z vérifie $\dot{\mathcal{F}}_z^1 = 0$. Il en résulte

$$\dot{z} = -\frac{\dot{C}(T)}{G + b - a + (\alpha - \beta)\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}^{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}^{(0)}\right)}, \tag{5.98}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}^{(0)}$ est donnée par (5.96). Le dénominateur $G + b - a + (\alpha - \beta)\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}^{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}^{(0)}\right)$ est positif, la fraction volumique de la martensite croît donc quand la température décroît. Le niveau d'orientation de la martensite à la fin de la transformation directe est

représenté par $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}^{(0)}$ qui croît de zéro sous contrainte nulle et à une valeur limite pour $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}^{(0)}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}^{(0)}} = \varepsilon_0$.

La transformation inverse s'effectue de manière que $\mathcal{F}_z^2$ reste nulle.

$$\left\{-\frac{1}{3}El_{\mathrm{MA}}\left(\sigma_{\mathrm{VM}}^{(0)}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}El_{\mathrm{MA}} + P_{\mathrm{MA}}\right)\left(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}^{(0)}\right)^2 - C(T)\right\} \tag{5.99}$$
$$-\boldsymbol{\sigma}^{(0)}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}^{(0)} + (G-b)z - a(1-z) + \left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}^{(0)}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}^{(0)}\right) = 0$$

L'évolution de la fraction z satisfait la condition de consistance $\dot{\mathcal{F}}_z^2 = 0$. On en déduit

$$\dot{z} = -\frac{\dot{C}(T)}{G - b + a + (\alpha-\beta)\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}^{(0)}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}^{(0)}\right)}. \tag{5.100}$$

$\dot{z}$ est de signe opposé par rapport à $\dot{T}$. La fraction volumique de la martensite décroît donc quand la température augmente au-delà d'une certaine limite jusqu'à atteindre une valeur nulle correspondant à un matériau purement austénitique. Le matériau retrouve alors sa forme non-déformée, parce que la déformation inélastique macroscopique $z\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$ s'annule.

5.3.6 Réponse à un chargement thermomécanique quelconque

Dans ce paragraphe, on propose de montrer la capacité du modèle unifié à simuler la réponse d'un MMF à un chargement thermomécanique caractérisé par une évolution simultanée de la température et de la contrainte. Un exemple d'un tel chargement est représenté par la figure 5.3.

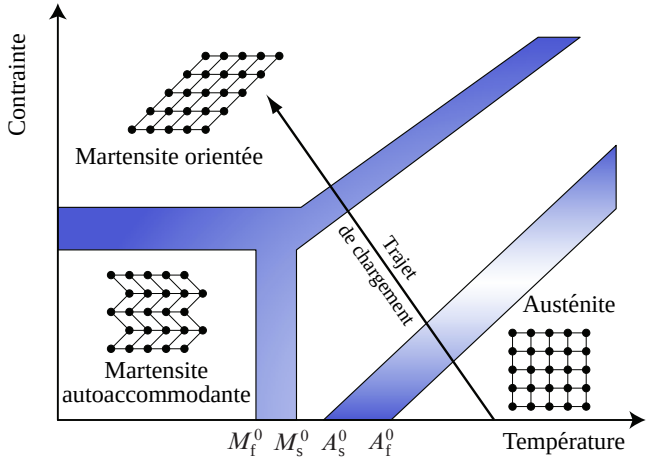


FIG. 5.3 – Exemple d'un trajet de chargement où la température et la contrainte varient en même temps.

Transformation martensitique directe

Le matériau à mémoire de forme, initialement à l'état austénitique, est refroidi tout en appliquant un chargement mécanique.

Le changement de phase direct est caractérisé par une valeur nulle de la fonction critère $\mathcal{F}_z^1$. L'orientation accompagnant le changement de phase est telle que $\mathcal{F}_{\text{ori}} = 0$. Il en résulte

$$\left\{\frac{1}{3}El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}} + P_{\text{MA}}\right)(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 - C(T)\right\} + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} \tag{5.101}$$
$$= (G+b)z - a(1-z)\left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right),$$

$$\left\|\boldsymbol{\sigma} - \frac{2}{3}\left[\alpha z + \beta(1-z)\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - \frac{2\mu}{3z}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}}\right\|_{\text{VM}} = zY. \tag{5.102}$$

Quand un changement de phase direct accompagné de formation de martensite orientée est en cours, les lois d'évolution de la fraction de martensite z et de la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ caractérisant l'orientation de la martensite sont obtenues en écrivant les conditions de consistance $\dot{\mathcal{F}}_z^1 = 0$ et $\dot{\mathcal{F}}_{\text{ori}} = 0$. Si la déformation équivalente $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}$ est inférieure à sa valeur limite ε_0, le multiplicateur μ dans (5.102) est nul. Les lois d'évolution de z et de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ sont telles que

$$\left[(G+b) - a + \frac{2}{3}(\alpha-\beta)\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} + 2\frac{\mu_{\text{eq}}^2}{\mu_{\text{A}}}(El_{\text{MA}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}):\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right]\dot{z} \tag{5.103}$$
$$-\left\{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}} - 2\left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}} - 3\mu_{\text{eq}}z(El_{\text{MA}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}):\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}\right\}\eta$$
$$= (El_{\text{MA}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}):\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}} + \left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}} + P_{\text{MA}}\right)\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\,\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{el}} - \dot{C}(T)$$

et

$$\left[Y + \left(3\frac{\mu_{\text{eq}}^2}{\mu_{\text{A}}} + \alpha - \beta\right)\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}\right]\dot{z} \tag{5.104}$$
$$+\left[\alpha z + \beta(1-z) + 3\mu_{\text{eq}}z\right]\eta = \frac{3}{2}\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}.$$

Cependant, le multiplicateur μ n'est pas nul quand $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}$ tend à dépasser sa valeur maximale ε_0. En effet, μ est donné dans ce cas par (5.68). Par conséquent, la condition $\dot{\mathcal{F}}_{\text{ori}} = 0$ s'écrit

$$Y\dot{z} + \left(\frac{1}{\varepsilon_0^2}\boldsymbol{s}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} + 3\mu_{\text{eq}}z\right)\eta = \frac{3}{2}\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}. \tag{5.105}$$

$\dot{z}$ et η sont alors solutions de l'équation précédente et de (5.103).

Transformation martensitique inverse

La transformation inverse de la martensite en austénite peut être engendrée par un chauffage accompagné d'une réduction du niveau de contrainte au sein du MMF.

L'évolution de la fraction volumique z est régie dans ce cas par la fonction critère $\mathcal{F}_z^2$. Lors du changement de phase, $\dot{\mathcal{F}}_z^2 = 0$ nécessairement. Il en résulte

$$\begin{aligned}&\left[(G-b)+a+\frac{2}{3}(\alpha-\beta)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}+2\frac{\mu_{\mathrm{eq}}^2}{\mu_{\mathrm{A}}}(El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}):\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right]\dot{z}\\&-\left[\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\mathrm{VM}}}-2\left[(\alpha-\beta)z+\frac{\beta}{2}\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\mathrm{VM}}}-3\mu_{\mathrm{eq}}z(El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}):\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\mathrm{VM}}}\right]\eta\\&=(El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}):\dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}}+\left(\frac{1}{3}El_{\mathrm{MA}}+P_{\mathrm{MA}}\right)\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{el}}-\dot{C}(T).\end{aligned}\tag{5.106}$$

Quand l'évolution de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$ est effective, elle vérifie la condition de consistance $\dot{\mathcal{F}}_{\mathrm{ori}} = 0$ qui correspond à (5.104) si $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}} < \varepsilon_0$ et à (5.105) si $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}$ tend à dépasser ε_0.

5.4 Simulation numérique et validation du modèle

Le modèle est programmé en 1D en utilisant Matlab®, selon l'algorithme 5.1. L'exposant $^{\mathrm{test}}$ désigne une valeur calculée à l'itération $i+1$ en utilisant les valeurs de z et de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$ à l'itération i.

5.4.1 Identification des paramètres du modèle

Le tableau 5.2 regroupe l'ensemble des valeurs des paramètres du modèle identifiés à partir des essais de Shaw et Kyriakides (1995).

Les paramètres du modèle			
E_{A}	61 500 MPa	a	6,892 MPa
E_{M}	24 000 MPa	b	6,909 MPa
ν	–	ε_0	4 %
Y	110 MPa	G	4,655 MPa
α	2 750 MPa	β	5 500 MPa
ξ	0,438 MPa/ °C	κ	2,492 MPa
A_{f}^0	40 °C		

TAB. 5.2 – Paramètres déterminés à partir des essais de Shaw et Kyriakides (1995).

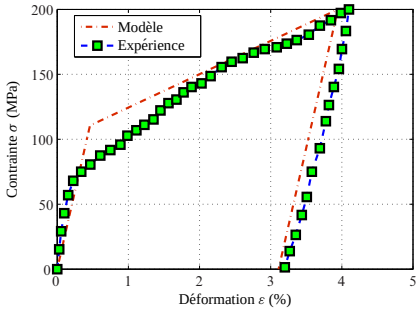
Entrées : paramètres du modèle, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{T}$, $z^{(0)}$, $\varepsilon_{\text{tr}}^{(0)}$.
Sorties : $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$.
début
- discrétiser le trajet de chargement en n intervalles ;
- initialiser un compteur : $i \leftarrow 0$.
- **tant que** $i < n$ **faire**
  - $\Delta\sigma^{(i)} \leftarrow \sigma^{(i+1)} - \sigma^{(i)}$;
  - $\Delta T^{(i)} \leftarrow T^{(i+1)} - T^{(i)}$;
  - calculer $\mathcal{F}_z^{1,(i)}$, $\mathcal{F}_z^{1,\,(i+1),\,\text{test}}$, $\mathcal{F}_z^{2,(i)}$, $\mathcal{F}_z^{2,\,(i+1),\,\text{test}}$, $\mathcal{F}_{\text{ori}}^{(i)}$, $\mathcal{F}_{\text{ori}}^{(i+1),\,\text{test}}$.
  - **si** $\mathcal{F}_z^{1,\,(i)} > 0$ **et** $\mathcal{F}_z^{1,\,(i+1),\,\text{test}} > \mathcal{F}_z^{1,\,(i)}$ **et** $1 - z > 0$ **alors**
    - changement de phase direct.
  - **si** $\mathcal{F}_z^{2,\,(i)} > 0$ **et** $\mathcal{F}_z^{2,\,(i+1),\,\text{test}} > \mathcal{F}_z^{2,\,(i)}$ **et** $z > 0$ **alors**
    - changement de phase inverse.
  - **si** $\mathcal{F}_{\text{ori}}^{(i)} > 0$ **et** $\mathcal{F}_{\text{ori}}^{(i+1),\,\text{test}} > \mathcal{F}_{\text{ori}}^{(i)}$ **et** $\varepsilon_0 - |\varepsilon_{\text{tr}}| > 0$ **alors**
    - orientation.
  - **suivant** transformations actives **faire**
    - **cas où** changement de phase direct seulement
      - $\dot{\mathcal{F}}_z^1 = 0$ donne $\Delta z^{(i)}$;
      - $\Delta\varepsilon_{\text{tr}}^{(i)} = 0$.
    - **cas où** changement de phase inverse seulement
      - $\dot{\mathcal{F}}_z^2 = 0$ donne $\Delta z^{(i)}$;
      - $\Delta\varepsilon_{\text{tr}}^{(i)} = 0$.
    - **cas où** orientation seulement
      - $\Delta z^{(i)} = 0$;
      - $\dot{\mathcal{F}}_{\text{ori}} = 0$ donne $\Delta\varepsilon_{\text{tr}}^{(i)}$.
    - **cas où** changement de phase direct et orientation
      - $\left\{\dot{\mathcal{F}}_z^1 = 0 \text{ et } \dot{\mathcal{F}}_{\text{ori}} = 0\right\}$ donnent $\Delta z^{(i)}$ et $\Delta\varepsilon_{\text{tr}}^{(i)}$.
    - **cas où** changement de phase inverse et orientation
      - $\left\{\dot{\mathcal{F}}_z^2 = 0 \text{ et } \dot{\mathcal{F}}_{\text{ori}} = 0\right\}$ donnent $\Delta z^{(i)}$ et $\Delta\varepsilon_{\text{tr}}^{(i)}$.
    - **cas où** aucune transformation active
      - $\Delta z^{(i)} = 0$ et $\Delta\varepsilon_{\text{tr}}^{(i)} = 0$.
    - **autres cas**
      - message d'avertissement : transformation inattendue ;
      - arrêt du calcul.
  - $z^{(i+1)} \leftarrow z^{(i)} + \Delta z^{(i)}$;
  - $\varepsilon_{\text{tr}}^{(i+1)} \leftarrow \varepsilon_{\text{tr}}^{(i)} + \Delta z^{(i)}$;
  - $i \leftarrow i + 1$.
- post-traitement.

fin

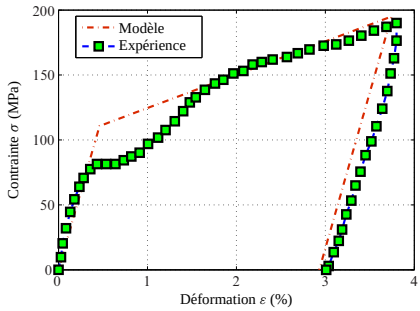
ALGORITHME 5.1 : Algorithme utilisé en 1D. Plusieurs phénomènes associés au comportement des MMF peuvent être pris en compte simultanément.

5.4.2 Validation expérimentale

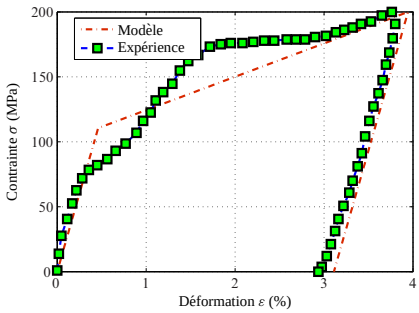
Pour l'ensemble des valeurs de température auxquelles les essais de Shaw et Kyriakides ont été réalisés, la comparaison des résultats numériques aux résultats expérimentaux est donnée par les figures 5.4.



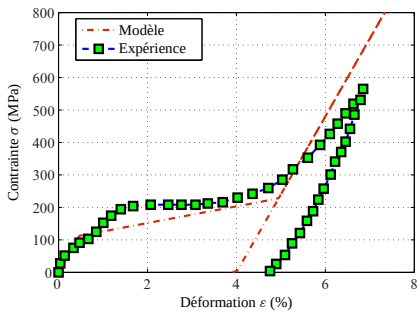
5.4.a – Température $T = -17{,}6$ °C.



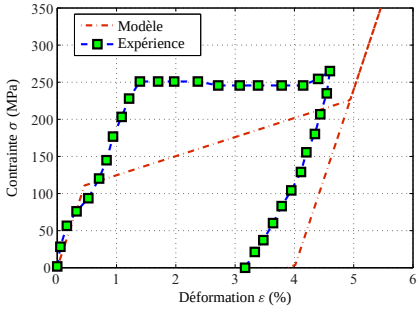
5.4.b – Température $T = -10$ °C.



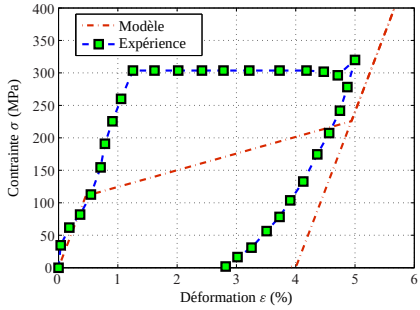
5.4.c – Température $T = 0$ °C.



5.4.d – Température $T = 10$ °C.

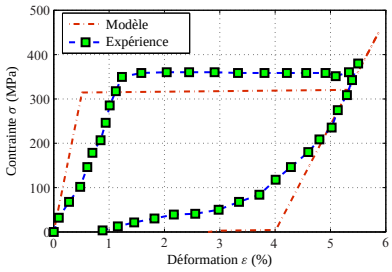


5.4.e – Température $T = 20$ °C.

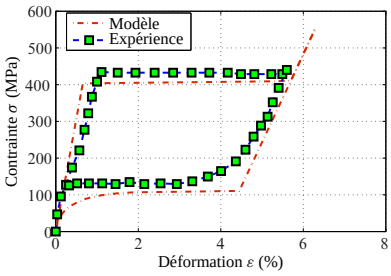


5.4.f – Température $T = 30$ °C.

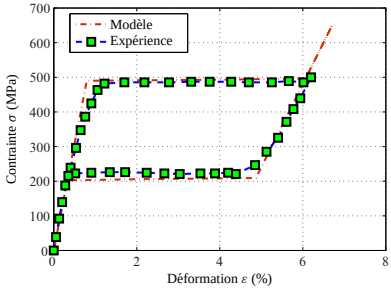
Les figures 5.4.a à 5.4.f correspondent à l'orientation de la martensite tandis que les figures 5.4.g à 5.4.m correspondent à l'effet pseudoélastique. Les essais réalisés à -10 °C et à 70 °C ont servi à l'identification des paramètres contenus dans le tableau 5.2. La validation expérimentale est satisfaisante, sauf pour les températures entre 10 °C et 30 °C, où un décalage est constaté. Ce décalage est dû à la formation de la phase R qui n'est pas prise en compte par le modèle.



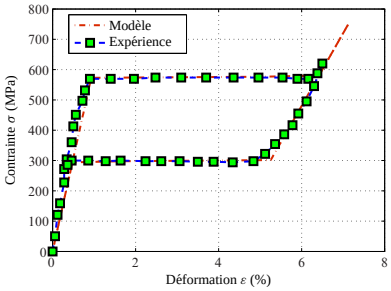
5.4.g – Température $T = 40$ °C.



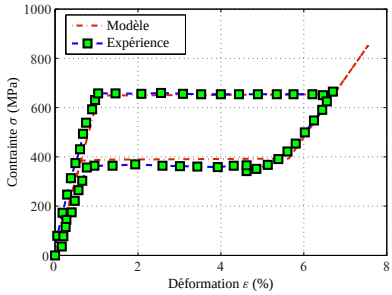
5.4.h – Température $T = 50$ °C.



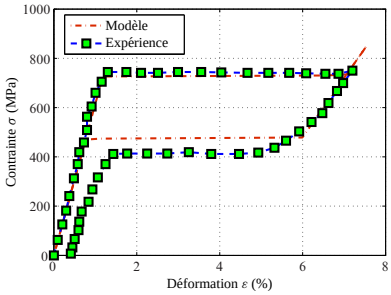
5.4.i – Température $T = 60$ °C.



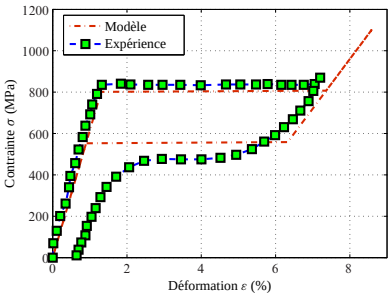
5.4.j – Température $T = 70$ °C.



5.4.k – Température $T = 80$ °C.



5.4.l – Température $T = 90$ °C.



5.4.m – Température $T = 100$ °C.

FIG. 5.4 – Comparaison des résultats expérimentaux et numériques. Essais de traction–décharge pour des températures allant de $-17{,}6$ °C à 100 °C.

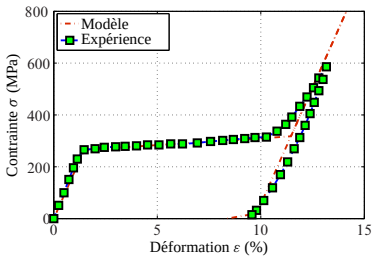
On a utilisé le même modèle pour reproduire des résultats d'essais de traction–décharge réalisés sur des fils en Nickel–Titane au sein du groupe Matériaux et Struc-

tures de l'Unité de Mécanique de l'ENSTA. Les fils ont un diamètre de 2 mm, ils ont été préalablement écrouis jusqu'à 20 % puis recuits à 400 °C pendant une heure avant d'être refroidis à l'air libre. Le tableau 5.3 contient les valeurs des paramètres du NiTi.

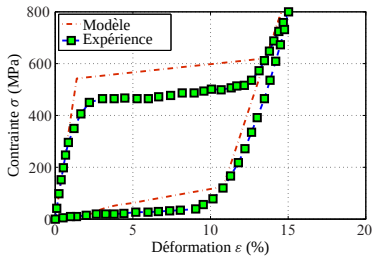
Les paramètres du modèle			
E_A	39 100 MPa	a	28,94 MPa
E_M	18 000 MPa	b	27,46 MPa
ν	–	ε_0	10,2 %
Y	265 MPa	G	37,3 MPa
α	539 MPa	β	3 137 MPa
ξ	0,477 MPa/ °C	κ	13,9 MPa
A_f^0	40 °C		

TAB. 5.3 – Paramètres du Nickel–Titane utilisé pour réaliser les essais de traction à l'ENSTA.

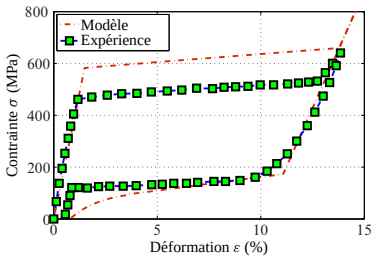
Les figures 5.5 montrent une comparaison des résultats numériques et expérimentaux. L'accord n'est pas aussi satisfaisant que dans le cas des essais de Shaw et Kyriakides (1995), ceci est dû au fait que le Nickel–Titane testé à l'ENSTA est caractérisé par des contraintes seuils de changement de phase qui n'évoluent pas linéairement avec la température (figure 5.6), une des hypothèses utilisées pour développer le modèle n'est donc pas vérifiée.



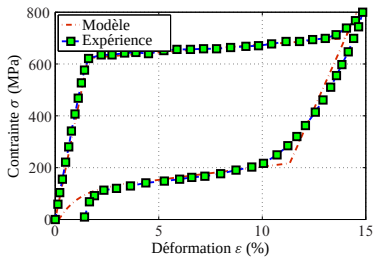
5.5.a – Température $T = 20$ °C.



5.5.b – Température $T = 40$ °C.



5.5.c – Température $T = 50$ °C.



5.5.d – Température $T = 60$ °C.

FIG. 5.5 – Comparaison des résultats expérimentaux et numériques. Essais de traction–décharge réalisés à l'ENSTA sur des fils en NiTi de diamètre 2 mm.

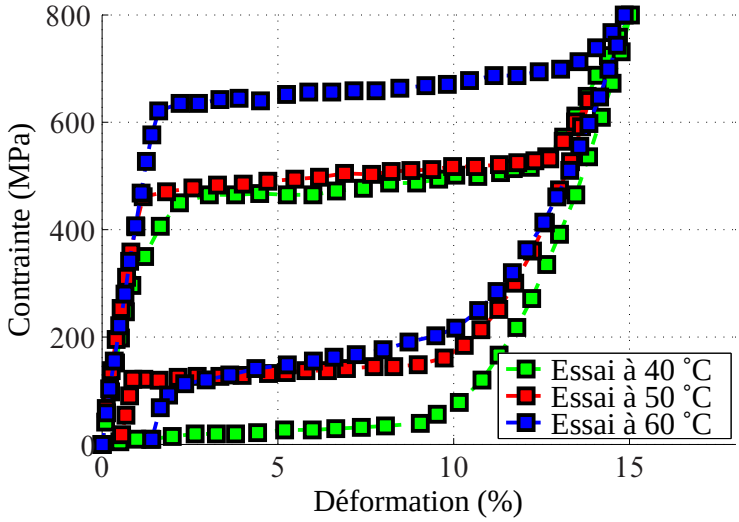
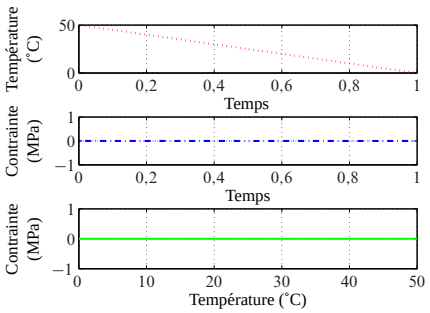


FIG. 5.6 – Réponse pseudoélastique des fils en Nickel–Titane testés à l'ENSTA. On remarque notamment l'évolution non linéaire de la contrainte seuil de changement de phase direct avec la température.

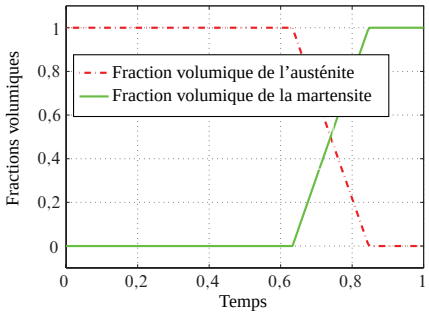
5.4.3 Simulation de l'autoaccommodation

Le MMF est initialement austénitique, ce qui correspond à une valeur nulle de la fraction volumique z.

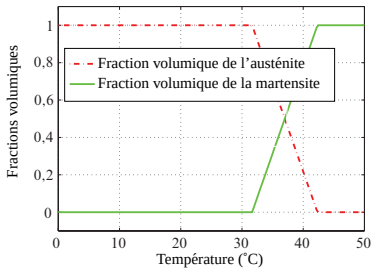
Les figures 5.7.b et 5.7.d représentent la réponse du matériau à un refroidissement de 50 °C, une température supérieure à A_f^0, à 0 °C. L'essai est réalisé sans contrainte externe (figure 5.7.a). La transformation de l'austénite en martensite autoaccommodante n'entraîne aucune déformation inélastique du matériau.



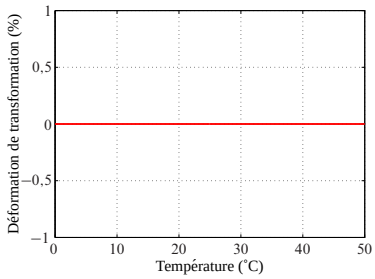
5.7.a – Chargement thermomécanique. Le NiTi est refroidi sous contrainte nulle.



5.7.b – Évolution temporelle des fractions volumiques. L'austénite se transforme complètement en martensite.



5.7.c – Évolution des fractions volumiques avec la température du NiTi. À basse température, le matériau devient complètement martensitique.



5.7.d – Évolution de la déformation inélastique $z\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$ avec la température. L'autoaccommodation de la martensite entraîne une déformation inélastique macroscopique nulle.

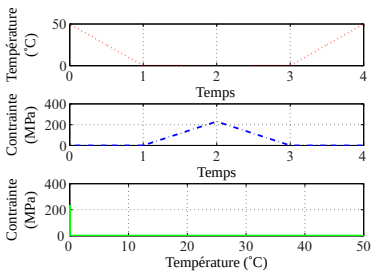
FIG. 5.7 – Modélisation de l'autoaccommodation. Le refroidissement du matériau à mémoire de forme à partir de l'état austénitique conduit à la transformation de l'austénite en martensite autoaccommodante.

5.4.4 Simulation de l'effet mémoire simple sens

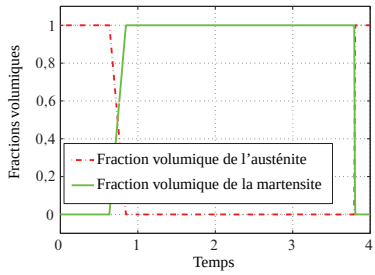
Le MMF est initialement à l'état austénitique caractérisé par une valeur nulle de la fraction volumique z. La température du matériau est de 50 °C.

Le matériau est soumis au trajet de chargement représenté par la figure 5.8.a :

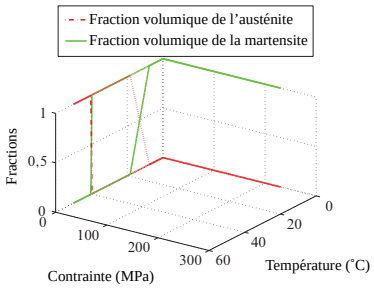
- de l'instant $t = 0$ à l'instant $t = 1$, on refroidit le matériau sous contrainte nulle. La martensite autoaccommodante est obtenue suite à cette opération ;
- entre $t = 1$ et $t = 2$, le matériau subit une traction isotherme qui oriente la martensite. La déformation inélastique locale de la martensite, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$, évolue dans ce cas sous l'effet de la contrainte qui augmente de zéro à 230 MPa ;
- de $t = 2$ jusqu'à $t = 3$, on effectue une décharge qui ramène la contrainte à zéro. Cette décharge ne permet pas de recouvrer $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$;
- enfin, le matériau est réchauffé entre $t = 3$ et $t = 4$ pour induire un changement de phase inverse lui permettant de retrouver sa forme initiale non déformée.



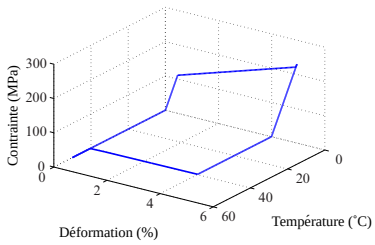
5.8.a – Chargement thermomécanique permettant d'obtenir l'effet mémoire simple sens.



5.8.b – Évolution temporelle des fractions volumiques. À la fin du trajet de chargement, le matériau retrouve son état austénitique initial.



5.8.c – Évolution des fractions volumiques avec la contrainte et la température. L'état initial correspond à une fraction volumique z nulle.



5.8.d – Courbe température–déformation–contrainte. Après avoir été déformé à basse température, le matériau retrouve sa forme non déformée par chauffage.

FIG. 5.8 – Modélisation de l'effet mémoire simple sens. Le matériau « se souvient » de sa forme non déformée à haute température.

5.4.5 Simulation de l'effet superthermique

La modélisation de l'effet superthermique est nettement améliorée par rapport au modèle précédent. En effet, le présent modèle prend en compte la dépendance de la déformation de transformation maximale obtenue au cours d'une transformation superthermique vis-à-vis du niveau de chargement mécanique auquel est soumis le matériau. Cette dépendance est bien mise en évidence expérimentalement (voir par exemple Lexcellent et coll. (2000)).

La figure 5.9 représente l'évolution de la déformation de transformation $z\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$ avec la température pour des niveaux de contrainte allant de zéro à 240 MPa par incréments de 30 MPa.

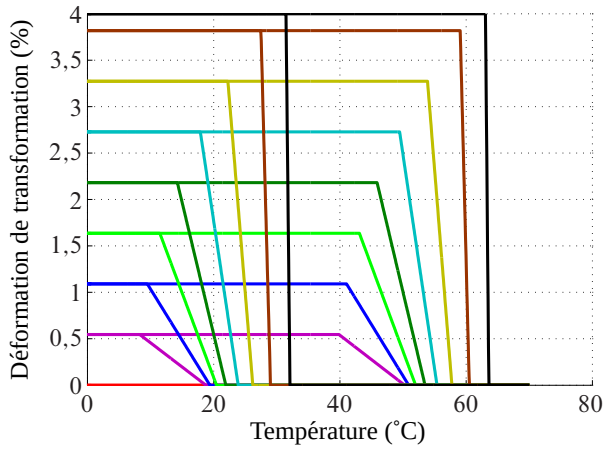


FIG. 5.9 – Effet du chargement mécanique sur la déformation de transformation au cours d'une transformation superthermique. La déformation augmente avec l'augmentation de la contrainte à cause d'une orientation plus importante des plaquettes martensitiques au sein du MMF.

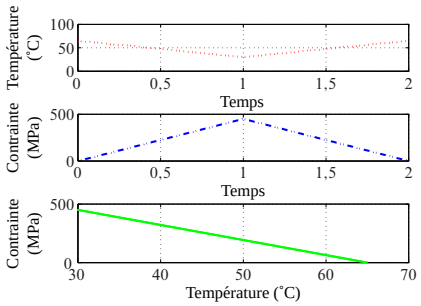
En l'absence d'un chargement mécanique, la déformation de transformation reste nulle au cours du cycle de chargement thermique (en rouge) ; ceci permet de décrire l'au-

toaccommodation de la martensite. La déformation de transformation augmente avec l'augmentation de la contrainte jusqu'à atteindre sa valeur maximale ε_0 si la contrainte appliquée est au moins égale au seuil de fin d'orientation de la martensite autoaccommodante, σ_{rf}. Sur la figure 5.9, la boucle en trait noir correspond à un essai superthermique à 240 MPa, la déformation de transformation maximale atteinte au cours du cycle est égale à la valeur limite ε_0 valant 4 %.

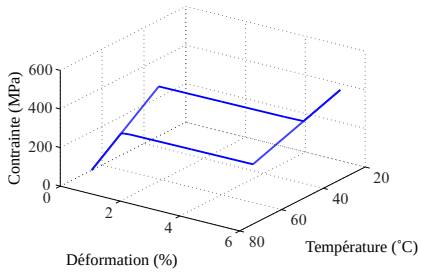
5.4.6 Simulation de la pseudoélasticité anisotherme

On considère le cas d'un MMF soumis à un essai de traction–décharge s'accompagnant d'une évolution de la température du matériau.

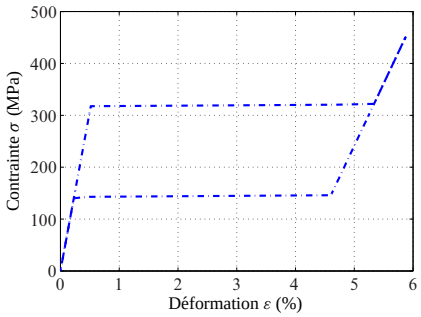
À l'instant initial, la température du matériau est de 65 °C et il n'est soumis à aucun chargement mécanique. Ce matériau est ensuite refroidi tout en augmentant la contrainte jusqu'à atteindre 30 °C et 450 MPa ; ceci entraîne un changement de phase direct accompagné d'une orientation de la martensite formée. Le changement de phase inverse est ensuite provoqué par une décharge accompagnée d'un chauffage du MMF ramenant la température à sa valeur initiale de 65 °C et la contrainte à zéro (figure 5.10.a).



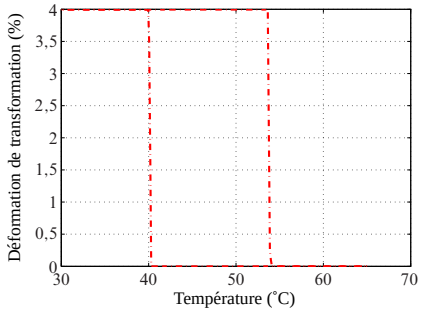
5.10.a – Chargement thermomécanique. Le NiTi est refroidi sous une contrainte croissante.



5.10.b – Courbe température–déformation–contrainte.



5.10.c – Courbe déformation–contrainte.



5.10.d – Courbe température–déformation de transformation.

FIG. 5.10 – Modélisation de la pseudoélasticité anisotherme. Le comportement du matériau est simultanément pseudoélastique et superthermique comme le montrent les figures 5.10.c et 5.10.d.

5.4.7 Comportement d'un stent pseudoélastique

Le modèle présente un couplage fort entre des phénomènes irréversibles dépendant à la fois du chargement mécanique et de la température. Ceci induit, sur le plan numérique, une forte non-linéarité qui complique la programmation.

L'implantation du modèle de comportement sous CASTEM étant un processus long à cause de la complexité des phénomènes à décrire, on utilise le logiciel Femlab™. Femlab™ offre la possibilité de programmer directement les équations du modèle qui peuvent ensuite être résolues en utilisant des solveurs génériques intégrés au logiciel.

En faisant l'hypothèse des petites perturbations, le problème aux limites s'écrit de la manière suivante :

– équations d'équilibre :

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \qquad \text{dans } \Omega, \tag{5.107}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{T} \qquad \text{sur } \partial_{\mathrm{f}}\Omega\,; \tag{5.108}$$

– conditions cinématiques :

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{u}^{\mathrm{d}} \qquad \text{sur } \partial_{\mathbf{u}}\Omega\,; \tag{5.109}$$

– équation de compatibilité :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\right) \qquad \text{dans } \Omega\,; \tag{5.110}$$

– lois complémentaires :
  – changement de phase pour $z = 0$ (paragraphe B.2 de l'annexe B) :
    • si $\mathcal{F}_z^1 = 0$ et $\dot{\mathcal{F}}_z^1 = 0$, $\dot{z}$ vérifie $\ddot{\mathcal{F}}_z^1 = 0$,
    • dans tous les autres cas, $\dot{z} = 0$;
  – changement de phase pour $0 < z < 1$:
    • si $\mathcal{F}_z^1 = 0$ et $\dot{\mathcal{F}}_z^1 = 0$, $\dot{z}$ vérifie $\ddot{\mathcal{F}}_z^1 = 0$,
    • si $\mathcal{F}_z^2 = 0$ et $\dot{\mathcal{F}}_z^2 = 0$, $\dot{z}$ vérifie $\ddot{\mathcal{F}}_z^2 = 0$,
    • dans tous les autres cas, $\dot{z} = 0$;
  – changement de phase pour $z = 1$ (paragraphe B.2 de l'annexe B) :
    • si $\mathcal{F}_z^2 = 0$ et $\dot{\mathcal{F}}_z^2 = 0$, $\dot{z}$ vérifie $\ddot{\mathcal{F}}_z^2 = 0$,
    • dans tous les autres cas, $\dot{z} = 0$;
  – orientation :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{tr}} = \eta\frac{\partial\mathcal{F}_{\mathrm{ori}}}{\partial\boldsymbol{X}}, \quad \mathcal{F}_{\mathrm{ori}} \leqslant 0, \quad \eta \geqslant 0, \quad \eta\mathcal{F}_{\mathrm{ori}} = 0 \tag{5.111}$$

et

$$\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}} \leqslant \varepsilon_0. \tag{5.112}$$

Ω désigne le stent, $\partial_{\mathrm{f}}\Omega$ est la frontière à laquelle une force $\mathbf{T}$ est imposée, $\mathbf{n}$ représente un vecteur unitaire sortant normal à $\partial_{\mathrm{f}}\Omega$, $\partial_{\mathbf{u}}\Omega$ est la frontière à laquelle un déplacement $\mathbf{u}^{\mathrm{d}}$ est imposé. La frontière $\partial\Omega$ du stent est l'union de $\partial_{\mathrm{f}}\Omega$ et de $\partial_{\mathbf{u}}\Omega$.

Les valeurs des différents paramètres utilisés pour effectuer le calcul sont indiquées dans le tableau 5.4.

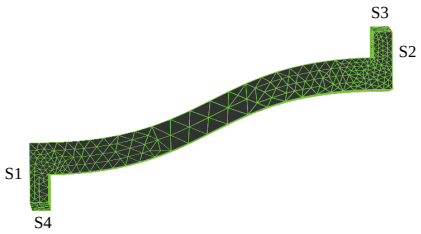
Les paramètres du modèle			
E_A	15 000 MPa	a	11,4 MPa
E_M	15 000 MPa	b	9,0 MPa
ν	0,3	ε_0	6 %
Y	90 MPa	G	13,2 MPa
α	666,67 MPa	β	2 166,67 MPa
ξ	0,18 MPa/ °C	κ	7,5 MPa
A_f^0	40 °C		

TAB. 5.4 – Valeurs des paramètres utilisées pour le calcul 3D.

La structure étudiée représente une partie d'un stent (figures 5.11.a et 5.11.b) soumise à une pression sur sa paroi interne qui croît de zéro à 6,5 MPa avant de revenir à zéro. Cette pression interne correspond, dans la réalité, à l'effet d'un ballon d'angioplastie utilisé pour déployer le stent au niveau d'une artère.



5.11.a – Stent entier.



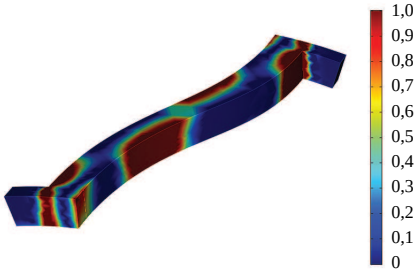
5.11.b – Partie du stent considérée pour la modélisation.

FIG. 5.11 – Modélisation d'un stent en MMF. Seule la partie représentée par la figure 5.11.b est considérée.

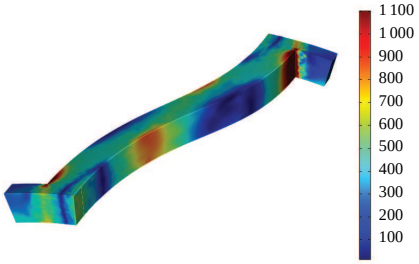
Les autres conditions aux limites sont les suivantes :
- sur les faces S1 et S2, les déplacements selon l'axe du stent sont empêchés ;
- sur les faces S3 et S4, le déplacement est empêché selon la normale à chacune de ses surfaces à cause de la symétrie radiale ;
- sur les autres faces, aucun chargement n'est appliqué. Les conditions aux limites sont du type Newton homogène.

La température de la structure est maintenue constante et égale à 60 °C. Cette température étant supérieure à A_f^0, le matériau présente un effet pseudoélastique à partir d'un certain niveau de chargement mécanique.

La figure 5.12.a représente la répartition de la fraction volumique de la martensite qui commence à se former au niveau des coins où la contrainte est maximale et se propage ensuite dans la structure. La distribution correspondante de la contrainte est illustrée par la figure 5.12.b.



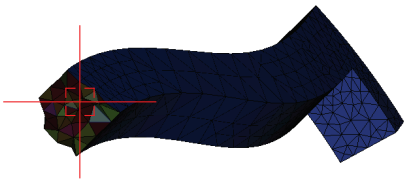
5.12.a – Fraction volumique de la martensite.



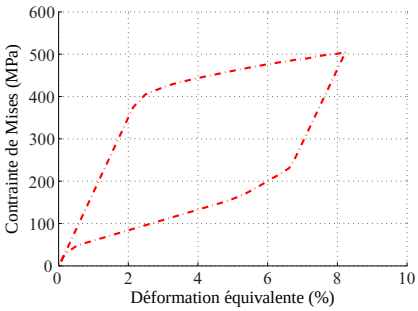
5.12.b – Contrainte équivalente de Mises, en MPa.

FIG. 5.12 – Distribution de la martensite au sein de l'élément de stent. La figure 5.12.b représente la distribution correspondante de la contrainte équivalente de Mises.

Pour mettre en évidence le comportement pseudoélastique du matériau, on trace la réponse en contrainte–déformation au point test indiqué sur la figure 5.13.a, la réponse correspondante est représentée par la figure 5.13.b. On remarque que la décharge commence en ce point avant que la déformation inélastique n'atteigne sa valeur maximale.



5.13.a – Point test.



5.13.b – Comportement local correspondant.

FIG. 5.13 – Comportement local en un point test de la structure. Le matériau présente un effet pseudoélastique.

5.5 Conclusion

Le modèle présenté au cours de ce chapitre constitue une description tridimensionnelle globale des principaux phénomènes associés aux matériaux à mémoire de forme. Cette description est rendue possible par l'introduction d'une variable déformation inélastique locale, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$, associée à l'orientation de la martensite. En effet, quoiqu'il soit théoriquement possible de prendre en compte l'effet individuel de chacune des variantes martensitiques sur le comportement macroscopique du MMF (Berveiller et Patoor, 1993 ; Gao et coll., 2000 ; Huang et coll., 2000, etc.), une telle démarche complique considérablement la description du comportement du matériau. L'introduction de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$ permet de considérer uniquement deux phases pour la modélisation : l'austénite élastique et la martensite considérée comme un milieu inélastique homogène.

Le présent modèle est complet, parce qu'il décrit tous les principaux phénomènes caractéristiques du comportement des MMF. Un même ensemble d'équations suffit pour cette description, d'où le caractère unifié de la modélisation. Les paramètres sont faciles à identifier et, à la différence du modèle précédent (chapitre 4), les chargements non-proportionnels sont pris en compte.

Le chapitre suivant sera consacré à l'extension du modèle afin de rendre possible la description du comportement des MMF soumis à un trajet de chargement cyclique. Le problème de la fatigue des MMF sera abordé au cours du même chapitre.

Bibliographie

F. AURICCHIO, « Three-dimensional modeling of shape-memory materials », *Journal de Physique IV*, vol. 11, p. 509–514, 2001.

F. AURICCHIO ET E. SACCO, « Thermo-mechanical modelling of a superelastic shape-memory wire under cyclic stretching–bending loadings », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, p. 6123–6145, 2001.

M. BERVEILLER ET E. PATOOR, Comportement thermomécanique des matériaux usuels et des alliages à mémoire de forme, dans *Technologie des Alliages à Mémoire de Forme*, chap. 2, p. 43–62, HERMES, 1993.

Z. BO ET D. LAGOUDAS, « Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, part III: evolution of plastic strains and two-way shape memory effect », *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, p. 1175–1203, 1999a.

Z. BO ET D. LAGOUDAS, « Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, part I: theoretical derivations », *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, p. 1089–1140, 1999b.

J. BOYD ET D. LAGOUDAS, « A thermodynamical constitutive model for shape memory materials. Part I. The monolithic shape memory alloy », *International Journal of Plasticity*, vol. 12, p. 805–842, 1996.

X. GAO ET L. BRINSON, « A simplified multivariant SMA model based on invariant plane nature of martensitic transformation », *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 13, p. 795–810, 2002.

X. GAO, M. HUANG ET L. BRINSON, « A multivariant micromechanical model for SMAs part 1. Crystallographic issues for single crystal model », *International Journal of Plasticity*, vol. 16, p. 1345–1369, 2000.

M. HUANG, X. GAO ET L. BRINSON, « A multivariant micromechanical model for SMAs part 2. Polycrystal model », *International Journal of Plasticity*, vol. 16, p. 1371–1390, 2000.

D. LAGOUDAS ET Z. BO, « Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, part IV: modeling of minor hysteresis loops », *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, p. 1205–1249, 1999a.

D. LAGOUDAS ET Z. BO, « Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, part II: material characterization and experimental results for a stable transformation cycle », *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, p. 1141–1173, 1999b.

D. LAGOUDAS ET P. ENTCHEV, « Modeling of transformation-induced plasticity and its effects on the behavior of porous shape memory alloys. Part I: constitutive model for fully dense SMAs », *Mechanics of materials*, vol. 36, p. 865–892, 2004.

D. LAGOUDAS, P. ENTCHEV, P. POPOV, E. PATOOR, L. BRINSON ET X. GAO, « Shape memory alloys, part II: modeling of polycrystals », *Mechanics of materials*, 2006, Article in Press.

S. LECLERQ ET C. LEXCELLENT, « A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 44, n° 6, p. 953–980, 1996.

C. LEXCELLENT ET G. BOURBON, « Thermodynamical model of cyclic behaviour of Ti–Ni and Cu–Zn–Al shape memory alloys under isothermal undulated tensile tests », *Mechanics of Materials*, vol. 24, p. 59–73, 1996.

C. LEXCELLENT, S. LECLERQ, B. GABRY ET G. BOURBON, « The two way shape memory effect of shape memory alloys: an experimental study and a phenomenological model », *International Journal of Plasticity*, vol. 16, p. 1155–1168, 2000.

Z. MOUMNI, *Sur la modélisation du changement de phase à l'état solide*, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Ponts et Chaussées, 1995.

Q. NGUYEN ET Z. MOUMNI, « Modélisation théorique et calcul numérique du changement de phase dans les solides », *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 7, n° 8, p. 47–68, 1998.

E. PATOOR ET M. BERVEILLER, Lois de comportement et calcul de structures en alliage à mémoire de forme, dans *Technologie des Alliages à Mémoire de Forme*, chap. 9, p. 195–224, HERMES, 1993.

B. RANIECKI ET C. LEXCELLENT, « Thermodynamics of isotropic pseudoelasticity in shape memory alloys », *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 17, p. 185–205, 1998.

B. RANIECKI, C. LEXCELLENT ET K. TANAKA, « Thermodynamic models of pseudoelastic behaviour of shape memory alloys », *Archives of Mechanics*, vol. 44, p. 261–284, 1992.

J. A. SHAW ET S. KYRIAKIDES, « Thermomechanical aspects of NiTi », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 43, n° 8, p. 1243–1281, 1995.

N. SIREDEY, E. PATOOR, M. BERVEILLER ET A. EBERHARDT, « Constitutive equations for polycrystalline thermoelastic shape memory alloys. Part I. intragranular interactions and behavior of the grain », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 36, p. 4289–4315, 1999.

K. TANAKA, D. OHNAMI, T. WATANABE ET J. KOSEGAWA, « Micromechanical simulations of thermomechanical behavior in shape memory alloys: transformation conditions and thermomechanical hysteresis », *Mechanics of Materials*, vol. 34, p. 279–298, 2002.

P. THAMBURAJA, « Constitutive equations for martensitic reorientation and detwinning in shape-memory alloys », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 53, p. 825–856, 2005.

CHAPITRE 6

Extension au comportement cyclique et à la fatigue

6.1 Introduction

Les matériaux à mémoire de forme sont utilisés dans la fabrication d'actionneurs, de stents et de « muscles artificiels » pour microrobots, dont le dimensionnement nécessite une prédiction fiable de la réponse du matériau constitutif aux chargements cyclique ainsi que de son comportement vis-à-vis de la fatigue.

La fatigue des MMF est un sujet de recherche fréquemment abordé (Melton et Mercier, 1979a,b,c ; Wagner et coll., 2004 ; Vaidynanathan et coll., 2000 ; Porter et coll., 2001) mais qui reste très ouvert (Eggeler et coll., 2004). Notamment, les mécanismes responsables de la fatigue à l'échelle microscopique font toujours l'objet d'investigations (Siredey et coll., 2005 ; Predki et coll., 2006).

Comme dans le cas des matériaux élastoplastiques classiques, tels que les aciers, le nombre de cycles à la fatigue d'un MMF varie notamment en fonction de la composition du matériau et de la nature du chargement imposé, ce nombre peut être de l'ordre de 10^4 pour une soupape thermique actionnée par effet mémoire simple sens (Eggeler et coll., 2004) mais doit dépasser 4×10^8 pour les stents (Morgan, 2004).

Dans la littérature, les modèles de prédiction de la durée de vie des MMF sont peu nombreux et font généralement usage de critères de type Manson–Coffin (Siredey et coll., 2005 ; Wagner et coll., 2004). En revanche, la modélisation de la réponse d'un MMF à des chargements cycliques, surtout dans le domaine pseudoélastique, fait l'objet de nombreux travaux (Liu et coll., 1999 ; Abeyaratne et Joo Kim, 1997 ; Lim et McDowell, 2002 ; Xie et coll., 1998 ; Tanaka et coll., 1995 ; Lexcellent et Bourbon, 1996 ; Bo et Lagoudas, 1999b, etc.).

Dans le cadre de ce chapitre, on s'intéresse à la modélisation du comportement des MMF soumis à des cycles de chargement thermomécanique quelconque en 3D et à la prise en compte, au sein du modèle, de l'effet mémoire double sens qui en résulte et qui sera expliqué au paragraphe suivant. On propose aussi un critère de durée de vie pouvant être utilisé pour le dimensionnement de structures en MMF quand le matériau présente un faible nombre de cycles à la fatigue (fatigue oligocyclique). Le chapitre est organisé de la manière suivante :

– le paragraphe 6.2 est consacré à la description de la réponse d'un matériau à mémoire de forme de type Nickel–Titane à un essai de traction répétée dans le

domaine pseudoélastique. La notion d'« effet mémoire double sens » est introduite à la fin de ce paragraphe ;
– ensuite, en s'appuyant sur les conclusions tirées des observations expérimentales, on propose un modèle de comportement du matériau soumis à un trajet de chargement cyclique. On montre la capacité du modèle à prendre en compte des chargements thermomécaniques variés ainsi que l'effet mémoire double sens ;
– puis, on décrit une démarche permettant d'identifier les paramètres du modèle à partir d'essais simples, avant d'effectuer des simulations numériques du comportement cyclique 1D d'un MMF en utilisant Matlab® ;
– enfin, en remarquant une analogie entre le comportement pseudoélastique cyclique des MMF et l'accommodation plastique des aciers, on propose un critère de durée de vie applicable pour le dimensionnement de structures en MMF. Le critère est validé dans le cas d'une éprouvette en Nickel–Titane soumise à une traction répétée.

6.2 Observations expérimentales

La figure 6.1 représente la réponse d'un fil en Nickel–Titane à un essai de traction répétée dans le domaine pseudoélastique. L'essai est réalisé à l'Unité de Mécanique de l'ENSTA.

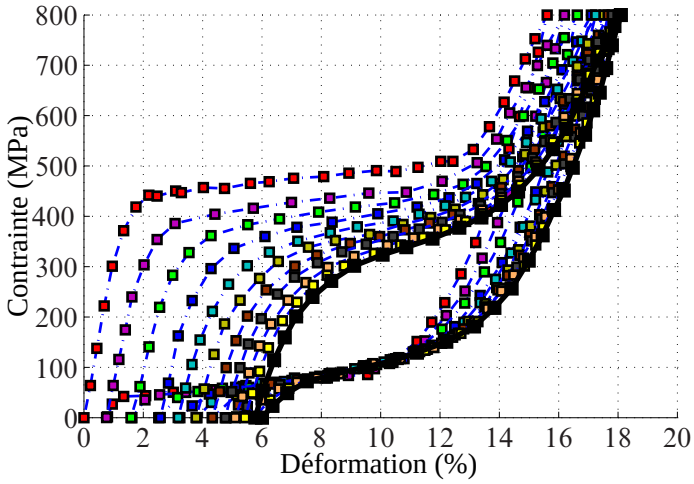


FIG. 6.1 – Essai de traction répétée sur un fil en NiTi. Le Nickel–Titane présente un comportement pseudoélastique caractérisé par une boucle d'hystérésis qui se stabilise après un certain nombre de cycles.

À partir de cette figure, on peut faire les remarques suivantes :
– le recouvrement des déformations inélastiques n'est pas total à la fin de chaque cycle. En effet, il subsiste, après la décharge, une déformation résiduelle qui augmente au fur et à mesure du chargement cyclique jusqu'à saturation. Cette déformation évolue exponentiellement avec le nombre de cycles comme le montre la figure 6.2.

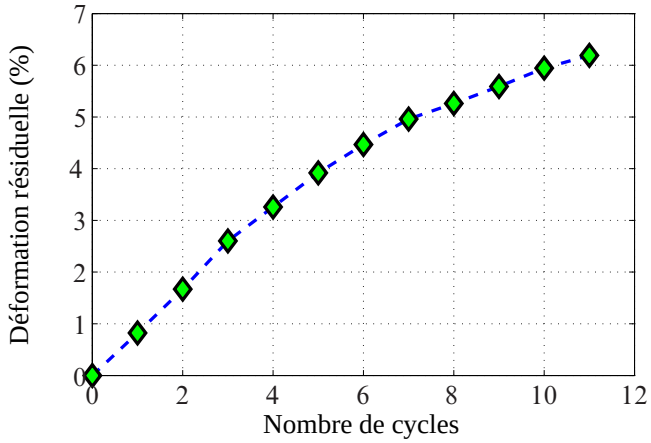


FIG. 6.2 – Évolution de la déformation résiduelle avec le nombre de cycles dans le cas d'un fil en Nickel–Titane soumis à une traction répétée.

– la contrainte de début de changement de phase direct décroît avec l'augmentation du nombre de cycles (figure 6.3).

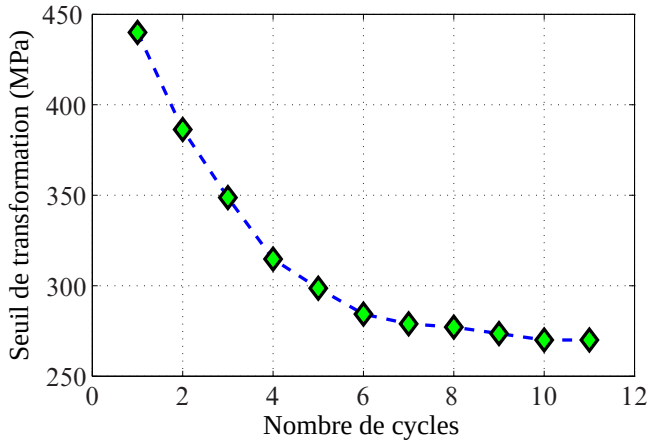


FIG. 6.3 – Évolution de la contrainte–seuil de début de changement de phase direct du Nickel–Titane avec le nombre de cycles de traction–décharge.

– la boucle pseudoélastique évolue progressivement avec le nombre de cycles, jusqu'à stabilisation. Sur la figure 6.1, la boucle stabilisée est en trait noir continu.

Dans la littérature, l'origine des déformations résiduelles est généralement expliquée par la subsistance au sein du MMF d'une martensite orientée (Lexcellent et Bourbon, 1996 ; Auricchio et coll., 2003). Le changement de phase répété de l'austénite en martensite orientée et inversement entraîne la création d'un champ de défaut au sein du matériau (Abeyaratne et Joo Kim, 1997). Les défauts sont responsables de l'apparition de contraintes localisées, dispersées à l'intérieur du MMF, entraînant la formation et le maintien d'une martensite orientée résiduelle qui n'est plus affectée lors des changements de phase ultérieurs (Tanaka et coll., 1995).

Le champ de contrainte interne engendré par le chargement cyclique et qui persiste après décharge complète permet au MMF de manifester un effet particulier dit « effet mémoire double sens ». En effet, ce champ de contrainte permet d'orienter les plaquettes martensitiques lors d'un refroidissement à partir de l'austénite sans nécessiter un chargement mécanique externe. Par conséquent, le matériau peut avoir une forme austénitique à haute température et une autre forme martensitique, déformée sous l'effet des contraintes internes, à basse température. Le matériau « se souvient » donc de deux configurations déformées au lieu d'une seule dans le cas de l'effet mémoire simple sens. Le processus permettant au matériau à mémoire de forme de présenter un effet mémoire double sens est appelé « éducation ». Lors de l'éducation, les propriétés du matériau évoluent jusqu'à saturation une fois le processus terminé ; l'éducation peut être réalisée par un chargement thermomécanique cyclique comme celui de la figure 6.1.

6.3 Modélisation du comportement cyclique des MMF

En s'appuyant sur les constatations expérimentales du paragraphe 6.2, on propose de généraliser le modèle unifié du chapitre précédent pour tenir compte du comportement sous chargement cyclique et de l'effet mémoire double sens résultant du processus d'éducation. D'après les remarques du paragraphe précédent, la réponse à un chargement cyclique d'un matériau à mémoire de forme est caractérisée à l'échelle macroscopique par l'apparition de déformations résiduelles inélastiques, induisant un champ de contraintes internes. On propose donc de décrire le comportement cyclique des MMF en introduisant deux variables d'état $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{r}$ et $\boldsymbol{B}$ représentant respectivement la déformation résiduelle et la contrainte interne. On introduit aussi une troisième variable z_e représentant la fraction cumulée de la martensite définie par

$$z_\mathrm{e} = \int_0^t \|\dot{z}\| \, d\tau, \tag{6.1}$$

où t est un temps cinématique. L'effet que le chargement cyclique peut avoir sur certaines propriétés du matériau peut être simulé en faisant dépendre ces propriétés de z_e.

6.3.1 Variables d'état et énergie libre

Dans un souci d'unification, on garde les variables d'état du modèle 3D non cyclique du chapitre 5 auxquelles on ajoute le tenseur de déformation résiduelle $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{r}$ et le tenseur de contrainte interne $\boldsymbol{B}$. L'ensemble des variables retenues comprend :

- la déformation macroscopique $\boldsymbol{\varepsilon}$ et la température T ;
- la fraction volumique z de la martensite et la fraction cumulée z_e ;
- les déformations locales des deux phases : $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{A}$ pour l'austénite et $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{M}$ pour la martensite ;
- la déformation de transformation locale au sein de la martensite, $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{tr}$;
- la contrainte interne $\boldsymbol{B}$ et la déformation résiduelle $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathrm{r}$.

On suppose que la densité de chaleur latente associée au changement de phase est une fonction de la fraction cumulée z_e. Les densités respectives des énergies libres de

l'austénite et de la martensite peuvent alors s'écrire

$$\mathcal{W}_{\mathrm{A}} \overset{\text{déf}}{=} W_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}), \tag{6.2}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mathrm{M}} &= W_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}, T, \boldsymbol{B}, z_{\mathrm{e}}) \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) + C(T, z_{\mathrm{e}}) - \frac{2}{3}\boldsymbol{B} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Le terme $\boldsymbol{B} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$ dans l'expression de $\mathcal{W}_{\mathrm{M}}$ permet la modélisation de l'effet mémoire double sens. Il représente une modification de l'énergie interne de la martensite, due à l'apparition du champ de contraintes internes, permettant une formation plus facile de la martensite orientée à partir de l'austénite. L'intérêt de ce terme pour la modélisation sera évident aux paragraphes suivants, notamment quand les expressions des fonctions critères seront établies.

La densité d'énergie due à l'interaction entre l'austénite et la martensite garde toujours son expression

$$\mathcal{I} = I(z, z_{\mathrm{e}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}) = G\frac{z^2}{2} + \frac{z}{2}[\alpha z + \beta(1-z)]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right). \tag{6.4}$$

Les paramètres G, α et β sont maintenant des fonctions de la fraction volumique cumulée z_{e}.

$$G = \widehat{G}(z_{\mathrm{e}}), \quad \alpha = \hat{\alpha}(z_{\mathrm{e}}) \quad \text{et} \quad \beta = \hat{\beta}(z_{\mathrm{e}}). \tag{6.5}$$

Les significations des différents paramètres n'ont pas changé par rapport au modèle 3D non cyclique du chapitre précédent.

Enfin, la densité d'énergie du matériau à mémoire de forme est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &\overset{\text{déf}}{=} W(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}, z, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}, \boldsymbol{B}, z_{\mathrm{e}}) \\ &= (1-z)\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}})\right] \\ &\quad + z\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) + C(T, z_{\mathrm{e}})\right] \\ &\quad + G\frac{z^2}{2} + \frac{z}{2}[\alpha z + \beta(1-z)]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right) - \frac{2}{3}z\boldsymbol{B} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

6.3.2 Liaisons internes et lagrangien

Les variables d'état obéissent aux liaisons internes suivantes :

– la fraction volumique de la martensite est nécessairement comprise entre zéro et un.

$$z \geqslant 0, \tag{6.7}$$

$$(1-z) \geqslant 0\,; \tag{6.8}$$

– la déformation de transformation équivalente $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}$ ne peut pas dépasser une valeur limite γ qui dépend de la fraction cumulée z_{e}.

$$\gamma - \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}} \geqslant 0, \quad \gamma \overset{\text{déf}}{=} \hat{\gamma}(z_{\mathrm{e}}). \tag{6.9}$$

Les liaisons données par (6.7) à (6.9) sont supposées être parfaites. Elles dérivent d'un potentiel

$$\mathcal{W}_l = -\boldsymbol{\lambda} : [(1-z)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} + z\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}] - \mu\left(\gamma - \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}\right) - \nu_1 z - \nu_2(1-z). \quad (6.10)$$

Les multiplicateurs de Lagrange ν_1, ν_2 et μ sont tels que

$$\nu_1 \geqslant 0,\ \nu_1 z = 0, \quad \nu_2 \geqslant 0,\ \nu_2(1-z) = 0 \quad \text{et} \quad \mu \geqslant 0,\ \mu\left(\gamma - \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}\right) = 0. \quad (6.11)$$

La somme de l'énergie $\mathcal{W}$ et du potentiel $\mathcal{W}_l$ dont dérivent les différentes liaisons entre les variables d'état fournit l'expression du lagrangien $\mathcal{L}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{W} + \mathcal{W}_l \overset{\text{déf}}{=} L(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}, z, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}, \boldsymbol{B}, z_{\mathrm{e}}) \\
&= (1-z)\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}})\right] \\
&\quad + z\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) + C(T, z_{\mathrm{e}}) - \frac{2}{3}\boldsymbol{B} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right] \\
&\quad + G\frac{z^2}{2} + \frac{z}{2}[\alpha z + \beta(1-z)]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right) \\
&\quad - \boldsymbol{\lambda} : [(1-z)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + z\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}] - \mu\left(\gamma - \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}\right) - \nu_1 z - \nu_2(1-z),
\end{aligned} \quad (6.12)$$

où les conditions (6.11) doivent être vérifiées.

6.3.3 Lois d'état

Le changement de phase, l'orientation de la martensite, l'éducation, l'évolution des déformations résiduelles au sein du MMF et l'évolution du champ de contraintes internes sont supposés être les seuls processus dissipatifs. Par conséquent, si l'on note $\mathcal{A}_z$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{tr}}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{e}}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{r}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{B}}$ les forces thermodynamiques associées aux variables internes z, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$, z_{e}, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}$ et $\boldsymbol{B}$ respectivement, seules ces forces peuvent être non nulles au cours d'une transformation donnée. Les lois d'état s'écrivent alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (6.13)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}}} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \quad (1-z)\,[\boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) - \boldsymbol{\lambda}] = \mathbf{0}, \quad (6.14)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \quad z\,[\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) - \boldsymbol{\lambda}] = \mathbf{0}, \quad (6.15)$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \mathcal{A}_z \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_z = \frac{1}{2}\big[&(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) \\
&- (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}})\big] \\
&- C(T, z_{\mathrm{e}}) - Gz - \left[(\alpha - \beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right) \\
&- \boldsymbol{\lambda} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}) + \frac{2}{3}\boldsymbol{B} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}},
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{tr}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{tr}} = z\left\{\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) - \frac{2}{3}\left[\alpha z + \beta(1-z)\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right\} \\
+ \frac{2}{3}z\boldsymbol{B} - \frac{2\mu}{3}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}},
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

$$
-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad (1-z)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} + z\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{0}, \tag{6.18}
$$

$$
-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{r}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{r}} = (1-z)\boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) + z\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}), \tag{6.19}
$$

$$
-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{B}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{B}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{B}} = \frac{2}{3}z\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}, \tag{6.20}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_{\mathrm{e}}} = \mathcal{A}_{\mathrm{e}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_{\mathrm{e}} = &-z\frac{\partial C(T, z_{\mathrm{e}})}{\partial z_{\mathrm{e}}} - \frac{\partial G}{\partial z_{\mathrm{e}}}\frac{z^2}{2} \\
&- \frac{z}{2}\left[\frac{\partial \alpha}{\partial z_{\mathrm{e}}}z + \frac{\partial \beta}{\partial z_{\mathrm{e}}}(1-z)\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right) - \mu\frac{\partial \gamma}{\partial z_{\mathrm{e}}}.
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

Les équations (6.13), (6.14), (6.15) et (6.18) permettent d'établir la loi de comportement du matériau.

$$
\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{K} : (\boldsymbol{\varepsilon} - z\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}). \tag{6.22}
$$

$\boldsymbol{K}$ est le tenseur élastique équivalent du MMF, il est donné par

$$
\boldsymbol{K} = \left[(1-z)\boldsymbol{K}_{\mathrm{A}}^{-1} + z\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}}^{-1}\right]^{-1}. \tag{6.23}
$$

6.3.4 Fonctions critères et lois complémentaires

La déformation résiduelle et la contrainte interne dépendent du nombre de cycles de chargement thermomécanique auxquels est soumis le matériau. Dans le cadre du présent modèle, on propose de tenir compte de l'effet des cycles de chargement à l'aide de la fraction volumique cumulée z_{e} de la martensite.

Comme le montre la figure 6.2 au paragraphe 6.2, la norme de la déformation résiduelle augmente exponentiellement avec le nombre de cycles jusqu'à une valeur asymptotique $\varepsilon_{\mathrm{r}}^{\mathrm{sat}}$. Pour en tenir compte, tout en assurant la positivité du produit $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{r}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}$, on propose la loi d'évolution suivante de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}$:

$$
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{r}} = \frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}^{\mathrm{sat}}}{\tau}\left(\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{s}}{\sigma_{\mathrm{VM}}}\right)\exp\left(-\frac{z_{\mathrm{e}}}{\tau}\right)\dot{z}_{\mathrm{e}}. \tag{6.24}
$$

La déformation résiduelle est supposée ne pas être associée à un changement de volume, elle est donc déviatorique. La constante de temps τ dépend du nombre de cycles

nécessaires à l'éducation du MMF et $\varepsilon_{\mathrm{r}}^{\mathrm{sat}}$ représente la déformation résiduelle en traction à la saturation, c'est-à-dire lorsque le cycle pseudoélastique se stabilise.

La dissipation accompagnant l'évolution de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}$ est nécessairement positive. En effet, on peut démontrer que $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{r}}$ est identiquement égale à la contrainte (annexe B) ; il s'ensuit la positivité du produit $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{r}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{r}}$.

De la même manière, l'évolution de la contrainte interne $\boldsymbol{B}$ est régie par la loi

$$\dot{\boldsymbol{B}} = \frac{B^{\mathrm{sat}}}{\tau}\left(\frac{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}}\right)\exp\left(-\frac{z_{\mathrm{e}}}{\tau}\right)\dot{z}_{\mathrm{e}}, \tag{6.25}$$

où B^{sat} est un scalaire positif. (6.25) traduit la croissance de la norme de $\boldsymbol{B}$ avec le nombre de cycles jusqu'à saturation. Par ailleurs, étant donné l'expression de la force thermodynamique $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{B}}$ associée à la variable $\boldsymbol{B}$, la dissipation $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{B}} : \dot{\boldsymbol{B}}$ est toujours positive.

L'évolution des variables $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}$, $\boldsymbol{B}$ et z_{e} étant liée à celle de la fraction volumique z de la martensite, on n'a pas besoin de définir des fonctions critères spécifiques à chacune de ces variables. Par ailleurs, on associe au changement de phase direct, au changement de phase inverse et à la déformation de transformation locale $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$ trois fonctions critères : $\mathcal{F}_z^1$, $\mathcal{F}_z^2$ et $\mathcal{F}_{\mathrm{ori}}$ respectivement. Les expressions de ces fonctions sont inspirées de leurs homologues du modèle 3D non cyclique. Elles sont telles que

$$\mathcal{A}_z \in \partial_{\dot{z}}\mathcal{D}, \tag{6.26}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{tr}} \in \partial_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{tr}}}\mathcal{D}, \tag{6.27}$$

où $\mathcal{D}$ est une fonction convexe, positive, continue et nulle à l'origine. $\mathcal{D}$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &\overset{\text{déf}}{=} D(\dot{z}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{tr}}) \\ &= P(z, z_{\mathrm{e}}, \dot{z})\,\dot{z} + R(z)\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{tr}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{tr}}}.\end{aligned} \tag{6.28}$$

$P(z, z_{\mathrm{e}}, \dot{z})$ est défini par

$$P(z, \dot{z}) = [a(1 - z) + bz]\ \mathrm{sign}\,\dot{z}, \tag{6.29}$$

a et b étant des paramètres dépendant de z_{e}.

$$a = \hat{a}(z_{\mathrm{e}}) \quad \text{et} \quad b = \hat{b}(z_{\mathrm{e}}). \tag{6.30}$$

D'autre part,

$$R(z) = z^2 Y. \tag{6.31}$$

Y est un paramètre matériel constant. Les paramètres a, b et Y sont toujours positifs comme on le montrera lorsque le problème d'identification des paramètres du modèle sera abordé aux paragraphes suivants ; ceci assure la positivité de $\mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ a toutes les propriétés d'un pseudo-potentiel de dissipation positif, convexe, semi-continu inférieurement et nul à l'origine ; les lois d'évolution de z et de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$ obéissant (6.26) et (6.27) satisfont nécessairement le deuxième principe de la thermodynamique.

Comme au chapitre précédent, on construit les expressions des fonctions critères $\mathcal{F}_z^1$, $\mathcal{F}_z^2$ et $\mathcal{F}_{\text{ori}}$.

$$\mathcal{F}_z^1 = \left\{\frac{1}{3}El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}} + P_{\text{MA}}\right)(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 - C(T, z_{\text{e}})\right\} \tag{6.32}$$
$$+ \left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - (G+b)z - a(1-z) - \left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right),$$

$$\mathcal{F}_z^2 = -\left\{\frac{1}{3}El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}} + P_{\text{MA}}\right)(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 - C(T, z_{\text{e}})\right\} \tag{6.33}$$
$$- \left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} + (G-b)z - a(1-z) + \left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right),$$

$$\mathcal{F}_{\text{ori}} = \left\| \left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right) - \frac{2}{3}\left[\alpha z + \beta(1-z)\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - \frac{2\mu}{3z}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}} \right\|_{\text{VM}} - zY. \tag{6.34}$$

La signification des différents paramètres est la même qu'au chapitre précédent.

Les expressions précédentes des fonctions critères ressemblent considérablement à celles obtenues dans le cadre du modèle 3D non cyclique. La différence majeure est l'apparition, dans chacune des trois expressions, du terme $\frac{2}{3}\boldsymbol{B}$ qui s'ajoute à la contrainte. Ainsi, la contrainte interne $\boldsymbol{B}$ joue un rôle semblable à celui de $\boldsymbol{\sigma}$ en cas de changement de phase et d'orientation des plaquettes martensitiques. On montre dans la suite que, grâce à l'introduction du tenseur $\boldsymbol{B}$, le présent modèle peut simuler l'effet mémoire double sens caractéristique des matériaux à mémoire de forme.

Les lois complémentaires associées au changement de phase vérifient les propriétés suivantes :

- si $\mathcal{F}_z^1 < 0$ et $\mathcal{F}_z^2 < 0$, le changement de phase ne peut pas se produire. Il en résulte
$$\dot{z} = 0\,; \tag{6.35}$$
- si le seuil de changement de phase direct est atteint, $\mathcal{F}_z^1$ est nulle. Dans ce cas la valeur de $\dot{z}$ est nulle si $\dot{\mathcal{F}}_z^1 < 0$; dans le cas contraire, elle est donnée par la condition de consistance $\dot{\mathcal{F}}_z^1 = 0$;
- si le seuil de changement de phase inverse est atteint, $\mathcal{F}_z^2$ est nulle. Dans ce cas la valeur de $\dot{z}$ est nulle si $\dot{\mathcal{F}}_z^2 < 0$; dans le cas contraire, elle est donnée par la condition de consistance $\dot{\mathcal{F}}_z^2 = 0$.

L'évolution de la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$, caractéristique de l'orientation de la martensite, obéit à la règle de normalité. Si l'on note

$$\boldsymbol{X} \overset{\text{déf}}{=} \left(\boldsymbol{s} + \frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right) - \frac{2}{3}\left[\alpha z + \beta(1-z)\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - \frac{2\mu}{3z}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}}, \tag{6.36}$$

la fonction critère $\mathcal{F}_{\text{ori}}$ associée à l'orientation des plaquettes martensitiques peut s'écrire

$$\mathcal{F}_{\text{ori}} = X_{\text{VM}} - zY. \tag{6.37}$$

Le tenseur de déformation inélastique locale de la martensite, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$, évolue de manière

que

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{tr}} &= \eta \frac{\partial \mathcal{F}_{\mathrm{ori}}}{\partial \boldsymbol{X}} \\ &= \frac{3}{2}\eta \frac{\boldsymbol{X}}{X_{\mathrm{VM}}}.\end{aligned} \tag{6.38}$$

Dans l'équation précédente, η est un scalaire nécessairement positif qui vérifie les conditions de Kuhn–Tucker :

$$\eta \geqslant 0, \quad \mathcal{F}_{\mathrm{ori}} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \eta \mathcal{F}_{\mathrm{ori}} = 0. \tag{6.39}$$

L'éducation d'un matériau à mémoire de forme conduit généralement à la stabilisation des propriétés thermomécaniques de ce matériau (Lexcellent et Bourbon, 1996). À l'échelle macroscopique, tout se passe comme si l'éducation provoquait une transition d'un matériau vers un autre complètement différent.

On propose de faire dépendre les paramètres matériels susceptibles d'évoluer au cours de l'éducation du nombre de cycles via la variable z_{e}. On associe alors à ces paramètres, comme dans le cas des variables $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}$, des expressions qui leur permettent d'avoir deux valeurs distinctes : une lorsque le matériau est vierge et une autre quand l'éducation est complétée. La transition de la valeur à l'état vierge vers celle à l'état complètement éduqué s'effectue exponentiellement en fonction de la fraction volumique cumulée z_{e} de la martensite. En pratique, on se donne les relations suivantes :

$$a = a^{(0)} + \left(a^{\mathrm{sat}} - a^{(0)}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{z_{\mathrm{e}}}{\tau}\right)\right); \tag{6.40}$$

$$b = b^{(0)} + \left(b^{\mathrm{sat}} - b^{(0)}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{z_{\mathrm{e}}}{\tau}\right)\right); \tag{6.41}$$

$$G = G^{(0)} + \left(G^{\mathrm{sat}} - G^{(0)}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{z_{\mathrm{e}}}{\tau}\right)\right); \tag{6.42}$$

$$C(T, z_{\mathrm{e}}) = C^{(0)}(T) + \left(C^{\mathrm{sat}}(T) - C^{(0)}(T)\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{z_{\mathrm{e}}}{\tau}\right)\right); \tag{6.43}$$

$$\gamma = \gamma^{(0)} + \left(\gamma^{\mathrm{sat}} - \gamma^{(0)}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{z_{\mathrm{e}}}{\tau}\right)\right). \tag{6.44}$$

Les exposants $^{(0)}$ et $^{\mathrm{sat}}$ correspondent respectivement au matériau vierge et au matériau éduqué. Les densités des chaleurs latentes $C^{(0)}(T)$ et $C^{\mathrm{sat}}(T)$ sont définies par

$$C^{(0)}(T) = \xi^{(0)}\left(T - \left(A_{\mathrm{f}}^{0}\right)^{(0)}\right) + \kappa^{(0)}, \tag{6.45}$$

$$C^{\mathrm{sat}}(T) = \xi^{\mathrm{sat}}\left(T - \left(A_{\mathrm{f}}^{0}\right)^{\mathrm{sat}}\right) + \kappa^{\mathrm{sat}}. \tag{6.46}$$

Les autres paramètres du modèle dépendant de la fraction z_{e} sont α et β. Lorsque le matériau est vierge, la contrainte nécessaire pour déclencher l'orientation de la martensite autoaccommodante est notée σ_{rs}. L'orientation est complète quand cette contrainte atteint une valeur σ_{rf}. Au cours de l'éducation du matériau, le champ de contraintes internes $\boldsymbol{B}$ facilite l'orientation de la martensite comme le montre l'expression de la fonction critère $\mathcal{F}_{\mathrm{ori}}$. Si l'on suppose que les contraintes effectives de début et de fin d'orientation sont toujours égales à σ_{rs} et σ_{rf}, alors :

– au début de l'orientation, la fonction critère $\mathcal{F}_{\mathrm{ori}}$ s'annule pour une déformation de transformation nulle et pour un niveau de contrainte effective $||\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{B}||_{\mathrm{VM}}$ égal à σ_{rs}. Le multiplicateur μ est également nul. Il en résulte,

$$Y = \sigma_{\mathrm{rs}}\,; \tag{6.47}$$

– à la fin de l'orientation, $\mathcal{F}_{\text{ori}}$ est nulle pour une déformation de transformation équivalente $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}$ égale à γ. Quand $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}$ vient d'atteindre γ par valeurs inférieures, le multiplicateur μ est nul pour une contrainte telle que $||\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{B}||_{\text{VM}}$ égale σ_{rf}. Par conséquent, si l'on se limite au comportement 1D en traction,

$$|\,\sigma_{\text{rf}}-\alpha\gamma|=Y\,; \tag{6.48}$$

En vertu de (6.47), l'équation précédente permet d'établir l'expression de α en fonction de γ :

$$\alpha=\frac{\sigma_{\text{rf}}-\sigma_{\text{rs}}}{\gamma}. \tag{6.49}$$

– quand l'austénite se transforme en martensite orientée, l'orientation est complète pour une contrainte effective équivalente, supérieure ou égale à σ_{rf}. En particulier, si on s'approche infiniment de σ_{rf} par valeurs inférieures, le multiplicateur μ est nul. Le début du changement de phase est donc caractérisé par

$$z=0,\quad ||\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{B}||_{\text{VM}}=\sigma_{\text{rf}},\quad \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}=\gamma\quad\text{et}\quad\mu=0. \tag{6.50}$$

En 1D, dans le cas particulier d'une traction, il vient

$$\beta=\frac{\sigma_{\text{rf}}}{\gamma}. \tag{6.51}$$

α et β sont donc tous les deux fonctions de z_{e} à cause de leur dépendance de γ.

Les expressions explicites des lois d'évolution de la fraction z et de la déformation de transformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ peuvent être établies en écrivant les conditions de consistance. En particulier, la condition $\dot{\mathcal{F}}_z^1=0$ doit être respectée lors du changement de phase direct, $\dot{\mathcal{F}}_z^2=0$ pendant le changement de phase inverse tandis que l'orientation des plaquettes martensitiques est décrite par une évolution de la variable $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ respectant la condition $\dot{\mathcal{F}}_{\text{ori}}=0$.

Changement de phase direct

Pendant le changement de phase direct, la fraction volumique z de la martensite croît. La dérivée $\dot{z}$ est donc positive, ce qui implique

$$\dot{z}_{\text{e}}=\dot{z}. \tag{6.52}$$

Si, pendant le changement de phase, la déformation équivalente $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}$ n'atteint pas sa limite γ, le multiplicateur de Lagrange μ dans l'expression de la fonction critère

$\mathcal{F}_{\text{ori}}$ est nul. z et $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ évoluent en respectant les relations

$$\begin{aligned}
&\left\{(G+b)-a+\frac{2}{3}(\alpha-\beta)\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}+\left(\frac{\partial G}{\partial z_{\text{e}}}+\frac{\partial b}{\partial z_{\text{e}}}\right)z+\frac{\partial a}{\partial z_{\text{e}}}(1-z)-\frac{2}{3}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z_{\text{e}}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right.\\
&\quad\left.+\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}-\frac{\partial\beta}{\partial\gamma}\right)z+\frac{1}{2}\frac{\partial\beta}{\partial\gamma}\right]\frac{\partial\gamma}{\partial z_{\text{e}}}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}+2\frac{\mu_{\text{eq}}^2}{\mu_{\text{A}}}(El_{\text{MA}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}):\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}+\frac{\partial C(T)}{\partial z_{\text{e}}}\right\}\dot{z}\\
&-\left\{\frac{3}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}+\frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right)-2\left[(\alpha-\beta)z+\frac{\beta}{2}\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}-3\mu_{\text{eq}}z(El_{\text{MA}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}})\right\}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}\eta \qquad (6.53)\\
&=(El_{\text{MA}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}):\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}+\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}}+P_{\text{MA}}\right)\text{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\text{tr}\,\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{el}}-\frac{\partial C(T)}{\partial T}\dot{T}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left\{Y+\left[\left(3\frac{\mu_{\text{eq}}^2}{\mu_{\text{A}}}+\alpha-\beta+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}z+\frac{\partial\beta}{\partial\gamma}(1-z)\right)\frac{\partial\gamma}{\partial z_{\text{e}}}\right)\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial z_{\text{e}}}\right]:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}\right\}\dot{z}\\
&+\left[\alpha z+\beta(1-z)+3\mu_{\text{eq}}z\right]\eta=\frac{3}{2}\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}.
\end{aligned} \qquad (6.54)$$

La relation (6.53) traduit la condition $\dot{\mathcal{F}}_z^1=0$ tandis que (6.54) correspond à $\dot{\mathcal{F}}_{\text{ori}}=0$ (voir l'annexe B pour les détails des calculs).

Dans le cas où $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}$ tend à dépasser γ, le multiplicateur μ n'est plus nul. En effet, μ dans ce cas est tel que

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}=\gamma &\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{tr}}=0\\
&\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{X}=0.
\end{aligned} \qquad (6.55)$$

Il en résulte

$$\frac{\mu}{z}=\frac{1}{\gamma}\left\{\left(\boldsymbol{s}+\frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right):\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}-\gamma^2\left[\alpha z+\beta(1-z)\right]\right\} \qquad (6.56)$$

et par conséquent

$$\boldsymbol{X}=\left(\boldsymbol{s}+\frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right)-\frac{2}{3\gamma^2}\left[\left(\boldsymbol{s}+\frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right):\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}. \qquad (6.57)$$

La condition $\dot{\mathcal{F}}_{\text{ori}}=0$ se traduit par

$$Y\dot{z}+\left[\frac{1}{\gamma^2}\left(\boldsymbol{s}+\frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right):\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}+3\mu_{\text{eq}}z\right]\eta=\frac{3}{2}\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}}. \qquad (6.58)$$

$\dot{z}$ et η sont solutions du système formé par les équations (6.53) et (6.58).

Changement de phase inverse

La fraction volumique z de la martensite décroît. Ceci entraîne

$$\dot{z}_{\text{e}}=-\dot{z}. \qquad (6.59)$$

Si la déformation équivalente $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}$ n'atteint pas sa limite γ, le multiplicateur μ est nul. $\dot{z}$ et η vérifient dans ce cas

$$\begin{aligned}
&\left\{(G-b)+a+\frac{2}{3}(\alpha-\beta)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}-\left(\frac{\partial G}{\partial z_{\mathrm{e}}}-\frac{\partial b}{\partial z_{\mathrm{e}}}\right)z+\frac{\partial a}{\partial z_{\mathrm{e}}}(1-z)+\frac{2}{3}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z_{\mathrm{e}}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right.\\
&\quad\left.-\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}-\frac{\partial\beta}{\partial\gamma}\right)z+\frac{1}{2}\frac{\partial\beta}{\partial\gamma}\right]\frac{\partial\gamma}{\partial z_{\mathrm{e}}}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}+2\frac{\mu_{\mathrm{eq}}^2}{\mu_{\mathrm{A}}}(El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}):\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}+\frac{\partial C(T)}{\partial z_{\mathrm{e}}}\right\}\dot{z}\\
&-\left\{\frac{3}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}+\frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right)-2\left[(\alpha-\beta)z+\frac{\beta}{2}\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}-3\mu_{\mathrm{eq}}z(El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}})\right\}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\mathrm{VM}}}\eta \qquad (6.60)\\
&=(El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}):\dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}}+\left(\frac{1}{3}El_{\mathrm{MA}}+P_{\mathrm{MA}}\right)\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{el}}-\frac{\partial C(T)}{\partial T}\dot{T}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left\{Y+\left[\left(3\frac{\mu_{\mathrm{eq}}^2}{\mu_{\mathrm{A}}}+\alpha-\beta-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}z+\frac{\partial\beta}{\partial\gamma}(1-z)\right)\frac{\partial\gamma}{\partial z_{\mathrm{e}}}\right)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial z_{\mathrm{e}}}\right]:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\mathrm{VM}}}\right\}\dot{z} \qquad (6.61)\\
&+\left[\alpha z+\beta(1-z)+3\mu_{\mathrm{eq}}z\right]\eta=0.
\end{aligned}$$

Si $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}$ tend à dépasser γ, le multiplicateur μ et la force thermodynamique $\boldsymbol{X}$ associée à l'orientation de la martensite sont respectivement donnés par (6.56) et (6.57). L'expression de la condition de consistance $\dot{\mathcal{F}}_{\mathrm{ori}}=0$ correspond à (6.58). $\dot{z}$ et η sont donc solutions de (6.58) et de (6.60).

Orientation sans changement de phase

En l'absence de changement de phase, $\dot{z}$ s'annule et le module η de la vitesse d'évolution de la déformation inélastique locale $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$ est solution de l'une des équations (6.54) ou (6.58). Le choix de l'équation dépend de la déformation de transformation équivalente $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}$ qui atteint, ou non, sa valeur limite γ.

$$\eta=\begin{cases}\dfrac{3}{2\left[\alpha z+\beta(1-z)+3\mu_{\mathrm{eq}}z\right]}\dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}}:\dfrac{\boldsymbol{X}}{X_{\mathrm{VM}}} & \text{si } \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}<\gamma,\\ \dfrac{3}{2\left[\frac{1}{\gamma^2}\left(\boldsymbol{s}+\frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right):\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}+3\mu_{\mathrm{eq}}z\right]}\dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}}:\dfrac{\boldsymbol{X}}{X_{\mathrm{VM}}} & \text{si } \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}=\gamma.\end{cases} \qquad (6.62)$$

6.3.5 Procédure d'identification des paramètres

Le présent modèle fait intervenir les paramètres suivants :
- les modules de Young de l'austénite et de la martensite, E_{A} et E_{M} ;
- le coefficient de Poisson ν, supposé le même pour les deux phases ;
- les déformations de transformation maximales en traction : $\gamma^{(0)}$ à l'état vierge et γ^{sat} à l'état éduqué ;
- $a^{(0)}$ et $b^{(0)}$, dépendant de la largeur de la boucle pseudoélastique, à l'état vierge ;

- a^{sat} et b^{sat}, homologues respectifs de $a^{(0)}$ et de $b^{(0)}$ à l'état éduqué ;
- Y, définissant la contrainte effective de début d'orientation de la martensite ;
- $G^{(0)}$, qui provient de l'interaction au sein de la martensite à l'état vierge ;
- G^{sat}, homologue de $G^{(0)}$ à l'état éduqué ;
- α et β qui définissent la largeur en contrainte de la boucle pseudoélastique ;
- $\xi^{(0)}$, déterminant l'effet d'une variation de la température sur les contraintes seuils de changement de phase dans le cas d'un matériau vierge ;
- ξ^{sat}, l'homologue de ξ^0 dans le cas du matériau éduqué ;
- $\kappa^{(0)}$, égal à $C^{(0)}(T, z_{\text{e}})$ pour $T = \left(A_{\text{f}}^0\right)^{(0)}$;
- κ^{sat}, l'homologue de $\kappa^{(0)}$ à l'état éduqué ;
- $\left(A_{\text{f}}^0\right)^{(0)}$, température de fin de changement de phase inverse à l'état vierge ;
- $\left(A_{\text{f}}^0\right)^{\text{sat}}$, température de fin de changement de phase inverse à l'état éduqué ;
- $\varepsilon_{\text{r}}^{\text{sat}}$, valeur limite du module de la déformation résiduelle $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{r}}$;
- B^{sat}, valeur limite du module de la contrainte interne $\boldsymbol{B}$;
- τ, constante de temps associée au processus d'éducation.

On considère que, après éducation, la martensite obtenue par simple refroidissement est complètement orientée. Il suffit alors de choisir pour la modélisation une expression de la contrainte interne $\boldsymbol{B}$ telle que $B^{\text{sat}} = \sigma_{\text{rf}}$. Sous cette condition, l'identification de tous les paramètres du modèle nécessite quatre essais simples :

- un essai de calorimétrie à balayage différentiel (DSC) réalisé sur un échantillon du matériau vierge ;
- un second essai DSC effectué sur un échantillon du matériau éduqué ;
- un essai d'orientation de la martensite autoaccommodante dans le cas du matériau vierge ;
- un essai de traction répétée dans le domaine pseudoélastique conduisant à la stabilisation de la boucle d'hystérésis.

L'essai d'orientation

L'essai d'orientation de la martensite autoaccommodante d'un matériau vierge permet notamment de déterminer le module de Young E_{M} de la martensite et la déformation de transformation maximale en traction $\gamma^{(0)}$ (figure 6.4). Le même essai permet de déterminer Y d'après (6.47) ainsi que les paramètres α et β d'après (6.49) et (6.51).

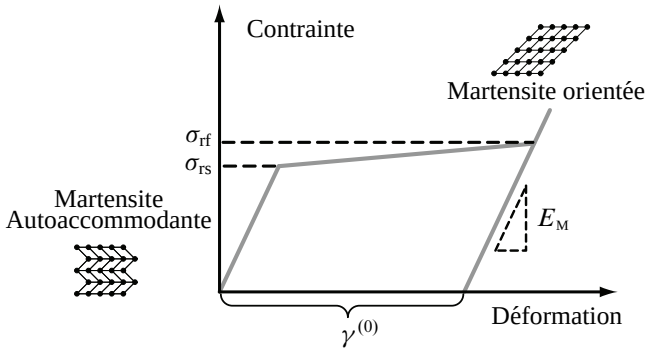


FIG. 6.4 – Orientation de la martensite autoaccommodante du MMF à l'état vierge.

L'essai de calorimétrie à balayage différentiel

L'essai de calorimétrie à balayage différentiel, effectué sur un échantillon du MMF éduqué, permet la détermination des températures de changement de phase du matériau à contrainte nulle. Ces températures sont généralement au nombre de quatre :

- $\left(M_{\mathrm{s}}^{0}\right)^{\mathrm{sat}}$ correspond au début du changement de phase direct ;
- $\left(M_{\mathrm{f}}^{0}\right)^{\mathrm{sat}}$ correspond à la fin du changement de phase direct ;
- $\left(A_{\mathrm{s}}^{0}\right)^{\mathrm{sat}}$ correspond au début du changement de phase inverse ;
- $\left(A_{\mathrm{f}}^{0}\right)^{\mathrm{sat}}$ correspond à la fin du changement de phase inverse.

Dans le cadre du modèle proposé, $\left(A_{\mathrm{f}}^{0}\right)^{\mathrm{sat}}$ est nécessaire à la détermination de la densité de chaleur latente $C^{\mathrm{sat}}(T)$.

On peut déterminer de la même manière les températures de changement de phase à contrainte nulle du matériau vierge. Ces températures sont notées $\left(M_{\mathrm{s}}^{0}\right)^{(0)}$, $\left(M_{\mathrm{f}}^{0}\right)^{(0)}$, $\left(A_{\mathrm{s}}^{0}\right)^{(0)}$ et $\left(A_{\mathrm{f}}^{0}\right)^{(0)}$. $\left(A_{\mathrm{f}}^{0}\right)^{(0)}$ intervient dans l'expression de $C^{(0)}(T)$.

L'essai de traction répétée

Lors d'un essai de traction répétée dans le domaine pseudoélastique, la boucle d'hystérésis caractéristique des matériaux à mémoire de forme se stabilise. Les caractéristiques thermomécaniques du matériau atteignent des valeurs qui n'évoluent plus au cours des cycles ultérieurs et qui correspondent à l'état complètement éduqué du MMF. Au niveau du modèle proposé, on peut considérer que ces valeurs correspondent à une fraction cumulée z_{e} infinie de la martensite, puisque l'évolution des paramètres est négligeable une fois l'éducation complétée.

La déformation résiduelle maximale en traction, $\varepsilon_{\mathrm{r}}^{\mathrm{sat}}$, est immédiatement déterminée (figure 6.5).

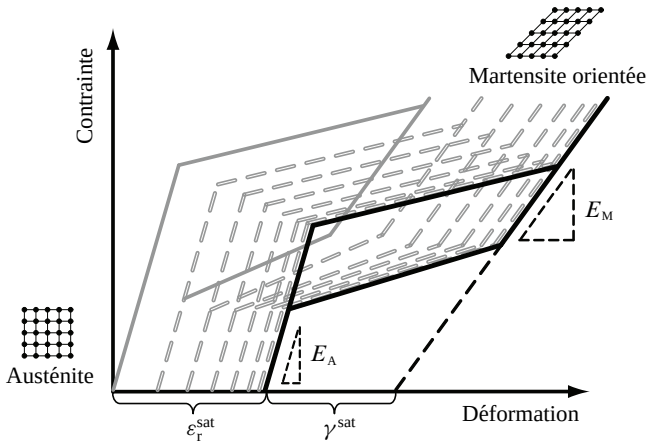


FIG. 6.5 – Représentation schématique de la réponse d'un MMF à un essai de traction répétée dans le domaine pseudoélastique.

En outre, si pour chacun des cycles on reporte le numéro du cycle en abscisse et la

valeur de la déformation résiduelle à la fin du cycle en ordonnée, on obtient une courbe similaire à celle de la figure 6.2. D'après cette courbe, en remarquant que chaque cycle complet de traction correspond à une augmentation de deux de la fraction cumulée z_e de la martensite, on peut déterminer la constante de temps τ par ajustement. En effet, en intégrant (6.24) on établit l'équation suivante de la courbe à ajuster :

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^{sat}\left(1 - \exp\left(-\frac{2N}{\tau}\right)\right), \tag{6.63}$$

où N est le nombre de cycles de traction répétée, et ε_r la composante de $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ parallèle à la direction de la traction appliquée. L'essai de traction répétée permet aussi de déterminer directement les modules de Young de l'austénite et de la martensite et la déformation de transformation maximale en traction du matériau éduqué, γ^{sat} (figure 6.5).

Pour déterminer le reste des paramètres, il faut se servir des équations du modèle. Le cycle pseudoélastique stabilisé, caractéristique du matériau à mémoire de forme éduqué, permet notamment de déterminer a^{sat}, b^{sat} et G^{sat}. Il permet aussi de calculer ξ^{sat} et κ^{sat} connaissant $\left(A_f^0\right)^{sat}$ et la température T_0 à laquelle l'essai est réalisé. En effet,

- la transformation de l'austénite en martensite commence pour une contrainte σ_{ms}^{sat} et une fraction z de la martensite égale à zéro. La fonction critère $\mathcal{F}_z^1$ est nulle, ce qui entraîne

$$\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A}\right)\frac{\left(\sigma_{ms}^{sat}\right)^2}{2} - C^{sat}(T_0) + \left(\sigma_{ms}^{sat} + B^{sat}\right)\gamma^{sat} - a^{sat} - \frac{\beta^{sat}}{2}\left(\gamma^{sat}\right)^2 = 0\,; \tag{6.64}$$

- la fonction critère $\mathcal{F}_z^1$ est également nulle à la fin du changement de phase direct pour une contrainte égale à σ_{mf}^{sat} et une fraction z égale à l'unité. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A}\right)\frac{\left(\sigma_{mf}^{sat}\right)^2}{2} - C^{sat}(T_0) + \left(\sigma_{mf}^{sat} + B^{sat}\right)\gamma^{sat} \\ - \left(G^{sat} + b^{sat}\right) - \left(\alpha^{sat} - \frac{\beta^{sat}}{2}\right)\left(\gamma^{sat}\right)^2 = 0\,;\end{aligned} \tag{6.65}$$

- le changement de phase inverse est contrôlé par la fonction critère $\mathcal{F}_z^2$ et son début est caractérisé par $z = 1$ et une contrainte σ_{as}^{sat}. Dans ce cas, $\mathcal{F}_z^2 = 0$ implique

$$\begin{aligned}-\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A}\right)\frac{\left(\sigma_{as}^{sat}\right)^2}{2} + C^{sat}(T_0) - \left(\sigma_{as}^{sat} + B^{sat}\right)\gamma^{sat} \\ + \left(G^{sat} - b^{sat}\right) + \left(\alpha^{sat} - \frac{\beta^{sat}}{2}\right)\left(\gamma^{sat}\right)^2 = 0\,;\end{aligned} \tag{6.66}$$

- à la fin de la transformation inverse, le matériau est de nouveau complètement austénitique. La fraction volumique z de la martensite s'annule pour une valeur σ_{af}^{sat} de la contrainte. Il en résulte la relation

$$\begin{aligned}-\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A}\right)\frac{\left(\sigma_{af}^{sat}\right)^2}{2} + C^{sat}(T_0) \\ - \left(\sigma_{af}^{sat} + B^{sat}\right)\gamma^{sat} - a^{sat} + \frac{\beta^{sat}}{2}\left(\gamma^{sat}\right)^2 = 0.\end{aligned} \tag{6.67}$$

Les équations (6.64) et (6.67) permettent de calculer a^{sat}.

$$a^{\text{sat}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{E_{\text{M}}} - \frac{1}{E_{\text{A}}}\right)\frac{\left(\sigma_{\text{ms}}^{\text{sat}}\right)^2 - \left(\sigma_{\text{af}}^{\text{sat}}\right)^2}{2} + \left(\sigma_{\text{ms}}^{\text{sat}} - \sigma_{\text{af}}^{\text{sat}}\right)\gamma^{\text{sat}}\right]. \tag{6.68}$$

L'expression de b^{sat} est obtenue en utilisant les équations (6.65) et (6.66).

$$b^{\text{sat}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{E_{\text{M}}} - \frac{1}{E_{\text{A}}}\right)\frac{\left(\sigma_{\text{mf}}^{\text{sat}}\right)^2 - \left(\sigma_{\text{as}}^{\text{sat}}\right)^2}{2} + \left(\sigma_{\text{mf}}^{\text{sat}} - \sigma_{\text{as}}^{\text{sat}}\right)\gamma^{\text{sat}}\right]. \tag{6.69}$$

Les équations (6.64) à (6.67) permettent en plus de calculer le paramètre G^{sat} ainsi que la valeur de $C^{\text{sat}}(T)$ en T_0. On trouve

$$\begin{aligned} G^{\text{sat}} = \frac{1}{2}\Bigg[&\left(\frac{1}{E_{\text{M}}} - \frac{1}{E_{\text{A}}}\right)\frac{\left(\sigma_{\text{mf}}^{\text{sat}}\right)^2 - \left(\sigma_{\text{ms}}^{\text{sat}}\right)^2 + \left(\sigma_{\text{as}}^{\text{sat}}\right)^2 - \left(\sigma_{\text{af}}^{\text{sat}}\right)^2}{2} \\ &+ \left(\sigma_{\text{mf}}^{\text{sat}} - \sigma_{\text{ms}}^{\text{sat}} + \sigma_{\text{as}}^{\text{sat}} - \sigma_{\text{af}}^{\text{sat}}\right)\gamma^{\text{sat}} - 2\left(\alpha^{\text{sat}} - \beta^{\text{sat}}\right)\left(\gamma^{\text{sat}}\right)^2\Bigg], \end{aligned} \tag{6.70}$$

$$\begin{aligned} C^{\text{sat}}(T_0) = \frac{1}{2}\Bigg[&\left(\frac{1}{E_{\text{M}}} - \frac{1}{E_{\text{A}}}\right)\frac{\left(\sigma_{\text{ms}}^{\text{sat}}\right)^2 + \left(\sigma_{\text{af}}^{\text{sat}}\right)^2}{2} \\ &+ \left(\sigma_{\text{ms}}^{\text{sat}} + \sigma_{\text{af}}^{\text{sat}}\right)\gamma^{\text{sat}} - \beta^{\text{sat}}\left(\gamma^{\text{sat}}\right)^2\Bigg] + B^{\text{sat}}\gamma^{\text{sat}}. \end{aligned} \tag{6.71}$$

D'après (6.46), le paramètre κ^{sat} est donné par

$$\kappa^{\text{sat}} = C^{\text{sat}}\left(\left(A_{\text{f}}^0\right)^{\text{sat}}\right). \tag{6.72}$$

$\left(A_{\text{f}}^0\right)^{\text{sat}}$ caractérise la fin de la transformation inverse pour un matériau complètement éduqué. Cette transformation est contrôlée par la fonction critère $\mathcal{F}_z^2$ qui, pour une valeur nulle de la fraction z et sous contrainte nulle, donne

$$C^{\text{sat}}\left(\left(A_{\text{f}}^0\right)^{\text{sat}}\right) = a^{\text{sat}} - \frac{\beta^{\text{sat}}\left(\gamma^{\text{sat}}\right)^2}{2} + B^{\text{sat}}\gamma^{\text{sat}}. \tag{6.73}$$

Le paramètre κ^{sat} est donc tel que

$$\kappa^{\text{sat}} = a^{\text{sat}} - \frac{\beta^{\text{sat}}\left(\gamma^{\text{sat}}\right)^2}{2} + B^{\text{sat}}\gamma^{\text{sat}}. \tag{6.74}$$

Connaissant $\left(A_{\text{f}}^0\right)^{\text{sat}}$, T_0, κ^{sat} et $C^{\text{sat}}(T_0)$, on détermine ξ^{sat}.

$$\begin{aligned} \xi^{\text{sat}} &= \frac{C^{\text{sat}}(T_0) - C^{\text{sat}}\left(\left(A_{\text{f}}^0\right)^{\text{sat}}\right)}{T_0 - \left(A_{\text{f}}^0\right)^{\text{sat}}} \\ &= \frac{C^{\text{sat}}(T_0) - \kappa^{\text{sat}}}{T_0 - \left(A_{\text{f}}^0\right)^{\text{sat}}}. \end{aligned} \tag{6.75}$$

La détermination des valeurs des paramètres associées au matériau vierge se fait de la même manière, en utilisant la première boucle pseudoélastique :

– au début du changement de phase direct, $\mathcal{F}_z^1$ s'annule. En même temps, les fractions z et z_e sont nulles et la contrainte vaut $\sigma_{ms}^{(0)}$. Il en résulte

$$\left(\frac{1}{E_M}-\frac{1}{E_A}\right)\frac{\left(\sigma_{ms}^{(0)}\right)^2}{2}-C^{(0)}(T_0)+\sigma_{ms}^{(0)}\gamma^{(0)}-a^{(0)}-\frac{\beta^{(0)}}{2}\left(\gamma^{(0)}\right)^2=0\,; \quad (6.76)$$

– à la fin de la transformation directe, la fraction z de la martensite et la fraction cumulée z_e correspondante sont égales à l'unité pour une contrainte $\sigma_{as}^{(0)}$ en traction. La déformation équivalente maximale en traction est égale à $\gamma^{(1)}$, où

$$\gamma^{(1)} \stackrel{\text{déf}}{=} \hat{\gamma}(1)=\gamma^{(0)}+\left(\gamma^{sat}-\gamma^{(0)}\right)\left(1-\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right); \quad (6.77)$$

pour cette valeur de γ,

$$\alpha=\hat{\alpha}(1)\stackrel{\text{déf}}{=}\alpha^{(1)} \quad \text{et} \quad \beta=\hat{\beta}(1)\stackrel{\text{déf}}{=}\beta^{(1)}. \quad (6.78)$$

Dans ces conditions, la relation $\mathcal{F}_z^1=0$ donne

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{E_M}-\frac{1}{E_A}\right)\frac{\left(\sigma_{mf}^{(0)}\right)^2}{2}-C^{(0)}(T_0)\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)-C^{sat}(T_0)\left(1-\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)\\&\quad+\left[\sigma_{mf}^{(0)}+B^{sat}\left(1-\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)\right]\gamma^{(1)}\\&\quad-\left(G^{(0)}+b^{(0)}\right)\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\\&\quad-\left(G^{sat}+b^{sat}\right)\left(1-\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)-\left(\alpha^{(1)}-\frac{\beta^{(1)}}{2}\right)\left(\gamma^{(1)}\right)^2=0\,;\end{aligned} \quad (6.79)$$

– la transformation inverse de la martensite en austénite est déclenchée pendant la décharge, lorsque la contrainte de traction atteint une valeur $\sigma_{as}^{(0)}$ pour $z=1$ et $z_e=1$. La condition $\mathcal{F}_z^2=0$ entraîne

$$\begin{aligned}&-\left(\frac{1}{E_M}-\frac{1}{E_A}\right)\frac{\left(\sigma_{as}^{(0)}\right)^2}{2}+C^{(0)}(T_0)\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)+C^{sat}(T_0)\left(1-\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)\\&\quad-\left[\sigma_{as}^{(0)}+B^{sat}\left(1-\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)\right]\gamma^{(1)}\\&\quad+\left(G^{(0)}-b^{(0)}\right)\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\\&\quad+\left(G^{sat}-b^{sat}\right)\left(1-\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)+\left(\alpha^{(1)}-\frac{\beta^{(1)}}{2}\right)\left(\gamma^{(1)}\right)^2=0\,;\end{aligned} \quad (6.80)$$

– à la fin de la transformation inverse, qui correspond à une contrainte en traction égale à $\sigma_{af}^{(0)}$, la fraction volumique de la martensite s'annule. La fraction cumulée devient égale à deux et la déformation équivalente maximale en traction vaut $\gamma^{(2)}$, où

$$\gamma^{(2)} \stackrel{\text{déf}}{=} \hat{\gamma}(2)=\gamma^{(0)}+\left(\gamma^{sat}-\gamma^{(0)}\right)\left(1-\exp\left(-\frac{2}{\tau}\right)\right) \quad (6.81)$$

et $\beta^{(2)} \overset{\text{déf}}{=} \hat{\beta}(2)$. La fonction critère $\mathcal{F}_z^2$ est nulle, ce qui permet d'écrire

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{1}{E_{\mathrm{M}}}-\frac{1}{E_{\mathrm{A}}}\right)\frac{\left(\sigma_{\mathrm{af}}^{(0)}\right)^2}{2}+C^{(0)}(T_0)\exp\left(-\frac{2}{\tau}\right)+C^{\mathrm{sat}}(T_0)\left(1-\exp\left(-\frac{2}{\tau}\right)\right)\\
&\quad-\left[\sigma_{\mathrm{af}}^{(0)}+B^{\mathrm{sat}}\left(1-\exp\left(-\frac{2}{\tau}\right)\right)\right]\gamma^{(2)}\\
&\quad-a^{(0)}\exp\left(-\frac{2}{\tau}\right)-a^{\mathrm{sat}}\left(1-\exp\left(-\frac{2}{\tau}\right)\right)+\frac{\beta^{(2)}}{2}\left(\gamma^{(2)}\right)^2=0.
\end{aligned}
\tag{6.82}
$$

Les équations (6.76), (6.79), (6.80) et (6.82) permettent d'obtenir les expressions des paramètres $a^{(0)}$, $b^{(0)}$ et $G^{(0)}$.

$$
\begin{aligned}
a^{(0)}=\frac{1}{2}\Bigg[&\left(\frac{1}{E_{\mathrm{M}}}-\frac{1}{E_{\mathrm{A}}}\right)\frac{\left(\sigma_{\mathrm{ms}}^{(0)}\right)^2-\left(\sigma_{\mathrm{af}}^{(0)}\right)^2\exp\left(\frac{2}{\tau}\right)}{2}\\
&+\sigma_{\mathrm{ms}}^{(0)}\gamma^{(0)}-\sigma_{\mathrm{af}}^{(0)}\exp\left(\frac{2}{\tau}\right)\gamma^{(2)}\Bigg]\\
&+\frac{1}{2}\left[C^{\mathrm{sat}}(T_0)-B^{\mathrm{sat}}\gamma^{(2)}-a^{\mathrm{sat}}\right]\left(\exp\left(\frac{2}{\tau}\right)-1\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta^{(2)}}{2}\left(\gamma^{(2)}\right)^2\exp\frac{2}{\tau}-\frac{\beta^{(0)}}{2}\left(\gamma^{(0)}\right)^2\right),
\end{aligned}
\tag{6.83}
$$

$$
\begin{aligned}
b^{(0)}=\frac{1}{2}&\left[\left(\frac{1}{E_{\mathrm{M}}}-\frac{1}{E_{\mathrm{A}}}\right)\frac{\left(\sigma_{\mathrm{mf}}^{(0)}\right)^2-\left(\sigma_{\mathrm{as}}^{(0)}\right)^2}{2}+\left(\sigma_{\mathrm{mf}}^{(0)}-\sigma_{\mathrm{as}}^{(0)}\right)\gamma^{(1)}\right]\exp\left(\frac{1}{\tau}\right)\\
&-b^{\mathrm{sat}}\left(\exp\left(\frac{1}{\tau}\right)-1\right),
\end{aligned}
\tag{6.84}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{(0)}=\frac{1}{2}&\left[\left(\frac{1}{E_{\mathrm{M}}}-\frac{1}{E_{\mathrm{A}}}\right)\frac{\left(\sigma_{\mathrm{mf}}^{(0)}\right)^2+\left(\sigma_{\mathrm{as}}^{(0)}\right)^2}{2}\exp\left(\frac{1}{\tau}\right)\right.\\
&\left.+\left(\sigma_{\mathrm{mf}}^{(0)}+\sigma_{\mathrm{as}}^{(0)}\right)\gamma^{(1)}\exp\left(\frac{1}{\tau}\right)-2\left(\alpha^{(1)}-\frac{\beta^{(1)}}{2}\right)\left(\gamma^{(1)}\right)^2\right]-C^{(0)}(T_0)\\
&+\left[B^{\mathrm{sat}}\gamma^{(1)}-C^{\mathrm{sat}}(T_0)-G^{\mathrm{sat}}-\left(\alpha^{(1)}-\frac{\beta^{(1)}}{2}\right)\left(\gamma^{(1)}\right)^2\right]\left(\exp\left(\frac{1}{\tau}\right)-1\right).
\end{aligned}
\tag{6.85}
$$

Dans l'expression de $G^{(0)}$,

$$C^{(0)}(T_0) = \frac{1}{2}\Bigg[\left(\frac{1}{E_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{E_{\mathrm{A}}}\right)\frac{\left(\sigma_{\mathrm{ms}}^{(0)}\right)^2 + \left(\sigma_{\mathrm{af}}^{(0)}\right)^2 \exp\left(\frac{2}{\tau}\right)}{2} + \left(\sigma_{\mathrm{ms}}^{(0)}\gamma^{(0)} + \sigma_{\mathrm{af}}^{(0)}\gamma^{(2)}\exp\left(\frac{2}{\tau}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\beta^{(0)}\left(\gamma^{(0)}\right)^2 + \beta^{(2)}\left(\gamma^{(2)}\right)^2\right)\Bigg] - \frac{1}{2}\left[C^{\mathrm{sat}}(T_0) - B^{\mathrm{sat}}\gamma^{(2)} - a^{\mathrm{sat}} + \frac{\beta^{(2)}}{2}\left(\gamma^{(2)}\right)^2\right]\left(\exp\left(\frac{2}{\tau}\right) - 1\right). \tag{6.86}$$

La connaissance de $\left(A_{\mathrm{f}}^0\right)^{(0)}$ et de $C^{(0)}(T_0)$ permet de calculer les paramètres $\xi^{(0)}$ et $\kappa^{(0)}$ de manière analogue à au cas du matériau éduqué. On trouve

$$\begin{aligned}\kappa^{(0)} &= C^{(0)}\left(\left(A_{\mathrm{f}}^0\right)^{(0)}\right)\\ &= a^{(0)} + \left(a^{\mathrm{sat}} - C^{\mathrm{sat}}\left(\left(A_{\mathrm{f}}^0\right)^{(0)}\right)\right)\left(\exp\left(\frac{2}{\tau}\right) - 1\right)\\ &\quad + B^{\mathrm{sat}}\gamma^{(2)}\left(\exp\left(\frac{2}{\tau}\right) - 1\right) - \frac{\beta^{(2)}}{2}\left(\gamma^{(2)}\right)^2\exp\left(\frac{2}{\tau}\right),\end{aligned} \tag{6.87}$$

$$\xi^{(0)} = \frac{C^{(0)}(T_0) - \kappa^{(0)}}{T_0 - \left(A_{\mathrm{f}}^0\right)^{(0)}}. \tag{6.88}$$

Pour plus de détails concernant l'établissement des expressions des divers paramètres, le lecteur est invité à consulter l'annexe B.

6.4 Simulation numérique et validation du modèle

On propose dans la suite de modéliser le comportement cyclique unidimensionnel d'un MMF. On s'intéresse particulièrement à la modélisation du comportement pseudoélastique cyclique, de l'effet mémoire double sens et de la réponse en 1D du MMF à un chargement cyclique non isotherme.

6.4.1 Simulation de la pseudoélasticité cyclique

La figure 6.6 représente la réponse d'une éprouvette en Nickel–Titane à un essai de traction répétée réalisé au sein de l'Unité de Mécanique de l'ENSTA.

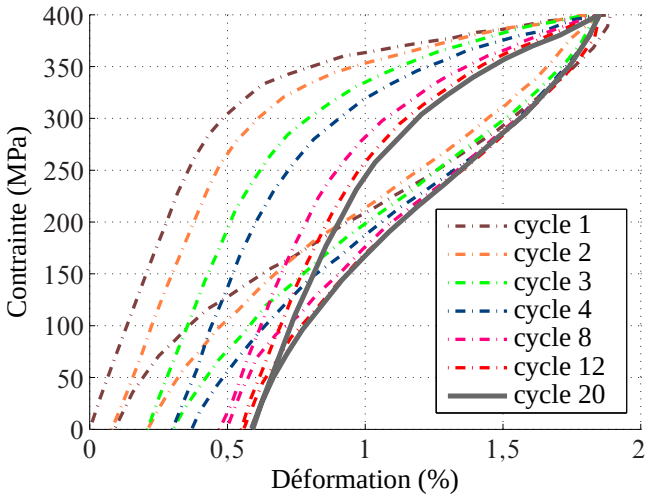


FIG. 6.6 – Réponse d'une éprouvette en Nickel–Titane à un essai de traction répétée. La boucle stabilisée est en trait continu.

L'évolution de la déformation résiduelle avec le nombre de cycles de traction est représentée par la figure 6.7.

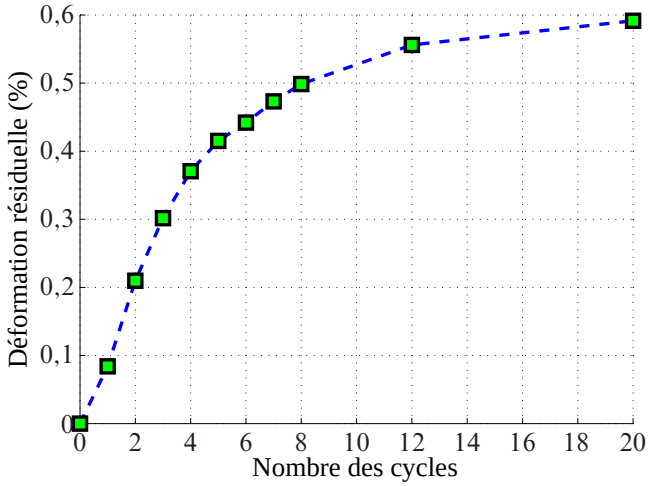


FIG. 6.7 – Évolution de la déformation résiduelle avec le nombre de cycles.

Ce Nickel–Titane est caractérisé par une contrainte de début d'orientation égale à 80 MPa et une contrainte de fin d'orientation égale à 160 MPa. La température de fin de transformation inverse du matériau à l'état vierge est de 42 °C ; cette température varie peu au cours du chargement cyclique. Connaissant ces informations, on peut déterminer les paramètres matériels du présent modèle en utilisant les expressions appropriées établies plus avant. Le tableau 6.1 regroupe l'ensemble des valeurs de ces paramètres.

Les paramètres du modèle			
E_A	70 000 MPa	E_M	45 000 MPa
$a^{(0)}$	1,304 MPa	a^{sat}	0,422 MPa
$b^{(0)}$	0,478 MPa	b^{sat}	0,215 MPa
$G^{(0)}$	2,883 MPa	G^{sat}	1,324 MPa
$\alpha^{(0)}$	8 333,3 MPa	α^{sat}	21 622 MPa
$\beta^{(0)}$	16 667 MPa	β^{sat}	43 243 MPa
$\gamma^{(0)}$	0,96 %	γ^{sat}	0,73 %
$\left(A_f^0\right)^{(0)}$	42 °C	$\left(A_f^0\right)^{sat}$	42 °C
$\kappa^{(0)}$	0,731 MPa	κ^{sat}	0,718 MPa
$\xi^{(0)}$	0,095 MPa/ °C	ξ^{sat}	0,056 MPa/ °C
τ	8,64	ε_r^{sat}	0,591 %

TAB. 6.1 – Paramètres du Nickel–Titane utilisé.

Les figures 6.8, 6.9 et 6.10 montrent que les paramètres sont bien identifiés.

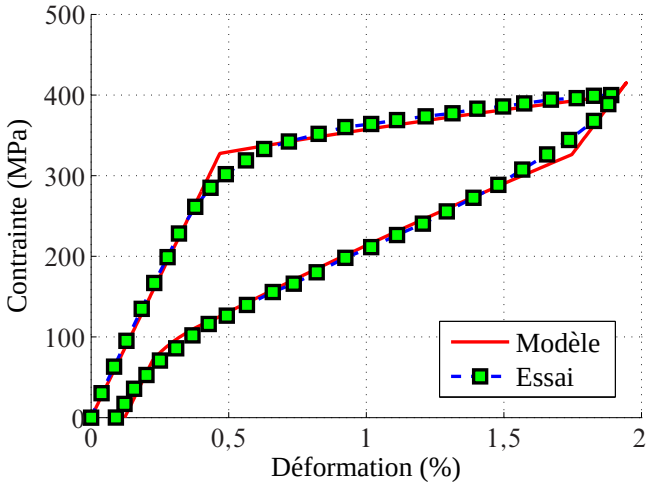


FIG. 6.8 – Comparaison de la réponse réelle du matériau au premier cycle de traction–décharge à la réponse prédite par le modèle.

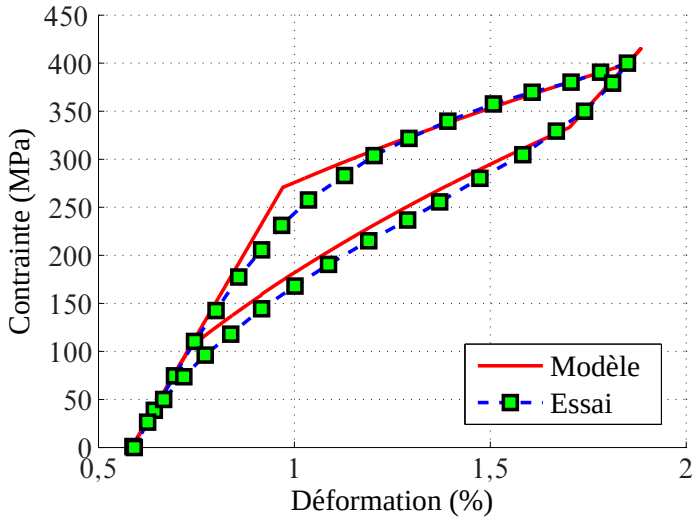


FIG. 6.9 – Comparaison de la réponse réelle du matériau au vingtième cycle de traction–décharge à la réponse prédite par le modèle.

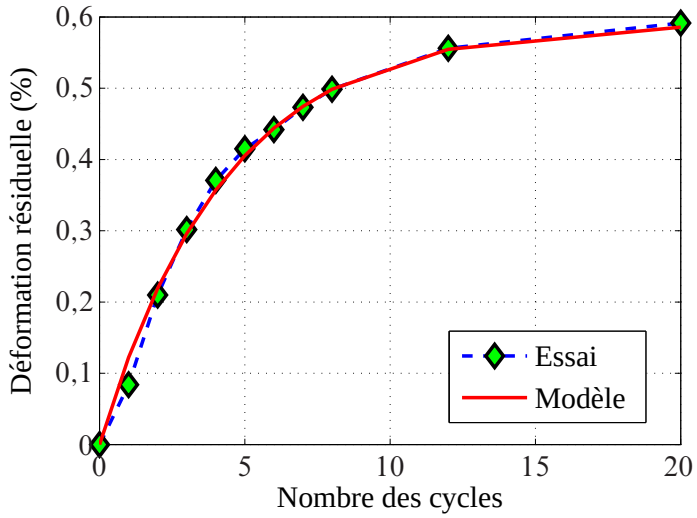


FIG. 6.10 – Comparaison des calculs aux résultats expérimentaux concernant l'évolution de la déformation résiduelle en fin de cycle avec le nombre de cycles.

La figure 6.11 montre que les prédictions du modèle s'accordent bien avec les résultats expérimentaux de l'essai de traction répétée. Pour que la représentation graphique reste claire, seules les boucles 2, 4 et 12 sont reportées.

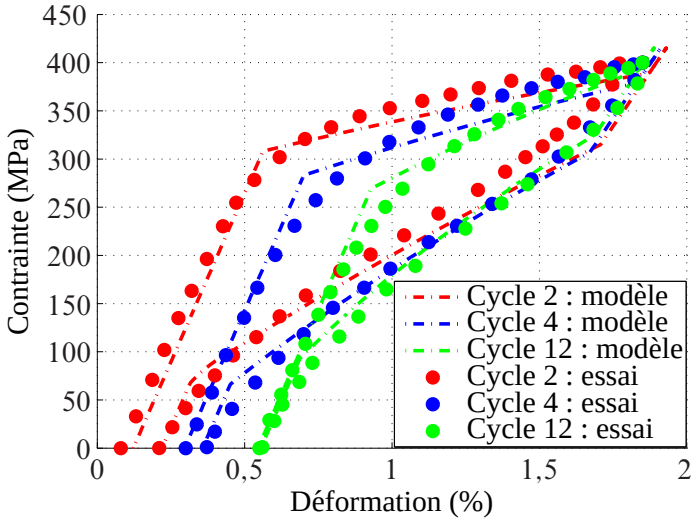
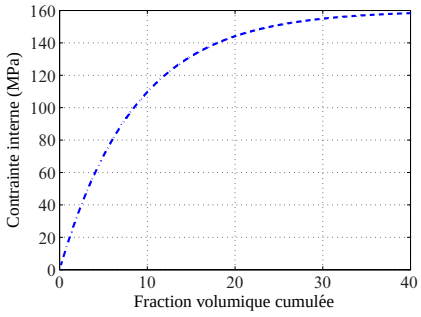
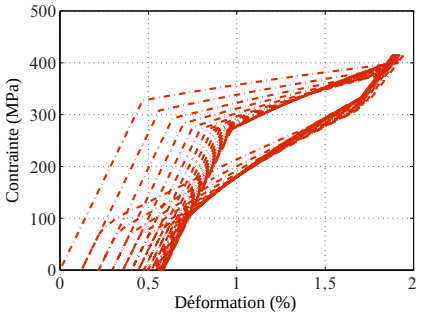


FIG. 6.11 – Comparaison des calculs aux résultats expérimentaux concernant l'évolution de la boucle d'hystérésis pseudoélastique avec les cycles de chargement.

La figure 6.12.a illustre l'évolution de la contrainte interne B avec la fraction volumique cumulée z_e et la réponse contrainte–déformation du matériau pour tous les 20 cycles de chargement est représentée par la figure 6.12.b.



6.12.a – Évolution de la contrainte interne.



6.12.b – Réponse calculée pour les 20 premiers cycles.

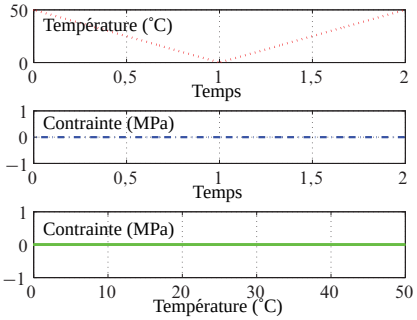
FIG. 6.12 – Prédiction de la réponse d'une éprouvette de Nickel–Titane à un essai de traction répétée.

6.4.2 Simulation de l'effet mémoire double sens

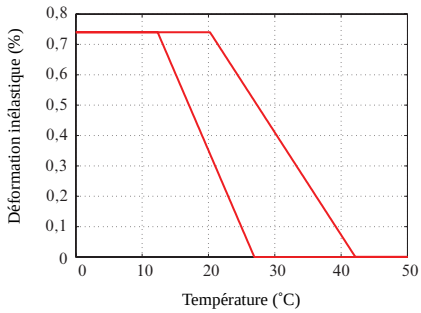
L'essai de traction répétée du paragraphe précédent entraîne l'éducation du MMF. Les caractéristiques thermomécaniques du matériau se stabilisent et les différents paramètres tendent vers leurs valeurs à l'état complètement éduqué. En particulier, la contrainte interne B atteint sa limite B^{sat}, permettant l'obtention de la martensite orientée à partir de l'austénite par simple refroidissement.

Le matériau est initialement à l'état austénitique à 50 °C. On lui fait subir le chargement suivant (figure 6.13.a) :

– de l'instant 0 à l'instant 1, on refroidit le matériau jusqu'à ce que la température atteigne 0 °C. Ceci conduit à l'apparition d'une déformation macroscopique importante par transformation de l'austénite en martensite orientée sous le seul effet de la contrainte interne B (figure 6.13.b) ;
– de l'instant 1 à l'instant 2, le matériau est chauffé de manière à provoquer le changement de phase inverse (figure 6.14). La martensite se transforme de nouveau en austénite et la déformation macroscopique disparaît.



6.13.a – Cycle de chargement.



6.13.b – Effet mémoire double sens.

FIG. 6.13 – Modélisation de l'effet mémoire double sens. Suite à l'éducation du MMF, il se crée au sein du matériau un champ de contraintes internes capable d'entraîner l'orientation de la martensite lors d'un changement de phase direct.

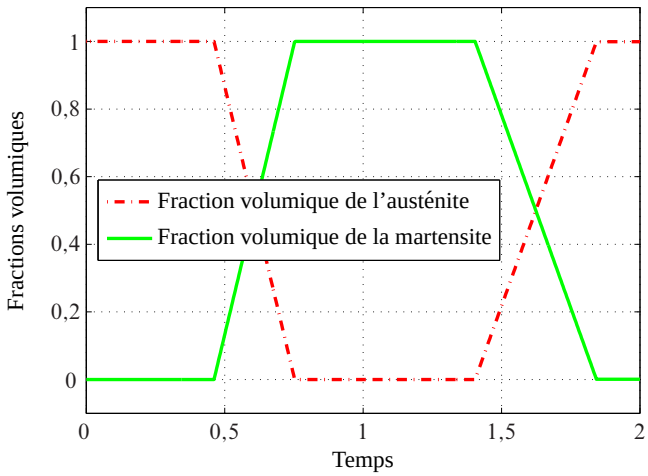


FIG. 6.14 – Modélisation de l'effet mémoire double sens. Le refroidissement du MMF, initialement austénitique, entraîne la formation de la martensite. Cette martensite se transforme de nouveau en austénite quand la température augmente suffisamment.

6.4.3 Simulation de l'effet superthermique cyclique

L'effet superthermique est provoqué par un cycle de refroidissement–chauffage et, simultanément, par un chargement mécanique externe. Dans le cas d'un chargement

cyclique appliqué au matériau vierge, la réponse du matériau dans le plan déformation–température présente un cycle d'hystérésis qui évolue avant de se stabiliser. La figure 6.4.3 due à Bo et Lagoudas, illustre l'effet superthermique cyclique dans le cas d'un fil en Nickel–Titane équiatomique soumis à une contrainte constante égale à 35 MPa.

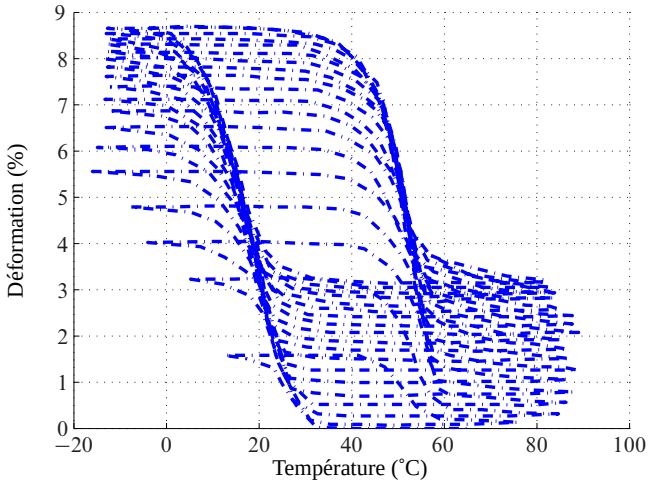
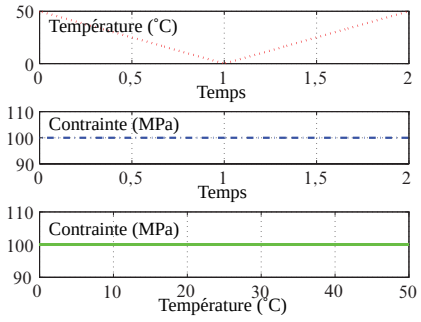


FIG. 6.15 – Réponse superthermique cyclique d'un fil en Nickel–Titane (Bo et Lagoudas, 1999a).

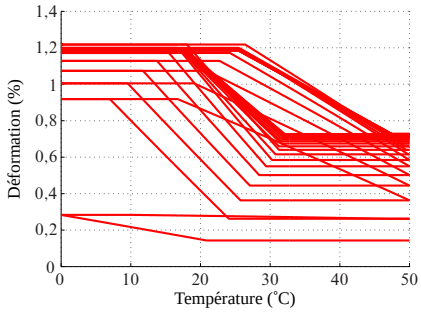
Pour la simulation, on se donne le trajet de chargement de la figure 6.16.a :
– l'austénite est d'abord refroidie de 50 °C à 0 °C sous une contrainte constante égale à 100 MPa. Ceci entraîne la transition de l'austénite en martensite partiellement orientée ;
– la transformation inverse est provoquée par un chauffage sous la même contrainte de 100 MPa.

Le matériau à mémoire de forme, initialement vierge, est soumis à ce trajet de chargement qu'on répète 20 fois.

La figure 6.16.b montre l'évolution de la boucle d'hystérésis déformation–température caractéristique de l'effet superthermique.



6.16.a – Cycle de chargement.



6.16.b – Stabilisation de la boucle d'hystérésis.

FIG. 6.16 – Modélisation de l'effet superthermique dans le cas d'un chargement cyclique. La boucle d'hystérésis se stabilise après un certain nombre de cycles.

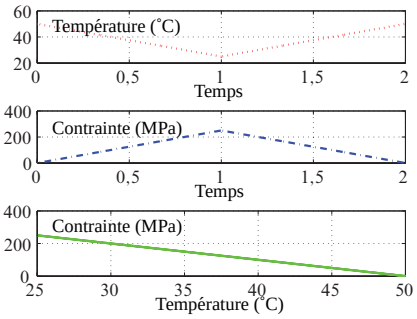
6.4.4 Réponse à un chargement cyclique quelconque

Le présent modèle est capable de simuler la réponse d'un MMF à un essai de chargement cyclique thermomécanique quelconque. La validation est cependant difficile dans le cas général à cause d'un manque de résultats expérimentaux.

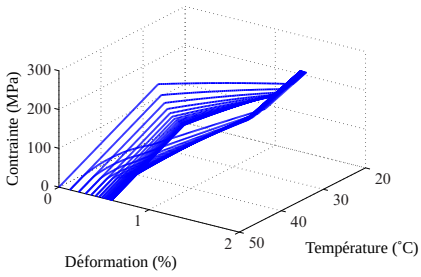
On s'intéresse au comportement du MMF soumis à 20 cycles de chargement thermomécanique identiques à celui de la figure 6.17.a :

- le matériau est d'abord refroidi à partir de l'état austénitique tout en appliquant une contrainte de traction croissante jusqu'à transformation totale de l'austénite en martensite ;
- la martensite obtenue est ensuite transformée de nouveau en austénite par chauffage accompagné d'une diminution du niveau de contrainte jusqu'à décharge totale.

La réponse du MMF à ce genre de chargement (figure 6.17.b), ressemble à la fois au comportement pseudoélastique et à l'effet superthermique comme le montrent les projections sur les plans déformation–contrainte (figure 6.18.a) et température–déformation (figure 6.18.b).

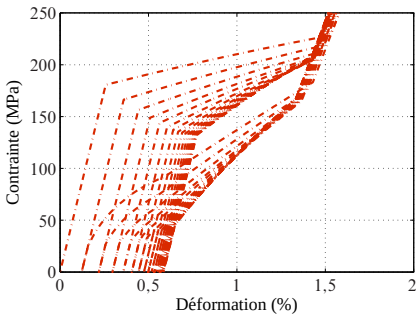


6.17.a – Cycle de chargement.

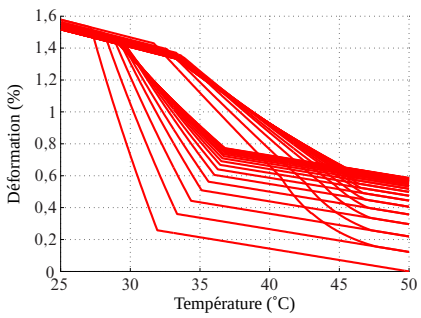


6.17.b – Stabilisation de la boucle d'hystérésis.

FIG. 6.17 – Réponse d'un MMF à un chargement thermomécanique cyclique. La boucle d'hystérésis se stabilise après un certain nombre de cycles.



6.18.a – Réponse en contrainte–déformation.



6.18.b – Réponse en déformation–température

FIG. 6.18 – Réponse d'un MMF à un chargement thermomécanique cyclique. Projections sur les plans déformation–contrainte et température–déformation.

6.5 Ébauche d'un modèle de fatigue des MMF

La fatigue d'un matériau à mémoire de forme s'explique à l'échelle microscopique par l'apparition et la propagation de microfissures au sein du matériau (Melton et Mercier, 1979a), suite à l'application d'un chargement thermomécanique variable dans le temps. Une compréhension plus poussée du phénomène est cependant compliquée, à cause de certaines propriétés caractéristiques des MMF, notamment le changement de phase qui peut se produire localement au sein du matériau (Wagner et coll., 2004) et l'apparition de la martensite résiduelle (Siredey et coll., 2005). La formation de la martensite ralentit la propagation des fissures dans le MMF (Eggeler et coll., 2004).

6.5.1 Étude expérimentale

À cause des similarités au niveau du mécanisme responsable de l'endommagement, il est intéressant d'étudier la fatigue des MMF dans un cadre similaire à celui des matériaux élastoplastiques usuels. Il convient donc de distinguer, en fonction du nombre de cycles à la rupture :

- la fatigue à faible nombre de cycles ou « oligocyclique » ;
- la fatigue associée à une endurance limitée du matériau ;
- la fatigue à grand nombre de cycles ou « polycyclique ».

Dans le cadre du présent mémoire, on s'intéresse à la fatigue résultant d'un comportement pseudoélastique cyclique des MMF. Dans ce cas, la rupture se produit généralement à faible nombre de cycles.

Matériau utilisé et traitement thermomécanique

Il s'agit d'un Nickel–Titane de composition massique 51,3 %Ti et 48,7 %Ni. La taille des grains est entre 60 µm et 70 µm. Les températures de changement de phase à contrainte nulle, déterminées à l'aide d'un essai de calorimétrie à balayage différentiel, sont les suivantes : $M_{\mathrm{f}}^{0} = 25$ °C, $M_{\mathrm{s}}^{0} = 39$ °C, $A_{\mathrm{s}}^{0} = 29$ °C et $A_{\mathrm{f}}^{0} = 42$ °C.

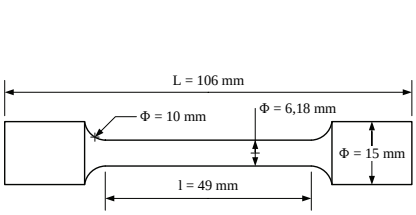
Les essais de chargement cyclique sont réalisés sur des éprouvettes pleines qui, contrairement aux fils, peuvent être sollicitées en compression. Par conséquent, il est possible d'étudier l'effet d'une contrainte moyenne négative sur l'« endurance » du matériau, c'est-à-dire sur sa résistance à la fatigue.

On fait subir à toutes les éprouvettes le même traitement thermomécanique qui consiste en un écrouissage de 20 % en traction, suivi d'un recuit à 400 °C pendant une heure. Ce traitement augmente le seuil de plasticité du Nickel–Titane, améliorant ainsi le comportement pseudoélastique du matériau (Wayman et Otsuka, 1999).

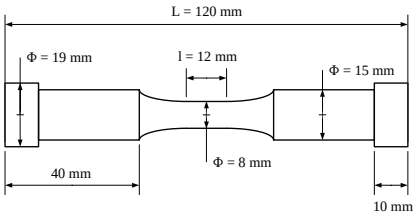
Essais réalisés

Les essais sont pilotés en contrainte à une fréquence de 0,3 Hz. Ils sont caractérisés par une amplitude constante, σ_{a}, égale à 550 MPa et une contrainte maximale inférieure au seuil de plasticité.

Afin d'étudier l'effet de la contrainte moyenne sur la fatigue du Nickel–Titane, on considère plusieurs rapports de charge $R \in \{0, 0{,}2, -1\}$, où $R \overset{\text{déf}}{=} \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$. Les géométries des éprouvettes utilisées sont représentées par les figures 6.19.a 6.19.b.



6.19.a – Pour $R = 0$.



6.19.b – Pour $R \in \{0,2, -1\}$.

FIG. 6.19 – Géométries des éprouvettes utilisées pour les essais cycliques.

6.5.2 Résultats et interprétations

Courbes de Wöhler

La figure 6.20 montre des courbes de Wöhler du Nickel–Titane étudié.

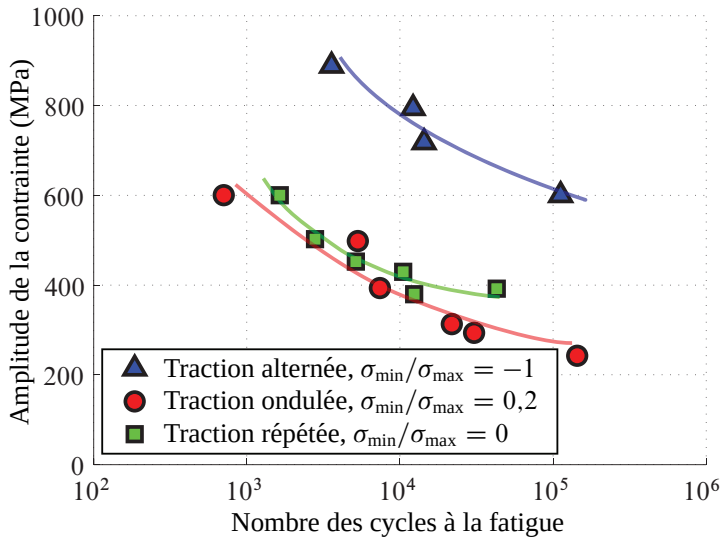


FIG. 6.20 – Courbes de Wöhler du Nickel–Titane. La durée de vie est affectée par la valeur moyenne de la contrainte appliquée.

Ces courbes représentent l'évolution du nombre de cycles à la fatigue du matériau, sous chargement cyclique uniaxial, en fonction de l'amplitude de la contrainte appliquée. Elles mettent en évidence l'effet de la contrainte moyenne sur l'endurance du Nickel–Titane. On constate, en effet, qu'une contrainte moyenne de compression permet une durée de vie plus longue par rapport à une contrainte moyenne de traction ; ceci peut être justifié à l'échelle microscopique par la tendance d'une contrainte de compression à refermer les microfissures à l'origine de la fatigue. Les courbes de Wöhler peuvent être utilisées pour la prédiction de la durée de vie d'un matériau sous chargement uniaxial uniquement et pour une contrainte moyenne donnée, elles ne conviennent donc pas pour le calcul à la fatigue de structures en MMF.

Prédiction de la durée de vie en fatigue oligocyclique

Dans la littérature, afin d'estimer la durée de vie des MMF en pseudoélasticité cyclique, les courbes de Wöhler sont abandonnées au profit de critères de type Manson–Coffin qui relient le nombre de cycles à la fatigue du matériau aux déformations plastiques.

En effet, dès 1979, Melton et Mercier montrent que la durée de vie des fils en MMF obéit au critère de Manson–Coffin et ce pour différents types d'alliages. Ce critère est repris dans plusieurs travaux ultérieurs (Melton et Mercier, 1979a ; Wagner et coll., 2004 ; Tolomeo et coll., 2001) ; sa généralisation au cas des chargements multiaxiaux est possible, moyennant la définition de déformations équivalentes, mais l'intérêt pratique d'une telle démarche n'est pas démontré.

Dans le cadre de cette thèse, on propose un critère énergétique de durée de vie en fatigue oligocyclique, en s'appuyant sur les travaux de Charkaluk et coll. (2002) dans le domaine de la fatigue oligocyclique des aciers. En effet, pour un matériau à mémoire de forme, la stabilisation de la boucle pseudoélastique rappelle le phénomène d'accommodation observable dans le cas des aciers soumis à certaines conditions de chargement cyclique ; la déformation inélastique est bornée dans les deux cas, mais le matériau continue à dissiper de l'énergie. La quantité d'énergie $\mathcal{W}_\mathrm{d}$ dissipée par cycle de chargement est donnée par

$$\mathcal{W}_\mathrm{d} = \oint \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{6.89}$$

Une fois le matériau accommodé, cette énergie devient constante, comme le montre la figure 6.21.

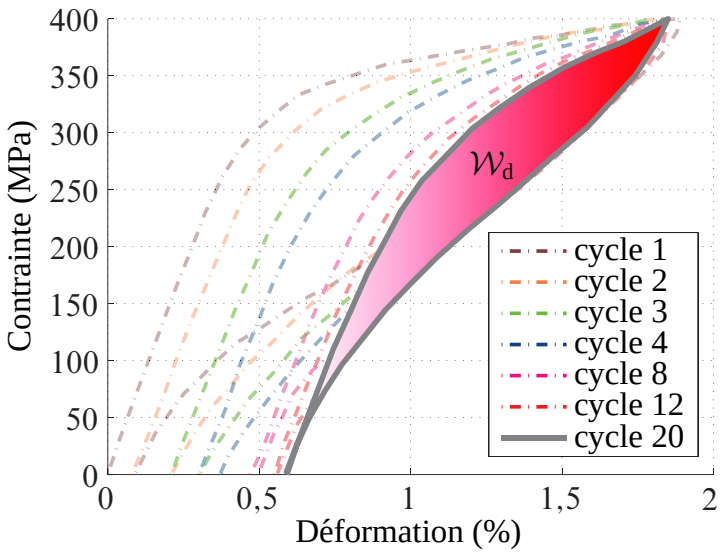


FIG. 6.21 – Stabilisation de la quantité d'énergie dissipée par cycle, $\mathcal{W}_\mathrm{d}$, au cours du chargement cyclique.

Dans le cas du Nickel–Titane étudié, l'évolution de la quantité d'énergie dissipée avec le nombre de cycles est représentée par la figure 6.22.

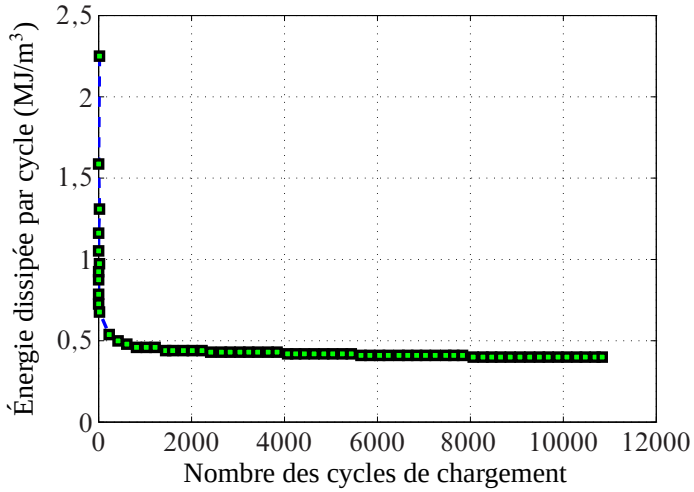


FIG. 6.22 – Énergie dissipée par cycle en fonction du nombre de cycles de chargement.

La figure 6.23 montre les prédictions du modèle pour les vingt premiers cycles.

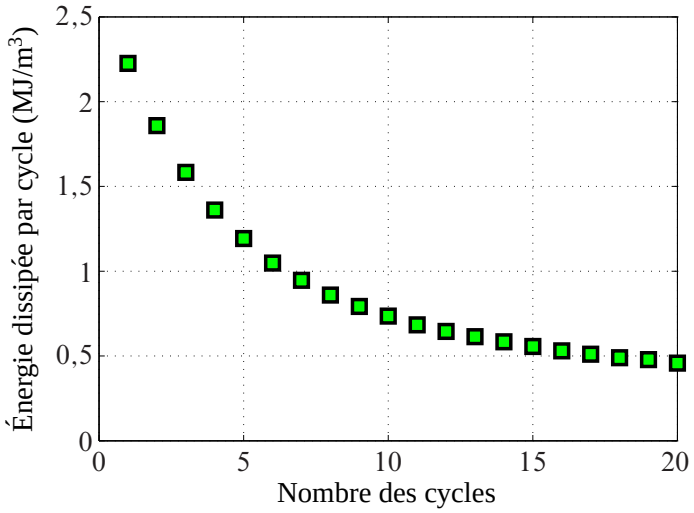


FIG. 6.23 – Résultats de calcul. Énergie dissipée par cycle en fonction du nombre de cycles de chargement.

Même si l'utilisation de l'énergie dissipée par cycle stabilisé pour l'estimation de la durée de vie d'un matériau est critiquée (Halford, 1966 ; Pineau et Pétrequin, 1997), son intérêt pratique est bien démontré : une approche énergétique développée par Charkaluk et coll. (2002) est appliquée avec succès à la prédiction de la durée de vie de pièces d'automobile en acier soumises à des chargements thermomécaniques compliqués. En s'inspirant de ce travail, on considère la figure 6.24 représentant la quantité d'énergie $\mathcal{W}_\mathrm{d}$ dissipée par cycle, en échelle logarithmique, en fonction du nombre de cycles à la fatigue, N_f, du Nickel–Titane.

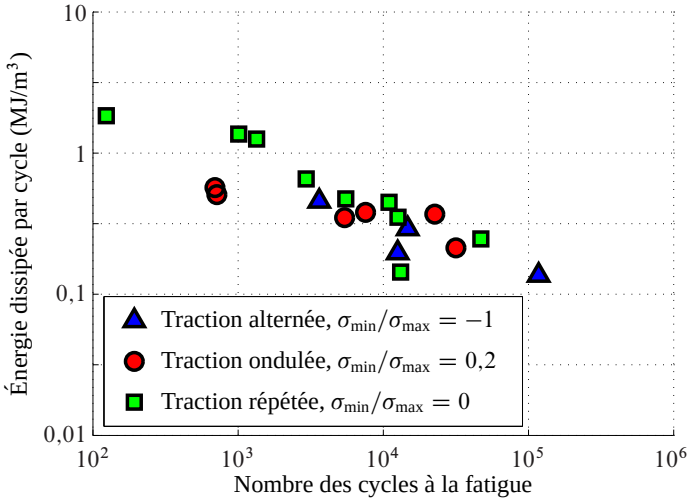


FIG. 6.24 – Énergie dissipée par cycle et nombre correspondant de cycles à la fatigue.

Cette figure montre une dépendance quasi-linéaire de $\log \mathcal{W}_\mathrm{d}$ par rapport à $\log N_\mathrm{f}$ et ce indépendamment de la valeur de la contrainte moyenne. On propose donc (Moumni et coll., 2005) d'approcher les résultats expérimentaux par une courbe d'équation

$$\mathcal{W}_\mathrm{d} = \alpha N_\mathrm{f}^{\beta}, \tag{6.90}$$

où α et β sont des paramètres du matériau. La figure 6.25 montre un bon accord des calculs avec les résultats des essais pour $\alpha = 11$ et $\beta = -0{,}377$.

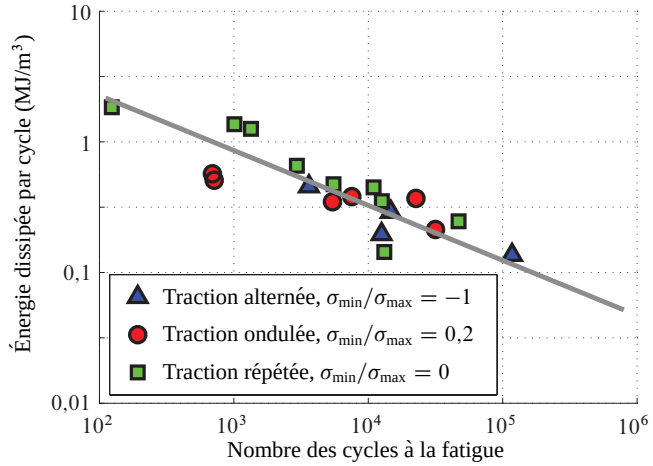


FIG. 6.25 – Représentation approchée de la dépendance de l'énergie dissipée par cycle par rapport au nombre de cycles à la fatigue à l'aide de la courbe d'équation $\mathcal{W}_\mathrm{d} = 11 N_\mathrm{f}^{-0{,}377}$.

L'expression (6.90) peut être utilisée immédiatement pour des calculs en 3D, puisqu'elle fait intervenir uniquement des quantités scalaires.

Sur le plan numérique, le cycle stabilisé en pseudoélasticité cyclique peut être déterminé à l'aide du modèle unifié. La quantité d'énergie dissipée par cycle stabilisé et, par conséquent, le nombre de cycles à la fatigue d'une structure en MMF peuvent donc être déterminés numériquement. Cependant, la validité du critère, constatée dans le cas d'un chargement uniaxial, reste à vérifier pour des chargements plus compliqués, en particulier pour la torsion.

6.6 Conclusion

Le modèle présenté au cours de ce chapitre permet de tenir compte de plusieurs phénomènes associés au comportement des matériaux à mémoire de forme soumis à des chargements cycliques. Il constitue une extension du chapitre précédent motivée par une idée simple : à l'échelle macroscopique, le comportement cyclique d'un MMF peut être interprété comme une transition d'un matériau à mémoire de forme instable vers un autre, stable ; cette transition peut être reproduite facilement sur le plan théorique en faisant dépendre les paramètres du modèle de comportement sous chargement non-cyclique d'une seule variable scalaire fonction du nombre de cycles. En outre, deux variables d'état tensorielles sont introduites : la contrainte interne $\boldsymbol{B}$ et la déformation résiduelle $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}$, permettant de simuler l'effet mémoire double sens.

Dans le cas du comportement pseudoélastique cyclique, le présent modèle est validé en comparant ses prédictions à des résultats d'essais réalisés au sein de l'Unité de Mécanique de l'ENSTA. Un critère de durée de vie en fatigue est proposé ; ce critère est validé dans le cas d'un chargement uniaxial mais sa validité pour des chargements multiaxiaux reste à prouver.

Bibliographie

R. ABEYARATNE ET S. JOO KIM, « Cyclic effects in shape-memory alloys: a one-dimensional continuum model », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 34, p. 3273–3289, 1997.

F. AURICCHIO, S. MARFIA ET E. SACCO, « Modelling of SMA materials: training and two way memory effect », *Computers and Structures*, vol. 81, p. 2301–2317, 2003.

Z. BO ET D. LAGOUDAS, « Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, part III: evolution of plastic strains and two-way shape memory effect », *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, p. 1175–1203, 1999a.

Z. BO ET D. LAGOUDAS, « Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, part I: theoretical derivations », *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, p. 1089–1140, 1999b.

E. CHARKALUK, A. BIGNONNET, A. CONSTANTINESCU ET K. DANG VAN, « Fatigue design criterion for structures under thermomechanical loading », *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 25, p. 1199–206, 2002.

G. EGGELER, E. HORNBOGEN, A. YAWNY, A. HECKMANN ET M. WAGNER, « Structural and functional fatigue of NiTi shape memory alloys », *Materials Science and Engineering A*, vol. 378, p. 24–33, 2004.

G. HALFORD, « The energy required for fatigue », *Journal of Materials*, vol. 1, p. 3–18, 1966.

C. LEXCELLENT ET G. BOURBON, « Thermodynamical model of cyclic behaviour of Ti–Ni and Cu–Zn–Al shape memory alloys under isothermal undulated tensile tests », *Mechanics of Materials*, vol. 24, p. 59–73, 1996.

T. LIM ET D. MCDOWELL, « Cyclic thermomechanical behavior of a polycrystalline pseudoelastic shape memory alloy », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 50, p. 651–676, 2002.

Y. LIU, Z. XIE ET J. VAN HUMBEECK, « Cyclic deformation of NiTi shape memory alloys », *Materials Science and Engineering A*, vol. 273–275, p. 673–678, 1999.

K. MELTON ET O. MERCIER, « The effect of the martensitic phase transformation on the low cycle fatigue behaviour of polycrystalline Ni–Ti and Cu–Zn–Al alloys », *Materials Science and Engineering*, vol. 40, p. 81–87, 1979a.

K. MELTON ET O. MERCIER, « Fatigue life of CuZnAl alloys », *Scripta Metallurgica*, vol. 13, p. 73–75, 1979b.

K. MELTON ET O. MERCIER, « Fatigue of NiTi thermoelastic martensites », *Acta Metallurgica*, vol. 27, p. 137–144, 1979c.

N. MORGAN, « Medical shape memory alloy applications — the market and its products », *Materials Science and Engineering A*, vol. 378, p. 16–23, 2004.

Z. MOUMNI, A. VAN HERPEN ET P. RIBERTY, « Fatigue analysis of shape memory alloys: energy approach », *Smart Materials and Structures*, vol. 14, p. S287–S292, 2005.

A. PINEAU ET P. PÉTREQUIN, *La fatigue des matériaux et des structures, 2^e édition revue et augmentée*, chap. 4, p. 155–214, Hermes, Paris, 1997.

G. PORTER, P. LIAW, T. TIEGS ET K. WU, « Fatigue and fracture behavior of Nickel–Titanium shape-memory alloy reinforced aluminum composites », *Materials Science and Engineering A*, vol. 314, p. 186–193, 2001.

W. PREDKI, M. KLÖNNE ET A. KNOPIK, « Cyclic torsional loading of pseudoelastic NiTi shape memory alloys: damping and fatigue failure », *Materials Science and Engineering A*, vol. 417, p. 182–189, 2006.

N. SIREDEY, A. HAUTCOEUR ET A. EBERHARDT, « Lifetime of superelastic Cu–Al–Be single crystal wires under bending fatigue », *Materials Science and Engineering A*, vol. 396, p. 296–301, 2005.

K. TANAKA, F. NISHIMURA, T. HAYASHI, H. TOBUSHI ET C. LEXCELLENT, « Phenomenological analysis on subloops and cyclic behavior in shape memory alloys under mechanical and/or thermal loads », *Mechanics of Materials*, vol. 19, p. 281–292, 1995.

D. TOLOMEO, S. DAVIDSON ET M. SANTINORANONT, « Cyclic properties of superelastic Nitinol: design implications », dans *Shape memory and superelastic technologies conference proceedings*, 2001.

R. VAIDYNANATHAN, D. DUNAND ET U. RAMAMURTY, « Fatigue crack-growth in shape-memory Ni-Ti and NiTi-TiC composites », *Materials Science and Engineering A*, vol. 289, p. 208–216, 2000.

M. WAGNER, T. SAWAGUCHI, G. KAUSTRÄTER, D. HÖFFKEN ET G. EGGELER, « Structural fatigue of pseudoelastic NiTi shape memory wires », *Materials Science and Engineering A*, vol. 378, p. 105–109, 2004.

C. WAYMAN ET K. OTSUKA (coordinateurs), *Shape Memory Alloys*, Cambridge University Press, 1999.

Z. XIE, Y. LIU ET J. VAN HUMBEECK, « Microstructure of NiTi shape memory alloy due to tension–compression cyclic deformation », *Acta Materialia*, vol. 46, p. 1989–2000, 1998.

Conclusion générale

Au cours de ce mémoire, nous avons présenté un modèle *complet* et *unifié* de comportement des matériaux à mémoire de forme et un critère énergétique applicable au calcul à la fatigue de structures fonctionnant dans le domaine pseudoélastique. Le modèle et le critère sont validés en comparant leurs prédictions à des résultats expérimentaux.

Notre modélisation présente les avantages suivants :

- elle est *complète*, c'est-à-dire qu'elle permet de simuler tous les principaux phénomènes caractéristiques du comportement des MMF. La simulation s'appuie sur une même loi de comportement et sur un même ensemble de lois complémentaires, ce qui lui confère un caractère *unifié* ;
- les paramètres sont simples à identifier ;
- l'accord des prédictions avec les résultats expérimentaux disponibles est satisfaisant ;
- étant donné la prise en compte des chargements non proportionnels, il est possible d'effectuer des calculs de structures en MMF soumises à des chargements complexes ;
- les chargements cycliques sont pris en compte. Il est donc possible de déterminer l'état stabilisé d'une structure soumise à des cycles de changement de phase répétés dans le domaine pseudoélastique. En particulier, le modèle permet de calculer l'énergie dissipée par cycle stabilisé en tout point de la structure ; le critère énergétique peut ensuite être utilisé pour estimer sa durée de vie.

Notre travail ouvre la voie vers une modélisation plus détaillée du comportement des MMF, permettant la prise en compte de certains effets souvent négligés, comme la formation de la phase R, l'apparition de boucles internes liées à des charges–décharges partielles dans le domaine pseudoélastique et la dissymétrie du comportement en traction et en compression. Nous pensons, par ailleurs, qu'il est possible de décrire la dynamique des MMF moyennant une extension du présent modèle.

Sur le plan expérimental, il serait intéressant d'appliquer des technologies nouvelles à l'étude des matériaux à mémoire de forme. Dans ce cadre, la thermographie infrarouge nous semble utile pour caractériser la localisation du changement de phase au niveau de certaines structures ; d'autres techniques, comme l'interaction laser–matière, promettent une meilleure description de la cinétique de la transformation martensitique.

En outre, le problème de la fatigue des MMF devra faire l'objet de recherches plus poussées. Dans l'immédiat, il est nécessaire de tester la validité de notre critère de durée de vie pour différents types de chargement, notamment pour la torsion, afin de vérifier son caractère intrinsèque.

ANNEXE A

Calculs relatifs au chapitre 4

A.1 Lois d'état

Le lagrangien s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\overset{\text{déf}}{=} L(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, z_1, z_2, z_3)\\ &= z_1\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1 : \boldsymbol{K}_{\text{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_1\right) + z_2\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\text{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + C(T)\right]\\ &\quad + z_3\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\text{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) + C(T)\right]\\ &\quad + Gz_1(z_2 + z_3) + Hz_2z_3\\ &\quad - \boldsymbol{\lambda} : \left(\sum_{i=1}^{3} z_i\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}\right) - \nu_0\left(\sum_{i=1}^{3} z_i - 1\right) - \sum_{i=1}^{3}\lambda_i z_i,\end{aligned} \tag{A.1}$$

où

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \lambda_i \geqslant 0 \text{ et } \lambda_i z_i = 0. \tag{A.2}$$

Le changement de phase est le seul processus dissipatif. Par conséquent, seules les forces thermodynamiques $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$, associées à l'évolution des fractions volu-

miques z_1, z_2 et z_3 respectivement, peuvent ne pas être nulles. Il vient

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\sigma}, \tag{A.3}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad z_1(\boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}, \tag{A.4}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad z_2\left[\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) - \boldsymbol{\lambda}\right] = \mathbf{0}, \tag{A.5}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_3} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad z_3\left[\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) - \boldsymbol{\lambda}\right] = \mathbf{0}, \tag{A.6}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1} = \mathcal{A}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_1 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1 : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 - G(z_2 + z_3) + \boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \nu_0 + \lambda_1, \tag{A.7}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_2} = \mathcal{A}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_2 = -\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + C(T)\right] - Gz_1 - Hz_3 + \boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \nu_0 + \lambda_2, \tag{A.8}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_3} = \mathcal{A}_3 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_3 = -\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) + C(T)\right] - Gz_1 - Hz_2 + \boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{\varepsilon}_3 + \nu_0 + \lambda_3, \tag{A.9}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad z_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + z_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + z_3\boldsymbol{\varepsilon}_3 = \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{A.10}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 + z_2 + z_3 = 1, \tag{A.11}$$

avec les conditions (A.2).

Quand les fractions z_i sont toutes non nulles, (A.4) à (A.6), en tenant compte de (A.3), donnent

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ &= \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \\ &= \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0), \end{aligned} \tag{A.12}$$

d'où

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}, \tag{A.13}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_0, \tag{A.14}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3 = \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}_0. \tag{A.15}$$

Compte tenu des équations (A.13) à (A.15), (A.10) implique

$$\left[z_1\boldsymbol{K}_{\mathrm{A}}^{-1} + (z_2 + z_3)\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}}^{-1}\right] : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon} - (z_2 - z_3)\boldsymbol{\varepsilon}_0, \tag{A.16}$$

d'où

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{K} : [\boldsymbol{\varepsilon} - (z_2 - z_3)\boldsymbol{\varepsilon}_0], \tag{A.17}$$

$\boldsymbol{K}$ étant le module élastique équivalent défini par

$$\boldsymbol{K} = \left[z_1\boldsymbol{K}_{\mathrm{A}}^{-1} + (1 - z_1)\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}}^{-1}\right]^{-1}. \tag{A.18}$$

On peut démontrer facilement que l'expression (A.18) de la loi de comportement est valable quelque soit la composition du matériau.

A.2 Pseudo-potentiel de dissipation et fonctions critères

Le pseudo-potentiel de dissipation $\mathcal{D}$ est tel que

$$\mathcal{D} = \alpha \dot{z}_1 + \beta \dot{z}_2 + \gamma \dot{z}_3, \tag{A.19}$$

avec

$$\alpha = a(z_2 + z_3) \operatorname{sign} \dot{z}_1, \tag{A.20}$$
$$\beta = (b_1 z_1 + b_2 z_3) \operatorname{sign} \dot{z}_2, \tag{A.21}$$
$$\gamma = (b_1 z_1 + b_2 z_2) \operatorname{sign} \dot{z}_3. \tag{A.22}$$

a, b_1 et b_2 sont des constantes positives.

Les lois d'évolution des variables dissipatives vérifient

$$\mathcal{A}_i \in \partial_{\dot{z}_i} \mathcal{D} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \tag{A.23}$$

d'où les inégalités

$$|\mathcal{A}_1| \leqslant a(z_2 + z_3), \tag{A.24}$$
$$|\mathcal{A}_2| \leqslant (b_1 z_1 + b_2 z_3), \tag{A.25}$$
$$|\mathcal{A}_3| \leqslant (b_1 z_1 + b_2 z_2). \tag{A.26}$$

Compte tenu des relations (A.3), (A.7), (A.8) et (A.9), ces inégalités fournissent les critères suivants, associés à l'évolution des fractions volumiques :

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1 : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \nu_0 - (G + a)(z_2 + z_3) + \lambda_1 \leqslant 0, \tag{A.27}$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1 : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \nu_0 + (G - a)(z_2 + z_3) - \lambda_1 \leqslant 0, \tag{A.28}$$

$$-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \tag{A.29}$$
$$- C(T) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \nu_0 - (G + b_1) z_1 - (H + b_2) z_3 + \lambda_2 \leqslant 0,$$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \tag{A.30}$$
$$+ C(T) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_2 - \nu_0 + (G - b_1) z_1 + (H - b_2) z_3 - \lambda_2 \leqslant 0,$$

$$-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) \tag{A.31}$$
$$- C(T) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_3 + \nu_0 - (G + b_1) z_1 - (H + b_2) z_2 + \lambda_3 \leqslant 0,$$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) \tag{A.32}$$
$$+ C(T) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_3 - \nu_0 + (G - b_1) z_1 + (H - b_2) z_2 - \lambda_3 \leqslant 0.$$

En raison de (A.2), un multiplicateur λ_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, n'intervient que lorsque la fraction z_i associée s'annule. Dans ce cas, (A.2) donne

$$\dot{\lambda_i} z_i + \lambda_i \dot{z}_i = 0 \Rightarrow \lambda_i \dot{z}_i = 0. \tag{A.33}$$

Si λ_i n'est pas nulle, $\dot{z}_i$ l'est nécessairement. Par conséquent, $\forall z_i \geqslant 0$, l'évolution de la fraction volumique z_i ne dépend pas de λ_i. On définit alors, indépendamment de λ_i, les fonctions critères suivantes :

$$\mathcal{F}_1^1 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1 : \boldsymbol{K}_{\text{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \nu_0 - (G + a)(z_2 + z_3), \tag{A.34}$$

$$\mathcal{F}_2^1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1 : \boldsymbol{K}_{\text{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \nu_0 + (G - a)(z_2 + z_3), \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1^2 = &-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\text{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \\ &- C(T) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \nu_0 - (G + b_1)z_1 - (H + b_2)z_3,\end{aligned} \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2^2 = &\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\text{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \\ &+ C(T) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_2 - \nu_0 + (G - b_1)z_1 + (H - b_2)z_3,\end{aligned} \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1^3 = &-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\text{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) \\ &- C(T) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_3 + \nu_0 - (G + b_1)z_1 - (H + b_2)z_2,\end{aligned} \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2^3 = &\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) : \boldsymbol{K}_{\text{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_0) \\ &+ C(T) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_3 - \nu_0 + (G - b_1)z_1 + (H - b_2)z_2.\end{aligned} \tag{A.39}$$

On considère à titre d'exemple la transformation de l'austénite en martensite M^+ uniquement :

– au début de la transformation, $z_1 = 1$ et (A.13) s'applique. La fonction critère $\mathcal{F}_2^1$ associée à la diminution de z_1 peut s'écrire

$$\mathcal{F}_2^1 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{K}_{\text{A}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} - \nu_0 + (G - a)(z_2 + z_3). \tag{A.40}$$

D'autre part, $z_2 = 0$, ce qui rend la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ dont dépend $\mathcal{F}_1^2$ indéfinie. Cependant, puisque la matrice $\boldsymbol{K}_{\text{M}}$ est définie positive, $\mathcal{F}_1^2$ admet un maximum $\mathcal{F}_1^{2\star}$ pour une valeur $\boldsymbol{\varepsilon}_2^\star$ de $\boldsymbol{\varepsilon}_2$. En effet, $\boldsymbol{\varepsilon}_2^\star$ est telle que

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1^2}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_2^\star = \boldsymbol{K}_{\text{M}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_0, \tag{A.41}$$

d'où

$$\mathcal{F}_1^{2\star} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{K}_{\text{M}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} - C(T) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \nu_0 - (G + b_1)z_1 - (H + b_2)z_3. \tag{A.42}$$

Or,

$$\mathcal{F}_1^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \mathcal{F}_1^{2\star} \leqslant 0, \tag{A.43}$$

$\mathcal{F}_1^{2\star} = 0$ définit donc le seuil de début d'apparition de la martensite M^+ ;

– au cours de la transformation, quand les fractions z_1 et z_2 sont strictement positives, les relations (A.13) à (A.15) s'appliquent. $\mathcal{F}_2^1$ est toujours donnée par (A.40) tandis que $\mathcal{F}_1^2$ s'écrit

$$\mathcal{F}_1^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{K}_{\text{M}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} - C(T) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \nu_0 - (G + b_1)z_1 - (H + b_2)z_3\,; \tag{A.44}$$

– à la fin de la transformation, $z_2 = 1$ et la fraction z_1 s'annule. z_1 ne peut plus décroître à cause de la liaison unilatérale $z_1 \geqslant 0$.

$$z_1 \geqslant 0 \Rightarrow \dot{z}_1 \geqslant 0 \text{ en } z_1 = 0. \tag{A.45}$$

En même temps, z_2 ne peut plus croître à cause de la liaison bilatérale (A.11) qui, pour $z_3 = 0$, permet de déduire que $\dot{z}_2 = -\dot{z}_1$.

De la même manière, les différentes fonctions critères peuvent être écrites de manière indépendante des déformations locales $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, quand les fractions z_i sont non nulles.

$$\mathcal{F}_1^1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{K}_{\text{A}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \nu_0 - (G + a)(z_2 + z_3), \tag{A.46}$$

$$\mathcal{F}_2^2 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{K}_{\text{M}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + C(T) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \nu_0 + (G - b_1)z_1 + (H - b_2)z_3, \tag{A.47}$$

$$\mathcal{F}_1^3 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{K}_{\text{M}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} - C(T) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \nu_0 - (G + b_1)z_1 - (H + b_2)z_2, \tag{A.48}$$

$$\mathcal{F}_2^3 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{K}_{\text{M}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + C(T) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \nu_0 + (G - b_1)z_1 + (H - b_2)z_2. \tag{A.49}$$

Si l'on considère que l'austénite et la martensite sont homogènes et isotropes de modules de Young respectifs E_{A} et E_{M} et qu'elles ont le même coefficient de Poisson ν,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{K}_{\text{A}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} &= El_{\text{A}}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} + P_{\text{A}}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 \\ &= \frac{2}{3}El_{\text{A}}\sigma_{\text{VM}}^2 + \left(\frac{1}{3}El_{\text{A}} + P_{\text{A}}\right)(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 \end{aligned} \tag{A.50}$$

et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{K}_{\text{M}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} &= El_{\text{M}}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} + P_{\text{M}}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 \\ &= \frac{2}{3}El_{\text{M}}\sigma_{\text{VM}}^2 + \left(\frac{1}{3}El_{\text{M}} + P_{\text{M}}\right)(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2, \end{aligned} \tag{A.51}$$

avec

$$El_{\text{A}} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1+\nu}{E_{\text{A}}}, \quad P_{\text{A}} \overset{\text{déf}}{=} -\frac{\nu}{E_{\text{A}}}, \quad El_{\text{M}} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1+\nu}{E_{\text{M}}}, \quad P_{\text{M}} \overset{\text{déf}}{=} -\frac{\nu}{E_{\text{M}}}. \tag{A.52}$$

σ_{VM} est la contrainte équivalente de Mises définie par

$$\sigma_{\text{VM}} = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{s} : \boldsymbol{s}}, \tag{A.53}$$

où $\boldsymbol{s}$ représente le tenseur déviateur de contrainte.

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{I}, \tag{A.54}$$

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} = \sum_i \boldsymbol{\sigma}_{ii}. \tag{A.55}$$

$\mathbf{I}$ est le tenseur identité de même dimension que $\boldsymbol{\sigma}$.

A.3 Lois complémentaires

La transformation d'une phase j en une phase k est régie par deux fonctions critères :
– $\mathcal{F}_2^j$ qui contrôle la diminution de la fraction z_j ;
– $\mathcal{F}_1^k$ qui contrôle l'augmentation de la fraction z_k.
Au cours de la transformation, z_j et z_k vérifient les conditions de consistance

$$\dot{\mathcal{F}}_2^j = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\mathcal{F}}_1^k = 0. \tag{A.56}$$

L'obtention des lois d'évolution associées au différentes transformations nécessite de calculer $\dot{\mathcal{F}}_i^j$ pour tout $(i, j) \in \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$.

On considère par exemple la transformation de l'austénite en martensite M^+ régie par les fonctions critères $\mathcal{F}_2^1$ et $\mathcal{F}_1^2$ données par (A.40) et (A.44). En raison de (A.50) et de (A.51),

$$\mathcal{F}_2^1 = -\frac{1}{2}\Big[El_{\mathrm{A}}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\sigma} + P_{\mathrm{A}}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2\Big] - \nu_0 + (G-a)(z_2+z_3), \tag{A.57}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1^2 = \frac{1}{2}\Big[El_{\mathrm{M}}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\sigma} + P_{\mathrm{M}}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2\Big] + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ - C(T) + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \nu_0 - (G+b_1)z_1 - (H+b_2)z_3.\end{aligned} \tag{A.58}$$

Soient

$$El_{\mathrm{MA}} \overset{\text{déf}}{=} El_{\mathrm{M}} - El_{\mathrm{A}} \quad \text{et} \quad P_{\mathrm{MA}} \overset{\text{déf}}{=} P_{\mathrm{M}} - P_{\mathrm{A}}, \tag{A.59}$$

les conditions de consistance impliquent

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathcal{F}_2^1 + \mathcal{F}_1^2\Big) = 0, \tag{A.60}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2^1 + \mathcal{F}_1^2 = \frac{1}{2}\Big(El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\sigma} + P_{\mathrm{MA}}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2\Big) + \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ - C(T) - (G+b_1)z_1 + (G-a)z_2 + [(G-a) - (H+b_2)]\,z_3,\end{aligned} \tag{A.61}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\mathcal{F}_2^1 + \mathcal{F}_1^2\Big) = (El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} + P_{\mathrm{MA}}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}}) + \dot{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ - \dot{C}(T) - (G+b_1)\dot{z}_1 + (G-a)\dot{z}_2 + [(G-a) - (H+b_2)]\,\dot{z}_3.\end{aligned} \tag{A.62}$$

Si μ_{A} et μ_{M} désignent les modules de cisaillement de l'austénite et de la martensite respectivement, le module de cisaillement équivalent du matériau, μ_{eq}, est tel que

$$\frac{1}{\mu_{\mathrm{eq}}} = \frac{z_{\mathrm{A}}}{\mu_{\mathrm{A}}} + \frac{1-z_{\mathrm{A}}}{\mu_{\mathrm{M}}}. \tag{A.63}$$

On définit alors la partie élastique $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{el}}$ du tenseur de contrainte par

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{el}} - 2\mu_{\mathrm{eq}}(z_2 - z_3)\boldsymbol{\varepsilon}_0. \tag{A.64}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_0$ étant déviatorique, il est facile d'établir

$$\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}} - 2\dot{\mu}_{\mathrm{eq}}(z_2 - z_3)\boldsymbol{s}:\boldsymbol{\varepsilon}_0 - 2\mu_{\mathrm{eq}}(\dot{z}_2 - \dot{z}_3)\boldsymbol{s}:\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{el}}. \tag{A.65}$$

D'autre part, en dérivant (A.63) on trouve

$$\dot{\mu_{\mathrm{eq}}} = \mu_{\mathrm{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{\mu_{\mathrm{A}}}\right)\dot{z}_1, \tag{A.66}$$

(A.65) s'écrit alors

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}} + \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{el}} \\ &\quad - 2\mu_{\mathrm{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{\mu_{\mathrm{A}}}\right)(z_2 - z_3)\boldsymbol{s}:\boldsymbol{\varepsilon}_0\dot{z}_1 - 2\mu_{\mathrm{eq}}\boldsymbol{s}:\boldsymbol{\varepsilon}_0(\dot{z}_2 - \dot{z}_3).\end{aligned} \tag{A.67}$$

De la même manière,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}}\boldsymbol{\varepsilon}_0 - 3\mu_{\mathrm{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{\mu_{\mathrm{A}}}\right)(z_2 - z_3)\left(\varepsilon_0^{\mathrm{eq}}\right)^2\dot{z}_1 - 3\mu_{\mathrm{eq}}\left(\varepsilon_0^{\mathrm{eq}}\right)^2(\dot{z}_2 - \dot{z}_3), \tag{A.68}$$

où $\varepsilon_0^{\mathrm{eq}}$ est une déformation équivalente définie par

$$\varepsilon_0^{\mathrm{eq}} = \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_0:\boldsymbol{\varepsilon}_0}. \tag{A.69}$$

Compte tenu de (A.67) et de (A.68), (A.60) s'écrit

$$\begin{aligned}&-\left\{2\mu_{\mathrm{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{\mu_{\mathrm{A}}}\right)(z_2 - z_3)\left[El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_0:\boldsymbol{\varepsilon}_0\right] + (G + b_1)\right\}\dot{z}_1 \\ &-\left\{2\mu_{\mathrm{eq}}\left[El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_0:\boldsymbol{\varepsilon}_0\right] - (G - a)\right\}\dot{z}_2 \\ &+\left\{2\mu_{\mathrm{eq}}\left[El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_0:\boldsymbol{\varepsilon}_0\right] + (G - a) - (H + b_2)\right\}\dot{z}_3 \\ &= -El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}} - \left(\frac{1}{3}El_{\mathrm{MA}} + P_{\mathrm{MA}}\right)\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{el}} - \boldsymbol{\varepsilon}_0:\dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}} + \dot{C}(T).\end{aligned} \tag{A.70}$$

En cas de chargement proportionnel

$$\boldsymbol{\sigma} = \phi(t)\boldsymbol{\sigma}_0, \tag{A.71}$$

où $\phi(t)$ est un scalaire dépendant d'un paramètre t et $\boldsymbol{\sigma}_0$ un tenseur de contrainte constant. Dans ce cas, on se donne

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}_0}{\sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{s}_0:\boldsymbol{s}_0}}. \tag{A.72}$$

(A.70) peut alors s'écrire

$$\begin{aligned}&-\left\{2\mu_{\mathrm{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{\mu_{\mathrm{A}}}\right)(z_2 - z_3)\varepsilon_0\left[El_{\mathrm{MA}}\sigma_{\mathrm{VM}}\operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0) + \frac{3}{2}\varepsilon_0\right] + (G + b_1)\right\}\dot{z}_1 \\ &-\left\{2\mu_{\mathrm{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\mathrm{MA}}\sigma_{\mathrm{VM}}\operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0) + \frac{3}{2}\varepsilon_0\right] - (G - a)\right\}\dot{z}_2 \\ &+\left\{2\mu_{\mathrm{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\mathrm{MA}}\sigma_{\mathrm{VM}}\operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0) + \frac{3}{2}\varepsilon_0\right] + (G - a) - (H + b_2)\right\}\dot{z}_3 \\ &= -El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}} - \left(\frac{1}{3}El_{\mathrm{MA}} + P_{\mathrm{MA}}\right)\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{el}} - \frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}}}{\sigma_{\mathrm{VM}}}\operatorname{sign}(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0) + \dot{C}(T).\end{aligned} \tag{A.73}$$

En même temps, (A.11) donne

$$\sum_{i=1}^{3} \dot{z}_i = 0. \tag{A.74}$$

Si la fraction de M^- n'évolue pas, les équations (A.73) et (A.74) sont suffisantes pour calculer les $\dot{z}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$; dans le cas contraire, il faut une équation supplémentaire fournie par la condition de consistance associée à l'évolution de z_3. Les différentes conditions de consistance sont définies de la manière suivante :

– si l'austénite se transforme en M^-,

$$\begin{aligned}
&-\left\{2\mu_{\text{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\text{M}}}-\frac{1}{\mu_{\text{A}}}\right)(z_2-z_3)\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G+b_1)\right\}\dot{z}_1\\
&-\left\{2\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]-(G-a)+(H+b_2)\right\}\dot{z}_2\\
&+\left\{2\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G-a)\right\}\dot{z}_3\\
&=-El_{\text{MA}}\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}-\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}}+P_{\text{MA}}\right)\text{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\text{tr}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{el}}+\frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}}{\sigma_{\text{VM}}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\dot{C}(T)\,;
\end{aligned} \tag{A.75}$$

– si la martensite M^+ se transforme en M^-,

$$\begin{aligned}
&\left[6\mu_{\text{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\text{M}}}-\frac{1}{\mu_{\text{A}}}\right)(z_2-z_3)\varepsilon_0^2-2b_1\right]\dot{z}_1\\
&+\left[6\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0^2-(H+b_2)\right]\dot{z}_2-\left[6\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0^2-(H-b_2)\right]\dot{z}_3=3\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}}{\sigma_{\text{VM}}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)\,;
\end{aligned} \tag{A.76}$$

– si la martensite M^- se transforme en M^+,

$$\begin{aligned}
&-\left[6\mu_{\text{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\text{M}}}-\frac{1}{\mu_{\text{A}}}\right)(z_2-z_3)\varepsilon_0^2+2b_1\right]\dot{z}_1\\
&-\left[6\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0^2-(H-b_2)\right]\dot{z}_2+\left[6\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0^2-(H+b_2)\right]\dot{z}_3=-3\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}}{\sigma_{\text{VM}}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)\,;
\end{aligned} \tag{A.77}$$

– si la martensite M^+ se transforme en austénite,

$$\begin{aligned}
&\left\{2\mu_{\text{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\text{M}}}-\frac{1}{\mu_{\text{A}}}\right)(z_2-z_3)\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G-b_1)\right\}\dot{z}_1\\
&+\left\{2\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]-(G+a)\right\}\dot{z}_2\\
&-\left\{2\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)+\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G+a)-(H-b_2)\right\}\dot{z}_3\\
&=El_{\text{MA}}\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}+\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}}+P_{\text{MA}}\right)\text{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\text{tr}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{el}}+\frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}}{\sigma_{\text{VM}}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\dot{C}(T)\,;
\end{aligned} \tag{A.78}$$

– si la martensite M^- se transforme en austénite,

$$\begin{aligned}
&\left\{2\mu_{\text{eq}}^2\left(\frac{1}{\mu_{\text{M}}}-\frac{1}{\mu_{\text{A}}}\right)(z_2-z_3)\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G-b_1)\right\}\dot{z}_1\\
&+\left\{2\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]-(G+a)+(H-b_2)\right\}\dot{z}_2\\
&-\left\{2\mu_{\text{eq}}\varepsilon_0\left[El_{\text{MA}}\sigma_{\text{VM}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\frac{3}{2}\varepsilon_0\right]+(G+a)\right\}\dot{z}_3\\
&=El_{\text{MA}}\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}+\left(\frac{1}{3}El_{\text{MA}}+P_{\text{MA}}\right)\text{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\text{tr}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{el}}-\frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{\text{el}}}{\sigma_{\text{VM}}}\,\text{sign}\,(\boldsymbol{s}:\boldsymbol{s}_0)-\dot{C}(T).
\end{aligned}\tag{A.79}$$

A.4 Procédure d'identification des paramètres

L'identification des paramètres nécessite un essai de calorimétrie à balayage différentiel, un essai d'orientation et un essai de traction–décharge dans le domaine pseudoélastique. En 1D, les expressions (A.40), (A.44) et (A.46) à (A.49) des fonctions critères s'écrivent

$$\mathcal{F}_1^1=\frac{\sigma^2}{2K_{\text{A}}}+\nu_0-(G+a)(z_2+z_3),\tag{A.80}$$

$$\mathcal{F}_2^1=-\frac{\sigma}{2K_{\text{A}}}-\nu_0+(G-a)(z_2+z_3),\tag{A.81}$$

$$\mathcal{F}_1^2=\frac{\sigma^2}{2K_{\text{M}}}-C(T)+\sigma\varepsilon_0+\nu_0-(G+b_1)z_1-(H+b_2)z_3,\tag{A.82}$$

$$\mathcal{F}_2^2=-\frac{\sigma^2}{2K_{\text{M}}}+C(T)-\sigma\varepsilon_0-\nu_0+(G-b_1)z_1+(H-b_2)z_3,\tag{A.83}$$

$$\mathcal{F}_1^3=\frac{\sigma^2}{2K_{\text{M}}}-C(T)-\sigma\varepsilon_0+\nu_0-(G+b_1)z_1-(H+b_2)z_2,\tag{A.84}$$

$$\mathcal{F}_2^3=-\frac{\sigma^2}{2K_{\text{M}}}+C(T)+\sigma\varepsilon_0-\nu_0+(G-b_1)z_1+(H-b_2)z_2.\tag{A.85}$$

On choisit une déformation ε_0 positive.

A.4.1 Essai d'orientation

Au début de l'essai, $z_2=z_3=\dfrac{1}{2}$. Si σ_{rs} représente la contrainte de début d'orientation et T_{ori} la température, constante, à laquelle l'essai est réalisé,

$$\mathcal{F}_2^3=0\Rightarrow-\frac{\sigma_{\text{rs}}^2}{2K_{\text{M}}}+C(T_{\text{ori}})+\sigma_{\text{rs}}\varepsilon_0-\nu_0\frac{H-b_2}{2}=0,\tag{A.86}$$

$$\mathcal{F}_1^2=0\Rightarrow\frac{\sigma_{\text{rs}}^2}{2K_{\text{M}}}-C(T_{\text{ori}})+\sigma_{\text{rs}}\varepsilon_0+\nu_0-\frac{H+b_2}{2}=0.\tag{A.87}$$

On détermine b_2 en éliminant ν_0 dans (A.86) par l'intermédiaire de (A.87).

$$b_2=2\sigma_{\text{rs}}\varepsilon_0.\tag{A.88}$$

A la fin de l'orientation, $z_2 = 1$. Si σ_{rf} désigne la contrainte de fin d'orientation,

$$\mathcal{F}_2^3 = 0 \Rightarrow -\frac{\sigma_{rf}^2}{2K_M} + C(T_{ori}) + \sigma_{rf}\varepsilon_0 - \nu_0(H - b_2) = 0, \tag{A.89}$$

$$\mathcal{F}_1^2 = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_{rf}^2}{2K_M} - C(T_{ori}) + \sigma_{rf}\varepsilon_0 + \nu_0 = 0. \tag{A.90}$$

On détermine H en éliminant ν_0 et en remplaçant b_2 par sa valeur donnée par (A.88).

$$H = 2(\sigma_{rs} - \sigma_{rf})\varepsilon_0. \tag{A.91}$$

A.4.2 Essai de traction–décharge dans le domaine pseudoélastique

Le changement de phase direct en traction se produit de manière que $\mathcal{F}_2^1 = 0$ et $\mathcal{F}_1^2 = 0$. On désigne par T_0 la température, constante, de l'essai.

Au début de la transformation directe, $z_1 = 1$. Si σ_{ms} désigne la contrainte de début de changement de phase,

$$\mathcal{F}_2^1 = 0 \Rightarrow -\frac{\sigma_{ms}}{2K_A} - \nu_0 = 0, \tag{A.92}$$

$$\mathcal{F}_1^2 = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_{ms}^2}{2K_M} - C(T_0) + \sigma_{ms}\varepsilon_0 + \nu_0 - (G + b_1) = 0. \tag{A.93}$$

On élimine ν_0 pour obtenir

$$\frac{\sigma_{ms}^2}{2}\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right) + \sigma_{ms}\varepsilon_0 - C(T_0) - (G + b_1) = 0. \tag{A.94}$$

A la fin de la transformation directe en traction, $z_2 = 1$. Si σ_{mf} désigne la contrainte de fin de changement de phase, en éliminant ν_0 de l'équation $\mathcal{F}_2^1 = 0$ par l'intermédiaire de $\mathcal{F}_1^2 = 0$ on obtient

$$\frac{\sigma_{mf}^2}{2}\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right) + \sigma_{mf}\varepsilon_0 - C(T_0) + (G - a) = 0. \tag{A.95}$$

Au début de la transformation inverse, $z_2 = 1$. Si σ_{as} désigne la contrainte de début de changement de phase, en éliminant ν_0 de l'équation $\mathcal{F}_2^2 = 0$ par l'intermédiaire de $\mathcal{F}_1^1 = 0$ on obtient

$$-\frac{\sigma_{as}^2}{2}\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right) - \sigma_{as}\varepsilon_0 + C(T_0) - (G + a) = 0. \tag{A.96}$$

Enfin, à la fin de la transformation inverse, $z_1 = 1$. Si σ_{af} désigne la contrainte de fin de changement de phase, en éliminant ν_0 de l'équation $\mathcal{F}_2^2 = 0$ par l'intermédiaire de $\mathcal{F}_1^1 = 0$ on obtient

$$-\frac{\sigma_{af}^2}{2}\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right) - \sigma_{af}\varepsilon_0 + C(T_0) + (G - b_1) = 0. \tag{A.97}$$

$$(A.95) - (A.96) \Rightarrow a = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_{mf}^2 - \sigma_{as}^2}{2}\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right) + (\sigma_{mf} - \sigma_{as})\varepsilon_0\right], \tag{A.98}$$

$$(A.94) + (A.97) \Rightarrow b_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_{ms}^2 - \sigma_{af}^2}{2}\left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_A}\right) + (\sigma_{ms} - \sigma_{af})\varepsilon_0\right]. \tag{A.99}$$

Compte tenu de (A.98) et de (A.99),

$$(\text{A.94}) - (\text{A.95}) \Rightarrow G = \frac{-1}{4}\left[\frac{\sigma_{\text{as}}^2 - \sigma_{\text{af}}^2}{2}\left(\frac{1}{K_{\text{M}}} - \frac{1}{K_{\text{A}}}\right) + (\sigma_{\text{as}} - \sigma_{\text{af}})\varepsilon_0 \right. \tag{A.100}$$
$$\left. + \frac{\sigma_{\text{mf}}^2 - \sigma_{\text{ms}}^2}{2}\left(\frac{1}{K_{\text{M}}} - \frac{1}{K_{\text{A}}}\right) + (\sigma_{\text{mf}} - \sigma_{\text{ms}})\varepsilon_0\right].$$

En remplaçant G par sa valeur,

$$(\text{A.94}) - (\text{A.97}) \Rightarrow C(T_0) = \frac{1}{4}\left[\frac{\sigma_{\text{as}}^2 + \sigma_{\text{af}}^2}{2}\left(\frac{1}{K_{\text{M}}} - \frac{1}{K_{\text{A}}}\right) + (\sigma_{\text{as}} + \sigma_{\text{af}})\varepsilon_0 \right. \tag{A.101}$$
$$\left. + \frac{\sigma_{\text{mf}}^2 + \sigma_{\text{ms}}^2}{2}\left(\frac{1}{K_{\text{M}}} - \frac{1}{K_{\text{A}}}\right) + (\sigma_{\text{mf}} + \sigma_{\text{ms}})\varepsilon_0\right].$$

On se donne l'expression suivante de $C(T)$:

$$C(T) = \xi\left(T - A_{\text{f}}^0\right) + \kappa, \tag{A.102}$$

ξ et κ étant des constantes matérielles et A_{f}^0 la température de fin de changement de phase inverse, caractérisée par $z_1 = 1$, à contrainte nulle. En éliminant ν_0 de $\mathcal{F}_2^2 = 0$ par l'intermédiaire de $\mathcal{F}_1^1 = 0$ on détermine la valeur de $C\left(A_{\text{f}}^0\right)$, égale à κ d'après (A.102).

$$C\left(A_{\text{f}}^0\right) = \kappa = b_1 - G. \tag{A.103}$$

D'autre part, d'après (A.102),

$$\xi = \frac{C(T) - A_{\text{f}}^0}{T - A_{\text{f}}^0}, \forall T \neq A_{\text{f}}^0. \tag{A.104}$$

En particulier, pour $T = T_0$,

$$\xi = \frac{C(T_0) - A_{\text{f}}^0}{T_0 - A_{\text{f}}^0}, \tag{A.105}$$

où $C(T_0)$ est donnée par (A.101).

Enfin, les paramètres K_{A}, K_{M} et ε_0 se déduisent directement à partir de la réponse pseudoélastique du matériau en contrainte–déformation.

ANNEXE B

Calculs relatifs au chapitre 6

B.1 Lois d'état

Le lagrangien s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\overset{\text{déf}}{=} L(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}, z, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}, \boldsymbol{B}, z_{\mathrm{e}}) \\ &= (1-z)\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}})\right] \\ &\quad + z\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) + C(T, z_{\mathrm{e}}) - \frac{2}{3}\boldsymbol{B} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right] \\ &\quad + G\frac{z^2}{2} + \frac{z}{2}[\alpha z + \beta(1-z)]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right) \\ &\quad - \boldsymbol{\lambda} : [(1-z)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} + z\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}] - \mu\left(\gamma - \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}\right) - \nu_1 z - \nu_2(1-z),\end{aligned} \tag{B.1}$$

où

$$G = \hat{G}(z_{\mathrm{e}}), \quad \alpha = \hat{\alpha}(z_{\mathrm{e}}), \quad \beta = \hat{\beta}(z_{\mathrm{e}}), \quad \gamma = \hat{\gamma}(z_{\mathrm{e}}). \tag{B.2}$$

Les multiplicateurs de Lagrange ν_1, ν_2 et μ sont tels que

$$\nu_1 \geqslant 0,\ \nu_1 z = 0, \quad \nu_2 \geqslant 0,\ \nu_2(1-z) = 0 \quad \text{et} \quad \mu \geqslant 0,\ \mu\left(\gamma - \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}\right) = 0. \tag{B.3}$$

Comme il est démontré à l'annexe A, on n'a pas besoin de tenir compte des multiplicateur de Lagrange ν_1 et ν_2 pour l'étude de l'évolution de z entre 0 et 1. Par conséquent, si l'on désigne par $\mathcal{A}_z$ et $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{tr}}$ les forces thermodynamiques associées respectivement au changement de phase et à l'orientation de la martensite, les lois d'état

s'écrivent

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \tag{B.4}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (1-z)\left[\boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) - \boldsymbol{\lambda}\right] = \mathbf{0}, \tag{B.5}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad z\left[\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) - \boldsymbol{\lambda}\right] = \mathbf{0}, \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \mathcal{A}_z \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_z = \frac{1}{2}\Big[&(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) \\ &- (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}})\Big] \\ &- C(T, z_{\mathrm{e}}) - Gz - \left[(\alpha - \beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right) \\ &- \boldsymbol{\lambda} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}) + \frac{2}{3}\boldsymbol{B} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}, \end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{tr}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{tr}} = z&\left\{\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) - \frac{2}{3}\left[\alpha z + \beta(1-z)\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right\} \\ &+ \frac{2}{3}z\boldsymbol{B} - \frac{2\mu}{3}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}}, \end{aligned} \tag{B.8}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (1-z)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} + z\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}, \tag{B.9}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{r}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{r}} = (1-z)\boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}) + z\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}), \tag{B.10}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{B}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{B}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{B}} = \frac{2}{3}z\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}, \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_{\mathrm{e}}} = \mathcal{A}_{\mathrm{e}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_{\mathrm{e}} = &-z\frac{\partial C(T, z_{\mathrm{e}})}{\partial z_{\mathrm{e}}} - \frac{\partial G}{\partial z_{\mathrm{e}}}\frac{z^2}{2} \\ &- \frac{z}{2}\left[\frac{\partial \alpha}{\partial z_{\mathrm{e}}}z + \frac{\partial \beta}{\partial z_{\mathrm{e}}}(1-z)\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right) - \mu\frac{\partial \gamma}{\partial z_{\mathrm{e}}}. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Quand $0 < z < 1$, les équations (B.5) et (B.6), compte tenu de (B.4), permettent de déduire

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} \\ &= \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}), \end{aligned} \tag{B.13}$$

d'où

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}, \tag{B.14}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}. \tag{B.15}$$

En remplaçant $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{A}}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}$ par leurs valeurs de (B.14) et (B.15) dans (B.9), on obtient

$$\left[(1-z)\boldsymbol{K}_{\mathrm{A}}^{-1} + z\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}}^{-1}\right] : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon} - z\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}. \tag{B.16}$$

La loi de comportement s'écrit alors

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{K} : (\boldsymbol{\varepsilon} - z\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}), \tag{B.17}$$

où $\boldsymbol{K}$ est le module élastique équivalent donné par

$$\boldsymbol{K} = \left[(1-z)\boldsymbol{K}_{\mathrm{A}}^{-1} + z\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}}^{-1}\right]^{-1}. \tag{B.18}$$

(B.17) est valable pour toute composition du matériau.

B.2 Lois complémentaires

Pour les raisons expliquées au chapitre 6, on se donne pour z_{e}, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{r}}$ et $\boldsymbol{B}$ les lois d'évolution suivantes :

$$\dot{z}_{\mathrm{e}} = |\dot{z}|\,, \tag{B.19}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{r}} = \frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}^{\mathrm{sat}}}{\tau}\left(\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{s}}{\sigma_{\mathrm{VM}}}\right)\exp\left(-\frac{z_{\mathrm{e}}}{\tau}\right)\dot{z}_{\mathrm{e}}, \tag{B.20}$$

$$\dot{\boldsymbol{B}} = \frac{B^{\mathrm{sat}}}{\tau}\left(\frac{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}}\right)\exp\left(-\frac{z_{\mathrm{e}}}{\tau}\right)\dot{z}_{\mathrm{e}}. \tag{B.21}$$

On impose à $\mathcal{A}_z$ et à $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{tr}}$ de vérifier

$$\mathcal{A}_z \in \partial_{\dot{z}}\mathcal{D}, \tag{B.22}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{tr}} \in \partial_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{tr}}}\mathcal{D}, \tag{B.23}$$

où $\mathcal{D}$ est une fonction convexe, positive, continue et nulle à l'origine, donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &\overset{\text{déf}}{=} D(\dot{z}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{tr}}) \\ &= P(z, z_{\mathrm{e}}, \dot{z})\,\dot{z} + R(z)\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{tr}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{tr}}}.\end{aligned} \tag{B.24}$$

$P(z, z_{\mathrm{e}}, \dot{z})$ est défini par

$$P(z, z_{\mathrm{e}}, \dot{z}) = [a(1-z) + bz]\ \mathrm{sign}\,\dot{z}, \tag{B.25}$$

a et b étant des paramètres positifs dépendant de z_{e},

$$a = \hat{a}(z_{\mathrm{e}}) \quad \text{et} \quad b = \hat{b}(z_{\mathrm{e}}). \tag{B.26}$$

D'autre part,

$$R(z) = z^2 Y, \tag{B.27}$$

Y étant une constante positive du matériau. (B.22) et (B.23) impliquent les inégalités

$$|\mathcal{A}_z| \leqslant a(1-z) + bz \tag{B.28}$$

et

$$||\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{tr}}||_{\mathrm{VM}} \leqslant R(z), \tag{B.29}$$

où $||\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{tr}}||_{\mathrm{VM}}$ est l'équivalent de Mises en traction du tenseur $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{tr}}$.

En raison de (B.4), (B.7) et (B.8), les inégalités (B.28) et (B.29) fournissent respectivement les critères de changement de phase et d'orientation de la martensite. Ces critères s'écrivent

$$\mathcal{F}_z^1 \leqslant 0, \tag{B.30}$$

$$\mathcal{F}_z^2 \leqslant 0, \tag{B.31}$$

$$\mathcal{F}_{\text{tr}} \leqslant 0, \tag{B.32}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_z^1 = \frac{1}{2}\big[&(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{r}}) : \boldsymbol{K}_{\text{A}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{r}}) \\ &- (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{r}}) : \boldsymbol{K}_{\text{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{r}})\big] \\ &- C(T, z_{\text{e}}) - (G + b)z - a(1 - z) - \left[(\alpha - \beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right) \\ &- \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}}) + \frac{2}{3}\boldsymbol{B} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}},\end{aligned} \tag{B.33}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_z^2 = -\frac{1}{2}\big[&(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{r}}) : \boldsymbol{K}_{\text{A}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{r}}) \\ &- (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{r}}) : \boldsymbol{K}_{\text{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{r}})\big] \\ &+ C(T, z_{\text{e}}) + (G - b)z - a(1 - z) + \left[(\alpha - \beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right) \\ &+ \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{A}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}}) - \frac{2}{3}\boldsymbol{B} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}},\end{aligned} \tag{B.34}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{F}_{\text{tr}}}{z} = \Bigg\| &\boldsymbol{K}_{\text{M}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{r}}) \\ &+ \frac{2}{3}\boldsymbol{B} - \frac{2}{3}\left[\alpha z + \beta(1 - z)\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - \frac{2\mu}{3z}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}}\Bigg\|_{\text{VM}} - zY.\end{aligned} \tag{B.35}$$

On note $\mathcal{F}_{\text{ori}}$ le rapport $\dfrac{\mathcal{F}_{\text{tr}}}{z}$. $\mathcal{F}_{\text{ori}}$ et $\mathcal{F}_{\text{tr}}$ sont de même signe pour tout $z > 0$, il convient donc de choisir $\mathcal{F}_{\text{ori}}$ comme fonction critère associée à l'orientation de la martensite à la place de $\mathcal{F}_{\text{tr}}$.

Au début du changement de phase direct, la fraction z est nulle. En raison de (B.6), la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}}$ dont dépend $\mathcal{F}_z^1$ est indéfinie dans ce cas tandis que $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{A}}$ vérifie (B.14) à cause de (B.4) et de (B.5). Cependant, puisque le tenseur $\boldsymbol{K}_{\text{M}}$ est défini positif, $\mathcal{F}_z^1$ admet un maximum $\mathcal{F}_z^{1\star}$ pour une valeur $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}}^{\star}$ de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}}$ telle que

$$\frac{\partial \mathcal{F}_z^1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}}} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{M}}^{\star} = \boldsymbol{K}_{\text{M}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{r}}. \tag{B.36}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_z^{1\star} = &\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \left(\boldsymbol{K}_{\text{M}}^{-1} - \boldsymbol{K}_{\text{A}}^{-1}\right) : \boldsymbol{\sigma} - C(T, z_{\text{e}}) \\ &+ \left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - (G + b)z - a(1 - z) - \left[(\alpha - \beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right).\end{aligned} \tag{B.37}$$

Or,

$$\mathcal{F}_z^1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \mathcal{F}_z^{1\star} \leqslant 0, \tag{B.38}$$

$\mathcal{F}_z^{1\star} = 0$ définit donc le seuil de début de changement de phase direct. Pour $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}^{\star}$, la fonction $\mathcal{F}_{\mathrm{ori}}$ associée à l'orientation de la martensite est donnée par

$$\mathcal{F}_{\mathrm{ori}} = \left\| \left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right) - \frac{2}{3}\left[\alpha z + \beta(1-z)\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \frac{2\mu}{3z}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}} \right\|_{\mathrm{VM}} - zY. \tag{B.39}$$

$\mathcal{F}_{\mathrm{ori}}$ contrôle l'orientation de la martensite. Pour des valeurs strictement positives de z, l'expression de $\mathcal{F}_{\mathrm{ori}}$ reste inchangée tandis que celle de $\mathcal{F}_z^1$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_z^1 = {} & \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \left(\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}}^{-1} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}}^{-1}\right) : \boldsymbol{\sigma} - C(T, z_{\mathrm{e}}) \\ & + \left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - (G+b)z - a(1-z) - \left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right). \end{aligned} \tag{B.40}$$

La fraction z ne peut pas dépasser l'unité à cause de la liaison unilatérale $1 - z \geqslant 0$.

Un raisonnement analogue permet d'identifier le seuil de début du changement de phase inverse et les expressions des fonctions critères au cours de la transformation de la martensite en austénite. En effet, pour $0 < z < 1$, en raison de (B.4), (B.5) et (B.6),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_z^2 = {} & -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \left(\boldsymbol{K}_{\mathrm{M}}^{-1} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}}^{-1}\right) : \boldsymbol{\sigma} + C(T, z_{\mathrm{e}}) \\ & - \left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} + (G-b)z - a(1-z) + \left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right). \end{aligned} \tag{B.41}$$

La transformation inverse ne peut pas se poursuivre quand z s'annule en raison de la liaison unilatérale $z > 0$.

Si l'on suppose que l'austénite et la martensite sont homogènes et isotropes de modules de Young respectifs E_{A} et E_{M} et qu'elles ont le même coefficient de Poisson ν, alors

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{K}_{\mathrm{A}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} = El_{\mathrm{A}}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} + P_{\mathrm{A}}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 \tag{B.42}$$

et

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{K}_{\mathrm{M}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} = El_{\mathrm{M}}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} + P_{\mathrm{M}}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2, \tag{B.43}$$

avec

$$El_{\mathrm{A}} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1+\nu}{E_{\mathrm{A}}}, \quad P_{\mathrm{A}} \overset{\text{déf}}{=} -\frac{\nu}{E_{\mathrm{A}}}, \quad El_{\mathrm{M}} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1+\nu}{E_{\mathrm{M}}}, \quad P_{\mathrm{M}} \overset{\text{déf}}{=} -\frac{\nu}{E_{\mathrm{M}}}. \tag{B.44}$$

Soient

$$El_{\mathrm{MA}} \overset{\text{déf}}{=} El_{\mathrm{M}} - El_{\mathrm{A}} \quad \text{et} \quad P_{\mathrm{MA}} \overset{\text{déf}}{=} P_{\mathrm{M}} - P_{\mathrm{A}}, \tag{B.45}$$

les expressions (B.39), (B.40) et (B.41) des fonctions critères peuvent s'écrire

$$\mathcal{F}_z^1 = \frac{1}{2}\Big(El_{\text{MA}}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\sigma} + P_{\text{MA}}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2\Big) - C(T,z_{\text{e}}) \tag{B.46}$$
$$+\left(\boldsymbol{\sigma}+\frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right):\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - (G+b)z - a(1-z) - \left[(\alpha-\beta)z+\frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right),$$

$$\mathcal{F}_z^2 = -\frac{1}{2}\Big(El_{\text{MA}}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\sigma} + P_{\text{MA}}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2\Big) + C(T,z_{\text{e}}) \tag{B.47}$$
$$-\left(\boldsymbol{\sigma}+\frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right):\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} + (G-b)z - a(1-z) + \left[(\alpha-\beta)z+\frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right),$$

$$\mathcal{F}_{\text{ori}} = \left\|\left(\boldsymbol{\sigma}+\frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right) - \frac{2}{3}\left[\alpha z+\beta(1-z)\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - \frac{2\mu}{3z}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}}\right\|_{\text{VM}} - zY. \tag{B.48}$$

Lorsque le changement de phase est effectif, l'évolution de z vérifie $\dot{\mathcal{F}}_z^1 = 0$ au cours d'une transformation directe et $\dot{\mathcal{F}}_z^2 = 0$ au cours d'une transformation inverse. L'évolution de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}$ vérifie la règle de normalité

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{tr}} &= \eta\frac{\partial\mathcal{F}_{\text{ori}}}{\partial\boldsymbol{X}}\\ &= \frac{3}{2}\eta\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\text{VM}}},\end{aligned} \tag{B.49}$$

où

$$\eta \geqslant 0, \quad \mathcal{F}_{\text{ori}} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \eta\mathcal{F}_{\text{ori}} = 0 \tag{B.50}$$

et

$$\boldsymbol{X} \overset{\text{déf}}{=} \left(\boldsymbol{s}+\frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right) - \frac{2}{3}\left[\alpha z+\beta(1-z)\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}} - \frac{2\mu}{3z}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}}}. \tag{B.51}$$

On considère à titre d'exemple le changement de phase direct accompagné d'une orientation de la martensite. $\dot{z}$ et $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{tr}}$ vérifient dans ce cas les conditions de consistance

$$\dot{\mathcal{F}}_z^1 = 0, \tag{B.52}$$
$$\dot{\mathcal{F}}_{\text{ori}} = 0. \tag{B.53}$$

En raison de (B.46),

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{F}}_z^1 = {} & El_{\text{MA}}\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} + P_{\text{MA}}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial C(T,z_{\text{e}})}{\partial T}\dot{T} - \frac{\partial C(T,z_{\text{e}})}{\partial z_{\text{e}}}\dot{z}_{\text{e}}\\ & +\left(\boldsymbol{\sigma}+\frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{tr}} + \left(\dot{\boldsymbol{\sigma}}+\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{B}}\right):\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\\ & -(G+b-a)\dot{z} - \left(\frac{\partial G}{\partial z_{\text{e}}}+\frac{\partial b}{\partial z_{\text{e}}}\right)z\dot{z}_{\text{e}} - \frac{\partial a}{\partial z_{\text{e}}}(1-z)\dot{z}_{\text{e}}\\ & -\left[(\alpha-\beta)\dot{z} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z_{\text{e}}}-\frac{\partial\beta}{\partial z_{\text{e}}}\right)z\dot{z}_{\text{e}} + \frac{1}{2}\frac{\partial\beta}{\partial z_{\text{e}}}\dot{z}_{\text{e}}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}\right)\\ & -2\left[(\alpha-\beta)z+\frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{tr}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{tr}}\right).\end{aligned} \tag{B.54}$$

Si μ_A et μ_M désignent les modules de cisaillement de l'austénite et de la martensite respectivement, le module de cisaillement équivalent du matériau, μ_{eq}, est tel que

$$\frac{1}{\mu_{eq}} = \frac{1-z}{\mu_A} + \frac{z}{\mu_M}. \tag{B.55}$$

On définit alors la partie élastique $\boldsymbol{\sigma}_{el}$ du tenseur de contrainte par

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{el} - 2\mu_{eq}\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}. \tag{B.56}$$

Compte tenu du fait que $\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}$ est déviatorique,

$$\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{el} - 2\dot{\mu}_{eq}z\boldsymbol{s}:\boldsymbol{\varepsilon}_{tr} - 2\mu_{eq}\dot{z}\boldsymbol{s}:\boldsymbol{\varepsilon}_{tr} - 2\mu_{eq}z\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{tr} + \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{el}. \tag{B.57}$$

D'autre part, en raison de (B.56),

$$\dot{\mu_{eq}} = -\mu_{eq}^2\left(\frac{1}{\mu_M} - \frac{1}{\mu_A}\right)\dot{z}. \tag{B.58}$$

(B.57) s'écrit alors

$$\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{s}}_{el} + \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{el} - 2\frac{\mu_{eq}^2}{\mu_A}\boldsymbol{s}:\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}\dot{z} - 2\mu_{eq}z\boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{tr}. \tag{B.59}$$

De la même manière,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{tr} = \boldsymbol{\varepsilon}_{tr}:\dot{\boldsymbol{s}}_{el} - 2\frac{\mu_{eq}^2}{\mu_A}\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}:\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}\dot{z} - 2\mu_{eq}z\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{tr}. \tag{B.60}$$

Compte tenu de (B.49), de (B.59) et de (B.60), la condition (B.52) s'écrit

$$\begin{aligned}
&\left\{(G+b) - a + \frac{2}{3}(\alpha-\beta)\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}:\boldsymbol{\varepsilon}_{tr} + \left(\frac{\partial G}{\partial z_e} + \frac{\partial b}{\partial z_e}\right)z + \frac{\partial a}{\partial z_e}(1-z) - \frac{2}{3}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z_e}:\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}\right.\\
&\quad\left. + \frac{2}{3}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z_e} - \frac{\partial\beta}{\partial z_e}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial\beta}{\partial z_e}\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}:\boldsymbol{\varepsilon}_{tr} + 2\frac{\mu_{eq}^2}{\mu_A}(El_{MA}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\varepsilon}_{tr}):\boldsymbol{\varepsilon}_{tr} + \frac{\partial C(T)}{\partial z_e}\right\}\dot{z}\\
&- \left\{\frac{3}{2}\left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right) - 2\left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{tr} - 3\mu_{eq}z(El_{MA}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\varepsilon}_{tr})\right\}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{VM}}\eta \qquad \text{(B.61)}\\
&= (El_{MA}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\varepsilon}_{tr}):\dot{\boldsymbol{s}}_{el} + \left(\frac{1}{3}El_{MA} + P_{MA}\right)\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{el} - \frac{\partial C(T)}{\partial T}\dot{T}
\end{aligned}$$

La détermination des deux inconnues $\dot{z}$ et η de l'équation précédente nécessite une équation supplémentaire :

- si $\mathcal{F}_{ori} < 0$ ou si $\mathcal{F}_{ori} = 0$ et $\dot{\mathcal{F}}_{ori} < 0$, $\eta = 0$ en raison de (B.50) ;
- dans le cas contraire,, la valeur de η peut ne pas être nulle. Elle est donnée dans ce cas par (B.53) :
  - si le module $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}:\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}}$ est inférieur à sa valeur limite γ, le multiplicateur μ dans l'expression de $\boldsymbol{X}$ est nul. Par conséquent,

$$\boldsymbol{X} \overset{\text{déf}}{=} \left(\boldsymbol{s} + \frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right) - \frac{2}{3}\left[\alpha z + \beta(1-z)\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}. \tag{B.62}$$

Il en résulte

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \dot{\boldsymbol{s}} + \frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{B}} \qquad (B.63)$$
$$- \frac{2}{3}\left[\frac{\partial\alpha}{\partial z_e}z + \frac{\partial\beta}{\partial z_e}(1-z)\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}\dot{z}_e - \frac{2}{3}(\alpha-\beta)\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}\dot{z} - \frac{2}{3}[\alpha z + \beta(1-z)]\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{tr}.$$

D'autre part,

$$\dot{\mathcal{F}}_{ori} = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{X}}{X_{VM}} : \dot{\boldsymbol{X}} - Y\dot{z}. \qquad (B.64)$$

En raison de (B.49), de (B.58), de (B.62) et de (B.63),

$$\boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X} : \dot{\boldsymbol{s}}_{el} - 2\frac{\mu_{eq}^2}{\mu_A}\boldsymbol{X} : \boldsymbol{\varepsilon}_{tr}\dot{z} - 2\mu_{eq}zX_{VM}\eta \qquad (B.65)$$
$$+ \frac{2}{3}\boldsymbol{X} : \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial z_e}\dot{z}_e - \frac{2}{3}\left[\dot{\alpha}z + \dot{\beta}(1-z)\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{tr} : \boldsymbol{X}\dot{z}_e$$
$$- \frac{2}{3}(\alpha-\beta)\boldsymbol{\varepsilon}_{tr} : \boldsymbol{X}\dot{z}_e - \frac{2}{3}[\alpha z + \beta(1-z)]\eta X_{VM}.$$

Au cours de la transformation directe, $\dot{z} > 0 \Rightarrow \dot{z}_e = \dot{z}$. Par conséquent, (B.64) s'écrit

$$\left\{Y + \left[\left(3\frac{\mu_{eq}^2}{\mu_A} + \alpha - \beta + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}z + \frac{\partial\beta}{\partial\gamma}(1-z)\right)\frac{\partial\gamma}{\partial z_e}\right)\boldsymbol{\varepsilon}_{tr} - \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial z_e}\right] : \frac{\boldsymbol{X}}{X_{VM}}\right\}\dot{z}$$
$$+ \left[\alpha z + \beta(1-z) + 3\mu_{eq}z\right]\eta = \frac{3}{2}\dot{\boldsymbol{s}}_{el} : \frac{\boldsymbol{X}}{X_{VM}}, \qquad (B.66)$$

– si $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{tr} : \boldsymbol{\varepsilon}_{tr}}$ tend à dépasser γ, le multiplicateur μ n'est plus nul. En effet, μ dans ce cas est tel que

$$\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{tr} : \boldsymbol{\varepsilon}_{tr}} = \gamma \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_{tr} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{tr} = 0$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_{tr} : \boldsymbol{X} = 0. \qquad (B.67)$$

Il en résulte, compte tenu de (B.51),

$$\frac{\mu}{z} = \frac{1}{\gamma}\left\{\left(\boldsymbol{s} + \frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}_{tr} - \gamma^2[\alpha z + \beta(1-z)]\right\} \qquad (B.68)$$

et par conséquent

$$\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{s} + \frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right) - \frac{2}{3\gamma^2}\left[\left(\boldsymbol{s} + \frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}_{tr}\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}. \qquad (B.69)$$

La condition $\dot{\mathcal{F}}_{ori} = 0$ se traduit dans ce cas par

$$Y\dot{z} + \left[\frac{1}{\gamma^2}\left(\boldsymbol{s} + \frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}_{tr} + 3\mu_{eq}z\right]\eta = \frac{3}{2}\dot{\boldsymbol{s}}_{el} : \frac{\boldsymbol{X}}{X_{VM}}. \qquad (B.70)$$

Au cours d'un changement de phase inverse, les lois d'évolution de z et de $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}$ vérifient la condition $\dot{\mathcal{F}}_z^2 = 0$. En se servant de (B.47),

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{F}}_z^2 = &-El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} - P_{\mathrm{MA}}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial C(T,z_{\mathrm{e}})}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial C(T,z_{\mathrm{e}})}{\partial z_{\mathrm{e}}}\dot{z}_{\mathrm{e}} \\ &- \left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right):\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{tr}} - \left(\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{B}}\right):\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} \\ &+ (G-b+a)\dot{z} + \left(\frac{\partial G}{\partial z_{\mathrm{e}}} - \frac{\partial b}{\partial z_{\mathrm{e}}}\right)z\dot{z}_{\mathrm{e}} - \frac{\partial a}{\partial z_{\mathrm{e}}}(1-z)\dot{z}_{\mathrm{e}} \\ &+ \left[(\alpha-\beta)\dot{z} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z_{\mathrm{e}}} - \frac{\partial\beta}{\partial z_{\mathrm{e}}}\right)z\dot{z}_{\mathrm{e}} + \frac{1}{2}\frac{\partial\beta}{\partial z_{\mathrm{e}}}\dot{z}_{\mathrm{e}}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right) \\ &+ 2\left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{tr}}\right).\end{aligned} \tag{B.71}$$

Au cours de la transformation inverse, $\dot{z} < 0 \Rightarrow \dot{z}_{\mathrm{e}} = -\dot{z}$. Compte tenu de (B.49), de (B.58) et de (B.59), (B.71) s'écrit

$$\begin{aligned}&\left\{(G-b) + a + \frac{2}{3}(\alpha-\beta)\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - \left(\frac{\partial G}{\partial z_{\mathrm{e}}} - \frac{\partial b}{\partial z_{\mathrm{e}}}\right)z + \frac{\partial a}{\partial z_{\mathrm{e}}}(1-z) + \frac{2}{3}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z_{\mathrm{e}}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}\right. \\ &\quad\left. - \frac{2}{3}\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma} - \frac{\partial\beta}{\partial\gamma}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial\beta}{\partial\gamma}\right]\frac{\partial\gamma}{\partial z_{\mathrm{e}}}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} + 2\frac{\mu_{\mathrm{eq}}^2}{\mu_{\mathrm{A}}}(El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}):\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} + \frac{\partial C(T)}{\partial z_{\mathrm{e}}}\right\}\dot{z} \\ &- \left\{\frac{3}{2}\left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{2}{3}\boldsymbol{B}\right) - 2\left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}} - 3\mu_{\mathrm{eq}}z(El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}})\right\}:\frac{\boldsymbol{X}}{X_{\mathrm{VM}}}\eta \\ &= (El_{\mathrm{MA}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}):\dot{\boldsymbol{s}}_{\mathrm{el}} + \left(\frac{1}{3}El_{\mathrm{MA}} + P_{\mathrm{MA}}\right)\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{el}} - \frac{\partial C(T)}{\partial T}\dot{T}\end{aligned} \tag{B.72}$$

Comme dans le cas du changement de phase direct, la détermination des deux inconnues $\dot{z}$ et η nécessite une équation supplémentaire. Cette équation est donnée par $\eta = 0$ si $\mathcal{F}_{\mathrm{ori}} < 0$ ou si $\mathcal{F}_{\mathrm{ori}} = 0$ et $\dot{\mathcal{F}}_{\mathrm{ori}} < 0$; dans le cas contraire, elle est donnée par (B.66) si $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}} < \gamma$ ou par (B.70) si $\sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}:\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{tr}}}$ tend à dépasser γ.

B.3 Procédure d'identification des paramètres

En 1D, (B.39), (B.40) et (B.41) donnent

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_z^1 = &\left(\frac{1}{E_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{E_{\mathrm{A}}}\right)\frac{\sigma^2}{2} - C(T,z_{\mathrm{e}}) \\ &+ (\sigma+B)\varepsilon_{\mathrm{tr}} - (G+b)z - a(1-z) - \left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\varepsilon_{\mathrm{tr}}^2,\end{aligned} \tag{B.73}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_z^2 = &-\left(\frac{1}{E_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{E_{\mathrm{A}}}\right)\frac{\sigma^2}{2} + C(T,z_{\mathrm{e}}) \\ &- (\sigma+B)\varepsilon_{\mathrm{tr}} + (G-b)z - a(1-z) + \left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\varepsilon_{\mathrm{tr}}^2,\end{aligned} \tag{B.74}$$

$$\mathcal{F}_{\mathrm{ori}} = \left|(\sigma+B) - [\alpha z + \beta(1-z)]\,\varepsilon_{\mathrm{tr}} - \frac{\mu}{z}\,\mathrm{sign}\,\varepsilon_{\mathrm{tr}}\right| - zY. \tag{B.75}$$

On suppose que l'éducation permet au matériau de se transformer en martensite complètement orientée, caractérisée par $|\varepsilon_{\text{tr}}| = \gamma$, par simple refroidissement à partir d'un état austénitique. L'identification des paramètres nécessite alors un essai d'orientation, un essai de traction répétée dans le domaine pseudoélastique jusqu'à stabilisation de la boucle d'hystérésis et deux essais de calorimétrie à balayage différentiel. On se donne

$$a = a^{(0)} + \left(a^{\text{sat}} - a^{(0)}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{z_{\text{e}}}{\tau}\right)\right), \tag{B.76}$$

$$b = b^{(0)} + \left(b^{\text{sat}} - b^{(0)}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{z_{\text{e}}}{\tau}\right)\right), \tag{B.77}$$

$$G = G^{(0)} + \left(G^{\text{sat}} - G^{(0)}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{z_{\text{e}}}{\tau}\right)\right), \tag{B.78}$$

$$C(T, z_{\text{e}}) = C^{(0)}(T) + \left(C^{\text{sat}}(T) - C^{(0)}(T)\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{z_{\text{e}}}{\tau}\right)\right), \tag{B.79}$$

$$\gamma = \gamma^{(0)} + \left(\gamma^{\text{sat}} - \gamma^{(0)}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{z_{\text{e}}}{\tau}\right)\right). \tag{B.80}$$

Les exposants $^{(0)}$ et $^{\text{sat}}$ correspondent respectivement au matériau vierge et au matériau éduqué. Les densités des chaleurs latentes $C^{(0)}(T)$ et $C^{\text{sat}}(T)$ sont définies par

$$C^{(0)}(T) = \xi^{(0)}\left(T - \left(A_{\text{f}}^{0}\right)^{(0)}\right) + \kappa^{(0)}, \tag{B.81}$$

$$C^{\text{sat}}(T) = \xi^{\text{sat}}\left(T - \left(A_{\text{f}}^{0}\right)^{\text{sat}}\right) + \kappa^{\text{sat}}. \tag{B.82}$$

B.3.1 Essai d'orientation

L'orientation de la martensite commence pour $|\sigma + B| = \sigma_{\text{rs}}$, $z = 1$ et $\varepsilon_{\text{tr}} = 0$ qui entraîne nécessairement $\mu = 0$. Par conséquent, (B.75) donne

$$Y = \sigma_{\text{rs}}. \tag{B.83}$$

Quand σ devient infiniment proche de σ_{rf} par valeurs inférieures, $\varepsilon_{\text{tr}} = \gamma$ et $\mu = 0$. L'orientation respecte la condition de consistance $\dot{\mathcal{F}}_{\text{ori}} = 0$ qui entraîne

$$\left(\dot{\sigma} + \dot{B}\right) - \alpha\dot{\varepsilon}_{\text{tr}} = 0, \tag{B.84}$$

d'où

$$\int_{\sigma_{\text{rs}}}^{\sigma_{\text{rf}}} d(\sigma + B) = \alpha \int_{0}^{\gamma} d\varepsilon_{\text{tr}}. \tag{B.85}$$

Par conséquent,

$$\alpha = \frac{\sigma_{\text{rf}} - \sigma_{\text{rs}}}{\gamma}. \tag{B.86}$$

On considère que la martensite formée à partir de l'austénite est complètement orientée lorsque la contrainte de début de changement de phase directe est supérieure ou égale au seuil σ_{rf} de fin d'orientation. Dans ce cas, $\mathcal{F}_{\text{ori}} = 0$ pour $z = 0$, $\varepsilon_{\text{tr}} = \gamma$, $(\sigma + B) = \sigma_{\text{rf}}$ et $\mu = 0$ donne

$$\beta = \frac{\sigma_{\text{rf}}}{\gamma}. \tag{B.87}$$

B.3.2 Essai de traction répétée dans le domaine pseudoélastique

Chaque cycle correspond à une augmentation de deux de z_e. en intégrant (B.20) on obtient, en 1D, la valeur de la déformation résiduelle à la fin d'un cycle entier de traction–décharge. Elle est donnée par

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^{sat}\left(1 - \exp\left(-\frac{2N}{\tau}\right)\right), \tag{B.88}$$

où N est le nombre de cycles. Le paramètre τ peut être déterminé par ajustement de la courbe (B.88) à la courbe expérimentale déduite directement de la réponse en contrainte–déformation du matériau.

Le cycle contrainte–déformation stabilisé permet l'identification de a^{sat}, b^{sat} et G^{sat}. Il permet aussi de calculer ξ^{sat} et κ^{sat} connaissant la température $\left(A_f^0\right)^{sat}$ déterminée par un essai de calorimétrie à balayage différentiel sur un échantillon du matériau complètement éduqué. En effet, soit T_0 la température à laquelle l'essai est réalisé

– le changement de phase direct commence pour $\sigma = \sigma_{ms}^{sat}$ et $z = 0$. z_e tends vers $+\infty$. En tenant compte de (B.76) à (B.82), $\mathcal{F}_z^1 = 0$ implique

$$\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A}\right)\frac{\left(\sigma_{ms}^{sat}\right)^2}{2} - C^{sat}(T_0) + \left(\sigma_{ms}^{sat} + B^{sat}\right)\gamma^{sat} - a^{sat} - \frac{\beta^{sat}}{2}\left(\gamma^{sat}\right)^2 = 0\,; \tag{B.89}$$

– à la fin du changement de phase direct, $\sigma = \sigma_{mf}^{sat}$ et $z = 1$. $\mathcal{F}_z^1 = 0$ implique

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A}\right)\frac{\left(\sigma_{mf}^{sat}\right)^2}{2} - C^{sat}(T_0) + \left(\sigma_{mf}^{sat} + B^{sat}\right)\gamma^{sat} \\ - \left(G^{sat} + b^{sat}\right) - \left(\alpha^{sat} - \frac{\beta^{sat}}{2}\right)\left(\gamma^{sat}\right)^2 = 0\,;\end{aligned} \tag{B.90}$$

– le changement de phase inverse commence pour $z = 1$ et $\sigma = \sigma_{as}^{sat}$. $\mathcal{F}_z^2 = 0$ implique

$$\begin{aligned}-\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A}\right)\frac{\left(\sigma_{as}^{sat}\right)^2}{2} + C^{sat}(T_0) - \left(\sigma_{as}^{sat} + B^{sat}\right)\gamma^{sat} \\ + \left(G^{sat} - b^{sat}\right) + \left(\alpha^{sat} - \frac{\beta^{sat}}{2}\right)\left(\gamma^{sat}\right)^2 = 0\,;\end{aligned} \tag{B.91}$$

– à la fin de la transformation inverse, $z = 0$ et $\sigma = \sigma_{af}^{sat}$. $\mathcal{F}_z^2 = 0$ entraîne

$$\begin{aligned}-\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A}\right)\frac{\left(\sigma_{af}^{sat}\right)^2}{2} + C^{sat}(T_0) \\ - \left(\sigma_{af}^{sat} + B^{sat}\right)\gamma^{sat} - a^{sat} + \frac{\beta^{sat}}{2}\left(\gamma^{sat}\right)^2 = 0.\end{aligned} \tag{B.92}$$

$$\text{(B.89)} + \text{(B.92)} \Rightarrow a^{sat} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A}\right)\frac{\left(\sigma_{ms}^{sat}\right)^2 - \left(\sigma_{af}^{sat}\right)^2}{2} + \left(\sigma_{ms}^{sat} - \sigma_{af}^{sat}\right)\gamma^{sat}\right], \tag{B.93}$$

$$\text{(B.90)} + \text{(B.91)} \Rightarrow b^{sat} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A}\right)\frac{\left(\sigma_{mf}^{sat}\right)^2 - \left(\sigma_{as}^{sat}\right)^2}{2} + \left(\sigma_{mf}^{sat} - \sigma_{as}^{sat}\right)\gamma^{sat}\right]. \tag{B.94}$$

Compte tenu de (B.93) et de (B.94),

$$(\text{B.89}) - (\text{B.90}) \Rightarrow G^{\text{sat}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{E_{\text{M}}} - \frac{1}{E_{\text{A}}}\right)\frac{\left(\sigma_{\text{mf}}^{\text{sat}}\right)^2 - \left(\sigma_{\text{ms}}^{\text{sat}}\right)^2 + \left(\sigma_{\text{as}}^{\text{sat}}\right)^2 - \left(\sigma_{\text{af}}^{\text{sat}}\right)^2}{2} + \left(\sigma_{\text{mf}}^{\text{sat}} - \sigma_{\text{ms}}^{\text{sat}} + \sigma_{\text{as}}^{\text{sat}} - \sigma_{\text{af}}^{\text{sat}}\right)\gamma^{\text{sat}} - 2\left(\alpha^{\text{sat}} - \beta^{\text{sat}}\right)\left(\gamma^{\text{sat}}\right)^2\right], \tag{B.95}$$

$$(\text{B.95}) \text{ et } (\text{B.89}) \Rightarrow C^{\text{sat}}(T_0) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{E_{\text{M}}} - \frac{1}{E_{\text{A}}}\right)\frac{\left(\sigma_{\text{ms}}^{\text{sat}}\right)^2 + \left(\sigma_{\text{af}}^{\text{sat}}\right)^2}{2} + \left(\sigma_{\text{ms}}^{\text{sat}} + \sigma_{\text{af}}^{\text{sat}}\right)\gamma^{\text{sat}} - \beta^{\text{sat}}\left(\gamma^{\text{sat}}\right)^2\right] + B^{\text{sat}}\gamma^{\text{sat}}. \tag{B.96}$$

D'autre part, (B.82) implique

$$\kappa^{\text{sat}} = C^{\text{sat}}\left(\left(A_{\text{f}}^0\right)^{\text{sat}}\right). \tag{B.97}$$

$\mathcal{F}_z^2 = 0$ pour $z = 0$ et $\sigma = 0$ donne

$$C^{\text{sat}}\left(\left(A_{\text{f}}^0\right)^{\text{sat}}\right) = a^{\text{sat}} - \frac{\beta^{\text{sat}}\left(\gamma^{\text{sat}}\right)^2}{2} + B^{\text{sat}}\gamma^{\text{sat}}, \tag{B.98}$$

d'où

$$\kappa^{\text{sat}} = a^{\text{sat}} - \frac{\beta^{\text{sat}}\left(\gamma^{\text{sat}}\right)^2}{2} + B^{\text{sat}}\gamma^{\text{sat}}. \tag{B.99}$$

Finalement, en raison de (B.82),

$$\begin{aligned}\xi^{\text{sat}} &= \frac{C^{\text{sat}}(T_0) - C^{\text{sat}}\left(\left(A_{\text{f}}^0\right)^{\text{sat}}\right)}{T_0 - \left(A_{\text{f}}^0\right)^{\text{sat}}} \\ &= \frac{C^{\text{sat}}(T_0) - \kappa^{\text{sat}}}{T_0 - \left(A_{\text{f}}^0\right)^{\text{sat}}}.\end{aligned} \tag{B.100}$$

La première boucle pseudoélastique permet la détermination de $a^{(0)}$, $b^{(0)}$ et $G^{(0)}$. Connaissant T_0 et $\left(A_{\text{f}}^0\right)^{(0)}$, elle permet aussi de calculer $\kappa^{(0)}$ et $\xi^{(0)}$. Si l'exposant $^{(i)}$ affecté à un paramètre donné désigne la valeur de ce paramètre pour $z_{\text{e}} = i$, on a :

– au début du changement de phase direct, $\mathcal{F}_z^1 = 0$ pour $z = 0$, $z_{\text{e}} = 0$ et $\sigma = \sigma_{\text{ms}}^{(0)}$ implique

$$\left(\frac{1}{E_{\text{M}}} - \frac{1}{E_{\text{A}}}\right)\frac{\left(\sigma_{\text{ms}}^{(0)}\right)^2}{2} - C^{(0)}(T_0) + \sigma_{\text{ms}}^{(0)}\gamma^{(0)} - a^{(0)} - \frac{\beta^{(0)}}{2}\left(\gamma^{(0)}\right)^2 = 0\,; \tag{B.101}$$

– à la fin de la transformation directe, $z = 1$, $z_e = 1$ et $\sigma = \sigma_{mf}^{(0)}$. $\mathcal{F}_z^1 = 0$ entraîne

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A}\right)\frac{\left(\sigma_{mf}^{(0)}\right)^2}{2} - C^{(0)}(T_0)\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right) - C^{sat}(T_0)\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)\\ + \left[\sigma_{mf}^{(0)} + B^{sat}\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)\right]\gamma^{(1)}\\ - \left(G^{(0)} + b^{(0)}\right)\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\\ - \left(G^{sat} + b^{sat}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right) - \left(\alpha^{(1)} - \frac{\beta^{(1)}}{2}\right)\left(\gamma^{(1)}\right)^2 = 0\,;\end{aligned} \tag{B.102}$$

– au début de la transformation inverse, $\sigma = \sigma_{as}^{(0)}$ pour $z = 1$ et $z_e = 1$. $\mathcal{F}_z^2 = 0$ implique

$$\begin{aligned}-\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A}\right)\frac{\left(\sigma_{as}^{(0)}\right)^2}{2} + C^{(0)}(T_0)\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right) + C^{sat}(T_0)\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)\\ - \left[\sigma_{as}^{(0)} + B^{sat}\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)\right]\gamma^{(1)}\\ + \left(G^{(0)} - b^{(0)}\right)\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\\ + \left(G^{sat} - b^{sat}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right) + \left(\alpha^{(1)} - \frac{\beta^{(1)}}{2}\right)\left(\gamma^{(1)}\right)^2 = 0\,;\end{aligned} \tag{B.103}$$

– à la fin de la transformation inverse, $\sigma = \sigma_{af}^{(0)}$ pour $z = 0$ et $z_e = 2$. $\mathcal{F}_z^2 = 0$ implique

$$\begin{aligned}-\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A}\right)\frac{\left(\sigma_{af}^{(0)}\right)^2}{2} + C^{(0)}(T_0)\exp\left(-\frac{2}{\tau}\right) + C^{sat}(T_0)\left(1 - \exp\left(-\frac{2}{\tau}\right)\right)\\ - \left[\sigma_{af}^{(0)} + B^{sat}\left(1 - \exp\left(-\frac{2}{\tau}\right)\right)\right]\gamma^{(2)}\\ - a^{(0)}\exp\left(-\frac{2}{\tau}\right) - a^{sat}\left(1 - \exp\left(-\frac{2}{\tau}\right)\right) + \frac{\beta^{(2)}}{2}\left(\gamma^{(2)}\right)^2 = 0.\end{aligned} \tag{B.104}$$

(B.101) + (B.104) $\times \exp\left(\frac{2}{\tau}\right)$ donne

$$\begin{aligned} a^{(0)} = \frac{1}{2}\Bigg[& \left(\frac{1}{E_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{E_{\mathrm{A}}}\right)\frac{\left(\sigma_{\mathrm{ms}}^{(0)}\right)^2 - \left(\sigma_{\mathrm{af}}^{(0)}\right)^2 \exp\left(\frac{2}{\tau}\right)}{2} \\ & + \sigma_{\mathrm{ms}}^{(0)}\gamma^{(0)} - \sigma_{\mathrm{af}}^{(0)} \exp\left(\frac{2}{\tau}\right)\gamma^{(2)}\Bigg] \\ & + \frac{1}{2}\left[C^{\mathrm{sat}}(T_0) - B^{\mathrm{sat}}\gamma^{(2)} - a^{\mathrm{sat}}\right]\left(\exp\left(\frac{2}{\tau}\right) - 1\right) \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta^{(2)}}{2}\left(\gamma^{(2)}\right)^2 \exp\frac{2}{\tau} - \frac{\beta^{(0)}}{2}\left(\gamma^{(0)}\right)^2\right). \end{aligned} \tag{B.105}$$

(B.102) $\times \exp\left(\frac{1}{\tau}\right)$ + (B.103) $\times \exp\left(\frac{1}{\tau}\right)$ donne

$$\begin{aligned} b^{(0)} = \frac{1}{2}\Bigg[& \left(\frac{1}{E_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{E_{\mathrm{A}}}\right)\frac{\left(\sigma_{\mathrm{mf}}^{(0)}\right)^2 - \left(\sigma_{\mathrm{as}}^{(0)}\right)^2}{2} + \left(\sigma_{\mathrm{mf}}^{(0)} - \sigma_{\mathrm{as}}^{(0)}\right)\gamma^{(1)}\Bigg] \exp\left(\frac{1}{\tau}\right) \\ & - b^{\mathrm{sat}}\left(\exp\left(\frac{1}{\tau}\right) - 1\right). \end{aligned} \tag{B.106}$$

Compte tenu de (B.105) et de (B.106), (B.102) $\times \exp\left(\frac{1}{\tau}\right)$ − (B.103) $\times \exp\left(\frac{1}{\tau}\right)$ donne

$$\begin{aligned} G^{(0)} = \frac{1}{2}\Bigg[& \left(\frac{1}{E_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{E_{\mathrm{A}}}\right)\frac{\left(\sigma_{\mathrm{mf}}^{(0)}\right)^2 + \left(\sigma_{\mathrm{as}}^{(0)}\right)^2}{2} \exp\left(\frac{1}{\tau}\right) \\ & + \left(\sigma_{\mathrm{mf}}^{(0)} + \sigma_{\mathrm{as}}^{(0)}\right)\gamma^{(1)} \exp\left(\frac{1}{\tau}\right) - 2\left(\alpha^{(1)} - \frac{\beta^{(1)}}{2}\right)\left(\gamma^{(1)}\right)^2\Bigg] - C^{(0)}(T_0) \\ & + \left[B^{\mathrm{sat}}\gamma^{(1)} - C^{\mathrm{sat}}(T_0) - G^{\mathrm{sat}} - \left(\alpha^{(1)} - \frac{\beta^{(1)}}{2}\right)\left(\gamma^{(1)}\right)^2\right]\left(\exp\left(\frac{1}{\tau}\right) - 1\right). \end{aligned} \tag{B.107}$$

Par conséquent, (B.101) − (B.104) × $\exp\left(\frac{2}{\tau}\right)$ donne

$$C^{(0)}(T_0) = \frac{1}{2}\Bigg[\left(\frac{1}{E_{\mathrm{M}}} - \frac{1}{E_{\mathrm{A}}}\right)\frac{\left(\sigma_{\mathrm{ms}}^{(0)}\right)^2 + \left(\sigma_{\mathrm{af}}^{(0)}\right)^2 \exp\left(\frac{2}{\tau}\right)}{2} + \left(\sigma_{\mathrm{ms}}^{(0)}\gamma^{(0)} + \sigma_{\mathrm{af}}^{(0)}\gamma^{(2)}\exp\left(\frac{2}{\tau}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\beta^{(0)}\left(\gamma^{(0)}\right)^2 + \beta^{(2)}\left(\gamma^{(2)}\right)^2\right)\Bigg] - \frac{1}{2}\left[C^{\mathrm{sat}}(T_0) - B^{\mathrm{sat}}\gamma^{(2)} - a^{\mathrm{sat}} + \frac{\beta^{(2)}}{2}\left(\gamma^{(2)}\right)^2\right]\left(\exp\left(\frac{2}{\tau}\right) - 1\right). \tag{B.108}$$

D'autre part, en raison de (B.81),

$$\kappa^{(0)} = C^{(0)}\left(\left(A_{\mathrm{f}}^0\right)^{(0)}\right). \tag{B.109}$$

$\mathcal{F}_z^2 = 0$ pour $z = 0$, $z_{\mathrm{e}} = 2$ et $\sigma = 0$ implique

$$\kappa^{(0)} = a^{(0)} + \left(a^{\mathrm{sat}} - C^{\mathrm{sat}}\left(\left(A_{\mathrm{f}}^0\right)^{(0)}\right)\right)\left(\exp\left(\frac{2}{\tau}\right) - 1\right) + B^{\mathrm{sat}}\gamma^{(2)}\left(\exp\left(\frac{2}{\tau}\right) - 1\right) - \frac{\beta^{(2)}}{2}\left(\gamma^{(2)}\right)^2\exp\left(\frac{2}{\tau}\right). \tag{B.110}$$

(B.81) implique, d'ailleurs,

$$\xi^{(0)} = \frac{C^{(0)}(T_0) - \kappa^{(0)}}{T_0 - \left(A_{\mathrm{f}}^0\right)^{(0)}}. \tag{B.111}$$