



**HAL**  
open science

# Développement de techniques de prévision de pluie basées sur les propriétés multi-échelles des données radar et satellites

Jose Luis Macor

► **To cite this version:**

Jose Luis Macor. Développement de techniques de prévision de pluie basées sur les propriétés multi-échelles des données radar et satellites. Planète et Univers [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2007. Français. NNT : . pastel-00003420

**HAL Id: pastel-00003420**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00003420>**

Submitted on 1 Sep 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES**

**THÈSE**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES**

Spécialité: SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'ENVIRONNEMENT

Présentée et soutenue publiquement par

José Luis MACOR

Le 9 Octobre 2007 à Champs-sur-Marne

École Doctorale: Ville Environnement

Titre de la thèse:

**Développement de Techniques de Prévision de Pluie Basées sur les  
Propriétés Multi-échelles des Données Radar et Satellites**

Directeur de thèse : Daniel SCHERTZER, CEREVE, ENPC, France

Co-directeur de thèse : Victor POCHAT, FICH, UNL, Argentine

Devant le jury composé de :

M	Juan C. BERTONI	Univ. de Córdoba, Argentina	Rapporteur
Mme	Isabel de LIMA	Inst. Polytechnique de Coimbra, Portugal	Rapporteur
M.	Guy DELRIEU	LTHE, Grenoble, France	Examineur
M.	Pierre HUBERT	ENSMP, Fontainebleu, France	Examineur
M.	Christian ONOF	Imperial College, London, UK	Examineur
M	Pierre RIBSTEIN	SISYPHE, Paris, France	Examineur



## Remerciements

Le travail présenté dans cette mémoire est une initiative de M. Daniel SCHERTZER, chercheur du Centre Nationale de Recherches Météorologiques (CNRM) de Météo-France et du Centre d'Enseignement et Recherche Eau, Ville et Environnement (CEREVE) de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, qui m'a accepté comme doctorant dans le cadre du projet Multiplicité d'échelles en Hydrométéorologie (MHYM). Il à dirigé cette thèse et a su me léguer un héritage scientifique consistant, je le témoigne ma profonde reconnaissance et gratitude.

Je remercie M Victor POCHAT, qui m'a accordé sa confiance en acceptant de co-diriger cette thèse en permettant souscrire un accord de co-tutelle entre l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées et l'Université Nationale du Littoral de Santa Fe, Argentine.

J'en profite pour remercier, Ioulia TCHIGUIRINSKAIA, Angelbert BIAOU, et Pietro BERNARDARA qui m'ont apporté un soutien très précieux dans le cadre de ce travail, particulièrement pour leurs suggestions dans les analyses multifractales des données radar.

M. Jean-Michel VEYSSEIRE de Météo-France Toulouse pour nous avoir grandement facilité l'accès aux données radar ayant servi aux analyses multifractales. Je le témoigne ma reconnaissance.

Mme Isabel DE LIMA PEDROSO et M. Juan Carlos BERTONI qui ont accepté de rapporter ma thèse je leur exprime mes sincères remerciements.

Je remercie Guy DELRIEU, Pierre HUBERT, Christian ONOF et Pierre RIBSTEIN d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je voudrais également témoigner ma reconnaissance aux autorités, chercheurs, doctorants, stagiers et collègues du CEREVE, qui ont partagé ces trois ans de travail et qui m'ont encouragé et donné leur amitié.

Je remercie aussi le programme ALβAN, programme de bourses de l'Union Européenne pour l'Amérique Latine (Bourse E04D046728AR), et le projet Floodsite de l'Union Européenne pour leur soutien financier partiel à cette étude.

Mes remerciements vont particulièrement à mon épouse Sandra et mes enfants Fiorella et Giuliano qui m'ont suivi dans cette aventure. Pour leur patience, amour et compréhension.

A mes parents qui m'ont encouragé et soutenu toujours.

## Résumé

Les précipitations, notamment la pluie, constituent un phénomène naturel qui a un très fort impact socio-économique, surtout lorsqu'elles ont un caractère torrentiel. Pour prendre en compte cet aspect, les systèmes hydrologiques d'alerte et de prévision ont besoin d'une information spatio-temporelle plus détaillée et des prévisions fiables de précipitation à très court terme. Ceci a une importance particulière dans de situations d'urgence (crues éclair, gestion de réseaux d'assainissement urbain, des barrages, etc.).

Les champs de nuages et de précipitations demeurent les champs les plus difficiles à simuler pour les actuels modèles de prévision météorologiques. En effet, les échelles spatio-temporelles de ces modèles restent largement supérieures à celles qui sont pertinentes pour les précipitations : les mécanismes des précipitations sont essentiellement paramétrisés et les pluies ne sont estimées que sur des échelles relativement grossières. De plus, le temps de mise en route de ces modèles est souvent prohibitif pour des prévisions à court terme.

Différentes méthodes statistiques de traitement des images satellites et radar ont été développées pour combler ce déficit de prévision. Ces méthodes prennent en compte un grand nombre d'information à petite échelle, mais elles n'ont pas de base physique, en particulier elles ne prennent pas en compte la dynamique fortement non linéaire des cellules orageuses.

Une alternative permettant a priori de dépasser, à l'aide des méthodes multifractales, les limites des précédentes méthodes a été récemment considérée. Elle est fondée sur les modèles de cascade et prend en compte la hiérarchie des structures ainsi que leurs interactions non linéaires sur une grande gamme d'échelle spatio-temporelles, l'anisotropie entre espace et temps, et causalité. Fondamentalement, les processus de cascade développent des gradients de contenu en eau des plus en plus grands sur des fractions de plus en plus petites de l'espace physique. Ce type de modèles a l'avantage d'avoir un nombre limité de paramètres qui ont une signification physique forte et peuvent être évalués soit théoriquement, soit empiriquement.

Dans cette thèse on présente la mise en oeuvre d'une procédure correspondant à cette alternative et son application à l'événement du 8-9 septembre 2002 à Nîmes, en utilisant des données radar fourni par la Direction de la Climatologie de Météo-France, pour déterminer

leurs caractéristiques multifractales. On présente aussi la mise en oeuvre d'une procédure pour la simulation et prévision de champs de pluie multifractale et l'étude de la loi de perte de prédictibilité attendue.

**Mots clés :** Prévision de pluie, simulation multifractale, modèles de cascade, prévision déterministe, prévision stochastique, prévision immédiate, prédictibilité, radar météorologique.

## Resumen

Las precipitaciones, principalmente la lluvia, constituyen un fenómeno natural que tiene un muy fuerte impacto socio económico, sobre todo cuando tienen un carácter torrencial. Para tener en cuenta este aspecto, los sistemas hidrológicos de alerta y de previsión necesitan información espacio temporal más detallada y previsiones de precipitación confiables a muy corto plazo. Esto tiene una gran importancia particularmente en situaciones de emergencia (riadas, manejo de sistemas de drenaje urbano, de embalses, etc.).

Los campos de nubes y de precipitaciones resultan los campos más difíciles de simular mediante los modelos de previsión meteorológica actuales. En efecto, las escalas espacio temporales de estos modelos resultan ampliamente superiores a aquellas involucradas por las precipitaciones: los mecanismos de la precipitación son esencialmente parametrizados y las lluvias solo son estimadas sobre escalas relativamente grandes. Además, el tiempo de implementación de estos modelos es a menudo restrictivo para las previsiones a corto plazo.

Diferentes métodos estadísticos de tratamiento de imágenes de satélite y radar se han desarrollado para salvar este déficit de previsión. Estos métodos toman en cuenta un gran número de información a pequeña escala, pero no tienen un sustento físico, en particular no tienen en cuenta la dinámica fuertemente no lineal de las células de tormenta.

Una alternativa que, con la ayuda de los métodos multifractales, permite a priori superar los límites de los métodos precedentes, ha sido considerada recientemente. Está basada en los modelos de cascada y tiene en cuenta la jerarquía de estructuras así como sus interacciones no lineales sobre una amplia gama de escalas espacio temporales, la anisotropía entre espacio y tiempo, y causalidad. Fundamentalmente, los procesos de cascada desarrollan gradientes de contenido de agua cada vez más grandes sobre fracciones cada vez más pequeñas del espacio físico. Este tipo de modelos tiene la ventaja de tener un número limitado de parámetros que tienen una significación física fuerte y pueden ser evaluados tanto teóricamente como empíricamente.

En esta tesis presentamos la puesta en marcha de un procedimiento correspondiente a esta alternativa y su aplicación al evento del 8-9 septiembre de 2002 en Nîmes, utilizando datos de radar suministrados por la Dirección de la Climatología de Météo-France, para

determinar sus características multifractales. Se presenta también la implementación de un procedimiento para la simulación y previsión de campos de lluvia multifractales y el estudio de la ley de pérdida de previsibilidad esperada.

**Palabras claves:** Previsión de lluvia, Simulación multifractal, modelos de cascada, previsión determinista, previsión estocástica, previsión inmediata, previsibilidad, radar meteorológico.

## Abstract

Precipitations, in particular the rain, constitute a natural phenomenon which has a very strong socio-economical impact, especially when they are torrential feature. To take into account this aspect, the hydrological systems of alert and forecast need more detailed space-time information and reliable forecast for precipitations in the very short term. This has a particular importance in emergencies (flash flood, urban drainage network management, dam management, etc.).

The fields of clouds and precipitations remain the fields most difficult to simulate for the current weather forecasting models. Indeed, the space-time scales of these models remain largely higher than those which are relevant for precipitations: the mechanisms of precipitations are mostly parameterised and the rains are estimated only on relatively large scales. Furthermore, the long spin-up time of these models impede to deliver short-term forecasts.

Various statistical methods of processing of satellite and radar images have been developed to make up this deficit of forecast. These methods take into account a great number of information on a small scale, but they do not have a physical base, in particular they do not take into account the strongly nonlinear dynamics of the stormy cells.

An alternative which allow a priori to exceed, using the multifractal methods, the limits of the preceding methods was recently considered. It is based on the cascade models and takes into account the hierarchy of the structures as well as their nonlinear interactions over a wide range of space-time scales, the anisotropy between space and time, and causality. Basically, the cascade processes develop gradients of more and more great water contents on more and more small fractions of physical space. This type of models empirically has the advantage of to have a very limited number of parameters which have a strong physical significance and can be evaluated either theoretically or empirically.

In this thesis we present the implementation of a procedure corresponding to this alternative and its application to the event from September 8-9, 2002 in Nîmes, using radar data provided by the Direction of Climatology of Météo-France, to determinate their

multifractal characteristics. We present also the implementation of a procedure for simulation and forecast of multifractal rain fields and the study of the law or predictability loss.

**Key words:** Rain forecast, multifractal simulation, cascade models, determinist forecast, stochastic forecast, nowcasting, predictability, meteorological radar.

# Table de Matières

<b>REMERCIEMENTS.....</b>	<b>3</b>
<b>RESUME.....</b>	<b>5</b>
<b>RESUMEN.....</b>	<b>7</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>9</b>
<b>TABLE DE MATIERES.....</b>	<b>11</b>
<b>LISTE DE FIGURES.....</b>	<b>14</b>
<b>1 INTRODUCTION.....</b>	<b>18</b>
1.1 HISTORIQUE SUR LA PREVISION METEOROLOGIQUE.....	18
1.2 IMPORTANCE DE LA PREVISION IMMEDIATE.....	22
1.3 CADRE D'ETUDE.....	24
1.4 BUT DE LA THESE.....	26
1.5 PLAN DE LA THESE.....	27
<b>2 THEORIE DES FRACTALS ET MULTIFRACTALS.....</b>	<b>29</b>
2.1 INTRODUCTION.....	29
2.2 FRACTALS.....	29
2.2.1 <i>Les types de fractals</i> .....	30
2.2.2 <i>Fractals déterministes unique échelle</i> .....	30
2.2.3 <i>Fractals déterministes multi-échelle</i> .....	31
2.2.4 <i>Fractals aléatoires</i> .....	31
2.2.5 <i>Fractals extraits à partir de la nature</i> .....	31
2.3 NOTION DE DIMENSION ET CODIMENSION FRACTALES.....	33
2.3.1 <i>Introduction</i> .....	33
2.3.2 <i>Généralisation de la notion de dimension</i> .....	35
2.3.3 <i>Calcul de la dimension fractale</i> .....	36
2.3.4 <i>Analyse fractale de l'occurrence de pluie</i> .....	38
2.3.5 <i>Notion de codimension</i> .....	41
2.4 MULTIFRACTALS.....	42
2.4.1 <i>Introduction</i> .....	42
2.4.2 <i>Propriétés des multifractals</i> .....	43
2.4.2.1 <i>Fonction codimension</i> .....	43
2.4.2.2 <i>Fonction d'échelles des moments</i> .....	45
2.4.2.3 <i>La transformation de Legendre</i> .....	47
2.4.3 <i>Multifractals universels</i> .....	48
2.5 NOTION DE CASCADES.....	49
2.5.1 <i>Introduction</i> .....	49
2.5.2 <i>Principe des cascades</i> .....	52
2.5.3 <i>Cascade discrète</i> .....	53
2.5.3.1 <i>Le <math>\beta</math>-modèle</i> .....	53
2.5.3.2 <i>L'<math>\alpha</math>-modèle</i> .....	56
2.5.3.3 <i>Autres modèles de cascades</i> .....	58
2.5.4 <i>Types de Cascades</i> .....	58
2.5.4.1 <i>Cascades spatiales auto-similaires</i> .....	59
2.5.4.2 <i>Cascades spatiales auto-affinés</i> .....	60
2.5.4.3 <i>Cascades non auto-similaires: invariance d'échelle généralisée</i> .....	61
2.5.4.4 <i>Cascades continues et universelles</i> .....	62
2.6 CONCLUSIONS.....	64
<b>3 ANALYSE MULTIFRACTALE.....</b>	<b>65</b>
3.1 INTRODUCTION.....	65
3.2 METHODE DE DISTRIBUTION DE PROBABILITE.....	65
3.3 METHODE DU MOMENT TRACE.....	67
3.4 METHODE DU DOUBLE MOMENT TRACE.....	68
3.5 SPECTRE D'ENERGIE.....	71

3.6	ANALYSE MULTIFRACTALE DES DONNEES RADAR.....	72
3.6.1	<i>Cas d'application: historiques et données</i> .....	72
3.6.2	<i>Détermination des Paramètres Multifractals</i> .....	76
3.6.2.1	Analyse spectrale.....	76
3.6.2.2	Détermination de $\alpha$ et $C_1$ .....	78
3.6.2.3	Divergence des moments et estimations biaisées.....	80
3.6.2.4	Invariance d'échelle des distributions de probabilité.....	81
3.6.2.5	Analyse espace-temps.....	82
3.7	CONCLUSION.....	85
<b>4</b>	<b>SIMULATION DE CASCADES MULTIFRACTALES.....</b>	<b>86</b>
4.1	INTRODUCTION.....	86
4.2	LE SOUS-GENERATEUR DE LEVY.....	87
4.3	SIMULATION D'UN CHAMP MULTIFRACTAL DANS L'ESPACE.....	88
4.3.1	<i>Cascades multifractales conservatives</i> .....	89
4.3.1.1	Cas unidimensionnel.....	89
4.3.1.2	Généralisation au cas multidimensionnel.....	91
4.3.2	<i>Cascade multifractals non-conservatives</i> .....	94
4.4	SIMULATION DE UN CHAMP MULTIFRACTAL EN ESPACE ET TEMPS.....	97
4.4.1	<i>Cas conservatif</i> .....	97
4.4.2	<i>Cas non conservatif</i> .....	98
4.5	GENERATION NUMERIQUE DES MULTIFRACTALS ESPACE ET TEMPS.....	101
4.6	ETUDES DES VARIATIONS DES PARAMETRES $\alpha$ ET $C_1$ .....	105
4.6.1	<i>Variation de <math>\alpha</math></i> .....	105
4.6.2	<i>Variation de <math>C_1</math></i> .....	105
4.7	CONCLUSIONS.....	106
<b>5</b>	<b>PREVISION ET PREDICTIBILITE MULTIFRACTALES DES CHAMPS DE PLUIE.....</b>	<b>109</b>
5.1	INTRODUCTION.....	109
5.2	CONSIDERATIONS GENERALES.....	109
5.3	PREMIERS EXEMPLES DE PREVISIONS MULTIFRACTALES.....	110
5.3.1	<i>Mode déterministe de prévision multifractale</i> .....	113
5.3.2	<i>Mode stochastique de prévision multifractale</i> .....	115
5.4	LIMITES DE PREDICTIBILITE.....	118
5.4.1	<i>Introduction</i> .....	118
5.4.2	<i>Analyse de prédictibilité</i> .....	119
5.5	RELAXATION DES STRUCTURES DU PASSE.....	127
5.5.1	<i>Le cadre théorique</i> .....	131
5.5.2	<i>Une approximation opérationnelle</i> .....	136
5.5.3	<i>Une perspective de prévision probabiliste</i> .....	140
5.5.4	<i>Conclusion</i> .....	141
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.....</b>	<b>142</b>
<b>7</b>	<b>ANNEXES.....</b>	<b>146</b>
	ANNEXE A: THEOREME DE LIMITE CENTRALE GENERALISEE ET VARIABLES DE LEVY.....	146
	ANNEXE B: TRANSFORMEE DE FOURIER ET THEOREME DE CONVOLUTION.....	150
	<i>Transformée de Fourier</i> .....	150
	<i>Transformée de Fourier en deux ou plus dimensions</i> .....	151
	<i>Convolution</i> .....	152
	<i>Convolution en utilisant FFT</i> .....	153
	<i>Traitement des effets d'extrémité par remplissage de zéros</i> .....	155
	ANNEXE C: SPECTRE D'ENERGIE CORRELEE ET DECORRELEE.....	158
	ANNEXE D: PROGRAMMES FORTRAN90 UTILISES.....	160
	<b>REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>166</b>
	<b>LISTE DE SYMBOLES.....</b>	<b>173</b>
	<b>ARTICLES.....</b>	<b>177</b>

SCALE PROBLEM IN URBAN FLOODS : A MULTISCALE APPROACHE IN SPECIAL ASPECTS OF URBAN FLOOD  
MANAGEMENT. HAMBURGER WASSERBAU-SCHRIFTIEN, HAMBURG, PP. 53-60. .... 177  
METHODES MULTIFRACTALES APPLIQUEES A LA PREVISION DE PLUIE EN UTILISANT DES DONNEES RADAR IN  
LA HOUILLE BLANCHE, NUM. 4 (AOUT 2007) PP. 92. .... 183

# LISTE DE FIGURES

FIGURE 1-1. DIAGRAMME SCHEMATIQUE DE LA PHENOMENOLOGIE METEOROLOGIQUE (D'APRES ORLANSKI, 1975 ; STULL, 1988 ; THUNIS ET BORNSTEIN, 1996 ; SCHERTZER ET AL, 1997). L' AIRE EN COULEUR JEUNE INDIQUE LE RANGE DE ECHELLES ESPACE-TEMPS DES MODELES METEOROLOGIQUES ACTUELS. ON PEUT VOIR QUE UN CERTAIN NOMBRE DE PHENOMENES ATMOSPHERIQUES NE SONT PAS BIEN MODELISES PAR CES MODELES. ...	24
FIGURE 1-2. IMAGE RADAR DE SIDNEY, AUSTRALIE LE 01/12/2006, SOURCE: BUREAU OF METEOROLOGY, AUSTRALIAN GOVERNMENT .....	25
FIGURE 1-3. IMAGE SATELLITE D'EUROPE OCCIDENTALE LE 01/12/2006 A 12:00 TU, SOURCE: METEOFRANCE ...	25
FIGURE 1-4. SCHEMA DE LA PREVISION STOCHASTIQUE. UN PASSE DEDUIT A PARTIR DES DONNEES OBSERVEES A L' AIDE DE LA MEMOIRE DU SYSTEME, QUI EST COMMUN A TOUTES LES TRAJECTOIRES FUTURES ADMISSIBLES (THEORIQUEMENT EN NOMBRE INFINI). DU FAIT DE LA NONLINEARITE DU SYSTEME, CES TRAJECTOIRES DIVERGENT RAPIDEMENT ET CREENT AINSI DES LIMITES DE PREDICTIBILITE .....	27
FIGURE 2-1. EXEMPLE DE CONSTRUCTION D'ENSEMBLES FRACTALS DIFFERENTS POUR LES TROIS PREMIERS PAS DE LA PROCEDURE ITERATIVE: (A) FRACTAL DETERMINISTE UNIQUE ECHELLE: ENSEMBLE DE CANTOR AVEC UN FACTEUR DE REDUCTION $r=1/3$ ; (B) FRACTAL DETERMINISTE MULTIPLE ECHELLE: ENSEMBLE DE CANTOR A DEUX ECHELLES AVEC DES FACTEURS DE REDUCTION $r_1=1/2$ (GAUCHE) ET $r_2=1/4$ (DROITE); (C) FRACTAL ALEATOIRE: ENSEMBLE DE CANTOR OU LES FACTEURS DE REDUCTION SONT PRIS ALEATOIREMENT DANS CHAQUE PAS DE LA GENERATION (D'APRES DE LIMA, 1998). .....	32
FIGURE 2-2. REPRESENTATION DE L' OCCURRENCE DE PLUIE JOURNALIERE PENDANT 19 ANNEES D' OBSERVATIONS DANS LA STATION INTA LABOULAYE (ARGENTINE). CETTE REPRESENTATION EVOQUE L' OBJET OBTENU AVEC UN GENERATEUR DE L' ENSEMBLE DE CANTOR. CHAQUE LIGNE CORRESPOND A UNE ANNEE D' OBSERVATIONS. ....	33
FIGURE 2-3. DIMENSION DANS L' ESPACE EUCLIDIEN: (A) $D=1$ , $N=(\ell_0/\ell)^1=4$ ; (B) $D=2$ , $N=(\ell_0/\ell)^2=16$ ; (C) $D=2$ , $N=(\ell_0/\ell)^3=64$ . ....	34
FIGURE 2-4. DETERMINATION DE LA DIMENSION D' UN OBJET FRACTAL: A) IMAGE ORIGINEL DE TAUX DE PLUIE DU RADAR DE NIMES, FRANCE, AVEC UNE RESOLUTION DE 256X256 PIXELS; B) : IMAGE D' OCCURRENCE DE PLUIE DE RESOLUTION 256X256 PIXELS; C) : IMAGE DEGRADEE EN 128X128 PIXELS; D) : IMAGE DEGRADEE EN 64X64 PIXELS; E) : IMAGE DEGRADE EN 32X32 PIXELS. ....	37
FIGURE 2-5. METHODE DE COMPTAGE DE BOITES: DIAGRAMME LOGARITHMIQUE POUR DIFFERENTES RESOLUTIONS DE L' IMAGE RADAR DE NIMES. LA DROITE CONTINUE INDIQUE UNE INVARIANCE D' ECHELLE POUR LES DIFFERENTES TAILLES DU PIXEL ET SA PENTE LA DIMENSION FRACTALE DE L' IMAGE $D_F=1.75$ . LA PENTE DE LA DROITE POINTILLEE INDIQUE LA DIMENSION DE L' ESPACE BIDIMENSIONNEL $D=2$ . ....	37
FIGURE 2-6. PLUIE JOURNALIERE A LABOULAYE, ARGENTINE, POUR LA PERIODE 1982-2000. LA SERIE CONTIENT 6940 VALEURS AVEC UNE PLUIE MOYENNE ANNUELLE DE 940 MM. LA VALEUR MAXIMALE ENREGISTREE A ETE DE 204 MM. ....	38
FIGURE 2-7. METHODE DE COMPTAGE DE BOITES: DIAGRAMME LOG-LOG DE LA PLUIE JOURNALIERE CONSIDEREE. LE GRAPHIQUE MONTRE LES ECHELLES DU TEMPS DE 1 JOUR JUSQU' A 256 JOURS. ....	39
FIGURE 2-8. METHODE DE COMPTAGE DE BOITES: DIAGRAMME LOG-LOG DE LA PLUIE JOURNALIERE CONSIDEREE. LE GRAPHIQUE MONTRE LES ECHELLES DU TEMPS DE 1 JOUR JUSQU' A 256 JOURS. LES VALEURS DES SEUILS DE LA PLUIE JOURNALIERE SONT 0.1, 1, 5, 7.5, 10, 15 ET 20 MM/JOUR. ....	40
FIGURE 2-9. RELATION ENTRE LE RANGE D' INTENSITES ET LE NIVEAU DE RESOLUTION TEMPORELLE DE L' OBSERVATION D' UN PROCESSUS CONTINUE. ....	43
FIGURE 2-10. ILLUSTRATION DE LA CASCADE TEMPORELLE DE PRECIPITATION OBSERVEE A LABOULAYE (ARGENTINE, 1982-2000) (SCHERTZER ET AL., 2007) A DES RESOLUTIONS DE PLUS EN PLUS FAIBLES (DE HAUT EN BAS), QUI EST PLUTOT SEMBLABLE A CELLE OBSERVEE A NIMES (FRANCE, 1975-1990) (LADROY ET AL., 1993) ; (A) LE TAUX DE PLUIE $R_\lambda$ SUR $N$ JOURS ( $N=1, 10, 30, 90, 180, 365$ ) AVEC LES CORRESPONDANTES RESOLUTIONS $\lambda = 1/N$ ; (B) LES SINGULARITES CORRESPONDANTS $\gamma = \text{Log}(R_\lambda) / \text{Log}(\lambda)$ . CES GRAPHIQUES ILLUSTRENT LE FAIT FONDAMENTAL QUE TANDIS QUE LES TAUX DE PLUIE SONT SENSIBLEMENT DEPENDANTS DE L' ECHELLE, LEURS SINGULARITES NE LE SONT PAS. LES SINGULARITES SONT LES VARIABLES PRINCIPALES POUR L' ANALYSE ET LES SIMULATIONS MULTIFRACTALES. ....	44
FIGURE 2-11. ILLUSTRATION SCHEMATIQUE DE LA FONCTION $c(\gamma)$ .....	46
FIGURE 2-12. ILLUSTRATION SCHEMATIQUE DE LA FONCTION D' ECHELLE DES MOMENTS $K(q)$ .....	46
FIGURE 2-13. ILLUSTRATION DES TRANSFORMATIONS DE LEGENDRE EN RELIANT GRAPHIQUEMENT LES FONCTIONS ASSOCIEES AVEC LES DISTRIBUTIONS DE PROBABILITE, $c(\gamma)$ ET AVEC LES MOMENTS STATISTIQUES $K(q)$ . A) $K(q)$ OBTENUE DE $c(\gamma)$ ; B) $c(\gamma)$ OBTENUE DE $K(q)$ (ADAPTEE DE TESSIER ET AL., 1993). ....	48
FIGURE 2-14. DIAGRAMME SCHEMATIQUE DE CONSTRUCTION D' UNE CASCADE MULTIPLICATIVE DISCRETE A PARTIR D' UN GENERATEUR INVARIANT D' ECHELLE. ....	54

FIGURE 2-15. ILLUSTRATION D'UN PAS DE LA CASCADE DU B-MODELE. A GAUCHE, LE MODELE COMMENCE PAR UNE DENSITE DE FLUX UNIFORME. A DROIT, APRES UN PAS DE LA CASCADE, LE MODELE PRODUIT UN SOUS-TOURBILLON "MORT" ET UN SOUS-TOURBILLON "VIF" RELIE A LA SINGULARITE $\Lambda^c$ .....	55
FIGURE 2-16. EXEMPLE DE CASCADE ANISOTROPE CONSTRUITE SUIVANT LE B-MODELE. ON ILLUSTRE LA STRUCTURE DE DEPART ET 3 PAS DE LA CASCADE AYANT LES PARAMERES $c=0.13$ , $H_t=1/3$ (D'APRES BIAOU, 2004). .....	56
FIGURE 2-17. ILLUSTRATION D'UN PAS DE LA CASCADE DU $\alpha$ -MODELE. A GAUCHE, LE MODELE COMMENCE PAR UNE DENSITE DE FLUX UNIFORME. A DROITE, APRES UN PAS DE LA CASCADE, LE MODELE PRODUIT UN SOUS-TOURBILLON "MOINS ACTIF ", RELIE A LA SINGULARITE $\gamma^* < 0$ , ET UN SOUS-TOURBILLON "PLUS ACTIFS" RELIE A LA SINGULARITE $\gamma^* > 0$ . .....	57
FIGURE 2-18. LA CONTRACTION-DILATATION $T_\lambda$ DEPLACE (PAR HOMOTHETIE) EN ECHELLE LE CHAMP $\epsilon_\lambda$ . CE NOUVEAU CHAMP DEPLACE, MULTIPLIE PAR UNE REALISATION INDEPENDANTE DE $\epsilon_\lambda$ , EST IDENTIQUE EN DISTRIBUTION A $\epsilon_{\lambda\lambda}$ (D'APRES MARSAN, 1998). .....	60
FIGURE 3-1. METHODE DTM: COMPORTEMENT DES DIVERS MOMENTS STATISTIQUES NORMALISES D'ORDRE $Q$ DES PUISSANCES $h$ DU PROCESSUS MULTIFRACTAL $\epsilon_\lambda$ .....	70
FIGURE 3-2. DETERMINATION DU PARAMETRE $\alpha$ PAR LA METHODE DTM. LA PENTE DE LA PARTIE LINEAIRE DU $\text{LOG}(K(Q,h))$ PAR RAPPORT A $\text{LOG}(h)$ DONNE UNE ESTIMATION DU PARAMETRE MULTIFRACTAL $\alpha$ . LA TENDANCE HORIZONTALE DES EXTREMITES DE LA COURBE CORRESPOND A DE PETITES OU DE GRANDES VALEURS DE L'ECHANTILLON. ....	70
FIGURE 3-3. IMAGE NOAA16 DU 9 SEPTEMBRE 2002 A 12H 20 UTC QUI MONTRE LA PERTURBATION ORAGEUSE QUI PRODUIT DES CRUES ECLAIRES DANS LE SUD-EST DE LA FRANCE (SOURCE: METEO-FRANCE) .....	73
FIGURE 3-4. SIX IMAGES SUCCESSIVES DE TAUX DE PLUIE DU RADAR METEOROLOGIQUE DE NIMES, FRANCE. LES IMAGES ONT UNE RESOLUTION SPATIALE DE 1 KM X 1 KM ET SONT SEPARÉES PAR DES INTERVALLES DE 5 MINUTES. A DROITE DE CHAQUE IMAGE ON TROUVE L'ECHELLE DE TAUX DE PLUIE EN MM. ....	75
FIGURE 3-5. SPECTRE D'ENERGIE (EN UNITES ARBITRAIRES) POUR QUELQUES IMAGES DU RADAR METEOROLOGIQUE DE NIMES CORRESPONDANTES A L'EVENEMENT DU 8 AU 9 SEPTEMBRE 2002 .....	77
FIGURE 3-6. SPECTRE D'ENERGIE (EN UNITES ARBITRAIRES) SPATIAL MOYEN DES 256 IMAGES RADAR. ON PEUT DEDUIRE LA VALEUR DE LA PENTE SPECTRALE $b \approx -1.69$ A PARTIR D'UNE REGRESSION LINEALE POUR $k > 15$ . CETTE VALEUR DE $b$ EST TRES PROCHE DE LA VALEUR THEORIQUE $-5/3$ DE KOLMOGOROV-OBUKHOV. ....	77
FIGURE 3-7. LE $\text{LOG}(\text{DTM})$ VERSUS $\text{LOG}(\lambda)$ POUR QUELQUES VALEURS DE $\eta$ (D'EN BAS EN HAUT $\eta=0.52, 3.02, 5.25, 6.31, 8.30$ ET $10.0$ ) EN UTILISANT $Q=1.5$ POUR LES 256 IMAGES CONSECUTIVES DU RADAR.....	79
FIGURE 3-8. LE $\text{LOG}(K(Q,\eta))$ VERSUS $\text{LOG}(\eta)$ DU DTM ESTIME POUR QUELQUES MOMENTS STATISTIQUES ( $Q=1.2, 1.5, 2.0$ , ET $2.5$ ). LA PENTE DES DROITES DONNE LE VALEUR DU PARAMETRE $\alpha=0.84$ . LA VALEUR DE $C_1$ A ÉTÉ ESTIMÉE $C_1=0.44$ POUR $Q=1.5$ .....	79
FIGURE 3-9. FONCTION D'ECHELLE DES MOMENTS EMPIRIQUE $K(Q)$ POUR LE DOMAINE SPATIAL (LIGNE POINTILLEE). LA COURBE CONTINUE EST LA FONCTION D'ECHELLE DES MOMENTS THEORIQUE AVEC PARAMETRES $\alpha=0.84$ ET $C_1=0.44$ . LA DROITE POINTILLEE FINE CORRESPOND A L'ASYMPTOTE LINEAIRE POUR DES MOMENTS $Q$ PLUS GRAND QUE $Q_D$ . ....	80
FIGURE 3-10. DETAIL DE LA FIGURE 3-9 EN MONTRANT LES FONCTIONS D'ECHELLE DE MOMENTS EMPIRIQUE ET THEORIQUE POUR LES ORDRES DE MOMENTS $Q < 1$ . ....	81
FIGURE 3-11. PROBABILITE $\text{Pr}(R \geq r)$ DE DEPASSER UN SEUIL D'INTENSITE FIXE $r$ POUR LES 256 IMAGES RADAR. LA LIGNE DROITE DE PENTE (EN VALEUR ABSOLUE) EGALE A 3.0, CORRESPONDE A UNE CHUTE ALGEBRIQUE DE LA DISTRIBUTION DE PROBABILITE POUR LES INTENSITES EXTREMES. CETTE PENTE EST L'ORDRE DE MOMENT CRITIQUE POUR LA DIVERGENCE DE MOMENTS STATISTIQUES.....	82
FIGURE 3-12. ANALYSE ESPACE-TEMPS : A) SOMME (PROJECTION) TOUT AU LONG DE L'AXE DU TEMPS, ANALYSE DE L'INVARIANCE D'ECHELLE SPATIALE ET DETERMINATION DE LA FONCTION D'ECHELLE DES MOMENTS $K_x(Q)$ ; B) SOMME (PROJECTION) TOUT AU LONG DE L'AXE DE ESPACE $x$ , ANALYSE DE L'INVARIANCE D'ECHELLE TEMPORELLE ET DETERMINATION DE LA FONCTION D'ECHELLE DES MOMENTS $K_t(Q)$ . ....	83
FIGURE 3-13. ANISOTROPIE $K_x(Q)$ VERSUS $K_t(Q)$ POUR LES DIRECTIONS $x$ (ESPACE) ET $t$ (TEMPS). L'INVERSE DE LA PENTE $S$ DE CETTE RELATION CONDUISE A $H_t \approx 0.35$ .....	84
FIGURE 3-14. ANISOTROPIE $K_t(Q)$ VERSUS $K_x(Q)$ POUR LES DIRECTIONS $x$ (ESPACE) ET $t$ (TEMPS). L'INVERSE DE LA PENTE $S$ DE CETTE RELATION CONDUISE A $H_t \approx 0.30$ .....	84
FIGURE 4-1. SOUS-GENERATEUR DE LEVY AVEC PARAMETRES: $\alpha=1.8$ , $C_1=0.1$ , $\Lambda=512$ . LES VALEURS DU SOUS-GENERATEUR ONT ÉTÉ INVERSEES POUR MIEUX MONTRER L'INTERMITTENCE DU BRUIT BLANC, DONC L'AXE VERTICAL EST NEGATIF.....	88
FIGURE 4-2. IMAGES D'UNE CASCADE CONSERVATIVE AUTO-SIMILAIRE AVEC PARAMETRES: $\alpha=1.8$ , $C_1=0.1$ , $H_t=0$ , $\Lambda=512$ . A) IMAGE BIDIMENSIONNELLE, L'ECHELLE D'INTENSITE EST LOGARITHMIQUE. B) IMAGE 3D, ON PEUT NOTER PLUS EN DETAILLE L'INTERMITTENCE DU FLUX.....	92

FIGURE 4-3. IMAGES D'UNE CASCADE CONSERVATIVE AUTO-AFFINE AVEC PARAMETRES $\alpha=1.8$ , $C_1=0.1$ , $H_v=0.33$ , $\Lambda=512$ . A) IMAGE BIDIMENSIONNELLE, L'ECHELLE D'INTENSITE EST LOGARITHMIQUE. B) IMAGE 3D, ON PEUT NOTER UNE ATTENUATION DE LA DENSITE DU FLUX. ....	93
FIGURE 4-4. CASCADE MULTIFRACTALE NON CONSERVATIVE AUTO-SIMILAIRE AVEC PARAMETRES: $\alpha=1.8$ , $C_1=0.1$ , $H=1/3$ , $H_v=0$ , $\Lambda=512$ . A) IMAGE BIDIMENSIONNELLE, L'ECHELLE D'INTENSITE EST LOGARITHMIQUE. B) IMAGE 3D, ON PEUT NOTER LE LISAGE DU CHAMP (MOINS INTERMITTENT) PAR RAPPORT AU FLUX CONSERVATIF ASSOCIE (FIGURE 4-2).....	96
FIGURE 4-5. REALISATION DE UNE CASCADE CONSERVATIVE ESPACE-TEMPS (DEUX DIMENSIONS EN ESPACE) AVEC PARAMETRES: $\alpha=1.5$ , $C_1=0.2$ , $H_t=1/3$ ET $\Lambda=256$ . LES IMAGES CORRESPONDENT A DES SECTIONS SPATIALES CONSECUTIVES: DE GAUCHE A DROITE ET D'EN HAUT EN BAS POUR DIFFERENTS TEMPS $T=0, 1, 2, 3, 4$ ET 5. ....	99
FIGURE 4-6. REALISATION DE UNE CASCADE NON CONSERVATIVE ESPACE-TEMPS (DEUX DIMENSIONS EN ESPACE) AVEC PARAMETRES: $\alpha=1.5$ , $C_1=0.2$ , $H=0.1$ , $H_t=1/3$ ET $\Lambda=256$ . LES IMAGES CORRESPONDENT A DES SECTIONS SPATIALES CONSECUTIVES : DE GAUCHE A DROITE ET D'EN HAUT EN BAS POUR DIFFERENTS TEMPS $T=0, 1, 2, 3, 4$ ET 5.....	100
FIGURE 4-7. SIMULATION D'UN CHAMP DE PRECIPITATION ET PROCESSUS INVERSE. LES VALEURS CORRESPONDANTES AUX GENERATEURS SONT NEGATIVES MAIS DANS CETTE FIGURE SONT PRISES EN VALEUR ABSOLUE A FIN MIEUX ILLUSTRER LEURS CARACTERISTIQUES. ON PEUT OBSERVER QUE L'OPERATION DE DECONVOLUTION INTRODUIT DES INSTABILITES DANS LE GENERATEUR (IMAGE A DROITE) CE QUI EXPLIQUE LA DIFFERENCE ENTRE LES DEUX GENERATEURS DE LA CASCADE. ....	104
FIGURE 4-8. ETUDE DU PARAMETRE $\alpha$ . SIMULATION DU MODELE DE CASCADE POUR $C_1$ FIXE A 0.2 ET POUR $\alpha$ VARIANT (D'HAUT EN BAS) 2, 1.5, 1.2, 0.8, 0.5 RESPECTIVEMENT, $H=0$ . ET $H_t=1/3$ . LA COLONNE DE GAUCHE CORRESPONDE AUX SOUS-GENERATEURS ET A DROITE LES CHAMPS CONSERVATIFS CORRESPONDANTS. ....	107
FIGURE 4-9. ETUDE DU PARAMETRE $C_1$ . SIMULATION DU MODELE DE CASCADE POUR $\alpha$ FIXE A 1.5 ET POUR $C_1$ VARIANT (D'HAUT EN BAS ET DE GAUCHE A DROIT) 0.1, 0.2, 0.5, 0.9, 1.2, 1.5 RESPECTIVEMENT, $H=0$ . ET $H_t=1/3$ . ....	108
FIGURE 5-1. DIAGRAMME SCHEMATIQUE DE LA PHENOMENOLOGIE METEOROLOGIQUE (ADAPTEE DE ORLANSKI, 1975, ATKINSON, 1981). LA LIGNE DROITE (EN COULEUR ROUGE), AJOUTEE PAR SCHERTZER ET AL., 1997, CORRESPOND A LA LOI D'ECHELLE DE KOLMOGOROV $\tau_\ell \sim \ell^{2/3}$ . ....	111
FIGURE 5-2. COMPARAISON DU CHAMP PREVU (IMAGES A DROITE) AVEC LE CHAMP DE REFERENCE (IMAGES A GAUCHE) POUR UNE REALISATION AVEC LES PARAMETRES $\alpha=1.8$ , $C_1=0.1$ , $H=1/3$ , $H_t=1/3$ ET $\Lambda=256$ , ET POUR LES TEMPS : $T=T_0$ , $T=T_0+\Delta T$ , $T=T_0+2\Delta T$ , $T=T_0+3\Delta T$ , $T=T_0+5\Delta T$ , $T=T_0+10\Delta T$ . LA PALETTE DE COULEURS DES IMAGES QUI REPRESENTE L'ECHELLE D'INTENSITES EST LOGARITHMIQUE. ....	114
FIGURE 5-3. COMPARAISON DU CHAMP PREVU (IMAGES A DROITE) AVEC LE CHAMP DE REFERENCE (IMAGES A GAUCHE) POUR UNE REALISATION AVEC LES PARAMETRES $\alpha=1.8$ , $C_1=0.1$ , $H=1/3$ , $H_t=1/3$ ET $\Lambda=32$ . CETTE FIGURE ILLUSTRE LA VARIATION PLUS LENTE DES GROSSES STRUCTURES PAR RAPPORT AUX PLUS PETITES STRUCTURES. LA PALETTE DE COULEURS DES IMAGES QUI REPRESENTE L'ECHELLE D'INTENSITES EST LOGARITHMIQUE.....	116
FIGURE 5-4. COMPARAISON AVEC LE CHAMP DE REFERENCE (IMAGES A GAUCHE), UNE REALISATION AVEC LES PARAMETRES $\alpha=1.5$ , $C_1=0.2$ , $H=1/3$ , $H_t=0.75$ ET $\Lambda=256$ AVEC LA MOYENNE (IMAGE A DROITE) DE 20 AUTRES REALISATIONS POSSIBLES AYANT LES MEMES PARAMETRES MULTIFRACTALS. LA PALETTE DE COULEURS DES IMAGES QUI REPRESENTE L'ECHELLE D'INTENSITES EST LOGARITHMIQUE.....	117
FIGURE 5-5. EVOLUTION TEMPORALE DE TROIS REALISATIONS MULTIFRACTALES: A ET B CORRESPONDANTES A UNE PREVISION STOCHASTIQUE AVEC PARAMETRES $\alpha=1.5$ , $C_1=0.1$ , $H=0.1$ , $H_t=0.25$ , ET C A UNE PREVISION DETERMINISTE. LA RESOLUTION DES IMAGES EST $\Lambda=256$ . LA PALETTE DE COULEURS EST LOGARITHMIQUE. ....	122
FIGURE 5-6. VARIATION DES STRUCTURES A PETITES ECHELLES DANS LE FUTUR (IMAGES EN BAS) EN COMPARAISON AVEC CELLE DE L'ENSEMBLE DES STRUCTURES (IMAGE EN HAUT) : A) POUR LA REALISATION A, B) POUR LA REALISATION B. LA PALETTE DE COULEURS EST LOGARITHMIQUE.....	124
FIGURE 5-7. CORRELATIONS $C^{(q)}$ POUR $q=1.5$ DES FLUX DES REALISATIONS A ( $t=1$ ) ET B ( $t=2$ ), RESPECTIVEMENT CELLES DU FLUX TOTAL $\epsilon^i_\lambda(\bar{x}, t)$ (COURBE NOIR, GENERE PAR $\gamma^i_\lambda(\bar{x}, t)$ ), DU FLUX PASSE $\tilde{\epsilon}^i_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$ (COURBE ROUGE, GENERE PAR $\gamma^i_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$ ) ET DU FLUX FUTUR $\epsilon^i_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$ (COURBE VERTE, GENERE PAR $\gamma^i_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$ ). EN ACCORD AVEC LES EQUATIONS (5.14, 5.15, 5.19) LA CORRELATION DES $\epsilon^i_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$ NE FAIT QUE FLUCTUER AUTOUR DE L'UNITE, CELLES DES $\epsilon^i_\lambda(\bar{x}, t)$ ET $\tilde{\epsilon}^i_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$ SONT SIMILAIRES ET DECREISSENT SUIVANT UNE LOI DE PUISSANCE DONT L'EXPOSANT EST PROCHE DE L'EXPOSANT THEORIQUE $K(q,2)/(1-H_t) \approx 0.8$ LES DROITES D'AJUSTEMENT PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRS SONT REPRESENTEES EN POINTILLE SUR LA FIGURE. ....	126

FIGURE 5-8. LOI DU DECLIN DU RAPPORT D'ECHELLE $\lambda(t)$ JUSQU'AUQUEL LES DEUX PREVISIONS STOCHASTIQUES (ICI A ET B, A PARTIR DE $t_0$ ) RESTE ETROITEMENT DEPENDANTES. LA CORRELATION ENTRE LA COURBE THEORIQUE (LOI DE PUISSANCE, EQ. 5.14) ET EMPIRIQUE EST DE 0.97. ....	127
FIGURE 5-9. SPECTRES D'ENERGIE (EN UNITES ARBITRAIRES), RESPECTIVEMENT CEUX DU FLUX TOTAL $\epsilon^i_\lambda(\bar{x}, t)$ (COURBE NOIR, GENERE PAR $\gamma^i_\lambda(\bar{x}, t)$ ), DU FLUX PASSE $\tilde{\epsilon}^i_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$ (COURBE ROUGE, GENERE PAR $\gamma^i_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$ ) ET DU FLUX FUTUR $\epsilon^i_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$ (COURBE VERTE, GENERE PAR $\gamma^i_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$ ) A GAUCHE POUR LA REALISATION A ( $t=1$ ) ET A DROITE POUR LA REALISATION B ( $t=2$ ). LES SPECTRES SONT CONSIDERES A PARTIR DU TEMPS $T=T_0$ JUSQU'A $T=T_0+17$ . ....	129
FIGURE 5-10. EXEMPLES (A) DE SOUS-GENERATEUR ET (B) GENERATEUR POUR $\alpha=1.5$ . ....	132
FIGURE 5-11. TRANSFORMEE DE FOURIER $\hat{G}(\omega, \omega_0)$ DE LA FONCTION DE TRANSFERT TRANSFORMANT LE GENERATEUR PASSE $\Gamma_p$ EN SA RELAXATION $\tilde{\Gamma}_p$ ....	132
FIGURE 5-12. EN COMPARAISON AVEC LES OBSERVATIONS (LIGNE DU HAUT), EXEMPLE DE TROIS PREVISIONS STOCHASTIQUES A, B ET C, CONDITIONNEES PAR LA RELAXATION DES STRUCTURES OBSERVEES DANS LE PASSE. LA PALETTE DES COULEURS EST LOGARITHMIQUE ET COUVRE LA GAMME 0.1 – 500 MM. LA RESOLUTION DES IMAGES EST $\lambda=256$ . ....	138
FIGURE 5-13. EVOLUTION TEMPORELLE DU RAPPORT D'ECHELLE JUSQU'AUQUEL LES PREVISIONS SONT VALABLES. ....	139
FIGURE 5-14. ÉVOLUTION TEMPORELLE DE LA MOYENNE SPATIALE DES PRECIPITATIONS OBSERVEES (COURBE EN GRAS) ET DES PREVISIONS A, B ET C. ....	139
FIGURE 5-15. ÉVOLUTION SPATIALE DES OBSERVATIONS (IMAGE EN HAUT) ET DES TROIS PREVISIONS STOCHASTIQUES A, B ET C. LA PALETTE DES COULEURS EST LOGARITHMIQUE ET COUVRE LA GAMME 0.1 – 500 MM/H. LA RESOLUTION DES IMAGES EST $\lambda=256$ . ....	140
FIGURE 6-1. EXEMPLE DE MOSAÏQUE D'IMAGES RADAR PRODUITE PAR METEO-FRANCE (COURTOISIE PH. LADOY) ....	142
FIGURE B-1. CONVOLUTION DE DEUX FONCTIONS. LE SIGNAL $f(x)$ EST FILTRE PAR CONVOLUTION PAR UNE FONCTION DELTA DE DIRAC EN $x'$ . LE RESULTAT EST LE MEME SIGNAL D'ENTREE MAIS DECALE $x'$ . ....	154
FIGURE B-2. CONVOLUTION DE FONCTIONS DISCRETES. NOTEZ COMMENT LA FONCTION DE REPONSE POUR LES TEMPS NEGATIFS EST ARRANGEE ET STOCKEE A L'EXTREMITE DROITE DE $G_j$ . (D'APRES PRESS ET AL., 1992) ....	155
FIGURE B-3. PROBLEME DE POLLUTION NUMERIQUE DE LA CONVOLUTION. NON SEULEMENT LA FONCTION DE REPONSE DOIT ETRE REARRANGEE COMME CYCLIQUE MAIS AUSSI LA FONCTION ORIGINALE. DONC UNE PARTIE DE CHAQUE EXTREMITE DE LA FONCTION ORIGINALE EST POLLUEE PAR LA CONVOLUTION. ....	156
FIGURE B-4. LE REMPLISSAGE DE ZEROS COMME SOLUTION AU PROBLEME DE POLLUTION NUMERIQUE. LA FONCTION ORIGINALE EST ETENDUE PAR DE ZEROS, EN SERVANT A DEUX BUT: I) LES ZEROS NE DISTURBENT PAS LA VRAIE CONVOLUTION ET II) TANDIS QUE LA FONCTION ORIGINALE CONVOLUE SUR LA REGION DE ZEROS, CETTE REGION PEUT ETRE JETEE. ....	157
FIGURE D-1. COUPURE AU TEMPS $T=T_0$ DU NOYAU DE TYPE FILTRE DE BUTTERWORTH UTILISE PAR LES PROGRAMMES DE SIMULATION ....	163
FIGURE D-2. COUPURE AU TEMPS $T=T_0$ DU NOYAU RANGE POUR LA CONVOLUTION SUIVANT LA METHODE PRESENTE DANS L'ANNEXE B. ....	163
FIGURE D-3. SCHEMA GENERAL DU PROGRAMME DE SIMULATION ET PREVISION STOCHASTIQUE MULTIFRACTALE. ....	164
FIGURE D-4. SCHEMA DU PROGRAMME SPECTRE POUR DETERMINER LE SPECTRE D'ENERGIE D'UNE SERIE D'IMAGES. ....	165
FIGURE D-5. SCHEMA DU PROGRAMME DTM POUR LA DETERMINATION DES PARAMETRES MULTIFRACTALS $\alpha$ ET $C1$ . ....	165
FIGURE D-6. SCHEMA DU PROGRAMME ANISOTROPIE POUR DETERMINER L'EXPOSANT D'ANISOTROPIE ESPACE-TEMPS. ....	165

# 1 Introduction

## 1.1 Historique sur la prévision météorologique

Dans la chronologie historique, les mesures météorologiques régulièrement enregistrées ont commencé à être effectuées au 18<sup>ème</sup> siècle. Les premières cartes synoptiques du temps, en fonction de la température, de la pression atmosphérique et de la vitesse et force des vents, ont été réalisées en 1820 par l'astronome et physicien allemand H.W Brandes (1777-1834).

Les stations météorologiques se sont multipliées progressivement, d'abord en Europe, puis dans le monde entier. Les prévisions ont commencé à être faites grâce à la possibilité de communiquer rapidement des informations, d'abord par le télégraphe (depuis 1837), puis par le téléphone (depuis 1876). Le premier rapport météorologique a été, en 1848, par le quotidien londonien Daily News et en France, on commença à établir des cartes quotidiennes du temps, dès 1855.

Un échange d'observations météorologiques fut organisé à l'occasion du Congrès International de météorologie de Vienne, en 1873, qui créa l'O.M.I. (Organisation météorologique internationale), remplacée en 1951 par l'O.M.M. (Organisation météorologique mondiale) dont le siège est à Genève.

En 1904, Vilhelm Bjerknes fut le premier à proposer que la prévision du comportement de l'atmosphère pourrait être traitée comme un problème de physique mathématique posé en fonction des conditions initiales. La discipline de la prévision numérique du temps fut fondée en 1922 par la publication du livre *Weather Prediction by Numerical Process*, du mathématicien britannique L. F. Richardson. Deux décennies avant l'invention de l'ordinateur, Richardson envisagea de faire résoudre numériquement, par une armée de calculateurs humains, les équations développées par Bjerknes. La vision pionnière de Richardson commença à porter ses fruits en 1950, alors que Charney, Fjortoft et von Neumann réussirent la première prévision numérique du temps par ordinateur. Les premiers programmes de prévisions numériques opérationnelles furent instaurés au début des années 1960.

Dans une approche déterministe, le but de la prévision numérique météorologique est de prédire le temps avec les lois de la physique, des techniques mathématiques et des ordinateurs. Elle se base sur un modèle déterministe : le temps qu'il fait à un instant donné n'est pas le fruit du hasard. Il est le produit de l'état de l'atmosphère à l'instant précédent et il sera la base de l'état de l'atmosphère à l'instant suivant. Une prévision numérique se base sur trois conditions :

- Les lois de la physique de l'atmosphère (hydrodynamique des fluides et thermodynamique) qui décrivent comment l'état de l'atmosphère se développe à partir d'un état précédent.
- Le temps actuel sur Terre.
- Moyens de calcul pour résoudre les équations mathématiques dans un délai plus court que la période de temps couvert par la prévision.

Pour démarrer une prévision numérique, il faut connaître les paramètres météorologiques (température, force et direction du vent, pression, humidité, etc.) sur une maille qui couvrent toute ou une grande partie de la Terre. Pratiquement, la résolution spatiale de cette maille est de 15 à 200km le long de la surface de la Terre et de quelques centaines de mètres jusqu'à une altitude de 10000m. A partir de ces conditions initiales, on peut faire un petit pas dans le futur et calculer l'état de l'atmosphère pour un instant plus tard. Pour des raisons de précision ce pas de temps ne doit pas dépasser quelques minutes, mais en utilisant successivement le résultat d'un calcul comme entrée pour un calcul suivant, on peut finir par calculer l'état de l'atmosphère sur plusieurs jours.

Basées sur des milliers de observations météorologiques sur la terre ferme, sur l'océan, sur des radiosondes en atmosphère et sur des observations par satellites, les données brutes sont de type et de qualité inégale et leur distribution sur terre est très hétérogène, donc une importante étape consiste à analyser et à réduire ces données pour les projeter sur une maille régulière de plusieurs centaines de milliers de points. Pour cela on doit recourir aux superordinateurs.

Pour des prévisions à plus long terme (au-delà de deux ou trois jours), il devient nécessaire d'augmenter la couverture du modèle à un hémisphère complet ou encore à tout le globe, afin de bien traiter les phénomènes encore lointains qui se propageront vers la zone d'intérêt. Pour la même raison, la maille du modèle est répartie de manière uniforme sur le

globe. Les modèles hémisphériques étant tombés en désuétude, ce type de prévision échoit au *modèle global*.

Pour les prévisions à court terme (en général moins de 6 heures), l'état de l'atmosphère dans des régions éloignées importe peu. Une perturbation présentement sur une région éloignée de celle d'intérêt mettra quelques jours à se propager et à se faire sentir. On peut alors choisir de concentrer une zone de maille fine du modèle sur la région d'intérêt, négligeant ainsi les phénomènes lointains. On parle alors d'un *modèle régional*.

En théorie, en augmentant la résolution du modèle, on en augmenterait le réalisme et on réduirait le besoin de recourir à la paramétrisation; toutefois, cela ne peut se faire qu'à un coût informatique et économique considérable, surtout s'il faut obtenir la prévision à l'intérieur d'échéances serrées.

D'autre part, l'idée de faire une prévision déterministe unique n'est pas conforme à la « méthode scientifique », dans le sens où les résultats de toute prévision scientifique sont incomplets sans une estimation de l'erreur dont ils sont entachés suite aux incertitudes affectant certains éléments du processus de prévision (Tennekes, 1991).

Il pourrait sembler facile d'estimer l'erreur associée à une prévision numérique du temps en utilisant une erreur moyenne déduite du traitement d'un grand nombre de cas du passé; cependant, l'atmosphère est chaotique, ce qui implique, non seulement que la précision de la prévision peut être sensible à de petites incertitudes dans les conditions initiales, mais aussi que l'amplification de l'erreur initiale dépend elle-même de l'état initial de l'atmosphère (Palmer, 2000).

Par leur nature, les phénomènes météorologiques extrêmes sont souvent associés à des développements atmosphériques intenses à assez petite échelle. Tels développements se produisent en général dans des conditions de forte instabilité de l'écoulement, ce qui suggère que leur prévision, plus que d'autres, sera sensible aux petites incertitudes affectant la connaissance de l'état initial. Dans de telles situations, s'appuyer sur une unique prévision déterministe risque de ne pas être fiable, ce que manifeste souvent l'incohérence d'un jour à l'autre de telles prévisions (Atger, 2000).

Une nouvelle approche probabiliste a donc été développée, celle de la *prévision d'ensemble*. La prévision d'ensemble sacrifie la résolution afin de pouvoir consacrer des ressources informatiques à faire tourner simultanément de nombreux exemplaires de modèles sur le même cas de prévision. Dans chaque cas, l'analyse est délibérément rendue légèrement différente des autres membres de l'ensemble, à l'intérieur des incertitudes intrinsèques de mesure ou d'analyse. Les scénarios plus ou moins divergents des prévisions offertes par les membres de l'ensemble permettent de quantifier la prédictibilité de l'atmosphère et d'offrir une marge d'erreur statistique sur la prévision. Le défi dans la conception d'un tel système est de faire en sorte que les fluctuations qu'on y observe constituent un signal représentatif de l'incertitude naturelle de la dynamique atmosphérique.

Certains systèmes de prévision d'ensemble (SPE) font aussi varier les méthodes de paramétrage des modèles membres de l'ensemble afin qu'une partie des fluctuations des prévisions représente les incertitudes de modélisation. Dans la même veine, il y a un intérêt marqué, dans la communauté de recherche sur les prévisions d'ensembles, envers les ensembles multi-modèles (c'est-à-dire combinant des modèles de différentes conceptions) et l'agrégation de SPE de différents pays en un super-ensemble. Il existe en ce moment deux efforts concrets en ce sens, soit le Système nord-américain de prévision d'ensemble (Canada, États-Unis, Mexique) et le "THORPEX Interactive Grand Global Ensemble", ou TIGGE (sous la coordination de l'Organisation météorologique mondiale).

La prévision de la structure spatio-temporelle à petite échelle des événements intenses de précipitations est cruciale pour l'évaluation des risques d'inondation dans de petits bassins versants et secteurs urbains. En l'absence d'un modèle déterministe fiable et complet de précipitations à petite échelle, on recourt à l'utilisation de modèles stochastiques de désagrégation pour produire des prévisions d'ensemble de précipitations à employer comme entrée aux modèles de transformation pluie-débit. Une procédure de désagrégation consiste d'un algorithme stochastique que permet de générer un ensemble de réalisations possibles du champ de pluie à petite échelle en partant d'un champ de pluie prévu sur de grandes échelles (Rebora et al., 2005).

Beaucoup de méthodologies ont été proposées pour la désagrégation de champs de pluie à cette date. Ces algorithmes peuvent être groupés en trois familles principales : (1) modèles autorégressifs non linéaires (Mejia et Rodriguez-Iturbe, 1974; Bell, 1987; Guillot et

Lebel, 1999), (2) processus basés sur la superposition de cellules orageuses (modèles cluster) (Waymire et al., 1984; Rodriguez-Iturbe et al., 1986; Northrop, 1998; Wheeler et al., 2000; Willems, 2001), (3) cascades multifractales (Lovejoy et Mandelbrot, 1985 ; Schertzer et Lovejoy, 1987a ; Gupta et Waymire, 1993; Over et Gupta, 1996; Menabde et al., 1997b; Deidda, 2000; Biaou, 2004).

Dans le cadre de cette dernière famille de procédures, on propose une nouvelle technique de simulation et prévision de champs de pluie que peut être considéré comme une alternative complémentaire aux modèles stochastiques déjà mentionnés.

## **1.2 Importance de la prévision immédiate**

A mesure que la population augmente et elle se concentre dans les zones urbaines et franges côtières des continents, les conséquences des événements naturels extrêmes ont un impact humain de plus en plus lourd. Non seulement les séismes, les phénomènes volcaniques et tsunamis requièrent systèmes de surveillance, de prévision hydrologique et d'alerte précoce. Les événements hydriques de ces dernières années (des inondations en Europe centrale en août 2002, des crues éclairées au sud de la France en septembre 2002; l'ouragan Katrina à la Nouvelle Orléans en août 2005; des inondations en Sumatra, Indonésie, décembre 2006; des inondations en Santa Fe, Argentine, avril 2003 et mars 2007; etc.) nous rappellent que les catastrophes majeures peuvent être aussi météohydrologiques et fréquentes.

Le changement climatique global joue un rôle prépondérant dans la génération d'inondations, ce qui est rapporté par l'augmentation des valeurs de précipitations dans diverses régions. Mais, il y a d'autres causes qui aggravent les effets des inondations :

- Causes de type structurelle : occupation de zones de haut risque aux inondations, inexistence ou déficience des protections de urbanisations, manque d'une gestion intégrée des bassins versants, des actions anthropiques qui augmentent et accélèrent les débits des crues, etc.
- Causes non structurelles : l'absence d'un système intégré d'alerte et de prévision hydrométéorologique, le manque ou déficience de gestion pendant l'émergence hydrique, etc. Ces causes ont eu en effet catastrophique dans l'inondation 2003, à Santa Fe, qui a constitué le plus grave désastre environnemental de l'Argentine (Bertoni, 2006). L'absence

de systèmes de prévision hydrométéorologiques adéquats est habituelle dans l'Amérique Latine et d'autres pays du tiers monde.

En général, la notion de l'alerte hydrométéorologique considère un délai de plusieurs jours pour mettre en place des moyens importants, voire une évacuation, s'avère nécessaire. Néanmoins, certains phénomènes (cumulus, orages convectives, tornades, etc.) se caractérisent étant très intenses avec une durée de vie courte. Ils ont une variabilité en espace et temps très importante. La production de débits des pluies intenses sur des zones urbaines notamment imperméabilisées ou sur des bassins versants avec très fort relief peut se traduire en crues éclairées (*flashflood*) et torrentielles dangereuses. Dans ce cas s'impose une prévision immédiate et fiable de la pluie.

Une prévision immédiate (*nowcasting*) est une prévision du temps à un horizon temporel de 0 à 6 heures. Il s'agit d'une description détaillée des conditions météorologiques du moment, desquelles on peut extrapoler le temps qu'il fera pour les deux heures suivantes. Cette échelle temporelle permet de prévoir avec une précision raisonnable des manifestations, telles que les nuages d'averses locaux. Sur la base des dernières données transmises par radar, par satellite et par observation, le prévisionniste peut réaliser une analyse des événements actuels à petite échelle et livrer une prévision plus précise pour les deux prochaines heures.

Dans divers symposiums internationaux (par exemple *Early Warning Conference (EWC III)*, Bonn, 2006), on a conclu qu'il est primordial de continuer à progresser sur le plan scientifique et technique des systèmes d'alertes et surveillances météo, mais aussi de la prévision de pluie à court terme. Une prévision immédiate et fiable est indispensable non seulement pour les alertes et la gestion de risques mais aussi pour la gestion de barrages et réseaux d'assainissement urbains.

Dans ce contexte, nous avons développé dans cette thèse une nouvelle technique pour la prévision de pluie spatialement détaillée et à très court terme. Basée physiquement sur la hiérarchie de structures dans la dynamique atmosphérique, elle est une alternative de prévision de pluie que peut être employée pour des buts opérationnels. Elle est capable d'employer des bases de données télé-déteectées (radar, satellite), et de surveiller les incertitudes et les pertes de prédictibilité.

### 1.3 Cadre d'étude

Il y a tout d'abord un consensus général sur le fait que les champs de nuages et de pluie sont les deux champs les plus difficiles à simuler à l'aide des modèles de prévision météo actuels. En effet, les échelles de temps et d'espaces de ces modèles (par exemple: GCM, RCM, NWP, etc.) restent largement supérieures (quelques dizaines de kilomètres et plus, en espace) à celles pertinentes pour les précipitations (figure 1-1). Les processus microphysiques des nuages et de la pluie sont paramétrisés et la précipitation n'est estimée que sur des échelles assez grossières par rapport à celles de la pluie. D'autre part, le temps de mise en route et de calcul de ces modèles est très long pour fournir une prévision immédiate.

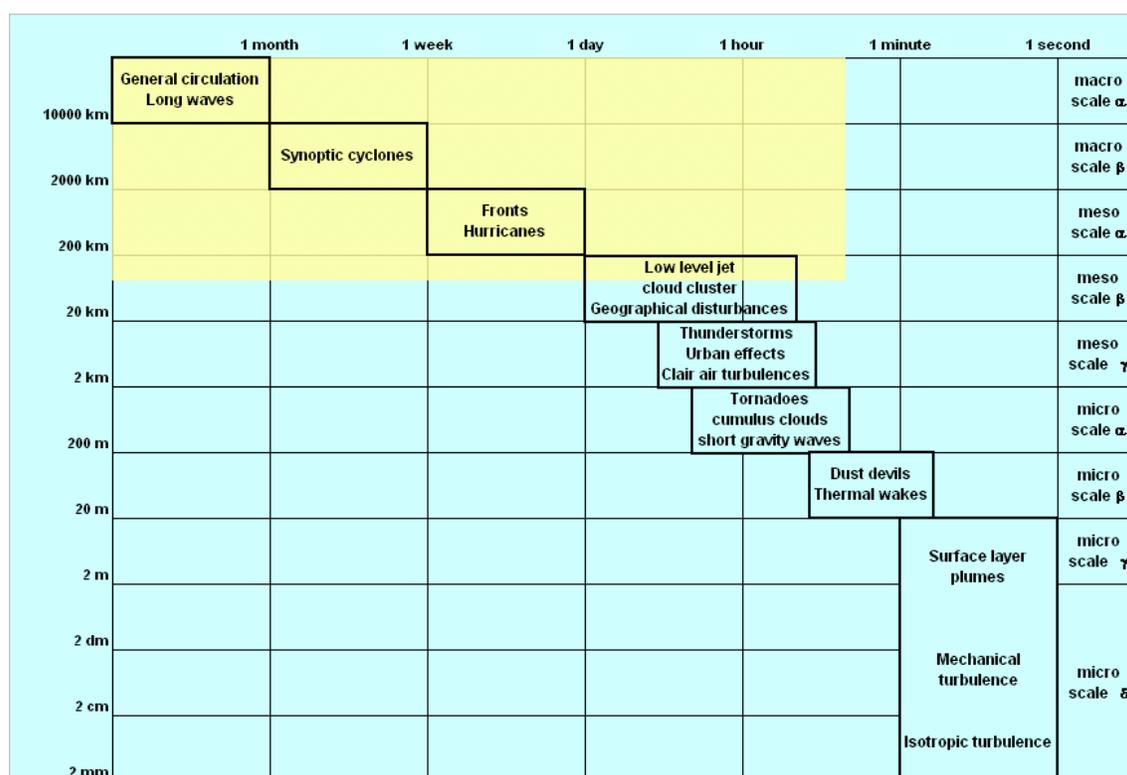


Figure 1-1. Diagramme schématique de la phénoménologie météorologique (d'après Orlanski, 1975 ; Stull, 1988 ; Thunis et Bornstein, 1996 ; Schertzer et al, 1997). L'aire en couleur jaune indique le range de échelles espace-temps des modèles météorologiques actuels. On peut voir que un certain nombre de phénomènes atmosphériques ne sont pas bien modélisés par ces modèles.

Cette absence de prévision à très court temps est particulièrement pénalisante pour de nombreuses applications hydrologiques, comme la gestion de la ressource eau et les alertes de crues. Pour tenter de combler ce déficit, différentes méthodes de traitement statistiques d'image radar (figure 1-2) et satellite (figure 1-3) ont été développées pour évaluer le

déplacement des cellules orageuses. Malgré certains résultats, ces méthodes heurtent avec le fait que ces cellules ont une dynamique fortement non linéaire et ainsi l'identification d'une même cellule entre deux images successives du radar n'est pas toujours facile.



Figure 1-2. Image radar de Sidney, Australie le 01/12/2006, source: bureau of meteorology, Australian Government



Figure 1-3. Image satellite d'Europe occidentale le 01/12/2006 à 12:00 TU, source: MétéoFrance

L'approche multifractale, basée sur les modèles de cascade (Lovejoy et Mandelbrot, 1985; Schertzer et Lovejoy, 1987a; Gupta et Waymire, 1993; Over et Gupta, 1996; Perica et Foufoula-Georgiu, 1996; Menabde et al., 1997a; Venugopal et al., 1999; Deidda, 2000) peut être perçue à la fois comme un compromis entre les modèles et méthodes cités précédemment. En effet, en respectant les symétries d'échelles des équations génératrices (Navier-Stokes, équations d'advection, etc.) les modèles de cascade permettent de simuler sur une très grande plage d'échelles spatio-temporelles la dynamique et ses interactions avec les champs multifractals, en générant une hiérarchie de structures ayant une grande variété de tailles, de durées de vie, d'intensités et de vitesse de déplacement.

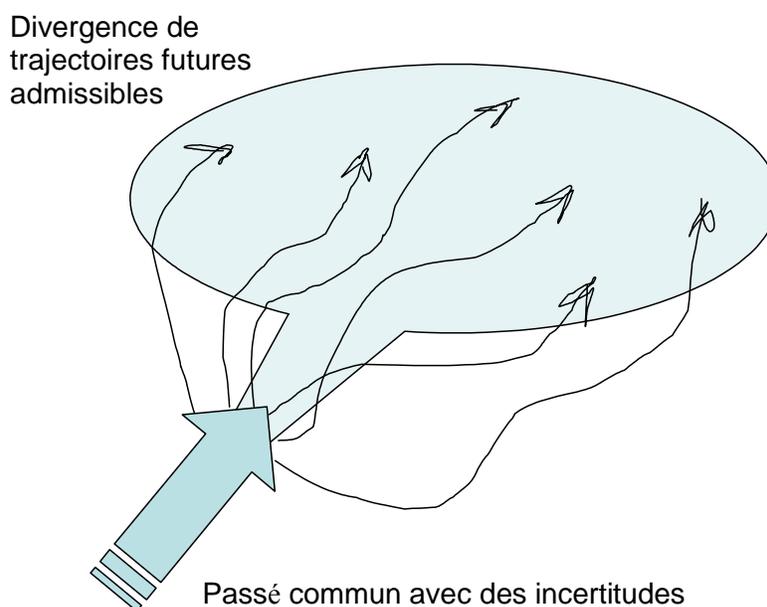
Le sujet de recherche de cette thèse se situe dans le cadre de la modélisation multifractale en vue de mettre au point une méthodologie opérationnelle de prévision de pluie à très court terme. Cette ligne de recherche se place directement dans le cadre du projet commun à l'ENPC et Météo-France sur la Multiplicité d'échelles en Hydrométéorologie (MHYM), dans le Programme Nationale de Recherche Hydrologique (PNRH) du CNRS, ainsi que l'initiative décennale de l'Association Internationale des Sciences Hydrologiques (IAHS) sur la prévision dans les bassins insuffisamment jaugés (PUB). Mais aussi dans le Projet FloodSite de l'Union Européenne sur l'analyse et gestion de risque d'inondation, qui aborde des questions concernant des processus, des méthodes et des procédures pour déterminer et contrôler des inondations et des risques relatifs dans des secteurs côtiers, des fleuves et des estuaires.

## **1.4 But de la thèse**

L'objectif de cette thèse est le développement de techniques de prévision de pluie à court terme basées sur les propriétés multi-échelles des champs de nuages, de la précipitation et des données radar et satellite. Le cadre général de cette thèse se situe donc dans celui des études d'analyse et de modélisation multi-échelle et plus particulièrement multifractales.

Dans cette ligne de recherche, nous développons une méthodologie correspondant à une simulation stochastique basée sur le paradigme de la cascade multifractale pour définir une prévision stochastique dont la première étape détermine le passé du générateur multifractal de la cascade afin d'utiliser sa mémoire pour conditionner au mieux le futur. La seconde étape,

qui est nettement plus aisée, permet de générer facilement un nombre très important de prévisions possible à partir de cette mémoire commune du passé, et de procéder ainsi à une prévision d'ensemble comme illustré par la figure 1-4



**Figure 1-4. Schéma de la prévision stochastique. Un passé déduit à partir des données observées à l'aide de la mémoire du système, qui est commun à toutes les trajectoires futures admissibles (théoriquement en nombre infini). Du fait de la nonlinéarité du système, ces trajectoires divergent rapidement et créent ainsi des limites de prédictibilité**

## **1.5 Plan de la thèse**

Ce manuscrit se compose de six chapitres, inclus ce premier chapitre d'introduction.

Le deuxième chapitre présente un rappel des principales notions fractales et multifractales : dimension et codimension fractales, formalisme multifractal, les cascades et leur classification. Ces notions sont illustrées à l'aide de la chronologie de pluie journalière (1982-2000) à Laboulaye, Argentine.

Le troisième chapitre est consacré aux méthodes multifractales et leur application aux données radar correspondantes au événement du 8-9 septembre 2002, fourni par la Direction de la Climatologie de Météo-France. Les techniques d'analyse multifractale appliquées ont conduit à la détermination des paramètres multifractals caractérisant l'événement étudié.

Le quatrième chapitre présente les techniques de simulation des cascades multifractales, d'abord dans l'espace, puis en espace-temps, ainsi que la sensibilité aux paramètres multifractals. A partir d'éléments anciens de programmation, nous avons établi de nouveaux programmes dont la validation a été testée de façon approfondie.

Le cinquième chapitre aborde la prévision multifractale des champs de pluie, ses considérations générales, et les limites de prédictibilité. Nous montrons qu'il est indispensable de procéder à une simulation stochastique des petites échelles, contrairement à une première approche de prévision multifractale. Ceci est illustré à partir des données radar et des paramètres estimés dans le chapitre 3.

Finalement, dans le chapitre six on présente les conclusions générales et perspectives de ce travail.

## 2 Théorie des Fractals et Multifractals

### 2.1 Introduction

Dans la nature les objets varient de taille depuis l'échelle sub-atomique jusqu'à la taille de l'univers. Traditionnellement, la géométrie Euclidienne a servi comme la base de la connaissance intuitive de la géométrie de la nature. Elle a été utilisée pour décrire la structure des objets physiques réguliers, habituellement d'un caractère géométrique simple. Divers mathématiciens ont développé des concepts géométriques qui dépassent la géométrie traditionnelle (Cantor, 1884; Peano, 1890; Von Koch, 1904), mais qui ont failli dans le passé pour gagner l'acceptation des sciences naturelles (Feder, 1988).

Plus récemment, Mandelbrot (1975, 1977, 1983) a introduit la notion de *fractals* pour désigner des objets qui ont une forme très irrégulière, très interrompue ou fragmentée (géométriquement compliquée), et la *géométrie fractale* pour caractériser ces objets aux propriétés inhabituelles en géométrie classique. La géométrie fractale peut être comprise comme une étendue de la géométrie Euclidienne.

Aujourd'hui, les idées apparues à partir de la géométrie fractale sont appliquées dans divers domaines de la science et de la technique: biologie, physique, chimie, géographie, hydrologie, vulcanisme, structures de matériels, informatique, musique, économie et finances, etc.

### 2.2 Fractals

Le mot fractal est un terme proposé par Mandelbrot (1975) qui vient du latin "fractus" et qui signifie irrégulier. Il caractérise toutes les formes géométriques qu'on peut imaginer comme faites de parties dont chacune est un modèle réduit du tout.

Si on observe un objet banal comme par exemple une tête de chou-fleur, on peut voir qu'elle se brise aisément en bouquets. Chaque bouquet a la forme d'un petit chou-fleur qui se décompose en bouquets plus petits, et ainsi de suite. Une expression mathématique imitant ce processus pourrait le continuer infiniment. En dehors d'une dilatation ou une réduction,

chaque petit bouquet est identique à tout autre bouquet, d'où la notion de "autosimilarité" (Mandelbrot, 1967, 1974, 1983, 1989, 2006).

On dit qu'un objet est auto-similaire si c'est l'union des copies de lui-même à différentes échelles où le processus est isotrope ou uniforme en toutes directions (Hasting et Sugihara, 1994). Alors, un objet fractal est un objet mathématique qui est issu d'un processus itératif et qui présente un caractère d'autosimilarité.

### 2.2.1 Les types de fractals

Quand on appelle fractal à un certain ensemble d'objets, nous considérons les caractéristiques suivantes (Falconer, 1990):

- L'ensemble a une structure fine, c'est-à-dire des détails présents aux échelles arbitrairement petites.
- L'ensemble est trop irrégulier pour être décrit dans le schéma géométrique traditionnel, localement et globalement.
- Souvent, l'ensemble a une certaine forme auto-similaire (c'est-à-dire que le tout est semblable à une des ses parties), peut-être approximatif ou statistique. D'habitude, la dimension fractale de l'ensemble (défini d'une manière quelconque) est plus grande que sa dimension topologique.
- Dans la plus part de cas d'intérêt, l'ensemble est défini d'une manière très simple, peut-être de manière récursive.

On peut distinguer entre fractals déterministes et aléatoires (Falconer, 1990; Hasting et Sugihara, 1993; De Lima, 1998; Tél, 1988). Les fractals déterministes sont la classe de fractals qui sont construits par règles déterministes. Ils sont classifiés comme fractals unique échelle ou multi-échelles. Les fractals aléatoires sont produits par des règles non déterministes.

### 2.2.2 Fractals déterministes unique échelle

La construction d'un tel ensemble commence en divisant un objet simple en  $N$  pièces identiques. Chaque nouvelle pièce est une copie de l'objet original réduit pour un même facteur  $r < 1$ . Le pas suivant consiste à répéter exactement de la même manière la procédure et

créer  $N$  nouvelles pièces identiques à chacune des précédentes. Alors, le fractal est obtenu en répétant indéfiniment la procédure. Le fractal peut être divisé dans  $N$  parts identiques, étant chacune une version à échelle plus petite de l'ensemble complet (Figure 2-1 (a)).

### **2.2.3 Fractals déterministes multi-échelle**

La construction des fractals de ce type commence par un objet initial divisé en  $N$  pièces qui ne sont pas toutes identiques. Chaque pièce est une copie de l'objet originel mais réduit par différents facteurs  $r_j < 1$  avec  $j=1,..,N$  (tous les  $r_j$  ne peuvent pas être identiques). La procédure est répétée infiniment de manière similaire. Chaque part du fractal est une version à échelle plus petite de l'objet originel complet (Figure 2-1 (b)).

### **2.2.4 Fractals aléatoires**

Dans ce cas, l'objet originel est divisé en  $N$  pièces identiques où chaque part est une copie réduite par certains facteurs pris aléatoirement. Dans chaque étape de la construction les fractals exhibent un caractère aléatoire. Par conséquent, les fractals aléatoires ne sont pas auto-similaires comme leurs contreparties. L'aspect non-uniforme de ces fractals est souvent plus près des phénomènes naturels (par exemple, lignes de côtes, surfaces topographiques, nuages). Pour décrire la construction de fractals qui impliquent des étapes aléatoires on peut utiliser la théorie de probabilité (figure 2-1 (c))

### **2.2.5 Fractals extraits à partir de la nature**

Un exemple d'ensemble fractal extrait de la nature est le cas d'occurrences de jours de pluie dans un certain endroit observé pendant une certaine période. L'occurrence de pluie est définie par un seuil de précipitation qui établit la distinction entre jour sec et pluvieux. Une séquence non interrompue de jours avec pluie s'appelle période pluvieuse. Les périodes pluvieuses peuvent être utilisées pour définir des objets fractals. Dans la figure 2-2, on représente l'occurrence de pluie journalière pendant 19 années d'observations dans la station expérimentale INTA à Laboulaye, centre de l'Argentine, comme un ensemble géométrique disjoint composé de segments élémentaires supportés par l'axe du temps. Cet ensemble

évoque le résultat obtenu après un certain nombre d'itérations dans le processus aléatoire générateur d'une poussière de Cantor. Cette analyse est inspirée à celle effectuée par Hubert et Carbonnel (1989) sur l'occurrence de pluie sur 45 années d'observation journalière à Dedougou, Burkina Faso.

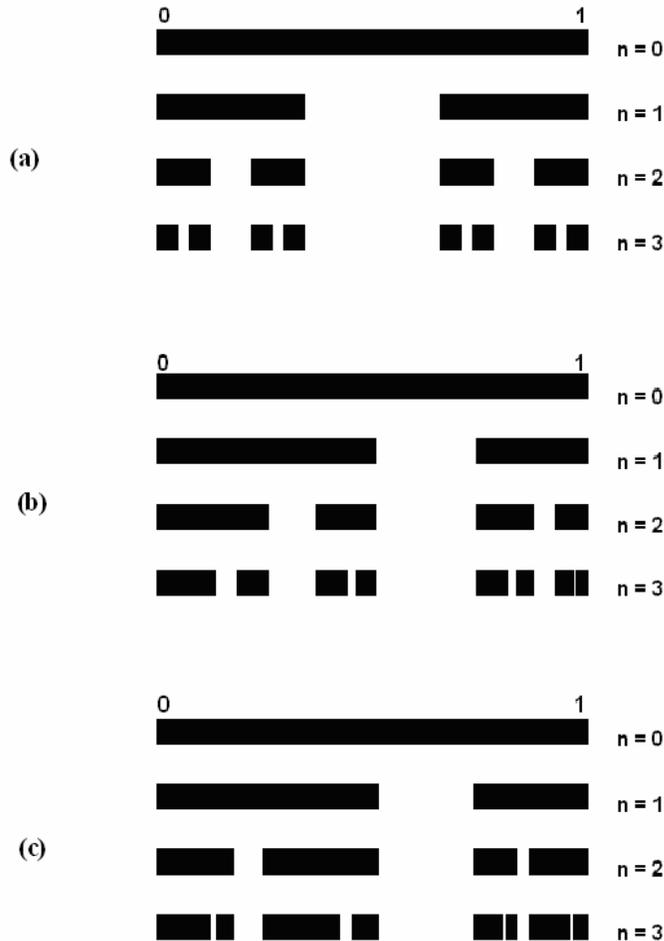


Figure 2-1. Exemple de construction d'ensembles fractals différents pour les trois premiers pas de la procédure itérative: (a) Fractal déterministe unique échelle: ensemble de Cantor avec un facteur de réduction  $r=1/3$ ; (b) Fractal déterministe multiple échelle: ensemble de Cantor à deux échelles avec des facteurs de réduction  $r_1=1/2$  (gauche) et  $r_2=1/4$  (droite); (c) Fractal aléatoire: ensemble de Cantor où les facteurs de réduction sont pris aléatoirement dans chaque pas de la génération (d'après De Lima, 1998).



Figure 2-2. Représentation de l'occurrence de pluie journalière pendant 19 années d'observations dans la station INTA Laboulaye (Argentine). Cette représentation évoque l'objet obtenu avec un générateur de l'ensemble de Cantor. Chaque ligne correspond à une année d'observations.

## 2.3 Notion de dimension et codimension fractales

### 2.3.1 Introduction

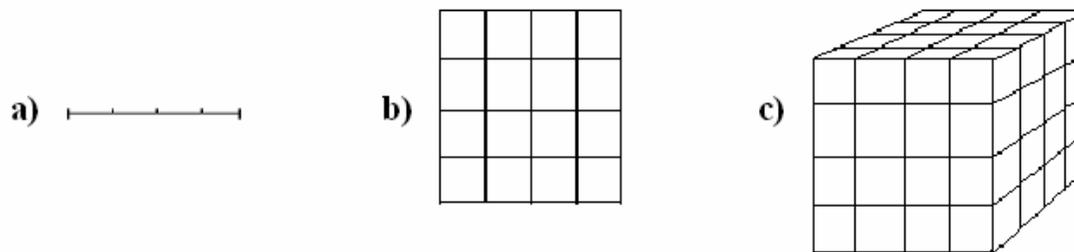
Pour caractériser des objets et des ensembles fractals, la géométrie fractale se sert de la notion de dimension fractale (Mandelbrot, 1967, 1977, 1983; Feder, 1988; Falconer, 1990; Barnsley, 1993; Hasting et Sugihara, 1993). Quand on parle de dimension, on a l'idée que elle contient d'information sur les propriétés géométriques d'un ensemble et cette notion est un outil important dans la géométrie fractale.

On sait qu'une ligne droite a pour support un espace de dimension 1. Un segment de ligne de longueur  $\ell_0$  par exemple, est auto-similaire. Il peut être divisé en  $N$  petits segments de taille  $\ell$  (figure 2-3 a). Chacun d'eux est une fraction du segment originel. Donc, le nombre de petits segments est estimé par:

$$N = \left( \frac{\ell_0}{\ell} \right)^D \quad (2.1)$$

où  $D$  (nombre entier) est la dimension de l'espace ( $D=1$ )

Ainsi, dans l'espace bidimensionnel ( $D=2$ ),  $N$  est le nombre de carrés de côté  $\ell$ , et donc de surface  $\ell^2$ , nécessaires pour paver un carré de côté  $\ell_0$  et de surface  $\ell_0^2$  (figure 2-3.b). Pour l'espace  $D=3$ , il s'agirait du pavage d'un cube de côté  $\ell_0$  par de cubes élémentaires de côté  $\ell$  (figure 2-3.c). En tant que  $D$  est entier elle se confond avec la dimension euclidienne de l'objet mesuré. Les objets auxquels peut être associée une dimension non entière possèdent une caractéristique que nous appellerons dimension fractale,  $D_f$ .



**Figure 2-3. Dimension dans l'espace euclidien: (a)  $D=1$ ,  $N=(\ell_0/\ell)^1=4$ ; (b)  $D=2$ ,  $N=(\ell_0/\ell)^2=16$ ; (c)  $D=3$ ,  $N=(\ell_0/\ell)^3=64$ .**

Du point de vue topologique, la dimension d'un objet est toujours un entier positif. Pour obtenir une mesure plus fine de la complexité d'un espace, il est essentiel d'avoir une manière différente de mesurer les choses.

Si on analyse l'objet fractal de la figure 2-1a (poussière de Cantor), il s'agit d'un ensemble presque vide quand le nombre d'itérations  $n$  tend vers l'infini. Cet ensemble disjoint a été formé à partir d'un segment initial de longueur  $\ell_0 = 1$ . Dans la première itération l'objet est constitué de deux segments de longueur  $\ell = \ell_0 / 3$ , séparés par un vide de même longueur. D'accord à l'équation (2.1):

$$D = \frac{\text{Log}N}{\text{Log}(\ell_0 / \ell)} \quad (2.2)$$

Etant le nombre de segments obtenus  $N = 2$ ,  $\ell_0 = 1$ , et  $\ell = \ell_0 / 3$ , donc,

$$D = \frac{\text{Log } 2}{\text{Log } 3} = 0.6309 \quad (2.3)$$

On constate que la dimension de cet objet n'est pas entière, pour tant la dimension est fractale.

### 2.3.2 Généralisation de la notion de dimension

Dans cette section, on verra une généralisation de la notion de dimension qui nous amène à une définition plus rigoureuse.

**Définition:**

Soit  $D > 0$  et  $\ell_0 > 0$  des nombres réels. Soit  $A$  un ensemble de  $\mathbb{R}^D$  recouvert par  $N$  sphères de diamètres  $\ell_i, i = 1, 2, \dots, N$ , tous inférieurs à  $\ell_0$ . On calcule la limite:

$$M_D(A) = \lim_{\ell_0 \rightarrow 0} \inf_{\ell_i < \ell_0} \sum_{i=1}^N \ell_i^D \quad (2.4)$$

où  $M_D(A)$  est la masse de l'ensemble  $A$ . On démontre qu'il existe une valeur  $D_H$  telle que:

$$\begin{aligned} M_D(A) &= 0 && \text{si } D > D_H \\ M_D(A) &= \infty && \text{si } D < D_H \\ M_D(A) &= \text{valeur} && \text{si } D = D_H \end{aligned} \quad (2.5)$$

La valeur de  $D_H$  est appelée dimension de Hausdorff (Mandelbrot, 1983 ; Barnsley, 1988 ; Falconer, 1990).

La dimension de Hausdorff est la dimension la plus étudiée mathématiquement, mais aussi la plus difficile à évaluer. En effet, elle possède les propriétés d'une dimension, c'est à dire qu'elle vaut 0 sur des ensembles dénombrables, et est additive sur les sommes dénombrables d'ensembles. Le problème principal de son calcul explicite réside dans la trop grande diversité de recouvrement à considérer pour évaluer le minorant. La dimension

fractale de tout objet peut être obtenue par le calcul de la dimension de Hausdorff de cet objet. Compte tenu de la complexité du calcul de la dimension de Hausdorff, on a souvent recouru, dans la pratique, à des recouvrements par sphères de diamètre uniforme. En supposant que  $N(\ell)$  est le nombre minimal de sphères de diamètre  $\ell$  nécessaire pour recouvrir  $A$  de taille  $\ell_0$ , en tenant compte de l'équation (2.2), on définit la dimension fractale par:

$$D_f = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\text{Log}N(\ell)}{\text{Log}(\ell_0 / \ell)} \quad (2.6)$$

Cette méthode est la plus utilisée pour estimer la dimension fractale, car plus facile à mettre en oeuvre, dans la pratique, contrairement à celle de Hausdorff.

### 2.3.3 Calcul de la dimension fractale

La méthode plus facile de calculer la dimension fractale d'un objet est la méthode de comptage de boîtes (Hentschel et Procaccia, 1983; Lovejoy et al., 1987; Hubert et Carbonnel, 1989). Le radar météorologique fournit une image instantanée des zones de précipitation avec différents taux de pluie. Ces zones apparaissent comme extrêmement morcelées et l'image peut être considérée comme un objet fractal de masse avec un caractère aléatoire.

La figure 2-4.a montre l'image de taux de pluie du 8 septembre 2002 à 11h30 fournie par le radar de Nîmes, France. La résolution de l'image est de 256x256 pixels. La figure 2-4.b, correspond à l'occurrence de pluie de la même image radar. La méthode consiste à compter le nombre de pixels coloriés (pluie non nulle) par rapport à la taille des pixels. Dans ce cas le nombre de pixels coloriés  $N = 16885$ , la taille de l'image  $\ell_0 = 256$  pixels et la taille du pixel est  $\ell = 1$ . Donc, la dimension fractale de cette image radar est  $D_f \approx 1.75$ .

La figure 2-4.c montre la même image mais elle est dégradée par la taille des pixels. La résolution de l'image est de 128x128 pixels. A mesure que la taille des pixels augmente, la résolution de l'image se dégrade et le nombre de pixels coloriés diminue (figure 2-4.d et figure 2-4.e, pour des résolutions 64x64 et 32x32 pixels, respectivement).

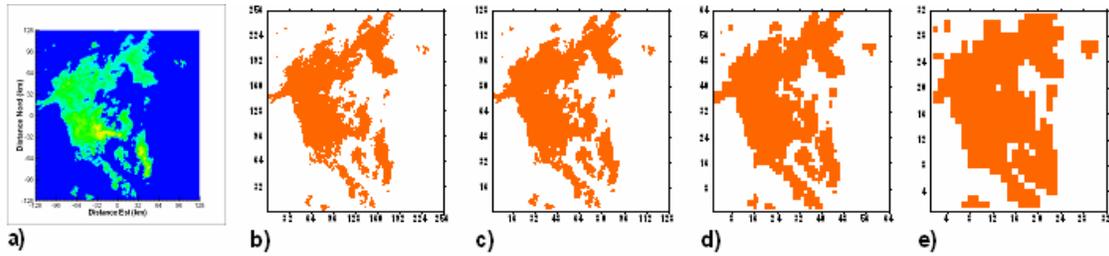


Figure 2-4. Détermination de la dimension d'un objet fractal: a) Image originel de taux de pluie du radar de Nîmes, France, avec une résolution de 256x256 pixels; b): Image d'occurrence de pluie de résolution 256x256 pixels; c): image dégradée en 128x128 pixels; d): image dégradée en 64x64 pixels; e): image dégradé en 32x32 pixels.

En appliquant la méthode aux images dégradées on trouve que il existe une loi d'invariance d'échelle (figure 2-5), dont l'exposant est la dimension fractale.

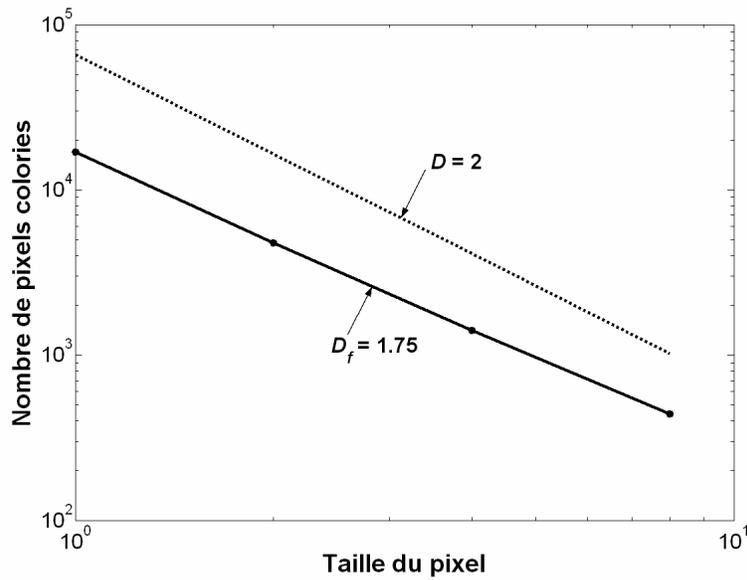
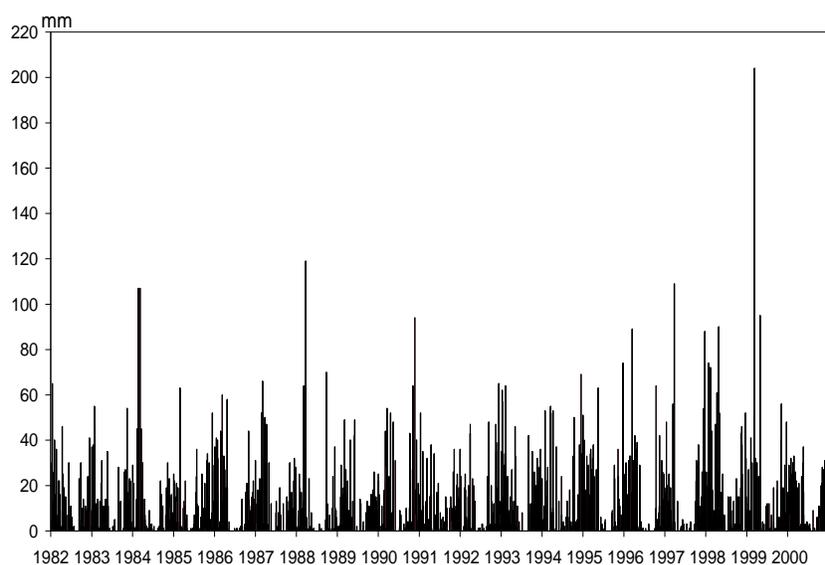


Figure 2-5. Méthode de comptage de boîtes: diagramme logarithmique pour différentes résolutions de l'image radar de Nîmes. La droite continue indique une invariance d'échelle pour les différentes tailles du pixel et sa pente la dimension fractale de l'image  $D_f=1.75$ . La pente de la droite pointillée indique la dimension de l'espace bidimensionnel  $D=2$ .

### 2.3.4 Analyse fractale de l'occurrence de pluie

Nous considérons le cas de une série temporelle de pluie journalière, correspondant à 19 ans d'observation d'un pluviomètre installé sous les normes de la WMO dans la station expérimentale de l'Institut National de Technologie Agricole (INTA), à Laboulaye dans la région centrale de l'Argentine. La figure 2-6 illustre la série d'étude où on peut voir la très forte intermittence de la pluie observée.



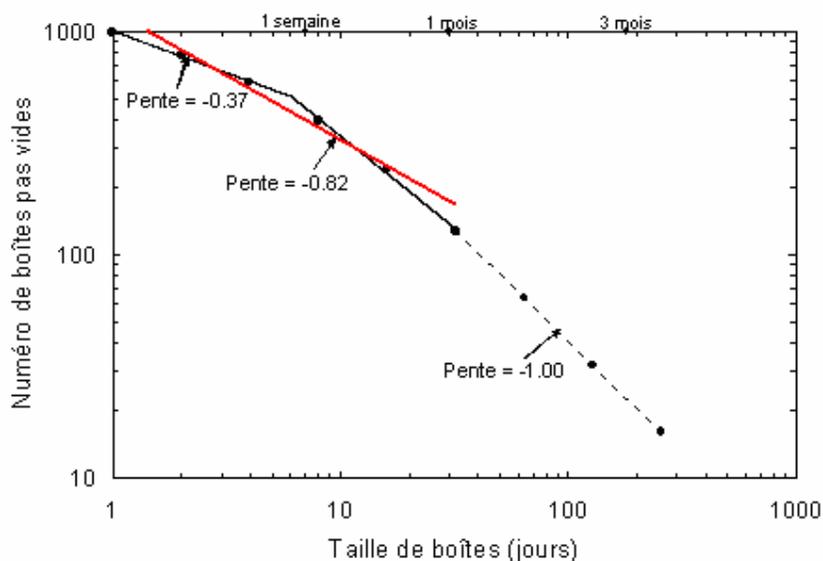
**Figure 2-6. Pluie journalière à Laboulaye, Argentine, pour la période 1982-2000. La série contient 6940 valeurs avec une pluie moyenne annuelle de 940 mm. La valeur maximale enregistrée a été de 204 mm.**

Pour calculer la dimension fractale de la pluie journalière de la série considérée, on applique la méthode de comptage de boîtes (*box counting*). Cette méthode use directement la définition donnée par l'équation (2.2) pour estimer la dimension fractale  $D_f$  de un ensemble  $A$ . Pour l'analyse, on a considéré une séquence de 4096 (c'est-à-dire  $2^{12}$ ) jours consécutifs, à partir du 1 janvier 1982.

Dans la figure 2-7 on montre la représentation des résultats obtenus dans un diagramme bi-logarithmique qui permet de déduire la dimension fractale de la pluie. Le graphique montre les échelles du temps de 1 jour jusqu'à 256 jours.

Pour les échelles plus grandes que 32 jours (1 mois) on ajuste une droite de pente égale à -1 (ligne discontinue) due au phénomène de saturation de la méthode utilisé. Pour les

échelles de temps plus petites à 6-7 jours, on ajuste une droite de pente égale à  $-0.37$ . Pour les échelles entre 6-7 jours et 1 mois, on ajuste une droite de pente égale à  $-0.82$ . Ce changement de pentes peut indiquer des régimes différents d'invariance d'échelles. La valeur de la dimension fractale moyenne qui caractérise des occurrences de pluie dans la plage d'échelles de 1-32 jours est 0.60 (ligne rouge dans la figure).



**Figure 2-7. Méthode de comptage de boîtes: diagramme log-log de la pluie journalière considérée. Le graphique montre les échelles du temps de 1 jour jusqu'à 256 jours.**

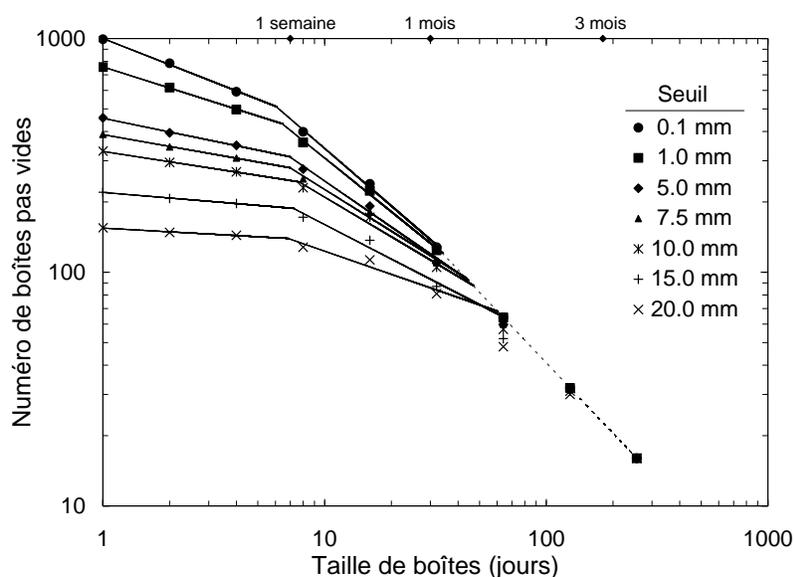
Dans le calcul de la dimension fractale on ne s'est pas préoccupée de l'intensité de la pluie, mais seulement de leur présence ou leur absence. Il est important d'attirer l'attention sur le fait que ce l'on qualifie d'état sec (non pluie) est relatif à un seuil qu'on s'est fixé. Hubert (1995) a étudié l'effet du seuil sur les dimensions fractales calculées en concluant que la dimension fractale dépend du seuil fixé. Par conséquent, le phénomène de la pluie ne peut pas être caractérisé par une seule dimension fractale (Hubert et al., 1995).

Une analyse similaire a été faite pour différents niveaux d'intensité de la pluie journalière. Les résultats observés sont montrés dans la figure 2-8. Les seuils de pluie considérés dans cette analyse sont, 0.1, 1, 5, 7.5, 10, 15 et 20 mm/jour.

On peut observer que pour les valeurs croissantes des seuils la dimension fractale correspondante diminue. Les valeurs absolues des pentes du graphique log-log de la figure 2-8 sont plus petites. La dimension fractale estimée pour les différents seuils dans la plage

d'échelle 1-32 jours est: 0.60 pour 0.1 mm/jour, 0.53 pour 1 mm/jour, 0.43 pour 5 mm/jour, 0.38 pour 7.5 mm/jour, 0.36 pour 10 mm/jour, 0.29 pour 15 mm/jour et 0.19 pour 20 mm/jour. En plus, on peut observer que l'échelle critique qui sépare les deux régimes d'invariance de échelles reste dans la même échelle pour les différents seuils (près de 6-7 jours).

Cette dépendance de la dimension sur la valeur de son seuil de référence devrait amener à considérer dans ce type d'étude, mieux que la notion d'objet fractal, l'approche de champ multifractal. On peut voir que le phénomène est caractérisé par une hiérarchie de fractals correspondant aux régions sur lesquelles le champ dépasse des seuils (ou singularités) de plus en plus élevés.



**Figure 2-8. Méthode de comptage de boîtes: diagramme log-log de la pluie journalière considérée. Le graphique montre les échelles du temps de 1 jour jusqu'à 256 jours. Les valeurs des seuils de la pluie journalière sont 0.1, 1, 5, 7.5, 10, 15 et 20 mm/jour.**

Des analyse similaires avec de résultats semblables ont été réalisées par De Lima (1998) sur des séries de pluie du Portugal, d'Hollande et de France, ce qui indique l'existence d'un caractère multifractal universel de la pluie.

### 2.3.5 Notion de codimension

Quand on parle de dimension on a une idée sur les propriétés d'un ensemble. De même, la dimension fractale caractérise un objet ou un ensemble fractale. Dans la définition de dimension, pour chaque échelle  $\ell$ , l'ensemble  $A$  est mesuré ou caractérisé d'une manière qui ignore les irrégularités dans les échelles plus petites que  $\ell$ . Si on définit un ensemble géométrique de taille  $\ell_0$ , on définit le rapport d'échelle  $\lambda = \ell_0 / \ell$ .

Soit  $D$  la dimension euclidienne de  $\mathbb{R}^D$ , support d'un ensemble fractal  $A$ . Si  $D_f$  est la dimension fractale de  $A$ , on définit la codimension (Mandelbrot, 1967, 1977, 1983; Barnsley, 1988; Feder, 1988; Falconer, 1990) par:

$$c = D - D_f \quad (2.7)$$

Cette codimension est une notion importante dans l'étude du caractère fractal des objets.

Soient  $N_\lambda$  le nombre de boîtes nécessaires pour paver l'espace  $\mathbb{R}^D$  tout entier, à l'échelle  $\lambda$  et  $N_\lambda(A)$  le nombre de boîtes nécessaires pour paver un ensemble fractale  $A$  contenu dans  $\mathbb{R}^D$ , à la même échelle  $\lambda$ . Soit  $D_f$  la dimension fractale de  $A$ . En utilisant les expressions de la méthode de comptage de boîtes, on a:

$$\begin{aligned} N_\lambda &\approx \lambda^D \\ N_\lambda(A) &\approx \lambda^{D_f} \end{aligned} \quad (2.8)$$

On en déduit que:

$$\frac{N_\lambda(A)}{N_\lambda} \approx \lambda^{D_f - D} = \lambda^{-c} \quad (2.9)$$

$c$  étant la codimension définie par (2.7). L'équation (2.9) est celle d'une probabilité définie sur l'ensemble fractal  $A$  (Lovejoy et Schertzer, 1992). Elle traduit la probabilité qu'un cube de  $\mathbb{R}^D$ , à l'échelle  $\lambda$  soit contenu dans l'ensemble fractal  $A$ .

## **2.4 Multifractals**

### **2.4.1 Introduction**

La géométrie des structures fractales peut être caractérisée par un index d'échelle: la dimension fractale. Cependant, les processus et systèmes géophysiques ne peuvent pas être étudiés comme ensembles. Dans l'approche monofractale on considère seulement la présence de pluie, en omettant le fait que la pluie est un processus fortement non linéaire et qui exhibe une grande variabilité dans une vaste plage d'échelles de temps et d'espace.

La théorie multifractale offre un cadre pour les études de processus non linéaires qui exhibent différents niveaux d'intensité. Cette théorie traite la distribution des quantités physiques mesurées sur un support géométrique et peut manipuler la variabilité à grande échelle. Le terme multifractals a été introduit par Frisch et Parisi (1985) pour se référer à des mesures caractérisées par un ensemble d'index de échelles ou dimensions fractales (Grassberger, 1983; Hentschel et Procaccia, 1983; Schertzer et Lovejoy, 1983; Schertzer et Lovejoy, 1984).

Beaucoup de processus géophysiques sont fortement intermittents et caractérisés par différents niveaux d'intensité (Schertzer et Lovejoy, 1985b; Ladoy et al., 1991; Davis et al, 1994). Ces processus ne peuvent pas être décrits statistiquement par un seul exposant. La multifractalité ou invariance d'échelles multiple implique que ces processus sont décrits par une hiérarchie infinie d'exposants de échelles. Alors, on nécessite infinies dimensions fractales pour quantifier de quelle façon les différents niveaux d'intensité de un processus se distribuent sur un espace d'observation donné. La codimension  $c$  n'est pas unique et le processus est multifractal.

À certaines échelles très petites les processus sont homogènes. Les valeurs mesurées sont discrètes et l'échelle d'observation est généralement plus grande que l'échelle plus interne des processus. Par conséquent, les observations sont des moyennes des densités des processus à la résolution de l'appareil de mesure. La figure 2-9 on montre que la plage d'intensité dépend du niveau de résolution de l'observation d'un processus continue. La résolution du niveau d'observation des processus perde l'échelle des détails plus petits, dont ils peuvent être très importants à très petite échelle (Schertzer et Lovejoy, 1989b, 1991).

Comme l'indique la figure 2-10a, l'intensité des pluies à différentes échelles de temps présente des fluctuations extrêmes. Cette figure illustre la grande intermittence de la pluie: la moyenne journalière de l'année 1999 (3.22 mm) est peu significative en regardant les 204 mm enregistrés le 7 mars 1999. Qualitativement cette variabilité ressemble à celle produite par des modèles de cascade (Schertzer et Lovejoy, 1987a, 1989b ; Lovejoy et Schertzer, 1990 ; Tessier, 1993).

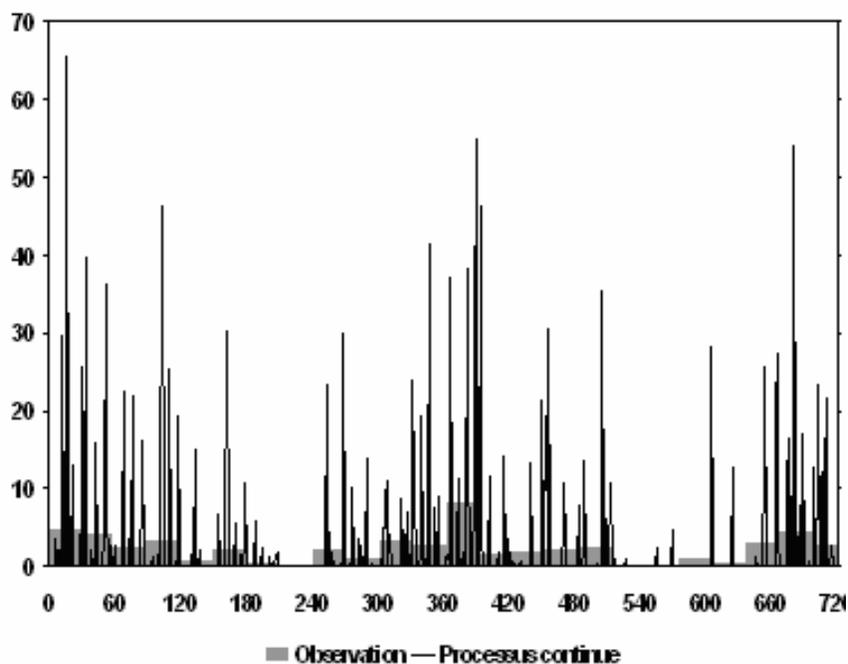


Figure 2-9. Relation entre le range d'intensités et le niveau de résolution temporelle de l'observation d'un processus continue.

## 2.4.2 Propriétés des multifractals

### 2.4.2.1 Fonction codimension

En faisant référence à la notion de codimension fractale (Section. 2.3.5), on peut calculer la probabilité d'obtenir à la résolution  $\lambda$  une singularité d'ordre supérieur ou égal à  $\gamma$ , où  $\gamma = \text{Log}_\lambda(R_\lambda)$  étant  $R_\lambda$  le taux de pluie. Dans la figure 2-10b on illustre les singularités  $\gamma$  correspondantes à chaque résolution  $\lambda$  de la cascade de précipitation à Laboulaye.

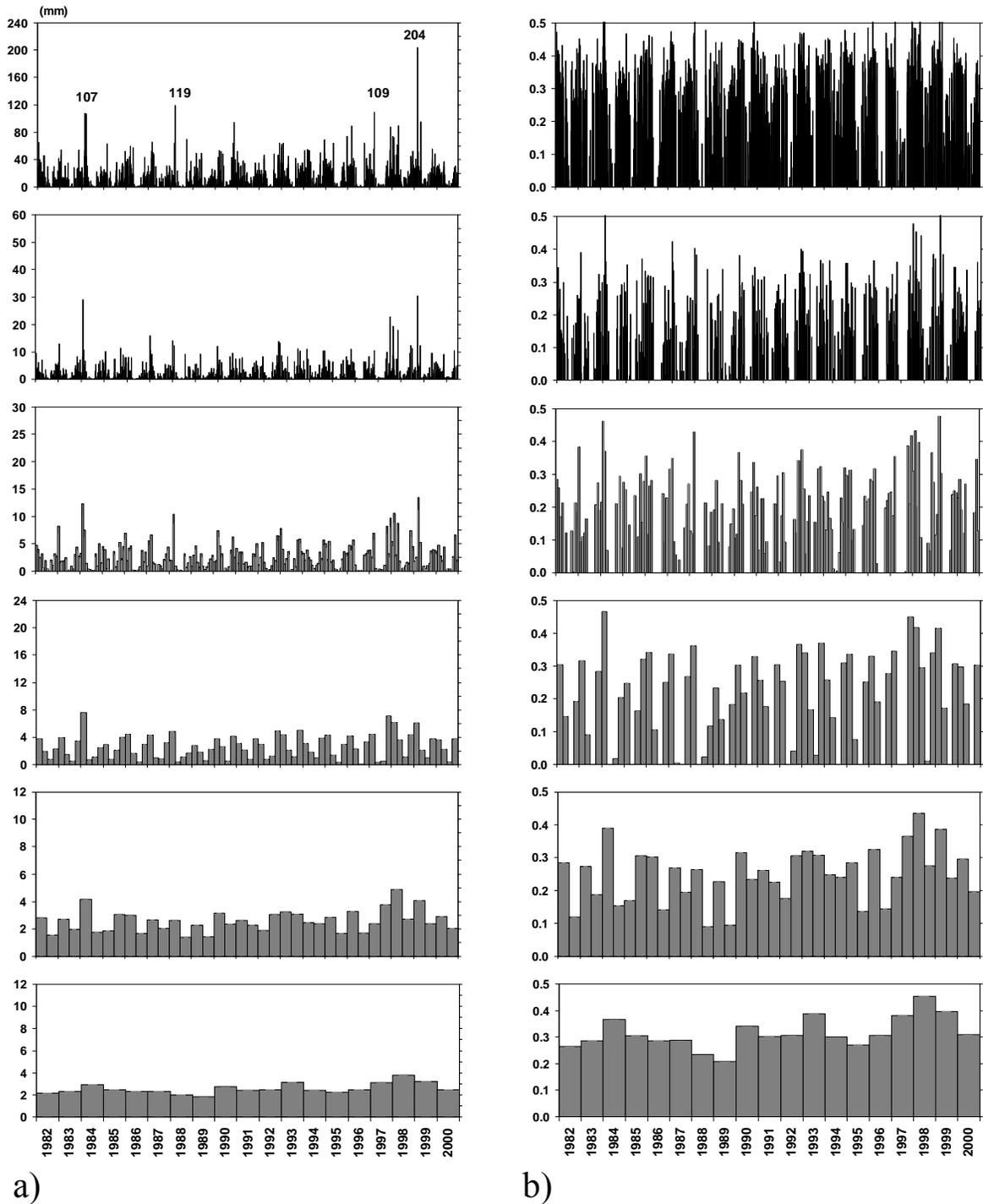


Figure 2-10. Illustration de la cascade temporelle de précipitation observée à Laboulaye (Argentine, 1982-2000) (Schertzer et al., 2007) à des résolutions de plus en plus faibles (de haut en bas), qui est plutôt semblable à celle observée à Nîmes (France, 1975-1990) (Ladoy et al., 1993) ; (a) le taux de pluie  $R_\lambda$  sur  $N$  jours ( $N=1, 10, 30, 90, 180, 365$ ) avec les correspondantes résolutions  $\lambda = 1/N$  ; (b) les singularités correspondants  $\gamma = \text{Log}(R_\lambda) / \text{Log}(\lambda)$ . Ces graphiques illustrent le fait fondamental que tandis que les taux de pluie sont sensiblement dépendants de l'échelle, leurs singularités ne le sont pas. Les singularités sont les variables principales pour l'analyse et les simulations multifractales.

En étant  $\gamma$  le paramètre qui caractérise le champ  $\varepsilon_\lambda$ , il est indépendant du niveau de résolution  $\lambda$ . Etant  $N_\lambda(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma)$  le nombre de boîtes de taille  $\lambda^{-1}$  caractérisées par une singularité d'ordre supérieur ou égal à  $\gamma$ , et  $N_\lambda$  le nombre total de boîtes nécessaires pour paver l'espace entier, donc:

$$\Pr(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) = \frac{N_\lambda(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma)}{N_\lambda} \quad (2.10)$$

En fonction des dimensions du chaque domaine:

$$\Pr(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) = \frac{\lambda^{D_f(\gamma)}}{\lambda^D} \quad (2.11)$$

La probabilité d'obtenir une singularité dont l'ordre est supérieur à  $\gamma$ , à la résolution  $\lambda$ , s'écrit en tenant compte de  $D = c(\gamma) + D_f(\gamma)$ , donc:

$$\Pr(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)} \quad (2.12)$$

La fonction  $c(\gamma)$  est une fonction convexe (figure 2-11), exposant invariant d'échelle de la distribution de probabilité, qui caractérise la répartition de singularités. Cette fonction est appelée fonction codimension. Schertzer et Lovejoy (1992a) ont montré qu'il est plus pertinent de faire appel aux codimensions  $c(\gamma)$  plutôt qu'aux dimensions fractales  $D_f(\gamma)$ , puisque le cadre stochastique permet  $c(\gamma)$  d'être supérieur à  $D_f(\gamma)$ .

### 2.4.2.2 Fonction d'échelles des moments

Une autre manière de décrire les champs multifractals est à travers les moments statistiques du champ  $\varepsilon_\lambda$ . Comme  $c(\gamma)$  caractérise l'invariance d'échelle de la distribution de probabilité, il est naturel d'introduire une fonction  $K(q)$  qui caractérisera de façon analogue les divers moments statistiques d'ordre  $q$  du champ (Schertzer et Lovejoy, 1987a; Schertzer et Lovejoy, 1991):

$$\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \quad (2.13)$$

La fonction  $K(q)$  est convexe du type montré dans la figure 2-12 et elle est appelée fonction de échelle des moments, où  $q$  est l'ordre des moments statistique,  $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle$  est la moyenne du  $q^{\text{ème}}$  moment des intensités à la résolution  $\lambda$ .  $K(q)$  est une fonction caractéristique invariante d'échelle indiquant le comportement asymptotique des moments d'ordre  $q$ .

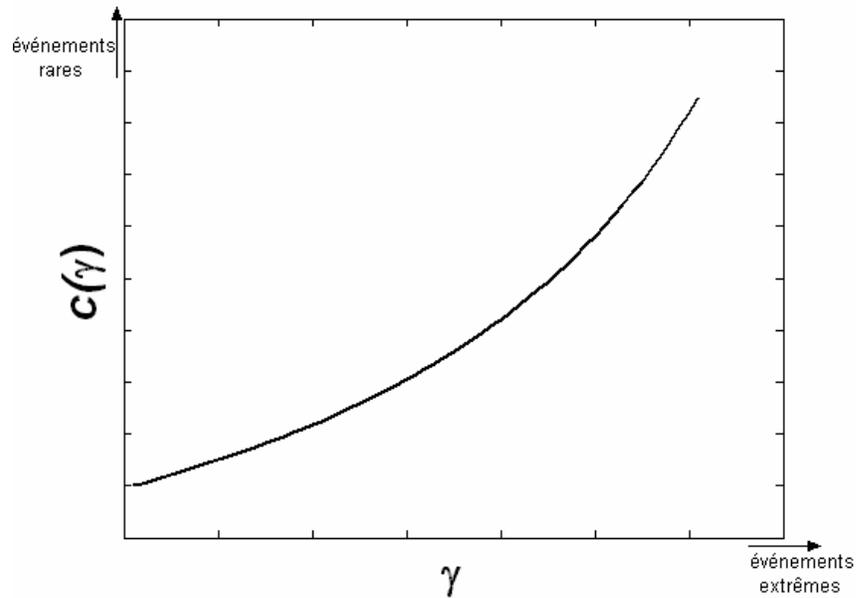


Figure 2-11. Illustration schématique de la fonction  $c(\gamma)$ .

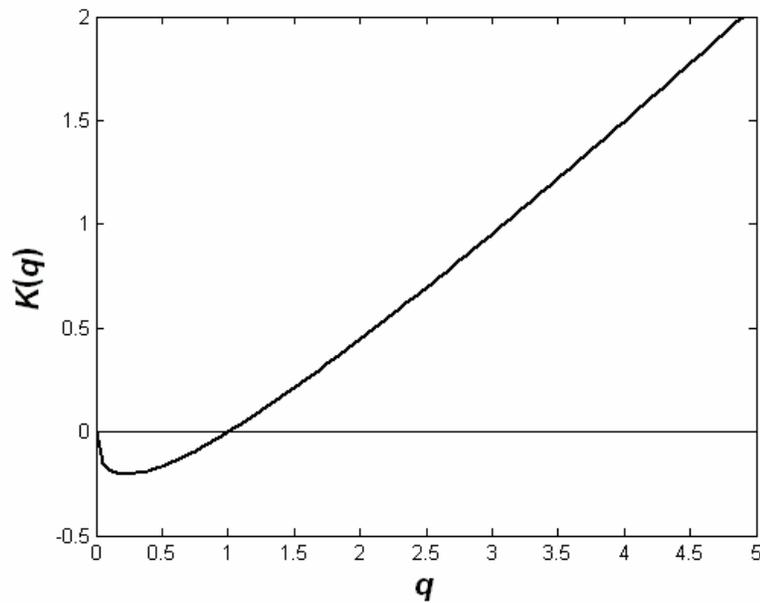


Figure 2-12. Illustration schématique de la fonction d'échelle des moments  $K(q)$ .

### 2.4.2.3 La transformation de Legendre

Il existe entre les deux fonctions  $K(q)$  et  $c(\gamma)$  une relation biunivoque qui est mis en évidence par la transformation de Legendre (Parisi et Frish, 1985):

$$K(q) = \max_{\gamma} \{q\gamma - c(\gamma)\} \Leftrightarrow c(\gamma) = \max_q \{q\gamma - K(q)\} \quad (2.14)$$

Ces relations expriment la correspondance entre les moments et les ordres de singularité, telle qu'au moment d'ordre  $q$  correspond la singularité  $\gamma_q$  :

$$K(q) = q\gamma_q - c(\gamma_q) \quad (2.15)$$

Et à l'inverse, à la singularité  $\gamma$  correspond l'ordre de moment  $q_\gamma$  :

$$c(\gamma) = q_\gamma \gamma - K(q_\gamma) \quad (2.16)$$

Graphiquement, la transformation de Legendre dans l'équation (2.14) est la distance maximale entre la ligne  $q\gamma$  et la courbe  $c(\gamma)$  (figure 2-13.a). Pour la transformation inverse de Legendre c'est la distance entre la ligne  $\gamma_q$  et la courbe  $K(q)$  (figure 2-13.b). La transformation de Legendre relie les points de la fonction  $c(\gamma)$  aux tangentes de la fonction  $K(q)$  et vice-versa. La correspondance un à un entre les moments et ordres de singularités est donc:

$$q = c'(\gamma) \quad (2.17)$$

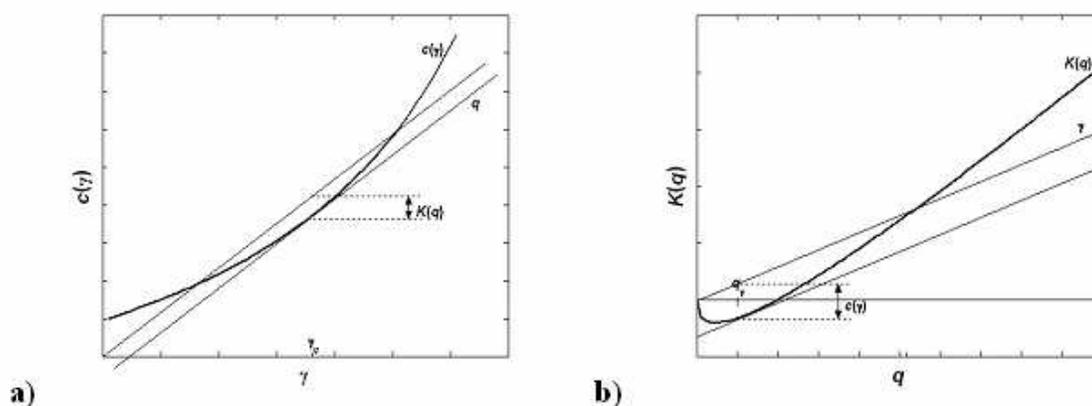
$$\gamma = K'(q) \quad (2.18)$$

Si les singularités  $\gamma$  sont limitées par une valeur  $\gamma_{\max}$ , la transformation de Legendre de  $c(\gamma)$  a lieu seulement pour une plage fini des valeurs de  $\gamma$ . Ceci conduit à un comportement linéaire de la fonction d'échelle des moments pour des moments  $q > q_{\max}$ . Le moment critique est  $q_{\max} = c'(\gamma_{\max})$ . Pour cette plage de valeurs la fonction  $K(q)$  s'obtient par:

$$K(q) = q\gamma_{\max} - c(\gamma_{\max}) \quad (2.19)$$

### 2.4.3 Multifractals universels

Les statistiques des processus multifractals sont caractérisées par les fonctions  $c(\gamma)$  et  $K(q)$ . La description de ces fonctions par des modèles est donc importante. Dans les multifractals, il y a seulement une contrainte de convexité sur les fonctions exposantes  $c(\gamma)$  et  $K(q)$ . Ainsi, un nombre infini de paramètres serait exigé pour déterminer, ou décrire, un processus multifractal. La notion d'universalité, bien connue en physique, est une approche simplifiée à ce problème. L'universalité est la présence dans différents processus du même comportement dynamique structurel, qui peut être quantifié avec quelques paramètres. L'universalité des processus aléatoires multiplicatifs a été abordée de différents points de vue (Mandelbrot, 1974; Schertzer et Lovejoy, 1987a; Mandelbrot, 1989; Lovejoy et Schertzer, 1990; Mandelbrot, 1991; Schertzer et Lovejoy, 1991; Gupta et Waymire, 1993; Schertzer et Lovejoy, 1994; Schertzer et al., 1995; Gupta et Waymire, 1997; Schertzer et Lovejoy, 1997).



**Figure 2-13. Illustration des transformations de Legendre en reliant graphiquement les fonctions associées avec les distributions de probabilité,  $c(\gamma)$  et avec les moments statistiques  $K(q)$ . a)  $K(q)$  obtenue de  $c(\gamma)$ ; b)  $c(\gamma)$  obtenue de  $K(q)$  (adaptée de Tessier et al., 1993).**

Une alternative proposée par Schertzer et Lovejoy (1987a), pour des processus continus, explore l'existence de certains générateurs attractifs stables qui mènent à différentes classes de multifractals ayant un comportement distinct. Ces classes de multifractals sont 'universelles' dans le sens que sous des itérations répétées, le générateur peut converger à une limite bien définie qui dépend relativement peu de ses caractéristiques. D'autre part, les

fonctions exposantes qui décrivent le comportement des processus multifractals à travers les échelles ne sont paramétrisées que par trois paramètres. Pour les multifractals universels, la fonction d'échelle s'écrit:

$$K(q) - Hq = \begin{cases} \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ C_1 q \ln(q) & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.20)$$

Le paramètre  $\alpha$  est l'index de Lévy ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ),  $C_1$  est la codimension de la singularité moyenne et  $H$  est l'écart par rapport à la conservation du champ. La fonction de codimension donc s'écrit:

$$c(\gamma - H) = \begin{cases} C_1 \left( \frac{\gamma}{C_1 \alpha'} + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha'} & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ C_1 \exp\left( \frac{\gamma}{C_1} - 1 \right) & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.21)$$

où  $\alpha'$  satisfait:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1 \quad \text{pour } \alpha \neq 1 \quad (2.22)$$

Dans les équations (2.20) et (2.21)  $H$ ,  $\alpha$  et  $C_1$  sont les paramètres nécessaires pour caractériser les fonctions d'invariance d'échelle et les propriétés statistiques des processus multifractals. Ces paramètres sont appelés paramètres multifractals universels.

## **2.5 Notion de cascades**

### **2.5.1 Introduction**

Dans la géophysique, les champs se caractérisent pour avoir une variabilité et une anisotropie extrêmes sur une vaste gamme d'échelles spatio-temporelles. L'atmosphère est un fluide qui présente des mouvements fortement turbulents en variant dans l'espace depuis le

millimètre jusqu'à l'échelle planétaire. Le rapport des échelles spatiales intervenantes est de l'ordre du milliard (Schertzer et Lovejoy, 1987a). Cette grande variabilité non linéaire présente une grande complexité, ce qui explique les difficultés rencontrées dans les études des champs géophysiques. Les mouvements turbulents de l'atmosphère sont régis par un ensemble complexe d'équations et quoi qu'il en soit, ces équations sont non linéaires et elles ne sont résolues que dans quelques cas particuliers.

Les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible sont une approche à la turbulence atmosphérique (Schertzer et Lovejoy, 1987a, 1989b, 1991; Marsan et al., 1996; Schertzer et Lovejoy, 1997; Marsan, 1998; Biauou, 2004):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \bar{v} + \bar{f} \\ \nabla \cdot \bar{v} &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Où  $\bar{v}$  est la vitesse du champ,  $t$  le temps,  $p$  la pression statique,  $\rho$  la densité du fluide,  $\nu$  la viscosité cinématique, et  $\bar{f}$  les forces extérieures (par exemple la gravité).

Lorsque la vitesse des écoulements devient plus grande, les mouvements sont turbulents et les non linéarités des équations transmettent de façon statistique l'énergie des grandes échelles vers les petites échelles. Il est possible de montrer que les termes non linéaires d'advection ne dissipent pas l'énergie turbulente (Kraichnan, 1967; Leslie, 1973), mais celle-ci est dissipée sous forme de chaleur par frottement visqueux uniquement aux échelles de l'ordre de celle de la viscosité.

Richardson (1922) décrit, sous forme de poème, les écoulements turbulents en faisant intervenir une cascade d'énergie. Ces idées intuitives peuvent se traduire de la façon suivante: la turbulence développée est entretenue à grandes échelles par un forçage extérieur. Ensuite, par interactions non linéaires provenant du terme d'advection, l'énergie des mouvements à grande échelle est transmise aux échelles plus petites, et ainsi de suite, sans dissipation. Les termes d'advection conservent l'énergie, sauf que les termes de viscosité ne soient plus négligeables.

Bien que les propriétés mathématiques des équations de Navier-Stokes (existence et unicité de ses solutions) correspondent à un des bien connus problèmes de Hilbert (Hilbert, 1902), qui restent totalement ouverts, ces équations ont une symétrie d'échelle. Ces équations restent formellement invariantes sous n'importe quelle opérateur contraction-dilatation spatio-temporel (de rapports d'échelles  $\lambda$ ,  $\lambda^{1-H_t}$ ). Par une renormalisation convenable des variables dépendantes de l'équation (2.23):

$$\begin{aligned}
\bar{x} &\rightarrow \bar{x} / \lambda \\
t &\rightarrow t / \lambda^{1-H_t} \\
\bar{v} &\rightarrow \bar{v} / \lambda^H \\
\mathbf{v} &\rightarrow \mathbf{v} / \lambda^{1+H} \\
\bar{f} &\rightarrow \bar{f} / \lambda^{2H-1}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Donc, l'équation (2.23) possède une propriété d'invariance d'échelle (*scaling*). L'exposant  $H_t$  mesure la différence de loi d'échelle entre les coordonnées d'espace et de temps (il correspond à l'écart par rapport à l'isotropie).  $H$  est le degré de non conservation (en moyenne) de la vitesse turbulente.

Dans le cadre des études de la turbulence développés par Kolmogorov (Kolmogorov, 1941) le temps de vie  $\tau_\ell$  d'un tourbillon de taille  $\ell$  est tel que la variation de vitesse a cette échelle est:

$$\delta v_\ell \approx \ell / \tau_\ell \tag{2.25}$$

Selon Kolmogorov la variation de vitesse s'écrit:

$$\delta v_\ell \approx \bar{\epsilon}^{1/3} \ell^{1/3} \tag{2.26}$$

étant  $\bar{\epsilon}$  le flux (moyen) d'énergie homogène à travers l'échelle  $\ell$ , donc

$$\tau_\ell \approx \bar{\epsilon}^{-1/3} \ell^{2/3} \tag{2.27}$$

ce qui finalement donne  $H_t = H = 1/3$ .

Dans le cas de la turbulence non homogène (Kolmogorov, 1962; Obukhov, 1962), le résultat est plus complexe dû aux fluctuations du flux. Dans ce cas le temps de vie du tourbillon  $\tau_\ell$  est intermittent et dépendant du flux hétérogène  $\varepsilon_\ell$  plutôt que du  $\bar{\varepsilon}$ .

L'interprétation phénoménologique de ce résultat est que la zone inertielle se schématise comme un ensemble de structures à chaque échelle. Les interactions d'une structure de taille  $\ell$  avec les autres structures de l'écoulement se caractérisent par une déformation  $1/\tau_\ell$  de la structure (Marsan, 1998). Cette déformation génère des structures plus petites, permettant ainsi à l'énergie de cascader des grandes vers les petites échelles, tel que a été énoncé par Richardson (1922).

Schertzer et Lovejoy (1991) ont montré que la symétrie d'échelle dans l'espace et dans le temps pour les solutions des équations de Navier-Stokes (pour des nombres de Reynolds grands qui caractérisent les turbulences atmosphériques) est similaire à l'invariance d'échelle qui présentent les champs scalaires actifs tels que les champs des nuages et de pluie. Donc, les champs de pluie (qui sont de champs multifractals) obéissent à des lois semblables à celle de Kolmogorov.

## 2.5.2 Principe des cascades

Dans le paragraphe précédent on a vu que les interactions entre les grosses structures génèrent de plus petites structures en leurs transférant leur énergie, et cela se répète jusqu'à l'échelle de la viscosité moléculaire, qui est de l'ordre du millimètre. Ainsi, l'étude des champs multifractals se fera en utilisant cette propriété caractérisée par la distribution de l'énergie sous la forme de cascade (Schertzer et Lovejoy, 1987a, 1989b, 1991).

On verra dans ce paragraphe la construction de cascades, en commençant par le cas plus simple: les cascades auto-similaires et discrètes, dans un domaine purement spatial. On considère un domaine spatial bidimensionnel de taille  $L \times L$  correspondant à la structure la plus grande, d'intensité ou densité de mesure  $\varepsilon_0$ . La construction consiste à itérer un générateur de la cascade, invariant d'échelle, de l'échelle plus grande  $L$  jusqu'à l'échelle de résolution  $l = L / \Lambda$ , où  $\Lambda$  est le rapport d'échelle maximum de la cascade.

Dans la première étape de la construction on divise le domaine  $L \times L$  en  $\lambda \times \lambda$  structures d'échelle  $L/\lambda$ , et à attribuer à chaque nouvelle structure d'indice  $i$  une intensité  $\varepsilon_{1,i} = \varepsilon_0 \mu \varepsilon_{1,i}$ , ou  $\mu \varepsilon_{1,i}$  est une réalisation, indépendante pour chaque structure et chaque pas de la cascade, d'une variable aléatoire positive de loi dépendante du modèle fractal ou multifractal considéré. La conservation, en moyenne d'ensemble, à ce pas de la cascade (et à tous les pas), de la quantité initiale s'écrit  $\langle \varepsilon_{1,i} \rangle = \varepsilon_0$ , ce qui suggère que  $\langle \mu \varepsilon_{1,i} \rangle = 1$ . Après  $n$  itérations du processus multiplicatif, les dimensions des structures obtenues sont  $L/\lambda^n$  et l'énergie de chaque structure s'écrit  $\varepsilon_{n,i} = \varepsilon_{n-1,i} \mu \varepsilon_{n,i}$ . En prenant compte de l'équation (2.13), la variable aléatoire est caractérisée par la fonction  $K(q)$  telle que (Schertzer et Lovejoy, 1987a ; Lovejoy et Schertzer, 1990 ; Marsan, 1998 ; Biauou, 2004):

$$\langle (\mu \varepsilon)^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \quad (2.28)$$

La conservation en moyenne d'ensemble de la masse totale à chaque pas de la cascade permet donc de déduire que la fonction  $K(q)$  obéit à la condition  $K(1) = 0$ . Ce choix d'une conservation en moyenne d'ensemble est à distinguer d'une conservation exacte car elle mène à des propriétés de divergence des moments, à des ordres suffisamment grands. Ceci définit le générateur de la cascade qu'on itère  $n = \log(\Lambda) / \log(\lambda)$  fois (figure 2.14).

## 2.5.3 Cascade discrète

### 2.5.3.1 Le $\beta$ -modèle

Le modèle de cascade le plus simple est le  $\beta$ -modèle (Novikov et Stewart, 1964; Mandelbrot, 1974; Frisch et al., 1978) qui prend en compte les intermittences de la turbulence en attribuant un des deux états possibles aux structures générées: "mort"/"vif". Dans ce modèle le taux d'énergie peut prendre deux valeurs: 0 ou  $\lambda^c$  (figure 2.15), avec les probabilités suivantes:

$$\begin{aligned} \Pr(\mu \varepsilon = 0) &= 1 - \lambda^{-c} && \text{"mort"} \\ \Pr(\mu \varepsilon = \lambda^c) &= \lambda^{-c} && \text{"vif"} \end{aligned} \quad (2.29)$$

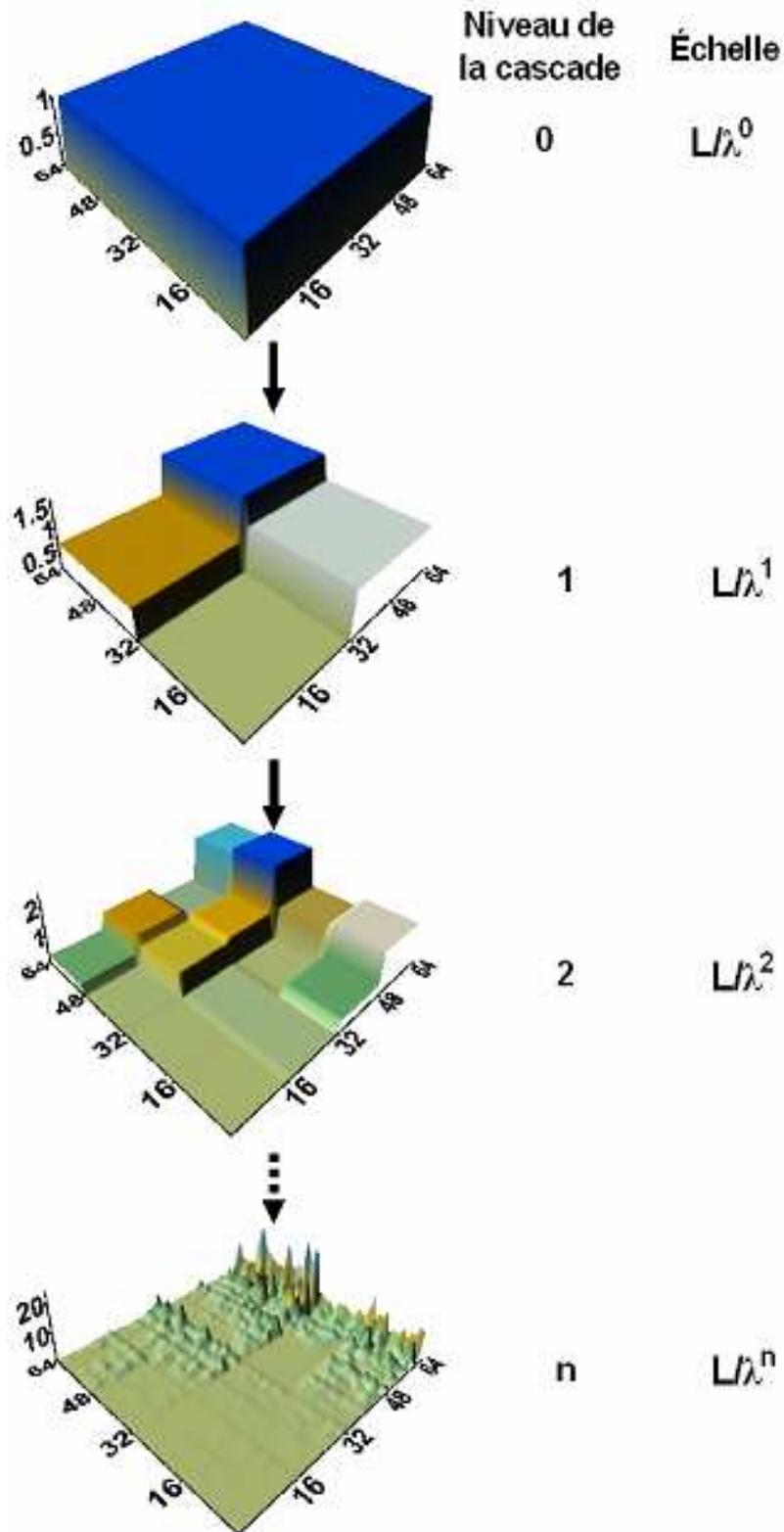
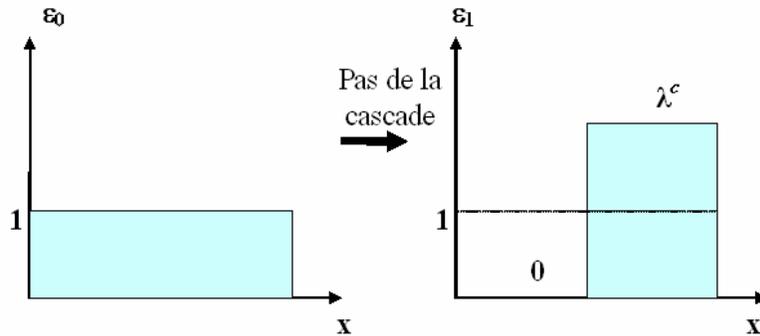


Figure 2-14. Diagramme schématique de construction d'une cascade multiplicative discrète à partir d'un générateur invariant d'échelle.

où  $\varepsilon$  est l'énergie à l'échelle plus grande,  $\mu\varepsilon$  est la fraction de l'énergie transférée aux échelles plus petites,  $\lambda$  est le rapport d'échelle et  $c$  est la codimension des structures d'état "vif". Ce modèle est semblable à la construction de l'ensemble de Cantor, il est en fait un ensemble monofractal, caractérisé par un seul exposant fractal.



**Figure 2-15. Illustration d'un pas de la cascade du  $\beta$ -modèle. A gauche, le modèle commence par une densité de flux uniforme. A droite, après un pas de la cascade, le modèle produit un sous-tourbillon "mort" et un sous-tourbillon "vif" relie à la singularité  $\lambda^c$ .**

Par rapport à l'équation (2.7) la dimension fractale correspondante est  $D_f = D - c$ , où  $D$  est la dimension de l'espace support du processus. La variable aléatoire  $\mu\varepsilon$  devrait respecter la conservation (en moyenne de l'ensemble), c'est-à-dire que  $\langle \mu\varepsilon \rangle = 1$  (pour tous les niveaux de la cascade).

La figure 2-16 montre un exemple du  $\beta$ -modèle (Biaou, 2004) construit dans un espace de trois dimensions (deux de espace et une du temps). L'exposant d'anisotropie espace-temps considéré est  $H_t = 1/3$ , c'est-à-dire que pour le rapport d'échelles de temps on tient  $\lambda_t = \lambda^{1-H_t} = \lambda^{2/3}$ . La variable aléatoire pour cet exemple suit une loi binomiale déterminée par les paramètres  $c = 0.13$ ,  $\lambda = 3$ , et  $\lambda_t = 2.08 \approx 2$  en correspondant pour les structures actives une probabilité  $p = \lambda^{-c} = 3^{-0.13} = 0.87$ . Si  $N$  est le nombre de structures actives par chaque pas de la cascade, le nombre moyen de structures est  $\langle N \rangle = \lambda \lambda_t p = 15.66$ . Lorsque le processus de la cascade est itéré  $n$  fois, on peut estimer la dimension fractale de l'ensemble des structures actives:  $D_f = \ln(\langle N \rangle) / \ln(\lambda) \approx 2.5$ .

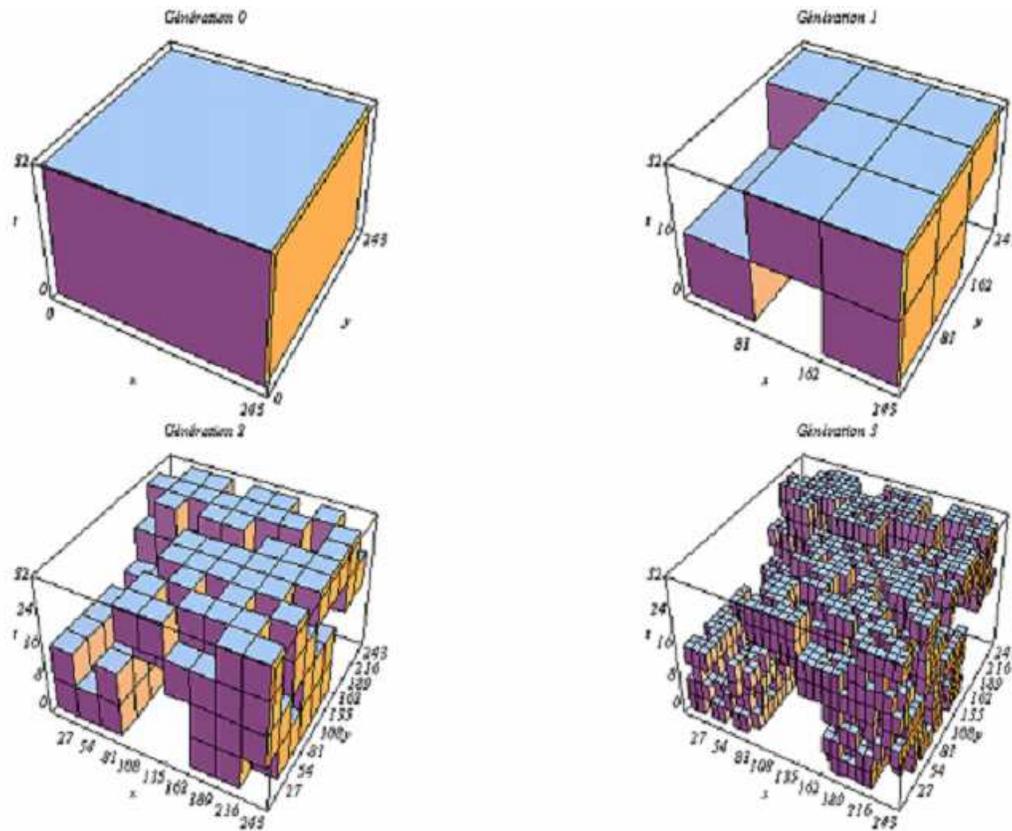


Figure 2-16. Exemple de cascade anisotrope construite suivant le  $\beta$ -modèle. On illustre la structure de départ et 3 pas de la cascade ayant les paramètres  $c=0.13$ ,  $H_f=1/3$  (d'après Biaou, 2004).

Le  $\beta$ -modèle est un exemple caricatural puisqu'il est une très pauvre approximation aux phénomènes de la turbulence. Ces phénomènes révèlent une grande complexité qui ne peut se réduire à la simple alternative "mort"/"vif" tel que le décrit le  $\beta$ -modèle. Cependant, ce modèle est un excellent cas pour expliquer le principe de cascade, car assez facile à mettre en oeuvre et très peu coûteux en temps de calcul.

### 2.5.3.2 L' $\alpha$ -modèle

La nécessité d'avoir une alternative plus réaliste à la dichotomie "mort"/"vif" du  $\beta$ -modèle a résulté dans l' $\alpha$ -modèle (Schertzer et Lovejoy, 1983; Schertzer et Lovejoy, 1985b), un modèle de cascade multiplicative discrète générant des multifractals. Il s'agit de insérer une déstabilisation du  $\beta$ -modèle en introduisant un facteur multiplicatif aléatoire à deux états. Au lieu de permettre aux tourbillons d'être "morts"/"vivants", ce modèle leur permet d'être

“moins actifs” (sous-tourbillons faible) ou “plus actifs” (sous-tourbillons forts) (figure 2-17), d’accord au suivant processus de Bernoulli avec la distribution binomial:

$$\begin{aligned} \Pr(\mu\varepsilon = \lambda^{\gamma^-}) &= 1 - \lambda^{-c} && \text{"moins actif"} \\ \Pr(\mu\varepsilon = \lambda^{\gamma^+}) &= \lambda^{-c} && \text{"plus actif"} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dans l’équation (2.30) les paramètres  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$  et  $c$  sont contraints de sorte que la moyenne de l’ensemble soit conservée ( $\langle \mu\varepsilon \rangle = 1$ ). Alors:

$$\lambda^{\gamma^+} \lambda^{-c} + \lambda^{\gamma^-} (1 - \lambda^{-c}) = 1 \quad (2.31)$$

Ce processus met en évidence l’existence de deux singularités  $\lambda^{\gamma^+}$  et  $\lambda^{\gamma^-}$ . Il faut remarquer que le  $\beta$ -modèle est un cas particulier du  $\alpha$ -modèle avec  $\gamma^+ = c$  et  $\gamma^- \rightarrow -\infty$ . Le  $\alpha$ -modèle est quant à lui un modèle multifractal, puisque possédant plus d’une singularité, donc plus d’une dimension fractale, étant donné qu’à chaque singularité, on associe une dimension fractale par le biais de la codimension.

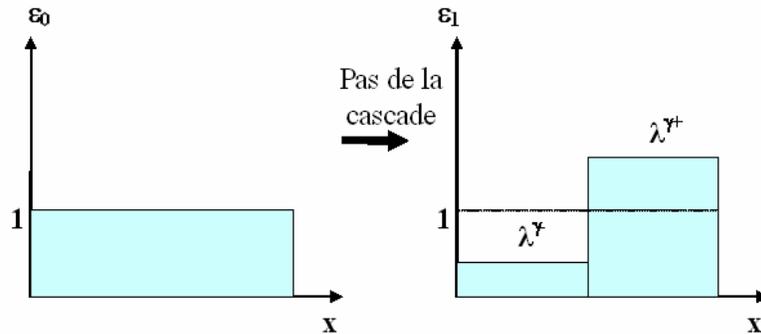


Figure 2-17. Illustration d’un pas de la cascade du  $\alpha$ -modèle. A gauche, le modèle commence par une densité de flux uniforme. A droite, après un pas de la cascade, le modèle produit un sous-tourbillon “moins actif”, relié à la singularité  $\gamma^- < 0$ , et un sous-tourbillon “plus actifs” relié à la singularité  $\gamma^+ > 0$ .

De façon générale, les singularités et  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$  créent, étape après étape, une hiérarchie infinie de singularités mixtes ( $\gamma^- \leq \gamma \leq \gamma^+$ ) telle qu’à la  $n^{\text{ième}}$  étape on a (Schertzer et Lovejoy, 1992b; Biaoou, 2004):

$$\gamma = \frac{n^+ \gamma^+ + n^- \gamma^-}{n^+ + n^-} \quad \text{avec } n = n^+ + n^- \quad (2.32)$$

Donc, on dit qu'un champ multifractal se caractérise par une infinité de singularités  $\gamma$ , donc par une infinité de dimensions fractales. Ainsi, un champ multifractal de densité  $\varepsilon_\lambda$  à la résolution  $\lambda$  peut s'écrire:

$$\varepsilon_\lambda \approx \lambda^\gamma \quad (2.33)$$

ce que suggère que le champ à chaque point du domaine sur lequel il est défini diverge (ou converge pour les singularités négatives, vers une constante) aux petites échelles en suivant un exposant local correspondant à la singularité à ce point.

### 2.5.3.3 Autres modèles de cascades

Dans la littérature il y a beaucoup d'autres modèles de cascades, nommés aussi modèles phénoménologiques. Ceux-ci incluent le modèle log-normal (Kolmogorov, 1962); le modèle Novikov-Stewart (Novikov et Stewart, 1964); le modèle 'Weighted curdling' (Mandelbrot, 1974); le  $\beta$ -modèle aléatoire (Benzi et al., 1984); le modèle de cascade universel (Schertzer et Lovejoy, 1987a), etc. Ces modèles supportent la théorie que les processus multiplicatifs invariants d'échelles rapportent généralement des multifractals. Le modèle de Schertzer et Lovejoy (1987a) explore l'existence de certains générateurs multifractals (stables et attractifs) et argue que les multifractals générés sont universels dans le sens que ces multifractals sont caractérisés par seulement quelques paramètres.

### 2.5.4 Types de Cascades

La génération des cascades nécessite deux types de générateurs à savoir: un générateur de structures physiques de la cascade et un générateur de valeurs aléatoires suivant une distribution donnée.

Dans cette partie, on passera en revue les différents types de cascades, c'est à dire les différents types de générateurs de structures de cascades. On fait allusion à la classification de générateurs de structures physiques. On verra les propriétés de ces opérateurs, dans les grandes lignes, sans trop insister sur les détails.

### 2.5.4.1 Cascades spatiales auto-similaires

Le principe général des cascades discrètes est celui des cascades multiplicatives décrites dans le paragraphe 2.5.2. Les structures générées après un certain nombre d'itérations sont reliées à la structure initiale par une similitude (vectorielle) dont le rapport (positif) est l'inverse  $\lambda^{-1}$  du rapport d'échelle  $\lambda$  ( $\lambda > 1$ ) de la structure initiale à celle des structures générées. Ces cascades sont caractérisées par une symétrie d'échelle isotrope entre les deux dimensions de l'espace. La forme de l'opérateur contraction-dilatation du générateur de ces cascades, pour un rapport d'échelle  $\lambda$ , s'écrit sous la forme:

$$T_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

qui peut être exprimé sous la forme:

$$T_\lambda = \lambda^{-G} \quad (2.35)$$

où  $G$  est une matrice diagonale de la forme:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Cette définition permet d'observer les propriétés d'invariance d'échelle d'un champ  $\varepsilon$  comme celui schématisé dans la figure 2-18. En effet, le générateur de structures défini par la matrice  $T_\lambda$  étant une homothétie, il possède une infinité d'axes globalement invariants. Il ne serait pas inutile de préciser que cette invariance d'échelle est celle qui sera mise en évidence par l'analyse multifractale des champs de précipitations. Les intensités à affecter aux

différentes sous structures obtenues sont fournies par un générateur de variables aléatoires que nous décrivons plus loin dans le chapitre 4.

### 2.5.4.2 Cascades spatiales auto-affinés

C'est le cas le plus simple de générateur non auto-similaire, il possède deux axes globalement invariants. Les cascades auto-affines sont caractérisées par une anisotropie entre les deux directions de l'espace. Si  $H_y$  mesure l'écart par rapport à l'isotropie des lois d'échelle (auto-similarité) entre les deux directions, la matrice  $G$  définie dans le cas des cascades auto-affines s'écrit (Schertzer et Lovejoy, 1985a ; Marsan, 1998 ; Biauou , 2004):

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - H_y \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

où  $H_y$  est l'exposant d'anisotropie spatiale.

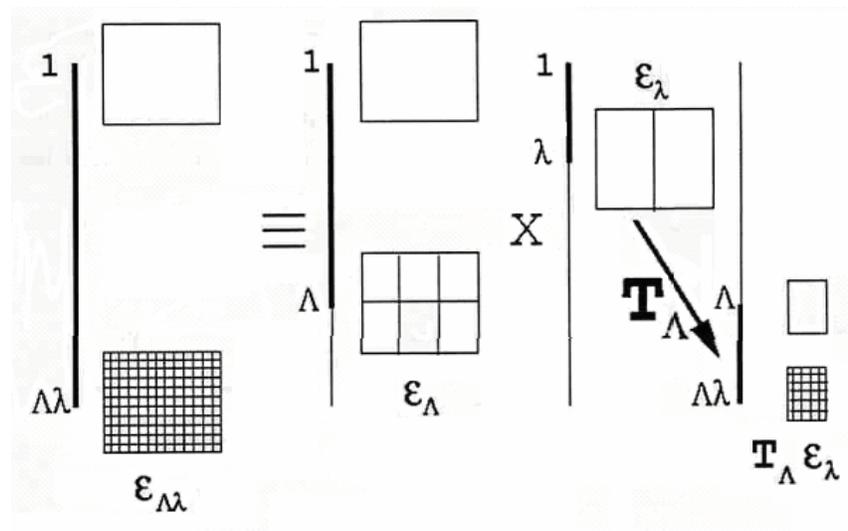


Figure 2-18. La contraction-dilatation  $T_\lambda$  déplace (par homothétie) en échelle le champ  $\epsilon_\lambda$ . Ce nouveau champ déplacé, multiplié par une réalisation indépendante de  $\epsilon_\Lambda$ , est identique en distribution à  $\epsilon_{\Lambda\lambda}$ . (D'après Marsan, 1998).

Dans les applications pratiques, différemment des cascades auto-similaires, on obtient une cascade auto-affine en opérant, suivant chacune des deux directions spatiales, une division par des rapports d'échelles différents:  $\lambda$  et  $\lambda^{1-H_x}$ , tandis que dans le cas de la cascade

auto-similaire, la division se fait par le même rapport d'échelle dans les deux directions. Les intensités sont attribuées suivant un facteur aléatoire de l'intensité initiale, fourni par un générateur de variables aléatoires.

L'opérateur contraction-dilatation  $T_\lambda$  possède les propriétés d'un groupe paramétré (Schertzer et Lovejoy, 1985a), engendré par la matrice diagonale génératrice  $G$  (éq. (2.37)):

$$T_\lambda T_{\lambda'} = T_{\lambda'} T_\lambda = T_{\lambda\lambda'} \quad (2.38)$$

Donc, en tenant compte de cette propriété de groupe, l'invariance en échelle du champ anisotrope  $\varepsilon_\lambda$ , peut s'écrire:

$$\varepsilon_{\lambda\lambda} \stackrel{d}{=} \varepsilon_\lambda T_\lambda \varepsilon_\lambda \quad (2.39)$$

où  $\stackrel{d}{=}$  indique l'identité en probabilité.

Un exemple de symétrie auto-affine, caractérisée par un exposant d'anisotropie espace- temps, est celle des équations de Navier-Stokes incompressible en régime turbulent, ce qui rend pertinent le cadre des cascades auto-affines pour la modélisation en espace et temps des champs multifractals.

### 2.5.4.3 Cascades non auto-similaires: invariance d'échelle généralisée

Les cascades auto-affines sont un cas particulier de cascades non auto-similaires. Dans ce paragraphe on verra une généralisation de la construction de cascades auto-affines aux cascades dont la matrice de l'opérateur contraction-dilatation ne possède pas forcément un axe invariant. Ces cascades sont définies par des opérateurs linéaires avec des matrices qui peuvent cesser d'être diagonales, contrairement aux autres cas évoqués précédemment.

Cette généralisation de cascades est couramment connue comme Invariance d'Échelle Généralisée (IEG) ou GSI (*Generalized Scale Invariance*) (Lovejoy et Schertzer, 1985; Schertzer et Lovejoy, 1985a; Lovejoy et al., 1987; Schertzer et Lovejoy, 1987b, 1989a;

Lovejoy et al., 1992; Pflug et al., 1993; Pecknold et al., 1996). La matrice de ces IEG peut prendre n'importe quelle forme et s'écrit de façon générale comme:

$$G = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Schertzer et Lovejoy (1985a) ont montré que cette forme générale de  $G$  ne semble être contrainte que par la nécessité de posséder des valeurs propres à partie réelle positive, de manière à assurer une contraction globale pour  $\lambda > 1$  ou une dilatation pour  $\lambda < 1$ . Un cas particulier de générateurs à trois dimensions est celui du générateur de cascade spatio-temporelle ayant une matrice diagonale de la forme:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - H_t \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Il s'agit d'une cascade auto-affine espace-temps avec deux directions spatiales parfaitement isotropes et une direction du temps caractérisée par un coefficient d'anisotropie espace-temps  $H_t$ .

#### 2.5.4.4 Cascades continues et universelles

Les cascades proposées ci-dessus présentent des limitations importantes, du fait que de telles cascades ne sont développées que sur un ensemble dénombrable d'échelles (d'où l'appellation cascades discrètes). Comme on peut le noter, l'opérateur contraction-dilatation n'est alors applicable que pour des rapports d'échelle multiples de  $\lambda$  et crée au niveau des simulations des carrés ou rectangles artificiels, qui ont peu voir avec les fractals observés dans la nature.

Pour améliorer ces modèles il convient donc de considérer une construction continue en échelle tout en maintenant le rapport d'échelle maximum  $\Lambda$  constant (ce qui correspond à une densification en échelle du processus de cascade (Schertzer et Lovejoy, 1987a; Lovejoy et

Schertzer, 1990; Schertzer et Lovejoy, 1991; Schertzer et Lovejoy, 1997)). La propriété de groupe donnée par l'équation (2.39) permet de définir le générateur associé  $\Gamma_\Lambda$  tel que:

$$\varepsilon_\Lambda = e^{\Gamma_\Lambda} \quad (2.42)$$

et l'équation(2.39) devient, pour le générateur:

$$\Gamma_{\Lambda\lambda} \stackrel{d}{=} \Gamma_\Lambda + T_\lambda \Gamma_\lambda \quad (2.43)$$

ce que établit la propriété de groupe additif pour  $\Gamma_\Lambda$ .

Deux contraintes fondamentales agissent sur le générateur. L'invariance d'échelles des moments du champ  $\varepsilon_\Lambda$  conduit à une divergence en  $\log \Lambda$  de la seconde fonction caractéristique de  $\Gamma_\Lambda$ :

$$\langle e^{q\Gamma_\Lambda} \rangle = e^{K_{\Gamma_\Lambda}(q)} \approx \Lambda^{K(q)} \quad (2.44)$$

c'est-à-dire,

$$K_{\Gamma_\Lambda}(q) \approx K(q) \log(\Lambda) \quad (2.45)$$

De plus, la propriété de groupe de  $\Gamma_\Lambda$  peut se re-écrire, pour tout  $\lambda$ :

$$\Gamma_\Lambda \stackrel{d}{=} \Gamma_\lambda + T_\lambda (\Gamma_\lambda + T_\lambda (\Gamma_\lambda + T_\lambda (\dots))) \dots \quad (2.46)$$

où  $\log(\Lambda)/\log(\lambda)$  incréments  $\Gamma_\Lambda$  sont utilisés.  $\Gamma_\Lambda$  est donc semblable à une marche aléatoire avec incréments stationnaires. Le pas  $\lambda$  de l'incrément pouvant être choisi aussi petit que voulu, ceci conduit donc à considérer pour  $\Gamma_\Lambda$  des distributions infiniment divisibles.

Cette contrainte a des conséquences importantes sur les processus de cascade. En effet, il a été montré qu'un champ multifractal est complètement caractérisé par ses fonctions  $c(\gamma)$  et  $K(q)$ , équivalentes au point de vue de l'information puisque duales par transformation de Legendre. Il est à priori de déterminer une infinité de paramètres (les valeurs de ces deux

fonctions) pour quantifier complètement le champ. Les processus de cascade, en n'admettant que des générateurs infiniment divisibles, contraignent les deux fonctions caractérisant la distribution. Ainsi le modèle universel réduit ce nombre de paramètres à deux (trois si l'on considère l'extension à des processus non conservatifs). Ces processus appartiennent donc à des classes universelles.

## **2.6 Conclusions**

Dans ce chapitre nous avons présenté les notions des objets fractals et multifractals et leur évolution, et aussi quelques exemples et applications. Nous avons présenté aussi les notions de cascades d'énergie qui caractérisent les modèles multifractals et qui permettent de générer les flux intermittents dont la moyenne statistique est conservée et invariante d'échelle. Donc, un champ généré par un processus de cascades multifractales respecte les propriétés d'invariance d'échelle et possède une très grande variété de dimensions fractales correspondant à une hiérarchie infinie de singularités.

Une des propriétés importantes des champs multifractals est qu'ils sont caractérisés par les fonctions de codimension  $c(\gamma)$  et d'échelle des moments  $K(q)$ . Ces deux fonctions sont des exposants des fonctions algébriques qui définissent les probabilités de dépassement d'un seuil de singularité  $\gamma$  et les moments d'ordre  $q$ , respectivement. Ces fonctions sont reliées par une transformation de Legendre et sont caractérisées par un grand nombre de paramètres. Dans le cas du modèle multifractal universel (Schertzer et Lovejoy, 1991) le nombre de paramètres peuvent être réduit à seulement trois.

Les fonctions  $c(\gamma)$  et  $K(q)$  peuvent être déterminées à partir de techniques très élaborées, connues comme techniques d'analyse multifractals, qui permettent de déterminer les paramètres que caractérisent ces deux fonctions et qu'on verra dans le chapitre suivant.

## 3 Analyse multifractale

### 3.1 Introduction

L'analyse multifractale d'un champ consiste à déterminer les paramètres multifractals qui caractérisent ce champ, c'est-à-dire ceux des fonctions  $K(q)$  et  $c(\gamma)$ . Il existe des techniques simples, faciles à mettre en œuvre qui permettent déterminer la fonction de échelle des moments,  $K(q)$ . Nous expliciterons la détermination de cette fonction sachant que la fonction codimension  $c(\gamma)$  pourra être déterminée par une transformation de Legendre appropriée.

Des méthodes dites indirectes et directes permettent déterminer les paramètres dans le cadre des multifractals universels. Les premières méthodes sont présentées sommairement dans les Sections 3.2 et 3.3.

La méthode de distribution de probabilité permet de calculer la fonction codimension et les paramètres  $\alpha$  et  $C_1$  s'en déduisent par des calculs numériques (pour plus de détails voir Schertzer et Lovejoy, 1994). La méthode du Moment Trace ou TM (*Trace Moment*), permet déterminer directement la fonction d'échelle des moments. Les paramètres  $\alpha$  et  $C_1$  sont estimés à partir de cette fonction par des calculs numériques. La fonction codimension  $c(\gamma)$  peut être déduite de la fonction  $K(q)$  par une transformation de Legendre appropriée.

Il est possible déterminer directement les paramètres multifractals  $\alpha$  et  $C_1$  sans passer préalablement par la détermination des fonctions qu'ils définissent. Ceci est rendu possible par une méthode directe qui est la technique du Moment Double Trace ou DTM, (*Double Trace Moment*).

### 3.2 Méthode de distribution de probabilité

Cette méthode (Schertzer et Lovejoy, 1989b; Lovejoy et Schertzer, 1990; Lavallée et al., 1991) appelée PDMS (de l'anglais *Probability Distribution Multiple Scaling*) est une technique développée pour estimer directement la fonction exposante  $c(\gamma)$  (Eq. 2.12), qui

décrit l'invariance d'échelle multiple des distributions de probabilité des processus. Dans cette technique les histogrammes sont examinés sur une plage d'échelle plutôt qu'aux uniques échelles. La méthode PDMS évite l'utilisation de la transformation de Legendre et la supposition implicite de convergence de tous les moments statistiques. La méthode est basée sur l'équation:

$$\Pr(\epsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) = F \lambda^{-c(\gamma)} \quad (3.1)$$

ou  $F$  est un prefacteur qui dépend faiblement de la singularité  $\gamma$  et varie lentement avec  $\lambda$ . La méthode suppose que les distributions de probabilité dans l'équation (3.1) sont d'un unique échantillon ou de plusieurs échantillons indépendants observés dans un espace de dimension  $D$  (Lovejoy et Schertzer, 1990).

Pour le calcul pratique des distributions de probabilité de l'équation (3.1), à chaque résolution  $\lambda$ , et pour la singularité  $\gamma$ , on pave l'espace de  $N_\lambda = \lambda^D$  boîtes de volume  $\lambda^{-D}$ . Si  $N_\lambda(\gamma)$  est le nombre de boîtes ayant une intensité  $\epsilon_\lambda$  qui vérifie l'inégalité:

$$\frac{\log(\epsilon_\lambda)}{\log(\lambda)} \geq \gamma \quad (3.2)$$

alors, l'équation (3.1) peut être écrit:

$$\Pr(\epsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) \approx \frac{N_\lambda(\gamma)}{N_\lambda} = F \lambda^{-c(\gamma)} \quad (3.3)$$

La procédure est répétée pour différentes valeurs de la singularité  $\gamma$ , et par valeurs décroissantes de résolution  $\lambda$  (obtenues par dégradation du signal). La fonction codimension  $c(\gamma)$  est obtenue en représentant dans un diagramme bi-logarithmique, les quantités  $N_\lambda(\gamma)/N_\lambda$  en fonction de  $\lambda$ . L'avantage de cette méthode est que prise en compte la variation lente du prefacteur  $F$ , où  $\log(F)$  est simplement l'interception en  $\log(\lambda) = 0$ .

### 3.3 Méthode du Moment Trace

La méthode du Moment Trace ou TM (*Trace Moment*) (Schertzer et Lovejoy, 1987a) permet déterminer la fonction exposante d'échelle des moments  $K(q)$  dans l'équation (2.13), et donc, de la fonction duale de codimension  $c(\gamma)$ . L'intérêt est de rechercher sur l'invariance d'échelle des moments d'ordre  $q$  de un champ conservatif de densité  $\varepsilon_\lambda$  à différentes échelles de résolution  $\lambda$ . Comme nous avons vu dans la Section 2.4 Le comportement multifractal à la petite échelle ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) mène à  $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \rightarrow \infty$  pour les moments statistiques  $q > 1$ , parce que  $K(q) > 0$  pour  $q > 1$ . Pour traiter ce type de comportement, l'invariance des moments est étudiée en utilisant les flux des densités de champs à la place des densités mêmes. Le flux d'un champ est l'intégral sur la densité du champ. La notion de flux signifie ici le flux à travers une échelle. (Schertzer et Lovejoy, 1989b)

Soit un processus de cascade observé par un ensemble arbitraire  $A$ , de dimension  $D$ , défini dans un espace  $X$ , à la résolution  $\lambda$ . Le flux total d'un champ de densité  $\varepsilon_\lambda$  sur l'ensemble  $A$  est:

$$\prod_\lambda(A) = \int_A \varepsilon_\lambda d^D x \quad (3.4)$$

On définit les moments d'ordre  $q$  de ces flux:

$$\left\langle \left( \prod_\lambda(A) \right)^q \right\rangle = \left\langle \left( \int_A \varepsilon_\lambda d^D x \right)^q \right\rangle \quad (3.5)$$

Cette formule ne peut pas être utilisée pour  $q$  non entier parce que les moments fractionnaires ne sont pas définis. La complexité de cette expression suggère l'introduction des moments traces du flux sur l'ensemble  $A$ :

$$Tr_A[\varepsilon_\lambda^q] = \left\langle \int_A (\varepsilon_\lambda)^q d^{qD} x \right\rangle \approx \lambda^{K(q)-D(q-1)} \quad (3.6)$$

Pour la mise en oeuvre de cette méthode, il suffit d'additionner les valeurs de  $\varepsilon_\lambda$  sur les pixels de résolution  $\lambda$ , de prendre la puissance  $q$  de la quantité obtenue, puis de calculer leur somme, normalisée par  $\lambda^{D(q-1)}$ , sur tous les pixels de l'ensemble  $A$ . La représentation en diagramme logarithmique de la quantité obtenue en fonction de  $\lambda$  permet de déterminer la fonction  $K(q)$ . En effet, si la dépendance est linéaire, on arrive à la conclusion que le champ caractéristique  $\varepsilon_\lambda$  possède la propriété d'invariance d'échelle et que la pente de la courbe obtenue fournit la valeur de  $K(q)$ . Pour passer d'une échelle de résolution  $\lambda$  à une autre, on procède par une dégradation du champ qui sera détaillée dans la méthode DTM.

### 3.4 Méthode du Double Moment Trace

La méthode du Moment Double Trace ou DTM (*Double Trace Moment*) (Lavallée, 1991; Lavallée et al., 1993) est une généralisation de la méthode du Moment Trace. Elle a été développée spécifiquement pour estimer directement les paramètres multifractals universels  $\alpha$  et  $C_1$ , sans passer par les fonctions qu'ils définissent. La méthode assume que les multifractals appartiennent à la classe universelle, contrairement aux méthodes décrites ci-dessus où aucune supposition n'est faite au sujet du type de multifractal qui est analysé. De même à la méthode TM, la méthode DTM permet également la détermination des fonctions exposantes  $K(q)$ , dans l'équation (2.13).

Comparé à la méthode TM, la technique de DTM présente un deuxième (double) moment dans l'analyse des données. Ce deuxième moment  $\eta$  est choisi dans un intervalle de  $\mathbb{R}^+$ . L'idée de cette méthode est généraliser l'application des méthodes statistiques à d'autres versions (normalisées) du processus multifractal. Ceci vise à augmenter le range dynamique du processus qui peut être analysé. La procédure agit sur l'intensité  $\varepsilon_\lambda$  associée avec la résolution la plus fine (connue)  $\lambda$  du processus. A partir du champ de densité  $\varepsilon_\lambda$ , on introduit le champ normalisé des puissances  $\eta$  de  $\varepsilon_\lambda$ :

$$\varepsilon_\lambda^{(\eta)} = \frac{\varepsilon_\lambda^\eta}{\langle \varepsilon_\lambda^\eta \rangle} \quad (3.7)$$

Si on considère les sous ensembles  $A_{\lambda,i}$ ,  $i=1,\dots,\lambda^D$  formant une partition du domaine  $A$  de dimension  $D$ , à la résolution  $\lambda$  :

$$A_\lambda = \bigcup_{i=1}^{\lambda^D} A_{\lambda,i} \quad \text{et} \quad A_{\lambda,i} \cap A_{\lambda,j} = \Phi \quad (3.8)$$

En se référant à l'expression du Moment Trace telle que fournie par l'équation (3.6), on peut écrire pour le champ normalisé  $\varepsilon_\lambda^{(\eta)}$  :

$$Tr_A [\varepsilon_\lambda^{(\eta)q}] = \lambda^{K(q,\eta)-D(q-1)} \quad (3.9)$$

où  $K(q,\eta)$  est la fonction de structure du champ normalisé  $\varepsilon_\lambda^{(\eta)}$ . Il faut remarquer que  $K(q,1)=K(q)$ , puisque le champ normalisé pour  $\eta=1$  correspond au moment initial d'ordre  $q$ .

Dans la pratique, la méthode du DTM est l'étude des comportements de divers moments normalisés d'ordre  $q$  des puissances  $\eta$  du processus multifractal  $\varepsilon_\lambda$  pour des valeurs décroissantes de la résolution (Figure 3-1). En prenant les moments d'ordre  $q$  du champ normalisé  $\varepsilon_\lambda^{(\eta)}$  :

$$\langle \varepsilon_\lambda^{(\eta)q} \rangle \approx \lambda^{K(q,\eta)} = \left\langle \frac{\varepsilon_\lambda^{\eta q}}{\langle \varepsilon_\lambda^\eta \rangle^q} \right\rangle = \frac{\lambda^{K(q\eta)}}{\lambda^{qK(\eta)}} = \lambda^{K(q\eta)-qK(\eta)} \quad (3.10)$$

Après identification, on obtient une relation d'une importance capitale:

$$K(q,\eta) = K(q\eta) - qK(\eta) \quad (3.11)$$

En considérant le modèle multifractal universel pour lequel la fonction de structure est fournie par l'expression (2.20), l'équation (3.11) peut s'écrire:

$$K(q,\eta) = \eta^\alpha K(q) \quad (3.12)$$

La représentation  $\log(K(q,\eta))$  pour différentes valeurs de  $\log(\eta)$  et un moment statistique  $q$  fixé, correspond à une courbe où la valeur du paramètre  $\alpha$  est la pente de la partie linéaire de cette courbe (figure 3-2). La valeur du paramètre  $C_1$  est estimée des équations (3.12) et (2.20).

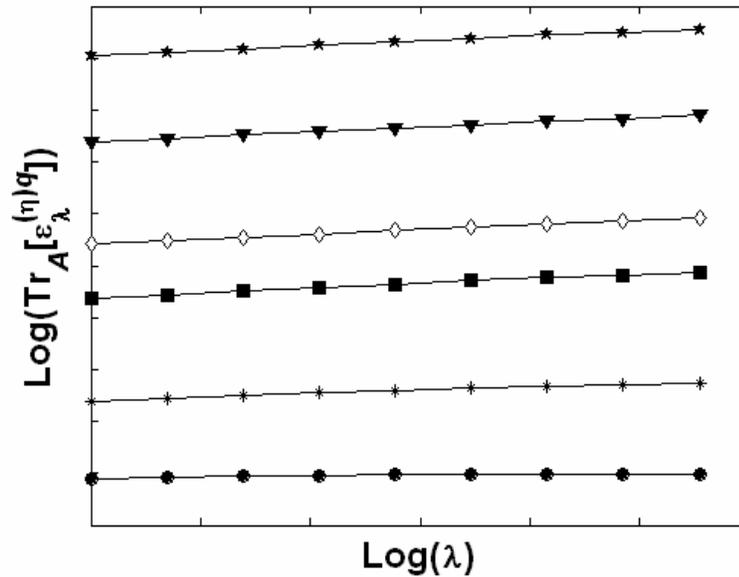


Figure 3-1. Méthode DTM: comportement des divers moments statistiques normalisés d'ordre  $q$  des puissances  $\eta$  du processus multifractal  $\epsilon_i$ .

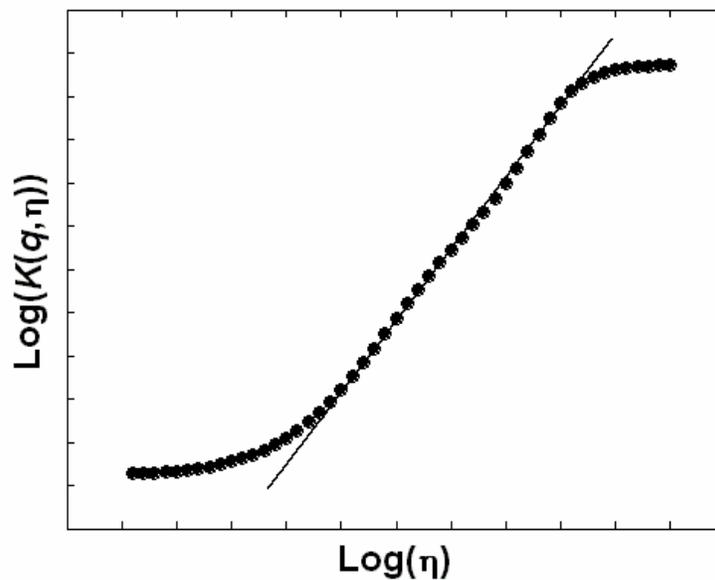


Figure 3-2. Détermination du paramètre  $\alpha$  par la méthode DTM. La pente de la partie linéaire du  $\text{Log}(K(q,\eta))$  par rapport à  $\text{Log}(\eta)$  donne une estimation du paramètre multifractal  $\alpha$ . La tendance horizontale des extrémités de la courbe correspond à de petites ou de grandes valeurs de l'échantillon.

### 3.5 Spectre d'énergie

Une évaluation préliminaire de l'invariance d'échelle peut être faite par une analyse spectrale standard (Mandelbrot, 1983; Schertzer et Lovejoy, 1985b; Schertzer et Lovejoy, 1987a; Ladoy et al., 1991; Lovejoy et Schertzer, 1995a). En effet, l'invariance d'échelle d'un champ implique que son spectre d'énergie suit une loi de puissance sur une plage étendue des nombres d'onde  $k$  :

$$E(k) = k^{-\beta} \quad (3.13)$$

où  $\beta$  est l'exposant spectral.

En plus, dans la caractérisation de un processus multifractal, le paramètre  $H$  (cf. Sect. 2.4.3) donne le degré de non conservation du processus. L'estimation du paramètre  $H$  utilise l'exposant du spectre d'énergie du processus. Si le spectre d'énergie des intensités du champ est de la forme comme exprimée dans l'équation (3.13), on attend que la valeur absolue de l'exposant spectral  $\beta$  sera en rapport avec le paramètre  $H$  et l'exposant des moments (Pecknold et al., 1993; Schertzer et Lovejoy, 1993; De Lima, 1998):

$$\begin{aligned} \beta &= 1 - K(2) && (\text{conservatif}) \\ \beta &= 1 - K(2) + 2H && (\text{non conservatif}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

L'exposant spectral est lié à une valeur simple de la fonction  $K(q)$ , correspondant au moment 2 puis que le spectre est un statistique de deuxième ordre. Le spectre d'énergie est obtenu à partir de la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation, qui est un moment de second ordre. Le paramètre  $H$  peut être obtenu avec l'équation (3.14) en utilisant une estimation empirique ou théorique du  $K(2)$ . La valeur théorique de  $K(2)$  peut être obtenue avec l'équation (2.20), après détermination des paramètres  $\alpha$  et  $C_1$ , en rapportant l'expression:

$$H = \frac{\beta - 1 + K(2)}{2} = \frac{\beta - 1}{2} + \frac{C_1(2^\alpha - 2)}{2(\alpha - 1)} \quad (3.15)$$

Pour un processus conservatif, le spectre est toujours moins raide que un bruit  $1/f$ , qui est caractérisé par un spectre du type  $E(k) = k^{-1}$ .

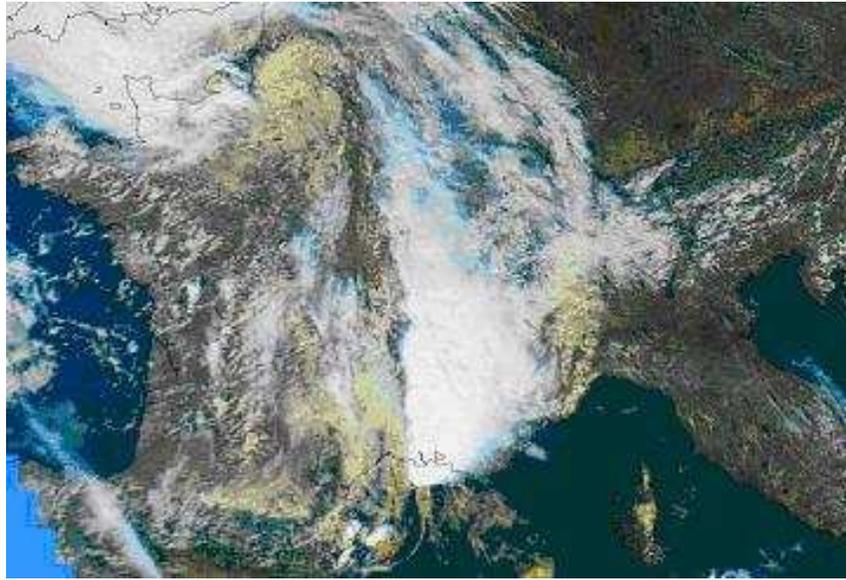
### **3.6 Analyse Multifractale des Données Radar**

Dans les paragraphes précédents on a présenté des procédures correspondantes à la caractérisation multifractale des champs de pluie. Dans cet paragraphe on présente la mise en œuvre et application de ces techniques à l'événement orageux du 8-9 septembre 2002 à Nîmes, France, en utilisant des données radar pour déterminer les paramètres multifractals qui caractérisent la cascade.

#### **3.6.1 Cas d'application: historiques et données**

Cévennes est une région méditerranéenne de la France entre les collines méridionales des Alpes et du Massif Central (des montagnes plus anciennes et plus érodées que des Alpes) et qui couvre les secteurs administratifs de Gard, Vaucluse et Herault et dont la ville principale est Nîmes. Elle est connue pour avoir des orages extrêmes, souvent appelés *épisodes cévenoles* capables de déclencher de crues éclairées dévastatrices. Par exemple, le 3 octobre 1988 en quelques heures le centre ville de Nîmes a été sévèrement touché. Parmi diverses études consacrées à ces cas, il vaut la peine de mentionner l'étude multifractal de la série chronologique de Nîmes sur 44 ans par Ladoy et al. (1993) qui ont montré que la queue de probabilité de taux de pluie est grosse, une caractéristique et le fait déconcertant qui sans l'événement tragique du 13 octobre l'année 1988 aurait été une année sèche. En effet, un taux de pluie de 400 millimètres fait partie de 8 heures, tandis que la moyenne annuelle est de l'ordre de 750 mm.

Pour l'étude de cas, on a choisi la série des orages violents qui a lieu en Cévennes du 8 au 9 septembre 2002. Des valeurs exceptionnelles de taux de pluies journalières ont été rapportées à Anduze (nord de la zone de Gard) avec plus de 680 millimètres. D'autres stations pluviométriques ont enregistré des taux journaliers de pluie entre 500 et 670 millimètres. De taux de pluie journalière plus grande que 300 mm a été enregistrée dans le département de Vaucluse. L'historique synoptique météorologique de cet événement a été classiquement analysé comme correspondant à un système convectif produit par la rencontre des vents chauds et humides méditerranéens avec des vents froids d'une dépression profonde d'altitude qui s'est développée lentement à partir de l'Irlande vers l'ouest de la France (Figure 3-3).



**Figure 3-3. Image NOAA16 du 9 septembre 2002 à 12h 20 UTC qui montre la perturbation orageuse qui produit des crues éclair dans le sud-est de la France (source: Météo-France)**

A des échelles légèrement plus petites, le rôle de la topographie des collines de Cévennes et des collines d'Alpes a été reconnu, en particulier en facilitant la montée vers le haut d'air méditerranéen chaud et de développement des cellules orageuses, aussi bien que par empêcher le déplacement des nuages. Beaucoup d'information à des échelles plus petites peut être impliquée à partir de données radar et nous avons en effet employé les archives de données radar de Météo-France. D'abord, elles correspondent à la série du radar PPI (*Plan Position Indicator*) toutes les 5 minutes.

Malheureusement, l'interpolation classique non linéaire des données 3D originales dans des coordonnées polaires avec la résolution irrégulière de l'espace à une altitude planaire constante de 256 km x 256 km, avec résolution régulière 1 km x 1 km peut créer de fausses coupures de graduation, que nous ne le discuterons pas dans cette travail. On concentre toute notre attention sur le radar météorologique de Nîmes, situé à la latitude 44°.81 nord et à la longitude 3°.90 est, a une altitude de 150.5 mètres. Le radar fonctionne dans la bande S (fréquence de 2.90 gigahertz) avec une puissance de transmission de 650 kilowatts. La période de essai commence à 11h30 du 8 septembre et elle finit à 8h45 le lendemain, c'est-à-dire avec une durée de 255 x 5 minutes = 21h 15m (Figure 3-4).

La réflectivité de pluie du radar ( $Z$ ) est conventionnellement transformée en taux de pluie ( $R$  en mm/h) avec l'aide de la relation (Marshall et Palmer, 1948):

$$Z = aR^b \quad (3.16)$$

avec les valeurs classiques des paramètres  $a=200$  et  $b=1.6$ . En considérant que dernièrement il y a eu une discussion sur les fluctuations de ces paramètres et les limitations fondamentales de cette relation (par exemple Duncan et al., 1992), on l'emploiera dans ce travail plutôt par des objectifs d'illustration. Toutefois, toute l'analyse multifractale peut directement être effectué sur la réflectivité, au lieu de l'estimation de taux de pluie correspondante.

La télédétection radar des précipitations intenses en régions méditerranéennes comme celle-ci que nous considérons, présente des difficultés importantes en raison de l'intensité des phénomènes et de la présence d'un relief marqué ainsi que de la forte anthropisation de ces régions. Dans la mesure de la réflectivité radar on assume que la distribution granulométrique des gouttes est homogène, absence d'effets d'atténuation, de masque et d'autres phénomènes parasites liés aux interférences (du relief, de propagation de la signal, etc.). Une difficulté supplémentaire dans l'estimation quantitative des pluies para radar est liée à l'hétérogénéité verticale des précipitations. Certains progrès ont été obtenus ces dernières années sur la qualité de mesures de pluie par radar (Tabary et al., 2007). En particulier, la procédure de traitements régionalisés et adaptatifs (Delrieu, 2006, Tabary, 2007) présente un potentiel d'amélioration non négligeable dans le cadre de la fusion des données radar de l'ensemble du réseau de radars.

Malgré ces améliorations, les données radar fourni par Météo-France correspondent à des intervalles de réflectivité radar ou de taux de pluie. Ainsi, les pixels avec valeur 0 ont une réflectivité radar inférieure à un seuil de 10 dBZ ou un taux de pluie inférieur à 0.2 mm/h. De cette façon, des valeurs faibles de précipitation ( $< 0.2$  mm/h) sont considérées nulles, ce qui évoque le problème de longue date sur les taux zéro de la pluie (Larnder, 1995, Marsan et al., 1996), et qui souvent a été résolu d'une façon ad hoc. On retrouvera ce problème dans le chapitre 4.

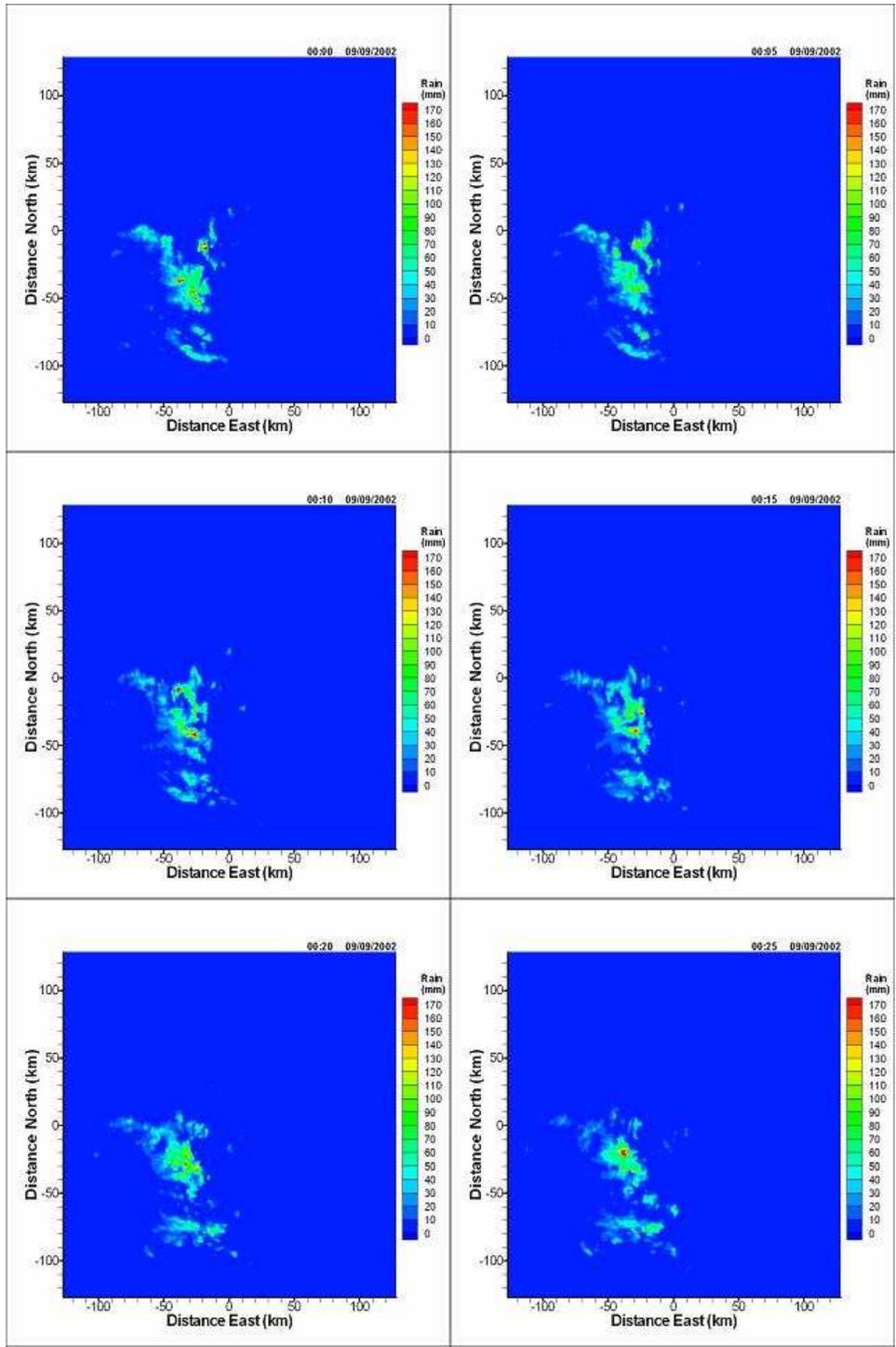


Figure 3-4. Six images successives de taux de pluie du radar météorologique de Nîmes, France. Les images ont une résolution spatiale de 1 km x 1 km et sont séparées par des intervalles de 5 minutes. A droite de chaque image on trouve l'échelle de taux de pluie en mm.

### 3.6.2 Détermination des Paramètres Multifractals

Comme on a expliqué dans le chapitre 2, le but de l'analyse multifractale est de quantifier la concentration de plus en plus haute d'un champ multifractal, par exemple le taux de pluie  $R_\lambda(\bar{x}, t)$ , à de plus en plus haute résolution  $\lambda$  ( $\lambda = L/\ell$ ), on rappelle que  $L$  est l'échelle plus grand du phénomène en espace-temps et  $\ell$  est l'échelle d'observation).

Dans le cadre du formalisme de la codimension multifractale, dont le développement a été partiellement inspiré par l'intermittence du champ de pluie, ceci est fondamentalement réalisé avec l'estimation de la fonction codimension, d'une façon généralement indirecte. Comme on déjà vu dans la section 3.1, la probabilité que un certain événement dépasse un seuil fixé est donnée par l'équation (3.3), ce qui signifie que dans un diagramme log-log en base  $\lambda$  la probabilité en fonction du seuil est indépendante de la résolution, tandis que chacun d'eux est dépendant de la résolution. Cette propriété a été souvent employée empiriquement en hydrologie (Bendjoudi et al., 1997, Bendjoudi et Hubert, 1998)

#### 3.6.2.1 Analyse spectrale

Le spectre d'énergie, calculé avec l'aide de une transformée de Fourier rapide (FFT) est un moyenne très convenable pour faire une première estimation du range d'échelle où le processus est invariant d'échelle et le degré de conservation. En effet, comme on déjà vu dans la sect. 3.5 le spectre d'énergie est exprimé par l'équation (3.13).

On a réalisé l'analyse spectrale (2D d'espace) de la série chronologique des 256 images radar (certaines d'elles sont montrées dans la figure 3-4). La figure 3-5 montre le spectre individuel de quelques images radar, tandis que la figure 3-6 montre le spectre d'énergie moyenne de la série complète.

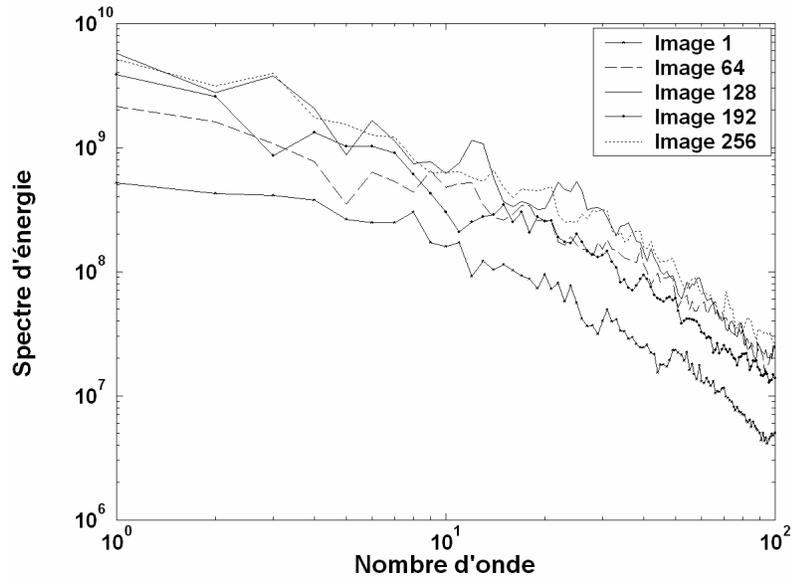


Figure 3-5. Spectre d'énergie (en unités arbitraires) pour quelques images du radar météorologique de Nîmes correspondant à l'événement du 8 au 9 septembre 2002

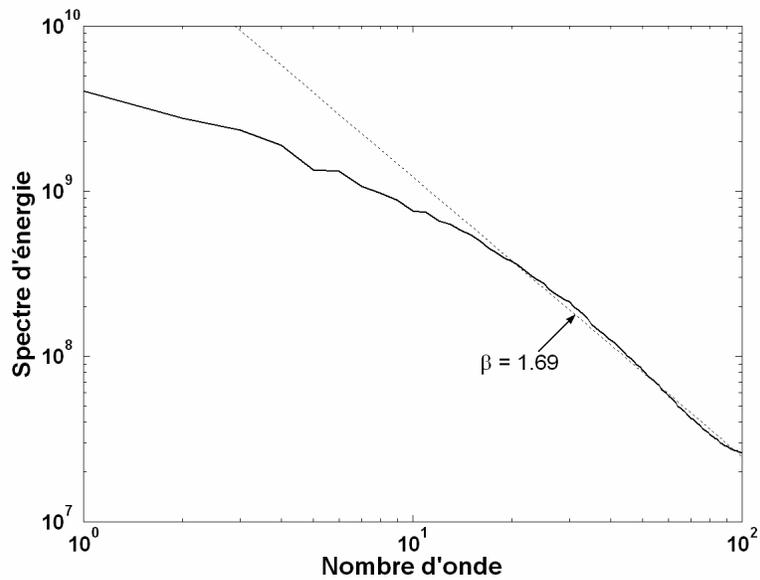


Figure 3-6. Spectre d'énergie (en unités arbitraires) spatial moyen des 256 images radar. On peut déduire la valeur de la pente spectrale  $\beta \approx -1.69$  à partir d'une régression linéale pour  $k > 15$ . Cette valeur de  $\beta$  est très proche de la valeur théorique  $-5/3$  de Kolmogorov-Obukhov.

Une loi de puissance est trouvée pour des nombres d'onde plus grand que 15. La pente spectrale est  $\beta \approx 1.69$ , donc la série d'image radar est non conservative avec paramètre  $H \approx 1/3$ . On définit donc un flux conservateur  $F$  du champ de pluie  $R$  en effectuant une intégration partielle de l'ordre  $1/3$  sur le dernier. Il vaut la peine de noter que l'exposant  $\beta$  correspond à la valeur théorique (Kolmogorov-Obukhov) du cas scalaire passif, tandis que le champ de pluie n'est pas tellement passif dû à l'influence du dégagement latent de la chaleur sur la dynamique.

### 3.6.2.2 Détermination de $\alpha$ et $C_1$

Comme on a présenté dans la Sect. 3.4 la méthode du DTM est une méthode directe pour estimer les deux autres exposants universels  $\alpha$  et  $C_1$ . Le premier pas correspond à obtenir des approches de la  $\eta^{\text{ème}}$  puissance normalisé du champ, d'abord en soulevant le champ original à la résolution la plus élevée  $\Lambda$  à la puissance  $\eta$ . Puis, en l'agrégeant, c'est-à-dire par moyenne spatiale, aux échelles de plus en plus petites  $\lambda < \Lambda$  pour obtenir  $R_\lambda^{(\eta)}$ . Le deuxième pas (illustré dans la figure 3-7) correspond au calcul du Trace Moment de ces  $\eta^{\text{ème}}$  puissances normalisées, c'est-à-dire estimer leurs moyennes statistiques en combinant la moyenne spatiale et la moyenne de l'échantillon. Dans la figure 3-7  $\text{Log(DTM)}$  est le  $\text{Log}(Tr_\lambda [R_\lambda^{(\eta)q}])$ .

Le graphique de la fonction d'échelle des moments  $K(q, \eta)$  versus  $\eta$  dans un diagramme log-log (figure 3-8) permet d'estimer le paramètre  $\alpha$  en prenant la pente de la partie linéaire de la courbe obtenue. En outre, l'intersection de  $K(q, \eta)$  avec l'axe  $\eta=1$  donne une estimation du paramètre  $C_1$ . Dans le présente analyse on a obtenu à la résolution  $\lambda$  et pour le range d'échelles 1 à 256 les valeurs  $\alpha = 0.84 \pm 0.02$  et  $C_1 = 0.44 \pm 0.02$  pour le moment statistique  $q = 1.5$ .

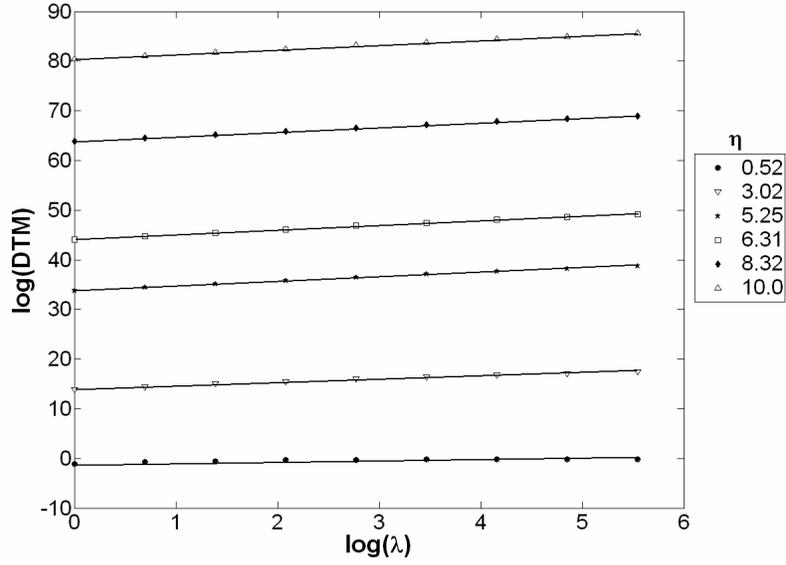


Figure 3-7. Le  $\log(\text{DTM})$  versus  $\log(\lambda)$  pour quelques valeurs de  $\eta$  (d'en bas en haut  $\eta=0.52, 3.02, 5.25, 6.31, 8.30$  et  $10.0$ ) en utilisant  $q = 1.5$  pour les 256 images consécutives du radar.

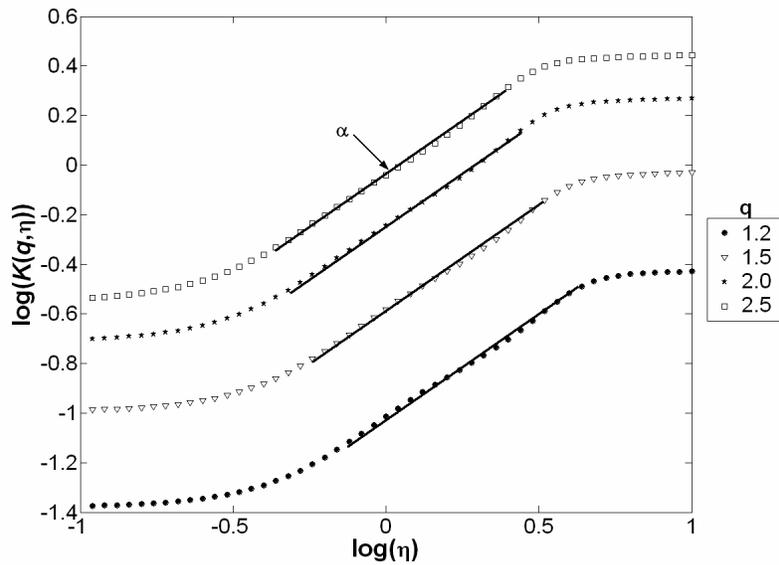


Figure 3-8. Le  $\log(K(q, \eta))$  versus  $\log(\eta)$  du DTM estimé pour quelques moments statistiques ( $q = 1.2, 1.5, 2.0,$  et  $2.5$ ). La pente des droites donne la valeur du paramètre  $\alpha = 0.84$ . La valeur de  $C_1$  a été estimée  $C_1 = 0.44$  pour  $q=1.5$ .

### 3.6.2.3 Divergence des moments et estimations biaisées

Comme montré par la figure 3-9 la fonction d'échelle des moments exhibe une asymptote linéaire pour les moments d'ordre plus grand que 3, ce qui est une évidence empirique d'une transition de phase multifractale. La fonction d'échelle de moments théoriques (ligne pleine) obtenue avec  $\alpha=0.84$  et  $C_1=0.44$  par l'équation (2.20) est très proche à la courbe expérimentale jusqu'au moment d'ordre 3. Cette valeur est cohérente avec la valeur  $q_D$  obtenue par l'analyse de la distribution de probabilité présentée dans la section suivante.

Il y a également disparité entre les fonctions empiriques et théoriques  $K(q)$  pendant des moments plus petits qu'une valeur critique  $q_{\min} \approx 0.7$  (figure 3-10). Ce moment critique est associé avec un comportement linéaire spécial de la fonction d'échelle des moments pour  $q < q_{\min}$ . Ce change qualitatif du comportement statistique est un autre exemple d'une transition de phase multifractale.

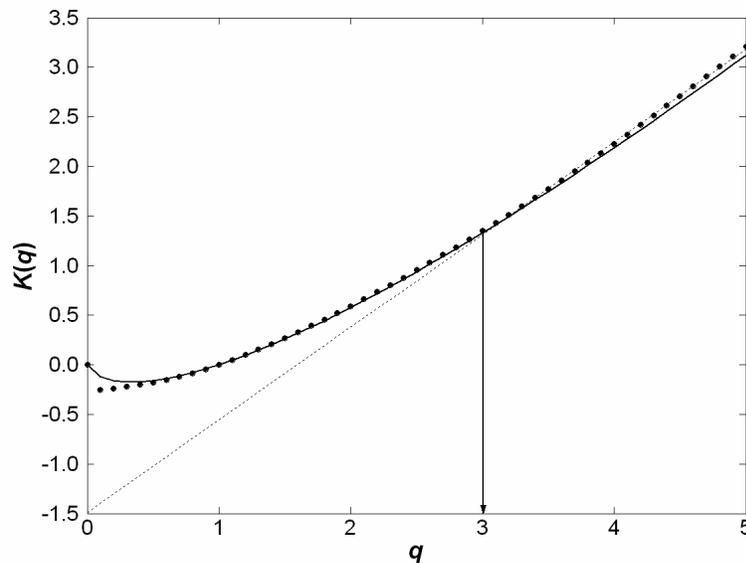
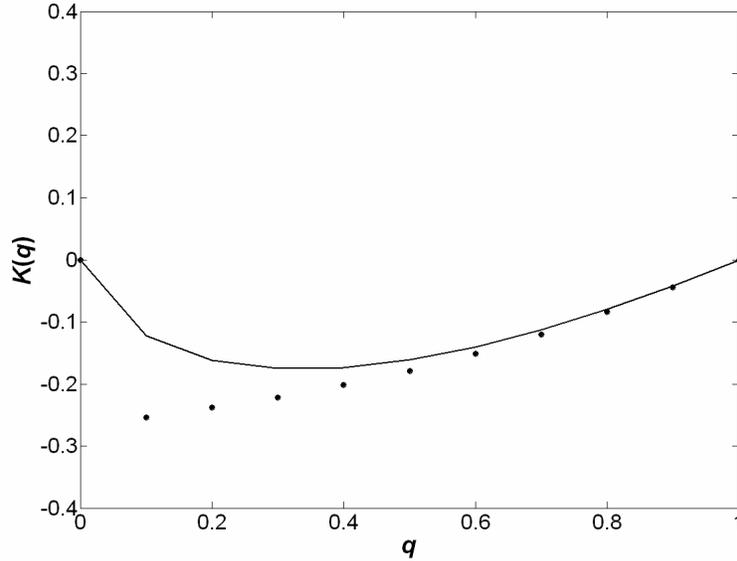


Figure 3-9. Fonction d'échelle des moments empirique  $K(q)$  pour le domaine spatial (ligne pointillée). La courbe continue est la fonction d'échelle des moments théorique avec paramètres  $\alpha = 0.84$  et  $C_1 = 0.44$ . La droite pointillée fine correspond à l'asymptote linéaire pour des moments  $q$  plus grand que  $q_D$ .



**Figure 3-10.** Détail de la figure 3-9 en montrant les fonctions d'échelle de moments empirique et théorique pour les ordres de moments  $q < 1$ .

D'autre part, le paramètre  $H$  détermine le degré de non conservation d'un processus multifractal. Pour son évaluation on emploie l'exposant d'échelle du spectre d'énergie du processus. Si le spectre d'énergie des intensités  $R_\lambda$  du processus est de la forme comme décrite par l'équation (3.13) et la valeur absolue de l'exposant spectral  $\beta$  est relié au paramètre  $H$  comme exprimé par l'équation (3.14), donc le paramètre  $H$  peut être obtenu en utilisant l'estimation théorique de  $K(2)$  après détermination des paramètres  $C_1$  et  $\alpha$  en appliquant l'équation (3.15). Pour la valeur de  $\beta \approx 1.69$  obtenu dans la section 3.6.3.1, la valeur du paramètre  $H \approx 0.63$ .

### 3.6.2.4 Invariance d'échelle des distributions de probabilité

La figure 3-11 présente dans un diagramme log-log la probabilité de l'intensité de pluie  $R$  de dépasser un seuil fixé  $r$ . Un comportement asymptotique en loi de puissance a été ajusté par une régression linéaire (en log-log). La pente de cette asymptote est une estimation de l'ordre critique de divergence des moments  $q_D = 3.0$ : les moments théoriques (cet à dire avec un échantillon infini) sont infinis pour tous les ordres  $q \geq q_D$ . Cette estimation peut être comparée avec celles obtenues par des analyses similaires. Duncan et al. (1992) ont trouvé la

même valeur  $q_D = 3.0$ , alors que Schertzer et Lovejoy (1987a) ont obtenu un  $q_D = 1.7$ , pour d'autres données radar (basées sur la réflectivité radar). Par contre une valeur similaire a été obtenue par Ladoy et al. (1993) dans une analyse multifractale des données pluviométriques de pluie à Nîmes.

### 3.6.2.5 Analyse espace-temps

L'analyse espace-temps est fait entre une direction d'espace et celle du temps. L'objectif est la détermination de l'exposant d'anisotropie  $H_t$  entre l'espace et le temps, qui a une utilité importante pour le développement de cascades spatio-temporelles.

Quand on constitue une paire entre une direction de l'espace donnée et celle du temps, on établit des coupes sur l'autre direction de l'espace. Les données qui seront prises en compte dans l'analyse des couples  $(x, t)$  sont ceux contenues dans les  $y = i, y = i + 1$  (figure 3-12). Les fonctions d'échelle des moments sont calculées en suivant chacune des deux axes pour calculer  $K_x(q)$ . Tous les valeurs correspondantes au temps contenues dans l'élément de volume délimité par  $y$ , sont accumulées dans chaque pixel de  $x$  (Biaou, 2004).

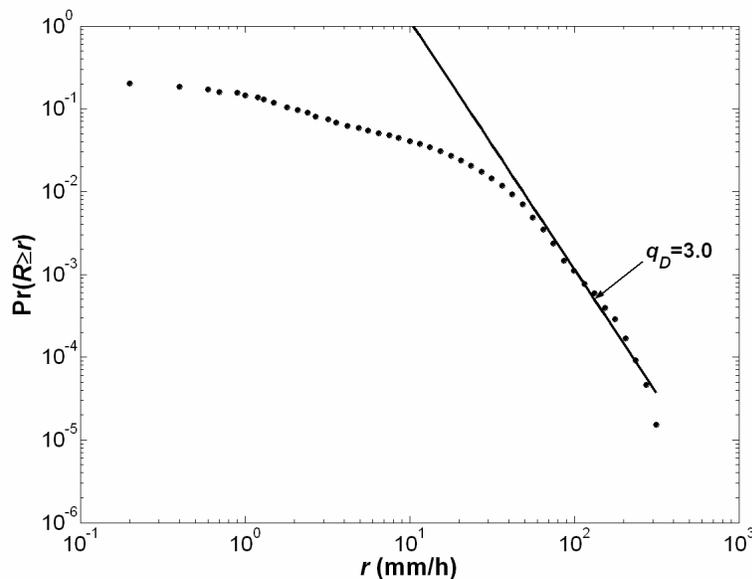


Figure 3-11. Probabilité  $\Pr(R \geq r)$  de dépasser un seuil d'intensité fixé  $r$  pour les 256 images radar. La ligne droite de pente (en valeur absolue) égale à 3.0, correspond à une chute algébrique de la distribution de probabilité pour les intensités extrêmes. Cette pente est l'ordre de moment critique pour la divergence de moments statistiques.

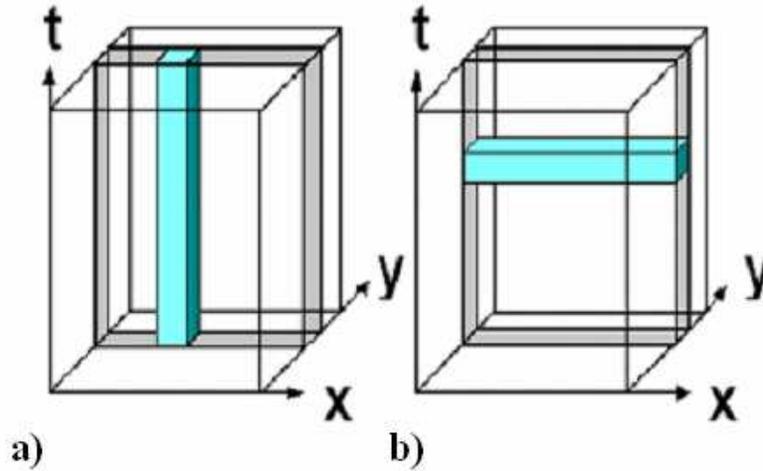


Figure 3-12. Analyse espace-temps : a) somme (projection) tout au long de l'axe du temps, analyse de l'invariance d'échelle spatiale et détermination de la fonction d'échelle des moments  $K_x(q)$ ; b) somme (projection) tout au long de l'axe de espace  $x$ , analyse de l'invariance d'échelle temporelle et détermination de la fonction d'échelle des moments  $K_t(q)$ .

Le même principe est appliqué pour l'axe du temps, en déterminant  $K_t(q)$ . L'exposant d'anisotropie peut être calculé par (Marsan, 1998):

$$K_x(q) = \frac{K_t(q)}{1 - H_t} \quad (4.2)$$

L'anisotropie espace-temps a été estimée du graphique  $K_x(q)$  contre  $K_t(q)$  (figure 3-13). La pente  $S = 1/(1 - H_t) = 1.53$  donne une valeur du paramètre d'anisotropie  $H_t \approx 0.35$ . Au travers d'une analyse similaire entre l'autre direction de l'espace  $y$  et le temps on détermine  $K_y(q)$ :

$$K_y(q) = \frac{K_t(q)}{1 - H_t} \quad (4.3)$$

Du graphique  $K_y(q)$  contre  $K_t(q)$  (figure 3-14) le paramètre d'anisotropie a été estimé  $H_t \approx 0.30$ . En supposant une isotropie parfaite entre les deux axes de l'espace, on peut déduire que l'exposant d'anisotropie d'espace-temps est une moyenne entre les deux précédents, donc  $H_t \approx 0.33$ .

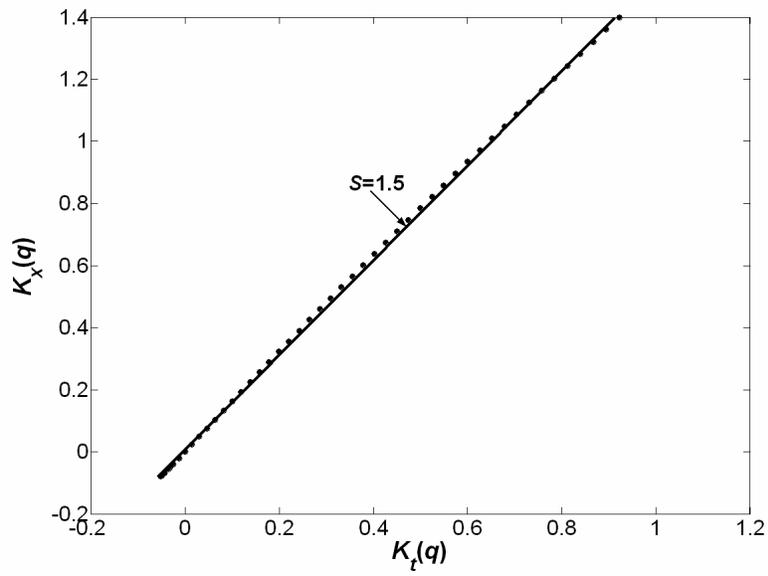


Figure 3-13. Anisotropie  $K_x(q)$  versus  $K_t(q)$  pour les directions  $x$  (espace) et  $t$  (temps). L'inverse de la pente  $S$  de cette relation conduite à  $H_t \approx 0.35$

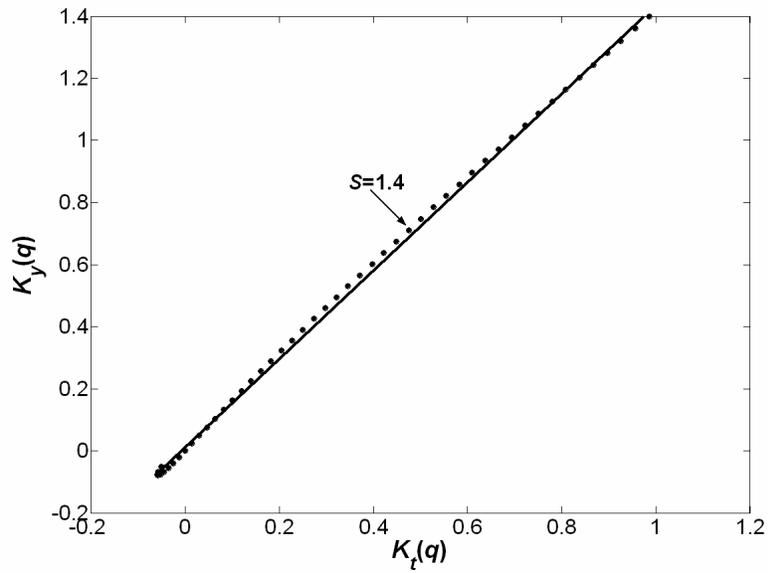


Figure 3-14. Anisotropie  $K_y(q)$  versus  $K_t(q)$  pour les directions  $x$  (espace) et  $t$  (temps). L'inverse de la pente  $S$  de cette relation conduite à  $H_t \approx 0.30$

### **3.7 Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons fait un rappel de la notion d'analyse multifractale et de quelques méthodes d'analyse de données, en particulier la méthode du Double Moment Trace (DTM) qui a été développée spécifiquement pour estimer de façon directe les paramètres multifractals universels  $\alpha$  et  $C_1$ . Nous avons fait rappel aussi à la méthode du spectre d'énergie pour la détermination du paramètre de Hurst, qui mesure le degré de non conservation d'un processus.

Nous avons aussi présenté l'application de cette méthodologie d'analyse multifractale à des données radar réels correspondantes à l'événement « cévenole » du 8-9 septembre 2002 à Nîmes, sud de la France.

Pour cette application en trois dimensions nous avons développé nos propres programmes d'analyse multifractale basés dans certains cas sur des anciens algorithmes unidimensionnels. Les résultats obtenus à l'aide de la méthode DTM ont été testés avec le programme FractHydro développé par Biau (2004).

De l'analyse multifractal de ces données, nous avons estimé les paramètres  $H = 0.33$ ,  $\alpha = 0.84$  et  $C_1 = 0.44$ . De l'analyse de distribution de probabilité nous avons trouvé une valeur de l'ordre critique des moments statistiques  $q_D = 3.0$ . De l'analyse espace-temps nous avons trouvé une valeur de l'exposant d'anisotropie  $H_t = 0.33$ .

La détermination de ces paramètres multifractals est fondamentale pour que les simulations et/ou prévisions de champs de pluie maintiennent les caractéristiques multifractales d'origine.

## 4 Simulation de cascades multifractales

### 4.1 Introduction

Dans le chapitre 2 nous avons présenté les notions sur les cascades et nous avons vu deux exemples particuliers de cascades spatio-temporelles:  $\alpha$ -modèle et  $\beta$ -modèle. Ces deux modèles possèdent un même générateur, mais ils sont différents en la manière de attribuer les densités aux structures générées. Dans les cascades spatio-temporelles, la plupart des modèles discrets sont caractérisés par un générateur correspondant aux cascades auto-affines de matrice comme celle décrite par l'équation (2.41). Donc, entre deux générations successives chaque structure de taille  $L_x, L_y, T$  (deux directions de espace et une direction du temps) est divisée en sous structures de taille  $L_x/\lambda, L_y/\lambda, T/\lambda^{1-H_t}$ , étant  $\lambda$  le rapport d'échelle entre deux générations successives et  $H_t$  l'exposant d'anisotropie espace-temps.

Nous avons vu aussi que le générateur de la cascade universelle  $\Gamma_\lambda$  doit être de façon que sa fonction caractéristique  $K_{\Gamma_\lambda}(q)$  diverge en  $\log(\lambda)$  (équation 2.45), étant le générateur équivalent à un processus stochastique avec une distribution de Lévy. Si on considère pour le générateur des distributions infiniment divisibles, on peut distinguer deux types de lois: les lois stables (stabilité par addition) et les lois non stables.

Les lois stables de Lévy présentent la propriété de posséder des bassins d'attraction, qui peut être précisé avec l'aide de la généralisation du théorème de la limite centrale (voir Annexe A), à l'inverse des lois non stables. Cette classification est reprise par Schertzer et al. (1995) sous forme de universalité *forte* en ce qui concerne les lois stables et universalité *faible* pour les lois non stables (Dubrulle, 1994; She et Léveque, 1994; She et Waymire, 1995). Des analyses empiriques (Schertzer et al., 1995; Schertzer et al., 1997) ont indiqué que le cadre de l'universalité dite *forte* semblait être la plus pertinente, et c'est dans ce cadre qu'on décrira la construction de cascades continues universelles.

## 4.2 Le sous-générateur de Lévy

Puisque on veut simuler des multifractals universels dont statistiques sont décrits par les équations (2.20) et (2.21), et étant le générateur de la cascade équivalent à un processus stochastique avec une distribution de Lévy, il sera obtenu à partir d'un bruit blanc avec les paramètres  $\alpha$  et  $C_1$  désirés. D'abord, on génère des variables aléatoires Lévy avec le paramètre  $\alpha$ , qui sont stables par addition (Feller, 1971), en modifiant leur amplitude par la constante  $(C_1/|\alpha-1|)^{1/\alpha}$  nécessaire pour obtenir le paramètre  $C_1$  désiré. Le bruit stochastique appelé aussi le *sub-générateur* est généré suivant la méthode proposée par Chambers et al. (1976), qui donnent une expression pour la représentation d'une variable stable de Lévy extrême,  $\gamma_\alpha$ , d'index  $\alpha$  :

$$\gamma_\alpha = \frac{\sin(\alpha(\phi - \phi_0))}{\cos(\phi)^{1/\alpha}} \left( \frac{\cos(\phi - \alpha(\phi - \phi_0))}{W} \right)^{(1-\alpha)/\alpha} \quad \text{pour } \alpha \neq 1$$

$$\gamma_\alpha = \frac{2}{\pi} \left( \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) \tan(\phi) + \ln \left( \frac{\pi W \cos(\phi)}{\pi - 2\phi} \right) \right) \quad \text{pour } \alpha = 1$$
(4.1)

où

$$\phi_0 = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1 - |1 - \alpha|}{\alpha} \right)$$
(4.2)

$\phi$  est une variable aléatoire uniforme sur le domaine  $(-\pi/2, \pi/2)$ , et  $W$  est une variable exponentielle standard, avec  $W$  et  $\phi$  mutuellement indépendantes. Cette technique pour produire un bruit blanc de Lévy ne requiert que la production de deux variables aléatoires et peu d'opérations sur elles. Cette méthode est supérieure à l'algorithme lentement convergent présenté par Wilson et al. (1991). Nous avons programmé en Fortran 90 l'algorithme S\_LEVY basé sur une méthode proposée par Pecknold et al. (1993), en utilisant les routines Fortran standard pour la génération aléatoire des variables La figure 4-1 illustre un exemple de sous-générateur multifractal obtenu par une cascade de Lévy.

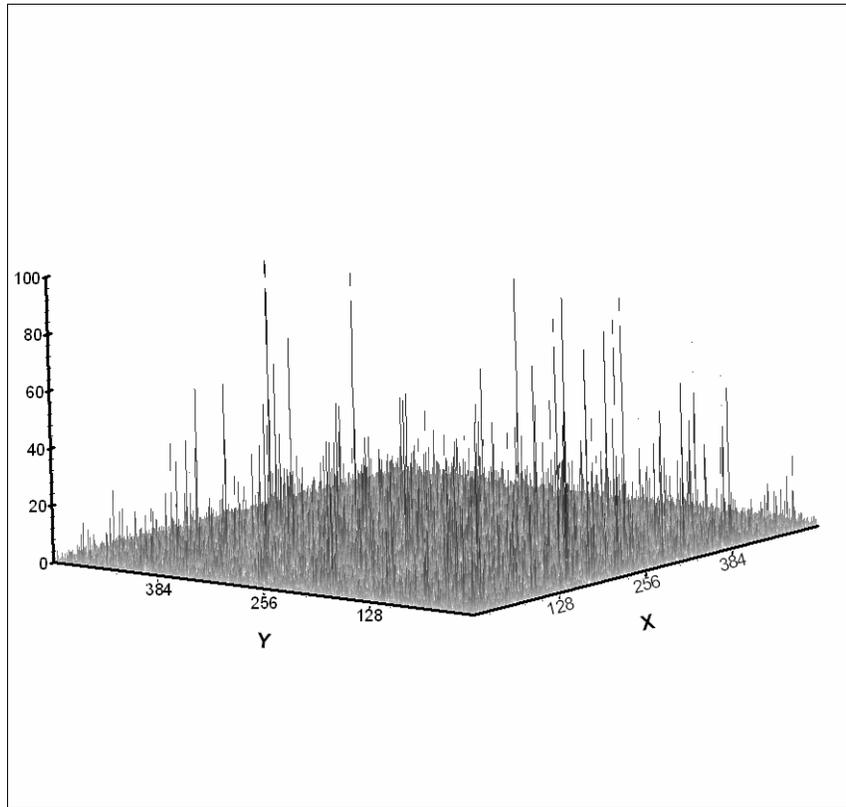


Figure 4-1. Sous-générateur de Lévy avec paramètres:  $\alpha=1.8$ ,  $C_1=0.1$ ,  $\Lambda=512$ . Les valeurs du sous-générateur ont été inversées pour mieux montrer l'intermittence du bruit blanc, donc l'axe vertical est négatif.

### 4.3 Simulation d'un champ multifractal dans l'espace

Pour créer un champ multifractal, le générateur de cascades continues doit satisfaire les quatre conditions suivantes (Schertzer et Lovejoy, 1987a, 1989b ; Marsan, 1998):

1. La seconde fonction caractéristique (au sens de Fourier) du générateur possède une divergence logarithmique avec l'échelle.
2. Les nombres d'onde (dans l'espace de Fourier lors de l'intégration fractionnaire) sont compris dans l'intervalle  $[1, \lambda]$ , ce qui correspond à une coupure aux petites échelles.
3. Pour des fluctuations positives, la distribution de probabilité du générateur doit chuter plus rapidement que la fonction exponentielle afin d'assurer une convergence de  $K(q)$  pour  $q > 0$ .

4. La normalisation de la cascade doit être assurée de manière canonique, c'est-à-dire en moyenne d'ensemble; telle que  $\langle \varepsilon_\lambda \rangle = 1$ , ce qui conduit à  $K(1) = 0$ .

En suite on considère les cas des cascades spatiales (une et deux dimensions d'espace) conservatives et non conservative.

### 4.3.1 Cascades multifractales conservatives

#### 4.3.1.1 Cas unidimensionnel

La construction d'un champ multifractal universel conservatif unidimensionnel correspond à une transformation d'un bruit blanc de Lévy, appelé le sous-générateur, en un champ multifractal  $\varepsilon_\lambda$  :

$$\gamma_\lambda \rightarrow \varepsilon_\lambda \quad (4.3)$$

La transformation inverse permet de trouver le sous-générateur à partir du champ multifractal connu:

$$\varepsilon_\gamma \rightarrow \gamma_\lambda \quad (4.4)$$

Comme on a dit précédemment le générateur  $\Gamma_\lambda$  est un processus équivalent à un processus de marche aléatoire avec des incréments de Lévy, il y a lui même une distribution de Lévy. Un processus tel est obtenu en sommant des contributions  $\gamma_\alpha = L_\alpha$  pondérées, indépendantes et identiquement distribuées (voir annexe A). Dans l'espace unidimensionnel:

$$\Gamma_\lambda(x) = \int g_\lambda(x-x') \gamma_\alpha(x') dx' \quad (4.5)$$

Où  $\gamma_\alpha(x)$  est le sous-générateur de la cascade (bruit blanc de Lévy d'index  $\alpha$ ),  $g_\lambda(x)$  est le filtre pondérant les contributions, et  $\Gamma_\lambda(x)$  est le générateur de la cascade. Pour obtenir la divergence en  $\log(\lambda)$  du générateur  $\Gamma_\lambda$  on doit avoir :

$$\int g_\lambda^\alpha(x) dx = \int_{x \in D_\lambda} g^\alpha(x) dx = \log(\lambda) \quad (4.6)$$

où  $D_\lambda$  est le domaine d'échelle  $[\lambda^{-1}, 1]$ , étant donné que  $\Gamma_\lambda$  est coupé aux grandes échelles à l'échelle intégrale  $L$ , et aux petites échelles à l'échelle  $L/\lambda$ ,  $g_\lambda$  est définie comme la restriction à ce domaine d'échelle  $D_\lambda$  de la fonction algébrique  $|x|^{-1/\alpha}$ :

$$g_\lambda(x) = |x|^{-1/\alpha}, |x| \in D_\lambda \quad (4.7)$$

L'équation (4.5) s'agit d'un produit de convolution, donc peut être exprimée:

$$\Gamma_\lambda(x) = g_\lambda(x) * \gamma_\alpha(x) \quad (4.8)$$

A ce point-là nous avons deux possibilités pour effectuer cette convolution, soit par l'intégration donné par l'équation (4.5), appelée convolution dans l'espace physique, soit par une transformation dans l'espace de Fourier et en appliquant le théorème de convolution (Annexe B). En considérant cette dernière possibilité, l'équation (4.8) peut être re-écrite:

$$\hat{\Gamma}_\lambda(k) = \hat{g}_\lambda(k) \hat{\gamma}_\alpha(k) \quad (4.9)$$

Où la notation  $\hat{\phantom{x}}$  désigne les transformées de Fourier. On doit noter que, à l'exception du cas normal  $\alpha = 2$ , la transformée de Fourier d'un bruit blanc de Lévy n'est pas un bruit blanc.

Sur la détermination de la convolution avec les deux méthodes mentionnées ci-dessus, on reviendra plus tard dans la section 4.5.

Un fois le générateur  $\Gamma_\lambda$  dans l'espace physique est déterminé, on trouve el champ conservatif (équation (2.42)):  $\varepsilon_\lambda = e^{\Gamma_\lambda}$ . Il reste finalement à re-normaliser la cascade, afin d'en assurer sa conservation, soit donc  $K(1) = 0$ . Ceci est obtenu directement en divisant la cascade par  $\langle \varepsilon_\lambda = \langle e^{\Gamma_\lambda} \rangle \rangle$  pour le générateur obtenu avec l'équation (4.5), donc en recentrant le sous-générateur  $\gamma_\alpha(x)$ .

### 4.3.1.2 Généralisation au cas multidimensionnel

Le générateur de la cascade décrit ci-dessus correspond au cas unidimensionnel. Ceci peut être généralisé à des domaines  $D > 1$ , ainsi qu'à des cascades non auto-similaires, donc de dimension elliptique  $Del$  quelconque (Schertzer et Lovejoy, 1987a). Le plus convenable est de définir les sous-générateur comme un bruit blanc de Lévy sur le domaine complet, puis de le filtrer par la fonction  $g$ , elle aussi définie sur ce nouveau domaine. Pour déterminer la forme de la fonction filtre, on doit appliquer l'opérateur  $T_\lambda$  à l'intégrale  $\int_{D_\lambda} g^\alpha(\bar{x}) d\bar{x}$ , où  $D_\lambda$  est l'ensemble des  $\bar{x}$ , tel que  $\|\bar{x}\| \in [\lambda^{-1}, 1]$ . Dans Schertzer et Lovejoy (1985a) on démontre que l'opérateur  $T_\lambda = \lambda^{-Del}$ , donc  $T_\lambda d\bar{x} = \lambda^{-Del} d\bar{x}$ , où  $Del$  est la trace de la matrice de l'opérateur  $T_\lambda$  :

$$T_\lambda \int_{D_\lambda} g^\alpha(\bar{x}) d\bar{x} = \lambda^{Del} \int_{D_\lambda} g^\alpha(T_\lambda \bar{x}) d\bar{x} \quad (4.10)$$

Alors,

$$g^\alpha(T_\lambda \bar{x}) \approx \lambda^{Del} g^\alpha(\bar{x}) \quad (4.11)$$

Finalement la fonction de filtre est:

$$g(\bar{x}) \approx \|\bar{x}\|^{-Del/\alpha} \quad (4.12)$$

Les figures 4-2 et 4-3 illustrent deux exemples de cascades spatiales. Il s'agit de deux réalisations de cascades multifractales bidimensionnelles auto-similaire et auto-affine respectivement.

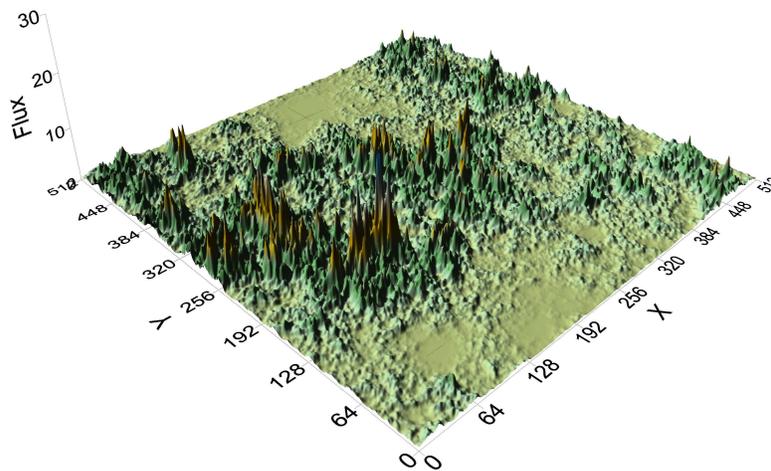
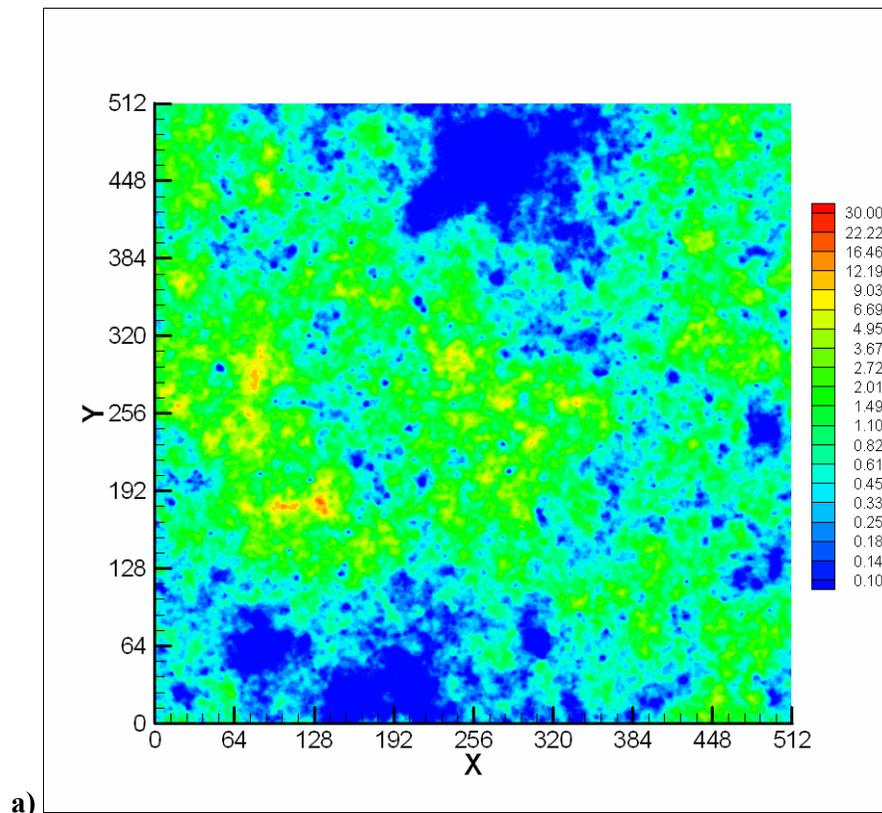


Figure 4-2. Images d'une cascade conservative auto-similaire avec paramètres:  $\alpha=1.8$ ,  $C_1=0.1$ ,  $H_y=0$ ,  $\Lambda=512$ . a) Image bidimensionnelle, l'échelle d'intensité est logarithmique. b) Image 3D, on peut noter plus en détail l'intermittence du flux.

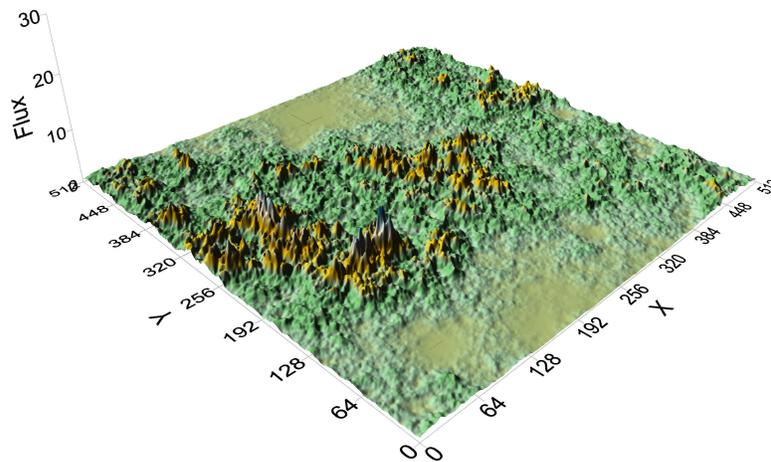
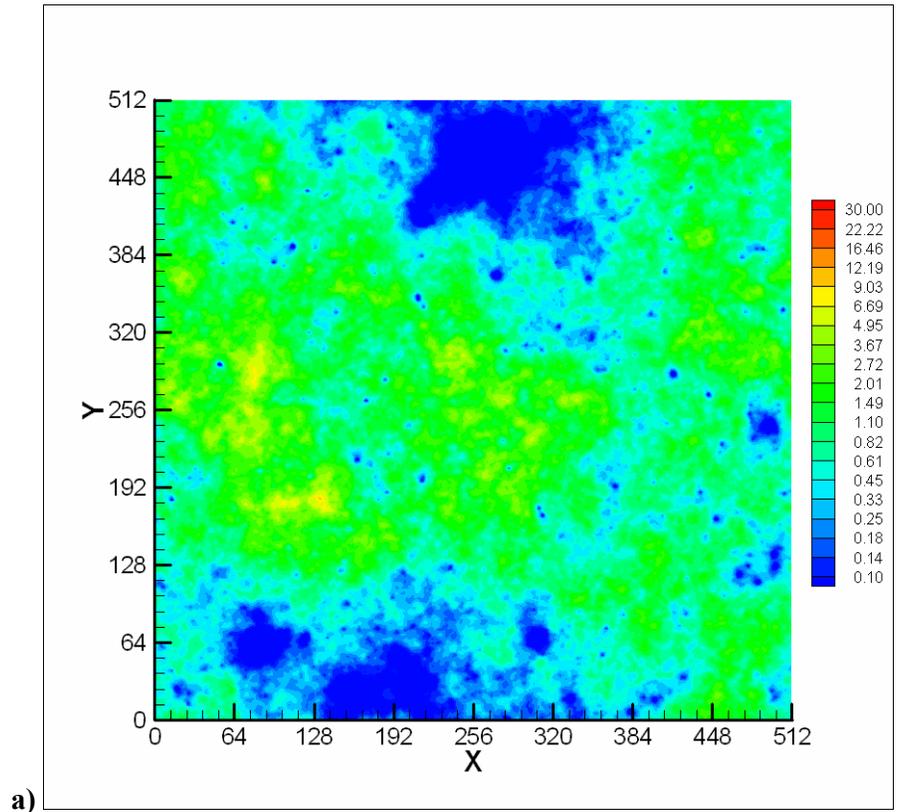


Figure 4-3. Images d'une cascade conservative auto-affine avec paramètres  $\alpha=1.8$ ,  $C_1=0.1$ ,  $H_y = 0.33$ ,  $\Lambda=512$ . a) Image bidimensionnelle, l'échelle d'intensité est logarithmique. b) Image 3D, on peut noter une atténuation de la densité du flux.

### 4.3.2 Cascade multifractals non-conservatives

Dans les paragraphes précédents on a indiqué les étapes menant à la construction de cascades continues, avec générateur de Lévy, conservatives, c'est-à-dire avec conservation statistique, en moyenne d'ensemble, du moment d'ordre 1, à toute échelle ( $K(1)=0$ ). Ces constructions ne sont pas valides pour des quantités non conservées en moyenne comme la vitesse ou la concentration d'un scalaire passif (Obukhov, 1962, Corrsin, 1951). Ces quantités sont en fait conservées pour un ordre de moment différent de l'unité.

Ensuite on décrira la méthode de construction de tels multifractals. Il s'agit d'intégrer manière fractionnaire le flux conservatif associé en utilisant les modèles dénommés Flux Intégrés Fractionnairement (FIF) (Schertzer et al., 1997).

Dans les études sur la turbulence atmosphérique et de fluides visqueux (Kolmogorov, 1962, Obukhov, 1962), l'hypothèse affinée de Kolmogorov à pour forme générique:

$$\delta\rho_\ell \approx \ell^{-H} \varepsilon_\ell^a \quad (4.13)$$

où  $\delta\rho_\ell$  es l'incrément d'un champ non conservatif (vitesse ou concentration de scalaire passif) à travers une taille  $\ell$ ,  $H$  mesure le degré de non conservation,  $\varepsilon_\ell$  est le flux invariant ou champ conservatif correspondant, et  $a$  est un exposant dimensionnel. L'équation (4.13) pondère à chaque échelle le flux conservatif à la puissance  $a$  par un facteur de loi d'échelle caractérisé par le paramètre  $H$  et associe les incréments de  $\rho$  au flux invariant  $\varepsilon$ .

Les propriétés de symétrie du champs non conservatif  $\rho$  peuvent être exprimées par les fonctions de structure d'exposant  $\zeta(q)$  de façon que:

$$\langle \rho_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{-\zeta(q)} \quad (4.14)$$

Avec les équations (4.13) et (4.14) et en connaissant la fonction  $K(q)$  du flux  $\varepsilon$  par l'équation (2.13), on obtient:

$$\langle \rho_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{-Hq} \lambda^{K(aq)} \quad (4.15)$$

et on peut déduire la fonction exposant  $\zeta(q)$  à partir de (4.14) et (4.15):

$$\zeta(q) \approx qH - K(aq) \quad (4.16)$$

L'équation (4.13) conduit à un déplacement des singularités puisque l'équation (4.16) est équivalente à (Marsan, 1998):

$$\gamma_\rho = a\gamma_\varepsilon - H \quad (4.17)$$

$$c_\rho(\gamma_\rho) = c_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) \quad (4.18)$$

où  $\gamma_\varepsilon$  et  $\gamma_\rho$  sont les singularités des champs  $\varepsilon$  et  $\rho$  respectivement, et  $c_\varepsilon$  et  $c_\rho$  leurs codimensions respectives. On vérifie que  $\zeta(1) = H - K(a) \neq 0$ , donc  $\rho$  a une distribution multifractale correspondante à une cascade non conservative. La conservation s'observe pour le moment d'ordre  $q$  tel que  $\zeta(q) = 0$ , c'est-à-dire que  $K(aq) = qH$ .

L'intégration fractionnaire du flux permet d'obtenir une distribution équivalente à celle du champ non conservatif (Schertzer et Lovejoy, 1987a, Schertzer et al., 1997). Le champ  $\rho$  peut être généré par:

$$\rho_\lambda(\bar{x}) = \int_{\|\bar{x}'\| \in D_\lambda} G(\bar{x}) \varepsilon_\lambda^a(\bar{x} - \bar{x}') d\bar{x}' \quad (4.19)$$

Ce qui correspond à une convolution dans l'espace physique ou une simple multiplication dans l'espace de Fourier préalable transformation par FFT des deux fonctions. Schertzer et Lovejoy (1987a, 1997) ont démontré que  $G(\bar{x})$  doit être en loi de échelle de la forme:

$$G(\bar{x}) = \|\bar{x}\|^{-D_{el}+H} \quad (4.20)$$

La figure 4-4 présente un exemple de cascade multifractale non conservative bidimensionnelle auto-similaire.

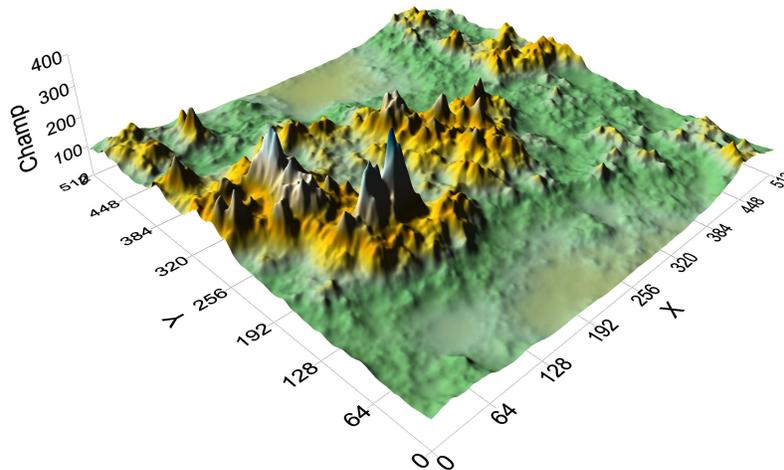
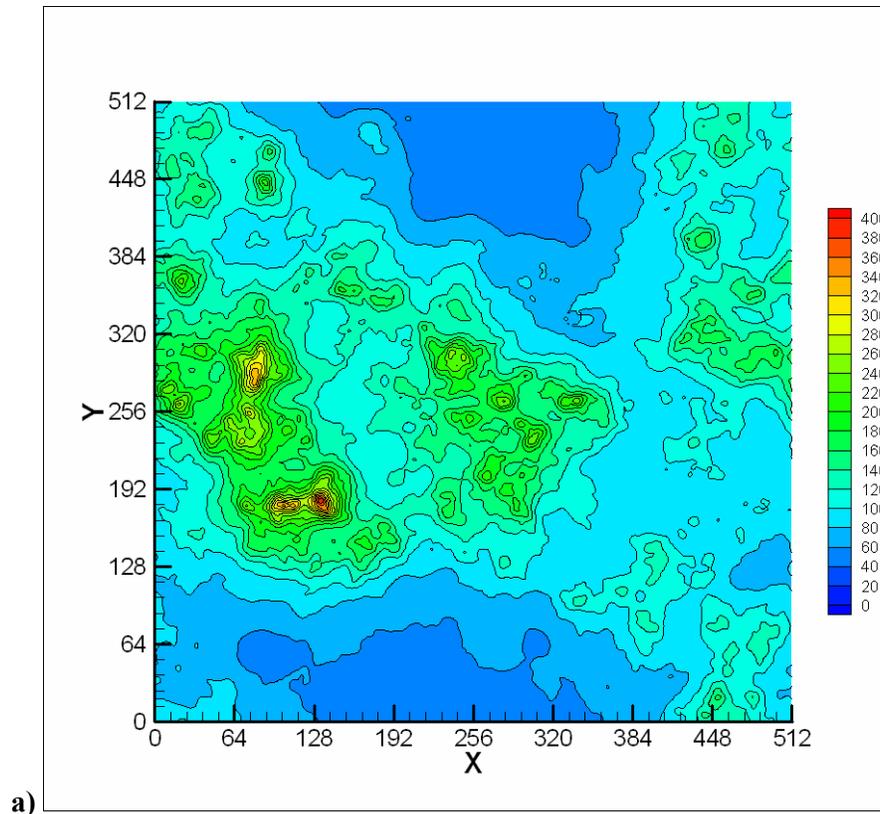


Figure 4-4. Cascade multifractale non conservative auto-similaire avec paramètres:  $\alpha=1.8$ ,  $C_1=0.1$ ,  $H=1/3$ ,  $H_y=0$ ,  $\Lambda=512$ . a) Image bidimensionnelle, l'échelle d'intensité est logarithmique. b) Image 3D, on peut noter le lisage du champ (moins intermittent) par rapport au flux conservatif associé (figure 4-2).

## 4.4 Simulation de un champ multifractal en espace et temps

### 4.4.1 Cas conservatif

Dans les paragraphes précédents on a vu comment construire des cascades auto-similaires et auto-affines spatiales. Comparativement aux cascades précédentes les cascades spatio-temporelles doivent vérifier deux propriétés fondamentales: i) l'auto-affinité, c'est-à-dire l'anisotropie en loi d'échelle entre l'espace et le temps, et ii) la causalité, c'est-à-dire la cassure de symétrie miroir suivant la direction du temps: le passé ne dépend pas du futur.

La causalité permet de distinguer le passé du futur et ça correspond à une antécédence temporelle (Bunge, 1961) dans le sens qu'un événement (le sous-générateur) à un instant donné se propage uniquement dans le futur et cette propagation est caractérisée par un grain causal (une fonction de Green retardée).

On considère le cas plus général de cascades espace-temps, c'est-à-dire celui sur le domaine de dimension  $D+1$  ( $D$  dimension d'espace plus la dimension temporelle). Pour ce domaine, l'opérateur de contraction-dilatation  $T_\lambda$  est (Schertzer et al., 1997 ; Marsan, 1998 ; Biaoou, 2004):

$$T_\lambda(\bar{x}, t) \rightarrow (\lambda^{-1}\bar{x}, \lambda^{-1+H_t}t) \quad (4.21)$$

Soit un générateur IEG avec une matrice (on considère  $D=2$ , deux dimensions en espace étant isotropes entre elles):

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-H_t \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

où la dimension elliptique est donc  $Del = D+1-H_t$ . La causalité s'introduit lors de l'intégration fractionnaire du sous-générateur  $\gamma_\alpha(\bar{x}, t)$  donnant le générateur  $\Gamma_\lambda(\bar{x}, t)$ , c'est-à-dire lors de la propagation du sous-générateur, devant être causale:

$$\Gamma_\lambda(\bar{x}, t) = \iint_{\|\bar{x}', t'\| \in D_\lambda} g(\bar{x}', t') \gamma_\alpha(\bar{x} - \bar{x}', t - t') d\bar{x}' dt' \quad (4.23)$$

Etant la fonction de filtre  $g$  définie comme une fonction de Green retardée tel que:

$$g(\bar{x}, t) = \begin{cases} \|\bar{x}, t\|^{-D_{el}/\alpha} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

De même comme on a vu précédemment, l'équation (4.23) s'agit d'un produit de convolution, et pour tant peut être exprimée:

$$\Gamma_\lambda(\bar{x}, t) = g_\lambda(\bar{x}, t) * \gamma_\alpha(\bar{x}, t) \quad (4.25)$$

En faisant la correspondante transformation dans l'espace de Fourier et en appliquant le théorème de convolution, l'équation (4.25) peut être re-écrite:

$$\hat{\Gamma}_\lambda(\bar{k}, \varpi) = \hat{g}_\lambda(\bar{k}, \varpi) * \hat{\gamma}_\alpha(\bar{k}, \varpi) \quad (4.26)$$

La FFT inverse de  $\hat{\Gamma}_\lambda(\bar{k}, \varpi)$  donne le générateur de la cascade dans le espace physique. Dans les figures 4-5 et 4-6 on illustre deux exemples de cascades multifractales en espace temps. La première figure s'agit d'une série de six images consécutives d'une réalisation d'une cascade espace-temps conservative et la deuxième de une série de six images consécutives d'une cascade non conservative.

#### 4.4.2 Cas non conservatif

La construction d'une cascade multifractale espace-temps non conservative à partir de son flux conservatif comme on a décrit dans le paragraphe précédent requière aussi l'introduction d'une fonction de Green retardée pour le filtre fractionnaire  $G$ . Cette fonction s'exprime par:

$$G(\bar{x}, t) = \begin{cases} \|\bar{x}, t\|^{-D_{el}+H} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

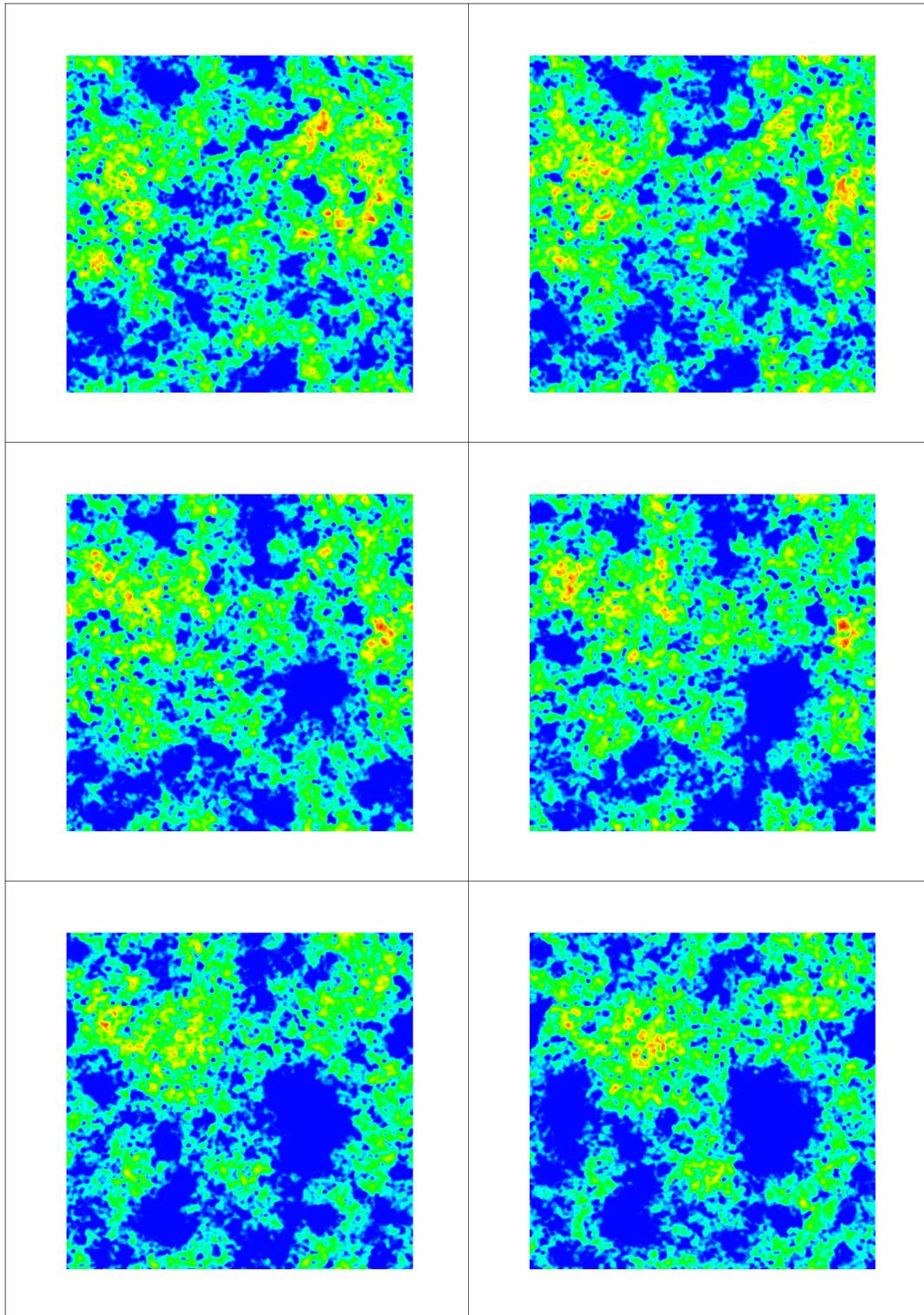


Figure 4-5. Réalisation de une cascade conservative espace-temps (deux dimensions en espace) avec paramètres:  $\alpha=1.5$ ,  $C_1=0.2$ ,  $H_t=1/3$  et  $\Lambda=256$ . Les images correspondent à des sections spatiales consécutives: de gauche à droite et d'en haut en bas pour différents temps  $t=0, 1, 2, 3, 4$  et  $5$ .

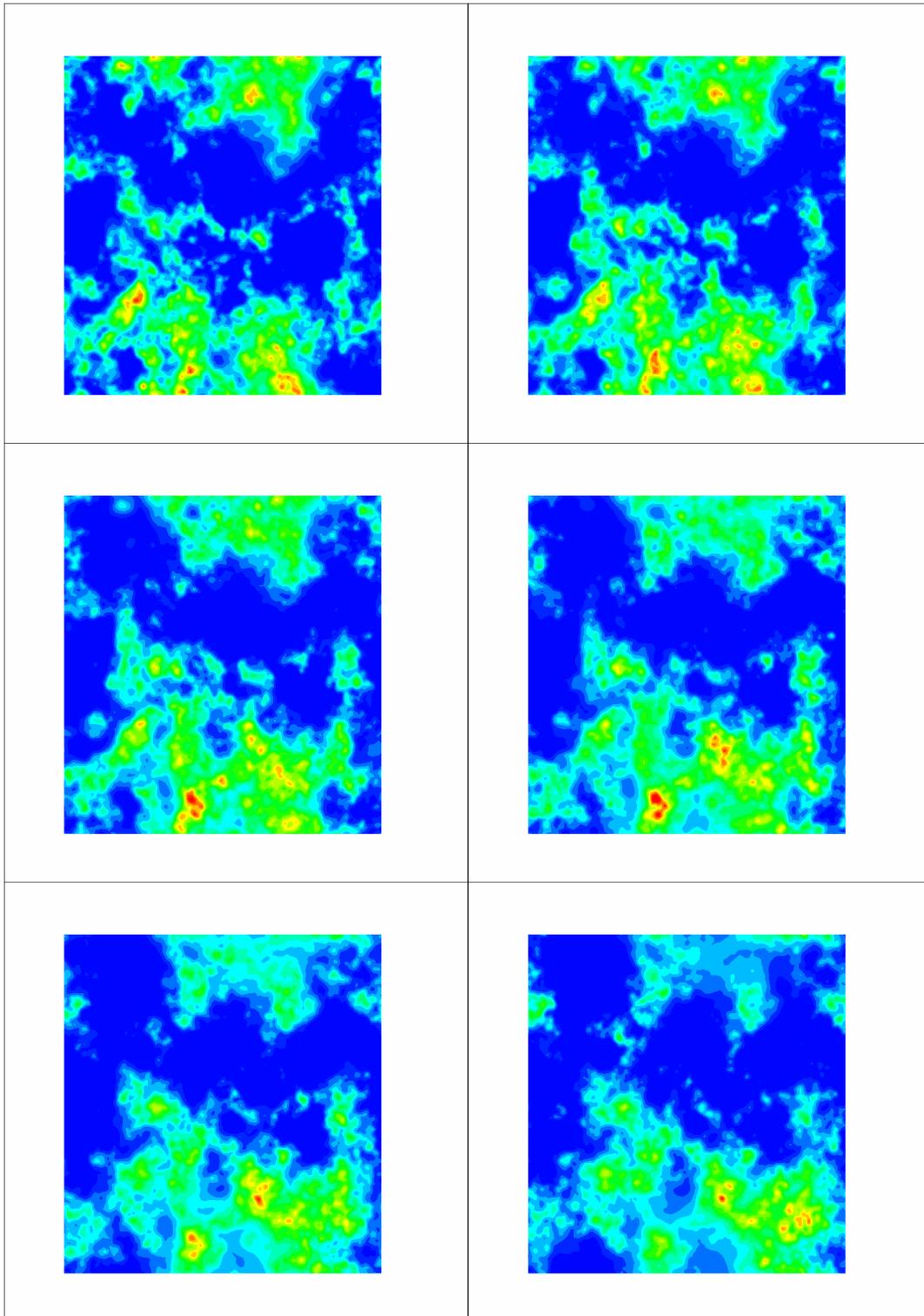


Figure 4-6. Réalisation de une cascade non conservative espace-temps (deux dimensions en espace) avec paramètres:  $\alpha=1.5$ ,  $C_1=0.2$ ,  $H=0.1$ ,  $H_1=1/3$  et  $\Lambda=256$ . Les images correspondent à des sections spatiales consécutives : de gauche à droite et d'en haut en bas pour différents temps  $t=0, 1, 2, 3, 4$  et  $5$ .

Donc l'intégration fractionnaire du flux permet d'obtenir une distribution équivalente à celle du champ non conservatif,  $\rho$ , en espace et temps. Le champ  $\rho$  peut être généré par:

$$\rho_\lambda(\bar{x}, t) = \iint_{\|\bar{x}', t'\| \in D_\lambda} G(\bar{x}, t) \varepsilon_\lambda(\bar{x} - \bar{x}', t - t') d\bar{x}' dt' \quad (4.28)$$

En correspondant à une convolution entre le flux et la fonction filtre.

De même que dans la Sect. 4.3.2 la convolution dans l'espace physique correspond à une simple multiplication dans l'espace de Fourier préalable transformation par FFT des deux fonctions.

#### **4.5 Génération numérique des multifractals espace et temps**

Dans cette section on considère la génération numérique de champs multifractals en espace-temps, concernant la simulation de cascades continues spatiales et temporeles causales ayant, par rapport à la théorie vue dans les sections précédentes, quelques problèmes nettement numériques, qui nécessitent certains ajustements et précisions.

On a vu que pour la construction d'un champ multifractal auto-affine espace-temps, conservatif, on définit une grille de dimension  $D+1$  ( $D$  dimension de espace plus la dimension dans le temps) comprenant  $N^{D+1}$  pixels, sur la quelle on génère le champs. On considère une puissance de 2 pour  $N$  qui permette l'utilisation de la transformée de Fourier rapide (Press et al., 1992). Le rapport d'échelle total est  $\Lambda = N$ .

D'abord on génère le sous-générateur  $\gamma_\alpha(\bar{x}, t)$  correspondant à un bruit blanc de Lévy extrémal d'index  $\alpha$ , tel que  $\langle e^{q\gamma_\alpha(\bar{x}, t)} \rangle = e^{q^\alpha}$  dont le cas particulier  $q=1$  génère la condition  $\langle e^{\gamma_\alpha(\bar{x}, t)} \rangle = e$ . A fin d'obtenir une codimension de singularités moyennes  $C_1$  Pecknold et al. (1993) suggèrent multiplier le sous-générateurs par la constante  $(C_1/|\alpha-1|)^{1/\alpha}$ , de sorte que  $\langle e^{q\gamma_\alpha(\bar{x}, t)} \rangle = e^{C_1 q^\alpha}$ . Nous avons trouvé que cette proposition n'est pas valable pour  $\alpha < 1$ . Dans ce cas le sous générateur doit être affecté différemment par une autre constante:

$\gamma_\alpha^*(\bar{x}, t) = (C_1 / |\alpha - 1|)^{1/\alpha} \gamma_\alpha(\bar{x}, t) - (C_1 / (1 - \alpha) \text{sign}(\alpha - 1))$  de manière que  $\langle e^{q\gamma^*(\bar{x}, t)} \rangle = e^{K(q)}$ . Pour le cas particulier  $q=1$  la normalisation correspond à :  $\langle e^{\gamma^*(\bar{x}, t)} \rangle = 1$  et non  $e$  puisque  $K(1) = 0$ .

Avec ces dernières considérations, pour obtenir le générateur de la cascade par une intégration fractionnaire causale de  $\gamma_\alpha(\bar{x}, t)$  on définit la fonction de Green retardée  $g(\bar{x}, t)$  tel que a été donnée par l'équation (4.24). Cependant, le noyau de convolution présenté dans l'équation (4.12) et par conséquent dans l'équation (4.24) est en lois de puissance négative, donc divergent à petite échelle. Pour éviter cette difficulté numérique nous avons introduit une coupure à cette loi de puissance pour travailler de façon cohérente à résolution fine. Dans l'annexe D nous examinons plus en détail cette approche, que nous avons utilisée dans nos programmes.

Comme nous l'avons déjà mentionné le produit de convolution peut être effectué de manière conventionnelle par l'intégration du sous-générateur avec la fonction de filtre dans l'espace physique. Nous avons développé les algorithmes utilisés pour cette alternative de calcul de la convolution et nous avons constaté qu'elle demande beaucoup de espace mémoire de l'ordinateur et beaucoup de temps de calcul. Les algorithmes ont été validés par d'autres programmes reconnus comme Mathematica et Matlab.

L'autre alternative est de calculer le produit de convolution dans l'espace de Fourier par simple multiplication des transformées de Fourier (par FFT) du sous-générateur et du noyau, comme on décrit dans l'annexe B. Nous avons développé les programmes nécessaires pour la convolution en langage Fortran 90, en prenant comme base des FFT les algorithmes publiés par Press et al. (1992). Comme dans l'alternative précédente nous avons validé nos algorithmes avec Mathematica et Matlab. Nous avons constaté que pour la simulation de champs cette alternative est plus efficace puisqu'elle épargne mémoire, temps de calcul et conserve la taille du champ simulé. Pour ces raisons nous avons opté pour cette seconde alternative pour le calcul de la convolution.

Une fois obtenu le générateur et avant de prendre son exponentielle pour calculer le flux multifractal conservatif il faut le normaliser et le recentrer a fin d'imposer la contrainte  $\langle e^{\Gamma_\lambda} \rangle = 1$  comme il a été énoncé dans la section 4.3. Ce recentrage est obtenu à l'aide de la « variation » d'ordre  $\alpha$  de ce générateur. Au niveau théorique cette variation correspond à une

généralisation de celle usuellement utilisée en calcul stochastique pour les exponentielles de processus gaussiens (donc d'ordre  $\alpha=2$ ). En pratique, elle peut se calculer en calculant le prefacteur nécessaire à introduire pour obtenir la normalisation correspondant à la conservation du flux. On démontre ainsi (Schertzer et Lovejoy, 1987a) que:

$$va = C_1 * \log(\lambda) / \text{abs}(\alpha - 1) \quad (4.29)$$

La discrétisation en série numérique des intégrales introduit un autre problème qui est lié au fait, connu depuis Euler, que la série  $\{1/i\}_{i=1,N}$  n'est pas asymptotiquement équivalent à  $\log(N)$ , d'où la nécessité de normaliser numériquement le générateur par le prefacteur suivant :

$$eu = \left( \frac{va}{\sum g_i(\bar{x}, t)} \right)^{1/\alpha} \quad (4.30)$$

A partir du champ conservatif ainsi construit, les multifractals non conservatifs associés peuvent être générés, en faisant une nouvelle convolution ou intégration fractionnaire avec une nouvelle fonction de filtre qui prenne en compte le paramètre de Hurst,  $H$ .

La figure 4-7 montre un exemple de simulation d'un champ de précipitation. Le côté gauche illustre le processus de simulation commençant par un bruit blanc qui est coloré par convolution pour obtenir le générateur, puis par exponentiation le flux conservatif qui est à son tour convolé pour obtenir le champ de précipitation. Le côté droit illustre le processus inverse par des déconvolutions correspondantes, ce qui on utilise pour la prévision. Le schéma numérique d'inversion peut introduire des instabilités numériques qui sont l'origine des différences entre les deux générateurs de la figure. Ces instabilités numériques correspondent à des valeurs négatives très proches de 0 du flux, ce qui empêche le calcul du logarithme pour trouver le générateur. A fin d'éviter ces instabilités on a introduit une contrainte qui prend un seuil minimum positif du flux. Malheureusement cette contrainte introduit des biais dans le générateur quand on prend le logarithme du flux. Dans la figure 4-7 on peut observer à gauche le générateur obtenu à partir de la intégration fractionnaire du bruit blanc de Lévy et à droite le générateur obtenu comme le logarithme de la dérivation fractionnaire du champ non conservatif simulé. On peut voir l'aspect tronqué du générateur à droite.

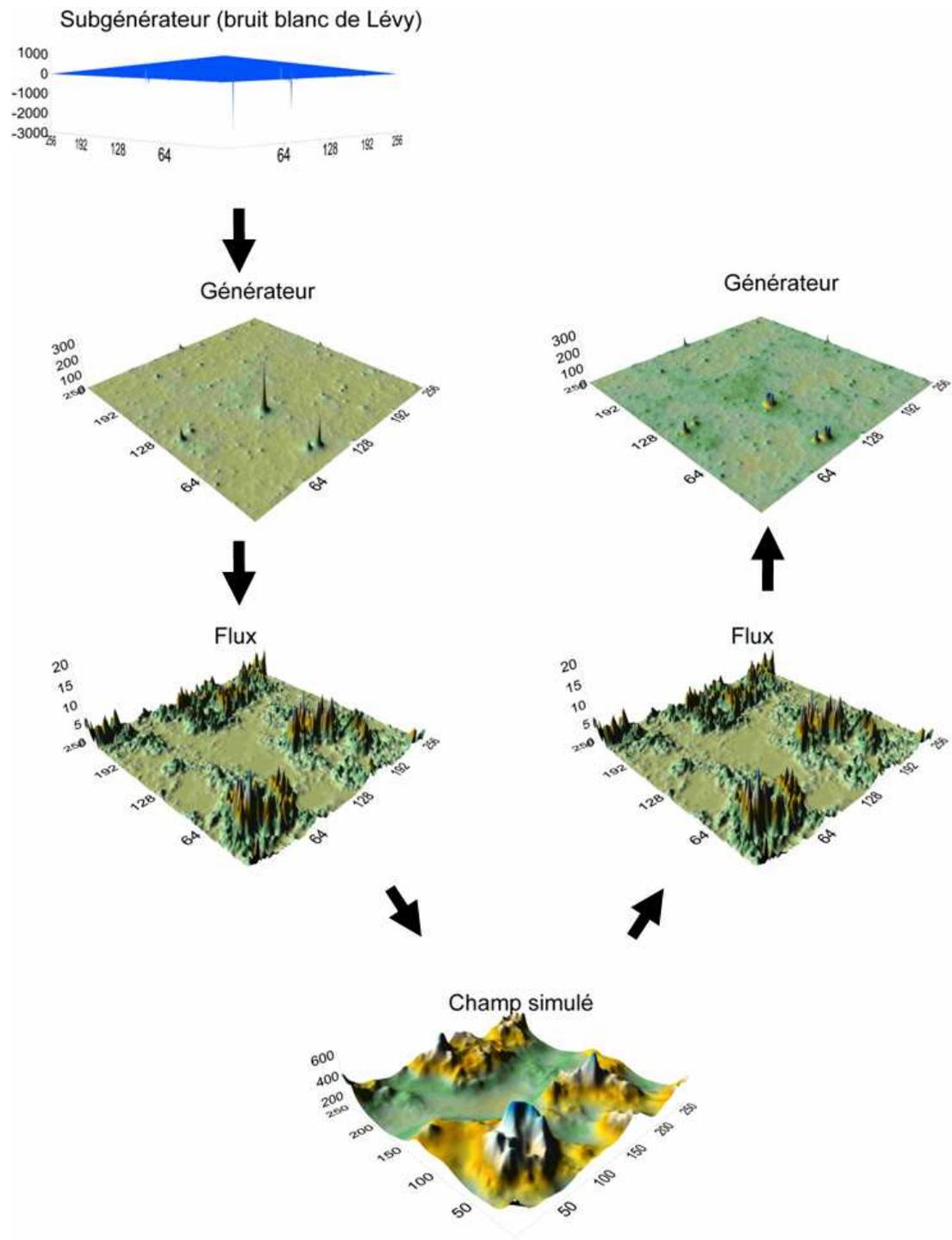


Figure 4-7. Simulation d'un champ de précipitation et processus inverse. Les valeurs correspondantes aux générateurs sont négatives mais dans cette figure sont prises en valeur absolue à fin mieux illustrer leurs caractéristiques. On peut observer que l'opération de déconvolution introduise des instabilités dans le générateur (image à droite) ce qui explique la différence entre les deux générateurs de la cascade.

## 4.6 Etudes des variations des paramètres $\alpha$ et $C_1$

Dans cette section on présente des études des variations des paramètres multifractals  $\alpha$  et  $C_1$  au travers des analyses de sensibilité du modèle à ces deux paramètres.

### 4.6.1 Variation de $\alpha$

D'abord, on commence par l'analyse de sensibilité au paramètre  $\alpha$  (figure 4-8). Pour ce-là on a fixé la valeur du paramètre  $C_1$  à 0.2 et on a varié les valeurs de  $\alpha$  ( $\alpha=2, 1.5, 1.2, 0.8$  et  $0.5$ , d'haut en bas). La figure illustre à gauche les sous-générateurs  $\gamma_\alpha$  obtenus à partir de la génération d'un bruit blanc de Lévy pour les différentes valeurs de  $\alpha$ , et à droite les champs conservatifs correspondants après intégration fractionnaire. Le cas a) correspond à un sous-générateur symétrique gaussien (distribution log-normal) avec  $\alpha=2$  et moyenne égale 0. Le modèle correspond au cas particulier du  $\alpha$ -modèle. Du côté droit on illustre le flux ou champ conservatif.

Les cas b) et c) correspondent à des sous-générateurs de Lévy avec  $1 < \alpha < 2$  tel que  $\langle \exp(q \gamma_\alpha) \rangle = e^{q^\alpha}$ , en particulier pour  $q=1$ ,  $\langle \exp(\gamma_\alpha) \rangle = e$ . Les cas d) et e) correspondent à des sous-générateurs de Lévy avec  $0 < \alpha < 1$  tel que  $\langle \exp(q \gamma_\alpha) \rangle = e^{K(q)}$ , et en particulier pour  $q=1$ ,  $\langle \exp(\gamma_\alpha) \rangle = 1$ , comme expliqué dans la section précédente. Dans la figure les valeurs des sous-générateurs ont été inversées à fin de les mieux représenter. Du côté droit on présente les flux respectifs. On peut voir que au fur et à mesure qu'on fait croître la valeur de  $\alpha$ , les singularités deviennent de plus en plus fortes. On peut observer aussi que pour des valeurs de  $\alpha$  plus petits, le modèle tend vers le cas particulier du  $\beta$ -modèle et le pourcentage de valeurs nuls du flux augmentent.

### 4.6.2 Variation de $C_1$

Pour l'analyse de la variation du paramètre  $C_1$  on a fixé la valeur du paramètre  $\alpha$  à 1.5, puis on a attribué au paramètre  $C_1$  les valeurs 0.1, 0.2, 0.5, 0.9, 1.2, 1.5 pour les

simulations. Dans la figure 4-9 on présente les champs conservatifs pour ces valeurs du paramètre  $C_1$  (d'haut en bas et de gauche à droit) respectivement.

On peut noter que de façon générale pour les valeurs plus grandes de  $C_1$  les champs générés sont peu denses dans l'espace (il s'agit de la densité spatiale de zones pluvieuses, donc de l'intermittence spatiale), avec seulement quelques grandes singularités alors que pour les valeurs faibles de  $C_1$ , les champs deviennent plus denses dans l'espace mais avec de singularités moins fortes.

## **4.7 Conclusions**

Dans ce chapitre nous avons mis en oeuvre une méthodologie qui permet de simuler de champs multifractals basée sur la notion de cascades spatio-temporelles. Nous avons présenté ici la procédure pour obtenir les générateurs des cascades à partir de bruits stochastiques (appelés sous-générateurs) en suivant une lois stable de Lévy. Nous avons amélioré l'algorithme proposé par Pecknold et al. (1993), en particulier pour les valeurs de  $\alpha < 1$  en introduisant le facteur de correction présenté dans la section 4.5.

Nous avons considéré deux alternatives pour la détermination des générateurs de la cascade soit dans l'espace physique soit dans l'espace de Fourier et nous avons constaté que la seconde alternative est la plus adéquate au but de cette thèse. Et c'est cela que nous avons opté pour nos simulations.

A partir de la mise en oeuvre des programmes spécifiques basés sur un ancien algorithme programmé avec Mathematica (Schertzer, et al., 2002), nous avons fait aussi des simulations en espace de champs multifractals: i) par de cascades multifractales conservatives, unidimensionnelle et puis multidimensionnelle, ii) par de cascades non conservatives.

Puis nous avons présenté la simulation en espace et temps d'un champ multifractal pour les cas conservatifs et non conservatifs respectivement. Nous avons généré numériquement des champs multifractals spatio-temporels et nous avons étudié l'influence des variations des paramètres multifractals  $\alpha$  et  $C_1$  sur les simulations.

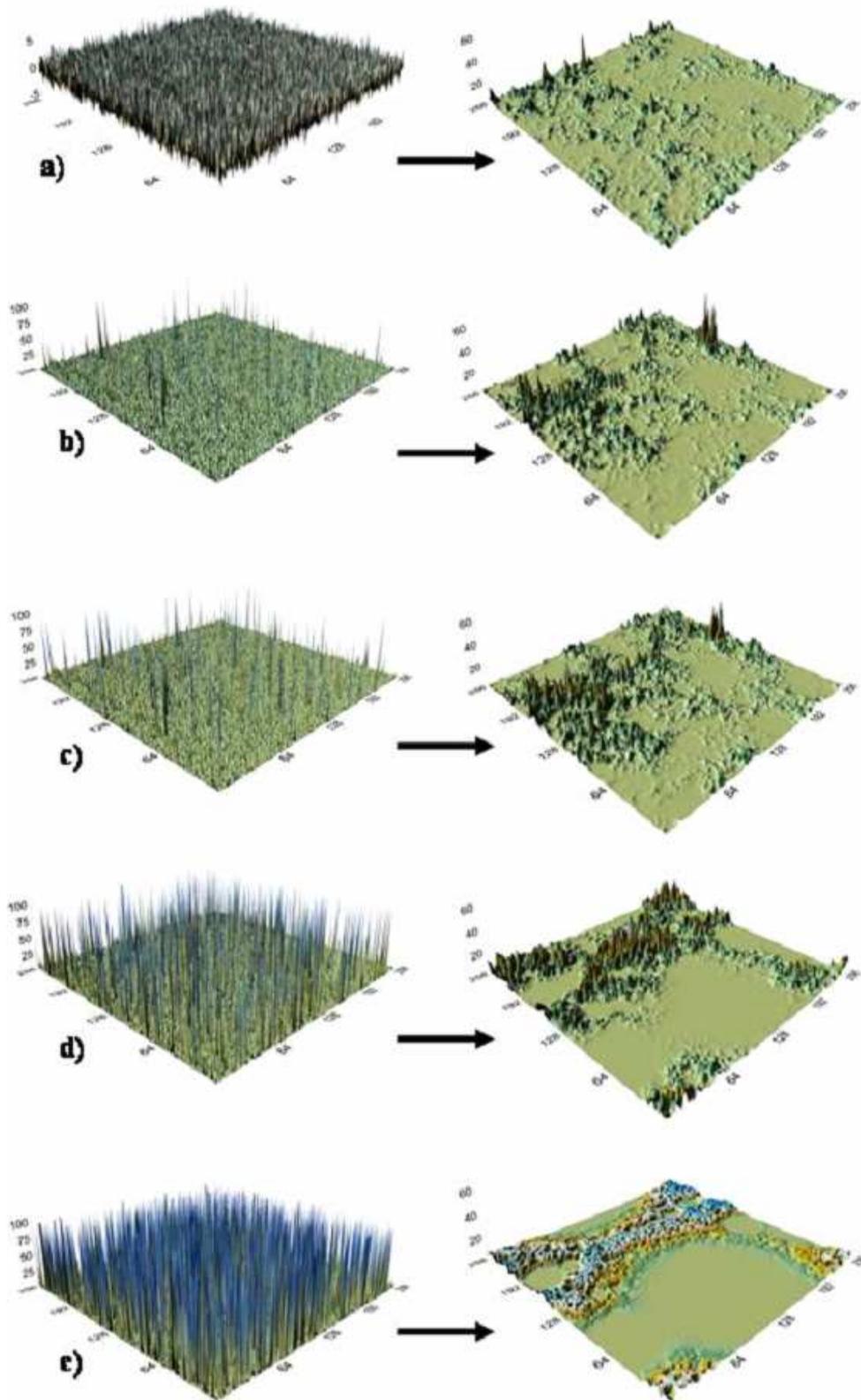


Figure 4-8. Etude du paramètre  $\alpha$ . Simulation du modèle de cascade pour  $C_1$  fixé à 0.2 et pour  $\alpha$  variant (d'haut en bas) 2, 1.5, 1.2, 0.8, 0.5 respectivement,  $H=0$ . et  $H_f=1/3$ . La colonne de gauche correspond aux sous-générateurs et à droite les champs conservatifs correspondants.

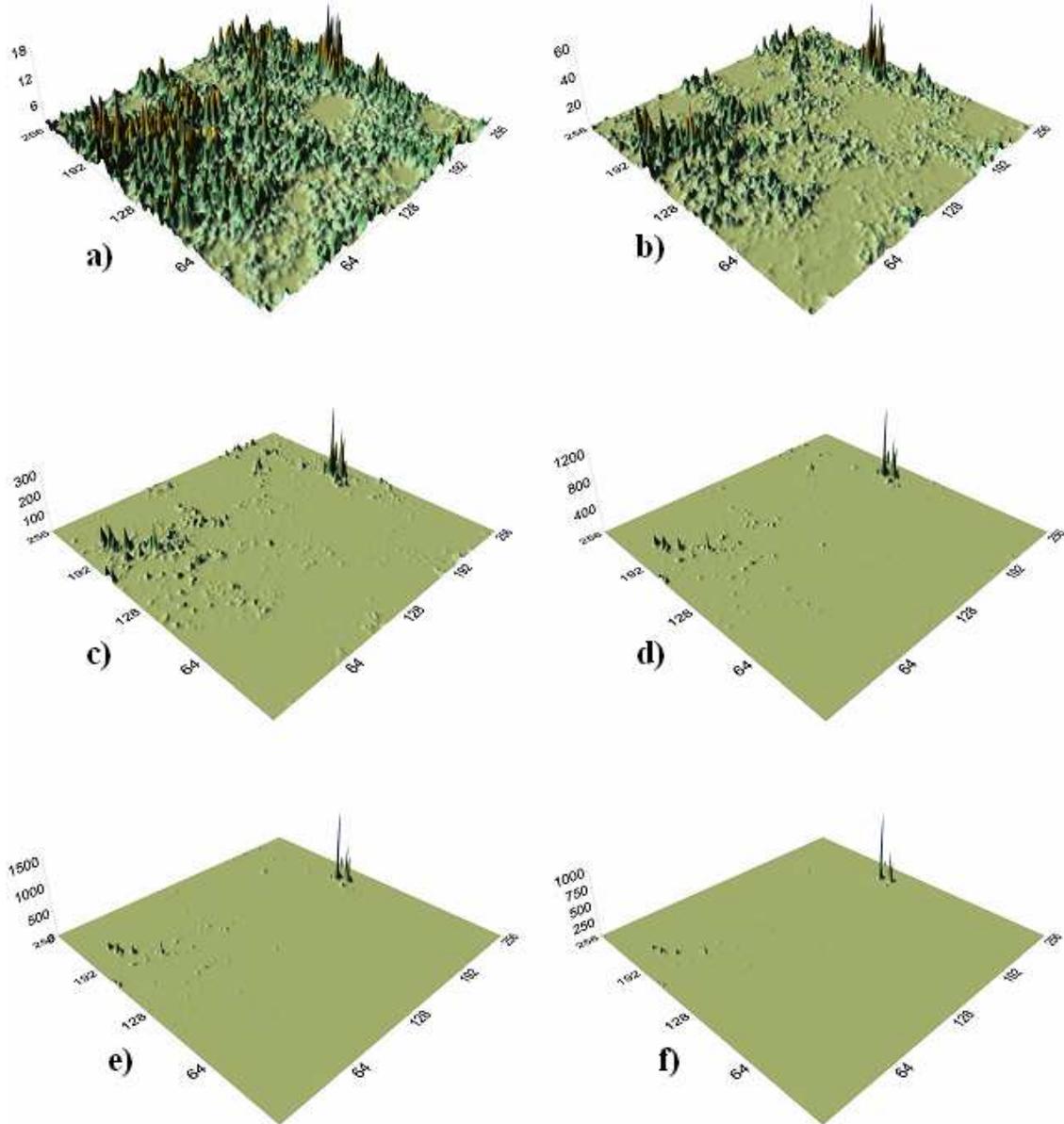


Figure 4-9. Etude du paramètre  $C_1$ . Simulation du modèle de cascade pour  $\alpha$  fixé à 1.5 et pour  $C_1$  variant (d'haut en bas et de gauche à droite) 0.1, 0.2, 0.5, 0.9, 1.2, 1.5 respectivement,  $H=0$ . et  $H_f=1/3$ .

## 5 Préviation et prédictibilité multifractales des Champs de Pluie

### 5.1 Introduction

Comme nous l'avons indiqué au commencement de cette thèse, le but principal de ce travail est de définir une méthode multifractale de préviation de pluie. Celle-ci est basée sur la compréhension d'un champ de précipitation comme une cascade en espace-temps, c'est-à-dire d'un ensemble de structures hiérarchiquement emboîtées sur une grande gamme d'échelles, caractérisées dynamiquement par une relation d'échelle entre temps de vie  $\tau$  et taille  $\ell$  telle que (Schertzer et al., 1997 ; Marsan et al., 1997 ; Marsan, 1998):

$$\tau_\ell = \ell^{1-H_f} \quad (5.1)$$

On peut conceptualiser qualitativement les problèmes à la fois de prédictibilité et de prédiction à partir de cette relation : une structure de taille donnée est perdue après une période plus grande que son temps de vie, mais durant cette période apparaissent des structures de taille plus petites, qui modifient le champ et en même temps conserve sa complexité. Ces sont effectivement les deux phénomènes fondamentaux qui définiront les modes de préviation multifractale : comment utiliser au mieux l'information du passé en prévoyant la « relaxation » des grandes structures. Nous sommes bien sûr très proche de l'actuel débat sur les paramétrisations stochastiques par rapport aux paramétrisations déterministes, ces dernières fournissant des champs trop lisses. Le cadre multifractal est par nature particulièrement simple, conceptuellement et techniquement, pour aborder ce débat. Par contre, il y a quelques difficultés techniques, mais nullement conceptuelles, pour prendre en compte le premier aspect.

### 5.2 Considérations générales

Une caractéristique générale de la turbulence atmosphérique est que pour des structures d'une taille donnée il y a un temps de vie typique relié dimensionnellement par la vitesse de cisaillement. La vitesse elle-même a une loi d'échelle sur une grande gamme

d'échelles dynamiquement significatives pour l'atmosphère, ce qui mène à penser à un modèle d'invariance d'échelle espace-temps.

Ce modèle est tout à fait différent du schéma standard de la dynamique atmosphérique qui suppose une hiérarchie de mécanismes dynamiques qualitativement différents sur différentes sous-gammes d'échelle, notamment une dynamique quasi-bidimensionnelle à grande échelle, fort différente de celle des petites échelles supposées quasi-tridimensionnelle (Monin, 1972, Pedlosky, 1979).

Il est important de noter que ce schéma était lui même en contradiction avec d'autres considérations phénoménologiques classiques, telles que les relations empiriques entre temps de vie et tailles typiques de divers phénomènes atmosphériques. La figure 5-1 en donne un exemple qui présente suivant deux axes. A première vue, cela semble être bien différent de l'approche que nous avons discutée jusqu'à maintenant. Cependant, il est facile de voir que ce schéma est totalement compatible avec l'idée de l'invariance d'échelles puisque tous les phénomènes sont placés tout au long d'une droite (diagonale rouge) dans le diagramme log-log. Ceci indique que la relation temps de vie/taille suit une loi de puissance et que cette loi n'a aucune taille caractéristique. De plus, la pente est très près de  $2/3$  qui est théoriquement prévue en utilisant des processus de cascade et l'analyse dimensionnelle. Cette conception alternative, le modèle d'invariance d'échelle unifié de l'atmosphère est le seule compatible avec ces observations, en particulier dans la meso-échelle (exemple : Lilley et al., 2004; Lovejoy et al. 2004, pour une analyse à l'aide d'un radar embarqué, et Lovejoy et al., 2001 pour une analyse d'images satellites).

### **5.3 Premiers exemples de prévisions multifractales**

Dans les sections précédentes, la construction du champ  $\varepsilon_\lambda(\bar{x}, t)$  a été faite à partir d'un bruit blanc, le sous-générateur  $\gamma_\lambda(\bar{x}, t)$ . La construction complète (résumée en Fig. 4.7) correspond à une série de transformations (dont deux intégrations fractionnaires et une exponentiation), selon les paramètres  $\alpha$ ,  $C_1$ ,  $H$  effectuée à partir du sous-générateur. En inversant cette série de transformations et les transformations elles-mêmes (partie droite de Fig. 4-7), on peut théoriquement déterminer le sous-générateur ayant défini un champ multifractal donné. Cependant que des instabilités peuvent apparaître, c'est particulièrement

le cas d'une déconvolution en opposition à la robustesse d'une convolution : celle-ci lisse, comme le fait une intégration, alors que celle-là accentue les fluctuations, comme le fait une dérivée. Dans notre cas, elles correspondent respectivement à des intégrations et dérivations fractionnaires. Ce problème n'est pas que théorique du fait que toutes les données ont des incertitudes. Il est en fait le seul problème technique, mais non conceptuel, que nous allons rencontrer dans le développement de procédures multifractales de prévision.

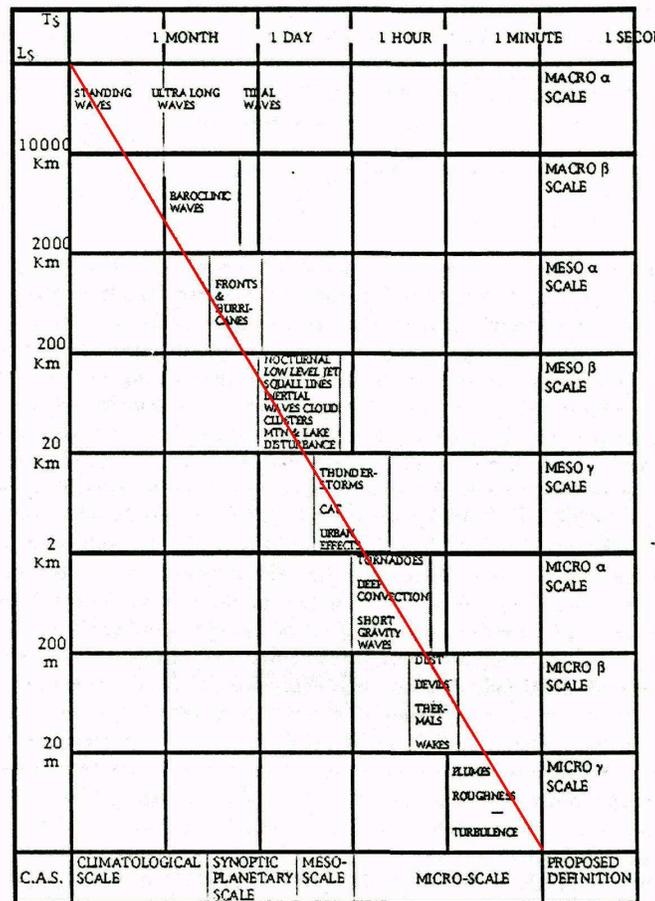


Figure 5-1. Diagramme schématique de la phénoménologie météorologique (adaptée de Orlandi, 1975, Atkinson, 1981). La ligne droite (en couleur rouge), ajoutée par Schertzer et al., 1997, correspond à la loi d'échelle de Kolmogorov  $\tau_t \sim \ell^{2/3}$ .

Avec les réserves que nous venons d'évoquer, et sur lesquelles nous reviendrons en détail, on peut théoriquement supposer que nous savons inverser le processus de génération d'un champ multifractal à partir de son sous-générateur ou pour le moins de son générateur. Dans le premier cas,  $\gamma_\lambda(\bar{x}, t)$  étant le sous-générateur du champ (donc aussi bien pour le passé

$t < t_0$  que pour le futur  $t > t_0$ ), on suppose que l'on est capable de déterminer le passé du sous-générateur, « le sous-générateur passé »  $\gamma_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$  :

$$\gamma_{p,\lambda}(\bar{x}, t) = \gamma_\lambda(\bar{x}, t)H(t_0 - t) \quad (5.2)$$

Où  $H(t_0 - t)$  est la fonction de Heaviside, par opposition au « futur sous-générateur » :

$$\gamma_{f,\lambda}(\bar{x}, t) = \gamma_\lambda(\bar{x}, t) - \gamma_{p,\lambda}(\bar{x}, t) = \gamma_\lambda(\bar{x}, t)H(t - t_0) \quad (5.3)$$

Ces deux équations illustrent ce que nous avons qualitativement dit sur les deux axes fondamentaux de la prévision fondamentale : la détermination de  $\gamma_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$  correspondant à comment exploiter la mémoire du processus, le choix de  $\gamma_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$  comment introduire de nouvelles structures en préservant certaines propriétés du processus. En effet, du fait de la causalité,  $\gamma_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$  suffit pour générer le passé du champ, et au-delà de cela comme se relaxent dans le futur les structures du passé. La propriété que le sous-générateur  $\gamma_\lambda(\bar{x}, t)$  est un bruit blanc (par définition) est fondamentale, puisque cela signifie que  $\gamma_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$  et  $\gamma_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$  sont indépendants, ce que montre immédiatement qu'un tel processus a des limites de prédictibilités qu'il convient d'étudier afin de procéder à des prévisions aussi proches possible de ces limites. Bien évidemment du fait de la structure hiérarchique de la cascade, il n'est pas de même pour les champs passé et futurs correspondants :

$$\varepsilon_{p,\lambda}(\bar{x}, t) = \varepsilon_\lambda(\bar{x}, t)H(t_0 - t) \quad (5.4)$$

$$\varepsilon_{f,\lambda}(\bar{x}, t) = \varepsilon_\lambda(\bar{x}, t)H(t - t_0) \quad (5.5)$$

Et nous avons des définitions similaires pour les générateurs correspondants. Le but d'une prévision est évidemment de définir un champ prévu dans le futur  $\tilde{\varepsilon}_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$  aussi « proche » que possible. Ce qui est moins évident est de définir la notion adéquate de proximité, cela nécessite d'abord d'évaluer les limites intrinsèques de prédictibilité.

### 5.3.1 Mode déterministe de prévision multifractale

Nous allons pour le moment nous concentrer sur le problème de la simulation d'une prévision, donc sur le choix de sous-générateur futur  $\gamma_{f,\lambda}(\bar{x},t)$ . Un premier choix possible (Marsan et al., 1996 ; Marsan, 1998) est de vouloir préserver de façon déterministe le flux. Comme le processus est multiplicatif, il suffit que les contributions du futur soient l'unité, donc (aux conditions près de normalisation par euler et variation (cf. Sect. 4.5)) que le sous-générateur futur soit nul :

$$\tilde{\gamma}_{f,\lambda}(\bar{x},t) = 0 \quad (5.6)$$

Dans le cadre de ce mode de prévision qui correspond à une paramétrisation déterministe des petites échelles dans le futur,  $\gamma_{p,\lambda}(\bar{x},t)$  génère aussi bien le champ passé que sa prévision dans le futur. Celle-ci correspond à la relaxation des structures du passé. Aucune structure de petite échelle n'est rajoutée, le champ devient de plus en plus lisse : il perd de sa complexité.

Il est important de remarquer que cette procédure est possible seulement parce que la causalité de la transformation (notamment l'intégration fractionnaire) est respectée, donc que le futur n'interfère pas avec le champ passé  $\varepsilon_{p,\lambda}(\bar{x},t)$  (pour  $t < t_0$ ); autrement, une transformation non causale mènerait à un champ  $\varepsilon'_{\lambda}(\bar{x},t)$  différent de  $\varepsilon_{p,\lambda}(\bar{x},t)$  pour  $t < t_0$ .

Nous avons simulé cette procédure pour 3 dimensions (deux coordonnées d'espace et une coordonnée de temps) et les paramètres  $\alpha=1.8$ ,  $C_1=0.1$ ,  $H=1/3$ ,  $H_t=1/3$  à la résolution  $\lambda=256$ . Les résultats sont montrés dans la figure 5-2, en comparant une des prévisions possibles (colonne à droite) avec les états futurs « réels » (colonne à gauche), pour les différents temps futurs  $t=t_0$ ,  $t_0+\Delta t$ ,  $t_0+2\Delta t$ ,  $t_0+3\Delta t$ ,  $t_0+5\Delta t$  et  $t_0+10\Delta t$ . Pour des temps  $t>t_0$  les grandes structures (en couleur jaune) sont déformées et disparaissent lentement, tandis que les structures de petite échelle disparaissent rapidement.

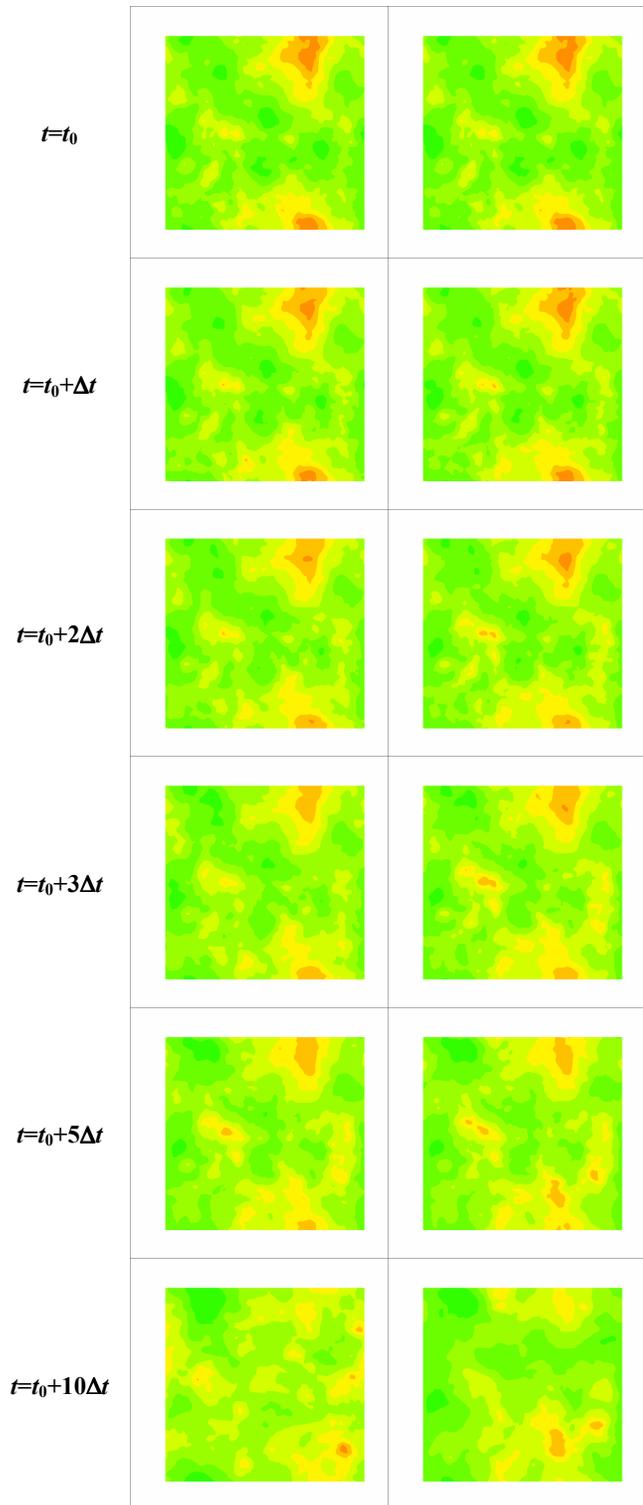


Figure 5-2. Comparaison du champ prévu (images à droite) avec le champ de référence (images à gauche) pour une réalisation avec les paramètres  $\alpha=1.8$ ,  $C_1=0.1$ ,  $H=1/3$ ,  $H_f=1/3$  et  $\lambda=256$ , et pour les temps :  $t=t_0$ ,  $t=t_0+\Delta t$ ,  $t=t_0+2\Delta t$ ,  $t=t_0+3\Delta t$ ,  $t=t_0+5\Delta t$ ,  $t=t_0+10\Delta t$ . La palette de couleurs des images qui représente l'échelle d'intensités est logarithmique.

Dans la figure 5-3 nous présentons une autre simulation en espace et temps avec les paramètres  $\alpha=1.8$ ,  $C_1=0.1$ ,  $H=1/3$ ,  $H_t=1/3$ , mais cette fois à la résolution  $\lambda=32$ . Comme dans la figure précédente dans la colonne à droite on illustre une des prévisions possibles et à gauche les états « réels ». Dans la figure 5-3 on peut observer comment les grosses structures changent plus lentement que les petites structures observées à l'échelle plus fine de la figure 5-2. Cela illustre la hiérarchie des temps de variabilité des structures (Eq. 5.1) : ceux des petites structures étant beaucoup plus rapide que ceux des grosses structures. L'unité des temps est d'ailleurs prise comme le temps des plus petites structures représentées.

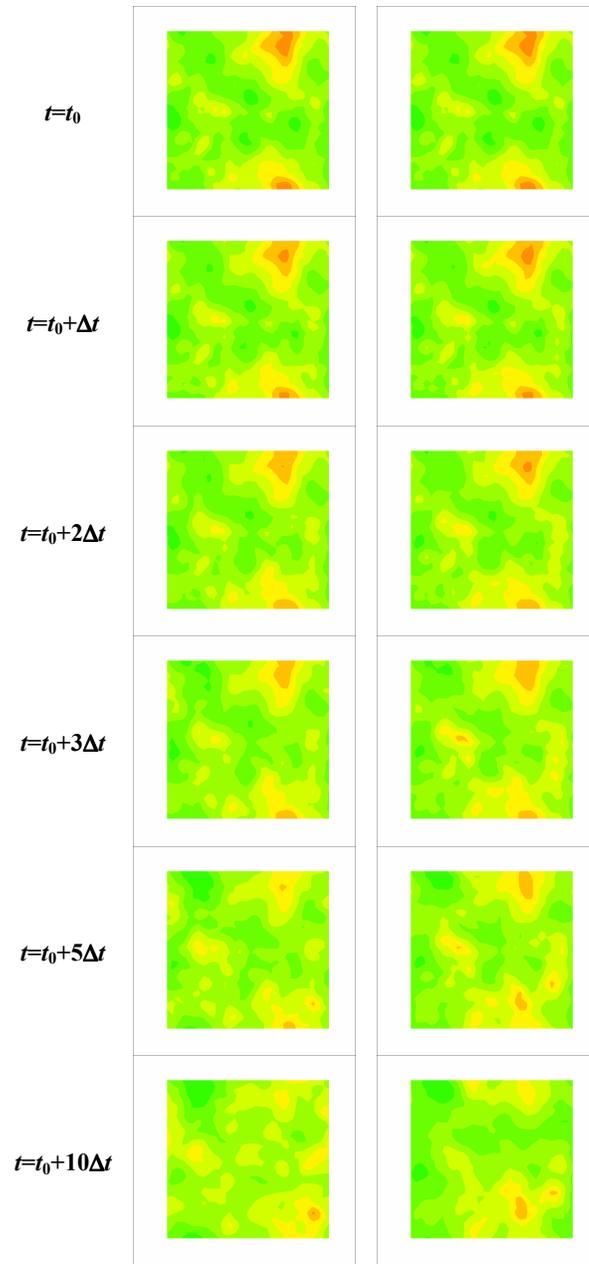
### 5.3.2 Mode stochastique de prévision multifractale

La perte de complexité par le mode déterministe de prévision est fondamentalement due au fait que prendre  $\gamma_{f,\lambda}(\bar{x},t)$  de façon déterministe, correspond à le doter d'une toute nature tout autre que celle de  $\gamma_\lambda(\bar{x},t)$ , qui lui n'a aucune difficulté à préserver à la fois la conservation du flux (cette fois de façon stochastique, plus précisément de façon canonique, c'est à dire en moyenne d'ensemble) et la complexité du champ. Pour lui les deux vont de pair. On arrive donc à un mode stochastique de prévision multifractale (Schertzer et Lovejoy, 2004b, Macor et al., 2007a) : il suffit de prendre pour sous-générateur futur prévu  $\tilde{\gamma}_{f,\lambda}(\bar{x},t)$  n'importe quelle réalisation possible de bruit blanc avec les caractéristiques  $(C_1, \alpha)$  compatibles avec les données du passé autrement dit ( $\stackrel{d}{=}$  désignant l'égalité en loi de distribution) :

$$\tilde{\gamma}_{f,\lambda}(\bar{x},t) \stackrel{d}{=} \gamma_{f,\lambda}(\bar{x},t) \quad (5.7)$$

Par rapport au mode déterministe, nous avons résolu plusieurs questions (dont la conservation de la complexité du champ) mais un problème nouveau : nous n'avons plus une seule prévision, mais une infinité de prévisions possibles.

Nous sommes de plein pied dans le cadre des prévisions stochastiques et d'ensemble. Dans ce cadre, nous pouvons procéder à un nombre important de possibles réalisations et effectuer des statistiques sur celles-ci par exemple déterminer leur moyenne.



**Figure 5-3.** Comparaison du champ prévu (images à droite) avec le champ de référence (images à gauche) pour une réalisation avec les paramètres  $\alpha=1.8$ ,  $C_1=0.1$ ,  $H=1/3$ ,  $H_f=1/3$  et  $\lambda=32$ . Cette figure illustre la variation plus lente des grosses structures par rapport aux plus petites structures. La palette de couleurs des images qui représente l'échelle d'intensités est logarithmique.

Dans la figure 5-4 nous présentons une prévision multiple avec les paramètres  $\alpha=1.5$ ,  $C_1=0.2$ ,  $H=1/3$ ,  $H_f=0.75$  à la résolution  $\lambda=256$ . Dans ce cas, nous avons considéré 20 réalisations stochastiques différentes. Dans la colonne à droite on présente la moyenne des 20 réalisations et dans la colonne à gauche la réalisation de référence.

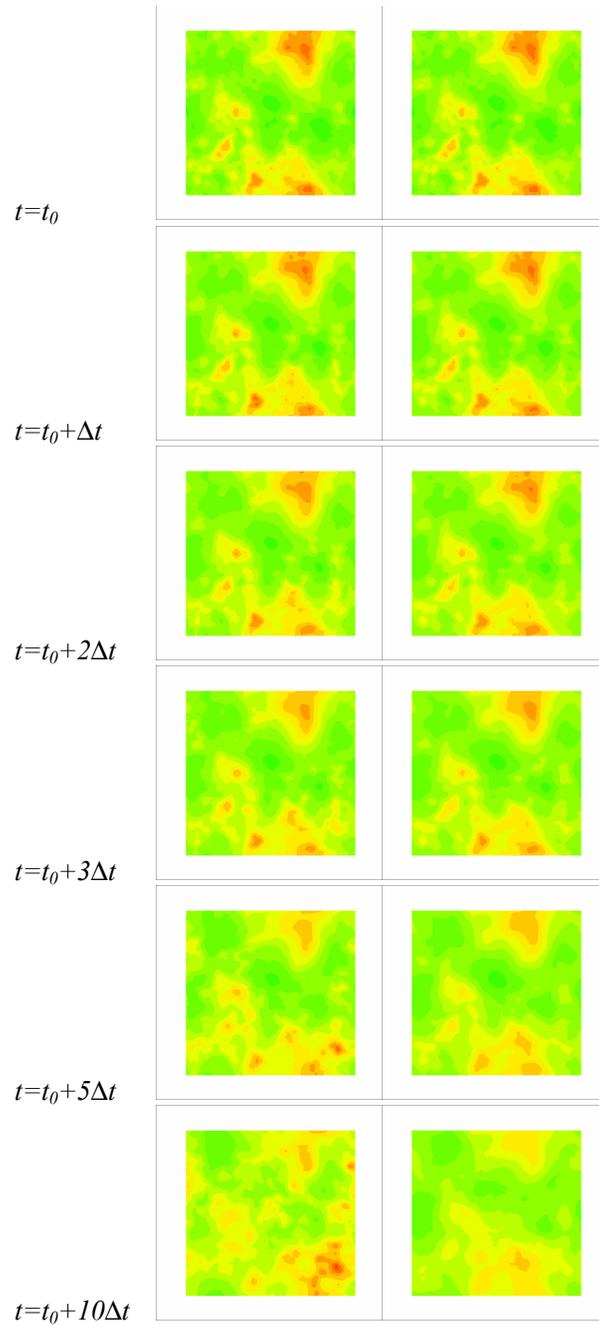


Figure 5-4. Comparaison avec le champ de référence (images à gauche), une réalisation avec les paramètres  $\alpha=1.5$ ,  $C_1=0.2$ ,  $H=1/3$ ,  $H_f=0.75$  et  $\lambda=256$  avec la moyenne (image à droite) de 20 autres réalisations possibles ayant les mêmes paramètres multifractals. La palette de couleurs des images qui représente l'échelle d'intensité est logarithmique.

## **5.4 Limites de Prédicibilité**

### **5.4.1 Introduction**

La sensibilité de la dynamique non linéaire de l'atmosphère aux petites perturbations a été très largement popularisée avec l'aide de la métaphore de "l'effet papillon", du chaos déterministe (Lorenz, 1963; Lorenz, 1993). L'approche classique pour mesurer la prédictibilité est d'introduire une erreur à petite échelle et d'estimer la croissance de cette erreur au cours du temps. Dans le cadre du chaos déterministe à petit nombre de degré de libertés, cette croissance est exponentielle. Ainsi, dans l'espace de phase, deux trajectoires initialement extrêmement proches tendront à diverger exponentiellement avec le temps, devenant entièrement décorrélés en un temps caractéristique fini. La popularité de « l'effet papillon » a sans doute contribué à ce que la divergence exponentielle, soit considéré comme le modèle universel de la perte de prédictibilité, alors que l'on peut objecter (Schertzer et Lovejoy, 2004) que pour la turbulence complètement développée, due à l'invariance d'échelle dans l'espace et le temps, il n'y a plus de temps caractéristique du processus. On attend ainsi une décorrélation en loi de puissance dans le temps.

Celle-ci a d'ailleurs été obtenue à l'aide des techniques de fermeture des équations de Navier-Stokes développées pour la turbulence homogène (Lorenz, 1969, Leith et Kraichnan, 1972, Metais et Lesieur, 1986) en étudiant l'évolution temporelle sur le spectre d'énergie corrélée pour deux champs initialement décorrélés seulement pour de grands nombres d'onde : le nombre d'onde caractérisant la frontière entre énergie corrélée et décorrélée décroît bien en loi de puissance. Ces modèles sont intrinsèquement limités par des fortes suppositions sur les statistiques de la solution, perdant ainsi la caractéristique essentielle de l'intermittence du processus.

Plus récemment, a été proposée une approche basée sur les « modèles en coquilles sphériques (shell-models) » (Crisanti et al., 1993a ; Crisanti et al., 1993b), en définissant l'exposant généralisé de Lyapunov. Cependant, ces modèles perdent radicalement leur dimensionnalité spatiale et gardent seulement un nombre très réduit de degrés de liberté, donc leur pertinence avec les résultats de prédictibilité de la turbulence reste discutable. Il serait à cet égard intéressant d'étudier la prédictibilité des modèles « cascades de gyroscopes » (Tchiguirinskaia et Schertzer, 1996; Tchiguirinskaia et al., 1997 ; Tchiguirinskaia et al., 1998)

qui ont la même structure hiérarchique et presque la même simplicité, mais préserve la dimensionnalité de l'espace.

Le modèle multifractal causal pour la turbulence permet en effet une description complète de ce processus de décorrélation, c'est-à-dire son comportement moyen donné par les spectres classiques (statistiques d'ordre 2), aussi bien que sa forte variabilité en considérant des statistiques d'ordre supérieur. Marsan et al., (1996) ont étudié cette décorrélation en considérant celle de l'auto-corrélation en temps d'un champ unique, statistiquement semblable à celle de la corrélation de deux champs.

#### 5.4.2 Analyse de prédictibilité

Thompson (1957) et Lorenz (1969) installent un cadre plutôt général pour étudier la croissance des erreurs d'un champ espace-temps complexe, à savoir les solutions des modèles météorologiques ou des équations de Navier-Stokes, en considérant les deux solutions  $\bar{u}_1(\bar{x}, t)$  et  $\bar{u}_2(\bar{x}, t)$  comme initialement identiques, à l'exception d'une perturbation  $\delta\bar{u}(\bar{x}, 0) = \bar{u}_2(\bar{x}, 0) - \bar{u}_1(\bar{x}, 0)$ , confinée à de petites échelles de espace. Quand les interactions non linéaires préservent l'énergie cinétique (par exemple les équations de Navier-Stokes incompressibles), il est convenable et important de considérer l'énergie cinétique corrélée:

$$e^c(\bar{x}, t) = \bar{u}_2(\bar{x}, t)\bar{u}_1(\bar{x}, t) \quad (5.8)$$

Et l'énergie correspondante de décorrélation:

$$e^A(\bar{x}, t) = \frac{1}{2}(\delta\bar{u}(\bar{x}, t))^2 = \frac{1}{2}(\bar{u}_2(\bar{x}, t) - \bar{u}_1(\bar{x}, t))^2 \quad (5.9)$$

Aussi bien que l'énergie totale (de l'ensemble des deux solutions):

$$e^T(\bar{x}, t) = \bar{u}_1(\bar{x}, t) + \bar{u}_2(\bar{x}, t) \quad (5.10)$$

et l'énergie de chaque solution:

$$e^n(\bar{x}, t) = \frac{1}{2} (\bar{u}_n(\bar{x}, t))^2 \quad (5.11)$$

Ceci implique la relation (démontré dans l'annexe C):

$$e^T(\bar{x}, t) = e^c(\bar{x}, t) + e^\Delta(\bar{x}, t) \quad (5.12)$$

Ce qui prouve que si l'énergie totale est statistiquement stationnaire, il y a un flux de l'énergie corrélée  $e^c(\bar{x}, t)$  vers l'énergie décorrélée  $e^\Delta(\bar{x}, t)$ . La même propriété tient pour les spectres d'énergie correspondants  $E^T(k, t) = E^c(k, t) + E^\Delta(k, t)$ , puisque ceux-ci correspondent à la décomposition linéaire de celles-là par rapport aux nombres d'onde (par exemple  $\langle e^n(\bar{x}, t) \rangle = \int_0^\infty E^n(k, t) dk$ ).

Par conséquent, le spectre d'énergie décorrélée augmente constamment en magnitude de grands à de petits nombres d'onde, jusqu'à atteindre le spectre de l'énergie totale  $E^T(k, t) \approx k^{-5/3}$ . On peut définir un nombre d'onde critique  $k_c(t) \approx 1/\ell_c(t) \approx t^{-3/2}$  tel que  $E^c(k_c(t), t) = E^\Delta(k_c(t), t)$ . Thompson (1957) a étudié la croissance de l'erreur initiale avec l'aide des dérivés initiales du temps, tandis que Lorenz (1969) a procédé à une intégration du temps avec l'aide d'approches quasi-gaussiennes. Kraichnan (1971) et Leith (1971) ont raffiné ces dernières avec l'aide du modèle EDQNM (*Eddy-Damped Quasi Normal Model*, Orszag, 1970) et le modèle *Test Field Model* (Leith et Kraichnan, 1972).

Lilly (1985) a critiqué le cadre statistique de l'analyse de prédictibilité de Lorenz, Leith et Kraichnan, en précisant qu'une conséquence du cadre quasi-normal de leurs schémas de fermeture est que leurs analyses sont locales mais aussi globales. Ceci n'est pas conforme à l'observation que diverses structures atmosphériques (par exemple les orages, Lilly, 1983) maintiennent une identité stable beaucoup plus longue que leur temps de retournement. Lilly (1985) montre, en citant les résultats de Schertzer et Lovejoy, 1984, que la distribution de probabilité du gradient de température et coupure de vent ont une queue de probabilité en loi de puissance:

$$\Pr(x \geq s) \approx s^{-q_D} \quad s \gg 1 \quad (5.13)$$

Lilly argue donc que les statistiques de l'erreur devraient également suivre une loi de puissance, tel qu'ils soient beaucoup plus variables et extrêmes que ceux assumés par les approches de fermeture quasi-normales. En effet, comme nous l'avons déjà montré en Sect. 3.6.2.4, l'exposant en loi de puissance  $q_D$  des queues de probabilité est un ordre critique de la divergence des moments statistiques. En conséquence, les moments statistiques théoriques d'ordre  $q \geq q_D$  sont infinis, tandis que leurs estimations empiriques sur des échantillons finis continuent à croître avec le nombre d'échantillons. Donc, comme une conséquence immédiate, les moments de second ordre, tels que les spectres d'énergie, sont inadéquates pour caractériser la variabilité des processus. Malheureusement, les approches de fermeture quasi-normales clôturent la hiérarchie infinie des moments à l'aide des moments de second ordre.

Pour généraliser l'approche suivie dans l'analyse spectrale de la prédictibilité, on considère l'évolution dans le temps d'une paire de champs multifractals  $\bar{u}_1(\bar{x}, t)$  et  $\bar{u}_2(\bar{x}, t)$  à la même résolution  $\Lambda$ . Les deux champs ont les sous-générateurs  $\gamma_\Lambda^1$  et  $\gamma_\Lambda^2$ , qui sont identiques jusqu'au temps  $t_0$ , après quoi ils deviennent indépendants. Ils correspondent donc à deux prévisions stochastiques indépendantes du même champ. Le problème de prédictibilité est donc équivalente à celui de la dispersion des prévisions stochastiques, d'où sont intérêt très pratique pour les prévisions de ce type. Marsan et al. (1996) et Schertzer et Lovejoy (1997) ont vérifié que les analyses spectrales de ces simulations multifractales sont conformes aux résultats de la turbulence homogène, aussi bien que la présence des éclats de fluctuations violentes qui ne peuvent pas être expliquées à l'aide des moments statistiques de second ordre, par exemple les spectres d'énergie.

En effet, bien que l'énergétique de la cascade des erreurs demeure fondamentalement la même, celle-ci ne contraint plus les plus grandes fluctuations des erreurs comme dans le cas gaussien. On peut observer des éclats similaires en espace et temps pour la différence  $\delta\bar{u}(\bar{x}, t)$  de la paire de champs  $\bar{u}_1(\bar{x}, t)$  et  $\bar{u}_2(\bar{x}, t)$  montrés en figure 5.5.

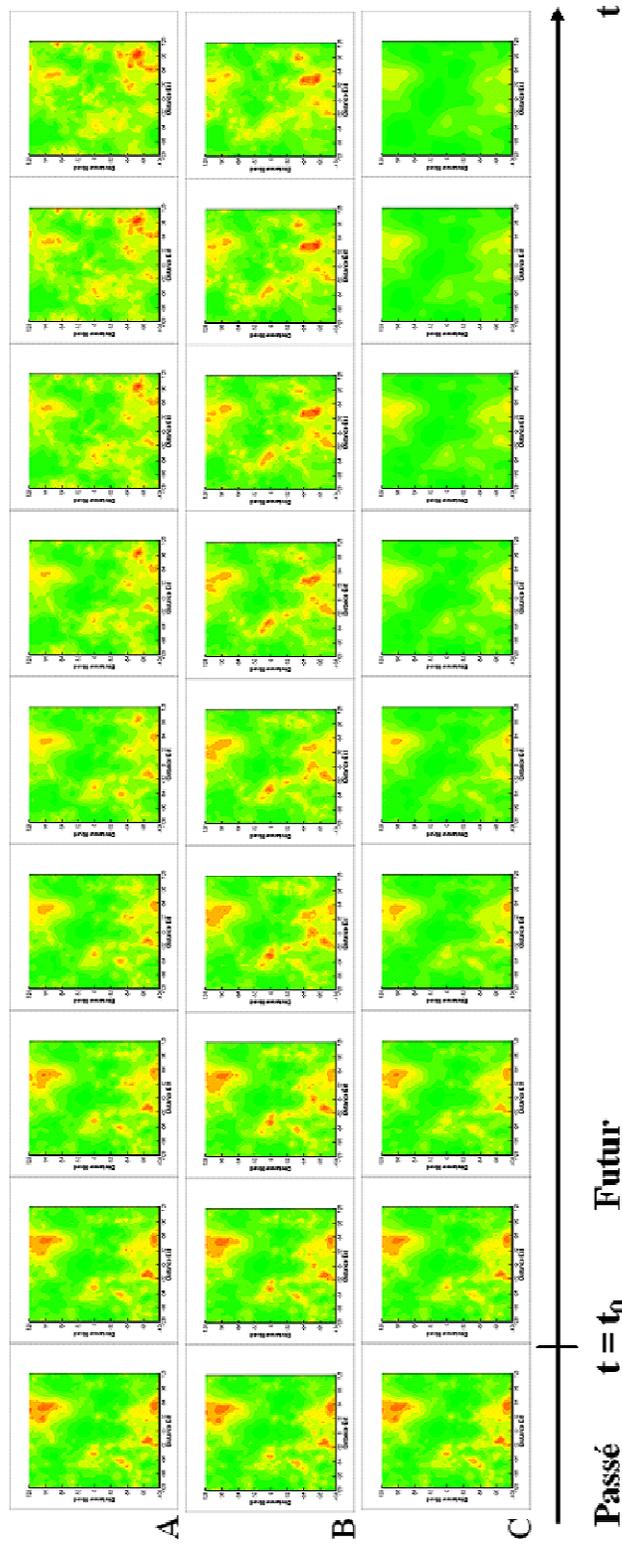


Figure 5-5. Evolution temporelle de trois réalisations multifractales: A et B correspondant à une prévision stochastique avec paramètres  $\alpha=1.5$ ,  $C_1=0.1$ ,  $H=0.1$ ,  $H_f=0.25$ , et C à une prévision déterministe. La résolution des images est  $\lambda=256$ . La palette de couleurs est logarithmique.

Cette figure présente l'évolution temporelle de ces deux prévisions stochastiques en représentation PPI (*Plan Position Indicator*). Le délai de temps entre deux images successives est de cinq minutes, avec une résolution spatiale 256x256. La réalisation C montre la prévision déterministe correspondante. On peut noter que les structures à petites échelles disparaissent plus rapidement tandis que les structures à échelles plus grandes tendent à disparaître plus lentement. Les paramètres multifractals considérés pour cet exemple sont  $\alpha=1.5$ ,  $C_1=0.2$ ,  $H=0.1$  et  $H_t=1/4$  (au lieu de  $1/3$ , pour obtenir des rapports de gammes d'échelle de 256 en espace et de 64 en temps), et l'échelle de couleurs est logarithmique.

La figure 5-6 présente l'évolution des structures à petites échelles dans le futur ( $t > t_0$ ) pour les prévisions stochastiques A et B respectivement. Dans la figure 5-6.a, la ligne en haut présente (à partir de  $t=t_0$ ) la réalisation A avec l'ensemble des structures (donc celles générées à la fois par le sous-générateur passé, comme celui du futur) pour comparaison avec les structures à petite échelle (ligne en bas) générées uniquement par le futur. On peut donc observer comment le nombre des petites structures augmente avec le temps et comment celles-là varient très rapidement au fur et mesure que l'inertie du passé disparaît. La figure 5-6.b illustre la même analyse pour la réalisation B. On peut aussi observer que les petites structures dans le futur deviennent très indépendantes entre les deux réalisations.

- L'indépendance soudaine des sous-générateurs à  $t_0$  introduit seulement (dû à l'intégration fractionnaire) une croissance logarithmique (donc lente) de l'indépendance relative entre les générateurs correspondantes et par conséquent les deux champs  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  ne restent dépendants que seulement jusqu'à une résolution d'échelle  $\lambda(t) \leq \Lambda$ . En raison de l'anisotropie entre le temps et l'espace ( $H_t \neq 0$ ) on a (Schertzer et Lovejoy, 2004):

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \Lambda && \text{pour } t \leq t_0 \\ \lambda(t) &\approx \text{Min}\left[\Lambda, \left(\frac{T}{t-t_0}\right)^{\frac{1}{1-H_t}}\right] && \text{pour } t > t_0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

où  $T$  est l'échelle externe de temps du processus.

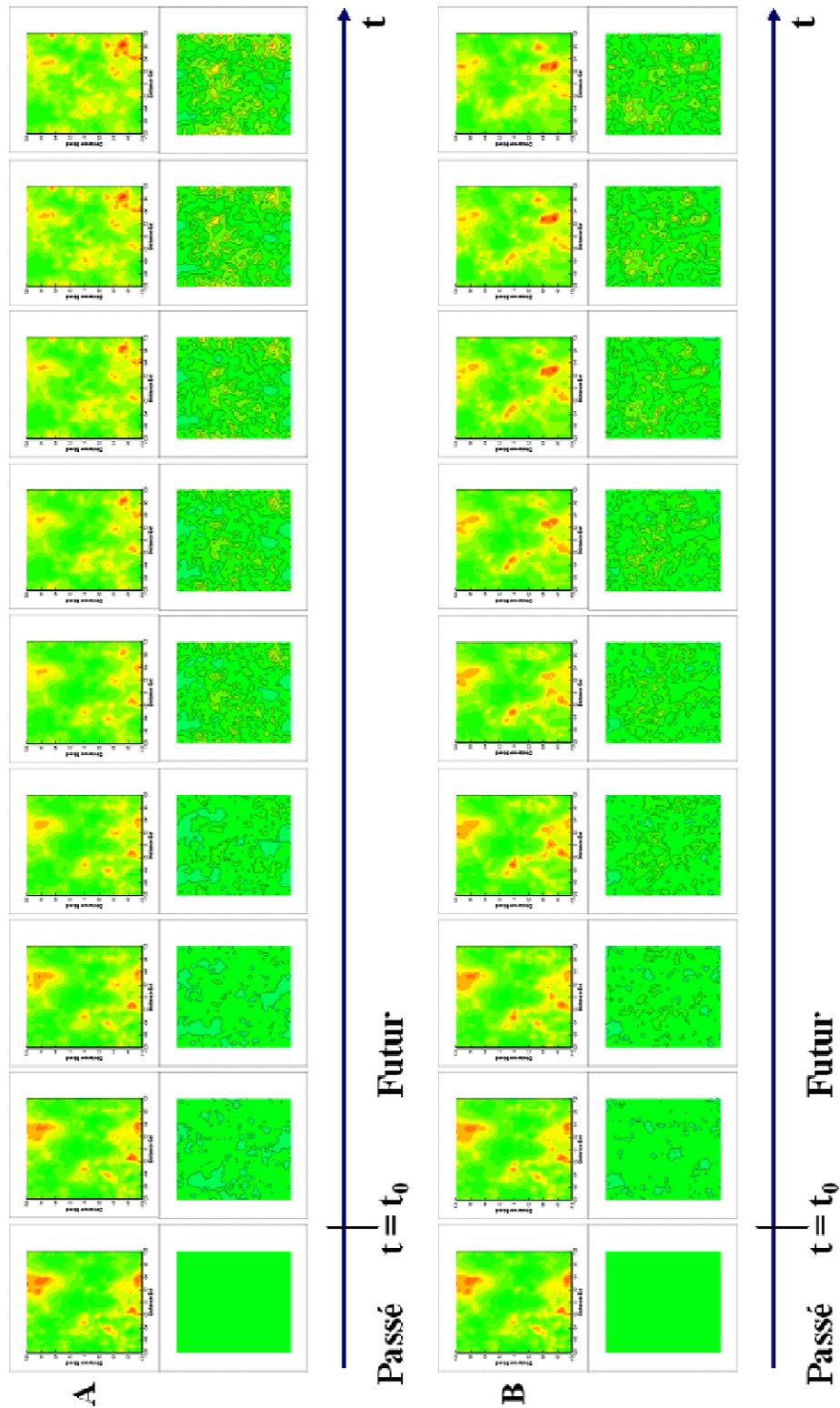


Figure 5-6. Variation des structures à petites échelles dans le futur (images en bas) en comparaison avec celle de l'ensemble des structures (image en haut) : a) pour la réalisation A, b) pour la réalisation B. La palette de couleurs est logarithmique.

Par conséquence, on obtient pour la covariance d'ordre  $q$  (Schertzer et Lovejoy, 2004) :

$$C^{(q)}(\varepsilon_{1,\Lambda}, \varepsilon_{2,\Lambda}) = \frac{\langle (\varepsilon_{1,\Lambda} \varepsilon_{2,\Lambda})^q \rangle}{\langle (\varepsilon_{1,\Lambda})^q \rangle \langle (\varepsilon_{2,\Lambda})^q \rangle} \propto \lambda(t)^{K(q,2)} \quad (5.15)$$

tel que :

$$K(q,2) = K(2q) - 2K(q) \quad (5.16)$$

où  $K(q)$  est la fonction d'échelle des moments des flux  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . La non linéarité de  $K(q,2)$  est une conséquence de  $K(q)$  et il montre que le champ  $\varepsilon_{1,\Lambda} \varepsilon_{2,\Lambda}$  est multifractal, mais avec la caractéristique distinctive est que la gamme du rapport d'échelles  $[1, \lambda(t)]$  a aussi une chute en loi de puissance (éq. (5.14)).

La figure 5-7 présente en coordonnées bi-logarithmique la corrélation d'ordre  $q = 1.5$  (Eq. 5.15) entre les flux de deux réalisations A ( $i=1$ ) et B ( $i=2$ ) de la figure 5-5. Les corrélations entre les flux totaux  $\varepsilon^i_\lambda(\bar{x}, t)$  (générés par le sous-générateur total  $\gamma^i_\lambda(\bar{x}, t)$  respectivement pour chacune des réalisations) et celles des flux passés  $\tilde{\varepsilon}^i_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$  (générés respectivement par le sous-générateur passé  $\gamma^i_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$  pour chacune des réalisations, le tilde est introduit pour indiquer qu'il n'est pas défini uniquement sur le passé, ce que nous discuterons en détail dans la prochaine section) décroissent bien de façon similaire et que, par contre, celle des flux futurs  $\varepsilon^i_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$  (générés respectivement par le sous-générateur futur  $\gamma^i_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$  pour chacune des réalisations) ne fait que fluctuer autour de l'unité. En effet, du fait de l'indépendance de  $\gamma^i_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$  et  $\gamma^i_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$ , il n'y a pas seulement factorisation de flux (du fait de l'équation 5.3) :

$$\varepsilon^i_\lambda(\bar{x}, t) = \tilde{\varepsilon}^i_{p,\lambda}(\bar{x}, t) \varepsilon^i_{f,\lambda}(\bar{x}, t) \quad (5.17)$$

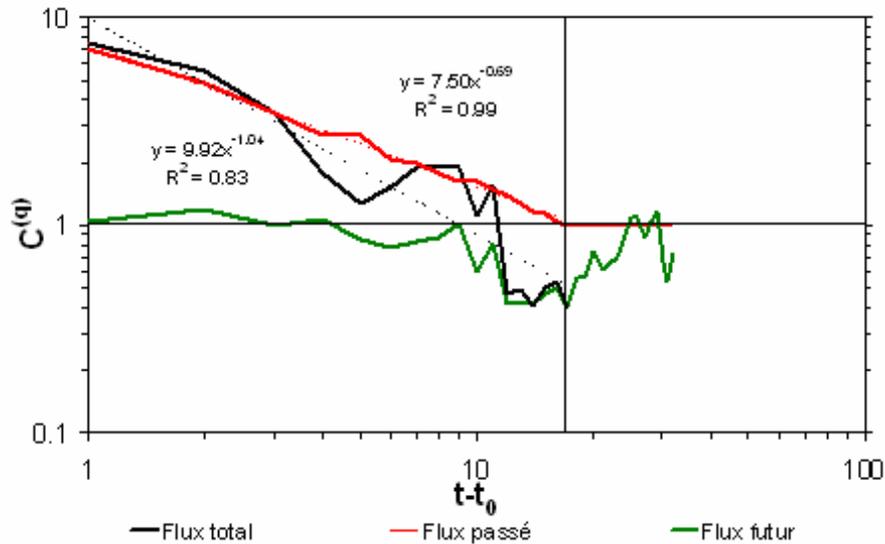
Mais aussi à diverses factorisations de moments, par exemple :

$$\langle \varepsilon^i_\lambda(\bar{x}, t)^q \rangle = \langle \tilde{\varepsilon}^i_{p,\lambda}(\bar{x}, t)^q \rangle \langle \varepsilon^i_{f,\lambda}(\bar{x}, t)^q \rangle \quad (5.18)$$

D'où :

$$C^{(q)}(\varepsilon^1_{p,\Lambda}, \varepsilon^2_{p,\Lambda}) = C^{(q)}(\tilde{\varepsilon}^1_{p,\Lambda}, \tilde{\varepsilon}^2_{p,\Lambda}), C^{(q)}(\varepsilon^1_{f,\Lambda}, \varepsilon^2_{f,\Lambda}) = 1 \quad (5.19)$$

Les exposants empiriques des corrélations des flux totaux et passés encadrent la valeur théorique :  $K(q,2)/(1-H_t) \approx 0.8$  obtenue pour  $(\alpha, C_1, H_t, q) = (1.5, 0.2, 0.25, 1.5)$ . On peut cependant remarquer que la limite de simulation est plus rapidement atteinte pour la corrélation du flux du passé (elle devient égale à l'unité pour  $t-t_0=16$ ) alors que les fluctuations des deux autres vont jusqu'au temps limite de la simulation  $t-t_0=32$  et deviennent de ce fait identiques.



**Figure 5-7.** Corrélations  $C^{(q)}$  pour  $q=1.5$  des flux des réalisations A ( $i=1$ ) et B ( $i=2$ ), respectivement celles du flux total  $\varepsilon^i_{\lambda}(\bar{x}, t)$  (courbe noir, généré par  $\gamma^i_{\lambda}(\bar{x}, t)$ ), du flux passé  $\tilde{\varepsilon}^i_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$  (courbe rouge, généré par  $\gamma^i_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$ ) et du flux futur  $\varepsilon^i_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$  (courbe verte, généré par  $\gamma^i_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$ ). En accord avec les équations (5.14, 5.15, 5.19) la corrélation des  $\varepsilon^i_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$  ne fait que fluctuer autour de l'unité, celles des  $\varepsilon^i_{\lambda}(\bar{x}, t)$  et  $\tilde{\varepsilon}^i_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$  sont similaires et décroissent suivant une loi de puissance dont l'exposant est proche de l'exposant théorique  $K(q,2)/(1-H_t) \approx 0.8$ . Les droites d'ajustement par la méthode des moindres carrés sont représentées en pointillé sur la figure.

Par ailleurs, la figure 5-8 présente la variation en loi de puissance du rapport d'échelle  $\lambda(t)$  pour  $t > t_0$ . Les valeurs empiriques obtenues des réalisations A et B à partir de l'équation (5.15) sont comparées avec les valeurs théoriques obtenues à partir de l'équation (5.14). Le coefficient de régression entre les deux courbes a été estimé égal à 0.97.

Afin de comparaison avec les résultats spectraux de Marsan et al., 1996, nous avons considéré le spectre d'énergie du flux total  $\varepsilon^i_\lambda(\bar{x}, t)$  (généré par  $\gamma^i_\lambda(\bar{x}, t)$ ), du flux passé  $\tilde{\varepsilon}^i_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$  (généré par  $\gamma^i_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$ ) et du flux  $\varepsilon^i_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$  (généré par  $\gamma^i_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$ ). La figure 5-9 présente les graphes correspondant pour chaque pas de temps (de  $t_0$  à  $t = t_0 + 17$ ). On peut voir que le flux d'énergie de décorrélation, initialement nul, augmente progressivement jusqu'à coïncider avec le flux total.

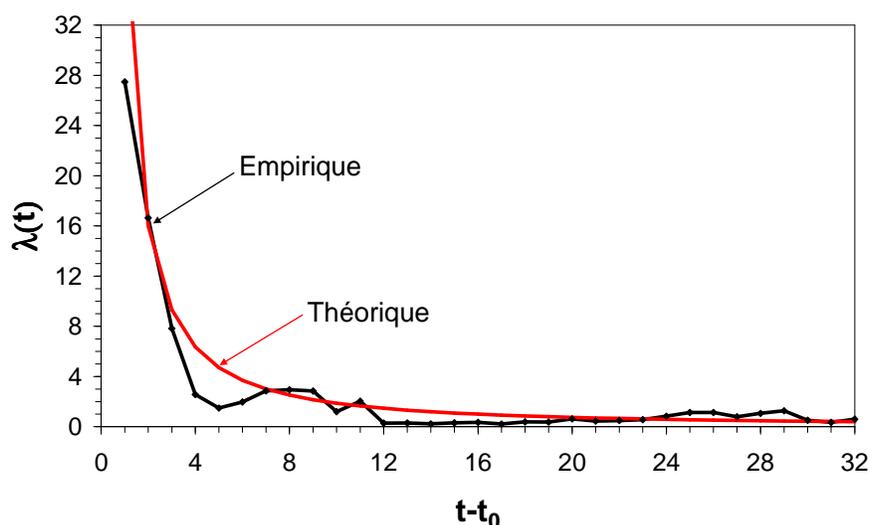


Figure 5-8. Loi du déclin du rapport d'échelle  $\lambda(t)$  jusqu'auquel les deux prévisions stochastiques (ici A et B, à partir de  $t_0$ ) reste étroitement dépendantes. La corrélation entre la courbe théorique (loi de puissance, Eq. 5.14) et empirique est de 0.97.

## 5.5 Relaxation des structures du passé

Dans cette section nous revenons sur la question d'estimer la relaxation des structures du passé. Cette question se pose d'une part en soi comme prévision déterministe (Sect. 5.3.1), et donc d'autre part comme la première étape conditionnant la prévision stochastique (Sect. 5.3.2). A l'opposé de la seconde étape, qui est particulièrement simple dans le cadre multifractal, celle-ci pose des difficultés techniques qu'il convient de discuter, tout en n'oubliant pas que les données que nous avons à traiter dans l'opérationnel sont relativement grossières. Ainsi, comme nous l'avons déjà mentionné toutes les pluies relativement faibles ( $R < 0.2$  mm/h) sont tout simplement considérées comme nulles, alors qu'elles correspondent

à une gamme de singularités qui sont par maints côtés sensibles pour les caractéristiques du sous-générateur  $\gamma_\lambda(\bar{x}, t)$  et du générateur  $\Gamma_\lambda(\bar{x}, t)$ , celles de leurs valeurs fortement négatives (cf Fig. 4-7).

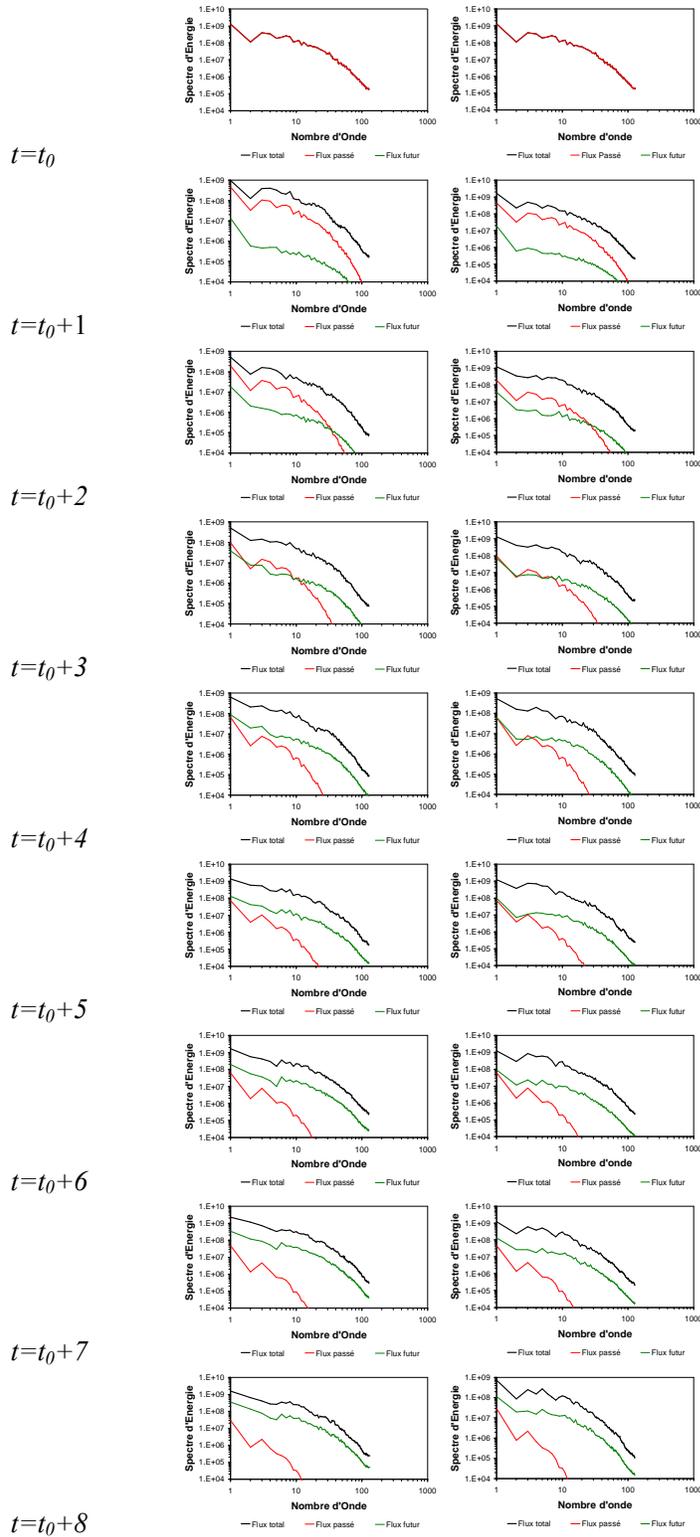


Figure 5-9. Spectres d'énergie (en unités arbitraires), respectivement ceux du flux total  $\varepsilon^i_\lambda(\bar{x}, t)$  (courbe noir, généré par  $\gamma^i_\lambda(\bar{x}, t)$ ), du flux passé  $\tilde{\varepsilon}^i_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$  (courbe rouge, généré par  $\gamma^i_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$ ) et du flux futur  $\varepsilon^i_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$  (courbe verte, généré par  $\gamma^i_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$ ) à gauche pour la réalisation A ( $i=1$ ) et à droite pour la réalisation B ( $i=2$ ). Les spectres sont considérés à partir du temps  $t=t_0$  jusqu'à  $t=t_0+17$ .

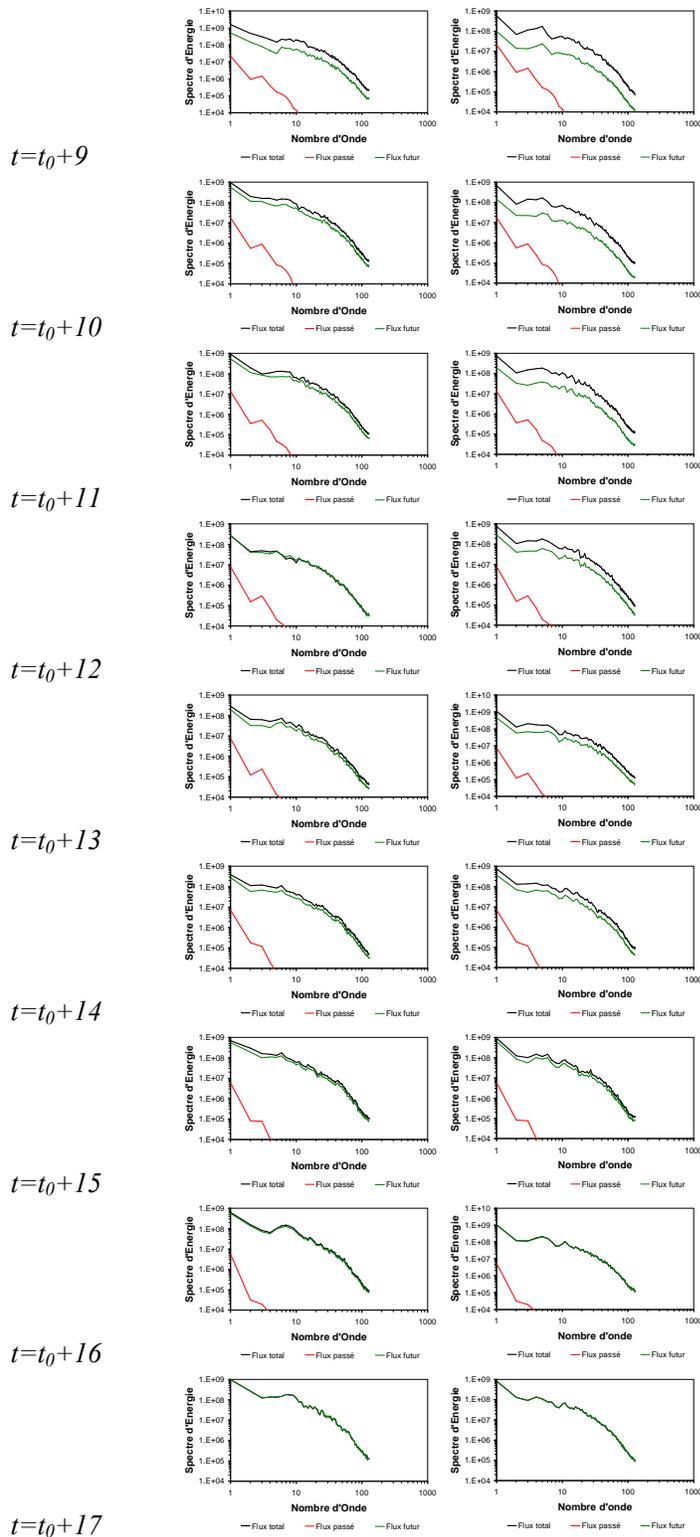


Figure 5-9 (continuation). Spectres d'énergie (en unités arbitraires) des flux total (courbe noire), flux généré par le sous-générateur passé (courbe rouge) et flux généré par le sous-générateur futur (courbe verte). A gauche les correspondants à la réalisation A et à droite les correspondants à la réalisation B.

### 5.5.1 Le cadre théorique

Nous avons déjà discuté, notamment par rapport à la figure 4-7, que la prévision déterministe, donc la relaxation des structures du passé, correspond théoriquement d'une part à inverser le processus de simulation (donc la partie droite de cette figure, pour déterminer le sous-générateur passé à partir des données du passé, puis d'effectuer une simulation à partir de sous-générateur pour prévoir (de façon déterministe) la relaxation de ces structures. D'une part, il y a le problème connu depuis Hadamard qu'une déconvolution est en général un problème mal posé, mais surtout qu'effectuer une série de déconvolution/ convolution représente un certain gâchis, source de plus d'instabilités. Il est donc nécessaire d'étudier et de réduire dans la mesure du possible cette série d'opérations inverses l'une de l'autre. Cela est particulièrement illustré par le fait que l'unité des convolutions est un  $\delta$  de Dirac. Celle-ci pose bien évidemment des problèmes numériques, alors qu'elle correspond à une transformation triviale. Nous allons donc définir et analyser la transformation du générateur passé en sa relaxation et tenter de court-circuiter l'estimation délicate du sous-générateur passé. On peut remarquer que malgré leur complexité, chacune des transformations est linéaire, il doit donc en être de même pour la transformation globale.

Pour étudier cette transformation, nous allons être obligés d'introduire quelques notations. Pour les réduire à l'essentiel, nous allons dans cette section, d'une part omettre l'indice  $\lambda$  de référence au rapport d'échelle, ce qui est loisible du fait que celui-ci sera constant, d'autre part omettre de faire figurer les variables d'espace tout comme les intégrations correspondantes. Celles-ci ne créent aucun problème, contrairement au temps qui introduit des problèmes non triviaux. Nous allons nous concentrer sur le problème du passage du sous-générateur  $\gamma(t)$  au générateur  $\Gamma(t)$  et vice-versa, mais, cela vaut bien sûr *mutadis mutandis* pour le passage du flux (conservatif)  $\varepsilon(t)$  au champ (non conservatif)  $\rho(t)$ , qui se correspondent aussi par une convolution de même type.

Nous considérons donc le noyau causal  $g_c$  ( $H$  désignant la fonction d'Heaviside)

$$g_c(\tau) = g(\tau)H(\tau) \quad (5.20)$$

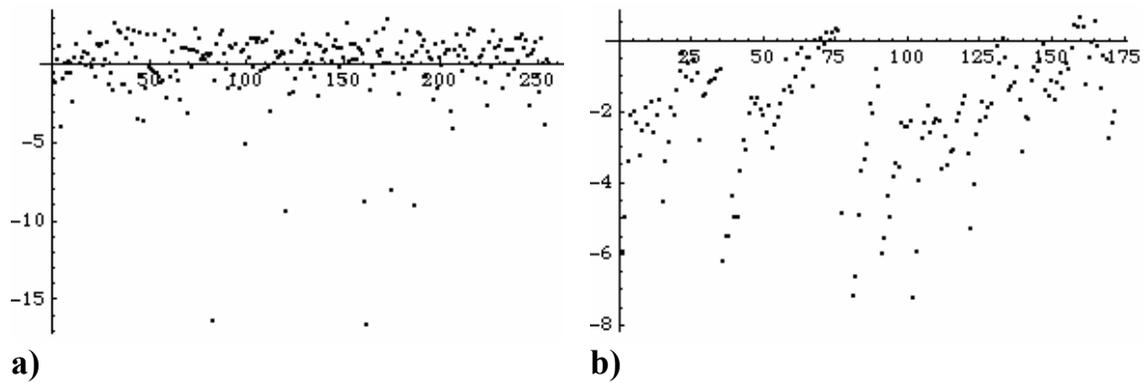


Figure 5-10. Exemples (a) de sous-générateur et (b) générateur pour  $\alpha=1.5$

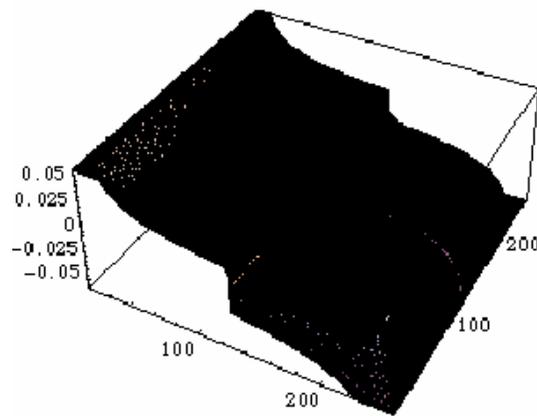


Figure 5-11. Transformée de Fourier  $\hat{G}(\omega, \omega_0)$  de la fonction de transfert transformant le générateur passé  $\Gamma_p$  en sa relaxation  $\tilde{\Gamma}_p$

Définissant la transformation de  $\gamma(t)$  en  $\Gamma(t)$  :

$$\Gamma(t) = \int dt' g_c(t-t') \gamma(t') = \int_{-\infty}^t dt' g(t-t') \gamma(t') \quad (5.21)$$

De façon réciproque nous avons:

$$\gamma(t) = \int dt' g_c^{-*}(t-t') \Gamma(t') = \int_{-\infty}^t dt' g^{-*}(t-t') \Gamma(t') \quad (5.22)$$

où  $g_c^{-*}$  est le noyau inverse de  $g_c$  et est aussi causal:

$$g_c^{-*}(\tau) = g^{-*}(\tau)H(\tau) \quad (5.23)$$

et donc satisfait par définition (où  $\delta$  désigne la fonction de Dirac):

$$\delta(t-t'') = \int dt' g_c(t-t') g_c^{-*}(t'-t'') = \int_{t''}^t dt' g(t-t') g^{-*}(t'-t'') \quad (5.24)$$

où, sans perte de généralité, nous pouvons prendre  $t'' = 0$ .

Il est important de noter que la symétrie des notations entre  $g_c$  et  $g_c^{-*}$  ne doit pas masquer qu'en général si  $g_c$  est fortement régulière (une loi de puissance dans notre cas), cela sera d'autant moins le cas pour  $g_c^{-*}$  : celle-ci peut contenir des singularités, tels que des  $\delta$ , correspondant à des dérivations (entières ou non).

Pour un temps présent donné  $t_0$ , le sous-générateur passé  $\gamma_p(t|t_0)$ , dont nous explicitons dans cette section la dépendance par rapport à  $t_0$ , est la restriction au passé  $[-\infty, t_0]$  du sous-générateur:

$$\gamma_p(t|t_0) = H(t_0 - t)\gamma(t) \quad (5.25)$$

A l'aide de Eq. 5.21, le sous-générateur passé définit le "générateur de relaxation du passé"  $\tilde{\Gamma}_p(\cdot|t_0)$  qui transmet vers le futur l'information du passé:

$$\tilde{\Gamma}_p(t|t_0) = \int dt' g_c(t-t')\gamma_p(t'|t_0) = \int_{-\infty}^{t \wedge t_0} dt' g(t-t')\gamma_p(t'|t_0) \quad (5.26)$$

mais dans la pratique nous n'avons qu'accès « générateur du passé »  $\Gamma_p(\cdot|t_0)$ , qui est restreint au passé  $[-\infty, t_0]$ :

$$\Gamma_p(t|t_0) = H(t_0 - t)\tilde{\Gamma}_p(t|t_0) = H(t_0 - t) \int_{-\infty}^t dt' g(t-t')\gamma_p(t'|t_0) \quad (5.27)$$

Nous avons évidemment:

$$t \leq t_0 : \tilde{\Gamma}_p(t|t_0) \equiv \Gamma_p(t|t_0) = \Gamma(t) \quad (5.28)$$

alors que nous sommes assurément intéressé par le cas opposé  $\tilde{\Gamma}_p(t|t_0)$  pour  $t > t_0$  et que nous voulons le déduire de  $\Gamma_p$ . Pour cela, les équations (5.22) et (5.25) conduisent à l'aide de les équations (5.28) (le causalité de  $g_c^{-*}$  implique  $t' < t_0$ ):

$$\gamma_p(t|t_0) = H(t_0 - t) \int dt' g_c^{-*}(t - t') \Gamma(t') \quad (5.29)$$

et comme la causalité de  $g_c^{-*}$  implique  $t' < t_0$  à l'aide de l'équation (5.28) nous obtenons:

$$\gamma_p(t|t_0) = H(t_0 - t) \int dt' g_c^{-*}(t - t') \Gamma_p(t'|t_0) \quad (5.30)$$

ce qui avec l'aide de l'équation (5.26) conduit à:

$$\tilde{\Gamma}_p(t|t_0) = \iint dt' dt'' g_c(t - t') H(t_0 - t') g_c^{-*}(t' - t'') \Gamma_p(t''|t_0) \quad (5.31)$$

Ce qui confirme déjà l'existence de la transformation du sous-générateur passé  $\Gamma_p$  en sa relaxation  $\hat{\Gamma}_p$  et qu'elle est linéaire. Elle peut être définie à l'aide de la fonction de transfert suivante :

$$G(T, T_0) = \int dT' g_c(T - T') H(T_0 - T') g_c^{-*}(T') \quad (5.32)$$

avec  $T = t - t''$ ,  $T' = t' - t''$ ,  $T_0 = t_0 - t''$ . Cela correspond à:

$$G(t - t'', t_0 - t'') = \int dt' g_c(t - t') H(t_0 - t') g_c^{-*}(t' - t'') \quad (5.33)$$

$$\tilde{\Gamma}_p(t|t_0) = \int dt'' G(t - t'', t_0 - t'') \Gamma_p(t''|t_0) \quad (5.34)$$

et nous savons déjà quelle se réduit à l'identité (équation (5.28)) pour  $t \leq t_0$ , soit :

$$H(T_0 - T)G(T, T_0) = \delta(T) \quad (5.35)$$

On peut remarquer que le noyau  $G$  est définie par une sorte de double convolution portant sur  $t''$ . Cette structure est plus évidente lorsque l'on considère sa transformée de Fourier (désignée par un accent circonflexe):

$$\hat{G}(\omega, \omega_0) = \iint d\omega d\omega_0 e^{i(\omega T + \omega_0 T_0)} G(T, T_0) \quad (5.36)$$

$$\hat{G}(\omega, \omega_0) = \hat{g}_c(\omega) \hat{H}(\omega_0) \int dT' g_c^{-*}(T') e^{i(\omega + \omega_0) T'} = \hat{g}_c(\omega) \hat{H}(\omega_0) / \hat{g}_c(\omega + \omega_0) \quad (5.37)$$

où l'on a utilisé le fait que :

$$\hat{g}^{-*} = \hat{g}^{-1} \quad (5.38)$$

et le fait que la transformation d'une transformation se traduit par un changement de phase:

$$\hat{f}(\cdot - a) = \hat{f} e^{ia\omega} \quad (5.39)$$

Du fait que :

$$H(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{Sign}(t)) \quad (5.40)$$

on a :

$$\hat{H}(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{i}{\omega} \quad (5.41)$$

soit donc finalement :

$$\hat{G}(\omega, \omega_0) = \pi\delta(\omega_0) + \frac{i}{\omega_0} \hat{g}_c(\omega) / \hat{g}_c(\omega + \omega_0) \quad (5.42)$$

qui est relativement simple et est illustrée en figure 5.11 pour une loi de puissance :

$$g_c(\tau) = \frac{H(\tau)}{\Gamma(H)} \tau^{-1+H} \quad (5.43)$$

Mais la dépendance par rapport à  $t_0$  de  $\gamma_p(t|t_0)$  introduit une convolution dans l'espace de Fourier si l'on veut exprimer  $\hat{\Gamma}_p(\omega|\omega_0)$  par rapport à  $\hat{\Gamma}_p(\omega|\omega_0)$  par le biais de  $\hat{G}(\omega, \omega_0)$ , et non un simple produit  $\hat{G}\hat{\Gamma}_p$ , comme pour une convolution simple (dans l'espace physique).

### 5.5.2 Une approximation opérationnelle

Si les équations (5.33), (5.34) et (5.42) présentent un intérêt manifeste pour une représentation synthétique et un contrôle de la série de convolutions/déconvolutions (par exemple, et c'est fondamental, préserver le signe d'une quantité tel que le champ  $\varepsilon$  dont on prend le logarithme), elles ne sont pas encore directement exploitables numériquement. Nous n'avons en effet pas trouvé de programme de convolutions numériques rapides et relativement universels (c'est-à-dire relativement indépendantes de la forme de  $g_c$ ) et nous avons vu d'autre part que la transformation de Fourier ne résout pas directement le problème.

Il nous faut aussi préciser les critiques que nous avons adressées à la série de convolutions/déconvolutions par traitement en « force brute » numérique : celle-ci fonctionne plutôt bien en mode simulation (comme en témoigne d'ailleurs la figure 4-7. Ainsi, les erreurs d'arrondi n'introduisent que quelques petites valeurs négatives pour le champ  $\varepsilon$ , qui d'une part décroissent sensiblement avec une précision accrue du mode de calcul (ex. passage en double précision pour le Fortran, précision élevée pour Mathematica) et qui d'autre part transformées en valeurs positives ne créent que des imprécisions relatives pour le générateur par le passage au logarithme.

Il est en tout autrement dès que l'on travaille sur des données : la force brute ne passe plus! C'est la raison principale pour laquelle nous avons analysé ce problème. Cela semble principalement du fait que les problèmes de dynamiques des capteurs, comme la discrétisation des données font qu'elles ne sont pas directement assimilables par le modèle, pourtant défini

par certaines de leurs caractéristiques essentielles que nous avons effectivement analysées dans les sections précédentes. Ce problème est suffisamment général en géophysique, pour qu'il ne nous surprenne pas.

En l'absence de technique d'assimilation pour des données aussi variables et discontinues que les précipitations, nous avons finalement opté pour la technique opérationnelle suivante (Macor et al., 2007b, préparé pour NHESS) :

- ne pas déconvoluer le champ (non conservatif) en son flux (conservatif) mais estimer directement par passage au logarithme le générateur du champ, ceci permet d'éviter tout problème de signe.
- appliquer au contraire la force brute numérique à ce générateur sans se faire aucune illusion sur les extrêmes du sous-générateur ainsi estimé : son comportement relativement moyen couvre largement la plage des intensités effectivement mesurées.

Les figures suivantes donnent un aperçu des résultats qui peuvent ainsi être obtenus sur l'événement de Nîmes. La Figure 5-12 donne l'exemple de trois prévisions stochastiques A, B et C, conditionnées par la relaxation des structures observées dans le passé en comparaison avec l'évolution effectivement observée. On remarquera que malgré la rudesse de l'approximation que nous avons utilisé, le conditionnement par le passé semble relativement efficace, c'est-à-dire conforme aux observations. On peut aussi remarquer que les prévisions stochastiques donnent une plus grande richesse de petites structures : cela est probablement dû aux limites induites par la quantification des données radars, alors que les simulations n'ont pas ce problème.

La Figure 5-13, qui est à comparer avec 5-8 donne l'évolution temporelle du rapport d'échelle semi-empirique  $\lambda(t)$  jusqu'auquel les prévisions A, B et C restent fortement dépendantes. Elles sont toutes trois fortement similaires avec la courbe théorique (en gras), du moins pendant la majeure partie de la prévision. Le relatif excès vers la fin de la période de prévision de  $\lambda(t)$  pourrait être dû à des limites du processus de calcul, mais il conviendrait de l'analyser en détail.

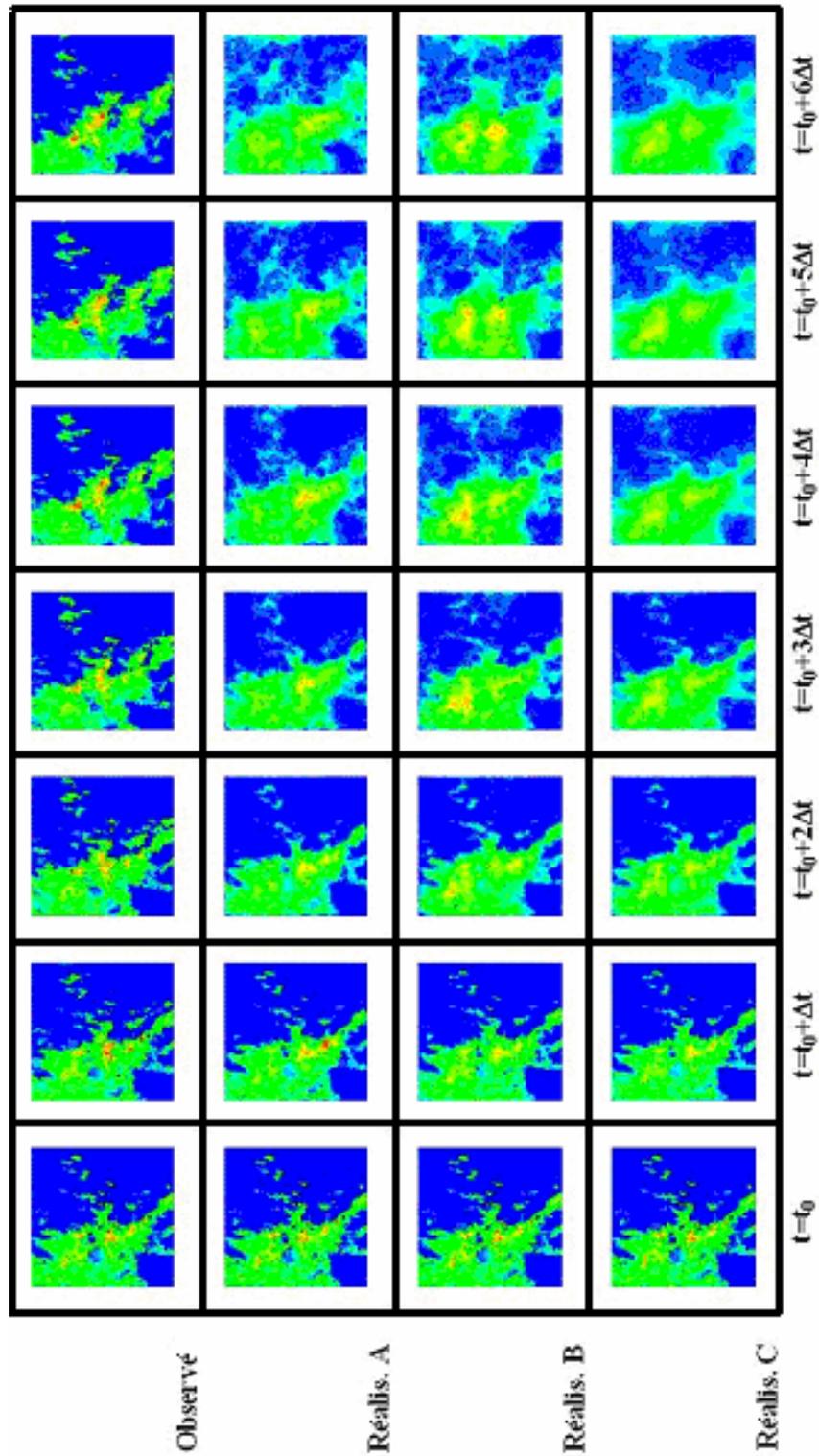


Figure 5-12. En comparaison avec les observations (ligne du haut), exemple de trois prévisions stochastiques A, B et C, conditionnées par la relaxation des structures observées dans le passé. La palette des couleurs est logarithmique et couvre la gamme 0.1 – 500 mm. La résolution des images est  $\lambda=256$ .

La Figure 5-14 illustre l'évolution temporelle de la moyenne spatiale des précipitations observées et des prévisions A, B et C. Cette moyenne est effectivement préservée par les prévisions, alors que la contrainte de la simulation ne porte que sur les moyennes d'ensemble. La Figure 5-15 illustre l'évolution spatiale de la moyenne temporelle des observations et des prévisions A, B et C. On observe que dans les limites de prédictibilité les structures spatiales de la pluie sont acceptablement préservées.

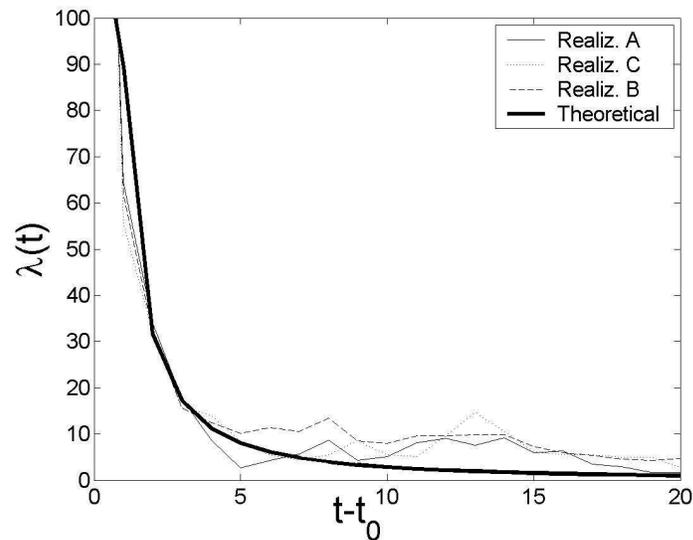


Figure 5-13. Evolution temporelle du rapport d'échelle jusqu'auquel les prévisions sont valables.

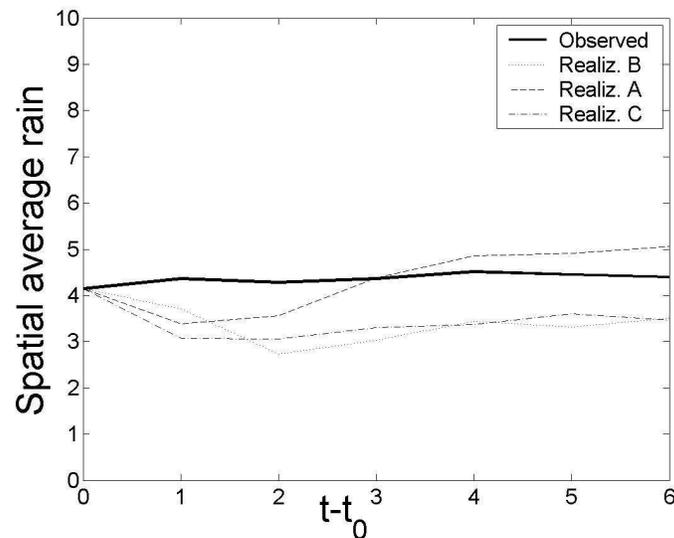


Figure 5-14. Évolution temporelle de la moyenne spatiale des précipitations observées (courbe en gras) et des prévisions A, B et C.

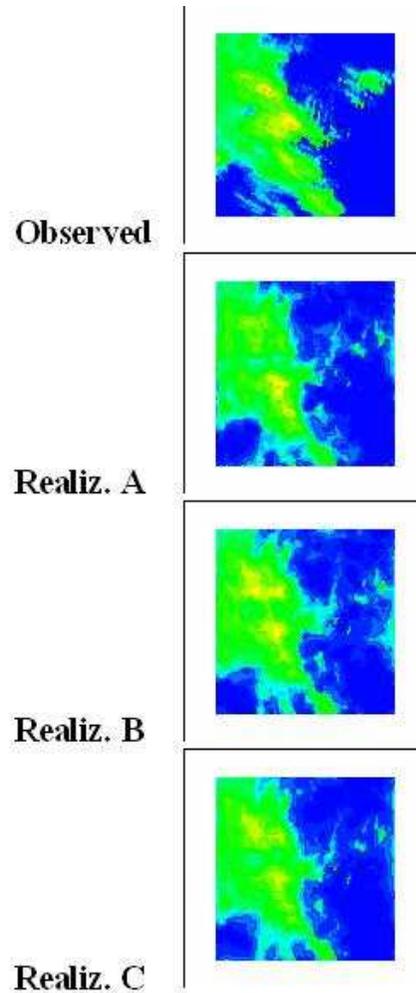


Figure 5-15. Évolution spatiale des observations (image en haut) et des trois prévisions stochastiques A, B et C. La palette des couleurs est logarithmique et couvre la gamme 0.1 – 500 mm/h. La résolution des images est  $\lambda=256$ .

### 5.5.3 Une perspective de prévision probabiliste

Comme nos prévisions sont basées sur un processus stochastique bien défini, nous avons de fait la possibilité d’atteindre une information beaucoup plus riche et plus globale, mais certes moins graphiquement spectaculaire que la présentation d’une série de prévisions stochastiques indépendantes (du moins pour leur générateur futur). Il s’agit d’évaluer l’évolution spatio-temporelle de la probabilité du processus, par exemple l’évolution temporelle de la distribution spatiale de la probabilité d’excéder un seuil donné ou d’un quantile donné. Le cadre multifractal est particulièrement simple pour les flux conservatifs. En effet, au niveau théorique l’évolution de ceux-ci est déterminée par une équation de type

diffusion fractionnaire à laquelle on sait de façon relativement générale associer une équation de Fokker-Planck fractionnaire (Chechkin et al., 1995; Benson et al., 2000; Yanosvsky et al., 2000; Schertzer, et al., 2001). Au niveau pratique cela correspond à l'addition indépendante des sous-générateurs passés et futurs pour constituer le sous-générateur total, et donc pour les singularités  $\tilde{\gamma}_p, \gamma_f, \gamma$  correspondant respectivement à la relaxation <sup>2</sup>du flux passé, au flux futur et au flux total. La singularité  $\tilde{\gamma}_p$  étant supposée déterminée à l'aide des données du passé, la codimension de la probabilité d'excéder  $\gamma$  (équation 2.12) est alors déterminée uniquement par celle de la singularité du futur :

$$c(\gamma - \tilde{\gamma}_p) = c(\gamma_f) \quad (5.44)$$

#### 5.5.4 Conclusion

Dans ce dernier paragraphe nous avons discuté de manière critique les notions sur la prédictibilité qui ont émergé de l'étude des systèmes complexes dans le temps. On a aussi argué que la complexité dans l'espace implique des limitations fortes sur l'applicabilité des modèles de coupure statistique ou des modèles d'exposant généralisé de Lyapunov. La phénoménologie de la turbulence homogène indique que la loi de perte de prédictibilité n'est pas exponentielle: elle est algébrique. Malheureusement, le schéma quasi-normal de ces modèles ne les permet pas de traiter l'intermittence. Dans cette thèse nous montrons que les multifractals offrent un cadre plus convenable pour quantifier la prédictibilité des systèmes complexes dans l'espace-temps. Ceci devrait nous aider à trouver des stratégies alternatives de modélisation en approchant les limites intrinsèques de prédictibilité.

## 6 Conclusions et perspectives

Dans cette thèse nous avons discuté à la fois théoriquement et pratiquement comment les caractéristiques multiéchelles en espace et en temps des champs de pluie, et donc celles des données correspondantes (radar et satellite) pouvaient être utilisées pour définir de nouvelles techniques de prévision de pluie à très court terme. L'approche que nous avons commencé à explorer est basée physiquement sur la hiérarchie spatio-temporelle des structures atmosphériques, et permet effectivement d'utiliser aisément des bases de données télédéteectées (radar/satellite) du fait que celles-ci ont la propriété, à l'image des processus atmosphériques, d'avoir des lois d'échelle. Du fait que nous prenons appui sur ces lois d'échelles pour développer notre méthodologie, celle-ci peut être appliquée à une grande diversité de base de données. Ainsi, il convient d'insister que si nous avons pris pour différentes raisons comme exemple pédagogique et de test le cas d'une chronologie d'un seul radar (celui de Nîmes pour l'événement des 8-9 septembre 2002), nous avons bien en vue l'application à des mosaïques radar (figure 6-1), ou des images satellitaires.

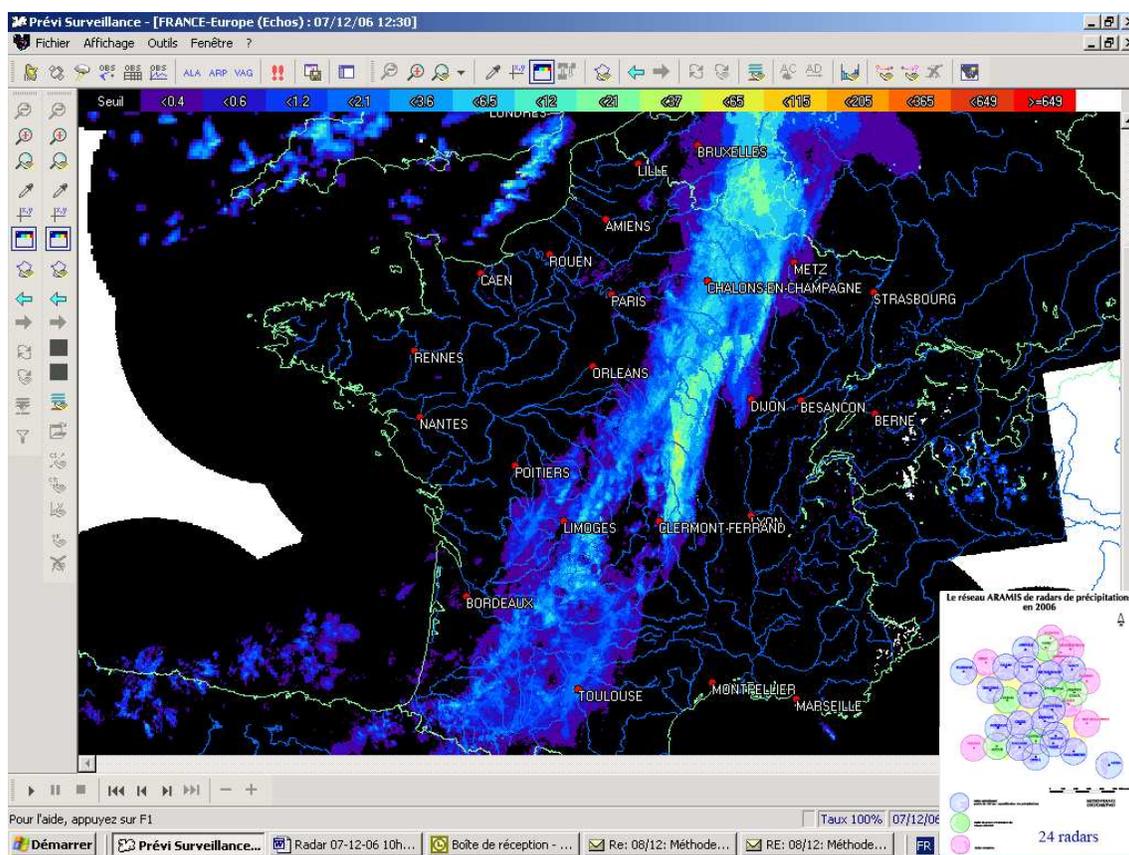


Figure 6-1. Exemple de mosaïque d'images radar produite par Météo-France (courtoisie Ph. Ladoy)

Nous avons commencé cette thèse en rappelant dans le chapitre 2 les notions de fractals et multifractals et leur évolution avec quelques exemples illustratifs à l'aide de la chronologie de pluie journalière à Laboulaye, Argentine. Nous avons comparé ces exemples avec les résultats antérieurement obtenus par des analyses similaires effectuées par De Lima (1998) sur des séries de pluies de différents pays européens, en constatant le caractère multifractal universel de la pluie. Ensuite, nous avons présenté les idées relatives aux principes des cascades d'énergie qui caractérisent les modèles multifractals, leurs premières propriétés et le moyen de les caractériser par la fonction codimension  $c(\gamma)$  et d'échelle des moments statistiques  $K(q)$ .

Dans le chapitre 3 nous avons présenté les méthodes d'analyse multifractale, avec en particulier le développement de programmes pour leur application à des données en 1+2D. Nous avons effectué une application de ces outils d'analyse aux données du radar de Nîmes pour l'événement des 8-9 septembre 2002.

Dans le chapitre 4 nous avons présenté la construction et la simulation de cascades multifractales avec les notions clef permettant de développer des programmes spécifiques de simulation numérique : sous-générateur (bruit blanc de Lévy pour les multifractals universels), générateurs et flux (conservatifs) correspondants, et enfin comment en déduire des champs non conservatifs en 1+2D en vue de la prévision. Nous avons analysé d'anciens éléments de programmation et nous avons établi de nouveaux programmes dont la validation a été testée de façon approfondie. Nous avons ainsi pu corriger quelques erreurs ou incertitudes des procédures anciennes de simulations, notamment pour les valeurs de  $\alpha \leq 1$ .

Nos programmes, qui utilisent des transformées de Fourier rapides pour les convolutions, ont pris en compte le fait qu'il faut introduire pour une résolution finie (ce qui est toujours le cas dans les simulations numériques), une coupure correspondante à loi (théorique) en loi de puissance du noyau de convolution pour éviter des divergences à des échelles numériques inférieures à cette résolution. Concrètement, cela permet de déterminer de façon simple la composante de nombre d'onde zéro de la transformée de Fourier du noyau de convolution, donc de résoudre un problème qui avait été souvent cité.

Pour des fins de validation, nous avons aussi développé des algorithmes effectuant les convolution dans l'espace physique pour comparer leurs résultats avec ceux antérieurement rédigés en Mathematica, qui permet des convolutions en physique assez rapides.

Nous avons analysé aussi le processus de simulation inverse, qui permet, au moins au niveau théorique, d'explorer la mémoire du passé afin d'effectuer des prévisions en les conditionnant par rapport à ce passé. Malheureusement, nous avons trouvé que cette inversion par une série de déconvolutions introduit de fortes instabilités qui empêchent par exemple de préserver la positivité du champ.

Dans le chapitre 5 nous avons abordé la prévision multifractale sur deux axes fondamentaux : prévision déterministe et prévision stochastique. Dans le premier cas, explorée par (Marsan et al., 1996), la prévision prend seulement en compte la mémoire du processus observé et cherche à déterminer dans le futur la relaxation des structures observées dans le passé sans introduire d'autre information. Elle avait été jugée optimale tenant compte de ce dernier point, mais nous insistons sur le fait qu'elle a l'inconvénient de dégrader la complexité du champ, et que pour maintenir celle-ci il est indispensable d'introduire de nouvelles structures. Ceci correspond à la prévision stochastique qui est obtenue en prolongeant le sous-générateur dans le futur, à partir des caractéristiques multifractales compatibles avec le passé. Contrairement à la méthode déterministe, la méthode stochastique permet une infinité de prévisions possibles et de mieux détecter les possibles perturbations ou structures de précipitation à petites échelles, très intenses et intermittentes, typiques des structures convectives.

Ces éléments nous permettent alors d'analyser et quantifier de façon simple la prédictibilité des champs multifractals, analyser les flux qui progressivement introduisent des divergences entre deux champs étant initialement identiques.

Ayant analysé les limites intrinsèques de prévision, nous pouvons aborder concrètement les méthodes de prévision. Autant la définition et l'intégration du sous-générateur futur est particulièrement aisée dans le cadre multifractal, celle de la relaxation du générateur passé pose quelques problèmes techniques qui n'avaient pas été assez pris en compte dans les études antérieures. Nous les avons discuté en détail tant au point de vue théorique que pratique. A fin de réduire dans la mesure de possible les opérations inverses et

aussi la source d'instabilités qu'elles introduisent nous avons analysé la transformation directe du générateur passé en sa relaxation et chercher à court-circuiter l'estimation du sous-générateur passé. Malheureusement cette méthodologie requiert une mise en œuvre très soignée du schéma numérique avant d'être testé. Tenant compte de ces difficultés, nous avons donc développé une approximation opérationnelle que nous avons testée sur l'événement de Nîmes.

En conclusion je pense que le sujet de cette thèse a présenté l'intérêt d'avoir un but fortement appliqué tout en se basant sur des développements numériques et des problèmes fondamentaux. Les méthodologies de simulation et prévision de pluie proposées dans cette thèse peuvent être considérées comme une alternative aux méthodes traditionnelles de prévision (modèles de type météorologique ou traitement statistique des images radar) et elles peuvent être intégrées aux modèles hydrologiques distribués pour ainsi contribuer à améliorer les prévisions des débits rivière, alertes de crues éclair, gestion des réseaux du assainissement, gestion de barrages, etc.

Il reste encore à résoudre quelques problèmes numériques, et de tester ces techniques sur d'autres données radar ou satellite. Toutefois, il y a un vaste champ de développements applicatifs en perspective, tout en ne négligeant pas la nécessité de pousser plus loin la réflexion sur les problèmes théoriques et pratiques que nous avons rencontrés.

## 7 Annexes

### **Annexe A: Théorème de limite centrale généralisée et variables de Lévy**

Les variables gaussiennes sont obtenues en appliquant le théorème de limite centrale. Ce théorème assume que la variance des variables stables, sous addition, est finie. Les variables aléatoires de Lévy, qui sont stables par addition (Feller, 1971), sont une généralisation des variables gaussiennes et elles ont variance infinie. Dans cette annexe on verra quelques caractéristiques des variables stables de Lévy. Pour une discussion plus détaillée voir par exemple Schertzer et Lovejoy, 1989b, Schertzer et Lovejoy, 1993, Wilson et al., 1991.

Pour un ensemble  $n$  variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.)  $X_i \stackrel{d}{=} X_1$ , avec  $i=1,2,\dots,n$ , sont points stables sous une somme re-normalisée si pour tout entier  $n \geq 2$ , il existe un  $b_n$  positif et un  $a_n$  réel tel que:

$$\sum_{i=1}^n X_i \stackrel{d}{=} b_n X_1 + a_n \quad (\text{A.1})$$

où  $\stackrel{d}{=}$  signifie égalité en distributions de probabilité. Le cas gaussien, avec variance finie, correspond à:

$$\langle X_1^2 \rangle \leq \infty \rightarrow b_n = n^{1/2}, a_n = (n-1)\langle X_1 \rangle \quad (\text{A.2})$$

où le symbole  $\langle \cdot \rangle$  indique la moyenne de l'ensemble.

La limite  $n \rightarrow \infty$  de la somme re-normalisée dans l'équation (A.3) correspond au théorème de limite centrale "classique":

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \sum_{i=1}^n X_i \right) - a_n}{b_n} \quad (\text{A.3})$$

Cette limite converge à une variable gaussienne  $X$ , même si les variables  $X_i$  ne sont pas gaussiennes, mais sont de variance finie, c'est-à-dire:

$$\langle X^2 \rangle = \langle X_i^2 \rangle \leq \infty \rightarrow b_n = n^{1/2}, a_n = n\langle x_i \rangle - \langle X \rangle \quad (\text{A.4})$$

Donc, la loi gaussienne est attractive. La variable  $X$  est complètement indépendante des détails de la distribution de  $X_i$ . Lévy (1954) a généralisé le cas gaussien en relaxant l'hypothèse de variance finie par les variables  $X_i$  (ce qui implique que chaque moment statistique pour la limite est fini). Lévy a introduit un ordre de divergence,  $\alpha$ , pour les moments des variables aléatoires  $X_i$  qui satisfait l'équation (A.1) ou (A.3):

$$\begin{aligned} \langle |X_i|^q \rangle < \infty & \quad \text{pour } q < \alpha \\ \langle |X_i|^q \rangle = \infty & \quad \text{pour } q \geq \alpha \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

avec

$$b_n = n^{1/\alpha} \quad (\text{pour } \alpha > 1, a_n = n\langle X_i \rangle - \langle X \rangle) \quad (\text{A.6})$$

L'ordre de divergence pour les moments,  $\alpha$ , est appelé index de Lévy ( $0 < \alpha < 2$ ). Les variables  $X_i$  sont appelées variables hyperboliques dues à la chute algébrique de leurs queues de distribution de probabilité. Donc, les variables Lévy sont les points stables et fixés des sommes re-normalisées de variables hyperboliques indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). Le cas gaussien apparaît comme le cas régulier, pour lequel la divergence des moments est supprimée.

Les distributions de probabilité des variables de Lévy stables ne sont pas exprimables sous une forme fermée avec des fonctions élémentaires, avec les exceptions  $\alpha=2, 1, 0.5$ . Cependant, la seconde fonction caractéristique peut être donnée sous une forme fermée due aux propriétés de stabilité. La fonction  $K(q)$  est le logarithme de la première fonction caractéristique  $Z(q)$ , qui est la transformée de la distribution de probabilité  $dP(X)$ :

$$e^{K(q)} = Z(q) = \langle e^{qX} \rangle = \int e^{qX} dP(X) \quad (\text{A.7})$$

où  $q$  est réel.

La propriété fondamentale du point fixé (équation (A.1)) est transposée facilement aux fonctions caractéristiques: les variables  $X_i \stackrel{d}{=} X_1$ , avec  $i=1,2,\dots,n$ , de la seconde fonction caractéristique  $K(q)$  sont points stables sous une somme re-normalisée si pour tout entier  $n \geq 2$ , il existe un  $b_n$  positif et un  $a_n$  réel tel que:

$$n K(q) = K(b_n q) + a_n q \quad (\text{A.8})$$

La limite correspond à:

$$K(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ K_i \left( \frac{q}{b_n} \right) - \frac{a_n q}{n b_n} \right] \quad (\text{A.9})$$

où  $K_i$  est la seconde fonction caractéristique des variables  $X_i$  et  $K$  est la seconde fonction caractéristique de  $X$ . Ces fonctions caractéristiques, jusqu'au terme de recentrage, devraient être des lois de puissances avec l'exposant  $\alpha$  limité à 2, et doivent être positives pour éviter la divergence à  $q=0$ . Ainsi, on obtient:

$$K(q) = \lambda_\alpha q^\alpha \quad (\text{A.10})$$

où  $\lambda_\alpha$  est une constante analogue à la variance déterminant l'amplitude des variables aléatoires. La condition  $\alpha=2$  correspond au cas gaussien régulier; si  $\alpha > 2$  alors  $\langle X_i^2 \rangle < \infty$  et on obtient une limite gaussienne.

L'estimation d'un moment du  $q^{\text{ème}}$  ordre d'une variable aléatoire  $x$ , en utilisant la méthode standard (Schertzer et Lovejoy, 1993) donne:

$$\mu_q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^q \quad (\text{A.11})$$

Etant  $\langle x^q \rangle$  la moyenne estimée de l'ensemble en utilisant  $n$  observations empiriques indépendantes. La convergence  $n \rightarrow \infty$ ,  $\mu_q \rightarrow \langle x^q \rangle$  est assurée par la loi de nombres grands; il est seulement vrai quand  $\langle x^q \rangle < \infty$ . Cependant, si la variable  $x$  est hyperbolique avec exposant  $q_D$ , alors la variable  $x^q$  est hyperbolique avec exposant  $q_D/q$ . Le théorème de limite central généralisé (pour  $q > q_D$ ) mène à:

$$\sum_{i=1}^n x_i^q \rightarrow \approx L_\alpha n^{1/\alpha} \quad (\text{A.12})$$

où  $\alpha \approx q_D/q$  (ainsi, est  $\alpha > 1$ ) et  $L_\alpha$  est une variable aléatoire de Lévy (d'index  $\alpha$ ). Donc,

$$\mu_q \approx L_\alpha n^{\frac{1}{\alpha}-1} \quad (\text{A.13})$$

Le  $q^{\text{ème}}$  moment estimé est fini pour  $n$  fini, mais divergera avec la taille de l'échantillon. La variable  $L_\alpha$  est hyperbolique avec exposant  $\alpha$  (puisque  $\alpha < 1$ , donc  $\langle L_\alpha \rangle = \infty$ ). Pour  $n$  fixe, il y aura de grandes fluctuations parmi différentes estimations expérimentales ( $\mu_q$ ) et on s'attend que chaque échantillon de  $n$  valeurs ait quelques valeurs extrêmes qui domineront l'estimation de  $\mu_q$ .

## **Annexe B: Transformée de Fourier et théorème de convolution**

Les techniques de Fourier sont largement utilisées en programmation numérique depuis l'introduction des transformées de Fourier rapides (FFT). Cependant leur pénétration dans le domaine de l'hydrologie est encore relativement limitée, ce qui explique la présence de cette annexe.

### **Transformée de Fourier**

Pour un certain nombre de problèmes informatique, la transformée de Fourier ( $\mathcal{F}$ ) est un outil informatique efficient pour accomplir certaines manipulations communes des données. Pour d'autres types de problèmes, la transformée de Fourier (ou le spectre d'énergie en rapport) a en elle-même un intérêt intrinsèque. Dans tous les cas ils partagent une méthodologie commune.

Un processus physique peut être décrit dans le domaine de l'espace physique par les valeurs d'une certaine quantité  $f$  comme une fonction de l'espace  $x$ , par exemple  $f(x)$ , ou bien dans le domaine de la fréquence, où le processus est indiqué en donnant son amplitude  $F$  (généralement un nombre complexe indiquant la phase aussi) in fonction de la fréquence  $k$ , qui est  $F(k)$ , avec  $-\infty < k < \infty$ . Pour beaucoup d'objectifs il est utile penser que  $f(x)$  et  $F(k)$  sont deux représentations différentes de la même fonction. On peut y aller d'une représentation à l'autre à travers les équations de la transformée de Fourier:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i k x} dx \quad (\text{B.1})$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-2\pi i k x} dk \quad (\text{B.2})$$

On peut noter que quelques auteurs (particulièrement physiciens et mathématiciens) préfèrent écrire la transformation en termes de fréquence angulaire  $\omega \equiv 2\pi k$  au lieu de la

fréquence d'oscillation. Les équations (B.1) et (B.2) peuvent être exprimées d'une autre façon:

$$F(k)=\mathcal{F}(f(x)) \quad (\text{B.3})$$

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}(F(k)) \quad (\text{B.4})$$

La transformée de Fourier est linéaire, puisque si  $f(x)$  et  $g(x)$  ont transformée de Fourier  $F(k)$ ,  $G(k)$ , alors:

$$\mathcal{F}\{a f(x) + b g(x)\} = \mathcal{F}\{a f(x)\} + \mathcal{F}\{b g(x)\} = a \mathcal{F}\{f(x)\} + b \mathcal{F}\{g(x)\} = a F(k) + b G(k) \quad (\text{B.5})$$

Où  $a$  et  $b$  sont de coefficients réels. En outre, la transformée de Fourier est symétrique, puisque  $F(k)=\mathcal{F}\{f(x)\}$  implique  $F(-k)=\mathcal{F}\{f(-x)\}$

## Transformée de Fourier en deux ou plus dimensions

Soit une fonction complexe  $f(x_1, x_2)$  définie sur une grille de deux dimensions, on peut définir sa transformée de Fourier bidimensionnel comme une fonction complexe  $F(k_1, k_2)$ , définie sur la même grille,

$$F(k_1, k_2) = \sum_{x_2=0}^{N_2-1} \sum_{x_1=0}^{N_1-1} f(x_1, x_2) e^{2\pi i k_2 x_2 / N_2} e^{2\pi i k_1 x_1 / N_1} \quad (\text{B.6})$$

En tirant l'exponentiel de sous-index 2 dehors la somme sur  $x_1$ , ou en reversant l'ordre de l'addition en tirant l'exponentiel de sous-index 1 dehors la somme sur  $x_2$ , on peut voir immédiatement que la FFT bidimensionnel peut être calculée en prenant les FFT unidimensionnels séquentiellement sur chaque index de la fonction originale. On peut exprimer ça de manière symbolique:

$$F(k_1, k_2) = FFT_1\{FFT_2\{f(x_1, x_2)\}\} = FFT_2\{FFT_1\{f(x_1, x_2)\}\} \quad (\text{B.7})$$

Pour que ceci soit pratique,  $N_1$  et  $N_2$  devraient être de une certaine longueur efficace pour une FFT, habituellement une puissance de 2. La programmation d'une FFT bidimensionnel, en utilisant l'équation (B.7) avec une routine unidimensionnelle de FFT, est un peu plus difficile d'agir de ce qu'elle semble d'abord. Donc, ce n'est pas une technique recommandée.

La généralisation de (B.6) à  $n$  dimensions est évidemment,

$$F(k_1, k_2) = \sum_{x_n=0}^{N_n-1} \dots \sum_{x_1=0}^{N_1-1} f(x_1, \dots, x_n) e^{2\pi i k_n x_n / N_n} \dots e^{2\pi i k_1 x_1 / N_1} \quad (\text{B.8})$$

Ou  $k_1$  et  $x_1$  rangent de 0 à  $N_1-1$ ,  $k_2$  et  $x_2$  rangent de 0 à  $N_2-1$ , ...,  $k_n$  et  $x_n$  rangent de 0 à  $N_n-1$ .

La transformation inverse de (B.6) et (B.8) s'obtiennent en changeant  $i$  dans les équations par  $-i$  et multiplier par un facteur  $1/(N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n)$ . La plus part des caractéristiques de la FFT multidimensionnelle sont analogues à celles du cas unidimensionnel.

Dans notre travail on utilise la routine FOURN développée par Press et al. (1992), en langage Fortran 77 et modifiée par travailler en double précision. La routine requiert comme entrée (i) la matrice de données, (ii) un scalaire qui contient le nombre de dimensions, (iii) un vecteur contenant la longueur de la matrice de données pour chaque dimension. On doit noter que ces longueurs doivent être toutes puissances de 2, et sont le nombre de valeurs complexes en chaque direction; et iv) un scalaire égale à  $\pm 1$  indiquant si on fait une transformée directe ou inverse.

## Convolution

La convolution de deux fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$ , dénotée  $f^*g$ , est définie par (Bracewell, 1999):

$$f * g \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x - x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} g(x') f(x - x') dx' \quad (\text{B.9})$$

Le théorème de convolution établit que la transformée de Fourier de la convolution de deux fonctions est le produit de la transformée de Fourier individuel de chaque fonction:

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\} \mathcal{F}\{g\} \quad (\text{B.10})$$

Etant  $f$ ,  $g$  et  $h$  des fonctions arbitraires et  $a$  une constante, la convolution satisfait les propriétés (Bracewell, 1999):

$$f * g = g * f \quad (\text{B.11})$$

$$f * (g * h) = (f * g) * h \quad (\text{B.12})$$

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h) \quad (\text{B.13})$$

$$a(f * g) = (af) * g = f * (ag) \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{d}{dx}(f * g) = \frac{df}{dx} * g + f * \frac{dg}{dx} \quad (\text{B.15})$$

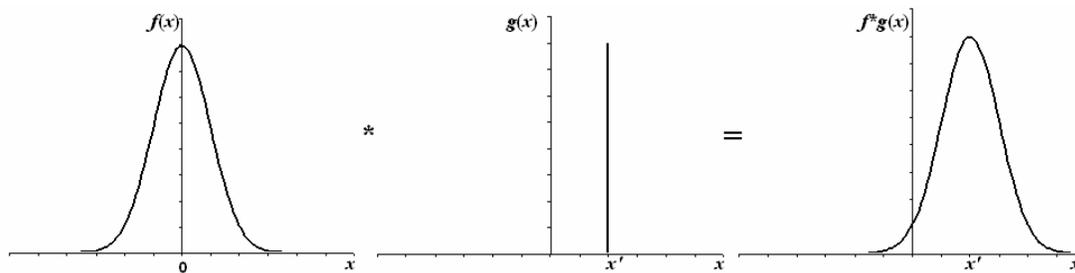
## Convolution en utilisant FFT

Dans le paragraphe précédent on a défini la convolution de deux fonctions continues dans l'équation (B.9) et on a donné le théorème de convolution dans l'équation (B.10). Mathématiquement l'égalité (B.11) est vraie, mais dans beaucoup d'applications les deux fonctions ont des significations et des caractères tout à fait différents. Une des deux fonctions est typiquement un signal ou flux de données  $f(x)$ , l'autre fonction est une fonction réponse,  $g(x)$ , typiquement une fonction de pointe qui tombe à zéro dans les deux directions depuis son maximum. L'effet de la convolution est de filtrer le signal selon le récipé fourni par la fonction de réponse. En particulier, une fonction impulsion ou delta de Dirac, d'aire unitaire en  $x'$  filtre le signal dans la même forme de la fonction réponse mais décalée à  $x'$  comme  $g(x - x')$  (figure B.1).

Dans le cas discret, le signal  $f(x)$  est représenté par ses valeurs échantillonnées au même intervalle de temps  $f_i$ . La fonction de réponse est aussi un ensemble discret de nombres  $g_j$ , mais réarrangé de tel façon que  $g_0$  indique quel multiple du signal d'entrée dans un canal (une valeur particulière de  $i$ ) est copié dans le canal identique de sortie (la même valeur de  $i$ );  $g_1$  indique quel multiple du signal d'entrée dans le canal  $i$  est en plus copié dans le canal  $i+1$  de la sortie;  $g_{-1}$  indique le multiple que est copié dans le canal  $i-1$ ; et ainsi de suite pour des valeurs positives et négatives de  $j$  dans  $g_j$  (figure B.2). La convolution discrète avec une fonction de réponse de durée finie  $M$  est définie par:

$$(f * g)_i \equiv \sum_{j=-M/2+1}^{M/2} f(j) g(i-j) \quad (\text{B.16})$$

Où  $M$  est défini comme le nombre de valeurs non nulles de  $g_j$ .



**Figure B-71. Convolution de deux fonctions. Le signal  $f(x)$  est filtré par convolution par une fonction delta de Dirac en  $x'$ . Le résultat est le même signal d'entrée mais décale  $x'$ .**

Le théorème de convolution discrète établi que si un signal  $f$  est périodique avec période  $N$ , de sorte qu'il soit complètement déterminé par les  $N$  valeurs  $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$ , alors sa convolution discrète avec une fonction de réponse de durée finie  $N$  est un membre de la transformée discrète paire de Fourier:

$$\sum_{j=-N/2+1}^{N/2} f(i-j) g(j) \Leftrightarrow F_k G_k \quad (\text{B.17})$$

où  $F_k$ , ( $k=0, 1, \dots, N-1$ ) est la transformée discrète de Fourier des valeurs  $f_i$  ( $i=0, 1, \dots, N-1$ ), tandis que  $G_k$  ( $k=0, 1, \dots, N-1$ ) es la transformée discrète de Fourier des valeurs  $g_j$  ( $j=0, 1, \dots, N-1$ ). Ces valeurs de  $g_j$  sont les mêmes que pour le range  $j=-N/2+1, \dots, N/2$ , mais réarrangés comme a été décrit ci-dessus.

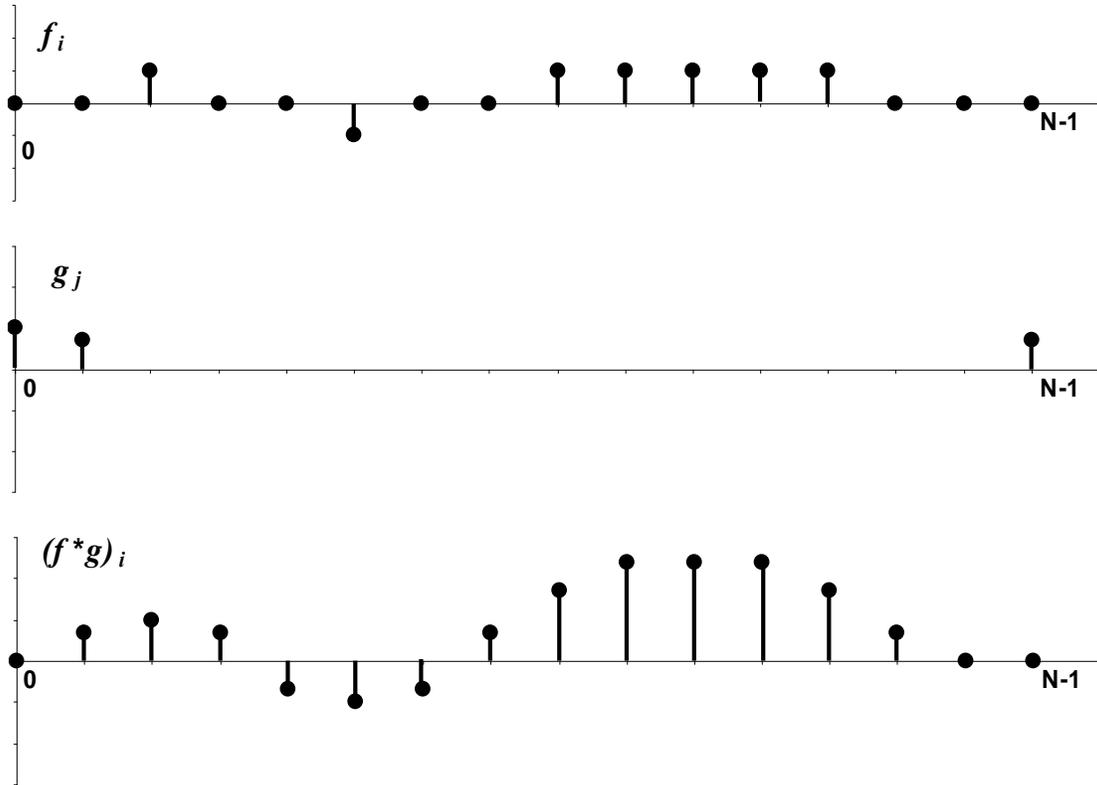


Figure B77-2. Convolution de fonctions discrètes. Notez comment la fonction de réponse pour les temps négatifs est arrangée et stockée à l'extrémité droite de  $g_j$ . (d'après Press et al., 1992)

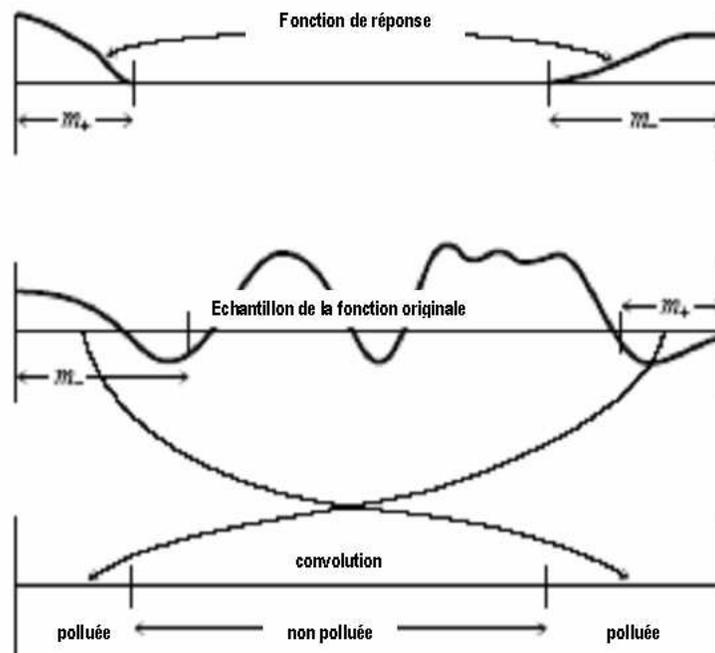
### Traitement des effets d'extrémité par remplissage de zéros

Le théorème de convolution discrète présume que un ensemble de deux circonstances que ne sont pas universelles. D'abord, on suppose que le signal d'entrée est périodique, tandis que les vraies données réelles sont souvent sans répétition ou bien ils consistent d'une extension non périodique de longueur finie. Deuxièmement, le théorème de convolution prend la durée de la réponse égale à la période des données, c'est-à-dire que tous les deux sont  $N$ .

Presque toujours, on s'intéresse dans une fonction de réponse dont la durée  $M$  est beaucoup plus courte que la longueur  $N$  de l'ensemble de données. Dans ce cas on peut simplement étendre la fonction de réponse à la longueur  $N$  avec remplissage de zéros (*zero padding*). C'est-à-dire qu'on définit  $g_j=0$  pour  $M/2 \leq j \leq N/2$  et pour  $-N/2+1 \leq j \leq -M/2+1$ .

Le théorème de convolution suppose que les données sont périodiques, elles pollueront faussement le premier canal de sortie  $(f^*g)_0$  avec certaines données réarrangés de l'extrémité plus éloignée du flux de données  $f_{N-1}, f_{N-2}$ , etc (Figure B.3). Par conséquent; on a besoin d'installer un zone remplie avec des zéros à la fin du vecteur  $f_i$  pour faire nulle cette pollution numérique. Ces zéros protégeront le premier canal de sortie  $(f^*g)_0$  et évidemment le second canal de sortie  $(f^*g)_1$  et les ultérieures. Le nombre de zéros nécessaires à remplir dans l'extrême du flux de données est égal à la durée positive maximale ou à la durée négative maximale de la fonction de réponse. Pour une fonction symétrique de durée  $M$ , on n'a besoin que de  $M/2$  zéros. En combinant cette opération avec le remplissage de zéros de la fonction de réponse  $g_j$  décrite ci-dessus, on isole efficacement les données de la pollution numérique produite par la périodicité non désirée (Figure B.4).

Dans la thèse nous avons développé les sous-routines S\_CONVOLUTION et S\_DECONVOLUTION pour le calcul de la convolution et déconvolution en 3D en prenant compte de ce problème de pollution numérique. Les algorithmes ont été écrits en langage FORTRAN 90.



**Figure B-3. Problème de pollution numérique de la convolution. Non seulement la fonction de réponse doit être réarrangée comme cyclique mais aussi la fonction originale. Donc une partie de chaque extrémité de la fonction originale est polluée par la convolution.**

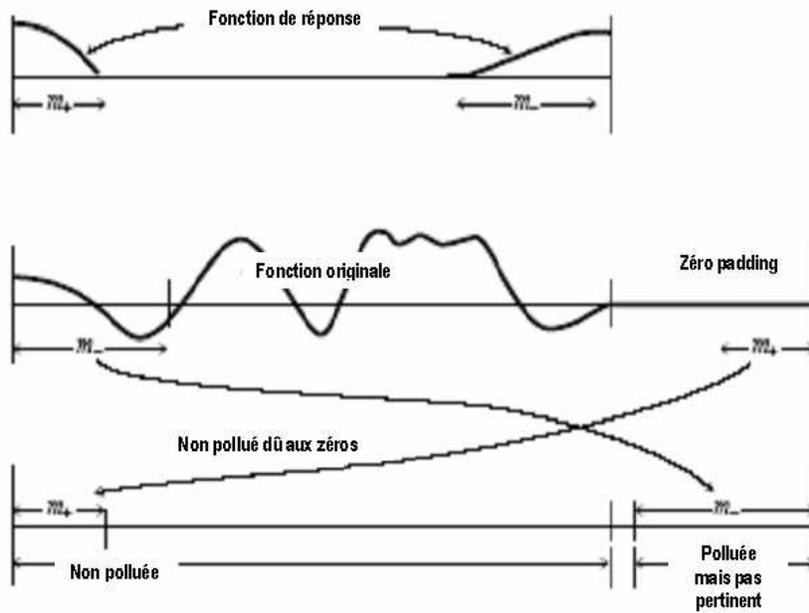


Figure B-4. Le remplissage de zéros comme solution au problème de pollution numérique. La fonction originale est étendue par de zéros, en servant à deux but: i) les zéros ne disturbent pas la vraie convolution et ii) tandis que la fonction originale convolué sur la région de zéros, cette région peut être jetée.

## **Annexe C: Spectre d'énergie corrélée et décorrélée**

On considère deux flux  $\varepsilon_A$  et  $\varepsilon_B$  générés par un sous-générateur stochastique commun jusqu'à un certain temps  $t = t_0$  à partir duquel les flux deviennent indépendants. L'énergie totale est la somme de l'énergie individuelle des flux:

$$e_T(\bar{x}, t) = e_B(\bar{x}, t) + e_A(\bar{x}, t) \quad (\text{C.1})$$

étant les énergies individuelles :

$$e_A(\bar{x}, t) = \frac{1}{2}(\varepsilon_A(\bar{x}, t))^2 \quad (\text{C.2})$$

et

$$e_B(\bar{x}, t) = \frac{1}{2}(\varepsilon_B(\bar{x}, t))^2 \quad (\text{C.3})$$

Donc, (C.1) peut être re-écrite :

$$e_T(\bar{x}, t) = \frac{1}{2}(\varepsilon_B(\bar{x}, t))^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_A(\bar{x}, t))^2 \quad (\text{C.4})$$

étant  $e_c(\bar{x}, t)$  l'énergie de corrélation, on a :

$$e_T(\bar{x}, t) = \frac{1}{2}(\varepsilon_B(\bar{x}, t))^2 - e_c(\bar{x}, t) + \frac{1}{2}(\varepsilon_A(\bar{x}, t))^2 + e_c(\bar{x}, t) \quad (\text{C.5})$$

$e_c(\bar{x}, t)$  s'exprime par :

$$e_c(\bar{x}, t) = \varepsilon_A(\bar{x}, t)\varepsilon_B(\bar{x}, t) \quad (\text{C.6})$$

Donc (C.6) dans (C.5) :

$$e_T(\bar{x}, t) = \frac{1}{2}(\epsilon_B(\bar{x}, t))^2 - \epsilon_A(\bar{x}, t)\epsilon_B(\bar{x}, t) + \frac{1}{2}(\epsilon_A(\bar{x}, t))^2 + e_c(\bar{x}, t) \quad (\text{C.7})$$

On peut la re-écrire :

$$e_T(\bar{x}, t) = \frac{1}{2}(\epsilon_B(\bar{x}, t) - \epsilon_A(\bar{x}, t))^2 + e_c(\bar{x}, t) \quad (\text{C.8})$$

Mais, le premier terme du membre droit de (C.8) est par définition l'énergie de décorrélation :

$$e_\Delta(\bar{x}, t) = \frac{1}{2}(\epsilon_B(\bar{x}, t) - \epsilon_A(\bar{x}, t))^2 \quad (\text{C.9})$$

Pour tant, on vérifie que :

$$e_T(\bar{x}, t) = e_\Delta(\bar{x}, t) + e_c(\bar{x}, t) \quad (\text{C.10})$$

## **Annexe D: Programmes Fortran90 utilisés**

Le modèle de simulation et prévision stochastique multifractale utilisé dans ce travail, a été programmé par l'auteur de cette thèse en langage FORTRAN 90, en profitant ses capacités modulaires. A fin de gagner au maximum les capacités de vitesse et mémoire des ordinateurs on a considéré la programmation structurée et dynamique qui permet la nouvelle version FORTRAN 90. Le modèle consiste de un programme principal qui fait la lecture des données, des paramètres multifractals préalablement déterminés et l'initialisation des variables de calcul. Il fait appel à certains sous-programmes spécifiques de calcul à savoir:

Sous-programme S\_KERNEL: détermine la fonction de filtre (Fonction de Green retardée en trois dimensions) et la range de façon adéquate pour l'opération de convolution/déconvolution. Comme nous avons déjà mentionné dans la Section 4.5 le noyau de convolution tel que a été donnée par l'équation 4.24 présente une difficulté numérique. Cette difficulté a été rencontrée dans les simulations effectuées par Schertzer et Lovejoy (1987a), Wilson et al. (1991), Pecknold et al. (1993), Naud et al. (1996), Pecknold et al. (1996) et correspond au fait que les noyaux de convolution utilisées sont des lois de puissance négative, donc divergentes à petite échelle. Cette difficulté était particulièrement sensible pour définir numériquement la valeur de la transformée de Fourier au nombre d'onde zéro.

En fait, cette divergence n'intervient qu'à résolution infinie. Une première proposition a été de tenir en compte en Fourier de la taille fine de la boîte de calcul (voir l'annexe de Schertzer et Lovejoy (1991), mais il est plus simple d'introduire (Schertzer et al., 2002) une coupure à ce comportement en loi de puissance pour travailler de façon cohérente à résolution finie, ce qui est toujours le cas numériquement. Il était proposé d'obtenir cette coupure à l'aide de « l'ondelette de Cauchy », dont la mise en œuvre était présentée dans le programme Mathematica de l'appendice B de cet article.

En fait dans les développements consécutifs de ce modèle, il s'est avéré qu'il était tout aussi efficace et plus simple d'introduire cette coupure par des fonctions du type (souvent appelées filtres Butterworth) :

$$g(r) = (1 + r^2)^{1/2} \quad (D.1)$$

où  $r \ll 1: g(r) \approx 1; r \gg 1: g(r) \approx r^{-1}$

Nous avons suivi systématiquement cette dernière approche dans tous nos programmes Fortran de convolution et d'intégration fractionnaire. Cela nous a permis d'obtenir une programmation rigoureuse (ex. sans plus introduire de constante de correction comme cela est arrivé dans des anciens programmes Fortran) et que nous avons pu valider à l'aide des programmes MatLab et Mathematica

Il est lié à d'autre sous-programme : S\_KERNELPADD. Une fois déterminé le filtre ou « kernel » nous estimons les kernels pour la convolution avec le sous-générateur et pour la convolution avec le flux respectivement. Nous appelons au sous-programme S\_KERNELPADD pour ranger ces kernels et les étendre avec des zéros (padding) comme a été indiqué dans l'annexe B. Les figures D-1 et D-2 illustrent le noyau avec la méthode de filtres Butterworth et le noyau rangé pour la convolution selon la méthode vue dans l'annexe B.

Sous programmes S\_CONVOLUTION et S\_DECONVOLUTION : ils sont appelés à fin de calculer le produit de convolution et déconvolution respectivement. Ils sont programmés en FORTRAN 90 et ils ont testé avec les logiciels Mathematica et MatLab. Ces deux sous-programmes font appel à des autres sous-programmes, notamment aux sous-routines S\_RLFT3, S\_REALFT, S\_FOURN et S\_FOUR1 basées sur les anciens algorithmes fournis par Press et al. (1992) et réécrites en FORTRAN 90 en double précision (voir annexe B).

Sous programme S\_SUBGENERATOR: calcule le sous-générateur stochastique à partir des paramètres multifractals préalablement estimés. Il appelle à la sous-routine S\_LEVY pour la détermination du bruit blanc de Lévy. Dans la programmation de cette sous-routine nous avons considéré la méthode proposée par Pecknold et al. (1993) améliorée avec la modification proposée dans la Sect. 4.2.

Dans la figure D-3 on illustre schématiquement le programme utilisé pour les simulations/prévisions. En plus des sous-programmes énumérés précédemment, il y a d'autres algorithmes et fonctions utilisés par le programme principal comme par exemple:

F\_VARIATION et F\_EULER calculent la valeur des paramètres variation et euler qui permettent le recentrage et normalisation du générateur avant de prendre son exponentielle pour calculer le champ multifractal conservatif (flux) comme a été indiqué dans la Sect. 4.5.

La fonction F\_MEDIAEXP3D permet de calculer la moyenne de l'exponentiel du générateur 3D à fin de vérifier la contrainte  $\langle e^{\Gamma_\lambda} \rangle = 1$  imposée par le recentrage et normalisation du générateur

Pour la détermination des paramètres multifractals nous avons programmés quelques algorithmes basés sur des anciennes versions. Les programmes ont été écrits en FORTRAN 90 et adaptés à trois dimensions. Ainsi, par exemple, pour déterminer le paramètre de Hurst de la série d'images nous avons programme l'algorithme SPECTRE 3D (figure D-4) qui permet de calculer le spectre d'énergie de chaque image et de l'ensemble d'images (cf. Sect. 3.6.2.1). Il utilise aussi le sous-programme S\_FOURN pour la transformation rapide de Fourier.

Les paramètres  $\alpha$  et  $C_1$  sont estimés avec le programme S\_DTM (figure D-5) en appliquant la méthode du Moment Double Trace (en 3D) présenté dans la Sect. 3.6.2.2. Il y a l'option de la détermination automatique des paramètres, mais il est conseillé de vérifier les résultats de manière graphique. Ce programme a été testé avec FractHydro (Biaou, 2004).

L'exposant d'anisotropie, très utile pour la construction des cascades multifractales, est calculé en faisant une analyse espace-temps. Pour cela, nous avons développé le programme S\_ANISOTROPIE (figure D-64), selon la méthode proposée par Marsan (1996) et Biaou (2004) et présenté dans la Section 3.6.2.5.

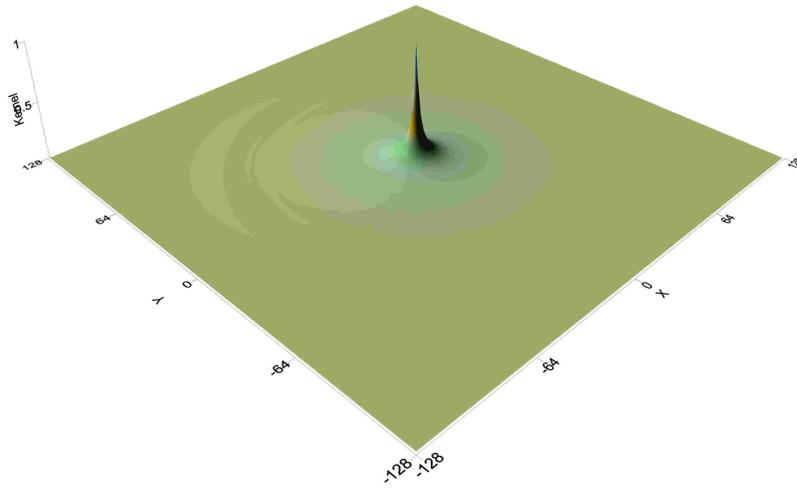


Figure D-1. Coupure au temps  $t=t_0$  du noyau de type filtre de Butterworth utilisé par les programmes de simulation

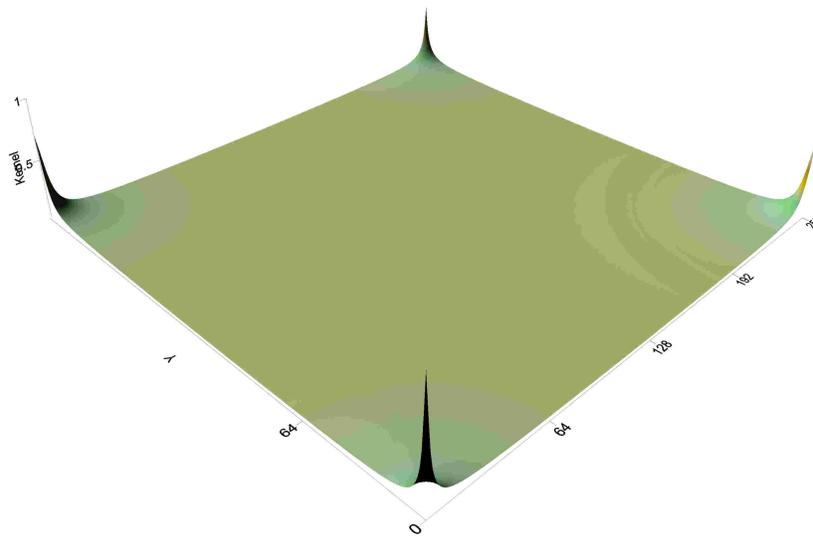


Figure D-2. Coupure au temps  $t=t_0$  du noyau rangé pour la convolution suivant la méthode présentée dans l'annexe B.

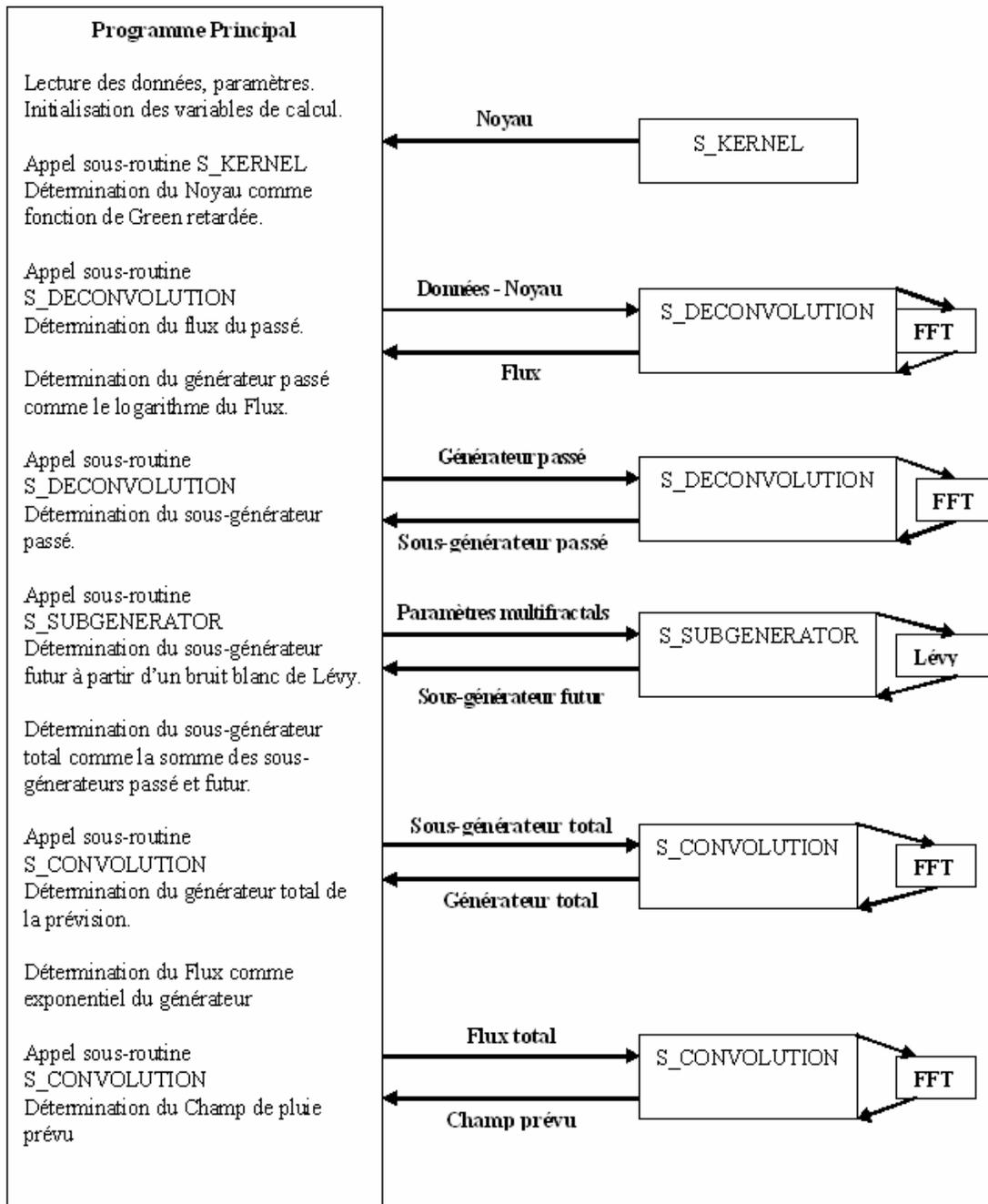


Figure D-3. Schéma général du programme de simulation et prévision stochastique multifractale.

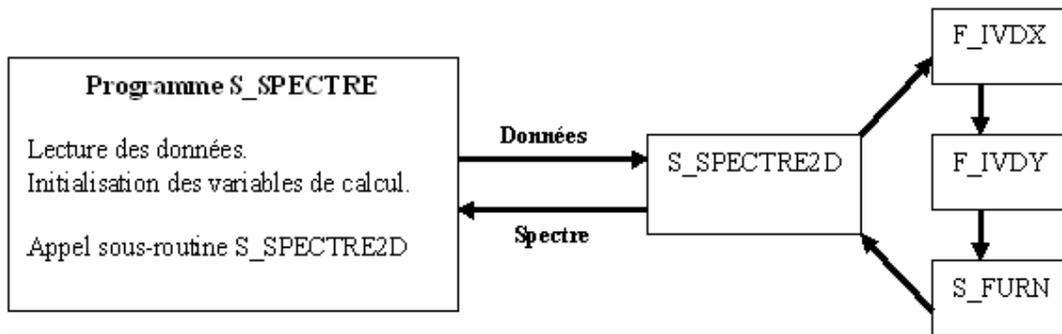


Figure D-4. Schéma du programme Spectre pour déterminer le spectre d'énergie d'une série d'images.

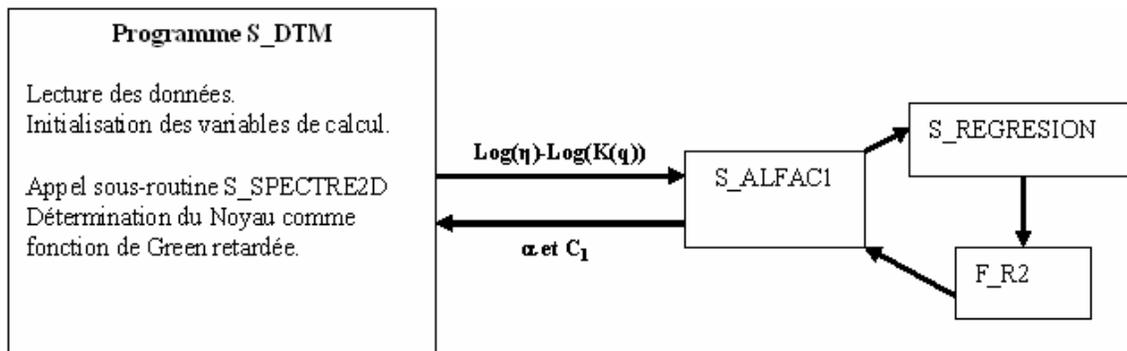


Figure D-5. Schéma du programme DTM pour la détermination des paramètres multifractals  $\alpha$  et  $C_1$ .

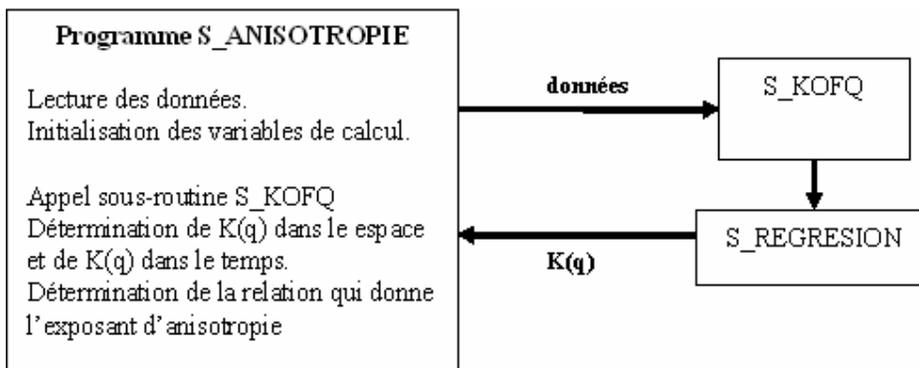


Figure D-6. Schéma du programme Anisotropie pour déterminer l'exposant d'anisotropie espace-temps.

## Référence Bibliographiques

- Atger, F., 2000. La prévision du temps à moyenne échéance en France. *La météorologie*, **30**: 61-86.
- Barnsley, M., 1988. Fractal everywhere. Accademy Press Professional, San Diego, CA, U.S.A., 394 pp.
- Bell, T.L., 1987. A space-time stochastic model of rainfall for satellite remote-sensing studies. *Journal of Geophysical Research*, **92(D)**: 9631-9643.
- Bendjoudi, H. et Hubert, P., 1998. A propos de la distribution statistique des cumuls pluviométriques annuels. Faut-il en finir avec la normalité ? *Revue des Sciences de l'Eau*, **4**: 617-630.
- Bendjoudi, H., Hubert, P., Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1997. Multifractal point of view on rainfall intensity-duration-frequency. *Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris*, **325(5)**: 323-326.
- Benson, D., Wheatcraft, S.W. et Meerschaert, M., 2000. Application of a fractional advection-dispersion equation. *Water Resource Research*, **36(6)**: 1403-1412.
- Benzi, R., Paladin, G., Parisi, G. et Vulpiani, A., 1984. On the multifractal structure of fully developed turbulence. *Journal Physics A*, **17**: 3521-3531.
- Bertoni, J.C., 2006. Inondations urbaines en Amérique Latine: réflexions sur le rôle des facteurs de risque. In: I. Tchiguirinskaia, K. Ni Ni Thein et P. Hubert (Editors), *Frontiers in Flood Research: Le point de la recherche sur les crues*. Kovacs Coloquium, UNESCO, Paris, pp. 123-141.
- Biaou, A., 2004. De la Meso-échelle à la Micro-échelle: Désagregation spatio-temporelle multifractale des précipitations. Ph.D. Thesis, Ecole de Mines de Paris, Paris, 181 pp.
- Bunge, M., 1961. Causality, chance and law. *American Scientist*, **49**: 432-448.
- Cantor, G., 1884. Uber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, 6. *Mathematische Annalen*, **24(4)**: 453-488.
- Chechkin, A.V., Schertzer, D., Tur, A.V. et Yanovsky, V.V., 1995. Generalized Fokker-Planck equation for anomalous diffusion. *Ukrain Journal Physics*, **40(5)**: 434-439.
- Corrsin, S., 1951. On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence. *Journal of Applied Physics*, **22(4)**: 469-473.
- Crisanti, A., Jensen, M.H., Paladin, G. et Vulpiani, A., 1993a. Predictability of velocity and temperature fields in intermittent turbulence. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **26**: 6943-6960.
- Crisanti, A., Jensen, M.H., Vulpiani, A. et Paladin, G., 1993b. Intermittency and Predictability in Turbulence. *Physical Review Letters*, **70(2)**: 166-169.
- Davis, A., Marshak, A., Wiscombe, W. et Cahalan, R., 1994. Multifractal characterizations of nonstationarity and intermittency in geophysical fields: observed, retrieved, or simulated. *Journal of geophysical research*, **99(D4)**: 8055-8072.
- De Lima, M.I.P., 1998. Multifractals and the temporal structure of rainfall. Ph.D. Thesis, Agricultural University, Wageningen, Netherlands, 229 pp.
- Deidda, R., 2000. Rainfall downscaling in a space-time multifractal framework. *Water Resources Research*, **36(7)**: 1779-1794.
- Duncan, M., Lovejoy, S., Fabry, F. et Schertzer, D., 1992. Fluctuating radar cross-section of a multifractal distribution of scatterers *Proceedings of: 11th International Conference on Precipitation and Clouds*, Montréal, Canada. 997-1000 pp.
- Falconer, K., 1990. Fractal Geometry. Mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons, Chichester, England, 288 pp.
- Feder, J., 1988. Fractals. Plenum Press, New York, 283 pp.
- Frisch, U. et Parisi, G., 1985. Fully developed turbulence and intermittency. In: *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*. *Proceedings*

- of: *International School of Physics 'Enrico Fermi'*, Varenna, Italy. M. Ghil, R. Benzi et G. Parisi (Editors), Course LXXXVIII, Amsterdam, 1985, 84 pp.
- Frisch, U., Sulem, P. et Nelkin, M., 1978. A simple dynamical model of intermittency in fully developed turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, **87**: 719-724.
- Grassberger, P., 1983. Generalized dimensions of strange attractors. *Physics Letters A*, **97**(6): 227-230.
- Guillot, G. et Lebel, T., 1999. Disaggregation of Sahelian mesoscale convective system rain fields: Further developments and validation. *Journal of geophysical research*, **104**: 31533-31551.
- Gupta, V.K. et Waymire, E., 1993. A statistical analysis of mesoscale rainfall as random cascade. *Journal of Applied Meteorology*, **32**: 251-267.
- Gupta, V.K. et Waymire, E., 1997. Reply to ' Universal multifractals do exist!'. *Journal of Applied Meteorology*, **36**(9): 1304.
- Hasting, H. et Sugihara, G., 1994. *Fractals: a user's guide for the natural sciences*. Oxford University Press, Oxford, U.K., 248 pp.
- Hentschel, H.G.E. et Procaccia, I., 1983. The infinite number of generalized dimensions of fractals strange attractors. *Physica*, **D**(8): 435-444.
- Hilbert, D., 1902. Sur les problèmes futurs des mathématiques *Proceedings of: 2ème Congrès International des Mathématiciens*, Paris. Gauthier-Villars, 58-114 pp.
- Hubert, P., 1995. Fractals et multifractals appliqués à l'étude de la variabilité temporelle des précipitations. In: R. Fiddes (Editor), *Space and time scale variability and interdependencies in hydrological processes*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., pp. 175-181.
- Hubert, P. et Carbonnel, J.P., 1989. Dimensions fractales de l'occurrence de pluie en climat soudano-sahélien. *Hydrologie Continentale*, **4**(1): 3-10.
- Hubert, P., Friggitt, F. et Carbonnel, J.P., 1995. Multifractal structure of rainfall occurrence in West Africa. In: Z.W. Kundzewicz (Editor), *New uncertainty concepts in hydrology and water resources*, Madralin, Poland, pp. 109-113.
- Kolmogorov, A.N., 1941. The local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Doklady Akademia Nauk SSSR*, **30**: 301-305.
- Kolmogorov, A.N., 1962. A refinement of previous hypothesis concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, **13**: 82-85.
- Kraichnan, R., 1967. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *The Physics of Fluids*, **10**(7): 1417-1423.
- Ladoy, P., Lovejoy, S. et Schertzer, D., 1991. Extreme variability of climatological data: scaling and intermittency. In: D. Schertzer et S. Lovejoy (Editors), *Non-linear variability in geophysics: scaling and fractals*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, pp. 241-250.
- Ladoy, P., Schmitt, F., Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1993. Variabilité temporelle multifractale des observations pluviométriques à Nimes. *Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris*, **317**: 775-782.
- Larnder, C., 1995. Observer problems in multifractals: the example of rain. Msc. Thesis, McGill University, Montréal, Canada, 105 pp.
- Lavallée, D., 1991. Multifractal techniques: analysis and simulation of turbulent fields. Ph.D. Thesis, McGill University, Montréal, Canada.
- Lavallée, D., Lovejoy, S., Schertzer, D. et Ladoy, P., 1993. Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation. In: L.D. Cola et N. Lam (Editors), *Fractals in geography*. Prentice-Hall, pp. 158-192.

- Lavallée, D., Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1991. On the determination of the codimension function. In: D. Schertzer et S. Lovejoy (Editors), *Scaling, fractals and nonlinear variability in geophysics*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, pp. 99-110.
- Leith, C. et Kraichnan, R., 1972. Predictability of turbulent flows. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **29**(6): 1041-1058.
- Leslie, D., 1973. *Developments in the theory of turbulence*. Clarendon Press, Oxford, U.K., 368 pp.
- Lilley, M., Lovejoy, S., Strawbridge, K. et Schertzer, D., 2004. 23/9 dimensional anisotropic scaling of passive admixtures using lidar data of aerosols. *Physical Review E*, **70**(036307): 1-7.
- Lilly, D., 1983. Dynamics of rotating thunderstorms. In: D. Lilly et T. Gal-Chen (Editors), *Meso-scale meteorology - Theories, observations and models*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Netherlands, pp. 531-543.
- Lilly, D., 1985. Theoretical predictability of small-scale motions. In: M. Ghil, R. Benzi et G. Parisi (Editors), *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*. North Holland, Amsterdam, pp. 281-289.
- Lorenz, E., 1963. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**: 130-141.
- Lorenz, E., 1969. The predictability of a flow which possesses many scales of motion. *Tellus*, **21**: 289-307.
- Lorenz, E., 1993. *The essence of chaos*. UCL Press, London.
- Lovejoy, S. et Mandelbrot, B.B., 1985. Fractal properties of rain and a fractal model. *Tellus*, **37**(A): 209-232.
- Lovejoy, S. et Schertzer, D., 1985. Generalized scale invariance and fractal models of rain. *Water Resource Research*, **21**(8): 1233-1250.
- Lovejoy, S. et Schertzer, D., 1990. Multifractals, universality classes and satellite and radar measurement of cloud and rain fields. *Journal of geophysical research*, **95**(D3): 2021-2034.
- Lovejoy, S., Schertzer, D. et Pflug, K., 1992. Generalized scale invariance and differential rotation in cloud radiance. *Physica A*, **185**: 121-128.
- Lovejoy, S., Schertzer, D. et Stanway, J.D., 2001. Direct evidence of multifractal atmospheric cascades from planetary scales down to 1 km. *Physical Review Letter*, **86**(22): 5200-5203.
- Lovejoy, S., Schertzer, D. et Tsonis, A.A., 1987. Functional box-counting and multiple elliptical dimensions in rain. *Science*, **235**(4792): 1036-1038.
- Macor, J., Schertzer, D. et Lovejoy, S., 2007a. Méthodes multifractales appliquées à la prévision de pluie en utilisant des données radar. *La Houille Blanche*, **4**: 1-7.
- Macor, J., Schertzer, D. et Lovejoy, S., 2007b. Rain and Flood Multifractal Nowcasting Using Radar Data. *Natural Hazard and Earth System Sciences*(Special Issue: Propagation of uncertainty in advanced meteo-hydrological forecast systems) (en préparation).
- Mandelbrot, B., 1974. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *Journal of Fluid Mechanics*, **62**(2): 331-358.
- Mandelbrot, B., 1989. A class of multinomial multifractal measures with negative (latent) values for 'dimension'  $f(\alpha)$ . In: L. Pietronero (Editor), *Fractals' physical origin and properties*. Plenum, New York, pp. 3-29.
- Mandelbrot, B.B., 1967. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, **156**: 636-638.
- Mandelbrot, B.B., 1975. *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*. Flammarion, Paris, 288 pp.
- Mandelbrot, B.B., 1977. *Fractals: form, chance and dimension*. W. H. Freeman, San Francisco, USA, 363 pp.

- Mandelbrot, B.B., 1983. The fractal geometry of nature. W.H. Freeman, New York, 468 pp.
- Mandelbrot, B.B., 1991. Random multifractals: negative dimensions and the resulting limitations of the thermodynamical formalism. *Proceedings of the royal society of London A*, **434**: 79-88.
- Mandelbrot, B.B., 2006. Apprenti bétourné, L'irruption des géométries fractales dans les sciences. Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences, Paris, pp. 15-39.
- Marsan, D., 1998. Multifractals espace-temps; dynamique et predicibilité; application aux précipitations. Ph.D. Thesis, Université de Paris VI, Paris.
- Marsan, D., Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1996. Causal space-time multifractal processes: predictability and forecasting of rain fields. *Journal of Geophysical Research*, **101**(D21): 26333-26346.
- Marsan, D., Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1997. Predictability of multifractal processes: the case of turbulence. In: M.Giona, G.Biardi (Editors), Fractal and Chaos in Chemical Engineering, CFIC 96. World Scientific, pp 371-384.
- Mejia, J. et Rodriguez-Iturbe, I., 1974. On the synthesis of random fields sampling from the spectrum: An application to the generation of hydrologic spatial processes. *Water Resource Research*, **10**: 705-711.
- Menabde, M., Harris, D., Seed, A., Austin, G. et Stow, D., 1997a. Multiscaling properties of rainfall and bounded random cascades. *Water Resource Research*, **33**(12): 2823-2830.
- Menabde, M., Seed, A., Harris, D. et Austin, G., 1997b. Self similar random fields and rainfall simulation. *Journal of Geophysical Research*, **102**(D12): 13509-13515.
- Metais, O. et Lesieur, M., 1986. Statistical predictability of decaying turbulence. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **49**(9): 857-870.
- Monin, A.S., 1972. Weather forecasting as a problem in physics. MIT Press, Boston.
- Naud, C., Schertzer, D., Lovejoy, S., 1996. Fractional integration and radiative transfer in multifractal atmosphères. In: W. Woyczynski et S. Molchansov (Editors), Stochastic Models in Geosystems. Springer-Verlag, pp. 239-267.
- Northrop, P., 1998. A clustered spatial-temporal model of rainfall. *Proceedings of the royal society of London*, **A**(45): 1875-1888.
- Novikov, E. et Stewart, R., 1964. Intermittency of turbulence and spectrum of fluctuations in energy dissipation. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Geofizicheskaya*, **3**: 408-412.
- Obukhov, A., 1962. Some specific features of atmospheric turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, **13**: 77-81.
- Orlanski, I., 1975. A rational subdivision of scale for atmospheric processes. *Bulletin American Meteorological Society*, **56**(5): 527-530.
- Orszag, S., 1970. Analytical theories of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, **41**: 363-386.
- Over, T. et Gupta, V.K., 1996. A space-time theory of mesoscale rainfall using random cascades. *Journal of Geophysical Research*, **101**(D21): 26319-26331.
- Palmer, T.N., 2000. The prediction of uncertainty in weather and climate forecasting. *Reports on Progress in Physics*, **63**: 71-116.
- Parisi, G. et Frish, U., 1985. A multifractal model of intermittency. In: M. Ghil, R. Benzi et G. Parisi (Editors), Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate dynamics. North Holland, New York, pp. 84-88.
- Peano, G., 1890. Sur une courbe qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen*, **26**: 157-160.
- Pecknold, S., Lovejoy, S. et Schertzer, D., 1996. The morphology and texture of anisotropic multifractals using generalized scale invariance. Stochastic models in geosystems. In: S. Molchansov et W. Woyczynski (Editors), IMA Volumes in mathematics and its applications. Springer-Verlag, New York, pp. 269-312.

- Pecknold, S., Lovejoy, S., Schertzer, D., Hooge, C. et Malouin, J.F., 1993. The simulation of universal multifractal. In: J. Perdang et A. Lejeune (Editors), Cellular automata: prospects in astronomy and astrophysics. World Sciences, River Edge, New York, pp. 228-267.
- Pecknold, S., Lovejoy, S. et Schertzer, D., 1996. The morphology and texture of anisotropic multifractals using generalized scale invariance. In: W. Woyczynski et S. Molchanov (Editors), Stochastic Models in Geosystems. Springer-Verlag, pp. 269-311.
- Pedlosky, J., 1979. Geophysical fluid dynamics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Perica, S. et Foufoula-Georgiu, E., 1996. Linkage of scaling and thermodynamic parameters of rainfall: results from midlatitude mesoscale convective systems. *Journal of Geophysical Research*, **101**(D3): 7431-7448.
- Pflug, K., Lovejoy, S. et Schertzer, D., 1993. Generalized scale invariance difference rotation and cloud texture: analysis and simulation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **50**: 538-553.
- Press, W., Flannery, B., Teukolsky, S. et Vetterling, W., 1992. Numerical recipes in FORTRAN 77. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 992 pp.
- Rebora, N., Ferraris, L., Von Hardenberg, J. et Provenzale, A., 2005. Stochastic downscaling of LAM predictions: an example in the Mediterranean area. *Advances in Geosciences*, **2**: 181-185.
- Richardson, L.F., 1922. Weather prediction by numerical processes. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 236 pp.
- Rodriguez-Iturbe, I., Cox, D. et Eagleson, P.S., 1986. Spatial modelling of total storm rainfall. *Proceedings of the royal society of London*, **A**(403): 27-50.
- Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1983. Elliptical turbulence in the atmosphere *Proceedings of: 4th Symposium on turbulent shear flow*, Karlsruhe, West Germany. 11.1-11.8 pp.
- Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1984. On the dimension of atmospheric motions. In: T. Tatsumi (Editor), Turbulence and chaotic phenomena in fluids. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, pp. 505-512.
- Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1985a. Generalized scale invariance in turbulent phenomena. *Physico Chemical Hydrodynamics*, **6**(5-6): 623-635.
- Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1985b. The dimension and intermittency of atmospheric dynamics. In: L. Bradbury, F. Durst, B. Lauder, F. Schmidt et J. Whietlaw (Editors), Turbulent shear flow. Springer-Verlag, Berlin, pp. 7-33.
- Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1987a. Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. *Journal of Geophysical Research*, **92**(D8): 9693-9714.
- Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1987b. Singularités anisotropes, divergence des moments en turbulence: invariance d'échelle généralisée et processus multiplicatifs. *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*, **11**(1): 139-181.
- Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1989a. Generalized scale invariance and multiplicative processes in the atmosphere. *Pure and Applied Geophysics*, **130**(1): 57-81.
- Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1989b. Nonlinear variability in geophysics: multifractal simulations and analysis. In: L. Pietronero (Editor), Fractals physical origin and properties. Plenum Press, New York, pp. 49-79.
- Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1991. Nonlinear geodynamical variability: multiple singularities, universality and observables. In: D. Schertzer et S. Lovejoy (Editors), Non-linear variability in geophysics: scaling and fractals. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, pp. 41-82.
- Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1992. Hard and soft multifractal processes. *Physica A*, **185**(1-4): 187-194.

- Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1994. EGS Richardson AGU Chapman NVAG3 Conference: Non linear variability in geophysics: scaling and multifractal processes. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **1**(2/3): 77-79.
- Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1997. Universal multifractals do exist!: Comment on 'A statistical analysis of mesoscale rainfall as a random cascade'. *Journal of Applied Meteorology*, **36**(9): 1296-1303.
- Schertzer, D. et Lovejoy, S., 2004. Space-time complexity and multifractal predictability. *Physica A*, **338**: 173-186.
- Schertzer, D. et Lovejoy, S., 2004b. Uncertainty and Predictability in Geophysics: Chaos and multifractal insights. In: R. Sparks et C. Hawkesworth (Editors), State of the Planet, Frontiers and Challenges in Geophysics. AGU, Washington, pp. 317-334.
- Schertzer, D., Larcheveque, M., Duan, V., Yanosvsky, V. et Lovejoy, S., 2001. Fractional Fokker-Planck equation for nonlinear stochastic differential equations driven by non-Gaussian Lévy stable noises. *Journal of Mathematical Physics*, **41**(1): 200-212.
- Schertzer, D., Lovejoy, S. et Hubert, P., 2002. An introduction to stochastic multifractal fields. In: A. Ern et L. Weiping (Editors), Mathematical problems in environmental science and engineering, Series in Contemporary applied mathematics. Higher Educational Press, Beijing, vol. 4, pp. 106-179.
- Schertzer, D., Lovejoy, S. et Schmitt, F., 1995. Structures in turbulence and multifractal universality. In: M. Meneguzzi, A. Pouquet et P. Sulem (Editors), Small scale structures in 3D hydro and MHD turbulence. Springer-Verlag, Berlin, pp. 137-144.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., Schmitt, F., Chigirinskaya, Y. et Marsan, D., 1997. Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency. *Fractals*, **5**(3): 427-471.
- Schertzer, D., Tchiguirinskaia, I., Macor, J. et Lovejoy, S., 2007. Scale problem flooding estimates. In: E. Pasche (Editor), Special aspects of urban flood management. Hamburger Wasserbau-Schriftien, Hamburg, pp. 53-60.
- Stull, R., 1988. An introduction to boundary layer meteorology. Kluwer Academic, 666 pp.
- Tchiguirinskaia, I. et Schertzer, D., 1996. Dynamical hierarchical cascade models, multifractal space-time intermittency and lie structure in turbulence. In: W. Woyczynski et S. Molchanov (Editors), Stochastic Models in Geosystems. Springer-Verlag, New York.
- Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1997. Scaling Gyroscopes Cascade: Universal multifractal features of 2-D and 3-D turbulence. In: M. Giona et G. Biardi (Editors), Fractals and Chaos in Chemical Engineering. World Scientific, Singapore, pp. 371-384.
- Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D. et Lovejoy, S., 1998. An alternative to Shell-models: More complete and yet simple model of intermittency. In: U. Frish (Editor), Advances in Turbulence VII. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, pp. 263-266.
- Tél, T., 1988. Fractals, multifractals and thermodynamics: an introductory review. *Zeitschrift für Naturforschung A*, **43**: 1154-1174.
- Tennekes, H., 1991. Karl Popper and the accountability of numerical forecasting, New developments in Predictability, ECMWF Workshop Proceedings, Reading, U.K.
- Tessier, Y., Lovejoy, S. et Schertzer, D., 1993. Universal multifractals: theory and observations for rain and clouds. *Journal of Applied Meteorology*, **32**(2): 223-250.
- Thompson, P.D., 1957. Uncertainty of initial state as a factor in the predictability of large scale atmospheric flow patterns. *Tellus*, **9**(3): 275-295.
- Thunis, P. et Bornstein, R., 1996. Hierarchy of mesoscale flow assumption and equations. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **53**(3): 380-397.
- Venugopal, V., Fofoula-Georgiou, E. et Sapozhnikov, V., 1999. A space-time downscaling model for rainfall. *Journal of Geophysical Research*, **104**(D16): 19705-19721.

- Von Koch, H., 1904. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire. *Arkiv för Matematik*, **1**: 681-704.
- Waymire, E., Gupta, V.K. et Rodriguez-Iturbe, I., 1984. A spectral theory of rainfall intensity at the meso-beta scale. *Water Resource Research*, **20**: 1483-1465.
- Wheater, H. et al., 2000. Spatial-temporal rainfall fields: modelling and statistical aspects. *Hydrology and Earth System Sciences*, **4**: 581-601.
- Willems, P., 2001. A spatial rainfall generator for small spatial scales. *Journal of Hydrology*, **252**(1): 126-144.
- Yanosvsky, V., Chechkin, A.V., Schertzer, D. et Tur, A.V., 2000. Lévy diffusion and fractional Fokker Planck equation. *Physica A*, **282**(1-2): 13-34.

## Liste de symboles

$a$	coefficient de la relation Marshall-Palmer qui transforme la réflectivité de pluie du radar en intensité de pluie (dépendent du type de précipitation).
$a$	exposant dimensionnel ( $a = 1/3$ ).
$A$	ensemble contenu dans l'espace $\mathbb{R}^D$ .
$b$	exposant de la relation Marshall-Palmer (dépendent du type de précipitation).
$c$	codimension fractal d'un ensemble arbitraire.
$c_\varepsilon$	codimension du champs conservatif.
$c_p$	codimension du champ non conservatif.
$c(\gamma)$	fonction codimension, définie par les singularités $\gamma$ de la densité d'un processus (fonction convexe).
$C_1$	codimension de la singularité moyenne d'un processus. Paramètre multifractal qui quantifie l'écart par rapport à l'homogénéité du processus.
$C^{(q)}$	covariance d'ordre $q$ .
$D$	dimension de l'espace (nombre entier) qui inclue un objet ou ensemble.
$Del$	dimension elliptique (trace de l'opérateur contraction-dilatation).
$D_f$	dimension fractal d'un objet ou ensemble.
$D_H$	dimension de Hausdorff.
$D_\lambda$	domaine d'échelle $[\lambda^{-1}, 1]$ .
$e^c(\bar{x}, t)$	énergie cinétique corrélée.
$e^n(\bar{x}, t)$	énergie cinétique individuelle de chaque solution de Navier-Stokes..
$e^T(\bar{x}, t)$	énergie cinétique totale.
$eu$	préfacteur de normalisation du générateur.
$e^\Delta(\bar{x}, t)$	énergie cinétique décorrélée.
$E(k)$	spectre d'énergie spatial d'un processus.
$E^c(k, t)$	spectre d'énergie corrélé
$E^T(k, t)$	spectre d'énergie total
$E^\Delta(k, t)$	spectre d'énergie décorrélé
$\bar{f}$	force extérieure.
$F$	préfacteur dépendant de la singularité $\gamma$ .
$g(\bar{x}, t)$	fonction de filtre ou noyau espace-temps de la convolution du sous-générateur. (définie comme fonction de Green retardée).
$g(\tau)$	noyau non causal.
$g_c(\tau)$	noyau causal défini par $g_c(\tau) = g(\tau)H(\tau)$ .
$g_c^{-*}(\tau)$	noyau inverse de $g_c(\tau)$ .
$g_\lambda(x)$	noyau à la résolution $\lambda$ de la convolution du sous-générateur.
$\hat{g}_\lambda(k)$	noyau à la résolution $\lambda$ de la convolution du sous-générateur dans l'espace de Fourier.
$\hat{g}_\lambda(\bar{k}, \omega)$	noyau espace-temps à la résolution $\lambda$ de la convolution du sous-générateur dans l'espace de Fourier.
$G(T, T_0)$	fonction de transfert définie par une double convolution.
$G(\bar{x})$	noyau de la convolution du champ conservatif.

$G(\bar{x}, t)$	noyau espace-temps de la convolution du champ conservatif (définie comme fonction de Green retardée).
$\hat{G}(\omega, \omega_0)$	fonction de transfert dans l'espace de Fourier.
$H$	paramètre multifractal qui quantifie l'écart par rapport au degré de conservation d'un processus (exposant de Hurst).
$H(t_0 - t)$	fonction de Heaviside.
$H_t$	paramètre qui quantifie l'écart par rapport à l'isotropie espace-temps.
$H_y$	paramètre qui quantifie l'écart par rapport à l'isotropie entre deux directions d'espace.
$\hat{H}(\omega_0)$	fonction de Heaviside dans l'espace de Fourier.
$k$	nombre d'onde dans l'espace.
$k_c(t)$	nombre d'onde critique.
$K(q)$	fonction d'échelles des moments statistiques d'ordre $q$ .
$K(q, \eta)$	fonction d'échelle des moments doubles qui caractérise un processus normalisé par des $\eta$ -puissances arbitraires ( $\eta \neq 1$ ).
$K_t(q)$	fonction d'échelle des moments statistiques sur l'axe du temps.
$K_x(q)$	fonction d'échelle des moments statistiques sur l'axe spatial $x$ .
$K_y(q)$	fonction d'échelle des moments statistiques sur l'axe spatial $y$ .
$K_{\Gamma_\lambda}(q)$	fonction caractéristique du générateur $\Gamma_\lambda$ .
$K(1)$	fonction d'échelle du moment statistique 1 ( $K(1) = 0$ ).
$K(2)$	fonction d'échelle du moment statistique 2.
$l =$	échelle de résolution ( $l = L / \Lambda$ )
$\ell_0$	taille d'un objet géométrique défini dans l'espace dont les dimensions dépendent de l'espace auquel il est inclus [ $L, L^2, L^3$ ].
$\ell$	taille d'un objet géométrique à l'échelle d'observation ou intérêt [ $L, L^2, L^3$ ].
$L$	échelle maximum de la cascade.
$L_x$	taille maximale d'une structure dans la direction de espace $x$ .
$L_y$	taille maximale d'une structure dans la direction de espace $y$ .
$L_\alpha$	variable aléatoires de Lévy indépendantes et identiquement distribuées.
$M_D(A)$	masse de un ensemble $A$ .
$n$	nombre d'itération de la cascade ( $n = \log(\Lambda) / \log(\lambda)$ ).
$N$	nombre fini d'échantillons.
$N_\lambda$	nombre de boîtes nécessaires pour paver.
$N_\lambda(A)$	nombre de boîtes nécessaires pour paver un ensemble fractal $A$ .
$q$	ordre de moment statistique.
$q_D$	ordre de moment critique pour la divergence des moments statistiques.
$q_{\max}$	ordre de moment critique associé à un comportement linéaire de la fonction $K(q)$ pour des moments $q > q_{\max}$ .
$q_{\min}$	ordre de moment critique associé à un comportement spécial de la fonction $K(q)$ pour de moments $q < q_{\min}$ ( $0 < q_{\min} < 1$ ).
$q_\gamma$	moment statistique relie à l'ordre de singularité $\gamma$ par $\gamma = K'(q_\gamma)$
$p$	pression $[[M/(LT^2)]]$
$r$	facteur de réduction.
$r$	seuil de taux de pluie (L/T).
$R$	taux de pluie (L/T).

$R_\lambda(\bar{x}, t)$	taux de pluie en espace et temps à la résolution $\lambda$ .
$S$	penne.
$t$	temps [T].
$t_0$	temps de commencement de la prevision [T].
$T$	temps maximal de la cascade [T].
$Tr_A$	moments traces du flux sur l'ensemble $A$ .
$T_\lambda$	opérateur contraction-dilatation.
$\bar{u}_1(\bar{x}, t)$	solution des équations de Navier-Stokes en espace-temps.
$\bar{u}_2(\bar{x}, t)$	solution des équations de Navier-Stokes en espace-temps.
$\bar{v}$	vitesse moyenne [L/T].
$\nu a$	préfacteur de recentrage du générateur.
$W$	variable aléatoire exponentielle standard.
$x$	axe orthogonal de l'espace.
$X$	espace arbitraire.
$y$	axe orthogonal de l'espace.
$Z$	réflectivité de pluie du radar.
$\alpha$	index de Lévy. Paramètre multifractal qui quantifie le degré de multifractalité d'un processus $0 \leq \alpha \leq 2$ .
$\alpha'$	paramètre lié au index de Lévy par la relation : $\alpha' = \alpha / (\alpha - 1)$ .
$\beta$	exposant spectral.
$\delta \bar{u}(\bar{x}, 0)$	perturbation initial à petite échelle de l'espace.
$\delta p_\ell$	incrément d'un champ non conservatif à travers une taille $\ell$ .
$\phi$	variable aléatoire uniforme sur le range $[-\pi/2, \pi/2]$ .
$\phi_0$	fonction lie à la détermination des variables aléatoires de Lévy: $\phi_0 = \pi/2((1 -  1 - \alpha )/\alpha)$ .
$\gamma$	ordre de singularité de l'intensité d'un processus.
$\gamma_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$	sous-générateur espace-temps futur de la cascade à la résolution $\lambda$ .
$\gamma_{\max}$	limite supérieure des ordres de singularités $\gamma$ .
$\gamma_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$	sous-générateur espace-temps du passé de la cascade à la résolution $\lambda$ .
$\gamma_p(t t_0)$	sous-générateur passé dépendant par rapport au temps présent $t_0$ .
$\gamma_q$	ordre de singularité relie au moment $q$ par $q = c'(\gamma_q)$ .
$\gamma_\alpha$	variable aléatoire stable de Lévy ou sous-générateur de la cascade.
$\gamma_\alpha^*$	sous-générateur de la cascade après multiplication pour le préfacteur de correction pour $\alpha < 1$ .
$\gamma_\varepsilon$	singularité du champ conservatif.
$\gamma_p$	singularité du champ non conservatif.
$\gamma_\lambda$	sous-générateur de la cascade à la résolution $\lambda$ .
$\gamma_\lambda(\bar{x}, t)$	sous-générateur espace-temps complet de la cascade à la résolution $\lambda$ .
$\gamma^+$	paramètre des singularités plus actifs dans le modèle $\alpha$ -modèle ( $0 < \gamma^+$ ).
$\gamma^-$	paramètre des singularités moins actifs dans le modèle $\alpha$ -modèle ( $\gamma^- < 0$ ).
$\hat{\gamma}_\alpha(k)$	sous-générateur de la cascade dans l'espace de Fourier.
$\hat{\gamma}_\alpha(\bar{k}, \bar{\omega})$	sous-générateur espace-temps de la cascade dans l'espace de Fourier.
$\tilde{\gamma}_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$	Sous-générateur espace-temps futur déterministe.
$\Gamma_p$	générateur multifractal passé.

$\Gamma_p(\cdot t_0)$	générateur multifractal du passé dépendant par rapport au temps présent $t_0$ .
$\hat{\Gamma}_p(\omega \omega_0)$	générateur multifractal du passé dépendant par rapport au temps présent $t_0$ dans l'espace de Fourier.
$\tilde{\Gamma}_p$	relaxation du générateur multifractal passé dans le futur.
$\tilde{\Gamma}_p(\cdot t_0)$	générateur de relaxation du passé.
$\tilde{\hat{\Gamma}}_p(\omega \omega_0)$	générateur de relaxation du passé dans l'espace de Fourier.
$\Gamma_\lambda$	générateur multifractal à la résolution $\lambda$ .
$\Gamma_\lambda(\bar{x}, t)$	générateur multifractal espace-temps de la cascade à la résolution $\lambda$ .
$\hat{\Gamma}_\lambda(k)$	générateur multifractal à la résolution $\lambda$ dans l'espace de Fourier.
$\hat{\Gamma}_\lambda(\bar{k}, \bar{\omega})$	générateur multifractal espace-temps à la résolution $\lambda$ dans l'espace de Fourier.
$\delta$	fonction de Dirac.
$\varepsilon_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$	flux ou champ conservative espace-temps futur à la résolution $\lambda$ .
$\varepsilon_{p,\lambda}(\bar{x}, t)$	flux ou champ conservative espace-temps du passé à la résolution $\lambda$ .
$\varepsilon_\lambda$	flux ou champ conservatif d'un processus à la résolution $\lambda$ .
$\varepsilon_\lambda(\bar{x}, t)$	flux ou champ conservatif en espace-temps à la résolution $\lambda$ .
$\varepsilon_\lambda^{(\eta)}$	flux normalisé par puissances aléatoires $\eta$ à la résolution $\lambda$ .
$\varepsilon'_\lambda(\bar{x}, t)$	flux ou champ conservatif en espace-temps à la résolution $\lambda$ obtenu par transformation non causale.
$\varepsilon_\ell$	flux ou champ conservatif hétérogène.
$\varepsilon_0$	flux ou champ de mesure correspondant à la structure la plus grande.
$\bar{\varepsilon}$	flux ou champ conservatif moyen.
$\tilde{\varepsilon}_{f,\lambda}(\bar{x}, t)$	flux ou champ conservatif espace-temps prévu dans le futur.
$\eta$	puissance arbitraire de normalisation.
$\Lambda$	rapport d'échelle maximum de la cascade.
$\lambda$	rapport d'échelle ou résolution. Il est défini comme le quotient entre l'échelle plus grande d'un processus et l'échelle d'intérêt.
$\mu$	facteur multiplicatif aléatoire de la cascade.
$\rho$	densité $[M/(L^2T^2)]$ .
$\rho$	champ non conservatif.
$\tau$	temps $[T]$ .
$\tau_\ell$	temps de vie d'une structure de taille $\ell$ .
$\nu$	viscosité $[L^2/T]$ .
$\bar{\omega}$	nombre d'onde dans le temps.
$\zeta(q)$	exposant de la fonction de structure du champ non conservatif.
*	produit de convolution.
$\prod_\lambda(A)$	flux total d'un champ conservatif sur l'ensemble $A$ .
$\langle \dots \rangle$	moyenne d'un ensemble.
$\stackrel{d}{=}$	indique identité en probabilité.

## Articles

### ***Scale Problem in Urban Floods : A Multiscale Approache in Special Aspects of Urban Flood Management. Hamburger Wasserbau-Schriftien, Hamburg, pp. 53-60.***

SCALE PROBLEM IN URBAN FLOODS: A MULTISCALE APPROACH

Daniel Schertzer<sup>1</sup>, Ioulia Tchiguirinskaia<sup>1</sup>, Jose Macor<sup>1,3</sup>, Shaun Lovejoy<sup>4</sup>

1 – CEREVE, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Marne-la-Vallée, France;

2 – CNRM, Météo-France, Toulouse, France; 3 –FICH, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina; 4 – Physics dept., McGill U. , Montreal, Que., Canada.

[Daniel.Schertzer@enpc.fr](mailto:Daniel.Schertzer@enpc.fr)

#### **Abstract**

The problem of scales is ubiquitous in hydrology and water management sciences. However, there have been a general tendency to bypass this fundamental problem rather than to solve it. We argue that new statistical physics techniques are now available which permit – over wide ranges of scale- to easily handle extreme variability, intermittency, clustering and long range correlations, which are key phenomena of this problem. For example, it has been shown that nonlinear interactions over a large range of scale generally lead to power law probability distributions that are very rich in extremes. We emphasize that these techniques yield with the help of a few statistical exponents a rather straightforward quantification of the variability of the processes and data over a wide range of space-time scales. We argue that it is timely to discuss their application to urban hydrology and flood management.

#### **Acknowledgement**

The authors would like to thank ERA-NET CRUE, CEATI Dam Safety Interest Group and ECCO-PNRH for their funding of this research

#### **Introduction**

Hydrology and water resource management sciences face a fundamental difficulty: the involved physical, chemical, biological, ecological, and socio-economic processes operate and display an extreme variability over a wide range of space-time scales [ex. *Sposito*, 1998 ; *Tchiguirinskaia et al.*, 2004a]. Data gathered from these processes are used to make water resource management decisions, often through the development of predictive models that assist with decision making. The fundamental problems in the application of these models are often underestimated [*Beven*, 1989]. These problems result from limitations of the model equations relative to a heterogeneous reality; the lack of a theory of subgrid scale integration; practical constraints on solution methodologies; and problems of dimensionality in parameter calibration. The transformation of rainfall into runoff at a basin outlet is the combined effect

of many hydrological processes, which occur at a wide range of spatial and temporal scales [Obled *et al.*, 1994]. As a consequence, the scale of the combined hydrological response of the basin is still problematic and concepts for its definition are yet to be identified [Morin *et al.*, 2001].

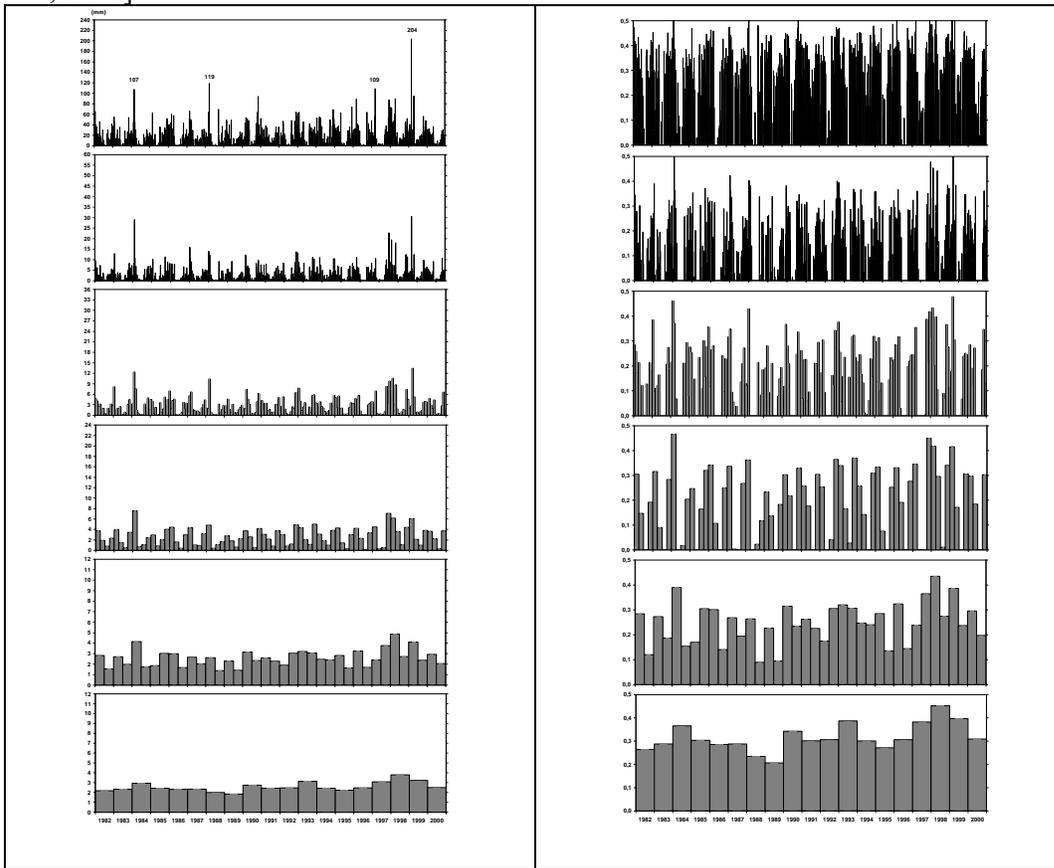


Figure 1: Illustration of the rain cascade observed at Laboulaye (Argentina, 1982-2000) [Macor *et al.*, 2006] at lower and lower resolutions (from top to down), which is rather similar to that observed at Nimes (France, 1975-1990) [Ladoy *et al.*, 1993]; (a) the rain rate  $R_\lambda$  over  $N$  days ( $N = 1, 10, 30, 90, 180, 365$ ) with corresponding resolutions  $\lambda = 1/N$ , (b) the corresponding singularities  $\gamma = \text{Log}(R_\lambda) / \text{Log}(\lambda)$ . These graphs illustrate the fundamental fact that whereas the rain rates are sensitively scale dependent, their singularities are not. The singularities are the key variables for multifractal analysis and simulations.

On the overall, the issues associated with scales and scaling when interpreting data or modelling results are rather perceived as a source of difficulties and uncertainties that should be rather bypassed than to be addressed. This is rather systematic in urban hydrology, although the importance of these issues have been often emphasized to assess hydrological risks [Berthier *et al.*, 2004; Einfalt *et al.*, 2004, Vieux, 2004 #1525; Berne *et al.*, 2004]. Risk is usually identified with the probability of occurrence of a set of input variables times the impact in economic or other societal terms. The input variables can include the effects of climate change on rainfall and ecology, the consequences of human intervention in land use and hydro-morphological resilience, the occurrence of debris flows, the possibility of dam or embankment failures, human errors in operating control facilities, and so on. The impacts can include damage to property, disruption to communications, delay of traffic, worry and stress to human beings, as well as loss of life. This probability can be seen as propagating along a causal chain of physical and societal effects.

The data corresponding to the input variables as well as to the possible impacts, are from various origin (e.g. in-situ or remotely sensed data, census and other surveys), various quality and accuracy, they are often very sparse (in time and space), and are usually acquired at various space or/and time scales. Forgetting these problems can lead to serious misinterpretation and misuse of these data. For instance, even small differences in ground level in urban areas can make significant differences to water pathways, therefore terrain data at various resolution and/or accuracy can lead to distinct estimations of the inundated areas for a given return period. Time scales are also critical in evaluating the economical damages, e.g. the depth and duration of flooding are crucial for the integrity of structures, preserving communications, velocity for structures scouring.

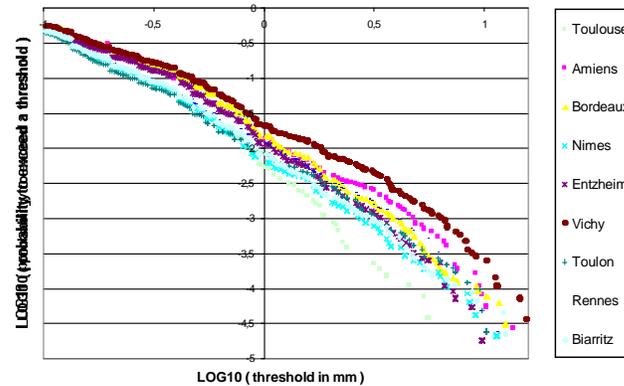


Figure 2: Log-log plot of the rainfall probability tails for 9 cities in France with distinct regional climates: Toulouse, Amiens, Nîmes, Vichy, Rennes, Biarritz, Bordeaux, Entzheim, Toulon. All of them exhibit over a significant range of thresholds fat tails (i.e. power laws) with an exponent  $q_D = 2.9 \pm 0.7$  in good agreement with those reported by previous studies.

## Statistical physics for urban hydrology

### ***Beyond uncertainty: multiscale variability***

The simplest and most fruitful manner to address the extreme variability of processes and data over a wide range of space-time scales is to search for an elementary and scale invariant process that generates this variability scale by scale (Figure 1 for illustration) and that is defined by the nonlinear interactions between structures at different scales. This corresponds in fact to the concept of cascades [Richardson, 1922 ; Yaglom, 1966] and finally the concept of multifractals [Benzi *et al.*, 1984 ; Schertzer and Lovejoy, 1984; Parisi and Frisch, 1985 ], in particular for the analysis and modelling of precipitations [Schertzer and Lovejoy, 1987]. The possibility to characterize precipitations *across scales* (e.g. from continental scales to storm cub-cells [Lovejoy and Schertzer, 2006]) instead of doing it only *at a given scale* lead to a number of multifractal precipitation studies [for an early review Lovejoy and Schertzer, 1995] and more recently to multifractal discharge studies [Tessier *et al.*, 1996; Pandey *et al.*, 1998; Hubert *et al.*, 2002; Labat *et al.*, 2002; Tchiguirinskaia *et al.*, 2002; Tchiguirinskaia *et al.*, 2004b ]. Indeed, in this framework, one can address the question of quantifying and modelling the variability in an increasing complexity order (Figure 1 for illustration with the rain rate):

- i) Which scale dependence of the average « activity »?
- ii) Which average intermittency: how does the average « activity » cluster at smaller and smaller scales?
- iii) Which intermittency variability with respect to the various activity levels?
- iv) Which behaviour for the extremes?

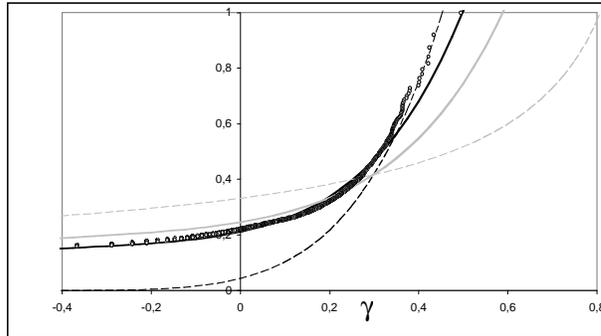


Figure 3: Multifractal codimensions for Laboulaye daily rain rates (see Figure 1) obtained with the help of: empirical data (open circles); universal multifractals for the ranges of 1-16 days (grey dashed line) and of 16-512 days (black dashed line); surrogates for the full scale range of daily data (black line) and of instantaneous data (grey line).

### Multifractal quantification of the variability

To study a field, e.g. the rain rate  $R_\lambda$  or the river discharge  $Q_\lambda$ , across scales require to observe at various resolutions  $\lambda$ , which is defined by the ratio  $L/\ell$  of the external (time or/and space) scale  $L$  of the phenomenon (or of the sample) and of the observation scale  $\ell$ . The observations at various scales may result of various sensors, but more usually from successive coarse graining (e.g. moving or fixed averages) of observations from a given sensor. In case of scale symmetry, a well defined parameter corresponds to the questions ((i)-(iv)):

- the exponent  $H$  (so-called Hurst exponent) is the scaling exponent of the statistical average:  $\langle R_\lambda \rangle \approx \lambda^H$  ( $\langle \cdot \rangle$  -the ensemble average,  $\approx$  -the asymptotic equivalence for large resolutions). For  $H=0$  the statistical average of the observations is strictly scale invariant and the field is said to be conservative;
- the codimension  $C_I \geq 0$ :  $C_I = 0$  for an homogeneous field more generally  $C_I$  measures the clustering of the (average) activity at smaller and smaller scales;
- the multifractality index  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ) measures the variability of this clustering with respect to the various activity levels.  $\alpha=0$  for a field whose all activity levels clusters at the same rate, the field is said to be uni/mono-fractal and the clustering is defined with the help of the unique fractal dimension  $d-C_I$ ; the exponent  $q_D$  ( $0 < q_D \leq \infty$ ) of the power-law distribution of the extremes ( $q_D = \infty$  corresponds to an exponential falloff), often called Pareto law ( $q_D < \infty$ ), i.e. for large thresholds  $s$ :  $\Pr(R_\lambda > s) \approx s^{-q_D}$ .

For instance, many studies point out an exponent  $q_D \approx 3$  for power-law distribution of the rainfall extremes (Figure 2 for illustration). These four parameters are defined for any cascade process, the first three ( $H, C_I, \alpha$ ) are related to the rather average behaviour of the field, contrary to  $q_D$ , the last one. Nevertheless, in the framework of universal multifractals ( $H, C_I, \alpha$ ) fully define the field, including its extremes, and therefore  $q_D$ . Furthermore, this relationship is analytically known for a cascade over a given (fractal) dimension  $D$ , is the non trivial solution ( $\neq 1$ ) of:  $(q_D^\alpha - q_D)(\alpha - 1) = (q_D - 1)D/C$ . Various methods have been developed to estimate these 'universal multifractal exponents' [Lavallée et al., 1992; Schertzer and Lovejoy, 1993].

The logarithm (base  $\lambda$ ) of rain rates define their multifractal singularities  $\gamma(\lambda)$ . Similarly, the logarithm (base  $\lambda$ ) of its exceedence probability ( $\Pr$ ) empirically estimates its multifractal codimensions (Figure 3, open circles, that corresponds to the daily data from Figure 1a), which are scale invariant over the scaling range, contrary to probabilities. At the same time, the multifractal parameters estimated over a given range of scales, define the

corresponding theoretical codimension functions. The dashed lines of Figure 3 illustrate these functions for the ranges of 1-16 days and 16-512 days [Macor *et al.*, 2006]. One may note the significant difference between these two functions. This corresponds to distinct scaling behaviours for the weather and climatology components. Nevertheless, with the help of cascade properties, one can theoretically define the compound codimension that takes into account these two scaling regimes (Figure 3, black line) that is in satisfactory agreement with an empirical data. Furthermore, by assuming that the scaling behaviour observed over the range of 1-16 days will continue to smaller scales, one may obtain the behaviour of instantaneous (unmeasured) intensities (Figure 3, grey line) that can easily be converted back to physical units to obtain Intensity-Duration curves.

## Summary and prospects

We pointed out that we have nowadays rather straightforward techniques to quantify the variability of processes and data over a wide range scales. We believe that they are rather indispensable to put an end to the "structural" deficit of retrospective data, i.e. apart from a few major events that lead to specific investigations, one has neither data on the amounts of damage per event and per urban commune impacted by a given event, nor any reliable modelling of these events. More generally, we believe that these techniques are indispensable to help citizens, communities, city or state planners to take their decision with not only all the possible information, but also with reliable insights on possible consequences of their choice, e.g. to evaluate the efficiency of sustainable drainage, opening of culverts and restoration of natural rivers to attenuate flood waves and to reduce the vulnerability and damages.

## References

- Benzi, R., G. Paladin, G. Parisi, and A. Vulpiani, On the multifractal nature of fully developed turbulence, *Journal of Physics A*, 17, 3521-3531, 1984.
- Berne, A., G. Delrieu, J.D. Creutin, and C. Obled, Temporal and spatial resolution of rainfall measurements required for urban hydrology, *Journal of Hydrology*, 299 (3-4), 166-179, 2004.
- Berthier, E., H. Andrieu, and J.D. Creutin, The role of soil in the generation of urban runoff: development and evaluation of a 2D model, *Journal of Hydrology*, 299 (3-4), 252-266, 2004.
- Beven, K., Changing ideas in hydrology — The case of physically based models, *Journal of Hydrology*, 195 (1-2), 157-172, 1989.
- Einfalt, T., K. Arnbjerg-Nielsen, C. Golz, N.E. Jensen, M. Quirnbach, and G. Vaes, Towards a roadmap for use of radar rainfall data in urban drainage, *Journal of Hydrology*, 299 (3-4), 186-202, 2004.
- Hubert, P., I. Tchiguirinskaia, H. Bendjoudi, D. Schertzer, and S. Lovejoy, Multifractal modeling of the Blavet river discharges at Guerledan., in *Proceedings of the Third Celtic Hydrology Colloquium*, pp. 47-58, Galway, Ireland, 10-12 July 2002., 2002.
- Labat, D., A. Mangin, and R. Ababou, Rainfall-runoff relations for karstic springs: multifractal analyses, *J. Hydrology*, 256, 176-195, 2002.
- Ladoy, P., F. Schmitt, D. Schertzer, and S. Lovejoy, Analyse multifractale de la variabilité temporelle des observations pluviométriques à Nîmes, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, in press, 1993.
- Lavallée, D., S. Lovejoy, D. Schertzer, and F. Schmitt, On the determination of universal multifractal parameters in turbulence, in *Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas*, edited by K. Moffat, M. Tabor, and G. Zaslavsky, pp. 463-478, Kluwer, 1992.
- Lovejoy, S., and D. Schertzer, Multifractals and Rain, in *New Uncertainty Concepts in Hydrology and Water Resources*, edited by Z.W. Kundzewicz, pp. 62-103, Cambridge University Press, 1995.
- Lovejoy, S., and D. Schertzer, Multifractals, cloud radiances and rain, *J. of Hydrol.*, 322, 59-88, 2006.
- Macor, J., I. Tchiguirinskaia, D. Schertzer, and S. Lovejoy, Analyse Multifractale de la Pluie à Laboulaye (Argentine), *J. Hydrological Sciences*, (submitted), 2006.

- Morin, E., Y. Enze, U. Shamir, and R. Garti, The characteristic time scale for basin hydrological response using radar data, *Journal of Hydrology*, 253 (1-4), 85-99, 2001.
- Obled, C., J. Wendling, and K. Beven, The sensitivity of hydrological models to spatial rainfall patterns: an evaluation using observed data, *Journal of Hydrology*, 159 (1-4), 305-333, 1994.
- Pandey, G., S. Lovejoy, and D. Schertzer, Multifractal Analysis Including Extremes of Daily River Flow Series for Basins one to a million square kilometers, *J. Hydrology*, 208, 62-81, 1998.
- Parisi, G., and U. Frisch, On the singularity structure of fully developed turbulence, in *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*, edited by M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi, pp. 84-88, North Holland, Amsterdam, 1985.
- Richardson, L.F., *Weather prediction by numerical process*, Cambridge University Press republished by Dover, 1965, 1922.
- Schertzer, D., and S. Lovejoy, On the Dimension of Atmospheric motions, in *Turbulence and Chaotic phenomena in Fluids*, edited by T. Tatsumi, pp. 505-512, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1984.
- Schertzer, D., and S. Lovejoy, Physical modeling and Analysis of Rain and Clouds by Anisotropic Scaling of Multiplicative Processes, *Journal of Geophysical Research*, D 8 (8), 9693-9714, 1987.
- Schertzer, D., and S. Lovejoy, *Lecture Notes: Nonlinear Variability in Geophysics 3: Scaling and Multifractal Processes in Geophysics*, 292 pp., Institut d'Etudes Scientifique de Cargèse, Cargèse, France, 1993.
- Sposito, G., *Scale Dependence and Scale Invariance in Hydrology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- Tchiguirinskaia, I., M. Bonnel, and P. Hubert, Scales in Hydrology and Water Management, pp. 170, IAHS, Wallingford U.K., 2004a.
- Tchiguirinskaia, I., P. Hubert, H. Bendjoudi, and D. Schertzer, Multifractal Modeling of River Runoff and Seasonal Periodicity, in *Preventing & Fighting Hydrological Disasters*, Orisonturi Universitare, Timisoara, Romania, 2002.
- Tchiguirinskaia, I., D. Schertzer, P. Hubert, H. Bendjoudi, and S. Lovejoy, Multiscaling geophysics and sustainable development, in *Scales in Hydrology and Water Management*, edited by I. Tchiguirinskaia, M. Bonnel, and P. Hubert, pp. 111-137, IAHS Press, Wallingford, UK, 2004b.
- Tessier, Y., S. Lovejoy, P. Hubert, D. Schertzer, and S. Pecknold, Multifractal analysis and modeling of Rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions, *J. Geophys. Res.*, 31D, 26,427-26,440, 1996.
- Yaglom, A.M., The influence on the fluctuation in energy dissipation on the shape of turbulent characteristics in the inertial interval, *Sov. Phys. Dokl.*, 2, 26-30, 1966.

**Méthodes Multifractales Appliquées à la Prédiction de Pluie en Utilisant des Données Radar in La Houille Blanche, Num. 4 (août 2007) pp. 92.**

## MÉTHODES MULTIFRACTALES APPLIQUÉES À LA PRÉVISION DE PLUIE EN UTILISANT DES DONNÉES RADAR

*Multifractal Methods Applied to Rain Forecast Using Radar Data*

José Macor<sup>(1)</sup>, Daniel Schertzer<sup>(1,2)</sup>, Shaun Lovejoy<sup>(3)</sup>

<sup>(1)</sup> CERREVE, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 6-8 Avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, 77455 Marne la Vallée Cedex 2

Tél.: +33 (0)1 64 15 36 48, Fax: 01 64 15 37 64, e-mail: macor@cereve.enpc.fr

<sup>(2)</sup> CNRM, Météo-France, 1 Quai Branly, 75007 Paris, France

<sup>(3)</sup> Physics Dept., McGill University, 3600 University St, Montreal, Quebec H3A 2T8, Canada

*Dans des situations d'urgence, les systèmes hydrologiques d'alerte et de prévision exigent de plus en plus une information spatio-temporelle détaillée et des prévisions fiables de la pluie à très court terme. Les actuels modèles de prévision météorologiques ou les méthodes statistiques de traitement d'images radar et satellite ne peuvent pleinement répondre à ces exigences: nombreuses paramétrisations, temps de mise en route et de calcul trop longs ou non prise en compte de la dynamique fortement non linéaire des cellules orageuses. L'approche multifractale, fondée physiquement sur les modèles de cascade, prend en compte la hiérarchie des structures et leurs interactions non linéaires sur une grande gamme d'échelles spatio-temporelles, ainsi que l'anisotropie temps-espace. L'avantage de cette approche est qu'elle ne fait intervenir qu'un nombre très limité de paramètres, qui de plus ont une signification physique forte.*

*Nous présentons la mise en oeuvre d'une procédure de prévision multifractale de pluie utilisant des données radar pour déterminer le passé du générateur de la cascade. Nous comparons deux modes de prévision multifractale, respectivement stochastique et déterministe.*

*In the emergency situations, the hydrological alert and forecast systems require more and more detailed space-time information and reliable rain forecasts in the very short term. The current weather forecasting models or the statistical methods of radar and satellite image processing cannot fully answer these requirements: numerous parameterizations, long spin-up and computation times or strongly nonlinear dynamics of stormy cells not taken into account. The multifractal approach, physically based on the cascade models, takes into account the hierarchy of the structures and their nonlinear interactions over a wide range of space time scales, as well as the time-space anisotropy. The advantage of this approach is that it requires only a very limited number of parameters, which moreover have a strong physical significance.*

*We present the implementation of a procedure of multifractal rain forecast using data radar to determine the past of the cascade generator. We compare two modes of multifractal forecast, respectively stochastic and deterministic.*

### introduction

Les précipitations, notamment la pluie, constituent un phénomène naturel qui a un très fort impact socio-économique, surtout lorsqu'elles ont un caractère torrentiel. Pour prendre en compte cet aspect, les systèmes hydrologiques d'alerte et de prévision ont besoin d'une information spatio-temporelle plus détaillée et des prévisions fiables de précipitation à très court terme. Ceci a une importance particulière dans de situations d'urgence (crues éclair, gestion de réseaux d'assainissement urbain, des barrages, etc.).

Les champs de nuages et de précipitations demeurent les champs les plus difficiles à simuler pour les actuels modèles de prévision météorologique. En effet, les échelles spatio-

temporelles de ces modèles restent largement supérieures à celles qui sont pertinentes pour les précipitations : les mécanismes des précipitations sont essentiellement paramétrisés et les pluies ne sont estimées que sur des échelles relativement grossières. De plus, le temps de mise en route de ces modèles est souvent prohibitif pour des prévisions à court terme.

Différentes méthodes statistiques de traitement des images satellites et radar ont été développées pour combler ce déficit de prévision. Ces méthodes prennent en compte un grand nombre d'informations à petite échelle, mais elles n'ont pas de base physique, en particulier elles ne prennent pas en compte la dynamique fortement non linéaire des cellules orageuses.

Une alternative permettant a priori de dépasser, à l'aide des méthodes multifractales, les limites des précédentes méthodes a été récemment considérée. Elle est fondée sur les modèles de cascade et prend en compte la hiérarchie des structures ainsi que leurs interactions non linéaires sur une grande gamme d'échelles spatio-temporelles et l'anisotropie temps-espace. Fondamentalement, les processus de cascade développent des gradients du contenu en eau de plus en plus grands sur des fractions de plus en plus petites de l'espace physique. Ce type de modèles a l'avantage d'avoir un nombre limité de paramètres qui ont une signification physique forte et peuvent être évalués soit théoriquement, soit empiriquement.

Nous présentons la mise en oeuvre d'une procédure correspondant à cette alternative et son application à l'événement orageux du 8-9 septembre 2002 à Nîmes, en utilisant des données radar pour déterminer le passé du générateur de la cascade. Nous discutons deux modes de prévision : l'un correspondant à une paramétrisation stochastique des petites échelles du futur, l'autre à une paramétrisation déterministe.

## Cas d'Etude

Le cas d'étude considéré est l'orage du 8 au 9 septembre 2002 qui a touché Nîmes dans la région méditerranéenne des Cévennes, au sud de la France. Des valeurs de taux de pluie journalière assez exceptionnelles ont été mesurées, notamment supérieures à 680 mm, soit de l'ordre du taux annuel. Le passage de cet événement a provoqué des pertes de vies humaines, de très importants dommages sur les infrastructures et des pertes économiques considérables.

Notre travail a essentiellement porté sur une série de 256 images, fournie par la Direction de la Climatologie de Météo-France, de la réflectivité radar de la pluie mesurée par le radar (en bande S) de Nîmes. La période entre images est de 5 minutes et chacune a 256x256 pixels correspondant à une résolution spatiale de l'ordre du kilomètre. La période d'analyse commence à 11h30 le 8 septembre et finit à 8h45 le 9 septembre. La réflectivité radar de la pluie ( $Z$ ) est par convention transformée en taux de pluie ( $R$  en mm/h) à l'aide de la formule de Marshall et Palmer [1] :

$$Z = aR^b \quad (1)$$

avec les valeurs classiques des paramètres  $a = 200$  et  $b = 1.6$ . Nous ne discuterons pas ici les limites de cette formule [2], car rien ne prévient d'appliquer cette méthode à d'autres estimations du champ de pluie.

## L'APPROCHE MULTIFRACTALE

### *Aspect théorique*

L'approche multifractale a pour base physique la notion de cascade suggérée par Richardson [3] comme pilotant la dynamique atmosphérique : les grosses structures se cassent en plus petites structures en leur transférant leur énergie, et cela se répète jusqu'à l'échelle de la viscosité moléculaire, qui est de l'ordre du millimètre. Dans les modèles de cascades les plus simples [4], [5], [6], un facteur aléatoire détermine la fraction de flux transmis d'un tourbillon

à chacun de ses sous-tourbillons. De plus, ces facteurs sont tous statistiquement indépendants. Le cas plus caricatural est le  $\beta$ -modèle [7], [8], qui a un seul niveau d'activité et par conséquent une seule dimension fractale caractérisant la concentration du flux d'énergie sur une fraction extrêmement ténue de l'espace. Mais ce caractère mono-fractal est non générique : la simple introduction de deux niveaux d'activité (forte et faible) dans un pas de la cascade [9], [10], [11], génère tout un spectre de niveaux d'activité et par conséquent un hiérarchie (infinie) de dimensions fractales. D'où le terme multifractal [12]. Chaque dimension caractérise l'ensemble associé avec un ordre particulier de singularité  $\gamma$  de l'intensité du processus à différentes échelles. De façon plus précise, la probabilité qu'un taux de pluie multifractal  $R_\lambda$ , à une résolution spatiale donnée  $\lambda$  (ou rapport de l'échelle de l'échantillon par rapport à celle de l'observation, dans cette étude  $\lambda = 256$ ), dépasse un certain seuil donné  $\lambda^\gamma$  est donnée par [13] :

$$\Pr(R_\lambda \geq \lambda^\gamma) = \lambda^{-c(\gamma)} \quad (2)$$

où  $c(\gamma)$  ( $c(\gamma) > 0$ ) est la codimension statistique de l'événement  $R_\lambda \geq \lambda^\gamma$ . Si le champ est mono-fractal,  $c(\gamma)$  est constant. Si  $c(\gamma) < d$ , où  $d$  est la dimension de l'espace physique,  $d - c(\gamma)$  est la dimension fractale du support  $R_\lambda \geq \lambda^\gamma$ . La définition de la fonction codimension implique que  $c(\gamma)$  est une fonction croissante de  $\gamma$  et concave. Sous des conditions très générales, la connaissance de la distribution de probabilité d'une variable aléatoire et celle de tous ses moments statistiques sont équivalentes. Comme  $c(\gamma)$  caractérise l'invariance d'échelle de la distribution de probabilité, il est naturel d'introduire une fonction qui caractérisera de façon analogue les divers moments statistiques d'ordre  $q$  du taux de pluie  $R_\lambda$  à la résolution spatiale  $\lambda$  [13], [14] :

$$\langle R_\lambda^q \rangle = \lambda^{K(q)} \quad (3)$$

où,  $\langle \cdot \rangle$  désigne l'espérance mathématique ou moyenne d'ensemble, et  $K(q)$  est l'exposant de la loi d'échelle des moments statistiques d'ordre  $q$ .  $K(q)$  est aussi une fonction concave. Si le processus de cascade est conservatif (c'est-à-dire que la moyenne ne dépend pas de l'échelle), la fonction vérifie la condition  $K(1) = 0$  imposée par la conservation de l'énergie en moyenne d'ensemble :

$$\langle R_\lambda \rangle \equiv 1 \quad (4)$$

De façon générale, il faut une infinité de paramètres (ex. la fonction  $c(\gamma)$  ou  $K(q)$ ) pour caractériser un champ multifractal. Cependant, les multifractals universels [13], qui par une généralisation du théorème de la limite centrale, correspondent aux limites stables et attractives des processus multifractals identiquement indépendamment distribués, et interagissant non linéairement entre eux, sont définis par seulement trois paramètres :

- l'exposant de Hurst,  $H$ , qui mesure le degré de non conservation du champ ( $H = 0$  pour un champs conservatif),
- la codimension fractale,  $C_1$ , qui mesure l'hétérogénéité du champ ( $C_1 = 0$  pour un champ hétérogène),
- l'index de multifractalité  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ), que mesure combien multifractal est le champ ( $\alpha = 0$  pour un champ mono-fractal,  $\alpha = 2$  pou le cas (improprement) appelé log-normal).

La fonction d'échelle des moments statistiques  $K(q)$  et la fonction  $c(\gamma)$  ont les expressions analytiques suivantes [13] :

$$K(q) - Hq = \begin{cases} C_1(q^\alpha q)/(\alpha - 1); & \alpha \neq 1 \\ C_1 q \ln(q); & \alpha = 1 \end{cases}; \quad c(\gamma - H) = \begin{cases} C_1(\gamma/(C_1\alpha') + 1/\alpha)^{\alpha'}; & \alpha \neq 1 \\ C_1 \exp(\gamma/C_1 - 1); & \alpha = 1 \end{cases} \quad (5)$$

où  $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$

## Analyse spectrale

Le spectre d'énergie est un moyen commode [15], [16] pour obtenir de premières estimations du paramètre multifractal  $H$ . En effet, le spectre d'énergie  $E(k)$  ( $k$  étant le nombre d'onde) a une pente spectrale constante  $\beta$  sur la gamme d'invariance d'échelle du champ :

$$E(k) \approx k^{-\beta} \quad (6)$$

et du fait que le spectre est la transformée de Fourier de la covariance :

$$\beta = 1 + 2H - K(2) \quad (7)$$

Un processus conservatif exige non seulement  $H = 0$ , mais également  $K(2) \geq K(1) = 0$ , donc que  $\beta \leq 1$ . Réciproquement,  $\beta - 1$  peut être considéré comme une approximation de  $2H$  en négligeant  $K(2)$ . Cette première estimation peut être utilisée pour estimer une quantité conservative, appelée le flux, par une dérivation fractionnaire d'ordre  $H$ . La figure 1(a) présente le spectre individuel de quelques images radar, la figure 1(b) montre le spectre moyen de toute la série d'images. Pour  $k > 15$ , la pente spectrale est  $\beta \approx 1.69$ , donc la série analysée n'est pas conservative et  $H \approx 1/3$ .

## La méthode du Double Moment Trace

Le Double Moment Trace ou DTM (de l'anglais Double Trace Moment) [17] est une méthode efficace et simple pour estimer directement les paramètres  $\alpha$  et  $C_1$ . On élève à différentes puissances (arbitraires)  $\eta$  le taux  $R_\lambda$  à la résolution la plus fine  $\Lambda$ , définissant ainsi  $R_\lambda^{(\eta)} = R_\lambda^\eta$  que l'on agrège à des résolutions  $\lambda$  de moins en moins forte et l'on montre que :

$$R_\lambda^{(\eta)} = R_\lambda^\eta / \langle R_\lambda^\eta \rangle \quad (8)$$

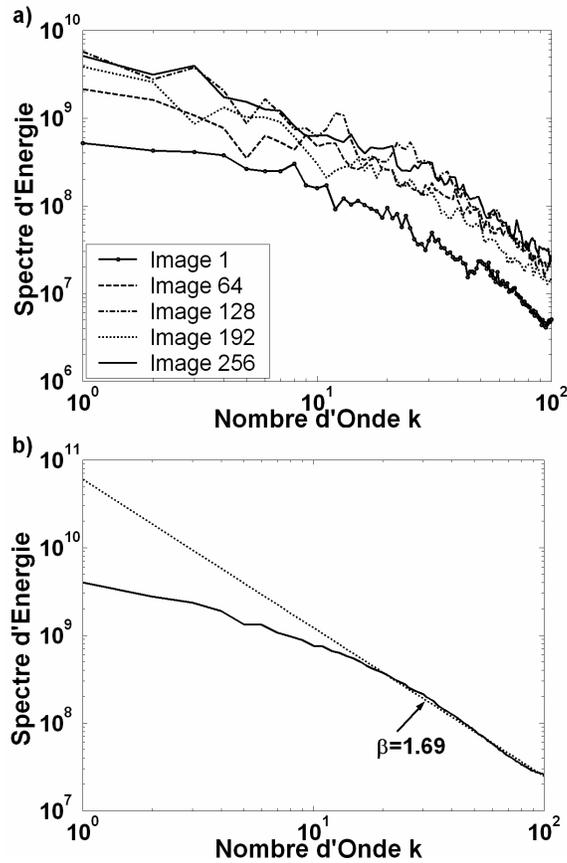
Les moments statistiques d'ordre  $q$  sont alors calculés. Pour les processus multifractals universels, du fait des équations (5) et (8) l'exposant de la loi d'échelle  $K(q, \eta)$  des moments statistiques de  $R_\lambda^{(\eta)}$  satisfait :

$$K(q, \eta) = \eta^\alpha K(q) \quad (9)$$

Nous utilisons cette équation en variant systématiquement  $\eta$ , et pour divers valeurs de  $q$  ( $q = 1.2, 1.5, 2, 2.5$ ). En représentation log-log, pour chaque valeur fixée de  $q$ ,  $K(q, \eta)$  est une droite de pente  $\alpha$ , et le paramètre  $C_1$  peut se déduire de l'intersection de  $K(q, \eta)$  avec  $\eta = 1$  :

$$C_1 = K(q)(\alpha - 1) / (q^\alpha - q) \quad (10)$$

Dans notre cas, les paramètres multifractals universels peuvent être déduits de la figure 2. Pour des résolutions  $\lambda$  variant entre 1 et 256 on trouve  $\alpha = 0.84 \pm 0.02$  et  $C_1 = 0.44 \pm 0.02$ .



**Figure 1 : Analyse spectrale. 1a) Spectre d'énergie individuel de cinq images radar. 1b) Spectre d'énergie moyenne des 256 images de la série.**

### ***Divergence des moments***

L'approche multifractale a mis en évidence la possibilité d'avoir des extrêmes tellement fréquents que leur poids en probabilité entraîne une divergence des moments statistiques. La figure 3 présente en log-log la probabilité de l'intensité de pluie  $R$  de dépasser un seuil fixé  $r$ . Un comportement asymptotique en loi de puissance a été ajusté par une régression linéaire (en log-log). La pente de cette asymptote est une estimation de l'ordre critique de divergence des moments  $q_D = 3$  : les moments théoriques (c'est à dire avec un échantillon infini) sont infinis pour tous les ordres  $q \geq q_D$ . Cette estimation peut être comparée avec celles obtenues par des analyses similaires pour des autres données radar [2], [13]. Une valeur similaire a été obtenue dans une analyse multifractale des données pluviométriques de pluie à Nîmes [18]. La divergence des moments pour  $q \geq q_D$  se retrouve dans l'asymptote linéaire de la fonction empirique  $K(q)$  d'échelle des moments statistiques (cf figure 4). L'apparition de cette asymptote à partir de  $q_D \approx 3$  peut être comprise comme une transition de phase multifractal [19], [20]. La fonction  $K(q)$  théorique (ligne pleine) obtenue pour  $\alpha = 0.84$  et  $C_1 = 0.44$  en utilisant l'équation (5) est très proche de la courbe expérimentale pour des valeurs de  $q$  compris entre  $q_{\min} = 0.7$  et  $q_D = 0.3$ , mais ne l'est plus après cette dernière valeur.

## Anisotropie spatio-temporelle

L'Analyse spatio-temporelle est effectuée entre une direction d'espace et celle du temps. L'objectif est de déterminer l'exposant d'écart à l'anisotropie  $H_t$  ( $H_t = 0$  pour une isotropie), qui relie la durée  $\tau$  des phénomènes à leur extension spatiale  $l$  par une loi d'échelle  $\tau = l^{(1-H_t)}$ , est indispensable pour le développement de cascades spatio-temporelles. La méthode utilisée [21], [22], consiste à calculer les fonctions d'échelle des moments statistiques  $K_x(q)$  et  $K_t(q)$  correspondant à des coupes spatio-temporelles le long respectivement des axes  $x$  et  $t$ . L'exposant d'anisotropie peut être estimé à l'aide de la relation suivante (cf figure 5) :

$$K_x(q) = K_t(q) / (1 - H_t) \quad (11)$$

De façon analogue on peut estimer  $H_t$  par rapport à l'autre direction de l'espace. Dans notre cas la valeur moyenne de  $H_t$  à été trouvé  $H_t = 0.33$ , ce qui est en très bon accord avec la valeur théorique 1/3 d'une cascade turbulente pilotée par la dynamique.

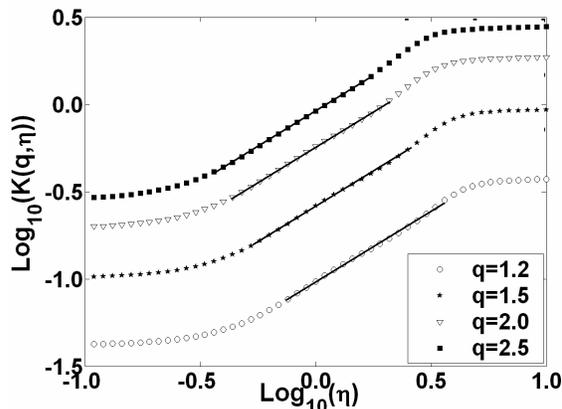


Figure 2 : Graphique log-log de  $K(q)$  vs  $\eta$  pour différents valeurs de  $q$ . Les pentes des droites correspondent au paramètre  $\alpha = 0.84$ .

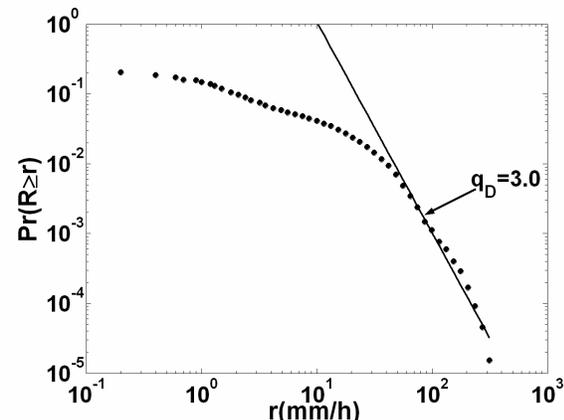


Figure 3 : Probabilité  $\text{Pr}(R \geq r)$  de dépasser un seuil d'intensité fixé  $r$  pour les 256 images radar.

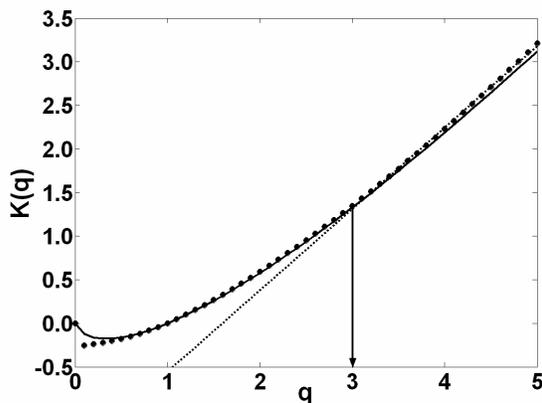


Figure 4 : Graphique log-log de  $K(q)$  vs  $q$ . La ligne pointillée est la  $K(q)$  empirique tant que la ligne pleine es la  $K(q)$  théorique pour  $\alpha = 0.84$ .

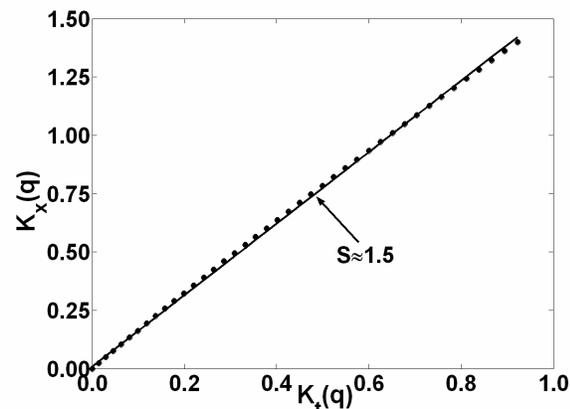


Figure 5 : Anisotropie :  $K_x(q)$  vs  $K_t(q)$  pour les directions  $x$  et  $t$ . L'inverse de la pente de cette relation conduite à  $H_t = 0.33$ .

## Modele de prevision

### **Simulation d'un champ multifractal**

Les modèles de cascade opèrent avec un générateur invariant d'échelle qui agit depuis l'échelle la plus grande à l'échelle la plus petite. Pour produire des cascades multiplicatives continues, on considère le processus additif défini par le logarithme du champ à une résolution finie  $\lambda$ . Ici, nous nous contenterons de mentionner que la limite (pour la résolution tendant vers l'infini) d'un tel processus n'a rien de trivial [13]. Ainsi, nous définissons le générateur  $\Gamma_\lambda$  à la résolution  $\lambda$  du champ multifractal  $\varepsilon$  par la relation :

$$\varepsilon_\lambda = e^{\Gamma_\lambda} \quad (12)$$

Pour avoir un comportement en loi d'échelle, de fait multifractal, le générateur peut être pris comme résultant d'une convolution d'un bruit blanc  $S_\lambda$ , appelé sous-générateur, par un noyau de convolution en loi de puissance  $g_\lambda$  :

$$\Gamma_\lambda = g_\lambda * S_\lambda \quad (13)$$

Cette convolution (en fait une intégration fractionnaire) peut être numériquement réalisée à l'aide d'une transformation de Fourier rapide, puisque :

$$\Gamma_\lambda = F^{-1}(F(g_\lambda) * F(S_\lambda)) \quad (14)$$

Dans le cas de multifractals universels,  $S_\lambda$  est un bruit blanc de Lévy (avec une anti-symétrie maximale) et le noyau de convolution est :

$$g_\lambda = \|\bar{x}, t\|^{-Del/\alpha} \quad (15)$$

où  $Del = d + 1 - H_t$  est appelé la dimension elliptique (dimension effective du domaine espace-temps du processus),  $d$  est la dimension de espace et  $\|\|$  est une échelle espace-temps telle que :  $\|\lambda\bar{x}, \lambda^{1-H_t} t\| = \lambda \|\bar{x}, t\|$

L'équation (12) définit un champ conservatif  $\varepsilon_\lambda$  à partir du générateur  $\Gamma_\lambda$ . Pour obtenir un champ non conservatif  $R_\lambda (H \neq 0)$ , typique des processus géophysiques, on peut effectuer une nouvelle convolution :

$$R_\lambda = G_\lambda * \varepsilon_\lambda \quad (16)$$

dont le noyau  $G_\lambda$  est défini par :

$$G_\lambda = \|\bar{x}, t\|^{-Del+H} \quad (17)$$

La figure 6 montre un exemple de simulation d'un champ de précipitation. Le coté gauche illustre le processus de simulation commençant par un bruit blanc que est coloré par convolution pour obtenir le générateur, puis par exponentiation le flux conservatif que est à son tour convolé pour obtenir le champ de précipitation. Le coté droit illustre le processus inverse par les déconvolutions correspondantes. Nous sommes actuellement en train d'améliorer le schéma numérique d'inversion pour réduire les instabilités numériques à l'origine des différences entre les deux générateurs.

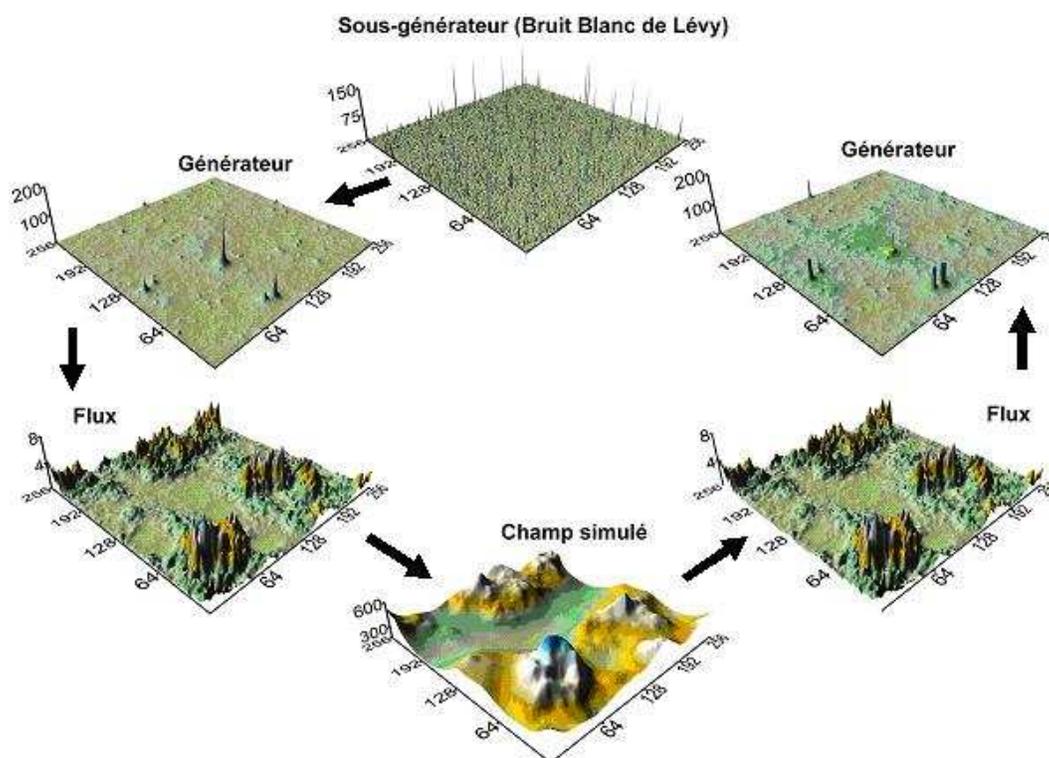
### **Prévision multifractale**

Pour effectuer des prévisions multifractales, nous exploitons le fait qu'au cœur d'un processus multifractal universel il y a un bruit blanc de Lévy, les sous-générateur  $S_\lambda$ , dont le futur est indépendant du passé. Une première étape correspond à inverser la simulation afin d'estimer le sous-générateur passé  $S_{\lambda,p}$ , à partir des observations passées (dans le cas d'étude, la série des données radar de pluie) Nous avons mentionné que cela pose plusieurs questions techniques du fait des instabilités numériques générées par les inversions.

La deuxième étape, plus aisée, correspond à une simulation effectuée à partir du sous-générateur complété sur la période (future) de prévision :  $S_\lambda = S_{\lambda,p} + S_{\lambda,f}$ , où  $S_{\lambda,p}$  est déterminé dans la précédente étape. Deux options assez évidentes (illustrées en figure 7) :

- Une prévision (ou paramétrisation sous-maille) stochastique :  $S_{\lambda,f}$  est un bruit blanc de Lévy avec les valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $C_1$  correspondant aux estimations faites sur  $S_{\lambda,p}$  (ici :  $\alpha=1.5$ ,  $C_1=0.2$ ,  $H=0.1$ ). En d'autres termes on prolonge de manière stochastique le passé pour conserver les mêmes règles (à travers les échelles spatio-temporelles) d'interaction et de destruction des structures.
- Une prévision (ou paramétrisation sous-maille) déterministe :  $S_{\lambda,f}$  est défini de façon déterministe pour conserver le flux à travers les échelles.

Le contraste entre ces deux options est assez évident en figure 7, où la réalisation A sert de référence et les trois réalisations ont le même passé ( $t \leq t_0$ ). La réalisation B correspond à une prévision stochastique à partir de ce passé, et C à une prévision déterministe. On note que B a une variabilité de même type que celle de A, car effectivement des structures à petites échelles sont générées dans le futur, ce qui n'est pas le cas pour C.



**Figure 6 : Simulation d'un champ de précipitation et processus inverse. Les valeurs du sous-générateur (bruit blanc) et des générateurs sont négatives, mais dans cette figure sont prises en valeur absolue à fin mieux illustrer leurs caractéristiques. On peut observer que l'opération de déconvolution introduit des instabilités dans le générateur (image à droite), ce qui explique la différence entre les deux générateurs de la cascade.**

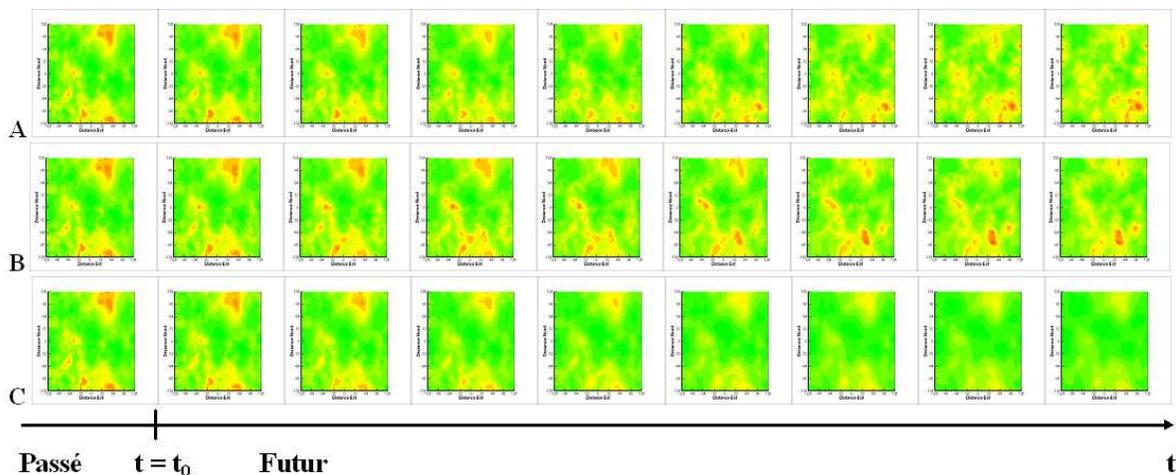
## CONCLUSIONS

Dans cet article nous avons présenté la mise en oeuvre d'une nouvelle technique pour la prévision de pluie à très court terme. Cette approche, que nous avons commencé à explorer,

est basée physiquement sur la hiérarchie spatio-temporelle des structures atmosphériques, et permet d'utiliser aisément des bases de données télédéteectées (radar météorologique, satellite). Les résultats obtenus dans cette ligne de recherche suggèrent que l'analyse de l'invariance d'échelle et le comportement multifractal de la structure spatio-temporelle de la pluie peut être utile pour la génération synthétique de données de pluie spatialement distribuée. Nous signalons que le modèle multifractal espace-temps peut être incorporé à des schémas numériques de modélisation en hydrologie (débits de rivière, alertes de crues éclair, gestion des réseaux d'assainissement, gestion de barrages, etc.), et être étendu à des mosaïques d'images radar et en combinaison avec des données satellitaires pour obtenir de plus grandes gammes d'échelle.

## remerciements

Nous reconnaissons Ioulia Tchiguirinskaia et Angelbert Biao pour leurs suggestions dans l'analyse des données radar, ainsi que Jean-Michel Veysseire pour nous avoir grandement facilité l'accès à ces données. Nous remercions aussi le programme ALβAN, programme de bourses de l'Union Européenne pour l'Amérique Latine (Bourse E04D046728AR), et le projet Floodsite de l'Union Européenne pour leur soutien financier partiel à cette étude.



**Figure 7 : Evolution temporelle de trois réalisations multifractales : A et B correspondantes à une prévision stochastique, et C à une prévision déterministe.**

## REFERENCES et Citations

- [1] Marshall, J. S. & Palmer, W. M. (1948). – The distribution of rain-drops with size. *J. Meteor.*, **5**(4), 165-166.
- [2] Duncan, M., Lovejoy, S., Fabry, F., & Schertzer, D. (1992). – Fluctuating radar cross-section of a multifractal distribution of scatterers; Proc. 11 Int. Conf. on Precipitation and Clouds. Montreal, Canada, pp. 997-1000.
- [3] Richardson, L. F. (1922). – *Weather prediction by numerical processes*. Cambridge: Cambridge University Press.

- [4] Kolmogorov, A. N. (1962). – A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynold number. *J. Fluid Mech.*, **13**, 82-85.
- [5] Novikov, E. A., & Steward, R. (1964). – Intermittency of turbulence and spectrum of fluctuations in energy dissipation. *Izv.Akad. Nauk SSSR, Ser. Geofiz.*, **3**, 408-412.
- [6] Yaglom, A. M. (1966). – The influence of fluctuations in energy dissipation on the shape of turbulent characteristics in the inertial interval. *Sov. Phys. Dokl.*, **2**, 26-30.
- [7] Mandelbrot, B. (1974). – Intermittent turbulence in self-similar cascade: divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid Mech.*, **62**, 331-358.
- [8] Frish, U., Sulem, P. L., & Nelkin, M. (1978). – A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. *J. Fluid Mech.*, **87**, 719-724.
- [9] Schertzer, D., & Lovejoy, S. (1984). – On the dimension of atmospheric motions. *Turbulence and chaotic phenomena in fluids*. T. Tatsumi (editor). Elsevier Science Publishers. Amsterdam, pp. 505-512.
- [10] Levitch, E., & Tzvetkov, E. (1985). – Helical inverse cascade in three-dimensional turbulence as a fundamental dominant mechanism in mesoscale atmospheric phenomena. *Phys. Rep.*, **128**(1), 1-37.
- [11] Bialas, A., & Pechanski, R. (1986). – Moments of rapidity distributions as a measure of short-range fluctuations in high-energy collisions. *Nucl. Phys. B*, **273**, 703-718.
- [12] Parisi, G., & Frish, U. (1985). – A multifractal model of intermittency. *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climatic dynamics*. M. Ghil, R. Benzi & G. Parisi (editors). North Holland, New York, pp. 84-88.
- [13] Schertzer, D., & Lovejoy, S. (1987). – Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling of multiplicative processes. *J. Geophys.Res.*, **92**(D8), 9693-9714.
- [14] Lovejoy, S., & Schertzer, D. (1990). – Multifractals, universality classes and satellite and radar measurement of cloud and rain fields. *J. Geophys. Res.*, **95**(D3), 2021-2034.
- [15] Schertzer, D., & Lovejoy, S. (1994). – EGS Richardson AGU Chapman NVAG3 Conference: Nonlinear variability in geophysics: scaling and multifractal processes. *Nonlin. Proc. in Geophys.*, **1**(2/3), 77-79.
- [16] de Lima, M. I. P. (1998). –Multifractal and temporal structure of rainfall. PhD thesis. Wageningen Agricultural University. Wageningen, Netherlands.
- [17]Lavallée, D., Lovejoy, S., Schertzer, D., & Ladoy, P. (1993). – Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation. *Fractals in geography*. L. De Cola & N. Lam (editors), pp. 171-205.
- [18] Ladoy, P., Schmitt, F., Schertzer, D., & Lovejoy, S. (1993). – Variabilité temporelle multifractale des observations pluviométriques à Nîmes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **317**, Ser. II, pp. 775-782.
- [19] Schertzer, D., & Lovejoy, S. (1988). –Nonlinear variability in Geophysics: multifractal simulations and analysis. *Fractal's physical origin and properties*. L. Pietronero (editor). Plenum Press, New York, pp. 49-79.
- [20] Schertzer, D., & Lovejoy, S. (1991). –Nonlinear geodynamical variability: multiple singularities, universality and observables. *Nonlinear variability in Geophysics: scaling and fractals*. D. Schertzer & S. Lovejoy (editors). Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 41-829.

- [21] Marsan, D. (1998). – Multifractals espace-temps, dynamique et prédictibilité; application aux précipitations. PhD thesis, Université Paris 6.
- [22] Biaou, A. (2004). – De la meso-échelle à la micro-échelle : disagregation spatio-temporelle multifractale des précipitations. PhD thesis, Ecole des Mines, Paris.