Familles de mesures au bord et bas du spectre.

Olivier Mohsen

Thèse: Familles de mesures au bord et bas du spectre

Olivier Mohsen

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Gilles Courtois pour avoir accepté d'être mon directeur. Merci pour les nombreuses heures de travail qu'il m'a consacré, mais aussi pour sa bonne humeur et pour son amitié. Merci aussi à toute sa famille que j'ai rencontré avec beaucoup de plaisir.

Je remercie avec plaisir tous les professeurs qui ont participé à mon jury de thèse : Frédéric Paulin, Vadim Kaïmanovich, Yves Benoist, Marc Bourdon, François Ledrappier. Merci pour vos remarques, vos conseils, et pour l'intérêt que vous portez à mon travail. Merci également à Ursula Hamenstädt d'avoir été rapporteur pour ma thèse et de l'avoir lu avec beaucoup d'intéret.

Merci aux secrétaires et informaticiens du centre de mathématiques Laurent Schwartz pour tous les services qu'ils m'ont rendu et toujours avec le sourire : Claudine, Michèle, Carole, Alain, Florence et Stéphane.

Merci à tous les mathématiciens avec qui j'ai eu l'occasion de discuter et qui ont répondu à mes questions : Paul Gauduchon, Andréi Moroianu, Jean-Michel Bony, Emmanuel Ferrand, Jean Barge, Jean Lannes, Constantin Vernicos, Barbara Schapira, Jean-Claude Picaud, Gérard Besson, Sylvain Gallot et bien d'autres encore. Merci à Vincent Humilière et à tous les participants du séminaire des thésards avec qui j'ai passé de bons moments de détente.

Merci à toute ma famille et à tous mes amis pour leur affection, et sans qui je n'aurais jamais pu accomplir tout le chemin jusqu'ici.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Dans ce mémoire, j'expose la théorie des familles équivariantes de mesures sur le bord à l'infini du revêtement universel d'une variété compacte à courbure strictement négative. Ensuite j'utilise cette théorie pour étudier le comportement du bas du spectre du laplacien des fonctions sur le revêtement universel lorsqu'on fait varier la métrique sur la variété compacte. J'utilise aussi cette théorie pour démontrer la rigidité du spectre marqué des longueurs dans la classe conforme d'une métrique à courbure négative sur un variété compacte.

Sur une variété compacte X qui porte une métrique à courbure strictement négative, le revêtement universel $\tilde{X}$ de X a une croissance exponentielle pour toute métrique g sur X, ce qui se traduit par la non nullité de certains invariants de la métrique g comme par exemple l'entropie volumique $h(g) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log \mathrm{Vol} B(R)$ (où $B(R)$ est une boule de rayon R dans $\tilde{X}$), ou le bas du spectre du revêtement universel $\lambda_1(g)$, défini comme la borne inférieure des quotients de Rayleigh $\frac{\int_{\tilde{X}} |df|^2}{\int_{\tilde{X}} f^2}$ des fonctions f sur $\tilde{X}$ à support compact. Lorsque X admet une métrique hyperbolique g_0 (c'est-à-dire une métrique de courbure constante égale à -1), on peut se poser la question de savoir si cette métrique est un extremum pour ces invariants. Un résultat classique de Besson Courtois et Gallot est que les métriques hyperboliques sont des minima de l'entropie volumique (voir [BCG1]). Plus précisément la fonctionnelle $g \to h(g)$ restreinte aux métriques de même volume que g_0 atteint son minimum en g_0 et de plus si $\dim X \geq 3$ et si $h(g) = h(g_0)$ alors g et g_0 sont isométriques, et ce résultat est valable plus généralement lorsque g_0 est une métrique localement symétrique à courbure strictement négative.

En ce qui concerne le bas du spectre du revêtement universel, on sait déja que g_0 est un point critique de la fonctionnelle $g \to \lambda_1(g)$, et Besson Courtois et Gallot ont montré que $\lambda_1(g_0)$ est maximal en restriction aux métriques conformes à g_0 et de même volume. En particulier si $\dim X = 2$ alors par uniformisation $\lambda_1(g_0)$ est un maximum de la fonctionnelle $g \to \lambda_1(g)$ restreinte aux métriques de même volume que g_0. Dans le chapitre 3 de ce mémoire on montre le théorème suivant : (voir théorème 3.9 et corollaire 3.11) :

Théorème 1.1. *Soit X une variété compacte de dimension ≥ 3 et g_0 une métrique hyperbolique sur X. Si g est une métrique conforme à g_0 de même volume et différente de g_0 alors le bas du spectre du revêtement universel pour g_0 est strictement supérieur à celui pour g : $\lambda_1(g_0) > \lambda_1(g)$. D'autre part il existe un voisinage de g_0 dans sa tranche d'Ebin tel que pour toute métrique g contenue dans ce voisinage et différente de g_0, le bas du spectre pour g est strictement supérieur à celui de g_0 : $\lambda_1(g_0) < \lambda_1(g)$.*

Dans ce théorème, la tranche d'Ebin de g_0 est une classe de métriques qui contient g_0 et dont l'espace tangent en g_0 est un supplémentaire orthogonal à la somme des espaces tangents en g_0 de la classe conforme de g_0 et de l'orbite de g_0 par les difféomorphismes de X. Il va sans dire que $\lambda_1(g)$ est constant le long de l'orbite de g_0 par les difféomorphismes, et donc le théorème nous dit que g_0 est un point selle de la fonctionnelle $g \to \lambda_1(g)$.

Une difficulté que l'on rencontre lorsqu'on étudie $\lambda_1(g)$ pour démontrer le théorème 1.1 est qu'il n'existe pas de fonction sur $\tilde{X}$ dont le quotient de Rayleigh soit minimal et égal à $\lambda_1(g)$ à cause de la non compacité de $\tilde{X}$. Pour surmonter cette difficulté, on va considérer certaines suites de fonctions L^2 dont les quotients de Rayleigh sont arbitrairement proches de $\lambda_1(g)$ et qui convergeront non pas vers une fonction L^2 mais vers un objet défini sur le bord à l'infini de $\tilde{X}$, que l'on peut voir comme une famille équivariante de mesures sur le bord. A cette famille, on associe un “quotient de Rayleigh” qui coïncide avec la limite des quotients de Rayleigh de la suite de fonctions, et on montre alors que $\lambda_1(g)$ est la borne inférieure des quotients de Rayleigh des familles de mesures sur le bord (théorème 3.1), et de plus, lorsque $g = g_0$, alors il existe une famille canonique de mesures dont le quotient de Rayleigh est minimal et égal à $\lambda_1(g_0)$. Considérer les quotients de Rayleigh de familles de mesures plutôt que des quotients de Rayleigh de fonctions L^2 sur $\tilde{X}$ va nous permettre d'étudier $\lambda_1(g)$ au voisinage de g_0 pour démontrer le théorème 1.1. Par ailleurs une question ouverte est de savoir si pour toute métrique g il existe une famille de mesures dont le quotient de Rayleigh soit égal à $\lambda_1(g)$.

Ces familles de mesures que l'on vient d'introduire sont définies dans le chapitre 2 de ce mémoire et leurs principales propriétés y sont établies. On y donnera également la classification de ces familles de mesures. Cette théorie, dûe à Ledrappier, (voir [L1]) et c'est une généralisation de la théorie des familles de mesures de Patterson-Sullivan. Ces dernières sont des exemples de familles équivariantes de mesures. Les résultats de ce chapitre sont déjà connus (voir [L1]), mais l'approche ici est parfois différente de [L1], notamment dans la preuve du fait que les mesures considérées n'ont pas d'atomes, et du fait que chaque période d'un cocycle normalisé est plus grande qu'une constante fois la longueur de la géodésique périodique correspondante. Ces deux faits sont très liés et leur preuve est plus géométrique ici que dans [L1].

Une autre application de la théorie des familles équivariantes de mesures concerne l'étude de la rigidité du spectre marqué des longueurs pour les variétés compactes à courbure strictement négative. Sur une variété riemannienne compacte, on définit le spectre marqué des longueurs comme la fonction qui à chaque classe d'homotopie libre de lacets associe le minimum des longueurs des lacets dans cette classe. On peut se demander dans quels cas deux métriques sont égales à un difféomorphisme près si et seulement si elles ont le même spectre marqué des longueurs. Une condition nécessaire pour que cette équivalence soit vraie est que le groupe fondamental soit non trivial afin qu'il y ait des classes d'homotopie libre de lacets non triviales, ce qui exclu entre autre le cas d'une sphère. Cependant, dans le cas d'une sphère, on peut quand même se demander si la métrique ronde est la seule métrique ayant la propriété que toutes ses géodésiques sont fermées et de même longueur, et la réponse est que non : il existe des sphères munies de métriques non rondes, appelées "surfaces de Zoll" ayant cette propriété (voir [Be2]). On vient de dire que pour qu'il y ait rigidité du spectre marqué des longueurs, il est nécessaire que le groupe fondamental soit non trivial, on peut dire plus généralement qu'il est nécessaire que pour au moins l'une des deux métriques que l'on compare la réunion des courbes de longueur minimale dans leur classe d'homotopie libre soit dense, et on sait que cette condition est réalisée lorsque la métrique est à courbure strictement négative. Mais on ne sait toujours pas si deux métriques à courbure négative qui ont le même spectre marqué sont isométriques. On sait seulement que c'est le cas en dimension 2 (voir [O] ou [C]) ou lorsque l'une des deux métriques est localement symétrique (voir [BCG1]). On sait aussi en dimension quelconque que lorsqu'on déforme de façon lisse une métrique à courbure strictement négative sans en modifier le spectre marqué des longueurs, alors cette déformation est triviale, c'est-à-dire qu'elle est induite par une isotopie (voir [CS]). Dans le chapitre 4, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.2. *Soit g et g' deux métriques conformes sur X, à courbure strictement négative et ayant le même spectre marqué des longueurs. Alors elles sont égales.*

Ce résultat était déja connu : c'est une conséquence d'un théorème de Croke, [CD]. La preuve ici est différente de celle de [CD] et fait intervenir les familles de mesures équivariantes et le fait que si deux métriques ont le même spectre marqué des longueurs alors les mesures de Patterson de l'une et de l'autre sont équivalentes.

Chapitre 2

Les familles équivariantes de mesures sur le bord

2.1 Le bord à l'infini

Soit X une variété compacte à courbure strictement négative. Notons $\tilde{X}$ le revêtement universel de X, que l'on muni du relevé de la métrique sur X. Le bord à l'infini $\partial\tilde{X}$ de $\tilde{X}$ est défini comme ceci : on appelle rayon géodésique l'image d'une isométrie $[0, +\infty[\to \tilde{X}$, et on dit que deux rayons géodésiques sont équivalents s'ils sont à distance de Hausdorff finie, la distance de Hausdorff de deux ensembles étant la borne inférieure des $M > 0$ tels que chacun des ensembles soit contenu dans le M-voisinage de l'autre. Le bord à l'infini $\partial\tilde{X}$ est défini comme l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques (voir par exemple [GH]).

Rappelons sans démonstration quelques propriétés (voir [BGS]) : Notons T^1X le fibré tangent unitaire de X. Tout vecteur $v \in T^1X$ engendre un rayon géodésique qui définit un point de $\partial\tilde{X}$ que nous noterons $v(\infty)$. Pour tout $x \in \tilde{X}$, chaque point de $\partial\tilde{X}$ est représenté par un et un seul rayon géodésique issu de x, et donc l'application

$$\begin{aligned} T_x^1X &\to \partial\tilde{X} \\ v &\to v(\infty) \end{aligned}$$

est une bijection. Cette bijection induit une topologie sur $\partial\tilde{X}$ qui ne dépend pas du choix de x. De plus, la réunion $\tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$ admet une topologie d'espace compact qui est caractérisée par le fait qu'une suite $y_n \in \tilde{X}$ tend vers un point $\theta \in \partial\tilde{X}$ si et seulement si la distance $d(y_n, x)$ tend vers $+\infty$ et si l'angle $\measuredangle_x(\theta, y_n)$ entre y_n et θ vu du point x tend vers 0, x étant un point de $\tilde{X}$ dont le choix n'importe pas.

Enfin, rappelons que la définition de $\partial\tilde{X}$ ne dépend pas du choix de la métrique à courbure strictement négative sur X. En effet c'est une conséquence de la proposition suivante (voir [GH], chapitre 5, théorème 25) :

Proposition 2.1. *Soient g et g' deux métriques à courbure strictement négative sur $\tilde{X}$ qui sont les relevés de métriques sur X. Il existe une constante $A > 0$ telle que*

- *si r est un rayon géodésique pour g dans $\tilde{X}$, alors il existe r' un rayon géodésique pour g' dont la distance de Hausdorff à r est inférieure à A.*
- *si c est une géodésique pour g dans $\tilde{X}$, alors il existe une géodésique c' pour g' dont la distance de Hausdorff à c est inférieure à A.*

2.2 Structure höldérienne sur le bord

Le bord à l'infini $\partial\tilde{X}$ est naturellement muni d'une famille de distances qui sont toutes Hölder-équivalentes les une des autres. Nous allons plus tard construire certaines de ces distances. Néanmoins, il est possible de donner une description de la structure Höldérienne naturelle de $\partial\tilde{X}$ sans avoir à introduire une de ces distances, et c'est ce que nous allons faire dans cette section.

Pour $x \in \tilde{X}$, $\theta \in \partial\tilde{X}$, on note $D(x, \theta)$ le cône d'angle $\pi/2$ issue du vecteur $\vec{x\theta}$, c'est-à-dire

$$D(x, \theta) = \left\{ y \in \tilde{X} | \measuredangle_x(y, \theta) \leq \pi/2 \right\}.$$

Notons $\overline{D}(x, \theta)$ l'adhérence de $D(x, \theta)$ dans $\tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$, et notons $\partial D(x, \theta) = \overline{D}(x, \theta) \cap \partial\tilde{X}$. Autrement dit,

$$\partial D(x, \theta) = \left\{ \xi \in \partial\tilde{X} | \measuredangle_x(\xi, \theta) \leq \pi/2 \right\}.$$

Pour $T \geq 0$, notons x_T le point à distance T de x sur le rayon géodésique issu de x et dirigé vers θ. On posera alors

$$\begin{aligned} D^T(x, \theta) &= D(x_T, \theta), \\ \overline{D}^T(x, \theta) &= \overline{D}(x_T, \theta), \\ \partial D^T(x, \theta) &= \partial D(x_T, \theta). \end{aligned}$$

Le fait suivant est une conséquence des théorèmes de comparaison, sachant que la courbure de $\tilde{X}$ est majorée par une constante strictement négative :

Proposition 2.2. *Soient $x \in \tilde{X}$, $\theta \in \partial\tilde{X}$, alors $D^{T'}(x,\theta) \subset D^T(x,\theta)$ si $T' \geq T$, et la famille des ensembles $(\overline{D}^T(x,\theta))_{T\in[0,+\infty[}$ est une base de voisinage de θ dans $\tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$.*

Démonstration. Montrons par l'absurde la première affirmation : supposons que $D^{T'}(x,\theta)$ ne soit pas inclu dans $D^T(x,\theta)$ et soit $z \in D^{T'}(x,\theta) \setminus D^T(x,\theta)$. Considérons le triangle (z, x_T, x'_T) : dans ce triangle les angles aux sommets x_T et $x_{T'}$ sont $\geq \pi/2$ donc la somme des angles dans ce triangle est stricetment plus grande que π, ce qui est impossible car la courbure est négative (voir par exemple [GH] chapitre 3, théorème 12).

Montrons la deuxième affirmation : il est clair que les ensembles $D^T(x,\theta)$ sont des voisinages de θ dans $\tilde{X}\cup\partial\tilde{X}$. Nous devons montrer que tout voisinage de θ contient un ensemble $D^T(x,\theta)$ pour T assez grand. Soit V un voisinage de θ. Quitte à le remplacer par un voisinage plus petit, on peut supposer que V est l'adhérence dans $\tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$ d'un ensemble

$$\{y \in \tilde{X} | d(x,y) > M \text{ et } \measuredangle_x(y,\theta) < a\},$$

où $M, a > 0$. Supposons par l'absurde que $D^T(x,\theta)$ ne soit pas contenu dans V pour T arbitrairement grand. Soit $z \in D^T(x,\theta) \setminus V$. On peut supposer que $T > M$ donc $d(x,z) > M$ et donc $\measuredangle_x(z,\theta) > a$. Considérons alors le triangle (x, z, x_T). Le coté $[x, x_T]$ est de longueur T, arbitrairement grand, et les angles aux sommets x, x_T qui bordent ce coté sont respectivement $> a$ et $\geq \pi/2$. Or l'existence d'un tel triangle est impossible lorsque T est trop grand, (voir proposition 5.3 dans l'annexe), d'où une contradiction. □

Définition 2.3. *Fixons $x \in \tilde{X}$. On dira qu'une fonction h sur $\partial\tilde{X}$ est Hölder-continue s'il existe deux constantes $A, b > 0$ telles que pour tout $\theta \in \partial\tilde{X}$, $T > 0$, et pour tout $\xi, \zeta \in \partial D^T(x,\theta)$ on ait*

$$|h(\xi) - h(\zeta)| \leq Ae^{-bT}.$$

Cette définition ne dépend pas du choix de x d'après la proposition suivante :

Proposition 2.4. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $A > 0$ telle que si $\theta \in \partial\tilde{X}$, $T \geq 0$, et $x, y \in \tilde{X}$ avec $d(x,y) \leq \epsilon$, alors*

$$D^{T+A}(y,\theta) \subset D^T(x,\theta). \tag{2.1}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et soit A une constante > 0 ne dépendant que de ϵ que l'on déterminera plus tard. Soit $x, y \in \tilde{X}$ tels que $d(x, y) \leq \epsilon$, soit $T > 0$, $\theta \in \partial\tilde{X}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $z \in \tilde{X}$ tel que $z \in D^{T+A}(y, \theta)\backslash D^T(x, \theta)$. Notons (x_t), (y_t) les géodésiques dirigées vers θ et telles que $x_0 = x$ et $y_0 = y$. Ces deux géodésiques ne s'éloignent pas (voir propostion 5.1 dans l'annexe), et on a donc que $d(y_T, x_T) \leq \epsilon$, et $d(y_{T+A}, x_{T+A}) \leq \epsilon$. Considérons alors les deux triangles géodésiques (x_T, x_{T+A}, z) et (y_T, y_{T+A}, z). On a que les angles $\measuredangle_{x_T}(x_{T+A}, z)$ et $\measuredangle_{y_{T+A}}(y_T, z)$ sont $\geq \pi/2$. Donc d'après la proposition 5.4 (dans l'annexe), on a

$$d(z, x_{T+A}) \geq d(z, x_T) + A - 2\delta,$$
$$d(z, y_T) \geq d(z, y_{T+A}) + A - 2\delta,$$

(où δ est une constante ne dépendant que de X) et en additionnant ces deux inégalités on obtient

$$[d(z, x_{T+A}) - d(z, y_{T+A})] + [d(z, y_T) - d(z, x_T)] \geq 2A - 4\delta,$$

donc $2\epsilon \geq 2A - 4\delta$, ce qui est contradictoire pouvu qu'on ait choisi $A > \epsilon + 2\delta$. □

2.3 Cocycles et familles équivariantes de mesures : définitions

On donne les définitions suivantes (voir aussi [L1], même si les termes employés ont parfois des sens différents) :

– On appelle cocycle une application continue

$$C : \tilde{X}^2 \times \partial\tilde{X} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, \theta) \to C_\theta(x, y)$$

vérifiant

$$C_\theta(x, y) + C_\theta(y, z) = C_\theta(x, z)$$
$$C_{\gamma\theta}(\gamma x, \gamma y) = C_\theta(x, y) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma,$$

et telle que pour x, y fixé, l'application $\theta \to C_\theta(x, y)$ soit Hölder-continue.

- On appelle famille équivariante de mesures sur $\partial\tilde{X}$ une famille $\mu = (\mu_x)$ qui à tout $x \in \tilde{X}$ associe une mesure finie μ_x sur $\partial\tilde{X}$ telle que pour tout $x \in \tilde{X}$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$, on ait la relation d'équivariance
$$\mu_{\gamma(x)} = \gamma_*\mu_x,$$
et telle qu'il existe un cocycle C vérifiant
$$-\log\left(\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\theta)\right) = C_\theta(x,y). \tag{2.2}$$
En particulier, les mesures μ_x d'une même famille sont contenues dans la même classe de densité de mesures, et cette classe est Γ-invariante, et donc le support de ces mesures est $\partial\tilde{X}$, car il est fermé non vide et Γ-invariant.
- On dira d'un cocycle qu'il est normalisé s'il est associé à une famille équivariante de mesures comme ci-dessus.
- On dira que deux cocycles C et C' sont cohomologues s'il existe une fonction continue $f : \tilde{X}\times\partial\tilde{X} \to \mathbb{R}$, Γ-invariante (au sens où $f(\gamma x, \gamma\theta) = f(x,\theta)$) telle que
$$C_\theta(x,y) - C'_\theta(x,y) = f(x,\theta) - f(y,\theta). \tag{2.3}$$
Rappelons que de telles fonctions f correspondent à des fonctions continues sur T^1X, via l'identification Γ-équivariante $\tilde{X} \times \partial\tilde{X} \simeq T^1\tilde{X}$. En particulier, ces fonctions sont bornées.

Si C et C' sont deux cocycles cohomologues, et si C est normalisé, alors il existe d'une part une fonction f vérifiant (2.3), et d'autre part il existe une famille équivariante de mesures (μ_x) vérifiant (2.2). On voit alors que C' est lui aussi normalisé, car si on définit la famille de mesures (μ'_x) par
$$\frac{d\mu'_x}{d\mu_x}(\theta) = e^{f(x,\theta)},$$
alors on a bien
$$C'_\theta(x,y) = -\log\left(\frac{d\mu'_x}{d\mu'_y}(\theta)\right).$$
Remarquons alors que les mesures μ_x et μ'_x sont équivalentes, et de plus, comme f est borné, il existe une constante $A \geq 1$ telle que pour tout x on ait
$$A^{-1}\mu_x \leq \mu'_x \leq A\mu_x.$$

L'ensemble des cocycles est un espace vectoriel. Un exemple bien connu de cocycle non trivial est le cocycle de Busemann, qu'on peut caractériser par la propriété suivante :

$$B_\theta(x,y) = \lim_{z\to\theta} [d(x,z) - d(y,z)]$$

(voir corollaire 2.7 pour l'existence de cette limite), mais il existe d'autres cocycles et nous allons tous les décrire dans ce chapitre. Nous allons aussi montrer l'existence de familles équivariantes de mesures qui n'est pas évidente pour l'instant, et nous allons également toutes les décrire. En particulier on montrera le théorème suivant :

Théorème 2.5. *Pour tout cocycle C, il existe un unique réel s tel que le cocycle $C+sB$ soit normalisé (où B désigne le cocycle de Busemann). De plus, les familles équivariantes de mesures associées à un même cocycle normalisé par la relation (2.2) sont toutes proportionnelles.*

(Voir aussi [L1], théorèmes 1.d et 2.d)

2.4 Construction de cocycles

Dans cette section, on va montrer comment à partir d'une fonction höldérienne sur T^1X on peut construire un cocycle (corollaire 2.7 ci-cessous). Tout d'abord, on dit qu'une fonction F sur T^1X est höldérienne s'il existe des constantes $A > 0$, $0 < b \leq 1$ tels que $|F(u) - F(v)| \leq Ad(u,v)^b$ pour tout $u, v \in T^1X$. Ici, d désigne n'importe qu'elle distance sur T^1X équivalente à une distance riemannienne (le choix de d n'importe pas pour cette définition puisque T^1X est compacte). On utilisera les flots géodésiques de T^1X et de $T^1\tilde{X}$, qui seront notés ϕ_t. On notera π les projections canoniques $T^1X \to X$ et $T^1\tilde{X} \to \tilde{X}$. Si F est une fonction höldérienne sur T^1X, le relevé de F sur $T^1\tilde{X}$ sera également noté F. Pour $x, y \in \tilde{X}$, nous noterons $\int_x^y F$ l'intégrale suivante :

$$\int_x^y F = \int_0^T F(\phi_t v)dt,$$

où $T = d(x,y)$ et $v \in T^1\tilde{X}$ vérifie $\pi v = x$ et $\pi\phi_T v = y$ (ce vecteur v est unique si $x \neq y$).

Lemme 2.6. *Soit F une fonction höldérienne sur T^1X et soit $\epsilon_0 > 0$, alors il existe des constantes $A, b > 0$ tels que pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$ et pour tout quadruplet $x, x', y, y' \in \tilde{X}$ tels que $d(x, x') \leq \epsilon$, $d(y, y') \leq \epsilon$, on a*

$$\left| \int_x^y F - \int_{x'}^{y'} F \right| \leq A\epsilon^b$$

Corollaire 2.7. *Pour tout $x, y \in \tilde{X}$ et $\theta \in \partial\tilde{X}$, notons $C_\theta^F(x, y)$ ou bien $\int_x^\theta F - \int_y^\theta F$ la limite suivante :*

$$C_\theta^F(x, y) = \int_x^\theta F - \int_y^\theta F = \lim_{z(\in\tilde{X})\to\theta} \left(\int_x^z F - \int_y^z F \right).$$

Cette limite existe bien, et l'application $\theta \to C_\theta^F(x, y)$ est Hölder-continue. Donc la fonction C^F ainsi définie est un cocycle.

Démonstration du lemme. Soit F une fonction höldérienne et soit $\epsilon_0 > 0$. Comme

$$\int_x^y F - \int_{x'}^{y'} F = \left(\int_x^y F - \int_{x'}^y F \right) + \left(\int_{x'}^y F - \int_{x'}^{y'} F \right),$$

il suffit de montrer le lemme dans les deux cas suivant : lorsque $y = y'$ et lorsque $x = x'$. Traitons le cas $y = y'$ (l'autre cas est similaire). L'idée de la preuve est que les deux géodésiques qui partent de x et de x' et qui se rejoignent en y se rapprochent de façon exponentielle d'après la proposition 5.5 (dans l'annexe), et comme la fonction F est Höldérienne, la différence entre les deux intégrales sera petite, indépendamment de la longueur des deux géodésiques.

Voici maintenant la preuve en détail. Par commodité, les distances que l'on utilisera sur T^1X et sur $T^1\tilde{X}$ sont définies comme ceci : choisissons $r > 0$ arbitrairement. Pour tout $u, v \in T^1X$ (ou $\in T^1\tilde{X}$), on définit la distance $d(u, v)$ entre les vecteurs tangents unitaires u et v par

$$d(u, v) = \sup_{s\in[0,r]} d(\pi\phi_s u, \pi\phi_s v).$$

La distance d ainsi définie sur T^1X est Lipschitz-équivalente à n'importe quelle distance riemannienne sur T^1X. Soit $x, x', y \in \tilde{X}$ tels que $d(x, x') \leq \epsilon_0$.

Comme x et x' jouent le même rôle, on peut supposer que $d(x', y) \geq d(x, y)$. Posons $T = d(x, y)$, et $\tau = d(x', y) - d(x, y)$. On a que $0 \leq \tau \leq d(x, x') \leq \epsilon_0$. D'après la proposition 5.5, si $t \in [0, T]$ et $t \leq T - r$, on a

$$d(\phi_t u, \phi_{t+\tau} v) \leq d(x, x') e^{-\lambda(2\epsilon_0)t},$$

où $u, v \in T^1\tilde{X}$ sont les vecteurs basés en x et en x' et dirigés vers y. De plus, comme la distance d est Lipschitz-équivalente à une distance riemannienne, et que pour cette distance riemannienne, la norme de la différentielle de ϕ_t est uniformément bornée lorsque $t \in [0, r]$, alors par conséquent il existe une constante $M > 0$ telle que si $t \in [0, T]$ et $t > T - r$, on a

$$d(\phi_t u, \phi_{t+\tau} v) \leq M d(x, x').$$

Donc, comme F est höldérienne, on peut écrire pour $t \in [0, T]$

$$|F(\phi_{t+\tau} u) - F(\phi_t v)| \leq \begin{cases} Ad(x, x')^b e^{-\lambda(2\epsilon_0)bt} & \text{si } t \leq T - r, \\ Ad(x, x')^b M^b & \text{si } t > T - r, \end{cases}$$

où A et b sont les constantes de Hölder pour F. On peut maintenant écrire

$$\begin{aligned} \left| \int_x^y F - \int_{x'}^y F \right| &\leq \int_{t=0}^T |F(\phi_{t+\tau} u) - F(\phi_t v)| \, dt + \int_{t=0}^\tau |F(\phi_t u)| \, dt \\ &\leq Ad(x, x')^b \left(\int_0^T e^{-\lambda(2\epsilon_0)bt} dt + rM^b \right) + \tau \|F\|_\infty \\ &\leq d(x, x')^b \left(\frac{A}{\lambda(2\epsilon_0)b} + ArM^b + \epsilon_0^{1-b} \|F\|_\infty \right), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. □

Démonstration du corollaire. Soient $x, y \in \tilde{X}$. Pour tout $z \in \tilde{X}$, notons

$$C_z^F(x, y) = \int_x^z F - \int_y^z F.$$

Pour prouver à la fois l'existence de la limite $\lim_{z \to \theta} C_z^F(x, y)$ et la Hölder-continuité en θ, il suffit de montrer qu'il existe des constantes $A, b > 0$ vérifiant : pour tout $T > 0$, $\theta \in \partial\tilde{X}$ et $z, z' \in D^T(x, \theta)$, alors

$$\left| C_z^F(x, y) - C_{z'}^F(x, y) \right| \leq Ae^{-bT}. \tag{2.4}$$

D'après le lemme 2.6, on sait que $C_z^F(x,y)$ est borné uniformément en $z \in \tilde{X}$, donc la propriété (2.4) est vérifiée lorsque T n'est pas trop grand pourvu que l'on choisisse la constante A suffisament grande et la constante $b > 0$ suffisamment petite. Soit donc T suffisamment grand en un sens que l'on va déterminer par la suite, et soit $z \in D^T(x,\theta)$. Notons $(x_t)_{t\geq 0}$ le rayon géodésique issu de x et dirigé vers θ. Il convient de comparer $C_z^F(x,y)$ avec $C_{x_{T/2}}^F(x,y)$. Pour cela, notons x' le projeté de $x_{T/2}$ sur la géodésique passant par x et z, et notons y' le projeté de x' sur celle passant par y et z. Comme l'angle $\measuredangle_{x_T}(x,z) \geq \pi/2$, alors d'après la proposition 5.4 (dans l'annexe), le sommet x_T est à distance inférieure à δ de la géodésique passant par x et z (δ étant une constante ne dépendant que de X), et ensuite, comme le segment géodésique partant de x_T vers x se rapproche exponentiellement vite du segment géodésique $[x,z]$ (proposition 5.5), on peut écrire que

$$d\left(x_{T/2}, x'\right) \leq 2\delta e^{-\lambda(2\delta)T/2}.$$

En particulier, le point x' est située entre x et z et $d(x,x') \geq T/2 - 2\delta$. Maintenant, la géodésique partant de x vers z se rapproche elle-même exponentiellement vite de la géodésique passant par y et z d'après la proposition 5.5, et donc on peut écrire que

$$d(x',y') \leq 2d(x,y)e^{-\lambda(2d(x,y))[T/2-2\delta]}.$$

Maintenant on peut appliquer le lemme 2.6 pour faire les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
|C_z^F(x,y) - C_{x_{T/2}}^F(x,y)| &= \left| C_z^F(x',y') + \left(\int_x^{x'} F - \int_x^{x_{T/2}} F \right) + \right. \\
&\qquad \left. + \left(\int_y^{x_{T/2}} F - \int_y^{y'} F \right) \right| \\
&\leq A\left[d(x',y')^b + d(x',x_{T/2})^b + d(y',x_{T/2})^b \right] \\
&\leq A' e^{-b'T},
\end{aligned}$$

où A', b' sont des constantes qui ne dépendent ni de T, ni de z. Donc, si $z, z' \in D^T(x,\theta)$, on a

$$|C_z^F(x,y) - C_{z'}^F(x,y)| \leq 2A'e^{-b'T},$$

ce qu'on voulait. $\square$

On montrera dans la section suivante que chaque classe de cohomologie contient un cocycle de la forme C^F comme on vient d'en construire.

Remarquons que lorsqu'on applique le corollaire 2.7 en prenant la fonction $F = 1$, le cocycle obtenu est le cocycle de Busemann $B = C^1$.

2.5 Cocycles cohomologues

On montre que chaque classe de cohomologie est atteinte par un cocycle de la forme C^F :

Proposition 2.8. *Pour tout cocycle C, il existe une fonction höldérienne F sur T^1X telle que les cocycles C et C^F soient cohomologues.*

Démonstration. Soit C un cocycle. Nous allons construire un autre cocycle C' cohomologue à C, que l'on va pouvoir écrire sous la forme C^F. Afin de rendre cette construction plus intuitive, nous allons supposer un instant que le cocycle C est normalisé, même si ce n'est pas toujours le cas. On suppose donc qu'il existe une famille équivariante de mesures (μ_x) telle que

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\theta) = e^{-C_\theta(x,y)}.$$

Fixons une origine o, et donnons-nous une fonction ρ sur $\tilde{X}$, de classe C^∞ positive et à support compact, mais ne s'annulant pas sur un domaine fondamental de Γ de telle sorte qu'on ait

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \rho(\gamma x) > 0 \text{ pour tout } x.$$

Définissons une nouvelle famille équivariante de mesures (μ'_x) en posant

$$\mu'_x = \sum_\gamma \rho(\gamma^{-1}x)\mu_{\gamma o}. \tag{2.5}$$

Il vient alors que

$$\frac{d\mu'_x}{d\mu_o}(\theta) = \sum_\gamma \rho(\gamma^{-1}x)e^{-C_\theta(\gamma o,o)},$$

et le cocycle $C'_\theta(x,y) = -\log(\frac{d\mu'_x}{d\mu'_y}(\theta))$ associé à cette nouvelle famille s'écrit

$$C'_\theta(x,y) = -\log\left(\frac{\sum_\gamma \rho(\gamma^{-1}x)e^{-C_\theta(\gamma o,o)}}{\sum_\gamma \rho(\gamma^{-1}y)e^{-C_\theta(\gamma o,o)}}\right) \tag{2.6}$$

Il est cohomologue à C car on peut écrire

$$C_\theta(x,y) - C'_\theta(x,y) = f(x,\theta) - f(y,\theta),$$

avec

$$f(x,\theta) = \log\left(\frac{d\mu'_x}{d\mu_x}(\theta)\right) = \log\left(\sum_\gamma \rho(\gamma^{-1}x)e^{-C_\theta(\gamma o,x)}\right),$$

qui est bien continue et Γ-invariante.

Mais en fait, même sans supposer que C est normalisé, nous pouvons définir le cocycle C' cohomologue à C par la formule (2.6) qui a toujours un sens.

Maintenant, pour finir la preuve, nous allons établir l'existence d'une fonction höldérienne F sur T^1X telle que $C' = C^F$, c'est-à-dire $C'_\theta(x,y) = \int_x^\theta F - \int_y^\theta F$. Supposons que ce soit le cas, on aurait alors pour tout $v \in T^1\tilde{X}$ et pour tout $t \geq 0$

$$C'_{v(\infty)}(\pi v, \pi\phi_t v) = \int_{s=0}^t F(\phi_s v)ds,$$

et donc nécessairement on aurait

$$\begin{aligned} F(v) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} C'_{v(\infty)}(\pi v, \pi\phi_t v) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \log\left(\sum_\gamma \rho\gamma^{-1}\pi(\phi_t v)e^{-C_{v(\infty)}(\gamma o,o)}\right) \\ &= \frac{\sum_\gamma \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(\rho\gamma^{-1}\pi\phi_t v\right)e^{-C_{v(\infty)}(\gamma o,o)}}{\sum_\gamma \rho\gamma^{-1}\pi v e^{-C_{v(\infty)}(\gamma o,o)}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Définissons donc F par (2.7) (nous pouvons le faire car $\rho\gamma^{-1}\pi$ est C^∞ et les sommes $\sum_\gamma$ sont finies). A priori, F est définie sur $T^1\tilde{X}$, mais elle est clairement Γ-invariante, et donc elle induit bien une foncion F sur T^1X. On doit montrer que F est höldérienne. Comme on sait que les produits ou quotients ou exponentielles de fonctions höldériennes sont höldériens, il nous suffit de montrer que les fonctions utilisées à la ligne (2.7) sont localement höldériennes (i.e. höldériennes sur les compactes). Cela est évident pour les fonctions $v \to \rho\gamma^{-1}\pi v$ et $v \to \frac{d}{dt}|_{t=0}(\rho\gamma^{-1}\pi\phi_t v)$, car elles sont C^∞. En ce qui concerne les fonctions $v \to C_{v(\infty)}(\gamma o, o)$, cela résulte du lemme suivant :

Lemme 2.9. *Si h est une fonction hölder-continue sur $\partial\tilde{X}$, alors la fonction $v \in T^1\tilde{X} \to h(v(\infty))$ est localement höldérienne.*

Démonstration. Soient h une fonction Hölder-continue sur $\partial\tilde{X}$ et $K \in \tilde{X}$ un compact. On doit montrer qu'il existe des constantes $A, b > 0$ telles que pour tout u, v appartenant au compact $\pi^{-1}K \subset T^1\tilde{X}$, on ait

$$|h(u(\infty)) - h(v(\infty))| \leq Ad(u,v)^b.$$

Soit $u, v \in \pi^{-1}K$, et posons $\theta = u(\infty)$ et $\xi = v(\infty)$. Comme h est hölder-continue, il existe des constantes $A, \lambda > 0$ ne dépendant que de h et du compact K telles que si $\xi \in \partial D^T(x,\theta)$ pour $x \in K$ et pour $T \geq 0$, alors

$$|h(\theta) - h(\xi)| \leq Ae^{-\lambda T}.$$

Nous allons montrer qu'en effet ξ appartient à $\partial D^T(\pi u, \theta)$ si $d(u,v)$ suffisamment petit, et qu'on peut prendre T d'autant plus grand que $d(u,v)$ est petit. Soit (x_t) la géodésique engendrée par le vecteur u et soit $T \in \mathbb{R}$ tel que x_T soit le projeté de ξ sur cette géodésique, autrement dit x_T est le point de cette géodésique qui minimise la fonction $x \to B_\xi(x,o)$. De plus, le vecteur $\vec{x_T\xi}$ fait un angle droit avec la géodésique (x_t) et donc $\xi \in \partial D^T(\pi u, \theta)$ si $T \geq 0$. Posons $\epsilon = d(u,v)$. On rappelle que la distance d sur $T^1\tilde{X}$ est définie par

$$d(u,v) = \sup_{s\in[0,r]} d(\pi\phi_s u, \pi\phi_s v),$$

où $r > 0$ a été fixé arbitrairement. Considérons donc le vecteur $w \in T^1\tilde{X}$ tel que $w(\infty) = \xi$ et $\pi w = \pi u$ (ce vecteur est unique), alors d'après la proposition 5.1,

$$d(\pi\phi_s v, \pi\phi_s w) \leq \epsilon \text{ pout tout } s > 0,$$

et donc $d(v,w) \leq \epsilon$, donc

$$d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w) \leq 2\epsilon$$

On rappelle aussi que la distance d sur $T^1\tilde{X}$ est équivalente à une distance riemannienne induite par une métrique Γ-invariante, ce qui entraine que l'angle entre deux vecteurs basés au même point est controlé par la distance entre ces deux vecteurs, i.e. il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\measuredangle(u,w) \leq Md(u,w),$$

Notons (y_t) la géodésique engendrée par le vecteur w. D'après la proposition 5.7 dans l'annexe, on a

$$d(x_t, y_t) \leq \measuredangle(u, w) M_0 e^{bt},$$

où M_0 et b sont des constantes ne dépendant que de $\tilde{X}$. On peut en déduire par exemple que

$$d(x_t, y_t) \leq 1 \text{ si } t \leq -\frac{1}{b} \log\left(\measuredangle(u, w) M_0\right). \tag{2.8}$$

Posons

$$T_0 = -\frac{1}{b} \log\left(\measuredangle(u, w) M_0\right) - 2.$$

Nous pouvons alors affirmer que $T \geq T_0$. En effet, dans le cas contraire, on aurait

$$\begin{aligned} B_\xi(x_T, o) - B_\xi(x_{T_0+2}, o) &= B_\xi(x_T, x_{T_0+2}) \\ &\geq \ B_\xi(y_T, y_{T_0+2}) - 2 \\ &= T_0 - T > 0, \end{aligned}$$

(où on a utilisé (2.8) et le fait que la fonction de Busemann $x \to B_\xi(x, o)$ est 1-Lipschitzienne). Or ceci contredit le fait que x_T est le projeté de ξ sur (x_t). Donc finalement on a que

$$\begin{aligned} |h(\theta) - h(\xi)| &\leq A e^{-\lambda T_0} \\ &= A \exp\left[\frac{\lambda}{b} \log\left(\measuredangle(u, w) M_0\right) + 2\lambda\right] \\ &\leq \left[A e^{2\lambda} \left(2 M M_0\right)^{\frac{\lambda}{b}}\right] \epsilon^{\left[\frac{\lambda}{b}\right]}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

$\square$

Nous venons de montrer que F est höldérienne. Il nous reste à vérifier que $C' = C^F$. Pour l'instant, nous savons déja d'après la définition de F que si (x_t) est une géodésique dirigée vers $\theta \in \partial\tilde{X}$, alors pour tout $t, s \in \mathbb{R}$, on a

$$C'_\theta(x_s, x_t) = \int_{x_s}^{x_t} F.$$

Soit maintenant x, y, θ quelconques. Notons (x_t), (y_t) les géodésiques dirigées vers θ et telles que $x_0 = x$ et $y_0 = y$. Soit $\tau = B_\theta(x, y)$, c'est-à-dire l'unique réel tel que

$$\lim_{t \to +\infty} d(x_{t+\tau}, y_t) = 0,$$

On peut écrire alors

$$\begin{aligned} C'_\theta(x, y) &= C'_\theta(x, x_{t+\tau}) + C'_\theta(x_{t+\tau}, y_t) + C'_\theta(y_t, y) \\ &= \int_x^{x_{t+\tau}} F + C'_\theta(x_{t+\tau}, y_t) - \int_y^{y_t} F \\ &= \left[\int_x^{y_t} F - \int_y^{y_t} F \right] + \left[\int_x^{x_{t+\tau}} F - \int_x^{y_t} F \right] + C'_\theta(x_{t+\tau}, y_t). \end{aligned}$$

Le premier terme entre crochet tend vers $C_\theta^F(x, y)$ quand t tend vers l'infini d'après le corollaire 2.7. Le deuxieme terme entre crochet tend vers zéro d'apreѕ̀ le lemme 2.6, et le troisième terme $C'_\theta(x_{t+\tau}, y_t)$ tend vers zéro car la fonction C' est uniformément continue. Donc $C'_\theta(x, y) = C_\theta^F(x, y)$, et la proposition 2.8 est prouvée. $\square$

2.6 Construction de familles équivariantes de mesures

Dans cette section, on va construire suffisamment de familles équivariantes de mesures pour montrer la proposition suivante, qui est une brique dans le théorème 2.5.

Proposition 2.10. *Pour tout cocycle C, il existe un réel s tel que le cocycle $C + sB$ soit normalisé.*

Cette construction est une généralisation de la construction de Patterson par laquelle on obtient la famille des mesures de Patterson, ce qui correspond dans ce qui va suivre au cas où $F = 0$.

On introduit tout d'abord la série de Poincaré

$$P_s(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma y)}, \text{ pour } x, y \in \tilde{X},\ s \in \mathbb{R}.$$

Lemme 2.11. *Il existe un réel $h \geq 0$ appelé "entropie volumique" tel que*

$$P_s(x,y) = +\infty \text{ si } s < h,$$
$$P_s(x,y) < +\infty \text{ si } s > h.$$

Démonstration. Fixons x, y. La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, $s \to P_s(x,y)$ est décroissante et vaut $+\infty$ pour $s = 0$. Soit $h = \sup\{s | P_s(x,y) = +\infty\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Il nous reste à montrer que h est fini, et qu'il ne dépend pas de x, y. On vérifie facilement que h est égal au taux de croissance exponentiel suivant

$$h = \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log \#\{\gamma \in \Gamma | d(x, \gamma y) \leq R\}.$$

Comme l'action de Γ sur $\tilde{X}$ est cocompact ce taux est aussi égal au taux de croissance exponentiel du volume des boules

$$h = \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log \mathrm{Vol}(B(x,R)),$$

Ce taux ne dépend pas de x, donc h ne dépend pas de x, y. Enfin comme la courbure de $\tilde{X}$ est minorée par une constante $-a^2 < 0$, alors le volume de la boule $\mathrm{Vol}(B(x,R))$ est plus petit que le volume d'une boule de de même rayon R dans l'espace hyperbolique de dimension $n = dimX$ à courbure constante $-a^2$. Or le taux de croissance exponentiel du volume des boules dans l'espace hyperbolique à courbure $-a^2$ est égal à $a(n-1)$ et donc $h \leq a(n-1) < \infty$. $\square$

Soit F une fonction höldérienne sur T^1X. On définit la série de Poincaré généralisée par

$$P_s^F(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(x,\gamma y) - \int_x^{\gamma y} F}, \text{ pour } x, y \in \tilde{X},\ s \in \mathbb{R}.$$

Le fait que cette série converge ou non ne dépend pas de x, y. Plus précisément, si $x, y, x', y' \in \tilde{X}$, et si on pose $A = d(x,x') + d(y,y')$, on a que pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\left| s(d(x,\gamma y) - d(x', \gamma y')) + \int_x^{\gamma y} F - \int_{x'}^{\gamma y'} F \right| \leq |s|A + C,$$

où C est une constante indépendante de γ, donnée par le lemme 2.6. De cela on peut déduire

$$e^{-|s|A-C} P_s^F(x,y) \leq P_s^F(x',y') \leq e^{|s|A+C} P_s^F(x,y). \tag{2.9}$$

Lemme 2.12. *Il existe un réel $h(F)$ tel que*

$$P_s^F(x,y) = +\infty \ si \ s < h(F),$$
$$P_s^F(x,y) < +\infty \ si \ s > h(F).$$

Démonstration. Fixons x, y. La fonction $s \to P_s^F(x,y)$ est décroissante, et d'après le lemme 2.11, elle vaut $+\infty$ pour $s \leq -\|F\|_\infty$, et elle a une valeur finie pour $s \geq h + \|F\|_\infty$, donc il existe $h(F) > 0$ qui vérifie l'énnocé pour x, y fixés. D'après (2.9), $h(F)$ ne dépend pas de x, y. □

Maintenant nous attaquons la construction de Patterson généralisée : Deux cas se présentent : ou bien $P_{h(F)}^F(x,y) = +\infty$ pour tout $x, y \in \tilde{X}$, ou bien $P_{h(F)}^F(x,y) < +\infty$ pour tout $x, y \in \tilde{X}$.

Premier cas : On suppose que $P_{h(F)}^F(x,y) = +\infty$ (c'est le cas le plus simple). Rappelons que la réunion $\Gamma \cup \partial\tilde{X}$ est une compactification du groupe discret Γ, et que dans cette compactification, une suite $\gamma_n \in \Gamma$ converge vers un point $\theta \in \partial\tilde{X}$ si et seulement si $\gamma_n(x)$ converge vers θ, pour un x et donc pour tout $x \in \tilde{X}$. Fixons $o \in \tilde{X}$ une origine quelconque. Pour tout $x \in \tilde{X}$ et $s > h(F)$, on définit la mesure suivante sur Γ :

$$\mu_x^s = \frac{1}{P_s^F(o,o)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x,\gamma o) - \int_x^{\gamma o} F} \delta_\gamma.$$

En particulier, les mesures μ_o^s sont des probabilités, et il existe une suite $s_n > h(F)$ qui converge vers $h(F)$ et telle que la suite de mesure $\mu_o^{s_n}$ converge faiblement dans l'espace des mesures sur le compact $\Gamma \cup \partial\tilde{X}$ vers une mesure finie non nulle μ_o. Comme la série $P_s^F(o,o)$ tend vers $+\infty$ lorsque s tend vers $h(F)$, alors chacun des coefficients devant les masses de Dirac dans l'expression de μ_o^s tend vers zéro, ce qui fait que la limite μ_o est supportée par $\partial\tilde{X}$. Pour tout $x \in \tilde{X}$ et $s > h(F)$ les mesures μ_x^s et μ_o^s sont équivalente, avec une fonction densité qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_x}{d\mu_o}(\gamma) &= e^{-s(d(x,\gamma o) - d(o,\gamma o)) - \left(\int_x^{\gamma o} F - \int_o^{\gamma o} F\right)} \\ &= \exp\left[- \left(\int_o^{\gamma o} (F+s) - \int_x^{\gamma o} (F+s) \right) \right]. \end{aligned}$$

D'après le corollaire 2.7, ces fonctions $\gamma \in \Gamma \to \exp\left[-\left(\int_o^{\gamma o}(F+s) - \int_x^{\gamma o}(F+s)\right)\right]$ se prolongent par continuité sur $\partial\tilde{X}$ par

$$\begin{aligned}\theta \to & \exp\left[-C_\theta^{F+s}(x,o)\right] \\ & = \exp\left[-C_\theta^F(x,o) - sB_\theta(x,o)\right].\end{aligned}$$

De plus, d'après le lemme 2.6, ces prolongements convergent uniformément en θ sur $\Gamma \cup \partial\tilde{X}$ lorsque s tend vers $h(F)$. Par conséquent, la suite de mesure $\mu_x^{s_n}$ converge faiblement vers une mesure finie μ_x équivalente à μ_o et on a

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_o}(\theta) = e^{-C_\theta^F(x,o) - h(F)B_\theta(x,o)}.$$

et donc plus généralement

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\theta) = e^{-C_\theta^F(x,y) - h(F)B_\theta(x,y)}.$$

Enfin, on verifie facilement que les relations d'équivariance $\mu_{\gamma x}^s = \gamma_*\mu_x^s$, et donc $\mu_{\gamma x} = \gamma_*\mu_x$ Ainsi, (μ_x) est une famille équivariante de mesures ce qui achève la construction dans le premier cas.

Deuxième cas : On suppose que $P_{h(F)}^F(x,y) < +\infty$. On va pouvoir néanmoins construire une série de Poincaré modifiée $\overline{P}_s^F$ tel que $\overline{P}_{h(F)}^F(x,y) = +\infty$, puis reproduire une construction similaire à celle du premier cas. Fixons une origine o. On sait que pour tout $\epsilon > 0$,

$$P_{h(F)-\epsilon}^F(o,o) = \sum_\gamma \exp\left[(\epsilon - h(F))d(o,\gamma o) - \int_o^{\gamma o} F\right] = +\infty.$$

On peut donc remplacer dans cette série la constante ϵ par une fonction convenablement choisie qui tend vers zéro quand γ tend vers l'infini de telle sorte que la somme reste infinie : plus précisément on peut trouver une fonction $\alpha : \mathbb{R}^+ \to R^+ \setminus \{0\}$ vérifiant $\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = 0$ et telle que

$$\sum_\gamma \exp\left[\left(\alpha\left(d(o,\gamma o)\right) - h(F)\right) d(o,\gamma o) - \int_o^{\gamma o} F\right] = +\infty.$$

On peut supposer également (quitte à remplacer α par une fonction plus grande) que α est décroissante, et que la fonction $t \to t\alpha(t)$ est croissante. On pose alors

$$\overline{P}_s^F(x,y) = \sum_\gamma \exp\left[\left(\alpha\left(d(x,\gamma y)\right) - s\right) d(x,\gamma y) - \int_x^{\gamma y} F\right].$$

On a alors que $\overline{P}_s^F(o,o) = +\infty$ si et seulement si $s \le h(F)$. Pour tout $x \in \tilde{X}$ et $s > h(F)$, on définit la mesure μ_x^s sur Γ :

$$\mu_x^s = \frac{1}{\overline{P}_s^F(o,o)} \sum_\gamma \exp\left[(\alpha\left(d(x,\gamma o)\right) - s)\, d(x,\gamma o) - \int_x^{\gamma o} F\right] \delta_\gamma.$$

On considère à nouveau une suite $(s_n) > h(F)$ tendant vers $h(F)$ telle que les mesures de probabilité $\mu_o^{s_n}$ convergent faiblement vers une mesure μ_o sur $\partial\tilde{X}$. Ensuite, pour tout $x \in \tilde{X}$ et $s > h(F)$, la densité de μ_x^s par rapport à μ_o^s peut s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_x^s}{d\mu_o^s}(\gamma) = \exp\Big[&(d(x,\gamma o)\alpha(d(x,\gamma o)) - d(o,\gamma o)\alpha(d(o,\gamma o))) \\ &- \left(\int_x^{\gamma o}(F+s) - \int_o^{\gamma o}(F+s)\right)\Big],\ \gamma \in \Gamma\end{aligned}$$

Cette fonction densité se prolonge par continuité sur $\partial\tilde{X}$: en effet, comme α est une fonction décroissante qui tend vers zéro et comme la fonction $t \to t\alpha(t)$ est croissante, on a que

$$\begin{aligned}|d(x,z)\alpha(d(x,z)) - d(o,z)\alpha(d(o,z))| &\le \alpha(d(o,z))|d(x,z) - d(o,z)| \\ &\le \alpha(d(o,z))d(x,o) \xrightarrow[z\to\theta\in\partial\tilde{X}]{} 0.\end{aligned}$$

De plus, comme dans le cas précédent, ces fonctions densité convergent uniformément lorsque s tend vers $h(F)$. Donc $\mu_x^{s_n}$ converge faiblement vers une mesure μ_x sur $\partial\tilde{X}$ et on a

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\theta) = e^{-h(F)B_\theta(x,y) - C_\theta^F(x,y)}.$$

De plus on a bien les relations d'équivariance $\mu_{\gamma x} = \gamma_* \mu_x$, donc (μ_x) est bien une famille équivariante de mesures , ce qui achève la construction.

Par cette construction, on a prouvé la proposition 2.10 dans le cas d'un cocycle qui s'écrit sous la forme C^F. Mais on sait par la proposition 2.8 qu'un cocycle quelconque C est toujours cohomologue à un cocycle de la forme C^F, donc $C + sB$ est normalisé si et seulement si $C^F + sB$ est normalisé, et donc la proposition 2.10 est prouvée dans le cas général.

Maintenant nous allons énoncer une proposition qui récapitule certaines propriétés de la construction de Patterson généralisée ci-dessus. Cette proposition servira dans un chapitre ultérieur :

Proposition 2.13. *Soit F une fonction höldérienne normalisée sur TX et soit $o \in \tilde{X}$ un point quelconque. Alors il existe (μ_x) une famille équivariante de mesures associée au cocycle C^F telle qu'il existe des mesures μ_o^s sur Γ pour tout $s > 0$ qui vérifient les propriétés suivantes*

- *Il existe une suite $s_n > 0$ qui tend vers 0 telles que les mesures $\mu_o^{s_n}$ convergent faiblement vers μ_o dans l'espace des mesures finies sur le compact $\Gamma \cup \tilde{X}$.*
- *Pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour tout $s > 0$, la fonction densité*
$$\frac{d\gamma_*\mu_o^s}{d\mu_o^s},$$
qui est définie sur Γ a priori, se prolonge par continuité sur $\Gamma \cup \partial\tilde{X}$ et sa restriction à $\partial\tilde{X}$ est la fonction
$$\theta \to e^{-C_\theta^F(\gamma o,o) - sB_\theta(\gamma o,o)}.$$
- *Enfin, pour γ fixé, le prolongement de la fonction densité $\frac{d\gamma_*\mu_o^s}{d\mu_o^s}$ convergent uniformément quand s tend vers 0^+*

2.7 Le lemme de l'ombre

Le lemme de l'ombre permet de décrire aproximativement les mesures d'une famille équivariante de mesures à l'aide du cocycle associé :

Lemme 2.14. *Soit (μ_x) une famille équivariante de mesures et soit C le cocycle*
$$C_\theta(x,y) = -\log\left(\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\theta)\right).$$
Alors il existe une constante $A \geq 1$ telle que pour tout $x \in \tilde{X}$, $\theta \in \partial\tilde{X}$, $T \geq 0$, on ait
$$A^{-1}e^{-C_\theta(x,x_T)} \leq \mu_x\left(\partial D^T(x,\theta)\right) \leq Ae^{-C_\theta(x,x_T)}$$
(où x_T désigne le point à distance T de x sur le rayon géodésique $[x\theta)$).

Démonstration. Tout d'abord, montrons le lemme pour $T = 0$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M \geq 1$ telle que pour tout x, θ, on ait
$$M^{-1} \leq \mu_x\left(\partial D(x,\theta)\right) \leq M.$$

L'inégalité "$\leq M$" est évidente car les mesures μ_x sont finies et équivariantes, donc leurs masses totales sont bornées. Quant à l'inégalité "$M^{-1} \leq$", supposons par l'absurde qu'elle ne soit pas vraie, alors il existerait une suite x_n, θ_n telle que

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{x_n}(\partial D(x_n, \theta_n)) = 0.$$

Comme les mesures sont équivariantes et que l'action de Γ sur $\tilde{X}$ est cocompact, on peut supposer que la suite x_n est contenue dans un compact $K \subset \tilde{X}$ et converge vers un point x_∞, et que la suite θ_n converge vers un point $\theta \in \partial\tilde{X}$. Alors pour $x \in K$, l'angle $\measuredangle_x(\theta_n, \theta)$ converge vers zéro uniformément en $x \in K$, et en particulier il existe N tel que pour tout $n > N$ et pour tout $x \in K$ on a

$$\measuredangle_{x_n}(\theta, \theta_n) \leq \pi/4.$$

Par ailleurs, l'ensemble

$$V = \{\xi \in \partial\tilde{X} | \measuredangle_x(\xi, \theta) \leq \pi/4, \text{ pour tout } x \in K\}$$

est un voisinage de θ dans $\partial\tilde{X}$. Donc on a que $V \subset \partial D(x_n, \theta_n)$ pour $n \geq N$ et il vient que

$$\mu_{x_\infty}(V) = \lim_{n\to\infty} \mu_{x_n}(V) = 0,$$

ce qui est exclu car le support de μ_{x_∞} est $\partial\tilde{X}$ (car il c'est un fermé non vide et Γ-invariant).

Maintenant, montrons le lemme pour $T \geq 0$, mais en supposant que le cocycle s'écrit sous la forme C^F pour une certaine fonction höldérienne F sur T^1X. Soit $x \in \tilde{X}$ et $\theta \in \partial\tilde{X}$. Remarquons que

$$C^F_\theta(x, x_T) = \int_x^{x_T} F.$$

On sait d'après le cas précédent que

$$\mu_{x_T}(\partial D^T(x, \theta)) \in [M^{-1}, M]. \tag{2.10}$$

Par ailleurs,

$$\mu_x(\partial D^T(x, \theta)) = \int_{\partial D^T(x,\theta)} e^{-C^F_\xi(x, x_T)} d\mu_{x_T}(\xi). \tag{2.11}$$

Montrons que la différence $C^F_\xi(x, x_T) - \int_x^{x_T} F$ avec $\xi \in \partial D^T(x, \theta)$ est bornée indépendamment de T : comme l'angle $\measuredangle_{x_T}(x, \xi)$ est supérieur ou égal à $\pi/2$

alors la distance entre x_T et son projeté z sur le rayon géodésique $[x\xi)$ est inférieure à δ (lemme **??**). Alors on a

$$C_\xi^F(x, x_T) = \int_x^z F + C_\xi^F(z, x_T),$$

et donc

$$\begin{aligned} \left| C_\xi^F(x, x_T) - \int_x^{x_T} F \right| &\leq \left| C_\xi^F(z, x_T) \right| + \left| \int_x^z F - \int_x^{x_T} F \right| \\ &\leq A \end{aligned} \tag{2.12}$$

d'après le lemme 2.6 (A est une constante indépendante de T). Donc en combinant (2.10), (2.11), (2.12), on obtient

$$M^{-1} e^{-\int_x^{x_T} F - A} \leq \mu_x(\partial D^T(x, \theta) \leq M e^{-\int_x^{x_T} F + A},$$

ce qu'on voulait.

Il reste à traiter le cas d'un cocycle C quelconque. On sait néanmoins qu'un cocycle C est toujours cohomologue à un cocycle C^F, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f continue et Γ-invariante telle que

$$C_\theta(x, y) - C_\theta^F(x, y) = f(x, \theta) - f(y, \theta).$$

On peut alors appliquer le cas précédent au cocycle C^F associé à la famille équivariante de mesures (μ'_x) définie par $\frac{d\mu'_x}{d\mu_x}(\theta) = e^{f(x,\theta)}$, et on obtient qu'il existe A tel que pour tout x, θ, T, on ait

$$A^{-1} e^{-C_\theta^F(x, x_T)} \leq \mu'_x(\partial D^T(x, \theta) \leq A e^{-C_\theta^F(x, x_T)},$$

d'où il vient

$$A^{-1} e^{-C_\theta(x, x_T) - 3\|f\|_\infty} \leq \mu_x(\partial D^T(x, \theta)) \leq A e^{-C_\theta(x, x_T) + 3\|f\|_\infty},$$

Ce qui achève la démonstration. □

2.8 Distances sur le bord

Dans cette section, on construit une famille de distances sur $\partial\tilde{X}$. Ces distances seront compatibles avec la structure höldérienne déjà définie. Elles seront notées $\overline{\Delta}_x$ pour $x \in \tilde{X}$ (voir ci-dessous) et les boules centrées en θ pour la distance $\overline{\Delta}_x$ "ressembleront" aux ensembles $\partial D^T(x, \theta)$ qu'on a déjà introduit.

Pour $x \in \tilde{X}$ et pour $\theta, \xi \in \partial\tilde{X}$, notons $d(x, (\theta\xi))$ la distance entre x et la géodésique $(\theta\xi)$ si $\theta \neq \xi$, et à $+\infty$ sinon.

Proposition 2.15. *Il existe une constante A telle que pour tout $x \in \tilde{X}$ et pour tout $\theta, \xi, \zeta \in \partial\tilde{X}$, on ait*

$$\min\{d(x, (\theta\zeta)), d(x, (\zeta\xi))\} \leq d(x, (\theta\xi)) + A.$$

Démonstration. Soit $\theta, \xi, \zeta \in \tilde{X}$, et soit z le point situé sur la géodésique $(\theta\xi)$ à distance minimale de x, i.e telle que $d(x, z) = d(x, (\theta\xi))$. Comme $\tilde{X}$ est un espace δ-hyperbolique pour une certaine constante $\delta > 0$ (voir proposition 5.2 dans l'annexe), le point z est à distance $\leq \delta$ de la réunion des géodésiques $(\theta\zeta)$ et $(\zeta\xi)$. Par conséquent, x est à distance inférieure à $d(x, z) + \delta$ de cette réunion, autrement dit

$$\min\{d(x, (\theta\zeta)), d(x, (\zeta\xi))\} \leq d(x, (\theta\xi)) + \delta,$$

ce qu'on voulait. □

Définition 2.16. *Une application $\Delta : \partial\tilde{X}^2 \to \mathbb{R}^+$ est une quasi-distance si*

- *elle est continue*
- *elle est symétrique*
- *pour tout $\theta \in \tilde{X}$, $\Delta(\theta, \theta) = 0$.*
- *On a l'inégalité suivante, dite "quasi-ultramétrique" :*

$$\Delta(\theta, \xi) \leq \sqrt{2}\max\{\Delta(\theta, \zeta), \Delta(\zeta, \xi)\}$$

pour tout $\theta, \xi, \zeta \in \partial\tilde{X}$.

Posons

$$\Delta_x(\theta, \xi) = \exp\left[-bd(x, (\theta\xi))\right], \tag{2.13}$$

avec $b = \log(\sqrt{2})/A$, où A est donné par la proposition 2.15. Alors d'après cette proposition, Δ_x est une quasi-distance pour tout $x \in \tilde{X}$.

A toute quasi-distance Δ, on peut associer une distance qui lui est "équivalente". Plus précisément, on pose

$$\overline{\Delta}(\theta, \xi) = \inf\left\{\Delta(\theta_0, \theta_1) + \ldots + \Delta(\theta_{n-1}, \theta_n) \mid n \geq 1,\ \theta_0 \ldots \theta_n \in \partial\tilde{X},\ \theta_0 = \theta,\ \theta_n = \xi\right\},$$

et on a la proposition suivante :

Proposition 2.17. *Si Δ est une quasi-distance, alors $\overline{\Delta}$ est une distance sur $\partial\tilde{X}$, et on a*

$$\frac{1}{2}\Delta \leq \overline{\Delta} \leq \Delta$$

Démonstration. L'inégalité triangulaire pour $\overline{\Delta}$ est clairement vérifiée. L'inégalité $\overline{\Delta} \leq \Delta$ est claire également. Il reste à montrer l'inégalité $\Delta \leq 2\overline{\Delta}$. Il nous suffit pour cela de montrer que pour $\theta_0, \ldots, \theta_n \in \partial\tilde{X}$, on a

$$\Delta(\theta_0, \theta_n) \leq 2\left(\Delta(\theta_0, \theta_1) + \ldots + \Delta(\theta_{n-1}, \theta_n)\right) \tag{2.14}$$

On utilisera l'inégalité suivante, qui s'obtient en appliquant deux fois l'inégalité quasi-ultramétrique : pour tout $\theta, \zeta, \eta, \xi \in \partial\tilde{X}$, on a

$$\Delta(\theta, \xi) \leq 2\max\left\{\Delta(\theta, \zeta), \Delta(\zeta, \eta), \Delta(\eta, \xi)\right\}. \tag{2.15}$$

Montrons l'inégalité (2.14) par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivial. Supposons que l'inégalité soit vraie jusqu'au rang n, et soit $\theta_0, \theta_{n+1} \in \partial\tilde{X}$. Posons

$$M = \sum_{i=0}^{n} \Delta(\theta_i, \theta_{i+1}).$$

Il existe au moins un entier $j \in \{-1, \ldots, n-1\}$ tel que

$$\sum_{i=0}^{j} \Delta(\theta_i, \theta_{i+1}) \leq M/2 \text{ et } \sum_{i=j+2}^{n} \Delta(\theta_i, \theta_{i+1}) \leq M/2.$$

D'après (2.15), on peut écrire

$$\Delta(\theta_0, \theta_n) \leq 2\max\left\{\Delta(\theta_0, \theta_{j+1}), \Delta(\theta_{j+1}, \theta_{j+2}), \Delta(\theta_{j+2}, \theta_{n+1})\right\}.$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\Delta(\theta_0, \theta_{j+1}) \leq 2\sum_{i=0}^{j} \Delta(\theta_i, \theta_{i+1}) \leq M,$$

et de la même manière, on a aussi $\Delta(\theta_{j+2}, \theta_{n+1}) \leq M$. Enfin, on a clairement $\Delta(\theta_{j+1}, \theta_{j+2}) \leq M$ également. donc $\Delta(\theta_0, \theta_{n+1}) \leq 2M$, ce qui achève la démonstration par récurrence. □

D'après cette proposition, on peut définir pour tout $x \in \tilde{X}$ la distance suivante :

$$\overline{\Delta}_x(\theta, \xi) = \inf \left\{ \Delta_x(\theta_0, \theta_1) + \ldots + \Delta_x(\theta_{n-1}, \theta_n) \mid n \geq 1,\ \theta_0 \ldots \theta_n \in \partial \tilde{X},\ \theta_0 = \theta,\ \theta_n = \xi \right\}.$$

Notons $B_x(\theta, R)$ la boule de rayon R centrée en θ pour la distance $\overline{\Delta}_x$. Ces boules sont liées aux ensembles $\partial D^T(x, \theta)$ déjà introduits, par la proposition suivante :

Proposition 2.18. *Il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $x \in \tilde{X}$, $\theta \in \partial \tilde{X}$, $T \geq A$, on ait les inclusions*

$$\partial D^{T+A}(\theta, x) \subset B_x(\theta, e^{-bT}) \subset \partial D^{T-A}(\theta, x).$$

(b désigne la constante qui apparait en (2.13))

Démonstration. Soit $A > 0$ une constante que l'on déterminera plus tard. Fixons x, θ et notons (x_t) la géodésique dirigée vers θ telle que $x_0 = x$. Montrons la première inclusion : Soit $\xi \in \partial D^{T+A}(x, \theta)$: on a alors $\measuredangle_{x_{T+A}}(\theta, \xi) \leq \pi/2$. On cherche à minorer la distance $d(x, (\theta\xi))$ entre x et la géodésique $(\theta\xi)$. Comme le triangle géodésique (x_{T+A}, θ, ξ) est δ-hyperbolique (proposition 5.2), la géodésique $(\theta\xi)$ est contenue dans le δ-voisinage de la réunion des deux autres côtés $[x_{A+T}\theta) \cup [x_{A+T}\xi)$, et le projeté de x sur cette réunion est le sommet x_{T+A} car l'angle $\measuredangle_{x_{T+A}}(x, \xi)$ est supérieur à π. Donc

$$d(x, (\theta\xi)) \geq d(x, [x_{A+T}\theta) \cup [x_{A+T}\xi)) - \delta = d(x, x_{T+A}) - \delta = T + A - \delta,$$

donc en choisissant $A \geq \delta$ on a $d(x, (\theta\xi)) \geq T$, et donc

$$\overline{\Delta}_x(\theta, \xi) \leq \Delta_x(\theta, \xi) \leq e^{-bT},$$

c'est-à-dire que $\xi \in B_x(\theta, e^{-bT})$, et donc on a montré la première inclusion.

Montrons maintenant la deuxième inclusion : Soit $\xi \in B_x(\theta, e^{-bT})$. Alors d'après la proposition 2.17,

$$\Delta_x(\theta, \xi) \leq 2e^{-bT}, \text{ i.e. } d(x, (\theta\xi)) \geq T - \frac{\log 2}{b}.$$

Soit $S \in \mathbb{R}$ tel que x_S soit le projeté de ξ sur la géodésique (x_t). Montrons déjà que S est positif. Si S n'est pas positif, cela revient à dire que l'angle $\measuredangle_x(\theta, \xi)$ est supérieur à $\pi/2$. Or d'après la proposition 5.4 (dans l'annexe), cela implique que la distance $d(x,(\theta\xi))$ est inférieure à une constante δ' qui ne dépend que de X, or on peut supposer que ce n'est pas le cas, car on peut supposer que $A \geq \frac{\log 2}{b} + \delta'$, et donc $d(x,(\theta\xi)) \geq T - \frac{\log 2}{b} \geq A - \frac{\log 2}{b} \geq \delta'$. On a donc $\xi \in \partial D^S(\theta,x)$ avec $S \geq 0$, et on veut montrer que $\xi \in \partial D^{T-A}(\theta,x)$, donc on a juste à montrer que $S \geq T - A$. Dans le triangle (x_S,θ,ξ), l'angle au sommet x_S vaut $\pi/2$, donc d'après la proposition 5.4, la distance entre le sommet x_S et son projeté z sur le côté opposé $(\theta\xi)$ est inférieure à δ' :

$$d(z,s_S) \leq \delta'.$$

On peut alors écrire $S = d(x,x_S) \geq d(x,z) - d(z,x_S) \geq d(x,(\theta\xi)) - d(z,x_S) \geq T - \frac{\log 2}{b} - \delta' \geq T - A$, ce qu'on voulait. □

Corollaire 2.19. *Soit $x \in \tilde{X}$. Une fonction h sur $\partial\tilde{X}$ est Hölder-continue si et seulement si elle est höldérienne pour la distance $\overline{\Delta}_x$.*

Nous pouvons maintenant donner une nouvelle formulation du lemme de l'ombre en combinant l'ancien lemme de l'ombre (lemme 2.14) avec la proposition 2.18 :

Lemme 2.20. *Soit (μ_x) une famille équivariante de mesures et soit C le cocycle*

$$C_\theta(x,y) = -\log\left(\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\theta)\right).$$

Alors il existe une constante $A \geq 1$ telle que pour tout $x \in \tilde{X}$, $\theta \in \partial\tilde{X}$, $T \geq 0$, on ait

$$A^{-1}e^{-C_\theta(x,x_T)} \leq \mu_x\left(B_x(\theta,e^{-bT})\right) \leq Ae^{-C_\theta(x,x_T)}$$

(où x_T désigne le point à distance T de x sur le rayon géodésique $[x\theta)$).

La structure höldérienne sur $\partial\tilde{X}$: Nous pouvons maintenant démontrer que la structure höldérienne sur $\partial\tilde{X}$ est indépendante du choix de la métrique g à courbure strictement négative sur X. En effet si on remplace la métrique g par une autre métrique g' sur X à courbure strictement négative, et si on note $\overline{\Delta}'_x$ les distances qui remplacent alors les distances $\overline{\Delta}_x$, on va pouvoir montrer que les distances $\overline{\Delta}_x$ et $\overline{\Delta}'_x$ sont Hölder-équivalentes, c'est à dire telles qu'il existent des constantes $A > 1$ et $0 < b < 1$ telles que

$$A^{-1}\overline{\Delta}_x^{1/b} \leq \overline{\Delta}'_x \leq A\overline{\Delta}_x^b.$$

Pour voir cela, soient $\xi, \theta \in \partial^2 \tilde{X}$, on note $(\theta\xi)'$ la géodésique pour la métrique g' reliant les points ξ et θ, et on note $d'(x, (\theta\xi)')$ la distance pour la métrique g' entre cette géodésique et le point x pour tout $x \in \tilde{X}$. La proposition 2.1 implique que les géodésiques $(\theta\xi)$ et $(\theta\xi)'$ sont chacune contenues dans le M-voisinage de l'autre, où M est une constante ne dépendant que de g et g'. De plus, par compacité il existe une constante $B > 1$ telle que

$$B^{-2} g \leq g' \leq B^2 g,$$

et de tout cela on peut déduire que

$$B^{-1} d(x, (\xi\theta)) - M \leq d'(x, (\xi\theta)') \leq B d(x, (\xi\theta)) + M,$$

ce qui entraine que les distances $\overline{\Delta}$ et $\overline{\Delta}'$ sont Hölder-équivalentes.

2.9 Unicité d'une famille équivariante de mesures associée à un cocycle donné

Dans cette section nous achevons la démonstration du théorème 2.5 par les propositions 2.21 et 2.23

Proposition 2.21. *Soit C un cocycle. Il existe un unique réel s tel que le cocycle $C + sB$ soit normalisé.*

Démonstration. L'existence a déjà été démontrée (proposition 2.10). Supposons par l'absurde qu'il existe $s > s'$ tels que les cocycles $C + sB$ et $C + s'B$ soient normalisés. Soient alors (μ_x), (μ'_x) des familles équivariantes de mesures telles que

$$C_\theta(x, y) + sB_\theta(x, y) = -\log\left(\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\theta)\right),$$
$$C_\theta(x, y) + s'B_\theta(x, y) = -\log\left(\frac{d\mu'_x}{d\mu'_y}(\theta)\right).$$

Le lemme de l'ombre (lemme 2.20) donne une estimation des mesures des boules $B_x(\theta, e^{-bT})$ pour les mesures μ_x et μ'_x à l'aide des cocycles correspondant $C + sB$ et $C + s'B$. On peut donc estimer le rapport des deux mesures de cette boule à l'aide de la différence des deux cocycles $(s - s')B$: Plus présisément il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout x, θ et pour tout $T > 0$, on ait

$$A^{-1} e^{-(s-s')T} \leq \frac{\mu_x \left(B_x(\theta, e^{-bT})\right)}{\mu'_x \left(B_x(\theta, e^{-bT})\right)} \leq A e^{-(s-s')T}.$$

Autrement dit, pour tout $0 < R \leq 1$,

$$A^{-1} R^{(s-s')/b} \leq \frac{\mu_x \left(B_x(\theta, R)\right)}{\mu'_x \left(B_x(\theta, R)\right)} \leq A R^{(s-s')/b}.$$

Comme $s - s' > 0$ on voit que ce rapport est petit pour des boules de rayon R petit. Cela va nous permettre de mettre en évidence que la mesure μ_x est nulle, ce qui sera la contradiction recherchée. Soit $x \in \tilde{X}$, soit $R > 0$, et soit $Y = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\} \subset \partial\tilde{X}$ un ensemble R-séparé maximal de $\partial\tilde{X}$ pour la distance $\overline{\Delta}_x$. Alors on a d'une part que les boules $B_x(\theta_i, R/2)$ sont disjointes, et d'autre part que les boules $B_x(\theta_i, R)$ recouvrent $\partial\tilde{X}$. Or on a le lemme suivant :

Lemme 2.22. *Soit (μ_x) une famille équivariante de mesures . Alors il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout x, θ, et pour tout $0 < R \leq 1$, on a*

$$1 \leq \frac{\mu_x \left(B_x\left(\theta, R\right)\right)}{\mu_x \left(B_x\left(\theta, R/2\right)\right)} \leq A$$

Démonstration. Ce lemme est vrai parce que les estimations données par le lemme de l'ombre (lemme 2.20) pour deux boules de rayons R et $R/2$ sont du même ordre de grandeur : en effet, en posant $T = -(\log R)/b$ et $T' = -(\log(R/2))/b$, on a d'après le lemme 2.20

$$\mu_x \left(B_x(\theta, R)\right) \leq A e^{-C_\theta(x, x_T)},$$
$$\mu_x \left(B_x(\theta, R/2)\right) \geq A^{-1} e^{-C_\theta(x, x_{T'})},$$

et donc

$$1 \leq \frac{\mu_x \left(B_x(\theta, R)\right)}{\mu_x \left(B_x(\theta, R/2)\right)} \leq A^2 e^{-C_\theta(x_{T'}, x_T)}.$$

Or on a $d(x_T, x_{T'}) = T' - T = (\log 2)/b$, et la fonction $C_\theta(x, y)$ restreinte à l'ensemble des (x, y, θ) telle que $d(x, y) \leq (\log 2)/b$ est bornée car elle est continue et invariante pour l'action de Γ qui est cocompacte sur cet ensemble. Donc les nombres $C_\theta(x_T, x_{T'})$ sont bornés par une constante $L > 0$ indépendante de x, θ, R et donc

$$1 \leq \frac{\mu_x\left(B_x(\theta, R)\right)}{\mu_x\left(B_x(\theta, R/2)\right)} \leq A^2 e^L,$$

ce qui prouve le lemme. □

Ainsi, grâce au lemme, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mu_x\left(\partial\tilde{X}\right) &\leq \sum_i \mu_x\left(B_x\left(\theta_i, R\right)\right) \\
&\leq M \sum_i \mu_x\left(B_x\left(\theta_i, R/2\right)\right) \\
&\leq MA\left(\frac{R}{2}\right)^{(s-s')/b} \sum_i \mu'_x\left(B_x\left(\theta_i, R/2\right)\right) \\
&\leq MA\left(\frac{R}{2}\right)^{(s-s')/b} \mu'_x\left(\partial\tilde{X}\right),
\end{aligned}$$

et comme R est arbitrairement petit, on a $\mu_x(\partial\tilde{X}) = 0$, d'où une contradiction. Donc $s = s'$. □

La proposition suivante constitue la dernière brique dans le théorème 2.5

Proposition 2.23. *Soit C un cocycle normalisé, et soit (μ_x) et (μ'_x) deux familles équivariantes de mesures telles que*

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\theta) = \frac{d\mu'_x}{d\mu'_y}(\theta) = e^{-C_\theta(x,y)},$$

alors ces familles de mesures sont proportionnelles.

Démonstration. D'abord nous montrons que μ_x et μ'_x sont équivalentes. Le lemme de l'ombre (lemme 2.20) appliqué aux familles (μ_x) et (μ'_x) implique qu'il existe une constante A telle que pour tout x, θ et pour tout $0 < R \leq 1$, on ait

$$A^{-1} \leq \frac{\mu_x\left(B_x(\theta, R)\right)}{\mu'_x\left(B_x(\theta, R)\right)} \leq A.$$

Fixons $x \in \tilde{X}$. Soit $K \subset \partial\tilde{X}$ un compact. Notons

$$K_R = \bigcup_{\theta \in K} B_x(\theta, R), \text{ pour } R > 0.$$

Alors $K = \bigcap_R K_R$ et $\mu_x(K) = \lim_{R\to 0} \mu_x(K_R)$. Soit $0 < R \leq 1/2$ et soit $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\} \subset K$ un sous-ensemble R-séparé maximal pour la distance $\overline{\Delta}_x$. Alors la réunion des boules $B_x(\theta_i, R/2)$ est disjointe et contenue dans $K_{R/2}$ et les boules $B_x(\theta_i, R)$ recouvrent K. Donc

$$\begin{aligned} \mu'_x(K) &\leq \sum_i \mu'_x(B_x(\theta_i, R) \\ &\leq A \sum_i \mu_x(B_x(\theta_i, R) \\ &\leq AM \sum_i \mu_x(B_x(\theta_i, R/2) \text{ (via le lemme 2.22)} \\ &\leq AM\mu_x(K_{R/2}). \end{aligned}$$

Comme R est arbitrairement petit, on a $\mu'_x(K) \leq AM\mu_x(K)$ et de la même manière, on prouve que $\mu_x(K) \leq AM\mu'_x(K)$. Or comme les mesures μ_x et μ'_x sont régulière, (ce qui signifie que la mesure d'un borélien est le sup des mesures des compacts inclus dans ce borélien), alors les inégalités précédentes sont valables pour tout borélien, autrement dit

$$A^{-1}M^{-1}\mu_x \leq \mu'_x \leq AM\mu_x.$$

En particulier, pour tout x, les mesures μ_x et μ'_x sont équivalentes, et d'après le thórème de Radon-Nikodym, il existe une fonction mesurable h sur $\partial\tilde{X}$ telle que

$$\frac{d\mu'_x}{d\mu_x}(\theta) = h(\theta) \qquad \mu_x(\theta)\text{-presque partout.}$$

La même fonction h convient pour tout les x. En particulier pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$h(\gamma^{-1}\theta) = \frac{d\mu'_x}{d\mu_x}(\gamma^{-1}\theta) = \frac{d\mu'_{\gamma x}}{d\mu_{\gamma x}}(\theta) = h(\theta) \qquad \mu_x(\theta)\text{-presque partout,}$$

et donc on peut supposer que h est Γ-invariante. Il nous reste donc juste à montrer que h est constante μ_x-presque partout. Supposons par l'absurde que ça ne soit pas le cas, alors il existe une constante A telle que les ensemble

$Y = \{h > A\}$ et $Z = \{h \leq A\}$ soient de mesure non nulle pour μ_x. Or ces ensembles sont Γ-invariant, donc on peux définir une famille de mesures non nulles (μ''_x) en posant

$$\mu''_x = \mu_x(Y \cap \cdot).$$

Alors (μ''_x) est bien une famille équivariante de mesure qui vérifie les mêmes relations de densité que (μ_x). Donc d'après les arguments précédents, les mesures μ_x et μ''_x sont équivalentes, ce qui est une contradiction car $\mu_x(Z) > 0$ et $\mu''_x(Z) = \mu_x(Y \cap Z) = \mu_x(\emptyset) = 0$. Ceci achève la démonstration. □

Dans la fin de cette section nous utilisons le résultat d'unicité contenu dans la proposition 2.23 ci-dessus pour énnoncer une proposition qui est un raffinement de la proposition 2.13 et qui nous sera utile dans un chapitre ultérieur.

Proposition 2.24. *Soit F une fonction höldérienne normalisée sur TX et soit (μ_x) une famille équivariante de mesures associée au cocycle C^F. Soit $o \in \tilde{X}$ un point quelconque. Alors il existe des mesures μ_o^s sur Γ pour tout $s > 0$ qui vérifient les propriétés suivantes*

- *Les mesures μ_o^s convergent faiblement vers μ_o dans l'espace des mesures finies sur le compact $\Gamma \cup \tilde{X}$ quand s tend vers 0^+.*
- *Pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour tout $s > 0$, la fonction densité*

$$\frac{d\gamma_*\mu_o^s}{d\mu_o^s},$$

qui est définie sur Γ a priori, se prolonge par continuité sur $\Gamma \cup \partial\tilde{X}$ et sa restriction à $\partial\tilde{X}$ est la fonction

$$\theta \to e^{-C_\theta^F(\gamma o, o) - sB_\theta(\gamma o, o)}.$$

- *Enfin pour γ fixé, les prolongements des fonctions densité $\frac{d\gamma_*\mu_o^s}{d\mu_o^s}$ convergent uniformément quand s tend vers 0^+*

2.10 Les périodes d'un cocycle

Le groupe Γ du revêtement $\tilde{X} \to X$ est un groupe d'isométrie de $\tilde{X}$. Comme X est compacte, chaque élément $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$ est hyperbolique, ce qui signifie que l'action de γ sur le compactifié $\tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$ admet exactement deux points fixes situés sur le bord $\partial\tilde{X}$, et agit par translation sur la géodésique reliant ces deux points, dans la direction de l'un d'entre eux qu'on note γ_+. L'autre est noté γ_-. La longueur de la translation est noté $\gamma[1]$. C'est un réel strictement positif. La géodésique $(\gamma_+\gamma_-)$ se projette sur une géodésique fermée de X. Chaque vecteur $v \in T^1X$ tangent à cette géodésique fermée est $\gamma[1]$-périodique pour le flot géodésique (ϕ_t).

Soit C un cocycle. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on définit la période de C en γ, noté $\gamma[C]$:

$$\gamma[C] = C_{\gamma_+}(x, \gamma x).$$

Cette définition ne dépend pas de x car le cocycle C est Γ-invariant. Les périodes de C en deux éléments conjugés sont égales :

$$\gamma[C] = (\alpha\gamma\alpha^{-1})[C].$$

Dans le cas où $C = C^F$ pour une fonction höldérienne F sur T^1X,

$$\gamma[C^F] = \int_{t=0}^{\gamma[1]} F(\phi_t v)\, dt,$$

où $v \in T^1X$ est la projection d'un vecteur unitaire tangent à la géodésique $(\gamma_+\gamma_-)$ et dirigé vers γ_+. Pour alléger, nous noterons $\gamma[F] = \gamma[C^F]$, et nous dirons que ce nombre est la période de F en γ. Avec ces notations, on retrouve bien que $\gamma[1]$ est la longueur de la translation induite par γ sur la géodésique $(\gamma_+\gamma_-)$.

Si deux cocycles C et C' sont cohomologues, alors leurs périodes sont égales. En effet il existe une fonction continue $f : \tilde{X} \times \partial\tilde{X} \to \mathbb{R}$, Γ-invariante, telle que

$$C_\theta(x, y) - C'_\theta(x, y) = f(x, \theta) - f(y, \theta),$$

et donc $\gamma[C] - \gamma[C'] = f(x, \gamma_+) - f(\gamma(x), \gamma_+) = 0$.

On montre que la réciproque est également vraie : deux cocycles sont cohomologues si leurs périodes sont égales. C'est un corollaire du théorème suivant :

Théorème 2.25 (Livsic)**.** *Soit F une fonction höldérienne sur T^1X dont les périodes sont nulles. Alors il existe une fonction continue U sur T^1X dérivable dans la direction du flot géodésique tel que F soit la dérivée de Lie de U par le champ de vecteur générateur du flot géodésique.*

Démonstration. Construisons la fonction U qui convient. Il existe $v \in T^1X$ tel que l'orbite positive de v soit dense (voir dans annexe : sous-section 5.2.5). On commence par définir la fonction U sur l'orbite de v : on pose $U(v) = 0$. Alors on doit nécessairement avoir pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$U(\phi_t(v)) = \int_0^t F(\phi_s(v))ds.$$

On montre alors que la fonction U ainsi définie sur l'orbite de v est uniformément continue. En effet, on se donne $\epsilon > 0$. Soit $\alpha > 0$ une constante ne dépendant que de ϵ que nous allons définir plus tard, et soient deux points u_1, u_2 de l'orbite de v, tels que $d(u_1, u_2) \leq \alpha$. Soient s_1 et s_2 tels que $u_1 = \phi_{s_1}(v)$ et $u_2 = \phi_{s_2}(v)$, et soit $t = s_2 - s_1$, on peut supposer que $t \geq 0$ quitte à échanger u_1 et u_2. Alors u_1 est (t, α)-périodique (ce qui signifie que $d(u_1, \phi_t(u_1)) \leq \alpha$, voir dans l'annexe 5.2.3). D'après le "closing lemma" (lemme 5.11), il existe η, T ne dépendant que de ϵ tels si $\alpha \leq \eta$ et si $t \geq T$ alors il existe un point $w \in T^1X$ périodique de période comprise entre $t - \epsilon$ et $t + \epsilon$ tel que $d_t(u_1, w) \leq \epsilon$ (on rappelle que d_t est défini par $d_t(u, v) = \sup_{s \in [0,t]} d(\phi_s u, \phi_s v)$. Or on peut très bien supposer qu'on a choisit $\alpha \leq \eta$ (puisque η ne dépend que de ϵ). Par contre on ne peut pas supposer que $t \geq T$, mais ce n'est pas grave, car comme l'orbite positive de v est dense, il existe $u_3 = \phi_{s_3}(v)$ tel que $d(u_3, u_2) \leq \alpha$ et tel que t' défini par $t' = s_3 - s_2 \geq T$, et donc on peut appliquer le "closing lemma" à u_2 et u_3 : il existe w périodique de période t'' comprise entre $t' - \epsilon$ et $t' + \epsilon$ tel que $d_{t'}(u_2, w) \leq \epsilon$). On peut supposer que ϵ est inférieur au rayon d'injectivité de X (quitte à remplacer ϵ par un nombre plus petit), ce qui nous assure l'existence de deux relevés $\tilde{u}_2, \tilde{w} \in T\tilde{X}$ tels que $d_{t'}(\tilde{u}_2, \tilde{w}) \leq \epsilon$). En particulier, si on pose

$$\begin{aligned} x &= \pi \tilde{u}_2, \\ x' &= \pi \tilde{w}, \\ y &= \pi \phi_{t'} \tilde{u}_2, \\ y' &= \pi \phi_{t''} \tilde{w}, \end{aligned}$$

alors on a

$$d(x, x') \leq \epsilon, \text{ et } d(y, y') \leq 2\epsilon$$

Alors on applique le lemme 2.6 (en prenant ϵ_0 égal à deux fois rayon d'injectivité de X), ce qui nous assure l'existence de deux constante A, b ne dépendant que de X et F, telles que

$$\left| \int_x^y F - \int_{x'}^{y'} F \right| \leq A\epsilon^b.$$

Or on vérifie facilement d'une part que $\int_x^y F = U(u_3) - U(u_2)$, d'autre part que $\int_{x'}^{y'} F = 0$ car c'est une période de F, donc supposée nulle, d'où il vient $|U(u_2) - U(u_3)| \leq A\epsilon^b$. De la même manière on peut appliquer à nouveau le "closing lemma" à u_1 et u_3, (pour cela il faut supposer qu'on ait choisit $\alpha \leq \frac{\eta}{2}$ car $d(u_1, u_3)$ est majoré par $d(u_1, u_2) + d(u_2, u_3) \leq 2\alpha$), puis on applique le lemme 2.6 et on obtient que $|U(u_1) - U(u_3)| \leq A\epsilon^b$, et donc $|U(u_1) - U(u_2)| \leq 2A\epsilon^b$, ce qui montre que U est uniformément continue et peut se prolonger par continuité sur T^1X.

Vérifions maintenant que la dérivée de U dans la direction du flot est F, c'est-à-dire :

$$F(u) = \frac{d}{dt}_{|t=0} U(\phi_t(u)).$$

On sait déjà que c'est vrai si u appartient à l'orbite de v. Si u est quelconque, il existe une suite de points v_n appartenant à l'orbite de v qui tend vers u. Pour tout réel t

$$\int_0^t F(\phi_s(v_n))ds = U(\phi_t(v_n)) - U(v_n).$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\int_0^t F(\phi_s(u))ds = U(\phi_t(u)) - U(u),$$

et donc F est bien la dérivée de U dans la direction du flot. □

Corollaire 2.26. *Deux cocycles sont cohomologues si leurs périodes sont égales.*

Démonstration. On s'agit de montrer qu'un cocycle est cohomologue à 0 si ses périodes sont nulles. Soit donc C un cocycle dont les périodes sont nulles. On sait que C est cohomologue à un cocycle C^F pour une certaine fonction höldérienne F. Les périodes de F sont donc nulles. D'après le théorème de Livsic, F est la dérivée dans la direction du flot d'une certaine fonction U sur

T^1X, que l'on peut relever en une fonction $U : \tilde{X} \times \partial\tilde{X} \to \mathbb{R}$, Γ-invariante. Montrons alors que

$$C_\theta^F(x,y) = U(y,\theta) - U(x,\theta).$$

Soit $x, y \in \tilde{X}$, $\theta \in \partial\tilde{X}$, soient (x_t) et (y_t) les deux géodésiques partant de x et y, et dirigées vers θ, et soit $\tau = B_\theta(x,y)$, c'est-à-dire que τ est l'unique réel tel que

$$\lim_{t\to\infty} d(x_{t+\tau}, y_t) = O.$$

Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} C_\theta^F(x,y) &= \lim_{t\to\infty} C_\theta^F(x, x_{t+\tau}) - C_\theta^F(y, y_t) \\ &= \lim_{t\to\infty} \int_x^{x_{t+\tau}} F - \int_y^{y_t} F \\ &= \lim_{t\to\infty} [U(x_{t+\tau},\theta) - U(x,\theta)] - [U(y_t,\theta) - U(y,\theta)] \\ &= U(y,\theta) - U(x,\theta). \end{aligned}$$

Donc C^F, et C sont cohomologues à 0. □

Proposition 2.27. *Les périodes d'un cocycle normalisé sont* ≥ 0.

Démonstration. Soit C un cocycle normalisé, c'est-à-dire tel qu'il existe une famille équivariante de mesures (μ_x) tel que

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\theta) = e^{-C_\theta(x,y)}.$$

Soit $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$ et soit $x \in \tilde{X}$ un point situé sur la géodésique invariante par γ, et soit $T = d(x, \gamma x)$. On a $C_{\gamma_+}(x, \gamma^n x) = n\gamma[C]$. D'après le lemme de l'ombre (lemme 2.14), on a

$$\mu_x(\partial D^{nT}(x,\gamma_+) \geq A^{-1} e^{-C_{\gamma_+}(x,\gamma^n x)} = Ae^{-n\gamma[C]}.$$

Comme la mesure est finie, cette quantité est majorée indépendamment de n, donc on doit avoir $\gamma[C] \geq 0$. □

Corollaire 2.28. *Soit F une fonction höldérienne sur T^1X telle que le cocycle C^F soit normalisé. Alors il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $x, y \in \tilde{X}$,*

$$\int_x^y F > -A.$$

Démonstration. D'après le lemme de spécification (lemme 5.13, dans l'annexe), il existe une constante $M > 0$ tel que pour tout $x, y \in \tilde{X}$, il existe un élément non trivial $\gamma \in \Gamma$ et un point z situé sur la géodésique invariante par γ tel que

$$d(x, z) < M \text{ et } d(y, \gamma z) < M,$$

et ainsi d'après le lemme 2.6, il existe une constante $A > 0$ ne dépendant pas de x, y, telle que

$$\int_x^y F \geq \int_z^{\gamma z} F - A.$$

Or

$$\int_z^{\gamma z} F = \gamma[F],$$

et d'après la proposition précédente les périodes de F sont positives, donc

$$\int_z^{\gamma z} F \geq 0,$$

ce qui termine la démonstration. □

Le but de cette section est de démontrer un théorème qui renforce la proposition précédente :

Théorème 2.29. *Si C est un cocycle normalisé, alors il existe $A > 0$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on ait*

$$\frac{\gamma[C]}{\gamma[1]} \geq A.$$

La preuve de ce théorème reposera sur le fait que les mesures μ_x n'ont pas d'atomes.

Proposition 2.30. *Soit (μ_x) une famille équivariante de mesures sur le bord $\partial\tilde{X}$ (équivariante pour l'action de Γ). Alors pour tout x, μ_x est une mesure sans atomes. (On rappelle que l'action de Γ sur $\tilde{X}$ est cocompacte).*

Démonstration. Un élément $\theta \in \partial\tilde{X}$ peut être de deux sortes : ou bien il est l'extrémité γ_+ d'une géodésique invariante par un éleément $\gamma \in \Gamma$, ou bien tous les éléments $\gamma\theta$ sont distincts pour $\gamma \in \Gamma$.

Première partie La mesure μ_x n'a pas d'atome θ vérifiant que tous les éléments $\gamma\theta$ soient distincts ($\gamma \in \Gamma$). En effet, supposons par l'absurde qu'il y ait un θ de cette sorte tel que $\mu_x(\theta) > 0$ pour un certain $x \in \tilde{X}$ (donc pour tous). Soit (x_t) le rayon géodésique issu de x et dirigé vers θ. Comme l'action de Γ sur $\tilde{X}$ est cocompacte, il existe une suite de réels positifs (t_n) tendant vers $+\infty$ et une suite (γ_n) d'éléments distincts de Γ telle que la distance $d(\gamma_n x, x_{t_n}$ soit plus petite que le diamètre de X. Ainsi d'après le lemme 2.6 on a pour tout n

$$\mu_{\gamma_n x}(\theta) = \exp\left[-C_\theta(\gamma_n x, x_{t_n})\right] \mu_{x_{t_n}}(\theta) \geq M \mu_{x_{t_n}}(\theta),$$

où M est une constante ne dépendant que du cocycle C associé à la famille de mesures. Par ailleurs,

$$\mu_{x_{t_n}}(\theta) = \exp\left[-C_\theta(x_{t_n}, x)\right] \mu_x(\theta).$$

On peut supposer que $C = C^F$, où F est une fonction höldérienne sur T^1X, et alors d'après le corollaire précédent

$$-C_\theta(x_{t_n}, x) = \int_x^{x_{t_n}} F \geq -A,$$

donc

$$\mu_{\gamma_n x}(\theta) \geq M e^{-A} \mu_x(\theta).$$

Or $\mu_{\gamma_n x}(\theta) = \mu_x(\gamma_n^{-1}\theta)$ et tous les éléments $\gamma_n^{-1}\theta$ sont distincts. Donc la mesure μ_x est infinie, d'où une contradiction car la mesure est finie.

Deuxième partie La mesure μ_x n'a pas d'atome qui soit l'extrémité γ_+ d'une géodésique invariante par un élément γ. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe un élément non trivial $\gamma \in \Gamma$ tel que $\mu_x(\gamma_+) > 0$. Soit $x \in \tilde{X}$ un point de la géodésique invariante par γ. Comme γ_+ est un atome, on a que

$$\mu_{\gamma x}(\gamma_+) = \mu_x(\gamma_+) > 0,$$

et donc

$$1 = \frac{d\mu_x}{d\mu_{\gamma x}}(\gamma_+).$$

Or la fonction $\theta \to \frac{d\mu_x}{d\mu_{\gamma x}}(\theta)$ est Hölder-continue par hypothèse, ce qui entraine qu'il existe des constantes $A, b > 0$, telles que pour tout entier $n \geq 0$

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_{\gamma x}}(\theta) \geq 1 - Ae^{-nb}, \text{ lorsque } \theta \in \partial D(\gamma^n x, \gamma_+). \tag{2.16}$$

Considérons alors l'ensemble $\partial D(x, \gamma_+) \setminus \{\gamma_+\}$. C'est un voisinage épointé de γ_+ et il est de mesure non nulle. Nous allons montrer qu'il est de mesure infini ce qui sera la contradiction recherchée puisqu'on sait par ailleurs que la mesure μ_x est finie. Posons

$$K = \partial D(x, \gamma_+) \setminus \partial D(\gamma x, \gamma_+).$$

Pour tout entier positif n on a que

$$\gamma^n K = \partial D(\gamma^n x, \gamma_+) \setminus \partial D(\gamma^{n+1} x, \gamma_+).$$

D'après le fait 2.2, on sait que

$$\partial D(x, \gamma_+) \setminus \{\gamma_+\} = \bigcup_{n \geq 0} \gamma^n K.$$

Posons $a_n = \mu_x(\gamma^n K)$. Alors on peut écrire

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \int_{\gamma^{n+1}K} d\mu_x(\theta) \\
&= \int_{\gamma^{n+1}K} \frac{d\mu_x}{d\mu_{\gamma x}}(\theta) d\mu_{\gamma x}(\theta) \\
&\geq \left(1 - Ae^{-(n+1)b}\right) \int_{\gamma^{n+1}K} d(\gamma_* \mu_x)(\theta) = \left(1 - Ae^{-(n+1)b}\right) a_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, par récurence, on a que

$$a_n \geq a_0 \prod_{j=1}^{n} \left(1 - Ae^{-jb}\right)$$

et donc les nombres a_n sont uniformément minorés par $\prod_{j=1}^{\infty}(1 - Ae^{-jb}) > 0$, donc

$$\mu_x(\partial D(x, \gamma_+) \setminus \{\gamma_+\}) = \sum_n a_n = +\infty,$$

d'où une contradiction. □

Démonstration du théorème 2.29. Supposons par l'absurde que le théorème soit faux. On peut supposer que $C = C^F$ pour une certaine fonction höldérienne F sur T^1X . Alors on pourrait trouver $\gamma \in \Gamma$ telle que $\frac{\gamma[F]}{\gamma[1]}$ soit arbitrairement petit. Soit

$$T = \frac{\gamma[1]}{\gamma[F]},$$

(qui est donc arbitrairement grand). Soit (x_t) la géodésique invariante par γ et soit $P \in \mathbb{R}$ tel que $x_P = \gamma x_0$. On suppose que (x_t) est paramétré dans le bon sens pour que $P > 0$ et $P = \gamma[1]$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{x_t}^{x_{P+t}} F = \gamma[F] = \frac{P}{T}.$$

Donc

$$P = \int_{t=0}^{T} \left[\int_{x_t}^{x_{P+t}} F \right] dt = \int_{s=0}^{P} \left[\int_{x_s}^{x_{s+T}} F \right].$$

Donc il existe au moins un réel s_0 tel que

$$\int_{x_{s_0}}^{x_{s_0+T}} F \leq 1. \tag{2.17}$$

Notons bien que $T = d(x_{s_0}, x_{s_0+T})$ est arbitraiement grand, et ne retenons de tout ceci que le fait qu'on peut trouver une suite de couples $x_n, y_n \in \tilde{X}$

$$\int_{x_n}^{y_n} F \leq 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = +\infty.$$

Maintenant considérons la familles (μ_x) associée au cocycle normalisé C^F. La fin de la preuve consiste à dire que d'après le lemme de l'ombre, il y a alors des ouverts de $\partial\tilde{X}$ "arbitrairement petits" dont la mesure pour μ_x est plus grande qu'une constante strictement positifs et donc μ_x a un atome, ce qui sera la contradiction cherchée. Plus précisément, fixons une origine $o \in \tilde{X}$. On peut supposer que la distance $d(x_n, o)$ est inférieure au diamètre de X pour tout n, et donc d'après le lemme 2.6, on a

$$\int_{o}^{y_n} F \leq \int_{x_n}^{y_n} F + M \leq 1 + M,$$

où M est une constante indépendante de n. Notons alors $T_n = d(o, y_n)$, qui tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, et notons θ_n l'extrémité du rayon géodésique issue de o et passant par y_n. Alors d'après le lemme de l'ombre (lemme 2.20), il existe une constante $A > 0$ indépendante de n telle que

$$\mu_o\left(B_o\left(\theta_n, e^{-bT_n}\right)\right) \geq Ae^{-\int_o^{y_n} F} \geq Ae^{-1-M}.$$

Or les ensembles $B_o\left(\theta_n, e^{-bT_n}\right)$ sont des boules (pour la distance $\overline{\Delta}_o$) de rayon de plus en plus petit centrées en θ_n. On peut supposer quitte à extraire que θ_n tend vers un point θ, et donc θ est un atome car tous ses voisinages sont de mesure $\geq Ae^{-1-M}$, d'où la contradiction. $\square$

Le corollaire suivant vient renforcer le corollaire 2.28

Corollaire 2.31. *Soit F une fonction höldérienne sur T^1X telle que le cocycle C^F soit normalisé. Alors il existe des constantes $A, B > 0$ telle que pour tout $x, y \in \tilde{X}$,*

$$\int_x^y F > Bd(x,y) - A.$$

Démonstration. La preuve est semblable à la preuve du corollaire 2.28. D'après le lemme de spécification, il existe une constante $M > 0$ tel que pour tout $x, y \in \tilde{X}$, il existe un élément non trivial $\gamma \in \Gamma$ et un point z situé sur la géodésique invariante par γ tel que

$$d(x,z) < M \text{ et } d(y, \gamma z) < M,$$

et ainsi d'après le lemme 2.6, il existe une constante $A > 0$ ne dépendant pas de x, y, telle que

$$\int_x^y F \geq \int_z^{\gamma z} F - A.$$

Or

$$\int_z^{\gamma z} F = \gamma[F],$$

et d'après le théorème 2.29 il existe une constante B independante de γ telle que $\gamma[F] \geq Bd(z, \gamma z)$, donc

$$\int_x^y F \geq Bd(z,\gamma z) - A \geq Bd(x,y) - A - 2BM.$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

Corollaire 2.32. *Soit (μ_x) une famille équivariante de mesures . Soit $\theta \in \partial\tilde{X}$ et soit $x_n \in \tilde{X}$ une suite qui tend vers θ. Alors les mesures μ_{x_n} renormalisées convergent faiblement vers la masse de Dirac en θ.*

Démonstration. Il nous suffit de montrer que pour tout compact $K \subset \partial\tilde{X} \setminus \{\theta\}$, les nombres $\mu_{x_n}(K)$ tendent vers zéro. Soit $o \in \tilde{X}$ une origine quelconque. Comme

$$\frac{d\mu_{x_n}}{d\mu_o}(\xi) = e^{-C_\xi(x_n, o)},$$

il nous suffit de montrer que les fonctions $\xi \to C_\xi(x_n, o)$ tendent vers l'infini uniformément sur K quand n tends vers l'infini. On peut supposer que $C =$

C^F pour une certaine fonction höldérienne F normalisée. Comme x_n tend vers $\theta \notin K$, alors il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout n et pour tout $\xi \in K$, la distance entre o et le rayon géodésique $[x_n, \xi)$ est inférieure à M. Soit donc $y \in [x_n, \xi)$ tel que $d(y, o) \leq M$. On peut alors écrire en utilisant le corollaire précédent

$$C_\xi^F(x_n, o) = \int_{x_n}^{y} F + C_\xi^F(y, o) \geq Bd(x_n, y) - A + C_\xi^F(y, o).$$

Or comme $d(y, o) \leq M$ le nombre $C_\xi^F(y, o)$ est borné indépendament de ξ et de n, et d'autre part la distance $d(x_n, y)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Donc on a bien que $C_\xi^F(x_n, o)$ tend vers l'infini uniformément pour $\xi \in K$. $\square$

Chapitre 3

Le bas du spectre et les familles équivariantes de mesures

On considère à nouveau une variété riemannienne compacte (X, g) à courbure strictement négative et son revêtement universel muni de la métrique induite $(\tilde{X}, g)$. Notons $H^2(\tilde{X}) \subset L^2(\tilde{X})$ l'espace de Sobolev des fonctions sur $\tilde{X}$ de carré intégrable et dont la différentielle au sens des distributions peut être représentée par une 1-forme mesurable et de carré intégrable. On définit le quotient de Rayleigh d'une fonction $f \in H^2(\tilde{X})$ par :

$$R(f) = \int_{\tilde{X}} |df(x)|_g^2 dx \Big/ \int_{\tilde{X}} f^2(x) dx.$$

Ce nombre dépend de la métrique g.

On définit le bas du spectre de $(\widetilde{X}, g)$ comme la borne inférieure des quotients de Rayleigh :

$$\lambda_1 = \inf\{R(f) | f \in H^2(\tilde{X})\}.$$

Remarquons que comme l'espace des fonctions C^∞ à support compact est dense dans $H^2(\tilde{X})$, on peut définir le λ_1 simplement comme la borne inférieure des quotients de Rayleigh des fonctions C^∞ à support compact (sans avoir à introduire l'espace de Sobolev $H^2(\tilde{X})$).

Cette définition du λ_1 a pour inconvénient le fait qu'il n'existe pas de fonction dans $H^2(\tilde{X})$ qui minimise le quotient de Rayleigh. Mais nous allons donner une autre définition du λ_1, qui tiendra compte du fait que $\tilde{X}$ admet un quotient compact. Cette définition fera intervenir les familles équivariantes de mesures introduites dans le chapitre précédent. Elle sera donnée par le théorème 3.1 qui va suivre.

3.1 Quotient de Rayleigh d'une famille équivariante de mesures sur le bord

Pour définir le quotient de Rayleigh d'une famille équivariante de mesures $\mu = (\mu_x)$, on aura besoin de l'hypothèse de régularité suivante : on dira qu'un cocycle C est lisse si la fonction $x, y, \theta \to C_\theta(x,y)$ est C^∞ en les variables x, y, et que ses dérivées successives sont continues en x, y, θ, et on dira qu'une famille équivariante de mesures $\mu = (\mu_x)$ est lisse si le cocycle associé

$$C_\theta(x,y) = -\log\left(\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\theta)\right)$$

est lisse. Remarquons que la formule (2.5) permet de construire un exemple de famille lisse équivariante de mesures à partir d'une famille quelconque et d'une partition de l'unité Γ-invariante.

On définit une fonctionnelle sur l'ensemble des familles lisses équivariantes de mesures : soit μ une famille lisse équivariante de mesures . Choisissons une mesure finie ν sur $\partial\tilde{X}$ telle que $\mu_x \sim \nu$ pour tout $x \in \tilde{X}$ (par exemple, on peut choisir $\nu = \mu_x$ pour un certain x). Soit $r_\theta(x)$ la fonction

$$r_\theta(x) = \sqrt{\frac{d\mu_x}{d\nu}(\theta)}.$$

Comme μ est lisse, la fonction $x \to r_\theta(x)$ est dérivable. Pour tout $x \in \tilde{X}$, on pose

$$A(x) = \int_{\partial\tilde{X}} |dr_\theta(x)|^2 d\nu(\theta).$$

Ce nombre $A(x)$ ne dépend pas du choix de ν : en effet, si on choisit une autre mesure ν', on pose

$$r'_\theta(x) = \sqrt{\frac{d\mu_x}{d\nu'}(\theta)},$$

$$A'(x) = \int_{\partial\tilde{X}} |dr'_\theta(x)|^2 d\nu'(\theta),$$

et comme ν et ν' sont équivalentes il existe alors une fonction mesurable h sur $\tilde{X}$ telle que
$$\frac{d\nu'}{d\nu}(\theta) = h(\theta) \ \nu\text{-presque partout},$$
et donc on a
$$r'_\theta(x) = r_\theta(x)\sqrt{h(\theta)},$$
$$A'(x) = \int_{\partial\tilde{X}} |dr_\theta(x)|^2 h(\theta) d\nu'(\theta) = A(x).$$

Donc la fonction $A : x \to A(x)$ ne dépend que de la famille μ, et par conséquent elle est Γ-invariante (car la famille μ est Γ-équivariante). On se donne $X_0 \subset \tilde{X}$ un domaine fondamental de Γ, et on pose
$$\mathcal{R}(\mu) = \int_{X_0} A(x)dx \Bigg/ \int_{X_0} \mu_x(\partial\Gamma)dx.$$

On dira que $\mathcal{R}(\mu)$ est le quotient de Rayleigh de μ, à cause du théorème suivant :

Théorème 3.1. *On se donne ν une mesure sur $\partial\tilde{X}$ telle qu'il existe au moins une famille équivariante de mesures (μ_x) équivalentes à la mesure ν. Alors λ_1 est la borne inférieure des quotients de Rayleigh des familles lisses équivariantes de mesures équivalentes à ν.*

Voici l'idée générale de la preuve de ce théorème : étant donnée que les familles équivariantes de mesures sur le bord s'obtiennent comme "limite faible" de familles équivariantes de mesures sur le groupe Γ par la construction de Patterson généralisée (voir section 2.6), on va étendre la notion de quotient de Rayleigh pour ces familles de mesures sur Γ, et on aura que le quotient de Rayleigh de la "limite faible" de ces familles est la limite des quotients de Rayleigh (sous de bonnes hypothèses). Et d'autre part ces quotients de Rayleigh de familles de mesures sur Γ coïncideront avec des quotients de Rayleigh classiques de fonctions C^∞ et L^2, dont les valeurs pourront être arbitrairement proche de λ_1. Le théorème en découlera. Voici maintenant la preuve détaillée :

Démonstration du théorème 3.1. Cette démonstration est en trois partie :

3.1.1 Les familles de mesures sur Γ, et leur quotient de Rayleigh

On appelle famille équivariante de mesures sur Γ une famille $m = (m_x)$ qui à tout $x \in \widetilde{X}$ associe une mesure m_x sur le groupe discret Γ telle que pour tout $x \in \widetilde{X}$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$, on ait la relation d'équivariance $m_{\gamma(x)} = \gamma_* m_x$ (autrement dit pour tout $\alpha \in \Gamma$ on a $m_{\gamma(x)}(\{\gamma\alpha\}) = m_x(\{\alpha\})$), et aussi telle que pour tout γ, la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{X} &\to \mathbb{R} \\ x &\to m_x(\{\gamma\}) \end{aligned}$$

soit intégrable. Si de plus cette fonction est C^∞ pour tout γ, on dira que la famille m est lisse.

Exemple : Remarquons que lors de la construction de Patterson généralisée (chapitre 2, section 2.6), on fait intervenir des familles équivariantes de mesures sur Γ, ce sont les familles $(\mu_x^s)_x$, pour $s \geq h(F)$. Cependant, ces familles ne sont pas lisses en général.

Soit m une famille lisse équivariante de mesures sur Γ. On définit ici le quotient de Rayleigh $\mathcal{R}(m)$ de deux façons équivalentes. La première façon consiste à définir $\mathcal{R}(m)$ comme le quotient de Rayleigh de la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{X} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \sqrt{m_x(\gamma)}, \end{aligned}$$

où γ est un élément quelconque du groupe Γ. Le choix de γ n'importe pas car si on choisit un autre élément γ', la fonction $x \to \sqrt{m_x(\gamma')} = \sqrt{m_{\gamma\gamma'^{-1}(x)}(\gamma)}$ est la composée de la fonction $x \to \sqrt{m_x(\gamma)}$ avec l'isométrie $\gamma\gamma'^{-1}$. On peut choisir par exemple $\gamma = I$, l'élément neutre de Γ. Remarquons alors que l'application qui à m associe la fonction $x \to \sqrt{m_x(I)}$ définit une correspondance bijective entre l'espace des familles équivariantes de mesures sur Γ et l'ensemble des fonctions positives de carré intégrable sur $\tilde{X}$, dont la réciproque est l'application qui à une fonction f associe la famille de mesures m définie par $m_x(\gamma) = f^2(\gamma^{-1}x)$.

La deuxième façon de définir $\mathcal{R}(m)$ se rapproche plus de la définition du quotient de Rayleigh pour une famille lisse équivariante de mesures sur $\partial\tilde{X}$:

on choisit une mesure n sur Γ équivalente à la mesure de comptage (comme par exemple la mesure de comptage elle-même), et on pose

$$r_\gamma(x) = \sqrt{\frac{dm_x}{dn}(\gamma)} = \sqrt{\frac{m_x(\gamma)}{n(\gamma)}}$$
$$A(x) = \int_\Gamma |dr_\gamma(x)|^2 dn(\gamma).$$

La fonction $x \to A(x)$ ne dépend pas du choix de la mesure n et elle est Γ-invariante. On se donne $X_0 \subset \tilde{X}$ un domaine fondamental quelconque de Γ et on pose

$$\mathcal{R}(m) = \int_{X_0} A(x)dx \Big/ \int_{X_0} m_x(\Gamma)dx.$$

Pour voir que les deux définitions sont équivalentes, regardons ce dernier quotient dans le cas où on choisit n égal à la mesure de comptage sur Γ : alors le numérateur peut s'écrire

$$\int_{X_0} \sum_\gamma |dr_\gamma(x)|^2 dx = \int_{\tilde{X}} |dr_I(x)|^2 dx,$$

et par ailleurs on a $r_\gamma(x) = \sqrt{m_x(\gamma)}$, et le dénominateur s'écrit donc

$$\int_{X_0} \sum_\gamma m_x(\gamma)dx = \int_{\tilde{X}} r_I^2(x)dx.$$

Donc finalement ce quotient est le quotient de Rayleigh de la fonction $x \to r_I(x) = \sqrt{m_x(I)}$, et donc les deux définitions de $\mathcal{R}(m)$ sont équivalentes.

Enfin notons que comme $\mathcal{R}(m)$ peut être vu comme le quotient de Rayleigh d'une fonction, on a alors la proposition suivante, par définition du λ_1 :

Proposition 3.2. *Soit m une famille lisse équivariante de mesures , alors*

$$\mathcal{R}(m) \geq \lambda_1.$$

3.1.2 On étale une fonction L^2 sur $\tilde{X}$ en utilisant l'action du groupe Γ

Nous continuons la preuve du théorème 3.1 : on va montrer ici que pour tout ϵ arbitrairement petit il exsite une famille équivariante de mesures sur

$\partial\tilde{X}$ dont le quotient de Rayleigh est inférieur à $\lambda_1+\epsilon$. De plus on peut choisir cette famille de telle manière que les mesures soient équivalentes à la mesure ν fixée dans le théorème.

Par définition du λ_1, on peut trouver une fonction f, C^∞ à support compact telle que $R(f) \leq \lambda_1 + \epsilon$. De plus, comme Γ agit par isométries sur $\tilde{X}$, alors pour tout $\gamma \in \Gamma$, la fonction $f \circ \gamma$ vérifie aussi $R(f \circ \gamma) \leq \lambda_1 + \epsilon$. Or on a le lemme suivant :

Lemme 3.3. *Soit f, g deux fonctions C^∞ à support compact non nulles sur $\tilde{X}$, et dont les quotients de Rayleigh sont $\leq \lambda_1+\epsilon$. Alors la fonction $\sqrt{f^2+g^2}$ a elle aussi son quotient de Rayleigh $\leq \lambda_1 + \epsilon$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{X}} \left| d\sqrt{f^2+g^2} \right|^2 &= \int \frac{|f\ df + g\ dg|^2}{f^2+g^2} \\
&\leq \int \frac{(|f|\ |df| + |g|\ |dg|)^2}{f^2+g^2} \\
&\leq \int \left(|df|^2 + |dg|^2\right) \text{ (d'après Cauchy-Schwartz)} \\
&\leq \max\left(R(f), R(g)\right) \int \left(f^2+g^2\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Soit $(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ une famille sommable de coefficients positifs. Considérons la fonction $\sqrt{\sum_\gamma a_\gamma f^2 \circ \gamma}$ (on "étale" la fonction f sur $\tilde{X}$ en utilisant l'action du groupe Γ et les coefficients a_γ). Alors d'après le lemme précédent, on a que le quotient de Rayleigh de cette fonction est $\leq \lambda_1 + \epsilon$. Il reste à voir maintenant qu'en choisissant astucieusement les coefficients a_γ, on peut faire converger ce quotient de Rayleigh vers le quotient de Rayleigh d'une certaine famille équivariante de mesures sur $\partial\tilde{X}$.

Considérons la mesure ν donné dans l'énnoncé du théorème. On peut (quitte à la remplacer par une mesure équivalente) supposer que $\nu = \mu_o$, pour $o \in \tilde{X}$ et pour une certaine famille équivariante de mesures (μ_x). De plus d'après le théorème 2.5 et la proposition 2.8, on peut supposer que la famille (μ_x) est obtenue par la construction de Patterson généralisée pour une certaine fonction höldérienne normalisée F sur T^1X (chapitre 2, section

2.6). On a donc que μ_o est la limite faible quand s tend vers 0 d'une suite de mesures μ_o^s sur Γ :

$$\mu_o^s = \sum_\gamma a_\gamma^s \delta_\gamma,$$

où a_γ^s sont les coefficients de la série de Poincaré $P_s^F(o,o)$ ou bien de la série de Poincaré modifiée $\bar{P}_s^F(o,o)$ que l'on a renormalisée de telle sorte que la somme des coefficients soit égale à 1 (voir chapitre 2, section 2.6). Posons alors pour $s > 0$

$$f_s = \sqrt{\sum_\gamma a_\gamma^s f^2 \circ \gamma}.$$

Le quotient de Rayleigh de cette fonction est inférieur à $\lambda_1 + \epsilon$, et c'est aussi le quotient de Rayleigh de la famille de mesures sur Γ correspondante : nous noterons $(m_x^s)_{x\in\tilde{X}}$ cette famille : elle est définie par

$$\begin{aligned} m_x^s &= \sum_{\gamma\in\Gamma} f_s^2(\gamma^{-1}x)\delta_\gamma \\ &= \sum_{\gamma,\beta\in\Gamma} a_\beta^s f^2(\beta\gamma^{-1}x)\delta_\gamma \\ &= \sum_{\gamma,\beta\in\Gamma} f^2(\gamma^{-1}x) a_\beta^s \delta_{\gamma\beta} \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma} f^2(\gamma^{-1}x)\gamma_*\mu_o^s \end{aligned}$$

La somme est finie pour x fixé car la fonction f est à support compact. Ainsi cette mesure m_x^s converge faiblement, quand s tend vers 0, vers une mesure

$$\nu_x = \sum_\gamma f^2(\gamma^{-1}x)\gamma_*\mu_o.$$

La famille ν_x ainsi définie est une famille équivariante de mesures sur $\partial\tilde{X}$. C'est la famille recherchée : on peut montrer en effet que son quotient de Rayleigh est bien inférieur à $\lambda_1 + \epsilon$: on a

$$\mathcal{R}(\nu_x) = \int_{X_0}\int_{\partial\tilde{X}} |dr_\theta(x)|^2 d\mu_o(\theta)dx \Big/ \int_{X_0} \mu_x(\partial\tilde{X})dx.$$

où

$$r_\theta(x) = \sqrt{\frac{d\nu_x}{d\mu_o}(\theta)} = \sqrt{\sum_\gamma f^2(\gamma^{-1}x)\frac{d\gamma_*\mu_o}{d\mu_o}(\theta)}.$$

Dans ce quotient de Rayleigh, le dénominateur peut s'écrire :

$$\int_{X_0} \sum_\gamma f^2(\gamma^{-1}x)\gamma_*\mu_o(\partial\tilde{X})dx = \mu_o(\partial\tilde{X}) \int_{\tilde{X}} f^2.$$

Quant au numérateur, on peut écrire, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned}\int_{X_0}\int_{\partial\tilde{X}} |dr_\theta(x)|^2 d\mu_o(\theta)dx &= \int_{X_0}\int_{\partial\tilde{X}} \frac{\left|\sum_\gamma f(\gamma^{-1}x)d(f\circ\gamma^{-1})(x)\frac{d\gamma_*\mu_o}{d\mu_o}(\theta)\right|^2}{\sum_\gamma f^2(\gamma^{-1}x)\frac{d\gamma_*\mu_o}{d\mu_o}(\theta)} d\mu_o(x)dx \\ &\leq \int_{X_0}\int_{\partial\tilde{X}} \sum_\gamma |df(\gamma^{-1}x)|^2 \frac{d\gamma_*\mu_o}{d\mu_o}(\theta)d\mu_o(x)dx \\ &= \mu_o(\partial\tilde{X}) \int_{\tilde{X}} |df|^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{R}(\nu_x) \leq R(f) \leq \lambda_1 + \epsilon.$$

3.1.3 Le quotient de Rayleigh de la limite faible est la limite des quotients de Rayleigh

Nous achevons la démonstration du théorème 3.1 en montrant que si $\mu = (\mu_x)$ est une famille lisse équivariante de mesures sur $\partial\tilde{X}$, alors $\mathcal{R}(\mu) \geq \lambda_1$. Pour cela nous montrerons que $\mathcal{R}(\mu)$ est une limite de quotients de Rayleigh de familles de mesures sur Γ qui sont supérieurs à λ_1 d'après la proposition 3.2.

Soit (μ_x) une famille lisse équivariante de mesures sur $\partial\tilde{X}$. Fixons une origine $o \in \tilde{X}$. Choisissons ρ une fonction C^∞ à support compact sur $\tilde{X}$ qui ne s'annule pas sur un domaine fondamental de Γ. Considérons la famille équivariante de mesures (μ'_x) définie par

$$\mu'_x = \sum_\gamma \rho(\gamma^{-1}x)\gamma_*\mu_o.$$

On peut supposer que ρ vérifie $\rho(o) = 1$ et $\rho(\gamma o) = 0$ pour γ différent de l'identité. Ainsi nous avons que

$$\mu_{\gamma o} = \mu'_{\gamma o} \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

Comme cela est expliqué dans la preuve de la proposition 2.8 chapitre 2, le cocycle associé à la famille (μ'_x) est le cocycle C^F pour une certaine fonction höldérienne normalisée F sur T^1X. La proposition 2.24 nous dit qu'il existe des mesures μ_o^s sur Γ pour tout $s > 0$ qui vérifient les propriétés suivantes : La mesure μ_o sur $\partial\tilde{X}$ est la limite faible des mesures μ_o^s quand s tend vers 0^+, et pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $s > 0$, la fonction densité

$$\frac{d\gamma_*\mu_o^s}{d\mu_o^s},$$

qui est définie sur Γ a priori, se prolonge par continuité sur $\Gamma \cup \partial\tilde{X}$ et sa restriction à $\partial\tilde{X}$ est la fonction

$$\theta \to e^{-C_\theta^F(\gamma o,o) - sB_\theta(\gamma o,o)}.$$

Enfin, pour γ fixé, cette fonction densité et son prolongement convergent uniformément quand s tend vers 0^+, et la restriction de la limite sur $\partial\tilde{X}$ est donc la fonction

$$\theta \to e^{-C_\theta^F(\gamma o,o)} = \frac{d\gamma_*\mu_o}{d\mu_o}(\theta).$$

On pose

$$\mu_x'^s = \sum_\gamma \rho(\gamma^{-1}x)\gamma_*\mu_o^s.$$

Ainsi, pour $s > 0$ fixé, la famille $(\mu_x'^s)$ est une famille lisse équivariante de mesures sur Γ, et pour x fixé les mesures $\mu_x'^s$ convergent faiblement vers μ'_x. Remarquons que ces mesures $\mu_x'^s$ sont différentes des mesures notées μ_x^s rencontrées au chaptitre 2, section 2.6. Elles semblent jouer le même rôle pour l'instant mais l'avantage des nouvelles mesures est que la famille $(\mu_x'^s)$ ici présente est lisse, alors que la famille μ_x^s de la section 2.6 ne l'était pas.

Soit $f(x,\theta)$ la fontion définie sur $\tilde{X} \times \partial\tilde{X}$ par

$$f(x,\theta) = \frac{d\mu_x}{d\mu'_x}(\theta).$$

Comme Les familles (μ_x) est (μ'_x) sont lisses, alors la fonction $f(x,\theta)$ est de classe C^∞ pour la variable x, i.e. les dérivées successives de f pour la variable x existent et sont continues en x,θ. De plus, f est Γ-invariante, i.e. $f(\gamma x,\gamma\theta)=f(x,\theta)$. On peut alors étendre cette fonction f sur $\widetilde{X}\times(\Gamma\cup\partial\tilde{X})$. Une façon de construire cette extension est d'utiliser une famille auxiliaire de mesures équivariantes $\nu=(\nu_x)$ et de poser pour tout $(x,\gamma)\in\tilde{X}\times\Gamma$

$$f(x,\gamma)=\int_{\partial\tilde{X}} f(x,\theta)d(\gamma_*\nu_o)(\theta),$$

où o est une origine quelconque. Cette extension de f reste Γ-invariante. Il faut aussi supposer qu'on a choisit ν normalisé de sorte que ν_o soit de masse égale à 1, et ainsi l'extension de f garde la propriété d'être de classe C^∞ pour la variable x, i.e. les dérivées succesives pour la variable x sont continues sur $\widetilde{X}\times(\Gamma\cup\partial\tilde{X})$. Pour voir cela, on note $d^{(k)}f$ la dérivée k-ième de f pour la variable x, et il faut montrer que si x_n tend vers x et $\gamma_n\in\Gamma$ tend vers $\theta\in\partial\tilde{X}$ alors $d^{(k)}f(x_n,\gamma_n)$ tend vers $d^{(k)}f(x,\theta)$. Or

$$d^{(k)}f(x_n,\gamma_n)=\int_{\partial\tilde{X}} d^{(k)}f(x_n,\theta)d(\gamma_{n*}\nu_o)(\theta)$$

et on sait d'une part que les mesures $\gamma_{n*}\nu_o=\nu_{\gamma_n o}$ convergent faiblement vers la masse de Dirac en θ (voir corollaire 2.32), et d'autre part que les fonctions $\theta\in\partial\tilde{X}\to d^{(k)}f(x_n,\theta)$ convergent uniformément vers $\theta\to d^{(k)}f(x,\theta)$, donc on peut bien en déduire que $d^{(k)}f(x_n,\gamma_n)$ tend vers $d^{(k)}f(x,\theta)$.

On définit alors les mesures μ_x^s sur Γ en posant

$$\mu_x^s(\gamma)=f(x,\gamma)\mu_x'^s(\gamma).$$

Ainsi, pour $s>0$ fixé, la famille (μ_x^s) est une famille lisse équivariante de mesures sur Γ, et pour x fixé les mesures μ_x^s convergent faiblement vers μ_x. Il nous reste maintenant à montrer que $\mathcal{R}(\mu^s)$ tend vers $\mathcal{R}(\mu)$ quand s tend vers 0^+. Pour cela, on écrit les quotients $\mathcal{R}(\mu^s)$ et $\mathcal{R}(\mu)$ de cette manière :

$$\mathcal{R}(\mu^s)=\int_{X_0}\int_\Gamma |dr_\theta^s(x)|^2\ d\mu_o^s(\theta)\ dx\Big/\int_{X_0}\mu_x^s(\Gamma)dx,$$

$$\mathcal{R}(\mu)=\int_{X_0}\int_{\partial\tilde{X}} |dr_\theta(x)|^2\ d\mu_o(\theta)\ dx\Big/\int_{X_0}\mu_x(\partial\tilde{X})dx,$$

où $r^s_\theta(x)$ et $r_\theta(x)$ sont les fonctions définies pour $\theta \in \Gamma \cup \partial\Gamma$ et pour $x \in \tilde{X}$ par

$$r^s_\theta(x)^2 = f(x,\theta)\sum_\gamma \rho(\gamma^{-1}x)\frac{d\gamma_*\mu^s_o}{d\mu^s_o}(\theta),$$

$$r_\theta(x)^2 = f(x,\theta)\sum_\gamma \rho(\gamma^{-1}x)\frac{d\gamma_*\mu_o}{d\mu_o}(\theta).$$

Remarquons que si on se restreint à $x \in X_0$ alors il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls dans les sommes ci-dessus, et rappelons que pour γ fixé, $\frac{d\gamma_*\mu^s_o}{d\mu^s_o}$ converge uniformément vers $\frac{d\gamma_*\mu_o}{d\mu_o}$. Donc $|dr^s_\theta(x)|^2$ converge vers $|dr_\theta(x)|^2$ uniformément pour $(x,\theta) \in X_0 \times (\Gamma \cup \partial\Gamma)$. Rappelons aussi que μ^s_o converge faiblement vers μ_o et que μ^s_x converge faiblement vers μ_x. On en déduit alors que les dénominateurs des quotient $\mathcal{R}(\mu^s)$ convergent vers celui de $\mathcal{R}(\mu)$, et que les numérateurs des $\mathcal{R}(\mu^s)$ convergent vers celui de $\mathcal{R}(\mu)$ et donc $\lim_{n\to\infty}\mathcal{R}(\mu^s) = \mathcal{R}(\mu)$. Ceci achève la démonstration du théorème 3.1 □

On peut se poser la question de l'existence et de l'unicité d'une famille équivariante de mesures μ pour laquelle la borne inférieure est atteinte dans le théorème 3.1, c'est-à-dire telle qu'on ait

$$\lambda_1 = \mathcal{R}(\mu).$$

Dans la section 2.7, on va voir que c'est le cas si la métrique est hyperbolique. La question reste ouverte dans le cas d'une métrique quelconque.

3.1.4 Familles de mesures minimisant le quotient de Rayleigh

Dans la fin de cette section, on étudie le cas où la borne inférieure dans le théorème 3.1 est atteinte par une famille de mesure, et en particulier la famille des mesures de Patterson.

Soit μ, une quelconque famille lisse équivariante de mesures sur $\partial\Gamma$, que normalisons de sorte que $\int_{X_0}\mu_x(\partial\Gamma)dx = 1$. Soit $r_\theta(x)$ la fonction définie par

$$r_\theta(x)^2 = \frac{d\mu_x}{d\mu_o}(\theta).$$

Lemme 3.4. *On peut écrire*

$$\mathcal{R}(\mu) = \int_{X_0} \int_{\partial\Gamma} r_\theta(x)\ \Delta r_\theta(x)\ d\mu_o(\theta) dx, \tag{3.1}$$

où Δ désigne le laplacien pour la variable x.

Démonstration. Il s'agit d'appliquer la formule de Stokes après s'être ramené à des intégrales de fonctions à supports compacts. Pour cela, on se donne (U_i) un recouvrement de X par des ouverts difféomorphes à des boules, et (σ_i) une partition de l'unité adaptée à ce recouvrement. Soit $\pi : \widetilde{X} \to X$ la projection canonique. On associe à chacun des U_i un ouvert $\widetilde{U_i} \subset \widetilde{X}$ qui lui est difféomorphe via l'application π.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\mu) &= \int_{X_0} \int_{\partial\Gamma} |dr_\theta(x)|^2\ d\mu_o(\theta) dx \\
&= \sum_i \int_{X_0} \int_{\partial\Gamma} (dr_\theta(x), d\left(r_\theta(x)\sigma_i(\pi(x))\right))\ d\mu_o(\theta) dx \\
&= \sum_i \int_{\widetilde{U}_i} \int_{\partial\Gamma} (dr_\theta(x), d\left(r_\theta(x)\sigma_i(\pi(x))\right))\ d\mu_o(\theta) dx \\
&= \sum_i \int_{\widetilde{U}_i} \int_{\partial\Gamma} \Delta r_\theta(x)\ r_\theta(x)\sigma_i(\pi(x))\ d\mu_o(\theta) dx \\
&= \int_{X_0} \int_{\partial\Gamma} r_\theta(x)\ \Delta r_\theta(x)\ d\mu_o(\theta) dx.
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.5. *Si $\mathcal{R}(\mu) = \lambda_1$, alors on a pour tout $\theta \in \partial\Gamma$*

$$\Delta r_\theta = \lambda_1 r_\theta$$

Démonstration. Soit $f : \widetilde{X} \times \partial\Gamma \to \mathbb{R}$, une fonction C^∞ en la variable x, telle que

$$\int_{X_0} \int_{\partial\Gamma} f(x,\theta)\ d\mu_x(\theta) dx = 0. \tag{3.2}$$

Pour t suffisament proche de 0, on définit la famille équivariante de mesures μ^t par

$$\frac{d\mu_x^t}{d\mu_x}(\theta) = 1 + tf(x,\theta).$$

La condition (3.2) signifie que μ^t est normalisé, c'est-à-dire $\int_{X_0} \mu_x^t(\partial\Gamma)dx = 1$. La quantité $\mathcal{R}(\mu^t)$ s'écrit (en n'écrivant pas les variables pour alléger)

$$\mathcal{R}(\mu^t) = \int_{X_0} \int_{\partial\Gamma} |d(r\sqrt{1+tf})|^2 d\mu_o(\theta)dx.$$

Comme $\mathcal{R}(\mu)$ est minimale, on en déduit que

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \mathcal{R}(\mu^t) = 0$$
$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \left(\int_{X_0} \int_{\partial\Gamma} |d(r\sqrt{1+tf})|^2 d\mu_o(\theta)dx \right) = 0$$
$$\int_{X_0} \int_{\partial\Gamma} 2(d(rf), dr) d\mu_0(\theta)dx = 0$$
$$\int_{X_0} \int_{\partial\Gamma} 2fr\Delta r d\mu_0(\theta)dx = 0$$

(où pour obtenir la dernière ligne on a utilisé la formule de Stockes de la même manière que dans la preuve du lemme 3.4). Comme f est une fonction quelconque vérifiant (3.2) ce qui peut aussi s'écrire

$$\int_{X_0} \int_{\partial\Gamma} fr^2 d\mu_0(\theta)dx = 0,$$

alors on a Δr est égal à r multipliée par une constante. D'après le lemme 3.4, la constante est λ_1. □

La famille des mesures de Patterson, notée p, est l'unique famille équivariante de mesures sur $\partial\Gamma$ telle qu'il existe une constante h telle qu'on ait

$$\frac{dp_x}{dp_o}(\theta) = e^{-hB(x,\theta)},$$

où $B(x,\theta)$ désigne la fonction de Busemann normalisée par $B(o,\theta) = 0$. L'existence et l'unicité à une constante multiplicative près d'une telle famille découle du théorème 2.5. La constante h est l'entropie volumique de X. Un calcul simple montre que $\mathcal{R}(p) = h^2/4$, et donc que $\lambda_1 \leq h^2/4$. Le théorème suivant illustre le lemme 3.5. Il a été établi auparavant à la suite des travaux de Ledrappier, Foulon, Labourie, Besson, Courtois, Gallot ([L5],[FL],[BCG1]) :

Théorème 3.6. *Si $\lambda_1 = h^2/4$, alors la métrique est localement symétrique.*

Démonstration. Si $\lambda_1 = h^2/4$, on a donc $\mathcal{R}(p) = h^2/4 = \lambda_1$, et alors d'après le lemme 5.3, on a

$$\Delta\, e^{-\frac{h}{2}B} = \frac{h^2}{4} e^{-\frac{h}{2}B}.$$

De cela on peut déduire facilement que $\Delta B = h$. Or on sait grâce à [FL] et [BCG1] que cela équivaut à dire que la métrique est localement symétriques. □

3.2 Le bas du spectre d'une variété hyperbolique est un point selle

Dans cette section, X est une variété compacte et $\tilde{X}$ son revêtement universel. On suppose que X admet une métrique hyperbolique g_0. Dans cette section, nous alons considérer d'autres métriques sur X et étudier comment se comporte λ_1 lorsqu'on fait varier la métrique “au voisinage de g_0”. Si g est une métrique sur X on notera $\lambda_1(g)$ le bas du spectre du revêtement universel $\tilde{X}$ muni du relevé de la métrique g. Si μ est une famille lisse équivariante de mesures , on notera $\mathcal{R}_g(\mu)$ le quotient de Rayleigh de μ pour cette même métrique.

On fixe une origine $o \in \widetilde{X}$. On note $B(x, \theta)$ la fonction de Busemann pour g_0, normalisée par $B(o, \theta) = 0$, et on note $P = (P_x)$ la famille des mesures de Patterson pour g_0. L'entropie volumique de X pour la métrique hyperbolique g_0 se calcule explicitement et elle est égale à $n-1$. La famille des mesures de Patterson est donc caractérisée par

$$\frac{dP_x}{dP_o}(\theta) = e^{-(n-1)B(x,\theta)}.$$

Nous la normalisons de telle sorte que

$$\int_{X_0} P_x(\partial\Gamma)dx = 1.$$

Le quotient de Rayleigh $\mathcal{R}_{g_0}(P)$ se calcule facilement :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{g_0}(P) i \int_{X_0}\int_{\partial\tilde{X}} \left| d\left(e^{-\frac{n-1}{2}} B(x,\theta)\right)\right|^2 dP_0(\theta)dx \Big/ \int_{X_0} P_x(\partial\tilde{X})dx \\ = \frac{(n-1)^2}{4}.\end{aligned}$$

En fait $\lambda_1(g_0) = \frac{(n-1)^2}{4}$, ce qui pourra se déduire par exemple de la théorème 3.9.

Toute famille μ équivalente à P est caractérisée par les relations de densité

$$\frac{d\mu_x}{dP_x}(\theta) = e^{-f(x,\theta)},$$

où f est une fonction équivariante et C^∞ en la variable x au sens où ses jets sont continus pour (x,θ). Enfin, dans ce qui suit, le symbole dx fera référence à la mesure induite par g_0, et les notations $(\cdot,\cdot)$ et $|\cdot|^2$ désigneront des produits scalaires pour la métrique g_0.

3.2.1 Rappels de géométrie hyperbolique

Nous noterons D l'opérateur de dérivée covariante sur X et $\tilde{X}$ associé a la métrique g_0 et à son relevé sur $\tilde{X}$. Soit $\theta \in \partial\tilde{X}$, et considérons la fonction de Busemann $x \to B(x,\theta)$. La dérivée covariante de la différentielle de cette fonction au point x s'écrit $DdB(x,\theta)$. C'est une forme bilinéaire symétrique sur l'espace tangent $T_x\tilde{X}$. On a le

Lemme 3.7.

$$DdB(x,\theta) = g_0(x) - dB(x,\theta) \otimes dB(x,\theta). \tag{3.3}$$

Démonstration. Soit $x \in \tilde{X}$ et $\theta \in \partial\tilde{X}$. Soit $u \in T_x\tilde{X}$ le vecteur unitaire dirigé vers θ. l'espace $T_x\tilde{X}$ se décompose en somme directe

$$T_x\tilde{X} = \mathbb{R}u \oplus u^\perp.$$

La forme linéaire $dB(x,\theta)$ sur $T_x\tilde{X}$ vérifie

$$dB(x,\theta)(u) = 1$$
$$dB(x,\theta)(v) = 0 \ \forall v \in u^\perp$$

La forme bilinéaire symétrique $DdB(x,\theta)$ se décompose de façon unique sous la forme

$$DdB(x,\theta) = A \ + \ c \otimes dB(x,\theta) \ + \ dB(x,\theta) \otimes c + s dB(x,\theta) \otimes dB(x,\theta),$$

où A est une forme bilinéaire symétrique sur $u^\perp$, c est une forme linéaire sur $u^\perp$, et $s \in \mathbb{R}$. Or, comme $\tilde{X}$ muni du relevé de g_0 est l'espace hyperbolique, alors chaque isométrie de l'espace euclidien $u^\perp$ est réalisé par une isométrie de $\tilde{X}$ qui fixe x et θ. Ainsi, les formes A et c sont invariantes par isométrie de $u^\perp$. Donc $c = 0$ et A est un multiple du produit scalaire euclidien $g_{0x|u^\perp}$. Donc finalement on peut écrire

$$DdB(x,\theta) = rg_0(x)_{|u^\perp} + sdB(x,\theta) \otimes dB(x,\theta),$$

où s et r sont deux réels. Montrons que $s = 0$: soit $\sigma(t)$ la géodésique telle que $\sigma'(0) = u$, alors

$$s = DdB(x,\theta)(u,u) = \frac{d^2}{dt^2}_{|t=0} B(\sigma(t),\theta) = 0$$

car $t \to B(\sigma(t),\theta)$ est une fonction affine. Calculons maintenant r : soit $v \in u^\perp$. Soit $\sigma(t)$ la géodésique telle que $\sigma'(0) = v$. Alors

$$r = DdB(x,\theta)(v,v) = \frac{d^2}{dt^2}_{|t=0} B(\sigma(t),\theta).$$

Pour calculer cette dérivée seconde, on identifie l'espace hyperbolique $\tilde{X}$ avec le modèle du demi-espace de Poincaré $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^{n-1}$ en envoyant x sur le point $(1,0,\ldots,0)$ et θ sur ∞, et v sur le vecteur tangent $(0,1,0,\ldots,0)$. Alors la fonction de Busemann $x \to B(x,\theta)$ s'identifie à la fonction

$$(y,x_1,\ldots,x_{n-1}) \to -\log(y) + C,$$

où C est une constante. Par ailleurs la géodésique $\sigma(t)$ s'identifie à une courbe $c(t)$ qui décrit le demi-cercle centré en 0 passant par le point $(1,0,\ldots,0)$ et située dans le plan $(x_2,\ldots,x_{n-1}) = 0$. On a donc

$$c(t) = (\cos(a(t)), \sin(a(t)), 0, \ldots, 0),$$

où $a(t)$ est une fonction telle que $a(0) = 0$ et $a'(0) = 1$. Donc finalement

$$\begin{aligned} r &= \frac{d^2}{dt^2}_{|t=0} (-\log(\cos(a(t)))) \\ &= \frac{d}{dt}_{|t=0} \left(\frac{\sin(a(t))a'(t)}{\cos(a(t))} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc

$$DdB(x,\theta) = g_0(x)_{|u^\perp} = g_0(x) - dB(x,\theta) \otimes dB(x,\theta).$$

□

3.2.2 Comportement de $\lambda_1(g)$ dans la tranche d'Ebin :

On considère (X, g_0) une variété hyperbolique réelle.

Définition 3.8 ([BCG2] et [Be1]). *On définit la tranche d'Ebin de g_0 comme l'espace des métriques g sur X qui s'écrivent*

$$g = g_0(e^H \cdot, \cdot)$$

où H est une section du fibré des endomorphismes symétriques du fibré tangent de X muni de la métrique g_0, qui vérifie les conditions
(i) $\mathrm{trace}(H) = 0$,
(ii) $\delta H = 0$.

Dans cette définition, la section H peut s'identifier à un vecteur tangent à l'espace des métriques au point g_0. La condition (i) signifie alors que H est orthogonale à la classe conforme de g_0, tandis que la condition (ii) signifie que H est orthogonale à l'orbite de g_0 sous l'action des difféomorphismes de X.

Notons aussi que pour une métrique g dans la tranche d'Ebin de g_0, les mesures riemanniennes induites par g et g_0 sont les mêmes (car $\det(e^H) = 1$). Rappelons aussi que la condition $\delta H = 0$ revient à dire que pour tout champ de vecteurs X, on a

$$\int_X (H, DX)dx = 0,$$

ou encore, en notant $h = g_0(H \cdot, \cdot)$, pour toute 1-forme α sur X, on a

$$\int_X (h, D\alpha)dx = 0.$$

Ici, on utilise la notation $(\cdot, \cdot)$ pour désigner les produits scalaires ponctuels induits par g_0 sur les fibrés des endomorphismes de TM et des formes bilinéaires sur TM.

Le théorème suivante permet d'étudier le comportement de $\lambda_1(g)$ dans la tranche d'Ebin.

Théorème 3.9. *Soit (X, g_0) une variété hyperbolique réelle de dimension $n \geq 3$. Il existe un C^0 voisinage $\mathcal{V}$ de g_0 dans la tranche d'Ebin tel que pour toute métrique $g \in \mathcal{V}$ et pour toute famille équivariante de mesures μ équivalente à P, on ait*

$$\mathcal{R}_g(\mu) \geq \mathcal{R}_{g_0}(P).$$

Par conséquent, on a

$$\lambda_1(g) \geq \lambda_1(g_0) = \frac{(n-1)^2}{4}.$$

De plus, l'égalité $\lambda_1(g) = \lambda_1(g_0)$ *est atteinte si et seulement si* $g = g_0$.

Démonstration. Soit $g = g_0(e^H \cdot, \cdot)$ dans la tranche d'Ebin, et soit μ une famille équivalente à P. On sait que le quotient de Rayleigh $\mathcal{R}_g(\mu)$ est invariant si on renormalise μ par une constante multiplicative, donc on peut supposer quitte à renormaliser que

$$\int_{X_0} \mu_x(\partial\Gamma)dx = 1.$$

On peut écrire

$$\frac{d\mu_x}{dP_x}(\theta) = e^{-f(x,\theta)}.$$

Donc

$$\frac{d\mu_x}{dP_o}(\theta) = e^{-f(x,\theta)-(n-1)B(x,\theta)}.$$

Pour exprimer $\mathcal{R}_g(\mu)$, on a besoin d'écrire le produit scalaire pour g à l'aide de celui pour g_0, noté $(\cdot, \cdot)$, et de e^H : Le produit scalaire ponctuel pour g de deux 1-formes a et b s'écrit :

$$(ae^{-H}, b), \text{ ou aussi } (a, be^{-H}).$$

On a donc (en n'écrivant plus les variables x et θ pour alléger) :

$$\mathcal{R}_g(\mu) = \frac{1}{4}\int_{X_0}\int_{\partial\Gamma} \big((df + (n-1)dB), (df + (n-1)dB)e^{-H}\big)\, d\mu_x(\theta)dx.$$

On rappelle à nouveau que la mesure sur X_0 pour laquelle on intègre est a priori la mesure riemannienne induite par g, mais elle coïncide avec la mesure induite par g_0 qui est notée dx. Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_g(\mu) - \mathcal{R}_{g_0}(P) = \frac{1}{4}\int_{X_0}\int_{\partial\Gamma} \big[&(df, dfe^{-H}) + 2(n-1)(dB, dfe^{-H}) \\ &+(n-1)^2(dB, dB[e^{-H} - \mathrm{id}])\big]\, d\mu_x(\theta)dx.\end{aligned} \tag{3.4}$$

On veut montrer que cette quantité est positive. Dans cette expression, le terme entre crochet s'écrit sous la forme

$$(a, aA) + (b, aB) + (b, bC),$$

où a et b désignent les 1-formes df et dB et A, B, C désignent respectivement les endomorphismes symétriques e^{-H}, $2(n-1)e^{-H}$ et $(n-1)^2[e^{-H} - \mathrm{id}]$. Ce terme entre crochet n'a pas de raison d'être une fonction positive car par exemple, l'endomorphisme $C = (n-1)^2[e^{-H} - \mathrm{id}]$ n'est pas toujours défini positif. On va transformer l'expression (3.4) de manière à ce que le terme entre crochet soit une fonction positive (lorsque H est C^0-proche de 0).

On introduit pour cela la 1-forme α suivante sur $\widetilde{X}$: pour tout vecteur u tangent en x on pose

$$\alpha(x)(u) = \int_{\partial\Gamma} dB(x,\theta)(u)d\mu_x(\theta).$$

On réécrit cela ainsi :

$$\alpha(x) = \int_{\partial\Gamma} dB(x,\theta)e^{-(f+(n-1)B)(x,\theta)}dP_o(\theta).$$

Cette 1-forme passe au quotient et définit une 1-forme sur X. On calcule sa dérivée covariante (pour la métrique g_0) : c'est le 2-tenseur

$$D\alpha(x) = \int_{\partial\Gamma} [DdB - (df + (n-1)dB) \otimes dB]\, d\mu_x(\theta)$$

Comme $(\widetilde{X}, g_0)$ est l'espace hyperbolique de dimension n, on a la relation

$$DdB = g_0 - dB \otimes dB.$$

Donc

$$D\alpha(x) = \int_{\partial\Gamma} [g_0 - df \otimes dB - ndB \otimes dB]\, d\mu_x(\theta).$$

On sait que la divergence d'une 1-forme sur X est d'intégrale nulle. La divergence de la 1-forme α peut s'écrire $\mathrm{trace} D\alpha$. Par ailleurs, $\mathrm{trace}(g_0 - ndB \otimes dB) = 0$, donc en appliquant la trace à l'équation précédente on obtient

$$\int_{X_0}\int_{\partial\Gamma} (df, dB)d\mu_x(\theta)dx = -\int_X \mathrm{trace} D\alpha = 0. \tag{3.5}$$

D'autre part, on contracte $D\alpha$ avec le 2-tenseur $h = g_0(H\cdot,\cdot)$ et on intègre sur X. Comme $\delta H = 0$ et comme $(h, g_0) = \mathrm{trace} H = 0$, on obtient la relation

$$0 = -\int_X (h, D\alpha) = \int_{X_0}\int_{\partial\Gamma} [(dB, df H) + n(dB, dBH)]\, d\mu_x(\theta) dx \qquad (3.6)$$

Alors en combinant l'expression (3.4) avec les relations (3.5) et (3.6) on obtient l'expression

$$\mathcal{R}_g(\mu) - \mathcal{R}_{g_0}(P) =$$

$$\frac{1}{4}\int_{X_0}\int_{\partial\Gamma} \Big[(df, df e^{-H}) + 2(n-1)(dB, df[e^{-H} - \mathrm{id} + \frac{(n-1)}{2n}H]) \\ +(n-1)^2(dB, dB[e^{-H} - \mathrm{id} + H])\Big]\, d\mu_x(\theta) dx. \qquad (3.7)$$

Cette fois le terme entre crochet est une fonction positive lorsque H est C^0-proche de 0. Pour voir cela, on écrit ce terme sous la forme

$$[(a, aA) + (b, aB) + (b, bC)],$$

où $a = df$, $b = dB$, et

$$\begin{aligned} A &= e^H \\ B &= 2(n-1)[e^{-H} - \mathrm{id} + \frac{n-1}{2n}H] \\ C &= (n-1)^2[e^{-H} - \mathrm{id} + H] \end{aligned}$$

Les endomorphismes A, B, C sont symétriques, et A est défini positif. On peut alors mettre le terme entre crochet sous une forme canonique de la manière suivante

$$\begin{aligned} [(a, aA) + (b, aB) + (b, bC)] &= (aA^{\frac{1}{2}}, aA^{\frac{1}{2}}) + (bBA^{-\frac{1}{2}}, aA^{\frac{1}{2}}) + (b, bC) \\ &= \left|aA^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}bBA^{-\frac{1}{2}}\right|^2 - \frac{1}{4}\left|bBA^{-\frac{1}{2}}\right| + (b, bC) \\ &= \left|aA^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}bBA^{-\frac{1}{2}}\right|^2 + \frac{1}{4}(b, b[4C - BA^{-1}B]), \end{aligned}$$

et on peut voir que l'endomorphisme $(4C - BA^{-1}B)$ est symétrique positif. En effet, soit $x \in \widetilde{X}$ et soit (e_i) une base de $T_x\widetilde{X}$ qui diagonalise H et soit (λ_i) les valeurs propres associées. Alors,

– (e_i) diagonalise A et les valeurs propres sont $e^{-\lambda_i} = 1 + o(1)$,
– (e_i) diagonalise B et les valeurs propres sont $2(n-1)[e^{-\lambda_i} - 1 + \frac{n-1}{2n}\lambda_i] = -\frac{(n-1)(n+1)}{n}\lambda_i + o(\lambda_i)$,
– (e_i) diagonalise C et les valeurs propres sont $(n-1)^2[e^{-\lambda_i} - 1 + \lambda_i] = (n-1)^2[\frac{\lambda_i^2}{2} + o(\lambda_i^2)]$

donc (e_i) diagonalise $4C - BA^{-1}B$ et les valeurs propres ont pour développement limité
$$(n-1)^2 \left[2 - \frac{(n+1)^2}{n^2}\right] \lambda_i^2 + o(|\lambda_i|^2)$$
Elles sont bien positives lorsque H est C^0-proche de 0 et $n \geq 3$. D'où
$$\mathcal{R}_g(\mu) - \mathcal{R}_{g_0}(P) \geq 0.$$

Cas d'égalité : Supposons maintenant que
$$\lambda_1(g) = \frac{(n-1)^2}{4}.$$
On doit montrer que si H est suffisament C^0-proche de 0, alors $H = 0$.

Par hypothèse, il existe une suite μ^k de familles équivariantes de mesures équivalentes à P, normalisées, telles que
$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{R}_g(\mu^k) - \mathcal{R}_{g_0}(P) = 0.$$
Soit f_k tel que
$$\frac{d\mu_x^k}{dP_x}(\theta) = e^{-f_k(x,\theta)}.$$
Ecrivons à nouveau l'équation (3.7)
$$\mathcal{R}_g(\mu^k) - \mathcal{R}_{g_0}(P) =$$
$$\frac{1}{4}\int_{X_0}\int_{\partial\Gamma}\Big[(df_k, df_k e^{-H}) + 2(n-1)(dB, df_k[e^{-H} - \mathrm{id} + \frac{(n-1)}{2n}H]) + (n-1)^2(dB, dB[e^{-H} - \mathrm{id} + H])\Big]\, d\mu_x^k(\theta)dx.$$
Comme on la vu précédemment le terme entre crochet s'écrit sous la forme
$$(a, aA) + (b, aB) + (b, bC),$$

et il est positif si H est suffisamment C^0-proche de 0. On peut également montrer par le même raisonnement la chose plus générale suivante : si η est un nombre positif suffisamment petit et si on suppose H suffisamment C^0-proche de 0, alors le terme

$$(1-\eta)(a,aA)+(b,aB)+(1-\eta)(b,bC)$$

est positif. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}(a,aA)+(b,aB)+(b,bC)=&\eta(a,aA)+\eta(b,bC)\\&+(1-\eta)(a,aA)+(b,aB)+(1-\eta)(b,bC)\end{aligned}$$

De plus, comme $A=e^{-H}$ et $C=e^{-H}-\mathrm{id}+H$, on en déduit que les endomorphismes $A-\frac{1}{2}\mathrm{id}$ et $C-\frac{1}{4}H^2$ sont symétriques positifs en supposant qu'on ait pris H suffisamment C^0-proche de 0. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}(a,aA)+(b,aB)+(b,bC)=&\eta(a,a(A-\frac{1}{2}\mathrm{id})+\eta(b,b(C-\frac{1}{4}H^2)\\&+(1-\eta)(a,aA)+(b,aB)+(1-\eta)(b,bC)\\&+\frac{\eta}{2}|a|^2\\&+\frac{\eta}{4}|bH|^2,\end{aligned}$$

et dans le terme de droite, chaque ligne est positive. On peut alors intégrer cette équation et faire tendre k vers $+\infty$, on sait alors que le membre de gauche tends vers zéro, donc les termes du membre de droite, qui sont positifs, tendent vers zéro, et en particulier les deux derniers, ce qui donne :

$$\lim_{k\to\infty}\int_{X_0}\int_{\partial\Gamma}|df_k(x,\theta)|^2d\mu_x^k(\theta)dx=0,$$

et

$$\lim_{k\to\infty}\int_{X_0}\int_{\partial\Gamma}|dB(x,\theta)H|^2d\mu_x^k(\theta)dx=0.$$

Considérons alors la suite des mesures $d\mu_x^k(\theta)dx$ sur le compact $\widetilde{X}\times\partial\Gamma$. Ces mesures sont invariantes pour l'action diagonale de Γ et induisent des mesures finies sur le quotient qui est compact. De plus, ces mesures sont de masse 1, et on peut donc extraire une sous-suite qui converge faiblement vers une certaine mesure finie que l'on va noter m pour l'instant. On peut voir m comme une mesure Γ-invariante sur $\widetilde{X} \times \partial\Gamma$. On a donc

$$\int_{X_0} \int_{\partial\Gamma} |dB(x,\theta)H|^2 dm(x,\theta) = 0.$$

Si m est une mesure qui charge les ouverts, alors cela veut dire que $dB(x,\theta)H = 0$ pour tout (x,θ), et donc $H = 0$. Donc, pour conclure la preuve, il suffit de montrer que m charge les ouverts. Nous allons voir que c'est bien le cas en montrant qu'en fait m n'est autre que la mesure $dP_x(\theta)dx$ (qui charge les ouverts, bien sûr).

Soit c une fonction sur $\widetilde{X} \times \partial\Gamma$ de classe C^2, i.e telles que ses dérivées premières et secondes pour la variable x sont des fonctions continues de (x,θ). On note Δc le laplacien de c pour la variable x induit par la métrique g_0. La mesure $dP_x(\theta)dx$ est une mesure harmonique pour le feuilletage stable (voir [G]), ce qui signifie qu'on a

$$\int_{\widetilde{X} \times \partial\Gamma} \Delta c(x,\theta) dP_x(\theta) dx = 0$$

pour toute fonction c à support compact. Cela se vérifie facilement en écrivant $dP_x(\theta)dx = \exp(-(n-1)B(x,\theta))dP_o(\theta)dx$. Dans [L4] ou dans [G], on montre qu'il n'y a qu'une seule mesure harmonique pour le feuilletage stable. Il nous suffit donc de montrer que m est harmonique pour le feuilletage stable : Pour toute fonction c, de classe C^2, à support compact, on peut écrire (en omettant les variables x et θ pour alléger)

$$\int_{\widetilde{X} \times \partial\Gamma} \Delta c dm = \lim_k \int_{\widetilde{X}} \int_{\partial\Gamma} \Delta c \exp(-f_k - (n-1)B) dP_o(\theta) dx.$$

Or,

$$\begin{aligned}
&\int_{\widetilde{X}} \int_{\partial\Gamma} \Delta c \exp(-f_k - (n-1)B) dP_o(\theta) dx \\
&= \int_{\widetilde{X}} \int_{\partial\Gamma} \left(dc, de^{-f_k-(n-1)B}\right) dP_o(\theta) dx \\
&= \int_{\widetilde{X}} \int_{\partial\Gamma} \left[\left(e^{-f_k} dc, de^{-(n-1)B}\right) + (dc, -df_k)\, e^{-f_k-(n-1)B}\right] dP_o(\theta) dx \\
&= \iint \left(d(ce^{-f_k}), de^{-(n-1)B}\right) dP_o(\theta) dx + \iint (df_k, c(n-1)dB - dc)\, d\mu_x^k(\theta) dx.
\end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, le premier terme est nul car $\Delta e^{-(n-1)B} = 0$, et le deuxième tend vers zéro quand k tend vers l'infini, car comme c et dc sont bornées et à support compact, on peux utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz et majorer ce terme par une constante fois

$$\left(\int_{X_0}\int_{\partial\Gamma} |df_k|^2 d\mu_x^k(\theta)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

qui tend vers zéro, comme on l'a vu avant. Donc

$$\int_{\widetilde{X}\times\partial\Gamma} \Delta c dm = 0,$$

donc m est harmonique pour le feuilletage stable, ce qui termine la preuve. □

Remarque : La théorème 3.9 est inspiré de la proposition 4.1 dans [BCG2], qui affirme que g_0 est un minimum local strict dans sa tranche d'Ebin pour l'invariant $T_2(g)$ qui peut être défini ici par

$$T_2(g) = \inf\{R(\mu), \mu \text{ équivalente à } P, \text{ et } \mu_x(\partial\Gamma) = 1 \text{ pour tout } x\}.$$

Mais on a $\lambda_1(g) \leq T_2(g)$, et donc la proposition 4.1 de [BCG2] seule ne suffit pas à traiter le cas de $\lambda_1(g)$.

Comportement de $\lambda_1(g)$ dans la classe conforme (cf [BCG3]) : Maintenant on va étudier le comportement de $\lambda_1(g)$ dans la classe conforme de g_0 : Soit g une métrique conforme à g_0, différente de g_0 mais de même volume que g_0. Elle s'écrit

$$g = k^2 g_0,$$

où k est une fonction telle que $\int_X k^n = \mathrm{Vol}(g_0)$. Pour toute 1-forme α sur X, le carré scalaire de α pour g s'écrit :

$$k^{-2}|\alpha|^2.$$

Dans la proposition suivante, on compare les quotients de Rayleigh de P selon les métriques g et g_0 :

Proposition 3.10. *Soit g une métrique conforme à g_0 et de même volume, mais différente de g_0. Alors on a*

$$\mathcal{R}_g(P) < \mathcal{R}_{g_0}(P),$$

Démonstration. Comme g_0 est une métrique hyperbolique, l'application $x \to P_x(\partial\Gamma)$ est constante. Par conséquent, on a

$$\mathcal{R}_g(P) = \frac{(n-1)^2}{4} \int_X k(x)^{n-2} dx / \int_X dx,$$

donc, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\mathcal{R}_g(P) < \frac{(n-1)^2}{4} = \mathcal{R}_{g_0}(P).$$

□

Corollaire 3.11. *$\lambda_1(g)$ est un maximum strict au point g_0 dans la classe conforme de g_0 à volume constant.*

Chapitre 4

Rigidité du spectre marqué dans la classe conforme d'une métrique

Soit X une variété compacte et soit Γ son groupe fondamental. Chaque classe de conjugaison non triviale de Γ correspond à une classe d'homotopie libre de lacets dans X. Si X est muni d'une métrique riemannienne g, chaque classe d'homotopie libre contient au moins une géodésique fermée de longueur minimal (cette géodésique est unique si g est à courbure strictement négative). Le spectre marqué des longueurs de g est l'application qui à une classe d'homotopie libre associe le minimum des longueurs des lacets dans cette classe.

On dira qu'une métrique g sur X est rigide pour le spectre marqué des longueurs si pour toute métrique g' ayant le même spectre marqué des longueurs que g, alors g et g' sont isométriques. On dira que g est infinitésimalement rigide pour le spectre marqué des longueurs si toute déformation lisse de la métrique qui fixe le spectre marqué des longueurs est triviale à isométrie près.

Sur n'importe quelle variété compacte X il existe des métriques qui ne sont pas infinitésimalement rigides pour le spectre marqué des longueurs, comme par exemple des métriques telles qu'il existe un ouvert de X dans lequel ne passe aucune géodésique fermée minimisante ("un gros champignon !"). Cependant, ces exemples de métriques ne sont pas à courbure strictement négative. Une question ouverte est de savoir si une métrique à courbure strictement négative sur X est rigide pour le spectre marqué des longueurs.

Concernant cette question, Guillemin et Kazdhan ont d'abord démontré en 1980 qu'une métrique à courbure strictement négative sur une surface compacte est infinitésimalement rigide pour le spectre marqué des longueurs ([GK]). Puis en 1990, Otal et Croke ont démontré indépendamment l'un de l'autre qu'une métrique à courbure strictement négative sur une surface compacte est rigide pour le spectre marqué des longueurs ([O] et [C]), ce qui renforce le résultat précédent. En 1998, Croke et Sharafutdinov on démontré qu'une metrique à courbure strictement négative sur une variété compacte de dimension quelconque est infinitésimalement rigide ([CS]), ce qui généralise encore le résultat de Guillemin et Kazdhan.

Ici nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Soit g et g' deux métriques conformes sur X, à courbure strictement négative et ayant le même spectre marqué des longueurs. Alors elles sont égales.*

Démonstration. Soit B et B' les cocycles de Busemann associés aux métriques g et g'. Comme g et g' ont le même spectre marqué des longueurs, cela signifie que les périodes des cocycles B et B' sont égales. D'après le théorème de Livsic, il existe une fonction $F : \tilde{X} \times \partial\tilde{X} \to \mathbb{R}$, Γ-invariante, telle que telle que

$$B'_\theta(x,y) = B_\theta(x,y) + F(x,\theta) - F(y,\theta).$$

Les fonctions B et B' sont dérivables pour la variable x et leurs dérivées dB et dB' ne dépendent pas de la variable y et sont continues pour les variables x,θ et Γ-invariantes. On peut écrire

$$|\nabla B'(x,\theta)|_g^2 = |\nabla B(x,\theta)|_g^2 + |\nabla F(x,\theta)|_g^2 + 2g(\nabla B(x,\theta), \nabla F(x,\theta)), \quad (4.1)$$

où ∇ désigne l'opérateur gradiant pour la métrique g

Comme g et g' sont conformes, cela signifie qu'il existe une fonction $\lambda : X \to \mathbb{R}$, C^∞ et strictement positive, telle que

$$g' = \lambda^2 g.$$

Notons ∇f et $\nabla' f$ les gradiants pour les métriques g et g' d'une fonction f sur X. On a pour toute fonction dérivable f sur X :

$$\nabla' f = \lambda^{-2}\nabla f,$$

et donc

$$|\nabla' f|_{g'} = \lambda^{-4}|\nabla f|_{g'} = \lambda^{-2}|\nabla f|_g.$$

Nous noterons T^1X le fibré unitaire tangent de X pour la métrique g. Soit *liou* la mesure de Liouville sur T^1X. Rappelons qu'elle est invariante pour l'action du flot géodésique sur T^1X (voir section 5.3 dans l'annexe). En identifiant T^1X au quotient de $\tilde{X} \times \partial\tilde{X}$ par l'action de Γ, on peut intégrer (4.1) sur T^1X pour la mesure *liou* :

$$\int |\nabla B'(x,\theta)|_g^2 dliou(x,\theta) = \int |\nabla B(x,\theta)|_g^2 dliou(x,\theta) \\ + \int |\nabla F(x,\theta)|_g^2 dliou(x,\theta) + 2\int g(\nabla B(x,\theta), \nabla F(x,\theta)) dliou(x,\theta). \quad (4.2)$$

Or la dernière intégrale est nulle car la quantité $g(\nabla B(x,\theta), \nabla F(x,\theta))$ est égale à la dérivée de la fonction F dans la direction du flot géodésique (F est vue ici comme une fonction sur T^1X), et donc son intégrale est nulle puisque la mesure *liou* est invariante par le flot géodésique. De plus on a

$$|\nabla B(x,\theta)|_g = 1,$$

et

$$|\nabla B'(x,\theta)|_g = \lambda^2(x)|\nabla' B'(x,\theta)|_{g'} = \lambda^2(x),$$

et donc en remplaçant dans (4.2) on a que

$$\int_{T^1X} \lambda^2(x) dliou(x,\theta) \geq \int_{T^1X} dliou(x,\theta).$$

comme la mesure image de *liou* par la projection $T^1X \to X$ est la mesure riemannienne, que nous noterons v_g, on a donc

$$\int_X \lambda^2 dv_g \geq Vol(X,g).$$

D'après l'inégalité de Hölder, on peut écrire

$$\left(\int_X \lambda^n dv_g\right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_X dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}} \geq Vol(X,g)$$
$$Vol(X,g')^{\frac{2}{n}} Vol(X,g)^{\frac{n-2}{n}} \geq Vol(X,g)$$
$$Vol(X,g') \geq Vol(X,g).$$

Or comme g et g' joue le même rôle au départ, cette dernière inégalité est une égalité

$$Vol(X,g) = Vol(X,g').$$

Donc l'intégrale
$$\int_{T^1X} |\nabla F(x,\theta)|_g^2 dliou(x,\theta) = 0.$$
donc $\nabla F = 0$ donc pour tout θ, $x \to F(x,\theta)$ est constante. Donc la fonction F est constante car elle est continue, Γ-invariante et que l'orbite $\Gamma\theta$ est dense dans dX pour tout θ. Donc $B = B'$, et donc $g = g'$. $\square$

Chapitre 5

Annexe

5.1 Espaces de Hadamard à courbure pincée par deux constantes strictements négative, triangles géodésiques, convexité de la distance

Soit $\tilde{X}$ une variété complète simplement connexe à courbure pincée entre deux constantes $k' < k$ strictement négatives. Nous allons rappeler certaines propriétés bien connues pour une telle variété. Notons $\partial\tilde{X}$ le bord géométrique de $\tilde{X}$

Proposition 5.1. *Soient $(x_t), (y_t)$ deux rayons géodésiques dirigés vers le même point $\theta \in \partial\tilde{X}$. Alors*

$$d(x_t, y_t) \leq d(x_0, y_0) \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Démonstration. Soit $z_n \in \tilde{X}$ une suite qui tend vers $\theta \in \partial\tilde{X}$. Soient $(x_t^n), (y_t^n)$ les rayons géodésiques issues de x_0 et y_0 et dirigés vers z_n. Alors ces deux suites de rayons convergent uniformément sur les compacts vers les deux rayons (x_t) et (y_t). Il nous suffit donc de montrer que

$$d(x_t^n, y_t^n) \leq d(x_0, y_0) \text{ pour } t \in [0, \inf\{d(x_0, z_n), d(y_0, z_n)\}],$$

or comme $\tilde{X}$ vérifie le critère de comparaison T_0 selon [GH] (chapitre 3, p 49), alors on peut se ramener à montrer l'inégalité dans le cas où $\tilde{X} = \mathbb{R}^2$ ce qui est sans difficulté. $\square$

Proposition 5.2 (voir [GH], chapitre 3, corollaire 10)**.** *Il existe une constante δ telle que pour tout triangle géodésique (x, y, z) dans $\tilde{X}$ et pour tout point w situé sur le côté $[x, y]$, on a*

$$d(w, [y, z] \cup [z, x]) \leq \delta.$$

(On dit que $\tilde{X}$ est δ-hyperbolique.)

Notons H_k le plan hyperbolique de courbure constante égale à $k < 0$.

Proposition 5.3. *Soit $a, b \in]0, \pi]$, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout triangle géodésique (x, y, z) dans $\tilde{X}$, si les angles au sommets x, y sont respectivement $\geq a$ et $\geq b$, alors*

$$d(x, y) \leq \delta.$$

Démonstration. Soit (x', y', z') le triangle de comparaison correspondant dans H_k, alors les angles au sommets x', y' sont à nouveau respectivement $\geq a$, et $\geq b$ (voir [GH], chapitre 3, théorème 12). On s'est donc ramené à prouver la proposition dans le cas $\tilde{X} = H_k$, ce qui est sans difficulté. □

Proposition 5.4. *Pour tout $a \in]0, \pi]$, il existe une constante δ telle que pour tout triangle géodésique (x, y, z) dans $\tilde{X}$ tel que l'angle au sommet x soit $\geq a$, alors la distance entre x et le coté opposé $[y, z]$ est inférieure à δ. Par conséquent, si $y, z \in \tilde{X}$ alors*

$$d(y, z) \geq d(y, x) + d(x, z) - 2\delta.$$

Démonstration. Comme l'angle au sommet x est $\geq a$, on peut trouver un point w sur le côté $[y, z]$ tel que

$$\measuredangle_x(y, w) \geq a/2 \text{ et } \measuredangle_x(z, w) \geq a/2.$$

Maintenant, comme y, w, z sont alignés dans cet ordre, alors au moins l'un des deux angles suivants est $\geq \pi/2$:

$$\measuredangle_w(x, y) \geq \pi/2 \text{ ou } \measuredangle_w(x, z) \geq \pi/2.$$

Plaçons nous par exemple dans le cas où $\measuredangle_w(y, x) \geq \pi/2$, nous pouvons alors appliquer la proposition précédente 5.3 au triangle (x, y, w), où les angles qui bordent le côté $[x, w]$ sont $\geq a/2$ et $\geq \pi/2$: il existe une constante δ ne dépendant que de a et de $\tilde{X}$, telle que $d(x, w) \leq \delta$, ce qui prouve la première affirmation de la proposition. La deuxième affirmation s'en déduit facilement. □

Proposition 5.5. *Pour tout $\epsilon_0 > 0$ il existe $\lambda(\epsilon_0)$ tel que si x, y vérifient $d(x, y) \leq \epsilon_0$, et si (x_t) et (y_t) sont deux rayons géodésiques issus de x et y, (paramétrés à vitesse 1) et qui se rejoignent en un point $z = x_T = y_T$, alors pour tout $t \in [0, T]$, on a*

$$d(x_t, y_t) \leq d(x, y)e^{-\lambda(\epsilon_0)t}.$$

(Remarquons que la constante $\lambda(\epsilon_0)$ ne dépend pas du temps T où les deux géodésiques se rejoignent.)

Démonstration. Comme $\tilde{X}$ vérifie le critère de comparaison T_k selon [GH] (chapitre 3, p 49), on introduit le triangle de comparaison (x', y', z') dans H_k et on se ramène à démontrer la proposition dans H_k, ce qui ne pose pas de grandes difficultés. □

Corollaire 5.6. *Si (x_t) et (y_t) sont deux rayons géodésiques issus de deux points x et y, et dirigés vers un même point à l'infini θ (autrement dit, les deux rayons sont à distance de Hausdorff bornée), alors il existe un unique réel $B_\theta(x, y)$ tel que*

$$\lim_{+\infty} d(x_{B_\theta(x,y)+t}, y_t) = 0.$$

De plus, pour tout ϵ_0 il existe $\lambda(\epsilon_0)$ tel que si $d(x, y) < \epsilon_0$ et si $B_\theta(x, y) = 0$, alors pour tout $t \geq 0$, on a

$$d(x_t, y_t) \leq d(x, y)e^{-\lambda(\epsilon_0)t}.$$

Démonstration. Posons A égal à la distance de Hausdorff entre les deux rayons géodésiques. On étend le rayon géodésique (x_t) en une géodésique entière (i.e. on s'autorise à considérer x_t pour $t < 0$). On considère le projeté de y sur la géodésique (x_t) : ce projeté s'écris x_s pour un certain réel s et on a $d(x_s, y) \leq A$. Pour tout entier $n > 0$, considérons le point y_n sur le rayon issu de y. D'après la proposition 5.1, $d(y_n, x_{s+n} \leq A$. Montrons qu'il existe $s_n \in [s - A, s + A]$ tel que $d(x_{s_n}, y_n) = n$: pour faire cela, on constate que $d(x_{s-A}, y_n) \geq n$ (car $d(x_{s-A}, y_n) \geq d(x_{s-A}, x_{s+n}) - d(x_{s+n}, y_n) \geq A + n - A = n$), puis on constate que $d(x_{s+A}, y_n) \leq n$ (car $d(x_{s+A}, y_n) \leq d(x_{s+A}, x_{s+n}) + d(x_{s+n}, y_n) \leq n - A + A = n$), puis on applique le théorème des valeurs intermédiaires, et on trouve le s_n cherché. Ainsi, en faisant tendre n vers l'infini, et quitte à extraire une sous suite, le point x_{s_n} converge vers un point que l'on note $x_{B_\theta(x,y)}$ où $B_\theta(x, y)$ est un réel. De plus, les segments géodésiques $[x_{s_n}, y_n]$ convergent uniformément sur les compacts vers le rayon géodésique $(x_{B\theta(x,y)+t})$. Donc en appliquant la proposition précédente 5.5 avec les deux rayons géodésiques issus de x_{s_n} et y, et qui se rejoignent au point y_n, et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$d(x_{B_\theta(x,y)+t}, y_t) \leq d(x_{B_\theta(x,y)}, y)e^{-\lambda(2A)t},$$

ce qui tend bien vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Enfin, si de plus $d(x,y) < \epsilon_0$, et si $B_\theta(x,y) = 0$, alors s_n tend vers 0 et x_{s_n} tend vers x, et $d(x_{s_n}, y) < \epsilon_0$ pour n assez grand, et donc lorsqu'on passe à la limite, on peut écrire

$$d(x_t, y_t) \leq d(x,y)e^{-\lambda(\epsilon_0)t}.$$

□

Proposition 5.7. *Il existe des constantes $M > 0$, $a > 0$ telles que si (x_t) et (y_t) sont deux rayons géodésiques engendrés par deux vecteurs unitaires u et v basés en un même point $x \in \tilde{X}$ et si on pose $\alpha = \measuredangle(u,v)$, alors*

$$d(x_t, y_t) \leq \alpha M e^b t.$$

Démonstration. Soit $(u_s)_{s\in[0,\alpha]}$ un arc de cercle dans $T^1_x\tilde{X}$, paramétré par l'angle, et qui relie u et v. Soit (x^s_t) le rayon géodésique engendré par u_s. Le champs de vecteur $t \to \frac{\partial}{\partial s}x^s_t$ le long du rayon géodésique $t \to (x^s_t)_{t\geq 0}$ est un champ de Jacobi, et la courbure est minorée par $k' < 0$, donc d'après le théorème de comparaison de Rauch (cf [CE], p 29), la norme du champ de Jacobi $\|\frac{\partial}{\partial s}x^s_t\|$ est majorée par la norme du champ de jacobi correspondant dans le plan hyperbolique à courbure k' qu'on peut calculer explicitement et qui vaut $\frac{1}{\sqrt{|k'|}}\sinh(\sqrt{|k'|}t)$, et donc on obtient

$$\|\frac{\partial}{\partial s}x^s_t\| \leq \frac{1}{\sqrt{|k'|}}\sinh(\sqrt{|k'|}t).$$

D'où il vient pour tout $t > 0$

$$d(x_t, y_t) \leq \int_0^\alpha \|\frac{\partial}{\partial s}x^s_t\|ds \leq \alpha\frac{1}{\sqrt{|k'|}}\sinh(\sqrt{|k'|}t) \leq \alpha\frac{1}{\sqrt{|k'|}}e^{\sqrt{|k'|}t},$$

d'où le résultat.

□

5.2 Le lemme de spécification

Soit X une variété compacte à courbure strictement négative. Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement universel et soit Γ le groupe fondamental de X, vu comme un sous-groupe du groupe des isométries de $\tilde{X}$. Soit $\partial\tilde{X}$ le bord à l'infini de $\tilde{X}$. L'espace $\tilde{X} \cup \partial\tilde{X}$ est naturellement compact. Notons $\pi : T^1X \to X$ et $\pi : T^1\tilde{X} \to \tilde{X}$ les fibrés unitaires tangents de X et $\tilde{X}$ et notons à nouveau $p : T^1\tilde{X} \to T^1X$ l'application induite par le revêtement. Notons (ϕ_t) les flots géodésiques sur T^1X et $T^1\tilde{X}$. Enfin, pour tout $v \in T^1\tilde{X}$, notons $v(\infty)$ le point de $\partial\tilde{X}$ induit par le rayon géodésique engendré par v.

5.2.1 Densité des géodésiques périodiques

Rappelons sans démonstration les propriétés suivantes :

- Si ξ et θ sont deux points distincts dans $\partial\tilde{X}$, alors ils sont les extrémités d'une unique géodésique dans $\tilde{X}$ notée $(\xi\theta)$. Notons $\partial^2\tilde{X}$ l'ensemble des couples de points distincts dans $\partial\tilde{X}$.
- Soit une suite $(\xi_n, \theta_n) \in \partial^2\tilde{X}$, et une suite (x_n) telle que $x_n \in (\xi_n\theta_n)$. Si ξ_n tend vers ξ, θ_n vers θ et x_n vers x, alors $x \in (\xi\theta) \cup \{\xi, \theta\}$, ou bien $x = \xi = \theta$.
- Pour chaque isométrie non triviale $\gamma \in \Gamma$, il existe deux points γ_+ et $\gamma_- \in \partial\tilde{X}$ tels que γ fixe γ_- et γ_+, et agisse sur la géodésique $(\gamma_-\gamma_+)$ par translation dans la direction de γ_+. Cette géodésique induit une géodésique périodique dans X. De plus, si U et V sont des voisinages de γ_- et γ_+ dans $\partial\tilde{X}$, alors il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $\gamma^n(\partial\tilde{X} \setminus U) \subset V$, et $\gamma^{-n}(\partial\tilde{X} \setminus V) \subset U$.
- Si γ et α sont deux éléments non triviaux de Γ, et si $\gamma_- = \alpha_-$, alors $\gamma_+ = \alpha_+$, et il existe deux entiers m, n tels que $\gamma^n = \alpha^m$.

Le but de cette section est d'établir la proposition suivante :

Proposition 5.8. *l'ensemble* $\{(\gamma_-, \gamma_+) | \gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}\}$ *est dense dans* $\partial^2\tilde{X}$.

Lemme 5.9. *l'ensemble* $\{\gamma_+ | \gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}\}$ *est dense dans* $\partial\tilde{X}$.

Démonstration. Soit $\theta \in \partial\tilde{X}$. On doit trouver une suite γ_n telle que γ_{n+} converge vers θ. Soit $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}$. Soit $x \in (\gamma_-\gamma+)$. Soit une suite $(\alpha_n) \in \Gamma$ telle que $\alpha_n(x)$ converge vers θ. On pose $\gamma_n = \alpha_n\gamma\alpha_n^{-1}$, ainsi $\alpha_n(x) \in (\gamma_{n-}, \gamma_{n+})$. On peut supposer quitte à extraire que les deux suites γ_{n-} et γ_{n+} convergent. Alors l'une de ces deux limites est θ, ce qu'on voulait (quitte à remplacer γ_n par γ_n^{-1}) $\square$

Preuve de la proposition. Soit U et U' deux ouverts dans $\partial\tilde{X}$. On veut montrer qu'il existe un élément non trivial $\gamma \in \Gamma$ ayant un premier point fixe dans U et le deuxième dans U'. On peut supposer que U et U' sont disjoints, et qu'ils sont homéomorphes à des boules. D'après le lemme, il existe α et $\alpha' \in \Gamma$ tels que $\alpha_+ \in U$ et $\alpha'_+ \in U'$. Alors $\alpha_- \neq \alpha'_-$ et il existe des voisinages disjoints V et V', de α_- et α'_-. Comme $U' \subset \partial\tilde{X} \setminus U$, alors pour tout entier n assez grand, on a

$$\alpha^{-n}(U') \subset V,$$

et comme $V \subset \partial\tilde{X} \setminus V'$, on a

$$\alpha'^n\alpha^{-n}(U') \subset U'.$$

On pose donc $\gamma = \alpha'^n\alpha^{-n}$ où n est un entier assez grand, et d'après le théorème du point fixe de Brower, γ admet un point fixe dans U'. De la même manière, en considérant $\gamma^{-1} = \alpha^n\alpha'^{-n}$, on montre que γ admet aussi un point fixe dans U si n est assez grand. □

5.2.2 Densité des feuilles instables

Rappelons sans démonstration les propriétés suivantes :

- Deux géodésiques qui se rejoignent se rapprochent exponentiellement vite : plus précisément pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\lambda(\epsilon)$ tel que si $G = (\xi\theta)$ est une géodésique et si $a(t)$ est une géodésique paramétrée à vitesse 1 sur un intervalle $[0, l]$ (ou $[0, +\infty[$) vérifiant $a(l) \in G$ (ou $\lim_{+\infty} a(t) = \theta$) et si $d(G, a(0)) \leq \epsilon$, alors pour tout $t \in [0, l]$ (ou $[0, +\infty[$) on a
$$d(a(t), G) \leq e^{-\lambda(\epsilon)t}\epsilon. \tag{5.1}$$
- L'application
$$\begin{aligned} T^1\tilde{X} &\to \tilde{X} \times \partial\tilde{X} \\ v &\to (\pi v, v(\infty)) \end{aligned}$$
est un homéomorphisme. Par conséquent, si $\theta \in \partial\tilde{X}$ et $x \in \tilde{X}$, il existe un unique rayon géodésique issu de x et dirigé vers θ.
- Soient $\theta \in \partial\tilde{X}$ et $x, y \in \tilde{X}$, et soit $a, b : [0, +\infty[\to \tilde{X}$ les deux rayons issus de x, y et dirigés vers θ. Alors il existe un unique réel noté $B_\theta(x, y)$ tel que
$$\lim_{t\to\infty} d\left(a(t + B_\theta(x, y)), b(t)\right) = 0.$$
l'application $(x, y, \theta) \to B_\theta(x, y)$ est appelée la fonction de Busemann.

– Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\lambda(\epsilon) > 0$ tel que si $a(t)$ et $b(t)$ sont deux géodésiques paramétrées sur le même intervalle $[0, l[$ (ou $[0, +\infty[$) vérifiant $a(l) = b(l)$ (ou bien $\lim_\infty a(t) = \lim_\infty b(t) = \theta$ et $B_\theta(a(0), b(0)) = 0$), et telles que $d(a(0), b(0)) \leq \epsilon$, alors pour tout $t \in [0, l]$ (ou $[0, +\infty[$), on a

$$d(a(t), b(t)) \leq d(x, y)e^{-t\lambda(\epsilon)}. \tag{5.2}$$

– Soit $o \in T^1\tilde{X}$ une origine quelconque. L'application

$$\begin{aligned} T^1\tilde{X} &\to \partial^2\tilde{X} \times \mathbb{R} \\ v &\to \big(-v(\infty), v(\infty), B_{v(\infty)}(o, \pi v)\big) \end{aligned} \tag{5.3}$$

est un homéomorphisme.

Pour $x \in \tilde{X}$ et $\theta \in \partial\tilde{X}$, notons $\vec{x\theta}$ le vecteur unitaire basé au point x et qui engendre le rayon géodésique dirigé vers θ. Si $\tilde{u} = \vec{x\theta} \in T^1\tilde{X}$, on définit la variété fortement stable de $\tilde{u}$ par

$$W^{ss}(\tilde{u}) = \left\{\vec{y\theta} | B_\theta(x, y) = 0\right\}.$$

Si $u \in T^1X$, on définit

$$W^{ss}(u) = p\left(W^{ss}(\tilde{u})\right),$$

où $\tilde{u}$ est un relevé quelconque de u dans $T^1\tilde{X}$. Si $u \in T^1X$ (où $T^1\tilde{X}$) on définit la variété fortement instable de u par

$$W^{su}(u) = \left\{v | -v \in W^{ss}(-u)\right\}.$$

Si $u, v \in T^1\tilde{X}$ et si $u(\infty) \neq (-v)(\infty)$, alors il existe un unique élément $\in T^1\tilde{X}$ noté $\langle u, v\rangle$ et un unique réel τ tel que $\langle u, v\rangle \in W^{ss}(u)$ et $\phi_\tau\langle u, v\rangle \in W^{su}(v)$. En utilisant l'homéomorphisme (5.3), on a que si $u \simeq (\xi, \theta, t)$ et $v \simeq (\xi', \theta', t')$, alors $\langle u, v\rangle \simeq (\xi', \theta, t)$. En particulier, l'application $(u, v) \to \langle u, v\rangle$ est continue.

Définissons les distances suivantes sur T^1X (et sur $T^1\tilde{X}$) : Si $r > 0$

$$d_r(u, v) = \sup_{s \in [0, r]} d\left(\pi\phi_s u, \pi\phi_s v\right) \text{ pour } u, v \in T^1X, \text{ ou } u, v \in T^1\tilde{X}. \tag{5.4}$$

Choisissons $r > 0$ quelconque. Nous utiliserons la distance d_r sur T^1X et sur $T^1\tilde{X}$, et nous noterons $d = d_r$ pour alléger. La distance d sur T^1X est Lipschitz-équivalente aux distances riemanniennes. De même, la distance d

sur $T^1\tilde{X}$ est Lipschitz-équivalente aux distances riemanniennes induites par des métriques Γ-invariantes sur $T^1\tilde{X}$. La propriété (5.2) entraine immédiatemment que si $u, v \in T^1\tilde{X}$ appartiennent à la même variété fortement stable et si $d(u,v) \leq \epsilon$, alors

$$d(\phi_t u, \phi_t v) \leq d(u,v)e^{-t\lambda(\epsilon)} \text{ pour } t \geq 0. \tag{5.5}$$

Si $\epsilon > 0$ et $\tilde{u} \in T^1\tilde{X}$, on définit

$$W_\epsilon^{ss}(\tilde{u}) = W^{ss}(\tilde{u}) \cap B(\tilde{u}, \epsilon),$$

et si $u \in T^1X$ on définit

$$W_\epsilon^{ss}(u) = p\left(W_\epsilon^{ss}(\tilde{u})\right),$$

où $\tilde{u}$ est un relevé de u dans $T^1\tilde{X}$. On définit de la même manière $W_\epsilon^{su}(u)$ pour $u \in T^1X$ ou $T^1\tilde{X}$.

L'application $(u,v) \to \langle u,v\rangle$ est continue et Γ-équivariante sur son domaine de définition. De plus, pour tout $u \in T^1\tilde{X}$, $\langle u,u\rangle = u$. Donc si $\epsilon > 0$ est suffisament petit et si $d(u,v) < \epsilon$, alors par compacité l'élément $\langle u,v\rangle$ est bien défini, et il existe un nombre $\delta(\epsilon) > 0$ ne dépendant que de ϵ tel que $\langle u,v\rangle \in W_{\delta(\epsilon)}^{ss}(u)$, et $\phi_\tau\langle u,v\rangle \in W_{\delta(\epsilon)}^{su}(v)$ pour un certain réel $\tau \in [-\delta(\epsilon), \delta(\epsilon)]$. Enfin, on peut choisir $\delta(\epsilon)$ de sorte que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \delta(\epsilon) = 0. \tag{5.6}$$

Si $\epsilon > 0$, on dit qu'une partie Y de T^1X est ϵ-dense si pour tout $x \in T^1X$ il existe $y \in Y$ tel que $d(x,y) < \epsilon$.

Le but de cette section est d'établir la proposition suivante :

Proposition 5.10. *Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $T > 0$ tel que pour tout $u \in T^1X$, l'ensemble*

$$\bigcup_{t\in[0,T]} \phi_t(W_\epsilon^{su}(u))$$

est ϵ-dense.

Démonstration. D'après la proposition 5.8 et le fait que (5.3) est un homéomorphisme, alors l'ensemble des éléments de T^1X périodiques pour le flot géodésique est dense. Soit donc $\{p_1, \ldots, p_k\}$ un ensemble fini ϵ-dense dans T^1X constitué uniquement d'éléments périodiques. Dans un premier temps nous allons prouver la proposition lorsque $u \in \{p_1, \dots, p_k\}$. Pour $i = 1, \dots, k$, notons t_i la période de p_i et choisissons $\tilde{p}_i$ un relevé de p_i dans $T^1\tilde{X}$, de sorte que $\langle \tilde{p}_i, \tilde{p}_j \rangle$ soit bien défini pour tout i, j.

Soit $i \in \{1, \dots, k\}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\phi_{nt_i}(W^{su}(p_i)) = W^{su}(p_i).$$

De plus, comme pour tout $v \in W^{su}(\tilde{p}_i)$, on sait que la distance $d(\phi_{-t}\tilde{p}_i, \phi_{-t}v)$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini, alors

$$W^{su}(p_i) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi_{nt_i}(W^{su}_\epsilon(p_i)).$$

Soit $j \in \{1, \dots, k\}$. Alors il existe un unique τ tel que

$$\phi_\tau \langle \tilde{p}_j, \tilde{p}_i \rangle \in W^{su}(\tilde{p}_i).$$

Donc il existe τ' tel que

$$p(\langle \tilde{p}_j, \tilde{p}_i \rangle) \in \phi_{\tau'}(W^{su}_\epsilon(p_i)).$$

Or comme p_j est périodique et que $p(\langle \tilde{p}_j, \tilde{p}_i \rangle)$ appartient à $W^{ss}(p_j)$, alors il existe $R > 0$ tel que $\phi_R(p_j) = p_j$ et $d(p_j, \phi_R p \langle \tilde{p}_j, \tilde{p}_i \rangle) < \epsilon$. Soit $T_{i,j} = \tau' + R$. On a donc que p_j est à distance $< \epsilon$ de $\phi_{T_{i,j}}(W^{su}_\epsilon(p_i))$. On peut supposer que $T_{i,j}$ est positif quitte à choisir R assez grand. On pose $T = \sup\{T_{i,j} | i, j = 1, \dots, k\}$ (ce T ne dépend que de ϵ). Comme $\{p_1, \dots, p_k\}$ est ϵ-dense, alors on a montré que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$\bigcup_{t \in [0,T]} \phi_t(W^{su}_\epsilon(p_i)) \text{ est } 2\epsilon\text{-dense.} \tag{5.7}$$

Il reste maintenant à voir comment on peut remplacer p_i par $u \in T^1X$ quelconque dans (5.7). Soit $u \in T^1X$. Comme $\{p_1, \dots, p_k\}$ est ϵ-dense, il existe un p_i tel que $d(u, p_i) < \epsilon$. Pour tout $v \in T^1X$, alors d'après (5.7) il existe $x \in W^{su}_\epsilon(p_i)$ et $t \in [0, T]$ tel que

$$d(\phi_t(x), v) < 2\epsilon.$$

Soient $\tilde{u}$, $\tilde{x}$ et $\tilde{v}$ des relevés de u, x et v, tels que $d(\tilde{u}, \tilde{p}_i) < \epsilon$, $d(\tilde{x}, \tilde{p}_i) < \epsilon$, et $d(\tilde{v}, \phi_t(\tilde{x})) < 2\epsilon$. Comme $d(\tilde{x}, \tilde{u}) < 2\epsilon$, si on suppose que ϵ est suffisamment petit, alors $\langle\tilde{x},\tilde{u}\rangle \in W^{ss}_{\delta(2\epsilon)}(\tilde{x})$ est bien défini et il existe un unique réel $\tau \in [-\delta(2\epsilon),\delta(2\epsilon)]$ tel que si on pose $\tilde{y} = \phi_\tau\langle\tilde{x},\tilde{u}\rangle$, alors $\tilde{y} \in W^{su}_{\delta(2\epsilon)}(\tilde{u})$. Comme $\phi_{-\tau}\tilde{y}$ et $\tilde{x}$, sont dans la même variété fortement stable, alors $d(\phi_t x, \phi_{t-\tau} y) \leq d(x, \phi_{-\tau} y) < \delta(2\epsilon)$.

Donc

$$d(\phi_t\tilde{y}, v) \leq d(\phi_t\tilde{y}, \phi_{t-\tau}y) + d(\phi_{t-\tau}\tilde{y}, \phi_t x) + d(\phi_t x, v) < 2\delta(2\epsilon) + 2\epsilon.$$

Donc finalement on a montré qu'il existe $T > 0$ ne dépendant que de ϵ tel que

$$\bigcup_{t\in[0,T]} \phi_t\left(W^{su}_{\delta(2\epsilon)}(u)\right) \text{ est } (2\delta(2\epsilon)+2\epsilon)\text{-dense.}$$

C'est bien ce qu'on voulait quitte à remplacer ϵ par un nombre ϵ' plus petit tel que $2\delta(\epsilon') + 2\epsilon' < \epsilon$.

$\square$

5.2.3 Le "Closing lemma"

Si $t > 0$ on définit les distances d_t sur T^1X et sur $T^1\tilde{X}$ comme ceci :

$$d_t(u,v) = \sup_{s\in[0,t]} d\left(\phi_s u, \phi_s v\right), \text{ pour } u,v \in T^1X \text{ ou } u,v \in T^1\tilde{X}.$$

Si $t > 0$ et $\eta > 0$, on dit que $u \in T^1X$ est (t,η)-pseudo-périodique si $d(u,\phi_t u) \leq \eta$. Le but de cette section est de montrer le lemme suivant :

Lemme 5.11 (Closing lemma)**.** *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ et $T > 0$ tel que pour tout $t > T$ et pour tout $u \in T^1X$, si u est (t,η)-pseudo-périodique, alors il existe $v \in T^1X$ périodique de période comprise entre $t-\epsilon$ et $t+\epsilon$, tel que $d_t(u,v) < \epsilon$.*

Soient $\eta > 0$, $T > 0$. On appelle (T,η)-pseudo-orbite toute suite

$$(u_n, t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

telle que $u_n \in T^1\tilde{X}$, $t_n > T$ et $d(\phi_{t_n}u_n, u_{n+1}) < \eta$. L'essentiel pour la preuve du Closing lemma réside dans la proposition suivante :

Proposition 5.12. *Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$, $T > 0$, tels que pour tout (T,η)-pseudo-orbite (u_n,t_n), il existe un élément $v \in T^1\tilde{X}$ et une suite de réels (s_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|(s_{n+1}-s_n)-t_n| \leq \epsilon$ et $d_{t_n}(u_n, \phi_{s_n}v) \leq \epsilon$.*

Démonstration. L'idée de la preuve est la suivante : une pseudo-orbite est une succession de morceaux d'orbites, et on peut essayer de "rattacher" les morceaux un à un sans trop faire bouger l'ensemble, jusqu'à ce qu'on obtienne une orbite entière. Pour $k \in \mathbb{Z}$, l'application qui consiste à rattacher deux morceaux d'une (T, η) pseudo-orbite (u_n, t_n) au niveau du point u_k est définie de la façon suivante (elle est bien définie si η est assez petit) :

$$A_k : (u_n, t_n) \to (v_n, t'_n),$$

où la pseudo-orbite (v_n, t'_n) est définie en posant

$$\begin{gathered} v_k = \langle u_k, \phi_{t_{k-1}} u_{k-1} \rangle, \\ t'_{k-1} = t_{k-1} - \tau \end{gathered}$$

où τ est l'unique réel tel que $\phi_\tau v_k \in W^{su}(u_{n-1})$,

$$\begin{gathered} v_{k-1} = \phi_{-t'_{k-1}} v_k, \\ t'_n = t_n \text{ pour } n \neq k-1, \end{gathered}$$

$$v_n = \begin{cases} \phi_{(t_k + \ldots + t_{n-1})}(v_k) & \text{si } n \geq k+1 \text{ et } u_j = \phi_{(t_k + \ldots + t_{j-1})}(u_k) \text{ pour } j = k+1, \ldots, n, \\ \phi_{(-t_n \ldots - t_{k-2})}(v_{k-1}) & \text{si } n \leq k-2 \text{ et } u_j = \phi_{(-t_j \ldots - t_{k-2})}(u_k) \text{ pour } j = n, \ldots, k-2, \\ u_n & \text{sinon,} \end{cases} \tag{5.8}$$

Cette application A_k ainsi définie consiste bien en un "rattachement" au niveau de v_k car on a $v_k = \phi_{t'_{k-1}} v_{k-1}$. Il faut remarquer aussi que par (5.8), elle veille à ne pas "détacher" les morceaux de la pseudo-orbite déjà rattachés. Enfin, comme $v_k = \langle u_k, \phi_{t_{k-1}} u_{k-1} \rangle$, alors u_k et v_k sont dans la même variété fortement stable et $d(u_k, v_k) < \delta(\eta)$. Donc pour tout entier $j \geq 0$, ou bien $v_{k+j} = u_{k+j}$, ou bien $u_{k+j} = \phi_{t_k + \ldots + t_{k+j-1}}(u_k)$ et $v_{k+j} = \phi_{t_k + \ldots + t_{k+j-1}}(v_k)$ et donc d'après (5.5) on a

$$d_{t_{k+j}}(u_{k+j}, v_{k+j}) \leq \delta(\eta) e^{-j\lambda(\delta(\eta))T}. \tag{5.9}$$

De la même manière on peut montrer par exemple que pour $j \geq 0$,

$$d_{t_{k-1-j}}(u_{k-1-j}, v_{k-1-j}) \leq 2\delta(\eta) e^{-j\lambda(2\delta(\eta))T}. \tag{5.10}$$

On se donne $\mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}, i \to \sigma_i$ une bijection quelconque. On définie la suite de pseudo-orbite (u_n^k, t_n^k) en posant $(u_n^0, t_n^0) = (u_n, t_n)$, et pour $k \geq 1$

$$(u_n^k, t_n^k) = A_{\sigma_k} \circ \ldots \circ A_{\sigma_1}(u_n, t_n)$$

On voudrait montrer que si η et T sont bien choisi, alors cette suite converge simplement lorsque k tend vers l'infini, et la proposition est vérifée en prenant $v = \lim_{k\to\infty} u_0^k$.

Soit $\epsilon > 0$. Choisissons $\eta > 0$ suffisamment petit et $T > 0$ suffisamment grand pour que en posant $T' = T - \delta(2\eta)$ et $\lambda = \lambda(2\delta(2\eta))$ on ait

$$4\delta(2\eta) \sum_{j\geq 0} e^{-j\lambda T'} < \epsilon \quad \text{et} \quad 4\delta(2\eta) \sum_{j\geq 1} e^{-j\lambda T'} < \eta.$$

On vérifie alors, par récurrence sur k et en utilisant (5.9) et (5.10), qu'on a les propriétés suivantes :

- Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, (u_n^k, t_n^k) est une $(T', 2\eta)$-pseudo-orbite. Plus précisément, pour $n \in \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$, on a $u_n^k = \phi_{t_{n-1}^k}(u_{n-1}^k)$ et $|t_{n-1}^k - t_{n-1}| \leq \delta(2\eta)$, et pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$, on a $t_{n-1}^k = t_{n-1}$ et

$$d\left(u_n^k, \phi_{t_{n-1}^k}\left(u_{n-1}^k\right)\right) < \eta + 2\delta(2\eta) \sum_{i=1}^{k} e^{-|\sigma_i - n|\lambda T'} < 2\eta,$$

- Pour $k \in \mathbb{N}$, pour l compris entre 0 et k, et pour $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$d_{t_n}\left(u_n^k, u_n^l\right) < 2\delta(2\eta) \left(\sum_{\substack{j\geq 0 \\ i\in\{l+1,\ldots,k\} \\ n=\sigma_i+j}} e^{-j\lambda T'} + \sum_{\substack{j\geq 0 \\ i\in\{l+1,\ldots,k\} \\ n=\sigma_i-1-j}} e^{-j\lambda T'} \right) < \epsilon.$$

Par conséquent, pour tout n, la suite u_n^k est de Cauchy et converge quand k tend vers l'infini. Pour conclure la preuve de la proposition, il suffit de poser $v = \lim_{k\to\infty} u_0^k$, $s_0 = 0$, $s_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} t_i^k$ pour $n \geq 1$, et $s_n = -\lim_{k\to\infty} \sum_{i=n}^{-1} t_i^k$ pour $n \leq -1$, car ainsi on a $\phi_{s_n} v = \lim_{k\to\infty} u_n^k$ et donc $d_{t_n}(\phi_{s_n} v, u_n) \leq \epsilon$

$\square$

Démonstration du "Closing lemma". Soit $\epsilon > 0$. On choisit les $\eta > 0$ et $T > 0$ donnés par la proposition 5.12. Soit $t > T$ et $u \in T^1X$ tels que $d(\phi_t u, u) < \eta$. Soient $\tilde{u} \in T^1\tilde{X}$ un relevé de u et soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $d(\gamma\tilde{u}, \phi_t\tilde{u}) < \eta$. Alors la suite $(\gamma^n\tilde{u}, t)_{n\in Z}$ est une (T, η)-pseudo-orbite, et d'après la proposition 5.12, il existe $\tilde{v} \in T^1\tilde{X}$ et une suite (s_n) tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|(s_{n+1} - s_n) - t| \leq \epsilon$ et

$$d_t(\phi_{s_n}\tilde{v}, \gamma^n\tilde{u}) \leq \epsilon. \tag{5.11}$$

Il nous reste juste à montrer que $v = p\tilde{v} \in T^1X$ est périodique de période comprise entre $t - \epsilon$ et $t + \epsilon$. Dans un premier temps, on peut voir que $\tilde{v}(\infty) = \gamma_+$: en effet on sait que

$$\tilde{v}(\infty) = \lim_{n\to\infty} \pi\phi_{s_n}\tilde{v} \quad \text{et} \quad \gamma_+ = \lim_{n\to\infty} \pi\gamma^n\tilde{u}.$$

Or d'après (5.11), les suites de points $\pi\phi_{s_n}\tilde{v}$ et $\pi\gamma^n\tilde{u}$ restent à distance bornées, et donc elles ont même limite à l'infini. Donc $\tilde{v}(\infty) = \gamma_+$. De la même manière on montre que $-\tilde{v}(\infty) = \gamma_-$. Donc il existe $t' > 0$ tel que $\gamma\tilde{v} = \phi_{t'}(\tilde{v})$ et $v = p\tilde{v}$ est périodique de période t'. Enfin on peut supposer que $s_0 = 0$ (quitte à remplacer $\tilde{v}$ par $\phi_{s_0}\tilde{v}$) et ainsi on peut écrire

$$d\left(\phi_{t'}\tilde{v}, \phi_{s_1}\tilde{v}\right) \leq d\left(\gamma\tilde{v}, \gamma\tilde{u}\right) + d\left(\gamma\tilde{u}, \phi_{s_1}\tilde{v}\right) \leq 2\epsilon.$$

Donc $|t' - s_1| \leq 2\epsilon$ et donc $|t' - t| \leq 3\epsilon$, ce qu'on voulait quitte à remplacer ϵ par un nombre ϵ' plus petit pour que $3\epsilon' < \epsilon$. □

5.2.4 Le lemme de spécification

On a déja vu que les points périodiques de T^1X forment un ensemble dense. Le lemme suivant affine cette propriété :

Lemme 5.13 (spécification)**.** *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que pour tout $t > 0$ et pour tout $u \in T^1X$, il existe $v \in T^1X$, périodique de période comprise entre t et $t + R$ tel que*

$$d_t(u, v) \leq \epsilon.$$

La preuve de ce lemme découlera du "closing lemma" et de la proposition suivante :

Proposition 5.14. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que pour tout $t > 0$ et pour tout $u \in T^1X$ il existe $t' \in [t, t+R]$, et $v \in T^1X$ (t', ϵ)-pseudo-périodique tel que $d_t(u, v) \leq \epsilon$.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Soit $t > 0$ et $u \in T^1X$. D'après la proposition 5.10, il existe $R > 0$ ne dépendant que de ϵ tel que

$$\bigcup_{s\in[0,R]} \phi_s\left(W^{su}_{\epsilon}(\phi_t u)\right)$$

est ϵ-dense. Il existe donc un réel $s \in [0, R]$ et un élément de $W_\epsilon^{su}(\phi_t u)$ que l'on écrira sous la forme $\phi_t v$ tel que $d(u, \phi_{t+s} v) \leq \epsilon$. Comme $\phi_t v \in W_\epsilon^{su}(\phi_t u)$ alors $d_t(u, v) < \epsilon$ et si on pose $t' = t + s$, on peut écrire

$$d\left(v, \phi_{t'} v\right) \leq d(v, u) + d(u, \phi_{t'} v) \leq 2\epsilon$$

ce qu'on voulait quitte à remplacer ϵ par un nombre plus petit ϵ' tel que $2\epsilon' < \epsilon$. □

Démonstration du lemme de spécification. Soit $\epsilon > 0$. D'après le "closing lemma", il existe $T > \epsilon$ et $\eta \in]0, \epsilon[$ tel que pour tout $t > T$ et $u \in T^1X$ (t, η)-pseudo-périodique, il existe un réel $t' \in [t - \epsilon, t + \epsilon]$ un élément t'-périodique v tel que $d_t(u, v) < \epsilon$.

Soit $t > 0$ et $u \in T^1X$. D'après la proposition précédente il existe $R' > 0$ ne dépendant que de ϵ, et un réel $s \in [0, R']$ et un élément $(T + t + s, \eta)$-pseudo-périodique u' tel que $d_t(u, u') < \epsilon$. On choisit $R = R' + T + \epsilon$. Alors R ne dépend que de ϵ, et d'après le "closing lemma", il existe v, t'-périodique avec $t' \in [t, t + R]$, tel que $d_t(u', v) < \epsilon$. Donc $d_t(u, v) < 2\epsilon$ ce qu'on voulait quitte à remplacer ϵ par un nombre ϵ' plus petit tel que $2\epsilon' < \epsilon$.

□

5.2.5 Il existe une orbite dense dans T^1X

On montre ici l'existence d'un élément $v \in T^1X$ dont l'orbite positive $\{\phi_t(v) | t \geq 0\}$ est dense. Nous savons déjà que l'ensemble des éléments périodiques de T^1X sont denses dans T^1X. Soit donc (u_n) une suite dense d'éléments périodiques dans T^1X. Pour construire un élément $v \in T^1X$ dont l'orbite positive est dense, nous allons construire une suite $(v_n) \in T^1X$ et une suite de réels positifs (t_n) telle que si p et n sont deux entiers tels que $1 \leq p \leq n$, alors

$$d(u_p, \phi_{t_p}(v_n)) < 1/p.$$

Cette construction se fait par récurence : on pose $v_1 = u_1$ et $t_1 = 0$. Supposons que l'on ait déja construit pour n compris entre 1 et N les vecteurs v_n et les nombres t_n. Alors l'ensemble

$$\left\{v \in T^1X | d(\phi_{t_p}(v), u_p) \leq 1/p \text{ pour } p = 1, \ldots, N\right\}$$

est un ouvert de T^1X non vide car il contient v_N. Cet ouvert rencontre la variété stable de u_{N+1} car les variétés stables sont denses. Choisissons v_{N+1}

dans cette intersection. Comme v_{N+1} et u_{N+1} partagent la même variété stable et comme u_{N+1} est périodique, il existe bien un réel positif t_{N+1} tel que

$$d\left(\phi_{t_{N+1}}(v_{N+1}), u_{N+1}\right) < 1/\left(N+1\right),$$

et donc v_{N+1} et t_{N+1} conviennent, et la construction par récurrence fonctionne bien. Une fois construite la suite (v_n), on choisit v une valeur d'adhérence de cette suite. Alors l'orbite positive de v est dense car v vérifie que pour tout entier $n \geq 1$

$$d\left(\phi_{t_n}(v), u_n\right) \leq 1/n.$$

5.3 La mesure de Liouville est invariante par le flot géodésique

Soit X une variété riemannienne, et soit T^1X le fibré unitaire tangent. C'est un fibré en sphére euclidienne sur une variété riemannienne, et cela qui induit une mesure sur T^1X, appelée mesure de Liouville. Il est bien connu que cette mesure est invariante par le flot géodésique sur T^1X. Une preuve de ce fait consiste à montrer que cette mesure est donnée par une forme volume qui s'écrit

$$\lambda \wedge d\lambda \wedge \ldots \wedge d\lambda,$$

où λ est une 1-forme, appelée forme de Liouville, et qui est invariante par le flot géodésique.

5.3.1 La forme de Liouville sur le fibré cotangent

Soit X une variété. Soit $\pi : T^*X \to X$ le fibré cotangent. On définit une 1-forme l sur T^*X, appelée forme de Liouville : pour tout $\alpha \in T^*X$ et pour tout vecteur tangent $v \in T_\alpha T^*X$, on pose $x = \pi(\alpha)$, et ainsi la differentielle de π appliquée au vecteur v est un vecteur tangent à X en x :

$$\pi_* v \in T_x X,$$

et on définit alors

$$l(v) = \alpha(\pi_* v),$$

ce qui définit la forme de Liouville l.

On peut décrire cette forme l avec un système de coordonnées adaptées sur le fibré cotangent : d'abord on se donne un système de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ sur X. Ces coordonnées définissent localement un système de n champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, et le système dual de 1-formes $dx_1, \ldots, dx_n$. Ainsi on introduits sur T^*X des coordonnées locales : à $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ on associe la forme linéaire sur l'espace tangent au point de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, dont les coordonnées dans la base $dx_1, \ldots, dx_n$ sont $(y_1, \ldots, y_n)$. Ces coordonées sur T^*X définissent localement un système de $2n$ champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$, et le système dual de 1-formes $dx_1, \ldots, dx_n, dy_1, \ldots, dy_n$. La 1-forme de Liouville peut alors s'écrire avec ces coordonnées

$$l = \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i. \tag{5.12}$$

Notons que la différentielle extérieur dl s'écrit

$$dl = \sum_{i=1}^{n} dy_i \wedge dx_i. \tag{5.13}$$

5.3.2 La forme de Liouville et la mesure de Liouville

Soit (X, g) une variété riemannienne. La dualité entre les fibrés tangents et cotangent va nous permettre de faire passer la forme de Liouville du fibré cotangent sur le fibré tangent.

Soit $\pi : TX \to X$ et $\pi : T^*X \to X$ les fibrés tangent et cotangent. La métrique g induit un isomorphisme canonique entre les fibrés TX et T^*X :

$$\Phi : TX \to T^*X$$
$$v \in T_xX \to g_x(v, \cdot) \in T_x^*X.$$

La forme de Liouville définit sur T^*X induit une 1-forme sur TX que nous noterons λ et que nous appellerons à nouveau forme de Liouville. Afin de décrire explicitement la 1-forme λ et la 2-forme $d\lambda$ sur TX, on se donne un point $v \in TX$, et on construit une base de T_vTX de la manière suivante. Tout d'abord, on pose $x = \pi(v) \in X$ et on se donne une base orthonormée $e_1, \ldots, e_n$ de T_x. L'espace tangent T_vTX est la somme direct de l'espace tangent à la fibre contenant v et l'espace horizontal pour la connexion de Levi-Civita au point v, noté H_v :

$$T_vTX = T_vT_xX \oplus H_v.$$

Soit $X_1, ..., X_n$ la base de H_v correspondant au relevés horizontaux des vecteurs de la base $v_1, \dots, v_n$ pour la fibration $\pi : TX \to X$. L'espace vectoriel T_vT_xX est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel T_xX dont il est un espace tangent. Soit $Y_1, \dots, Y_n$ la base de T_vT_xX correspondant à la base $e_1, \dots, e_n$ de T_xX par cet isomorphisme. On a donc une base de T_vTX : $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$.

Posons $\alpha = \Phi(v) \in T^*X$. On utilise la base $e_1, \dots, e_n$ de T_xX et l'application exponentielle pour définir un système de coordonnées dans X au voisinage de x :

$$(x_1, \dots, x_n) \to \exp_x\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right).$$

On en déduit alors un système de coordonées locales $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ sur T^*X (comme dans la sous-section précédente). Soit

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}$$

les champs de vecteurs associés à ces coordonnées.

L'isomorphisme entre les fibrés TX et T^*X induit un isomorphisme entre les espaces tangents T_vTX et $T_\alpha T^*X$. On a le fait suivant :

Fait 5.15. *L'isomorphisme entre T_vTX et $T_\alpha T^*X$ envoie X_i sur $\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha)$ et Y_i sur $\frac{\partial}{\partial y_i}(\alpha)$.*

De ce fait et des équations (5.12) et (5.13) on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 5.16. *Soit $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonées du vecteur v dans la base $e_1, \dots, e_n$. Soit $X_1^*, \dots, X_n^*, Y_1^*, \dots, Y_n^*$ la base de T_v^*TX obtenue par dualité avec la base $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ de T_vTX. Alors la forme de Liouville et sa différentielle extérieure au point v s'écrivent*

$$\lambda(v) = \sum_{i=1}^n v_i X_i^*$$
$$d\lambda(v) = \sum_{i=1}^n Y_i^* \wedge X_i^*$$

Soit T^1X le fibré tangent unitaire de X, et considérons λ_{T^1X}, la restriction de la forme de Liouville sur T^1X. Dans ce qui précède, on considère le cas ou

v est un vecteur unitaire et on peut suposer que $v = e_1$, le premier vecteur de la base orthonormé de T_xX. Ainsi, une base de l'espace tangent T_vT^1X, qui est de dimension $2n-1$, est la famille $X_1, \ldots, X_n, Y_2, \ldots, Y_n$, la forme de Liouville λ_{T^1X} et sa différentielle extérieure au point v s'écrivent

$$\lambda(v) = X_1^*$$
$$d\lambda(v) = \sum_{i=2}^{n} Y_i^* \wedge W_i^*$$

Ainsi, on introduit la $2n-1$-forme ω suivante :

$$\omega = (\lambda \wedge d\lambda \wedge \ldots \wedge d\lambda)\,|T^1X.$$

C'est une forme volume sur T^1X et elle s'écrit au point v :

$$\omega(v) = X_1^* \wedge (Y_2^* \wedge X_2^*) \wedge \ldots \wedge (Y_n^* \wedge X_n^*).$$

La forme volume ω induit donc la mesure de Liouville sur T^1X. L'image de cette mesure par la projection $\pi : T^1X \to X$ est la mesure riemannienne fois la volume de la sphère euclidienne de dimension $n-1$.

5.3.3 La forme de Liouville est invariante

Nous allons montrer que la forme de Liouville λ_{T^1X} sur le fibré tangent unitaire est invariante par le flot géodésique ϕ_t, plus précisément nous alons montrer que pour tout $v \in T^1X$ et $Z \in T_vT^1X$, on a

$$\lambda(\phi_{l*}Z) = \lambda(Z),$$

pour tout réel $l > 0$ tel que $\phi_l(v)$ est bien défini (ce n'est pas toujours le cas car on n'a pas supposé que la variété est complète). Choisissons une courbe $(v_s)_{s\in]-\epsilon,\epsilon[}$ dans T^1X telle que $Z = \frac{d}{ds}_{|s=0} v_s$. Pour tout $s \in]-\epsilon, \epsilon[$ et pour $t \in]0, l[$, on pose

$$c(s,t) = \pi \circ \phi_t(Z_s).$$

Pour tout s, l'application $t \to c(s,t)$ est une courbe (localement géodésique) de longueur t. Or d'après la formule de la variation première, la dérivée en $s = 0$ de la longueur de la courbe $c(s,\cdot)$ est égale à

$$g\left(\frac{d}{ds}c(s,l), \frac{d}{dt}c(s,l)\right) - g\left(\frac{d}{ds}c(s,0), \frac{d}{dt}c(s,0)\right).$$

Donc cette différence est nulle. Or $g(\frac{d}{ds}c(s,0), \frac{d}{dt}c(s,0)) = \lambda(Z)$ et $g(\frac{d}{ds}c(s,l), \frac{d}{dt}c(s,l)) = \lambda(\phi_{l*}Z)$, donc on a bien

$$\lambda(\phi_{l*}Z) = \lambda(Z).$$

Donc la forme de Liouville est invariante par le flot, et il en va de même pour la forme volume $\omega = (\lambda \wedge d\lambda \wedge, \ldots, \wedge d\lambda)_{T^1X}$, et pour la mesure de Liouville associée, ce qu'il fallait démontrer.

Bibliographie

[AS] M. Anderson, R. Schoen : *Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature*, Ann. of Math. 121 (1985) 429–461.

[B] M. Bourdon : *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT (-1)-espace*, L'enseignement mathématique, 41 (1995), 63–102.

[BCG1] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot : *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, Geom. Funct. Anal. 5 (1995), no. 5, 731–799.

[BCG2] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot : *Les variétés hyperboliques sont des minima locaux de l'entropie topologique*, Invent. Math. 117 (1994), no. 3, 403–445.

[BCG3] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot : *Volume et entropie minimale des espaces localement symétriques*, Invent. Math. 103 (1991), no. 2, 417–445.

[Be1] A.L. Besse : *Einstein manifolds*, (Ergeb. Math. Grenzgeb., Bd. 10) Berlin Heidelberg New York : Springer 1987.

[Be2] A.L. Besse : *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas], 93. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[BGS] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder : *Manifolds of nonpositive curvature*, Birkhaüser, 1985.

[CE] J. Cheeger, D. Ebin : *Comparison theorems in Riemannian geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[CD] C. Croke, N. Dairbekov : *Lengths and volumes in Riemannian manifolds*, Duke Math. J. 125 (2004), no. 1, 1–14.

[C] Croke, Christopher B. *Rigidity for surfaces of nonpositive curvature.* Comment. Math. Helv. 65 (1990), no. 1, 150–169.

[CS] Croke, Christopher B. ; Sharafutdinov, Vladimir A. *Spectral rigidity of a compact negatively curved manifold.* Topology 37 (1998), no. 6, 1265–1273.

[FL] P. Foulon, F. Labourie : *Sur les variétés compactes asymptotiquement harmoniques*, Invent. Math. 109 (1992), 97–111.

[G] L. Garnett : *Foliations, the ergodic theorem and brownian motion*, Jour. of Funct. Anal., 51 (1983), 285–311.

[GH] É. Ghys, P. de La Harpe : *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, 83. Birkhaüser Boston, Inc., Boston, MA, 1990

[GK] Guillemin, V. ; Kazhdan, D. *Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds.* Topology 19 (1980), no. 3, 301–312.

[H] U. Hamenstädt : *Harmonic measures, hausdorff measures and positive eigenfunctions*, J. Diff. Geom. 44 (1996), 1–31

[K] V. A. Kaimanovich : *Brownian motion and harmonic functions on covering manifolds. An entropy approach*, English translation : Soviet Math. Dokl., 33(1986), 812–816.

[L1] F. Ledrappier : *Structure au bord des variétés à courbure négative*, Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, No. 13, Année 1994–1995, 97–122, Sémin. Théor. Spectr. Géom., 13, Univ. Grenoble I, Saint-Martin-d'Hères, 1995.

[L2] F. Ledrappier : *Harmonic 1-forms on the stable foliation*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 25 (1994), no. 2, 121–138.

[L3] F. Ledrappier : *A heat kernel characterization of asymptotic harmonicity*, Proceedings AMS, 118 (1993), 1001–1004.

[L4] F. Ledrappier : *Ergodic properties of the stable foliations*, Ergodic theory and related topics, III (Güstrow, 1990), 131–145, Lecture Notes in Math 1514, Springer, Berlin, 1992.

[L5] F. Ledrappier : *Harmonic measures and Bowen-Margulis measures*, Israel J. Math. 71 (1990), no. 3, 275–287.

[L6] F. Ledrappier : *Ergodic properties of Brownian motion on covers of compact negatively-curve manifolds*, Bol. Soc. Brasil. Mat. 19 (1988), no. 1, 115–140.

[O] J.P. Otal : *Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative*, Ann. of Math. (2) 131 (1990), no. 1, 151–162.

[R] T. Roblin : *Ergodicité et équidistribution en courbure négative*, Memoires de la SMF 95 (2003).