



Non linear dynamic of coupled machanical systems: model reduction and identification

Tien Minh Nguyen

► To cite this version:

Tien Minh Nguyen. Non linear dynamic of coupled machanical systems: model reduction and identification. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2007. English. NNT: . pastel-00002994

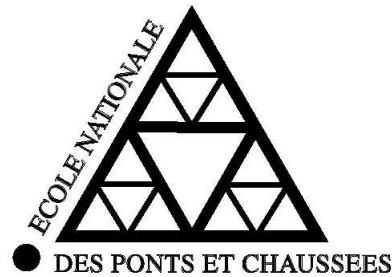
HAL Id: pastel-00002994

<https://pastel.hal.science/pastel-00002994>

Submitted on 19 Dec 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE
présentée pour l'obtention du diplôme de
DOCTEUR
DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité : *Structures et Matériaux*

présentée par

Tien Minh NGUYEN

Sujet de la thèse :

**Dynamique non linéaire des systèmes mécaniques
couplés : Réduction de modèle et Identification**

soutenue le 22 janvier 2007

devant le jury composé de :

Président : **M. POTIER-FERRY**

Rapporteurs : **J.C. GOLINVAL**
A. BERLIOZ

Examineurs : **G. BONNET**
L. GARIBALDI

Directeur de thèse : **P. ARGOUL**

A ma famille,
A Van-Anh.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire Analyse des Matériaux et Identification (LAMI) sous la direction de Pierre ARGOUL. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour sa confiance, ses conseils et ses encouragements durant ces quatre années. Étudier la dynamique avec lui fut un réel plaisir.

Ma gratitude va aussi à Guy BONNET pour l'intérêt avec lequel, il a suivi ma thèse. Ses conseils précieux, le partage de ses compétences scientifiques m'ont beaucoup aidé à mener à bien ce travail.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Michel POTIER-FERRY pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Messieurs Jean-Claude GOLINVAL et Alain BERLIOZ ont accepté de rapporter sur cette thèse. J'en suis honoré et je les en remercie sincèrement.

Je remercie aussi Monsieur Luigi GARIBALDI pour sa participation au jury de thèse.

Sans financement, il n'y aurait jamais eu de thèse. Je voudrais donc remercier l'École des Ponts et la région Ile-de-France grâce à qui j'ai obtenu une aide financière.

J'adresse mes sincères remerciements au directeur du LAMI, Karam SAB, de m'avoir accueilli dans son laboratoire avec de bonnes conditions de travail et un environnement de recherche exceptionnel tant du point de vue des qualités humaines que scientifiques.

Je voudrais remercier chaleureusement tous les membres du LAMI, permanents, doctorants et stagiaires, avec qui les échanges scientifiques, techniques ou amicaux ont été très formateurs pour ma vie professionnelle et ont fait de ces quatre années une belle étape de ma vie.

Je remercie tous mes amis pour la motivation que leur amitié m'a apportée. Leur soutien, leur enthousiasme et leur sens de l'humour m'ont permis d'aller au bout de cette aventure qu'est la thèse.

Un grand merci à Van-Anh, pour tout. Grâce à toi, j'ai pu surmonter des moments difficiles non seulement durant la thèse mais aussi dans la vie.

Enfin et avant tout, je tiens à remercier du fond du coeur ma famille, qui a su me donner sans cesse soutien, amour, encouragement et l'envie d'apprendre encore plus. Elle était et continuera d'être, je le sais, un soutien sans faille.

Table des matières

Acronymes	11
Table des figures	12
Liste des tableaux	19
Introduction générale	21
1 Etude bibliographique et problématique générale	23
1.1 Modes Normaux Non linéaires	25
1.1.1 Définitions des MNNs	25
1.1.2 Méthodes de calcul des MNNs	28
1.2 Identification des systèmes mécaniques vibratoires	29
1.2.1 Identification des systèmes mécaniques linéaires	30
1.2.2 Identification des systèmes mécaniques non linéaires	33
1.3 Dynamique des structures non linéaires géométriques	34
1.4 Méthodes de sous-structuration dynamique	36
1.4.1 Cas linéaire	36
1.4.2 Cas non linéaire	37
1.5 Conclusions	39
2 About some numerical techniques for computing Nonlinear Normal Modes	41
2.1 Introduction	43
2.2 Shaw and Pierre's approach	44
2.3 Bellizzi and Bouc's approach	45
2.3.1 Symmetrical nonlinear restoring forces	46
2.3.2 General nonlinear restoring forces	46
2.4 Two methods for calculating periodic solutions	47
2.4.1 Harmonic Balance Methods	47
2.4.2 Shooting Methods	47

2.4.3	Link with Bellizzi and Bouc's approach	48
2.5	Continuation techniques	49
2.5.1	Preliminary	49
2.5.2	Principles	49
2.5.3	Implementation	51
2.6	Procedure for determining the convergence and the validity domain of all the methods	52
2.7	Numerical simulations	53
2.7.1	Example 1 : A nonlinear two-mass system with cubic nonlinearities	53
2.7.2	Example 2 : A nonlinear two-mass system with quadratic and cubic nonlinearities	58
2.8	Conclusions	67
3	Identification des systèmes mécaniques par analyse en ondelettes	69
3.1	Introduction	71
3.2	Signal et la Transformation en Ondelettes Continue (TOC)	71
3.2.1	Signal analytique - Signal asymptotique	71
3.2.2	Transformation en ondelettes	72
3.3	Calcul numérique de la transformation en ondelettes continue	77
3.3.1	Méthodes de calcul	77
3.3.2	Effet de bord	78
3.3.3	Découplage des modes	80
3.3.4	Le temps d'arrêt	80
3.3.5	Choix des paramètres de l'ondelette mère	81
3.4	Analyse des signaux modulés en amplitude et en fréquence	82
3.4.1	Analyse par ondelettes de lignes spectrales	83
3.4.2	Analyse par ondelettes des signaux modulés en amplitude et en fréquence .	84
3.4.3	Méthodes d'extraction des arêtes	86
3.5	Identification modale des systèmes linéaires	88
3.5.1	Réponses libres	88
3.5.2	Réponses au bruit ambiant	100
3.6	Identification des systèmes non linéaires	111
3.6.1	Principes d'identification	111
3.6.2	Identification de systèmes faiblement non linéaires, amortis	112
3.6.3	Validation	116
3.7	Conclusions	127

4 Etude statique et dynamique d'une poutre mince non linéaire géométrique	129
4.1 Introduction	131
4.2 Poutre d'Euler-Bernoulli en vibrations non linéaires	131
4.2.1 Déformations de la poutre	131
4.2.2 Énergie potentielle - Énergie cinétique	132
4.2.3 Formulation variationnelle faible - Equation de vibration	132
4.2.4 Discrétisation par éléments finis	133
4.2.5 Résolution du problème non linéaire en dynamique	135
4.2.6 Validation	135
4.3 Etude statique d'une poutre mince d'Euler-Bernoulli soumise à des déplacements imposés	145
4.3.1 Solution analytique approchée	145
4.3.2 Solution semi-analytique	147
4.3.3 Exemple numérique	149
4.4 Remarques et Conclusions	150
5 Réduction de modèle en dynamique non linéaire	151
5.1 Introduction	153
5.2 Principe de sous-structuration dynamique	153
5.3 Approches de Shaw et Pierre	154
5.3.1 Approche 1-mode	154
5.3.2 Approche modes-multiples	156
5.4 Méthode de sous-structuration non linéaire	157
5.4.1 Équation de vibration d'une sous-structure	157
5.4.2 Problème d'interface fixe	158
5.4.3 Problème de relèvement statique	159
5.4.4 Représentation du système dans la base linéaire de Craig-Bampton	160
5.4.5 Réduction de modèle avec l'approche de Shaw et Pierre	160
5.4.6 Assemblage des sous-structures	162
5.5 Validation	162
5.5.1 Exemple 1 : Système non linéaire à 5-DDLs	163
5.5.2 Exemple 2 : Système non linéaire à 6-DDLs	167
5.6 Remarques et Conclusions	171
Conclusion générale	174

A	Rappels sur le système linéaire discret	175
A.1	Systèmes linéaires conservatifs	175
A.2	Systèmes linéaires dissipatifs	177
A.2.1	Amortissement proportionnel	177
A.2.2	Amortissement non-proportionnel	178
	Bibliographie	180

Acronymes

MNN	Mode Normal Non-linéaire
DDL	Degré De Liberté
TF	Transformation de Fourier
TO	Transformation en Ondelettes
TCO	Transformation Continue en Ondelettes
KB	Krylov-Bogoliubov
KBM	Krylov-Bogoliubov-Mitropolski
FSO	Fonction Spectrale en Ondelettes
FRF	Fonction de Réponses en Fréquence
EH	Equilibrage Harmonique
MP	Méthodes de Perturbation
NNM	Non-linear Normal Mode
HBM	Harmonic Balance Method
DOF	Degree-Of-Freedom
RD	Random Decrement
[M]	Notation d'une matrice (en gras et entre crochets)
u	Notation d'un vecteur (en gras)

Table des figures

2.1	Example 1 : Nonlinear two-mass system with : $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 1$, $k_2 = 5$ and the cubic nonlinearities : $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 1$	53
2.2	Example 1 : Dependence of the frequency on the first mode amplitude of the first NNM, calculated by : HBM with different numbers of harmonics and Shooting+C.	54
2.3	Example 1 : Dependence of the second mode amplitude on the first one of the first NNM calculated by : HBM with different numbers of harmonics and Shooting+C.	54
2.4	Example 1 : First NNM, (Left $\rightarrow$ right) Invariant manifolds - Time response $q_1(t)$ - Time response $q_2(t)$, calculated by HBM+C and Shooting+C. (Top $\rightarrow$ bottom) Point 1, 2, 3, 4 described in Fig. 2.3	55
2.5	Example 1 : Dependence of the frequency on the first mode amplitude of the first NNM, calculated by : Shaw & Pierre with different numbers of harmonics and Shooting+C	56
2.6	Example 1 : Dependence of the second mode amplitude on the first one of the first NNM, calculated by : Shaw & Pierre with different numbers of harmonics and Shooting+C	56
2.7	Example 1 : Dependence of the frequency on the first mode amplitude of the first NNM calculated by : Bellizzi & Bouc with different numbers of harmonics and Shooting+C.	57
2.8	Example 1 : Dependence of the second mode amplitude on the first one of the first NNM calculated by : Bellizzi & Bouc with different numbers of harmonics and Shooting+C.	57
2.9	Example 1 : Dependence of the first mode amplitude (a_1) on the modal amplitude (b) calculated by : Bellizzi & Bouc, Shooting+C and Bellizzi+C with two numbers of harmonics ($m = 28$ and 34).	58
2.10	Example 1 : Dependence of the second mode amplitude (a_2) on the first mode amplitude (a_1) calculated by : Bellizzi & Bouc, Shooting+C and Bellizzi+C with two numbers of harmonics ($m = 28$ and 34).	59
2.11	Example 2 : two-dof nonlinear system with quadratic and cubic springs : 1(left)-Equilibrium configuration, 2(right)-Deformed configuration.	59
2.12	Example 2 : Dependence of the frequency on the first mode amplitude of the first NNM, calculated by : Shooting+C, HBM+C and Bellizzi+C.	60
2.13	Example 2 : Dependence of the frequency on the first mode amplitude of the first NNM calculated by : Shooting+C, Shaw & Pierre and Bellizzi & Bouc.	61

2.14	Example 2 : Dependence of the second mode amplitude on the first one of the first NNM calculated by : Shooting+C, HBM+C and Bellizzi+C.	61
2.15	Example 2 : Dependence of the second mode amplitude on the first one of the first NNM calculated by : Shooting+C, Shaw & Pierre and Bellizzi & Bouc.	62
2.16	Example 2 : Dependence of the first mode amplitude (a_1) on the modal amplitude (b) calculated by : Bellizzi & Bouc and Bellizzi+C.	62
2.17	Example 2 : Invariant manifold of the first NNM.	63
2.18	Example 2 : First NNM. (Left $\rightarrow$ right) Invariant manifolds - Time responses $q_1(t)$ - Time responses $q_2(t)$. (Top $\rightarrow$ bottom) Point 1, 2, 3, 4 described in Fig. 2.16 . . .	63
2.19	Example 2 : Dependence of the first mode amplitude (a_2) on the modal amplitude (b) of the second NNM, calculated by : Bellizzi & Bouc and Bellizzi+C.	64
2.20	Example 2 : How to obtain a new branch at bifurcation point for the second NNM (dashed arrows denoted positive direction).	65
2.21	Example 2 : Dependence of the second mode amplitude (a_2) on the frequency of the second NNM, calculated by : Shooting+C, HBM+C and Bellizzi+C.	65
2.22	Example 2 : Dependence of the second mode amplitude (a_2) on the frequency of the second NNM, calculated by : Shooting+C, Shaw & Pierre and Bellizzi & Bouc. . .	66
2.23	Example 2 : Dependence of the second mode amplitude (a_2) on the first mode amplitude (a_1) of the second NNM, calculated by : Shooting+C, HBM+C and Bellizzi+C. . .	66
2.24	Example 2 : Dependence of the second mode amplitude (a_2) on the first mode amplitude (a_1) of the second NNM, calculated by : Shooting+C, Shaw & Pierre and Bellizzi & Bouc.	67
2.25	Example 2 : Invariant Manifold of the second NNM.	67
2.26	Example 2 : Second NNM, (Left $\rightarrow$ right) Invariant manifolds - Time response $q_2(t)$ - Time response $q_1(t)$. (Top $\rightarrow$ bottom) Point 1, 2, 3, 4 described in Fig.2.20 . . .	68
3.1	Localisation dans le plan temps-fréquence de : 1-Ondelette mère (gauche) ; 2-Transformée en ondelettes (droite).	74
3.2	Localisation dans le plan temps-fréquence de l'ondelette mère de Cauchy (trait continu (-)) et de sa version dilatée-translatée avec $a > 1$ (trait pointillé (- .)) et $a < 1$ (trait discontinu (- -))	77
3.3	Modules de la TO (avec l'ondelette de Cauchy) du signal $u(t) = \cos(2\pi t)$: 1-(gauche) longueur infinie, 2-(droite) longueur finie.	78
3.4	Modules de la TO ($Q = 4$) du signal $u(t) = \cos(2\pi t)$ sur le plan temps-fréquence. Les différents domaines D_{red} où l'effet de bord est négligé.	80
3.5	Modules de la TO (Cauchy) du signal $u(t) = \cos(2\pi t) - 2\cos(3\pi t)$: 1-(gauche) $Q = 5$, 2-(droite) $Q = 9$	81
3.6	Modules de la TO ($Q = 3, 6$) du signal $u(t) = e^{-0,015 \cdot 10\pi t} \cos\left(10\pi\sqrt{1 - 0,015^2}t\right)$ sur le plan temps-fréquence. Le temps d'arrêt : $\tilde{t} = 24,43s$ (droite verticale discontinue). . .	82
3.7	Fonctions correctrices $Corr_2$ et $Corr_3$ avec l'ondelette de Cauchy	86
3.8	Procédure d'identification des paramètres modaux	90

3.9	Erreur relative sur la fréquence identifiée en fonction de Q : 1(Gauche) par la méthode des arêtes. 2(Droite) par la méthode des modules.	92
3.10	Erreur relative sur le taux d'amortissement identifié en fonction de Q (par la méthode des arêtes).	92
3.11	Signal ($L = 15s$) - TF - TO ($Q = 4$).	93
3.12	1(Gauche) Arêtes des TOs. 2(Droite) Phases des TOs.	93
3.13	1(Gauche) Log du module des TOs. 2(Droite) Signal reconstruit.	94
3.14	Système discret à 4DDLs, à amortissement non-proportionnel : $k_1 = k_5 = 2$, $k_2 = k_4 = 4$, $k_3 = 4$, $m_1 = m_4 = 1$, $m_2 = m_3 = 2$, $c_1 = 0,5$, $c_2 = c_3 = 0,2$ et $c_4 = 0,1$	94
3.15	Déplacements du système à 4DDLs à amortissement non-proportionnel.	95
3.16	TOs et arêtes du signal $u_4(t)$ pour quatre intervalles de fréquence.	95
3.17	(En haut) Mode 1 - Mode 2. (En bas) Mode 3 - Mode 4.	97
3.18	Les paramètres modaux du 1 ^{er} mode : (En haut) 1) TO. 2) Log du module. (En bas) 3) Déformée modale. 4) Produit $\xi_1 \omega_1$	99
3.19	1(gauche) Relation entre la durée effective (t_f) de la fonction du RD et le nombre de points d'échantillonnage (n). 2(droite) Une partie de la fonction du RD comparée avec la réponse impulsionnelle associée (le cas de $\text{Log}_{10} n = 4,7$).	102
3.20	Transformée de Fourier - Transformée en ondelettes - Signal aléatoire.	104
3.21	Variation de la fréquence et de l'amortissement en fonction du facteur de qualité Q	105
3.22	Oscillateur linéaire soumis à un bruit blanc : la FSO du signal $u(t)$ et celle de la réponse impulsionnelle associée $h(t)$ (Avec $Q = 287$).	105
3.23	Distribution des paramètres modaux identifiés à partir de 1000 réponses ambiantes : 1) Fréquence propre. 2) Amortissement.	106
3.24	Bâtiment à sept étages à tester (construit en 1970). Hauteur : 22m. Longueur : 30m. Largeur : 14m. (a) Façade sud. (b) Façade nord. (c) Plan d'un étage typique : Murs de contreventement en B.A. Façades en panneaux de béton faiblement armé. Plancher en B.A.	107
3.25	Accélérations mesurées au 7 ^e , 5 ^e , 3 ^e étage et au rez-de-chaussée du bâtiment à Lyon.	108
3.26	Accélérations mesurées au 7 ^e , 5 ^e , 3 ^e étage et rez-de-chaussée du bâtiment à Lyon (sous choc).	109
3.27	TO de l'accélération mesurée au dernier étage (capteur 1).	110
3.28	1(Gauche) Fréquences instantanées. 2(Droite) Backbones.	110
3.29	Oscillateur non linéaire et amorti : Signal - TF - TO ($Q = 3,6$) avec les conditions initiales : $u(0) = 2.10^{-3} m$ et $\dot{u}(0) = 0$	116
3.30	Oscillateur non linéaire ($\xi = 0,5\%$) : 1(Gauche) Fréquence instantanée. 2(Droite) Backbone.	118
3.31	Oscillateur non linéaire ($\xi = 0,5\%$) : 1(Gauche) Amplitude instantanée. 2(Droite) Signal reconstruit.	118
3.32	Benchmark de l'Université de Liège (Gauche) - Un zoom pour la lame mince (droite)	119

3.33	Benchmark de Liège : L'accélération mesurée au capteur 7 - TF - TO.	120
3.34	Benchmark de Liège : Fréquences instantanées.	121
3.35	Benchmark de Liège : TO du signal mesuré par le capteur 7 ($Q = 16, 8 \simeq Q_{min}$).	122
3.36	Rapport des fréquences : 1(Gauche) par rapport à la fréquence du 1 ^{er} mode. 2(Droite) par rapport à la fréquence du 2 ^e mode.	122
3.37	Benchmark de Liège : 1(Gauche) Backbone du 1 ^{er} mode. 2(Droite) Amplitude instantanée du 1 ^{er} mode.	123
3.38	Benchmark de Liège : Identification du 1 ^{er} mode.	124
3.39	Benchmark du LCPC - Rapport des fréquences : 1(Gauche) par rapport à la fréquence du 1 ^{er} mode. 2(Droite) par rapport à la fréquence du 2 ^e mode.	125
3.40	Benchmark de LCPC : Identification du 1 ^{er} mode.	126
3.41	Benchmark de LCPC - Identification de la non linéarité pour le 1 ^{er} mode : 1(Gauche) Backbone. 2(Droite) Amplitude instantanée.	127
4.1	Variation de huit premières fréquences linéaires en fonction du nombre d'éléments	135
4.2	Le cas de $F = 8, 1N$: Fréquence instantanée du premier mode	137
4.3	Le cas de $F = 20, 8N$: 1(gauche)-Fréquence instantanée du premier mode, 2(droite)-Rapports entre les fréquences des surharmoniques et celle du 3 ^e mode.	138
4.4	$\det \mathbf{G}_a $ en fonction du rapport $\omega_1/\omega_{1,lin}$	139
4.5	Premier MNN, calculé par Shooting+C : 1(Gauche) q_1/h fonction de $\omega_1/\omega_{1,lin}$ ($\omega_{1,lin} = 34,7876 rad/s$), 2(Droite) q_3/h en fonction de q_1/h	139
4.6	Déformées de la poutre associées aux points P_1 , P_2 et P_3 indiqués sur la figure 4.5.	140
4.7	Surfaces invariantes du 1 ^{er} MNN associées aux : 1(Gauche) 2 ^e coordonnée modale, 2(Gauche) 3 ^e coordonnée modale (associée à la branche 1 de solution).	140
4.8	Réponses temporelles associées aux : (Haut en bas)-points P_1 , P_2 et P_3 . (Gauche à droite)-composantes $q_1(t)$, $q_2(t)$ et $q_3(t)$	141
4.9	Premier MNN, calculé par HBM+C : 1(Gauche) q_1/h en fonction de $\omega_1/\omega_{1,lin}$, 2(Droite) q_3/h en fonction de q_1/h	141
4.10	Approche de Shaw et Pierre : 1(Gauche) q_1/h en fonction de $\omega_1/\omega_{1,lin}$, 2(Droite) q_3/h en fonction de q_1/h	142
4.11	Surfaces invariantes calculées par l'approche de Shaw et Pierre : (En haut) $P_2(a, \phi)$ et $Q_2(a, \phi)$, (En bas) $P_3(a, \phi)$ et $Q_3(a, \phi)$	143
4.12	Premier MNN, calculé par Bellizzi+C : 1(Gauche) q_1/h en fonction de $\omega_1/\omega_{1,lin}$, 2(Droite) q_3/h en fonction de q_1/h	144
4.13	Premier MNN, calculé par Bellizzi+C : q_1/h en fonction de b/h	144
4.14	Premier MNN, calculé par Bellizzi+C : 1(Gauche) $\Omega_1(b, \phi)/\omega_{1,lin}$, 2(Droite) $\Psi_1(b, \phi)$ (associé à la branche 1 de solution).	144
4.15	Premier MNN, calculé par Bellizzi+C : 1(Gauche) $\Psi_2(b, \phi)$, 2(Droite) $\Psi_3(b, \phi)$ (associé à la branche 1 de solution).	145
4.16	Lame non linéaire en statique : 1) Déplacement transverse. 2) Rotation.	149

4.17	Lame non linéaire en statique : Déplacement axial	149
5.1	Principe de sous-structuration dynamique	154
5.2	Divergence des solutions obtenues par la technique de développement asymptotique : 1(Gauche)-Backbones. 2(Droite)-Relation entre les amplitudes modales	156
5.3	Exemple 1 : Système non linéaire à 5-DDLs, pris dans la thèse d'Apiwattannalung- garn [3] : 1(En haut)-Système global. 2(En bas)-Sous-systèmes.	163
5.4	Exemple 1 : Réponses temporelles du système non linéaire à 5-DDLs (cas de $k_4 = 5$). Trait continu (-) : Modèle complet. Trait discontinu (- -) : Modèle réduit.	166
5.5	Exemple 1 : Réponses temporelles du système non linéaire à 5-DDLs (cas de $k_4 =$ 20). Trait continu (-) : Modèle complet. Trait discontinu (- -) : Modèle réduit.	166
5.6	Exemple 2 : Système non linéaire à 6-DDLs : 1(En haut)-Système global. 2(En bas)-Sous-systèmes.	167
5.7	Exemple 2 : X_3 en fonction des coordonnées "maîtres" q_1 et q_2	169
5.8	Exemple 2 : Réponses temporelles du sous-système (2). Trait continu (-) : Modèle réduit. Trait discontinu (- -) : Modèle complet.	169
5.9	Exemple 2 : Réponses temporelles du système global. Trait continu (-) : Modèle réduit. Trait discontinu (- -) : Modèle complet.	170
A.1	Surface invariante de phase associée au premier mode.	176
A.2	Représentation du 1 ^{er} mode dans : 1(Gauche) l'espace de configuration (ligne mo- dale), 2(Droite) l'espace de phase.	177

Liste des tableaux

3.1	Trois ondelettes mères progressives complexes	76
3.2	Paramètres des ondelettes mères pour caractériser les arêtes	83
3.3	Identification des paramètres modaux	89
3.4	Paramètres de la procédure d'identification	91
3.5	Fréquences et modes réels (valeurs théoriques)	96
3.6	Paramètres de la procédure d'identification	96
3.7	Fréquences et amortissements identifiés	96
3.8	Modes complexes identifiés	97
3.9	Paramètres de la procédure d'identification	98
3.10	Fréquences propres et taux d'amortissements identifiés	99
3.11	Paramètres de la procédure d'identification	104
3.12	Paramètres modaux identifiés	105
3.13	Résultats obtenus par Hans <i>et al.</i> [33] pour le 1 ^{er} mode transversal	107
3.14	Paramètres de la procédure d'identification	108
3.15	Paramètres modaux identifiés pour le 1 ^{er} mode transversal	109
3.16	Paramètres de la procédure d'identification	117
3.17	Résultats d'identification de f_0 et de $\varepsilon\beta$	117
3.18	Résultats d'identification de $\xi\omega_0$ et de a_0	117
3.19	Caractéristiques du benchmark de Liège	119
3.20	Paramètres de la procédure d'identification du benchmark de Liège	120
3.21	Résultats d'identification du benchmark de Liège	123
3.22	Paramètres de la procédure d'identification	125
3.23	Résultats d'identification du benchmark du LCPC	126
4.1	Fréquences propres linéaires pour les huit premiers modes	136
4.2	Fréquences et amortissements identifiés pour deux cas de forces	138
5.1	Les pulsations propres linéaires des systèmes et sous-systèmes dans l'exemple 1 . .	165
5.2	Les pulsations propres linéaires des systèmes et sous-systèmes dans l'exemple 2 . .	168

Introduction générale

L'analyse vibratoire des systèmes mécaniques, et plus particulièrement des systèmes non linéaires couplés, est une thématique importante car elle concerne de nombreux domaines tels que le génie civil, l'aéronautique, l'automobile, etc. Dans le cas de vibrations "linéaires" en basses fréquences, l'analyse modale s'applique et on compte jusqu'à ce jour de nombreuses applications réelles. Pourtant, dans de nombreuses situations, les structures présentent en réalité des comportements non linéaires dont l'origine est très diverse comme la géométrie, le matériau ou le contact. Les modèles linéaires ne sont alors plus adaptés pour représenter le comportement de ces structures, d'où le besoin de modèles non linéaires plus précis. Les travaux scientifiques concernant les vibrations non linéaires ne sont pas abondants en raison de la complexité des problèmes engendrés. Ceux-ci sont difficiles voire impossibles à résoudre et conduisent habituellement un temps de calcul important.

En parallèle, on s'intéresse aussi de plus en plus au développement des techniques d'identification qui permettent de détecter et d'identifier les paramètres caractérisant le comportement dynamique des systèmes mécaniques. Il s'agit de techniques de traitement des signaux mesurés par des essais vibratoires dans le domaine temporel, fréquentiel ou encore temps-fréquence. Depuis sa première utilisation dans les années 90, l'analyse temps-fréquence, et en particulier la transformation en ondelettes, a été étudiée et appliquée pour identifier des systèmes vibratoires linéaires et non linéaires à partir des signaux modulés en temps et en fréquence. On a voulu, dans une partie de cette thèse, apporter quelques discussions et modifications, dans le but de compléter et améliorer ces outils puissants et efficaces pour le traitement du signal.

Les travaux réalisés au cours de cette thèse s'inscrivent dans une thématique du groupe "dynamique" de l'Institut de Navier. Les principaux objectifs sont double : d'une part le développement des techniques de calcul des modes non linéaires, conduisant à l'extension de la méthode de sous-structuration dynamique au cas non linéaire, et d'autre part l'identification des systèmes vibratoires linéaires ainsi que non linéaires à l'aide de l'analyse en ondelettes.

Ce mémoire est composé de cinq chapitres.

Le premier chapitre fait une synthèse bibliographique sur la dynamique et l'identification des systèmes mécaniques vibratoires. Dans un premier temps, on liste les différentes définitions et principales méthodes de calcul de modes non linéaires. On aborde ensuite les méthodes d'identification des paramètres caractérisant la dynamique des systèmes vibratoires linéaires et non linéaires à partir soit des réponses libres, soit des réponses sous excitations ambiantes. Puis, quelques rappels concernant la dynamique des structures non linéaires géométriques notamment des poutres minces sont données. Enfin, on donne une vision globale sur les méthodes de réduction de modèle en dynamique linéaire en général et non linéaire en particulier.

Dans *le deuxième chapitre*, on aborde le calcul des Modes Normaux Non linéaire (MNNs). Comme ce chapitre va faire l'objet d'un article à soumettre dans une revue internationale, le texte

est rédigé *en anglais*. On présente deux approches pour le calcul des modes non linéaires : l'approche de Shaw et Pierre et l'approche de Bellizzi et Bouc, puis deux méthodes pour calculer les réponses périodiques : la méthode de balance harmonique et la méthode de tir. Les trois dernières méthodes conduisent à l'écriture d'un système d'équations algébriques non linéaires dont le nombre d'inconnues est plus grand que le nombre d'équations. On présente ensuite la technique de résolution par continuation des branches de solutions qui permet de détecter des points de bifurcation et de déterminer de nouvelles branches de solutions passant par ces points. Enfin, les techniques sont appliquées sur deux systèmes discrets non linéaires à deux degrés de liberté (DDLs) avec des non linéarités cubiques et quadratiques.

Au cours du *troisième chapitre*, on présente des méthodes d'identification des systèmes vibratoires linéaires et non linéaires en utilisant la transformation en ondelettes (TO). Après avoir présenté des notions et des propriétés essentielles sur le traitement de signal à l'aide de la transformation en ondelettes continue (TOC), on aborde les problèmes de calcul numérique de la TOC : les méthodes de calcul, l'effet de bord, le découplage des modes, le temps d'arrêt de la transformée en ondelettes et surtout, le choix des paramètres de l'ondelette mère. Ensuite, on présente plusieurs techniques pour déterminer les paramètres caractérisant la TO : l'arête et le squelette. Puis, deux procédures d'identification des paramètres modaux des systèmes linéaires à partir des réponses libres et des réponses sous excitations ambiantes respectivement sont proposées. Après une brève revue des méthodes pour détecter, caractériser et identifier les non linéarités des systèmes vibratoires faiblement non linéaires, on propose une solution analytique approchée par la méthode de Krylov-Bogoliubov-Mitropolskii, de la réponse libre d'un oscillateur faiblement non linéaire et fortement amorti. De plus, au long de ce chapitre, les méthodes présentées sont validées au travers d'exemples numériques ainsi que de tests réels.

Ensuite, le *quatrième chapitre* propose une étude statique et dynamique d'une poutre mince bi-encastée avec des non linéarités géométriques. On rappelle d'abord les équations "classiques" de la vibration libre de la poutre en faisant l'*hypothèse de grands déplacements et de petites déformations*. Puis les équations sont discrétisées par éléments finis et on y ajoute de façon empirique, des termes d'amortissements modaux qui sont au préalable identifiés grâce à l'analyse en ondelettes des réponses expérimentales. Enfin, les modes non linéaires de la poutre sont calculés en utilisant les techniques présentées dans le chapitre 2.

Le *dernier chapitre* est consacré à l'extension de la méthode de sous-structuration de Craig-Bampton au cas non linéaire. Après une brève description sur le principe de la méthode de Craig-Bampton, on présente les approches 1-mode et modes-multiples de Shaw et Pierre qui permettent de calculer le modèle réduit d'un système discrétisé non linéaire. En supposant que le couplage entre les sous-systèmes est faible, le modèle réduit du système global est obtenu en assemblant les modèles réduits de ces sous-systèmes non linéaires. La méthode proposée est appliquée sur deux systèmes discrets à 5 et 6 DDLs respectivement, avec des non linéarités cubiques.

Finalement, la thèse est clôturée par quelques conclusions et perspectives de ce travail.

Chapitre 1

Etude bibliographique et problématique générale

CE CHAPITRE a pour objectif de faire une brève synthèse bibliographique sur les problèmes suivants :

- ★ *Les définitions de Modes Normaux Non linéaires (MNNs) et les méthodes de calcul.*
 - ★ *L'identification des systèmes vibratoires linéaires et non linéaires à partir des réponses libres ainsi que des réponses sous excitations ambiantes.*
 - ★ *La dynamique des structures non linéaires géométriques et en particulier des poutres minces.*
 - ★ *Les méthodes de réduction de modèle en dynamique non linéaire des systèmes couplés.*
-

 PLAN DU CHAPITRE 1

1.1	Modes Normaux Non linéaires	25
1.1.1	Définitions des MNNs	25
1.1.2	Méthodes de calcul des MNNs	28
1.2	Identification des systèmes mécaniques vibratoires	29
1.2.1	Identification des systèmes mécaniques linéaires	30
1.2.2	Identification des systèmes mécaniques non linéaires	33
1.3	Dynamique des structures non linéaires géométriques	34
1.4	Méthodes de sous-structuration dynamique	36
1.4.1	Cas linéaire	36
1.4.2	Cas non linéaire	37
1.5	Conclusions	39

1.1 Modes Normaux Non linéaires

En vibration linéaire, une réponse libre d'un système mécanique linéaire est déterminée en superposant les réponses de chaque mode de vibration (ou réponses modales). Les réponses modales sont invariantes, *i.e* pour des conditions initiales qui excitent un seul mode, les réponses du système restent sur ce mode à tout instant. De plus, des paramètres modaux du système comme la fréquence et la forme modale, ne varient pas au cours du temps. Cependant, toutes ces propriétés des systèmes linéaires ne sont plus applicables aux systèmes non linéaires car d'une part, les fréquences varient au cours du temps et d'autre part, les formes modales dépendent de l'amplitude des vibrations.

Ainsi, depuis une quinzaine d'années, des recherches sont menées afin d'étendre les notions de modes aux cas non linéaires à partir des idées issues du cas linéaire, aboutissant au concept des modes normaux non linéaires (MNNs)¹. Cette section est donc consacrée à mettre au point les définitions et les méthode de calcul des MNNs.

1.1.1 Définitions des MNNs

Plusieurs définitions des MNNs ont été proposées. On s'intéresse à trois définitions souvent utilisées :

- **Approche de Rosenberg**

Rosenberg a été l'un des premiers à donner une définition des MNNs. Dans [67], les MNNs d'un système conservatif composé de n -masses reliées par des ressorts non linéaires sont définis comme "*vibration à l'unisson*", *i.e* les vibrations dans lesquelles toutes les masses atteignent leurs valeurs maximales au même instant et passent par leurs positions d'équilibre (zéros) au même instant. Suivant cette définition, les mouvements des masses peuvent s'exprimer en fonction du mouvement de l'une d'entre elles. Rosenberg a également donné une définition des "*lignes modales*" qui sont, dans l'espace de configuration, des trajectoires des modes normaux. Dans le cas où le rapport entre les déplacements des masses est constant, les MNNs sont appelés "*modes similaires*" et les lignes modales sont des droites. Un mode similaire ne dépend pas de l'amplitude de vibration. Dans le cas général, ce rapport n'est plus constant et les MNNs correspondants sont appelés "*modes non-similaires*". Les lignes modales sont alors des courbes tangentes au point d'équilibre stable (point zéro) au mode linéaire associé représenté, comme nous l'avons dit ci-dessus, par une droite passant par l'origine. A noter que l'approche de Rosenberg ne s'applique qu'à des systèmes discrets, conservatifs, avec des forces internes non linéaires qui sont des fonctions polynômiales impaires des composantes des déplacements.

De nombreux travaux fondés sur la définition de Rosenberg ont été réalisés pour étudier la stabilité et la bifurcation des modes normaux non linéaires dues aux changements de certains paramètres et de l'énergie du système. Les systèmes considérés dans ces recherches sont, dans la plupart des cas, conservatifs et à deux degrés-de-liberté (DDLs). Vakakis [86] a étudié en profondeur le phénomène de localisation, la stabilité et la bifurcation des modes non linéaires des réponses libres et forcées des systèmes à plusieurs DDLs.

Dans le contexte des MNNs de Rosenberg, à partir de la forme générale de la réponse libre des systèmes linéaires, Bouc et Bellizzi ([19] et [13]) ont proposé une nouvelle formulation sur l'existence et le calcul des MNNs de type Rosenberg pour des systèmes mécaniques non linéaires

¹MNNs : Modes Normaux Non linéaires, notation utilisée tout au long de la thèse

discrets, conservatifs et autonomes. Un MNN est défini par la donnée de deux fonctions respectivement de type “fréquence” et “forme modale” dépendant de deux variables appelées respectivement amplitude et phase. Ces fonctions, devant être π -périodiques par rapport à la variable de phase, sont supposées avoir une forme trigonométrique par rapport à cette variable. La période de vibrations ne dépend que de l’amplitude des oscillations. La méthode de résolution numérique de Galerkin a été proposée pour calculer les MNNs. Suivant que les systèmes possèdent des non linéarités symétriques ou non par rapport au déplacement, deux formulations ont été proposées (voir [13]).

Dans [12], Bouc et Bellizzi ont proposé une nouvelle approche de calcul des modes non linéaires complexes pour les systèmes non linéaires dissipatifs avec amortissement proportionnel ou non-proportionnel. Pourtant, leur approche n’est valable que dans le cas où les non linéarités sont fonctions symétriques des déplacements. A la différence du cas précédent non-amorti, un MNN est défini par la donnée de quatre variables : deux pour les formes modales qui sont associées aux parties réelle et imaginaire des modes complexes, deux pour les fréquences qui sont associées aux parties réelle et imaginaire des valeurs propres complexes. Il est important de remarquer que seules les oscillations libres ont été considérées dans les approches de Bouc et Bellizzi.

- **Approche de Shaw et Pierre**

Shaw et Pierre [71] ont étudié l’invariance de l’espace bi-dimensionnel constitué par l’espace des déplacements et celui des vitesses. Pour des conditions initiales se trouvant sur une surface invariante d’un mode, les réponses du système restent sur cette surface à tout instant. Pour un système linéaire, cette surface est un plan. A partir des résultats obtenus pour les systèmes linéaires, les auteurs ont proposé une nouvelle définition de MNNs pour des systèmes non linéaires discrets [71] et continus [72]. Dans leur approche, un mode est choisi comme mode “maître”. Les mouvements et les vitesses de tous les autres DDLs, appelés “esclaves” s’expriment en fonction du couple déplacement-vitesse du mode “maître”. Les surfaces invariantes dans le cas non linéaire sont tangentes, au point zéro, au plan invariant du mode linéaire associé. Pour calculer les modes non linéaires, des variables “esclaves” sont approchées par des séries polynômiales en terme de variables du mode “maître”.

Si le système possède une résonance interne, *i.e* s’il existe des relations de type : $\omega_i = p\omega_j, \omega_k = p\omega_i \pm q\omega_j, \dots$, (p, q) étant des entiers, il se produit des transferts énergétiques entre les modes impliqués dans la résonance interne, ces modes se couplent. Dans ce cas, les approches présentées dans [71] et [72] ne sont plus valables. Boivin *et al.* [17] ont généralisé le concept de Shaw et Pierre au cas de modes multiples, *i.e* les modes “maîtres” choisis étant des modes impliqués dans la résonance interne. A noter que les variables “esclaves” se développent aussi en séries polynômiales des variables des modes “maîtres”. La résolution des équations différentielles régissant la géométrie des surfaces invariantes proposée dans [71] et [17] n’est possible que lorsque les amplitudes de vibration restent “petites”. Le domaine de validité, *i.e* l’intervalle des amplitudes des réponses modales de la coordonnée “maître”, n’est pas connu a priori. Ce domaine est différent d’un système à l’autre.

Fondé sur l’approche de Shaw et Pierre, Pesheck *et al.* [65] et [64] ont proposé une nouvelle approche “1-mode” de MNN qui donne des solutions précises même si les amplitudes deviennent “assez grandes”. Dans la formulation de Pesheck, les surfaces invariantes des MNNs sont paramétrées par un nouveau couple formé par l’amplitude et la phase du mode “maître” choisi, au lieu du couple “déplacement-vitesse”. Les équations algébriques non linéaires régissant la géométrie des surfaces invariantes sont ensuite résolues par la méthode de Galerkin.

Jiang *et al.* [39] ont adapté l’approche de Pesheck [65] pour des systèmes dont les forces internes

non linéaires sont continues par morceaux. Les surfaces invariantes des MNNs sont à nouveau paramétrées par les variables d’amplitude et de phase.

Combinant les approches de Boivin [17] et Pesheck [65], Jiang *et al.* [40] ont généralisé l’approche de Pesheck au cas où le système présente des résonances internes entre les modes. Le calcul des MNNs d’un tel système est toutefois très coûteux en temps de calcul.

Récemment dans [41], Jiang *et al.* ont proposé une approche pour calculer les MNNs des systèmes vibratoires sous excitations harmoniques en considérant l’excitation comme une variable complémentaire qui, avec les deux autres variables : amplitude et phase, régit la géométrie des surfaces invariantes des MNNs.

Apiwattanalungarn, dans son rapport de thèse [3], a simulé les deux types d’approche de Shaw et Pierre : celle de type amplitude-phase et celle de type déplacement-vitesse. Il a montré que quand l’amplitude est “assez importante”, l’approche “amplitude-phase” donne des solutions qui sont meilleures que celles obtenues avec l’approche “déplacement-vitesse”. Par contre, l’approche “amplitude-phase” est beaucoup plus coûteuse en temps de calcul.

Il est important de noter que dans la plupart des recherches citées ci-dessus, les systèmes étudiés sont des systèmes conservatifs ou amortis avec amortissement proportionnel : les modes normaux de ces systèmes sont réels. Dans le cas de la présence d’amortissement non-proportionnel, les valeurs propres ainsi que les modes propres sont complexes. Legrand *et al.* [50] ont généralisé l’approche de Shaw et Pierre et de Pesheck pour le cas des systèmes dissipatifs avec des amortissements proportionnels et non-proportionnels. En se fondant sur la transformation réelle linéaire de Hirsch et Smale [34], une nouvelle approche de type amplitude-phase a été proposée. La méthodologie a été appliquée à la construction des MNNs d’un système de rotor avec des non linéarités locales.

- **Approche “formes normales”**

Cette approche consiste à faire de changements de variables de façon à éliminer, jusqu’à un ordre fixé à l’avance, le maximum de termes non linéaires. Par exemple, afin d’éliminer tous les termes quadratiques, les équations de la dynamique sont tronquées jusqu’à l’ordre 2 et les solutions asymptotiques sont donc recherchées sous forme de séries polynômiales d’ordre 2. La forme simplifiée de l’équation de la dynamique est appelée “*forme normale*”. L’analyse de cette forme normale devient plus facile car cette dernière ne comprend que des termes non linéaires “importants” pour la dynamique. Cette méthode est fondée sur la théorie de la “*forme normale*” de Poincaré et Poincaré-Dulac. Les coordonnées obtenues après le changement de variables sont appelées coordonnées normales. Pour avoir plus de détails sur cette approche, il est conseillé de consulter [32].

Une méthode directe fondée sur la théorie de la “forme normale” est proposée par Nayfeh [58] afin de construire des MNNs pour les systèmes continus. Cette méthode est comparée avec les trois méthodes suivantes : la méthode à échelles multiples, la méthode de Shaw et Pierre [72] et la méthode de King et Vakakis [43] à travers les exemples de trois systèmes conservatifs continus non linéaires avec des non linéarités cubiques. L’auteur conclut que la méthode à échelles multiples est la plus simple et la plus rapide parmi les trois méthodes citées et que la méthode de “formes normales” peut s’appliquer aux systèmes avec ou sans résonance interne, ce qui est exclu pour les deux autres méthodes.

Une variante de cette méthode a été présentée par Jézéquel et Lamarque dans [38]. Les auteurs ont étudié en détail l’oscillation libre et l’oscillation forcée des systèmes non linéaires à 2-DDLs. Les résultats ont été comparés avec ceux obtenus par les méthodes analytiques classiques (méthode à échelles multiples) et la méthode numérique de Runge-Kutta.

Touzé [83] utilise le concept de sous-espace invariant de Shaw et Pierre pour définir un MNN d'un système conservatif non linéaire discret. Un changement de variables non linéaires, fondé sur la théorie de formes normales, permet d'obtenir un sous-espace invariant. Cependant, comme la méthode se base sur une technique de développement asymptotique, son domaine de validité est limité.

Il est important de noter que les approches de MNNs, conduisant à une résolution par un développement asymptotique des solutions, possèdent des champs d'applications et des domaines de validité assez limités. Ces derniers ne sont pas connus a priori et ils sont différents d'un système à l'autre. Certains problèmes ne sont pas abordés dans la littérature : 1) La détermination du domaine de validité d'une approche, 2) La comparaison de résultats obtenus par différentes approches. Le chapitre 2 a pour objectif de résoudre ces problèmes.

1.1.2 Méthodes de calcul des MNNs

Cochelin [23] a classé les méthodes de calcul des MNNs en quatre groupes principaux. Ici, on ne présente que les points forts et les points faibles de chacune des méthodes. Les détails ne seront pas abordés.

- **Les méthodes de perturbation**

La méthode de Poincaré est la plus ancienne méthode pour résoudre des équations différentielles non linéaires. Elle a été proposée par Henri Poincaré en 1892 pour résoudre certains problèmes de mécanique céleste. Elle consiste à chercher des solutions périodiques des équations différentielles non linéaires sous forme d'une série de puissances croissantes d'un paramètre ε associé aux termes non linéaires. Elle est à l'origine du développement de plusieurs méthodes : méthode des échelles multiples, méthode de Krylov-Bogoloubov, méthode de la moyenne, etc.

Toutes ces méthodes ont l'avantage d'obtenir des solutions analytiques et de permettre une bonne compréhension sur les phénomènes importants de la dynamique non linéaire comme l'apparition des surharmoniques, la stabilité des solutions. Par contre, plus l'ordre du paramètre ε augmente, plus le calcul devient lourd en temps de calcul et en complexité de calcul. En plus, la convergence n'est assurée que pour un paramètre ε "petit", ce qui exclut les systèmes possédant une non linéarité "forte".

- **Les méthodes de type Galerkin**

On peut trouver plusieurs versions de ce type de techniques : méthodes de Galerkin, méthodes de balance harmonique, etc (voir le livre de Szeplinska [77] pour plus de détails). Des solutions supposées périodiques sont développées sous la forme de séries de Fourier tronquées. L'équation de la dynamique est ensuite projetée sur une base de Galerkin, *i.e* une base constituée par des termes sinusoïdaux et cosinoïdaux, afin de déterminer les coefficients situés dans les séries de Fourier. Un système d'équations algébriques est ainsi obtenu. Il est usuellement résolu par des méthodes numériques.

En faisant une comparaison entre les deux types de techniques : les méthodes de perturbation (MPs) et les méthodes d'équilibrage harmonique (EH), Cochelin [23] montre que le domaine de validité des EHs est plus "large" que celui des MPs mais que l'analyse de l'interaction entre les modes est plus facile avec les MPs qu'avec les EHs.

Lewandowski [53] montre une équivalence entre les méthodes de Galerkin et les méthodes de balance harmonique. L'auteur a proposé une méthode de résolution numérique du système algébrique, obtenue par la méthode de Galerkin, en utilisant la technique de continuation des

branches de solutions suivant un paramètre de chemin choisi : la longueur d'arc, par exemple. Cette méthode est très efficace pour étudier la stabilité des réponses et pour construire de nouvelles branches de réponses aux points de bifurcation.

Notons que la méthode de Galerkin a été utilisée aussi bien dans l'approche de Bouc et Bellizzi ([19], [12] et [13]) et dans les approches de Shaw et Pierre ([64], [50], ...) pour trouver la géométrie de la surface invariante de phase.

- **Les techniques asymptotiques**

Dans leurs premiers travaux, Shaw et Pierre [71] proposaient un développement asymptotique pour calculer directement les sous-espaces invariants. Comme dans la section précédente, les mouvements des coordonnées “esclaves” sont recherchés sous la forme de séries polynômiales d'un couple des variables de phase (déplacement-vitesse) du mode “maître” choisi. La détermination des coefficients dans les séries se fait par la mise à zéro de tous les termes ayant une même puissance par rapport aux variables du mode “maître”.

Boivin *et al.* [17] ont également utilisé cette technique asymptotique pour calculer les sous-espaces invariants de phase avec des dimensions supérieures à 2 dans le cas où il existe des résonances internes.

Dans les travaux de Jézéquel et Lamarque [38], de Nayfeh [58] et de Touzé [83] sur l'analyse des systèmes dynamiques non linéaires utilisant la théorie des formes normales, les modes non linéaires sont calculés via un développement asymptotique.

Pourtant, le domaine de validité des techniques asymptotiques est assez limité. Lorsque l'amplitude de vibration est “grande”, ces techniques ne donnent plus de bons résultats.

- **Méthodes de tir**

Il est évident que la précision des résultats obtenus par les méthodes de type Galerkin dépend du nombre de termes harmoniques choisi. Plus ce nombre est important, plus les résultats sont bons. Pourtant, le nombre d'équations algébriques différentielles à résoudre devient grand. Cela implique un coût de calcul très important.

La méthode de tir présente beaucoup d'avantages dans le calcul des réponses périodiques. Elle consiste à intégrer directement l'équation différentielle de la dynamique sur une période de vibration T en utilisant des méthodes d'intégration temporelle numérique comme Runge-Kutta, Newmark, etc. Un système de N équations (N est le nombre de degrés de liberté du système) est obtenu tandis que l'on a $N + 1$ inconnues, du fait que la période n'est pas connue a priori. Cette inconnue supplémentaire peut être la période, la fréquence ou le niveau d'énergie mécanique, etc. En donnant une valeur fixée pour cette inconnue, le système de N équations peut être résolu.

Il est préférable d'associer à la méthode de tir une méthode de continuation suivant un paramètre de contrôle afin de faire une étude de stabilité et de bifurcation sur les branches des solutions. La combinaison de ces deux méthodes a été utilisée avec succès par Sundararajan *et al.* [76] pour calculer les réponses périodiques des systèmes non linéaires soumises à des excitations périodiques.

1.2 Identification des systèmes mécaniques vibratoires

Que signifie “l'identification modale” ? Elle consiste à identifier les caractéristiques dynamiques des systèmes mécaniques à partir des réponses vibratoires. Depuis les années 80, on cherche constamment à améliorer des méthodes existantes, à en développer de nouvelles afin d'augmenter

la précision et la fiabilité des résultats identifiés, de réduire le coût de calcul et enfin de faciliter l'utilisation de la méthode.

Dans la littérature, il existe beaucoup de méthodes d'identification. Il est difficile d'effectuer une classification détaillée qui tienne compte de toutes les méthodes existantes. On peut les classer en se fondant sur les critères donnés par E. Balmès :

- Le type de représentation,
- Le nombre de DDLs (un DDL ou multiple-DDLs),
- La nature (globale/locale) des paramètres estimés,
- Le nombre d'entrées et sorties, *i.e* le nombre d'excitations et des réponses mesurées simultanément. On a les types de méthodes suivants : SISO (Une entrée - Une sortie), SIMO (Une entrée - Multiples Sorties), MIMO (Multiples Entrées - Multiples Sorties).
- Les données de référence : les données temporelles sont les plus utilisées car elles contiennent les informations exactes. Elles sont souvent très bruitées comme par exemple les réponses de structures sous excitations ambiantes : les excitations dues au vent, au trafic, etc.
- Le domaine de travail : le domaine temporel, fréquentiel ou temps-fréquence.

Maia *et al.* [56] ont donné une classification globale des méthodes d'analyse modale qui possède beaucoup de similitudes vis-à-vis des critères énoncés ci-dessus. De plus, sa classification utilise un critère supplémentaire direct/indirect. Les méthodes directes sont relatives au modèle spatial du système, *i.e* l'équation de mouvement du système. En revanche, les méthodes indirectes travaillent sur le modèle modal, *i.e* les paramètres modaux du système : fréquences propres, amortissements et déformées modales.

Dans les sections suivantes, l'identification des systèmes linéaires et non linéaires sera abordée.

1.2.1 Identification des systèmes mécaniques linéaires

Les méthodes d'identification des systèmes linéaires sont classifiées en trois groupes associés à leur domaine de travail : le domaine temporel, le domaine fréquentiel et le domaine temps-fréquence. Comme les méthodes d'identification sont abondantes, on présente dans cette section quelques méthodes souvent utilisées ainsi que les points forts et les points faibles de chacune de ces méthodes.

a) Domaine temporel

★ *La méthode d'Ibrahim Time Domain (ITD)* proposée par Ibrahim *et al.* [36] s'applique au cas des oscillations libres d'un système. Cette méthode utilise le modèle d'état discret du système, *i.e* le vecteur temporel est discrétisé avec le pas Δt . La matrice de Hankel de l'état du système associé à un ordre fixé est établie. L'identification se fait par la recherche des valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice W reliant la matrice de Hankel définie à l'instant t et celle définie à l'instant $t + \Delta t$. La matrice des valeurs propres et la matrice des vecteurs propres fournissent respectivement les fréquences propres et les déformées modales du système. Afin d'éliminer des modes non-physiques ou des modes parasites, le Facteur de Confiance Modal (FCM) est utilisé. Cette méthode est très sensible aux signaux bruités, ce qui peut perturber considérablement la détermination des amortissements. Notons bien que cette méthode se trouve dans la catégorie : MDDL, SIMO et que la matrice W se détermine au sens des moindres carrés.

★ *Least Squares Complex Exponential Method (LSCE)*

Le principe de cette méthode est le même que la méthode d'Ibrahim. Dans la méthode d'Ibrahim, l'état discret du système à l'instant t est représenté en fonction de celui à l'instant $t + \Delta t$ par un polynôme d'ordre 1, tandis que dans la méthode LSCE, cette fonction est d'un ordre supérieur à 1. Les matrices reliant la matrice de Hankel définie à l'instant t et celle définie à l'instant $t + \Delta t$ W_i sont aussi déterminées au sens des moindres carrés. Le champ d'application de la méthode de LSCE est aussi MDLL et SIMO. On constate que cette méthode est aussi très sensible au bruit dans les signaux de mesure.

★ *Méthodes des sous-espaces*

Comme dans les deux méthodes précédentes, une représentation discrète de l'état du système est également utilisée dans les méthodes des sous-espaces. La matrice de Hankel s'établit par des covariances entre les états d'un système définis à deux instants consécutifs. Différentes de celles obtenues par deux méthodes précédentes, les matrices d'observabilité et de contrôlabilité se déterminent par une technique de Décomposition en Valeurs Singulières. Les paramètres modaux s'obtiennent à travers les matrices d'observabilité et de contrôlabilité. Plusieurs méthodes de calcul de ces matrices ont été proposées par Ta [78], Lardies [45], [44], Liu [55]. Afin d'éliminer des modes parasites, Lardies [44] a proposé une procédure qui permet de choisir l'ordre du modèle qui n'est pas connu a priori. Cette méthode des sous-espaces a été appliquée avec succès à plusieurs systèmes réels tels que le pont suspendu de Jinma en Chine (voir Ta [78]).

★ *Méthodes du décrétement aléatoire*

Cette méthode a été développée par Cole [24] à la fin des années 60 et au début des années 70. Elle sert à mesurer des caractéristiques dynamiques et à détecter des défauts des structures en service et soumises à des forces stochastiques. Selon Cole, une réponse de la structure à une excitation aléatoire à l'instant $t_0 + t$ se compose de trois parties : 1) une première réponse impulsionnelle associée à des conditions initiales en déplacement à l'instant t_0 , 2) une seconde réponse impulsionnelle associée à des conditions initiales en vitesse à l'instant t_0 , 3) une partie aléatoire due au chargement appliqué à la structure dans la période de t_0 à $t_0 + t$. La méthode du décrétement aléatoire consiste à faire la moyenne des réponses correspondant à des conditions initiales choisies suivant une règle fixée a priori. Comme le nombre de moyennes augmente, l'influence de la partie aléatoire, supposée stationnaire, de moyenne nulle et satisfaisant la loi de Gauss, s'annule au fur et à mesure. Les fonctions du décrétement aléatoire obtenues sont proportionnelles aux fonctions d'autocorrélation, qui sont quant à elles proportionnelles aux réponses impulsionnelles de la structure. La technique du décrétement aléatoire a été abordée de façon détaillée dans la thèse d'Asmussen [8].

b) Domaine fréquentiel

★ *La Méthode de Peak Picking* est une méthode classique et très souvent utilisée grâce à sa simplicité. Elle consiste à identifier des paramètres modaux de la structure en se fondant sur des Fonctions de Réponses en Fréquence (FRF) en supposant que les modes sont suffisamment découplés et que les amortissements sont faibles. Les fréquences propres correspondent aux pics de résonance et les amortissements sont mesurés à l'aide de la méthode de largeur de bande. Les résultats identifiés ne sont généralement pas exacts. Il est conseillé d'utiliser ce type de méthode pour donner une estimation initiale des paramètres modaux de la structure.

★ *Méthodes polynômiales*

Notons bien que ce type de méthode s'applique aussi au domaine temporel (voir le *System Identification Toolbox - for use with MATLAB*). Cette méthode consiste à représenter les

FRFs sous la forme de fractions rationnelles. Les coefficients du numérateur et dénominateur de ces fractions se calculent par la résolution au sens des moindres carrés en minimisant l'écart entre la FRF du modèle et la FRF mesurée. Il est notable que les méthodes polynômiales sont très sensibles au bruit.

c) Domaine temps-fréquence

Quand on travaille dans le domaine fréquentiel, on perd la notion temporelle et vice versa. Par contre, l'analyse temps-fréquence des réponses de structures permet de combler cette lacune. L'analyse temps-fréquence est récente et robuste pour l'identification des systèmes mécaniques. Elle a été utilisée à partir des années 90. Le livre de Carmona *et al.* [22] donne un aperçu global sur l'analyse temps-fréquence des réponses vibratoires. Deux types de transformations sont abordés : la transformation continue de Gabor et la transformation continue en ondelettes ainsi que leurs versions discrètes. On peut citer ici les contributions de : Staszewski [75], Ruzzene *et al.* [69], Argoul *et al.* [6], Le *et al.* [49], Bontezar *et al.* [18], Lardies *et al.* [46], etc.

Staszewski *et al.* [74] ont proposé trois méthodes pour la détermination des amortissements en se fondant sur la transformation en ondelettes (TO) : la TO pour une valeur donnée de la dilatation, l'enveloppe des réponses impulsionnelles, la recherche de squelettes des ondelettes. Cette dernière donne les résultats les plus exacts parmi les trois méthodes ci-dessus même pour des signaux bruités.

Dans la thèse de Le [48], une étude détaillée sur les ondelettes et leurs applications dans l'identification des paramètres modaux a été présentée. Trois ondelettes mères sont comparées : les ondelettes de Morlet, les ondelettes de Cauchy et les ondelettes harmoniques. L'auteur retient les deux premières. Les effets de bord dus à la longueur finie des signaux ont été abordés. L'auteur a aussi proposé un intervalle de variation pour le paramètre caractérisant les ondelettes mères afin d'éviter les effets de bord et aussi pour obtenir un bon découplage entre les arêtes. Une application réelle est présentée : la méthode impact-écho qui est une méthode d'auscultation non-destructive des structures en service. Elle permet de détecter les défauts dans les éléments en béton en mesurant le chemin des ondes P se propageant dans ces éléments. Quelques résultats de ce travail ont été publiés en [6] et [49].

La thèse de Ta [78] est semblable à celle de Le [48]. Seules les ondelettes de Morlet ont été abordées. Plus particulièrement, une procédure basée sur l'entropie de Shannon permet à l'auteur de choisir un paramètre optimal des ondelettes de Morlet. Cette procédure a aussi été présentée par Lardies *et al.* [46]. Elle a été appliquée sur des mesures expérimentales de la réponse d'un pont Z24 sous trafic situé entre Berne et Zurich en Suisse.

En ce qui concerne les signaux de courte durée, Boltezar *et al.* [18] ont proposé trois méthodes afin de réduire l'effet de bord et d'obtenir le maximum de bons résultats identifiés : la méthode de *reflected-window*, la méthode d'*equal-window-area* et la méthode d'*adaptive-wavelet-function*. Toutes ces méthodes ont été appliquées sur des signaux expérimentaux.

Erlicher et Argoul [28] s'intéressent au cas où l'amortissement est non proportionnel. Ils ont proposé d'utiliser l'indice de non-proportionnalité donnée par Adhikari [1], pour caractériser l'importance de la non-proportionnalité de l'amortissement modal pour des systèmes linéaires possédant des modes complexes, *i.e* des systèmes avec des amortissements non-proportionnels. Le mode complexe, obtenu par la normalisation proposée dans [1], peut être considéré comme *le mode complexe normalisé optimal* qui est le plus proche de son mode normal associé [1].

Il est important de noter que dans la plupart des articles pré-cités, l'analyse en ondelettes s'applique au cas de réponses libres. Dans le cas de réponses aux bruits ambiants, la méthode du décrétement aléatoire est d'abord utilisée pour obtenir des réponses libres [78]. Nguyen *et al.*

[60] propose d'identifier des caractéristiques modales des structures directement à partir des réponses ambiantes en utilisant la fonction spectrale en ondelettes dont l'expression est donnée par Carmona *et al.* [22]. La procédure proposée a été appliquée à des mesures de bruit de fond sur un immeuble d'habitation à Lyon.

1.2.2 Identification des systèmes mécaniques non linéaires

Comme mentionné dans la section des Modes Normaux Non linéaires, les systèmes non linéaires ne possèdent pas les propriétés des systèmes linéaires :

- Le principe de superposition modale ne peut plus être appliqué.
- Des surharmoniques/sous-harmoniques peuvent être générées.
- La fréquence des oscillations varie au cours du temps et bien évidemment en fonction des amplitudes des réponses.
- La dépendance des réponses vis-à-vis de l'excitation.

Pour ces raisons, on rencontre en pratique beaucoup de difficultés dans l'identification des systèmes non linéaires. On présente ici seulement quelques méthodes qui sont souvent utilisées.

a) Domaine temporel

- *Décomposition en modes Propres Orthogonaux (POD)*

Cette méthode est aussi appelée la décomposition de Karhunen-Loeve (K-L). Elle consiste à extraire des informations spatiales à partir des données temporelles disponibles dans un domaine. L'identification des paramètres d'un système non linéaire se base sur la minimisation d'une fonction de coût représentant la différence entre la POD mesurée et la POD simulée (du modèle). La technique a été validée par Lenaerts *et al.* [52] sur un système constitué par une poutre couplée avec une lame mince. Les résultats identifiés ont été comparés avec ceux obtenus en utilisant la méthode de *reverse path* [51]. Cette technique peut s'appliquer aux systèmes non linéaires continus et à MDDLs.

b) Domaine fréquentiel

- *Les Fonctions de Réponses en Fréquence (FRF) d'ordre élevé*, sont définies en considérant que des réponses du système non linéaire peuvent être développées en séries de Volterra (voir la thèse de Ferreira [29] pour plus de détails).

c) Domaine temps-fréquence

Les techniques d'identification dans le domaine temps-fréquence permettent d'obtenir la variation temporelle des caractéristiques dynamiques du système.

De plus, l'analyse temps-fréquence donne la possibilité de découpler chaque composante modale et de l'identifier de façon séparée. Cependant, le principe de superposition modale n'est plus valable pour des systèmes non linéaires. Par conséquent, afin d'utiliser l'analyse temps-fréquence pour l'identification des paramètres des systèmes non linéaires, il est souvent supposé que la réponse libre d'un système faiblement non linéaire à MDDLs s'exprime comme une combinaison linéaire des composantes "modales". Cette hypothèse a été utilisée par Staszewski [75], Bellizzi *et al.* [14], Argoul *et al.* [6], etc.

Staszewski [75] utilise la transformée de Gabor pour déterminer la fréquence instantanée, l'amplitude instantanée et le backbone, *i.e* l'amplitude en fonction de la fréquence. La technique a été appliquée à la réponse libre d'un oscillateur avec une non linéarité cubique et un amortissement de type Coulomb. Les paramètres du système sont identifiés par la minimisation au sens des moindres carrés, de la différence entre le backbone mesuré et le backbone du modèle

dont l'expression analytique est obtenue en résolvant, par la méthode asymptotique de Krylov-Bogoliubov, l'équation de vibration de l'oscillateur non linéaire cubique.

L'identification des systèmes non linéaires fondée sur la transformation de Gabor est aussi abordée par Bellizzi *et al.* [14]. L'auteur a introduit la notion des Modes Non linéaires Couplées (CNMs) : la réponse totale (avec des conditions initiales quelconques) est définie comme une combinaison linéaire des réponses modales. Les résultats analytiques calculés en utilisant cette notion des CNMs sont comparés avec ceux qui sont obtenues par l'application de la transformation de Gabor.

Dans [6], Argoul et Le ont proposé quatre indicateurs instantanés calculés à partir de la transformée en ondelettes de Cauchy pour détecter et caractériser le comportement non linéaire des systèmes : l'amplitude instantanée, la fréquence instantanée, la phase instantanée et la forme modale instantanée. L'identification est fondée sur une optimisation au sens des moindres carrés. L'idée d'utiliser les solutions analytiques calculées par la méthode de Krylov-Bogoliubov dans l'identification des paramètres non linéaires a été appliquée par plusieurs auteurs. Ta *et al.* [79], Lardies *et al.* [47] ont proposé des solutions analytiques d'un oscillateur non linéaire avec certaines formes de non linéarités vis-à-vis de l'amortissement et de la rigidité. Les caractéristiques dynamiques sont ensuite extraites à l'aide de la transformation en ondelettes de Morlet.

1.3 Dynamique des structures non linéaires géométriques

Les problèmes mécaniques industriels comportent souvent de nombreuses non linéarités. Ils sont non seulement difficiles à modéliser mais aussi difficiles à résoudre car : 1) le principe de superposition modale ne s'applique plus, 2) la fréquence varie en fonction de l'amplitude et aussi au cours du temps. Les non linéarités rencontrées lors de vibrations de structure sont d'origines très diverses ; elles peuvent être dues soit à la géométrie, soit à la loi de comportement du matériau, soit à des phénomènes de contact ou de jeu entre solides, etc. A partir des données expérimentales seules, il est en général très difficile de caractériser quels types de non linéarités sont présents dans le comportement dynamique de la structure.

On trouve classiquement la classification suivante des non linéarités caractéristiques en vibration des structures en trois grandes familles (par exemple : Thomas et Thouverez [81]) :

- *Non linéarités géométriques* : Elles sont liées à l'apparition de grandes amplitudes dans le comportement des structures. Comme on se trouve dans le cas de grands déplacements, la relation entre la déformation et le déplacement n'est plus linéaire. Les structures minces de type poutres, plaques et coques auxquelles l'industrie fait de nos jours très souvent appel, sont très rapidement sujettes aux grands déplacements. La prise en compte des non linéarités géométriques dues aux grandes amplitudes dans la modélisation du comportement des structures minces est actuellement un domaine de recherche extrêmement actif au niveau international.
- *Non linéarités matérielles* : Elles trouvent leur origine dans des dislocations au sein même du matériau. La relation entre la contrainte et la déformation n'est plus linéaire. On peut citer des lois de comportement élasto-plastiques, viscoélastiques non linéaires, etc.
- *Non linéarités de contact* : Elles apparaissent à la jonction entre solides. Elles dépendent des phénomènes de contact, de frottement, de jeu au niveau des liaisons entre solides.

Les structures minces possédant des non linéarités géométriques, sont aujourd'hui largement utilisées dans de nombreux domaines : le génie civil, l'aéronautique, etc. L'atténuation et le contrôle

des vibrations pour de telles structures deviennent un enjeu important afin d'éviter des phénomènes pouvant être dangereux lors de l'utilisation normale de ces structures.

L'étude des vibrations des structures non linéaires peut être abordée suivant plusieurs aspects :

- la modélisation par la méthode des éléments finis ou la méthode de Ritz,
- la résolution des équations de vibration : par les méthodes asymptotiques, la méthode de balance harmonique, la méthode de tir, etc,
- le calcul des modes non linéaires : par l'utilisation des notions de MNNs de Shaw et Pierre ou de Bouc et Bellizzi, etc,
- la nature des oscillations : libre ou forcée.

Nous soulignons dans quelques références suivantes, la démarche retenue pour la modélisation des vibrations de structures minces avec des non linéarités géométriques ainsi que la résolution des équations du mouvement.

Lewandowski [53]-[54] utilise la méthode de Galerkin (ou de balance harmonique) pour transformer des équations différentielles régissant les vibrations des structures avec des non linéarités géométriques en un système d'équations algébriques. Ce dernier est résolu par la méthode de continuation qui permet à l'auteur d'étudier la stabilité des réponses stationnaires en utilisant la théorie de Floquet.

Ribeiro [66] étudie les vibrations périodiques des plaques et poutres non linéaires géométriques en régime forcé. La méthode des éléments finis est d'abord utilisée pour la modélisation. La résolution des équations de la dynamique est fondée sur une méthode de tir. Grâce à elle, l'auteur a pu obtenir certaines branches de solutions non accessibles par la méthode de balance harmonique.

Pesheck *et al.* [65] s'intéresse aux vibrations d'une hélice d'hélicoptère représentée par une poutre mince avec des non linéarités géométriques. Il utilise la méthode de Rayleigh-Ritz pour modéliser son comportement vibratoire. Les modes non linéaires de cette poutre sont calculés en appliquant l'approche 1-mode de Shaw et Pierre en terme d'amplitude et de phase.

Jiang *et al.* [40] étend l'approche de Shaw et Pierre pour le cas de modes multiples avec possibilité de prendre en compte des résonances internes. Son approche est validée au travers de l'étude de l'hélice d'hélicoptère précédente. Touzé *et al.* [84] utilise la théorie de la forme normale pour calculer les MNNs des structures non linéaires géométriques. Pourtant, comme la méthode se fonde sur une approche asymptotique, son domaine de validité reste assez limité. Les résultats ne sont plus fiables lorsque l'amplitude de vibration devient importante.

Azrar *et al.* [11] propose d'utiliser la méthode asymptotique numérique (MAN) pour calculer les réponses des plaques avec non linéarités géométriques sous deux types d'excitation harmonique : répartie et concentrée. Il s'agit d'utiliser la méthode de balance harmonique et la méthode des éléments finis pour obtenir un système d'équations non linéaires algébriques. La résolution se fait par une technique de perturbation, *i.e* la solution est développée sous une série polynômiale de puissances. Cette dernière permet de transformer le système d'équations non linéaires en une séquence de problèmes linéaires qui ont une même matrice de rigidité. La précision des résultats dépend bien évidemment de l'ordre de la série polynômiale caractérisant la solution. L'avantage de la MAN réside dans le fait qu'elle ne nécessite pas beaucoup de temps de calcul même si l'ordre de la série est assez importante. Pérignon, dans sa thèse [62], combine toutes ces techniques (éléments finis, balance harmonique et continuation) et les implémente dans un code de calcul éléments finis **Eve**, développé au sein du laboratoire de mécanique et d'acoustique (LMA) à Marseille, pouvant être téléchargé à partir de l'internet². Ce code de calcul permet de traiter des problèmes : élasticité

²<http://esm2.imt-mrs.fr/~baguet/eve>

3D, élasticité 2D, plaques-coques et barres. Il peut calculer des réponses forcées harmoniques en non linéaire grâce à l'utilisation d'un solveur MAN ou Newton-Raphson. Récemment, Arquier *et al.* [7] propose une technique similaire à celle de Pérignon mais avec deux modifications : 1) la méthode de balance harmonique est remplacée par la méthode de tir, 2) le paramètre utilisé dans la méthode de continuation est l'énergie mécanique totale calculée sur une orbite périodique de solutions.

1.4 Méthodes de sous-structuration dynamique

Les structures complexes sont souvent composées de plusieurs sous-structures. Ces dernières peuvent être dimensionnées et fabriquées par plusieurs équipes souvent installées sur des sites différents pour des raisons du coût et de main d'œuvre ou du stockage, etc. Par conséquent, l'utilisation de la méthode de sous-structuration dans le contexte industriel ainsi que dans la recherche s'avère très utile. D'une part, la taille du problème et le coût de calcul sont réduits considérablement. D'autre part, la compréhension sur le comportement dynamique de la structure globale est fondée sur celle de chaque sous-structure. Pourtant, il est important de noter que la méthode de sous-structuration est réellement efficace lorsque le nombre de DDL de l'interface de couplage est bien inférieur à celui de chaque sous-structure.

Les techniques de sous-structuration sont écrites pour des structures à comportement linéaire. Lorsque le comportement est non linéaire, elles sont plus difficiles à appliquer. La construction d'un modèle réduit et des déformées statiques pour chaque sous-structure non linéaire est encore possible dans certains cas. Dans la suite, on présente quelques références bibliographiques sur les méthodes de sous-structuration dynamique pour deux cas : le cas linéaire et le cas non linéaire.

1.4.1 Cas linéaire

La méthode de sous-structuration est initialement proposée par Hurty [35] en 1965. Il s'agit de la méthode de sous-structuration à interface de couplage fixe dans laquelle le comportement dynamique de chaque sous-structure linéaire est décrit par un ensemble de modes tels que : 1) Modes de corps rigide, 2) Modes statiques, définis comme les déformées de la sous-structure dues aux déplacements unitaires des points situés à l'interface de couplage, 3) Modes normaux de la sous-structure avec interface de couplage fixe. Les forces de réaction à l'interface de couplage se séparent en deux termes : les réactions statiquement déterminées et les réactions statiquement indéterminées.

En 1968, Craig et Bampton [25] ont simplifié le traitement des modes de corps rigide dans la méthode de Hurty en regroupant ces deux termes de forces de réaction à l'interface en un seul terme. Actuellement, la méthode de sous-structuration de Craig-Bampton est l'une des méthodes les plus utilisées en raison de sa simplicité, sa robustesse et sa précision.

En parallèle, d'autres techniques fondées sur le concept de Hurty ont été proposées et développées. *Dépendant des conditions aux limites appliquées aux interfaces de couplage entre les sous-structures*, Tran [85] propose de classer les techniques de sous-structuration en quatre groupes :

- *Interface fixe*, développée par Hurty [35], Craig-Bampton [25]. L'efficacité de la méthode réside dans sa simplicité d'utilisation, la précision de ses résultats. Les conditions aux limites explicites permettent un assemblage direct des matrices élémentaires. Par contre, elles

sont difficiles voire impossibles à réaliser expérimentalement pour une vérification avec une modélisation par éléments finis.

- *Interface libre*, développée par MacNeal [57], Rubin [68] et Craig-Chang [26]. Elle possède aussi une bonne précision. Contrairement à la précédente, les conditions aux limites libres associées sont implicites mais plus faciles à gérer si des essais sont envisagés. Pourtant, l'utilisation de cette méthode est limitée à cause de sa formulation assez complexe.
- *Interface hybride*, développée par MacNeal [57], Craig-Chang[27]. Puisque cette méthode est une combinaison des deux précédentes, elle en a les inconvénients mentionnés ci-dessus.
- *Interface chargée*, développée par Benfield et Hruda [15]. Dans cette méthode, les interfaces de couplage peuvent être libres ou chargées partiellement ou pour tous les degrés-de-liberté. Elle n'est pas souvent utilisée car elle donne une précision limitée dans les résultats obtenus.

Suivant le domaine dans lequel on aborde le problème, Girard et Roy, dans leur livre [31], classifie les méthodes de sous-structuration en trois catégories :

- 1- *Représentation matricielle* par assemblage direct des matrices de masse, raideur et amortissement de chaque sous-structure. C'est la technique de base qui convient aux matrices de petite taille.
- 2- *Représentation par des modes propres* ou synthèse modale. Elle est bien adaptée au domaine des basses fréquences dans lequel l'utilisation du principe de superposition modale est efficace. Cette méthode conduit à une réduction du modèle en utilisant une base incluant des modes propres tronqués et des modes statiques qui sont dépendants des conditions aux limites de l'interface de couplage comme présenté précédemment. C'est la raison pour laquelle Girard et Roy considèrent les techniques associées aux quatre types d'interface précédemment présentés, appartenant à cette catégorie (synthèse modale).
- 3- *Représentation par fonction de transfert*, ou synthèse fréquentielle. Sa mise en oeuvre est simple. Elle s'adapte très bien à l'expérimentation dans laquelle les fonctions de transfert sont les premières caractéristiques accessibles. Le champ d'application de telles méthodes est plus large que les autres car les structures industrielles possèdent souvent des caractéristiques dynamiques dépendant de la fréquence. Par exemple, le problème d'interaction sol-structure dans lequel la fonction d'impédance du sol dépend de la fréquence d'oscillation. Pourtant, la taille du problème peut devenir très importante parce que les fonctions de transfert sont calculées fréquence par fréquence tandis que, dans certains cas, la bande de fréquence peut être large et la discrétisation en fréquence assez fine.

1.4.2 Cas non linéaire

Si nous gardons la terminologie de Girard et Roy [31], les techniques de sous-structuration dans le cas non linéaire, peuvent être classifiées en trois catégories :

- 1- *Représentation matricielle*.

Comme dans le cas linéaire, cette technique de base est adaptée aux systèmes de petite taille. A cause de la présence des raideurs non linéaires, il est manifesté que le coût de calcul du cas non linéaire est plus important que dans le cas linéaire.

- 2- *Représentation par modes propres*.

Apiwattannalungarn [3] applique la méthode de sous-structuration à interface fixe dans le cas des systèmes discrets non linéaires avec un couplage faible entre les sous-systèmes. Le principe de l'approche d'Apiwattannalungarn est le suivant :

- L'équation de la dynamique de chaque sous-structure est projetée sur une base linéaire de Craig-Bampton, constituée par : **1)** des modes propres qui sont solutions du problème de vibration de la sous-structure non-amortie linéaire associée avec interface fixe (*problème d'interface fixe*), **2)** des modes statiques calculés en imposant des déplacements unitaires à chaque DDL (*problème de relèvements statiques*).
- En utilisant le concept de sous-espace invariant de Shaw et Pierre [71], le modèle réduit élémentaire de chaque sous-structure non linéaire avec interface fixe est déterminé. Notons qu'il est formé par un oscillateur non linéaire.
- Grâce aux conditions de continuité des déplacements et d'équilibre des efforts à l'interface de couplage, les modèles réduits élémentaires non linéaires sont assemblés pour obtenir un modèle réduit global.

Pour chaque sous-structure non linéaire, Iwatsubo *et al.* [37] utilisent la méthode des échelles multiples pour obtenir un système d'équations différentielles ou algébriques linéaires suivant les ordres de perturbation. Finalement, les auteurs appliquent la méthode de synthèse modale sur l'ensemble des équations linéaires. Ils proposent également de remplacer la méthode des échelles multiples par celle de la balance harmonique qui leur permet d'obtenir des équations linéaires pour les composantes fréquentielles. Ces deux méthodes sont appliquées sur un système de rotor où la force interne non linéaire est de type Duffing (cubique en déplacement) et la force externe est harmonique avec une fréquence d'excitation proche de la première fréquence critique du rotor. Les auteurs concluent qu'avec l'utilisation des deux méthodes proposées, des résultats numériques corrects ont pu être obtenus dans le cas où seuls quelques modes sont pris en compte et que le temps de calcul peut être considérablement réduit.

Sundararajan *et al.* [76] utilisent la méthode de sous-structuration avec interface fixe pour obtenir un modèle réduit d'un système de rotor composé par des *sous-systèmes linéaires avec des éléments d'interface non linéaires*. La résolution de l'équation de vibration du modèle réduit global est ensuite effectuée par application de la méthode de tir combinée avec la technique de continuation.

Argoul *et al.* [4], Nguyen *et al.* [61] ont adopté une démarche similaire en remplaçant l'interface non linéaire par des ressorts non linéaires. Le comportement des sous-systèmes reste linéaire. Ils étendent cette démarche au cas d'une poutre dont le comportement est supposé linéaire, couplée avec une lame mince. Le comportement de la lame est modélisée par des ressorts non linéaires et sa masse est négligée car elle est très inférieure à celle de la poutre. Un modèle réduit est alors obtenu grâce à la méthode de Craig-Bampton. La comparaison entre les réponses expérimentales (essais menés à l'Université de Liège dans l'équipe du Prof. J.C. Golinval) et les réponses numériques obtenus par intégration directe des équations du mouvement du modèle réduit est réalisée au moyen de l'analyse continue en ondelettes.

3- Représentation par fonction de transfert.

Ce type de méthode est bien adapté aux systèmes non linéaires dont les caractéristiques dépendent de la fréquence.

Les méthodes de sous-structuration non linéaire dans le domaine fréquentiel, sont développées dans la thèse de Ferreira [29]. Les équations différentielles non linéaires sont transformées en équations algébriques en utilisant deux méthodes telles que la méthode de Balance Multi-Harmonique et la méthode de Fonctions de Description Multi-Harmoniques. La première est une version généralisée de la méthode de Balance Harmonique en définissant les Fonctions de Réponses en Fréquences d'ordre supérieur à l'aide des séries de Volterra, tandis que la deuxième cherche à approcher (ou linéariser) les forces non linéaires par des Fonctions de Description.

Finalement, le couplage des sous-systèmes est effectué au travers des fonctions de transfert.

1.5 Conclusions

Ce chapitre est constitué d'une synthèse bibliographique sur les vibrations non linéaires de systèmes mécaniques, notamment les techniques de réduction de modèle et d'identification des paramètres caractérisant le comportement dynamique.

Dans un premier temps, on s'est intéressé aux définitions et à la présentation des méthodes de calcul des modes non linéaires, en mettant l'accent sur le champ d'application et le domaine de validité de chacune d'entre elles. Il est apparu qu'une comparaison des approches des MNNs ainsi que des techniques pour déterminer le domaine de validité de chacune des approches est nécessaire, ce qu'on va aborder dans le chapitre 2.

Ensuite, différentes techniques d'identification de systèmes linéaires et non linéaires à partir des réponses libres ou des réponses sous excitations ambiantes, ont été présentées. Elles permettent d'obtenir une vision générale sur les techniques d'identification. Une attention particulière est ensuite portée sur l'utilisation de l'analyse temps-fréquence par la transformation en ondelettes à des fins d'identification (cf. chapitre 3).

Puis, après une classification de diverses formes des non linéarités rencontrées en vibration, quelques références bibliographiques concernant la dynamique des structures avec non linéarités géométriques ont été données. Le cas d'une poutre mince est envisagé au chapitre 4 et permet l'illustration et la validation des techniques de calcul des MNNs numériquement mises au point au chapitre 2.

Enfin, une revue de méthodes de sous-structuration dynamique des systèmes mécaniques couplés a été présentée. On s'est intéressé en particulier à la synthèse modale dans le domaine non linéaire, dans le but d'étendre une technique de sous-structuration linéaire classique (méthode de Craig-Bampton) au cas non linéaire en utilisant les concepts des MNNs précédemment décrits. Ce travail fait l'objet du chapitre 5.

Chapitre 2

About some numerical techniques for computing Nonlinear Normal Modes

THIS CHAPTER deals with four numerical techniques for computing Nonlinear Normal Modes (NNM) : Shooting Method, Harmonic Balance Method, Bellizzi-Bouc's approach and Shaw-Pierre's approach.

After presented the principle of these methods, we dispose of some systems of non-linear algebraic equations. Some of these can be solved by using the Continuation technique that allows to obtain all of the branches of solution (stable and unstable branches). Proposed techniques are validated and compared through two nonlinear systems with quadratic and cubic springs.

PLAN DU CHAPITRE 2

2.1	Introduction	43
2.2	Shaw and Pierre's approach	44
2.3	Bellizzi and Bouc's approach	45
2.3.1	Symmetrical nonlinear restoring forces	46
2.3.2	General nonlinear restoring forces	46
2.4	Two methods for calculating periodic solutions	47
2.4.1	Harmonic Balance Methods	47
2.4.2	Shooting Methods	47
2.4.3	Link with Bellizzi and Bouc's approach	48
2.5	Continuation techniques	49
2.5.1	Preliminary	49
2.5.2	Principles	49
2.5.3	Implementation	51
2.6	Procedure for determining the convergence and the validity domain of all the methods	52
2.7	Numerical simulations	53
2.7.1	Example 1 : A nonlinear two-mass system with cubic nonlinearities	53
2.7.2	Example 2 : A nonlinear two-mass system with quadratic and cubic nonlinearities	58
2.8	Conclusions	67

Two methods for calculating periodic solutions of nonlinear vibratory systems are first presented : Shooting Method (*Shooting*) and Harmonic Balance Method (*HBM*). By combining with a Continuation technique (*C*), both methods (*Shooting+C* and *HBM+C*) allow obtaining a whole solution (stable and unstable branches) and performing stability and bifurcation analysis of solutions. Two approaches for computing nonlinear normal modes (NNMs) are presented : Shaw and Pierre's approach [64], Bellizzi and Bouc's approach [12]. A procedure to determine the validity domain of both approaches, *i.e* the variation domain of the amplitude of the solution, is proposed by using the *Shooting+C* or *HBM+C* methods. In addition, an improvement of the Bellizzi and Bouc's approach [12] for computing NNMs of nonlinear systems is presented by combining it with Continuation technique (*Bellizzi+C* method). All proposed techniques are validated through two simulated data sets obtained from the responses of two-*degrees of freedom* nonlinear systems with quadratic and cubic springs. The solution convergence and accuracy are discussed by comparing all the methods. In summary, the techniques presented in this chapter exhibit promising results for computing NNMs of a wide variety of nonlinear dynamic systems.

2.1 Introduction

The concept of NNMs provides a general framework for building reduced-order models for nonlinear systems. It was initiated by Rosenberg for studying conservative, nonlinear systems with smooth nonlinear restoring forces [67]. The definition of NNMs was then generalized by Shaw and Pierre [71] using the concept of invariant manifolds. Based on this definition, many analytical and numerical frameworks for constructing NNMs have been proposed and applied to a wide class of discrete or continuous systems with smooth or non-smooth restoring forces [39], with internal resonances [40], with non-proportional damping forces [50], subjected to shocks or harmonic excitations [41]. Lewandowski [53]-[54] presented a Galerkin technique for computing periodic solutions. Reference solutions will be determined by using the shooting method [76]. Recently, a new formulation for the existence and computation of a NNM has been introduced by Bellizzi and Bouc [13] in the case of both undamped and damped nonlinear systems [12]. When the amplitude of the NNM becomes "too large" or when a bifurcation occurs, the techniques presented in [71] and in [13], when applied alone, fail and thus lead to no solution. Their validity domain, *i.e* the variation domain of the amplitude of the solution, is not known a priori. When combined with continuation methods, the techniques presented in [76] (*Shooting+C*) and in [53]-[54] (*HBM+C*) can easily detect bifurcation points and find new branches of solutions at these points. Furthermore, the stability analysis can be taken into account. These two methods are useful to see the limitations of the two previous ones particularly during bifurcation analysis.

All of the techniques presented in this chapter are applied to undamped nonlinear systems with polynomial nonlinearities. Their comparison is illustrated through two sets of simulated data : the first set is obtained from the responses of a two-degrees-of-freedom (DOF) nonlinear undamped system with cubic springs; the second set is another two-dof nonlinear system with cubic and quadratic springs. These techniques are compared by analyzing relations between a modal amplitude and the frequency or relations between different modal coordinates. The results are finally compared with those obtained by solving numerically the full system of motion equations excited by initial conditions given by each of the previous methods.

2.2 Shaw and Pierre's approach

The formulations of Shaw and Pierre's approach have been presented in [71] and in [64]. In this section, only some main points will be discussed. For further details, please see these references.

Free oscillations of a N degree-of-freedom (DOF) autonomous non-linear vibratory system are considered. Their equations of motion can be transformed into linear modal coordinates, as follows :

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = f_i(q_j) \quad \text{for } i, j = 1..n, \quad n \leq N \quad (2.1)$$

where q_i , ω_i , f_i are the i -th linear modal coordinate, linear natural frequency and non linear restoring force respectively. Generally, f_i depends on all the linear modal coordinates (displacements and velocities). In order to simplify computational procedures, it is assumed that f_i is only a function of the linear modal displacements : q_j . Thus, the computational cost for constructing NNMs can be significantly reduced.

The definition for NNMs based on invariant manifolds given by Shaw and Pierre [71] is recalled :

“NNM invariant manifold is a two-dimensional invariant manifold in the system's phase space that is tangent to the corresponding linear modal eigenspace at the stable equilibrium point. On this manifold, the system's dynamics is governed by an equation of motion involving a pair of state variables (a modal displacement-velocity or a modal amplitude-phase), it behaves like a single-DOF system”.

In order to parameterize these manifolds, a pair of state variables are chosen as “master” coordinates for a particular NNM. For the k -th NNM, we note $(q_k, \dot{q}_k)$ the master coordinates. In [64], Pesheck *et al.* have proved that the use of modal polar coordinates (amplitude-phase) allows to produce accurate reduced order models over large amplitude ranges. It no longer works for classical modal coordinates (displacement-velocity) when the NNM amplitudes become “large” in the case of strongly nonlinear systems. Consequently, an alternative set of “master” coordinates (a_k, ϕ_k) is defined by using the transformation :

$$\begin{cases} q_k &= a_k \cos \phi_k \\ \dot{q}_k &= -\omega_k a_k \sin \phi_k \end{cases} \quad (2.2)$$

For the sake of simplicity, let us put : $a = a_k$ and $\phi = \phi_k$. Then, all the remaining modal coordinates, called “slave” coordinates, are expressed as unknown functions of the “master” polar coordinates :

$$\begin{cases} q_i &= P_i(a, \phi) \\ \dot{q}_i &= Q_i(a, \phi) \end{cases} \quad \text{for } i = 1..n, \quad i \neq k \quad (2.3)$$

The time derivatives of these coordinates can be easily deduced :

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial P_i}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial P_i}{\partial \phi} \dot{\phi} \\ \ddot{q}_i &= \frac{\partial Q_i}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial Q_i}{\partial \phi} \dot{\phi} \end{cases} \quad \text{for } i = 1..n, \quad i \neq k \quad (2.4)$$

By replacing (2.2) into the k -th equation of motion (2.1), we get :

$$\begin{cases} \ddot{a} &= -\frac{f_k}{\omega_k} \sin \phi \\ \ddot{\phi} &= \omega_k - \frac{f_k}{a\omega_k} \cos \phi \end{cases} \quad (2.5)$$

Finally, a set of $2(n-1)$ PDEs independent of time, governing the invariant manifolds geometry, is obtained by combining (2.3), (2.4) and (2.5) :

$$\begin{cases} Q_i &= \frac{\partial P_i}{\partial a} \left(-\frac{f_k}{\omega_k} \sin \phi \right) + \frac{\partial P_i}{\partial \phi} \left(\omega_k - \frac{f_k}{a\omega_k} \cos \phi \right) \\ -\omega_i^2 P_i + f_i &= \frac{\partial Q_i}{\partial a} \left(-\frac{f_k}{\omega_k} \sin \phi \right) + \frac{\partial Q_i}{\partial \phi} \left(\omega_k - \frac{f_k}{a\omega_k} \cos \phi \right) \end{cases} \quad (2.6)$$

These equations cannot be solved in closed form. Methods to obtain approximate solutions for $P_i(a, \phi)$ and $Q_i(a, \phi)$ are needed. Pesheck *et al.* [64] applied the Galerkin technique to solve the above system over the domain $a \in [0, a_0]$, $\phi \in [0, 2\pi]$. In this chapter, a Galerkin projection is also carried out using some known shape functions $T_{(l,m)}(a, \phi)$ and $U_{(l,m)}(a, \phi)$. The unknown (P_i, Q_i) can be then expressed as a double truncated series in (a, ϕ) such as :

$$\begin{cases} P_i &= \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\phi} C_i^{(l,m)} T_{(l,m)}(a, \phi) \\ Q_i &= \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\phi} D_i^{(l,m)} U_{(l,m)}(a, \phi) \end{cases} \quad (2.7)$$

where $C_i(l, m)$ and $D_i(l, m)$ are unknown coefficients. $T_{(l,m)}(a, \phi)$ and $U_{(l,m)}(a, \phi)$ are known shape functions, composed generally by products of functions in a and ϕ defined over the intervals : $a \in [0, a_0]$ and $\phi \in [0, 2\pi]$. One possible expression is given in [64] :

$$\begin{cases} T_{(l,m)}(a, \phi) &= L_l(a) \cos((m-1)\phi) \\ U_{(l,m)}(a, \phi) &= L_l(a) \sin(m\phi) \end{cases} \quad (2.8)$$

Equations (2.6) are projected into a Galerkin basis made of known shape functions $T_{(l,m)}(a, \phi)$ and $U_{(l,m)}(a, \phi)$. Then, a set of $2(n-1)N_a N_\phi$ non linear algebraic equations in $C_i(l, m)$ and $D_i(l, m)$ are obtained and numerically solved by an optimisation procedure in a least-squares sense.

It can be noticed that the choice of the numbers of expansion functions N_a and N_ϕ depends strongly on the variation domain of the amplitude of the modal coordinates, especially on its upper boundary a_0 which is not known a priori.

2.3 Bellizzi and Bouc's approach

In [13], Bellizzi and Bouc presented a new formulation for the existence and calculation of the synchronous periodic oscillations of undamped autonomous nonlinear mechanical systems based on the Rosenberg's definition for the NNMs :

"A motion where all the material points in the system reach their extreme values and pass through zero simultaneously".

Note that nonlinear restoring forces $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ can be rewritten as a sum of two terms :

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(-\mathbf{q})}{2} + \frac{\mathbf{f}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}(-\mathbf{q})}{2} = \mathbf{f}_{even}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_{odd}(\mathbf{q}) \quad (2.9)$$

where $\mathbf{f}_{even}(\mathbf{q})$ and $\mathbf{f}_{odd}(\mathbf{q})$ are respectively, even and odd nonlinear restoring forces with respect to the displacement $\mathbf{q}$. One can easily obtain : $\mathbf{f}_{even}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_{even}(-\mathbf{q})$ and $\mathbf{f}_{odd}(\mathbf{q}) = -\mathbf{f}_{odd}(-\mathbf{q})$.

Two cases have been considered : symmetrical nonlinear restoring forces, i.e. $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = -\mathbf{f}(-\mathbf{q})$ (or $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_{odd}(\mathbf{q})$) and general nonlinear restoring forces, i.e. $\mathbf{f}(\mathbf{q}) \neq -\mathbf{f}(-\mathbf{q})$. Only main features of [13] will be discussed below.

2.3.1 Symmetrical nonlinear restoring forces

The NNM is expressed in terms of the *modal vector* Ψ and *frequency* Ω that depend on two variables : *amplitude* ($b \geq 0$) and *phase* (Φ). The functions (Ψ, Ω) are assumed to be π -periodic with respect to the *phase* variable (Φ). For the k -th NNM, a synchronous periodic solution to the equation (2.1) is sought in the form :

$$\mathbf{q}(t) = \Psi(b, \Phi(t)) b \cos \Phi(t) \quad \text{with} \quad \mathbf{q}(t) = \{q_1(t), \dots, q_n(t)\}^T \quad (2.10)$$

$$\dot{\Phi}(t) = \Omega(b, \Phi(t)) \quad (2.11)$$

$$\Phi(0) = \varphi, \quad \text{for} \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (2.12)$$

A normalization condition on the modal vector Ψ is chosen to ensure that the parameter b appropriately characterizes the amplitude of the modal line, as follows :

$$\Psi^T(b, \Phi(t))[\mathbf{M}]\Psi(b, \Phi(t)) = 1 \quad (2.13)$$

After replacing the time derivatives $\dot{\mathbf{q}}(t)$ and $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ into Equation (2.1), together with the above equation, a set of $(N + 1)$ -ordinary differential equations (ODEs), that depends on two unknown functions (Ψ, Ω^2) , is obtained. It has been shown in [13] that : **1**) for a well-defined periodic solution of this set of ODEs, we always have : $\Omega^2(b, \Phi) \geq 0$ for $\forall(b \geq 0, \Phi \in [0, 2\pi])$ and **2**) as $b \mapsto 0$, (Ψ, Ω^2) tends to the corresponding normal modes $(\Psi_{lin}, \Omega_{lin}^2)$ of the underlying linear system.

As for the Shaw and Pierre's approach, the Galerkin technique is also carried out. At first, the functions (Ψ, Ω^2) are expanded into finite Fourier series with respect to Φ (truncated at the m -th order and even in ϕ) :

$$\Psi_{(m)}(b, \Phi) = \sum_{k=0}^m \Psi_k(b) \cos 2k\Phi \quad (2.14)$$

$$\Omega_{(m)}^2(b, \Phi) = \sum_{k=0}^m \Omega_k(b) \cos 2k\Phi \quad (2.15)$$

It should be noted that the number (m) of harmonics depends on the fixed amplitude b . Numerical results show that when the upper bound of amplitude domain is chosen as $b = a_0$ (a_0 is the upper bound of amplitude domain in Shaw and Pierre's approach) and the number of harmonics is taken equal to $2m = N_\phi$, similar results are obtained.

After projecting on the Galerkin basis which is defined over the domain $\Phi \in [0, 2\pi]$, a set of $(n + 1)(m + 1)$ non linear algebraic equations (for a fixed value of b) is obtained :

$$\mathbf{G}^{(1)}(\mathbf{\Gamma}^{(1)}) = 0 \quad \text{with} \quad \mathbf{\Gamma}^{(1)} = [\Psi_0, \Omega_0, \dots, \Psi_m, \Omega_m]^T \quad (2.16)$$

Theses equations are solved numerically by an optimization process in a least-squares sense. As before for the Shaw and Pierre's approach, the Bellizzi and Bouc's approach is valid for some b belonging to a certain interval $[0, b_0]$. The upper bound b_0 is not known a priori.

2.3.2 General nonlinear restoring forces

In this case, the NNMs take the following form :

$$\mathbf{q}(t) = \Psi(b, \Phi(t)) b \cos \Phi(t) + b\mathbf{B}(b, \Phi(t)) \quad (2.17)$$

$$\dot{\Phi}(t) = \Omega(b, \Phi(t)) \quad (2.18)$$

$$\Phi(0) = \varphi, \quad \text{for} \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (2.19)$$

where $\mathbf{B}$ is a vector function assumed to be π -periodic with respect to the phase variable $\Phi(t)$ and is added to balance the even terms of the nonlinear restoring forces $\mathbf{f}_{even}(\mathbf{q})$:

$$\mathbf{B}_{(m)}(b, \Phi) = \sum_{k=0}^m \mathbf{B}_k(b) \cos 2k\Phi \quad (2.20)$$

As for the symmetrical case, the Galerkin procedure is used to obtain approximate solutions. A set of $(2n+1)(m+1)$ non linear algebraic equations (for a fixed value of b) is obtained :

$$\mathbf{G}^{(2)}(\mathbf{\Gamma}^{(2)}) = 0 \quad \text{with} \quad \mathbf{\Gamma}^{(2)} = [\Psi_0, \mathbf{B}_0, \Omega_0, \dots, \Psi_m, \mathbf{B}_m, \Omega_m]^T \quad (2.21)$$

2.4 Two methods for calculating periodic solutions

In order to obtain periodic solutions for non linear vibratory undamped systems, a lot of methods have been proposed and applied successfully. A brief review of two methods is given here : Harmonic Balance Method (HBMs) [53]-[54] and Shooting Method [76].

2.4.1 Harmonic Balance Methods

The HBM consists in seeking solutions expanded into finite Fourier series (truncated at n -order), as follows :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \mathbf{q}_0 + \sum_{k=1}^{n_0} \left(\mathbf{q}_k^{(c)} \cos k\Phi + \mathbf{q}_k^{(s)} \sin k\Phi \right) \\ \Phi(t) &= \omega t \end{aligned} \quad (2.22)$$

where $\mathbf{q}_k^{(c)}$ and $\mathbf{q}_k^{(s)}$ are modal vectors corresponding to the k -th harmonic term of the Fourier expansion, ω is the oscillation frequency.

As for both of previous approaches, a similar accuracy of responses is obtained when the number of harmonic terms verifies : $n_0 = 2m = N_\phi$. A Galerkin projection is also carried out. Then, a set of $n(2n_0+1)$ equations in $n(2n_0+1)$ unknowns $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_k^{(c)}, \mathbf{q}_k^{(s)})$ (for a fixed value of ω) is obtained, that can be written in the following form :

$$\mathbf{G}^{(3)}(\mathbf{\Gamma}^{(3)}) = 0 \quad \text{with} \quad \mathbf{\Gamma}^{(3)} = [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1^{(c)}, \mathbf{q}_1^{(s)}, \dots, \mathbf{q}_{n_0}^{(c)}, \mathbf{q}_{n_0}^{(s)}]^T \quad (2.23)$$

2.4.2 Shooting Methods

The general governing equation for a periodically forced non linear system (for a fixed value of period (T) or oscillation frequency (ω)) is written in the first order form, of $2n$ -dimension, as follows :

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\tau, \mathbf{z}(\tau)) \quad (2.24)$$

where τ is the time variable and $\mathbf{z} = [\mathbf{q} \quad \dot{\mathbf{q}}]^T$ is the state vector.

The periodicity of solutions requires the following condition to be fulfilled :

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(T) \quad (2.25)$$

It is often convenient to normalize the period (T) to unity, *i.e* the new time variable is defined as $t = \tau/T$. Equations (2.24) and (2.25) become then :

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = T\mathbf{g}(t, \mathbf{z}(t)) = \mathbf{h}(t, \mathbf{z}(t)) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(1) \quad (2.27)$$

The initial condition vector is denoted by $\mathbf{s} = \mathbf{z}(0)$. Then, the vector $\mathbf{z}(t)$ depends on the choice of $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(\mathbf{s}, t) \quad (2.28)$$

The periodicity condition (2.27) can be rewritten as follows :

$$\mathbf{G}^{(4)}(\mathbf{s}) = \mathbf{z}(1) - \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(\mathbf{s}, t = 1) - \mathbf{s} = 0 \quad (2.29)$$

It should be noted that the number of non linear algebraic equations of the shooting method ($2n$), is not dependent on the number of harmonics present in the response and is equal to the order of the system. Thus, solutions obtained from the shooting method will be considered, in the following, as “reference” ones.

If we put $\mathbf{\Gamma}^{(4)} = \mathbf{s}$, a similar form of equation is obtained as previously :

$$\mathbf{G}^{(4)}(\mathbf{\Gamma}^{(4)}) = 0 \quad (2.30)$$

2.4.3 Link with Bellizzi and Bouc’s approach

In order to determine the limit of Bellizzi and Bouc’s approach, *i.e.* the maximum value of modal amplitude b_{max} , the relation between the amplitude of the “master” mode (a_k) and the modal amplitude b is needed.

Consider at first, the case of **symmetrical nonlinear restoring forces**. From the formulation (2.10) and the normalisation condition (2.13) at zero phase, *i.e* $\Phi(t) = 0$, we get :

$$\mathbf{q}_0^T [\mathbf{M}] \mathbf{q}_0 = \{\mathbf{\Psi}^T [\mathbf{M}] \mathbf{\Psi}\} b^2 = b^2 \quad (2.31)$$

where $\mathbf{q}_0$ denotes the value of time response $\mathbf{q}(t)$ at zero phase.

The first equation of (2.2) at zero phase is :

$$\mathbf{q}_{0,k} = a_k \quad (2.32)$$

where $\mathbf{q}_{0,k}$ is the k -th coordinate of the vector $\mathbf{q}_0$ and a_k is the amplitude of the “master” mode (k -th mode)

So, the relation between the amplitude of the “master” mode (a_k) and the modal amplitude b can be obtained.

In the case of **general nonlinear restoring forces**, the normalisation condition (at zero phase) is rewritten as follows :

$$\mathbf{q}_0^T [\mathbf{M}] \mathbf{q}_0 = \{[\mathbf{\Psi} + \mathbf{B}]^T [\mathbf{M}] [\mathbf{\Psi} + \mathbf{B}]\} b^2 = b^2 \{1 + \mathbf{B}^T [\mathbf{M}] \mathbf{B}\} \quad (2.33)$$

It should be noticed that this formulation is restricted to Bellizzi and Bouc approach. So, in the case of HBM, Shooting Method and Shaw and Pierre’s approach, the relation between the amplitude of the “master” mode (a_k) and the modal amplitude (b) cannot be found.

2.5 Continuation techniques

This section presents the continuation algorithm for solving the motion equation, obtained by three methods : Bellizzi-Bouc's approach, HBM and Shooting method.

2.5.1 Preliminary

The three techniques previously presented have some common features :

- They depend on a fixed parameter λ :
 - *Bouc and Bellizzi's approach* : $\lambda = b$, the amplitude of the considered NNM for both cases of symmetrical and general nonlinear restoring forces.
 - *Hamonic Balance Method* : $\lambda = \omega$, the oscillation frequency.
 - *Shooting Method* : λ can be chosen as the period (T) or the oscillation frequency (ω).
- Four equations (2.16), (2.21), (2.23) and (2.30) have the same form :

$$\mathbf{G}(\mathbf{\Gamma}) = 0 \quad (2.34)$$

Equations (2.16), (2.21), (2.23) can be written explicitly as functions of $\mathbf{\Gamma}$ but it is not the case for the equation (2.30).

Thus, both of these features can be summarized in the following equation :

$$\mathbf{G}(\mathbf{\Gamma}, \lambda) = 0 \quad (2.35)$$

For a fixed value of λ , the above equation can be solved numerically. However, the stability as well as bifurcations of solutions are difficult to predict. In order to obtain all the branches of solution (unstable and stable), the Continuation technique is considered. It consists of calculating iterative solutions for some discrete values λ_1, λ_2 , etc. Since continuation techniques require the calculation of a Jacobian matrix at every time increment, it can be used to form the Floquet matrix which in turn will yield information on local stability and bifurcation.

There are a lot of Continuation techniques : arc-length [76], pseudo arc-length,... In this chapter, the arc-length continuation scheme is chosen because of its simplicity.

2.5.2 Principles

Since the number of variables is one more than the number of equations when the parameter λ is considered as an additional variable, a new equation is needed. The variables of the problem are re-parameterized by introducing a new parameter α , called *arc-length*. Then, the arc-length equation is defined as follows :

$$\frac{\partial \mathbf{\Gamma}^T}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \right)^2 = 1 \quad (2.36)$$

The algorithm of the Continuation method is made of two successive loops : one external and one internal.

i) External loop :

At the $(i+1)$ -th step, the previous solution pair $(\mathbf{\Gamma}^{(i)}, \lambda^{(i)})$ is assumed to be determined. A predictor for the $(i+1)$ -th solution pair $(\mathbf{\Gamma}^{(i+1)}, \lambda^{(i+1)})$ is defined as follows :

$$\begin{cases} \mathbf{\Gamma}^{(i+1)} &= \mathbf{\Gamma}^{(i)} + \Delta \mathbf{\Gamma}^{(i)} \\ \lambda^{(i+1)} &= \lambda^{(i)} + \Delta \lambda^{(i)} \end{cases} \quad (2.37)$$

where the incremental pair $(\Delta\mathbf{\Gamma}^{(i)}, \Delta\lambda^{(i)})$ is determined iteratively in the internal loop.

ii) Internal loop :

- *At the $(k+1)$ -th step :* the incremental pair $(\Delta\mathbf{\Gamma}_{k+1}^{(i)}, \Delta\lambda_{k+1}^{(i)})$ can be calculated by :

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{\Gamma}_{k+1}^{(i)} &= \Delta\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} + \delta\mathbf{\Gamma} \\ \Delta\lambda_{k+1}^{(i)} &= \Delta\lambda_k^{(i)} + \delta\lambda \end{cases} \quad (2.38)$$

It is constrained by the arc-length condition (2.36) :

$$\left[\Delta\mathbf{\Gamma}_{k+1}^{(i)}\right]^T \Delta\mathbf{\Gamma}_{k+1}^{(i)} + \left[\Delta\lambda_{k+1}^{(i)}\right]^2 = [\Delta\alpha]^2 \quad (2.39)$$

To determine $(\delta\mathbf{\Gamma}, \delta\lambda)$, the function $\mathbf{G}$ is developed in Taylor series around the point $(\mathbf{\Gamma}_k^{(i+1)}, \lambda_k^{(i+1)})$ with respect to the arc-length variable α (only the first order is kept) :

$$\mathbf{G}^{(i+1)} + \left[\mathbf{G}_{\mathbf{\Gamma}}^{(i+1)}\right] \delta\mathbf{\Gamma} + \mathbf{G}_{\lambda}^{(i+1)} \delta\lambda = 0 \quad (2.40)$$

where $[\mathbf{G}_{\mathbf{\Gamma}}]$, $\mathbf{G}_{\lambda}$ are the first derivatives of $\mathbf{G}$ with respect to $\mathbf{\Gamma}$ and λ variables respectively. The quantities $\mathbf{G}^{(i+1)}$, $[\mathbf{G}_{\mathbf{\Gamma}}^{(i+1)}]$ and $\mathbf{G}_{\lambda}^{(i+1)}$ are evaluated at the point $(\mathbf{\Gamma}_k^{(i+1)}, \lambda_k^{(i+1)})$.

We have then :

$$\delta\mathbf{\Gamma} = \delta\bar{\mathbf{\Gamma}} + \delta\tilde{\mathbf{\Gamma}}\delta\lambda \quad (2.41)$$

with $\delta\bar{\mathbf{\Gamma}} = [\mathbf{G}_{\mathbf{\Gamma}}^{(i+1)}]^{-1} \mathbf{G}^{(i+1)}$ and $\delta\tilde{\mathbf{\Gamma}} = [\mathbf{G}_{\mathbf{\Gamma}}^{(i+1)}]^{-1} \mathbf{G}_{\lambda}^{(i+1)}$.

When replacing (2.41) into (2.38) and (2.39), a 2nd-order algebraic equation is obtained :

$$a_1 (\delta\lambda)^2 + 2a_2 \delta\lambda + a_3 = 0 \quad (2.42)$$

with

$$\begin{aligned} a_1 &= \delta\tilde{\mathbf{\Gamma}}^T \delta\tilde{\mathbf{\Gamma}} + 1 \\ a_2 &= \left[\Delta\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} + \delta\bar{\mathbf{\Gamma}}\right]^T \delta\tilde{\mathbf{\Gamma}} + \Delta\lambda_k^{(i)} \\ a_3 &= \left[\Delta\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} + \delta\bar{\mathbf{\Gamma}}\right]^T \left[\Delta\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} + \delta\bar{\mathbf{\Gamma}}\right] + \left[\Delta\lambda_k^{(i)}\right]^2 - [\Delta\alpha]^2 \end{aligned}$$

To get a real solution, the discriminant $\Delta = a_2^2 - a_1 a_3$ must be positive. To avoid returning to the branch of solution previously found, the scalar product of two vectors which are tangent to the branch of the solution at the previous point and at the current point, needs to be positive :

$$\gamma = \left[\Delta\mathbf{\Gamma}_{k+1}^{(i)}\right]^T \Delta\mathbf{\Gamma}_k^{(i)} + \Delta\lambda_{k+1}^{(i)} \Delta\lambda_k^{(i)} > 0 \quad (2.43)$$

The procedure is restarted with the value of the arc-length increment $\Delta\alpha$ reduced by half if one of the following cases holds : 1) both solutions give the same sign to γ due to the fact that there exist two branches of the solution or more precisely a bifurcation point is detected ; 2) the discriminant $\Delta = (a_2^2 - a_1 a_3)$ is negative.

- *Stopping conditions for the internal loop :*

$$|\delta\lambda|/|\lambda^{(i+1)}| < \epsilon_1; \quad \|\delta\mathbf{\Gamma}\|/\|\mathbf{\Gamma}^{(i+1)}\| < \epsilon_2; \quad \|\mathbf{G}\| < \epsilon_3 \quad (2.44)$$

where $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ are the assumed precisions for calculations.

All of these three conditions must be fulfilled simultaneously.

iii) How to initialize the internal loop

The Taylor's series expansion is done at the solution pair $(\mathbf{\Gamma}_k^{(i)}, \lambda_k^{(i)})$ which is determined at the previous external step (i -th loop). Equation (2.42) becomes :

$$\left[\delta \tilde{\mathbf{\Gamma}}_0^T \delta \tilde{\mathbf{\Gamma}}_0 + 1 \right] \delta \lambda^2 - [\Delta \alpha]^2 = 0 \quad \text{with} \quad \delta \tilde{\mathbf{\Gamma}}_0 = \left[\mathbf{G}_{\mathbf{\Gamma}}^{(i)} \right]^{-1} \mathbf{G}_{\lambda}^{(i)} \quad (2.45)$$

Then, the first estimation of the incremental solution pair $(\Delta \lambda_0^{(i)}, \Delta \mathbf{\Gamma}_0^{(i)})$ for the internal loop ($k = 0$) is given by :

$$\Delta \lambda_0^{(i)} = \pm \delta \lambda = \Delta \alpha / \sqrt{\delta \tilde{\mathbf{\Gamma}}_0^T \delta \tilde{\mathbf{\Gamma}}_0 + 1} \quad (2.46)$$

$$\Delta \mathbf{\Gamma}_0^{(i)} = \delta \tilde{\mathbf{\Gamma}}_0 \Delta \lambda_0^{(i)} \quad (2.47)$$

where the sign in Eq. (2.46) is the same sign as that of total increment of $\Delta \lambda^{(i)}$ in Eq. (2.37) (of the previous incremental step). It can be noticed that the sign of Eq. (2.46) can be chosen arbitrarily. This gives us the possibility to change the direction of the vector which is tangent to the current branch of solution by choosing the sign of (2.46) opposite to that of the total increment of $\Delta \lambda_k$ in the previous incremental step.

2.5.3 Implementation

1) Shooting Method combined with Continuation technique (denoted by Shooting+C)

In order to use the Continuation technique to solve nonlinear algebraic equations resulting from the Shooting method, three quantities $\mathbf{G}$, $[\mathbf{G}_{\mathbf{s}}]$ (or $[\mathbf{G}_{\mathbf{\Gamma}}]$ since $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{s}$) and $\mathbf{G}_{\lambda}$, can be estimated at point $(\mathbf{\Gamma}, \lambda)$ as follows :

- *Determination of $[\mathbf{G}_{\mathbf{s}}] = [\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{s}]$*

The derivative of (2.29) with respect to $\mathbf{s}$ is :

$$\left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{s}} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{z}(\mathbf{s}, \lambda, 1)}{\partial \mathbf{s}} \right] - [\mathbf{I}] \quad (2.48)$$

where $[\mathbf{I}]$ is the unit matrix.

The term $[\partial \mathbf{z}(\mathbf{s}, \lambda, 1) / \partial \mathbf{s}]$ is determined by writing the derivative of (2.26) with respect to $\mathbf{s}$:

$$\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{z}}(\mathbf{s}, \lambda, t)}{\partial \mathbf{s}} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{s}, \lambda, t)}{\partial \mathbf{z}} \right] \left[\frac{\partial \mathbf{z}(\mathbf{s}, \lambda, t)}{\partial \mathbf{s}} \right] \quad (2.49)$$

Let us note : $[\mathbf{W}(\mathbf{s}, \lambda, t)] = [\partial \mathbf{z}(\mathbf{s}, \lambda, t) / \partial \mathbf{s}]$ and $[\mathbf{J}] = [\partial \mathbf{h} / \partial \mathbf{z}]$. The above equation becomes :

$$\begin{cases} [\dot{\mathbf{W}}(\mathbf{s}, \lambda, t)] &= [\mathbf{J}][\mathbf{W}(\mathbf{s}, \lambda, t)] \\ [\mathbf{W}(\mathbf{s}, \lambda, 0)] &= [\mathbf{I}] \end{cases} \quad (2.50)$$

Solutions of the above problem give values of $[\mathbf{W}(\mathbf{s}, \lambda, t = 1)]$ or $[\partial \mathbf{z}(\mathbf{s}, \lambda, t = 1) / \partial \mathbf{s}]$.

- *Determination of $\mathbf{G}_{\lambda} = \partial \mathbf{G} / \partial \lambda$*

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \mathbf{z}(\mathbf{s}, \lambda, 1)}{\partial \lambda} \quad (2.51)$$

The derivative of (2.30) with respect to λ is :

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial \lambda} = \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{z}} \right] \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \lambda}$$

Let us put : $\mathbf{V}(\mathbf{s}, \lambda, t) = \partial \mathbf{z}(\mathbf{s}, \lambda, t) / \partial \lambda$, we get :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{s}, \lambda, t) &= [\mathbf{J}]\mathbf{V}(\mathbf{s}, \lambda, t) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \lambda} \\ \mathbf{V}(\mathbf{s}, \lambda, 0) &= \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.52)$$

Solutions of the above problem give values of $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{s}, \lambda, t = 1)$ or $\partial \mathbf{z}(\mathbf{s}, \lambda, t = 1) / \partial \lambda$.

Three quantities $\mathbf{G}$, $[\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{s}]$ and $\partial \mathbf{G} / \partial \lambda$ can be evaluated by solving simultaneously three equations : (2.30), (2.50) and (2.52) with the numerical method of resolution of Runge-Kutta.

Since only unforced nonlinear systems are considered, the term $\partial \mathbf{h} / \partial \lambda$ in (2.52) is equal to zero. Practically, a “very small” harmonic excitation term needs to be added in equation (2.30). This force can be taken as : $\mathbf{F} = \varepsilon \mathbf{F}_0 \cos(\omega t)$ with $\varepsilon = 10^{-6} \div 10^{-4}$.

2) HBM Method + Continuation technique (denoted by *HBM+C*) & Bellizzi and Bouc’s approach + Continuation technique (denoted by *Bellizzi+C*)

For these two methods, it can be noticed that $\mathbf{G}$ is an explicit function of the $\mathbf{\Gamma}$ and λ variables. Consequently, contrary to the *Shooting+C* method, in the *HBM+C* and *Bellizzi+C* methods, the quantities $\mathbf{G}$, $[\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{\Gamma}]$ and $\partial \mathbf{G} / \partial \lambda$ can be directly calculated.

2.6 Procedure for determining the convergence and the validity domain of all the methods

As described previously, the convergence of the Shaw and Pierre’s approach depends strongly on the value of the upper bound of amplitude domain (a_0). So, there exists a “validity domain” $[0; a_{\max}]$ where $a_{\max} \geq a_0$, out of which the convergence of the approach cannot be reached.

Unlike the Shaw and Pierre’s approach, the convergence of the Bellizzi and Bouc’s approach depends on the choice of a fixed value of the modal amplitude (b). Usually, the upper bound $b_{\max}$ of its “validity domain” is determined by increasing, step by step, b from a small value ($b = 0$, for example) until convergence is not possible.

When combining with the Continuation technique, the Shooting method and HBM can calculate whole branches of solution. From results obtained by these two methods, relations between the oscillation frequency and the amplitude of some coordinates or relations between the amplitude of “master” coordinate and the other ones can be easily determined, the validity domain of Shaw and Pierre’s approach and Bellizzi and Bouc’s approach can be deduced.

In summary, we propose a procedure to evaluate the convergence and validity domain for all the methods presented previously, as follows :

1. At first, the Shooting method combined with the Continuation technique (*Shooting+C*), is carried out to obtain “reference” solutions.
2. The HBM combined with the Continuation technique (*HBM+C*) is used to determine a necessary order of Fourier series (n_0) and the maximum value of the amplitude of the mode of interest : $a_{k, \max}$.
3. The Shaw and Pierre’s approach (*Shaw & Pierre*) is used with parameters : $a_0 = a_{k, \max}$, $N_\phi = n_0$. Only the value of N_a has to be determined.

4. The Bellizzi and Bouc's approach combined with the Continuation technique (*Bellizzi+C*) is used to determine the maximum value of the modal amplitude of the mode of interest, *i.e* b_{max} .
5. Finally, the Bellizzi and Bouc's approach (*Bellizzi & Bouc*) is used with parameters : $b_0 = b_{max}$ and the number of terms in Fourier series : $m = n_0/2$.

2.7 Numerical simulations

In this section, the methods presented above are applied to two examples. The first one is a nonlinear two-mass system with cubic nonlinearities, while the second one has both quadratic and cubic nonlinearities.

2.7.1 Example 1 : A nonlinear two-mass system with cubic nonlinearities

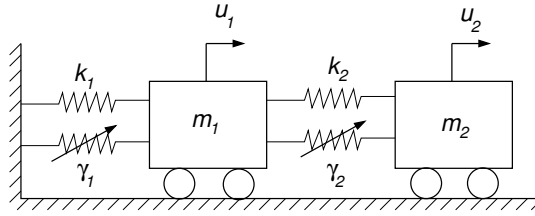


FIGURE 2.1. *Example 1 : Nonlinear two-mass system with : $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 1$, $k_2 = 5$ and the cubic nonlinearities : $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 1$.*

The first example taken from [64], which is a nonlinear two-mass system with cubic nonlinearities, is shown in Fig. 2.1. The modal equations of motion are :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + 0.689^2 q_1 &= -0.405 q_1^3 - 1.34 q_1^2 q_2 - 1.51 q_1 q_2^2 - 0.394 q_2^3 \\ \ddot{q}_2 + 3.244^2 q_2 &= -0.448 q_1^3 - 1.51 q_1^2 q_2 - 1.05 q_1 q_2^2 - 4.58 q_2^3 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Only the first NNM of this system is considered. It is calculated with all the methods described in the previous sections.

2.7.1.1 Shooting+C and HBM+C Methods

Parameters of the Continuation procedure are chosen as follows :

- Arc-length increment : $\Delta\alpha = 10^{-4}$,
- Accuracy of calculations : $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 10^{-9}$.

This choice is the same when the Continuation technique is used in this study. The procedure is started from the point which is the solution of the underlying linear system with its first modal frequency : $\omega_1 = \omega_{1,lin} = 0.689 rad/s$ and its initial modal amplitudes : $a_1 = a_2 = 0$.

Fig. 2.2 shows the dependence of the frequency on the first mode amplitude for different numbers of harmonic terms (n_0) in the Fourier series (2.22). We can observe that the accuracy is reached up to $n_0 = 12$ when compared with results obtained using *Shooting+C*. The maximum value of the first mode amplitude is equal to $a_{1,max} = 2.248$. Fig. 2.3 shows the dependence of the second

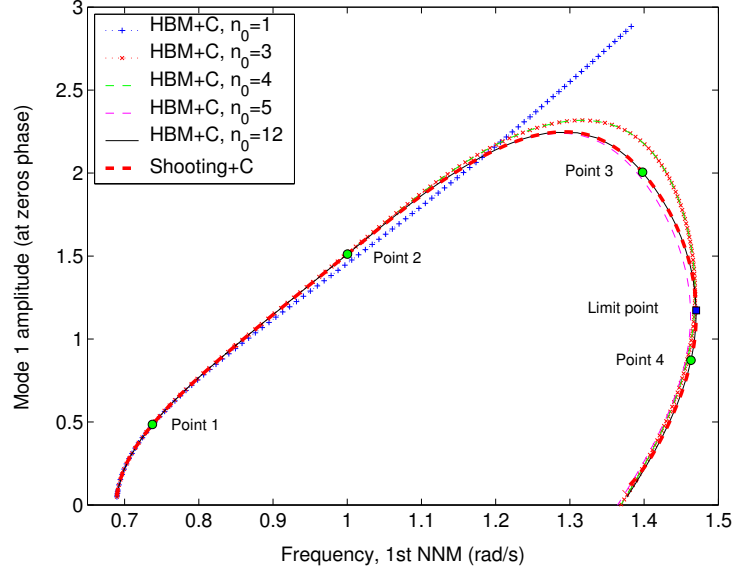


FIGURE 2.2. *Example 1 : Dependence of the frequency on the first mode amplitude of the first NNM, calculated by : HBM with different numbers of harmonics and Shooting+C.*

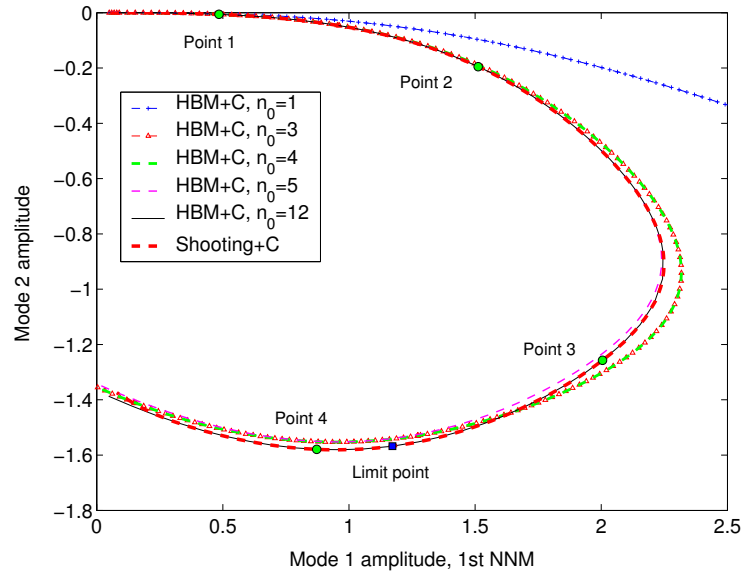


FIGURE 2.3. *Example 1 : Dependence of the second mode amplitude on the first one of the first NNM calculated by : HBM with different numbers of harmonics and Shooting+C.*

mode amplitude on the first mode amplitude. Since the nonlinearity of the system is only cubic, the results calculated for $n_0 = 3$ and $n_0 = 4$ are identical.

As described previously, the continuation technique can detect critical points, *i.e* limit points or bifurcation points. So, in this example, a limit point has been detected as shown in Fig. 2.2. It should be noted that $n_0 = 12$ is not enough for obtaining a good accuracy if we zoom in near the end of the curve, *i.e* around the point $(\omega_1 = 1.4, a_1 = 0.2)$. Before this point, the curves of the *HBM+C* and the ones of *Shooting+C* are indistinguishable. A divergence occurs after this point.

The evolutions of the invariant manifolds from the starting point (of underlying linear system) to the points 1, 2, 3 and 4 respectively indicated in Fig. 2.2, are shown in the first column of Fig. 2.4. The second column of this figure shows time responses of the system simulated with initial conditions associated with these four points. The corresponding initial conditions are indicated by four points in Fig. 2.3.

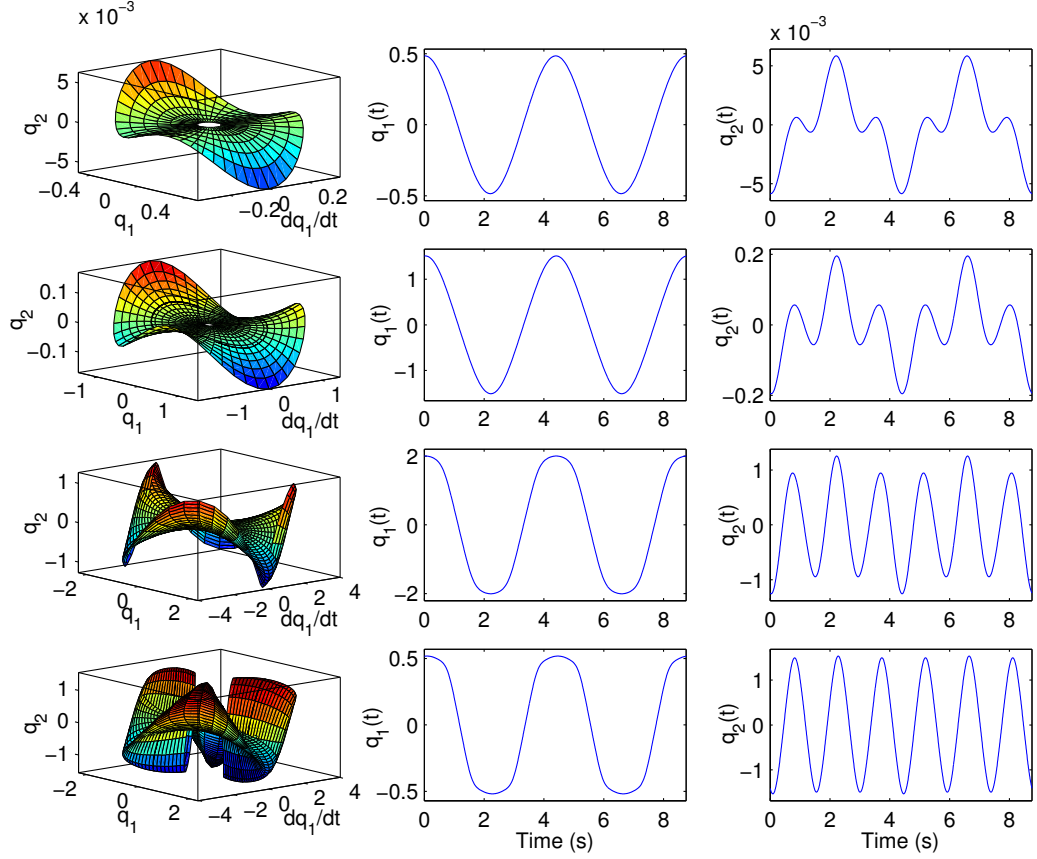


FIGURE 2.4. *Example 1 : First NNM, (Left $\rightarrow$ right) Invariant manifolds - Time response $q_1(t)$ - Time response $q_2(t)$, calculated by HBM+C and Shooting+C. (Top $\rightarrow$ bottom) Point 1, 2, 3, 4 described in Fig. 2.3*

2.7.1.2 Shaw and Pierre's approach (denoted as Shaw & Pierre)

By varying the values of the numbers of expansion orders (N_a, N_ϕ) , the “convergence” of the first NNM invariant manifold has been found for $(N_a = 5, N_\phi = 12)$. It's important to note that the shape functions (2.8) are defined in the domain : $a \in [0, a_0]$ with $a_0 = 2.22$ and $\phi \in [0, 2\pi]$. Results for this example have already been obtained by Pesheck *et al.* in [64]. In the previous item, we have already noticed that the maximum value of the first mode amplitude is $a_{1,max} = 2.248$. This can explain the nonconvergence of the Shaw and Pierre's approach if the value of a_0 is taken greater than $a_{1,max}$.

The convergence of the Shaw and Pierre's approach is shown in Fig. 2.5 and 2.6 which indicate the dependence of the frequency on the first mode amplitude and the dependence of the second mode amplitude on the first one of the first NNM, respectively.

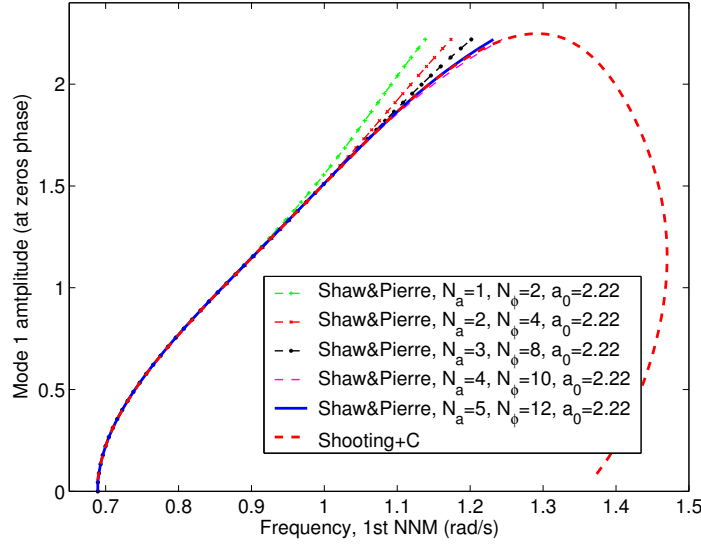


FIGURE 2.5. *Example 1 : Dependence of the frequency on the first mode amplitude of the first NNM, calculated by : Shaw & Pierre with different numbers of harmonics and Shooting+C*

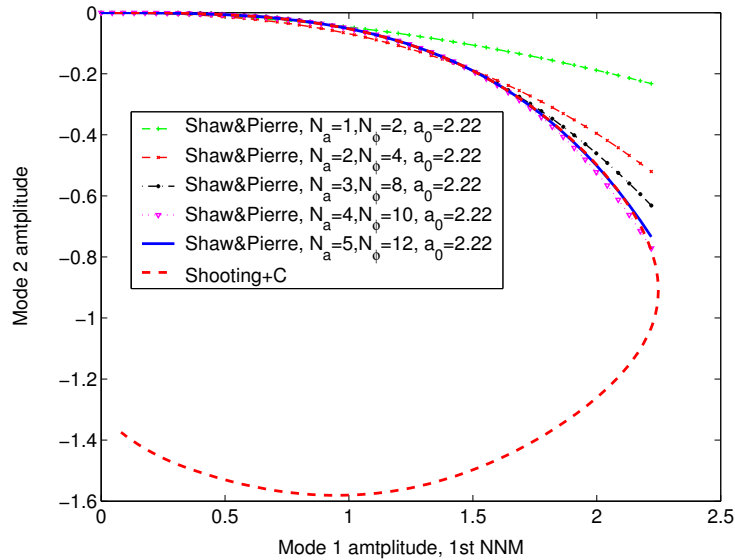


FIGURE 2.6. *Example 1 : Dependence of the second mode amplitude on the first one of the first NNM, calculated by : Shaw & Pierre with different numbers of harmonics and Shooting+C*

2.7.1.3 Bellizzi and Bouc's approach (denoted by Bellizzi & Bouc)

When the nonlinear restoring forces are symmetrical, NNMs are calculated by solving equation (2.21). The convergence of the first NNM was examined as shown in Fig. 2.7 and 2.8.

At first, the approach is started from a state near the one of the underlying linear system ($b = 0.05$ for example). The modal amplitude b is increased step by step until the convergence is no longer reached. Finally, with $m = 6$ which corresponds to a number of harmonics being equal to $2m = 12$, the convergence fails when $b_0 = 2.4$. A divergence occurs at $b_0 = 2.4$ even if $m = 8$.

The relation between the first mode amplitude a_k and the modal amplitude b , i.e $a_k(b)$, is

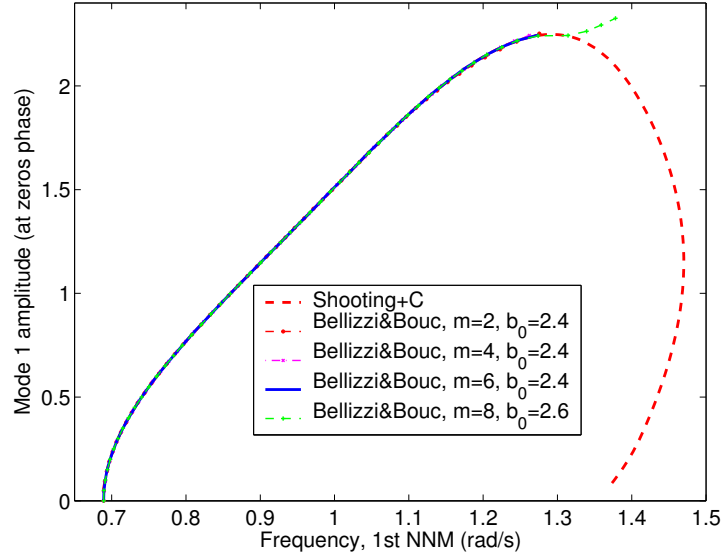


FIGURE 2.7. *Example 1 : Dependence of the frequency on the first mode amplitude of the first NNM calculated by : Bellizzi & Bouc with different numbers of harmonics and Shooting+C.*

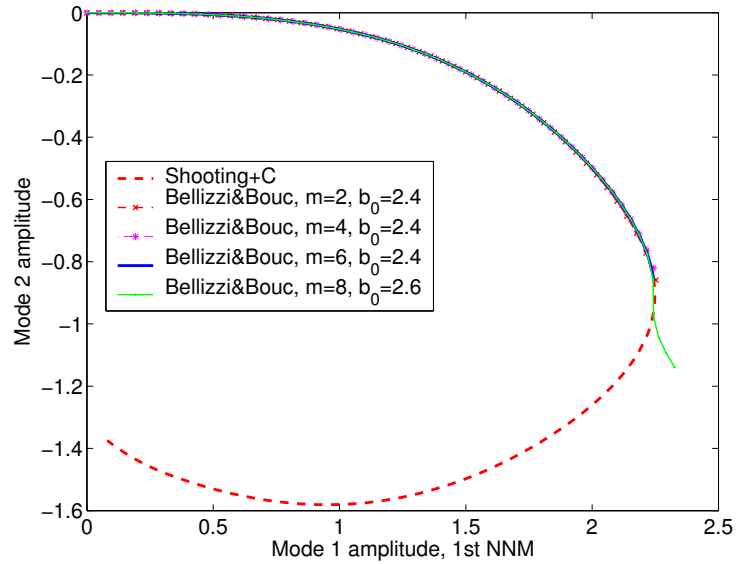


FIGURE 2.8. *Example 1 : Dependence of the second mode amplitude on the first one of the first NNM calculated by : Bellizzi & Bouc with different numbers of harmonics and Shooting+C.*

determined and shown in Fig 2.9. In this figure, we can easily observe that the maximum value of modal amplitude is equal to $b_{max} = 2.445$. This explains why the Bellizzi and Bouc's approach diverges at $b_0 = 2.6$.

It should be noted that the numbers of terms (in the Galerkin projection) required to obtain the same accuracy for all approaches : HBM (n_0), Shaw-Pierre (N_ϕ) and Bellizzi-Bouc (m) verify the following equality :

$$n_0 = 2m = N_\phi \quad (2.54)$$

2.7.1.4 Bellizzi and Bouc's approach combined with Continuation technique (denoted by *Bellizzi+C*)

Since the Bellizzi and Bouc's approach cannot calculate a new branch of solution after the point where the modal amplitude is maximum as shown in Fig. 2.9, we propose to combine this approach with the Continuation technique.

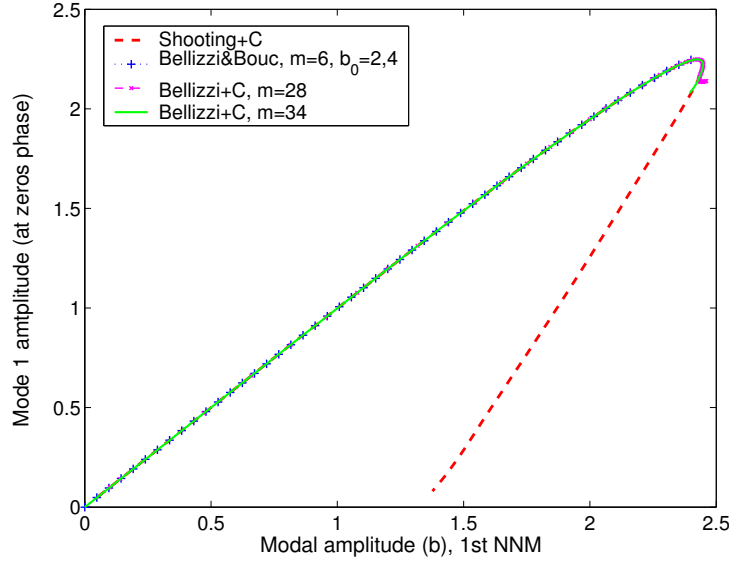


FIGURE 2.9. *Example 1 : Dependence of the first mode amplitude (a_1) on the modal amplitude (b) calculated by : Bellizzi & Bouc, Shooting+C and Bellizzi+C with two numbers of harmonics ($m = 28$ and 34).*

The dependence of the first mode amplitude (a_1) on the modal amplitude (b) is shown in Fig. 2.9, while the dependence of the second mode amplitude (a_2) on the first mode amplitude (a_1) is indicated in Fig. 2.10. Compared to results obtained from *Shooting+C*, a good agreement is observed. However, to reach this accuracy, the numbers of terms in the Galerkin projection (m) are very important as it affects computation time. For $m = 28$, one can observe a divergence from the *Shooting+C* curve just after the turning point which is, of course, a limit point. Even if ($m = 34$), we can go only a little further from the divergence point of the case $m = 28$. The influence of the value of (m) necessary to obtain a curve like this one by *Shooting+C* is extremely important.

2.7.2 Example 2 : A nonlinear two-mass system with quadratic and cubic nonlinearities

The second example taken from [12] is a nonlinear two mass system with both of quadratic and cubic nonlinearities, is shown in Fig. 2.11. The modal equations of motion are :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \frac{1}{2}\omega_1^2(3q_1^2 + q_2^2) + \omega_2^2 q_1 q_2 + \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2)q_1(q_1^2 + q_2^2) &= 0 \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \frac{1}{2}\omega_2^2(3q_2^2 + q_1^2) + \omega_1^2 q_1 q_2 + \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2)q_2(q_1^2 + q_2^2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

where $\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 2$.

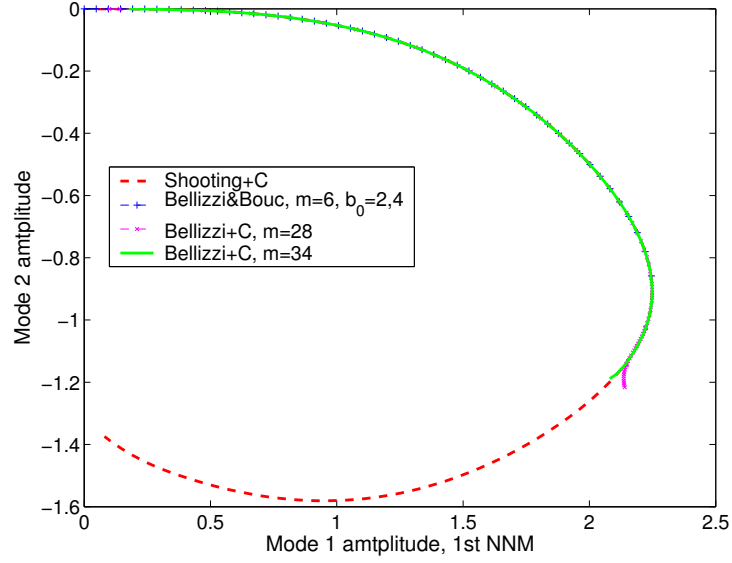


FIGURE 2.10. *Example 1 : Dependence of the second mode amplitude (a_2) on the first mode amplitude (a_1) calculated by : Bellizzi & Bouc, Shooting+C and Bellizzi+C with two numbers of harmonics ($m = 28$ and 34).*

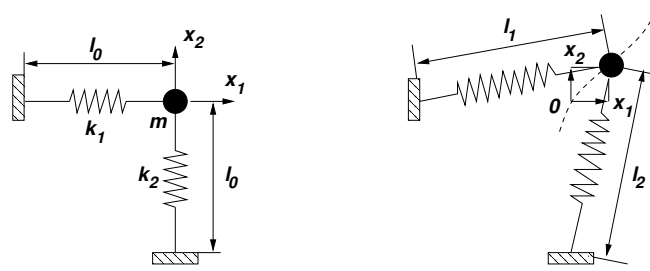


FIGURE 2.11. *Example 2 : two-dof nonlinear system with quadratic and cubic springs : 1(left)-Equilibrium configuration, 2(right)-Deformed configuration.*

2.7.2.1 First NNM

Since nonlinear restoring forces are not symmetrical, the relation between the amplitude of the “master” mode (a_1) and the modal amplitude (b) cannot be found. It should be noted that in [12], Bellizzi and Bouc have calculated the solution over the domain of amplitude : $b \in [0, 0.42]$ for the first NNM and $b \in [0, 0.8]$ for the second NNM. It will be shown in the following that the “true” validity domain of amplitude is bigger than that used in [12]. In addition, since the nonlinear restoring forces are non symmetrical, equations to be solved are (2.23).

The procedure for the calculations carried out is :

1. Shooting Method combined with Continuation technique (*Shooting+C*) to obtain “reference” solutions,
2. HBM combined with Continuation technique (*HBM+C*) to determine a necessary order of Fourier serie : $n_0 = 8$ and the maximum value of the first mode amplitude : $a_{1,max} = 0.271$,

3. Shaw and Pierre's approach (*Shaw & Pierre*) with parameters : $a_0 = 0.27, N_a = N_\phi = n_0 = 8$,
4. Bellizzi and Bouc's approach combined with Continuation technique (*Bellizzi+C*) to determine the maximum value of the first modal amplitude : $b_{max} = 0.4854$,
5. Bellizzi and Bouc's approach (*Bellizzi & Bouc*) with parameters : $b_0 = b_{max} = 0.4854$ and $m = 4$.

The dependence of the frequency on the first mode amplitude and the dependence of the second mode amplitude on the first one of the first NNM, calculated by all presented methods are shown in Fig. 2.12, 2.13, 2.14 and 2.15, respectively. All the curves are very similar and their difference are hardly perceptible. Unlike the previous example, in this case, *Bellizzi+C* method has yielded accurate results compared to the ones obtained from *Shooting+C* method for all of curves indicated in Fig. 2.16 with an acceptable number of harmonics being equal to $m = 16$.

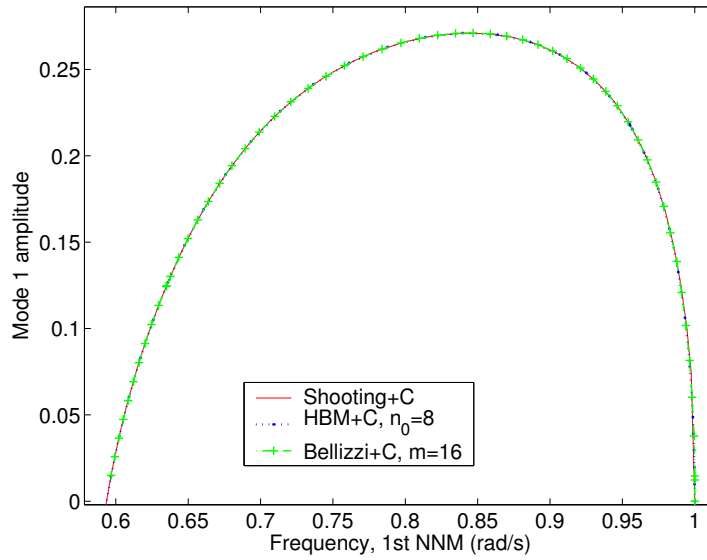


FIGURE 2.12. *Example 2 : Dependence of the frequency on the first mode amplitude of the first NNM, calculated by : Shooting+C, HBM+C and Bellizzi+C.*

The invariant manifold of the first NNM is shown in Fig. 2.17. Time responses produced by *Bellizzi+C* are shown in Fig. 2.18. They are simulated with four different initial conditions associated with four points indicated in Fig. 2.16. The time responses are directly calculated by simulating the equation (2.1) using the same initial conditions of approximative responses. All responses obtained are indistinguishable. In Fig. 2.18, we can also observe the evolution of invariant manifolds determined from the origin, which corresponds to solutions of the underlying linear system, to considered points (point 1, 2, 3, 4 as indicated in Fig. 2.16).

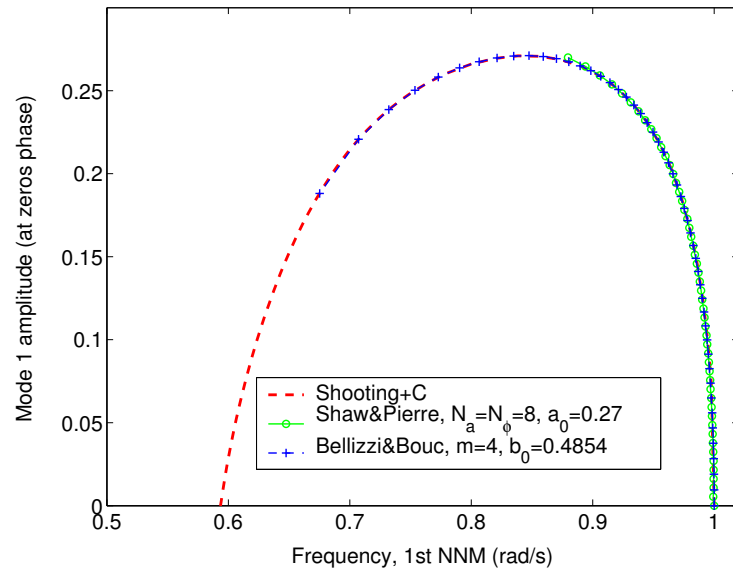


FIGURE 2.13. *Example 2 : Dependence of the frequency on the first mode amplitude of the first NNM calculated by : Shooting+C, Shaw & Pierre and Bellizzi & Bouc.*

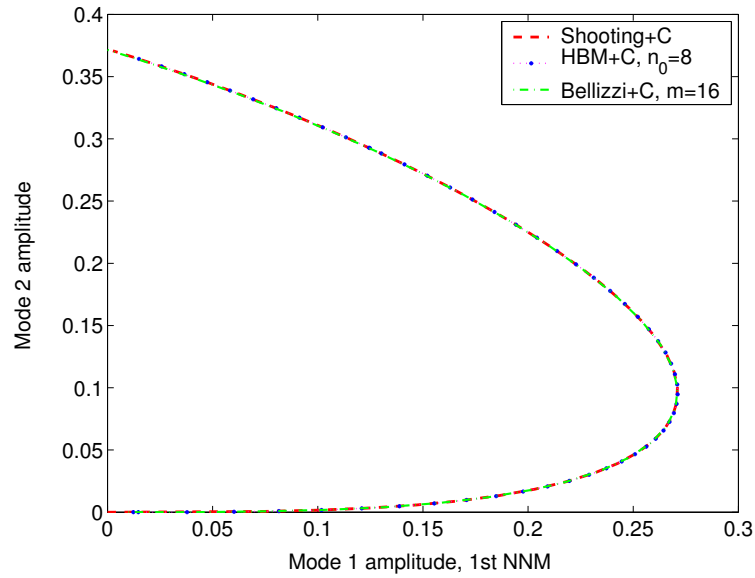


FIGURE 2.14. *Example 2 : Dependence of the second mode amplitude on the first one of the first NNM calculated by : Shooting+C, HBM+C and Bellizzi+C.*

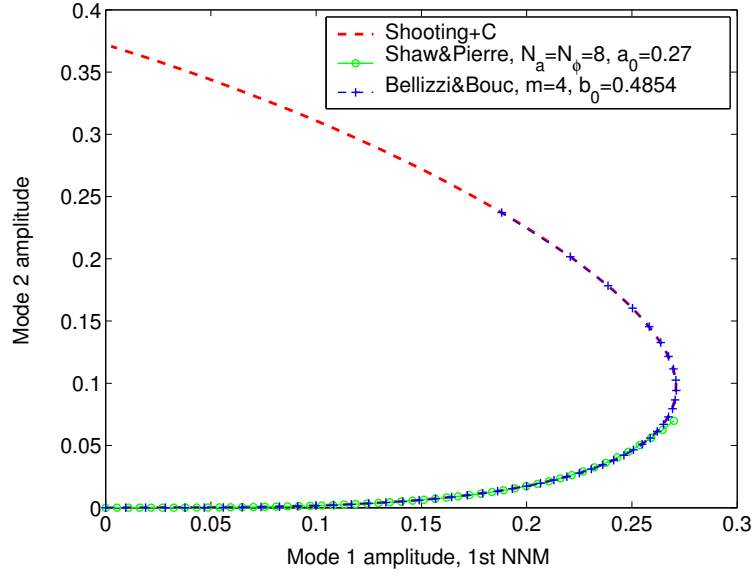


FIGURE 2.15. *Example 2 : Dependence of the second mode amplitude on the first one of the first NNM calculated by : Shooting+C, Shaw & Pierre and Bellizzi & Bouc.*

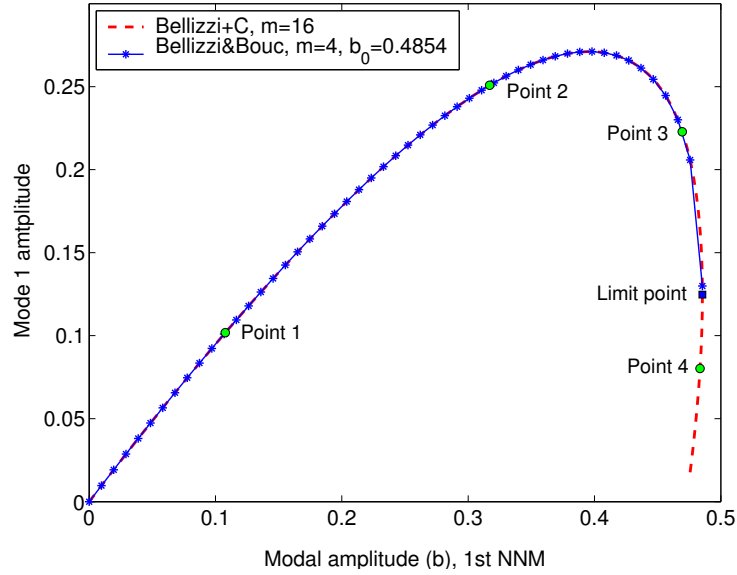
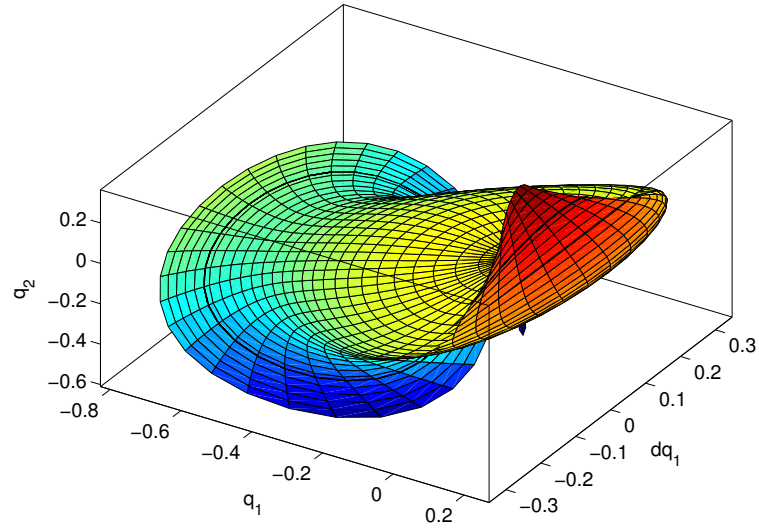
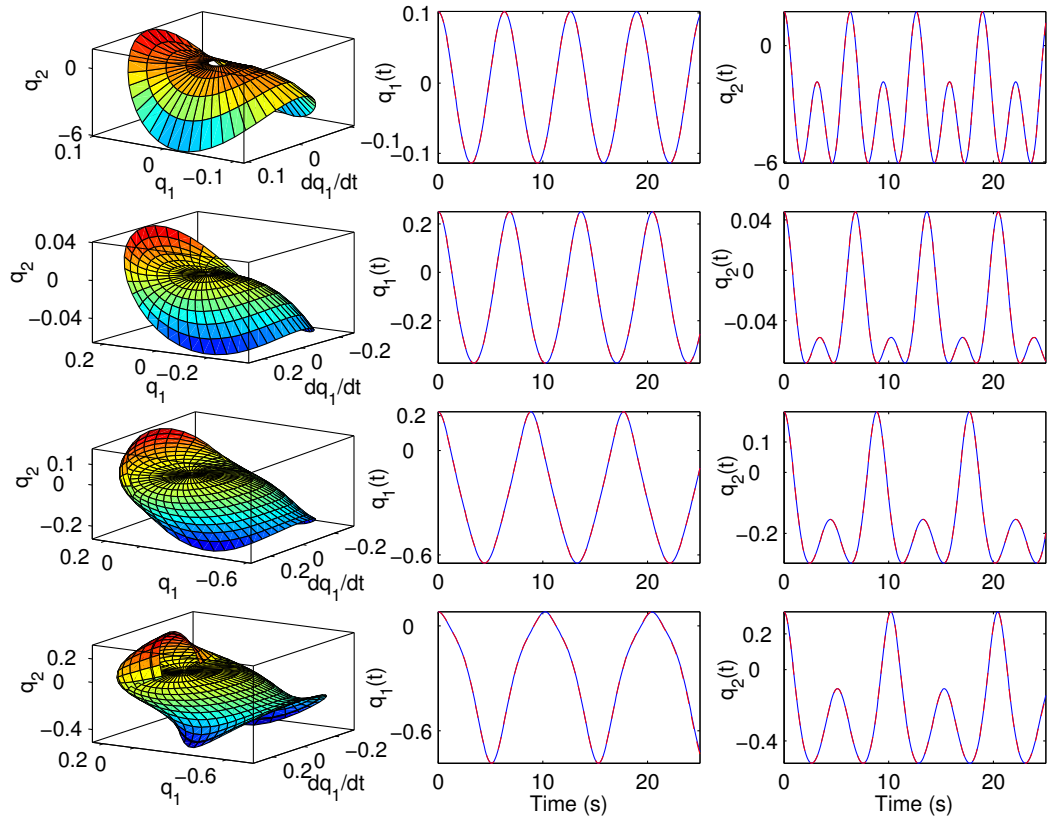


FIGURE 2.16. *Example 2 : Dependence of the first mode amplitude (a_1) on the modal amplitude (b) calculated by : Bellizzi & Bouc and Bellizzi+C.*

FIGURE 2.17. *Example 2 : Invariant manifold of the first NNM.*FIGURE 2.18. *Example 2 : First NNM. (Left $\rightarrow$ right) Invariant manifolds - Time responses $q_1(t)$ - Time responses $q_2(t)$. (Top $\rightarrow$ bottom) Point 1, 2, 3, 4 described in Fig. 2.16*

2.7.2.2 Second NNM

The same procedure as cited in the previous section is repeated for the calculation of the second NNM :

1. *Shooting+C* : to obtain the “reference” solutions.
2. *HBM+C* : to determine the number of harmonics required to yield the accuracy : $n_0 = 8$ and the maximum value of the second mode amplitude : $a_{2,max} = 0.424$.
3. *Shaw & Pierre* with : $a_0 = 0.36, N_a = N_\phi = 8$.
4. *Bellizzi+C* : to determine the maximum value of the second modal amplitude : $b_{2,max} = 1.01$.
5. *Bellizzi & Bouc* with : $b_0 = 1.01, m = 4$.

Based on the sign of $\det |\mathbf{G}_a|$, a bifurcation point is detected as indicated in Fig. 2.19.

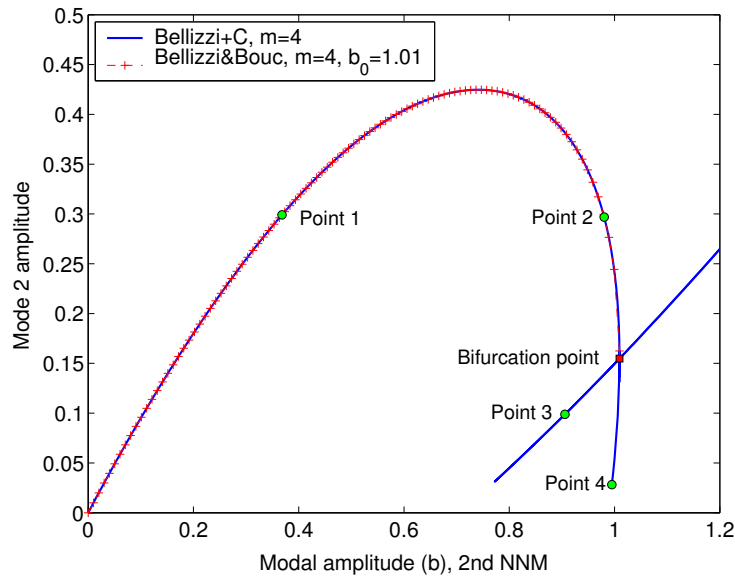


FIGURE 2.19. *Example 2 : Dependence of the first mode amplitude (a_2) on the modal amplitude (b) of the second NNM, calculated by : Bellizzi & Bouc and Bellizzi+C.*

As illustrated in Fig 2.20, to obtain new branches of solutions at the bifurcation point, the schedule described below was used :

- From A_1 , we follow in the positive direction denoted by a dashed arrow (from top to bottom), until detecting a limit point O .
- From O , one goes to B_1 . By changing the direction (the new positive direction is from bottom to top) and adding a perturbation $\Delta \mathbf{G} = \tau \mathbf{d}$ ($\mathbf{d}$ is a random vector with its norm being equal to unit, $\tau = 10^{-5}$) to the equation (2.35), we are now at the point B_2 with positive direction (bottom to top).
- From B_2 , one goes towards to C_2 . The first secondary branch ($B_2 \rightarrow C_2$) is obtained. It should be noticed that the previous perturbation $\Delta \mathbf{G} = 10^{-5} \mathbf{d}$ is always kept during this step.
- At C_2 , we change the direction, *i.e* the new direction is from right to left, and the perturbation is removed, *i.e* $\tau = 0$. We obtain the point C_1 located on the “real” curve which is a new branch of solution with the positive direction (from right to left).
- We go from C_1 to D_1 . This segment defines the new branch of solution.

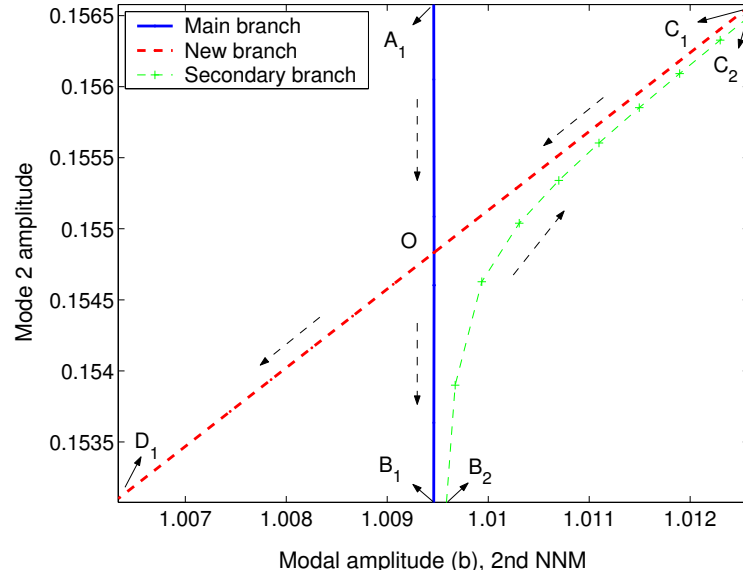


FIGURE 2.20. *Example 2 : How to obtain a new branch at bifurcation point for the second NNM (dashed arrows denoted positive direction).*

In summary, our scheme is : $A_1 \rightarrow B_1 \circ B_2 \rightarrow C_2 \circ C_1 \rightarrow D_1$ (the symbol $\circ$ denotes : jump and change directions).

The dependence of the frequency on the second mode amplitude and the dependence of the first mode amplitude on the second mode amplitude of the second NNM, calculated by all presented methods are shown in Fig. 2.21, 2.22, 2.23 and 2.24, respectively. A good agreement between results calculated by all approaches can be observed.

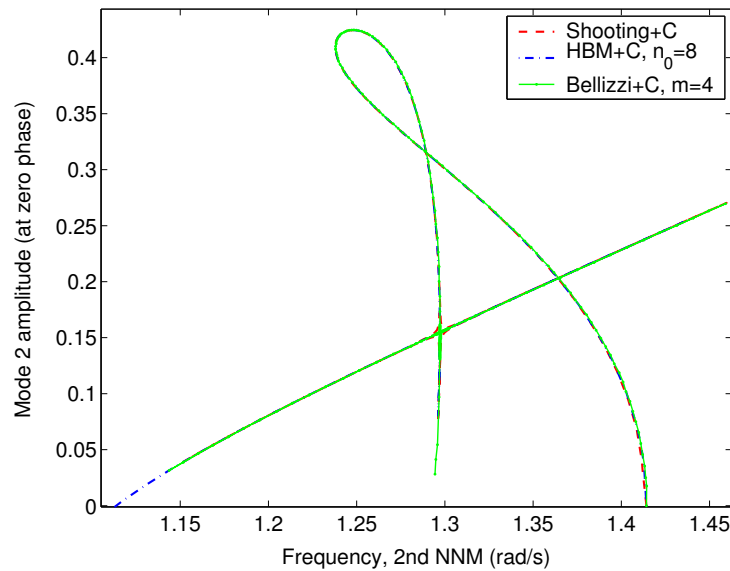


FIGURE 2.21. *Example 2 : Dependence of the second mode amplitude (a_2) on the frequency of the second NNM, calculated by : Shooting+C, HBM+C and Bellizzi+C.*

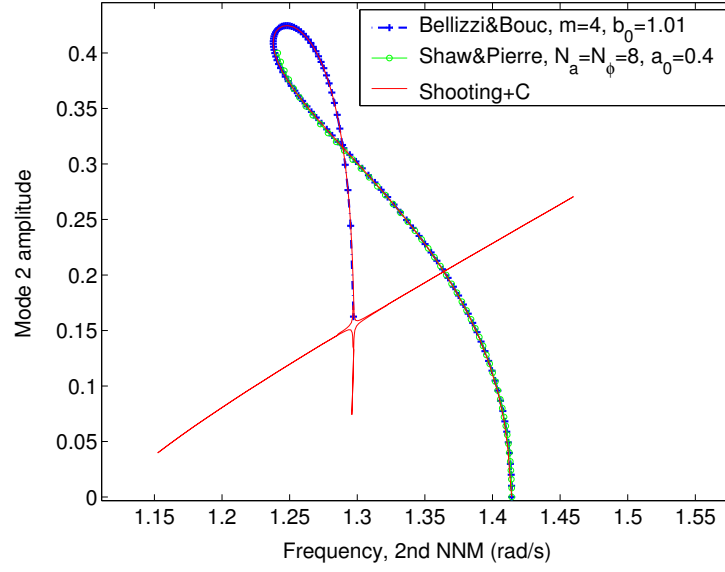


FIGURE 2.22. *Example 2 : Dependence of the second mode amplitude (a_2) on the frequency of the second NNM, calculated by : Shooting+C, Shaw & Pierre and Bellizzi & Bouc.*

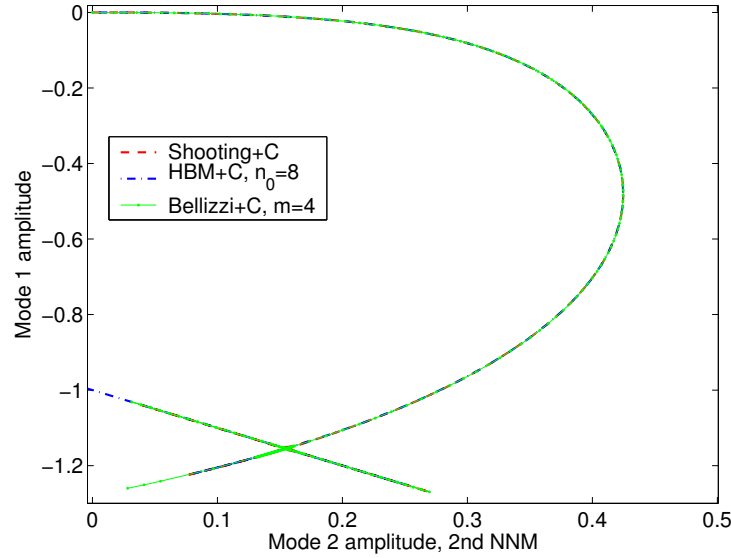


FIGURE 2.23. *Example 2 : Dependence of the second mode amplitude (a_2) on the first mode amplitude (a_1) of the second NNM, calculated by : Shooting+C, HBM+C and Bellizzi+C.*

The invariant manifold plotted in Fig. 2.25 looks like “a hat”. Two different parts can be easily observed : “the brim” represents the new branch of solution and the main part of the “hat” characterizes the main branch of solution. As the first NNM, the time responses obtained by simulating directly equations of motion and the approximative ones associated with four initial conditions are shown in Fig. 2.26. A good agreement between them is observed. The evolution of invariant manifolds is also presented in this figure.

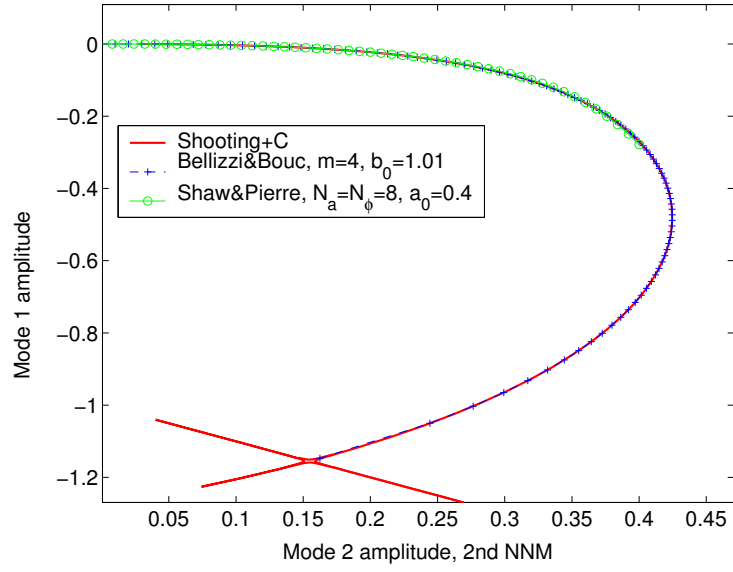


FIGURE 2.24. *Example 2 : Dependence of the second mode amplitude (a_2) on the first mode amplitude (a_1) of the second NNM, calculated by : Shooting+C, Shaw & Pierre and Bellizzi & Bouc.*

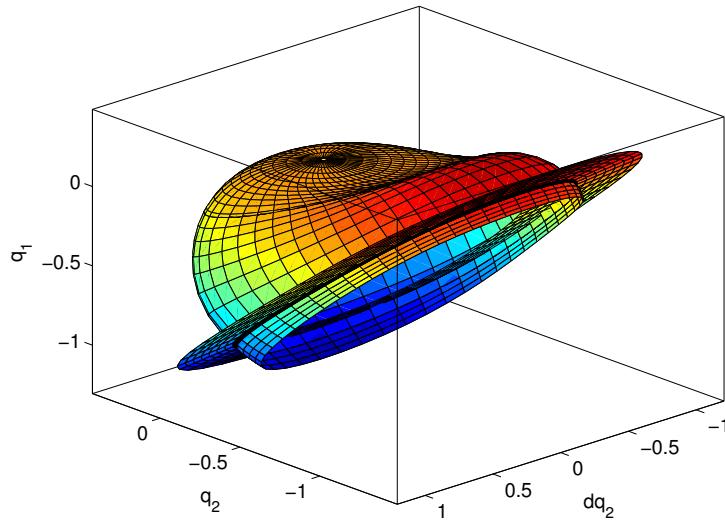


FIGURE 2.25. *Example 2 : Invariant Manifold of the second NNM.*

2.8 Conclusions

In this chapter, two methods for computing periodic solutions of non linear vibratory discrete systems are presented : Shooting Method and HBM. Both of them when combined with the Continuation technique allow obtaining whole branches of solutions (stable/unstable branch), detecting the critical points and analyzing the stability of solutions. Solutions obtained from *Shooting+C* are considered as “reference” solutions to make comparisons with those obtained by other techniques.

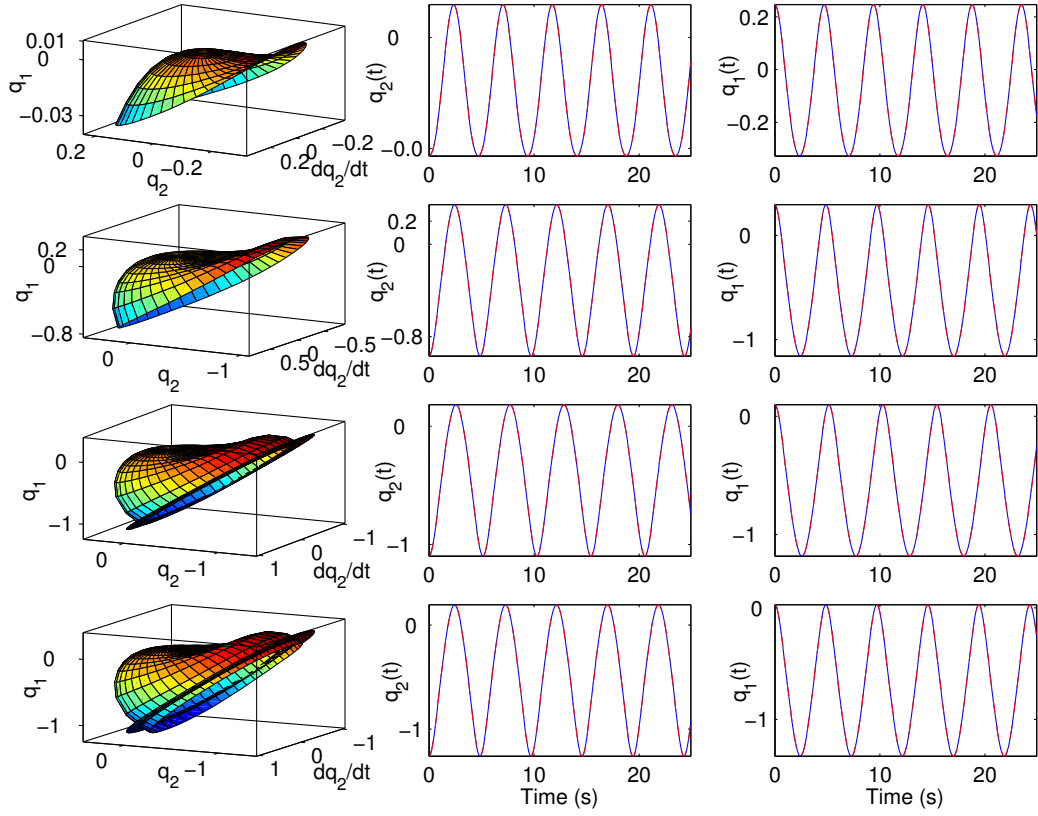


FIGURE 2.26. *Example 2 : Second NNM, (Left $\rightarrow$ right) Invariant manifolds - Time response $q_2(t)$ - Time response $q_1(t)$. (Top $\rightarrow$ bottom) Point 1, 2, 3, 4 described in Fig.2.20*

In addition, two formulations of NNMs are presented : Shaw and Pierre's approach, Bellizzi and Bouc's approach. Both approaches depend strongly on the validity domain. Outside of this domain, the convergence of both approaches fails. This chapter proposes a procedure for determining the validity domain of these approaches by using the results obtained from *Shooting+C* or *HBM+C* methods. Furthermore, a combination between the Bellizzi and Bouc's approach and the Continuation technique is implemented in order to get rid of the validity domain in the Bellizzi and Bouc's approach.

All of techniques are validated through two numerical examples : one with two-dofs nonlinear systems with cubic springs, the other with cubic and quadratic springs one. Results obtained from all methods are compared by using the frequency-amplitude or amplitude-amplitude relations. The proposed procedures allow calculating of NNMs for a real thin beam fixed at its ends investigated in the chapter 4.

Chapitre 3

Identification des systèmes mécaniques par analyse en ondelettes

CE CHAPITRE est consacré à l'identification des systèmes vibratoires à l'aide de l'analyse en ondelettes.

Après avoir donné les notions et les propriétés essentielles sur le traitement du signal grâce à la transformation en ondelettes continue (TOC), les problèmes de calcul numérique de la TOC (les méthodes de calcul, l'effet de bord, etc) sont abordés. On propose ensuite des méthodes pour déterminer les caractéristiques principales de la TO : l'arête et le squelette.

A la fin du chapitre, on dispose des méthodes d'identification des systèmes vibratoires linéaires et non linéaires à partir des réponses libres ainsi que des réponses sous excitations ambiantes (pour le cas linéaire seulement). L'application sur plusieurs réponses numériques et expérimentales permet de valider les méthodes d'identification présentées.

PLAN DU CHAPITRE 3

3.1	Introduction	71
3.2	Signal et la Transformation en Ondelettes Continue (TOC)	71
3.2.1	Signal analytique - Signal asymptotique	71
3.2.2	Transformation en ondelettes	72
3.3	Calcul numérique de la transformation en ondelettes continue	77
3.3.1	Méthodes de calcul	77
3.3.2	Effet de bord	78
3.3.3	Découplage des modes	80
3.3.4	Le temps d'arrêt	80
3.3.5	Choix des paramètres de l'ondelette mère	81
3.4	Analyse des signaux modulés en amplitude et en fréquence	82
3.4.1	Analyse par ondelettes de lignes spectrales	83
3.4.2	Analyse par ondelettes des signaux modulés en amplitude et en fréquence	84
3.4.3	Méthodes d'extraction des arêtes	86
3.5	Identification modale des systèmes linéaires	88
3.5.1	Réponses libres	88
3.5.2	Réponses au bruit ambiant	100
3.6	Identification des systèmes non linéaires	111
3.6.1	Principes d'identification	111
3.6.2	Identification de systèmes faiblement non linéaires, amortis	112
3.6.3	Validation	116
3.7	Conclusions	127

3.1 Introduction

Le contenu de ce chapitre traite de l'identification des systèmes vibratoires linéaires et non linéaires à l'aide de la transformation en ondelettes.

Dans la première section 3.2, les notions et les propriétés typiques sur le traitement du signal par ondelettes sont données. La section 3.3 aborde des aspects numériques dans le calcul pratique de la transformation en ondelettes : l'effet de bord, le découplage de modes et le temps d'arrêt. Le choix des paramètres de l'ondelette mère est discuté en fin de section. Ensuite, la section 3.4 est consacrée à la caractérisation des arêtes de la transformée en ondelettes des signaux modulés en temps et en fréquence.

Les méthodes d'identification des paramètres modaux des systèmes linéaires à partir des réponses libres et des réponses ambiantes sont présentées dans la section 3.5. Elles sont appliquées sur des données numériques ainsi que des données réelles qui proviennent : **1)** d'une poutre mince bi-encastree en petits déplacements soumise à un choc, **2)** d'un immeuble d'habitation à Lyon soumis aux excitations ambiantes. La dernière section 3.6 étend les techniques de traitement des réponses linéaires au cas non linéaire. La validation se fait sur une simulation des réponses d'un oscillateur non linéaire de type cubique et sur deux tests réels possédant des non linéarités géométriques : **1)** un système complexe constitué par une poutre liée à une lame mince, **2)** une poutre en grands déplacements (et petites déformations).

Les aspects nouveaux dans ce chapitre sont : 1) l'identification des structures linéaires sous excitations ambiantes, 2) la solution analytique d'une équation différentielle non linéaire régissant la vibration libre d'un oscillateur faiblement non linéaire avec un amortissement significatif.

3.2 Signal et la Transformation en Ondelettes Continue (TOC)

Cette section présente les notions et les propriétés essentielles de la transformation en ondelettes continue.

3.2.1 Signal analytique - Signal asymptotique

Un signal réel d'énergie finie peut s'écrire sous la forme :

$$u(t) = A(t) \cos(\alpha(t)) \quad (3.1)$$

où $A(t)$ et $\alpha(t)$ sont respectivement l'amplitude et la phase instantanée du signal.

On définit les notions suivantes :

– La fréquence instantanée :

$$\omega(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} \quad (3.2)$$

– Le signal complexe associé :

$$z(t) = A(t)e^{i\alpha(t)} \quad (3.3)$$

– Le signal analytique associé est obtenue en appliquant un filtre linéaire qui élimine toutes les fréquences négatives et donne une représentation unique du signal.

$$Z_u(t) = [1 + iHT].u(t) = A_z(t)e^{i\alpha_z(t)} \quad (3.4)$$

où $HT(\cdot)$ est l'opérateur de la transformation de Hilbert, $A_z(t)$ et $\alpha_z(t)$ sont respectivement l'amplitude et la phase instantanée du signal analytique :

$$A_z(t) = |Z_u(t)| \quad ; \quad \alpha_z(t) = \angle Z_u(t)$$

La transformée de Fourier du signal analytique peut alors s'exprimer comme :

$$\hat{Z}_u(\omega) = 2H(\omega)\hat{u}(\omega), \quad \text{où : } H(\cdot) \text{ est la fonction de Heaviside}$$

En général, le signal analytique $Z_u(t)$ est différent du signal complexe $z(t)$. Pourtant, dans le cas où la variation relative de l'amplitude $A(t)$ est très lente par rapport à la variation de la phase $\alpha(t)$, *i.e.*

$$\left| \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \right| \ll \dot{\alpha}(t) \quad (3.5)$$

on obtient l'approximation : $Z_u(t) \simeq z(t)$ (voir [22] pour avoir plus de détails). Les signaux satisfaisant à la condition (3.5) sont appelés *signaux asymptotiques*. Ce type de signal facilite l'analyse dans le plan temps-fréquence.

Tenant compte de (A.11) ou de (A.21), la condition (3.5) est satisfaite si : $\xi_j \ll \sqrt{1 - \xi_j^2}$. On déduit donc : $\xi_j \ll 1/\sqrt{2}$ ($\xi = 1/\sqrt{2}$ correspond au cas où on n'a plus le phénomène d'amplification dynamique à la résonance).

3.2.2 Transformation en ondelettes

Comme nous l'avons dit précédemment, la transformation de Fourier ne donne que l'information fréquentielle. Toute l'information temporelle est perdue. Par contre, l'analyse temps-fréquence permet d'obtenir une représentation du signal dans le plan temps-fréquence grâce à un filtre qui est une fonction oscillante bien localisée en temps et en fréquence. En réalité, l'analyse linéaire temps-fréquence peut s'effectuer à l'aide de différentes transformations comme la transformation en ondelettes ou la transformation de Gabor. Cette dernière présente une localisation temps-fréquence constante, *i.e* elle ne change pas d'un point à l'autre sur le plan temps-fréquence (voir la thèse de Le [48]). C'est un inconvénient car on souhaite une bonne résolution en temps à basses fréquences et une bonne résolution en fréquence à hautes fréquences. La transformation en ondelettes continue (TOC) permet de remédier à cet inconvénient. C'est la raison pour laquelle on considère seulement la TOC dans cette thèse. Le but de ce chapitre n'est pas de donner une présentation exhaustive de la TOC mais de rappeler les éléments théoriques utiles pour notre étude.

3.2.2.1 Transformation en ondelettes continue

- **Définition**

Soit $\psi(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ une fonction analysante bien localisée en temps et en fréquence. Cette fonction est appelée *ondelette mère*. Sa version dilatée par le paramètre d'échelle $a \in \mathbb{R}^+$ et translatée par le paramètre de temps $b \in \mathbb{R}$ s'écrit :

$$\psi_{(a,b)}(t) = \frac{1}{a} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \quad (3.6)$$

La transformation continue en ondelettes normée dans $L^1(\mathbb{R})$ d'un signal réel d'énergie finie $u(t)$ est définie alors :

$$T_\psi[u](b, a) = \langle u, \psi_{(a,b)} \rangle = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (3.7)$$

où $\bar{\psi}(t)$ est la conjuguée de l'ondelette mère. Dans la littérature, on trouve aussi la définition de la TOC avec la normalisation de $\psi_{(a,b)}(t)$ dans $L^2(\mathbb{R})$:

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (3.8)$$

Dans cette thèse, on choisit la définition de la TOC normée dans $L^1(\mathbb{R})$ (voir Carmona *et al.* [22]). On voit que la formule (3.7) peut aussi être interprétée comme un produit de convolution entre le signal $u(t)$ et la version dilatée et translatée de l'ondelette mère $\psi(t)$, *i.e*

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{a} \left(u * \psi \left(-\frac{\cdot}{a} \right) \right) (b) \quad (3.9)$$

Grâce à la formule de Parseval-Plancherel, la TOC peut être définie par une autre formule qui sera très utile pour effectuer son calcul numérique :

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega) \bar{\hat{\psi}}(a\omega) e^{i\omega b} d\omega \quad (3.10)$$

En choisissant la normalisation dans $L^1(\mathbb{R})$ de la TOC, il est facile de montrer que :

$$T_\psi[\ddot{u}](b, a) = -\frac{1}{a} T_\psi[\dot{u}](b, a) = \frac{1}{a^2} T_\psi[u](b, a) \quad (3.11)$$

où $\dot{\psi}(t)$ et $\ddot{\psi}(t)$ sont respectivement les dérivées d'ordre 1 et 2 de l'ondelette mère $\psi(t)$ par rapport au temps. Cette formule permet de calculer la vitesse, l'accélération, au travers de la transformation en ondelettes, dans le cas où seuls les déplacements sont disponibles.

A partir de (3.9), on souligne que la transformation en ondelettes est linéaire. Par exemple, pour un signal possédant un nombre fini de composantes, *i.e* $u(t) = \sum_k u_k$, sa TO peut être calculée par :

$$T_\psi[u](b, a) = T_\psi \left[\sum_k u_k \right] (b, a) = \sum_k T_\psi[u_k](b, a) \quad (3.12)$$

• Condition d'admissibilité - Formule de reconstruction

L'ondelette mère doit satisfaire à la *condition d'admissibilité* qui assure que le coefficient C_ψ défini par

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \left| \hat{\psi}(\omega) \right|^2 \frac{d\omega}{\omega} \quad (3.13)$$

est fini, non nul et indépendant de ω .

Une fois que cette condition est satisfaite, on peut facilement en déduire que l'ondelette mère est de moyenne nulle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (3.14)$$

et que le signal $u(t)$ peut être reconstruit par :

$$u(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} T_\psi[u](b, a) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{da}{a} db \quad (3.15)$$

• Ondelettes progressives

Les ondelettes mères $\psi(t)$ sont *progressives* si elles appartiennent à l'espace de Hardy qui est défini par :

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{R}) = \left\{ \psi(t) \in L^2(\mathbb{R}), \quad \hat{\psi}(\omega) = 0 \quad \forall \omega \leq 0 \right\} \quad (3.16)$$

Cette définition peut être décrite par la relation : $\hat{\psi}(\omega) = H(\omega)\hat{\psi}(\omega)$ avec $H(\cdot)$ est la fonction de Heaviside.

Les ondelettes progressives sont des fonctions à valeurs complexes. Dans le contexte du traitement de signal, on choisit des ondelettes progressives au lieu des ondelettes réelles pour deux raisons ([22], p. 132) :

- Comme la TF de l'ondelette mère possède une symétrie Hermitienne, *i.e* $\hat{\psi}(-\omega) = \overline{\hat{\psi}(\omega)}$, le signal réel $u(t)$ peut être reconstruit uniquement à partir de la partie correspondant aux fréquences positives.
- Les ondelettes progressives facilitent la détection des arêtes et du squelette grâce à la relation entre la TO du signal $u(t)$ et celle du signal analytique associé $Z_u(t)$:

$$T_\psi[u](b, a) = \langle u, \psi_{(a,b)} \rangle = \frac{1}{2} \langle Z_u, \psi_{(a,b)} \rangle = \frac{1}{2} T_\psi[Z_u](b, a) \quad (3.17)$$

3.2.2.2 Localisation temps-fréquence

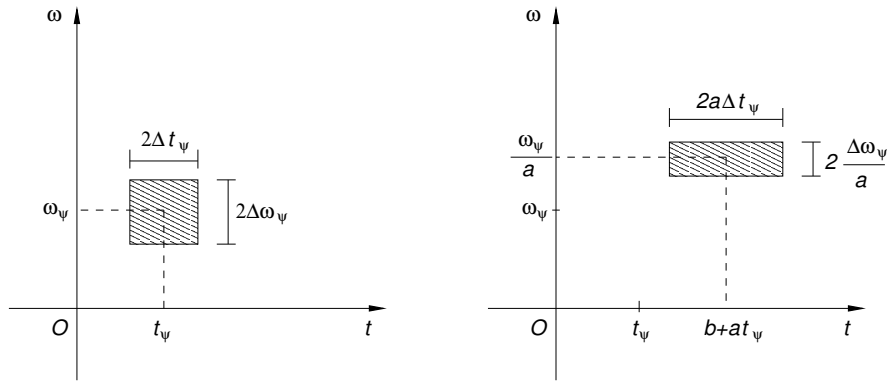


FIGURE 3.1. Localisation dans le plan temps-fréquence de : 1-Ondelette mère (gauche); 2-Transformée en ondelettes (droite).

• Localisation de l'ondelette mère

La localisation de l'ondelette mère $\psi(t)$ dans le plan temps-fréquence est représentée par un rectangle dont le centre (t_ψ, ω_ψ) et les dimensions (longueur $2\Delta t_\psi$ et largeur $2\Delta\omega_\psi$) (voir la figure 3.1.1) sont déterminés comme suit :

- Centre temporel et fréquentiel

$$t_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|_2^2} dt \quad (3.18)$$

$$\omega_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\|\hat{\psi}\|_2^2} d\omega \quad (3.19)$$

- Résolution temporelle et fréquentielle

$$\Delta t_\psi = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_\psi)^2 \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|_2^2} dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

$$\Delta\omega_\psi = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_\psi)^2 \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\|\hat{\psi}\|_2^2} d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

L'aire de ce rectangle obéit au *principe d'incertitude de Heisenberg* :

$$\mu_\psi = \Delta t_\psi \Delta \omega_\psi \geq \frac{1}{2} \quad (3.22)$$

qui peut être interprété par le fait que : si on a une bonne précision en fréquence, *i.e* $\Delta \omega_\psi$ est faible, on perd la précision en temps, *i.e* Δt_ψ est grand, et vice versa.

• Localisation de la transformée en ondelettes

La localisation de la transformée en ondelettes $T_\psi[u](b, a)$ est reliée à celle de la version translatée et dilatée $\psi_{(a,b)}(t)$ (voir la formule (3.6)) de l'ondelette mère.

Considérons que l'ondelette mère $\psi(t)$ se localise autour du centre (t_ψ, ω_ψ) avec les résolutions $(\Delta t_\psi, \Delta \omega_\psi)$. La version translatée en temps b et dilatée à l'échelle a (voir la figure 3.1.2) se localise autour du centre :

$$\begin{cases} t &= b + at_\psi \\ \omega &= \frac{\omega_\psi}{a} \end{cases} \quad (3.23)$$

avec les résolutions :

$$\begin{cases} \Delta t &= a\Delta t_\psi \\ \Delta \omega &= \frac{\Delta \omega_\psi}{a} \end{cases} \quad (3.24)$$

et l'incertitude se détermine donc,

$$\mu_{\psi_{(a,b)}} = \Delta t \Delta \omega = \Delta t_\psi \Delta \omega_\psi = \mu_\psi \geq \frac{1}{2} \quad (3.25)$$

On constate que l'aire du rectangle représentant la localisation de la TO est la même que celle de l'ondelette mère $\psi(t)$.

Dans l'analyse fréquentielle, le filtre (ou la fenêtre) est caractérisé par un facteur de qualité qui est défini comme le rapport entre le centre fréquentiel et la résolution fréquentielle. A partir de la formule (3.9), on voit que les ondelettes peuvent aussi être considérées comme un filtre. Cette remarque a permis à Le [48] de suggérer la définition du *facteur de qualité des ondelettes* Q comme suit :

$$Q = \frac{\omega}{2\Delta\omega} = \frac{\frac{\omega_\psi}{a}}{2\frac{\Delta\omega_\psi}{a}} = \frac{\omega_\psi}{2\Delta\omega_\psi} \quad (3.26)$$

On constate que ce facteur de qualité dépend uniquement de l'ondelette mère $\psi(t)$, et pas du paramètre d'échelle a , ni du paramètre de temps b .

3.2.2.3 Ondelettes mères

Le choix des ondelettes joue un rôle très important dans le traitement des signaux réels. Le [48] propose quatre conditions permettant de choisir des ondelettes mères optimales pour le traitement des signaux réels modulés en temps et en fréquence :

- être admissible,
- être progressive,
- avoir une bonne localisation en temps et en fréquence,
- faciliter le calcul de TO.

TABLEAU 3.1. *Trois ondelettes mères progressives complexes*

	Ondelette de Cauchy	Ondelette de Morlet	Ondelette de Cauchy modifiée
$\psi(t)$	$\left(\frac{i}{t+i}\right)^{n+1}$	$e^{-\frac{t^2}{2\delta^2}} e^{i\beta t}$	$\left(\frac{i}{\beta t+i}\right)^{n+1}$
$\widehat{\psi}(\omega)$	$\frac{2\pi\omega^n e^{-\omega}}{n!} H(\omega)$	$\delta\sqrt{2\pi} e^{-\frac{(\omega-\beta)^2\delta^2}{2}}$	$2\pi\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^n \frac{e^{-\omega/\beta}}{n!} H(\omega)$
$\ \psi\ _{L^2}^2$	$\pi \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$	$\delta\sqrt{\pi}$	$\pi \frac{(2n)!}{\beta(2^n n!)^2}$
C_ψ	$4\pi^2 \frac{(2n-1)!}{(2^n n!)^2}$	∞	$4\pi^2 \frac{(2n-1)!}{(2^n n!)^2}$
t_ψ	0	0	0
ω_ψ	$n + \frac{1}{2}$	β	$\frac{1}{2}\beta(2n+1)$
$\Delta\omega_\psi$	$\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$	$\frac{1}{\delta\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\beta\sqrt{2n+1}$
Δt_ψ	$\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$	$\frac{\delta}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\beta\sqrt{2n-1}}$
μ_ψ	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}}$
Q	$\frac{1}{2}\sqrt{2n+1}$	$\frac{\beta\delta}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2n+1}$

En se fondant sur ces conditions, trois ondelettes mères : l'ondelette de Cauchy, l'ondelette de Morlet et l'ondelette harmonique ont été comparées. Finalement, deux entre d'elles sont retenues : l'ondelette de Cauchy et l'ondelette de Morlet. Les caractéristiques de ces deux ondelettes sont présentées dans le tableau 3.1.

On constate que l'ondelette de Morlet dépend de deux paramètres : β et δ . A une fréquence ω , *i.e* le paramètre d'échelle associé est $a = \frac{\omega_\psi}{\omega}$, les résolutions de la TO avec l'ondelette mère de Morlet sont : $\Delta t = a\Delta t_\psi = \frac{\beta\delta}{\omega\sqrt{2}}$ et $\Delta\omega = \frac{\Delta\omega_\psi}{a} = \frac{\omega}{\beta\delta\sqrt{2}}$. D'une part, on constate que ces résolutions $(\Delta t, \Delta\omega)$ ne dépendent que du produit $\beta\delta$ qui est le facteur de qualité Q à $\sqrt{2}$ près. D'autre part, ce produit doit être choisi de telle sorte que $\beta\delta \geq 2\pi\sqrt{2\log 2}$ pour que l'ondelette de Morlet soit admissible. Par conséquent, on peut fixer soit β , soit δ sans changer la localisation de l'ondelette de Morlet. Par exemple, Carmona *et al.* [22] prennent $\delta = 1$ tandis que Lardiès *et al.* [46] choisissent $\beta = 2\pi\sqrt{2\log 2}$.

En revanche, l'ondelette de Cauchy dépend d'un seul paramètre n (ou du facteur de qualité Q). Plus n est grand, plus l'incertitude de l'ondelette de Cauchy est proche de sa valeur minimale $\mu_\psi = \frac{1}{2}$. Pourtant, comme n est une quantité adimensionnelle, les paramètres de localisation de l'ondelette mère comme ω_ψ , $\Delta\omega_\psi$, t_ψ et Δt_ψ , sont aussi adimensionnels et ils n'ont pas de sens physique. Afin de remédier ce défaut, Erlicher et Argoul [28] proposent l'*ondelette mère de Cauchy modifiée* dans laquelle un paramètre $\beta(\text{rad/s})$ est rajouté. Les caractéristiques de cette ondelette mère sont données dans le tableau 3.1. En choisissant $\beta = 1$, les caractéristiques de l'ondelette

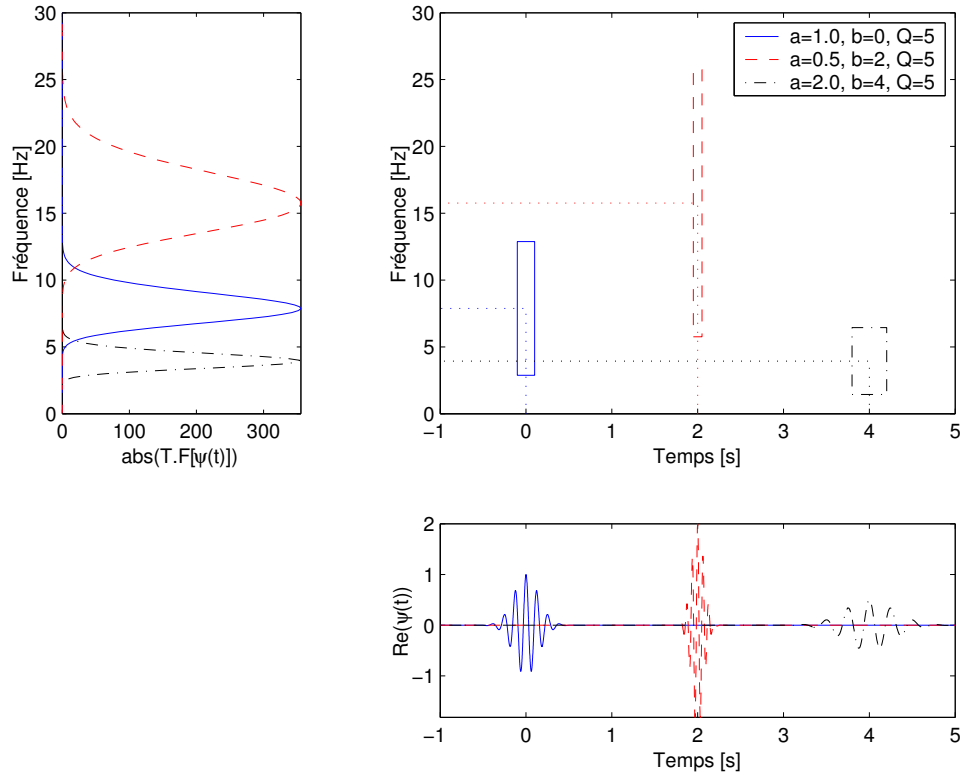


FIGURE 3.2. Localisation dans le plan temps-fréquence de l'ondelette mère de Cauchy (trait continu (-)) et de sa version dilatée-translatée avec $a > 1$ (trait pointillé (- .)) et $a < 1$ (trait discontinu (- -))

mère de Cauchy modifiée sont identiques que celles de l'ondelette mère Cauchy classique, mais elles possèdent implicitement un sens physique.

La localisation de l'ondelette mère de Cauchy et de sa version dilatée-translatée avec $a > 1$ (effet de dilatation en temps et de compression en fréquence) et $a < 1$ (effet de compression en temps et de dilatation en fréquence) sont illustrées sur la figure 3.2.

3.3 Calcul numérique de la transformation en ondelettes continue

Cette section aborde les aspects de calcul numérique de la TOC : les méthodes de calcul, l'effet de bord, le temps d'arrêt effectif et le découplage des modes.

3.3.1 Méthodes de calcul

La transformation en ondelettes continue peut être calculée par trois méthodes :

- Intégration directe (formule (3.7)),
- Produit de convolution (formule (3.9)),
- Transformation de Fourier Inverse (formule (3.10)).

Une comparaison des temps de calcul pour les différentes techniques pré-citées a été effectuée par Le [48] sur un exemple numérique. La méthode possédant un temps de calcul minimal est celle de la *transformation de Fourier inverse*. On va utiliser cette méthode tout au long de la thèse.

3.3.2 Effet de bord

D'une part, le signal mesuré $u(t)$ a habituellement une durée L finie, *i.e* $L < \infty$ et il est discrétisé. D'autre part, la transformation en ondelettes est interprétée comme le produit de convolution entre le signal $u(t)$ et la version dilatée et translatée $\psi_{a,b}(t)$ de l'ondelette mère (formule (3.9)). Par conséquent, avant l'instant initial ($t < 0$) et après l'instant final ($t > L$), l'ondelette mère $\psi_{a,b}(t)$ convoluée avec des zéros. La transformée en ondelettes du signal de durée finie diffère de celle du signal de durée infinie au voisinage des deux bords de l'enregistrement, *i.e* aux alentours de $t = 0$ et $t = L$. Et par suite, l'identification des paramètres modaux génère des erreurs de plus en plus importantes quand b est proche de 0 ou de L . Cet effet est appelé *effet de bord*. Il est illustré sur la figure 3.3 qui représente la transformation en ondelettes (avec l'ondelette de Cauchy) d'un signal numérique : $u(t) = \cos(2\pi t)$ avec deux intervalles de temps : infini (figure 3.3.1) et fini $[0, 20s]$ (figure 3.3.2).

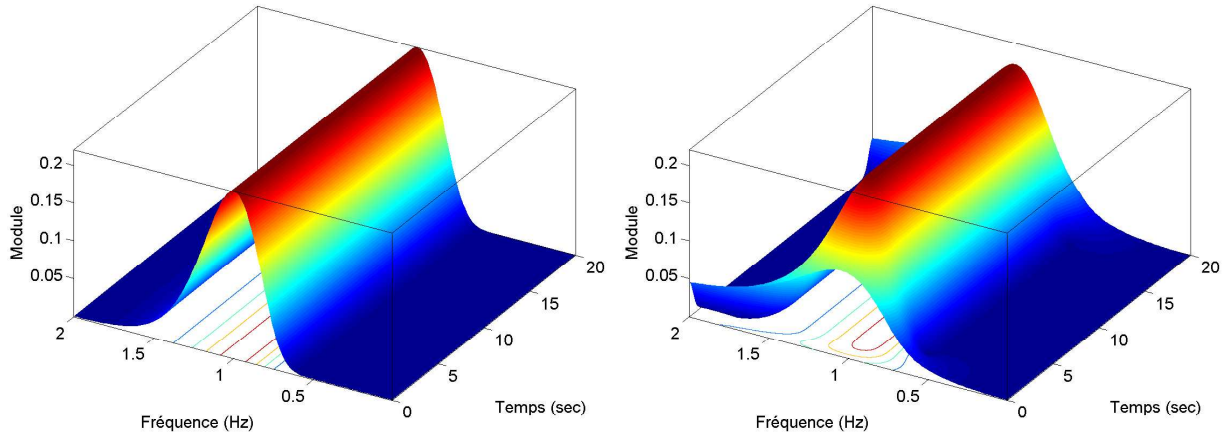


FIGURE 3.3. Modules de la TO (avec l'ondelette de Cauchy) du signal $u(t) = \cos(2\pi t)$: 1-(gauche) longueur infinie, 2-(droite) longueur finie.

Les ondelettes mères normalisées, *i.e* $\tilde{\psi}(t) = \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|_2^2}$ et $\tilde{\psi}(\omega) = \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\|\hat{\psi}\|_2^2}$ peuvent être considérées comme les densités de probabilité de moyennes t_ψ et ω_ψ , d'écart-types finis Δt_ψ et $\Delta \omega_\psi$ respectivement. Afin de déterminer le domaine D sur le plan temps-fréquence où l'effet de bord est négligé, on introduit deux coefficients réels c_t et c_f tels que les valeurs maximales des densités probabilistes des ondelettes mères normalisées définies par :

$$\begin{cases} \epsilon_t = \text{Prob} \{t \notin \mathbb{I}_t\} & \text{avec } \mathbb{I}_t = [t_\psi - c_t \Delta t_\psi, t_\psi + c_t \Delta t_\psi] \\ \epsilon_\omega = \text{Prob} \{\omega \notin \mathbb{I}_\omega\} & \text{avec } \mathbb{I}_\omega = [\omega_\psi - c_f \Delta \omega_\psi, \omega_\psi + c_f \Delta \omega_\psi] \end{cases} \quad (3.27)$$

soient petites. Ces valeurs, dépendant des coefficients c_t et c_f , sont calculées à l'aide des inégalités appliquées à la théorie de probabilité. On présente quelques inégalités ¹ souvent utilisées :

¹en référence sur la page web : <http://en.wikipedia.org/wiki/Category:Inequalities>

– Inégalité de Chebyshev

$$\begin{cases} \epsilon_t = \text{Prob}\{t \notin \mathbb{I}_t\} & \leq \frac{1}{c_t^2} & \text{pour } c_t > 1 \\ \epsilon_\omega = \text{Prob}\{\omega \notin \mathbb{I}_\omega\} & \leq \frac{1}{c_f^2} & \text{pour } c_f > 1 \end{cases} \quad (3.28)$$

– Inégalité de Vysochanskij-Petunin

$$\begin{cases} \epsilon_t = \text{Prob}\{t \notin \mathbb{I}_t\} & \leq \frac{4}{9c_t^2} & \text{pour } c_t > \sqrt{8/3} \simeq 1,633 \\ \epsilon_\omega = \text{Prob}\{\omega \notin \mathbb{I}_\omega\} & \leq \frac{4}{9c_f^2} & \text{pour } c_f > \sqrt{8/3} \simeq 1,633 \end{cases} \quad (3.29)$$

On constate que l'inégalité de Vysochanskij-Petunin est plus "forte" que celle de Chebyshev. On propose $c_t = c_f \geq 5$ ce qui correspondent avec $\sup[\epsilon_t] = \sup[\epsilon_\omega] = 0,0178$. De résultats identiques ont été obtenus avec Erlicher et Argoul [28] qui utilisent l'inégalité de Gauss-Winkler (ou l'inégalité de Vysochanskij-Petunin) pour déterminer $c_t = c_f \geq 5$.

L'effet de bord a été beaucoup étudié par Le [48] en considérant la décroissance des ondelettes mères au moyen de deux rapports :

$$r_\psi = \frac{|\psi(t_\psi + c_t \Delta t_\psi)|}{|\psi(t_\psi)|} \quad ; \quad r_{\hat{\psi}} = \frac{|\hat{\psi}(\omega_\psi + c_f \Delta \omega_\psi)|}{|\hat{\psi}(\omega_\psi)|}$$

Pour l'ondelette de Morlet : $r_\psi^{(M)} = e^{-\frac{c_t^2}{4}}$ et $r_{\hat{\psi}}^{(M)} = e^{-\frac{c_f^2}{4}}$. Pour l'ondelette de Cauchy, $r_\psi^{(C)} \rightarrow r_\psi^{(M)}$ et $r_{\hat{\psi}}^{(C)} \rightarrow r_{\hat{\psi}}^{(M)}$ lorsque $Q \rightarrow +\infty$. Le, dans sa thèse [48], propose de choisir : $c_t = c_f \geq 5$.

- **Domaine de localisation de la transformée en ondelettes autour du point (b_j, ω_j) où l'effet de bord est négligé :**

$$\tilde{D}_{red} = \left\{ (b, \omega) \quad \left| \quad \begin{aligned} b_j + \frac{\omega_\psi}{\omega_j} t_\psi - c_t \frac{\omega_\psi}{\omega_j} \Delta t_\psi \leq b \leq b_j + \frac{\omega_\psi}{\omega_j} t_\psi + c_t \frac{\omega_\psi}{\omega_j} \Delta t_\psi \quad \text{et} \\ \frac{\omega_j}{\omega_\psi} \omega_\psi - c_f \frac{\omega_j}{\omega_\psi} \Delta \omega_\psi \leq \omega \leq \frac{\omega_j}{\omega_\psi} \omega_\psi + c_f \frac{\omega_j}{\omega_\psi} \Delta \omega_\psi \end{aligned} \right. \right\} \quad (3.30)$$

Ce domaine doit appartenir au domaine de validité, i.e $\tilde{D}_{red} \subset [0, L] \times [0, 2\pi f_{Nyquist}]$. On obtient donc

$$D_{red} = \left\{ (b, \omega) \quad \left| \quad \frac{1}{\omega} 2c_t Q \mu_\psi \leq b \leq L - \frac{1}{\omega} 2c_t Q \mu_\psi \quad \text{et} \quad \frac{1}{L} c_t 4Q \mu_\psi \leq \omega \leq \frac{2\pi f_{Nyquist}}{1 + c_f \frac{\Delta \omega_\psi}{\omega_\psi}} \right. \right\} \quad (3.31)$$

On voit que le domaine D_{red} est limité par deux hyperboles : $\omega = \frac{1}{b} c_t 2Q \mu_\psi$ et $\omega = \frac{1}{L - b} c_t 2Q \mu_\psi$ et une ligne horizontale : $\omega = \frac{2\pi f_{Nyquist}}{1 + c_f \frac{1}{2Q}}$. La borne inférieure de fréquence du domaine D_{red} ,

égale à $\omega_{inf} = \frac{1}{L} c_t 4Q \mu_\psi$, est l'intersection de deux hyperboles à l'instant $t = L/2$. A la fréquence $\omega = \omega_j$, cette borne inférieure indique une condition pour le facteur de qualité de l'ondelette mère :

$$Q \leq Q_{max} = \frac{L \omega_j}{4c_t \mu_\psi} \quad (3.32)$$

Prenons le signal numérique $u(t) = \cos(2\pi t)$ défini sur l'intervalle de temps $[0, 20s]$ comme illustration de ce qui précède. La TO dans le plan temps-fréquence est représentée sur la figure 3.4. Les hyperboles obtenues avec différentes valeurs de c_t ($c_t = c_f = 3, 4$ et 5) sont aussi tracées. On note que le domaine D_{red} correspondant à $c_t = c_f = 5$ supprime complètement l'effet de bord. On a choisi dans cet exemple la valeur de $Q = 4$ qui est inférieure à $Q_{max} = 12,56$.

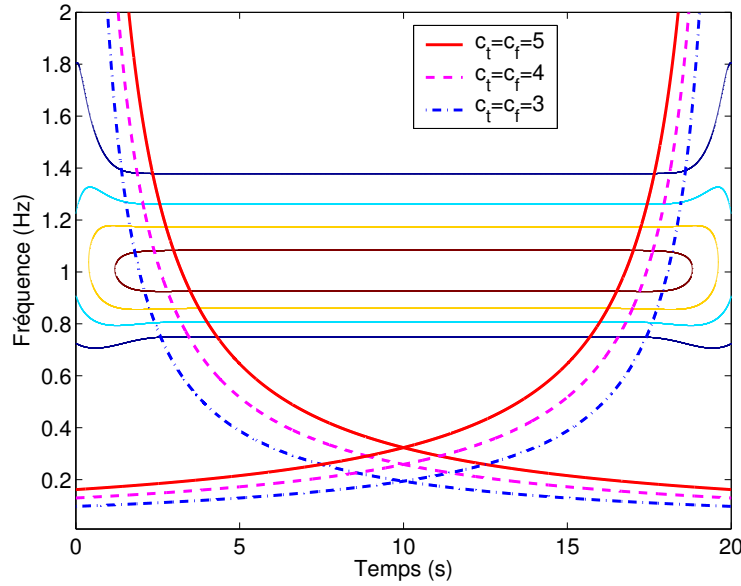


FIGURE 3.4. Modules de la TO ($Q = 4$) du signal $u(t) = \cos(2\pi t)$ sur le plan temps-fréquence. Les différents domaines D_{red} où l'effet de bord est négligé.

3.3.3 Découplage des modes

En se fondant sur la linéarité de la transformation en ondelettes et sur le fait qu'elle peut être considérée comme un filtre (formule (3.9)), son utilisation permet de découpler les modes proches et de les analyser séparément.

Considérons une composante ω_j . Afin de découpler cette composante des deux composantes (ω_{j-1} et ω_{j+1}), il faut que la résolution de la version translatée et dilatée $\hat{\psi}_{(b,a)}(\omega)$ de l'ondelette mère soit inférieure ou égale à $d\omega_j = \min\{\omega_j - \omega_{j-1}, \omega_{j+1} - \omega_j\}$. On obtient :

$$d\omega_j \geq c_f \Delta\omega = c_f \frac{\omega_j}{\omega_\psi} \Delta\omega_\psi = c_f \frac{\omega_j}{2Q} \quad (3.33)$$

On en déduit donc :

$$Q \geq Q_{min} = c_f \frac{\omega_j}{2d\omega_j} \quad (3.34)$$

On prend un signal numérique composé de deux composantes : $u(t) = \cos(2\pi t) - 2\cos(3\pi t)$ défini sur l'intervalle de temps $[0, 20s]$. Afin de découpler la composante $\omega_2 = 3\pi rad/s$, le facteur de qualité doit être supérieur ou égal à $Q_{min} = 7,5$ (avec $c_t = c_f = 5$, $d\omega_2 = 0,5\pi rad/s$). Sur la figure 3.5, la différence entre les transformations en ondelettes calculées avec deux valeurs de Q : $Q = 5 < Q_{min}$ et $Q = 9 > Q_{min}$ est très claire.

3.3.4 Le temps d'arrêt

L'amplitude des oscillations libres des systèmes linéaires amortis diminue au fur et à mesure que le temps augmente, ceci est dû au fait que cette amplitude est exponentiellement proportionnelle à l'amortissement modal. Après un certain temps, l'amplitude de l'oscillation devient très faible et les paramètres modaux sont difficiles à identifier.

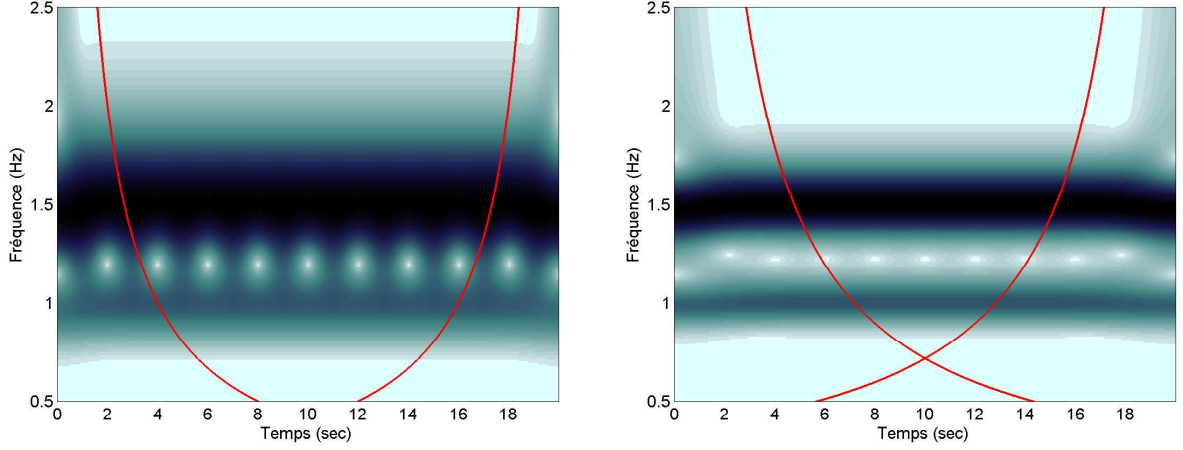


FIGURE 3.5. Modules de la TO (Cauchy) du signal $u(t) = \cos(2\pi t) - 2\cos(3\pi t)$: 1-(gauche) $Q = 5$, 2-(droite) $Q = 9$

Soit $A_{kj}(t) = A_{kj,0}e^{-\xi_j\omega_j t}H(t)$ l'amplitude modale du signal analytique $Z_{u_{k,j}}(t)$ associé au mode j et au signal $u_k(t)$. On cherche un instant $\tilde{t}_{kj}$ tel que le rapport :

$$\epsilon_{A_{kj}} = A_{kj}(\tilde{t}_{kj})/A_{kj,0} = e^{-\xi_j\omega_j\tilde{t}_{kj}} \quad (3.35)$$

soit très petit. Les calculs numériques montrent que $\epsilon_A = 10^{-4} \div 10^{-5}$. On définit le temps d'arrêt minimal comme :

$$\tilde{t}_j = \min_{k=1, N_c} t_{\bar{u}_{kj}} \quad (3.36)$$

où N_c est le nombre de capteurs.

Les résultats d'identification sont bons si ce temps d'arrêt $\tilde{t}_j$ est supérieur à la borne inférieure du domaine de localisation temporelle D_{red} donné par (3.31), *i.e*

$$\tilde{t}_j \geq \frac{1}{\omega_j} 2c_t Q \mu_t \quad (3.37)$$

Pour illustrer, on prend un signal numérique sous la forme : $u(t) = e^{-\xi\omega t} \cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t)$ avec $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$, $\xi = 1,5\%$ (figure 3.6). Les bornes de Q sont respectivement : $Q_{min} = 3,53$, $Q_{max} = 114,23$. Si on choisit le seuil $\epsilon_A = 10^{-5}$, le temps d'arrêt correspondant est de $\tilde{t} = 24,43\text{s}$ qui est représenté par une droite verticale discontinue sur la figure 3.6. Au delà de cet instant $\tilde{t}$, la fréquence instantanée devient inexacte.

Dans la réalité, des signaux mesurés sur des systèmes très amortis possèdent habituellement un temps d'arrêt assez faible, tandis que la durée d'enregistrement peut être longue. Il n'est pas nécessaire de calculer la TO pour toute la longueur du signal. On propose donc, de couper ces signaux avant de calculer leurs TOs.

3.3.5 Choix des paramètres de l'ondelette mère

La combinaison des inégalités (3.32) et (3.34) donne un intervalle du facteur de qualité Q de l'ondelette mère :

$$c_f \frac{\omega_j}{2d\omega_j} \leq Q \leq \frac{L\omega_j}{4c_t\mu_\psi} \quad (3.38)$$

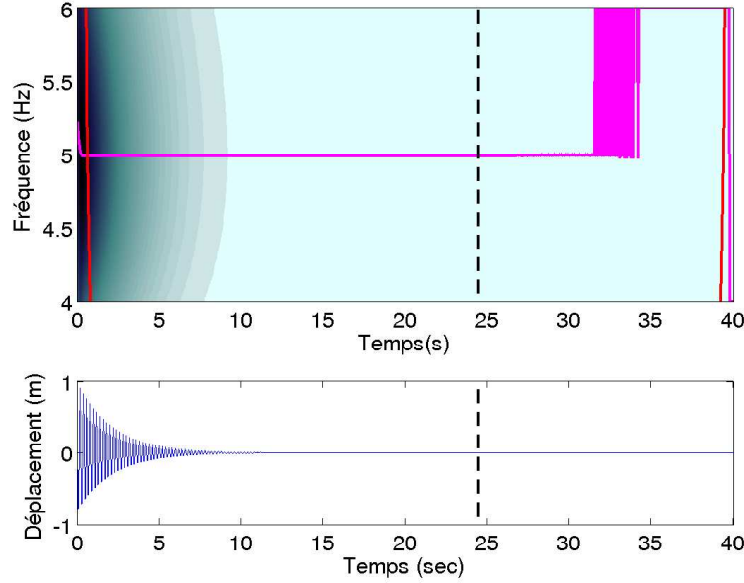


FIGURE 3.6. Modules de la TO ($Q = 3, 6$) du signal $u(t) = e^{-0,015 \cdot 10\pi t} \cos\left(10\pi\sqrt{1 - 0,015^2}t\right)$ sur le plan temps-fréquence. Le temps d'arrêt : $\tilde{t} = 24,43s$ (droite verticale discontinue).

Avec la condition :

$$4c_f c_t \mu_\psi \leq L d \omega_j \quad (3.39)$$

Plus la valeur de Q est élevée, plus l'effet de bord est significatif et moins l'effet de couplage est important, *i.e* le domaine de localisation de la TO (3.31) se réduit. Les calculs numériques montrent que lorsque $Q \in \left[Q_{min}, \frac{Q_{min} + Q_{max}}{2}\right]$, les résultats d'identification sont bons avec des erreurs relatives assez petites.

Si la condition (3.39) n'est pas satisfaite, c_t et c_f doivent être diminués. Dans les cas où le signal doit être coupé, il faut que la durée du nouveau signal satisfasse à cette condition.

Dans la littérature, certains articles ont débordé le choix d'une valeur dite "optimale" du facteur de qualité (voir [46], [79]). Il consiste à minimiser l'entropie des ondelettes calculée par rapport aux facteurs de qualité Q . D'une part, dans ces articles, la variation des paramètres modaux identifiés en fonction de Q n'a pas été donnée. D'autre part, une seule valeur de $Q_{optimal}$ est proposée pour analyser tous les modes. Ceci peut devenir incorrect dans le cas de modes couplés. Dans ce cas, les intervalles de Q associés à chaque mode peuvent être disjoints, *i.e* il n'y a pas de valeur de Q commune pour tous les modes.

3.4 Analyse des signaux modulés en amplitude et en fréquence

Après avoir présenté des notions de base sur la transformation en ondelettes dans les sections précédentes, on va dans la suite, tenter de répondre à la question suivante : comment la transformation en ondelettes permet d'obtenir les caractéristiques de signaux modulés en amplitude et en fréquence.

Comme nous l'avons dit précédemment, l'ondelette peut être considérée comme un filtre. Ceci permet d'analyser une composante quelconque du signal et de déterminer l'évolution temporelle du module et de la phase de cette composante. Autrement dit, la transformée en ondelettes dans le plan temps-échelle se concentre dans le voisinage d'une courbe $a = a_r(b)$, appelée *arête* de la transformée [82] :

$$a_r(b) = \frac{K}{\nu(b)} \quad (3.40)$$

où $\nu(b)$ est la fréquence instantanée du signal ; K est une constante ne dépendant que de l'ondelette mère.

La caractérisation des arêtes pour le cas des lignes spectrales (la forme générale est donnée dans (3.41)) qui est le cas particulier de celui des signaux modulés en amplitude et en fréquence, a été abordée de façon très détaillée par Torrèsani [82] ainsi que par Le [48]. Par conséquent, dans cette thèse, on ne rappelle que des points essentiels de leurs études.

3.4.1 Analyse par ondelettes de lignes spectrales

Une ligne spectrale $z(t)$ est représentée par :

$$z(t) = A(t)e^{i\omega_r t} \quad \text{avec} \quad \omega_r = \text{const} \quad (3.41)$$

L'amplitude $A(t)$ est d'abord développée en série de Taylor autour du point $t = b$. En gardant le premier terme de cette série et utilisant la formule de Parseval-Plancherel (3.10), la transformée en ondelettes peut être approchée par :

$$T_\psi[z](b, a) \simeq A(b)\overline{\hat{\psi}}(a\omega_r)e^{i\omega_r b} \quad (3.42)$$

On déduit donc

$$\max_a |T_\psi[z](b, a)| = |T_\psi[z](b, a_r)| \quad \text{avec} \quad a_r = \frac{\omega_{\psi_0}}{\omega_r} \quad (3.43)$$

où ω_{ψ_0} est la fréquence à laquelle l'ondelette mère $\hat{\psi}(\omega)$ est maximale, i.e $\hat{\psi}'(\omega_{\psi_0}) = 0$.

TABLEAU 3.2. Paramètres des ondelettes mères pour caractériser les arêtes

	Ondelette de Cauchy	Ondelette de Morlet
$A_\psi(t)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^{n+1}$	$-\frac{t^2}{2\delta^2}$
$\alpha_\psi(t)$	$(n+1) \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$	βt
$\dot{\alpha}_\psi(0)$	$n+1$	β
$\ddot{\alpha}_\psi(0)$	0	0
ω_{ψ_0}	n	β

Torrèsani ([82], p.47) a donnée comme définition pour l'arête :

Supposant que $\widehat{\psi}(\omega)$ est à valeurs réelles (ce qui est vrai pour l'ondelette de Cauchy et celle de Morlet), le module $|T_\psi[z](b, a)|$ de la transformée en ondelettes se comporte comme $\widehat{\psi}(a\omega)$ et est donc localement maximum pour $a_r = \frac{\omega_{\psi_0}}{\omega_r}$ (voir le tableau 3.2 pour les expressions de ω_{ψ_0}). La transformée en ondelettes est donc localisée au voisinage d'une ligne horizontale, appelée **arête**. La restriction de la transformée en ondelettes sur cette arête est appelée le **squelette** de la transformée.

Dans le cas d'un signal formé de la somme d'un nombre fini de **lignes spectrales** :

$$z(t) = \sum_k z_k = \sum_k A_k(t) e^{i\omega_k t} \quad (3.44)$$

La linéarité de la TO conduit à l'expression approchée suivante pour $T_\psi[z](b, a)$:

$$T_\psi[z](b, a) = \sum_k T_\psi[z_k](b, a) \simeq \sum_k A_k(b) \widehat{\psi}(a_k \omega_k) e^{i\omega_k b} \quad \text{avec} \quad a_k = \frac{\omega_{\psi_0}}{\omega_k} \quad (3.45)$$

Dans ce cas, la TO est localisée sur plusieurs lignes spectrales (ou *arêtes*).

3.4.2 Analyse par ondelettes des signaux modulés en amplitude et en fréquence

Considérons maintenant non seulement des signaux modulés en amplitude, mais aussi modulés en fréquence dont la représentation canonique est donnée par (3.1). Pour rappel, le signal asymptotique associé $Z_u(t)$ est donné par (3.4) avec l'hypothèse qui dit que la variation de l'amplitude $A(t)$ est très lente par rapport à la variation de la phase $\alpha(t)$.

Considérons aussi une ondelette mère progressive $\psi(t)$ appartenant à l'espace de Hardy (3.16). Cette ondelette mère est exprimée sous la forme d'une amplitude et d'une phase instantanée :

$$\psi(t) = A_\psi(t) e^{i\alpha_\psi(t)} \quad (3.46)$$

En se fondant sur (3.17), la transformée en ondelettes du signal $u(t)$ est déterminée par

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{2} \langle Z_u, \psi_{(a,b)} \rangle = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) A_\psi \left(\frac{t-b}{a} \right) e^{i\{\alpha(t) - \alpha_\psi(\frac{t-b}{a})\}} dt \quad (3.47)$$

Notons :

$$\Phi_{(b,a)}(t) = \alpha(t) - \alpha_\psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \quad ; \quad M_{(b,a)}(t) = A(t) A_\psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \quad (3.48)$$

Comme dans le cas des lignes spectrales, afin de caractériser les arêtes de la TO calculée par (3.47), l'idée d'approximer la TO en gardant seulement le premier terme dans le développement en série de Taylor de certaines fonctions autour de son point stationnaire $t_s = t_s(b, a)$ qui est solution de l'équation : $\dot{\Phi}_{(b,a)}(t) = 0$, soit :

$$\dot{\alpha}(t_s) = \frac{1}{a} \dot{\alpha}_\psi \left(\frac{t_s - b}{a} \right) \quad (3.49)$$

Une remarque importante est tirée à partir de l'équation (3.49) : la fréquence instantanée de l'ondelette translatée et dilatée coïncide avec la fréquence instantanée du signal analysé au point stationnaire t_s . Cela a permis à Torrèsani ([82]) de donner une autre définition de l'arête :

L'arête de la transformée en ondelettes peut être définie comme l'ensemble :

$$A = \left\{ (b, a_r(b)) \mid t_s(b, a) = b \text{ ou } \dot{\alpha}(b) = \frac{\dot{\alpha}_\psi(0)}{a_r(b)} \right\} \quad (3.50)$$

Selon la forme des fonctions à développer en série de Taylor, différentes approximations de la TO ont été proposées :

a) 1^{ère} approximation

Torrésani [82] propose :

$$T_\psi[u](b, a) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \text{Sgn}[\ddot{\Phi}_{(b,a)}(t_s)]}}{\sqrt{|\ddot{\Phi}_{(b,a)}(t_s)|}} \frac{1}{a} \bar{\psi}\left(\frac{t_s - b}{a}\right) Z_u(t_s) \quad (3.51)$$

En remplaçant t_s par b , le squelette est déterminé par

$$T_\psi[u](b, a_r(b)) \simeq \text{Corr}_1(b) Z_u(b), \quad \text{avec} \quad \text{Corr}_1(b) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \text{Sgn}[\ddot{\Phi}_{(b,a_r(b))}(b)]}}{\sqrt{|\ddot{\Phi}_{(b,a_r(b))}(b)|}} \frac{1}{a_r(b)} \bar{\psi}(0) \quad (3.52)$$

Puisque $\ddot{\Phi}_{(b,a_r(b))}(b) = -\frac{1}{a_r^2} [\dot{a}_r(b) \dot{\alpha}_\psi(0) + \ddot{\alpha}_\psi(0)]$ ne dépend pas du signal $u(t)$, la fonction correctrice $\text{Corr}_1(b)$ n'en dépend pas non plus. D'une part, elle ne dépend que de l'ondelette mère. D'autre part, on a : $\ddot{\alpha}_\psi(0) = 0$ pour l'ondelette de Cauchy et celle de Morlet. Par conséquent, la fonction $\text{Corr}_1(b)$ n'est définie que si $a_r(b)$ n'est pas constante, i.e $\dot{a}_r(b) \neq 0$ ce qui n'est pas le cas pour les systèmes linéaires dont les fréquences propres sont constantes par rapport au temps.

b) 2^e approximation

Utilisant la même démarche que la section précédente 3.4.1, Torrèsani [82] propose une autre approximation :

$$T_\psi[u](b, a) \simeq \frac{1}{2} Z_u(b) \bar{\psi}(a \dot{\alpha}(b)) \quad (3.53)$$

Le squelette correspondant vaut :

$$T_\psi[u](b, a_r(b)) \simeq Z_u(b) \text{Corr}_2 \quad \text{avec} \quad \text{Corr}_2 = \frac{1}{2} \bar{\psi}(\dot{\alpha}_\psi(0)) \quad (3.54)$$

La fonction Corr_2 possède les propriétés suivantes :

- Elle ne dépend que des paramètres de l'ondelette, i.e elle est indépendante du paramètre b .
- Pour l'ondelette de Cauchy et aussi pour l'ondelette de Morlet, cette fonction est réelle car les fonctions $\hat{\psi}$ et $\dot{\alpha}_\psi(0)$ sont toutes réelles.

c) 3^e approximation

Dans [48], Le développe la fonction $f_{(b,a)}(t) = A(t) e^{i\Phi_{(b,a)}(t)}$ en série de Taylor. La transformée en ondelettes est donc approchée par :

$$T_\psi[u](b, a) \simeq \frac{1}{2a} A(t_s) e^{i\Phi_{(b,a)}(t_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} A_\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{1}{2} Z_u(t_s) e^{-i\alpha_\psi\left(\frac{t_s-b}{a}\right)} \|\psi\|_{L^1} \quad (3.55)$$

En remplaçant $t_s = b$ dans la formule ci-dessus, le squelette est calculé par :

$$T_\psi[u](b, a_r(b)) \simeq \text{Corr}_3 Z_u(b), \quad \text{avec} \quad \text{Corr}_3 = \frac{1}{2} e^{-i\alpha_\psi(0)} \|\psi\|_{L^1} \quad (3.56)$$

Comme l'approximation précédente, la fonction Corr_3 dans l'approximation de Le est aussi une fonction réelle qui est indépendante du paramètre b .

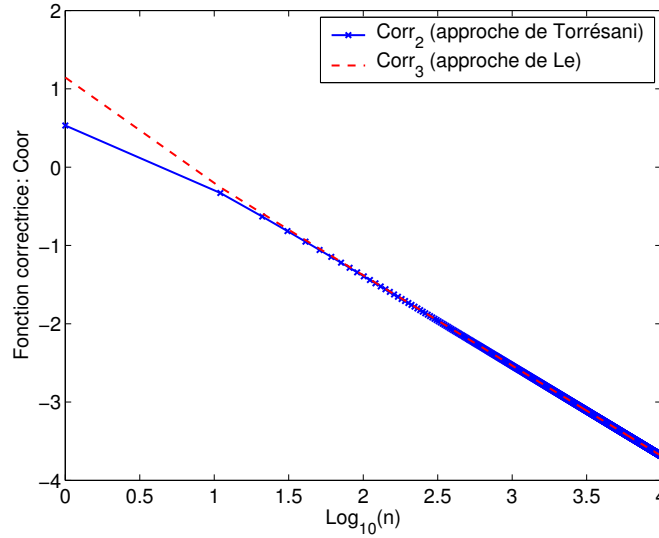


FIGURE 3.7. Fonctions correctrices $Corr_2$ et $Corr_3$ avec l'ondelette de Cauchy

En comparant les deux dernières approximations : (3.54) et (3.56), on obtient :

- pour l'ondelette de Morlet : $Corr_3 = Corr_2 = \delta\sqrt{2\pi}$.
- pour l'ondelette de Cauchy : Les valeurs de ces deux fonctions sont tracées sur une même figure 3.7 en échelle logarithmique. L'approximation $Corr_3 \simeq Corr_2$ est obtenue pour $n \geq 10^{1.5}$ (soit $Q \simeq 4$).

En résumé, on constate que l'approximation de Torrèsani [82] ou celle de Le [48] deviennent identiques pour $Q \geq 4$.

3.4.3 Méthodes d'extraction des arêtes

Dans la section précédente, deux définitions pour les arêtes associées au module et à la phase ont été données. On en déduit deux méthodes d'extraction des arêtes.

En outre, selon le nombre d'arêtes que les méthodes d'extraction peuvent détecter en même temps, on peut les classifier en deux groupes :

- méthodes d'extraction d'une arête.
- méthodes d'extraction de plusieurs arêtes.

3.4.3.1 Extraction des arêtes par le module

Cette section présente un petit résumé des méthodes de détection des arêtes (voir Carmona *et al.* [22] pour plus de détails).

i) Maxima du module (ou Méthodes différentielles).

a) Maximum global du module.

La méthode permettant de détecter une seule arête consiste à chercher le paramètre d'échelle a_r pour chaque instant b qui maximise le module de la TO :

$$\max_a |T_\psi[z](b, a)| = |T_\psi[z](b, a_r)| \quad \text{avec} \quad a_r = \frac{\omega_{\psi_0}}{\omega_r} \quad (3.57)$$

b) *Maxima locaux du module.*

On constate que la formule ci-dessus peut être interprétée comme :

$$\frac{\partial |T_\psi[z](b, a)|}{\partial a} = 0 \quad (3.58)$$

ce qui permet de détecter plusieurs arêtes à la fois.

Il est important à noter que les méthodes basées sur les maxima du module de la TO sont très simples à réaliser. Pourtant, elles sont très sensibles au bruit car il peut rajouter des arêtes artificielles dans la TO.

ii) Méthodes intégrales

A partir des méthodes différentielles présentées ci-dessus, on remarque que l'arête trouvée est un ensemble de points dans le plan temps-fréquence. En plus, cet ensemble de points forme une courbe continue dans le cas où le rapport bruit/signal est faible.

Comme nous l'avons dit précédemment, les méthodes différentielles sont instables vis-à-vis du bruit. Afin d'améliorer l'exactitude des résultats identifiés, la propriété de "continuité" des arêtes est utilisée dans *les méthodes intégrales*.

Elle consiste à minimiser une fonction de coût composée de deux parties correspondant respectivement à :

- L'énergie intégrée le long de l'arête qui varie lentement avec la variable b .
- La continuité de l'arête.

Deux méthodes se trouvant dans cette catégorie sont présentées dans [22] : *la méthode de Corona* et *la méthode des modes conditionnellement itérés*. Il est important à noter que les méthodes intégrales sont capables de détecter uniquement une seule arête.

iii) Méthode de "Crazy Climber"

Cette méthode permet de détecter plusieurs arêtes à la fois. Différente des méthodes intégrales, on ne minimise pas une fonction de coût, ici on introduit une approche pour générer une densité d'occupation (le poids) qui forme l'arête.

L'idée principale est d'utiliser la représentation temps-fréquence (représentée comme une colline) pour générer une marche aléatoire d'un grimpeur (aléatoire aussi) dans le plan temps-fréquence. Les grimpeurs sont attirés par l'arête de la colline. D'un côté, la marche est effectuée à une température donnée et à un instant donné. D'un autre côté, plus la température diminue, plus le grimpeur est attiré par l'arête. Les mouvements des grimpeurs ne sont pas bloqués suivant les deux directions. Chaque point situé sur le plan temps-fréquence est associé une *mesure d'occupation* qui est le nombre de fois où les grimpeurs sont passés par ce point.

L'algorithme se décompose en deux étapes :

- *la relaxation stochastique*. Cette étape a pour objectif de générer des mouvements de grimpeurs jusqu'à une température finale choisie. A la fin de cette étape, des *mesures d'occupation intégrées* (la moyenne des mesures d'occupation) sont calculées.
- *le chaînage* permet d'obtenir des arêtes à partir des mesures d'occupation intégrées calculées dans l'étape précédente.

3.4.3.2 Extraction des arêtes par la phase

Fondé sur la définition (3.50), le problème d'extraction des arêtes consiste à résoudre numériquement l'équation différentielle :

$$\frac{\partial (\angle T_\psi[u](b, a))}{\partial b} = \frac{\dot{\alpha}_\psi(0)}{a} \quad (3.59)$$

Dans son livre [82], Torr sani présente la méthode itérative de Kronland-Martinet (ou l'algorithme de point fixe) qui s'inspire du principe ci-dessus. On constate que cette méthode d'extraction fait partie des méthodes différentielles introduites dans la section précédente. D'une part, elle possède les mêmes inconvénients : la sensibilité vis-à-vis du bruit, la détection d'une seule arête. D'autre part, elle est moins rapide que les méthodes d'extraction par le module car l'équation (3.59) doit être résolue à chaque instant.

3.5 Identification modale des systèmes linéaires

Dès le début de ce chapitre, les points essentiels sur le traitement du signal par l'analyse en ondelettes ont été présentés. Il nous reste une seule question : comment appliquer la technique des ondelettes à l'identification des systèmes vibratoires linéaires à partir des réponses libres et des réponses sous excitations ambiantes. La première moitié de cette section a pour objectif de répondre à cette question et d'appliquer les techniques présentées sur les réponses numériques ainsi que les réponses expérimentales.

3.5.1 Réponses libres

3.5.1.1 Principe d'identification

Soit p_{kj} un paramètre modal du mode j obtenu à partir de la mesure d'un capteur localisé à la position k sur le système. On cherche à minimiser, au sens des moindres carrés, la différence entre une fonction dépendant de p_{kj} et la mesure de cette fonction. Cette dernière contient implicitement des informations sur le paramètre p_{kj} pour chaque position de mesure :

$$\min_{p_{kj}} \left\| F_{p_{kj}}^{mes} - F_{p_{kj}}^{iden}(p_{kj}) \right\|^2 \quad (3.60)$$

Dans la réalité, les essais dynamiques sont délicats. Il y a plusieurs facteurs qui peuvent influencer la précision des mesures. Il est normal que les valeurs identifiées pour p_{kj} puissent être différentes d'un capteur à l'autre. Théoriquement, un paramètre modal du système ne dépend pas de la position du capteur. Par conséquent, la valeur moyenne des p_{kj} est considérée comme valeur caractérisant le paramètre modal du mode j :

$$p_j = \frac{1}{N_c} \sum_{k=1}^{N_c} p_{kj} \quad (3.61)$$

où N_c est le nombre de capteurs posés sur le système.

3.5.1.2 Méthodes d'identification

En se référant à la section A.2 dans l'annexe, on constate que les réponses libres de systèmes linéaires dans les deux cas d'amortissement proportionnel et non-proportionnel peuvent être mis sous la forme générale suivante :

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^n u_{kj} = \sum_{j=1}^n A_{u_{kj}}(t) \cos(\alpha_{kj}(t))$$

La procédure d'identification des paramètres modaux est identique pour les deux cas d'amortissement. Pour le signal associé au i -ième mode et à la position du k -ième capteur, différentes méthodes d'identification sont présentées dans le tableau 3.3.

TABLEAU 3.3. Identification des paramètres modaux

Paramètres	$\mathbf{p}_{kj}$	Méthodes	$\mathbf{F}_{\mathbf{p}_{kj}}^{\text{mes}}$	$\mathbf{F}_{\mathbf{p}_{kj}}^{\text{iden}}$
	$\tilde{\omega}_{kj}$	Arête	$\tilde{\omega}_{kj}$	$\frac{K}{a_{kj}}$
Pulsation propre	$\tilde{\omega}_{kj}$	Phase	$\angle Z_{u_{kj}}$ (ou $\angle Z_{\dot{u}_{kj}}, \angle Z_{\ddot{u}_{kj}}$)	$\tilde{\omega}_{kj} t - r_{kj}$
	ω_{kj}	Module	$ Z_{\dot{u}_{kj}} / Z_{u_{kj}} $ (ou $ Z_{\ddot{u}_{kj}} / Z_{\dot{u}_{kj}} $)	ω_{kj}
	$\xi_{kj}\omega_{kj}$	Module	$\ln Z_{\dot{u}_{kj}} $	$-\xi_{kj}\omega_{kj}t + r'_{kj}$
Amortissement	ξ_{kj}	Phase	$ \cos(\angle Z_{u_{kj}} - \angle Z_{\dot{u}_{kj}}) $ (ou $ \cos((\angle Z_{\dot{u}_{kj}} - \angle Z_{\ddot{u}_{kj}})/2) $)	ξ_{kj}
Modes	ϕ_{kj}	-	$Z_{u_{kj}}/Z_{u_{rj}}$	ϕ_{kj}

Dans ce tableau, $\tilde{\omega}_{kj}$ est la pulsation propre amortie calculée par : $\tilde{\omega}_{kj} = \omega_{kj}\sqrt{1 - \xi_{kj}^2}$. Les signaux analytiques $Z_{u_{kj}}$, $Z_{\dot{u}_{kj}}$ et $Z_{\ddot{u}_{kj}}$ sont calculés à partir des TO correspondantes comme nous l'avons présenté dans la section 3.4.2.

En ce qui concerne l'identification des modes réels, il faut normaliser les modes par rapport à une position de référence (r) choisie (représenté par $Z_{u_{rj}}$ dans le tableau). Pour des modes complexes, les modes sont ensuite normalisés suivant la notion de modes complexes optimaux présentée à la section A.2.2.2 dans l'annexe.

Parmi les méthodes d'identification présentées dans le tableau, la méthode des arêtes pour l'identification des pulsations propres et la méthode des modules pour l'identification des amortissements modaux sont les deux méthodes les plus simples et plus robustes. Elles sont aussi valables pour des systèmes non linéaires, sujet que l'on va aborder par la suite dans cette thèse.

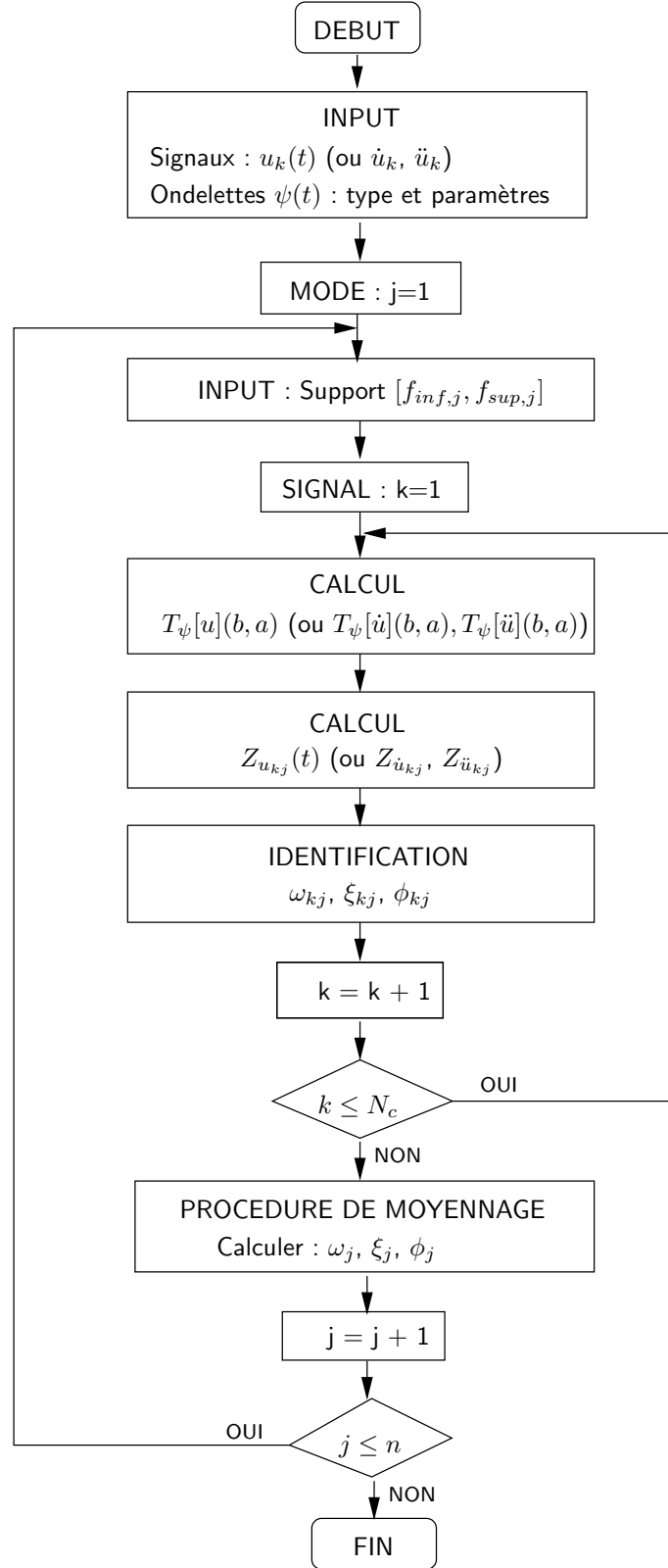
L'organigramme complet pour l'identification des paramètres modaux des systèmes linéaires est présenté sur la figure 3.8.

3.5.1.3 Influence des paramètres de l'ondelette mère sur l'exactitude des paramètres modaux identifiés

En général, l'identification des paramètres modaux dépend des choix suivants :

- Le nombre des points de discrétisation (N) dans la bande de fréquence $[f_{j,\text{inf}}, f_{j,\text{sup}}]$ contenant la j -ième fréquence propre f_j à identifier. Les fréquences identifiées directement par les arêtes sont les plus influencées. L'erreur relative ϵ_f de la fréquence identifiée est donnée par :

$$\sup |\epsilon_f| = \frac{f_{j,\text{sup}} - f_{j,\text{inf}}}{2(N+1)\tilde{f}_{j,\text{exact}}} \quad (3.62)$$

FIGURE 3.8. *Procédure d'identification des paramètres modaux*

où $\tilde{f}_{j,exact}$ est la valeur exacte de la fréquence propre amortie.

Plus N est grand, plus l'erreur relative est faible et plus le temps de calcul est important. En

réalité, cette erreur est très petite, l'influence de N sur l'exactitude des résultats peut être négligée.

- Le facteur de qualité Q : Les calculs numériques montrent que les paramètres modaux identifiés varient en fonction de Q . Le choix de Q a été discuté dans la section 3.3.5.

3.5.1.4 Exemple numérique : Un oscillateur linéaire

Cet exemple a pour but d'examiner la variation des paramètres modaux en fonction du facteur de qualité. Les caractéristiques de ce système sont : $m = 1kg$, $k = 100\pi^2 N/m$, $c = 0,6\pi Ns/m$, soit fréquence propre $\omega_0 = 10\pi rad/s$ et amortissement $\xi = 1,5\%$. Les conditions initiales en déplacement et en vitesse sont prises égales à : $u(0) = 1m$ et $\dot{u}(0) = 0$. Les réponses libres sont obtenues en résolvant les équations différentielles régissant la vibration du système à l'aide de la méthode de résolution numérique de Runge-Kutta sous **Matlab**. Les bornes de l'intervalle des facteurs de qualité $[Q_{min}, Q_{max}]$ sont modifiées suivant la longueur de la réponse temporelle : $L = 15, 30$ et $40s$. A partir de la transformée de Fourier, les paramètres utilisés pour la procédure d'identification par ondelettes sont donnés dans le tableau 3.4 pour les trois différentes durées de la réponse.

TABLEAU 3.4. Paramètres de la procédure d'identification

Longueur $c_t = c_f$ (s)	$f_{j,inf}$ (Hz)	$f_{j,sup}$ (Hz)	$f_{j,est}$ (Hz)	$df_{j,est}$ (Hz)	N	Q_{min}	Q_{max}	$(Q_{min} + Q_{max})/2$
15	5,5	4	6	5	5	128	3,5	42,8
30	5,5	4	6	5	5	128	3,5	100,0
40	5,5	4	6	5	5	128	3,5	114,2

L'erreur relative sur la fréquence identifiée (par la méthode des arêtes et de modules) et celle sur le taux d'amortissement identifié (par la méthode de modules) sont tracées (en fonction de Q) sur la figure 3.9 et 3.10, respectivement.

Lorsque $Q \leq (Q_{min} + Q_{max})/2$, on note que les résultats d'identification sont "bons" pour les trois longueurs des réponses (avec des erreurs $< 0,01\%$). En particulier, de meilleurs résultats sont obtenus avec $Q = Q_{min}$. Au delà de ce seuil de $Q = (Q_{min} + Q_{max})/2$, les erreurs relatives augmentent rapidement. Comme nous l'avons remarqué dans la section précédente, l'influence du nombre de points de discrétisation (N) sur l'exactitude des paramètres modaux identifiés est négligeable. En effet, l'erreur relative sur la fréquence (par la méthode des arêtes) est estimée par (3.62) :

$$\sup |\epsilon_f| = \frac{f_{j,sup} - f_{j,inf}}{2(N+1)\tilde{f}_{j,exact}} = \frac{6-4}{2(128+1)5\sqrt{1-0,015^2}} 100\% = 0,15\% \quad (3.63)$$

On s'aperçoit sur la figure 3.9.1 que l'erreur relative sur la fréquence identifiée par la méthode des arêtes, associée à n'importe quelle valeur Q , est inférieure à $\sup |\epsilon_f| = 0,15\%$. En revanche, l'erreur relative sur la fréquence identifiée par la méthode des modules (voir la figure 3.9.2) est "presque" nulle. De plus, les erreurs relatives issues de la méthode d'identification par modules sont moins importantes que celle vis-à-vis de la méthode d'identification par arêtes. Toutefois,

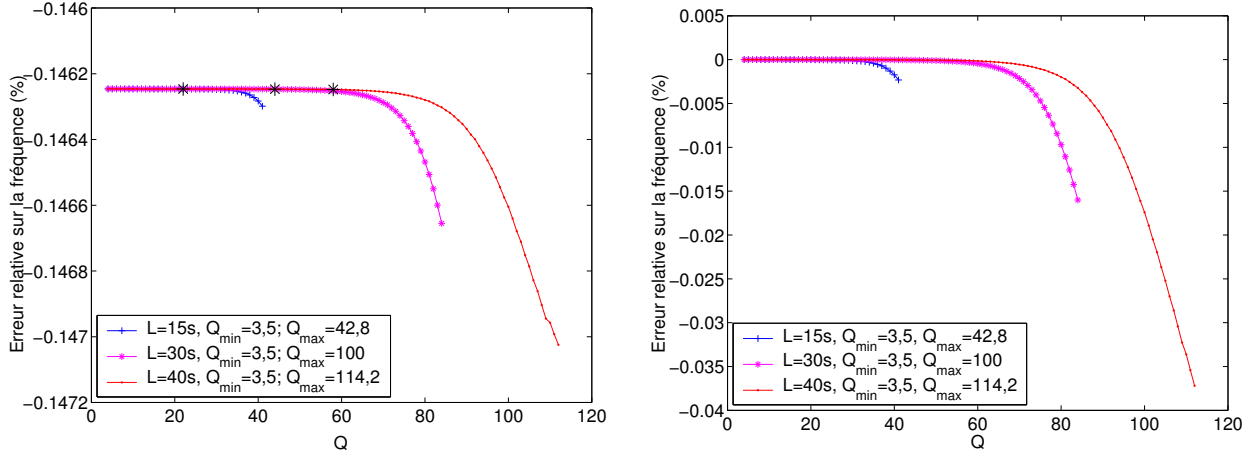


FIGURE 3.9. *Erreur relative sur la fréquence identifiée en fonction de Q : 1(Gauche) par la méthode des arêtes. 2(Droite) par la méthode des modules.*

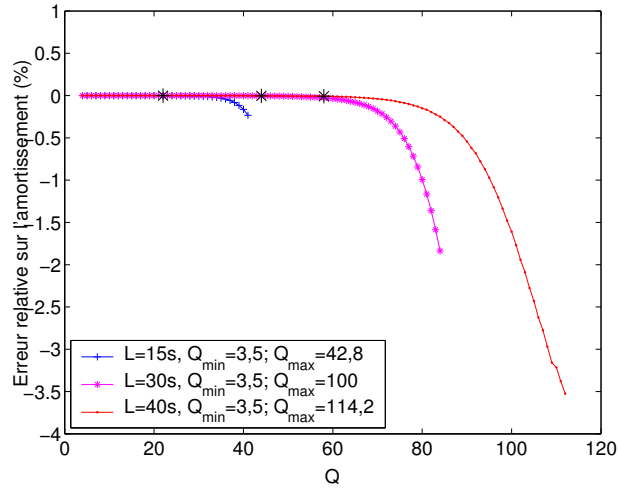


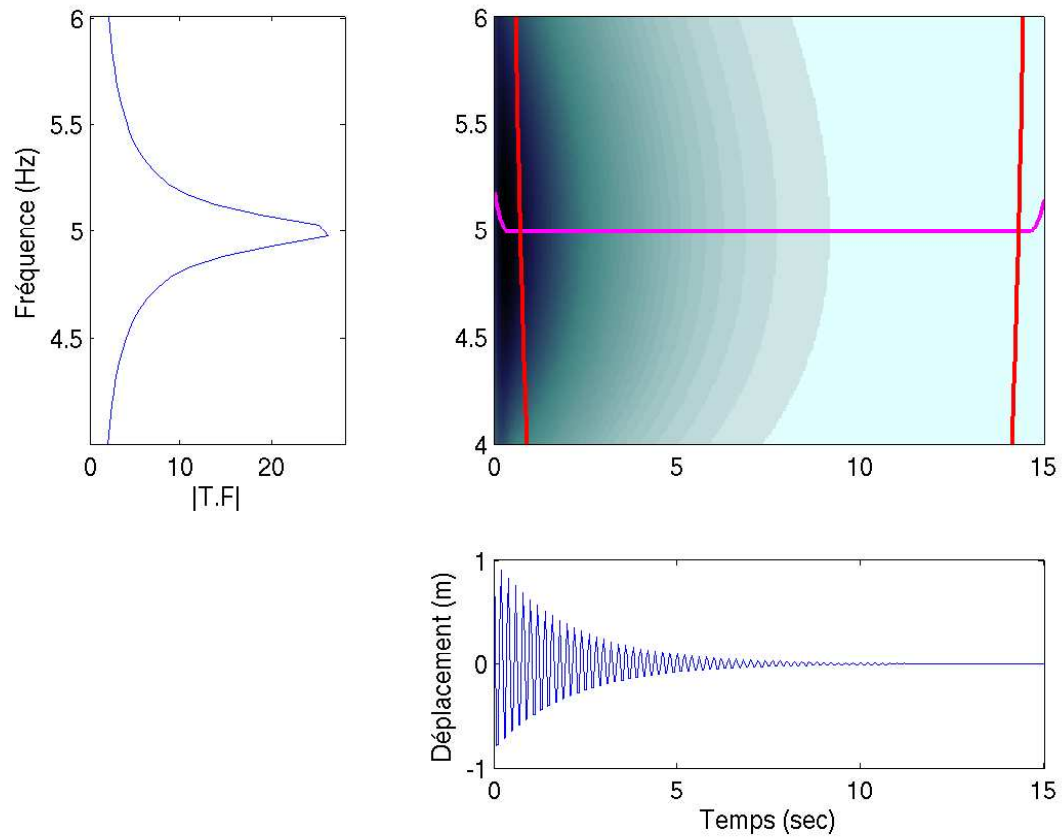
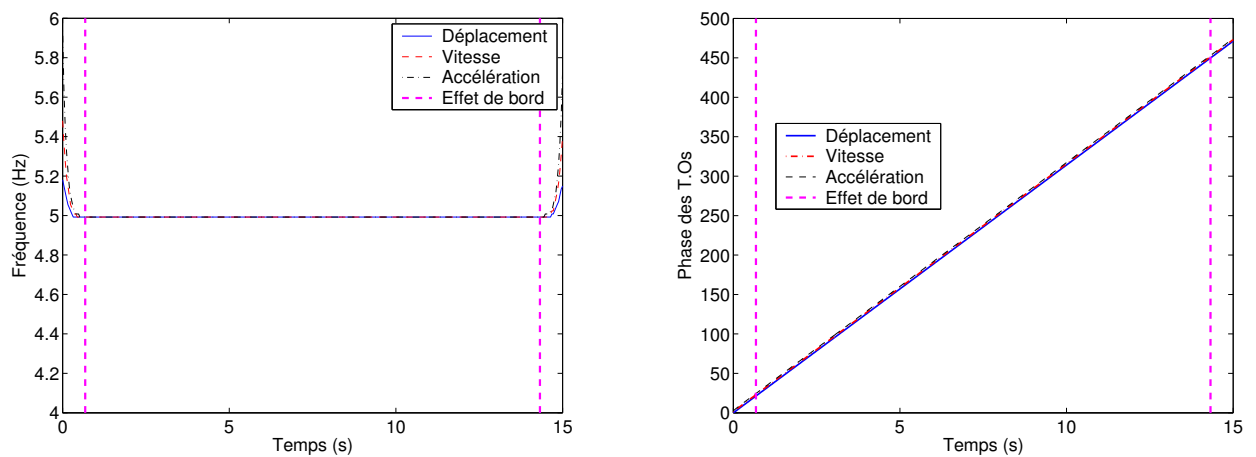
FIGURE 3.10. *Erreur relative sur le taux d'amortissement identifié en fonction de Q (par la méthode des arêtes).*

les erreurs relatives sur la fréquence identifiée par les deux méthodes d'identification restent très faibles. L'influence de Q (dans l'intervalle proposé) sur l'identification de la fréquence est donc négligée.

La TO calculée avec $Q = 4$ (proche de Q_{min}) est illustrée sur la figure 3.11. L'arête est également représentée sur cette figure.

Les transformées en ondelettes associées à la vitesse et à l'accélération sont calculées à partir de celle associée au déplacement par la formule (3.11). L'arête, la phase et le logarithme de module des TOs sont calculées et présentées sur les figures 3.12.1, 3.12.2 et 3.13.1, respectivement. Le signal construit à partir de la TO et le signal initial sont très cohérents (voir la figure 3.13.2).

Les paramètres modaux sont identifiés à l'aide des méthodes présentées dans le tableau 3.3. Les fréquences et les amortissements identifiés pour toutes les méthodes sont exactement égaux à $f_{exact} = 5Hz$ et $\xi_{exact} = 1,5\%$.

FIGURE 3.11. *Signal ($L = 15s$) - TF - TO ($Q = 4$).*FIGURE 3.12. *1(Gauche) Arêtes des TOs. 2(Droite) Phases des TOs.*

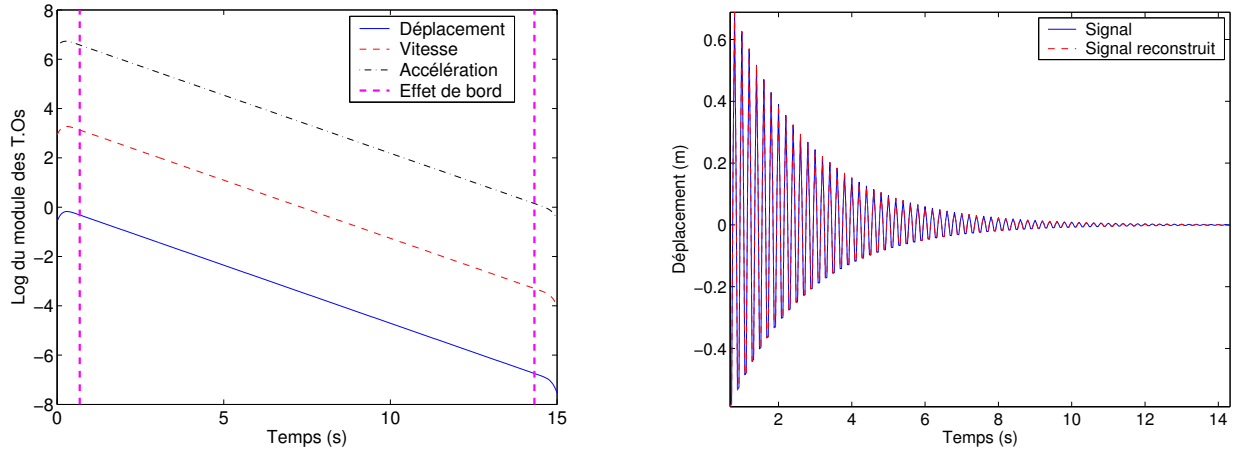


FIGURE 3.13. 1(Gauche) Log du module des T.Os. 2(Droite) Signal reconstruit.

3.5.1.5 Exemple numérique : Système discret à 4DDLs et à amortissement non-proportionnel

On prend l'exemple numérique présenté dans [28]. Ce système est à 4 DDLs et à amortissement non-proportionnel, illustré sur la figure 3.14. Les valeurs théoriques des caractéristiques modales de ce système sont données dans le tableau 3.5. D'une part, on constate que ce système possède des modes couplés (modes 3 et 4). D'autre part, les taux d'amortissement modal sont assez élevés. Les modes réels sont normalisés par rapport à la masse, *i.e* $\Phi_j^T [\mathbf{M}] \Phi_j = 1$. Tandis que les modes complexes "optimaux" sont normalisés selon la formule (A.25). Les indices caractérisant la non-proportionnalité de l'amortissement modal sont aussi calculés grâce à (A.27).

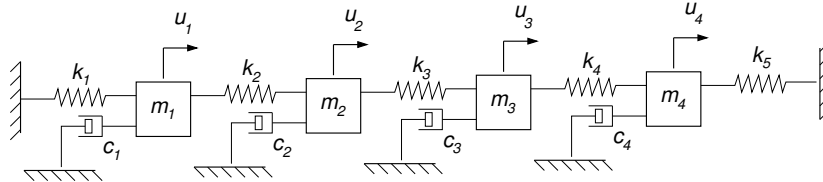


FIGURE 3.14. Système discret à 4DDLs, à amortissement non-proportionnel : $k_1 = k_5 = 2$, $k_2 = k_4 = 4$, $k_3 = 4$, $m_1 = m_4 = 1$, $m_2 = m_3 = 2$, $c_1 = 0,5$, $c_2 = c_3 = 0,2$ et $c_4 = 0,1$.

Les réponses libres sont obtenues en résolvant les équations différentielles régissant la vibration du système à l'aide de la méthode de résolution numérique de Runge-Kutta sous **Matlab**. Les conditions initiales en déplacement et en vitesse sont toutes nulles sauf : $\dot{u}_4 = 1\text{m/s}$. Le pas de temps et la longueur du signal sont pris égaux à $\Delta t = 1/5/f_{max} = 0,4624\text{ s}$ et $L = 250\text{ s}$, respectivement. Les réponses en déplacement sont présentées sur la figure 3.15. On constate que le système est très amorti, tandis que la durée d'enregistrement est relativement longue. Il faut donc couper les signaux avant de calculer leur transformée en ondelettes. Puisque $df_{3,est} = df_{4,est} = 0,04\text{ Hz}$, la durée des nouveaux signaux doit vérifier : $L' \geq 4c_t c_f \mu_\psi / d\omega_j = 168,1$. On choisit : $L' = 180\text{ s}$.

A partir de la transformée de Fourier des signaux, les estimations des fréquences et des intervalles de fréquence utilisées pour la procédure d'identification sont déterminées et données dans le tableau 3.6. Notons que les valeurs du facteur de qualité Q sont choisies proches des bords inférieurs des intervalles correspondants.

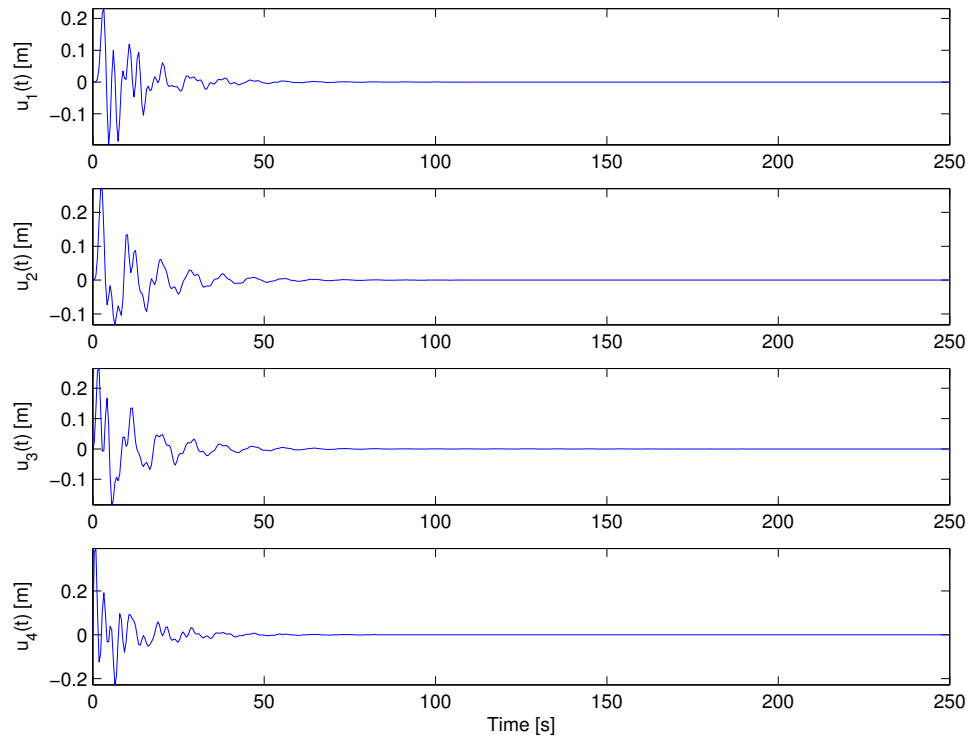


FIGURE 3.15. Déplacements du système à 4DDLs à amortissement non-proportionnel.

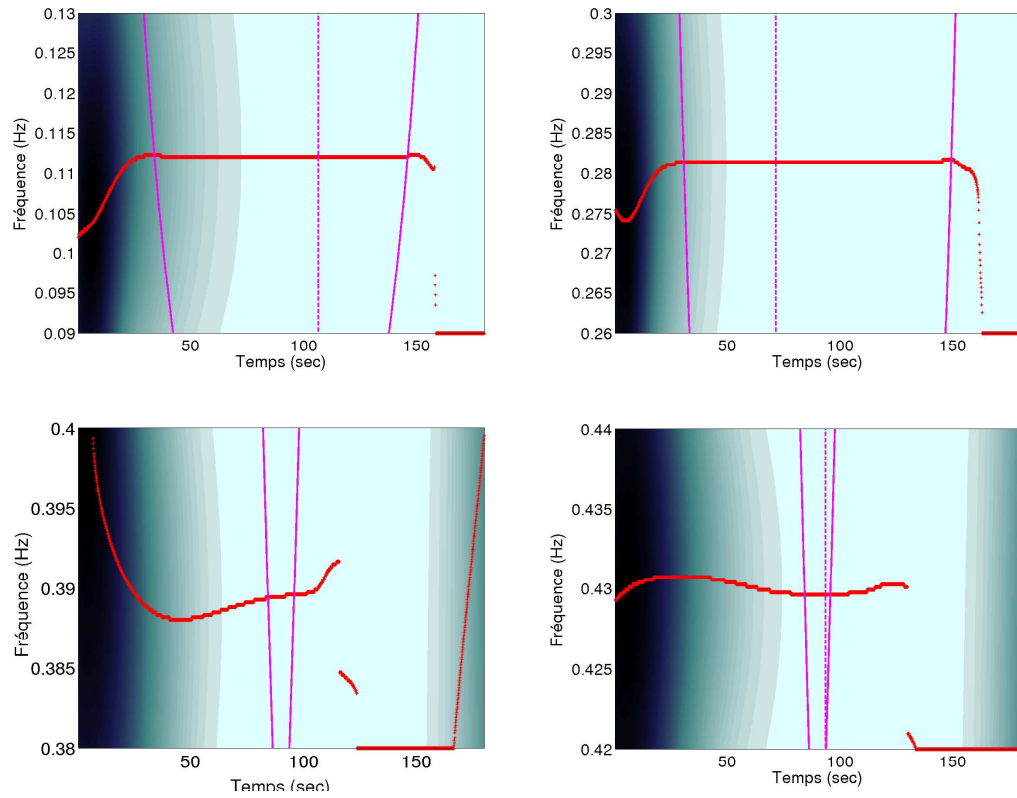


FIGURE 3.16. TOs et arêtes du signal $u_4(t)$ pour quatre intervalles de fréquence.

Les paramètres modaux identifiés ainsi que les indices de non-proportionnalité sont montrés dans les tableaux 3.7 et 3.8. On constate qu'avec le choix $Q \simeq Q_{min}$, les résultats obtenus sont bons. Les modes 1, 2 et 4 sont très proches des valeurs exactes. En revanche, le mode 3 est identifié avec une erreur de quelques pour-cents par rapport aux valeurs exactes parce que le temps d'arrêt correspondant à un seuil d'amplitude $\epsilon_A = 10^{-4}$ donné (formule (3.35)) ne satisfait pas à la condition (3.37). Les TOs du signal $u_4(t)$ et les temps d'arrêt calculés pour quatre modes, illustrés sur la figure 3.16, permettent d'expliquer cet écart. La figure 3.17 présente la configuration des modes du système.

TABLEAU 3.5. *Fréquences et modes réels (valeurs théoriques)*

Modes (j)	1	2	3	4
$f_{j,exact}$ (Hz)	0,1127	0,2819	0,3903	0,4298
$\Phi_{j,exact}$	$\begin{pmatrix} 0,3015 \\ 0,4523 \\ 0,4523 \\ 0,3015 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,5285 \\ -0,3322 \\ 0,3322 \\ 0,5285 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,6396 \\ 0,2132 \\ 0,2132 \\ -0,6396 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,46983 \\ 0,37367 \\ -0,37367 \\ 0,46983 \end{pmatrix}$

TABLEAU 3.6. *Paramètres de la procédure d'identification*

Modes (j)	$c_t = c_f$	$f_{j,est}$ (Hz)	$f_{j,inf}$ (Hz)	$f_{j,sup}$ (Hz)	$df_{j,est}$ (Hz)	N	Q_{min}	Q_{max}	Q_{choisi}
1	6,5	0,11	0,09	0,13	0,11	128	3,53	9,58	3,6
2	6,5	0,28	0,26	0,30	0,11	128	8,27	24,37	8,3
3	6,5	0,39	0,38	0,40	0,04	128	31,69	33,95	31,7
4	6,5	0,43	0,42	0,44	0,04	128	34,94	37,43	35,0

TABLEAU 3.7. *Fréquences et amortissements identifiés*

Modes (j)	Fréquences (Hz)		Amortissements (%)	
	$f_{j,ident}$	$f_{j,exact}$	$\xi_{j,ident}$	$\xi_{j,exact}$
1	0,1126	0,1127	9,660	9,657
2	0,2819	0,2819	6,013	6,013
3	0,3899	0,3903	5,517	5,591
4	0,4298	0,4298	3,259	3,260

TABLEAU 3.8. Modes complexes identifiés

Modes	Modes complexes		Indices de non-propor.	
(j)	$\Psi_{j,ident}$	$\Psi_{j,exact}$	$\mathbb{I}_{j,ident}$	$\mathbb{I}_{j,exact}$
1	$\begin{pmatrix} 0,3021 - 0,0173i \\ 0,4520 + 3E - 6i \\ 0,4516 + 0,0072i \\ 0,3010 + 0,0065i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,3021 - 0,0172i \\ 0,4520 + 6E - 5i \\ 0,4516 + 0,0072i \\ 0,3010 + 0,0064i \end{pmatrix}$	0,0259	0,0258
2	$\begin{pmatrix} -0,5267 + 0,0528i \\ -0,3307 - 0,0568i \\ 0,3273 - 0,0172i \\ 0,5206 + 0,0279i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,5267 + 0,0529i \\ -0,3307 - 0,0568i \\ 0,3273 - 0,0172i \\ 0,5206 + 0,0279i \end{pmatrix}$	0,0960	0,0960
3	$\begin{pmatrix} -0,6567 + 0,0261i \\ 0,2282 - 0,1220i \\ 0,1963 + 0,0810i \\ -0,5791 - 0,0397i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,6551 + 0,0254i \\ 0,2334 - 0,1295i \\ 0,1857 + 0,0946i \\ -0,5791 - 0,0370i \end{pmatrix}$	0,176	0,189
4	$\begin{pmatrix} -0,3871 - 0,1624i \\ 0,3469 + 0,0129i \\ -0,3650 + 0,0618i \\ 0,4674 - 0,1234i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,3869 - 0,1622i \\ 0,3468 + 0,0128i \\ -0,3651 + 0,0618i \\ 0,4679 - 0,1231i \end{pmatrix}$	0,272	0,271

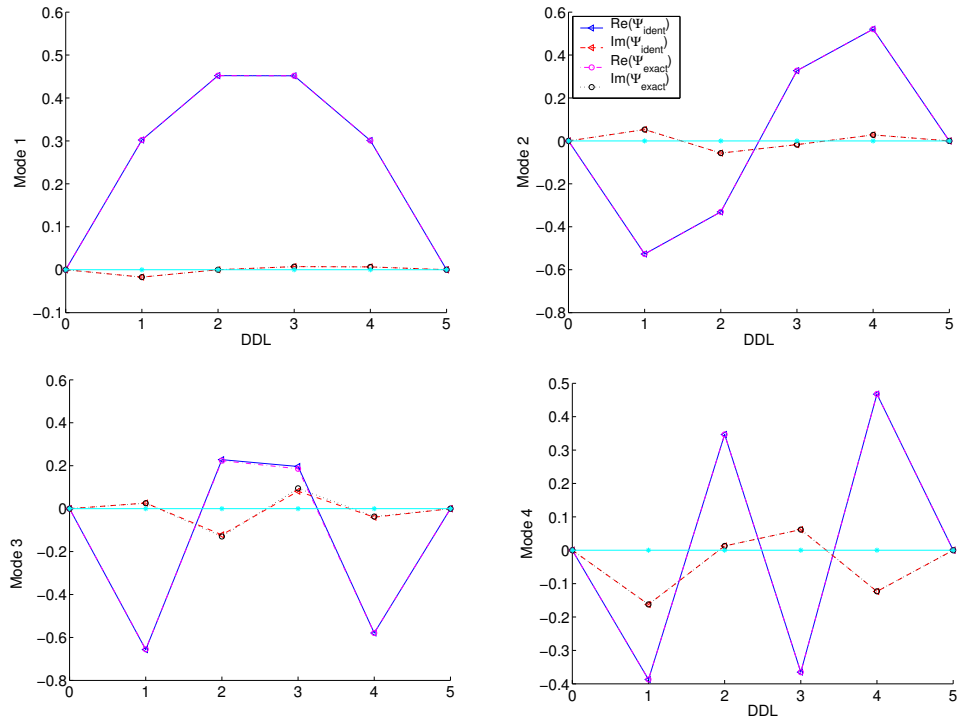


FIGURE 3.17. (En haut) Mode 1 - Mode 2. (En bas) Mode 3 - Mode 4.

3.5.1.6 Cas réel : Vibration linéaire d'une lame bi-encastée

L'expérimentation a été réalisée au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC) à Paris. Le système d'essai constitue une lame mince en acier, bi-encastée dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont : la section $h \times b = 0,003 \times 0,04m^2$, la masse volumique $\rho = 7850kg/m^3$, le module d'Young $E = 2,1.10^{11}Pa$, la longueur $L = 1,7m$.

Six capteurs ont été régulièrement espacés sur la lame avec une distance de $\Delta L = 0,243m$ entre eux. Le système est excité par une sollicitation de choc dû à un marteau avec une amplitude de $8,1N$.

Le tableau 3.9 donne les paramètres utilisés pour la procédure d'identification par ondelettes.

TABLEAU 3.9. Paramètres de la procédure d'identification

Modes (j)	$c_t = c_f$	$f_{j,est}$ (Hz)	$f_{j,inf}$ (Hz)	$f_{j,sup}$ (Hz)	$df_{j,est}$ (Hz)	N	Q_{min}	Q_{max}	Q_{choisi}
1	5,5	5,5	5,0	6,0	5,5	128	3,54	25,13	14,3
2	5,5	16,5	17,5	17,0	11,3	128	4,14	77,68	42,9
3	5,5	27,8	28,8	28,3	11,3	128	6,89	129,32	68,1
4	5,5	46,2	47,2	46,7	18,4	128	6,97	213,39	110,2
5	5,5	69,5	70,5	70,0	23,3	128	8,26	319,86	164,1
6	5,5	94,9	95,9	95,4	25,4	128	10,33	435,93	223,1
7	5,5	132,7	133,7	133,2	35,4	128	10,35	608,65	309,5
8	5,5	168,1	169,1	168,6	35,4	128	13,09	770,42	391,8

Les résultats d'identification sont présentés dans le tableau 3.10. On constate que l'identification des fréquences est assez bonne, avec une différence maximale de 11,36% par rapport aux valeurs théoriques déterminées par :

$$f_{k,exact} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda_k}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (3.64)$$

où k est l'indice du mode. λ_k est la solution de l'équation transcendante : $\cos \lambda_k \cosh \lambda_k = 1$, il prend des valeurs : $\lambda_1 = 4,730$, $\lambda_2 = 7,853$, $\lambda_k \approx (2k+1)\frac{\pi}{2}$ pour $k \geq 3$.

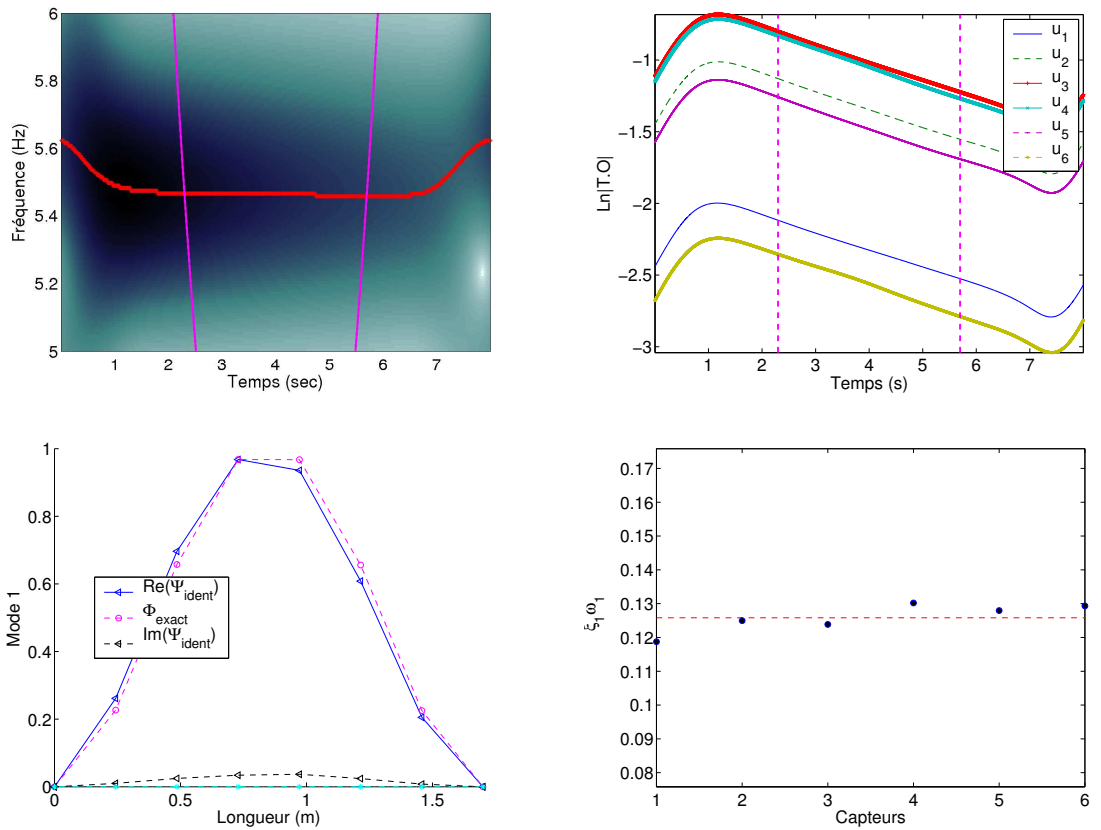
Les modes réels associés ont la forme :

$$\Phi_k(x) = \cosh \lambda_k \frac{x}{L} - \cos \lambda_k \frac{x}{L} - \left(\frac{\cosh \lambda_k - \cos \lambda_k}{\sinh \lambda_k - \sin \lambda_k} \right) \left(\sinh \lambda_k \frac{x}{L} - \sin \lambda_k \frac{x}{L} \right) \quad (3.65)$$

La figure 3.18 illustre l'identification du 1^{er} mode. L'image de la TO montre que la fréquence propre est indépendante du temps. On trouve aussi que la partie réelle du 1^{er} mode est proche de celle du mode normal associé.

TABLEAU 3.10. Fréquences propres et taux d'amortissements identifiés

Modes	Fréquences (Hz)			Amortissements (%)
	$f_{j,ident}$	$f_{j,exact}$	Erreur (%)	
1	5,4621	5,5189	1,03	0,367
2	16,9413	15,2124	11,36	0,599
3	28,2584	29,8262	5,26	0,185
4	46,7503	49,2995	5,17	0,261
5	69,8738	73,6466	5,12	0,311
6	95,3294	102,8618	7,32	0,297
7	133,2727	136,9462	2,68	0,160
8	168,6011	175,8998	4,15	0,160

FIGURE 3.18. Les paramètres modaux du 1^{er} mode : (En haut) 1) TO. 2) Log du module. (En bas) 3) Déformée modale. 4) Produit $\xi_1\omega_1$.

3.5.2 Réponses au bruit ambiant

Comme on l'a signalé dans la partie bibliographique, la technique du décréement aléatoire (RD²) permet de calculer à partir des réponses au bruit ambiant, des fonctions du décréement aléatoire qui sont proportionnelles aux fonctions d'auto-corrélation. Ces dernières peuvent être considérées comme des réponses libres de la structure. Par conséquent, la méthode du décréement aléatoire est mise en oeuvre avant de faire une analyse en ondelettes. Cette section présente seulement quelques points essentiels de la technique. Des détails peuvent être trouvés dans la thèse d'Asmussen [8].

3.5.2.1 Technique du décréement aléatoire

La technique du décréement aléatoire est une méthode qui transforme des processus stochastiques stationnaires en fonction du RD. La réponse aléatoire d'une structure linéaire à l'instant $t_0 + t$ est considérée comme la somme de trois réponses : une première réponse impulsionnelle associée à des conditions initiales en déplacement ; une seconde réponse impulsionnelle associée à des conditions initiales en vitesse ; une réponse aléatoire due aux excitations appliquées à la structure dans la période de t_0 à $t_0 + t$, qui est supposée être un processus stationnaire de moyenne nulle. Lorsqu'on moyenne la réponse totale, la partie aléatoire s'annule au fur et à mesure. En revanche, afin d'éviter que les deux réponses impulsionnelles s'annulent également, une condition dite *condition de déclenchement* est donc nécessaire.

Considérons un processus stochastique stationnaire $u(t)$. L'auto-fonction du RD définie comme la moyenne du processus $u(t)$ avec une condition de déclenchement $\mathbf{T}_{u(t)}$ s'écrit de la façon suivante :

$$D_{uu}(\tau) = \mathbb{E} [u(t + \tau) | \mathbf{T}_{u(t)}] \quad (3.66)$$

La partie aléatoire de $u(t)$ est supposée non seulement stationnaire, mais aussi ergodique. L'auto-fonction du RD de $u(t)$ peut être écrite comme suit :

$$\hat{D}_{uu}(\tau) = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} u(t_i + \tau) | \mathbf{T}_{u(t_i)} \quad (3.67)$$

où N_t est le nombre de points du signal satisfaisant à la condition de déclenchement $\mathbf{T}_{u(t_i)}$.

Un point de déclenchement est détecté si une des conditions suivantes est satisfaite :

– Dépassement de niveau :

$$\mathbf{T}_{u(t)} = \{u(t) = a\} \quad (3.68)$$

– Extremum local :

$$\mathbf{T}_{u(t)} = \{a_1 \leq u(t) < a_2, \quad \dot{u}(t) = 0\} \quad (3.69)$$

– Point positif :

$$\mathbf{T}_{u(t)} = \{a_1 \leq u(t) < a_2\} \quad (3.70)$$

– Dépassement de zéro :

$$\mathbf{T}_{u(t)} = \{u(t) = 0 \quad \dot{u}(t) > 0\} \quad (3.71)$$

²RD : Random Decrement (en anglais)

où a , a_1 et a_2 sont des niveaux de déclenchement choisis.

D'une part, il est évident que plus le nombre de points (N_t) satisfaisant des conditions de déclenchement est élevé, plus la fonction du RD est proche de la réponse impulsionnelle associée. On constate que la condition (3.70) donne le plus grand nombre de points de déclenchement. D'autre part, dans la pratique, le signal $u(t)$ est échantillonné en un nombre fini de points. Il peut cependant exister un cas où on ne peut pas trouver des points discrets satisfaisant la condition $u(t) = a$ ou $\dot{u}(t) = b$. C'est le cas des trois conditions (3.68), (3.69) et (3.71). Les deux raisons ci-dessus conduisent à choisir la condition (3.70) pour la technique du RD.

Dans [8], Asmussen montre qu'une fonction du RD associée à la condition (3.70) est proportionnelle à celle d'auto-corrélation par la formule suivante :

$$D_{uu}(\tau) = \frac{R_{uu}(\tau)}{\sigma_u^2} \tilde{a} \quad (3.72)$$

où $R_{uu}(\tau)$ est la fonction d'auto-corrélation ; σ_u^2 est la variance du processus aléatoire $u(t)$; $\tilde{a}$ est le niveau de déclenchement calculé à travers a_1 , a_2 et une fonction de densité p_u :

$$\tilde{a} = \frac{\int_{a_1}^{a_2} x p_u(x) dx}{\int_{a_1}^{a_2} p_u(x) dx} \quad (3.73)$$

Il reste un seul problème pour le calcul pratique des fonctions du RD : comment choisir a_1 et a_2 . Selon Asmussen [8], les valeurs de ces deux bornes sont optimales si elles minimisent la variance de la fonction du RD normalisée :

$$\min_{a_1, a_2} \left\{ \text{Var} \left[\frac{\hat{D}_{uu}(\tau)}{\tilde{a}} \right] \right\} \quad (3.74)$$

La solution proposée est : $[a_1, a_2] = [\sigma_u, +\infty]$

Grâce aux remarques précédentes, on peut constater que la fonction du RD permet d'obtenir la réponse impulsionnelle associée. En pratique, cette technique est assez simple à réaliser. Pourtant, une partie du début de cette fonction du RD est seulement cohérente avec la réponse impulsionnelle associée. Par conséquent, cette partie est à choisir avec soin. Principalement, le nombre de points doit être suffisamment important pour obtenir des résultats "corrects".

Pour illustration, la technique de RD est appliquée sur plusieurs signaux aléatoires dont le nombre de points d'échantillonnage est différent. Ces signaux sont obtenus en faisant le produit de convolution d'une réponse impulsionnelle dont la fréquence et l'amortissement sont respectivement $f_0 = 5\text{Hz}$ et $\xi = 1,5\%$ avec un bruit blanc.

La figure 3.19.2 trace la fonction du RD calculée pour le signal de $5 \cdot 10^4$ points d'échantillonnage. On constate qu'une partie de début de cette fonction, *i.e* $[0; 2,58s]$, est cohérente avec la réponse impulsionnelle associée. La figure 3.19.1 montre la relation entre la durée effective (t_f) de la fonction du RD et le logarithme du nombre de points d'échantillonnage ($\log_{10} n$). On s'aperçoit que plus le nombre de points d'échantillonnage est important, plus la durée effective de la réponse impulsionnelle obtenue est longue et bien évidemment, que le temps de calcul augmente considérablement.

3.5.2.2 Fonction Spectrale en Ondelettes (FSO)

Dans la section précédente, on a présenté la technique du décrétement aléatoire qui permet d'obtenir des réponses libres à partir des données ambiantes. L'identification modale des réponses

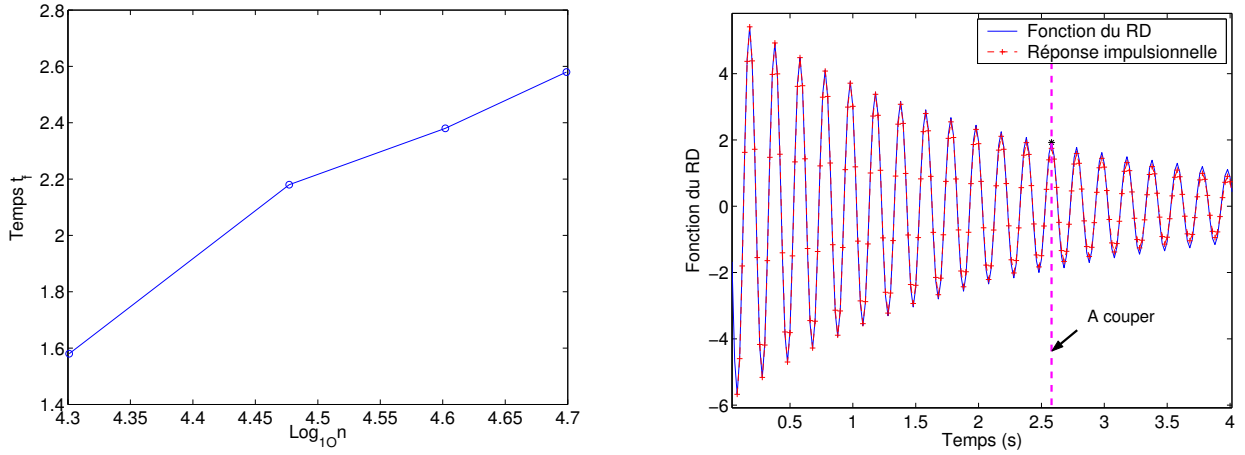


FIGURE 3.19. 1(gauche) Relation entre la durée effective (t_f) de la fonction du RD et le nombre de points d'échantillonnage (n). 2(droite) Une partie de la fonction du RD comparée avec la réponse impulsionnelle associée (le cas de $\log_{10} n = 4,7$).

libres s'effectue ensuite à l'aide de l'analyse en ondelettes. Dans cette section, on propose d'utiliser la FSO pour déterminer directement des paramètres modaux à partir des données ambiantes sans utiliser la technique du RD.

Supposons que le signal $u(t)$ soit un processus stochastique stationnaire de moyenne nulle. On appelle C_u - fonction d'auto-covariance de $u(t)$, i.e $C_u(t) = \mathbb{E}(u(t)u(0))$ et $\hat{C}_u$ - sa transformée de Fourier. Cette fonction non-négative est aussi appelée *densité spectrale de puissance*.

La représentation spectrale du signal $u(t)$ s'écrit (voir [22], p.77) :

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \sqrt{\hat{C}_u(\omega)} W(d\omega) \quad (3.75)$$

où $W(d\omega)$ est une mesure de bruit blanc³.

La représentation spectrale de sa TO s'écrit donc

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega b} \widehat{\psi}(a\omega) \sqrt{\hat{C}_u(\omega)} W(d\omega) \quad (3.76)$$

La variance de la TO à une échelle fixée a vaut :

$$\mathbb{E} \{ |T_\psi[u](b, a)|^2 \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}(a\omega)|^2 \hat{C}_u(\omega) d\omega \quad (3.77)$$

En réalité, la nature de l'excitation n'est pas connue car on ne peut pas en général, mesurer l'excitation due au vent, au trafic, etc, exercée sur des structures. Une hypothèse sur la nature de l'excitation est donc nécessaire :

“L'excitation ambiante est supposée être un bruit blanc”.

³Un bruit blanc est une réalisation d'un processus aléatoire dans lequel la densité spectrale de puissance est la même pour toutes les fréquences.

Pour un oscillateur linéaire excité par un bruit blanc $b(t)$ de moyenne nulle et de variance σ^2 , ses réponses linéaires peuvent être déterminées par le produit de convolution entre l'excitation et sa fonction de réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$u(t) = h(t) * b(t) \quad (3.78)$$

On déduit donc la relation entre les densités spectrales :

$$\widehat{C}_u(\omega) = |H(\omega)|^2 \widehat{C}_b(\omega) \quad (3.79)$$

D'un côté, l'équation (3.77) se transforme :

$$\mathbb{E} \{ |T_\psi[u](b, a)|^2 \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| H(\omega) \widehat{\psi}(a\omega) \right|^2 \widehat{C}_b(\omega) d\omega = \sigma^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| H(\omega) \widehat{\psi}(a\omega) \right|^2 d\omega \quad (3.80)$$

D'autre côté, la variance de la TO de réponse impulsionnelle $(T_\psi[h](b, a))$ s'écrit :

$$\mathbb{E} \{ |T_\psi[h](b, a)|^2 \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| H(\omega) \widehat{\psi}(a\omega) \right|^2 d\omega \quad (3.81)$$

Finalement, on obtient :

$$\mathbb{E} \{ |T_\psi[u](b, a)|^2 \} = \sigma^2 \mathbb{E} \{ |T_\psi[h](b, a)|^2 \} \quad (3.82)$$

A partir de (3.77), Carmona *et al.* proposent d'utiliser (voir [22], p.241) :

$$\widetilde{V}_L^{(u)}(a) = a V_L^{(u)}(a) = \frac{a}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} |T_\psi[u](b, a)|^2 db \quad (3.83)$$

comme un estimateur pour le spectre de puissance en ondelettes appelé *Fonction Spectrale en Ondelettes* (FSO). Ce spectre est "lisse" et biaisé. L'équation (3.77) devient alors

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \widetilde{V}_L^{(u)}(a) = a \mathbb{E} \{ |T_\psi[u](b, a)|^2 \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{\psi}(\omega) \right|^2 \widehat{C}_u \left(\frac{\omega}{a} \right) d\omega \quad (3.84)$$

Utilisant (3.82), on obtient :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left[\widetilde{V}_L^{(u)}(a) - \sigma^2 \widetilde{V}_L^{(h)}(a) \right] = 0 \quad \text{pour } \forall a > 0 \quad (3.85)$$

Se fondant sur la relation précédente, on propose une procédure d'identification des paramètres modaux (ω_0 et ξ) d'un oscillateur linéaire soumis à des excitations ambiantes inconnues. Pour des systèmes à plusieurs DDLs, cette idée reste encore valable à condition que les modes soient suffisamment découplés. Dans la pratique, puisque la durée temporelle d'enregistrement des réponses est finie, l'équation (3.85) n'est normalement plus valable. Par conséquent, on la remplace par un problème de minimisation au sens des moindres carrés :

$$\min_{\omega_0, \xi} \int_{\mathbb{I}_a} \left\{ \widetilde{V}_L^{(u)}(a) - \sigma^2 \widetilde{V}_L^{(h)}(a) \right\}^2 da \quad (3.86)$$

où $\mathbb{I}_a$ est un intervalle des échelles a .

Il est important de noter que la solution du problème ci-dessus dépend du choix des paramètres de l'ondelette mère. Comme nous l'avons signalé dans les sections précédentes, dans le cas des réponses libres, les résultats d'identification sont bons si Q appartient à $[Q_{min}, (Q_{min} + Q_{max})/2]$. On propose d'utiliser $Q = (Q_{min} + Q_{max})/2$ pour le cas des réponses sous excitations ambiantes.

3.5.2.3 Exemple numérique : un oscillateur linéaire

On considère un oscillateur linéaire dont la fréquence propre et l'amortissement sont respectivement $f_0 = 5\text{Hz}$ et $\xi = 1,5\%$. Cet oscillateur est soumis à un bruit blanc de moyenne nulle et de variance unitaire, *i.e* $\sigma^2 = 1$. La réponse du système, sa transformée de Fourier et sa transformée en ondelettes (avec $Q = (Q_{min} + Q_{max})/2 = 287$) sont illustrées sur la figure 3.20. Sur l'image de la TO, on obtient une seule information : l'énergie du signal se concentre autour de la fréquence de 5Hz mais avec une dispersion assez grande. Par conséquent, une arête ne peut pas être extraite. On utilise alors, deux techniques appliquées au cas des réponses ambiantes : RD et FSO. Les paramètres utilisés dans la procédure d'identification sont donnés dans le tableau 3.11.

TABLEAU 3.11. Paramètres de la procédure d'identification

Méthode	$c_t = c_f$	$f_{j,inf}$ (Hz)	$f_{j,sup}$ (Hz)	$f_{j,est}$ (Hz)	$df_{j,est}$ (Hz)	N	Q_{min}	Q_{max}	Q_{choisi}
FSO	5,5	4	6	5	5	400	3,53	571,2	287
RD	5,5	4	6	5	5	400	3,53	4,34	3,9

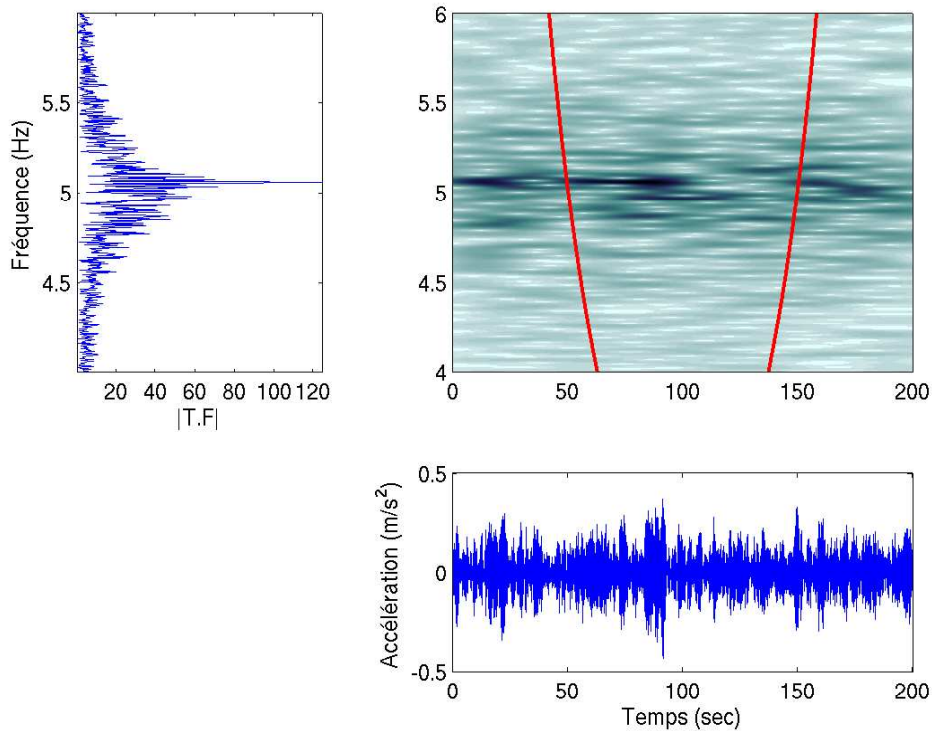


FIGURE 3.20. Transformée de Fourier - Transformée en ondelettes - Signal aléatoire.

En utilisant la FSO, la variation des paramètres modaux identifiés en fonction du facteur de qualité $Q \in [Q_{min}, Q_{max}]$ (avec un pas de $\Delta Q = 5$) est déterminée et donnée sur la figure 3.21. On s'aperçoit que la fréquence f_0 augmente en fonction de Q , tandis que l'amortissement identifié

ξ diminue. Le tableau 3.12 présente les fréquences propres et les amortissements calculés par deux méthodes : RD et FSO (avec $Q = (Q_{min} + Q_{max})/2$). Les résultats obtenus par deux méthodes sont proches et estiment convenablement la fréquence et l'amortissement de l'oscillateur.

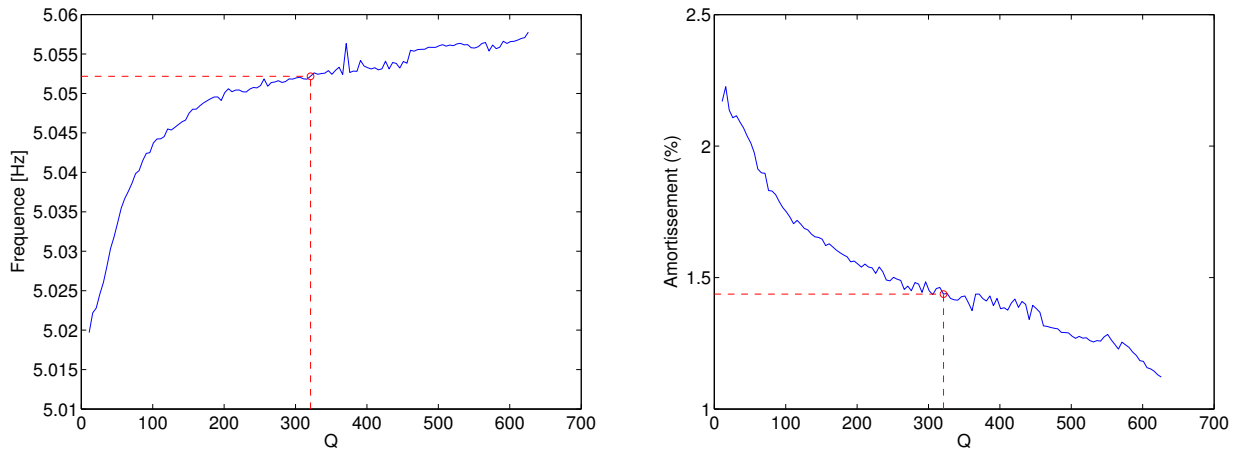


FIGURE 3.21. Variation de la fréquence et de l'amortissement en fonction du facteur de qualité Q .

TABEAU 3.12. Paramètres modaux identifiés

Fréquence (Hz)			Amortissement (%)		
Exact	RD	FSO	Exact	RD	FSO
5	4,998	5,052	1,5	1,45	1,45

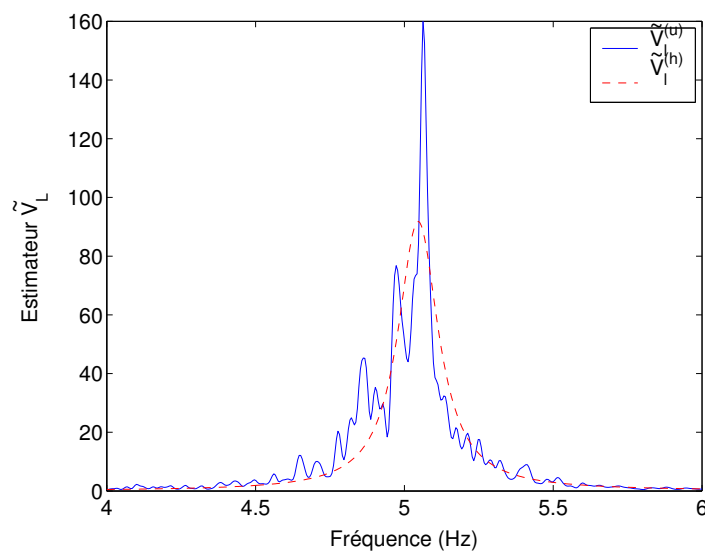


FIGURE 3.22. Oscillateur linéaire soumis à un bruit blanc : la FSO du signal $u(t)$ et celle de la réponse impulsionnelle associée $h(t)$ (Avec $Q = 287$).

La figure 3.22 montre l'allure de l'estimateur du signal $u(t)$ et de la réponse impulsionnelle associée $h(t)$: $\tilde{V}_L^{(u)}(\omega)$ et $\tilde{V}_L^{(h)}(\omega)$ calculés pour $L = 200s$ avec $Q = (Q_{max} + Q_{min})/2 \approx 287$. La distribution des paramètres modaux identifiés pour 1000 réponses ambiantes différentes est donnée sur la figure 3.23.

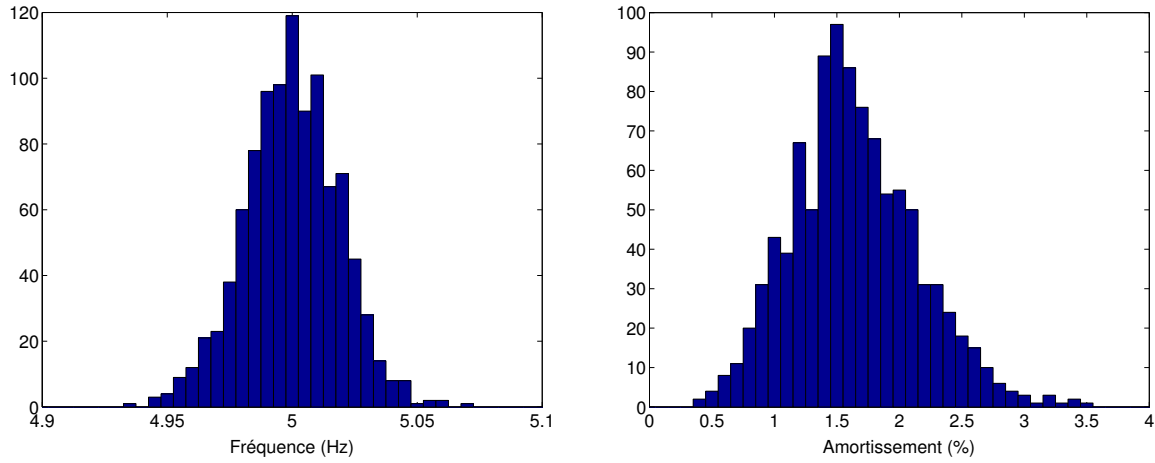


FIGURE 3.23. *Distribution des paramètres modaux identifiés à partir de 1000 réponses ambiantes : 1) Fréquence propre. 2) Amortissement.*

On constate que les distributions se concentrent respectivement, à une fréquence de $5Hz$ et à un amortissement de $1,5\%$. On peut conclure que la méthode de FSO est assez robuste pour l'identification des paramètres modaux d'un oscillateur linéaire soumis à un bruit blanc.

3.5.2.4 Cas réel : un immeuble d'habitation à 7 étages à Lyon

La section précédente a montré la validité de la procédure d'identification des paramètres modaux dans le cas d'un oscillateur linéaire soumis à un bruit blanc. Dans cette section, on tente d'appliquer cette procédure au cas d'un immeuble d'habitation à Lyon.

Dans le cadre d'un projet d'étude de vulnérabilité sismique des bâtiments existants, Boutin et ses collaborateurs de l'ENTPE de Lyon ont réalisé une campagne d'essais de vulnérabilité des bâtiments. Les détails de ce projet sont présentés dans [21] et [33].

Le bâtiment de l'étude, construit en 1970, est un bâtiment régulier de sept étages dont les dimensions sont : $22m$ de hauteur, $30m$ de longueur, $14m$ de largeur, illustré par une photographie provenant de l'article de Hans *et al.* [33] (voir la figure 3.24). Les figures 3.24.a), 3.24.b) et 3.24.c) présentent respectivement la façade sud, la façade nord et le plan d'un étage typique.

Trois différents types d'excitations ont été utilisés pour identifier des fréquences propres, des taux d'amortissements et des formes modales du bâtiment :

- Excitation ambiante due au trafic et au vent.
- Excitation harmonique appliquée au dernier étage grâce à un générateur de forces harmoniques.
- Excitation de choc généré par une pelle mécanique.

Quatre accéléromètres piézoélectriques unidimensionnels ont été utilisés pour mesurer des accélérations suivant les deux directions : longitudinale et transversale. Ils sont placés au rez-de-chaussée, 3^e, 5^e et 7^e étage. Les signaux des réponses ambiantes mesurées sont présentés sur la figure 3.25.

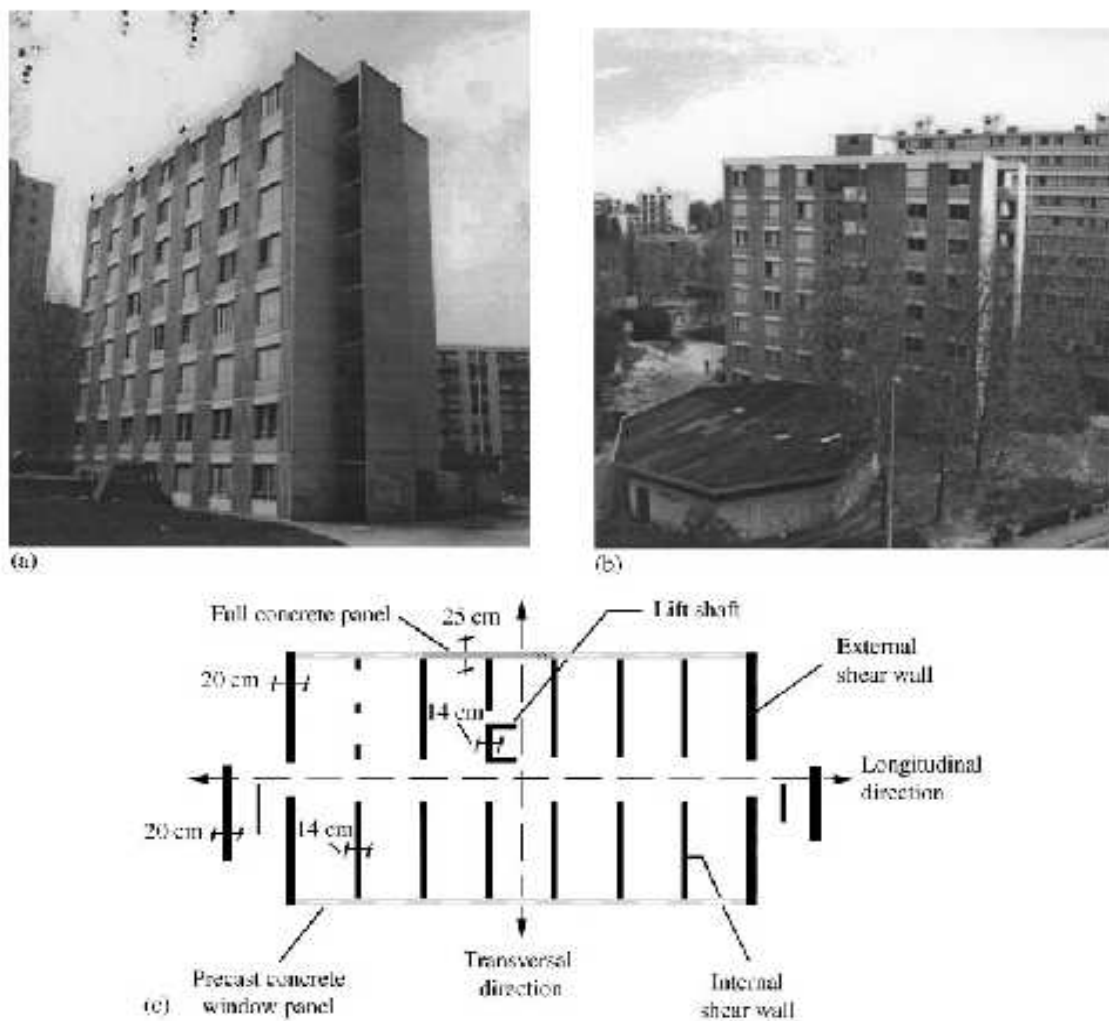


FIGURE 3.24. Bâtiment à sept étages à tester (construit en 1970). Hauteur : 22m. Longueur : 30m. Largeur : 14m. (a) Façade sud. (b) Façade nord. (c) Plan d'un étage typique : Murs de contreventement en B.A. Façades en panneaux de béton faiblement armé. Plancher en B.A.

TABEAU 3.13. Résultats obtenus par Hans et al. [33] pour le 1^{er} mode transversal

Fréquence (Hz)		Amortissement (%)			
Choc	Harmonique	Capteur	Choc	Harmonique	
4,50	4,57	1	3,36	3,23	
		2	3,56	3,60	
		3	3,64	3,20	
		4	3,81	3,45	

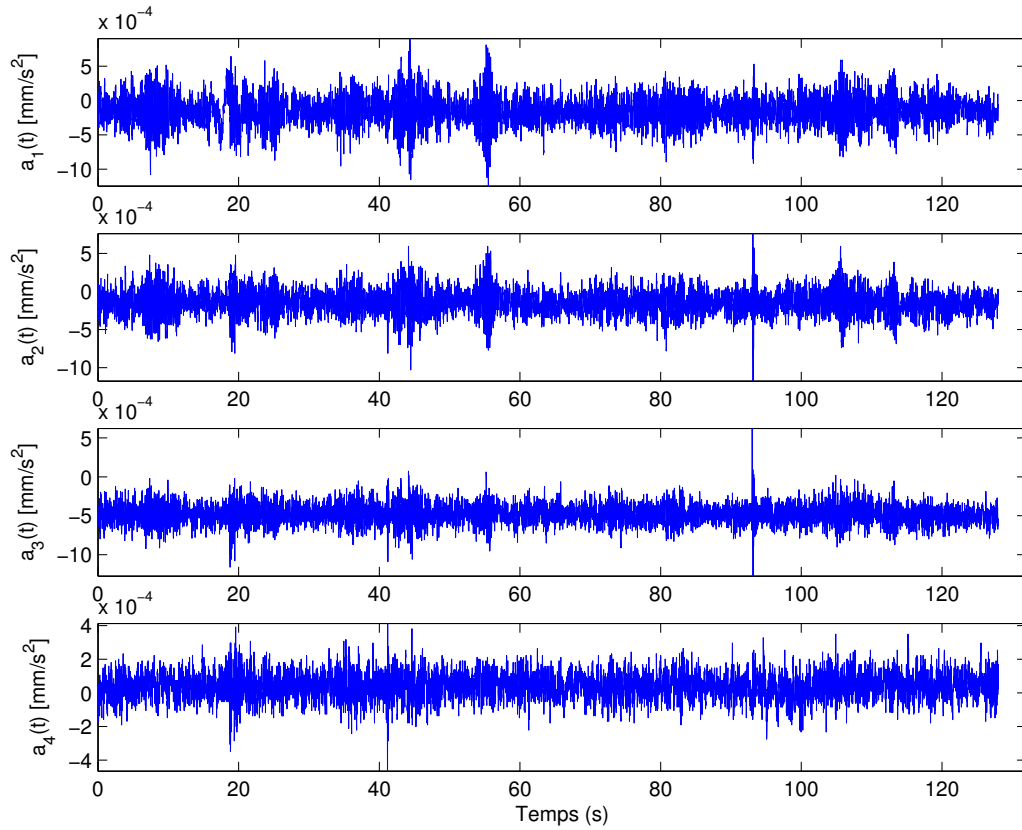


FIGURE 3.25. Accélérations mesurées au 7^e, 5^e, 3^e étage et au rez-de-chaussée du bâtiment à Lyon.

Hans *et al.* [33] ont traité les signaux obtenus par des tests harmoniques et des tests de choc en utilisant le décrément logarithmique basé sur la transformée en ondelettes. Dans sa thèse [48], Le identifie les paramètres modaux à l'aide de l'analyse continue en ondelettes des réponses libres du bâtiment, *i.e* le cas d'excitation de choc. Nous allons utiliser la procédure d'identification présentée dans la section précédente pour identifier des paramètres modaux de ce bâtiment à partir des réponses sous excitations ambiantes.

Les paramètres utilisés pour la procédure d'identification par ondelettes sont donnés dans le tableau 3.14.

TABLEAU 3.14. Paramètres de la procédure d'identification

Méthodes	$c_t = c_f$	$f_{j,inf}$ (Hz)	$f_{j,sup}$ (Hz)	$f_{j,est}$ (Hz)	$df_{j,est}$ (Hz)	N	Q_{min}	Q_{max}	Q_{choisi}
RD	5,5	2	8	4,5	4,5	64	3,53	4,33	4
FSO	5,5	3	6	4,5	4,5	384	3,53	329,01	166,27

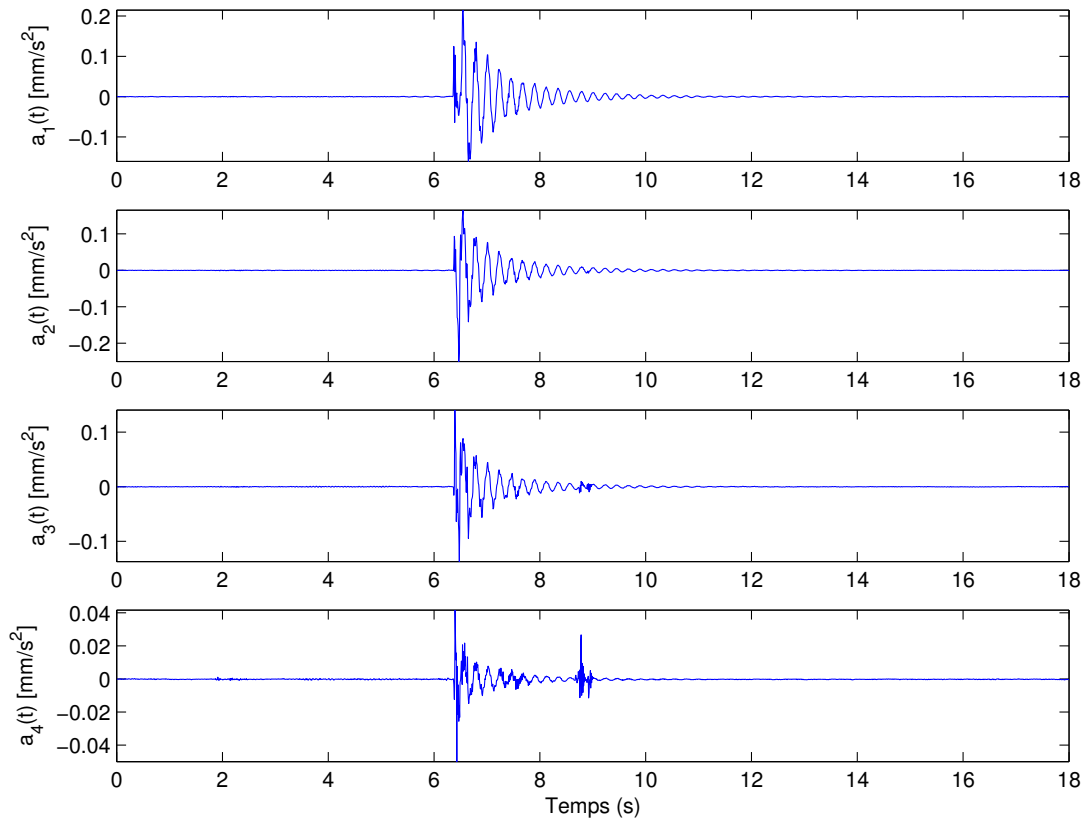
Les résultats des paramètres modaux identifiés par deux techniques : celle du décrément aléatoire (RD) et celle de la fonction spectrale en ondelettes (FSO) sont présentés dans le tableau 3.15.

TABLEAU 3.15. Paramètres modaux identifiés pour le 1^{er} mode transversal

Capteur (k)	Fréquence (Hz)		Amortissement (%)	
	RD	FSO	RD	FSO
1	4,5728	4,5866	2,5209	2,5755
2	4,5728	4,5815	2,4483	2,5494
3	4,5728	4,5814	2,4424	2,5970

Parmi les signaux enregistrés, l'amplitude du signal mesuré par le capteur 4, *i.e* celui situé au rez-de-chaussée, est assez faible (2.10^{-4} mm/s^2). Ceci peut expliquer pourquoi les caractéristiques modales ne peuvent pas être identifiées à partir du signal mesuré par le capteur 4. Ainsi le deuxième mode n'est pas suffisamment excité pour être correctement identifié. Par conséquent, seuls les résultats du premier mode sont obtenus et présentés. On constate que la différence entre les résultats obtenus par les deux techniques reste faible.

En ce qui concerne l'excitation harmonique et l'excitation de choc, le tableau 3.13 présente des résultats obtenus par Hans *et al.* [33]. Les réponses temporelles mesurées par les mêmes capteurs placés sur le bâtiment sous excitation de choc sont tracées sur la figure 3.26.

FIGURE 3.26. Accélérations mesurées au 7^e, 5^e, 3^e étage et rez-de-chaussée du bâtiment à Lyon (sous choc).

On trouve aisément que les paramètres identifiés dans le cas de choc, par Hans *et al.* [33], sont plus élevés que ceux obtenus dans le cas des excitations ambiantes. Ceci peut être expliqué par le fait que : d’une part, l’excitation ambiante (de l’ordre de $10^{-3}mm/s^2$ pour le 1^{er} capteur), est beaucoup plus faible en amplitude que l’excitation harmonique et l’excitation de choc (de l’ordre de $2.10^{-1}mm/s^2$ pour le 1^{er} capteur) ; d’autre part, le comportement du sol est en réalité non linéaire. En effet, en appliquant la TOC sur les réponses du bâtiment au choc, on constate que le comportement du bâtiment est non linéaire et on attribue la cause de ces non linéarités au comportement du sol, comme le montre la figure 3.27 où est tracée la TO de l’accélération mesurée au dernier étage. Une variation des fréquences en fonction du temps est observée.

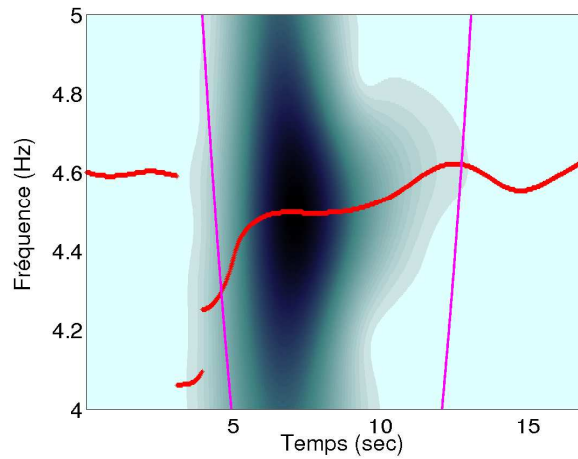


FIGURE 3.27. TO de l'accélération mesurée au dernier étage (capteur 1).

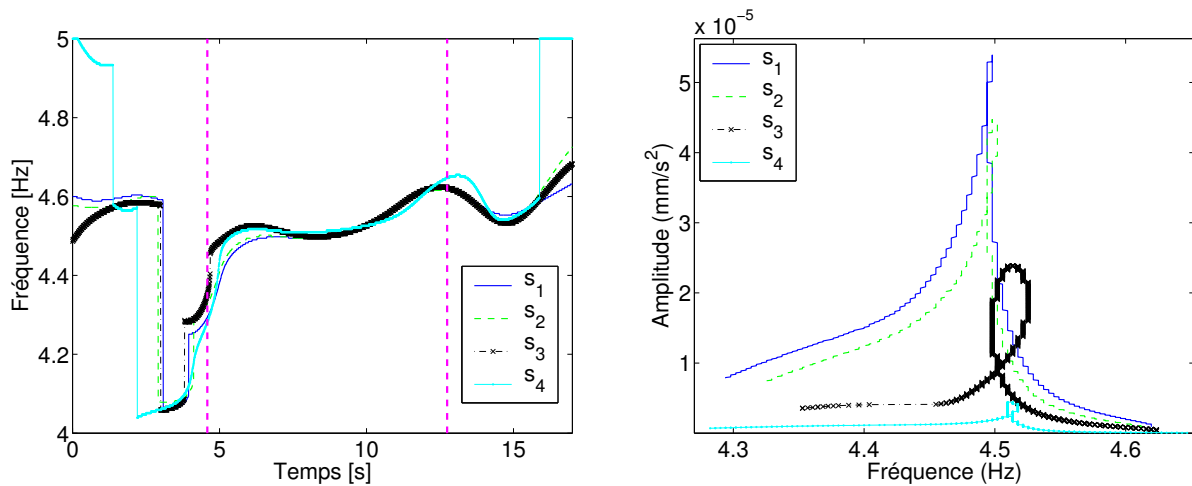


FIGURE 3.28. 1(Gauche) Fréquences instantanées. 2(Droite) Backbones.

La figure 3.28.1, où sont tracées les fréquences instantanées, montre qu’après avoir appliqué le choc sur le bâtiment, la fréquence augmente rapidement de $4,4Hz$ à $4,5Hz$. Puis, elle continue à augmenter de $4,5Hz$ à $4,6Hz$ après être resté “linéaire” pendant $2s$. Hans *et al.* [33] ont peut-être considéré la fréquence de cette “plage linéaire”, égale à $4,5Hz$, comme celle du 1^{er} mode du bâtiment. En ce qui concerne l’amplitude des réponses, la figure 3.28.2 présente la variation

des amplitudes en fonction de la fréquence. Sur cette figure, on remarque qu'il y a deux plages d'amplitudes séparées par la fréquence $4,5\text{Hz}$. Dans la première, les amplitudes augmentent avec la fréquence, tandis que dans la deuxième, les amplitudes diminuent.

Des remarques similaires sont faites par Argoul *et al.* [5] lorsqu'ils utilisent la TO pour identifier le comportement dynamique de bâtiments sous choc.

3.6 Identification des systèmes non linéaires

3.6.1 Principes d'identification

Les sections précédentes abordent l'identification des paramètres modaux des systèmes linéaires à l'aide de l'analyse par ondelettes. Deux cas de réponses ont été traités : des réponses libres et des réponses au bruit ambiant. Dans les exemples présentés, le comportement des structures reste linéaire. Pourtant, lorsque l'amplitude du déplacement augmente, des effets non linéaires peuvent être détectés dans le comportement. C'est le cas pour l'immeuble d'HLM à Lyon précédemment présenté. Quand une sollicitation d'amplitude plus élevée (excitation par une pelle mécanique) que précédemment (excitations ambiantes) est appliquée, on remarque un comportement non linéaire dans les réponses mesurées. Ceci nous a conduit à adapter l'utilisation de la TO au cas des systèmes faiblement non linéaires en se fondant sur les propriétés de filtre de la TO. Alors, la transformation en ondelettes permet de :

- *Détecter* : L'arête de la TO permet d'obtenir directement la fréquence instantanée. Le comportement du système est non linéaire ou non-stationnaire si la fréquence varie en fonction du temps.
- *Caractériser* : A partir de la TO, on peut déterminer non-seulement la fréquence instantanée, mais aussi d'autres quantités (l'amplitude instantanée ou/et sa dérivée) qui sont aussi dépendantes du temps. On peut alors déduire la variation de ces quantités en fonction de l'amplitude instantanée. Ces dernières sont très utiles pour caractériser la non linéarité du système.

Dans la littérature, la plupart des non linéarités abordées est de type polynômial :

- La non linéarité vis-à-vis de l'amortissement par Lardies *et al.* [47] :
La partie non linéaire dans l'équation différentielle est proportionnelle au produit du déplacement et de la vitesse :

$$f(u(t), \dot{u}(t)) = \mu |u(t)|^m |\dot{u}(t)|^n \dot{u}(t) \quad (3.87)$$

où m et n sont des entiers strictement positifs ; $\mu \in \mathbb{R}$.

- La non linéarité vis-à-vis de la raideur :
Staszewski [75], Argoul *et al.* [6] étudient le cas d'un oscillateur non linéaire de type cubique :

$$f(u(t), \dot{u}(t)) = \beta \omega_0^2 u^3(t) \quad (3.88)$$

Dans sa thèse [48], Le considère les cas : non linéarité cubique, linéarité par morceaux et bi-linéarité. L'étude de non linéarité cubique a été validée expérimentalement, dans [6], sur un test réel constituant d'une poutre encastree à une extrémité et liée à un support fixe à travers une lame mince (Le [48]).

Ta *et al.* [79] considère le cas plus général :

$$f(u(t), \dot{u}(t)) = \eta |u(t)|^m \text{Sgn}(u(t)) + \sum_i \mu_i |\dot{u}(t)|^i \text{Sgn}(\dot{u}(t)) \quad (3.89)$$

Des tests réels sur la non linéarité en raideur et en amortissement ont été étudiés dans la thèse de Ta [78]. La structure testée est une poutre en acier, encastree-libre. Au départ, le comportement de la structure est linéaire. Les non linéarités locales sont introduites en mettant sur la poutre : une contre-réaction non linéaire en raideur et en amortissement.

On constate que les travaux pré-cités ont pour points communs que :

- i) **La non linéarité est faible** ou l'oscillation du système autour d'un état d'équilibre est de faible amplitude. La k -ième réponse non linéaire peut être supposée comme la somme des composantes "modales" :

$$u_k(t) = \sum_{i=1}^n A_{ki}(t) \cos(\alpha_{ki}(t)) \quad (3.90)$$

- ii) **Ils sont fondés sur une démarche similaire pour l'identification des paramètres :**

- A partir de la TO, on détermine les variations de certaines quantités $R(t)$ (fréquence instantanée ou dérivée de l'amplitude instantanée), en fonction de l'amplitude instantanée $A(t)$.
- Ensuite, en se fondant sur les expressions analytiques approchées de ces quantités obtenues par les méthodes de résolution asymptotique de Krylov-Bogoliubov d'un oscillateur non linéaire **faiblement amorti**, les coefficients a_i de cette expression sont déterminés par une minimisation, au sens des moindres carrés, de l'écart entre la mesure de la quantité et le modèle :

$$\min_{a_i} \|R^{\text{modèle}}(a_i, A) - R^{\text{mesuré}}(A)\| \quad \text{pour } A \in [A_1, A_2] \quad (3.91)$$

3.6.2 Identification de systèmes faiblement non linéaires, amortis

En se fondant sur la méthode approchée de résolution des équations différentielles non linéaires de Krylov-Bogoliubov-Mitropolski [2], on essaie, dans cette section, de déterminer les expressions analytiques approchées de l'amplitude instantanée et de la fréquence instantanée dans le cas où *l'amortissement n'est plus faible*. Il est important de noter que *l'hypothèse de non linéarité faible*, ainsi que les démarches pré-citées pour l'identification, sont toujours conservées.

La technique d'identification est ensuite, appliquée sur des réponses libres de trois systèmes :

- un exemple numérique d'un oscillateur non linéaire et amorti.
- deux tests réels : 1) une poutre linéaire couplée avec une lame mince à l'Université de Liège, 2) une poutre mince bi-encastree au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.

3.6.2.1 Expression analytique de l'amplitude instantanée et de la fréquence instantanée pour un oscillateur non linéaire de type cubique et amorti.

Considérons les oscillations libres d'un oscillateur non linéaire de type cubique et amorti :

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) + \varepsilon f(u(t)) = 0 \quad (3.92)$$

où ε est un paramètre dont la valeur est "petite". La force non linéaire est formée par un terme non linéaire cubique : $f(u(t)) = \beta\omega_0^2 u^3(t)$.

On utilise la méthode de Krylov-Bogoliubov-Mitropolski [2] (KBM) pour déterminer des solutions approchées de l'équation précédente.

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle ordinaire linéaire, *i.e* le cas où $\varepsilon = 0$, possède deux solutions : $\lambda_i = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ (seul le cas de l'amortissement sous-critique est considéré). Pour simplifier la notation, on pose : $\tilde{k} = \xi\omega_0$ et $\tilde{\omega} = i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$. La solution générale de (3.92) avec $\varepsilon = 0$ s'écrit donc

$$u_0(t) = e^{-\tilde{k}t} \left(a_1 e^{\tilde{\omega}t} + a_2 e^{-\tilde{\omega}t} \right) \quad (3.93)$$

où a_1 et a_2 sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales.

La solution approchée de l'équation différentielle non linéaire (3.92) prend la forme :

$$u(t) = a_1(t)e^{\lambda_1 t} + a_2(t)e^{\lambda_2 t} + \varepsilon u_1(a_1, a_2, t) + \varepsilon^2 u_2(a_1, a_2, t) + \dots \quad (3.94)$$

où $a_j(t)$ ($j = 1, 2$) sont solutions des équations différentielles du 1^{er} ordre suivantes :

$$\dot{a}_j = \varepsilon A_j^{(1)}(a_1, a_2, t) + \varepsilon^2 A_j^{(2)}(a_1, a_2, t) + \dots \quad (3.95)$$

Comme les deux premiers termes de (3.94) incluent $e^{\pm\tilde{\omega}t}$, $u_1(t)$, $a_1(t)$ et $a_2(t)$ ne contiennent pas ces termes. A partir de (3.95), on en déduit que $A_1(t)$ et $A_2(t)$ ne contiennent pas non plus $e^{\pm\tilde{\omega}t}$. Cette condition assure que les fonctions d'amplitude $a_i(t)$ ne sont pas oscillantes.

Supposons que les solutions (3.94) et (3.95) soient approchées jusqu'au premier ordre en ε . On va omettre dans la suite, les exposants (1) de $A_j^{(1)}$ pour une raison de simplification de notation. En remplaçant (3.94) dans l'équation (3.92), les termes associés à ε s'écrivent :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + 2\tilde{k}\dot{u}_1 + \omega_0^2 u_1 + e^{-\tilde{k}t} \left(e^{\tilde{\omega}t} \left(\dot{A}_1 + 2\tilde{\omega}A_1 \right) + e^{-\tilde{\omega}t} \left(\dot{A}_2 - 2\tilde{\omega}A_2 \right) \right) = \\ -f \left(a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \right) = -\beta\omega_0^2 e^{-3\tilde{k}t} \left(a_1^3 e^{3\tilde{\omega}t} + 3a_1^2 a_2 e^{\tilde{\omega}t} + 3a_1 a_2^2 e^{-\tilde{\omega}t} + a_2^3 e^{-3\tilde{\omega}t} \right) \end{aligned} \quad (3.96)$$

Deux équations associées aux termes $e^{\pm\tilde{\omega}t}$ et une équation pour les termes restants s'écrivent donc :

$$\dot{A}_1 + 2\tilde{\omega}A_1 = -\beta\omega_0^2 3a_1^2 a_2 e^{-2\tilde{k}t} \quad (3.97)$$

$$\dot{A}_2 - 2\tilde{\omega}A_2 = -\beta\omega_0^2 3a_1 a_2^2 e^{-2\tilde{k}t} \quad (3.98)$$

$$\ddot{u}_1 + 2\tilde{k}\dot{u}_1 + (\tilde{k}^2 - \tilde{\omega}^2)u_1 = -\beta\omega_0^2 e^{-3\tilde{k}t} \left(a_1^3 e^{3\tilde{\omega}t} + a_2^3 e^{-3\tilde{\omega}t} \right) \quad (3.99)$$

Les solutions générales des équations précédentes sont respectivement :

$$A_1(t) = \alpha_1 e^{-2\tilde{\omega}t} \quad (3.100)$$

$$A_2(t) = \alpha_2 e^{-2\tilde{\omega}t} \quad (3.101)$$

$$u_1(t) = \alpha_3 e^{(-\tilde{k}-\tilde{\omega})t} + \alpha_4 e^{(-\tilde{k}+\tilde{\omega})t} = \alpha_3 e^{\lambda_1 t} + \alpha_4 e^{\lambda_2 t} \quad (3.102)$$

où α_i sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales.

Comme nous l'avons dit précédemment, les solutions générales de $u_1(t)$, $A_1(t)$ et $A_2(t)$ ne contiennent pas de termes en $e^{\pm j\tilde{\omega}t}$, ($j = 1, 2, \dots$). Ceci entraîne que les solutions générales ci-dessus sont nulles, *i.e* les coefficients α_i sont égaux à zéros. Finalement, en tenant compte de (3.95), les solutions finales de (3.97), (3.98) et (3.99) sont égales aux solutions particulières qui

sont écrites respectivement :

$$A_1(t) = \beta\omega_0^2 \frac{3a_1^2 a_2 e^{-2\tilde{k}t}}{2(\tilde{k} - \tilde{\omega})} = \frac{1}{\varepsilon} \dot{a}_1(t) \quad (3.103)$$

$$A_2(t) = \beta\omega_0^2 \frac{3a_1 a_2^2 e^{-2\tilde{k}t}}{2(\tilde{k} + \tilde{\omega})} = \frac{1}{\varepsilon} \dot{a}_2(t) \quad (3.104)$$

$$u_1(t) = b_1 e^{3(\tilde{\omega} - \tilde{k})t} + b_2 e^{-3(\tilde{\omega} + \tilde{k})t} \quad (3.105)$$

où les coefficients b_1 et b_2 sont donnés par :

$$b_1 = -\frac{\beta\omega_0^2 a_1^3}{4(\tilde{k} - \tilde{\omega})(\tilde{k} - 2\tilde{\omega})}; \quad b_2 = -\frac{\beta\omega_0^2 a_2^3}{4(\tilde{k} + \tilde{\omega})(\tilde{k} + 2\tilde{\omega})};$$

En utilisant la transformation : $a_1 = ae^\varphi/2$ et $a_2 = ae^{-\varphi}/2$, les deux équations (3.103) et (3.104) deviennent :

$$\dot{a} = \varepsilon\beta \frac{3\tilde{k}a^3}{8} e^{-2\tilde{k}t} \quad (3.106)$$

$$\dot{\varphi} = \varepsilon\beta \frac{3\tilde{\omega}a^2}{8} e^{-2\tilde{k}t} \quad (3.107)$$

D'où :

$$a(t) = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \varepsilon\beta \frac{3a_0^2}{8} (e^{-2\tilde{k}t} - 1)}} \quad (3.108)$$

$$\varphi(t) = -\frac{\tilde{\omega}}{2\tilde{k}} \ln \left(1 + \varepsilon\beta \frac{3a_0^2}{8} (e^{-2\tilde{k}t} - 1) \right) + \varphi_0 \quad (3.109)$$

où $a_0 = a|_{t=0}$ et $\varphi_0 = \varphi|_{t=0}$ sont des conditions initiales de l'amplitude et de la phase.

On constate que l'amplitude instantanée et la phase instantanée ne dépendent que de la non linéarité cubique caractérisée par le paramètre β . Une fois que les solutions de $a(t)$ et $\varphi(t)$ sont déterminées, l'expression de $u_1(t)$, donnée par (3.105), peut être déduite. La solution finale $u(t)$ s'écrit sous la forme :

$$u(t) = ae^{-\tilde{k}t} \cosh(\tilde{\omega}t + \varphi) + \varepsilon u_1 \quad (3.110)$$

Lien entre la méthode de Krylov-Bogoliubov (KB) et celle de KBM

Considérons seulement la composante fondamentale de (3.110), *i.e* le terme εu_1 est négligé. Avec les notations : $\tilde{\omega} = i\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} = i\tilde{\omega}_0$ et $\tilde{k} = \xi\omega_0$, la solution (3.110) se réécrit donc,

$$u(t) \simeq ae^{-\tilde{k}t} \cosh(\tilde{\omega}t + \varphi) = ae^{-\xi\omega_0 t} \cos(\tilde{\omega}_0 t + \varphi/i) \quad \text{avec } i = \sqrt{-1} \quad (3.111)$$

On en déduit l'amplitude instantanée et la fréquence instantanée :

$$A(t) = ae^{-\xi\omega_0 t} \quad (3.112)$$

$$\dot{\alpha}(t) = \tilde{\omega}_0 + \dot{\varphi}/i = \tilde{\omega}_0 + \varepsilon\beta \frac{3\tilde{\omega}_0 a^2}{8} e^{-2\xi\omega_0 t} \quad (3.113)$$

A partir de (3.112) et (3.113), on obtient :

$$\dot{\alpha}(A) = \tilde{\omega}_0 \left(1 + \varepsilon \beta \frac{3A^2}{8} \right) \quad (3.114)$$

L'expression (3.114), appelée *le backbone*, représente la relation entre la fréquence instantanée $\dot{\alpha}(t)$ et l'amplitude instantanée $A(t)$. Lorsque *l'amortissement est faible*, on obtient les approximations suivantes : $a(t) \simeq a_0$ et $\tilde{\omega}_0 \simeq \omega_0$. Dans ce cas là, on retrouve des résultats identiques obtenus par *la méthode de Krylov-Bogoliubov* (voir [48]).

On remarque que dans le cas d'amortissement “fort”, les résultats obtenus par la méthode de KBM sont meilleurs que ceux obtenus par la méthode de KB. On le verra au travers des exemples donnés dans les sections suivantes.

3.6.2.2 Identification des systèmes faiblement non linéaires par l'analyse en ondelettes

Comme nous l'avons dit dans les sections précédentes, la transformation en ondelettes permet d'obtenir des variations temporelles de l'amplitude et de la fréquence.

Ensuite, la détection des surharmoniques, qui sont des multiples de la fréquence fondamentale, permet d'identifier le type de non linéarité. Par exemple, dans le cas de la non linéarité géométrique, on obtient des surharmoniques de type 2 : 1 et 3 : 1. Il est important de noter que l'identification par ondelettes s'effectue seulement dans le cas où une expression analytique approchée de la fréquence en fonction de l'amplitude est connue. Cette dernière est disponible pour certains types de comportement : linéaire par morceaux, bi-linéaire et non linéaire géométrique.

Une procédure d'identification par ondelettes a été proposée par Le (p. 109, [48]). On va la reprendre en y apportant quelques modifications.

- ★ *Étape 1* : les TOs sont calculées à partir des signaux numériques ou réels $u_k(t)$. Comme nous l'avons dit, plus le facteur de qualité Q de l'ondelette mère est élevé, plus l'effet de bord est significatif, moins l'effet de couplage est important. Géométriquement, plus Q augmente, plus les deux hyperboles limitant le domaine réduit de localisation de la transformée en ondelettes (voir la formule 3.31) se rapprochent. Cela veut dire que l'on perd l'information sur la fréquence instantanée, au fur et à mesure. De plus, comme les paramètres du système non linéaire sont déterminées au sens des moindres carrés, il faut que le domaine de localisation de la TO soit suffisamment grand. La valeur Q doit être choisie de la façon ce que : le maximum d'information temporelle soit retenu et les courbes (la fréquence instantanée ou l'amplitude instantanée) soient “lisses”. En principe, $Q = Q_{min}$ est la valeur idéale. Pourtant, dans certains exemples réels, le facteur de qualité choisi est supérieur à Q_{min} pour obtenir une bonne identification des paramètres.
- ★ *Étape 2* : A partir des TOs, les arêtes et les squelettes associés à chaque composante “modale” du signal $u_k(t)$ mesuré par le capteur k , sont extraits. On en déduit la fréquence instantanée $\dot{\alpha}_{kj}^{mesure}(t)$ et le signal analytique $Z_{u_{kj}}^{mesure}(t)$ associés au capteur k et à la composante “modale” j .
- ★ *Étape 3* : Caractériser le type de comportement du système en se fondant sur plusieurs fréquences instantanées pour savoir si l'une est surharmonique d'une autre ou non. On associe un modèle au comportement du système.

★ *Étape 4* : Identifier des non linéarités du système en minimisant, au sens des moindres carrés, l'écart entre la fréquence instantanée $\dot{\alpha}_{kj}^{mesure}(t)$ (et/ou l'amplitude $A_{kj}^{mesure}(t)$) mesurée et celle du modèle : $\dot{\alpha}_{kj}^{modele}(t)$ (et $A_{kj}^{modele}(t)$).

Par exemple, dans le cas d'un oscillateur avec des non linéarités géométriques, l'expression (3.114) permet d'identifier $\tilde{\omega}$ et le produit $\varepsilon\beta$, tandis que la relation (3.112) est utilisée pour identifier a_0 et $\xi\omega_0$.

3.6.3 Validation

Dans cette section, la technique d'identification des systèmes non linéaires est appliquée sur : 1) des réponses numériques d'un oscillateur non linéaire et amorti, 2) des réponses libres d'une poutre linéaire couplée avec une lame mince, 3) des réponses libres d'une poutre mince bi-encastée.

3.6.3.1 Test numérique : un oscillateur faiblement non linéaire et amorti

Considérons un oscillateur faiblement non linéaire dont l'équation de vibration est donnée par (3.92). Les paramètres de l'oscillateur sont : $f_0 = 5\text{Hz}$ et $\varepsilon\beta = 10^5$. Deux cas d'amortissement sont considérés : 1) Amortissement "faible" : $\xi = 0,5\%$ (soit $\xi\omega_0 = 0,1571$), 2) Amortissement "fort" : $\xi = 4\%$ (soit $\xi\omega_0 = 1,2566$). Le système est simulé avec les conditions initiales : $u(0) = 2.10^{-3}\text{m}$ et $\dot{u}(0) = 0$. Les réponses libres de l'oscillateur sont obtenues en résolvant l'équation (3.92) par la méthode de Runge-Kutta, sur une longueur d'enregistrement $L = 20(\text{s})$ avec 2048 points d'échantillonnage, et l'une de ces réponses est tracée sur la figure 3.29.

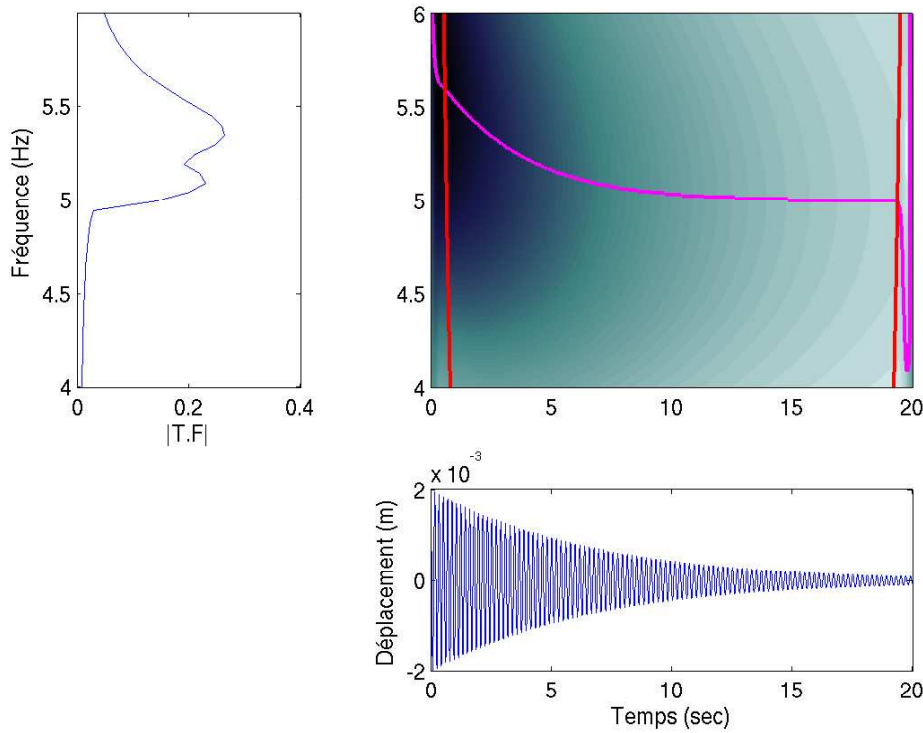


FIGURE 3.29. Oscillateur non linéaire et amorti : Signal - TF - TO ($Q = 3,6$) avec les conditions initiales : $u(0) = 2.10^{-3}\text{m}$ et $\dot{u}(0) = 0$.

Les paramètres utilisés pour la procédure d'identification sont donnés dans le tableau 3.16. La figure 3.29 montre la TO calculée avec $Q = 3,6$ (proche de Q_{min}). On constate que ce choix est correct car le maximum d'information sur la fréquence instantanée est retenu. Les résultats d'identification obtenus par les deux approches : Krylov-Bogoliubov (KB) et Krylov-Bogoliubov-Mitropolski (KBM) sont donnés respectivement dans les tableaux 3.17 et 3.18.

TABLEAU 3.16. Paramètres de la procédure d'identification

$c_t = c_f$	f_{inf} (Hz)	f_{sup} (Hz)	f_{est} (Hz)	df_{est} (Hz)	N	Q_{min}	Q_{max}	Q_{choisi}
5,5	4	6	5	5	256	3,53	57,12	3,6

TABLEAU 3.17. Résultats d'identification de f_0 et de $\varepsilon\beta$

Amortissement	f_0			$\varepsilon\beta$	
	Valeur (Hz)	Erreur (%)		Valeur	Erreur (%)
0,5%	5	0%		$0,964 \cdot 10^5$	3,64%
4,0%	4,998	0,05%		$1,083 \cdot 10^5$	8,32%

TABLEAU 3.18. Résultats d'identification de $\xi\omega_0$ et de a_0

Taux d'amortissement	Méthodes	$\xi\omega_0$			a_0	
		Valeur	Erreur (%)		Valeur	Erreur (%)
0,5%	KB	0,1548	1,143%		$2,05 \cdot 10^{-3}$	2,302%
	KBM	0,1576	0,322%		$1,97 \cdot 10^{-3}$	1,56%
4,0%	KB	1,2451	0,924%		$2,11 \cdot 10^{-3}$	5,17%
	KBM	1,2522	0,353%		$1,97 \cdot 10^{-3}$	1,56%

Dans le cas d'amortissement faible, les résultats d'identification sont assez bons avec une erreur maximale de l'ordre de 3,64% (vis-à-vis de la non linéarité cubique $\varepsilon\beta$). Lorsque le taux d'amortissement augmente, l'erreur devient plus importante (de l'ordre de 8,32%). En ce qui concerne l'identification de $\xi\omega_0$ et de a_0 , la méthode KBM fournit des estimations plus correctes des paramètres identifiés que la méthode KB. Pour la méthode de KBM, on constate que l'amortissement n'influence pas la précision des résultats d'identification car les erreurs ne changent presque pas dans les deux cas d'amortissement.

Les résultats d'identification correspondant au 1^{er} mode sont illustrés sur les figures 3.30 et 3.31. La figure 3.30.1 présente les fréquences instantanées obtenus par la méthode des arêtes et par

la méthode de modules fondée sur le rapport entre les modules des TO : vitesse/déplacement ou accélération/vitesse (comme dans le cas linéaire). On s'aperçoit que ces deux méthodes d'identification donnent des résultats similaires.

Le backbone “mesuré”, obtenu par l'analyse en ondelettes, est tracé sur la figure 3.30.2. En se fondant sur ce backbone “mesuré”, les coefficients (ω_0 et $\varepsilon\beta$) du backbone “identifié” (ou du modèle) sont déterminés au sens des moindres carrés. On trouve que l'identification est bonne car une bonne cohérence entre le backbone “mesuré” et celui “identifié” est observée sur la figure 3.30.2.

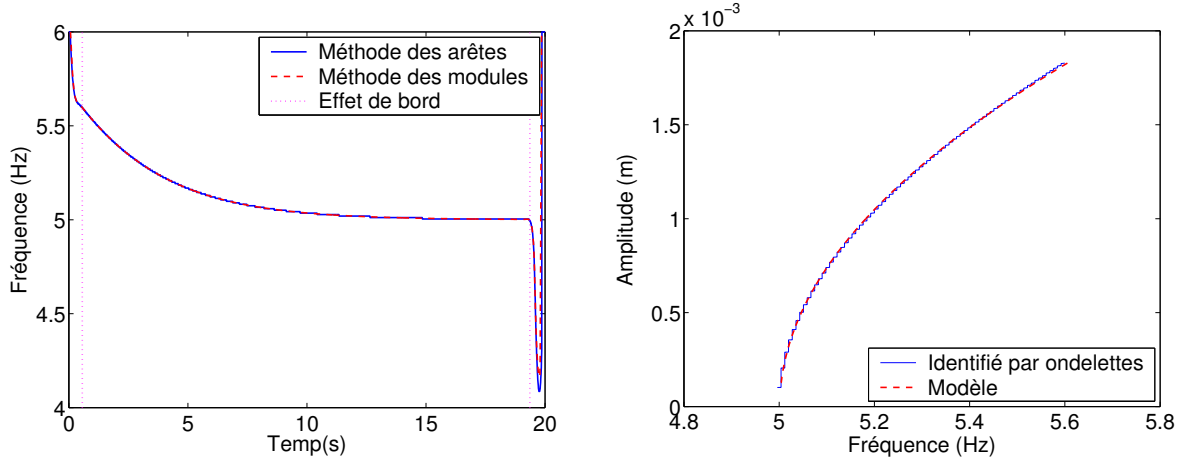


FIGURE 3.30. *Oscillateur non linéaire ($\xi = 0,5\%$) : 1(Gauche) Fréquence instantanée. 2(Droite) Backbone.*

Les coefficients de l'amplitude instantanée (a_0 et $\xi\omega_0$) sont identifiés de la même façon que ceux du backbone. La figure 3.31.1 montre l'amplitude instantanée “mesurée” et celles “identifiées” par deux méthodes : KB et KBM. On trouve que la méthode KBM donne des résultats qui sont meilleurs que ceux de la méthode KB. La figure 3.31.2 trace le signal original et le signal reconstruit par l'ondelette. On observe aussi une bonne cohérence entre les signaux.

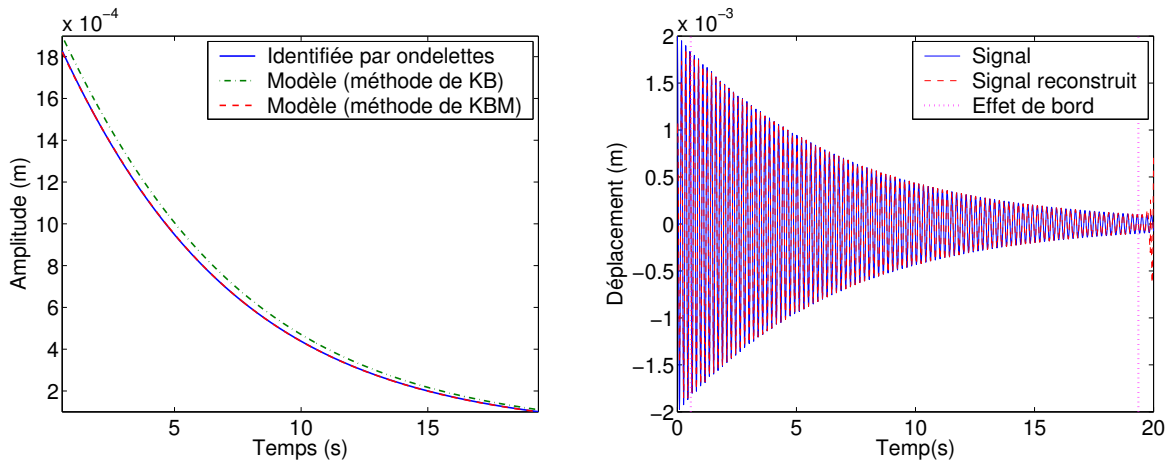


FIGURE 3.31. *Oscillateur non linéaire ($\xi = 0,5\%$) : 1(Gauche) Amplitude instantanée. 2(Droite) Signal reconstruit.*

3.6.3.2 Test réel 1 : Poutre linéaire couplée avec une lame mince

Le corps d'épreuve des essais menés à l'Université de Liège, comme le montre la figure 3.32, est constitué d'une poutre en acier, encastree à une extrémité, liée à une lame mince en acier, elle-même encastree à l'autre extrémité. Les caractéristiques mécaniques et géométriques des composantes du benchmark sont données dans le tableau 3.19.

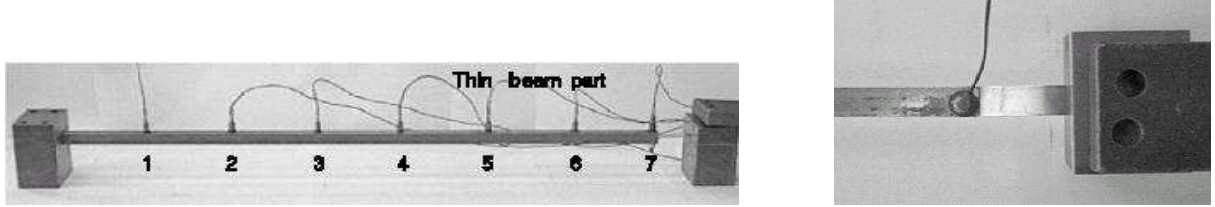


FIGURE 3.32. Benchmark de l'Université de Liège (Gauche) - Un zoom pour la lame mince (droite)

TABEAU 3.19. Caractéristiques du benchmark de Liège

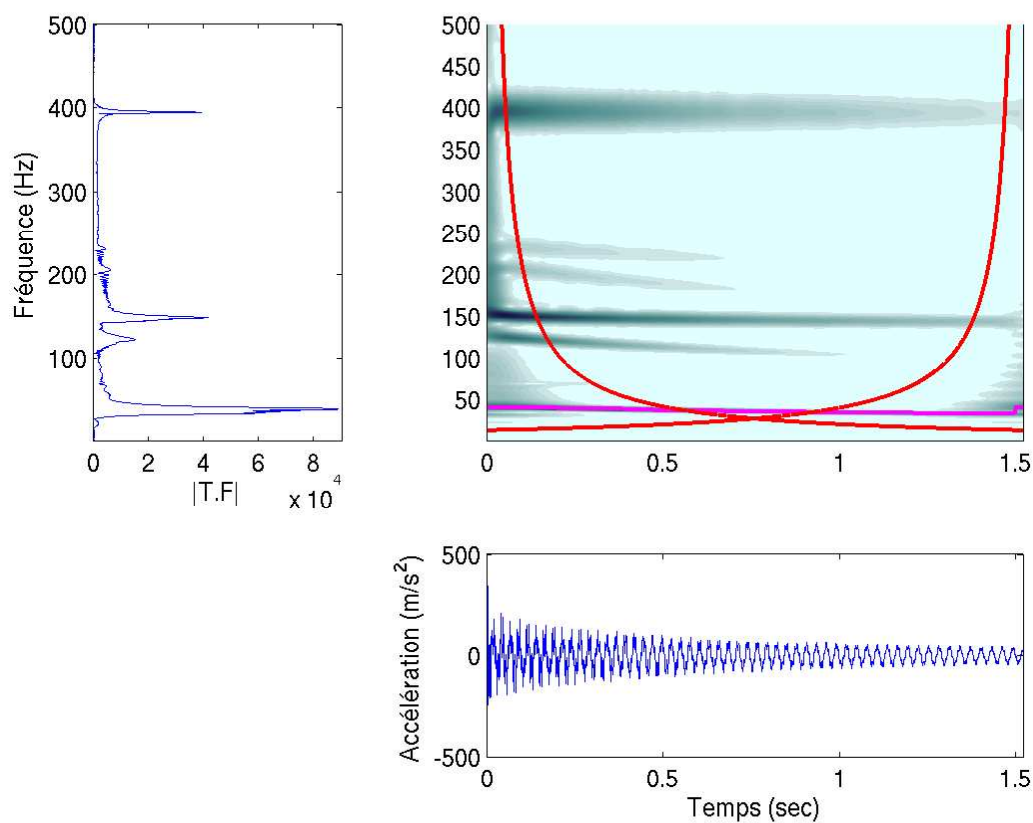
Composante	Matériau	E (Pa)	ρ (kg/m ³)	L (cm)	h (mm)	b (mm)
Poutre	Acier	$2,1 \cdot 10^{11}$	7850	59,3	14	14
Lame	Acier	$2,1 \cdot 10^{11}$	7850	4,0	14	0,5

Le système d'acquisition des mesures se compose de sept accéléromètres régulièrement installés sur la poutre. Ils sont numérotés de 1 (près de l'encastrement de la poutre) à 7 (l'autre extrémité de la poutre). Le système est excité dans la direction horizontale par un choc appliqué entre le capteur 6 et le capteur 7. La fréquence d'échantillonnage est de $f_{echan.} = 5120 Hz$. La durée d'enregistrement est : $L = 7773/f_{echan.} = 1,518s$.

La figure 3.33 montre l'accélération mesurée par le capteur 7, sa TF et sa TO ($Q = 20$). A partir de l'image de la TO, on trouve qu'il y a 7 pics de résonances concentrés autour de : 38, 110, 150, 190, 220, 395 et 470 Hz.

Les paramètres utilisés pour la procédure d'identification par ondelettes sont donnés dans le tableau 3.20. La notation $S_{i,j}$ se rapporte la j -ième surharmonique du mode i . Les fréquences instantanées identifiées par la méthode des arêtes sont présentées dans la figure 3.34.

En général, on trouve que l'identification des fréquences est assez bonne. Cependant, pour le mode 3 et la surharmonique $S_{2,2}$, le choix de $Q = Q_{min}$ donne des résultats d'identification incorrects. La TO du signal mesuré à partir du capteur 7 est tracée sur la figure 3.35. L'arête (ou la fréquence instantanée) n'est pas "lisse". Pour ces deux modes, on doit choisir $Q = (Q_{max} + Q_{min})/2$ au lieu de $Q = Q_{min}$ parce que d'une part, les valeurs de Q_{min} sont assez petites; d'autre part ces deux modes se trouvent dans le domaine des fréquences élevées. Il faut donc choisir Q assez élevé pour que la résolution fréquentielle $\Delta\omega = \Delta\omega_\psi/a$ soit faible.

FIGURE 3.33. *Benchmark de Liège : L'accélération mesurée au capteur 7 - TF - TO.*TABLEAU 3.20. *Paramètres de la procédure d'identification du benchmark de Liège*

Modes	$c_t = c_f$	f_{inf} (Hz)	f_{sup} (Hz)	f_{est} (Hz)	df_{est} (Hz)	N	Q_{min}	Q_{max}	Q_{choisi}
1	5,5	33	43	33	33	128	3,53	28,61	3,6
S_{1,1}	5,5	100	125	125	19	128	18,09	108,39	18,1
2	5,5	144	153	153	13	128	32,37	132,68	32,4
S_{1,2}	5,5	165	210	202	14	128	39,68	175,17	39,7
S_{2,1}	5,5	212	235	213	11	128	73,22	184,71	73,3
3	5,5	393	397	395	65	128	16,71	342,53	179,6
S_{2,2}	5,5	450	485	465	65	128	19,46	398,90	209,2

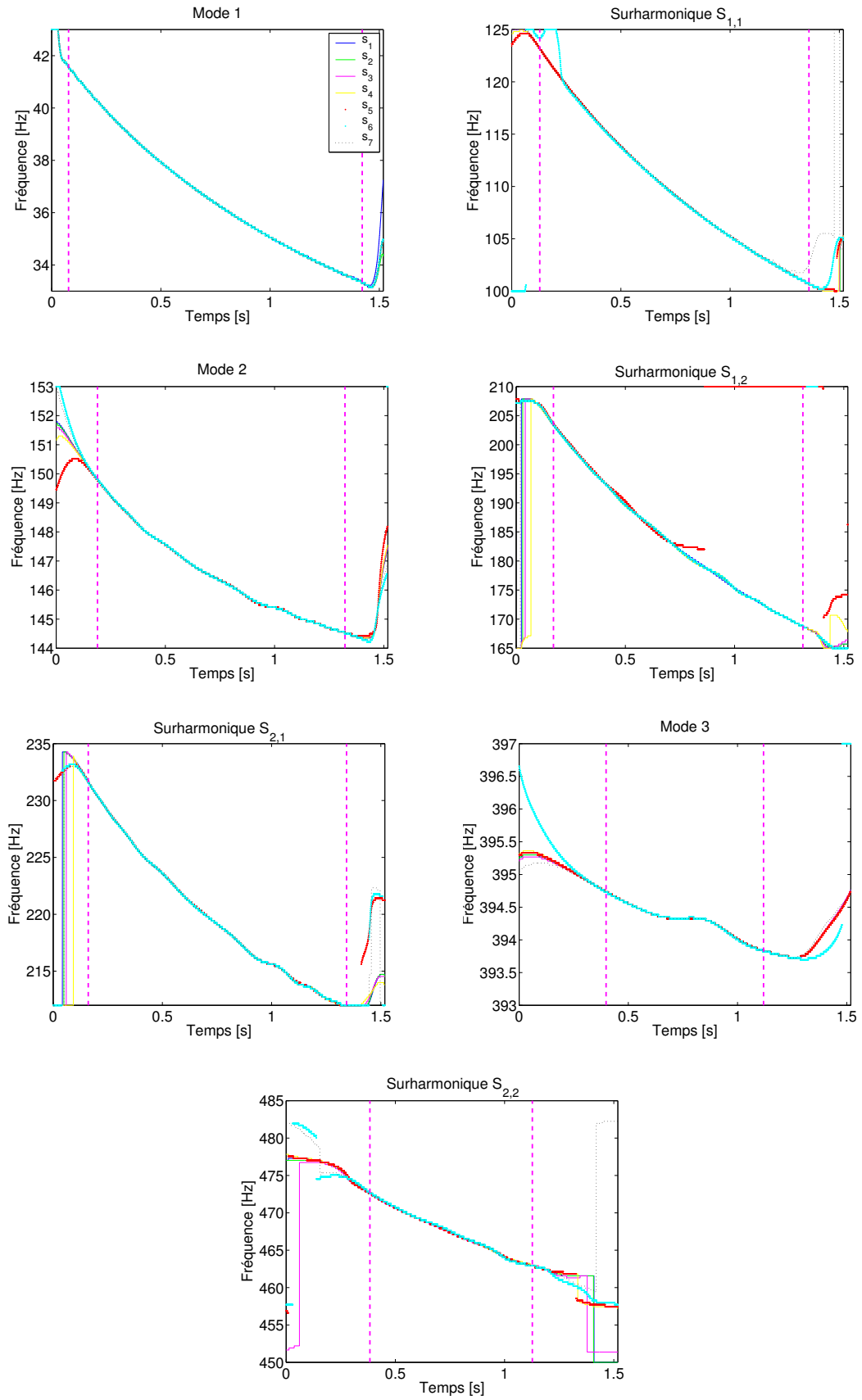


FIGURE 3.34. Benchmark de Liège : Fréquences instantanées.

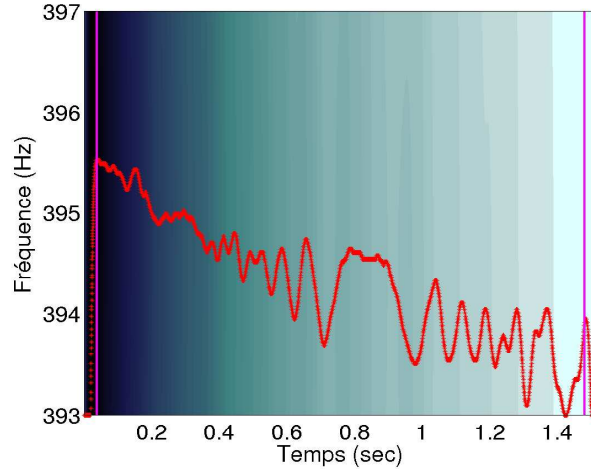


FIGURE 3.35. *Benchmark de Liège : TO du signal mesuré par le capteur 7 ($Q = 16,8 \simeq Q_{min}$).*

On trouve que le rapport entre la fréquence de $S_{1,1}$ et celle du mode 1 est très proche de 3 ($f_{1,1}/f_1 \simeq 3$) (voir la figure 3.36.1). On en déduit qu'il y a une résonance de type 3 : 1. Cela montre que le système possède une non linéarité cubique et que $S_{1,1}$ est forcément une surharmonique de la fréquence fondamentale du 1^{er} mode.

Sur la figure 3.36.1, on obtient aussi une autre résonance de type 5 : 1 qui est le rapport entre la fréquence du $S_{1,2}$ et la fréquence du 1^{er} mode ($f_{1,2}/f_1 \simeq 5$). En particulier, si on fait attention à l'image de la TO (figure 3.33), on observe qu'il y a un petit pic de résonance entre les fréquences de $70 \div 78(Hz)$ qui est proportionnel à la 1^{ère} fréquence avec un coefficient de 2. Cette fréquence représente peut-être une surharmonique de type 2 : 1 de la fréquence fondamentale du 1^{er} mode. Comme elle est peu excitée, l'arête de la TO associée à ce mode est plus difficile à extraire. Les mêmes observations sont obtenues pour le 2^e mode. Sur la figure 3.36.2, on détecte une surharmonique de type 3 : 2 et 3, 2 : 1 qui sont respectivement les rapports entre les fréquences de $S_{2,1}$ ($S_{2,2}$) et la fréquence du 2^e mode, *i.e* $f_{2,1}/f_2 \simeq 3/2$ et $f_{2,2}/f_2 \simeq 3,2/1$.

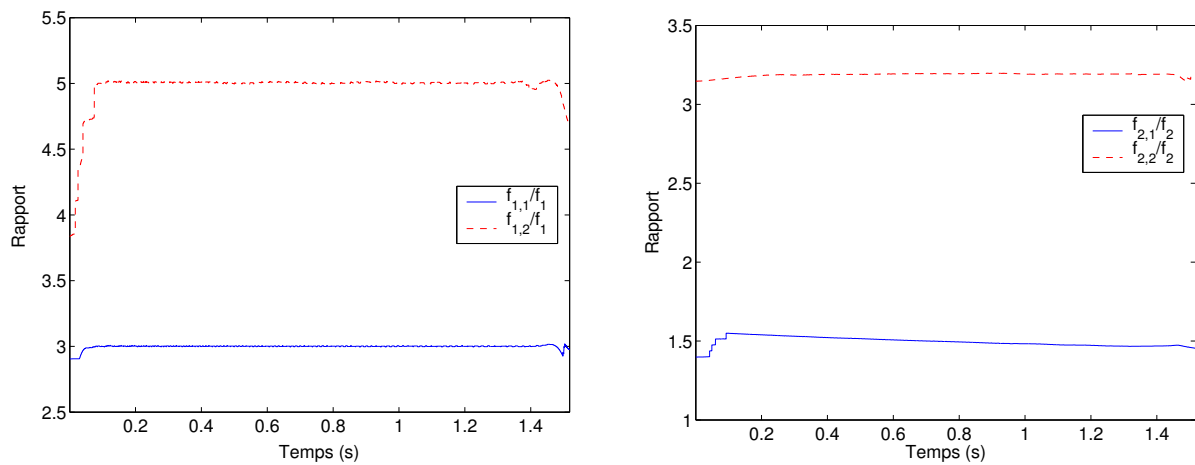


FIGURE 3.36. *Rapport des fréquences : 1(Gauche) par rapport à la fréquence du 1^{er} mode. 2(Droite) par rapport à la fréquence du 2^e mode.*

La lame est mince car une des dimensions est plus faible que les autres ($b = 0,5\text{mm} \ll h = 14\text{mm}$). En supposant que les déformations restent faibles, son comportement vibratoire peut mettre en évidence des non linéarités liées à des phénomènes de grands déplacements ou grandes rotations [4]. Ces non linéarités de type géométrique sont étudiées plus en détail dans le chapitre suivant avec l'apparition de termes cubiques et/ou quadratiques dans les équations du mouvement. Ceci explique les résonances de type 3 : 1 et 2 : 1 dans les réponses vibratoires du benchmark de Liège.

En utilisant la solution analytique de Krylov-Bogoliubov-Mitropolski (KBM), les paramètres caractérisant la non linéarité du benchmark de Liège sont identifiés et donnés dans le tableau 3.21.

TABLEAU 3.21. Résultats d'identification du benchmark de Liège

Modes	f_0 (Hz)	$\varepsilon\beta$	$\xi\omega_0$	a_0 (m/s ²)
1	30,2	$4,403.10^5$	$1,526.10^{-3}$	0,5884
2	145,0	$4,152.10^7$	$6,375.10^{-5}$	1,4925
3	394,0	$6,752.10^8$	$5,997.10^{-6}$	1,928

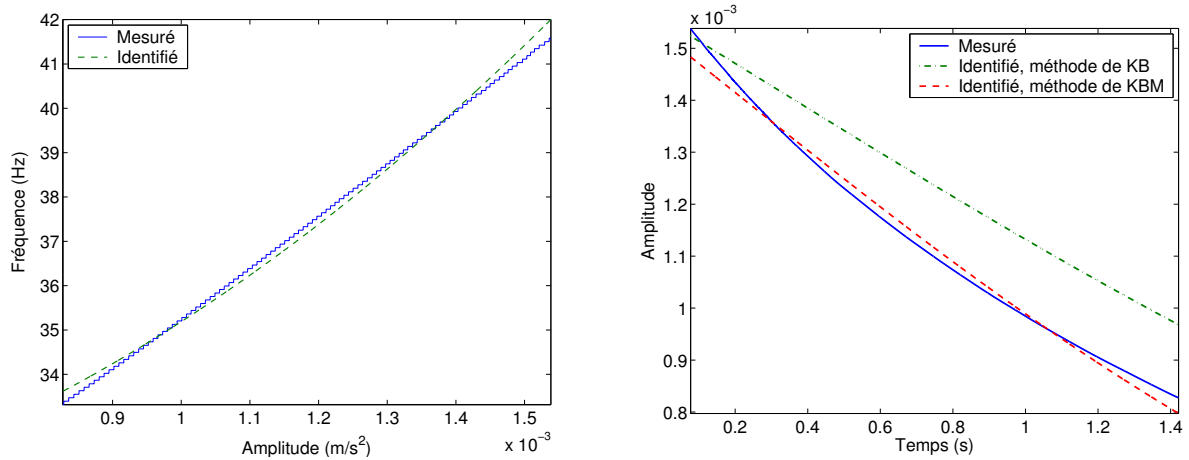
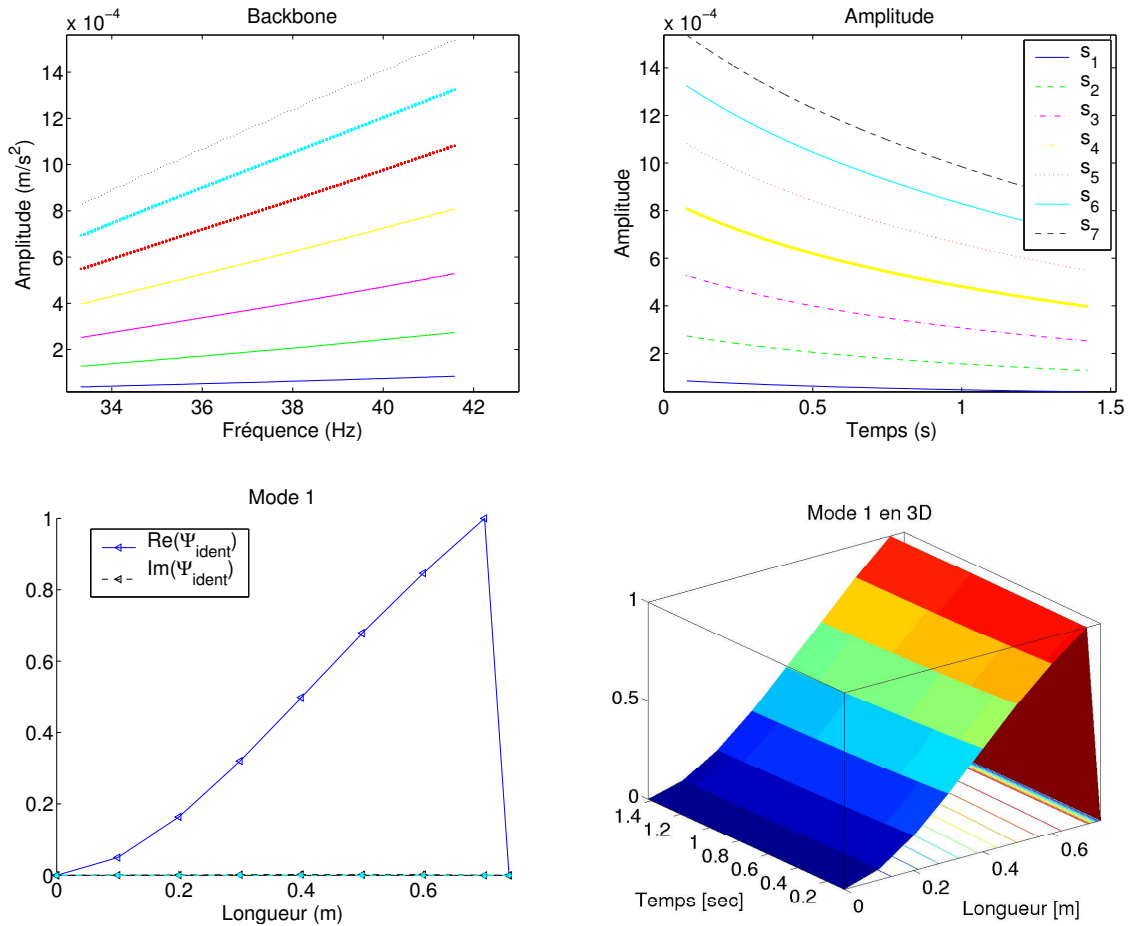


FIGURE 3.37. Benchmark de Liège : 1(Gauche) Backbone du 1^{er} mode. 2(Droite) Amplitude instantanée du 1^{er} mode.

L'identification de la non linéarité caractérisant le 1^{er} mode est illustrée sur la figure 3.37. On constate que la solution de KBM est plus pertinente que celle de Krylov et Bogoliubov (KB). Ici, on ne présente que les paramètres identifiés pour le 1^{er} mode : le backbone, l'amplitude instantanée, la déformée modale en 2D et en 3D (voir la figure 3.38). On constate que la partie imaginaire de la déformée modale est presque nulle. Cette remarque est encore valable pour tous les autres modes. Par conséquent, on peut conclure que le modèle de l'amortissement de type proportionnel et visqueux est correct pour représenter ce système.

FIGURE 3.38. *Benchmark de Liège : Identification du 1^{er} mode.*

3.6.3.3 Test réel 2 : Vibration non linéaire d'une poutre mince bi-encastée

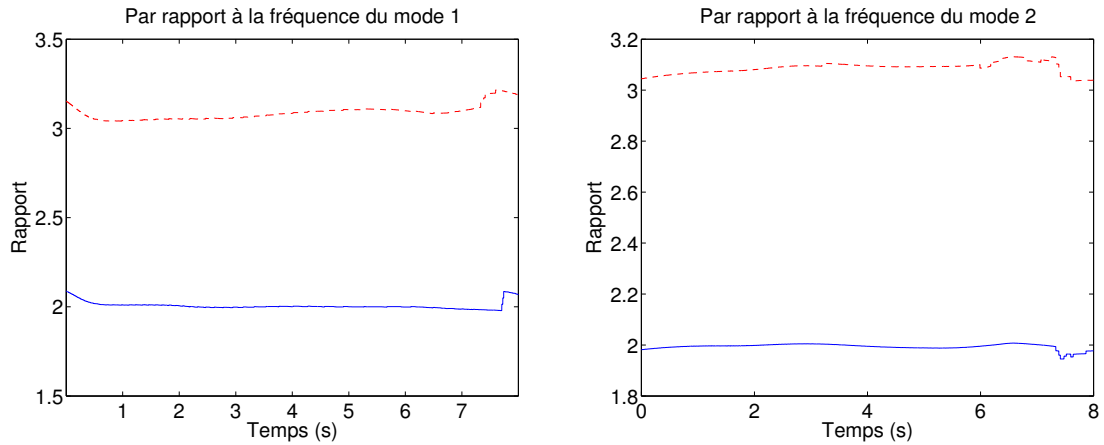
Dans la section 3.5.1.6, la vibration linéaire de la poutre mince bi-encastée a été étudiée grâce à l'analyse en ondelettes. On rappelle que, dans le cas "linéaire", l'amplitude du choc appliqué à la lame est de $8,1N$. Dans cette section, on va analyser les réponses libres de la lame excitée par un choc dont l'amplitude est plus élevée : $F = 20,8N$. La variation des fréquences du 1^{er} mode (figure 3.40) en fonction du temps montre que le comportement de la poutre est donc non linéaire.

Les paramètres utilisés pour la procédure d'identification sont donnés dans le tableau 3.22. Les TOs des réponses expérimentales calculées avec $Q = Q_{min}$ sont très bruitées à cause de la présence des bruits dans les signaux. Par conséquent, pour ce test, on choisit $Q = (Q_{min} + Q_{max})/2$.

Comme dans l'exemple précédent, après avoir déterminé les fréquences instantanées, les rapports entre ces fréquences sont ensuite calculés pour détecter si l'une est une surharmonique de l'autre. Comme indiqué sur la figure 3.39.1, les rapports entre les fréquences du mode $S_{1,1}$ et du mode 2 confirment respectivement la présence de résonances de type 2 : 1 et 3 : 1. On remarque que les deux premières fréquences peuvent être reliées par : $f_2 \simeq 3f_1$, ce qui peut être une résonance interne entre ces deux modes. Par conséquent, le mode 2 et le surharmonique $S_{1,2}$ peuvent s'interagir. Ceci peut expliquer pourquoi les paramètres associés à ce mode ne peuvent pas être déterminés. Identiquement, on a des surharmoniques du mode 2 de type 2 : 1 et 3 : 1 qui sont montrées sur la figure 3.39.2.

TABLEAU 3.22. Paramètres de la procédure d'identification

Modes (j)	$c_t = c_f$	$f_{j,inf}$ (Hz)	$f_{j,sup}$ (Hz)	$f_{j,est}$ (Hz)	$df_{j,est}$ (Hz)	N	Q_{min}	Q_{max}	Q_{choisi}
1	5, 5	5, 0	6, 0	5, 5	5, 5	128	3, 54	25, 13	14, 3
S_{1,1}	5, 5	10, 5	12, 0	11, 3	5, 7	128	5, 45	51, 63	28, 5
2	5, 5	16, 5	17, 5	17, 0	5, 7	128	8, 20	77, 68	42, 9
3	5, 5	27, 8	28, 8	28, 4	5, 6	128	13, 95	129, 77	71, 9
S_{2,1}	5, 5	33, 5	34, 5	34, 0	5, 7	128	16, 40	155, 36	85, 9
4	5, 5	46, 4	47, 4	46, 9	5, 6	128	23, 03	214, 31	118, 7
S_{2,2}	5, 5	52, 0	53, 0	52, 6	5, 7	128	25, 38	240, 36	132, 9
5	5, 5	69, 0	71, 0	70, 0	5, 8	128	30, 17	351, 85	191, 0
6	5, 5	94, 0	96, 0	95, 4	5, 8	128	45, 23	435, 93	240, 6
7	5, 5	132, 3	134, 3	133, 3	5, 6	128	64, 31	609, 11	336, 7
8	5, 5	167, 5	169, 5	168, 5	5, 8	128	79, 89	769, 96	424, 9

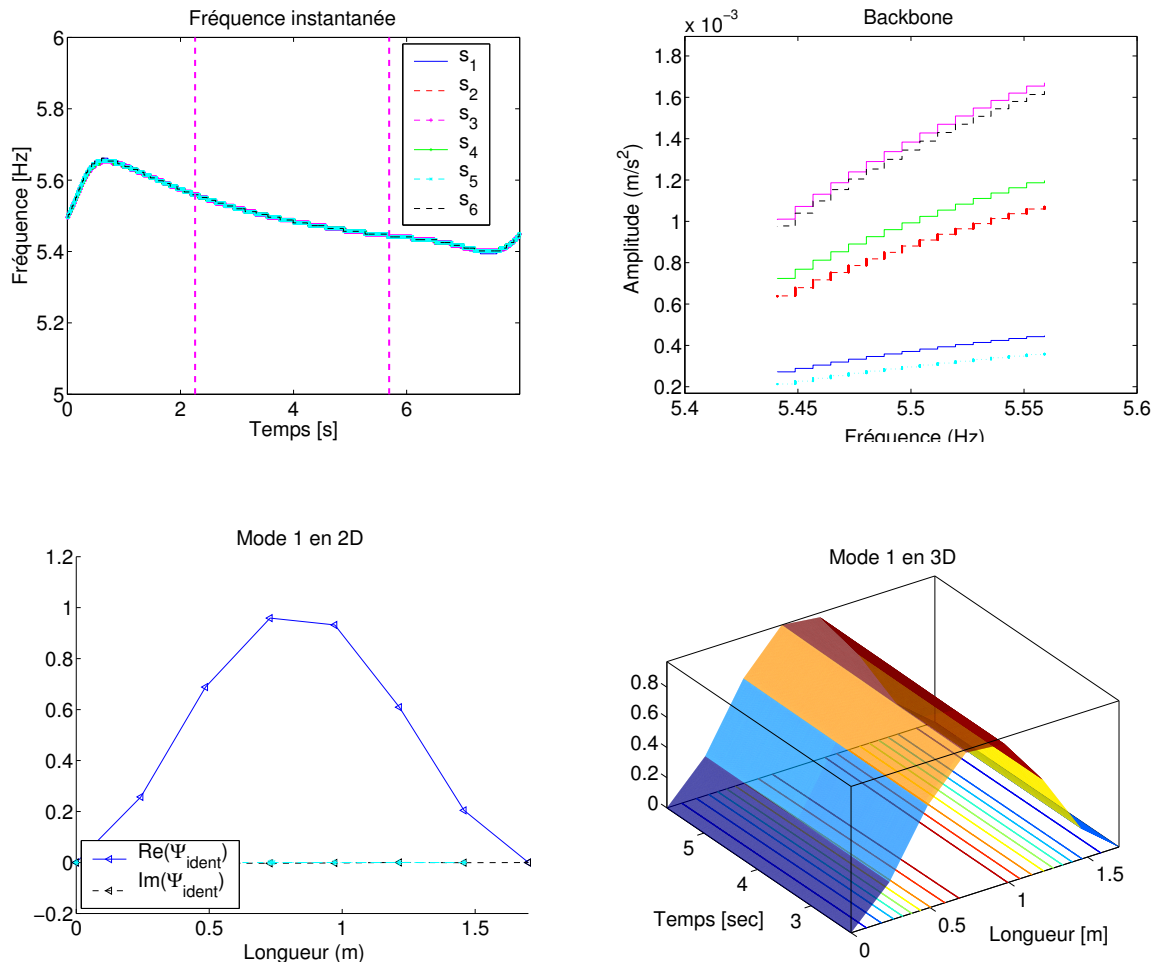
FIGURE 3.39. Benchmark du LCPC - Rapport des fréquences : 1(Gauche) par rapport à la fréquence du 1^{er} mode. 2(Droite) par rapport à la fréquence du 2^e mode.

Les caractéristiques associées à chaque mode sont identifiées et données dans le tableau 3.23. En comparaison avec les résultats identifiés pour le cas de l'essai de vibration "linéaire" (voir le tableau 3.10), on trouve que les fréquences linéaires identifiées sont très semblables, tandis que les amortissements identifiés ont des valeurs supérieures à celles qui sont identifiées dans le cas "linéaire". Pour l'illustration, l'identification des caractéristiques du 1^{er} mode est montrée sur la figure 3.40.

Une bonne cohérence entre le backbone (et l'amplitude instantanée) mesurée pour le 1^{er} mode et celle identifiée est observée sur les figures 3.41. Finalement, la figure 3.41.2 montre encore une fois que la méthode de KBM donne des résultats plus corrects de celle de KB.

TABLEAU 3.23. Résultats d'identification du benchmark du LCPC

Modes	f_0 (Hz)	$\varepsilon\beta$	a_0 (m/s ²)	$\xi\omega_0$	ξ (%)
1	5,378	$3,178.10^4$	$2,311.10^{-3}$	0,1509	0,44
2	-	-	-	-	-
3	28,219	$3,19.10^6$	$1,84.10^{-4}$	0,4019	0,22
4	46,750	$2,43.10^7$	$7,97.10^{-5}$	0,8769	0,29
5	69,898	$8,70.10^8$	$4,18.10^{-5}$	1,4546	0,33
6	95,338	$1,67.10^9$	$1,42.10^{-4}$	2,1754	0,36
7	133,23	$2,40.10^9$	$5,77.10^{-6}$	1,3563	0,16
8	168,56	$2,36.10^9$	$2,34.10^{-5}$	1,8356	0,17

FIGURE 3.40. Benchmark de LCPC : Identification du 1^{er} mode.

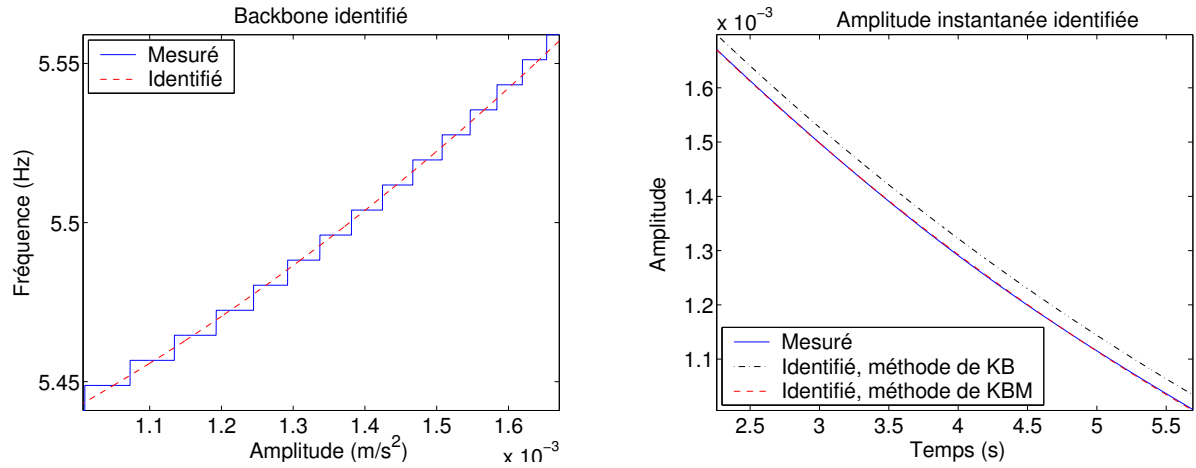


FIGURE 3.41. *Benchmark de LCPC - Identification de la non linéarité pour le 1^{er} mode : 1(Gauche) Backbone. 2(Droite) Amplitude instantanée.*

3.7 Conclusions

Dans ce chapitre, on a présenté et développé un outil puissant pour l'analyse vibratoire des systèmes linéaires et non linéaires : la transformation en ondelettes. Après avoir rappelé des notions et des propriétés essentielles de l'analyse en ondelettes pour le traitement des signaux 1D, les aspects du calcul numérique de la TO ont été abordés : l'effet de bord, l'effet de couplage, le temps d'arrêt. Le choix des paramètres de l'ondelette mère a été aussi discuté.

Les caractéristiques importantes de la TO sont décrites : l'arête et le squelette permettant de déterminer le signal analytique associé. Certaines formules approchées de la TO ont été comparées. Finalement, deux d'entre elles sont retenues : celle de Torrèsani et celle de Le.

La première application visée est l'identification modale des systèmes vibratoires linéaires. Deux types de réponses sont considérés : la réponse libre et la réponse au bruit ambiant. Différentes méthodes adaptées à chaque type de réponses sont présentées, validées et comparées au travers de simulations numériques et de deux tests réels : 1) Réponses libres d'une poutre mince bi-encastée sous choc de faible amplitude, 2) Réponses au bruit ambiant d'un immeuble d'habitation à Lyon. Les résultats d'identification obtenus par la TO, sont tous comparés avec ceux calculés en utilisant d'autres techniques. Les résultats obtenus sur les exemples proposés sont très prometteurs et permettent de valider la procédure d'identification proposée.

Une question : comment détecter et identifier des non linéarités dans le comportement des systèmes vibratoires faiblement non linéaires et en particulier des non linéarités géométriques ? En se fondant sur la méthode de Krylov-Bogoliubov-Mitropolski, une nouvelle formulation analytique pour la solution de l'équation différentielle non linéaire de type cubique a été présentée. Elle a montré sa pertinence au travers d'un test numérique et de deux tests réels. Le premier, effectué à l'Université de Liège, est un système complexe constitué par une poutre reliée à une lame mince. Le deuxième, effectué au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées à Paris, est une poutre mince bi-encastée. Par l'analyse des ondelettes, on a détecté et identifié des non linéarités géométriques dans ces deux tests réels. Les résultats obtenus sont satisfaisants. Ils montrent l'efficacité et la performance de l'application de la transformation en ondelettes dans l'analyse non linéaire des systèmes vibratoires.

Chapitre 4

Etude statique et dynamique d'une poutre mince non linéaire géométrique

CE CHAPITRE est consacré à l'analyse dynamique d'une structure typique présentant une non linéarité géométrique : **la poutre mince**. On s'intéresse à la modélisation et au calcul des modes non linéaires de cette structure.

Le chapitre commence par une brève revue bibliographique à propos des non linéarités rencontrées en vibrations des structures et se poursuit par l'étude de vibrations des structures avec des non linéarités géométriques notamment des poutres minces. A partir des expressions de l'énergie totale, les équations de vibrations d'une poutre en grands déplacements sont établies. Puis, elles sont discrétisées par la méthode des éléments finis. L'analyse en ondelettes permet ensuite d'identifier des caractéristiques dynamiques de la poutre à partir de réponses numériques, obtenues en résolvant directement l'équation de vibrations. On s'intéresse aussi au calcul des modes non linéaires en utilisant les méthodes présentées dans le chapitre 2.

Pour terminer, on propose une étude statique d'une poutre mince encastrée à une extrémité et soumise à des déplacements imposés à l'autre extrémité. Ce problème est ensuite résolu par deux approches : l'approche analytique et l'approche semi-analytique. Cette dernière permet d'obtenir numériquement des solutions "exactes".

PLAN DU CHAPITRE 4

4.1	Introduction	131
4.2	Poutre d'Euler-Bernoulli en vibrations non linéaires	131
4.2.1	Déformations de la poutre	131
4.2.2	Énergie potentielle - Énergie cinétique	132
4.2.3	Formulation variationnelle faible - Equation de vibration	132
4.2.4	Discrétisation par éléments finis	133
4.2.5	Résolution du problème non linéaire en dynamique	135
4.2.6	Validation	135
4.3	Etude statique d'une poutre mince d'Euler-Bernoulli soumise à des déplacements imposés	145
4.3.1	Solution analytique approchée	145
4.3.2	Solution semi-analytique	147
4.3.3	Exemple numérique	149
4.4	Remarques et Conclusions	150

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va considérer une structure non linéaire géométrique typique : *une poutre mince bi-encastrée de type Euler-Bernoulli*. La première section est consacrée à l'écriture des équations de la dynamique et à la modélisation de la poutre par la méthode des éléments finis.

La validation se fait sur le cas d'une poutre mince en acier, bi-encastrée au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées dont les caractéristiques dynamiques ont été identifiées, dans le chapitre précédent, à partir des réponses expérimentales au choc. Dans ce chapitre, deux types de réponses temporelles sont calculés : 1) des réponses amorties, obtenues par la résolution directe des équations de vibrations, 2) des réponses périodiques, obtenues par les méthodes présentées dans le chapitre 2.

Dans la deuxième section, on présente une étude d'une poutre mince soumise à des déplacements statiques à son extrémité. Une solution approchée va être analytiquement calculée et comparée avec la solution "exacte" déterminée par une approche semi-analytique. Enfin, ce chapitre se termine avec quelques remarques et conclusions.

4.2 Poutre d'Euler-Bernoulli en vibrations non linéaires

Cette partie a pour l'objectif de modéliser *la poutre mince de type Euler-Bernoulli en vibrations non linéaires géométriques* en utilisant la méthode des éléments finis. Le modèle va être validé sur une poutre mince bi-encastrée.

4.2.1 Déformations de la poutre

Soit $u(x, t)$ et $v(x, t)$ le déplacement axial et le déplacement transverse de la poutre.

La déformation axiale ε et la courbure κ se déterminent respectivement, par les formules suivantes (cf. [16]) :

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2} [(u')^2 + (v')^2] \quad (4.1)$$

$$\kappa = \frac{(1 + u')v'' - u'v'}{(1 + u')^2 + (v')^2} \quad (4.2)$$

Le premier terme de (4.1) représente la partie linéaire de la déformation axiale, tandis que les deux derniers termes correspondent à la partie non linéaire. On rappelle que dans le cas linéaire où l'hypothèse de petits déplacements est valable, la partie non linéaire de (4.1) est négligée.

Dans les structures minces, *l'hypothèse de petites déformations et de grands déplacements* est faite :

$$(u')^2 \ll u' \ll 1 \quad (4.3)$$

Les expressions (4.1) et (4.2) sont alors simplifiées et réécrites comme suit :

$$\varepsilon \simeq u' + \frac{1}{2}(v')^2 \quad (4.4)$$

$$\kappa \simeq v'' \quad (4.5)$$

4.2.2 Énergie potentielle - Énergie cinétique

L'énergie potentielle V s'écrit :

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L (M\kappa + N\varepsilon) dx \quad (4.6)$$

où L est la longueur de la poutre ; M , N sont respectivement le moment d'inertie, l'effort normal de la poutre dont les expressions sont données par :

$$M = EI\kappa = EIv'' \quad (4.7)$$

$$N = ES\varepsilon = ES \left(u' + \frac{1}{2}(v')^2 \right) \quad (4.8)$$

En introduisant (4.4) et (4.5) dans (4.6), on obtient :

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^L v''^2 dx + \frac{ES}{2} \int_0^L u'^2 dx + \frac{ES}{2} \int_0^L u'v'^2 dx + \frac{ES}{8} \int_0^L v'^4 dx \quad (4.9)$$

où E , S et I sont respectivement le module d'Young, l'aire et le moment d'inertie de la section.

L'énergie cinétique T a la forme suivante :

$$T = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dx \quad (4.10)$$

où $\dot{u}$, $\dot{v}$ sont les dérivées temporelles des déplacements et ρ est la masse volumique de la poutre.

4.2.3 Formulation variationnelle faible - Equation de vibration

Utilisant le principe de Hamilton, la formulation variationnelle faible du problème s'écrit :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\rho S \ddot{u} \delta u + \rho S \ddot{v} \delta v + ES u' \delta u' + EI v'' \delta v'' + ES u' v' \delta v' + \frac{ES}{2} v'^2 \delta u' + \frac{ES}{2} v'^3 \delta v' \right] dx dt = 0 \quad (4.11)$$

Puisque la formulation ci-dessus est vérifiée pour tout champ de déplacements virtuels δu et δv , deux équations sont obtenues :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\rho S \ddot{v} \delta v + EI v'' \delta v'' + ES u' v' \delta v' + \frac{ES}{2} v'^3 \delta v' \right] dx dt = 0 \quad (4.12)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\rho S \ddot{u} \delta u + ES u' \delta u' + \frac{ES}{2} v'^2 \delta u' \right] dx dt = 0 \quad (4.13)$$

Posons : $N = ES \left(u' + \frac{1}{2}(v')^2 \right)$, $M = EI v''$ et $T = EI v^{(3)}$ et effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta v \left\{ \rho S \ddot{v} + EI v^{(4)} - ES \left[\left(u' + \frac{1}{2}v'^2 \right) v'' + (u'' + v'v'') v' \right] \right\} dx dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left[(M \delta v')|_0^L + (T \delta v)|_0^L + (N v' \delta v)|_0^L \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta u \left[\rho S \ddot{u} - ES (u'' + v'v'') \right] dx dt + \int_{t_1}^{t_2} (N \delta u)|_0^L dt = 0 \quad (4.15)$$

Finalement, les équations d'équilibre régissant la vibration de la poutre mince s'écrivent :

$$\rho S \ddot{v} + EI v^{(4)} - ES \left[\left(u' + \frac{1}{2} v'^2 \right) v'' + (u'' + v' v'') v' \right] = 0 \quad (4.16)$$

$$\rho S \ddot{u} - ES (u'' + v' v'') = 0 \quad (4.17)$$

4.2.4 Discrétisation par éléments finis

La poutre est discrétisée en N_e éléments. Les déplacements d'un élément sont approchés par :

$$v^e(x, t) \simeq \sum_{i=1}^4 \phi_i(x) s_i(t) \quad (4.18)$$

$$u^e(x, t) \simeq \sum_{i=1}^2 \psi_i(x) w_i(t) \quad (4.19)$$

où $\phi_i(x)$ et $\psi_i(x)$ sont respectivement fonctions d'interpolation (linéaires et cubiques) associées au déplacement transverse (et rotation) et au déplacement axial. $s_i(t)$ et $w_i(t)$ sont respectivement des coordonnées généralisées associées au déplacement transverse et au déplacement axial ($s_i(t)$ contient le déplacement transverse $p_i(t)$ et la rotation $\theta_i(t)$).

Les fonctions d'interpolation sont introduites dans la formulation variationnelle faible donnée dans la section précédente. Les matrices élémentaires de masse, de rigidité linéaire, de rigidité quadratique et de rigidité cubique associées au déplacement transverse (noté par l'indice $(.)^v$) et déplacement axial (noté par l'indice $(.)^u$) sont écrites pour l'élément e :

$$M_{ij}^v = \rho S \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad (4.20)$$

$$M_{ij}^u = \rho S \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (4.21)$$

$$K_{ij}^v = EI \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx \quad (4.22)$$

$$K_{ij}^u = ES \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx \quad (4.23)$$

$$K_{2,i}^v = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^2 G_{2,ijk}^v s_j w_k \quad (4.24)$$

$$\text{avec } G_{2,ijk}^v = ES \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i'(x) \phi_j'(x) \psi_k'(x) dx \quad (4.25)$$

$$K_{2,i}^u = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 G_{2,ijk}^u s_j s_k \quad (4.26)$$

$$\text{avec } G_{2,ijk}^u = \frac{ES}{2} \int_{x_e}^{x_{e+1}} \psi_i'(x) \phi_j'(x) \phi_k'(x) dx \quad (4.27)$$

$$K_{3,i}^v = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 G_{3,ijkl}^v s_j s_k s_l \quad (4.28)$$

$$\text{avec } G_{3,ijkl}^v = \frac{ES}{2} \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i'(x) \phi_j'(x) \phi_k'(x) \phi_l'(x) dx \quad (4.29)$$

Ensuite, après avoir assemblé les éléments et tenu compte des conditions aux limites, on obtient :

$$[\mathbf{M}^v]\ddot{\mathbf{s}} + [\mathbf{K}^v]\mathbf{s} + \mathbf{K}_2^v(\mathbf{s}, \mathbf{w}) + \mathbf{K}_3^v(\mathbf{s}) = 0 \quad (4.30)$$

$$[\mathbf{M}^u]\ddot{\mathbf{w}} + [\mathbf{K}^u]\mathbf{w} + \mathbf{K}_2^u(\mathbf{s}) = 0 \quad (4.31)$$

où :

$\mathbf{s}$ et $\mathbf{w}$ sont les coordonnées généralisées. Pour rappel, $\mathbf{s}$ contient des déplacements transverses p_i et des angles de rotation Θ_i .

$[\mathbf{M}^v]$, $[\mathbf{M}^u]$, $[\mathbf{K}^v]$ et $[\mathbf{K}^u]$ sont respectivement les matrices de masse et de rigidité linéaire associées au déplacement transverse et déplacement axial.

$\mathbf{K}_2^v(\mathbf{s}, \mathbf{w})$ et $\mathbf{K}_3^v(\mathbf{s})$ sont respectivement les vecteurs caractérisant les non linéarités quadratiques et cubiques associées au déplacement transverse.

$\mathbf{K}_2^u(\mathbf{s})$ est le vecteur caractérisant les non linéarités quadratiques associées au déplacement axial.

En regroupant les vecteurs des coordonnées généralisées en un seul vecteur $\mathbf{U}$ tel que :

$$\mathbf{U} = [[p_1 \quad \Theta_1 \quad w_1] \quad \dots \quad [p_{N_e+1} \quad \Theta_{N_e+1} \quad w_{N_e+1}]]^T \quad (4.32)$$

on obtient une seule équation de vibration :

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{U}} + [\mathbf{K}]\mathbf{U} + \mathbf{K}_2(\mathbf{U}) + \mathbf{K}_3(\mathbf{U}) = 0 \quad (4.33)$$

Elle est habituellement projetée sur une base modale linéaire et tronquée :

$$\mathbf{U} = [\Phi]\mathbf{q} \quad (4.34)$$

où $[\Phi]$ est la matrice de dimension $3(N_e - 1) \times n$ (avec $n < 3(N_e - 1)$), contenant des vecteurs propres réels qui sont obtenus en résolvant le problème linéaire associé : $\{-\omega_i^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]\} \Phi_i = 0$.

La représentation en coordonnées modales linéaires de l'équation de vibrations ci-dessus s'exprime donc :

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ijk} q_j q_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijkl} q_j q_k q_l = 0 \quad \text{avec } i = 1..n. \quad (4.35)$$

où ω_i est la pulsation propre linéaire. a_{ijk} et b_{ijkl} sont des coefficients caractérisant respectivement les non linéarités quadratiques et cubiques.

Finalement, on peut faire des remarques suivantes :

- Les non linéarités géométriques sont fonctions quadratiques et cubiques des déplacements.
- Le nombre d'éléments N_e est choisi de manière que les premières fréquences propres linéaires restent stables lorsque N_e est augmenté.
- Les amortissements peuvent être introduits dans le modèle par l'intermédiaire de coefficients d'amortissements modaux identifiés, grâce à l'analyse en ondelettes, à partir des données expérimentales.

4.2.5 Résolution du problème non linéaire en dynamique

En ce qui concerne une classe particulière des solutions (solutions périodiques), les méthodes de résolution utilisées se divisent en quatre groupes, comme présenté au premier chapitre :

- Méthodes de perturbation,
- Méthodes de type Galerkin,
- Techniques asymptotiques,
- Méthode de tir.

Certaines de ces méthodes permettent de réécrire les équations de vibration sous une forme compatible avec la résolution par des techniques de continuation, par exemple la méthode de harmonique balance ou la méthode de tir. L'utilisation de ces méthodes a été présentée au chapitre 2.

Il est important de noter que la plupart des méthodes de calcul des solutions périodiques ne s'applique qu'à des systèmes non-amortis. Comme les amortissements modaux sont identifiés à partir des réponses expérimentales à l'aide de l'analyse en ondelettes, ils peuvent être introduits dans les équations de vibration. La méthode de résolution numérique de Runge-Kutta permet ensuite de calculer les réponses amorties.

4.2.6 Validation

Dans cette section, on étudie la vibration non linéaire de la poutre mince en acier, bi-encastée. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont : $h \times b = 0,003 \times 0,04m^2$, $L = 1,7m$, $E = 2,1.10^{11}Pa$ et $\rho = 7850kg/m^3$.

Le nombre d'éléments de discrétisation de la poutre est déterminé en calculant la variation des erreurs relatives des huit premières fréquences propres linéaires (par rapport aux valeurs théoriques associées) en fonction du nombre d'éléments N_e (voir la figure 4.1). Avec $N_e = 40$, l'erreur relative maximale pour la huitième fréquence propre linéaire est 0,0136%.

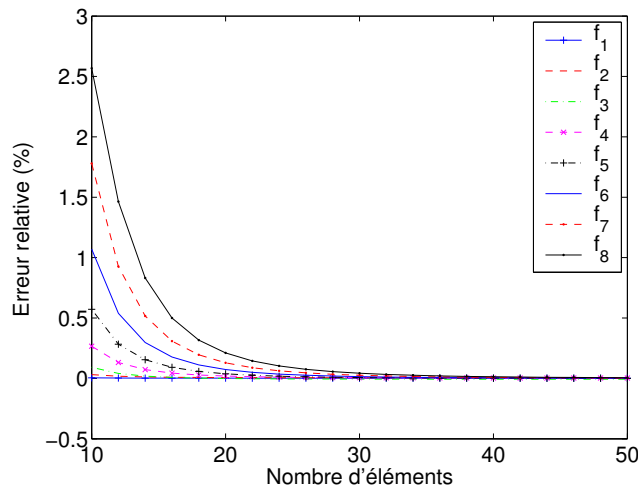


FIGURE 4.1. Variation de huit premières fréquences linéaires en fonction du nombre d'éléments

La k -ième fréquence propre linéaire théorique est calculée par la formule suivante :

$$f_k^{theo} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda_k}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (4.36)$$

où λ_k est la solution de l'équation transcendante : $\cos \lambda_k \cosh \lambda_k = 1$. Il prend des valeurs suivantes : $\lambda_1 = 4,730$, $\lambda_2 = 7,853$, $\lambda_k \simeq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ pour $k \geq 3$.

Les valeurs des fréquences propres linéaires théoriques (f_{theo}) et celles calculées à partir du modèle des éléments finis (f_{EF}) avec un nombre d'éléments égal à $N_e = 40$, sont données dans le tableau 4.1.

TABLEAU 4.1. *Fréquences propres linéaires pour les huit premiers modes*

Modes	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_{theo}(Hz)$	5,5365	15,2611	29,9216	49,4572	73,8823	103,1910	137,3844	176,4627
$f_{EF}(Hz)$	5,5366	15,2620	29,9204	49,4625	73,8959	103,2278	137,4709	176,6445
Erreur(%)	0,0017	0,0053	-0,0067	0,0034	0,0024	0,0047	0,0083	0,0136

Dans la section qui suit, deux types de solutions de l'équation de vibration de la poutre vont être calculés :

- Les réponses amorties, calculées par la méthode de résolution numérique de Runge-Kutta, servent à une comparaison avec des réponses réelles grâce à l'analyse en ondelettes.
- Les réponses périodiques, calculées par les méthodes présentées dans le chapitre 2.

4.2.6.1 Calcul des réponses amorties

Les amortissements modaux identifiés par les techniques des ondelettes sont introduits dans l'équation de vibration :

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2q_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ijk}q_jq_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijkl}q_jq_kq_l = 0 \quad \text{avec } i = 1..n. \quad (4.37)$$

Puisque seuls les huit premiers modes sont identifiés à partir des données expérimentales, le nombre de modes propres retenus est donc choisi égal à $n = 8$ inférieur à la taille du système qui, avant la projection, est égale à $3(N_e - 1) = 117DDLs$. Ensuite, l'équation de vibration est résolue par la méthode numérique de Runge-Kutta avec les paramètres d'échantillonnage : période $\Delta t = 0,001s < 1/2/f_{max} = 0,0028s$ et durée d'enregistrement $L_t = 8s$.

Dans le cas expérimental, la poutre est excitée par un choc avec deux amplitudes différentes. On a observé un comportement quasiment "linéaire" pour $F = 8,1N$, tandis que pour $F = 20,8N$, la poutre présente un comportement non linéaire. Par conséquent, pour valider le modèle de poutre, un choc avec ces deux amplitudes est aussi appliqué. Une fois les réponses temporelles calculées, l'analyse par ondelettes est utilisée pour identifier les caractéristiques dynamiques du système.

i) Premier cas : $F = 8,1N$ en $x_0 = 0,4m$

Les valeurs des amortissements sont prises à partir du tableau 3.10. La comparaison entre les fréquences instantanées identifiées (expérimentales et numériques) est donnée sur la figure 4.2. On constate que : 1) la fréquence est quasiment indépendante du temps, 2) la fréquence expérimentale est un peu plus petite que la fréquence numérique. Cependant, l'erreur relative

entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques reste très faible (environ 1%). Ce résultat est satisfaisant car l'essai dynamique est en réalité assez délicat. Il y a beaucoup de facteurs qui influencent la précision des résultats d'identification : la fixation de la structure n'est pas parfaite, les paramètres géométriques et physiques de la structure sont mal mesurés, etc.

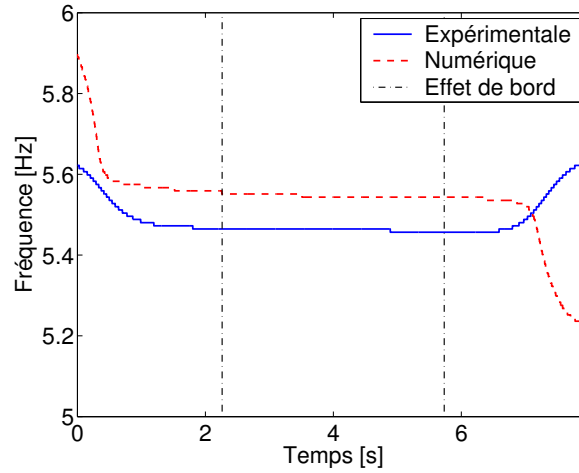


FIGURE 4.2. Le cas de $F = 8,1N$: Fréquence instantanée du premier mode

Les résultats d'identification sont donnés dans le tableau 4.2. Ils sont très proches des valeurs théoriques avec des erreurs relatives très faibles (de l'ordre de 0,2%).

ii) Deuxième cas : $F = 20,8N$ en $x_0 = 0,7m$

On introduit les coefficients d'amortissement correspondant aux mesures effectuées avec la force $F = 20,8N$ (les valeurs sont données dans le tableau 3.23). Puisque le mode 2 dans le cas des signaux expérimentaux n'a pas pu être identifié, on prend la valeur correspondant au cas $F = 8,1N$.

La figure 4.3.1 montre les fréquences instantanées du 1^{er} mode pour deux types de signaux : expérimental et numérique. Les deux courbes ont une même allure et l'écart entre elles reste assez faible (environ 1,5%). Les résultats donnés dans le tableau 4.2 sont satisfaisants avec une erreur maximale de 0,4%.

Comme on a abordé dans le chapitre précédent, en se fondant sur les rapports entre les fréquences, les fréquences identifiées à partir des données expérimentales permettent de détecter les surharmoniques. On voit apparaître, dans le cas expérimental, des surharmoniques du 1^{er} et 2^e mode (voir les figures 3.39). En revanche, dans le cas numérique, les surharmoniques des deux premiers modes ne peuvent pas être détectées car il y a des interactions entre ces modes et les autres. De façon plus détaillée, en déterminant les rapports entre les fréquences propres linéaires, on obtient des relations suivantes : $f_2 \simeq 3f_1$, $f_3 \simeq 2f_2$. Seules les surharmoniques du 3^e mode sont détectées. Les résonances de type 2 : 1 et 3 : 1 entre le mode 3 et ses surharmoniques sont observées sur la figure 4.3.2 où sont tracés les rapports entre les fréquences instantanées.

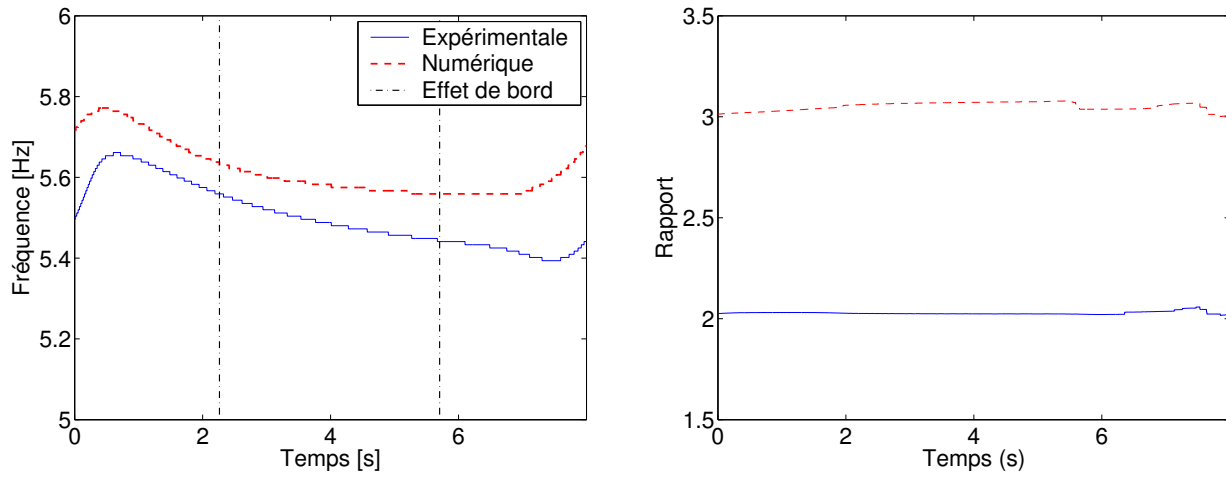


FIGURE 4.3. Le cas de $F = 20,8N$: 1(gauche)-Fréquence instantanée du premier mode, 2(droite)-Rapports entre les fréquences des surharmoniques et celle du 3^e mode.

TABLEAU 4.2. Fréquences et amortissements identifiés pour deux cas de forces

Modes	$F = 8, 1N$			$F = 20, 8N$		
	Fréquences (Hz)		Amort. (%)	Fréquences (Hz)		Amort. (%)
	(j)	f_j	Erreur (%)	ξ_j	f_j	Erreur (%)
1	5, 5433	0, 121	0, 361	5, 5142	0, 402	0, 4317
2	15, 2921	0, 203	0, 664	15, 2921	0, 203	0, 6592
3	29, 9395	0, 063	0, 175	29, 9395	0, 063	0, 2126
4	49, 4749	0, 036	0, 247	49, 5352	0, 157	0, 2787
5	73, 9107	0, 039	0, 294	73, 9107	0, 039	0, 3115
6	103, 2217	0, 006	0, 274	103, 3487	0, 153	0, 3343
7	137, 4217	0, 027	0, 193	137, 5000	0, 084	0, 1552
8	176, 5212	0, 033	0, 153	176, 6407	0, 101	0, 1633

4.2.6.2 Calcul des réponses périodiques

Dans cette section, les réponses périodiques de la poutre vont être calculées à l'aide de la procédure proposée dans le chapitre 2 :

- ★ Méthode de tir + Continuation,
- ★ Méthode de balance harmonique + Continuation,
- ★ Approche de Shaw et Pierre,
- ★ Approche de Bellizzi et Bouc + Continuation,
- ★ Approche de Bellizzi et Bouc.

On s'intéresse ici au calcul du premier mode non linéaire. En principe, le nombre de modes propres linéaires retenus dans la base modale doit être très grand. Cela entraîne un temps de calcul très important. Pour valider la procédure de calcul des MNNs présentée dans le chapitre 2 avec un temps de calcul "raisonnable", n est choisi égal à 3.

a) Méthode de tir + Continuation (notée par *Shooting+C*)

Les paramètres utilisés dans la méthode de *Shooting+C* sont :

- la longueur de l'arc : $\Delta\alpha = 10^{-4}$,
- les erreurs de calcul : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10^{-9}$.

La méthode démarre au point correspondant au système linéaire associé ($\omega_1/\omega_{1,lin} = 1$, $\mathbf{q} = 0$). En se fondant sur la valeur du déterminant de la matrice Jacobienne de $\mathbf{G}$, *i.e* $\det|\mathbf{G}_a|$, un point de limite (point A) où le déterminant est nul, *i.e* $\det|\mathbf{G}_a| = 0$, est détecté (il est repéré sur la figure 4.4).

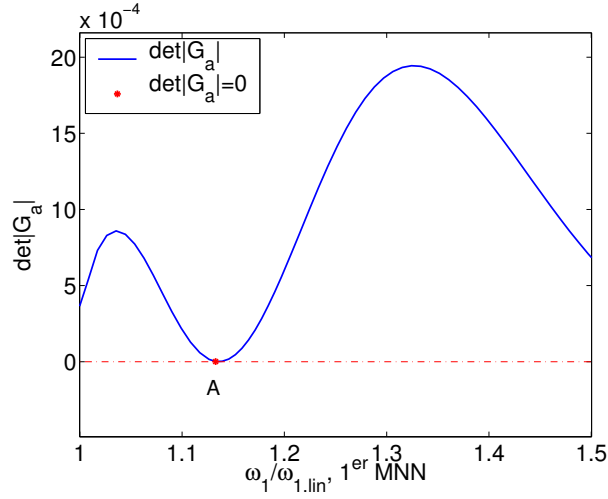


FIGURE 4.4. $\det|\mathbf{G}_a|$ en fonction du rapport $\omega_1/\omega_{1,lin}$.

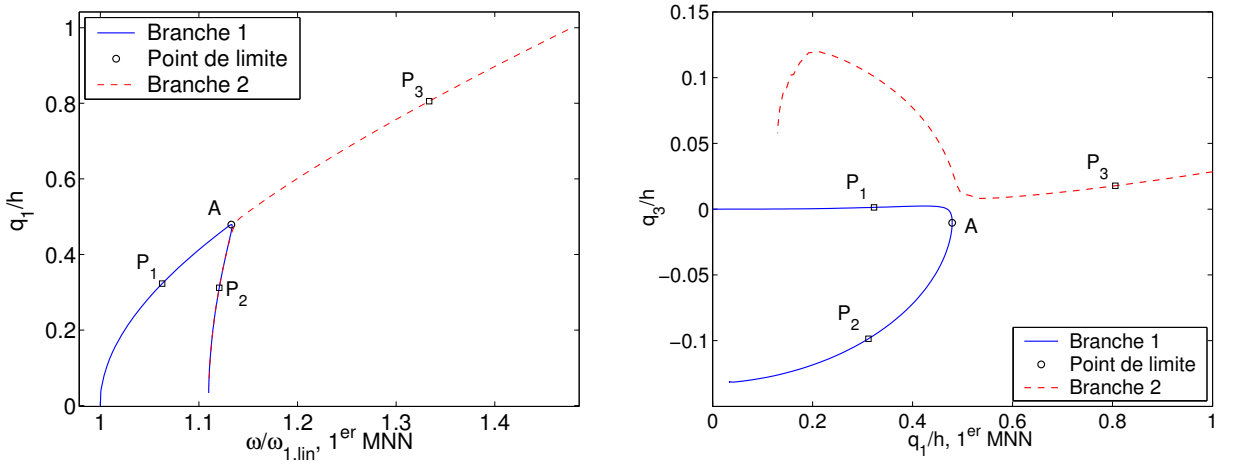


FIGURE 4.5. Premier MNN, calculé par *Shooting+C* : 1(Gauche) q_1/h fonction de $\omega_1/\omega_{1,lin}$ ($\omega_{1,lin} = 34,7876 \text{ rad/s}$), 2(Droite) q_3/h en fonction de q_1/h .

Les figures 4.5.1 et 4.5.2 montrent respectivement la variation du rapport $\omega_1/\omega_{1,lin}$ ($\omega_{1,lin} = 34,7876 \text{ rad/s}$) et celle de l'amplitude du 3^e mode divisée par l'épaisseur de la poutre (q_3/h) en fonction de l'amplitude du 1^{er} mode divisée par l'épaisseur de la poutre (q_1/h). Sur la figure 4.5.2, on constate qu'il y a deux branches séparées : branche 1 et branche 2. Pour passer de l'une à l'autre, on introduit une petite perturbation $\Delta \mathbf{G} = \tau \mathbf{d}$ ($\tau = 10^{-5}$ et $|\mathbf{d}| = 1$) dans l'équation algébrique non linéaire (2.35).

Les déformées de la poutre associées aux trois points P_1 , P_2 et P_3 (définis en figure 4.5) sont données sur la figure 4.6. Il est évident que les déformées correspondant aux points P_1 et P_3 caractérisent le 1^{er} mode. En revanche, le point P_2 se trouve sur une partie de la branche 1 (après le point de limite A) caractérisant une résonance interne entre le mode 1 et 3. Le type de cette résonance peut être 1 : 5 car le rapport $\omega_{3,lin}/\omega_{1,lin} \simeq 4,78$.

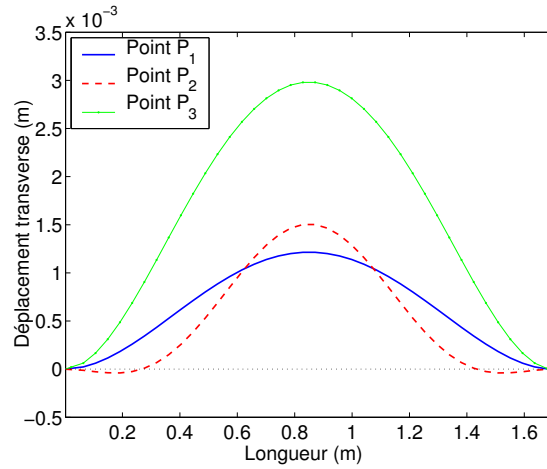


FIGURE 4.6. Déformées de la poutre associées aux points P_1 , P_2 et P_3 indiqués sur la figure 4.5.

Les surfaces invariantes associées à la branche 1 de solution (voir la figure 4.5.2) sont présentées sur les figures 4.7.1 et 4.7.2. Les réponses temporelles, calculées avec les conditions initiales associées aux trois points P_1 , P_2 et P_3 , sont présentées sur la figure 4.8.

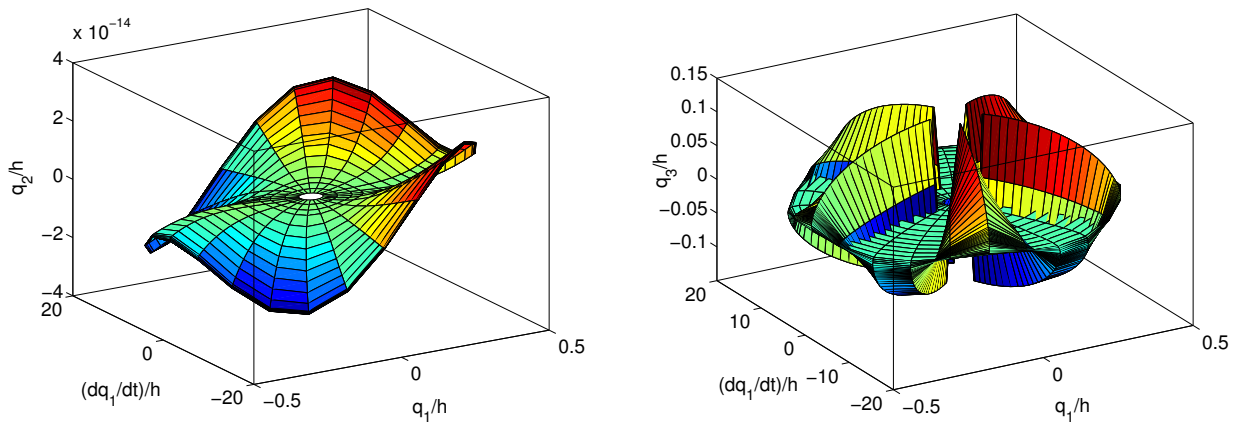


FIGURE 4.7. Surfaces invariantes du 1^{er} MNN associées aux : 1(Gauche) 2^e coordonnée modale, 2(Gauche) 3^e coordonnée modale (associée à la branche 1 de solution).

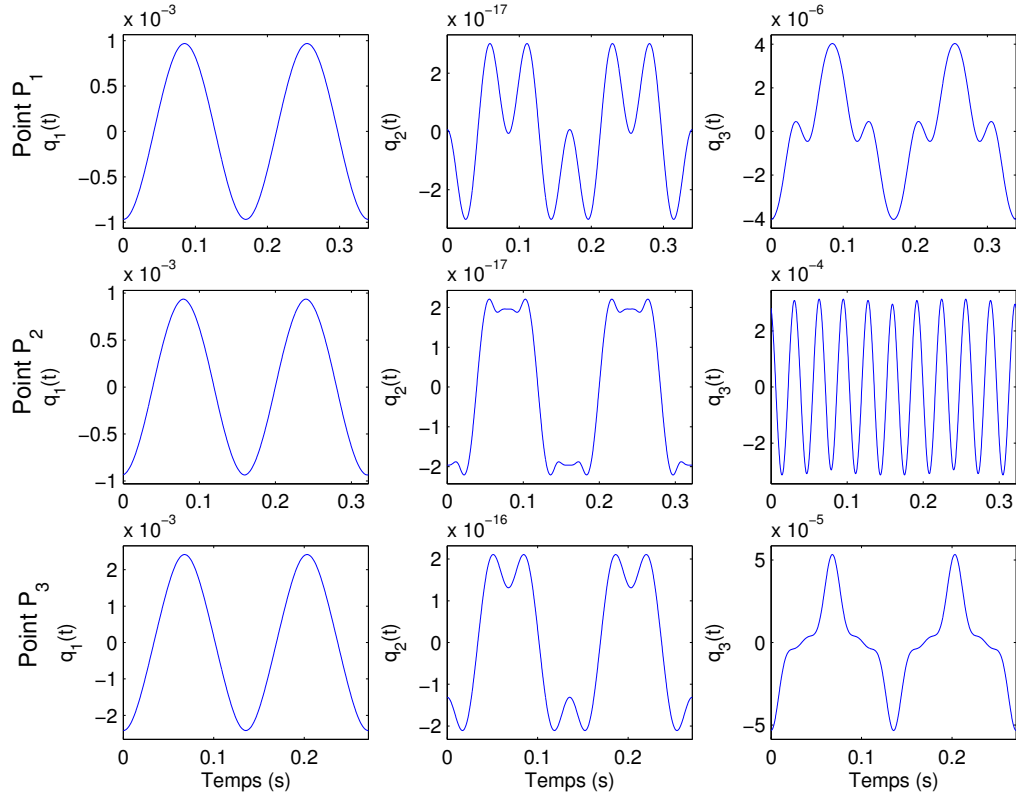


FIGURE 4.8. Réponses temporelles associées aux : (Haut en bas)-points P_1 , P_2 et P_3 . (Gauche à droite)-composantes $q_1(t)$, $q_2(t)$ et $q_3(t)$.

b) Méthode de balance harmonique + Continuation (notée par HBM+C)

Comme la solution calculée par la méthode *Shooting+C* est considérée comme une “référence”, elle sert à déterminer le nombre d’harmoniques (n_0) nécessaire utilisé dans la méthode de balance harmonique combinée avec la technique de continuation.

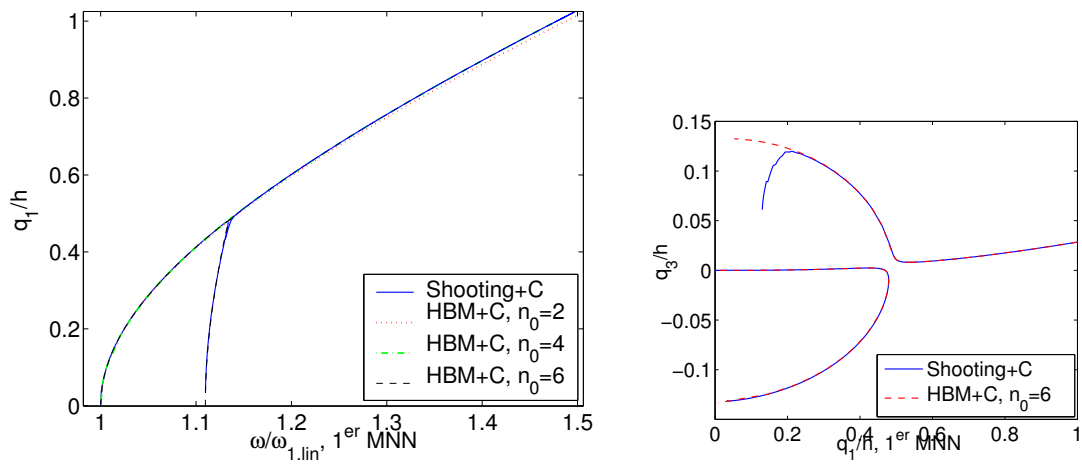


FIGURE 4.9. Premier MNN, calculé par HBM+C : 1(Gauche) q_1/h en fonction de $\omega_1/\omega_{1,lin}$, 2(Droite) q_3/h en fonction de q_1/h .

La comparaison entre les résultats calculés par *HBM+C* et ceux calculés par *Shooting+C* est faite en se fondant sur les deux relations : 1) q_1/h en fonction de $\omega_1/\omega_{1,lin}$ (figure 4.9.1), 2) q_3/h (ou q_2/h) en fonction de q_1/h (figure 4.9.2). En faisant varier le nombre d'harmoniques n_0 dans le développement de la solution en série de Fourier, la convergence de la méthode de *HBM+C*, par rapport aux résultats obtenus par *Shooting+C*, est obtenue pour $n_0 = 6$. Cependant, pour une partie du début de la branche 2 (voir la figure 4.9.2), on constate que la méthode de *HBM+C* ne donne pas des résultats "corrects", *i.e* ils sont différents de ceux obtenus par *Shooting+C*.

c) Approche de Shaw et Pierre (notée par Shaw & Pierre)

La convergence de cette approche dépend de deux paramètres : le nombre des fonctions polynômiales (N_a) et celui des fonctions harmoniques (N_ϕ). En se fondant sur les résultats obtenus par *HBM+C*, on choisit : $N_\phi = n_0 = 6$ et le bord supérieur de l'intervalle de l'amplitude du mode "maître" (mode 1) : $a_0 = 1,437 \cdot 10^{-3}$ (ou $a_0/h \simeq 0,479$), ce qui correspond à l'amplitude maximale de la branche 1 de solution.

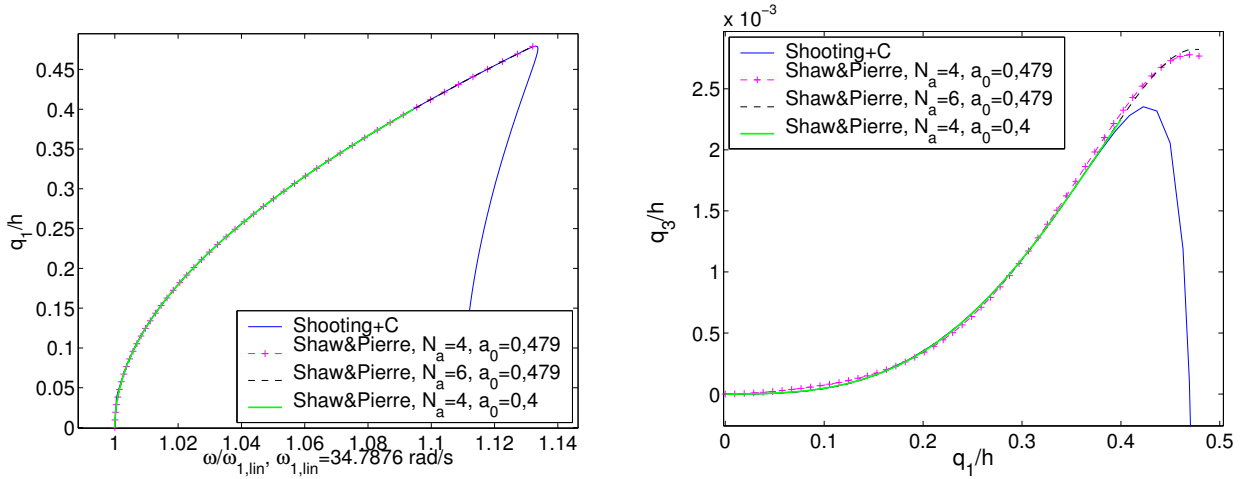


FIGURE 4.10. Approche de Shaw et Pierre : 1(Gauche) q_1/h en fonction de $\omega_1/\omega_{1,lin}$, 2(Droite) q_3/h en fonction de q_1/h .

Les figures 4.10.1 et 4.10.2 montrent respectivement les résultats obtenus en utilisant l'approche de Shaw et Pierre avec les différentes valeurs de N_a pour l'intervalle d'amplitude $a \in [0; 1,437 \cdot 10^{-3}]$. La relation entre q_1/h et $\omega_1/\omega_{1,lin}$ est tracée sur la figure 4.10.1. Une bonne cohérence entre les résultats obtenus par *Shooting+C* et ceux par *Shaw & Pierre* est observée. Pourtant, la convergence de l'approche de Shaw et Pierre en fonction de N_a est plus visible sur la figure 4.10.2 qui illustre la variation de q_3/h en fonction de q_1/h . On remarque que la courbe correspondant au cas de $N_a = 6$ ne coïncide que partiellement avec la courbe de "référence", *i.e* celle calculée par *Shooting+C*, au début pour $q_1/h \in [0; 0,4]$. Cela montre que la valeur de N_a doit être très élevée. Il est évident que lorsqu'on choisit : $a_0 = 1,2 \cdot 10^{-3}$ ($a_0/h = 0,4$ qui plus faible que la précédente), on obtient une bonne convergence avec $N_a = 4$ seulement (voir la figure 4.10.2).

En choisissant $N_a = 4$ et $a_0 = 1,2 \cdot 10^{-3}$ (ou $a_0/h = 0,4$), les surfaces invariantes associées aux 2^e et 3^e coordonnées modales, exprimées en fonction de l'amplitude a et de la phase ϕ , sont calculées et tracées sur les figures 4.11. On rappelle que : $P_2 = q_2$, $Q_2 = \dot{q}_2$, $P_3 = q_3$ et $Q_3 = \dot{q}_3$.

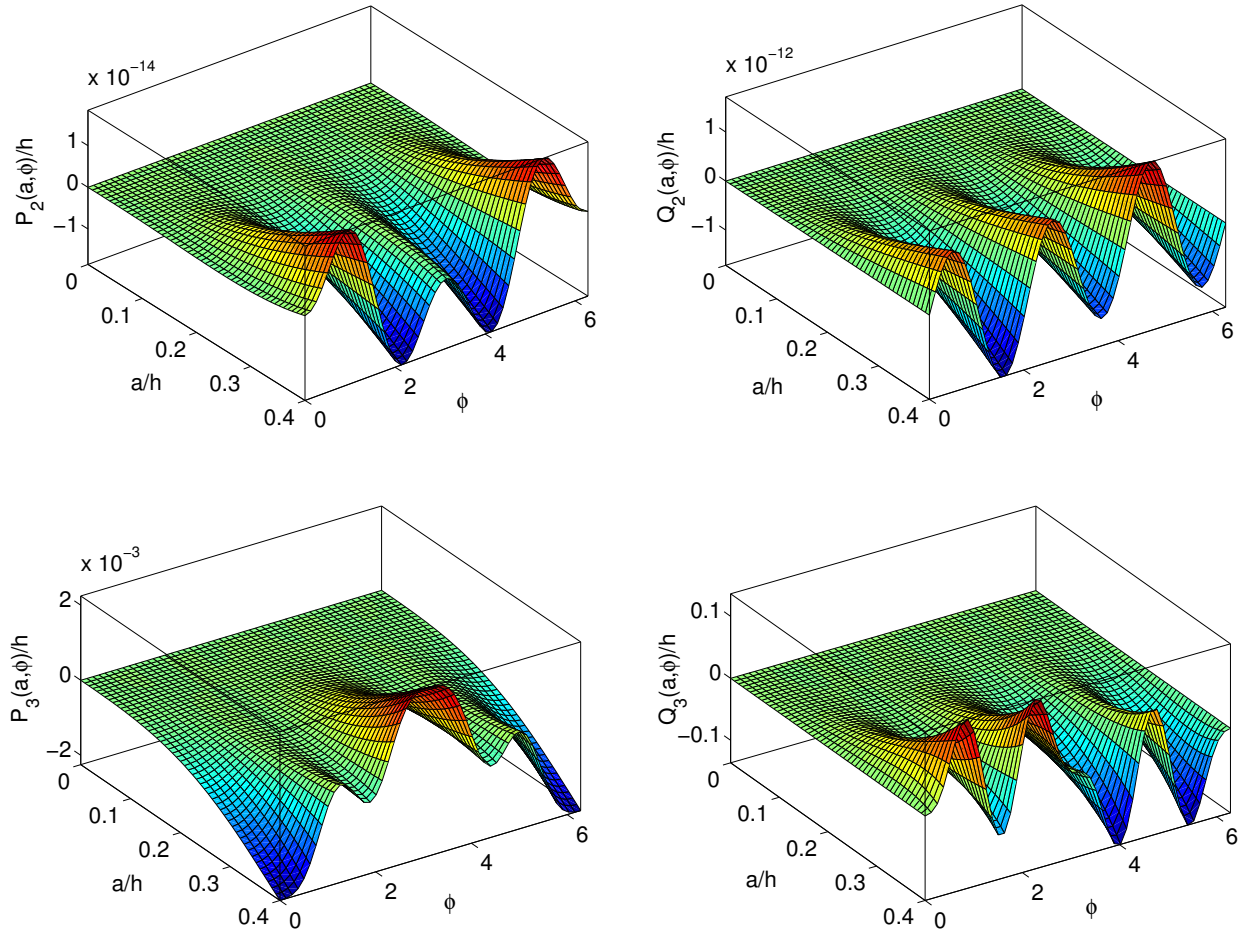


FIGURE 4.11. Surfaces invariantes calculées par l'approche de Shaw et Pierre : (En haut) $P_2(a, \phi)$ et $Q_2(a, \phi)$, (En bas) $P_3(a, \phi)$ et $Q_3(a, \phi)$.

d) Approche de Bellizzi et Bouc + Continuation (notée par *Bellizzi+C*)

A partir des résultats obtenus par la méthode *HBM+C*, on déduit : $m = n_0/2 = 3$ qui, on le rappelle, est le nombre de termes dans le développement en séries de Fourier des solutions dans l'approche de Bouc et Bellizzi. On a choisi dans cette approche, l'amplitude modale b comme paramètre de bifurcation. Cependant, sur les figures 4.12.1 et 4.12.2 où sont tracées respectivement les relations : 1) q_1/h en fonction de $\omega_1/\omega_{1,lin}$, 2) q_3/h en fonction de q_1/h , on constate qu'une seule partie des courbes calculées avec $m = 3$ est cohérente avec les courbes de "référence". Il est donc nécessaire d'augmenter la valeur de m pour obtenir une convergence de l'approche *Bellizzi+C*. En effet, plus la valeur de m est élevée, plus les résultats obtenus sont "corrects". Pourtant, le temps de calcul augmente d'autant plus grand que la valeur de m . Même si la valeur de m est élevée ($m = 16$), la différence entre une partie des courbes calculées par *Bellizzi+C* et les courbes de "référence", est observée sur les figures 4.12.1 et 4.12.2.

Pour le cas de $m = 16$, la figure 4.13 montre la relation entre l'amplitude de la 1^{ère} coordonnée modale et le paramètre de bifurcation b (divisée par l'épaisseur h de la poutre). Les figures 4.14 et 4.15 illustrent respectivement la fréquence $\Omega_1(a, \phi)$ et les trois composantes du vecteur modal $\Psi(a, \phi)$ correspondant à la branche 1 de solution.

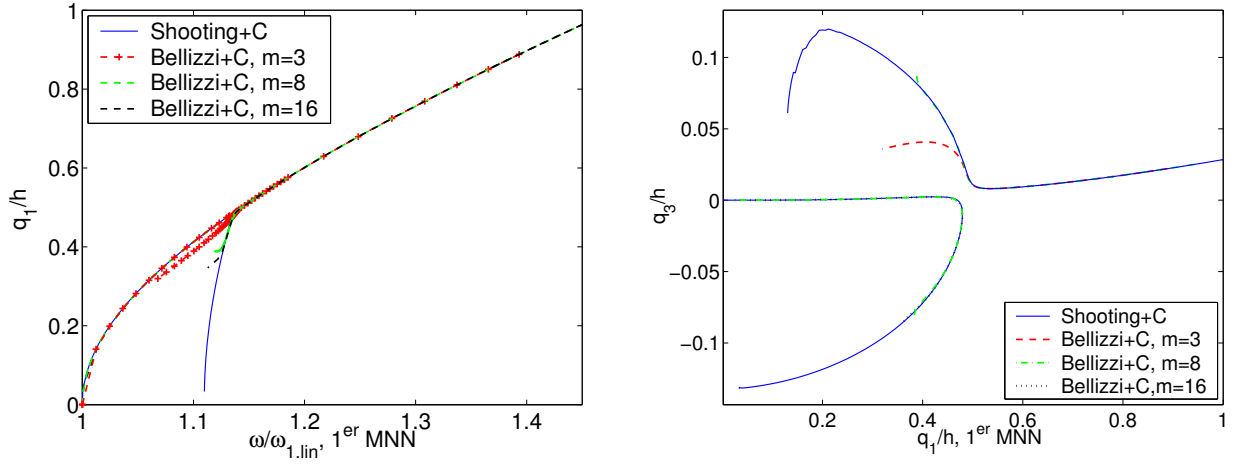


FIGURE 4.12. Premier MNN, calculé par Bellizzi+C : 1(Gauche) q_1/h en fonction de $\omega_1/\omega_{1,lin}$, 2(Droite) q_3/h en fonction de q_1/h .

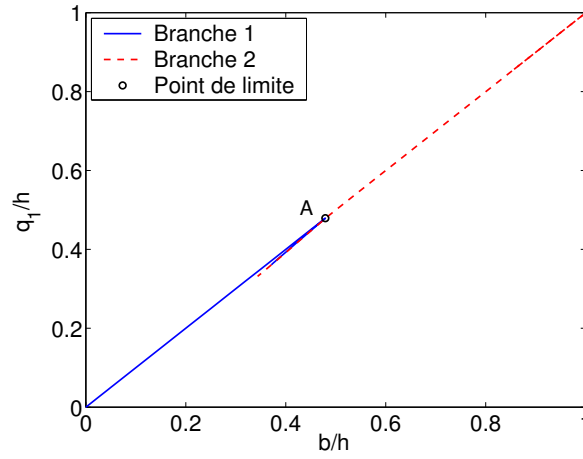


FIGURE 4.13. Premier MNN, calculé par Bellizzi+C : q_1/h en fonction de b/h .

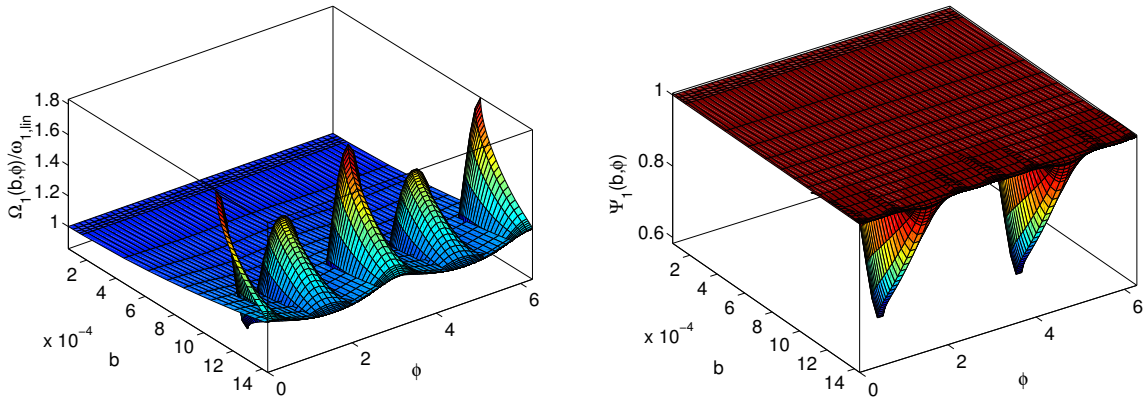


FIGURE 4.14. Premier MNN, calculé par Bellizzi+C : 1(Gauche) $\Omega_1(b, \phi)/\omega_{1,lin}$, 2(Droite) $\Psi_1(b, \phi)$ (associé à la branche 1 de solution).

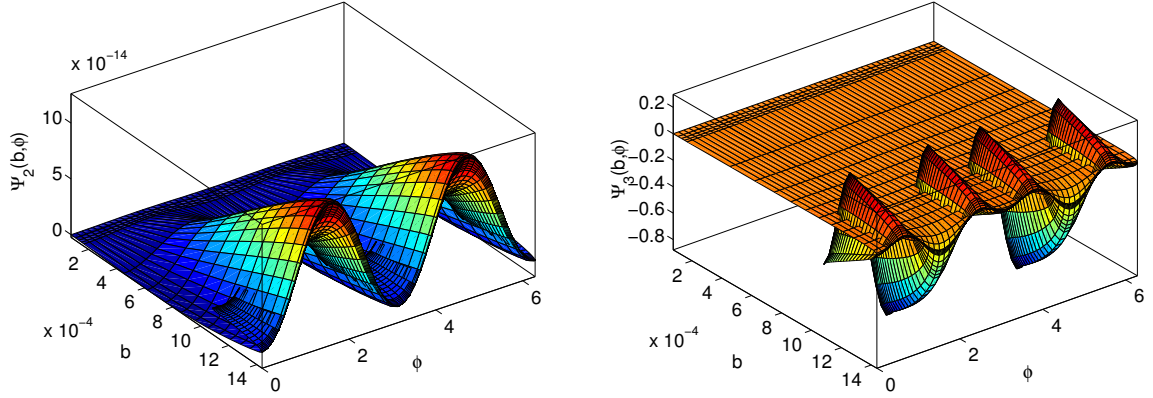


FIGURE 4.15. Premier MNN, calculé par Bellizzi+C : 1(Gauche) $\Psi_2(b, \phi)$, 2(Droite) $\Psi_3(b, \phi)$ (associé à la branche 1 de solution).

4.3 Etude statique d'une poutre mince d'Euler-Bernoulli soumise à des déplacements imposés

On considère le cas d'une poutre de longueur L , encastree à une extrémité (en $x = 0$) et soumise à des déplacements imposés à l'autre extrémité (en $x = L$). Les conditions aux limites sont alors :

$$\begin{aligned} v(0) &= v'(0) = u(0) = 0 \\ v(L) &= v_L; \quad v'(L) = \theta_L; \quad u(L) = u_L \end{aligned} \quad (4.38)$$

Dans le cas statique, les termes associés aux dérivées temporelles de u et v sont négligés, les équations d'équilibre (4.16) et (4.17) deviennent :

$$EIv^{(4)} - ES \left[\left(u' + \frac{1}{2}v'^2 \right) v'' + (u'' + v'v'') v' \right] = 0 \quad (4.39)$$

$$-ES (u'' + v'v'') = 0 \quad (4.40)$$

En introduisant (4.40) dans (4.42), on a :

$$v^{(4)} - \frac{S}{I} \left(u' + \frac{1}{2}v'^2 \right) v'' = 0 \quad (4.41)$$

$$u'' + v'v'' = 0 \quad (4.42)$$

4.3.1 Solution analytique approchée

Lorsque les déplacements imposés restent "petits", les solutions des équations ci-dessus peuvent être approchées par :

$$v \simeq v_{lin} + v_1 \quad (4.43)$$

$$u \simeq u_{lin} + u_1 \quad (4.44)$$

avec les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} u'_{lin} + u'_1 &= O(\varepsilon) \\ v''_1 &= O(\varepsilon) \\ v'_{lin} &= O(\varepsilon^p) \quad \text{avec } p \geq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Le système d'équations linéaire associé s'écrit :

$$\begin{cases} EI v_{lin}^{(4)} &= 0 \\ u_{lin}'' &= 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

Il est résolu avec les conditions aux limites données ci-dessus. Ses solutions peuvent être facilement calculées :

$$v_{lin}(x) = \frac{x^3 - x^2 L}{L^2} \theta_L + \frac{3Lx^2 - 2x^3}{L^3} v_L = S_\theta(x) \theta_L + S_v(x) v_L \quad (4.47)$$

$$u_{lin}(x) = \frac{x}{L} u_L = S_u(x) u_L \quad (4.48)$$

où $S_u(x)$, $S_v(x)$, $S_\theta(x)$ sont des fonctions de relèvement statique associées au déplacement axial, au déplacement transverse et à la rotation de la section.

Les hypothèses sur les solutions données ci-dessus nous conduisent aux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$EI v_1^{(4)} - ES \left[u_{lin}' + u_1' + \frac{1}{2} (v_{lin}')^2 \right] v_{lin}'' = 0 \quad (4.49)$$

$$u_1'' + v_{lin}' v_{lin}'' = 0 \quad (4.50)$$

avec les conditions aux limites :

$$u_1(0) = v_1(0) = v_1'(0) = u_1(L) = v_1(L) = v_1'(L) = 0 \quad (4.51)$$

Les solutions $v_1(x)$ et $u_1(x)$ sont déterminées sans difficulté. On en déduit les solutions générales $u(x)$ et $v(x)$:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{x}{L} u_L + \\ &\quad \frac{-18x^5 + 45Lx^4 - 30L^2x^3 + 3L^4x}{5L^6} v_L^2 + \frac{36x^5 - 75Lx^4 + 40L^2x^3 - L^4x}{10L^5} v_L \theta_L + \\ &\quad \frac{-27x^5 + 45Lx^4 - 20L^2x^3 + 2L^4x}{30L^4} \theta_L^2 \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{3Lx^2 - 2x^3}{L^3} v_L + \frac{x^3 - Lx^2}{L^2} \theta_L + \\ &\quad \frac{S}{I} \left[\frac{3x^5 - 5Lx^4 + L^2x^3 + L^3x^2}{60L^3} u_L \theta_L + \frac{-2x^5 + 5Lx^4 - 4L^2x^3 + L^3x^2}{20L^4} u_L v_L + \right. \\ &\quad \frac{3x^5 - 5Lx^4 + L^2x^3 + L^3x^2}{900L^2} \theta_L^3 + \frac{-7x^5 + 15Lx^4 - 9L^2x^3 + L^3x^2}{600L^3} \theta_L^2 v_L + \\ &\quad \left. \frac{8x^5 - 15Lx^4 + 6L^2x^3 + L^3x^2}{200L^4} \theta_L v_L^2 + \frac{-6x^5 + 15Lx^4 - 12L^2x^3 + 3L^3x^2}{100L^5} v_L^3 \right] \end{aligned} \quad (4.53)$$

Finalement, les efforts en $x = L$ sont :

$$\begin{aligned} \text{Effort normal} \quad N_L &= \frac{ES}{L} u_L + \frac{3ES}{5L^2} v_L^2 - \frac{ES}{10L} v_L \theta_L + \frac{ES}{15} \theta_L^2 \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \text{Effort tranchant} \quad T_L &= \frac{12EI}{L^3} v_L - \frac{6EI}{L^2} \theta_L - \frac{11ES}{10L} u_L \theta_L + \frac{6ES}{5L^2} u_L v_L + \frac{18ES}{25L^3} v_L^3 - \frac{39ES}{50L^2} v_L^2 \theta_L + \frac{19ES}{100L} v_L \theta_L^2 - \frac{11ES}{150} \theta_L^3 \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \text{Moment fléchissant} \quad M_L &= -\frac{6EI}{L^2} v_L + \frac{4EI}{L} \theta_L + \frac{2ES}{15} u_L \theta_L - \frac{ES}{10L} u_L v_L - \frac{3ES}{50L^2} v_L^3 + \frac{9ES}{100L} v_L^2 \theta_L - \frac{ES}{50} v_L \theta_L^2 - \frac{2ESL}{225} \theta_L^3 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Dans ces expressions ci-dessus, les efforts se composent de trois parties : une partie linéaire, une partie quadratique et une partie cubique, écrites pour chacun des efforts sur trois lignes différentes.

4.3.2 Solution semi-analytique

En posant $\kappa(x) = v''(x)$ et $\alpha(x) = u'(x) + \frac{1}{2} (v'(x))^2$, les équations (4.41) et (4.42) se réécrivent :

$$\kappa''(x) - \frac{S}{I} \alpha(x) \kappa(x) = 0 \quad (4.57)$$

$$\alpha'(x) = 0 \quad (4.58)$$

A partir de la 2e équation, on constate que $\alpha(x)$ est constant, i.e $\alpha(x) = \alpha(L) = \alpha$. Seul le cas d'effort normal ($N = ES\alpha$) positif, i.e $\alpha > 0$, est considéré.

Alors, l'équation (4.57) a une solution générale :

$$\kappa(x) = a_1 \cosh(\beta x) + a_2 \sinh(\beta x) = v''(x) \quad (4.59)$$

avec $\beta^2 = \frac{S\alpha}{I} > 0$ et a_1, a_2 sont des constantes déterminées à partir des conditions aux limites de la poutre.

L'intégration de cette équation conduit à :

$$v'(x) = \frac{1}{\beta} [a_1 \sinh(\beta x) + a_2 \cosh(\beta x)] + a_3 \quad (4.60)$$

Les conditions aux limites associées à la rotation des sections :

$$\begin{aligned} - \text{En } x = 0 : v'(0) &= \frac{a_2}{\beta} + a_3 = 0 \implies a_3 = -\frac{a_2}{\beta} \\ - \text{En } x = L : v'(L) &= \frac{1}{\beta} [a_1 \sinh(\beta L) + a_2 \cosh(\beta L)] + a_3 = \theta_L \end{aligned}$$

$$\implies a_1 = \frac{\beta \theta_L + a_2 [1 - \cosh(\beta L)]}{\sinh(\beta L)} \quad (4.61)$$

L'équation (4.60) devient :

$$v'(x) = \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\beta\theta_L + a_2 [1 - \cosh(\beta L)]}{\sinh(\beta L)} \sinh(\beta x) + a_2 [\cosh(\beta x) - 1] \right\} \quad (4.62)$$

En intégrant cette expression, on a :

$$v(x) = \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\{\beta\theta_L + a_2 [1 - \cosh(\beta L)]\} \cosh(\beta x)}{\sinh(\beta L)\beta} + a_2 \left[\frac{\sinh(\beta x)}{\beta} - x \right] \right\} + a_4 \quad (4.63)$$

Les conditions aux limites associées aux déplacements transverses sont :

$$\begin{aligned} - \text{En } x = 0 : v(0) &= \frac{\beta\theta_L + a_2 [1 - \cosh(\beta L)]}{\sinh(\beta L)\beta^2} + a_4 = 0 \implies a_4 = -\frac{\beta\theta_L + a_2 [1 - \cosh(\beta L)]}{\sinh(\beta L)\beta^2} \\ - \text{En } x = L : v(L) &= \frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{\beta\theta_L + a_2 [1 - \cosh(\beta L)]}{\sinh(\beta L)} [\cosh(\beta L) - 1] + a_2 \sinh(\beta L) \right\} - \frac{a_2 L}{\beta} = v_L \\ &\implies a_2 = \frac{\beta\theta_L [\cosh(\beta L) - 1] - \beta^2 v_L \sinh(\beta L)}{2 - 2 \cosh(\beta L) + L\beta \sinh(\beta L)} \end{aligned} \quad (4.64)$$

De plus :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{I\beta^2}{S} - \frac{1}{2} [v'(x)]^2 = \frac{I\beta^2}{S} - \frac{1}{2\beta^2} \{a_1 \sinh(\beta x) + a_2 [\cosh(\beta x) - 1]\}^2 = \\ &= \frac{I\beta^2}{S} - \frac{1}{2\beta^2} \left\{ \frac{a_1^2}{2} [\cosh(2\beta x) - 1] + a_1 a_2 [\sinh(2\beta x) - 2 \sinh(\beta x)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_2^2}{2} [3 - 4 \cosh(\beta x) + \cosh(2\beta x)] \right\} \end{aligned} \quad (4.65)$$

L'expression de $u(x)$ est obtenue par intégration de la relation précédente :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{I\beta^2}{S} x - \frac{1}{2\beta^2} \left\{ \frac{a_1^2}{2} \left[\frac{\sinh(2\beta x)}{2\beta} - x \right] + a_1 a_2 \left[\frac{\cosh(2\beta x)}{2\beta} - 2 \frac{\cosh(\beta x)}{\beta} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_2^2}{2} \left[3x - 4 \frac{\sinh(\beta x)}{\beta} + \frac{\sinh(2\beta x)}{2\beta} \right] \right\} + a_5 \end{aligned} \quad (4.66)$$

Les conditions aux limites associées aux déplacements axiaux sont :

$$\begin{aligned} - \text{En } x = 0 : u(0) &= \frac{3}{4\beta^3} a_1 a_2 + a_5 = 0 \\ &\implies a_5 = -\frac{3}{4\beta^3} a_1 a_2 \end{aligned} \quad (4.67)$$

- En $x = L$:

$$\begin{aligned} u(L) &= \frac{I\beta^2}{S} L - \frac{1}{2\beta^2} \left\{ \frac{a_1^2}{2} \left[\frac{\sinh(2\beta L)}{2\beta} - L \right] + a_1 a_2 \left[\frac{\cosh(2\beta L)}{2\beta} - 2 \frac{\cosh(\beta L)}{\beta} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_2^2}{2} \left[3L - 4 \frac{\sinh(\beta L)}{\beta} + \frac{\sinh(2\beta L)}{2\beta} \right] \right\} + a_5 = u_L \end{aligned} \quad (4.68)$$

En portant (4.61), (4.64), (4.67) dans (4.68), on obtient une équation dont l'inconnue est β . La solution de cette équation est obtenue par la minimisation au sens des moindres carrés.

4.3.3 Exemple numérique

Considérons seulement la lame mince du benchmark de Liège dont les caractéristiques sont données dans le tableau 3.19. La lame, encastree à une extrémité, subit un déplacement imposé à l'extrémité qui est liée avec la poutre : $v_L = 5,76 \cdot 10^{-4} m$, $\theta_L = -0,0011 rad$, $u_L = -1,9132 \cdot 10^{-6} m$.

La lame est modélisée par la méthode des éléments finis en la discrétisant en 40 éléments. Les déformées statiques sont déterminées par les trois méthodes : semi-analytique, approchée et éléments finis. Parmi elles, la méthode semi-analytique permet de déterminer numériquement des solutions “exactes”. Les figures 4.16 montrent les déformées statiques de la lame. On peut faire les remarques suivantes :

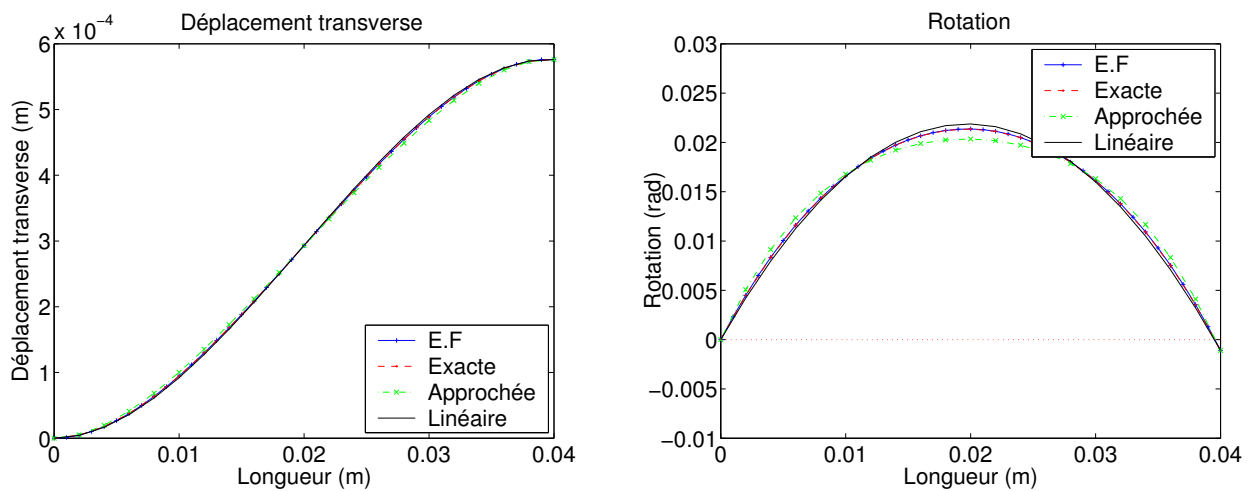


FIGURE 4.16. *Lame non linéaire en statique : 1) Déplacement transverse. 2) Rotation.*

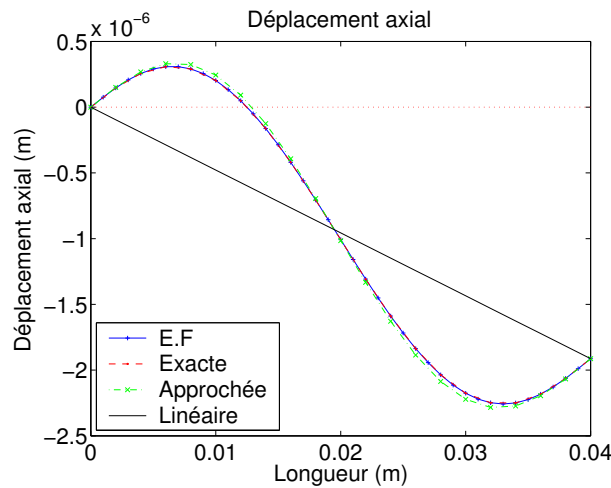


FIGURE 4.17. *Lame non linéaire en statique : Déplacement axial*

- Les solutions obtenues par la méthode des éléments finis (avec 40 éléments) coïncident avec les solutions “exactes”.
- Les différences entre les solutions approchées et les solutions “exactes” sont négligeables.

- Les solutions calculées en tenant compte uniquement de la partie linéaire (par rapport à v_L , θ_L et u_L) de deux expressions (4.52) et (4.53) sont aussi montrées sur ces figures. On constate que pour le déplacement transverse et la rotation, la partie linéaire est suffisante pour obtenir des résultats acceptables. Ce n'est plus le cas pour le déplacement axial (voir la figure 4.17). Pourtant, il est négligeable en valeur absolue devant le déplacement transverse ($|u| < 0,5 \cdot 10^{-6}$).

4.4 Remarques et Conclusions

Dans ce chapitre, on a étudié les vibrations libres d'une poutre mince avec des non linéarités géométriques. Les équations de vibrations ont été établies pour le cas de grands déplacements. Elles permettent de prendre en compte : 1) un couplage entre le déplacement axial et le déplacement transverse, 2) les non linéarités sont des fonctions polynômiales cubiques et quadratiques de déplacements. La validation du modèle a été faite sur une poutre mince en acier, bi-encastée qui a été élaborée et instrumentée au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées à Paris. La comparaison entre le modèle et la mesure expérimentale a été effectuée grâce à l'analyse en ondelettes. Les résultats obtenus sont satisfaisants. Utilisant les méthodes présentées au chapitre 2, les modes non linéaires de cette poutre ont été calculés en mettant l'accent sur les points caractéristiques du comportement non linéaire : la variation de l'amplitude en fonction de la fréquence, les résonances internes, etc.

La fin du chapitre a été consacrée à l'étude statique d'une poutre mince, encastée à une extrémité et soumise à des déplacements imposés à l'autre extrémité. Une solution analytique approchée a été proposée et comparée avec la solution "exacte" déterminée par une approche semi-analytique. Les résultats numériques obtenus sont satisfaisants, ce qui permettent de valider le modèle de poutre non linéaire géométrique en statique et aussi en vibrations.

Chapitre 5

Réduction de modèle en dynamique non linéaire

C’E CHAPITRE a pour objectif d’étendre la méthode de sous-structuration dynamique de Craig-Bampton linéaire au cas non linéaire. Grâce aux approches 1-mode et modes-multiples de Shaw et Pierre, les modèles réduits des sous-structures non linéaires sont calculés. L’assemblage des sous-structures se fait en supposant que le couplage entre elles est faible.

La méthode proposée est validée au travers des exemples numériques qui sont des systèmes discrets non linéaires à 5 et 6 DDLs. Le premier exemple utilise seulement l’approche 1-mode pour déterminer ses modèles réduits. Par contre, dans le deuxième exemple, la présence d’une résonance interne entre les modes de sous-structure avec interface fixe, suggère d’utiliser l’approche modes-multiples de Shaw et Pierre.

 PLAN DU CHAPITRE 5

5.1	Introduction	153
5.2	Principe de sous-structuration dynamique	153
5.3	Approches de Shaw et Pierre	154
5.3.1	Approche 1-mode	154
5.3.2	Approche modes-multiples	156
5.4	Méthode de sous-structuration non linéaire	157
5.4.1	Équation de vibration d'une sous-structure	157
5.4.2	Problème d'interface fixe	158
5.4.3	Problème de relèvement statique	159
5.4.4	Représentation du système dans la base linéaire de Craig-Bampton	160
5.4.5	Réduction de modèle avec l'approche de Shaw et Pierre	160
5.4.6	Assemblage des sous-structures	162
5.5	Validation	162
5.5.1	Exemple 1 : Système non linéaire à 5-DDLs	163
5.5.2	Exemple 2 : Système non linéaire à 6-DDLs	167
5.6	Remarques et Conclusions	171

5.1 Introduction

Compte tenu des études bibliographiques présentées dans le premier chapitre, nous avons choisi d'étudier plus en détail la technique de sous-structuration non linéaire de Apiwattannalungarn [3].

Notons que le choix du nombre de modes retenus pour les sous-structures avec interface fixe est très important et un choix maladroit peut conduire à des modèles réduits quelque peu "bancals". En effet, prenons l'exemple d'un système composé de deux sous-systèmes (1) et (2). Les pulsations propres linéaires des sous-systèmes linéaires associés sont par ordre croissant : $\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \dots$ et $\omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}, \dots$, respectivement. Supposons que la pulsation de couplage ω_C , générée par l'assemblage des sous-structures, satisfait aux conditions suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} \omega_1^{(1)} & < & \omega_2^{(1)} & < & \omega_C & < & \omega_3^{(1)} < \dots \\ & & \omega_1^{(2)} & < & \omega_C & < & \omega_2^{(2)} < \dots \end{array}$$

Le modèle réduit obtenu selon l'approche d'Apiwattannalungarn contient alors les premières pulsations propres linéaires de chaque sous-système, *i.e* $\omega_1^{(1)}$ et $\omega_1^{(2)}$, et la pulsation de couplage ω_C . On remarque que le modèle réduit ainsi obtenu est incomplet puisque la pulsation propre du 2^e mode associé au 1^{er} sous-système est absente du modèle réduit et ce modèle peut conduire à des résultats peu corrects.

Afin de remédier à ce défaut, on va étendre dans ce chapitre la méthode de réduction de modèle d'Apiwattannalungarn en utilisant l'approche *modes-multiples* de Shaw et Pierre. La première section présente le principe de la méthode de sous-structuration dynamique. La section suivante a pour but de rappeler les points essentiels dans l'approche 1-mode [71] et modes-multiples de Shaw et Pierre [17]. Ensuite, la version étendue de la méthode de Craig-Bampton dans le cas non linéaire est présentée dans la section 4. La méthode proposée sera appliquée aux exemples numériques qui sont des systèmes discrets non linéaires à 5 et 6 DDLs.

5.2 Principe de sous-structuration dynamique

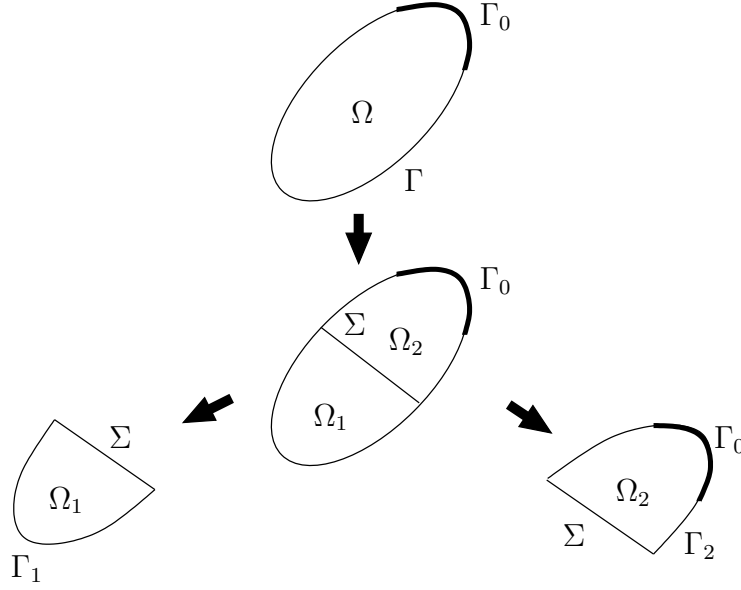
Soit Ω un domaine occupé par la structure $\mathbb{S}$. Il est décomposé en un nombre fini N_s de sous-domaines Ω_r , occupé par $\mathbb{S}_r$, avec $r = 1, \dots, N_s$. Soient $\partial\Omega_r$ et Σ_r , respectivement la frontière et l'interface de couplage de la sous-structure $\mathbb{S}_r$.

Le principe de la méthode de sous-structuration dynamique est illustré sur un exemple simple d'un système composé de deux sous-systèmes Ω_1 et Ω_2 (voir la figure 5.1).

Soit $\mathbf{u}^{(r)}(\mathbf{x}, t)$ ($r = 1, 2$), le champ de déplacement admissible en chaque point $\mathbf{x} \in \Omega_r$ de la sous-structure $\mathbb{S}_r$. La méthode de réduction de modèle de Craig-Bampton consiste à écrire $\mathbf{u}^{(r)}(\mathbf{x}, t)$ comme une somme directe de deux champs :

- un champ de déplacement admissible $\mathbf{u}_{\text{RS}}^{(r)}(\mathbf{x}, t)$ qui est la solution d'un problème de relèvement statique de la sous-structure avec des déplacements imposés $\mathbf{u}_{\Sigma}^{(r)}(\mathbf{x}, t)$ sur l'interface Σ_r . Ce relèvement statique est associé à un opérateur de raideur $\mathbf{S}_{\Sigma}^{(r)}$:

$$\mathbf{u}_{\text{RS}}^{(r)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}_{\Sigma}^{(r)} \left(\mathbf{u}_{\Sigma}^{(r)}(\mathbf{x}, t) \right) \quad (5.1)$$

FIGURE 5.1. *Principe de sous-structuration dynamique*

- un champ de déplacement admissible $\mathbf{u}_{\text{IF}}^{(r)}(\mathbf{x}, t)$. Ce champ est décomposé suivant une base infinie des modes propres $\{\Phi_i^{(r)}(\mathbf{x}); i = 1, 2, \dots\}$ de la sous-structure $\mathbb{S}_r$ avec une interface de couplage fixe, *i.e.* $\mathbf{u}_{\Sigma}^{(r)}(\mathbf{x}, t) = 0$ sur Σ_r .

$$\mathbf{u}_{\text{IF}}^{(r)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \Phi_i^{(r)}(\mathbf{x}) \mathbf{s}_i^{(r)}(t) \quad (5.2)$$

où $\{\mathbf{s}_i^{(r)}(t)\}_{i \geq 1}$ sont des coordonnées généralisées.

La réduction de modèle consiste à tronquer la base infinie des modes propres. L'équation (5.2) est donc, remplacée par :

$$\mathbf{u}_{\text{IF}}^{(r)}(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{i=1}^{N_m} \Phi_i^{(r)}(\mathbf{x}) \mathbf{s}_i^{(r)}(t) \quad (5.3)$$

où N_m est le nombre de vecteurs propres retenus.

Au total, pour une sous-structure $\mathbb{S}_r$, le champ de déplacement admissible $\mathbf{u}^{(r)}(\mathbf{x}, t)$ s'écrit :

$$\mathbf{u}^{(r)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_{\text{RS}}^{(r)}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}_{\text{IF}}^{(r)}(\mathbf{x}, t) \simeq \mathbf{S}_{\Sigma}^{(r)} \left(\mathbf{u}_{\Sigma}^{(r)}(\mathbf{x}, t) \right) + \sum_{i=1}^{N_m} \Phi_i^{(r)}(\mathbf{x}) \mathbf{s}_i^{(r)}(t) \quad (5.4)$$

5.3 Approches de Shaw et Pierre

Dans cette section, deux approches proposées par Shaw et Pierre pour calculer les MNNs d'un système conservatif non linéaire sont présentées : Approche 1-mode et Approche modes-multiples.

5.3.1 Approche 1-mode

La définition des MNNs en terme de déplacement-vitesse a été présentée dans le chapitre 2. En utilisant cette définition, un MNN est paramétré par un couple de variables : déplacement-

vitesse associé à un mode considéré, appelé *mode “maître”*. Les autres coordonnées modales, correspondant à des modes appelés *modes “esclaves”*, sont exprimées en terme du couple de variables précédemment défini.

Soient ($q_k = u$, $\dot{q}_k = v$) le déplacement et la vitesse du mode “maître” k . Les autres coordonnées s'écrivent donc :

$$q_i = X_i(u, v) \quad (5.5)$$

$$\dot{q}_i = Y_i(u, v) \quad (5.6)$$

$$\text{avec } i = 1..n, \quad i \neq k$$

En dérivant les deux expressions ci-dessus, on obtient :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial X_i}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial X_i}{\partial v} \dot{v} \quad (5.7)$$

$$\ddot{q}_i = \frac{\partial Y_i}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial Y_i}{\partial v} \dot{v} = -\omega_i^2 q_i + f_i(q_i, \dot{q}_i) = -\omega_i^2 u + f_i(X_j, Y_j, u, v) \quad (5.8)$$

Les équations gérant les variables du mode “maître” (u, v) sont données par :

$$\dot{u} = v \quad (5.9)$$

$$\dot{v} = -\omega_k^2 u + f_k(X_j, Y_j, u, v) \quad (5.10)$$

En introduisant (5.9) et (5.10) dans (5.7) et (5.8), on obtient $(2n - 2)$ équations aux dérivées partielles non linéaires :

$$\frac{\partial X_i}{\partial u} v + \frac{\partial X_i}{\partial v} \{-\omega_k^2 u + f_k(X_j, Y_j, u, v)\} = Y_i \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial u} v + \frac{\partial Y_i}{\partial v} \{-\omega_k^2 u + f_k(X_j, Y_j, u, v)\} = -\omega_i^2 u + f_i(X_j, Y_j, u, v) \quad (5.12)$$

avec $i = 1..n, \quad i \neq k$

Pour résoudre ces deux équations, Shaw et Pierre [72] proposent de faire des hypothèses sur la forme des solutions de X_i et Y_i , par exemple sous formes polynômiales :

$$\begin{aligned} q_i = X_i(u, v) &= a_{1i}u + a_{2i}v + a_{3i}u^2 + a_{4i}uv + a_{5i}v^2 + a_{6i}u^3 \\ &\quad + a_{7i}u^2v + a_{8i}uv^2 + a_{9i}v^3 + \dots \\ \dot{q}_i = Y_i(u, v) &= b_{1i}u + b_{2i}v + b_{3i}u^2 + b_{4i}uv + b_{5i}v^2 + b_{6i}u^3 \\ &\quad + b_{7i}u^2v + b_{8i}uv^2 + b_{9i}v^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.13)$$

En introduisant ces formes de solutions dans (5.11) et (5.12), on obtient $(2n - 2)$ équations différentielles non linéaires contenant des termes qui sont la combinaison de u et v comme : $u, v, u^2, v^2, uv, u^2v, uv^2, u^3, v^3, \dots$. Par exemple, si on limite à l'ordre 3 le développement, $9(2n - 2)$ coefficients (a_{ji}, b_{ji}) sont aisément déterminés en regroupant tous les termes qui ont le même monôme de u et v . Associés au 1^{er} ordre (u et v), $2(2n - 2)$ coefficients sont calculés. Associé au 2^e ordre (u^2, uv, v^2), $3(2n - 2)$ coefficients sont obtenus. Finalement, au 3^e ordre (u^3, u^2v, uv^2, v^3), $4(2n - 2)$ coefficients restants sont déterminés.

Une fois que tous les coefficients de X_i et Y_i sont obtenus, le système d'équations (5.9) et (5.10) dont les inconnues sont (u, v) est obtenu. On constate que ce système décrivant la dynamique d'un oscillateur non linéaire est le modèle réduit, sur le mode k , d'un système qui possède n -DDLs.

Cependant, il est important de noter que le domaine de validité, *i.e* le domaine de variation des amplitudes, est limité lorsqu'on utilise des techniques de résolution par développement asymptotique. Pour illustrer cette constatation, on reprend le 1^{er} exemple du chapitre 2. C'est un système discret à 2-DDLs avec des non linéarités cubiques, comme indiqué sur la figure 2.1.

Soit N_{as} l'ordre du développement asymptotique (5.13). Les NNMs sont calculés avec différentes valeurs de N_{as} . Les figures 5.2.1 et 5.2.2 présentent respectivement les backbones et les relations entre les amplitudes modales qui sont calculés avec quatre valeurs de N_{as} (3, 5, 7 et 9). En principe, plus la valeur de N_{as} est grande, plus la solution est proche de celle obtenue par la méthode de tir. Cependant, cela est juste uniquement pour les faibles amplitudes. Une divergence des solutions est observée à partir de l'amplitude $q_1 = 0,6$, *i.e* l'intervalle d'amplitude du 1^{er} mode est de $[0; 0,6]$. En conclusion, la technique de résolution par développement asymptotique est valable pour de faibles amplitudes.

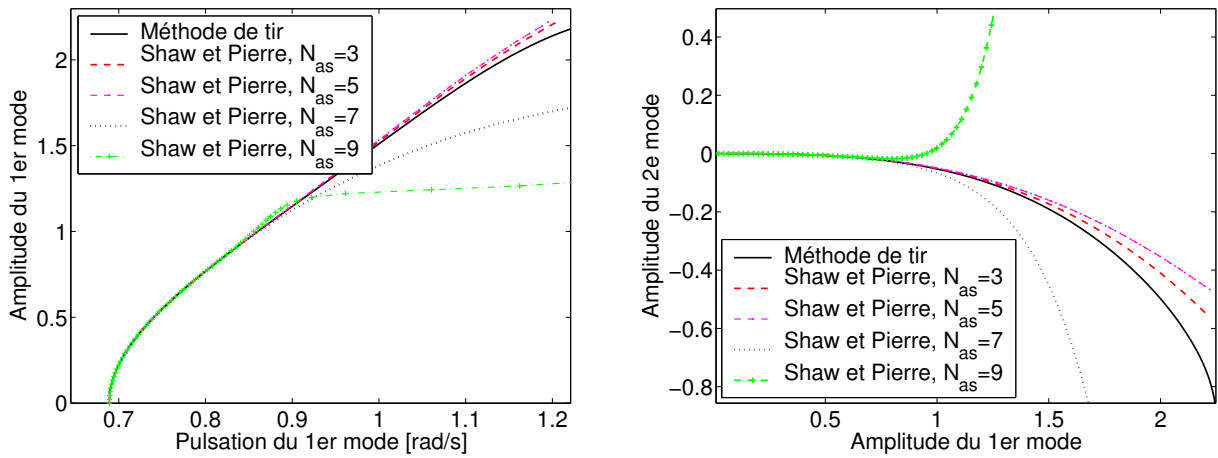


FIGURE 5.2. Divergence des solutions obtenues par la technique de développement asymptotique : 1(Gauche)-Backbones. 2(Droite)-Relation entre les amplitudes modales

5.3.2 Approche modes-multiples

La réponse totale d'un système linéaire se détermine en superposant les réponses modales qui sont calculées séparément. Pour un système non linéaire, le principe de superposition modale n'est plus, en général, valable. De plus, lorsqu'il y a des résonances internes, *i.e* il existe des relations de type : $\omega_i = p\omega_j, \omega_i = p\omega_j \pm q\omega_k, \dots$, (p et q étant des nombres entiers), les modes impliqués dans la résonance interne se couplent à travers un échange d'énergie entre eux. La résonance interne, qui apparaît aux faibles amplitudes, peut disparaître aux grandes amplitudes et vice-versa [64].

Mathématiquement, dans l'approche précédente, certaines équations qui déterminent des coefficients a_{ij} et b_{ij} deviennent singulières s'il existe des résonances internes entre les modes. Afin de remédier à ces défauts de l'approche 1-mode, Boivin *et al.* [17] généralisent le concept des MNNs au cas de modes-multiples :

*“Un mode-multiple normal du système non linéaire est un mouvement dans un espace invariant $2m$ -dimensionnel de phase. Cette surface est tangente à un espace $2m$ -dimensionnel contenant m modes linéaires au point d'équilibre stable de son système linéarisé. Sur cette surface, la dynamique du système est gouvernée par m -couples de variables de phase, *i.e* le déplacement et la vitesse. Le comportement vibratoire du système peut être considéré comme celui du système à m -DDLs”.*

La construction des surfaces invariantes dans le cas de modes multiples est similaire à celle de l'approche 1-mode, *i.e* par la technique de développement asymptotique.

Soit $\mathbf{S}_M$ un ensemble d'indices de modes choisis pour être modes “maîtres” (par exemple les modes associés à une résonance interne). $\mathbf{u}_M$ et $\mathbf{v}_M$ sont des déplacements et vitesses des modes “maîtres”. Les autres coordonnées modales s'expriment en fonction de $(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M)$:

$$q_i = X_i(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M) \quad (5.14)$$

$$\dot{q}_i = Y_i(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M) \quad (5.15)$$

$$\text{avec } i = 1..n, \quad i \notin \mathbf{S}_M$$

où n est le nombre de DDLs.

Identiquement à l'approche 1-mode, la géométrie de la surface invariante de phase est déterminée par des équations différentielles non linéaires suivantes :

$$\sum_{k \in \mathbf{S}_M} \left\{ \frac{\partial X_i}{\partial u_k} v_k + \frac{\partial X_i}{\partial v_k} [-\omega_k^2 u_k + f_k(X_j, Y_j, u_k, v_k)] \right\} = Y_i \quad (5.16)$$

$$\sum_{k \in \mathbf{S}_M} \left\{ \frac{\partial Y_i}{\partial u_k} v_k + \frac{\partial Y_i}{\partial v_k} [-\omega_k^2 u_k + f_k(X_j, Y_j, u_k, v_k)] \right\} = -\omega_i^2 X_i + f_i(X_j, Y_j, u_k, v_k) \quad (5.17)$$

$$\text{avec } i = 1..n, \quad i \notin \mathbf{S}_M$$

Les équations ci-dessus ne peuvent pas être directement résolues. Des approximations sont nécessaires. Les formes polynômiales de X_i et Y_i en fonction des variables des modes “maîtres” sont aussi proposées.

5.4 Méthode de sous-structuration non linéaire

Dans cette section, on utilise les notations suivantes :

- Une matrice est notée en gras, en majuscule et entre crochets. Un vecteur est notée en gras, en majuscule.
- Les indices et exposants en majuscules permettent de qualifier la matrice ou le vecteur correspondants.
- Les indices et exposants en minuscules permettent d'indiquer les composantes de la matrice ou du vecteur correspondants.
- L'exposant (s) indique le nom de la sous-structure correspondante.

Par exemple, les notations $\mathbf{U}_C$ et $\mathbf{U}^C$ désignent le vecteur dont les composantes sont tous les déplacements à l'interface de couplage. Tandis que la notation $\mathbf{U}_C^{(1)}$ signifie que ce vecteur contient les déplacements de la sous-structure (1). Par contre, la notation $\mathbf{U}_1^C$ indique la 1^{ère} composante du vecteur $\mathbf{U}_C$.

5.4.1 Équation de vibration d'une sous-structure

Considérons une structure constituée par deux sous-structures (1) et (2). On utilise les notations $(.)^{(s)}$ ($s = 1, 2$) pour désigner la sous-structure correspondante. L'équation de vibration de chaque

sous-structure s'écrit :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{M}_{II}] & [\mathbf{M}_{IB}] \\ [\mathbf{M}_{BI}] & [\mathbf{M}_{BB}] \end{bmatrix}^{(s)} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_I \\ \ddot{\mathbf{U}}_B \end{bmatrix}^{(s)} + \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{II}] & [\mathbf{K}_{IB}] \\ [\mathbf{K}_{BI}] & [\mathbf{K}_{BB}] \end{bmatrix}^{(s)} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_I \\ \mathbf{U}_B \end{bmatrix}^{(s)} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_I(\mathbf{U}) \\ \mathbf{F}_B(\mathbf{U}) \end{bmatrix}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_B \end{bmatrix}^{(s)} \quad (5.18)$$

où $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{K}]$ et $\mathbf{F}$ sont respectivement les matrices de masse, de rigidité et le vecteur des forces non linéaires qui sont fonction des déplacements $\mathbf{U}$. Les indices I et B représentent respectivement, les DDLs internes et ceux de l'interface de couplage entre les deux sous-structures. $\mathbf{G}$ est le vecteur des efforts du couplage à l'interface.

Notons que la dimension de l'équation ci-dessus est $N = N_I + N_B$, où N_I et N_B sont respectivement le nombre de DDLs internes et ceux de l'interface de couplage.

Les conditions d'assemblage à l'interface de couplage sont :

– Continuité des déplacements :

$$\mathbf{U}_B^{(1)} = \mathbf{U}_B^{(2)} \quad (5.19)$$

– Équilibre des efforts de couplage :

$$\mathbf{G}_B^{(1)} + \mathbf{G}_B^{(2)} = \mathbf{0} \quad (5.20)$$

On considère dans la suite les deux problèmes précédemment cités : problème d'interface fixe et problème de relèvement statique. Comme le principe est le même pour les deux sous-structures, l'indice (s) sera omi dans les sous-sections qui suivent.

5.4.2 Problème d'interface fixe

Les modes de vibration de la sous-structure avec interface fixe, *i.e* $\mathbf{U}_B = \mathbf{0}$, sont déterminés en résolvant l'équation :

$$[\mathbf{M}_{II}]\ddot{\mathbf{U}}_I + [\mathbf{K}_{II}]\mathbf{U}_I + \mathbf{F}_I(\mathbf{U}_I, \mathbf{U}_B = \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

où les matrices de masse $[\mathbf{M}_{II}]$ et de rigidité $[\mathbf{K}_{II}]$ sont symétriques et définies positives.

La taille de ce système est N_I . La relation (5.21) est projetée sur la base modale linéaire tronquée constituée des n premiers modes propres linéaires du système linéaire associé : $[\mathbf{M}_{II}]\ddot{\Phi}_I + [\mathbf{K}_{II}]\Phi_I = \mathbf{0}$. On détermine facilement les modes propres réels : Φ_i (avec $i = 1, \dots, n$ et $n \leq N_I$).

La transformation :

$$\mathbf{U}_I(t) = [\Phi]\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i q_i(t) \quad (5.22)$$

permet d'obtenir la représentation modale de l'équation de vibration de la sous-structure :

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i + f_i(q_j) = 0, \quad \text{avec } i, j = 1, \dots, n \quad (5.23)$$

où ω_i est la pulsation propre linéaire et q_i est la coordonnée modale.

Dans le cas linéaire classique (sans terme $f_i(q_j)$), le problème d'interface fixe de la méthode de Craig-Bampton, s'arrête après avoir déterminé le modèle réduit linéaire. Dans le cas non linéaire, on applique ensuite les approches 1-mode et modes-multiples de Shaw et Pierre comme présenté dans la section précédente. En choisissant l'ensemble des modes "maîtres" $k \in \mathbf{S}_M$, les autres coordonnées modales s'expriment en fonction des variables de ces modes "maîtres" ($\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M$) :

$$q_i = X_i(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M) \quad (5.24)$$

$$\dot{q}_i = Y_i(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M) \quad (5.25)$$

avec $i = 1..n$, $i \notin \mathbf{S}_M$

Choix du nombre des modes “maîtres”

Même si le choix des éléments de $\mathbf{S}_M$ est libre, un choix de ces éléments en nombre insuffisant ou mal ordonnés peut conduire à un modèle incorrect, comme le montrera l'exemple numérique abordé dans la section suivante où les réponses libres du modèle réduit sont différentes de celle obtenues à partir de la résolution directe des équations du modèle global (sans réduction) avec les mêmes conditions initiales.

On propose de calculer d'abord les premières fréquences jusqu'à un certain ordre, pour chacune des sous-structures linéaires associées et pour la structure globale linéaire associée. Après avoir fait la comparaison entre les fréquences propres des sous-structures et celles de la structure globale, on en déduit les fréquences (ω_C) provenant de l'assemblage des sous-structures. Puis, le nombre des modes “maîtres” (m) de la sous-structure (s) est choisi pour que la condition suivante soit satisfaite :

$$\omega_m^{(s)} \leq \max \left\{ \omega_1^{(1)} \quad \omega_1^{(2)} \quad \dots \quad \omega_1^{(N_s)} \quad \omega_C \right\} \leq \omega_{m+1}^{(s)} \quad (5.26)$$

où N_s est le nombre de sous-structures.

Comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction, il est préférable de choisir :

$$\mathbf{S}_M = [1, 2, \dots, m] \quad (5.27)$$

pour obtenir un modèle réduit correct.

Notons que pour calculer le modèle réduit des sous-structures non linéaires, on utilise l'approche 1-mode de Shaw et Pierre si $m = 1$, tandis que lorsque $m > 1$; on applique l'approche modes-multiples de Shaw et Pierre.

5.4.3 Problème de relèvement statique

Dans le cas statique, l'équation d'équilibre de chaque sous-structure non linéaire devient :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{II}] & [\mathbf{K}_{IB}] \\ [\mathbf{K}_{BI}] & [\mathbf{K}_{BB}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_I \\ \mathbf{U}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_I(\mathbf{U}) \\ \mathbf{F}_B(\mathbf{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{G}}_B \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

où $\tilde{\mathbf{G}}_B$ est la force statique à l'interface de couplage.

Dans le cas linéaire, le problème de relèvement statique conduit à une relation linéaire entre les DDLs internes et les DDLs de l'interface. Cette relation devient non linéaire quand le comportement de l'interface de couplage est non linéaire. En générale, le problème de relèvement statique non linéaire ne donne pas de solutions analytiques. Par conséquent, l'introduction des modes statiques non linéaires rend la résolution de problème difficile. Apiwattannalungarn [3] suppose que la partie non linéaire des modes statiques est négligée devant la partie linéaire. Les exemples numériques donnés dans les sections suivantes montrent que les modes statiques linéaires sont suffisants pour obtenir des résultats satisfaisants. On a donc :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{II}] & [\mathbf{K}_{IB}] \\ [\mathbf{K}_{BI}] & [\mathbf{K}_{BB}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_I \\ \mathbf{U}_B \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{G}}_B \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

À partir de la première ligne de l'équation ci-dessus, on obtient une relation entre les DLLs internes et les DDLs de l'interface :

$$\mathbf{U}_I = -[\mathbf{K}_{II}]^{-1} [\mathbf{K}_{IB}] \mathbf{U}_B \quad (5.30)$$

5.4.4 Représentation du système dans la base linéaire de Craig-Bampton

En se fondant sur la formule (5.4), le déplacement des DDLs internes d'un sous-système discret s'écrit :

$$\mathbf{U}_I = \mathbf{U}_{I,IF} + \mathbf{U}_{I,RS} \quad (5.31)$$

où les déplacements $\mathbf{U}_{I,IF}$ et $\mathbf{U}_{I,RS}$ dont les expressions sont données par les relations (5.22) et (5.30), sont respectivement solutions du problème d'interface fixe et de celui de relèvement statique.

En introduisant (5.22) et (5.30) dans l'équation précédente, on obtient donc :

$$\mathbf{U}_I = [\Phi]\mathbf{q} - [\mathbf{K}_{II}]^{-1} [\mathbf{K}_{IB}] \mathbf{U}_B = \begin{bmatrix} [\Phi] & -[\mathbf{K}_{II}]^{-1} [\mathbf{K}_{IB}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{U}_B \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

La base linéaire de Craig-Bampton est constituée par : a) des modes propres qui sont solutions du problème d'interface fixe, b) des modes statiques qui sont solutions du problème de relèvement statique. Une projection sur la base linéaire de Craig-Bampton consiste à utiliser la transformation suivante :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} [\Phi] & -[\mathbf{K}_{II}]^{-1} [\mathbf{K}_{IB}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{U}_B \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Par souci de notation, on pose $\mathbf{U}_C = \mathbf{U}_B$. On note C l'indice correspondant à l'interface de couplage. En utilisant la transformation (5.33), l'équation de la vibration (5.18) de la sous-structure (s) devient :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{I}] & [\mathbf{M}_{SC}] \\ [\mathbf{M}_{CS}] & [\mathbf{M}_{CC}] \end{bmatrix}^{(s)} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{U}}_C \end{bmatrix}^{(s)} + \begin{bmatrix} [\mathbf{\Lambda}_{SS}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{CC}] \end{bmatrix}^{(s)} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{U}_C \end{bmatrix}^{(s)} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_S(\mathbf{q}, \mathbf{U}^b) \\ \tilde{\mathbf{F}}_C(\mathbf{q}, \mathbf{U}^b) \end{bmatrix}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_C \end{bmatrix}^{(s)} \quad (5.34)$$

où l'indice S représente les coordonnées modales internes. $[\mathbf{\Lambda}_{SS}] = \text{diag}\{\omega_1^2, \dots, \omega_n^2\}$ est la matrice contenant les pulsations propres linéaires au carrés de la sous-structure.

A ce stade, l'équation obtenue ci-dessus dont la dimension est $(n + N_C)$ est une version réduite du modèle initial (équation 5.18) avec la dimension $(N_I + N_C)$ puisque $n < N_I$.

5.4.5 Réduction de modèle avec l'approche de Shaw et Pierre

En omettant l'indice (s) des sous-structures, le système (5.34) est développé comme suit :

$$\ddot{q}_i + \sum_{s=1}^{N_C} [\mathbf{M}_{SC}]_{is} \ddot{U}_s^C + \omega_i^2 q_i + \tilde{F}_i^S(q_j, q_k, U_l^C) = 0 \quad (5.35)$$

$$\ddot{q}_k + \sum_{s=1}^{N_C} [\mathbf{M}_{SC}]_{ks} \ddot{U}_s^C + \omega_k^2 q_k + \tilde{F}_k^S(q_j, q_k, U_l^C) = 0 \quad (5.36)$$

$$\sum_{r=1}^n [\mathbf{M}_{CS}]_{lr} \ddot{q}_r + \sum_{s=1}^{N_C} [\mathbf{M}_{CC}]_{ls} \ddot{U}_s^C + \sum_{s=1}^{N_C} [\mathbf{K}_{CC}]_{ls} U_s^C + \tilde{F}_l^C(q_j, q_k, U_l^C) = G_l^C \quad (5.37)$$

avec $k \in \mathbf{S}_M$; $i, j = 1, \dots, n$; $i, j, r \notin \mathbf{S}_M$; $l, s = 1, \dots, N_C$

En remplaçant (5.35) dans (5.37), on obtient donc :

$$\ddot{q}_k + \sum_{s=1}^{N_C} [\mathbf{M}_{SC}]_{ks} \ddot{U}_s^C + \omega_k^2 q_k + \tilde{F}_k^S(q_j, q_k, U_l^C) = 0 \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1, i \notin \mathbf{S}_M}^n [\mathbf{M}_{CS}]_{li} \left\{ \sum_{s=1}^{N_C} [\mathbf{M}_{SC}]_{is} \ddot{U}_s^C + \omega_i^2 q_i + \tilde{F}_i^S(q_j, q_k, U_l^C) \right\} + \\ & \sum_{k=1, k \in \mathbf{S}_M}^n [\mathbf{M}_{CS}]_{lk} \ddot{q}_k + \sum_{s=1}^{N_C} [\mathbf{M}_{CC}]_{ls} \ddot{U}_s^C + \sum_{s=1}^{N_C} [\mathbf{K}_{CC}]_{ls} U_s^C + \tilde{F}_l^C(q_j, q_k, U_l^C) = G_l^b \quad (5.39) \\ & \text{avec } k \in \mathbf{S}_M; \quad i, j = 1, \dots, n; \quad i, j, r \notin \mathbf{S}_M; \quad l, s = 1, \dots, N_C \end{aligned}$$

L'équation (5.39) est ré-arrangée comme suit :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1, k \in \mathbf{S}_M}^n [\mathbf{M}_{CS}]_{lk} \ddot{q}_k + \sum_{s=1}^{N_C} [\mathbf{M}_{CC, new}]_{ls} \ddot{U}_s^C + \sum_{s=1}^{N_C} [\mathbf{K}_{CC}]_{ls} U_s^C + \tilde{F}_l^{C, new}(q_j, q_k, U_l^C) = G_l^C \quad (5.40) \\ & \text{avec } [\mathbf{M}_{CC, new}]_{ls} = [\mathbf{M}_{CC}]_{ls} - \sum_{i=1, i \notin \mathbf{S}_M}^n [\mathbf{M}_{CS}]_{li} [\mathbf{M}_{SC}]_{is} \\ & \tilde{F}_l^{C, new} = \tilde{F}_l^C - \sum_{i=1, i \notin \mathbf{S}_M}^n [\mathbf{M}_{CS}]_{li} \left\{ \omega_i^2 q_i + \tilde{F}_i^S(q_j, q_k, U_l^C) \right\} \\ & k \in \mathbf{S}_M; \quad i, j = 1..n; \quad i, j, r \notin \mathbf{S}_M; \quad l, s = 1..N_C \end{aligned}$$

Dans le problème d'interface fixe, l'approche modes-multiples de Shaw et Pierre a été utilisée pour calculer des expressions de q_i en fonction de m -couples de variables $(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M)$ des modes "maîtres" $\mathbf{S}_M$, i.e

$$q_i = X_i(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M) \quad (5.41)$$

$$\dot{q}_i = Y_i(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M) \quad (5.42)$$

$$\text{avec } i = 1, \dots, n, \quad i \notin \mathbf{S}_M \quad (\text{ou } i > m)$$

On se rappelle que $\mathbf{u}_M = \mathbf{q}_M$, $\mathbf{v}_M = \dot{\mathbf{q}}_M$ avec $\mathbf{q}_M = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$ et m est le nombre de modes "maîtres".

En regroupant (5.38) et (5.40) et en tenant compte de (5.41) et (5.42), on obtient une seule équation sous forme matricielle dont les variables sont $(\mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M, \mathbf{U}_C)$:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{I}_{MM}] & [\mathbf{M}_{MC}] \\ [\mathbf{M}_{CM}] & [\mathbf{M}_{CC, new}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_M \\ \ddot{\mathbf{U}}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{\Lambda}_{MM}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{CC}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_M \\ \mathbf{U}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_M(\mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M, \mathbf{U}_C) \\ \tilde{\mathbf{F}}_{C, new}(\mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M, \mathbf{U}_C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_C \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

où $[\mathbf{I}_{MM}]$ est la matrice unitaire de taille $m \times m$. $[\mathbf{\Lambda}_{MM}] = \text{diag} \{ \omega_1^2, \dots, \omega_m^2 \}$ contient les m premières pulsations propres (au carré) de la sous-structure. $\tilde{\mathbf{F}}_M = [\tilde{\mathbf{F}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{F}}_m]^T$ est le vecteur des forces internes non linéaires.

En résumé, le changement d'ordre du modèle réduit de la sous-structure (s) est montré comme suit :

- *Début (sans réduction)* : $N = N_I + N_C$, où N_I et N_C sont respectivement le nombre de DDLs internes et celui de DDLs à l'interface de couplage.

- Après avoir projeté sur la base linéaire de Craig-Bampton : $N_1 = n + N_C$ avec $n < N_I$, où n est le nombre de modes propres linéaires retenus.
- Finalement, après avoir utilisé l'approche modes-multiples (ou 1-mode) de Shaw et Pierre : $N_2 = m + N_C$, avec $m < n$, où m est le nombre de modes “maîtres”.

5.4.6 Assemblage des sous-structures

Après un changement de notations, les conditions d'assemblage (5.19) et (5.20) deviennent :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_C^{(1)} = \mathbf{U}_C^{(2)} &= \mathbf{U}_C \\ \mathbf{G}_C^{(1)} + \mathbf{G}_C^{(2)} &= \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.44)$$

L'équation (5.43) est ré-écrite en introduisant la notation (s) :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_{MM}] & [\mathbf{M}_{MC}] \\ [\mathbf{M}_{CM}] & [\mathbf{M}_{CC,new}] \end{bmatrix}^{(s)} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_M \\ \ddot{\mathbf{U}}_C \end{bmatrix}^{(s)} + \\ & \begin{bmatrix} [\mathbf{\Lambda}_{MM}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{CC}] \end{bmatrix}^{(s)} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_M \\ \mathbf{U}_C \end{bmatrix}^{(s)} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_M(\mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M, \mathbf{U}_C) \\ \tilde{\mathbf{F}}_{C,new}(\mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M, \mathbf{U}_C) \end{bmatrix}^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_C \end{bmatrix}^{(s)} \end{aligned} \quad (5.45)$$

En utilisant les conditions d'assemblage ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_{MM}]^{(1)} & [\mathbf{0}] & [\mathbf{M}_{MC}]^{(1)} \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}_{MM}]^{(2)} & [\mathbf{M}_{MC}]^{(2)} \\ [\mathbf{M}_{CM}]^{(1)} & [\mathbf{M}_{CM}]^{(2)} & [\mathbf{M}_{CC,new}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_M^{(1)} \\ \ddot{\mathbf{q}}_M^{(2)} \\ \ddot{\mathbf{U}}_C \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} [\mathbf{\Lambda}_{MM}]^{(1)} & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{\Lambda}_{MM}]^{(2)} & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{CC}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_M^{(1)} \\ \mathbf{q}_M^{(2)} \\ \mathbf{U}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_M^{(1)}(\mathbf{q}_M^{(1)}, \dot{\mathbf{q}}_M^{(1)}, \mathbf{U}_C) \\ \tilde{\mathbf{F}}_M^{(2)}(\mathbf{q}_M^{(2)}, \dot{\mathbf{q}}_M^{(2)}, \mathbf{U}_C) \\ \tilde{\mathbf{F}}_{C,new}(\mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M, \mathbf{U}_C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_M &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}_M^{(1)} \\ \mathbf{q}_M^{(2)} \end{bmatrix} \\ [\mathbf{M}_{CC,new}] &= [\mathbf{M}_{CC,new}]^{(1)} + [\mathbf{M}_{CC,new}]^{(2)} \\ [\mathbf{K}_{CC}] &= [\mathbf{K}_{CC}]^{(1)} + [\mathbf{K}_{CC}]^{(2)} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{C,new}(\mathbf{q}_M, \dot{\mathbf{q}}_M, \mathbf{U}_C) &= \tilde{\mathbf{F}}_{C,new}^{(1)}(\mathbf{q}_M^{(1)}, \dot{\mathbf{q}}_M^{(1)}, \mathbf{U}_C) + \tilde{\mathbf{F}}_{C,new}^{(2)}(\mathbf{q}_M^{(2)}, \dot{\mathbf{q}}_M^{(2)}, \mathbf{U}_C) \end{aligned}$$

L'équation (5.46) caractérise le modèle réduit de la structure globale. Notons que l'ordre de ce dernier est plus petit que celui du modèle complet (sans réduction).

5.5 Validation

Dans cette section, on reprend l'exemple numérique d'un système discret à 5-DDLs qui a été utilisé par Apiwattannalungarn [3]. Le modèle complet est réduit en utilisant l'approche 1-mode de Shaw et Pierre.

Le deuxième exemple a pour objectif de calculer le modèle réduit associé à l'aide de l'approche modes-multiples de Shaw et Pierre.

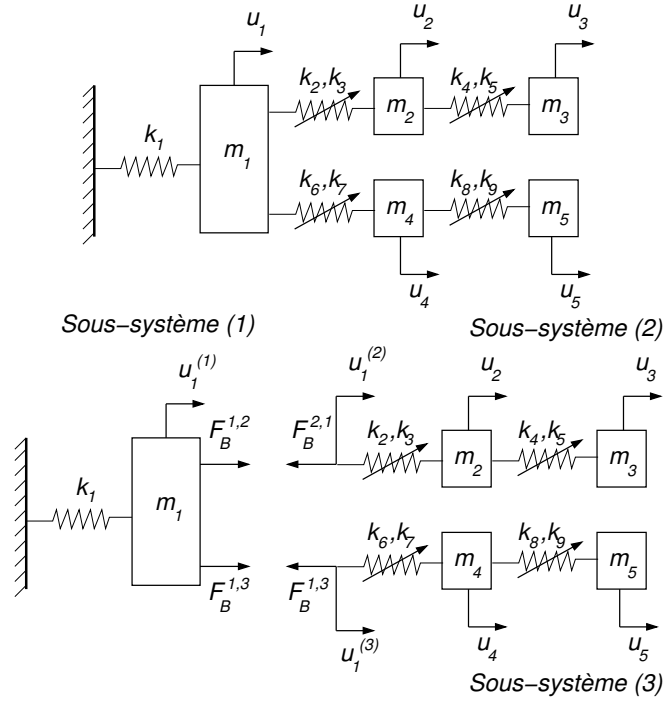


FIGURE 5.3. Exemple 1 : Système non linéaire à 5-DDLs, pris dans la thèse d'Apiwattannalungarn [3] : 1(En haut)-Système global. 2(En bas)-Sous-systèmes.

5.5.1 Exemple 1 : Système non linéaire à 5-DDLs

Le système est illustré sur la figure 5.3.1. Il est divisé en trois sous-systèmes (voir la figure 5.3.2). Pour illustrer les démarches de la méthode précédemment présentée, on commence par écrire les équations de vibration du système global et celles des sous-systèmes.

L'équation de vibration du système global s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \\ \ddot{u}_5 \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} (k_1 + k_2 + k_6) & -k_2 & 0 & -k_6 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_4) & -k_4 & 0 & 0 \\ 0 & -k_4 & k_4 & 0 & 0 \\ -k_6 & 0 & 0 & (k_6 + k_8) & -k_8 \\ 0 & 0 & 0 & -k_8 & k_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} k_3(u_1 - u_2)^3 + k_7(u_1 - u_4)^3 \\ k_3(u_2 - u_1)^3 + k_5(u_2 - u_3)^3 \\ k_5(u_3 - u_2)^3 \\ k_7(u_4 - u_1)^3 + k_9(u_4 - u_5)^3 \\ k_9(u_5 - u_4)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.47)
 \end{aligned}$$

$$m_1 \ddot{u}_1^{(1)} + k_1 u_1^{(1)} = F_B^{1,2} + F_B^{1,3} \quad (5.48)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1^{(2)} \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_4) & -k_4 \\ 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_3(u_1^{(2)} - u_2)^3 \\ k_3(u_2 - u_1^{(2)})^3 + k_5(u_2 - u_3)^3 \\ k_5(u_3 - u_2)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_B^{2,1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1^{(3)} \\ \ddot{u}_4 \\ \ddot{u}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_6 & -k_6 & 0 \\ -k_6 & (k_6 + k_8) & -k_8 \\ 0 & -k_8 & k_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(3)} \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_7(u_1^{(3)} - u_4)^3 \\ k_7(u_4 - u_1^{(3)})^3 + k_9(u_4 - u_5)^3 \\ k_9(u_5 - u_4)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_B^{3,1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

(5.48), (5.49) et (5.50) sont respectivement les équations de vibration des sous-systèmes (1), (2) et (3).

Les conditions d'assemblage sont :

- La continuité des déplacements à l'interface de couplage

$$u_1^{(1)} = u_1^{(2)} = u_1^{(3)} = u_1 \quad (5.51)$$

- L'équilibre des efforts à l'interface de couplage

$$F_B^{1,2} + F_B^{2,1} = 0 \quad (5.52)$$

$$F_B^{1,3} + F_B^{3,1} = 0 \quad (5.53)$$

Nous allons ensuite envisager deux cas en faisant varier la valeur du paramètre k_4 : $k_4 = 5$ et $k_4 = 20$, en fixant les autres paramètres comme suit :

- Les masses : $m_1 = 5$, $m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 1$.
- Les rigidités linéaires : $k_1 = 50$, $k_2 = 1$, $k_6 = 4$, $k_8 = 45$.
- Les rigidités cubiques : $k_3 = 2$, $k_5 = k_7 = k_9 = 1$.

Les pulsations propres du système global et des sous-systèmes (2) et (3) avec interface fixe sont données dans le tableau 5.1.

Nous choisissons de construire un modèle réduit de dimension 3 pour les deux cas de k_4 . Le modèle réduit va donc être composé de la première pulsation propre de chacun des deux sous-systèmes et de la pulsation de couplage. Il est déterminé en utilisant l'approche 1-mode de Shaw et Pierre avec un ordre égal à 5 pour le développement polynômial. Le mode 1 est choisi comme "maître", *i.e* $q_1 = u$, $\dot{q}_1 = v$ et les coordonnées modales "esclaves" sont ensuite déterminées en fonction des coordonnées modales "maîtres", *i.e*

$$\begin{cases} q_2 &= X_2(u, v) \\ \dot{q}_2 &= Y_2(u, v) \end{cases} \quad (5.54)$$

TABLEAU 5.1. Les pulsations propres linéaires des systèmes et sous-systèmes dans l'exemple 1

Modes	$k_4 = 5$			$k_4 = 20$		
	Sys. global	Sous-sys. 2	Sous-sys. 3	Sys. global	Sous-sys. 2	Sous-sys. 3
1	0,682	0,689		0,695	0,703	
2	1,338		1,398	1,338		1,398
3	3,223	3,244		3,339		
4	3,361			6,365	6,364	
5	9,595		9,594	9,595		9,594

1) Le cas de $k_4 = 5$

En se fondant sur les valeurs des pulsations propres linéaires du système global et des sous-systèmes, des remarques suivantes peuvent être énoncées :

- Le 1^{er} mode du sous-système (2) avec interface fixe contribue au 1^{er} mode du système global et le 1^{er} mode du système (3) au 2^e mode du système global.
- Le 2^e mode du sous-système (2) contribue au 3^e mode du système global et celui du sous-système (3) au 5^e mode du système global.
- Finalement, le mode 4 du système global constitue donc le mode de couplage entre les sous-systèmes, *i.e.* $\omega_C = \omega_4$.

En résumé, les pulsations propres sont classées par ordre croissant :

$$\omega_1^{(2)} < \omega_1^{(3)} < \omega_2^{(2)} < \omega_C < \omega_2^{(3)} \quad (5.55)$$

A partir des inégalités (5.55), on note que la pulsation propre du 3^e mode du système global, qui est inférieure à la pulsation de couplage ω_C , est négligée pour le système réduit. Cette simplification entraîne certaines perturbations dans la réponse du système comme le montre la figure 5.4 où sont tracées à la fois les réponses temporelles du système complet (sans réduction) et du système réduit aux mêmes conditions initiales : $q_1^{(2)}(0) = 0,4$; $q_1^{(3)}(0) = 0,4$; $u_1(0) = 0,2$ et $\dot{q}_1^{(2)}(0) = \dot{q}_1^{(3)}(0) = \dot{u}_1(0) = 0$. On constate que les réponses du modèle complet sont différentes de celles du modèle réduit, en particulier pour la réponse de la masse 1 (u_1).

2) Le cas de $k_4 = 20$

Comme dans le cas précédent, on peut faire des remarques suivantes :

- Le 1^{er} mode du sous-système (2) avec interface fixe contribue au 1^{er} mode du système global et le 1^{er} mode du système (3) au 2^e mode du système global.
- Le 2^e mode du sous-système (2) contribue au 4^e mode du système global et celui du sous-système (3) au 5^e mode du système global.
- Le mode 3 du système global est donc, le mode de couplage entre les deux sous-systèmes.

Les pulsations propres linéaires sont classées par ordre croissant :

$$\omega_1^{(2)} < \omega_1^{(3)} < \omega_C < \omega_2^{(2)} < \omega_2^{(3)} \quad (5.56)$$

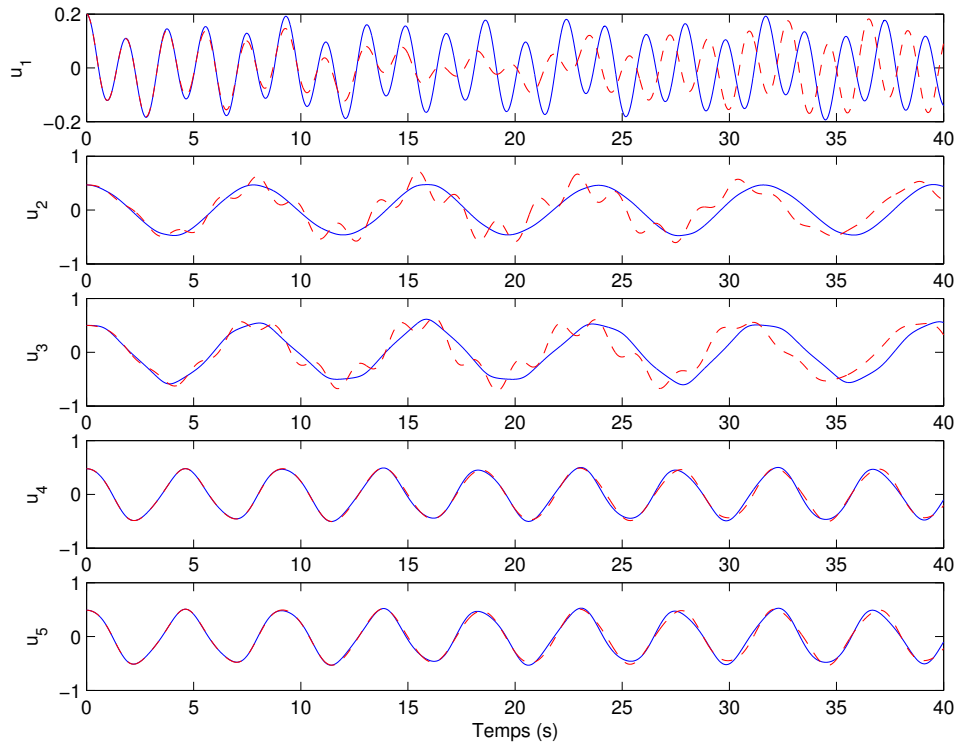


FIGURE 5.4. *Exemple 1 : Réponses temporelles du système non linéaire à 5-DDLs (cas de $k_4 = 5$). Trait continu (-) : Modèle complet. Trait discontinu (- -) : Modèle réduit.*

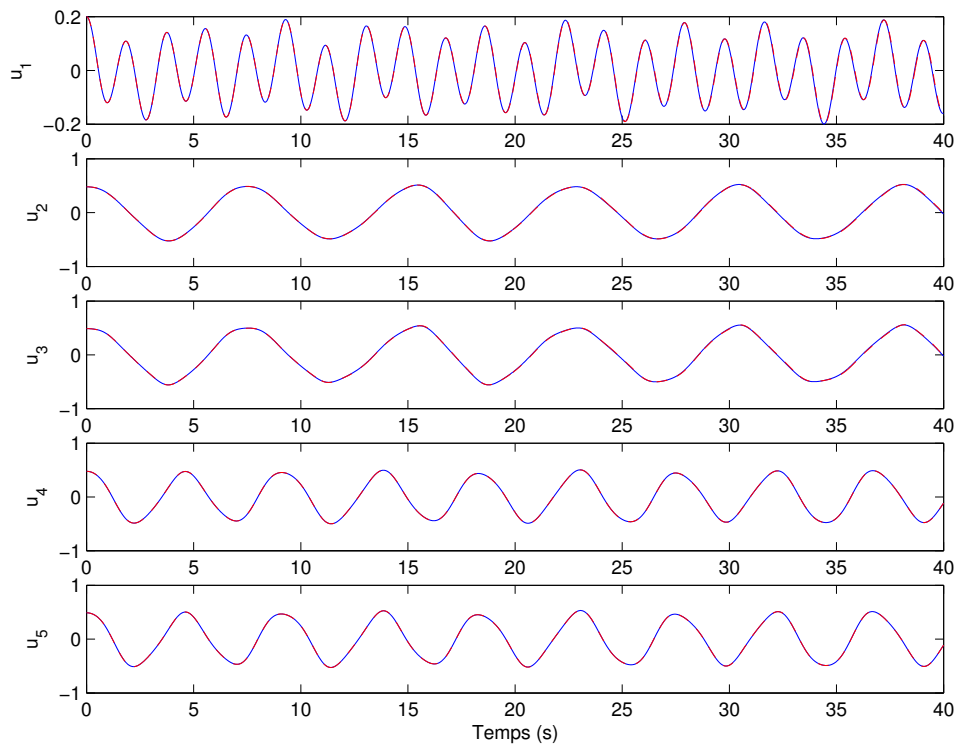


FIGURE 5.5. *Exemple 1 : Réponses temporelles du système non linéaire à 5-DDLs (cas de $k_4 = 20$). Trait continu (-) : Modèle complet. Trait discontinu (- -) : Modèle réduit.*

Pour cet exemple, on ne perd aucune pulsation propre. Les réponses temporelles du système complet (sans réduction) et du système réduit aux mêmes conditions initiales : $q_1^{(2)}(0) = 0,4$; $q_1^{(3)}(0) = 0,4$; $u_1(0) = 0,2$ et $\dot{q}_1^{(2)}(0) = \dot{q}_1^{(3)}(0) = \dot{u}_1(0) = 0$, sont présentées respectivement par les traits continus et discontinus sur la figure 5.5. On constate que les deux modèles donnent des résultats très similaires, ce qui nous permet de valider le modèle réduit.

5.5.2 Exemple 2 : Système non linéaire à 6-DDLs

Dans l'exemple précédent, on a utilisé l'approche 1-mode de Shaw et Pierre pour le modèle réduit de chaque sous-système non linéaire. À noter que le modèle réduit est correct dans le cas où la pulsation de couplage ω_C satisfait la condition :

$$\omega_1^{(s)} < \omega_C < \omega_2^{(s)} \quad (5.57)$$

où $\omega_1^{(s)}$ et $\omega_2^{(s)}$ sont la 1^{ère} et la 2^e pulsations propres linéaires du sous-système (s).

Dans cet exemple, on considère un système non linéaire discret à 6-DDLs. Le système global et ses sous-systèmes sont indiqués sur la figure 5.6.

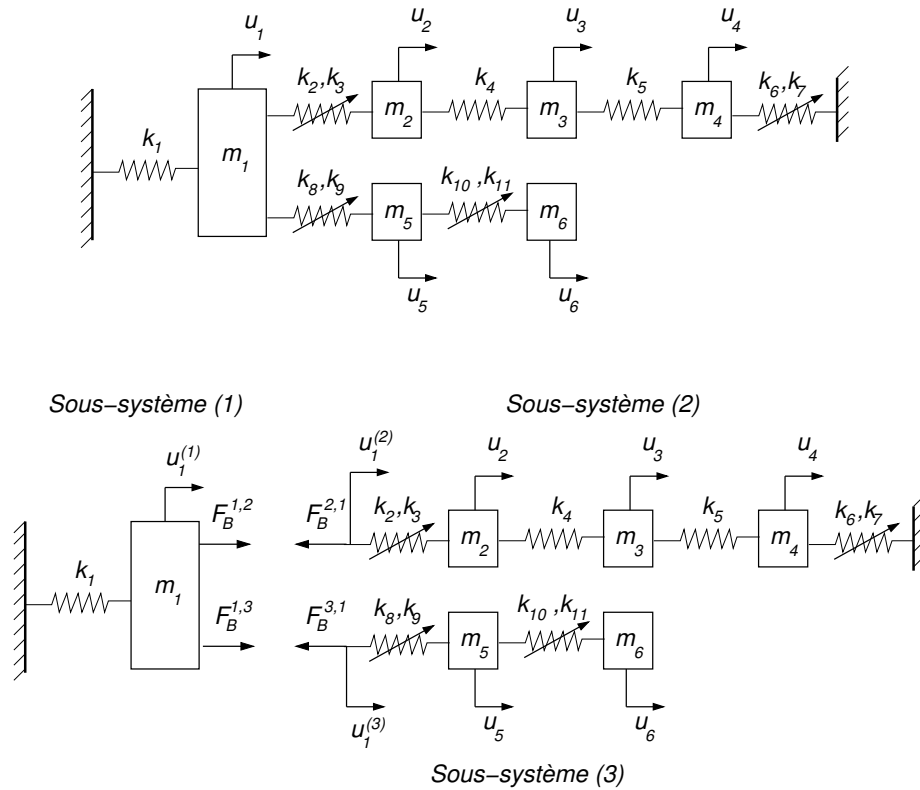


FIGURE 5.6. Exemple 2 : Système non linéaire à 6-DDLs : 1(En haut)-Système global. 2(En bas)-Sous-systèmes.

Les paramètres du système sont :

- Les masses : $m_1 = 5$, $m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = 1$.
- Les rigidités linéaires : $k_1 = 50$, $k_2 = 0,5$, $k_4 = 5$, $k_5 = 2,03$, $k_6 = 0,6$, $k_8 = 1$, $k_{10} = 8$.
- Les rigidités cubiques : $k_3 = 1$, $k_7 = 1,5$, $k_9 = 2$, $k_{11} = 1$.

TABLEAU 5.2. *Les pulsations propres linéaires des systèmes et sous-systèmes dans l'exemple 2*

Modes	Pulsations propres linéaires (<i>rad/s</i>)		
	Sys. global	Sous-sys. 2	Sous-sys. 3
1	0,594	0,597	
2	1,259		1,379
3	1,791	1,792	
4	2,762		
5	3,406	3,405	
6	6,493		6,488

Comme dans l'exemple précédent, on calcule d'abord, les pulsations propres linéaires du système global et celles des sous-systèmes avec interface fixe. Elles sont données dans le tableau 5.2.

On obtient les relations suivantes : $\omega_1 \simeq \omega_1^{(2)}$, $\omega_2 \simeq \omega_2^{(3)}$, $\omega_3 \simeq \omega_2^{(2)}$, $\omega_5 \simeq \omega_3^{(2)}$, $\omega_6 \simeq \omega_2^{(3)}$. On en déduit que $\omega_4 = \omega_C = 2,762(\text{rad/s})$ est la pulsation propre correspondant au mode de couplage. On trouve que :

$$\omega_1^{(2)} < \omega_2^{(2)} < \omega_C < \omega_3^{(2)} \quad (5.58)$$

$$\omega_1^{(3)} < \omega_C < \omega_2^{(3)} \quad (5.59)$$

De plus, il y a une résonance interne entre le 1^{er} et le 2^e modes du sous-système (2) avec interface fixe : $\omega_2^{(2)} \simeq 3\omega_1^{(2)}$.

Par conséquent, un modèle réduit global correct doit prendre en compte les deux premiers modes du sous-système (2) et le 1^{er} mode du sous-système (3). Dans ce cas, on utilise l'approche modes-multiples ($m = 2$) pour le sous-système (2) et l'approche 1-mode pour le sous-système (3).

5.5.2.1 Réduction de modèle pour le sous-système (2) avec l'approche modes-multiples

Pour le sous-système (2), à partir des remarques faites dans la section précédente, on choisit les modes 1 et 2 comme modes “maîtres”, *i.e*

$$\mathbf{S}_M = \{1, 2\} \quad (5.60)$$

À l'aide de l'approche modes-multiples de Shaw et Pierre, on détermine les relations des coordonnées “esclaves”, *i.e* q_i et $\dot{q}_i$ ($i \notin \mathbf{S}_M$ ou $i = 3$), en fonction des coordonnées associées avec les modes “maîtres” :

$$q_3 = X_3(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M) \quad (5.61)$$

$$\dot{q}_3 = Y_3(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M) \quad (5.62)$$

$$\text{avec } \mathbf{u}_M = [q_1, q_2], \quad \mathbf{v}_M = [\dot{q}_1, \dot{q}_2]$$

À noter que l'ordre du développement de X_3 et Y_3 en séries polynômiales de $\mathbf{u}_M$ et $\mathbf{v}_M$ est choisi égal à 5. La figure 5.7 présente l'amplitude de X_3 avec les vitesses nulles, *i.e* $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$.

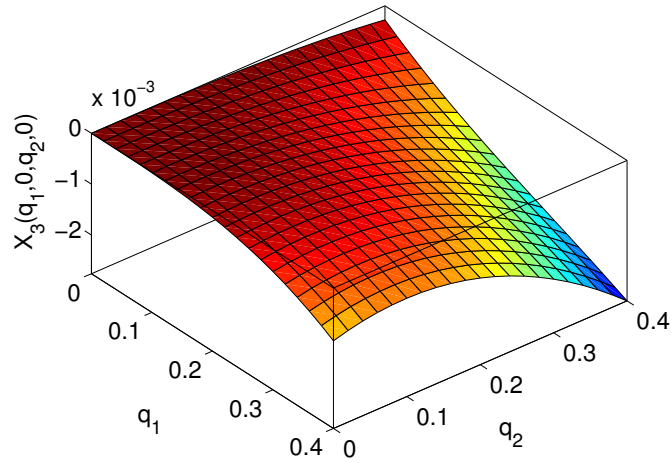


FIGURE 5.7. *Exemple 2 : X_3 en fonction des coordonnées “maîtres” q_1 et q_2 .*

Le modèle complet (3-DDLs) et le modèle réduit (2-DDLs) du sous-système (2) sont simulés avec des conditions initiales identiques : $q_1(0) = q_2(0) = 0,2$ et $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$. Les réponses temporelles des deux modèles sont données dans la figure 5.8 où les traits continus et discontinus représentant respectivement les résultats du modèle réduit et ceux du modèle complet. On constate que les réponses de deux modèles sont très cohérentes.

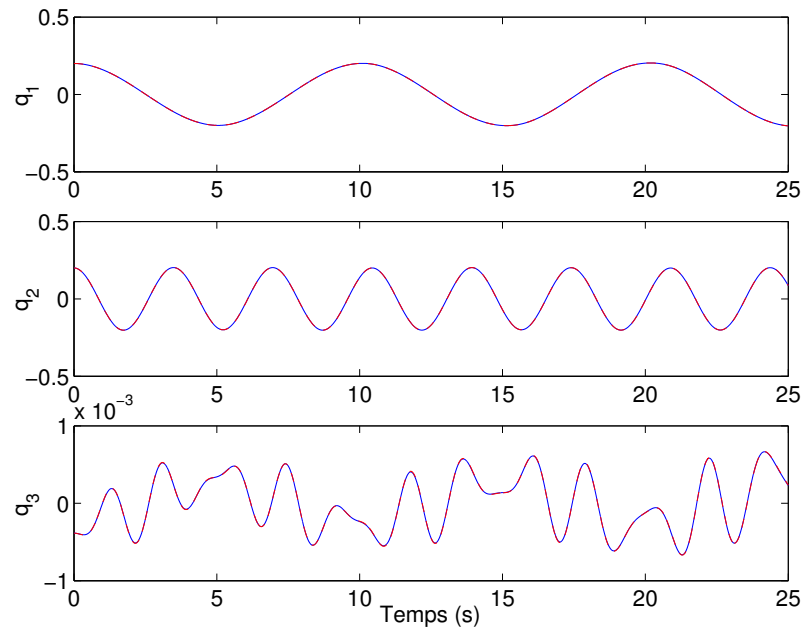


FIGURE 5.8. *Exemple 2 : Réponses temporelles du sous-système (2). Trait continu (-) : Modèle réduit. Trait discontinu (- -) : Modèle complet.*

5.5.2.2 Modèle réduit du système global

On a déterminé le modèle réduit pour le sous-système (2) dans la section précédente. Il reste à déterminer le modèle réduit pour le sous-système (3) et le système global.

Pour le sous-système (3), l'approche 1-mode est utilisée. Le mode 1 est choisi comme mode "maître". L'ordre du développement des coordonnées "esclaves", *i.e* q_2 et $\dot{q}_2$, en séries polynômiales des coordonnées "maîtres" est choisi égal à 3. L'assemblage se fait par application des conditions à l'interface de couplage : 1) Continuité des déplacements, 2) Equilibre des efforts. Un modèle réduit pour le système global est obtenu.

La taille du modèle réduit est de 4 par rapport à 6 pour le modèle complet (sans réduction). Le modèle réduit est simulé avec les conditions initiales : $q_1^{(2)} = 0, 2$, $q_2^{(2)} = 0, 2$, $q_1^{(3)} = 0, 1$, $u_1 = 0, 02$ et les vitesses nulles. Une fois que les réponses temporelles de toutes les masses du système global sont déterminées, on en déduit les conditions initiales (dans l'espace de configuration) avec lesquelles les réponses du modèle complet (sans réduction) sont simulées pour les comparer à celles du modèle réduit.

Les réponses temporelles du modèle réduit et du modèle complet sont toutes deux présentées sur la figure 5.9. Une bonne cohérence entre les résultats des deux modèles est observée.

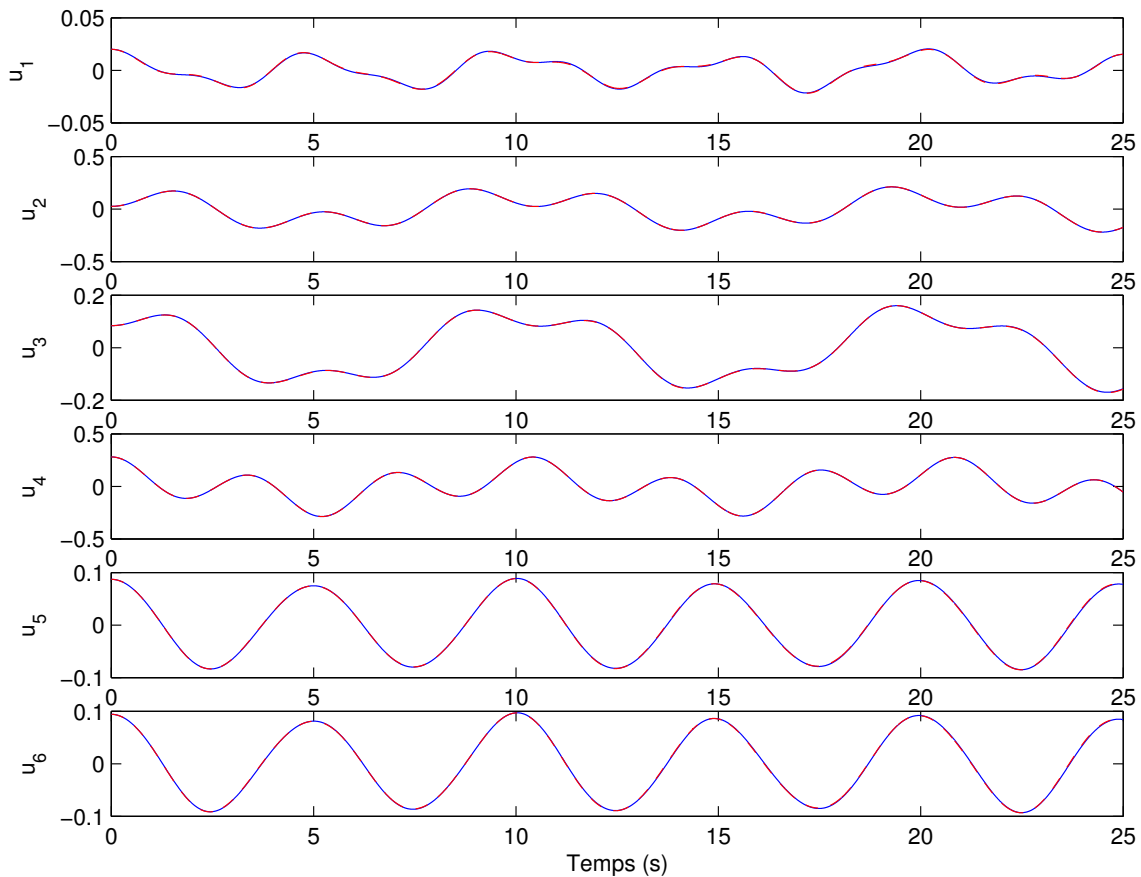


FIGURE 5.9. *Exemple 2 : Réponses temporelles du système global. Trait continu (—) : Modèle réduit. Trait discontinu (---) : Modèle complet.*

5.6 Remarques et Conclusions

Ce chapitre est dans la continuation du travail de Apiwattannalungarn [3] pour étendre la méthode de sous-structuration de Craig-Bampton au cas non linéaire.

L'origine de la méthode de Craig-Bampton classique est gardée, *i.e* le système est projeté sur une base linéaire constituée par : 1) des modes propres linéaires tronqués qui sont solutions du problème de vibration des sous-structures avec interface de couplage fixe, 2) des modes statiques qui sont solutions du problème de relèvement statique en imposant les déplacements unitaires aux DDLs de l'interface. Apiwattannalungarn [3] utilise ensuite l'approche 1-mode de Shaw et Pierre pour calculer les modèles réduits des sous-structures non linéaires avec interface fixe en supposant que le couplage est faible.

Cependant, l'approche 1-mode peut s'avérer insuffisante pour déterminer un modèle réduit "correct" lorsqu'il y a des résonances internes dans les sous-structures ou lorsque la fréquence propre due au couplage entre sous-structures est assez élevée. On propose donc d'utiliser *l'approche modes-multiples de Shaw et Pierre* dans ces cas là. Cette proposition est validée à travers deux exemples numériques qui sont des systèmes discrets non linéaires à 5 et 6-DDLs. Ce dernier possède une résonance interne entre les deux premiers modes.

Puisque les approches de Shaw et Pierre utilisent une technique de développements asymptotiques, comme abordé dans le chapitre 2, le domaine de validité, *i.e* l'intervalle d'amplitudes des oscillations, est limité. Ce domaine ne peut pas être "large" et la non linéarité doit être "faible". De plus, l'approche modes-multiples a besoin d'un temps de calcul prohibitif. Par exemple, pour l'exemple 2, cette approche a besoin de 10h jours sur le CPU P4-2,7G/1G. C'est la raison pour laquelle on a présenté seulement des systèmes numériques à quelques DDLs pour valider les méthodes.

Conclusion générale et Perspectives

Conclusions

Le travail présenté dans cette thèse est une contribution à l'étude des vibrations non linéaires des systèmes mécaniques non linéaires couplés. Deux problèmes ont été étudiés : la construction de modèles réduits en utilisant des notions de modes non linéaires et l'identification des paramètres caractérisant le comportement dynamique des structures non linéaires.

Dans un premier temps, quatre méthodes pour calculer les MNNs des systèmes mécaniques non linéaires discrets, ont été présentées et comparées au travers d'exemples numériques : l'approche de Shaw et Pierre, l'approche de Bellizzi et Bouc, la méthode de Balance Harmonique et la méthode de tir. Les trois dernières conduisent à l'écriture d'un système d'équations algébriques non linéaires dépendant d'un paramètre dit *paramètre de bifurcation* qui peut être la fréquence d'excitation ou l'amplitude modale. Elles sont résolues ensuite par l'application de la technique de continuation des branches de solutions en fonction du paramètre de bifurcation. Afin de déterminer la convergence et le domaine de validité de certaines méthodes, *i.e* le domaine de variation des amplitudes des réponses, on a proposé une procédure comprenant les étapes suivantes : 1) Méthode de tir + Continuation, 2) Méthode de Balance Harmonique + Continuation, 3) Approche de Shaw et Pierre, 4) Approche de Bellizzi et Bouc, 5) Approche de Bellizzi et Bouc + Continuation. Les étapes 3, 4 et 5 peuvent être effectuées en parallèle.

Ensuite, les notions et les propriétés importantes pour le traitement du signal par la transformation en ondelettes continue (TOC) ont été données. On a également abordé les problèmes du calcul numérique de la TOC : les méthodes de calcul, l'effet de bord, le découplage des modes, le temps d'arrêt de la TO. Le choix des paramètres de l'ondelette mère, notamment le facteur de qualité Q a été discuté tout au long des exemples numériques. On dispose donc des outils performants et robustes de traitement des signaux modulés en temps et en fréquence.

Puis, l'identification modale des systèmes vibratoires linéaires à partir des réponses libres a été étudiée. On a également étudié deux méthodes d'identification à partir de réponses sous excitations ambiantes : 1) la méthode du décrément aléatoire, 2) la méthode de fonction spectrale en ondelettes avec l'hypothèse où l'excitation ambiante est un bruit blanc. Les méthodes ont été appliquées sur des réponses ambiantes d'un immeuble d'habitation à Lyon. Les résultats d'identification obtenus sont relativement satisfaisants.

En ce qui concerne l'identification des paramètres caractérisant le comportement dynamique des systèmes faiblement non linéaires, une étude analytique d'un oscillateur non linéaire de type Duffing et avec un amortissement "fort" a été effectuée en utilisant la méthode de résolution de Krylov-Bogoliubov-Mitropolskii. La technique d'identification a été appliquée avec succès sur des réponses libres des systèmes numériques et celles des tests réels.

Un logiciel “maison” permettant une identification automatique des systèmes mécaniques vibratoires linéaires et non linéaires a été programmé sous MATLAB.

Enfin, une version généralisée de la méthode de sous-structuration de Craig-Bampton dans le cas non linéaire, a été proposée. Les fréquences propres linéaires de la structure globale et celles de ses sous-structures linéaires associées sont d’abord calculées pour déterminer les fréquences provenant de l’assemblage. Ces dernières permettent de choisir le nombre de modes retenus dans chaque sous-structure qui influence sur la précision du modèle réduit global. Le modèle réduit des sous-structures non linéaires dont les non linéarités sont fonctions polynômiales de déplacements et de vitesses, a été déterminé en se fondant sur l’approche 1-mode et modes-multiples de Shaw et Pierre. En supposant que le couplage entre les sous-structures est faible, le modèle réduit global est obtenu en assemblant des modèles réduits élémentaires des sous-structures. La méthode proposée a été validée avec succès au travers de deux exemples numériques.

Perspectives

Les limitations de notre étude concernant la réduction de modèle en dynamique non linéaire :

- a) Les méthodes, programmées sous MATLAB, n’ont pas été optimisées. Le temps de calcul augmente rapidement avec le nombre de DDLs du système étudié. Actuellement, ces méthodes sont applicables sur des systèmes de taille petite.
- b) La stabilité des réponses vibratoires n’a pas été étudiée en détail.
- c) L’amortissement (proportionnel et/ou non-proportionnel) n’a pas été introduit.
- d) Le cas des réponses forcées n’est pas considéré.

Les perspectives de notre travail en découlent naturellement : *Comment remédier aux limitations ci-dessus*. Les limitations mentionnées ci-dessus ont déjà été résolues pour certains cas particuliers. Par exemple, la méthode de tir et la méthode de balance harmonique sont encore valables pour analyser le régime forcé. Ce n’est pas le cas pour l’approche de Bellizzi et Bouc et celle de Shaw et Pierre présentées dans cette thèse. Il faut donc des versions généralisées pour ces approches.

L’étude sur les “*systèmes complexes*” est très abondante car elle concerne : le type de système, le comportement dynamique, le type de couplage. Pour l’instant, la notion de “modes non linéaires” est définie seulement pour une classe spécifique de structures : des structures avec des non linéarités géométriques. La question “*Est-ce qu’on arrive à définir une notion de modes non linéaires pour d’autres comportements non linéaires ?*” reste un problème ouvert.

L’analyse temps-fréquence est un outil très puissant et robuste pour l’identification des systèmes vibratoires linéaires. Les méthodes d’identification présentées dans cette thèse, ont été appliquées seulement sur un nombre limité de systèmes réels comme : une poutre de taille petite ou encore un immeuble d’habitation avant sa destruction. Il serait intéressant de les appliquer sur une série importante des structures non seulement en génie civil mais aussi dans d’autres domaines : aéronautique, automobile, etc.

Pour l’identification des systèmes non linéaires, il semble que la détection de la non linéarité est le seul point fort de l’analyse temps-fréquence. Concernant la caractérisation, on se trouve rapidement limité due à la complexité qui réside dans la nature mal connue de la non linéarité, d’où le besoin de modèles mathématiques “ad-hoc”.

Annexe A

Rappels sur le système linéaire discret

La compréhension des systèmes linéaires est actuellement très claire. Ils ont été traités de façon très détaillée dans le livre de Gibert [30]. On ne présente, dans ce mémoire, qu'un petit résumé sur ce sujet en mettant l'accent sur des paramètres caractérisant le comportement dynamique des systèmes linéaires telles que les modes propres, les fréquences propres et les représentations des modes dans l'espace de phases et dans l'espace de configuration.

En réalité, les systèmes mécaniques présentent toujours des phénomènes de dissipation d'énergie. Cette dissipation d'énergie provient du frottement développé aux liaisons des différents éléments du système, du comportement anélastique des matériaux, etc. On considère ici l'hypothèse d'amortissement visqueux qui est représenté par une matrice d'amortissement $\mathbf{C}$. Les **oscillations libres** d'un système linéaire dissipatif dans *l'espace de configuration* sont décrites par :

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}}(t) + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{u}}(t) + [\mathbf{K}]\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{A.1})$$

où $[\mathbf{M}]$ et $[\mathbf{K}]$ sont respectivement les matrices de masse et de rigidité, symétriques et définies positives. $[\mathbf{C}]$ est la matrice d'amortissement.

A.1 Systèmes linéaires conservatifs

L'équation de vibrations libres des systèmes linéaires et conservatifs dans l'espace de configuration s'écrit :

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}}(t) + [\mathbf{K}]\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{A.2})$$

Les modes propres linéaires $\{\Phi_k, k = 1..N\}$ (N est le nombre de DDLs) et les pulsations propres linéaires associées $\{\omega_k\}$ sont obtenus par la résolution du problème de recherche des vecteurs propres et des valeurs propres associé : $(-[\mathbf{M}]\omega_k^2 + [\mathbf{K}]) \Phi_k = \mathbf{0}$.

Ces modes linéaires forment une base orthonormale appelée base modale linéaire : $\{\Phi\} = \{\Phi_1, \dots, \Phi_N\}$. La projection de (A.2) sur cette base, *i.e* $\mathbf{u}(t) \simeq [\Phi]\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i \mathbf{q}_i(t)$, nous donne la *représentation modale* de cette équation :

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0, \quad \text{pour } i = 1..n \quad (\text{A.3})$$

où n est le nombre de modes propres retenus ($n \leq N$).

Notons bien que pour des systèmes continus, les bases modales ont une infinité de fonctions de base. Cependant, un nombre limité de ces fonctions permet d'obtenir des réponses approchées assez proches des réponses "exactes". C'est la base du principe de réduction de modèle qui permet de réduire considérablement le temps de calcul.

La réponse totale du système est donc calculée par la superposition des réponses modales, *i.e* les réponses associées à chaque mode :

$$\mathbf{u}(t) \simeq \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i(t) = [\Phi] \mathbf{q} = \sum_{i=1}^n \Phi_i q_i(t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i \rho_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) \quad (\text{A.4})$$

où les coefficients ρ_i, φ_i sont déterminés à partir des conditions initiales.

Considérons le rapport entre la coordonnée j et 1 de la composante modale $\mathbf{u}_i$:

$$\frac{u_i^{(j)}(t)}{u_i^{(1)}(t)} = \frac{\Phi_i^{(j)} q_i(t)}{\Phi_i^{(1)} q_i(t)} = \frac{\Phi_i^{(j)}}{\Phi_i^{(1)}} = c_i^{(j)} \quad (\text{A.5})$$

Il est évident que $c_i^{(j)}$ ne dépend pas de temps. C'est pourquoi, dans l'espace de configuration $(u_i^{(1)}, u_i^{(j)})$, le mode i est représenté par une droite de pente $c_i^{(j)}$, appelée la ligne modale. Dans l'espace de phase $(u_i^{(1)}, \dot{u}_i^{(1)})$, le mode est représenté par un plan, qui est un sous-espace invariant de l'espace de phase. Pour toutes les conditions initiales situées dans ce plan, les réponses associées restent dans ce plan à tout instant. De plus, la trajectoire des réponses forme une ellipse située dans ce plan. En plus, les réponses modales sont synchrones, *i.e* toutes les DDLs atteignent leur maximum à même instant et elles passent par zéros simultanément.

Pour l'illustration, prenons l'exemple numérique d'un système discret à 2-DDLs comme montré sur la figure 2.1 (chapitre 2). On considère seulement *le premier mode* du système linéaire associé. La surface invariante de phase associée au premier mode est représentée sur la figure A.1.

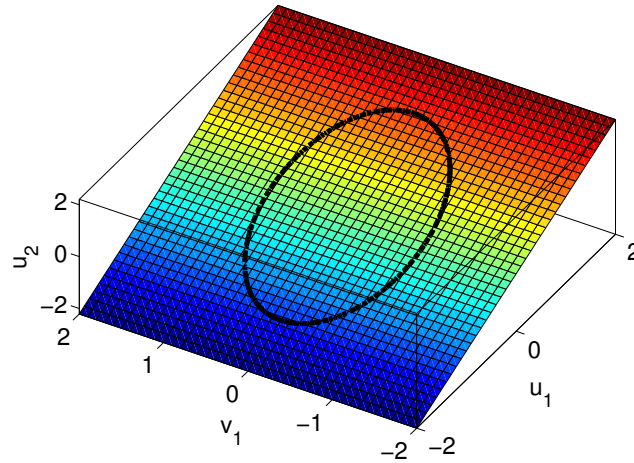


FIGURE A.1. Surface invariante de phase associée au premier mode.

La projection de la trajectoire de la réponse dans l'espace de configuration (u_1, u_2) et l'espace de phase (u_1, v_1) sont respectivement illustrées sur les figures A.2.1 et A.2.2. Dans l'espace de configuration, le premier mode est représenté par une droite passant par zéro qui est le point

d'équilibre du système. Par exemple, les conditions initiales : $u_1(0) = 1,34$, $u_2(0) = 1,48$, $v_1(0) = v_2(0) = 0$ correspondent avec un point de départ située sur le premier mode car $\frac{u_2(0)}{u_1(0)} = \frac{\Phi_1^{(2)}}{\Phi_1^{(1)}} = 1,1$. La réponse associée à la forme d'une ellipse dans l'espace de phase et elle reste dans le plan du mode à tout instant.

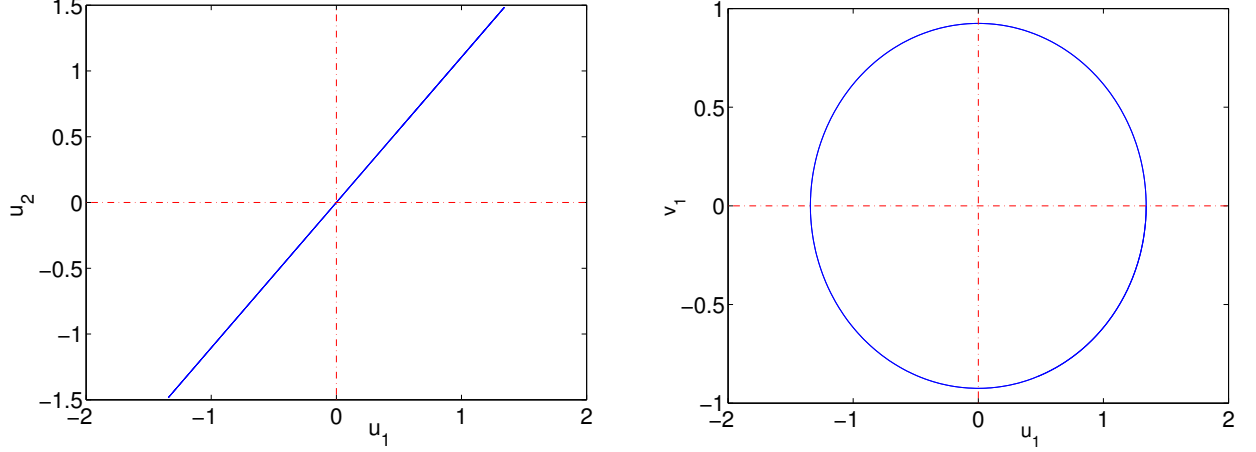


FIGURE A.2. Représentation du 1^{er} mode dans : 1(Gauche) l'espace de configuration (ligne modale), 2(Droite) l'espace de phase.

A.2 Systèmes linéaires dissipatifs

En projetant l'équation (A.1) sur la base modale $\{\Phi\}$ constituée par des vecteurs propres $\{\phi_k, k = 1..n\}$ obtenues en résolvant le problème de recherche des modes propres et des valeurs propres du système conservatif associé, *i.e* $(-[\mathbf{M}]\omega_k^2 + [\mathbf{K}])\Phi_k = 0$, on obtient :

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + [{}^t\Phi\mathbf{C}\Phi] \dot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{\Lambda}]\mathbf{q}(t) = 0 \quad (\text{A.6})$$

où $[\mathbf{\Lambda}] = \text{diag}\{\omega_1^2, \dots, \omega_n^2\}$ est la matrice diagonale des pulsations propres linéaires (au carrés).

La matrice $[{}^t\Phi\mathbf{C}\Phi]$ n'est pas, en général, diagonale si aucune hypothèse n'est pas faite sur la forme de la matrice d'amortissement $[\mathbf{C}]$. D'où, les amortissements sont classifiés en deux catégories :

- Amortissement proportionnel,
- Amortissement non-proportionnel lorsque la matrice $[{}^t\Phi\mathbf{C}\Phi]$ n'est pas diagonale.

A.2.1 Amortissement proportionnel

Une hypothèse classique est celle de Rayleigh où la matrice d'amortissement est proportionnelle aux matrices de masse et de rigidité. On a :

$$[\mathbf{C}] = \alpha[\mathbf{M}] + \beta[\mathbf{K}], \quad (\alpha, \beta \text{-sont des constantes})$$

Dans ce cas, la matrice $[{}^t\Phi\mathbf{C}\Phi]$, appelée *matrice d'amortissement modal*, est diagonale, *i.e* $[{}^t\Phi\mathbf{C}\Phi] = \text{diag}\{2\xi_1\omega_1, \dots, 2\xi_n\omega_n\}$. Par conséquent, les équations (A.6) sont découplées :

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2q_i = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.7})$$

La réponse totale du système s'écrit donc :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i q_i(t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i \left[\rho_i e^{-\xi_i \omega_i t} \cos(\tilde{\omega}_i t - \varphi_i) \right] \quad (\text{A.8})$$

où les coefficients ρ_i, φ_i sont déterminés à partir des conditions initiales. $\tilde{\omega}_i = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$ est la pulsation propre amortie (le cas d'amortissement sous-critique est considéré).

Dans l'espace bi-dimensionnel de phase, la réponse modale amortie forme une ligne spirale converge vers l'origine. Il est important de remarquer que les systèmes possédant l'amortissement proportionnel ont des modes propres réels et des valeurs propres réelles.

En dérivant le déplacement total, la vitesse et l'accélération sont obtenues :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(t) &= \sum_{i=1}^n \Phi_i \rho_i \omega_i e^{-\xi_i \omega_i t} \left[-\xi_i \cos(\tilde{\omega}_i t - \varphi_i) - \sqrt{1 - \xi_i^2} \sin(\tilde{\omega}_i t - \varphi_i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \Phi_i \rho_i \omega_i e^{-\xi_i \omega_i t} \cos(\tilde{\omega}_i t - \varphi_i - \delta_i + \pi) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}(t) &= \sum_{i=1}^n \Phi_i \rho_i \omega_i^2 e^{-\xi_i \omega_i t} \left[-\xi_i \cos(\tilde{\omega}_i t - \varphi_i - \delta_i + \pi) - \sqrt{1 - \xi_i^2} \sin(\tilde{\omega}_i t - \varphi_i - \delta_i + \pi) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \Phi_i \rho_i \omega_i^2 e^{-\xi_i \omega_i t} \cos(\tilde{\omega}_i t - \varphi_i - 2\delta_i) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

avec le déphasage $\delta_i = \arccos(\xi_i)$.

Pour l'identification des systèmes à l'aide de la transformation en ondelettes continue, il est préférable de réécrire ces réponses sous la forme générale suivante (voir la section 3.2.1) :

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^n u_{kj} = \sum_{j=1}^n A_{u_{kj}}(t) \cos(\alpha_{kj}(t))$$

– Associé au déplacement $u_k(t)$

$$\begin{aligned} A_{u_{kj}} &= |\phi_{kj}| \rho_j e^{-\xi_j \omega_j t} \\ \alpha_{u_{kj}} &= \tilde{\omega}_j t - \varphi_j + \frac{\pi}{2} (1 - \text{Sgn}(\phi_{kj})) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

– Associé à la vitesse $\dot{u}_k(t)$

$$\begin{aligned} A_{\dot{u}_{kj}} &= |\phi_{kj}| \rho_j \omega_j e^{-\xi_j \omega_j t} \\ \alpha_{\dot{u}_{kj}} &= \tilde{\omega}_j t - \varphi_j - \delta_j + \frac{\pi}{2} (1 + \text{Sgn}(\phi_{kj})) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

– Associé à l'accélération $\ddot{u}_k(t)$

$$\begin{aligned} A_{\ddot{u}_{kj}} &= |\phi_{kj}| \rho_j \omega_j^2 e^{-\xi_j \omega_j t} \\ \alpha_{\ddot{u}_{kj}} &= \tilde{\omega}_j t - \varphi_j - 2\delta_j + \frac{\pi}{2} (1 - \text{Sgn}(\phi_{kj})) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

A.2.2 Amortissement non-proportionnel

Différent du cas précédent, la matrice $[\mathbf{t} \Phi \mathbf{C} \Phi]$ dans le cas n'est plus diagonale. Afin de trouver des solutions, les équations (A.1) sont habituellement transformées sous forme d'état, *i.e* sa représentation dans l'espace de phase constitué par l'espace des déplacements et celui des vitesses :

$$\begin{cases} [\mathbf{M}] \dot{\mathbf{v}} + [\mathbf{C}] \mathbf{v} + [\mathbf{K}] \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{v} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

On en déduit :

$$[\mathbf{A}_1]\dot{\mathbf{z}} + [\mathbf{B}_1]\mathbf{z} = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\text{où } [\mathbf{A}_1] = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}] & [\mathbf{M}] \\ [\mathbf{M}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{B}_1] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & -[\mathbf{M}] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix}$$

En faisant un changement de variables : $\mathbf{u}(t) = \Psi e^{\lambda t}$ et $\mathbf{v}(t) = \lambda \Psi e^{\lambda t}$ avec Ψ , λ - les modes propres et les valeurs propres complexes associées, on obtient le problème de calcul des modes propres et des valeurs propres complexes :

$$([\mathbf{A}_1]\lambda + [\mathbf{B}_1]) \begin{Bmatrix} \Psi \\ \lambda \Psi \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{A.16})$$

Cette équation donne n paires de vecteurs propres $(\Psi_k, \bar{\Psi}_k)$ et n paires de valeurs propres complexes $(\lambda_k, \bar{\lambda}_k)$.

A.2.2.1 Forme générale des réponses vibratoires

En remplaçant $\mathbf{u}(t) = \Psi e^{\lambda t}$ dans l'équation (A.1), on obtient :

$$(\lambda^2[\mathbf{M}] + \lambda[\mathbf{C}] + [\mathbf{K}]) \Psi = 0 \quad (\text{A.17})$$

Considérons deux paires de solutions : (Ψ_i, λ_i) et (Ψ_j, λ_j) . Il est facile de déduire que :

$$\begin{cases} (\lambda_i + \lambda_j)^t \Psi_j [\mathbf{M}] \Psi_i + {}^t \Psi_j [\mathbf{C}] \Psi_i & = 0 \\ \lambda_i \lambda_j {}^t \Psi_j [\mathbf{M}] \Psi_i - {}^t \Psi_j [\mathbf{K}] \Psi_i & = 0 \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

On pose :

$$\omega_j^2 = \frac{{}^t \Psi_j \mathbf{K} \Psi_j}{{}^t \Psi_j \mathbf{M} \Psi_j} \quad ; \quad 2\xi_j \omega_j = \frac{{}^t \Psi_j \mathbf{C} \Psi_j}{{}^t \Psi_j \mathbf{M} \Psi_j}$$

Considérons le cas de l'amortissement sous-critique, i.e $\xi_j < 1$, la j -ième solution de ce système d'équations s'écrit :

$$\lambda_j = -\omega_j \xi_j + i\tilde{\omega}_j, \quad \tilde{\omega}_j = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \quad (\text{A.19})$$

La réponse totale en coordonnée k du système (A.1) s'écrit sous la forme :

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^n \left(\psi_{kj} Q_j e^{\lambda_j t} + \bar{\psi}_{kj} \bar{Q}_j e^{\bar{\lambda}_j t} \right) \quad \text{avec } k = 1, \dots, n \quad (\text{A.20})$$

où Q_j est déterminé à partir des conditions initiales.

Comme dans le cas d'amortissement proportionnel, on réécrit aussi la réponse totale (A.20) sous la forme générale :

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^n u_{kj} = \sum_{j=1}^n A_{u_{kj}}(t) \cos(\alpha_{kj}(t))$$

– Associé au déplacement $u_k(t)$

$$\begin{aligned} A_{u_{kj}} &= 2|\psi_{kj}| |Q_j| e^{-\xi_j \omega_j t} \\ \alpha_{u_{kj}} &= \tilde{\omega}_j t + \angle \psi_{kj} + \angle Q_j \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

– Associé à la vitesse $\dot{u}_k(t)$

$$\begin{aligned} A_{\dot{u}_{kj}} &= 2|\psi_{kj}||Q_j|\omega_j e^{-\xi_j\omega_j t} \\ \alpha_{\dot{u}_{kj}} &= \tilde{\omega}_j t + \angle\psi_{kj} + \angle Q_j - \delta_j + \pi \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

– Associé à l'accélération $\ddot{u}_k(t)$

$$\begin{aligned} A_{\ddot{u}_{kj}} &= 2|\psi_{kj}||Q_j|\omega_j^2 e^{-\xi_j\omega_j t} \\ \alpha_{\ddot{u}_{kj}} &= \tilde{\omega}_j t + \angle\psi_{kj} + \angle Q_j - 2\delta_j \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

A.2.2.2 Normalisation des modes complexes

Soit $\Psi_j \in \mathbb{C}^n, \forall j = 1..N$, le j -ième mode complexe quelconque du système ; $\Phi_j \in \mathbb{R}^n, \forall j = 1..N$ le j -ième mode réel normalisé par rapport à la masse :

$$\Phi_j^T \mathbf{M} \Phi_j = 1, \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (\text{A.24})$$

Les systèmes linéaires non-amortis ou avec amortissement proportionnel possèdent des modes normaux réels. La normalisation de ces modes réels, par des constantes réelles, ne change pas l'allure des modes dans l'espace de configuration. Il n'est pas cependant le cas pour des modes complexes lorsqu'on les normalise par des constantes complexes. Adhikari [1] introduit la notion des *modes complexes optimaux* (noté par $\Psi_{j,opt}$) qui sont les plus proches, au sens des moindres carrés, des modes normaux associés :

$$\Psi_{j,opt} = \frac{\Phi_j^T \bar{\Psi}_j}{\|\Psi_j\|^2} \Psi_j \quad (\text{A.25})$$

D'un côté, ce mode complexe optimal est une projection orthogonale de Ψ_j sur Φ_j . D'autre côté, il est indépendant du choix du mode complexe initial Ψ_j . En effet, pour une autre normalisation : $\Psi'_j = c_j \Psi_j$ avec $c_j \in \mathbb{C}$, le mode complexe optimal associé s'écrit donc :

$$\Psi'_{j,opt} = \frac{\Phi_j^T \bar{\Psi}_j}{\|\Psi_j\|^2 |c_j|^2} \bar{c}_j c_j \Psi_j = \Psi_{j,opt} \quad (\text{A.26})$$

Afin de quantifier la non-proportionnalité, Adhikari [1] propose d'utiliser l'indice de non-proportionnalité définie par la différence entre le mode complexe optimal et son mode normal associé :

$$\mathbb{I}_j = \frac{\|\Psi_{j,opt} - \Phi_j\|}{\|\Phi_j\|} \quad (\text{A.27})$$

Comme le mode complexe optimal est le plus proche, au sens des moindres carrés, du mode normal associé, son indice de non-proportionnalité $\mathbb{I}_j$ est minimum parmi ceux associés aux autres modes complexes.

Bibliographie

- [1] S. Adhikari. Optimal complex modes and an index of damping non-proportionality. *Mechanical Systems and Signal Processing*, pages 1–27, 2004.
- [2] M. S. Alam. A unified Krylov-Bogoliubov-Mitropolskii method for solving n th order nonlinear system. *Journal of Franklin Institut*, 339 :239–248, 2002.
- [3] P. Apiwattannalungarn. *Model reduction of nonlinear structural systems using nonlinear normal modes and component mode synthesis*. PhD thesis, Michigan State University, 2003.
- [4] P. Argoul, S. Erlicher, and T.M. Nguyen. Free oscillations of a beam with a local non-linearity : Comparison of mechanical modeling and experiments by means of wavelet analysis. *Proceedings of DETC2005 : 20th Biennial Conf. on Mechanical Vibration and Noise*, pages 1347–1356, 2005.
- [5] P. Argoul, S. Hans, F. Conti, and C. Boutin. Time-frequency of free oscillations of mechanical structures. Application to the identification of the mechanical behaviour of buildings under shocks. *COST F3 Conf. on System Identification and Structural Health Monitoring*, pages 238–292, 2000.
- [6] P. Argoul and Le T.-P. Instantaneous indicators of structural behaviour based on the continuous cauchy wavelet analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(1) :243–250, 2003.
- [7] R. Arquier, S. Bellizzi, R. Bouc, and B. Cochelin. Two methods for the computation nonlinear modes of vibrating systems at large amplitudes. *Computer and Structure*, 84 :1565–1576, 2006.
- [8] J. C. Asmussen. *Modal analysis based on the random decrement technique - Application to civil engineering structures*. PhD thesis, University of Aalborg, 1997.
- [9] L. Azrar, R. Benamar, and R. G. White. A semi-analytical approach to the non-linear dynamic response problem of s-s and c-c beams at large vibration amplitudes, part I : General theory and application to the single mode approach to free and forced vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 224(2) :183–207, 1999.
- [10] L. Azrar, R. Benamar, and R. G. White. A semi-analytical approach to the non-linear dynamic response problem of s-s and c-c beams at large vibration amplitudes, part I : Multi-mode approach to the steady state forced periodic response. *Journal of Sound and Vibration*, 255(1) :1–41, 2002.
- [11] L. Azrar, E. H. Boutyour, and M. Potier-Ferry. Non-linear forced vibrations of plates by an asymptotique-numerical method. *Journal of Sound and Vibration*, 252(4) :657–674, 2002.
- [12] S. Bellizzi and R. Bouc. A new formulation fot the existence and calculation of nonlinear modes. *EUROMECH 457*, pages 25–28, 2004.
- [13] S. Bellizzi and R. Bouc. A new formulation fot the existence and calculation of nonlinear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 287(7) :545–569, 2005.

- [14] S. Bellizzi, P. Guilleman, and R. Kronland-Martinet. Identification of coupled non-linear modes from free vibration using time-frequency representations. *Journal of Sound and Vibration*, pages 191–213, 2001.
- [15] W. A. Benfield and R. F. Hruda. Vibration analysis of structures by component mode synthesis. *AIAA Journal*, 9(7) :1255–1261, 1971.
- [16] P. Bisch. *Mécanique des structures*. cours de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2003.
- [17] N. Boivin, C. Pierre, and S.W. Shaw. Nonlinear Modal Analysis of Structural Systems featuring Internal Resonance. *Journal of Sound and Vibration*, 182(2) :336–341, 1995.
- [18] M. Boltezar and J. Slavic. Enhancements to the continuous wavelet transform for damping identifications on short signal. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(5) :1065–1076, 2004.
- [19] R. Bouc and S. Bellizzi. Une nouvelle approche pour l'existence et le calcul des modes non linéaires. *Publications du LMA*, (156) :39–58, 2003.
- [20] F. Bourquin. *Synthèse modale et Analyse numérique des multistuctures élastiques*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1990.
- [21] C. Boutin, S. Hans, I. Erdin, and M. Lorient. Approche de la vulnérabilité sismique par l'étude du comportement de bâtiments réels. *Contrat de plan Etat-Région, Laboratoire Géomatériaux, ENTPE Lyon*, 1999.
- [22] R. Carmona, W.-L. Hwang, and B. Torrésani. *Practical Time-Frequency Analysis, Gabor and Wavelet Transforms with an Implementation in S*. Academic Press, 1998.
- [23] B. Cochelin. Modes non-linéaires des structures élastiques : quelques définitions et méthodes de calcul. *Publication du LMA*, (156) :1–14, 2003.
- [24] H.A. Cole. On-The-Line analysis of randoms vibration. *AIAA paper*, pages 68–288, 1968.
- [25] R. R. Craig and M. C. C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.
- [26] R. R. Craig and C. J. Chang. Free-interface methods of substructures coupling for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 14(11) :1633–1635, 1976.
- [27] R. R. Craig and C. J. Chang. On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 77(405) :89–99, 1977.
- [28] S. Erlicher and P. Argoul. Modal identification of linear non-proportionally damped systems by wavelet transform. *Mechanical Systems and Signal Processing*, in press, 2006.
- [29] J. V. Ferreira. *Dynamic response analysis of structures with nonlinear components*. PhD thesis, Imperial college of science, technology and medicine, University of London, May 1999.
- [30] R. J. Gibert. *Vibrations des structures*. Editions Eyrolles, 1998.
- [31] A. Girard and N. Roy. *Dynamique des structures industrielles*. Lavoisier, 2003.
- [32] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector field*. Springer, 1986.
- [33] S. Hans, E. Ibrahim, S. Pernot, C. Boutin, and C.-H. Lamarque. Damping identification in multi-degree-of-freedom system via a wavelet-logarithmic decrement-part 2 : study of a civil engineering building. *Journal of Sound and Vibration*, 235(3) :375–403, 2000.
- [34] M. W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.

- [35] W. C. Hurty. Vibration of structural systems by component mode synthesis. *AIAA Journal*, 6(7) :678–685, 1965.
- [36] S.R. Ibrahim and E.C. Mikulcik. A method for identification of vibration parameters from the free response. *The Shock and Vibration Bulletin*, (47) :183–198, 1977.
- [37] T. Iwatsubo, K. Shimbo, and Sh. Kawamura. Nonlinear vibration analysis of a rotor system using component mode synthesis method. *Archive of Applied Mechanics*, 72(11-12) :843–855, 2003.
- [38] L. Jezequel and C.H. Lamarque. Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *Journal of Sound and Vibration*, 149(1) :429–459, 1991.
- [39] D. Jiang, C. Pierre, and S.W. Shaw. Large-amplitude nonlinear normal modes of piecewise linear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 217(3) :869–891, 2004.
- [40] D. Jiang, C. Pierre, and S.W. Shaw. The construction of non-linear normal modes for systems with internal resonance. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 40 :729–746, 2005.
- [41] D. Jiang, C. Pierre, and S.W. Shaw. Non-linear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 288(4-5) :791–812, 2005.
- [42] H.B. Keller. *Lecture on numerical methods in bifurcation problems*. Tata Institute of Fundamental Research. Bombay : Springer, 1987.
- [43] M.E. King and A. Vakakis. A energy-based formulation for computing nonlinear normal modes in undamped continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 116 :332–340, 1993.
- [44] J. Lardies. Modal parameter estimation and model order selection of a randomly vibration system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(6) :825–838, 1998.
- [45] J. Lardies. State-space identification of vibrating systems from multi-output measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(4) :543–558, 1998.
- [46] J. Lardies, M.-N Ta, and M. Berthillier. Modal parameter estimation based on the wavelet transform of output data. *Archive of Applied Mechanics*, 73 :718–733, 2004.
- [47] J. Lardiès and M.-N. Ta. A wavelet-based approach for the identification of damping in non-linear oscillators. *International Journal of Mechanical Science*, pages 1262–1281, 2005.
- [48] T. P. Le. *Auscultation dynamique des structures à l’aide de l’analyse de l’analyse continue en ondelettes*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts en Chaussées, 2003.
- [49] T.-P. Le and P. Argoul. Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response. *Journal of Sound and Vibration*, 17(1) :243–250, 2003.
- [50] M. Legrand, D. Jiang, C. Pierre, and S.W. Shaw. Nonlinear normal modes of a rotating shaft based on the invariant manifold method. *International Journal of Rotating Machinery*, 10(4) :319–335, 2004.
- [51] V. Lenaerts, G. Kerschen, and J.-C. Golinval. Identification of a continuous structure with a geometrical non-linearity. Part I : Conditioned reverse path method. *Journal of Sound and Vibration*, pages 889–906, 2003.
- [52] V. Lenaerts, G. Kerschen, and J.-C. Golinval. Identification of a continuous structure with a geometrical non-linearity. Part II : Proper orthogonal decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, pages 907–919, 2003.
- [53] R. Lewandowski. Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures, part 1 : theoretical background. *International Journal of Solids and Structures*, 34(15) :1925–1947, 1997.

- [54] R. Lewandowski. Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures, part 2 : numerical strategy and examples. *International Journal of Solids and Structures*, 34(15) :1949–1964, 1997.
- [55] K. Liu. Modal parameter estimation using the state space method. *Journal of Sound and Vibration*, 197(6) :387–402, 1998.
- [56] N. M. M. Maia and J. M. M. Silva. *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Research Studies Press Ltd, 1997.
- [57] R. H. Marneal. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers and Structures*, 1(4) :581–601, 1971.
- [58] A. H. Nayfeh. On direct methods for constructing nonlinear normal modes of continuous systems. *Journal of Vibration and Control*, (1) :389–430, 1995.
- [59] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons, 1979.
- [60] T.-M. Nguyen, P. Argoul, and R. Ceravolo. Wavelet analysis of structural responses under ambient excitation. *Proceedings of the 6th international Conference on Structural Dynamics, Paris, France*, pages 107–112, 2005.
- [61] T.M. Nguyen, P. Argoul, G. Bonnet, and E. Silvano. Analyse dynamique d’une poutre linéaire avec une interface non-linéaire. *7e Colloque Nationale en Calcul des Structures*, pages 345–350, 2005.
- [62] F. Pérignon. *Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non linéaires*. PhD thesis, Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II), 2004.
- [63] E. Pesheck, N. Boivin, C. Pierre, and S.W. Shaw. Nonlinear Modal Analysis of Structural Systems using Multi-Mode Invariant Manifolds. *Nonlinear Dynamics*, (25) :183–205, 2001.
- [64] E. Pesheck and C. Pierre. A new Galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 249(5) :971–993, 2002.
- [65] E. Pesheck, C. Pierre, and S.W. Shaw. Accurate reduced-order models for a simple rotor blade model using nonlinear normal modes. *Mathematical and Computer Modelling*, 33 :1085–1097, 2001.
- [66] P. Ribeiro. Non-linear forced vibrations of thin/thick beams and plates by the finite element and shooting methods. *Computers and Structures*, 82 :1413–1423, 2004.
- [67] R.M. Rosenberg. On nonlinear vibrations of systems with many degree of freedom. *Advanced Appl. Mech.*, (9) :155–242, 1966.
- [68] S. Rubin. Improvement component-mode representation for structural dynamic analysis. *AIAA Journal*, 13(8) :995–1006, 1975.
- [69] M. Ruzzene, A. Fasana, L. Garibaldi, and B. Piombo. Natural frequencies and dampings identification using wavelet transform : application to real data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(2) :207–218, 1997.
- [70] R. Seydel. *From equilibrium to chaos : Practical bifurcation and stability analysis*. Elsevier, 1988.
- [71] S.W. Shaw and C. Pierre. Normal modes de vibration for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164(1) :85–124, 1993.
- [72] S.W. Shaw and C. Pierre. Normal modes de vibration for non-linear continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 169(3) :319–347, 1994.

- [73] C. H. Sheu, G. De Roeck, M. Van Laethem, and P. Geyskens. Application of the substructuring technique to non-linear dynamique structural analysis. *Computers and Structures*, 35(5) :593–601, 1990.
- [74] W.J. Staszewski. Identification of damping in MDOF systems using time-scale decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 203(2) :283–305, 1997.
- [75] W.J. Staszewski. Identification of non-linear systems using multiscale ridges and skeletons of the wavelet transform. *Journal of Sound and Vibration*, 214(4) :639–658, 1998.
- [76] P. Sundararajan and S. T. Noah. An algorithm for response and stability of large order non-linear systems - Application to rotor systems. *Journal of Sound and Vibration*, 214(4) :695–723, 1998.
- [77] W. Szemplinska and Stupnicka. *The Behaviour of Nonlinear Vibrating Systems, Volume II : Advanced Concepts and Application to Multi-Degree-of-Freedom Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [78] M. N. Ta. *Analyse modale par sous-espaces et par la transformation en ondelettes*. PhD thesis, U.F.R des sciences et techniques de l’université de Franche-Compté, 2005.
- [79] M.-N. Ta and J. Lardiès. Identification of weak nonlinearities on damping and stiffness by the continuous wavelet transform. *Journal of Sound and Vibration*, pages 16–37, 2006.
- [80] O. Thomas. *Analyse et modélisation de vibrations non-liéaires de milieux minces élastiques - Application aux instruments de percussion*. PhD thesis, Université de Marie Curie, 2001.
- [81] O. Thomas and F. Trouverez. Panorama des non-linéarités rencontrées en vibration. *Journée nationale des modes non-linéaires : définitions et applications*, 18 Novembre 2005.
- [82] B. Torrèsani. *Analyse continue par ondelettes*. CNRS Editions, 1995.
- [83] C. Touzé. A normal form approach for non-linear normal modes. *Publication du LMA*, (156) :15–39, 2003.
- [84] C. Touzé, O. Thomas, and A. Huberdeau. Asymptotique non-linear normal modes for large-amplitude vibrations of continuous structures. *Computers and Structures*, 82 :2671–2682, 2004.
- [85] D.M. Tran. Component mode synthesis methods using interface modes. Application to structures with cyclic symmetry. *Computers and Structures*, 79 :209–222, 2001.
- [86] A.F. Vakakis, L.I. Manevitch, Y.V. Mikhlin, and A.A. Zevin. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. John Wiley & Sons, 1996.

Résumé

DYNAMIQUE NON LINÉAIRE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES COUPLÉS : RÉDUCTION DE MODÈLES ET IDENTIFICATION

Le travail présenté dans ce mémoire est une contribution au domaine de l'analyse et de l'identification du comportement dynamique des structures non linéaires. Le premier objectif est la mise au point et la comparaison de quatre techniques de calcul des Modes Normaux Non linéaires (MNNs) : l'approche de Shaw et Pierre, l'approche de Bellizzi et Bouc, l'équilibrage harmonique et la méthode de tir. La combinaison des trois dernières méthodes avec la méthode de continuation permet de détecter les points de bifurcation et de trouver les nouvelles branches de solutions. Le deuxième objectif est l'identification des paramètres caractérisant le comportement dynamique des systèmes linéaires et non linéaires à partir des réponses libres ou des réponses au bruit ambiant. Les outils présentés sur le traitement du signal réel modulé en amplitude et en fréquence par la transformation en ondelettes continue permettent d'atteindre cet objectif. Le dernier objectif est l'extension de la méthode de sous-structuration linéaire de Craig-Bampton au cas non linéaire. Lorsque l'hypothèse de couplage faible entre les sous-structures est faite, le modèle réduit de la structure globale est obtenu par assemblage de modèles réduits de sous-structures avec interfaces de couplage fixe. Ces modèles réduits sont calculés en utilisant l'approche des MNNs de Shaw et Pierre. La robustesse et l'efficacité des méthodes présentées sont étudiées au travers d'exemples numériques ainsi que de tests réels.

Mots clefs : Modes Normaux Non linéaires, méthode de continuation, transformation en ondelettes, identification modale, oscillations libres, excitations ambiantes, sous-structuration, réduction de modèle.

Abstract

NONLINEAR DYNAMIC OF COUPLED MECHANICAL SYSTEMS : MODEL REDUCTION AND IDENTIFICATION

This work is devoted to the analysis and identification of the dynamical behaviour of nonlinear structures. First, four techniques for computing Nonlinear Normal Modes are presented and compared : the Shaw and Pierre's approach, the Bellizzi and Bouc's approach, the harmonic balance method and the shooting method. The combination between the three last methods and the continuation technique allows to detect bifurcation points and to obtain new branches of solution. Next, the identification of parameters characterising the dynamical behaviour of linear and nonlinear systems from free responses or responses under ambient excitation is studied. Some tools are proposed in order to process frequency modulated real signals by using the continuous wavelet transform. Finally, the linear Craig-Bampton's substructure method is extended to the nonlinear case. With the assumption of weak coupling between substructures, a reduced model of global structure is determined by assembling reduced models of substructures with fixed coupling interfaces, which are obtained from the invariant manifold (or Shaw and Pierre's) approach. The robustness and the efficiency of the studied methods are shown through numerically simulated data and benchmarks.

Keywords : Nonlinear Normal Modes, continuation method, wavelet transform, modal identification, free oscillations, ambient excitation, substructure, model reduction.