



Ecole doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

# THÈSE

pour obtenir le grade de

**Docteur**

de

**l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers**

**Spécialité "Mécanique - Matériaux"**

*présentée et soutenue publiquement  
par*

**François HENNEBELLE**

le 05 décembre 2007

**DETERMINATION DES INCERTITUDES DE MESURES SUR  
MACHINES A MESURER TRIDIMENSIONNELLES**

**APPLICATION AUX ENGRENAGES**

*Directeur de thèse : Maxence BIGERELLE*

*Co-encadrement de la thèse : Thierry COOREVITS*

Jury :

**M. Pierre-Jean BARRE**, Professeur, Directeur, ENSAM, Lille ..... Président  
**M. Jean-François FONTAINE**, Professeur, QLIO, IUT de Dijon, Auxerre ..... Rapporteur  
**M. Hassan ZAHOUANI**, Professeur, LTDS, Ecole Centrale de Lyon..... Rapporteur  
**M. Maxence BIGERELLE**, Professeur, Laboratoire Roberval, UTC..... Examineur  
**M. Thierry COOREVITS**, Maître de Conférence, L2MA, ENSAM, Lille ..... Examineur  
**M. Alain IOST**, Professeur, LMPGM, ENSAM, Lille..... Examineur  
**M. Frédéric LAMARQUE**, Maître de Conférence, Laboratoire Roberval, UTC .. Examineur  
**M. Pascal SESSA**, Directeur de la métrologie du CETIM de Senlis..... Invité

**Laboratoire de Métrologie et de Mathématiques Appliquées**  
*ENSAM, CER de Lille*

# Remerciements

Mon travail de thèse a été réalisé au Laboratoire de Métrologie et de Mathématiques Appliquées dirigé par Monsieur Olivier GIBARU. Ce laboratoire est installé à l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Lille dirigée par Monsieur Pierre-Jean BARRE qui me fait l'honneur de présider ce jury. Je tiens tout particulièrement à le remercier pour la confiance qu'il a accordé à Adrien VAN GORP et à moi-même pour l'organisation et la formation des élèves-ingénieurs en déformations plastiques et assemblages. Pour son accueil et sa confiance, qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

C'est un plaisir de reconnaître ce que je dois à Jean-François FONTAINE, Professeur des Universités au département Qualité Logistique Industrielle et Organisation à l'IUT de Dijon à Auxerre et à Hassan ZAHOUANI, Professeur des Universités au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'Ecole Centrale de Lyon d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail.

Merci à Monsieur Frédéric LAMARQUE du laboratoire Roberval de L'UTC d'avoir accepté de participer à ce jury.

Je tiens à remercier Monsieur Alain IOST, Professeur des Universités au Laboratoire de Métallurgie Physique et Génie des Matériaux, d'avoir accepté de faire partie de ce jury. C'est dans son équipe que j'ai pu faire mes premiers pas en recherche au cours de mon DEA et de mon Projet de Fin d'Etude. J'y ai beaucoup appris.

Je tiens particulièrement à remercier mes directeurs de thèse, Maxence BIGERELLE et Thierry COOREVITS pour m'avoir épaulés durant ces trois années.

A Thierry, je suis très reconnaissant de m'avoir patiemment appris la rigueur nécessaire lorsqu'on manipule des micromètres qui ont bien trop tendance à voyager en troupeaux.

Je tiens également à remercier les membres du laboratoire de métrologie du CETIM de Senlis, et notamment Pascal SOUQUET, Pascal SESSA, Nicolas ROUSSET, Renald VINCENT et Fabrice DESNOYER, pour leur accueil chaleureux et leur aide pour mener à bien cette étude qui devrait aboutir, je l'espère prochainement, à une accréditation COFRAC. Je remercie plus particulièrement Pascal SESSA d'avoir accepté de participer à mon jury.

A Jean Claude VERVISCH, technicien au laboratoire de métrologie de l'ENSAM de Lille et Michel LELEU, technicien en usinage, que je ne remercierai jamais assez pour leurs compétences, leurs conseils avisés, leur bonne humeur et pour tout dire leur talent...

A ma famille, qui m'a toujours aidée et soutenue dans mes projets personnels et professionnels, je dis tout ce que l'on ne peut pas écrire.

A mes amis et plus particulièrement Adrien et Adi qui ont toujours répondu présents, sans qui ma thèse n'aurait pas été la même... Thierry nous appelle les trois mousquetaires, il doit y avoir une raison.

# Sommaire Global

<b>INTRODUCTION</b> .....	<b>1 – 9</b>
<b>CHAPITRE I</b> .....	<b>10 – 36</b>
Conséquence des défauts de géométrie d'une machine à mesurer tridimensionnelle sur la géométrie apparente d'une forme circulaire	
<b>CHAPITRE II</b> .....	<b>39 – 66</b>
Etude de cales à créneaux	
<b>CHAPITRE III</b> .....	<b>69 – 86</b>
Mesures de rectitudes	
<b>CHAPITRE IV</b> .....	<b>89 – 116</b>
Systèmes de palpage	
<b>CHAPITRE V</b> .....	<b>119 – 136</b>
Géométrie de la machine dans le plan	
<b>CHAPITRE VI</b> .....	<b>139 – 153</b>
Méthode de permutation ou de multiretournement	
<b>CHAPITRE VII</b> .....	<b>155 – 183</b>
Incertitudes	
<b>CHAPITRE VIII</b> .....	<b>185 – 194</b>
Mesurandes de l'engrenage	
<b>CHAPITRE IX</b> .....	<b>197 – 214</b>
Conception d'un étalon 2D/3D	
<b>CHAPITRE X</b> .....	<b>217 – 230</b>
Application en science des matériaux - Analyse de prothèses de hanches	
<b>CONCLUSION</b> .....	<b>233 – 234</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b> .....	<b>235 – 246</b>
<b>ANNEXE 1</b> .....	<b>249 – 255</b>
Contribution de quelques défauts sur la mesure d'un cercle	
<b>ANNEXE 2</b> .....	<b>257 – 259</b>
Position des points d'appui de moindre flexion	
<b>ANNEXE 3</b> .....	<b>261 – 268</b>
Notions de géométrie de l'engrenage	
<b>ANNEXE 4</b> .....	<b>271 - 273</b>
Etapas Monte Carlo	

# INTRODUCTION

## Préambule

Nul ne sait quand les engrenages ont été inventés. Les archéologues estiment qu'ils auraient été inventés 5000 ans avant Jésus Christ lorsque les être humains paresseux de relever l'eau du sol eux-mêmes ont l'idée d'utiliser les animaux. Ainsi, ils ont eu besoin de transférer la rotation de l'orientation horizontale à la verticale. Les animaux peuvent entraîner une roue dentée horizontale et, si celle-ci est reliée à une roue dentée verticale, les seaux d'eau seront levés.

Les premières descriptions de mécanismes utilisant des engrenages datent de 300 ans avant Jésus Christ. Des archéologues ont même retrouvé des plans et dessins d'horloges perpétuelles utilisant la force de l'eau combinant des engrenages et des vis d'Archimède en 280 avant Jésus Christ [SAE1990]. De superbes dessins décrivant les mécanismes de cette période sont présents dans un livre sur les machines de George Andream BOCKLERN publié en 1661 à Nuremberg. Au début, les engrenages étaient faits en bois. Ensuite aux environs de 80 ans avant Jésus Christ, ils auraient également été réalisés dans des métaux mous comme le bronze. Des plans complexes de mécanismes d'horloges datant de 87 avant Jésus Christ et utilisant ces matériaux existent. Certains de ces plans sont répertoriés à « The American Philosophical Society ». Néanmoins il fallut attendre la révolution industrielle pour voir l'apparition du fer dans la fabrication des engrenages. Les engrenages en fonte ont constitué une réelle amélioration par rapport aux engrenages en bois, mais ceux-ci étaient de très faible précision et pas vraiment mesurables.

Dans les années 1800, avec l'arrivée du moteur à vapeur, un énorme développement a été nécessaire pour permettre la transmission de grandes vitesses de rotation. Heureusement, dans le même temps, les machines de taillage et d'usinage des métaux se sont développées au début de la révolution industrielle. Dorénavant, la fabrication des engrenages est en grande partie confiée à des entreprises spécialisées.

L'histoire de la fabrication des engrenages est résumée sur la **Figure 1** issues de [OCH2006].

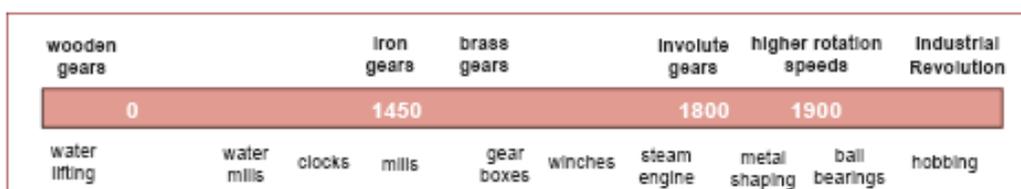


Figure 1 : histoire de la fabrication des engrenages de 0 à 1900.

La fabrication du profil classique du flanc de la dent d'engrenage en développante de cercle aurait été inventée en Suisse en 1922 et rentre l'année suivante dans le monde industriel avec succès. Néanmoins, il est difficile de trouver l'auteur réel de l'invention du profil en développante de cercle. Dans son article LIGUINE [LIG1872] fait un point historique intéressant sur le sujet, les prémisses datent de 1694.

Les premières discussions sur la mesure des engrenages datent de 1920 et le sujet est encore d'actualité. Les premiers étalons de contrôle d'engrenage datent de cette période. C'est à partir de la compréhension des erreurs trouvées que les qualités de fabrication ont pu être améliorées. Ainsi, peu après 1930, les engrenages de type hélicoïdaux ont pu être fabriqués et utilisés notamment en automobile. Mais ce type d'engrenage est encore plus complexe à contrôler et la solution de la mesure n'a été inventée que vers 1945.

Après 1960, les machines spéciales pour le contrôle des engrenages étaient couramment utilisées par les industriels. Celles-ci permettent de quantifier la qualité des engrenages fabriqués en fonction des résultats de mesure d'un étalon. En effet, ces étalons permettent à la fois la comparaison directe des mesures mais aussi l'étalonnage des appareils de mesure. La qualité des étalons est donc primordiale. C'est pourquoi dès cette période, des campagnes d'intercomparaisons ont eu lieu entre les différents instituts nationaux.

L'électronique évolue rapidement et le contrôle numérique des machines outils et de l'engrenage devient possible à partir de 1975. Les machines-outils à commande numérique font leur apparition dès 1980. Les artefacts parfaitement connus servent alors à prouver l'exactitude d'un mécanisme de contrôle des machines, l'électronique et les logiciels d'évaluation. Depuis cette date, les machines à commande numérique et plus particulièrement les machines à mesurer tridimensionnelles prennent le pas sur les machines spéciales qui montrent leur faiblesse en terme d'incertitudes de mesure.

Au niveau de l'incertitude de mesure, la méthode la plus simple est la méthode par comparaison [ISO/TS 15530-3, 2004]. C'est la plus utilisée actuellement. Cette méthode consiste à comparer la mesure par rapport à un étalon de référence parfaitement connu. Néanmoins, il devient utile de constamment concevoir de nouveaux étalons pour suivre l'évolution des engrenages comme le présente la **Figure 2** issue de [OCH2006] dans la mesure où même la taille de l'engrenage considéré doit être proche de l'étalon mesuré.

Actuellement, il existe différentes organisations effectuant le contrôle des étalons dans le monde. Néanmoins comme le précise la **Figure 3** issue de [OCH2006], il n'existe pas en France de laboratoire accrédité. Le CETIM est le représentant en France du contrôle des engrenages et s'appuie sur notre étude pour obtenir l'accréditation nécessaire aux industries de la mécanique en France.

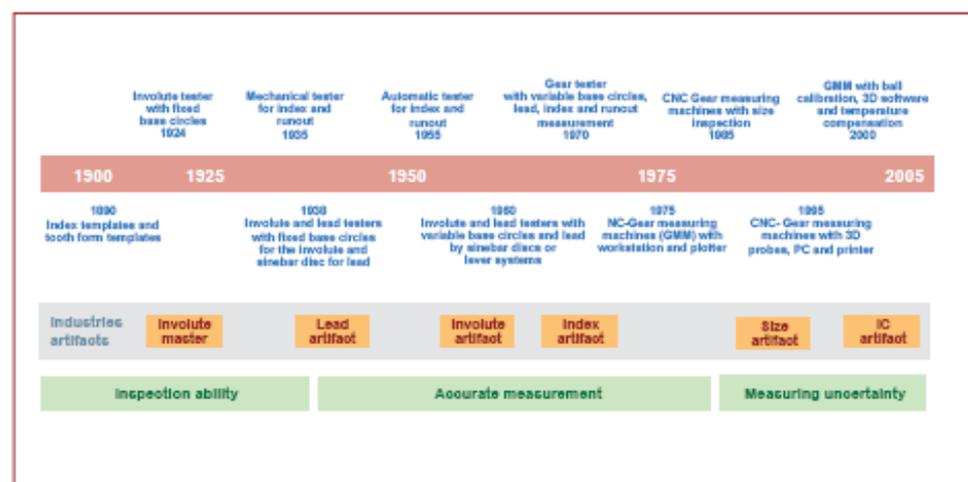


Figure 2 : Histoire du contrôle des engrenages de 1900 à 2005

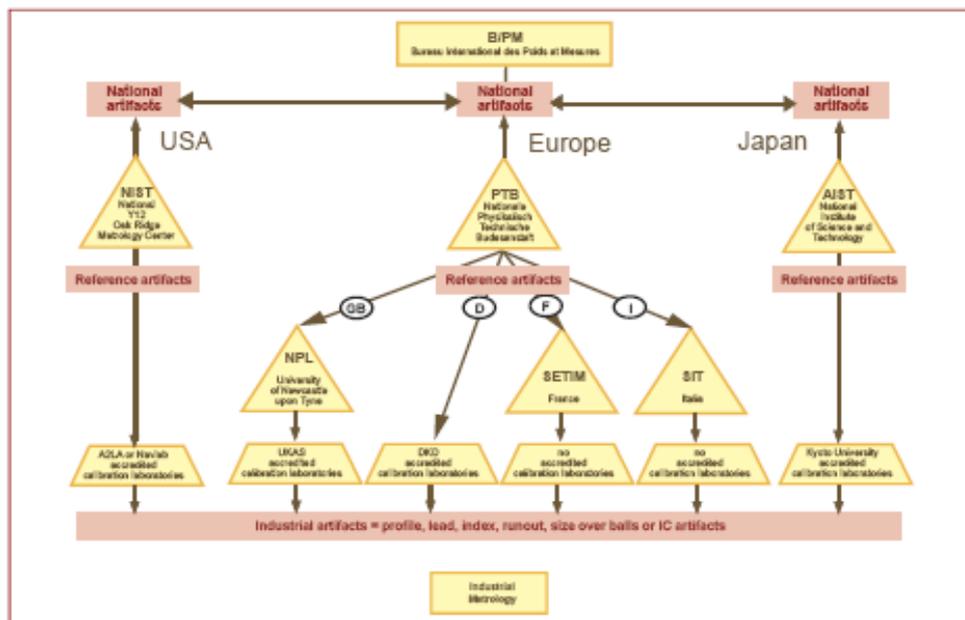


Figure 3 : Organisation mondiale de la traçabilité des étalons pour la mesure d'engrenage

Il existe bien évidemment quelques ouvrages de référence incontournables de généralités sur les engrenages concernant la géométrie, le fonctionnement, les matériaux utilisés, la résistance à l'usure et à la fatigue,... Nous ne ferons pas de rapport bibliographique sur le sujet, néanmoins des références relativement complètes peuvent être citées [HEN1979 - BOR1980 - BOR1989 - SAE1990 - PAS2002 - FAN2007]

## Contexte

L'objectif de la thèse est de mettre au point une méthode capable d'évaluer les incertitudes de mesures sur Machines à Mesurer Tridimensionnelles (MMT). Ce travail, effectué en partenariat avec le Centre Technique des Industries Mécaniques (CETIM) de Senlis, est centré essentiellement sur le contrôle de pièces de forme circulaire et plus particulièrement les engrenages. Nos travaux s'appuient principalement sur la méthode de Monte Carlo et sur des techniques de permutations linéaires ou circulaires pour séparer les défauts et chiffrer les incertitudes de mesure associée.

La méthode de permutation appliquée à une roue dentée de  $Z$  dents par incrément de  $1/Z$  tour permet de séparer les écarts liés à la géométrie de la machine des écarts liés à la géométrie de la pièce. Cette méthode aboutit à l'existence d'une constante qui s'interprète comme l'impossibilité de réaliser le rattachement des mesures sans assurer la traçabilité. Lorsqu'on mesure un profil, cela aboutit à une constante par ensemble de points situés sur un même cercle et donc autant de constantes que de cercles de mesure, c'est-à-dire de points par profil.

L'existence de cette constante est inévitable (rattachement) mais si on mesure l'ensemble des profils d'une roue sur  $N$  points par flanc mesuré de manière cocyclique pour chaque flanc alors les  $N$  constantes de permutation aboutissent à obtenir les flancs à un profil près. Autrement dit,

on peut obtenir des variations de géométrie de flanc en bénéficiant de l'élimination de la part de la géométrie de la machine mais pas la géométrie des flancs.

L'étude de la constante pour chacun des cercles est donc un passage nécessaire à l'analyse du profil. Cette étude des constantes nous conduit inmanquablement à avoir une réflexion poussée sur le contenu des constantes et à donc d'étudier la géométrie de la machine et l'influence de celle-ci sur l'expression des constantes.

Pour modéliser la géométrie des machines à portique, nous utilisons la théorie classique dite du « corps solide en petits déplacements ». La machine Leitz PMM-C 1000P sur laquelle nous travaillons possède une erreur d'indication maximale de  $U = 1,3 + L/500 \mu\text{m}$ , ce qui signifie que pour une pièce de  $L = 500 \text{ mm}$ , l'erreur d'indication ne dépasse pas  $1,3+1=2,3 \mu\text{m}$ . A ce niveau de qualité, une part importante du travail consiste à optimiser les méthodes de mesure.

Dans le plan, seuls les défauts de justesses, de rectitudes, de lacet et de perpendicularité doivent être évalués. Les rectitudes sont mesurées par la technique du retournement d'une règle rectifiée pour laquelle nous avons évalué et optimisé les prises de mesure en effectuant un bilan complet des causes d'incertitudes (mise en position, répartition des points en fonction notamment des états de surface et des erreurs de mesures). La traçabilité est assurée par la mesure d'une cale à gradins raccordée au mètre. Une méthode basée sur la permutation linéaire a été développée dans le but de supprimer mathématiquement l'incertitude sur la détermination de la constante du palpeur. Cette cale à gradins permet de déterminer les deux défauts de justesse, de lacet ou de perpendicularité après connaissance des autres défauts.

L'analyse de l'effet de la géométrie de la MMT sur la mesure d'une pièce de forme circulaire ou d'une roue dentée montre qu'il est impossible de caractériser complètement la géométrie de la MMT à partir d'une pièce supposée parfaite. Cependant, nous avons mis en place un concept de « défauts équivalents » propre à la géométrie de la machine et à la définition théorique de la pièce étudiée. Ceci permet d'analyser les conséquences des défauts de géométrie de la machine sur la mesure de pièces de forme circulaire. Cette méthode a été validée par simulation et expérimentalement sur deux machines différentes : la Trimesure MC 15.07.06 de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers (ENSAM) de Lille à palpeur dynamique Renishaw et sur la machine Leitz type PMM-C 1000 P du CETIM de Senlis, équipée d'une tête mesurante du même constructeur.

Des outils informatiques développés à Lille ont été implantés au laboratoire de métrologie du CETIM de Senlis afin d'effectuer automatiquement le traitement des mesures permettant de déterminer les défauts de la machine et les défauts équivalents sur les engrenages ou bagues mesurés, et d'afficher les incertitudes associées. Une correction de géométrie de la machine est également mise en place. Les incertitudes sur les défauts de la machine et sur les mesurands étudiés ont été déterminées par une simulation Monte Carlo en prenant en compte les covariances. L'ensemble des traitements est développé sous Mathematica®, après avoir vérifié la qualité de la génération des nombres aléatoires de ce logiciel.

Le concept des défauts équivalents permet d'enrichir l'analyse du contrôle périodique de la machine et de corriger les défauts de celle-ci pour la mesure de la pièce considérée. Dans cette perspective, un étalon retournable a été conçu pour le suivi de la géométrie de la machine et l'évaluation des incertitudes de mesure dans le domaine de l'engrenage.

Les systèmes de palpation utilisés ont été évalués afin de corriger les défauts systématiques identifiables de ceux-ci et chiffrer les incertitudes associées. Ces travaux sont un apport en terme d'incertitudes de mesure pour de nombreuses applications ; un exemple est traité : l'étude des taux de pénétration et des volumes d'usure sur des explants des prothèses totales de hanches.

Une présentation, au COFRAC, de nos travaux appliqués à la mesure des engrenages cylindriques droits, a permis d'obtenir l'examen de l'accréditation par un comité d'experts et constitue une étape importante. L'obtention de l'accréditation serait une première en France et permettrait la mise en place d'une chaîne nationale en métrologie des engrenages.

Nous avons particulièrement défendu l'idée auprès du comité d'accréditation que les mesurandes des engrenages étaient parfaitement normalisés, sans interprétation possible de l'opérateur, ce qui permet de lever un verrou essentiel pour l'accréditation sur MMT. L'identification des causes d'incertitudes de l'ensemble du processus de mesure et la correction d'une partie de ceux-ci est réalisée conformément au Guide pour l'expression des incertitudes de mesure (GUM).

La structuration de la thèse est schématisée sur la **Figure 4** présentée à la fin de ce document. Celle-ci permet de comprendre les différentes interactions entre les éléments clefs de l'étude. Les principaux résultats sont détaillés ci-dessous.

## Structuration

**Le chapitre I**, intitulé «**Conséquence des défauts de géométrie d'une machine à mesurer tridimensionnelle sur la géométrie apparente d'une forme circulaire**» expose :

- Le modèle de correction des MMT dit « cinématique »,
- les conséquences des défauts de base de la géométrie de la machine dans le plan sur la géométrie apparente de la pièce circulaire mesurée,
- le problème de la dépendance des défauts dans la mesure où plusieurs de défauts ont les mêmes conséquences sur la géométrie apparente d'une pièce de forme circulaire que la combinaison d'autres défauts,
- la possibilité de modéliser l'ensemble des défauts de la machine, dans le plan pour des mesures de pièces de forme circulaire, comme une justesse et une rectitude équivalente, appelés défauts équivalents,
- l'avantage d'utiliser les polynômes de Tchebychev pour l'interpolation des fonctions équivalentes dans la mesure où ces polynômes permettent de bien représenter la réalité physique (les premiers termes sont égaux aux termes MPC représentant bien le comportement de la machine),
- la possibilité de généraliser l'étude sur un engrenage et par la même occasion sur toute pièce de forme circulaire,

Pour arriver à ce résultat, de nombreuses simulations ont été réalisées à l'aide de programmes informatiques écrits sous Mathematica®. L'obtention des polynômes représentant la justesse et la rectitude équivalente est déterminée automatiquement par un programme d'analyse. Ce programme exploite les écarts dans la direction de la normale, utilise bien entendu l'interpolation par les polynômes de Tchebychev et la méthode des moindres carrés. Les paramètres de l'analyse sont donc :

- la justesse équivalente,
- la rectitude équivalente,
- la variation de rayon (raccordement au mètre) pour le cercle et le calage des flancs gauches et droits pour l'étude des dentures.

Le chapitre I expose les concepts théoriques pour évaluer la contribution des défauts de la machine sur les pièces de forme circulaire étudiées. Pour mesurer correctement les défauts de

la machine à mesurer dans le plan, nous devons donc évaluer les deux justesses, les deux rectitudes, le lacet et la perpendicularité entre les deux axes (X et Y) considérés.

La mesure des défauts est effectuée soit à l'aide d'une règle en utilisant la technique de retournement pour les rectitudes, soit à l'aide d'une cale à gradins pour les autres défauts dans la mesure où celle-ci est un outil intéressant en terme de traçabilité (raccordement au mètre) dans l'optique d'une accréditation.

Pour minimiser les incertitudes, une étude complète de l'optimisation des mesures de la cale à gradins et de la règle a été effectuée et présentée dans deux chapitres respectivement les chapitres II et III.

**Le chapitre II** est intitulé « **Etude de cales à créneaux** », il présente une méthode permettant :

- de tenir compte de l'erreur sur la constante palpeur résultant d'un défaut du système de palpation et de son étalonnage sur la sphère de référence,
- de raccorder une autre cale à gradins dont les créneaux ont une longueur égale à un multiple de ceux de la cale de référence,
- de déterminer des défauts de la machine de type justesse, lacet ou perpendicularité,
- d'optimiser les mesures (prise de référentiel, posage, nombre de points mesurés,...) afin de réduire les incertitudes de mesure,
- de chiffrer le bilan des causes d'incertitudes aussi bien au niveau de la KOBA que de l'algorithme de traitement utilisé (effet de la température,...).

**Le chapitre III** est intitulé « **Mesures de rectitudes** », il présente :

- le principe de la mesure de la rectitude par retournement,
- l'influence de l'état de surface (rugosité) des règles sur l'incertitude de mesure (utilisation d'un algorithme de filtrage par le rayon de la bille du stylet),
- l'effet des variations de température et plus exactement des gradients thermiques sur la déformation des pièces et donc de l'évolution de la rectitude,
- l'effet de la variation de l'hygrométrie sur l'évolution des rectitudes des machines,
- une méthode d'optimisation de la répartition des points de mesure sur la règle en fonction de l'état de surface, des erreurs de répétabilité et de poursuite, de la flexion de la règle,...

**Le chapitre IV**, est intitulé « **Systèmes de palpation** », il présente les deux technologies de systèmes de palpation utilisées, à savoir : les palpeurs dynamiques de type TP2 ou TP6 Renishaw et la tête mesurante Leitz.

Les résultats obtenus au niveau des palpeurs dynamiques sont les suivants :

- Modèle du trilobe (mesure dans le plan de l'étoile) par les fonctions équivalentes,
- Modèle de flexion du stylet selon le méridien,
- Modélisation en 3D par la composition des deux modèles.

Les résultats obtenus au niveau de la tête mesurante du CETIM :

- Mise en évidence d'un problème d'hystérésis,
- Premières avancées au niveau des incertitudes liées à l'utilisation d'au moins deux palpeurs et du scanning.

**Le chapitre V**, est intitulé « **Géométrie de la machine dans le plan** », il présente :

- les résultats expérimentaux obtenus au niveau de la détermination de la géométrie de la machine à mesurer Leitz du CETIM de Senlis, à savoir les mesures des défauts de justesses, de rectitudes, de lacet, et de perpendicularité, mais aussi la combinaison de ces défauts en terme d'écart sur un engrenage théorique simulé (écarts, défauts équivalents),
- la transformation des défauts mesurés sur la machine Leitz en fonctions équivalentes,
- les résultats de l'étude, sur la machine de l'ENSAM, de la Machine Checking Gauge et de l'engrenage MAAG par permutation comparés à une étude par les fonctions équivalentes (validation expérimentale du concept).

**Le chapitre VI** est intitulé « **Méthode de permutation ou de multiretournement** », il présente :

- la méthode de permutation permettant de séparer les défauts de la pièce de ceux de la machine et du système de palpé sur une roue dentée à partir de  $Z$  mesures,  $Z$  étant le nombre de dents. On montre que le calcul fait apparaître des constantes qui ne permettent pas de chiffrer correctement les mesures de profils,
- Deux méthodes pour analyser les constantes et en diminuer l'importance en terme d'incertitudes, enfin, on chiffre l'incertitude sur le raccordement qui ne peut être réalisé par cette méthode.

Les chapitres précédents nous ont permis de mettre en place des méthodes de mesures des différents défauts de la machine et des systèmes de palpé. Dans le chapitre suivant, nous mettons en application les différentes techniques et remarques des premiers chapitres afin de mettre en place la technique de détermination des incertitudes. Les traitements sont effectués sous Mathematica®. Une validation expérimentale des concepts est effectuée.

**Le chapitre VII** est intitulé « **Incertainces de mesures** », il présente :

- la notion d'incertainces de mesures,
- la méthode des 5M (méthode d'Ishikawa) appliquée aux mesures des défauts de la machine et aux mesures de pièces de forme circulaire,
- l'analyse des incertainces en terme de « phénomènes physiques »,
- la vérification des distributions utilisées dans les simulations, à savoir la distribution normale et la distribution uniforme,
- l'utilisation de la distribution de type dérivée en Arcsinus pour la prise en compte des températures,
- la méthode de Monte Carlo et l'application à la mesure de la géométrie de la machine,
- les premiers résultats concernant les incertainces sur les fonctions décrivant la géométrie de la Leitz,
- les incertainces obtenues sur les défauts équivalents et les écarts.

**Le chapitre VIII**, intitulé « **Mesurandes de l'engrenage** » présente :

- la définition des différents mesurandes liés à la division et au profil,
- la méthode de calcul des incertainces sur ces mesurandes,
- la prise en compte de la contribution de la géométrie machine et du système de palpé,
- les incertainces sur les prises de référence, dilatations de la pièce mesurée, état de surface de la pièce etc.

Dans le cadre d'une accréditation, il est important de pouvoir effectuer un suivi de la machine.

**Le chapitre IX**, intitulé « **Conception d'un plateau 2D/3D** », expose :

- la conception d'un étalon pouvant servir au contrôle périodique de la machine et à la recherche sur les mesures d'engrenage. Il permet d'évaluer les mesurandes de division, de profil et d'hélice,

Cet étalon a fait l'objet du dépôt d'une enveloppe Soleau.

A partir des différents travaux que l'on a effectués sur les palpeurs dynamiques (correction des défauts et maîtrise des incertitudes) et la prise en compte du fait que la mesure des prothèses de hanche est une mesure localisée sur la machine, nous pouvons effectuer la mesure de petites pièces de géométrie circulaire ou sphérique en maîtrisant les incertitudes.

**Le chapitre X**, intitulé « **Application en Science des Matériaux – Analyse de prothèses de hanches** » présente les principaux premiers résultats effectués pour le CHRU de Lille et les industriels B&JR et SEM pour l'évaluation du taux de pénétration et du volume d'usure d'explants. Les résultats de cette étude sont le fruit de l'optimisation des prises de référentiel et la correction des erreurs systématiques du palpeur dynamique utilisé (modèle par les fonctions équivalentes dans le plan de l'étoile et modèle du méridien). Les résultats obtenus sont en parfaite adéquation avec les données chirurgicales. Le taux de pénétration et le volume d'usure des explants ont été validés à partir des points mesurés et de simulations.

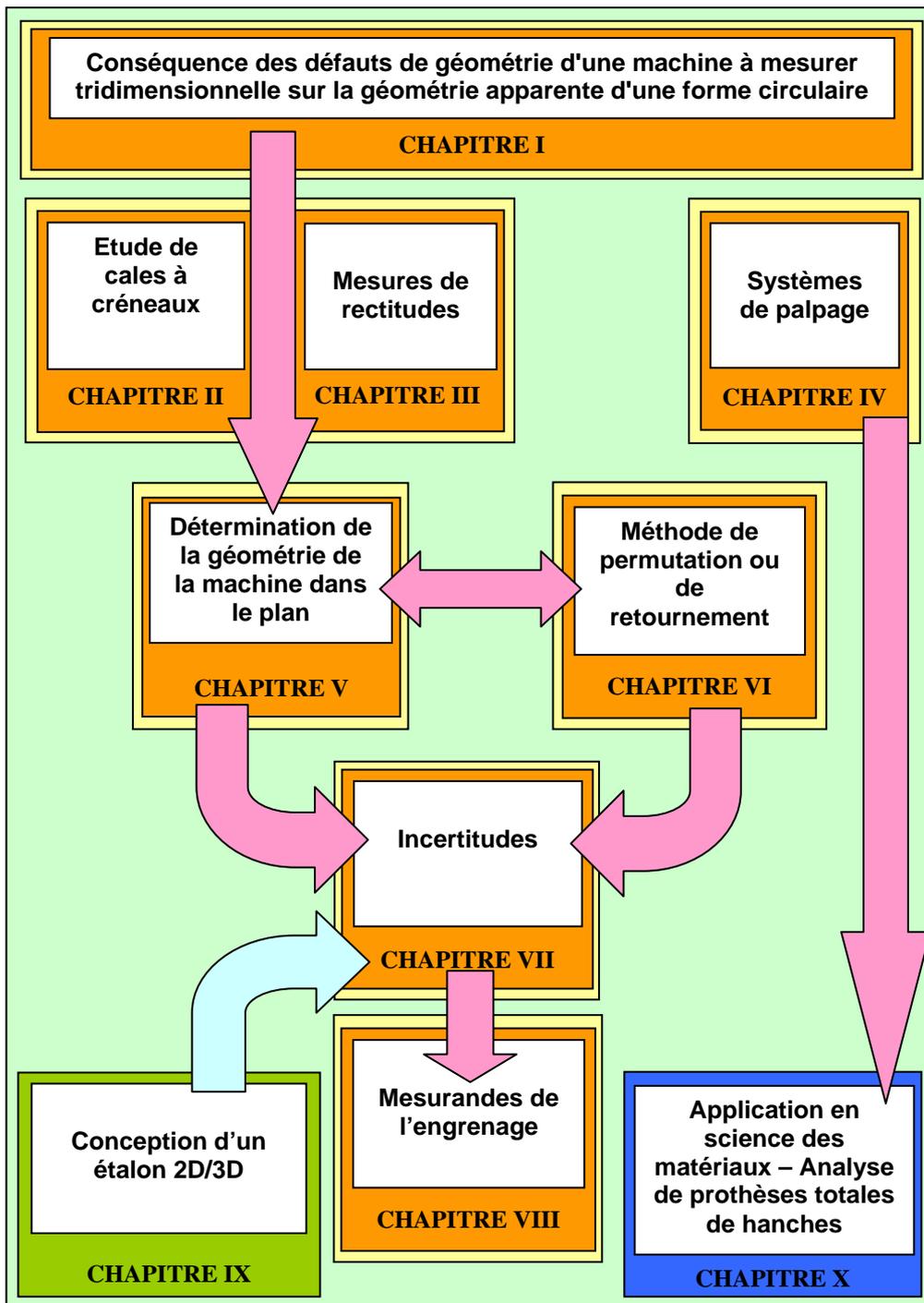


Figure 4 : Schéma de structuration de la thèse

# CHAPITRE I

## Conséquence des défauts de géométrie d'une machine à mesurer tridimensionnelle sur la géométrie apparente d'une forme circulaire

### SOMMAIRE

1	Introduction .....	11
2	Géométrie des machines à mesurer .....	11
2.1	Présentation des machines à mesurer étudiées .....	11
2.2	Chaîne métrologique et dénomination des axes machine .....	11
2.3	Principe du modèle dit cinématique ou de la mécanique du corps solide en petits déplacements .....	11
2.4	Notations, signes et unités .....	11
2.4.1.	Notations .....	11
2.4.2.	Signes .....	11
2.4.3.	Unités .....	11
2.5	Description de l'empilement des axes .....	11
2.6	Méthode de correction .....	11
2.7	Définition et choix pour les perpendicularités .....	11
2.8	Description des bras de levier palpeur .....	11
2.9	« Dégradation » en machine plate .....	11
2.10	Modèle MPC .....	11
3	Analyse des écarts sur une forme circulaire .....	11
3.1	Calcul des écarts sur une forme circulaire .....	11
3.2	Ecriture et indépendance des défauts .....	11
3.3	10 inconnues décrivant la géométrie pour 4 informations .....	11
3.4	Réduction du système de défauts .....	11
3.4.1.	Etude des 2 Rectitudes ( $xTy$ et $yTx$ ) – Combinaison 1 .....	11

## CHAPITRE I

CONSEQUENCE DES DEFAUTS DE GEOMETRIE D'UNE MACHINE A MESURER TRIDIMENSIONNELLE  
SUR LA GEOMETRIE APPARENTE D'UNE FORME CIRCULAIRE

3.4.2.	Etude des 2 Justesses ( $xTx$ et $yTy$ ) – Combinaison 2 .....	11
3.4.3.	Justesse et Rectitude d'axe différent – Combinaison 3 .....	11
3.4.4.	Justesse et de Rectitude du même axe – Combinaison 4 .....	11
4	Dépendances des défauts de Justesse et de Rectitude .....	11
5	Ecriture des défauts en fonction de $xTy$ , $xTx$ – Vers l'écriture des défauts équivalents ...	11
5.1	Décomposition de $xRz$ , $yTx$ et $yTy$ selon $xTy$ , $xTx$ .....	11
5.1.1.	Analyse d'un défaut de lacet d'axe x (relevé sur les Ecarts).....	11
5.1.2.	Analyse d'un défaut de Rectitude $yTx$ (relevé sur les Ecarts) .....	11
5.1.3.	Analyse d'un défaut de Justesse $yTy$ (relevé sur les Ecarts).....	11
5.2	La décomposition des écarts par rapport à $xTy$ et $xTx$ .....	11
5.3	Contribution des fonctions équivalentes .....	11
5.4	Analyse de trois défauts typiques .....	11
5.4.1.	Perpendicularité .....	11
5.4.2.	Justesse .....	11
5.4.3.	Lacet .....	11
6	Conclusion .....	11

# Conséquence des défauts de géométrie d'une machine à mesurer tridimensionnelle sur la géométrie apparente d'une forme circulaire

## 1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter la correction de géométrie des machines à mesurer tridimensionnelles utilisant la mécanique du corps solide en petits déplacements. Les différents éléments du modèle (justesse, rectitude, lacet, perpendicularité) seront étudiés sur le plan expérimental dans les chapitres suivants.

Nous présenterons ensuite un modèle dit MPC développé dans [COO1990] qui fournit une méthode générale de description des déformations des structures sous l'effet de la température qui consiste à superposer aux fonctions décrivant la géométrie de la MMT des polynômes du second degré.

Enfin, nous analyserons l'effet des défauts de géométrie sur des pièces de forme circulaire (bague, roue dentée). En particulier, nous chercherons à montrer qu'il est possible de décrire la géométrie de la machine en la réduisant à une justesse et une rectitude.

## 2 Géométrie des machines à mesurer

La détermination des défauts machine et la correction de ceux-ci n'est pas récente. La première référence bibliographique date de 1977 [SCH1977]. Dans son papier SCHULTSCHIK présente la combinaison de 18 défauts par des relations purement géométriques en grandes rotations. La notion d'espace pièce apparaît dans [GOO1977]. L'utilisation du mouvement de corps solide pour la correction aurait été faite pour la première fois par l'équipe du NBS [HOC1977]. CLEMENT et BOURDET mettent en évidence l'intérêt de la notion du torseur métrique, notamment dans [BOU1987] en effectuant une approche de la correction s'appuyant sur la mécanique des milieux continus avec un formalisme tensoriel.

La mécanique du corps solide en petits déplacements a été utilisée en parallèle dans différents pays et a suscité de nombreuses publications aux Etats-Unis (NBS, [NI1993 – CHE1993 – ELS1990]), en Allemagne (PTB, Zeiss, [BUS1984 - BUS1985 - WÄL1987 – LEN1988]) et en France (Renault Automation – Jean-Marie DAVID [DAV1983]).

Les informations contenues dans ce paragraphe sont issues essentiellement d'une proposition à l'UNM pour le projet NF E11-151 [NF E 11-151, 2003]. Ce paragraphe est essentiel à la compréhension de la démarche et toutes les notations seront reprises pour notre étude.

## CHAPITRE I

## CONSEQUENCE DES DEFATS DE GEOMETRIE D'UNE MACHINE A MESURER TRIDIMENSIONNELLE SUR LA GEOMETRIE APPARENTE D'UNE FORME CIRCULAIRE

## 2.1 Présentation des machines à mesurer étudiées

Le schéma classique d'une machine à mesurer dite à portique est présenté sur la **Figure 1** ci-dessous. Les machines que nous étudions (portique mobile à l'ENSAM, portique fixe au CETIM) sont de conceptions différentes [**Figure 2**] mais l'analyse est la même pour ces deux machines.

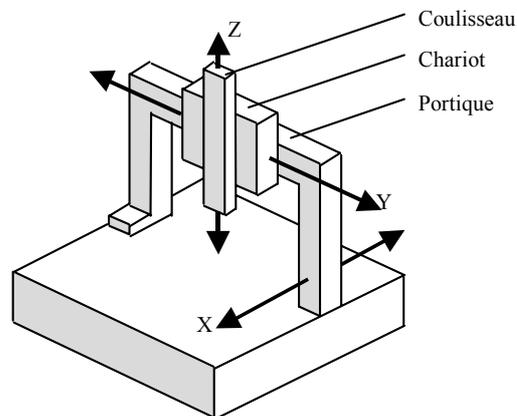


Figure 1 : Schématisation d'une machine à mesurer tridimensionnelle

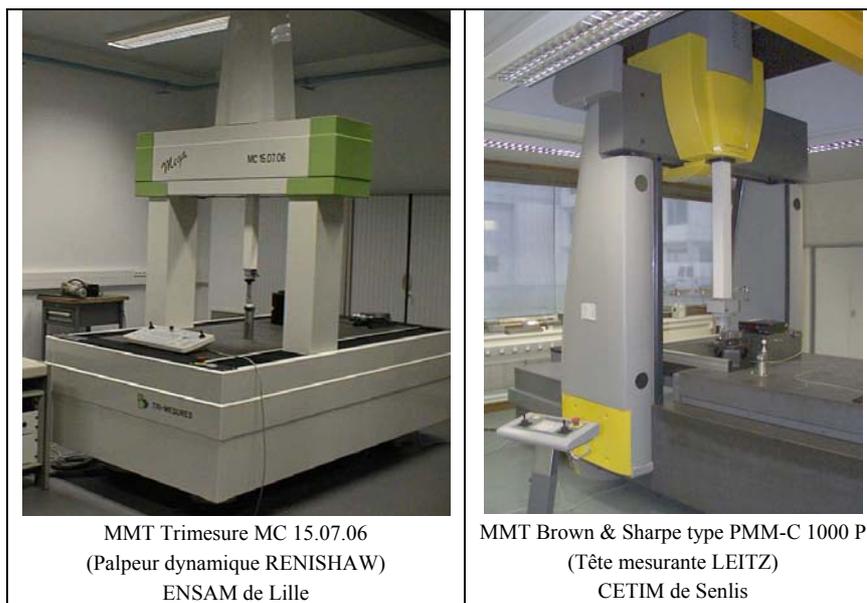


Figure 2 : Présentation des machines à mesurer tridimensionnelle utilisées

## 2.2 Chaîne métrologique et dénomination des axes machine

On définit la chaîne métrologique [**Figure 3**] comme étant la chaîne de solides et de liaisons permettant de relier la pièce et le palpeur (ou l'outil). On convient d'appeler X le porte pièce (ou la glissière directement reliée au porte-pièce) et Z le porte palpeur. L'axe Y est l'axe intermédiaire.

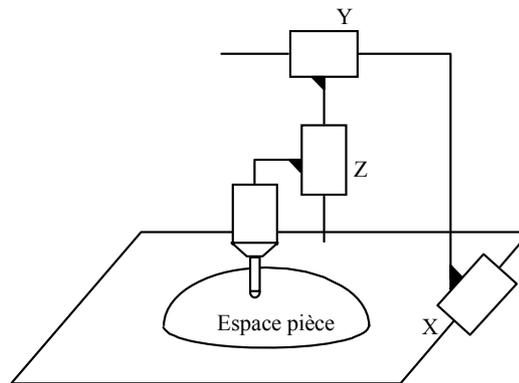


Figure 3 : Chaîne métrologique

Cette notion de chaîne métrologique est importante car elle montre d'une part que les axes ne sont pas équivalents (X porte Y et Z, Y porte Z et Z porte l'élément terminal) et d'autre part elle oblige à prendre en compte la totalité des éléments reliant la pièce et le palpeur.

Les constructeurs ont fait des choix éventuellement différents pour la dénomination de leurs axes. On se propose de définir une machine standard qui aurait les caractéristiques de désignation des axes telles que décrites au dessus, ce qui est valable pour les deux machines citées ci-dessus. Les corrections sont exprimées pour cette machine standard.

### 2.3 Principe du modèle dit cinématique ou de la mécanique du corps solide en petits déplacements.

Soit une glissière sur laquelle se translate un chariot [Figure 4]. Le mouvement nominal de translation du chariot est repéré par une règle de lecture de déplacement.

On suppose que :

- la règle est parfaite (au sens du rattachement aux étalons nationaux),
- la glissière est parfaitement réalisée et parfaitement rigide,
- le chariot parfaitement rigide glisse parfaitement sur la glissière, ...

Dans ces conditions, le chariot (donc l'ensemble des points constituant le chariot) subit un mouvement de translation pure de la valeur indiquée par la règle et dans la direction X.

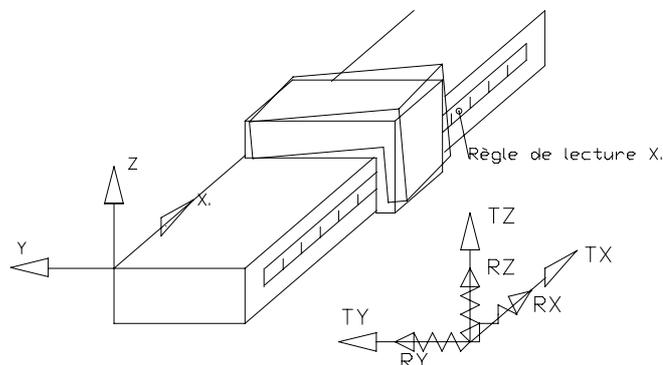


Figure 4 : Schéma de la glissière et de son chariot

## CHAPITRE I

## CONSEQUENCE DES DEFAUTS DE GEOMETRIE D'UNE MACHINE A MESURER TRIDIMENSIONNELLE SUR LA GEOMETRIE APPARENTE D'UNE FORME CIRCULAIRE

Les choses étant par nature imparfaites, pour chaque valeur de  $X$  indiquée, le chariot prend une position réelle différente de la position théorique. Ce chariot est d'ailleurs, éventuellement, déformé. Pour décrire complètement le passage de la position théorique du chariot à la position réelle, il y a trois informations indépendantes à donner pour chaque point du chariot. Il est clair que cela représente une quantité infinie d'informations.

On peut toujours faire des hypothèses de continuité des valeurs et chercher des méthodes d'interpolation pour diminuer le volume de codage à réaliser. Cette méthode n'a pas été retenue par les industriels de la machine à mesurer probablement pour deux raisons. :

La première est que cette méthode n'a aucune puissance explicative pour réaliser des corrections mécaniques (par rodage par exemple) ou interpréter des résultats défectueux.

La seconde est que si l'on fait un maillage de l'espace de mesure suivant des petits cubes, le volume du codage nécessaire est multiplié par huit si la longueur des axes est doublée puisque la valeur est proportionnelle au volume alors qu'une méthode décrivant les erreurs le long de chaque axe ne voit son volume de codage que multiplié par deux. Le problème n'est évidemment pas le stockage des informations compte tenu de l'évolution des prix en informatique mais l'acquisition des informations qui reste onéreuse.

Pour décrire, le passage de la position théorique du chariot à la position réelle, on va faire d'une part l'hypothèse de l'indéformabilité du chariot et d'autre part on s'appuie sur la constatation expérimentale que les défauts à mesurer sont faibles (de l'ordre de quelques dizaines de micromètres pour les translations et quelques dizaines de microradians pour les rotations). On peut alors décrire le passage de la position théorique du chariot à la position réelle comme un petit déplacement de corps solide soit, mathématiquement, un torseur de petits déplacements.

L'hypothèse d'indéformabilité du chariot peut paraître très restrictive, elle mérite un commentaire. L'idée est que le chariot est en fait un générateur de déplacements qui met en position un solide, le chariot lui-même n'a donc pas besoin d'être globalement indéformable, seul l'élément mis en place doit l'être. Les transferts de masse provoquent des déformations des éléments très importants mais sur une machine à portique, ces déformations sont bien prises en compte par le modèle développé dans la mesure où ils sont reproductibles.

Ce modèle est très intéressant car il permet de modéliser le déplacement d'un solide sous la forme d'un champ de moments décrit par un torseur. Il permet alors d'exprimer des déplacements combinant des translations et des rotations en disposant des propriétés de linéarité, de commutativité et d'associativité.

## 2.4 Notations, signes et unités

### 2.4.1. Notations

Si on reprend le schéma de la **Figure 4**, il est classique de noter :

- $iT_j$  (ou  $T_{ij}$ ) la translation de l'axe  $i$  dans la direction  $j$ , soit :
  - $xTx$  ( $T_{xx}$ ) : justesse ou erreur relative de position
  - $xTy$  ( $T_{xy}$ ) : rectitude horizontale
  - $xTz$  ( $T_{xz}$ ) : rectitude verticale
- $iR_j$  ( $R_{ij}$ ) la rotation de l'axe  $i$  autour de l'axe  $j$ , soit :
  - $xRx$  ( $R_{xx}$ ) : roulis
  - $xRy$  ( $R_{xy}$ ) : tangage
  - $xRz$  ( $R_{xz}$ ) : lacet

Ces six valeurs sont en fait des fonctions de  $x$  variable décrivant la position sur l'axe  $X$ .

En chaque point  $M$ , on définit le moment du torseur par 
$$\vec{\varepsilon}(M) = \vec{\varepsilon}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

Pour une machine complète, on définit ainsi :

- les fonctions de X notées ( $xTx$ ,  $xTy$ ,  $xTz$ ,  $xRx$ ,  $xRy$ ,  $xRz$ ) pour l'axe X,
- les fonctions de Y notées ( $yTx$ ,  $yTy$ ,  $yTz$ ,  $yRx$ ,  $yRy$ ,  $yRz$ ) pour l'axe Y,
- et les fonctions de Z notées ( $zTx$ ,  $zTy$ ,  $zTz$ ,  $zRx$ ,  $zRy$ ,  $zRz$ ) pour l'axe Z.

En faisant cela, on fait l'hypothèse de l'indépendance des axes. Cette hypothèse est valide sur une machine à portique mais pas sur une machine à trusquin ou sur une perceuse radiale par exemple.

### 2.4.2. Signes

On considérera toujours les petites quantités traitées dans un repère X,Y,Z direct.

Pour les translations, la règle est de décrire le vecteur ayant pour origine un point appartenant à la position théorique du chariot et pour extrémité le même point à la position réelle du chariot. Cela correspond à une valeur positive exprimée dans le repère direct.

Pour les rotations, les angles exprimés dans ce repère seront décomposés dans trois mouvements plan sur plan (XY, YZ et ZX). Ils seront comptés positivement de X vers Y, de Y vers Z et de Z vers X [Figure 5].

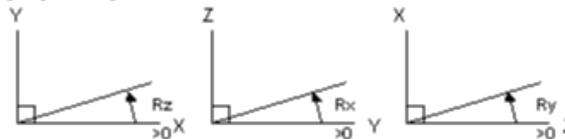


Figure 5 : Règles des signes pour les rotations

### 2.4.3. Unités

Les petites translations sont exprimées en millimètres et les petites rotations sont exprimées en radians.

## 2.5 Description de l'empilement des axes.

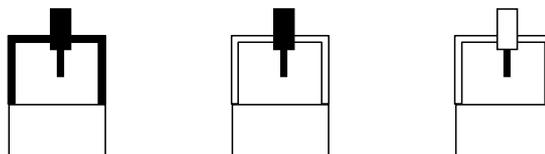


Figure 6 : Principe de base de la correction logicielle de la géométrie des MMT

Pour étudier les défauts d'une des trois glissières, il est utile de considérer les deux autres glissières comme "soudées" [Figure 6]. La partie comprise entre la pièce et la glissière mobile est appelée "demi-machine pièce" et la partie comprise entre la glissière et le palpeur est appelée "demi-machine outil". La différence entre la position réelle et la position théorique de la demi-machine outil est décrite par un petit mouvement de corps solide que l'on décrit par un tourneur de petits déplacements. Cette conception aboutit à la correction dite cinématique.

## CHAPITRE I

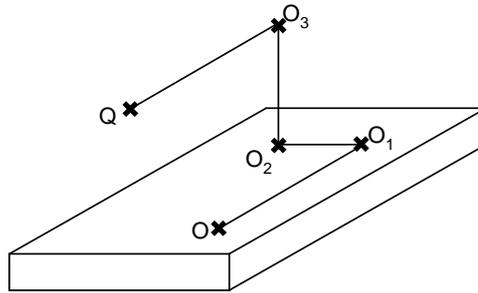
CONSEQUENCE DES DEFAUTS DE GEOMETRIE D'UNE MACHINE A MESURER TRIDIMENSIONNELLE  
SUR LA GEOMETRIE APPARENTE D'UNE FORME CIRCULAIRE

Figure 7 : Représentation schématique de la décomposition en 3 mouvements d'entraînement successifs. Q indique la position du centre de la bille terminale du palpeur.

Soit  $\vec{T}_i(P,Q)$ , le moment au point Q du torseur défini au point P et décrivant les erreurs de l'axe i. Un point O lié au coulisseau devient O1 dans le mouvement X puis O2 dans le mouvement Y puis O3 dans le mouvement Z [Figure 7]. Au point Q, l'erreur totale est décrite par un vecteur  $\vec{E}(Q)$  tel que :  $\vec{E}(Q) = \vec{T}_X(O_1, Q) + \vec{T}_Y(O_2, Q) + \vec{T}_Z(O_3, Q)$

## 2.6 Méthode de correction.

Sur un exemple 2D, en justesse et en lacet seulement, il est facile de comprendre que la correction consiste à faire l'approximation de la tangente à l'angle pour obtenir des formulations linéaires. On montre également que les effets des rotations s'accumulent simplement sans avoir besoin de prendre de précautions particulières quant à la non-commutativité des rotations car la linéarisation des équations s'accompagnent d'un découplage.

On voit sur cette figure qu'on peut envisager deux philosophies pour la correction:

Méthode 1: on réalise la mesure et la correction de la rotation par rapport à un point quelconque mais constant puis, la correction étant réalisée, on mesure la justesse.

Méthode 2: on réalise la mesure de la justesse au point 0 d'une part et la mesure de la rotation d'autre part puis on corrige les deux phénomènes en même temps. Cette méthode présente une rigueur bien plus importante et une réelle puissance explicative quant à l'état géométrique de la machine. Nous proposons de choisir cette méthode. La première méthode est utilisée par certains industriels.

## 2.7 Définition et choix pour les perpendicularités

La Figure 8 montre deux axes "spaghettis" présentant "à l'œil" un défaut de perpendicularité sensible. Le problème est évidemment que l'œil "sent" un défaut de perpendicularité que le mathématicien ne sait pas calculer faute d'une définition précise.

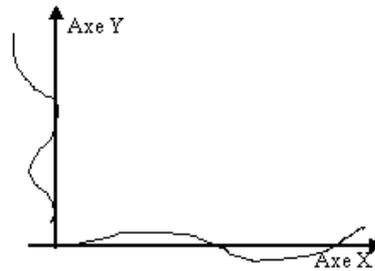


Figure 8 : Définition de la perpendicularité

Pour donner une définition précise de la perpendicularité, il faut aller au delà et définir une méthode mathématique qui présentera forcément un certain arbitraire. L'intérêt de la correction est alors d'utiliser une stratégie en deux temps. Dans un premier temps les axes sont corrigés avec des perpendicularités arbitrairement fixées à zéro. Dans un second temps, les perpendicularités sont définies sur des axes préalablement corrigés donc a priori "droits". Cette stratégie que nous proposons d'éviter pour la définition des justesses est raisonnable puisque les perpendicularités résultent d'un simple réglage et non pas de l'état réel de la machine (glissières, règles). En terme de stratégie d'acquisition, cela n'empêchera pas le développement d'une réflexion qui consiste à dire que la correction de chaque axe est entachée d'incertitudes et qu'il faut en tenir compte pour l'évaluation des perpendicularités.

On peut nommer les trois perpendicularités:

- $P_z$  pour l'écart angulaire entre X et Y
- $P_x$  pour l'écart angulaire entre Y et Z
- $P_y$  pour l'écart angulaire entre Z et X

Les choix possibles pour coder les perpendicularités sont nombreux. Le choix consistant à coder les perpendicularités comme des paramètres extérieurs aux fonctions de correction aboutit à des difficultés inutiles. On peut songer à un codage par les rectitudes ou à un codage par les rotations.

On propose le choix suivant :

- $P_z$  comme la valeur à l'origine de la rotation  $xR_z$
- $P_x$  comme la valeur à l'origine de la rotation  $yR_x$
- $P_y$  comme la valeur à l'origine de la rotation  $xR_y$

## 2.8 Description des bras de levier palpeur

Il existe au moins deux méthodes pour décrire la position de la bille terminale réelle (au sens de en service au moment du calcul de la correction) du palpeur. On appelle cela le "bras de levier palpeur" en terme de métier.

La première consiste à choisir un palpeur dit de référence pour mesurer la position de la sphère de calibrage des palpeurs dans l'espace de la machine, ce qui est un travail fait par l'opérateur de la machine à chaque changement de position de la sphère. Cette méthode nécessite la connaissance des caractéristiques du palpeur de référence. C'est la méthode utilisée sur la machine du CETIM de Senlis.

La seconde consiste à mettre en place une sphère fixe dans l'espace de la machine et de repérer sa position avec un palpeur de référence, ce qui est un travail fait par le constructeur une fois pour toute. Cette méthode nécessite la connaissance d'un triplet (X, Y, Z) représentant la position de la sphère de référence dans l'espace de la machine. C'est la méthode utilisée sur la machine de l'ENSAM de Lille.

## CHAPITRE I

## CONSEQUENCE DES DEFAUTS DE GEOMETRIE D'UNE MACHINE A MESURER TRIDIMENSIONNELLE SUR LA GEOMETRIE APPARENTE D'UNE FORME CIRCULAIRE

En tout état de cause, il faudra stocker un triplet (X, Y, Z) lié à une information décrivant une méthode normalisée de description. Les deux méthodes présentées méritent d'être approfondies et probablement normalisées.

## 2.9 « Dégradation » en machine plate

On s'intéresse à la mesure d'une bague ou d'un engrenage cylindrique droit placé dans le plan XY de la machine. On reprend évidemment les conventions de la **Figure 7**. Les petits déplacements du palpeur dans la direction Z ont un effet du second ordre que nous négligeons dans la mesure où toutes les mesures sont sensiblement effectuées à la même hauteur et donc que les variations  $O_3Z$  sont négligeables [**Figure 9**].

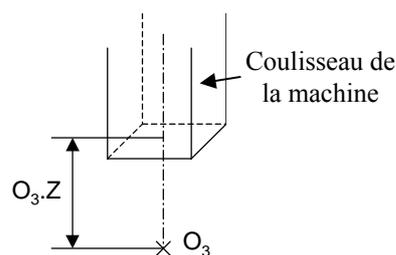


Figure 9 : variations suivant l'axe z négligeables

La formule de correction est :  $\overrightarrow{\varepsilon}(Q) = \overrightarrow{T}_X(O_1, Q) + \overrightarrow{T}_Y(O_2, Q) + \overrightarrow{T}_Z(O_3, Q)$

Explications les moments :

$$\overrightarrow{\varepsilon}(Q) = \overrightarrow{\varepsilon}(O_1) + \overrightarrow{\omega}_x \wedge \overrightarrow{O_1Q} + \overrightarrow{\varepsilon}(O_2) + \overrightarrow{\omega}_y \wedge \overrightarrow{O_2Q} + \overrightarrow{\varepsilon}(O_3) + \overrightarrow{\omega}_z \wedge \overrightarrow{O_3Q}$$

Par définition, on a :  $\overrightarrow{O_1O_2}(0, Y, 0)$  et  $\overrightarrow{O_2O_3}(0, 0, Z)$ . Supposons que  $\overrightarrow{O_3Q}(0, 0, 0)$  et de plus que la cote Z reste constante. Tout déplacement lié à Z sera alors une constante similaire à un déplacement de la pièce sans conséquence sur sa géométrie, on peut donc supposer que  $Z=0$  et ne pas écrire les déplacements correspondants.

On a alors :  $\overrightarrow{\varepsilon}(Q) = \overrightarrow{\varepsilon}(O_1) + \overrightarrow{\omega}_x \wedge \overrightarrow{O_1Q} + \overrightarrow{\varepsilon}(O_2)$

Dans le plan XY, cette formule se réduit à :  $\overrightarrow{\varepsilon}(Q) = \begin{pmatrix} xTx \\ xTy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega_{xx} \cdot Y \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} yTx \\ yTy \end{pmatrix}$

En ajoutant la perpendicularité XY comme la valeur à l'origine du lacet que l'on note Pz, on complète la formule précédente :

$$\overrightarrow{\varepsilon}(Q) = \begin{pmatrix} xTx \\ xTy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega_{xx} \cdot Y + Pz \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} yTx \\ yTy \end{pmatrix}$$

## 2.10 Modèle MPC

Le concept MPC a été introduit dans la thèse de T. COOREVITS [COO1990 – chapitre 5]. L'idée consiste à dire que les axes de la machine ne peuvent se déformer de manière incohérente en particulier sous l'influence de gradients thermiques pour lesquels le phénomène de base est une déformation en bilame modélisable par une parabole c'est-à-dire un polynôme du second ordre.

On convient de superposer à chacune des 18 fonctions décrivant la géométrie de la machine un polynôme du second degré de la forme  $M+P\beta+C\beta^2$  où  $\beta$  représente la coordonnée en cause. Les coefficients  $M$ ,  $P$ ,  $C$  représentent respectivement un décalage moyen, une pente et une courbure. Avec ce type de représentation, il devient alors possible de considérer que les perpendicularités deviennent redondantes (elles sont directement intégrées dans ces paramètres).

Le tableau 1 ci-dessous est une analyse des significations physiques des différents coefficients. Ce tableau permet de prévoir des problèmes de couplage entre certaines fonctions décrivant le comportement de la machine, par exemple, un décalage constant sur le lacet est une perpendicularité XY qui peut également être représentée par une pente sur la rectitude xTy ou une pente sur la rectitude yTx.

Ce tableau annonce également des couplages par exemple entre la rectitude xTy et le lacet xRz. Une rectitude parabolique issue d'un gradient thermique provoque un lacet proportionnel directement lié ce qui se justifie simplement, par le fait que la dérivée d'une parabole est une fonction proportionnelle.

Nous verrons dans la suite de l'étude que ce couplage peut encore être plus finement analysé car on considère ici non la fonction vue directement mais son effet sur un cercle.

Il existe également une publication de J.- P. KRUTH [KRU2001] relativement intéressante au niveau de la dépendance de la géométrie aux variations de température.

Pour notre étude, nous définissons une zone privilégiée dans l'espace de la machine. La géométrie est étudiée finement dans cette zone grâce à des mesures d'une cale à créneaux et d'une règle que nous décrirons plus loin. La machine du CETIM sur laquelle nous travaillons est corrigée, les fonctions d'erreurs que nous mesurons sont donc des résidus liés à un changement d'équilibre thermique entre le moment de la calibration par le constructeur et le moment de notre propre étude, aux incertitudes de calibration et au fait que nous travaillons sur une zone limitée dans laquelle nous optimisons la géométrie.

Les phénomènes thermiques relèvent d'une analyse MPC, et constituent expérimentalement l'essentiel de l'allure des courbes ce qui justifie un polynôme d'ordre 2 pour lisser les courbes. Nous avons choisi de pouvoir tenir compte d'oscillations d'un degré supérieur sans aller trop loin pour éviter les oscillations numériques, en s'appuyant sur les évaluations expérimentales, le choix d'un degré 3 nous a paru pertinent. Nous utilisons les polynômes de Tchebychev [MAS2003 - JED2005] pour interpoler nos courbes, un degré 3 correspond donc à un ordre 4. Ces polynômes définis par récurrence sont bâtis à partir de fonctions sinusoïdales, ils ont peu tendance à l'oscillation [ADC1987].

## CHAPITRE I

## CONSEQUENCE DES DEFAUTS DE GEOMETRIE D'UNE MACHINE A MESURER TRIDIMENSIONNELLE SUR LA GEOMETRIE APPARENTE D'UNE FORME CIRCULAIRE

Etude de l'axe X de la machine							
		Txx	Txy	Txz	Rxx	Rxy	Rxz
coefficient	M	Décalage d'origine	Décalage d'origine	Décalage d'origine		Perpendicularité XZ	Perpendicularité XY
	P	Dilatation de l'axe X	Perpendicularité XY	Perpendicularité XZ	Torsion	Associée courbure X	Associée Courbure Y
	C		Courbure horizontale	Courbure verticale			
Etude de l'axe Y de la machine							
		Tyx	Tyy	Tyz	Ryx	Ryy	Ryz
coefficient	M	Décalage d'origine	Décalage d'origine	Décalage d'origine	Perpendicularité YZ	Perpendicularité XZ	
	P	Perpendicularité YZ	Dilatation de l'axe Y	Perpendicularité YZ	Associée courbure Y	Torsion	Associée courbure X
	C	Courbure horizontale		Courbure verticale			
Etude de l'axe Z de la machine							
		Tzx	Tzy	Tzz	Rzx	Rzy	Rzz
Coefficient	M	Décalage d'origine	Décalage d'origine	Décalage d'origine			
	P	Perpendicularité XZ	Perpendicularité YZ	Dilatation Z	Associée courbure Y	Associée courbure X	Vissage
	C	Courbure	Courbure				

Tableau 1 : Récapitulatif des significations physiques des 54 coefficients

### 3 Analyse des écarts sur une forme circulaire

La bibliographie sur l'analyse de mesures de formes circulaires est relativement bien fournie [KNA1983\_1 – KNA1983\_2 – KUN1983 - WOO1988 – PAH1995]. Les auteurs mesurent des étalons circulaires de type bagues, MCG, Ball bar, ... et en déduisent les défauts de la machine. Nous allons faire un point sur ces analyses.

#### 3.1 Calcul des écarts sur une forme circulaire

Si on utilise les informations contenues dans le § 2.9, sous l'hypothèse de modèle du torseur des petits déplacements, on détermine rapidement les défauts influents sur chacun des deux axes (x et y) de la machine, soit (en notant  $n_x$  et  $n_y$  respectivement les composantes de la normale suivant l'axe x et y) :

- Pour l'axe x, la contribution des défauts s'écrit :

$$\begin{pmatrix} xTx & -xRz.y \\ xTy + \mathbf{0} \\ xTz & xRx.y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = xTx.n_x - xRz.y.n_x + xTy.n_y.$$

- Pour l'axe y, la contribution des défauts s'écrit : 
$$\begin{vmatrix} yTx \\ yTy \cdot n_y \\ yTz \\ \mathbf{0} \end{vmatrix} n_x = yTx \cdot n_x + yTy \cdot n_y .$$

Dans le plan, les défauts de la machine influents sur la mesure sont donc au nombre de cinq et sont les suivants:

- 2 justesses  $xTx$  et  $yTy$  respectivement suivant les axes x et y,
- 2 rectitudes  $xTy$  et  $yTx$  respectivement suivant les axes x et y,
- Le lacet  $xRz$  correspondant à la rotation de l'axe x autour de l'axe z.

Remarque : Le défaut de perpendicularité peut être intégré dans le lacet comme une constante sur ce défaut.

A ces défauts, il faudra bien évidemment rajouter :

- la position angulaire essentiellement pour l'engrenage,
- la position suivant x et y notée  $Tx$  et  $Ty$ .

Si on considère une pièce de géométrie circulaire dans ce plan [Figure 10].

Les points M appartenant à cette pièce ont pour coordonnées 
$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = \text{cste} \end{cases} \quad (1)$$

La normale en ces points est notée 
$$\begin{vmatrix} n_x = \cos(\theta + \xi) \\ n_y = \sin(\theta + \xi) \\ \mathbf{0} \end{vmatrix} \quad (2), \quad \xi \text{ représentant l'angle que fait la}$$

normale par rapport à la normale radiale (cas de la bague). Cet angle  $\xi$  peut être écrit en fonction de l'angle de pression normalisé ( $\alpha$ ) pour l'engrenage, tel que  $\xi = \frac{\pi}{2} - \alpha$  [Figure 10].

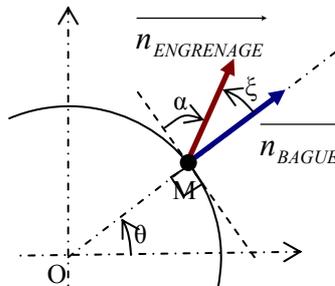


Figure 10 : Représentation de la normale de la bague et de l'engrenage d'un point M

L'étude d'une bague ou d'un engrenage cylindrique droit est similaire. La seule différence réside dans la direction de la normale :

- Pour l'engrenage, l'angle de pression  $\alpha$  est constant et égal dans la majorité des cas à  $20^\circ$  (valeur normalisée). On rencontre aussi dans des anciens montages dans engrenages où la valeur de cet angle  $\alpha$  vaut  $14,5^\circ$  ou  $25^\circ$ . La direction de la normale varie en fonction de  $\theta + \xi$  [Figure 10],
- Pour une bague, la normale varie suivant  $\theta$  ( $\xi = 0$  soit  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ).

## CHAPITRE I

## CONSEQUENCE DES DEFAUTS DE GEOMETRIE D'UNE MACHINE A MESURER TRIDIMENSIONNELLE SUR LA GEOMETRIE APPARENTE D'UNE FORME CIRCULAIRE

## 3.2 Ecriture et indépendance des défauts

Une étude précise de l'effet de chacun de ces défauts en terme d'écart suivant la normale montre qu'ils ne sont pas indépendants entre eux c'est-à-dire que l'on peut trouver deux défauts qui ont les mêmes contributions sur la mesure d'une denture ou d'une bague. Nous allons donc chercher à identifier précisément chacune des contributions et réduire le système de défauts pour trouver un système ayant une décomposition unique. Il faudra ensuite écrire les défauts non retenus en fonction des autres pour conserver un résidu faible et donc décrire correctement le système [Figure 11].

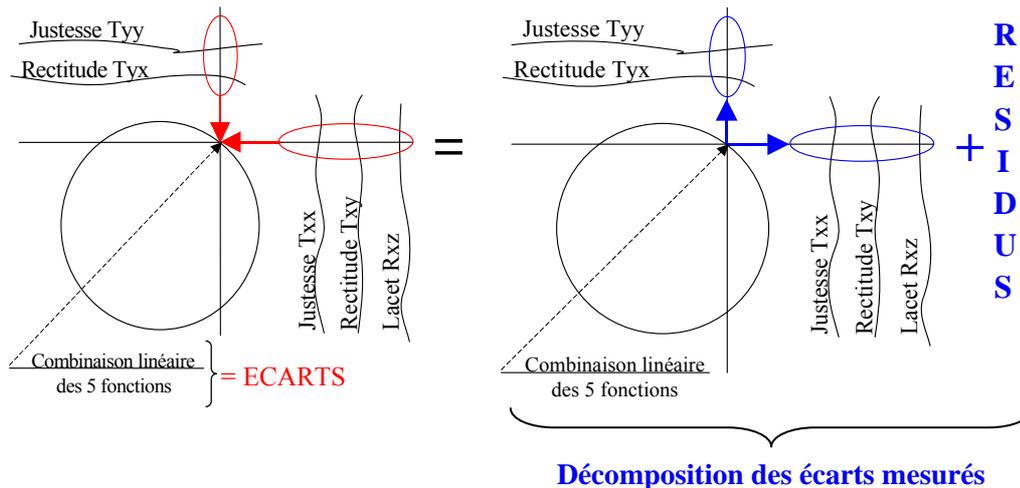


Figure 11 : Principe de la recherche de la décomposition unique des défauts de la machine dans le plan

Notation :

Pour toute la suite de l'étude, la contribution d'un défaut  $j$  (plus précisément sa contribution sur l'écart dans la direction de la normale) sera notée :  $C_j(x, y, z, \theta)$ .

La contribution de ces défauts dans le plan dans le cas général d'une mesure d'une pièce de forme circulaire s'écrit :

$$- C_{xTx}(x, y, z, \theta) = \begin{vmatrix} xTx(x) & n_x \\ \mathbf{0} & n_y = xTx(x) n_x \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

i.e.  $C_{xTx}(x, y, z, \theta) = xTx(x) \cos(\theta + \xi)$  (3)

$$- C_{yTy}(x, y, z, \theta) = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & n_x \\ yTy(y) & n_y = yTy(y) n_y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

i.e.  $C_{yTy}(x, y, z, \theta) = yTy(y) \sin(\theta + \xi)$  (4)

$$- C_{xTy}(x, y, z, \theta) = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & n_x \\ xTy(x) & n_y = xTy(x) n_y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

$$\text{i.e.: } C_{xTy}(x, y, z, \theta) = xTy(x) \sin(\theta + \xi) \quad (5)$$

$$- C_{yTx}(x, y, z, \theta) = \begin{pmatrix} yTx(y) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} n_x \\ n_y = yTx(y) n_x \\ \mathbf{0} \end{matrix}$$

$$\text{i.e.: } C_{yTx}(x, y, z, \theta) = yTx(y) \cos(\theta + \xi) \quad (6)$$

$$- C_{xRz}(x, y, z, \theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ xRz(x) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ y \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} n_x \\ n_y = -xRz(x) y n_x \\ \mathbf{0} \end{matrix}$$

$$\text{i.e.: } C_{xRz}(x, y, z, \theta) = -xRz(x) R \sin \theta \cos(\theta + \xi) \quad (7)$$

L'écart mesuré en un point résultant des défauts de la machine s'écrit comme une combinaison de ces défauts (pour illustrer quelques contributions typiques voir l'**annexe 1**).

Traitons un exemple. Il s'agit de montrer que l'effet d'une rectitude et du lacet ne peuvent être totalement séparés sur une pièce circulaire. On suppose l'égalité des contributions  $C_{xTy}(x, \theta) = C_{xRz}(x, \theta)$ , en combinant les relations 1, 2, 5, et 7 pour  $\xi=0$ , on obtient :

$$xTy(x) \cdot \sin \theta = -xRz(x) \cdot R \sin \theta \cdot \cos \theta,$$

$$\text{i.e. } xTy(x) = -x \cdot xRz(x)$$

Cette relation signifie que si le lacet a une certaine forme, la part de la rectitude qui peut s'écrire  $xTy(x) = -x \cdot xRz(x)$  aura le même effet sur la pièce circulaire que le lacet et ne saurait être analysée indépendamment du lacet. Ceci correspond d'ailleurs malheureusement à un effet de bilame qui déforme la rectitude en parabole et le lacet de manière linéaire, la relation ci-dessus montre qu'on ne sait pas séparer les contributions.

### 3.3 10 inconnues décrivant la géométrie pour 4 informations

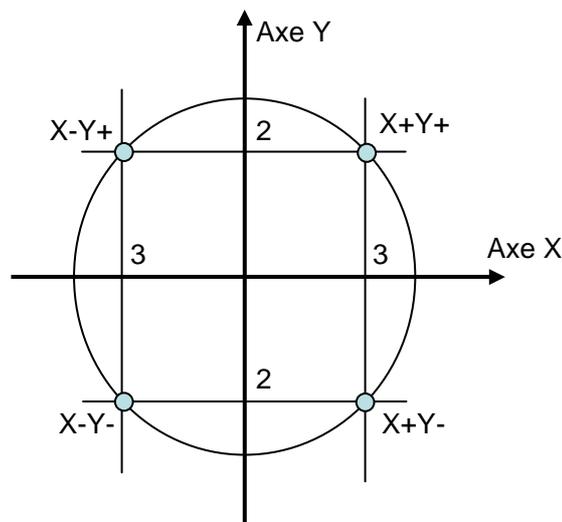


Figure 12 : décompte des défauts à analyser et des informations disponibles

## CHAPITRE I

## CONSEQUENCE DES DEFAUTS DE GEOMETRIE D'UNE MACHINE A MESURER TRIDIMENSIONNELLE SUR LA GEOMETRIE APPARENTE D'UNE FORME CIRCULAIRE

L'écart suivant la normale au point (X+Y+) est issu de la combinaison linéaire de trois défauts en X et deux en Y. Au point (X+Y-), on a les mêmes défauts en X et deux défauts supplémentaires en Y. Au point (X-Y-), on retrouve les mêmes défauts en Y qu'au point (X+Y-) mais on ajoute trois nouveaux défauts de l'axe X. Au point (X-Y+), on retrouve la contribution des trois défauts sur X que l'on a déjà pris en compte au point (X-Y-) et la contribution des deux défauts sur Y que l'on déjà pris en compte au point (X+Y+) [Figure 12]. Globalement, pour ces quatre points, on a dix inconnues à déterminer et quatre informations sous la forme des écarts suivant la normale. Il est donc clair qu'il est impossible d'analyser complètement la géométrie des axes X et Y à partir de la mesure du cercle. On voit apparaître dans cette analyse l'importance des points symétriques par rapport aux axes que l'on retrouvera de manière naturelle dans les équations sous la forme de fonctions paires et impaires.

Une véritable analyse des cinq défauts élémentaires à partir d'une mesure de forme circulaire est donc impossible. Lorsqu'on peut faire des hypothèses sur l'existence de quelques défauts simples (justesse linéaire qui déforme le cercle en ellipse dont les axes sont parallèles aux axes de la machine, défaut de perpendicularité qui déforme le cercle en ellipse dont les axes sont orientés à 45° par rapport aux axes de la machine), il est classique de pratiquer une séparation par un calcul au sens des moindres carrés. Dans la suite, nous nous proposons d'étudier différentes combinaisons possibles des défauts de justesses et de rectitudes pour former un système indépendant et donc analysable et vérifier que le défaut de lacet est bien une combinaison linéaire des défauts retenus.

### 3.4 Réduction du système de défauts

#### 3.4.1. Etude des 2 Rectitudes (xTy et yTx) – Combinaison 1

Nous allons examiner la dépendance des 2 rectitudes [Figure 13].

Les autres défauts sont supposés nuls, c'est-à-dire :  $xTx = 0$ ,  $yTy = 0$ , et  $xRz = 0$ .

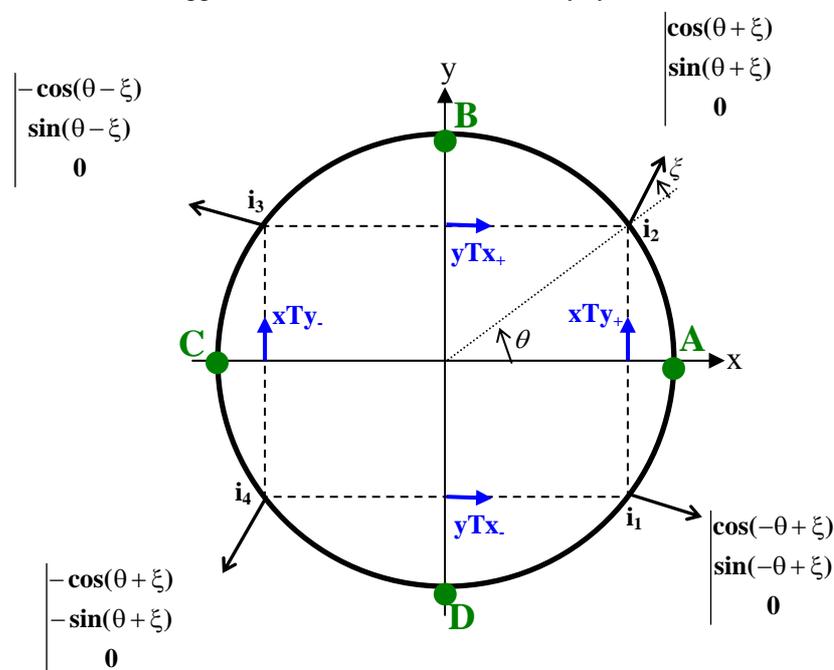


Figure 13 : Etude des rectitudes

Les écarts s'écrivent donc  $Ecart[i]=xTy[i].n_y + yTx[i].n_x$ , soit :

$$\begin{pmatrix} \sin(-\theta + \xi) & 0 & \cos(-\theta + \xi) & 0 \\ \sin(\theta + \xi) & 0 & 0 & \cos(\theta + \xi) \\ 0 & \sin(\theta - \xi) & 0 & -\cos(\theta - \xi) \\ 0 & -\sin(\theta + \xi) & -\cos(\theta + \xi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xTy_+ \\ xTy_- \\ yTx_- \\ yTx_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice ci-dessus est égal à  $-\sin(2\theta) \sin(2\xi)$ . Dans le cas d'une bague  $\xi=0$ , le déterminant est nul, les défauts sont dépendants.

### 3.4.2. Etude des 2 Justesses (xTx et yTy) – Combinaison 2

Nous allons examiner la dépendance des 2 justesses [Figure 14].

Les autres défauts sont supposés nuls, c'est-à-dire :  $xTy = 0$ ,  $yTx = 0$ , et  $xRz=0$ .

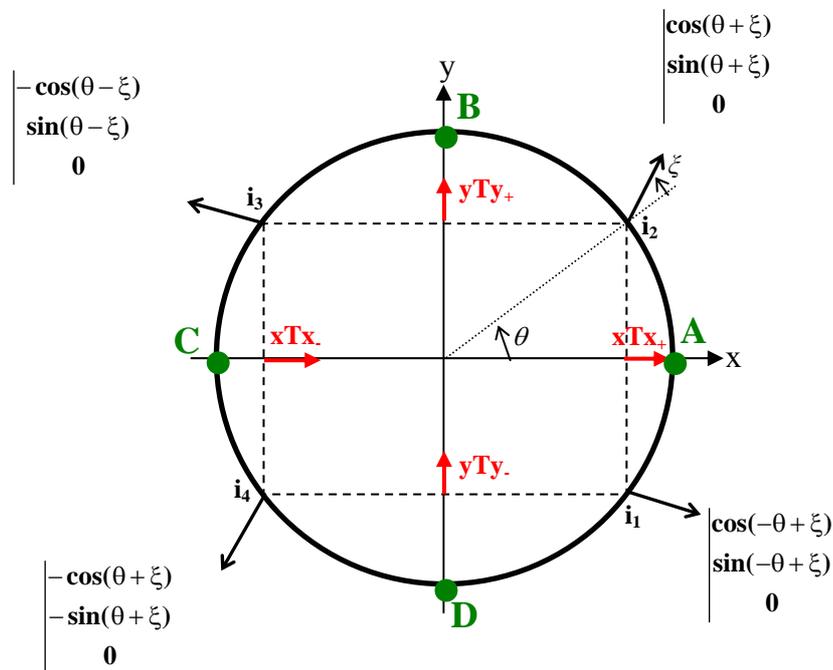


Figure 14 : Etude des justesse

Les écarts s'écrivent donc  $Ecart[i]=xTx[i].n_x + yTy[i].n_y$ , soit :

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta + \xi) & 0 & \sin(-\theta + \xi) & 0 \\ \cos(\theta + \xi) & 0 & 0 & \sin(\theta + \xi) \\ 0 & -\cos(\theta - \xi) & 0 & \sin(\theta - \xi) \\ 0 & -\cos(\theta + \xi) & -\sin(\theta + \xi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xTx_1 \\ xTx_2 \\ yTy_1 \\ yTy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice ci-dessus est égal à  $\sin(2\theta) \sin(2\xi)$ . Dans le cas d'une bague  $\xi=0$ , le déterminant est nul, les défauts sont dépendants.

## CHAPITRE I

CONSEQUENCE DES DEFAUTS DE GEOMETRIE D'UNE MACHINE A MESURER TRIDIMENSIONNELLE  
SUR LA GEOMETRIE APPARENTE D'UNE FORME CIRCULAIRE**3.4.3. Justesse et Rectitude d'axe différent – Combinaison 3**

Nous allons examiner la dépendance du défaut de justesse d'axe x ( $xTx$ ) et de la rectitude d'axe y ( $yTy$ ) [Figure 15].

Les autres défauts sont supposés nuls, c'est-à-dire :  $xTy = 0$ ,  $yTy = 0$ , et  $xRz = 0$ .

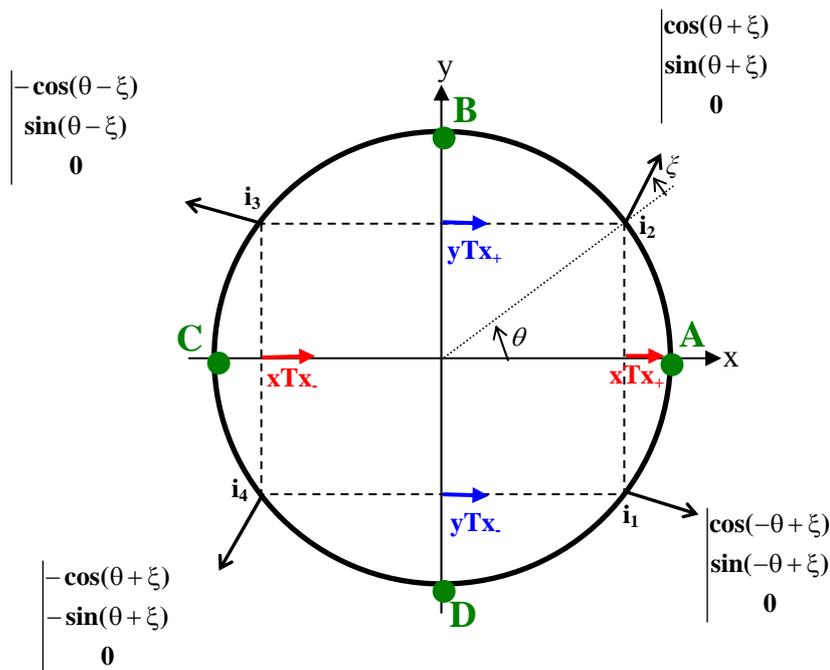


Figure 15 : Etude de rectitude et de justesse d'axe différents

Les écarts s'écrivent donc  $Ecart[i] = xTx[i].n_x + yTy[i].n_x$ , soit :

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta + \xi) & 0 & \cos(-\theta + \xi) & 0 \\ \cos(\theta + \xi) & 0 & 0 & \cos(\theta + \xi) \\ 0 & -\cos(\theta - \xi) & 0 & -\cos(\theta - \xi) \\ 0 & -\cos(\theta + \xi) & -\cos(\theta + \xi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xTx_+ \\ xTx_- \\ yTy_- \\ yTy_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$$

Le système d'équations est non inversible car le déterminant de la matrice ci-dessus est nul. Les deux défauts sont donc dépendants. De la même façon, on prouve qu'un défaut de justesse d'axe y et de la rectitude d'axe x sont dépendants.

### 3.4.4. Justesse et de Rectitude du même axe – Combinaison 4

On considère un défaut de justesse d'axe x ( $xTx$ ) et de rectitude d'axe x ( $xTy$ ) [Figure 16]. Les autres défauts sont supposés nuls, c'est-à-dire :  $yTy=0$ ,  $yTx=0$ , et  $xRz=0$ .

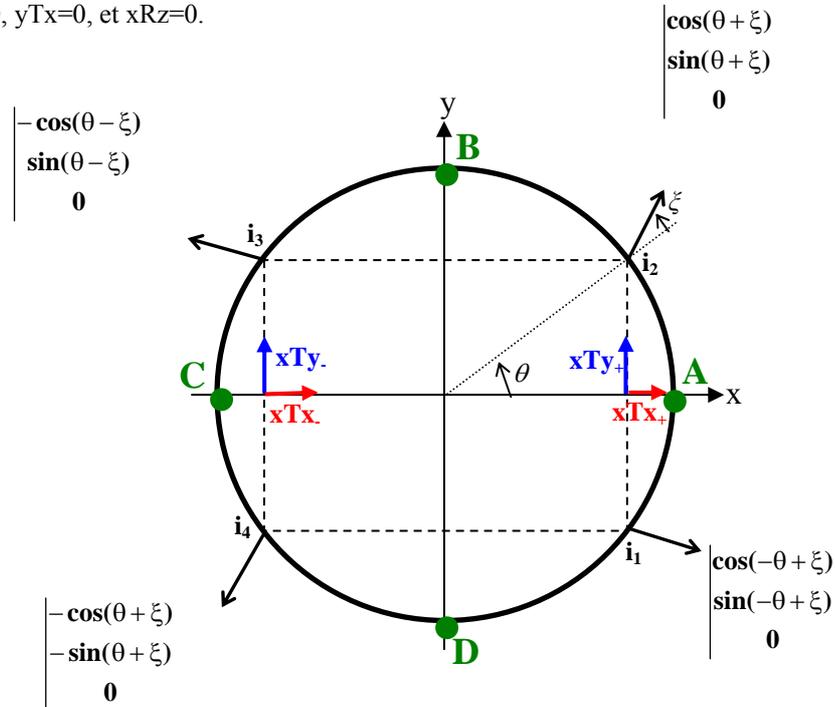


Figure 16 : Etude de rectitude et de justesse de même axe

Les écarts s'écrivent donc  $Ecart[i]=xTx[i].n_x + xTy[i].n_y$ , soit :

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta + \xi) & 0 & \sin(-\theta + \xi) & 0 \\ \cos(\theta + \xi) & 0 & \sin(\theta + \xi) & 0 \\ 0 & -\cos(\theta - \xi) & 0 & \sin(\theta - \xi) \\ 0 & -\cos(\theta + \xi) & 0 & -\sin(\theta + \xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xTx_+ \\ xTx_- \\ xTy_+ \\ xTy_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$$

Après simplification, le déterminant de la matrice ci-dessus est égal à  $-\sin^2(2\theta)$ . Ce déterminant n'est pas nul sauf aux points A, B, C, D, quelque soit  $\xi$ .

Un défaut de justesse d'axe x (resp. y) et une rectitude de même axe sont indépendants sauf aux points A, B, C, et D. Cette dépendance aux points A, B, C et D ne posent pas de problème en pratique au niveau de l'expression du défaut suivant la normale.

## CHAPITRE I

CONSEQUENCE DES DEFAUTS DE GEOMETRIE D'UNE MACHINE A MESURER TRIDIMENSIONNELLE  
SUR LA GEOMETRIE APPARENTE D'UNE FORME CIRCULAIRE

## 4 Dépendances des défauts de Justesse et de Rectitude

Le tableau 2 ci-dessous analyse les dépendances des défauts de rectitude et de justesse dans le cas de la bague et dans celui de l'engrenage.

Le défaut de lacet n'est pas traité dans ce tableau, nous montrerons au paragraphe suivant qu'il est décomposable sur une base constituée de la justesse et de la rectitude de l'axe X.

Les cases en jaune dans le tableau correspondent aux cas indépendants, nous avons retenu la combinaison 4 (case en orange).

Défauts considérés					Type de pièce étudié		Cas	Analyse
xRz	xTy	yTx	xTx	yTy	BAGUE	ENGRENAGE		
0	0	0	0	0			A	Pas d'intérêt
0	0	0	0	1			B	Incomplet (cf. cas F)
0	0	0	1	0			C	Incomplet (cf. cas K)
0	0	0	1	1	Dépendant	Indépendant	D	Combinaison 2
0	0	1	0	0			E	Incomplet (cf. cas F)
0	0	1	0	1	Indépendant	Indépendant	F	Combinaison 4
0	0	1	1	0	Dépendant	Dépendant	G	Combinaison 3
0	0	1	1	1	Dépendant	Dépendant	H	Déduit de la combinaison 3
0	1	0	0	0			I	Incomplet (cf. cas K)
0	1	0	0	1	Dépendant	Dépendant	J	Combinaison 3
0	1	0	1	0	Indépendant	Indépendant	K	Combinaison 4
0	1	0	1	1	Dépendant	Dépendant	L	Déduit de la combinaison 3
0	1	1	0	0	Dépendant	Indépendant	M	Combinaison 1
0	1	1	0	1	Dépendant	Dépendant	N	Déduit de la combinaison 3
0	1	1	1	0	Dépendant	Dépendant	O	Déduit de la combinaison 3
0	1	1	1	1	Dépendant	Dépendant	P	Déduit de la combinaison 3

Tableau 2 : Bilan des dépendances des défauts de justesse et de rectitude

Que l'on étudie la bague ou l'engrenage, l'analyse des écarts de justesse et de rectitude peut donc se faire par la combinaison de la rectitude x et de la justesse x (voir les possibilités dans le tableau ci-dessus). Nous avons choisi de privilégier l'axe x a car l'effet du lacet sur un cercle s'écrit directement comme une rectitude x et que l'axe x est le premier axe de la chaîne métrologique.

## 5 Ecriture des défauts en fonction de $xTy$ , $xTx$ – Vers l'écriture des défauts équivalents

### 5.1 Décomposition de $xRz$ , $yTx$ et $yTy$ selon $xTy$ , $xTx$

Le système indépendant choisi pour résoudre l'étude est constitué de la justesse  $xTx$  et de la rectitude  $xTy$  [Figure 17].

Les écarts s'écrivent donc  $Ecart[i]=xTy[i].n_y + xTx[i].n_x$ .

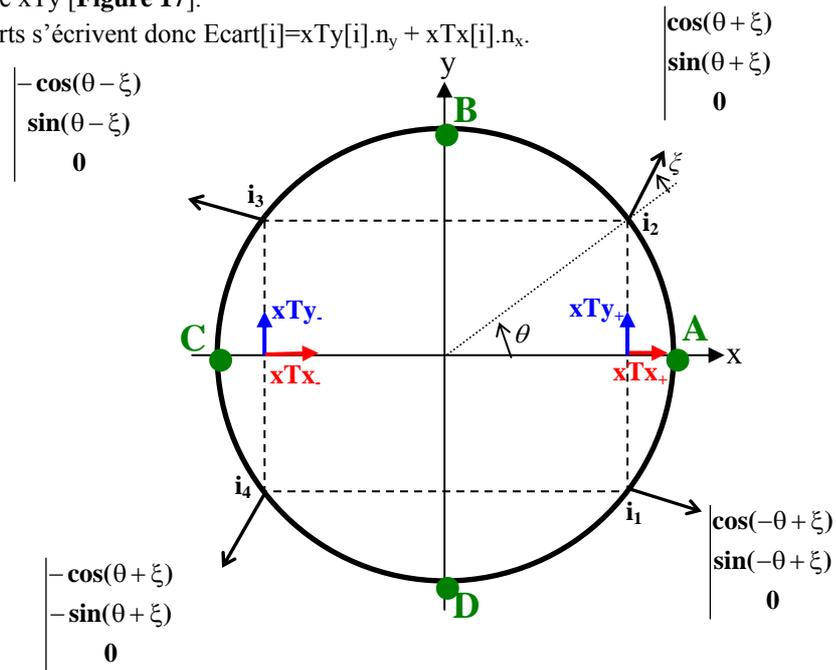


Figure 17: Analyse des défauts en fonction de  $xTy$  et  $xTx$

#### 5.1.1. Analyse d'un défaut de lacet d'axe $x$ (relevé sur les Ecarts)

Les écarts s'écrivent donc  $Ecart[i]= -y.xRz[i].n_x$ , soit :  $xTy[i].n_y + xTx[i].n_x = y.xRz[i].n_x$ , c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \sin(\xi - \theta) & 0 & \cos(\xi - \theta) & 0 \\ \sin(\xi + \theta) & 0 & \cos(\xi + \theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\xi - \theta) & 0 & -\cos(\xi - \theta) \\ 0 & -\sin(\xi + \theta) & 0 & -\cos(\xi + \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xTy_+ \\ xTy_- \\ xTx_+ \\ xTx_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin(\theta) \cos(-\theta + \xi) xRz_- \\ -R \sin(\theta) \cos(\theta + \xi) xRz_- \\ -R \sin(\theta) \cos(-\theta + \xi) xRz_+ \\ R \sin(\theta) \cos(\theta + \xi) xRz_+ \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice ci-dessus est égal à  $-\sin(2\theta)^2$ .

Le déterminant n'est pas nul (sauf aux points  $B$  et  $D$ , c'est-à-dire  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ou  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ), le système est indépendant et il existe une seule et unique solution pour résoudre le système.

Un défaut de lacet est donc bien analysé à l'aide de la Rectitude et de la Justesse d'axe  $x$ .

## CHAPITRE I

## CONSEQUENCE DES DEFAUTS DE GEOMETRIE D'UNE MACHINE A MESURER TRIDIMENSIONNELLE SUR LA GEOMETRIE APPARENTE D'UNE FORME CIRCULAIRE

$$\begin{pmatrix} xTy_+ \\ xTy_- \\ xTx_+ \\ xTx_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R.xRz_- \frac{\cos(2\xi) + \cos(2\theta)}{2 \cdot \cos \theta} \\ -R.xRz_+ \frac{\cos(2\xi) + \cos(2\theta)}{2 \cdot \cos \theta} \\ R.xRz_- \frac{\cos \xi \cdot \sin \xi}{\cos \theta} \\ R.xRz_+ \frac{\cos \xi \cdot \sin \xi}{\cos \theta} \end{pmatrix}$$

Pour  $\xi=0$ , on obtient  $xTy=-R.\cos\theta.xRz=-x.xRz$ , ce qui correspond au cas de la bague.

**Bilan :** *Le défaut de lacet s'exprime bien comme une combinaison de  $xTy$  et  $xTx$ .*

5.1.2. Analyse d'un défaut de Rectitude  $yTx$  (relevé sur les Ecart)

Les écarts s'écrivent donc :  $Ecart[i]=yTx[i].n_x$ ,

Soit :  $xTy[i].n_y + xTx[i].n_x = yTx[i].n_x$ ,

C'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \sin(\xi - \theta) & 0 & \cos(\xi - \theta) & 0 \\ \sin(\xi + \theta) & 0 & \cos(\xi + \theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\xi - \theta) & 0 & -\cos(\xi - \theta) \\ 0 & -\sin(\xi + \theta) & 0 & -\cos(\xi + \theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xTy_+ \\ xTy_- \\ xTx_+ \\ xTx_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yTx_- \cos(-\theta + \xi) \\ yTx_+ \cos(\theta + \xi) \\ -yTx_+ \cos(-\theta + \xi) \\ -xTx_- \cos(\theta + \xi) \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice ci-dessus est égal à  $-\sin(2\theta)^2$ .

Ce déterminant n'est pas nul (sauf aux points B et D, c'est-à-dire  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ou  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ), le système est indépendant et il existe une seule et unique solution pour résoudre le système.

Un défaut de Rectitude  $yTx$  est bien analysé à l'aide de la Rectitude et de la Justesse d'axe x.

$$\begin{pmatrix} xTy_+ \\ xTy_- \\ xTx_+ \\ xTx_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{yTx_+ - yTx_- \cos(2\xi) + \cos(2\theta)}{2 \sin(2\theta)} \\ \frac{yTx_- - yTx_+ \cos(2\xi) + \cos(2\theta)}{2 \sin(2\theta)} \\ \frac{yTx_- + yTx_+}{2} + \frac{yTx_- - yTx_+ \sin(2\xi)}{2 \sin(2\theta)} \\ \frac{yTx_+ + yTx_-}{2} + \frac{yTx_+ - yTx_- \sin(2\xi)}{2 \sin(2\theta)} \end{pmatrix}$$

Pour  $\xi=0$ , ce qui correspond au cas de la bague,

$$xTx = \frac{yTx_- + yTx_+}{2},$$

$$xTy_+ = \frac{yTx_+ - yTx_-}{2 \cdot \tan \theta},$$

$$xTy_- = \frac{yTx_- - yTx_+}{2 \cdot \tan \theta}.$$

**Bilan :** *Le défaut de Rectitude y s'exprime bien comme une combinaison de  $xTy$  et  $xTx$*

### 5.1.3. Analyse d'un défaut de Justesse yTy (relevé sur les Ecart)

Les écarts s'écrivent donc  $Ecart[i] = yTy[i].n_y$ , soit :  $xTy[i].n_y + xTx[i].n_x = yTy[i].n_y$ , c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \sin(\xi - \theta) & 0 & \cos(\xi - \theta) & 0 \\ \sin(\xi + \theta) & 0 & \cos(\xi + \theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\xi - \theta) & 0 & -\cos(\xi - \theta) \\ 0 & -\sin(\xi + \theta) & 0 & -\cos(\xi + \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xTy_+ \\ xTy_- \\ xTx_+ \\ xTx_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -yTy_- \sin(\theta - \xi) \\ yTy_+ \sin(\theta + \xi) \\ yTy_+ \sin(\theta - \xi) \\ -yTy_- \sin(\theta + \xi) \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice ci-dessus est égal à  $-\sin(2\theta)^2$ . Le déterminant n'est pas nul (sauf aux points B et D, c'est-à-dire  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ou  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ), le système est indépendant et il existe une seule et unique solution pour résoudre le système.

Un défaut de Rectitude yTx est bien analysé à l'aide de la Rectitude et de la Justesse d'axe x.

$$\begin{pmatrix} xTy_+ \\ xTy_- \\ xTx_+ \\ xTx_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{yTy_- + yTy_+}{2} + \frac{yTy_+ - yTy_-}{2} \frac{\sin(2\xi)}{\sin(2\theta)} \\ \frac{yTy_- + yTy_+}{2} + \frac{yTy_- - yTy_+}{2} \frac{\sin(2\xi)}{\sin(2\theta)} \\ \frac{yTy_+ - yTy_-}{2} \frac{\cos(2\xi) - \cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} \\ \frac{yTy_- - yTy_+}{2} \frac{\cos(2\xi) - \cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} \end{pmatrix}$$

Pour  $\xi=0$ , ce qui correspond au cas de la bague

$$xTx_+ = \frac{-yTy_- + yTy_+}{2} \tan \theta,$$

$$xTx_- = \frac{yTy_- - yTy_+}{2} \tan \theta,$$

$$xTy = \frac{yTy_- + yTy_+}{2}.$$

**Bilan :** Le défaut de Justesse y s'exprime bien comme une combinaison de xTy et xTx

## CHAPITRE I

CONSEQUENCE DES DEFAUTS DE GEOMETRIE D'UNE MACHINE A MESURER TRIDIMENSIONNELLE  
SUR LA GEOMETRIE APPARENTE D'UNE FORME CIRCULAIRE**5.2 La décomposition des écarts par rapport à xTy et xTx**

Les résultats du paragraphe 5.1, nous permettent d'écrire que :

$$\begin{aligned} xTy_+^{\text{Equivalent}} = xTy_+ &+ \left( \frac{R \cdot xRz_-}{2} \cdot \frac{\cos(2\xi) + \cos(2\theta)}{\cos \theta} \right) \\ &+ \left( \frac{yTx_+ - yTx_-}{2} \cdot \frac{\cos(2\xi) + \cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} \right) \\ &+ \left( \frac{yTy_- + yTy_+}{2} + \frac{yTy_+ - yTy_-}{2} \cdot \frac{\sin(2\xi)}{\sin(2\theta)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xTy_-^{\text{Equivalent}} = xTy_- &+ \left( \frac{R \cdot xRz_+}{2} \cdot \frac{\cos(2\xi) + \cos(2\theta)}{\cos \theta} \right) \\ &+ \left( \frac{yTx_- - yTx_+}{2} \cdot \frac{\cos(2\xi) + \cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} \right) \\ &+ \left( \frac{yTy_- + yTy_+}{2} + \frac{yTy_- - yTy_+}{2} \cdot \frac{\sin(2\xi)}{\sin(2\theta)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xTx_+^{\text{Equivalent}} = xTx_+ &+ \left( -R \cdot xRz_- \cdot \frac{\cos \xi \sin \xi}{\cos \theta} \right) \\ &+ \left( \frac{yTx_- + yTx_+}{2} + \frac{yTx_- - yTx_+}{2} \cdot \frac{\sin(2\xi)}{\sin(2\theta)} \right) \\ &+ \left( \frac{yTy_+ - yTy_-}{2} \cdot \frac{\cos(2\xi) - \cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xTx_-^{\text{Equivalent}} = xTx_- &+ \left( -R \cdot xRz_+ \cdot \frac{\cos \xi \sin \xi}{\cos \theta} \right) \\ &+ \left( \frac{yTx_- + yTx_+}{2} + \frac{yTx_+ - yTx_-}{2} \cdot \frac{\sin(2\xi)}{\sin(2\theta)} \right) \\ &+ \left( \frac{yTy_- - yTy_+}{2} \cdot \frac{\cos(2\xi) - \cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} \right) \end{aligned}$$

Cette décomposition est valable quelque soit  $\xi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ . Pour un engrenage, l'angle de

pression standard vaut bien sûr :  $\alpha = \frac{\pi}{9}$ . Pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ( $\xi=0$ ), on obtient le cas de la bague.

Dans les expressions, on voit apparaître des termes tels que  $\left( \frac{yTx_- + yTx_+}{2} \right)$  qui correspond à la

partie paire de la fonction yTx ou  $\left( \frac{yTy_+ - yTy_-}{2} \right)$  qui correspond à une partie impaire.

### 5.3 Contribution des fonctions équivalentes

Connaissant les fonctions équivalentes sur une denture, il est possible de déterminer la contribution de ces défauts équivalents pour simuler les défauts de la machine sur la mesure de l'engrenage.

La contribution des fonctions équivalentes sur la mesure d'une denture après simplification par les formules de trigonométrie s'écrit alors classiquement :

$$C_{Denture}^{FonctionsEquivalentes} = xTx^{Equivalent} \cdot n_x + xTy^{Equivalent} \cdot n_y,$$

$$C_{\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}}^{FonctionsEquivalentes} = (xTx_- + yTx_- + R \cdot xRz_+ \cdot \sin \theta) \cdot \cos(\theta + \xi) + (xTy_- + yTy_-) \cdot \sin(\theta + \xi)$$

$$C_{-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}^{FonctionsEquivalentes} = (xTx_+ + yTx_+ + R \cdot xRz_- \cdot \sin \theta) \cdot \cos(\theta + \xi) + (xTy_+ + yTy_+) \cdot \sin(\theta + \xi)$$

### 5.4 Analyse de trois défauts typiques

#### 5.4.1. Perpendicularité

Si on simule sur un cercle un défaut de perpendicularité, ce défaut peut-être modélisé sous la forme d'une constante sur le lacet, d'une pente sur une rectitude ou pris en compte de manière spécifique c'est-à-dire en ajoutant une contribution supplémentaire par rapport à la somme des trois torseurs de petits déplacements. La **Figure 18** montre un défaut de circularité. Sur ce graphique, on a simulé un défaut de perpendicularité de 50 microradians sur un cercle de 200mm de diamètre, cela correspond à une pente de 10 $\mu$ m sur le diamètre du cercle. La déformation du cercle correspond à une ellipse à 45 degrés

Après calcul des fonctions équivalentes, on retrouve une justesse équivalente nulle et de rectitude équivalente en forme de pente.

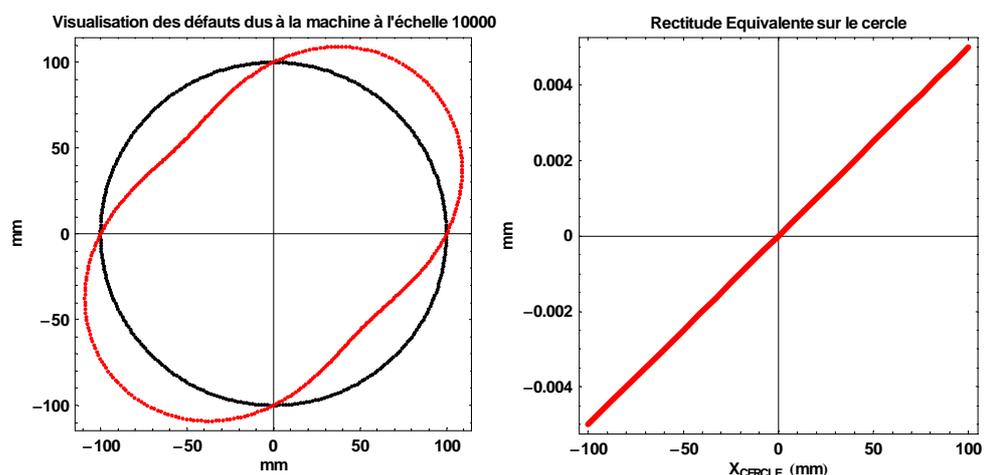


Figure 18 : défaut de perpendicularité et rectitude équivalente

## CHAPITRE I

## CONSEQUENCE DES DEFAUTS DE GEOMETRIE D'UNE MACHINE A MESURER TRIDIMENSIONNELLE SUR LA GEOMETRIE APPARENTE D'UNE FORME CIRCULAIRE

## 5.4.2. Justesse

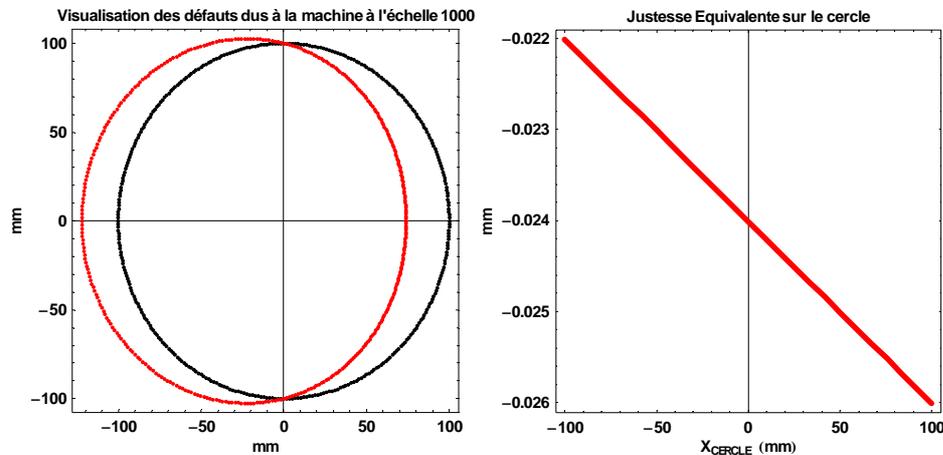


Figure 19 : défaut de justesse et justesse équivalente

On pourrait analyser de la même manière un allongement d'un axe lié à une dilatation par exemple, sur la **Figure 19** on a simulé une pente sur la justesse de  $20\mu\text{m}$  par mètre. Cette pente provoque à la fois un déplacement et une déformation de la pièce. Après analyse, on retrouve une pente de  $4\mu\text{m}$  puisque le cercle fait 200mm de diamètre.

## 5.4.3. Lacet

On a simulé l'effet d'un lacet de  $40\mu\text{m}$  par mètre compter à partir du zéro de l'axe. Ce lacet correspond d'une part à l'effet d'une perpendicularité et d'autre part à un lacet qui est similaire à une rectitude parabolique [**Figure 20**]. La perpendicularité se traduit par la pente sur la rectitude équivalente. On retrouve également la déformation parabolique.

On a fait le même travail sur une roue [**Figure 21**], les rectitudes équivalentes dépendent du diamètre.

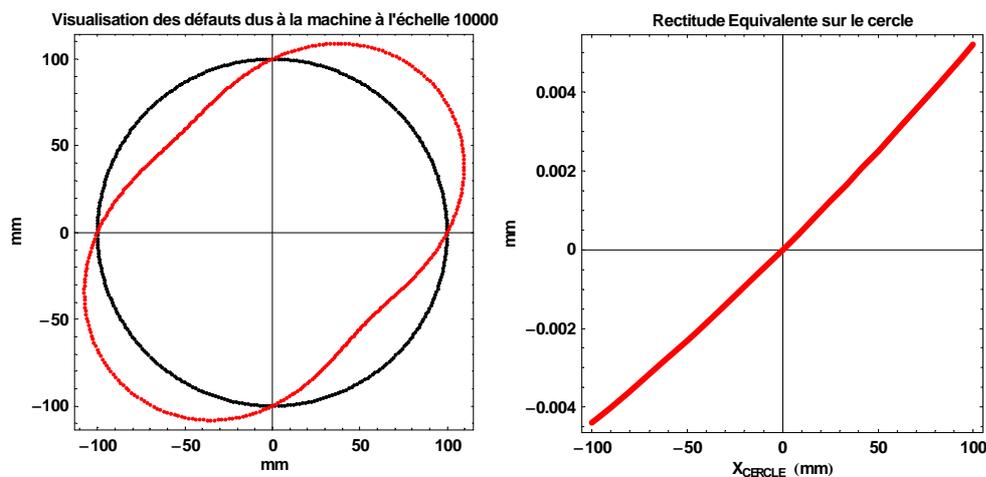


Figure 20 : défaut de lacet et rectitude équivalente

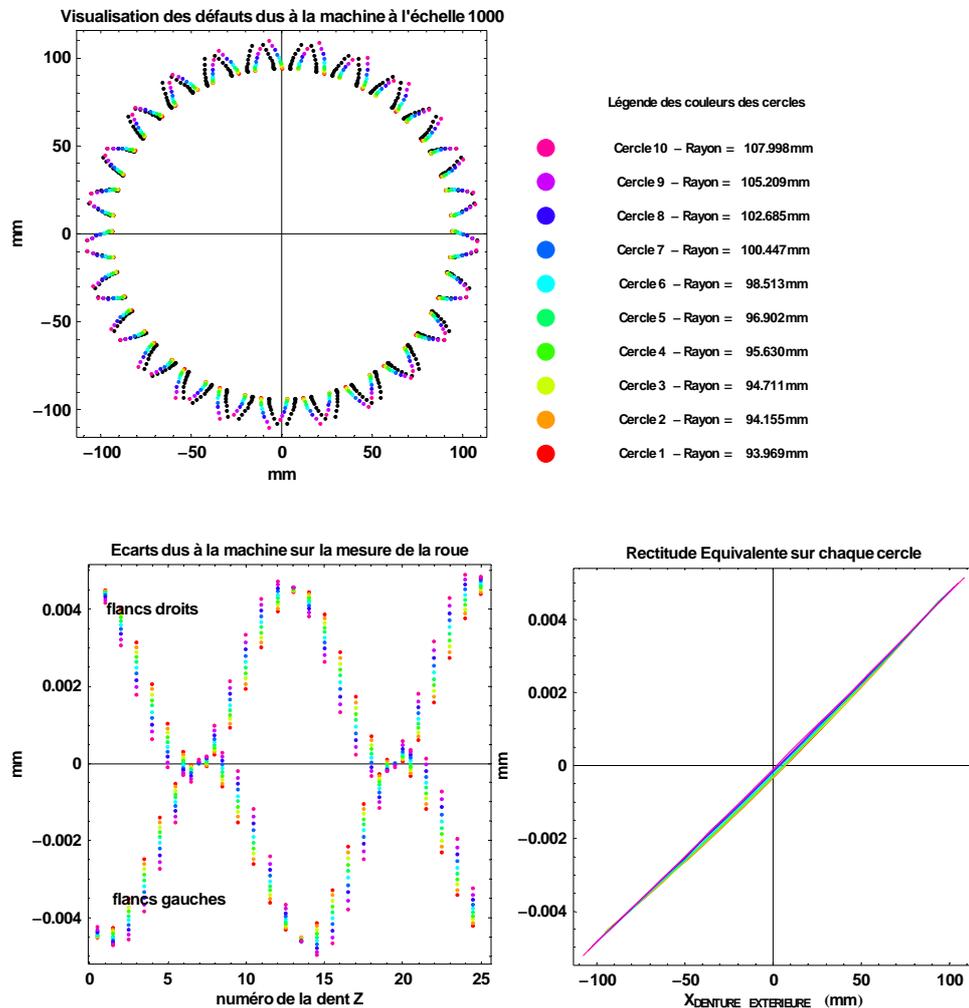


Figure 21 : Simulation sur une roue Z=25, module=8

## 6 Conclusion

La correction de géométrie des machines à mesurer par la mécanique du corps solide est industriellement opérationnelle depuis les années 1985, cette technique est désormais classique. La vraie difficulté de cette technique est en fait la maîtrise de l'empilement des contributions des axes constituant la chaîne métrologique et les techniques expérimentales qui feront l'objet des chapitres suivants.

La mesure d'un étalon de forme circulaire (bague, Machine Checking Gauge, Ball Bar etc) a souvent été proposée pour vérifier la géométrie d'une machine. Nous montrons ici que l'information recueillie est partielle et nous développons l'idée que les écarts constatés peuvent être modélisés par une justesse et une rectitude équivalentes mais qu'il est impossible d'aller au-delà dans l'analyse.

Ces défauts équivalents peuvent être utilisés comme méthode d'analyse (paragraphe 5) et ils seront utilisés pour analyser les constantes apparaissant dans la méthode de permutation [Chapitre VI].





## CHAPITRE II :

# Etude de cales à créneaux

## SOMMAIRE

1	Introduction et bibliographie .....	40
2	Présentation du problème.....	44
3	Evaluation de la constante palpeur .....	45
3.1	Estimation directe.....	45
3.2	Détermination mathématique de la constante palpeur.....	47
4	Etalonnage de cales - à gradins -.....	49
4.1	Raccordement de deux cales étalons à partir de la connaissance de deux autres cales.....	49
4.1.1	Résolution théorique du problème .....	50
4.1.2	Vérification Expérimentale.....	51
4.2	Raccordement de la MITUTOYO à partir d'une KOBA .....	51
4.2.1	Etalonnage de la MITUTOYO au CETIM.....	51
4.2.2	Etalonnage de la MITUTOYO et détermination de la justesse d'une machine à l'aide de notre nouvelle méthode.....	53
5	Mise en position et mesures d'une KOBA.....	55
5.1	Optimisation de la prise de référentiel d'une KOBA .....	55
5.2	Répartition des points et orientation de la cale.....	56
5.2.1	Nombre de points.....	56
5.2.2	Influence du système de palpation .....	58
5.2.3	Orientation de la cale à gradins.....	59
5.3	Influence de la mise en position .....	59
6	Sources d'incertitudes liées à l'algorithme utilisé .....	60
6.1	Répétabilité, dérive thermique.....	60
6.2	Effet d'une dérive thermique.....	62
6.2.1	Mise en équation pour une étude formelle.....	62
6.2.2	Effet d'une variation de température .....	63
6.3	Incertitude sur la qualité du décalage de la longueur d'un créneau.....	65
6.4	Inclinaison de la cale à gradin entre les deux positions.....	65
7	Conclusion.....	66

# Etude de cales à créneaux

## 1 Introduction et bibliographie

Une cale à gradins, appelée également cale à créneaux, présente de nombreux avantages. Cet étalon permet le contrôle périodique d'une machine à mesurer tout en garantissant une traçabilité [NF EN ISO 9000, 2005 – NF X 07-001, 1994] de part son raccordement au mètre étalon. Au niveau d'une vérification de géométrie de la machine dans le plan, elle permet de déterminer les défauts de justesse, de lacet, et de perpendicularité, c'est-à-dire tous les défauts sauf les rectitudes. Le contrôle de la géométrie de la machine avec ce type d'étalon est relativement bien connu [SCH1984, WAL1984] mais les défauts de mesures de la cale par elle-même ne sont pas forcément évalués avec précision. Les 2 types de cales à gradins les plus connues sont la KOBA (KOLB et BAUMANN) et la MITUTOYO [Figure 1].

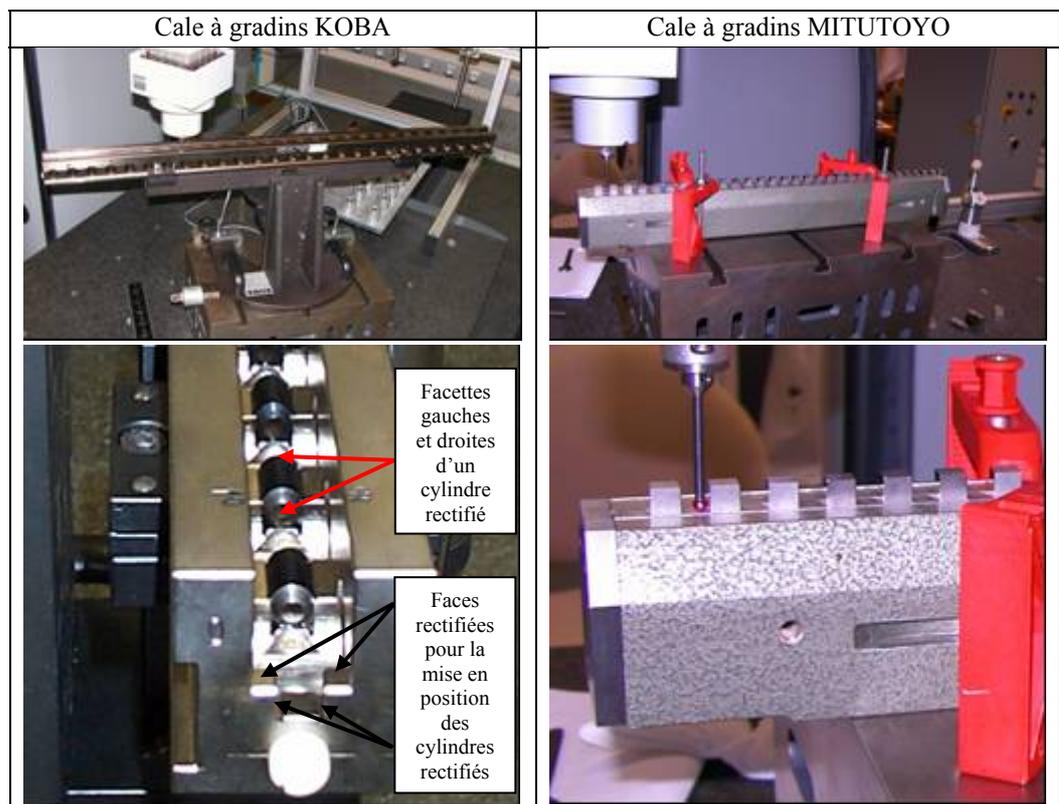


Figure 1 : photos d'une KOBA et d'une MITUTOYO

Au niveau de la bibliographie, on ne trouve pas grand-chose sur ce type d'étalons. En effet, de façon classique, les laboratoires utilisent ce type de cale pour le contrôle de leur machine [CAU1996] par rapport à un procès verbal d'étalonnage et n'effectuent pas forcément de recherche sur la mesure de la cale. Dans [JUS1999] et [PTB2005], Otto JUSKO du PTB a publié en 1999 et en 2005 les résultats internes et une intercomparaison sur une KOBA de 1020

## CHAPITRE II

## ÉTUDE DE CALES A CRENEAUX

mm de long. De 1999 à 2005, la cale à gradin a été mesurée par un grand nombre de laboratoires reconnus et bénéficie alors de dix contrôles différents dont deux du PTB. Dans ce dernier document, le PTB précise que la cale à gradins est relativement stable dans le temps, dans la mesure où ils n'ont pas décelé de réelles modifications entre les mesures de 1999 et les mesures de 2000 qu'ils ont effectuées. Les différences entre leurs mesures de 1999 et celles de 2000 sont représentées sur la **Figure 2**. L'axe des abscisses de la figure représente le numéro de la face (une face tous les 20 mm). Sur ce point particulier d'ailleurs, le CETIM fait étalonner tous les ans au LNE une KOBA de 1020 mm de long, identique à celle de cette intercomparaison et n'a pas constaté non plus de dégradation de la cale à gradins.

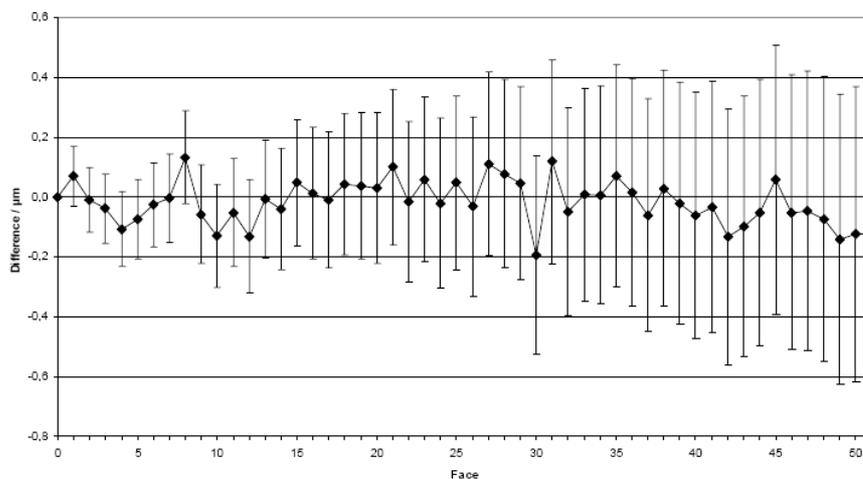


Figure 2 : Différence entre les mesures de 1999 et celle de 2000 du PTB sur leur KOBA et incertitudes associées

Cette intercomparaison est relativement intéressante dans la mesure où l'on peut évaluer à la fois la capacité des laboratoires à mesurer ce type d'étalon [Figure 3] mais aussi avoir un ordre de grandeur des incertitudes de mesure affichées par les laboratoires pour des mesures simples de longueur.

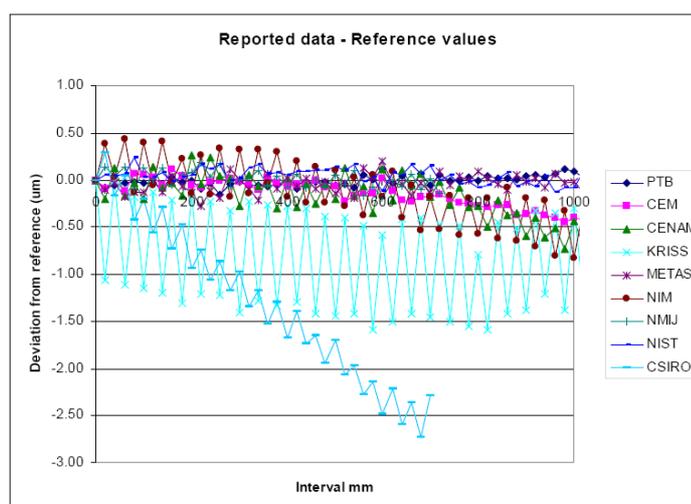


Figure 3 : Résultats des mesures de la KOBA affichées par les différents laboratoires

Les résultats de mesures de la KOBA par les participants présentent des différences relativement importantes essentiellement de deux natures différentes :

- une pente sur les écarts qui peut être une mauvaise prise en compte de la température ou une erreur de justesse sur la machine sur laquelle, ils ont effectués les mesures,
- un décalage entre les mesures des faces gauches et droites, résultant d'une mauvaise prise en compte des erreurs d'étalonnage du palpeur utilisé sur la sphère de référence. Nous présenterons le problème et son traitement dans la suite de ce chapitre.

Pour notre étude, nous avons accès à ces 2 types d'étalons :

- Le CETIM de Senlis possède une KOBA de 1020 mm ayant des créneaux de 20 mm. Cette KOBA est étalonnée au LNE sur 800 mm. Elle est constituée de petits cylindres rectifiés positionnés dans une rainure également rectifiée. La KOBA possède son propre montage qui permet d'assurer le posage aux points de moindre flexion, et évite les déformations de celle-ci afin d'assurer a priori la répétabilité et la reproductibilité [NF ISO 5725-1, 1994].
- Le laboratoire de Métrologie de l'ENSAM de Lille possède une MITUTOYO de 600 mm non raccordée. Une MITUTOYO est constituée d'un empilage de cales étalons de 10 mm chacune positionnées en quinconce. Cette cale à gradins ne possède pas de montage assurant un posage optimisé. Cet étalon ne servira que pour des études particulières.

Les méthodes développées dans ce chapitre s'appliquent pour les cales à gradins de type KOBA ou MITUTOYO, mesurées avec système de palpation classique de type palpeur dynamique ou tête mesurante, mais pas forcément pour les « nouveaux étalons » que l'on trouve dans la bibliographie basés sur des sphères à la place des créneaux et/ou associés à des techniques de mesures optiques.

Même si nous ne pouvons pas tirer énormément d'informations au sujet de la bibliographie sur ce sujet, dans la mesure où ce type d'étalon étalon est classiquement utilisé depuis de nombreuses années pour effectuer la géométrie des machines [BUS1984 - KOB1988]. Nous allons tout de même présenter rapidement quelques références bibliographiques intéressantes au sujet de nouvelles cales à gradins basées sur la mesure de sphère.

- Dans [OSA2002] l'auteur présente un nouvel étalon [Figure 4] basé sur le principe de la cale à gradins mais constitué de sphères à la place des créneaux. Cet étalon est mesuré en technologie optique (interférométrie laser). On pourrait envisager mesurer directement l'étalon avec un palpeur dynamique ou une tête mesurante et dans ce cas, on repère dans l'espace le centre des différentes sphères. Néanmoins, le protocole de mesure est différent de celui de mesurer des faces parallèles entre-elles.

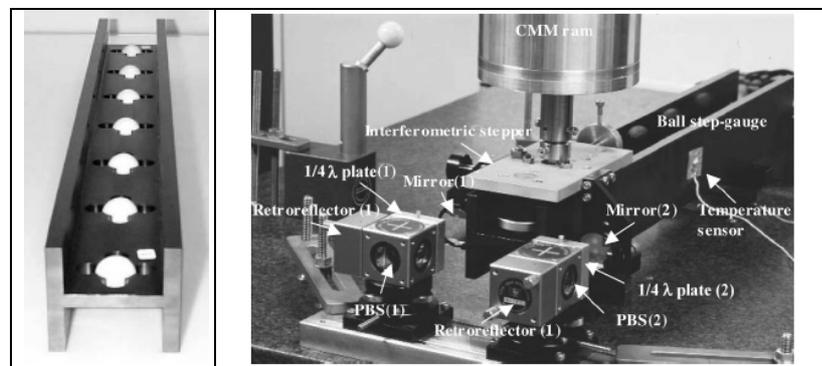


Figure 4 : Cale à gradins constituée de sphères mesurée en technologie optique dans [OSA2002]

## CHAPITRE II

## ÉTUDE DE CALES A CRENEAUX

- Dans [PHI2001], le National Institute of Standards and technology (NIST) présente un nouvel étalon [Figure 5] basé sur une sphère se déplaçant sur un chariot et sur laquelle est positionné un miroir. La sphère est ainsi mesurée à la fois en interférométrie laser et à la fois par le système de palpage de la machine. Ce type d'étalon est approprié aux machines longues comme le montre la Figure 5.

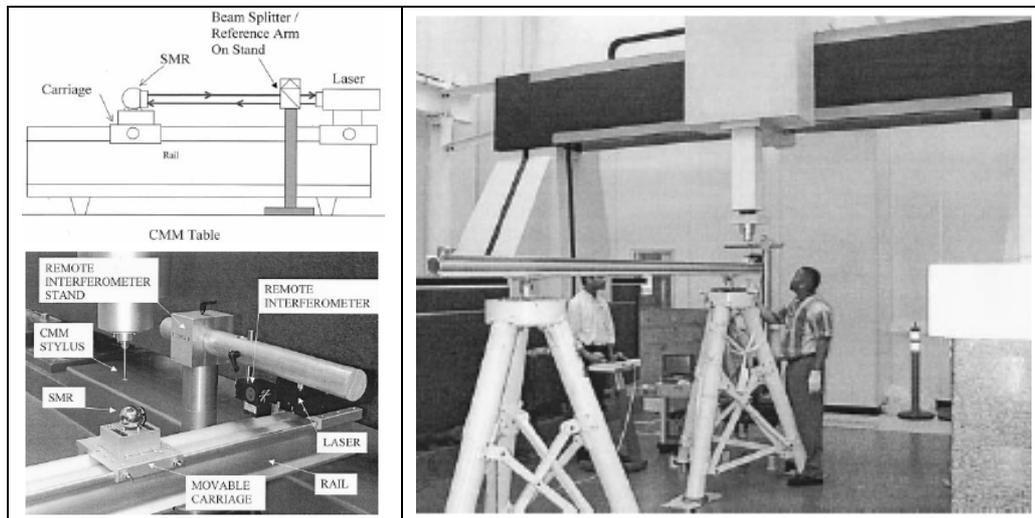


Figure 5 : cale constituée d'une bille sur un chariot mobile mesurée par interférométrie dans [PHI2001]

- Dans [TRA2006], les auteurs présentent un papier sur les palpeurs autocentres à lames flexibles pour la vérification des machines-outils. Dans cet article, les mesures sont réalisées sur des cales à gradins de grandes dimensions constituées de sphères permettant entre autres les mesures de justesse. [Figure 6].

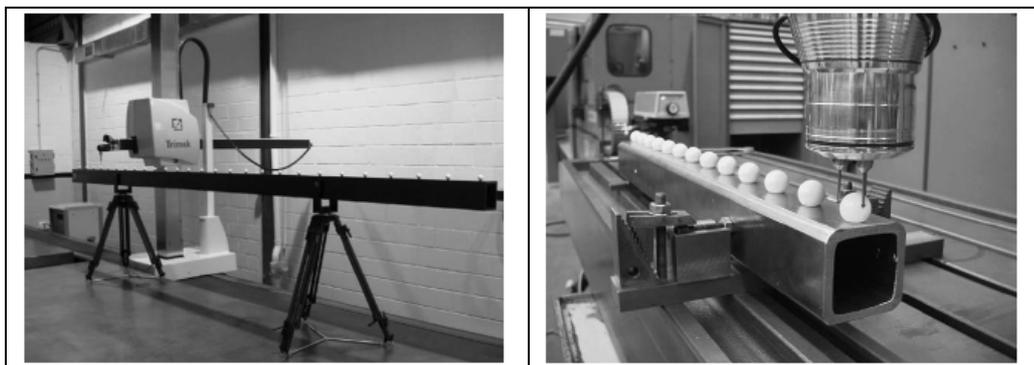


Figure 6 : Photos de cales à gradins constituées de sphère dans [TRA2006]

Les articles traitant de la problématique de l'étalonnage des cales étalons sont également relativement intéressants en terme de prise en compte des incertitudes de mesures [DEC1996 – DEC1997a – DEC1997b – DEC2000] notamment en terme d'erreurs dues aux variations de température.

## 2 Présentation du problème

L'utilisation d'une cale à créneau dans l'optique de réaliser un contrôle de la géométrie d'une machine à mesurer tridimensionnelle nécessite quelques précautions.

Outre les problèmes de positionnement et de prise de référentiel, il existe un problème de flexion du stylet et de comportement du système de palpation (palpeurs statiques ou dynamiques - **chapitre IV**). Ces défauts sont minimisés au sens des moindres carrés de l'étalonnage du palpeur sur la sphère de référence. La prise en compte des flexions n'est pas parfaite et un défaut de comportement de l'ensemble « système de palpation et stylet » subsiste et se traduit lors d'une mesure bidirectionnelle par l'existence d'une constante que l'on appellera « constante palpeur » que nous allons tenter de minimiser voire de prendre en compte.

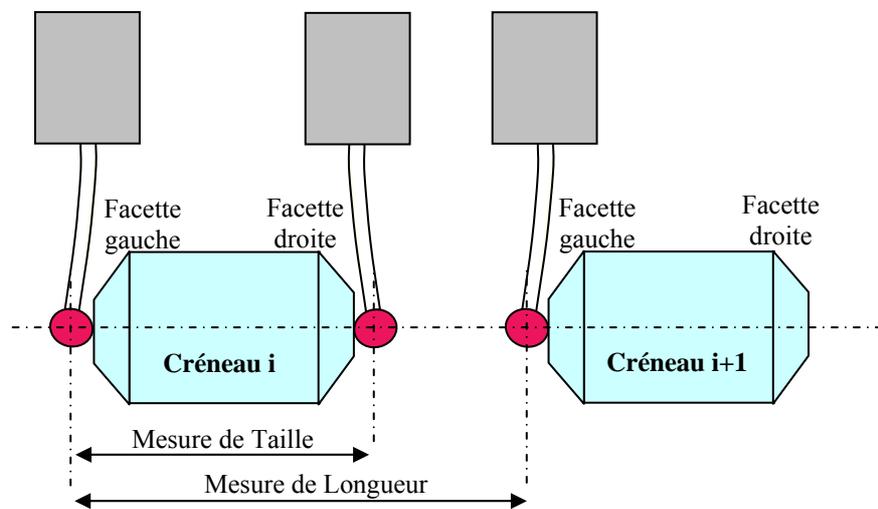


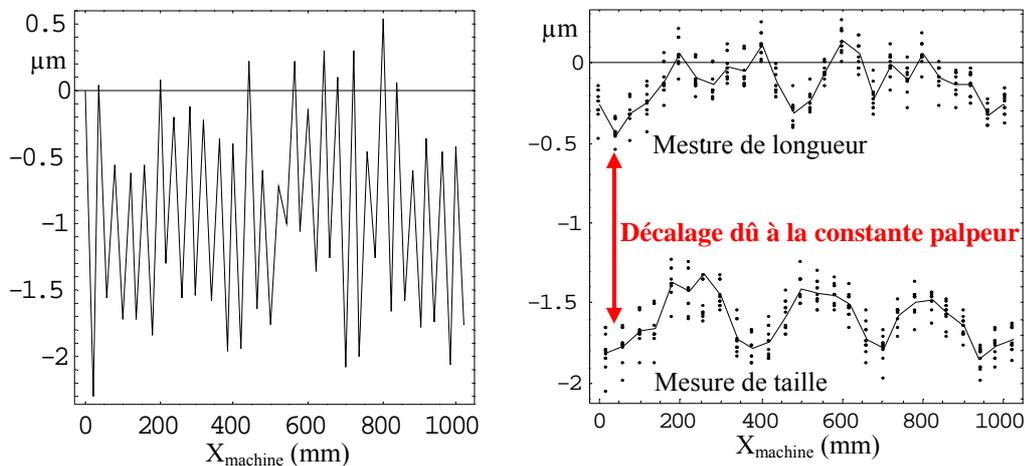
Figure 7 : Schématisation du problème des mesures bidirectionnelles

Lors de mesures de cale à gradins, il existe 2 types de mesure de distance de nature différente [Figure 7] :

- Les distances de type « Mesure de longueur ». Ces distances sont des mesures de longueur entre 2 facettes de même nature (gauche/gauche). La direction d'accostage est la même, ainsi la flexion du stylet et le comportement du système de palpation n'a pas beaucoup d'influence. Même si le palpeur n'est pas correctement étalonné sur sa sphère de référence, ce type de distance est correctement mesuré.
- Les distances de type « Mesure de Taille » sont des mesures de longueur entre 2 facettes de nature différente (gauche/droite). La direction d'accostage étant différente, la flexion du stylet et le comportement du système de palpation influent fortement sur la mesure effectuée. Lors de l'étalonnage du palpeur sur la sphère de référence, le logiciel de la machine calcule la constante palpeur à partir des points mesurés dans différentes directions de l'espace. Lors de notre mesure sur la cale à gradin, nous n'avons que 2 directions de mesure. La constante palpeur n'est pas optimale et il convient donc de prendre des précautions lors de la mesure afin de supprimer mathématiquement cette constante qui peut être plus ou moins importante.

Ces notions apparaissent dans [WEC1980] mais aucune prise en compte réelle du problème n'est abordée en terme de correction par algorithme. Dans [TRA2005], l'auteur évoque le problème des mesures unilatérales et bilatérales qui est en travaux pour la future norme ISO/CD 10360-7, concernant les « MMT utilisant des systèmes de sonde », prévue pour 2009.

Les graphes de la **Figure 8** représentent l'écart obtenu (justesse : mesure – étalon) d'une mesure d'une cale à gradins KOBA sans tenir compte de la constante palpeur suivant l'axe  $x$  d'une machine donnée. Dans ce cas, on obtient bien deux types de mesures différentes.



**Figure 8 :** Visualisation du défaut de constante palpeur sur la détermination de la justesse de l'axe  $X$  d'une machine

Le graphe de gauche représente une seule mesure où l'on rejoint les points mesurés sans faire la différence entre les mesures de type « Mesure de longueur » et celles de type « mesure de taille ». Le résultat de la mesure peut être considéré comme mauvais car extrêmement bruité.

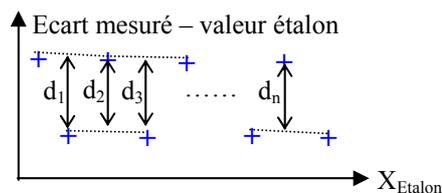
Le graphe de droite quant à lui représente plusieurs mesures de répétabilité (onze mesures identiques). Les points ne sont pas reliés et l'on distingue bien les deux types de mesures différentes. Les deux courbes représentent les moyennes des deux types de mesures. Le décalage dû à la constante palpeur est bien identifiable.

### 3 Evaluation de la constante palpeur

#### 3.1 Estimation directe

Il est toujours possible de translater artificiellement les mesures de taille pour les superposer aux mesures de longueur afin d'obtenir la justesse sur l'intégralité des faces des créneaux. Pour cela, il faut corriger les mesures de l'effet de la constante palpeur. Néanmoins, les mesures de taille restent alors entachées d'une incertitude sur l'estimation de cette constante.

Il existe plusieurs solutions pour évaluer cette constante. Il est possible d'interpoler entre les mesures de longueur  $i-1$  et  $i+1$  et de calculer chacune des distances entre les points  $i$  et la courbe interpolée [**Figure 9**].



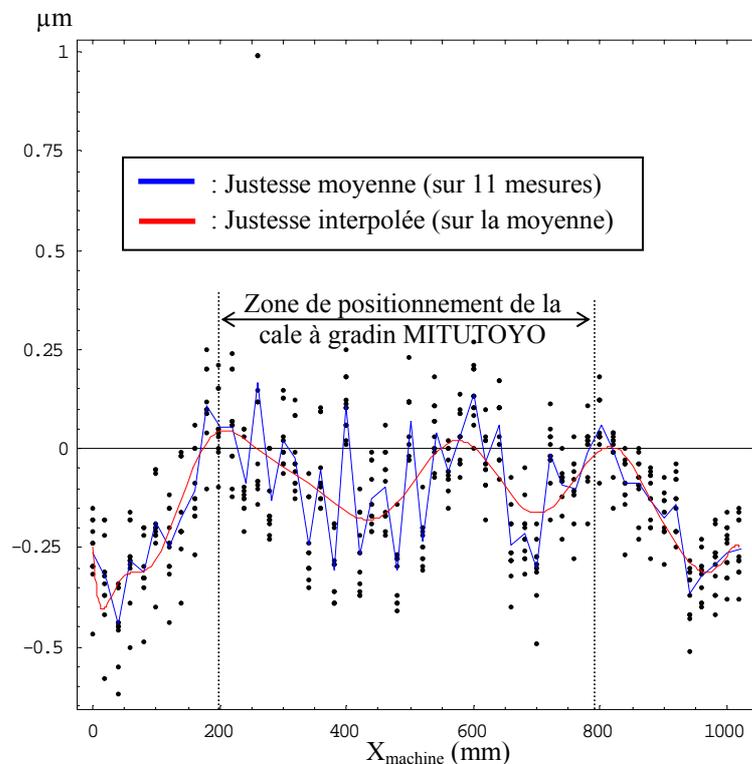
**Figure 9 :** Schéma de principe relativement simple d'estimation de la constante palpeur

Cette opération est à répéter pour tous les points de mesure sauf pour la première et la dernière face. La constante palpeur est alors la moyenne de toutes les distances calculées à une incertitude près fonction de la courbe d'interpolation considérée et de la variabilité des points de mesure (répétabilité sur la mesure de chacune des faces).

La constante palpeur estimée vaut  $C_p = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$  avec :  $n$  le nombre de longueurs calculées et  $d_i$  la distance calculée entre les point  $i-1$  et  $i+1$ .

Dans le cas des mesures des graphes de la **Figure 8**, le défaut de constante palpeur estimé est de  $1,48 \mu\text{m}$  pour un défaut de justesse variant de moins d'un micromètre.

Une fois les mesures de taille recalées par rapport aux mesures directes de longueur, il est possible de déterminer la justesse sur l'intégralité des facettes de la cale à gradins [**Figure 10**].



*Figure 10 : Détermination de la justesse d'une machine sur l'intégralité des facettes d'une cale à gradins après estimation et correction de la constante palpeur*

Nous cherchons à évaluer les justesses des axes de la machine Leitz qui sont de très bonne qualité. L'objectif est donc d'utiliser l'information fournie par la totalité des créneaux ; c'est pourquoi nous avons développé une méthode d'optimisation de la prise en compte de la constante palpeur sans avoir recours à une quelconque interpolation.

### 3.2 Détermination mathématique de la constante palpeur

Dans la mesure où nous souhaitons déterminer la justesse sur l'intégralité des facettes de la cale à gradins, il nous semble primordial d'optimiser l'évaluation de la constante palpeur sans avoir recours à une quelconque approximation (interpolation et moyenne de distances). C'est pourquoi, nous avons développé une technique basée sur la « permutation linéaire », dérivée de la méthode de comparaison indirecte par décalage de OUYANG [OUY1995], consistant à décaler la cale à gradins afin de supprimer mathématiquement l'influence de la constante sur les différentes mesures.

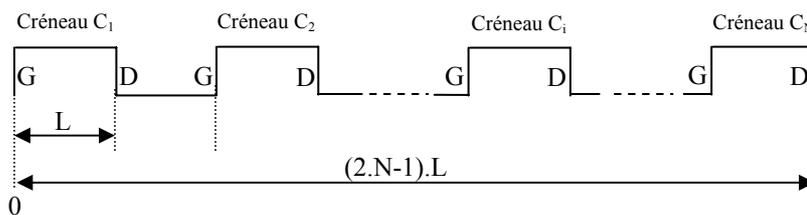


Figure 11 : Cale à gradins de N créneaux en position initiale (0)

Si l'on considère la mesure d'une cale à gradins de N créneaux [Figure 11] dans sa position initiale (0), nous pouvons écrire que :

$$\begin{array}{ll}
 C_1G(0) = 0 & C_1G(0)_{\text{mesuré}} = C_1G(0) \\
 C_1D(0) = L & C_1D(0)_{\text{mesuré}} = C_1D(0) - xTx_{(L)} + Cp \\
 C_2G(0) = 2.L & C_2G(0)_{\text{mesuré}} = C_2G(0) - xTx_{(2L)} \\
 C_2D(0) = 3.L & C_2D(0)_{\text{mesuré}} = C_2D(0) - xTx_{(3L)} + Cp \\
 \dots & \dots \\
 C_iG(0) = 2.(i-1).L & C_iG(0)_{\text{mesuré}} = C_iG(0) - xTx_{(2.(i-1).L)} \\
 C_iD(0) = (2.i-1).L & C_iD(0)_{\text{mesuré}} = C_iD(0) - xTx_{(2.i-1).L} + Cp \\
 \dots & \dots \\
 C_NG(0) = 2.(N-1).L & C_NG(0)_{\text{mesuré}} = C_NG(0) - xTx_{(2.(N-1).L)} \\
 C_ND(0) = (2.N-1).L & C_ND(0)_{\text{mesuré}} = C_ND(0) - xTx_{(2.N-1).L} + Cp
 \end{array}$$

où :

- $C_iG(0)$  représente la distance réelle de la facette gauche du créneau  $C_i$  par rapport à  $C_1G(0)$ ,
- $C_iD(0)$  représente la distance réelle de la facette droite du créneau  $C_i$  par rapport à  $C_1G(0)$ ,
- $C_iG(0)_{\text{mesuré}}$  représente la distance mesurée de la facette gauche du créneau  $C_i$  par rapport à  $C_1G(0)$ ,
- $C_iD(0)_{\text{mesuré}}$  représente la distance mesurée de la facette droite du créneau  $C_i$  par rapport à  $C_1G(0)$ ,
- $xTx_{(k)}$  représente la justesse de l'axe considéré ici l'axe  $x$  à la distance  $k$ .

Ne possédant pas assez d'équations par rapport au nombre d'inconnues pour déterminer la constante  $Cp$ , on décale la cale à gradins d'une distance  $L$ , on a alors :

$$\begin{array}{ll}
 C_1G(L) = C_1G(0) & C_1G(L)_{\text{mesuré}} = C_1G(L) \\
 C_1D(L) = C_1D(0) & C_1D(L)_{\text{mesuré}} = C_1D(L) - (xTx_{(2L)} - xTx_{(L)}) + Cp \\
 C_2G(L) = C_2G(0) & C_2G(L)_{\text{mesuré}} = C_2G(L) - (xTx_{(3L)} - xTx_{(L)}) \\
 C_2D(L) = C_2D(0) & C_2D(L)_{\text{mesuré}} = C_2D(L) - (xTx_{(4L)} - xTx_{(L)}) + Cp \\
 \dots & \dots \\
 C_iG(L) = C_iG(0) & C_iG(L)_{\text{mesuré}} = C_iG(L) - (xTx_{(2.i-1).L} - xTx_{(L)}) \\
 C_iD(L) = C_iD(0) & C_iD(L)_{\text{mesuré}} = C_iD(L) - (xTx_{(2.i).L} - xTx_{(L)}) + Cp \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

$$C_N G(L) = C_N G(0) \quad C_N G(L)_{\text{mesuré}} = C_N G(L) - (xTx_{((2,N-1),L)} - xTx_{(L)})$$

$$C_N D(L) = C_N D(0) \quad C_N D(L)_{\text{mesuré}} = C_N D(L) - (xTx_{(2,N,L)} - xTx_{(L)}) + Cp$$

Il existe alors plus d'équations que d'inconnues, nous pouvons alors tenter de résoudre le système d'équation pour déterminer les justesses et la constante palpeur Cp.

Nous pouvons écrire le système d'équations sous forme matricielle :

$\begin{matrix} C_1 D(0)_{\text{mesuré}} - C_1 D(0) \\ C_2 G(0)_{\text{mesuré}} - C_2 G(0) \\ C_2 D(0)_{\text{mesuré}} - C_2 D(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ C_i G(0)_{\text{mesuré}} - C_i G(0) \\ C_i D(0)_{\text{mesuré}} - C_i D(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ C_N G(0)_{\text{mesuré}} - C_N G(0) \\ C_N D(0)_{\text{mesuré}} - C_N D(0) \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \ddots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \ddots & 0 & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & 1 & \vdots \end{matrix}$	<p>Mesures en position initiale</p>
$\begin{matrix} C_1 D(L)_{\text{mesuré}} - C_1 D(L) \\ C_2 G(L)_{\text{mesuré}} - C_2 G(L) \\ C_2 D(L)_{\text{mesuré}} - C_2 D(L) \\ \vdots \\ \vdots \\ C_i G(L)_{\text{mesuré}} - C_i G(L) \\ C_i D(L)_{\text{mesuré}} - C_i D(L) \\ \vdots \\ \vdots \\ C_N G(L)_{\text{mesuré}} - C_N G(L) \\ C_N D(L)_{\text{mesuré}} - C_N D(L) \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}$	<p>Mesures décalées de L</p>
<p>Données</p>	<p>A</p>	<p>Inconnues</p>

Soit : Données = A . Inconnues

La matrice A n'étant pas carrée, il n'est pas possible de l'inverser directement.

Néanmoins, ce système peut se résoudre selon la pseudo inversion de Moore-Penrose [BOT1999 - TER2002].

En effet, on peut écrire :  ${}^t A \cdot \text{Données} = {}^t A \cdot A \cdot \text{Inconnues}$

La matrice de covariance ( ${}^t A \cdot A$ ) devient alors une matrice carrée, ce qui nous permet d'écrire :  $\text{Inconnues} = ({}^t A \cdot A)^{-1} \cdot {}^t A \cdot \text{Données}$

Cette méthode permet de déterminer à la fois la constante palpeur Cp et les différentes justesses. Au paragraphe 4, nous allons appliquer cette méthode pour étalonner des cales en références à d'autres cales. Les décalages à prévoir dépendent des dimensions des cales.

## 4 Etalonnage de cales - à gradins -.

L'idée est de réaliser le raccordement d'une cale à créneaux en référence à une autre en se basant sur un protocole identique à celui utilisé au paragraphe 3.2, c'est-à-dire à effectuer une « permutation linéaire ». Pour cette étude nous avons construit dans un premier temps des petites cales à créneaux de démonstration à partir d'un empilement de cales assemblées rigoureusement, puis nous avons appliqué la même démarche pour étalonner la MITUTOYO par rapport à la KOBA.

### 4.1 Raccordement de deux cales étalons à partir de la connaissance de deux autres cales

Les cales considérées sont celles schématisées sur la **Figure 12**, c'est-à-dire 2 cales de 100 mm dont on connaît parfaitement la longueur et 2 cales de 50 mm que l'on souhaite raccorder.

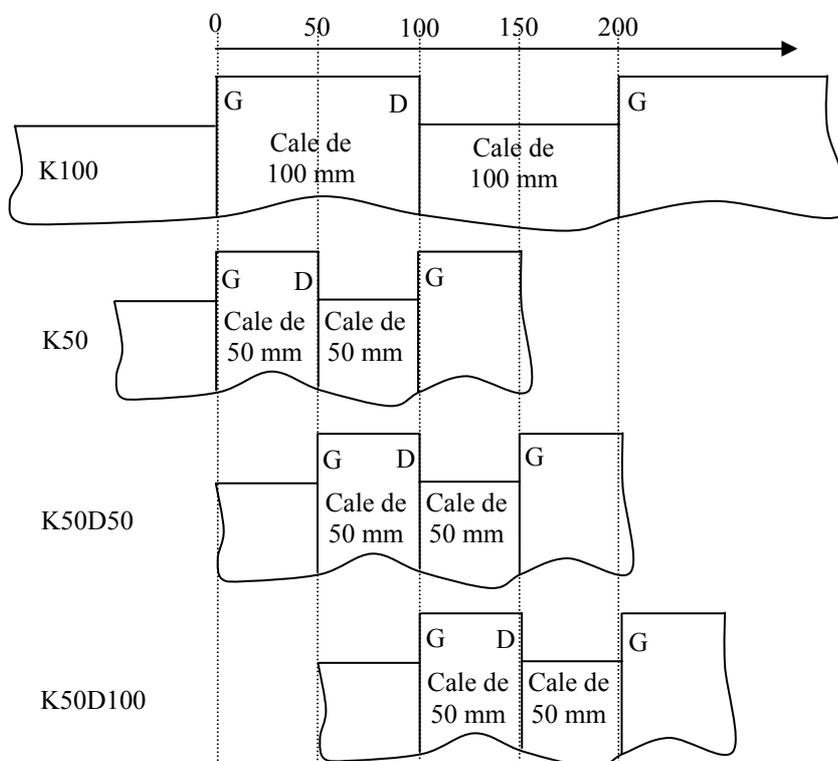


Figure 12 : Schéma des différentes mesures effectuées

#### Notations

- $K100(x)$  est la mesure du montage de cales de 100 mm de référence à la côte  $x$  du montage de cales
- $K50(x)$  est la mesure du montage de cales de 50 mm à raccorder à la côte  $x$  du montage de cales
- $K50D50(x)$  est la mesure du montage de cales de 50 mm décalée de 50 mm à la côte  $x$  du montage de cales
- $K50D100(x)$  est la mesure du montage de cales de 50 mm décalée de 100 mm à la côte  $x$  du montage de cales

**Hypothèses**

On considère que l'empilement de cales K100 est complètement raccordé, c'est-à-dire que :

- K100(0) = 0 mm
- K100(100) = 100 mm
- K100(200) = 200 mm

**Mise en équations**

$$\begin{aligned}
 K100(100)_{\text{mesuré}} &= K100(100) - xTx(100) + Cp \\
 K100(200)_{\text{mesuré}} &= K100(200) - xTx(200) \\
 K50(50)_{\text{mesuré}} &= K50(50) - xTx(50) + Cp \\
 K50(100)_{\text{mesuré}} &= K50(100) - xTx(100) \\
 K50D50(50)_{\text{mesuré}} &= K50(50) - (xTx(100) - xTx(50)) + Cp \\
 K50D50(100)_{\text{mesuré}} &= K50(100) - (xTx(150) - xTx(50)) \\
 K50D100(50)_{\text{mesuré}} &= K50(50) - (xTx(150) - xTx(100)) + Cp \\
 K50D100(100)_{\text{mesuré}} &= K50(100) - (xTx(200) - xTx(100))
 \end{aligned}$$

**4.1.1 Résolution théorique du problème**

$$\begin{pmatrix}
 K100(100)_{\text{mesuré}} - K100(100) \\
 -K100(200)_{\text{mesuré}} + K100(200) \\
 K50(50)_{\text{mesuré}} \\
 -K50(100)_{\text{mesuré}} \\
 K50D50(50)_{\text{mesuré}} \\
 -K50D50(100)_{\text{mesuré}} \\
 K50D100(50)_{\text{mesuré}} \\
 -K50D100(100)_{\text{mesuré}}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 xTx_{(50)} \\
 xTx_{(100)} \\
 xTx_{(150)} \\
 xTx_{(200)} \\
 Cp \\
 K50(50) \\
 K50(100)
 \end{pmatrix}$$

En utilisant la même méthode de résolution que précédemment, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{pmatrix}
 xTx_{(50)} \\
 xTx_{(100)} \\
 xTx_{(150)} \\
 xTx_{(200)} \\
 Cp \\
 K50(50) \\
 K50(100)
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \\
 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \\
 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{2} & \frac{9}{16} & -\frac{7}{16} & -\frac{3}{4} \\
 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \\
 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \\
 -1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{1}{2} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \\
 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 K100(100)_{\text{mesuré}} - K100(100) \\
 -K100(200)_{\text{mesuré}} + K100(200) \\
 K50(50)_{\text{mesuré}} \\
 -K50(100)_{\text{mesuré}} \\
 K50D50(50)_{\text{mesuré}} \\
 -K50D50(100)_{\text{mesuré}} \\
 K50D100(50)_{\text{mesuré}} \\
 -K50D100(100)_{\text{mesuré}}
 \end{pmatrix}$$

Le système peut donc se résoudre, à partir des mesures effectuées en connaissant uniquement les valeurs raccordées des 2 cales de 100 mm. On détermine ainsi l'étalonnage (raccordement) des deux cales de 50 mm, la justesse de la machine aux côtes 50, 100, 150, 200 mm et la constante palpeur Cp.

### 4.1.2 Vérification Expérimentale

Expérimentalement, nous avons effectué les mesures :

- En déterminant correctement le diamètre de la bille en rubis du stylet (3.9938 mm) par mesure de la sphère de référence et avec un défaut de justesse de la machine proportionnelle d'environ 25  $\mu\text{m}/\text{m}$  (expérience 1).
- En imposant le diamètre de la bille du stylet avec une constante palpeur importante mais fautive. Le diamètre de la bille du stylet est ainsi fixé à 3.4938 mm. Le défaut de justesse de la machine reste le même (défaut quasi proportionnel d'environ 25  $\mu\text{m}/\text{m}$ ).

Les résultats obtenus sont conformes à la théorie [Tableau 1].

	$xTx_{(50)}$	$xTx_{(100)}$	$xTx_{(150)}$	$xTx_{(200)}$	Cp	K50(50) Calculé	K50(100) Calculé
Unités	$\mu\text{m}$	$\mu\text{m}$	$\mu\text{m}$	$\mu\text{m}$	$\mu\text{m}$	mm	mm
Expérience 1	-1.34	-2.22	-3.63	-5.38	-0.74	50.00053	99.99983
Expérience 2	-1.22	-1.93	-3.27	-4.93	500.57	49.99909	100.00000

Tableau 1 : Vérification expérimentale de la méthode sur un cas simple

Nous avons donc mis au point un protocole expérimental qui permet de raccorder une cale à créneaux par rapport à une autre cale de référence, en supprimant la part de la justesse de la machine et la constante palpeur qui sont calculées en même temps.

Dans le cas traité, la cale à créneaux que l'on souhaite raccorder est constituée de créneaux faisant la moitié de la longueur par rapport à la cale à créneaux de référence. Cette méthode permet de raccorder des cales dont la dimension est un multiple de la cale de référence. Si l'on souhaite raccorder une cale n fois plus petite que la cale de référence, n étant un entier, alors il faudra effectuer n décalages de la cale à étalonner.

## 4.2 Raccordement de la MITUTOYO à partir d'une KOBA

Pour valider notre démarche, nous nous proposons d'étalonner la cale à gradins MITUTOYO de l'ENSAM à partir de mesures d'une KOBA étalonnée du CETIM de plus petite dimension sur une machine possédant un défaut de justesse relativement important que nous devons également déterminer. La KOBA étant plus petite que la MITUTOYO, il faudra effectuer un décalage en plus de la KOBA pour couvrir l'intégralité de la zone d'étude de la MITUTOYO. Une comparaison est effectuée par comparaison entre notre méthode et une mesure plus classique effectuée au CETIM

### 4.2.1 Etalonnage de la MITUTOYO au CETIM

Pour valider notre méthode d'étalonnage, nous avons décidé de mesurer de façon plus classique la MITUTOYO sur la machine Leitz du CETIM à partir de la KOBA de 1020 mm du CETIM de Senlis et de comparer les résultats ainsi obtenus sur les 2 machines. La démarche utilisée au CETIM de Senlis pour étalonner la MITUTOYO est décrite sur la **Figure 13**.

Les mesures directes de la cale à gradins KOBA permettent de déterminer la justesse locale de la machine du CETIM tous les 20 mm (largeur des créneaux) en estimant et en supprimant les erreurs dues à la constante palpeur sur chacune des facettes droites de la KOBA (utilisation d'une méthode classique cf. §3.1). Ainsi, en mesurant dans la même zone la MITUTOYO, celle-ci peut-être étalonnée directement tous les 40 mm (faces de même nature entre la KOBA et la MITUTOYO non perturbées par la constante palpeur) et tous les 20 mm après correction de la constante palpeur obtenue à partir des mesures de la KOBA.

Il reste encore à étalonner les faces droites de la MITUTOYO :

Une première méthode qui consiste à effectuer une interpolation linéaire de la justesse sur chacune des zones de 20 mm permet de connaître approximativement la justesse correspondant aux créneaux non étalonnés de la MITUTOYO. Le fait de réaliser une interpolation linéaire n'est pas choquant dans le sens où la justesse n'évolue pas fondamentalement sur 20 mm (évolution lente).

Une seconde méthode consiste à décaler de 10 mm la MITUTOYO pour que les faces droites se trouvent en face des points où l'on a déjà évalué la justesse de la machine grâce aux mesures de la KOBA, et de tenir compte de la constante palpeur trouvée sur les mesures de la KOBA pour corriger les valeurs. On détermine ainsi plus précisément la distance entre chacune des faces droites de la MITUTOYO. Il reste alors à caler les faces droites par rapport aux faces gauches. Pour effectuer ce calage, on évalue l'épaisseur moyenne des créneaux sur les 2 mesures de la MITUTOYO (position initiale et position décalée de 10 mm). La connaissance de cette largeur moyenne de créneaux permet ainsi de positionner au mieux les faces droites par rapport aux faces gauches.

Nous avons effectué les 2 démarches qui fournissent quasiment les mêmes résultats.

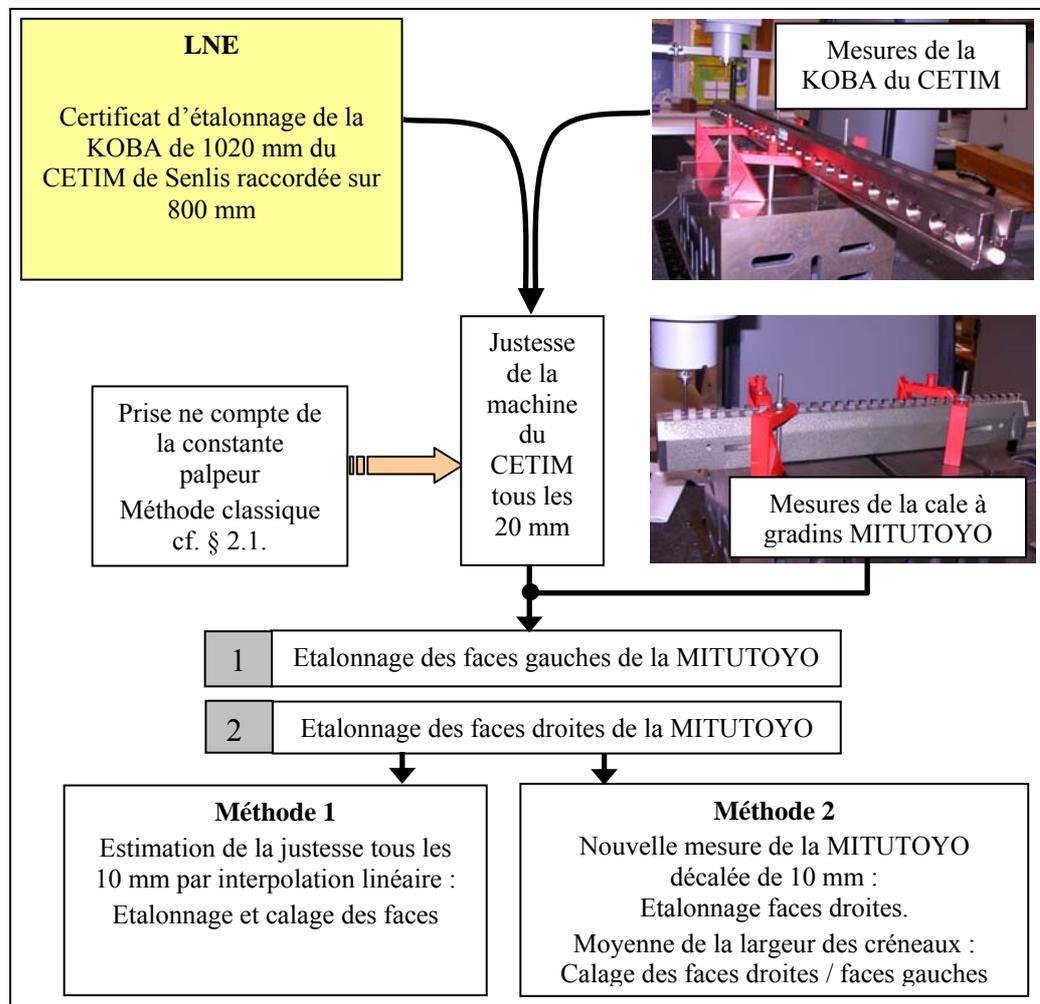


Figure 13 : Schéma explicatif de l'étalonnage de la MITUTOYO au CETIM de Senlis

#### 4.2.2 Etalonnage de la MITUTOYO et détermination de la justesse d'une machine à l'aide de notre nouvelle méthode

La **Figure 14** présente le défaut de justesse de la machine (au sens correction) obtenu par mesures directes de la KOBA (sans suppression de la constante palpeur) dans 2 positions, dans la mesure où la KOBA mesure 420 mm et que l'on souhaite réaliser l'étalonnage sur 600mm. On choisit de faire recouvrir la KOBA sur 100mm. Les 2 mesures de la KOBA sont représentées en noir et en bleu. On observe les 2 réseaux de points dus à la constante palpeur.

Les points rouges correspondent à la justesse de la machine déterminée par notre méthode de décalage (permutation linéaire) issus des données de la MITUTOYO. Ils correspondent à l'analyse de deux positions de la KOBA et de trois positions de la MITUTOYO

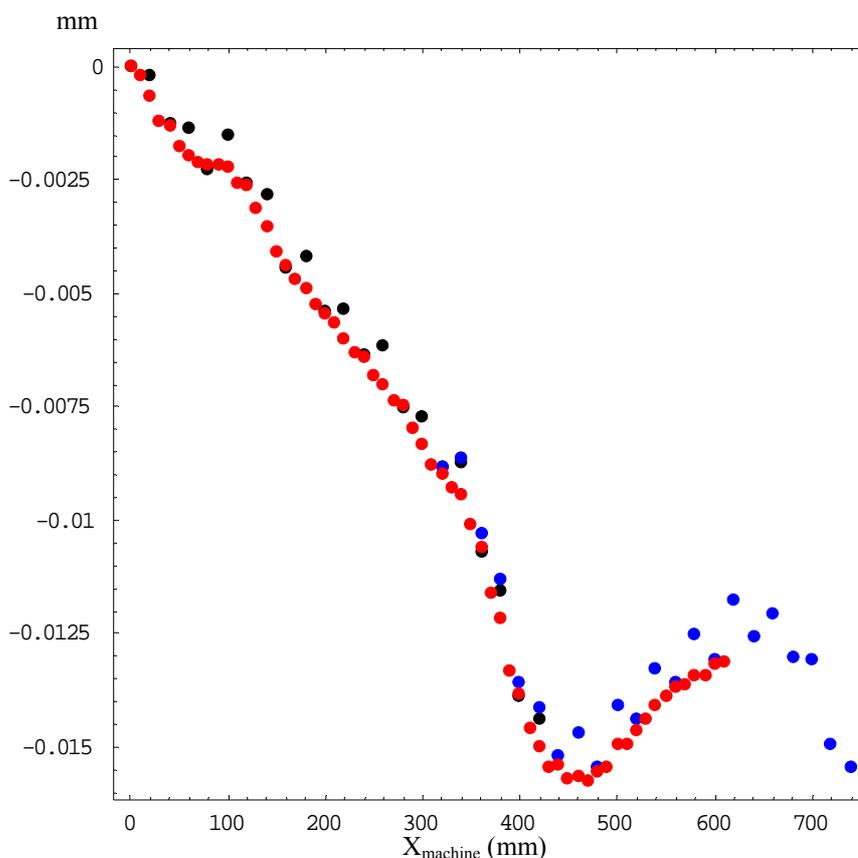


Figure 14 : Détermination de la justesse de la machine par notre méthode et par mesure directe de KOBA

La **Figure 15** représente l'évolution de la justesse au sens correction de la MITUTOYO, c'est-à-dire de son étalonnage (écart de mesure par rapport à la valeur vraie).

Les points noirs correspondent à l'étalonnage de la MITUTOYO effectué au CETIM de Senlis et la courbe noire correspond à l'interpolation de ces points par un polynôme d'ordre 3.

Les points rouges correspondent à l'étalonnage de la MITUTOYO effectué à l'ENSAM de Lille sur une machine possédant un gros défaut de justesse [**Figure 14**] suivant l'axe x. La courbe rouge correspond à l'interpolation de ces points par un polynôme d'ordre 3. Le décalage vertical des deux courbes n'a pas d'importance car résulte du calage du premier point.

La différence entre les mesures du CETIM et celles obtenues à l'ENSAM de Lille par notre méthode est très faible [Figure 16] lorsque l'on recalc convenablement le premier point. Les résultats obtenus sont très prometteurs lorsque l'on sait que la machine de l'ENSAM possède une résolution suivant l'axe x de 0,2  $\mu\text{m}$ .

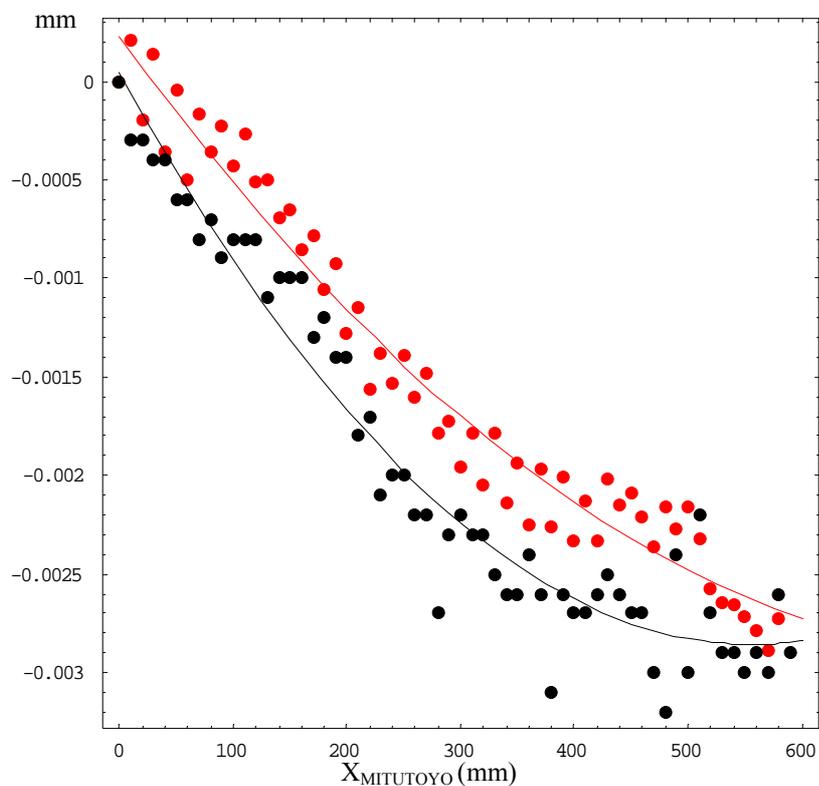


Figure 15 : Evolution de la justesse de la MITUTOYO au CETIM et à l'ENSAM

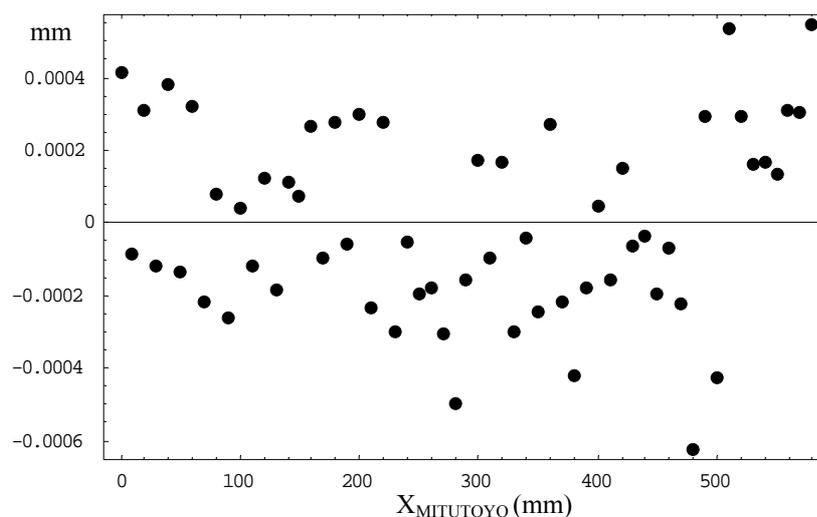


Figure 16 : différence entre l'étalonnage du CETIM et celui de l'ENSAM

## 5 Mise en position et mesures d'une KOBA

### 5.1 Optimisation de la prise de référentiel d'une KOBA

Le procès verbal d'étalonnage de la KOBA précise les conditions de prise du référentiel :

Son orientation est assurée en prenant comme référence la face inférieure en appui sur les points de moindre flexion et sur la face latérale extérieure côté numéro de série.

Le capteur CARY utilisé pour l'étalonnage est positionné de tel sorte que le centre de bille soit sur l'axe des cylindres ; la position de la face est alors donnée par l'abscisse du point d'intersection de l'axe de mesure avec les faces.

L'origine des distances est le point central de la face extérieure du premier cylindre au niveau du repère (0) de la KOBA.

Cette prise de référentiel est conditionnée par la machine SGIP sur laquelle est effectué l'étalonnage. Pour nos expérimentations, nous sommes contraint d'effectuer une prise de référentiel la plus proche possible de celle indiquée sur le procès verbal afin de garantir la traçabilité.

Cette prise de référentiel ne paraît pas optimale compte tenu des faces mesurées, il n'y a aucun lien entre les faces et les gradins et leur état de surface est peu soigné. L'idée consiste à utiliser au mieux les faces rectifiées qui permettent le montage des gradins [Figure 17].

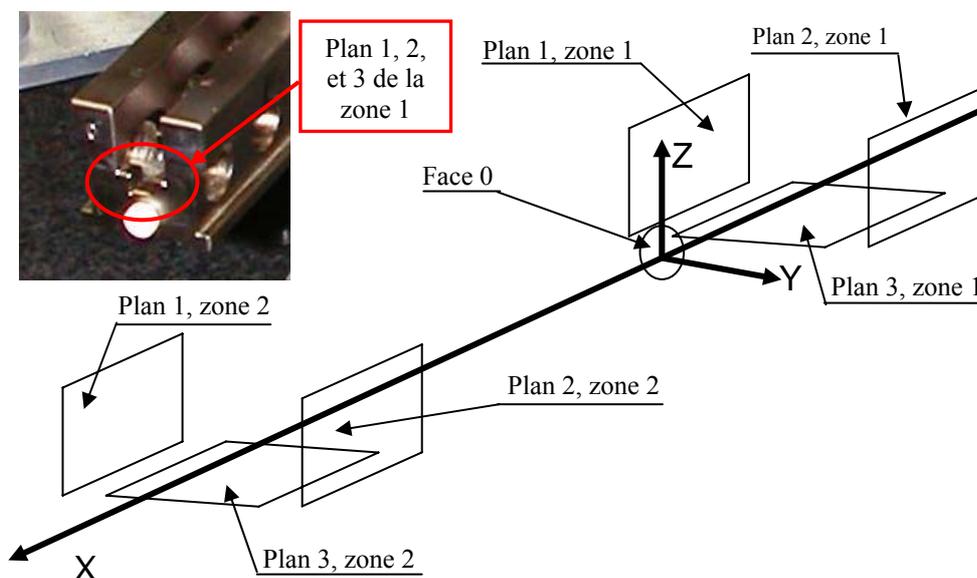


Figure 17 : Présentation des faces rectifiées de la KOBA

Les créneaux de la cale à gradins sont sertis entre trois plans, probablement en jouant sur la dilatation. Les plans 1, 2 et 3, zone 1 d'une part et zone 2 d'autre part, constituent des surfaces pouvant potentiellement recevoir des créneaux mais laissées libres par le constructeur avant le premier créneau (zone 1) et après le dernier (zone 2). Ces plans paraissent rectifiés.

Un examen des autres surfaces de la cale ne montre pas d'autres surfaces rectifiées de bonne qualité susceptibles de servir de références. L'utilisation de ces créneaux est donc naturelle

pour mettre en place le référentiel de mesure d'autant que les créneaux étant placés dans le plan neutre de flexion, ce qui explique la forme en U caractéristique de ce type de cale, les plans sont dans la même zone.

On peut envisager deux stratégies de mesure.

- Une stratégie classique utilisant les constructions. On mesure les plans 1, 2 et 3 avec quatre points sur chaque zone. On crée un plan parallèle au plan 3 à une distance égale au rayon des créneaux. On réalise l'intersection des plans 1 et 2 et de ce plan parallèle. On crée une droite milieu de deux droites précédentes (qui sont contenues dans le même plan). Cette droite constitue l'axe X du repère. L'axe Z est orthogonal au plan 3. L'origine est obtenue en mesurant le plan de la face 0 et en réalisant l'intersection de ce plan avec la droite constituant l'axe X.
- Une stratégie plus originale utilise un méta-élément composé de quatre plans. Imaginons que la cale soit parfaite. Les plans 1, 2 et 3 et la face 0 sont orthogonaux, parallèles etc. L'idée est de calculer un tel élément au sens des moindres carrés à partir des points palpés respectivement sur chaque surface.

Le problème est de gérer les contraintes de parallélisme et d'orthogonalité. Pour éviter un algorithme de minimisation de fonctionnelle quadratique sous contraintes, l'idée est d'utiliser un élément géométriquement parfait proche de la solution comme solution initiale puis de l'optimiser de manière à respecter les contraintes.

De façon classique, les quatre plans sont mesurés indépendamment. On calcule ensuite un élément proche mais géométriquement parfait. De nombreux choix sont possibles mais tant que la solution reste raisonnable, c'est-à-dire proche de la solution finale, le choix de la solution initiale n'a pas vraiment d'importance.

Proposons une solution. On considère la normale au plan 3. Par deux produits vectoriels successifs, on calcule un vecteur proche de la normale au plan 1 mais orthogonal au plan 3. Ces deux vecteurs et les points de définition de chaque plan définissent complètement le méta-élément.

Dans une seconde phase, le méta-élément est optimisé au sens des moindres carrés selon les six composantes d'un torseur de petits déplacements plus la distance entre les plans 1 et 2, soit sept paramètres en tout. Ce calcul est itératif tant que la somme des carrés des écarts n'est pas stable.

Le calcul en position du méta-élément est classique, pour la distance, il suffit de mettre en place un vecteur de sensibilité de 1 pour les points des plans 1 et 2.

A la fin du calcul, on dispose d'un élément géométriquement parfait fournissant une direction stable pour la mesure des gradins. Il suffit de réaliser un plan milieu entre les plans 1 et 2 optimisés et un plan parallèle au plan 3 optimisé à une distance moitié de la largeur calculée du méta-élément. La notion de distance entre les deux plans est claire puisque, par définition, les plans sont parallèles.

## 5.2 Répartition des points et orientation de la cale

### 5.2.1 Nombre de points

Dans le cadre d'une étude de la justesse de la machine, il faut bien séparer une vérification de la machine selon le concept normalisé de taille et une évaluation de la justesse. L'évaluation de la justesse doit être faite selon une méthodologie assurant une grande stabilité à la mesure. Une bonne stratégie est d'utiliser des plans au sens des moindres carrés en 5 points pour bénéficier d'un effet de moyenne.

## CHAPITRE II

## ÉTUDE DE CALES A CRENEAUX

La **Figure 18** présente la courbe d'évolution en  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  où  $n$  est le nombre de points par face et sa dérivée. La courbe est strictement décroissante mais, en pratique, au-delà de cinq à six points de mesures, la pente est nettement plus faible. Il faut choisir un compromis entre un grand nombre de points de mesure pour bénéficier d'un effet de moyenne et un temps de mesure raisonnable à la fois pour éviter des dérives thermiques trop importantes et pour une question de coût. La mesure de cinq points par face semble un bon compromis.

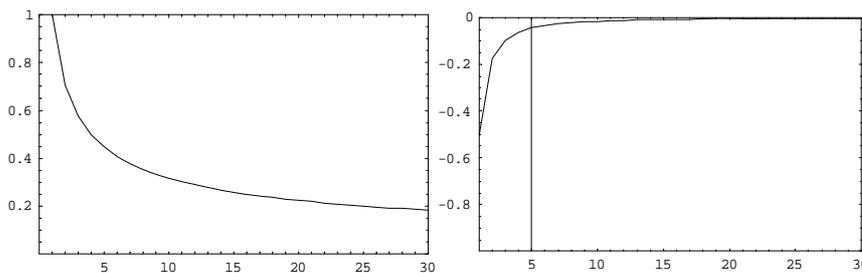


Figure 18 : Effet du nombre de points mesurés sur dispersion de la moyenne et sa dérivée

La répartition des cinq points par face est relativement classique. Il faut que les points soient assez éloignés pour éviter de retomber deux fois sur un même micro défaut, mais pas trop pour éviter les effets de bord bien connu sur toutes les pièces rectifiées ou rodées. On propose donc de répartir les points sur chacune des facettes de la façon suivante [**Figure 19**] :

- 1 point au centre de la facette,
- 1 point aux quatre coins d'un carré tel que l'intersection des diagonales du carré passe évidemment le centre de la facette et donc par le premier point de mesure. Les diagonales du carré mesurent 2 mm.

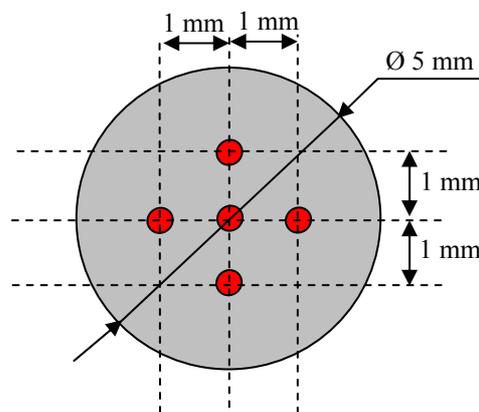


Figure 19 : répartition des 5 points de mesure sur chacune des facettes mesurées

Puisqu'un plan au sens des moindres carrés passe par le centre de gravité des points mesurés, cette répartition permet d'obtenir au centre du cercle la moyenne des cinq points mesurés.

### 5.2.2 Influence du système de palpé

Lors de l'étude de la répétabilité des mesures, qui nous a permis d'optimiser la mise en position des cales à gradins KOBA nous avons également mis en évidence une différence de comportement au niveau des points mesurés. En effet, quelque soit le système de palpé étudié (Tête mesurante de la Leitz, palpeurs dynamiques TP2 et TP6 Renishaw de la machine de l'ENSAM), nous avons constaté que le premier point de mesure était bien moins stable que les suivants.

La **Figure 20** représente les valeurs des écarts mesurés auxquels on a supprimé la justesse moyenne calculée sur chacune des facettes de la KOBA pour chacun des points. Les premiers points sont représentés en noir, les points 2, 3, 4, et 5 sont représentés en couleur. Nous avons montré expérimentalement que la valeur moyenne du premier point mesuré ne correspond pas à la valeur moyenne des autres points. Cette information est connue des métrologues pour les palpeurs dynamiques en fin de vie mais pas forcément pour les têtes mesurantes, même si on ne parle pas des mêmes ordres de grandeur.

Nous avons donc choisi de mesurer points par face. Les deux premiers points sont mesurés au centre de la face et on élimine le premier.

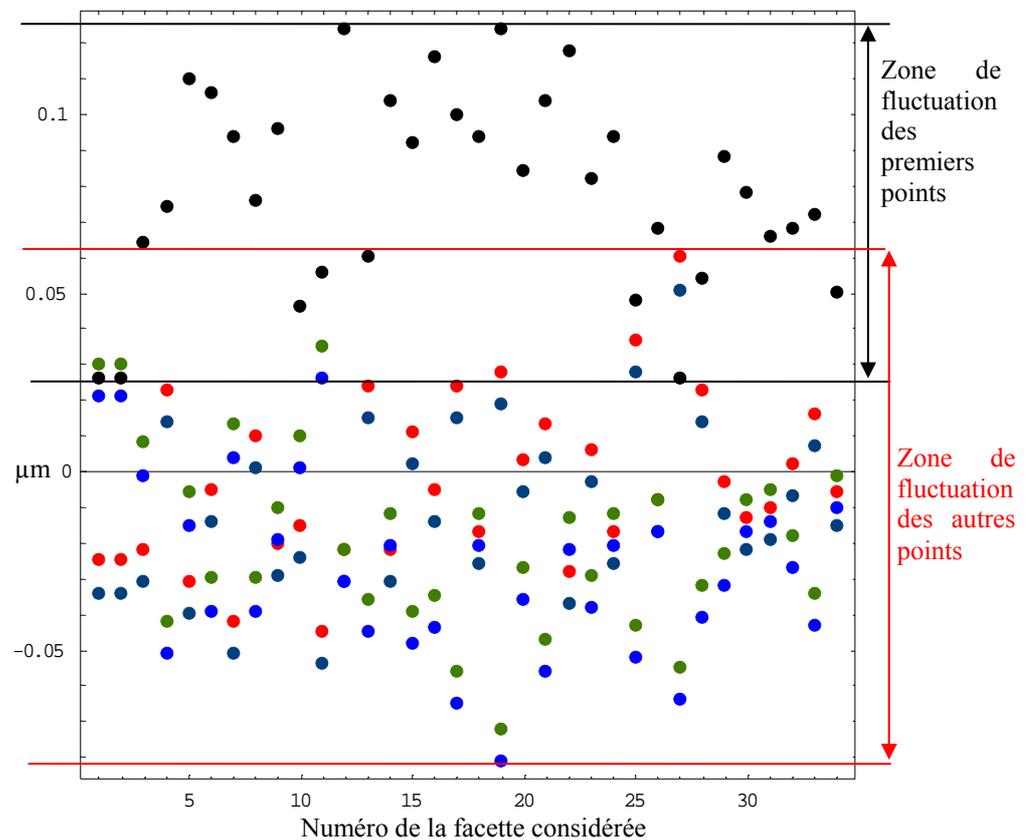


Figure 20 : Représentation de la variation des écarts de mesure sur chacune des facettes et chacun des points

### 5.2.3 Orientation de la cale à gradins

Il faudra également faire très attention lors du dégauchissage de la cale à gradins. En effet, un défaut d'alignement  $e$  de la cale de longueur  $L$  provoque un raccourcissement apparent de la cale de l'ordre de  $e^2/2L$ . Si on tolère 0,1 micromètre pour une machine de haute qualité et avec  $L=800\text{mm}$ , on trouve un défaut d'alignement limite de  $e^2 = 0,0001 \times 2 \times 800$  soit  $e= 0,4 \text{ mm}$ . C'est un réglage parfaitement possible et nécessaire car la correction d'alignement doit être limitée par principe. Dans la mesure où l'écart augmente comme le carré du défaut d'alignement, la valeur de 0,4 mm est une limite à ne pas dépasser. De plus, il faudra bien prendre en compte le défaut d'alignement réel et corriger les valeurs.

## 5.3 Influence de la mise en position

La mise en position d'une cale à créneaux sur une machine à mesurer nécessite quelques précautions.

Il faut impérativement poser la cale sur ses points de moindre flexion et assurer son maintien au droit des points d'appui. La **Figure 21** permet de montrer l'influence d'une mauvaise mise en position. Pour ce faire, nous avons mesuré la KOBA du CETIM sans son support. Les points de bridage ont été légèrement déplacés des points d'appui. Le résultat est sans commentaire, la justesse obtenue est perturbée par les points de bridage.

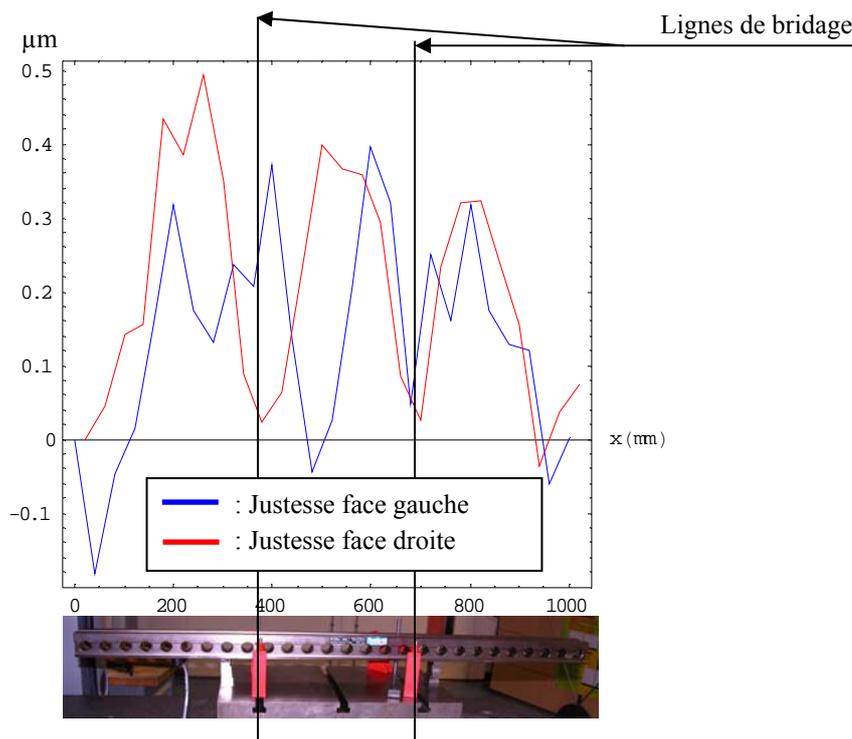


Figure 21 : Influence d'une mauvaise mise en position

Cette étude n'a pas été faite pour montrer l'absurdité d'un tel montage mais bien pour chiffrer l'ordre de grandeur des incertitudes introduites et reproduire sur un étalon connu ce que l'on est obligé de faire pour mesurer notre cale MITUTOYO. En effet, le posage de la cale MITUTOYO est hyperstatique (quatre plans) et le système de fixation d'origine n'est pas prévu aux points de moindre flexion. Pour minimiser l'influence de cette conception, on bride

la cale sur un support que l'on ne démonte jamais, et c'est le support que l'on met en position et que l'on bride.

De même, l'étude de répétabilité et de reproductibilité a permis de montrer que le support d'origine de la KOBA [Figure 1] n'était pas assez rigide surtout au niveau de l'équerre support. Nous avons donc décidé de supprimer tout le bas du montage et de fixer la KOBA directement sur un cube [Figure 22]. Cette solution a permis de diminuer par trois le « bruit de mesure » en répétabilité et en reproductibilité. D'ailleurs, il est intéressant de remarquer que d'autres laboratoires choisissent également de ne pas utiliser ce montage [TAK2002, KUR2006].



Figure 22 : Photo de montage de la KOBA pour la détermination des défauts de la machine

## 6 Sources d'incertitudes liées à l'algorithme utilisé

### 6.1 Répétabilité, dérive thermique

La Figure 23 représente les écarts dans la direction de la normale pour deux mesures de la cale à créneaux. Les points sont programmés à partir des longueurs fournies par le certificat d'étalonnage donc le graphe représente des écarts. La Figure 24 représente la différence entre ces deux mesures, ce qui permet de d'évaluer la répétabilité obtenue.

Sur la Figure 23, la première mesure est affichée à zéro ce qui correspond au point de référence et à une mesure dans le sens X+. Le point suivant correspond à l'autre coté du créneau à 20mm de distance et est décalé d'environ « a » [Figure 23]. Cette différence peut facilement s'expliquer par une mauvaise évaluation du diamètre de la bille du palpeur. Les points alignés correspondent à l'ensemble des faces mesurées dans la direction X+. Il s'agit d'une pente d'environ 1  $\mu\text{m}$  sur 800 mm qui est probablement d'origine thermique.

Les points décalés correspondent donc aux faces X-. Le décalage « b » est beaucoup plus difficile à justifier. Dans la mesure où les deux mesures sont très cohérentes, il ne peut s'agir d'une correction brutale de température ou d'un mouvement de la cale à gradins. Les deux points décalés vers le bas à la fin du graphe posent également un réel problème. Les points mesurés selon X+ sont représentatifs de la justesse de la machine qui a un caractère continu.

Quant aux points dans la direction X- et compte tenu de l'ensemble des acquisitions réalisées, nous pensons qu'il s'agit d'un problème de qualité sur l'étalonnage de la cale fournie par le certificat.

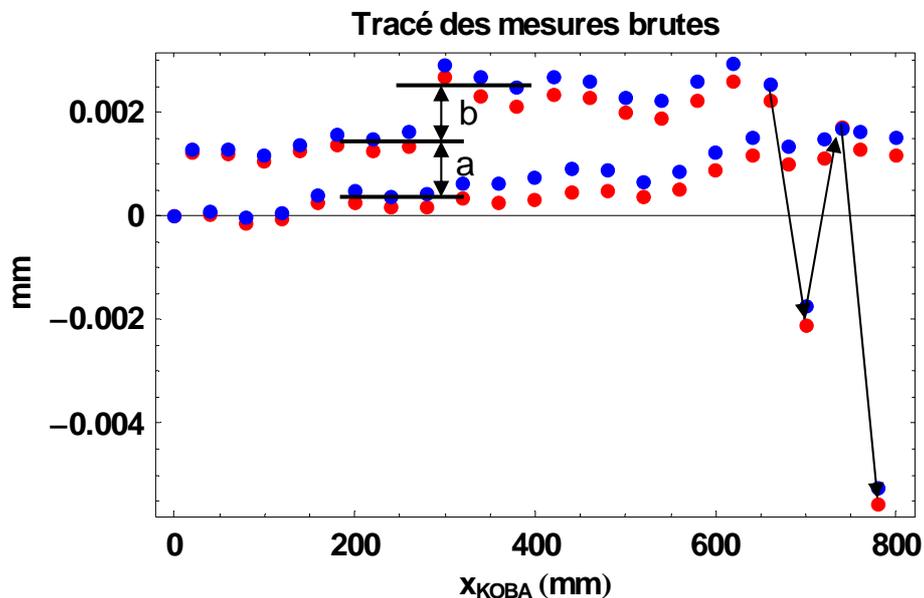


Figure 23 : Tracé des écarts dans la direction de la normale relevés pour les deux mesures de répétabilité

La machine du CETIM de Senlis, sur laquelle sont effectuées les mesures, est équipée de sondes de températures sur chacun des axes et d'une sonde de contact pour la pièce en cours de mesure. Lors des expérimentations, il convient d'effectuer une mesure que l'on ne sauvegarde pas. Cette mesure permet de réguler la température de la machine et des sondes dont notamment la sonde de contact. Les mesures présentées sur la **Figure 23** ont volontairement été effectuées sans tenir compte de cette remarque ce qui permet d'obtenir une variation de température entre les deux mesures effectuées ; la sonde de contact n'a pas eu le temps nécessaire pour se stabiliser avant la correction en température. Ce type de mesure est en réalité à rejeter mais permet ici de mettre en évidence le phénomène.

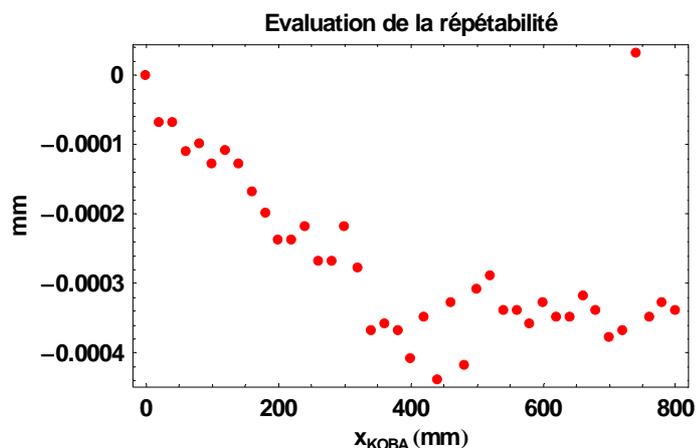


Figure 24 : Tracé de la différence des écarts des deux mesures précédentes pour évaluer la répétabilité

La comparaison des deux mesures [Figure 24] fait apparaître une pente qui se traduit par une différence de longueur de la cale d'environ  $0,4 \mu\text{m}$  sur  $800 \text{ mm}$  entre les deux mesures pour le cas présenté soit une variation de température de moins de  $0,05^\circ\text{C}$ .

Une différence de température ou une mauvaise correction de température aussi minime soit-elle aboutie à des erreurs relativement importantes.

## 6.2 Effet d'une dérive thermique

### 6.2.1 Mise en équation pour une étude formelle

Nous avons choisi de programmer l'algorithme de permutation linéaire à partir des mesures de longueur afin d'éviter les erreurs de signes sur les écarts dans la direction de la normale.

Nous pouvons également effectuer une approche en écart suivant la normale d'autant que fondamentalement, c'est ce qui est mesuré. Les équations sont différentes mais fournissent au final le même résultat. Dans cette partie, le raisonnement est effectué en terme d'écarts.

Si on note 1 la première face mesurée (qui est une face gauche) et 2 la deuxième face mesurée (face droite), .... Les écarts suivant la normale peuvent s'interpréter comme suit :

- une translation de référentiel T qui donne un écart positif +T sur les faces droites (donc +T pour la face 2) et un écart négatif -T sur les faces gauches (donc -T pour la face 1).
- un défaut de justesse  $-J_2$  en 2 et  $+J_1$  en 1 sachant que la justesse est définie comme la correction à ajouter à la mesure pour trouver une mesure juste.
- un terme correctif sur le diamètre du palpeur qui est la quantité à ajouter au diamètre affiché au palpeur pour trouver le diamètre réel, +C au point 2 et +C au point 1
- un terme correctif qui correspond à l'écart entre la cote théorique de la cale et la longueur réelle, a priori ce terme est fourni par le certificat d'étalonnage ou à déterminer par comparaison, on note ce terme  $E_1$  ou  $E_2$ .

L'écart mesuré sur la face 1 s'écrit :  $E_{\text{mesuré}_1} = -T + J_1 + C + E_1$

L'écart mesuré sur la face 2 s'écrit :  $E_{\text{mesuré}_2} = +T - J_2 + C + E_2$

La justesse à l'origine (donc sur la face 1) est posée égale à zéro soit  $J_1 = 0$ .

La variation de longueur  $\Delta L$  pour le premier créneau défini entre les points 1 et 2 s'écrit donc :

$$\Delta L = -T + J_1 + C + E_1 + T - J_2 + C + E_2 = J_1 - J_2 + 2C + E_1 + E_2$$

L'élimination de la constante palpeur consiste à réaliser deux mesures, une première puis une seconde en décalant la cale de la longueur d'un créneau soit  $20 \text{ mm}$ . Si on considère que les écarts sont corrigés de l'étalonnage de la cale et que  $E_{m_i^j}$  est la mesure de l'écart dans la direction de la normale de la face i dans la position j alors on peut écrire les équations suivantes :

Pour la première mesure :

$$E_{m_1^1} = -T_1 + C$$

$$E_{m_2^1} = +T_1 - J_2 + C$$

$$E_{m_3^1} = -T_1 + J_3 + C$$

$$E_{m_4^1} = +T_1 - J_4 + C$$

Pour la seconde mesure :

$$E_{m_1^2} = -T_2 + J_2 + C$$

$$E_{m_2^2} = +T_2 - J_3 + C$$

$$E_{m_3^2} = -T_2 + J_4 + C$$

$$E_{m_4^2} = +T_2 - J_5 + C$$

Globalement, on peut écrire le problème sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Em_1^1 \\ Em_2^1 \\ Em_3^1 \\ Em_4^1 \\ Em_1^2 \\ Em_2^2 \\ Em_3^2 \\ Em_4^2 \end{pmatrix}$$

Une résolution formelle du système d'équation fournit :

$$C = \frac{1}{8} (Em_2^1 + 2 \cdot Em_3^1 + Em_4^1 + Em_2^2 + 2 \cdot Em_3^2 + Em_4^2)$$

$$\text{Soit } C = \frac{1}{8} \cdot (-J_2 + 2 \cdot J_3 - J_4 + 4 \cdot C + J_2 - 2 \cdot J_3 + J_4 + 4 \cdot C)$$

### 6.2.2 Effet d'une variation de température

Même si nous appliquons une méthode de Monte Carlo pour chiffrer les incertitudes de mesure et notamment celles dues aux variations de température, nous nous proposons d'étudier de manière analytique l'effet d'une variation de température sur nos séries de mesures et sur la stratégie de permutation linéaire. Cette analyse aboutira à des stratégies de minimisation des incertitudes.

Supposons que, lors de la seconde mesure, la machine se dilate et que l'on superpose aux justesses une pente  $p$  qui exprimée sur la longueur  $L$  de chacun des créneaux de la cale à gradins alors on a :  $J_2 + pL$ ,  $J_3 + 2pL$  et  $J_4 + 3pL$ . La constante palpeur vaut :

$$C' = \frac{1}{8} (-J_2 + 2 \cdot J_3 - J_4 + 4 \cdot C + J_2 + pL - 2 \cdot (J_3 + 2 \cdot pL) + (J_4 + 3 \cdot pL) + 4 \cdot C) = C$$

**Résultat 1 :** La valeur de  $C$  n'est donc pas modifiée ce que confirment les essais numériques effectués. En fait, la dilatation n'a aucun effet sur l'évaluation de la constante palpeur.

De la même manière, l'analyse formelle montre que :

**Résultat 2 :** Le premier et le dernier point n'étant mesuré qu'une fois, il ne bénéficie pas de l'effet de moyenne de la résolution au sens des moindres carrés du problème. En conséquence, la justesse exprimée au premier point reste à 0 et celle du dernier point est celle obtenue grâce à la seconde mesure de koba sans influence de la première mesure. En cas d'incohérence entre les deux mesures, la courbe résultat est donc cassée aux deux extrémités. Une koba de 800mm décalée une fois couvre 820mm mais il faut éviter les 20 premiers millimètres et les 20 derniers donc la courbe est définie sur 780mm. Il faudra en tenir compte pour estimer les perpendicularités en particulier. Ce résultat est également confirmé sur la simulation ci-après.

**Résultat 3 :** La pente  $p$  sur l'une des deux mesures a un effet  $p/2$  sur les mesures finales, ou d'une façon générale, on réalise la moyenne des pentes, ce qui correspond au résultat obtenu par simulation au paragraphe suivant [Figure 26].

Remarque : Si la Koba se dilate, les créneaux de 20mm se dilatent ce qui a un effet très faible (une variation de température de 0,5 degré provoque un allongement de l'ordre de 0,12µm qui sera par contre intégré dans la constante).

### Simulation

Dans la séquence de mesure destinée à déterminer le diamètre de la bille du palpeur, on peut considérer que l'effet de la variation de température est de l'ordre de quelques dixièmes de micromètres (entre la mesure initiale et la mesure décalée d'un créneau de la cale).

Nous pouvons simuler dans ces conditions l'effet d'une différence de température sur notre algorithme de suppression de la constante palpeur. Ainsi, nous considérons que les écarts des mesures en position initiale sont nuls et qu'il existe une pente sur la courbe d'évolution des écarts en fonction de la longueur mesurée sur la cale à créneaux [Figure 25]. Nous analysons ensuite la conséquence d'un tel défaut de variation de température sur la courbe de justesse calculée [Figure 26].

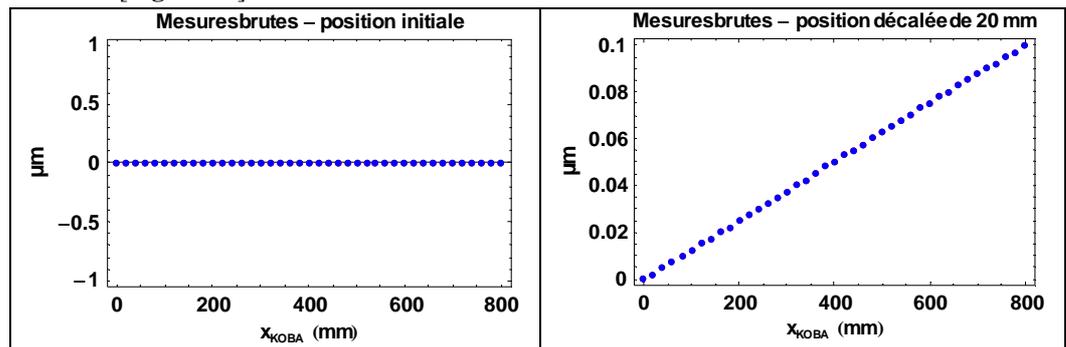


Figure 25 : Mise en place des écarts simulés

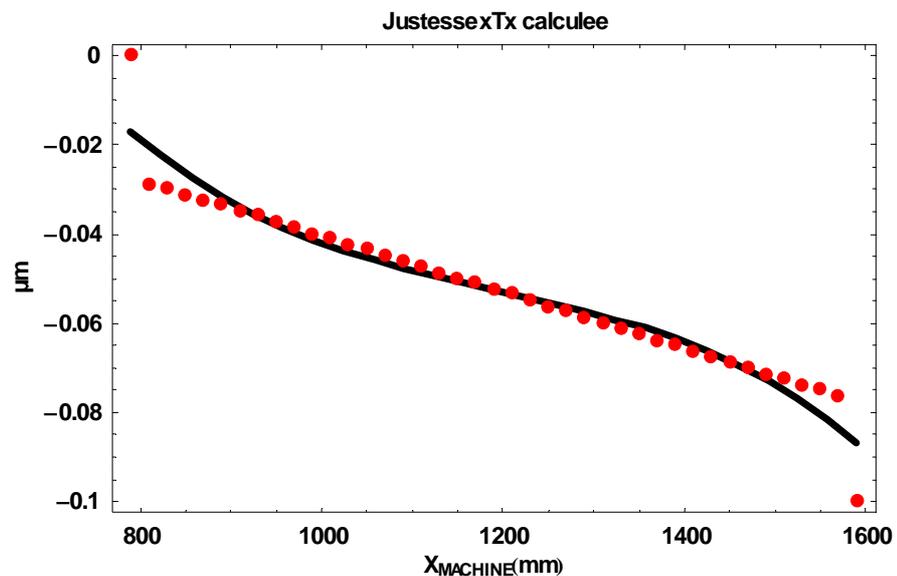


Figure 26 : Justesse calculée (rouge) et interpolation directe (noir)

Pour effectuer correctement des mesures de cales à gradins, il est recommandé de relever les températures et de monter des sondes de température sur la cale à gradins pour vérifier de la stabilité de la température de l'étalon donc de sa stabilité dimensionnelle. La Figure 27 [KUR2006] est une photo issue du « National Institute of Advanced Industrial Science and Technology – National Metrology Institute of Japan – Lengths and Dimensions Division / Dimensional Standards Section ». Elle représente la mesure de l'étalonnage de la KOBA du PTB pour une intercomparaison [PTB2005] par une méthode optique avec suivi en température. On remarque bien sur la photo les câbles de prise de température. Il est d'ailleurs

intéressant de noter que la majorité des cales à gradins présentent déjà des emplacements prévus à cet effet, comme c'est le cas pour la KOBA du CETIM.

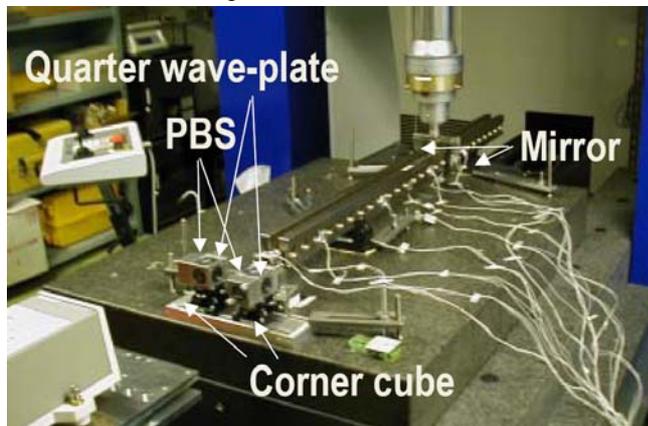


Figure 27 : Etalonnage d'une KOBA dans un laboratoire du Japon

### 6.3 Incertitude sur la qualité du décalage de la longueur d'un créneau

L'effet d'une incertitude sur la qualité du décalage de la longueur d'un créneau, c'est-à-dire 20mm peut être résumé de la façon suivante :

- Si la justesse est linéaire, l'effet est nul puisque la cale est estimée de la même manière quelque soit la position de celle-ci.
- Si la justesse est parabolique, un point est entaché d'une erreur de justesse  $a(x+h)^2 \cong a(x^2 + 2xh)$  à la place d'une erreur  $ax^2$  soit une différence  $a2xh$  qui est une contribution linéaire qui a la même conséquence qu'une variation de température. Expérimentalement, on constate une justesse parabolique qui se modélise approximativement par l'équation  $0,9 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{x}{400}\right)^2$ ,  $x$  étant exprimé en mm. Si on

examine les coordonnées des points mesurés en espace machine, on constate que  $h$  est toujours strictement inférieur à 0.2mm de par les conditions expérimentales utilisées. Dans ces conditions, la pente résiduelle exprimée sur 800mm est de  $a2xh = \frac{0,9 \cdot 10^{-3}}{400^2} \cdot 2 \cdot 800 \cdot 0,2 = 1,8\text{nm}$ , ce qui est négligeable.

- Au-delà, une variation de justesse de type  $a(x+h)^n \cong a(x + nx^{n-1}h)$  fournit une incertitude liée au pas  $h$  que l'on peut chiffrer mais celle-ci est très faible dans la mesure où en pratique la justesse est au pire parabolique.
- Cette analyse est valable pour les grandes longueurs d'onde. Pour les courtes longueurs d'onde (liées aux systèmes d'entraînements en particulier) seule une étude expérimentale est possible.

### 6.4 Inclinaison de la cale à gradin entre les deux positions

L'effet d'une inclinaison est directement prise en compte en corrigeant les mesures après mesure de l'angle entre les axes de la cale à gradins dans la première et la seconde position.

## 7 Conclusion

Nous avons mis en place une méthodologie de mise en œuvre de la Koba visant à supprimer l'influence de la détermination de la constante palpeur, ce qui revient à utiliser le palpeur en mode monodimensionnel sans intégrer dans les incertitudes le diamètre de la sphère de calibrage. Nous avons travaillé les conditions de montage car le montage d'origine n'est pas satisfaisant.

Nous avons proposé une nouvelle méthodologie pour créer le référentiel de mesure, mais la description des références devra être améliorée pour être certain que les conditions de mise en œuvre correspondent parfaitement au procès verbal d'étalonnage. Ce point particulier méritera d'être réévalué lors du prochain étalonnage de la KOBA.

L'analyse de la cale à gradins KOBA du CETIM montre que la position de certains créneaux, essentiellement dans la plage de 700 à 800 mm, doit être vérifiée. Ce problème sur l'étalonnage a été constaté (**Figure 23** par exemple), quelque soit la position de la KOBA dans l'espace de la machine, ce qui exclu un problème localisé.

La cause d'incertitude la plus importante est liée à la température à travers d'une part le certificat d'étalonnage et d'autre part les mesures proprement dites. Il faut également prendre en compte les variations à faible longueur d'onde au niveau de la machine et les perturbations à caractère gaussien.





# CHAPITRE III :

## Mesures de rectitudes

### SOMMAIRE

1	Introduction .....	70
1.1	Généralités.....	70
1.2	Principe du traitement des mesures .....	72
1.3	Règles de rectitudes inadaptées .....	72
1.4	Choix technologiques.....	73
2	Influence de l'état de surface de la règle.....	73
2.1	Etat de surface de la règle avant polissage - Traitement.....	74
2.2	Etat de surface de la règle après polissage - Traitement.....	76
3	Effet des variations de température.....	78
4	L'hygrométrie a-t-elle une influence .....	79
4.1	Présentation .....	79
4.2	Variation de rectitude du coulisseau après une prise d'humidité de trente minutes ....	79
4.3	Variation de rectitude du coulisseau après une prise d'humidité de soixante heures ..	81
4.4	Bilan .....	82
5	Positionnement, répartition des points.....	82
5.1	Problèmes de positionnement.....	82
5.2	Minimisation des problèmes de positionnement .....	82
5.3	Répartition des points.....	83
5.3.1.	Défaut de positionnement sur chacun des axes.....	83
5.3.2.	Erreurs de poursuites .....	83
5.3.3.	Répétabilité.....	84
5.3.4.	Rugosité de la règle.....	84
5.3.5.	Déformations de la règle.....	85
5.3.6.	Simulation et résultats.....	85
6	Conclusion .....	86

# Mesures de rectitudes

## 1 Introduction

### 1.1 Généralités

Au niveau de l'étude des défauts de forme (normes ISO concernant la cotation fonctionnelle), la rectitude est la qualité de ce qui est droit, elle est caractérisée par une ligne [TRO2006]. La minimisation porte sur :

- deux droites parallèles projetées dans un plan,
- la section d'un parallélépipède,
- le diamètre d'un cylindre (cas particulier, le cylindre peut être considéré comme l'élément parallèle à l'axe.

Dans cette optique, on trouve assez facilement des publications basées sur la zone minimale [NER1989 - HUA1993 - CHE1996 - GOU1999 - ZHA1999]. Néanmoins, ce type de référence n'est pas indispensable pour notre étude car la pente sur la rectitude s'interprète comme une perpendicularité, tout changement sur le choix de la référence conduit à une modification de la perpendicularité qui compense le choix forcément arbitraire qui a pu être fait.

Au niveau de l'étude de la géométrie d'une MMT, les écarts de rectitude sont situés dans les deux plans perpendiculaires à l'axe considéré [NF E10-101, 1988]. Ainsi par exemple pour l'axe x d'une MMT, il faut déterminer les translations de cet axe dans les plans XY et XZ [MAT1995]. Dans le cas d'une étude dans le plan, le défaut de rectitude d'un axe est donc l'erreur de position perpendiculairement au déplacement. Pour mesurer un défaut de rectitude, plusieurs méthodes s'offrent à nous [NF E 10-101], à savoir :

- Les méthodes de type optique :
  - Interféromètre laser à comptage de franges avec l'option rectitude [BAL1979 - EST1985 - E 11-016, 1987],
  - Lunette d'alignement (permet de contrôler simultanément les deux plans)
  - Laser d'alignement
- Les méthodes de type mécanique :
  - Méthode à plusieurs capteurs [WHI1976 - LI1996],
  - Méthode utilisant une règle étalon de rectitude [CAY1953 - CAY1956 - WHI1976]. La longueur minimum de la règle est celle de l'axe considéré.

Pour une règle étalon, une seule mesure est nécessaire, l'incertitude dépend entre autre de la qualité de l'étalon (état de surface,...) et de son étalonnage.

Pour une règle non étalonnée, il faut réaliser deux mesures en utilisant la technique du retournement. Cette méthode permet de séparer les écarts de rectitude de la règle de ceux de la MMT. L'incertitude dépend entre autre de la qualité de l'étalon (état de surface) et des erreurs dues à la méthode du retournement. Cette méthode est connue depuis de nombreuses années et fait partie des méthodes de comparaison à une référence "dématérialisée" utilisée par l'abbé CAYERE [CAY1953 - CAY1956]. Dans ces articles appliqués à des cas concrets, l'abbé CAYERE utilise des étalons matériels pour déterminer les défauts des machines en multipliant des mesures spécialement conçues pour compenser les erreurs introduites par les étalons auxquels on demande seulement de ne pas varier au cours des mesures. C'est le début des méthodes de permutation, propagation, retournement,...

## CHAPITRE III

## MESURES DE RECTITUDES

Nous avons choisi d'étudier les défauts de rectitude de la machine à mesurer par l'intermédiaire d'une règle en appliquant le principe du retournement. Ce principe bien connu dans le domaine de la métrologie permet de déterminer les défauts de la règle et ceux de la machine.

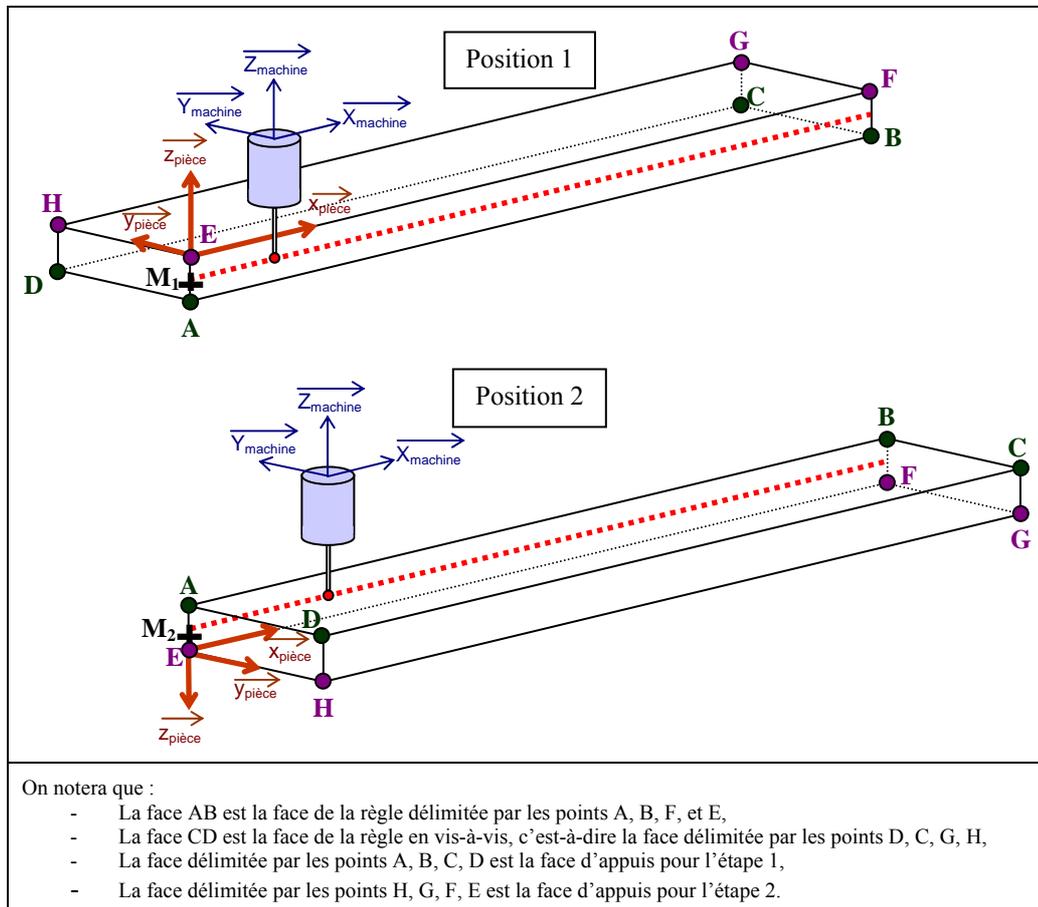


Figure 1 : Schématisation d'une mesure de rectitude en deux étapes

La **Figure 1** présente les mesures à effectuer sur la règle afin de mesurer la rectitude.

La première étape consiste à mesurer directement une des faces de la règle, par exemple, la face AB. Le repère de la pièce est représenté sur la règle, et celui de la machine sur le schéma d'un palpeur qui serait en train d'effectuer une ligne de mesure sur cette règle.

La seconde étape consiste à mesurer de nouveau la même face AB de la règle, mais celle-ci a été préalablement retournée.

## 1.2 Principe du traitement des mesures

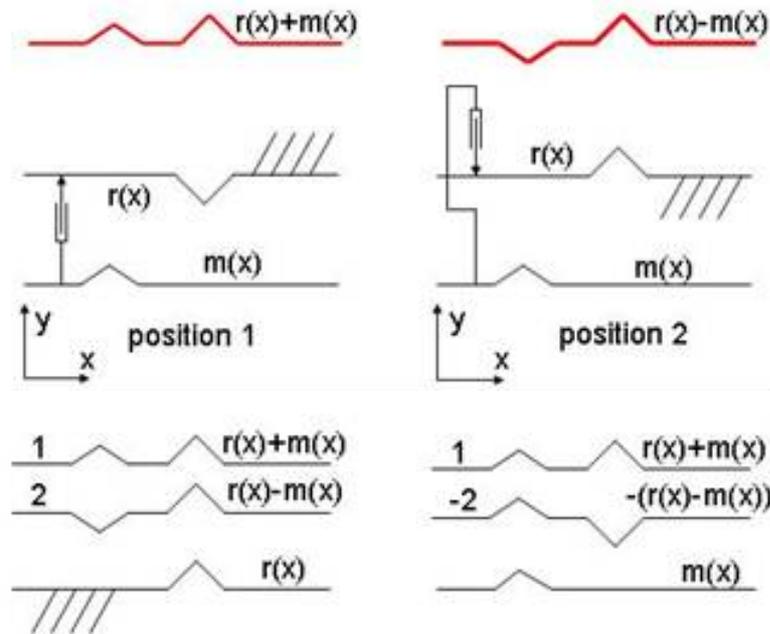


Figure 2 : explication du calcul de rectitude

La **Figure 2** montre le principe du retournement de la règle et du calcul de la rectitude de la règle et de la machine. Pour traiter correctement la rectitude, il faut poser trois conventions de signe :

- Si le point sur la trajectoire de la machine se déplace vers les Y positifs, on convient que le défaut est positif, on le note  $m(x)$
- Une bosse de la règle est interprétée comme un défaut positif, on le note  $r(x)$
- Si le comparateur s'enfonce, son indication est positive

Dans la première situation, le comparateur enregistre  $e_1(x) = m(x) + r(x)$ .

Dans la seconde situation, le comparateur enregistre  $e_2(x) = -m(x) + r(x)$ .

La demi-somme et la demi-différence fournissent  $r(x)$  et  $m(x)$ .

## 1.3 Règles de rectitudes inadaptées

Sur le principe, une mesure de rectitude est relativement simple. En pratique, c'est une mesure assez complexe à mettre en œuvre si l'on souhaite étudier une rectitude de quelques micromètres ou moins. En effet, il existe certes des règles de rectitude en granit [**Figure 3**] qui possèdent leur propre montage mais la rugosité du granit induit un bruit de mesure de l'ordre de grandeur de la rectitude recherchée dans notre cas. Lors de la remise en position et de la prise de référentiel de la règle après de son retournement [**Figure 1 - Etape 2**], celle-ci ne se repositionne pas exactement au même endroit et les « trous » du granit sont préjudiciables. Il est donc impossible d'utiliser un tel étalon. Nous avons validé ce point de vue en effectuant des séries de mesures en optimisant au maximum la prise de mesure et la répartition des points.

Il existe également des règles « limace » [**Figure 4**], mais ces règles ne sont absolument pas prévues pour ce type de mesures comme le démontre l'Abbé CAYERE dans son ouvrage [CAY1956]. Ce type de règle est un plan étalon portatif très allongé.



Figure 3 : Photo d'une règle de rectitude en granit munie de son support



Figure 4 : photos d'une règle « limace » de mécanicien

## 1.4 Choix technologiques

Nous avons donc choisi d'utiliser une règle rectifiée en acier de même longueur que la KOBA et d'adapter notre montage KOBA pour les mesures de rectitude [Figure 5].

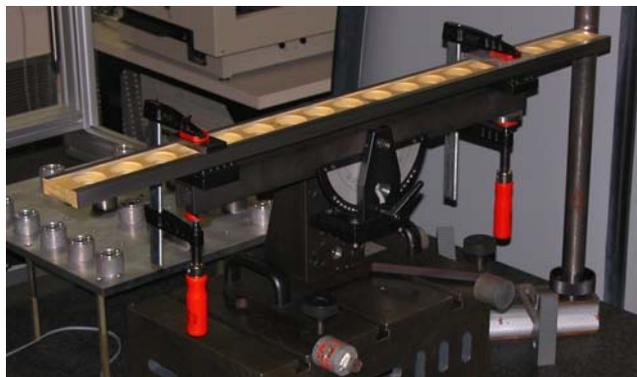


Figure 5 : Photo du montage utilisé

La mise en position doit être isostatique et le maintien doit éviter de déformer la règle. Si tel n'était pas le cas, la règle se déformerait essentiellement en flexion et en vrillage et la rectitude serait complètement faussée. Ce point est d'autant plus vrai que ce ne sont pas les mêmes faces de la règle qui sont en appui pour la mesure initiale et la mesure retournée [Figure 1].

## 2 Influence de l'état de surface de la règle

Au paragraphe 2.1, nous allons étudier l'influence de l'état de surface de la règle sur le bruit de mesure généré. L'étude est effectuée directement sur la règle brute de rectification.

Au paragraphe 2.2., nous allons montrer l'intérêt d'un rodage de la pièce (polissage)

## 2.1 Etat de surface de la règle avant polissage - Traitement

Pour connaître l'influence de l'état de surface de la règle sur la mesure de la rectitude, il faut mesurer la rugosité (rugosimètre à contact) et simuler le profil apparent de la règle, c'est-à-dire simuler le profil vu par la machine via son système de palpation. Nous avons utilisé un stylet muni d'une bille de 5 mm de diamètre pour nos mesures de rectitude. Il convient donc de réaliser un filtrage par une bille de 5 mm de diamètre [BIG1999 - WU1999 – COO2003\_2 - PAW2004].

Avant d'effectuer le filtrage, il faut mesurer le profil de la pièce, et le redresser pour supprimer la pente par un polynôme de degré 1 [Figure 6]. On redresse bien le profil brut car c'est ce profil qui est considéré comme étant le profil réel, le filtrage de la bille du rugosimètre (quelques micromètres) est considéré comme étant négligeable vis-à-vis de la taille de la bille du palpeur (5 millimètres).

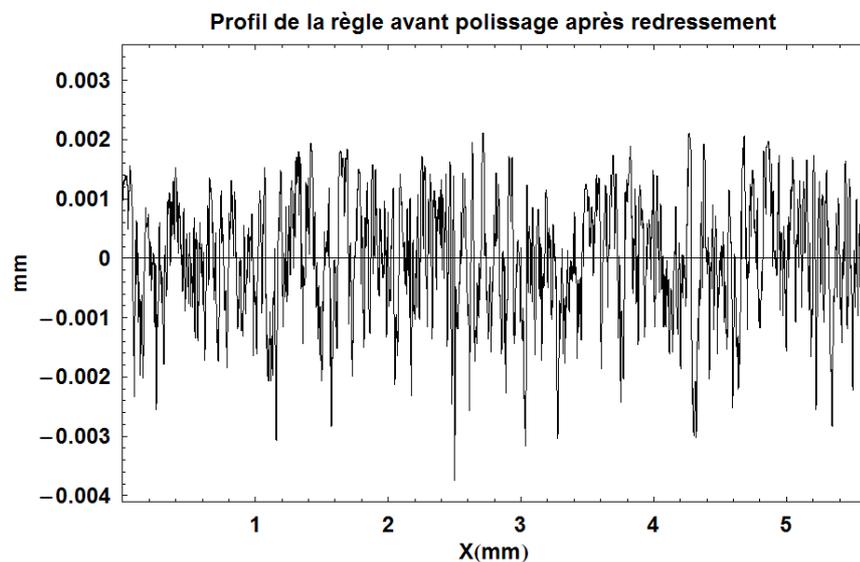


Figure 6 : Un des profils de la règle mesurée au rugosimètre à contact redressé par un polynôme de degré 1

L'algorithme utilisé pour effectuer ce filtrage est le suivant :

- On place le point le plus bas de la bille strictement au dessus du point le plus haut du profil, c'est-à-dire que le centre de la bille doit être situé à une ordonnée supérieure à celle du point le plus haut du profil auquel on ajoute le rayon de la bille.
- On digitalise la bille avec le même pas que le pas en abscisse du profil mesuré au rugosimètre à contact.
- On déplace la bille pas par pas en abscisse le long du profil et on détermine les coordonnées au contact du centre de la bille.

En pratique, pour une position donnée sur le profil, on calcule la distance entre chacun des points de la bille et les points du profil en vis-à-vis. La distance minimum calculée correspond au point de contact de la bille sur le profil. Les coordonnées du centre de la bille au contact correspondent selon l'axe des abscisses à la position initiale, et selon l'axe des ordonnées à la position initiale moins la distance minimale calculée.

Pour pouvoir obtenir la totalité du profil filtré, il convient de rallonger artificiellement le début et la fin du profil mesuré au rugosimètre d'une fois le rayon de la bille. Pour être sûr que la bille ne tombe en contact sur ces parties, il suffit d'imposer aux points rajoutés que leur ordonnée soit plus petite, d'une fois le rayon de bille, que la plus petite des hauteurs du profil.

La **Figure 7** présente le même profil que celui de la **Figure 6** à la même échelle mais lorsqu'il est vu par la machine, c'est-à-dire après filtrage par une bille de diamètre 5 mm (bille utilisée dans notre cas).

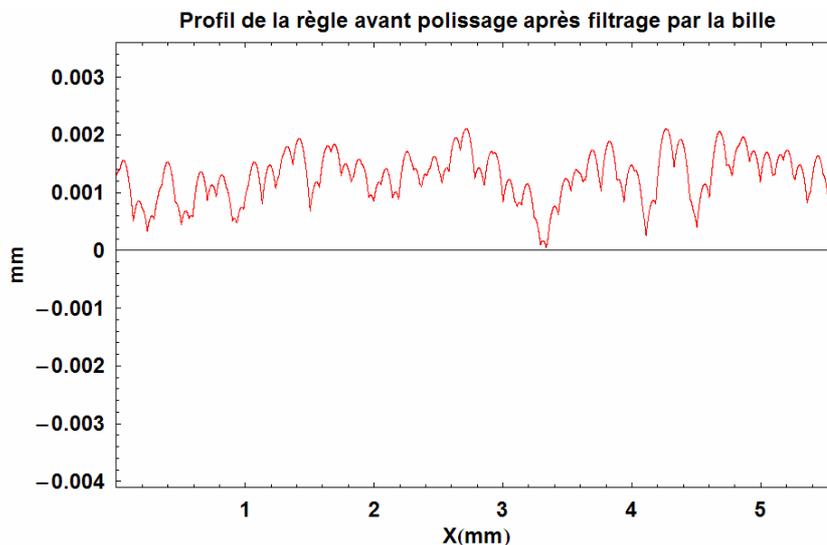


Figure 7 : Le profil de la Figure 6 vu par la machine (filtrage avec bille de diamètre 5 mm)

On remarque que la rugosité de la règle avant polissage et après filtrage par la bille du stylet possède une rugosité totale de  $R_t = 2 \mu\text{m}$  pour une évaluation d'une trentaine de profils sur une longueur de moins de 7 mm, ce qui est encore relativement important. Ce qui est plus gênant, ce n'est pas la valeur de  $2 \mu\text{m}$  mais bien la forme du profil et plus particulièrement les pentes du profil. En effet, la mesure de rectitude se faisant en deux étapes, c'est-à-dire une mesure et une mesure après retournement, il est strictement impossible de retomber sur les mêmes points (flexion sous poids propre, reprise de référentiel, erreur de poursuite, ...). Les défauts de reprise cumulés entre les deux types de mesures ont été estimés à  $\pm 0.1 \text{ mm}$  au maximum, ce qui fournit une incertitude de mesure sur la rectitude de  $1 \mu\text{m}$ , ce qui est en dehors de nos attentes.

Remarque : Pour bien montrer l'influence du filtrage, nous avons représenté les 2 profils, c'est-à-dire la **Figure 6** et la **Figure 7** sur le même graphique [**Figure 8**].

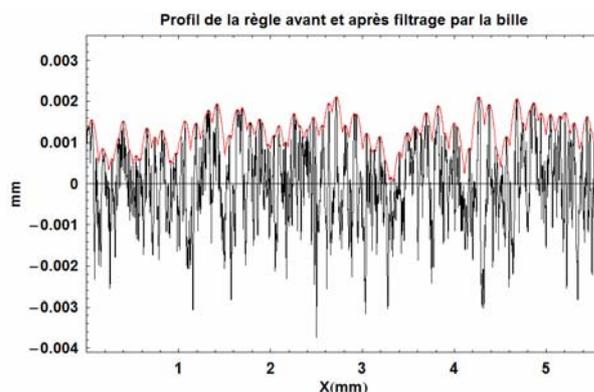


Figure 8 : Profil mesuré au rugosimètre (noir) et profil vu par la machine (rouge) avec une bille de 5 mm de diamètre

## 2.2 Etat de surface de la règle après polissage - Traitement

L'état de surface de la règle ayant une influence notable sur le résultat de la mesure de rectitude, nous avons décidé d'effectuer un rodage manuel de celle-ci. Les résultats du rodage sur un des profils de la règle sont présentés sur la **Figure 9**.

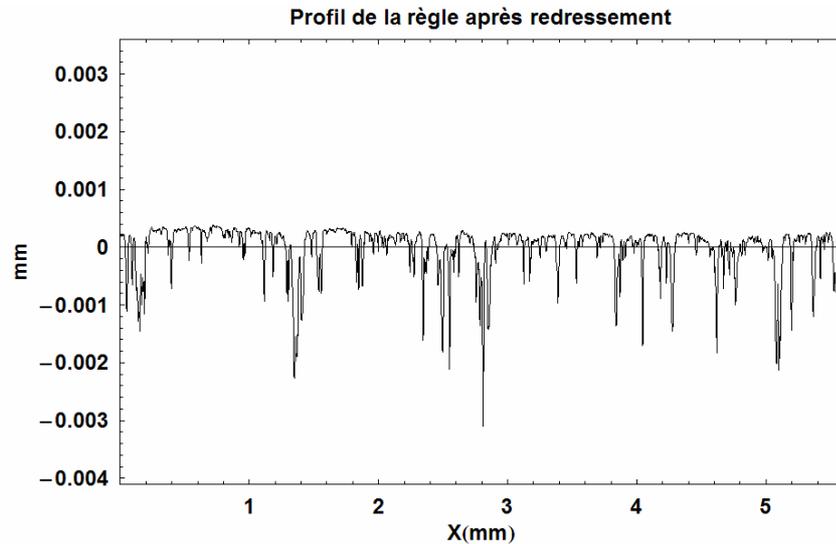


Figure 9 : profil de la règle polie mesurée au rugosimètre à contact et redressé par un polynôme de degré 1

Le polissage a été effectué, dans un premier temps, à la main, à l'aide d'une cale et du papier abrasif grade 4000 avec du lubrifiant. Il est primordial de ne pas arrondir les faces. Si on reprend les notations de la **Figure 1**, un défaut d'ondulation, c'est-à-dire un défaut de grande longueur d'onde dans le sens longitudinal (direction AB) n'a que très peu d'influence sur la mesure. Par contre, un bombé dans le sens de la hauteur (direction CD) est préjudiciable puisque les mesures sont effectuées en deux fois et que la flexion de la règle change de sens d'une mesure à l'autre. Comme tout rodage, nous avons écrêté les profils initiaux [**Figure 6**], c'est-à-dire que nous avons supprimé tous les pics hauts des profils [**Figure 9**].

Nous avons bien entendu effectué le même filtrage que précédemment. Les échelles des graphes sont conservées afin de faciliter la comparaison. Après filtrage par la bille de 5 mm du stilet du palpeur, on obtient un profil de rugosité vu par la machine ayant un  $R_t$  environ de 0.6  $\mu\text{m}$ . De plus, les pentes du nouveau profil sont beaucoup plus faibles et l'incertitude due à la rugosité de la règle passe alors à environ 0.5  $\mu\text{m}$  [**Figure 10**]. La **Figure 11** représente conjointement les graphes des **Figure 9** (noir) et **Figure 10** (rouge).

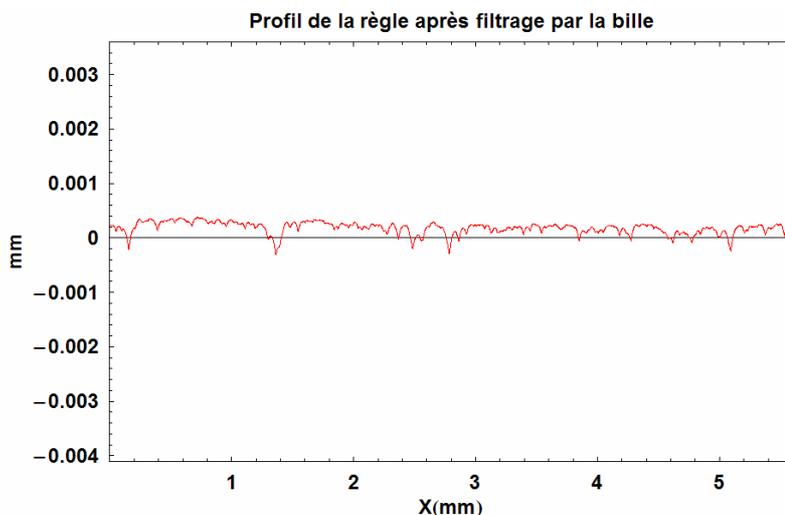


Figure 10 : Le profil de la Figure 9 vu par la machine (filtrage avec bille de diamètre 5 mm)

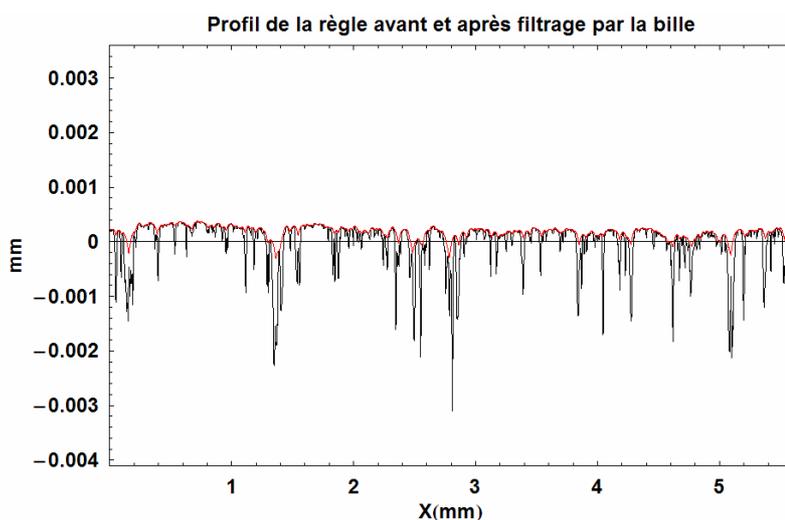


Figure 11 : Profils des figures 7 (noir) et 8 (rouge) sur le même graphe

Pour mesurer correctement une rectitude de quelques micromètres sur une machine, il faut donc obligatoirement effectuer une rectification suivie d'un polissage de haute qualité pour obtenir des états de surface poli miroirs.

La rugosité de la règle a ainsi un impact fort sur la qualité des mesures de rectitude. Il convient donc de faire extrêmement attention à la mise en position de la règle et à la prise de référentiel. En effet, tout décalage de celle-ci d'une mesure à l'autre (mesure et retournement) provoque un bruit de mesure dû à la rugosité. De ce fait, nous avons cherché à optimiser ces mesures en travaillant sur la répartition des points, le positionnement, la prise de référentiel,...

### 3 Effet des variations de température

Par approximation, on peut considérer qu'un gradient thermique constant, variation linéaire au sein du graminé de la machine, tend à déformer celui-ci en forme de parabole. Ce phénomène est appelé bilame thermique [WEB1984]. Le fait de considérer que la variation de température est linéaire est réaliste en situation établie de stratification de température d'une salle climatisée. Ainsi la variation de longueur des fibres est proportionnelle à la position de celles-ci dans l'épaisseur ; la déformée correspondante est un cercle.

Le calcul est relativement simple est schématisé sur la **Figure 12**.

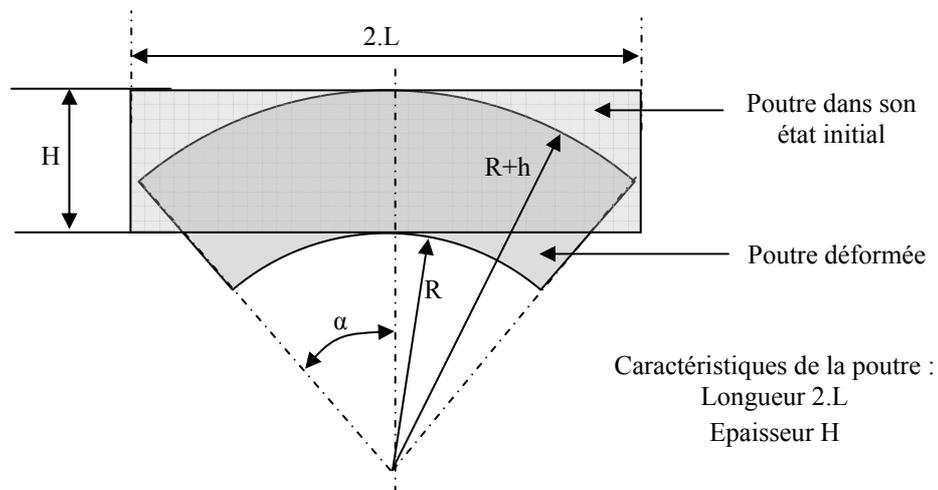


Figure 12 : Schéma pour le calcul théorique du bilame thermique

La fibre inférieure n'est pas allongée,  $L=R.\alpha$ .

La fibre supérieure est allongée de  $\Delta L=\lambda.L.\Delta T$ , sa longueur est alors de  $L+\Delta L=(R+h).\alpha$ .

Donc  $\Delta L=h.\alpha$

La flèche de la poutre vaut  $f=R.(1-\cos\alpha)\approx R.\frac{\alpha^2}{2}$  car  $\alpha$  petit

Soit  $f=R\alpha.\frac{\alpha}{2}=L.\frac{\Delta L}{2h}=L.\frac{\lambda L\Delta T}{2h}=\frac{\lambda L^2\Delta T}{2h}$  avec  $\lambda\approx 7.10^{-6}^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

La rectitude est donc déformée sous la forme  $f.\left(\frac{x}{L}\right)^2$

L'effet de bilame a également un effet induit sur la rotation du chariot c'est-à-dire sur le tangage correspondant.

## 4 L'hygrométrie a-t-elle une influence

### 4.1 Présentation

En métrologie, le taux d'hygrométrie des salles est contrôlé au même titre que les variations de température. La stabilisation de la température est le paramètre primordial et elle est stabilisée autour de 20°C. Une variation de  $\pm 1^\circ\text{C}$  par rapport à la valeur de consigne de 20° est la tolérance fréquemment utilisée. L'hygrométrie est un paramètre secondaire et est réglée à environ  $55 \pm 15\%$ . Cette variation d'hygrométrie inquiète certains métrologues qui affirment qu'une variation de celle-ci déforme les machines en rectitude, d'autres affirment que l'hygrométrie n'a aucune influence tant que le point de rosée n'est pas atteint bien sûr, mais aucune vraie étude n'a été faite à ce sujet à notre connaissance.

Le but de cette étude est donc d'étudier l'influence de la variation d'hygrométrie de la pièce mesurée (poutre) dans deux cas extrêmes :

- Tout d'abord, la variation de rectitude d'une poutre est étudiée après une prise d'humidité de trente minutes dans de l'eau à température ambiante. Pour garantir la même température entre l'eau et l'environnement extérieur, l'eau est déposée dans un bac métallique quarante huit heures à l'avance. La poutre durant sa prise d'humidité est immergée sur 10mm environ. Cette première expérimentation simulerait grossièrement l'influence du nettoyage du marbre de la machine à l'éponge fortement mouillée.
- Ensuite l'expérience est recommencée après avoir trempé la poutre pendant soixante heures afin de simuler un cas extrême de prise d'humidité.

La pièce considérée est un coulisseau de machine à mesurer de section carrée de 85 mm de côté et de 1140 mm de longueur. Ce coulisseau est posé en 2+1 points situés au 2/9 de la longueur totale pour être aux points de moindre flexion [annexe 2] de la poutre à la fois sur la machine à mesurer mais aussi dans sa période de prise d'humidité [Figure 13].



Figure 13 : Mesure du coulisseau après prise d'humidité

### 4.2 Variation de rectitude du coulisseau après une prise d'humidité de trente minutes

La poutre a été mesurée cinq fois. Les deux premières mesures sont réalisées dans les mêmes conditions et permettent d'évaluer la répétabilité de la mesure de la poutre sèche. La troisième mesure a été effectuée après démontage de la poutre, suivi de son remontage afin d'évaluer la

reproductibilité (poutre toujours sèche). La poutre est ensuite immergée trente minutes pour effectuer une prise d'humidité. Les quatrième et cinquième mesures sont ensuite effectuées, la cinquième étant une mesure répétée de la quatrième.

Les différentes mesures sont représentées sur la **Figure 14**.

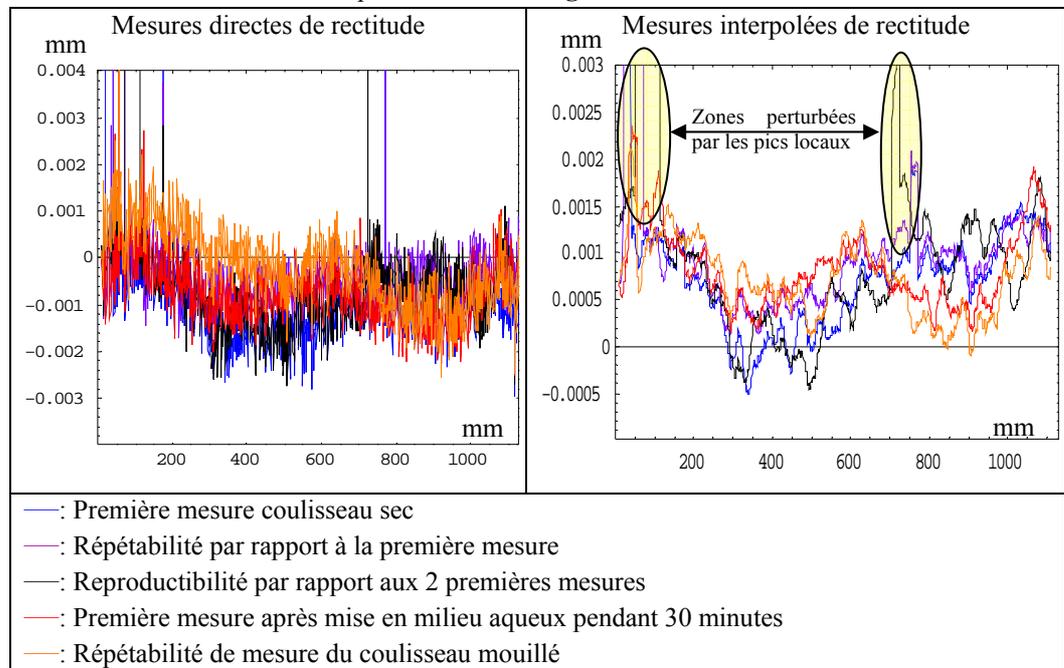


Figure 14 : Analyse de l'évolution de la rectitude du coulisseau (Expérience 1)

Les mesures directes ne permettent pas de donner une indication de l'influence de la variation d'hygrométrie dans la mesure où le bruit de mesure est relativement important (rugosité du granit). C'est pourquoi il faut réaliser un filtrage. Malheureusement, sur chacune des mesures, il existe des points que l'on pourrait considérer comme points aberrants qui sont dus à des défauts de rugosité locale. Ces points perturbent considérablement les filtrages polynomiaux simples. Il existe donc plusieurs solutions de filtrage pour supprimer ou au moins atténuer les points aberrants. Pour cette étude, on se contentera de réaliser une moyenne mobile. Le bruit local est rapidement supprimé et il ne reste donc que les pics locaux qui continuent de parasiter le signal (zones entourées en transparent jaune).

Les mesures interpolées sont une moyenne mobile sur onze valeurs. En fait, la mesure relevée au point  $i$  est la moyenne de ce point avec les cinq points voisins de part et d'autre de ce point.

A la vue des diverses courbes relevées, nous pouvons affirmer qu'il n'existe pas de réelle perturbation géométrique liée à l'évolution de l'hygrométrie pour une immersion de la poutre en granit d'une durée de l'ordre d'une trentaine de minutes. Un nettoyage du marbre à l'éponge humide n'a donc aucune influence notable sur la géométrie du marbre si la température de l'eau est égale à celle du granit bien évidemment. En effet, nous considérons que l'expérience est un cas extrême et les différences obtenues sont quasiment du même ordre de grandeur que ceux que l'on peut relever en reproductibilité mais aussi au niveau du bruit de mesure causé par la rugosité de surface. De plus, les différences relevées n'ont pas réellement l'allure attendue par un phénomène qui serait dû à une prise d'humidité. En effet, la poutre n'est immergée que sur une de ces faces et en cas d'absorption d'humidité, l'eau vient se loger dans les pores du granit en imposant alors une contrainte de traction locale. Dans ce cas, le granit s'allongerait donc du côté de la face immergée ce qui se traduirait par un effet de bilame du même type que l'effet bilame thermique très bien connu des métrologues, ce qui n'est pas le cas ici.

On peut donc affirmer que le nettoyage à l'éponge humide d'un marbre n'a aucune influence sur sa géométrie si la température de l'eau et de l'éponge (évidemment) est égale à la température du marbre.

### 4.3 Variation de rectitude du coulisseau après une prise d'humidité de soixante heures

Cette deuxième série de mesures est le cas extrême résultant d'une immersion prolongée. Le protocole consiste à immerger la poutre en granit pendant soixante heures dans un bac d'eau à la température de la salle et de mesurer l'évolution de géométrie durant le séchage de la poutre. La poutre est ainsi sortie de l'eau et séchée au chiffon. Elle est aussitôt mise en place et mesurée à différents moments sans jamais être démontée.

Les différentes mesures sont représentées sur la **Figure 15**.

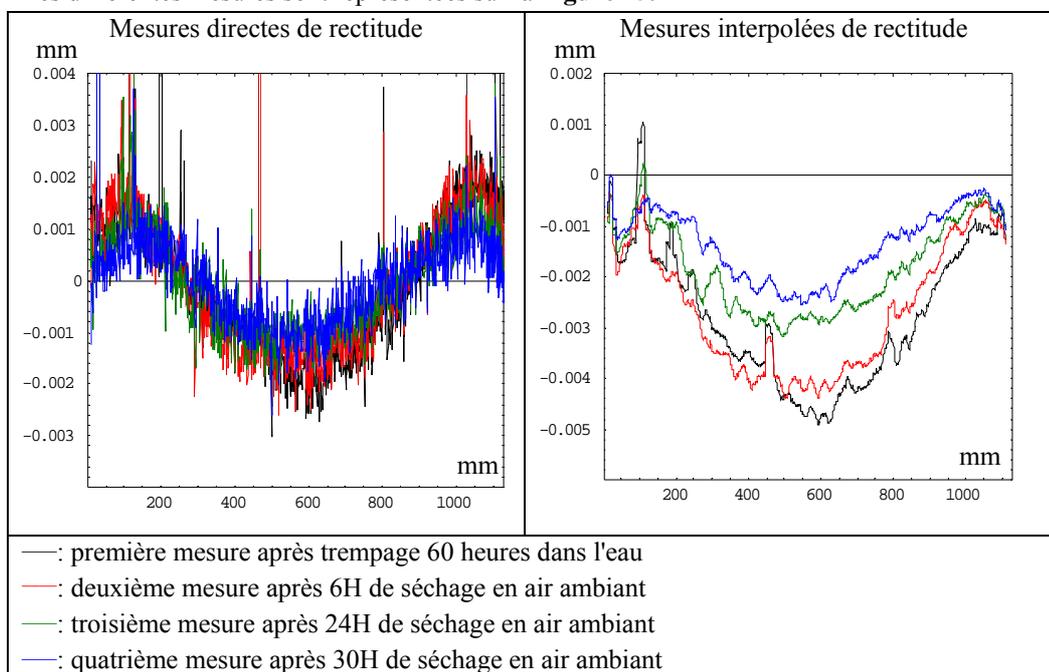


Figure 15 : Analyse de l'évolution de la rectitude du coulisseau (Expérience 2)

Les résultats bruts sont également fort bruités pour les mêmes raisons que précédemment et ne permettent pas de voir de réelles évolutions, on pratique le même filtrage. Avec cette expérience, on relève donc une réelle évolution de géométrie de la poutre en granit.

Si on reprend la formule du paragraphe 3.1,  $f \approx \frac{\lambda l^2 \Delta T}{2h}$ , avec une longueur mesurée

$L=2l=1120\text{mm}$ , une épaisseur  $h=85\text{mm}$  et un effet de bilame thermique dû à une variation de température  $\Delta T=1^\circ$  entre ces deux faces, on trouve  $f \approx 12,9\mu\text{m}/^\circ\text{C}$ . La flèche relevée entre les différentes mesures est de 2 micromètres sur trente heures de mesures, ce qui correspond à une variation de température équivalente de environ  $0,16^\circ\text{C}$ .

## 4.4 Bilan

La variation de flexion de la poutre sur trente heures correspond à une variation thermique de la poutre d'environ  $0,16^{\circ}\text{C}$ , ce qui est négligeable compte tenu des variations thermiques probables entre les différentes mesures. De ce fait, nous pensons que la variation d'hygrométrie n'a pas d'incidence notable en terme d'incertitudes sur les mesures. Il est, par contre, possible que des fluctuations d'hygrométrie soient liées à des variations de température compte tenu du fonctionnement de la climatisation et que cela explique des déformations.

# 5 Positionnement, répartition des points

## 5.1 Problèmes de positionnement

Avec la méthode de détermination de la rectitude basée sur le retournement de la règle, il existe un réel problème de mise en position dans la mesure où il faut retourner et replacer la règle. Une erreur de position angulaire (faible) de la règle provoque une rotation de la courbe assimilable à un défaut de perpendicularité [EKI2007]. Il suffit de supprimer la pente de la rectitude et de mesurer de manière indépendante le défaut de perpendicularité (ce qui est d'ailleurs purement conventionnel).

Un défaut de mise en position par translation suivant l'axe transversal de la règle provoque une simple translation de la courbe de rectitude sans effet sur sa forme.

Une erreur de position de la règle par translation suivant l'axe longitudinal, par contre, fournit une erreur relativement négligeable, si ce déplacement reste relativement très faible et que la règle possède un état de surface rodé et poli mais ne peut être supprimé du résultat. Par contre, s'il existe un bruit de mesure causé par une rugosité significative de la règle, la mise en position selon cet axe longitudinal est à réaliser avec le maximum de précision.

Une erreur de position de la règle par translation verticale (suivant l'épaisseur de la règle) provoque également un bruit de mesure dû à la rugosité de la règle et à sa forme transversale.

## 5.2 Minimisation des problèmes de positionnement

Afin de minimiser au maximum les problèmes de positionnement, il faut définir un référentiel reproductible et un système mécanique de mise en position qui ne déforme pas la règle.

La détermination du référentiel doit pouvoir être la même pour les deux types de mesure, c'est-à-dire avant et après retournement.

La position des trois points de posage doit être prévue telle que deux des points soient le plus proche possible de cette face de mesure [Figure 16]. Bien entendu ces points sont positionnés au  $2/9^{\text{ème}}$  de la longueur de la règle. Si on considère que les points de posage sont fixes par rapport au référentiel de la machine, alors  $P_1$  et  $P_3$  [Figure 16] doivent être alignés avec la face de mesure et au plus près de cette face, ce qui signifie que lors du retournement, il faudra déplacer  $P_3$  tel que  $P_2$  et  $P_3$  soient alignés. On évitera de placer  $P_2$  au milieu de la règle pour qu'un effort de frottement en  $P_2$  ne perturbe pas la règle en flexion.

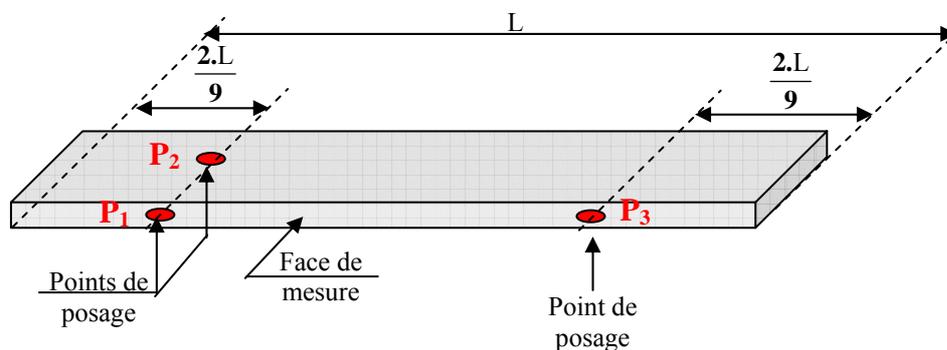


Figure 16 : position des points de posage

Le référentiel est construit en mesurant les trois mêmes plans aussi bien dans la mesure initiale que dans la mesure effectuée après retournement, soit en conservant les conventions de la Figure 1 :

- le plan ABCD (plan d'appui ou parallèle au plan d'appui selon le type de mesure) mesuré avec un palpeur horizontal.
- Le plan ABFE correspondant au plan suivant lequel sont effectués les points de mesures pour déterminer la rectitude.
- Le plan AEHD correspondant au plan du bout, c'est le plan qui permet de caler les mesures dans le sens longitudinal.

La détermination de la rectitude est effectuée au milieu de la face ABFE. La face de calage dans la direction longitudinale (AEHD), doit être de très bonne qualité (face rectifiée) pour permettre un bon recalage des mesures.

### 5.3 Répartition des points

Pour répartir convenablement les points de mesures, il faut pouvoir estimer différents paramètres comme le défaut de positionnement sur chacun des axes, les erreurs de poursuite machine, la répétabilité, la rugosité de la règle, de déformation de la règle. C'est en fonction de ces différents paramètres que doivent être repartis les points de mesure.

L'étude de la répartition optimum des points de mesure présentée est effectuée sur une règle rectifiée non polie lustrée réalisée par l'ELAG (Ecole Libre d'Apprentissage de Grenoble). Nous avons pu vérifier que le polissage de la règle permet de diminuer grandement le bruit de mesure (répétabilité). Nous souhaitons aller jusqu'à un poli lustrage.

#### 5.3.1. Défaut de positionnement sur chacun des axes

La face de calage dans la direction longitudinale (face AEHD), n'étant pas rectifiée, nous avons estimé le défaut de positionnement à  $\pm 0,1$  mm dans cette direction. Pour connaître cette erreur de positionnement, il suffit de définir un référentiel, de réaliser plusieurs fois la mesure de ce plan et d'évaluer la position suivant l'axe longitudinal d'un point de ce plan construit par exemple comme étant l'intersection de ce plan par rapport à la droite principale de mesure. Suivant l'axe vertical, le défaut de positionnement est estimé à  $\pm 0,02$  mm car la face mesurée est rectifiée et la flexion minimisée. Le calage suivant l'autre direction est peu influente comme précisé ci-dessus.

#### 5.3.2. Erreurs de poursuites

Les erreurs de poursuite ont directement été évaluées sur des mesures de rectitude de type yTx. Les résultats ne sont présentés que sur un type de mesure (position initiale) [Figure 17 pour

l'axe x et **Figure 18** pour l'axe z]. Pour l'autre type (position retournée) les résultats sont équivalents.

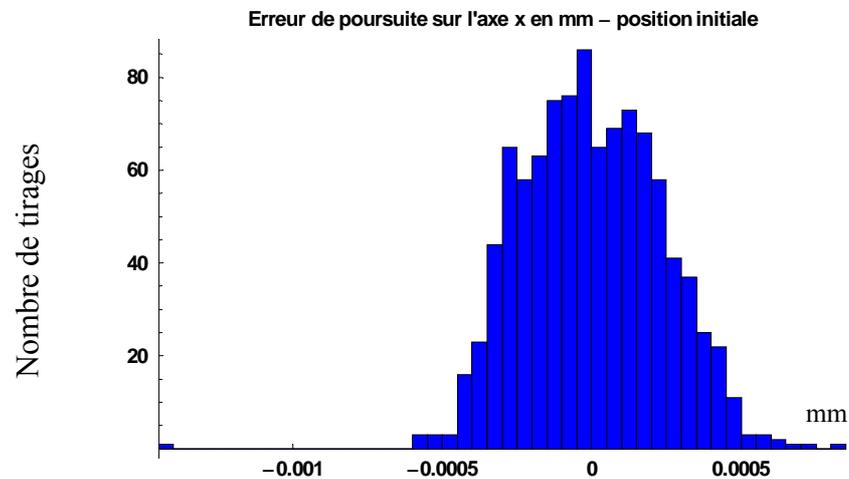


Figure 17 : erreur de poursuite suivant l'axe x

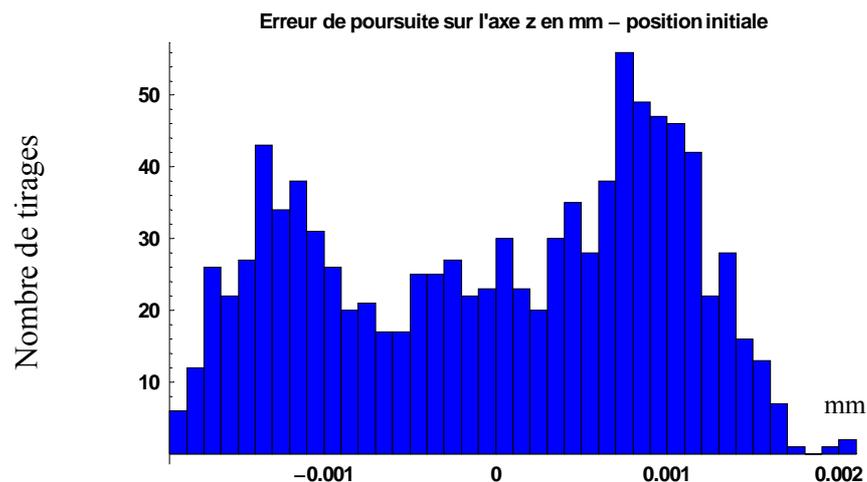


Figure 18 : erreur de poursuite suivant l'axe z

Les erreurs de poursuite sont relativement faibles. Nous les fixerons à  $\pm 2 \mu\text{m}$  et nous vérifierons qu'elles restent bien dans cet ordre de grandeur.

### 5.3.3. Répétabilité

Elle a également été évaluée sur des mesures de rectitude. Plusieurs mesures sont effectuées et on évalue la dispersion à  $\pm 0,3 \mu\text{m}$ .

### 5.3.4. Rugosité de la règle

Elle a été étudiée de la façon présentée au paragraphe 2 de ce chapitre, dans les deux directions principales, c'est-à-dire dans le sens longitudinal et dans le sens transversal [**Figure 19**]. En effet, la rugosité est différente suivant ces deux directions à cause des conditions de rectification de la règle.

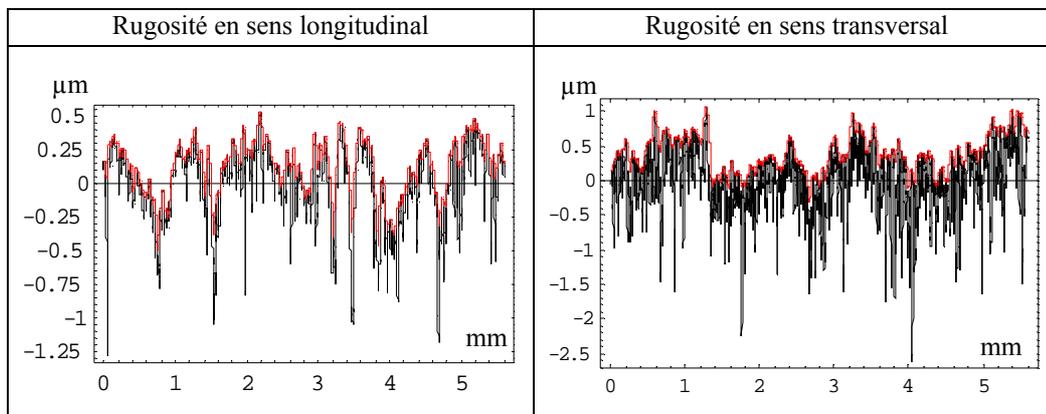


Figure 19: Rugosité de la règle avant (noir) et après filtrage par la bille (rouge) dans les deux sens considérés

### 5.3.5. Déformations de la règle

La déformation due au bridage est contrôlée.

### 5.3.6. Simulation et résultats

La simulation a été effectuée de la façon suivante : les différents paramètres perturbant la mesure ont été évalués et on calcule la distance optimale entre les points tel que l'on minimise l'écart type des mesures en considérant des sites de trois points suivant l'axe longitudinal et 3 points suivant l'axe transversal pour simuler des sites de cinq points [Figure 21]. On considère un profil, on décale le profil d'une certaine valeur, on effectue la différence entre le point situé sur le profil initial et celui sur le profil décalé. On recherche donc à minimiser cette différence et plus précisément à minimiser l'écart type de cette différence [Figure 20] afin d'obtenir le pas optimum entre deux points du site de points.

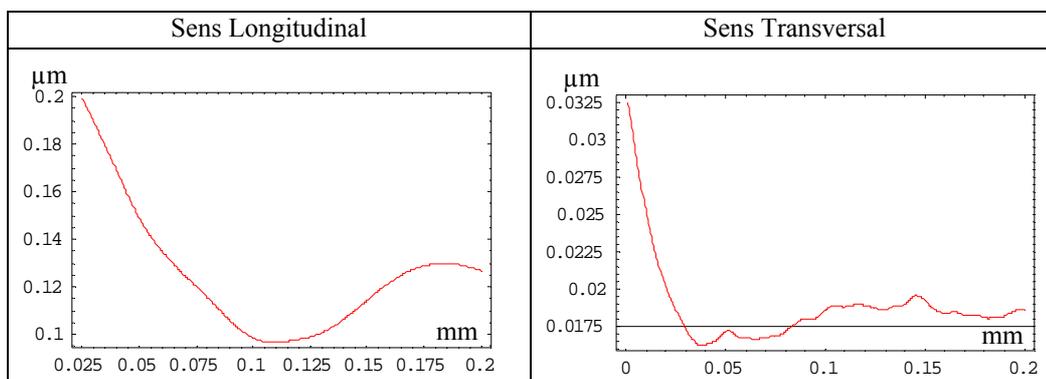


Figure 20 : Evolution de l'écart type de la différence de hauteur du profil et du profil décalé

La face de calage dans la direction longitudinale, n'étant pas rectifiée, nous avons estimé un défaut de positionnement de  $\pm 0,1$  mm dans cette direction. De notre analyse nous en déduisons que ce paramètre est le paramètre prépondérant vis-à-vis des défauts d'état de surface, d'erreurs de poursuite et de répétabilité. Ainsi nous obtenons par calcul une position optimale entre deux points longitudinaux de l'ordre de  $0,1 \text{ mm} \pm 0,02 \text{ mm}$ .

Au vu de la rugosité de la face rectifiée dans le sens transversal, la distance optimale dans le sens vertical est de  $0,05 \text{ mm} \pm 0,015 \text{ mm}$ . Dans ce sens, la rugosité de la règle est le paramètre

prépondérant vis-à-vis des erreurs de poursuite, de répétabilité, de flexion de la règle sous poids propre, de positionnement (dans la mesure où l'on conserve les mêmes faces de référence en position initiale et en position retournée).

La position optimisée des points de mesure sur la face rectifiée est donc la suivante :

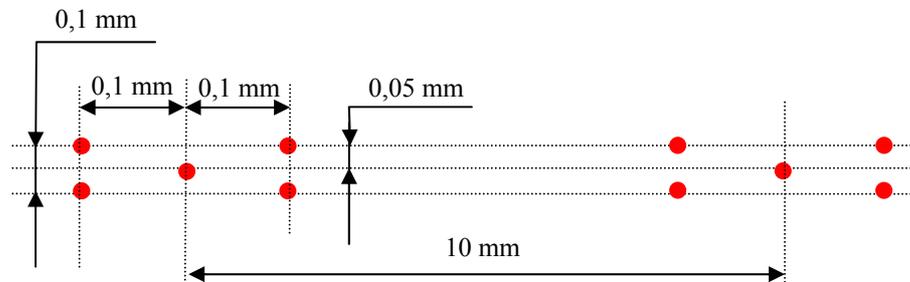


Figure 21 : Optimisation de la répartition des points pour la mesure de rectitude

## 6 Conclusion

La méthode du retournement est simple mais sa mise en œuvre est délicate. La rugosité de la règle et la qualité de la remise en position sont essentielles pour la qualité du résultat.

Les causes d'incertitudes sont essentiellement : la rugosité, la remise en place et l'erreur de poursuite, le palpeur, la répétabilité de la machine, les incertitudes sur la mesure de l'axe considéré et les défauts de répétabilité de la machine.





# CHAPITRE IV :

## Systemes de palpage

### SOMMAIRE

1	Introduction .....	90
2	Palpeurs dynamiques .....	90
2.1	Présentation .....	90
2.2	Réponse d'un palpeur dynamique : expérimentation .....	91
2.3	Modèle théorique.....	92
2.4	Vers un modèle mixte 2D/3D.....	95
2.4.1	Modélisation du trilobe en utilisant les fonctions équivalentes .....	95
2.4.2	Modèle suivant un méridien.....	97
3	Tête mesurante Leitz.....	100
3.1	Généralités.....	100
3.2	Ecart suivant la normale .....	101
3.3	Erreur tangentielle .....	103
3.4	Proposition de modèle de comportement .....	104
3.5	Etude des déflexions de la tête mesurante .....	105
3.5.1.	Etude des déflexions du parallélogramme X - $D_X$ .....	105
3.5.2.	Etude des déflexions du parallélogramme Y - $D_Y$ .....	105
3.5.3.	Etude des déflexions du parallélogramme Z - $D_Z$ .....	106
3.5.4.	Calcul du pseudo angle de frottement.....	107
3.6	Problèmes de répétabilité .....	108
4	Prise en compte des défauts de la tête.....	109
5	Multi palpeur et Scanning.....	110
5.1	Multi palpeur .....	110
5.2	Mesures en scanning .....	113
6	Conclusion.....	116

# Systemes de palpation

## Introduction

La structure mécanique d'une machine à mesurer permet d'assurer le repérage du déplacement dans l'espace du palpeur grâce aux règles de lecture équipant les axes de la machine.

En matière de palpeurs, nous nous intéresserons à deux technologies différentes, à savoir : le palpeur dynamique Renishaw type TP2 ou TP6 équipant la machine du laboratoire de l'ENSAM et la tête mesurante Leitz du CETIM de Senlis en mesure point à point. La tête mesurante du CETIM permet également de faire des mesures de scanning qu'il est prévu d'étudier ultérieurement.

Les incertitudes liées aux palpeurs sont loin d'être négligeables et ont une importance forte sur la mesure des pièces et notamment sur les mesures de pièces de forme circulaire. Il est donc primordial de les étudier de manière très précise dans l'optique d'effectuer un bilan complet des causes d'incertitudes, et, dans la mesure du possible, nous tenterons de supprimer la part systématique des défauts de ces deux dispositifs de mesure.

## Palpeurs dynamiques

### 2.1 Présentation

Le comportement et les caractéristiques des palpeurs dynamiques [Figure 1] sont à l'heure actuelle assez bien connus. Néanmoins, il n'existe pas réellement de corrections ou de prise en compte par les utilisateurs des informations connues.

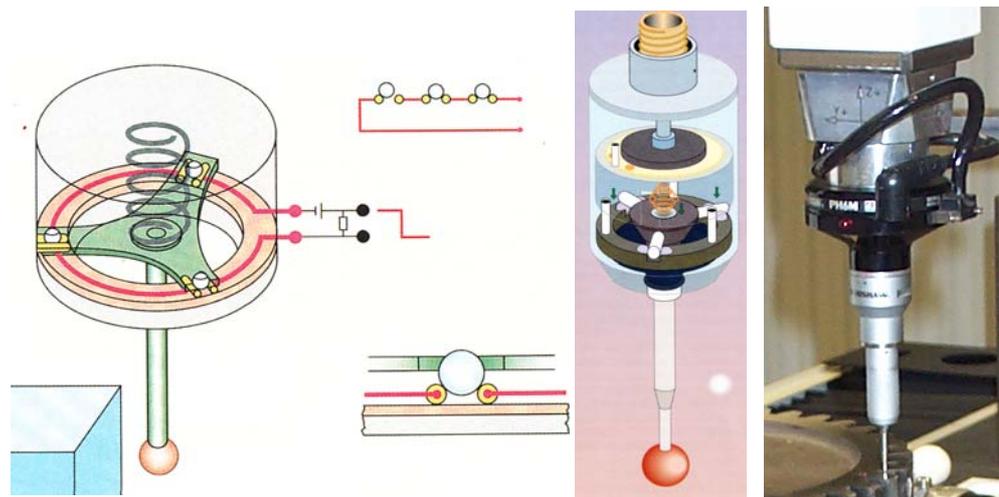


Figure 1 : Schémas et photo d'un palpeur TP2 Renishaw

Un palpeur à déclenchement est, de façon classique, basé sur une liaison isostatique dite de Boyce. Cette liaison est constituée de trois petits cylindres constituant une étoile à trois branches à 120 degrés les unes des autres reposant chacune sur un groupe de deux billes pour

former deux appuis ponctuels situés sur un cercle. Le plaquage des cylindres sur les petites billes est assuré par un ressort de tarage dont on peut régler la force en le comprimant plus ou moins via une vis de réglage dans l'axe et en partie haute du palpeur. L'effort exercé par le palpeur sur la pièce au moment de la prise de mesure est conditionné entre autre par le réglage de cette force de tarage. Pour garantir une bonne répétabilité du système, il vaut veiller à assurer un effort de 0,05 à 0,1N au minimum au moment de la prise de mesure. Néanmoins, un effort de tarage trop important conduira à des flexions de stylet importantes.

La prise de mesure de ce type de palpeur s'effectue à la volée. La bille accoste la pièce à vitesse constante, donc à accélération nulle, et on détecte le contact entre la pièce et la bille sous la forme d'un top de lecture des règles de mesure du déplacement des axes de la machine à mesurer tridimensionnelle. En fait, le palpeur sert d'interrupteur lorsqu'il rentre en contact avec la pièce. Les coordonnées du point mesuré sont alors les coordonnées machine du centre de la bille du palpeur.

La vitesse d'accostage est de l'ordre de 0,5 à 1 mètre par minute.

Techniquement, la prise de mesure est assurée par l'évolution de la résistance du montage des 6 contacts en série [Figure 1]. Au moment du contact entre la pièce et le palpeur, on passe d'une situation isostatique à une situation hyperstatique à sept points de contact. L'étoile se déplace donc pour retrouver une situation d'équilibre et au moins un des contacts tend à se décoller. Un montage électrique simple de type comparateur consiste à déclencher l'impulsion au moment où la résistance atteint une valeur seuil non nul. Cette technique garantit qu'en fait les appuis de l'étoile sont en place au moment du déclenchement et que le mouvement de celle-ci est limité à l'effet de l'élasticité des contacts ponctuels.

La conception de ce système induit des efforts différents pour la prise de mesure en fonction de la direction d'accostage. Dans la bibliographie, il est relativement facile de trouver la forme du trilobe caractéristique d'une mesure dans le plan de l'étoile [BUT1991 - AST1997-1 - AST1997-2 - CAU1998 - DOB2005 - WOZ2005] mais l'écriture des modèles 3D est moins satisfaisante [MAY1996 - EST1996 - EST1997-1 - SHE1997-1 - SHE1997-2 - DOB2003 - WOZ2003]. Nous avons mis au point une modélisation 3D du comportement de ce type de palpeur basée sur l'écriture du principe fondamental de la statique mais surtout nous montrons que le passage d'un modèle 2D à un modèle 3D peut être réalisé de manière très simple permettant une correction efficace.

## 2.2 Réponse d'un palpeur dynamique : expérimentation

Le comportement d'un palpeur en 3D est facilement identifiable expérimentalement. Il suffit de mesurer une bille de bonne qualité géométrique, comme une grosse bille rubis de stylet (8 mm de diamètre) fixé sur la machine ou une bille de référence (environ 25 mm de diamètre). Comme la mesure d'une bille de petit diamètre est une mesure locale, les défauts dus à la machine sont négligeables et on identifie ainsi les défauts du système de palpation. Néanmoins, il convient de faire quelques essais en permutant la sphère de référence pour vérifier le défaut de forme celle-ci qui n'est pas forcément négligeable dans toutes les zones en particulier dans la zone de l'encastrement.

L'analyse d'une série de mesures ayant montré des incohérences, nous avons été amené à mettre en cause la sphère utilisée. La Figure 2 montre les écarts dans la direction de la normale de la mesure à l'équateur de cette sphère de référence Zeiss inclinée à 45°. L'ovalisation de celle-ci est assez importante. La différence entre les 2 cercles concentriques représentés est de environ 0,43µm et correspond à un cercle proche de la zone d'encastrement. La sphère avait pourtant un certificat d'étalonnage satisfaisant mais la mesure a probablement été faite sur un seul cercle dans un plan orthogonal à l'encastrement, ce qui est insuffisant.

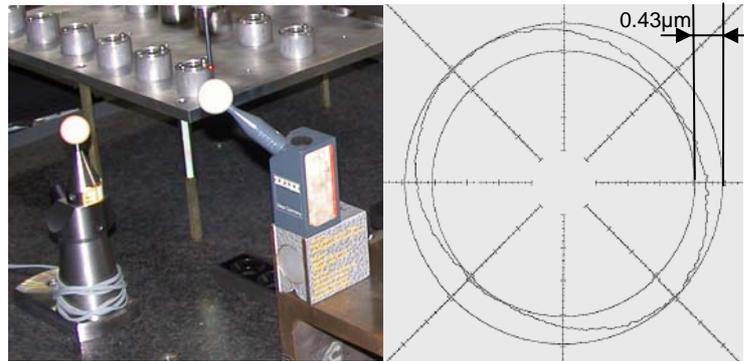


Figure 2 : Photo et résultat de palpé d'une sphère de référence Zeiss inclinée à 45°

Pour caractériser la réponse d'un palpeur dans le plan XY de la machine, il suffit de mesurer une sphère au niveau de l'équateur, c'est-à-dire parallèlement au plan de l'étoile à trois branches du palpeur. Dans ce cas, on retrouve évidemment la forme du trilobe, correspondant à la variation de l'effort de décollement (effort tranchant sur le stylet) présent dans de nombreux articles. La **Figure 3** présente les résultats expérimentaux d'une mesure d'un palpeur Renishaw TP2 au niveau de l'équateur. La flexion maximale est de l'ordre de 10μm, ce qui est un ordre de grandeur typique. A droite, on trouve une figure issue de la bibliographie.

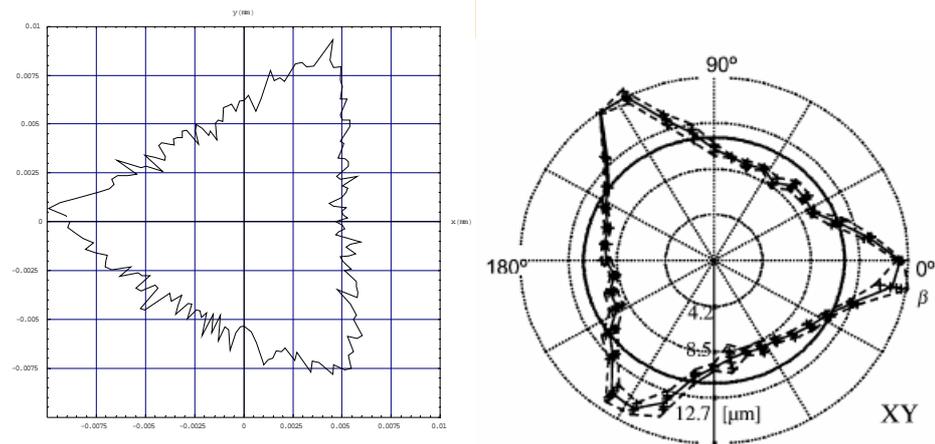


Figure 3 : Représentation des écarts suivant la normale de la mesure d'une sphère à l'équateur avec un palpeur dynamique Renishaw de type TP2, à droite, figure issue de [DOB2003 - WOZ2003]

### 2.3 Modèle théorique

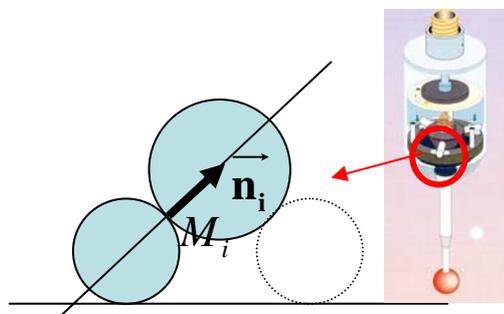


Figure 4 : modélisation d'un palpeur

On isole l'étoile à trois branches posées sur 6 points de contact caractérisés par  $M_i$  et la normale  $\vec{n}_i$  telle que  $\|\vec{n}_i\| = 1$  pour  $i=\{1,6\}$ . On suppose l'absence de frottement de contact donc les efforts sont notés  $\vec{F}_i = F_i \cdot \vec{n}_i$ . Le point de contact du ressort est noté O et l'effort correspondant est noté  $\vec{T}$ . Le point de contact entre la bille en rubis et la pièce est noté C et l'effort de contact est noté  $\vec{P}$ . On décide d'écrire l'équilibre du solide isolé au point O, on a donc :

$$\begin{cases} \sum_{i=1,6} F_i \cdot \vec{n}_i + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \\ \sum_{i=1,6} \vec{OM}_i \wedge F_i \cdot \vec{n}_i + \vec{OC} \wedge \vec{P} = \vec{0} \end{cases}$$

Les projections fournissent 6 équations. On a 7 inconnues, les efforts de contact  $F_i$  et l'effort  $P$  si on fixe la direction du contact. Ce décompte correspond à un système hyperstatique. Pour résoudre le système, on fait l'hypothèse que l'un des points de contact décolle (avec la limite déjà décrite à ce sujet). Physiquement, il y a un changement de configuration au moment du décollement mais, mathématiquement, les équations correspondent à un contact bilatéral et sont linéaires. L'idée est de calculer les 6 efforts  $F_i$  pour  $P = 0$  d'une part et pour une valeur de  $P$  suffisamment grande pour être certain du décollement, par exemple,  $P = 10\text{N}$ .

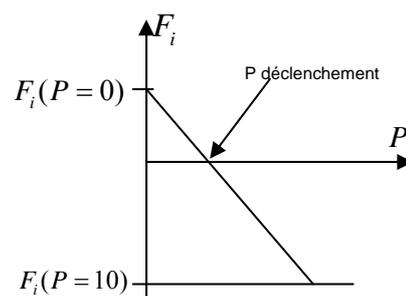


Figure 5 : détection de l'appui le plus déchargé

Puisque pour  $P=0$  tous les appuis sont chargés de la même manière, il suffit donc de tester l'appui correspondant à « l'effort de contact » le plus négatif pour  $P = 10\text{N}$ . Cet appui décolle le premier [Figure 5]. Une simple règle de trois fournit l'effort  $P$  correspondant.

Si on suppose que le stylet est une poutre encastree de longueur  $l$ , de moment quadratique constant  $I$  et de module d'Young  $E$  alors on a la précourse évaluée par la formule :

$$Pr = \frac{P \cdot l^3}{3EI}$$

Dans cette formule, si le stylet a un diamètre  $d$ , on a  $I = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$ . La précourse est très sensible au

choix de  $l$  et de  $d$ . Par exemple, choisir  $d=1\text{mm}$  plutôt que  $d=1,5\text{mm}$  revient à multiplier la précourse par  $1,5^4$  soit environ 5. Lorsque l'opérateur choisit un stylet, il a une influence majeure sur l'incertitude de mesure. En pratique, lorsqu'on augmente la longueur du stylet, les accélérations de la commande numérique tendent à faire déclencher le palpeur ce qui justifie souvent une augmentation du tarage et donc de l'effort de déclenchement. Le métrologue a donc tout intérêt à optimiser son choix de stylet pour effectuer des mesures convenables.

La Figure 6 est un résultat de calcul dans le plan équatorial de la bille c'est-à-dire pour un effort tranchant vis-à-vis du stylet. Les six points au centre de la figure correspondent à la

position des points de contact. Les autres points décrivent l'effort nécessaire au basculement de l'étoile. L'effort de tarage du ressort est de 1N. Le stylet a une longueur de 30mm.

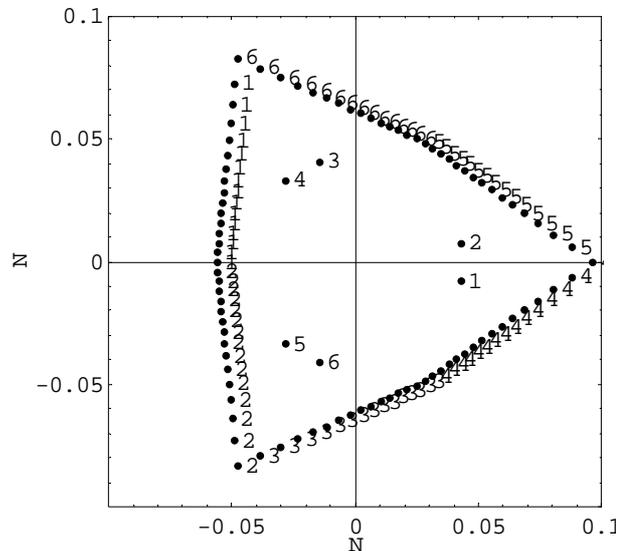


Figure 6 : Représentation de l'effort nécessaire au basculement et du numéro du point basculant

Sur la **Figure 7**, nous avons effectué une représentation sur laquelle on a supprimé un défaut de centrage et le rayon moyen à gauche et une représentation cartésienne à droite. La représentation cartésienne a l'avantage de ne pas se déformer si le rayon est mal évalué.

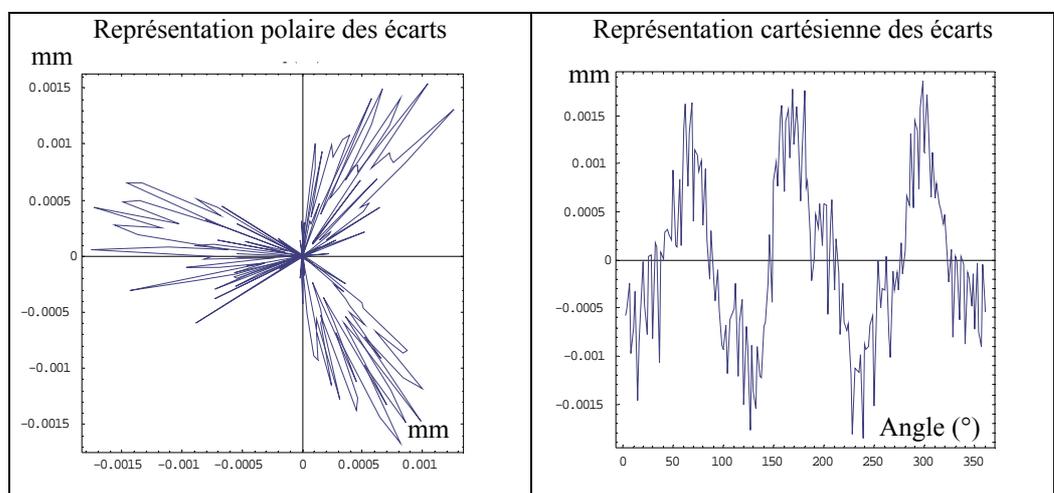


Figure 7 : Représentation classique de la réponse du palpeur dynamique dans le plan de l'étoile – représentation polaire et cartésienne.

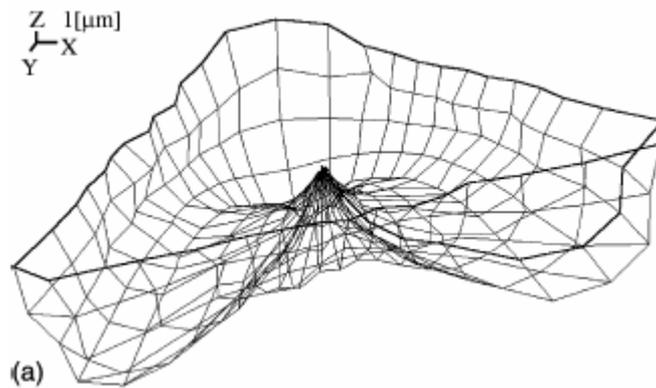


Figure 8 : représentation 3D [WOZ2003]

Le modèle développé permet de faire des représentations 3D comme celle de la figure X tout en proposant un formalisme beaucoup plus concis que ceux proposés par les publications déjà citées. Cette représentation en pomme [Figure 8] est classique, elle correspond aux flèches du stylet mais elle n'est pas très satisfaisante. En terme d'incertitudes, seuls les écarts suivant la normale provoqués par la flexion du stylet sont importants et ils sont négatifs.

## 2.4 Vers un modèle mixte 2D/3D

En pratique, la mesure des écarts dans le plan équatorial de la bille est simple, par contre, l'identification du modèle 3D est bien plus compliquée. Nous proposons un modèle basé sur une modélisation du trilobe dans le plan couplé avec un modèle simple du passage au 3D.

### 2.4.1 Modélisation du trilobe en utilisant les fonctions équivalentes

Il est tout à fait possible d'utiliser les fonctions équivalentes, justesse et rectitude, introduites au chapitre 1, pour caractériser la forme du trilobe [Figure 7].

On utilise un polynôme d'interpolation de degré 6 (polynôme de Tchebychev d'ordre 7) pour chacune des fonctions équivalentes afin de tenir compte de la symétrie de la conception mécanique décrite précédemment. On identifie la forme du trilobe par optimisation aux moindres carrés à l'aide d'une variation de rayon et des deux défauts équivalents [Figure 9 et Figure 10]. Ce modèle lisse le comportement du palpeur [Figure 9] alors qu'il existe trois points de rebroussement à  $120^\circ$ , au raccord entre chacune des branches, résultant de la conception mécanique. Néanmoins, le résidu entre les mesures réelles et le modèle est pratiquement un bruit blanc de  $\pm 0,2\mu\text{m}$  [Figure 11].

Avec ce type de résolution, il est donc relativement simple d'effectuer des corrections des mesures dans le plan et diminuer les incertitudes de mesure dues au système de palpation.

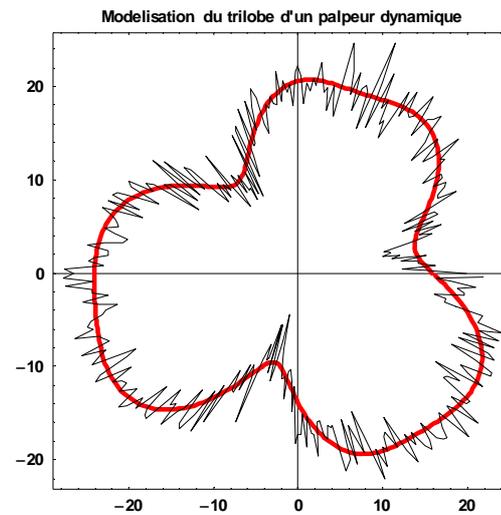


Figure 9 : Représentation à l'échelle 10000 des écarts dans la direction de la normale relevés de la mesure de l'équateur d'une sphère de référence à l'aide d'un palpeur dynamique Renishaw TP2

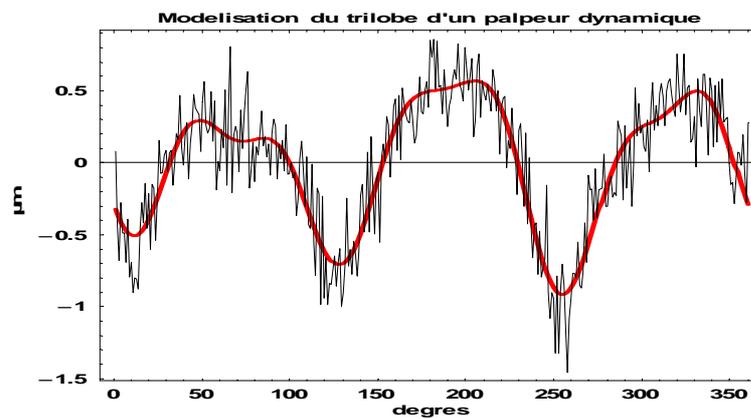


Figure 10: Représentation des écarts dans la direction de la normale en fonction de l'angle de la mesure de l'équateur d'une sphère de référence à l'aide d'un palpeur dynamique Renishaw TP2

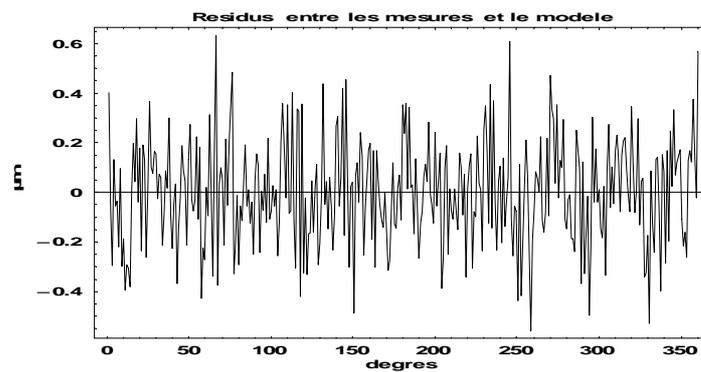


Figure 11 : Résidus entre les écarts mesurés et le modèle utilisé

### 2.4.2 Modèle suivant un méridien

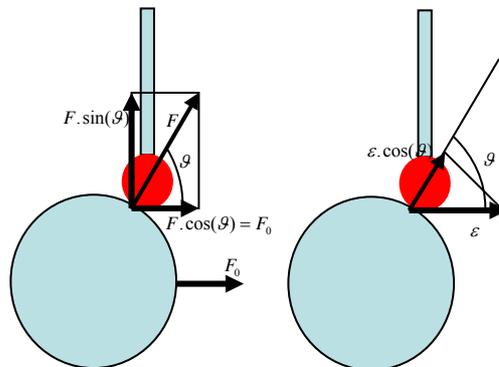


Figure 12 : analyse de la mesure 3D

La **Figure 12** montre que l'effort suivant la normale (on néglige le frottement) peut se décomposer en un effort tranchant et un effort de compression. L'effort de compression a une influence négligeable sur la déformation du stylet. L'effort tranchant qui fait basculer l'étoile est le même que dans le plan équatorial, donc la flexion est la même. Par contre, La flèche du stylet n'est pas vue en vraie grandeur, on obtient  $\varepsilon \cdot \cos(\theta)$ . Au pôle, la flexion du stylet est donc nulle.

Pour expérimenter ce modèle très simple, on reprend l'acquisition précédente et on repère un plan correspondant à une flèche maximale d'un coté et une flèche minimale de l'autre [**Figure 13**] en analysant la courbe de la **Figure 7**. Pour cette mesure, les écarts ont été recentrés aux moindres carrés, la symétrie des points mesurés permet de donner le même poids à chaque point, le rapport entre la plus grande flèche et la plus petite est de l'ordre de 1,8 (cette évaluation est obtenue grâce au modèle développé).

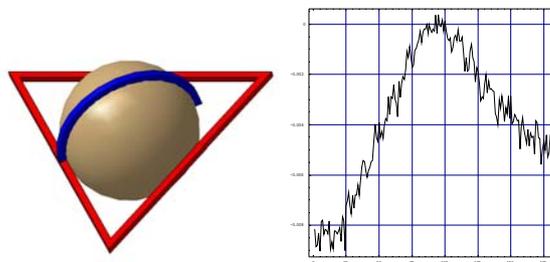


Figure 13 : mesure dans un plan privilégié de l'étoile

On obtient le résultat de la **Figure 13** après un recalage des résultats qui consiste à écrire que la flèche est quasi nulle lorsque le stylet est sollicité en compression pure et que dans le plan étudié le rapport des flèches est de 1.8. La **Figure 14** montre le modèle en cosinus qui fournit une excellente approximation du comportement du palpeur.

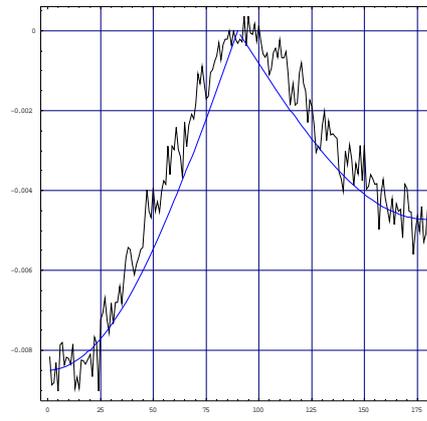


Figure 14 : modèle en cosinus

On peut améliorer le modèle en remarquant que la composante  $F \cdot \sin(\vartheta)$  tend à diminuer la précontrainte réalisée par le ressort. On pose : « T » l'effort du ressort, « L » la longueur de la tige du stylet comptée comme la distance entre le centre de la bille et le centre de l'étoile, « a » la dimension d'une des branches de l'étoile, « F » l'effort de palpation, «  $\vartheta$  » l'angle entre le plan de l'équateur et le point considéré.

Alors, l'effort minimal de basculement vaut :  $a \cdot (T - F \cdot \sin(\vartheta)) = L \cdot F \cdot \cos(\vartheta)$  soit  $a \cdot T = (a \cdot \sin(\vartheta) + L \cdot \cos(\vartheta)) F$  d'où  $L \cdot F \cdot \cos(\vartheta) = \frac{L \cos(\vartheta)}{a \cdot \sin(\vartheta) + L \cos(\vartheta)} a \cdot T$ . Le terme  $\frac{L \cos(\vartheta)}{a \cdot \sin(\vartheta) + L \cos(\vartheta)}$  apparaît

comme un coefficient qui corrige le moment de basculement  $aT$  donc l'effort nécessaire au déclenchement et donc la flèche. La **Figure 15** est un ajustement grâce à ce nouveau modèle. Ce modèle est plus satisfaisant que le précédent, le modèle en cosinus correspond simplement à considérer que la distance  $a$  est négligeable devant  $L$ .

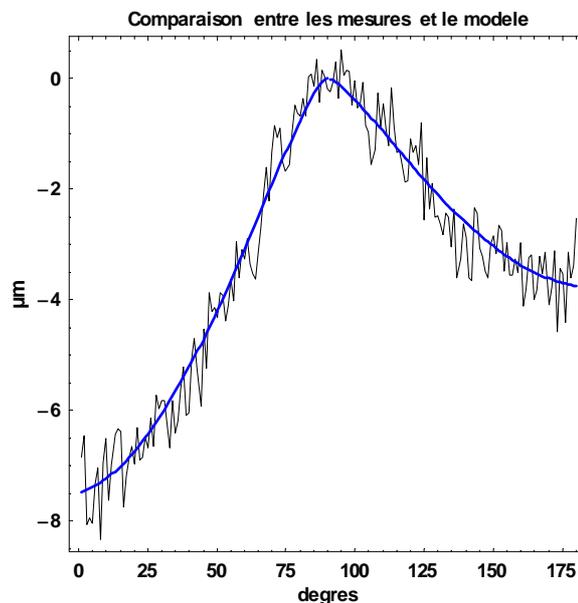


Figure 15 : mesure de l'écart dans la direction de la normale pour une mesure le long d'un méridien passant par une des branches du trilobe

L'utilisation de ce modèle simple permet de grandement diminuer les défauts du système de palpation dans la mesure où l'on trouve un résidu entre les mesures expérimentales et le modèle de moins de  $\pm 1\mu\text{m}$  [Figure 16].

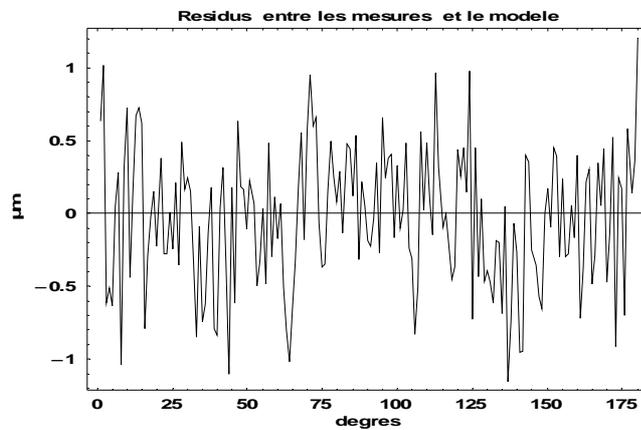


Figure 16 : Tracé des résidus entre les mesures et le modèle utilisé

### 3 Tête mesurante Leitz

#### 3.1 Généralités

La prise de mesure d'une tête mesurante est une mesure considérée comme statique. Elle consiste à poser la bille sur la pièce et à mesurer avec la machine arrêtée ou en mouvement très lent. La mesure s'effectue donc à déplacement quasiment nul.

Il existe plusieurs constructeurs de tête mesurantes, les plus connus étant Zeiss, Leitz et Sip. L'idée de base de ces trois têtes est la même. La tête est constituée de trois parallélogrammes à lames flexibles orthogonaux deux à deux équipés chacun d'un système de mesure du déplacement. Pour le reste, les têtes sont forcément de conception et de fonctionnement différents d'un constructeur à un autre. Nous nous intéresserons uniquement à la tête mesurante Leitz du CETIM de Senlis.

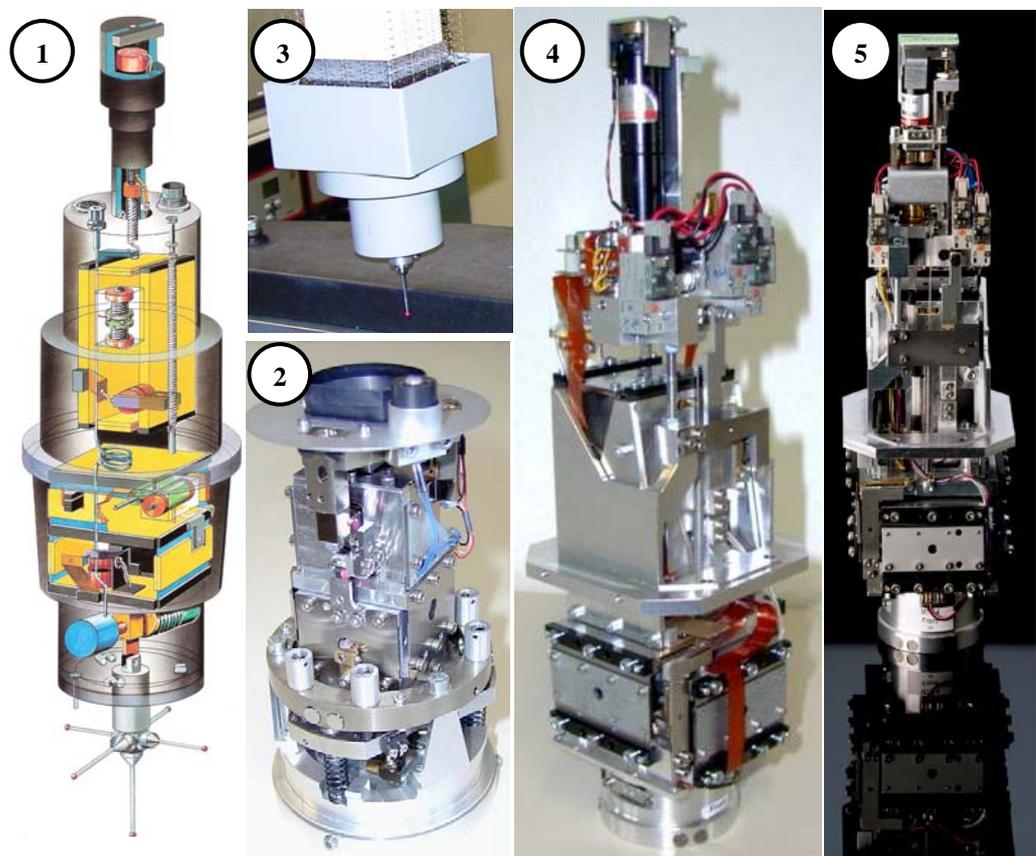


Figure 17 : Visualisation de têtes mesurantes Leitz

La tête mesurante Leitz est équipée de deux parallélogrammes imbriqués X et Y suspendus sous un parallélogramme d'axe de déplacement Z vertical. Elle est équipée de générateur d'effort passif c'est-à-dire de ressorts. Lorsque la bille entre en contact avec la pièce, les parallélogrammes bougent (déflexion) jusqu'à une valeur seuil. Ensuite la machine recule dans la direction de la normale d'accostage et une série de points correspondant à la position de la machine d'une part et à la déflexion de la tête d'autre part sont enregistrés. Une régression au

sens des moindres carrés permet de calculer le point de contact retenu est correspondant à une déflexion standard. La machine du CETIM est réglée pour une déflexion de  $50\mu\text{m}$ .

Il n'existe que peu d'informations sur les têtes mesurantes. Il faudra donc pratiquement que l'on travaille en boîte noire. Les articles de la bibliographie que nous avons trouvés sur le sujet traitent soit d'un autre type de tête mesurante et relativement anciennes [NAW1985 - PET1988], soit sont relativement général [WEC2004], soit se concentrent sur la mesure en scanning [SAV2006 – MAN2007 - PER2007].

La **Figure 17** présente sur la photo 1, un schéma d'une tête Leitz de première génération issue d'une ancienne documentation commerciale [LEI1990], sur les photos 2 et 3 la tête montée sur la machine à mesurer du CETIM (LSP S4) et sur les **photos 4 et 5**, une photo du dernier modèle sorti (LSP X5).

### 3.2 Ecart suivant la normale

Lorsqu'on effectue une mesure sous Quindos (le logiciel de Leitz), il est possible de récupérer les écarts dans la direction de la normale calculée, les coordonnées théoriques et réelles des points d'accostage, les coordonnées du centre de la bille du palpeur au moment du contact, les coordonnées réelles et théoriques des normales de contact et enfin les déflexions des différents parallélogrammes de la tête. Nous nous proposons d'étudier l'ensemble de ces informations sur des mesures suivant l'équateur d'une sphère de référence. Seule une étude dans ce plan XY est effectuée pour l'instant dans la mesure où l'étude porte essentiellement sur des mesures d'engrenages cylindriques droits.

[**Figure 18**], le point réellement touché M est le point de contact entre la surface réellement mesurée et la bille du stylet. Ce point se trouve évidemment dans la direction de la normale réelle d'accostage.

Deux types d'écarts dans la direction de la normale peuvent être évalués [**Figure 18**]. On peut définir un écart suivant la normale  $\varepsilon_2$  au point réellement touché ou un écart suivant la normale  $\varepsilon_1$  calculé par rapport au point visé parallèlement à la normale théorique.

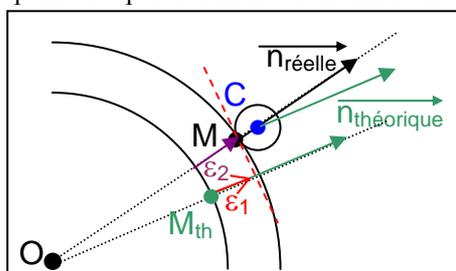


Figure 18 : 2 écarts suivant la normale possibles

On considère la mesure de la sphère de référence de la Leitz suivant l'équateur (mesure de cercles de points) et si on note :

- O le centre de la sphère et R le rayon de la sphère,
- r le rayon de la bille du stylet et C son centre de coordonnées  $(X_{\text{mesuré}}^C, Y_{\text{mesuré}}^C, Z_{\text{mesuré}}^C)$
- $M_{\text{th}}$  le point théorique visé et  $(X_{\text{th}}, Y_{\text{th}}, Z_{\text{th}})$  les coordonnées de  $M_{\text{th}}$ ,
- M le point réellement mesuré,
- $\varepsilon_1$  l'écart dans la direction de la normale approchée.

Alors :  $\vec{MC} = r \cdot \vec{n}_{\text{th}}$  soit  $\varepsilon_1 = \vec{M}_{\text{th}} M \cdot \vec{n}_{\text{th}}$

Dans la mesure où les mesures sont effectuées sur une sphère ; il est possible de calculer l'écart

$\varepsilon_2$  tel que  $\varepsilon_2 = \sqrt{(X_{\text{mesuré}}^C)^2 + (Y_{\text{mesuré}}^C)^2 + (Z_{\text{mesuré}}^C)^2} - (R+r)$

La différence entre les deux méthodes de détermination de l'écart est présentée sur la **Figure 19** en coordonnées cartésiennes et en polaires.

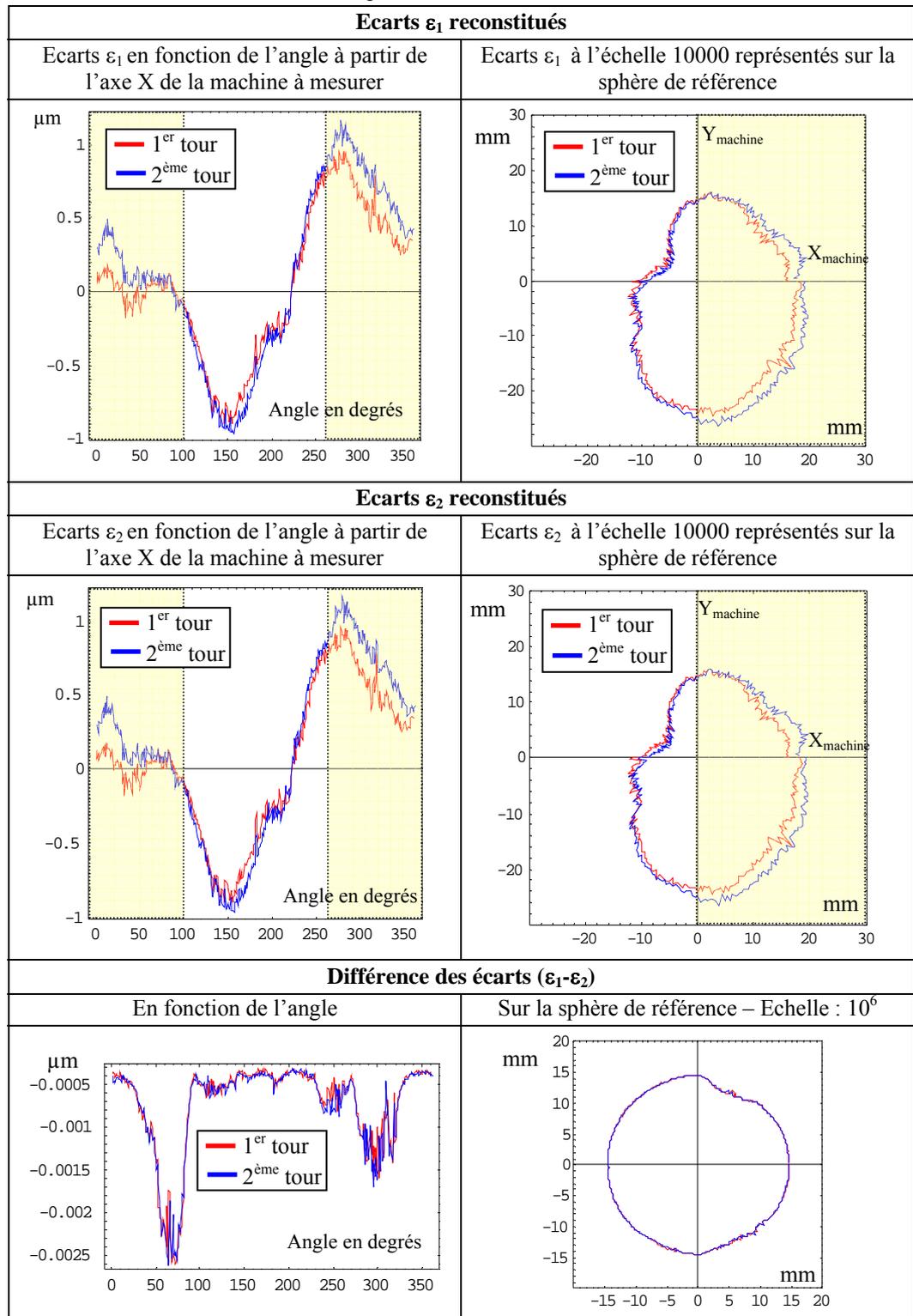


Figure 19 : Etude des écarts dans la direction de la normale suivant les 2 méthodes de calcul

Dans la zone ( $X > 0$ ) où l'on constate une variation de l'écart dans la direction de la normale mesurée. Cette variation est de l'ordre de 0,3 à 0,4  $\mu\text{m}$ , ce qui n'est pas négligeable pour une tête mesurante (zone en jaune transparent sur la **Figure 19**) mais surtout cette variation n'a pas la nature d'un bruit, cela ressemble à l'effet d'un frottement.

La différence de calcul des écarts ( $\varepsilon_1$  ou  $\varepsilon_2$ ) est négligeable [**Figure 19**] même si elle est plus importante dans la zone X positif.

### 3.3 Erreur tangentielle

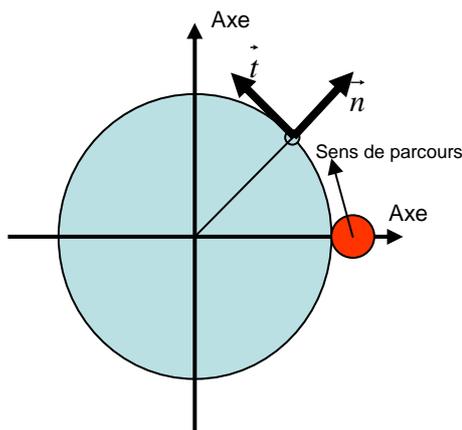


Figure 20 : mesure d'une bille pour qualifier le palpeur

On réalise une mesure dans le plan équatorial de la bille dans le sens trigonométrique en programmant 360 points  $M_i$  sur un cercle. On définit la normale  $\vec{n}_i$  en chaque point et le vecteur tangent  $\vec{t}_i$  orienté dans le sens du parcours [**Figure 20**]. Le point C est le centre de la bille du palpeur, r est le rayon de la bille : on définit le point touché  $M'_i$  par :  $\overrightarrow{M_i C} = r\vec{n}_i$ , on peut alors écrire :  $\overrightarrow{M_i M'_i} = (\overrightarrow{M_i M'_i} \cdot \vec{n}_i)\vec{n}_i + (\overrightarrow{M_i M'_i} \cdot \vec{t}_i)\vec{t}_i$  qui est une décomposition sur deux vecteurs orthogonaux.  $\overrightarrow{M_i M'_i} \cdot \vec{n}_i$  est l'écart dans la direction de la normale et  $\overrightarrow{M_i M'_i} \cdot \vec{t}_i$  est l'écart suivant la tangente. Si l'écart suivant la tangente est positif alors la machine est en avance sinon elle est en retard.

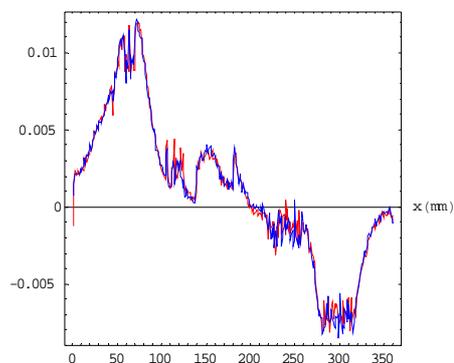


Figure 21 : Tracés des erreurs tangentielles calculées en fonction de l'angle

On retrouve une erreur tangentielle d'une dizaine de micromètres [Figure 21] dans le secteur  $X>0$ . Cette erreur tangentielle a un effet faible sur l'écart mesuré [Figure 22] mais est intéressante pour comprendre le comportement de la tête. Cet effet de 3nm correspond à la différence entre les définitions des écarts suivant la normale du paragraphe précédent.

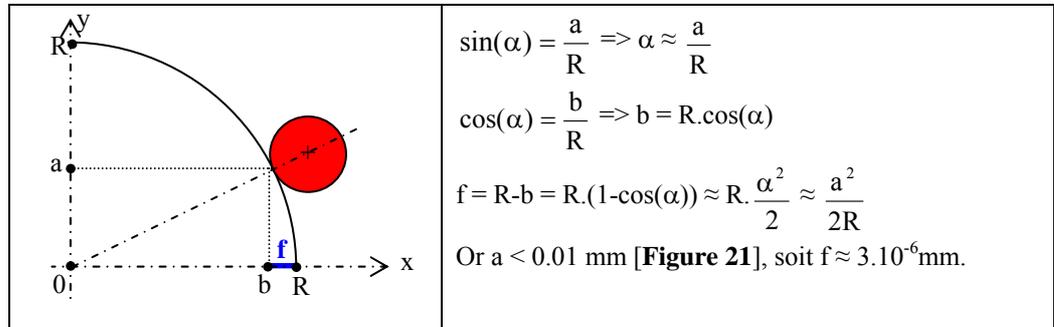


Figure 22 : Etude de l'influence de l'écart tangentielle sur la mesure de l'écart

### 3.4 Proposition de modèle de comportement

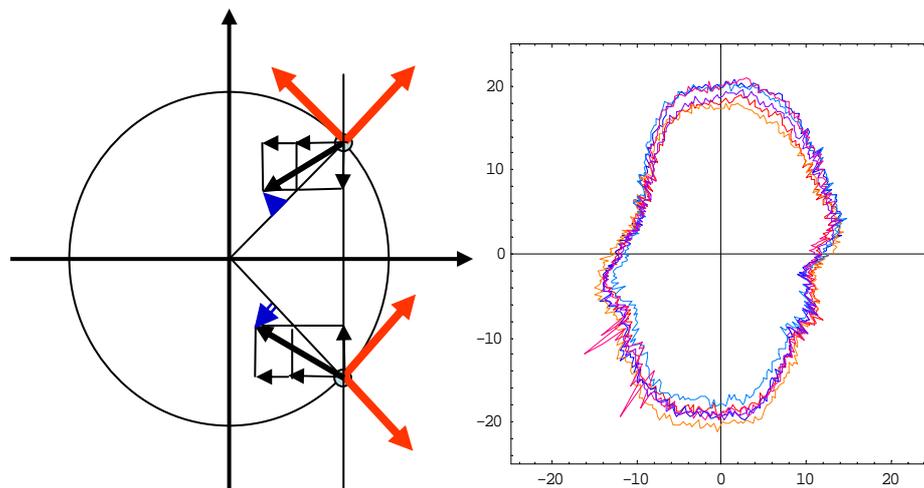


Figure 23 : analyse de l'erreur de poursuite et écarts suivant la normale

La déflexion totale est une constante et les déflexions sont colinéaires à l'effort de mesure. Supposons qu'il y ait un frottement au niveau du générateur d'effort qui travaille dans le secteur  $X>0$ . Les déflexions restent sensiblement correctes car la machine est pilotée dans la direction de la normale mais la flexion du stylet est mal corrigée et la machine avance trop dans la direction X. Après combinaison des déflexions et des positions de la machine, le point X est trop avancé. Le schéma de la Figure 23 montre que l'erreur de poursuite sera positive vers  $Y>0$  et négative dans le secteur  $Y<0$  conformément à l'expérience.

Quant à l'écart suivant la normale, en l'absence de problème, la tête fournit une déflexion  $(a \cos(\theta), a \sin(\theta))$ , après produit scalaire par la normale  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$  on retrouve la déflexion  $a$  qui est corrigée. Supposons maintenant que le déplacement vaille  $((a + \delta) \cos(\theta), (a + \delta) \sin(\theta))$  après produit scalaire et prise en compte de la déflexion, il reste une erreur  $\delta \cos^2(\theta)$  qui a la forme d'une ellipse allongée le long des axes. Ce qui paraît être notre cas. Une analyse en boîte noire est toujours délicate néanmoins, nous pensons que la tête sur

laquelle nous travaillons possède un défaut du générateur d'effort du secteur  $X > 0$ . Ce défaut provoque un défaut de répétabilité qui n'est pas un bruit, il ressemble à une hystérésis.

### 3.5 Etude des déflexions de la tête mesurante

On récupère les déflexions  $D_x$  et  $D_y$  des parallélogrammes de la tête mesurante. On travaille à déflexion totale constante soit  $\sqrt{D_x^2 + D_y^2} = 50\mu\text{m}$ , ce qu'on vérifie numériquement.

#### 3.5.1. Etude des déflexions du parallélogramme X - $D_x$

Le palpeur est réglé pour que sa déflexion totale soit de  $50\mu\text{m}$  au moment de la saisie. Projetée sur les axes X et Y, cette déflexion correspond à une fonction sinusoïdale de  $50\mu\text{m}$ . La déflexion du parallélogramme est proportionnelle à la projection de l'effort de contact sur la direction du parallélogramme.

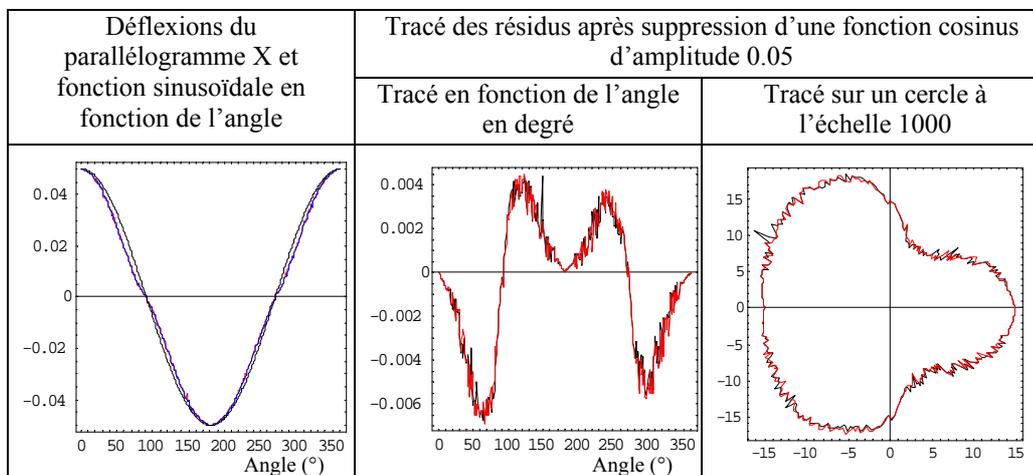


Figure 24 : Etude des déflexions du parallélogramme X

Entre le premier et le deuxième tour, les déflexions du parallélogramme suivant X de la tête mesurante sont répétables et s'équilibrent autour de la sinusoïde noire [Figure 24]. La différence entre les valeurs de déflexion et la sinusoïde permet de montrer une différence de comportement entre les mesures effectuées suivant  $X > 0$  et celles sur  $X < 0$ .

#### 3.5.2. Etude des déflexions du parallélogramme Y - $D_y$

Entre le premier et le deuxième tour, les déflexions du parallélogramme suivant Y de la tête mesurante sont répétables. Par contre, ces valeurs de déflexion, contrairement à celle de l'axe X, restent toujours au dessus de la sinusoïde [Figure 25]. La différence entre les valeurs de déflexion et la sinusoïde permet de montrer une différence de comportement entre les mesures effectuées suivant  $Y > 0$  et celles sur  $Y < 0$ . De plus, entre les mesures sur  $Y < 0$  et celle sur  $Y > 0$ , il existe une discontinuité (zone entourée en jaune transparent). Cette discontinuité de comportement peut s'expliquer si on considère qu'il existe un frottement au niveau du générateur d'effort qui travaille dans la direction X. En effet, si tel est le cas, comme la tête mesurante effectue sa mesure à déplacement constant, c'est-à-dire que la somme des carrés des déflexions est une constante, il faut que le parallélogramme Y compense les défauts de celui suivant X. Or dans ces zones, la composante suivant Y de la normale passe par zéro en

changeant de signe, ce qui permet d'expliquer la discontinuité rencontrée ; le parallélogramme doit bouger beaucoup pour au final obtenir un déplacement global constant.

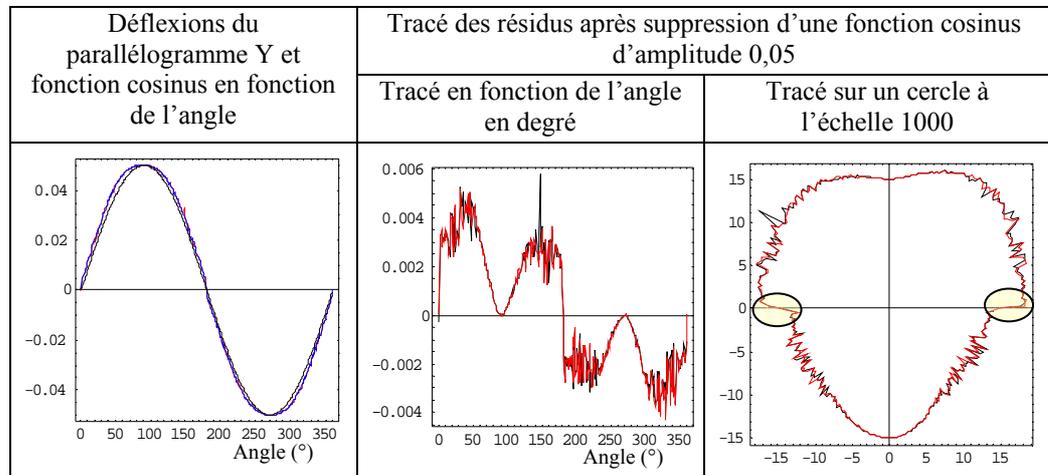


Figure 25 : Etude des déflexions du parallélogramme Y

L'analyse des déflexions reste délicate car  $\sqrt{D_X^2 + D_Y^2} = 50\mu\text{m}$  donc toute variation d'une déflexion induit une variation sur l'autre ce qui explique que si l'une est au dessus de la fonction sinusoïdale l'autre est au dessous.

La tête mesurante effectue sa mesure à déplacement constante, c'est-à-dire que la somme des carrés des déflexions est une constante.

### 3.5.3. Etude des déflexions du parallélogramme Z - $D_Z$

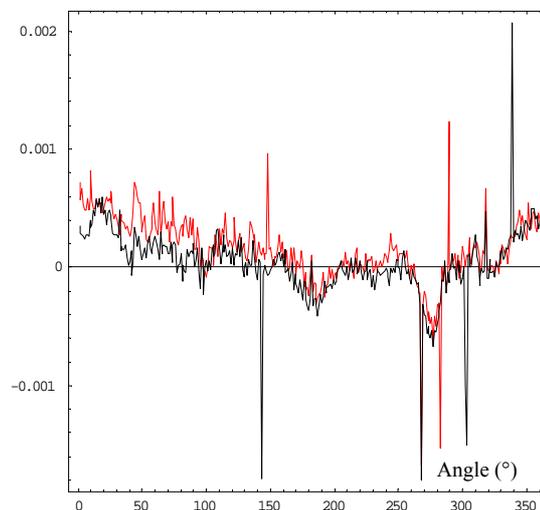


Figure 26 : Déflexions du parallélogramme Z en fonction de l'angle

Les déflexions du parallélogramme selon l'axe Z [Figure 26] ne présentent par d'intérêt particulier pour cette mesure. Par contre, il était primordial de faire ce tracé pour vérifier que celle-ci n'était pas aberrante. La déflexion de ce parallélogramme est assez stable et l'ordre de grandeur des variations de celui-ci a peu d'influence sur la mesure. Le calcul est du même type

que le calcul de l'influence de l'erreur tangentielle sur la mesure de l'erreur mesurée réalisé au paragraphe 3.3 et donc la conclusion est la même : l'ordre de grandeur de l'erreur réalisée sur la mesure des écarts n'a pas réellement d'incidence.

### 3.5.4. Calcul du pseudo angle de frottement

Il est possible de calculer un pseudo angle de frottement  $\mu$ , tel que :

$$\mu = \text{Tan}[\text{ArcSin}(\frac{D_X}{\sqrt{D_X^2 + D_Y^2}} \cdot n_y - \frac{D_Y}{\sqrt{D_X^2 + D_Y^2}} \cdot n_x)]$$

La **Figure 27** représente alors l'évolution de  $\mu$ . Ces tracés mettent encore en avant un problème de discontinuité de l'évolution de  $\mu$  suivant X lorsque la sollicitation du parallélogramme X change de sens. Ces zones sont entourées sur le graphique.

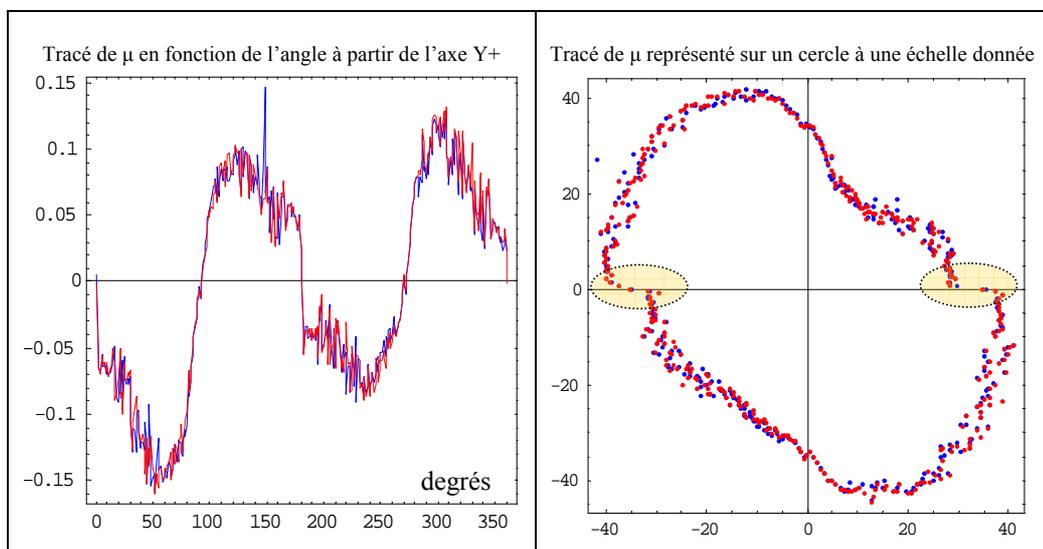


Figure 27 : Evolution du pseudo angle de frottement

Remarque : L'ordre de grandeur de  $\mu$  est celui d'un coefficient de frottement, il correspond à un angle entre la normale et la direction du vecteur déflexion de l'ordre de 6 à 8 degrés. Une telle différence provoque une erreur suivant la normale liée à la correction d'un diamètre de bille de 5mm de l'ordre de  $2,5 - 2,5 \cos(8^\circ) = 24,3 \mu\text{m}$  ce qui est évidemment inacceptable. Cela est une limite essentielle à l'utilisation des déflexions pour déterminer la direction de la normale.

Ne pouvant résoudre les problèmes actuellement, nous allons chiffrer et tenter de prendre en compte les problèmes de répétabilité rencontrés. Le fabricant des têtes mesurantes a été interrogé et nous attendons une réaction de sa part.

### 3.6 Problèmes de répétabilité

Au vu des problèmes de répétabilité rencontrés, nous avons décidé de comparer la réponse de la tête mesurante en changeant le sens de parcours, c'est-à-dire de réaliser deux tours en sens trigonométrique et deux tours en sens horaire [Figure 28].

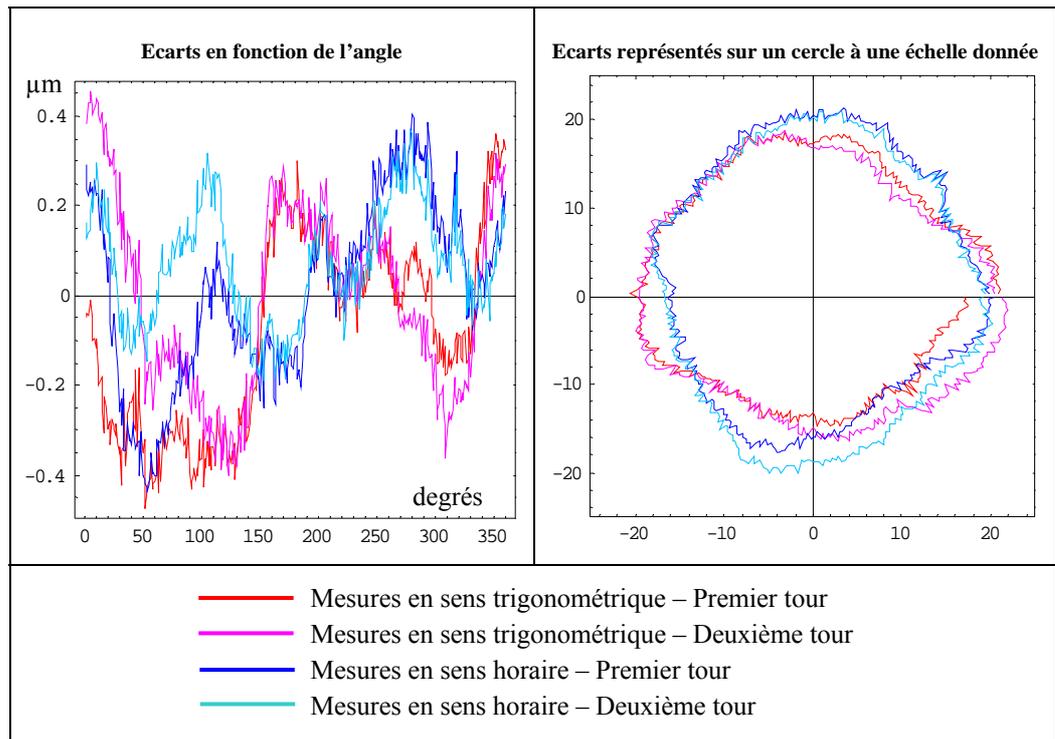


Figure 28 : Etude des écarts relevés – mesures en sens trigonométrique et horaire

On remarque donc que le problème de répétabilité rencontré précédemment entre deux mesures effectuées en suivant le même sens de parcours et amplifié lorsque l'on inverse ce sens de parcours. Cela renforce l'idée d'un phénomène d'hystérésis. La Figure 29 fournit le déplacement apparent de la sphère pour les 4 mesures, la dérive thermique est évidente mais reste très faible (de l'ordre de  $0,2\mu\text{m}$ ), il peut s'agir d'un problème d'échauffement de la tête ou d'une déformation de la structure de la machine et plus particulièrement d'un bilame sur le coulisseau.

Des mesures complémentaires ont été effectuées sur une autre machine possédant la même tête mesurante. Les résultats et les conclusions sont similaires. Ce type de tête mesurante possède un défaut de répétabilité relativement important variant de  $\pm 0,2$  à  $\pm 0,6$  micromètres.

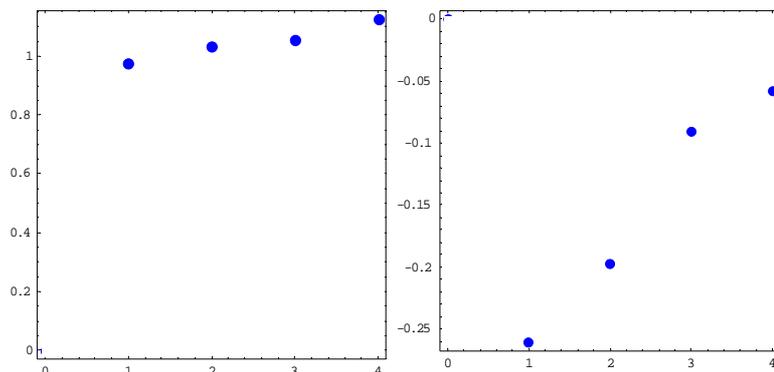


Figure 29 : Déplacement du centre apparent de la sphère en  $\mu\text{m}$  dans les directions X et Y

## 4 Prise en compte des défauts de la tête

A priori, la tête mesurante de la Leitz présente un défaut de perpendicularité correspondant un défaut de perpendicularité entre les parallélogrammes en X de ceux suivant l'axe Y, chaque parallélogramme a une rigidité différente et il existe une erreur de justesse différente pour chacun des axes X et Y.

Nous procéderons à une analyse en deux temps. Premièrement, nous effectuons un recentrage des mesures pour estimer l'incertitude totale liée au palpeur dans le plan. Dans un second temps, nous cherchons à identifier un modèle de comportement.

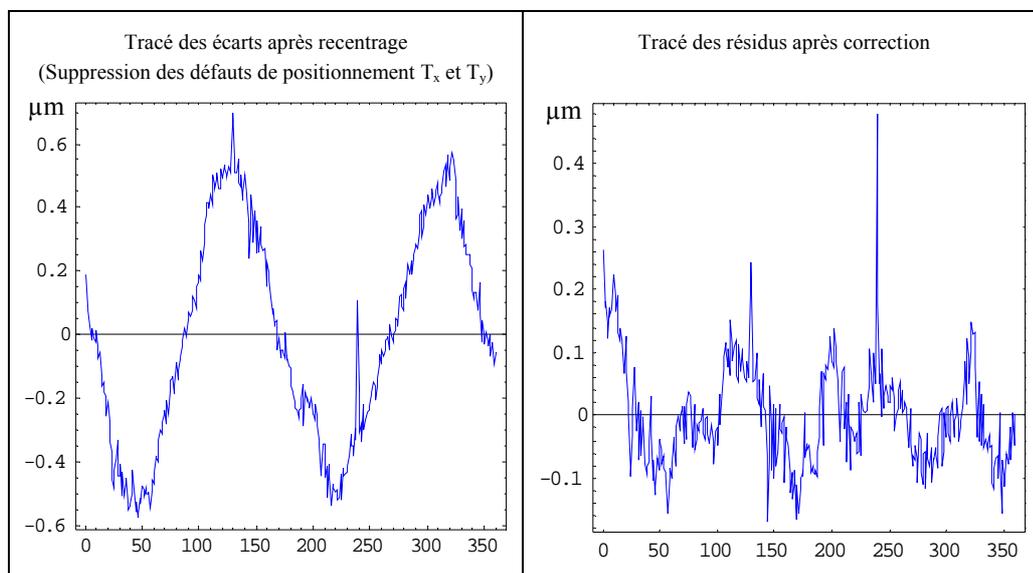


Figure 30 : Tracé des écarts et des résidus après correction

Pour traiter convenablement les mesures et évaluer les défauts de la tête mesurante, il conviendrait donc de faire un calage aux moindres carrés avec cinq vecteurs de sensibilité, à savoir :

- la normale  $n_x$  pour tenir compte de l'erreur de positionnement suivant l'axe x ( $T_x$ ),
- la normale  $n_y$  pour tenir compte de l'erreur de positionnement suivant l'axe y ( $T_y$ ),
- une constante (1) pour déterminer et compenser l'erreur sur le rayon ( $\delta R$ ),

- $y.n_x$  pour déterminer et compenser le défaut de perpendicularité ( $\perp$ ),
- $x.n_x$  pour déterminer et compenser le défaut de justesse relative entre les deux axes  $x$  et  $y$  considérés pris en compte sur l'axe  $x$  ( $xTx$ ).

Pour les mesures traitées, présentées sur la **Figure 30**, les écarts initiaux dus aux défauts de la tête mesurante sont de l'ordre de  $\pm 0.6 \mu\text{m}$  après recentrage mais avant correction et d'environ  $\pm 0.2 \mu\text{m}$  après correction. La correction est dans ce cas d'un grand intérêt dans la mesure où elle permet de diminuer par trois les incertitudes de mesure. Le défaut le plus important est bien évidemment le défaut de perpendicularité

Ce type de traitement et de correction est parfaitement envisageable pour des mesures de pièces circulaires à normales radiales (type bague), ce qui permet de diminuer les défauts de la tête mesurante [**Figure 30**]. Dans ce cas, il faut impérativement parcourir la pièce dans le même sens de rotation que lors de la détermination des défauts de la tête mesurante sur les mesures de la sphère de référence.

Ce type de traitement n'est pas du tout envisageable pour des mesures d'engrenages, dans la mesure où les normales changent radicalement d'orientation d'un flanc à un autre. Il convient de constater ce problème, et il faudra en tenir compte dans le bilan des causes d'incertitudes. Néanmoins, il ne faut pas tenir compte de ce défaut comme un défaut de répétabilité uniforme de  $\pm 0,6 \mu\text{m}$  pour tous les traitements. En effet si on considère la mesure d'un profil, la variation angulaire est faible et donc les défauts en local de la tête mesurante sont faibles. Pour les mesurandes du profil, une répétabilité de la tête mesurante de  $\pm 0,1 \mu\text{m}$  est tout à fait convenable. Par contre pour les mesures de division, il faudra tenir compte d'une incertitude de  $\pm 0,6 \mu\text{m}$  sous la forme d'une densité de probabilité uniforme.

## 5 Multi palpeur et Scanning

### 5.1 Multi palpeur

L'étude du comportement d'un système de palpation à plusieurs billes dit « multipalpeur » [NF EN ISO 10360-5,2001] est nécessaire pour prendre en compte les incertitudes sur les prises de référence sur pignons arbrés et pour la poursuite de l'étude des engrenages de type hélicoïdaux. Cette étude n'est pas aboutie, nous présentons les premières réflexions.

#### *Bijection de l'espace pièce sur l'espace machine*

Dans [COO1990], on introduit la notion de bijection entre l'espace pièce et l'espace machine. On dit qu'il y a bijection si, à un point sur la pièce correspond une position de la machine et une seule, alors à un petit déplacement dans l'espace de la pièce correspond un petit déplacement dans l'espace de la machine. En rapprochant ce concept de la technologie des machines qui garantit un faible gradient des défauts de l'instrument, on peut en déduire qu'une machine bijective fournit la mesure d'un petit objet avec un faible niveau d'incertitudes.

Une machine travaillant avec au moins deux palpeurs, ou deux positions de palpeurs pour les machines équipées de têtes orientables de type Renishaw PH10 par exemple ou avec un quatrième axe n'est pas bijective.

#### *Incertitude sur une mesure de longueur obtenue avec deux palpeurs*

Examinons l'ensemble des opérations qui interviennent dans la mesure d'une longueur avec deux palpeurs différents. La distance entre les centres des billes des stylets du palpeur est notée  $d$ .

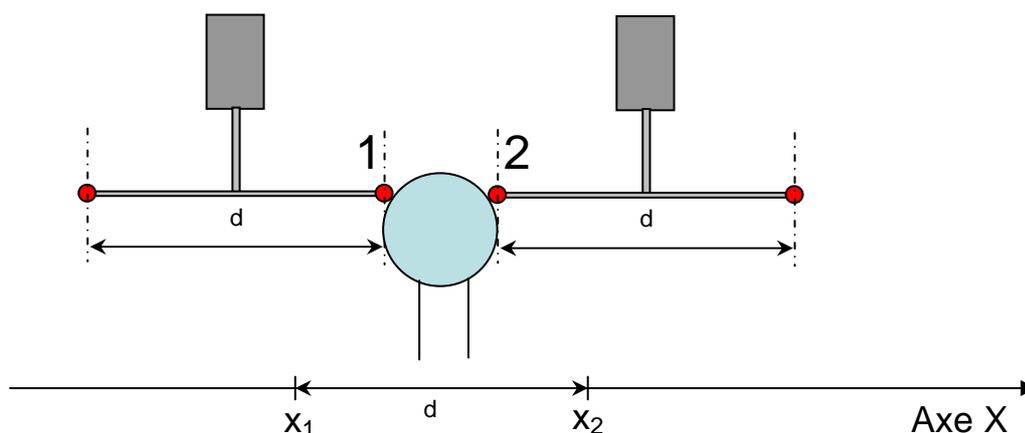


Figure 31 : Schéma d'un multi palpeur à deux branches, phase de calibrage

Pendant la phase de calibrage, la mesure de la sphère fixe à l'aide de la bille 1 (resp. 2) fournit  $x_1$  (resp.  $x_2$ ) long de l'axe X (on peut compléter le raisonnement pour les axes Y et Z). Ces positions correspondent à la position qu'aurait l'axe X si la bille du palpeur pouvait être confondue avec le centre de la bille de calibrage. La distance  $d$  vaut donc  $x_2 - x_1$ .

Il faut noter que la sphère ne peut qu'être mesurée sur un  $\frac{1}{4}$  de sa surface, éventuellement un peu plus, mais il ne faut pas descendre trop bas car, au niveau de l'encastrement, les sphères sont parfois déformées.

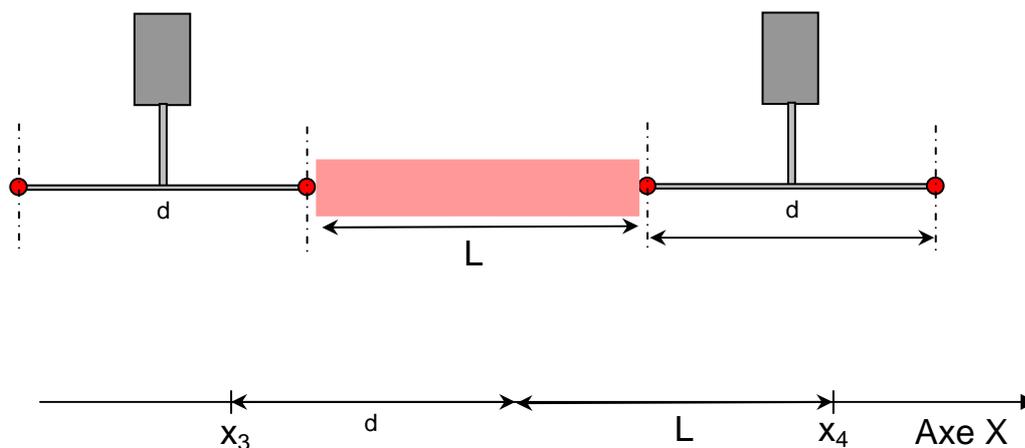


Figure 26 : Schéma d'un multi palpeur à deux branches, phase de mesure

Dans la phase de mesure, la bille 1 (resp.2) touche la pièce se qui correspond à la position  $x_3$  (resp.  $x_4$ ). On a  $x_4 - x_3 = L + d$  soit  $L = x_4 - x_3 - d = x_4 - x_3 - (x_2 - x_1)$ .

La longueur  $L$  peut être écrite de deux manières :

-  $L = x_4 - x_3 - d = (x_4 - (x_2 - x_1)) - x_3$ , cette écriture correspond à l'idée d'ajouter une correction de position à la bille 2 pour que la surface paraisse être mesurée avec la bille 1.

-  $L = x_4 - x_3 - d = (x_4 - x_2) - (x_3 - x_1)$ , cette écriture correspond à l'idée d'ajouter une correction à chaque bille pour que la surface paraisse avoir été mesurée avec une même bille « virtuelle »

Les deux logiques de correction existent chez les constructeurs.

Du point de vue des incertitudes, dans l'expression  $L = x_4 - x_3 - (x_2 - x_1)$ , on a une distance  $x_4 - x_3$  mesurée à une position différente et à un moment différent donc à une température différente

de la mesure de la distance  $x_2-x_1$ . La distance  $x_4-x_3$  n'est évidemment jamais inférieure à  $d$ , ce qui signifie que la mesure d'un petit objet présente une incertitude liée à la mesure de deux distances  $d$  au minimum.

Les incertitudes à prendre en compte sont :

- Incertitude liée à la position de la machine pendant la mesure 1 et à l'estimation du centre de la sphère liée au palpeur
- Idem pour la mesure 2
- Incertitude liée à la position de la machine pendant la mesure 3 et à l'estimation du plan liée au palpeur, incertitude liée à la correction de rayon de bille
- Idem pour la position 4
- Incertitude liée à la variation de température du solide liant les billes 1 et 2
- Incertitude liée à la variation de température sur la machine avec une compensation partielle sur  $d$  en effet l'écart à  $20^\circ\text{C}$  sur  $d$  se compense partiellement car les températures ne peuvent être totalement indépendantes
- Incertitude sur la température de la pièce
- Incertitudes sur les coefficients de dilatation

L'incertitude sur la position de chacune des sphères est une constante tout au long de la mesure ce qui introduit une dépendance entre les différentes mesures de la gamme.

#### **Minimiser l'incertitude liée au défaut de bijection**

Pour minimiser l'incertitude sur  $L$ , on a intérêt à ce que la sphère et la pièce soit proche l'une de l'autre et que le temps s'écoulant entre les deux mesures soit minimal.

En particulier, il faut noter que la hauteur de la pièce par rapport à la sphère de référence a une importance notable en terme d'incertitudes à cause de l'évolution de  $zRz$  qui est souvent significatif compte tenu de la technologie employée.

#### **Remarque sur la mesure partielle du cercle**

L'estimation du rayon de la sphère de référence et de sa position sont fortement influencées par la zone mesurée sur la sphère.

Nous avons réalisé une simulation sur un cercle partiel, pour traiter un problème plan. Nous avons déterminé les évolutions du calage en position et de la variation de rayon sur une portion de cercle mesurée en 25 points et calculé au sens des moindres carrés. L'arc de cercle est centré sur l'origine et symétrique par rapport à l'axe X. Les points sont perturbés dans la direction de la normale avec une gaussienne de moyenne nulle et d'écart type  $1\mu\text{m}$ . Les résultats sont présentés sur la **Figure 33**.

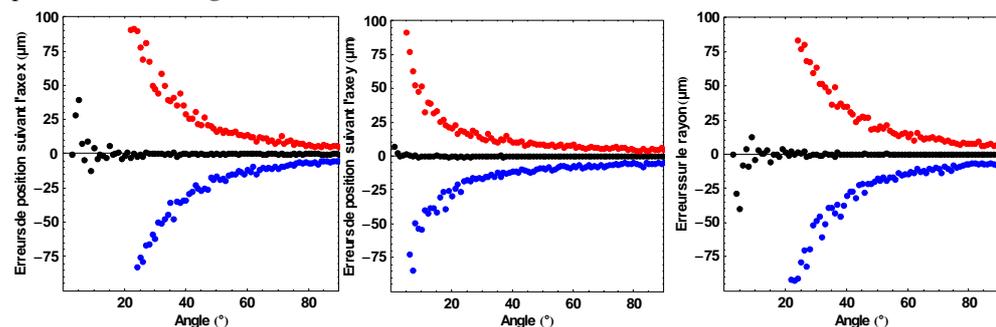


Figure 32 : Evolution de la détermination du calage en position et de la variation de rayon

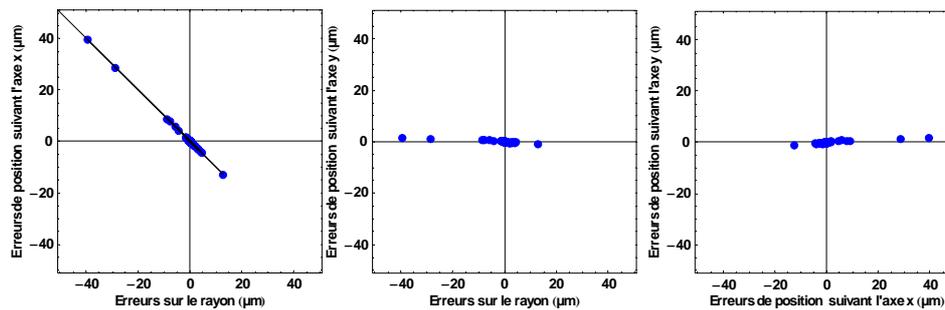


Figure 33 : Mise en évidence de la corrélation entre les paramètres

Le tracé des paramètres les uns en fonction des autres montrent la parfaite corrélation entre la translation suivant X et la variation de rayon [Figure 33]. L'idée est que lorsque le rayon augmente, le centre recule. Ce type de corrélation est pris en compte par la simulation de MonteCarlo.

## 5.2 Mesures en scanning

La mesure en scanning consiste à mesurer en continue la pièce à vitesse constante en se déplaçant le long de la surface (conservation du contact en permanence entre le palpeur et la pièce). Au niveau bibliographique, on ne trouve pas encore grand-chose sur le sujet bien que le système soit de plus en plus utilisé par les industriels. Ce mode de palpation est régi par une norme [NF EN ISO 10360-4, 2000].

L'article publié par HEXAGON METROLOGY [HEX2007], présente relativement bien la technique de mesure en scanning. Cette technique permet de saisir un grand nombre de points élémentaires et est un outil important en terme de mesure du profil d'un engrenage par exemple.

Les palpeurs de scanning continu, conçus pour transmettre au système un flux ininterrompu de données, représentent une solution appropriée en éliminant les déplacements auxiliaires de la machine qui ralentissent le processus de mesure. Ce mode de mesure est également intéressant dans le processus de détermination de surfaces inconnues de forme gauche.

Les techniques de scanning continu peuvent être décomposées en deux méthodes différentes, à savoir : en boucle « ouverte » ou « fermée ». La technique du scanning en « boucle ouverte » est la technique utilisée lorsque l'on connaît la géométrie théorique de la pièce à mesurer. Elle permet de mesurer à grande vitesse, le palpeur parcourant ses trajectoires sur la surface nominale en restant toujours perpendiculaire à la pièce. La technique du scanning en « boucle fermée » est utilisée pour la numérisation de formes mathématiques non définies. La tête de scanning continu relève les variations d'orientation de la surface de la pièce et maintient le contact avec elle.

Les palpeurs continus passifs ne sont pas pourvus de servomoteurs d'axes et le retour répétable dans la position zéro est réalisé à l'aide de « rappels élastiques » appropriés. Au cours du processus de scanning, la MMT maintient, avec ses mouvements, la touche toujours en contact avec la pièce. Elle contrôle la déviation de la touche en asservissant ses mouvements aux transducteurs du palpeur de sorte que l'instrument fonctionne toujours dans sa plage de réponse linéaire. Comme ils n'ont pas de moteur, normalement, ces palpeurs ne produisent pas de chaleur pendant le fonctionnement et ne sont donc pas en théorie soumis à des phénomènes de dérive thermique. Certaines têtes sont munies d'un capteur thermique intégré pour la mesure de compensation en température de la pièce et d'un système pour l'équilibrage du poids de la touche.

Néanmoins ce type de système est soumis à des problèmes vibratoires causés entre autre par l'état de surface de la pièce palpée et des problèmes dynamiques propres au système que l'on retrouve assez facilement en mesurant une bague par exemple [WEC2004 - SAV2006 - PER2007 - **Figure 34**]. Ces problèmes dynamiques constituent en général une grande partie des incertitudes.

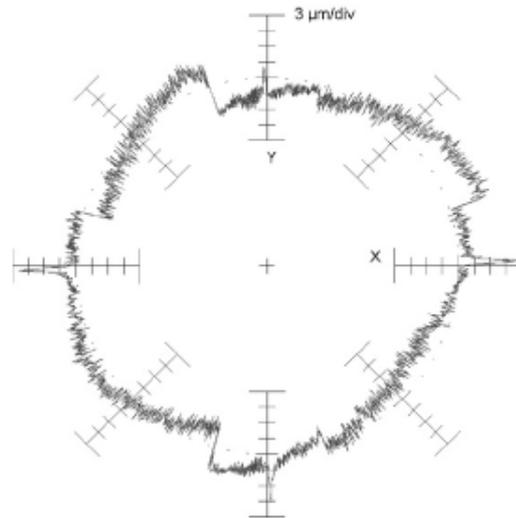


Figure 34 : Mesure d'une bague en scanning

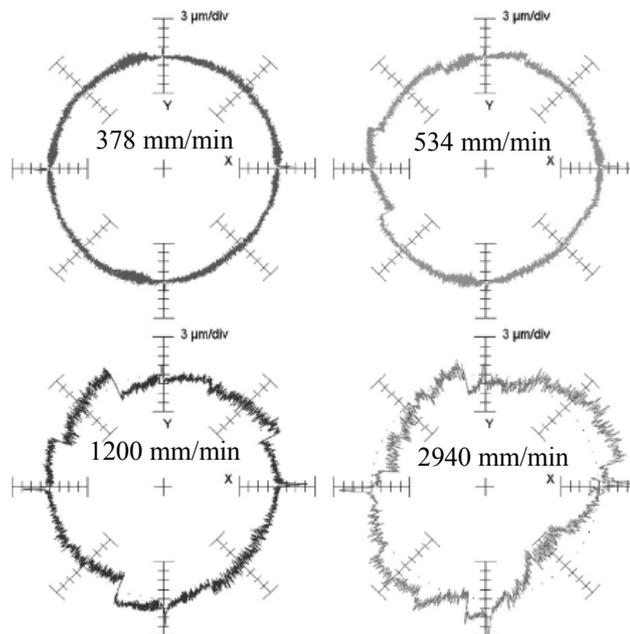


Figure 35 : Visualisation de l'augmentation de l'influence de la vitesse de scanning

On remarque sur ces figures [PER2007] l'augmentation des défauts du système de palpé en fonction de la vitesse de Scanning. Il est intéressant de remarquer la présence de discontinuité

sur le tracé des écarts [Figure 34 et Figure 35]. L'auteur montre également que le sens de parcours a une influence sur la réponse du système [Figure 36]. Sur cette figure, la vitesse de scanning est de 1374 mm/min, le sens de parcours étant soit en sens trigonométrique, soit en sens horaire.

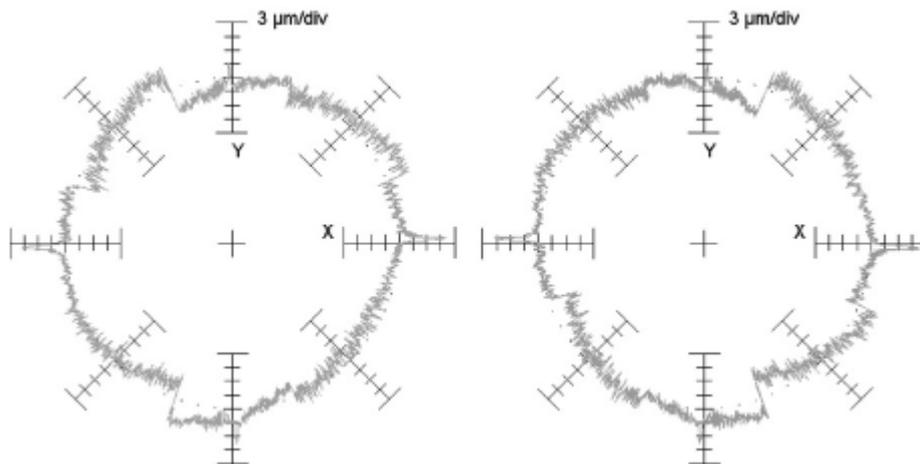


Figure 36 : Mesures dans deux sens de parcours différents

L'auteur reprend également l'idée préconisée par Zeiss à ses clients depuis 2004 qui consiste à faire des essais pour optimiser la vitesse de scanning avant de réaliser ses mesures. En effet, les problèmes dynamiques sont extrêmement dépendants de la rigidité des palpeurs et sont plus importants dès lors que la rigidité du palpeur est faible.

Pour évaluer le système, il existe également quelques artefacts normalisés [Figure 37 – MOR2002].

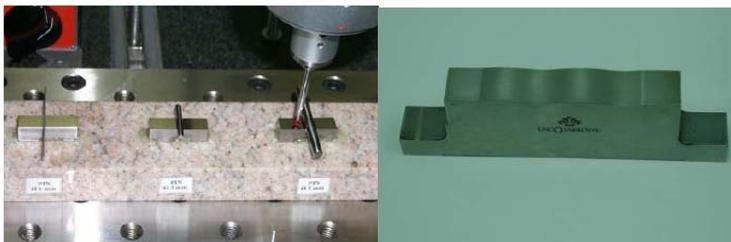


Figure 37 : Artefact pour les mesures de scanning

Même si, en pratique, on mesure souvent les profils des dentures selon ce procédé, l'étude du scanning n'a pas encore été effectuée à ce jour, dans la mesure où la tête mesurante de la Leitz possède déjà des problèmes de répétabilité en mesure point à point. Ces problèmes ressemblent tout de même étrangement à des problèmes analogues aux conséquences des problèmes dynamiques rencontrés en scanning dont notamment les problèmes d'hystérésis. Dans ce cas, il est conseillé de diminuer la vitesse du scanning. Nous pensons actuellement qu'il existe des problèmes dynamiques sur la tête Leitz et qu'il serait indispensable de faire des essais de palpation en changeant le protocole de mesure de la tête (force exercée, vitesse,...). Nous n'avons pas encore pu effectuer ce type d'essais.

## 6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donc présenté deux technologies différentes de systèmes de palpation, à savoir les palpeurs dynamiques et la tête mesurante de la machine Leitz du CETIM de Senlis. Au niveau de l'étude des palpeurs dynamiques, nous avons mis en place un modèle du trilobe dans le plan de l'étoile en utilisant le concept des fonctions équivalentes, un modèle de flexion du stylet le long d'un méridien et une modélisation 3D basée sur le couplage de ces deux modèles. Au niveau de la tête mesurante de la Leitz, nous avons mis en évidence un problème d'hystérésis et avons apporté quelques éléments de réponse au niveau de la part d'incertitudes causées par l'utilisation d'au moins deux palpeurs (étude indispensable pour la prise des références sur pignons arbrés) ainsi que les problèmes rencontrés en scanning, en s'appuyant sur quelques références bibliographiques.





# CHAPITRE V :

## Géométrie de la machine dans le plan

### SOMMAIRE

1	Concept de zone qualifiée métrologiquement.....	120
2	Protocole expérimental .....	120
3	Défauts de la Leitz .....	121
3.1	Justesse xTx.....	121
3.2	Lacet xRz et vérification de la justesse xTx .....	122
3.3	Justesse yTy.....	124
3.4	Rectitude xTy .....	125
3.5	Rectitude yTx .....	126
3.6	Réflexion sur le résidu sinusoïdal.....	126
3.7	Perpendicularité.....	127
4	Combinaison des défauts de la Leitz -Fonctions Equivalentes .....	129
5	Etude de la géométrie de la machine à mesurer Trimesure de l'ENSAM de Lille .....	131
5.1	Evaluation de la géométrie de la machine .....	132
5.2	Machine Checking Gauge .....	132
5.2.1.	Présentation.....	132
5.2.2.	Mesures au MCG .....	133
5.2.3.	Combinaison des défauts de la machine et mesures à la MCG.....	135
6	Correction des mesures.....	136

# Détermination de la géométrie de la machine dans le plan

## 1 Concept de zone qualifiée métrologiquement

La machine sur laquelle nous travaillons possède un volume utile de 2400\*1200\*1000mm. Dans le cadre d'une accréditation pour les engrenages cylindriques droits, nous proposons un concept de « zone qualifiée métrologiquement ». Cette zone est plate et correspond à la position du plan médian des roues mesurées. La dimension de cette zone est définie par la longueur de la cale à créneaux qui peut faire l'objet d'un procès verbal accrédité soit 800mm. Cette zone fera l'objet d'une étude poussée de sa géométrie.

La qualification de cette zone est réalisée périodiquement et sera suivie. Normalement, la géométrie d'une machine à mesurer évolue peu dans le temps si l'on excepte les variations dues à la température puisque les guidages aérostatiques garantissent l'absence de frottement donc d'usure. La stratification de température en hiver où la climatisation souffle de l'air chaud sera légèrement différente de la stratification en été où la climatisation souffle de l'air froid. Sous l'effet des variations thermiques non homogènes (gradients thermiques), les éléments constituant la machine se dilatent et se déforment. Ces effets sont sensibles puisque, par exemple, sous l'effet d'une variation d'un dixième de degré, la longueur d'une pièce en acier d'un mètre de long augmente par dilatation de 11,5 $\mu$ m.

Nous étudierons la géométrie de la machine dans le plan à un instant donné, les variations de température et de gradient étant intégrés dans la simulation de Monte Carlo en terme d'incertitudes de mesure.

Nous nous sommes concentré essentiellement sur les mesures dans le plan qualifié métrologiquement mais des mesures utilisant le Machine Checking Gauge [BLU2001 - SPR2003] ont été effectuées à différentes hauteurs afin d'estimer les variations de géométrie de la machine et chiffrer entre autre les incertitudes sur les prises de référence.

## 2 Protocole expérimental

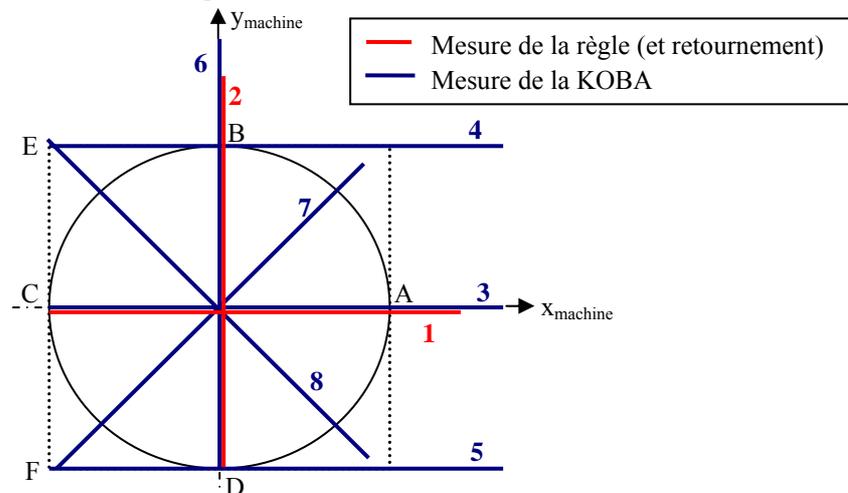


Figure 1 : Mesures effectuées pour évaluer la géométrie de la machine

Les défauts de justesses ( $xTx$  et  $yTy$ ), le lacet ( $xRz$ ) et la perpendicularité sont estimés à partir de mesures de la KOBA et les défauts de rectitudes ( $xTy$  et  $yTx$ ) évalués à l'aide d'une règle en utilisant la technique de retournement.

Les résultats présentés dans ce chapitre sont le fruit de l'utilisation des techniques exposées dans les chapitres précédents. Les défauts sont définis en tant que correction (c'est-à-dire l'opposé de l'erreur).

L'intégralité des mesures effectuées est représentée sur **Figure 1**.

Les mesures 1 et 2 sont des rectitudes obtenues par retournement. On vérifie immédiatement que le profil de la règle est bien le même dans les deux mesures (en tenant compte des incertitudes).

Les mesures 3, 4 et 5 sont des justesses obtenues grâce à la cale à créneaux. Les mesures 4 et 5 permettent de déterminer le lacet mais peuvent également être recoupées avec la mesure 3 puisque la demi somme des mesures 4 et 5 fournit la mesure 3 (hors incertitude). Durant le protocole expérimental, ce calcul est effectué immédiatement pour vérifier la cohérence des résultats.

La mesure 6 fournit la justesse de l'axe Y. On peut alors réaliser les mesures 7 et 8 qui fournissent la perpendicularité. Pour calculer la perpendicularité, on corrige les mesures des contributions des justesses, du lacet et des rectitudes. On peut alors vérifier la linéarité du résidu.

Ce protocole expérimental tend à permettre une vérification des résultats au fur et à mesure des acquisitions.

## 3 Défauts de la Leitz

### 3.1 Justesse $xTx$

Nous définissons la justesse en tant que correction, c'est-à-dire que la justesse est la longueur vraie (étalon) moins à la longueur réelle (mesurée) d'un axe.

La méthode la plus répandue pour mesurer la justesse est l'interférométrie laser à comptage de franges. La stabilité en fréquence des lasers Hélium-Néon utilisés est de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-8}$  mais les incertitudes pratiques sont plus importantes. La longueur d'onde est fonction de l'indice de réfraction de l'air qui varie avec la température, la pression atmosphérique et l'hygrométrie mais également avec la composition réelle de l'air dans lequel se propage le faisceau. Les systèmes actuels mesurent les trois paramètres physiques cités et calculent l'indice. La machine se dilate, il faut donc mesurer sa température en tenant compte. Cette notion de « température de la machine » est très délicate à l'échelle de quelques dixièmes de degrés et le coefficient de dilatation à prendre en compte est presque toujours mal connu. Enfin, les difficultés expérimentales ne sont pas à négliger (mise en place des optiques, asservissement etc). L'incertitude pratique à prendre en compte est au moins de l'ordre d'un à plusieurs micromètres pour un mètre.

L'utilisation de la cale à gradins appelée également cale étagée ou à créneaux est alors d'une grande utilité puisqu'elle fait intervenir toute la chaîne de mesure, c'est-à-dire la machine, le système de palpé, ... que sa température est relativement facile à mesurer et que le certificat d'étalonnage indique une incertitude de l'ordre de  $\pm(0,3 + 1,5 \cdot 10^{-6}L)$  micromètres où L est la longueur mesurée en millimètres ; pour  $L=1000\text{mm}$ , on a donc une incertitude de  $\pm 1,8\mu\text{m}$ . L'essentiel du terme proportionnel tient à la prise en compte de l'incertitude sur le coefficient de dilatation et sur la température.

La justesse  $xTx$  correspond à la mesure de type 3 sur la **Figure 1**.

La courbe  $xTx$  de la **Figure 2** est le résultat du traitement de quatre mesures, deux en position initiale (répétabilité) et deux en position décalée de l'épaisseur d'un créneau (20 mm). L'algorithme utilisé est celui présenté au chapitre 2. Les points rouges correspondent au

résultat direct du traitement. La courbe noire est la courbe de justesse  $xTx$  retenue. Cette courbe est un polynôme de Tchebychev d'ordre 4, ce qui correspond à un polynôme de degré 3. Ce choix est justifié dans le **Chapitre 1 - § 2.10**.

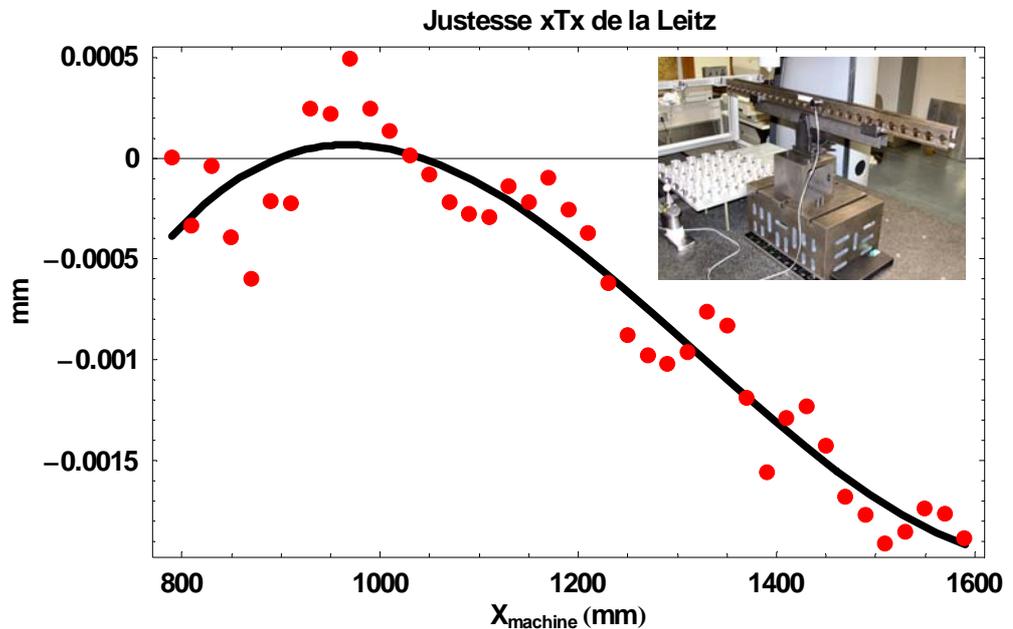


Figure 2 : Evolution de la justesse  $xTx$  de la Leitz (correction)

Les résidus entre la courbe retenue et les points obtenus se répartissent sur une gaussienne d'écart type  $0,2\mu\text{m}$ . L'erreur maximum commise est de  $-0,54\mu\text{m}$ .

### 3.2 Lacet $xRz$ et vérification de la justesse $xTx$

Le lacet est la rotation du portique de la machine autour de l'axe  $z$  lors du déplacement selon l'axe  $x$ . Dans la mesure où l'on mesure la justesse avec une cale à gradins, le lacet sera mesuré avec la même cale à gradins.

La mesure d'une justesse d'axe  $x$  à une distance  $y \neq 0$  est perturbée par la valeur du lacet. La détermination du lacet [Figure 3] a été effectuée en réalisant les mesures de type 4 et 5 définies sur la Figure 1 pour maximiser le bras de levier et vérifier la justesse  $xTx$ .

La constante palpeur déterminée lors de l'étude de la justesse  $xTx$  est reprise afin de tenir compte de l'erreur due au palpeur qui est la même pour ces mesures puisque les directions d'accostage sont les mêmes en repère tête mesurante. Pour cette raison, il est strictement proscrit de requalifier la tête mesurante sur la sphère de référence pour les mesures de type 3, 4 et 5 pour ne pas changer la valeur de cette constante palpeur.

La courbe du lacet  $xRz$  de la Figure 3 est donc le résultat du traitement de deux mesures de type 5, deux mesures de type 6 et de la constante palpeur  $Cp$  trouvée pour l'étude de la justesse  $xTx$ .

$$\text{En fait, } xRz = \frac{\text{Mesures de Type 4 corrigées de } Cp - \text{Mesures de Type 5 corrigées de } Cp}{\text{Distance entre les deux mesures}}$$

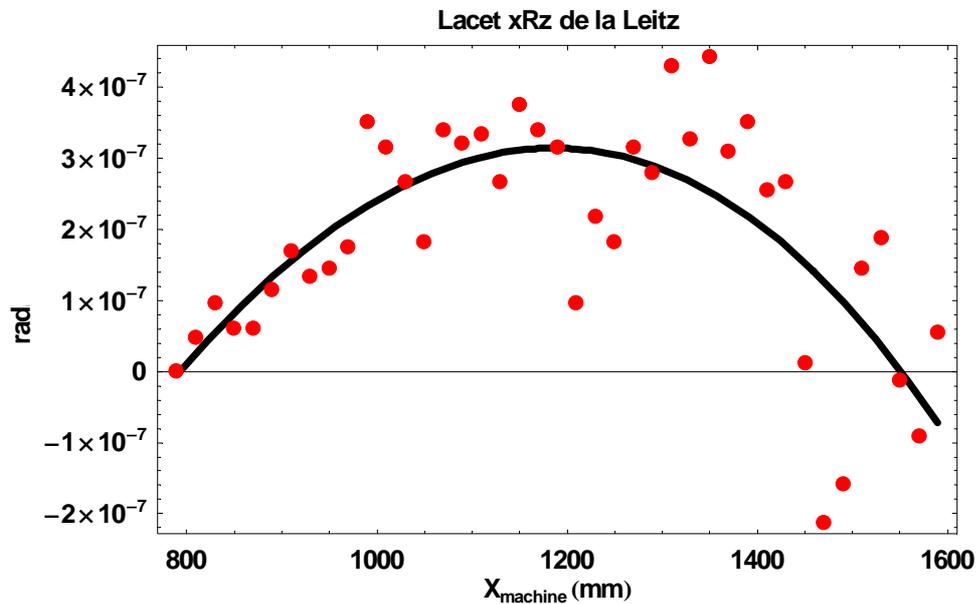


Figure 3 : Détermination du lacet xRz (correction)

Sur la **Figure 3**, les points rouges sont les points obtenus après calcul et la courbe noire et l'interpolation de ces points par un polynôme de Tchebychev d'ordre 4. L'écart type des résidus est de  $1,080 \cdot 10^{-7}$  rad et l'écart maximum est de  $3,4 \cdot 10^{-7}$  rad.

Il est possible de déterminer de nouveau la justesse xTx tel que :

$$xTx_{\text{recalculé}} = \text{valeur étalon}$$

$$= \frac{\text{Mesures de Type 4 corrigées de } Cp + \text{Mesures de Type 5 corrigées de } Cp}{2}$$

On obtient ainsi les points rouges et la courbe interpolée bleu de la **Figure 4**.

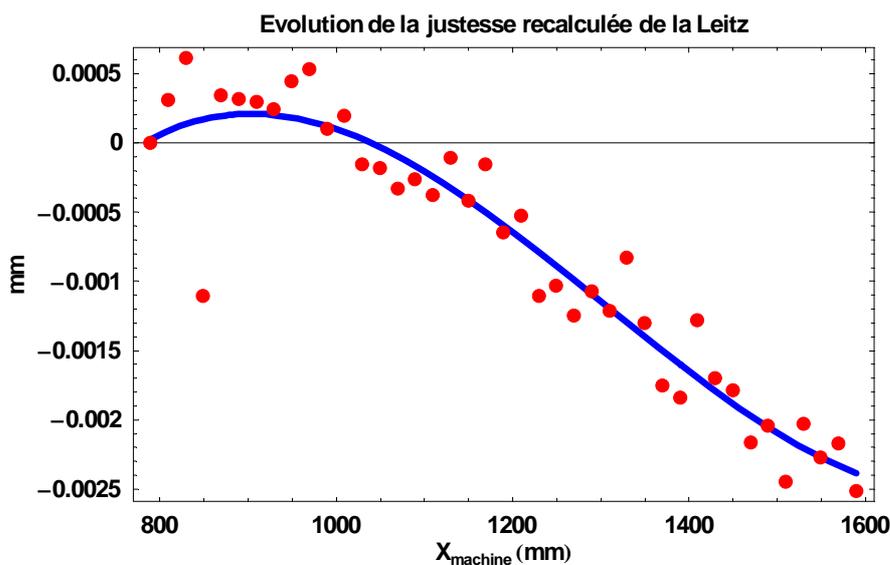


Figure 4 : Détermination de la justesse xTx à partir des mesures de type 4 et 5

La comparaison entre la justesse  $xTx$  déterminée à partir des mesures de type 3 et des mesures de type 4 et 5 est présentée sur la **Figure 5**. Les résultats sont très proches, la différence étant pratiquement une pente qui s'explique par une variation de température entre les mesures de type 3 et ceux de type 4 et 5.

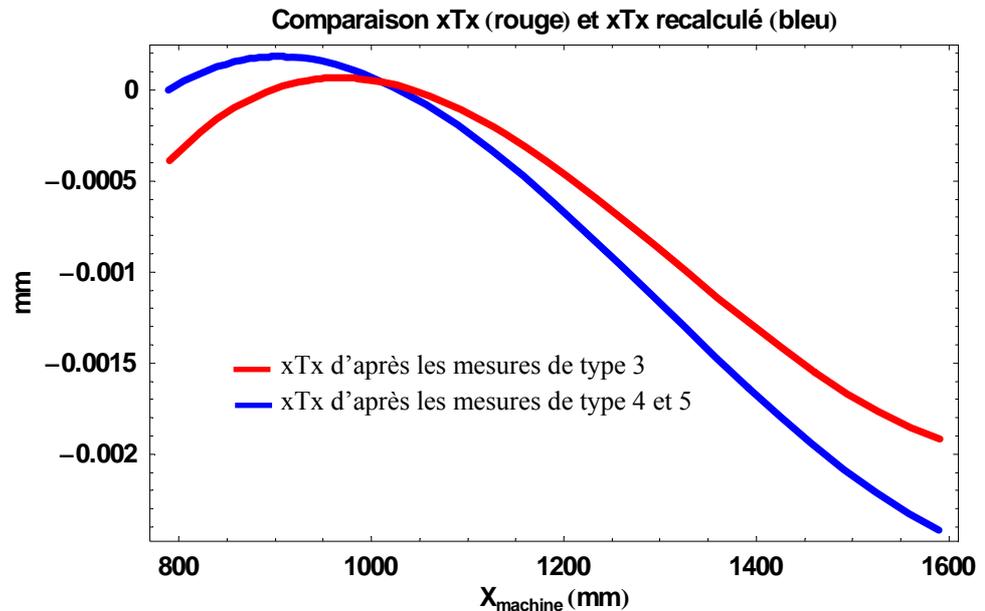


Figure 5 : Tracé de justesse  $xTx$  déterminée à partir des mesures de type 3 et de ceux de type 4 et 5

### 3.3 Justesse $yTy$

La justesse  $yTy$  [Figure 6] est déterminée à partir des mesures de type 6 [Figure 1 Erreur ! Source du renvoi introuvable.]. Elle est obtenue de la même façon que la justesse  $xTx$ , c'est-à-dire à partir de deux mesures en position initiale et de deux mesures en position décalée afin de tenir compte de la constante palpeur selon l'axe  $y$  de la tête mesurante.

Les points rouges sont les points directement calculés, la courbe noire est la courbe interpolée par un polynôme de Tchebychev d'ordre 4.

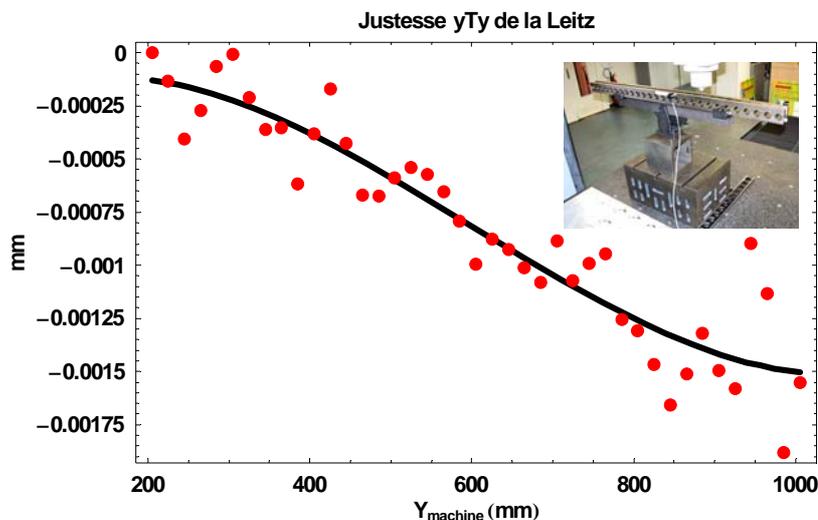


Figure 6 : Evolution de la justesse  $yTy$  de la Leitz (correction)

L'écart type des résidus entre la courbe interpolée et les points calculés est de  $0,18 \mu\text{m}$  avec un écart maximum de  $0,56 \mu\text{m}$ .

### 3.4 Rectitude xTy

La rectitude d'un axe dans le plan est la translation de cet axe dans la direction perpendiculaire. Ainsi la rectitude  $xTy$  est la translation suivant  $y$  de l'axe  $x$ .

Nous avons choisi de réaliser nos mesures de rectitude par la méthode mécanique de mesure d'une règle non étalonnée mais ayant un état de surface rectifié et d'utiliser la technique de retournement [Chapitre III].

Quatre mesures, deux en position initiale et deux en position retournée permettent donc de déterminer la rectitude de la machine (et de la règle utilisée).

La rectitude  $xTy$  obtenue après redressement est présentée sur la Figure 7.

Les points obtenus sont représentés en noir et la courbe d'interpolation (Tchebychev d'ordre 4) est représentée en bleu. L'écart type des résidus entre les points obtenus et la courbe interpolée est de  $0,12 \mu\text{m}$  avec un écart maximum de  $0,33 \mu\text{m}$ .

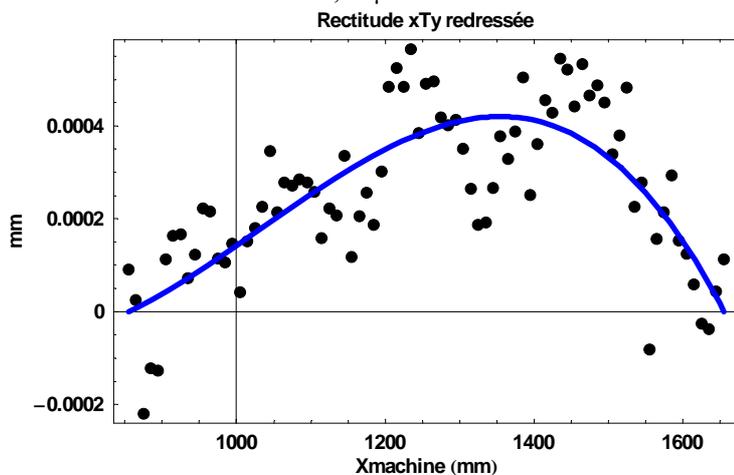


Figure 7 : Détermination de la rectitude  $xTy$  de la Leitz (correction)

### 3.5 Rectitude yTx

De la même manière que pour l'axe x, on détermine la rectitude yTx de l'axe y [Figure 8].

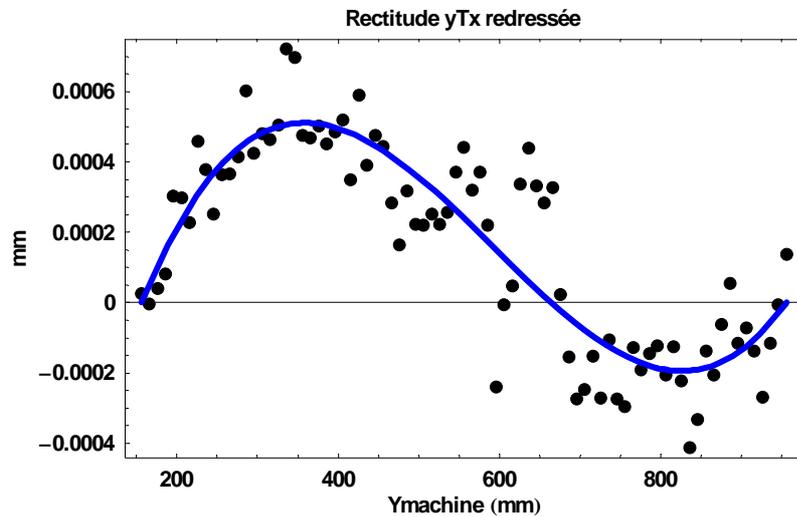


Figure 8 : Détermination de la rectitude yTx de la Leitz (correction)

Entre les points mesurés et la courbe interpolée, le résidu possède un écart type de 0,10  $\mu\text{m}$  et un écart maximum de 0,24  $\mu\text{m}$ .

### 3.6 Réflexion sur le résidu sinusoïdal

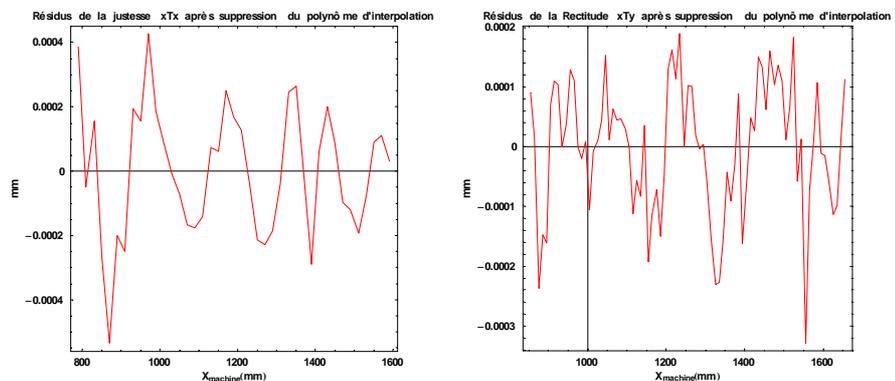


Figure 9 : Différences entre les courbes interpolées et les mesures xTx et xTy

Les courbes de la Figure 9 correspondent à la différence entre les courbes interpolées en justesse xTx et en rectitude xTy et les mesures brutes. Ce sont deux mesures orthogonales obtenues avec des moyens différents. Les pas et les ordres de grandeur sont cohérents. Il s'agit probablement d'un problème de comportement dynamique de la machine que nous n'avons pas encore étudié, il s'agit en particulier de comparer les pas mesurés aux caractéristiques du système d'entraînement et aux vitesses de travail.

### 3.7 Perpendicularité

Nous quantifions le défaut de perpendicularité en mesurant la cale à gradins dans deux positions différentes, à savoir à  $+45^\circ$  et à  $-45^\circ$ . Le fait de déterminer la perpendicularité avec deux mesures différentes permet de fiabiliser le résultat. En effet, pour déterminer correctement ce défaut, il faut corriger les mesures des autres défauts, c'est-à-dire des défauts de justesse, de lacet, et de rectitude. Or il existe des incertitudes sur la détermination des différents défauts ce qui perturbe la détermination du défaut de perpendicularité.

Le principe de détermination du défaut de perpendicularité est relativement simple et est schématisé sur la **Figure 10**. On note  $L_{app}$  la longueur apparente d'une cale de longueur  $L$  vue par la machine possédant uniquement un défaut de perpendicularité caractérisé par l'angle  $\gamma$ . La cale est inclinée d'un angle  $\beta$  par rapport à l'axe  $x$  de la machine.

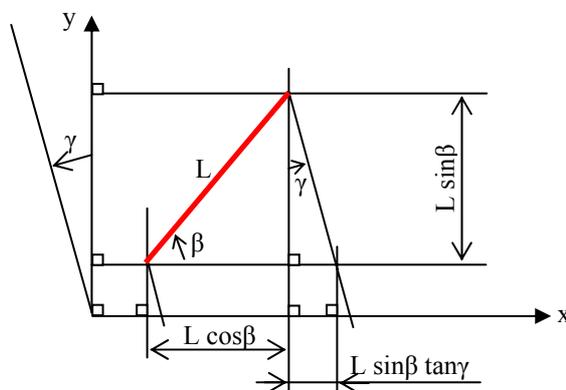


Figure 10 : Schéma de principe du calcul de la perpendicularité

Dans ce cas, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} L_{app}^2 &= (L \cos \beta + L \sin \beta \tan \gamma)^2 + (L \sin \beta)^2 \\ &= L^2 + 2L^2 \cos \beta \sin \beta \tan \gamma + L^2 \sin^2 \beta \tan^2 \gamma \\ &\approx L^2 (1 + \gamma \sin(2\beta)) \end{aligned}$$

$$\text{Soit } L_{app} \approx L \left( 1 + \frac{\sin(2\beta)}{2} \gamma \right)$$

$$\text{Pour } \beta = 45^\circ, L_{app} \approx L \left( 1 + \frac{\gamma}{2} \right)$$

$$\text{Pour } \beta = -45^\circ, L_{app} \approx L \left( 1 - \frac{\gamma}{2} \right)$$

Les mesures de type 7 et 8 [Figure 11] permettent de déterminer respectivement le défaut de perpendicularité lorsque  $\gamma = +45^\circ$  et  $\gamma = -45^\circ$ .

Les mesures de la cale à gradin, dans ces deux positions, sont entachées des défauts de rectitudes, de justesses, de lacet et de la constante palpeur. Il faut donc supprimer ces défauts pour déterminer la perpendicularité. Ainsi les défauts précédant sont utilisés et la constante palpeur est déterminée en réalisant un décalage. Pour chacune des mesures de perpendicularité, la cale à gradins est mesurée quatre fois, à savoir deux fois en position initiale et deux fois en position décalée de la valeur d'un créneau (20 mm) dans la direction de la cale.

Ainsi, après suppression de la constante palpeur, on détermine  $X_c$  et  $Y_c$  les nouvelles coordonnées  $x$  et  $y$  d'un point après correction de l'ensemble des défauts (hors perpendicularité).

Un point mesuré de la cale à gradins s'écrit alors :

$$\begin{cases} X_c = x + xTx + yRx - xRz.y \\ Y_c = y + yTy + xTy \end{cases}$$

On relève ensuite la pente  $p$  de la courbe de justesse à  $\pm 45^\circ$  corrigée (suppression des défauts de justesse, rectitude et lacet) en fonction de la longueur étalon de la cale à gradins, ce qui permet de déterminer l'angle  $\gamma$  du défaut de perpendicularité tel que  $\gamma = \frac{2.p}{\sin(2.\beta)}$ , où  $\beta$

représente l'angle entre l'axe  $x$  et l'axe de la cale à gradins. On réalise ce calcul pour les mesures de type 7 et 8 indépendamment [Figure 11]. Le défaut de perpendicularité que l'on retient est la moyenne des deux mesures.

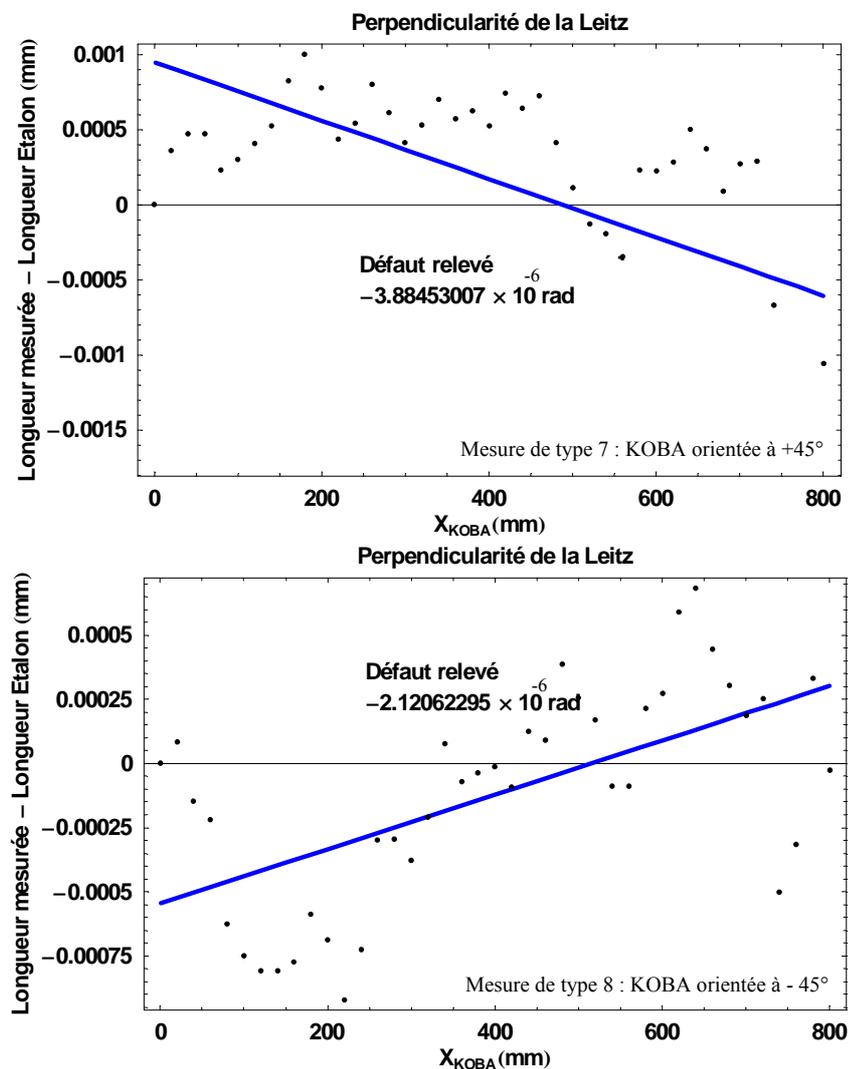


Figure 11 : Détermination du défaut de perpendicularité à l'aide des deux mesures

Calculer deux fois le défaut de perpendicularité est relativement intéressant, dans la mesure où l'on peut vérifier indépendamment la concordance des deux mesures.

En fait pour calculer correctement la perpendicularité dans le cas où l'on effectue les deux types de mesures, il faudrait calculer la perpendicularité à partir de l'ensemble des mesures.

Dans ce cas, la pente  $p$  de la droite est calculée à partir de l'ensemble de mesures de type 7 et 8, en inversant le signe des écarts obtenus sur un des types. On peut également calculer la perpendicularité comme la moyenne des deux perpendicularités calculées (types 7 et 8) ce qui fournit quasiment le même résultat.

Théoriquement, les graphes de la **Figure 11** devraient montrer des points alignés selon des pentes opposées. En pratique, cela n'est pas tout à fait le cas. Les écarts mesurés sont très faibles et les incertitudes que l'on retrouvera au chapitre concernant la simulation de Monte Carlo ne sont pas négligeables d'autant que ces courbes intègrent l'ensemble des incertitudes du processus y compris les incertitudes sur l'étalonnage de la cale à créneaux.

## 4 Combinaison des défauts de la Leitz - Fonctions Equivalentes

La géométrie de la machine étant connue dans le plan, il est possible de déterminer la conséquence de ces défauts de géométrie sur la mesure d'une bague ou d'une denture dans la zone d'étude. Nous avons montré que les défauts de la machine pouvaient se décomposer de manière unique grâce au concept de fonctions équivalentes propre à la géométrie étudiée.

Les résultats sur une denture extérieure [**Figure 12**] sont présentés ci-dessous. La denture considérée est un engrenage cylindrique droit de module  $m=8$  et de  $Z=25$  dents.

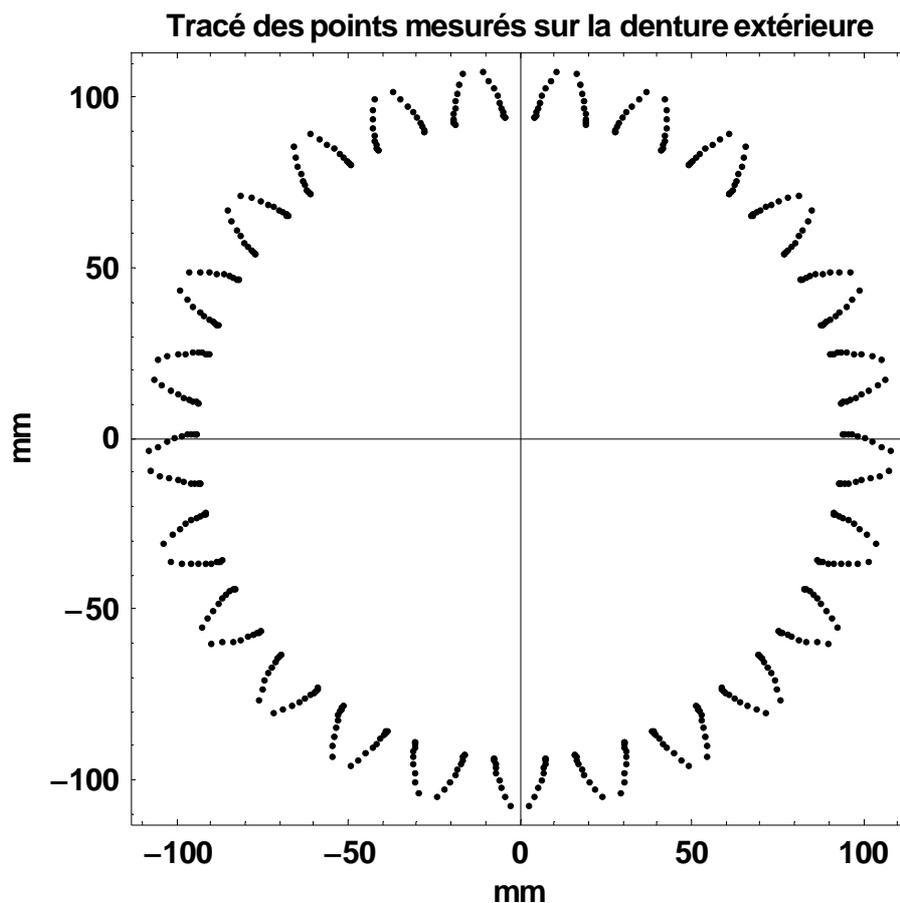


Figure 12 : denture extérieure étudiée

La contribution des défauts de géométrie de la machine à mesurer sur les écarts est représentée sur la **Figure 13**.

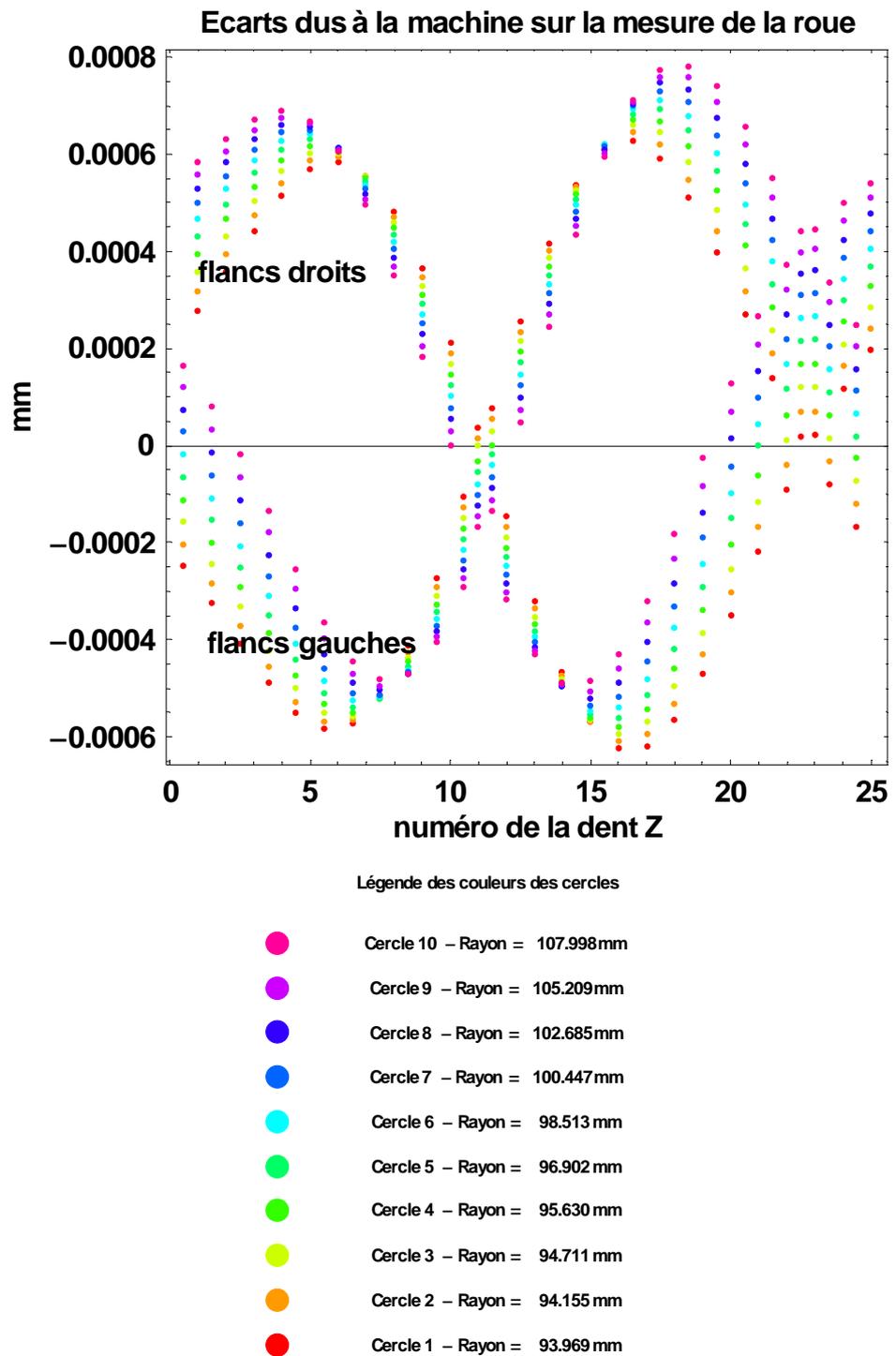


Figure 13 : conséquences des défauts de la machine sur l'engrenage considéré

Les défauts équivalents sont représentés sur la **Figure 14**. On identifie au sens des moindres carrés une justesse d'axe x, une rectitude d'axe x et le calage angulaire des flancs gauches et droits. Au lieu de caler indépendamment les flancs gauches et droits, il serait également possible de ne caler angulairement qu'un seul des deux flancs et de rajouter une variation d'épaisseur de denture, ce qui revient exactement au même résultat.

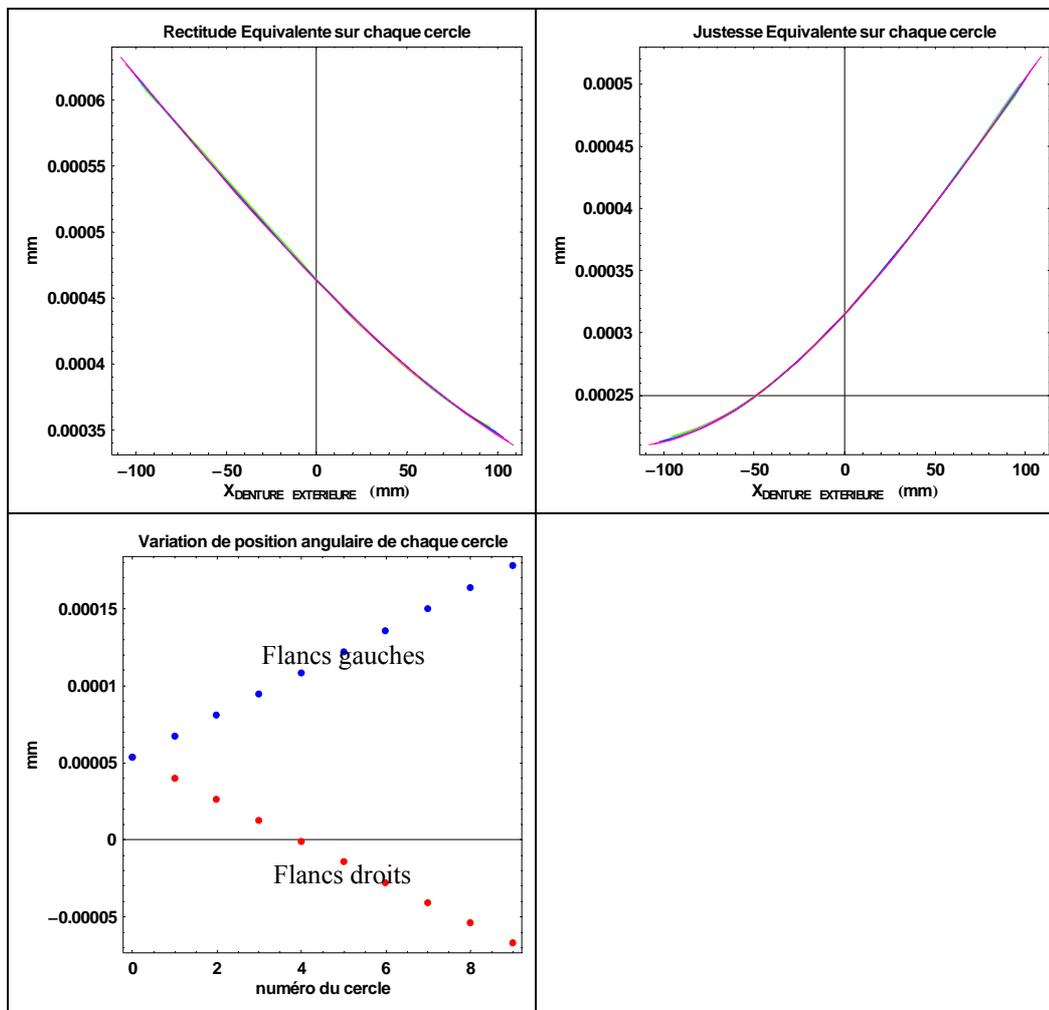


Figure 14 : Tracé des fonctions équivalentes sur la géométrie étudiée

Il est intéressant de noter que les fonctions équivalentes (justesse et rectitude équivalentes) n'évoluent pas significativement d'un cercle à l'autre à condition que les cercles soient de rayon relativement proche (cas de l'engrenage).

## 5 Etude de la géométrie de la machine à mesurer Trimesure de l'ENSAM de Lille

La géométrie de la machine de l'ENSAM de Lille a également été évaluée. Dans ce paragraphe, nous ne présenterons pas d'incertitudes de mesure mais nous validons expérimentalement les différentes notions présentes dans les chapitres précédents. Une mesure du Machine Checking Gauge, dans la zone d'étude, permet de vérifier à la fois la combinaison

des défauts de la machine mais aussi le calcul des fonctions équivalentes sur les mesures de type cercle. Nous validons également expérimentalement le calcul des fonctions équivalentes grâce à une comparaison avec des mesures d'engrenages par permutation [Chapitre VI].

## 5.1 Evaluation de la géométrie de la machine

Les différents défauts (au sens correction) de la Trimesure obtenus grâce aux méthodes exposées précédemment sont représentés sur la **Figure 15**.

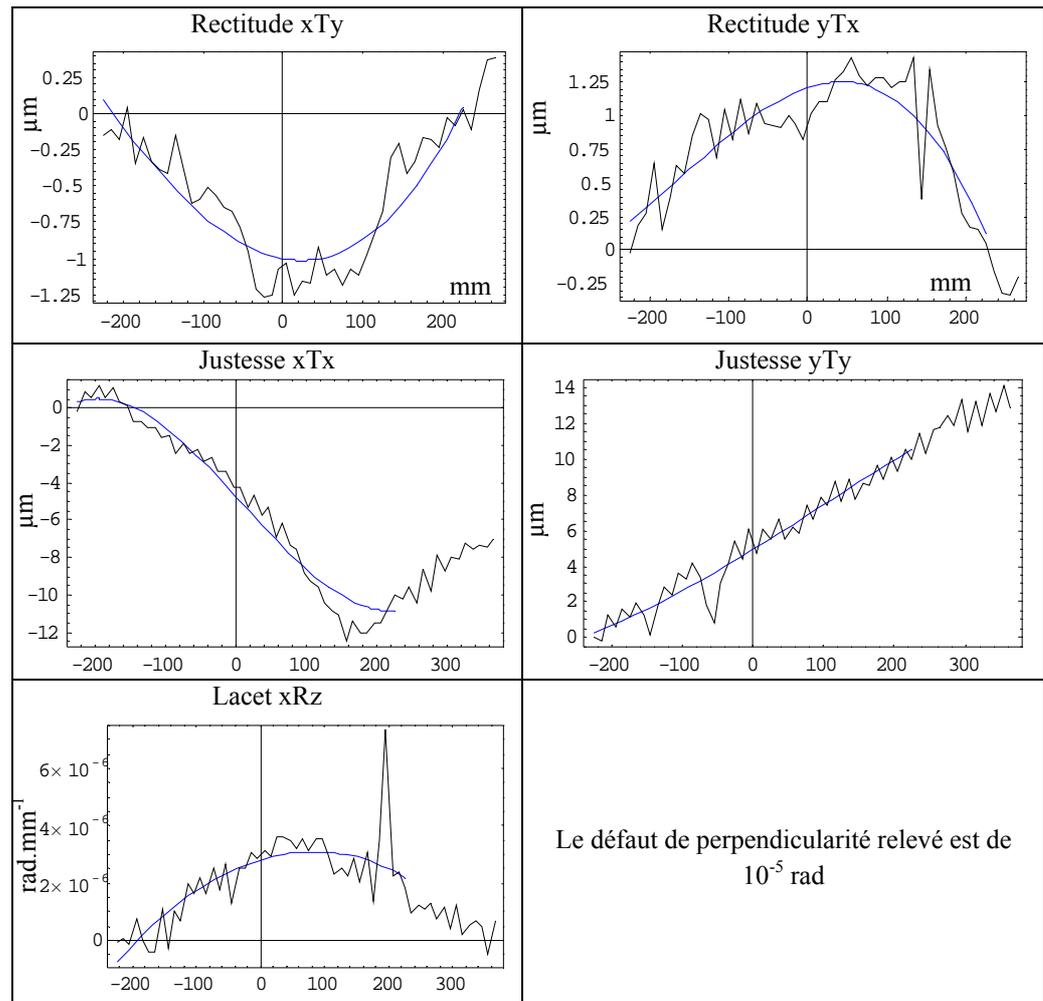


Figure 15 : Défaut de la Trimesure de l'ENSAM de Lille

## 5.2 Machine Checking Gauge

### 5.2.1. Présentation

La machine Checking Gauge (MCG) [Figure 16] est constituée d'un bras en fibre de carbone, de faible poids et peu sensible aux effets thermiques, monté sur un pivot constitué d'une bille de rubis de diamètre 4mm. Ce bras est équilibré et entraîné par le stylet du palpeur. La bille rubis du stylet est engagée dans une fourche qui autorise uniquement un mouvement radial. Au moment de la prise de mesure, la bille du palpeur est en contact en trois points garantissant une

grande qualité de mesure. Le MCG peut décrire une sphère tronquée. La sphéricité de la surface décrite est de  $\pm 0.5 \mu\text{m}$  [Documentation Renishaw].

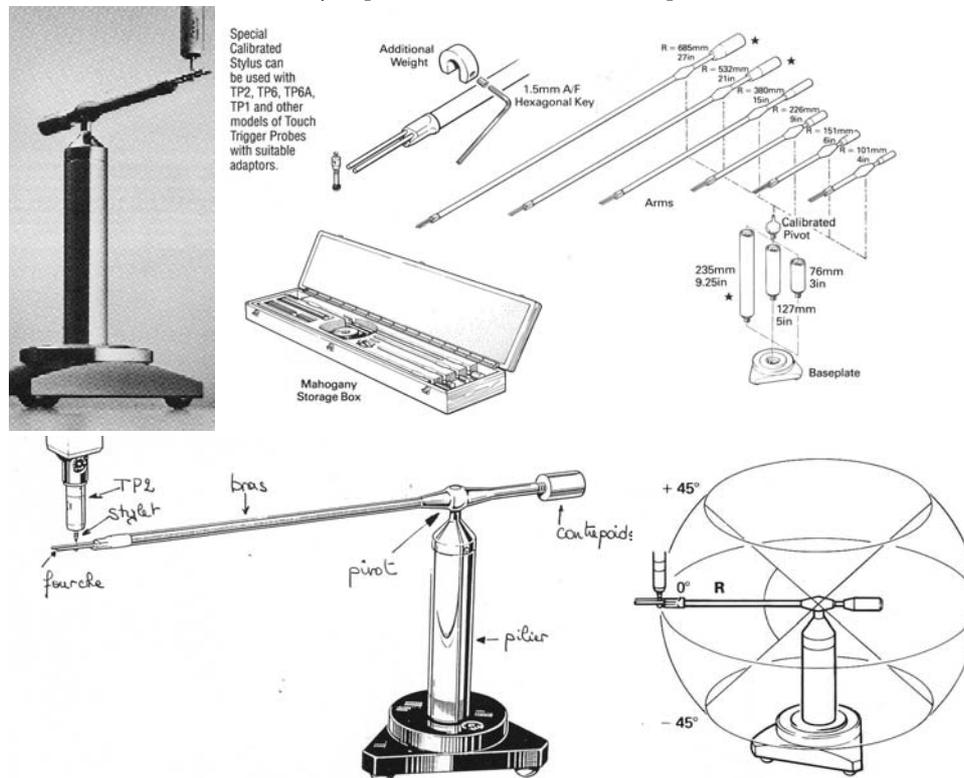


Figure 16 : description de la Machine Checking Gauge

Le Checking Gauge [BLU2001 - SPR2003], appelé parfois jauge de calibrage volumétrique, permet de faire une analyse rapide des défauts d'une machine. Ce type d'étalon est du même type que le système Ball Bar fortement utilisé pour évaluer les qualités d'une machine outil.

En ce qui nous concerne, seul un cercle de 225 mm de rayon a été généré à une altitude z constante dans la mesure où l'on réalise une étude dans le plan.

Les écarts suivant la normale obtenus sont la somme de plusieurs phénomènes, à savoir :

- Défauts de géométrie de la machine,
- Comportement du palpeur
- Effet de la mise en place du MCG (erreur de palpement du pivot),
- Erreur sur le rayon du MCG (pas raccordé),
- Erreur de répétabilité.

### 5.2.2. Mesures au MCG

Les écarts dans la direction de la normale des mesures du Machine Checking Gauge sont représentés sur la Figure 17. Un point a été mesuré tous les deux degrés soit 180 points par tour.

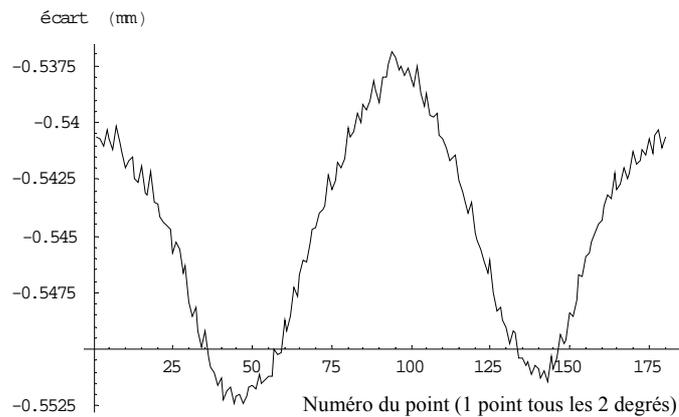


Figure 17 : Ecart relevés à la Machine Checking Gauge

Au Chapitre I, nous avons montré que les défauts du plan sont analysables comme :

- une rectitude équivalente,
- une justesse équivalente,
- une variation de rayon correspond au fait que le MCG ne bénéficie pas d'un raccordement au mètre.

Une optimisation aux moindres carrés a été effectuée dans ces conditions afin de déterminer les fonctions équivalentes sur les mesures du MCG [Figure 18].

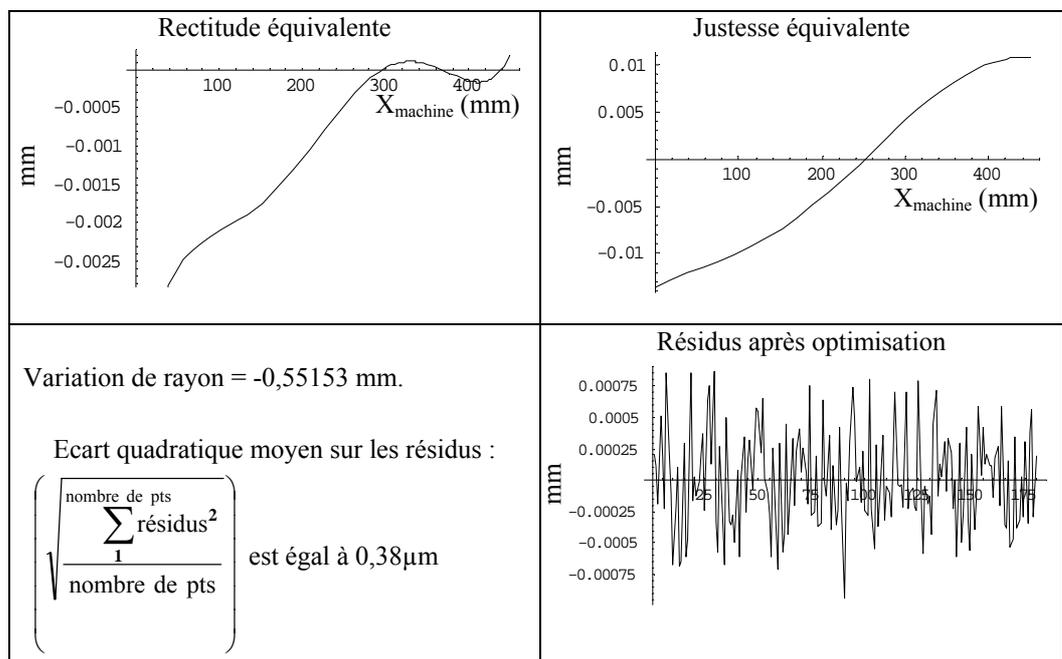


Figure 18 : Traitement des écarts

L'analyse directe des écarts mesurés par les fonctions équivalentes est tout à fait faisable comme le montre la Figure 18. Néanmoins, pour valider complètement notre étude, il est indispensable de comparer les résultats obtenus sur le MCG avec la combinaison des défauts de la machine.

### 5.2.3. Combinaison des défauts de la machine et mesures à la MCG

Pour réaliser la comparaison directe des écarts relevés sur la MCG et la combinaison des défauts de la machine à mesurer, il convient de prendre quelques précautions. En effet, comme nous l'avons précisé, le MCG ne bénéficie pas d'un raccordement au mètre, nous allons donc réaliser un calage aux moindres carrés des écarts mesurés en prenant trois vecteurs de sensibilité, à savoir deux translations et une variation de rayon pour recalibrer le cercle mesuré par le MCG. Ce calage ne supprime pas les défauts dus à la machine mais permet de recentrer les écarts.

La combinaison des défauts de la machine nous permet de définir les écarts  $\varepsilon$  dus à la géométrie de la machine sur le cercle mesuré, on a :

$$\varepsilon = -\{ (R_y(y) + J_x[x] - (\gamma + L_x[x]).y) n_x + (R_x(x) + J_y(y)) n_y \}$$

La **Figure 19** représente les résultats de la comparaison entre les écarts mesurés au MCG et la combinaison des défauts de la machine. Sur cette figure, le graphe noté A, permet de montrer que la corrélation directe entre les écarts du MCG et la combinaison des défauts de la machine est bonne mais pas parfaite. Le graphe noté B, permet de montrer que l'optimisation aux moindres carrés des écarts de la MCG est d'excellente qualité. Le graphe noté C présente conjointement la mesure de la sphère centrale du MCG et la différence entre la combinaison des défauts de la machine et de l'optimisation par les fonctions équivalentes des mesures de la MCG. Ce graphe C permet d'affirmer que les défauts mesurés par la MCG sont la somme des défauts de la machine et des défauts dus au système de palpation étudié.

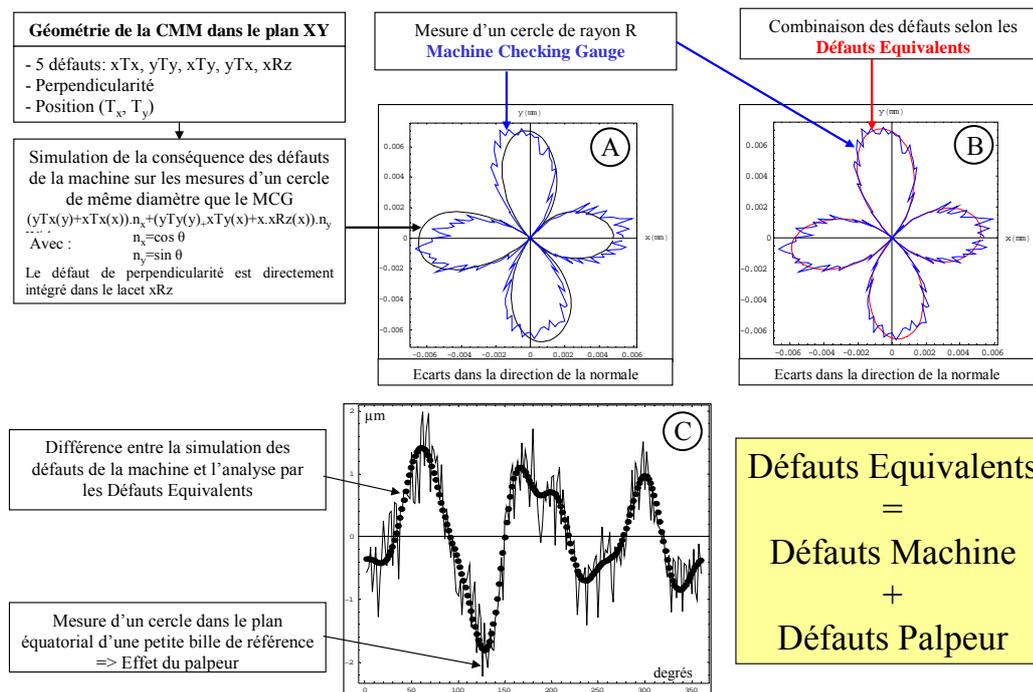


Figure 19 : Comparaison des mesures à la MCG et de la combinaison des défauts de la machine

## 6 Correction des mesures

La **Figure 20** représente le bilan des défauts de la machine influençant les mesures de pièces de forme circulaire et leur contribution sur les mesures. L'étude de la géométrie de la machine permet donc de faire des corrections des mesures afin de diminuer les incertitudes sur les mesurandes étudiés. Il faut ensuite prendre compte l'incertitude sur les corrections.

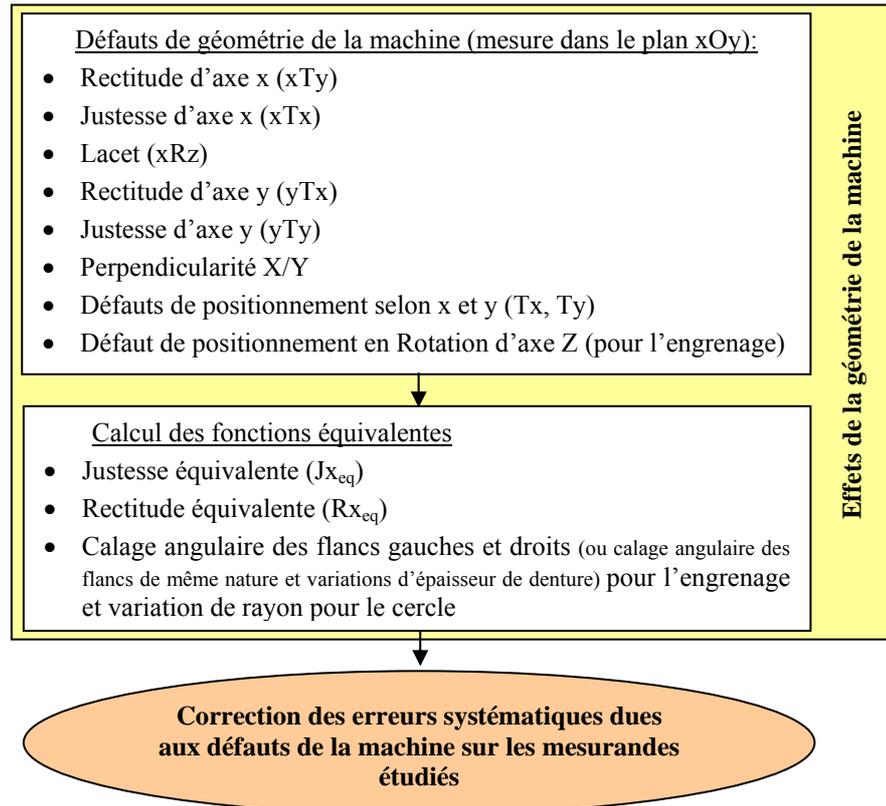


Figure 20 : Bilan sur les effets de la géométrie de la machine sur la mesure de pièces de forme circulaire





# CHAPITRE VI

## Méthode de permutation ou de multiretourneement

### SOMMAIRE

1	Introduction .....	140
2	Méthode du multiretourneement .....	141
2.1	Présentation. Première méthode d'analyse.....	141
2.2	Méthode de la moyenne - Permutation circulaire.....	145
2.2.1	Elimination de l'erreur pièce : calcul de l'erreur machine .....	145
2.2.2	Elimination de l'erreur machine: calcul de l'erreur pièce .....	146
2.2.3	Interprétation des résultats .....	147
3	Traitement des constantes issues de la permutation.....	147
3.1	Utilisation des fonctions équivalentes .....	147
3.2	Analyse directes des constantes issues de la permutation .....	151
3.2.1	Cas d'une pièce à normales radiales (bague) .....	151
3.2.2	Cas de l'engrenage.....	152
3.3	Raccordement.....	153
4	Conclusion .....	153

# Méthode de permutation ou de multiretournement

## 1 Introduction

Les méthodes de séparation des défauts peuvent se classer en trois catégories, à savoir : les méthodes de retournement, de propagation et de permutation. Ces techniques sont basées sur les multi orientations des pièces. Un papier important sur ces techniques a été écrit par WHITEHOUSE en 1976 [WHI1976].

- La méthode de retournement a déjà été utilisée au chapitre III sur la mesure des rectitudes afin de séparer les défauts de la pièce de ceux de la machine. Les références bibliographiques à ce sujet sont difficiles à trouver dans la mesure où c'est une technique très ancienne. Au niveau du contrôle de la rectitude du banc d'une machine outil (un tour par exemple), l'abbé CAYERE a fait un point important sur la technique dans les années 1953-1956. [CAY1953 – CAY1956]. A l'heure actuelle, seul le principe de base se retrouve dans les ouvrages courants. Nous ne développerons pas la technique ici, pour plus d'informations, se reporter au chapitre III.
- La technique de propagation est utilisée principalement pour la mesure de pièces de forme circulaire [WHI1976 - MOO1989 - GAO1997]. Les prémisses de cette méthode se retrouve une fois de plus dans les ouvrages de l'abbé CAYERE [CAY1956] afin de mesurer les défauts d'un plateau. Elle consiste généralement à disposer trois capteurs fixes en périphérie de la pièce et de mesurer plusieurs fois la pièce après l'avoir tournée d'un angle donné entre chaque mesure. Cette technique peut également être utilisée pour mesurer la rectitude d'une règle [WHI1976 - LI1996], les capteurs sont dans ce cas alignés. Un traitement intelligent permet de séparer les défauts de la pièce de ceux de la machine.
- La technique de permutation, très proche du principe de propagation, consiste à mesurer la pièce N fois en la faisant tourner de  $\frac{2\pi}{N}$  tour entre chaque mesure complète de la pièce. Les références ne manquent pas sur le sujet [WHI1976 - LIN1989 – LIN1992 - TON1996 - EST1997-2 - COO2003\_1]. Néanmoins, les notations des articles ne sont pas toujours rigoureuses ou complexes, c'est pourquoi nous avons réécrit complètement, à partir de ces références, le principe de la permutation appliquée à l'engrenage. Nous avons utilisé cette technique pour mesurer les défauts d'un MAAG sur la MMT de l'ENSAM de Lille.

## 2 Méthode du multiretourneement

### 2.1 Présentation. Première méthode d'analyse.

L'idée est de séparer les défauts d'une pièce présentant une symétrie d'ordre  $Z$  des défauts de la machine à mesurer par permutation. La permutation complète consiste à mesurer  $Z$  gammes de points de la pièce par rotation de  $\frac{2\pi}{Z}$ . Dans le cadre de cette étude, la pièce est une roue dentée de module  $m$  présentant  $Z$  dents. Une gamme est composée de  $F$  points mesurés par dent soit une acquisition de  $F \times Z$  points pour l'étude complète de la roue dentée

On mesure l'étalon en accostage suivant la normale comme une surface complexe mais, dans le cas d'un engrenage, on enregistre les positions successives du centre de la bille du palpeur. La normale est calculée suivant les méthodes précédentes. Le résultat pour chaque point est un écart suivant la normale.

Pour fixer les idées, on suppose que la roue est posée sur la surface de travail de la machine à mesurer. Son axe de symétrie est placé verticalement. La pièce et sa remise en position après rotation de  $\frac{2\pi}{Z}$  sont imprécises. Il convient de préciser l'origine et l'ordre de grandeur des erreurs que cela engendre:

1. Erreurs liées à la variation de la localisation des points en espace machine. Pour les 3 fonctions de translations, une variation de 10 micromètres pour 50 mm de course soit 0,2 micromètres par millimètre est déjà très importante. Pour les trois fonctions de rotations, l'angle maximum constaté est de l'ordre de 50 micromètres par mètre, une variation de bras de levier de 1 millimètre correspond à une erreur de 0,05 micromètres.

2. Erreurs liées à la variation de la localisation des points en espace pièce. Ces erreurs correspondent à une erreur tangentielle et une erreur sur la direction de la normale au point visé. Les erreurs engendrées dépendent du rayon de courbure de la pièce et du rayon palpeur. Pratiquement, en limitant les erreurs de localisation à quelques  $10\mu\text{m}$  et pour une dent de module 6 (donc à grand rayon de courbure), l'hypothèse de la symétrie n'engendre pas d'erreur significative.

#### Notations

On appelle famille de points homologues un ensemble de  $Z$  points et leurs normales (on pourrait aussi dire  $Z$  facettes) définis symétriquement sur la pièce. Dans le cas de  $F$  points mesurés par dent de la roue dentée, on a  $F$  familles.

Ainsi, si la pièce tourne de  $\frac{2\pi}{Z}$  degrés, le premier point vient nominalement dans la position du second (en espace machine), le second à la place du troisième etc...

On réalise une description informatique de la pièce à mesurer, c'est-à-dire que l'on définit  $N$  points théoriques  $M_0$  et leurs normales, ce qui revient à donner une géométrie nominale parfaite à la pièce. Les écarts se calculent par rapport à ces points. Pour respecter la symétrie, les  $N$  points forment  $F$  familles homologues de  $Z$  points. On a alors  $N = F \times Z$ .

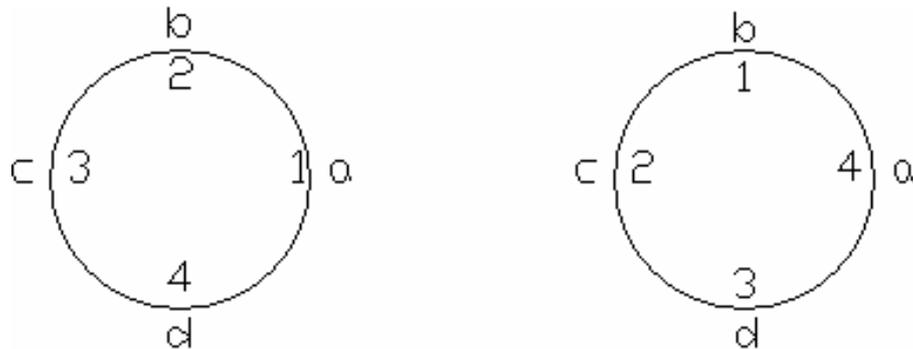
On suppose que les  $N$  points sont disposés de telle façon que la position de la pièce soit entièrement déterminée.

Lorsqu'on réalise une mesure, on obtient N écarts suivant la normale qui sont la somme de trois classes d'erreurs :

1. Les écarts dus à la géométrie de la machine.
2. Les écarts dus à la différence entre la géométrie théorique de la pièce et sa géométrie réelle.
3. Les écarts liés aux défauts de positionnement. Puisque la pièce est un solide en petit déplacement, ces N écarts de positionnement peuvent se résumer en 6 informations élémentaires soit 3 translations et 3 petites rotations.

A chaque nouvelle mesure, après rotation de  $\frac{2\pi}{Z}$  radians, la pièce reprend nominalement la même position donc les défauts machine à prendre en compte sont identiques d'une mesure à l'autre. Par contre, en repère pièce, ces erreurs ne s'appliqueront pas au même point.

*EXEMPLE:*



*Figure 1 : Schéma pour l'explication de la permutation*

Sur la **Figure 1** :

- les points désignés par des chiffres (1, 2, 3, ou 4) sont en espace pièce
- les points désignés par des lettres (a, b, c, ou d) sont en espace machine.

A la première mesure, l'erreur de géométrie machine au point a ( $E_m a$ ) s'applique sur la pièce au point 1 qui possède une erreur de géométrie pièce ( $E_p 1$ ). Sous forme d'équation, l'erreur au point 1 pour la première mesure s'écrit :

$$E\mathbf{1}_1 = E_m a + E_p \mathbf{1} + E_d \mathbf{1}_1$$

où  $E_d \mathbf{1}_1$  est l'erreur de position ou de déplacement au point 1 dans la mesure d'indice 1.

L'observateur est en espace pièce. A la seconde mesure, l'erreur au point a s'applique au point 4 et la mesure au point 1 est faussée par l'erreur au point b. Sous forme d'équation, l'erreur au point 1 s'écrit :

$$E\mathbf{1}_2 = E_m b + E_p \mathbf{1} + E_d \mathbf{1}_2$$

## CHAPITRE VI

## METHODE DE PERMUTATION OU DE MULTIRETOURNEMENT

Pour les mesures 3 et 4, on a :

$$E_{1_3} = E_m c + E_p \mathbf{1} + E_d \mathbf{1}_3$$

$$E_{1_4} = E_m d + E_p \mathbf{1} + E_d \mathbf{1}_4$$

La somme de ces quatre équations donne :

$$E_{1_1} + E_{1_2} + E_{1_3} + E_{1_4} = E_m a + E_m b + E_m c + E_m d + 4E_p \mathbf{1} + E_d \mathbf{1}_1 + E_d \mathbf{1}_2 + E_d \mathbf{1}_3 + E_d \mathbf{1}_4$$

A chaque nouvelle gamme, (ensemble des mesures pour une position donnée de la pièce), on ajoutera 4 informations (4 écarts suivant la normale) mais uniquement 2 inconnues de positions (2 translations). Les erreurs de géométrie machine s'introduisent dans les équations par permutation circulaire. Après un nombre suffisant de gammes (dans cet exemple, 4 gammes sont nécessaires), il est possible de calculer les différents écarts. La somme des quatre équations est une technique qui sera utilisée au paragraphe suivant. On peut écrire ce problème sous forme entièrement matricielle. On note  $T_x$  (respectivement  $T_y$ ) le déplacement de translation dans le sens X (respectivement Y). On aboutit à un système de 16 inconnues et 16 équations qui est à la fois très creux (beaucoup de zéros) et de déterminant nul.

Précisons tout de suite l'origine de ce déterminant nul. Si la méthode de séparation permettait de calculer tous les écarts suivant la normale, qui correspondent à la différence entre la pièce nominale et la pièce physique, cela constituerait un raccordement sans référence, ce qui est impossible. L'équation précédente montre que les écarts seront calculés à une constante près égale à  $E_m a + E_m b + E_m c + E_m d$ . Pour une mesure de division cela ne pose pas de problème puisque cette constante correspond à une rotation d'ensemble de la roue physique par rapport à la roue nominale. Lorsqu'on s'intéresse aux deux flancs, les constantes s'interprètent comme une méconnaissance de l'épaisseur moyenne de la denture.

Il est intéressant d'examiner les conditions de "résolvabilité" du système pour un nombre de mesures  $G$  inférieur ou égal à  $Z$ .

De manière générale, dans l'espace à trois dimensions, si on appelle  $N$  le nombre de points et  $G$  le nombre de mesures, on a :

- $N$  inconnues géométrie machine  $E_m$ .
- $N$  inconnues géométrie pièce  $E_p$ .
- 6 inconnues de position par gamme qui donnent un effet global  $E_d$  au niveau de chaque point. Cet effet est évalué par le torseur de petits déplacements.
- $N$  informations par gammes sous forme de  $N$  écarts suivant la normale.

Chaque écart s'écrira :  $E = E_m + E_p + E_d$

Pour posséder suffisamment d'informations par rapport aux inconnues, on doit avoir pour  $G$  gammes l'inégalité:  $2N + 6G \geq N \cdot G$  (1)

Cette relation exprime que le nombre de gammes minimal à prévoir est supérieur à  $\frac{2N}{N-6}$  et que  $N$  ne peut être inférieur à 6.

Introduisons la notion de famille de points dans cette équation. On suppose qu'on réalise  $G=Z$  gammes c'est-à-dire un retournement complet. La relation (1) s'écrit avec  $N=F \cdot Z$ :

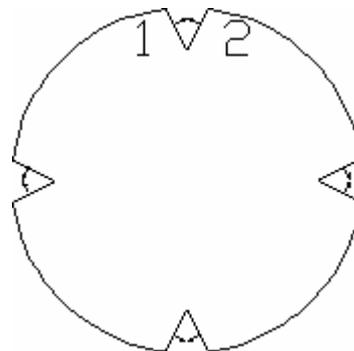
$$2F \cdot Z + 6Z \geq F \cdot Z \cdot Z$$

$$6 \leq F \cdot (Z-2)$$

Comme dans les théories sur l'isostatisme, ce genre d'analyse très globale doit être manipulé avec prudence.

Dans l'exemple traité précédemment, on considère une famille de points permettant de réaliser un positionnement de la pièce en deux translations orthogonales. La relation doit s'écrire  $2 \leq F \cdot (Z-2)$ . Si  $F=1$  alors  $Z \geq 4$ , on est dans un cas de réalisation minimale.

La **Figure 2** est une autre forme de pièce plane permettant de contrôler complètement le mouvement plan (2 translations, une rotation).



*Figure 2 : pièce plane permettant de contrôler complètement le mouvement plan*

On a  $F=2$  et  $Z=4$  soit  $F \cdot (Z-2)=4 > 3$ , le problème est soluble. Cette situation correspond à l'engrenage.

Pour l'application à un engrenage avec  $Z=24$  dents et  $F=2$  familles de points, il faut au minimum  $\frac{2N}{N-3} = \frac{48}{21}$  mesures soit au moins 3 mesures. En fait, on choisit de réaliser 24 mesures des 48 points, on obtient donc un système de  $24 \times 48 = 1152$  équations à  $48 + 48 + 3 \times 24 = 168$  inconnues. La réduction aux moindres carrés peut être écrite avec des techniques matricielles. Heureusement, le problème possède de nombreuses symétries, et il est possible de le réduire. Il est d'ailleurs certain que sous la forme décrite ici la résolution poserait des problèmes de rang.

Il est intéressant de remarquer que cette technique de mesure permet d'utiliser une machine fautive sur le plan géométrique et une pièce sans précision. La prise en compte de toutes les causes possibles d'erreurs permet également d'évaluer la répétabilité des mesures.

## 2.2 Méthode de la moyenne - Permutation circulaire.

### 2.2.1 Elimination de l'erreur pièce : calcul de l'erreur machine

Soit une pièce de symétrie d'ordre  $Z$  possédant donc  $Z$  formes identiques désignées par les indices  $i$  de 1 à  $Z$  pour la pièce

On désigne par:

- $\tilde{i}$  la forme  $i$  pour la machine.
- $k$  les points réels de la forme  $i$  pour la pièce, l'erreur sera donc notée  $E_p^{ik}$ .
- $\tilde{k}$  les points fictifs pour la machine de la forme fictive  $i$ , l'erreur sera notée  $E_m^{\tilde{i}\tilde{k}}$ .

La pièce est mesurée en  $Z$  positions désignées par les indices  $j$  de 0 à  $Z-1$ .

On a  $F$  points par formes désignées par les indices  $k$  de 1 à  $F$ .

Les erreurs sont définies comme suit :

- $E_p^{ik}$  erreur de géométrie sur la forme  $i$  au point  $k$ .
- $E_m^{\tilde{i}\tilde{k}}$  erreur de géométrie de la machine en un point fictif de la forme  $i$  au point  $k$ .
- $E_d^{ikj}$  erreur due au déplacement  $j$  au point  $k$  de la forme  $i$ .
- $E_t^{ikj}$  erreur totale mesurée au point  $k$  de la forme  $i$  dans le déplacement  $j$ .

On a la relation générale:

$$E_t^{ikj} = E_m^{\tilde{i}\tilde{k}} + E_p^{ik} + E_d^{ikj}$$

Répétons la mesure du point  $k$  situé sur la forme 1 liée à l'espace pièce dans les gammes  $j$  de 0 à  $Z-1$ .

$$E_t^{1k0} = E_m^{\tilde{1}\tilde{k}} + E_p^{1k} + E_d^{1k0}$$

$$E_t^{1k1} = E_m^{\tilde{2}\tilde{k}} + E_p^{1k} + E_d^{1k1}$$

d'une façon générale, on a:

$$E_t^{1kj} = E_m^{(j+1)\tilde{k}} + E_p^{1k} + E_d^{1kj}$$

et à la fin,

$$E_t^{1k(Z-1)} = E_m^{\tilde{Z}\tilde{k}} + E_p^{1k} + E_d^{1k(Z-1)}$$

On fait la somme de ces  $Z$  relations:

$$\sum_{j=0}^{Z-1} E_t^{1kj} = \sum_{j=0}^{Z-1} E_m^{(j+1)\tilde{k}} + \sum_{j=0}^{Z-1} E_p^{1k} + \sum_{j=0}^{Z-1} E_d^{1kj}$$

De façon générale, on a, quelque soit  $i$  :

$$\sum_{j=0}^{Z-1} E_t^{ikj} = \sum_{j=0}^{Z-1} E_m^{((i+j) \bmod Z)\tilde{k}} + \sum_{j=0}^{Z-1} E_p^{ik} + \sum_{j=0}^{Z-1} E_d^{ikj}$$

Le terme  $\sum_{j=0}^{Z-1} E_t^{ikj}$  est la somme des erreurs totales acquises dans les U mesures.

Le terme  $\sum_{j=0}^{Z-1} E_m^{((i+j) \bmod Z)k}$  est la somme des erreurs de géométrie de la machine au point fictif k pour toutes les formes i. Cette somme se retrouvera pour tous les points avec permutation des termes, elle ne dépend pas de i. C'est donc une constante additive pour chaque point k.

Le terme  $\sum_{j=0}^{Z-1} E_p^{ik} = Z.E_p^{ik}$  représente Z fois l'erreur de géométrie de la pièce au point de la famille k sur la forme i.

Le terme  $\sum_{j=0}^{Z-1} E_d^{ikj}$  représente le déplacement du point de la famille k sur la forme i sous l'action d'un déplacement fictif représentant la somme des petits déplacements pour les Z positions ce qui donne un petit déplacement.

En répétant la mesure pour les N=FZ points de la pièce, on calcule N fois les quatre sommes de Z termes et on obtient F familles de Z erreurs à une constante près et à un déplacement près. On peut optimiser ce résultat aux moindres carrés pour éliminer le déplacement fictif et éventuellement les constantes.

### 2.2.2 Elimination de l'erreur machine: calcul de l'erreur pièce

On reprend les expressions précédentes mais au lieu de suivre un point appartenant à la pièce, on suit un point appartenant à la machine.

Les sommes s'écrivent alors:

$$\sum_{j=0}^{U-1} E_t^{ikj} = \sum_{j=0}^{U-1} E_m^{\tilde{i}k} + \sum_{j=0}^{U-1} E_p^{((i-j) \bmod U)k} + \sum_{j=0}^{U-1} E_d^{ikj}$$

Les erreurs résultantes de l'effet au point k de la forme i d'un déplacement j restant définies en repère pièce, elles ont un effet différent au point k de la forme i défini en repère machine. On a l'égalité suivante:

$$E_d^{ikj} \text{ (repère machine)} = E_d^{((i+j) \bmod U)kj} \text{ (repère pièce)}$$

Le terme  $\sum_{j=0}^{U-1} E_m^{\tilde{i}k} = U.E_m^{\tilde{i}k}$  représente U fois l'erreur de géométrie de la machine au point k de la forme i.

Le terme  $\sum_{j=0}^{U-1} E_p^{((i-j) \bmod U)k}$  est la somme des erreurs au point k de toutes les formes i de la pièce. Cette somme se retrouvera pour tous les points de la machine avec permutation des termes. C'est donc une constante additive pour tous les points.

Le terme  $\sum_{j=0}^{U-1} E_d^{ikj}$  représente le déplacement du point k de la forme i sous l'action d'un déplacement fictif représentant la somme des déplacements pour les U positions.

### 2.2.3 Interprétation des résultats

Le calcul permet de séparer les défauts de la pièce des défauts de la machine.

Pour accéder au déplacement lors de chaque gamme  $j$ , on reprend une des expressions précédentes, par exemple:

$$E_t^{ikj} = E_m^{((i+j) \bmod U)\tilde{k}} + E_p^{ik} + E_d^{ikj}$$

Pour chacun des termes  $E_t^{ikj}$ , on retranche le terme machine et le terme pièce. On obtient le terme de déplacement évalué avec une pièce parfaite et une machine parfaite. Par optimisation sur l'ensemble des points, on obtient le déplacement  $j$ .

Les résidus après élimination des trois sources de défauts forment une évaluation sur une mesure pratique de la répétabilité de la machine.

Le calcul introduit une constante par famille de points pour les erreurs pièce et une pour les erreurs machine. On montre que ces deux constantes sont égales. On trouve donc  $F$  constantes distinctes. Celles-ci ont une grande importance puisqu'elles correspondent aux phénomènes physiques que l'on ne sait pas déterminer par retournement. En particulier, elles correspondent au raccordement au mètre.

Le problème de l'évaluation des constantes est important puisqu'il limite l'intérêt de la permutation pour les mesures de profils.

## 3 Traitement des constantes issues de la permutation

### 3.1 Utilisation des fonctions équivalentes

L'engrenage MAAG est un master de 40 dents et de module égal à 5. Il a été mesuré par permutation sur la machine à mesurer de l'ENSAM de Lille dans la zone dans laquelle nous avons caractérisé la géométrie de la machine.

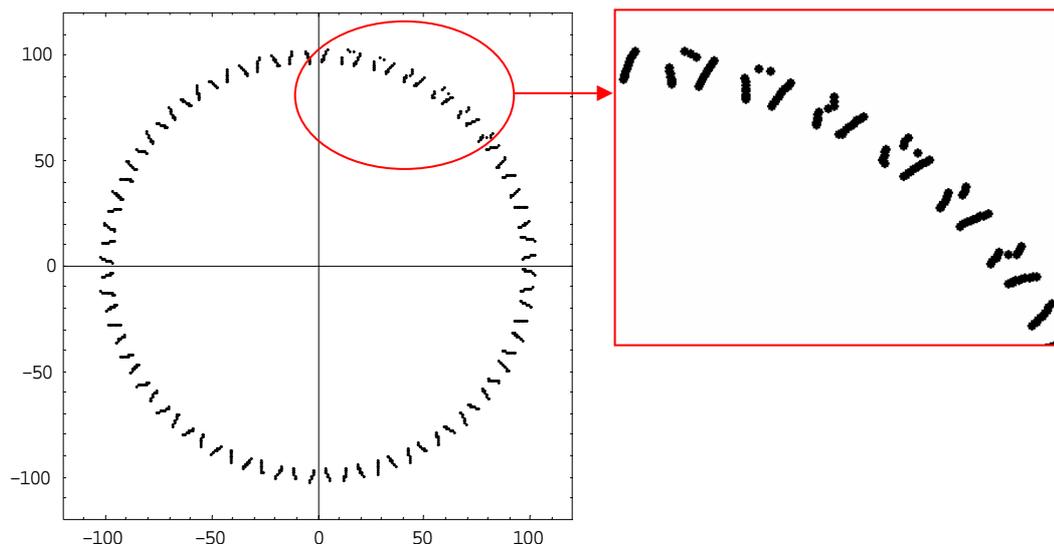


Figure 3 : Visualisation des écarts mesurés sur le MAAG représentés à une échelle donnée sur celui-ci

Pour mettre en évidence les problèmes de constantes dans la permutation, nous avons volontairement collé du scotch pour simuler des défauts sur certaines dents du master. Ces défauts sont visibles dans le premier quadrant de la **Figure 3**. L'épaisseur de scotch est de 60  $\mu\text{m}$  (vérifié en mesure de marche sur un profilomètre à contact de type KLA Tencor P10). Les défauts locaux sur la pièce sont donc très importants.

La méthode d'étude est schématisée sur la **Figure 4** :

L'engrenage est mesuré par permutation (40 dents donc 40 mesures) afin de séparer les défauts de la machine des défauts de la pièce.

L'analyse des défauts de la pièce peut être directement évaluée par la permutation. Les mesurandes de division sont bien évalués mais les mesurandes de profil ne sont pas analysables à cause de la présence de la constante angulaire sur chacun des cercles de points.

L'étude des fonctions équivalentes moyennes sur les erreurs de la machine issues de la permutation permet de déterminer les erreurs de la pièce pour chacune des mesures (correction directe des écarts pour chacune des mesures). La justesse équivalente est déterminée à une pente près ce qui doit être intégré en terme d'incertitudes. On peut alors corriger chacune des 40 mesures pour retrouver les profils.

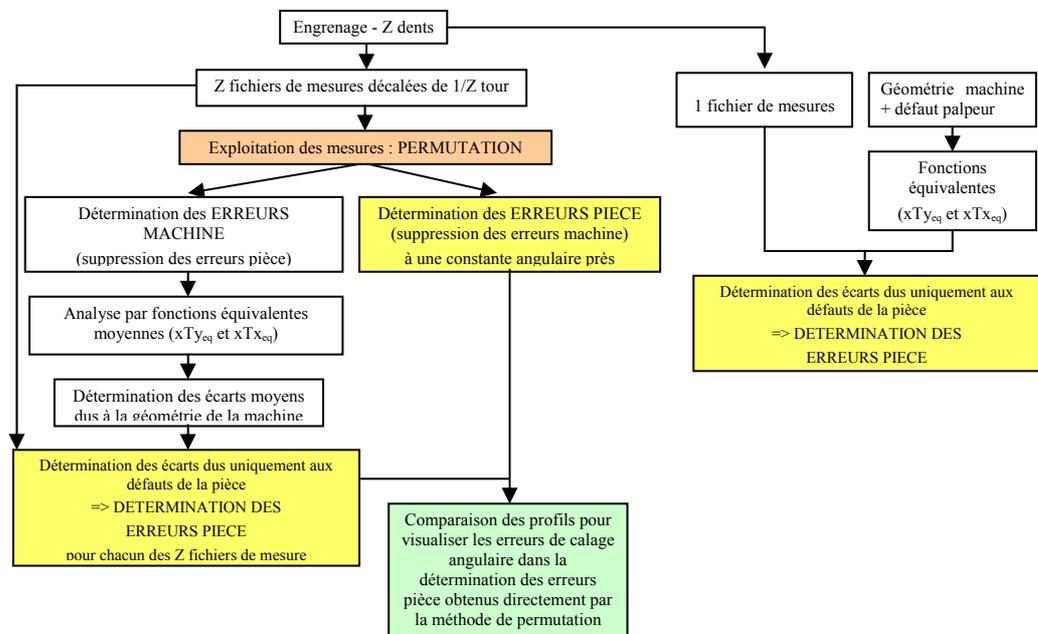


Figure 4 : Démarche pour l'étude de l'engrenage

La **Figure 5** représente conjointement les écarts dans la direction de la normale sur la pièce après suppression des erreurs de la machine par la permutation (points bleus – erreurs pièce) et après correction des écarts mesurés par ceux issus de l'analyse des erreurs machine par les fonctions équivalentes (points noirs). Les points bleus sont recentrés par les moyennes. La figure 26 illustre directement le résultat sur les profils.

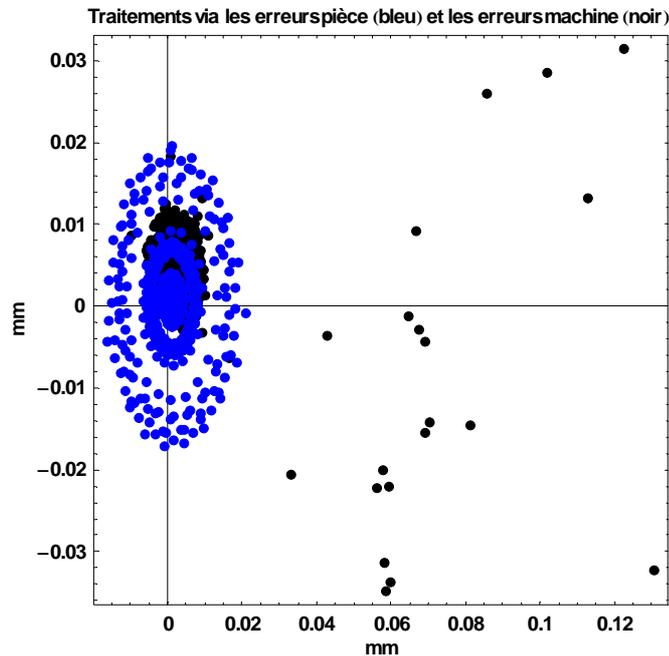


Figure 5 : Superposition des écarts dans la direction de la normale  
 Erreur Pièce (bleu) et Erreurs Corrigées par analyse des défauts machine (noir)

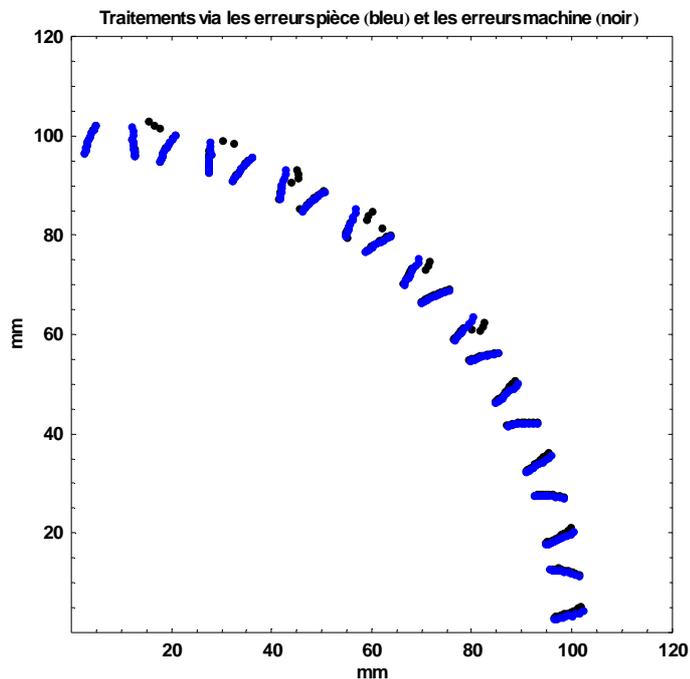


Figure 6 : La correction de géométrie permet de retrouver les dents volontairement déformées

La **Figure 7** représente les fonctions équivalentes calculées à partir des erreurs machine issues de la permutation sur chacun des cercles de points mesurés sur l'engrenage. La **Figure 8** représente les Fonctions équivalentes calculées directement grâce aux défauts de la machine appliqués à la définition théorique de l'engrenage MAAG.

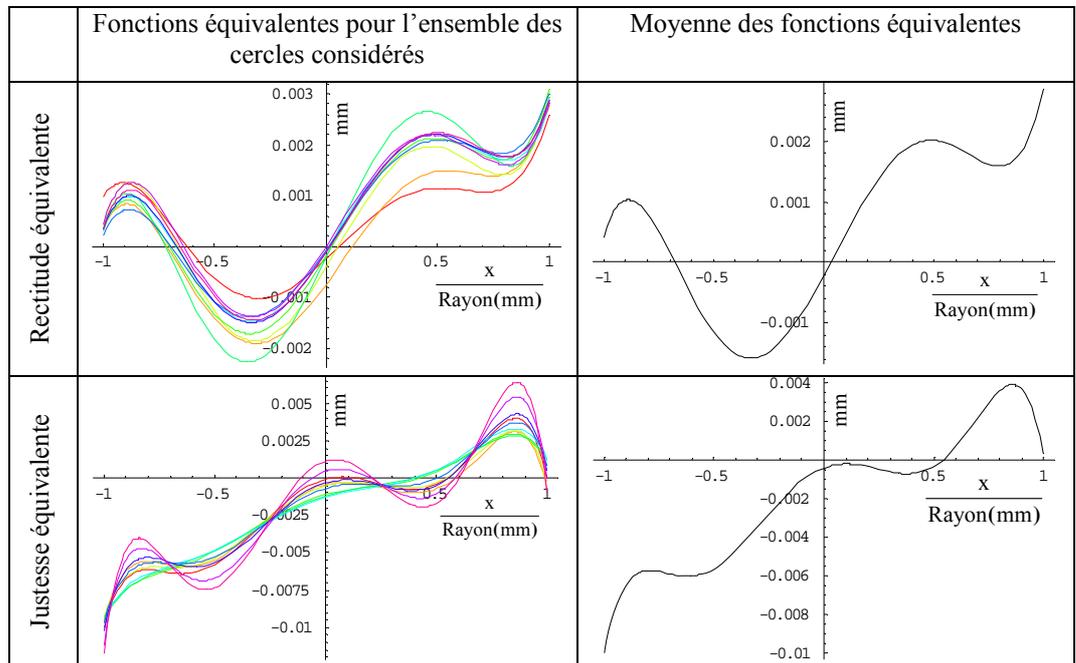


Figure 7 : Fonctions équivalentes calculées à partir des erreurs machine issues de la permutation sur chacun des cercles de points mesurés sur l'engrenage MAAG

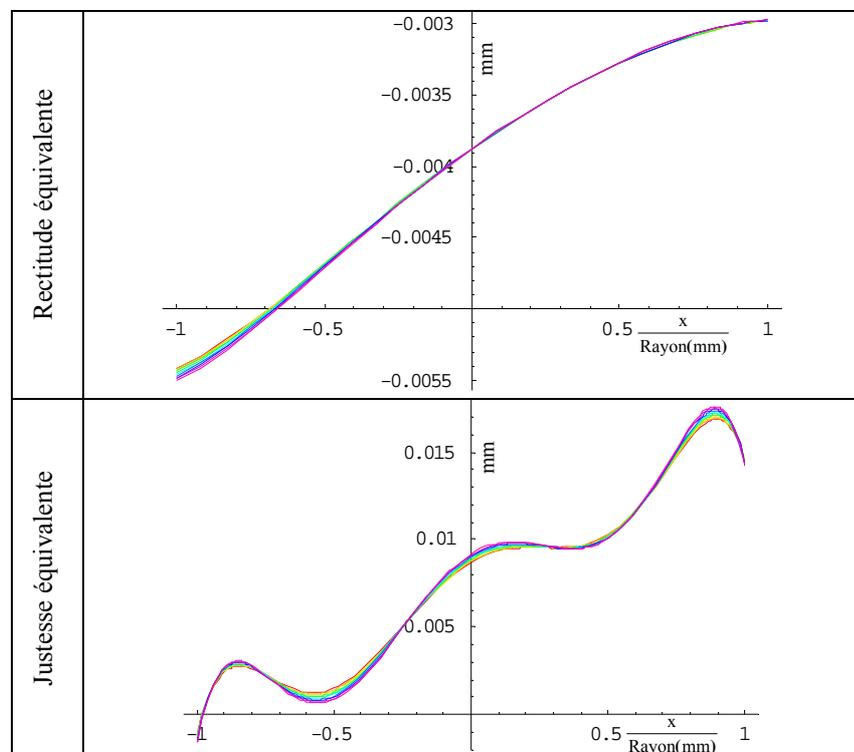


Figure 8 : Fonctions équivalentes calculées directement les défauts de la machine appliquées à la définition théorique de l'engrenage MAAG

La **Figure 8** montre que, pour une définition théorique et des défauts connus de la machine, les fonctions équivalentes sur les différents cercles sont pratiquement identiques ce qui montre que les fluctuations des fonctions équivalentes de la **Figure 7** sont dues aux incertitudes (évolution de température entre les différentes mesures, répétabilité...).

Néanmoins, la détermination des fonctions équivalentes moyennes, par l'analyse des erreurs machine issues de la permutation, fournit une bonne correction des défauts de la machine et du système de palpé à une pente sur la justesse près qui correspond au raccordement.

Les évolutions des fonctions équivalentes de la **Figure 8** sont différentes des moyennes obtenues pour les fonctions équivalentes de la **Figure 7** dans la mesure où les fonctions équivalentes tracées sur la **Figure 8**, ne prennent pas en compte les défauts du système de palpé.

### 3.2 Analyse directes des constantes issues de la permutation

Lors de mesure de denture par permutation, il apparaît une constante que l'on ne peut déterminer et qui correspond au calage angulaire des différents cercles de points. Grâce à l'étude des fonctions équivalentes, nous pouvons chiffrer en terme d'incertitudes le calage des différents cercles. En effet, si on considère la géométrie de la machine à mesurer, l'ensemble des défauts se décompose en une rectitude équivalente et une justesse équivalente.

#### 3.2.1 Cas d'une pièce à normales radiales (bague)

Pour une bague, la contribution des fonctions équivalentes, c'est-à-dire des écarts peuvent se décomposer de la façon présentée sur la **Figure 9**, afin d'analyser la somme des écarts.

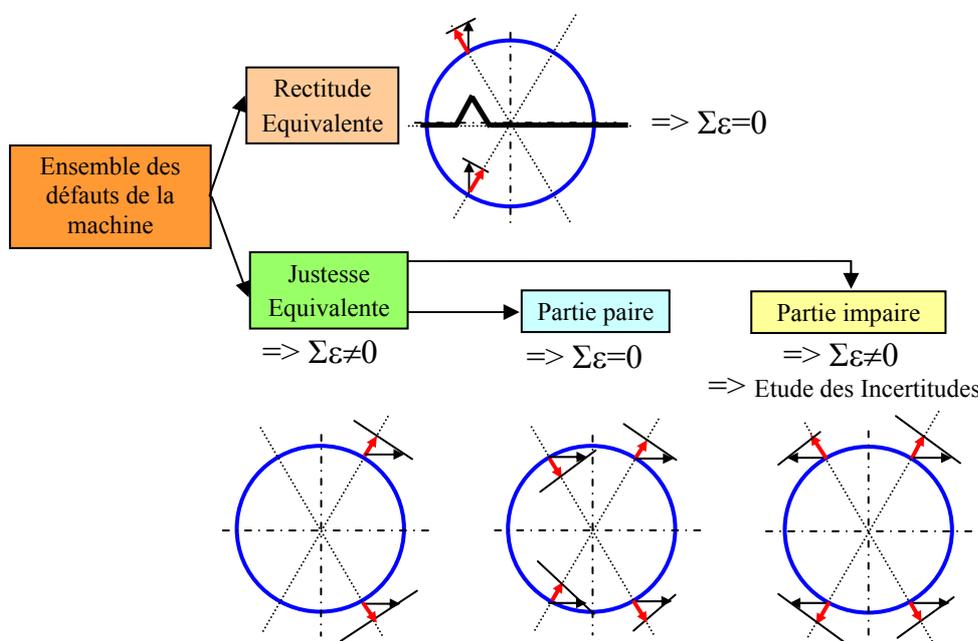


Figure 9 : Détermination des termes contributeurs d'incertitudes lors d'une mesure de denture par permutation

Pour une position donnée de l'axe et, par exemple, pour un rectitude positive, l'écart sur le point d'ordonnée positive est positif et l'écart sur le point d'ordonnée négative est négatif. Ces

deux écarts sont évidemment égaux en valeur absolue. La constante qui apparaît dans la permutation est donc nulle, la contribution de ces deux points s'annulant.

Pour la justesse, les contributions de deux points présentant la même abscisse X sont égales et donc s'ajoutent. Si on veut affiner l'analyse, il faut considérer les abscisses X et -X. Une fonction peut toujours se décomposer en une partie paire et une partie impaire, la partie paire de la fonction voit sa contribution s'annuler tandis que la partie impaire ne s'annule pas.

La contribution de la partie impaire de la justesse ne peut qu'être intégrée en terme d'incertitude.

Cette analyse est basée sur l'idée que l'on dispose des quatre points pour les abscisses X et -X. Pour une bague, l'échantillonnage peut être facilement prévu pour cela.

### 3.2.2 Cas de l'engrenage

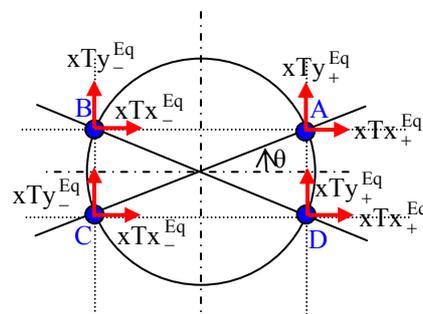


Figure 10 : Schéma pour l'étude de la constante de la permutation pour un engrenage

La **Figure 10** permet de faciliter la compréhension de la démonstration pour l'évaluation de la constante issue de la permutation. Les notations restent les mêmes que précédemment, c'est-à-dire que l'angle  $\xi$  est l'angle entre la normale au point considéré et la normale au cercle.

- Au niveau des justesses équivalentes, les contributions s'écrivent :

- En A :  $+xTx_+^{Eq} \cdot \cos \theta \cdot \cos \xi - xTx_+^{Eq} \cdot \sin \theta \cdot \sin \xi$
- En B :  $-xTx_-^{Eq} \cdot \cos \theta \cdot \cos \xi - xTx_-^{Eq} \cdot \sin \theta \cdot \sin \xi$
- En C :  $-xTx_-^{Eq} \cdot \cos \theta \cdot \cos \xi + xTx_-^{Eq} \cdot \sin \theta \cdot \sin \xi$
- En D :  $+xTx_+^{Eq} \cdot \cos \theta \cdot \cos \xi + xTx_+^{Eq} \cdot \sin \theta \cdot \sin \xi$

Donc si  $xTx_-^{Eq} = xTx_+^{Eq}$  alors la somme est nulle, c'est-à-dire que la partie paire de la justesse équivalente n'est pas influente sur la constante.

- Au niveau des rectitudes équivalentes, les contributions s'écrivent :

- En A :  $+xTy_+^{Eq} \cdot \cos \theta \cdot \sin \xi + xTy_+^{Eq} \cdot \sin \theta \cdot \cos \xi$
- En B :  $-xTy_-^{Eq} \cdot \cos \theta \cdot \sin \xi + xTy_-^{Eq} \cdot \sin \theta \cdot \cos \xi$
- En C :  $-xTy_-^{Eq} \cdot \cos \theta \cdot \sin \xi - xTy_-^{Eq} \cdot \sin \theta \cdot \cos \xi$
- En D :  $+xTy_+^{Eq} \cdot \cos \theta \cdot \sin \xi - xTy_+^{Eq} \cdot \sin \theta \cdot \cos \xi$

Donc si  $xTy_-^{Eq} = xTy_+^{Eq}$  alors la somme est nulle, c'est-à-dire que la partie paire de la rectitude équivalente n'est pas influente sur la constante.

Nous pouvons donc dire que la variation de la constante issue de la permutation est uniquement due aux variations des parties impaires des fonctions équivalentes. Typiquement, le raccordement au mètre correspond une pente sur la justesse qui est une fonction impaire.

En pratique lors de l'opération de permutation, c'est un peu plus complexe dans la mesure où l'on ne peut pas forcément garantir un point mesuré à  $\theta$ ,  $\pi-\theta$ ,  $\pi+\theta$ , et  $-\theta$  à cause du nombre et de la position des flancs de dents. Il faudra donc tenir compte de cette remarque dans l'évaluation des incertitudes de mesures sur la constante.

### 3.3 Raccordement

Le cas d'une pente  $p$  sur la justesse de l'axe  $X$ , qui est une fonction impaire est important puisqu'il correspond au problème du raccordement. Si on a un cercle de rayon  $R$ , en un point de coordonnées  $x = R \cos(\theta)$ , on a une contribution de la pente dans la direction  $X$   $pR \cos(\theta)$  soit une contribution  $pR \cos(\theta) \cos(\theta + \zeta)$  sur une normale non radiale. Après développement, on trouve que pour  $N$  points régulièrement répartis sur le cercle, la somme des écarts vaut :

$pR \cos(\zeta) \frac{N}{2}$ , soit une moyenne de  $\frac{1}{2} pR \cos(\zeta)$ . Avec  $p=10^{-5}$  soit une dilatation de  $10\mu\text{m/m}$

c'est-à-dire environ 1 degré pour de l'acier,  $R=100\text{mm}$  et  $\zeta=70^\circ$  car d'une roue standard alors

$\frac{1}{2} pR \cos(\zeta) = 0,17\mu\text{m}$ , ce qui reste faible.

## 4 Conclusion

La méthode de permutation est couramment pratiquée en matière d'engrenages. Le procès verbal d'une mesure d'hélice réalisé par le PTB indique quatre mesures de la roue puis un retournement et à nouveau quatre mesures et enfin une moyenne. L'utilisation de la permutation et des stratégies d'élimination des constantes trouvera tout son sens dans l'évaluation des incertitudes en fournissant une stratégie concurrente à l'analyse directe des défauts de la machine. Néanmoins, cette méthode nécessite un nombre important de mesures pour une roue, chaque mesure étant entachée d'incertitudes en particulier liées à la température alors que la méthode de qualification de la géométrie, qui est certes également longue, permet d'analyser complètement la machine et donc toutes les roues dentées que l'on peut souhaiter mesurer dans la zone étudiée.



# CHAPITRE VII :

## Incertitudes

### SOMMAIRE

1	Introduction .....	156
2	Etude du passage de la bague à l'engrenage .....	158
3	Sources d'incertitudes .....	159
3.1	Les erreurs de mesurage .....	159
3.2	Diagramme d'Ishikawa .....	160
3.3	Incetitudes au sens phénomènes physiques .....	162
4	Les distributions utilisées .....	164
4.1	Présentation .....	164
4.2	Loi Normale .....	165
4.2.1	Etude de la distribution .....	165
4.2.2	Etude de la corrélation du tirage .....	167
4.2.3	Bilan sur la distribution normale .....	170
4.3	Loi uniforme .....	170
4.4	Réflexions sur la loi dite en dérivée en Arcsinus .....	172
4.4.1.	Généralités .....	172
4.4.2.	Fonction de répartition .....	172
4.4.3.	Densité de probabilité .....	172
4.4.4.	Inversion de la fonction de répartition .....	173
4.4.5.	Espérance mathématique et variance .....	173
4.4.6.	Remarque sur cette modélisation .....	174
5	Simulation de Monte Carlo .....	175
5.1	Généralités .....	175
5.2	Le problème de la preuve .....	176
5.3	Traitement des mesures brutes de Rectitudes .....	176
5.3.1	Présentation .....	176
5.3.2	Schématisation de la perturbation des mesures de la règle .....	176
5.4	Traitement des mesures brutes de la KOBA .....	177
5.4.1	Présentation .....	177
5.4.2	Prise en compte des variations de température .....	178
5.4.3	Schématisation de la perturbation des mesures de KOBA .....	179
5.5	Incetitudes liées à l'étalonnage de la KOBA .....	180
6	Incetitudes sur les défauts de la Leitz .....	180
7	Incetitudes sur les écarts et sur les fonctions équivalentes .....	182
8	Conclusion .....	183

# Incertitudes

## 1 Introduction

Classiquement, pour évaluer les incertitudes de mesures, un modèle du processus est défini par une formule puis une étude de propagation par les dérivées partielles [MFQ1995 – CFM1999] correspondant à la sensibilité des entrées sur le résultat final est réalisée. Le modèle du processus doit prendre en compte l'ensemble des opérations y compris les corrections réalisées. Les corrélations devraient être prises en compte mais cela est souvent délicat.

Sur les machines à mesurer tridimensionnelles (MMT), la méthode classique de cumul des variances est difficile à pratiquer car :

- la MMT est une machine universelle qui permet des mesures sur de nombreux types de pièces, il est nécessaire d'adapter le bilan des causes à chaque fois d'autant que les défauts ne jouent pas tous en même temps ce qui diminue les incertitudes.

- le calcul d'un défaut de forme par exemple à une nature très particulière d'une part il consiste à prendre en compte des points extrêmes ce qui signifie que la propagation dépend du profil et d'autre part le résultat est toujours positif. Dans ces conditions, l'histogramme correspondant à un défaut de forme est dissymétrique surtout pour les défauts de forme faibles et les queues de distribution vers l'avant peuvent être très importantes. Il n'est pas rare d'avoir besoin de 5 à 6 écart-types pour couvrir les valeurs extrêmes.

- Les zones de probabilité de présence d'un élément géométrique peuvent avoir une forme compliquée. Si on réalise des opérations d'intersection, de projection, etc., la géométrie des zones de probabilité de présence devient réellement difficile à appréhender.

- une mesure sur MMT peut être plus ou moins longue et ce temps doit être mis en regard des constantes de temps des phénomènes aboutissant à la déformation des structures métrologiques en particulier les phénomènes thermiques. Vis-à-vis des déformations des structures liées au fonctionnement été hiver de la climatisation par exemple, la mesure est courte et les déformations de la structure doivent être considérées comme stables sur la durée de la mesure. Vis-à-vis des déformations liées au réchauffement de la structure par les moteurs assurant le déplacement de la MMT, la mesure est longue. Il faut prendre en compte les constantes de temps dans les simulations l'influence sur des mesures successives immédiates, dans l'heure, la journée, le mois l'année....on pourrait parler de **durée de vie des covariances**

- il y a de nombreuses formes de covariances, par exemple, une rectitude aura la même influence sur deux plans parallèles à l'axe de déplacement et donc aucune influence sur une mesure de distance. De la même manière, la distance entre deux alésages mesurés avec la même stratégie sera insensible aux défauts du palpeur Renishaw.

Ce sont les raisons pour lesquelles nous proposons de réaliser une modélisation de tout le processus de mesure depuis l'opération de calibrage des axes jusqu'aux mesurandes, une simulation est alors une histoire possible de l'obtention des mesurandes. La simulation de MonteCarlo est alors une multiplication des scénarios possibles.

Le supplément du GUM propose de simuler des covariances linéaires, nous proposons de prendre en compte les covariances de manière plus fine mais directement dans le modèle plutôt que de manière statistique

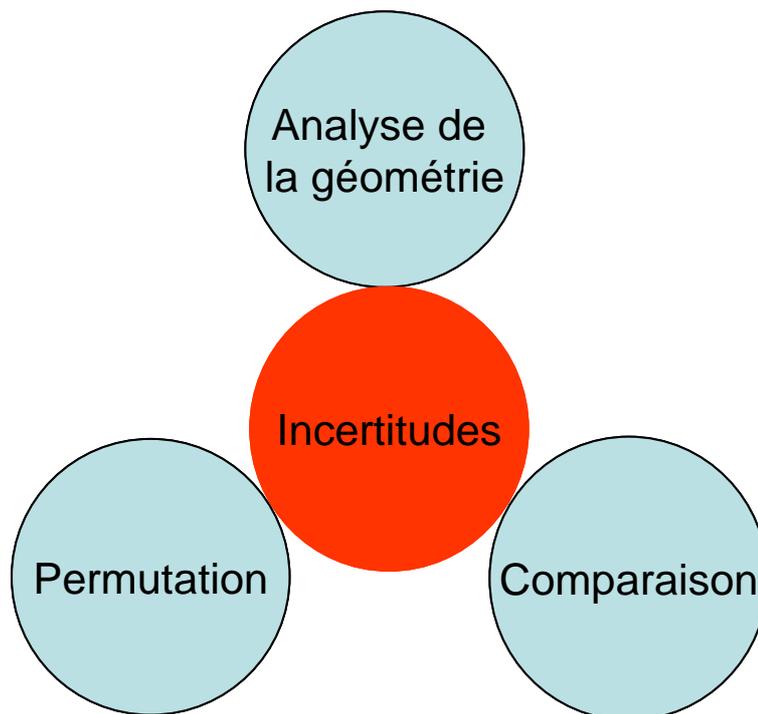


Figure 1 : Trois méthodes pour un triangle de vérification

En métrologie, la situation commence à être rassurante lorsqu'on peut déterminer le même mesurande par deux voies différentes et trouver des résultats compatibles. Nous développons trois approches pour la détermination des incertitudes sur les roues dentées, ces trois approches formant un triangle de vérification.

La première voie consiste à déterminer la géométrie de la machine, le comportement du palpeur et d'une façon générale à étudier les différents termes à intégrer dans le calcul d'incertitudes. On peut qualifier cette approche d'analytique. Cette approche fera l'objet d'une simulation de Monte Carlo.

La seconde voie consiste à réaliser une permutation pour séparer l'apport de tous les défauts fixes par rapport aux défauts tournant en même temps que la pièce. On peut qualifier cette approche de synthétique. Cette méthode étant utilisée essentiellement en vérification, le calcul d'incertitudes ne fait pas ici l'objet d'un chapitre mais cela mériterait d'être fait.

La troisième voie consiste à réaliser une comparaison entre la roue dentée à évaluer et un objet étalon. Si l'objet étalon est une roue dentée de même caractéristique alors on réalise une comparaison, la méthode est décrite dans l'ISO15530 [ISO/TS 15530-3, 2004]. Si l'objet étalon est une bague alors la méthode est originale à notre connaissance.

## 2 Etude du passage de la bague à l'engrenage

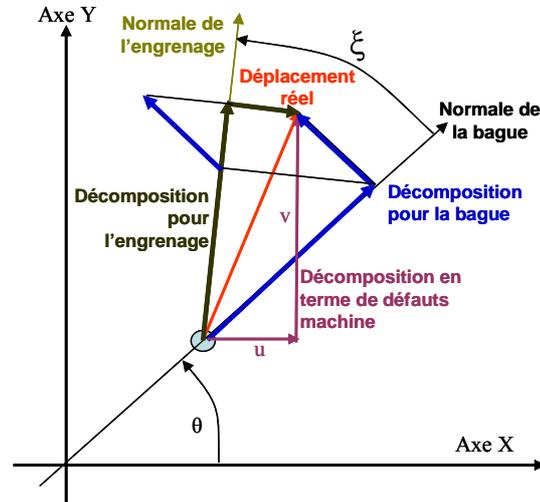


Figure 2 : Schéma de l'étude du passage de la bague à l'engrenage

Pour évaluer les incertitudes, la norme ISO15530 partie 3 [ISO15530-3], propose une méthode par comparaison ; l'idée est d'étudier la possibilité d'évaluer les incertitudes liées à la géométrie de la machine en comparant la mesure d'une bague et celle d'une roue dentée de même diamètre [Figure 2].

L'idée est que le déplacement de la machine (correspondant aux défauts de géométrie) en un point d'une bague et au point correspondant d'une roue dentée de même diamètre est le même, c'est la projection suivant la normale qui change.

Le déplacement réel de la machine au point étudié est noté  $(u, v)$ . Ce déplacement  $(u, v)$  est composé des justesses, des rectitudes, du lacet et de la perpendicularité.

La projection du déplacement  $(u, v)$  sur la direction de la normale à la bague peut s'écrire  $u \cos(\theta) + v \sin(\theta)$  et correspond à l'écart suivant la normale mesuré sur la bague. La projection sur la direction orthogonale à la normale  $u \sin(\theta) - v \cos(\theta)$  est perdue.

La projection du déplacement  $(u, v)$  sur la direction de la normale à l'engrenage peut s'écrire  $u \cos(\theta + \xi) + v \sin(\theta + \xi)$  et correspond à l'écart suivant la normale mesuré sur la roue.

Si on suppose que la bague est parfaite, la question est d'utiliser les résultats de la mesure de la bague pour corriger les mesures sur l'engrenage ou pour évaluer les incertitudes. L'écart suivant la normale sur l'engrenage peut être écrit de la façon suivante:

$(u \cos(\theta) + v \sin(\theta)) \cos(\xi) - (u \sin(\theta) - v \cos(\theta)) \sin(\xi)$ , où le terme  $u \sin(\theta) - v \cos(\theta)$  correspondant à la projection sur la direction orthogonale à la normale est inconnu. Il est donc possible d'envisager de corriger l'écart suivant la normale mesuré sur la roue du terme  $(u \cos(\theta) + v \sin(\theta)) \cos(\xi)$  et de tenir compte de l'incertitude qui correspond au terme  $(u \sin(\theta) - v \cos(\theta)) \sin(\xi)$ .

Néanmoins, dans le cas d'une roue dentée, la part corrigée est faible par rapport à la part de l'incertitude de mesure à prendre en compte. En effet, pour le cas de l'engrenage, l'angle de pression standard valant 20 degrés, l'angle  $\xi$  est donc proche de 70 degrés.

La part projetée est donc prise en compte dans la correction par l'intermédiaire d'une multiplication par  $\cos(\xi)$ , c'est-à-dire environ 34% de l'écart mesuré sur la bague. La part

## CHAPITRE VII

## INCERTITUDES

orthogonale, qui est perdue, intervient en terme d'incertitudes multipliée par  $\sin(\xi)$ , c'est-à-dire environ à 94%. Le problème est d'évaluer cette incertitude.

En terme d'incertitude, si on considère le déplacement  $u$  (resp.  $v$ ) comme une source d'incertitude caractérisée par une incertitude-type  $\sigma_u$  (resp.  $\sigma_v$ ), si on fait l'hypothèse que ces variables sont indépendantes et que  $\sigma_u = \sigma_v$  alors l'incertitude-type associée à  $u \cos(\theta) + v \sin(\theta)$  et celle associée à  $u \sin(\theta) - v \cos(\theta)$  sont égales. On peut alors réaliser une étude statistique des écarts suivant la normale mesurés sur la bague en améliorant la connaissance de l'incertitude-type par bootstrap [EFR1979 - EFR1993 - DAV1997] et introduire celle-ci (multipliée par  $\sin(\xi)$  en valeur absolue) dans les incertitudes sur les mesures de la roue. Cette méthodologie complète la notion de comparaison.

Par précaution, on propose de prendre en compte une densité de probabilité uniforme (une loi normale serait trop favorable car, par exemple, une perpendicularité correspond à une fonction sinusoïdale sur la mesure d'une pièce de forme circulaire et fournit une densité de probabilité de type dérivée d'arcsinus).

La mesure de la bague est sensible au comportement du palpeur, dans une vraie méthode par comparaison donc d'une bague à une autre bague, l'incertitude systématique associée au palpeur est éliminée. Dans une évaluation d'incertitude sur l'engrenage à partir des informations fournies par la bague, il faut en tenir compte en tant qu'incertitude sur la correction d'une part puis en tant qu'incertitude sur la mesure. Cette incertitude liée au palpeur ne peut qu'être déterminée en mesurant une bague de faible diamètre pour laquelle l'apport de la géométrie de la machine sera négligeable. Il faut également tenir compte de la répétabilité de la machine.

### 3 Sources d'incertitudes

#### 3.1 Les erreurs de mesurage

D'une manière générale, on pourra écrire que le résultat d'une mesure est égal à somme de la valeur vraie et de l'erreur de mesure. Si cette façon d'exprimer le problème est très compréhensible, il se heurte immédiatement à l'impossibilité de déterminer une valeur vraie.

Les erreurs de mesures résultent de :

- l'erreur aléatoire, qui fluctue de manière imprévisible lorsqu'un mesurage est répété dans des conditions maintenues aussi constantes que possible (répétabilité).
- L'erreur systématique, qui est pratiquement constante ou qui évolue lentement et régulièrement en fonction des conditions expérimentales.

On peut donc écrire :

$$\text{Résultat de mesure} = \text{valeur vraie} + \text{erreur aléatoire} + \text{erreur systématique}$$

Pour caractériser les erreurs aléatoires, il suffit de répéter le mesurage, on tient compte de cette erreur en calculant la moyenne arithmétique de l'ensemble des valeurs et on indique une incertitude fonction de la distribution obtenue. A titre d'exemple, si on choisit de mesurer la longueur d'une cale étalon, on effectue  $n$  mesures, on obtient alors une population de  $n$  valeurs de longueur, on trace l'histogramme de répartition de ces valeurs. On obtient en règle générale une gaussienne pour ce type de mesure. La valeur retenue pour la longueur est la moyenne des mesures. L'erreur aléatoire est caractérisée par l'écart type de la distribution obtenue. Il faut bien noter que la valeur obtenue de longueur est encore entachée de l'erreur systématique.

Compenser les erreurs systématiques n'est pas aussi simple. Il faut avant tout en connaître les causes et appliquer des corrections nécessaires sur le résultat de mesure. Toute erreur systématique connue doit être corrigée. Néanmoins, il existe des erreurs systématiques que l'on

ne peut pas corriger, il faut alors les estimer et en déduire une contribution en terme d'incertitude de mesure.

Par exemple, si on reprend l'exemple de la mesure de la cale sur une machine à mesurer. La flexion du stylet induit une erreur systématique que l'on peut déterminer et corriger. Par contre, les variations dimensionnelles de la cale sous les effets de la température vont introduire des erreurs qu'il est difficile de supprimer, on les estime et on indique une incertitude de mesure propre aux variations de température. En fait, aucune correction ne peut être parfaite et il est indispensable d'associer à la correction une incertitude.

L'incertitude affichée doit donc toujours être supérieure à  $\pm$  l'erreur systématique et contenir la valeur vraie [Figure 3 – BIN2006].

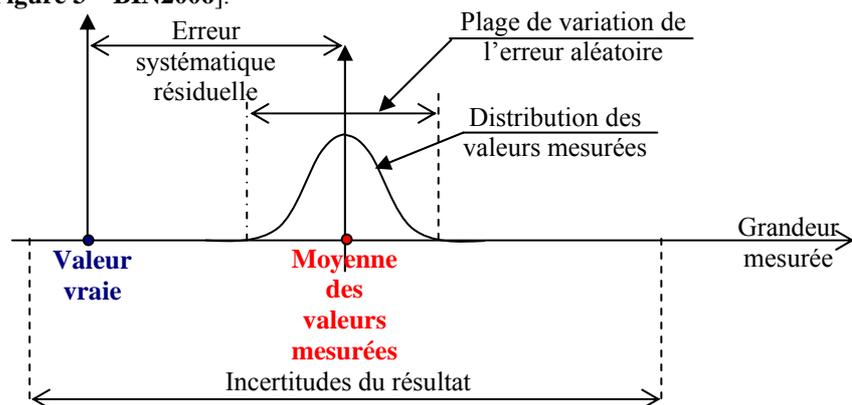


Figure 3 : Erreurs aléatoires, erreur systématique résiduelle et incertitudes du résultat

### 3.2 Diagramme d'Ishikawa

Le diagramme d'Ishikawa appelé également diagramme « causes à effet » est un outil qui permet d'étudier de manière systématique les causes possibles des incertitudes de mesures du processus de mesure [WIR2006] et permet également de déterminer les moyens pour y remédier lorsque c'est possible. Cet outil se présente sous la forme d'arêtes de poisson classant les catégories de causes inventoriées selon la technique dite des 5 M : matière, main d'œuvre, matériel, méthode, milieu [Figure 4]. La décomposition de ce diagramme appliqué à notre cas d'étude est représentée sur la Figure 5.

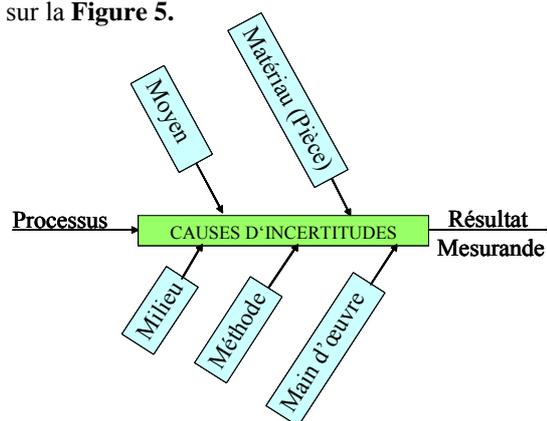


Figure 4 : Diagramme d'Ishikawa – méthode des 5M

Cette décomposition est une approche possible. Elle permet bien de lister l'ensemble des causes d'incertitudes possibles pour chacun des « 5M » mais on perd la notion de phénomènes physiques mis en jeu, c'est-à-dire la notion d'effet induit.

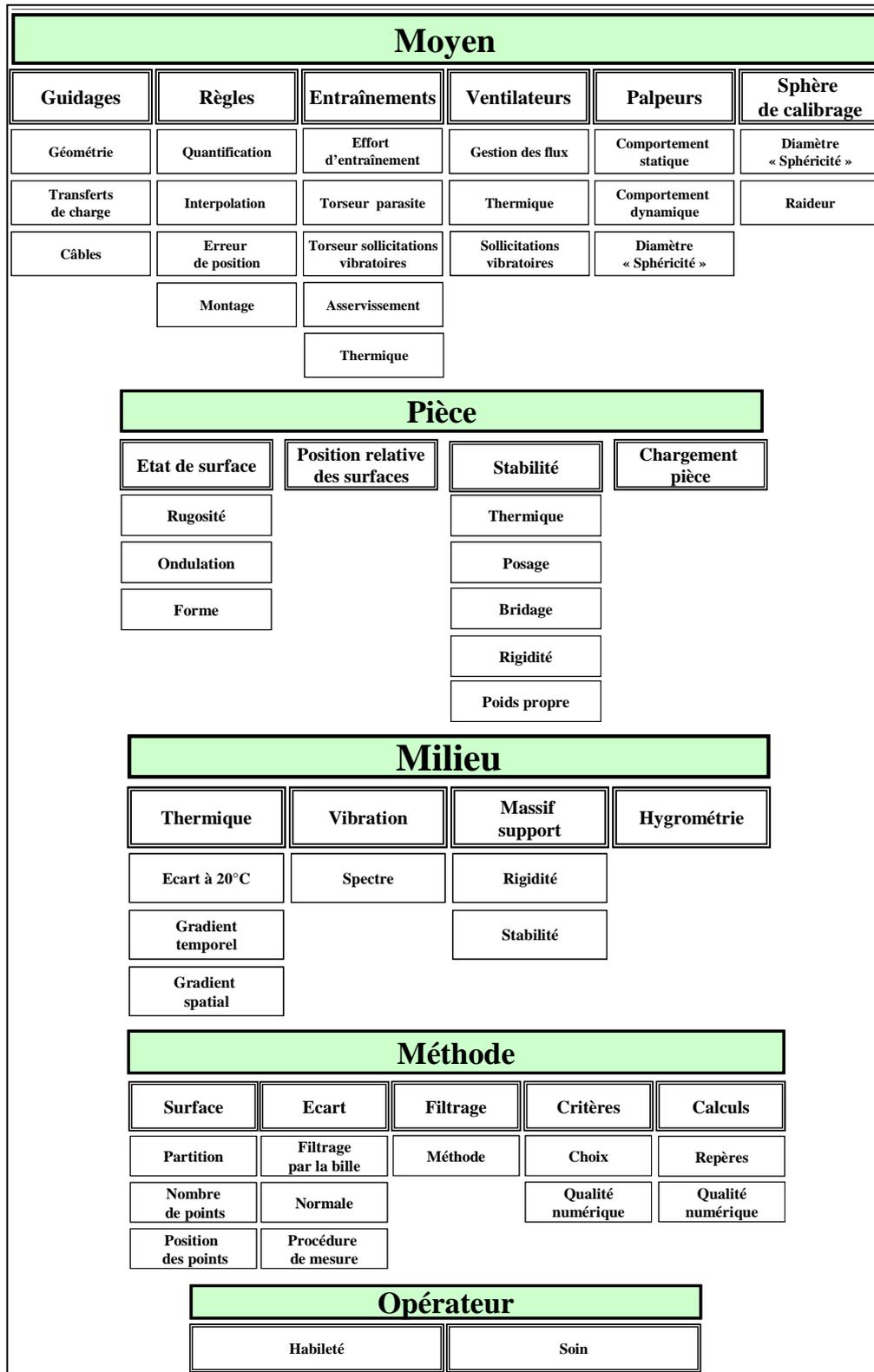


Figure 5 : Décomposition du diagramme d'Ishikawa pour nos applications

### 3.3 Incertitudes au sens phénomènes physiques

Si on cherche à déterminer les incertitudes de mesures liées aux phénomènes physiques, ce qui revient forcément à se rapprocher le plus possible de la réalité, il faut alors étudier :

- La géométrie machine et les incertitudes sur les différents défauts de la machine,
- Le comportement du système de palpation (défauts, calibrage, réglages,...),
- Les problèmes thermiques (déformations, corrections, dérives de points fixes,...),
- Les problèmes dynamiques,
- Les efforts exercés (mise en position, bridage, contact de la bille du palpeur,...),

Ce type de démarche est schématisé sur la **Figure 6**. Un certain nombre de phénomènes sont de type « opérateur indépendant » comme la géométrie de la machine ou les défauts de conception du système de palpation mais la stratégie de mesure (nombre de points, répartition, mise en position, réglage machine,...) joue un rôle essentiel sur les résultats obtenus en terme d'incertitudes causées par les choix de l'opérateur. A titre d'exemple, pour faire simple, si nous mesurons avec un nombre insuffisant de points, l'incertitude sera grande par manque d'information, si nous mesurons trop de points, les évolutions de températures seront grandes ce qui augmentera également les incertitudes de mesure. Au-delà de cela, l'opérateur construit l'ensemble des opérations qui aboutiront à l'expression du mesurande et dans la plupart des cas, le problème de la preuve est impossible à résoudre dans l'état actuel des connaissances. L'engrenage est un cas particulier dans lequel les mesures sont parfaitement définies ainsi que les méthodes de traitement.

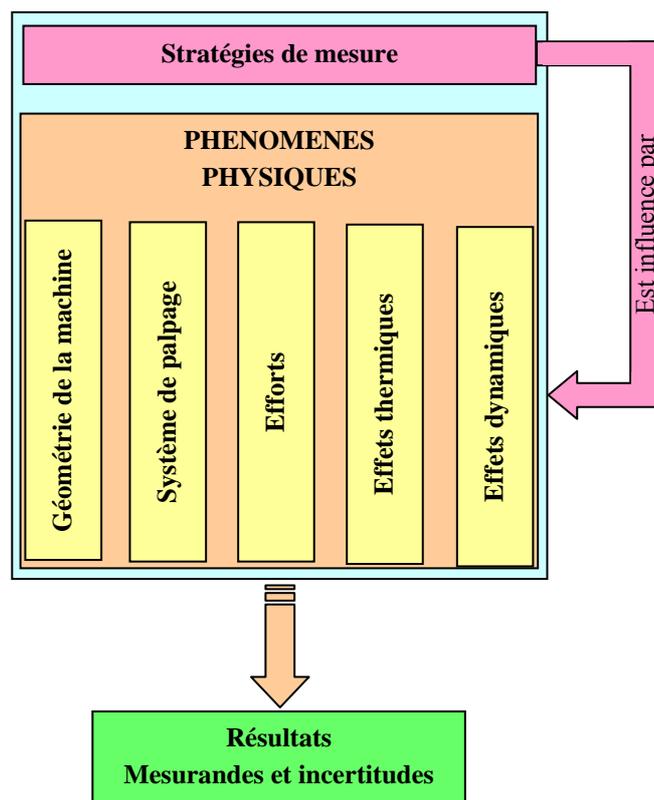


Figure 6 : Incertitudes au sens phénomènes physiques (effets induits)

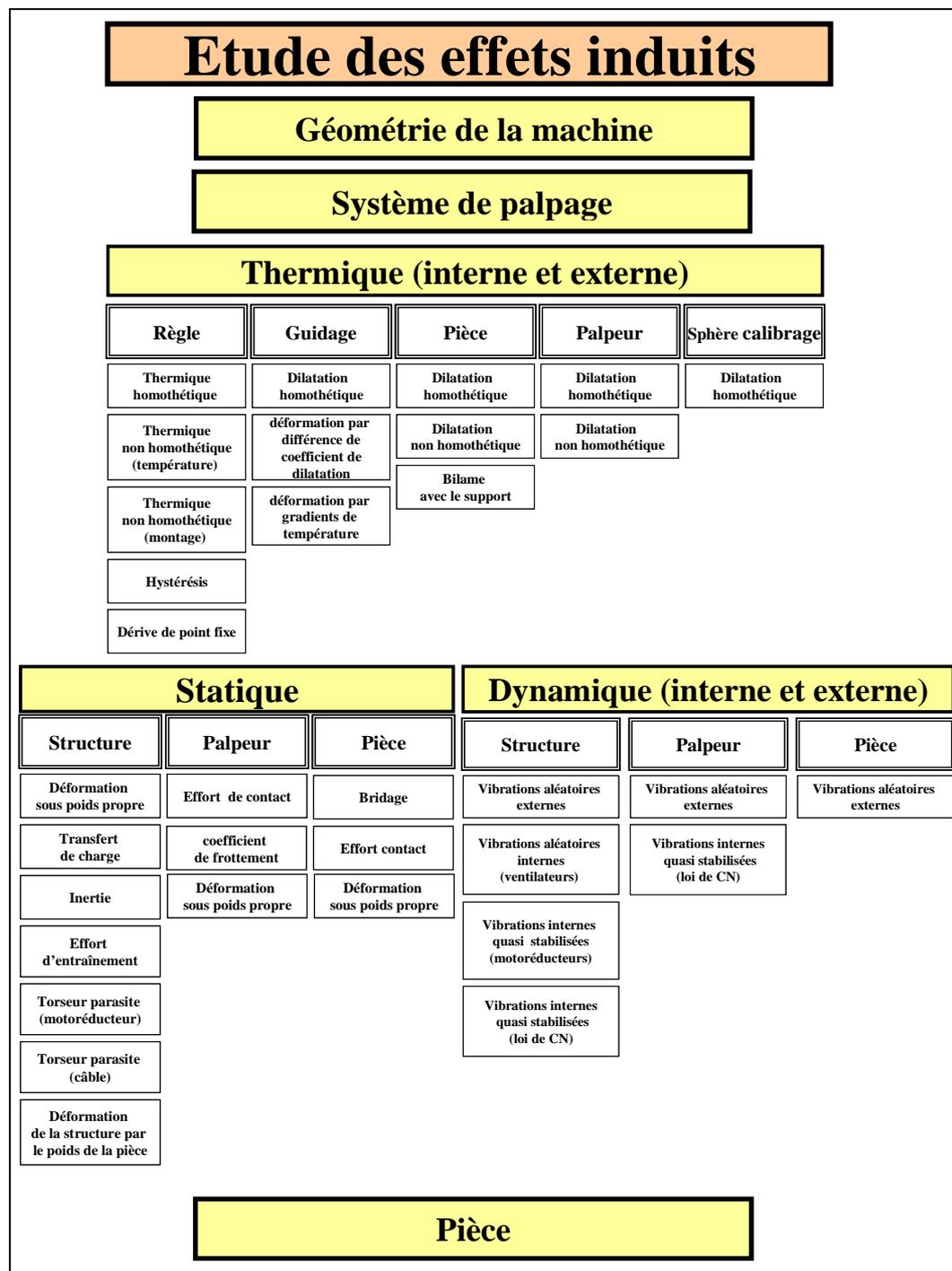


Figure 7 : Description des effets induits dans le modèle « phénomènes physiques »

La **Figure 7** donne la description des effets induits dans le modèle « phénomènes physiques ». La conséquence de la stratégie de mesure doit être intégrée dans les calculs et joue un rôle essentiel.

## 4 Les distributions utilisées

### 4.1 Présentation

Pour simuler les variations des différents phénomènes physiques perturbants les mesures, il est indispensable de choisir une densité de probabilité. Les densités de probabilité que l'on utilise pour nos problèmes sont :

- Uniformes en ce qui concerne :
  - o la résolution, l'allongement et la dérive de points fixes des différents axes,
  - o la perpendicularité,
  - o la tête mesurante,
  - o les défauts locaux,
  - o les références,
  - o la température, la rugosité et le coefficient de dilatation des pièces,
  - o ...
- Gaussiennes pour :
  - o la répétabilité,
  - o l'erreur de poursuite,
  - o ...
- Loi en dérivée d'Arcsinus pour :
  - o Les variations de températures liées à la climatisation

Les modèles paramétriques de densités de probabilités à un (uniforme) ou deux paramètres (moyenne et écart type pour la loi normale) pour réaliser ces simulations numériques doivent donc être vérifiés. En effet, les méthodes statistiques dites paramétriques ne sont pas très robustes et peuvent si le modèle choisi n'est pas raisonnable, conduire à des résultats erronés. Il est alors primordial de vérifier que le modèle statistique envisagé est compatible avec les données obtenues.

Le logiciel que nous utilisons pour traiter nos différentes mesures et effectuer les simulations est le logiciel Mathematica. Ce logiciel a déjà été éprouvé sur de nombreux points et nous allons donc vérifier ici la capacité du logiciel à générer des données qui suivent une loi normale, une loi uniforme, une loi en dérivée d'Arcsinus. Nous avons également testé le logiciel Crystal Ball sur ces mêmes types de distribution dans la mesure où ce logiciel est maintenant une des références sur l'évaluation des incertitudes en métrologie [AMI2004 - GON2005].

Pour simuler les variations de température de la climatisation d'une salle de métrologie, il est d'usage d'utiliser une distribution suivant une loi de type arcsinus. Nous ne présenterons pas les résultats mais cette distribution pose des problèmes au niveau des extrémités à cause des arrondis de calcul des générateurs de nombres aléatoires sur ce type de distribution, nous travaillons actuellement sur ce point. Nous avons donc remplacé les distributions Arcsinus par des distributions uniformes comme il est d'usage de le faire. De plus, nous ne sommes pas complètement convaincu du bien fondé de l'utilisation d'une distribution de type dérivée d'Arcsinus pour simuler les évolutions de température des salles climatisées.

Comme il est demandé actuellement d'effectuer un million de tirages pour avoir un résultat acceptable au sens métrologique du terme [DES2007-1] - ISO/TC 213 N 659 ISO DGUIDE 99998], nous allons donc tester la loi normale et la loi uniforme dans ces conditions.

## CHAPITRE VII

## INCERTITUDES

Néanmoins le nombre de million de tirages est critiquable. En effet, il vaudrait mieux faire un suivi de l'évolution des phénomènes, en étudiant par exemple les évolutions des moyennes et des écarts types, et arrêter la simulation avant, c'est-à-dire une fois le résultat stabilisé plutôt que de perdre du temps de calcul à effectuer un nombre aussi important de tirages. Evaluer un million de cas est possible pour des problèmes simples mais augmente considérablement les temps de calcul si on veut évaluer l'évolution complète de la géométrie de la machine en calculant sur chacune des pièces mesurées les incertitudes sur l'ensemble des paramètres, à savoir : les défauts, les défauts équivalents, les mesurandes de l'engrenage considéré par exemple,...

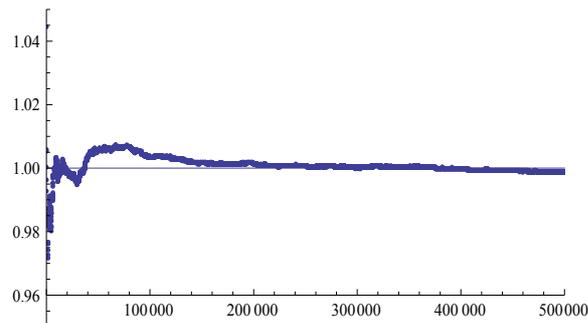


Figure : stabilisation de l'écart-type d'une population gaussienne

On a réalisé 500000 tirages selon une densité de probabilité gaussienne de moyenne nulle et d'écart type 1. Très vite, l'écart type est évalué à 1% mais il faut attendre 150000 tirages pour être stabilisé.

D'ailleurs au niveau bibliographique, il est possible de déterminer l'incertitude liée aux nombres de simulations. L'auteur [LAU2007] a démontré qu'en comparaison avec l'exactitude des résultats rendus par les logiciels, que la relation établie théoriquement ( $u = \frac{2}{\sqrt{M}} s$ )

modélise fidèlement l'incertitude liée à l'utilisation de la simulation de Monte Carlo. On peut donc en déduire qu'il est nécessaire de faire au moins 10000 simulations pour que cette incertitude ne pèse pas plus que pour moins de 2% de l'écart-type. L'écart type expérimental est noté  $s$ , le nombre de simulation de Monte Carlo est noté  $M$ ,  $u$  est l'incertitude due à la méthode de Monte Carlo.

Il peut être avantageux de prendre en compte une erreur sur la simulation et gagner considérablement en temps de calcul, plutôt que de réaliser le million de tirage préconisé par le GUM et quelques auteurs [DES2007-1].

## 4.2 Loi Normale

### 4.2.1 Etude de la distribution

La fonction utilisée sous Mathematica est : `Random[NormalDistribution[Moyenne, Ecart-Type]` du package `<<Statistics'NormalDistribution'`.

Les différentes vérifications ont été effectuées sur le logiciel de statistique SAS et Statistica.

Nous avons testé une distribution normale de un million de tirages de moyenne 0 et d'écart type 1. [Figure 8] (loi normale centrée réduite). Les données Mathematica sont représentées sur l'histogramme bleu, la loi gaussienne centrée réduite est en rouge.

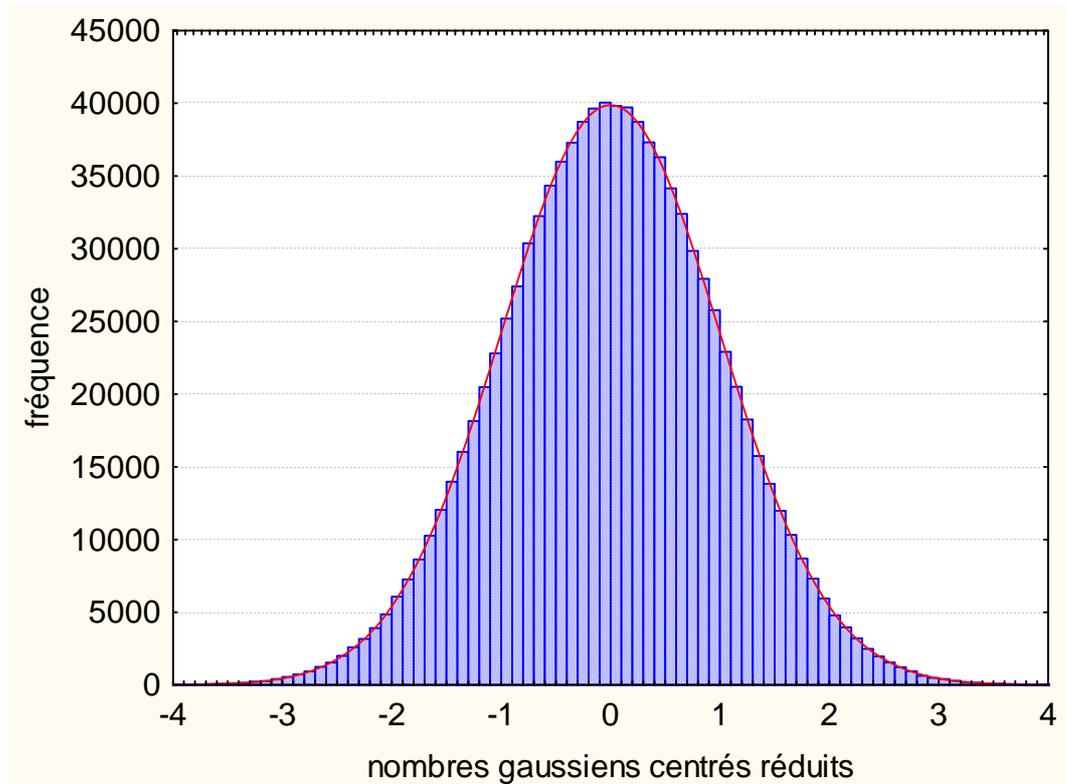


Figure 8 : Représentation de la distribution obtenue

Pour tester la normalité, nous avons réalisé quatre tests d'adéquation différents à savoir :

- le test du Chi2
- le test de Kolmogorov-Smirnov,
- le test de Cramer-von Mises,
- le test de Anderson-Darling.

Nous ne développerons pas ces tests, seuls les résultats sont représentés.

Cette figure représente le paramètre  $p$  en fonction du nombre de tirages. Ce paramètre représente la probabilité de se tromper en affirmant que la loi n'est pas gaussienne alors qu'elle est gaussienne (probabilité de rejeter la normalité alors que les données sont gaussiennes)

Dans notre cas, pour le tirage considéré, nous pouvons affirmer selon le test du Chi2 que nous avons environ 6,5% de se tromper en disant que la loi n'est pas gaussienne, ce qui est tout à fait acceptable et au seuil classique de confiance de 0,05, nous ne rejetons pas l'hypothèse que les données suivent une loi gaussienne.

La **Figure 9** représente l'évolution du paramètre  $p$  en fonction du nombre de tirages effectués et ceux pour les quatre tests effectués. A noter qu'il est d'usage de considérer que la répartition n'est pas satisfaisante si le paramètre  $p$  est en dessous de 0,05, ce qui n'est pas le cas pour chacun des quatre tests effectués. De ce fait, le générateur de Mathematica est apte à engendrer des données gaussiennes et ceux pour des tirages allant de 1000 à 5000000 de cas.

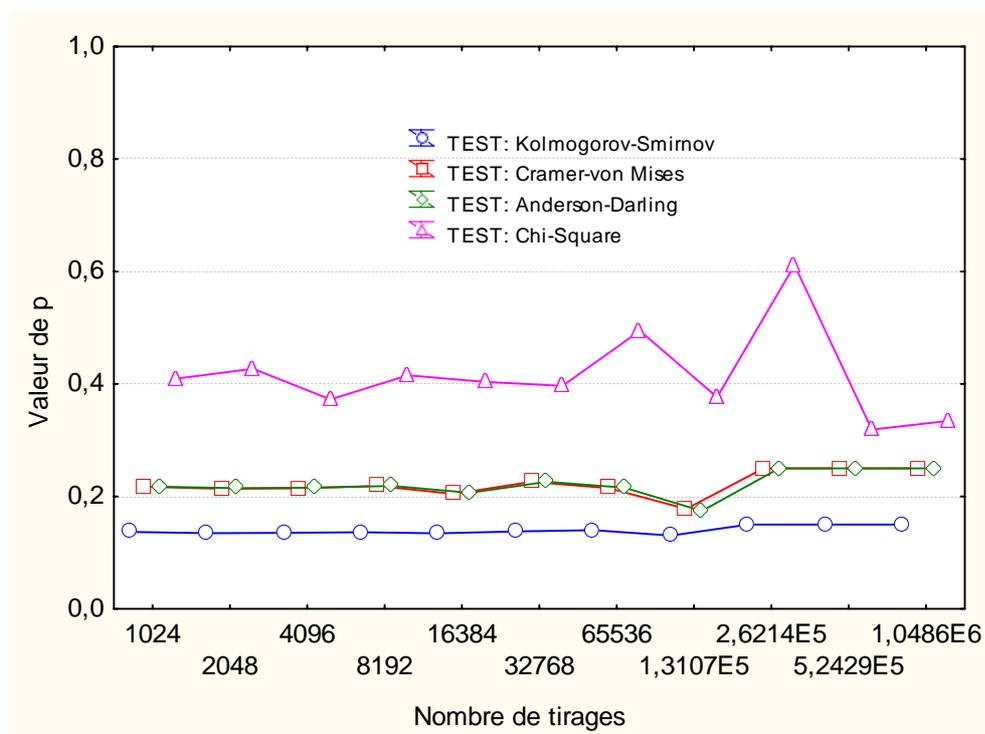


Figure 9 : Evolution du paramètre  $p$  en fonction du nombre de tirage pour les 4 tests

La densité de probabilité selon la loi normale de Mathematica est tout à fait acceptable. Néanmoins il reste à étudier la corrélation, c'est-à-dire étudier « la mémoire du tirage sur les tirages suivants ».

#### 4.2.2 Etude de la corrélation du tirage

Un test visuel consiste à effectuer deux tirages identiques et de tracer l'évolution du premier tirage en fonction du deuxième. A chaque numéro de point, on associe une couleur, les couleurs évoluant tout au long du tirage. Si les tirages sont corrélés, il existera des zones de couleurs dominantes. Ce tracé [Figure 10] ne permet pas de dire que les tirages sont corrélés mais on ne peut pas affirmer qu'ils ne le sont pas partiellement.

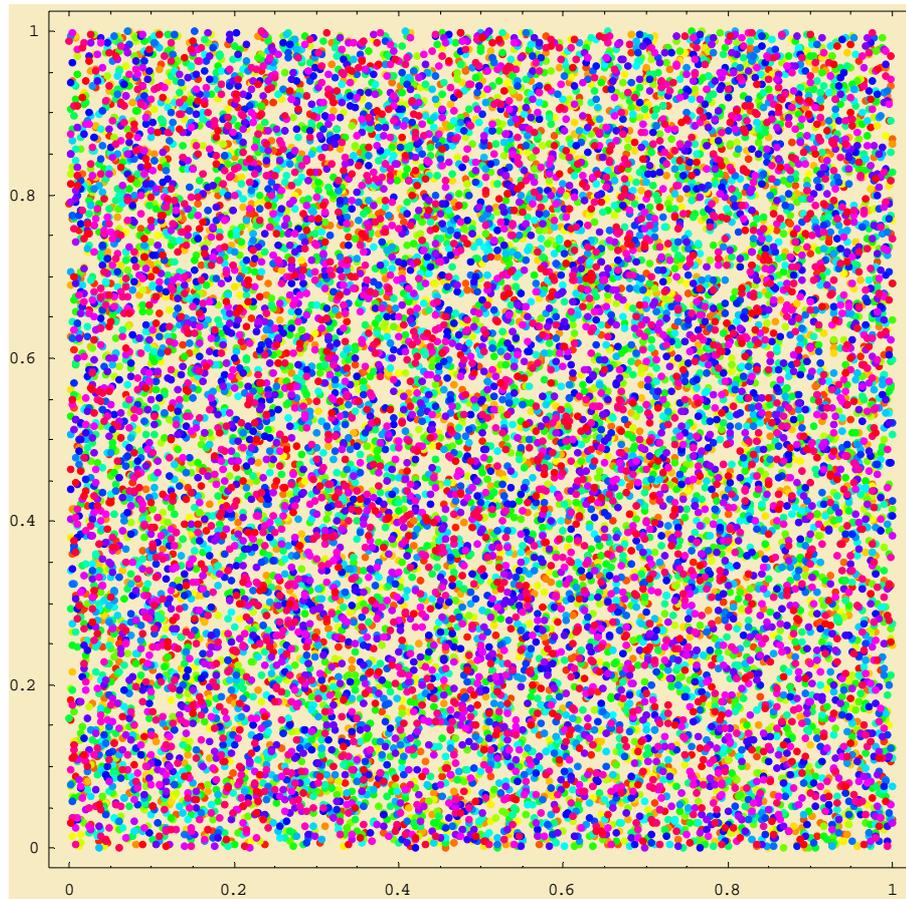


Figure 10 : Tracé visuel de 2 distributions pour évaluer la corrélation du tirage

Il faut donc étudier plus particulièrement la corrélation pour évaluer le caractère aléatoire du tirage. Nous notons  $X_1, \dots, X_n$  les valeurs des tirages de 1 à 1000000. Il faut donc regarder si on a  $X_1=f(X_2), X_1=f(X_3), \dots, X_1=f(X_i), \dots$ . Si tel est le cas les tirages sont corrélés. La **Figure 11**, représente donc le tracé du coefficient de corrélation pour des décalages allant de 1 à 1000 (lags). Pour le reste des tirages, les résultats sont similaires et ne sont pas présentés pour ne pas alourdir la représentation qui devient illisible. La **Figure 12** quant à elle représente l'histogramme de la valeur de la probabilité critique,  $p$ , de rejet du coefficient de corrélation nul. Comme pour le test du Khi2, aucune valeur de  $p$  n'est inférieure au seuil critique de 0,05. Les résultats présentés sont tout à fait satisfaisants au sens statistique dans la mesure où il n'y a pas de réel corrélation détectée et que le paramètre  $p$  reste supérieur à 0,05 (limite statistique pour rejeter l'hypothèse que le tirage n'est pas corrélé)

CHAPITRE VII  
INCERTITUDES

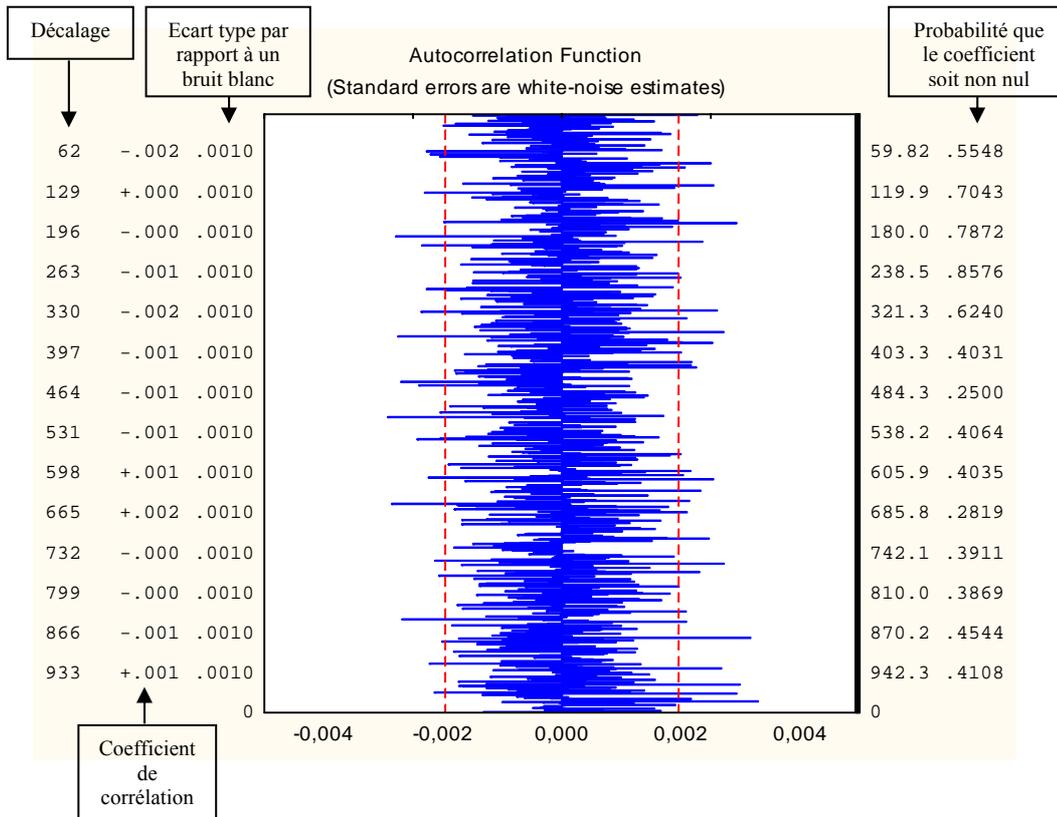


Figure 11 : Tracé du coefficient de corrélation de 1 à 1000 décalages

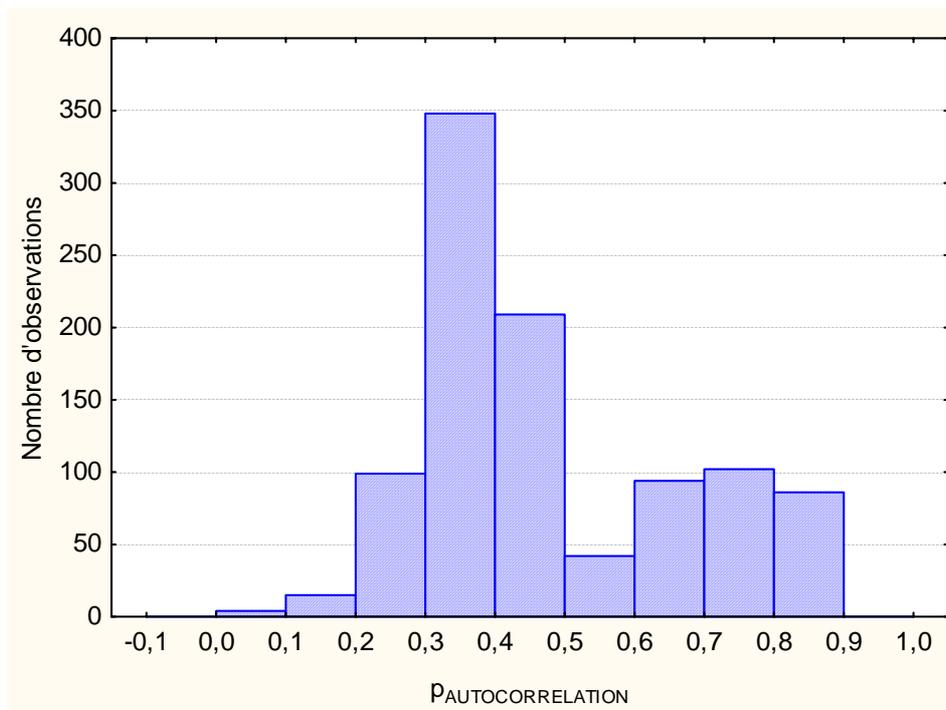


Figure 12 : Tracé du paramètre p de l'autocorrélation sur 1000000 de tirages

### 4.2.3 Bilan sur la distribution normale

Au terme de cette étude nous pouvons affirmer que la distribution normale de Mathématique est acceptable, aussi bien au niveau de la répartition que de la corrélation. Une étude équivalente a été effectuée :

- Sur Mathematica avec 5000000 tirages,
- Sur la distribution normale du logiciel Crystal Ball sur un million de tirage.

Il est également intéressant de noter que les deux logiciels donnent des résultats similaires et il est impossible de statuer, à l'aide de ces deux tests, sur la supériorité d'un des générateurs de ces logiciels. Pour notre part, les études sont effectuées sous Mathematica qui présente notamment l'avantage d'être auto-suffisant, c'est-à-dire qu'il répond à l'intégralité de nos attentes et indépendant d'autres logiciels comme Excel qui présente de nombreux inconvénients comme les problèmes d'interpolations, la limitation à 65536 lignes par feuille de tableau, la mauvaise qualité des représentations graphiques,...

Au niveau du générateur de nombres aléatoires, il faudrait idéalement connaître l'algorithme du générateur, notamment sa période et la transformation utilisée sur la loi uniforme pour simuler des données gaussiennes.

## 4.3 Loi uniforme

La loi uniforme a été testée de la même façon que la loi normale sur Mathématique et sur Crystal Ball. Seuls les résultats sur Mathematica sont présentés. La **Figure 13** représente la distribution uniforme obtenue, la **Figure 14** représente le tracé du coefficient de corrélation de 1 à 1000 tirages et **Figure 15** représente le tracé du paramètre  $p$  de l'autocorrélation sur le million de tirages. Au terme de l'analyse nous en avons déduit que la distribution de Mathematica (de même que celle de Crystall ball) est tout à fait convenable et remplit les conditions statistiques nécessaires.

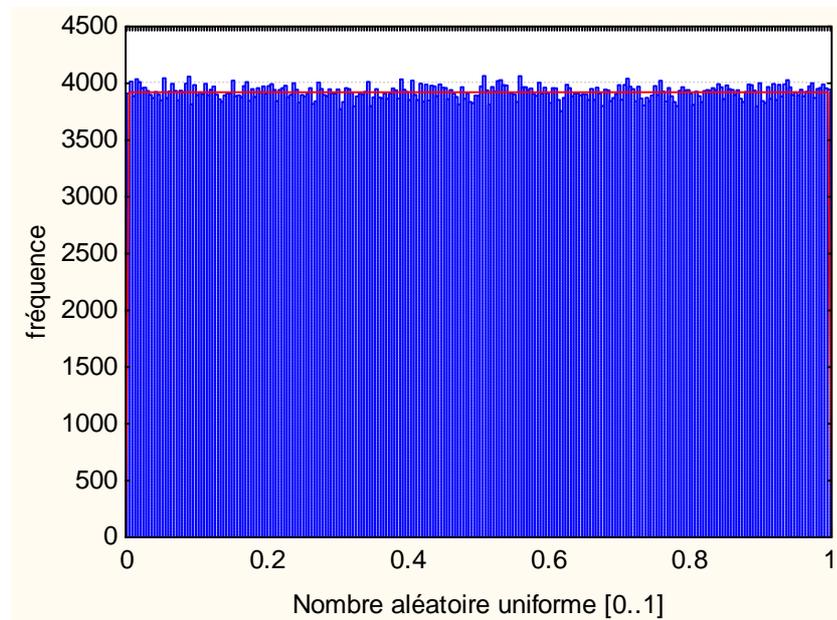


Figure 13 : Représentation de la distribution obtenue

CHAPITRE VII  
INCERTITUDES

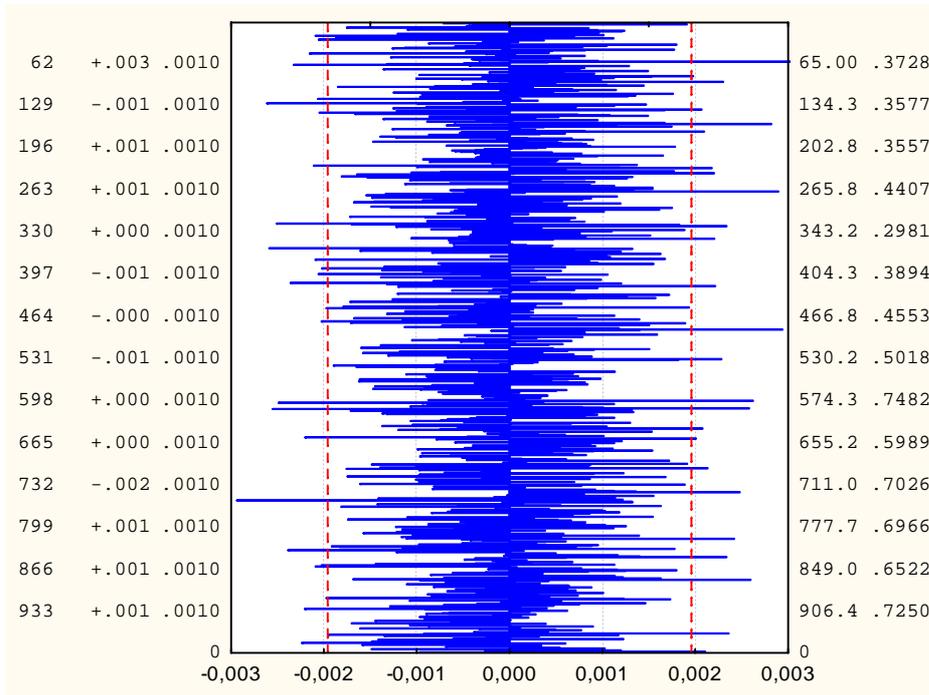


Figure 14 : Tracé du coefficient de corrélation de 1 à 1000 décalages

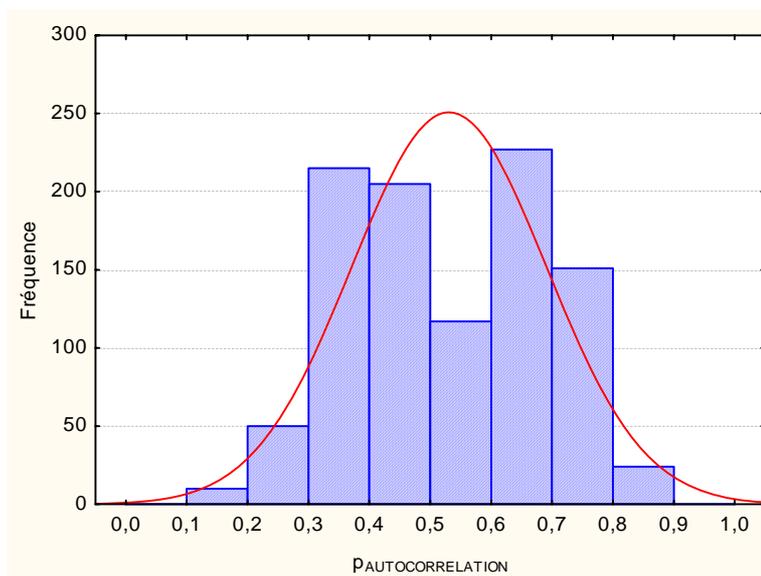


Figure 15 : Tracé du paramètre  $p$  de l'autocorrélation sur 1000000 de tirages

## 4.4 Réflexions sur la loi dite en dérivée en Arcsinus

### 4.4.1. Généralités

La loi dérivée d'arcsinus est utilisée dans les bilans d'incertitudes pour tenir compte de fluctuations périodiques qui correspondent au fait que la climatisation des salles est asservie.

Cette distribution est régulièrement utilisée mais, sur le plan bibliographique, nous n'en connaissons pas de réelle justification à la fois sur le plan théorique et sur le plan pratique.

Supposons que la température  $T$  fluctue entre  $-a$  et  $+a$  de manière sinusoïdale, alors la température vaut :  $T=a.\sin(\theta)$  où  $\theta$  est une variable aléatoire de densité de probabilité uniforme sur  $[0,2\pi]$ . Cherchons à caractériser  $T$  en tant que variable aléatoire.

### 4.4.2. Fonction de répartition

La fonction de répartition est définie de la façon suivante :

$$\Pr(T \leq t) = 1 - \Pr(\text{Arcsin}\left(\frac{t}{a}\right) \leq \theta \leq \pi - \text{Arcsin}\left(\frac{t}{a}\right))$$

$$\Pr(T \leq t) = 1 - \int_{\text{Arcsin}\left(\frac{t}{a}\right)}^{\pi - \text{Arcsin}\left(\frac{t}{a}\right)} \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi} (\pi + 2\text{Arcsin}\left(\frac{t}{a}\right))$$

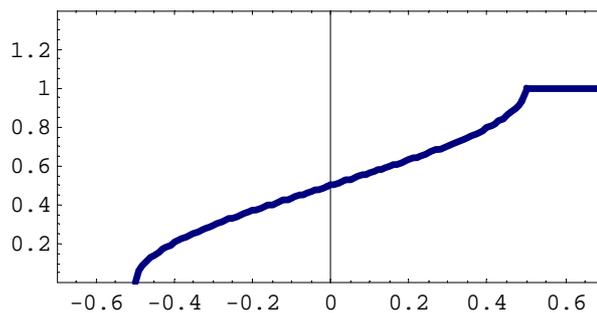


Figure 16 : Tracé de la fonction de répartition en arcsinus

Pour l'exemple de la **Figure 16**, on a choisi  $a=0.5$

### 4.4.3. Densité de probabilité

La densité de probabilité est la dérivée de la fonction de répartition soit :

$$dp(t) = \frac{1}{\pi a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{a}\right)^2}}$$

La **Figure 17** correspond à la loi en U qui est donnée dans beaucoup de documents mais sans justification.

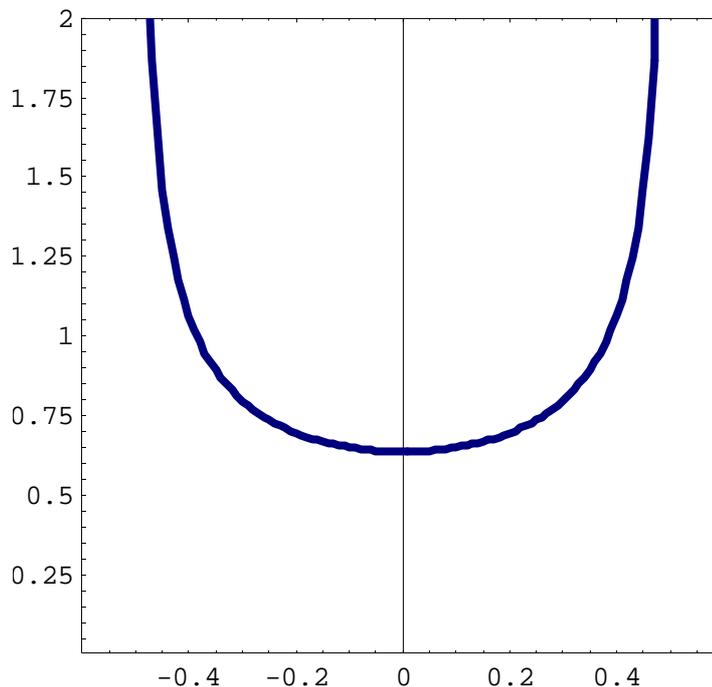


Figure 17 : Densité de probabilité dite en dérivée de Arcsinus pour  $a=0.5$

#### 4.4.4. Inversion de la fonction de répartition

Si on écrit :  $y = \frac{1}{2\pi}(\pi + 2\text{Arcsin}(\frac{t}{a}))$ , alors on a :  $t = a \cdot \sin(\pi(y - \frac{1}{2}))$ .

Dans cette formule,  $y$  est une variable aléatoire de densité de probabilité uniforme entre 0 et 1. Pour une simulation de Monte Carlo, cette formule permet de simuler les variations de la température.

#### 4.4.5. Espérance mathématique et variance

L'espérance mathématique s'écrit :  $E = \int_{-a}^a t \cdot \frac{1}{\pi a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{t}{a})^2}} \cdot dt = 0$

La variance s'écrit :  $\sigma^2 = \int_{-a}^a t^2 \cdot \frac{1}{\pi a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{t}{a})^2}} \cdot dt = \frac{a^2}{2}$ , soit un écart type de  $\sigma = \frac{a}{\sqrt{2}}$ , ce qui

est un résultat classique.

#### 4.4.6. Remarque sur cette modélisation

Reprenons la fonction de répartition :

$$\Pr(t \leq T) = 1 - \int_{\text{Arcsin}(\frac{t}{a})}^{\pi - \text{Arcsin}(\frac{t}{a})} \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi} (\pi + 2\text{Arcsin}(\frac{t}{a}))$$

On reprend la valeur  $a=0,5$  pour fixer les idées, on veut comparer la probabilité que la température soit sur un extrême par exemple entre 0,4 et 0,5 et la probabilité que la température soit centrée entre -0,05 et 0,05.

La probabilité que la température soit comprise entre deux valeurs  $t_1$  et  $t_2$  s'écrit :

$$\Pr(t_1 \leq T \leq t_2) = \frac{1}{\pi} (\text{Arcsin}(\frac{t_2}{a}) - \text{Arcsin}(\frac{t_1}{a}))$$

Soit numériquement :

$$\Pr(0,4 \leq T \leq 0,5) = \frac{1}{\pi} (\text{Arcsin}(\frac{0,5}{0,5}) - \text{Arcsin}(\frac{0,4}{0,5})) = 0,2$$

$$\Pr(-0,05 \leq T \leq 0,05) = \frac{1}{\pi} (\text{Arcsin}(\frac{0,05}{0,5}) - \text{Arcsin}(\frac{-0,05}{0,5})) = 0,06$$

Ce résultat est prévisible en regardant la densité de probabilité mais il semble douteux qu'il soit plus de trois fois plus probable d'être vers la température extrême qu'autour de la température de consigne. Nous sommes actuellement en train de faire une campagne de mesure sur notre climatisation pour avoir une meilleure appréhension de ce qui se passe.

Sur la **Figure 18**, on voit un résultat préliminaire. Une sonde PT100 est installée dans un petit cylindre de cuivre de 20mm de diamètre et de 20mm de haut. Le rôle du cylindre est d'éviter des fluctuations trop brutales. La courbe comprend un point toutes les cinq minutes en abscisses (graduations en heures). Entre les heures 65 et 75 environ, on voit l'effet d'une journée de travaux pratiques. L'histogramme est tracé pour les 45 premières heures. On a effectivement une allure en U mais on est loin de la concentration de valeurs sur les bords que suggère la loi en dérivée de arc sinus.

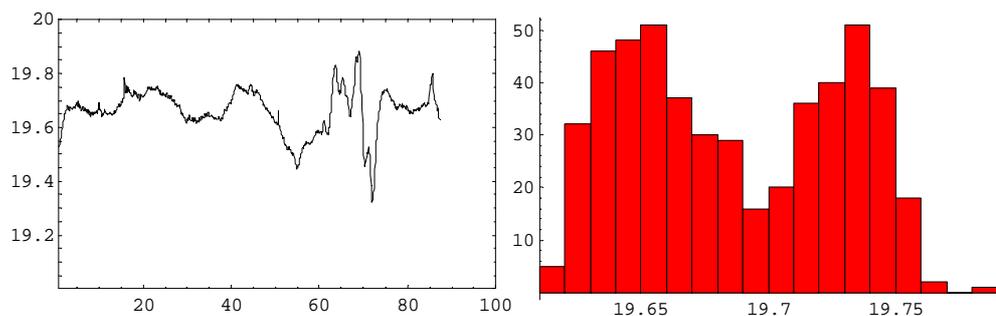


Figure 18 : 80 heures d'acquisition et l'histogramme des 45 premières heures

D'autres mesures laissent à penser que la loi en dérivée de arc sinus est beaucoup trop sévère. Nous utilisons une loi de densité de probabilité uniforme pour l'instant pour modéliser les fluctuations de température.

## 5 Simulation de Monte Carlo

### 5.1 Généralités

Le principe de cette méthode est assez simple [GEN2003] ; le modèle analytique est remplacé par une description mathématique parfaitement déterministe. Le module de calcul utilisé permet de simuler le processus étape par étape dans l'ordre chronologique en tenant compte des covariances. En fait, par simulation, chaque donnée d'entrée est perturbée en utilisant des distributions de nombres aléatoires (lois de densités de probabilité uniformes, gaussiennes, lois en arcsinus,...) pour obtenir une évaluation du ou des mesurands étudiés.

A l'heure actuelle, on trouve relativement facilement de la documentation sur le sujet [COO1994 - SCH2000 - WIL2001 - GON2004 - TRA2005 - DHA2006 - SAN2006]. On parle facilement de Machine Virtuelle pour caractériser cette méthode [Figure 19].

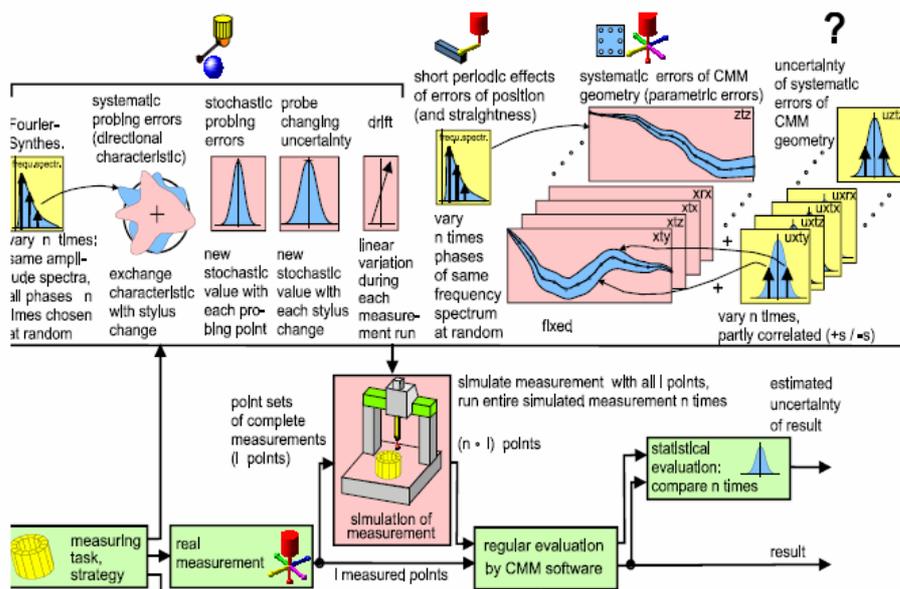


Fig. 20: The Virtual CMM Concept

Figure 19 : Schéma classique du concept de machine virtuelle issue de [TRA2005]

Pour chiffrer les incertitudes de mesures sur les différents mesurands considérés, nous avons choisi d'utiliser la simulation numérique par la méthode de Monte Carlo, selon le supplément 1 [ISO/TC 213 N 659 ISO DGUIDE 99998] du GUM [NF ENV 13005] depuis 2007. Il conseille d'effectuer un million de simulations.

Dans la suite du chapitre, nous nous intéresserons aux incertitudes sur la géométrie de la machine et sur l'effet de cette géométrie sur les écarts mesurés. Au chapitre suivant, les incertitudes sur les mesurands intégreront les autres termes d'incertitudes en particulier les incertitudes liées à la pièce et à la prise des références.

## 5.2 Le problème de la preuve

Les programmes informatiques sont présents dans toutes les étapes de ce travail ce qui pose toujours le problème d'apporter la preuve de la qualité du résultat au sens de la norme [NF EN ISO/CEI 17025, 2000].

Sur la machine à mesurer, les points issus du fonctionnement de la mécanique sont corrigés par logiciel avant d'être intégrés par Quindos pour le calcul des mesurandes.

Nous considérons les points fournis par la machine comme des informations brutes mais nous avons vérifié sur plusieurs jeux de données que nos programmes fournissaient bien le même résultat que Quindos. Sur le plan logique, les résultats étant les mêmes, il n'y a pas de souci. En cas de différence, deux logiciels sont insuffisants pour trancher.

Pour tester le passage des mesures issues des cales à créneaux ou des rectitudes aux fonctions, Thierry COOREVITS a programmé des jeux de tests totalement indépendamment des programmes de l'auteur. Le seul lien était constitué de fichiers de type « .csv » transmis sur une clé USB.

Les recoupements expérimentaux constituent également des éléments de vérification à la fois de la qualité des programmes et de la qualité des procédures même si on reste toujours un peu prudent devant les résultats puisqu'il subsiste toujours des petites différences non explicables même si elles sont compatibles avec les incertitudes.

Des intercomparaisons [DES2007-2] sont en cours. Le CETIM a envoyé des étalons en Allemagne (PTB), au Royaume-Uni (NPL) et aux Etats-Unis (NIST).. Dès que les étalons seront de retour, nous pourrons recouper nos résultats, vérifier la qualité des corrections et des évaluations d'incertitudes.

Nous cherchons ainsi à renforcer la confiance dans nos corrections et nos évaluations d'incertitudes par des tests informatiques en boîte noire, des recoupements expérimentaux et des intercomparaisons.

## 5.3 Traitement des mesures brutes de Rectitudes

### 5.3.1 Présentation

Le chapitre III sur les rectitudes a permis de montrer comment on pouvait optimiser les mesures pour diminuer les incertitudes. Pour simuler les incertitudes restantes, on utilise la méthode de Monte Carlo, les mesures réelles (les écarts) sont perturbées par :

- Une distribution gaussienne de moyenne nulle et d'écart type  $0,5 \mu\text{m}$  pour simuler les erreurs de répétabilité de la machine et du système de palpation, de la rugosité de la règle et d'erreur de positionnement lors du retournement,... Cette distribution est estimée en majorant les défauts de répétabilité relevés sur un nombre important d'essais.
- Une distribution uniforme entre  $-0,025$  et  $0,025 \mu\text{m}$  pour tenir compte de la résolution de la machine.
- Une distribution gaussienne de moyenne nulle et d'écart type différent si on mesure la rectitude suivant l'axe x ou suivant l'axe y pour tenir compte de l'effet de bilame dû aux gradients thermiques. L'écart type est égal à la flèche estimée. Cette distribution doit être multipliée par la distance aux carrés. La démonstration est présentée au paragraphe suivant.

### 5.3.2 Schématisation de la perturbation des mesures de la règle

La **Figure 20** représente le schéma de perturbation des mesures servant au calcul de rectitude. Pour déterminer la rectitude d'un axe on se base sur quatre mesures, deux pour chacune des deux configurations (avant et après retournement)

## CHAPITRE VII

## INCERTITUDES

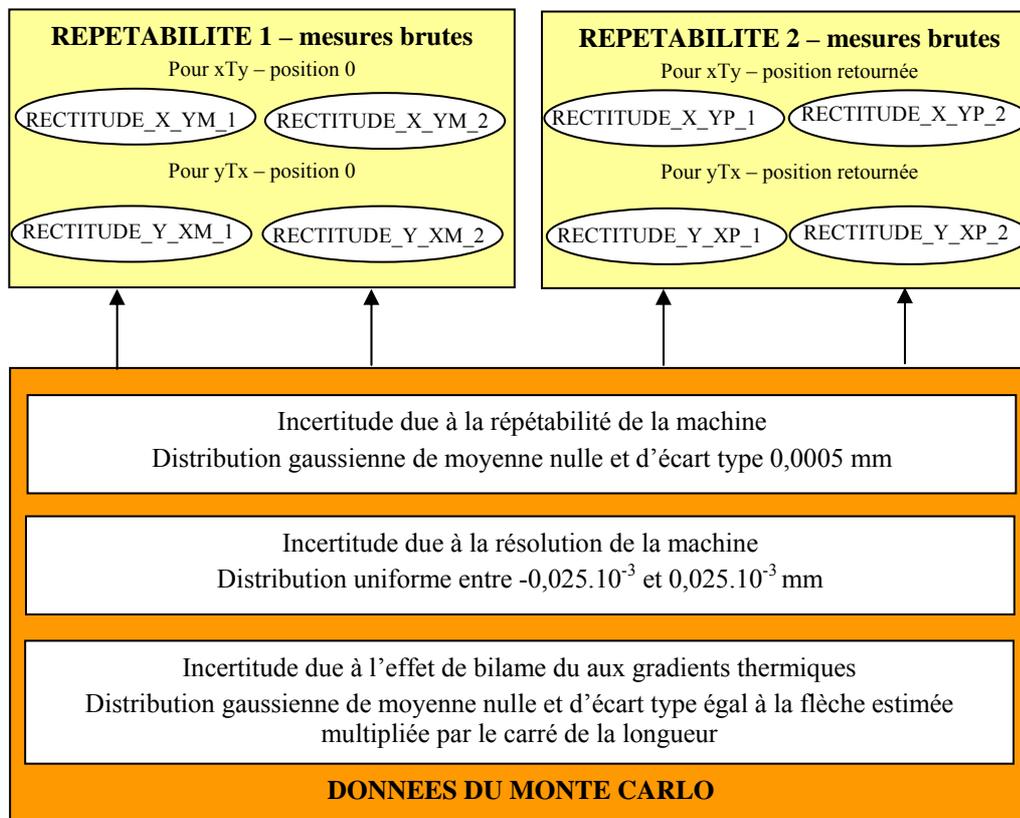


Figure 20 : Schéma de perturbation des mesures brutes

## 5.4 Traitement des mesures brutes de la KOBA

### 5.4.1 Présentation

Le chapitre II sur les mesures des cales à gradins a permis de montrer comment on pouvait optimiser les mesures pour limiter les incertitudes. Pour simuler les incertitudes restantes, on utilise la méthode de Monte Carlo, les mesures réelles (les longueurs mesurées) sont perturbées par :

- Une distribution gaussienne de moyenne nulle et d'écart type  $0,1 \mu\text{m}$  pour simuler les erreurs de répétabilité de la machine et du système de palpage,... Cette distribution est estimée en majorant les défauts de répétabilité relevés sur un nombre important d'essais.
- Une distribution uniforme entre  $-0,025$  et  $0,025 \mu\text{m}$  pour tenir compte de la résolution de la machine.
- Un ensemble de lois uniformes pour tenir compte des variations de température. Ce point est détaillé au paragraphe suivant.

Une référence bibliographique intéressante est l'article de Ted DOIRON [DOI1997].

## 5.4.2 Prise en compte des variations de température

### 5.4.2.1 Variations directes de température

Les variations de température de la cale, de la machine, ou de l'ambiance sont les premières causes d'incertitude sur ce type de mesure.

Les corrections température doivent être bien réfléchies. En effet, trois stratégies de corrections sont possibles :

- Correction entre chaque mesure
- Correction entre chaque mesure de nature différente
- Correction unique par défaut mesuré

Le choix de l'une ou l'autre des corrections est fonction de la résolution des sondes et des variations possibles de températures dans la salle. En effet, si l'incertitude sur la correction est supérieure à l'incertitude causée par une variation de température, il vaut mieux ne pas faire de correction.

Les prises de température pour effectuer cette correction sont trois sondes de platine de type PT100 sur chacun des axes de la machine et une sonde de contact pour la pièce.

Pour les prises de référentiel sur la KOBA, le CETIM doit déposer la sonde de contact ce qui aboutit à une incertitude causée par le déplacement de la sonde (mise en position jamais identique, changement de l'état de surface local, temps de réponse de la sonde,...).

A l'heure actuelle, le protocole choisit est d'effectuer une correction avant chaque mesure de nature différente ce qui est critiquable. Une étude est en cours pour chiffrer les incertitudes suivant les trois corrections présentées afin d'optimiser une fois de plus les mesures.

Au niveau des incertitudes liées à la température [NIC2001], on se fixe les perturbations suivantes :

- $\lambda \cdot \Delta T_{SC} \cdot L$  : ce terme permet de simuler la différence de température entre la sonde et la cale qui change lorsque l'on passe d'une mesure à une mesure de nature différente (même  $\Delta T_{SC}$  pour les deux mesures de répétabilité).
- $\lambda \cdot \Delta T_e \cdot L$  : ce terme permet de simuler les variations relatives de température entre la sonde et la machine. On considère que cette variation est la même pour les mesures d'un même défaut.
- $\lambda \cdot \Delta T_r \cdot L$  : ce terme permet de simuler une variation due à la résolution / répétabilité sur les prises de température,... Ce terme change entre chaque mesure.
- $\Delta \lambda \cdot 0,5 \cdot L$  : ce terme permet de simuler une l'incertitude sur la valeur du coefficient de dilatation [DEC1996] de la KOBA. Le coefficient 0,5 correspond à  $0,5^\circ\text{C}$ , c'est-à-dire la variation maximale de température tolérée au niveau de l'ambiance.

### 5.4.2.2 Effet de la variation de la rectitude (bilame thermique) sur la mesure de la KOBA

Pour les mesures du défaut de lacet, il faudra que l'on intègre en plus l'effet de bilame du granit de la machine qui a une influence notable. En effet, l'effet de bilame thermique déforme le granit en forme de parabole, ce qui induit une rotation du chariot. Cette rotation est égale à la dérivée de la forme parabolique du granit.

Précédemment, on a trouvé que la rectitude était déformée sous la forme  $f \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2$  à cause du

bilame thermique, on trouve alors une rotation du chariot de  $2 \cdot f \cdot \frac{x}{L^2} = \frac{\lambda \cdot L^2 \cdot \Delta T}{h} \cdot \frac{x}{L^2} = \frac{\lambda \cdot \Delta T}{h} \cdot x$

## CHAPITRE VII

### INCERTITUDES

Ainsi, cette variation de la rectitude induit une pente de  $\frac{\lambda\Delta T}{h}$  sur le lacet et une variation de justesse à une distance d de  $\frac{\lambda\cdot\Delta T\cdot d}{h}\cdot x$ .

#### 5.4.3 Schématisation de la perturbation des mesures de KOBA

La **Figure 21** représente le schéma de perturbation des mesures de KOBA pour les mesures permettant de déterminer les défauts de justesse, lacet et perpendicularité.

Pour chacun des défauts analysés, on se base sur quatre mesures, deux pour chacune des deux positions nécessaires.

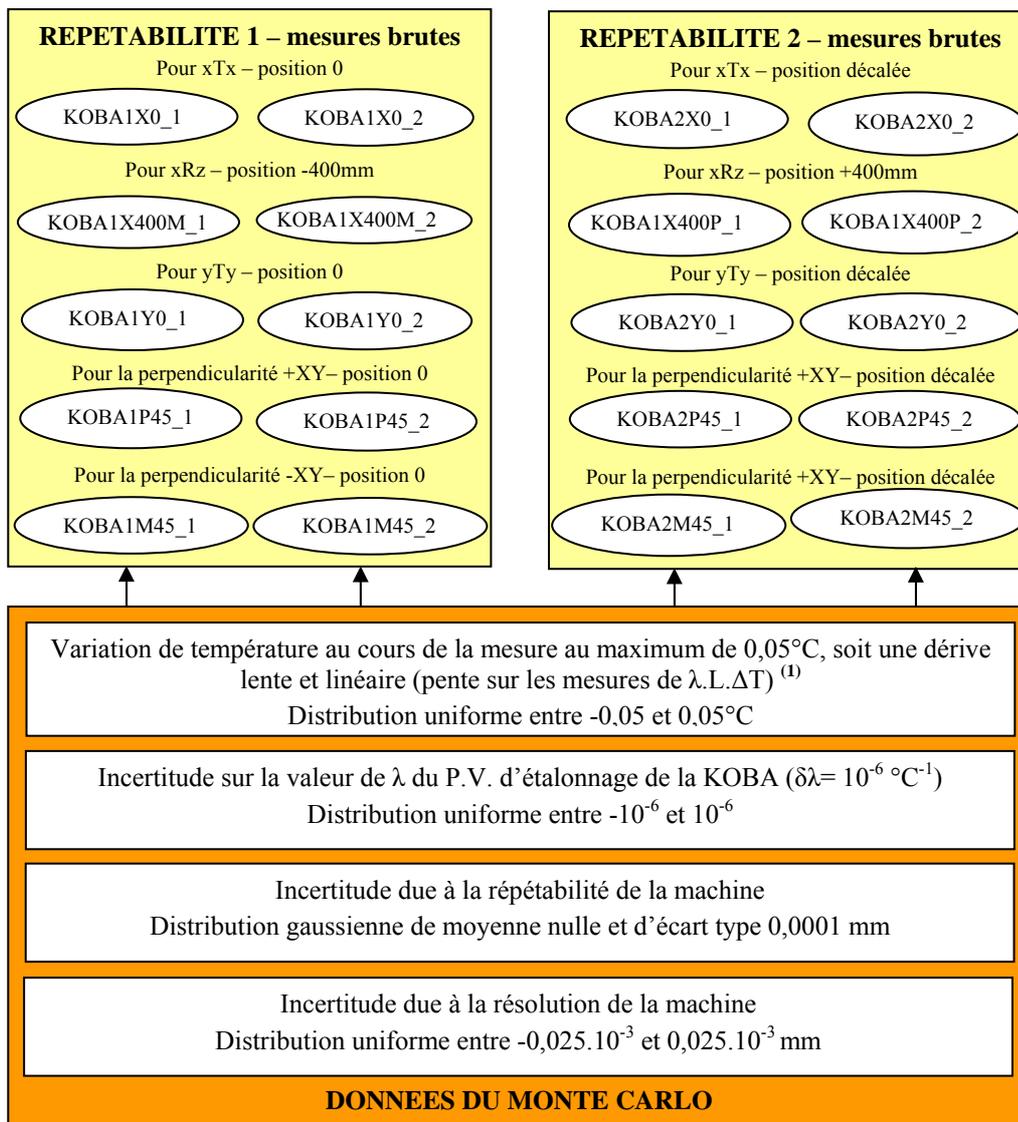


Figure 21 : Schéma de perturbation des mesures brutes de KOBA

## 5.5 Incertitudes liées à l'étalonnage de la KOBA

Sur le Procès Verbal d'étalonnage de la KOBA, il est précisé que l'incertitude sur l'étalonnage des divers créneaux de la cale est de  $\pm (0,3\mu\text{m} + 1,5 \cdot 10^{-6} L)$ . Il faut alors tenir compte de cette incertitude pour nos mesures, sachant que  $k=2$ , soit :

Ajouter aux valeurs 2 termes, l'un constant l'autre proportionnel à la longueur de la KOBA [Figure 22].

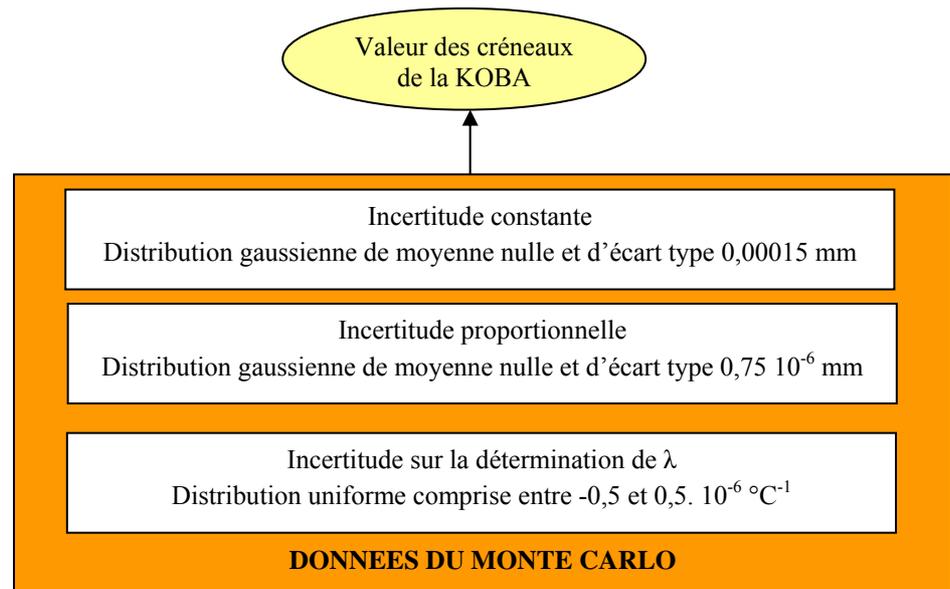


Figure 22 : Schéma de perturbation des valeurs d'étalonnage de la KOBA

## 6 Incertitudes sur les défauts de la Leitz

L'ensemble des opérations informatiques nécessaires au calcul d'incertitudes est détaillé en **annexe 4**. Le bilan des causes d'incertitudes sera affiné et une série d'expériences et d'amélioration est d'hors et déjà prévu. Les résultats préliminaires montrés **Figure 23** sont probablement trop sévères.

CHAPITRE VII  
INCERTITUDES

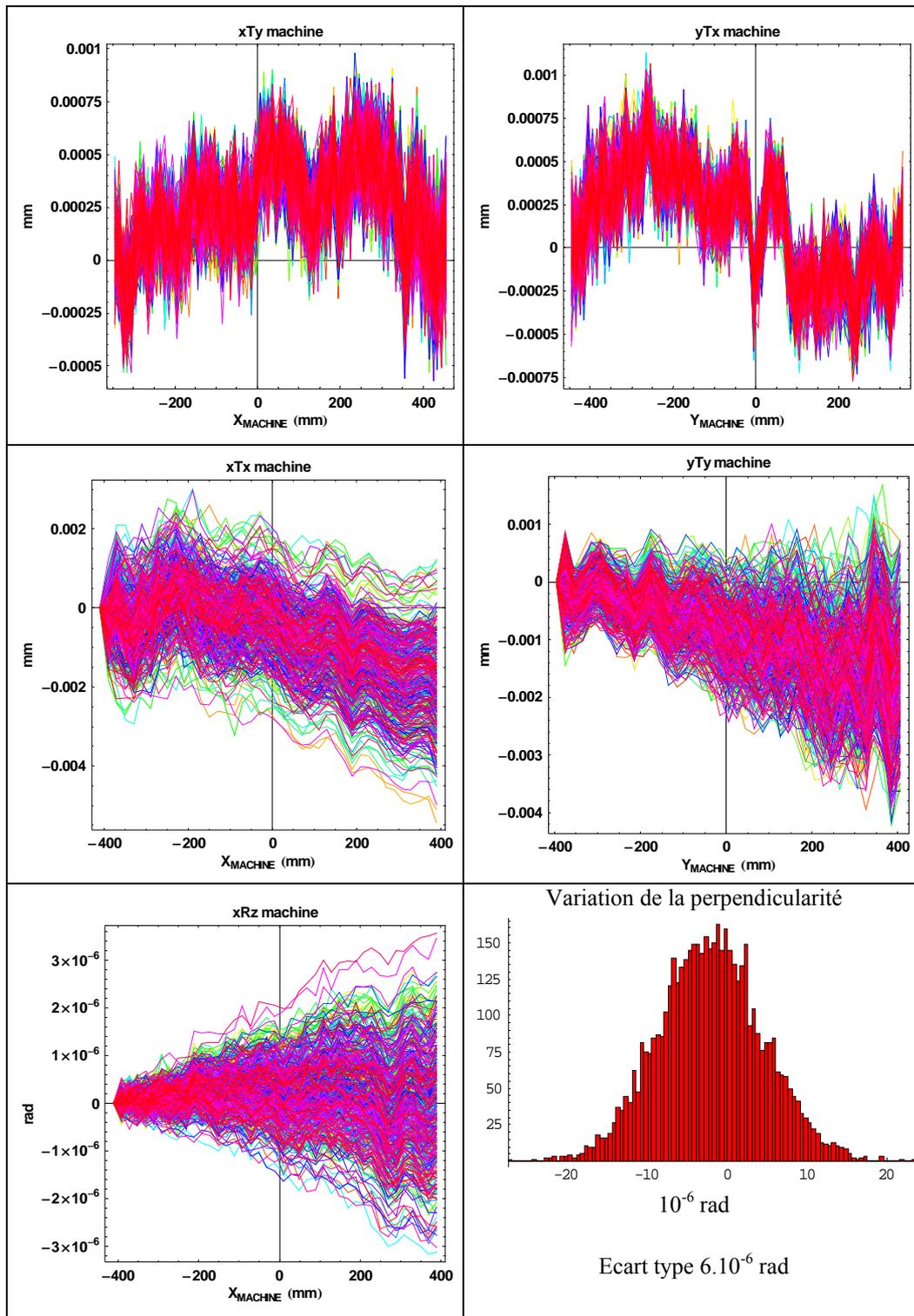


Figure 23 : Evolution possible des défauts de la machine

## 7 Incertitudes sur les écarts et sur les fonctions équivalentes

Nous avons effectué une simulation de monte Carlo sur la détermination de la géométrie de la machine dans le plan. Ainsi il a été possible d'évaluer les variations possibles des différents défauts [Figure 23] mais également des écarts dus à la machine [Figure 24]. D'après cette simulation nous pouvons affirmer que l'incertitude sur les écarts dus à la machine sur chacun des flancs est proche de  $\pm 2 \mu\text{m}$  sur l'engrenage simulé ( $Z=25$ ,  $m=8$ ). Il est ainsi tout à fait naturel de trouver une variation des fonctions équivalentes du même ordre de grandeur [Figure 25].

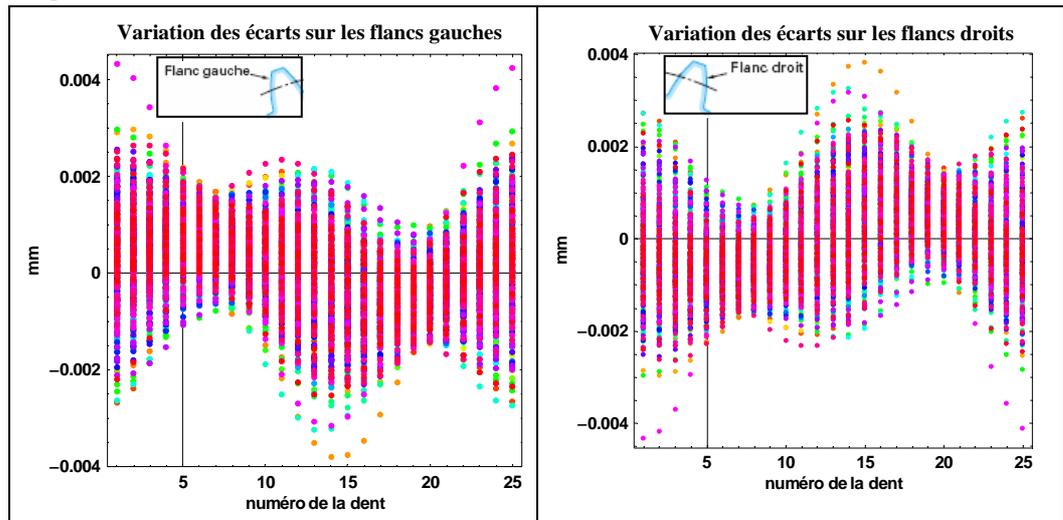


Figure 24 : Variation possible des écarts sur chacun des flancs

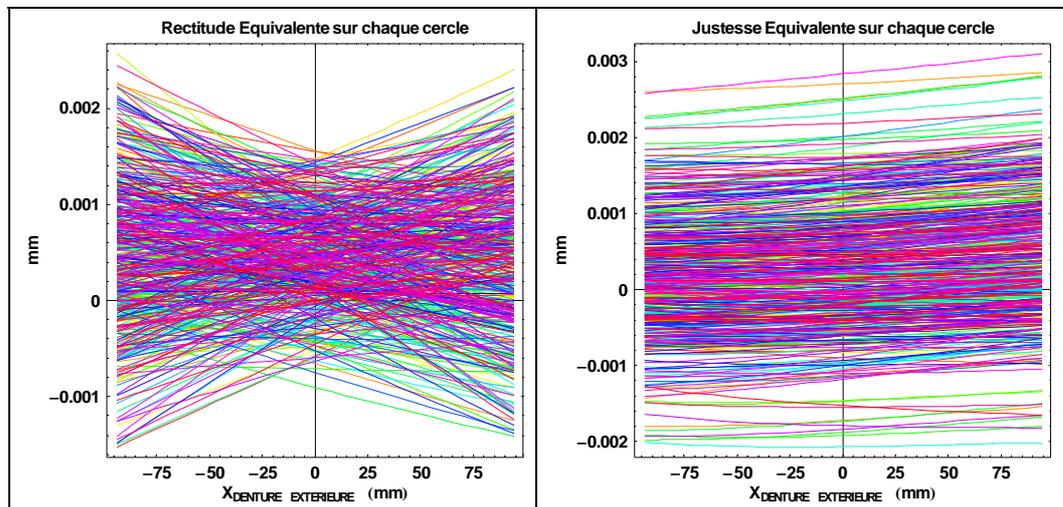


Figure 25 : Evolution des justesses et des rectitudes équivalentes

## 8 Conclusion

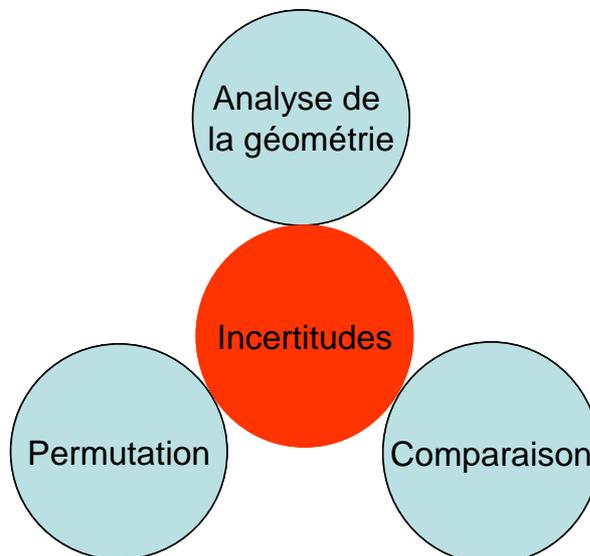


Figure 26 : Schéma des méthodes d'évaluation des incertitudes

Nous mettons en place trois types de méthodes d'évaluation des incertitudes [Figure 26].

Une méthode analytique pour laquelle on peut mener des expérimentations fines avec un bon raccordement mais qui passe nécessairement par le modèle de description de la géométrie du corps solide en petits déplacements.

La permutation que ne nécessite qu'une hypothèse de reproductibilité mais qui introduit des constantes dont on ne peut s'affranchir complètement et qui est sensible aux phénomènes thermiques.

La comparaison qui peut être à deux niveaux, soit on dispose d'un étalon du même type que la roue à évaluer et la normalisation fournit les outils nécessaires soit on ne dispose pas de l'étalon du même type, on dispose d'une bague et on propose une méthode originale pour chiffrer les incertitudes.

Ces trois méthodes n'ont pas pu être mises en concurrence complètement mais cela fournira la base de la preuve indispensable dans le cadre d'une accréditation.

Sur le plan concret, le niveau d'incertitudes de  $\pm 2\mu\text{m}$  auquel nous arrivons paraît cohérent mais la prise en compte des températures nécessite des expérimentations complémentaires.



# CHAPITRE VIII :

## Mesurandes de l'engrenage

### SOMMAIRE

1	Généralités .....	186
2	Profil .....	188
2.1	Ecart total de profil : $F_{\alpha}$ .....	188
2.2	Ecart de forme de profil : $f_{f\alpha}$ .....	189
2.3	Ecart d'inclinaison de profil : $f_{H\alpha}$ .....	190
3	Division .....	191
3.1	Les écarts individuels de pas .....	192
3.2	Les écarts totaux de division .....	193
4	Conclusion .....	194

# Mesurandes de l'engrenage

## 1 Généralités

Un mesurande est la grandeur particulière soumise à mesurage [NF X-07-001, 1994].

Pour le cas de l'engrenage cylindrique droit, les définitions et les valeurs admissibles des écarts des flancs homologues de la denture sont définis par l'ISO 1328-1 (1995) – Partie 1 [NF ISO 1328-1,1995].

Pour ce type d'engrenage, deux types de mesurandes sont à contrôler, à savoir les mesurandes de profil et de division. Les mesurandes relatifs à l'hélice ne sont pas nécessaire puisque l'angle d'hélice est nul par définition de l'engrenage cylindrique droit.

Notre démarche de détermination des mesurandes et de l'incertitude associée est présenté sur la **Figure 1**.

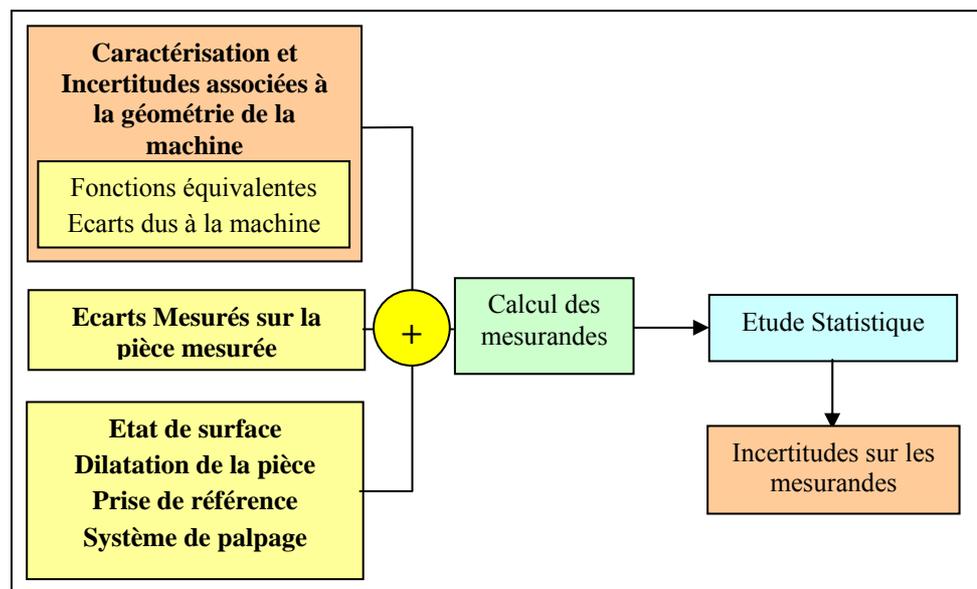


Figure 1 : Détermination des incertitudes sur les mesurandes de l'engrenage

En fait, on tient compte des défauts de la machine en tant que correction à apporter sur les écarts mesurés et on ajoute l'influence de l'état de surface des pièces, des phénomènes thermiques sur la pièce (dilatation), du système de palpage et les incertitudes sur la prise de référence.

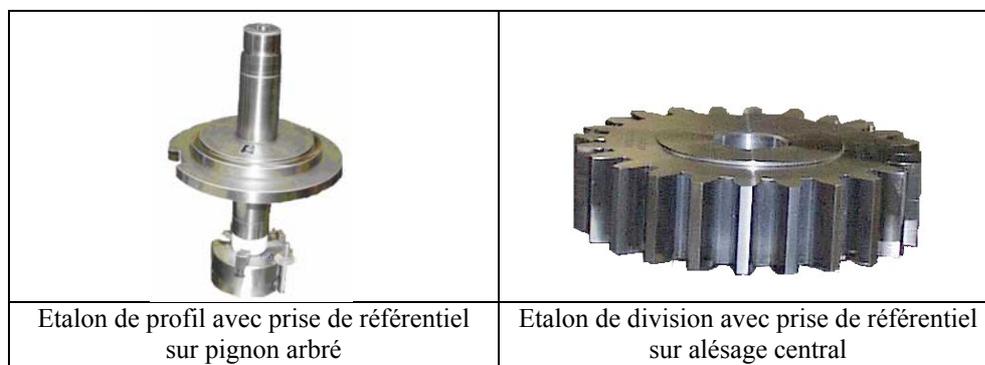
Au niveau du système de palpage, il est souvent possible d'apporter une correction, à partir d'une étude par les fonctions équivalentes des mesures réalisées sur la sphère de référence [Chapitre IV] par exemple, mais la tête mesurante utilisée présente un problème de répétabilité, ce qui exclut la possibilité de correction. Néanmoins, on peut remarquer que les défauts de la tête mesurante restent toujours continus et limités pour de faibles évolutions angulaires, nous pouvons donc indiquer une incertitude importante de  $\pm 0,6 \mu\text{m}$  pour les mesurandes de division et faible de quelques dixièmes de micromètres ( $\pm 0,1 \mu\text{m}$ ) pour les

## CHAPITRE VIII

## MESURANDES DE L'ENGRENAGE

mesures correspondantes aux mesurandes du profil. Il serait également possible de simuler plus finement les problèmes de répétabilité pour simuler finement le comportement mais ces problèmes sont le résultat d'un comportement anormal qu'il faut déterminer. Une action corrective auprès du fabricant a été évoquée par le CETIM. Néanmoins, au vu des articles de la bibliographie, comme précisé au **chapitre IV**, les défauts rencontrés sur la tête mesurante ressemblent étrangement à des problèmes de prise en compte des problèmes dynamiques que l'on rencontre en mode scanning alors que nous nous travaillons en mode point à point où ces problèmes sont normalement négligeables.

Au niveau de la prise de référentiel, il faut bien faire la différence entre les mesures d'un alésage et celles sur pignon arbré [**Figure 2**]. En effet, les incertitudes sur la prise de référence d'un alésage se calculent relativement facilement (monopalpeur) alors que la prise de référence d'un pignon arbré nécessite l'emploi de multi palpeurs pour des problèmes d'accessibilité. Ce point particulier est en cours d'étude et sera également nécessaire pour les mesures d'hélice pour les engrenages hélicoïdaux. L'étude des multi palpeurs est donc la suite logique de nos études.



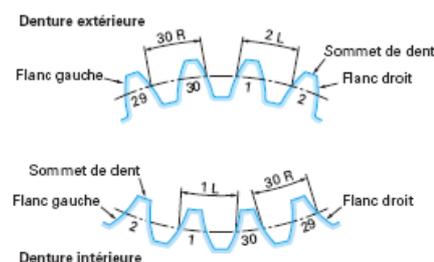
*Figure 2 : Photos de 2 étalons avec prise de référentiel différent*

Nous allons présenter successivement des résultats de mesurandes de profil et de division. Néanmoins, à ce jour, nous ne donnerons aucun résultat en terme d'incertitudes dans la mesure où nos étalons font l'objet d'une intercomparaison en cours auprès du PTB, du NPL et du NIST indispensable pour notre démarche d'accréditation COFRAC en cours.

Les mesurandes du profil sont des mesures de la denture extérieure MAAG de l'ENSAM de Lille et les mesurandes de division présentés sont en fait les conséquences des défauts de géométrie de la machine du CETIM sur les mesures de division.

Dès retour de nos étalons, nous les mesurerons et effectuerons le calcul des incertitudes selon le schéma de la **Figure 1**. En attendant, nous travaillons donc sur les prises en compte des prises de référence des pignons arbrés (multi palpeurs) et (avec le fabricant) sur les problèmes de la tête mesurantes.

L'identification des flancs droits et gauches est représentée sur la **Figure 3**.



*Figure 3 : Définition des flancs droits et gauches*

## 2 Profil

Les mesurandes du profil sont au nombre de trois à savoir :

- Ecart total de profil noté  $F_\alpha$
- Ecart de forme du profil noté  $f_{f\alpha}$
- Ecart d'inclinaison du profil noté  $f_{H\alpha}$

Le document intitulé « Contrôle des engrenages parallèles » écrit par M. PASQUIER dans les techniques de l'ingénieur [PAS2002] est un bon résumé des définitions de la norme [NF ISO 1328-1,1995] sur les définitions et contrôles de ce type d'engrenage. Nous ne développerons donc pas le sujet, juste une définition succincte de ces mesurandes sera reprise.

La **Figure 4** présente la mesure d'un profil de denture.

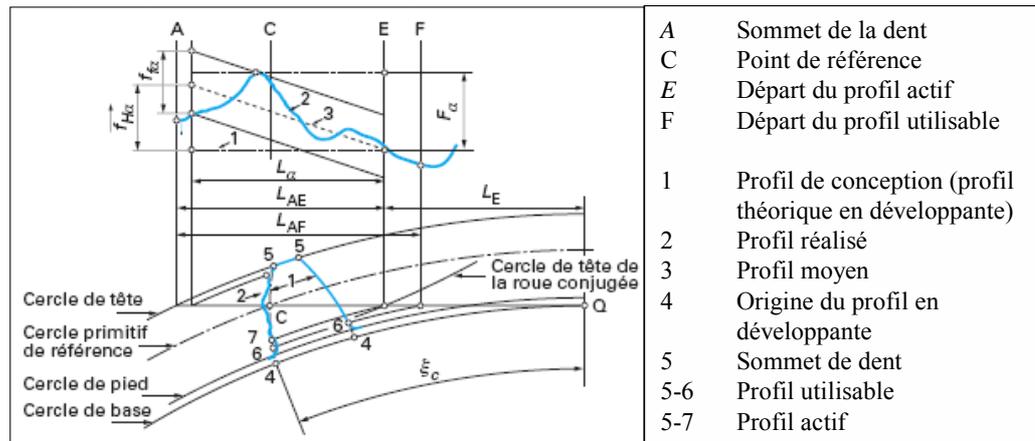


Figure 4 : Profil de dent et diagramme du profil

### 2.1 Ecart total de profil : $F_\alpha$

L'écart total de profil  $F_\alpha$  [Figure 5] est la distance entre deux tracés du profil de référence encadrant le tracé effectif des écarts de profil sur la longueur d'évaluation  $L_\alpha$ .

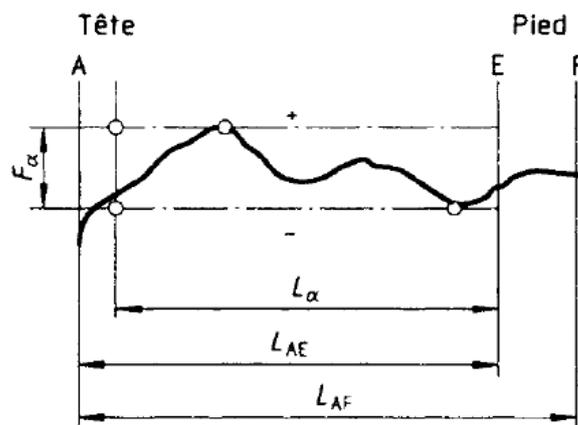


Figure 5 : schéma de détermination de l'écart total de profil  $F_\alpha$

## CHAPITRE VIII

## MESURANDES DE L'ENGRENAGE

La **Figure 6** représente la détermination de  $F_\alpha$  à partir des écarts dans la direction de la normale des mesures d'un des profils du MAAG sur la machine de l'ENSAM.

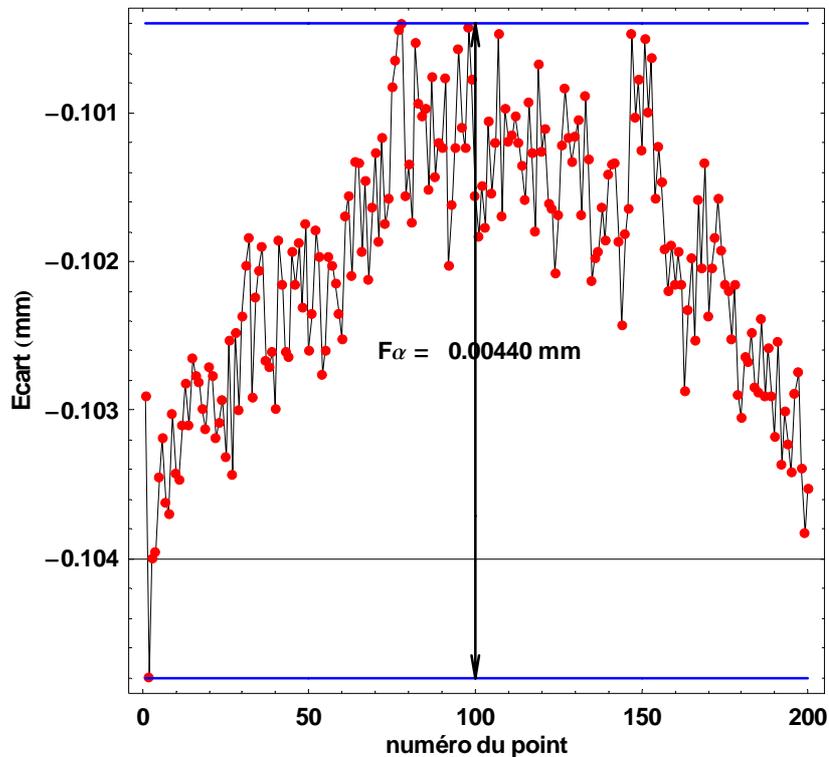


Figure 6 :  $F_\alpha$  sur un des profils du MAAG mesuré sur la Trimesure de l'ENSAM

## 2.2 Ecart de forme de profil : $f_{f\alpha}$

L'écart de forme de profil  $f_{f\alpha}$  [Figure 7] est la distance entre deux tracés du profil moyen encadrant le tracé effectif des écarts de profil sur la longueur d'évaluation  $L_\alpha$ .

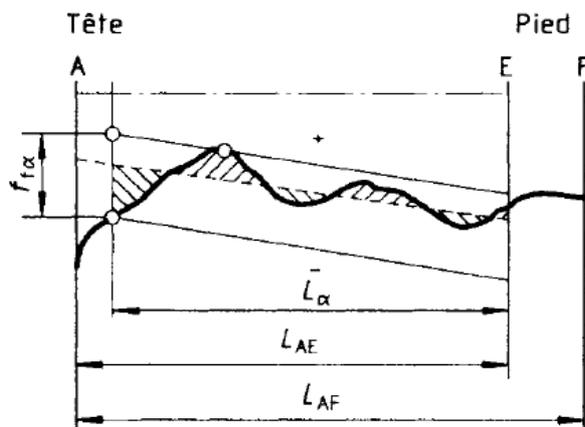


Figure 7 : Schéma de détermination de l'écart de forme du profil  $f_{f\alpha}$

La **Figure 8** représente la détermination de  $F_{H\alpha}$  à partir des écarts dans la direction de la normale des mesures d'un des profils du MAAG sur la machine de l'ENSAM.

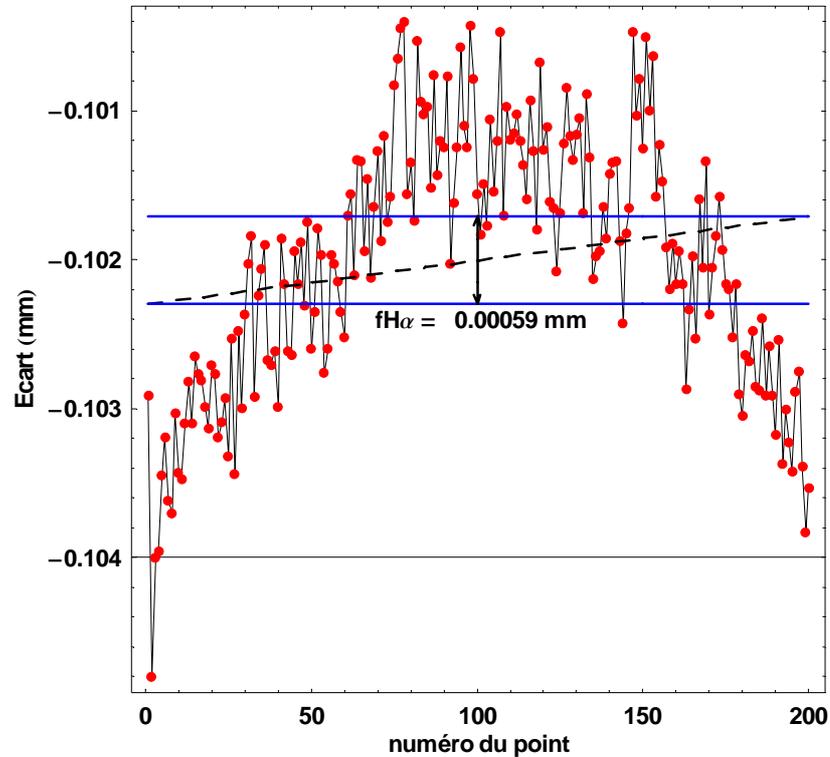


Figure 8 :  $f_{\alpha}$  d'un des profils du MAAG mesuré sur la Trimesure de l'ENSAM

### 2.3 Ecart d'inclinaison de profil : $f_{H\alpha}$

L'écart d'inclinaison de profil  $f_{H\alpha}$  [Figure 9] est la distance entre deux tracés du profil de référence coupant le tracé du profil moyen aux extrémités de la longueur d'évaluation  $L_{\alpha}$ .

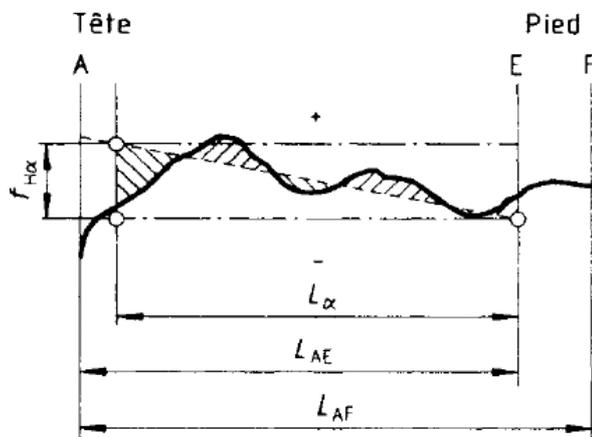


Figure 9 : Schéma de l'écart d'inclinaison de profil  $f_{H\alpha}$

La **Figure 10** représente la détermination de  $F_{H\alpha}$  à partir des écarts dans la direction de la normale des mesures d'un des profils du MAAG sur la machine de l'ENSAM.

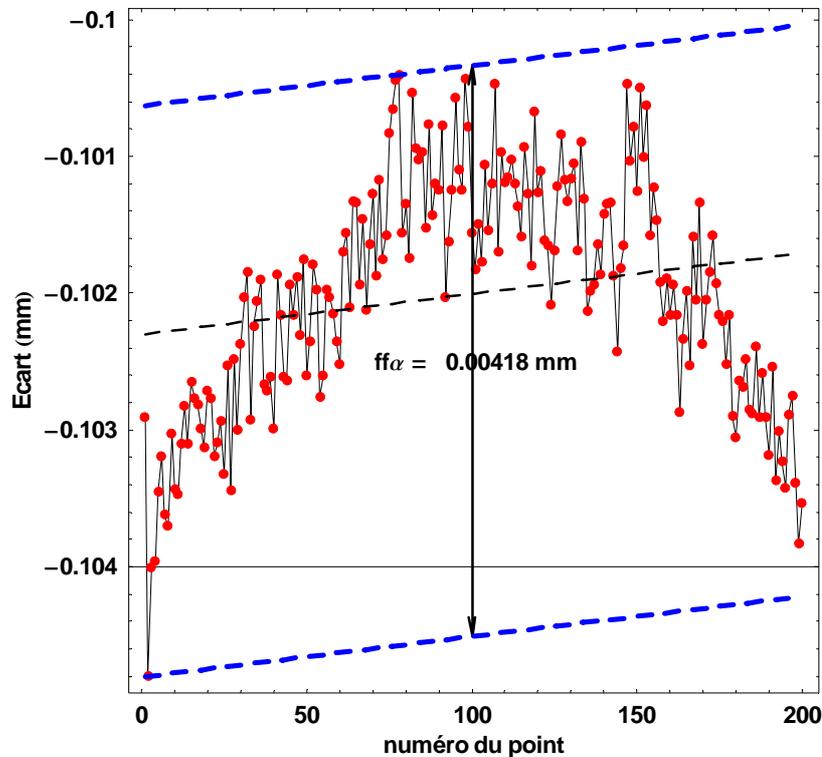


Figure 10 :  $f_{H\alpha}$  sur une profil du MAAG mesuré sur la Trimesure de l'ENSAM

### 3 Division

Les mesurandes de division sont au nombre de deux, à savoir :

- les écarts individuels de pas, notés  $f_{pt}$ ,
- les écarts totaux de division, notés  $F_p$ .

Ils sont schématisés sur la **Figure 11**.

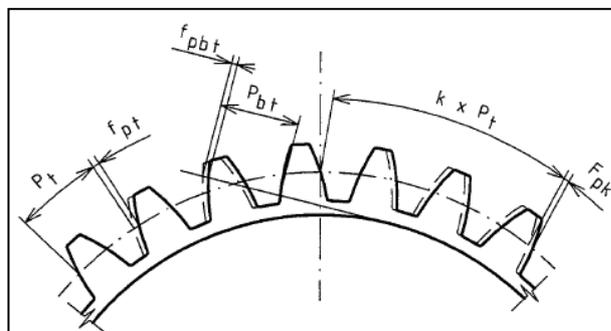


Figure 11 : Schématisation des mesures de division

### 3.1 Les écarts individuels de pas

Les écarts individuels de pas sont la différence algébrique entre la valeur effective d'un pas et la valeur correspondante théorique dans le plan apparent. Elle est définie sur un cercle concentrique à l'axe de la roue située sensiblement à mi-hauteur de dent.

La **Figure 12** et la **Figure 13** représentent respectivement les écarts individuels de pas des flancs gauches et droits.

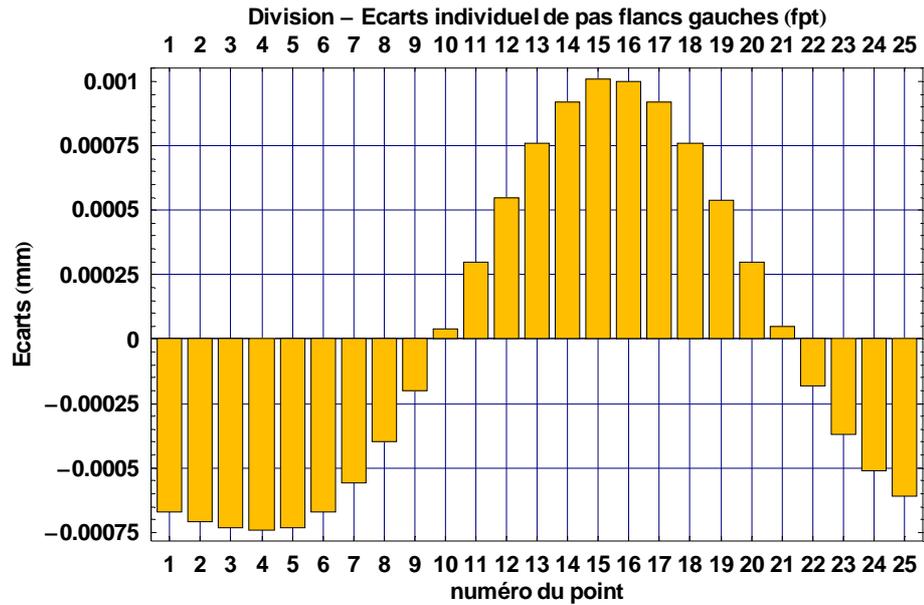


Figure 12 :  $F_{pt}$  pour les flancs gauches

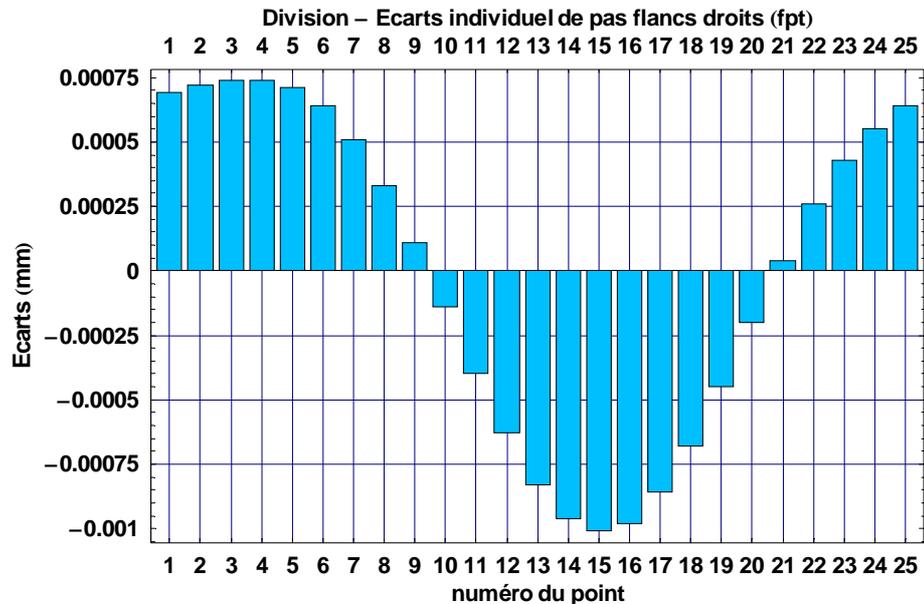


Figure 13 :  $F_{pt}$  pour les flancs droits

### 3.2 Les écarts totaux de division

L'écart total de division  $F_p$  est la valeur maximale de l'écart cumulé de pas sur tout secteur de flancs homologues (i.e.  $k$  compris entre 1 et  $Z$ ). Il représente l'amplitude totale de la courbe des écarts cumulés de pas.

La **Figure 14** et la **Figure 15** représentent respectivement les écarts cumulés de pas des flancs gauches et droits.

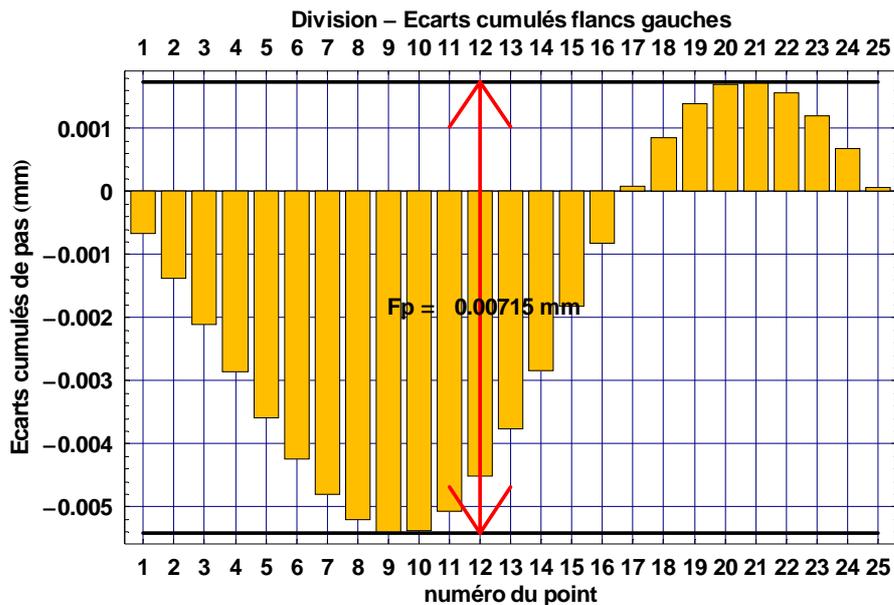


Figure 14 :  $F_p$  pour les flancs gauches

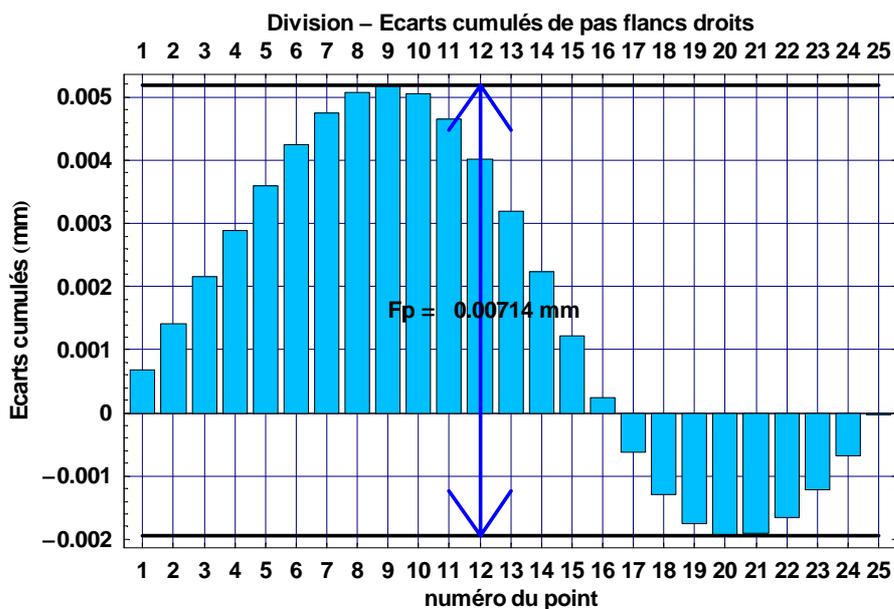


Figure 15 :  $F_p$  pour les flancs droits

## 4 Conclusion

L'étude sur les mesurandes n'est pas aboutie à ce jour dans la mesure où nos étalons ne sont pas disponibles actuellement (intercomparaison) et que nous avons un travail à compléter sur les prises de référence, des fluctuations de température,... Le programme de calcul des mesurandes à partir d'écarts est réalisé et doit être prochainement validé après confrontation des résultats de mesure fournis par QUINDOS. Les résultats seront communiqués dès que possible. La norme FD ISO/TR 10064-5 [**FD ISO/TR 10064-5, 2006**] sera étudiée et appliquée au niveau des variations de température de la pièce (dilatation) qui influence les mesurandes du profil entre autre (Annexe A de cette norme).





# CHAPITRE IX:

## Conception d'un étalon 2D/3D

### SOMMAIRE

1	Concept.....	198
1.1	Etalons (Artéfacts) pour le contrôle d'engrenages .....	198
1.2	Concept initial .....	199
1.3	Extension du concept.....	200
2	Conception des plateaux 2D .....	201
2.1	Présentation .....	201
2.2	Répartition des billes périphériques .....	202
2.3	Mise en position des billes .....	203
2.3.1.	Fixation des billes .....	203
2.3.2.	Calcul de l'angle de contact optimum pour le posage des billes.....	203
2.3.3.	Détermination des dimensions du cône de posage.....	206
2.4	Etude de l'hélice.....	207
3	Conception du plateau 3D.....	208
3.1	Montage 1.....	208
3.2	Montage 2.....	209
4	Stratégie de mesure du profil.....	210
4.1	Détermination des principaux points .....	210
4.2	Mesures des Ecarts .....	211
4.2.1.	Utilisation du module cercle .....	211
4.2.2.	Utilisation du module engrenage .....	212
4.3	Position optimale des billes de 20 mm .....	213
4.4	Conception d'un plateau pour les études limitées au 2D.....	214
5	Conclusion.....	214

# Conception d'un étalon 2D/3D

## 1 Concept

### 1.1 Etalons (Artéfacts) pour le contrôle d'engrenages

Les étalons sont essentiels en métrologie [MOR2002]. En effet, les contrôles se font classiquement par comparaison [ISO/TS 15530-3, 2004], c'est-à-dire que l'on compare la mesure par rapport à un étalon de référence parfaitement connu, afin de déterminer les incertitudes de mesure.

Au niveau bibliographique, il existe un grand nombre d'étalons pour la mesure d'engrenages [NF ISO 18653, 2004 - FD ISO/TR 10064-5, 2006].

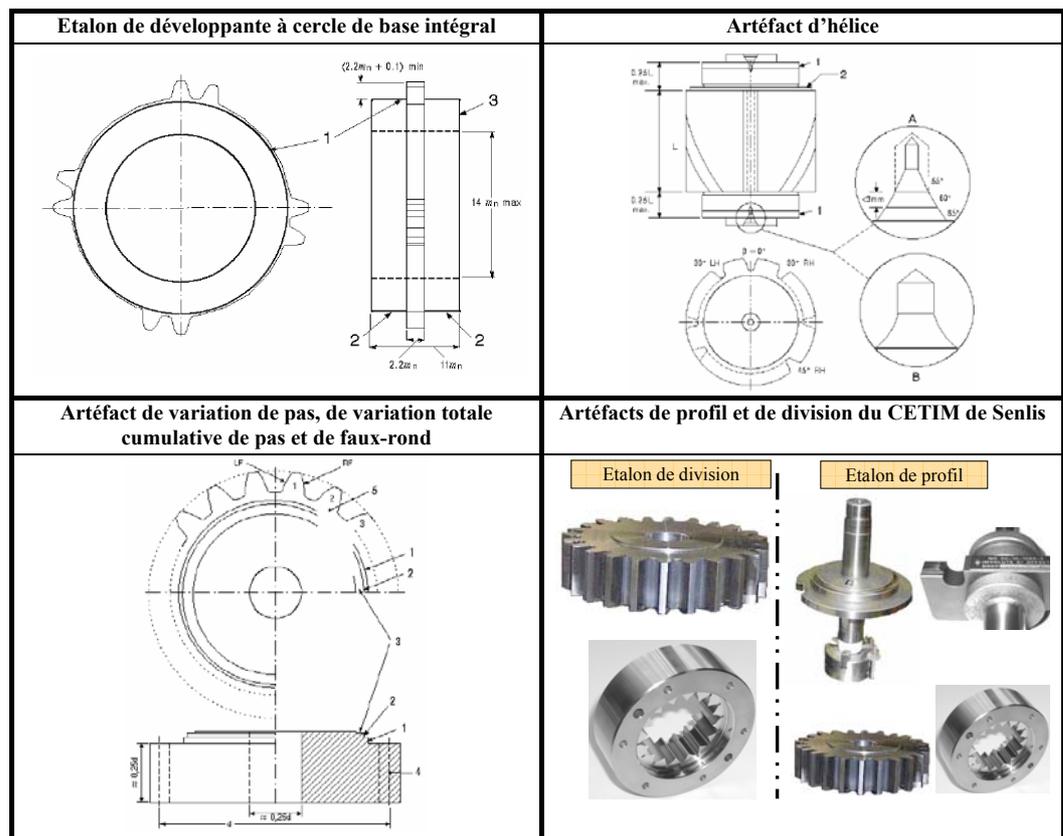


Figure 1 : Quelques artéfacts

L'étalon de développante à cercle de base intégral [Figure 1] est une manière d'utiliser une dent en forme de développante réelle. Cette conception permet de vérifier la développante à partir de principes fondamentaux par roulement et alignement sur le cercle de base.

Il existe de nombreux procédés et artéfacts pouvant être utilisés pour l'étalonnage des hélices. L'artéfact présenté [Figure 1] est une manière d'utiliser une dent de forme hélicoïdale réelle. Les étalons d'hélice doivent présenter une hélice à droite, une hélice à gauche et une fente sans hélice.

L'étalon de variation de pas, de variation totale cumulative de pas et de faux-rond [Figure 1] est typiquement un engrenage cylindrique droit possédant entre 18 et 30 dents et de préférence ayant un nombre premier de dents.

Il existe d'autres types d'étalons pour le contrôle d'engrenage dont par exemple l'étalon ayant une forme autre que celle en développante. Les plus connus sont les artéfacts de plan consistant en une surface plate qui représente un plan parallèle à l'axe de rotation de l'artéfact et décalé par rapport à cet axe. Il existe également des étalons à flancs plats [Figure 2], soit constitués de cales étalons [DEC2000], soit directement taillés dans cette configuration [OCH2006]. L'intérêt de ces étalons réside dans le fait qu'ils sont relativement simples à mesurer et que l'on peut effectuer une méthode de permutation [MAR1998].

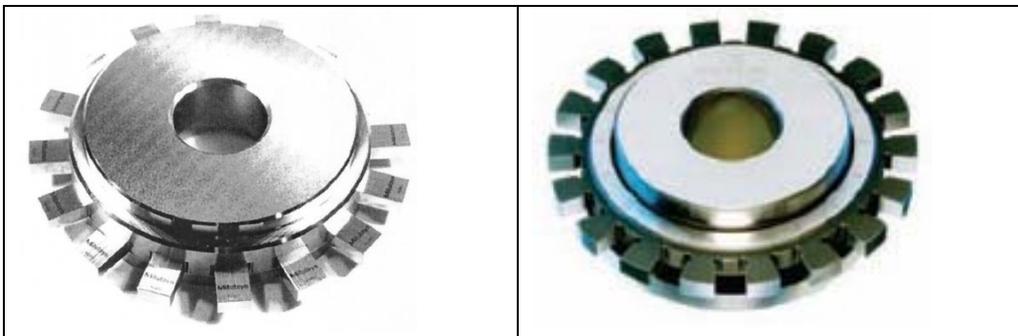


Figure 2 : Artéfacts à flancs droits

## 1.2 Concept initial

Le CETIM a participé à une intercomparaison japonaise [ROU2006] consacrée à la métrologie du profil. L'étalon de référence est un plateau à deux sphères [Figure 3 - TAK2005]. L'idée est que localement, si le rayon de la sphère est de l'ordre du rayon de courbure de la forme en développante au niveau du primitif, les incertitudes de mesure sont comparables sur une pseudo mesure de profil sur la sphère et sur la développante et que les écarts entre le profil sur la sphère et le profil en développante sont calculables donc corrigeables. Cet étalon est maintenant normalisé [FD ISO/TR 10064-5, 2006] pour la mesure du profil mais ne permet pas de réaliser des mesures de division, d'hélice,...

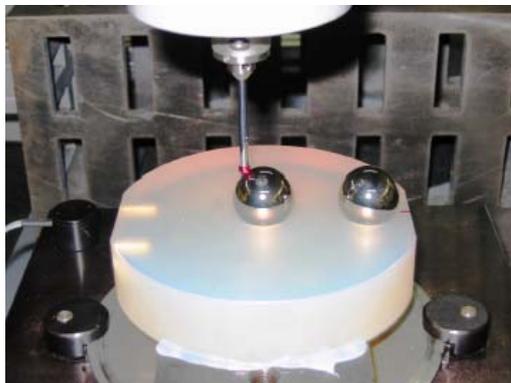


Figure 3 : Etude de la métrologie du profil à l'aide d'un étalon à 2 sphères

En ce qui nous concerne, le CETIM possède un bon nombre d'étalons de profil, de division et d'hélice. Néanmoins, nous avons cherché à concevoir un étalon permettant le contrôle du profil, de la division et de l'hélice ainsi que le contrôle périodique de la machine. Cet étalon est basé sur des sphères afin de ne pas être perturbé par les défauts du système de palpation pour les mesures de division (repérage des centres de sphère). Les défauts du système de palpation étant étudiés indépendamment sur une sphère parfaitement connue (sphère de référence par exemple au centre de l'étalon).

### 1.3 Extension du concept

L'idée est de réaliser un plateau 2D constitué de billes qui simulent les points de contact au niveau du cercle primitif. C'est donc une extension du concept du plateau à deux billes de l'intercomparaison japonaise à laquelle le CETIM a participé. L'idée de base était de constituer un plateau à  $n$  billes (le diamètre des billes étant choisi) en positionnant  $2n$  de ces billes jointives sur le diamètre ainsi calculé et de supprimer une bille sur deux [Figure 4].

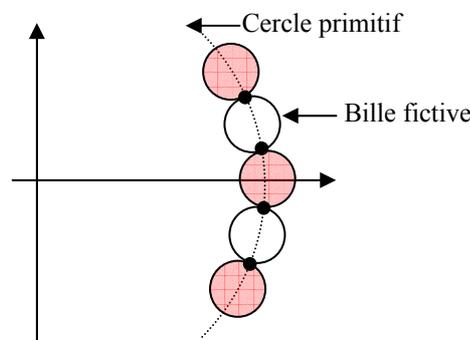


Figure 4 : Position des billes sur le plateau

A partir de cette configuration de base, un calcul a été mené en cherchant le diamètre des billes et la distance entre le centre des billes et l'axe du plateau tels que sur l'intersection entre le cercle primitif et les billes fournissent les positions théoriques des points de la roue et les normales correspondantes au cercle de base, c'est-à-dire que la géométrie du plateau soit exactement la même que celle de la roue au niveau du cercle primitif (cf. §2.2).

Pour évaluer la géométrie d'une machine à mesurer à l'aide d'un étalon de longueur, il convient de placer l'étalon parallèlement aux axes pour vérifier les justesses et à 45 degrés pour vérifier les perpendicularités. Ces positions ne sont évidemment pas exhaustives mais constituent une vérification locale de l'essentiel des qualités géométriques de la machine. Nous avons donc choisi de placer huit billes à 45 degrés ou seize billes à 22,5 degrés c'est-à-dire  $Z=8$  ou  $Z=16$ .

Le diamètre des billes a été choisi parmi les valeurs standard proches du diamètre des sphères de calibrage des palpeurs soit 20 et 30 mm.

A partir de cette géométrie de base, nous avons défini les concepts suivants:

- **Concept pour le profil** : Comme pour le plateau de l'intercomparaison japonaise, il est possible de réaliser des mesures de profil mais, on se propose de jouer sur les diamètres des billes pour avoir pour certaines mesures un profil présentant des écarts positifs par rapport à la développante et pour d'autres des écarts négatifs.

- **Concept pour la division** : Grâce à une stratégie de multiretournement, portant sur le centre des billes calculé au sens des moindres carrés, il sera possible de connaître très finement la

position des billes. En passant à la division définie comme le calage angulaire de points, on devrait maîtriser les incertitudes de mesures de manière intéressante.

- **Balayage de la zone accréditée** : Dans la conception de l'étalon, il est prévu de pouvoir disposer de deux plateaux de même conception mais de diamètres différents afin de réaliser un balayage du domaine d'accréditation 2D [Figure 5]. La position en hauteur du centre des billes des 2 plateaux par rapport au plan de posage est la même pour travailler dans le même plan sur la machine à mesurer tridimensionnelle. Cela constituera une vérification de la MMT.

- **Concept pour l'hélice dans le plan** : La mesure de l'hélice pourra également être simulée en remplaçant les inserts équipés de billes par des cylindres étalons et dans une moindre mesure sur les sphères ou en utilisant le principe de [WES1998]. En effet dans son papier D. B. WESS montre qu'une ligne sur la surface d'une sphère peut être utilisée pour simuler une hélice.

- **Concept pour l'hélice dans l'espace** : Les plateaux peuvent être assemblés pour créer un étalon 3D faisant l'objet de permutation.

## 2 Conception des plateaux 2D

### 2.1 Présentation

Le petit plateau [Figure 5] est constitué de neuf billes, à savoir une au centre et huit en périphérie (une bille tous les 45°). Le diamètre de bille est conditionné par le marché et nous avons choisi un diamètre de bille de 20mm (diamètre courant possédant une bonne qualité géométrique). Le diamètre du cercle de localisation du centre des billes périphériques doit être calculé de tel sorte que la distance entre deux billes permettrait le passage d'une autre bille de même diamètre (§2.2).

Le grand plateau est constitué de dix sept billes de diamètre 30mm, soit une bille au centre et seize billes en périphérie.

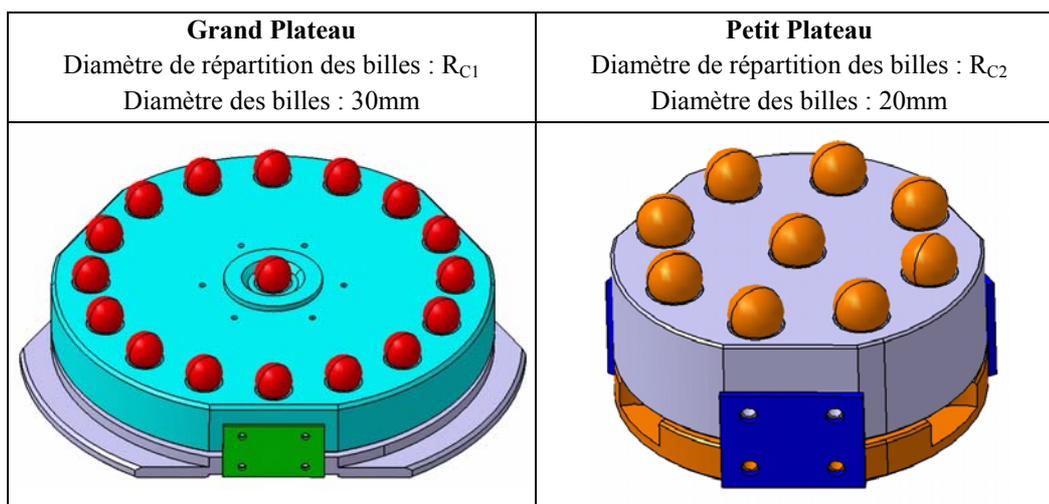


Figure 5 : Vue des 2 plateaux utilisés

Les plateaux ne sont pas fixés directement sur la machine à mesurer pour éviter les déformations dues au bridage. Ainsi, nous avons décidé de monter les plateaux sur lames flexibles (Trois lames disposées à 120°). Les lames flexibles sont alors fixées à la fois sur les plateaux et sur leurs socles respectifs et permettent de réaliser un assemblage permanent pratiquement insensible au bridage. Les références bibliographiques sur le principe, le fonctionnement et l'intérêt des montages à lames flexibles ne manquent pas et ceux-ci sont utilisés depuis les années 30 jusqu'à aujourd'hui [PLA1954 - JON1956 - RYU1997 - GEN2000]. Nous ne citerons donc pas les références sur Elsevier Science Inc.

## 2.2 Répartition des billes périphériques

Pour répartir les billes, il faut déterminer la distance du centre C d'une bille au centre 0 [Figure 6]. Ces distances sont notées respectivement  $R_{C1}$  et  $R_{C2}$  pour le grand et le petit plateau.

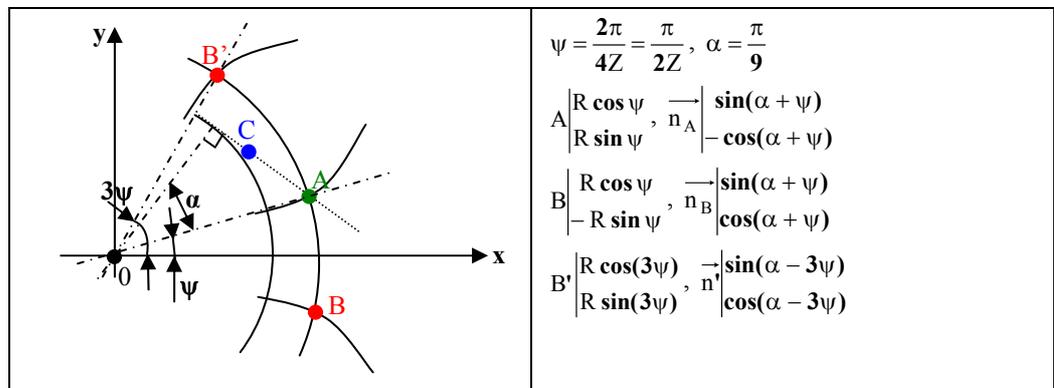


Figure 6 : Mise en place du calcul pour la répartition des billes

$$\vec{CA} = \rho \cdot \vec{n}_A \Rightarrow C = \begin{pmatrix} R \cos \psi \\ R \sin \psi \end{pmatrix} - \rho \begin{pmatrix} \sin(\alpha + \psi) \\ -\cos(\alpha + \psi) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{CB'} = \rho \cdot \vec{n}' \Rightarrow C = \begin{pmatrix} R \cos(3\psi) \\ R \sin(3\psi) \end{pmatrix} - \rho \begin{pmatrix} \sin(\alpha - 3\psi) \\ \cos(\alpha - 3\psi) \end{pmatrix} \quad (2)$$

La résolution du système composé des équations (1) et (2) nous permet de déterminer le rayon primitif R.

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \begin{cases} R[\cos \psi - \cos(3\psi)] - \rho[\sin(\alpha + \psi) - \sin(\alpha - 3\psi)] = 0 \\ R[\sin \psi - \sin(3\psi)] + \rho[\cos(\alpha + \psi) + \cos(\alpha - 3\psi)] = 0 \\ \psi = \frac{\pi}{2Z}, \alpha = \frac{\pi}{9}, \rho = 20 \text{ (ou } 30), Z = 8 \text{ (ou } 16) \end{cases}$$

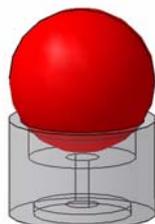
Après application numérique, on trouve  $R_1 = 148.2432$  mm et  $R_2 = 50.6617$  mm

A partir de la connaissance de ces 2 rayons  $R_1$  et  $R_2$  et en utilisant l'équation 1 ou 2, on détermine  $R_{C1}$  et  $R_{C2}$  en écrivant que  $R_{Ci} = \sqrt{x_{Ci}^2 + y_{Ci}^2}$  où  $x_{Ci}$  et  $y_{Ci}$  sont les composante en x et y du point  $C_i$  relatif au rayon  $R_{Ci}$ .

Après application numérique, on trouve  $R_{C1} = 143.8053$  mm et  $R_{C2} = 48.1670$  mm.

## 2.3 Mise en position des billes

### 2.3.1. Fixation des billes

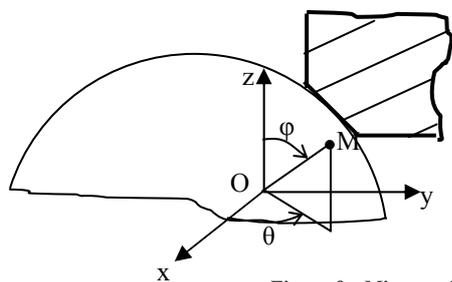


Les différentes billes sont collées sur un insert [Figure 7] et ce sont ces inserts qui sont fixés sur leur couronne correspondante. Le but est d'éviter la déformation des billes et de pouvoir contrôler facilement leur circularité sur le banc de circularité. Il est également envisageable de mettre des cales pelables entre la couronne et les inserts afin de régler plus finement la hauteur des centres des différentes billes. Enfin, la solution d'inserts permet de pouvoir remplacer les billes par des cylindres étalons dans l'optique de réaliser des mesures d'hélice [Figure 10].

Figure 7 : Inserts

Il existe néanmoins une incertitude, qui pourra être chiffrée, au niveau des profils locaux mesurés dans la mesure où l'on réalise les mesures sur les sphères et qu'un défaut suivant l'axe vertical conduit inévitablement à une erreur. Néanmoins cette erreur est d'un ordre de grandeur assez faible ( $\approx 10^{-6}$  mm).

### 2.3.2. Calcul de l'angle de contact optimum pour le posage des billes



$$M \begin{cases} x = R \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ y = R \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta \\ z = R \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

Figure 8 : Mise en place du repère et écriture du point M

On note M, un point de contact de la bille sur la couronne de posage de l'insert. Ce point est bien évidemment situé sur une sphère de diamètre égal au diamètre de la bille et s'écrit :

#### • 2.3.2.1. Proposition 1 : bille sur 3 appuis

La question est de choisir la position de trois points sur lesquels on pose une sphère et tel que l'incertitude sur la position de la sphère soit la même dans trois directions orthogonales. On ne peut pas placer de point dans la direction Z.

Principe du calcul : L'idée est de considérer que la bille est posée sur 3 points décalés de  $120^\circ$  dans le plan XoY et de chercher l'angle  $\varphi$  tel que des variations aléatoires dans la direction de la normale au contact provoque respectivement dans les directions orthogonales X, Y et Z des variations égales.

Les 3 points de posage répartis tel que  $\theta=0, 120, 240^\circ$ , ont alors pour normales respectivement:

$$\vec{n}_1 \begin{cases} \sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{cases}, \vec{n}_2 \begin{cases} -\sin 30 \cdot \sin \varphi \\ \cos 30 \cdot \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{cases}, \vec{n}_3 \begin{cases} -\sin 30 \cdot \sin \varphi \\ -\cos 30 \cdot \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{cases}$$

Si on considère un petit déplacement de la bille  $\vec{t} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ , on peut écrire l'écart résultant en chacun

des points M, respectivement  $e_1, e_2, e_3$ :

$$e_1 = \vec{t} \cdot \vec{n}_1 = u \cdot \sin \varphi + w \cdot \cos \varphi$$

$$e_2 = \vec{t} \cdot \vec{n}_2 = -u \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin \varphi + v \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin \varphi + w \cdot \cos \varphi$$

$$e_3 = \vec{t} \cdot \vec{n}_3 = u \cdot \sin \varphi + w \cdot \cos \varphi$$

$$\text{Soit : } \begin{pmatrix} \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ -\sin 30^\circ \sin \varphi & \cos 30^\circ \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\sin 30^\circ \sin \varphi & -\cos 30^\circ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Le but est d'équilibrer les incertitudes sur  $u, v, w$ , il faut donc inverser la matrice.

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3 \cdot \sin \varphi} & \frac{-1}{3 \cdot \sin \varphi} & \frac{-1}{3 \cdot \sin \varphi} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sin \varphi} & \frac{-1}{\sqrt{3} \cdot \sin \varphi} \\ \frac{1}{3 \cdot \cos \varphi} & \frac{1}{3 \cdot \cos \varphi} & \frac{1}{3 \cdot \cos \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

On note  $\sigma$  l'incertitude type.

On suppose que  $e_1, e_2, e_3$  sont des variables indépendantes et présentent la même incertitude type  $\sigma$ .

$\sigma_u, \sigma_v$ , et  $\sigma_w$  représentent respectivement les incertitudes types selon  $u, v$ , et  $w$ .

$$u = \frac{1}{3 \cdot \sin \varphi} (2 \cdot e_1 - e_2 - e_3) \Rightarrow \sigma_u^2 = \frac{2 \cdot \sigma^2}{3 \cdot \sin^2 \varphi}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sin \varphi} (e_2 - e_3) \Rightarrow \sigma_v^2 = \frac{2 \cdot \sigma^2}{3 \cdot \sin^2 \varphi}$$

$$w = \frac{1}{3 \cdot \cos \varphi} (e_1 + e_2 + e_3) \Rightarrow \sigma_w^2 = \frac{\sigma^2}{3 \cdot \cos^2 \varphi}$$

L'incertitude type est la même en chacun des points de pose de la bille si :

$$\frac{2 \cdot \sigma^2}{3 \cdot \sin^2 \varphi} = \frac{\sigma^2}{3 \cdot \cos^2 \varphi}, \text{ soit } \tan \varphi = \sqrt{2}, \text{ donc } \varphi = 54,7^\circ$$

- **2.3.2.2. Proposition 2 : bille en contact sur un anneau élastique**

L'idée est de considérer un posage élastique sur un anneau tel que le contact soit bilatéral.

On note  $\lambda$  la raideur curviligne des pièces. M est un point de contact entre la couronne élastique et la bille [Figure 8]. Un élément curviligne de contact entre la bille et l'insert, s'écrit  $R \cdot \sin\varphi \cdot d\theta$ . On ne considère que 2 déplacements différents; un déplacement axial selon l'axe z et un radial selon l'axe x (tout autre déplacement radial dans le plan XoY fournit les mêmes conclusions).

- Etude de l'effet du déplacement radial (suivant l'axe x)

L'effet du déplacement parallèle à l'axe x de M a pour normale  $\vec{n} \begin{matrix} | \\ u \\ \mathbf{0} \\ | \\ \mathbf{0} \end{matrix}$  et s'écrit  $\sin\varphi \cdot \cos\theta \cdot u$ .

La projection h de ce point M suivant cet axe x s'écrit :  $\sin\varphi \cdot \cos\theta$

L'effort élémentaire dans la direction de la normale dû à ce déplacement vaut :

$$\lambda \cdot R \cdot \sin\varphi \cdot d\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \cdot u \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta = \lambda \cdot R \cdot \sin^3\varphi \cdot \cos^2\theta \cdot d\theta$$

$$\text{Or } \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \cdot d\theta = \pi$$

Donc la raideur radiale a pour expression :  $\lambda \cdot R \cdot \sin^3\varphi \cdot \pi \cdot u$

- Etude de l'effet du déplacement axial (suivant l'axe z)

L'effet du déplacement parallèle à l'axe z de M a pour normale  $\vec{n} \begin{matrix} | \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ | \\ w \end{matrix}$  et s'écrit  $\cos\varphi \cdot w$ .

La projection h de ce point M suivant cet axe z s'écrit :  $\cos\varphi$

L'effort élémentaire dans la direction de la normale dû à ce déplacement vaut :

$$\lambda \cdot R \cdot \sin\varphi \cdot d\theta \cdot \cos\varphi \cdot w \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot R \cdot \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi \cdot w \cdot d\theta$$

Donc la raideur axiale a pour expression :  $\lambda \cdot R \cdot \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi \cdot 2\pi \cdot w$

- Egalité des raideurs dans toutes les directions

$$\lambda \cdot R \cdot \sin^3\varphi \cdot \pi = \lambda \cdot R \cdot \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi \cdot 2\pi \Rightarrow \sin^2\varphi = 2 \cdot \cos^2\varphi$$

Soit  $\tan\varphi = \sqrt{2}$ , donc  $\varphi = 54.7^\circ$

Les 2 méthodes de calcul utilisé donne donc le même résultat. L'angle optimal de posage d'une bille sur une couronne inclinée est de  $54.7^\circ$ .

### 2.3.3. Détermination des dimensions du cône de posage

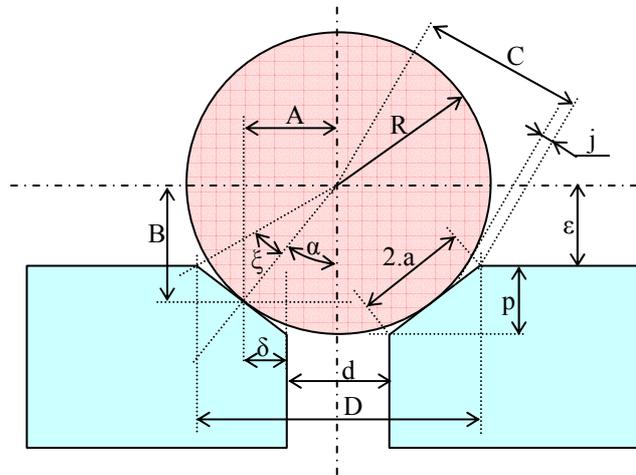


Figure 9 : Côtes principal pour le calcul de dimensionnement des inserts

#### 2.3.3.1. Calcul de la profondeur du chanfrein

R le rayon de la bille utilisé (10mm ou 15mm)

L'angle  $\alpha$  a été déterminé précédemment, ainsi nous avons :

$$\alpha = \text{ArcTan}(\sqrt{2}) \approx 54,7^\circ$$

Condition n°1 : Pour réaliser correctement les mesures, il faut pouvoir mesurer des points au niveau de l'équateur des billes, ce qui conditionne la côte  $\varepsilon$ . On choisit arbitrairement  $\varepsilon \geq 4\text{mm}$  pour permettre le passage d'un stylet muni d'une bille de  $\varnothing 5\text{mm}$  sans difficulté ni risque de collision

Condition n°2 : La largeur  $2.a$  de posage des billes telle que  $3\text{mm} \leq 2.a \leq 5\text{mm}$  pour permettre un appui suffisant pour la mise en position des billes sur leur logement.

Or  $\varepsilon = B - \frac{p}{2}$  avec  $B = R \cdot \cos(\alpha)$ , soit :

$$p = 2 \cdot (R \cdot \cos(\alpha) - \varepsilon) \text{ avec } \varepsilon \geq 4\text{mm (condition n°1) et R le rayon de la bille}$$

$$p = 2 \cdot a \cdot \sin(\alpha) \text{ soit : } 3\text{mm} \leq \frac{p}{\sin(\alpha)} \leq 5\text{mm (condition n°2)}$$

- Pour les billes de  $\varnothing 20\text{mm}$  :

Si  $\varepsilon_{\text{limite}} = 4\text{mm}$  alors  $p \approx 3,547\text{mm}$  et  $2.a \approx 4,344\text{mm}$

On choisit donc une profondeur de chanfrein de  $p = 3,5\text{mm}$

**Bilan :  $p = 3,5\text{mm}$ ,  $2.a = 4,287\text{mm}$ ,  $\varepsilon = 4,023\text{mm}$**

- Pour les billes de  $\varnothing 30\text{mm}$  :

Si  $\varepsilon_{\text{limite}} = 4\text{mm}$  alors  $p \approx 9,321\text{mm}$  et  $2.a \approx 11,415\text{mm}$ . La condition 2 n'est pas respectée, il faut diminuer la profondeur de chanfrein pour remplir la condition 2, la condition 1 sera forcément remplie.

Si on optimise la condition n°2, alors  $2.a = 4\text{mm}$ , soit  $p \approx 3,266$ .

On choisira une profondeur de chanfrein de  $3,5\text{mm}$ .

**Bilan :  $p = 3,5\text{mm}$ ,  $2.a = 4,287\text{mm}$ ,  $\varepsilon = 6,910\text{mm}$**

### 2.3.3.2. Calcul du jeu $j$ maximum entre la bille et le cône de posage (chanfrein)

$$j=C-R \text{ avec } C = \frac{R}{\cos\left(\text{ArcTan} \frac{a}{R}\right)}$$

A.N. :

Pour une bille de  $\varnothing 20\text{mm}$ ,  $j=0,227\text{mm}$

Pour une bille de  $\varnothing 30\text{mm}$ ,  $j=0,152\text{mm}$

### 2.3.3.3. Calcul des 2 diamètres principaux $d$ et $D$

$$d = 2.(A - \delta) \text{ et } D = 2.(A + \delta) \text{ avec } \delta = a.\cos(\alpha) \text{ et } A = R.\sin(\alpha)$$

- Pour une bille de  $\varnothing 20\text{mm}$ , les diamètres calculés sont  $d=13,855\text{mm}$  et  $D=18,805\text{mm}$   
=> le diamètre intérieur de perçage est donc de 14mm
- Pour une bille de  $\varnothing 30\text{mm}$ , les diamètres calculés sont  $d=22,020\text{mm}$  et  $D=26,970\text{mm}$   
=> le diamètre intérieur de perçage est donc de 22mm

## 2.4 Etude de l'hélice

Il est tout à fait envisageable de retirer les inserts de maintien des billes afin de disposer des cylindres étalons et ainsi d'étudier sur une centaine de millimètres l'effet de l'hélice [Figure 10].

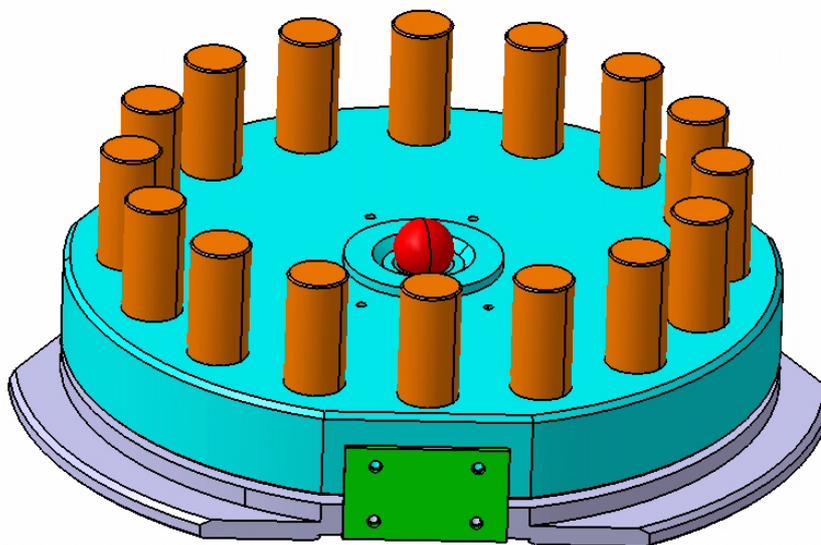


Figure 10 : Grand plateau pour les études de l'hélice

### 3 Conception du plateau 3D

#### 3.1 Montage 1

Pour réaliser l'étude 3D de la machine, nous avons opté pour l'utilisation des plateaux 2D pour limiter à la fois le nombre de pièces et le coût. L'assemblage du petit plateau sur le grand se fait par l'intermédiaire de lames flexibles pour limiter au maximum les déformations lors du montage [Figure 11]. Le cylindre rose sert de liaison entre les plateaux du bas et du haut. Lors des mesures du plateau du bas en vue de faire du 3D (plateau du haut et cylindre de liaison non assemblés), le montage sur lame flexible constitué des deux cylindres entourant la bille centrale reste en place et il est toujours possible de mesurer la bille centrale, sans souci d'accès.

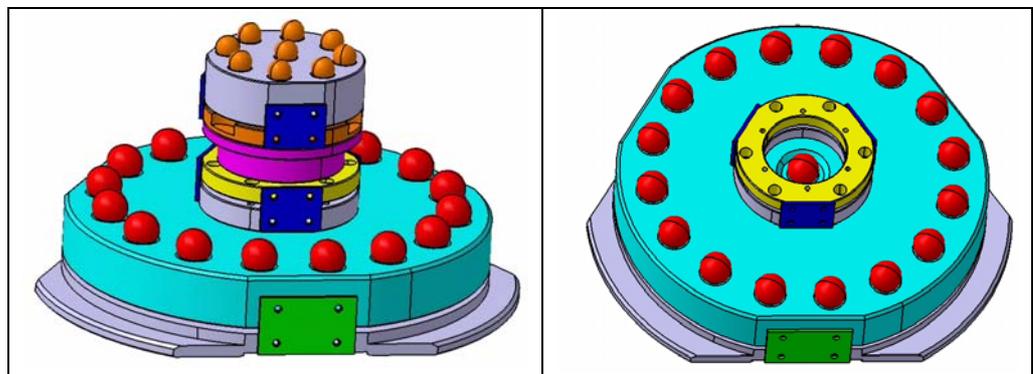


Figure 11 : Vue générale du montage 1 pour l'étude 3D

Avec ce montage, il est donc possible de simuler la mesure locale d'engrenages de type coniques droits (mesure de deux billes en vis-à-vis) ou coniques hélicoïdaux (mesure de deux billes décalées), c'est-à-dire évaluer l'effet d'hélice ou non [Figure 12]. En effet, si on étudie la distance entre les centres billes dans des plans contenant l'axe, les mesures sont effectuées sans effet d'hélice. Dans le cas contraire, l'effet d'hélice peut être évalué.

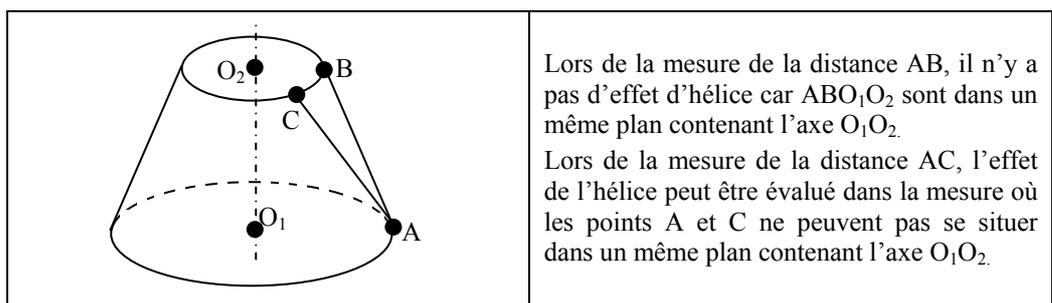


Figure 12 : Explication de l'étude de l'effet d'hélice

### 3.2 Montage 2

Il est également possible d'usiner une pièce supplémentaire surmontée d'une bille de référence pour évaluer un plus grand volume de la machine (augmentation de la hauteur en z) et d'étudier entre autre les deux autres perpendicularités [Figure 13].

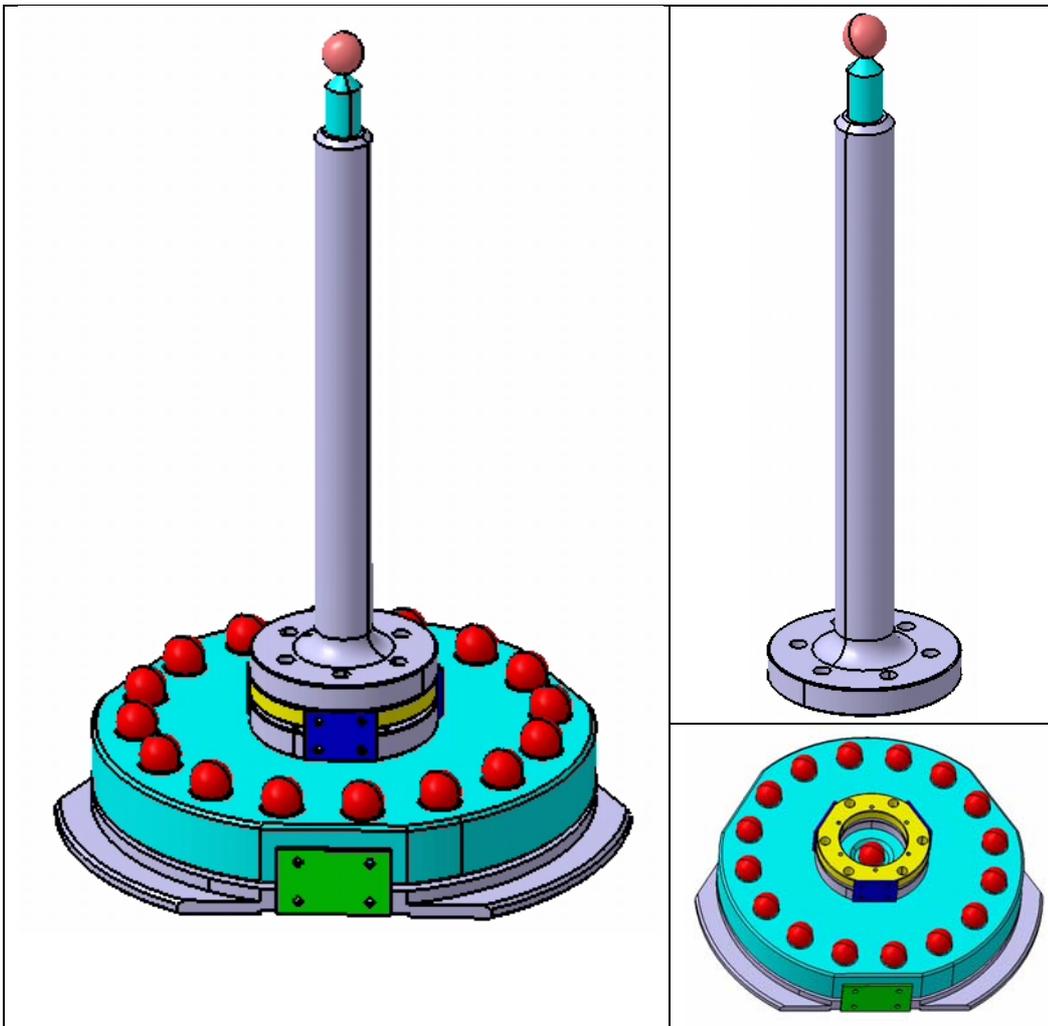


Figure 13 : Vue générale du montage 2 pour l'étude 3D

## 4 Stratégie de mesure du profil

### 4.1 Détermination des principaux points

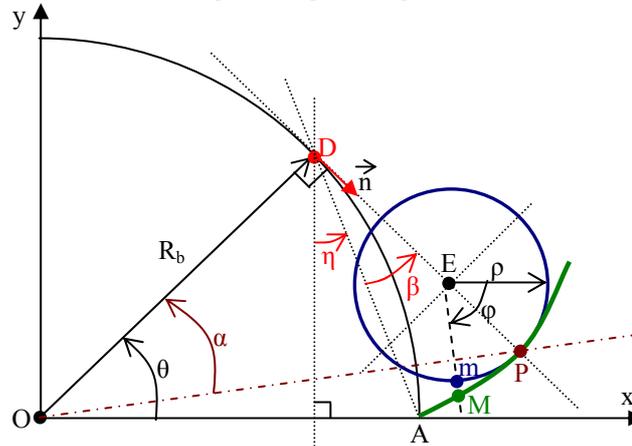


Figure 14 : Schéma de calcul de la différence entre la mesure d'une sphère et de l'engrenage

On note [Figure 14] :

- m le point courant sur le cercle de diamètre  $\rho$  pour l'angle  $\varphi$
- M le point courant sur la développante de cercle pour l'angle  $\varphi$
- P le point de contact entre le cercle et la développante de cercle. P est sur le cercle primitif
- $\theta_p$  l'angle  $\theta$  pour lequel les points M, m et P sont confondus

$$A \begin{vmatrix} R_b \\ \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

$$C \begin{vmatrix} R_b \cdot \cos \theta \\ R_b \cdot \sin \theta \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} \begin{vmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{vmatrix}$$

$$M \begin{vmatrix} R_b \cdot \cos \theta + R_b \cdot \theta \cdot \sin \theta \\ R_b \cdot \sin \theta - R_b \cdot \theta \cdot \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$m \begin{vmatrix} \rho \cdot \cos \varphi + X_E \\ \rho \cdot \sin \varphi + Y_E \end{vmatrix}, \varphi < 0$$

$$M=m=P \text{ pour } \theta=\theta_p=\tan \alpha \text{ soit } \varphi = -\left(\frac{\pi}{2} - \theta_p\right) \text{ et } \beta = \eta = \frac{\theta_p}{2}$$

$$E \begin{vmatrix} R_b \cdot \cos \theta_p + R_b \cdot \theta_p \cdot \sin \theta_p - \rho \cdot \sin \theta_p \\ R_b \cdot \sin \theta_p - R_b \cdot \theta_p \cdot \cos \theta_p + \rho \cdot \cos \theta_p \end{vmatrix}$$

## 4.2 Mesures des Ecart

Pour mesurer les écarts, deux philosophies sont possibles ; il est possible d'utiliser soit le module cercle, soit le module engrenage, c'est-à-dire placer les points théoriques sur un cercle ou sur une développante.

Le module cercle correspond à la mesure de la géométrie de notre étalon [Figure 15 - §4.2.1]. La mesure du point visé est sur un cercle (sur la bille de rayon  $\rho$ ). La normale est évidemment la normale à la bille par rapport au point visé. Il est possible de déduire les coordonnées du point M sur la développante de cercle.

Le module engrenage correspond à la programmation d'un engrenage alors que l'on mesure un cercle [Figure 16 - §4.2.2]. Les écarts mesurés représentent les écarts du cercle par rapport au profil en développante. Les points visés appartiennent donc à l'engrenage alors que le point mesuré appartient au cercle. La normale d'accostage n'est pas la normale au point réellement mesuré à cause du diamètre de la bille du palpeur.

### 4.2.1. Utilisation du module cercle

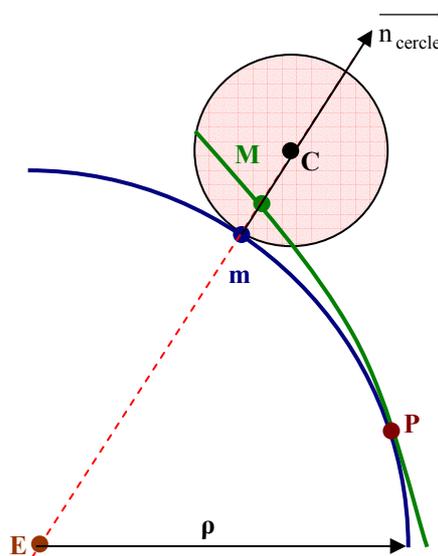


Figure 15 : Cas de la mesure du cercle

Pour  $\vec{n}_{bille} \begin{cases} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{cases}$ , la normale d'accostage de la bille,  $\vec{mM} = \varepsilon \cdot \vec{n}$

#### 4.2.2. Utilisation du module engrenage

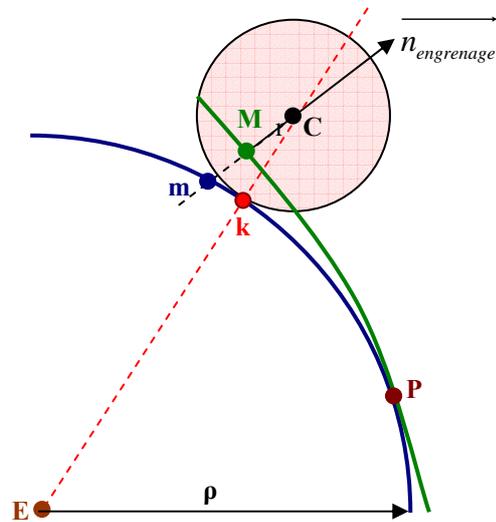


Figure 16 : Cas de la mesure de l'engrenage

On recherche  $\varepsilon$  l'écart dans la direction de la normale :

$$\begin{matrix} \overrightarrow{n_{engrenage}} \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{matrix}$$

$r$ =rayon de la bille du palpeur

$\rho$ =rayon de bille considérée

Si on note  $\overrightarrow{MC} = \lambda \cdot \overrightarrow{n_{engrenage}}$  alors  $\varepsilon = \lambda \cdot r$

Pour déterminer l'écart dans la direction de la normale, il faut donc calculer  $\lambda$

Calcul de  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MC} &\Rightarrow EC^2 = EM^2 + MC^2 + 2 \cdot \overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{MC} \\ &\Rightarrow (\rho + r)^2 = EM^2 + \lambda^2 + 2 \cdot \overrightarrow{EM} \cdot \lambda \cdot \overrightarrow{n_{engrenage}} \end{aligned}$$

Or les points E et M ont précédemment été déterminés, il est donc possible de résoudre l'équation ci-dessus. Il existe 2 solutions dont une est aberrante.

On peut ainsi déterminer la différence entre le profil de l'engrenage et la bille en fonction de l'angle [Figure 17]. Les angles limites sont déterminés par le diamètre de tête ( $d_a$ ) et le diamètre de pied ( $d_f$ ), avec :  $d_a = d + 2 \cdot m$  et  $d_f = d - 2,5 m$

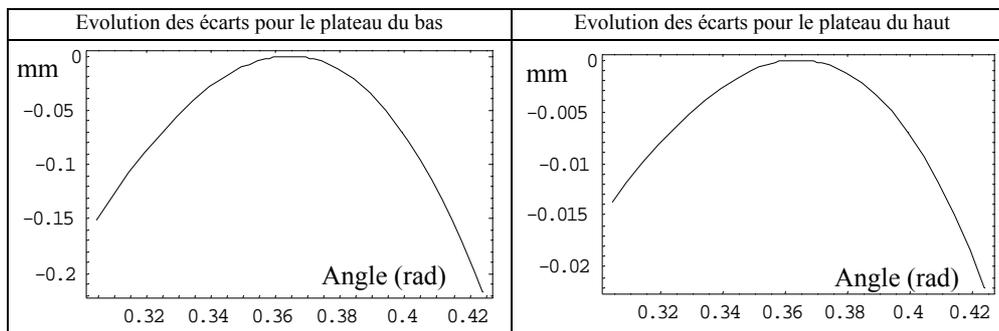


Figure 17 : Evolution de l'écart entre l'engrenage et la bille en fonction de l'angle

Dans l'environnement proche du primitif, les écarts entre l'engrenage et la bille sont faibles mais dès que l'on s'éloigne, les écarts augmentent rapidement. Si l'on souhaite approcher au plus près l'engrenage et étudier finement des écarts plus faibles, il est possible de positionner des billes sur un rayon optimisé.

### 4.3 Position optimale des billes de 20 mm

On recherche le rayon primitif optimum  $R_{\text{prim}}$  calculé pour des billes de diamètre 20mm tel que la courbure de la dent d'un engrenage équivalent corresponde à la courbure de la bille au niveau du rayon primitif.

$$R_{\text{prim}} = \frac{R_{\text{bille}}}{\tan \alpha}, \text{ soit } R_{\text{prim}} = 27,47 \text{ mm}$$

On choisit donc d'encadrer le résultat en considérant 2 cas d'engrenages :

$m=2$  et  $Z=27$  ou  $Z=28$

On recherche alors des coordonnées du point C du centre de la bille

$$\text{On a } 2.\psi = \frac{2\pi}{2.Z}, \text{ soit } \psi = \frac{\pi}{2.Z}$$

Or  $D=m.Z$ , soit  $Z=R$  car  $m=2$

$$\text{D'où } C \begin{cases} R.\cos \psi - \rho.\sin(\alpha + \psi) \\ R.\sin \psi + \rho.\cos(\alpha + \psi) \end{cases} \text{ est la position optimale du centre de la bille}$$

A.N. : Le centre C de positionnement optimum de la bille a pour coordonnées :

- {22,9935 ; 10,7521} pour l'équivalence d'un engrenage de 27mm de rayon primitif

- {24,0142 ; 10,7603} pour l'équivalence d'un engrenage de 28mm de rayon primitif

Il est possible de placer ces deux groupes de deux billes sur les conceptions proposées, c'est-à-dire entre les billes du petit plateau 2D du haut. Le paragraphe 4.4 présente la conception d'un plateau 2D limité au 2D sur lequel a été disposé les deux groupes de deux billes en position optimisée.

#### 4.4 Conception d'un plateau pour les études limitées au 2D

Pour des études 2D uniquement, il est possible si on le souhaite de ne réaliser qu'un seul plateau et de « projeter » le plateau du haut sur celui du bas [Figure 18]. On a ainsi la possibilité de tester le comportement de la machine et de la tête mesurante sur deux cercles de billes de rayons différents et de posséder les deux groupes de deux billes en position optimisée. Bien entendu ce plateau ne doit pas être réalisé seul pour éviter les déformations et doit être monté sur lame flexible comme les montages proposés tout au long de ce chapitre.

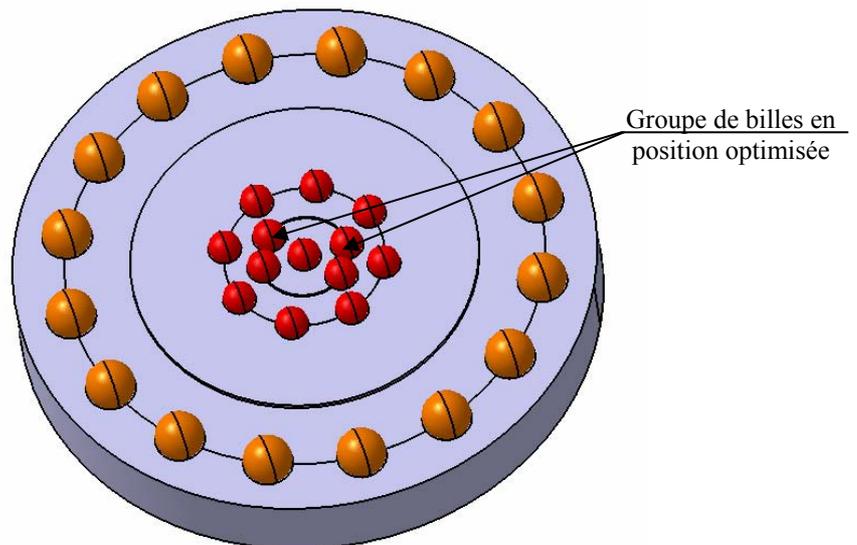


Figure 18 : Conception d'un plateau 2D avec la présence des deux groupes de billes de 20 mm en position optimisée

## 5 Conclusion

Cette conception a fait l'objet d'un dépôt d'enveloppe Soleau par le CETIM.

Un étalon de ce type se justifie à la fois en terme de calcul d'incertitudes et en terme de vérification périodique de la machine. La version plane en vue de l'accréditation COFRAC en cours avec le CETIM de Senlis sur le contrôle des mesurandes des engrenages cylindriques droits devrait bientôt être fabriquée. La version 3D permettra d'étendre les travaux à tous types d'engrenages. Ce type d'étalon a également un rôle intéressant à jouer pour l'évaluation d'un plateau pivotant.





# CHAPITRE X :

## Application en science des matériaux - Analyse de prothèses de hanches

---

### SOMMAIRE

1	Introduction .....	218
2	Présentation des explants et technique expérimentale .....	219
3	Méthode de mesure des explants .....	220
4	Résultats de mesure .....	222
5	Evaluation du taux de pénétration.....	223
6	Estimation de l'usure volumique .....	224
6.1	Estimation de l'endommagement volumique à partir des points mesurés.....	224
6.2	Simulation .....	225
6.3	Application de la méthode aux cupules explantées .....	226
6.4	Comparaison des méthodes analytiques et de la méthode sur MMT.....	227
7	Etude des explants métalliques .....	228
7.1	Généralités.....	228
7.2	Mesures d'explants et incertitudes de mesure .....	229
8	Conclusion.....	230

# Application en science des matériaux - Analyse de prothèses de hanches

## 1 Introduction

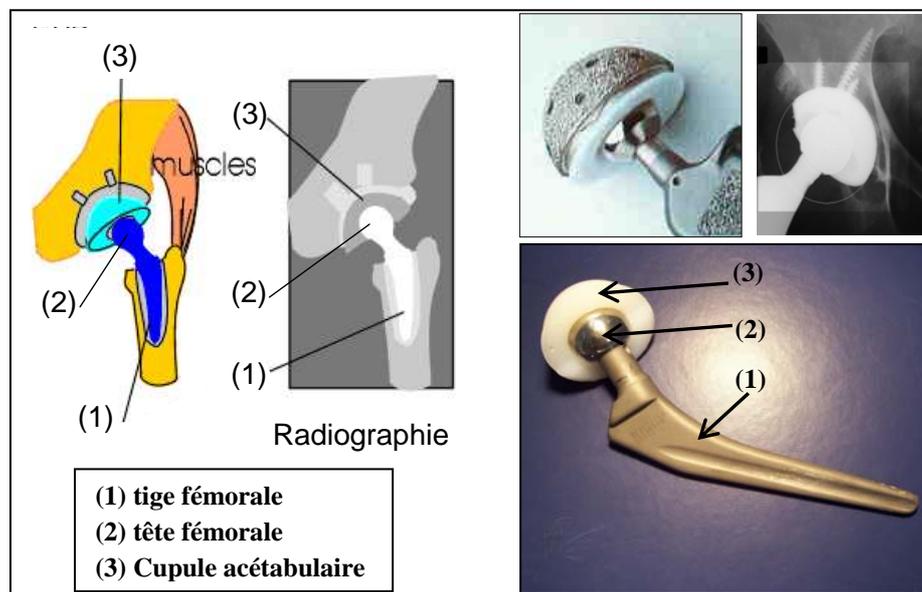


Figure 1 : Schéma et photos de prothèses totales de hanche (PTH)

Estimé actuellement à plus de 100000 par an, le nombre de prothèses totales de hanche (PTH) [Figure 1] posées en France est en constante progression en raison du succès lié à cet acte chirurgical [ANA2001]. Ainsi, l'implantation d'une PTH n'est plus liée à une population dont l'âge dépasse 70 ans mais se pratique aujourd'hui de façon courante sur des sujets de moins de 50 ans [ANA2001]. En pratique, bien que l'espérance de survie de ces dispositifs médicaux soit de 10 à 15 ans, des complications peuvent se produire avant ce terme et environ 8000 patients sont ainsi réopérés chaque année en France [TRE1999]. A l'exclusion des complications, comme l'infection ou la luxation, les échecs cliniques actuels sont en grande majorité attribués à des réactions biologiques ostéolytiques qui engendrent une dégradation locale des propriétés de l'os pouvant conduire à un descellement aseptique de la prothèse. La génération de débris d'usure par les surfaces frottantes des composants des PTH, en particulier celles relatives aux composants articulaires, est reconnue comme étant le principal facteur à l'origine du phénomène d'ostéolyse et de ses conséquences cliniques [BUD2004 – DUM2002 – GEE2000 – LAN1997 – NIE2000a – NIE2000b – SAN1998 – TIP2000 – WIL2005]. De plus, il est important de garder à l'esprit que le nombre de PTH posées sur des patients jeunes

ne cesse de croître. Or, pour cette catégorie de patients, le risque potentiel de révision est majoré dans la mesure où leur espérance de vie est plus longue et leur niveau d'activités potentiellement plus élevé. De plus, le vieillissement d'une population qui souhaite conserver une vie active ne fera qu'accentuer ce risque ainsi que la nécessité d'accroître continuellement les performances exigées et la durée de vie des composants des PTH. En résumé, le maintien de l'intégrité et l'amélioration du fonctionnement à long terme (Supérieur à 20 ans) de ces dispositifs médicaux passe nécessairement par une meilleure compréhension des mécanismes d'endommagement des composants des PTH.

L'objectif de l'étude présentée dans ce chapitre est de déterminer le taux de pénétration linéaire et d'estimer de façon précise le volume endommagé d'explants en polyéthylène ou en métal ; volume qui dépend à la fois de l'usure et du fluage dans le cas du polyéthylène. Une nouvelle méthode d'évaluation de ces deux quantités est proposée et comparée à deux autres couramment utilisées par les chirurgiens orthopédistes. Dans un premier temps, la pertinence de cette nouvelle méthode est évaluée à partir de l'analyse de fichiers de points simulant divers degrés d'endommagement d'implants ; degrés comparables à ceux mesurés cliniquement sur clichés radiographiques. Dans un second temps, des implants sont mesurés au moyen d'une Machine à Mesurer Tridimensionnelle (MMT) pour enregistrer des valeurs d'écarts par rapport à la géométrie théorique avant implantation. Ces mesures sont effectuées sur les surfaces externe et interne de chaque explant ; la surface externe servant de référence pour la construction du référentiel. Notre méthode est également appliquée pour estimer directement non seulement le taux de pénétration linéaire, mais aussi le volume endommagé sans recours à un modèle analytique.

Enfin, nous évoquerons les problématiques des explants en métal.

## 2 Présentation des explants et technique expérimentale

Les explants analysés pour valider les techniques de calcul sont en polyéthylène. Ces explants se répartissent en sept cupules à simple mobilité et dix cupules à double mobilité [Figure 2].



Figure 2 : Visualisation des deux types de cupules analysées

Pour la majorité de ces explants, nous ne disposons d'aucune information concernant leur géométrie initiale, néanmoins nous possédons des implants neufs avec leurs plans de

fabrication que nous utiliserons pour comparer les écarts géométriques par rapport aux tolérances de fabrication.

Les mesures ont été effectuées sur une Machine à Mesurer Tridimensionnelle TRI-MESURES type MC 15.07.06. Le logiciel de mesure utilisé est METROLOG XG V4.002. La température de la salle est réglée à une consigne de  $20 \pm 0.1^\circ\text{C}$ . La programmation des points de mesures et le traitement des données ont été effectués à l'aide du logiciel MATHEMATICA 5.2. Un exemple de visualisation de points théoriques programmés et du repère utilisé dans le cas d'un explant à double mobilité est illustré en **Figure 3**.

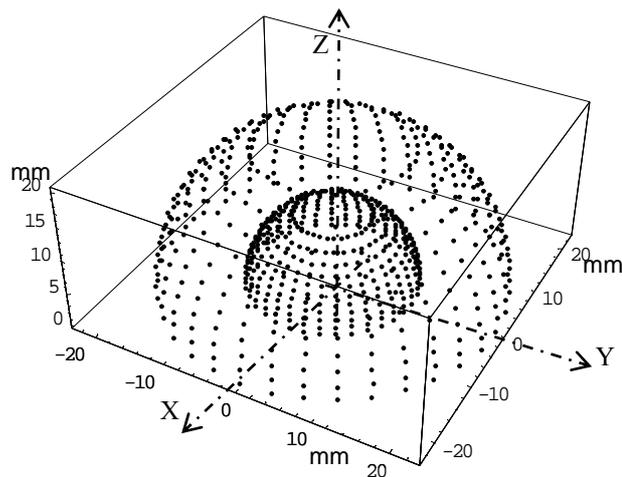


Figure 3 : Présentation des points mesurés et du repère utilisé

### 3 Méthode de mesure des explants

Pour effectuer les mesures sans risquer de déformer la cupule tout en garantissant une bonne mise en position sur la machine, nous avons choisi de coller la cupule sur une couronne en acier à l'aide de ciment orthopédique. Cette mise en position du montage sur la machine à mesurer permet de respecter au mieux la rigidité et la chaîne métrologique [**Figure 4**].

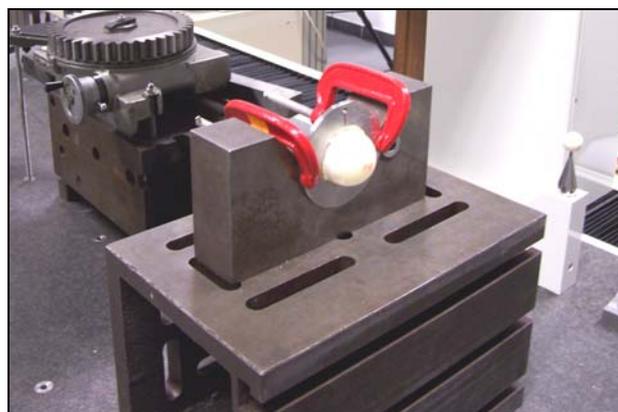


Figure 4 : Présentation de la mise en position d'un explant sur la Machine à Mesurer Tridimensionnelle

On suppose que la surface externe de l'explant ne subit aucun endommagement significatif par rapport à sa géométrie macroscopique initiale et aux tolérances de fabrication. Cette hypothèse a effectivement été vérifiée pour les six explants pour lesquels nous disposons des plans de fabrication.

Le repère pièce créé consiste à mesurer :

- la surface externe de l'explant afin de déterminer le centre du repère,
- la face d'appui de la cupule, en mesurant le plan de la couronne qui permet de déterminer la normale principale,
- un point arbitraire sur le pourtour de la cupule pour déterminer un deuxième axe et ainsi bloquer le repère en rotation.

Le troisième axe du repère est construit de telle sorte que le repère soit direct

Les surfaces externe et interne de l'explant, ont été mesurées pour chacun des points ( $X_{\text{mesuré}}$ ,  $Y_{\text{mesuré}}$ ,  $Z_{\text{mesuré}}$ ) en accostage dans la direction des normales ( $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ ) [Figure 5]. Les écarts dans la direction des normales sont exprimés et analysés par rapport aux points théoriques ( $X_{\text{théorique}}$ ,  $Y_{\text{théorique}}$ ,  $Z_{\text{théorique}}$ ) [figure I]. Ces écarts  $\varepsilon$  dans la direction de la normale s'écrivent :

$$\varepsilon = (X_{\text{mesuré}} - X_{\text{théorique}})n_x + (Y_{\text{mesuré}} - Y_{\text{théorique}})n_y + (Z_{\text{mesuré}} - Z_{\text{théorique}})n_z$$

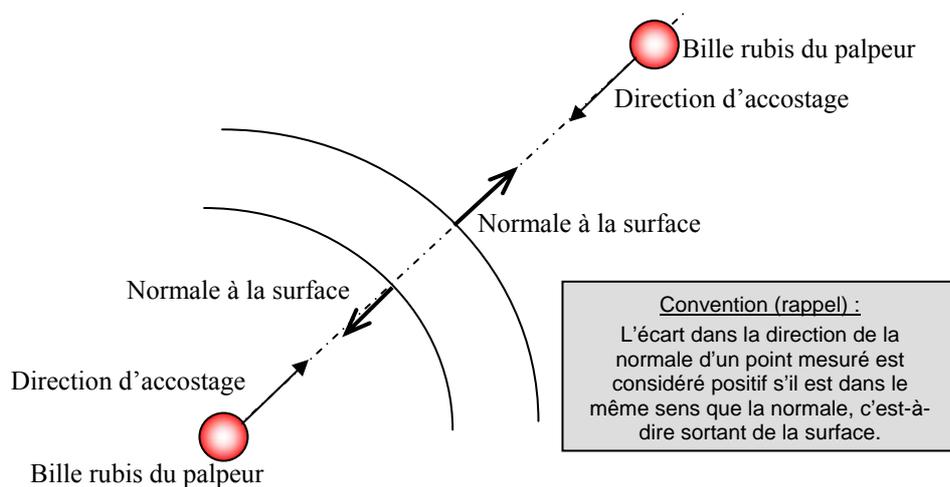


Figure 5 : Schéma explicatif du palpement dans la direction des normales et du signe des écarts

L'ensemble des mesures est effectué en une seule gamme programmée ; elle-même divisée en sous gammes. La répétabilité et la reproductibilité ont été évaluées en mesurant plusieurs fois un implant neuf lors de la mise au point du protocole expérimental. L'incertitude en reproductibilité sur les valeurs indiquées est estimée à une vingtaine de micromètres. Celle-ci est essentiellement due à la position angulaire de l'explant qui ne permet pas de palper exactement les mêmes points lors d'une remise en position complète sur le dispositif de mesure. Sans réorientation de l'explant, cette répétabilité pour une même position est bien entendu de quelques micromètres et due aux défauts du système de palpement.

Des cercles de 36 points régulièrement répartis dans chaque plan XY (un point tous les degrés) ont été mesurés sur les surfaces interne et externe. Ces divers plans sont espacés de un millimètre selon l'axe Z pour la surface interne.

## 4 Résultats de mesure

Un algorithme de calcul aux moindres carrés a été utilisé pour positionner la surface externe. Cet algorithme de calcul prend en compte à la fois l'effet de la position, c'est-à-dire les décalages de la surface mesurée par rapport à la surface théorique selon les axes X, Y et Z, mais aussi l'effet d'homothétie. La méthode du calage des sphères aux moindres carrés est retenue, car elle fournit une valeur stable et exempte de biais statistique systématique dans la mesure où les incertitudes ne sont pas corrélées. La surface interne est toujours de géométrie sphérique. Le défaut de forme de cette sphère est alors la distance (au sens variation de rayon) de deux sphères concentriques entre elles et concentriques à la sphère de référence contenant la totalité des points mesurés déterminée aux moindres carrés. A partir de l'optimisation des surfaces aux moindres carrés, il est possible de donner une information sur le décalage entre les centres des surfaces interne et externe. Le dernier peut se décomposer en un décalage radial et un décalage axial.

Il est également possible d'effectuer une visualisation de l'endommagement de l'intérieur de la cupule, en effectuant une représentation 3D des écarts réels dans la direction des normales après un recalage aux moindres carrés du repère sur le centre de la sphère externe [Figure 6] Sur cette représentation, un code couleur a été utilisé pour visualiser aisément la zone endommagée, tout en donnant un ordre de grandeur des écarts relevés par rapport à la géométrie initiale (sphère intérieure théorique).

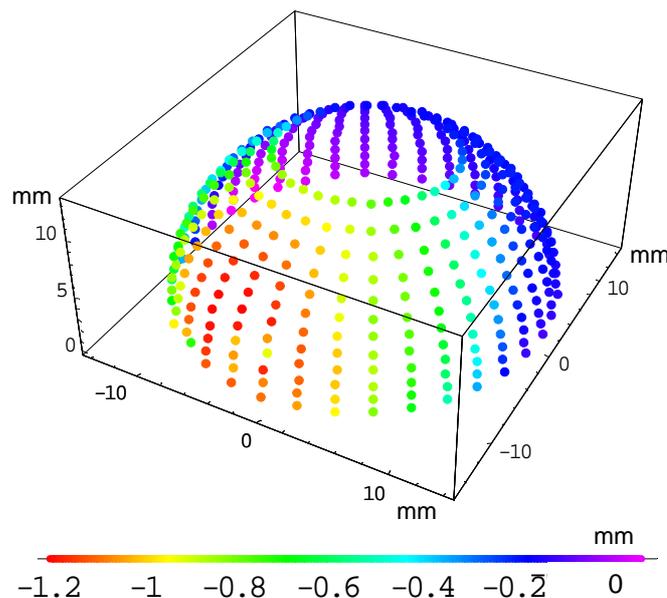


Figure 6 : Visualisation 3D de l'endommagement de la sphère intérieure, des écarts réels dans la direction des normales, après recentrage du repère sur le centre de la sphère extérieure recalée aux moindres carrés

## 5 Evaluation du taux de pénétration

Le taux de pénétration maximum est la distance du point mesuré le plus éloigné de la surface théorique de référence centrée sur la sphère extérieure, divisée par le nombre d'années de fonctionnement de la prothèse.

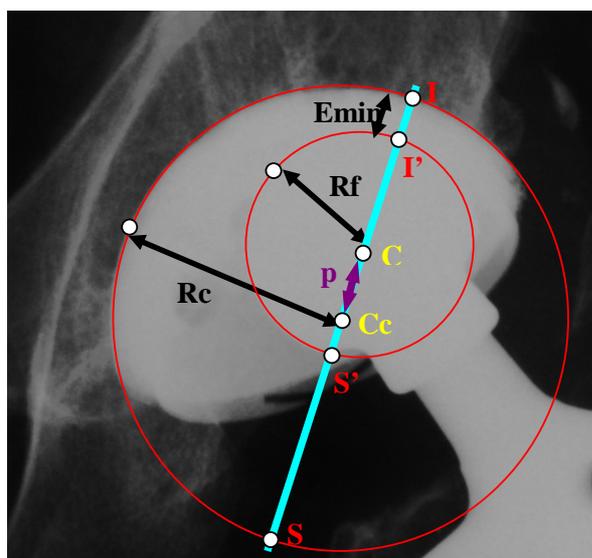


Figure 7 : Mesure de la profondeur de pénétration sur cliché radiographique

Les chirurgiens effectuent directement les mesures de la profondeur de pénétration  $p$  sur des clichés radiographiques selon différentes méthodes telles que celle de Charnley et Cupic ou celle de Dorr [BAR2001 – HAL1998a – HAL1998b]. Charnley et Cupic considèrent le rayon externe du cotyle métallique  $Rc$ , le rayon de la tête fémorale  $Rf$ , et la distance  $Emin$  [Figure 7]. La profondeur de pénétration  $p$  est alors calculée en utilisant l'équation (1). Pour la méthode de Dorr, les longueurs  $d(S, S')$  et  $d(I, I')$  sont mesurées [Figure 7] et la profondeur de pénétration  $p$  est calculée à l'aide de l'équation (2).

$$p = Rc - (Rf + Emin) \quad (1)$$

$$p = \frac{d(S, S') - d(I, I')}{2} \quad (2)$$

Notre méthode de mesure de la profondeur de pénétration, à partir de l'exploitation des fichiers de mesures issus de la Machine à Mesurer Tridimensionnelle, fournit des résultats comparables aux méthodes utilisées par les chirurgiens [Figure 8].

La Figure 8 montre qu'il est possible d'identifier une relation linéaire, avec une pente voisine de 1, entre la profondeur de pénétration déterminée par notre méthode de mesure et celles déterminées par les chirurgiens selon les méthodes de Charnley et Cupic ou celle de Dorr.

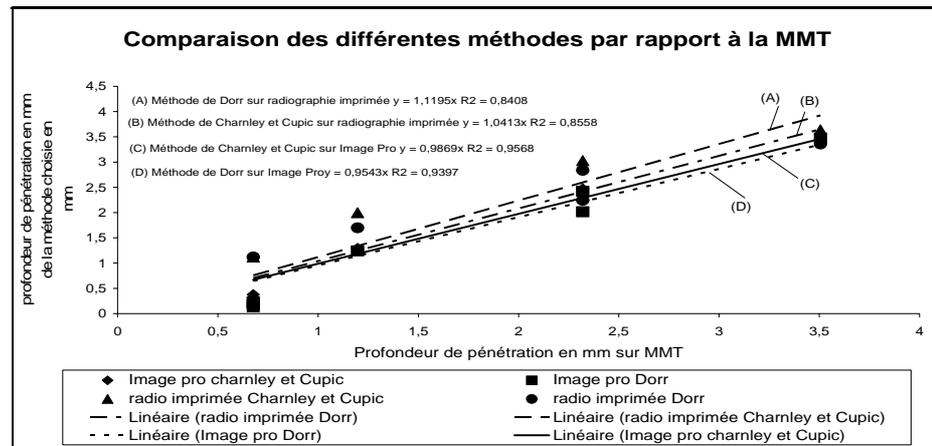


Figure 8 : Comparaison de notre méthode de mesure du taux de pénétration par rapport aux méthodes de Charnley et Cupic ou de Dorr

## 6 Estimation de l'usure volumique

Quelle que soit la méthode utilisée par les chirurgiens, la principale limite réside dans le fait que la mesure de profondeur de pénétration n'est pas autosuffisante pour estimer le volume endommagé ( $V_e$ ) qui lui est associé. Pour estimer ce dernier, ceux-ci utilisent un modèle analytique nécessitant des hypothèses sur la forme du volume endommagé.

La méthode la plus couramment utilisée, appelée méthode A (3), consiste à calculer le volume d'usure à partir de la connaissance de la profondeur de pénétration  $p$  et le rayon de la tête fémorale  $R_f$  [BAR2001 – HAL1998a – HAL1998b].:

$$V_{LA} = \Pi \times R_f^2 \times p \quad (3)$$

Une variante de cette méthode, appelée méthode B (4), intègre la valeur du jeu fonctionnel ( $R_i - R_f$ ) entre la tête fémorale et l'insert en polyéthylène [BAR2001 – HAL1998a – HAL1998b] :

$$V_{LB} = \frac{\Pi \times R_f^2 \times p}{1 + \frac{(R_i - R_f)}{p}} \quad (4)$$

Ce sont des valeurs que nous allons comparer à celles obtenues à partir des mesures sur MMT.

### 6.1 Estimation de l'endommagement volumique à partir des points mesurés

L'estimation du volume endommagé ( $V_e$ ) de la surface interne de la cupule est basée sur l'exploitation des écarts mesurés dans la direction de la normale.

- Si  $S_{(j,k)}$  est l'élément de surface délimité par les points  $k$  et  $k+1$  du  $j^{\text{ème}}$  cercle et les points  $k$  et  $k+1$  du  $j+1^{\text{ème}}$  cercle de la demi sphère théorique interne de la cupule,
- Si  $E_{(C,P_t)}$  est l'écart dans la direction de la normale mesuré sur le cercle  $C$  au point  $P_t$ ,
- Si  $Es_{(j,k)}$  est défini comme l'écart moyen dans la direction de la normale associé à cet élément de surface  $S_{(j,k)}$

Alors:

$$Es_{(j,k)} = \frac{E_{(j,k)} + E_{(j,k+1)} + E_{(j+1,k)} + E_{(j+1,k+1)}}{4} \quad (5)$$

Le volume usé  $Vol_{(j,k)}$  associé à cette surface est obtenu en l'assimilant à celui d'une portion sphérique d'épaisseur  $Es$ .

$$Vol_{(j,k)} = \int_{R_{int}}^{R_{int} + Es_{(j,k)}} \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \Delta\theta} \int_{\phi_k}^{\phi_k + 1} r^2 dr d\theta \cos(\varphi) d\varphi \quad (6)$$

$$Vol_{(j,k)} = \frac{\Delta\theta}{3} \frac{(R_{int} - dec)}{nbreCercleInt \cdot R_{int}} ((R_{int} - Es_{(j,k)})^3 - R_{int}^3) \quad (7)$$

$$\text{où} \quad \Delta\theta = \frac{2\pi}{nptCercle} \quad (8)$$

$nptCercle$  : le nombre de points par cercle

$R_{int}$  : le rayon du cercle interne

$nbreCercleInt$  : le nombre de cercles internes

$dec$  : le décalage par rapport au centre théorique du premier cercle mesuré

Il est alors possible de définir le volume endommagé calculé selon la formule :

$$Volume_{calculé} = \sum_{j=1}^{nbreCercleInt} \sum_{k=1}^{nptCercle} Vol_{(j,k)} \quad (9)$$

Nous avons également comparé par simulation notre méthode de détermination du volume d'usure par portion sphérique avec la méthode discrète classique utilisée par les logiciels de maillage du commerce (volume d'éléments de formes tétraédriques) et le calcul réel par la forme intégrale. Notre méthode fournit les résultats les plus proches du calcul réel.

## 6.2 Simulation

Les points théoriques simulés sont situés sur une demi-sphère de rayon  $R_{int}$ , et les points de mesure simulés sont situés sur un demi-ellipsoïde d'équation :

$$\frac{X^2}{(R_{int} + G)^2} + \frac{Y^2}{(R_{int} + B)^2} + \frac{Z^2}{(R_{int} + A)^2} = 1 \quad (10)$$

Un décalage entre le centre de la sphère théorique et le centre de symétrie de l'ellipsoïde a également été testé. Notre programme calcule alors le volume ( $V_{calculé}$ ) par la méthode définie précédemment en considérant les écarts dans la direction de la normale comme la différence entre ceux théoriques simulés et ceux de mesure simulés. Une comparaison entre le volume engendré par le demi-ellipsoïde ( $V_{ellipsoïde} = \frac{2}{3} \times \pi \times A \times B \times G$  (11)) et celui de la demi-sphère

théorique ( $V_{sphère} = \frac{2}{3} \times \pi \times R_{int}^3$  (12)) permet de vérifier notre estimation du volume

endommagé calculé ( $V_{calculé}$ ) par rapport à l'endommagement théorique programmé  $V_{réel}$  :

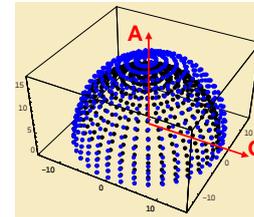
$$V_{réel} = V_{ellipsoïde} - V_{sphère} \quad (13)$$

On définit enfin le pourcentage d'erreur  $\%_{erreur} = \frac{V_{calculé} - V_{réel}}{V_{réel}} \times 100$  (14)

Le **Tableau 1** donne la valeur du pourcentage d'erreur en fonction de différentes valeurs des paramètres  $G$  et  $A$  qui simulent respectivement une pénétration linéaire purement axiale suivant  $Z$  et purement radiale suivant  $XY$ . Le paramètre  $B$  n'est pas considéré dans la mesure où il a les mêmes effets que le paramètre  $G$ .

	A	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
G												
0		0,00	0,28	0,19	0,16	0,17	0,21	0,28	0,36	0,45	0,53	0,52
0,5		0,15	3,50	2,49	1,58	1,11	0,85	0,69	0,57	0,50	0,56	0,69
1		0,25	2,07	3,26	2,92	2,34	1,87	1,53	1,27	1,11	0,99	0,92
1,5		0,27	0,92	2,50	3,02	2,87	2,55	2,20	1,91	1,69	1,49	1,36
2		0,24	0,35	1,62	2,48	2,77	2,73	2,55	2,32	2,10	1,89	1,74
2,5		0,14	0,04	0,92	1,83	2,35	2,56	2,58	2,46	2,31	2,14	1,99
3		0,02	0,10	0,47	1,21	1,80	2,19	2,37	2,38	2,35	2,24	2,12
3,5		0,17	0,16	0,17	0,76	1,30	1,77	2,02	2,17	2,21	2,20	2,13
4		0,26	0,20	0,01	0,40	0,89	1,34	1,64	1,87	1,99	2,04	2,02
4,5		0,28	0,21	0,10	0,15	0,53	0,94	1,28	1,54	1,71	1,82	1,87
5		0,22	0,22	0,15	0,00	0,28	0,62	0,93	1,19	1,41	1,56	1,66

	% erreur < 1%
	1% < % erreur < 2%
	2% < % erreur < 3%
	3% < % erreur < 4%



*Tableau 1: Evolution du pourcentage d'erreur sur la valeur de l'usure volumique en fonction du type d'usure. Le paramètre G représente une pénétration radiale en mm dans le plan XY et le paramètre A une pénétration axiale en mm suivant l'axe Z*

Dans le **Tableau 1**, les zones sont représentées par niveau de gris en fonction du pourcentage d'erreur. Ainsi selon le type de pénétration imposée, il est possible de connaître l'erreur commise sur le calcul du volume endommagé estimé par notre méthode. Cette erreur est due au nombre, à la répartition des points et à l'hypothèse de construction des éléments de volume. Toutefois, pour des valeurs de pénétration inférieures à 3 mm radialement ou axialement, l'erreur commise reste inférieure à 2,5%. Sachant qu'en pratique, une pénétration supérieure à 2 mm est jugée critique et entraîne un retrait systématique de l'implant par les chirurgiens, notre méthode fournit donc une très bonne approximation du volume endommagé.

### 6.3 Application de la méthode aux cupules explantées

La **Figure 9** qui présente l'évolution de l'usure volumique calculée par la méthode d'analyse des écarts sur MMT par rapport à la profondeur de pénétration linéaire mesurée, montre clairement l'existence d'une relation quasiment linéaire. La pente de cette droite est de 0,4 avec un coefficient de corrélation de 0,95. Nous vérifions ici expérimentalement le bien fondé de l'utilisation d'une relation analytique pour passer de la mesure du taux de pénétration à un volume endommagé, ce qui permet de valider l'utilisation d'une relation analytique. Ce point a également été vérifié par simulation.

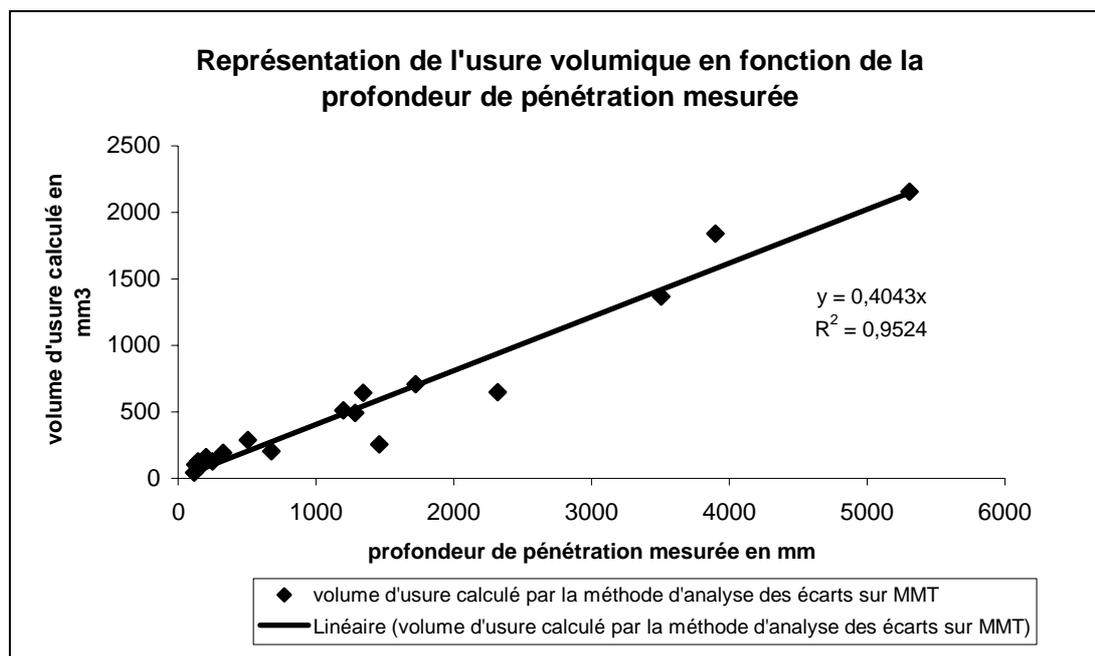


Figure 9 : Représentation de l'usure volumique calculée par l'analyse des écarts sur MMT en fonction de la mesure de la profondeur de pénétration pour 18 cupules

## 6.4 Comparaison des méthodes analytiques et de la méthode sur MMT

La Figure 10 représente schématiquement les méthodes cliniques et notre méthode pour déterminer le taux de pénétration et le volume d'usure d'explants.

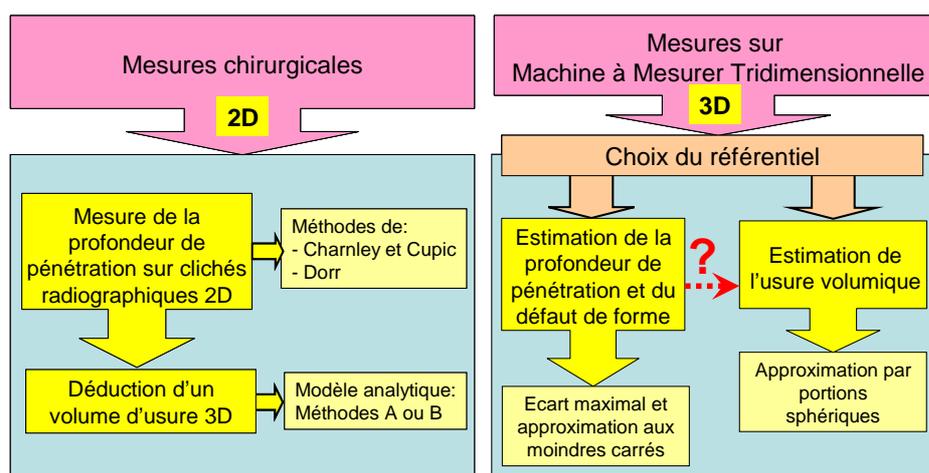


Figure 10 : Schématisation des méthodes cliniques et de notre méthode pour déterminer le taux de pénétration et le volume d'usure des explants

Les résultats des méthodes A et B utilisant un modèle analytique sont comparés à notre estimation de volume endommagé [Figure 11].

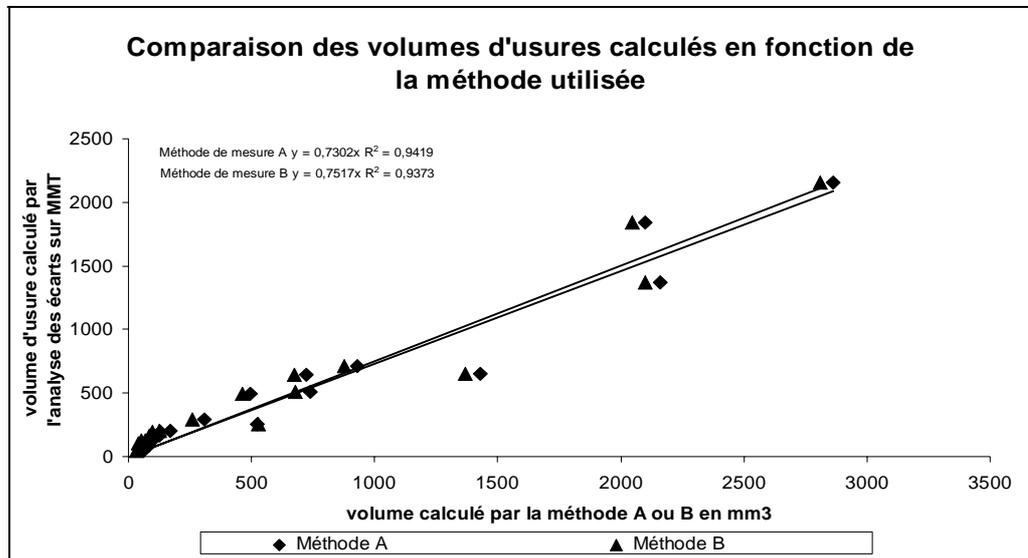


Figure 11 : Comparaison du volume calculé par notre méthode et les méthodes analytiques A et B

Les méthodes analytiques A et B fournissent des résultats très similaires. De plus, il existe une relation linéaire entre l'estimation du volume endommagé résultant de ces méthodes et celle issue de la notre, dont la pente est proche de 0,7 avec un coefficient de corrélation aux alentours de 0,94. Ceci montre que les méthodes habituellement utilisées par les praticiens ont tendance à surestimer le volume d'usure calculé. Le modèle analytique pourrait ainsi être modifié pour tenir compte de ces résultats. Néanmoins, il faut bien remarquer que les mesures ont été réalisées à 20°C alors que le corps humain est proche de 37°C.

## 7 Etude des explants métalliques

### 7.1 Généralités

L'utilisation du couple métal-métal offre des possibilités de grands diamètres permettant d'augmenter la stabilité intrinsèque de l'articulation prothétique ainsi que son débattement et doit permettre, par une géométrie optimale, de limiter au maximum les effets de luxation.

Il a été démontré que le tissu aux alentours de la prothèse ne pouvait pas supporter un important volume de débris en polyéthylène, et qu'un plus petit volume d'usure, même venant de l'alliage utilisé pour le couple métal/métal (CoCrMo) pouvait être toléré.

Des résultats relativement récents sur simulateurs de hanche particulièrement encourageants, montrent une usure mineure pour le couple métal-métal. Certes, les métalloses ont quasiment disparu (sauf en cas de conflit du col avec le rebord de la cupule), et il n'a pas été observé d'ostéolyse importante. En effet, les particules métalliques produites sont de petites tailles, inférieures à 0,3 µm, et ne sont pas susceptibles d'activation du processus immunologique. La petite taille de ces particules favorise leur passage dans le courant sanguin. Il ne semble pas y avoir de risques hématopoïétiques ni de toxicité mise en évidence. On constate cependant qu'il existe des débris métalliques dans les tissus péri prothétiques lorsque ces prothèses sont reprises, alors même qu'il n'y a pas de réaction ostéolytique ou inflammatoire.

Il a été prouvé expérimentalement qu'il existe un facteur de 1 à 10 entre l'usure d'un couple métal-métal et celle d'un couple tête céramique-cotyle PE, et de 20 entre un couple métal-métal et un couple tête métal-cotyle PE. Le **Tableau 2** montre les valeurs d'usure linéaire typiques de différents couples de matériaux de prothèses de hanche réopérées. Nous pouvons ainsi remarquer que les couples durs montrent sensiblement moins d'usure que les couples dur/mou [JIN2006].

Cotyle	Tête fémorale	Usure linéaire en mm / an
CoCrMo	CoCrMo	0.003-0.01 (CoCrMo)
Polyéthylène	Acier	0.1-0.3 (polyéthylène)
Polyéthylène	CoCrMo	0.1-0.3 (polyéthylène)
Polyéthylène	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.05-0.1 (polyéthylène)
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.003-0.01 (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )

Tableau 2: Usure linéaire en fonction du couple

Il a été prouvé qu'à long terme, sur des prothèses qui ont été explantés après 25 ans, la tête fémorale et la cupule s'usent en moyenne de 6  $\mu\text{m}$  par an en pénétration linéaire et produit une usure volumique d'environ 6  $\text{mm}^3$  par an. Est également à souligner les capacités d'autopolissage de la combinaison métal-métal.

## 7.2 Mesures d'explants et incertitudes de mesure

Les résultats de mesures sur les couples Métal/Métal ne seront pas exposés dans la mesure où l'étude, confidentielle pour une durée de cinq ans, a été réalisée pour les industriels SEM (Science Et Médecine) et B&JR France (Bone and Joint Research France). Néanmoins, les concepts de base sont présentés ci-après.

Dans la mesure où les taux d'usure sont relativement faibles pour ce type d'explants, nous avons dû effectuer un travail important sur les mesures. Les programmes de calcul de volume d'usure mis en place pour les couples métal/polyéthylène restent identiques et tout à fait applicables mais, il nous faut réduire au maximum les incertitudes de mesures.

Les prothèses étant des pièces de petites dimensions, on peut considérer que les défauts de la géométrie de la machine sont négligeables.

Les temps de mesure sont relativement courts pour ce type de pièce ce qui nous permet de ne pas avoir de problèmes de variations de température.

Les explants ne sont pas bridés mais collés sur un support pour éviter les déformations dues à la mise et au maintien en position.

La mesure est effectuée en mono palpeur pour limiter au maximum les erreurs sur la prise du référentiel. De ce fait, la surface extérieure n'est pas mesurée, le référentiel est réalisé conformément aux considérations techniques du constructeur, et est basé sur la mesure du plan de la collerette et d'un cercle extérieur de la cupule. Cette prise de référentiel est répétable et reproductible sans trop de problèmes pour ce type de prothèses.

Les incertitudes restantes étant celles du système de palpation, il convient d'optimiser au maximum les mesures en choisissant des stylets les plus courts possibles afin de limiter les flexions. De plus, il convient de positionner la cupule dans l'environnement proche de la sphère de référence, de préférence à la même hauteur, pour éviter les effets de rotation du coulisseau de la machine à mesurer (limiter zRz).

Les mesures ont été réalisées avec un palpeur dynamique de type TP2 de Renishaw et sont corrigées en utilisant les techniques présentées au **Chapitre IV** en faisant attention aux sens

des normales (la cupule est une sphère mesurée en concavité, c'est-à-dire le « négatif » de la sphère). Dans ce chapitre, nous avons exposé la méthode permettant de compenser les erreurs systématiques du système de palpation. Une vérification du bien fondé de la correction a été effectuée par simulation et en utilisant la technique de permutation, exposée au **chapitre VI**, appliquée aux mesures d'engrenages.

## 8 Conclusion

Cette étude présente une nouvelle méthode d'évaluation du taux de pénétration linéaire et du volume d'usure d'explants en polyéthylène, à partir du traitement de données issues d'un palpation sur Machine à Mesurer Tridimensionnelle.

Le taux de pénétration linéaire obtenu par notre méthode est en accord avec les mesures effectuées sur des clichés radiographiques. Le principal avantage de notre méthode est de fournir la valeur d'un volume endommagé (usure et fluage) sans recourir à un quelconque modèle analytique. Néanmoins, nous avons également vérifié par simulation la linéarité entre le taux de pénétration et le volume d'usure, ce qui permet d'affiner la relation analytique des chirurgiens pour leur calcul du volume d'usure en fonction du taux de pénétration mesuré directement sur les clichés radiographiques.

La correction des défauts du système de palpation nous permet de diminuer grandement les incertitudes de mesure et ainsi nous permet de mesurer correctement non seulement des explants en polyéthylène mais aussi des explants métalliques.





# Conclusion

Les travaux menés s'inscrivent dans une logique d'accréditation. Pour sa partie purement scientifique et technique, le dossier comprend les éléments suivants :

- Une description des méthodes de mesure mises en œuvre conformément à la norme ISO 10064-1. Cela comprend en particulier une définition des mesurandes compatibles avec les incertitudes recherchées.
- Une validation de la méthode de mesure, c'est-à-dire de l'ensemble des opérations depuis l'acquisition des points de mesure jusqu'au calcul des mesurandes. Il s'agit en particulier de démontrer l'absence d'incertitude de méthode (cela ne pose pas de problème particulier puisque le CETIM utilise une méthode de mesure normalisée qui fait l'objet du rapport technique ISO/TR 10064-1).
- Une validation des logiciels de calcul utilisés (logiciel de la machine à mesurer QUINDOS option GEAR et l'ensemble de nos procédures).
- L'assurance du raccordement aux unités SI.
- l'évaluation des incertitudes de mesure, en particulier, un bilan des principales sources d'incertitudes et un descriptif de la méthode d'estimation mise en œuvre.
- l'assurance de la qualité des résultats, sous la forme de résultats de comparaisons interlaboratoires.

Nous avons effectué le raccordement aux unités SI par l'intermédiaire de la cale à créneaux raccordée par le LNE et validé nos procédures pour la partie géométrie de la machine par des tests en boîte noire en générant les données grâce à des programmes indépendants développés par une personne différente de l'auteur. La validation du logiciel QUINDOS a été réalisée par Thierry COOREVITS dans le cadre d'un rapport interne au CETIM non publié.

Nous avons établi un bilan des causes d'incertitudes dont nous savons qu'il doit être affiné en particulier dans le domaine de la température et des prises de référence sur la pièce. La propagation est réalisée par une méthode de Monte Carlo qui est programmée pour la partie géométrie de la machine et pour l'effet de la géométrie sur la pièce. Le calcul des mesurandes est en cours.

L'ensemble de notre travail a été réalisé en cherchant à recouper les résultats aussi souvent que possible, à créer de la redondance analysée au sens des moindres carrés pour diminuer les incertitudes, à éliminer l'influence de causes d'incertitudes à chaque fois que cela est possible en utilisant ce que l'Abbé Cayère appelait la métrologie intellectuelle c'est-à-dire les retournements et les permutations pour obtenir des résultats de qualité sachant que quelques micromètres d'amplitude représentent une forte variation sur la machine sur laquelle nous travaillons.

Un point clé pour la suite de nos travaux tient à l'assurance de la qualité. Nous avons proposé l'idée d'un triangle de vérification avec trois méthodes largement indépendantes (l'étude analytique, la comparaison et la permutation). L'étude analytique et la permutation ont été comparées en particulier sur notre machine à mesurer. La réalisation complète de notre programme triangulaire sera possible dès que la comparaison interlaboratoires organisée par le CETIM avec les laboratoires PTB, NPL et NIST) sera achevée. Cette campagne nécessitera un important travail de synthèse qui permettra une validation des méthodes proposées.

# Perspectives

---

Nous venons de mener une nouvelle campagne de mesures d'évaluation de la géométrie de la machine Leitz du CETIM à deux hauteurs différentes couplée à des mesures de températures pour :

- tenir compte du changement récent de la climatisation,
- effectuer les ajustements nécessaires sur les valeurs des paramètres de la simulation de Monte Carlo notamment au niveau des fluctuations liées aux évolutions de la température,
- chiffrer les évolutions possibles de la géométrie de la machine dans le plan lorsque l'on s'éloigne du plan de mesure (variation suivant l'axe z).

Les problèmes rencontrés sur les mesures de la cale à gradins KOBA ont été identifiés durant la période de préparation de la soutenance et provenaient notamment d'un problème soft.

Une intervention sur la tête mesurante de la machine a été effectuée par le constructeur qui a confirmé un problème sur le parallélogramme X, ce qui valide notre analyse. Un réglage a été effectué sur la tête, c'est pourquoi nous allons effectuer quelques mesures pour chiffrer de nouveau les incertitudes de mesures liées au système de palpéage.

L'intégration des différents programmes informatiques de traitement associé à une démarche qualité sur la preuve de la validation des algorithmes sera intégrée au CETIM de Senlis dans les deux prochains mois.

Les étalons de l'intercomparaison seront prochainement mesurés pour recouper les différents résultats selon la norme ISO 5725 et comparer ceux-ci avec notre analyse basée sur la machine virtuelle.

Ces différents points sont la continuation logique de l'étude afin de réaliser l'audit COFRAC en mars 2008 dans le but d'obtenir l'accréditation de la mesure des engrenages cylindriques droits sur Machines à Mesurer Tridimensionnelles.

Une campagne de publications sur les principaux résultats de l'étude sera prochainement entreprise.

Au niveau de la poursuite de l'étude à plus longue échéance, il faut prévoir :

- la vérification expérimentale du passage des incertitudes de la bague à celle de l'engrenage, ce qui pourrait être une avancée considérable en s'appuyant sur la norme ISO 15530-3,
- des mesures de roues en permutation pourront être effectuées pour recouper une fois de plus nos résultats,
- l'extension au 3D pour l'évaluation des incertitudes sur tous types d'engrenages,
- l'étude du mode scanning pour les mesures de profil, d'hélice,
- l'étude du multipalpeur indispensable pour améliorer l'évaluation des incertitudes sur les prises de référence et la mesure de certaines roues dentées,
- la mise en place d'un suivi périodique simple et précis qui peut être basé sur des mesures effectuées sur l'étalon « plateau » que nous avons conçu,
- l'évaluation du plateau pivotant nécessaire pour la mesure de certaines roues dentées.

Ces travaux seront réalisés entre autre dans le cadre du laboratoire commun entre le CETIM de Senlis et l'ENSAM de Lille.

Sur la base des travaux sur l'engrenage, il devrait être possible d'envisager des études sur d'autres types de pièces.

# REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[ADC1987] : James L. ADCOCK, (Janvier 1987). "Curve Fitter for Pole-Zero Analysis", Hewlett-Packard Journal.

[AMI2004] : AMIR, Y. (2004). "CRYSTAL BALL® Implementation engineering - engineering design under uncertainty." Proceedings of the 2004 Crystal Ball User Conference.

[ANA2001] : "Prothèses totales primaires de la hanche : évaluation du choix de la prothèse et des techniques opératoires", Rapport de l'Agence Nationale d'Accréditation et d'Evaluation en Santé (ANAES), service évaluation des technologies, service évaluation économique, 2001 (*accessible sur internet en format pdf*).

[AST1997-1] : R. A. E. ASTON, Jim DAVIS, et al. (1997). "a probing question: a customer's investigation into the directional variability of a coordinate measuring machine touch trigger probe." International Journal of Machine Tools & Manufacture 37(10): 1375-1382.

[AST1997-2] : ASTON, R. A. E., J. DAVIS, et al. (1997). "Forced touch-down: a customer's further examination of a touch trigger probe." International Journal of Machine Tools & Manufacture 37(10): 1383-1392.

[BAL1979] : Richard R. BALWIN, Thomas M. HOFFER, (1979). Mesure de la rectitude d'un déplacement – Note d'application 156-5 – Hewlett-Packard Company, Santa Clara, Californie.

[BAR2001] : R.L. BARRACK, C. LAVERNIA, E.S. SZUSZCZEWICZ, J. SAWHNEY (2001). "Radiographic wear measurement in a cementless metal-backed modular Cobalt-Chromium Acetabular component", The Journal of Arthroplasty 16, n° 7, 820-828.

[BIG1999] : Maxence BIGERELLE, (1999). "Caractérisation géométrique des surfaces et interfaces – Application en métallurgie" – Rapport de Thèse ENSAM 1999

[BIN2006] : Christophe BINDI, (2006). Dictionnaire pratique de la métrologie – Mesure, essai et calculs d'incertitudes – AFNOR.

[BLU2001] : H. BLUTEAU, P. BOURDET, (2001). "Quality follow-up of CMM via the measurement of microdefects" - Measurement 29 (2001) 307–315

[BOR1980] : R. LE BORZEC, F. E. AMOURI (1980). "Vérification d'engrenage." Cours ENSAM.

[BOR1989] : R. LE BORZEC (1989). "Etude générale de l'engrenage." Cours ENSAM.

[BOT1999] : Albrecht BOTTCHE, Bernd SILBERMANN, (1999). "Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices", Springer 83-116 (Moore-Penrose Inverses and Singular values).

[BOU1987] : P. BOURDET, (1987) "Contribution à la mesure tridimensionnelle: modèle d'identification géométrique des surfaces, Métrologie fonctionnelle des pièces mécaniques, Correction géométrique des machines à mesurer tridimensionnelles" – Thèse de doctorat université de Nancy 1.

[BOU1999] : Patrick BOUCHARINE, (1999). "Métrologie des surfaces" Techniques de l'Ingénieur R 1390 1-15.

[BUD2004] : A. BUDFORD, T. GOSWAMI, (2004). "Review of wear mechanisms in hip implants : Paper I –General", Mat. Design 25, 385-393.

[BUS1984] : K. BUSCH, H. KUNZMANN, F. WAELDELE, (1984). "Numerical Error-Correction of a Coordinate Measuring Machine"- Proceedings of the International Symposium on Metrology for Quality Control in Production TOKYO.

[BUS1985] : K. BUSCH, H. KUNZMANN, F. WÄLDELE, (Mai 1985) "Calibration of coordinate measuring machines" – 3<sup>nd</sup> Int. Precision Engineering Seminar Interlaken, 89-93.

[BUT1991] : Clive BUTLER, (1991). "An investigation into the performance of probes on coordinate measuring machines" – Industrial Metrology 2 (1991) 59-70.

[CAU1996] : P. CAUCHICK-MIGUEL, Tim KING, Jim DAVIS, (1996). "CMM verification: a survey" Measurement Vol. 17. No. 1, pp. 1-16,1996.

[CAU1998] : CAUCHICK-MIGUEL, P. A. and T. G. KING (1998). "Factors which influence CMM touch trigger probe performance." International Journal of Machine Tools & Manufacture 38(4): 363-374.

[CAY1953] : CAYERE, (1953). "Métrologie des angles". Extraits de la "machine moderne" de juin 1953 à septembre 1954. Publié en polycopié par l'Ecole Libre d'Apprentissage de Grenoble.

[CAY1956] : CAYERE, (1956). "Mesure des défauts d'une règle-étalon" - Extraits de "Manipulation de Métrologie mécanique" de décembre 1956 à mai 1957. Publié en polycopié par l'Ecole Libre d'Apprentissage de Grenoble.

[CFM1999] : Collège Français de Métrologie, 1999, "27 exemples d'évaluation d'incertitudes d'étalonnage".

[CHE1993] : J. S. CHEN, J.X. YUAN, J. NI, S.M. WU, (1993). "Real-time Compensation for Time-variant Volumetric Errors on a Machining Center"– Journal of Engineering for Industry, Vol. 115, 472-479.

[CHE1996] : S. Hossein CHERAGHI, Huay S. LIM, Saied MOTAVALLI, (1996). "Straightness and flatness tolerance evaluation : an optimization approach" – Precision Engineering 18:30-37.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [COO1990] : Thierry COOREVITS, (1990). "Contribution au développement des techniques d'autocalibrage appliquées aux machines à mesurer tridimensionnelles" Thèse de Doctorat ENSAM No90. ENAM. 0003.
- [COO2001] : Thierry COOREVITS, Jean-Marie DAVID, (2001) - Incertitudes de mesures sur machines à mesurer tridimensionnelles: approche par une méthode de Monte Carlo. Proceedings - Congrès International de Métrologie.
- [COO2003\_1]: Thierry COOREVITS, Nicolas ROUSSET, Florian SYLVESTRE, (2004) "Raccordement en métrologie des engrenages cylindriques droits: méthodologie sur Machine à Mesurer Tridimensionnelle" – Proceedings – Congrès International de métrologie
- [COO2003\_2]: Thierry COOREVITS, Nicolas ROUSSET, Rénaud VINCENT, (2004) "Incertitudes sur Machine à Mesurer Tridimensionnelle : Pièce et Méthode" – Proceedings – Congrès International de métrologie
- [DAV1983] : Jean-Marie DAVID, (1983). "Correction par logiciel des défauts de géométrie d'une machine à mesurer" – Rapport interne DS11339, plan R. 1983.
- [DAV1997] : A.C. DAVISON, D.V. HINKLEY, (1997). "Bootstrap methods and their application" , Cambridge Univ. Press.
- [DEC1996] : J. E. DECKER, J. R. PEKELSKY, (1996). "Uncertainty of Gauge Block Calibration by Mechanical Comparison: A Worked Example – Case 1: Gauges of Like Material", NRC Doc. No. 39998.
- [DEC1997a] : J. E. DECKER, J. R. PEKELSKY, (1997). "Uncertainty Evaluation for the Measurement of Gauge Blocks by Optical Interferometry", NRC Doc. No. 41374.
- [DEC1997b] : J. E. DECKER, J. R. PEKELSKY, (1997). "Gauge Blocks Calibration by Optical Interferometry at the National Research Council of Canada ", NRC Doc. No. 41374.
- [DEC2000] : J. E. DECKER, K. BUSTRAAN, S. DE BONTH, J. R. PEKELSKY, (2000). "Updates to the NRC gauge block interferometer", NRC Doc. No 42753.
- [DES2007-1]: M. DESENFANT, N. FISHER, B. BLANQUART, N. BEDIAT, (2007). "Evaluation de l'incertitude en utilisant les simulations de Monte Carlo" – Proceedings – Congrès international de Métrologie – Lille 2007.
- [DES2007-2]: M. DESENFANT, Soraya AMAROUCHE, (2007). "Evaluation d'aptitude par comparaisons interlaboratoires" - Proceedings – Congrès international de Métrologie – Lille 2007.
- [DHA2006] : P. B. DHANISH, J. MATHEW, (2006). "Effect of CMM point coordinate uncertainty on uncertainties in determination of circular features" - Measurement 39 (2006) 522-531.
- [DOB2003] : Marek DOBOSZ, Adam WOZNIAK, (2003). "Metrological feasibilities of CMM touch trigger probes. Part II: Experimental verification of the 3D theoretical model of probe pretravel" Measurement 34 (2003) 273-286.

- [DOB2005] : Marek DOBOSZ, Adam WOZNIAK, (2005). "CMM touch trigger probes testing using a reference axis" *Precision Engineering* 29 (2005) 281-289.
- [DOI1997] : Ted DOIRON, J. STOUP, (1997). "Uncertainty and Dimensional Calibrations" – *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology* 102, 647 (1997).
- [DUM2002] : J.H. DUMBLETON, M.T. MANLEY, A.A. EDIDIN, (2002). "A literature review of the association between wear rate and osteolysis", *J. Arthrop.* 17, 649-661.
- [E 11-016, 1987] : Norme E11-016, Avril 1987 "Instruments de mesure de longueur - Interféromètres à comptage de franges et à source laser."
- [EFR1979] : B. EFRON, (1979) "Bootstrap methods: another look at the jackknife". *Ann. Statist.*, 7 pp. 1–26.
- [EFR1993] : B. EFRON, R.J. TIBSHIRANI, (1993). "An introduction to the bootstrap" , Chapman&Hall.
- [EKI2007]: T.O. EKINCI, J. R. R. MAYER, (2007). " Relationships between straightness and angular kinematic errors in machines " *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 47 (2007) 1997-2004.
- [ELS1990] : Ahmad K. ELSHENNAWY, Inyong HAM, (1990). "Performance Improvement in Coordinate Measuring Machines by Error Compensation"- *J. Manuf. Syst.*, Vol.9, No. 2, 151-158.
- [EST1985] : W. Tyler ESTLER, (1985) - "Calibration and use of optical straightedges in the metrology of precision machines" *Optical Engineering* Vol. 24 No. 3.
- [EST1996] : ESTLER, W. T., S. D. PHILLIPS, et al. (1996). "Error compensation for CMM touch trigger probes." *Precision Engineering* 19: 85-97.
- [EST1997 1] : ESTLER, W. T., S. D. PHILLIPS, et al. (1997). "Practical aspects of touch-trigger probe error compensation." *Precision Engineering* 21: 1-17.
- [EST1997-2] : W. Tyler ESTLER, Chris J. EVANS, L. Z. SHAO, (1997). "Uncertainty estimation for multiposition form error metrology" - *Precision Engineering* 21 :72-82, 1997.
- [FAN2007] : Jean-Louis FANCHON, (2007). "Guide des SCIENCES et TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES" AFNOR NATHAN - §29 et 31.
- [FD ISO/TR 10064-5, 2006] : FD ISO/TR 10064-5: Engrenages cylindriques – Code pratique de réception – Partie 5 : recommandations relatives à l'évaluation des instruments de mesure des engrenages.
- [GAO1997] : WEI GAO, SATOSHI KIYONO, TAKAMITU SUGAWARA, (1997). " High-accuracy roundness measurement by a new error separation method" – *Precision engineering* 21:123-133, 1997.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [GEE2000] : M.A. McGEE, D.H. HOWIE, K.COSTI, D.R. HAYNES, C.I. WILDENAUER, (2000). M.J. PEARCY, J.D. McLEAN, "Implant retrieval studies of the wear and loosening of prosthetic joints: a review", *Wear* 241, 158-165.
- [GEN2000] : Pierre GENEQUAND, Michel BOGDANSKI, Ivar KJELBERG, (2000). "Elements flexibles usinés pour applications microtechniques" – Bulletin SSC n°33 – 2000.
- [GEN2003] : James E. GENTLE, (2003). "Random Number Generation and Monte Carlo methods" – Springer, Statistics and Computing, second Edition
- [GON2004] : A. GUSTAVO GONZALEZ, M. ANGELES HERRADOR, AGUSTIN G. ASUERO, (2004). "Uncertainty evaluation from Monte-Carlo simulations by using Crystal-Ball software". *Accred Qual Assur* (2005) 10:149-154.
- [GOO1977] : T.C. GOODHEAD, P.F. MCGOLDRICK, J.J. CRABTREE, (SEPTEMBRE 1977). "Automatic detection of and compensation for alignment errors in machine tool slideways". *Proceedings of the eighteenth machine tool design and research conference – Londres.*
- [GOU1999] : J. B. GOU, Y. X. CHU, Z. X. LI, (1999). "A geometric theory of form, profile, and orientation tolerances" – *Precision Engineering* 23 (1999) 79-93.
- [HAL1998a] : R.M. HALL, (1998). "Radiographic measurement of wear in total hip arthroplasty", *Current Orthopaedics* 12, 202-208.
- [HAL1998b] : R.M. HALL, P.S. CRAIG, P. SINEY, A. UNSWORTH, B.M. WROBLEWSKI, (1998). "Differences in the rates of penetration determined from radiographic and shadowgraphic measurements of acetabular sockets", *The Journal of Arthroplasty* 13, n° 5, 570-575.
- [HEN1979] : GEORGES HENRIOT, (1979). "Traité théorique et pratique des engrenages" DUNOD.
- [HEX2007] : HEXAGON METROLOGY, (2007). "Point sur la mesure" – No. 4 février 2007
- [HOC1977] : R. HOCKEN, J. A. SIMPSON, B. BORCHARDT, J. LAZAR, C. REEVE, P. STEIN, (1977). "Three Dimensional metrology". *Annals of the CIRP* Vol. 26/2/1977, 403-408.
- [HUA1993] : S. T. HUANG, K. C. FAN, John H. WU. "A new minimum zone method for evaluating straightness errors" – *Butterworth-Heinemann*, Vol.15 No 3.
- [ISO15530-3] : ISO/TS 15530-3:2004 - Geometrical Product Specifications (GPS) -- Coordinate measuring machines (CMM): "Technique for determining the uncertainty of measurement - Part 3: Use of calibrated workpieces or standards".
- [ISO/TC 213 N 659 ISO DGUIDE 99998] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML. "Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement Propagation of distribution using a Monte Carlo method", draft. Ce supplément doit bientôt être disponible gratuitement sur le site du BIPM et celui de OIML.

- [ISO/TS 15530-3, 2004] : ISO/TS 15530-3:2004 - Mars 2004 - Spécification géométrique des produits (GPS) - Machines à mesurer tridimensionnelles (MMT) : technique pour la détermination de l'incertitude de mesure - Partie 3 : utilisation de pièces étalonnées ou des normes.
- [JED2005] : Franck Jedrzejewski, (2005) "Introduction aux méthodes numériques" – Springer - Deuxième édition – 35-67.
- [JIN2006]: Z.M. JIN, M. STONE, E. INGHAM, J. FISHER, (2006). "Biotribology", Current Orthopaedics 20, 32-40.
- [JON1951] : R.V. JONES and al., (1951). - "Parallel and rectilinear spring movements" - Journal of scientific instruments n°58 1951.
- [JON1956] : R.V. JONES and al., (1956). - "Some parasitic deflexions in parallel spring movements" – Journal of scientific instruments - 13 janvier 1956.
- [JUS1999] : Otto JUSKO – PTB Bericht F-37 (1999). "Calibration of a step gauge" Final report of EUROMET – Projet #372 (disponible sur internet).
- [KNA1983\_1] : W. KNAPP, (1983). "Test of three-Dimensional Uncertainty of Machine Tools and Measuring Machines and its Relation to the Machine Errors" – Annals of the CIRP Vol. 32/1/1983.
- [KNA1983\_2] : W. KNAPP, (1983). "Circular test for three-coordinate measuring machines and machine tools" – Precision engineering Vol. 5, No.3 juillet 1983.
- [KOB1988] : KOLB und BAUMANN und Co Gmbh. Premiers documents techniques constructeur trouvés au sujet de la "cale-étalon à gradins de précision" pour le contrôle des machines.
- [KUN1983] : H. KUNZMANN, F. WÄLDELE, (1983). "On Testing Coordinate Measuring Machines (CMM) with Kinematic Reference Standards (KRS)" – Annals of the CIRP Vol.32/1/1983.
- [KRU2001] : J.-P. KRUTH, P. VANHERCK, C. VAN DEN BERGH, B. SCHACHT, (2001). "A parametric model for compensation of the temperature dependent geometry of a coordinate measuring machine" – Journal of Manufacturing systems, 2001
- [KUR2006] : Tomizo KUROSAWA (2006) "Step Gauge measurement" – Document NMIJ/AIST - Présentation du dispositif expérimental de la mesure de la KOBA de l'intercomparaison organisée par le PTB (disponible sur internet).
- [LAN1997] : F. LANGLAIS, (1997). "Le polyéthylène en 1997", Cahiers d'Enseignement de la SOFCOT, Conférences d'Enseignement 1997, Elsevier, Paris, 53-69.
- [LAU2007] : S. LAUDREL, M. KLEIN, (2007). "La simulation numérique de Monte Carlo pour l'évaluation de l'incertitude: nouvelle voie ou impasse? " – Proceedings – Congrès international de Métrologie – Lille 2007.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [LEI1990] : WILD LEIZ, (1990). "LEITZ PMM – Unbeatable precision – the measuring probe system" – documentation commerciale de février 1990, page 12.
- [LEN1988] : K. J. LENZ, W. MERZENICH, (1988). "Achievement of accuracy by error compensation of large CMMs" – Butterworth & Co, Vol. 10, No. 4.
- [LI1996] : C. James LI, SHENGYI LI, JIANMING YU, (1996). "High-resolution error separation technique for in-situ straightness measurement of machine tools and workpieces" Mechatronics Vol. 6, No. 3, pp 337-347, 1996.
- [LIG1872] : V. LIGUINE, (1872). "Note historique sur le problème des engrenages cylindriques" Bulletin de la S.M.F., tome 1 (1872-1873), 251-253. – Référence disponible sur NUMDAM.
- [LIN1989] : Cao LINXIANG , (1989). "The measuring accuracy of the multistep method in the error separation technique" – J. Phys. E: Sci. Instrum. 22 (1989) 903-906.
- [LIN1992] : Cao LINXIANG, Wang HONG, Li XIONGUA, Shen QINGHONG , (1992). "Full-harmonic error separation technique" – Meas. Sci. Technol. 3 (1992) 1129-1132.
- [MAN2007] : Jean-François MANLAY, (2007). "MMT : une intercomparaison de plus, pour quoi faire ? Intercomparaison en métrologie tridimensionnelle d'une forme gauche" Proceedings - Congrès International de Métrologie – Lille 2007
- [MAR1998] : W. D. MARK, (1998). "Method for precision calibration of rotary scale errors and precision determination of gear tooth index errors" – Mechanical Systems and Signal Processing (1998) 12(6), 723-752.
- [MAS2003] : J. C. MASON, David Christopher HANDSCOMB, 2003. "Chebyshev Polynomials" – Mathematics – chapitre 6 – 145-162.
- [MAT1995] : Jean-Paul MATHIEN, (1995). "Contrôle des machines à mesurer" – Techniques de l'Ingénieur R1318 1-8.
- [MAY1996] : J. R. René MAYER, Abdeljabbar GHAZZAR, Olivier ROSSY, (1996). "3D Characterisation, modelling and compensation of the pre-travel of a kinematic touch trigger probe" – Measurement Vol. 19, No. 2, pp 83-94, 1996.
- [MFQ1995] : "Guide pour la détermination des incertitudes de mesure" (1995), Mouvement Français pour la Qualité.
- [MOO1989] : D. MOORE, (1989) "Design considerations in multiprobe roundness measurement" – J. Phys. E.: Sci. Instrum. 22 (1989) 339-343.
- [MOR2002] : Edward P. MORSE, (2002). "Artifact selection and its role in CMM evaluation" – IDW 8 mai 2002
- [NAW1985] : Leszek NAWARA, Marek KOWALSKI, (1985). "Influence of the Multicoordinate Measuring Machine Head Characteristic on Circular Profiles Measurements" Annals of the CIRP Vol. 34/1/1985.

[NER1989] : F. NERI, G. SAITTA, S. CHIOFALO, (1989). "An accurate and straightforward approach to line regression analysis of error-affected experimental data" – J. Phys. E. Sci. Instrum. 22 (1989) 215-217.

[NF E 10-101] : Norme Française AFNOR NF E 10-101, février 1988 - "Méthode de mesurage dimensionnel – deuxième partie : écart de rectitude".

[NF E 11-151, 2003] : Norme Française AFNOR NF E 11-151, Décembre 2003 - "Spécification géométrique des produits (GPS) – Machines à mesurer tridimensionnelles à portique – Représentation des corrections de géométrie".

[NF E10-101, 1988] : Norme Française AFNOR NF E10-101, Février 1988. "Méthodes de mesurage dimensionnel - Deuxième partie : écarts de rectitude".

[NF EN ISO 10360-4, 2000] : Norme Française AFNOR NF EN ISO 10360-4, Août 2000 - Spécification géométrique des produits (GPS) - Essais de réception et de vérification périodique des machines à mesurer tridimensionnelles (MMT) - Partie 4 : MMT utilisées en mode de mesure par scanning.

[NF EN ISO 10360-5, 2001] : Norme Française AFNOR NF EN ISO 10360-5 - Mars 2001 - Spécification géométrique des produits (GPS) - Essai de réception et de vérification périodique des machines à mesurer tridimensionnelles (MMT) - Partie 5 : MMT utilisant des systèmes de palpé à stylets multiples

[NF EN ISO 5725-1, 1994] : Norme Française AFNOR NF EN ISO 5725-1, Décembre 1994 - "Application de la statistique - Exactitude (justesse et fidélité) des résultats et méthodes de mesure - Partie 1 : principes généraux et définitions".

[NF EN ISO 9000, 2005] : Norme Française AFNOR NF EN ISO 9000, Octobre 2005 Systèmes de management de la qualité - Principes essentiels et vocabulaire.

[NF EN ISO/CEI 17025, 2000] : Norme Française AFNOR NF EN ISO/CEI 17025, Mai 2000 - "Prescriptions générales concernant la compétence des laboratoires d'étalonnages et d'essais".

[NF ENV 13005] : Norme Française AFNOR NF ENV 13005 - Août 1999 - Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (GUM).

[NF ISO 1328-1,1995] : Norme Française AFNOR NF ISO 1328-1, Novembre 1995 - Engrenages cylindriques - Système ISO de précision - Partie 1 : définitions et valeurs admissibles des écarts pour les flancs homologues de la denture (2ème tirage, décembre 1997)

[NF ISO 18653, 2004] : Norme Française AFNOR NF ISO 18653 - Mars 2004 - Engrenages - Évaluation des instruments de mesure des engrenages individuels.

[NF X-07-001, 1994] Norme Française AFNOR : NF X 07-001 Décembre 1994 Normes fondamentales. Vocabulaire international des termes fondamentaux et généraux de métrologie.

[NI1993] : J. NI, S. M. WU, (1993). "An On-Line Measurement Technique for Machine Volumetric Error Compensation" – Journal of Engineering for Industry, Vol. **115**, 85-92.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [NIC2001]: J.V. NICHOLAS and D.R. WHITE, (2001). "Uncertainty in Measurement" Traceable Temperatures - 2001 John Wiley & Sons, Ltd. 37-94
- [NIE2000a] : C.M. McNIE, D.C. BARTON, E. INGHAM, J.L. TIPPER, J. FISCHER, M.H. STONE, (2000)."The prediction of polyethylene wear rate and debris morphology produced by microasperities on femoral heads", J. Mater. Sci. Mater. Med. 11, 163-174.
- [NIE2000b] : C.M. McNIE, D.C. BARTON, E. INGHAM, J.L. TIPPER, J. FISCHER, M.H. STONE, (2000)."Modeling of damage to articulating surfaces by third body particles in total joint replacements", J. Mater. Sci. Mater. Med. 11, 569-578.
- [OCH2006] : Rudolf OCH, (2006). "Gear measuring machines and traceability 1900-2006" – Gear Product News – octobre 2006.
- [OSA2002] : OSAWA, S., T. TAKATSUJI, et al. (2002). "Development of a ball step-gauge and an interferometric stepper used for ball-plate calibration." Precision Engineering **26**: 214-221.
- [OUY1995] : J. F. OUYANG, I. S. JAWAHIR, (1995). "Ball array calibration on a coordinate measuring machine using a gage block" – Measurement 16 (1995) 219-229.
- [PAH1995] : H. PAHK, J. KIM, (1995). "Application of Microcomputer for Assessing the Probe Lobing Error and Geometric Errors of CMMs Using Commercial Ring Gauges". Int. J. Adv. Manuf. Technol. (1995) 10 :208-218.
- [PAS2002] : PASQUIER, M. (2002). "Contrôle des engrenages parallèles." Techniques de l'ingénieur R1290: 1-13.
- [PAW2004] : Pawe P. PAWLUS, (2004). "Mechanical filtration of surface profiles" – measurement 35 (2004) 325-341.
- [PER2007] : P.H. Pereira, R.J. Hocken, (2007)."Characterization and compensation of dynamic errors of a scanning coordinate measuring machine".- Precision Engineering 31 (2007) 22–32.
- [PET1988] : J. PETTAVEL, P. SEBELLIN, (1988). "A new three-dimensional probe OMNISIP" Quality, Avril 1988.
- [PHI2001] : PHILLIPS, S. D., D. SAWYER, et al. (2001). "A novel artifact for testing large coordinate measuring machines" Precision Engineering **25** 29–34.
- [PLA1954]: J. E. PLAINEVAUX, (1954). "Guidage rectiligne sur lames élastiques. Comparaison de divers types connus et nouveaux" – Nuovo Cimento, Vol.12 n°1.
- [PTB2005] : PTB (2005). "CMM1D : Step Gauge and Ball Bars." Physikalisch-Technische Bundesanstalt rapport CCL-K5 (disponible sur internet).
- [ROU2006] : N. ROUSSET, (2006). "Participation à la campagne d'intercomparaison japonaise." CETIM confidentiel: 1-39.
- [RYU1997] : Jae W. RYU, Dae-Gab GWEON, (1997). "Error analysis of a flexure hinge mechanism induced by machining imperfection" – Precision Engineering 21:83-89.

- [SAE1990] : Society of Automotive Engineers, John H. TANZER and al., (1990). "Gear Design AE-15 – Manufacturing and Inspection Manual" - Society of Automotive Engineers, Inc. Extrait des articles publiés dans "Gear and Spline Technical Committee of the SAE Mechanical Components and Fluids Systems.
- [SAN1998] : S. SANTAVIRTA, Y.T. KONTINEN, R. LAPPALAINEN, A. ANTILLA, S.B. GOODMAN, M. LIND, L. SMITH, M. TAGAKI, E. GOMEZ-BARRENA, L. NORDSTLETTEN, J.W. WU, (1998). "Materials in total joint replacement", *Current Orthopaedics* 12, 51-57.
- [SAN2006] : J. Sanchez, S. Santillan, (2006). "Simpler approach to virtual multiaxis machines: Fundamentals" - *Measurement* 39 (2006) 352–370
- [SAV2006] : E. SAVIO, (2006). "Uncertainty in testing the metrological performances of coordinate measuring machines" – *Annals of the CIRP*, Vol. 55 No. 1, pp. 535-538.
- [SCH1977] : R. SCHULTSCHIK, (1977). "The Components of the Volumetric Accuracy" *Annals of the CIRP* Vol.25/1/1977, pp. 223-228.
- [SCH1984] : H.-H. SCHUßLER, A. SCHAFFER, R. SCHMIDT, (1984). "Praktische Erfahrungen bei der Abnahme von Koordinatenmeßgeräten hinsichtlich der Längenmeßunsicherheit nach der Richtlinie VDI/VDE 2617, blatt 2.1" *VDI Berichte* **529**: 15-55.
- [SCH2000] : H. SCHWENKE, B.R. L. SIEBERT, F. WÄLDELE, H. KUNZMANN, (2000). "Assessment of Uncertainties in Dimensional Metrology by Monte Carlo Simulation: Proposal of a Modular and Visual Software" – *Annals of the CIRP* Vol. 49/1/2000.
- [SHE1997 - 1] : Yin-Lin. SHEN, Xianping ZHANG, (1997). "Pretravel Compensation for vertically oriented touch-trigger probes with straight styli". *Int. J. Mach. Tools Manufact.* Vol. 37, No. 3, pp. 249-262, 1997.
- [SHE1997 - 2] : Y. SHEN, S. MOON (1997). "Mapping of probe pretravel in dimensional measurements using neural networks computational technique" *Computers in Industry* 34 (1997) 295-306.
- [SPR2003] : J.M. Sprauel, J.M. Linares, J. Bachmann, P. Bourdet, (2003). "Uncertainties in CMM Measurements, Control of ISO Specifications" *Annals of the CIRP* Vol. 52 No. 1, 423-426.
- [TAK2005] : Toshiyuki TAKATSUJI, Koshi KONDO, Aizo KUBO, Frank HAERTIG, Sonko OSAWA, Kazuya NAOI, Tomizo KUROSAWA, (2005) "Performance assessment of involute gear measurement by CMM using a double-ball artifact" - *Proceedings of SPIE - Volume* 5879.
- [TAK2002] : Kiyoshi TAKAMASU, Ryoshu FURUTANI, Tomizo KUROSAWA, Toshiyuki TAKATSUJI, Franz WÄLDELE, Heinrich SCHWENKE, Nicholas BROWN, Esa JAATINEN, (2002). "International Standard Development of Virtual CMM (Coordinate Measuring Machine)" (*accessible sur internet en format pdf*).
- [TER2002] : Vladimir Yu TERTYCHNY-DAURI, (2002). "Mathematics and Its Applications - Adaptative Mechanics" *Kluwer Academic Publishers*, 427-440 (Pseudo inversion and rectangular matrices).

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [TIP2000] : J.L. TIPPER, E. INGHAM, J.L. HAILEY, A.A. BESONG, J. FISHER, B.M. WROBLEWSKI, M.H. STONE, (2000). "Quantitative analysis of polyethylene wear debris, wear rate and head damage in retrieved Charnley hip prostheses", *J. Mater. Sci. Mater. Med.* 11, 117-124.
- [TON1996] : Sun TONG, (1996). "Two-step method without harmonics suppression in error separation" – *Meas. Sci. Technol.* 7 (1996) 1563-1568.
- [TRA2005] : Eugen TRAPET, (2005). "Measuring with Vision Systems: Industry Standards for Acceptance and Verification tests"- Proceedings – 3rd EMVA Business Conference - Palermo 2005.
- [TRA2006] : TRAPET, E., J.-J. A. MARTIN, et al. (2006). "Self-centering probes with parallel kinematics to verify machine-tools." *Precision Engineering* 30: 165-179.
- [TRE1999] : D. TREHEUX, (1999). "Frottement et usure des céramiques  $Al_2O_3 - ZrO_2$  pour applications biomédicales", *Mat. Tech. Hors-Série*, 17-22.
- [TRO2006] : Jean-Pierre TROTIGNON, T. COOREVITS, J.-M. DAVID, R. DIETRICH, G. FACY, E. HUGONNAUD, M. NICOLAS, M. POMPIDOU, (2006). "Construction Mécanique" AFNOR Précis Tome 2 – 198-233.
- [WÄL1984] : F. WÄLDELE, H. KUNZMANN, (1984). "Der Kugelstab als kinematischer Prüfkörper für Koordinatenmeßgeräte" *VDI Berichte* 529: 161-176.
- [WÄL1987]: F. WÄLDELE, (1987). "Kalibrierung von Koordinatenmeßgeräten" – *VDI Berichte NR.659*.
- [WEB1984] H. WEBER, (1984). "Beeinträchtigung der Genauigkeit von Koordinatenmessungen durch die Umgebung" *VDI Berichte n°524 – 107-116*.
- [WEC1980] : A. WECKENMANN, (Décembre 1980). "The accuracy of multi-coordinate measuring machines" 5<sup>ème</sup> Int. Conference on automated inspection and product control – Stuttgart.
- [WEC2004] : A. Weckenmann, T. Estler, G. Peggs, G., D. McMurtry, (2004). "Probing Systems in Dimensional Metrology" – *Annals of the CIRP*, Vol. 53/2:657-684.
- [WES1998] : Dennis B. WESS, (1998). "Development of a novel lead master consisting of an offset sphere" *Precision Engineering* 22:206-219, 1998.
- [WHI1976] : D J WHITEHOUSE, (1976). "Some theoretical aspects of error separation techniques in surface metrology" – *Journal of Physics E: Scientific Instruments* septembre 1976 Vol. 9 pp531-536
- [WIL2001] : R. G. WILHELM, R. HOCKEN, H. SCHWENKE, (2001). "Task Specific Uncertainty in Coordinate Measurement" – *Annals of the CIRP* Vol.50, No. 2, 553-563
- [WIL2005] : J.M. WILKINSON, A.J. HAMER, I. STOCKLEY, R. EASTELL, (2005). "Polyethylene wear rate and osteolysis: critical threshold versus continuous dose-response relationship", *J. Orthop. Res.* 23, 520-525.

[WIR2006] : Jenny WIRANDI, Alexander LAUBER, (2006). "Uncertainty and traceable calibration – how modern measurement concepts improve product quality in process industry" - Measurement 39 (2006) 612–620

[WOO1988] : M. WOOLLETT, (1988). "Rapid error correction of coordinate measuring machines for squareness, twist and scaling errors", Adv. Manuf. Eng. Vol. 1 octobre 1988.

[WOZ2003] : Adam WOZNIAK, Marek DOBOSZ, (2003). "Metrological feasibilities of CMM touch trigger probes. Part I: 3D theoretical model of probe pretravel" Measurement 34 (2003) 273-286.

[WOZ2005] : Adam WOZNIAK, Marek DOBOSZ, (2005). "Influence of measured objects parameters on CMM touch trigger probe accuracy of probing" Precision Engineering 29 (2005) 290-297.

[WU1999] : Jiunn-Jong WU, (1999). "Spectral analysis for the effect of stylus tip curvature on measuring rough profiles" – Wear 230 (1999) 194-200

[ZHA1999] : Qing ZHANG, K. C. FAN, ZHU LI, (1999). "Evaluation method for spacial straightness errors based on minimum zone condition" – Precision Engineering 23 (1999) 264-272.





# ANNEXE 1

## Contribution de quelques défauts sur la mesure d'un cercle

### 1 Défauts d'axe x influençant la mesure d'un cercle

#### 1.1 Rectitude d'axe x

On considère le défaut de rectitude suivant l'axe x qui a une contribution sur l'axe y.

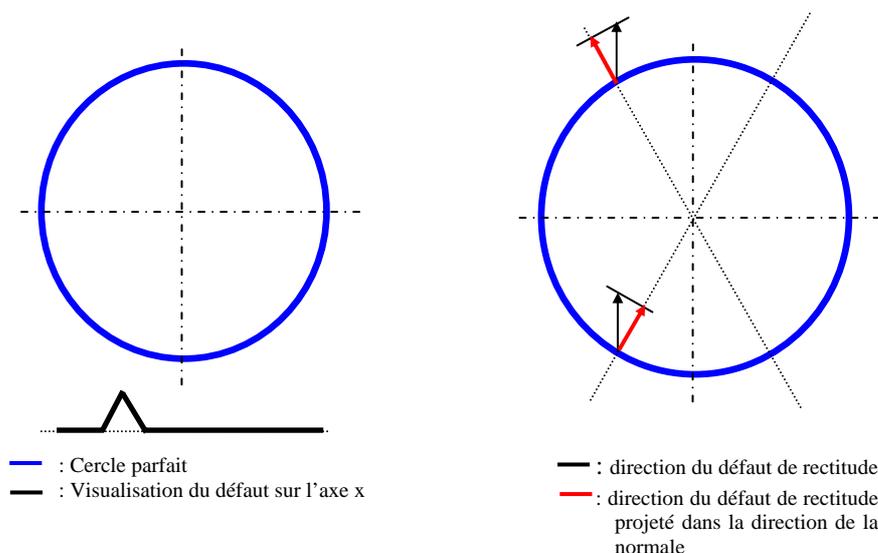
Le vecteur de sensibilité correspondant s'écrit alors :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ r(x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \end{vmatrix} = r(x) \cdot n_y, \text{ soit dans le cas du cercle : } r(x) \sin \theta$$

Pour comprendre les conséquences d'un défaut de rectitude sur les mesures d'un cercle, 2 cas physiquement possibles sont détaillés ci-après.

#### Défaut ponctuel sur l'axe x

Un défaut ponctuel est simulé [Figure 1]. Il correspond physiquement à une bosse localisée sur un axe.



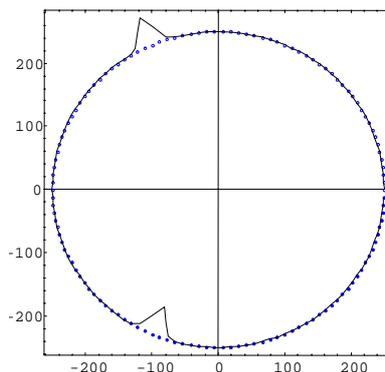


Figure 1 : Conséquence du défaut de rectitude ponctuel sur la mesure du cercle parfait

### Défaut parabolique de l'axe x

Un défaut parabolique en rectitude [Figure 2] est un des défauts les plus couramment rencontré sur les machines à mesurer et correspond physiquement à la déformation dans le plan de la mesure de l'axe dans la direction du déplacement considéré (l'axe x dans le cas ci-dessous). Ce défaut est très important dans le cas de variations thermiques. En règle général, il est dû à un effet de bilame par gradient de température qui provoque un cintrage des guidages de la machine.

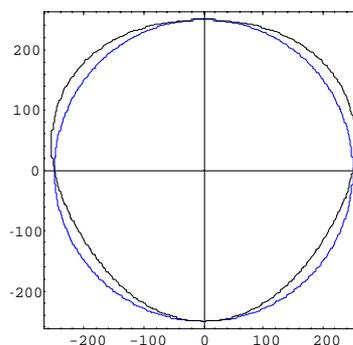
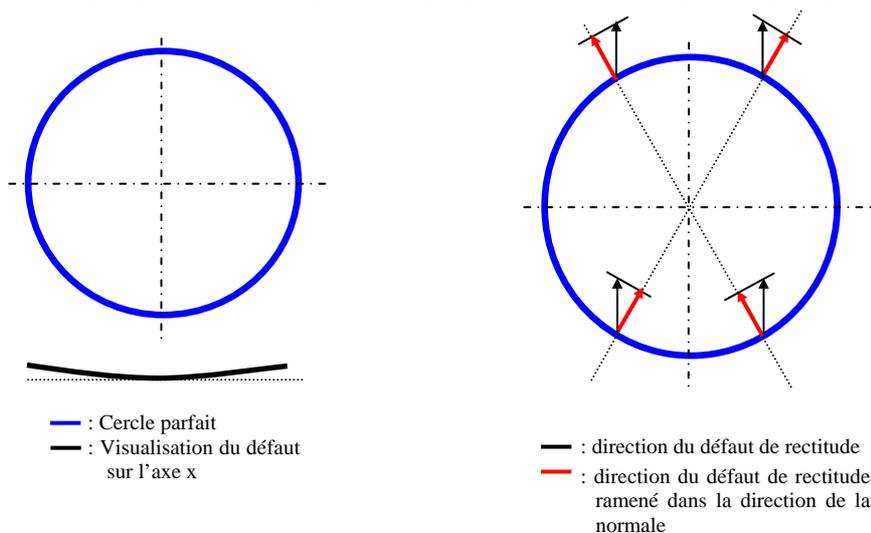


Figure 2 : Conséquence du défaut de rectitude parabolique sur la mesure du cercle parfait

## 1.2 Lacet d'axe x

Un défaut dû au lacet d'axe x, s'écrit,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \\ l(x) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l(x).y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ 0 \end{pmatrix} = -l(x).y.nx, \text{ soit pour le cercle : } -l(x) R \sin \theta \cos \theta$$

Pour comprendre les conséquences d'un défaut de lacet sur les mesures d'un cercle, 2 cas simples physiquement possibles sont détaillés ci-après.

### Défaut ponctuel d'axe x

Un défaut de lacet ponctuel [Figure 3] correspond physiquement à un problème de positionnement angulaire du portique à un instant donné de la mesure.

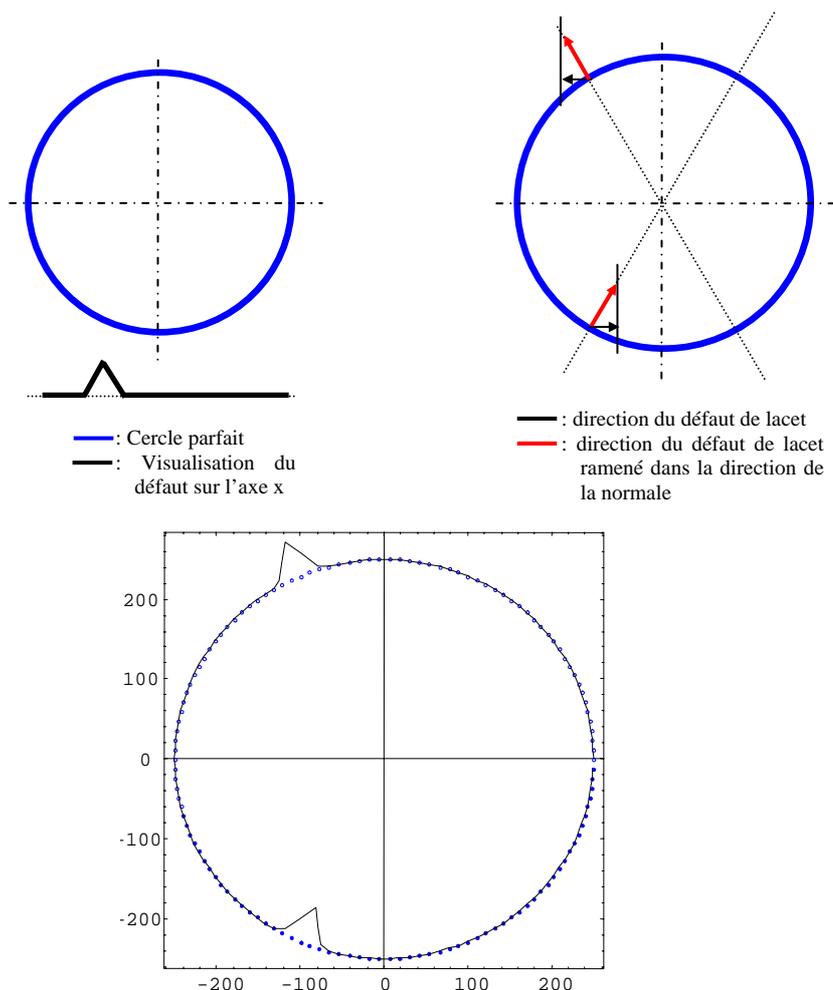


Figure 3 : Conséquence du défaut de lacet ponctuel sur la mesure du cercle parfait

### Lacet linéaire d'axe x

Un défaut de lacet linéaire [Figure 4] correspond physiquement à une inclinaison proportionnelle au déplacement suivant l'axe x du portique. Ce phénomène est couramment rencontré sur les machines à mesurer et est souvent dû à des tensions générées par le câblage des machines, ou par des défauts de guidage de l'axe x non effectué à l'aplomb du centre de gravité du portique.

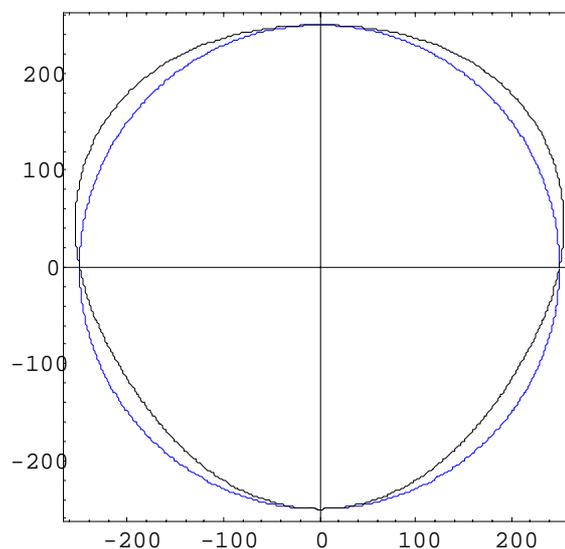
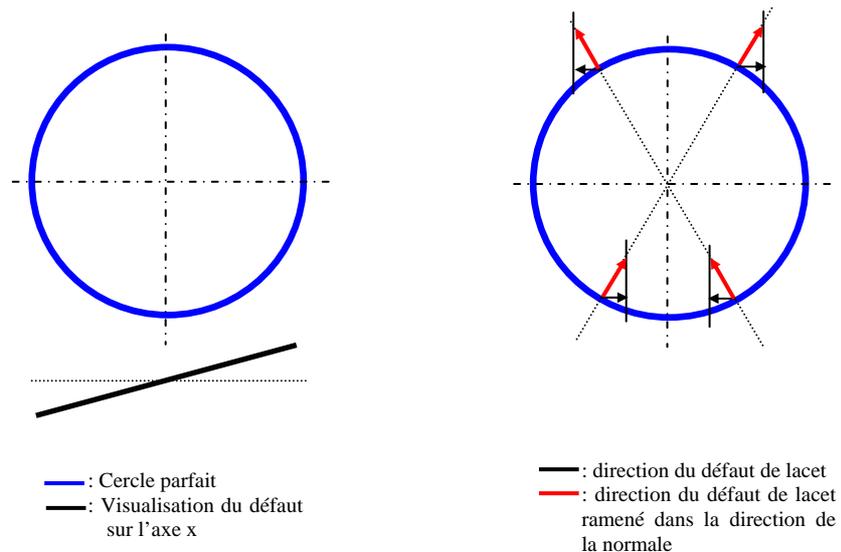


Figure 4 : Conséquence du défaut de lacet proportionnel sur la mesure du cercle parfait

### 1.3 Justesse d'axe x

Un défaut de justesse d'un axe correspond à un problème de raccordement au mètre de la règle de mesure considérée de la machine.

Un défaut de justesse d'axe x, s'écrit,

$$\begin{vmatrix} j(x) & nx \\ 0 & ny \end{vmatrix} = j(x).nx, \text{ soit dans la cas du cercle : } j(x) \cos\theta$$

Pour comprendre les conséquences d'un défaut de justesse sur les mesures d'un cercle, 2 cas simples physiquement possibles sont détaillés ci-après [Figure 5 et Figure 6].

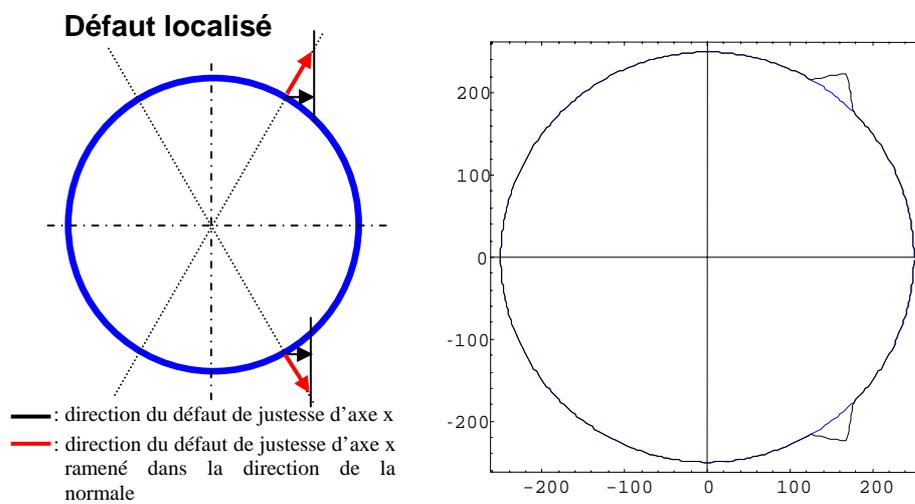


Figure 5 : Conséquence du défaut de justesse ponctuel sur la mesure du cercle parfait

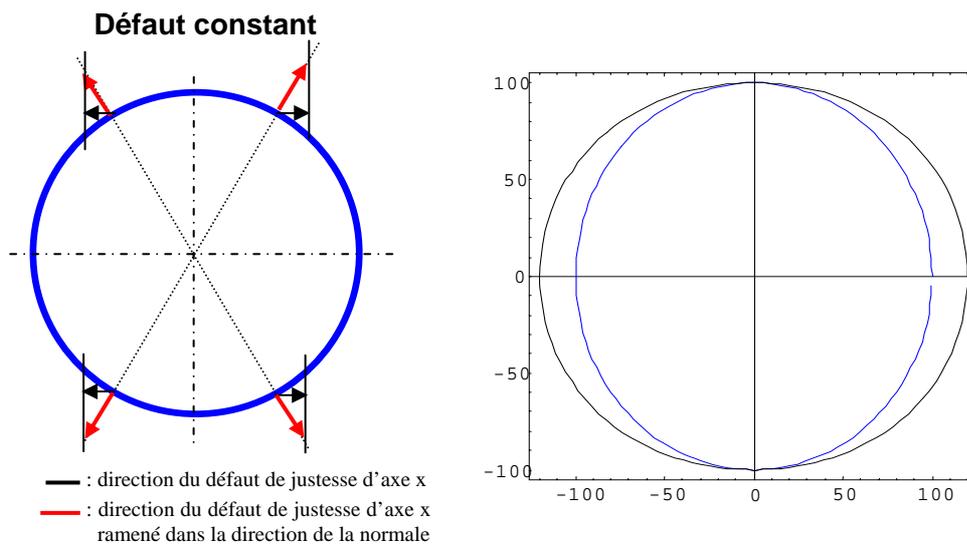


Figure 6 : Conséquence du défaut de justesse proportionnel sur la mesure du cercle parfait

## 2 Défauts d'axe y influençant la mesure d'un cercle

Les mêmes constructions et les mêmes conséquences sont observables sur la rectitude et la justesse d'axe y que la rectitude et à la justesse d'axe x. Il suffit juste d'invertir les axes.

### Défaut de rectitude d'axe y

Un défaut de rectitude d'axe y, s'écrit,

$$\begin{vmatrix} r(y) \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} nx \\ ny \end{vmatrix} = r(y).nx, \text{ soit dans le cas du cercle : } r(y) \cos \theta$$

### Défaut de justesse d'axe y

Un défaut de justesse d'axe y, s'écrit,

$$\begin{vmatrix} 0 \\ j(y) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} nx \\ ny \end{vmatrix} = j(y).ny, \text{ soit dans le cas du cercle : } j(y) \sin \theta$$

## 2.1 Autres défauts

### Défaut de perpendicularité

Le défaut de perpendicularité entre 2 axes, provoque bien entendu une déformation du cercle théorique et a donc une influence non négligeable sur la mesure d'une pièce. Le résultat de la mesure d'un cercle dans le plan (O, x, y) sur une machine possédant un défaut de perpendicularité conduit à transformer le cercle en une forme de type ellipse [Figure 7].

Ce défaut n'est pas présenté en même temps que les défauts de rectitude, lacet ou justesse dans la mesure où il est déjà directement intégré dans l'étude des autres défauts. En effet, il peut être intégré dans la rectitude comme une pente sur celle-ci ou une constante sur le lacet.

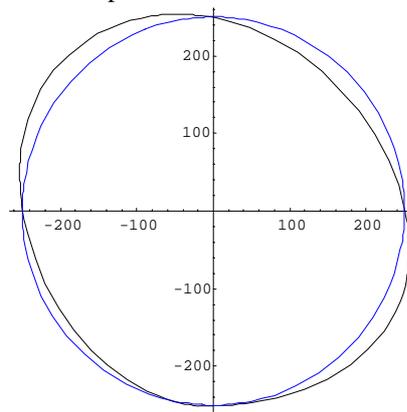
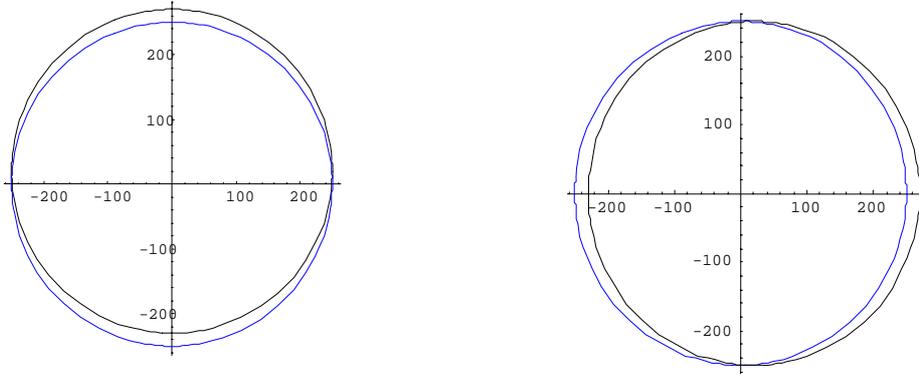


Figure 7 : Visualisation de l'effet d'un défaut de perpendicularité

### Défaut de positionnement

Le défaut de positionnement est l'écart existant entre la position théorique (courbes bleues sur la **Figure 8** ci-dessous et la position réelle (courbes noires). Les conséquences sur la mesure du cercle sont nulles du point de vue de sa forme et de son diamètre.



*Figure 8 : Observation des erreurs de positionnement possibles, d'axe x à gauche et d'axe y à droite*



## ANNEXE 2

# Position des points d'appui de moindre flexion

### Présentation

Le but de cette annexe de vérifier la position des points d'appuis au  $2/9^{\text{ème}}$  de la longueur d'une règle. Ce résultat est connu en métrologie mais nous n'avons pas trouvé de document le démontrant et surtout, nous voulons évaluer la sensibilité de la position de ces points sur la déformation d'une règle.

Soit une poutre de masse  $m$ , de longueur  $L$ , d'épaisseur  $e$  et de largeur  $l$ , posée sur deux appuis ponctuels A et B soumise à son poids propre [Figure 1]. La poutre est donc soumise à une charge uniformément répartie  $q=e.l.p.g$  où  $\rho$  est la masse volumique de la poutre et  $g=9,81$ .

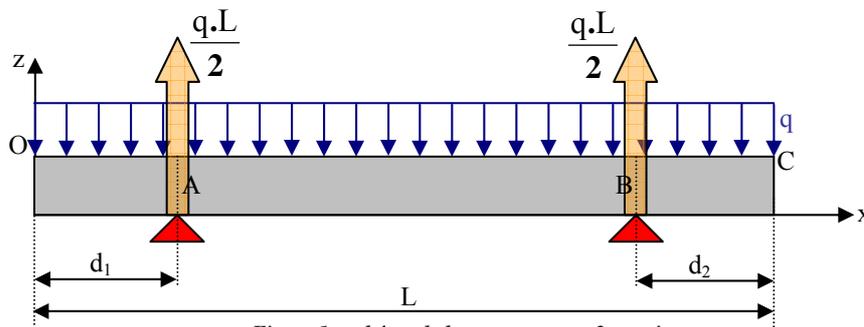


Figure 1 : schéma de la poutre sur ses 2 appuis

Le calcul de la flèche relève de l'intégration de la formule classique :  $y'' = -\frac{M_f}{E.I}$  avec

un moment fléchissant : pour  $x \in \{O, A\}$ ,  $M_f = \frac{q \cdot x^2}{2}$  et pour  $x \in \{A, B\}$ ,

$$M_f = \frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{q \cdot L}{2} \cdot (x - d)$$

Le calcul fournit l'expression complète de la flèche en fonction de  $d$  :

$$\text{Pour } x \in \{O, A\} : y = \frac{q}{E.I} \left( -\frac{x^4}{24} + \frac{L}{4} \left( -\frac{L^2}{6} + d \cdot (L - d) \right) \cdot x + \left( \frac{d}{4} \left( \frac{d^3 + L^3}{6} - d \cdot L \cdot (L - d) \right) \right) \right)$$

Pour  $x \in \{A, B\}$  :

$$y = \frac{q}{E.I} \left( -\frac{x^4}{24} + \frac{L}{2} \cdot \frac{(x-d)^3}{6} + \frac{L}{4} \left( -\frac{L^2}{6} + d \cdot (L - d) \right) \cdot x + \left( \frac{d}{4} \left( \frac{d^3 + L^3}{6} - d \cdot L \cdot (L - d) \right) \right) \right)$$

## Détermination de la position optimum des points d'appui

Pour déterminer la position optimum des points d'appuis, il faut trouver  $d$  tel que la flexion soit globalement minimale c'est-à-dire que la flèche soit identique en  $x=0$  et en  $x=\frac{L}{2}$ .

En égalisant les flèches précédentes et après calcul, on a :  $-5.L^3 + 24.L^2.d - 32.d^3 = 0$

Cette équation du troisième degré deux solutions physiquement aberrantes, la troisième correspond au posage optimum tel que  $d = 0,223149L$ .

Classiquement, les métrologues réalisent le posage au  $\frac{2}{9}$ <sup>ème</sup> de la longueur  $L$  d'une poutre soit environ :  $0.222.L$ , ce qui est proche de la valeur trouvée.

## Différence de flexion entre la position optimum et le posage au $\frac{2}{9}$ <sup>ème</sup>

Nous avons naturellement comparé le posage au  $\frac{2}{9}$ <sup>ème</sup> par rapport au posage optimum déterminé pour la règle de rectitude utilisée, soit

$L = 1$  m,

$e = 25$  mm,

$l = 90$  mm,

$\rho = 7.8$  kg/dm<sup>3</sup>.

La différence de flexion de la poutre entre le posage optimum et le posage au  $\frac{2}{9}$ <sup>ème</sup> de la longueur est de l'ordre de  $2.85-2.67=0.18\mu\text{m}$  [Figure 2]. Pour toutes nos expérimentations, ce posage au  $\frac{2}{9}$ <sup>ème</sup> de la longueur des poutres a été respecté.

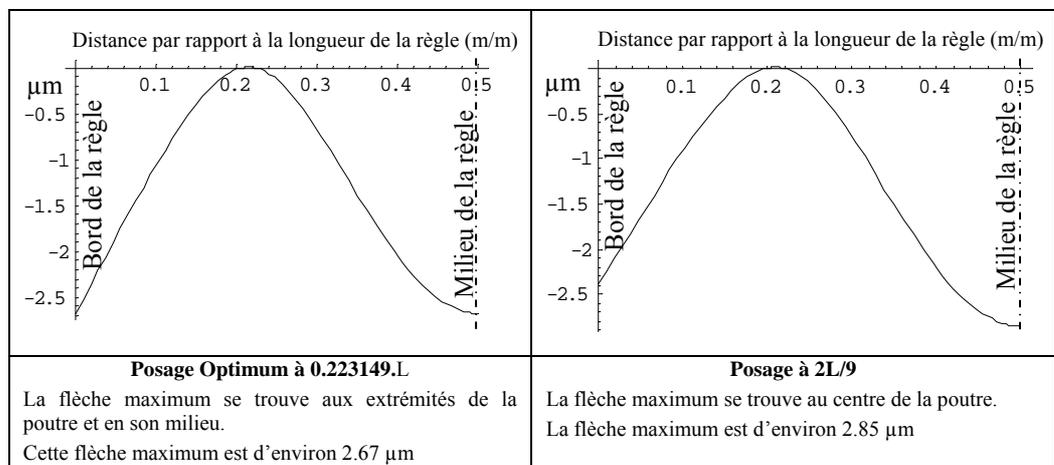


Figure 2 : Comparaison du posage au  $\frac{2}{9}$ <sup>ème</sup> et du posage optimum tracé sur la moitié de la règle utilisée

## Sensibilité du posage

Pour évaluer la sensibilité du posage, il suffit de tracer la dérivée de la flèche par rapport à  $d$  [Figure 3].

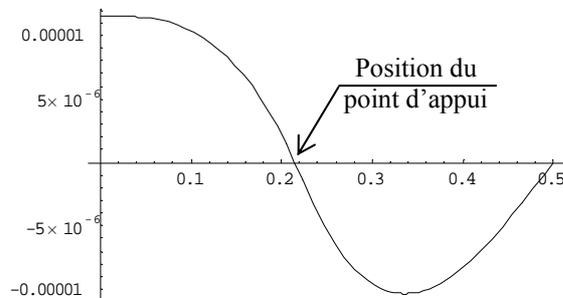


Figure 3 : Dérivée de la flèche sur la demi règle

La pente de la dérivée est importante au niveau du point d'appui optimal [Figure 3]. Il faut donc positionner avec précision les points d'appuis pour ne pas trop déformer les règles. Avec nos valeurs définies précédemment, si on effectue une application numérique, une erreur de positionnement des points d'appuis de 10 mm, ce qui est relativement faible, double la flèche de la règle.

Pour les mesures de rectitude, la flexion de règle conduit à ne pas mesurer la règle suivant la même ligne avant et après retournement ce qui aboutit à des incertitudes de mesure liées notamment à l'état de surface (rugosité) de la règle utilisée.





- **Détermination de  $\overrightarrow{OQ}$  (et donc des coordonnées de  $Q$ )**

Le vecteur colinéaire à  $OQ$  et normé s'écrit:

$$\frac{\overrightarrow{OQ}}{\|\overrightarrow{OQ}\|} = \begin{cases} u_x = \cos(\theta) \\ u_y = \sin(\theta) \\ u_z = \mathbf{0} \end{cases}$$

$\theta > \phi$  pour un flanc droit et  $\theta < \phi$  pour un flanc gauche.

Le vecteur  $\overrightarrow{OQ}$  a donc pour composantes:

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{cases} x = R_b \cdot \cos(\theta) \\ y = R_b \cdot \sin(\theta) \\ z = \mathbf{0} \end{cases}$$

- **Normale de contact - Détermination de  $\overrightarrow{QM}$**

Normale de contact :

Le vecteur unitaire, orthogonal, de direction  $QM$ , c'est-à-dire la normale de contact a pour composantes  $(u_y, -u_x, \mathbf{0})$  pour un flanc droit et  $(-u_y, u_x, \mathbf{0})$  pour un flanc gauche, soit :

$$\frac{\overrightarrow{QM}}{\|\overrightarrow{QM}\|} = \begin{cases} \eta \cdot u_x = \eta \cdot \sin(\theta) \\ -\eta \cdot u_y = -\eta \cdot \cos(\theta) \\ u_z = \mathbf{0} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \eta = \mathbf{1} & (\text{flanc droit}) \\ \eta = -\mathbf{1} & (\text{flanc gauche}) \end{cases}$$

Détermination de  $\overrightarrow{QM}$  :

$$\|\overrightarrow{QM}\| = \text{arc}(QP) = R_b \cdot (\theta - \phi)$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{QM} = \begin{cases} \eta \cdot R_b \cdot (\theta - \phi) \cdot \sin(\theta) \\ -\eta \cdot R_b \cdot (\theta - \phi) \cdot \cos(\theta) \\ \mathbf{0} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \eta = \mathbf{1} & (\text{flanc droit}) \\ \eta = -\mathbf{1} & (\text{flanc gauche}) \end{cases}$$

- **Equation paramétrique du flanc de la dent (coordonnées du point  $M$ )**

On peut écrire  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QM}$  soit les coordonnées du point  $M$  :

$$M \begin{cases} x = R_b \cdot \cos(\theta) + R_b \cdot (\theta - \phi) \cdot \sin(\theta) \\ y = R_b \cdot \sin(\theta) - R_b \cdot (\theta - \phi) \cdot \cos(\theta) \\ z = \text{cste} \end{cases}$$

## 1.2 Calcul du calage au premier point

On note  $r$  le rayon de la bille du palpeur. Le point M appartenant au flanc doit être décalé dans le sens de la normale pour obtenir le point C, centre de la bille du palpeur, soit:

$$C_{\text{théorique}} \begin{cases} x = R_b \cdot \cos(\theta) + R_b \cdot (\theta - \phi) \cdot \sin(\theta) + r \cdot \eta \cdot \sin(\theta) \\ y = R_b \cdot \sin(\theta) - R_b \cdot (\theta - \phi) \cdot \cos(\theta) - r \cdot \eta \cdot \cos(\theta) \\ z = \text{cste} \end{cases}$$

On suppose que l'écart suivant la normale est nul en ce premier point ce qui permettra de calculer les angles  $\theta$  et  $\phi$ . Le système se transforme de manière évidente en multipliant la première équation respectivement par  $\cos(\theta)$  et la seconde par  $\sin(\theta)$  et en faisant la somme.

$$\begin{cases} x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) = R_b \\ x \cdot \sin(\theta) - y \cdot \cos(\theta) = R_b \cdot (\theta - \phi) + r \cdot \eta \\ z = \text{cste} \end{cases}$$

Pour résoudre la première équation, on introduit un angle auxiliaire  $\xi$  tel que  $\cos(\xi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$  et  $\sin(\xi) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ . Cet angle représente l'angle entre l'origine et le centre de la bille du palpeur dans le plan XY et par rapport à l'axe X. Si la cote  $y$  est négative, on prendra  $\xi = 2\pi - \xi$  l'angle étant calculé par l'Arccosinus.

On peut alors écrire: 
$$\cos(\xi) \cdot \cos(\theta) + \sin(\xi) \cdot \sin(\theta) = \frac{R_b}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Soit: 
$$\cos(\xi - \theta) = \frac{R_b}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

On reprend la notation  $\eta = 1$  pour un flanc droit et  $\eta = -1$  pour un flanc gauche, on a:

$$\theta = \xi + \eta \cdot \text{Arc cos}\left(\frac{R_b}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

La seconde équation fournit  $\phi$ .

### 1.3 Calcul de l'écart suivant la normale

On reprend le jeu d'équations précédent mais on ajoute un écart suivant la normale  $\varepsilon$ .

$$C_{\text{mesuré}} \begin{cases} x = R_b \cdot \cos(\theta) + R_b \cdot (\theta - \phi) \cdot \sin(\theta) + (r + \varepsilon) \cdot \eta \cdot \sin(\theta) \\ y = R_b \cdot \sin(\theta) - R_b \cdot (\theta - \phi) \cdot \cos(\theta) - (r + \varepsilon) \cdot \eta \cdot \cos(\theta) \\ z = \text{cste} \end{cases}$$

Dans ce cas, les inconnues sont les angles  $\theta$  et  $\phi$  et l'écart suivant la normale  $\varepsilon$ .

$$\begin{cases} x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta) = R_b \\ x \cdot \sin(\theta) - y \cdot \cos(\theta) = R_b \cdot (\theta - \phi) + (r + \varepsilon) \cdot \eta \cdot \cos(\beta) \\ z = \text{cste} \end{cases}$$

L'angle  $\theta$  relève du même calcul que précédemment.

La deuxième équation fournit l'écart suivant la normale  $\varepsilon$ .



**Calage de la développante à la base :**

$$\beta = \theta - \frac{\text{Arc}MP}{Rb}$$

**Calage de la développante au primitif**

$$\varphi = \beta + \tan \alpha$$

**Point au primitif**

$$\begin{cases} Xp = Rb \cdot \sin \varphi + Rb \cdot \tan \alpha \cdot (-\cos \varphi) \\ Yp = Rb \cdot \cos \varphi + Rb \cdot \tan \alpha \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

$$\gamma_p = \text{Arc} \sin \frac{Xp}{\sqrt{Xp^2 + Yp^2}} \text{ est l'angle } \gamma \text{ définit par le point q sur le cercle primitif}$$

**Ecart suivant la normale  $\varepsilon$  des flancs droits des creux :**

$$\zeta = \text{Arc} \sin \left( \frac{Mx}{\sqrt{Mx^2 + My^2}} \right) \text{ si } My \geq 0$$

$$\zeta = \pi - \text{Arc} \sin \left( \frac{Mx}{\sqrt{Mx^2 + My^2}} \right) \text{ si } My < 0$$

$$\theta = \zeta + \text{Arc} \cos \left( \frac{Rb}{\sqrt{Mx^2 + My^2}} \right)$$

$$\varepsilon = \sqrt{(Mx - R_b \cdot \sin \theta)^2 + (My - R_b \cdot \cos \theta)^2} - r - R_b \cdot \text{Modulo} \left( \theta - \left( \beta - (k-1) \cdot \frac{2\pi}{Z} \right) \right)$$

k entier variant de 1 à Z

**Ecart suivant la normale  $\varepsilon$  des flancs droits des creux :**

$$\zeta = \text{Arc} \sin \left( \frac{Mx}{\sqrt{Mx^2 + My^2}} \right) \text{ si } My \geq 0$$

$$\zeta = \pi - \text{Arc} \sin \left( \frac{Mx}{\sqrt{Mx^2 + My^2}} \right) \text{ si } My < 0$$

$$\theta = \zeta + \text{Arc} \cos \left( \frac{Rb}{\sqrt{Mx^2 + My^2}} \right)$$

$$\varepsilon = \sqrt{(Mx - R_b \cdot \sin \theta)^2 + (My - R_b \cdot \cos \theta)^2} - r - R_b \cdot \text{Modulo} \left( -\theta - \left( -2 \cdot \gamma + \beta + \frac{\pi}{Z} + (k-1) \cdot \frac{2\pi}{Z} \right) \right)$$

k entier variant de 1 à Z

### 3 Etude de la courbure d'une dent

La surface est décrite par le point  $M \begin{vmatrix} x(\theta, h) \\ y(\theta, h) \\ z(\theta, h) \end{vmatrix}$ . On a 2 paramètres  $h$  et  $\theta$ .

La première forme quadratique caractérise le carré du vecteur vitesse du point considéré, soit :

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = g_{11} \cdot \dot{\theta}^2 + 2 \cdot g_{12} \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{h} + g_{22} \cdot \dot{h}^2$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \dot{x} = x_u \cdot \dot{u} \\ \dot{y} = y_\theta \cdot \dot{\theta} + y_h \cdot \dot{h} \\ \dot{z} = z_\theta \cdot \dot{\theta} + z_h \cdot \dot{h} \\ g_{11} = \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \\ g_{12} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial h} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial h} \\ g_{22} = \left( \frac{\partial x}{\partial h} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial h} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial h} \right)^2 \end{cases}$$

La seconde forme quadratique caractérise la projection du vecteur accélération sur la normale au point considéré, soit :

$$\ddot{M} \cdot \vec{n} = (M_{\theta\theta} \cdot \vec{n}) \dot{\theta}^2 + 2(M_{\theta h} \cdot \vec{n}) \dot{\theta} \dot{h} + (M_{hh} \cdot \vec{n}) \dot{h}^2 = b_{11} \cdot \dot{u}^2 + 2b_{12} \cdot \dot{u} \dot{v} + b_{22} \dot{v}^2$$

$$\text{avec : } \begin{cases} b_{11} = \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} n_x + \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} n_y + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} n_z \\ b_{12} = \frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial h} n_x + \frac{\partial^2 y}{\partial \theta \partial h} n_y + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial h} n_z \\ b_{22} = \frac{\partial^2 x}{\partial h^2} n_x + \frac{\partial^2 y}{\partial h^2} n_y + \frac{\partial^2 z}{\partial h^2} n_z \end{cases}$$

Les courbures principales sont les valeurs minimum et maximum des courbures définies dans le plan contenant le point étudié et sa normale. Ce sont les valeurs propres du couple formé des matrices  $g_{ij}$  et  $b_{ij}$ . Les directions principales sont les vecteurs propres correspondant. Les directions principales sont orthogonales.

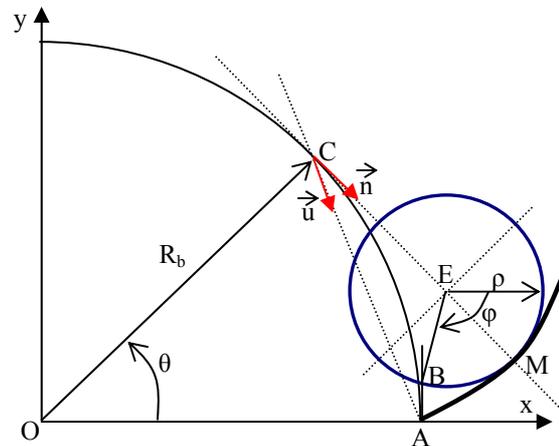
Les valeurs propres se calculent tel que le déterminant soit nul, c'est-à-dire :

$$\det \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda g_{11} & b_{12} - \lambda g_{12} \\ b_{12} - \lambda g_{12} & b_{22} - \lambda g_{22} \end{vmatrix} = 0$$

$$(b_{11} - \lambda g_{11})(b_{22} - \lambda g_{22}) - (b_{12} - \lambda g_{12})^2 = 0$$

La courbe de la dent d'engrenage est de  $-\frac{1}{R\theta}$

Comparaison de courbure d'un flanc d'engrenage par rapport à un cercle



$$C \begin{cases} R_b \cdot \cos \theta \\ R_b \cdot \sin \theta \end{cases}$$

$$A \begin{cases} R_b \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{n} \begin{cases} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{cases}$$

$$M \begin{cases} R_b \cdot \cos \theta + R_b \cdot \theta \cdot \sin \theta \\ R_b \cdot \sin \theta - R_b \cdot \theta \cdot \cos \theta \end{cases}$$

$$E \begin{cases} R_b \cdot \cos \theta + R_b \cdot \theta \cdot \sin \theta + \rho \cdot \sin \theta \\ R_b \cdot \sin \theta - R_b \cdot \theta \cdot \cos \theta - \rho \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Recherche des coordonnées de B

$$B \begin{cases} X_B = Rb \\ Y_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_B - X_E = \rho \cdot \cos \varphi \\ Y_B - Y_E = \rho \cdot \sin \varphi \end{cases}, \text{ soit } Y_B = Y_E + \rho \cdot \sin \left( \text{ArcCos} \left( \frac{X_B - X_E}{\rho} \right) \right)$$

Donc la distance d(A,B) recherchée est de  $Y_B$





# ANNEXE 4

## Etapes Monte Carlo

### *Démarche pour la géométrie de la machine et les fonctions équivalentes*

**Etape 1 :** Lecture des fichiers :  
- mesures en repère pièce,  
- position en repère machine,  
- étalonnage de la KOBA.

**Etape 2 :** Création de la matrice de correction de la constante palpeur

**Etape 3 :** Mise en place des données pour le calcul des fonctions équivalentes  
Récupération du centre en repère machine  
Récupération des données théoriques de l'engrenage considéré

**Etape 4 :** Mise en place des données du Monte Carlo

**Etape 5 :** Mise en place des axes en repère machine des différents défauts

**Etape 6 :** Construction du Monte Carlo pour la détermination des incertitudes

**Etape 6.1. : Modification des données brutes via les données du monte Carlo**

Pour les mesures de KOBA  
Pour les mesures de Rectitude

**Etape 6.2. : Modification des données du P.V. de la KOBA**

**Etape 6.3. : Traitement des différents défauts**

**Etape 6.3.1. : Traitement de la justesse  $xTx$**

- Moyenne des 2 mesures de répétabilité 1 et celles de répétabilité 2
- Utilisation de l'algorithme de décalage pour déterminer  $xTx$  et la constante palpeur  $CpX$
- Orientation du défaut car les mesures sont effectuées de  $+X$  vers  $-X$
- Interpolation du défaut par un polynôme de Tchebychev de degré 3 pour le calcul de la perpendicularité et des fonctions équivalentes

**Etape 6.3.2. : Traitement du lacet  $xRz$**

- Correction des données brutes par la connaissance de la constante palpeur  $CpX$
- Moyenne des 2 mesures de répétabilité 1 et celles de répétabilité 2
- Calcul de la distance entre les deux mesures suivant l'axe  $y$

- Calcul du lacet et détermination de la justesse  $xTx$  recalculée
- Orientation du défaut car les mesures sont effectuées de  $+X$  vers  $-X$ )
- Interpolation du défaut par un polynôme de Tchebychev de degré 3 pour le calcul de la perpendicularité et des fonctions équivalentes

#### **Etape 6.3.3. : Traitement de la justesse $yTy$**

- Moyenne des 2 mesures de répétabilité 1 et celles de répétabilité 2
- Utilisation de la matrice de détermination des constantes palpeurs  
=> Détermination de  $yTy$  et  $CpY$
- Interpolation du défaut par un polynôme de Tchebychev de degré 3 pour le calcul de la perpendicularité et des fonctions équivalentes

#### **Etape 6.3.4. : Traitement de la rectitude $xTy$**

- Moyenne des sites de 5 points par mesure
- Moyenne des 2 mesures de répétabilité 1 et celles de répétabilité 2
- Calcul de la rectitude  $xTy$
- Redressement de la rectitude pour avoir zéro aux deux bouts
- Interpolation du défaut par un polynôme de Tchebychev de degré 3 pour le calcul de la perpendicularité et des fonctions équivalentes

#### **Etape 6.3.5. : Traitement de la rectitude $yTx$**

- Même traitement que  $xTy$

#### **Etape 6.3.6. : Traitement de la perpendicularité**

##### **Etape 6.3.6.1. : Traitement de la perpendicularité $+XY$**

- Moyenne des 2 mesures de répétabilité 1 et celles de répétabilité 2
- Utilisation de la matrice de détermination des constantes palpeurs  
=> Détermination des longueurs brutes mesurées et  $Cp45P$
- Correction des longueurs brutes mesurées par la connaissance de l'orientation de la KOB A en repère machine et des défauts de rectitude, justesse et lacet de la machine déterminés
- Calcul du défaut de perpendicularité 1 à partir de la connaissance de la pente de l'évolution du défaut de longueur (longueur mesurée - longueur étalon) en fonction de la longueur étalon

##### **Etape 6.3.6.2. : Traitement de la perpendicularité $-XY$**

- Même traitement que pour le calcul de la perpendicularité  $+XY$  pour obtenir le défaut de perpendicularité 2

##### **Etape 6.3.6.2. : Calcul du défaut global de perpendicularité**

- Le défaut de perpendicularité global est évalué comme étant la moyenne des 2 défauts de perpendicularité calculés.

#### **Etape 6.4. : Détermination des fonctions Equivalentes**

Création des écarts dus à la machine par rapport à la définition théorique de l'engrenage considéré

Décomposition des divers points par cercle de même rayon

---

ANNEXE 4  
ETAPES MONTE CARLO

Traitement des écarts de chacun des cercles par optimisation aux moindres carrés (4 vecteurs de sensibilité) pour la détermination :

- la rectitude équivalente,
- la justesse équivalente,
- le calage des flancs droits,
- le calage des flancs gauches.

**Etape 7** : Stockage des données après gestion des décimales

**Etape 8** : Récupération des données et tracé des résultats





# DETERMINATION DES INCERTITUDES DE MESURES SUR MACHINES A MESURER TRIDIMENSIONNELLES APPLICATION AUX ENGRENAGES

**RESUME:** L'accréditation des Machines à Mesurer Tridimensionnelles (MMT) est envisageable pour les engrenages à condition d'évaluer les incertitudes de mesures, les mesurands étant parfaitement définis par la normalisation. Nos travaux s'appuient principalement sur la méthode de Monte Carlo et sur des techniques de permutations linéaires ou circulaires pour séparer les défauts et chiffrer les incertitudes de mesures associées, conformément au Guide pour l'expression des incertitudes de mesures (GUM). L'analyse de l'effet de la géométrie de la MMT sur la mesure d'une pièce de forme circulaire ou d'une roue dentée montre qu'il est impossible de caractériser complètement la géométrie de la MMT à partir d'une pièce supposée parfaite. Cependant, nous avons mis en place un concept de « défauts équivalents » propre à la géométrie de la machine et à la définition théorique de la pièce étudiée. Les systèmes de palpage utilisés ont été évalués afin de corriger les défauts systématiques identifiables et chiffrer les incertitudes associées. En prenant l'exemple d'un engrenage cylindrique droit, trois approches sont comparées : l'analyse des caractéristiques métrologiques de la MMT, la méthode de permutation et celle de comparaison. La méthode proposée permet de diminuer les incertitudes de mesures et peut être généralisée pour différentes applications. Nous proposons comme exemple l'étude des taux de pénétration et des volumes d'usure sur des explants de prothèses totales de hanches.

**Mots-clés:** *incertitudes, Machines à Mesurer Tridimensionnelle (MMT), géométrie machine, cales à gradins, engrenages, prothèses totales de hanches*

# DETERMINATION OF MEASUREMENTS UNCERTAINTIES ON COORDINATE MEASURING MACHINES APPLICATION TO GEARS

**ABSTRACT:** Because measurands are perfectly defined in standards, Coordinate Measuring Machines (CMM) accreditation is possible for gears provided measurements uncertainties are assessed. In accordance with the Guide to the expression of Uncertainty in Measurement (GUM), our work is mainly based on the Monte Carlo method and linear or circular error separation techniques to differentiate defaults and quantify associated measurements uncertainties. Analysis of the CMM geometry effect on a circular ring or gear measurement shows that it is impossible to characterize completely the CMM geometry with a part supposed to be perfect. However, we set up a concept of "Equivalent defaults" characterizing the CMM geometry for the theoretical definition of the studied part. The probing systems used were assessed in order to compensate the identifiable systematic defaults and quantify associated uncertainties. Based on the example of a cylindrical gear, three different approaches are compared: the analysis of the CMM metrological characteristics, by error separation method and by comparison. This contribution in term of uncertainties measurements has numerous applications; for example the study of penetration rates and wear volumes of explanted total hip prostheses.

**Keywords:** *uncertainty, Coordinate Measuring Machine (CMM), machine geometry, step gauges, gears, total hips prostheses.*