

Calcul de champs électromagnétiques et de répartition de charges surfaciques dans des domaines quasi-singulier.

Samir Kaddouri

▶ **To cite this version:**

Samir Kaddouri. Calcul de champs électromagnétiques et de répartition de charges surfaciques dans des domaines quasi-singulier.. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2007. Français. NNT : . pastel-00002592

HAL Id: pastel-00002592
https://pastel.hal.science/pastel-00002592

Submitted on 27 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Polytechnique

Ecole Nat. Sup. de Techniques Avancées

Résolution du problème du potentiel électrostatique dans des domaines prismatiques et axisymétriques singuliers. Etude asymptotique dans des domaines quasi-singuliers.

Thèse

présentée et soutenue le 12 Mars 2007

pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Ecole Polytechnique

Spécialité Mathématiques Appliquées

par

Samir KADDOURI

Composition du jury

Président :	ALOUGES François
Rapporteurs :	DAUGE Monique MOUSSAOUI Mohand
Examinateur :	JOLY Patrick
Directeur de thèse :	CIARLET Patrick

Thèse réalisée au Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA – Poems – UMR 27 06

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein de l'Unité de Mathématiques Appliquées (Uma) de l'Ensta. Je remercie Eric Lunéville, directeur de cette unité, pour m'avoir accueilli et permis de travailler pendant trois ans dans un excellent environnement. Je remercie également tous les autres membres de l'Uma pour leur disponibilité ainsi que pour les excellentes conditions de travail qui existent au sein de cette équipe.

Je remercie Patrick Joly pour avoir accepté de participer au jury de thèse, ainsi que Monique Dauge et Mohand Moussaoui pour avoir accepté de rapporter cette thèse. Je remercie particulièrement Monique Dauge pour les corrections qu'elle a apportées à ce document.

Je remercie François Alouges pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse, pour ses remarques, ainsi que pour son soutien et ses encouragements alors que j'étais en Dea.

Mille milliards de mercis à Patrick Ciarlet, pour m'avoir permis de m'initier à la recherche en me proposant ce sujet de thèse, mais aussi pour sa patience, sa disponibilité et ses conseils pendant les trois années que j'ai passées à l'Ensta.

Mes remerciements s'adressent également aux autres doctorants de cette unité pour l'ambiance conviviale qui a régné en leur compagnie.

Un grand merci à Annie Marchal, secrétaire de l'Uma pour son aide précieuse face aux formalités.

Table des matières

Introduction générale **1**

Première partie : Singularités d'arêtes en domaine prismatique **9**

Introduction **11**

Chapitre 1 Méthode de Fourier et du complément singulier **13**

1.1 Introduction 13

1.2 Méthode du complément singulier : λ-approche 14

1.2.1 Généralités 15

1.2.2 Décomposition de $L^2(\omega)$ 19

1.2.3 Méthode du Complément Singulier 22

1.3 Cas de l'arête prismatique 27

1.3.1 Développement en série de Fourier 28

1.3.2 Prise en compte de la singularité 31

1.3.3 Approximation de $\breve{u}_k$ et λ_k 33

1.3.4 Algorithme de la MFCS 34

1.3.5 Méthode du complément singulier en domaine prismatique 37

1.3.6 Complément singulier 2D-Eléments finis prismatiques 39

1.3.7 Eléments finis prismatiques 40

1.3.8 Approximation de la partie régulière 41

Chapitre 2 Cas d'une arête axisymétrique **43**

2.1 Espaces de Sobolev à poids 44

2.2 Décomposition en séries de Fourier 47

2.3 Régularité et structure de la solution 50

2.4 Méthode du complément singulier pour les modes $u_k, |k| \geq 2$ 52

2.4.1 Description 52

2.4.2 Calcul de p_s^2 et ϕ_s^2 . . . 55
2.4.3 Calcul de $\tilde{u}_k$ et c_k . . . 57
2.5 Méthode du complément singulier pour les modes $u_k, |k| = 1$ . . . 58
2.5.1 Description . . . 58
2.5.2 Calcul de $p_s^{\pm 1}$ et $\phi_s^{\pm 1}$ . . . 59
2.5.3 Calcul de $\tilde{u}_{\pm 1}$ et $c_{\pm 1}$ . . . 61
2.6 Méthode du complément singulier pour les modes $u_0, k = 0$ . . . 61
2.6.1 Description . . . 61
2.6.2 Calcul de p_s^0 et ϕ_s^0 . . . 62
2.6.3 Calcul de $\tilde{u}_0$ et c_0 . . . 62
2.7 Méthode du complément singulier en domaine axisymétrique . . . 63
2.7.1 Décomposition tensorielle . . . 63
2.7.2 Algorithme . . . 63
2.8 Conclusion . . . 64

Chapitre 3 Expériences numériques **65**
3.1 Préliminaires . . . 66
3.1.1 Quadrature . . . 66
3.1.2 Tests préliminaires . . . 66
3.1.3 Tests . . . 67
3.2 Cas prismatique . . . 67
3.2.1 Approximation de la solution par éléments finis prismatiques . . . 67
3.2.2 Cas prismatique : convergence de la Méthode de Fourier et du Complément Singulier . . . 70
3.2.3 Cas prismatique : MFCS et éléments finis 3D . . . 72
3.3 Cas axisymétrique : FFEM et MFCS . . . 74
3.4 Analyse de la complexité . . . 78
3.5 Conclusion . . . 81

Deuxième partie : Coins arrondis **83**

Chapitre 4 Coins arrondis en dimension deux **85**
4.1 Introduction . . . 85
4.2 Espaces fonctionnels. . . . 86
4.2.1 Définitions et notations géométriques. . . . 86

4.2.2 Espaces de Sobolev en domaine non borné. 88
4.2.3 Cas axisymétrique. 91
4.2.4 Espaces de Sobolev sur Ω. 92
4.3 Problème de Dirichlet dans le cône. 92
4.3.1 Le problème dans Ω. 93
4.3.2 Le problème dans Ω : cas cartésien. 95
4.3.3 Le problème dans Ω : cas axisymétrique. 100
4.4 Coins arrondis en dimension deux. 102
4.4.1 Généralités. 102
4.4.2 Développement asymptotique de la solution 107
4.4.3 Représentation intégrale de la dérivée normale. 111
4.5 Coins arrondis : cas axisymétrique. 113
4.5.1 Développement asymptotique de la solution. 113
4.5.2 Représentation intégrale de la dérivée normale. 115
4.6 Discrétisation du problème par éléments finis 117
4.6.1 L'opérateur Dirichlet-to-Neumann 117
4.6.2 Approximation par éléments finis 119
4.7 Expériences numériques. 120
4.8 Conclusion 122

Chapitre 5 Application au cas de domaines prismatiques **125**
5.1 Introduction 125
5.1.1 Espaces à poids et analyse de Fourier 126
5.1.2 Comportement asymptotique des modes au voisinage du coin 133
5.1.3 Développement asymptotique 135
5.2 Conclusion 140

Conclusion **143**

Bibliographie **145**

Table des figures

1 Configuration pointe-cible 2

1.1 Domaine ω. 15
1.2 Notations 17
1.3 L'élément prismatique de référence 40

2.1 Domaine méridien. 44

3.1 Matrice de rigidité du laplacien en 3D. 67
3.2 Erreur $\log - \log$ en normes L^2 et H^1 pour un domaine et une solution réguliers . 67
3.3 Singularités duale p_s^h(gauche) et primale ϕ_s^h(droite) 68
3.4 Isovaleurs des solutions p_s^h(gauche), ϕ_s^h(droite) 68
3.5 Maillage bidimensionnel pour $h = 0.125$. 69
3.6 Graphe $k_{\max} = [h^{-\frac{1}{2-\alpha}}]$ où $[x]$ est la partie entièrede x avec $\alpha = \frac{2}{3}$. 71
3.7 Coefficient de singularité d'arête γ_h pour différents pas de maillage h avec $f = 1$. 72
3.8 Coefficient de singularité d'arête γ_h pour différents pas de maillage h avec $f(z) = \log(|\log(z/2)|)$ 73

4.1 Domaines $\Omega, \Omega_\varepsilon$: cas cartésien ($n = 2$) et axisymétrique ($n = 3$). 87
4.2 Domaine tronqué. 117

5.1 Prisme avec arête arrondie. 126
5.2 Coin arrondi en domaine borné. 136

Introduction générale

Les phénomènes électrostatiques ont un interêt considérable dans de nombreuses applications domestiques et industrielles. Parmi celles-ci, on peut citer les systèmes de traitement de fumées rejetées par les centrales thermiques dont le principe est de charger les particules en suspension dans les gaz par un dispositif ionisant afin qu'elles s'accumulent sur les parois reliées à la terre et qu'on récupère ensuite pour les éliminer.

On peut encore citer la pulvérisation électrostatique dans le cas de la peinture industrielle par exemple. Lorsqu'on peint au pistolet un objet, la peinture projetée est formée de gouttes microscopiques, et seule une partie atteint l'objet à peindre, l'autre partie se dispersant dans l'air. Afin d'augmenter le rendement, on applique un fort potentiel au pistolet (de l'ordre de $\phi_1 = 90$ kV) alors que la cible est maintenue au potentiel $\phi_0 = 0$. Grâce au champ électrique résultant, les particules de peinture sont chargées électriquement. La différence de potentiel entre le pistolet et l'objet induit un champ électrique et les particules de peinture, sous l'action de forces électrostatiques sont alors dirigées suivant les lignes de champs du champ électrique vers la cible. Ce champ électrique, particulièrement intense au bout du pistolet, est décrit par la conservation de la charge conduisant à la relation

$$\mathrm{div}\,(\varepsilon \mathbf{E}) = \varrho, \tag{1}$$

où ε est la permittivité électrique du milieu, ϱ la charge électrique spatiale. En supposant que le milieu est homogène et si ϕ désigne le potentiel électrostatique, l'équation (1) se réécrit

$$-\Delta\phi = \frac{\varrho}{\varepsilon}, \tag{2}$$

en utilisant la relation $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Afin de clôre la formulation du problème (pour le potentiel ϕ), il faut préciser le domaine de calcul et les conditions au bord. A la surface du conducteur, on a supposé que le potentiel ϕ est constant. Une première approche consiste à clôre le domaine par des bords artificiels auxquels on impose une condition de type Neumann. Des expériences numériques ont été réalisées dans ce sens par Timouyas *et al* [76, 59]. On peut toutefois considérer qu'à l'échelle des charges le milieu est infini et s'intéresser au problème posé en domaine non borné. Il devient nécessaire alors pour la solvabilité du problème de préciser le comportement du potentiel à l'infini. L'introduction de poids dans les espaces fonctionnels dans lesquels la solution est recherchée permet de répondre à cette question : c'est la seconde approche.
Par ailleurs, le comportement de la charge électrique ϱ est décrit par l'equation (conservation de la charge)

$$\mathrm{div}\mathbf{J} = 0, \tag{3}$$

où $\mathbf{J}$ est la densité de courant qui, sous des hypothèses physiques (on considère une seule espèce de charges et on néglige la couche d'ionisation à la pointe), peut être exprimée sous la forme

$$\mathbf{J} = K\varrho\mathbf{E}, \tag{4}$$

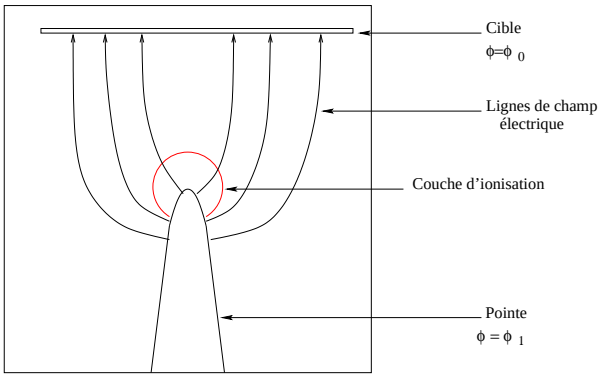


FIG. 1 – Configuration pointe-cible

avec K la mobilité des charges, ce qui conduit à l'équation suivante pour la densité de charge

$$\nabla \varrho \cdot \nabla \phi = \frac{\varrho^2}{\varepsilon}. \tag{5}$$

C'est une équation de conservation qui requiert de préciser la condition au bord pour densité de la charge ϱ. Celle ci est la plus délicate [2, 3]. L'hypothèse de Kaptzov, selon laquelle le champ électrique à la surface de la pointe reste constant lorsque la décharge ("couronne") se produit permet de simplifier le modèle. En effet, l'intensité E du champ $\mathbf{E}$ est égale à une valeur E_c fixée par la géométrie du problème, la température et la pression. En toute généralité, la décharge couronne dépend de l'intensité du champ éléctrique et un moyen de prendre en compte cette dépendance est de prescrire une loi d'injection. On relie la densité de charge ϱ à E, en exprimant que $\varrho = f(E - E_c)$ si $E > E_c$ et $\varrho = 0$ si $E \leq E_c$ à la surface du conducteur.
Dans l'air, E_c est donnée par les formules de Peek suivantes [2] :

– en géométrie cylindrique,

$$E_c = 3.1 \times 10^4 \mathrm{d} \left(1 + \frac{0.308}{\sqrt{\mathrm{d}r_c}}\right) \mathrm{kV.cm}^{-1}, \tag{6}$$

– en géométrie sphérique,

$$E_c = 3.1 \times 10^4 \mathrm{d} \left(1 + \frac{0.308\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{d}r_c}}\right) \mathrm{kV.cm}^{-1} \tag{7}$$

où r_c est le rayon de courbure (exprimé en cm), $\mathrm{d} = \dfrac{T_0 P}{T P_0}$, où T_0 est la température standard, T la température réelle, P_0 la pression standard et P la pression réelle. Toutefois cette hypothèse ne peut être utilisée que pour des pointes à géométrie sphérique ou cylindrique.
On doit donc résoudre un système couplé en ϕ et ϱ, faisant intervenir les équations (2) et (5), ainsi que les conditions aux limites décrites précédemment.
L'équation (5) est résolue par la méthode des caractéristiques dès que la répartition de charge $\varrho = \partial_n \phi$ est connue sur la pointe de l'éléctrode. Il est donc utile de savoir estimer cette quantité.

Le calcul de la charge surfacique $\varrho = \varepsilon_0 \partial_n u$ intervient également dans l'étude de la charge des satellites. Au delà d'une certaine altitude (90km), les radiations solaires provoquent des

réactions photochimiques avec les gaz de l'atmosphère. Cette zone de l'atmosphère est alors ionisée. Lorsqu'un satellite traverse cette portion d'atmosphère, celui-ci est soumis à un flux d'ions et d'électrons et peut ainsi développer une charge induite à sa surface, ce qui peut entraîner des perturbations dans le fonctionnement des instruments électriques.

Si Ω représente le satellite, l'objectif est de déterminer la charge surfacique ϱ sur $\partial\Omega$ [30]. L'exterieur du satellite est supposé être un plasma décrit par les équations de Vlasov-Poisson stationnaires qui s'écrivent :

$$v \cdot \nabla_x f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}(t,x) \cdot \nabla_v f_\alpha = 0,$$

où $f_\alpha = f_\alpha(x,v)$ est la fonction de distribution des particules de type α, et q_α, m_α sont respectivement la charge et la masse des particules de type α et $\mathbf{E}(t,x)$ est le champ quasi-électrostatique. Avec $\mathbf{E}(t,x) = -\nabla\phi(t,x)$, le potentiel ϕ vérifie une équation de Poisson :

$$-\Delta\phi = \varrho = \sum_\alpha \varrho_\alpha = \sum_\alpha q_\alpha \int_{\mathbf{R^3}} f_\alpha \, \mathrm{d}v.$$

Comme pour l'exemple précédent, on a besoin de conditions aux limites pour que le système soit complet. Elles sont déterminées par l'équilibre thermodynamique et la neutralité du plasma à l'infini pour f_α et de type Dirichlet pour ϕ, avec la condition $\lim_{|x|\to\infty} \phi(t,x) = 0$.

Dans cette thèse, nous nous concentrons d'une part sur la résolution du problème aux limites portant sur le potentiel électrostatique

$$-\Delta u = f \tag{8}$$

avec conditions de Dirichlet homogènes dans un domaine polyhédrique ou invariant par rotation possédant une arête rentrante, donc de la forme $\omega \times Z$ où Z est un intervalle borné de $\mathbf{R}$ et ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^2$, et d'autre part sur l'asymptotique de la solution de (8), posé dans un domaine ayant un coin ou une pointe "arrondie"de rayon de courbure de l'ordre de ε, avec $\varepsilon << 1$.

Dans les applications, beaucoup de structures et d'objets à modéliser possèdent, en effet, des particularités géométriques tels que des coins, des arêtes, etc..., qui peuvent constituer des éléments actifs du système, par exemple générer des champs électromagnétiques importants, nécessaires à l'extraction d'un fort courant d'électrons d'une cathode à pointe, dans un générateur de micro-ondes, ou bien elles peuvent être vues comme des contraintes physiques, et il faut pouvoir contrôler les effets négatifs dûs aux claquages induits par des champs intenses [11]. C'est le cas des klystrons, qui sont des dispositifs dans lesquels sont injectées des particules chargées. Ils sont formés d'un tube en regard duquel, on place des cavités. Le but du dispositif est de générer des ondes électromagnétiques dans une bande de fréquences donnée. Le processus dépend de la géométrie du domaine et son efficacité est lié à la présence de coins rentrants qui sont en fait arrondis. Des phénomènes de claquage dûs aux champs intenses peuvent apparaître, il faut alors pouvoir les éviter. La présence de telles particularités modifie les propriétés des solutions des équations régissant les phénomènes modélisés et leur étude permet d'acquérir une connaissance précise des comportements au voisinage de telles singularités géométriques. Concernant les coins rentrants, la Méthode du Complément Singulier (MCS) a été introduite par Assous et al.[15, 16] pour la résolution des équations de Maxwell bidimensionnelles puis adaptée dans [34] au cas du laplacien dans des domaines polygonaux non convexes, et peut être reformulée pour coïncider avec l'approche de Moussaoui [69]. L'idée de base est d'utiliser la décomposition de $L^2(\omega)$ obtenue

dans [53] pour décomposer les solutions en parties régulière et singulière afin de recouvrir une convergence optimale des méthodes éléments finis P^1. En effet, la solution $u \in H_0^1(\omega)$ de (8) n'est plus de régularité H^2 et l'erreur H^1 lorsqu'on discrétise par éléments finis P^1 est en $\mathcal{O}(h^\alpha)$, où α est un paramètre lié à l'ouverture du coin non convexe. Par contre, on a toujours une écriture

$$u = u_r + u_s$$

où $u_r \in H^2(\omega)$ et $u_s = \sum_{j=1}^{n_s} c_j \phi_j$ avec $c_j \in \mathbf{R}$ et $\phi_j \in H^1(\omega) \backslash H^2(\omega)$ et n_s le nombre de coins rentrants. D'un point de vue pratique, la MCS consiste à ajouter les termes singuliers aux espaces de fonctions test ainsi que des fonctions test "duales" pour le calcul des coefficients c_j. Dans ce même but, d'autres méthodes consistant à prendre en compte explicitement le comportement singulier ont été proposées, voir par exemple [19], [28] qui font intervenir des fonctions de troncature et un problème variationnel non symétrique, ou encore [64] et [23], pour des domaines polyédriques, et dans un autre esprit les méthodes de raffinement de maillage au voisinage des singularités géométriques. En dimension deux, il y a autant de parties singulières à ajouter que de coins rentrants [51, 53]. Cette méthode (MCS) appartient à la famille des méthodes de fonctions singulières duales (DSFM : Dual Singular Function Method), où on introduit des fonctions test duales pour améliorer la vitesse de convergence lorsqu'on résout numériquement le problème de Dirichlet pour le laplacien [44, 19, 20, 22, 28]. Ces méthodes avaient elles même été introduites pour améliorer la qualité de la première méthode du genre : la Singular Function Method (SFM) de Strang et Fix [47] qui elle ne comprend que l'ajout de fonctions singulières sans fonctions singulières duales pour calculer les coefficients de singularité.

En dimension trois, le traitement des singularités est plus délicat. Parmi les singularités géométriques, il convient de distinguer le cas des coins non convexes de celui des arêtes rentrantes. L'espace des fonctions singulières associées aux coins non convexes est de dimension finie tandis qu'il est de dimension infinie pour le cas des arêtes rentrantes. Les cas de l'arête et du cône infini constituent les problèmes modèles pour étudier le comportement des solutions au voisinage des sommets et arêtes non convexes. L'étude est réalisée dans [50, 51, 52, 42, 53, 60, 70, 38]. Pour un domaine polyédrique, en notant $\mathcal{C}$ l'ensemble des coins non convexes, (ρ_c, σ_c) les coordonnées sphériques d'origine le coin $c \in \mathcal{C}$, $\mathcal{E}$ l'ensemble des arêtes rentrantes, et (r_e, θ_e, z_e) les coordonnées cylindriques d'origine l'arête $e \in \mathcal{E}$ de direction z_e, la solution peut être décomposée en

$$u = u_r + u_e + u_c,$$

où $u_r \in H^2(\omega)$ et u_c, u_e sont respectivement les parties singulières dûe aux coins rentrants et aux arêtes rentrantes et sont de la forme

$$u_e = \sum_{e \in \mathcal{E}} \gamma_e(r_e, z_e) r^{\alpha_e} \sin(\alpha_e \theta_e),$$

avec α_e lié à l'angle formé par les faces de l'arête, et

$$u_c = \sum_{c \in \mathcal{C}} \sum_{-\frac{1}{2} < \lambda_c < \frac{1}{2}} \gamma_c \chi(\rho_c) \rho_c^{\lambda_c} \phi_c(\sigma_c), \gamma_c \in \mathbf{R},$$

où la somme est prise d'abord sur les sommets et ensuite sur les valeurs propres λ_c de l'opérateur de Laplace-Beltrami avec conditions de Dirichlet correspondantes à l'intersection du cône infini issu de c avec la sphère $\mathbf{S}^2$. Pour une arête infinie, avec une section polygonale i.e. $\omega \times \mathbf{R}$, ω ne possédant qu'un seul coin rentrant, l'écriture se réduit à (c.f. [52, 53, 60, 9])

$$u = u_r + \gamma_(r, z) r^\alpha \sin(\alpha\theta),$$

où γ est un produit de convolution suivant z :

$$\gamma = K_0 \star h$$

avec $K_0(r,z) := \dfrac{1}{\pi}\dfrac{r}{r^2+z^2}$ et h est une fonction appartenant à l'espace $H^{1-\alpha}(\mathbf{R})$.

Les domaines axisymétriques présentent quant à eux deux types de singularités géométriques : les pointes côniques (non-convexes) correspondant aux sommets rentrants situés sur l'axe, et les arêtes (circulaires) rentrantes. Les résultats de régularité et la caractérisation des singularités pour les arêtes rentrantes sont similaires à ceux rappelés précédemment. Une pointe cônique engendre un terme singulier dans la solution si son ouverture par rapport à l'axe est supérieure à une certaine valeur $\pi/\beta^\star$ définie par $P_{1/2}(\cos(\pi/\beta^\star)) = 0$, où $P_{1/2}$ est la fonction de Legendre d'indice $1/2$ et d'ordre 0 [18, 55, 56]. Par ailleurs, le fait de se placer dans un domaine invariant par rotation introduit une difficulté supplémentaire, les espaces variationnels à considérer étant des espaces à poids.

La plupart des méthodes numériques pour résoudre le laplacien dans les géométries considérées reposent jusqu'à présent sur des techniques de raffinements de maillage. Dans [56], les auteurs résolvent le problème (8) dans un domaine axisymétrique avec une arête rentrante grâce à un développement de Fourier suivant θ, ramenant le problème à une suite de problèmes posés dans un domaine bidimensionnel avec un coin rentrant. L'approximation par éléments finis est obtenue en raffinant au coin. Dans [56, 8], pour tenir compte du comportement singulier dans les directions orthogonales aux arêtes dans les domaines prismatiques, le maillage est raffiné uniquement dans ces directions (raffinement anisotrope), le raffinement étant décrit par un paramètre $0 < \mu < 1$. Pour certaines valeurs du paramètre μ, l'erreur obtenue lors de l'approximation est alors optimale. Pour un domaine polyédrique possédant des coins rentrant et des arêtes rentrantes, la difficulté est de combiner des raffinements isotropes près des coins et anisotropes près des arêtes. En effet, un coin étant toujours attaché à une arête, l'une pouvant être dominante par rapport à l'autre. D'autre part, au voisinage des arêtes le domaine n'a plus nécéssairement un caractère prismatique. Dans [10], une méthode est proposé pour le cas de données $f \in L^p, p > 2$, les estimations d'erreurs faisant intervenir la régulatité dans les espaces $W^{m,p}$ avec $p > 2$. Toutes ces méthodes de raffinement de maillage utilise le fait que la solution de (8) appartient à des espaces à poids naturels pour l'étude de ces singularités.

Dans la réalité, les coins et arêtes ne sont jamais vifs mais sont toujours arrondis avec un faible rayon de courbure. On peut toujours néanmoins parler de singularités géométriques puisque les phénomènes induits restent intenses. C'est le cas des pulvérisateurs électrostatiques, décrits ci-dessus, qui sont une application des décharges couronnes. Une étude concernant les coins arrondis, plus précisément le calcul de densité de charge, a été réalisé dans [59] et un comportement asymptotique au voisinage de la pointe a été observé numériquement en $\mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-1})$ où α est l'exposant de singularité pour le problème limite quand $\varepsilon \to 0$. Cette thèse s'inscrit naturellement à la suite de ces travaux. Par ailleurs, nous avons basés notre étude sur les travaux théoriques présentés [65, 66]. Dans ces références, les auteurs construisent des développements asymptotiques pour de nombreux problèmes contenant un paramètre de perturbation, et en particulier, pour des domaines singuliers dont les singularités géométriques sont remplacées par des courbes régulières. A l'aide des techniques qui y sont exposées, et sous l'hypothèse que f est assez régulière, on peut construire un développement de la solution u_ε de (8) de la forme

$$u_\varepsilon \sim (1-\chi_\varepsilon)u_0 + \lambda_1\varepsilon^\alpha q_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) + \lambda_2\varepsilon^{2\alpha} q_2\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) + \ldots + \lambda_n\varepsilon^{n\alpha} q_n\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) + \ldots,$$

où χ_ε est une fonction de troncature à support près de la singularité géométrique et

$$u_0 \sim \sum_j \lambda_j r^{j\alpha} \varphi_j(\theta)$$

quand $r \to 0$. Les exposants $n\alpha$ proviennent des exposants de singularité pour le problème limite $\varepsilon = 0$. L'idée est de corriger les parties singulières par des termes de couche limite qui, dans notre cas, est située près du coin. L'analyse asymptotique est similaire à celle de [39, 29] à la différence près que dans notre cas, la perturbation agit sur la régularité du domaine. D'autre part, d'un strict point de vue de l'analyse fonctionnelle (en termes d'espaces de Sobolev), u_ε ne contient plus de termes singuliers, i.e. recouvre la régularité H^2 au voisinage du coin arrondi. Toutefois, on peut considérer que u_ε contient les singularités liées au coin via les termes de couche limite. En effet, les fonctions q_j sont solutions d'un problème aux limites posé dans un ouvert non borné indépendant de ε faisant intervenir ces singularités. En particulier, nous avons choisi de traiter le problème en domaine non borné, dans le cadre des espaces de Sobolev à poids, le cas des domaines bornés s'en déduisant sans difficultés. Les techniques utilisées sont celles de l'analyse multi-échelle et sont développées dans [65, 66].

Ce document comprend cinq chapitres. Les trois premiers sont dédiés à l'approximation par éléments finis du problème (8) posé dans un domaine prismatique ou axisymétrique avec des arêtes rentrantes. Les deux derniers sont consacrés aux développements asymptotiques des solutions lorsque le coin ou la pointe rentrants possèdent un rayon de courbure de l'ordre de ε. Le comportement dominant de la densité de charge au coin en découlera immédiatement.

Le premier chapitre est consacré à l'approximation du problème (8) dans un domaine prismatique possédant une arête rentrante. Tout d'abord, on rappelle les résultats de décomposition en parties régulières et singulières qui sont à la base de la MCS, le résultat principal étant celui de la décomposition orthogonale de L^2 :

$$L^2(\omega) = \Delta(H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)) \oplus^\perp N$$

Dans un polyèdre général, un résultat analogue est prouvé dans [51, 42, 14]. Cependant, si N est de dimension finie en deux dimensions d'espace, ce n'est plus le cas en dimension trois lorsque le domaine possède des aretes rentrantes. A l'aide d'un développement en séries de Fourier dans la direction de l'arête, le problème (8) est réduit à une succession de problèmes bidimensionnels de la forme

$$-\Delta u_\mu + \mu u_\mu = f_\mu, \mu > 0,$$

où f_μ est un mode de Fourier de f. Ceci rend possible l'application de la MCS à la famille de problèmes ainsi obtenus, et chaque mode u_μ s'écrira :

$$u_\mu = \tilde{u}_\mu + c_\mu \phi_s, \tilde{u}_\mu \in H^2(\omega), c_\mu \in \mathbf{R},$$

où ϕ_s est le complément singulier utilisé : c'est le même pour tous les modes. Cependant, en réalisant cette analyse, on constate que l'hypothèse $f \in L^2$ n'est pas suffisante pour obtenir des estimations optimales lors de la discrétisation du problème : nous verrons quelles hypothèses additionnelles doivent être faites. L'algorithme de la méthode (Méthode de Fourier et du Complément Singulier , MFCS) a donné lieu à la publication [32].

Dans le second chapitre, on décrit la MFCS pour les domaines axisymétriques avec une arête circulaire non convexe. Le principe est le même que pour les domaines prismatiques : la solution est développée en série de Fourier suivant θ. Contrairement au cas prismatique, les espaces des parties régulières sont différents suivant que le mode k est tel que $|k| \leq 1$ ou $|k| \geq 2$. En effet, les parties singulières pour $|k| \geq 2$, sont suffisamment régulières au voisinage de l'axe $r = 0$ contrairement à celles des modes $|k| \leq 1$. Comme cet espace ne dépend plus de k pour $|k| \geq 2$ [18], il convient donc d'utiliser trois compléments singuliers respectivement pour les modes $|k| \geq 2, |k| = 1, k = 0$. Ce chapitre reprend essentiellement les résultats de [33].

Dans le troisième chapitre, différentes méthodes sont mises en œuvre numériquement pour résoudre (8) et comparées d'un point de vue de la complexité, et de la qualité des résultats, et notamment à des approximations obtenues après rafinement de maillage.

Dans le quatrième chapitre, on se consacre à l'analyse du problème (8) lorsque le domaine possède un coin arrondi en dimension deux, ainsi qu'en dimension trois, en géométrie axisymétrique, pour une donnée invariante par rotation. On fait l'hypothèse que f est nulle dans un voisinage fixe de l'origine. Ceci revient à dire qu'il n'y a pas de charges à la pointe de l'éléctrode, cette hypothèse est raisonnable tant que la décharge n'a pas eu lieu. En particulier, on se propose de justifier mathématiquement les formules de Peek et de les étendre à des domaines dont la géométrie à l'infini est celle d'un cône. L'interêt d'obtenir une formule explicite pour la trace de la dérivée normale réside dans la mise en évidence du lien entre des grandeurs caractéristiques des problèmes posés dans le domaine avec coin vif et dans le domaine avec coin arrondi. Ainsi d'un point de vue numérique, on ne discrétise par éléments finis que le domaine avec coin vif, ce qui présente l'avantage de ne pas avoir à raffiner le maillage pour prendre en compte le rayon de courbure de l'arrondi. Plus précisément, on considère le cas des cônes vifs et arrondis. Pour le cône vif, le cadre fonctionnel qui convient est celui des espaces à poids, la pondération permet ici de prendre en compte le caractère non borné des domaines. Pour définir les termes de couche limite, dans le cas du cône arrondi, on définit les espaces fonctionnels par une mise à l'échelle, faisant apparaître des poids dépendant explicitement de ε. La principale difficulté, pour les estimations d'erreurs, est de connaître la dépendance en ε de la norme de l'opérateur qui à f associe u_ε pour ces espaces. En nous inspirant de [65, 66], nous montrons qu'elle est bornée uniformément en ε. Nous proposons une comparaison de notre approche aux techniques de représentation intégrale.

Dans le dernier chapitre, nous appliquons ces mêmes techniques aux cas des domaines prismatiques en se limitant à l'asymptotique de la solution aux premiers ordres. Les techniques du chapitre 1 et 4, nous permettent de ramener le problème à la dimension deux.

Première partie : Singularités d'arêtes en domaine prismatique

Introduction

On considère un domaine prismatique Ω de la forme

$$\Omega = \omega \times]0,1[,$$

où ω est un domaine polygonal borné de $\mathbf{R}^2$ et $f \in L^2(\Omega)$. On suppose que ω n'a qu'un seul coin rentrant d'angle intérieur plus grand que π, qu'on notera π/α où $\alpha \in]1/2, 1[$.
On s'intéresse à la résolution numérique du problème aux limites suivant

trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega. \tag{1}$$

La formulation variationnelle pour ce problème s'écrit
trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x, \text{ pourtout } v \in H_0^1(\Omega), \tag{2}$$

a étant la forme bilinéaire continue définie sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ par

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x,$$

et dont la coercivité résulte de l'inégalité de Poincaré. Le théorème de lax Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution de (1).

Lorsque l'ouvert Ω n'est pas convexe, la solution du problème (1) n'est plus nécessairement dans $H^2(\Omega)$, et l'approximation de u par éléments finis P^1 n'est alors plus en $O(h)$ pour la norme H^1, où h est le pas de la discrétisation. Plus précisément, la régularité de u dépend de l'ouverture de l'angle, donc de α :

$$\begin{aligned} &u \in H^{1+\alpha-\epsilon}(\Omega), \quad \forall \epsilon > 0, \\ &r^\beta \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega), \quad \forall i = 1,2, \quad \forall \beta > 1-\alpha, \\ &\frac{\partial u}{\partial x_3} \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

et u admet une décomposition en somme d'une partie régulière $u_r \in H^2(\Omega)$ et d'une partie singulière u_s,

$$u = u_r + u_s,$$

avec $u_s = \gamma(x) r^\alpha \sin(\alpha\theta)$, où (r,θ) sont les coordonnées polaires locales avec origine au coin et dont l'un des côtés du coin coïncide avec l'axe $\{\theta = 0\}$. La théorie de l'interpolation et la

régularité de u montrent que l'application directe de la méthode des éléments finis founit une approximation en norme H^1 en $O(h^{\alpha-\varepsilon}), \forall \varepsilon > 0$. Un moyen de restaurer l'estimation en $O(h)$ consiste à raffiner le maillage au niveau du coin rentrant (cf [8, 9, 10]).
Les domaines axisymétriques et prismatiques possèdent l'avantage d'avoir une géométrie tensorielle, ce qui permet de réduire le problème d'une dimension d'espace et d'appliquer des techniques établies en dimension deux. En utilisant une décomposition en série de Fourier suivant x_3, pour les domaines prismatiques et suivant θ pour les domaines axisymétriques, le problème (1) se réduit à une suite de problèmes aux limites en dimension deux. Grâce à la méthode du complément singulier [34], on établit une estimation pour l'approximation par éléments finis en $O(h + \frac{1}{N})$, où N est le paramètre de troncature de la série.

1

Méthode de Fourier et du complément singulier

Sommaire

1.1 Introduction 13
1.2 Méthode du complément singulier : λ-approche 14
1.2.1 Généralités 15
1.2.2 Décomposition de $L^2(\omega)$ 19
1.2.3 Méthode du Complément Singulier 22
1.3 Cas de l'arête prismatique 27
1.3.1 Développement en série de Fourier 28
1.3.2 Prise en compte de la singularité 31
1.3.3 Approximation de $\breve{u}_k$ et λ_k 33
1.3.4 Algorithme de la MFCS 34
1.3.5 Méthode du complément singulier en domaine prismatique 37
1.3.6 Complément singulier 2D-Eléments finis prismatiques 39
1.3.7 Eléments finis prismatiques 40
1.3.8 Approximation de la partie régulière 41

1.1 Introduction

Ce premier chapitre présentent les principaux résultats concernant les singularités de type coins en dimension deux, et leur application en vue de résoudre le problème de Dirichlet pour le laplacien

trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \tag{1.1}$$

où $\Omega := \omega \times Z$, avec $\omega \subset \mathbf{R}^2$, possédant un coin rentrant et $Z \subset \mathbf{R}$ un intervalle de sorte que Ω possédant une arête rentrante. Dans la section 1.2.2, on rappelle la décomposition de l'espace $L^2(\omega)$ en somme orthogonale de deux sous espaces

$$\Delta(H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)) \oplus^{\perp} N. \tag{1.2}$$

En dimension deux, l'espace des singularités N est de dimension finie égale au nombre de coins rentrants. La connaissance explicite de ces singularités permet la mise en øeuvre de méthodes

numériques de type éléments finis consistant à ajouter à l'espace des fonctions de base autant de fonctions singulières que de coins rentrants (méthodes de fonctions singulières). Dans la partie 1.2.3, on décrit la Méthode du Complément Singulier (MCS) [34], qui consiste à utiliser comme fonction singulière particulière, celle correspondant à la décomposition orthogonale 1.2 de $L^2(\omega)$.

En dimension trois, la nature des singularités d'arête est plus délicate, et l'espace des singularités n'est plus de dimension finie. Toutefois, il est possible d'obtenir une connaissance partielle de la partie singulière de la solution, mais celle-ci reste insuffisante pour envisager une extension des méthodes de fonctions singulières pour un domaine prismatique possédant une arête non convexe. Dans la partie 1.3, à l'aide d'un développement en série de Fourier dans la direction de l'arête, on réduit le problème (1.1) en une suite de problèmes 2D découplés pour lesquels ces méthodes peuvent s'appliquer. Les estimations d'erreurs pour l'approximation du coefficient singulier et de la partie régulière sont établies dans la partie 1.3.3. Si la donnée f est un peu plus régulière que $L^2(\Omega)$, ces estimations conduisent à l'algorithme de la MFCS, présenté dans la partie 1.3.4. Pour finir, la MFCS fournit une approximation du coefficient de singularité d'arête sous la forme d'un polynôme trigonométrique, donc une approximation complète de la partie singulière de la solution. La partie régulière peut être directement calculée par une méthode type éléments finis. La forme particulière du domaine Ω permet d'envisager par exemple, les éléments finis prismatiques.

Notations On appellera $S_0, S_1, ..., S_M$ les sommets de ω et $\gamma_1, ..., \gamma_{M+1}$ les segments de bord de sorte que :

$$\begin{array}{lcl} \gamma_j & = & [S_{j-1}, S_j], 1 \leq j \leq M, \\ \gamma_{M+1} & = & [S_M, S_0]. \end{array}$$

γ_1, γ_2 étant celles formant l'angle rentrant. On notera $\gamma = \cup_j \gamma_j$ et $\gamma_c = \gamma_1 \cup \gamma_2$.
Les coordonnées polaires (r, θ) attachées au coin S_j sont choisies telles que l'axe $\{\theta = 0\}$ contient le segment de bord γ_j.
Pour chaque arête γ_j, on introduit le vecteur directeur $\tau_j = \frac{\overrightarrow{S_{j-1}S_j}}{\|S_{j-1}S_j\|}$ et n_j le vecteur tel que (τ_j, n_j) forme une base orthonormale de $\mathbf{R}^2$.
On suppose aussi que deux arêtes consécutives n'ont pas la même direction.
Dans la suite, pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, ∂_i désigne l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $\partial^2_{i,j}$(∂^2_i lorsque $i = j$) l'opérateur $\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Lorsque τ est un vecteur de $\mathbf{R}^2$, ∂_τ désigne la dérivation dans la direction τ.
Enfin, l'angle au coin rentrant sera noté π/α où $\alpha \in]1/2, 1[$ et α_0 désigne un réel appartenant à l'intervalle $]1/2, \alpha[$. On notera aussi $(\ ,\ )_0$ le produit scalire L^2.

1.2 Méthode du complément singulier : λ-approche

On commence par donner quelques définitions et propriétés des espaces fonctionnels intervenant dans l'étude théorique des singularités. Il s'agit essentiellement des espaces de Sobolev, ainsi que certains espaces de traces. On renvoie à [53] pour les preuves.

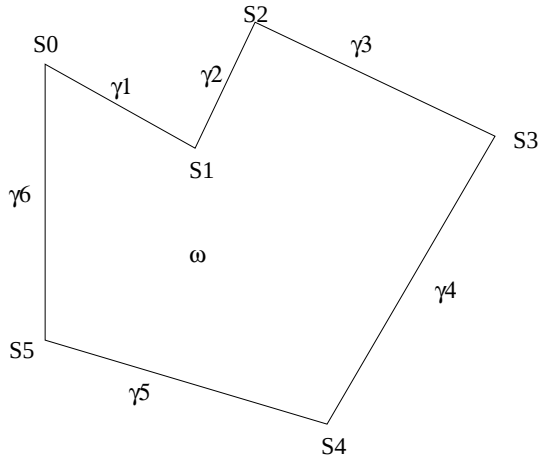


FIG. 1.1 – Domaine ω.

1.2.1 Généralités

Pour $\nu \in \mathbf{N}^q$, on note $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_q$ et ∂^ν désigne l'opérateur $\dfrac{\partial^{|\nu|}}{\partial^{\nu_1} x_1 \ldots \partial^{\nu_q} x_q}$.
Dans cette partie Q est un ouvert lipschitzien de $\mathbf{R}^q$, avec $q \geq 1$, et n la normale extérieure à Q. $\mathcal{C}_0^\infty(Q)$ est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Q, et $\mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$ celui des restictions à $\overline{Q}$ des fonctions de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^q)$.
Pour $m \in \mathbf{N}$, l'espace $H^m(Q)$ est l'espace des $u \in L^2(Q)$ possédant des dérivées faibles jusqu'à l'ordre m dans $L^2(Q)$. C'est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\|u\|_m = \left(\sum_{|\nu| \leq m} \|\partial^\nu u\|_0^2 \right)^{1/2},$$

où $\|\cdot\|_0$ désigne la norme de $L^2(Q)$.
On désigne par $H_0^m(Q)$ l'adhérence de $\mathcal{C}_0^\infty(Q)$ dans $H^m(Q)$. On redonne la définition des espaces de Sobolev d'ordre non entier.

Définition 1.2.1 *Soit $s \geq 0, s \notin \mathbf{N}, s = m + \sigma, m \in \mathbf{N}, \sigma \in]0,1[$. L'espace de Sobolev $H^s(Q)$ est l'espace des $u \in L^2(Q)$ vérifiant :*

$$u \in H^m(Q),$$

et

$$\int_{Q \times Q} \frac{|\partial^\nu u - \partial^\nu u|^2}{|x-y|^{q+2\sigma}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y < \infty$$

pour $|\nu| = m$. C'est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\|u\|_s = \left\{ \|u\|_m^2 + \sum_{|\nu|=m} \int_{Q \times Q} \frac{|\partial^\nu u(x) - \partial^\nu u(y)|^2}{|x-y|^{q+2\sigma}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right\}^{1/2}.$$

Définition 1.2.2 *On note $H_0^s(Q)$ la fermeture de $\mathcal{C}_0^\infty(Q)$ dans $H^s(Q)$.*

Propriété 1 *$H_0^s(Q) = H^s(Q)$ si et seulement si $s \in [0, \frac{1}{2}]$.*

Définition 1.2.3 *L'espace dual de $H_0^s(Q)$ est noté $H^{-s}(Q)$.*

Pour $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$, on note $u|_{\partial Q}$ sa restriction au bord ∂Q de Q. Le résultat suivant rappelle définition et propriétés classiques de l'opérateur de trace dans le cas d'un domaine polygonal de $\mathbf{R}^2$, c.f. [53, Thm. 1.4.6, p. 17].

Théorème 1.2.1 *Soit Q un domaine polygonal borné de $\mathbf{R}^2$, et $(\Gamma_j)_{j=1..M+1}$ les segments de bord avec $\Gamma = \partial Q = \bigcup_{1\le j\le M+1} \Gamma_j$. Alors pour chaque j, l'application*

$$u \longrightarrow \left\{ u|_{\Gamma_j}, \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_j}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial n^k}\Big|_{\Gamma_j} \right\}$$

définie sur $\mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$ se prolonge pour $k < s - \frac{1}{2}$ en une application linéaire continue surjective de $H^s(Q)$ sur $\Pi_{p=0}^k H^{s-p-\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$.

Le résultat précédent décrit les traces sur le bord arête par arête. Une description globale n'est pas immédiate dans le cas des polygones, car nécessiterait de définir les espaces de traces $H^{s-p-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ de façon globale. Pour un domaine régulier, par exemple de classe $\mathcal{C}^{1,1}$, l'espaces des traces sur le bord des élḿents de $H^2(Q)$ et $H^1(Q)$ coïncide avec l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$. Il n'en va plus de même pour des domaines polygonaux, nécessitant d'introduire de nouveaux espaces.

Définition 1.2.4 *Soit $s \ge 0$. On note $H_{00}^s(Q)$ l'espace des $u \in H_0^s(Q)$ telles que u prolongée par 0 hors de Q est dans $H^s(\mathbf{R}^n)$.*

Quand $s \in [0,1]$, $s \neq 1/2$, $H_{00}^s(Q)$ coincide avec $H_0^s(Q)$. Ceci n'est plus vrai pour $s = 1/2$, on donne une caractérisation de cet espace dans ce cas.

Propriété 2 *Soit $\rho(x)$ la distance de x à ∂Q. Alors*

$$H_{00}^{1/2}(Q) = \left\{ u \in H_0^{1/2}(Q) \Big| \quad \frac{u}{\sqrt{\rho}} \in L^2(Q) \right\}.$$

Il est muni de la norme

$$\|u\|_{00,1/2} = \left\{ \|u\|_{1/2}^2 + \left\| \frac{u}{\sqrt{\rho}} \right\|_0^2 \right\}^{1/2}.$$

Pour $s - 1/2 \in \mathbf{N}, H_{00}^s(Q)$ est l'ensemble des $u \in H_0^m(Q)$ tels que $\dfrac{\partial^\alpha u}{\sqrt{\rho}} \in L^2(Q), |\alpha| \le m$.

La caractérisation des traces de $H^2(Q)$ fait intervenir des conditions de compatibilités aux coins qu'on décrit ci dessous. On renvoie à [53, Thm. 1.4.6] pour une caractérisation plus générale. Notons pour $j \le M$, $\Gamma_j = [S_{j-1}, S_j], \Gamma_{M+1} = [S_M, S_0]$ les segments de bord de Q et ω_j l'angle formé par Γ_j et Γ_{j+1} intérieur à Q, voir Fig. 1.2.1.

Théorème 1.2.2 *L'application $u \longrightarrow \left(u|_{\Gamma_j}, \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_j}\right)$ définie sur $\mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$ se prolonge à $H^2(Q)$ sur le sous espaces des fonctions de $\Pi_{j=1}^{M+1}\left(H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)\right)$ satisfaisant*

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma_j}(S_j) &= u|_{\Gamma_{j+1}}(S_j), \\ \partial_{\tau_j} u &\equiv -\cos\omega_j \partial_{\tau_{j+1}} u + \sin\omega_j \partial_{n_{j+1}} u, \text{ en } S_j \\ \partial_{n_j} u &\equiv -\cos\omega_j \partial_{n_{j+1}} u - \sin\omega_j \partial_{\tau_{j+1}} u, \text{ en } S_j. \end{aligned}$$

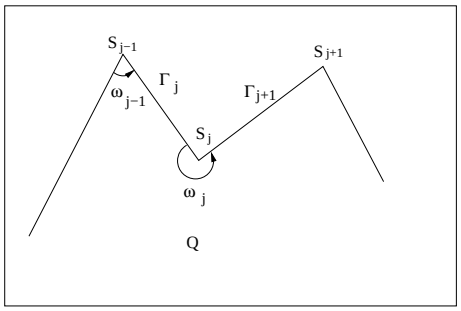


FIG. 1.2 – Notations

où la relation $u \equiv v$ en S_j signifie $\exists \delta > 0$, $\displaystyle\int_0^\delta |u(S_j - s\tau_j) - v(S_j + s\tau_{j+1})|^2 \frac{\mathrm{d}s}{s} < \infty$.

On rappelle aussi une formule de Green utile dans la suite. On note $E(\Delta, L^2)$ l'espace des $u \in H^1(Q)$ tels que $\Delta u \in L^2(Q)$. Il est muni de la norme du graphe $\|u\|_E = \left\{\|u\|_1^2 + \|\Delta u\|_0^2\right\}^{1/2}$.

Proposition 1.2.1 *Soit $u \in H^1(Q)$ et $p \in E(\Delta, L^2)$. Alors $\left.\dfrac{\partial p}{\partial n}\right|_{\partial Q} \in H^{-1/2}(\partial Q)$, et on a la formule de Green suivante*

$$\int_Q u\Delta p \,\mathrm{d}x + \int_Q \nabla u \cdot \nabla p \,\mathrm{d}x = < \left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\partial Q}, u|_{\partial Q} >_{H^{-1/2}(\partial Q), H^{1/2}(\partial Q)} .$$

Preuve. Soient $u, \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{Q})$. On a :

$$\int_Q \Delta u \cdot \psi \,\mathrm{d}x + \int_Q \nabla u \cdot \nabla \psi \,\mathrm{d}x = \int_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial n} \psi \,\mathrm{d}\sigma$$

qui reste vraie pour $\psi \in H^1(Q)$ par densité. Définissons l'application L par

$$L : u \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{Q}) \longmapsto L(u) \in \left(H^{\frac{1}{2}}(\partial Q)\right)', \; L(u)\psi = \int_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial n} \psi \,\mathrm{d}\sigma.$$

En notant $R : H^{1/2}(\partial Q) \longmapsto H^1(Q)$ un relèvement continue de la trace, on a

$$L(u)\psi = \int_Q \Delta u \cdot R\psi \,\mathrm{d}x + \int_Q \nabla u \cdot \nabla \left(R\psi\right) \,\mathrm{d}x,$$

et

$$\begin{aligned} \left|L(u)\psi\right| &\leq C \left(\|\Delta u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}\right) \|R\psi\|_{H^1}, \\ &\leq C \left(\|\Delta u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}\right) \|\psi\|_{H^{1/2}}. \end{aligned}$$

Par densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{Q})$ dans $E(\Delta, L^2)$ [61], l'application L se prolonge à $E(\Delta, L^2)$ en une application $\tilde{L}$ et on pose pour $u \in E(\Delta, L^2)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q} = \tilde{L}(u)$$

■

Si p est seulement dans $L^2(Q)$ avec $\Delta p \in L^2(Q)$, on peut encore définir par densité un trace sur ∂Q pour p. En effet, d'après la formule de Green classique : pour $u, v \in H^2(Q)$,

$$\int_Q (u\Delta v - v\Delta u)\ \mathrm{d}x = \sum_{1\le j\le M+1} \int_{\Gamma_j} \left(u|_{\Gamma_j} \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Gamma_j} - v|_{\Gamma_j} \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_j} \right) \mathrm{d}\sigma,$$

dont on déduit qu'il existe une constante C telle que

$$\Big| \sum_{1\le j\le M+1} \int_{\Gamma_j} \left(u|_{\Gamma_j} \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Gamma_j} - v|_{\Gamma_j} \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_j} \right) \mathrm{d}\sigma \Big| \le C\|u\|_2, \tag{1.3}$$

Considérons alors pour j fixé l'ensemble

$$U_j = \left\{ u \in H^2(Q), u|_{\Gamma_k} = \frac{\partial u}{\partial n_k}\Big|_{\Gamma_k} = 0, \forall k \neq j \right\}.$$

Pour $u \in U_j$, l'inégalité (1.3) devient :

$$\Big| \int_{\Gamma_j} \left(u|_{\Gamma_j} \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Gamma_j} - v|_{\Gamma_j} \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_j} \right) \mathrm{d}\sigma \Big| \le C\|u\|_2, \tag{1.4}$$

D'après le théorème 1.2.2, l'image de U_j par l'application $u \mapsto \left(u|_{\Gamma_j}, \frac{\partial u}{\partial n_j}\Big|_{\Gamma_j} \right)$ est le sous ensemble des éléments de $H^{3/2}(\Gamma_j) \times H^{1/2}(\Gamma_j)$ satisfaisant

$$\begin{aligned}
u(S_j) &= 0, \\
u(S_{j-1}) &= 0, \\
\partial_{\tau_j} u &\equiv 0, \text{ en } S_j, \\
0 &\equiv \partial_{\tau_j} u, \text{en } S_{j-1}, \\
\partial_{n_j} u &\equiv 0, \text{en } S_j, \\
0 &\equiv \partial_{n_j} u, \text{ en } S_{j-1}.
\end{aligned}$$

D'après la propriété 2, ces conditions signifient exactement que

$$u|_{\Gamma_j} \in H^{3/2}_{00}(\Gamma_j),\ \frac{\partial u}{\partial n_j}\Big|_{\Gamma_j} \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_j).$$

Réciproquement, étant donnés $\varphi \in H^{3/2}_{00}(\Gamma_j), \psi \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_j)$, il existe $u \in U_j$ telle que

$$u|_{\Gamma_j} = \varphi,\ \frac{\partial u}{\partial n_j}\Big|_{\Gamma_j} = \psi,$$

et $\|u\|_2 \le C\left(\|\varphi\|_{00,1/2} + \|\psi\|_{00,3/2} \right)$.
On pose alors pour $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$,

$$Lv(\varphi, \psi) = \int_{\Gamma_j} \left(\varphi \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Gamma_j} - v|_{\Gamma_j} \psi \right) \mathrm{d}\sigma = \int_Q (u\Delta v - v\Delta u)\ \mathrm{d}x.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
|Lv(\varphi,\psi)| &\le C(\|v\|_0 + \|\Delta v\|_0)\|u\|_2, \\
&\le C(\|v\|_0 + \|\Delta v\|_0) \left(\|\varphi\|_{00,1/2} + \|\psi\|_{00,3/2} \right)
\end{aligned}$$

L'application L définit donc une application continue de $\mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$ dans $H_{00}^{3/2}(\Gamma_j)' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_j)'$ avec $\|Lv\| \leq C(\|v\|_0 + \|\Delta v\|_0)$. En introduisant l'espace

$$D(\Delta, L^2) = \left\{p \in L^2(Q),\ \Delta p \in L^2(Q)\right\}$$

et par densité de $\mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$ dans $D(\Delta, L^2)$, l'application L se prolonge à $D(\Delta, L^2)$ en une application continue à valeur dans $H_{00}^{3/2}(\Gamma_j)' \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_j)'$. Ceci nous permet d'identifier les traces de $v \in D(\Delta, L^2)$ sur chaque arête Γ_j à des formes linéaires sur $H_{00}^{3/2}(\Gamma_j) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_j)$. On pourra écrire la formule de Green sous la forme

$$\int_Q (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x = \sum_j \left({}_{H_{00}^{3/2}} < u|_{\Gamma_j}, \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Gamma_j} >_{(H_{00}^{3/2})'} - {}_{(H_{00}^{1/2})'} < v|_{\Gamma_j}, \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_j} >_{H_{00}^{1/2}} \right), \quad (1.5)$$

pour tout $v \in D(\Delta, L^2)$, et pour tout $u \in H^2(Q)$ vérifiant :

$$u|_{\Gamma_j} \in H_{00}^{3/2}(\Gamma_j) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_j} \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_j), \quad \text{pour tout } j.$$

Cette extension de la formule de Green (cf. [53, Thm. 1.5.3, p. 26]) permet de caractériser l'espace des singularités dans la décomposition de $L^2(\omega)$.

1.2.2 Décomposition de $L^2(\omega)$

Les résultats suivant établissent essentiellement que l'image de $H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)$ par le laplacien est un sous espace fermé de $L^2(\omega)$ de codimension finie. On commence par un lemme.

Lemme 1.2.1 *Soit $\phi \in H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)$. Alors*

$$|\phi|_2 := \left(\sum_{i+j=2} \|\partial_{i,j}^2 \phi\|_0^2 \right)^{1/2} = \|\Delta\phi\|_0.$$

Preuve. : Lorsque $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\omega)$, le lemme résulte facilement de deux intégrations par parties successives. Soit maintenant $\phi \in H^3(\omega) \cap H_0^1(\omega)$.
En utilisant la formule de Green, il vient :

$$\begin{aligned} \int_\omega \partial_1^2\phi\partial_2^2\phi\,\mathrm{d}x - \int_\omega (\partial_1\partial_2\phi)^2\,\mathrm{d}x &= \int_{\partial\omega} \partial_1\phi\big((\partial_2^2\phi)n_1 - (\partial_1\partial_2\phi)n_2\big)\,\mathrm{d}\sigma, \\ &= \sum_{M+1\geq j\geq 1} \int_{\gamma_j} \partial_1\phi\big((\partial_2^2\phi)n_1^j - (\partial_1\partial_2\phi)n_2^j\big)\,\mathrm{d}\sigma, \\ &= \sum_{M+1\geq j\geq 1} I_j \end{aligned}$$

où $n^j = \begin{pmatrix} n_1^j \\ n_2^j \end{pmatrix}$ est la normale extérieure au bord γ_j (les termes intégrés dans les seconds membres sont bien définis au sens de la trace, vu la régularité de ϕ).
Sur les bords γ_j tels que $n_1^j = 0$, on a $\partial_1\phi = 0$, et l'intégrale sur γ_j est nulle. Sur les autres arêtes de bord, on remarque que

$$(\partial_2^2\phi)n_1^j - (\partial_1\partial_2\phi)n_2^j = \nabla(\partial_2\phi).\begin{pmatrix} -n_2^j \\ n_1^j \end{pmatrix}$$

et que $\tau = \begin{pmatrix} -n_2^j \\ n_1^j \end{pmatrix}$ est un vecteur tangentiel. Pour une de ces arêtes, on a $n_1^j \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} I_j &= \frac{n_2^j}{n_1^j} \int_{\gamma_j} \partial_1\phi \nabla(\partial_1\phi).\tau d\sigma \\ &= -\frac{n_2^j}{n_1^j} \left((\partial_1\phi)^2(S_j) - (\partial_1\phi)^2(S_{j-1})\right) \end{aligned}$$

La régularité sur ϕ implique que $\nabla\phi$ est continue sur $\overline{\omega}$ et que $\nabla\phi \cdot \tau = 0$. Pour deux arêtes consécutives γ_j, γ_{j+1}, les vecteurs tangents τ_j, τ_{j+1} sont indépendants et $\nabla\phi(S_j)$ est othogonal aux deux, donc est nul. Ainsi, les termes de bords n'apportent pas de contribution et le lemme est vrai pour $\phi \in H^3(\omega) \cap H_0^1(\omega)$.
Le lemme découle alors immédiatement de la densité de $H^3(\omega) \cap H_0^1(\omega)$ dans $H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)$ ([53],Thm. 1.6.1.). ■

Le théorème qui suit est central. Tout d'abord, le lemme 1.2.1 implique que pour tout $u \in H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)$,

$$\|u\|_2 \leq C\|\Delta u\|_0$$

i.e. l'opérateur $\Delta : H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega) \to L^2(\omega)$ est injectif et son image est fermée dans $L^2(\omega)$.

Remarque 1.2.1 *Si $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, l'image par le laplacien de l'espace $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est encore fermée dans $L^2(\Omega)$.*

On désigne par N, l'orthogonal dans $L^2(\omega)$ de son image $\Delta(H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega))$.

Théorème 1.2.3 *L'espace $L^2(\omega)$ se décompose de la manière suivante :*

$$L^2(\omega) = \Delta(H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)) \oplus^{\perp} N, \tag{1.6}$$

où N est un espace de fonctions harmoniques singulières :

$$N = \left\{ p \in L^2(\omega) \text{ tel que : } \Delta p = 0 \text{ dans } \omega \text{ et } \forall j \; p|_{\gamma_j} == 0 \quad \text{dans} \quad (H_{00}^{1/2}(\gamma_j))' \right\}.$$

Preuve. C.f. [53, p. 45-48]. Soit $p \in N$. Alors

$$\forall w \in H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega), \int_\omega p \cdot \Delta w \, \mathrm{d}x = 0,$$

en particulier lorsque $w \in \mathcal{C}_0^\infty(\omega), p$ vérifie donc au sens des distributions

$$p \in L^2(\omega), \; \Delta p = 0.$$

Soit $1 \leq j \leq M+1$ et $\varphi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\gamma_j)$. D'après le théorème de trace 1.2.1, il existe $w \in H^2(\omega)$ tel que $\partial_{n_j} w|_{\gamma_j} = \varphi_j, \; w|_{\gamma_j} = 0$ et $\partial_{n_k} w|_{\gamma_k} = w|_{\gamma_k} = 0$ pour tout $k \neq j$. En utilisant la formule de Green (1.5) avec $w \in H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)$,

$$\int_\omega (w\Delta p - p\Delta w) \, \mathrm{d}x = \sum_j \left({}_{H_{00}^{3/2}} < w|_{\gamma_j}, \frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{\gamma_j} >_{(H_{00}^{3/2})'} - {}_{H_{00}^{1/2}} < p|_{\gamma_j}, \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\gamma_j} >_{H_{00}^{1/2}} \right),$$

et en prenant en compte les conditions aux limites, on trouve que :

$$_{H_{00}^{1/2}} < p|_{\gamma_j}, \varphi_j >_{H_{00}^{1/2}} = 0, \forall j.$$

Par conséquent, $p|_{\gamma_j} = 0$ dans $H_{00}^{1/2}(\gamma_j)'$. Pour montrer la réciproque, on utilise à nouveau la formule de Green (1.5) pour trouver que :

$$\forall w \in H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega), \int_\omega p \Delta w \, \mathrm{d}x.$$

■

Remarque 1.2.2 *La trace de $p \in N$ sur γ_j doit être comprise au sens des éléments de $D(\Delta, L^2)$.*

On a néanmoins le résultat suivant

Lemme 1.2.2 *Soit $p \in N$. Alors $p \in H^1(\omega \backslash \overline{V})$, où V est un voisinage du coin rentrant.*

Le théorème 1.6 permet de voir que pour $f \in L^2(\omega)$, l'appartenance de la solution $u \in H_0^1(\omega)$ de $-\Delta u = f$ à $H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)$ n'est pas assuré. En d'autres termes, $H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)$ n'est pas assez 'gros' pour résoudre le problème. Le comportement des éléments de N au voisinage du coin rentrant est déterminé en étudiant le laplacien en coordonnées polaires dans le secteur ω_ρ intersection de ω avec le disque centré au coin de rayon ρ, pour un $\rho > 0$. L'expression de l'opérateur Δ dans ces coordonnées est :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

A cet effet, on introduit les fonctions propres de l'opérateur $-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}$ sur $]0, \pi/\alpha[$.

Proposition 1.2.2 *L' opérateur*

$$\begin{aligned} \Lambda_\theta : L^2(]0, \pi/\alpha[) &\longrightarrow L^2(]0, \pi/\alpha[), \\ u &\longrightarrow -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}, \end{aligned}$$

de domaine $D(\Lambda_\theta) = H^2(]0, \pi/\alpha[) \cap H_0^1(]0, \pi/\alpha[)$, est autoadjoint, d'inverse compact. Il admet un spectre ponctuel $\lambda_m = (m\alpha)^2$ et l'ensemble de ses vecteurs propres $\varphi_m(\theta) = \sqrt{2\alpha/\pi}\sin(m\alpha\theta)$ forment une base hilbertienne de $L^2(]0, \pi/\alpha[)$.

Lemme 1.2.3 *Soit $v \in \mathcal{C}^\infty(]0, \rho]; D(\Lambda))$ satisfaisant $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Lambda_\theta v = 0$ pour $r < \rho$, et on suppose que $v \in L^2(\omega_\rho)$. Alors*

$$v(r, \theta) = v_{-1} r^{-\alpha} \sin(\alpha\theta) + \sum_{m \geq 1} v_m r^{m\alpha} \varphi_m(\theta).$$

Preuve. Puisque $(\varphi_m)_{m \geq 1}$ est une base orthonormale de $L^2(]0, \frac{\pi}{\alpha}[)$, il existe $v_m(r) \in \mathcal{C}^\infty(]0, \rho])$ tels que

$$v(r, \theta) = \sum_{m \geq 1} v_m(r) \varphi_m(\theta) \tag{1.7}$$

avec $v_m(r) = \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} v(r,\theta)\varphi_m(\theta)d\theta$.
La régularité de v_m ainsi que l'équation satisfaite par v permettent d'écrire l'équation dont v_m est solution :

$$v_m''(r) + \frac{1}{r}v_m'(r) - \frac{(m\alpha)^2}{r^2}v_m(r) = 0.$$

Les solutions de cette équation s'écrivent

$$\begin{aligned} v_m(r) &= a_m r^{-m\alpha} + b_m r^{m\alpha}, \text{ pour } m \neq 0 \\ v_0(r) &= a_0 + b_0 \log(r), \text{ pour } m = 0. \end{aligned}$$

Comme $v \in L^2(\omega_\rho)$, on a aussi :

$$|v_m(r)|^2 \leq \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} |v(r,\theta)|^2 d\theta.$$

donc

$$\int_0^\rho |v_m(r)|^2 r dr \leq \int_{\omega_\rho} |v(r,\theta)|^2 r dr d\theta < \infty.$$

Ce qui implique $a_m = 0$ pour tout $m < -1$ ■

Corollaire 1.2.1 *Il existe $p \in N$ tel que :*

$$p - r^{-\alpha}\sin(\alpha\theta) \in H^1(\omega).$$

Preuve. C'est une conséquence du lemme précédent. ■

Ainsi, dans le cas d'un seul coin rentrant, N est de dimension 1. Le cas où ω présente plusieurs coins rentrants reste identique dans la démarche en procédant par localisation, la dimension de N étant alors égale au nombre de coins rentrants.

1.2.3 Méthode du Complément Singulier

Dans cette partie, on considère la résolution du problème pour $f \in L^2(\omega)$

$$\text{trouver } u \in H_0^1(\omega),\ -\Delta u = f \text{ dans } \omega. \tag{1.8}$$

On décrit ci dessous la MCS [34] dans les deux approches : prise en compte du complément singulier spécifique à la décomposition (1.6) (approche orthogonale) et prise en compte uniquement du comportement singulier au voisinage du coin (approche non orthogonale).

Approche 'orthogonale'

Dans le cas d'un seul coin rentrant, N est donc de dimension 1, on note p_s un générateur (à un scalaire près) de N dont un choix possible est celui qui vérifie

$$p_s = \tilde{p} + p_p, p_p = r^{-\alpha}\sin(\alpha\theta), \tilde{p} \in H^1(\omega).$$

La MCS consistera donc à ajouter une seule fonction singulière ϕ_s à l'espaces des fonctions de base lors de la discrétisation par éléments finis. D'après (1.6), $f \in L^2(\omega)$ peut s'écrire

$$f = -\Delta\tilde{u} + cp_s,$$

avec

$$c = \frac{1}{\|p_s\|_0^2} \int_\omega f p_s \, \mathrm{d}x, \tilde{u} \in H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega),$$

la solution de (1.8) se décompose alors en

$$u = \tilde{u} + c\phi_s,$$

où ϕ_s est alors déterminé par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta\phi_s & = & p_s \text{ dans } \omega, \\ \phi_s & = & 0 \text{ sur } \partial\omega, \end{array} \right.$$

et peut s'écrire

$$\phi_s = \tilde{\phi} + \beta\phi_p, \text{ avec } \tilde{\phi} \in H^2(\omega), \phi_p = r^\alpha \sin(\alpha\theta).$$

Précisons l'approximation de p_s et ϕ_s.
Soit $\mathcal{T}_h$ un maillage régulier, affine équivalent de ω, dont les sommets sont notés $(M_i)_{i=1..\mathcal{N}=\mathcal{N}_i+\mathcal{N}_b}$, on supposera pour simplifier que les $\mathcal{N}_b$ derniers sommets sont les sommets de bords. On note $\mathcal{V}_h$ l'espace des fonctions de base P^1 notées $(\phi_i)_{i=1..\mathcal{N}}$, associées à la triangulation et $\mathcal{V}_h^0$ le sous espace des fonctions nulles au bord. On introduit les notations suivantes : Π_h est l'opérateur d'interpolation globale, π_h l'opérateur d'interpolation aux points du bord, et $\Pi_h^- = \Pi_h - \pi_h$.
On note $h_K = \mathrm{diam}(K)$, pour $K \in \mathcal{T}_h$ et $h = \max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$ le pas du maillage.

Les fonctions p_s, p_p étant harmoniques, $\tilde{p}$ l'est aussi, et on peut montrer que $\tilde{p}$ a une trace nulle (au sens $H^{\frac{1}{2}}$) sur $\gamma_1 \overset{\circ}{\cup} \gamma_2$ tandis que sur les autres arêtes de bord $\gamma_j, j \geq 3$, le lemme 1.2.2 implique que $\tilde{p}|_{\gamma_j} = -p_p|_{\gamma_j}, j \geq 3$. Par conséquent, d'après la proposition 1.2.1, $\tilde{p}$ est solution du problème

trouver $\tilde{p} \in H^1(\omega),\ \tilde{p}|_{\gamma_1\cup\gamma_2} = 0,\ \tilde{p}|_{\gamma_j} = -p_p|_{\gamma_j}, j \geq 3,\ (\nabla\tilde{p}, \nabla v)_0 = 0, \forall v \in H_0^1(\omega)$.
On prend alors comme approximation de p_s

$$p_s^h = \tilde{p}_h + r^{-\alpha}\sin(\alpha\theta)$$

où $\tilde{p}_h$ est calculée de la façon suivante

$$\tilde{p}_h = p_h - q_h, \quad q_h = \pi_h p_p = \sum_{k=1+\mathcal{N}_i}^{k=\mathcal{N}_b+\mathcal{N}_i} p_p(M_k)\phi_k,$$

et où $p_h \in \mathcal{V}_h^0$ est tel que $(\nabla\tilde{p}_h, \nabla v)_0 = 0, \forall v \in \mathcal{V}_h^0$.
Pour obtenir ensuite une approximation de ϕ_s, on considère alors le problème suivant

trouver $\tilde{\phi} \in H^1(\omega)$ tel que $\tilde{\phi}|_{\partial\omega} = -\beta\phi_p|_{\partial\omega}$ et $(\nabla\tilde{\phi}, \nabla v)_0 = (p_s, v)_0, \forall v \in H_0^1(\omega)$.
Avant de passer au problème discret, précisons la constante β.

Proposition 1.2.3 *On a la relation suivante*

$$\beta = \frac{1}{\pi}\|p_s\|_0^2.$$

Preuve. Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\omega})$ une fonction de troncature valant 1 dans un voisinage du coin rentrant $B(S_1, r_0)$ et nulle dans $B(S_1, 2r_0)$, pour un $r_0 > 0$ convenablement choisi. La fonction ϕ_s peut s'écrire

$$\phi_s = \phi^* + \beta\chi\phi_p$$

avec $\phi^* \in H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)$ et par conséquent,

$$\Delta\phi^* \perp N$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \|p_s\|_0^2 &= \int_\omega -\Delta\phi_s \cdot p_s \,\mathrm{d}\omega, \\ &= -\beta\left(\int_\omega \Delta(\chi\phi_p)\cdot\tilde{p}\,\mathrm{d}\omega + \int_\omega \Delta(\chi\phi_p)\cdot p_p\,\mathrm{d}\omega\right), \\ &= -\beta(I_1+I_2) \end{aligned}$$

Or $\tilde{p} \in E(\Delta, L^2), \chi\phi_p \in H^1$ donc d'après la proposition 1.2.1

$$I_1 = \int_\omega \chi\phi_p \cdot \Delta\tilde{p}\,\mathrm{d}\omega - \ {}_{-1/2,\gamma} < \frac{\partial\tilde{p}}{\partial n}, \chi\phi_p >_{1/2,\gamma} + \ {}_{-1/2,\gamma} < \frac{\partial}{\partial n}(\chi\phi_p), \tilde{p} >_{1/2,\gamma} .$$

Les deux premiers termes sont nuls car $\tilde{p}$ est harmonique et $\chi\phi_p \in H_0^1(\omega)$ et quant au dernier, comme $\frac{\partial}{\partial n}(\chi\phi_p) \in L^2(\gamma)$, on a à faire à une intégrale dans laquelle seules les arêtes du coin rentrant peuvent avoir une contribution à cause du support de χ. Mais celle ci est nulle puisque $\tilde{p}|_{\gamma_c} = 0$ dans $H^{1/2}(\gamma_c)$. Finallemnt $I_1 = 0$.
Quant au terme I_2, on le calcule de la façon suivante

$$I_2 = \int_\omega \Delta(\chi\phi_p)\cdot p_p\,\mathrm{d}\omega = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\omega-\omega\cap B(S_1,\varepsilon)} \Delta(\chi\phi_p)\cdot p_p\,\mathrm{d}\omega$$

Dans $\omega_\varepsilon = \omega\backslash(\omega\cap B(S_1,\varepsilon))$, $\chi\phi_p$ est régulière et par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_{\omega_\varepsilon} \Delta(\chi\phi_p)\cdot p_p\,\mathrm{d}\omega &= \int_{\partial\omega_\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial n}(\chi\phi_p)p_p - \chi\phi_p\frac{\partial}{\partial n}p_p\right)\mathrm{d}\sigma, \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}}\left(-p_p\frac{\partial}{\partial r}\phi_p|_{r=\varepsilon} + \phi_p\frac{\partial}{\partial r}p_p|_{r=\varepsilon}\right)\varepsilon\,\mathrm{d}\theta, \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}}\left(-\varepsilon^{-\alpha}\sin(\alpha\theta)\alpha\varepsilon^{\alpha-1}\sin(\alpha\theta) - \varepsilon^{\alpha}\sin(\alpha\theta)\alpha\varepsilon^{-\alpha-1}\sin(\alpha\theta)\right)\varepsilon\,\mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

pour ε assez petit. Finalement, $I_2 = -\pi$. ■

Une fois calculée une approximation de p_s, on cherche l'approximation éléments finis de $\tilde{\phi}$ sous la forme :

$$\tilde{\phi}_h = -\beta_h\pi_h\phi_p + \phi_h^0, \quad \phi_h^0 \in \mathcal{V}_h^0,$$

où $\beta_h = \dfrac{1}{\pi}\|p_s^h\|_0^2$, et $\phi_h^0 \in H_0^1(\omega)$ est telle que

$$(\nabla\tilde{\phi}_h, \nabla v_h)_0 = (p_s^h, v_h)_0, \forall v_h \in \mathcal{V}_h^0.$$

On prend alors comme approximation de ϕ_s la fonction $\phi_s^h = \tilde{\phi}_h + \beta_h\phi_p$.

Proposition 1.2.4 *Les approximations p_s^h et ϕ_s^h vérifient les estimations suivantes*

$$\|p_s - p_s^h\|_0 \le Ch^{2\alpha_0} \tag{1.9}$$

$$\|\phi_s - \phi_s^h\|_1 \le Ch. \tag{1.10}$$

Preuve. Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\omega})$ une fonction de troncature comme dans la preuve précédente. On introduit les fonctions $\tilde{s} = -(1-\chi)p_p, \quad p^0 = \tilde{p} - \tilde{s} = \tilde{p} + (1-\chi)p_p$, avec $p^0 \in H_0^1(\omega) \cap H^{1+\alpha_0}(\omega)$. D'après le problème satisfait par $\tilde{p}$, p^0 est solution de

trouver $p^0 \in H_0^1(\omega)$ tel que $\left(\nabla p^0, \nabla v\right)_0 = -\left(\nabla \tilde{s}, \nabla v\right)_0, \forall v \in H_0^1(\omega)$.

On considère donc le problème discret suivant

trouver $p_h^0 \in \mathcal{V}_h^0$ tel que $\left(\nabla p_h^0, \nabla v_h\right)_0 = -\left(\nabla \Pi_h \tilde{s}, \nabla v_h\right)_0, \forall v_h \in \mathcal{V}_h^0$. Par différence,

$$\left(\nabla(p_0 - p_h^0), \nabla v_h\right)_0 = \left(\nabla(\Pi_h \tilde{s} - \tilde{s}), \nabla v_h\right)_0, \forall v_h \in \mathcal{V}_h^0.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\|\nabla(p^0 - p_h^0)\|_0^2 &= \left(\nabla(p^0 - q_h) + \nabla(q_h - p_h^0), \nabla(p^0 - q_h) + \nabla(q_h - p_h^0)\right)_0, \\
&= \|\nabla(p^0 - q_h)\|_0^2 + \|\nabla(q_h - p_h^0)\|_0^2 \\
&\quad + 2\left(\nabla(p^0 - p_h^0), \nabla(q_h - p_h^0)\right)_0 + 2\left(\nabla(p_h^0 - q_h), \nabla(q_h - p_h^0)\right)_0 \\
&\leq \|\nabla(p^0 - q_h)\|_0^2 + 2\left(\nabla(\Pi_h \tilde{s} - \tilde{s}), \nabla(q_h - p_h^0)\right)_0
\end{aligned}$$

Dans la dernière inégalité, on prend $q_h = \Pi_h p^0$

$$\begin{aligned}
|p^0 - p_h^0|_1^2 &\leq \|\nabla(p^0 - \Pi_h p^0)\|_0^2 + 2\left(\nabla(\Pi_h \tilde{s} - \tilde{s}), \nabla(\Pi_h p^0 - p^0)\right)_0 + 2\left(\nabla(\Pi_h \tilde{s} - \tilde{s}), \nabla(p^0 - p_h^0)\right)_0, \\
&\leq |p^0 - \Pi_h p^0|_1^2 + 2|\Pi_h \tilde{s} - \tilde{s}|_1 |\Pi_h p^0 - p^0|_1 + 2|\Pi_h \tilde{s} - \tilde{s}|_1 |p^0 - p_h^0|_1, \\
&\leq 2|p^0 - \Pi_h p^0|_1^2 + 3|\Pi_h \tilde{s} - \tilde{s}|_1^2 + \frac{1}{2}|p^0 - p_h^0|_1^2,
\end{aligned}$$

en utilisant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de Young. A l'aide des estimations standard en éléments finis, on obtient

$$|p^0 - p_h^0|_1^2 \leq C(h^\alpha + h)$$

et finalement, en écrivant que $p_s - p_s^h = \tilde{p} - \tilde{p}_h = p^0 + \tilde{s} - p_h^0 - \Pi_h \tilde{s}$ on arrive à

$$|p_s - p_s^h|_1 \leq |p^0 - p_h^0|_1 + |\tilde{s} - \Pi_h \tilde{s}|_1 \leq C h^\alpha.$$

Pour obtenir une estimation en norme L^2, on considère $w \in H^{1+\alpha_0}(\omega) \cap H_0^1(\omega)$ solution de

$$\left(\nabla w, \nabla v\right)_0 = \left(p^0 - p_h^0, v\right)_0, \forall v \in H_0^1(\omega) \tag{1.11}$$

et satisfaisant l'estimation

$$|w|_{1+\alpha_0} \leq C\|p^0 - p_h^0\|_0.$$

De même, soit w_h son approximation par éléments finis

$$\left(\nabla w_h, \nabla v_h\right)_0 = \left(p^0 - p_h^0, v_h\right)_0, \forall v_h \in \mathcal{V}_h^0.$$

En prenant $v_h = w_h$ et grâce à l'inégalité de Poincaré

$$|w_h|_1 \leq C\|p^0 - p_h^0\|_0.$$

D'après les estimations standard en éléments finis

$$|w - w_h|_1 \leq C h^{\alpha_0} |w|_{1+\alpha_0} \leq C h^{\alpha_0} \|p^0 - p_h^0\|_0.$$

A l'aide de $v = p^0 - p_h^0 \in H_0^1(\omega)$ dans (1.11),

$$\begin{aligned}
\|p^0 - p_h^0\|_0^2 &= \left(\nabla w, \nabla(p^0 - p_h^0)\right)_0, \\
&= \left(\nabla(w - w_h), \nabla(p^0 - p_h^0)\right)_0 + \left(\nabla w_h, \nabla(p^0 - p_h^0)\right)_0, \\
&= \left(\nabla(w - w_h), \nabla(p^0 - p_h^0)\right)_0 + (\nabla(\Pi_h\tilde{s} - \tilde{s}), \nabla(w_h - w))_0 + (\nabla(\Pi_h\tilde{s} - \tilde{s}), \nabla w)_0, \\
&\leq |w - w_h|_1 |p^0 - p_h^0|_1 + |\Pi_h\tilde{s} - \tilde{s}|_1 |w - w_h|_1 + |\Pi_h\tilde{s} - \tilde{s}|_1 |w|_{1+\alpha_0}, \\
&\leq Ch^{2\alpha_0}\|p^0 - p_h^0\|_0 + Ch^{1+\alpha_0}|\tilde{s}|_2\|p^0 - p_h^0\|_0.
\end{aligned}$$

Finalement, la norme L^2 de $p_s - p_s^h$ satisfait à

$$\|p_s - p_s^h\|_0 \leq \|p^0 - p_h^0\|_0 + \|\Pi_h\tilde{s} - \tilde{s}\|_0 \leq C(h^{2\alpha_0} + h^2).$$

Pour la singularité primale, on estime d'abord l'erreur pour $\tilde{\phi}$. On a

$$\left(\nabla(\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_h)_0, \nabla v_h\right) = \left(p_s - p_s^h, v_h\right)_0, \forall v_h \in \mathcal{V}_h^0. \qquad \blacksquare$$

Approche 'non orthogonale'

On garde les notations de la section précédente. La méthode décrite ci dessus est basée sur l'écriture de f correspondant à la décomposition orthogonale de $L^2(\omega)$ donnée par (1.6). A partir des écritures de u et de ϕ_s ci-dessus, on peut réécrire u sous la forme

$$u = \check{u} + \lambda\phi_p,$$

où

$$\check{u} = \tilde{u} + c\tilde{\phi}, \quad \lambda = \beta c = \frac{1}{\pi}\int_\omega f p_s \,\mathrm{d}x. \tag{1.12}$$

Il est alors possible d'approcher u en calculant cette fois des approximations de λ et $\check{u}$.
On pose $\lambda_h = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_\omega f p_s^h \,\mathrm{d}x$.

Corollaire 1.2.2 *L'approximation λ_h vérifie $|\lambda - \lambda_h| \leq Ch^{2\alpha_0}$.*

On cherche une approximation de u sous la forme

$$u_h = \check{u}_h + \lambda_h\phi_p,$$

avec $\check{u}_h = -\lambda_h\pi_h\phi_p + u_h^0, u_h^0 \in \mathcal{V}_h^0$. Comme ϕ_p est harmonique, la partie régulière est solution de
trouver $\check{u} \in H^1(\omega)$, $\check{u}|_{\partial\omega} = -\lambda\phi_p|_{\partial\omega}$ et $(\nabla\check{u}, \nabla v)_0 = (f, v)_0, \forall v \in H_0^1(\omega)$.
Le problème discret à résoudre est donc
trouver $u_h^0 \in \mathcal{V}_h^0$, telle que $(\nabla\check{u}_h, \nabla v_h)_0 = (f, v_h)_0, \forall v_h \in \mathcal{V}_h^0$ Par différence, on a

$$(\nabla(\check{u} - \check{u}_h), \nabla v_h)_0 = 0, \forall v_h \in \mathcal{V}_h^0.$$

Soit $w_h \in \mathcal{V}_h$ telle que $\check{u}_h - w_h \in \mathcal{V}_h^0$. En injectant dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}
|\check{u} - w_h|_1^2 &= |\check{u} - \check{u}_h|_1^2 + |\check{u}_h - w_h|_1^2 + 2(\nabla(\check{u} - \check{u}_h), \nabla(\check{u}_h - w_h))_0, \\
&= |\check{u} - \check{u}_h|_1^2 + |\check{u}_h - w_h|_1^2.
\end{aligned}$$

En particulier,

$$|\check{u} - \check{u}_h|_1^2 \leq |\check{u} - w_h|_1^2.$$

On choisit $w_h = \Pi_h \breve{u} + (\lambda - \lambda_h)\Pi_h \phi_p = \Pi_h u - \lambda_h \Pi_h \phi_p$ de sorte que

$$\begin{aligned} \breve{u}_h - w_h &= -\lambda_h \pi_h \phi_p + u_h^0 - \Pi_h u + \lambda_h \Pi_h \phi_p, \\ &= \lambda_h \Pi_h^- \phi_p + u_h^0 - \Pi_h u \in \mathcal{V}_h^0. \end{aligned}$$

L'opérateur Π_h étant continu (uniform. en h) de $\mathcal{C}^0(\bar{\omega}) \longrightarrow H^1(\omega)$, l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} |\breve{u} - \breve{u}_h|_1 &\leq |\breve{u} - \Pi_h \breve{u}|_1 + |\lambda - \lambda_h||\Pi_h \phi_p|_1, \\ &\leq Ch|\breve{u}|_2 + Ch^{2\alpha_0} \\ &\leq Ch. \end{aligned}$$

Finalement, nous avons

Proposition 1.2.5 *L'approximation $u_h = \breve{u}_h + \lambda_h \phi_p$ de u décrite ci dessus vérifie :*

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch.$$

La suite est consacrée à la résolution numérique du problème de Dirichlet pour le laplacien dans un domaine possédant une arête prismatique. L'étude des singularités d'arêtes pour le laplacien a été traitée par Grisvard [50, 52, 53] dans le cas du cylindre infini $Q = \omega \times \mathbf{R}$. On pourra consulter aussi [42, 70]. Ce cas constitue le problème modèle pour étudier les singularités d'arêtes pour un polyèdre. Ci dessous on considère le cas d'un domaine borné : le développement en séries de Fourier suivant x_3 permet de réduire le problème à la dimension deux.

1.3 Cas de l'arête prismatique

Dans cette section, on s'intéresse au problème

$$\text{trouver } u \in H_0^1(\Omega),\ -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \tag{1.13}$$

posé dans un domaine prismatique de la forme

$$\Omega = \omega \times Z,$$

où Z est un intervalle de $\mathbf{R}$, et à son approximation numérique en combinant éléments finis (en (x_1, x_2)) et polynômes trigonométriques (en x_3). On prendra $Z =]0,1[$ pour simplifier. D'après [53, 38], quand $f \in L^2(\Omega)$, la solution du problème (1.13) s'écrit

$$u = u_r + u_s, \tag{1.14}$$

avec $u_r \in H^2(\Omega)$ et $u_s = \gamma(r,z) r^\alpha \sin(\alpha\theta)$.
La géométrie particulière du problème rend ici possible l'application du principe de séparation de variables. Par analogie avec la proposition 1.2.2, l'étude de l'opérateur $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_3^2}$ avec conditions de Dirichlet homogène en $x_3 = 0$ et $x_3 = 1$ fournit une base orthogonale $(\mathrm{e}_k)_{k\geq 1}$, de $L^2(]0,1[)$ avec

$$\mathrm{e}_k(x_3) = \sqrt{2}\sin(k\pi x_3).$$

Ainsi, il est possible de développer en séries de Fourier (généralisées) toute fonction f de $L^2(\Omega)$ sur cette base

$$f = \sum_{k\geq 0} f_k \mathrm{e}_k. \tag{1.15}$$

Dans la suite, on justifie de tels développements, ainsi que les propriétés satisfaites par les coefficients u_k. A partir des résultats obtenus, et de ceux concernant les singularités bidimensionnelles, on mettra en évidence, sous des hypothèses supplémentaires que l'on précisera, une décomposition de la forme (1.14) avec u_s de la forme

$$u_s = \gamma(x_3) r^\alpha \sin(\alpha\theta), \tag{1.16}$$

i.e. : γ ne dépend que de x_3, avec $\gamma \in H^2(]0,1[) \cap H_0^1(]0,1[)$.

1.3.1 Développement en série de Fourier

Lemme 1.3.1 *Soit u dans $L^2(\Omega)$. Il existe des coefficients $u_k \in L^2(\omega), k \in \mathbf{N}, k \geq 1$*

$$u_k(x_1,x_2) = \int_0^1 u(x_1,x_2,x_3)\mathrm{e}_k(x_3)dx_3,$$

tels que

$$u = \sum_{k\geq 1} u_k \mathrm{e}_k,$$

dans $L^2(\Omega)$, et

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k\geq 1} \|u\|^2_{L^2(\omega)}.$$

De plus, si $u \in H_0^1(\Omega)$, les coefficients u_k appartiennent à $H_0^1(\omega)$, et

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k\geq 1} \left\{ \|\nabla u_k\|^2_{L^2(\omega)} + (k\pi)^2 \|u_k\|^2_{L^2(\omega)} \right\}.$$

Preuve. Comme $u \in L^2(\Omega)$, d'après le théorème de Fubini,

$$u(x_1,x_2,\cdot) \in L^2(]0,1[),$$

pour presque tout $(x_1,x_2) \in \omega$. D'après la théorie des séries de Fourier, on peut donc la développer suivant la base orthonormale $(\mathrm{e}_k)_{k\geq 1}$ de $L^2(]0,1[)$

$$u(x_1,x_2,x_3) = \sum_{k\geq 1} u_k(x_1,x_2)\mathrm{e}_k(x_3)$$

pour presque tout $x_3 \in]0,1[$, $(x_1,x_2) \in \omega$, avec

$$u_k(x_1,x_2) = \int_0^1 u(x_1,x_2,x_3)\mathrm{e}_k(x_3)\,\mathrm{d}x_3.$$

En appliquant l'identité de Parseval on obtient

$$|u(x_1,x_2,\cdot)|^2_{L^2(]0,1[)} = \sum_{k\geq 1} |u_k(x_1,x_2)|^2$$

En intégrant sur ω, et grâce aux théorèmes de Fubini et Beppo-Levi on obtient

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k\geq 1} \|u_k\|^2_{L^2(\omega)}.$$

Si $u \in H_0^1(\Omega)$ on prouve les mêmes relations pour $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}$, en utilisant les identités

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_1},\ \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_2},\ \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)_k = k\pi u_k.$$

On détaille la preuve pour la première identité, les autres s'obtiennent identiquement.
Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\omega)$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_k, \phi \right\rangle &= \int_\omega \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3)\mathrm{e}_k(x_3)\phi(x_1,x_2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\omega, \\
&= \int_0^1 \mathrm{e}_k(x_3) \int_\omega \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3)\phi(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}x_3, \\
&= -\int_0^1 \mathrm{e}_k(x_3) \int_\omega \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1,x_2)u(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}x_3, \\
&= -\int_\omega \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1,x_2)u_k(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\omega, \\
&= \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_1}, \phi \right\rangle
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.3.1 *Soit $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. On a*

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\left(\|u_k\|^2_{H^2(\omega)} + (k\pi)^2\|u_k\|^2_{H^1(\omega)} + (k\pi)^4\|u_k\|^2_{L^2(\omega)}\right). \tag{1.17}$$

Lemme 1.3.2 *On a les équivalences suivantes*

$$f \in H_0^1(]0,1[, L^2(\omega)) \Longleftrightarrow \sum_{k\geq 1} k^2\|f_k\|^2_{L^2(\omega)} < \infty, \tag{1.18}$$

$$f \in H^2(]0,1[, L^2(\omega)) \cap H_0^1(]0,1[, L^2(\omega)) \Longleftrightarrow \sum_{k\geq 1} k^4\|f_k\|^2_{L^2(\omega)} < \infty. \tag{1.19}$$

Preuve. On ne prouve que la première, la seconde étant semblable. Soit $f \in L^2(\omega)$ vérifiant $\partial_3 f \in L^2(\omega)$ et $f|_{x_3=0} = f|_{x_3=1} = 0$.

$$\begin{aligned}
k\pi f_k &= -\sqrt{2}\int_0^1 f(x_1,x_2,x_3)\left(\cos(k\pi x_3)\right)'\,\mathrm{d}x_3, \\
&= \sqrt{2}\int_0^1 \partial_3 f(x_1,x_2,x_3)\cos(k\pi x_3)\,\mathrm{d}x_3
\end{aligned}$$

Comme $\partial_3 f \in L^2(\omega)$ et que $\left(1, \sqrt{2}\cos(k\pi x_3)\right)_{k\geq 1}$ est une base orthogonale de $L^2(]0,1[)$, la finitude de la somme $\sum_{k\geq 0} k^2\|f_k\|^2_{L^2(\omega)}$ est acquise.
Réciproquement, supposons $\sum_{k\geq 0} k^2\|f_k\|^2_{L^2(\omega)} < \infty$ et posons

$$F_K = \sum_{0\leq k\leq K} f_k \sin(k\pi\cdot).$$

On sait d'abord que $F_K \longrightarrow f$, quand $K \longrightarrow +\infty$ dans $L^2(\omega)$, donc $\partial_3 F_K \longrightarrow \partial_3 f, K \longrightarrow +\infty$ dans $\mathcal{D}'(\omega)$. Comme $\sum_{k\geq 0} k^2 \|f_k\|^2_{L^2(\omega)} < \infty$, la suite $(\partial_3 F_K)_K$ est de Cauchy dans $L^2(\omega)$, donc converge dans cet espace vers $\partial_3 f$ qui appartient donc à $L^2(\omega)$. ■

Lemme 1.3.3 *Soient $u, v \in H^1_0(\Omega)$. La forme bilinéaire définie par :*

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x,$$

se réécrit

$$a(u,v) = \sum_{k\geq 0} a_k(u_k, v_k),$$

où a_k est définie par : $a_k(u,v) = \int_\omega \left(\nabla u_k \cdot \nabla v_k + (k\pi)^2 u_k v_k\right) \mathrm{d}x$.

Preuve. Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_{x_1} u \cdot \partial_{x_1} v \, \mathrm{d}x &= \int_\omega \left(\int_0^1 \partial_{x_1} u \cdot \partial_{x_1} v \, \mathrm{d}x_3 \right) \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2, \\
&= \int_\omega \left(\sum_{k\geq 0} \partial_{x_1} u_k \cdot \partial_{x_1} v_k \right) \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2, \\
&= \sum_{k\geq 0} \int_\omega \left(\partial_{x_1} u_k \cdot \partial_{x_1} v_k\right) \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2,
\end{aligned}$$

la deuxième égalité est une conséquence de l'identité de Bessel et la troisième parce que le produit de deux éléments de $\ell^2(\mathbf{N}, L^2(\omega))$ est dans $\ell^1(\mathbf{N}, L^1(\omega))$. ■

Lemme 1.3.4 *Pour $f \in L^2(\Omega)$, les coefficients de Fourier u_k de l'unique solution $u \in H^1_0(\Omega)$ au problème (1) vérifient, pour chaque $k \in \mathbf{N}$,*

$$a_k(u_k, v) = (f_k, v)_0, \forall v \in H^1_0(\omega). \tag{1.20}$$

De plus, on a :

$$\sum_{k\geq 0} k^2 \left(\|\nabla u_k\|^2_0 + (k\pi)^2 \|u_k\|^2_0 \right) \leq \|f\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Preuve. Comme u est solution de la formulation variationnelle

$$a(u,v) = (f,v)_{L^2(\Omega)}, \text{pour tout } v \in H^1_0(\Omega),$$

il suffit de prendre comme fonction test $v = v_k \mathrm{e}_k \in H^1_0(\Omega), v_k \in H^1_0(\omega)$, et d'utiliser le lemme précédent, pour obtenir que u_k vérifie

$$a_k(u_k, v) = (f_k, v_k)_{L^2(\omega)},$$

pour tout $v_k \in H^1_0(\omega)$. Ensuite, on a avec $v_k = u_k$:

$$\|\nabla u_k\|^2_0 + (k\pi)^2 \|u_k\|^2_0 \leq C \|f_k\|_0 \|u_k\|_0,$$

et à l'aide d'une inégalité de Young,

$$\|\nabla u_k\|_0^2 + (k\pi)^2\|u_k\|_0^2 \leq C\left(\frac{1}{2(k\pi)^2}\|f_k\|_0^2 + \frac{(k\pi)^2}{2}\|u_k\|_0^2\right).$$ ■

Pour $u \in L^2(\Omega)$, on note U_N la somme partielle de Fourier de u :

$$U_N = \sum_{k=1}^{k=N} u_k \mathrm{e}_k.$$

Corollaire 1.3.1 *Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ l'unique solution de (1.13). Alors $(U_N)_N$ converge vers u dans $H^1(\Omega)$. De plus, $(\Delta U_N)_N$ converge f dans $L^2(\Omega)$.*

Preuve. Le fait que $(U_N)_N$ converge vers u dans $H^1(\Omega)$ est une conséquence du lemme 1.3.1. D'autre part, on a

$$-\Delta U_N = \sum_{k=0}^{k=N}(-\Delta u_k + (k\pi)^2 u_k)\mathrm{e}_k = \sum_{k=0}^{k=N} f_k \mathrm{e}_k,$$

ce qui entraîne la convergence de $(\Delta U_N)_N$ vers f dans $L^2(\Omega)$. ■

Corollaire 1.3.2 *Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ l'unique solution de (1.13). Alors $\partial_3 u \in H^1(\Omega)$.*

Preuve. Il faut prouver que $\partial_{3,i} u \in L^2(\Omega)$ pour $i = 1, 2, 3$. Comme $\sum_{k\geq 0} k^4 \|u_k\|^2_{L^2(\omega)} < \infty$, on déduit que $u \in H^2(]0,1[, L^2(\omega)) \cap H_0^1(]0,1[, L^2(\omega))$, en particulier $\partial_{3,3} u \in L^2(\Omega)$.
Pour $\partial_{3,i} u, i = 1, 2$ on a

$$\partial_{3,i} U_N(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=0}^{k=N} k\pi \partial_i u_k(x_1, x_2)\cos(k\pi x_3)$$

et comme $\sum_{k\geq 0} k^2 \|\nabla u_k\|^2_{L^2(\omega)} < \infty$, $\partial_{3,i} U_N$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers $\partial_{3,i} u$. ■

D'après (1.20), les coefficients u_k satisfont le problème aux limites suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u_k + (k\pi)^2 u_k & = & f_k \text{ dans } \omega \\ u_k & = & 0 \text{ sur } \partial\omega. \end{array}\right. \tag{1.21}$$

1.3.2 Prise en compte de la singularité

Pour $k \in \mathbf{N}$, la forme bilinéaire a_k satisfait aux hypothèses du théorème de Lax-Milgram, le problème (1.21) possède donc une unique solution dans $H_0^1(\omega)$. Réécrivant (1.21) sous la forme

$$-\Delta u_k = \tilde{f}_k := f_k - (k\pi)^2 u_k \in L^2(\omega), u_k \in H_0^1(\omega),$$

les résultats de la section 1.2.3 permettent d'écrire

$$u_k = \tilde{u}_k + c_k \phi_s,$$

avec

$$\tilde{u}_k \in H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega),\ c_k = \frac{1}{\|p_s\|_0^2}\int_\omega (f_k - \mu_k u_k) p_s \,\mathrm{d}x, \quad \mu_k = (k\pi)^2, \tag{1.22}$$

ou encore sous la forme

$$u_k = \check{u}_k + \lambda_k \phi_p \tag{1.23}$$

avec

$$\check{u}_k = \tilde{u}_k + c_k \tilde{\phi} \in H^2(\omega),\ \lambda_k = c_k \beta = \frac{1}{\pi} \int_\omega (f_k - \mu_k u_k) p_s \, \mathrm{d}x. \tag{1.24}$$

Si on recompose formellement la série de Fourier de u, la solution de (1.13) s'écrit :

$$u = u_r + u_s$$

où

$$u_r(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k \geq 0} \check{u}_k(x_1, x_2) \mathrm{e}_k(x_3),$$

et

$$u_s = \gamma(x_3)\phi_p, \quad \gamma(x_3) = \sum_{k \geq 0} \lambda_k \mathrm{e}_k(x_3)$$

et peut être approchée par

$$u_N = u_r^N + u_s^N$$

où u_r^N et u_s^N sont les sommes partielles de Fourier de u_r et u_s à l'ordre N. Nous verrons dans la suite quelles hypothèses doit satisfaire f pour que l'écriture $u = u_r + \gamma(x_3)\phi_p$, avec $u_r \in H^2(\Omega)$ soit effective.

Lemme 1.3.5 *On a les estimations a priori suivantes*

$$\mu_k \|u_k\|_0 \leq C \|f_k\|_0, \tag{1.25}$$

$$\sqrt{\mu_k} \|\nabla u_k\|_0 \leq C \|f_k\|_0, \tag{1.26}$$

$$\|\Delta u_k\|_0 \leq C \|f_k\|_0. \tag{1.27}$$

Preuve. D'après la formulation variationelle satifaite par u_k, on a

$$\|\nabla u_k\|_0^2 + \mu_k \|u_k\|_0^2 = (f_k, u_k)_0.$$

et (1.25) en découle facilement grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La deuxième (1.26) résulte d'une inégalité de Young

$$\|\nabla u_k\|_1^2 + \mu_k \|u_k\|_0^2 \leq \frac{\mu_k}{2} \|u_k\|_0^2 + \frac{1}{2\mu_k} \|f_k\|_0^2$$

La troisième est immédiate à partir de (1.22) et de (1.25). La dernière étant alors triviale d'àprès l'équation dont u_k est solution. ∎

1.3.3 Approximation de $\check{u}_k$ et λ_k

On établit ici les estimations vérifiées par $\check{u}_k$ et λ_k, quand $k \to +\infty$, qui permettront de justifier la décomposition 3D de u obtenue à partir des décompositions 2D des modes de Fourier u_k. Dans la suite, on notera $\| \ . \ \|_a$ la norme associée à la forme bilinéaire a_k.

Lemme 1.3.6 *On a les estimations suivantes :*

$$\|\check{u}_k\|_a \leq C\sqrt{\mu_k}\|f_k\|_0, \tag{1.28}$$

$$|\check{u}_k|_2 \leq C\|f_k\|_0, \tag{1.29}$$

$$\|\Delta\check{u}_k\|_0 \leq C\|f_k\|_0. \tag{1.30}$$

$$|\lambda_k| \leq C\|f_k\|_0, \tag{1.31}$$

$$|\lambda_k| \leq C\mu_k^{\frac{\alpha-1}{2}}\|f_k\|_0, \tag{1.32}$$

Preuve. : L'inégalité (1.31) est évidente d'après l'expression (1.24) de λ_k et l'estimation (1.25). Pour (1.28), on a :

$$a_k(\check{u}_k + \lambda_k\phi_p, v) = (f_k, v)_0, \ \forall v \in H_0^1(\omega).$$

En appliquant ceci avec $v = u_k$ et en développant, il vient

$$\|\check{u}_k\|_a^2 + 2\lambda_k a_k(\phi_p, \check{u}_k) + \lambda_k^2\|\phi_p\|_a^2 = (f_k, u_k)_0,$$

et par suite

$$\|\check{u}_k\|_a^2 \leq \|f_k\|_0\|u_k\|_0 + 2|\lambda_k|\|\phi_p\|_a\|\check{u}_k\|_a.$$

En utilisant (1.25) et l'estimation

$$\|\phi_p\|_a \leq C\sqrt{\mu}_k,$$

ainsi qu'une inégalité de Young, on a :

$$\begin{aligned} \|\check{u}_k\|_a^2 &\leq \frac{1}{\mu_k}\|f_k\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u_k\|_a^2 + C\mu_k|\lambda_k|^2, \\ &\leq \frac{1}{\mu_k}\|f_k\|_0^2 + C\mu_k|\lambda_k|^2. \end{aligned}$$

L'estimation (1.31) permet de conclure.
Pour l'inégalité (1.29), il suffit d'écrire, que d'après (1.24),

$$\check{u}_k = \tilde{u}_k + \lambda_k\tilde{\phi}/\beta$$

ainsi,

$$|\check{u}_k|_2 \leq |\tilde{u}_k|_2 + C|\lambda_k| \leq C\|f_k\|_0.$$

Or, d'après le lemme 1.2.1,

$$|\check{u}_k|_2 \leq \|\Delta\tilde{u}_k\|_0 + C|\lambda_k| \leq C\|f_k\|_0,$$

et

$$-\Delta\tilde{u}_k = f_k - \mu_k u_k - \lambda_k p_s/\beta,$$

on en déduit donc la conclusion d'après (1.25) et (1.31).
Pour obtenir (1.32), on utilise les résultats de [53, Thm. 2.5.2] où u_k est décomposée en

$$u_k = u_{k,R} + c(\mu_k)\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu_k}r}\eta(r)\phi_p,$$

avec $u_{k,R} \in H^2(\omega)\cap H_0^1(\omega)$, $c(\mu_k) \in \mathbf{R}$ satisfaisant $|c(\mu_k)| \leq C\mu_k^{\frac{\alpha-1}{2}}\|f_k\|_0$, et η est une fonction de troncature égale à 1 au voisinage de O et nulle dans un voisinage de l'infini telle que $\eta\phi_p \in H_0^1(\omega)$. Comme $\left(\lambda_k - c(\mu_k)\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu_k}r}\eta(r)\right)\phi_p$ doit appartenir à $H^2(\omega)$ on a nécessairement $\lambda_k = c(\mu_k)$. ■

Lemme 1.3.7

$$|u_k|_{1+\alpha_0} \leq C\mu_k^{\frac{\alpha_0-1}{2}}\|f_k\|_0, \tag{1.33}$$

Preuve. Toujours d'après [53, Thm. 2.5.2], on a

$$|u_{k,R}|_2 + \sqrt{\mu_k}|u_{k,R}|_1 + \mu_k|u_{k,R}|_0 \leq C\|f_k\|_0.$$

En particulier,

$$|u_{k,R}|_1 \leq C\mu_k^{-1/2}\|f_k\|_0, \quad |u_{k,R}|_2 \leq C\|f_k\|_0,$$

ce qui donne par interpolation

$$|u_{k,R}|_{1+\alpha_0} \leq C\mu_k^{\frac{\alpha_0-1}{2}}\|f_k\|_0.$$

Reste ensuite à évaluer la semi norme $H^{1+\alpha_0}(\omega)$ de $v_p = \mathrm{e}^{-\sqrt{\mu_k}r}\eta(r)\phi_p$. Il suffit de l'évaluer dans $\omega \cap B(S_1, r_0)$. En passant en coordonnées polaires et en faisant le changement de variables $x = \sqrt{\mu_k}\xi, y = \sqrt{\mu_k}\xi'$, la quantité

$$|v_p|^2_{H^{1+\alpha_0}(\omega\cap B(S_1,r_0))} = \int\int_{\omega\cap B(S_1,r_0)\times\omega\cap B(S_1,r_0)} \frac{|\nabla v_p(x) - \nabla v_p(y)|^2}{|x-y|^{2+2\alpha_0}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

est en $\mathcal{O}(\mu_k^{(\alpha_0-\alpha)/2})$. A l'aide de l'estimation (1.32) on a

$$|\lambda_k\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu_k}r}\eta(r)\phi_p|_{H^{1+\alpha_0}(\omega)} = \mathcal{O}(\mu_k^{(\alpha_0-1)/2}).$$ ■

1.3.4 Algorithme de la MFCS

On considère les approximations éléments finis P^1 $\check{u}_k^h$ et λ_k^h de $\check{u}_k$ et λ_k obtenues en appliquant la méthode de la partie 1.2.3. Pour calculer u_k suivant la décomposition (1.23), on a besoin de connaître le coefficient λ_k. Or précisément, u_k intervient dans le calcul de λ_k et on a donc un système couplé en (u_k, λ_k). On introduit l'approximation par éléments finis standard z_k^h, i.e. z_k^h est solution du problème

$$\text{trouver } z_k^h \in \mathcal{V}_h^0, \text{ tel que } a_k(z_k^h, v_h) = (f_k, v_h)_0, \text{ pour tout } v_h \in \mathcal{V}_h^0. \tag{1.34}$$

pour calculer une approximation λ_k^h de λ_k. D'une certaine façon, le rôle de z_k^h est de produire un découplage.
L'expression du coefficient λ_k est

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi}\int_\omega (f_k - \mu_k u_k)p_s\,\mathrm{d}x,$$

on va donc approcher λ_k de la façon suivante

$$\begin{cases} \lambda_k^h = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_\omega (f_k - \mu_k z_k^h) p_s^h \,\mathrm{d}x, \text{ pour } k \le Ch^{-\frac{1}{2-\alpha_0}}, k \le N, \text{et} \\ \lambda_k^h = 0, \text{ pour } k \ge Ch^{-\frac{1}{2-\alpha_0}}, k \le N, \end{cases}$$

où p_s^h est l'approximation de p_s calculée dans la partie 1.2.3. La proposition suivante va permettre d'estimer l'erreur commise dans l'approximation des λ_k.

Proposition 1.3.1 *Pour* $0 \le k \le Ch^{-\frac{1}{2-\alpha_0}}$

$$\|u_k - z_k^h\|_0 \le Ch^{2\alpha_0}\mu_k^{\alpha_0 - 1}\|f_k\|_0, \tag{1.35}$$

Preuve. D'après (1.20) et (1.34)

$$\|u_k - z_k^h\|_a \le \|u_k - v_h\|_a \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h^0.$$

D'autre part, d'après la théorie de l'interpolation

$$|z_k - \Pi_h z_k|_1 \le Ch^{\alpha_0}|z_k|_1, \quad |z_k - \Pi_h z_k|_{1+\alpha_0} \le Ch^{1+\alpha_0}|z_k|_{1+\alpha_0}. \tag{1.36}$$

Ainsi,

$$\|u_k - z_k^h\|_a \le C\left(1 + \sqrt{\mu_k}h\right) h^{\alpha_0}|z_k|_{1+\alpha_0}. \tag{1.37}$$

Par dualité, nous avons

$$\begin{aligned} \|u_k - z_k^h\|_0 &= \sup_{g \in L^2(\omega)} \frac{(u_k - z_k^h, g)_0}{\|g\|_0}, \\ &= \sup_{g \in L^2(\omega)} \frac{a_k(w(g), u_k - z_k^h)}{\|g\|_0} \end{aligned}$$

où $w(g)$ est l'unique solution du problème

$$\text{trouver } w(g) \in H_0^1(\omega), \text{ tel que } a_k(w(g), v) = (g, v)_0 \text{ pour tout } v \in H_0^1(\omega). \tag{1.38}$$

D'après (1.20) et (1.34), on a alors :

$$\begin{aligned} \|u_k - z_k^h\|_0 &= \sup_{g \in L^2(\omega)} \frac{a_k(w(g) - \Pi_h w(g), u_k - z_k^h)}{\|g\|_0}, \\ &= \sup_{g \in L^2(\omega)} \frac{a_k(w(g) - \Pi_h w(g), u_k - z_k^h)}{\|g\|_0}, \\ &= \sup_{g \in L^2(\omega)} \frac{\|w(g) - \Pi_h w(g)\|_a \|u_k - z_k^h\|_a}{\|g\|_0}. \end{aligned}$$

A l'aide de (1.33), (1.36) et (1.37), on obtient la conclusion

$$\|u_k - z_k^h\|_0 \le Ch^{2\alpha_0}\mu_k^{\alpha_0 - 1}\|f_k\|_0,$$

puisque $1 + \sqrt{\mu_k}h \le C'$ pour $k \le Ch^{-\frac{1}{2-\alpha_0}}$. ∎

Corollaire 1.3.3 *Pour $k \leq Ch^{-\frac{1}{2-\alpha_0}}, k \leq N$, on a*

$$|\lambda_k - \lambda_k^h| \leq C(h^{2\alpha_0}\mu_k^{\alpha_0} + h^{2\alpha_0})\|f_k\|_0. \tag{1.39}$$

Preuve. Par différence,

$$\lambda_k - \lambda_k^h = \frac{\mu_k}{\pi}\left(\int_\omega u_k(p_s^h - p_s)\,\mathrm{d}x + \int_\omega p_s^h(z_k^h - u_k)\,\mathrm{d}x + \int_\omega f_k(p_s - p_s^h)\,\mathrm{d}x\right),$$

le premier terme de la somme est majorée par $Ch^{2\alpha_0}(\mu_k\|u_k\|_0) \leq Ch^{2\alpha_0}\|f_k\|_0$, le deuxième par $Ch^{2\alpha_0}\mu_k\mu_k^{\alpha_0-1}\|f_k\|_0$, et enfin le troisième par $Ch^{2\alpha_0}\|f_k\|_0$. ∎

Passons maintenant à l'approximation de $\check{u}_k$. On rappelle qu'il est solution du problème

trouver $\check{u}_k \in H^1(\omega)$ tel que $a_k(\check{u}_k, v) + \lambda_k a_k(\phi_p, v) = (f_k, v)_0,\ \forall v \in H_0^1(\omega)$.

Une fois, λ_k^h calculé, on cherche alors $\check{u}_k^h \in \mathcal{V}_h$ solution du problème

$$\text{trouver } \check{u}_k^h \in \mathcal{V}_h^0,\ \text{tel que } a_k(\check{u}_k^h, v_h) + \lambda_k^h a_k(\phi_p, v_h) = (f_k, v_h)_0,\ \forall v_h \in \mathcal{V}_h^0, \tag{1.40}$$

sous la forme

$$\check{u}_k^h = -\lambda_k^h \pi_h(\phi_p) + u_{k,h}^0, u_{k,h}^0 \in \mathcal{V}_h^0.$$

Par différence, on a

$$a_k(\check{u}_k - \check{u}_k^h, v_h) + (\lambda_k - \lambda_k^h)a_k(\phi_p, v_h) = 0, \forall v_h \in \mathcal{V}_h^0. \tag{1.41}$$

Soit $w_h \in \mathcal{V}_h$ telle que $w_h - \check{u}_k^h \in \mathcal{V}_h^0$.
En écrivant $\check{u}_k - \check{u}_k^h = \check{u}_k - w_h + w_h - \check{u}_k^h$, on obtient en développant

$$\|\check{u}_k - w_h\|_a^2 = \|\check{u}_k - \check{u}_k^h\|_a^2 + \|\check{u}_k^h - w_h\|_a^2 + 2a_k(\check{u}_k - \check{u}_k^h, \check{u}_k^h - w_h),$$

et par conséquent

$$\|\check{u}_k - \check{u}_k^h\|_a^2 \leq \|\check{u}_k^h - w_h\|_a^2 - 2a_k(\check{u}_k - \check{u}_k^h, \check{u}_k^h - w_h).$$

D'après (1.41), on a alors

$$\|\check{u}_k - \check{u}_k^h\|_a^2 \leq \|\check{u}_k^h - w_h\|_a^2 + 2(\lambda_k - \lambda_k^h)a_k(\phi_p, \check{u}_k^h - w_h).$$

On prend $w_h = \Pi_h\check{u}_k + (\lambda_k - \lambda_k^h)\Pi_h\phi_p = \Pi_h u_k - \lambda_k^h\Pi_h\phi_p$.
On vérifie bien que $\check{u}_k^h - w_h \in \mathcal{V}_h^0$. En effet,

$$\begin{aligned}
\check{u}_k^h - w_h &= -\lambda_k^h\pi_h\phi_p + u_{k,h}^0 - \Pi_h\check{u}_k - (\lambda_k - \lambda_k^h)\Pi_h\phi_p,\\
&= -\lambda_k^h(\Pi_h\phi_p - \Pi_h^-\phi_p) + u_{k,h}^0 - \Pi_h u_k + \lambda_k\Pi_h\phi_p - (\lambda_k - \lambda_k^h)\Pi_h\phi_p,\\
&= \lambda_k^h\Pi_h^-\phi_p + u_{k,h}^0 - \Pi_h u_k.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\|\check{u}_k - \check{u}_k^h\|_a^2 &\leq \|\check{u}_k - \Pi_h\check{u}_k - (\lambda_k - \lambda_k^h)\Pi_h\phi_p\|_a^2\\
&\quad +2(\lambda_k - \lambda_k^h)a_k(\phi_p, \check{u}_k^h - \Pi_h\check{u}_k - (\lambda_k - \lambda_k^h)\Pi_h\phi_p),\\
&\leq C\|\check{u}_k - \Pi_h\check{u}_k\|_a^2 + C|\lambda_k - \lambda_k^h|^2\|\Pi_h\phi_p\|_a^2 + C|\lambda_k - \lambda_k^h|\|\phi_p\|_a\|\check{u}_k^h - \Pi_h\check{u}_k\|_a\\
&\quad +C|\lambda_k - \lambda_k^h|^2\|\phi_p\|_a\|\Pi_h\phi_p\|_a,\\
&\leq C(h^2 + \mu_k h^4)|\check{u}_k|_2^2 + C\mu_k|\lambda_k - \lambda_k^h|^2 + C|\lambda_k - \lambda_k^h|\|\phi_p\|_a\|\check{u}_k^h - \Pi_h\check{u}_k\|_a,
\end{aligned}$$

en utilisant la régularité H^2 de $\check{u}_k$ et la continuité de l'opérateur Π_h (uniforme en h). En appliquant une inégalité de Young au dernier terme, puis une inégalité triangulaire, on a :

$$\|\check{u}_k - \check{u}_k^h\|_a^2 \leq C(h^2 + \mu_k h^4)|\check{u}_k|_2^2 + C\mu_k|\lambda_k - \lambda_k^h|^2.$$

D'après (1.29), on aboutit alors au

Théorème 1.3.1 *On a pour $k \in \mathbf{N}$,*

$$\|\check{u}_k - \check{u}_k^h\|_a^2 \leq C(\sqrt{\mu_k}h^2\|f_k\|_0^2 + \mu_k|\lambda_k - \lambda_k^h|^2).$$

On en déduit le

Corollaire 1.3.4 *Pour $k \in \mathbf{N}$:*

$$\|u_k - u_k^h\|_a \leq C\mu_k h\|f_k\|_0$$

Preuve. L'erreur $u_k - u_k^h$ s'écrit :

$$u_k - u_k^h = \check{u}_k - \check{u}_k^h + (\lambda_k - \lambda_k^h)\phi_p,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \|u_k - u_k^h\|_a^2 &\leq C\left(\|\check{u}_k - \check{u}_k^h\|_a^2 + |\lambda_k - \lambda_k^h|^2\|\phi_p\|_a^2\right), \\ &\leq C\left(\mu_k h^2\|f_k\|_0^2 + \mu_k|\lambda_k - \lambda_k^h|^2\right). \end{aligned}$$

Il suffit alors de prouver que

$$|\lambda_k - \lambda_k^h|^2 \leq C\mu_k h^2\|f_k\|_0^2$$

reste vraie pour tout $k \in \mathbf{N}$. En effet, pour $k \geq Ch^{-\frac{1}{2-\alpha_0}}$, c'est à dire,

$$h^{-2}k^{2\alpha_0-4} \leq C,$$

on a d'après (1.33) :

$$|\lambda_k - \lambda_k^h|^2 = |\lambda_k|^2 \leq Ck^2h^2(h^{-2}k^{2\alpha_0-4})\|f_k\|_0^2 \leq Ck^2h^2\|f_k\|_0^2,$$

et pour $k < Ch^{-\frac{1}{2-\alpha_0}}$, on a :

$$\begin{aligned} h^2 &< Ck^{-2(2-\alpha_0)}, \\ h^{4\alpha_0-2} &< Ck^{-2(2-\alpha_0)(2\alpha_0-1)}, \end{aligned}$$

ce qui avec le corollaire 1.3.3 donne :

$$\begin{aligned} |\lambda_k - \lambda_k^h|^2 &\leq C(h^2h^{4\alpha_0-2}k^{4\alpha_0} + h^{2\alpha_0})\|f_k\|_0^2, \\ &\leq Ch^2(k^{2(2\alpha_0-(2\alpha_0-1)(2-\alpha_0))} + 1)\|f_k\|_0^2, \end{aligned}$$

et $2\alpha_0 - (2\alpha_0 - 1)(2 - \alpha_0) = 1 - (2\alpha_0 - 1)(1 - \alpha_0) < 1$ vu le choix de α_0. ∎

1.3.5 Méthode du complément singulier en domaine prismatique

Soit u la solution du problème (1.13) et u_k ses coefficients de Fourier. On pose, pour $N \in \mathbf{N}$,

$$u_h^N = \sum_{k=1}^{k=N} u_k^h \mathrm{e}_k, \quad u_k^h = \check{u}_k^h + \lambda_k^h\phi_p.$$

On a donc

$$\begin{aligned} u_h^N &= \sum_{k=1}^{k=N} \check{u}_k^h \mathrm{e}_k + \left(\sum_{k=1}^{k=N} \lambda_k^h \mathrm{e}_k\right)\phi_p, \\ &= \check{U}_N^h + \gamma_N^h\phi_p. \end{aligned}$$

Lemme 1.3.8 *Soit $f \in L^2(\Omega)$. On suppose de plus que $f \in H^2(]0,1[, L^2(\omega)) \cap H_0^1(]0,1[, L^2(\omega))$. Alors l'unique solution u de (1.13), s'écrit*

$$u = \check{u} + \gamma\phi_p,$$

avec $\check{u} \in H^2(\Omega)$ et $\gamma \in H^2(]0,1[) \cap H_0^1(]0,1[)$.

Preuve. On note $(U_N)_N$ la suite des sommes partielles de Fourier de u. On a alors

$$U_N = \check{U}_N + \gamma_N\phi_p, \quad \check{U}_N = \sum_{k=1}^{k=N} \check{u}_k \mathrm{e}_k, \quad \gamma_N = \sum_{k=1}^{k=N} \lambda_k \mathrm{e}_k.$$

on sait déja que U_N converge vers u dans $H^1(\Omega)$. D'après le lemme 1.3.2 et l'inégalité (1.31), on a

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} k^4 |\lambda_k|^2 < \infty,$$

et ceci entraine la convergence de γ_N vers une limite γ dans $H^2(]0,1[) \cap H_0^1(]0,1[)$, ainsi que celles de $(\gamma_N\phi_p)_N$ dans $H^1(\Omega)$ vers $\gamma\phi_p$ et $(\Delta(\gamma_N\phi_p))_N$ dans $L^2(\Omega)$ vers $\gamma''\phi_p$. Comme $\check{U}_N = U_N - \gamma_N\phi_p$, $\check{U}_N$ converge dans $H^1(\Omega)$ vers $u - \gamma\phi_p = \check{u}$, et de même, $\Delta\check{U}_N$ converge vers $\Delta\check{u}$ dans $L^2(\Omega)$. Il reste à obtenir que $\check{u} \in H^2(\Omega)$. On a déja :

$$\partial_3\check{u} = \partial_3 u - \gamma'\phi_p \in H^1(\Omega).$$

Pour les dérivées $\partial^2_{i,j}\check{u}, i,j \leq 1,2$, on note que

$$\partial^2_{i,j}\check{U}_N = \sum_{k=1}^{k=N} \partial^2_{i,j}\check{u}_k \mathrm{e}_k,$$

et la conclusion découle de (1.29). ∎

Remarque 1.3.2 *La décomposition ci dessus n'est pas valable sans hypothèses supplémentaires sur f. Plus généralement, on renvoie à [50] pour les propriétés suivantes.*

Si $f \in H^m(Q)$, il existe des fonctions $(c_{j,l}(z))_{j\geq 1, l\geq 0}$ telles que

$$u - \sum_{2l+j\alpha<m+1} c_{j,l}(z) r^{2l+j\alpha} \sin(j\alpha\theta) \in L^2(I, H^{m+2}(W))$$

De plus, si $(m+1)\alpha \notin \mathbf{N}, c_{j,l} \in H^{m+1-2l-j\alpha-\varepsilon}(I)$ pour tout $\varepsilon > 0$ (avec $\varepsilon = 0$ si $m = 0$).

Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$ alors $c_{j,l} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{I})$ et

$$u - \sum_{2l+j\alpha<m+1} c_{j,l}(z) r^{2l+j\alpha} \sin(j\alpha\theta) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{I}, H^{m+2}(W))$$

Proposition 1.3.2 *On a l'estimation suivante :*

$$\|\nabla(u - u_h^N)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\Big(\|f\|_0 + \|\partial_3 f\|_0 + \|\partial_3^2 f\|_0\Big)\left(h + \frac{1}{N}\right) \tag{1.42}$$

Preuve. En utilisant le lemme 1.3.1,

$$\begin{aligned}\|\nabla(u-u_h^N)\|_{L^2(\Omega)} &= \sum_{k=1}^{k=N}\left(\|\nabla(u_k-u_k^k)\|_0^2+(k\pi)^2\|u_k-u_k^k\|_0^2\right)\\ &\quad+\sum_{k=N+1}^{k=\infty}\left(\|\nabla u_k\|_0^2+(k\pi)^2\|u_k\|_0^2\right),\\ &= I_1+I_2.\end{aligned}$$

D'après le lemme 1.3.4,

$$\begin{aligned}I_2 &= \sum_{k=N+1}^{k=\infty}\left(\|\nabla u_k\|_0^2+(k\pi)^2\|u_k\|_0^2\right),\\ &\leq CN^{-2}\sum_{k=N+1}^{k=\infty}k^2\left(\|\nabla u_k\|_0^2+(k\pi)^2\|u_k\|_0^2\right),\\ &\leq CN^{-2}\|f\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

En ce qui concerne I_1,

$$\begin{aligned}I_1 &= \sum_{k=1}^{k=N}\|u_k-u_k^h\|_a^2,\\ &\leq \sum_{k=1}^{k=N}Ck^4h^2\|f_k\|_0^2,\\ &\leq h^2\|\partial_{3,3}^2 f\|_0^2\end{aligned}$$

D'où la conclusion. ∎

Dans cet approche la partie régulière u_r, est approchée par

$$u_{r,h}^N=\sum_{k=1}^{k=N}\check{u}_k^h\mathrm{e}_k,$$

et la partie singulière par

$$u_{s,h}^N=\gamma_h^N\phi_p,\quad \gamma_h^N=\sum_{k=1}^{k=N}\lambda_k^h\mathrm{e}_k.$$

Dans la partie singulière, la somme définissant γ_h^N ne dépend pas de N mais uniquement de h. On se propose dans le paragraphe suivant, d'approcher directement la partie régulière par éléments finis prismatiques.

1.3.6 Complément singulier 2D-Eléments finis prismatiques

Dans cette partie, on utilise l'approximation de γ calculée précédemment

$$\gamma_h(x_3)=\sum_{0\leq k\leq h^{-\frac{1}{2-\alpha}}}\lambda_k^h\mathrm{e}_k(x_3),$$

pour calculer l'approximation par éléments finis prismatiques de la partie régulière u_r dans la décomposition

$$u = u_r + \gamma(x_3)\phi_p$$

avec $u_r \in H^2(\Omega)$ et $\gamma \in H^2(0,1)$.
On ne résoud plus N problèmes bidimensionnels comme pour la MFCS pour approcher la partie régulière : seule la partie singulière nécessite une transformée de Fourier inverse.

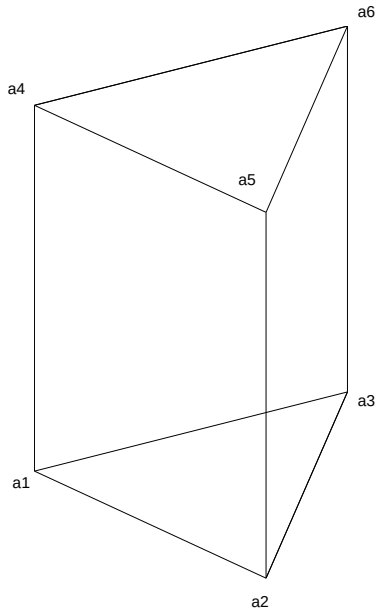


FIG. 1.3 – L'élément prismatique de référence

1.3.7 Eléments finis prismatiques

Soit $\mathcal{P}_h$ un maillage par éléments prismatiques $P^1_{2D} \otimes P^1_{1D}$ de Ω, régulier et affine équivalent. Un tel maillage s'obtient sans difficulté à partir d'un maillage triangulaire de ω (cf section suivante). C'est un élémént fini de Lagrange de degré 1.
L'élément prismatique de référence est décrit comme suit (cf figure 1.3) : notant a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 et a_6 ses degrés de libertés, les fonctions de forme locales sont données par $\psi_i(a_j) = \delta_{ij}$:

$$\begin{array}{rcl} \psi_1(x) & = & (1-x_1-x_2)(1-x_3) \\ \psi_2(x) & = & x_1(1-x_3) \\ \psi_3(x) & = & x_2(1-x_3) \\ \psi_4(x) & = & (1-x_1-x_2)x_3 \\ \psi_5(x) & = & x_2x_3 \\ \psi_6(x) & = & x_1x_3 \end{array} \tag{1.43}$$

Les fonctions tests sont donc combinaisons linéaires de fonctions de la forme

$$\begin{array}{rcl} v(x_1,x_2,x_3) & = & (ax_1+bx_2+c)(dx_3+f), \\ & = & cf + afx_1 + bfx_2 + cdx_3 + adx_1x_3 + bdx_2x_3. \end{array}$$

On note V_h l'espace des fonctions test et V_h^0 le sous espace des fonctions nulles au bord

$$V_h^0 = \{v_h \in V_h : v_h|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

On notera Π_h l'opérateur d'interpolation sur V_h, et π_h l'opérateur d'interpolation au bord.

Remarque 1.3.3 *La structure des fonctions de forme locale (1.43) permet de voir que la fonction de base associée au point $M(x_i, y_i, z_j)$ n'est autre que $\gamma_j(z)\phi_i(x, y)$, où $\gamma_j \in P^1_{1D}(0, 1), \gamma_j(z_l) = \delta_{jl}$ et $\phi_i \in P^1_{2D}(\omega), \phi_i(x_k, y_k) = \delta_{ik}$.*

1.3.8 Approximation de la partie régulière

On cherche une approximation u_h de u sous la forme

$$u_h = u_r^h + \gamma_h\phi_p$$

La partie régulière u_r vérifie le problème de Dirichlet suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u_r & = & f + \gamma''\phi_p \text{ dans } \Omega, \\ u_r & = & -\gamma\phi_p|_{\partial\Omega} \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

On fixe une fonction $\zeta \in \mathcal{C}_0^1(\mathbf{R}^+)$ vérifiant $\zeta = 1$ pour $r \leq r_0$ et $\zeta = 0$ pour $r \geq 2r_0 > 0$, pour un r_0 convenable. On pose

$$\begin{array}{rcl} s & = & -(1 - \zeta(r))\gamma\phi_p \in H^2(\Omega), \\ s_h & = & -(1 - \zeta(r))\gamma_h\phi_p \in H^2(\Omega), \\ u_r & = & s + u_r^0, \quad u_r^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ u_r^h & = & \Pi_h s_h + u_r^{h,0}, \quad u_r^{h,0} \in V_h^0, \end{array}$$

u_r^h étant l'approximation éléments finis prismatiques de u_r recherchée.

Remarque 1.3.4 *La fonction de troncature ζ est introduite ici pour les seuls besoins de la démonstration. Dans la pratique, elle n'est pas recquise et la partie régulière est approchée en résolvant un problème de Dirichlet non homogène (cf plus loin).*

u_r^0 et $u_r^{h,0}$ sont solutions des problèmes

$$\text{trouver } \; u_r^0 \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } a(u_r^0, v) = (f, v)_0 - a(s, v) - (\gamma'\phi_p, \partial_3 v)_0, \forall v \in H_0^1(\omega). \quad (1.44)$$

et

$$\text{trouver } u_r^{h,0} \in V_h^0 \text{tel que } a(u_r^{h,0}, v_h) = (f, v_h)_0 - a(\Pi_h s_h, v_h) - (\gamma_h'\phi_p, \partial_3 v_h)_0, \forall v_h \in V_h^0. \quad (1.45)$$

Par différence entre (1.44) et (1.45),

$$a(u_r^0 - u_r^{h,0}, v_h) = a(\Pi_h s_h - s, v_h) - ((\gamma_h' - \gamma')\phi_p, \partial_3 v_h)_0, \forall v_h \in V_h^0, \quad (1.46)$$

et en écrivant

$$u_r^0 - u_r^{h,0} = (u_r^0 - \Pi_h u_r^0) + \Pi_h u_r^0 - u_r^{h,0},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
|u_r^0 - u_r^{h,0}|_1^2 &= a(u_r^0 - u_r^{h,0}, u_r^0 - \Pi_h u_r^0) + a(u_r^0 - u_r^{h,0}, \Pi_h u_r^0 - u_r^{h,0}), \\
&= a(u_r^0 - u_r^{h,0}, u_r^0 - \Pi_h u_r^0) + a(\Pi_h s_h - s, \Pi_h u_r^0 - u_r^{h,0}) \\
&\quad -((\gamma_h' - \gamma')\phi_p, \partial_3(\Pi_h u_r^0 - u_r^{h,0}))_0, \\
&\leq |u_r^0 - \Pi_h u_r^0|_1 |u_r^0 - u_r^{h,0}|_1 + |\Pi_h s_h - s|_1 (|\Pi_h u_r^0 - u_r^0|_1 + |u_r^0 - u_r^{h,0}|_1) \\
&\quad + C|\gamma_h - \gamma|_1 (|\Pi_h u_r^0 - u_r^0|_1 + |u_r^0 - u_r^{h,0}|_1
\end{aligned}$$

A l'aide de l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
|u_r^0 - u_r^{h,0}|_1^2 \leq\ & C(|u_r^0 - \Pi_h u_r^0|_1^2 + |\Pi_h s_h - s|_1^2 + |\Pi_h u_r^0 - u_r^0|_1^2 \\
& + |\gamma_h - \gamma|_1^2).
\end{aligned}$$

A l'aide des estimations suivantes

$$\begin{aligned}
\|\gamma_h - \gamma\|_1 &\leq C_f h, \\
|\Pi_h(s_h) - s|_1 &\leq |\Pi_h(s_h) - s_h|_1 + |s_h - s|_1 \leq C_f h, \\
|u_r^0 - \Pi_h u_r^0|_1 &\leq C_f h,
\end{aligned}$$

on obtient l'estimation $O(h)$ voulue pour $|u_r^0 - u_r^{h,0}|_1$.
D'un point de vue pratique, on cherche une approximation de u sous la forme

$$u_h = -\pi_h(\gamma_h \phi_p) + \bar{u}_r^{h,0},$$

avec $\bar{u}_r^{h,0} \in V_h^0$ et π_h l'opérateur d'interpolation au bord et des calculs analogues à ceux de la section 1.2.3 prouvent une estimation identique à celle obtenue ci-dessus.

Remarque 1.3.5 *Il est aussi possible de décomposer u en $u = u_r^0 + \frac{1}{\beta}\gamma\phi_s$, avec $u_r^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et résoudre le problème*

$$\text{trouver } u_r^0 \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } -\Delta u_r^0 = f + \frac{1}{\beta}(\gamma''\phi_s - \gamma p_s) \text{ dans } \Omega, \tag{1.47}$$

2

Cas d'une arête axisymétrique

Sommaire

2.1 Espaces de Sobolev à poids 44
2.2 Décomposition en séries de Fourier 47
2.3 Régularité et structure de la solution 50
2.4 Méthode du complément singulier pour les modes $u_k, |k| \geq 2$ . . 52
2.4.1 Description 52
2.4.2 Calcul de p_s^2 et ϕ_s^2 55
2.4.3 Calcul de $\tilde{u}_k$ et c_k 57
2.5 Méthode du complément singulier pour les modes $u_k, |k| = 1$ . . 58
2.5.1 Description 58
2.5.2 Calcul de $p_s^{\pm 1}$ et $\phi_s^{\pm 1}$ 59
2.5.3 Calcul de $\tilde{u}_{\pm 1}$ et $c_{\pm 1}$ 61
2.6 Méthode du complément singulier pour les modes $u_0, k = 0$ . . . 61
2.6.1 Description 61
2.6.2 Calcul de p_s^0 et ϕ_s^0 62
2.6.3 Calcul de $\tilde{u}_0$ et c_0 62
2.7 Méthode du complément singulier en domaine axisymétrique . 63
2.7.1 Décomposition tensorielle 63
2.7.2 Algorithme 63
2.8 Conclusion 64

On a présenté dans le chapitre précédent, une méthode de résolution numérique pour le problème de Dirichlet pour le laplacien en dimension trois dans un domaine prismatique en utilisant un développement en série de Fourier dans la direction de l'arête et en résolvant les problèmes 2D pour les modes de Fourier par la MCS.

Dans ce chapitre, on considère le même problème pour un domaine invariant par rotation possédant une arête circulaire rentrante. A l'aide d'un développement sur la base $(\mathrm{e}^{ik\theta})_{k\in\mathbf{Z}}$ de $L^2(]0, 2\pi[)$, et en suivant la même démarche, on aboutit à un algorithme analogue à celui du chapitre précédent. Dans le cadre de la géométrie axisymétrique, l'utilisation des séries de Fourier nécessite de préciser les espaces de Sobolev auxquels appartiennent les différents modes. La distinction avec le cas prismatique réside dans les espaces fonctionnels qui sont des espaces à poids dont on précise les propriétés qu'on utilise dans la suite [18].

2.1 Espaces de Sobolev à poids

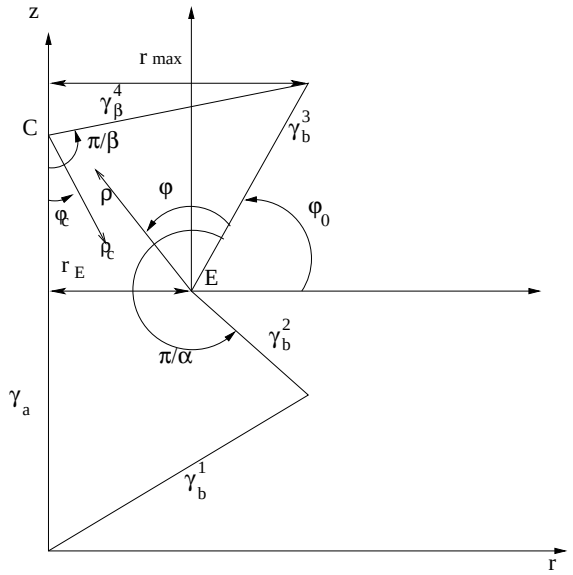


FIG. 2.1 – Domaine méridien.

On considère un domaine Ω obtenu par rotation autour d'un axe Oz d'un polygone ω. On note $\partial\omega = \gamma_a \cup \gamma_b$ le bord de ω avec γ_a le côté situé sur l'axe Oz et $\gamma_b = \bigcup_{i\in F} \gamma_b^i$ la réunion des autres arêtes de bord. Le bord $\partial\Omega$ est engendré par rotation de γ_b autour de l'axe Oz. On notera $(\Gamma_i)_{i\in F}$ l'ensemble des faces de $\partial\Omega$, Γ_i étant la face engendrée par γ_b^i (voir Figure 2.1). En introduisant les coordonnées cylindriques (r, θ, z), l'ouvert Ω peut ainsi être identifié à l'ouvert

$$\Omega \simeq \tilde{\Omega} := \{(r, \theta, z) |\, (r, z) \in \omega, \theta \in [0, 2\pi[\}$$

On suppose que ω possède un unique coin rentrant noté E dont l'angle interne a pour mesure π/α, avec $1/2 < \alpha < 1$. On note C le coin non convexe de Ω sur l'axe (Oz) et on supposera que l'angle π/β (voir Fig. 2.1) satisfait la condition suivante :

$$\nu_c := \min\left\{\nu > 0, P_\nu^0(\cos\pi/\beta) = 0\right\} > 1/2,$$

où $(P_\nu^0)_\nu$ est la famille des pôlynomes de Legendre d'ordre 0 et d'indice ν. Dans le cas contraire, on dira que Ω présente un coin vif en C. On notera (ρ, φ) les coordonnées polaires attachées au point E, et w_E un voisinage du coin E de la forme

$$w_E := \{(\rho\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi)), 0 < \rho < R, 0 < \varphi < \pi/\alpha\}$$

pour un $R > 0$ convenable, et par $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ une fonction de troncature vérifiant $0 \le \eta \le 1,\ \eta(\rho) \equiv 0,$ pour $\rho \ge 2R/3,\ \eta(\rho) \equiv 1$ pour $\rho \le R/3$.
A $u : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, on associe $\tilde{u} : \tilde{\Omega} \longrightarrow \mathbf{R}$ par

$$\tilde{u}(r, \theta, z) = u(r\cos\theta, r\sin\theta, z), \tag{2.1}$$

pour $(r, z) \in \omega$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Les formules de changement de variables donnent alors

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x, y, z)|^2 \,\mathrm{d}x\ \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_{\tilde{\Omega}} |\tilde{u}(r\cos\theta, r\sin\theta, z)|^2 r\,\mathrm{d}r\ \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z, \\
\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_{\tilde{\Omega}} \left(\left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\right|^2 + \left|\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}\right|^2 + \left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\right|^2\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Dans l'identification 2.1, les espaces $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ ont pour image respectivement :

$$\mathcal{L}^2(\tilde{\Omega}) := \left\{ u : \tilde{\Omega} \to \mathbf{R} \text{ mesurable }, \int_{\tilde{\Omega}} |u(r\cos\theta, r\sin\theta, z)|^2 r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z < \infty \right\}$$

et

$$\mathcal{H}^1(\tilde{\Omega}) := \left\{ u \in \mathcal{L}^2(\tilde{\Omega}) \middle| \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial z} \in \mathcal{L}^2(\tilde{\Omega}) \right\}.$$

Remarque 2.1.1 *En toute rigueur, l'application* $(r, z, \theta) \longrightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ *est une bijection de* $\omega \times [0, 2\pi[$ *sur* $\Omega - \gamma_a$*, mais* γ_a *étant de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue, les espaces* $L^2(\Omega)$ *et* $H^1(\Omega)$ *ont les mêmes images que* $L^2(\Omega - \gamma_a)$ *et* $H^1(\Omega - \gamma_a)$*.*

L'image de $H_0^1(\Omega)$ est alors

$$\mathcal{H}_0^1(\tilde{\Omega}) = \left\{ u \in \mathcal{H}^1(\tilde{\Omega}), u|_{\gamma_b \times [0,2\pi[} = 0 \right\}$$

où $u|_{\gamma_b \times [0,2\pi[}$ est la trace sur $\partial\Omega = \gamma_b \times [0, 2\pi[$ de u à travers l'identification 2.1 .
Dans ces conditions, le problème variationel

$$\text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x, \tag{2.2}$$

se transpose dans $\tilde{\Omega}$ en

$$\text{trouver } \ u \in \mathcal{H}_0^1(\tilde{\Omega}) \ \text{ tel que } \ \forall v \in \mathcal{H}_0^1(\tilde{\Omega}),$$
$$\int_{\tilde{\Omega}} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \right) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z = \int_\Omega f v r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z. \tag{2.3}$$

Comme $L^2(\Omega)$ s'identifie à l'aide des coordonnées cylindriques et au théorème de Fubini à $L^2(]0, 2\pi[; L^2(\omega, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z))$, la décomposition en séries de Fourier suivant θ transforme le problème (2.3) en une succession de problèmes bidimensionnels grâce à l'orthogonalité des $(\mathrm{e}^{ik\theta})_k$ dans $L^2(]0, 2\pi[)$. Pour plus de clarté, $\tilde{\Omega}$ et Ω seront confondus et Ω sera décrit par les coordonnées cylindriques. Etant donc donnée $f \in \mathcal{L}^2(\tilde{\Omega})$, son développement en série de Fourier s'écrira

$$f(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(r, z) \mathrm{e}^{ik\theta}, \text{ pour presque tout } (r, \theta, z) \in \Omega.$$

Afin de caractériser les coefficients de Fourier f_k, on introduit les espaces à poids suivants [18]

$$L^2_\mu(\omega) := \left\{ u : \omega \to \mathbf{R} \text{ mesurable }, \int_\omega |u|^2 r^\mu \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z < \infty \right\},$$

normé par $\|u\|_{0,\mu} = \left(\int_\omega |u|^2 r^\mu \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z \right)^{1/2}$ et pour $s \in \mathbf{N}$,

$$H^s_\mu(\omega) := \left\{ u \in L^2_\mu(\omega), \partial^\nu u \in L^2_\mu(\omega) \text{ pour } |\nu| \le s \right\},$$

muni de la norme $\|u\|_{s,\mu} = \left(\sum_{|\nu| \le s} \|\partial^\nu u\|^2_{0,\mu} \right)^{1/2}$, où pour $\nu \in \mathbf{N}^2$, $\partial^\nu u$ désigne $\dfrac{\partial^{|\nu|}}{\partial r^{\nu_1} \partial z^{\nu_2}} u$, avec $|\nu| = \nu_1 + \nu_2$.
Pour $s \in \mathbf{R}^+$, on définit $H^s_\mu(\omega)$ par interpolation

$$H^s_\mu(\omega) := [H^{[s]+1}_\mu(\omega), H^{[s]}_\mu(\omega)]_{[s]+1-s}.$$

On notera $H_\mu^{s-1/2}(\gamma)$ l'espace des traces associées. On se limitera désormais aux cas $s \in [0,2]$, dont on peut donner les propriétes suivantes :

Proposition 2.1.1 *Pour $s \in [0,2[$, l'espace $H_1^s(\omega)$ est l'ensemble des traces dans un demi-plan méridien des fonctions de $H^s(\Omega)$ qui sont invariantes par rotation. Pour $s = 2$, on notera l'espace des traces correspondant par $H_+^2(\omega)$ égal à*

$$\left\{ u \in H_1^2(\omega), \frac{\partial u}{\partial r} \in L_{-1}^2(\omega) \right\}$$

On a aussi besoin de définir des espaces de fonctions plus régulières au voisinage de γ_a. On pose pour $s \geq 0$,

$$V_1^s(\omega) = \left\{ u \in H_1^s(\omega) \middle| r^{l+m-s} \partial_r^l \partial_z^m u \in L_1^2(\omega), 0 \leq l+m \leq [s] \right\}.$$

Les problèmes variationnels dont sont solutions les modes de Fourier $(u_k)_k$ de la solution feront intervenir les deux types d'espaces suivants : l'espace des fonctions appartenant à $H_1^1(\omega)$, ayant une trace nuulle sur γ_b pour le mode 0 et l'espace des fonctions appartenant à $V_1^1(\omega)$, ayant une trace nulle sur γ tout entier pour tous les autres modes. Grâce à l'opérateur de trace sur γ_a, on peut donner une caractérisation pratique des espaces $V_1^s(\omega)$ [18].

Proposition 2.1.2 *Pour $0 \leq l < s-1$, l'application*

$$w \in H_1^s(\omega) \mapsto \left. \frac{\partial^l w}{\partial r^l} \right|_{\gamma_a} \in H^{s-l-1}(\gamma_a)$$

est continue.

Proposition 2.1.3 *Soit $s \in \mathbf{R}^+$.*

1. *Si $s \notin \mathbf{N}$ alors* $V_1^s(\omega) = \left\{ u \in H_1^s(\omega) \middle| \left. \frac{\partial^l w}{\partial r^l} \right|_{\gamma_a} = 0,\ 0 \leq l < s-1 \right\}$.
2. *Si $s \in \mathbf{N}$ alors* $V_1^s(\omega) = \left\{ u \in H_1^s(\omega) \middle| \left. \frac{\partial^l w}{\partial r^l} \right|_{\gamma_a} = 0,\ 0 \leq l < s-1, \left. \frac{\partial^{s-1}}{\partial r^{s-1}} w \right|_{\gamma_a} \in L_{-1}^2(\omega) \right\}$.

Dans le cas des valeurs $s = 0, 1, 2$, qui seront les plus rencontrées dans la suite, on remarque que

$$V_1^0(\omega) = L_1^2(\omega), V_1^1(\omega) = H_1^1(\omega) \cap L_{-1}^2(\omega), V_1^2(\omega) = H_1^2(\omega) \cap H_{-1}^1(\omega).$$

$\overset{\diamond}{H}{}_1^1(\omega)$ désignera le sous-espace de $H_1^1(\omega)$ des fonctions à trace nulle sur γ_b. Les fonctions de $V_1^1(\omega)$ et $V_1^2(\omega)$ ont la propriété d'avoir une trace nulle sur γ_a

Proposition 2.1.4 *On a les propriétés suivantes*

$$\begin{aligned} u \in H_1^1(\omega) \cap L_{-1}^2(\omega) &\implies u|_{\gamma_a} = 0, \\ u \in \overset{\circ}{H}{}_{-1}^1(\omega) &\implies u \in L_{-3}^2(\omega). \end{aligned}$$

On désignera par $\overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega), \overset{\circ}{V}{}_1^2(\omega), \overset{\circ}{H}{}_{-1}^1(\omega)$ les sous-espaces des fonctions à trace nulle sur γ_b. Enfin, on utilisera souvent la formule de Green suivante, où Δ^+ désigne l'opérateur $\partial_{rr}^2 + r^{-1}\partial_r + \partial_{zz}^2$.

Proposition 2.1.5 *Soit $u, v \in H_1^1(\omega)$ et $\Delta^+ v \in L_1^2(\omega)$. Alors $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\gamma_b} \in H_1^{-1/2}(\gamma_b)$, et on a la formule de Green suivante*

$$\int_\omega u \cdot \Delta^+ v \; r \, \mathrm{d}\omega + \int_\omega \nabla u \cdot \nabla v \; r \, \mathrm{d}\omega = < \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\gamma_b}, u|_{\gamma_b} >_{H_1^{-1/2}(\gamma_b), H_1^{1/2}(\gamma_b)} . \tag{2.4}$$

De plus, pour tout $w \in \overset{\circ}{H}{}_{-1}^1(\omega)$, tel que $\Delta^+ w \in L_1^2(\omega)$, on a :

$$\Re \int_\omega \left(-\frac{\overline{w}}{r^2} \cdot \Delta^+ w \right) r \, \mathrm{d}\omega = \|\nabla w\|_{0,-1}^2 - 2\|w\|_{0,-3}^2. \tag{2.5}$$

On peut maintenant préciser les propriétés du développement en séries de Fourier.

2.2 Décomposition en séries de Fourier

On note pour $k \in \mathbf{Z}$, $\mathrm{e}_k(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{-ik\theta}}{\sqrt{2\pi}}$. La famille $(\mathrm{e}_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est une base (sur $\mathbf{C}$) orthonormale de $L^2(]0, 2\pi[)$.

Proposition 2.2.1 *Soit $u \in L^2(\Omega)$. Il existe des coefficients de Fourier $u_k(r, z) \in L_1^2(\omega)$ donnés par :*

$$u_k(r, z) = \int_0^{2\pi} u(r, \theta, z) \overline{\mathrm{e}}_k(\theta) \, \mathrm{d}\theta$$

et vérifiant :

$$\|u\|_0 = \left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} \|u_k\|_{0,1}^2 \right)^{1/2}, \tag{2.6}$$

$$u(r, \theta, z) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} u_k(r, z) \mathrm{e}_k(\theta), \tag{2.7}$$

presque partout dans Ω. De plus, les équivalences suivantes ont lieues

$$u \in H^1(\Omega) \Longleftrightarrow \begin{cases} u_0 \in H_1^1(\omega), \\ u_k \in V_1^1(\omega), k \neq 0, \\ \|u_0\|_{1,1}^2 + \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}*} \left(\|u_k\|_{1,1}^2 + k^2 \left\| \dfrac{u_k}{r} \right\|_{0,1}^2 \right) < \infty \end{cases} \tag{2.8}$$

Preuve. La preuve est dans [55] et est similaire au cas prismatique. Comme pour presque tout $(r, z) \in \omega$, $u(r, \cdot, z) \in L^2(]0, 2\pi[)$(théorème de Fubini), elle admet un développement en série de Fourier

$$u(r, \theta, z) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} u_k(r, z) \mathrm{e}_k(\theta),$$

avec les coefficients $u_k(r, z) = \int_0^{2\pi} u(r, \theta, z) \overline{\mathrm{e}}_k(\theta) \, \mathrm{d}\theta$. En particulier, $\|u_k\|_{0,1} \leq \|u\|_0$. D'après l'identité de Parseval, et les théorèmes de Fubini et Beppo-Lévy, on obtient la relation (2.6). Si $u \in H^1(\Omega)$, on prouve, comme dans le cas prismatique, que :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_k = \frac{\partial u_k}{\partial r}, \; \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_k = \frac{\partial u_k}{\partial z}, \; \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)_k = \frac{ik\pi}{r} u_k.$$

et ainsi les relations (2.8). ∎

Remarque 2.2.1 *Si $u \in H_0^1(\Omega)$, les modes de Fourier appartiennent aux sous espaces à trace nulle sur γ_b, à savoir, $u_0 \in \overset{\diamond}{H}{}_1^1(\omega)$ et $u_k \in \overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega)$ pour $k \neq 0$.*

Lorsque $u \in L^2(\Omega)$ et qu'elle ne possède que certaines dérivées dans $L^2(\Omega)$, les relations de Parseval restent vraies pour ces dérivées. C'est ce que précise la propriété suivante dans le cas des dérivées $\dfrac{\partial^j u}{\partial \theta^j}, j = 1, 2$.

Proposition 2.2.2 *Soit $u \in L^2(\Omega)$. L'equivalence suivante a lieu, pour $j = 1, 2$:*

$$\frac{\partial^j u}{\partial \theta^j} \in L^2(\Omega) \Longleftrightarrow \sum_{k \in \mathbf{Z}} k^{2j} \|u_k\|_{0,1}^2 < \infty.$$

Preuve. Soit $u \in L^2(\Omega)$ vérifiant $\partial_\theta u \in L^2(\Omega)$. Par intégration par parties et périodicité en θ :

$$\begin{aligned} ik\pi u_k(r,z) &= \int_0^{2\pi} u(r,\theta,z)\,(\overline{\mathrm{e}}_k(\theta))'\,\mathrm{d}\theta, \\ &= -\int_0^{2\pi} (\partial_\theta u(r,\theta,z))\,\overline{\mathrm{e}}_k(\theta)\,\mathrm{d}\theta, \\ &= -(\partial_\theta u)_k\,(r,z) \end{aligned}$$

Comme $\partial_\theta u \in L^2(\Omega)$ la somme $\displaystyle\sum_{k \in \mathbf{Z}} k^2 \|u_k\|_{0,1}^2$ est finie.

Réciproquement, supposons $\displaystyle\sum_{k \in \mathbf{Z}} k^2 \|u_k\|_{0,1}^2 < \infty$ et posons pour presque tout r, θ, z, et pour $K \in \mathbf{N}$,

$$U_K(r,\theta,z) = \sum_{-K \leq k \leq K} u_k(r,z) \mathrm{e}^{ik\pi\theta}.$$

On sait d'abord que $U_K \longrightarrow u, K \longrightarrow +\infty$ dans $L^2(\Omega)$, donc $\partial_\theta U_K \longrightarrow \partial_\theta u, K \longrightarrow +\infty$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Comme $\displaystyle\sum_{k \in \mathbf{Z}} k^2 \|u_k\|_{0,1}^2 < \infty$, la suite $(\partial_\theta U_K)_K$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, donc converge dans cet espace vers $\partial_\theta u$ qui appartient donc à $L^2(\Omega)$. ∎

Pour l'espace $H^2(\Omega)$, on rappelle (voir [18]) que l'espace des traces dans un demi-plan méridien via le développement de Fourier est

- l'espace $H^2_{(0)}(\omega) := H^2_+(\omega)$ pour le mode 0,
- l'espace $H^2_{(\pm 1)}(\omega) := \left\{u \in H_1^2(\omega), u|_{\gamma_a} = 0\right\}$, pour les modes ± 1 et
- l'espace $H^2_{(k)}(\omega) := V_1^2(\omega)$ pour tous les autres modes $|k| \geq 2$.

Grâce à la représentation en série de Fourier, résoudre le problème (2.3) est équivalent à résoudre les problèmes aux limites satifaits par les modes $u_k, k \in \mathbf{Z}$. En utilisant le développement en série de Fourier, on peut réécrire la formulation de (2.3) en fonction des modes. Pour $f \in L^2(\Omega), v \in L^2(\Omega)$ d'après le théorème de Fubini et l'identité de Bessel :

$$\begin{aligned} \int_\Omega f v\,\mathrm{d}x &= \int_\omega \left(\int_0^{2\pi} f(r,\theta,z) v(r,\theta,z)\,\mathrm{d}\theta\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z, \\ &= \int_\omega \sum_{k \in \mathbf{Z}} f_k(r,z) v_k(r,z) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Comme $(f_k)_{k\in\mathbf{Z}}, (v_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ appartiennent à $\ell^2(\mathbf{Z}, L^2_1(\omega))$, on a :

$$\int_\Omega fv\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \int_\omega f_k(r,z)v_k(r,z)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z.$$

Pour la forme bilinéaire a, on a

Proposition 2.2.3 *Soit $u, v \in H^1(\Omega)$. La forme bilinéaire*

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

se réécrit sous la forme

$$a(u,v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(u_k, v_k)$$

où u_k, v_k sont les coefficients de Fourier de u et v définis dans la proposition 2.2.1 et a_k est la forme définie par :

- *pour $k = 0, a_0(u,v) = \displaystyle\int_\omega \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z,\ u, v \in H^1_1(\omega),$*
- *pour $k \neq 0, a_k(u,v) = \displaystyle\int_\omega \left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{k^2}{r^2}uv\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z,\ u, v \in V^1_1(\omega).$*

Preuve. On a la relation suivante :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z &= \int_\omega \left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r}\,\mathrm{d}\theta\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z, \\
&= \int_\omega \left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{\partial u_k}{\partial r}\frac{\partial v_k}{\partial r}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z, \\
&= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \int_\omega \frac{\partial u_k}{\partial r}\frac{\partial v_k}{\partial r} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que le produit de deux familles de carré sommable est sommable et du théorème de Fubini. En procédant de même pour les produits en $\dfrac{\partial}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\cdot\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}$, on obtient la conclusion. ∎

On peut maintenant écrire pour chaque $k \in \mathbf{Z}$ le problème variationnel dont u_k est solution. En choissant des fonctions tests de la forme $v(r,\theta,z) = v_l(r,z)\mathrm{e}^{il\theta}$, avec

$$\begin{aligned}
v_l &\in \overset{\diamond}{H}{}^1_1(\omega), \text{pour } l = 0, \\
v_l &\in \overset{\diamond}{V}{}^1_1(\omega), \text{pour } l \neq 0,
\end{aligned}$$

de sorte que $v \in H^1_0(\Omega)$, on aboutit comme dans le cas prismatique, à la

Proposition 2.2.4 *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Les coefficients de Fourier u_k de $u \in H^1_0(\Omega)$ solution de l'équation $-\Delta u = f$ dans Ω sont solutions des problèmes*

$$\text{trouver } u_0 \in \overset{\diamond}{H}{}^1_1(\omega) \text{ tel que } a_0(u_0, v) = \int_\omega f_0(r,z)v(r,z)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z,\ \forall v \in \overset{\diamond}{H}{}^1_1(\omega),\ k = 0, \quad (2.9)$$

et

$$\text{trouver } u_k \in \overset{\diamond}{V}{}_1^1(\omega) \text{ tel que } a_k(u_k,v) = \int_\omega f_k(r,z)v(r,z)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z,\ \forall v \in \overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega), k \neq 0, \quad (2.10)$$

où f_k est le k-ème mode de Fourier de f et a_k est définie dans la proposition 2.2.3. De plus, on a les inégalités :

$$\|\nabla u_0\|_{0,1} \leq C\|f_0\|_{0,1}, \quad (2.11)$$

$$\left\| \frac{\partial u_k}{\partial r} \right\|_{0,1}^2 + \left\| \frac{\partial u_k}{\partial z} \right\|_{0,1}^2 + k^2 \left\| \frac{u_k}{r} \right\|_{0,1}^2 \leq C \frac{r_{\max}^2}{k^2}\|f_k\|_{0,1}^2. \quad (2.12)$$

Corollaire 2.2.1 *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Les coefficients de Fourier u_k de $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de l'équation $-\Delta u = f$ dans Ω sont solutions des problèmes aux limites suivants*

$$\text{pour } k = 0,\ -\Delta^+ u_0 = f_0 \text{ dans } \Omega,\quad u_0 = 0 \text{ sur } \gamma_b, \quad (2.13)$$

$$\text{pour } k \neq 0,\ -\Delta^+ u_k + \frac{k^2}{r^2}u_k = f_k \text{ dans } \Omega,\quad u_k = 0 \text{ sur } \gamma_b. \quad (2.14)$$

Le théorème de Lax Milgram garantit l'existence et l'unicité de u_k. Si le domaine avait été convexe, la solution serait dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et les coefficients de Fourier appartiendraient à l'espace $H^2_{(k)}(\omega) \cap \overset{\diamond}{H}{}_1^1(\omega)$ (voir plus haut). Ce n'est plus le cas lorsque le domaine est non convexe.

2.3 Régularité et structure de la solution

La présence d'une arête axisymétrique non convexe a été étudiée dans [18], [55]. On rappelle ici les principaux résultats de régularité et la structure des solutions de (2.13) et (2.14). La partie principale des opérateurs au voisinage de la singularité géométrique de ω est $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, ainsi les singularités des modes u_k sont celles du laplacien.

Lemme 2.3.1 *On a les estimations a priori suivantes pour $k \geq 2$:*

$$k^2\|u_k\|_{0,-1} \leq r_{\max}\|f_k\|_{0,1}, \quad (2.15)$$

$$|k|\|\nabla u_k\|_{0,1} \leq \frac{r_{\max}}{\sqrt{2}}, \|f_k\|_{0,1} \quad (2.16)$$

$$\|\Delta^+ u_k\|_{0,1} \leq 2\|f_k\|_{0,1}, \quad (2.17)$$

$$(k^2-2)\|u_k\|_{0,-3} \leq \|f_k\|_{0,1}, \quad (2.18)$$

$$\left(k^2-2\right)^{1/2}\|\nabla u_k\|_{0,-1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|f_k\|_{0,1} \quad (2.19)$$

Preuve. Les deux premières sont déduites de la proposition 2.2.4. En multipliant (2.14) par $r^{-2}\bar{u}_k$ et à l'aide de la formule 2.4, on obtient

$$\|\nabla u_k\|_{0,-1}^2 + (k^2-2)\|u_k\|_{0,-3}^2 \leq \|f_k\|_{0,1}\|u_k\|_{0,-3},$$

et on obtient les deux dernières. L'inégalité (2.17) découle alors de $\Delta^+ u_k = f_k - k^2 r^{-2}u_k$. ∎

Proposition 2.3.1 *Soit $f \in L^2_1(\omega)$ et u_k solution du problème*

$$u \in \overset{\circ}{V}{}^1_1(\omega),\ a_k(u,v) = (f,v)_{L^2_1}, \forall v \in \overset{\circ}{V}{}^1_1(\omega),\ \text{pour } k \neq 0,$$
$$u \in \overset{\diamond}{H}{}^1_1(\omega),\ a_k(u,v) = (f,v)_{L^2_1}, \forall v \in \overset{\diamond}{H}{}^1_1(\omega),\ \text{pour } k = 0.$$

Alors u_k se décompose en $u_k(r,z) = \tilde{u}_k(r,z) + \gamma_k \eta(\rho) \mathrm{e}^{-|k|\rho} \rho^\alpha \sin(\alpha\varphi)$, avec $\gamma_k \in \mathbf{R}$ satisfaisant

$$|k|^{1-\alpha}|\gamma_k| \leq \|f\|_{0,1},$$

et

$$\tilde{u}_k(r,z) \in \begin{cases} H^2_+(\omega) \cap \overset{\diamond}{H}{}^1_1(\omega), k = 0, \\ H^2_1(\omega) \cap \overset{\circ}{V}{}^1_1(\omega), k = \pm 1, \\ V^2_1(\omega) \cap \overset{\circ}{V}{}^1_1(\omega), |k| > 1 \end{cases}$$

satisfaisant $\|\tilde{u}_k\|_{H^2(\omega_E)} \leq C\|f\|_{0,1}$.
En particulier, u_k possède les régularités locales suivantes :

$$u_k|_{\omega \setminus \overline{\omega}_E} \in \begin{cases} H^2_+(\omega \setminus \overline{\omega}_E), k = 0, \\ H^2_1 \cap L^2_{-1}(\omega \setminus \overline{\omega}_E), |k| = 1, \\ V^2_1(\omega \setminus \overline{\omega}_E), |k| > 1, \end{cases}$$

et

$$u_k|_{\omega_E} \in H^{1+\alpha-\varepsilon}(\omega_E)$$

On peut maintenant préciser en tenant compte de la structure des modes de Fourier, la décomposition 3D de la solution $u \in H^1_0(\Omega)$ du problème (2.3) [55, Thm. 6.3, p.851], [56, Thm 7.2, p.1892-1893].

Théorème 2.3.1 *Soit $f \in L^2(\Omega), u \in H^1_0(\Omega)$ vérifiant $-\Delta u = f$ dans Ω. On a la représentation suivante*

$$u(r,\theta,z) = u_r(r,\theta,z) + u_s(r,\theta,z), \tag{2.20}$$

où

$$u_s(r,\theta,z) = \eta(\rho)\gamma(\rho,\theta)\rho^\alpha \sin(\alpha\varphi),$$
$$\gamma(\rho,\theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \gamma_k \mathrm{e}^{-|k|\rho} \mathrm{e}^{ik\theta},$$
$$u_r(r,\theta,z) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{u}_k(r,z) \mathrm{e}^{ik\theta}$$

avec

$$\tilde{u}_k \in H^2(\omega_E) \cap H^1_0(\omega_E),\ \|\tilde{u}_k\|_{2,\omega_E} + |k|\|\tilde{u}_k\|_{1,\omega_E} + |k|^2\|\tilde{u}_k\|_{0,\omega_E} \leq C\|f_k\|_{0,\omega_E},$$
$$\|\rho^{-1+\varepsilon}\gamma\|_0 + \|\rho^{-1+\alpha}\nabla\gamma\|_0 + \|\rho^\alpha D^2\gamma\|_0 \leq C\|f\|_0,$$

pour $\varepsilon > 0$, et

$$|k|^{1-\alpha}|\gamma_k| \leq C\|f_k\|_{0,\omega_E}.$$

En particulier, en notant $\gamma_0(\theta) = \gamma(0,\theta)$ alors $\gamma_0 \in H^{1-\alpha}_{\mathrm{per}}(]0,2\pi[)$.

On verra dans la partie 2.7 que sous des hypothèses supplémentaires sur f, la solution u possède comme pour le cas prismatique une partie singulière tensorielle $u_s(r,\theta,z) = \gamma(\theta)\rho^\alpha \sin(\alpha\varphi)$

2.4 Méthode du complément singulier pour les modes $u_k, |k| \geq 2$

Soit $\mathcal{T}_h$ un maillage régulier, affine équivalent de ω, dont les sommets sont notés : $(M_i)_{i=1..\mathcal{N}}$, avec $\mathcal{N} = \mathcal{N}_i + \mathcal{N}_b$ et on supposera pour simplifier que les $\mathcal{N}_b$ derniers sommets sont les sommets de bords. On note $\mathcal{V}_h$ l'espace des fonctions de base P^1 $(\phi_i)_{i=1..\mathcal{N}}$, associées à la triangulation et $\mathcal{V}_h^0$ le sous espace des fonctions nulles au bord. On note $h_K = diam(K)$, pour $K \in \mathcal{T}_h$ et $h = max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$ le pas du maillage. On introduit les notations suivantes : Π_h est l'opérateur d'interpolation (de Lagrange) globale, π_h l'opérateur d'interpolation aux points du bord. On introduit aussi l'opérateur de Clément P_h qui applique $\overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega)$ sur $\overset{\circ}{\mathcal{V}}_h = \overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega) \cap \mathcal{V}_h$: à chaque sommet M_i, on associe un triangle $T_i \in \mathcal{T}_h$ contenant M_i (comme le maillage est régulier, le nombre de tels triangles est borné indépendamment de h) et on définit l'opérateur de projection p_i de $L_1^2(T_i)$ sur $P^1(T_i)$: pour tout $v \in L_1^2(T_i)$, $p_i v \in P^1(T_i)$ satisfait

$$\forall q \in P^1(T_i), \quad \int_{T_i} (v - p_i v)(r,z) q(r,z) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z = 0.$$

L'opérateur P_h est alors définit par :

$$P_h v = \sum_{i=1, M_i \notin \gamma_a \cup \gamma_b}^{\mathcal{N}} p_i v(M_i) \phi_i.$$

Cet opérateur vérifie les propriétés suivantes [17]

Lemme 2.4.1 *Pour tout $w \in V_1^{1+\alpha_0}(\omega) \cap \overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega)$, on a*

$$h^{-1}\|w - P_h w\|_{0,1} + \|w - P_h w\|_{V_1^1} \leq C h^{\alpha_0},$$

Preuve. D'après [17], la propriété est vraie pour $w \in V_1^2(\omega) \cap \overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega)$. Comme $V_1^{1+\alpha_0}(\omega)$ est l'interpolé de $V_1^2(\omega)$ et $V_1^1(\omega)$, on obtient le résultat par un argument d'interpolation pour les éléments de $V_1^2(\omega) \cap \overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega)$. Par densité, on a la conclusion. ■

2.4.1 Description

De même que dans le cas du laplacien standard, on a une décomposition analogue de $L_1^2(\omega)$. En notant $A_2 = -\Delta^+ + \dfrac{4}{r^2} I$, on a une décomposition :

$$L_1^2(\omega) = A_2(H_{(2)}^2(\omega) \cap \overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega)) \overset{\perp}{\oplus} N_2 \tag{2.21}$$

Afin de caractériser l'espace N_2, on utilise une formule d'integration comparable à (1.5) mais pour un domaine axisymétrique. On introduit d'abord les espaces suivants

Définition 2.4.1 *Pour chaque face $\Gamma_i, i \in F$ on note $\rho_i(x)$ la distance de x à $\partial\Gamma_i$. On définit*

$$H_{00}^{1/2}(\Gamma_i) := \left\{ f \in H^{1/2}(\Gamma_i), \frac{f}{\sqrt{\rho_i}} \in L^2(\Gamma_i) \right\}$$

et

$$\breve{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_i) = H_{00}^{1/2}(\Gamma_i) \cap \breve{\mathcal{D}}'(\Gamma_i),$$

où $\breve{\mathcal{D}}'(\Gamma_i)$ est l'espace des distributions sur Γ_i invariantes par rotation.

Soit γ_1^i l'opérateur de trace $\gamma_1^i : u \in H^2(\Omega) \longmapsto \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_i} \in H^{1/2}(\Gamma_i)$ et $\breve{H}^2(\Omega) = H^2(\Omega) \cap \breve{\mathcal{D}}'(\Omega)$ où $\breve{\mathcal{D}}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω invariantes par rotation. Enfin, on introduit aussi le sous ensemble suivant de $\breve{H}^2(\Omega)$

$$G_i = \left\{ u \in \breve{H}^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \gamma_1^j u = 0, \ \forall j \neq i \right\}.$$

On a

Proposition 2.4.1 *L'opérateur γ_1^i est continu de $\breve{H}^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ à valeurs dans $\breve{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_i)$. De plus, γ_1^i est surjectif de G_i sur $\breve{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_i)$ et il existe un relèvement continu.*

Ce résultat permet de prouver la formule d'intégration suivante

Proposition 2.4.2 *Soit $p \in D(\Delta, \Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}$ et $u \in \breve{H}^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Alors*

$$\int_\Omega (p \cdot \Delta u - \Delta p \cdot u) \, \mathrm{d}x = \sum_{i \in F} {}_{(\breve{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_i))'} \left\langle p, \frac{\partial u}{\partial n} \right\rangle_{\breve{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_i)}. \tag{2.22}$$

On peut alors prouver en suivant la même démarche que pour le cas cartésien la caractérisation de l'espace des singularités N_2.

Proposition 2.4.3 *Le supplémentaire N_2 est alors*

$$N_2 = \left\{ p \in L_1^2(\omega), A_2 p = 0, \forall i \ p|_{\gamma_b^i} = 0, \left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\gamma_a} = 0. \right\}$$

Il est de dimension finie égale au nombre de coins rentrants sur γ_b.

Comme dans le cas cartésien, il existe $p_s^2 \in N_2$ tel que $p_s^2 - \eta(\rho)\rho^{-\alpha}\sin(\alpha\varphi) \in \overset{\circ}{V_1^1}(\omega)$.
Soit r'' et r' tels que $0 < r'' < r' < r_E$ et $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ vérifiant $\chi(r) = 1$ pour $r < r''$ et $\chi(r) = 0$ pour $r > r'$. On définit aussi

$$\omega' = \{(r, z) \in \omega, r < r'\}.$$

Lemme 2.4.2 *Soit $p \in N_2$. Alors $\chi p \in V_1^2(\omega)$.*

Preuve. On sait déjà que $\chi p \in V_1^1(\omega)$ et $\chi p = 0$ sur $\partial\omega'$. Comme

$$\left(-\Delta^+ + \frac{4}{r^2} I \right) \chi p = -2\nabla\chi \cdot \nabla p - p\Delta^+\chi \in L_1^2(\omega),$$

χp appartient à $V_1^2(\omega')$. ∎

Pour calculer p_s^2, on peut décomposer, comme dans le cas cartésien, p_s^2 en une partie régulière et une partie singulière au coin. Dans le cas axisymétrique, l'écriture

$$p_s^2 = \tilde{p} + p_p^2,$$

avec $\tilde{p} \in V_1^1(\omega)$ et $p_p^2 = \rho^{-\alpha}\sin(\alpha\phi)$ n'est pas adaptée d'après la proposition 2.1.4 puisque p_p^2 devrait avoir une trace nulle sur γ_a. L'introduction de la fonction de troncature η dans la partie

singulière ne permet pas d'avoir une bonne approximation lors de sa discrétisation. Comme $p_s^2|_{\omega''} \in V_1^2(\omega'')$, on choisit donc de représenter $p_s^2 \in N_2$ sous la forme

$$p_s^2 = \tilde{p} + p_p^2, \tag{2.23}$$

avec

$$p_p^2 = \left(\frac{r}{r_E}\right)^2 \rho^{-\alpha} \sin(\alpha\varphi),$$

de sorte que chaque terme possède la régularité V_1^2 au voisinage de l'axe $r = 0$.
D'autre part, $\tilde{p} \in V_1^1(\omega)$, en effet,

$$\begin{aligned} p_s^2 &= \tilde{p}_r^2 + \eta(\rho)\rho^{-\alpha}\sin(\alpha\varphi),\ \tilde{p}_r^2 \in V_1^1(\omega), \\ &= \tilde{p}_r^2 + \left(\eta(\rho) - \left(\frac{r}{r_E}\right)^2\right)\rho^{-\alpha}\sin(\alpha\varphi) + \left(\frac{r}{r_E}\right)^2 \rho^{-\alpha}\sin(\alpha\varphi), \end{aligned}$$

et $\left(\eta(\rho) - \left(\frac{r}{r_E}\right)^2\right)\rho^{-\alpha}\sin(\alpha\varphi) \in H^1(\omega_E)$ puisque

$$\left(\eta(\rho) - \left(\frac{r}{r_E}\right)^2\right)\rho^{-\alpha} = \frac{2}{a}\rho^{1-\alpha}\cos(\varphi + \varphi_0) + \mathcal{O}(\rho^{2-\alpha}),$$

quand $\rho \to 0$.
L'égalité (2.21) fournit alors une décomposition pour tous les modes $|k| \geq 2$ en partie régulière et singulière. En effet, d'après les résultats de régularité rappelés au début, on sait que $u_k|_{\omega'} \in H^1_{-1}(\omega') \subset L^2_{-3}(\omega')$ donc $f_k - (k^2-4)r^{-2}u_k \in L^2_1(\omega)$. L'unique solution du problème

$$\text{trouver } u \in \overset{\circ}{V_1^1}(\omega),\ \text{pour tout } v \in \overset{\circ}{V_1^1}(\omega),\ a_2(u,v) = (f_k - (k^2-4)r^{-2}u_k, v)_{0,1}, \tag{2.24}$$

s'écrit, d'après (2.21), $u = \tilde{u}_k + c_k\phi_s^2$ où $\phi_s^2 \in \overset{\circ}{V_1^1}(\omega)$ satisfait à : $A_2\phi_s^2 = p_s^2$.
Comme $u = u_k$,

$$u_k = \tilde{u}_k + c_k\phi_s^2, \quad \tilde{u}_k \in H^2_{(2)}(\omega) \cap \overset{\circ}{V_1^1}(\omega), \tag{2.25}$$

où $\tilde{u}_k$ et c_k vérifient

$$a_k(\tilde{u}_k, v) + c_k a_k(\phi_s^2, v) = (f_k, v)_{0,1}, \quad \forall v \in \overset{\circ}{V_1^1}(\omega).$$

En remarquant que

$$\left(\frac{\phi_s^2}{r^2}, p_s^2\right)_{0,1} = \|\nabla\phi_s^2\|^2_{0,-1} + 2\|\phi_s^2\|^2_{0,-3},$$

on obtient

$$\left(\|p_s^2\|^2_{0,1} + (k^2-4)\left[\|\nabla\phi_s^2\|^2_{0,-1} + 2\|\phi_s^2\|^2_{0,-3}\right]\right)c_k + (k^2-4)(\tilde{u}_k, p_s^2) = (f_k, p_s^2).$$

Cette dernière relation permet d'exprimer le coefficient c_k

$$c_k = \frac{\left(f_k - \frac{k^2-2^2}{r^2}u_k,\ p_s^2\right)_{0,1}}{\|p_s^2\|^2_{0,1}}. \tag{2.26}$$

On note désormais $\phi_p^2 = \left(\frac{r}{r_E}\right)^2 \rho^\alpha \sin(\alpha\varphi)$, ainsi ϕ_s^2 s'écrit

$$\phi_s^2 = \tilde{\phi} + \beta_2 \phi_p^2, \tag{2.27}$$

avec $\tilde{\phi} \in V_1^2(\omega)$, et $\phi_p^2 = \left(\frac{r}{r_E}\right)^2 \rho^\alpha \sin(\alpha\varphi)$ de sorte que (2.25) se réécrit

$$u_k = \check{u}_k + \lambda_k \phi_p^2, \check{u}_k \in V_1^2(\omega),$$

avec $\lambda_k = \beta_2 c_k$. Le coefficient β_2 se calcule comme dans le cas cartésien et vaut

$$\beta_2 = \frac{1}{r_E \pi} \|p_s^2\|_{0,1}^2.$$

Lemme 2.4.3 *On a l'estimation suivante pour le coefficient c_k*

$$|c_k| \leq C|k|^{\alpha-1}.$$

2.4.2 Calcul de p_s^2 et ϕ_s^2

On part de la décomposition (2.23). Comme la partie singulière de p_s^2 est explicitement connue, la partie régulière $\tilde{p}$ est solution du problème aux limites suivant

$$\text{trouver } \tilde{p} \in V_1^1(\omega) \text{ telle que } \tilde{p} = -p_p^2 \text{ sur } \partial\omega \text{ et } \left(-\Delta^+ + \frac{4}{r^2}\right)\tilde{p} = \Delta^+ p_p^2 - \frac{4}{r^2} p_p^2 \text{ dans } \omega. \tag{2.28}$$

Un calcul donne

$$\begin{aligned}
\left(\Delta^+ - \frac{4}{r^2}\right) p_p^2 &= \Delta^+ \left(\left(\frac{r}{r_E}\right)^2 \rho^{-\alpha} \sin(\alpha\varphi)\right) - \frac{4}{r_E^2}\rho^{-\alpha}\sin(\alpha\varphi), \\
&= \frac{2}{r_E^2}\rho^{-\alpha}\sin(\alpha\varphi) + 2\frac{2r}{r_E^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho^{-\alpha}\sin(\alpha\varphi)\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(\frac{r}{r_E}\right)^2 \rho^{-\alpha}\sin(\alpha\varphi)\right) \\
&\quad -\frac{4}{r_E^2}\rho^{-\alpha}\sin(\alpha\varphi), \\
&= -\frac{5r}{r_E^2}\alpha\rho^{-\alpha-1}\sin(\alpha\varphi + \varphi'), \quad \varphi' = \varphi + \varphi_0,
\end{aligned}$$

en utilisant l'expression de ∂_r dans les variables (ρ, φ)

$$\partial_r = \cos(\varphi + \varphi_0)\partial_\rho - \frac{\sin(\varphi + \varphi_0)}{\rho}\partial_\varphi.$$

Ainsi, $\left(\Delta^+ - \frac{4}{r^2}\right) p_p^2$ définit clairement au voisinage du coin rentrant, un élément de $H^{-1}(\omega_E)$, donc appartient au dual de $\overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega)$. Cependant la fonction $\left(\rho^{-\alpha-1}\sin(\alpha\varphi + \varphi')\right)|_{\omega_E}$ n'est pas dans $L^2(\omega_E)$, et ceci entraine une perte de régularité sur $\tilde{p}$, ce qui aura pour effet d'affaiblir la vitesse de convergence lors de la discrétisation par éléments finis. On remédie à cet inconvénient en "enrichissant"la partie singulière. On va ajouter à p_p^2 un terme supplémentaire Q de sorte que

$$\left(\Delta^+ - \frac{4}{r^2}\right)(p_p^2 - Q)|_{\omega_E} \in L^2(\omega_E).$$

On recherche donc $Q \in V_1^1(\omega)$, de régularité V_1^2 au voisinage de l'axe $r = 0$ et satisfaisant $Q = 0$ sur $\partial\omega_E \cap \gamma_b$. On a, tous calculs faits,

$$\left(\Delta^+ - \frac{4}{r^2}\right)\left(p_p^2 - \frac{5}{r_E}\left(\frac{r}{r_E}\right)^2 Q'\right) = \frac{5r}{r_E^2}\frac{\partial s_D^E}{\partial r} - \frac{5}{r_E}\left(\frac{r}{r_E}\right)^2 \Delta Q' - \frac{25r}{r_E^3}\frac{\partial Q'}{\partial r},$$

où on a noté s_D^E la fonction $(\rho, \varphi) \mapsto \rho^{-\alpha}\sin(\alpha\varphi)$. En choisissant Q' telle que $\Delta Q' = \dfrac{\partial}{\partial r} s_D^E$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{5r}{r_E^2}\frac{\partial s_D^E}{\partial r} - \frac{5}{r_E}\left(\frac{r}{r_E}\right)^2 \Delta Q' &= \frac{5}{r_E}\frac{r}{r_E}\left(1 - \frac{r}{r_E}\right)\frac{\partial s_D^E}{\partial r}, \\ &= -\alpha\frac{5}{r_E}\frac{r}{r_E}\left(1 - \frac{r}{r_E}\right)\rho^{\alpha-1}\sin((\alpha+1)\varphi + \varphi_0),\end{aligned}$$

qui est L^2 au voisinage du coin rentrant, puisque

$$1 - \frac{r}{r_E} = \frac{r_E - r}{r_E} = -\frac{\rho}{r_E}\cos(\varphi + \varphi_0).$$

Par séparation de variables, on trouve

$$Q'(\rho, \varphi) = \frac{1}{2}\rho^{1-\alpha}\cos(\varphi + \varphi_0)\sin(\alpha\varphi),$$

et on vérifie que $Q = \frac{5}{r_E}\left(\frac{r}{r_E}\right)^2 Q'$ convient ; en gardant la même notation pour la nouvelle partie singulière :

$$\begin{aligned}p_p^2 &= \left(\frac{r}{r_E}\right)^2 \rho^{-\alpha}\sin(\alpha\varphi) - Q, \\ &= \left(\frac{r}{r_E}\right)^2 \left(1 - \frac{5\rho}{2r_E}\cos(\varphi + \varphi_0)\right)\rho^{-\alpha}\sin(\alpha\varphi),\end{aligned}$$

on a cette fois

$$\begin{aligned}\left(\Delta^+ - \frac{4}{r^2}\right)p_p^2 &= \frac{5}{r_E}\frac{r}{r_E}\left(1 - \frac{r}{r_E}\right)\left(-\alpha\rho^{-\alpha-1}\sin(\alpha\varphi)\right) - \\ &\quad \frac{25r}{2r_E^3}\left(\rho^{-\alpha}\sin(\alpha\varphi) - \alpha\cos(\varphi + \varphi_0)\sin((\alpha+1)\varphi + \varphi_0)\right)\end{aligned}$$

qui appartient à $L_1^2(\omega)$.
Pour l'approximation numérique, on utilise donc la décomposition

$$p_s^2 = (\tilde{p} + Q) + p_p^2 = \hat{p} + p_p^2$$

avec $\hat{p}|_{\omega_E} \in H^{1+\alpha_0}(\omega_E)$, ainsi $\hat{p} \in V_1^{1+\alpha_0}(\omega)$.
La partie régulière $\hat{p}$ est solution du nouveau problème aux limites suivant

$$\text{trouver } \hat{p} \in V_1^1(\omega) \text{ telle que } \hat{p} = -p_p^2 \text{ sur } \partial\omega \text{ et } a_2(\hat{p}, v) = (-A_2 p_p^2, v)_{0,1}, \forall v \in \overset{\circ}{V_1^1}(\omega). \quad (2.29)$$

Pour établir l'erreur d'approximation, on introduit un prolongement V_1^2 de $p_p^2|_\gamma$ dans ω

$$\tilde{s} = -(1 - \eta(\rho))p_p^2,$$

de sorte que la fonction singulière p_s^2 s'écrit

$$p_s^2 = p^0 + \tilde{s} + p_2^p,$$

où $p^0 = (\hat{p} - \tilde{s}) \in \overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega)$, p_s^2 est alors approchée par

$$p_s^{2,h} = p_h^0 + \Pi_h \tilde{s} + p_p^2$$

où $p_h^0 \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}_h$ est l'approximation éléments finis de p^0, i.e. solution du problème

$$\text{trouver } p_h^0 \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}_h,\ a_2(p_h^0, v_h) = (-A_2 p_p^2, v_h)_{0,1} - a_2(\Pi_h \tilde{s}, v_h), \forall v_h \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}_h\ . \tag{2.30}$$

Lemme 2.4.4 *On a les estimations d'erreurs suivantes*

$$\|p_s^2 - p_s^{2,h}\|_{V_1^1} \leq Ch^{\alpha_0}, \quad \|p_s^2 - p_s^{2,h}\|_{0,1} \leq Ch^{2\alpha_0}.$$

Preuve. cf. [33]. ∎

Pour le calcul de ϕ_s^2, (2.27) est suffisante pour fournir une bonne approximation. Comme $\phi_s^2 \in \overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega)$, vérifie

$$a_2(\phi_s^2, v) = (p_s^2, v)_{0,1}, \quad \forall v \in \overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega),$$

$\tilde{\phi}$ vérifie lui $\tilde{\phi} = -\beta_2 \phi_p^2$

$$a_2(\tilde{\phi}, v) = (p_s^2, v)_{0,1} - \beta_2 (A_2 \phi_p^2, v)_{0,1}, \quad \forall v \in \overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega).$$

Un calcul donne

$$A_2 \phi_p^2 = \frac{5r}{r_E^2} \alpha \rho^{\alpha-1} \sin((\alpha-1)\varphi - \varphi_0) \in L_1^2(\omega).$$

On approche $\tilde{\phi}$ par $\tilde{\phi}_h \in \mathcal{V}_h$, $\quad \tilde{\phi}_h = -\beta_{2,h} \pi_h \phi_p^2 + \phi_h^0$, où $\beta_{2,h} = \frac{1}{r_E \pi} \|p_s^{2,h}\|_{0,1}^2$, et $\phi_h^0 \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}_h$ telle que

$$a_2(\tilde{\phi}_h, v_h) = (p_s^{2,h}, v_h)_{0,1} - \beta_{2,h} (A_2 \phi_p^2, v_h)_{0,1}, \quad \forall v_h \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}_h\ .$$

On prend alors $\phi_s^{2,h} = \tilde{\phi}_h + \beta_{2,h} \phi_p^2$ comme approximation de ϕ_s^2.

Lemme 2.4.5 *On a les estimations d'erreurs suivantes*

$$\|\phi_s^2 - \phi_s^{2,h}\|_{V_1^1} \leq Ch, \quad \|\nabla(\phi_s^2 - \phi_s^{2,h})\|_{0,1}^2 + k^2 \|\phi_s^2 - \phi_s^{2,h}\|_{0,-1}^2 \leq Ck^2 h^2.$$

Preuve. cf. [33]. ∎

2.4.3 Calcul de $\tilde{u}_k$ et c_k

Lorsque une approximation c_k^h du coefficient de singularité c_k est connu, $\tilde{u}^k$ est approchée par la solution du problème

$$\text{trouver } \tilde{u}_h^k \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}_h \text{ tel que } a_k(\tilde{u}_h^k, v_h) = (f_k, v_h)_{0,1} - c_k^h a_k(\phi_s^h, v_h)_{0,1}, \quad \forall v_h \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}_h\ . \tag{2.31}$$

D'après (2.26), comme dans le cas prismatique, un moyen pour approcher c_k consiste à calculer une première approximation par éléments finis z_h^k de u^k et de prendre c_k^h égal à

$$\begin{aligned} c_k^h &= \frac{1}{\|p_s^{2,h}\|_{0,1}^2}\left(f_k - \frac{k^2-2^2}{r^2}z_h^k, p_s^{2,h}\right)_{0,1}, \\ &= \frac{1}{\|p_s^{2,h}\|_{0,1}^2}\left(f_k, p_s^{2,h}\right)_{0,1} - \frac{k^2-4}{\|p_s^{2,h}\|_{0,1}^2}\left(r^{-2}z_h^k, p_s^{2,h}\right)_{0,1} \end{aligned}$$

Comme les élément de $\overset{\circ}{\mathcal{V}}_h$ sont linéaires au voisinage de l'axe $r=0, z_h^k, p_s^{2,h}$ sont tous deux V_1^1 au voisinage de l'axe $r=0$, i.e. $\frac{z_h^k}{r}, \frac{p_s^{2,h}}{r} \in L_1^2(\omega)$, par conséquent le produit scalaire $\left(r^{-2}z_h^k, p_s^{2,h}\right)_{0,1}$ doit être compris au sens de $\left(r^{-1}u_h^k, r^{-1}p_s^{2,h}\right)_{0,1}$. D'autre part, il ne peuvent appartenir à $L_{-3}^2(\omega)$, et par conséquent, on ne peut pas contrôler les quantités $\left(r^{-2}(p_s^2 - p_s^{2,h}), v\right)_{0,1}$ ou $\left(r^{-2}(p_s^2 - p_s^{2,h}), v - v_h\right)_{0,1}$ directement par $\|r^{-2}(p_s^2 - p_s^{2,h}), \|_{0,-3}$ ou $\|r^{-2}(z^k - z_h^k), \|_{0,-3}$ mais par contre, on aura :

$$\begin{aligned} \left|\left(r^{-2}(p_s^2 - p_s^{2,h}), v\right)_{0,1}\right| &\leq \|p_s^2 - p_s^{2,h}\|_{0,1}\|v\|_{0,-3}, \forall v \in L_{-3}^2(\omega), \\ \left|\left(r^{-2}(p_s^2 - p_s^{2,h}), v - v_h\right)_{0,1}\right| &\leq \|p_s^2 - p_s^{2,h}\|_{0,-1}\|v\|_{0,-1}, \forall v \in L_{-1}^2(\omega). \end{aligned}$$

Lemme 2.4.6 *Soit z^k la solution du problème (2.14) et z_h^k son approximation par éléments finis standards. Alors*

$$\begin{aligned} \|z^k - z_h^k\|_{0,-1} &\leq Ck^{-2}\|f_k\|_{0,1}, \\ \|z^k - z_h^k\|_{0,-1} &\leq Ck^{-1}(h^{\alpha_0}k^{\alpha_0-1} + h)\|f_k\|_{0,1}, \\ \|z^k - z_h^k\|_{0,1} &\leq C(h^{2\alpha_0}k^{2(\alpha_0-1)} + h^2)\|f_k\|_{0,1}, \\ |c_k - c_k^h| &\leq C(h^{2\alpha_0}k^{2\alpha_0} + h^2k^2)\|f_k\|_{0,1}. \end{aligned}$$

Preuve. cf. [33]. ∎

Lemme 2.4.7 *L'approximation éléments finis P^1 de la solution du problème (2.31) vérifie l'estimation suivante*

$$\|\nabla(\tilde{u}^k - u_h^k)\|_{0,1}^2 + k^2\|\tilde{u}^k - u_h^k\|_{0,-1}^2 \leq Ck\left(h^2(1+k^2h^2)\|f_k\|_{0,1}^2 + |c_k - c_k^h|^2\right). \tag{2.32}$$

2.5 Méthode du complément singulier pour les modes $u_k, |k| = 1$

2.5.1 Description

On note ici A_1 l'opérateur $-\Delta^+ + \frac{1}{r^2}I$. Les deux modes $u_{\pm 1}$ sont toujours résolus variationnellement dans le même espace $\overset{\circ}{V}_1^1(\omega)$, mais $H^2(\Omega)$ se projète sur

$$H_{(\pm 1)}^2(\omega) = \left\{u \in H_1^2(\omega) | u|_{\gamma_a} = 0\right\}$$

cette fois ci. Cependant comme $r^{-2}u_{\pm 1}, r^{-2}\phi_s^2 \in L_1^2(\omega)$, pour ces modes aussi, (2.21) peut servir de décomposition de base en choisissant ϕ_s^2 comme le complément singulier dans la décomposition de $u_{\pm 1}$. Toutefois, il convient mieux pour ces modes d'utiliser une décomposition spécifique. En

effet, ϕ_s^2 appartient à un espace de fonctions bien plus régulières au voisinage de l'axe $\{r = 0\}$ que ne le sont celles de $H_1^2(\omega) \cap \overset{\diamond}{H}{}_1^1(\omega)$ qui est celui des parties régulières pour les modes ± 1. On applique donc la MCS pour $u_{\pm 1}$ en utilisant la décomposition de $L_1^2(\omega)$ suivante :

$$L_1^2(\omega) = A_1(H_1^2(\omega) \cap \overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega)) \overset{\perp}{\oplus} N_1$$

avec N_1 caractérisé par

Proposition 2.5.1

$$N_1 = \left\{ p \in L_1^2(\omega) | A_1 p = 0, p|_{\gamma_b^i} = 0, \forall i,\ p|_{\gamma_a} = 0 \right\}$$

et est de dimension finie égale au nombre de coins rentrants sur γ_b.

On désigne par p_s^1 un générateur de N_1 ; et on choisit celui qui s'écrit

$$p_s^1 = \tilde{p}^1 + \left(\frac{r}{r_E}\right) \rho^{-\alpha} \sin(\alpha\varphi), \quad \tilde{p}^1 \in V_1^1(\omega),$$

et on note $\phi_s^1 \in \overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega)$ solution de $A_1 \phi_s^1 = p_s^1$, qu'on décompose en

$$\phi_s^1 = \tilde{\phi}^1 + \beta_1 \left(\frac{r}{r_E}\right) \rho^{\alpha} \sin(\alpha\varphi), \quad \tilde{\phi}^1 \in H_1^2(\omega) \cap V_1^1(\omega),$$

La MCS donne alors pour les modes $u^{\pm 1}$

$$u^{\pm 1} = \tilde{u}^{\pm 1} + c_{\pm 1} \phi_s^1, \tag{2.33}$$

avec $\tilde{u}^{\pm 1} \in H_1^2(\omega) \cap \overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega)$, $c_{\pm 1} = \dfrac{\left(f_{\pm 1} | p_s^1\right)_{0,1}}{\|p_s^1\|_{0,1}^2}$, et $\tilde{u}^{\pm 1}$ est solution du problème

$$\text{trouver } \tilde{u}^{\pm 1} \in \overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega),\ a_{\pm 1}(\tilde{u}^{\pm 1}, v) + c_{\pm 1} a_{\pm 1}(\phi_s^1, v) = (f_{\pm 1}, v)_{0,1}, \quad \forall v \in \overset{\circ}{V}{}_1^1(\omega). \tag{2.34}$$

2.5.2 Calcul de $p_s^{\pm 1}$ et $\phi_s^{\pm 1}$

La partie singulière duale $\left(\frac{r}{r_E}\right) \rho^{-\alpha} \sin(\alpha\varphi)$ présente le même inconvénient que celle des modes $|k| \geq 2$, son image par $\Delta^+ - r^{-2}$ n'est pas dans L^2 au voisinage du coin rentrant. On doit donc la modifier en conséquence comme cela a été fait pour celle de p_s^2. Par un calcul analogue, on prend comme nouvelle partie singulière

$$p_p^1 = \left(\frac{r}{r_E}\right) \rho^{-\alpha} \sin(\alpha\varphi) \left(1 - \frac{3\rho}{2r_E} \cos(\varphi + \varphi_0)\right),$$

p_s^1 s'écrivant alors :

$$p_s^1 = \hat{p} + p_p^1, \quad \hat{p} \in V_1^1(\omega).$$

La partie régulière $\hat{p}$ de p_s^1 vérifiant alors le problème

$$\text{trouver } \hat{p} \in V_1^1(\omega) \text{ tel que } \hat{p}|_\gamma = -p_p^1|_\gamma \text{ et } a_1(\hat{p}, v) = \left(-A_1 p_p^1, v\right)_{0,1}, \quad \forall v \in V_1^1(\omega), \tag{2.35}$$

avec $-A_1 p_p^1 = \dfrac{3}{2r_E^2}\rho^{-\alpha}\Big(-3\sin(\alpha\varphi) + 5\alpha\cos(\varphi+\varphi_0)\sin((\alpha+1)\varphi+\varphi_0)\Big)$.
Pour l'approximation éléments finis, on procède exactement comme pour p_s^2. On introduit un prolongement régulier de $p_p^1|_\gamma$ dans ω

$$\tilde{s} = -(1-\eta(\rho))p_p^1,$$

de sorte que la fonction singulière p_s^1 se réécrit

$$p_s^1 = p^0 + \tilde{s} + p_p^1,$$

où $p^0 = (\hat{p} - \tilde{s}) \in \overset{\circ}{V_1^1}(\omega)$,et p_s^1 est alors approchée par

$$p_s^{1,h} = p_h^0 + \Pi_h \tilde{s} + p_p^1$$

où $p_h^0 \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}_h$ est l'approximation éléments finis de p^0, i.e. solution de

$$a_1(p_h^0, v_h) = \big(-A_1 p_p^1, v_h\big)_{0,1} - a_1(\Pi_h\tilde{s}, v_h), \forall v_h \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}_h\ .$$

Lemme 2.5.1 *On a les estimations d'erreurs suivante :*

$$\|p_s^1 - p_s^{1,h}\|_{V_1^1} \le Ch^{\alpha_0}, \quad \|p_s^1 - p_s^{1,h}\|_{0,1} \le Ch^{2\alpha_0}.$$

Pour le calcul de ϕ_s^1, on réalise la même démarche que celle employée pour le calcul de ϕ_s^2 : en notant $\phi_p^1 = \left(\dfrac{r}{r_E}\right)\rho^\alpha\sin(\alpha\varphi)$, $\phi_s^1 = \tilde{\phi} + \beta_1\phi_p^1$ vérifie

$$a_2(\phi_s^1, v) = (p_s^1, v)_{0,1}, \quad \forall v \in \overset{\circ}{V_1^1}(\omega),$$

par conséquent $\tilde{\phi}$ est solution du problème

$$\text{trouver } \tilde{\phi} \in V_1^1(\omega), \text{ tel que } \tilde{\phi}|_{\gamma_b} = -\beta_1\phi_p^1|_{\gamma_b} \text{ et } a_1(\tilde{\phi}, v) = (p_s^1, v)_{0,1} - \beta_1(A_1\phi_p^1, v)_{0,1}, \quad \forall v \in \overset{\circ}{V_1^1}(\omega). \tag{2.36}$$

Un calcul donne

$$A_1\phi_p = \frac{3}{r_E}\alpha\rho^{\alpha-1}\sin((\alpha-1)\varphi - \varphi_0) \in L_1^2(\omega).$$

On approche $\tilde{\phi}$ par $\tilde{\phi}_h \in \mathcal{V}_h$, $\quad \tilde{\phi}_h = -\beta_{1,h}\pi_h\phi_p^1 + \phi_h^0$, où $\beta_{1,h} = \frac{1}{r_E\pi}\|p_s^{1,h}\|_{0,1}^2$, et $\phi_h^0 \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}_h$ telle que

$$a_1(\tilde{\phi}_h, v_h) = (p_s^{1,h}, v_h)_{0,1} - \beta_{1,h}(A_1\phi_p^1, v_h)_{0,1}, \quad \forall v_h \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}_h\ .$$

On prend alors $\phi_s^{1,h} = \tilde{\phi}_h + \beta_{1,h}\phi_p^1$ comme approximation de ϕ_s^1.

Lemme 2.5.2 *On a les estimations d'erreurs suivantes*

$$\|\phi_s^1 - \phi_s^{1,h}\|_{V_1^1} \le Ch.$$

2.5.3 Calcul de $\tilde{u}_{\pm 1}$ et $c_{\pm 1}$

La discrétisation du problème (2.34) est

$$\text{trouver } \tilde{u}_h^{\pm 1} \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}_h(\omega) \text{ tel que } a_{\pm 1}(\tilde{u}_h^{\pm 1}, v_h) = (f_{\pm 1}, v_h) - c_{\pm 1}^h a_{\pm 1}(\phi_s^{\pm 1,h}, v_h), \quad \forall v \in \overset{\circ}{\mathcal{V}}_h(\omega), \tag{2.37}$$

où $c_{\pm 1}^h = \dfrac{\left(f_{\pm 1}, p_s^{\pm 1,h}\right)_{0,1}}{\|p_s^{\pm 1,h}\|_{0,1}^2}$.
On prend alors $u_h^{\pm 1} = \tilde{u}_h^{\pm 1} + c_{\pm 1}^h \phi_s^{\pm 1,h}$.

Lemme 2.5.3 *On a les estimations d'erreurs suivantes*

$$\begin{array}{lcl} |c_{\pm 1} - c_{\pm 1}^h| & \leq & Ch^{2\alpha_0}\|f_{\pm 1}\|_{0,1}, \\ \|\tilde{u}^{\pm 1} - \tilde{u}_h^{\pm 1}\|_{V_1^1} & \leq & Ch\|f_{\pm 1}\|_{0,1}, \\ \|u^{\pm 1} - u_h^{\pm 1}\|_{V_1^1} & \leq & Ch\|f_{\pm 1}\|_{0,1}. \end{array}$$

Preuve. cf. [33]. ∎

2.6 Méthode du complément singulier pour les modes $u_0, k = 0$

2.6.1 Description

L'espace variationnel est maintenant $\overset{\diamond}{H}{}_1^1(\omega)$ et le mode u_0 est solution du problème

$$\text{trouver } u_0 \in \overset{\diamond}{H}{}_1^1(\omega) \text{ tel que } a_0(u_0, v) = (f_0, v), \quad \forall v \in \overset{\diamond}{H}{}_1^1(\omega). \tag{2.38}$$

L'application $u \longrightarrow u_0$ applique l'espace $H^2(\Omega)$ sur

$$H_+^2(\omega) = \left\{ u \in H_1^2(\omega) | \frac{\partial u}{\partial r} \in L_{-1}^2(\omega) \right\}.$$

On note $A_0 = -\Delta^+$. D'après l'hypothèse faite au début du chapitre, il n'y a pas de singularité dûe à un éventuel coin rentrant sur l'axe. Le mode u_0 ne présente donc qu'une singularité dûe au coin rentrant E. De même que pour les modes ± 1, la fonction ϕ_s^2 ne convient pas comme choix de complément singulier pour l'approximation numérique de u_0. De ce fait, pour les mêmes raisons que précédemment, on utilise ici aussi un complément singulier spécifique au mode 0 : l'espace $L_1^2(\omega)$ est décomposé en :

$$L_1^2(\omega) = A_0(H_+^2(\omega) \cap \overset{\diamond}{H}{}_1^1(\omega)) \overset{\perp}{\oplus} N_0,$$

avec

$$N_0 = \left\{ p \in L_1^2(\omega) | A_0 p = 0, p|_{\gamma_b^i} = 0, \forall i, \left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\gamma_a} = 0 \right\}.$$

C'est un espace de dimension 1, engendré par $p_s^0 = \hat{p} + \rho^\alpha \sin(\alpha\varphi)$, avec $\hat{p} \in H_1^1(\omega)$. On note $\phi_s^0 \in \overset{\diamond}{H}{}_1^1(\omega)$ vérifiant $A_0\phi_s^0 = p_s^0$; elle se décompose en

$$\phi_s^0 = \hat{\phi} + \beta_0 \rho^\alpha \sin(\alpha\varphi), \quad \hat{\phi} \in H_1^2(\omega),$$

avec $\beta_0 = \frac{1}{r_E \pi}\|p_s^0\|_{0,1}^2$. Pour le mode u_0, on obtient :

$$u_0 = \tilde{u}_0 + c_0\phi_s^0, \tag{2.39}$$

avec c_0 donné par : $c_0 = \dfrac{\left(f_0|p_s^0\right)_{0,1}}{\|p_s^0\|_{0,1}^2}$ et $\tilde{u}_0 \in H_1^2(\omega) \cap \overset{\diamond}{H}{}_1^1(\omega)$.

2.6.2 Calcul de p_s^0 et ϕ_s^0

Le calcul de p_s^0 et ϕ_s^0 est ici très similaire au cas cartésien, $\hat{p}$ et $\hat{\phi}$ satisfont les problèmes suivant

$$\text{trouver } \hat{p} \in H_1^1(\omega), \hat{p} = -\rho^{-\alpha}\sin(\alpha\varphi) \text{ sur } \gamma_b, a_0(\hat{p}, v) = \left(\Delta^+ p_p^0, v\right)_{0,1}, \quad \forall v \in \overset{\diamond}{H}{}_1^1(\omega), \tag{2.40}$$

$$\text{trouver } \hat{\phi} \in H_1^1(\omega), \hat{\phi} = -\rho^{\alpha}\sin(\alpha\varphi) \text{ sur } \gamma_b, \text{ et } a_0(\hat{\phi}, v) = \left(\Delta^+ \phi_p^0, v\right)_{0,1}, \quad \forall v \in \overset{\diamond}{H}{}_1^1(\omega). \tag{2.41}$$

En introduisant

$$\tilde{s} = -(1 - \eta(\rho))p_p^0,$$

de sorte que p_s^0 s'écrit

$$p_s^0 = p^0 + \tilde{s} + p_p^0,$$

où $p^0 = (\hat{p} - \tilde{s}) \in \overset{\diamond}{H}{}_1^1(\omega)$, on approche p_s^0 par

$$p_s^{0,h} = p_h^0 + \Pi_h\tilde{s} + p_p^0$$

où $p_h^0 \in \overset{\diamond}{\mathcal{V}}_h$ est l'approximation éléments finis de p^0, i.e. solution de

$$a_0(p_h^0, v_h) = \left(\Delta^+ p_p^0, v_h\right)_{0,1} - a_0(\Pi_h\tilde{s}, v_h), \forall v_h \in \overset{\diamond}{\mathcal{V}}_h .$$

Lemme 2.6.1 *On a les estimations d'erreurs suivantes*

$$\|p_s^0 - p_s^{0,h}\|_{1,1} \leq Ch^{\alpha_0}, \quad \|p_s^0 - p_s^{0,h}\|_{0,1} \leq Ch^{2\alpha_0}, \quad \|\phi_s^0 - \phi_s^{0,h}\|_{1,1} \leq Ch.$$

2.6.3 Calcul de $\tilde{u}_0$ et c_0

A partir de (2.39), $\tilde{u}_0$ est solution du problème

$$\text{trouver } \tilde{u}^0 \in \overset{\diamond}{H}{}_1^1(\omega) \text{ tel que } a_0(\tilde{u}^0, v) = (f_0, v) - c_0 a_0(\phi_s^0, v), \quad \forall v \in \overset{\diamond}{H}{}_1^1(\omega). \tag{2.42}$$

On approche donc $\tilde{u}_0$ par la solution du problème

$$\text{trouver } \tilde{u}_h^0 \in \overset{\diamond}{\mathcal{V}}_h(\omega), \text{ tel que } a_0(\tilde{u}_h^0, v_h) = (f_0, v_h) - c_0^h a_0(\phi_s^{0,h}, v_h), \quad \forall v \in \overset{\diamond}{\mathcal{V}}_h(\omega), \tag{2.43}$$

où $c_0^h = \dfrac{\left(f_0, p_s^{0,h}\right)_{0,1}}{\|p_s^{0,h}\|_{0,1}^2}$.

On prend alors $u_h^0 = \tilde{u}_h^0 + c_0^h\phi_s^{0,h}$ comme approximation de u^0.

Lemme 2.6.2 *On a les estimations d'erreurs suivantes*

$$\begin{array}{lcl} |c_0 - c_0^h| & \leq & Ch^{2\alpha_0}\|f_0\|_{0,1}, \\ \|\tilde{u}^0 - \tilde{u}_h^0\|_{1,1} & \leq & Ch\|f_0\|_{0,1}, \\ \|u^0 - u_h^0\|_{1,1} & \leq & Ch\|f_0\|_{0,1}. \end{array}$$

Preuve. cf. [33]. ∎

2.7 Méthode du complément singulier en domaine axisymétrique

On obtient l'algorithme de la MFCS en appliquant la Méthode du Complément Singulier aux modes de Fourier de u. Contrairement au cas prismatique où la partie singulière reste la même pour tous les modes, pour le cas axisymétrique, les modes $k = 0, \pm 1$, requierent une décomposition spécifique. Cela tient au fait que l'espace auquel appartient le k-eme mode ne dépend pas de k pour $|k| \geq 2$.

2.7.1 Décomposition tensorielle

Comme pour le cas prismatique, en réécrivant la décomposition de u_k de la proposition 2.3.1 sous la forme

$$\begin{aligned}\tilde{u}_k + \gamma_k\eta(\rho)\mathrm{e}^{-|k|\rho}\rho^\alpha\sin(\alpha\varphi) &= \tilde{u}_k + \gamma_k\eta(\rho)\rho^\alpha\sin(\alpha\varphi) + \gamma_k\eta(\rho)(\mathrm{e}^{-|k|\rho}-1)\rho^\alpha\sin(\alpha\varphi),\\ &= \gamma_k\eta(\rho)\rho^\alpha\sin(\alpha\varphi) + \tilde{u}_k + \tilde{w}_k,\\ &= \gamma_k\eta(\rho)\rho^\alpha\sin(\alpha\varphi) + w_k,\end{aligned}$$

avec $w_k|_{\omega_E} \in H^2(\omega_E)$, et en sommant formellement, la partie singulière dans (2.20) devient tensorielle, de la forme $\gamma_0(\theta)\eta(\rho)\rho^\alpha\sin(\alpha\varphi)$, à la condition que $\gamma_0(\theta) = \sum_k \gamma_k \mathrm{e}_k(\theta)$, $\sum_k w_k(r,z)\mathrm{e}_k(\theta)$ sont assez régulières, ce qui n'est pas vrai sans hypothèse supplémentaire sur le second membre f. On renvoie à [55, **S**5., **S**6.] pour les détails.

Théorème 2.7.1 *Soit $f \in L^2(\Omega)$ tel que $\partial_\theta f, \partial^2_{\theta,\theta} f \in L^2(\Omega)$, et $u \in H^1_0(\Omega)$ vérifiant $-\Delta u = f$. Alors u se décompose de la façon suivante*

$$u(r,\theta,z) = \tilde{u}_r(r,\theta,z) + u_s(r,\theta,z),$$

avec $u_r \in H^2(\Omega), u_s(r,\theta,z) = \eta(\rho)\gamma(\theta)\rho^\alpha\sin(\alpha\varphi), \gamma \in H^2_{\mathrm{per}}(]0,2\pi[)$ et

$$\|u_r\|_2 + \|\gamma\|_{H^2(]0,2\pi[)} \leq C\sum_{k=0}^{k=2}\left\|\frac{\partial^k f}{\partial\theta^k}\right\|_2.$$

Preuve. cf. [33]. ∎

2.7.2 Algorithme

L'algorithme de la MFCS pour des domaines invariants par rotation s'énonce ainsi : pour $N \in \mathbf{N}$ et $|k| \leq N$,

1. trouver $z^k_h \in \mathcal{V}_h$ solution de $a_k(z^k_h, v_h) = (f_k, v_h)_{0,1},\ \forall v_h \in \mathcal{V}_h$ et calculer

$$c^h_k = \begin{cases} \frac{1}{\|p^h_s\|_{0,1}}\left((f_k, p^h_s)_{0,1} - k^2(\frac{z^k_h}{r}, \frac{p^h_s}{r})_{0,1}\right), & |k| \leq Ch^{-\frac{1}{2-\alpha_0}},\\ 0, & N \geq |k| > Ch^{-\frac{1}{2-\alpha_0}},\end{cases}$$

2. trouver $\tilde{u}^k_h \in \mathcal{V}_h$ solution de $a_k(\tilde{u}^k_h, v_h) = (f_k, v_h)_{0,1} - c^h_k a_k(\phi^h_s, v_h),\ \forall v_h \in \mathcal{V}_h$, et on pose

$$u^k_h = \begin{cases} \tilde{u}^k_h + c^h_k\phi^h_s, & |k| \leq Ch^{-\frac{1}{2-\alpha_0}},\\ z^k_h, & N \geq |k| > Ch^{-\frac{1}{2-\alpha_0}}.\end{cases}$$

3. On pose alors $u_h^N = \sum_{|k|\leq N} u_h^k \mathrm{e}_k$.

A l'aide des lemmes 2.4.6, 2.4.7, 2.5.3, et 2.6.2 on montre le résultat suivant.

Théorème 2.7.2 *Soit $u_h^k \in \mathcal{V}_h$ l'approximation de u_k dans l'algorithme précédent. On a l'estimation suivante*

$$\|\nabla(u^k - u_h^k)\|_{0,1}^2 + k^2\|u^k - u_h^k\|_{0,-1}^2 \leq Ck^4h^2\|f_k\|_{0,1}^2.$$

La proposition 2.2.1 implique alors l'erreur d'approximation suivante pour la MFCS

Théorème 2.7.3 *On a l'estimation suivante, pour*

$$\|\nabla(u - u_h^N)\|_0 \leq C(h + N^{-1}) \left(\sum_{j\leq 2} \|\frac{\partial^j f}{\partial\theta^j}\|_0 \right)$$

Preuve. cf. [33]. ■

2.8 Conclusion

Aussi bien pour les domaines prismatiques que pour les domaines invariants par rotation possédant une arête rentrante, la MFCS permet de retrouver l'estimation d'erreur optimale lorsqu'on utilise les éléments finis P^1 lorsque le second membre f est suffisamment régulier dans la direction de l'arête :

$$\|\nabla(u - u_h^N)\|_{L^2} \leq C(h + N^{-1}) \left(\sum_{j\leq 2} \|\frac{\partial^j f}{\partial\theta^j}\|_{L^2} \right).$$

Pour les domaines prismatiques, on doit supposer en plus que f s'annule sur les bases du prisme i.e. $\omega \times \{0, 1\}$. Pour un problème de Neumann homogène, l'hypothèse doit être adapté et devient $\partial_3 f = 0$ sur $\omega \times \{0, 1\}$. Pour le cas axisymétrique, la distinction réside dans la présence de poids dans les espaces fonctionnels et dans la présence de coefficients vaiables dans les opérateurs différentiels régissant les problèmes dont sont solutions les modes de Fourier de la solution. La présence de pointes coniques (i.e. cas où $1 < \beta < \beta_c$, voir paragraphe 4.2.3) est traitée dans [33] et se traduit par l'ajout dans la décomposition du mode 0, d'autant de termes de singularités coniques supplémentaires qu'il y a de pointes.

Dans le chapitre suivant, on étudie la MFCS d'un point de vue numérique : comparaison avec d'autres méthodes numériques existantes, influence de la régularité dans la direction de l'arête, analyse de complexité aussi bien pour le cas prismatique que pour le cas axisymétrique.

3

Expériences numériques

Sommaire

3.1 Préliminaires 66
3.1.1 Quadrature 66
3.1.2 Tests préliminaires 66
3.1.3 Tests 67
3.2 Cas prismatique 67
3.2.1 Approximation de la solution par éléments finis prismatiques . . . 67
3.2.2 Cas prismatique : convergence de la Méthode de Fourier et du Complément Singulier 70
3.2.3 Cas prismatique : MFCS et éléments finis 3D 72
3.3 Cas axisymétrique : FFEM et MFCS 74
3.4 Analyse de la complexité 78
3.5 Conclusion 81

Dans ce chapitre, on se propose de mettre en œuvre la MFCS et de la comparer à d'autres méthodes numériques pour résoudre le problème de Dirichlet homogène pour le laplacien. Dans le cas du domaine prismatique, on comparera trois méthodes différentes : éléments finis prismatiques 3D, la MFCS et la méthode hybride MFCS/éléments finis prismatiques de la partie 1.3.6, le coefficient de singularité n'étant pas connu explicitement en général. Pour les domaines invariants par rotations, les tests ont été effectués par Beate Jung. Trois méthodes différentes sont mises en œuvre : la MFCS, la FFEM (Fourier Finite Element Method [56]) avec maillages quasi-uniformes du domaine dans un demi plan méridien, puis avec maillages raffinées au voisinage du coin. D'après le chapitre précédent, il y a trois complément singulier pour la MFCS : $|k| = 0, |k| = 1, |k| \geq 2$.

Le plan du chapitre est le suivant. Dans les parties 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3 on teste les vitesses de convergence pour chacune des méthodes citées pour résoudre le problème de Dirichlet homogène pour le laplacien dans un domaine prismatique, ainsi que l'influence de la régularité du second membre sur la vitesse de convergence. Dans les parties 3.3, on s'intéresse aux cas de domaines invariants par rotation possédant une arête rentrante. A cause du poids r^{-1} dans les formulations variationnelles, où r est la distance à l'axe de révolution, on considère deux problèmes exacts dont le comportement au voisinage de l'axe $r = 0$ est différent. On s'intéresse aussi à la vitesse de convergence par rapport à N, nombres de modes de Fourier approchés en fonction de la régularité de la solution exacte par rapport à la variable angulaire. Finalement, dans la partie 3.5, on analyse la complexité de chaque méthode utilisée.

3.1 Préliminaires

3.1.1 Quadrature

λ_1	λ_2	λ_3	z	c	n
a	a	$1-2a$	z_1	$\frac{c_1}{2}$	3
b	b	$1-2b$	z_1	$\frac{c_2}{2}$	3
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	z_1	$\frac{9}{80}$	1
a	a	$1-2a$	z_2	$\frac{c_1}{2}$	3
b	b	$1-2b$	z_2	$\frac{c_2}{2}$	3
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	z_2	$\frac{9}{80}$	1

TAB. 3.1 – Points d'intégration sur le prisme unité

La présence de fonctions singulières telles que $r^{-\alpha}\sin(\alpha\theta)$ nécessite une formule d'intégration adéquate : on a utilisé une formule à 7 points pour l'intégration en 2D. La forme particulière des fonctions de base des éléments finis prismatiques permet une intégration séparée en 3D : une combinaison avec une formule à 2 points pour l'intégration sur $]0,1[$ suffit. En résumé, il y a 14 points d'integration par prisme. On les donne sur le prisme de référence (voir la table Tab. 3.1) : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les coordonnées barycentriques sur le triangle, n est le nombre de permutations des coordonnées barycentriques pour avoir les autres points, z est la coordonnée sur $]0,1[$ et c est le coefficient d'intégration. Les valeurs de a, b, z_1, z_2, c_1, c_2 sont $a = \frac{6-\sqrt{15}}{21}, b = \frac{6+\sqrt{15}}{21}, z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}, c_1 = \frac{155-\sqrt{15}}{1200}, c_2 = \frac{155+\sqrt{15}}{1200}$.
La MCS ne calcule que la partie régulière de p_s, la partie principale, elle, est exacte : la norme de p_s doit être calculée de manière aussi précise que possible, car elle intervient dans le calcul de β, donc dans celui du coefficient de singularité γ. Elle est calculée en partitionnant le domaine ω en deux sous domaines : $\omega = (\omega \cap B(S,R)) \cup (\omega \backslash B(S,R))$, où $B(S,R)$ est le disque centré au sommet rentrant S et de rayon R.
La norme L^2 de p_s^h peut s'écrire :

$$\|p_s^h\|_0^2 = \|\tilde{p}_h\|_0^2 + 2(\tilde{p}_h, p_p)_0 + \|p_p\|_0^2 := (1) + (2) + (3),$$

et en décomposant alors (3) sous la forme

$$\|p_p\|_0^2 = \|p_p\|_{0,\omega\cap B(S,R)}^2 + \|p_p\|_{0,\omega\backslash B(S,R)}^2 := (3a) + (3b)$$

le terme $(3a)$ est calculée exactement sur $\omega \cap B(S,R)$:

$$\|p_p\|_{0,\omega\cap B(S,R)}^2 = \pi \frac{R^{2-2\alpha}}{4\alpha - 4\alpha^2}$$

tandis qu'on utilise une formule à 7 points pour les termes $(1), (2), (3b)$.

3.1.2 Tests préliminaires

Les matrices d'intégration ainsi que celles des problèmes discrétisés sont des matrices bandes (la figure Fig. 3.1 représente la matrice de rigidité du laplacien en 3D pour les éléments finis prismatiques avec 299 triangles, 5980 prismes, 3696 sommets). Les systèmes linéaires sont résolus par

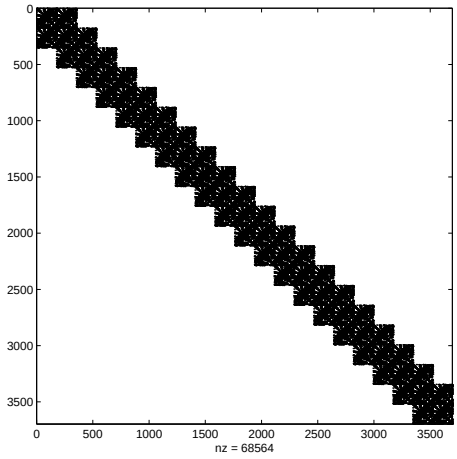


FIG. 3.1 – Matrice de rigidité du laplacien en 3D.

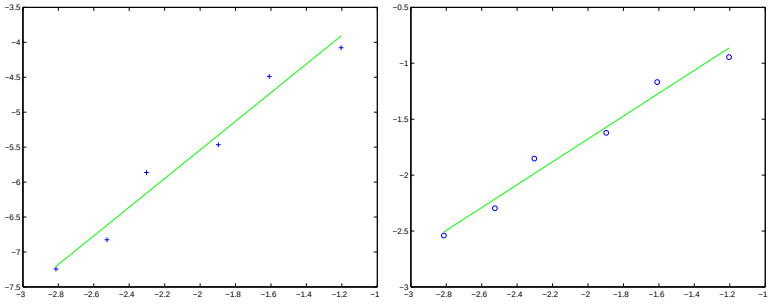


FIG. 3.2 – Erreur $\log - \log$ en normes L^2 et H^1 pour un domaine et une solution réguliers

gradient conjugué. Le code éléments finis prismatiques a été testé sur le cas $\Omega = [0,1]^3$ en prenant pour solution exacte $u(x_1, x_2, x_3) = \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\sin(\pi x_3)$. On a représenté sur la figure Fig. 3.2 les diagrammes d'erreur $\log \|u - u_h\|_0$ et $\log |u - u_h|_1$, pour $h = 0.3, 0.2, 0.15, 0.1, 0.08, 0.06$. Par régression linéaire, on obtient des vitesses de convergence en $h^{1.022}$ pour la norme H^1 et $h^{2.05}$ pour la norme L^2.

3.1.3 Tests

Pour les calculs, on a pris pour domaine ω, celui de la figure Fig. 3.5 correspondant à $\alpha = 2/3$. Les figures Fig. 3.3 et 3.4 représentent l'allure des singularités duale p_s et primale ϕ_s sur ω, calculées avec 12288 triangles. Le tableau Tab. 3.2 présente les valeurs du coefficient β pour plusieurs valeurs de h.

3.2 Cas prismatique

3.2.1 Approximation de la solution par éléments finis prismatiques

Cette partie est consacrée aux tests numériques dans un domaine prismatique. L' objectif est de mettre en évidence numériquement les vitesses de convergence pour la résolution du problème

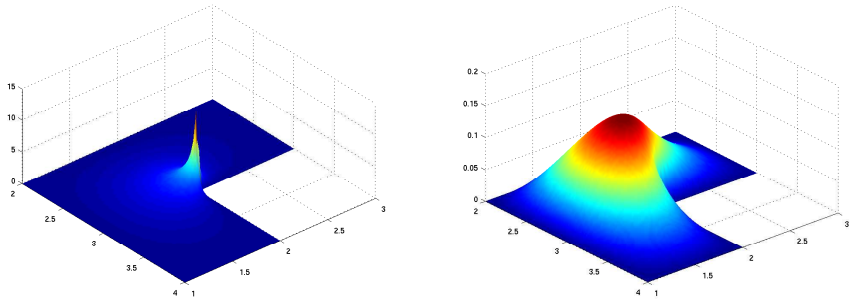


FIG. 3.3 – Singularités duale p_s^h(gauche) et primale ϕ_s^h(droite)

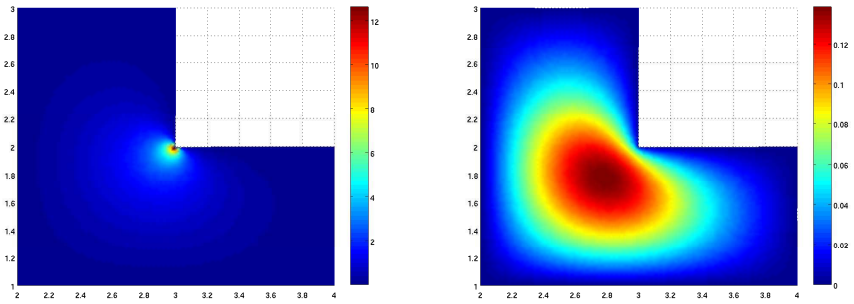


FIG. 3.4 – Isovaleurs des solutions p_s^h(gauche), ϕ_s^h(droite)

Triangles	Sommets	Pas	β_1
768	417	0.125	0.6357
3072	1601	0.0625	0.6332
12288	6273	0.0312	0.6325

TAB. 3.2 – Valeurs calculées de β_1 pour différents maillages.

de Poisson (1.13) par éléments finis prismatiques. A cet effet, on discrétise $\bar{\Omega}$ en prismes de diamètre h et de sommets $\{M_i\}_{i=1}^N$. Le maillage résultant est notée $\mathcal{P}_h$ et est obtenu à partir d'un maillage régulier de pas h du domaine $\bar{\omega}$ et d'une subdivision de l'intervalle Z de pas h.

Le domaine de calcul est $\Omega = \omega \times]0,1[$, avec $\omega :=]2,4[\times]1,3[\setminus]3,4[\times]2,3[$.
Sur $\mathcal{P}_h$, on définit l'espace variationnel discret suivant pour les éléments prismatiques :

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : \ v_h|_Q \in P_{2D}^1 \otimes P_{1D}^1, \ \forall Q \in \mathcal{P}_h\}$$

ainsi que le sous espace V_h^0 des fonctions s'annulant sur le bord de Ω. Les fonctions de bases de cet espace satisfont $\phi_j(M_i) = \delta_{i,j}$ et s'écrivent sur chaque prisme (cf. [37]) :

$$\phi_j(x,y,z) = a_1yz + a_2xz + a_3z + a_4x + a_5y + a_6.$$

Le problème (1.13) peut naturellement être approché par le problème discret :

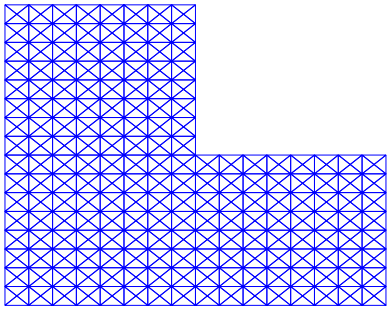


FIG. 3.5 – Maillage bidimensionnel pour $h = 0.125$.

$$\text{trouver } u_h \in V_h^0 \text{ tel que } \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v_h \, \mathrm{d}x \quad \forall\, v_h \in V_h^0.$$

h	Prismes	Sommets	$\|u - u_h\|_1$	β_1
0.25	768	565	4.10e-3	-
0.125	6144	3753	2.38e-3	0.78
0.0625	49152	27217	1.33e-3	0.84
0.03125	393216	207009	7.44e-4	0.84

TAB. 3.3 – Erreurs en norme H^1.

Les erreurs sont calculées à l'aide d'une formule de quadrature à 14 points sur chaque prisme obtenue à partir d'une formule de quadrature bidimensionnelle à 7 points (exacte jusqu'au degré 5) et une formule de Gauss à 2 points en dimension 1.

La Table 3.3 représente les erreurs en norme H^1 pour la solution obtenue par les éléments finis prismatiques lorsque la solution exacte est prise égale à :

$$u(r,\theta,z) = \begin{cases} (z(1-z))^2 \left(1 - (2r)^{\frac{4}{3}} + (2r)^{\frac{5}{3}} - (2r)^2\right)^2 r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2}{3}\theta) & , \quad r \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & , \quad r \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Les valeurs de β_1 de la Table 3.3 représentent les taux de convergentes dans la notation $O(h^{\beta_1})$ et sont calculées via les erreurs H^1 entre deux maillages consécutifs. D'après la Table 3.3, le taux de convergence est légèrement meilleur que celui prévu théoriquement en $\mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}})$ mais n'est pas encore en $\mathcal{O}(h)$. La différence entre la vitesse exacte et celle observée est sans doute due à l'utilsation de maillages qui sont en fait quasi-uniformes et à la présence d'une fonction de troncature.

Dans la partie suivante, on met en évidence l'efficacité de la MFCS décrite dans le chapitre 1 et dans [32] pour les domaines prismatiques. La vitesse de convergence optimale en $\mathcal{O}(h)$ pour la norme H^1 est retrouvée lorsque le second membre f appartient à $H^2(]0,1[, L^2(\omega))$ et satisfait $f = 0$ sur les faces $z = 0$ et $z = 1$. Ceci motive aussi de tester l'influence des conditions sur les faces sur la vitesse de convergence (voir [32, Théorème 6.1]) de cette méthode, ainsi que celui de la régularité de f par rapport à z.

3.2.2 Cas prismatique : convergence de la Méthode de Fourier et du Complément Singulier

La MFCS repose sur un développement de Fourier dans la direction de l'arête (axe Oz) pour transformer le problème 3D en une suite de problème 2D qui peuvent être résolus par la Méthode du Complément Singulier(MCS). L'un des avantages de la MFCS est qu'elle ne nécessite de calculer les coefficients de singularité que pour les premiers modes, la partie singulière des autres modes est suffisamment petite pour que l'erreur issue de la discrétisation soit dominante. On introduit d'abord quelques notations. N est le nombre de modes de Fourier considérés (paramètre de troncature) et $C^\star$ est une constante positive. $\mathcal{T}_h$ est la discrétisation régulière de $\overline{\omega}$, et

$$W_h^0 = \left\{u \in \mathcal{C}(\overline{\omega}), u_{|K} \in P^1(K)\ \forall K \in \mathcal{T}_h\right\} \cap H_0^1(\omega)$$

est l'espace variationnel discret associé à $\mathcal{T}_h$.

La solution approchée au problème (1.13) est donnée par

$$u_h^N = \sum_{k=0}^{k=N} u_h^k(x,y)\sin(k\pi z), \quad u_h^k = \tilde{u}_h^k + c_h^k \phi_s^h. \tag{3.1}$$

Contrairement au cas des domaines axisymétriques où aucune condition suivant θ n'est spécifiée grâce à la périodicité, on doit supposer que f s'annule sur les faces $z = 0$ et $z = 1$ pour obtenir une erreur optimale en $O(N^{-1} + h)$ (cf. [32, Théorème 6.1]. Afin de tester le comportement de la MFCS vis à vis des conditions au bord sur les faces $z = 0$ et $z = 1$, on prend un second membre f qui ne s'annule pas sur les faces mais possédant la régularité $H^2(]0,1[, L^2(\omega))$

La solution exacte est construite de la façon suivante :

$$u(r,\theta,z) = \begin{cases} z(1-z)\left(1-(2r)^{\frac{4}{3}}+(2r)^{\frac{5}{3}}-(2r)^2\right)^2 r^{\frac{2}{3}}\sin(\frac{2}{3}\theta), & r \le \frac{1}{2}, \\ 0, & r \ge \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.2}$$

pour laquelle le coefficient de singularité d'arête est construit dans $H^2(]0,1[) \cap H_0^1(]0,1[)$. Dans les expériences numériques, la solution u_h^N obtenue par la MFCS dans (3.1) est calculée avec N modes de Fourier et u_h^k est calculée sur la triangulation $\mathcal{T}_h$ de $\overline{\omega}$ de pas h. Pour étudier le taux de convergence, on décide de prendre le même nombre N de modes de Fourier pour toutes les triangulations et tel que $N^{-1} \le h$ pour le maillage le plus fin. Les taux de convergence sont

h	Sommets	$k_{\max}$	$\|u - u_h\|_1$	β_1
0.125	417	4	8.04e-3	-
0.0625	1601	7	4.32e-3	0.90
0.0312	6273	13	2.15e-3	0.99

TAB. 3.4 – Erreur en norme H^1 pour la MFCS avec $N = 32$ modes de Fourier.

présentés dans le tableau Tab. 3.4, où $k_{\max}$ est le mode de degré le plus grand pour lequel la MCS est utilisée. La figure Fig. 3.6 représente $k_{\max}$ en fonction du pas du maillage h et la constante $C^\star$ est prise égale à 1.

Le tableau Tab. 3.4 montre que la vitesse de convergence H^1 pour la MFCS est optimal même si f ne s'annule pas en $z = 0$ et $z = 1$. Ceci nous amène maintenant à tester la régularité en z du second membre f.

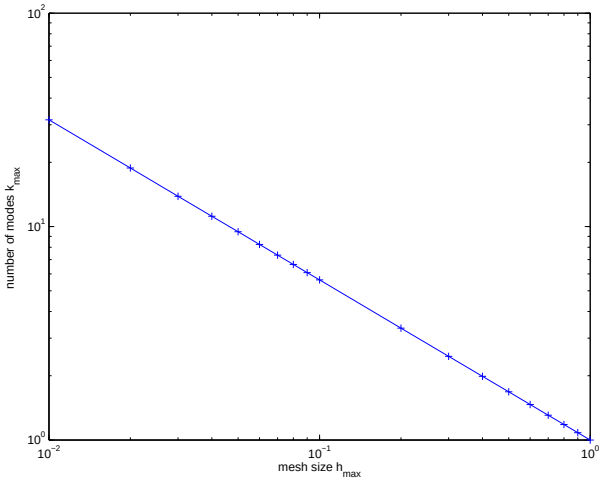


FIG. 3.6 – Graphe $k_{\max} = [h^{-\frac{1}{2-\alpha}}]$ où $[x]$ est la partie entièrede x avec $\alpha = \frac{2}{3}$.

Grâce aux propriétés spectrales de l'opérateur 1D :

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} : H_0^1(]0,1[) \to H^{-1}(]0,1[),$$

on sait (par interpolation) que

$$[H_0^1(]0,1[), L^2(]0,1[)]_s = \left\{ f = \sum_{k=1}^{\infty} f^k \mathrm{e}_k : \sum_{k=0}^{\infty} (k\pi)^{2(1-s)} |f^k|^2 < \infty \right\}$$

est $H_0^{1-s}(]0,1[)$ pour $s \neq 1/2$ et $H_{00}^{1/2}(]0,1[)$ pour $s = 1/2$ (cf. [63]). D'après le tableau Tab. 3.5, on peut observer des taux de convergence numériques optimaux lorsque f appartient aux espaces $H_0^{1-s}(]0,1[; L^2(\omega))$ pour $s = 0, 1/4, 3/4, 1$ et $H_{00}^{1/2}(]0,1[; L^2(\omega))$ pour $s = 1/2$. Ces tests on été réalisés sans FFT mais avec les modes de Fourier exacts de f. En effet, les resultats numériques présentent pas de différences notables qu'ils soient obtenus avec ou sans FFT. Les modes de Fourier exacts de la solution sont

$$u_k(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{(k\pi)^{\frac{7}{2}-s+\varepsilon}} \left(1 - (2r)^{\frac{4}{3}} + (2r)^{\frac{5}{3}} - (2r)^2\right)^2 r^{2/3} \sin(2\theta/3), & r \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & r \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ils sont choisis de façon à assurer la condition

$$(k\pi)^{2(1-s)} \|f^k\|_0^2 \sim \frac{1}{(k\pi)^{1+2\varepsilon}},$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Grâce à [32, Inég. (25)], voir aussi [26], le coefficient de singularité γ appartient à $H^{1-\alpha}(]0,1[)$, mais est de régularité $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ lorsque $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, voir [50]. La Figure 3.7 représente le coefficient de singularité γ_h approché obtenu par la MFCS pour différents pas de maillage pour $f = 1$: l'annulation de γ_h aux extrémités est dûe aux conditions de Dirichlet. Cependant, la famille $\{\gamma_h\}_h$ semble converger vers une limite régulière s'annulant bien en $z = 0$ et $z =$

s	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
β_1	0.97	1.00	1.03	1.03	1.02

TAB. 3.5 – Taux de convergence en norme H^1 pour f dans $H_0^{1-s}(]0,1[;L^2(\omega)), s \neq 1/2$ et $H_{00}^{1/2}(]0,1[,L^2(\omega))$, $N = 32$.

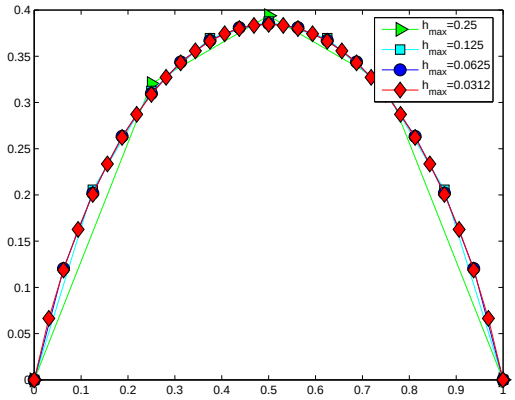


FIG. 3.7 – Coefficient de singularité d'arête γ_h pour différents pas de maillage h avec $f = 1$.

1. Il est aussi interessant de considérer le cas où le second membre f n'est pas régulier : la Figure 3.8 représente le coefficient γ pour $f(z) = \log(|\log(z/2)|)$ qui appartient à $H^{1/2}(]0,1[)$. La famille $\{\gamma_h\}_h$ converge au sens H^2 seulement hors d'un voisinage de $z = 0$. Pour obtenir une convergence, sur toute l'arête, il faut se placer dans l'espace à poids auquel appartient le coefficient de singularité [38].

3.2.3 Cas prismatique : MFCS et éléments finis 3D

Dans cette partie, on s'intéresse à la méthode combinant les éléments finis 3D avec la MFCS. On utilise la partie singulière de la solution pour approcher la partie régulière par éléments finis prismatiques. Comme la partie singulière n'est pas en en général explicitement connu pour des seconds membres $f \in L^2(\Omega)$, on fait les mêmes hypothèses sur f que pour la MFCS i.e. $f \in H^2(]0,1[,L^2(\omega)) \cap H_0^1(]0,1[,L^2(\omega))$. La partie singulière s'exprime alors simplement comme $\gamma(z)\phi_s$ avec $\gamma \in H^2(]0,1[) \cap H_0^1(]0,1[)$. Si

$$\gamma_h(z) = \sum_{k=0}^{N(h)} c_h^k \sin(k\pi z), \quad N(h) = k_{\max} = [h^{-\frac{1}{2-\alpha}}], \tag{3.3}$$

est le coefficient de singularité d'arête obtenu par la MFCS, la partie régulière est approchable par les éléments finis prismatiques décrit dans le paragraphe 3.2.1. En écrivant

$$u = u_r + \gamma\phi_s,$$

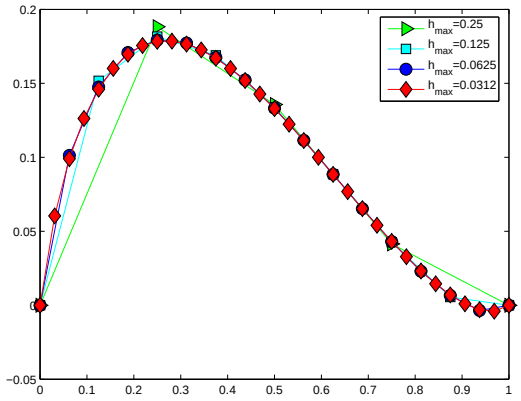


FIG. 3.8 – Coefficient de singularité d'arête γ_h pour différents pas de maillage h avec $f(z) = \log(|\log(z/2)|)$.

avec $\gamma \in H^2(]0,1[) \cap H_0^1(]0,1[)$, on sait que la partie régulière u_r résout le problème aux limites suivant :

$$-\Delta u_r = f + (\gamma'' \phi_s - \gamma p_s) \text{ dans } \Omega\,; \quad u_r = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

où p_s, ϕ_s sont définis comme dans la MFCS. Comme u_r et γ sont tous deux de régularité H^2, l'approximation par éléments finis prismatiques de u_r est obtenue avec une convergence optimale alors que l'approximation de γ par γ_h est réalisée en $\mathcal{O}(h)$, cf. [32, Inég. (68)]. La convergence globale de la méthode est illustrée dans le tableau Tab. 3.6 où f est associé à la solution exacte (3.2) de la partie précédente.

h	Sommets 3D	Sommets 2D	$\|u - u_h\|_1$	β_1
0.25	565	113	1.24e-2	-
0.125	3753	417	7.80e-3	0.65
0.0625	27217	1601	4.22e-3	0.88
0.0312	207009	6273	2.13e-3	0.98

TAB. 3.6 – Erreurs en norme H^1 en utilisant la MFCS pour la partie singulière et les éléments finis 3D pour la partie rgulière.

On retrouve le taux de convergence optimal pour la norme H^1. Comme $\gamma \in H^2(]0,1[) \cap H_0^1(]0,1[)$, sa série de Fourier converge dans $H^2(]0,1[) \cap H_0^1(]0,1[)$ (cf. [32, Lemma 6.1] ; dans cet exemple, la convergence a lieue sans hypothèses additionnelles sur f), ce qui permet de retrouver une convergence optimale. On pourra remarquer aussi que les erreurs sont quasi-identitiques à celles prsentées dans le tableau Tab. 3.4.

Pour résumer, on peut conclure que la MFCS est une méthode efficace d'après les résultats numériques obtenus même si on ne suppose pas les conditions de nullité de f aux faces du prisme (au moins lorsque le coefficient de singularité γ appartient à un espace convenable). Dans la partie 3.4, on compare et analyse les différentes méthodes présentées d'un point de vue de la complexité des algorithmes. On verra que la MFCS est la moins coûteuse.

3.3 Cas axisymétrique : FFEM et MFCS

On s'intéresse maintenant au cas d'un domaine invariant par rotation possédant une arête rentrante. Les notations géométriques sont celles du chapitre précédent. On compare ici la MFCS avec la FFEM réalisée avec des maillages quasi-uniformes et des maillages raffinés au coin rentrant E sur γ_b du domaine ω. Les résultats numériques ont été obtenus grâce au code FEMGP [58]. On note (r, θ, z) les coordonnées cylindriques, et et on rappelle que Ω est le domaine engendré par rotation autour de l'axe (Oz) de ω, γ_b engendre alors la frontière $\partial\Omega$ de Ω.

En effectuant une transformée de Fourier suivant θ, les modes u_k sont solutions des problèmes aux limites (2.13) et (2.14).

On introduit (r_E, z_E) les coordonnées du coin rentrant E et (ρ, ϕ) les coordonnées polaires locales au point E (voir la figure Fig. 2.1)

$$r - r_E = \rho\,\cos(\varphi + \varphi_0), \quad z - z_E = \rho\,\sin(\varphi + \varphi_0). \tag{3.4}$$

La FFEM avec raffinement de maillage consiste à décomposer la solution en série de Fourier suivant θ et à résoudre les problèmes vérifiés par les modes par éléments finis $2D$ en raffinant le maillage au coin. Pour décrire ce raffinement, on introduit un paramètre μ $(0 < \mu \leq 1)$. Etant donné alors un $h > 0$, on note $J = [h^{-1}]$, la partie entière de h^{-1}. La triangulation $\mathcal{T}_h$ est alors construite de la façon suivante : on définit

$$\begin{aligned}
\rho_j &:= \tilde{\rho}\,(jh)^{\frac{1}{\mu}}, && j = 0, 1, \ldots, J \\
h_j &:= \rho_j - \rho_{j-1}, && j = 1, 2, \ldots, J \\
B_j &:= \{(r, z) \in \omega : \rho_{j-1} < \rho \leq \rho_j\}, && j = 1, 2, \ldots, J,
\end{aligned}$$

où $\tilde{\rho}$, est un réel tel que $0 < \tilde{\rho} < r_E$, et on suppose que (cf. [73, 8])

(i) $l_1 h \leq h_T \leq l_2 h$ si $T \in \mathcal{T}_h$ avec $T \cap B_j = \emptyset$ pour tout $j = 1, \ldots, J$,

(ii) $l_1 h_j \leq h_T \leq l_2 h_j$ s'il existe $j \in \{1, \ldots, J\}$ tel que $T \cap B_j \neq \emptyset$

où l_1, l_2 ne dépendent pas de h. Le nombre n_j de triangles satifaisant $T \cap B_j \neq \emptyset$ pour un $j \in \{1, \ldots, J\}$ vérifie $n_j \leq Cj$ avec une constante C indépendante de h, j. Pour $\mu = 1$, le maillage est quasi-uniforme, et pour $0 < \mu < 1$, le maillage est quasi-uniforme hors d'un voisinage du coin. Le nombre total de sommets de $\mathcal{T}_h$ reste de l'ordre $\mathcal{O}(h^{-2})$. Les figures 3.12 et 3.13 représentent des exemples de tels maillages.

On recherche les vitesses de convergence sous la forme

$$\|u - u_h^N\|_{H^1(\Omega)} \approx C_1 h^\beta + C_2 N^{-\gamma} \tag{3.5}$$

où u et u_h^N sont respectivement les solutions exactes de (2.3) et les approximations obtenues par la MFCS (ou FFEM), β et γ sont respectivement les taux de convergence relatifs à h et N. Le code FEMGP calcule les normes $\|u - u_h^N\|_{H^1(\Omega)}$ relativement à h et N séparément. On calcule ensuite les valeurs de β (ou γ) successivement entre deux niveaux de raffinement en h ou N voir [79, **S**. 6.2.1] ou [56, **S**. 7] pour plus de détails.

Le domaine de calcul 2D est le même que précédemment $\omega :=]0, 1[\times]0, 1[\setminus]0.5, 1[\times]0.5, 1[$, le coin rentrant étant $E = (r_E, z_E) = (0.5, 0.5)$, l'angle ϕ_0 dans (3.4) est $\frac{\pi}{2}$, et l'exposant de

singularité est $\alpha = \frac{2}{3}$. On prend comme solution exact pour effectuer les tests

$$\begin{aligned} u(r,\theta,z) &= \tilde{u}(\rho,\phi)\Theta(\theta) \quad \text{avec} \\ \tilde{u}(\rho,\phi) &= \begin{cases} (-2^{\frac{7}{3}}\,\rho^3 + 7\cdot 2^{\frac{4}{3}}\,\rho^2 - 14\,\rho^{\frac{5}{3}} + \rho^{\frac{2}{3}})\,\sin(\frac{2}{3}\phi) & \text{pour } \rho \le 0.5, \\ 0 & \text{pour } \rho > 0.5, \end{cases} \\ \Theta(\theta) &= \begin{cases} -\theta^2 + \pi\theta & \text{pour } 0 < \theta \le \pi, \\ \theta^2 - 3\pi\theta + 2\pi^2 & \text{pour } \pi < \theta \le 2\pi\,, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.6}$$

et u peut être représentée par la série

$$u(r,\theta,z) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}^{2k+1}(\rho,\phi)\,\sin((2k+1)\theta) \quad \text{avec } \tilde{u}^{2k+1}(\rho,\phi) = \frac{\tilde{u}(\rho,\phi)}{(2k+1)^3}. \tag{3.7}$$

Pour des raisons pratiques, on choisit la représentation en sin-cos plutôt qu'en $\mathrm{e}^{ik\theta}$ pour les développements en séries de Fourier.

Afin de retrouver la vitesse de convergence optimale avec la méthode FFEM avec raffinement de maillage, on doit choisir le paramètre μ avec $\mu < \alpha$. Lorsque $\alpha \le \mu < 1$ la vitesse de convergence est meilleure qu'avec des maillages quasi-uniformes mais non optimale [8]. Les tests ont été effectués avec trois façons de raffiner le maillage correspondantes à trois différentes valeurs du paramètre μ : $\mu_2 = 1.02\alpha = 0.68$, $\mu_3 = 0.8\alpha \approx 0.533$ et $\mu_1 = 1$ correspondant au maillage quasi-uniforme. Les figures Fig. 3.12 et 3.13 montrent le raffinement pour $\mu = \mu_3$ et des pas de maillage $h = 0.125$ et $h = 0.0625$. L'intégration des fonctions singulières φ_s^k, $k \ge 0$, $p_s^{0,e;h}$, $p_s^{k;h}$, $k = 1, 2$ définies au chapitre précédent est réalisée comme mentionné dans la partie 3.1.1.

Le tableau Tab. 3.7 représente les résultats obtenus pour la convergence en norme H^1 relativement au pas du maillage h. Les quantités e_{μ_i}, $i = 1, 2, 3$, (resp. e_{MFCS}) désignent les normes H^1 pour l'erreur d'approximation, et β_{μ_i} (resp. β_{MFCS}) sont les taux de convergence correspondants. Le paramètre N est pris égal à $N = [h^{-1}]$, la valeur de $k_{\max}$ est déterminée par $k_{\max} := \left[h^{-\frac{1}{2-\alpha_0}}\right]$. On a choisi $\alpha_0 = 0.51$. Les résultats présentés dans le tableau Tab. 3.7 confirment le taux de

h	e_{μ_1}	β_{μ_1}	e_{μ_2}	β_{μ_2}	e_{μ_3}	β_{μ_3}	e_{MFCS}	β_{MFCS}	$k_{\max}$
0.125	2.361e-1	–	2.072e-1	–	1.695e-1	–	1.701e-1	–	4
0.0625	1.485e-1	0.669	1.175e-1	0.818	7.957e-2	1.091	9.094e-2	0.903	6
0.0312	9.004e-2	0.722	6.463e-2	0.863	3.946e-2	1.012	4.696e-2	0.953	10
0.0156	5.401e-2	0.737	3.484e-2	0.891	1.994e-2	0.985	2.381e-2	0.980	16
0.0078	3.214e-2	0.749	1.849e-2	0.914	1.017e-2	0.971	1.197e-2	0.992	25

TAB. 3.7 – Erreurs en norme H^1 : e_{μ_1}, e_{μ_2}, e_{μ_3}, e_{MFCS} ; et taux de convergence β_{μ_1}, β_{μ_2}, β_{μ_3}, β_{MFCS} par rapport à h pour la FFEM avec maillages quasi-uniformes ($\mu_1 = 1$), maillages raffinés ($\mu_2 = 0.68$, $\mu_3 \approx 0.533$) et la MFCS.

convergence théorique égal à 2/3 pour les maillages quasi-uniformes et 1 pour la méthode avec raffinement de maillage ($\mu < \alpha$) et la MFCS. En comparant les erreurs e_{μ_3} et e_{MFCS}, on peut remarquer une meilleure convergence avec la FFEM avec un raffinement de maillage correspondant à $\mu_3 = 0.8\alpha \approx 0.533$ qu'avec la MFCS pour l'exemple considéré. Comme annoncé, la FFEM avec un raffinement de maillage correspondant à un paramètre $\mu_2 = 1.02\alpha = 0.68$ a une meilleure vitesse de convergence qu'avec des maillages quasi-uniformes, mais non optimale.

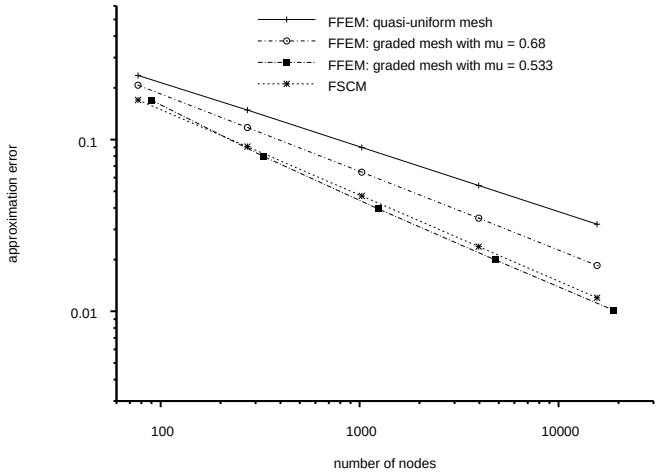


Figure 3.11 : Représentation $\log - \log$ des erreurs d'approximation pour la solution exacte (3.7)

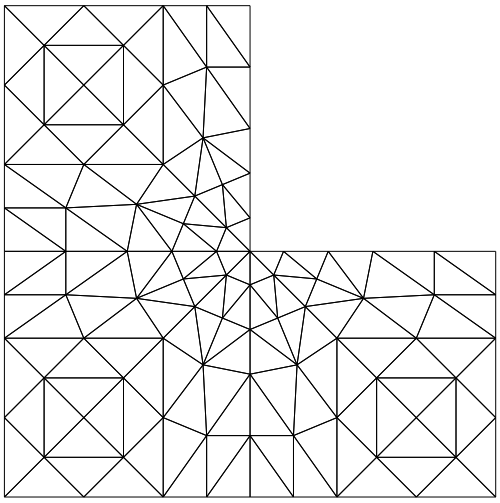


Figure 3.12 : Maillage raffiné pour $h = 0.125$ and $\mu \approx 0.533$

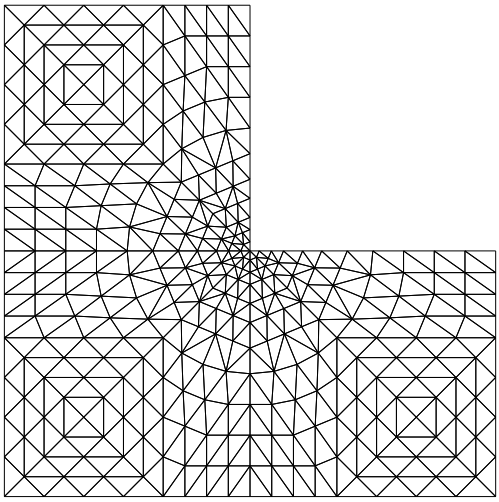


Figure 3.13 : Maillage raffiné pour $h = 0.0625$ and $\mu \approx 0.533$

L'étude de la vitesse de convergence par rapport au paramètre N est reportée dans le tableau Tab. 3.8 dans lequel les indices pour l'erreur e et le taux de convergence γ sont omis. On obtient des erreurs et des taux de convergence identiques pour toutes les méthodes testées. La convergence est indépendante de la méthode employée : en effet, la solution n'est pas singulière dans la direction de l'arête i.e. l'angle θ, et les paramètres h et N sont indépendants. Par conséquent, la FFEM avec raffinement ou la MFCS améliorent la convergence uniquement en h.

Les résultats du tableau Tab. 3.8 montrent que la vitesse de convergence en N est bien meilleure que celle prévue par la théorie $\gamma_{\text{th}} = 1$. Ceci est dûe à la régularité en θ de la solution qui est mieux que $H^2_{\text{per}}(]0, 2\pi[)$: en effet, les modes de Fourier ont un comportement en k^{-3} (voir (3.7)). Néanmoins, une régularité H^2 garantit une vitesse de convergence optimale $\gamma = 1$ en N. Par conséquent, il est intéressant de faire un test avec une solution moins régulière en θ. D'autre part, le poids r^{-1} dans les formulations variationnelles (2.14) suggère aussi de choisir des modes exacts qui ne soient pas zéro au voisinage de l'axe $r = 0$.

N	e	γ
8	1.3681e-3	–
16	4.5929e-4	1.5747
32	1.5985e-4	1.5227
64	5.5912e-5	1.5155
128	1.8620e-5	1.5863

TAB. 3.8 – Erreurs e en norme H^1 par rapport à N et taux de convergence γ.

Dans l'exemple suivant, on considère donc une solution exacte représentée par

$$u(r,\theta,z) = \frac{\bar{u}^0}{2} + \sum_{k=1}^{256} \frac{\bar{u}^k}{k^{\,2.51}} \sin k\theta \tag{3.8}$$

avec $\bar{u}^k = \tilde{u} + \hat{u}^k$ pour $k = 0, \ldots, 256$, $\tilde{u}$ est le même que dans (3.6), et

$$\begin{aligned} \hat{u}^0(r,z) &= (12r^3 - 14r^2 + 2)\,(z^3 - 1.5z^2 + 0.5z)\,, \\ \hat{u}^k(r,z) &= (r^{3.1} - 1.5r^{2.1} + 0.5r^{1.1})\,(z^3 - 1.5z^2 + 0.5z)\,, \quad k = 1, \ldots, 256. \end{aligned}$$

On a rajouté les termes $\hat{u}^k$ à $\tilde{u}$ pour assurer que les modes de Fourier de u ne sont pas nuls au voisinage de l'axe $r = 0$. Cependant, les fonctions $\bar{u}^k$ pour $k \neq 0$ s'annullent juste en $r = 0$ (voir la proposition 2.1.4).

h	e_{μ_1}	β_{μ_1}	e_{μ_2}	β_{μ_2}	e_{μ_3}	β_{μ_3}	e_{MFCS}	β_{MFCS}
0.125	1.708e-1	–	1.533e-1	–	1.300e-1	–	1.178e-1	–
0.0625	1.059e-1	0.690	8.631e-2	0.829	6.257e-2	1.055	6.322e-2	0.898
0.0312	6.351e-2	0.738	4.705e-2	0.875	3.122e-2	1.003	3.250e-2	0.960
0.0156	3.777e-2	0.750	2.519e-2	0.902	1.577e-2	0.985	1.642e-2	0.985
0.0078	2.234e-2	0.758	1.326e-2	0.925	8.027e-3	0.974	8.232e-3	0.996

TAB. 3.9 – Erreurs en norme H^1 : e_{μ_1}, e_{μ_2}, e_{μ_3}, e_{MFCS} ; et taux de convergence β_{μ_1}, β_{μ_2}, β_{μ_3}, β_{MFCS} par rapport à h pour la FFEM avec maillages quasi-uniformes ($\mu_1 = 1$), avec raffinement de maillage ($\mu_2 = 0.68$, $\mu_3 \approx 0.533$) et pour la MFCS.

On a représenté les résultats obtenus dans le tableau Tab. 3.9. Les valeurs de $k_{\max}$ sont les mêmes que dans le tableau Tab. 3.7. Les taux de convergence sont maintenant très près des valeurs théoriques et les taux β_{μ_1}, β_{μ_2} sont légèrement meilleurs que ceux de l'exemple précédent. Le tableau Tab. 3.10 montrent les erreurs d'approximations et les taux de convergence obtenus par rapport à N. On retrouve les résulats prévues par la théorie $\gamma_{\text{th}} = 1$ lorsque la solution a simplement une régularité $H^2_{\text{per}}(]0, 2\pi[)$ en θ.

N	e	γ
8	2.4070e-3	–
16	1.1731e-3	1.0370
32	5.8013e-4	1.0158
64	2.8242e-4	1.0386
128	1.2595e-4	1.1650

TAB. 3.10 – Erreurs en norme H^1 et taux de convergence γ par rapport à N.

3.4 Analyse de la complexité

Dans cette partie, on analyse les méthodes considérées dans les parties 3.2 et 3.3 du point de vue de la complexité algorithmique. A cet effet, on introduit les notations suivantes :

- K - nombre de mode de Fourier utilisés pour l'approximation ;
- $k_{\max}$ - paramètre intervenant dans MFCS, $k_{\max} = [h^{-\frac{1}{2-\alpha}}]$, cf. parties 3.2.2 et 3.3 ;
- N_2 - nombre de nœuds du maillage 2D ;
- ε - erreur de tolérance dans la méthode du gradient conjugué ;
- k_0 - le nombre d'itérations pour la résolution d'un système linéaire par la méthode du gradient conjugué préconditionné. Pour un h donné, il existe un nombre $k_{\mathrm{GC}}(h)$ tel que le nombre d'itération pour atteindre la tolérance ε par la méthode du gradient conjugué préconditionné est en $\mathcal{O}(N_2^{3/2} \ln \varepsilon^{-1})$ pour $k \leq k_{\mathrm{GC}}(h)$ et $\mathcal{O}(N_2 \ln \varepsilon^{-1})$ pour $k > k_{\mathrm{GC}}(h)$, avec k le rang du mode de Fourier ; on pose $k_0 = k_{\mathrm{GC}}(h)$ pour la FFEM, et $k_0 = \min(k_{\mathrm{GC}}(h), k_{\max})$ pour la MFCS.
- m - nombre de sous-intervalles utilisés pour la FFT ;
- q_1 - nombre de points de quadrature utilisés pour l'integration 1D ;
- q_2 - nombre de points de quadrature utilisés pour l'integration 2D .

On commence d'abord avec la FFEM. Pour chaque k, la matrice $\mathbb{A}_{kh}$ du système linéaire pour la méthode des éléments finis est $\mathbb{A}_{kh} = \mathbb{A}_h + k^2 \mathbb{D}_h$, donc les matrices de rigidité $\mathbb{A}_h$ et la matrice de masse $\mathbb{D}_h$ sont calculées une fois pour toute. De plus, pour k assez grand, $k^2\mathbb{D}_h$ est dominant dans $\mathbb{A}_{kh}$ de sorte que la matrice $\mathbb{A}_{kh}$ est bien conditionnée, et le nombre d'itérations pour la résolution du système diminue.

On donne dans le tableau Tab. 3.11, le nombre d'opérations arithmétiques pour chaque étape dans la mise en œuvre de la FFEM pour des domaines axisymétriques et prismatiques, même si elle n'a été implémentée que dans le cas axisymétrique (cf. partie 3.3).

D'après le tableau Tab. 3.11, le nombre total d'opérations arithmétique pour la FFEM a un comportement en

$$\mathcal{O}(q_2 N_2 K \, + \, q_2 N_2 m \log_2 m \, + \, k_0 N_2^{\frac{3}{2}} \ln \varepsilon^{-1} + (K - k_0) N_2 \ln \varepsilon^{-1}). \tag{3.9}$$

Dans le cas de la MFCS, on doit prendre en compte en plus le nombre d'opérations pour le calcul des fonctions singulières duales et primales, des coefficients c_h^k (ou λ_k^h) et des parties régulières $\tilde{u}_h^k$ (ou $\check{u}_h^k$) pour $k = 0, \ldots, k_{\max}$. Mentionnons aussi que les singularités duales et primales sont indépendantes des méthodes (FFEM/MFCS) et sont calculées une fois pour toute. Pour les domaines prismatiques, un seul couple doit être calculé tandis qu'il en faut trois pour les domaines axisymétriques (cf. (2.25),(2.33), (2.39)).

Etapes	**Nombre d'opérations**
Calcul pour un coefficient de la matrice de rigidité et de la matrice de masse	$\mathcal{O}(q_2 N_2)$
Assemblage des matrices $\mathbb{A}_h$ et $\mathbb{D}_h$	$\mathcal{O}(N_2)$
Evaluation du mode de Fourier f^k de f en chaque point de quadrature	$\mathcal{O}(q_2 N_2 m \log_2 m)$
Calcul pour un coefficient du membre de droite pour $k = 1, \ldots, K$	$\mathcal{O}(q_2 N_2 K)$
Résolution de K systèmes linéaires par la méthode du gradient conjugué préconditionné	$\mathcal{O}(k_0 N_2^{\frac{3}{2}} \ln \varepsilon^{-1})+$ $\mathcal{O}((K - k_0) N_2 \ln \varepsilon^{-1})$
Reconstitution de la solution 3D à partir de celles des problèmes 2D	$\mathcal{O}(N_2 m \log_2 m)$

TAB. 3.11 – Nombre d'opérations arithmétiques pour la FFEM pour des domaines prismatiques and axisymétriques.

Pour le calcul des parties régulières $\tilde{u}_h^k$, les matrices $\mathbb{A}_h, \mathbb{D}_h$, et les seconds membres nécessitent le même nombre d'opérations que dans la FFEM. Il faut donc rajouter uniquement le calcul de $a_k(\varphi_s^h, v)$ pour le cas prismatique (cf. partie 3.2.2) et le calcul de $a_0(\varphi_s^{0,e;h}, v)$, $a_{\pm 1}(\varphi_s^{1;h}, v)$, and $a_k(\varphi_s^{2;h}, v), |k| \geq 2$, pour le cas axisymétrique (cf. partie 3.3). Ceci conduit au tableau Tab. 3.12.

Etapes	**Nombre d'opérations**
Assemblage des matrices de rigidité pourles singularités duales et primales	$\mathcal{O}(q_2 N_2)$
Résolutions des systèmes linéaires par la méthode du gradient conjugué préconditionné	$\mathcal{O}(N_2^{\frac{3}{2}} \ln \varepsilon^{-1})$
Calcul des coefficients c_h^k pour $k = 1, \ldots, k_{\max}$	$\mathcal{O}(q_2 N_2 k_{\max})$
Assemblage du terme $a_k(\varphi_s^h, v)$ pour $k = 1, \ldots, k_{\max}$	$\mathcal{O}(q_2 N_2 k_{\max})$
Résolution de $k_{\max}$ systèmes linéaires par la méthode du gradient conjugué préconditionné (if $k_{\max} > k_0$)	$\mathcal{O}(k_0 N_2^{\frac{3}{2}} \ln \varepsilon^{-1})+$ $\mathcal{O}((k_{\max} - k_0) N_2 \ln \varepsilon^{-1})$
Résolution des problèmes 2D $u_h^k = \tilde{u}_h^k + c_h^k \varphi_s^h$, $k = 1, \ldots, k_{\max}$	$\mathcal{O}(k_{\max} N_2)$

TAB. 3.12 – Nombres d'opérations supplémentaires nécessaires pour la MFCS pour les cas prismatiques et axisymétriques.

Le nombre d'opérations supplémentaires pour la MFCS est en

$$\mathcal{O}(q_2 N_2 k_{\max} \; + \; k_0 N_2^{\frac{3}{2}} \ln \varepsilon^{-1} \; + \; (k_{\max} - k_0) N_2 \ln \varepsilon^{-1}). \tag{3.10}$$

Pour les méthodes contenant une approximation par éléments finis 3D pour les domaines prismatiques, i.e. éléments finis prismatiques 3D et la méthode utilisée dans la partie 3.2.3, on introduit les notations supplémentaires suivantes

- N_1 - nombre de sommets présent sur l'arête ;
- N_3 - nombre total de sommets du maillage 3D ;
- q_3 - nombre de points de quadrature pour l'intégration 3D.

Pour les maillages 3D utilisés dans la partie 3.2.1, on a les relations $q_2 q_1 = q_3$, $N_2 N_1 = N_3$, et la régularité des maillages implique $N_1 \approx h^{-1} \approx \sqrt{N_2}$. De plus, pour le paramètre $k_{\max}$ de la MFCS, on a $k_{\max} \approx h^{-\frac{1}{2-\alpha}} \approx N_2^{\frac{1}{2(2-\alpha)}}$.

L'utilisation des éléments finis prismatiques seuls pour résoudre le problème ne recquiert que les matrices de rigidité et la discrétisation du second membre ainsi qu'une méthode de gradient conjugué. Le nombre d'opérations relatives à chacune de ces étapes et reporté dans le tableau Tab. 3.13 d'où on déduit un coût total pour la mise en œuvre des éléments finis prismatiques

$$\mathcal{O}(q_2 N_2 q_1 N_1 + (N_1 N_2)^{\frac{4}{3}} \ln \varepsilon^{-1}). \tag{3.11}$$

Etapes	**Nombre d'opérations**
Calcul pour un coefficient de la matrice de rigidité	$\mathcal{O}(q_2 N_2 q_1 N_1)$
Assemblage de la matrice de rigidité	$\mathcal{O}(N_2 N_1)$
Assemblage du second membre	$\mathcal{O}(N_1 q_1 N_2 q_2)$
Résolution du système linéaire par la méthode du gradient conjugué	$\mathcal{O}((N_1 N_2)^{\frac{4}{3}} \ln \varepsilon^{-1})$

TAB. 3.13 – Nombre d'opérations pour la méthode des éléments finis prismatiques 3D.

L'approximation de la partie singulière par la MFCS requiert le calcul des modes f_k de f ainsi qu'une approximation des modes u_k de la solution u. Le nombre de mode de Fourier utile à l'approximation de la partie singulière dépend de h (cf. partie 3.2.3), et seuls $k_{\max}$ modes doivent être calculés.

Le nombre d'opérations pour cette méthode est résumé dans le tableau Tab.3.14, où $\mathbb{A}_h$ et $\mathbb{D}_h$ sont les matrices de rigidité et de masse des problèmes 2D. Le nombre d'opération pour les calculs 3D sont les mêmes que ceux du tableau Tab. 3.13.

Le coût total pour la méthode MFCS/éléments finis prismatiques est donc en

$$\begin{aligned}\mathcal{O}((N_1 N_2)^{\frac{4}{3}} \ln \varepsilon^{-1} + N_1 q_1 N_2 q_2 + k_0 N_2^{\frac{3}{2}} \ln \varepsilon^{-1} + (k_{\max} - k_0) N_2 \ln \varepsilon^{-1} \\ + q_2 N_2 k_{\max} + q_2 N_2 m \log_2 m),\end{aligned} \tag{3.12}$$

les étapes les plus coûteuses étant la résolution du système linéaire 3D avec un coût en $\mathcal{O}(N_2^2 \ln \varepsilon^{-1})$ ainsi que la FFT avec un coût en $\mathcal{O}(N_2^{\frac{3}{2}} q_2 \ln(N_2))$.

Pour comparer ces résultats, on considère la situation la plus mauvaise en supposant $k_0 = k_{\max}$ pour la MFCS. Comme $K \geq k_{\max}$, les complexités pour la FFEM (3.9) et la MFCS (3.10)

Etape	**Nombre d'opérations**
Assemblages des matrice de rigidité relative aux singularités duale et primale	$\mathcal{O}(q_2 N_2)$
Résolution des systèmes linéaires par la méthode du gradient conjugué préconditionné	$\mathcal{O}(N_2^{\frac{3}{2}} \ln \varepsilon^{-1})$
Assemblages des matrices $\mathbb{A}_h$ et $\mathbb{D}_h$	$\mathcal{O}(N_2)$
Calcul des modes de Fourier f_k du second membre f en chaque point de quadrature	$\mathcal{O}(q_2 N_2 m \log_2 m)$
Assemblage des seconds membres pour $k = 1, \ldots, k_{\max}$	$\mathcal{O}(q_2 N_2 k_{\max})$
Résolution de $k_{\max}$ systèmes linéaires par méthode du gradient conjugué préconditionné (si $k_{\max} > k_0$)	$\mathcal{O}(k_0 N_2^{\frac{3}{2}} \ln \varepsilon^{-1}) +$ $\mathcal{O}((k_{\max} - k_0) N_2 \ln \varepsilon^{-1})$
Calcul des coefficients c_h^k pour $k = 1, \ldots, k_{\max}$	$\mathcal{O}(q_2 N_2 k_{\max})$
Sommation des termes $c_h^k \varphi_s^h$ pour $k = 1, \ldots, k_{\max}$	$\mathcal{O}(N_2 m \log_2 m)$

TAB. 3.14 – Nombre d'opérations arithmétiques pour l'approximation de la partie singulière par la MFCS.

sont équivalentes. En exprimant la complexité de la MFCS en termes de degrés de liberté 2D, on trouve un coût en $O(N_2^{2-\eta} \ln \varepsilon^{-1})$, avec $\eta = \frac{1-\alpha}{2(2-\alpha)} > 0$ ce qui est légèrement mieux que les méthodes 3D.

3.5 Conclusion

Les tests numériques ont montré que la MFCS conduit toujours à une vitesse de convergence optimale que ce soit en domaine prismatique ou invariant par rotation avec une arête rentrante. Il est aussi intéressant de remarquer que la convergence de la MFCS est optimale même si le second membre f ne satisfait pas les conditions d'annulation sur $\partial\omega \times \{0, 1\}$ pour le cas prismatique ou encore si f a une régularité plus faible par rapport à z, typiquement $f \in H_0^{1-s}(]0, 1[; L^2(\omega))$. Pour les domaines axisymétriques possédant une arête rentrante, les tests numériques conduisent à un même taux de convergence en N quelque soit la méthode employée. Toutefois, plus f est régulière en z et plus la vitesse de convergence par rapport au paramètre N est meilleure (cf. partie 3.3). D'autre part, le nombre $k_{\max}$ de modes de Fourier effectif à calculer est assez petit en comparaison avec N (cf. Tab. 3.4 et 3.7). Du point de vue de la complexité, le nombre d'opérations de la MFCS ou de la FFEM est légèrement inférieur à celui des méthodes 3D.

Deuxième partie : Coins arrondis

4

Coins arrondis en dimension deux

Sommaire

4.1 Introduction 85
4.2 Espaces fonctionnels. 86
4.2.1 Définitions et notations géométriques. 86
4.2.2 Espaces de Sobolev en domaine non borné. 88
4.2.3 Cas axisymétrique. 91
4.2.4 Espaces de Sobolev sur Ω. 92
4.3 Problème de Dirichlet dans le cône. 92
4.3.1 Le problème dans Ω. 93
4.3.2 Le problème dans Ω : cas cartésien. 95
4.3.3 Le problème dans Ω : cas axisymétrique. 100
4.4 Coins arrondis en dimension deux. 102
4.4.1 Généralités. 102
4.4.2 Développement asymptotique de la solution 107
4.4.3 Représentation intégrale de la dérivée normale. 111
4.5 Coins arrondis : cas axisymétrique. 113
4.5.1 Développement asymptotique de la solution. 113
4.5.2 Représentation intégrale de la dérivée normale. 115
4.6 Discrétisation du problème par éléments finis 117
4.6.1 L'opérateur Dirichlet-to-Neumann 117
4.6.2 Approximation par éléments finis 119
4.7 Expériences numériques. 120
4.8 Conclusion 122

4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes intéressés au calcul de champs électrostatiques au voisinage d'arêtes rentrantes et nous avons vu que la MFCS fournit une méthode efficace pour de tels problèmes. Dans les applications, beaucoup d'objets possèdent des singularités géométriques (coins/arêtes rentrants, pointes coniques) pour générer des champs intenses. Dans la réalité, les coins et les arêtes ne sont jamais "vifs" mais sont toujours arrondis avec un faible rayon de courbure. Les phénomènes physiques induits restent toujours intenses dans ce cas et c'est pourquoi on parle de géométrie quasi-singulière.

On s'interesse ici au calcul du champ électrique et la densité de charge au voisinage d'une pointe ayant un petit rayon de courbure en son sommet. Comme modèle, on considère le problème électrostatique pour le potentiel électrique. Pour ce problème, les formules empiriques de Peek décrivent la relation existante entre le champ éléctrique à la surface de l'électrode et son rayon de courbure. Néanmoins, ces formules sont valables uniquement pour des électrodes possédant une géométrie sphérique ou cylindre. On se propose de justifier rigoureusement ces formules et de les étendre à des géométries (invariante par rotation en dimension trois) coïncidant à l'infini avec celles d'un cône.

Le plan de ce chapitre est le suivant : dans un premier temps, nous précisons le cadre fonctionnel d'étude en introduisant les espaces à poids et les propriétés dont nous nous servirons pour le problème dans le cône infini et dans le cône "arrondi". Le cas du cône infini est traité dans une deuxième partie dans laquelle nous établissons les propriétés d'existence-unicité et de régularité. Les deux parties suivantes sont consacrées aux coins "arrondis"en variables cartésiennes et axisymétriques. A l'aide des développements multiéchelles, nous mettons en évidence le comportement asymptotique des solutions lorsque le rayon de courbure tend vers zéro, à partir duquel, nous obtenons celui de la dérivée normale au bout de l'arrondi. Enfin, nous illustrons ces résultats par quelques expériences numériques.

Notations. $\mathbf{R}^n$ désigne l'espace euclidien de dimension n, avec $n = 2, 3$.
Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{N}^n, n \in \{2, 3\}$, et $\varepsilon > 0$, on note

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \sqrt{1+|x|^2}, \\ \rho_\varepsilon(x) &= \varepsilon\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \sqrt{\varepsilon^2+|x|^2}, \quad \text{où} \quad |x| = \left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \partial^\lambda u &= \frac{\partial^{|\lambda|}u}{\partial x_1^{\lambda_1}\cdots\partial x_n^{\lambda_n}}, \qquad\qquad \text{où} \quad |\lambda| = \lambda_1+\cdots+\lambda_n. \end{aligned}$$

Lorsque A est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, et $\sigma > 0, \sigma A$ désigne l'ensemble :

$$\sigma A := \{\sigma m\,;\, m \in A\}\,.$$

$B_\sigma(x)$ la boule ouverte centrée en x et de rayon σ qu' on notera B_σ quand $x = O$.
Si A, B sont deux espaces topologiques avec $A \subset B, \overline{A}^B$ désigne la fermeture de A dans B.
Lorsque $n = 3$ et que l'on considère un ouvert axisymétrique, on le notera $\breve{A}$; A désignera sa trace dans un demi-plan méridien, un point de A étant repéré par ses coordonnées $(r, z), r = \sqrt{x_1^2+x_2^2}, z = x_3$.
$\mathcal{C}_0^\infty(A)$ est l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans A.
$\mathcal{C}_0^\infty(\overline{A})$ est l'ensemble des restrictions à $\overline{A}$ des fonctions de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.
$\mathcal{D}'(A)$ est l'ensemble des distributions sur A.
$L^2_{\mathrm{loc}}(A)$ est l'espace des fonctions localement de carré intégrable sur A.

4.2 Espaces fonctionnels.

4.2.1 Définitions et notations géométriques.

On définit d'abord la classe d'ouverts que l'on considère.

– Pour $n = 2$, et $1/2 < \alpha < 1$, on appelle Ω le secteur angulaire de sommet O d'angle au sommet π/α comme sur la Fig. 4.1, et $\Gamma = \partial\Omega$ son bord. Pour simplifier, on suppose dans

toute la suite que $\alpha \notin \mathbf{Q}$: on renvoie à [51, 70, 42] pour la nature des singularités lorsque $\alpha \in \mathbf{Q}$.
On note $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, l'application [1]

$$x \longmapsto \begin{cases} cx, & x < -1, \\ -\dfrac{c}{2}(x^2+1), & |x| \leq 1, \\ -cx, & x > 1. \end{cases} \tag{4.1}$$

globalement de classe $\mathcal{C}^1$ (et de classe $\mathcal{C}^2$ partout sauf aux points de raccord $x = \pm 1$), où $c = -\tan(\pi/(2\alpha))^{-1} > 0$ et ω l' ouvert

$$\omega := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 | x_2 > \varphi(x_1)\right\}.$$

Si $\varepsilon > 0$, on pose alors

$$\Omega_\varepsilon := \varepsilon\omega = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 |\ x_2/\varepsilon > \varphi(x_1/\varepsilon)\right\},$$

en particulier, $\Omega_1 = \omega$. On note $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon$ son bord et $O_\varepsilon = (0, -c\varepsilon/2)$ son sommet.

– Pour $n = 3$, et pour $1 < \beta < 2$, on appelle Ω le demi-cône de sommet O situé dans le demi plan $\left\{(r, z) \in \mathbf{R}^2, r > 0\right\}$ d'angle π/β comme sur la figure 4.1, et $\breve{\Omega}$ le cône engendré par rotation de Ω autour de l'axe (Oz).
On appelle de même φ l'application définie par (4.1) avec $c = -\tan(\pi/\beta)^{-1}$. L'ouvert ω est, quant à lui, défini par

$$\omega := \left\{(r, z) \in \mathbf{R}^2 | z > \varphi(r), r > 0\right\},$$

et engendre par rotation autour de l'axe (Oz) l'ouvert $\breve{\omega}$. On définit comme pour $n = 2$, les ouverts Ω_ε et $\breve{\Omega}_\varepsilon$. On note resp. $\Gamma_a, \Gamma_a^\varepsilon$ la partie de la frontière resp. de $\Omega, \Omega_\varepsilon$ situés sur l'axe $r = 0$ et $\Gamma_b, \Gamma_b^\varepsilon$ l' autre partie de la frontière resp. de Ω et Ω_ε (voir figure 4.1).

– Pour $\varepsilon = 0$, on convient que $\rho_0 = \rho, \Omega_0 = \Omega, \breve{\Omega}_0 = \breve{\Omega}$ et idem pour les bords de ces domaines. On notera que $\rho_0(x) \neq \lim_{\varepsilon\to 0} \rho_\varepsilon(x)$.

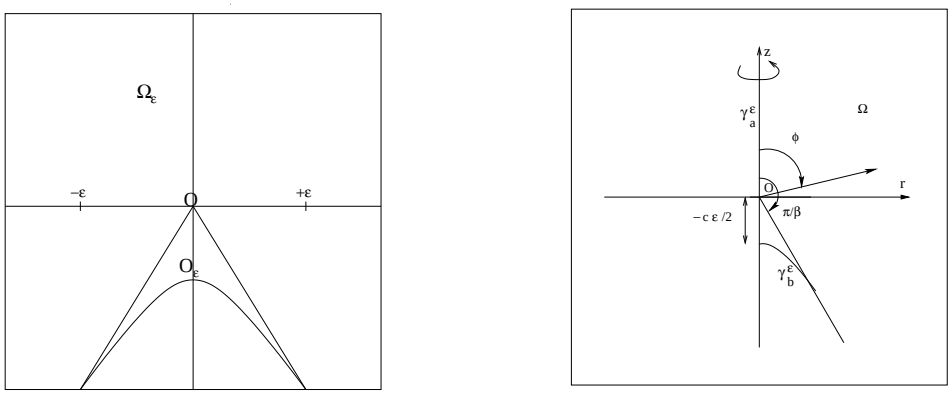


FIG. 4.1 – Domaines $\Omega, \Omega_\varepsilon$: cas cartésien ($n = 2$) et axisymétrique ($n = 3$).

[1] Pour des raisons pratiques, on choisit une forme parabolique. On vérifie par la suite que toute forme avec φ régulière respectant $\varphi(0) \neq 0, \varphi'(0) = 0$ convient.

4.2.2 Espaces de Sobolev en domaine non borné.

On définit dans cette partie les espaces fonctionnels pour l'étude du problème. Comme pour le cas du problème de Dirichlet dans un domaine extérieur, les espaces de Sobolev à poids fournissent un cadre approprié pour la recherche de solutions. La principale différence provient de la nature non bornée de la frontière qui nécessite de définir l'espace des traces qui convient. Nous introduisons donc les espaces :

Définition 4.2.1 *Pour $m \in \mathbf{N}, \beta \in \mathbf{R}$, introduisons*

- *pour $\varepsilon > 0$, l'espace :*

$$W^m_\beta(\Omega_\varepsilon) = \left\{ u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega_\varepsilon) \;\middle|\; w^\varepsilon_\lambda \partial^\lambda u \in L^2(\Omega_\varepsilon) \text{ pour } |\lambda| \leq m \right\},$$

- *et pour $\varepsilon = 0$, l'espace :*

$$W^m_\beta(\Omega) = \left\{ u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \;\middle|\; w_\lambda \partial^\lambda u \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\lambda| \leq m \right\}$$

où les poids $w^\varepsilon_\lambda, w_\lambda$ sont donnés par :

$$w^\varepsilon_\lambda(x) = \rho_\varepsilon(x)^{\beta+|\lambda|-m}, w_\lambda(x) = \rho(x)^{\beta+|\lambda|-m}.$$

Le rôle des poids est triple. Tout d'abord, ils fixent le comportement à l'infini. Ensuite, ils sont choisis de manière à obtenir des inégalités de coercivité de type Poincaré. Enfin, leur introduction dans les espaces W^m_β ne modifie pas le comportement des éléments à l'origine : de cette façon, les propriétés locales restent identiques à celle des espaces classiques. En particulier, on a la série d'inclusions suivantes :

$$H^m(\Omega_\varepsilon) \subset W^m_\beta(\Omega_\varepsilon) \subset H^m_{\mathrm{loc}}(\Omega_\varepsilon),$$

et si Ω_ε est borné,

$$W^m_\beta(\Omega_\varepsilon) = H^m(\Omega_\varepsilon).$$

L'interêt de l'introduction de poids dépendant de ε apparaîtra lors des estimations d'erreurs dans les développements asymptotiques.

Proposition 4.2.1 *$W^m_\beta(\Omega_\varepsilon)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(u,v)_{W^m_\beta(\Omega_\varepsilon)} = \sum_{0 \leq |\lambda| \leq m} \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\partial^\lambda u \cdot \partial^\lambda v \right) w^\varepsilon_\lambda(x)^2 \, \mathrm{d}x.$$

Par troncature, on se ramène aux propriétés des espaces $H^m(\Omega_\varepsilon)$. En particulier,

Proposition 4.2.2 *$\mathcal{C}^\infty_0(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ est dense dans $W^m_\beta(\Omega_\varepsilon)$.*

On peut alors s'intéresser à l'adhérence de $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega_\varepsilon)$ dans cet espace.

Définition 4.2.2 $\overset{\circ}{W}{}^m_\beta(\Omega_\varepsilon) := \overline{\mathcal{C}^\infty_0(\Omega_\varepsilon)}^{W^m_\beta(\Omega_\varepsilon)}$.

L'espace dual $\left(W^m_\beta(\Omega_\varepsilon)\right)'$ est caractérisé par :

Proposition 4.2.3 *$f \in (W^m_\beta(\Omega_\varepsilon))'$ si et seulement s'il existe $(f_\lambda)_{0\leq|\lambda|\leq m}$, vérifiant $w^\varepsilon_\lambda f_\lambda \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, telles que :*

$$< f, u >= \sum_{0\leq|\lambda|\leq m} \int_{\Omega_\varepsilon} f_\lambda \cdot \partial^\lambda u \ \mathrm{d}x, \forall u \in W^m_\beta(\Omega_\varepsilon).$$

Preuve. C'est une conséquence du théorème de Riesz. ∎

L'espace $W^m_\beta(\Omega_\varepsilon)$ coïncidant localement avec l'espace $H^m(\Omega_\varepsilon)$, les traces peuvent être définies localement. L'espace variationnel ad hoc. pour le laplacien étant $W^1_0(\Omega_\varepsilon)$, nous précisons les propriétés des traces pour cet espace. Le comportement des traces à l'infini est comparable à celui des traces pour un demi plan [54]. On définit donc l'espace suivant :

Définition 4.2.3

$$W_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon) := \left\{ u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Gamma_\varepsilon) \middle| \frac{u}{\sqrt{\rho_\varepsilon}} \in L^2(\Gamma_\varepsilon), \int_{\Gamma_\varepsilon\times\Gamma_\varepsilon} \frac{|u(\sigma)-u(\sigma')|^2}{|\sigma-\sigma'|^2} \,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\sigma' < \infty \right\}$$

Le dual de $W_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)$ est noté $W_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)$. La proposition suivante caractérise les traces de $W^1_0(\Omega_\varepsilon)$:

Proposition 4.2.4 *Pour $\varepsilon > 0$, l'opérateur trace*

$$\gamma : u \in \mathcal{C}^\infty_0(\overline{\Omega}_\varepsilon) \longrightarrow u_{|\Gamma_\varepsilon} \in \mathcal{C}^0(\Gamma_\varepsilon)$$

se prolonge continûment sur $W^1_0(\Omega_\varepsilon)$ en une application surjective à valeurs dans $W_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)$. De plus, $\gamma^{-1}(\{0\}) = \overset{\circ}{W}{}^1_0(\Omega_\varepsilon)$.

Dans le cas du cône (i.e. $\varepsilon = 0$), des conditions de compatibilité [53] au sommet doivent être ajoutées. Désignons par Γ_-, Γ_+ les deux composantes de son bord : $\Gamma = \Gamma_- \cup \{O\} \cup \Gamma_+$. Pour $u \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$, on notera $u^-(\sigma) = u(x^-(\sigma))$ et $u^+(\sigma) = u(x^+(\sigma))$ où $\sigma \in \mathbf{R}^+ \to x^+(\sigma)$ (resp. $x^-(\sigma)$) est une paramétrisation linèaire de Γ_+ (resp. Γ_-). La deuxième condition dans la définition de $W_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ signifie aussi qu'au voisinage du coin, les traces u^+ et u^- vérifient[53]

$$\exists \delta_0 > 0, \int_0^{\delta_0} |u^+(\sigma) - u^-(\sigma)| \frac{d\sigma}{\sigma} < \infty. \tag{4.2}$$

Proposition 4.2.5 *L'opérateur trace*

$$\gamma : u \in \mathcal{C}^\infty_0(\overline{\Omega}) \longrightarrow u_{|\Gamma} \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$$

se prolonge continûment sur $W^1_0(\Omega)$ en une application surjective à valeurs dans $W_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, son noyau est $\gamma^{-1}(\{0\}) = \overset{\circ}{W}{}^1_0(\Omega)$.
De plus,

$$g \in W_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g^\pm \in W_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\pm), \ \textit{et} \\ \ \textit{il existe} \ \ \delta_0 > 0, \displaystyle\int_0^{\delta_0} |g^+(\sigma) - g^-(\sigma)|^2 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}. \end{array} \right.$$

Pour établir les formules de Green nous avons besoin de définir d'autres espaces.

Définition 4.2.4 $W(\mathrm{div},\Omega_\varepsilon) := \left\{\mathbf{u}\in L^2(\Omega_\varepsilon)^2, \rho_\varepsilon \mathrm{div}(\mathbf{u})\in L^2(\Omega_\varepsilon)\right\}.$

Muni du produit scalaire

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathrm{div},\Omega_\varepsilon} := (\mathbf{u},\mathbf{v})_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + (\rho_\varepsilon(x)\mathrm{div}(\mathbf{u}),\rho_\varepsilon(x)\mathrm{div}(\mathbf{v}))_{L^2(\Omega_\varepsilon)},$$

c'est un espace de Hilbert.

Proposition 4.2.6 *L'espace $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)^2$ est dense dans $W(\mathrm{div},\Omega_\varepsilon)$.*

Preuve. Soit $L\in W(\mathrm{div},\Omega)'$ tel que $L(\varphi)=0, \forall\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\bar\Omega)^2$. D'après le théorème de Riesz, il existe $\ell\in W(\mathrm{div},\Omega)$ tel que :

$$L(\varphi) = (\ell,\varphi)_{L^2} + (\rho(x)\mathrm{div}(\ell),\rho(x)\mathrm{div}(\varphi))_{L^2}.$$

On appelle $\tilde\ell$ et $\tilde q$ les prolongements respectifs de ℓ et $q=\mathrm{div}(\ell)$ à $\mathbf{R}^2$ par zéro et on note $\tilde L$ la forme associée. On a alors pour tout $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^2)^2$, :

$$\begin{aligned}\tilde L(\varphi) &= (\tilde\ell,\varphi)_{L^2} + (\rho(x)\tilde q,\rho(x)\mathrm{div}(\varphi))_{L^2},\\ &= 0,\end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$-\nabla(\rho(x)^2\tilde q) = \tilde\ell, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)^2.$$

Comme $\tilde\ell\in L^2(\mathbf{R}^2)^2$ et que $\rho(x)\tilde q\in L^2(\mathbf{R}^2)$, on a :

$$\rho(x)^2\tilde q\in W^1(\mathbf{R}^2),$$

Comme $\tilde q$ est identiquement nul dans $\mathbf{R}^2-\Omega$, on a en fait $\rho(x)q\in\overset{\circ}{W}{}_0^1(\Omega)$ de sorte qu'il existe une suite $(w_n)_n$ de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que :

$$\left\|\frac{w_n}{\rho(x)} - \rho(x)q\right\|_0 + \|\ell-\nabla w_n\|_0 \longrightarrow 0.$$

Soit alors $\mathbf{u}\in W(\mathrm{div},\Omega)$.

$$\begin{aligned}L(\mathbf{u}) &= (\ell,\mathbf{u})_{L^2} + (\rho(x)\mathrm{div}(\ell),\rho(x)\mathrm{div}(\mathbf{u}))_{L^2},\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla w_n dx + \int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{u})w_n dx,\\ &= \lim_{n\to+\infty} 0.\end{aligned}$$

■

Les éléments de $W(\mathrm{div},\Omega)$ possèdent une trace faible, décrite dans le résultat suivant

Proposition 4.2.7 *Pour $\varepsilon\geq 0$, l'application $\gamma_n : \mathbf{u}\in\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)^2 \to \mathbf{u}.\mathbf{n}|_{\Gamma_\varepsilon}\in L^2(\Gamma_\varepsilon)$ se prolonge en une application linéaire continue, notée encore γ_n de $W(\mathrm{div},\Omega_\varepsilon)$ dans $W_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)$. De plus, on a la formule d'intégration par parties suivante :*
$\forall\mathbf{u}\in W(\mathrm{div},\Omega_\varepsilon),\ v\in W_0^1(\Omega_\varepsilon)$,

$$(\mathbf{u},\nabla v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + (\mathrm{div}(\mathbf{u}),v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = {}_{W_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)}<\mathbf{u}.\mathbf{n}|_{\Gamma_\varepsilon}, v|_{\Gamma_\varepsilon}>_{W_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)}. \tag{4.3}$$

Preuve. Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)^2$ et $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)$. On a :

$$(\mathbf{u}, \nabla v)_{L^2} + (\mathrm{div}(\mathbf{u}), v)_{L^2} = -\int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{u}.\mathbf{n} v d\sigma.$$

Le membre de gauche est continue par rapport à v pour la norme W_0^1 et par densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ dans $W_0^1(\Omega_\varepsilon)$, l'identité précédente reste valide pour $v \in W_0^1(\Omega_\varepsilon)$, et on a :

$$|\int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{u}.\mathbf{n} v d\sigma| \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathrm{div}} \|v\|_{W_0^1}, \forall \mathbf{u} \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon), \forall v \in W_0^1(\Omega_\varepsilon).$$

Pour $\mu \in W_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)$, et $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ on pose :

$$L(\mathbf{u}) = \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{u}.\mathbf{n} \mu d\sigma.$$

Considérons alors un relèvement continu $\mathcal{R}$ de $W_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)$ dans $W_0^1(\Omega_\varepsilon)$. On a alors :

$$\begin{aligned} |L(\mathbf{u})| &= \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{u}.\mathbf{n} \mu d\sigma \right|, \\ &\leq C\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{div}} \|\mathcal{R}\mu\|_{W_0^1}, \\ &\leq C\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{div}} \|\mu\|_{W_0^{\frac{1}{2}}}, \forall \mathbf{u} \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon), \end{aligned}$$

puisque $L(\mathbf{u}) = -\left\{(\mathbf{u}, \nabla \mathcal{R}\mu)_{L^2} + (\mathrm{div}(\mathbf{u}), \mathcal{R}\mu)_{L^2}\right\}$.
Comme L est continue en $\mathbf{u}$ pour la norme de $W(\mathrm{div}, \Omega_\varepsilon)$ et par densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ dans cet espace, L se prolonge à $W(\mathrm{div}, \Omega_\varepsilon)$. Ainsi, l'opérateur de trace $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)^2 \to \mathbf{u}.\mathbf{n}|_{\Gamma_\varepsilon} \in L^2(\Gamma_\varepsilon)$ se prolonge à $W(\mathrm{div}, \Omega_\varepsilon)$ et à valeur dans $W_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)$. ∎

4.2.3 Cas axisymétrique.

On définit identiquement pour $m \in \mathbf{N}, \beta \in \mathbf{R}$ les espaces $W_\beta^m(\breve{\Omega}_\varepsilon), \varepsilon \geq 0$ quand $n = 3$. Ils vérifient les mêmes propriétés qu'en dimension deux. L'espace des traces pour $W_0^1(\breve{\Omega}_\varepsilon)$ est défini cette fois par :

Définition 4.2.5

$$W_0^{\frac{1}{2}}(\breve{\Gamma}_\varepsilon) = \left\{ u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\breve{\Gamma}_\varepsilon) \middle| \frac{u}{\sqrt{\rho_\varepsilon}} \in L^2(\breve{\Gamma}_\varepsilon), \int_{\breve{\Gamma}_\varepsilon \times \breve{\Gamma}_\varepsilon} \frac{|u(\sigma) - u(\sigma')|^2}{|\sigma - \sigma'|^3} \,\mathrm{d}\sigma \,\mathrm{d}\sigma' < \infty \right\}.$$

Consacrons nous à la réduction de ces espaces à la dimension deux. On note pour $\mu \in \mathbf{R}, L^2_\mu(\Omega_\varepsilon)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure $r^\mu dr dz$. En particulier, on a le résultat suivant :

Lemme 4.2.1 *Soit $u \in W_\beta^2(\breve{\Omega}_\varepsilon)$ invariante par rotation autour de l'axe $r = 0$ et D^2u sa hessienne.*

$$\int_{\breve{\Omega}_\varepsilon} \rho_\varepsilon(x)^{2\beta} |D^2u(x)|^2 \,\mathrm{d}\breve{\Omega}_\varepsilon = 2\pi \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon(r,z)^{2\beta} \left\{ \left|\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right|^2 + \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|^2 \right\} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z.$$

Lorsque l'ouvert $\breve{\Omega}_\varepsilon$ est axisymétrique, on définit donc

Définition 4.2.6 *Pour $m \in \mathbf{N}, \beta \in \mathbf{R}$,*

$$W^m_{\beta,a}(\Omega_\varepsilon) = \left\{ u \in L^2_{1,\mathrm{loc}}(\Omega_\varepsilon) \middle| \rho_\varepsilon^{\beta+|\lambda|-m} \partial^\lambda_{r,z} u \in L^2_1(\Omega_\varepsilon), |\lambda| \leq m \right\}.$$

A l'aide du Lemme 4.2.1, et d'après [[18],[33]], les espaces en dimension trois se réduisent aux variables axisymétriques de la façon suivante :

Proposition 4.2.8 *Pour $m \in \{0,1\}$, l'espace $W^m_{\beta,a}(\Omega_\varepsilon)$ est l'ensemble des traces dans un demi-plan méridien des fonctions de $W^m_\beta(\breve{\Omega}_\varepsilon)$ qui sont invariantes par rotation. Pour $m = 2$ l'espace des traces correspondant est :*

$$W^2_{\beta,a,+}(\Omega_\varepsilon) = \left\{ u \in W^2_{\beta,a}(\Omega_\varepsilon) \middle| \rho_\varepsilon^\beta \partial_r u \in L^2_{-1}(\Omega_\varepsilon) \right\}$$

4.2.4 Espaces de Sobolev sur Ω.

Pour $x \in \Omega$, fixé $\varepsilon \longrightarrow 0, w^\varepsilon_\lambda(x)$ a pour limite $|x|^{\beta+|\lambda|-m}$. Les espaces de Sobolev construit à partir de ces poids sont les espaces naturels [65, 70] pour décrire les solutions des problèmes elliptiques posés dans un cône. On en rappelle ici la définition :

Définition 4.2.7 *Pour $m \in \mathbf{N}, \beta \in \mathbf{R}$,*

$$V^m_\beta(\Omega) = \left\{ u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \middle| \sum_{|\mu| \leq m} \int_\Omega |x|^{2(\beta+|\mu|-m)} |\partial^\mu u(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

On pourra noter que

$$u \in V^m_\beta(\Omega) \Longleftrightarrow \forall |\mu| \leq m, \ |x|^{|\mu|-m} \partial^\mu (|x|^\beta u) \in L^2(\Omega).$$

L'espaces des traces $V^{m-\frac{1}{2}}_\beta(\Gamma)$ associé est caractérisé lorsque $n = 2$ par :

$$\begin{aligned} V^{m-\frac{1}{2}}_\beta(\Gamma) \quad = \quad & \left\{ u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Gamma) \middle| |x|^{|\mu|-m+\frac{1}{2}} \partial^\mu (|x|^\beta u) \in L^2(\Gamma), |\mu| \leq m-1, \right. \\ & \left. \int_{\Gamma\times\Gamma} \frac{\left| \partial^\mu (|x|^\beta u)(x) - \partial^\mu (|y|^\beta u)(y) \right|^2}{|x-y|^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y < \infty, |\mu| = m-1 \right\}. \end{aligned}$$

4.3 Problème de Dirichlet dans le cône.

Dans cette partie et les suivantes, nous nous intéressons au problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & f \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \\ u & = & g \text{ sur } \Gamma_\varepsilon. \end{array} \right. \tag{4.4}$$

Désormais, nous supposons pour simplifier que $g = 0$, et que f s'annule dans un voisinage fixe de l'origine. Nous renvoyons à [65, Chap.7, Sec.7.1] et à la remarque 4.4.5 pour une hypothèse plus générale.

4.3.1 Le problème dans Ω.

Les résultats d'existence et d'unicité [65, 70] dans les espaces $V_\beta^m(\Omega)$ découlent de l'étude du laplacien dans la bande $\mathbf{R}\times]0,\pi/\alpha[$. En effet, on peut se ramener à celle ci par le changement de variable $t=\log(r)$ qui transforme le laplacien Δ en $\mathrm{e}^{-2t}\Delta_{t,\theta}$ et l'équation

$$\Delta u(x)=f(x),\ x\in\Omega,$$

en

$$\Delta_{t,\theta}v(t,\theta)=\mathrm{e}^{2t}g(t,\theta),\ (t,\theta)\in Q=\mathbf{R}\times]0,\pi/\alpha[$$

où $v(t,\theta)=u(\mathrm{e}^t\cos(\theta),\mathrm{e}^t\sin(\theta))$ et $g(t,\theta)=f(\mathrm{e}^t\cos(\theta),\mathrm{e}^t\sin(\theta))$. L'équation peut alors être traitée au moyen de la transformée de Fourier en la variable t. On montre alors que le laplacien Δ agit continûment de $V_\beta^{m+2}(\Omega)$ dans $V_\beta^m(\Omega)$ sauf pour certaines valeurs de β. Plus précisément, on a

Théorème 4.3.1 *Soit $\beta\in\mathbf{R}, m\geq 2, f\in V_\beta^{m-2}(\Omega), g\in V_\beta^{m-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.*
Si $\beta-m+1\notin\mathbf{Z}^*\alpha$ alors le problème

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u &=& f \text{ dans } \Omega,\\ u &=& g \text{ sur } \partial\Omega.\end{array}\right.$$

admet une unique solution dans $V_\beta^m(\Omega)$ satisfaisant

$$\|u\|_{V_\beta^m}\leq c\left(\|f\|_{V_\beta^{m-2}}+\|g\|_{V_\beta^{m-\frac{1}{2}}}\right).$$

Remarque 4.3.1 *En particulier, pour $m=2$, et $|\beta-1|<\alpha$, la solution appartient à $V_\beta^2(\Omega)$ lorsque $\{f,g\}\in V_\beta^0(\Omega)\times V_\beta^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ On renvoie à [65, 70] pour plus de détails.*

En dimension trois, on désigne par G l'intersection de $\breve{\Omega}$ avec la sphère unité $\mathbf{S}^2$ de sorte que :

$$\breve{\Omega}=\{\rho\sigma,\rho>0,\sigma\in G\}.$$

On note (ρ,θ,ϕ) les coordonnées sphériques. L'opérateur de Laplace Beltrami Δ_G est défini par :

$$\Delta_G=\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

On définit également sur G le gradient surfacique

$$\nabla_G u=\left(\begin{array}{c}\dfrac{1}{\sin\phi}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial u}{\partial\phi}\end{array}\right)$$

ainsi que l'espace

$$H^1(G)=\left\{u\in L^2(G),\nabla_G u\in L^2(G)^2\right\}.$$

Muni du produit scalaire $(u,v)_{H^1(G)}:=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_G uv\,\mathrm{d}\sigma+\int_G\nabla_G u\cdot\nabla_G v\,\mathrm{d}\sigma$, $H^1(G)$ est un espace de Hilbert, l'élément de surface sur G étant $\mathrm{d}\sigma=\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$. On note $H_0^1(G):=\overline{\mathcal{C}_0^\infty(G)}^{H^1(G)}$. La forme bilinéaire définie sur $H_0^1(G)\times H_0^1(G)$ par

$$A(u,v)=\int_G\nabla_G u\cdot\nabla_G v\,\mathrm{d}\sigma$$

est symétrique, continue, coercive sur $H_0^1(G)$. Par conséquent, on a :

Théorème 4.3.2 *Il existe une famille dénombrable de réels $(\Lambda_\ell)_{\ell\geq 1}$ positifs tendant vers $+\infty$ et une famille $(\Psi_\ell)_{\ell\geq 1}$ de $H_0^1(G)$ telles que :*
- *$(\Psi_\ell)_{\ell\geq 1}$ est une base hilbertienne de $L^2(G)$,*
- *$\left(\dfrac{\Psi_\ell}{\sqrt{\Lambda_\ell}}\right)_{\ell\geq 1}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(G)$,*
- *$-\Delta_G\Psi_\ell = \Lambda_\ell\Psi_\ell$, pour tout $\ell \geq 1$.*

Par ailleurs, la première valeur propre Λ_1 est simple et strictement positive.

Le changement de variable $t = \log(\rho)$ transforme le problème (4.4) posé dans $\breve{\Omega}$ en un autre posé dans $\mathbf{R}\times G$. En notant $v(t,\sigma) = u(\mathrm{e}^t\sigma)$,

Lemme 4.3.1 *On a les caractérisations suivantes :*
1. $u \in V_1^2(\breve{\Omega}) \Longleftrightarrow \forall|\lambda| \leq 2, \quad \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} D^\lambda v \in L^2(\mathbf{R}, L^2(G))$.
2. $f \in V_1^0(\breve{\Omega}) \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\left(\mathrm{e}^{2t} f(\mathrm{e}^t\sigma)\right) \in L^2(\mathbf{R}, L^2(G))$.

Preuve. On fait le calcul pour $u \in V_0^1(\breve{\Omega})$. On a

$$\begin{aligned}\int_{\breve{\Omega}} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty\int_G |v(t,\sigma)|^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t,\\ \int_{\breve{\Omega}} |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty\int_G \left(\left|\frac{\partial v}{\partial t}(t,\sigma)\right|^2 + |\nabla_G v(t,\sigma)|^2\right)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, ces égalités signifient

$$\mathrm{e}^t v, \mathrm{e}^t\nabla_{t,\sigma} v \in L^2(\mathbf{R}, L^2(G)).$$

Idem pour les autres termes. ∎

Théorème 4.3.3 *Soit $f \in V_1^0(\breve{\Omega})$. Le problème (4.4) admet une unique solution dans $V_1^2(\breve{\Omega})$ vérifiant $\|u\|_{V_1^2} \leq C\|f\|_{V_1^0}$.*

Preuve. On s'inspire de [51]. En posant $\rho = \exp(t)$, le problème (4.4) devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} + \Delta_G\right) v &=& g\\ v|_{\mathbf{R}\times\partial G} &=& 0,\end{array}\right. \tag{4.5}$$

où $v(t,\sigma) = u(\rho\sigma) = u(\mathrm{e}^t\sigma)$ et $g(t,\sigma) = \mathrm{e}^{2t} f(\mathrm{e}^t\sigma)$. Pour presque tout $t \in \mathbf{R}$, $v(t,\sigma)$ se décompose sur la base $(\Psi_\ell)_\ell$

$$v(t,\sigma) = \sum_{\ell\geq 1} v_\ell(t)\Psi_\ell(\sigma), \text{ avec } v_\ell(t) = \int_G v(t,\sigma)\Psi_\ell\,\mathrm{d}\sigma$$

et v_ℓ satisfait à l'équation

$$v_\ell'' + v_\ell' - \Lambda_\ell v_\ell = g_\ell \tag{4.6}$$

En multipliant l'équation par une fonction test $w \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ puis en intégrant, v_ℓ doit satisfaire

$$\int_{\mathbf{R}} \left(v_\ell' w' + \Lambda_\ell v_\ell w\right)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbf{R}} g_\ell w \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t, \quad \forall w \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}).$$

On définit alors les espaces

$$L^2(\mathbf{R}, \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t) := \left\{ v \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}) \middle| \mathrm{e}^{t/2} v \in L^2(\mathbf{R}) \right\}$$

et

$$H^1(\mathbf{R}, \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t) := \left\{ v \in L^2(\mathbf{R}, \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t) \middle| v' \in L^2(\mathbf{R}, \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t) \right\}$$

muni de la norme $\|v\|_{1,\exp} = \left(\|v\|^2_{0,\exp} + \|v'\|^2_{0,\exp}\right)^{1/2}$ dans lequel $\mathcal{C}^\infty_0(\mathbf{R})$ est dense. Comme $\Lambda_1 > 0$, la théorie variationnelle de Lax Milgram assure alors l'existence et l'unicité de la solution v_ℓ l'équation (4.6) dans $H^1(\mathbf{R}, \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t)$. Elle vérifie de plus :

$$\int_R |v''_\ell(t)|^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \le C \int_{\mathbf{R}} |g_\ell(t)|^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t, \tag{4.7}$$

$$\int_R |v'_\ell(t)|^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \le C \frac{1}{|\Lambda_\ell|} \int_{\mathbf{R}} |g_\ell(t)|^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t, \tag{4.8}$$

$$\int_R |v_\ell(t)|^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \le C \frac{1}{|\Lambda_\ell|^2} \int_{\mathbf{R}} |g_\ell(t)|^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \tag{4.9}$$

Puisque $f \in V^0_1(\breve{\Omega}), g$ vérifie d'après l'identité de Bessel et le théorème de Fubini :

$$\sum_{\ell \ge 1} \int_{\mathbf{R}} |g_\ell(t)|^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \|f\|^2_{V^0_1} < \infty. \tag{4.10}$$

Ainsi,

$$\sum_{\ell \ge 1} \int_{\mathbf{R}} \left(|v''_\ell(t)|^2 + |\Lambda_\ell||v'_\ell(t)|^2 + |\Lambda_\ell|^2 |v_\ell(t)|^2 \right) \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \le C\|f\|^2_{V^1_0} < \infty. \tag{4.11}$$

■

Comme pour le lemme 4.3.1, on a :

$$\begin{aligned} u \in V^2_\beta(\breve{\Omega}) &\iff \forall |\lambda| \le 2, \quad \mathrm{e}^{(\beta - \frac{1}{2})t} \partial^\lambda v \in L^2(\mathbf{R}, L^2(G)), \\ f \in V^0_\beta(\breve{\Omega}) &\iff \mathrm{e}^{(\beta - \frac{1}{2})t} \left(\mathrm{e}^{2t} f(\mathrm{e}^t \sigma) \right) \in L^2(\mathbf{R}, L^2(G)). \end{aligned}$$

Ainsi, on peut montrer de même que si $f \in V^0_\beta(\breve{\Omega})$, le problème (4.4) a une solution unique dans $V^2_\beta(\breve{\Omega})$ si $\forall \ell \in \mathbf{N},\ \left(\frac{1}{2} - \beta\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) - \Lambda_\ell \neq 0$. En particulier, on a le

Théorème 4.3.4 *On suppose $f \in V^0_\beta(\breve{\Omega})$ avec $|\beta - 1| < \sqrt{\Lambda_1 + \frac{1}{4}}$, et $g = 0$. Le problème (4.4) possède une solution unique dans $V^2_\beta(\breve{\Omega})$ vérifiant :*

$$\|u\|_{V^2_\beta} \le c\|f\|_{V^0_\beta}.$$

4.3.2 Le problème dans Ω : cas cartésien.

Noous proposons dans cette sous-section une approche variationnelle pour le problème posé dans le cône Ω qui est le cadre approprié pour la recherche de solutions physiques. L'espace $W^m_\beta(\Omega)$ combine la régularité H^1_{loc} et le comportement à l'infini permettant d'obtenir une analogue de l'inégalité de Poincaré pour des domaines non bornés. On notera (r, θ) les coordonnées polaires par rapport à O telles que $\{\theta = 0\}$ coïncide avec Γ^+.

Proposition 4.3.1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in \overset{\circ}{W}{}_0^1(\Omega)$,*

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{1+|x|^2}\,\mathrm{d}x \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x. \tag{4.12}$$

La semi norme $|u|_{W_0^1} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ est donc une norme sur $\overset{\circ}{W}{}_0^1(\Omega)$ équivalente à celle induite par la norme de $W_0^1(\Omega)$.

Preuve. Soit $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. D'après l'inégalité de Poincaré, il existe C telle que

$$\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} |u(r,\theta)|^2\,\mathrm{d}\theta \leq C \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \left|\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta)\right|^2 \mathrm{d}\theta.$$

Multipliant les deux membres par $\dfrac{1}{1+r^2}$ et intégrant par rapport à la mesure $r\,\mathrm{d}r$, il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+r^2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} |u(r,\theta)|^2\,\mathrm{d}\theta\right) r\,\mathrm{d}r \leq C \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta)\right|^2 \mathrm{d}\theta\right) r\,\mathrm{d}r$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{|u(r,\theta)|^2}{1+r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \quad \leq \quad C\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x.$$

Un argument de densité permet de conclure.

■

La théorie de Lax-Milgram peut donc s'appliquer à la forme variationnelle du problème. Le lemme suivant est une conséquence de (4.3) : c'est la formule de Green pour le laplacien.

Lemme 4.3.2 *Soient $u, v \in W_0^1(\Omega_\varepsilon)$ avec $\rho_\varepsilon \Delta u \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. L'opérateur de trace $u \mapsto \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_\varepsilon}$ défini sur $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ se prolonge à*

$$W_0^1(\Delta, \Omega_\varepsilon) := \left\{ u \in W_0^1(\Omega_\varepsilon),\ \rho_\varepsilon \Delta u \in L^2(\Omega_\varepsilon)\right\},$$

à valeur dans l'espace $W_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)$ et on a la formule de Green :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u \cdot v\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x = {}_{W_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)} < \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_\varepsilon}, v|_{\Gamma_\varepsilon} >_{W_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)} \tag{4.13}$$

Proposition 4.3.2 *Soit $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, telle que $\rho f \in L^2(\Omega)$. Il existe une unique solution u_0 dans $\overset{\circ}{W}{}_0^1(\Omega)$ au problème (4.4) qui satisfait de plus l'estimation*

$$\|u_0\|_{W_0^1} \leq C \|f\|_{W_1^0}.$$

Remarque 4.3.2 *Comme $f \equiv 0$ au voisinage de O, f appartient aussi à l'espace $V_1^0(\Omega)$ et ainsi $u_0 \in V_1^2(\Omega)$.*

Dans la section 4.4.3, on établit une formule intégrale pour la dérivée normale en utilisant la représentation de la solution à l'aide de la fonction de Green G_ε du domaine Ω_ε. Si $y \in \Omega_\varepsilon$ et δ_y représente la masse de Dirac au point y, G_ε est la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta_x G_\varepsilon(\cdot, y) & = & \delta_y \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_\varepsilon), \\ G_\varepsilon(\cdot, y) & = & 0 \text{ sur } \Gamma_\varepsilon, \end{array} \right. \tag{4.14}$$

avec la condition supplémentaire $G_\varepsilon(x, y) = \mathcal{O}(1)$, quand $|x| \longrightarrow +\infty$. On note $E_2(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\log(|x - y|)$, vérifiant

$$-\Delta_x E_2 = \delta_y,$$

au sens des distributions. On définit une fonction $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^+)$, telle que

$$\eta \equiv 0 \text{ pour } t \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty[\text{ et } \eta \equiv 1 \text{ pour } t \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right].$$

Comme la fonction $E_2(\cdot, y)$ a un comportement en $\log(|x|)$ à l'infini, elle n'appartient pas à $W_0^1(\Omega)$. On décompose alors la fonction $G_0(\cdot, y)$ sous la forme

$$G_0(x, y) = \eta\left(\frac{|x|}{|y|}\right) E_2(x, y) + H(x, y), \ x, y \in \Omega,$$

ce qui ramène la recherche à celle de $H(\cdot, y)$. Comme G_0 est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta_x G_0(\cdot, y) & = & \delta_y \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ G_0(\cdot, y) & = & 0 \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right. \tag{4.15}$$

$H_y(x) = H(x, y)$ est caractérisée par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta H_y & = & -\Delta\left(\left(1 - \eta\left(\frac{|\cdot|}{|y|}\right)\right) E_2(\cdot, y)\right) \text{ dans } \Omega, \\ H_y & = & -\eta\left(\frac{|\cdot|}{|y|}\right) E_2(\cdot, y) \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right. \tag{4.16}$$

qui admet bien une solution dans $W_0^1(\Omega)$, puisque

$$\text{supp}\left(\eta\left(\frac{|\cdot|}{|y|}\right)\right) \subset \left\{x \in \Omega, \frac{|y|}{2} < |x| < 2|y|\right\}$$

et

$$\text{supp}\left(\Delta\left(\left(1 - \eta\left(\frac{|\cdot|}{|y|}\right)\right) E_2(\cdot, y)\right)\right) \subset \left\{x \in \Omega, \frac{|y|}{2} < |x| < 2|y|\right\}.$$

Pour le cône en dimension deux, G_0 s' obtient explicitement par séparation de variables. On en donne ci dessous l'expression en coordonnées polaires.
On note $(\varphi_\ell)_{\ell \geq 1}, \varphi_\ell(\theta) = \sqrt{2\alpha/\pi}\sin(\ell\alpha\theta)$ la base orthonormale de $L^2(]0, \frac{\pi}{\alpha}[)$ associée à l'opérateur (1D) $\Lambda_\theta = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}$ avec conditions de Dirichlet en $\theta = 0$ et $\theta = \pi/\alpha$. On commence avec le lemme suivant :

Lemme 4.3.1 *Soit $\rho > 0$ et $v \in \mathcal{C}^\infty(]0, \rho]; D(\Lambda_\theta))$ satisfaisant $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Lambda_\theta v = 0$ pour $0 < r < \rho$. On suppose que $v \in H^1(\Omega \cap B_\rho)$. Alors*

$$v(r, \theta) = \sum_{m \geq 1} v_m r^{m\alpha} \varphi_m(\theta).$$

Si $v \in \mathcal{C}^\infty([\rho,\infty[;D(\Lambda_\theta))$ *et* $v(r,\theta)=\mathcal{O}(1)$ *quand* $r\longrightarrow\infty$ *alors*

$$v(r,\theta)=\sum_{m\geq 1} v_m r^{-m\alpha}\varphi_m(\theta).$$

Proposition 4.3.3 *Si* $(r_0,\theta_0)\in\Omega$, *alors* G_0 *a pour expression :*

$$\begin{aligned} G_0(r,\theta|r_0,\theta_0) &= \left(\sum_{m\geq 1}\frac{1}{2m\alpha}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{m\alpha}\varphi_m(\theta)\varphi_m(\theta_0)\right)\mathbf{1}_{]0,1[}\left(\frac{r}{r_0}\right) \\ &+\left(\sum_{m\geq 1}\frac{1}{2m\alpha}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{m\alpha}\varphi_m(\theta)\varphi_m(\theta_0)\right)\mathbf{1}_{]0,1[}\left(\frac{r_0}{r}\right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Preuve. On note pour simplifier $G(r,\theta)=G_0(r,\theta|r_0,\theta_0)$. Du lemme précédent, on déduit que G a pour expression

$$G(r,\theta)=\sum_{m\geq 1} A_m(r_0,\theta_0)r^{m\alpha}\varphi_m(\theta),$$

pour $0<r<r_0$, tandis que

$$G(r,\theta)=\sum_{m\geq 1} B_m(r_0,\theta_0)r^{-m\alpha}\varphi_m(\theta),$$

pour $r_0<r$, ce que l' on réécrit par commodité

$$\begin{aligned} G(r,\theta) &= \left(\sum_{m\geq 1} A_m(r_0,\theta_0)r^{m\alpha}\varphi_m(\theta)\right)\mathbf{1}_{0<r<r_0}+\left(\sum_{m\geq 1} B_m(r_0,\theta_0)r^{-m\alpha}\varphi_m(\theta)\right)\mathbf{1}_{r>r_0}, \\ &= G^-(r,\theta)\mathbf{1}_{0<r<r_0}+G^+(r,\theta)\mathbf{1}_{r>r_0}. \end{aligned}$$

Reste à déterminer l'expression des coefficients A_m et B_m.
La formule des sauts permet d'écrire :

$$\Delta G=\{\Delta G\}-\left[\frac{\partial G}{\partial n}\right]\delta_{\Omega\cap\{r=r_0\}}-\frac{\partial}{\partial n}\left([G]\,\delta_{\Omega\cap\{r=r_0\}}\right)$$

où

$$\left[\frac{\partial G}{\partial n}\right]=\left(\frac{\partial G^-}{\partial r}-\frac{\partial G^+}{\partial r}\right)_{r=r_0},\quad [G]=\left(G^- - G^+\right)_{r=r_0},$$

et $\delta_{\Omega\cap\{r=r_0\}}$ la distribution de Dirac sur l'arc de cercle $\Omega\cap\{r=r_0\}$.
Soit $\psi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et écrivons que $<-\Delta G,\psi>=\psi(r_0,\theta_0)$. A l'aide de la formule des sauts rappelée ci dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \psi(r_0,\theta_0) &= \int_{\Omega\cap\{r=r_0\}}\left(\frac{\partial G^-}{\partial r}-\frac{\partial G^+}{\partial r}\right)(r_0,\theta)\psi(r_0,\theta)\,\mathrm{d}\sigma \\ &+\int_{\Omega\cap\{r=r_0\}}\left(G^- - G^+\right)(r_0,\theta)\frac{\partial\psi}{\partial r}(r_0,\theta))\,\mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

ce qui se réecrit plus simplement

$$\psi(r_0,\theta_0) = \sum_{m\geq 1} m\alpha \left(A_m(r_0,\theta_0) r_0^{m\alpha} + B_m(r_0,\theta_0) r_0^{-m\alpha}\right) \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \psi(r_0,\theta)\varphi_m(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$+ \sum_{m\geq 1} \left(A_m(r_0,\theta_0) r_0^{m\alpha} - B_m(r_0,\theta_0) r_0^{-m\alpha}\right) \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\partial\psi}{\partial r}(r_0,\theta)\varphi_m(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

D'autre part, d'après la symmétrie de G_0, pour tout $r < r_0, (\theta,\theta_0) \in]0,\pi/\alpha[^2$,

$$\sum_{m\geq 1} A_m(r_0,\theta_0) r^{m\alpha}\varphi_m(\theta) = \sum_{m\geq 1} B_m(r,\theta) r_0^{-m\alpha}\varphi_m(\theta_0).$$

Pour $\theta = \theta_0$, cette relation permet d'écrire, pour tout $r < r_0, \theta \in]0,\pi/\alpha[$

$$A_m(r_0,\theta_0) r^{m\alpha} = B_m(r,\theta) r_0^{-m\alpha},$$

ou encore :

$$A_m(r_0,\theta) r_0^{m\alpha} = B_m(r,\theta) r^{-m\alpha}.$$

Il existe donc une fonction $c_m(\theta)$ pour chaque m telle que :

$$A_m(r,\theta) = \frac{c_m(\theta)}{r^{m\alpha}}, \quad B_m(r,\theta) = r^{m\alpha} c_m(\theta)$$

et avec l'expression de $\psi(r_0,\theta_0)$, on a

$$\psi(r_0,\theta_0) = \sum_{m\geq 1} 2(m\alpha) c_m(\theta_0) \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \psi(r_0,\theta)\varphi_m(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

pour tout $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.
Comme la masse de Dirac est une distribution a support compact, on peut tester avec $\psi(r,\theta) = \varphi_n(\theta)$, on obtient

$$c_m(\theta) = \frac{\varphi_m(\theta)}{2m\alpha}, m \geq 1.$$ ■

Lorsque $f \equiv 0$ au voisinage de l'origine, le comportement asymptotique de u_0 quand $r \longrightarrow 0$, est déterminé par la régularité locale de u_0. Le résultat suivant précise ce comportement.
Pour $\ell \in \mathbf{N}$, on définit $s_D^\ell(r,\theta) = r^{-\ell\alpha}\varphi_\ell(\theta)$ et $\phi_\ell(r,\theta) = r^{\ell\alpha}\varphi_\ell(\theta)$.

Proposition 4.3.4 *Il existe des coefficients $(\lambda_\ell)_{\ell\geq 1}$ tels que pour tout $N \in \mathbf{N}, N \geq 1, u_0$ présente le comportement suivant au voisinage de O*

$$u_0(r,\theta) = \sum_{\ell=1}^{N} \lambda_\ell \phi_\ell(r,\theta) + \mathcal{O}(r^{(N+1)\alpha}), \quad r \longrightarrow 0. \tag{4.18}$$

Le coefficient λ_ℓ est donné par la formule suivante :

$$\lambda_\ell = \frac{1}{2\ell\alpha} \int_\Omega f s_D^\ell \,\mathrm{d}x.$$

Preuve. Le développement asymptotique est obtenu par séparation de variables en coordonnées polaires. Pour la formule des coefficients λ_ℓ, on fait le calcul pour $\ell = 1$.
Comme $f = -\Delta u_0$, on a

$$\int_\Omega f s_D^1 \,\mathrm{d}x = \lim_{\nu \longrightarrow 0} \int_{\Omega - B_\nu} f s_D^1 \,\mathrm{d}x = \lim_{\nu \longrightarrow 0} \int_{\Omega - B_\nu} -\Delta u_0 s_D^1 \,\mathrm{d}x,$$

et

$$\int_{\Omega - B_\nu} u_0 \Delta s_D^1 \,\mathrm{d}x - \int_{\Omega - B_\nu} \Delta u_0 s_D^1 \,\mathrm{d}x = \int_{\partial(\Omega - B_\nu)} \left(\partial_n s_D^1 u_0 - s_D^1 \partial_n u_0\right) \,\mathrm{d}\sigma$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f s_D^1 \,\mathrm{d}x &= \lim_{\nu \longrightarrow 0} \int_{\partial\Omega \cap B_\nu^c} \left(\partial_n s_D^1 u_0 - s_D^1 \partial_n u_0\right) \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega \cap \partial B_\nu} \left(\partial_n s_D^1 u_0 - s_D^1 \partial_n u_0\right) \,\mathrm{d}x, \\
&= \lim_{\nu \longrightarrow 0} \int_{\Omega \cap \partial B_\nu} \left(\partial_n s_D^1 u_0 - s_D^1 \partial_n u_0\right) \,\mathrm{d}x, \\
&= \lim_{\nu \longrightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \left(\nu^{-\alpha} \sin(\alpha\theta)(\lambda_1 \alpha \nu^{\alpha-1} \sin(\alpha\theta) + o(\nu^{2\alpha-1}))\right) \nu \,\mathrm{d}\theta \\
&\quad + \lim_{\nu \longrightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \left((\alpha \nu^{-\alpha-1} \sin(\alpha\theta))(\lambda_1 \nu^\alpha \sin(\alpha\theta) + o(\nu^\alpha))\right) \nu \,\mathrm{d}\theta, \\
&= 2\alpha\lambda_1 \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin(\alpha\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta, \\
&= \pi\lambda_1
\end{aligned}$$

Le calcul est identique pour $\ell > 1$. ∎

4.3.3 Le problème dans Ω : cas axisymétrique.

Le domaine limite $\breve{\Omega}$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ présente une singularité[2] conique lorsque l'ouverture dépasse un angle dont la valeur est liée au zéro de la fonction de Legendre $P^0_{1/2}$, où $t \mapsto P^0_\nu(t)$ désigne le polynôme de Legendre d'ordre 0 et d'indice $\nu > 0$ qui est borné en $t = 0$ [13]. Plus précisément, on définit $\beta_c \in \left]1, 2\right[$ tel que $P^0_{1/2}\left(\cos\left(\pi/\beta_c\right)\right) = 0$, et on suppose désormais que l'ouverture conique satisfait $\pi/\beta > \pi/\beta_c$, i.e. $\beta \in \left]1, \beta_c\right[$. La singularité provient uniquement du mode $k = 0$ quand on décompose la solution en série de Fourier [72, 33]. Comme on considère le cas axisymétrique, on se limite à un second membre f axisymétrique, i.e. $\partial_\theta f \equiv 0$ et on suppose toujours qu'il s'annule au voisinage de la pointe. La solution au problème (4.4) est axisymétrique et satisfait le problème aux limites ci-dessous, posé dans un demi-plan méridien

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta^+ u_0 &=& f \text{ dans } \Omega, \\ u_0 &=& 0 \text{ sur } \Gamma_b, \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial n} &=& 0 \text{ sur } \Gamma_a, \end{array}\right. \tag{4.19}$$

où Δ^+ est l'opérateur 2D défini comme dans le chapitre 2, p. 46. Les propositions 4.3.1, 4.3.2 restent vraies en dimension trois ce qui assure l'existence et l'unicité de u_0.

[2]Une singularité géométrique est ou bien une arête axisymétrique rentrante, ou bien un coin rentrant (i.e. l' intersection de la sphère unité avec le cône infini construit sur ce coin est un polygone curviligne, le cas d' une pointe conique correpond à une base circulaire), rendant le domaine non convexe.

Au voisinage de la pointe, la régularité de la solution est liée aux indices $\nu > 0$ et aux zéros des polynômes de Legendre P_ν^0.
On introduit les coordonnées sphériques locales (ρ, ϕ), telles que $\{\phi = 0\}$ coïncide avec l'axe $\{r = 0\}$. Dans ces coordonnées, le laplacien modifié Δ^+ a pour expression

$$\Delta^+ = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cot(\phi)}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

Pour obtenir le comportement de u_0 au voisinage de l'origine, on décompose la solution en série suivant les fonctions propres de l'opérateur 1D

$$\Lambda_\phi^+ = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2} - \cot(\phi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}.$$

Suivant [12], on définit l'espace

$$\mathcal{H} = \left\{ u \in L^2_{\mathrm{loc}}\left(\left]0, \frac{\pi}{\beta}\right[\right), (\sin\phi)^{\frac{1}{2}} u \in L^2\left(\left]0, \frac{\pi}{\beta}\right[\right) \right\} \tag{4.20}$$

Le domaine de définition de l'opérateur Λ_ϕ^+ est

$$D(\Lambda_\phi^+) = \left\{ u \in \mathcal{H} \middle| \Lambda_\phi^+ u \in \mathcal{H}, u'(0) = u\left(\frac{\pi}{\beta}\right) = 0 \right\}. \tag{4.21}$$

Théorème 4.3.5 *Il existe une base hilbertienne $(u_\ell)_{\ell\geq 1}$ de $\mathcal{H}$ formée de fonctions propres de Λ qui sont dans*

$$\mathcal{H}^1 := \left\{ u \in \mathcal{H}, u' \in \mathcal{H}, u\left(\frac{\pi}{\beta}\right) = 0 \right\},$$

associé à la famille de valeurs propres $(\lambda_\ell)_{\ell\geq 1}$ de $\mathbf{R}_*^+, \lambda_\ell \longrightarrow +\infty$ quand $\ell \longrightarrow +\infty$. De plus, la famille $\left(\frac{u_\ell}{\sqrt{\lambda_\ell}}\right)_{\ell\geq 1}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}^1$.

Preuve. Si (u, λ) est un couple fonction propre/valeur propre, le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'' + \cot(\phi)u' + \lambda u & = & 0, \\ u'(0) = u\left(\frac{\pi}{\beta}\right) & = & 0 \end{array} \right. \tag{4.22}$$

être satisfait. En posant $w(\cos(x)) = u(x), \lambda = \nu(\nu+1), \nu > 0$, (4.22) est équivalent au problème aux lmites

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (1-t^2)w'' - 2tw' + \nu(\nu+1)w & = & 0, \\ w'(1) = w\left(\cos\left(\frac{\pi}{\beta}\right)\right) & = & 0. \end{array} \right. \tag{4.23}$$

C'est une équation de Legendre d'indice 0 et ν avec conditions aux limites mixtes, dont la base des solutions est constituée des polynomes $\left(P_\nu^0(t), Q_\nu^0(t)\right)_\nu$. Comme w est continue jusqu'en 1, car u l'est en 0, et que Q_ν^0 est infinie en $t = 1$, w doit vérifier

$$w(t) = AP_\nu^0(t), A \neq 0,$$
$$P_\nu^0\left(\cos\left(\frac{\pi}{\beta}\right)\right) = 0.$$

En notant donc $(\nu_\ell)_{\ell\geq 1}$ la suite des $\nu \in \mathbf{R}_*^+$ vérifiant $P_\nu^0\left(\cos\left(\frac{\pi}{\beta}\right)\right) = 0$ rangée en ordre croissant, et en posant

$$\lambda_\ell = \nu_\ell(\nu_\ell + 1),\ u_\ell(\phi) = \frac{P^0_{\nu_\ell}(\cos(\phi))}{\|P^0_{\nu_\ell}(\cos(\cdot))\|_{\mathcal{H}}},$$

on obtient les éléments propres de l'opérateur Λ_ϕ^+. ■

D'après les tables de solutions [1] et le choix de β, pour tout $\ell > 1, \nu_\ell > 1/2$ excepté ν_1. Comme $\nu_1 < 1/2$, le terme associé a une contribution dans u_0 qui n'est pas de régularité H^2. Pour $\ell \in \mathbf{N}$, on définit $s_D^\ell(\rho,\phi) = \rho^{-\nu_\ell} u_\ell(\phi)$ et $\phi_\ell^c(\rho,\phi) = \rho^{\nu_\ell} u_\ell(\phi)$.
La proposition suivante précise le comportement de la solution u_0 du problème (4.19) quand $\rho = \sqrt{r^2+z^2} \longrightarrow 0$.

Proposition 4.3.5 *Il existe des coefficients $(\lambda_\ell)_{\ell\geq 1}$ tels que pour tout $N \in \mathbf{N}, N \geq 1, u_0$ présente le comportement suivant au voisinage de la pointe :*

$$u_0(\rho,\phi) = \sum_{\ell=1}^{\ell=N} \lambda_\ell \phi_\ell^c(\rho,\phi) + \mathcal{O}(\rho^{\nu_{N+1}}),$$

et les coefficients λ_ℓ ont pour expression

$$\lambda_\ell = \frac{1}{1+2\nu_\ell} \int_\Omega f(\rho,\phi) s_D^\ell(\rho,\phi) \rho^2 \sin\phi \,\mathrm{d}\phi.$$

4.4 Coins arrondis en dimension deux.

A l'aide des comportements des solutions au voisinage du coin ($n = 2$) ou de la pointe ($n = 3$) établis précédemment, nous mettons en évidence un développement asymptotique multi-échelle en ε pour la solution u_ε dans Ω_ε. On définit une fonction $\xi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^+), 0 \leq \xi \leq 1$ valant 1 pour[3] $t \leq a$ et 0 pour $t \geq 2a$, et pour $\gamma > 0$, on note χ_γ la fonction $x \longrightarrow \xi\left(\frac{|x|}{\gamma}\right)$, pour $\gamma = 1$, on notera simplement χ la fonction associée.

4.4.1 Généralités.

On suppose que le second membre f ne dépend pas de ε et on fait la même hypothèse sur f au voisinage de O que dans la section précédente. Comme pour le cône, l'inégalité (4.12) et la formule de Green (4.3) sont vraies aussi pour Ω_ε. Nous avons donc :

Proposition 4.4.1 *Soit $f \in W_1^0(\Omega_\varepsilon)$. Il existe une unique solution u dans $W_1^2(\Omega_\varepsilon)$ au problème (4.4). De plus, elle vérifie*

$$\|u\|_{W_1^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_\varepsilon \|f\|_{W_1^0(\Omega_\varepsilon)}.$$

Preuve. D'après la formulation variationelle du problème, on a

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \left| \int_{\Omega_\varepsilon} f u dx \right|,$$

[3] $a = \sqrt{1+c^2}$ où $c = -\tan(\pi/(2\alpha))$.

et ainsi grâce à l inégalité (4.12)

$$\|u\|_{W_0^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_\varepsilon \|f\|_{W_1^0(\Omega_\varepsilon)}.$$

Soit $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon), \eta = 1$ pour $|x| \geq 2a$ et $\eta = 0$ pour $|x| \leq a$. On a

$$-\Delta(\eta u) = \eta f - 2\nabla u \cdot \nabla \eta - u\Delta\eta =: F,$$

avec $F \in V_1^0(\Omega)$. D'après le théorème 4.3.1, il existe une unique solution au problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta U & = & F \\ U|_{\partial\Omega} & = & 0, \end{array} \right.$$

dans $V_1^2(\Omega)$ satisfaisant $\|U\|_{V_1^2} \leq C\|F\|_{V_1^0}$. Comme $w = \eta u - U \in V_0^1(\Omega)$ vérifie le problème homogène, on en déduit $w = 0$, et ainsi $\eta u \in V_1^2(\Omega)$. Ainsi $u \in W_1^2(\Omega_\varepsilon)$ et vérifie $\|u\|_{W_1^2} \leq C_\varepsilon \left(\|f\|_{W_1^0} + \|u\|_{W_0^1} \right) \leq C_\varepsilon \|f\|_{W_1^0}$. ∎

Les propriétés d'existence et d'unicité de la solution restent vraies lorsque $f \in W_\beta^0(\Omega_\varepsilon)$, avec $|\beta - 1| < \alpha$.

Proposition 4.4.2 *On suppose $|\beta - 1| < \alpha$. Soit $f \in W_\beta^0(\Omega_\varepsilon)$. Il existe une unique solution u dans $W_\beta^2(\Omega_\varepsilon)$ au problème (4.4). De plus, elle vérifie :*

$$\|u\|_{W_\beta^2} \leq C_{\beta,\varepsilon} \|f\|_{W_\beta^0}$$

Preuve. Soit $\eta_\varepsilon : x \mapsto \eta(x/\varepsilon)$, avec η la fonction de la démonstration précédente et $\tilde{u} \in V_\beta^2(\Omega)$ solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta\tilde{u} & = & \eta_\varepsilon f \\ \tilde{u}|_{\partial\Omega} & = & 0. \end{array} \right.$$

Elle vérifie $\|\tilde{u}\|_{V_\beta^2(\Omega)} \leq C\|\eta_\varepsilon f\|_{V_\beta^0(\Omega)} \leq C'\|f\|_{W_\beta^0(\Omega_\varepsilon)}$. Posons alors $V = u - \eta_\varepsilon \tilde{u}$ de sorte que

$$\begin{array}{rcl} -\Delta V & = & f + \Delta(\eta_\varepsilon \tilde{u}), \\ & = & f + (\Delta\eta_\varepsilon)\tilde{u} - \eta_\varepsilon^2 f + 2\nabla\eta_\varepsilon \cdot \nabla\tilde{u}, \\ & = & (1 - \eta_\varepsilon^2) f + (\Delta\eta_\varepsilon)\tilde{u} + 2\nabla\eta_\varepsilon \cdot \nabla\tilde{u}, \\ & =: & F. \end{array}$$

Evaluons la norme de F dans $W_1^0(\Omega_\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\|F\|^2_{W_1^0(\Omega_\varepsilon)} &= \int_{\Omega_\varepsilon} (\varepsilon^2+|x|^2)|F(x)|^2\,\mathrm{d}x,\\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} (\varepsilon^2+|x|^2)^\beta |F(x)|^2 \frac{1}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\beta-1}}\,\mathrm{d}x,\\
&\leq C(\varepsilon,\beta)\|F\|^2_{V_\beta^0(\Omega)},\\
&\leq C(\varepsilon,\beta)\left(\int_{\Omega_\varepsilon}(1-\eta_\varepsilon^2)^2(\varepsilon^2+|x|^2)^\beta|f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\Delta\eta_\varepsilon|^2|x|^{2\beta}|\tilde{u}|^2\,\mathrm{d}x\right) +\\
&\quad C(\varepsilon,\beta)\int_\Omega |\nabla\eta_\varepsilon|^2|x|^{2\beta}|\nabla\tilde{u}|^2\,\mathrm{d}x,\\
&\leq C(\varepsilon,\beta)\left(\int_{\Omega_\varepsilon}(1-\eta_\varepsilon^2)^2(\varepsilon^2+|x|^2)^\beta|f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\Delta\eta_\varepsilon|^2|x|^{4\beta}\frac{|\tilde{u}|^2}{|x|^{2\beta}}\,\mathrm{d}x\right) +\\
&\quad C(\varepsilon,\beta)\int_\Omega |\nabla\eta_\varepsilon|^2|x|^{4\beta-2}\frac{|\nabla\tilde{u}|^2}{|x|^{2(\beta-1)}}\,\mathrm{d}x,\\
&\leq C(\varepsilon,\beta)\|f\|^2_{V_\beta^0}
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe un unique $V \in W_1^2(\Omega_\varepsilon)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta V &=& F\\ V|_{\partial\Omega} &=& 0.\end{array}\right.$$

D'autre part, $\Delta(\eta_\varepsilon V) = (\Delta\eta_\varepsilon)V - \eta_\varepsilon F + 2\nabla\eta_\varepsilon\cdot\nabla V \in V_\beta^0(\Omega)$ donc $\eta_\varepsilon V \in V_\beta^2(\Omega)$. On a donc $\eta_\varepsilon u = \eta_\varepsilon V + \eta_\varepsilon^2\tilde{u} \in V_\beta^2(\Omega)$. ∎

La démonstration du résultat suivant utilise cette propriété. A priori, la constante C_ε de la proposition 4.4.1 dépend du domaine Ω_ε et donc de ε. On va voir qu'il n'en est rien.

Proposition 4.4.3 *La constante C_ε de la proposition 4.4.1 peut être choisie indépendante de ε.*

Preuve. Ce résultat peut être obtenu directement par des considérations d'homogénéité. On en donne une autre démontration utilisant une méthode asymptotique qui précise l'erreur commise entre la solution et un développement asymptotique de la solution.
On considère

$$A_\varepsilon^{-1} : W_1^0(\Omega_\varepsilon) \longrightarrow W_1^2(\Omega_\varepsilon)$$

l'opérateur qui à $f \in W_1^0(\Omega_\varepsilon)$ associe la solution $u \in W_1^2(\Omega_\varepsilon)$ du problème (4.4), et on montre que sa norme d'opérateur est bornée indépendamment de ε. On écrit

$$f(x) = f_1(x) + \varepsilon^{-2} f_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{4.24}$$

avec $f_1 = \left(1-\chi_{\sqrt{\varepsilon}}\right)f$, et $f_2\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^2\chi_{\sqrt{\varepsilon}}f$, et on considère les deux problèmes aux limites suivants

$$-\Delta u_1 = f_1 \text{ dans } \omega, \quad u_1 = 0 \text{ sur } \Gamma \tag{4.25}$$

$$-\Delta u_2 = f_2 \text{ dans } \omega, \quad u_2 = 0 \text{ sur } \partial\omega. \tag{4.26}$$

On peut vérifier facilement que

$$\|f_1\|_{V_1^0(\Omega)} + \|f_2\|_{W_1^0(\omega)} \leq c\|f\|_{W_1^0(\Omega_\varepsilon)}.$$

avec c indépendante de ε. En particulier, u_1 et u_2 existent et sont uniques resp. dans $V_1^2(\Omega)$ et $W_1^2(\omega)$, et elles vérifient

$$\|u_1\|_{V_1^2(\Omega)} + \|u_2\|_{W_1^0(\omega)} \leq c\|f\|_{W_1^0(\Omega_\varepsilon)}.$$

On pose alors

$$U_\varepsilon = (1-\chi_\varepsilon)\, u_1 + \chi u_2\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$$

et on note R_ε l'application qui à f appartenant à $W_1^0(\Omega_\varepsilon)$ associe $U_\varepsilon \in W_1^2(\Omega_\varepsilon)$. Dans un premier temps, on prouve que R_ε est bornée indépendamment de ε. En effet,

$$\|U_\varepsilon\|_{W_1^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \left\| (1-\chi_\varepsilon)\, u_1 \right\|_{W_1^2(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \chi u_2\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{W_1^2(\Omega_\varepsilon)},$$

et comme $1-\chi_\varepsilon$ est nulle pour $|x| \leq a\varepsilon$, on a

$$\left\| (1-\chi_\varepsilon)\, u_1 \right\|^2_{W_1^2(\omega)} = \sum_{|\lambda|\leq 2} \int_{|x|\geq a\varepsilon} \left(\varepsilon^2 + |x|^2\right)^{|\lambda|-1} \left| \partial^\lambda \left((1-\chi_\varepsilon)\, u_1 \right)(x) \right|^2 \mathrm{d}x.$$

Les termes ne comportant pas de dérivées sur $(1-\chi_\varepsilon)$ sont bornées par $\|u_1\|_{V_1^2(\Omega)}$ tandis que pour les autres, l'intégration porte sur une région $\mathcal{C}_\varepsilon = \left\{ x : a\varepsilon < |x| < 2a\varepsilon \right\}$ dans laquelle $|x| = \mathcal{O}(\varepsilon)$, de sorte que $(\varepsilon^2 + |x|^2)^{|\lambda|-1} \sim |x|^{2(|\lambda|-1)}$. Ainsi $\left\| (1-\chi_\varepsilon)\, u_1 \right\|_{W_1^2(\omega)} \leq c_1\|u_1\|_{V_1^2(\Omega)}$, avec c_1 indépendante de ε. Pour l'autre terme $\chi u_2\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$ il suffit d'appliquer le changement de variable $y = \dfrac{x}{\varepsilon}$, pour obtenir

$$\left\| \chi u_2\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{W_1^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c_2\|u_2\|_{W_1^2(\omega)}.$$

Ceci prouve que $\|R_\varepsilon\|_{W_1^0 \longrightarrow W_1^2} \leq C$, avec C indépendante de ε. Posons alors $T_\varepsilon = (A_\varepsilon^{-1})^{-1} R_\varepsilon - I$, ainsi $A_\varepsilon^{-1} = R_\varepsilon(I + T_\varepsilon)^{-1}$ sera bornée en norme indépendamment de ε, pourvu que celle de T_ε soit assez petite. Soit donc $f \in W_1^0(\Omega_\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
T_\varepsilon f &= -\Delta U_\varepsilon - f, \\
&= -\chi_{\sqrt{\varepsilon}} f + \Delta\chi_\varepsilon u_1 + \chi_\varepsilon \Delta u_1 + 2\nabla\chi_\varepsilon \cdot \nabla u_1 \\
&\quad -\Delta\chi u_2\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) - \chi\Delta\left[u_2\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right] - 2\nabla\left[u_2\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right] \cdot \nabla\chi, \\
&= \Delta\chi_\varepsilon u_1 + 2\nabla\chi_\varepsilon \cdot \nabla u_1 - \Delta\chi u_2\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) - 2\nabla\left[u_2\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right] \cdot \nabla\chi.
\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue d'une part, d'après les problèmes vérifiés par u_1 et u_2, et d'autre part parce que χ_ε et $\left(1 - \chi_{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ possèdent des supports disjoints pour ε assez petit. Evaluons maintenant $\|T_\varepsilon f\|_{W_1^0}$. Désignons par E le terme contenant u_1, i.e. :

$$E = \Delta\chi_\varepsilon u_1 + 2\nabla\chi_\varepsilon \cdot \nabla u_1.$$

On a $\mathrm{supp}(E) \subset \mathcal{C}_\varepsilon$ et

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\varepsilon^2 + |x|^2\right) |E(x)|^2 \,\mathrm{d}x &\leq C \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\varepsilon^2 + |x|^2\right) \left| \Delta\chi_\varepsilon(x) u_1(x) \right|^2 \mathrm{d}x \right) \\ &\quad + C \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\varepsilon^2 + |x|^2\right) \left| \nabla\chi_\varepsilon(x) \cdot \nabla u_1(x) \right|^2 \mathrm{d}x \right) \\ &\leq C \left(① + ② \right).\end{aligned}$$

Fixons $d \in \mathbf{R}$ tel que $0 < d < \alpha$. Pour le terme ①, on a

$$\begin{aligned}\left\| \Delta\chi_\varepsilon u_1 \right\|_{W_1^0}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\varepsilon^2 + |x|^2\right) \left| \Delta\chi_\varepsilon(x) u_1(x) \right|^2 \mathrm{d}x, \\ &= \varepsilon^{2d} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \frac{\left(\varepsilon^2 + |x|^2\right)}{\varepsilon^{2d}} \left| \Delta\chi_\varepsilon(x) u_1(x) \right|^2 \mathrm{d}x, \\ &= \varepsilon^{2d} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} |x|^{2((1-d)-2)} \left| \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta\xi \left(\frac{|\,\cdot\,|}{\varepsilon} \right) u_1(x) \right|^2 \left(\varepsilon^2 + |x|^2\right) |x|^2 \left(\frac{|x|}{\varepsilon} \right)^{2d} \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

Comme $|x| = \mathcal{O}(\varepsilon)$ dans $\mathcal{C}_\varepsilon$, le terme $\dfrac{\left(\varepsilon^2 + |x|^2\right) |x|^2}{\varepsilon^4} \left(\dfrac{|x|}{\varepsilon} \right)^{2d}$ est un $\mathcal{O}(1)$. On a donc, *à la condition que* $u_1 \in V_{1-d}^2(\Omega)$

$$\left\| \Delta\chi_\varepsilon u_1 \right\|_{W_1^0} \leq C\varepsilon^d \|u_1\|_{V_{1-d}^2(\Omega)}.$$

La même estimation peut être établie pour le terme② Il reste donc *à vérifier que* $f_1 \in V_{1-d}^0(\Omega)$ pour conclure d'après la remarque 4.3.1 que $u_1 \in V_{1-d}^2(\Omega)$. Or,

$$\begin{aligned}\|f_1\|_{V_{1-d}^0}^2 &= \int_{\Omega \cap \{x : |x| \geq a\sqrt{\varepsilon}\}} |x|^{2(1-d)} |1 - \chi_{\sqrt{\varepsilon}}(x)|^2 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x, \\ &= \int_{\Omega \cap \{x : |x| \geq a\sqrt{\varepsilon}\}} |x|^2 |1 - \chi_{\sqrt{\varepsilon}}(x)|^2 |f(x)|^2 \frac{1}{|x|^{2d}} \,\mathrm{d}x, \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^d} \|f\|_{W_1^0(\Omega_\varepsilon)}^2.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left\| \Delta\chi_\varepsilon u_1 + \nabla\chi_\varepsilon \cdot \nabla u_1 \right\|_{W_1^0} \leq C\varepsilon^{\frac{d}{2}} \|f\|_{W_1^0(\Omega_\varepsilon)}.$$

Pour le terme contenant u_2 dans $T_\varepsilon f$, on prouve de la même façon que

$$\|f_2\|_{W_{1+d}^0} \leq \frac{C}{\varepsilon^d} \|f\|_{W_1^0(\Omega_\varepsilon)}^2.$$

Ainsi, $u_2 \in W_{1+d}^2(\omega)$ et

$$\left\| \Delta\chi u_2 \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + 2\nabla \left[u_2 \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right] \cdot \nabla\chi \right\|_{W_1^0} \leq C\varepsilon^d \|u_2\|_{W_{1+d}^2(\omega)}.$$

En conclusion, on a :

$$\forall f \in W_1^0(\Omega_\varepsilon),\ \|T_\varepsilon f\|_{W_1^0(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{d}{2}}\|f\|_{W_1^0(\Omega_\varepsilon)}.$$

En se souvenant que $A_\varepsilon^{-1} = R_\varepsilon(I+T_\varepsilon)^{-1}$, on obtient

$$\|A_\varepsilon^{-1}\| = \|R_\varepsilon(I+T_\varepsilon)^{-1}\| \leq \frac{C_1}{1-C_2\varepsilon^{\frac{d}{2}}}.$$ ■

Remarque 4.4.1 *Il est important de noter que l'on n'a pas utilisé la propriété de nullité de f au voisinage de O. En effet, la méthode ci-dessus fournit une approximation de la solution au problème ((4.4), même dans le cas où f n'est plus nulle au voisinage de l'origine. Toutefois, celle ci n'est pas suffisante pour écrire un développement de Taylor de u_ε, comme on le verra plus loin (voir la remarque 4.4.5).*

4.4.2 Développement asymptotique de la solution

Dans cette partie, on établit un développement asymptotique multi-échelle de la solution lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$. Le principe est calqué sur celui de la démonstration de la Proposition 4.4.3 : on part d'un terme qu'on suppose peu différent de la solution et on estime l'erreur commise dans l'équation.
Comme la perturbation du bord est locale, on peut supposer qu'à l'infini, u_ε est peu différente de u_0, ce qui nous amène à prendre pour premier terme du développement la solution u_0. Mais celle ci n'étant pas définie sur Ω_ε tout entier, on considère

$$U_\varepsilon^0 = (1-\chi_\varepsilon)\,u_0.$$

L'erreur introduite dans l'équation est alors :

$$\begin{aligned} f + \Delta U_\varepsilon^0 &= -\mathbf{1}_{[a,2a]}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\left(\Delta\chi_\varepsilon u_0 + 2\nabla\chi_\varepsilon\cdot\nabla u_0 - \chi_\varepsilon f\right), \\ &= -\mathbf{1}_{[a,2a]}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\left(\Delta\chi_\varepsilon u_0 + 2\nabla\chi_\varepsilon\cdot\nabla u_0\right), \end{aligned}$$

pour ε assez petit, d'après l'hypothèse faite sur f. On pose $R_\varepsilon^0 = u_\varepsilon - U_\varepsilon^0$, et on évalue ΔR_ε^0 en norme dans $W_1^0(\Omega_\varepsilon)$. A l'aide du comportement de u_0 au voisinage du coin, nous obtenons

$$\|\Delta R_\varepsilon^0\|_{W_1^0} \leq C\varepsilon^\alpha.$$

Par voie de conséquence, d'après les propositions 4.4.1 et 4.4.3,

Proposition 4.4.4 *Sous l'hypothèse que f s'annulle au voisinage de O,*

$$\|u_\varepsilon - U_\varepsilon^0\|_{W_1^2} \leq C_0\varepsilon^\alpha.$$

Cette première approximation n'étant pas suffisante pour obtenir des informations concernant la dérivée normale au sommet de l'arrondi, on recherche le terme suivant dans le développement de u_ε. En considérant le comportement à l'origine de u_0, on introduit la fonction Q_1 vérifiant

$$\varepsilon^{\alpha-2}Q_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^\alpha\left(\Delta\chi_\varepsilon\phi_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) + 2\nabla\chi_\varepsilon\cdot\nabla\left[\phi_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right]\right)$$

et on considère dans ω le problème aux limites

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta q_1 &=& Q_1 \text{ dans } \omega \\ q_1 &=& 0 \text{ sur } \partial\omega, \end{array}\right. \tag{4.27}$$

qui admet une unique solution q_1 dans $W^2_1(\omega)$. Posons alors

$$U^1_\varepsilon = (1-\chi_\varepsilon)\, u_0 - \lambda_1 \varepsilon^\alpha q_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right).$$

Cette fois ci l'erreur introduite est :

$$\begin{array}{rcl} f + \Delta U^1_\varepsilon &=& -\mathbf{1}_{[a,2a]}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\left(\Delta\chi_\varepsilon(u_0-\lambda_1\phi_1) + 2\nabla\chi_\varepsilon\cdot\nabla(u_0-\lambda_1\phi_1) - \chi_\varepsilon f\right), \\ &=& -\mathbf{1}_{[a,2a]}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\left(\Delta\chi_\varepsilon(u_0-\lambda_1\phi_1) + 2\nabla\chi_\varepsilon\cdot\nabla(u_0-\lambda_1\phi_1)\right) \end{array}$$

pour ε assez petit. En posant $y_1(\zeta) = (1-\chi(\zeta))\,\phi_1(\zeta) - q_1(\zeta), y_1$ vérifie

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta y_1 &=& 0 \text{ dans } \omega, \\ y_1 &=& 0 \text{ sur } \partial\omega, \\ y_1(\zeta) &=& \phi_1(\zeta) + c_1 s^1_D(\zeta) + \mathcal{O}(|\zeta|^{-\alpha}),\ |\zeta| \longrightarrow +\infty, \end{array}\right. \tag{4.28}$$

et ne dépend que du domaine ω. Un calcul simple montre que

$$2c_1\alpha = \lim_{R\longrightarrow+\infty}\int_{\Omega\cap\partial B_R}\left(y_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n} - \phi_1\frac{\partial y_1}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma_R,$$

entrainant la constante c_1 à valoir :

$$c_1 = \frac{1}{2\alpha}\int_{\{\sigma\in\Gamma,|\sigma|<a\}}\frac{\partial\phi_1}{\partial n}(\sigma)y_1(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma.$$

Le terme U^1_ε se réécrit alors

$$U^1_\varepsilon = (1-\chi_\varepsilon)\,(u_0-\lambda_1\phi_1) + \lambda_1\varepsilon^\alpha y_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right).$$

La proposition suivante précise l'erreur commise par U^1_ε.

Proposition 4.4.5 *Sous l'hypothèse que f s'annulle au voisinage de O,*

$$\|u_\varepsilon - U^1_\varepsilon\|_{W^2_1} \le C_1\varepsilon^{2\alpha}.$$

Preuve. On évalue $\|\Delta R_\varepsilon\|^2_{W^0_1}$ avec $R_\varepsilon = u_\varepsilon - U^1_\varepsilon = u_\varepsilon - (1-\chi_\varepsilon)\,u_0 + \lambda_1\varepsilon^\alpha q_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$ et

$$\begin{array}{rcl} \|\Delta R_\varepsilon\|^2_{W^0_1} &=& \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon}\left(\varepsilon^2+|x|^2\right)|\Delta R_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x, \\ &=& \displaystyle\int_{\mathcal{C}_\varepsilon}\left(\varepsilon^2+|x|^2\right)\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\Delta\xi\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)(u_0-\lambda_1\phi_1) + \frac{2}{\varepsilon}\nabla\xi\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla(u_0-\lambda_1\phi_1)\right\}^2\mathrm{d}x \end{array}$$

où $\mathcal{C}_\varepsilon = \left\{x\in\Omega_\varepsilon, a\varepsilon < |x| < 2a\varepsilon\right\}$.
Comme

$$\begin{array}{rcl} u_0 - \lambda_1\phi_1 &=& \lambda_2 r^{2\alpha}\sin(2\alpha\theta) + \mathcal{O}(r^{3\alpha}), \text{ et} \\ \nabla\left(u_0-\lambda_1\phi_1\right) &=& 2\alpha\lambda_2 r^{2\alpha-1}\begin{pmatrix}\sin(2\alpha\theta)\\ \cos(2\alpha\theta)\end{pmatrix} + \mathcal{O}(r^{3\alpha-1}), \end{array}$$

quand $r \longrightarrow 0$, l'intégrale ci-dessus est majorée par

$$C \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \varepsilon^2 \left(\frac{r^{4\alpha+1} \sin^2(2\alpha\theta)}{\varepsilon^4} + \mathcal{O}\left(\frac{r^{5\alpha+1}}{\varepsilon^4}\right) + \frac{r^{4\alpha}}{\varepsilon^3} + \mathcal{O}\left(\frac{r^{5\alpha}}{\varepsilon^3}\right) + \frac{r^{4\alpha-1}}{\varepsilon^2} + \mathcal{O}\left(\frac{r^{5\alpha-1}}{\varepsilon^2}\right)\right) \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$$

i.e. par

$$C\varepsilon^{4\alpha} + \mathcal{O}(\varepsilon^{5\alpha}).$$

Finalement, on aboutit à

$$\|\Delta R_\varepsilon\|_{W_1^0(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{2\alpha}$$

et l'estimation découle alors de

$$\|R_\varepsilon\|_{W_1^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C\|\Delta R_\varepsilon\|_{W_1^0(\Omega_\varepsilon)}.$$

de la proposition 4.4.3. ∎

Plus généralement, on peut prouver

Théorème 4.4.1 *Il existe des fonctions y_ℓ vérifiant $y_\ell(\zeta) - \phi_\ell(\zeta) = \mathcal{O}(|\zeta|^{-\alpha})$ quand $|\zeta| \longrightarrow +\infty$, et*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta y_\ell & = & 0 \text{ dans } \omega, \\ y_\ell & = & 0 \text{ sur } \partial\omega, \end{array} \right.$$

tel que pour tout $m \in \mathbf{N}, m \geq 1$ si U_ε^m est définie par

$$U_\varepsilon^m = (1-\chi_\varepsilon)\left(u_0 - \sum_{\ell=1}^{\ell=m} \lambda_\ell \phi_\ell\right) + \sum_{\ell=1}^{\ell=m} \lambda_\ell \varepsilon^{\ell\alpha} y_\ell\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right),$$

on ait l'erreur d'approximation

$$\|u_\varepsilon - U_\varepsilon^m\|_{W_1^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_m \varepsilon^{(m+1)\alpha}. \tag{4.29}$$

Remarque 4.4.2 *Ci dessus, les coefficients λ_ℓ sont ceux de (4.18). Si $\Omega, \Omega_\varepsilon$ sont bornés, on a*

$$\begin{array}{rcl} \|u_\varepsilon - U_\varepsilon^m\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} & \leq & C\varepsilon^{(m+1)\alpha}, \\ \|u_\varepsilon - U_\varepsilon^m\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} & \leq & C\varepsilon^{(m+1)\alpha-1}, \\ \|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} & \leq & C\varepsilon^{\alpha-1}. \end{array}$$

Corollaire 4.4.1 *Dans tout voisinage du point O_ε, on a*

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{1 \leq j \leq 4} \lambda_j \varepsilon^{j\alpha} y_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{5\alpha-1}). \tag{4.30}$$

Par ailleurs, lorsque $\varepsilon \to 0^+$, on a l'estimation suivante

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}(O_\varepsilon) = \lambda_1 \frac{\partial y_1}{\partial n}(O_1)\varepsilon^{\alpha-1} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2\alpha-1}). \tag{4.31}$$

Hors de tout voisinage de l'origine, pour ε assez petit, on a

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + c_1\lambda_1\varepsilon^{2\alpha} s_D^1(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3\alpha}), \tag{4.32}$$

où c_1 est la constante dans (4.28).

Preuve. On prouve le développement (4.31). On peut écrire au voisinage du point O_ε :

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{j\leq 4} \lambda_j \varepsilon^{j\alpha} y_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{5\alpha-1}).$$

Soit $x \in \Omega_\varepsilon,\ \eta > 0$ et e_2 le vecteur $(0,-1)$. On a

$$u_\varepsilon(x+\varepsilon^{1+\eta}e_2) - u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{1+\eta}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial e_2}(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2(1+\eta)} \times \varepsilon^{\alpha-2})$$

et le membre de droite est égal à

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x+\varepsilon^{1+\eta}e_2) - u_\varepsilon(x) &= \sum_{j\leq 4} \lambda_j \varepsilon^{j\alpha}\left(y_j\left(\frac{x+\varepsilon^{1+\eta}e_2}{\varepsilon}\right) - y_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{5\alpha-1}), \\ &= \sum_{j\leq 4} \lambda_j \varepsilon^{j\alpha}\left(\varepsilon^{\eta}\frac{\partial y_j}{\partial e_2}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{2\eta}\right)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{5\alpha-1}), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{u_\varepsilon(x+\varepsilon^{1+\eta}e_2) - u_\varepsilon(x)}{\varepsilon^{1+\eta}} = \sum_{j\leq 4} \lambda_j \varepsilon^{j\alpha+\eta-(1+\eta)}\left(\frac{\partial y_j}{\partial e_2}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{2\eta-(1+\eta)}\right)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{5\alpha-1-(1+\eta)})$$

Soit O_1 le point de coordonnées $(0,-c/2)$. Avec $x = \varepsilon O_1 = O_\varepsilon$ et $\eta = \alpha$, l'égalité ci-dessus devient

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial e_2}(O_\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3\alpha}/\varepsilon^{1+\alpha}) = \sum_{j\leq 4} \lambda_j \varepsilon^{j\alpha-1}\frac{\partial y_j}{\partial e_2}(O_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2\alpha-1}) + \mathcal{O}(\varepsilon^{4\alpha-2}),$$

d'où la conclusion

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial e_2}(O_\varepsilon) = \lambda_1 \varepsilon^{\alpha-1}\frac{\partial y_1}{\partial e_2}(O_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2\alpha-1}).$$

■

Remarque 4.4.3 *Comme y ne dépend que de ω, le premier terme du développement asymptotique (4.31) ne dépend que de la géométrie du domaine et du second membre f.*

Remarque 4.4.4 *En fait, c_1 peut être vu comme le coefficient permettant d'obtenir le comportement au voisinage de l'infini de $u_\varepsilon - u_0$ à partir du comportement local de u_ε*

$$\begin{aligned} &\text{Pour les } x \text{ tels que } |x| \leq \varepsilon, && u_\varepsilon(x) = \lambda_1 \varepsilon^{\alpha} y_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2\alpha-1}), \\ &\text{Pour les } x \text{ tels que } |x| \geq r_0 > 0, && u_\varepsilon(x) - u_0(x) = c_1\lambda_1\varepsilon^{2\alpha} s^1_D(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3\alpha}). \end{aligned}$$

Remarque 4.4.5 *Quand on ne suppose plus que f s'annule au voisinage de O, on peut toujours décomposer f en un terme f_1 s'annulant au voisinage de O et un autre f_2 à support compact en introduisant une fonction de troncature comme dans la preuve de la Proposition 4.4.3. Le premier terme du développement est celui de la preuve, et l'algorithme décrit précédemment conduit à un développement asymptotique de u_ε insuffisant pour obtenir un comportement précis de la dérivée normale au sommet de l'arrondi. On a seulement une estimation en*

$$\|u_\varepsilon - U^0_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_\delta \varepsilon^{\alpha/2-\delta}, \quad \forall \delta \in]0,\alpha/2[$$

avec une constante C_δ dépendante de f et δ. Toutefois, lorsque f est régulière et satisfait une propriété de décroissance rapide en 0 [65, Ch. 7] :

$$\forall N \in \mathbf{N}, \forall \beta \in \mathbf{N}^2, \exists C_\beta > 0, \left|\partial_\theta^{\beta_1}\left(r\partial_r\right)^{\beta_2} f\right| \leq C_\beta r^N,$$

au voisinage de O, le développement asymptotique (4.18) de u_0 reste vrai, et par conséquent celui de u_ε aussi.

4.4.3 Représentation intégrale de la dérivée normale.

Comme pour le cône, la fonction de Green G_ε de Ω_ε s'écrit : $G_\varepsilon(x,y) = \eta\left(\frac{|x|}{|y|}\right) E_2(x,y) + H_\varepsilon(x,y)$, où η est la fonction définie à la sous-section 4.3.2, positive sur $\mathbf{R}^+$, nulle dans un voisinage de O et $+\infty$, et $H_\varepsilon(\cdot,y)$ vérifie un problème analogue à (4.16).

Lemme 4.4.1 *La fonction de Green G_ε vérifie :*

1. $\nabla_x G_\varepsilon(x,y) = -\dfrac{x-y}{2\pi|x-y|^2} + O(1)$, *quand* $y \longrightarrow x$;
2. *pour tout* $y \in \Omega_\varepsilon, \psi \in \mathcal{C}_0^\infty\left(\overline{\Omega}_\varepsilon\right)$,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} G_\varepsilon(x,y)\Delta\psi(x)\,\mathrm{d}x = -\psi(y) + \int_{\Gamma_\varepsilon} \psi(x)\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial n_x}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(x).$$

Preuve. Le premier point est clair.
Pour le second, on considère une fonction de troncature $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$ à support dans une boule $B_\gamma(y)$ centrée en y de rayon γ assez petit et égale à 1 dans $B_{\frac{\gamma}{2}}(y)$.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} G_\varepsilon(x,y)\Delta\psi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\Omega_\varepsilon} G_\varepsilon(x,y)\Delta\left(\chi\psi\right)(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_\varepsilon} G_\varepsilon(x,y)\Delta\left((1-\chi)\psi\right)(x)\,\mathrm{d}x,\\
&= -\psi(y) + \int_{\Omega_\varepsilon - B_{\gamma/2}(y)} G_\varepsilon(x,y)\Delta\left((1-\chi)\psi\right)(x)\,\mathrm{d}x,\\
&= -\psi(y) + \int_{\Omega_\varepsilon - B_{\gamma/2}(y)} \Delta_x\left(G_\varepsilon(x,y)\right)\left((1-\chi)\psi\right)(x)\,\mathrm{d}x\\
&\quad - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial n_x}(x,y)(1-\chi)(x)\psi(x)\,\mathrm{d}\sigma(x),\\
&= -\psi(y) - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial n_x}(x,y)\psi(x)\,\mathrm{d}\sigma(x).
\end{aligned}$$

■

Bien sur, la fonction de Green permet d'exprimer la solution u_ε au moyen de la formule intégrale :

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\Omega_\varepsilon} f(y)G_\varepsilon(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{4.33}$$

Nous pouvons alors énoncer :

Proposition 4.4.6 *Soit $\sigma \in \Gamma_\varepsilon$. On a la formule de représentation intégrale :*

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}(\sigma) = \int_{\Omega_\varepsilon} f(y)\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial n_\sigma}(\sigma,y)\,\mathrm{d}y \tag{4.34}$$

Preuve. Soit $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty\left(\overline{\Omega}_\varepsilon\right)$ et calculons :

$$\begin{aligned}
< \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}, \psi > &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\Delta u_\varepsilon \psi - u_\varepsilon \Delta\psi\right)\,\mathrm{d}x,\\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(-f\psi - u_\varepsilon\Delta\psi\right)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

D'autre part, la singularité $\eta\left(\frac{|x|}{|y|}\right)\log(|x-y|)$ est localement intégrable [61] dans l'espace $\Omega_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon$, donc par le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \Delta\psi \,\mathrm{d}x &= \int_{\Omega_\varepsilon\times\Omega_\varepsilon} f(y)G_\varepsilon(x,y)\Delta\psi(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} f(y)\left(\int_{\Omega_\varepsilon} G_\varepsilon(x,y)\Delta\psi(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,\\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} f(y)\left(-\psi(y)-\int_{\Gamma_\varepsilon}\psi(x)\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial n_x}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(x)\right)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

La denière égalité est une conséquence du Lemme 4.4.1. Pour finir,

$$\begin{aligned}<\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n},\psi> &= \int_{\Omega_\varepsilon} f(y)\left(\int_{\Gamma_\varepsilon}\psi(x)\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial n_x}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(x)\right)\mathrm{d}y,\\ &= \int_{\Gamma_\varepsilon}\psi(x)\left(\int_{\Omega_\varepsilon} f(y)\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial n_x}(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\sigma(x),\end{aligned}$$

encore une fois d'après le théorème de Fubini, puisque la singularité $\dfrac{1}{|x-y|}$ est localement intégrable dans l'espace $\Gamma_\varepsilon \times \Omega_\varepsilon$. D'où la formule. ∎

Pour caractériser la fonction $\mathcal{G}' = \dfrac{\partial G_\varepsilon}{\partial n_\sigma}(\sigma,\cdot)$ lorsque $\sigma \in \Gamma_\varepsilon$, nous la décomposons en somme d'une partie singulière lorsque $y \longrightarrow \sigma$ et d'une partie appartenant à $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_\varepsilon)$:

$$\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial n_\sigma}(\sigma,y) = (n_x(\sigma)\cdot\nabla_x)\,G_\varepsilon(\sigma,y) = (n_x(\sigma)\cdot\nabla_x)\,E_2(\sigma,y) + \mathcal{G}''(\sigma,y).$$

Comme on peut écrire

$$\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial n_\sigma}(\sigma,y) = \lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{G_\varepsilon(\sigma-hn_\sigma,y)-G_\varepsilon(\sigma,y)}{h},$$

la fonction $\mathcal{G}'$ vérifie le problème aux limites suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Delta\mathcal{G}' &=& 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon,\\ \mathcal{G}' &=& 0 \text{ sur } \Gamma_\varepsilon - \{\sigma\}.\end{array}\right. \tag{4.35}$$

Notons $h(x,y) = y-\varphi(x) \equiv 0$ l'équation de Γ_ε et supposons[4] qu'au voisinage de $\sigma = (x_0,\varphi(x_0)), \Gamma_\varepsilon$ est de classe $\mathcal{C}^2$ de sorte que $\dfrac{\partial E_2}{\partial n_\sigma}(\sigma,\cdot)\Big|_{\Gamma_\varepsilon} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Gamma_\varepsilon)$ (borné quand $y \longrightarrow \sigma$) et considérons le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl}-\Delta\mathcal{G}'' &=& 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon,\\ \mathcal{G}'' &=& -\dfrac{\partial E_2}{\partial n_\sigma}(\sigma,\cdot) \text{ sur } \Gamma_\varepsilon.\end{array}\right. \tag{4.36}$$

A la condition que $\dfrac{\partial E_2}{\partial n_\sigma}(\sigma,\cdot)\Big|_{\Gamma_\varepsilon} \in W_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)$, le problème (4.36) est bien posé dans $W_0^1(\Omega_\varepsilon)$ et $\mathcal{G}''$ existe. Pour le point qui nous intéresse, i.e. celui de plus faible courbure $\sigma = O_\varepsilon$, on a tous

[4] c'est toujours vrai sauf aux deux points de raccords

calculs faits :

$$\frac{\partial E_2}{\partial n_\sigma}(\sigma,(x,\varphi(x))) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{cx+\frac{c\varepsilon}{2}}{x^2+(cx+\frac{c\varepsilon}{2})^2}, & x<-\varepsilon \\ \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\frac{c}{2\varepsilon}}{1+\left(\frac{c}{2\varepsilon}\right)^2 x^2}, & x\in]-\varepsilon,\varepsilon[, \\ -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{-cx+\frac{c\varepsilon}{2}}{x^2+(cx-\frac{c\varepsilon}{2})^2}, & x>\varepsilon. \end{cases}$$

Proposition 4.4.7 *La fonction* $\dfrac{\partial E_2}{\partial n_\sigma}(\sigma,\cdot)|_{\Gamma_\varepsilon}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* Γ_ε. *En particulier, elle admet une trace dans* $W_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)$. *De plus, on a les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial E_2}{\partial n_\sigma}(\sigma,\cdot)|_{\Gamma_\varepsilon} \right\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)} &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right), \\ \left\| \frac{\partial E_2}{\partial n_\sigma}(\sigma,\cdot)|_{\Gamma_\varepsilon} \right\|_{H^1(\Gamma_\varepsilon)} &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}\right), \\ \left\| \frac{\partial E_2}{\partial n_\sigma}(\sigma,\cdot)|_{\Gamma_\varepsilon} \right\|_{H^2(\Gamma_\varepsilon)} &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{5}{2}}}\right) \end{aligned}$$

On en déduit alors par une estimation directe que $\dfrac{\partial E_2}{\partial n_\sigma}(\sigma,\cdot)$ est telle que :

$$\left\| \frac{\partial E_2}{\partial n_\sigma}(\sigma,\cdot) \right\|_{W_0^{\frac{1}{2}}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right);$$

$\mathcal{G}''$ existe bien dans $W_0^1(\Omega_\varepsilon)$.

4.5 Coins arrondis : cas axisymétrique.

Nous nous intéressons maintenant au cas d'une pointe arrondie en dimension $n = 3$. On suppose aussi que l'ouverture du cône $\breve{\Omega}$ engendre une singularité conique[18]. Les techniques sont identiques à celles mises en oeuvre dans le cas de la dimension deux.

4.5.1 Développement asymptotique de la solution.

En dimension $n = 3$, l'inégalité de la proposition 4.12 résulte du lemme

Lemme 4.5.1 *Pour tout* $u \in \mathcal{C}_0^1(]0,+\infty[)$,

$$\int_0^{+\infty} |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x \le 4\int_0^{+\infty} x^2|u'(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Preuve. Une intégration par partie donne :

$$\begin{aligned} \int_0^r |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x &= [xu(x)]_0^r - \int_0^r 2xu(x)u'(x)\,\mathrm{d}x, \\ &\le \left(\int_0^r 4x^2u'(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^r u(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

■

Théorème 4.5.1 *Soit* $f \in W_1^0(\breve{\Omega}_\varepsilon)$.

1. *Il existe une unique solution* $u \in W_0^1(\breve{\Omega}_\varepsilon)$ *au problème aux limites (4.4). De plus* $u \in W_1^2(\breve{\Omega}_\varepsilon)$ *et satisfait à* $\|u\|_{W_1^2} \leq C_\varepsilon \|f\|_{W_1^0}$.
   La constante C_ε *peut être choisie indépendamment de* ε.
2. *Si* $|\beta - 1| < \sqrt{\Lambda_1 + \frac{1}{4}}$ *et* $f \in W_\beta^0(\breve{\Omega}_\varepsilon)$, *la solution existe et est unique dans* $W_\beta^2(\breve{\Omega}_\varepsilon)$, *avec* $\|u\|_{W_\beta^2} \leq C_\varepsilon \|f\|_{W_\beta^0}$.

Comme dans le cas cartésien, on pose

$$U_\varepsilon^0 = (1 - \chi_\varepsilon)\, u_0,$$

on peut prouver alors :

Proposition 4.5.1 *On suppose* f *nulle au voisinage de* O. *Il existe une constante* $C_0 > 0$ *indépendante de* ε *telle que*

$$\|u_\varepsilon - U_\varepsilon^0\|_{W^2_{1,a,+}} \leq C_0 \varepsilon^{\nu_1 + \frac{1}{2}}.$$

On introduit Q_1 vérifiant :

$$\varepsilon^{\nu_1 - 2} Q_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^{\nu_1}\left(\Delta^+ \chi_\varepsilon \phi_1^c\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) + 2\nabla\chi_\varepsilon \cdot \nabla\left[\phi_1^c\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right]\right),$$

et $q_1 \in W^2_{1,a,+}(\omega)$ solution du problème :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta^+ q_1 & = & Q_1 \text{ dans } \omega, \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial n} & = & 0 \text{ sur } \partial\omega_a, \\ q_1 & = & 0 \text{ sur } \partial\omega_b. \end{array}\right. \tag{4.37}$$

En posant :

$$U_\varepsilon^1 = (1 - \chi_\varepsilon)\, u_0 - \lambda \varepsilon^{\nu_1} q_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right), \tag{4.38}$$

$$= (1 - \chi_\varepsilon)\,(u_0 - \lambda_1 \phi_1^c) + \lambda_1 \varepsilon^{\nu_1} y_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right), \tag{4.39}$$

où $y_1(\zeta) = (1 - \chi(\zeta))\phi_1^c(\zeta) - q_1(\zeta)$, on peut pouver le résultat suivant :

Proposition 4.5.2 *On suppose* f *nulle au voisinage de* O. *Il existe une constante* $C_1 > 0$, *indépendante de* ε *telle que* $\|u_\varepsilon - U_\varepsilon^1\|_{W^2_{1,a,+}} \leq C_1 \varepsilon^{\nu_2 + \frac{1}{2}}$.

Plus généralement,

Théorème 4.5.2 *Soit* $m \in \mathbf{N}, m \geq 1$. *Pour* $\ell \leq m$, *il existe des fonctions* $y_\ell \in H^1_{1,\mathrm{loc}}(\omega)$ *vérifiant* $y_\ell(\zeta) - \phi_\ell^c(\zeta) = \mathcal{O}(|\zeta|^{-\nu_1 - 1}), |\zeta| \longrightarrow +\infty$ *et*

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta^+ y_\ell & = & 0 \text{ dans } \omega, \\ \dfrac{\partial y_\ell}{\partial n} & = & 0 \text{ sur } \partial\omega_a, \\ y_\ell & = & 0 \text{ sur } \partial\omega_b, \end{array}\right. \tag{4.40}$$

et telles que si U_ε^m *est défini par*

$$U_\varepsilon^m = (1 - \chi_\varepsilon)\,(u_0 - \sum_{\ell=1}^{\ell=m} \lambda_\ell \phi_\ell^c) + \sum_{\ell=1}^{\ell=m} \lambda_\ell \varepsilon^{\nu_\ell} y_\ell\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right), \tag{4.41}$$

alors on a l'estimation suivante

$$\exists C_m > 0,\ \|u_\varepsilon - U_\varepsilon^m\|_{W^2_{1,a,+}} \leq C_m \varepsilon^{\nu_{m+1}+\frac{1}{2}}. \tag{4.42}$$

Corollaire 4.5.1 *Au point O_ε, on a l'estimation suivante lorsque $\varepsilon \to 0^+$,*

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}(O_\varepsilon) = \lambda_1 \frac{\partial y_1}{\partial n}(O_1)\varepsilon^{\nu_1 - 1} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\nu_2 - 1}). \tag{4.43}$$

4.5.2 Représentation intégrale de la dérivée normale.

Alors qu'en dimension deux le comportement logarithmique nécessite d'introduire une fonction de troncature pour définir la fonction de Green, en dimension trois la fonction $\dfrac{1}{|x|}$ appartient à $W^1_0(\Omega_\varepsilon \cap \{x, |x| > 1\})$. La fonction de Green du domaine $\breve{\Omega}_\varepsilon$ peut donc s'écrire $G_\varepsilon(x,y) = \dfrac{1}{4\pi|x-y|} + H(x,y)$ avec $H(x,y) = \mathcal{O}(1)$ quand $|x| \longrightarrow +\infty$, à y fixé. Elle vérifie au sens des distributions

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta G_\varepsilon(\cdot, y) & = & \delta_y \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\breve{\Omega}_\varepsilon) \\ G_\varepsilon(\cdot, y) & = & 0 \text{ sur } \breve{\Gamma}_\varepsilon. \end{array} \right. \tag{4.44}$$

Le gradient de cette fonction (par rapport à x) a le comportement suivant

$$-\frac{x-y}{4\pi|x-y|^3} + \mathcal{O}(1),$$

quand $x \longrightarrow y$ On prouve par un calcul analogue à celui réalisé en dimension deux que la dérivée normale au point $\sigma \in \breve{\Gamma}_\varepsilon$, au voisinage duquel la frontière est de classe $\mathcal{C}^2$, est donnée par la formule de représentation intégrale

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}(\sigma) = \int_{\breve{\Omega}_\varepsilon} f(y) \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial n_\sigma}(\sigma, y)\, \mathrm{d}y. \tag{4.45}$$

Pour un point y qui n'est pas sur l'axe (Oz), la fonction de Green G_ε n'est pas axisymétrique. Pour réaliser pratiquement cette formule, on fixe donc $\sigma = O_\varepsilon$, point en lequel la normale extérieure est $-\vec{e}_z$. En ce point, on peut donc réécrire (4.45) sous la forme :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}(\sigma) = 2\pi \int_{\Omega_\varepsilon} f(r,z) \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial n_\sigma}(\sigma, (r,z)) r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}z. \tag{4.46}$$

Comme en dimension deux, $\mathcal{G}' = \dfrac{\partial G_\varepsilon}{\partial n_\sigma}(\sigma, \cdot)$ satisfait à un problème aux limites homogène du type

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta^+ \mathcal{G}' & = & 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon \\ \dfrac{\partial \mathcal{G}'}{\partial n} & = & 0 \text{ sur } \Gamma_a^\varepsilon, \\ \mathcal{G}' & = & 0 \text{ sur } \Gamma_b^\varepsilon. \end{array} \right. \tag{4.47}$$

En notant $E_3(x,y) = \dfrac{1}{4\pi|x-y|}$, on a pour $y = (r,z) \in \Omega_\varepsilon$

$$\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial G_\varepsilon}{\partial n_\sigma}(\sigma, y) = \dfrac{\partial G_\varepsilon}{\partial z_\sigma}(\sigma, y) & = & -\dfrac{1}{4\pi} \dfrac{z - z_{O_\varepsilon}}{(r^2 + (z - z_{O_\varepsilon}))^{\frac{3}{2}}} - \mathcal{G}''(y), \text{ soit,} \\ -\mathcal{G}'(y) & = & \dfrac{\partial E_3}{\partial z_\sigma}(\sigma, y) - \mathcal{G}''(y), \end{array}$$

avec $\mathcal{G}''$ vérifiant $-\Delta^+\mathcal{G}'' = 0$. Sur Γ_a^ε, on a $\left.\dfrac{\partial \mathcal{G}''}{\partial n}\right|_{\Gamma_a^\varepsilon} = -\left.\dfrac{\partial \mathcal{G}''}{\partial r}\right|_{\Gamma_a^\varepsilon} = 0$, tandis que sa trace sur Γ_b^ε est donnée en $\sigma' = (r, \varphi(r))$ par

$$\mathcal{G}''(\sigma') = \frac{\partial E_3}{\partial z_\sigma}(\sigma, \sigma') = \begin{cases} \dfrac{c}{8\pi\varepsilon} \dfrac{1}{r\left(1 + \left(\dfrac{c}{2\varepsilon}\right)^2 r^2\right)^{\frac{3}{2}}} & \text{pour } r < \varepsilon, \\ \dfrac{c}{4\pi} \dfrac{r - \dfrac{\varepsilon}{2}}{\left(r^2 + c^2\left(r - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} & \text{pour } r \geq \varepsilon. \end{cases} \tag{4.48}$$

En particulier, $\mathcal{G}''$ possède une trace sur Γ_b^ε singulière au point O_ε de sorte que $\mathcal{G}''|_{\Gamma_b^\varepsilon} \notin W_0^{1/2}(\Gamma_b^\varepsilon)$. Afin de caractériser pratiquement $\dfrac{\partial G_\varepsilon}{\partial z_\sigma}(\sigma, y)$, on pose donc

$$\mathcal{S}(y) = \frac{\partial E_3}{\partial z_\sigma}(\sigma, y) - \frac{c}{2\varepsilon} E_3(\sigma, y)$$

et on cherche $\dfrac{\partial G_\varepsilon}{\partial z_\sigma}(\sigma, y)$ sous la forme

$$\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial z_\sigma}(\sigma, y) = \mathcal{S}(y) - \mathcal{G}'''(y).$$

Ci-dessus, $\mathcal{G}'''$ est telle que

$$\begin{cases} -\Delta^+\mathcal{G}''' &= 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial \mathcal{G}'''}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_a^\varepsilon, \\ \mathcal{G}''' &= \mathcal{S} \text{ sur } \Gamma_b^\varepsilon, \end{cases} \tag{4.49}$$

où

$$\mathcal{S}|_{\Gamma_b^\varepsilon}(r, \varphi(r)) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon^3} \dfrac{c^3}{32\pi} \dfrac{r}{\left(1 + \left(\dfrac{c}{2\varepsilon}\right)^2 r^2\right)^{\frac{3}{2}}} & \text{pour} \quad r < \varepsilon, \\ \dfrac{c}{4\pi} \dfrac{r - \dfrac{\varepsilon}{2}}{\left(r^2 + c^2\left(r - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{c}{8\pi\varepsilon} \dfrac{1}{r\sqrt{1 + \left(\dfrac{c}{2\varepsilon}\right)^2 r^2}} & \text{pour} \quad r \geq \varepsilon, \end{cases}$$

Le comportement de $\mathcal{S}$ quand $r \longrightarrow +\infty$ est en r^{-2}, assurant ainsi que $S|_{\Gamma_b^\varepsilon} \in W_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)$ avec l'estimation

$$\|\mathcal{S}|_{\Gamma_b^\varepsilon}\|_{W_0^{\frac{1}{2}}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

On en déduit finalement l'existence d'une solution unique dans $W_0^1(\Omega_\varepsilon)$ au problème (4.49).

Le comportement asymptotique de la solution du problème de Dirichlet pour le laplacien au voisinage du coin (quand $r \longrightarrow 0$) qui nous permet d'avoir celui de la solution au voisinage de l'arrondi (quand $\varepsilon \longrightarrow 0$) est obtenu à partir de la méthode de séparation de variables. Cette meme méthode va nous permettre de reformuler le problème posé en domaine non borné en réduisant celui ci à un problème posé en domaine borné afin qu'un traitement numérique par éléments finis soit possible.

4.6 Discrétisation du problème par éléments finis

4.6.1 L'opérateur Dirichlet-to-Neumann

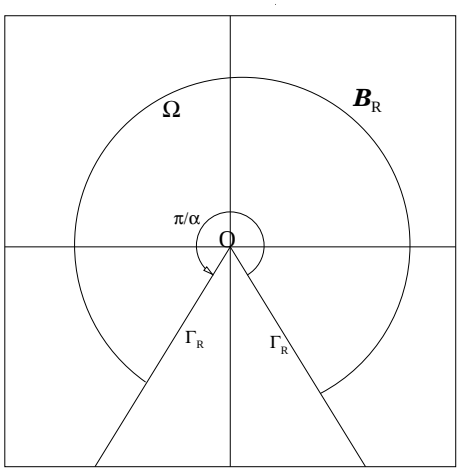


FIG. 4.2 – Domaine tronqué.

Pour réduire le problème 4.4 posé en domaine non borné à un problème équivalent posé en domaine borné, on sépare le domaine U (Ω_ε ou Ω) au moyen d'une frontière artificielle Σ en deux domaines dont l'un est borné. On choisira Σ circulaire et on notera U' le domaine borné et U'' celui qui est non borné. Le choix d'un cercle nous permettra de traiter la partie non borné en explicitant le développement en série de Fourier par séparation de variables. On supposera aussi que la donnée f est à support borné contenu dans U'. Soit Σ l'intersection de U avec le cercle de centre O et de rayon R. Introduisons le problème

$$\begin{aligned} -\Delta u' &= f, \\ u'|_{\partial\Omega_\varepsilon \cap \partial U'} &= 0, \\ \left.\frac{\partial u'}{\partial n'}\right|_\Sigma &= T(u'|_\Sigma) \end{aligned}$$

où T est l'opérateur qui à une fonction χ définie sur Σ associe la dérivée normale sur Σ de la solution u'' du problème

$$\begin{aligned} -\Delta u'' &= 0, \\ u''|_{\partial U \cap \partial U''} &= 0, \\ u''|_\Sigma &= \chi, \end{aligned}$$

et n' la normale extérieure à U'. Dans l'ouvert $\{x \in U, |x| > R\}$ la solution u s'écrit en coordonnées polaires

$$u''(r,\theta) = \sum_{m\geq 1} a_m r^{-m\alpha} \varphi_m(\theta)$$

où on rapelle que $(\varphi_m)_m$ est la base orthonormale de $L^2(]0,\pi/\alpha[)$ obtenue à partir de l'opérateur $-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}$, et les coefficients a_m ont pour expression

$$a_m = \left(\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} u(R,\theta)\varphi_m(\theta)\,\mathrm{d}\theta \right) R^{m\alpha},$$

L'opérateur Dirichlet-to-Neumann permet connaissant la valeur de u sur Σ de connaitre celle de $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma}$. Dans notre cas, nous avons

$$T(u''|_{\Sigma}) = \left.\frac{\partial u''}{\partial n'}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{\partial u''}{\partial r}\right|_{\Sigma} = -\sum_{m\geq 1}\frac{m\alpha}{R}\left(\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} u''(R,\theta'')\varphi_m(\theta'')\,\mathrm{d}\theta''\right)\varphi_m(\theta).$$

En identifiant $H^{1/2}(\Sigma)$ à $H^{1/2}(]0,\pi/\alpha[)$, avec la mesure $R\,\mathrm{d}\theta$ et si

$$u(\theta) = \sum_{m\geq 1} u_m\varphi_m(\theta), \sum_{m\geq 1}(1+m^2)^{1/2}u_m^2 < \infty,$$

alors

$$\|u\|_{H^{1/2}(\Sigma)} = R\left(\sum_{m\geq 1}(1+m^2)^{1/2}u_m^2\right)^{1/2}.$$

On notera pour $\mu\in\mathbf{R}, \|\cdot\|_\mu$ la norme dans $H^\mu(\Sigma)$ et l'opérateur $T : H^{1/2}(\Sigma)\longrightarrow H^{-1/2}(\Sigma)$ s'explicite

$$T(u) = -\sum_{m\geq 1}\frac{m\alpha u_m}{R}\varphi_m(\theta),$$

ainsi, pour $v(\theta) = \sum_{m\geq 1} v_m\varphi_m(\theta), \sum_{m\geq 1}(1+m^2)^{1/2}v_m^2 < \infty$

$$\int_\Sigma T(u)v\,\mathrm{d}\sigma = -\sum_{m\geq 1} m\alpha u_m v_m$$

Proposition 4.6.1 *La forme bilinéaire définie sur $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ par*

$$t(u,v) = -_{H^{-1/2}} < T(u), v >_{H^{1/2}}$$

est continue, symétrique, et définie positive.

Preuve. En effet, d'après ce qui précède

$$|t(u,v)| \leq C\left(\sum_{m\geq 1} mu_m^2\right)^{1/2}\left(\sum_{m\geq 1} mv_m^2\right)^{1/2} \leq C\|u\|_{1/2}\|v\|_{1/2}$$

et,

$$t(u,u) = \alpha\sum_{m\geq 1} mu_m^2 \geq c\|u\|_{1/2}^2.$$

■

Dans l'ouvert U', le problème (4.4) est équivalent au problème suivant

$$\text{trouver } u\in H^1(U') \text{ tel que } \begin{cases} -\Delta u' &= f, \\ u'|_{\partial U'\cap\partial U} &= 0, \\ \left.\dfrac{\partial u'}{\partial n'}\right|_{\Sigma} &= T(u'|_\Sigma). \end{cases} \tag{4.50}$$

En notant $\Gamma_R = \partial U' \cap \partial U$ et $H^1_{\Gamma_R}(U') = \left\{u \in H^1(U') | u_{\Gamma_R} = 0\right\}$, la formulation variationnelle du problème (4.50) est

$$\text{trouver } u' \in H^1_{\Gamma_R}(U') \text{ tel que } a(u', v) + b(u', v) = f(v), \forall v \in H^1_{\Gamma_R}(U'), \tag{4.51}$$

où

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_{U'} \nabla u.\nabla v dx, \\ b(u,v) &= -_{H^{-1/2}} < T(u|_\Sigma), v|_\Sigma >_{H^{1/2}}, \\ f(v) &= \int_{U'} f v dx. \end{aligned}$$

Corollaire 4.6.1 *Il existe une unique solution $u \in H^1_{\Gamma_R}(U')$ au problème (4.50).*

4.6.2 Approximation par éléments finis

Soit $\mathcal{T}_h$ une discrétisation régulière[5] de U' par triangles, et

$$V^h = \left\{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{U}') | v_h|_K \in P^1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\right\}$$

et

$$V^h_{\Gamma_R} = \left\{v_h \in V^h | v_h(M) = 0, \forall M \in \Gamma_R\right\}$$

On pose pour $u, v \in H^1(U')$,

$$b_N(u,v) = \sum_{m=1}^{m=N} m\alpha \left(\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} u(R,\theta')\varphi_m(\theta')d\theta'\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} v(R,\theta)\varphi_m\theta)d\theta\right)$$

et on considère le problème discret suivant de (4.50)

$$\text{trouver } u^N_h \in V^h_{\Gamma_R} \text{ tel que } a(u_h, v_h) + b_N(u_h, v_h) = f(v_h),\ \forall v_h \in V^h_{\Gamma_R}. \tag{4.52}$$

On note Σ_ρ l'intersection de U avec le cercle de centre O, de rayon ρ.

Proposition 4.6.2 *Le problème (4.52) possède une solution unique. En notant u la solution de (4.51), u^N_h celle de (4.52), il existe $C > 0$ telle que*

$$\|u^N_h - v_h\|_1 \leq C\left\{\|u - v_h\|_1 + \frac{1}{N}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{N\alpha}\|u\|_{3/2,\Sigma_\rho}\right\}$$

pour tout $\forall\ v_h \in V^h_{\Gamma_R}$

Preuve. Par différence, il vient

$$a(u - u^N_h, v_h) + b_N(u - u^N_h, v_h) = b_N(u, v_h) - b(u, v_h), \forall v_h \in V^h_{\Gamma_R}$$

[5] i.e. : $\exists \sigma, \frac{h_\Omega}{\rho_\Omega} \leq \sigma$ où $\rho_\Omega = \sup_{\Omega \in \mathcal{T}_h}\{\text{ diam } (B), B \subset \Omega\}$

et

$$\begin{aligned}
\|\nabla\left(u_h^N - v_h\right)\|_0^2 &= a(u_h^N - v_h, u_h^N - v_h), \\
&\leq C\left\{a(u_h^N - v_h, u_h^N - v_h) + b_N(u_h^N - v_h, u_h^N - v_h)\right\}, \\
&\leq C\left\{a(u - v_h, u_h^N - v_h) + b_N(u - v_h, u_N^h - v_h) + b(u, u_h^N - v_h) - b_N(u, u_h^N - v_h)\right\}, \\
&\leq C\left\{\|u - v_h\|_1 \|u_h^N - v_h\|_1 + |b(u, u_h^N - v_h) - b_N(u, u_h^N - v_h)|\right\},
\end{aligned}$$

d'où

$$\|\nabla\left(u_h^N - v_h\right)\|_0 \leq C\left\{\|u - v_h\|_1 + \sup_{w\neq 0\in H^1_{\Gamma_R}(\Omega_{\varepsilon,R})}\left\{\frac{|b(u,w) - b_N(u,w)|}{\|w\|_1}\right\}\right\},$$

en utilisant l'équivalence des normes H^1 et H^1_0.
Soit $w \in H^1_{\Gamma_R}(U')$, et notons $(u_m)_m, (w_m)_m$ les coefficients de Fourier des traces de u et w sur Σ sur la base des φ_m de sorte que

$$b(u,w) - b_N(u,w) = -\alpha \sum_{m=N+1}^{\infty} m u_m w_m,$$

Or $u_m = \left(\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} u(R,\theta)\varphi_m d\theta\right) = a_m R^{-m\alpha}$ donc pour $\rho < R$,

$$\begin{aligned}
|b(u,w) - b_N(u,w)| &= \left| -\alpha \sum_{m=N+1}^{\infty} m a_m w_m R^{-m\alpha}\right|, \\
&= \left|\alpha \sum_{m=N+1}^{\infty} m a_m w_m \rho^{-m\alpha}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{m\alpha}\right|, \\
&\leq C\alpha\left(\frac{\rho}{R}\right)^{N\alpha} \sum_{m=N+1}^{\infty} m|a_m w_m|\rho^{-m\alpha} \\
&\leq C\alpha\left(\frac{\rho}{R}\right)^{N\alpha} \frac{1}{N} \sum_{m=N+1}^{\infty} m^{3/2}|a_m|\rho^{-m\alpha} m^{1/2}|w_m|, \\
&\leq \frac{C\alpha}{R^2}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{N\alpha} \frac{1}{N}\|u\|_{3/2,\Sigma_\rho}\|u\|_{1/2,\Sigma}
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'estimation

$$\|\nabla\left(u_h^N - v_h\right)\|_0 \leq C\left\{\|u - v_h\|_1 + \frac{\alpha}{R^2}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{N\alpha}\frac{1}{N}\|u\|_{3/2,\Sigma_\rho}\right\}. \qquad \blacksquare$$

4.7 Expériences numériques.

Dans cette partie, on calcule une approximation numérique de la densité de charge au bout de la pointe en utilisant les formules asymptotiques (4.31) dans le cas cartésien (2D) et (4.43) dans le cas axisymétrique, en comparant ces formules avec les représentations intégrales (4.34)

et (4.45). Pour simplifier, on considère les calculs dans un domaine borné : secteur angulaire de rayon $R = 5$ arrondi au coin. Les résulats sont obtenus avec MATLAB.

Tout d'abord, on commence avec quelques remarques dans le cas cartésien, valables aussi pour le cas axisymétrique.
En considérant les développements asymptotiques, on constate que l'approximation peut être réalisée indépendamment de ε. En effet, $\dfrac{\partial y_1}{\partial n}(O_1)$ et α dépendent seulement de la géométrie du domaine ω, alors que λ_1 est égal à

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\alpha} \int_\Omega f s_D^1 \, \mathrm{d}x.$$

Ainsi, en supposant que $\dfrac{\partial y_1}{\partial n}(O_1)$ est connu (on remarque que la valeur de $\dfrac{\partial y_1}{\partial n}(O_1)$ est directement calculable en résolvant les problèmes (4.27) ou (4.28)) , seul λ_1 doît être évaluée. Ceci revient à calculer une approximation de s_D^1. Pour cela, on peut utiliser la Méthode du Complément Singulier [34], en discrétisant les problèmes au moyen des éléments finis de Lagrange P_1 sur une série de triangulations régulières $(\mathcal{T}_h)_h$, où h est le pas de discrétisation. D'après les remarques ci-dessus, le pas h peut être choisi *indépendamment de* ε. Les erreurs de convergence vérifient :

$$|\lambda_1 - \lambda_1^h| = \mathcal{O}(h^{2\alpha}).$$

en prenant en compte le résultat classique sur l'approximation d'intégrales lorsque le domaine exact et le domaine obtenu par discrétisation diffèrent, i.e. erreur en $\mathcal{O}(h^2)$.

Remarque 4.7.1 *L'erreur d'approximation pour λ_1 peut être améliorée [68] et obtenir un erreur en $\mathcal{O}(h^2)$. On peut aussi raffiner le maillage au voisinage du coin pour obtenir une erreur similaire.*

D'un autre côté, on peut aussi choisir d'utiliser les formules de représentation intégrale. Pour prendre en compte le voisinage de l'arrondi, le pas du maillage doît être de l'ordre de ε, i.e. $h_\varepsilon \simeq \varepsilon$. $\partial_n u_\varepsilon(O_\varepsilon)$ donné par (4.34) est évalué en calculant une approximation $\mathcal{G}'_h$ par éléments finis de $\mathcal{G}' = \partial_n G_\varepsilon(O_\varepsilon, \cdot)$ sous la forme $\mathcal{G}'_h = \mathcal{G}''_h + \partial_n E_2(O_\varepsilon, \cdot)$, où $\mathcal{G}''_h$ est l'approximation par éléments finis de Lagrange P^1 de la solution du problème (4.36). L'erreur de convergence devient alors

$$\left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}(O_\varepsilon) - \int_{\Omega_{\varepsilon,h}} f \mathcal{G}'_h \, \mathrm{d}x \right| = O(h_\varepsilon^2).$$

On remarque que les intégrales ne sont pas évaluées sur Ω_ε mais sur $\Omega^{ext} = \Omega_\varepsilon \cap \overset{\circ}{\mathrm{supp}}(f)$. De ce fait, la norme dans $L^2(\Omega^{ext})$ de la différence $\mathcal{G}' - \mathcal{G}'_h = \mathcal{G}'' - \mathcal{G}''_h$ est standard, i.e. en $O(h_\varepsilon^2 \, \|\mathcal{G}''\|_{H^2(\Omega^{ext})}) = \mathcal{O}(h_\varepsilon^2)$, puisque $\|\mathcal{G}''\|_{H^2(\Omega^{ext})} = \mathcal{O}(1)$.
Ainsi, pour comparer ces deux approches, on introduit le rapport

$$R_h(\alpha) = \frac{1}{\lambda_1^h \varepsilon^{\alpha-1}} \int_{\Omega_{\varepsilon,h}} f \mathcal{G}'_h dx.$$

On considère d'abord le cas cartésien avec un angle $3\pi/2$ ($\alpha = 2/3$). On choisit comme donnée une fonction s'annulant au voisinage de l'origine O

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 2, \\ \frac{1}{1+|x|^2}, & |x| \geq 2. \end{cases}$$

α \ h	0.2	0.1	0.05	0.025
2/3	1.077e-2	1.075e-2	1.076e-2	1.075e-2

TAB. 4.1 – Valeurs de λ_1^h pour $\alpha = 2/3$ et f nulle au voisinage de O.

Dans la Tab. 4.1, on donne les valeurs du coefficient λ_1^h, approchant λ_1, seul terme de (4.31) qui dépend des données. La Tab. 4.2 représente l'approximation de $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}(O_\varepsilon)$ multipliée par le facteur $\varepsilon^{\alpha-1}$ pour rendre le terme principal indépendant de ε.

α \ ε	0.5	0.25	0.125	0.062
2/3	9.34e-2	9.29e-2	9.28e-2	9.28e-2

TAB. 4.2 – Valeurs de $\varepsilon^{1-\alpha} \displaystyle\int_{\Omega_{\varepsilon,h}} f\mathcal{G}_h' \,\mathrm{d}x$ pour $\alpha = 2/3$ et f s'annule au voisinage de O.

Le rapport entre les deux valeurs calculées est reporté dans la Tab. 4.3 : ce rapport correspond à la valeur du coefficient $\dfrac{\partial y_1}{\partial n}(O_1)$, qui dépend uniquement de la géométrie du domaine. On présente ici les valeurs pour deux différentes valeurs de l'angle, précisément $3\pi/2$ et $4\pi/3$. On pourra remarquer que la convergence est bonne.
On a représenté dans la Tab. 4.4 les résultats obtenus lorsque f ne s'annulle pas au voisinage

α \ ε	0.5	0.25	0.125	0.062
2/3	-0.856	-0.868	-0.862	-0.862
3/4	-0.918	-0.883	-0.887	-0.890

TAB. 4.3 – Rapport $R_h(\alpha)$ pour $\alpha = 2/3, 3/4$ et f s'annulant au voisinage de O.

de l'origine. On a choisi la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|^2}.$$

Pour finir, on considère le cas axisymétrique, avec un angle correspondant à $\beta = 4/3$ et on choisit la donnée

$$f(x) = e^{-\frac{1}{|x|^2}}.$$

En d'autres termes, f est à décroissance rapide dans un voisinage de l'origine O. On a reporté les résultats dans la Tab. 4.5.

4.8 Conclusion

Les formules empiriques de Peek (6) et (7) ne sont valables que pour des électrodes ayant une géométrie spécifique. Sous les hypothèses que les données (la densité de charge) s'annulent au

α \ ε	0.5	0.25	0.125	0.062
2/3	-0.500	-0.436	-0.394	-0.376
3/4	-0.411	-0.360	-0.336	-0.305

TAB. 4.4 – Rapport $R_h(\alpha)$ pour $\alpha = 2/3, 3/4$ et f ne s'annullant pas au voisinage de O.

β \ ε	0.5	0.25	0.125	0.062
4/3	-0.106	-0.106	-0.105	-0.105

TAB. 4.5 – Rapport $R_h(\nu_1)$ pour $\beta = 4/3$ et f à décroissance rapide en O.

voisinage de la pointe, on a proposé une justification mathématique de ces formules dans le cas de géométries coïncidant à l'infini avec celle d'un cône. Le choix d'une forme parabolique pour l'arrondi est purement pratique, la généralisation à d'autres formes ne pose pas de problèmes spécifiques. En particulier, on a prouvé que la valeur de la dérivée normale au sommet de l'arrondi se comporte comme (cf. (4.31)) :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}(O_\varepsilon) = \lambda_1 \frac{\partial y_1}{\partial n}(O_1)\varepsilon^{\alpha-1} + o(1).$$

En d'autres termes, il dépend uniquement du rayon de courbure au sommet (ε), des données (à travers λ_1) et de la géométrie du domaine (coefficient $\frac{\partial y_1}{\partial n}(O_1)$).
Les résultats numériques sont en accord avec les résultats théoriques établis.
De plus, on explicite le lien entre le développement asymptotique du potentiel au voisinage de la pointe et au voisinage de l'infini. Ils sont reliés via la constante c_1 qui dépend seulement de la géométrie du domaine (voir la Remarque 4.4.4).

Enfin, on met en évidence un phénomène similaire à une couche limite mais localisée ici au voisinage de la pointe, i.e. pour $|x| \leq \varepsilon$.

5

Application au cas de domaines prismatiques

Sommaire

5.1 Introduction 125
5.1.1 Espaces à poids et analyse de Fourier 126
5.1.2 Comportement asymptotique des modes au voisinage du coin . . . 133
5.1.3 Développement asymptotique 135
5.2 Conclusion 140

5.1 Introduction

On va utiliser un développement en série de Fourier suivant z comme dans le chapitre 1 et l'analyse asymptotique du cas bidimensionnel pour le laplacien pour obtenir un développement asymptotique de la solution du laplacien dans un domaine cylindrique avec une arête rentrante "lissée" . Les domaines P, P_ε sont de la forme

$$U\times]0,1[,$$

où U est soit un ouvert noté Ω de $\mathbf{R}^2$ présentant un coin rentrant, soit un ouvert possédant coin 'arrondi'noté Ω_ε comme dans le chapitre 4. On notera indifféremment D les domaines P et P_ε quand il n'y a pas lieu de les distinguer. On suppose de même que le second membre f s'annule dans un voisinage cylindrique fixe de l'arête rentrante. Ceci nous permettra de séparer les variables et ainsi d'une part, de ramener le problème à une suite de problèmes bidimensionnels, et d'autre part d'obtenir le comportement asymptotique des modes de Fourier au voisinage du coin. On note (r,θ,z) les coordonnées cylindriques en choisissant comme axe (Oz) celui de l'arête, O étant l'origine, et O_ε le sommet de l'arrondi dans une section droite du prisme. En notant $(e_k)_k$ la base de $L^2(]0,1[)$ associée à l'opérateur $-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}$, i.e. $\mathrm{e}_k(z)=\sqrt{2}\sin(k\pi z)$, on a vu que toute fonction de $L^2(D)$ se décomposait en :

$$f=\sum_{k\geq 1} f_k \mathrm{e}_k,\ \ f_k\in L^2(U),$$

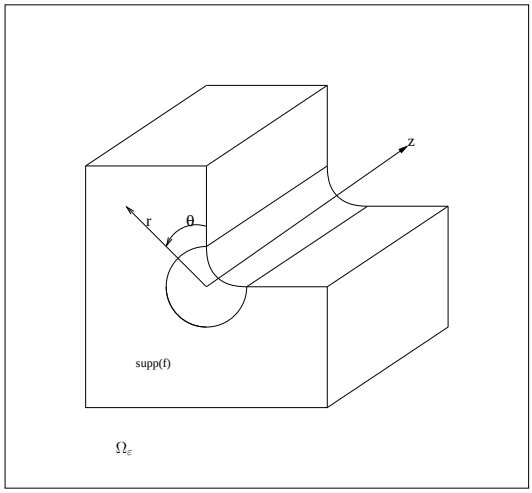


FIG. 5.1 – Prisme avec arête arrondie.

avec

$$\|f\|_{L^2(D)} = \left(\sum_{k\geq 1} \|f_k\|^2_{L^2(U)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Si $f \equiv 0$ dans l'ouvert $(U \cap B_2(O,\delta))\times]0,1[$ pour un $\delta > 0$, alors il en sera de même pour les modes $(f_k)_k$ dans $U \cap B_2(O,\delta)$, voisinage de O dans U. On note respectivement $u_0, u_\varepsilon \in H^1_0(D)$ les solutions du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & f, \\ u|_{\partial D} & = & 0 \end{array} \right. \tag{5.1}$$

pour $D = P, P_\varepsilon$. Nous allons appliquer ce qui a été fait en dimension deux aux modes de Fourier de la solution u_ε pour obtenir le comportement asymptotique de $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}$ sur $\{O_\varepsilon\}\times]0,1[$. Ces modes vérifient les problèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u_k + (k\pi)^2 u_k & = & f_k \text{ dans } U \\ u_k & = & 0 \text{ sur } \partial U. \end{array} \right. \tag{5.2}$$

On notera $u^0_k, u^\varepsilon_k \in H^1_0(U)$ les solutions du problème (5.2) respectivement lorsque $U = \Omega, \Omega_\varepsilon$.

5.1.1 Espaces à poids et analyse de Fourier

On décrit rapidement dans cette partie les espaces fonctionnels dans lesquels on établit l'existence et l'unicité d'une solution au problème (5.1). Ce sont des espaces à poids "anisotropes" : les poids n'interviennent que dans des directions particulières, ici orthogonales à l'arête. Comme dans le chapitre 1, la décomposition en série de Fourier dans la direction de l'arête est l'outil qui nous permettra d'utiliser les résultats obtenus en dimension deux. Comme on considère des espaces à poids, on redonne les propriétés du développement en série de Fourier.

Espaces à poids

Le domaine prismatique P ne présente qu'une singularité d'arête. Comme la solution u de (5.1) est régulière dans la direction de l'arête, i.e. $\partial_z u \in H^1(P)$, les directions singulières sont

orthogonales à l'arête. On note $r(x)$ la distance de $x \in \Omega$ à l'arête.

Définition 5.1.1 *Pour $m \in \mathbf{N}, \beta \in \mathbf{R}$*

$$\begin{aligned} V^m_\beta(P) &= \left\{ u \in L^2_{\rm loc}(P) \Big| \sum_{|\mu|\le m} \int_P |r(x)|^{2(\beta+|\mu|-m)} |\partial^\mu u(x)|^2 \, {\rm d}x < \infty \right\}, \\ W^m_\beta(P_\varepsilon) &= \left\{ u \in L^2_{\rm loc}(P_\varepsilon) \Big| \sum_{|\mu|\le m} \int_{P_\varepsilon} (\varepsilon^2 + r(x)^2)^{\beta+|\mu|-m} |\partial^\mu u(x)|^2 \, {\rm d}x < \infty \right\} \end{aligned}$$

On désignera par ω l'ouvert non borné obtenu par réunion des images de Ω_ε par homothétie centrée en O et de rapport $\dfrac{1}{\varepsilon}$:

$$\omega := \bigcup_{1>\varepsilon>0} \varepsilon^{-1}\Omega_\varepsilon,$$

et on définit comme dans le chapitre précédent les espaces $W^m_\beta(\omega), m \in \{0,1,2\}, \beta \in \mathbf{R}$.

Analyse de Fourier

Proposition 5.1.1 *Soit u appartenant à l'espace $W^0_\beta(P_\varepsilon)$. Pour $k \in \mathbf{N}$, il existe des coefficients $u_k \in W^0_\beta(\Omega_\varepsilon)$*

$$u_k(x_1,x_2) = \int_0^1 u(x_1,x_2,x_3) {\rm e}_k(x_3) dx_3,$$

tels que $u = \displaystyle\sum_{k\ge 0} u_k {\rm e}_k$, dans P_ε et $\|u\|^2_{W^0_\beta(P_\varepsilon)} = \displaystyle\sum_{k\ge 0} \|u_k\|^2_{W^0_\beta(\Omega_\varepsilon)}$.

De plus, si $u \in W^2_1(P_\varepsilon) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_0(P_\varepsilon)$, on a

$$\|u\|^2_{W^2_1(P_\varepsilon)} = \sum_{k\ge 0} \|u_k\|^2_{W^2_1(\Omega_\varepsilon)} + (k\pi)^2 \left(2\|\nabla u_k\|^2_{(W^0_1(\Omega_\varepsilon))^2} + \|u_k\|^2_0 \right) + (k\pi)^4 \|u_k\|^2_{W^0_1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Le même résultat est vrai si on remplace les espaces $W^m_\beta(P_\varepsilon)$ par $V^m_\beta(P), m \le 2, \beta \in \mathbf{R}$.
Si u est solution de (5.1), les modes $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ sont solution des problèmes aux limites (5.2).

Lemme 5.1.1 *On a les estimations a priori suivantes :*

$$\begin{aligned} \|r\Delta u_k\|_0 &\le C\|rf_k\|_0, \\ (k\pi)\|r\nabla u_k\|_0 &\le C\|rf_k\|_0, \\ (k\pi)^2\|ru_k\|_0 &\le C\|rf_k\|_0, \\ (k\pi)\|u_k\|_0 &\le C\|rf_k\|_0 \end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de calculer $\|(-\Delta + (k\pi)^2)u_k\|^2_{V^0_1(\Omega)}$ pour obtenir

$$\|r\Delta u_k\|^2_0 + 2(k\pi)^2\|r\nabla u_k\|^2_0 + (k\pi)^4\|ru_k\|^2_0 = \|rf_k\|^2_0 + 2(k\pi)^2\|u_k\|^2_0.$$

Pour la dernière, il suffit d'utiliser une inégalité de Hardy standard,

$$(k\pi)^2\|u_k\|^2_0 \le \|rf_k\|_0\|r^{-1}u_k\|_0 \le C\|rf_k\|_0\|\nabla u_k\|_0 \le C\|rf_k\|^2_0,$$ ∎

On introduit maintenant les deux espaces suivants :

$$\mathcal{V}^1_{1,N}(\Omega) = \left\{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2, r\nabla\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^4,\ \mathbf{u}\cdot\tau = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$$

où τ est le vecteur tangent à $\partial\Omega$ tel que (τ, n) soit une base orthonormale directe, et

$$\mathcal{E}_N(\Omega) = \left\{\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\infty_0(\overline{\Omega})^2,\ \mathbf{u}\cdot\tau = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \mathbf{u} \equiv 0 \text{ dans un voisinage de tous les coins de } \Omega\right\}.$$

Proposition 5.1.2 *$\mathcal{E}_N(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{V}^1_{1,N}(\Omega)$.*

Soit $\varpi \in]0, 2\pi[$, $\rho > 0$ et K_ρ le secteur angulaire plan défini par

$$K_\rho = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta), 0 < r < \rho, 0 < \theta < \varpi, \right\}.$$

Soit $\zeta \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbf{R})$ vérifiant $\zeta \equiv 1$ dans un voisinage $[-\rho, \rho]$ de 0 et nulle dans un voisinage de l'infini.

Lemme 5.1.2 *Soit $h \in V^1_1(K_\rho)$. Alors $(1-\zeta(nr))h$ tend vers h dans $V^1_1(K_\rho)$ quand n tend vers l'infini.*

Preuve. Il suffit de trouver $n \in \mathbf{N}$ tels que $\|h\zeta(nr)\|_{V^1_1}$ est aussi petit que l'on veut.
Il est clair que $h\zeta(nr)$, $\zeta(nr)\partial_x h$, $\zeta(nr)\partial_y h$ tendent vers 0 dans $V^0_1(K_\rho)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.
Il reste donc à évaluer la norme de $h\partial_r(\zeta(nr))$ dans $V^0_1(K_\rho)$.
Soit $M = \sup_{x\in\mathbf{R}}(x^2\zeta'(x))$. On a alors

$$\forall r > 0,\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 1,\ |\partial_r(\zeta(nr))| \leq \frac{M}{nr}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\|h\partial_r(\zeta(nr))\|_{V^0_1} &\leq \frac{C'}{n}\|r^{-1}h\|_{V^0_1}\\ &\leq \frac{C''}{n}\|r^{-1}h\|_{V^0_1}\end{aligned}$$

On peut donc choisir $n \in \mathbf{N}$ de sorte que $\|h\partial_r(\zeta(nr))\|_{V^0_1}$ soit aussi petit que l'on veut. ∎

On peut maintenant passer à la preuve de la proposition 5.1.2. Tout d'abord, on rappelle le résultat suivant [70] concernant les traces des fonctions de régularité $V^1_1(\Omega)$: l'application $\gamma : u \in \mathcal{C}^\infty_0(\overline{\Omega}\backslash\{O\}) \longrightarrow u|_{\partial\Omega} \in \mathcal{C}^\infty_0(\partial\Omega\backslash\{O\})$ se prolonge en une application continue encore notée γ, $\gamma : V^1_1(\Omega) \longrightarrow V^{1/2}_1(\partial\Omega)$ où l'espace $V^{1/2}_1(\partial\Omega)$ est défini par

$$V^{1/2}_1(\partial\Omega) = \left\{u \in L^2_{\text{loc}}(\partial\Omega) | \sqrt{r}u \in L^2(\partial\Omega),\ \int_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \frac{\left||x|u(x) - |y|u(y)\right|^2}{|x-y|^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty\right\}.$$

Preuve. On procède en plusieurs étapes en suivant [41]. Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{V}^1_{1,N}(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. On note r_j la distance au coin S_j et on pose $\Omega_{j,c} = \Omega \cap B(M_j, R_j)$ où R_j est un réel strictement positif.

Etape 1 D'après le lemme précédent, on peut choisir n tel que $\mathbf{u}_j = (1-\zeta(nr_j))\mathbf{u} \in V^1_1(\Omega_{j,c})^2$ et $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_j\|_{V^1_1(\Omega_{j,c})^2}$ est aussi petit que l'on veut par rapport à ε. Par construction, $\mathbf{u}_j \equiv 0$ au voisinage du coin S_j et $\mathbf{u}\cdot\tau|_{\partial\Omega} = 0$. On peut donc construire $\mathbf{u}_a \in \mathcal{V}^1_{1,N}(\Omega)$ tel que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_a\|_{\mathcal{V}^1_{1,N}} \leq \varepsilon/2$$

et $\mathbf{u}_a \equiv 0$ dans un voisinage $\mathcal{V}$ des coins de Ω.

Etape 2 Soit $\mathcal{V}_0$ un voisinage des coins de Ω tel que $\overline{\mathcal{V}}_0 \subset \mathcal{V}$. On introduit l'espace $\tilde{V}_1^{1/2}(\Omega)$ des fonctions de $V_1^{1/2}(\partial\Omega)$ qui s'annulent sur $\mathcal{V}_0 \cap \partial\Omega$ et l'opérateur de relèvement continu $L_\tau : \tilde{V}_1^{1/2}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{V}_{1,N}^1(\Omega)$ de sorte que si γ_τ est l'opérateur de "trace tangentielle"
$\gamma_\tau : \mathbf{u} \in \mathcal{V}_{1,N}^1(\Omega) \longrightarrow \mathbf{u}\cdot\tau \in V_1^{1/2}(\partial\Omega)$ on ait $\gamma_\tau L_\tau g = g, \forall g \in \tilde{V}_1^{1/2}(\Omega)$.
On note C_τ la norme de l' opérateur L_τ : on a donc $1 \leq \|\gamma_\tau\| \cdot \|L_\tau\| \leq \|\gamma_\tau\| C_\tau$.
Par régularisation (convolution avec une suite régularisante), on peut trouver $\mathbf{u}_b \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ tel que

$$\mathbf{u}_b \equiv 0 \text{ dans } \mathcal{V}_0, \quad \|\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b\|_{\mathcal{V}_{1,N}^1} \leq \varepsilon/(4\|\gamma_\tau\| \cdot \|L_\tau\|)$$

Par continuité de l'opérateur γ_τ, on a

$$\begin{aligned} \|\gamma_\tau(\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b)\|_{\mathcal{V}_1^{1/2}} &= \|\mathbf{u}_b \cdot \tau\|_{V_1^{1/2}} \\ &\leq \|\gamma_\tau\| \|\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b\|_{\mathcal{V}_{1,N}^1} \\ &\leq \varepsilon/(4C_\tau) \end{aligned}$$

Etape 3 L'opérateur de relèvement préservant la régularité [71] (une trace régulière fournit un relèvement régulier), on corrige la condition au bord de $\mathbf{u}_b$ en considérant $\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_b - L_\tau(\mathbf{u}_b \cdot \tau)$. On a alors

$$\mathbf{u}_c \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}),\ \mathbf{u}_c \cdot \tau = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad \mathbf{u}_c \equiv 0 \text{ dans un voisinage des coins de } \Omega.$$

Enfin $\|\mathbf{u}_c - \mathbf{u}\|_{\mathcal{V}_1^1} \leq \|\mathbf{u}_c - \mathbf{u}_b\|_{\mathcal{V}_1^1} + \|\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_a\|_{\mathcal{V}_1^1} + \|\mathbf{u}_a - \mathbf{u}\|_{\mathcal{V}_1^1} \leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/2 \leq \varepsilon$. ∎

Proposition 5.1.3 *Pour tous* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{1,N}^1(\Omega)$, *on a :*

$$\begin{aligned} \int_\Omega r^2 \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega r^2 \text{ rot } (\mathbf{u}) \cdot \text{ rot } (\mathbf{v})\,\mathrm{d}x + \int_\Omega r^2 \text{ div } (\mathbf{u}) \cdot \text{ div } (\mathbf{v})\,\mathrm{d}x \\ &\quad -2\int_\Omega (x_2 v_1 - x_1 v_2) \text{ rot } (\mathbf{u})\,\mathrm{d}x - 2\int_\Omega (x_2 u_1 - x_1 u_2) \text{ rot } (\mathbf{v})\,\mathrm{d}x \\ &\quad +2\int_\Omega (u_1 v_1 + u_2 v_2)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Preuve. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{\Omega})$.

$$\begin{aligned} \int_\Omega r^2 \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}\,\mathrm{d}x &= \sum_{1\leq i,j\leq 2} \int_\Omega r^2 \partial_j u_i \cdot \partial_j v_i\,\mathrm{d}x \\ &= -\sum_{1\leq i,j\leq 2} \int_\Omega \partial_j(r^2\partial_j u_i) v_i\,\mathrm{d}x + \sum_{1\leq i,j\leq 2} \int_{\partial\Omega} (r^2\partial_j u_i) v_i n_j\,\mathrm{d}\sigma \\ &= -\sum_{1\leq i,j\leq 2} \int_\Omega r^2 \partial_{jj} u_i v_i\,\mathrm{d}x - \sum_{1\leq i,j\leq 2} 2\int_\Omega x_j \partial_j u_i v_i\,\mathrm{d}x + \sum_{1\leq i,j\leq 2} \int_{\partial\Omega} (r^2\partial_j u_i) v_i n_j\,\mathrm{d}\sigma \\ &= -\int_\Omega r^2 \Delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}x - \sum_{1\leq i,j\leq 2} 2\int_\Omega x_j \partial_j u_i v_i\,\mathrm{d}x + \sum_{1\leq i,j\leq 2} \int_{\partial\Omega} (r^2\partial_j u_i) v_i n_j\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_\Omega r^2 \Big(\mathbf{rot} \text{ rot } (\mathbf{u}) - \nabla(\text{ div } (\mathbf{u}))\Big)\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \sum_{1\leq i,j\leq 2} 2\int_\Omega x_j \partial_j u_i v_i\,\mathrm{d}x + \sum_{1\leq i,j\leq 2} \int_{\partial\Omega} (r^2\partial_j u_i) v_i n_j\,\mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

Pour le premier terme du membre de droite, on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega r^2\Big(\mathbf{rot}\ \mathrm{rot}\ (\mathbf{u}) - \nabla(\ \mathrm{div}\ (\mathbf{u}))\Big)\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \mathrm{rot}\ (\mathbf{u})\cdot\ \mathrm{rot}\ (r^2\mathbf{v})\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\mathrm{rot}\ (\mathbf{u})(r^2\mathbf{v}\cdot\tau)\,\mathrm{d}\sigma\\ &\quad+\int_\Omega r^2\ \mathrm{div}\ (\mathbf{u})\cdot\ \mathrm{div}\ (r^2\mathbf{v})\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\mathrm{div}\ (\mathbf{u})(r^2\mathbf{v}\cdot n)\,\mathrm{d}\sigma\\ &= \int_\Omega r^2\ \mathrm{rot}\ (\mathbf{u})\cdot\ \mathrm{rot}\ (\mathbf{v})\,\mathrm{d}x + \int_\Omega r^2\ \mathrm{div}\ (\mathbf{u})\cdot\ \mathrm{div}\ (\mathbf{v})\,\mathrm{d}x\\ &\quad+2\int_\Omega\Big((x_1v_2-x_2v_1)\ \mathrm{rot}\ (\mathbf{u}) + (x_1v_1+x_2v_2)\ \mathrm{div}\ (\mathbf{v})\Big)\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_{\partial\Omega}(\partial_\tau(\mathbf{u}\cdot n)-\partial_n(\mathbf{u}\cdot\tau))(r^2\mathbf{v}\cdot\tau)\,\mathrm{d}\sigma\\ &\quad-\int_{\partial\Omega}(\partial_\tau(\mathbf{u}\cdot\tau)+\partial_n(\mathbf{u}\cdot n)(r^2\mathbf{v}\cdot n)\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

Le terme de bord se réecrit

$$\sum_{1\le i,j\le 2}\int_{\partial\Omega}(r^2\partial_j u_i)v_i n_j\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega} r^2\Big((\mathbf{v}\cdot\tau)\partial_n(\mathbf{u}\cdot\tau)+(\mathbf{v}\cdot n)\partial_n(\mathbf{u}\cdot n)\Big)\,\mathrm{d}\sigma.$$

On a maintenant

$$\begin{aligned}\int_\Omega r^2\nabla\mathbf{u}:\nabla\mathbf{v}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega r^2\ \mathrm{rot}\ (\mathbf{u})\cdot\ \mathrm{rot}\ (\mathbf{v})\,\mathrm{d}x + \int_\Omega r^2\ \mathrm{div}\ (\mathbf{u})\cdot\ \mathrm{div}\ (\mathbf{v})\,\mathrm{d}x\\ &\quad+2\int_\Omega\Big((x_1v_2-x_2v_1)\ \mathrm{rot}\ (\mathbf{u}) + (x_1v_1+x_2v_2)\ \mathrm{div}\ (\mathbf{u})\Big)\,\mathrm{d}x\\ &\quad-2\int_\Omega\Big(x_1(\partial_1u_1)v_1 + x_1(\partial_1u_2)v_2 + x_2(\partial_2u_1)v_1 + x_2(\partial_2u_2)v_2\Big)\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_{\partial\Omega} r^2\Big((\mathbf{v}\cdot\tau)\partial_\tau(\mathbf{u}\cdot n) - (\mathbf{v}\cdot n)\partial_\tau(\mathbf{u}\cdot\tau)\Big)\,\mathrm{d}\sigma,\end{aligned}\tag{5.3}$$

Le terme de bord est donc nul si $\mathbf{u}\cdot\tau = \mathbf{v}\cdot\tau = 0$ sur $\partial\Omega$.
Intéressons nous maintenant au deux termes milieux de (5.3) et notons S leur somme :

$$\begin{aligned}S &= 2\int_\Omega\Big((x_1v_2-x_2v_1)\ \mathrm{rot}\ (\mathbf{u}) + (x_1v_1+x_2v_2)\ \mathrm{div}\ (\mathbf{u})\Big)\,\mathrm{d}x\\ &\quad-2\int_\Omega\Big(x_1(\partial_1u_1)v_1 + x_1(\partial_1u_2)v_2 + x_2(\partial_2u_1)v_1 + x_2(\partial_2u_2)v_2\Big)\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_\Omega\Big((x_1v_2-x_2v_1)\ \mathrm{rot}\ (\mathbf{u})\,\mathrm{d}x\\ &\quad+2\int_\Omega\Big((x_1v_1(\partial_2u_2)+x_2v_2(\partial_1u_1)-x_1v_2(\partial_1u_2)-x_2v_1(\partial_2u_1)\Big)\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_\Omega\Big((x_1v_2-x_2v_1)\ \mathrm{rot}\ (\mathbf{u})\,\mathrm{d}x\\ &\quad-2\int_\Omega(x_1u_2(\partial_2v_1)+x_2u_1(\partial_1v_2)) + 2\int_{\partial\Omega}(x_1v_1u_2n_2+x_2v_2u_1n_1)\,\mathrm{d}\sigma\\ &\quad+2\int_\Omega(u_1v_1+u_2v_2)\,\mathrm{d}x + 2\int_\Omega(x_1u_2(\partial_1v_2)+x_2u_1(\partial_2v_1))\,\mathrm{d}x - 2\int_{\partial\Omega}(x_1u_2v_2n_1+x_2v_1u_1n_2)\,\mathrm{d}\sigma\\ &= 2\int_\Omega(u_1v_1+u_2v_2)\,\mathrm{d}x + 2\int_\Omega(x_1v_2-x_2v_1)\ \mathrm{rot}\ (\mathbf{u})\,\mathrm{d}x + 2\int_\Omega(x_1u_2-x_2u_1)\ \mathrm{rot}\ (\mathbf{v})\,\mathrm{d}x\\ &\quad-2\int_{\partial\Omega}(x_2u_1-x_1u_2)(\mathbf{v}\cdot\tau)\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

Encore une fois le terme de bord est nul si $\mathbf{v}\cdot\tau = 0$ sur $\partial\Omega$.
La proposition 5.3 est donc démontrée lorsque $\mathbf{u},\mathbf{v}$ appartiennent à $\mathcal{E}_N(\Omega)$. On conclut alors par un argument de densité pour tout couple d'éléments dans $\mathcal{V}^1_{1,N}(\Omega)$. ∎

Corollaire 5.1.1 *Pour $u \in V_1^2(\Omega) \cap V_0^1(\Omega), u = 0$ sur $\partial\Omega$.*

$$\sum_{1\le i,j\le 2} \|r\partial_{i,j}^2 u\|_0^2 = \|r\Delta u\|_0^2 + 2\|\nabla u\|_0^2. \tag{5.4}$$

Preuve. Soit $u \in V_1^2(\Omega) \cap V_0^1(\Omega), u = 0$ sur $\partial\Omega$ et posons $\mathbf{u} = \nabla u$. $\mathbf{u}$ vérifie

$$\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2, \quad r\nabla\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2, \quad \mathbf{u}\cdot\tau = 0,$$

on peut donc appliquer la formule (5.3) avec $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \nabla u$ pour obtenir la conclusion. ∎

Remarque 5.1.1 *On peut aussi faire un calcul direct et utiliser la densité de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ à trace nulle sur $\partial\Omega$ dans l'espace des fonctions de $V_1^2(\Omega)\cap V_0^1(\Omega)$ à trace nulle sur $\partial\Omega$ (cf. [40, Proposition 2.2])*

Théorème 5.1.1 *Pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe une unique solution $u_k \in V_1^2(\Omega)$ au problème (5.2) et on a de plus l'estimation*

$$\|u_k\|_{V_1^2(\Omega)} \le c\|f_k\|_{V_1^0(\Omega)}.$$

Preuve. On montre que la solution $u_k \in H_0^1(\Omega)$ appartient à $V_1^2(\Omega)$. On sait déjà que

$$\|u_k\|_{V_0^1(\Omega)} \le c\|f_k\|_{V_1^0(\Omega)}.$$

Soit $\delta > 0$, $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\bar\Omega), \eta \equiv 1$ dans B_δ et $\eta \equiv 0$ dans $\Omega\backslash B_{2\delta}$, et $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\bar\Omega)$ une fonction valant 1 sur le support de η. On prolonge la fonction ηu_k par 0 sur le cône K issu du coin rentrant de Ω. En posant $V = \eta u_k$, on a

$$\begin{aligned}\left(-\Delta + (k\pi)^2\chi\right)V &= -\Delta\eta u_k - 2\nabla\eta\cdot\nabla u_k - \eta\Delta u_k + (k\pi)^2\chi\eta u_k,\\ &= -\Delta\eta u_k - 2\nabla\eta\cdot\nabla u_k + \eta f_k =: F \in \mathcal{C}_0^\infty(\bar K\backslash\{O\})\end{aligned}$$

D'après le théorème 4.3.1, le laplacien avec condition au bord de Dirichlet induit un isomorphisme de $V_1^2(K)$ dans $V_1^0(K)$. Notons A^{-1} l'opérateur inverse qui à $F \in V_1^0(K)$ associe l'unique solution U du problème

$$-\Delta U = F, \quad U = 0 \text{ sur } \partial K\backslash\{O\}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left(-\Delta + (k\pi)^2\chi\right)V = F &\iff -\Delta V = F - (k\pi)^2\chi V,\\ &\iff V = A^{-1}\left(F - (k\pi)^2\chi V\right),\\ &\iff \left(I + (k\pi)^2 A^{-1} m_\chi\right)V = A^{-1}F),\end{aligned}$$

où m_χ est l'application qui à $U \in V_1^2(K)$ associe $\chi U \in V_1^0(K)$. Ainsi, V existe et est unique dans $V_1^2(K)$ pourvu que la norme de l'opérateur $(k\pi)^2A^{-1}m_\chi$ soit assez petite. Comme, $\|m_\chi\| \le \rho(\chi)^2$, où $\rho(\chi)$ est le rayon de la plus petite boule contenant le support de χ, V existe dès que $\rho(\chi) \le (2k\pi\|A^{-1}\|^{1/2})^{-1}$. En choisissant $\delta < \rho(\chi)/2$, on a $V = \eta u_k \in V_1^2(K)$, et $u_k \in V_1^2(\Omega)$. D'après le lemme 5.1.1,

$$\begin{aligned}\|u_k\|_{V_1^2(\Omega)} &\le c\left(\|rf_k\|_0^2 + (k\pi)^4\|ru_k\|_0^2\right),\\ &\le c\|f_k\|_{V_1^0(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

∎

Comme pour le laplacien en dimension deux, on peut alors montrer le résultat suivant pour le domaine prismatique P :

Théorème 5.1.2 *Soit $\beta \in \mathbf{R}, |\beta - 1| < \alpha$.*
Si $f \in V^0_\beta(P)$ alors le problème (5.1) posé dans P admet une unique solution dans $V^2_\beta(P)$ satisfaisant

$$\|u\|_{V^2_\beta} \leq c_\beta \|f\|_{V^0_\beta}.$$

De même, pour le prisme arrondi P_ε

Théorème 5.1.3 *Si $f \in W^0_\beta(P_\varepsilon)$ alors le problème (5.1) posé dans P_ε admet une unique solution dans $W^2_\beta(\Omega_\varepsilon)$ satisfaisant*

$$\|u\|_{W^2_\beta} \leq C_{\beta,\varepsilon} \|f\|_{W^0_\beta}.$$

Intéressons nous à la dépendance par rapport à ε de la constante $C_{1,\varepsilon}$.

Lemme 5.1.3 *Soit $m \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)^2$ et $u \in H^2(\Omega_\varepsilon)$.*

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} m \cdot n \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 \mathrm{d}\sigma = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\Delta u (m \cdot \nabla u) + {}^t\nabla u (\nabla m) \nabla u\right) \mathrm{d}x \tag{5.5}$$

Preuve. Elle s'obtient en intégrant par parties à partir de $\displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u (m \cdot \nabla u)\,\mathrm{d}x$. ∎

Lemme 5.1.4 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout ε assez petit, et $u \in W^2_1(\Omega_\varepsilon) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_0(\Omega_\varepsilon)$, on ait*

$$\sum_{1\leq i,j\leq 2} \|\rho_\varepsilon \partial^2_{i,j} u\|_0 \leq C \left(\|\rho_\varepsilon \Delta u\|_0 + \|\rho_\varepsilon \nabla u\|_0 + \|\nabla u\|_0\right) \tag{5.6}$$

Preuve. On peut montrer que

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq 2} \|\rho_\varepsilon \partial^2_{i,j} u\|^2_0 &= \|\rho_\varepsilon \Delta u\|^2_0 + 2\|\nabla u\|^2_0 - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{n_1}{n_2} \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\rho^2_\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right) \mathrm{d}\sigma, \\
&= \|\rho_\varepsilon \Delta u\|^2_0 + 2\|\nabla u\|^2_0 \\
&\quad - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varepsilon^2 \frac{\left(1 + \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 + \varphi(\frac{x}{\varepsilon})^2\right)}{(1 + \varphi'(\frac{x}{\varepsilon})^2)^{3/2}} \left(\frac{-c}{\varepsilon}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial n}(x, \varphi_\varepsilon(x))\right)^2 \sqrt{1 + \varphi'_\varepsilon(x)^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

en utilisant la paramétrisation $y = \varphi_\varepsilon(x)$ de γ_ε. Comme

$$\sup_{x\in[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{1 + \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 + \varphi(\frac{x}{\varepsilon})^2}{(1 + \varphi'(\frac{x}{\varepsilon})^2)^{3/2}} = \sup_{x\in[-1,1]} \frac{1 + x^2 + \varphi(x)^2}{(1 + \varphi'(x)^2)^{3/2}}$$

on obtient

$$\sum_{1\leq i,j\leq 2} \|\rho_\varepsilon \partial^2_{i,j} u\|^2_0 \leq \|\rho_\varepsilon \Delta u\|^2_0 + 2\|\nabla u\|^2_0 + C(\alpha,\varphi)\varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|^2_{L^2(\gamma_\varepsilon)}.$$

En considérant une fonction $\tilde{m} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\omega})$ telle que $\tilde{m} \cdot n|_{\partial\omega} \geq 2$, on applique le lemme 5.5 en choisissant $m = \tilde{m}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$, et avec $\varepsilon \leq \rho_\varepsilon$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|^2_{L^2(\gamma_\varepsilon)} &\leq c(\tilde{m}) \left(\|\varepsilon \Delta u\|_0 \|\nabla u\|_0 + \|\varepsilon \nabla u\|_0 \|\nabla u\|_0\right), \\
&\leq c(\tilde{m}) \left(\|\rho_\varepsilon \Delta u\|_0 \|\nabla u\|_0 + \|\rho_\varepsilon \nabla u\|_0 \|\nabla u\|_0\right), \\
&\leq c(\tilde{m}) \left(\|\rho_\varepsilon \Delta u\|^2_0 + \|\nabla u\|^2_0 + \|\rho_\varepsilon \nabla u\|^2_0\right)
\end{aligned}$$

D'où la conclusion. ■

Les mêmes estimations que celles du lemme 5.1.1 sont vraies pour les solutions $u_k^\varepsilon \in W_1^2(\Omega_\varepsilon)$. On en déduit la

Proposition 5.1.4 *La constante $C_{1,\varepsilon}$ peut être choisie indépendante de ε.*

5.1.2 Comportement asymptotique des modes au voisinage du coin

Dans ce paragraphe, on recherche le comportement de la solution de (5.2) au voisinage du coin rentrant. Les singularités du laplacien en dimension deux ne sont plus suffisantes pour décrire le comportement de la solution u_k^0 de (5.2) au voisinage du coin O. On doit donc introduire de nouvelles fonctions singulières liées à l'opérateur $-\Delta + \lambda, \lambda = (k\pi)^2, k \in \mathbf{N}$. A cet effet, le principe de séparation de variables appliqué à l'équation (5.2) permettra d'obtenir un développement de la solution u_k^0 quand $r \longrightarrow 0$. Par localisation, on se restreint à l'ouvert défini en coordonnées polaires $U_\delta = U \cap B_2(O,\delta) = \left\{(r,\theta)\middle| 0 < r < \delta, 0 < \theta < \frac{\pi}{\alpha}\right\}$. On met en évidence ce comportement en O en utilisant un développement en série de Fourier-Bessel et les propriétés des fonctions de Bessel modifiées [1],[74].

Lemme 5.1.1 *Soit $\nu \in \mathbf{R}, \nu > 0$ L'équation différentielle sur $]0,+\infty[$*

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0, \tag{5.7}$$

a pour base de solutions (I_ν, K_ν) définies par

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{t\geq 0} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2t}}{t!\Gamma(t+\nu+1)}, \tag{5.8}$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\pi\nu)}. \tag{5.9}$$

Remarque 5.1.1
- *I_ν est appelée fonction de Bessel modifiée d'ordre ν de première espèce.*
- *Lorsque $\nu = n \in \mathbf{N}, x > 0, K_n(x)$ est définie comme la limite, qui existe, de $K_\nu(x)$ quand $\nu \longrightarrow n$.*

Ces fonctions admettent les développements suivant quand $x \longrightarrow 0^+$ [74] :

Propriété 3 *Pour $\nu > 0, I_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(1+\nu)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)$ et $K_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)$ uniformément en x lorsque $x \longrightarrow 0^+$.*

De même, leurs dérivées admettent les développements suivants [74] :

Propriété 4 *Pour $\nu > 0, z > 0$*

$$I'_\nu(\nu z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\frac{(1+z^2)^{1/4}}{z}\exp(\nu\eta(z))\left(1 + R_0(\nu,z)\right), \tag{5.10}$$

$$K'_\nu(\nu z) = -\sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}\frac{(1+z^2)^{1/4}}{z}\exp(-\nu\eta(z))\left(1 + R_1(\nu,z)\right), \tag{5.11}$$

avec $\eta(z) = \sqrt{1+z^2} + \log\left(\frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}\right)$ et $R_k(\nu,z) \leq \frac{C}{\nu}$, pour $k = 0, 1$.

En particulier, lorsque $x \longrightarrow 0$, les dérivées ont le comportement suivant :

$$\begin{aligned} I'_\nu(x) &= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}}\left(\frac{e}{2\nu}\right)^\nu \frac{1}{x^{\nu-1}}\left(1+r_0(\nu,z)\right), \\ K'_\nu(x) &= -\sqrt{\frac{\pi\nu}{2}}\left(\frac{2\nu}{e}\right)^\nu \frac{1}{x^{\nu+1}}\left(1+r_1(\nu,z)\right), \end{aligned}$$

où $r_k(\nu,z) \leq \dfrac{C}{\nu^2}$, pour $k=0,1$. On peut alors énoncer

Lemme 5.1.5 *Soit $u \in H^1(U_\delta) \cap \mathcal{C}^\infty\left(]0,\delta[; H^2 \cap H_0^1\left(]0,\frac{\pi}{\alpha}[\right)\right)$ vérifiant $-\Delta u + (k\pi)^2 u = 0$. Alors*

$$u(r,\theta) = \sum_{\ell\geq 1} a_{\ell,k} I_{\ell\alpha}(k\pi r)\varphi_\ell(\theta),$$

avec

$$|a_{\ell,k}| \leq C\frac{(\ell\alpha+2)\Gamma(\ell\alpha+1)2^{\ell\alpha}}{(k\pi\delta)^{\ell\alpha}}\|u\|_{L^2}, \tag{5.12}$$

où $(\varphi_\ell)_\ell$ est la b.o.n de $L^2\left(]0,\frac{\pi}{\alpha}[\right)$ (c.f. Prop.1.2.2) et I_ν est la fonction de Bessel modifiée d'ordre ν de première espèce

Preuve. D'après la régularité supposée pour u, pour $0<r<\delta$, il existe des coefficients $u_\ell(r)$ vérifiant

$$u(r,\theta) = \sum_{\ell\geq 1} u_\ell(r)\varphi_\ell(\theta), \text{p.p. dans } \mathrm{U}_\delta \text{ avec, } u_\ell(r) = \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} u(r,\theta)\varphi_\ell(\theta)d\theta.$$

D'après l'équation vérifiée par u, les coefficients u_ℓ sont solutions de l'équation différentielle

$$u''_\ell + \frac{1}{r}u'_\ell - \left((k\pi)^2 + \frac{(\ell\alpha)^2}{r^2}\right)u_\ell = 0,$$

qui se ramène après changement de variable $u_\ell(r) = v_\ell(k\pi r)$ à l'équation

$$v''_\ell(s) + \frac{1}{s}v'_\ell(s) - \left(1 + \frac{(\ell\alpha)^2}{s^2}\right)v_\ell(s) = 0,$$

dont la solution générale s'exprime au moyen des fonctions de Bessel modifiée. Ainsi, d'après le lemme 5.1.1

$$u_\ell(r) = a_{\ell,k}I_{\ell\alpha}(k\pi r) + b_{\ell,k}K_{\ell\alpha}(k\pi r),\ a_{\ell,k}, b_{\ell,k} \in \mathbf{R}.$$

D'autre part, comme les inégalités suivantes

$$\int_0^\delta |u_\ell^{(s)}(r)|rdr \leq C\|\partial^s u\|_{L^2}, s=0,1, \tag{5.13}$$

doivent etre vérifiées, d'après les développements de $I_\nu^{(s)}, K_\nu^{(s)}, s=0,1$, ci dessus, les coefficients $b_{\ell,k}=0$ doivent être nuls pour tout $\ell \geq 1$. Ainsi, $u_\ell(r) = a_{\ell,k}I_{\ell\alpha}(k\pi r)$, et en exprimant (5.13), les coefficients $a_{\ell,k}$ vérifient l'estimation donnée dans le lemme. ∎

La principale motivation est la détermination de la densité charge sur l'arête $\{O_\varepsilon\}\times]0,1[$. Pour cette raison, nous nous limiterons aux premiers termes du développement asymptotique. Au voisinage de $r=0$, les modes ont un comportement identique à celui des solutions du laplacien

$$u_k^0(r,\theta)=\lambda_k^{1,0}r^\alpha\varphi_1(\theta)+\lambda_k^{2,0}r^{2\alpha}\varphi_2(\theta)+\lambda_k^{3,0}r^{3\alpha}\varphi_3(\theta)+\left\{\begin{array}{l}\mathcal{O}\left(\lambda_k^{4,0}r^{4\alpha}\right),\alpha<2/3,\\ \mathcal{O}\left(\lambda_k^{1,1}r^{\alpha+2}\right),\alpha>2/3,\end{array}\right.$$

quand $r\longrightarrow 0$, avec $\lambda_k^{j,t}=a_{j,k}\dfrac{(k\pi)^{j\alpha}}{2^{j\alpha+2t}\Gamma(1+j\alpha+t)t!}$, (et sous réserve que $\lambda_k^{4,0}$ et $\lambda_k^{1,1}$ soient non nuls.)
D'après [25], le comportement quand $k\longrightarrow+\infty$ des coefficients $\lambda_k^{j,t}$ est le suivant

$$|\lambda_k^{j,t}|\leq C\frac{\|f_k\|_{L^2}}{(k\pi)^{1-j\alpha-2t}}. \tag{5.14}$$

5.1.3 Développement asymptotique

Ici, ε est un nombre strictement positif fixé et suffisament petit. Soit y_1 la solution du problème (4.28) posé dans ω. Pour $n\in\mathbf{N}$, on note

$$\begin{aligned}R_n^{\varepsilon,0}&=u_n^\varepsilon-(1-\chi_\varepsilon)\,u_n^0,\\&=u_n^\varepsilon-U_n^{\varepsilon,0},\end{aligned}$$

et si le coefficient de singularité $\lambda_n^{1,0}$ de u_n^0 est non nul

$$\begin{aligned}R_n^{\varepsilon,1}&=u_n^\varepsilon-\left((1-\chi_\varepsilon)\,(u_n^0-\lambda_n^{1,0}\chi\phi_1)+\lambda_n^{1,0}\varepsilon^\alpha\chi y_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right),\\&=u_n^\varepsilon-U_n^{\varepsilon,1},\end{aligned}$$

les erreurs commises sur les termes d'ordre 0 et 1 dans le développement asymptotique de u_n^ε. Pour $N\in\mathbf{N}$, on définit l'approximation suivante de u_ε

$$u_\varepsilon^N(x,y,z)=\sum_{n=0}^{n=N}U_n^{\varepsilon,1}(x,y)\mathrm{e}_k(z). \tag{5.15}$$

On commence d'abord avec l'inégalité de Poincaré

Lemme 5.1.6 *Il existe une constante C indépendante de ε telle que pour tout $u\in H_0^1(U)$, on ait*

$$\|u\|_{L^2}\leq C\|\nabla u\|_{L^2}.$$

Preuve. On note $D_\varepsilon=\omega_\varepsilon-\overline{\omega},\gamma_\varepsilon=\partial\omega_\varepsilon-\partial\omega$ et $\gamma'=\partial\omega_\varepsilon-\overline{\gamma}_\varepsilon$. Soit $u\in\mathcal{C}_0^\infty(\omega_\varepsilon)$. On sait qu'il existe $C_P>0$ telle que $\|u\|_{L^2(\omega)}\leq C_P\|\nabla u\|_{L^2(\omega)}$. Comme $\|u\|^2_{L^2(\omega_\varepsilon)}=\|u\|^2_{L^2(\omega)}+\|u\|^2_{L^2(D_\varepsilon)}$, il suffit de majorer $\|u\|_{L^2(D_\varepsilon)}$. Pour cela, l'équation de γ_ε étant $y=\varphi_\varepsilon(x)$ dans un système d'axes bien choisi (Fig. 5.2), le domaine D_ε est défini par

$$D_\varepsilon=\{(\xi,\eta)\in\omega_\varepsilon||\xi|\leq\varepsilon,\varphi_\varepsilon(\xi)\leq\eta\leq-c|\xi|\}$$

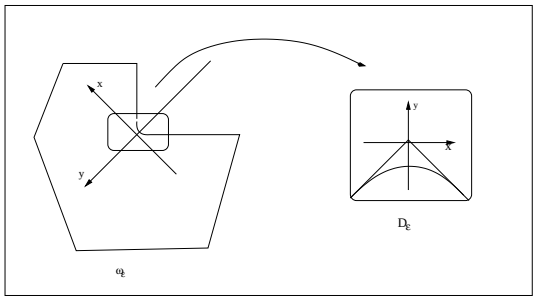


FIG. 5.2 – Coin arrondi en domaine borné.

où $c > 0$ est la pente des côtés du coin dans ce repère.

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) &= \int_{\varphi(\xi)}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial y}(\xi,s)ds, \\ |u(\xi,\eta)|^2 &\leq \operatorname{diam}(D_\varepsilon) \int_{\varphi(\xi)}^{\eta} \left|\frac{\partial u}{\partial y}(\xi,s)\right|^2 ds, \end{aligned}$$

puis en intégrant pour $(\xi,\eta) \in D_\varepsilon$, on aboutit à

$$\|u\|_{L^2(D_\varepsilon)} \leq C\sqrt{\varepsilon}\|\nabla u\|_{L^2(D_\varepsilon)}.$$

On a donc la conclusion puisque $C_P + C\sqrt{\varepsilon}$ peut être bornée indépendamment de ε. ■

On peut maintenant établir le début du développement asymptotique pour u_n^ε.

Proposition 5.1.5 *Pour* [6] $n \leq [(4a\pi\varepsilon)^{-1}]$*, on a l'estimation suivante*

$$\|\nabla(u_n^\varepsilon - U_n^{\varepsilon,0})\|_{L^2}^2 + (n\pi)^2\|u_n^\varepsilon - U_n^{\varepsilon,0}\|_{L^2}^2 \leq C\varepsilon^2(n\pi\varepsilon)^{2\alpha-2}\|f_n\|_0^2 \tag{5.16}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \left(-\Delta + (n\pi)^2 I\right) R_n^{\varepsilon,0} &= -\Delta\chi_\varepsilon u_n^0 - 2\nabla\chi_\varepsilon \cdot \nabla u_n^0 - \chi_\varepsilon f_n, \\ &= -\Delta\chi_\varepsilon u_n^0 - 2\nabla\chi_\varepsilon \cdot \nabla u_n^0 \end{aligned}$$

pour ε assez petit, de sorte que

$$\begin{aligned} \|\nabla(u_n^\varepsilon - U_n^{\varepsilon,0})\|_{L^2}^2 + (n\pi)^2\|u_n^\varepsilon - U_n^{\varepsilon,0}\|_{L^2}^2 &= \left(\left(-\Delta + (n\pi)^2 I\right) R_n^{\varepsilon,0}, R_n^{\varepsilon,0}\right)_{L^2}, \\ &= \left(-\Delta\chi_\varepsilon u_n^0 - 2\nabla\chi_\varepsilon \cdot \nabla u_n^0, R_n^{\varepsilon,0}\right)_{L^2}, \\ &\leq \left\| \Delta\chi_\varepsilon u_n^0 + 2\nabla\chi_\varepsilon \cdot \nabla u_n^0 \right\|_{W_1^0} \left\| R_n^{\varepsilon,0} \right\|_{W_0^1}, \\ &\leq \delta^2 \left\| \Delta\chi_\varepsilon u_n^0 + 2\nabla\chi_\varepsilon \cdot \nabla u_n^0 \right\|_{W_1^0}^2 + \frac{C'}{\delta^2}\|\nabla R_n^{\varepsilon,0}\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité

$$\|u\|_{W_0^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2, \ \forall u \in \overset{\circ}{W_0^1}(\Omega_\varepsilon),$$

[6] [x] désigne la partie entière de x.

puis une inégalité de Young. En choisissant convenablement δ, on obtient

$$\|\nabla(u_n^\varepsilon - U_n^{\varepsilon,0})\|_{L^2}^2 + (n\pi)^2\|u_n^\varepsilon - U_n^{\varepsilon,0}\|_{L^2}^2 \leq C''\left\|\Delta\chi_\varepsilon u_n^0 + 2\nabla\chi_\varepsilon\cdot\nabla u_n^0\right\|_{W_1^0}^2.$$

Or, d'après le développement en série de u_n^0 et l'estimation (5.14), on peut montrer aisément que

$$|u_n^0(r,\theta)| \leq Cr^\alpha(n\pi)^{\alpha-1}\|f_n\|_0 \text{ et } |\nabla u_n^0(r,\theta)| \leq Cr^{\alpha-1}(n\pi)^{\alpha-1}\|f_n\|_0$$

pour $a\varepsilon \leq r \leq 2a\varepsilon$ et $n \leq [(4a\pi\varepsilon)^{-1}]$. ■

Corollaire 5.1.2 *On a l'estimation*

$$\|u_n^\varepsilon - U_n^{\varepsilon,0}\|_{H^1} \leq C\varepsilon(n\pi\varepsilon)^{\alpha-1}\|f_n\|_0$$

Preuve. Conséquence de l'inégalité de Poincaré :

$$\begin{aligned}\|u_n^\varepsilon - U_n^{\varepsilon,0}\|_{H^1} &\leq C\|\nabla(u_n^\varepsilon - U_n^{\varepsilon,0})\|_{L^2}^2,\\ &\leq C\varepsilon(n\pi\varepsilon)^{\alpha-1}\|f_n\|_0\end{aligned}$$

■

En étudiant maintenant $\left(-\Delta + (n\pi)^2 I\right) R_n^{\varepsilon,1}$, on déduit l'erreur sur $u_n^\varepsilon - U_n^{\varepsilon,1}$,

Proposition 5.1.6 *Pour $n \leq [(4a\pi\varepsilon)^{-1}]$, on a l'estimation*

$$\begin{aligned}\|\nabla(u_n^\varepsilon - U_n^{\varepsilon,1})\|_{L^2}^2 + (n\pi)^2\|u_n^\varepsilon - U_n^{\varepsilon,1}\|_{L^2}^2 &\leq C\varepsilon^2\Big((n\pi\varepsilon)^{4\alpha-2} + (n\pi\varepsilon)^{4\alpha-2}(n\pi)^{4-2\alpha}\\ &\quad +(n\pi\varepsilon)^{4\alpha-2}(n\pi)^{-2\alpha}\Big)\|f_n\|_0^2\end{aligned}$$

Preuve. Si le coefficient de singularité $\lambda_n^{1,0} \neq 0$, on peut utiliser le développement asymptotique de u_n^ε à l'ordre 1, l'erreur étant $R_n^{\varepsilon,1} = u_n^\varepsilon - \left((1-\chi_\varepsilon)\left(u_n^0 - \lambda_n^{1,0}\chi\phi_1\right) + \lambda_n^{1,0}\varepsilon^\alpha\chi y_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right)$. On a alors

$$\begin{aligned}\left(-\Delta + (n\pi)^2 I\right) R_n^{\varepsilon,1} &= f_n - \Delta\chi_\varepsilon\tilde{u}_n^{0,1} + (1-\chi_\varepsilon)\Delta\tilde{u}_n^{0,1} - 2\nabla\chi_\varepsilon\cdot\nabla\tilde{u}_n^{0,1}\\ &\quad +\lambda_n^{1,0}\varepsilon^\alpha\left(\Delta\chi y_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) + 2\nabla\chi\cdot\nabla[y_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)]\right)\\ &\quad -(n\pi)^2(1-\chi_\varepsilon)\tilde{u}_n^{0,1} - (n\pi)^2\lambda_n^{1,0}\varepsilon^\alpha\chi y_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right),\\ &= \chi_\varepsilon f_n - \Delta\chi_\varepsilon\tilde{u}_n^{0,1} - 2\nabla\chi_\varepsilon\cdot\nabla\tilde{u}_n^{0,1}\\ &\quad -\lambda_n^{1,0}\varepsilon^\alpha(n\pi)^2\chi\left(y_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) - (1-\chi_\varepsilon)\phi_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right)\\ &\quad +\lambda_n^{1,0}\varepsilon^\alpha\left(\Delta\chi y_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) + 2\nabla\chi\cdot\nabla[y_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)]\right)\\ &\quad -\lambda_n^{1,0}\varepsilon^\alpha(1-\chi_\varepsilon)\left(\Delta\chi\phi_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) + 2\nabla\chi\cdot\nabla[\phi_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)]\right)\end{aligned}$$

en posant $\tilde{u}_n^{0,1} = u_n^0 - \lambda_n^{1,0}\chi\phi_1$.
En utilisant maintenant le fait que $\chi_\varepsilon f_n$ et $\nabla\chi\cdot\nabla(1-\chi_\varepsilon)$ sont nuls pour ε assez petit, et $y_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) - (1-\chi_\varepsilon)\phi_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) = -q_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}\left(-\Delta + (n\pi)^2 I\right) R_n^{\varepsilon,1} &= -\Delta\chi_\varepsilon\tilde{u}_n^{0,1} - 2\nabla\chi_\varepsilon\cdot\nabla\tilde{u}_n^{0,1} + \varepsilon^\alpha(n\pi)^2\lambda_n^{1,0}\chi q_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\\ &\quad -\lambda_n^{1,0}\varepsilon^\alpha\left(\Delta\chi q_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) + 2\nabla\chi\cdot\nabla[q_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)]\right).\end{aligned}$$

On a alors avec les mêmes arguments que dans la démonstration précédente

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u_n^\varepsilon - U_n^{\varepsilon,1})\|_{L^2}^2 + (n\pi)^2\|u_n^\varepsilon - U_n^{\varepsilon,1}\|_{L^2}^2 &= \left(\left(-\Delta + (n\pi)^2 I\right) R_n^{\varepsilon,1}, R_n^{\varepsilon,1}\right)_{L^2}, \\
&\leq C \left\| \left(-\Delta + (n\pi)^2 I\right) R_n^{\varepsilon,1}\|_{W_1^0} \right\| \frac{R_n^{\varepsilon,1}}{\rho_\varepsilon} \right\|_{L^2}, \\
&\leq C \left\| \Delta\chi_\varepsilon \tilde{u}_n^{0,1} + 2\nabla\chi_\varepsilon \cdot \nabla\tilde{u}_n^{0,1} \right\|_{W_1^0}^2 \\
&\quad + C\varepsilon^{2\alpha}(n\pi)^4|\lambda_n^{1,0}|^2 \left\| \chi q_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{W_1^0}^2 \\
&\quad + C\varepsilon^{2\alpha}|\lambda_n^{1,0}|^2 \left\| \Delta\chi q_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) + 2\nabla\chi \cdot \nabla[q_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)] \right\|_{W_1^0}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\|\nabla R_n^{\varepsilon,1}\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

Toujours d'après le développement en série de u_n^0 et l'estimation (5.14), on peut montrer aisément que

$$|\tilde{u}_n^{0,1} = u_n^0 - \lambda_n^{1,0}\chi\phi_1| \leq Cr^{2\alpha}(n\pi)^{2\alpha-1}\|f_n\|_0$$

pour $a\varepsilon \leq r \leq 2a\varepsilon$ et $n \leq [(4a\pi\varepsilon)^{-1}]$.
Par conséquent, le premier terme du membre de droite est majoré par

$$C\varepsilon^{4\alpha}(n\pi)^{4\alpha-2}\|f_n\|_0^2.$$

Le second terme, quant à lui, est majoré par

$$C\varepsilon^{2\alpha}(n\pi)^4(n\pi)^{2\alpha-2}\|f_n\|_0^2\varepsilon^{2\alpha}.$$

En effet, il suffit d'estimer le terme $\left\| \chi q_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2}^2$: on a

$$\begin{aligned}
\left\| \chi q_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\chi(x)|(\varepsilon^2 + |x|^2)\Big|q_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big|^2 \,\mathrm{d}x, \\
&= \varepsilon^4 \int_{\{y\in\omega:|y|\leq 2a/\varepsilon\}} |\chi(\varepsilon y)|(1+|y|^2)|q_1(y)|^2 \,\mathrm{d}y, \\
&\leq \varepsilon^4\Big(\int_{\{y\in\omega:|y|\leq R_0\}} (1+|y|^2)|q_1(y)|^2 \,\mathrm{d}y \\
&\quad + C\int_{\{y\in\omega:R_0\leq|y|\leq 2a/\varepsilon\}} |y|^2|y|^{-2\alpha} \,\mathrm{d}y\Big),
\end{aligned}$$

puisqu'on peut trouver $R_0 = R_0(q_1, \omega)$ tel que

$$|q_1(y)| \leq C|y|^{-\alpha} \quad \text{et } 1 + |y|^2 \leq 2|y|^2$$

pour tout $y \in \omega$ tel que $R_0 \leq |y|$. Finalement, on obtient :

$$\left\| \chi q_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon^4(A + C\varepsilon^{2\alpha-4}) \leq C\varepsilon^{2\alpha}.$$

Enfin le troisième est majoré par

$$C\varepsilon^{2\alpha}(n\pi)^{2\alpha-2}\|f_n\|_0^2\varepsilon^{2\alpha}$$

puisque $|q_1(R,\theta)| \leq \dfrac{C}{R^\alpha}$ et $|\nabla q_1(R,\theta)| \leq \dfrac{C}{R^{\alpha+1}}$ pour $a\varepsilon^{-1} \leq R \leq 2a\varepsilon^{-1}$ quand ε est assez petit. Finalement,

$$\begin{aligned}\|\nabla(u_n^\varepsilon - U_n^{\varepsilon,1})\|_{L^2}^2 + (n\pi)^2\|u_n^\varepsilon - U_n^{\varepsilon,1}\|_{L^2}^2 \quad &\leq \quad C\Big(\varepsilon^2(n\pi\varepsilon)^{4\alpha-2}\|f_n\|_0^2 \\ &\quad +\varepsilon^2(n\pi\varepsilon)^{4\alpha-2}(n\pi)^{4-2\alpha}\|f_n\|_0^2 \\ &\quad +\varepsilon^2(n\pi\varepsilon)^{4\alpha-2}\|f_n\|_0^2/(n\pi)^{2\alpha}\Big)\end{aligned}$$ ■

On en déduit

Corollaire 5.1.3 *Pour $n \leq [(4a\pi\varepsilon)^{-1}]$, on a l'estimation*

$$\|u_n^\varepsilon - U_n^{\varepsilon,1}\|_{H^1} \quad \leq \quad C\Big(\varepsilon(n\pi\varepsilon)^{2\alpha-1} + \varepsilon(n\pi\varepsilon)^{2\alpha-1}(n\pi)^{2-\alpha} + \varepsilon(n\pi\varepsilon)^{2\alpha-1}(n\pi)^{-\alpha}\Big)\|f_n\|_0 \quad (5.17)$$

Remarque 5.1.2 *Sans faire d'hypothèse sur les coefficients de singularité $\lambda_n^{1,0}$, on peut introduire le premier couple d'indices (j_0,t_0) tels que $\lambda_n^{j_0,t_0}$ soit différent de 0 et considérer q la solution dans $W_1^2(\omega)$ du problème aux limites*

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta q & = & Q \text{ dans } \omega \\ q & = & 0 \text{ sur } \partial\omega, \end{array}\right.$$

où Q est telle que $\varepsilon^{-2}Q\left(\dfrac{\cdot}{\varepsilon}\right) = \Delta\chi_\varepsilon\varphi_{j_0,t_0}\left(\dfrac{\cdot}{\varepsilon}\right) + 2\nabla\chi_\varepsilon\cdot\nabla[\varphi_{j_0,t_0}\left(\dfrac{\cdot}{\varepsilon}\right)]$ et $\varphi_{j_0,t_0}(r,\theta) = r^{2t_0+j_0\alpha}\varphi_{j_0}(\theta)$. On reprend alors les calculs en posant

$$U_n^{\varepsilon,1} = (1-\chi_\varepsilon)\,u_n^0 - \lambda_n^{j_0,t_0}\varepsilon^{2t_0+j_0\alpha}q\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right).$$

D'après la remarque 1.17, on obtient en notant, comme dans le chapitre 1, $\gamma_N(x_3) = \sum_{k=0}^{n=N}\lambda_k^{1,0}\mathrm{e}_k(x_3)$,

Proposition 5.1.7 *Soit $f \in H^2(]0,1[;L^2(\Omega_\varepsilon)) \cap H_0^1(]0,1[;L^2(\Omega_\varepsilon))$.*
Pour $N = [(4a\pi\varepsilon)^{-1}]$, et

$$u_\varepsilon^N = \sum_{k=0}^{k=N} U_k^{\varepsilon,1}\mathrm{e}_k = (1-\chi_\varepsilon)\sum_{k=0}^{k=N}\tilde{u}_k^{0,1}\mathrm{e}_k + \chi\varepsilon^\alpha\gamma_N y_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$$

on a l'estimation

$$\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^N\|_{H^1(P_\varepsilon)} \leq C\varepsilon\|f\|_{H^2(]0,1[;L^2)}. \quad (5.18)$$

Preuve. Il suffit de calculer la norme L^2 de $\nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^N)$

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u_\varepsilon - u_\varepsilon^N)\|^2_{L^2(P_\varepsilon)} &= \sum_{k\le N} \|\nabla(u_k^\varepsilon - U_k^{\varepsilon,1})\|^2_{L^2} + (k\pi)^2\|u_k^\varepsilon - U_k^{\varepsilon,1}\|^2_{L^2} \\
&\quad + \sum_{k>N} \|\nabla u_k^\varepsilon\|^2_{L^2} + (k\pi)^2\|u_k^\varepsilon\|^2_{L^2}, \\
&\le C\sum_{k\le N} \left(\varepsilon^2(k\pi\varepsilon)^{4\alpha-2} + \varepsilon^2(k\pi\varepsilon)^{4\alpha-2}(k\pi)^{4-2\alpha} + \varepsilon^2(k\pi\varepsilon)^{4\alpha-2}(k\pi)^{-2\alpha}\right)\|f_k\|_0^2 \\
&\quad + \sum_{k>N} \frac{(k\pi)^2}{(N\pi)^2}\left(\|\nabla u_k^\varepsilon\|^2_{L^2} + (k\pi)^2\|u_k^\varepsilon\|^2_{L^2}\right), \\
&\le C\varepsilon^2 \sum_{k\le N} \left(\|f_k\|^2_{L^2}(k\pi\varepsilon)^{2(2\alpha-1)} + (k\pi\varepsilon)^{4\alpha-2}(k\pi)^{-2\alpha}\|f_k\|^2_{L^2}\right) \\
&\quad + \sum_{k\le N} (k\pi)^{4-2\alpha}\|f_k\|^2_{L^2}(k\pi\varepsilon)^{4\alpha-2} + \frac{1}{(N\pi)^2}\sum_{k>N}\|f_k\|^2_{L^2}, \\
&\le C\varepsilon^2 \sum_{k\le N} (k\pi)^{4-2\alpha}\|f_k\|^2_{L^2} \\
&\quad + C\varepsilon^2 \sum_{k>N} \|f_k\|^2_{L^2}, \\
&\le C\varepsilon^2\|f\|^2_{H^2(]0,1[;L^2)}.
\end{aligned}$$

■

Comme $\|\Delta(u_\varepsilon - u_\varepsilon^N)\|_{L^2(P_\varepsilon)} = \|f - f^N\|_{L^2(P_\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon)$, où $f^N = \sum_{k\le N} f_k \mathrm{e}_k,\ N = [(4a\pi\varepsilon)^{-1}]$, on a l'estimation suivante

Corollaire 5.1.4 *Pour* $N = [(4a\pi\varepsilon)^{-1}]$

$$\left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} - \frac{\partial u_\varepsilon^N}{\partial n} \right\|_{H^{-1/2}(\partial P_\varepsilon)} \le C\varepsilon.$$

5.2 Conclusion

Pour le cas des domaines prismatiques, on a obtenu en appliquant les résultats du chapitre précédent, une estimation en $\mathcal{O}(\varepsilon)$ pour la norme H^1 lorsque on approche les modes $k \le N$ de la solution u_ε par un développement asymptotique à l'ordre 1 et pour $N \sim \varepsilon^{-1}$. Pour les traces des dérivées normales associées, on obtient une estimation en $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en norme $H^{-1/2}$.

Pour le cas d'un problème en domaine axisymétrique mais avec une donnée ne possédant plus la propriété d'invariance par rotation autour de l'axe $r = 0$, la démarche est identique. Le domaine est décrit en géométrie cylindrique par

$$\breve{\Omega} = \Omega \times [0, 2\pi[\cup \gamma_a$$

où Ω est la trace de $\breve{\Omega}$ dans un demi plan méridien et γ_a est la partie de la frontière de Ω située sur l'axe $r = 0$. Le domaine obtenu en remplaçant la pointe vive par une pointe arrondie de rayon de courbure ε en son sommet est noté $\breve{\Omega}_\varepsilon$, Ω_ε est sa trace dans un demi-plan méridien. On notera U l'ouvert Ω ou Ω_ε quand il n'y a pas lieu de les distinguer. On décompose la donnée $f \in L^2(\breve{\Omega})$ suivant la base $(\mathrm{e}^{ik\theta})_{k\in\mathbf{Z}}$ de $L^2(]0, 2\pi[)$ comme dans le chapitre 2

$$f(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(r, z)\mathrm{e}^{ik\theta}.$$

et on suppose $f = 0$ dans un voisinage fixe de l'origine.

Par décomposition en série de Fourier, on est donc amené à résoudre un problème bidimensionel pour chaque mode

$$u_0 \in \overset{\diamond}{H}{}^1_1(U), -\Delta^+ u_0 = f_0, \tag{5.19}$$

pour le mode $k = 0$ et

$$u_k \in \overset{\circ}{V}{}^1_1(U), -\Delta^+ u_k + \frac{k^2}{r^2} u_k = f_k \tag{5.20}$$

pour les modes $k \neq 0$, où l'opérateur Δ^+ est défini dans le chapitre 2.

Le comportement asymptotique des solutions des problèmes (5.20) est obtenu par séparation de variables, celui du mode 0 étant connu d'après le chapitre précédent. Dans les variables (ρ, ϕ), l'opérateur

$$-\Delta^+ + \frac{k^2}{r^2}$$

devient

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cot(\phi)}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) + \frac{k^2}{\rho^2 \sin^2\phi}.$$

Par séparation de variables, la solution de

$$-\Delta^+ u_k + \frac{k^2}{r^2} u_k = 0$$

a le comportement suivant quand $\rho \longrightarrow 0$:

$$u_k(\rho, \phi) = \sum_{\ell \geq 1} a_{k\ell} \rho^{\nu_k^\ell} \frac{P^k_{\nu_k^\ell}(\cos(\phi))}{\|P^k_{\nu_k^\ell}(\cos(\cdot))\|_{\mathcal{H}}}.$$

Ci-dessus, $\mathcal{H}$ est défini au paragraphe 4.3.3 du chapitre précédent, $P^k_{\nu_k^\ell}$ est la fonction de Legendre associée de première espèce de degré k et d'ordre ν_k^ℓ, avec $(\nu_k^\ell)_\ell$ la suite des racines ν de l'équation $P^k_\nu(\cos(\pi/\beta)) = 0$. Adaptons le cas prismatique au cas axisymétrique. En posant

$$u_\varepsilon^N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{k=N} U_k^{\varepsilon,1} \mathrm{e}^{ik\theta},$$

où $U_k^{\varepsilon,1}$ est le développement asymptotique à l'ordre 1, on peut obtenir

$$\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^N\|_{H^1(\breve{\Omega}_\varepsilon)} \leq C\varepsilon.$$

En ce qui concerne le développement asymptotique au premier ordre de la dérivée normale au sommet, il provient uniquement du mode 0 puisque la présence de la pointe conique n'a pas d'effet sur les modes $|k| \geq 1$ [72]. On aura donc

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}(O_\varepsilon) = \lambda_0 \frac{\partial y_1}{\partial n}(O_1) \varepsilon^{\nu_0^1 - 1} + o(1),$$

où λ_0 est le coefficient de singularité pour le mode 0 et y_1 la fonction introduite au paragraphe 4.5.1 du chapitre précédent.

Conclusion

Nous nous sommes intéressés au calcul du champ électrostatique au voisinage de coins et/ou d'arêtes rentrants. Le problème modèle que nous avons considéré est celui du problème de Dirichlet pour le laplacien posé dans un domaine polygonal (2D) ou prismatique ou axisymétrique (3D) non convexe. D'un point de vue théorique, l'étude mathématique des singularités est déjà très aboutie [51, 42, 53, 38]. Le premier objectif était donc de mettre au point des méthodes de calcul efficaces pour la résolution numérique de tels problèmes et retrouver la vitesse de convergence optimale des domaines convexes. En dimension deux, de nombreuses méthodes existent pour traiter les singularités liées à la présence de coins rentrants : méthodes de fonctions singulières (duales) et complément singulier, raffinement de maillages, etc..., [64, 34, 69, 4]. En dimension trois, les méthodes existantes reposent essentiellement sur les techniques de raffinement de maillage [56, 10, 27]. Nous avons considéré tout au long de cette thèse deux types de gémétries singulières : le cas des arêtes rentrantes situées au bord d'un domaine prismatique et le cas de pointes coniques dans un domaine axisymétrique.

Dans les trois premiers chapitres, nous avons présenté la Méthode de Fourier et du Complément Singulier (MFCS) pour la résolution numérique du problème de Dirichlet dans un domaine (prismatique ou axisymétrique) possédant une arête rentrante. La présence de pointes coniques pour le cas axisymétrique est aussi prise en compte dans [33]. Elle combine un développement série de Fourier dans la direction de l'arête et la méthode du complément singulier dans la direction transverse. Nous avons comparé la MFCS à d'autres méthodes numériques. La conclusion est double : d'une part, l'analyse de la complexité pour chaque méthode montre que la MFCS est la plus efficace, et d'autre part, la MFCS permet en pratique une vitesse de convergence optimale même si les données vérifient des hypothèses plus faibles que celles exposées dans l'analyse numérique de la méthode.

En géométrie quasi-singulière, nous avons d'abord étudié le cas des coins arrondis en dimension deux, puis le cas des pointes arrondies en domaine axisymétrique avec une donnée invariante par rotation. Les outils mathématiques utilisés sont ceux des développements asymptotiques multi-échelles présentés dans [65, 66]. Un développement asymptotique de la solution, ainsi que le comportement asymptotique de la densité de charge surfacique au sommet, en fonction du rayon de courbure ε (du coin ou de la pointe arrondi) ont été établis. Les résultats présentés dans le chapitre 4 justifient les résultats numériques observés par H. Timouyas dans sa thèse [76]. Ces résultats permettent de justifier également (dans une géométrie conique) la loi empirique de Peek, fréquemment utilisée en électrotechnique [2] pour déterminer le champ statique maximal à l'extremité d'une pointe arrondie. Une comparaison avec une méthode intégrale a permis la validation numérique du comportement asymptotique obtenu.

Comme extension des résultats obtenus en dimension deux, nous nous sommes intéressés

au cas d'un domaine prismatique avec une arête rentrante lissée en arrondissant avec un rayon de courbure ε le coin du domaine transverse à l'arête. Nous avons pu obtenir, à l'aide d'un développement en série de Fourier, un développement asymptotique au premier ordre pour la solution du problème du potentiel électrostatique. Une estimation d'erreur optimale en norme H^1 en $\mathcal{O}(\varepsilon)$ entre la solution et l'approximation de Fourier obtenue à l'aide des $N \sim \varepsilon^{-1}$ développements asymptotiques au premier ordre des modes de la solution a été établie. Pour le cas axisymétrique, une conclusion similaire peut être obtenue.

D'un point de vue plus appliqué, les résultats présentés dans ce mémoire pourront permettre de calculer le déplacement de particules chargées soumises à un champ électromagnétique extérieur ou au champ autoinduit, dans une cavité présentant coins ou arêtes rentrants, le cas échéant faiblement arrondis. En effet, on sait relier le comportement singulier ou quasi-singulier du champ électromagnétique à celui du potentiel associé , cf. [16, 15, 12, 13, 11], ainsi que [48, 57].

Bibliographie

[1] M. Abramovitz, I.A. Stegun. Handbook of mathematical functions Dover Publications, New York, 1965

[2] K. Adamiak, P. Atten. Simulation of corona discharge in point-plane configuration. J. Electrostat., **61**, p. 85-98, 2004.

[3] K. Adamiak, P. Atten, B. Khaddour and J.-L. Coulomb Simulation of corona discharge in configuration with a sharp electrode. J. of Optoelectronics and Advanced Materials, Vol. **6**, p. 1023-1028, 2004.

[4] M. Amara, M. Moussaoui. Approximations of solutions and singularities coefficients for an elliptic problem in a polygonal domain. Technical Report ENS Lyon, Lyon, France, 1989.

[5] C. Amrouche, V. Girault, J. Giroire. Dirichlet and Neumann exterior problems for the n-dimensional Laplace operator. An approch in weighted Sobolev spaces. J. Math. Pures Appl., **76**, p. 55-81, 1997

[6] C. Amrouche, Šárka Nečasová. Laplace equation in the half space with a non homogenous boundary condition Mathematica Bohemica, **2**, p.265-274, 2001

[7] C. Amrouche. The Neumann problem in the half space C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335, p. 151-156, 2002

[8] T. Apel. Anisotropic finite elements : local estimates and applications. B. G. Teubner, Advances in Numerical Mathematics, 1999.

[9] T. Apel, S. Nicaise. Elliptic problems in domain with edges : anisotropic regularity and anisotropic finite element meshes. Advances in Numerical Mathematics, 1994

[10] T. Apel, S. Nicaise. The finite element method with anisotropic mesh grading for elliptic problems in domains with corners and edges. Mathematical Methods in the Applied Sciences, **21**, p.519-549, 1998.

[11] F. Assous, P. Ciarlet Jr. Vlasov-Maxwell simulations in singular geometries. Actes de ICCS'06, Reading, UK, Part IV, Lecture Notes in Computer Science, Springer, 3994, p. 623-630, 2006.

[12] F. Assous, P. Ciarlet Jr, S. Labrunie. Theoretical tools to solve axisymmetric Maxwell equations. Math. Meth. Appl. Sci., **25**, p. 49-78, 2002

[13] F. Assous, P. Ciarlet Jr, S. Labrunie. Solution of axisymmetric Maxwell equations. Math. Meth. Appl. Sci., **26**, p. 861-896, 2003

[14] F. Assous, P. Ciarlet Jr, P.A. Raviart, E. Sonnendrücker. A characterisation of the singular part of the solution to Maxwell equations in a polyhedral domain. Math. Meth. Appl. Sci., **22**, 6, p. 485-499, 1999.

[15] F. Assous, P. Ciarlet Jr, J. Segré. Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in two-dimensional singular domains : the Singular Complement Method J. of Comp. Phys., Vol. **161**, p. 218-249, 2000

[16] F. Assous, P. Ciarlet, Jr et E. Sonnendrücker. Resolution of the Maxwell equations in a domain with reentrant corners RAIRO Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Vol. **32**, 3, p. 359-389,1998.

[17] Z. Belhachmi, C. Bernardi, S. Deparis. Weighted Clément operator and application to the finite element discretization of the axisymmetric Stokes problem. Internal report **03029**, Laboratoire Jacques Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie.

[18] C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday. Spectral methods for axisymmetric domains. Series in Applied Mathematics, Gauthiers-Villars, Paris and North Holland, Amsterdam, 1999.

[19] H. Blum, M. Dobrowolski. Une méthode d'éléments finis pour la résolution des problèmes elliptiques dans des ouverts avec coins. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **293** p. 99101, 1981.

[20] H. Blum, M. Dobrowolski. On finite element methods for elliptic equations on domains with corners. Computing, **28**, 1, 1982.

[21] T. Boulmezaoud Espaces de Sobolev avec poids pour l'équation de Laplace dans le demi espace C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **328**, p. 221-226, 1999.

[22] M. Bourlard, M. Dauge, Lubuma, S. Nicaise. Coefficients of the singularities for elliptic boundary value problems on domains with conical points. III. Fiinite element methods on polygonal domains. SIAM J. Numer. Anal. **29**, n° 1, 1992.

[23] A. S. Bonnet-BenDhia, C. Hazard, S. Lohrengel. A singular field method for Maxwell's equations SIAM J. Numer. Anal., vol. **59(6)**, pp. 2028-2044, 1999

[24] M. Borsuk, V. Kondratiev. Elliptic boundary value problems of second order in piecewise smooth domains. Nort Holland Matheatical Library, 2006.

[25] Bouhafa. Thèse de troisième cycle, Nice, 1983.

[26] S.C. Brenner, S. Nicaise, L.Y. Sung. Multigrid methods for the computation of edge tensor product singular functions. In preparation.

[27] A. Buffa, M. Costabel, M. Dauge. Algebraic convergence for anisotropic edge elements in polyhédral domains. Numer. Math, Vol. **101**, 11, p. 29-65, 2005

[28] Z. Cai, S. Kim. A finite element method using singular function for the Poisson equation. with corner singularities. Siam J. Numer. Anal., **39**, 286-299, 2001

[29] G. Caloz, M.Costabel, M. Dauge, G. Vial. Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer. Asymptotic Analysis, 2006

[30] O. Chanrion, L. Fezoui, F. Poupaud, M. Remaki. Couplage de modèles et de méthodes numériques pour l'électromagnétisme en domaine temporel. Revue Européenne des Eléments Finis, Vol. **8**, n° 5-6, p. 639-658, 1999.

[31] P. Ciarlet, Jr. Div-rot tools for solving Maxwell equations. Communication privée.

[32] P. Ciarlet, Jr, B. Jung, S. Kaddouri, S. Labrunie, J. Zou. The Fourier Singular Complement Method for the Poisson problem. Part I : prismatic domains. Numerische Mathematik, **101**, p. 423-450, 2005.

[33] P. Ciarlet, Jr, B. Jung, S. Kaddouri, S. Labrunie, J. Zou. The Fourier Singular Complement Method for the Poisson problem. Part II : axisymmetric domains. Numerische Mathematik,**102**, p. 583-610, 2006.

[34] P. Ciarlet,Jr, J. He. La méthode du complément singulier pour des problèmes scalaires 2d. C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, **336**, p. 353-358, 2003.

[35] P. Ciarlet,Jr, S. Kaddouri. Justification de la loi de Peek en électrostatique. C. R. Acad. Sci., Serie I, **343**, 2006.

[36] P. Ciarlet,Jr, S. Kaddouri. Multi-scaled asymptotic expansions for the electric potential : surface charge densities at rounded corners. Math. Mod. Meth. Appl. Sci., **17**(6), 2007.

[37] P.G. Ciarlet. Basic error estimates for elliptic problems Handbook of numerical analysis, Vol. II, North Holland, 1991.

[38] M. Costabel, M. Dauge. Singularities of electromagnetic fields in polyhedral domains. Arch. Rational Mech. Anal., **1151**, p. 221-276, 2000.

[39] M. Costabel, M. Dauge. Singularly perturbed mixed boundary value problem. Comm. Partial. Diff. Equations, **21**(11-12), p. 1919-1949,1996

[40] M. Costabel, M. Dauge. Weighted Regularisation of Maxwell Equations in Polyhedral domains. Numer. Math. **93**, p. 239-278, n° 2, 2002.

[41] M. Costabel, M. Dauge, S. Nicaise. Singularities of Maxwell interface problems. Université de Rennes I, IRMAR Research report 98-24, 1998.

[42] M. Dauge. Elliptic boundary value problems on corner domains. Lecture notes in mathematics, Vol. **1341**, Springer-Verlag, 1988

[43] R. Dautray, J.L. Lions. Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques Tome 1, Masson, 1984.

[44] M. Dobrowolski. Numerical approximation of elliptic interface and corner problems Habilitationsschrift,Univ. Bonn, 1981, Allemagne.

[45] E.Durand. Electrostatique. Masson, Paris, Vol. **1, 2, 3,** 1966.

[46] A. Ern, J.L. Guermond. Eléments finis : Théorie, applications, mise en oeuvre Springer,2002

[47] G. Fix, G. Strang. An Analysis of the Finite Element Method Prentice-Hall, 1973.

[48] E.Garcia. Résolution des équations de Maxwell instationnaires avec charges dans des domaines non-convexes. Thèse de troisième cycle, Université Paris 6, 2002.

[49] J. Giroire. Etude de quelques problèmes aux limites extérieurs et résolution par équations intégrales. Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, 1987.

[50] P. Grisvard. Singular solutions of elliptic boundary value problems in polyhedra. Portugaliae Mathematica , Vol. **41**, Fasc. 1-4, 1982.

[51] P. Grisvard. Elliptic problems in nonsmooth domains Monographs and studies in mathematics, Pitman, 1985.

[52] P. Grisvard. Edge behaviour of the solution of an elliptic problem. Math. Nachr. , **132**, p.281-299, 1987

[53] P.Grisvard. Singularities in boundary value problems RMA 22, Masson, Paris, 1992.

[54] B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids. Application au problème de Dirichlet dans un demi espace.Rend. Sem. Univ. Padova **46**, p. 227-272, 1971.

[55] B. Heinrich. Singularity functions at axisymmetric edges and their representation by Fourier series Math. Meth. App. Sci, Vol. **16**, p. 837-854, 1993.

[56] B. Heinrich. The Fourier Finite Element Method for Poisson's Equation in axisymmetric domains with edges SIAM J. Numer. Anal.,Vol. **33**, No.5, p. 1885-1911, 1996

[57] E. Jamelot. Résolution des équations de Maxwell avec des éléments finis de Galerkin continus. Thèse de troisième cycle, Ecole Polytechnique, 2005.

[58] M. Jung, T. Steidten Das Multigrid-Programmsystem FEMGP zur Lösung elliptischer und parabolischer Differentialgleichungen (Programmdokumentation). Technische Universität Chemnitz. (in preparation)

[59] L. Krähenbühl, H. Timouyas, M. Moussaoui, F. Buret. Coins et arrondis en éléments finis. Une approche mathématique des coins et arrondis pour les solutions par éléments finis de l'équation de Laplace. RIGE, Vol. **8**, p. 35-45, 2005.

[60] M. Lenczner. Méthode de calcul du coefficient de singularité pour la solution du problème de Laplace dans un domaine diédral. Modél. Math. Anal. Numér. **27**, p. 395-420, 1993.

[61] M. Lenoir. Equations intégrales et problèmes de diffraction. Polycopié de cours, ENSTA, 2004.

[62] M.N. Leroux. Résolution numérique du problème du potentiel dans le plan. Thèse de l'université de Rennes, 1974.

[63] J.L. Lions, E. Magenes. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Volume **1**, Dunod, Paris, 1968.

[64] J. Lubuma, S. Nicaise, Méthode de fonctions singulières pour problèmes aux limites avec singularités d'arêtes. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **319**, p. 11091114, 1994.

[65] V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskii. Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singularly Perturbed Problems : Volume I Operator Theory. Advances and Applications, Vol. **111**, Birkhaüser, 2000

[66] V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskii Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singularly Perturbed Problems : Volume 2 Operator Theory. Advances and Applications, Vol. **111**, Birkhaüser, 2000

[67] B. Mercier, G. Raugel. Résolution d'un problème aux limites dans un ouvert axisymétrique par éléments finis en r, z et séries de Fourier en θ. RAIRO Analyse Numérique, **16**, p. 405-461, 1982.

[68] B. Merlet. Sur quelques équations aux dérivées partielles et leur analyse numérique. Thèse de doctorat, Université Paris XI, 2004.

[69] M. Moussaoui. Sur l'approximation des solutions du problème de Dirichlet dans un ouvert avec coin. In :P. Grisvard et al, (eds), Singularities and constructive methods for their treatment, Springer Verlag, **1121**, p. 199-206, 1984.

[70] S. Nazarov, B. Plamenevskii. Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. De Gruyter Expositions in Mathematics 13, Berlin-New York, 1994

[71] J. Necas. Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Masson, Paris, 1967.

[72] B. Nkemzi. The Poisson equation in axisymmetric domains with conical points J. Comp. Appl. Math. Vol. **174**, 2, p. 399-421, 2005

[73] L. A. Oganesjan, L. A. Ruchovec. *Variacionno-raznostnye metody rešenija eliptičeskich uravnenij.* Izd. Akad. Nauk Armjanskoj SSR, Erevan, 1979.

[74] F.W.J. Olver. Asymptotics and special functions Academic Press, New York

[75] E. Stephan, J.R. Whiteman. Singularities of the Laplacian at corners and edges of three dimensional domains and their treatment with finite element methods. Math. Meth. Appl. Sci., **10**, p. 339-350, 1988.

[76] H. Timouyas. Analyse et analyse numérique des singularités en électromagnétisme. Thèse de troisième cycle, CEGELY, Lyon, 2003.

[77] G. Vial. Analyse multi-échelle et conditions aux limites approchées pour un problème avec couche mince dans un domaine à coin Thèse de doctorat, Université de Rennes I, IRMAR, 2003.

[78] G. Vial. Efficiency of approximate boundary conditions for corner domains coated with thin layers. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **340**, p. 215-220, 2005.

[79] B. Weber. Die Fourier-Finite-Elemente-Methode für elliptische Interfaceprobleme in axialsymmetrischen Gebieten. PhD thesis, Technische Universität Chemnitz-Zwickau, 1994.

Résumé

La première partie de ce mémoire est consacrée à la résolution numérique du problème de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet dans un domaine prismatique ou axisymétrique, possédant une arête rentrante sur sa frontière. Nous présentons la Méthode de Fourier et du Complément Singulier consistant à combiner un développement en série (de Fourier) dans la direction parallèle à l'arête et la Méthode du Complément Singulier pour les problèmes bidimensionnels associés aux modes (de Fourier). L'analyse de la MFCS conduit à une vitesse de convergence optimale (en $\mathcal{O}(h)$) lorsqu'on utilise les éléments finis de Lagrange P^1 pour la discrétisation. La méthode ne requiert aucun raffinement de maillage au voisinage de la singularité.

Nous nous intéressons ensuite au calcul de la densité de charge à la pointe d'une électrode lorsque celle-ci présente un faible rayon de courbure que nous abordons par la résolution du problème électrostatique. La relation entre le rayon de courbure et le champ électrique à la surface de la pointe est décrite par la loi empirique de Peek. Toutefois, celle ci n'est valable que pour des électrodes minces à géométrie cylindrique ou sphérique. On justifie mathématiquement cette loi et on l'étend à d'autres géométries. A l'aide des développements asymptotiques multi-échelles, on établit explicitement le comportement de la densité de charge pour des géométries coincidant avec le cône à l'infini. Enfin, nous illustrons ce comportement asymptotique par des expériences numériques réalisées en dimension deux, et en dimension trois, pour des domaines axisymétriques. Les résultats sont comparés à ceux obtenue par une méthode intégrale.

Mots-clés: Singularités, développement asymptotique, éléments finis.

Abstract

First, we focus on solving numerically the Poisson problem with homogenous Dirichlet conditions in a three dimensional prismatic or axisymmetric domain, with a reentrant edge at the boundary. We present the Fourier Singular Complement Method based on a Fourier expansion in the direction parallel to the reentrant edge and the Singular Complement Method for solving the 2D problems in the Fourier modes. The analysis shows that we recover the optimal rate of convergence $\mathcal{O}(h)$ when using P^1 Lagrange finite elements for the discretization. No refinement near the reentrant edge is required in the computations.

Second, we are interested in computing the charge density and the electricfield at the rounded tip of an electrode of small curvature radius. Our model problem is the electrostatic problem. For this problem, Peek's empirical formulas describe the relation between the electric field at the surface of the electrode and its curvature radius. However, they apply only to thin electrodes with either a purely cylindrical, or a purely spherical, geometrical shape. Our aim is to justify rigorously these formulas, and to extend them to more general, either two dimensional or three dimensional axisymmetric, geometries. With the help of multiscaled asymptotic expansions, we establish rigorously an explicit formula for the electric potential in geometries that coincide with a cone at infinity. We also prove a formula for the surface charge density, which is very simple to compute with the FE Method. In particular, the meshsize can be chosen independently of the curvature radius. We illustrate our mathematical results by numerical experiments.

Keywords: Singularities, multiscaled asymptotic expansions, finite elements.