



HAL
open science

Etude de structures élancées précontraintes en matériaux composites, application à la conception des gridshells

Cyril Douthe

► **To cite this version:**

Cyril Douthe. Etude de structures élancées précontraintes en matériaux composites, application à la conception des gridshells. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2007. English. NNT : . pastel-00003723

HAL Id: pastel-00003723

<https://pastel.hal.science/pastel-00003723>

Submitted on 29 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de
Docteur de l'École Nationale des Ponts et Chaussées

Spécialité : Structures et Matériaux

par

Cyril DOUTHE

**ÉTUDE DE STRUCTURES ÉLANCÉES PRÉCONTRAINES
EN MATÉRIAUX COMPOSITES :
APPLICATION À LA CONCEPTION DES GRIDSHELLS**

Soutenue le 16 novembre 2007 à l'E.N.P.C

devant le jury composé de :

Rapporteurs :	P. BOISSE
	R. MOTRO
Examineurs :	P. ROLLET
	B. VAUDEVILLE
Directeur de thèse :	J.-F. CARON
Conseiller scientifique :	O. BAVEREL

**ÉTUDE DE STRUCTURES ÉLANCÉES PRÉCONTRAINTES
EN MATÉRIAUX COMPOSITES :
APPLICATION À LA CONCEPTION DES GRIDSHELLS**

**Thèse de doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées
soutenue le 16 novembre 2007 par Cyril DOUTHE**

devant le jury composé de :

**Philippe BOISSE et René MOTRO, rapporteurs
Pascal ROLLET et Bernard VAUDEVILLE, examinateurs
Jean-François CARON, directeur de thèse
Olivier BAVEREL, conseiller scientifique**

Remerciements

À mon directeur de thèse, Jean-François Caron, pour sa confiance et son estime, pour la liberté laissée pendant ces trois années et pour le temps passé à relire le mémoire et ses précieux conseils de rédaction, sans lesquels le document final n'aurait pas la clarté qu'on lui a trouvée.

À mon conseiller scientifique, Olivier Baverel, pour sa disponibilité malgré un emploi du temps compliqué, pour la richesse de nos discussions et toutes les idées qui en sont nées, pour ce plaisir d'enseigner qu'il m'a transmis et pour m'avoir introduit dans la communauté des structures légères où se mêlent architectes, chercheurs et ingénieurs.

À Philippe Boisse, président du jury ainsi que rapporteur, pour les kilomètres parcourus pour que la soutenance ait bien lieu et pour ses remarques qui seront très utiles pour la suite de ce travail.

À mon autre rapporteur, René Motro, pour sa connaissance des technologies modernes, pour l'intérêt porté à mon travail et pour ses encouragements répétés à persévérer dans cette voie.

À Pascal Rollet et Bernard Vaudeville, qui ont bien voulu participer au jury, lire attentivement le manuscrit et présenter le regard d'un architecte et d'un ingénieur sur ce travail.

À l'École Nationale des Ponts et Chaussées et à ses directeurs de la recherche successifs qui ont témoigné un intérêt certain pour les structures innovantes en matériaux composites et financé le programme expérimental de cette thèse.

Aux techniciens du laboratoire Christophe Bernard, Gilles Moreau, Didier Berg et Alain Tainain, à Ali Karrech, Fadi Jouneid, Adélaïde Feraille, Courine Rouby, et à tous ceux qui ont trouvé, ne serait-ce qu'une heure, pour aider à la construction du prototype, ainsi qu'à Marie-Françoise Kaspi qui a pris soin de nous pour qu'on ne meure pas de froid et de soif.

À Laurent Heydel et Philippe Nicolon pour le temps passé bénévolement aux mesures sur le gridshell, ainsi qu'à Didier Bouteloup, Cyril Romieux et Jean-Mickaël qui ont aidé certaines fois.

À Alain Ehrlacher, Adélaïde Feraille, Gilles Foret, Marie-Françoise Kaspi, Robert Le Roy, tous les membres du laboratoire et à Karam Sab, son directeur, qui m'ont adopté et considéré comme faisant déjà partie de l'équipe.

À Sylvain, Hassen, Mouhammad, Hoai-Son, Joanna, Lina, Tiffany, Corinne et Julien, les copains de toutes les pauses et du mois d'août à Champs-sur-Marne.

À Mathilde, pour sa relecture minutieuse du mémoire et toutes les corrections orthographiques et formelles qu'elle a pu y apporter et pour m'avoir accompagné au jour le jour pendant ces trois ans et un peu plus.

Table des matières

Introduction	1
1 Les gridshells	5
1.1 Qu'est-ce qu'un gridshell?	5
1.2 Historique des gridshells	16
1.3 Le gridshell de Mannheim	18
1.4 Le gridshell du musée de Downland	22
1.5 Les autres réalisations principales	27
1.6 Conclusion	32
2 Les matériaux composites	33
2.1 Les matériaux composites dans le génie civil	33
2.2 Intérêt des matériaux composites pour les gridshells : démonstration par la méthode de Ashby	40
2.3 Comportement des tubes composites pultrudés fléchis pour une application aux gridshells	52
2.4 Conclusion	73
3 La méthode de relaxation dynamique : un outil pour l'étude des structures élancées précontraintes en grands déplacements	75
3.1 Historique	76
3.2 L'algorithme de la relaxation dynamique	81
3.3 Définition des efforts intérieurs	87
3.4 Définition des liaisons	94
3.5 Stabilité et convergence de l'algorithme	97
3.6 Schéma général de l'algorithme de relaxation dynamique	104
3.7 Validation du programme <i>AlgoRD</i>	106
3.8 Exemple d'application : les nexorades	119

3.9	Conclusion	122
4	Forme et gridshells	125
4.1	Historique de la recherche de la forme en compression pure	126
4.2	Formes funiculaires à contour imposé	130
4.3	Formes funiculaires à contour libre	136
4.4	Formes à surface imposée	147
4.5	Conclusion	152
5	Conception et étude numérique du comportement mécanique du premier gridshell en composites	153
5.1	Codes et méthodes de dimensionnement des gridshells en matériaux composites	154
5.2	Conception du prototype	156
5.3	Conclusion	175
6	Réalisation et étude expérimentale du premier gridshell en composites	177
6.1	Construction du prototype	177
6.2	Tests de chargement avant et après triangulation	182
6.3	Comparaison avec un modèle numérique	188
6.4	Réalisation d'une ouverture	200
6.5	Coût du prototype	201
6.6	Conclusion	202
	Conclusion et perspectives	205
A	Le programme de relaxation dynamique : <i>AlgoRD</i>	211
A.1	Présentation générale	211
A.2	Définition de la structure	212
A.3	Définition des paramètres de l'algorithme	221
A.4	Analyse des résultats	222
B	Plans et mesures du premier gridshell en matériaux composites	225
B.1	Plan d'exécution du prototype	225
B.2	Plans du protocole expérimental	228
B.3	Résultats des mesures effectuées sur le prototype	230
B.4	Comparaisons entre les déplacements du modèle et du prototype	234

Liste des notations	237
Liste des figures	243
Liste des tableaux	251
Bibliographie	253

Introduction

Les couvertures de bâtiment sont des structures spécifiques, leur chargement principal est en général leur propre poids. Chercher à concevoir ces structures les plus légères possible permet des avancées économiques, écologiques et esthétiques. Les méthodes constructives ont évoluées avec les époques et les matériaux disponibles, mais toujours autour de trois axes principaux : l'adaptation de la forme et du matériau, l'utilisation de la double courbure et la minimisation des efforts de flexion. C'est en cherchant à s'affranchir complètement des efforts de flexion sous poids propre que Frei Otto a développé les structures de gridshells. Ces coques discrètes à double courbure résultent de l'inversion d'un filet suspendu, elles sont donc les exacts funiculaires de leur propre poids. De plus, il met au point un procédé constructif original et très économique qui permet d'obtenir des surfaces gauches par déformation élastique et triangulation d'une grille plane sans rigidité en cisaillement et constituée d'éléments rectilignes standard. Après quelques réalisations mineures, le potentiel esthétique et mécanique de ces structures éclate avec la construction du gridshell de Mannheim en 1975.

Pourtant le bâtiment ne fait pas école et reste pendant vingt-cinq ans le seul gridshell au monde, malgré des qualités remarquables sur le plan structurel. Deux raisons principales seront avancées pour expliquer cette situation : d'une part les méthodes de calcul de l'époque négligent la flexion dans les éléments et par conséquent ne permettent pas d'étudier précisément les contraintes dans la structure et d'autre part, les éléments de la grille sont en bois lamellé-collé et leur état de flexion permanente pose des problèmes de fluage et de durabilité des assemblages. Dans le premier chapitre, après un historique des gridshells, on verra que les progrès de ces dernières années en matière de simulation numérique et les efforts de la filière bois pour rationaliser les profils ont permis un renouveau de ces structures en Angleterre avec les gridshells du musée de Downland et du *Savill Building*.

Il semble cependant possible d'aller plus loin dans cette rationalisation en proposant des solutions alternatives plus durables et plus performantes qui intègrent des nouveaux matériaux fibrés synthétiques en lieu et place de ce matériau composite anisotrope naturel qu'est le bois. Les polymères renforcés de fibres de verre ou de carbone sont relativement nouveaux dans le génie civil et la construction. Leurs applications actuelles copient les solutions techniques qui ont été optimisées pour l'acier (armature pour béton, renforcement par collage, poutrelle en I ou en H, etc.). Beaucoup plus souples que l'acier, les composites apparaissent rarement comme la solution la plus pertinente pour ces applications dans lesquelles les exigences de raideur conduisent à un surdimensionnement de la structure en terme de résistance. En revanche, les contraintes constructives des gridshells liées à leur processus de montage utilisent la déformabi-

lité des éléments. Leur allongement élastique important et leur module d'Young élevé font donc des composites de bons candidats pour ce type de structure. On remarque d'ailleurs que partout où une grande déformabilité et une grande raideur sont exigées en même temps, ils s'imposent : ailes de planeur, arcs, skis, cannes à pêche, pare-chocs. . . Dans le deuxième chapitre, on démontrera donc que les composites verre/résine constituent véritablement une alternative intéressante au bois pour la construction des gridshells et on étudiera plus en détail le comportement mécanique de ces matériaux dans les conditions de flexion en grands déplacements qui sont celles des éléments d'un gridshell.

Effectivement, l'amplitude des déplacements qui interviennent durant le montage des gridshells est grande et leur calcul nécessite l'utilisation de méthodes numériques capables de prendre en compte des non-linéarités géométriques. Par le passé, trois méthodes ont été utilisées pour le calcul des gridshells : la méthode des densités de forces, la méthode de Newton-Raphson et la méthode de relaxation dynamique. C'est cette dernière qui a été choisie ici et qui sera exposée dans le troisième chapitre. Son principe consiste à remplacer la recherche de l'état d'équilibre statique par un calcul dynamique fictif qui, par amortissements successifs, va conduire à l'état d'équilibre statique. Les modèles utilisés pour le calcul dynamique et le calcul des efforts intérieurs sont exposés, ainsi qu'un modèle original pour la prise en compte des excentricités au niveau des liaisons. Viennent ensuite l'étude de la stabilité de l'algorithme et sa validation par de nombreuses comparaisons avec d'autres modèles analytiques et numériques, ce qui donnera l'occasion d'illustrer également la polyvalence de la méthode.

À la différence de la plupart des structures à double courbure existantes, la forme des gridshells ne peut pas être imposée : elle est l'unique forme d'équilibre qui satisfait un ensemble donné de contraintes géométriques et de conditions d'appui. La recherche de la forme est donc un enjeu en soi et elle fait l'objet du quatrième chapitre. Trois méthodes sont développées. La première a été systématisée par Frei Otto : elle repose sur l'étude de modèles réduits parfaitement tendus et conduit à des formes dont le contour ou les points d'appui sont imposés. La deuxième constitue l'un des objets de ce travail, elle est indissociable de l'utilisation de la méthode de relaxation dynamique et de la prise en compte de la raideur en flexion des éléments ; elle conduit à des formes dont les contours libres sont l'expression de la raideur naturelle de la matière. La troisième n'est qu'esquissée mais semble très prometteuse pour la conception de structures pour des enveloppes courbes, elle permet de fabriquer des grilles en équilibre sur des surfaces dont la forme est imposée.

Cependant la donnée de la forme ne suffit pas à définir une structure. Il faut bien entendu en étudier le comportement mécanique. Dans le cinquième chapitre, on aborde tout d'abord la question du règlement de construction de référence pour la définition des chargements et des critères de dimensionnement des éléments. Il semble aujourd'hui naturel que cette étude s'inscrive dans le cadre des Eurocodes. Il n'existe pas de tome spécifiquement dédié aux matériaux composites, mais des coefficients partiels de sécurité et des critères spécifiques ont déjà été proposés et seront examinés ici. À titre d'illustration, ils sont mis en œuvre dans l'étude d'un prototype de gridshell en composites construit à l'École Nationale des Ponts et Chaussées. Cette étude comprend la description des matériaux utilisés et l'identification de leurs propriétés mécaniques, la définition de la forme, l'étude de deux variantes de triangulation et celle du comportement sous

chargement règlementaire. Chacune de ces étapes permet de mettre en lumière certains traits spécifiques du comportement des gridshells.

Le sixième chapitre décrit la construction de ce prototype et le programme expérimental réalisé en collaboration avec l'École Nationale des Sciences Géographiques. Les différentes étapes du montage et les techniques utilisées sont tout d'abord expliquées, ainsi que les tests de chargement effectués sur la structure avant et après triangulation. Les résultats de ces tests seront ensuite analysés afin notamment de quantifier l'effet de la triangulation. Ils seront également confrontés à un modèle numérique construit à partir du relevé des positions des appuis de la structure réelle. Cela permettra en outre de mieux comprendre le comportement d'ensemble de la structure et l'évolution des contraintes dans les éléments. Enfin, quelques éléments de bilan sur les coûts de ce prototype sont donnés afin de montrer sa compétitivité par rapport à des structures déjà exploitées industriellement dans la construction.

Le dernier chapitre rappellera les principaux résultats de ce travail et conclura sur l'efficacité des outils proposés pour l'analyse des structures élancées précontraintes en matériaux composites, la pertinence des structures de gridshells pour la réalisation de couvertures de moyenne ou de grande portée. Un dernier mot sera ajouté sur les perspectives de développement du programme et des méthodes, ainsi que sur les nouvelles applications envisageables.

Chapitre 1

Les gridshells

Le mot *gridshell* est un emprunt à la langue anglaise qui n'a pas d'équivalent en français ; il importe donc avant toute chose de définir ce que sont les gridshells et le concept structurel sur lequel ils reposent. Il s'agit d'une famille de résilles gauches issues d'un processus de montage particulier ; les gridshells sont des structures à double courbure obtenues par déformation élastique d'une grille plane sans rigidité en cisaillement. L'intérêt de la double courbure repose sur l'utilisation de la raideur de la forme pour couvrir de grands espaces. Cette idée très ancienne a permis la construction de nombreux bâtiments extraordinaires, avec une grande variété de matériaux. On examinera successivement les techniques de construction et les caractéristiques de ces différents ouvrages, afin de mieux comprendre les spécificités des gridshells. Puis, après un bref historique, les principales réalisations de ce type de structures seront présentées. L'accent sera particulièrement mis sur deux ouvrages emblématiques : le grand hall de l'exposition horticole de Mannheim de 1975 et l'atelier du musée de Downland de 2002.

1.1 Qu'est-ce qu'un gridshell ?

1.1.1 Une structure et une forme

Le mot *gridshell*, parfois aussi orthographié *grid shell*, est un emprunt à la langue anglaise qui n'a pas d'équivalent en français ; les Allemands en revanche utilisent le mot *Gitterschale* dont le nom anglais est probablement la traduction. Il est formé des mots *grid* et *shell*, qui signifient respectivement « grille » et « coque » ; il désigne ainsi une coque dont la surface est formée d'une grille au lieu d'être continue. Le concept de gridshell dans son acception la plus courante correspond donc à un type particulier de structures qui regroupe ce qu'on pourrait appeler en français les résilles gauches (par opposition aux résilles planes).

Dans *IL10 Gitterschalen* [78], l'ouvrage que Frei Otto et l'*Institut für leichte Flächentragwerke* (Institut pour les structures légères ou IL) de Stuttgart ont consacré à l'étude des gridshells, la définition est cependant plus précise : « Un gridshell est une structure de barres, courbe dans l'espace. Les barres forment une grille plane avec une maille rectangulaire et un espacement constant entre chaque noeud. La forme du gridshell est déterminée par retournement de la

forme d'un filet suspendu. De la même façon que le retournement de la chaînette donne la courbe idéale d'un arc sans flexion, le retournement de la forme du filet conduit à une surface funiculaire dans laquelle le gridshell est sans flexion. » Le principe constructif sur lequel reposent les gridshells est donc celui d'une grille plane régulière, formée de deux directions de barres continues et articulées entre elles au niveau de chaque intersection. Une telle grille n'a pas de rigidité en cisaillement, ce qui la rend facilement déformable en dehors de son plan et transformable en une surface gauche. Cette surface, comme la grille dont elle est issue, contient des degrés de liberté en rotation que l'on peut bloquer avec des moyens de contreventement traditionnels et disposer ainsi d'une coque rigide.

Les gridshells sont donc une famille particulière de résilles gauches dont le concept est indissociable d'une certaine typologie de formes et de la méthode constructive d'obtention de ces formes. Ce qui est recherché avec ces structures, c'est la surface idéale dont la géométrie garantit l'absence de moment de flexion sous poids propre, la coque la plus légère.

1.1.2 Des structures et de la légèreté

Pour caractériser la légèreté d'une structure, il est d'usage de considérer le rapport entre les deux principaux types de chargements auxquels elle est soumise : les chargements permanents ou de poids propre et les chargements variables comme le vent, la neige ou les charges liées à l'exploitation de l'ouvrage. Lorsque ce rapport est élevé, le comportement de la structure est essentiellement déterminé par les charges permanentes qui sont constantes et parfaitement connues. En revanche, plus ce rapport est faible, plus la structure est considérée comme légère. Les chargements de service avec leur variabilité dans le temps et leurs différences de nature jouent alors un rôle important dans le dimensionnement de l'ouvrage ce qui augmente la complexité du travail de conception. Pourquoi alors chercher à concevoir les structures les plus légères possibles ?

Dans le livre *Leicht und Weit* [92], Jörg Schlaich, qui est également issu de l'« école de Stuttgart », voit pour cela trois raisons. D'un point de vue écologique, ces structures permettent d'économiser de la matière et, de part leur conception même, sont en général faciles à démonter, voire à recycler. D'un point de vue économique, elles requièrent le développement de détails et de méthodes de construction de haute technicité ce qui crée du travail pour une main d'œuvre qualifiée et par là même plus de richesse pour la société. Enfin, d'un point de vue culturel, léger et fin sont des adjectifs plus valorisants que lourd et épais. « Les structures légères stimulent l'ingénieur parce qu'elles s'adressent autant à son savoir, à ses capacités et à son expérience qu'à son imagination et à son intuition. Elles sont pour lui l'occasion de proposer des solutions constructives originales et pertinentes et d'apporter ainsi une contribution notable à la culture architecturale. »

À partir de son expérience professionnelle, Jörg Schlaich distingue quatre directions de recherche pour guider le concepteur de structures légères :

- La flexion dans les éléments doit être évitée le plus possible car, dans un élément fléchi, toute la matière n'est pas sollicitée au maximum de sa capacité. Ainsi dans une poutre, la

matière située dans la partie centrale ne participe que très peu à la reprise des efforts, elle alourdit donc inutilement la structure.

- Les matériaux doivent être choisis en fonction de la nature des efforts qu'ils subissent et de leur propriétés mécaniques et physiques relatives. Dans ce sens, la démarche proposée ici se rapproche beaucoup de la méthode de choix des matériaux développée par Michael Ashby sur laquelle le chapitre 2.2 reviendra.
- Une meilleure utilisation de toute la capacité de résistance des matériaux peut être obtenue par l'usage de la précontrainte. De la même façon que la précontrainte dans le béton permet à ce dernier de reprendre des efforts de tension, la raideur géométrique procurée par la précontrainte permet à un élément tendu de reprendre plus facilement des charges latérales et des efforts de compression par « détension ».
- La forme de la structure et sa courbure sont également sources de rigidité parce qu'elles permettent de reprendre tout ou partie des efforts perpendiculaires à la structure sous forme de traction ou de compression. Plus on se rapproche du funiculaire d'un chargement, plus on évite la flexion dans les éléments et plus on est léger. Dans l'espace, lorsqu'elles sont bien conçues, les surfaces à double courbure reprennent les efforts perpendiculaires à la surface uniquement sous forme d'efforts membranaires, c'est-à-dire dans le plan local de la surface et sans flexion. Ce dernier point est d'expérience quotidienne : tant qu'elle reste plate, une feuille de papier est incapable de porter toute sa longueur, mais elle la franchit largement si l'on lui donne une forme de gouttière. Si l'on vient recharger cette feuille de papier en son milieu, on s'aperçoit qu'elle est encore très déformable parce que la surface ainsi obtenue n'est qu'à simple courbure. Il est impossible d'obtenir une surface à double courbure à partir d'une feuille de papier ou de toute autre surface à courbure gaussienne nulle. La résistance que l'on peut attendre d'une surface à double courbure est cependant bien supérieure à celle d'une surface à simple courbure, en témoigne l'extraordinaire finesse et robustesse d'une simple coquille d'œuf.

Si l'on confronte la définition donnée par Frei Otto aux critères ci-dessus, les gridshells en matériaux composites semblent pouvoir permettre la construction de grands espaces, libres de tout support, avec une très grande légèreté. D'une part la forme obtenue par inversion d'un filet garantit l'absence de flexion sous poids propre. D'autre part, compte tenu des propriétés mécaniques requises pour les différentes phases de construction, il est montré dans le paragraphe 2.2 que le bois et les matériaux composites sont les meilleurs matériaux pour ce type d'application. Enfin, la double courbure de la coque dans sa forme finale assure théoriquement un fonctionnement membranaire sous chargement asymétrique.

Le premier gridshell n'a cependant vu le jour qu'en 1962 et, comme la quasi totalité des gridshells qui ont été construits depuis, il était fait de bois. L'idée d'utiliser du bois fléchi pour la construction d'abris n'est pas nouvelle, elle est même couramment mise en œuvre pour la structure des yourtes mongoles. Néanmoins, la réalisation d'une couverture de grande portée avec une structure en bois nécessite des techniques d'aboutage et de collage qui n'ont été développées qu'au siècle dernier ce qui explique en grande partie que ce type de structures ne soit apparu que récemment. Les matériaux composites étant issus d'une technologie encore plus ré-

cente, leur utilisation comme éléments de structure dans le génie civil était, il y a dix ans, encore confidentielle, si bien que le prototype de gridshell construit à l'École Nationale des Ponts et Chaussées est le premier gridshell en composite au monde (cf. paragraphe 6). Ainsi cette structure à double courbure originale pourrait être une réponse moderne au très vieux problème de la couverture sans appuis intermédiaire d'un grand espace, problème auquel les réponses sont directement liées aux matériaux disponibles à chaque époque.

1.1.3 De la double courbure

De pierre et de briques

On prête souvent l'invention de la coupole aux assyriens dont la civilisation s'étendit sur l'ensemble du deuxième millénaire avant notre ère. Construites à partir de briques en terre crue, ces coupoles hémisphériques étaient montées sur cintres de roseaux et réservées aux salles d'apparat des palais. Cette forme ne se développera réellement autour de la Méditerranée qu'avec l'avènement de l'empire romain. En effet, les Grecs ne sont guère enclins à l'usage de la maçonnerie et du mortier pour leurs bâtiments hors du commun et ne construisent donc que très peu de voûtes à l'exception de quelques ouvrages remarquables par encorbellement. « Dérivés des tombeaux à plan circulaire crétois, les tombeaux à coupole (*tholos*) mycéniens révèlent un nouveau sentiment de l'espace et une puissance constructive que rien ne laissait présager. Cette série de monuments funéraires culmine avec le « trésor d'Atrée » à Mycènes daté de la seconde moitié du XIII^{ème} siècle av. J.-C. (cf. figure 1.1) [. . .]. Haute de 13,20 m sur 14,50 m de diamètre, la *tholos* a la forme d'une ruche et constitue la plus grande salle sans soutient intérieur de l'antiquité européenne : elle ne sera dépassée que par le Panthéon de l'empereur Hadrien à Rome. »¹

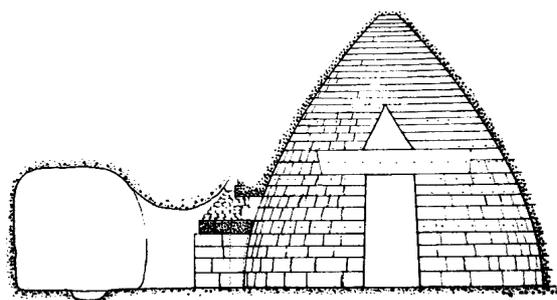


FIG. 1.1 – Coupe de la voûte du trésor d'Atrée.

FIG. 1.2 – Œil de la voûte du Panthéon à Rome.

Ce dernier, avec ses 43,30 m de diamètre, est resté de l'an 125 jusqu'au siècle dernier la plus grande coupole du monde occidental (cf. figure 1.2). La structure de cet ouvrage, encore parfaitement conservée, est celle d'une coque nervurée en béton coulée dans un parement de briques. Le degré de finition de cette coque est tel que la masse volumique et la raideur du béton diminuent au fur et à mesure que l'on se rapproche du sommet de l'édifice. À côté de ce bâtiment extraordinaire, la demie coupole cylindrique se généralise dans l'empire romain pour la couverture des absides, dites en « cul de four », dans les monuments publics comme les thermes

¹Papaioannou,[82], 1972, p. 38.

romains ou les basiliques civiles. Ensuite, en dehors de quelques églises de taille modeste, cette forme architecturale se perd dans l'empire romain d'Occident, mais perdure quelques temps dans l'empire byzantin avec notamment la basilique Sainte Sophie à Istanbul construite en 537 sous l'empereur Justinien. Sa très haute coupole de 32 m de diamètre est située à près de 56 m au dessus du sol. Entièrement en brique, elle repose sur quatre colonnes principales d'une surface de 100 m² chacune, c'est dire la masse de cette coupole.

Le dôme est réinventé en Occident par Filippo Brunelleschi en 1436, date de la construction du dôme de Santa Maria del Fiore à Florence. Il met au point à cette occasion une technique de montage originale : la coupole est faite de deux hélices de briques qui reposent l'une sur l'autre et qui ne nécessitent donc pas de cintre. On assiste alors à une sorte de renouveau de la coupole durant toute la Renaissance italienne et, peu à peu, partout ailleurs en Europe.

De béton et d'acier

L'une des difficultés principales rencontrées dans la réalisation des coupoles sphériques réside dans le fait que, soumises à leur propre poids, leurs méridiens sont comprimés et leurs parallèles tendus. Les structures en maçonnerie comme le Panthéon à Rome ou la basilique Sainte Sophie à Istanbul, n'ont qu'une résistance très faible en traction ; il est donc nécessaire d'augmenter considérablement les épaisseurs au niveau de la base de leur coque là où les tensions sont les plus importantes. Le poids total des coupoles augmente en conséquence. L'invention du béton armé en 1870 par Joseph Monier et du béton précontraint par Eugène Freyssinet en 1928 va permettre un véritable essor des coques en voile mince. Grâce aux aciers introduits dans le béton, ingénieurs et architectes disposent d'un matériau qui fonctionne aussi bien en compression qu'en traction et vont ainsi pouvoir gagner beaucoup en légèreté.



FIG. 1.3 – L'auditorium Kresge du MIT de Eero Saarinen.

Les capacités plastiques du matériau mettent quelques dizaines d'années à être assimilées et beaucoup d'ingénieurs et d'architectes restent encore figés sur l'ancien vocabulaire de formes. Le huitième de sphère de l'auditorium Kresge du *Massachusetts Institute of Technology* construit en 1955 par Eero Saarinen en est un bel exemple (cf. figure 1.3). De base triangulaire, cette coque a une portée de 48,5 m et une épaisseur en partie courante d'une dizaine de centimètres à peine. Elle ne peut cependant se porter seule et nécessite des poutres de rives dont la hauteur varie de 50,8 cm à 91,4 cm au niveau des appuis. Le poids total de la coque n'est plus que de 400 kg/m² [86].

Si le béton armé permet de réaliser des coques qui travaillent en tension, les armatures de ce dernier n'en doivent pas moins être dimensionnées avec précision car c'est sur elles seules que repose la tenue de l'ouvrage. La théorie des coques développés dès le début du XX^{ème} siècle pose en pratique rapidement des problèmes géométriques d'une grande complexité, de sorte que, jusqu'à l'apparition des méthodes numériques fondées sur la méthode des éléments finis, seule l'étude géométrique des surfaces simples (surfaces de révolution et surfaces réglées) était raisonnablement possible. En dehors des cylindres et autres silos, ce sont donc principalement les surfaces réglées qui se sont développées, car elles ont l'avantage d'être faciles à réaliser à partir de planches de bois rectilignes. Parmi les constructions les plus marquantes, on peut citer trois bâtiments construits en 1958 :

- l'église de l'Atlantide à Montevideo en Uruguay de l'architecte Elado Dieste dont les façades reposent sur la juxtaposition de conoïdes (cf. figure 1.4) ;
- le pavillon « Philipps » de l'Exposition Universelle de Bruxelles fruit de la collaboration entre Le Corbusier et Yannis Xenakis. La forme est ici le produit d'un assemblage complexe de paraboloides hyperboliques en une sorte de structure plissée (cf. figure 1.5) ;
- le restaurant *Los Manantiales* à Xochimilco au Mexique dû à Felix Candela dont la forme est obtenue par rotation de 60° d'un élément de paraboloides hyperboliques (cf. figure 1.6).

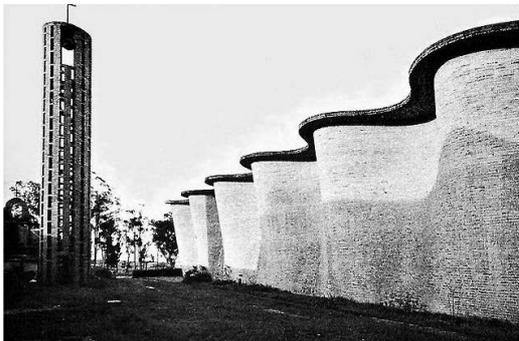


FIG. 1.4 – L'église de l'Atlantide à Montevideo de E. Dieste.



FIG. 1.5 – Modèle du pavillon Philipps de Y. Xenakis.



FIG. 1.6 – Le restaurant *Los Manantiales* de F. Candela en construction.

Il y a cependant comme une incohérence à concevoir des structures qui travaillent principalement en tension avec un matériau, le béton, qui n'a de résistance qu'en compression. Certains s'orientent vers la recherche de la forme en compression pure qui évite tout effort de traction.

Dans le plan par exemple, cette courbe peut être obtenue par inversion d'une chaînette soumise à son propre poids. Un des grands utilisateurs de cette technique est l'architecte catalan Antonio Gaudi qui réalise pour l'église de la Colonia Güell (1908-1916) un modèle très complexe de l'ensemble des éléments porteurs au moyen de fils et de petits sacs de sable (cf. paragraphe 4.1.2). De ce projet audacieux entièrement en brique mais de portée maximale somme toute modeste, seule la crypte a été réalisée.

C'est un ingénieur suisse, Heinz Isler, qui renouvellera cette technique en l'adaptant à la recherche de surfaces funiculaires. Il utilise pour cela des tissus avec une faible raideur en cisaillement qu'il charge d'eau ou de plâtre afin de réaliser des maquettes solides après le gel ou la prise du matériau (cf. E. Ramm [87] et paragraphe 4.1.2). L'étude par photogramétrie de la forme obtenue n'est cependant que la première étape de la conception de la coque. Une analyse structurelle est ensuite indispensable pour le dimensionnement des renforts passifs et actifs dans le béton. En outre, comme la forme de la coque est très libre, la structure du coffrage donne lieu à des chefs d'œuvre de charpente. Ce procédé autorise Heinz Isler à s'affranchir des poutres de rives qui alourdisaient la coque de Saarinen et à passer à seulement quelques centimètres d'épaisseur sur l'ensemble de la coque comme dans le cas de la station service de Deitigen au bord de l'autoroute N1 en Suisse (cf. figure 1.7 ci-dessous).



FIG. 1.7 – Coques de Heinz Isler au-dessus d'une station service.

D'autres cherchent plutôt à remplacer le béton par un autre matériau comme l'acier qui a lui de bonnes propriétés en traction. Ainsi Bernard Lafaille réalise en 1935 un hyperboloïde de révolution de 14 m de portée à l'aide d'une tôle soudée de 1,2 mm d'épaisseur raidie localement par de fines lames transversales pour seulement 13 kg/m². Son concepteur ne réussira cependant pas à imposer ce type de formes sur un projet et tout au long de sa vie ne réalisera que des couvertures à simple courbure. Ses recherches sur les voiles minces structurels en font néanmoins un précurseur des structures textiles dont le procédé industriel de fabrication n'était pas encore au point [73].

De câbles et de toiles

S'il est d'usage de faire remonter les premiers emplois des toiles tendues pour se protéger des intempéries à des origines lointaines (voire préhistoriques), il reste indéniable qu'elles ont connues une évolution très importante au cours des cinquantes dernières années. Ces structures (campements militaires, couverture des arènes à Rome) étaient principalement temporaires et dé-

montables ; désormais elles ont de plus en plus une vocation fixe et durable, comme par exemple lorsqu'elles sont utilisées pour la couverture des quais de la gare de Lourdes (cf. figure 1.8). Cette évolution a été permise par le développement de tissus techniques à partir de fibres de synthèse dont la résistance mécanique et la durabilité sont supérieures à celles des fibres naturelles ainsi que par le développement d'outils de calcul numérique qui permettent d'appréhender la forme de ces structures et d'en étudier le comportement (cf. paragraphe 3.1.2).



FIG. 1.8 – Couverture des quais de la gare de Lourdes.

La difficulté principale de résolution de ces deux problèmes est liée à la nature même des matériaux utilisés puisqu'ils n'ont de raideur ni en compression ni en flexion. Il faut donc faire en sorte que la toile reste tendue quelles que soient les actions extérieures qui s'y appliquent, faute de quoi des plis apparaîtront et la structure vieillira prématurément. L'équation qui gouverne l'équilibre local de la toile est donnée ci-dessous avec T_1 et T_2 qui représentent les tensions principales, R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux associés et p la pression extérieure.

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = p$$

Pour être en équilibre, la surface doit être à double courbure inverse, c'est-à-dire telle que R_1 et R_2 soient toujours de signes contraires, ou bien être soumise à une pression permanente ce que l'on réalise en pratique dans les structures gonflables. Toutes les surfaces à double courbure inverse ne sont cependant pas des surfaces en équilibre et toutes celles à double courbure positive ne sont pas gonflables à l'aide d'une pression hydrostatique. Tout l'enjeu de la première étape de la conception d'une structure textile est de trouver une forme qui satisfasse en tout point la relation d'équilibre ci-dessus. Quelques formes d'équilibre ont une expression analytique simple comme le parabolôïde hyperbolique ou le tube cylindrique sous pression pour lequel C. Wielgosz *et al.* a mis au point un modèle analytique et numérique complet pour l'analyse statique ou dynamique et le flambement [99, 60, 100]. En dehors de ces rares exemples, ce problème, qu'il est convenu d'appeler la « recherche de forme », est très complexe et a suscité le développement de méthodes expérimentales et numériques spécifiques qui seront développées dans le chapitre 4.

De plus, ces structures ont un poids propre de l'ordre d'une dizaine de kilogrammes par mètre carré, ce qui en fait des constructions extrêmement sensibles au vent. Comme elles sont

souples, leur comportement met en jeu des interactions fluide-structure qui viennent s'ajouter aux effets non-linéaires liés à la précontrainte. Ces phénomènes sont difficilement pris en compte par les bureaux d'études si bien que l'usage est de prévoir des facteurs de sécurité importants. Ainsi dans l'état de l'art dressé par Marc Malinowski [67] dont ce paragraphe s'inspire très largement, on trouve que le règlement impose que la toile soit sollicitée à seulement 20% de sa résistance à rupture.

De verre et de métal

Les coques de verre et de métal commencent à se développer, d'après Jürgen Graf [45], avec l'engouement de la noblesse anglaise pour les serres tropicales au XIX^{ème} siècle. Le palmier devenu le symbole de la puissance et de la richesse culturelle de l'empire britannique, il était nécessaire de concevoir des bâtiments dans lesquels ces plantes puissent recevoir lumière et chaleur en quantité suffisante. Grâce à la révolution technique et industrielle anglaise, un nouveau type de construction en verre et métal, dit « adossé à la maison », voit donc le jour : protégés du vent du nord par un mur maçonné (celui de la maison), les palmiers profitent de toute la chaleur accumulée par la verrière qui les entoure. Rapidement les jardiniers s'aperçoivent que la serre fonctionne d'autant mieux que les rayons du soleil frappe sa surface perpendiculairement et en concluent tout naturellement qu'une enveloppe à double courbure est la forme la plus efficace pour leurs bâtiments.

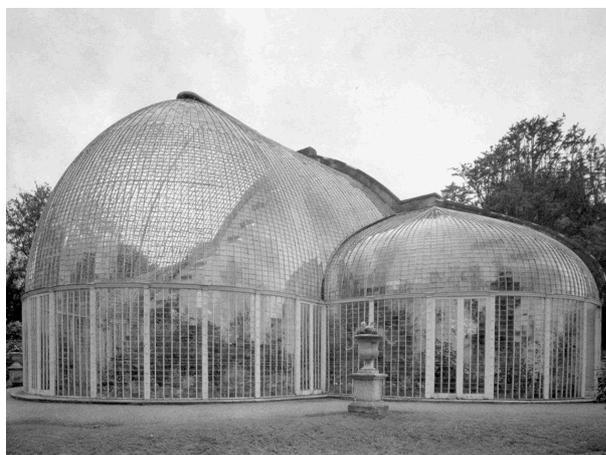


FIG. 1.9 – Vue extérieure de la serre du Bickton Garden, 1825.

C'est ainsi qu'en 1825, John Claudius Loudon, paysagiste, construit la fameuse serre de Bickton Garden dans le sud du Devon (cf. figure 1.9). Elle est constituée d'un dôme central de 8,3 m de haut et de deux dômes latéraux symétriques, le tout couvrant une surface d'environ 200 m². Les nervures en fer forgé de la coupole sont espacées d'environ 18 cm et recouvertes de panneaux de verre qui servent de contreventement à la structure métallique et lui confère toute sa rigidité. Le même principe constructif est adopté pour de nombreuses serres comme celle du Kew Garden à Londres (1844) ou celle du Kibble Palace à Glasgow (1873). Il ne tarde pas à sortir du domaine botanique et à être appliqué à d'autres types de bâtiments comme la Bourse du Commerce de Paris rénovée en 1889.

Actuellement, la plupart des règlements de construction interdisent le verre structurel, la structure métallique doit être stable indépendamment de sa couverture. Avant la pose de cette dernière, on a donc affaire à une résille, une grille métallique dont la forme et la rigidité sont celle d'une coque dont la surface est discrète au lieu d'être continue. De cette constatation vient le nom de *gridshell* (ou *Gitterschale* en allemand) souvent utilisé pour décrire ce genre de structure [42, 9, 93, 94, 95, 59, 27, 107]. Le plus souvent, le système de contreventement adopté est fait de croix de Saint-André en câbles précontraints pour ne pas trop perdre en transparence. La structure de la coupole sphérique de la piscine de Neckarsulm en Allemagne due à l'équipe de Jörg Schlaich est une belle illustration de cette technique² (cf. figure 1.10).



FIG. 1.10 – Coupole sphérique de la piscine de Neckarsulm.

Sur ce projet, l'espacement entre les nervures est supérieur au mètre, il n'est donc plus possible de rattrapper la non-planéité des quadrangles formés par la structure métallique et de couvrir cette structure avec des panneaux plans comme dans le cas de la serre du Bicton Garden. La coupole de la piscine est donc réalisée à l'aide de panneaux de verre à double courbure. S'il est techniquement possible aujourd'hui de fabriquer de tels verres, le procédé reste très coûteux et cela limite son application à des structures exceptionnelles.

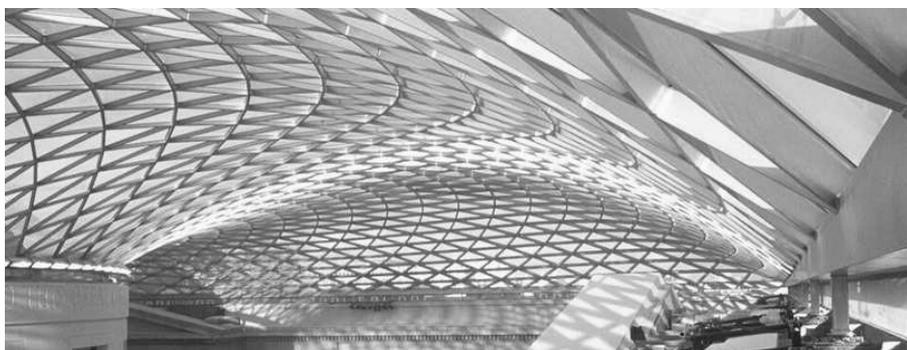


FIG. 1.11 – Couverture de la cour intérieure du British Museum.

Pour palier ce désavantage, il est nécessaire de partir du principe que la structure doit être couverte par des panneaux plans. Une première solution consiste à concevoir un pavage de la surface à l'aide de triangles, forcément plans. Toutes les surfaces peuvent être découpées

²Cf. A. Holgate [50], p.106-109.

ainsi, y compris les plus libres comme l'illustre la couverture du hall de la DG Bank à Berlin fruit de la collaboration en 2001 de l'architecte Frank Gehry et de l'ingénieur Jörg Schlaich (cf. paragraphe 4.4.1 et J. Glymph [43]) ou celle de la cour Elisabeth II du British Museum à Londres conçue par Norman Foster et Buro Happold en 2000 (cf. figure 1.11). Une telle structure est encore très coûteuse : le découpage en triangles des plaques de verre engendre beaucoup de perte de matière et les nœuds de la structure métallique sont des pièces d'une complexité rare : six barres y convergent avec une orientation dans l'espace chaque fois différente ce qui nécessite la fabrication d'assemblages standard à dix-huit articulations comme pour le projet berlinois ou de milliers de pièces uniques comme pour le projet du British Museum.

Une deuxième solution a conduit au développement de surfaces obtenues par translation dont le bureau d'étude de Jörg Schlaich (*Schlaich Bergermann und Partner*) est un fervent défenseur [50]. Le principe de la génération de ces surfaces est exposé dans l'article de J. Glymph [43] et se fonde sur le fait qu'entre deux vecteurs parallèles un plan peut toujours être défini. Si le maillage d'une surface gauche est construit de telle sorte que deux éléments opposés soient toujours parallèles alors il est certain qu'une couverture avec des panneaux plans est possible. Si deux courbes quelconques de l'espace, appelées génératrices, se déplacent par translation l'une le long de l'autre et vice versa, elles définissent un maillage dans lequel les quatre coins d'un élément sont toujours dans le même plan. La liberté de formes ainsi réalisables est immense, en témoigne la couverture de la maison des hippopotames du zoo de Berlin (cf. figure 1.12). Pour générer cette forme, une courbe à deux bosses est utilisée dans le sens longitudinal et couplée à une parabole différente sur chacune des bosses. La surface obtenue après translations réciproques des différentes courbes est ensuite coupée sur un des côtés pour dégager une surface verticale sur le bassin extérieur.

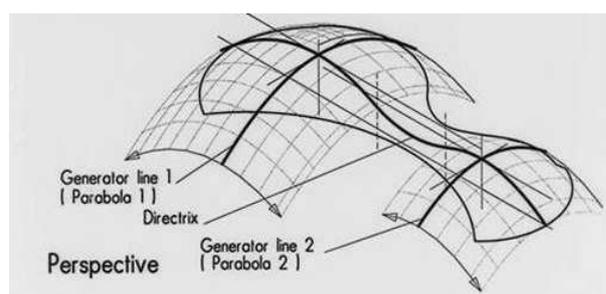


FIG. 1.12 – Génération de la forme de la maison des hippopotames à Berlin.

Les surfaces par translation permettent une standardisation importante des éléments car, si les courbes génératrices sont découpées avec un seul et même pas, l'ensemble de la structure est constructible avec un seul type d'assemblage et un seul type d'élément à l'exception de ceux situés sur le périmètre de la surface. Toute la construction de ces coques repose donc sur la conception de cet assemblage qui doit être capable de s'orienter dans les trois directions de l'espace pour chacune des quatre barres qui viennent s'y rattacher et de permettre la précontrainte des câbles de triangulation. Cet assemblage est donc une pièce de haute technologie qui reste coûteuse et qui n'a pas permis aux structures à double courbure de se démocratiser.

De bois et de planches

Les structures de coques en bois sont très anciennes en particulier dans l'architecture navale et religieuse. Ces coques sont souvent raidies en de multiples endroits par des diaphragmes ou des cloisons qui divisent l'espace intérieur et cassent la perspective. Leurs portées restent faibles en comparaison des ouvrages présentés ci-dessus, notamment parce qu'elles ont longtemps été limitées par la taille des grumes et les techniques d'assemblage. Le développement des colles et du lamellé-collé permet de rabouter facilement les pièces de bois et, par là, ouvre la voie vers la réalisation des premiers gridshells.

1.2 Historique des gridshells

1.2.1 Les premiers gridshells

Pour Frei Otto, les gridshells sont les pendants surfaciques de la chaînette inversée. Ses premières expériences sur des modèles suspendus de tissus et de plâtre durcis commencent dès la fin de la deuxième guerre mondiale avec pour but avoué « de découvrir des formes de voûtes faciles à construire avec des briques et bon marché »³. Sa démarche initiale est donc tout à fait similaire à celle de Heinz Isler [87]. Une quinzaine d'années plus tard, il a abandonné ses recherches sur les surfaces continues pour se consacrer aux réseaux discrets et construit en 1962 un premier gridshell à Berkeley aux États-Unis. Il s'agit d'une structure expérimentale à quatre arches de rives de 52 m² avec une portée maximum de 7,80 m dont la forme est le résultat de l'inversion de celle d'un filet suspendu aux quatre coins. La structure a été levée à la main et rigidifiée dans sa forme finale par blocage des rotations au niveau des nœuds. Cette réalisation dans le cadre d'un enseignement sur les méthodes de recherche de forme et la construction de gridshells montre que l'essentiel des concepts structurels sont déjà clairement définis.

Le pavillon d'exposition Deubau à Essen en Allemagne construit la même année le confirme. D'une taille supérieure à celle du précédent, ce bâtiment qui constitue ici à la fois les murs et la toiture couvre 198 m² et franchit 16,82 m. Contrairement à celui de Berkeley qui était en acier, il est réalisé en bois lamellé-collé avec des sections de 60 x 40 mm. Cela permet d'ajouter un système de couverture en toile plastique enduite maintenue par des lattes de bois simplement clouées sur la grille principale et d'intégrer une ouverture en partie basse en renforçant simplement les mailles avoisinantes par des plaques de contre-plaqué. Ce premier bâtiment, par son niveau de détails, préfigure les structures de grande portée à venir.

Il faudra pourtant attendre cinq ans avant qu'un nouveau projet voie le jour pour l'exposition universelle de 1967 à Montréal où Frei Otto est chargé de la conception du pavillon allemand. Sous le grand réseau de câbles de la couverture, il loge un gridshell de 365 m² pour abriter une salle de conférence. La portée (17,5 m) n'augmente pas et les techniques employées sont sensiblement identiques aux précédentes. La principale nouveauté provient de la préfabrication en Allemagne de l'intégralité de la grille qui est transportée en un seul morceau repliée sur elle-même.

³IL10 *Gitterschalen*, [78], p. 20

Suivent ensuite différents projets plus ambitieux (72 m de portée pour la piscine de Borkum en Allemagne en 1966, 88 m pour un hall d'exposition à Monaco en 1969, 90 m pour une couverture de tribune pour les jeux olympiques de Munich en 1972), mais aucun ne remportera les concours d'architecture.

1.2.2 Les travaux de l'*Institut für leichte Flächentragwerke*

En 1970, cependant, les travaux de l'*Institut für leichte Flächentragwerke* (IL) sur les structures légères commencent à être connus et une compagnie japonaise intéressée par la production industrielle de structures légères va financer un programme de recherche de deux ans sur les gridshells et envoyer à Stuttgart une équipe de trois architectes qui viennent renforcer l'équipe du programme allemand de recherche extraordinaire (*Sonderforschungsbereich 64*) sur les structures spatiales de grande portée. Du travail de cette équipe naîtra le seul ouvrage entièrement consacré aux gridshells paru à ce jour : *IL10 Gitterschalen* [78].

Il comporte quatre parties d'importance inégale. La première fait l'inventaire des différentes techniques utilisées et justifie leur choix. Elle définit les gridshells selon la formule donnée au paragraphe 1.1.1 comme des structures issues d'une grille de poutres plane dont la forme résulte du retournement d'un filet suspendu. Différentes variétés de grille sont étudiées au travers de différents pavages réguliers du plan, mais seul le pavage de parallélogrammes satisfait les conditions de continuité des barres et de cinématique nécessaires à la mise en forme de la structure. Les techniques de réalisation du modèle à inverser sont également explorées et le plus pertinent est retenu. Dans ce dernier, chaque intersection de la grille est représentée par un anneau métallique sur lequel viennent s'accrocher de petites chaînes correspondant aux barres. Enfin, les méthodes de mesure de la géométrie sont détaillées, avec un accent particulier mis sur les dispositifs photogramétriques développés pour les réseaux de câbles du stade olympique de Munich.

La deuxième partie sur laquelle le paragraphe 4.1.1 reviendra, est consacrée à l'exploration systématique des formes réalisables à partir d'un filet suspendu. L'objectif est le développement d'un vocabulaire formel nouveau pour les architectes et la classification de ces formes en un certain nombre de familles : les filets ponctuellement suspendus, les filets à deux bords rigides, les filets à un bord rigide ouvert, les filets à un bord rigide fermé, les filets à bords rigides ouverts ou fermés, les filets à points de suspension intérieurs, les filets mixtes à éléments comprimés, etc. La variété des formes étudiées est immense : la moindre modification de la géométrie de la grille ou de ses conditions d'appui entraîne une modification de la forme. Les 150 structures présentées sont des structures optimisées dans lesquelles toutes les chaînes sont parfaitement tendues, c'est-à-dire que pour chacune d'elles, le périmètre du filet et la longueur des chaînes sur le bord ont été ajustés pour qu'aucune ne fasse de « ventre ». Cette partie comprend également plusieurs pages sur la problématique inverse qui consiste à chercher la grille développée qui permet d'aboutir à une forme donnée. La méthode proposée est une méthode constructive dans laquelle on trace la grille barre par barre, au compas, à partir de deux lignes directrices. L'approche choisie et la détermination de ses limites restent empiriques, une généralisation mathématique du problème n'étant volontairement pas cherchée.

Jusqu'ici, les auteurs ne se sont intéressés qu'aux formes, la troisième partie est donc naturellement dédiée à l'étude des structures ainsi obtenues. Le retournement de la forme est une étape virtuelle : la géométrie du filet suspendu est mesurée par photogrammétrie mais contient des erreurs en ce sens que les points n'y sont pas exactement en équilibre. Elle est donc corrigée numériquement à l'aide de la méthode des densités de force développée par Klaus Linkwitz, de l'université de Stuttgart, qui travaille en étroite collaboration avec l'équipe de l'IL (cf. paragraphe 3.1.2). Cette méthode permet en outre de connaître les efforts de tension qui existent dans les différents éléments. Les relations entre courbure et répartition des efforts sont donc analysées à partir de l'étude du cas simple d'une famille de filets suspendus par les quatre coins. L'insuffisance de cette méthode pour l'analyse des cas de charges autres que linéiques est soulignée et les grandes lignes d'une analyse par la méthode de Newton-Raphson et les éléments finis sont présentées. Ces méthodes sont alors appliquées à l'étude d'un des modèles précédents et le comportement général des gridshells sous les autres types de charges (charges de neige symétrique ou dissymétrique, charge latérale de vent, charge ponctuelle) en est déduit. Puis, la fin de la partie inventorie la plupart des détails constructifs des gridshells : matériaux possibles, systèmes de fixation, d'ancrage, de rigidification, de couverture et de montage.

Les projets de gridshells évoqués plus haut, réalisés ou non, font l'objet de la quatrième partie de l'ouvrage. Les esquisses du gridshell de Mannheim (cf. paragraphe ci-dessous) sont incluses ainsi que la description de deux nouvelles structures expérimentales réalisées au début des années 70 pour valider certaines solutions technologiques qui seront mises en œuvre à Mannheim : une de 6,68 m de portée sur le terrain de l'IL à Stuttgart en 1973 et une structure à double bosse de 12,5 m par 6 m à l'université Polytechnic North London en 1974 pour laquelle intervient pour la première fois le bureau d'étude anglais Ove Arup and Partners.

1.3 Le gridshell de Mannheim

1.3.1 Contexte

Une exposition horticole, le *Bundesgartenschau*, se tient tous les deux ans dans l'une des principales villes d'Allemagne. Pendant six mois, elle accueille environ un million de visiteurs dans un parc ou jardin réaménagé pour l'occasion et dans divers halls d'exposition et de restauration. Les villes de Mannheim et Ludwigshafen ont été choisies en 1970 pour l'organisation de l'exposition de 1975 et c'est l'agence d'architecture Mutschler and Partners qui va remporter le concours du bâtiment polyvalent. Leur projet initial est une structure tendue supportée par des ballons ; ils se tournent donc vers Frei Otto qui est devenu la référence sur les structures tendues depuis la réalisation du pavillon de Montréal en 1967. Après quelques essais, cette solution ne s'avère pas viable et ils adoptent l'idée d'une structure de gridshell à plusieurs dômes (cf. figure 1.13). Une maquette inversée de la structure est donc rapidement réalisée selon les méthodes décrites plus haut et approuvée par les deux municipalités. Un appel d'offre pour les études de la structure en bois est lancé en septembre 1973 et remporté par le bureau d'ingénierie anglais Ove Arup and Partners. Au sein de celui-ci, le projet est confié à l'ingénieur Edmund Happold qui s'émancipera plus tard pour créer le bureau d'études Buro Happold, responsable de la conception de la quasi

totalité des gridshells depuis trente ans (cf. paragraphe 1.5). C'est de l'article de E. Happold [48] publié juste après la livraison du bâtiment en 1975 par ce dernier que sont tirées la plupart des informations ci-dessous.

1.3.2 Dimensionnement de la structure

Le dimensionnement de cette structure est une gageure sur bien des points : le type de structure est nouveau, la portée prévue est quatre fois supérieure à celle des gridshells précédents et la construction doit être terminée en dix-huit mois pour l'exposition. La première tâche consiste donc à réaliser la maquette inversée de la structure, à optimiser le maillage et la découpe du filet pour obtenir la forme tendue optimale qui s'appuie sur le contour souhaité par les architectes (cf. figure 1.14). La géométrie de la maquette est ensuite mesurée par photogrammétrie puis corrigée numériquement par l'équipe de l'*Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen* (IAGB ou Institut pour l'application de la géodésie dans la construction) du professeur Linkwitz par la méthode des densités de forces (cf. paragraphe 3.1.2).



FIG. 1.13 – Vue aérienne du gridshell de Mannheim.

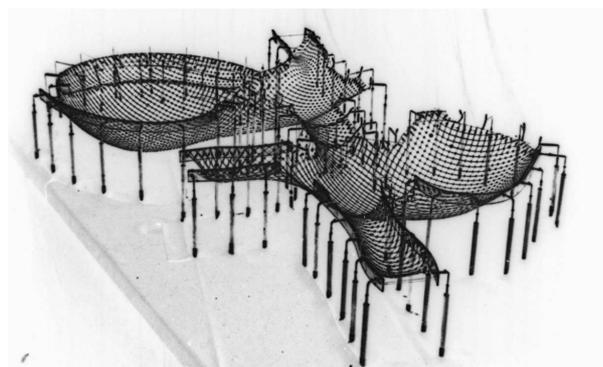


FIG. 1.14 – Maquette inversée du gridshell de Mannheim.

Une fois l'enveloppe extérieure du bâtiment définie, il est nécessaire d'évaluer les efforts qui s'y appliquent. Comme il est impossible de déduire directement des codes de calcul les actions climatiques qui s'exercent sur cette forme, des essais en soufflerie sont effectués. Les pressions partielles de vent sont ainsi déterminées à l'intérieur et à l'extérieur du bâtiment. La charge de neige choisie (40 kg/m^2) correspond à la valeur maximale de cette charge observée sur une période de recul de cinquante ans, soit deux fois la durée de vie estimée de l'ouvrage. Quant au poids propre de la structure avec sa couverture, il est estimé à 20 kg/m^2 .

En ce qui concerne le matériau, Frei Otto choisit d'importer du pruche de l'ouest (*tsuga heterophylla*), un arbre originaire de la côte ouest des États-Unis qui peut atteindre 60 m de haut avec des troncs très droits d'un diamètre de plus de 2 m. L'ensemble des propriétés mécaniques de cette essence est analysé : le comportement instantané, l'influence de l'humidité sur le module d'Young, sur la résistance à la rupture, la dilatation thermique dans les différentes orientations du matériaux, etc. Compte tenu des valeurs trouvées et des courbures à atteindre dans la forme finale, la section maximale des éléments de la grille ne peut dépasser les $50 \times 50 \text{ mm}$. De plus, ces éléments sont amenés à être fléchis en permanence ; il importe donc de connaître leurs caracté-

ristiques à long terme en fluage et en relaxation. Des expériences spécifiques sont donc montées avec des lattes soumises à une courbure constante à l'aide d'un câble excentré dont on mesure la variation de contrainte. Il apparaît ainsi que cette contrainte diminue de 30 % à 40 % en cinquante jours, ce qui va dans le sens de la sécurité si l'on considère que la résistance à rupture varie peu.

En parallèle à ces tests sur le bois, d'autres tests sont réalisés sur des maquettes afin de mieux comprendre le comportement des gridshells et d'étudier les mécanismes permettant de contrevenir aux instabilités structurelles. Au début de l'étude, le bureau de Klaus Linkwitz n'est pas en mesure de fournir la géométrie finale du gridshell de Mannheim, Edmund Happold décide donc de faire les premières expériences sur un modèle à l'échelle $1/16^e$ du gridshell d'Essen de 1962 (cf. paragraphe 1.2.1). Différents types de grille sont testés : grille articulée au niveau des nœuds, grille encastrée, grille articulée avec un contreventement lâche par câbles et grille encastrée avec un contreventement par câbles à chaque intersection. Sans surprise, cette dernière version de structure est beaucoup plus rigide. Quelques tests sur des assemblages encastrés ont lieu ensuite et montrent qu'il est, pour ainsi dire, impossible de considérer les intersections de la grille comme des nœuds rigides.

Forts de ces résultats, les ingénieurs mettent au point, par une analyse aux dimensions, les facteurs pertinents pour le changement d'échelle : la portée de l'ouvrage, la rigidité hors plan de la grille par unité de longueur, la rigidité en cisaillement des nœuds de la grille, la rigidité axiale de la grille et la rigidité en cisaillement apportée par le système de contreventement. Ils constatent alors que, pour être capable de reprendre les charges imposées au gridshell de Mannheim, une grille à double nappe avec contreventement est indispensable. Cette solution technologique n'est pas sans conséquences car, lors de la mise en forme de la grille, la nappe supérieure de la grille s'allonge alors que la nappe inférieure raccourcit. Pour permettre ces déformations, une certaine souplesse est nécessaire au niveau des assemblages, ce qui est en contradiction avec la recherche du nœud le plus rigide. De nouveaux tests en laboratoire sont donc effectués pour évaluer la raideur en cisaillement des connections et aboutissent à la création d'un trou oblong pour les nœuds de toutes les lattes supérieures de la grille.

L'ensemble des données recueillies est ensuite utilisé pour une quinzaine de simulations numériques de l'ensemble de la structure de Mannheim dans sa forme finale. Par rapport à la structure réelle, le maillage du modèle numérique est très lâche (une latte tous les 6 m au lieu d'une tous les 50 cm), il ne tient pas compte de la précontrainte dans les barres, ni de leur forme courbe entre deux nœuds du maillage et n'intègre que des charges ponctuelles au niveau des nœuds et des conditions aux limites fixes. Malgré quelques difficultés de convergence, des zones de faiblesses sont mises en évidence et renforcées soit par des cales insérées entre les deux nappes pour augmenter la raideur en cisaillement de la grille soit par un doublement local de la section des lattes. De nouvelles simulations sont alors effectuées et la charge de ruine est évaluée à 2,85 fois la charge maximale ce qui, tous facteurs de sécurité confondus, est jugé admissible.

1.3.3 Réalisation de la structure

Au niveau des appuis du gridshell, une très grande variété de solutions est mise en œuvre dont la plus courante est un appui direct sur des longrines en béton. Dans les zones où les charges retransmises par la grille sont relativement uniformes dans tous les cas de charge, la grille repose sur des câbles tendus semblables aux câbles de ralingue des structures tendues (cf. figure 1.15). Au niveau des ouvertures, ce sont des arches en bois lamellé-collé qui soutiennent la grille. Enfin, sur un des côtés de la halle, une ligne introduit une singularité dans la courbure du plus grand dôme (voir la photographie aérienne de la figure 1.13). De part et d'autre de cette brisure, la grille est interrompue et repose sur une poutre de vallée (le pendant des câbles de vallée des structures tendues), elle-aussi en lamellé-collé. Quel que soit le système de fondation considéré, la grille ne repose pas directement sur ses appuis mais sur des plaques intermédiaires de contre-plaqué de forte épaisseur qui servent à éviter les concentrations de contraintes dans les barres.

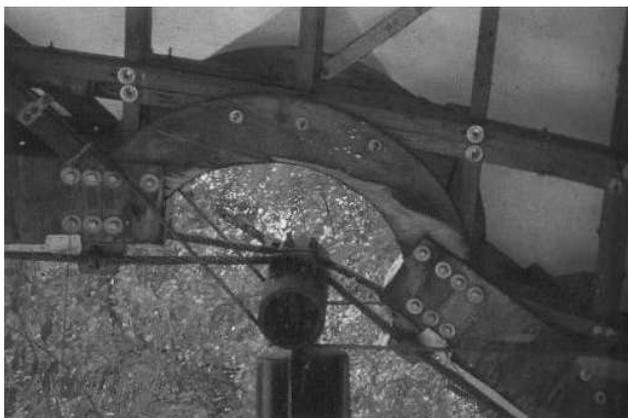


FIG. 1.15 – Détail du dispositif de fixation de la grille sur un câble.

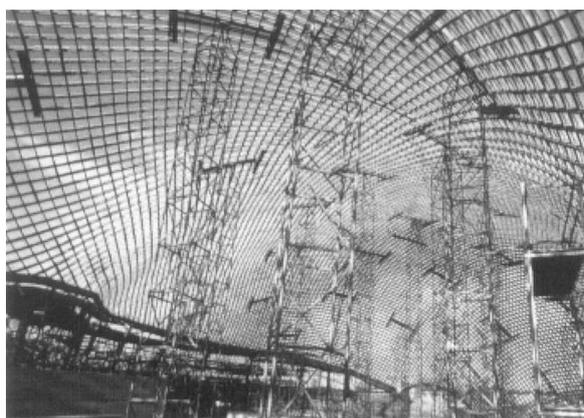


FIG. 1.16 – Les tours de levage et les répartiteurs en H de Mannheim.

Enfin, dernière difficulté à résoudre : le montage. Au départ, l'entreprise de charpente chargée de la construction du bâtiment propose de mettre en forme la grille à l'aide de grues de levage comme pour les gridshells d'Essen ou de Montréal. Les dimensions beaucoup plus importantes de la grille de Mannheim, la raideur de la structure en double nappe et le nombre d'engins nécessaires pour éviter de trop concentrer les efforts rendent la chose impossible. L'entreprise se rabat alors sur un système alternatif de tours d'échafaudage. Celles-ci mesurent un mètre de large, ont une hauteur adaptable par palier de 30 cm et sont stables jusqu'à 17 m de haut ; elles sont complétées en tête d'un répartiteur en H pour ne pas poinçonner la grille. En procédant de proche en proche et en poussant progressivement en différents points de la grille, un chariot élévateur ordinaire suffit à la mise en forme générale de la structure (cf. figure 1.16). Chaque fois qu'une zone atteint la bonne courbure ou entre en contact avec une ligne d'appuis, elle est rigidifiée par des lattes de bois posée le long des diagonales des mailles de la grille. Et ainsi de suite jusqu'à la rigidification totale de la structure. Enfin, avant l'agrément définitif, le contrôleur mandaté par la ville exige un test de chargement sur la structure réelle. Plus d'une centaine de poubelles sont donc empruntées à la ville de Mannheim et remplies d'eau, puis sus-

pendues à la structure pour simuler une charge de neige de 40 kg/m² sur une zone de 500 m². Les déplacements observés par l'équipe de l'IAGB avec des théodolites ne dépassent pas 8 cm, soit 1/750^e de la portée, ce qui est plus que suffisant. La couverture en PVC transparent peut donc être posée et le bâtiment ouvert au public.

Le gridshell du Bundesgartenschau de Mannheim est le plus grand gridshell construit à ce jour et il demeure la référence incontestée de ce type de structure, dont il est d'ailleurs resté pendant 25 ans le seul représentant. Les savoir-faire constructifs développés pendant sa conception n'ont guère connu d'évolution par la suite et les gridshells présentés dans les deux paragraphes suivants en reprennent tous les grandes lignes. En revanche, pour le calcul de la structure, les approximations sont pertinentes mais considérables : la géométrie théorique est celle d'un filet pas d'une grille en flexion, l'épaisseur des différentes couches est négligée, la précontrainte dans les barres également et l'analyse structurelle de la structure reste rudimentaire, si bien que c'est dans ce domaine qu'il reste des phénomènes à comprendre et à expliquer.

1.4 Le gridshell du musée de Downland

1.4.1 Le projet et son contexte

Le gridshell du musée de Downland, qui a vu le jour en 2002 au Royaume-Uni, constitue pour beaucoup le symbole du renouveau de ce type de structures. Le projet a fait l'objet d'une communication abondante dans la presse spécialisée en architecture, sur internet^{4, 5, 6} et dans les revues scientifiques d'ingénierie (cf. O. Kelly [58] et R. Harris [49]). C'est de ce dernier article que sont tirées la plupart des informations de cette section.

Le maître d'ouvrage du gridshell de Downland est le « Weald and Downland Open Air Museum », un musée et un centre de restauration de l'habitat en bois de la région du Sussex dans le sud de l'Angleterre. Depuis 1970, ses conservateurs et artisans parcourent la campagne environnante à la recherche de vieilles maisons traditionnelles en mauvais état, les démontent afin de les reconstruire sur le terrain du musée après restauration. Ce musée est donc une sorte de conservatoire de l'architecture vernaculaire de la région. Son atelier de charpente étant devenu trop exigu, il était nécessaire de construire un nouveau bâtiment. Le cahier des charges de celui-ci indique que la nouvelle construction devait à la fois être caractéristique de l'architecture du début du XXI^{ème} siècle et s'inscrire dans la tradition de l'artisanat local ; de plus, la main d'œuvre et les matériaux devaient, dans la mesure du possible, être issus de la région. Compte tenu de ces contraintes, la réponse de l'architecte Edward Cullinan, qui propose un gridshell en bois associé à une couverture traditionnelle, apparaît d'une grande pertinence.

Sur le plan architectural, Edward Cullinans confine toutes les activités commerciales dans une construction maçonnée semi enterrée qui sert de socle au gridshell qui abrite lui l'atelier de charpente de 700 m². L'enveloppe de la structure forme trois bulbes arrondis entrecoupés de deux vallées. Sa hauteur ondule ainsi entre 7 et 9,5 m tandis que, dans un même mouvement,

⁴<http://www.wealddown.co.uk/downland-gridshell-construction-progress.htm>

⁵en.wikipedia.org/wiki/Weald_and_Downland_Gridshell

⁶<http://vs2.i-dat.org/unstructuredo2/eco2.html>



FIG. 1.17 – Couverture du gridshell de Downland en court de montage.

sa largeur varie de 12 à 16,5 m. La longueur totale de l'édifice est d'environ 50 m. Il s'appuie en périphérie sur la dalle de béton qui surmonte le rez-de-chaussée et repose sur des arches en lamellé-collé à ces deux extrémités. Tous les éléments de structure en bois, y compris le gridshell lui-même, sont en chêne vert en provenance de Normandie qui n'est située qu'à 250 km du site du musée. La crête du bâtiment présente des pentes relativement faibles, elle est donc couverte à l'aide d'un système de voliges et de feuille de zinc (cf. figure 1.17). La partie intermédiaire de la couverture accueille des panneaux de polycarbonate transparents pour faire entrer la lumière. — L'introduction de ce matériau plastique au milieu du reste étonne, mais il faut noter que le polycarbonate est recyclable et que, ces panneaux étant légèrement distordus, il était impossible de leur substituer des vitrages ordinaires. — Enfin, la couverture des flancs est constituée d'un empilement de tuiles de thuya géant (*thuya gigantea*), un bois local qui ne nécessite aucun traitement de surface. L'ensemble des solutions techniques adoptées pour la couverture et les fondations satisfont donc amplement la deuxième partie du cahier des charges et ses exigences écologiques. En ce qui concerne les exigences de la première partie de ce cahier des charges, les paragraphes suivants montrent qu'elles sont également satisfaites, tant pour la conception, que la réalisation et le montage de ce gridshell.

1.4.2 La recherche de forme

Edward Cullinans cherchait depuis quelques années une occasion de réaliser un gridshell. Il en avait compris les principaux principes constructifs : le degré de liberté en cisaillement qui permet la mise en forme de la grille et l'importance de la double courbure de la forme finale qui donne à la coque toute sa rigidité. La première esquisse du bâtiment, celle présentée lors du concours, est donc très proche de la forme finale. Cependant il reste difficile pour lui de savoir quelle grille permettra d'obtenir cette forme et quelles doivent être les dimensions de cette grille pour qu'elle puisse résister aux différents chargements réglementaires. Il se tourne donc vers les ingénieurs du Buro Happold, seul bureau d'études à avoir dimensionné des gridshells à ce jour.

Les contraintes esthétiques imposées par l'architecte, les dimensions générales de la structure, la répartition des charges permanentes (notamment le poids de la couverture de la crête) et

l'importance relative des charges climatiques font qu'il apparaît déraisonnable que cette forme soit funiculaire de son propre poids. La recherche de forme ne peut donc être effectuée par inversion d'un filet ou selon la méthode des densités de force. C'est donc Chris Williams, professeur dans le département d'architecture et de génie civil de l'université de Bath, qui va être chargé de cette étape et définir une forme qui soit en équilibre sous l'ensemble des charges permanentes. Chris Williams a déjà une première expérience sur les gridshells puisqu'il faisait partie de l'équipe qui a fait l'étude aux éléments finis du gridshell de Mannheim⁷. S'appuyant sur ses travaux [2] et ceux de son collègue à l'université de Bath, Michael Barnes [13, 14, 15, 3], il va développer un programme spécifique de recherche de forme prenant en compte la flexion dans les éléments. Ce programme repose sur la méthode de la relaxation dynamique dont les principes sont développés dans le paragraphe 3.1.3. Les détails de la procédure permettant d'approcher la forme désirée par l'architecte n'ont cependant jamais été publiés et on peut se demander si Buro Happold et l'université de Bath n'ont pas un intérêt commercial à rester évasifs sur les méthodes et algorithmes qu'ils utilisent.

1.4.3 Les maquettes d'étude

Une fois la recherche de forme effectuée, une première maquette au centième a pu être réalisée en fil de fer. Son but était d'une part de montrer au client la faisabilité du passage de la grille plane au gridshell à surface gauche ; et d'autre part de mettre en évidence l'effet rigidifiant des câbles de contreventement. Dans la version définitive du projet, ceux-ci sont cependant remplacés par une troisième direction de latte de bois en peau extérieure. Cette solution a deux avantages principaux : elle divise par deux le nombre de nouveaux éléments à installer puisque les lattes travaillent aussi bien en traction qu'en compression, et elle permet une fixation aisée de la couverture sur ces lattes qui constituent des éléments filants régulièrement espacés dans le sens longitudinal sur les flancs et transversal sur la crête de la structure (cf. figure 1.17). Une deuxième maquette en bois à l'échelle 1/30^e est ensuite confectionnée par un étudiant de l'université de Bath pour la simulation des étapes de montage. Elle est suivie rapidement d'un autre modèle en bois à l'échelle 1/43^e dans lequel des clous sont ajoutés à la structure afin de mieux représenter le poids propre de la structure réelle. Cette maquette met en évidence deux difficultés lors du montage : des câbles additionnels seront nécessaires pour contraindre la structure à épouser la forme des vallées ainsi que pour coller aux arches en bois au niveau des extrémités de la structure. Elle permet également de comprendre le comportement de la grille pendant les phases intermédiaires de construction et l'influence de modifications locales des conditions aux limites sur la forme générale de la structure.

1.4.4 Le dimensionnement de la structure

Pendant le montage, la grille est soutenue en de multiples points par un échafaudage si bien que sa stabilité est assurée par ce dernier ; c'est donc la configuration finale de la structure qui va être déterminante pour le dimensionnement selon l'Eurocode 5. L'analyse numérique des

⁷http://www.smartgeometry2007.com/bio/williams_bio.asp

contraintes sous chargement est effectuée en parallèle avec la méthode de la relaxation dynamique et avec un programme de calcul par éléments finis du commerce. Après plusieurs essais avec différents espacements entre les lattes de la grille et différentes sections de lattes, il s'avère qu'une distance de 1,0 m entre deux lattes est suffisante dans la plupart des zones moyennant une redensification ponctuelle avec des lattes tous les 0,5 m afin d'éviter des concentrations d'efforts trop importantes dans les creux entre les dômes (cf. figure 1.18). La grille est formée de quatre couches superposées, deux dans chaque direction, formées de lattes de 50 x 35 mm. Comme pour le gridshell de Mannheim, le doublement des lattes a été nécessaire pour gagner de l'inertie en flexion et pour pouvoir reprendre des chargements antisymétriques.

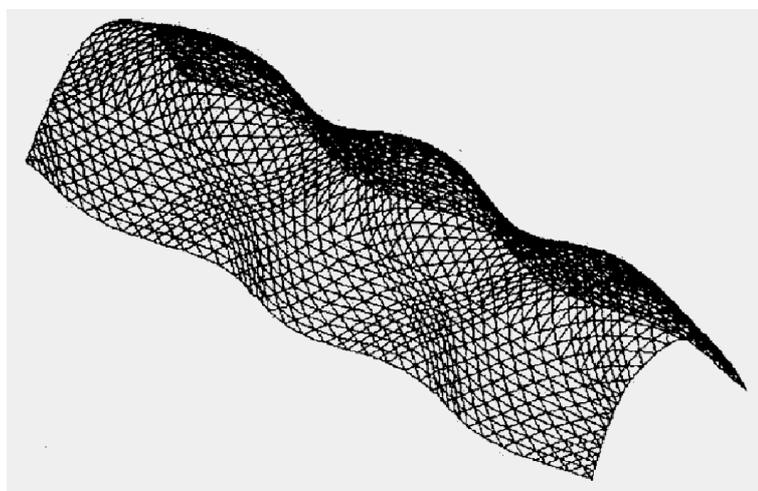


FIG. 1.18 – La structure du gridshell de Downland après analyse des contraintes.

En ce qui concerne le matériau, les tests menés à l'université de Bath ont montré que, parmi les essences locales, le chêne était celui qui possédait les meilleures propriétés mécaniques. Un chêne vert de Normandie a été choisi en raison de sa disponibilité et de la qualité des grumes (30 MPa de résistance à rupture en flexion, soit une classe D30 selon la réglementation européenne). Aucun défaut d'alignement supérieur à cinq degrés et aucun nœud n'étant tolérables dans les lattes de la grille, ils sont éliminés systématiquement du bois brut. Le bois qui arrive à l'atelier de préfabrication est ainsi découpé en éléments de 0,6 m qui sont ensuite réassemblés en latte de 6 m par aboutage à entures multiples. Après quoi, celles-ci sont apportées par camion sur le site du chantier où elles sont assemblées entre elles par joints biseautés en bout pour former les barres de la grille dont la longueur atteint 37 m pour la structure principale et 50 m pour le contreventement longitudinal.

Les quatre couches de lattes doivent ensuite être assemblées à l'aide d'une pièce qui permette à la fois la rotation des deux directions de barres entre elles et le glissement relatif des couches les unes sur les autres. Pour le gridshell de Mannheim, cette connection était réalisée à l'aide d'un boulon traversant et de trous oblongs. Avec le recul, cette solution est jugée insatisfaisante car elle affaiblit la section des barres à l'endroit où elles sont le plus sollicitées. Un nouveau type de connection est donc développé et breveté par l'entreprise de charpente et le bureau d'étude. Comme on peut le voir sur la figure 1.19, cet assemblage est constitué de trois plaques métalliques qui ensèrent les différentes nappes. La force de serrage des quatre boulons a été étudiée

pour permettre la rotation des barres et leur glissement. La plaque du milieu comporte deux pics en face supérieure et inférieure afin de fixer la position du noeud et pour que seuls des glissements relatifs autour de cette position soient autorisés. De plus, deux boulons opposés sur chaque assemblage sont prolongés afin d'obtenir des points de fixations pour les lattes de contreventement. Enfin, par endroit, la plaque inférieure accueille de petits dispositifs de suspension pour des charges légères qui pourront être ajoutées lors de l'exploitation du bâtiment.

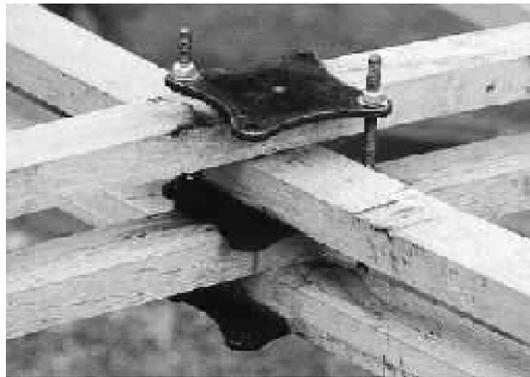


FIG. 1.19 – Système de connection du gridshell de Downland.

L'essentiel des détails techniques de la grille étant arrêté, un prototype de grille de 5 x 2,5 m a été construit sur le site afin de vérifier la déformabilité effective de la grille. La surface à double courbure réalisée a un rayon de courbure minimum de 5 m, soit légèrement moins que le plus petit des rayons de courbure de la forme finale. Aucun problème particulier n'étant à signaler, la construction du bâtiment est lancée.

1.4.5 La construction du bâtiment

Le système de levage de la grille mis en œuvre à Mannheim, avec la plupart des ouvriers qui travaillent sous la structure en suspension, ne respecte pas les standards de sécurité actuellement en vigueur en Grande-Bretagne. La grille est également trop lourde pour pouvoir être mise en place par un système de grues qui risquerait de provoquer un arrachement des points de levage. Plutôt que de lever la grille, il a donc été décidé de la construire en hauteur et de la laisser descendre sous son propre poids jusqu'à ce que les extrémités des barres entrent en contact avec le sol et leurs appuis. Une plateforme de 50 x 25 m est ainsi assemblée à la hauteur des creux entre les dômes et est surmontée par un système complexe d'étais de longueur et d'orientation réglable qui permettront d'ajuster la hauteur de la grille au fur et à mesure que l'échafaudage sera démonté (cf. figure 1.20). L'angle entre les deux directions de la grille n'est pas fixé puisque c'est justement ce degré de liberté en cisaillement qui garantit la déformabilité de la grille ; la configuration initiale de la grille est donc choisie de telle sorte que sa longueur initiale soit égale à la longueur finale du gridshell. Les positions des points situés dans le plan de symétrie de la structure ne varient donc que verticalement, le contrôle de leur alignement permettra de s'assurer qu'à chaque étape les déformations de la grille restent symétriques. Le processus de mise en forme progressive de la grille est ensuite initié et contrôlé en permanence par ordinateur à l'aide de deux cent capteurs répartis sur la grille (cf. figure 1.20).

Les difficultés rencontrées sur les maquettes d'études ont été également rencontrées sur la structure réelle et des câbles ont dû être ajoutés pour forcer la déformation des diagonales de certaines mailles dans les creux et près des extrémités. Aucune autre complication ne sera notée jusqu'à ce que la structure atteigne ses fondations sur lesquelles elle est simplement vissée. Des cales en bois, issues des chutes de la construction de la grille, sont ensuite logées entre tous les nœuds de la grille pour augmenter la résistance en cisaillement des nappes superposées. Enfin, le contreventement et la couverture sont installés.



FIG. 1.20 – La structure du gridshell de Downland en cours de montage.

Globalement, ce processus de construction s'est avéré très performant puisque, sur les 10 000 joints réalisés, seulement 145 sont cassés lors du montage. Il démontre donc la faisabilité technique de telles structures mais aussi sa viabilité économique. En effet, l'article de R. Harris [49] compare les coûts de construction au mètre carré du gridshell de Downland avec ceux d'autres bâtiments ayant un programme voisin construit par le bureau d'étude Buro Happold ces dernières années. Avec 1097 £/m², il se situe dans la moyenne des prix observés puisque le bâtiment le moins cher est revenu à 780 £/m² et le plus cher à 1520 £/m². Le gridshell de Downland fut donc logiquement suivi d'un certain nombre d'autres réalisations.

1.5 Les autres réalisations principales

1.5.1 Le pavillon du Japon de l'exposition « Hannovre 2000 »

Le thème de l'exposition universelle de Hannovre était l'environnement et le Japon désirait en profiter pour proposer une structure dont les matériaux puissent être entièrement recyclés après démontage. La conception de ce bâtiment a été confiée à l'architecte japonais Shigeru Ban⁸, associé pour l'occasion à Frei Otto et aux ingénieurs de Buro Happold. Celui-ci conçoit un tunnel ondulant de papier supporté par des tubes de carton assemblés entre eux par de simples sangles (cf. figure 1.21). Bien que l'architecture de papier ait été autorisée récemment par le ministère de la construction au Japon, aucun bâtiment de cette taille (70 m de long, 15 m de haut et 35 m de portée maximale) n'avait encore été construit et les autorités allemandes ont imposé l'addition d'arches de renfort en bois et ce malgré les calculs démontrant la stabilité de la structure.

⁸http://www.designboom.com/history/ban_expo.html

D'abord assemblée à plat sur un échafaudage spécial conçu par l'entreprise qui réalisera deux ans plus tard l'échafaudage du musée de Downland, la structure a été amenée jusqu'à sa forme finale en trois semaines. Aucun béton n'a été utilisé pour les fondations, simplement constituées de caisses de bois remplies de sable. Quant à la couverture, un papier imprégné spécialement importé du Japon a été préféré au PVC que seulement quelques entreprises sont en mesure de recycler. Il semble donc que la plupart des méthodes employées pour la construction du gridshell de Downland, dont la forme à trois bosses ressemble étrangement à celle-ci, aient été développées pour le pavillon du Japon même si ce dernier, en dehors de son extraordinaire souci écologique, bénéficie d'une notoriété moins grande.



FIG. 1.21 – Intérieur du pavillon du Japon de Shigeru Ban.

1.5.2 Le Savill Building du grand parc de Windsor

Depuis juin 2006, le plus grand gridshell du Royaume Uni se trouve au cœur du domaine royal du grand parc de Windsor et forme la nouvelle entrée des jardins Savill [8]. À la différence des trois bâtiments ci-dessus, ce gridshell ne forme que le toit de la structure (cf. figure 1.22) et ne descend pas jusqu'au sol ce qui permet d'ouvrir de larges vues sur la campagne environnante. La conception de la toiture est l'œuvre de l'architecte Glenn Howells en collaboration avec les ingénieurs de Buro Happold, ceux-là mêmes qui avaient travaillé sur le gridshell de Downland. Ici encore, les différents composants de la grille ont été assemblés à plat sur un échafaudage comportant 200 points de hauteurs ajustables afin d'atteindre la forme finale à trois dômes.

La géométrie de référence du toit s'appuie sur des formes simples : longs de 90 m et de largeur quasiment constante (environ 25 m), les bords extérieurs du toit suivent l'arc de l'axe central du bâtiment ; la section transversale est formée d'une série de paraboles dont la hauteur varie de 4,5 m à 9,5 m dans le sens longitudinal selon une sinusoïde. Ingénieurs et architectes ajustent ensuite cette forme de façon à ce qu'elle puisse effectivement résulter de la déformation d'une grille plane. Tous restent toujours très discrets sur les méthodes de recherche de forme mises en œuvre pour y parvenir.

D'un point de vue technologique, la grille est faite d'un mélèze local et suit une maille carrée d'un mètre de côté avec des sections de 80 x 50 mm. Pour gagner en inertie, elle est dédoublée et on utilise une technique de connection identique à celle développée pour le gridshell de



FIG. 1.22 – Intérieur du Savill building.



FIG. 1.23 – Ancrages de la couverture.

Downland. Les éléments longitudinaux de 36 m de long sont triés et assemblés de sorte qu'ils ne présentent aucun nœud, les chutes de bois étant réutilisées pour écarter les deux couches de la grille et pour retransmettre les efforts tranchants dans la coque. La structure est rigidifiée non pas par des câbles d'acier mais par des lattes de bouleau de 12 mm d'épaisseur. Sur ces lattes viennent s'ajouter un pare-vapeur, une couche d'isolation et une couverture traditionnelle en tuile de chêne de 100 x 20 mm. Enfin, le périmètre de la toiture est supporté par des tubes métalliques de 400 mm de diamètre qui reposent eux-mêmes sur une série de quadripodes en acier. Afin de mieux répartir les efforts entre la grille et les tubes, la liaison entre les deux est assurée par des plaques de contre-plaqué à haute résistance de 300 x 39 mm qui viennent s'intercaler dans la grille sur un ou deux mètres (cf. figure 1.23). Ainsi, même si la forme du gridshell n'est pas le produit de l'inversion d'un filet et que, par conséquent, les efforts n'y transitent pas de façon idéale, avec ses 17 kg/m² et la cohérence de ses choix technologiques, ce projet démontre que les gridshells en bois ont atteint une certaine maturité.

1.5.3 Le gridshell artisanal de Pishwanton

Le gridshell de Pishwanton de 2002 est à rapprocher des premières réalisations de Frei Otto par sa taille (80 m²), à ceci près qu'il s'agit d'un vrai bâtiment et pas d'une simple structure de démonstration. Conçu par l'architecte Christopher Day et l'ingénieur David Tasker, ce bâtiment quasi-rustique transforme une structure de haute technologie en un élément de la culture constructive traditionnelle et, avec un coût de 90 000 euros (à comparer aux 7,5 millions d'euros du *Savill Building* et aux 3 millions d'euros du gridshell de Downland), la met financièrement à la portée de tous⁹.

Comme pour le Savill Building, le gridshell ne constitue que la couverture du bâtiment, les murs extérieurs en forme d'hexagone sont réalisés à partir de pierres locales maçonnées (voir la maquette d'étude de la figure 1.24). La portée de la coque est de dix mètres. Elle est constituée d'une grille carrée en mélèze de deux fois vingt lattes de douze mètres de long et d'une section de 35 x 25 mm reliées entre elles par un simple système de boulons. Elle a été mise en forme en deux heures par une douzaine de volontaires sans autre moyen de levage que des étais et des

⁹<http://vs2.i-dat.org/unstructuredo2/gridshell.html>

cordes pour rabattre les angles. Le contreventement de la grille est assuré par plusieurs couches de planches de bois directement vissées dans la grille. Ces couches, trois en partie courante, quatre dans les angles qui sont plus sollicités, sont disposées perpendiculairement les unes aux autres pour augmenter la rigidité. La couverture est composée d'une épaisseur de liège pour l'isolation, d'une membrane plastique pour l'étanchéité et d'une couche de bouse de cheval et de vache aujourd'hui entièrement recouverte d'herbes folles (cf. figure 1.25).

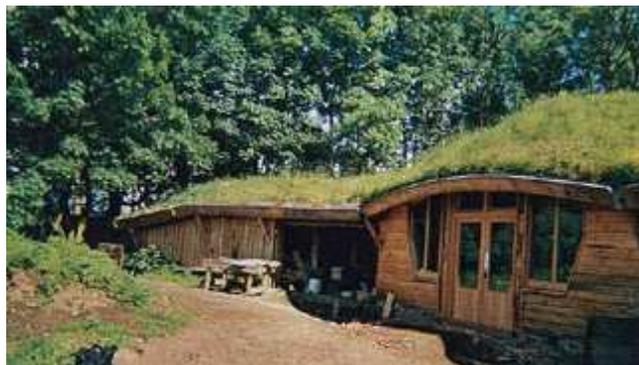
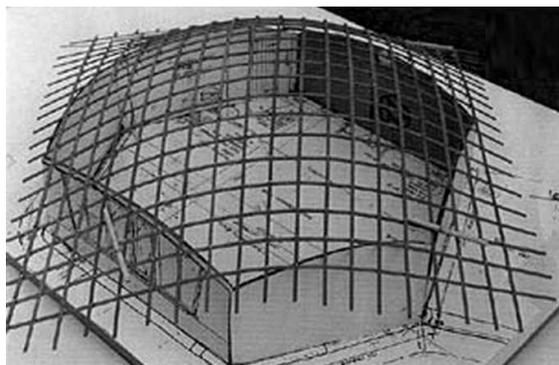


FIG. 1.24 – Maquette d'étude du gridshell.

FIG. 1.25 – Couverture végétale de Pishwanton.

La recherche de forme n'a vraisemblablement pas dépassé le stade de la maquette d'étude, ni même fait l'objet de mesures précises de géométrie. L'analyse structurelle résulte de « calculs de coin de table » à base de changements d'échelle et de théorie des coques élémentaire. Une analyse numérique complète de la mise en forme de la structure et de son comportement sous charges n'a pas pu être effectuée en raison des incertitudes importantes sur la qualité des matériaux et de son prix prohibitif. Le dimensionnement de la structure n'est donc qu'un dimensionnement en contrainte. Pour vérifier le bon comportement statique du bâtiment réel, un test de chargement, équivalent au cas de neige le plus défavorable, a eu lieu à l'aide de 700 sacs de sable de 20 kg chacun, répartis sur l'ensemble de la structure : un déplacement maximum de 25 mm a été mesuré, ce qui est tout à fait admissible. Compte tenu de l'épaisseur de bois rajoutée sur le gridshell en lui-même, on peut se demander si la grille n'a pas seulement servi de cintre et si tous les efforts ne transitent pas dans la coque formée par les différentes couches de bois. Quoiqu'il en soit ce projet démontre la remarquable simplicité constructive des gridshells qui peuvent s'affranchir sur des bâtiments modestes de l'expérience et du savoir-faire très protégé de quelques grands bureaux d'études. Les applications de taille réduite dans lesquelles des espaces libres de poteaux sont nécessaires, sont nombreuses : salles de réception, salles de classe ou de sport... et le gridshell de Pishwanton pourrait contribuer largement à donner confiance dans l'efficacité et l'élégance des formes courbes de ce type de structure.

1.5.4 Tour d'observation du zoo d'Helsinki

La tour d'observation du zoo d'Helsinki du finlandais Ville Hara (cf. figure 1.26) est le projet qui a gagné la compétition d'architecture ouverte aux étudiants de l'université technologique de la ville en 2000¹⁰. Cet ouvrage d'une dizaine de mètres comporte deux étages supportés par 72

¹⁰http://www.arcspace.com/architects/ville_hara/tower/index.htm

éléments de bois lamellé-collé de 12 m de long et d'une section de 60 x 60 mm. Ces derniers, pré-cintrés en usine selon sept gabarits différents, ont été montés un par un, directement en place de sorte que seule une légère flexion était nécessaire pour atteindre la forme finale. L'étape de mise en forme et de levage de la structure avant rigidification n'a donc pas lieu d'être ici. De plus, les différents éléments sont connectés entre eux par des plaques de clous et par des rivets, le degré de liberté en rotation de la grille n'existe donc pas. Ceci garantit une certaine stabilité à la forme mais induit des moments d'encastrement dans les éléments de la grille. Les paliers des étages jouent quant à eux le rôle de diaphragmes et sont reliés entre eux par les escaliers. Ainsi, bien que ce bâtiment semble proche des gridshells présentés plus haut, les choix constructifs qui ont été faits ici entraînent un fonctionnement structurel très différent des précédents.



FIG. 1.26 – Tour d'observation du zoo d'Helsinki.

La recherche de forme repose sur l'étude de maquettes à l'échelle photographiées numériquement. L'image obtenue sert de guide pour le dessin en trois dimensions de la structure selon lequel les différents éléments en lamellé-collé seront usinés. Du fait du précintrage de ces éléments, les précontraintes de flexion liées à la mise en forme de la structure ne sont pas très importantes et elles sont négligées pour l'analyse structurelle. Celle-ci peut donc être effectuée directement à partir de la géométrie finale de la structure fournie par les architectes, avec un logiciel de calcul aux éléments finis standard et suivant le canevas général de l'eurocode¹¹. Des tests expérimentaux statiques et dynamiques sur l'ouvrage réel ont confirmé la validité des hypothèses prises en compte dans la modélisation.

1.5.5 Le gridshell modulaire de Flimwell

Certains sites internet^{12, 13} ajoutent le gridshell modulaire du centre du bois de Flimwell dans le Sussex à la liste des gridshells réalisés. Ce bâtiment présente certes une toiture posée sur une grille mais celle-ci n'a qu'une simple courbure, elle-même posée sur des arches en bois. Cette grille ne porte que sur trois ou quatre mètres dans le sens où elle n'a pas de courbure ; il n'y a donc pas d'effet coque ce qui est incompatible avec la définition même des gridshells.

¹¹http://www.lusas.com/case/civil/wooden_tower.html

¹²<http://en.wikipedia.org/wiki/Gridshell>

¹³<http://vs2.i-dat.org/unstructuredo2/gridshell.html>

1.6 Conclusion

Le concept de grishell n'est pas, comme on a pu le voir, un concept clairement défini. Si tout le monde semble s'entendre sur le fait qu'il s'agit de structures de coques discrètes, tous n'y incluent pas le procédé de montage à partir d'une grille plane. C'est pourtant là que réside la grande originalité de ces structures : elles permettent de réaliser des formes libres à double courbure à partir d'éléments rectilignes standard en résumant les difficultés techniques à la seule question du levage et de la mise en forme. Dès 1975, le bâtiment du *Bundesgartenschau* de Mannheim révélait un univers formel radicalement nouveau par rapport aux formes des grandes couvertures construites par le passé. Il démontrait également la validité du concept de gridshell sur le plan mécanique, c'est-à-dire le passage par simple triangulation d'une grille souple à une structure d'une grande rigidité et d'une légèreté exceptionnelle. Pourtant, cette construction extraordinaire ne fait pas école et est restée un objet unique en son genre pendant près de 25 ans pour ne renaître qu'aujourd'hui.

On peut évoquer trois raisons à cela. La première est d'ordre sociologique et architectural : le développement des gridshells nécessite une réflexion profonde sur la façon d'habiter un espace courbe, d'appréhender un volume qui n'est plus simplement borné par des plans orthogonaux. En ce sens, les gridshells sont le pendant synclastique des formes issues de l'architecture textile et ils profitent maintenant de l'expérience acquise depuis quelques années dans ce domaine. La deuxième raison est technologique : l'usage de matériaux soumis à des courbures importantes et à une contrainte de flexion permanente est certes courant dans les objets quotidiens (panier en osier, passoire de ménage, arbalète, etc.) mais il demeure complètement inhabituel à l'échelle d'un bâtiment. Pour rassurer maîtres d'œuvre et maîtres d'ouvrage, ils importent donc de trouver le matériau adéquat et les technologies d'assemblage, de rabouillage qui apporteront des garanties suffisantes sur la pérennité de l'ouvrage. C'est à cette tâche qu'est consacré l'étude systématique des propriétés mécaniques et environnementales des matériaux du paragraphe 2.2 ; elle montrera qu'avec le bois, les matériaux composites semblent particulièrement adaptés pour cette application. La troisième raison enfin est d'ordre calculatoire : le passage d'une grille plane à une résille gauche n'a pas de solution analytique simple et le niveau de précision requis pour la géométrie dépasse celui de la maquette. C'est donc le développement de la puissance de calcul des ordinateurs et de nouveaux algorithmes de calcul non-linéaire qui vont permettre d'étudier avec précision le comportement mécanique de structures. Parmi ces algorithmes, la méthode de relaxation dynamique semble la plus performante, elle sera exposée dans le chapitre 3 et mise en œuvre pour les calculs de tous les gridshells présentés les chapitres suivants.

Chapitre 2

Les matériaux composites

La plupart des gridshells construits à ce jour ont une structure principale en bois. Compte tenu des contraintes mécaniques imposées durant le montage, ce choix semble le plus pertinent parmi les matériaux de construction traditionnels. Cependant il existe dans d'autres secteurs d'activité des matériaux très répandus comme les matériaux composites verre/résine qui offrent des performances équivalentes, voire meilleures que celles du bois, en terme d'allongement à rupture et de raideur. Il semble donc intéressant d'étudier plus précisément les propriétés de ces matériaux et leur adaptation à ce type d'application.

Ce chapitre est donc consacré aux matériaux composites dans le génie civil et pour les gridshells. On y rappelle tout d'abord les principales caractéristiques de ces matériaux polymères renforcés par des fibres et leur procédé d'élaboration, notamment la pultrusion. On passe également en revue leurs principales applications dans le génie civil : armature pour béton, renforcement de structure, élément de structure de ponts et de couverture de grande portée... Ensuite, on montre que les composites verre/résine sont des matériaux adaptés pour la construction de gridshell et qu'ils constituent une alternative intéressante au bois. Pour cela, une méthode originale pour le choix des matériaux dans la conception d'une pièce mécanique, appelée méthode de Ashby, est utilisée. Par une comparaison systématique des propriétés des matériaux, elle permet d'effectuer une analyse multicritère des contraintes et des objectifs spécifiques des gridshells et d'exhiber le ou les matériaux les plus adaptés pour cette application. Enfin, on étudie plus précisément le comportement mécanique des composites pultrudés fléchis dans le cadre de sollicitation en grande déformation des gridshells.

2.1 Les matériaux composites dans le génie civil

2.1.1 Généralités sur les matériaux composites

Par définition, les matériaux composites sont formés d'au moins deux matériaux issus de familles différentes (céramiques, polymères ou métaux). Les façons de combiner ces familles de matériaux sont extrêmement variées et de nature très diverses selon que l'objet est destiné au rotor d'un hélicoptère ou au remplissage d'une portière de voiture. Sans qu'on les appelle ainsi,

les matériaux composites sont employés depuis très longtemps dans le génie civil. Le torchis en est un bel exemple : « terre grasse argileuse malaxée avec de la paille hachée ou du foin, [il est] utilisé pour lier les pierres d'un mur ou pour former le hourdis d'une construction en colombage »¹. Le béton armé en est un autre, plus récent : les armatures d'acier constituent le renfort du mortier qui joue le rôle de matrice. Par certains côtés, on peut également voir le bois comme un composite naturel formé de fibres ligneuses reliées par de la cellulose. Cependant quand on parle de matériaux composites dans le génie civil, on ne pense pas à ces matériaux mais plutôt aux composites constitués d'une matrice organique renforcé par des fibres. Ces fibres sont essentiellement de trois types : verre, carbone et aramide, tandis que les matrices sont en général thermodurcissables : polyesters, phénoliques ou époxydes — Les résines thermoplastiques sont certes plus faciles à mettre en forme et à usiner, mais elles sont beaucoup moins résistantes que les thermodurcissables.— La structure de ces composites allie les qualités mécaniques d'un renfort en fibre aux qualités ductiles d'une matrice polymère. Celle-ci ayant des propriétés mécaniques beaucoup plus faibles que celles du renfort, son rôle est d'assurer la cohésion du matériau dans son ensemble et le transfert par cisaillement des contraintes aux fibres. Les principales propriétés mécaniques de ces constituants sont indiquées dans le tableau 2.1.

TAB. 2.1 – Propriétés mécaniques des constituants des composites fibre/résine [41]

	Densité t/m ³	Module GPa	Coefficient de Poisson	$\sigma^{rupture}$ MPa	Allongement $\epsilon^{rupture}$	Prix €/kg
Renforts fibrés						
Verre	2,5	74 à 86	0,2 à 0,25	2500 à 3200	4,5 à 5	3 à 14
Aramide	1,45	130	0,4	2900	2,6	80
Carbone	1,8	230 à 390	0,3 à 0,35	2500 à 3200	0,6 à 1,3	80 à 160
Matrices résineuses						
Epoxyde	1,2	4,5	0,4	130	2	7 à 23
Polyester	1,2	4,0	0,4	80	2,5	3
Vinylester	1,15	3,3	0,4	75	4	4,5

On observe que, parmi ces matériaux, les moins chers que l'on puisse fabriquer sont les composites verre/polyester ; ce sont donc les seuls qui ont une chance de se développer dans le génie civil. En effet, les quantités de matériau consommées dans ce domaine sont telles que la question du prix est centrale dans le choix du matériau utilisé. Il importe donc de choisir un processus industriel de fabrication capable de fournir de grandes quantités de matériau à un prix relativement bas. Si les procédés de fabrications des composites sont multiples : moulage par contact, moulage par projection simultanée, enroulement filamentaire, etc., mais il n'y a que la pultrusion qui semble en mesure de répondre à ce double objectif de coût et de volume².

2.1.2 La pultrusion

Le mot pultrusion est une contraction des termes anglo-saxons *pull* (tirer) et *extrusion*. Il s'agit d'un procédé industriel qui « permet de fabriquer des profilés de section constante hautement

¹Cf. Dictionnaire *Le petit Robert*, 1992

²Cf. M. Chatain, [30], 1993

renforcé dans le sens longitudinal. Pour ce faire, les fibres de renfort sont tirées à travers un bain d'imprégnation puis dans une filière chauffée, de manière à initier la réaction de polymérisation. À la sortie de la filière, le profilé solide est refroidi suffisamment pour pouvoir être pincé dans la tireuse sans risque de déformation. »[23]. Une ligne de pultrusion typique est illustrée sur la figure 2.1. Elle peut être couplée à d'autres installations de façon à améliorer les performances des profilés comme par exemple une ligne d'enroulement filamentaire qui va ajouter des fibres en dehors de l'axe principal. Des techniques de fabrication de profilés courbes existent également mais elles sont assez peu répandues. Les taux de fibres obtenus avec cette méthode vont jusqu'à 60 %.

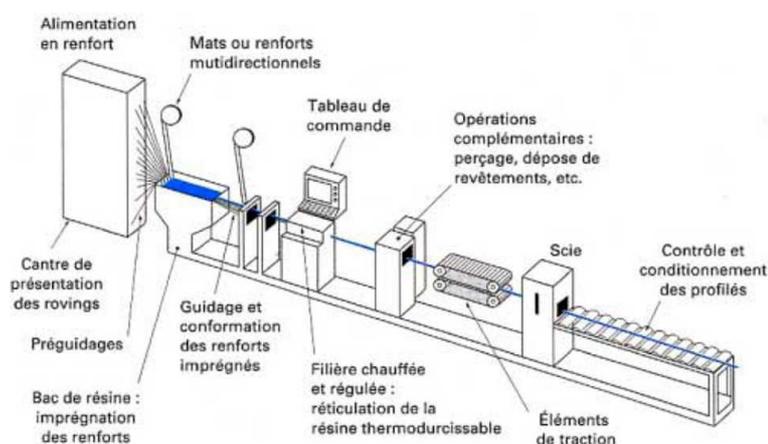


FIG. 2.1 – Schéma de principe d'une ligne de pultrusion.

Les sections possibles sont très variées : des plats, des profilés en I, en H ou en T, des tubes fermés, etc. Elles peuvent facilement accueillir des renforts locaux sous forme d'inserts métalliques ainsi que des fibres optiques pour des systèmes avancés de métrologie ou de transmission de données. C'est un procédé très économique car le niveau de standardisation est élevé et les quantités produites importantes. Les applications aussi sont très variées : flèches, bâtons de ski, conduites de fluide, garde-corps, boulonnerie, poutres, panneaux de façade ou de signalisation, fenêtres, bancs, tous types de poteaux (électrique, téléphonique, lampadaire, feux de signalisation, porte-drapeau, etc.). La plupart des réalisations actuelles dans le domaine du génie civil sont faites à l'aide de profilés pultrudés. Ils sont utilisés comme armature dans le béton, comme renforts de structure ainsi que comme éléments porteurs de ponts. Bien qu'encore marginal, le marché des composites dans la construction est en pleine expansion, les ouvrages mettant en œuvre ces matériaux se multiplient comme on va le voir dans les paragraphes qui suivent.

2.1.3 Applications pour le renforcement des structures

Armatures pour béton

Le béton armé est le matériau bon marché le plus répandu. Seulement, avec le temps, l'eau et d'autres agents agressifs s'infiltreront jusqu'aux armatures métalliques qui se corrodent et font éclater le béton, ce qui remet en cause la sûreté de l'ouvrage. Partant de cette constatation et du

fait que les composites verre/résine et carbone/résine ne rouillent pas, de nombreux laboratoires ont entrepris dès les années 1990 de remplacer les armatures métalliques par ces derniers. Ces programmes de recherche courent encore pour la plupart car les problèmes posés par ce changement de technologie sont nombreux. En effet, le verre est une solution beaucoup moins coûteuse que le carbone, mais il est attaqué par les bases. Or les formulations de béton avaient justement été faites pour être le plus basiques possible pour protéger les aciers des attaques acides. De nouveaux types de verre « alcali-résistants » ont donc été développés ainsi que de nouveaux bétons moins basiques. La question de la liaison entre le composite et le béton a également posé de nombreux problèmes qui commencent à peine à être réglés aujourd'hui (Quelle géométrie pour les composites pour obtenir le maximum d'adhérence et un rendement maximum de toutes les fibres ? Comment gérer les différences de coefficients de dilatation thermique ? etc). D'autres questions sont encore ouvertes : comment retrouver la souplesse de conception des cages d'armatures assemblées par plastification des aciers ? Faut-il préférer les résines thermodurcissables plus rigides pour lesquelles la préfabrication est incontournable, aux résines thermoplastiques formables sur chantier ?

Deux technologies sortent pour le moment du lot : les bétons-textiles renforcés par des tissus souples et les bétons armés de barres composites appelées *rebar*, pour *reinforcing bars* : barre de renforcement. Pour l'une comme pour l'autre de ces techniques, les réalisations sont peu nombreuses. Un bâtiment prototype a été construit à l'Université Technique d'Aix-la-chapelle avec des panneaux de façades en béton renforcé à l'aide de tissus de fibres de verre. Ces éléments ne sont pas structurels et, comme il n'y a plus d'épaisseur minimum nécessaire pour l'enrobage des aciers, le niveau de finesse atteint est remarquable, à peine plus d'un centimètre. Quelques ponts avec des armatures en verre existent aussi aux États-Unis (29 ponts routiers d'après Saskia Jülich [55]), au Canada (10 ponts routiers et 1 pont piétonnier toujours d'après S. Jülich [55]) et au Japon (3 ponts). La plupart ont été construits à l'aide de technologies brevetées, propriétés d'entreprises de travaux publics qui mettent en avant la rapidité de mise en œuvre et la légèreté de leur solutions, comme par exemple G. Barefoot et F. Matta qui proposent un pont constructible en cinq jours [11].

Renforcement et réparation des structures

La vie des ouvrages d'art en béton est pleine de péripéties : leurs matériaux vieillissent, se dégradent sous les effets des sels de déverglaçage et des cycles gel-dégel ; les imperfections, voire les erreurs de conception et d'exécution finissent par transparaître et entraînent des désordres dans les structures ; les charges appliquées varient et augmentent avec le trafic routier, etc. Les origines des pathologies sont multiples et les conséquences sont certaines : la surveillance et la réhabilitation des ouvrages d'art en France coûtent 45 milliards d'euros par an. Les interventions les plus courantes sont de trois types : réfection de l'étanchéité pour limiter la corrosion, réparation de la structure ou renforcement pour améliorer les performances et la durabilité de l'ouvrage. Les techniques de renforcement sont nombreuses : ragréage par mortier hydraulique, injection de polymère dans les zones fissurées, projection de béton fibré, ajout de câbles de précontrainte ou collage de tôles d'acier. Cette dernière solution est très efficace mais elle présente

quelques problèmes au niveau de la répartition des efforts entre aciers intérieurs et aciers collés. « Par ailleurs, le poids propre des tôles et leur rigidité spécifiques rendent difficiles les conditions d'application in situ. En conséquence, dès 1990, au Japon est apparue une technique de réparation qui substitue aux tôles métalliques des feuillettes composites moins lourds, plus performants mécaniquement et plus facile à mettre en œuvre »³.



FIG. 2.2 – Chantier de renforcement d'un pont sur l'autoroute A6 près de Toutry.

Cette technique de réparation par composites a fait l'objet de nombreuses recherches dont la plupart sont toujours en cours, notamment à l'École Nationale des Ponts et Chaussées (cf. G. Foret et O. Limam [63, 64]). Parallèlement, les réalisations concrètes se multiplient en Amérique du Nord, notamment au Canada et au Nord des États-Unis où les sollicitations climatiques sont plus rudes, et au Japon pour augmenter la résistance des ouvrages d'art et des bâtiments les plus stratégiques vis-à-vis du risque sismique. En Europe et en France, les applications sont moins nombreuses, peut-être parce que le règlement français impose depuis longtemps déjà de protéger les ouvrages par une chape d'étanchéité. Quelques exemples existent quand même, notamment le renforcement par des plats de carbone du pont sur l'A6 à hauteur de Toutry qui est passé en 2007 de deux à trois voies de circulation (cf. figure 2.2). Un guide de recommandation supervisé par l'Association Française de Génie Civil devrait paraître dans le courant de l'année [4].

2.1.4 Applications structurelles

Les applications dans lesquelles les composites sont utilisés comme éléments structurels porteurs sont peu nombreuses et la plupart du temps copient les structures qui ont été optimisées pour l'acier ce qui est contre-performant. Les familles de construction se diversifient peu à peu et vont maintenant du pont routier à la couverture de bâtiments de prestige.

Ponts et passerelles

Dans le domaine des ouvrages d'art, les composites sont employés pour trois postes principaux : le haubanage, les poutres principales et le tablier. Au début des années 1990, les composites étaient des matériaux nouveaux, ils suscitaient un engouement important et de nombreux

³Cf P. Hamelin [46]

ouvrages expérimentaux avec des haubans en fibre de carbone ont alors vu le jour, en particulier au Japon avec pas moins de onze passerelles et neuf ponts routiers (cf. S. Jülich [55]). Quelques ouvrages ont aussi été construits en Amérique du Nord et en Europe, dont la passerelle de Laroin en France pour laquelle un système d'ancrage de joncs en carbone a été développé par l'ENPC et breveté avec l'entreprise Freyssinet (cf. figure 2.3). L'évolution du prix du carbone n'ayant pas été très favorable par la suite, les aciers hautes performances sont restés la solution la plus rentable pour la réalisation des haubans [55].



FIG. 2.3 – La passerelle de Laroin, France.



FIG. 2.4 – La passerelle d'Aberfeldy, Écosse.

Seuls les composites verre/résine semblent donc à même de pénétrer le marché du génie civil, notamment grâce aux structures produites par le procédé très économique de pultrusion. Leurs propriétés mécaniques étant plus modestes, ils ont été principalement utilisés pour les poutres et les tabliers. 109 ponts pour piétons et 12 ponts routiers entièrement en composites existent aujourd'hui aux États-Unis, ainsi que 17 en Europe, dont l'un des tout premiers est la passerelle d'Aberfeldy en Ecosse (cf. figure 2.4). Leur portée est en général modeste, une quinzaine de mètres en moyenne, ce qui permet une préfabrication quasiment intégrale en usine. La légèreté du matériau rend le transport et la mise en œuvre de ces structures faciles ce qui entraîne une interruption minimale du trafic sur les voies franchies. Le faible coût d'entretien est également un point qui est mis en avant par les entreprises qui proposent ces ponts sur catalogue.

Les raisons de ce succès grandissant ne sont donc pas liées aux performances mécaniques des composites. Il faut dire que les typologies structurelles sont en général directement inspirées de celles qui ont été optimisées pour les ponts métalliques : poutres treillis, poutres en I de grandes tailles et poutres-caissons. La relative souplesse du matériau nécessite paradoxalement de concevoir des sections visuellement plus massives que celles qu'on aurait eues pour une solution équivalente en acier. Sur les premiers ouvrages, le collage n'était pas encore considéré comme une technologie sûre et ce surdimensionnement était accentué par l'utilisation d'assemblages par rivets et par boulons ce qui génère des surcontraintes importantes dans des profilés uniaxiaux.

L'innovation par la reproduction est un procédé courant lorsqu'un matériau nouveau apparaît, mais il atteint rapidement ses limites, car les techniques de construction sont adaptées au matériau pour lequel elles ont été développées grâce à une longue expérience. Il faut donc

inventer de nouvelles formes et de nouvelles méthodes pour les composites, c'est-à-dire :

- tirer parti des déformations élastiques importantes et de la haute résistance à rupture des fibres ;
- minimiser et simplifier les assemblages pour diminuer les concentrations de contrainte et les coûts ;
- utiliser au maximum des éléments préfabriqués pour augmenter leur qualité et réduire les coûts.

Des recherches dans ce sens ont été effectuées par Saskia Jülich dans sa thèse [55] sous la direction de J.-F. Caron. Elle y détaille un projet de passerelle en bow-string de 40 m de portée dans laquelle les arches principales sont des poutres droites post-flambées dont les forces de rappel élastique servent à mettre en tension les câbles et les haubans qui les sous-tendent, créant ainsi une poutre précontrainte d'une grande rigidité (cf. figure 2.5). Afin de tirer le meilleur parti de la résistance des éléments, les assemblages de la structure ont également été optimisés, notamment les ancrages des haubans (cf. S. Chataigner [29]). Le présent travail sur les gridshells est en quelque sorte une application de cette même démarche à des structures de bâtiment.



FIG. 2.5 – Maquette de la passerelle tout composite développée au LAMI.

Couverture sandwich

Les seuls emplois des composites dans le bâtiment étaient jusqu'à peu limités aux menuiseries de porte et de fenêtre, aux garde-corps et aux chemins de câbles électriques. L'année 2004 a vu la construction de la première couverture entièrement en composite en Israël avec les deux tourelles du centre Yitzhak Rabin à Tel Aviv (cf. figure 2.6). L'objectif premier de l'architecte Moshe Safdie n'était pourtant pas de réaliser une structure particulièrement innovante et le projet initial prévoyait des coques en béton. Une deuxième solution entièrement en acier a également été étudiée mais l'une comme l'autre des structures contredisait par leurs poids la légèreté attendue pour ses formes très libres. La proximité entre le bureau d'étude mandataire et l'université de Delft va conduire au développement d'une troisième variante qui sera finalement retenue : des coques composites formées de deux peaux extérieures à base de tissus de verre préimprégnés drapées sur un moule en polymère dense qui sert aussi d'âme de la coque. Les entreprises capables de produire un tel sandwich n'existant pas sur place, les coques ont été dimensionnées et préfabriquées en Hollande avant d'être acheminées jusqu'au chantier par route

et par mer [39]. Les raccords entre les différents pièces sont réalisés *in situ* avec de nouveaux tissus de verre, l'ensemble de la structure étant finalement mis en place d'un seul tenant au moyen d'une grue. Les détails sont particulièrement soignés et leur conception procède d'une démarche spécifique aux composites : par exemple, la coque reposant sur des appuis ponctuels, des inserts métalliques ont été intégrés au droit des futurs poteaux dès les premières étapes de la préfabrication pour garantir une liaison sans perçage entre ceux-ci et les composites. Le coût de cette structure sur mesure peut être contesté, le centre Rabin reste la première couverture de grande portée au monde à avoir été réalisée en composites. . .

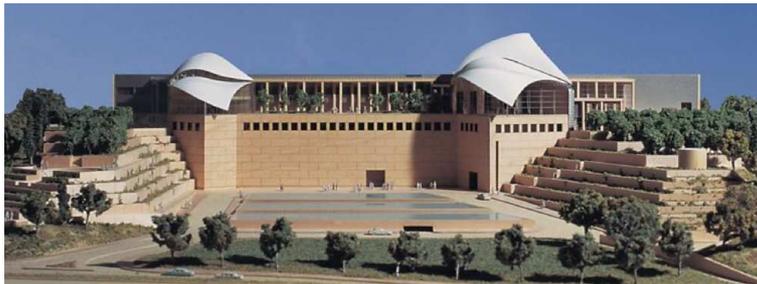


FIG. 2.6 – Maquette du centre Yitzhak Rabin à Tel-Aviv.

Depuis, une autre couverture de 25 m de portée a vu le jour à Bahrein. Il s'agit là aussi d'une coque sandwich en fibre de verre. La forme à simple courbure est cependant beaucoup moins intéressante et le niveau de finition et les détails plus banals, notamment parce que la coque est appuyée continuellement sur des bords droits. Ces deux bâtiments restent les deux seuls exemples de couverture de grande portée connus à ce jour. Dans l'un comme dans l'autre, la solution en composite sandwich aurait pu être remplacée par des coques moins chères faites de matériaux traditionnels (béton ou acier), c'est la recherche du prestige lié à l'innovation technologique qui a guidé le choix du matériau plutôt qu'une réflexion sur l'adéquation entre forme, fonction et matériau. Dans la partie qui suit, on démontrera que les composites sont, avec le bois, les matériaux idéaux pour les structures élancées précontraintes comme les gridshells ; pour cela, on utilisera la méthode de choix des matériaux proposée par M. Ashby.

2.2 Intérêt des matériaux composites pour les gridshells : démonstration par la méthode de Ashby

2.2.1 Principe de la méthode de Ashby

Tous les gridshells présentés dans le chapitre 1 ont une structure principale en bois à une exception près, le pavillon du Japon pour l'exposition universelle de Hannover dont la structure est en carton. Parmi les différents matériaux de construction traditionnels, le bois est effectivement le plus adapté au processus de montage très particulier des gridshells. Les matériaux cimentaires sont trop raides et trop fragiles en traction et les métaux malgré un allongement en rupture élevé ont un comportement élasto-plastique qui entraînent généralement une localisation des déformations incompatible avec la mise en forme de cette famille de structures. Le

côté atypique et relativement novateur des gridshells laisse cependant imaginer qu'il y a sans doute des matériaux plus appropriés, notamment les composites verre/résine, qui offrent des performances intéressantes pour la construction de ces résilles gauches.

L'ingénieur, qui désire concevoir une pièce mécanique, a aujourd'hui à sa disposition entre 40 000 et 80 000 matériaux. Comme il est rare que les performances de cette pièce dépendent d'une seule propriété, il est nécessaire de prendre en compte une combinaison de propriétés, comme par exemple les rapports résistance/poids ou rigidité/poids utiles pour la conception de produits légers. L'idée s'impose alors de représenter une propriété en fonction d'une autre et de tracer dans cet espace de propriétés les domaines qu'occupe chaque famille de matériaux ; les plages de variations des grandeurs étant en général très importantes, l'échelle logarithmique est souvent la plus appropriée. Il est frappant de constater que, quelles que soient les propriétés (résistance, ténacité, conductivité thermique...), les membres d'une même famille se regroupent et que, malgré la grande variété existante des métaux, ceux-ci occupent un espace distinct de celui des polymères, des céramiques ou des composites. Les diagrammes ainsi obtenus sont très utiles car ils concentrent un grand nombre d'informations sous une forme compacte et accessible, et ils permettent l'application d'une technique d'optimisation des performances qui constitue la base de la procédure de choix de M. Ashby [7].

La première étape de cette procédure consiste à traduire les spécifications et la fonction de l'objet en un ensemble d'objectifs (le moins cher possible, le plus léger, le moins polluant, le plus sûr, etc.) et de contraintes (charge minimale à supporter, dimension maximale, température normale de fonctionnement, etc.). La deuxième étape est consacrée à la construction d'indices de performance qui représentent le mieux possible les objectifs à atteindre. Ces indices de performances sont des fonctions de trois types de paramètres : des exigences fonctionnelles, des paramètres géométriques et des propriétés du matériau. En général, les types de paramètres sont indépendants les uns des autres si bien que le choix du meilleur matériau devient indépendant des détails de conception. On peut alors passer à la troisième étape : construire les cartes de matériaux avec les propriétés mécaniques intervenant dans les indices de performance, et choisir le meilleur matériau pour l'indice considéré. Souvent il y a plusieurs indices à optimiser et il faut établir un système de pondération pertinent à partir de ces indices avant de pouvoir conclure. Cette méthode est générale et peut être appliquée à une grande variété de problèmes, notamment aux gridshells.

2.2.2 Caractéristiques fonctionnelles des gridshells au sens de Ashby

Comme expliqué ci-dessus, la méthode de Ashby commence par la définition d'indices de performance qui doivent traduire les caractéristiques fonctionnelles des gridshells. Ces indices doivent faire intervenir des propriétés des matériaux, comme leur module d'Young, leur résistance, leur prix ou leur contenu énergétique, de façon à pouvoir comparer les matériaux entre eux. Sept indices de performances sont proposés ici, ils traduisent respectivement : la capacité du matériau à se déformer durant la mise en forme, sa rigidité à laquelle est liée celle de la forme triangulée, sa fragilité, son coût financier, son contenu énergétique, son impact environnemental et sa durabilité. Un facteur de forme est également ajouté afin d'intégrer les possibilités

technologiques qui permettent d'obtenir des sections géométriquement plus performantes.

Indice I_1

La première caractéristique des gridshells est leur processus de mise en forme : la grille doit être capable de supporter de grandes déformations élastiques de façon à former des surfaces avec des courbures importantes. Le meilleur matériau pour la phase de montage est donc celui qui, pour un diamètre d donné de barres, permet d'obtenir le plus faible rayon de courbure r . Si l'on considère une poutre de module d'Young E , les contraintes maximales en flexion σ^{max} sont données par :

$$\sigma^{max} = E \frac{d}{2r} \quad (2.1)$$

En introduisant la contrainte maximale élastique σ_e , on obtient le rayon de courbure minimal ; il vaut :

$$r^{min} = \frac{d E}{2 \sigma_e} \quad (2.2)$$

Le meilleur matériau pour l'étape de mise en forme est celui qui autorise le rayon de courbure le plus petit, c'est donc celui qui maximise le rapport σ_e/E . I_1 , le premier indice de performance à maximiser est donc défini par :

$$I_1 = \frac{\sigma_e}{E} \quad (2.3)$$

Indice I_2

La deuxième caractéristique des gridshells, en tant que structure, est qu'ils doivent satisfaire les critères de dimensionnement définis par les règlements de calcul en vigueur dans le bâtiment. Pour la phase de service du gridshell, le meilleur matériau est celui qui offre la plus grande rigidité pour cette même dimension de barre. Pour définir cette rigidité, il faut choisir le phénomène physique dont l'influence est la plus importante pour le dimensionnement du gridshell. On montre au paragraphe 5.2.4 que lorsque le système de couverture est souple, les déplacements ne sont pas dimensionnants. On montre également que, comme la structure triangulée fonctionne comme une coque, les déformations sous chargements extérieurs sont petites devant les déformations survenues durant la phase de montage. Par conséquent, les variations de contraintes sous charges sont faibles et, si les critères de dimensionnement en contrainte sont vérifiés pendant la phase de montage, ils le seront aussi pendant la phase de service. En fait, le phénomène physique élastique déterminant pour l'analyse structurelle des gridshells est donc le claquage ou le flambement de la coque (cf. paragraphe 5.2.4).

I_2 , le deuxième indice de performance doit donc être une mesure de la rigidité de la forme finale vis-à-vis du flambement. Pour obtenir une expression de la pression critique p_{cr} qui va provoquer le claquage de la coque, on suppose que cette charge est proche de celle qui provoque l'instabilité d'une coque cylindre équivalente soumise à un chargement hydrostatique, c'est-à-dire du type :

$$p_{cr} = \frac{3EI}{R^3} \quad (2.4)$$

Dans l'expression ci-dessus, \hat{R} représente le rayon de courbure de la coque, E son module d'Young et I l'inertie par unité de longueur qui est une fonction de d^4 , la puissance 4 du diamètre des barres. Le seul paramètre lié au matériau qui intervient dans cette expression est le module d'Young, plus il est élevé, plus la charge critique de flambement est élevée et plus la structure est sûre. I_2 , le deuxième indice de performance à maximiser est donc choisi ainsi :

$$I_2 = E \quad (2.5)$$

Indice I_3

En plus de ces deux indices, il semble nécessaire d'exiger des matériaux sélectionnés qu'ils soient capables de se déformer sans subir d'endommagement. On définit donc pour cela un troisième indice lié à la ténacité K_{Ic} des matériaux. On commence par supposer que ces matériaux, quels qu'ils soient, présentent avant chargement des micro-fissures dont la longueur maximale est a_c . La contrainte σ_f à laquelle se produit la rupture du matériau est alors donnée par :

$$\sigma_f = \frac{CK_{Ic}}{\sqrt{\pi a_c}} \quad (2.6)$$

Dans cette expression, C est une constante qui dépend de la géométrie de la pièce et de celle de la fissure, elle est en général proche de 1. Lors de la mise en forme des gridshells, les barres subissent des déformations importantes ; les matériaux adéquats doivent donc permettre une déformation élastique suffisante sans endommagement, c'est-à-dire sans atteindre la contrainte à rupture σ_f . La déformation élastique maximale ϵ_f peut être évaluée à partir de la loi de Hooke et de l'expression (2.6) :

$$\epsilon_f = \frac{\sigma_f}{E} \quad \text{soit} \quad \epsilon_f = \frac{CK_{Ic}}{E\sqrt{\pi a_c}} \quad (2.7)$$

Les matériaux pour lesquels le risque d'endommagement est le plus faible sont donc ceux qui ont la plus forte valeur de l'indice :

$$I_3 = \frac{K_{Ic}}{E} \quad (2.8)$$

Facteurs de forme

Au-delà des propriétés mécaniques propres du matériau, il est bien connu qu'à masse égale certaines géométries de section sont plus efficaces que d'autres : en flexion, les sections en I ou en H sont beaucoup plus performantes que les sections pleines, de même en torsion les profilés tubulaires. On sait également qu'il n'est pas possible technologiquement de fabriquer n'importe quelle section avec n'importe quel matériau. Il semble donc nécessaire d'élargir le concept d'indice de performance en y intégrant une mesure du rendement de la géométrie. Pour cela, Ashby propose d'introduire dans la procédure de choix des matériaux un facteur de forme caractéristique des performances de la section⁴. Les performances de l'ensemble matériau-géométrie sont alors évaluées à partir des propriétés des matériaux établies pour des sections

⁴Cf. M. Ashby [7], chapitre 7

circulaires pleines multipliées par la valeur du facteur de forme adimensionnel. Par exemple, le facteur de forme ϕ_f pour un tube circulaire fléchi dont l'épaisseur est égale au vingtième du diamètre est défini comme le rapport de l'inertie de référence et son inertie :

$$\phi_f = \frac{I_{ref}}{I} = \frac{\pi d^4 / 64}{\pi(d^4 - (d - d/20)^4) / 64} \quad \text{soit} \quad \phi_f \simeq 5 \quad (2.9)$$

Pour tenir compte de ce facteur de forme dans l'indice I_2 qui mesure la rigidité d'une structure fléchie formée de tube creux plutôt que de ronds pleins, on modifie I_2 de la façon suivante :

$$I_2 = E \quad \text{et} \quad \hat{I}_2 = \phi_f E \quad (2.10)$$

Les valeurs maximales de ces facteurs sont limitées à la fois par des contraintes technologiques de fabrication (laminage, soudage, etc.) et par des contraintes physiques qui font que, passée une certaine limite, les modes d'endommagement changent (flambage global, flambage local, plastification ou risque de fissuration plus grand, etc.). Voici quelques valeurs courantes d'après [7] de facteurs de forme pour les matériaux qui seront étudiés dans ce chapitre :

- Bois : $\phi_f = 2$,
- Composite Verre/résine : $\phi_f = 15$,
- Composite Carbone/résine : $\phi_f = 25$,
- Titane : $\phi_f = 35$,
- Céramique technique : $\phi_f = 35$.

Les facteurs de forme sont d'un emploi délicat, ils entraînent des distorsions des cartes de matériau car leur valeur dépend du type d'application choisi et surtout du type de section envisagée pour chaque matériau. Pour un indice ou une propriété du matériau donnée, il existe donc une infinité de cartes de matériau possible ; c'est pourquoi les cartes ne tiennent pas compte des facteurs de forme. C'est, comme on le verra un peu plus loin, à l'utilisateur de pondérer ses indices en fonction des critères qu'il aura choisi.

Indice I_4

Les applications envisagées pour les gridshells se situent dans le domaine du génie civil : chapiteaux ambulants, couvertures pour installations sportives, pour des bassins ou des cuves, etc. Les quantités de matériau consommées par ce domaine sont très importantes si bien que leur prix est un facteur déterminant dans le choix des techniques de constructions employées. Pour que les structures de gridshell aient une chance de se développer, il faut qu'elles soient économiques ; le but de la conception est donc simple : résistance et rigidité au meilleur prix. Pour évaluer le prix d'une structure de gridshell à partir du coût relatif par unité de volume des matériaux $C_R \rho$, il faut estimer son volume. Celui-ci est défini comme le produit de la longueur totale de barre utilisées L_{tot} par la section des barres S . Le coût des matériaux de la structure s'écrit donc : coût = $C_R \rho L_{tot} S$. Or la section nécessaire à la bonne tenue de l'ouvrage est celle qui permet de supporter un certain niveau de charge réglementaire q_{ELU} sans provoquer de flambement de la structure, c'est-à-dire celle qui vérifie l'équation (2.4) pour $p_{cr} = q_{ELU}$. Soit, en

tenant compte de l'expression de l'inertie en fonction de l'aire de la section ($I = \beta S^2$) :

$$q_{ELU} = \frac{3EI}{\widehat{R}^3} \quad \text{soit} \quad q_{ELU} = \frac{3\beta S^2}{\widehat{R}^3} E \quad (2.11)$$

À partir de l'expression ci-dessus, on peut déduire une expression de S en fonction des autres paramètres du problème :

$$S = \sqrt{\frac{q_{ELU} \widehat{R}^3}{3\beta E}} \quad (2.12)$$

Et ainsi une première estimation du coût de la structure en fonction du matériau.

$$\text{coût} = L_{tot} \sqrt{\frac{q_{ELU} \widehat{R}^3}{3\beta}} \frac{C_R \rho}{E^{1/2}} \quad (2.13)$$

Le matériau qui permet de construire un gridshell au moindre prix est donc celui qui maximise la valeur du quatrième indice, I_4 , défini comme suit :

$$I_4 = \frac{E^{1/2}}{C_R \rho} \quad (2.14)$$

Indice I_5

Il faut noter que le prix d'un matériau ne représente cependant que les coûts de l'entreprise qui le fabrique et qu'en général, le coût global pour la société d'un procédé industriel, notamment en terme d'énergie consommée et d'impact sur l'environnement n'est pas pris en compte. Ces aspects sont pourtant capitaux et doivent prendre dans les années à venir une importance croissante dans la conception des structures si l'on souhaite préserver la qualité de l'environnement. On choisit donc comme cinquième indice ce que M. Ashby définit comme le contenu énergétique des matériaux⁵. Les dépenses énergétiques qui surviennent au cours de la vie d'un matériau sont multiples (fabrication, transports, mise en œuvre, vie en œuvre, démantèlement et éventuellement recyclage). Malheureusement, Ashby ne précise pas les termes qu'il intègre dans son indice. Après comparaison des valeurs de la figure 2.10 avec celles recueillies par Lina Bouhaya [25], il semble vraisemblable que l'indice d'Ashby prenne en compte l'énergie de l'ensemble du cycle de vie du matériau. Il n'est de toute façon pas indispensable d'avoir une grande précision sur ces valeurs, car les ordres de grandeur sont assez fiables et permettent de distinguer les grandes familles de matériau.

Pour le reste, le raisonnement qui fait le lien entre le contenu énergétique par unité de volume $Q\rho$ et les propriétés mécaniques du matériau est en tout point identique à celui fait pour calculer le coût de la structure, si bien que la valeur du cinquième indice à maximiser est donnée par :

$$I_5 = \frac{E^{1/2}}{Q\rho} \quad (2.15)$$

⁵Cf. M. Ashby, [7], 2000, chapitre 16.

Indice I_6

L'énergie n'étant qu'une des contributions de l'impact environnemental d'un matériau, il est nécessaire de construire un autre indice, souvent appelé éco-indicateur qui réalise la somme de l'ensemble des contributions en fonction de la gravité des dommages causés (production de nitrate, d'ozone, de déchets ultimes ou cancérigènes, de métaux lourds, etc.). La définition de cet indice est controversée et n'est pas encore unifiée en Europe bien que de nombreux efforts soient entrepris dans ce sens. De plus, les valeurs (en millipoints par kilogrammes) présentées ci-dessous évoluent avec le temps et le type de procédé industriel mis en œuvre⁶. L'abréviation *GFRP* désigne les matériaux composites à matrice polymère renforcée de fibres de verre (Glass Fiber Reinforced Polymer) et *CFRP* les matériaux composites à matrice polymère renforcée de fibres de carbone (Carbon Fiber Reinforced Polymer).

Titane :	80-100	Béton :	0,6-1	GFRP :	12
Aluminium :	10-18	Béton armé :	1,5-2,5	CFRP :	20-25
Acier inox :	16-18	Brique :	0,5-1	Bois :	0,6-0,8
Acier au carbone :	4-4,3	Verre :	2-2,2		

Les valeurs ci-dessus sont difficilement comparables en l'état car on ne construit pas la même chose avec un kilogramme d'acier et un kilogramme de bois. Il faut donc définir I_6 , le sixième indice de façon à prendre en compte les valeurs de l'éco-indicateur Y , les masses volumiques ρ des matériaux et leur module d'Young :

$$I_6 = \frac{E^{1/2}}{Y\rho} \quad (2.16)$$

Indice I_7

Une autre caractéristique majeure des structures de génie civil est que la plupart des bâtiments sont soumis à une garantie décennale : les bonnes propriétés mécaniques doivent se conserver dans le temps. Les dégradations de ces propriétés ont des origines différentes mais se traduisent en général par une oxydation ou une corrosion du matériau. De nombreuses études traitent de la durabilité de telle ou telle substance dans différents environnements agressifs : eau salée, rayonnement ultraviolet, présence d'air et d'eau, milieux acides ou basiques, etc. La résistance à ces attaques peut alors être exprimée sur une échelle allant de « A » (excellent) à « D » (mauvais). La figure 2.11 reprend ces informations pour six atmosphères différentes. On remarque que les valeurs pour les bois ne sont pas portées sur le graphique ; des estimations ayant été trouvées ailleurs dans le livre, elles sont rappelées ici : C pour la tenue à l'eau salée, C pour la résistance aux acides, B pour la résistance aux bases et B pour la tenue aux ultraviolets. De façon générale, ces informations peu précises sont d'une utilité limitée, elles permettent néanmoins d'attirer l'attention sur des risques potentiels sous certains environnements et de faire un tri qualitatif entre les différentes familles de matériaux.

⁶Cf. M. Ashby [7], chapitre 16

2.2.3 Recherche du meilleur matériau

La première étape de la méthode de Ashby est maintenant terminée, les caractéristiques fonctionnelles des gridshells ont été transformées en une série de sept indices liés au matériau que l'on rappelle ici :

- Indice de déformabilité : $I_1 = \sigma/E$,
- Indice de rigidité : $I_2 = E$,
- Indice de fragilité : $I_3 = K_{Ic}/E$,
- Indice coût/rigidité : $I_4 = E^{1/2}/C_R\rho$,
- Indice contenu énergétique/rigidité : $I_5 = E^{1/2}/Q\rho$,
- Indice impact environnemental/rigidité : $I_6 = E^{1/2}/Y\rho$,
- Indice de durabilité : I_7 .

Tous les indices ne sont pas traités de la même façon par M. Ashby. Les cinq premiers sont étudiés exhaustivement et peuvent être combinés entre eux pour construire des cartes de matériau et chercher quel est le meilleur matériau pour les gridshells. Pour le sixième indice, seul l'éco-indicateur Y est évoqué sous forme de tableau. Quant au septième indice, il est abordé séparément des autres propriétés dans une carte circulaire spécifique (celle de la figure 2.11), malheureusement incomplète, puisqu'elle ne répertorie pas les bois.

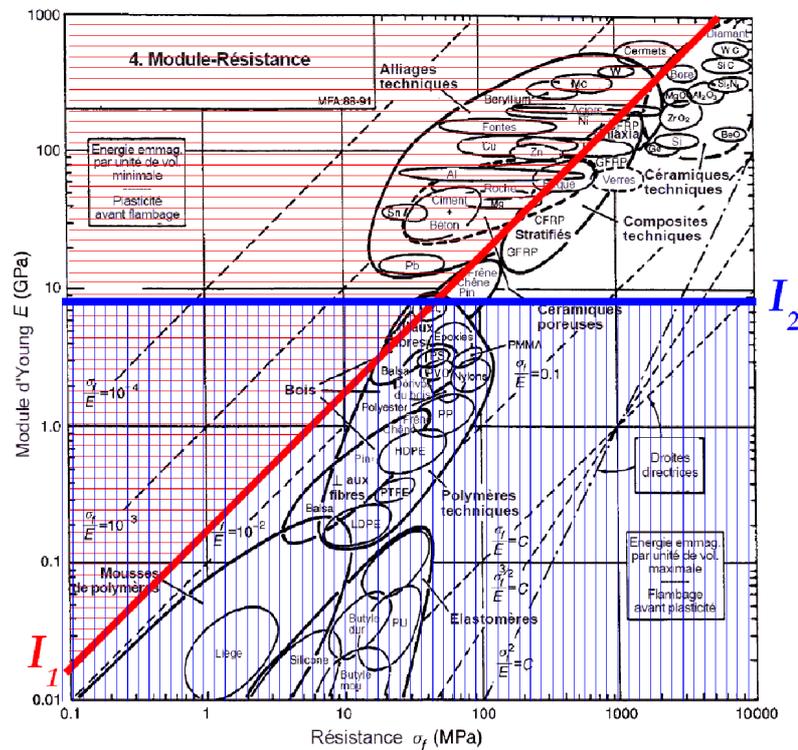


FIG. 2.7 – Carte Module d’Young/Résistance avec deux domaines délimités par les droites $I_1 = 0,2$ et $I_2 = 9$ GPa.

La première de ces cartes, celle de la figure 2.7, concerne les indices I_1 et I_2 , elle représente le module d’Young en GPa en fonction de la contrainte élastique maximale en MPa. Pour maximiser I_1 , il faut décaler la droite oblique de pente 1 le plus possible vers la droite du diagramme. Pour maximiser I_2 , il faut remonter le plus haut possible la droite horizontale. Le domaine isolé

sur la figure 2.7 est délimité par les droites $I_1 = 0,2$ et $I_2 = 9$ GPa, ce qui correspond aux valeurs obtenues pour des bois relativement denses comme le pin, le chêne et le frêne qui sont les matériaux choisis jusqu'à ce jour pour la réalisation des gridshells. On remarque que plusieurs matériaux possèdent de meilleures performances, surtout en terme de raideur, notamment les composites en fibre de verre (GFRP), les composites en fibre de carbone (CFRP), le titane, les aciers fortement écrouis et les céramiques techniques.

Pour éliminer rapidement les matériaux trop fragiles pour le génie civil, on utilise la carte de la figure 2.8 qui représente la ténacité des matériaux en $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ en fonction de leur module d'Young en GPa. Les indices concernés sont I_2 et I_3 . Comme dans le diagramme précédent, la valeur de référence choisie pour I_2 est égale à celle des bois denses, c'est-à-dire 9 GPa. Pour l'indice I_3 , caractéristique de la capacité à se déformer sans se rompre, on choisit arbitrairement une valeur légèrement supérieure à celle du verre qui est l'exemple typique du matériau fragile couramment employé dans la construction. Le domaine des matériaux admissibles pour les structures de gridshells est donc ici délimité par la droite verticale $I_2 = 9$ GPa et par la droite oblique de pente 1, $I_3 = 0,025$. Outre les bois, les bons candidats sont donc : les métaux, les composites verre/résine et carbone/résine. Par rapport au matériaux sélectionnés sur le diagramme 2.7, le diagramme 2.8 permet d'exclure les céramiques techniques qui sont bien trop cassantes pour ce type d'application.

Vient ensuite la question du prix. Il s'agit de déterminer parmi les matériaux précédents lesquels sont les plus économiques. On construit pour cela la carte de matériaux de la figure 2.9 avec en abscisse le prix relatif par unité de volume en €/m^3 et en ordonnée le module d'Young en GPa. Les isovaleurs de l'indice I_2 sont représentées sous forme de droites verticales, celles de l'indice $I_4 = E^{1/2}/C_R\rho$ par des droites obliques de pente 2 (l'équation de ces droites est du type : $\log E = 2 \log(C_R\rho) + 2 \log I_4$). On prend de nouveau comme référence les valeurs des indices du bois, c'est-à-dire $I_2 = 9$ GPa et $I_4 = 1$. Il semble alors qu'aucun des matériaux présentés n'est plus économique que le bois. Toutefois, si on prend en compte l'efficacité des sections propre à chaque matériau, autrement dit les facteurs de forme définis plus haut (à savoir 15 pour les composites verre/résine, 25 pour les composites carbone/résine et 35 pour le titane), seuls les composites à base de fibres de verre semblent à même de concurrencer les bois. En effet, la valeur moyenne de l'indice I_4 pour les GFRP qui est de 0,33 sans coefficient de forme, passe à 1,29 quand on tient compte de la géométrie de la section, ils atteignent donc le niveau des meilleurs bois. Dans le même temps, l'indice des CFRP passe de 0,05 à 0,26 et celui du titane passe de 0,05 à 0,30 ce qui est insuffisant dans les deux cas. Il n'y a donc que les composites verre/résine qui constituent une alternative économiquement viable au bois pour la construction de gridshell.

Le dernier aspect à considérer est le contenu énergétique des matériaux. On observe pour cela le diagramme de la figure 2.10 qui présente le module d'Young en GPa en fonction du contenu énergétique par unité de volume en GJ/m^3 . Les indices concernés par ce graphique sont les indices I_2 et I_5 . Comme précédemment on choisit de fixer comme valeur de référence les indices du bois, à savoir $I_2 = 9$ GPa et $I_5 = 0,5$. Comme sur la figure 2.9, les isovaleurs de I_5 sont des droites de pente 2. On constate alors que les composites verre/résine sont très loin derrière les bois, puisque leur meilleur indice vaut : 0,02. En tenant compte du facteur de forme, on arrive au mieux à 0,078. On pourrait alors être tenté de conclure que les bois sont de loin

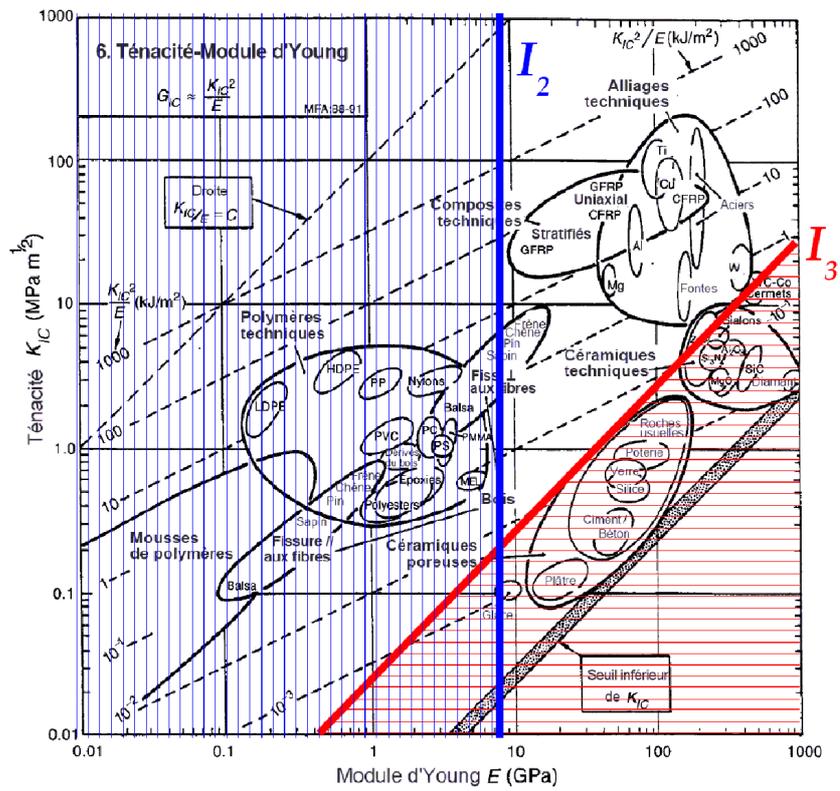


FIG. 2.8 – Carte Ténacité/Module d’Young avec deux domaines délimités par les droites $I_2 = 9$ GPa et $I_3 = 0,025$.

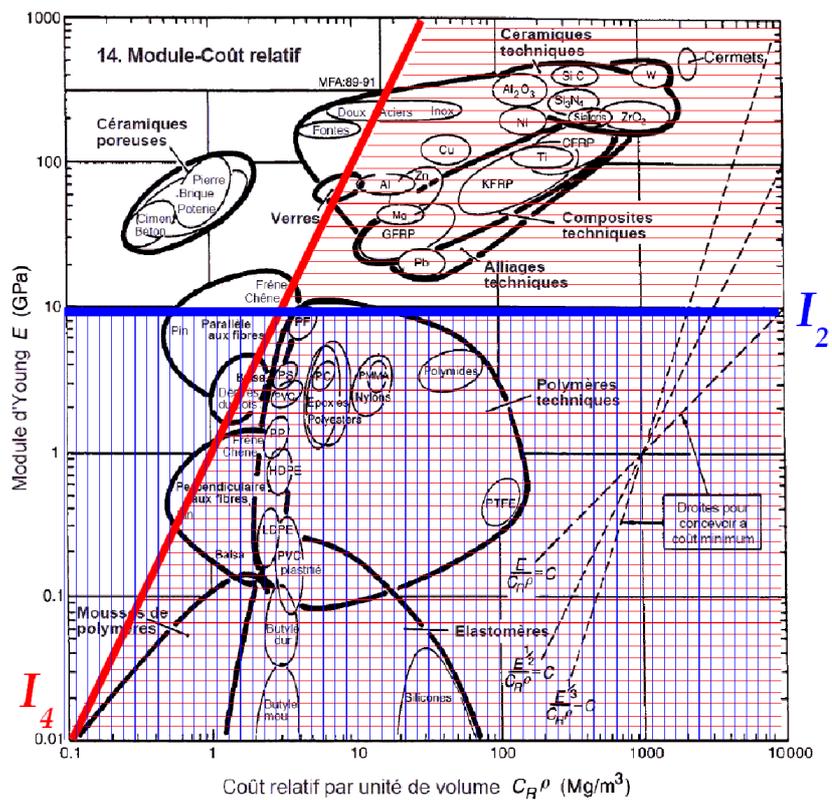


FIG. 2.9 – Carte module d’Young-prix relatif par unité de volume avec deux domaines délimités par les droites $I_2 = 9$ GPa et $I_4 = 0,01$.

les matériaux les plus écologiques pour les structures de gridshells, surtout si l'on rajoute à ces chiffres ceux des éco-indicateurs du paragraphe 2.2.2.

Sur ce dernier point, il ne faut cependant pas oublier que le bois est sensible aux atmosphères agressives s'il n'est pas traité convenablement et que, bien souvent, les produits utilisés pour le protéger sont fortement polluants. Des produits écologiques existent également mais ils ne sont malheureusement pas encore d'usage courant. Quoi qu'il en soit, ces traitements au cours de la vie en œuvre du matériau ont un coût, tant énergétique et environnemental que financier, qu'il faut additionner au coût des matériaux. De plus, si on considère que les performances affichées pour le bois sont celles de pièces sans défaut, il faut ajouter à ce bilan les coûts liés à la suppression des nœuds et autres problèmes de paralaxe pour la construction de barres de grandes longueurs. La plupart des colles mises en œuvre pour ces rabotages (cf. paragraphe 1.4 et article de D. Harris [49]) ont un bilan écologique désastreux, ce qui est trop souvent oublié quand on parle du bois comme du *matériau écologique par excellence*. Là aussi des colles plus saines existent, mais elles sont marginales. Les composites verre/résine au contraire sont stables dans la plupart des atmosphères comme on peut le voir sur la figure 2.11 et ne nécessitent qu'un entretien minimal ; leur coût de vie en œuvre est donc réduit. De plus, il existe des processus de fabrication en continu, notamment la pultrusion (cf. paragraphe 2.1.2), qui permettent la production de barres avec des propriétés mécaniques constantes sans autres limites de longueur que les dimensions de la pièce dans laquelle les machines sont installées. L'écart considérable avec les bois qu'on observait sur le plan du contenu énergétique est donc réduit d'autant et devient acceptable compte tenu des autres avantages des composites.

Si l'on récapitule l'ensemble des informations présentées sur les cinq figures de cette section, on constate que :

- les composites verre/résine ont des capacités de mise en forme semblables à celle du bois ;
- les composites verre/résine sont trois fois plus raides que le bois ;
- leur fragilité en déformation est du même ordre de grandeur ;
- leur prix est comparable ;
- le coût d'entretien des composites verre/résine est plus faible que celui du bois du fait d'une excellente durabilité ;
- l'impact environnemental des composites est plus important que celui du bois.

2.2.4 Conclusion

Les gridshells sont des structures d'un type nouveau, il était donc nécessaire de chercher le matériau le plus adapté pour leur construction. Pour cela, on a utilisé la méthode systématique de Ashby qui permet de comparer les propriétés de matériaux aussi divers que possible. Il semble que le bois et les composites verre/résine soient les plus appropriés : déformables, rigides et économiques. Le bilan environnemental des composites est moins bon que celui du bois, mais leurs performances mécaniques nettement supérieures garanties par un procédé fiable de fabrication industrielle et leur facilité d'assemblage par collage en font une alternative très intéressante à étudier.

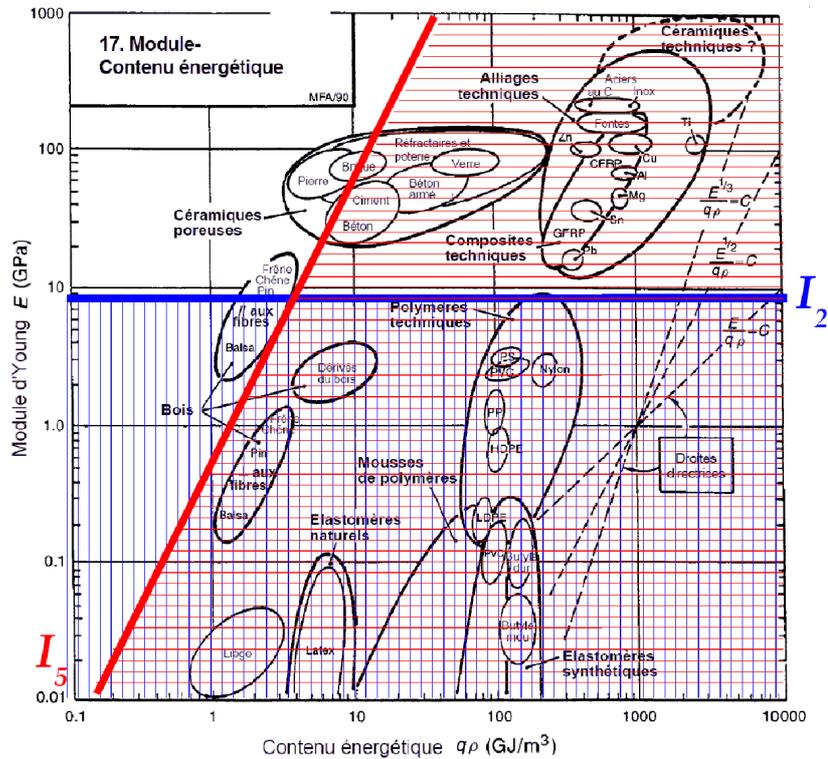


FIG. 2.10 – Carte module d'Young-contenu énergétique par unité de volume avec deux domaines délimités par les droites $I_2 = 9$ GPa et $I_5 = 0,01$.

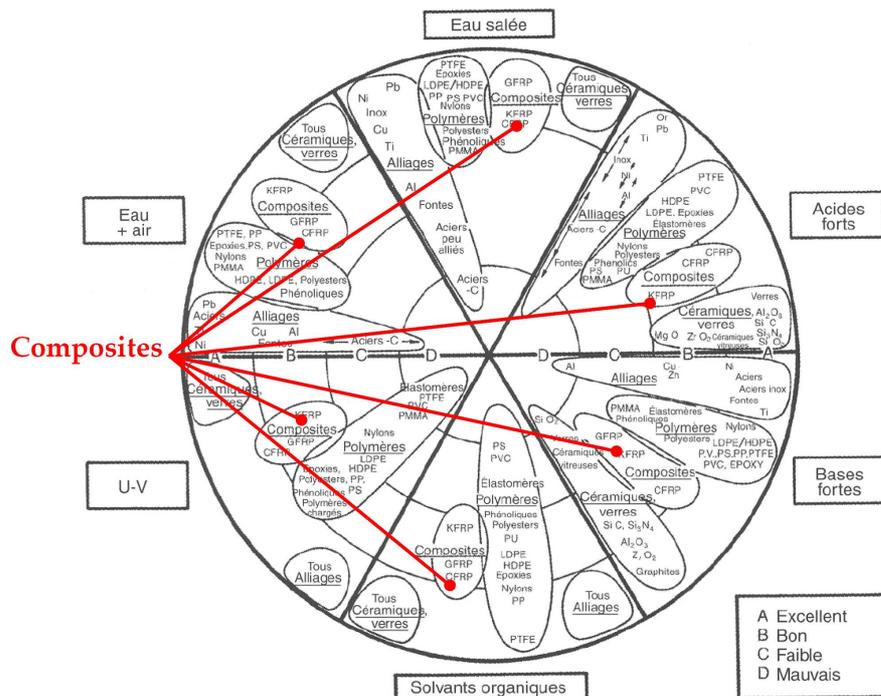


FIG. 2.11 – Résistance des matériaux à six environnements courants.

2.3 Comportement des tubes composites pultrudés fléchis pour une application aux gridshells

Dans les gridshells, les barres sont essentiellement fléchies, les contraintes dans le matériau sont donc des contraintes longitudinales. L'utilisation de profilés pultrudés tubulaires apparaît alors particulièrement indiquée : le procédé est économique et permet la production en grande longueur de barres continues dans lesquelles les fibres sont concentrées dans la direction principale du tube. Pour éviter le gauchissement des sections en cas de flexion déviée, il est également préférable de choisir une section circulaire. On verra par ailleurs dans le paragraphe 3.3.3 que, lorsqu'une telle section est associée à certains assemblages, cela permet d'éviter l'apparition de moment de torsion dans les barres.

Cependant si l'on regarde la plupart des applications des composites dans le génie civil (cf. paragraphe 2.1) ainsi que dans les autres domaines, on constate que jamais les composites ne sont utilisés en état de flexion permanente. Cette partie est donc consacrée à l'étude du comportement mécanique en grande transformation à court et à long terme des composites verre/résine pultrudés. Après une courte introduction générale sur le comportement isotrope transverse, les propriétés mécaniques des tubes utilisés pour cette recherche seront identifiées et un modèle simple pour la prédiction du mode de ruine des tubes fléchis sera proposé.

2.3.1 Généralités sur le comportement mécanique des pultrudés

Comportement isotrope transverse

La nature composite de ces matériaux leur confère une structure hétérogène et un comportement mécanique anisotrope. Cependant, selon le procédé industriel choisi, des symétries existent dans le matériau fini. Ainsi les éléments obtenus par enroulement filamentaire présentent une symétrie de révolution. Les pièces résultant de la cuisson de tissus préimprégnés possèdent les mêmes symétries que les tissus eux-mêmes, c'est-à-dire bien souvent deux plans de symétrie ; leur comportement est plutôt orthotrope. Les pièces injectées avec des fibres courtes ont des fibres à peu près équitablement réparties dans toutes les directions, le matériau est donc quasiment isotrope. Les profilés pultrudés quant à eux admettent au moins un plan de symétrie perpendiculairement à l'axe du profilé et, selon la forme du profilé, un ou plusieurs plan de symétrie. Pour les tubes circulaires utilisés pour ce travail, tout plan contenant l'axe du tube est un plan de symétrie : le comportement mécanique de ces éléments sera donc isotrope transverse. Le comportement isotrope transverse est caractérisé par cinq coefficients d'élasticité (cf. A. Ehrlicher [40]) :

- le module d'Young dans le sens long : E_L ;
- le module d'Young dans le sens transverse : E_T ;
- le module de glissement dans tout plan contenant l'axe : G_{LT} ;
- les deux coefficients de Poisson : ν_{LT} et ν_{TN} .

On note que la symétrie des coefficients d'élasticité entraîne : $\nu_{LT}/E_L = \nu_{TL}/E_T$ et que, pour les matériaux isotropes transverses, le module de cisaillement dans le plan perpendiculaire à l'axe

s'exprime en fonction des autres constantes d'élasticité $G_{TN} = E_T/2(1 + \nu_{TN})$. Les valeurs de ces constantes dépendent d'une part de la teneur en fibre ou du pourcentage de renfort dans le poids total et d'autre part de l'orientation des fibres par rapport à l'axe du profilé, pour chacune des couches qui constituent le composite. Il existe plusieurs modèles qui permettent de calculer ces constantes à partir de propriétés de chacun des constituants, on ne citera qu'un, développé par A. Diaz Diaz, J.-F. Caron et A. Ehrlicher [40] parce qu'il a l'avantage d'avoir été associé à un outil numérique téléchargeable gratuitement et polyvalent appelé MACLAM⁷.

Pour les composites unidirectionnels du type de ceux utilisés pendant la thèse, on peut faire quelques remarques d'ordre général⁸ : le comportement dans l'axe est gouverné par le taux de fibre et par les propriétés mécaniques des fibres parce que la raideur de la matrice est négligeable devant celle des renforts. En revanche dans le sens perpendiculaire à l'axe, le comportement du composite est très proche de celui de la résine parce que c'est elle qui assure la cohésion du matériau et que les fibres n'ont quasiment aucune résistance dans le sens transverse et en cisaillement.

En ce qui concerne la rupture, le type de phénomène observé dépend du type de sollicitation. En traction, ce sont essentiellement les fibres qui sont sollicitées, la rupture se produit donc lorsqu'on atteint la résistance en traction des fibres. En compression, l'essentiel de la charge est toujours repris par les fibres mais la matrice joue un rôle stabilisateur très important pour empêcher que celles-ci ne flambent, la rupture survient donc par flambement local des fibres lorsque la résine n'est plus capable d'assurer son rôle. En cisaillement, la résine est soumise à des contraintes importantes car c'est elle qui assure la transmission des efforts ; la rupture a donc lieu lorsque la contrainte limite en cisaillement de la résine est atteinte. La flexion est un phénomène complexe (cf. paragraphe 2.3.4) qui combine les trois types précédents de sollicitations ; le mode de rupture le plus probable est difficile à prévoir car il dépend beaucoup de la géométrie du profilé étudié.

On se rend bien compte sur ces quelques exemples simples que si l'on veut définir un critère de rupture pour ce genre de matériau, il faut prendre en compte l'anisotropie du matériau et les valeurs des contraintes à rupture dans chacune des directions principales. Le critère le plus couramment utilisé est le critère de Tsai-Hill ou de Hill. Pour un élément de structure en contrainte plane, il est défini par l'équation suivante :

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{\sigma_L^{rupt}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_T^{rupt}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{LT}}{\tau_{LT}^{rupt}}\right)^2 - \frac{\sigma_L \sigma_T}{(\sigma_L^{rupt})^2}} \leq 1 \quad (2.17)$$

avec : σ_L la contrainte longitudinale, σ_T la contrainte transverse, τ_{LT} le cisaillement dans le plan (L, T) et σ_L^{rupt} , σ_T^{rupt} et τ_{LT}^{rupt} les contraintes limites à rupture pour les sollicitations simples correspondantes. Il ne faut pas oublier de tenir compte dans l'expression (2.17) de ce que ces contraintes limites à rupture sont différentes en traction et en compression. Un exemple d'application de ce critère de ruine sera donné au paragraphe 2.3.4.

⁷<http://maclam.cimav.edu.mx/maclam3.htm>

⁸Cf. Daniel Gay, [41], 1999, chapitre 3.

Comportement à long terme

Ces dernières années, de nombreuses recherches ont été consacrées à l'étude du comportement à long terme des composites pultrudés [62, 1, 70], laminés [70], tissés [96] et même de la résine polyester seule [53]. De nombreux aspects ont été abordés, notamment l'influence de la température et de l'eau de mer [62, 70], celle du rayonnement ultraviolet [97] et celle des chargements cycliques pouvant entraîner une rupture par fatigue [38]. Tous ces résultats ont permis d'alimenter les bases de données qui sont à l'origine de diagrammes comme celui de la figure 2.11.

Dans les structures de gridshells, la géométrie des barres est fixée par triangulation après l'étape de mise en forme. Les différents éléments sont soumis à des contraintes de flexion permanentes et importantes qui peuvent se relaxer peu à peu avec le temps. Il est donc indispensable de connaître le comportement en fluage-relaxation des matériaux utilisés afin de dimensionner le bâtiment en connaissance de cause. Les études qui traitent du cas particulier des éléments avec une charge permanente de flexion sont cependant rares. Dans l'article de B. Abdel-Magid [1], deux types différents de composites, l'un en fibre de verre avec une résine polyuréthane, l'autre avec une résine époxy, sont soumis à des tests de flexion trois points. L'effet de la température est manifeste pour les deux matériaux dont les déformations augmentent à mesure que les contraintes diminuent. Le comportement du deuxième composite à base de résine époxy est, malgré tout, nettement meilleur que celui du premier dont la contrainte à rupture a quasiment été divisée par deux pour une température de 25°C. C'est donc essentiellement la résine et la qualité de l'interface fibre/matrice qui régissent les phénomènes de fluage et de relaxation.

La résine envisagée pour la construction des gridshells est une résine polyester parce qu'elle fournit les meilleures performances au meilleur prix. Aucune donnée n'étant disponible sur ce type de composite, un protocole d'essai spécifique (cf. figure 2.12) a été développé par Jean-François Caron [28] dans le but d'identifier les paramètres de la loi de comportement à long terme. Ces essais ont portés sur une vingtaine de tubes testés en flexion quatre points avec plusieurs niveaux de chargement allant de 10 % à 45 % de la charge à rupture. Ils ont montré que, quel que soit le niveau de la charge, les déformations différées correspondent à environ 8 % des déformations instantanées et que, au-delà de 30 % de la contrainte à rupture, un modèle de comportement visco-élastique linéaire n'est plus suffisant pour analyser les déformations des échantillons. Pour des niveaux de charges inférieurs, les paramètres caractéristiques d'un modèle rhéologique de Kelvin-Voigt ont donc pu être identifiés et aboutir à une expression de la complaisance du matériau comme dans les articles de B. Abdel-Magid [1] et de McBagonluri [70].

L'article de Jean-François Caron [28] montre donc que le fluage des composites à matrice polyester n'est pas négligeable mais qu'il est limité. Il est difficile d'être plus précis car les propriétés des résines sont relativement variables d'un fabricant à l'autre. Le protocole d'essai proposé reste malgré tout très simple et très rapide de mise en œuvre. On peut donc envisager que, pour la construction d'un gridshell en composite verre/résine, un fournisseur soit rapidement sélectionné et que des essais de fluage soient effectués en parallèle des autres études de structure. C'est d'ailleurs ce qui avait été fait pour la construction du gridshell de Mannheim où

l'identification des paramètres du fluage du bois, les tests sur les assemblages et les calculs de changement d'échelle étaient menés de front [48].

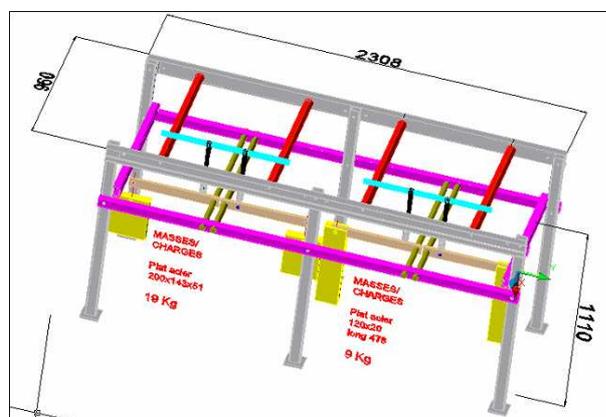


FIG. 2.12 – Plan du bâti de fluage développé dans [28].

2.3.2 Identification du comportement longitudinal

Contexte et protocole expérimental

La mise en forme des structures de gridshells par flexion fait subir au matériau de grandes transformations. Il est important que celles-ci restent dans un domaine élastique pour pouvoir pallier les aléas de chantier et pour qu'éventuellement on puisse démonter la structure. Il faut donc vérifier que le comportement des tubes demeure linéaire élastique lors de toute la phase de montage. On étudie pour cela le comportement en flexion des tubes pultrudés verre/polyester prévus pour la construction du gridshell prototype du LAMI. Le diamètre extérieur des tubes est de 42 mm, le diamètre intérieur de 35 mm, soit une épaisseur moyenne de 3,5 mm. La section est composée d'une partie centrale avec des fibres uniquement dans l'axe du profilé, recouverte, à l'intérieur et à l'extérieur, par une couche de mat avec des orientations aléatoires de fibre pour protéger la partie résistante du tube.



FIG. 2.13 – Protocole expérimental pour l'étude des tubes composites en grande transformation.

Le protocole expérimental représenté sur la figure 2.13 est celui d'un long tube fléchi sous l'action d'un câble tendu entre ses extrémités. Cette expérience a été choisie, car il existe une

expression simple en grande transformation de la géométrie post-flambée du tube connue sous le nom d'« *elastica* d'Euler » (cf. paragraphe 3.7.1). L'expérience est pilotée en déplacement par le raccourcissement progressif de la longueur du câble. Un capteur de force est placé sur le câble et une jauge de déformation est collée à mi-longueur sur la partie supérieure en tension du tube. Le déplacement à mi-longueur et la longueur du câble sont mesurés à chaque étape. La barre est déchargée une fois afin de vérifier la réversibilité des déformations.

Identification du module d'Young longitudinal

Pour identifier le comportement des tubes, le plus simple est de connaître leur courbe contrainte-déformation. La déformation maximale est donnée par une jauge située sur le tube à mi-longueur. Si l'on néglige la contrainte liée à l'effort normal devant celle liée aux efforts de flexion, la contrainte maximale peut être évaluée à l'aide de la force F dans le câble, de la flèche f à mi-longueur, du rayon R du tube et de son inertie I selon la formule ci-dessous.

$$\sigma^{max} = \frac{F \cdot f \cdot R}{I} \quad (2.18)$$

Comme on peut le constater sur la figure 2.14, la courbe $\sigma - \epsilon$ est parfaitement rectiligne avec une pente identique en charge et en décharge. On en déduit donc que le comportement des tubes en grande transformation est bien linéaire élastique jusqu'à la rupture. Sur les trois tests qui ont été réalisés, on trouve un module d'Young moyen de 26,7 GPa avec un écart type de 0,3 GPa. C'est ce module qui sera considéré comme le module d'Young longitudinal E_L du matériau par la suite. On note également que, pour chacun des trois essais, des craquements ont été audibles avant la rupture du tube aux alentours de 320 MPa. Cela incite à penser qu'il y a déjà, à ce niveau de sollicitation, un début d'endommagement et que la rupture du tube serait sans doute survenue si l'on avait maintenu cette charge constante assez longtemps, comme a pu le constater Aude Petel [83] lors de ses essais. La contrainte longitudinale à rupture du tube en flexion σ_L^{flex} se situe vers 350 MPa.

Comparaison avec l'*elastica* d'Euler

La courbe théorique de l'*elastica* d'Euler peut être entièrement caractérisée à l'aide d'un paramètre adimensionnel (cf. J. Courbon [33] et paragraphe 3.7.1). Si l'on note l la longueur du tube, a la longueur du câble et F_c la force critique de flambement d'Euler (calculée à l'aide du module d'Young moyen que l'on vient d'évaluer expérimentalement), les mesures prises au cours de l'expérience permettent de construire trois paramètres adimensionnels : F/F_c , a/l , f/l . De chacun de ces paramètres on peut déduire un angle initial α pour chaque pas de temps (cf. tableau 3.1). La comparaison de ces angles est présentée sur la figure 2.15.

Les courbes obtenues pour les paramètres a/l et f/l sont parallèles mais il existe entre elles un décalage d'environ 0,1 radians. Ce décalage s'explique par la présence d'une excentricité e_{exp} entre le tube et le câble. Cette excentricité au niveau du point d'application de la charge induit un moment fléchissant constant dans le tube avant même que l'on commence à raccourcir le

câble ce qui se traduit par l'apparition d'un angle initial supplémentaire que l'on peut évaluer selon (2.19). Les calculs donnent une valeur de 0,096 radians ce qui correspond à peu de choses près au décalage entre les deux courbes.

$$\alpha_{init} = \frac{l \cdot F_{init} \cdot e_{exp}}{E \cdot I} \quad (2.19)$$

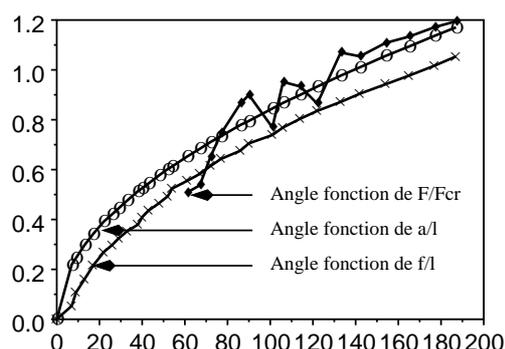
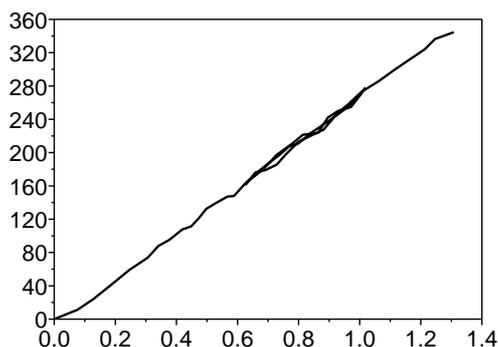


FIG. 2.14 – Comportement d'un tube fléchi

FIG. 2.15 – Comparaisons des angles initiaux

Quant à la courbe liée au paramètre F/F_c , on peut considérer qu'elle suit approximativement les deux autres. Les fluctuations qui demeurent sont principalement dues à la sensibilité de la géométrie au changement de force dans le câble. En effet, une augmentation de 5 % de la tension du câble se traduit par une augmentation de 30 % de l'angle initial (cf. tableau 3.1). C'est pourquoi les différents frottements dans le système peuvent altérer la mesure du capteur de force et conduire à de grandes variations de l'angle initial correspondant. L'approximation qui est faite semble satisfaisante et on peut donc conclure que la forme post-flambée prise par un tube correspond bien à la courbe caractéristique de l'*elastica* d'Euler.

2.3.3 Identification du comportement transverse

Remarques sur le mode de ruine

Lors des essais présentés sur la figure 2.13, la rupture des tubes est très brutale et très violente. Là où les contraintes étaient les plus fortes, on peut voir sur la figure 2.16 que la section est comme pulvérisée. On remarque aussi une grande fissure longitudinale, comme si le tube s'était écrasé sur lui-même, avec une rupture de la résine sur l'axe neutre de la section. Ce phénomène a été désigné sous le nom d'ovalisation par L. Brazier [26, 56]; pour les tubes homogènes, il n'est sensible que pour des rapports e/R (épaisseur sur rayon) supérieurs à $1/50$. Pour les tubes testés ici, le rapport e/R vaut $1/6$; l'anisotropie du matériau semble donc jouer un rôle très important. Pour bien comprendre le comportement en grande transformation des tubes fléchis, il faut étudier les déformations transversales dans le profilé car l'éclatement du pultrudé est si soudain qu'il est impossible de déterminer si la ruine est provoquée par la rupture de la partie comprimée, par son instabilité ou par la rupture de la résine du fait de l'ovalisation.



FIG. 2.16 – Rupture caractéristique d'un tube fléchi.

Détermination expérimentale du module transverse E_T

Le phénomène d'ovalisation fait intervenir le module d'Young transverse E_T du matériau et introduit des contraintes transversales dans la section. Il paraît donc nécessaire de mettre en place un dispositif expérimental qui permette de mesurer E_T ainsi que la résistance à rupture σ_T^{rupt} . On se propose donc de faire un essai de compression du tube dans le sens transverse (cf. figure 2.17). La mesure de la force P exercée par le plateau supérieur de la presse et du déplacement δ du point d'application de la charge P permet de connaître expérimentalement la raideur K_{exp} du tube (2.20).

$$K_{exp} = \frac{P}{\delta} \quad (2.20)$$

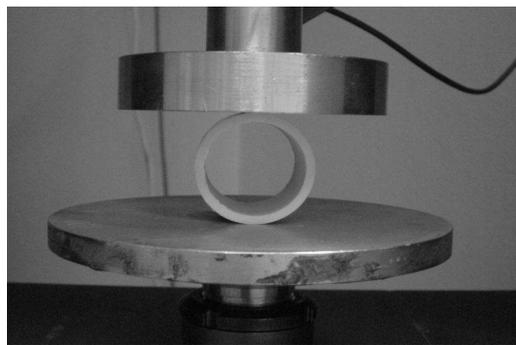


FIG. 2.17 – Expérience de flexion transverse d'un tube

On peut également obtenir une expression analytique de cette raideur. Pour cela, on considère que le tube pris dans le sens transverse peut être assimilé à une poutre circulaire dont la largeur est égale à la longueur de l'échantillon. De plus, l'essai de la figure 2.17 possède deux plans de symétrie contenant chacun l'axe du tube : le premier est parallèle au plateau de la presse, le deuxième parallèle à la direction de chargement. On peut donc réduire l'étude analytique de ce protocole expérimental à l'étude d'un quart de la section du tube, c'est-à-dire à l'étude de la poutre formant un quart de cercle de la figure 2.18. Les conditions d'appuis de cette poutre sont le résultat des coupes effectuées le long des plans de symétrie : le déplacement radial est libre, mais le déplacement orthoradial et la rotation sont bloqués.

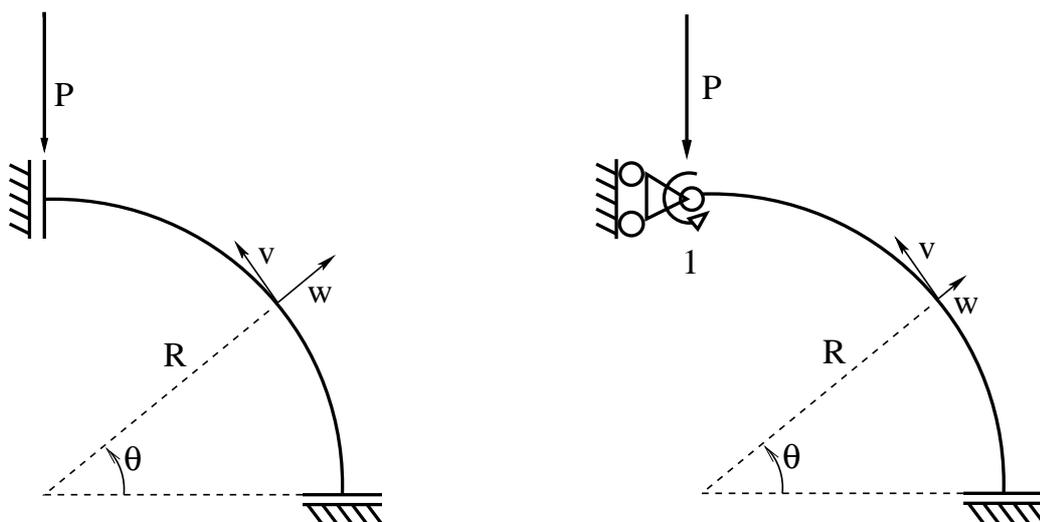


FIG. 2.18 – Essai de compression d'un anneau FIG. 2.19 – Système isostatique associé à 2.18

Pour évaluer la raideur de cette poutre, il faut déterminer le déplacement δ du point d'application de la charge. On calcule tout d'abord pour cela le moment M_T dans la poutre. Comme la structure est hyperstatique de degré un, on utilise le théorème de Ménabréa qui permet d'évaluer le moment hyperstatique M_T à partir d'une structure isostatique associée. On considère ici celle de la figure 2.19. Dans cette dernière, on a noté R le rayon moyen du tube, e son épaisseur, L la longueur de tube étudiée et θ le paramètre angulaire associé à l'abscisse curviligne. On calcule ensuite M_p , le moment dû au chargement $P/2$ appliqué par la presse, et M_1 , le moment unitaire lié à la coupure qui a été effectuée en $\theta = \pi/2$. Leurs expressions sont données ci-dessous.

$$M_p = \frac{P}{2}R(1 - \cos(\theta)) \quad \text{et} \quad M_1 = 1 \quad (2.21)$$

Ensuite, d'après le théorème de Ménabréa, le moment M_T dans le système hyperstatique est de la forme $M_p + X \cdot M_1$ où X est solution de l'équation suivante :

$$\int_0^{\pi/2} M_p M_1 R d\theta + X \int_0^{\pi/2} M_1^2 R d\theta = 0 \quad (2.22)$$

On en déduit donc la valeur de X et l'expression finale du moment M_T :

$$M_T = \frac{PR}{\pi} \left(1 - \frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right) \quad (2.23)$$

On remarque que la contrainte tangentielle à rupture dans le tube σ_T^{rupt} est donnée par (2.24) :

$$\sigma_T^{rupt} = \frac{M_T^{rupt} e}{2I_T} = \frac{6}{\pi} \frac{P^{rupt} R}{e^3 L} \quad (2.24)$$

À partir de l'expression du moment M_T et de celle du moment M_p lié au chargement P , on peut calculer le déplacement δ sous le point d'application de la charge P . On remarque tout d'abord compte tenu de la symétrie de la structure par rapport au plan parallèle aux plateaux

de la presse, le déplacement δ est le double du déplacement radial w observé en $\theta = \pi/2$ (cf. figure 2.18). Ce dernier se calcule aisément à l'aide du théorème de Pasternak dont l'expression est donnée par :

$$w(\theta = \frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_T M_P}{E_T I_T} R d\theta = \frac{\delta}{2} \quad (2.25)$$

Tous calculs faits, on trouve pour δ l'expression suivante :

$$\delta = \frac{PR^3}{E_T I_T} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) \quad (2.26)$$

Finalement, on obtient donc comme valeur de la raideur théorique K_{th} :

$$K_{th} = \frac{P}{\delta} \quad \text{soit} \quad K_{th} = E_T \frac{e^3 L}{R^3} \frac{\pi}{3(\pi^2 - 8)} \quad (2.27)$$

À l'aide des deux expressions de la raideur données par les équations (2.20) et (2.27), on déduit l'expression (2.28) du module d'Young transversal E_T en fonction des données de l'essai de compression.

$$E_T = \frac{P}{\delta} \frac{R^3}{e^3 L} \left(3\pi - \frac{24}{\pi} \right) \quad (2.28)$$

Deux séries d'essais ont été effectuées, la première comporte 9 échantillons d'une longueur L d'environ 40 mm et la seconde 4 échantillons d'une longueur d'environ 20 mm. Les résultats expérimentaux de ces 13 essais donnent pour K_{exp} des valeurs identiques avec le même niveau de dispersion pour les deux séries, soit une valeur moyenne de 748 N/mm avec un écart type de 51 kN/mm. À l'aide des caractéristiques géométriques des échantillons étudiés ($e = 3,40$ mm et $R = 19,16$ mm), on peut déduire une valeur du module d'Young transverse :

$$E_T = 5,9 \pm 0,4 \text{ GPa}. \quad (2.29)$$

De plus, tous les essais effectués ont été conduits jusqu'à la rupture de façon à évaluer la contrainte à rupture dans le sens transverse du matériau. La valeur de la contrainte qui est retenue pour la rupture est celle de l'apparition de la première fissure longitudinale qui apparaît bien avant la rupture complète du tube. En effet au-delà de cette première fissuration la contrainte mesurée correspond plus à la résistance de la structure du tube qu'à celle du matériau. La charge critique d'apparition de la première fissure se repère assez facilement par des craquements du matériau ainsi que par une rupture de pente sur la courbe force-déplacement de l'essai. À l'aide de (2.24), on déduit ensuite la valeur de la résistance à rupture σ_T^{rupt} .

Sur l'ensemble des essais effectués, on distingue nettement deux groupes de valeurs de résistance à rupture, le premier se situe vers $25,5 \pm 2$ MPa et le second vers $11,9 \pm 2$ MPa. Tous les échantillons de 20 mm appartiennent au deuxième groupe dont la résistance est la plus basse. On est donc tenté de penser qu'il y a un effet d'échelle et que l'endommagement lié à la découpe des échantillons a une importance d'autant plus grande que l'échantillon est petit. Pour pouvoir conclure, il faudrait compléter ces essais par une troisième série d'essais avec des échantillons

d'une longueur supérieure à 40 mm. Cela n'a pas été fait parce que l'utilisation d'échantillons plus longs accentue les défauts de parallélisme des plateaux de la presse ce qui conduit à des concentrations de contraintes et à une rupture précoce des éléments. Il faudrait donc revoir le dispositif d'essai et mettre une rotule en amont d'un des plateaux. Le temps manquant pour cela, il a été décidé d'admettre pour les contraintes à rupture tangentielle les valeurs fournies par le fabricant.

Comparaison avec les données du fabricant

Dans le sens longitudinal, les données du tableau 2.2 fournies par le fabricant sont en relativement bon accord avec les résultats trouvés expérimentalement dans la partie 2.3.2. Dans le sens transverse, la valeur expérimentale du module d'Young est supérieure de 50% à la valeur annoncée par le fabricant pour le module d'Young de la résine. Ceci est tout à fait compréhensible : les tubes sont recouverts de deux couches de mat (une à l'intérieur et une autre à l'extérieur) qui contiennent des fibres et qui viennent augmenter la raideur du tube dans le sens transverse.

TAB. 2.2 – Propriétés mécaniques des tubes fournies par le fabricant.

Sens	σ^{comp} (en MPa)	σ^{flex} (en MPa)	σ^{trac} (en MPa)	E (en GPa)
Longitudinal	220	350	500	25
Transverse	60		50	3,8

Les mêmes causes entraînant les mêmes effets, on s'attendrait à trouver le même type de résultats pour la résistance à rupture dans le sens transverse. On constate au contraire que la résistance à rupture est nettement plus faible (-50 % dans le meilleur des cas) que celle de la résine seule. Cet écart important peut s'expliquer par la nature des essais effectués. En effet, tous les échantillons testés sont des portions de tube, ils possèdent donc tous une géométrie courbe qui entraîne une sollicitation sévère du matériau et une très grande sensibilité aux imperfections. Les résultats du fabricant de tubes sont issus d'éprouvettes planes sollicitées en traction simple dans lesquelles le champ de contrainte est uniforme. Il est donc vraisemblable que les valeurs réelles des résistances à rupture du tube dans le sens transverse soient plus proches de celles du tableau 2.2 que celles issues du paragraphe précédent.

Les valeurs prises en compte par la suite seront donc les suivantes :

- pour les modules d'Young : $E_T = 5,9$ GPa et $E_L = 26,7$ GPa,
- pour les résistances à rupture dans les parties en compression : $\sigma_T^{rupt} = \sigma_T^{comp} = 60$ MPa et $\sigma_L^{rupt} = \sigma_L^{flex} = 350$ MPa ;
- et pour les résistances à rupture dans les parties en tension : $\sigma_T^{rupt} = \sigma_T^{trac} = 50$ MPa et $\sigma_L^{rupt} = \sigma_L^{trac} = 500$ MPa.

2.3.4 Ovalisation des sections

Principe de la modélisation

Sous l'action des efforts de flexion dans les tubes, on observe une distortion de leur section transversale. En effet, les contraintes de traction dans la fibre supérieure et de compression dans la fibre inférieure entraînent un écrasement de la section. Ce mécanisme d'ovalisation induit une forte augmentation des contraintes transversales et une instabilité liée à une perte de rigidité de la section. Comme on peut le voir dans la bibliographie abondante de l'article de Karamanos [56] de nombreux articles traitent du problème et se réfèrent pour beaucoup à la théorie de Brazier [26]. Celui-ci propose une cinématique des déplacements transversaux telle qu'une section circulaire fléchie se déforme de façon ellipsoïdale. L'énergie de déformation liée à cette ovalisation est ensuite considérée comme égale à celle de la déformation d'un anneau de longueur unité. Elle vient s'ajouter à l'énergie de flexion de la fibre moyenne du tube. Dans cette modélisation, l'ovalisation est donc traitée comme la somme de deux phénomènes unidimensionnels et non comme un problème de coque. Cette approximation, non négligeable, permet déjà une bonne appréhension du phénomène et permet une estimation analytique des contraintes liées à l'ovalisation.

Approche phénoménologique

Lorsque l'on soumet une section à un moment de flexion positif, les fibres supérieures sont tendues et les fibres inférieures sont comprimées. Les unes et les autres tendent à se rapprocher de l'axe neutre de la section de façon à retrouver leur état d'équilibre. Ce phénomène peut se traduire par un effort extérieur, appliqué à chaque fibre, dirigé perpendiculairement à la fibre neutre de la section et proportionnel à l'allongement de la fibre. Ces efforts extérieurs provoquent un écrasement de la section que l'on nomme ovalisation. De plus, si l'on se place dans le cadre des hypothèses de Navier-Bernouilli, les sections droites restant droites, l'allongement des fibres est proportionnel à la distance à la fibre neutre. Par conséquent, on peut considérer que, dans notre cas, l'étude de la cinématique du phénomène d'ovalisation se réduit à l'étude d'une section de tube soumise à un effort proportionnel à la distance à l'axe neutre de la fibre. C'est un problème plan de mécanique des poutres qui, compte tenu des symétries de la géométrie et du chargement, se ramène à l'étude du quart de cercle de la figure 2.20 soumis à un chargement $p \sin \theta$ représentatif des efforts induits par les fibres.

Le système est hyperstatique de degré un. Pour déterminer l'inconnue hyperstatique, on utilise à nouveau le théorème de Ménabréa. Pour cela, on considère le problème isostatique de la figure 2.21 associé à celui hyperstatique de la figure 2.20. On note R le rayon moyen du tube, e son épaisseur et L la longueur de tube étudiée. On calcule alors M_p le moment dû aux efforts d'ovalisation $p \sin(\theta)$, et M_1 le moment unitaire lié à la coupure qui a été effectuée en $\theta = \pi/2$ dont les expressions sont données ci-dessous :

$$M_p = \frac{pR^2}{4}(1 + \cos(2\theta)) \quad \text{et} \quad M_1 = 1 \quad (2.30)$$

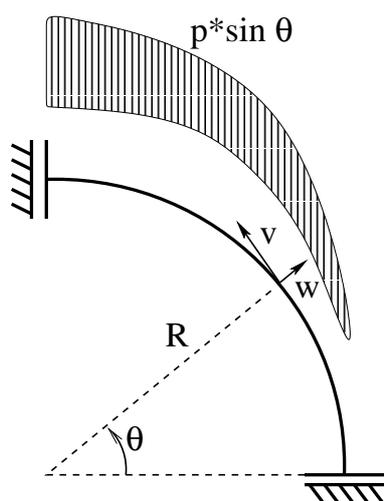


FIG. 2.20 – Ovalisation d'un quart de cercle

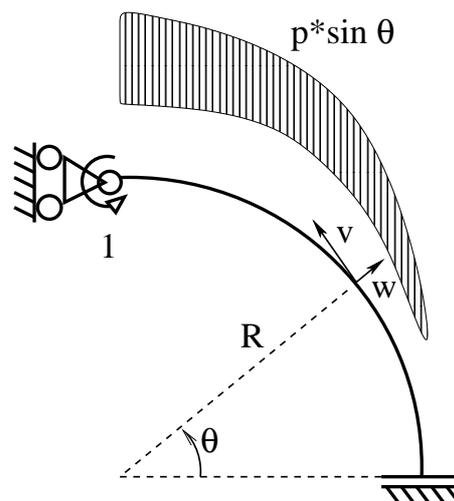


FIG. 2.21 – Système isostatique associé à 2.20

D'après le théorème de Ménabréa, le moment M_T dans le système hyperstatique est de la forme $M_p + X \cdot M_1$ où X est solution de l'équation (2.22). On en déduit donc la valeur de X et l'expression finale du moment M_T .

$$M_T = \frac{pR^2}{4} \cos(2\theta) \quad (2.31)$$

Du point de vue cinématique, on se place dans le cadre des hypothèses de Navier-Bernouilli et on suppose que les rotations sont petites au cours de l'ovalisation. On note $w(\theta)$ le déplacement radial, $v(\theta)$ le déplacement tangentiel et $'$ la dérivation par rapport à θ . Les déformations dans la structure sont caractérisées par la déformation axiale ϵ_T et la variation de courbure κ_T :

$$\epsilon_T = \frac{v' + w}{R} \quad \text{et} \quad \kappa_T = \frac{v' - w''}{R^2} \quad (2.32)$$

Pour simplifier le problème, on fait l'hypothèse que la structure est inextensible, ce qui revient à supposer $\epsilon_T = 0$. On en déduit alors que $v' = -w$. En substituant ce résultat dans l'expression (2.32), on obtient pour κ_θ l'expression :

$$\kappa_T = -\frac{w + w''}{R^2} \quad (2.33)$$

De plus, le quart de cercle étudié est une section d'un tube en composite. La propriété mécanique de la poutre qui modélise la section est donc le module d'Young E_T dans la direction transverse. Le comportement de la poutre s'écrit donc :

$$M_T = E_T I_T \kappa_T \quad \text{avec} \quad I_T = \frac{e^3 L}{12} \quad (2.34)$$

En combinant les expressions (2.33) et (2.34), on obtient une équation différentielle du deuxième ordre en w . Après résolution de cette dernière, on trouve pour w l'expression suivante, où C_1 et

C_2 sont deux constantes d'intégration :

$$w = \frac{pR^4}{E_T e^3 L} \cos(2\theta) + C_1 \cos(\theta) + C_2 \sin(\theta) \quad (2.35)$$

Comme on a fait l'hypothèse que la poutre est inextensible, on peut calculer l'expression (2.36) du déplacement tangentiel v par simple intégration de l'expression de w .

$$v = -\frac{1}{2} \frac{pR^4}{E_T e^3 L} \sin(2\theta) + C_1 \sin(\theta) - C_2 \cos(\theta) \quad (2.36)$$

En utilisant les conditions aux limites, c'est-à-dire le fait que $v(0) = v(\frac{\pi}{2}) = 0$, on démontre que $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$. Les déplacements liés à l'ovalisation de la section sont donc donnés par les expressions :

$$w = \frac{pR^4}{E_T e^3 L} \cos(2\theta) \quad \text{et} \quad v = -\frac{1}{2} \frac{pR^4}{E_T e^3 L} \sin(2\theta) \quad (2.37)$$

Si l'on définit le paramètre d'ovalisation ζ de la section comme le rapport du déplacement radial maximum w_{max} au rayon R du tube, on obtient :

$$\zeta = \frac{w_{max}}{R} = \frac{pR^3}{E_T e^3 L} \quad (2.38)$$

En introduisant le paramètre ζ dans (2.37), on remarque que l'on obtient exactement les expressions (2.39) et (2.40) admises par Brazier [26] pour sa modélisation de la cinématique du phénomène d'ovalisation. Sous l'effet d'un couple de flexion, la section d'un tube circulaire de rayon R se transforme donc en une ellipse de demi grand axe $R(1 + \zeta)$ et de demi petit axe $R(1 - \zeta)$.

$$w(\theta) = R\zeta \cos(2\theta) \quad (2.39)$$

$$v(\theta) = -R\frac{\zeta}{2} \sin(2\theta) \quad (2.40)$$

Détermination de l'amplitude de l'ovalisation

Dans le paragraphe précédent, on a montré que la transformation de la section d'un tube fléchi était caractérisée par un paramètre d'ovalisation ζ qui détermine l'amplitude des déformations transverses de la section. On va maintenant tenter de relier ce paramètre ζ au chargement extérieur réellement appliqué au tube, c'est-à-dire au changement de courbure longitudinale κ_L .

On utilise pour cela une approche énergétique comme dans l'article Karamanos [56] en l'adaptant à un tube isotrope transverse. On étudie dans un premier temps l'énergie U_o liée à l'ovalisation de la section que l'on assimile à une poutre circulaire. Si l'on se place dans le cadre des hypothèses de Navier-Bernouilli et que l'on suppose que la poutre est inextensible, l'énergie d'ovalisation dépend uniquement du changement de courbure transversale κ_T . Si l'on suppose de plus que les rotations sont petites au cours de l'ovalisation, l'expression de la variation de courbure est donnée par (2.33). En introduisant l'expression de w (2.39) dans (2.33),

on obtient une nouvelle expression de κ_T et de la déformation transversale ϵ_T en fonction de η l'épaisseur comprise entre $-e/2$ et $e/2$:

$$\kappa_T = -\frac{3\zeta \cos(2\theta)}{R} \quad \text{et} \quad \epsilon_T = -\frac{3\zeta \cos(2\theta)}{R}\eta \quad (2.41)$$

Lors de la transformation considérée la section se déforme dans un plan perpendiculaire à l'axe du tube, c'est donc le module d'Young transverse du matériau E_T qui doit être pris en compte dans le calcul des contraintes liées à l'ovalisation. L'énergie de déformation d'ovalisation U_o est donc donnée par :

$$U_o = \frac{1}{2} \int_S \sigma_T \epsilon_T dS = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-e/2}^{e/2} E_T (\kappa_T \eta)^2 R d\theta d\eta \quad (2.42)$$

Compte tenu de l'expression (2.41), l'énergie d'ovalisation s'écrit finalement :

$$U_o = \frac{3}{8} \frac{\pi e^3}{R} E_T \zeta^2 \quad (2.43)$$

Dans un deuxième temps, on s'intéresse à l'énergie liée à la flexion longitudinale U_L . Celle-ci se calcule aisément d'après la théorie des poutres de Navier-Bernouilli en fonction de la contrainte longitudinale σ_L et de la déformation longitudinale ϵ_L .

$$U_L = \frac{1}{2} \int_S \sigma_L \epsilon_L dS = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-e/2}^{e/2} E_L \epsilon_L^2 R d\theta d\eta \quad (2.44)$$

Comme le tube est initialement droit et qu'il n'est soumis qu'à une contrainte de flexion simple, on déduit l'expression de ϵ_L en fonction de la courbure κ_L imposée au tube et de y la distance à l'axe neutre.

$$\epsilon_L = \kappa_L y \quad (2.45)$$

Dans la configuration initiale, la distance à l'axe neutre est $(R + \eta) \sin(\theta)$. Dans la configuration déformée, le déplacement en chaque point du tube est donné par $w\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_T$ et la distance y s'écrit donc :

$$y = ((R + \eta + w)\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_T) \cdot \mathbf{e}_y = (R + \eta + w) \sin(\theta) + v \cos(\theta) \quad (2.46)$$

En remplaçant dans l'expression ci-dessus, v et w par les valeurs données en (2.39 et 2.40), l'expression finale de la déformation longitudinale est donc :

$$\epsilon_L = \kappa_L R \left(\left[1 + \frac{\eta}{R} + \zeta \cos(2\theta) \right] \sin(\theta) - \frac{\zeta}{2} \sin(2\theta) \cos(\theta) \right) \quad (2.47)$$

L'énergie de déformation longitudinale (2.44) devient alors :

$$U_L = \frac{1}{2} \kappa_L^2 \pi R^3 e E_L \left(1 - \frac{3}{2} \zeta + \frac{5}{8} \zeta^2 \right) \quad (2.48)$$

On remarque qu'en remplaçant les caractéristiques de l'anisotropie du matériau E_L et E_T par celle d'un matériau isotrope E , les expressions de U_o et U_L sont identiques à celles présentées par Karamanos [56]. On remarque également que, si on avait pris en compte l'effet Poisson dans le calcul des contraintes longitudinale σ_L et transversale σ_T , on aurait abouti aux mêmes équations pour les énergies U_L (2.48) et U_o (2.43) car les déformations ϵ_L et ϵ_T sont orthogonales ($\int \epsilon_L \epsilon_T = 0$).

Enfin, dans un troisième temps, on calcule l'énergie totale de déformation U par unité de longueur de tube. Elle est définie comme la somme de l'énergie de flexion longitudinale et de l'énergie d'ovalisation $U = U_L + U_o$. On sait alors que la valeur du paramètre ζ solution du problème d'ovalisation est celle qui minimise l'énergie totale U , c'est-à-dire telle que $dU/d\zeta = 0$. Après résolution de cette équation, on obtient l'expression de ζ en fonction de la valeur normalisée κ de la courbure longitudinale κ_L :

$$\zeta = \kappa^2 \frac{1}{1 + \frac{5}{6}\kappa^2} \quad \text{avec} \quad \kappa = \kappa_L \frac{R^2}{e} \sqrt{\frac{E_L}{E_T}} \quad (2.49)$$

On remarque à nouveau que cette expression est très semblable à celle obtenue pour un matériau isotrope ($\kappa = \kappa_L R^2/e$), l'anisotropie étant liée au paramètre E_L/E_T . L'amplitude des déformations d'ovalisation sera donc d'autant plus grande que le rapport des modules longitudinal et transverse sera grand. Si l'on considère par exemple le cas du matériau dont les propriétés sont données dans le tableau (2.2) et l'expression (2.49), on obtient une augmentation du paramètre ζ d'environ 650% par rapport au cas isotrope et donc une augmentation d'autant de l'amplitude des déformations dues à l'ovalisation. Le phénomène d'ovalisation pour les tubes composites est donc sensible pour des rapports R^2/e beaucoup plus faibles que pour des tubes isotropes et la rupture risque de se produire pour des chargements moins élevés.

Critère de Tsai-Hill

Dans les essais de flexion représentés sur la figure 2.13, la brutalité de la rupture ne permet pas de trancher entre les différents modes de ruine. En effet, la variété des fissures observées (écrasement du tube, rupture de la partie comprimée) permettent d'envisager une rupture des fibres en compression (rupture due à σ_L), une ovalisation de la section (rupture due à σ_T), une combinaison des deux ou une rupture liée à l'instabilité de la partie comprimée. Pour évaluer la contribution de ces différents modes ou des différentes contraintes correspondantes, on va dans un premier temps utiliser le critère de Tsai-Hill et dans un second temps vérifier la stabilité de la zone en compression.

On remarque tout d'abord que toutes les ruptures observées lors de ces essais l'ont été dans la partie centrale du tube, là où la courbure est maximale. Or dans cette partie, le cisaillement τ_{LT} est nul puisque l'effort tranchant est nul (la tangente à la courbe en ce point est parallèle à la ligne d'action des forces). On ne tiendra donc pas compte du terme de cisaillement dans l'expression du critère de Tsai-Hill (2.17). Ensuite, on peut calculer les valeurs des termes σ_L et σ_T , en fonction de déformations longitudinales ϵ_L (2.47) et des déformations transversales ϵ_T

(2.41) pour lesquelles l'expression du paramètre de l'ovalisation ζ en fonction de κ_L a été donnée plus haut en (2.49).

$$\sigma_L = \frac{E_L}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}}\epsilon_L + \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}}\epsilon_T \quad \text{et} \quad \sigma_T = \frac{\nu_{TL}E_L}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}}\epsilon_L + \frac{E_T}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}}\epsilon_T \quad (2.50)$$

À l'aide de l'expression (2.50), on montre que, quelle que soit la partie de la section considérée, le critère est toujours maximal en peau. On peut alors tracer la valeur maximale du critère de Tsai-Hill dans l'ensemble de la section en fonction de l'angle θ . Les valeurs du critère pour un tube de rayon $R = 19,25$ mm et d'épaisseur $e = 3,5$ mm sont représentées sur la figure (2.22) pour quatre valeurs de la courbure κ_L (0,25 - 0,35 - 0,45 et 0,55 m^{-1}). On voit ainsi l'évolution du profil des contraintes dans le tube, notamment au niveau de l'axe neutre. Ces profils de contraintes ont été validés par une modélisation avec un logiciel de calcul aux éléments finis par Aude Petel [83].

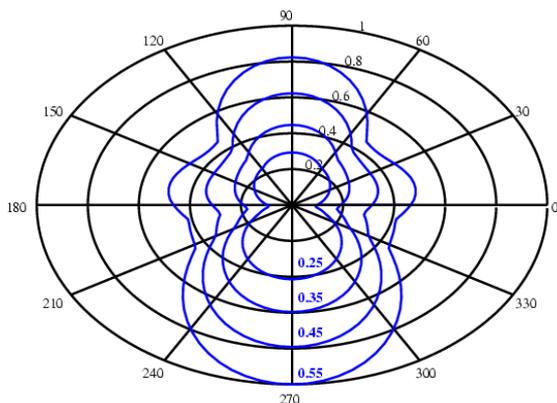


FIG. 2.22 – Variation du critère de Tsai-Hill en fonction de l'angle θ .

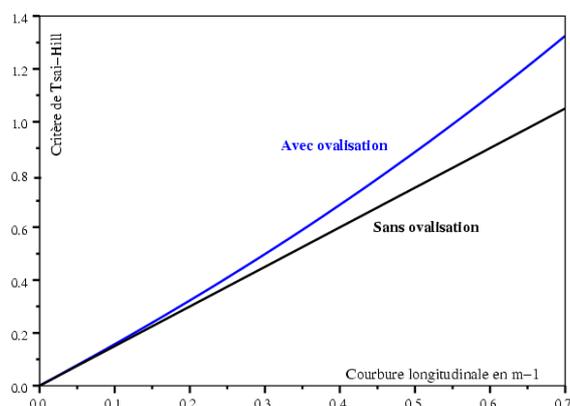


FIG. 2.23 – Critère de Tsai-Hill en fonction de la courbure longitudinale κ_L .

On constate que la valeur maximale du critère est atteinte en $\theta = 3\pi/2$ quelle que soit la valeur de la courbure κ_L . En effet, c'est là que se cumulent une contrainte de compression dans le sens longitudinal et une contrainte de tension dans le sens transverse, ce qui correspond à la sollicitation la plus défavorable de la section. La ruine du profilé survient donc dans la zone de compression pour une courbure longitudinale de 0,626 m^{-1} , ce qui correspond à un rayon de courbure de 1,60 m. Au delà de la ruine, il est intéressant d'étudier l'évolution du critère avec la courbure κ_L afin notamment de se rendre compte de l'importance de l'augmentation de contrainte du fait de l'ovalisation. Ainsi, sur la figure (2.23), on a tracé la valeur du critère pour la situation de référence sans ovalisation ainsi que dans le cas où l'ovalisation est prise en compte. On constate que l'ovalisation est négligeable (inférieure à 3 %) jusqu'à une courbure de 0,08 m^{-1} (soit jusqu'à 13 % de la contrainte à rupture), faible (inférieure à 10 %) jusqu'à une courbure de 0,29 m^{-1} (soit jusqu'à 46 % de la contrainte à rupture) et déterminante au-delà. Pour diminuer l'influence des contraintes de traction dans la résine sur la rupture, on peut envisager de changer de processus de fabrication des profilés et de rajouter des fibres perpendiculairement à l'axe par enroulement filamentaire. Les performances du pultrudé s'en trouveraient améliorées mais le coût du matériau augmenterait d'environ 30 %.

2.3.5 Instabilité locale de la partie comprimée

Domaine de validité de l'approche proposée

La partie inférieure d'un tube en flexion est comprimée, elle est donc sujette à une instabilité locale de flambement. Une première approche du phénomène consiste à assimiler la contrainte limite de flambement local dans le tube fléchi à celle d'un tube soumis à une compression uniforme. D'après l'article de Karamanos [56], « cette méthode malgré sa simplicité fournit des résultats remarquablement bons (en terme de moment critique, de courbure et de longueur d'onde de flambement) en comparaison avec les résultats d'une analyse non-linéaire aux éléments finis » si l'on reste dans une gamme raisonnable de courbure ($-1 \leq \bar{\kappa} \leq 0,95$). Dans cette expression, $\bar{\kappa}$ représente la courbure normalisée ; elle se déduit aisément de la courbure longitudinale κ_L à l'aide des caractéristiques géométriques et mécaniques de la section du tube.

$$\bar{\kappa} = \kappa_L \cdot \frac{R^2 \sqrt{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}}}{e} \quad (2.51)$$

Dans le cadre de cette étude, κ_L varie entre $-0,6 \text{ m}^{-1}$ et $0,6 \text{ m}^{-1}$, ce qui correspond à une courbure normalisée variant entre $-0,063$ et $0,063$. Il est donc tout à fait légitime de restreindre l'étude de l'instabilité des tubes en flexion à celle du flambement symétrique d'un cylindre en compression. Ce problème a déjà été abondamment traité depuis 50 ans, notamment par Timoshenko [101], Billington [22] et Bazant [20]. Le plus souvent, leurs ouvrages ne traitent en détail que le cas d'un matériau isotrope ; ici les tubes sont constitués d'un matériau isotrope transverse, il apparaît donc nécessaire de présenter à nouveau l'ensemble du raisonnement.

Flambement axisymétrique d'un cylindre

L'étude de la stabilité du cylindre est faite par la méthode variationnelle. On calcule l'énergie potentielle totale du système en sachant que celle-ci est minimale pour le déplacement solution du problème. On va montrer que, pour certaines valeurs du chargement, le déplacement radial n'est pas nul et que, par conséquent, la section est instable.

On considère pour commencer un cylindre circulaire de longueur l , d'épaisseur constante e , de rayon médian R soumis à une force axiale uniforme N_{zz} qui est positive en traction et constante dans le temps (cf. figure 2.24). Le système de coordonnées cylindriques est choisi de sorte que dans le repère local, l'axe \mathbf{e}_z est orienté le long de l'axe du tube, l'axe \mathbf{e}_T selon la tangente et l'axe \mathbf{e}_r selon la normale sortante. On note u le déplacement selon \mathbf{e}_z , w le déplacement selon \mathbf{e}_r et v le déplacement selon \mathbf{e}_T . Pour les propriétés mécaniques du matériau, on note E_L le module d'Young longitudinal, E_T le module d'Young transverse, ν_{LT} et ν_{TL} les coefficients de Poisson. Le sens longitudinal du matériau coïncide avec l'axe du cylindre, c'est-à-dire avec \mathbf{e}_z .

Description des déformations et des contraintes

On suppose que le flambement du tube est parfaitement axisymétrique. Cette hypothèse simplifie beaucoup les calculs et on montre en général que les premiers modes de flambement

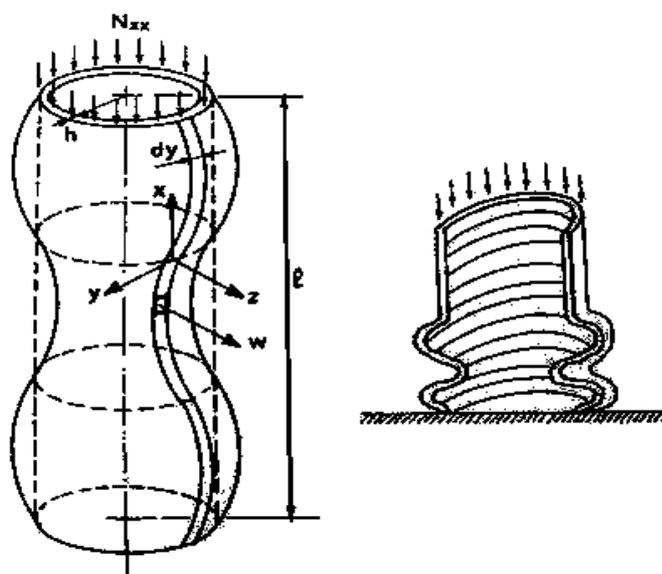


FIG. 2.24 – Flambement symétrique d'un cylindre (notations).

non symétriques sont obtenus pour des énergies très proches de celle du mode axisymétrique (quelques pour-cents). Les différentes variables ne dépendent donc ici que de z et le déplacement v est nul. On note $'$ la dérivation par rapport à l'unique variable z du problème. On peut alors calculer les déformations dans le cylindre à partir de leurs définitions en fonction des déplacements u et w :

$$\begin{cases} \epsilon_L = u' + \frac{w'^2 + u'^2}{2} \\ \epsilon_T = \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{w}{R} \right)^2 \\ \gamma_{TL} = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Par mesure de simplification dans (2.52), on va négliger u'^2 devant u' et w^2 devant w . En revanche, on ne fait pas d'hypothèse sur les ordres de grandeurs respectifs de u et de w ; la prise en compte d'un terme non-linéaire en w dans la déformation ϵ_L est indispensable à la prédiction du phénomène de flambement. On reconnaît par ailleurs dans ϵ_T , la déformation liée au changement du rayon du tube de R à $R + w$ (en effet $\epsilon_T = (2\pi(R + w) - 2\pi R) / 2\pi R = w/R$). Le déplacement radial w entraîne également de la flexion dans le tube. Dans le cadre des hypothèses des coques de Kirchhoff-Love, la variation de courbure longitudinale est $\kappa_L = w''$. Les autres variations de courbure sont nulles car le flambement est supposé axisymétrique. On peut ensuite déduire les contraintes longitudinales σ_L et transversales σ_T en fonction de η , la position dans l'épaisseur du tube :

$$\begin{cases} \sigma_L = \frac{E_L}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}} (\epsilon_L + \eta\kappa_L) + \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}} \epsilon_T \\ \sigma_T = \frac{\nu_{TL}E_L}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}} (\epsilon_L + \eta\kappa_L) + \frac{E_T}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}} \epsilon_T \end{cases} \quad (2.53)$$

Équation caractéristique

Pour établir l'équation différentielle caractéristique du problème, on calcule l'énergie potentielle de déformation élastique U^{def} du tube.

$$U^{def} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_L(\epsilon_L + \eta\kappa_L) + \sigma_T\epsilon_T) 2\pi R d\eta dz \quad (2.54)$$

En remplaçant les contraintes par leurs expressions en fonctions des déformations et en intégrant par rapport à η , la position dans l'épaisseur, on obtient :

$$U^{def} = \frac{\pi R}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}} \int_0^l \left(E_L e \epsilon_L^2 + E_T e \epsilon_T^2 + 2\nu_{TL} E_L e \epsilon_L \epsilon_T + E_L \frac{e^3}{12} \kappa_L^2 \right) dz \quad (2.55)$$

Si l'on considère que l'effort de compression N_{zz} est constant au cours du flambement, l'énergie potentielle liée aux efforts extérieurs U^{ext} peut s'exprimer de la façon suivante :

$$U^{ext} = -2\pi R N_{zz} u(l) \quad (2.56)$$

Les déplacements u et w solutions du problème minimisent l'énergie potentielle totale de la structure $U^{flamb} = U^{def} + U^{ext}$. Pour de petites variations (cinématiquement admissibles) δu du déplacement axial et δw du déplacement radial autour de la solution, la variation d'énergie δU^{flamb} doit être nulle. D'après (2.54) et (2.56), ces variations d'énergie s'écrivent :

$$\begin{aligned} \delta U^{flamb} &= \frac{2\pi R e}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}} \int_0^l \left(E_L (\epsilon_L + \nu_{TL}\epsilon_T) \delta\epsilon_L + E_T (\nu_{LT}\epsilon_L + \epsilon_T) \delta\epsilon_T \right) dz \\ &+ \frac{2\pi R}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}} \int_0^l E_L \frac{e^3}{12} \kappa_L \delta\kappa_L dz - 2\pi R N_{zz} \delta u(l) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Les variations de déformations $\delta\epsilon_L$, $\delta\epsilon_T$ et $\delta\kappa_L$ se calculent à l'aide des expressions (2.52).

$$\begin{cases} \delta\epsilon_L &= \delta u' + w' \delta w' \\ \delta\epsilon_T &= \frac{\delta w}{R} \\ \delta\kappa_L &= \delta w'' \end{cases} \quad (2.58)$$

En insérant ces expressions dans (2.57), on obtient :

$$\begin{aligned} \delta U^{flamb} &= \frac{2\pi R}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}} \int_0^l \left(E_L e (\epsilon_L + \nu_{TL}\epsilon_T) \delta u' + E_L e (\epsilon_L + \nu_{TL}\epsilon_T) w' \delta w' \right. \\ &+ \left. E_T e (\nu_{LT}\epsilon_L + \epsilon_T) \frac{\delta w}{R} + E_L \frac{e^3}{12} \kappa_L \delta w'' \right) dz - 2\pi R N_{zz} \delta u(l) \end{aligned} \quad (2.59)$$

On intègre ensuite par partie tous les produits dans lesquels interviennent les dérivées de δu et δw en tenant compte des conditions aux limites de l'expérience illustrée sur la figure 2.24. Du point de vue des déplacements, le plan sur lequel repose le cylindre est immobile verticalement

$u(0) = \delta u(0) = 0$ et, comme δw est une perturbation de l'équilibre, $\delta w(0) = \delta w(l) = 0$. De plus, les moments aux extrémités du cylindre sont nuls, donc : $w''(0) = w''(l) = \delta w''(0) = \delta w''(l) = 0$.

$$\begin{aligned} \delta U^{flamb} &= \frac{2\pi R}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}} \int_0^l \left(-E_L e (\epsilon_L + \nu_{TL}\epsilon_T)' \delta u - E_L e ((\epsilon_L + \nu_{TL}\epsilon_T)w')' \delta w \right. \\ &+ \left. E_T e (\nu_{LT}\epsilon_{zz} + \epsilon_T) \frac{\delta w}{R} + E_L \frac{e^3}{12} \kappa_{zz}'' \delta w \right) dz \\ &+ 2\pi R \left(\frac{E_L e}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}} (\epsilon_L(l) + \nu_{TL}\epsilon_T(l)) - N_{zz} \right) \delta u(l) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Comme u et w minimisent δU , l'expression (2.60) doit être nulle quels que soient δu et δw . Les termes sous l'intégrale doivent donc être nuls. On obtient ainsi le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} 0 = (\epsilon_L + \nu_{TL}\epsilon_T)' \\ 0 = \frac{E_L e}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}} (\epsilon_L(l) + \nu_{TL}\epsilon_T(l)) - N_{zz} \\ 0 = -E_L e ((\epsilon_L + \nu_{TL}\epsilon_T)w')' + E_T \frac{e}{R} (\nu_{LT}\epsilon_L + \epsilon_T) + E_L \frac{e^3}{12} \kappa_L'' \end{cases} \quad (2.61)$$

En intégrant la première équation de (2.61) et en tenant compte de la deuxième équation de (2.61), on obtient :

$$\frac{E_L e}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}} (\epsilon_L + \nu_{TL}\epsilon_T) = N_{zz} \quad (2.62)$$

On remplace alors $(\epsilon_L + \nu_{TL}\epsilon_T)$ par sa valeur en fonction de N_{zz} dans la troisième équation de (2.61) :

$$-N_{zz}w'' + E_T \frac{e}{R} (\nu_{LT} \frac{N_{zz}}{E_L e} + \epsilon_T) + \frac{E_L}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}} \frac{e^3}{12} \kappa_L'' = 0 \quad (2.63)$$

Enfin, on remplace ϵ_T et κ_L par leur valeur en fonction de w :

$$-N_{zz}w'' + E_T \frac{e}{R} (\nu_{LT} \frac{N_{zz}}{E_L e} + \frac{w}{R}) + \frac{E_L}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}} \frac{e^3}{12} w'''' = 0 \quad (2.64)$$

La solution particulière de l'équation ci-dessus est évidente :

$$\begin{aligned} \epsilon_L^0 &= \frac{N_{zz}}{E_L e} \quad \text{et} \quad \epsilon_T^0 = -\nu_{LT} \frac{N_{zz}}{E_L e} \\ \text{Soit} \quad u^0 &= \frac{N_{zz}}{E_L e} z \quad \text{et} \quad w^0 = -\nu_{LT} \frac{N_{zz}}{E_L} \frac{R}{e} \end{aligned} \quad (2.65)$$

L'équation différentielle homogène associée à (2.64) fournit l'équation caractéristique qui gouverne la stabilité du cylindre :

$$E_T \frac{we}{R^2} - N_{zz}w'' + \frac{E_L}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}} \frac{e^3}{12} w'''' = 0 \quad (2.66)$$

Étude de la stabilité de la section

L'équation (2.66) est une équation différentielle du quatrième ordre qui admet comme solution périodique les fonctions de la forme $w = w_0 \sin(m\pi x/l)$, où m est un entier qui décrit le nombre d'ondes qu'aura la déformée du cylindre après flambement. Ces solutions sont bien en accord avec les conditions aux limites en déplacement $w(0) = w(h) = 0$ et en moment $w''(0) = w''(h) = 0$. La substitution de $w = w_0 \sin(m\pi x/l)$ dans l'équation (2.66) conduit à la charge critique suivante :

$$N_{zz} = - \left(E_T \frac{e}{R^2} \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 + \frac{E_L}{1 - \nu_{TL}\nu_{LT}} \frac{e^3}{12} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right) \quad (2.67)$$

Cette charge critique dépend de $m\pi/l$, elle est minimale pour :

$$\frac{m\pi}{l} = \left(\frac{(1 - \nu_{TL}\nu_{LT})E_T}{E_L} \frac{12}{e^2 R^2} \right)^{1/4} \quad (2.68)$$

La charge critique vaut alors :

$$N_{zz}^{cr} = - \frac{e^2}{R} \sqrt{\frac{E_T E_L}{3(1 - \nu_{TL}\nu_{LT})}} \quad (2.69)$$

Cette valeur de la charge critique est en accord avec celle trouvée par Bazant [20] dans le cas d'un matériau anisotrope. On vérifie d'ailleurs facilement que, dans le cas où le matériau est isotrope, on retrouve la valeur communément admise dans les ouvrages de référence [101], [22], [20]. Pour connaître l'ordre de grandeur de la contrainte de compression qui provoque le flambement local du cylindre en flexion, on utilise les valeurs du tableau 2.2 pour les caractéristiques mécaniques de la section. Le rayon de courbure maximal du tube dans la configuration déformée R_f^{max} est évalué à partir de l'expression (2.41) :

$$R_f^{max} = \left(\kappa_T^{max} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = \frac{R}{1 - 3\zeta} \quad (2.70)$$

Le paramètre ζ de l'ovalisation se calcule à partir de la courbure imposée au tube d'après les expressions de (2.49). Pour une courbure imposée $\kappa_L = 0,5 \text{ m}^{-1}$, l'amplitude de l'ovalisation est de $\zeta = 1,82 \%$ si bien que le rayon de courbure final est $R_f^{max} = 20,36 \text{ mm}$. La valeur de la contrainte limite de flambement local se déduit ensuite de l'expression (2.69) :

$$\sigma_{flamb}^{max} = \frac{N_{zz}^{cr}}{e} = 982 \text{ MPa} \quad (2.71)$$

2.3.6 Conclusion sur le mode de ruine des tubes en flexion

La contrainte critique de flambement est beaucoup plus élevée que la contrainte longitudinale maximale observée lors des essais (350 MPa). Ce n'est donc pas l'instabilité de la partie comprimée du tube qui entraîne la ruine. La figure 2.22 montre également qu'avec les valeurs

des paramètres du composites du tableau 2.2, la valeur maximale du critère est atteinte en fibre inférieure du tube et non pas dans les parties latérales. C'est donc la contrainte longitudinale qui provoque la rupture en compression du tube.

Le modèle proposé pour l'évaluation des contraintes dans la section ovalisée du tube est très simple et la comparaison numérique qui a été faite par Aude Petel [83] avec un modèle tridimensionnel de tube avec les mêmes paramètres de matériau a montré que les ordres de grandeurs étaient exacts. Il semble donc que les grandes fissures longitudinales que l'on observe expérimentalement ne soient qu'une conséquence de la rupture en compression des fibres. On note cependant que la résistance à rupture de la partie comprimée qui a été prise en compte dans le modèle est la résistance à rupture en flexion, ce qui est une hypothèse forte. C'est vraisemblablement l'éclaircissement du problème du couplage flexion-compression dans les composites, qui permettra de trancher définitivement la question de l'origine de la rupture.

2.4 Conclusion

Dans le domaine du génie civil, les matériaux composites verre/résine sont des matériaux nouveaux qui commencent à se répandre grâce au procédé industriel de pultrusion qui permet la production d'objets de section standardisée à des tarifs très économiques. Les premières applications dans ce secteur sont malgré tout assez conservatrices et se cantonnent à une copie des structures en acier du début du XX^e siècle : armatures pour béton, renforcement par collage, treillis, etc. Beaucoup plus souples que l'acier, les composites apparaissent rarement comme la solution la plus pertinente pour ces applications dans lesquelles les exigences de raideur conduisent à un surdimensionnement de la structure en composites et à une très faible sollicitation de leur résistance à rupture.

En revanche, les contraintes constructives des gridshells liées à leur processus de montage utilisent la déformabilité des composites. Leur allongement élastique important et leur module d'Young élevé en font des bons candidats *a priori* pour ce type de structure. On a d'ailleurs vu par une étude systématique selon la méthode de Ashby que les composites constituent, avec le bois, les meilleurs matériaux pour les gridshells. Pour un prix équivalent, les performances mécaniques des composites sont meilleures. En contrepartie, leur bilan environnemental est moins bon, ce qui fait apparaître le bois comme la solution la plus écologique. Le développement de « bio-composites » à partir de fibres de lin ou de chanvre et de résine naturelle pourrait alors constituer l'alternative la plus intéressante.

Par ailleurs, la plupart des applications des composites dans le génie civil et dans les autres domaines n'utilisant pas des pultrudés fléchis en permanence et en grande déformation, il était nécessaire d'étudier le comportement mécanique à court et à long terme des composites verre/résine pultrudés. On a constaté que le comportement instantané du matériau reste linéaire élastique jusqu'à la rupture de la partie comprimée du tube. Il n'y a donc pas de non-linéarités matérielles à prendre en compte dans le calcul des gridshells. En revanche de grands déplacements synonymes de non-linéarités géométriques apparaissent lors du montage, l'outil de calcul développé au chapitre suivant devra donc être capable de les modéliser.

Par ailleurs, on a constaté dans les tubes fléchis que, s'il n'entraîne pas la ruine du profilé, le phénomène d'ovalisation n'est pas négligeable. Dans les tests qui ont été effectués il contribue à plus de 10 % de la contrainte totale lorsque celle-ci atteint 46 % de la résistance à rupture. Il vaut donc mieux rester en deçà de cette valeur. Une limitation de la contrainte à 30 % de la contrainte à rupture instantanée semble raisonnable, d'autant que cela permet d'éviter des fluages trop importants. On verra au paragraphe 5.1.2 que cette valeur est en accord avec les coefficients de sécurité recommandés par l'Eurocomp [32].

Chapitre 3

La méthode de relaxation dynamique : un outil pour l'étude des structures élancées précontraintes en grands déplacements

Les gridshells sont des structures dont la forme est obtenue par déformation élastique d'une grille sans rigidité en cisaillement. Les déplacements et les déformations qui interviennent durant la phase de montage sont importants si bien que leur calcul requiert des méthodes capables de prendre en compte des non-linéarités géométriques. Ce chapitre commence par un bref historique des méthodes numériques utilisées pour les gridshells : méthode de Newton-Raphson, méthode expérimentale associée à la méthode des densités de forces et méthode de relaxation dynamique. C'est cette dernière qui a été choisie pour le calcul des gridshells par la suite. Son principe consiste à remplacer une recherche d'état d'équilibre statique par un calcul dynamique fictif qui, par amortissements successifs, va conduire à l'état d'équilibre statique.

Les détails du calcul dynamique de cet algorithme sont tout d'abord présentés. Viennent ensuite les descriptions du calcul des efforts intérieurs et d'un modèle de liaison original. Les différents paramètres de la méthode étant définis, une méthode d'optimisation de ces paramètres est proposée afin de garantir la stabilité de l'algorithme et sa rapidité de convergence. Plusieurs tests sont ensuite effectués pour évaluer l'influence de la densité et de l'uniformité du maillage, les performances et la précision de la relaxation dynamique par rapport à celles d'un logiciel de calcul aux éléments finis classique, l'influence des excentricités sur ces performances et la capacité du programme à être utilisé pour l'analyse structurelle et la recherche de charges critiques de flambement. Enfin, la polyvalence de cet algorithme est illustrée au travers d'un problème de recherche de forme sur des structures à géométries complexes : les nexorades.

3.1 Historique

D'après la définition du chapitre 1, les gridshells sont des structures indissociables de leur processus de montage, leurs formes sont obtenues par déformation d'une grille sans rigidité en cisaillement. Du point de vue local du matériau, le passage de la grille à la coque reste un processus linéaire élastique réversible ce qui garantit notamment la démontabilité de la structure. Les phénomènes non-linéaires qui apparaissent durant la mise en forme des gridshells sont donc de nature géométrique uniquement. La prise en compte de ces non-linéarités dans le calcul des structures nécessite l'utilisation de méthodes de calcul numérique spécifiques. La méthode dite de Newton-Raphson est la plus connue et la plus répandue de ces méthodes, elle est basée sur la méthode des éléments finis classiques et présentée immédiatement ci-dessous. Étrangement elle n'a jamais été utilisée pour le calcul des gridshells. La puissance de calcul requise pour sa mise en œuvre est relativement importante, ce qui n'est certes plus un frein aujourd'hui mais l'était dans les années soixante, soixante-dix, si bien que la méthode utilisée par Frei Otto pour le calcul de la *Multihalle der Bundesgartenschau* de Mannheim est totalement différente de celle-ci. On a vu dans le paragraphe 1.2.2 qu'elle constitue une subtile association d'un travail sur maquettes, de mesures par photogrammétrie et d'un algorithme de calcul appelé méthode des densités de force dont les grands principes sont précisés ici. Cette méthode a été développée pour le calcul des réseaux de câbles et est encore couramment employée pour leur conception dans les pays latins et germaniques. Dans les pays anglo-saxons, on utilise plutôt un autre algorithme, appelé méthode de relaxation dynamique et développé à peu près à la même période. Il a été récemment adapté pour le calcul des gridshells de Hannover ou de Downland (cf. paragraphes 1.5.1 et 1.4). Cet algorithme simple et performant a été choisi pour l'analyse des gridshells de cette thèse et son historique sera détaillé à la fin de ce paragraphe et les détails de son fonctionnement le seront dans le reste du chapitre.

3.1.1 La méthode de Newton-Raphson et ses variantes

La méthode dite de Newton-Raphson est la plus connue et la plus répandue des méthodes de calcul non-linéaire implémentées dans les logiciels de calculs aux éléments finis. Les non-linéarités qui apparaissent dans le calcul des gridshells sont de nature géométrique : les déformations importantes de la structure entre sa configuration initiale et sa configuration sous chargement sont telles que les propriétés mécaniques sont sensiblement différentes dans les deux configurations et que l'hypothèse des petits déplacements que l'on fait souvent dans le cadre de l'analyse des structures de génie civil n'est donc plus valable. Après avoir calculé les déplacements sur la configuration initiale, il est nécessaire de réécrire les équations d'équilibre sur la configuration déformée. En général celles-ci ne sont pas vérifiées et conduisent à de nouveaux déplacements et donc à une nouvelle configuration déformée dont on devra vérifier l'équilibre : la résolution des problèmes en grands déplacements nécessite donc une analyse incrémentale de la structure.

Dans le cas linéaire, les déplacements inconnus \mathbf{u} sont déduits de la matrice de rigidité de la structure dans la configuration initiale \mathbf{K} et des efforts extérieurs \mathbf{f} à l'aide de la formule sui-

vante : $\mathbf{f} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}$. Pour les problèmes non-linéaires, la charge \mathbf{f} est décomposée en incréments $\delta\mathbf{f}$ suffisamment petits pour assurer la convergence. Toutefois, ces incréments ne garantissent pas le suivi d'un comportement réel, car il existe un cumul d'erreurs au cours des incréments successifs. La matrice de rigidité tangente conduit à la linéarisation du comportement à l'intérieur de chaque incrément et cette linéarisation par morceaux s'écarte progressivement de la courbe du comportement réel (cf. figure 3.1 et manuel de A. Chateuneuf [31] chapitre 14). Il est donc nécessaire d'introduire des procédures itératives garantissant l'équilibre des forces internes et externes à la fin de chaque incrément de charge. La méthode la plus répandue est la méthode dite de Newton-Raphson, dont l'algorithme est présenté succinctement ici.

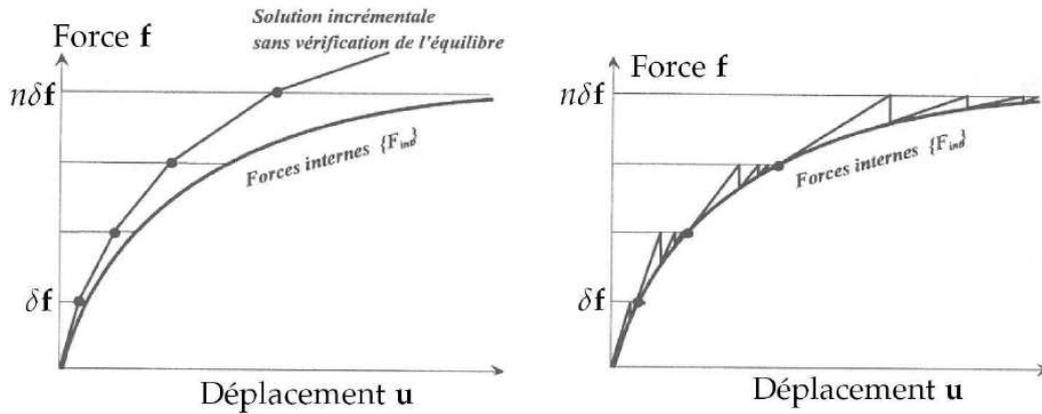


FIG. 3.1 – Schéma de résolution sans et avec itérations d'équilibre.

Pour un n ème incrément de charge $\delta\mathbf{f}$, on calcule un déplacement additionnel $\delta\mathbf{u}_0^n$ à l'aide de la matrice de rigidité tangente $\mathbf{K}(\mathbf{u}^{n-1})$ obtenue à partir des déplacements \mathbf{u}^{n-1} qui équilibrent le chargement de l'incrément précédente. La forme incrémentale de l'équation d'équilibre est donnée par :

$$\delta\mathbf{f} = \mathbf{K}(\mathbf{u}^{n-1}) \cdot \delta\mathbf{u}_0^n \quad (3.1)$$

On peut alors calculer une première estimation du déplacement total à la n ème itération : $\mathbf{u}_0^n = \mathbf{u}^{n-1} + \delta\mathbf{u}_0^n$ et en déduire la matrice de rigidité tangente correspondante. Puis de là, on calcule les efforts intérieurs liés à l'accroissement $\delta\mathbf{f}$ de la charge : $\mathbf{K}(\mathbf{u}_0^n) \cdot \delta\mathbf{u}_0^n$, ainsi qu'une estimation des efforts intérieurs à la n ème itération \mathbf{f}_{int}^n en fonction des efforts intérieurs obtenus à l'itération précédente :

$$\mathbf{f}_{int}^n = \mathbf{K}(\mathbf{u}_0^n) \cdot \delta\mathbf{u}_0^n + \mathbf{f}_{int}^{n-1} \quad (3.2)$$

La structure est en équilibre si le résidu des efforts \mathbf{R}_0^n est nul :

$$\mathbf{R}_0^n = n\delta\mathbf{f} - \mathbf{f}_{int}^n \quad (3.3)$$

Si celui-ci n'est pas nul, on peut calculer un déplacement complémentaire $\delta\mathbf{u}_1^n$ qui va équilibrer ce résidu, c'est-à-dire tel que :

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}_0^n) \cdot \delta\mathbf{u}_1^n = \mathbf{R}_0^n \quad (3.4)$$

Ensuite, on calcule une seconde estimation du déplacement total à la n ème itération : $\mathbf{u}_1^n = \mathbf{u}_1^{n-1} + \delta\mathbf{u}_0^n + \delta\mathbf{u}_1^n$, puis la matrice de rigidité tangente, puis le nouveau résidu. Et on procède ainsi, de proche en proche, jusqu'à ce que le résidu soit considéré comme suffisamment proche de zéro. On passe alors à l'incrément de charge suivant et on commence une nouvelle série d'itérations et ainsi de suite jusqu'à ce que toute la charge ait été appliquée à la structure.

Différentes variantes de cette méthode ont été développées, notamment les méthodes de Newton-Raphson initiale et modifiées. Elles reposent toutes sur un contrôle en force du processus, mais d'autres auteurs ont proposé des méthodes alternatives de contrôle en déplacement ou en longueur d'arc. Cette dernière, appelée méthode de *arc-length*, est aujourd'hui reconnue comme la meilleure méthode de contrôle. Cependant, comme les méthodes de Newton-Raphson, elle requiert une certaine expérience pour atteindre le niveau de performance désiré.

3.1.2 La méthode des densités de force

Pour Frei Otto et l'Institut pour les structures légères de Stuttgart (IL), les gridshells sont un moyen d'obtenir une coque en compression parfaite sous poids propre par déformation élastique puis contreventement d'une grille sans rigidité en cisaillement. En supposant que la raideur en flexion des éléments est négligeable, ils peuvent obtenir la forme naturelle de ces grilles en compression simple par inversion d'un filet tendu soumis à son propre poids. Or, leurs travaux sur la couverture du pavillon allemand de l'exposition universelle de Montréal en 1967 et sur les bâtiments du stade olympique de Munich de 1972, leur ont permis de développer un ensemble de techniques performant pour le calcul des réseaux de câbles et des filets tendus qui a été évoqué dans le paragraphe 4.1.1. Ce calcul se fonde sur la réalisation de maquettes et l'étude de leur géométrie par photogrammétrie. La précision de la mesure de ces modèles réduits étant insuffisante pour garantir l'équilibre de la structure réelle, elle est corrigée à l'aide d'une nouvelle méthode de calcul pour les structures tendues : la méthode des densités de force, fruit de la collaboration entre l'Institut pour les structures légères et l'Institut pour l'application de la géodésie dans la construction.

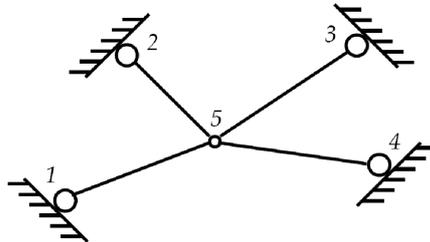


FIG. 3.2 – Structure de quatre câbles et un nœud libre.

La méthode des densités de force propose une linéarisation du problème non-linéaire de la recherche de l'état d'équilibre des structures tendues par l'introduction de coefficients de densité de force. Pour comprendre la signification de ces coefficients, on étudie la structure simple de la figure 3.2. Elle est composée de quatre câbles reliés entre eux au nœud 5. Les extrémités 1, 2, 3 et 4 sont fixes. Le problème est de savoir quelles sont les tensions \vec{T}_{i5} dans chacun des éléments

(i varie de 1 à 4) qui permettront d'obtenir un équilibre du nœud 5 et de savoir quelles sont les longueurs L_{i5} dans cette géométrie d'équilibre. Pour résoudre ce problème, on écrit tout d'abord la condition d'équilibre du nœud 5 :

$$\sum_{i=1}^4 \vec{T}_{i5} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \sum_{i=1}^4 \frac{T_{i5}}{L_{i5}} \vec{u}_{i5} = \vec{0} \quad (3.5)$$

Si l'on projette l'équation vectorielle (3.5) sur chacun des axes du plan et que l'on exprime la longueur L_{i5} en fonction des coordonnées des différents nœuds, on obtient :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 T_{i5} \frac{x_5 - x_i}{\sqrt{(x_5 - x_i)^2 + (y_5 - y_i)^2}} = 0 \\ \sum_{i=1}^4 T_{i5} \frac{y_5 - y_i}{\sqrt{(x_5 - x_i)^2 + (y_5 - y_i)^2}} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Le système d'équations formé par (3.6) est fortement non-linéaire ; il ne peut donc pas être résolu simplement. L'idée de Schek et Linkwitz [91, 65] a été de substituer au terme non-linéaire T_{i5}/L_{i5} un coefficient q_{i5} supposé connu et appelé « densité de force » de l'élément i . Ce coefficient peut être interprété comme la raideur géométrique de l'élément i de sorte que pour une même densité de force, l'élément sera d'autant plus tendu qu'il sera long. Si on introduit ces coefficients q_{i5} dans (3.6) , on obtient un système linéaire d'une grande simplicité, dont on peut trouver aisément la solution :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 q_{i5} (x_5 - x_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^4 q_{i5} (y_5 - y_i) = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x_5 = \frac{\sum_{i=1}^4 q_{i5} x_i}{\sum_{i=1}^4 q_{i5}} \\ y_5 = \frac{\sum_{i=1}^4 q_{i5} y_i}{\sum_{i=1}^4 q_{i5}} \end{cases} \quad (3.7)$$

On remarque que x_5 est le barycentre des (x_i, q_i) et y_5 celui des (y_i, q_i) . À partir des coordonnées du nœud 5 que l'on vient de déterminer et des coordonnées des autres nœuds, il est très facile de calculer les longueurs L_{i5} de tous les éléments et ensuite d'en déduire les tensions par $T_{i5} = q_{i5} L_{i5}$. Dans la configuration ainsi définie, la structure est alors en équilibre, la géométrie et les efforts de tous les éléments sont parfaitement connus.

Pour les détails de la généralisation de cet exemple à un réseau de câbles avec un grand nombre de degrés de liberté, on se rapportera aux articles de H. Schek et K. Linkwitz [91, 65] ainsi qu'à l'ouvrage de René Motro sur les structures de tensegrités [71], on n'a pas jugé utile de les développer ici. En effet, si la méthode des densités de force a une importance historique pour la recherche de forme des gridshells au sein de l'équipe de Frei Otto — c'est grâce à elle qu'ils déterminent avec exactitude la géométrie du filet suspendu dont ils tirent par inversion la forme de ces structures de poutres en compression parfaite — elle ne permet pas de prendre en compte la raideur en flexion des éléments. Celle-ci a cependant une influence sur leurs formes et donc sur la forme d'équilibre des gridshells. Une évaluation de l'approximation ainsi faite par l'IL pour quelques structures est proposée au paragraphe 4.2.2 et dans le cas du prototype au paragraphe 6.3.2.

À la suite de la réalisation du stade olympique de Munich, la méthode des densités de force a connu un certain succès en Allemagne et en France où elle est aujourd'hui couramment utilisée. Elle a été étendue à la recherche de forme des toiles tendues par B. Maurin et R. Motro [69] (elle prend alors le nom de « méthode des densités de surface ») et plus récemment à celle des coques parfaitement comprimées par B. Maurin et R. Motro [68]. Elle a été appliquée dans de nombreux projets de recherche qui couvrent une grande variété de structures tendues, parmi lesquels on peut citer les travaux de René Motro sur les structures de tensegrité [71] et ceux de Saskia Jülich qui utilise les densités de force pour uniformiser les contraintes dans les haubans d'une passerelle en bow-string [55]. Enfin, on peut remarquer que la méthode des densités de force permet d'obtenir par itérations successives des surfaces d'aire minimale ou des réseaux isocontraint [55]. L'avantage des surfaces d'aire minimale est que tous les éléments de la structure y sont sollicités de la même façon, l'inconvénient est que ces surfaces sont en général très plates ce qui augmente le risque de formation de poches d'eau et de surcharge de la structure.

3.1.3 La méthode de relaxation dynamique

Parallèlement à la méthode des densités de force en Allemagne, une autre méthode de calcul non-linéaire de structure a été développée au Royaume-Uni à partir des années soixante : la méthode de relaxation dynamique. Contrairement à la méthode des densités de force qui est spécifique aux structures tendues, la méthode de relaxation dynamique est une méthode numérique plus générale de résolution de problèmes mécaniques qui reposent sur des équations aux dérivées partielles complexes. Son concept apparaît pour la première fois dans un article de A. S. Day et J. R. Otter [77] qui procèdent par analogie avec les mouvements de la houle. Ils remplacent les équations de continuité et de mouvement de la mécanique des fluides par celles de l'élasticité et de la dynamique de la mécanique des structures. La résolution d'un système d'équations non-linéaires est ainsi simplifiée en un calcul explicite itératif et linéaire ; et la solution d'équilibre statique est alors comprise comme le résultat d'un processus dynamique amorti. Le raisonnement sous-jacent est cependant très physique : si l'on considère par exemple, une poutre en porte-à-faux au bout de laquelle on vient suspendre d'un seul coup une charge. Elle va osciller puis, du fait de l'amortissement intrinsèque du matériau, se stabiliser dans sa position d'équilibre statique. C'est exactement ce phénomène que la méthode reproduit, à ceci près que le comportement dynamique réel de la structure est remplacé par un comportement dynamique fictif défini pour dissiper l'énergie cinétique au plus vite et converger rapidement vers la position d'équilibre statique qui seule est recherchée.

La méthode de relaxation dynamique ne prend son nom qu'en 1965 dans deux articles successifs de A. S. Day [36] et P. Otter [76]. Les problèmes traités dans ces deux articles sont des problèmes d'élasticité linéaire : déformation de plaques minces, de réservoir sous pression et de barrages voûtes. Des effets non-linéaires liés à des fissures dans le matériau sont introduits pour la première fois par Holland [51] et les premiers calculs en grands déplacements sont dus à Rushton [88]. Depuis, la méthode a connu de nombreuses applications pour la résolution d'une grande variété de problèmes parmi lesquels on peut citer : l'étude de structures hyperélastiques de D. Oakley [74, 75] et viscoélastique de M. Salehi [89], l'analyse du comportement post-flambé

des structures de G. Ramesh [84] ou W. Zhang [108] avec dans ces deux articles un couplage intéressant entre la méthode de relaxation dynamique et la méthode de *arc-length*, l'analyse du comportement plastique avec endommagement des structures de G. Ramesh [85] et l'étude statique des milieux granulaires de J. Bardet [10]. Il faut noter ici, que la dynamique moléculaire, dont il est souvent question dans la communauté des milieux granulaires [34, 57], est une méthode explicite de calcul numérique dont les équations et les principes sont très proches de ceux de la relaxation dynamique, mais qu'au contraire de cette dernière, la dynamique moléculaire a pour but l'étude du comportement dynamique réel des grains et que, par conséquent, les paramètres d'amortissement et de masse doivent y être définis selon les propriétés réelles de la structure. Ces dénominations proches sont parfois source de confusion et certaines applications de la méthode de la relaxation dynamique se trouvent ainsi masquées comme celle d'A. Alaoui et K. Sab [5].

La première application aux structures tendues est due à A. S. Day et J. Bunce [37] qui cherchent à évaluer les déformations d'un réseau de câbles. C'est Michael Barnes qui, le premier, utilise la relaxation dynamique pour la recherche de forme et l'analyse structurelle des structures tendues et gonflables [13]. A cette époque, la méthode est en plein essor ; en trois ans, quatre thèses seront soutenues à l'université de la City de Londres : celle de M. Barnes sur le même sujet que l'article précité [12], celle de D. Wakefield sur les réseaux de câbles supportés par des arches en compression [104], celle de M. Papadrakakis sur des aspects plus mathématiques [80] et celle de B. Topping sur le calcul de structures modulables [102]. Les méthodes développées alors vont faire école et donner lieu à de nombreuses réalisations [14, 105]. La méthode de relaxation dynamique est aujourd'hui la méthode de référence pour le calcul des structures tendues dans le monde anglo-saxon ; elle a d'ailleurs fait l'objet d'un ouvrage récent relativement accessible de Wanda Lewis [61]. L'élément triangulaire de membrane développé par M. Barnes est encore très largement utilisé [106, 47, 61], même si un élément quadrangulaire a été proposé par P. Gosling et W. Lewis [44].

L'application de la méthode de relaxation dynamique aux structures réticulées spatiales auto-contraintes, aussi appelées structures en tenségrité, a fait l'objet de la thèse de S. Belkacem [21], mais la méthode de la relaxation dynamique s'avère ici moins performante pour la recherche de forme que la méthode des densités de force qui lui a été préféré dans les publications plus récentes sur le sujet [71, 16]. Les derniers développements de la méthode autour de la recherche de forme des gridshells ont été suscités par la construction du gridshell de Hannovre (cf. paragraphe 1.5.1). À cette occasion, Michael Barnes et son équipe développent un élément de poutre capable de reprendre des efforts de flexion [15, 2, 3]. C'est cet élément qui est repris et adapté dans ce travail de recherche et qui sera présenté dans le paragraphe 3.3.

3.2 L'algorithme de la relaxation dynamique

3.2.1 Un comportement dynamique fictif

La méthode de relaxation dynamique est un outil numérique qui utilise un calcul dynamique amorti pour trouver l'état d'équilibre statique d'un système mécanique. Le comportement dyna-

mique du système n'a dans cette méthode aucune importance en lui-même, il n'est qu'un moyen de parvenir à un état d'équilibre statique. En tant que moyen, il n'a donc pas à reproduire une certaine réalité physique du mouvement, mais se doit plutôt d'être le plus efficace possible afin d'obtenir rapidement des résultats précis et fiables. Les paramètres caractéristiques de la structure qui n'interviennent que dans le calcul dynamique (les coefficients d'amortissements intrinsèques des matériaux et les masses inertielles des éléments) peuvent donc être librement définis de façon à optimiser la vitesse de convergence de l'algorithme et sa robustesse. En effet, les taux d'amortissement intrinsèques des matériaux ou de la structure influent sur le nombre d'oscillations nécessaires avant d'atteindre une certaine stabilisation autour de l'équilibre mais n'influencent pas, même indirectement, la nature de l'état d'équilibre. Ils peuvent donc être choisis arbitrairement. L'optimisation de ces paramètres visqueux est possible [81, 103] et présentée plus bas (cf. paragraphe 3.5) mais elle est techniquement délicate. Ainsi, le plus souvent [15, 2, 47, 61] et notamment dans le programme développé pour cette thèse, on lui préfère un amortissement complètement artificiel appelé « amortissement cinétique ».

L'amortissement cinétique a été proposé par P. Cundall en 1976 [35]. Son principe repose sur l'échange au cours d'un mouvement non-amorti entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle élastique. En effet, dans un système mécanique conservatif, l'énergie mécanique se conserve ; chaque minimum de l'énergie potentielle du système correspond donc à un maximum de son énergie cinétique. Or l'état d'équilibre statique est un état dans lequel l'énergie potentielle est minimale. L'idée de P. Cundall est donc de remplacer la recherche d'une position d'équilibre par celle d'un maximum d'énergie cinétique. La procédure consiste ainsi à laisser la structure libre d'osciller, c'est-à-dire sans aucun amortissement, jusqu'à ce que l'énergie cinétique atteigne un maximum. La structure est alors arrêtée : les vitesses de tous les nœuds sont remises artificiellement à zéro. Si cette position est la position d'équilibre, la structure est immobile et le calcul est terminé ; sinon, la structure est à nouveau laissée libre d'osciller jusqu'au prochain maximum d'énergie cinétique où, comme précédemment, les vitesses sont remises à zéro. Et ainsi de suite jusqu'à ce que l'énergie cinétique de tous les modes de vibrations ait été dissipée et que l'équilibre soit atteint. Ce principe de l'amortissement cinétique est illustré par la figure 3.3 qui présente les variations de l'énergie cinétique au cours du temps d'une structure quelconque.

À titre d'exemple, considérons le pendule de la figure 3.4. Il est constitué d'une masse suspendue à un support indéformable par une tige également indéformable. L'articulation de la tige sur le support est une articulation parfaite et l'air est supposé sans frottement. Si la masse est lâchée de cette position, elle va descendre en suivant un arc de cercle et selon un mouvement accéléré, sa vitesse va donc croître jusqu'à ce que la masse passe au droit du point de fixation de la tige sur le support. L'énergie cinétique est alors maximale, la masse est donc arrêtée. La position d'équilibre est trouvée. On voit ainsi, sur un système à un degré de liberté, comment cette méthode d'amortissement cinétique permet de déterminer l'état d'équilibre. Pour des systèmes plus complexes, le principe reste le même, il suffit de répéter plusieurs fois cette procédure : oscillation libre, arrêt, oscillation libre, arrêt, etc.

Cette méthode remplace donc l'amortissement visqueux par un processus abstrait d'absorption progressive de l'énergie cinétique. La suite des valeurs de l'énergie mécanique y forme une suite décroissante et bornée, elle est donc convergente. Il n'y a pas de garantie que le minimum

absolu de l'énergie potentielle soit atteint par cette méthode, mais il n'y en a pas non plus dans la méthode avec un amortissement visqueux. Pour vérifier que l'équilibre trouvé est bien une position d'équilibre stable, la méthode usuelle qui consiste à vérifier que la structure retourne à sa position d'équilibre après perturbation, est en général très efficace.

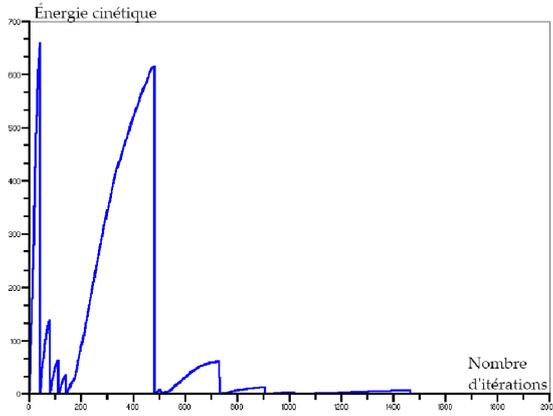


FIG. 3.3 – Variation de l'énergie cinétique.

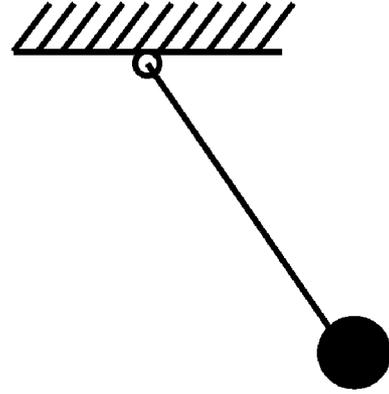


FIG. 3.4 – Pendule oscillant sans frottement.

3.2.2 Schéma explicite de différences finies

D'un point de vue pratique, le comportement dynamique est mis en œuvre dans la méthode de relaxation dynamique au travers d'un schéma explicite de différences finies classique. La position de chaque nœud de la structure est décrite par l'ensemble de ses trois coordonnées x , y et z dans un repère cartésien de référence. À l'instant t , la position du nœud i est donc définie par le vecteur \vec{X}_i^t . Le mouvement de ce nœud est régi par les équations usuelles du mouvement en dynamique des structures ; son accélération \vec{A}_i^t à l'instant t est donc donnée en fonction de la masse du nœud m_i et du résidu \vec{R}_i^t des efforts intérieurs et extérieurs par la deuxième loi de Newton :

$$m_i \cdot \vec{A}_i^t = \vec{R}_i^t \quad (3.8)$$

Si on utilise pour l'accélération un schéma d'approximation centré, on obtient une relation entre \vec{A}_i^t l'accélération à l'instant t , $\vec{V}_i^{t+\Delta t/2}$ la vitesse à l'instant suivant $t + \Delta t/2$ et $\vec{V}_i^{t-\Delta t/2}$ la vitesse à l'instant précédent $t - \Delta t/2$.

$$\vec{A}_i^t = \frac{\vec{V}_i^{t+\Delta t/2} - \vec{V}_i^{t-\Delta t/2}}{\Delta t} \quad (3.9)$$

De (3.8) et (3.9), on déduit donc pour la vitesse $\vec{V}_i^{t+\Delta t/2}$ l'expression suivante :

$$\vec{V}_i^{t+\Delta t/2} = \vec{V}_i^{t-\Delta t/2} + \frac{\Delta t}{m_i} \cdot \vec{R}_i^t \quad (3.10)$$

En utilisant pour la vitesse le même schéma d'approximation centré que pour l'accélération, on obtient une relation entre $\vec{V}_i^{t+\Delta t/2}$ la vitesse à l'instant $t + \Delta t/2$, $\vec{X}_i^{t+\Delta t}$ la position à l'instant

suivant $t + \Delta t$ et \vec{X}_i^t la position à l'instant précédent t .

$$\vec{X}_i^{t+\Delta t} = \vec{X}_i^t + \Delta t \cdot \vec{V}_i^{t+\Delta t/2} \quad (3.11)$$

Puis, en regroupant (3.10) et (3.11), on obtient la formule (3.12) qui permet de calculer la position à l'instant $t + \Delta t$ en fonction des variables à l'instant t précédent.

$$\vec{X}_i^{t+\Delta t} = \vec{X}_i^t + \Delta t \cdot \vec{V}_i^{t-\Delta t/2} + \frac{\Delta t^2}{m_i} \cdot \vec{R}_i^t \quad (3.12)$$

L'expression ci-dessus ne peut cependant pas être utilisée lors de la première itération de l'algorithme parce que la vitesse n'est pas connue à l'instant $-\Delta t/2$ mais à l'instant $t = 0$ où la vitesse est nulle. Ainsi, si l'on considère qu'à chaque instant, la vitesse moyenne est donnée par :

$$\vec{V}_i^t = \frac{1}{2}(\vec{V}_i^{t-\Delta t/2} + \vec{V}_i^{t+\Delta t/2}) \quad (3.13)$$

on peut déduire que la vitesse à l'instant $-\Delta t/2$ est telle que : $\vec{V}_i^{-\Delta t/2} = -\vec{V}_i^{+\Delta t/2}$. Pour la première itération, l'expression de la vitesse (3.10) devient alors (3.14) tandis que celle de la position reste inchangée.

$$\begin{cases} \vec{V}_i^{\Delta t/2} &= \frac{\Delta t}{2m_i} \cdot \vec{R}_i^0 \\ \vec{X}_i^{\Delta t} &= \vec{X}_i^0 + \Delta t \cdot \vec{V}_i^{\Delta t/2} \end{cases} \quad (3.14)$$

Si l'on laisse de côté le calcul du résidu des efforts intérieurs et extérieurs qui est développé dans le paragraphe 3.3, on peut désormais calculer par récurrence les positions et les vitesses des différents nœuds à chaque instant.

3.2.3 Compatibilité avec les conditions aux limites

Les appuis les plus courants bloquent les translations d'un nœud dans une ou plusieurs directions et laissent les rotations libres (voir les exemples de la figure 3.5). Des conditions non-linéaires peuvent éventuellement être ajoutées pour prendre en compte le soulèvement de l'appui, mais il est impossible d'empêcher la rotation d'un nœud. En effet, cela reviendrait à appliquer un moment ponctuel à ce nœud ce qui est incompatible avec les hypothèses du modèle de poutre sans torsion qui est décrit dans le paragraphe 3.3 et qui sera utilisé dans la suite de ce travail. Pour pouvoir prendre en compte des bloquages en rotation ou des encastremets, il faudrait enrichir le modèle cinématique actuel en introduisant des éléments de poutre avec des degrés de liberté en rotation à chaque nœud. Cette modification du mode de calcul des efforts intérieurs ne change pas le cœur de la méthode de relaxation dynamique et on a montré dans [72] que l'on pouvait facilement adapter le programme informatique présenté dans cette thèse à un modèle classique de poutre plane à six degrés de liberté (deux translations et une rotation à chaque extrémité). Outre le fait qu'il augmente les temps de calcul, cet enrichissement du modèle n'est pas nécessaire pour le calcul des gridshells, car les conditions aux limites des poutres dans tous les bâtiments de ce type construits à ce jour sont des rotules.

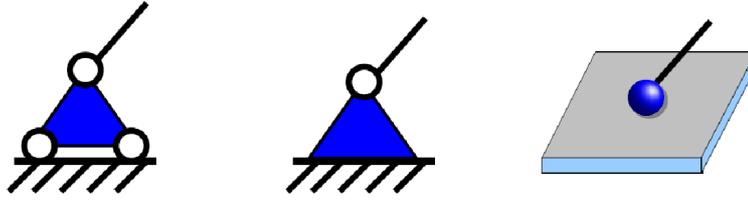


FIG. 3.5 – Différents types d'appui dans le plan et dans l'espace.

En pratique, la compatibilité des déplacements avec les conditions aux limites est assurée à chaque itération, le type de vérification à effectuer dépendant de la nature physique des appuis de la structure. On suppose qu'à l'instant t , le déplacement $\vec{U}_i^t = \vec{X}_i^t - \vec{X}_i^0$ du nœud i est admissible. En tenant compte de l'expression (3.11) qui donne la position à l'instant $t + \Delta t$ en fonction de la position à l'instant précédent et de la vitesse, on obtient pour le déplacement à $t + \Delta t$:

$$\vec{U}_i^{t+\Delta t} = \vec{U}_i^t + \Delta t \vec{V}_i^{t+\Delta t/2} \quad (3.15)$$

On se rend alors compte qu'il suffit de s'assurer que $\vec{V}_i^{t+\Delta t/2}$ est compatible avec les conditions aux limites pour que le nouveau déplacement soit admissible. Si, par exemple, le nœud i est libre de se déplacer selon l'axe des x mais qu'il est bloqué selon y et selon z , on doit imposer $\vec{V}_i^{t+\Delta t/2} \cdot \vec{y} = 0$ et $\vec{V}_i^{t+\Delta t/2} \cdot \vec{z} = 0$. Si le nœud i est simplement posé sur un plan perpendiculaire à l'axe des z et qu'un soulèvement vers les z positifs est autorisé, les nouvelles conditions de compatibilités s'écrivent :

$$\vec{V}_i^{t+\Delta t/2} = \begin{cases} \vec{V}_i^{t+\Delta t/2} - (\vec{V}_i^{t+\Delta t/2} \cdot \vec{z}) \vec{z} & \text{si } \vec{V}_i^{t+\Delta t/2} \cdot \vec{z} < 0 \\ \vec{V}_i^{t+\Delta t/2} & \text{si } \vec{V}_i^{t+\Delta t/2} \cdot \vec{z} \geq 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

On note qu'il n'y a par ailleurs aucune difficulté particulière à étendre le schéma précédent (3.16) à un blocage dans une direction quelconque de l'espace. On note également que le fait d'exprimer la compatibilité des déplacements avec les conditions aux limites sur les vitesses des nœuds et non sur leurs positions permet de calculer l'énergie cinétique directement sur des champs de vitesses cinématiquement admissibles et donc de diminuer un peu le temps de calcul.

3.2.4 Détermination des pics d'énergie cinétique

Comme il a été exposé plus haut (cf. paragraphe 3.1.3), la méthode de relaxation dynamique avec amortissement cinétique remplace la recherche du minimum de l'énergie potentielle par la recherche de pic d'énergie cinétique. C'est donc l'énergie cinétique qui est le paramètre de contrôle de l'algorithme. À partir des vitesses calculées dans le paragraphe précédent, il est aisé d'évaluer l'énergie cinétique de la structure à l'instant $t + \Delta t/2$:

$$E_c^{t+\Delta t/2} = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{V}_i^{t+\Delta t/2} \cdot \vec{V}_i^{t+\Delta t/2}) \quad (3.17)$$

Cette énergie cinétique $E_c^{t+\Delta t/2}$ est comparée à l'énergie cinétique $E_c^{t-\Delta t/2}$ de l'instant précédent. Si la nouvelle énergie est supérieure à la précédente alors l'énergie cinétique est en train de croître et la structure est laissée libre d'osciller. En revanche, si la nouvelle énergie est inférieure à la précédente, alors on vient de dépasser un pic d'énergie. C'est donc la géométrie à l'instant t qui est la géométrie dans laquelle l'énergie potentielle est minimale, c'est donc dans cette position que toutes les vitesses sont remises à zéro avant que la structure ne soit à nouveau laissée libre d'osciller.

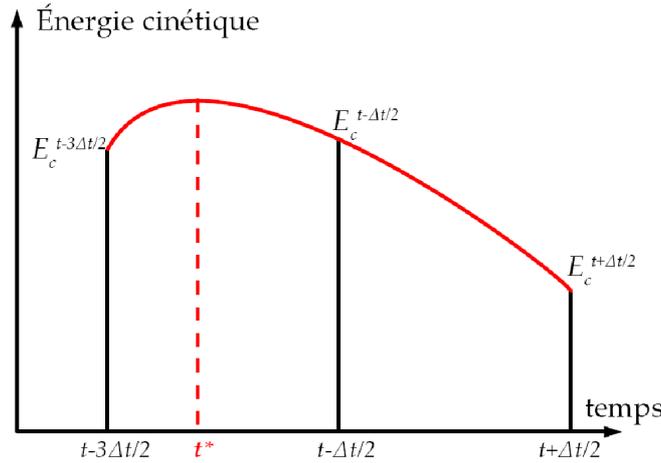


FIG. 3.6 – Interpolation parabolique de l'énergie cinétique autour du pic.

Michael Barnes fait remarquer dans [15] que le raisonnement ci-dessus assure que la géométrie à l'instant t est la géométrie dans laquelle l'énergie cinétique est maximale pour une vision discrète du temps. Pour améliorer la précision de la détermination de la géométrie du pic d'énergie cinétique, il introduit une interpolation parabolique de l'énergie cinétique entre les instants $t - 3\Delta t/2$, $t - \Delta t/2$ et $t + \Delta t/2$ (cf. figure 3.6). Le pic d'énergie cinétique est alors obtenu à l'instant correspondant au sommet de la parabole, c'est-à-dire à :

$$t^* = t + q \cdot \Delta t \quad \text{avec} \quad q = \frac{E_c^{t-\Delta t/2} - E_c^{t-3\Delta t/2}}{E_c^{t-3\Delta t/2} - 2E_c^{t-\Delta t/2} + E_c^{t+\Delta t/2}} \quad (3.18)$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les positions $\vec{X}_i^{t^*}$ des nœuds au moment du passage par le pic d'énergie cinétique à l'aide de la géométrie actuelle des $\vec{X}_i^{t+\Delta t}$ et des vitesses aux instants précédents $\vec{V}_i^{t+\Delta t/2}$ et $\vec{V}_i^{t-\Delta t/2}$. On obtient alors l'expression suivante :

$$\vec{X}_i^{t^*} = \vec{X}_i^{t+\Delta t} - \Delta t \cdot \vec{V}_i^{t+\Delta t/2} + (t - t^*) \cdot \vec{V}_i^{t-\Delta t/2} \quad (3.19)$$

En tenant compte de (3.10) et (3.18), l'expression (3.19) devient :

$$\vec{X}_i^{t^*} = \vec{X}_i^{t+\Delta t} - \Delta t \cdot (1 + q) \cdot \vec{V}_i^{t+\Delta t/2} + q \cdot \frac{\Delta t^2}{m_i} \cdot \vec{R}_i^t \quad (3.20)$$

L'équation (3.20) montre qu'il n'est pas nécessaire de stocker la valeur des vitesses à l'instant $t - \Delta t/2$ et qu'il suffit de garder en mémoire les valeurs des deux énergies cinétiques précédentes

pour calculer les positions de tous les nœuds dans la géométrie du pic. L'interpolation parabolique proposée par M. Barnes pour le calcul du pic est donc une opération qui ne demande que très peu de temps de calcul supplémentaire, elle est d'ailleurs assez souvent utilisée par d'autres auteurs [84, 47] et notamment dans le présent travail.

3.3 Définition des efforts intérieurs

3.3.1 Contexte général de la modélisation

Les structures étudiées dans ce mémoire sont des structures faites de poutres, de barres et de câbles. Seuls ces trois types d'éléments seront donc développés dans ce paragraphe ; pour une présentation d'un élément membranaire pour les structures textiles, on pourra se reporter à l'article de Michael Barnes [14] ou à l'ouvrage sur les structures tendues de Wanda Lewis [61]. Les grands principes de construction des différents éléments sont empruntés à M. Barnes [15] que ce travail reformule vectoriellement en trois dimensions et complète par un modèle original de liaison interne avec prise en compte des excentricités entre les différents éléments.

Le modèle cinématique utilisé pour la déformation des poutres est celui de Navier-Bernouilli : la géométrie d'un élément est donnée uniquement par son axe neutre, sa section et son inertie le long de celui-ci. Et, même si les transformations mises en œuvre sortent du cadre de l'hypothèse des petits déplacements, on considère qu'au cours du chargement, les sections droites restent droites et perpendiculaires à l'axe neutre et que le comportement du matériau reste élastique linéaire. On a vu dans le paragraphe 2.3.2 que, pour les profilés élancés en matériaux composites à fibres de verre utilisés pour le prototype de gridshell présenté dans le chapitre 6, ces hypothèses sont tout à fait raisonnables.



FIG. 3.7 – Ensemble de nœuds d'un élément de structure.

D'un point de vue pratique, tous les éléments d'une structure sont définis séparément par un ensemble ordonné de nœuds qui, comme sur la figure 3.7, se succèdent de 1 jusqu'à n . La nature de l'élément de structure modélisé définit les relations, les interactions entre des nœuds successifs à partir de leurs positions dans le plan ou dans l'espace. Les paragraphes suivants sont donc dédiés à la description de ces interactions : traction-compression, flexion plane et flexion dans l'espace. Les interactions entre deux éléments de structure distincts sont traitées à part dans le paragraphe 3.4.

3.3.2 Les efforts de traction et de compression

Les efforts normaux dans une poutre sont liés à sa déformation axiale. En partie courante de la poutre, le nœud i est relié aux nœuds $i - 1$ et $i + 1$ par des éléments qui se déforment (cf.

figure 3.7). À l'instant t , il subit donc deux efforts axiaux dus aux déformations actuelles $\epsilon_{i,j}^t$ de chacun de ces éléments. On note $\vec{T}_{i,j}^t$ l'effort exercé par la barre (i, j) sur le nœud i , avec j qui vaut $i - 1$ ou $i + 1$. La relation entre ces efforts et ces déformations est donnée par la théorie usuelle de la mécanique des structures en fonction des raideurs axiales $(ES)_{i,j}$ des éléments.

$$T_{i,j}^t = (ES)_{i,j} \cdot \epsilon_{i,j}^t \quad (3.21)$$

Pour chaque élément (i, j) , on peut déduire les déformations axiales à l'instant t à partir de sa longueur $L_{i,j}^t$ dans la configuration actuelle et de sa longueur $L_{i,j}^0$ dans la configuration au repos. La configuration au repos désigne une configuration non-précontrainte de l'élément, son état « naturel ». La direction des efforts de traction-compression s'exprime à partir des positions relatives $\vec{X}_{i,j}^t$ des différents nœuds, avec $\vec{X}_{i,j}^t = \vec{X}_j^t - \vec{X}_i^t$. L'expression (3.21) peut donc s'écrire :

$$\vec{T}_{i,j}^t = (ES)_{i,j} \cdot \frac{L_{i,j}^t - L_{i,j}^0}{L_{i,j}^0} \cdot \frac{\vec{X}_{i,j}^t}{L_{i,j}^t} \quad \text{soit} \quad \vec{T}_{i,j}^t = (ES)_{i,j} \cdot \left(\frac{1}{L_{i,j}^0} - \frac{1}{L_{i,j}^t} \right) \cdot \vec{X}_{i,j}^t \quad (3.22)$$

On remarque que, pour le calcul des éléments de câble, on peut facilement introduire la non-linéarité de leur comportement dans (3.22), grâce à une condition qui annule l'effort repris par le câble en cas de compression :

$$\vec{T}_{i,j}^t = \begin{cases} (ES)_{i,j} (1/L_{i,j}^0 - 1/L_{i,j}^t) \cdot \vec{X}_{i,j}^t & \text{si } L_{i,j}^t > L_{i,j}^0 \\ \vec{0} & \text{si } L_{i,j}^t \leq L_{i,j}^0 \end{cases} \quad (3.23)$$

De plus, dans un certain nombre de problèmes de structures tendues, il est nécessaire d'imposer un certain niveau de précontrainte dans la géométrie finale. C'est par exemple le cas pour les câbles des ponts haubannés qui ne doivent jamais se détendre. En général, la configuration finale est inconnue avant le début du calcul et il est souvent difficile de trouver quelles peuvent être les longueurs $L_{i,j}^0$ de chaque élément qui permettront d'obtenir le niveau de précontrainte voulu dans la configuration finale. Pour cette raison, Michael Barnes et d'autres après lui [13, 106, 47, 61] introduisent dans la formulation des éléments câbles un taux de précontrainte imposé $T_{i,j}^0$:

$$\vec{T}_{i,j}^t = \left(\frac{(ES)_{i,j}}{L_{i,j}^0} - \frac{(ES)_{i,j}}{L_{i,j}^t} + \frac{T_{i,j}^0}{L_{i,j}^t} \right) \cdot \vec{X}_{i,j}^t \quad (3.24)$$

Dans cette expression, la force liée à la précontrainte $T_{i,j}^0$ ne dérive pas d'un potentiel puisqu'il s'agit d'une force d'intensité constante dont la ligne d'action est la ligne qui joint le nœud i au nœud j ; il s'agit donc d'une force suiveuse. Or le raisonnement qui précède la mise en œuvre de la relaxation dynamique repose sur l'hypothèse que le système est conservatif, ce qui n'est plus le cas lorsqu'on introduit des forces suiveuses. La convergence de l'algorithme n'est alors plus démontrée. Pourtant, la méthode fonctionne assez bien, elle est même très répandue dans les pays anglo-saxons et en Asie où elle est utilisée pour la recherche de forme de filets de longueur minimale dans lesquels tous les éléments ont le même taux de précontrainte [15, 105, 106, 47, 61]. Cette stabilité de l'algorithme semble s'expliquer par le fait que les forces suiveuses sont toujours

introduites par paire de forces égales, opposées et portées par une même ligne d'action. Elles ne changent pas les équations d'équilibre global de la structure puisqu'elles n'induisent ni effort ni moment ; leur influence n'est que locale. Lorsque ces forces sont associées à des éléments de structure élastiques, on est quasiment sûr qu'un équilibre pourra être trouvé, fût-ce au prix de grandes déformations des éléments élastiques.

3.3.3 Les efforts de flexion

Influence du couplage torsion-flexion

Le modèle de calcul des efforts dans les éléments fléchis reprend les grands principes de celui présenté par S. Adriaenssens, M. Barnes et C. J. K. Williams [3], ce dernier ayant déjà été cité pour sa collaboration à la conception de la forme des gridshells de Hannover et Downland (cf. paragraphes 1.5.1 et 1.4). L'originalité du modèle vient de ce qu'il permet de prendre en compte la flexion d'un élément rectiligne, uniquement à partir des degrés de liberté en translation des nœuds, et qu'il ne requiert pas de degrés de liberté en rotation. Il est applicable aux problèmes plans faisant intervenir des poutres courbes et droites, mais il admet des restrictions importantes dans l'espace puisqu'il n'est valable que pour les poutres droites avec une symétrie de révolution soumises à des efforts ponctuels. Ces trois conditions, comme on va le voir, assurent une inertie semblable dans toutes les directions et une absence totale de torsion dans les éléments. Cette proposition est démontrée dans le paragraphe 273 de la théorie de l'élasticité de Love [66] ainsi que sous une forme plus condensée par S. Adriaenssens [3] ; en voici les grandes lignes.

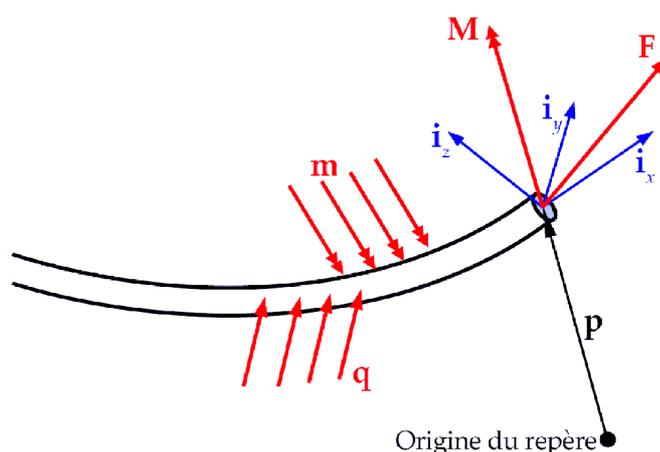


FIG. 3.8 – Repère local d'une poutre dans l'espace.

La figure 3.8 représente un fragment d'une poutre quelconque dans l'espace. Sa position par rapport à l'origine du repère de référence est définie par le vecteur \mathbf{p} , l'orientation de sa section par le repère local \mathbf{i}_x , \mathbf{i}_y et \mathbf{i}_z . L'orientation de la tangente à l'axe neutre de la poutre est donnée par \mathbf{i}_x , ce qui, en notant par ' la dérivation par rapport à l'abscisse curviligne s , se traduit par :

$$\mathbf{i}_x = \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{p}' \quad (3.25)$$

Les vecteurs \mathbf{i}_y et \mathbf{i}_z sont orientés selon les axes des deux moments principaux d'inertie I_{yy} et I_{zz} . Lorsque la poutre se déforme, l'orientation de ces vecteurs change mais ils restent perpendiculaires. De sorte que les expressions ci-dessous sont toujours vraies :

$$\mathbf{i}_y \cdot \mathbf{i}_z = 0, \quad \mathbf{i}_y \cdot \mathbf{i}_x = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_x = 0 \quad (3.26)$$

Les déformations de la poutre sont caractérisées par les variations de courbure κ_y et κ_z et par la torsion de son axe par unité de longueur ϕ' . En fonction de ces trois grandeurs on peut exprimer les changements d'orientation du repère local le long de l'axe de la poutre :

$$\begin{cases} \mathbf{i}'_x &= \kappa_z \mathbf{i}_y - \kappa_y \mathbf{i}_z \\ \mathbf{i}'_y &= -\kappa_z \mathbf{i}_x + \phi' \mathbf{i}_z \\ \mathbf{i}'_z &= \kappa_y \mathbf{i}_x - \phi' \mathbf{i}_y \end{cases} \quad (3.27)$$

Les efforts intérieurs dans la poutre, quant à eux, se décomposent dans le repère local en un effort normal N et deux efforts tranchants T_y et T_z . En chaque point, ils équilibrent le chargement extérieur \mathbf{q} par unité de longueur selon :

$$(N\mathbf{i}_x + T_y\mathbf{i}_y + T_z\mathbf{i}_z)' + \mathbf{q} = 0 \quad (3.28)$$

Soit, en développant la dérivée des efforts intérieurs :

$$N'\mathbf{i}_x + N\mathbf{i}'_x + T'_y\mathbf{i}_y + T_y\mathbf{i}'_y + T'_z\mathbf{i}_z + T_z\mathbf{i}'_z + \mathbf{q} = 0 \quad (3.29)$$

En tenant compte de (3.27) et de (3.26), la projection de l'équation d'équilibre (3.29) sur les trois axes locaux donne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} N' - T_y\kappa_z + T_z\kappa_y + \mathbf{q} \cdot \mathbf{i}_x &= 0 \\ N\kappa_z + T'_y - T_z\phi' + \mathbf{q} \cdot \mathbf{i}_y &= 0 \\ -N\kappa_y + T_y\phi' + T'_z + \mathbf{q} \cdot \mathbf{i}_z &= 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

On procède ensuite de même avec les moments intérieurs qui se décomposent dans le repère local de la poutre en un couple de torsion C et deux moments fléchissants principaux M_y et M_z . Ces moments équilibrent en chaque point le moment uniformément réparti \mathbf{m} selon :

$$(C\mathbf{i}_x + M_y\mathbf{i}_y + M_z\mathbf{i}_z)' + \mathbf{i}_x \wedge (N\mathbf{i}_x + T_y\mathbf{i}_y + T_z\mathbf{i}_z) + \mathbf{m} = 0 \quad (3.31)$$

Soit, en développant la dérivée des moments intérieurs et le produit vectoriel :

$$C'\mathbf{i}_x + C\mathbf{i}'_x + M'_y\mathbf{i}_y + M_y\mathbf{i}'_y + M'_z\mathbf{i}_z + M_z\mathbf{i}'_z + T_y\mathbf{i}_z - T_z\mathbf{i}_y + \mathbf{m} = 0 \quad (3.32)$$

Puis, en tenant compte de (3.27) et de (3.26), on projette comme précédemment l'équation

d'équilibre (3.32) sur les trois axes locaux :

$$\begin{cases} C' - M_y \kappa_z + M_z \kappa_y + \mathbf{m} \cdot \mathbf{i}_x & = 0 \\ C \kappa_z + M'_y - M_z \phi' - T_z + \mathbf{m} \cdot \mathbf{i}_y & = 0 \\ -C \kappa_y + M_y \phi' + M'_z + T_y + \mathbf{m} \cdot \mathbf{i}_z & = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

On introduit ensuite les équations de comportement qui relient les moments intérieurs aux déformations par l'intermédiaire de la raideur en torsion GJ de la poutre et de ses deux raideurs en flexion EI_{yy} et EI_{zz} . Dans le cas général d'une poutre dont les courbures initiales sont notées K_y , K_z et Φ' , ces équations s'écrivent :

$$\begin{cases} C & = GJ(\phi' - \Phi') \\ M_y & = EI_{yy}(\kappa_y - K_y) \\ M_z & = EI_{zz}(\kappa_z - K_z) \end{cases} \quad (3.34)$$

En introduisant ces expressions dans la première équation d'équilibre en moment de (3.33), on obtient :

$$C' - EI_{yy}(\kappa_y - K_y)\kappa_z + EI_{zz}(\kappa_z - K_z)\kappa_y + \mathbf{m} \cdot \mathbf{i}_x = 0 \quad (3.35)$$

Or les éléments de structure utilisés pour les gridshells sont des poutres rectilignes, c'est-à-dire telles que : $K_y = 0$ et $K_z = 0$, dont les moments d'inertie principaux sont égaux, c'est-à-dire tels que : $I_{yy} = I_{zz} = I$. Si l'on fait l'hypothèse supplémentaire qu'aucun couple de torsion n'est appliqué le long de la poutre ($\mathbf{m} \cdot \mathbf{i}_x = 0$), l'équation (3.35) devient :

$$C' - EI\kappa_y\kappa_z + EI\kappa_z\kappa_y = 0 \quad \text{soit} \quad C' = 0 \quad (3.36)$$

Le moment de torsion est donc constant dans ce cas et la raideur en torsion de la poutre n'a d'influence que sur la rotation relative de ses extrémités. Le terme extrémité désigne ici les bornes de toutes les zones dans lesquelles les équations locales d'équilibre sont valables. Pour les structures de gridshell, ces zones sont délimitées par les appuis et les liaisons entre les barres. Si les dispositifs d'appuis et de liaisons permettent une libre rotation de la barre autour de son axe neutre, alors il n'y a pas de torsion dans la poutre et la forme d'équilibre de la poutre ne dépend que de sa raideur en flexion. Avec le type d'assemblage choisi pour la construction des gridshells de cette thèse (cf. paragraphe 3.4), on peut admettre que les rotations sont libres. Cette hypothèse n'est pas totalement vérifiée car les efforts de serrage qui empêchent le glissement des pièces, empêchent aussi leur rotation. La torsion des barres dans les structures étudiées reste néanmoins très faible compte tenu de la souplesse du matériau et de la faible variation d'angle de sorte que cette hypothèse reste raisonnable.

Par ailleurs, comme les moments d'inerties sont identiques (le gridshell du chapitre 6 est construit avec des tubes creux circulaires), il n'est pas utile de connaître l'orientation de la section pour calculer les efforts de flexion. La modélisation d'une poutre droite à symétrie de révolution qui n'est soumise à aucun moment de torsion ne nécessite donc pas la prise en compte d'un degré de liberté en rotation autour de l'axe de la poutre. Le modèle présenté dans le paragraphe

suisant ne comprendra donc que trois degrés de libertés en translation par nœud.

Les efforts de flexion dans l'espace

Le modèle de poutre présenté dans ce travail ne comporte pas de degré de liberté en rotation, chaque poutre est représentée par un ensemble de nœuds du type de celui de la figure 3.7. L'état de chaque nœud i à l'instant t est décrit par le vecteur \vec{X}_i^t de ses trois coordonnées dans l'espace. Comme c'est la variation de courbure d'une poutre qui caractérise sa déformation en flexion, il importe donc d'identifier la courbure instantanée à partir des positions des points. On remarque tout d'abord que la variation de courbure aux extrémités d'une poutre est toujours nulle car la rotation y est libre et que, par conséquent, le moment est nul aux extrémités. Ensuite, en partie courante, on étudie la variation de courbure de la poutre en un nœud i quelconque semblable à celui de la figure 3.9.

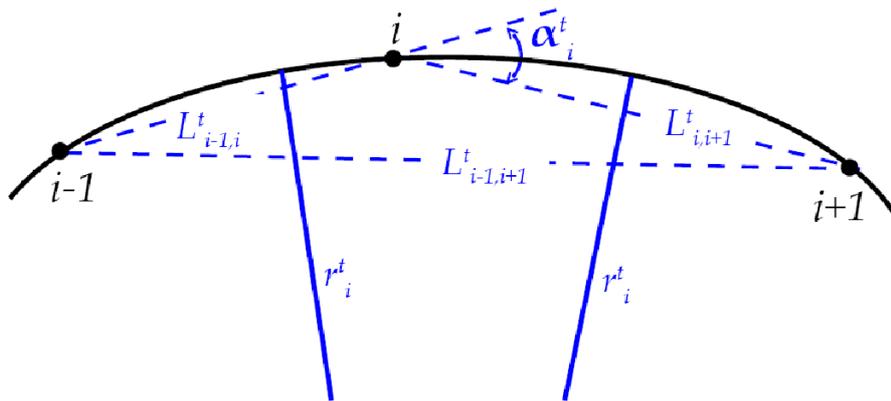


FIG. 3.9 – Calcul du rayon de courbure local d'une poutre droite.

On suppose que ce nœud et ces deux plus proches voisins $i - 1$ et $i + 1$ sont suffisamment proches pour qu'on puisse assimiler la déformée de la poutre entre ces points à un arc de cercle. Le rayon de cet arc de cercle est le rayon de courbure r_i^t de la poutre au nœud i à l'instant t . En remarquant que les nœuds $i - 1$, i et $i + 1$ sont dans un même plan, on peut calculer ce rayon par un simple raisonnement de géométrie plane à partir du sinus de l'angle α_i^t formé par les deux segments de droites $(i - 1, i)$ et $(i, i + 1)$ et de la longueur $L_{i-1,i+1}^t$ du segment $(i - 1, i + 1)$.

$$r_i^t = \frac{L_{i-1,i+1}^t}{2 \cdot \sin \alpha_i^t} \quad \text{avec} \quad \sin \alpha_i^t = \frac{\|\vec{X}_{i-1,i}^t \wedge \vec{X}_{i,i+1}^t\|}{L_{i-1,i}^t \cdot L_{i,i+1}^t} \quad (3.37)$$

Dans l'expression ci-dessus, on a noté $\vec{X}_{i-1,i}^t$ le vecteur $\vec{X}_i^t - \vec{X}_{i-1}^t$ et $L_{i-1,i}^t$ la longueur ou la norme de ce vecteur. Ensuite, par la théorie de la mécanique des structures, on peut déduire l'expression de l'intensité du moment fléchissant \vec{M}_i^t au point i :

$$\|\vec{M}_i^t\| = \frac{(EI)_i}{r_i^t} \quad (3.38)$$

On sait par ailleurs que la direction du moment \vec{M}_i^t est perpendiculaire localement au plan qui contient la courbe au voisinage de i . Elle est donc perpendiculaire aux vecteurs $\vec{X}_{i-1,i}^t$ et $\vec{X}_{i,i+1}^t$ et son sens est donné par leur produit vectoriel. L'expression finale du moment dans l'espace est donc donnée par :

$$\vec{M}_i^t = \frac{2 \cdot (EI)_i}{L_{i-1,i+1}^t} \cdot \frac{\vec{X}_{i-1,i}^t \wedge \vec{X}_{i,i+1}^t}{L_{i-1,i}^t \cdot L_{i,i+1}^t} \quad (3.39)$$

En l'état, la connaissance du moment \vec{M}_i^t est inutilisable car, en tant que moment, il ne modifie que la quantité d'accélération angulaire, une grandeur qui n'est pas définie ici puisque l'état de la poutre est caractérisé par les positions de ses nœuds. Il faut donc transformer ce moment en un couple de forces équivalentes appliquées aux nœuds. Pour cela, on va isoler le côté droit de la poutre de la figure 3.9 comme indiqué sur la figure 3.10.

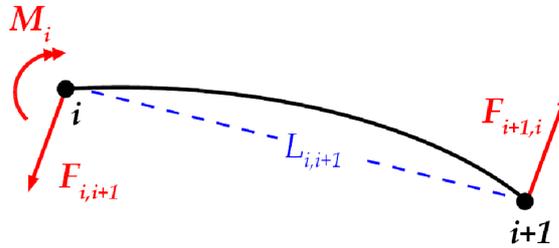


FIG. 3.10 – Équilibre d'un segment de poutre fléchie.

La poutre $(i, i + 1)$ est en flexion pure, la réaction au nœud $i + 1$ est donc situé dans un plan perpendiculaire à $\vec{X}_{i,i+1}^t$ car s'il y avait une composante selon $\vec{X}_{i,i+1}^t$ la poutre serait soumise à un effort normal et ne serait plus en flexion pure. On sait également que le moment lié à la réaction $\vec{F}_{i+1,i}^t$ équilibre le moment \vec{M}_i^t . Si $\vec{F}_{i+1,i}^t$ avait une composante selon \vec{M}_i^t , l'équilibre ne serait plus respecté. La réaction est donc située dans un plan perpendiculaire au moment \vec{M}_i^t . À l'aide de ces deux conditions, on déduit que la direction de la réaction est donnée par le produit vectoriel des normales aux deux plans : $\vec{X}_{i+1,i}^t \wedge \vec{M}_i^t$. L'équilibre des moments en norme donne ensuite : $\|\vec{F}_{i+1,i}^t\| \cdot \|\vec{X}_{i+1,i}^t\| = \|\vec{M}_i^t\|$, de sorte que l'expression finale de $\vec{F}_{i+1,i}^t$ est obtenue par :

$$\vec{F}_{i+1,i}^t = \frac{\vec{X}_{i+1,i}^t \wedge \vec{M}_i^t}{L_{i+1,i}^t{}^2} \quad (3.40)$$

De plus, l'équilibre en translation du segment $(i, i + 1)$ impose que l'on ait une réaction en i égale et opposée à la réaction en $i + 1$, c'est-à-dire telle que $\vec{F}_{i,i+1}^t = -\vec{F}_{i+1,i}^t$. Ensuite, de la même façon que précédemment, on isole le côté gauche de la poutre de la figure 3.9 et on calcule la réaction $\vec{F}_{i-1,i}^t$ au nœud $i - 1$ et la réaction $\vec{F}_{i,i-1}^t$ correspondante.

$$\vec{F}_{i-1,i}^t = -\vec{F}_{i,i-1}^t = \frac{\vec{X}_{i-1,i}^t \wedge \vec{M}_i^t}{L_{i,i-1}^t{}^2} \quad (3.41)$$

Le moment \vec{M}_i^t est ainsi transformé en deux couples de forces directement appliquées aux nœuds de la poutre et, pourvu que la poutre soit droite et qu'elle ait une inertie symétrique par

rotation autour de son axe, ces forces peuvent être entièrement déterminées à partir des seules coordonnées des nœuds dans l'espace. En chaque point situé en partie courante d'une poutre il y a donc quatre forces liées à la flexion, deux liées au moment \vec{M}_i^t , une liée au moment \vec{M}_{i+1}^t au nœud $i + 1$, et une liée au moment \vec{M}_{i-1}^t au nœud $i - 1$. En tenant compte des efforts de traction-compression donné par (3.22), la résultante des efforts intérieurs au nœud i à l'instant t est donnée par :

$$\vec{F}_{tot,i}^t = \vec{T}_{i,i-1}^t + \vec{T}_{i,i+1}^t + \frac{\vec{X}_{i,i-1}^t \wedge (\vec{M}_i^t - \vec{M}_{i-1}^t)}{L_{i,i-1}^t{}^2} + \frac{\vec{X}_{i,i+1}^t \wedge (\vec{M}_i^t - \vec{M}_{i+1}^t)}{L_{i,i+1}^t{}^2} \quad (3.42)$$

Les efforts de flexion dans le plan

Si la structure étudiée est contenue dans un plan, que son chargement l'est aussi et que ce plan est un plan de symétrie pour les éléments, alors le problème est un problème plan et la structure restera dans son plan au cours de la transformation. Il n'y a donc pas de gauchissement possible des sections, ni de torsion, y compris pour des poutres qui sont initialement courbes. Pour tenir compte de la courbure initiale d'une poutre dans le plan, on peut facilement adapter le modèle spatial. On calcule le rayon de courbure initial r_i^0 à l'aide de (3.37) et des positions au repos des nœuds et on introduit cette valeur dans le calcul de la variation de courbure et du moment \vec{M}_i^t donné par (3.39). La nouvelle expression du moment est la suivante :

$$M_i^t = (EI)_i \left(\frac{1}{r_i^t} - \frac{1}{r_i^0} \right) = (EI)_i \left(\frac{2}{L_{i-1,i+1}^t} \cdot \frac{\|\vec{X}_{i-1,i}^t \wedge \vec{X}_{i,i+1}^t\|}{L_{i-1,i}^t \cdot L_{i,i+1}^t} - \frac{2}{L_{i-1,i+1}^0} \cdot \frac{\|\vec{X}_{i-1,i}^0 \wedge \vec{X}_{i,i+1}^0\|}{L_{i-1,i}^0 \cdot L_{i,i+1}^0} \right) \quad (3.43)$$

3.4 Définition des liaisons

3.4.1 Modèle sans excentricité

Au niveau d'un point de liaison entre plusieurs barres, il existe une interaction entre ces barres. Pour modéliser les efforts qui s'appliquent d'une barre sur l'autre, on définit séparément, au niveau du point de liaison, un nœud sur chacune des barres. On néglige l'excentricité entre les axes de ces barres pour faire l'approximation que ces nœuds sont géométriquement confondus. Selon la méthode exposée dans le paragraphe précédent, on calcule ensuite, pour chacun de ces nœuds, les efforts internes liés à la barre à laquelle il appartient. On considère ensuite que l'effort qui s'exerce sur le point de liaison est égal à la somme vectorielle des efforts internes à chacune des barres. Enfin, pour que les nœuds des différentes barres de la liaison suivent la même trajectoire que le point de liaison avec lequel ils sont confondus, on applique à chacun de ces nœuds un effort égal à celui du point de liaison. Initialement confondus, les points mécaniques des différentes barres sont soumis à des forces identiques à chaque instant, ils restent donc confondus à chaque instant.

On remarque cependant que l'accélération des nœuds d'une liaison découle des efforts dans chacune des barres connectées. Le déplacement correspondant est donc lié, non pas à la rigidité de chacune des barres prise séparément, mais à la somme des rigidités de toutes les barres. Pour

que le modèle soit stable, il faut donc calculer séparément la masse fictive associée aux rigidités de chaque barre (cf. paragraphe 3.5) et les additionner pour obtenir la masse fictive affectée au nœud de liaison.

3.4.2 Modèle cinématique des excentricités

L'hypothèse des nœuds confondus est commode car elle est simple, elle converge facilement et produit des résultats de qualité acceptable. Cependant, les barres ont une épaisseur et en pratique il existe une excentricité entre les différentes couches superposées d'un gridshell. Cette excentricité est en général petite devant les dimensions de la structure et l'erreur commise en la négligeant pour la recherche de forme n'est pas trop importante. Cependant pour l'analyse structurelle du bâtiment, elle peut jouer un rôle primordial. En effet, par rapport au modèle précédent, elle rompt la symétrie entre les couches du gridshell et favorise ainsi l'apparition de certains modes de flambement dissymétriques. En ce sens, elle joue le même rôle que les imperfections de montage qui accentuent les phénomènes d'instabilité des résilles gauches [42, 9, 27, 107]. De plus, dans l'hypothèse d'une couverture du gridshell par une toile tendue, les tolérances sur la géométrie de la structure pour la préfabrication sont d'environ 3-4 cm ce qui est l'ordre de grandeur de l'excentricité entre les barres. La prise en compte de ces dernières est donc indispensable pour décrire la forme du gridshell avec ce niveau de précision.

D'un point de vue pratique, la modélisation des excentricités est indissociable du choix technologique des pièces utilisées pour joindre les différentes couches du gridshell; c'est la cinématique de ces pièces qui va déterminer les caractéristiques de la liaison et ses modifications au cours de la transformation sous charge. Pour les structures construites durant la thèse, les connecteurs sont toujours les pièces d'échafaudage orientables présentées sur la figure 3.11, la figure 3.12 montrant la cinématique qui leur est associée.



FIG. 3.11 – Assemblage orientable.

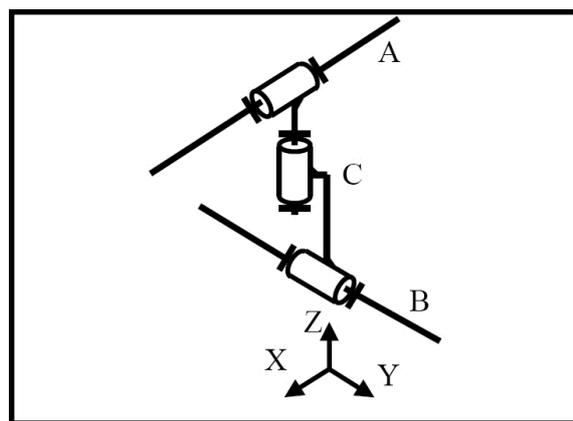


FIG. 3.12 – Modèle cinématique des connecteurs.

Dans ce modèle, le connecteur C qui relie la barre A à la barre B est constitué de trois articulations. La première est une rotation autour de l'axe de la barre A dont la direction dans la configuration déformée est définie par la tangente à la barre A (l'axe des X sur la figure 3.12). La deuxième est une rotation autour de l'axe de la barre B dont la direction est définie de la même façon par la tangente à la barre B (l'axe des Y sur la figure 3.12). La troisième est une rotation

autour de l'axe du connecteur C dont la direction est celle de la perpendiculaire commune aux barres A et B (l'axe des Z sur la figure 3.12). Ce système d'articulations garantit d'une part que l'orientation dans l'espace du connecteur est libre de contrainte et d'autre part qu'aucun couple de torsion n'est appliqué aux barres, de sorte que les hypothèses de la modélisation du paragraphe 3.3 restent valables.

3.4.3 Modèle numérique des excentricités

La prise en compte des excentricités dans le modèle numérique repose sur le même raisonnement que lorsque les points étaient supposés confondus, car le mouvement de chacun des nœuds d'une liaison est identique à celui de leur centre de gravité à une petite rotation près. À l'instant t , on calcule donc les efforts intérieurs dans chaque barre séparément, on y ajoute les efforts extérieurs. Leur somme est alors égale à la force appliquée au centre de gravité des points. Cette force est ensuite transmise à chacun des nœuds et leurs nouvelles positions sont calculées. Cependant dans cette nouvelle position, rien n'assure que le connecteur est bien perpendiculaire aux tangentes des barres et que la distance entre les barres est bien égale à la longueur e du connecteur. Il est donc nécessaire d'introduire une nouvelle étape dans l'algorithme qui modifie légèrement ces positions pour que les deux conditions précédentes soient vérifiées.

Pour cela, on va considérer le connecteur de la figure 3.12 qui relie le nœud i de la barre A et le nœud j de la barre B dont les positions à l'instant $t + \Delta t$ sont notées $\vec{X}_{A,i}^{t+\Delta t}$ et $\vec{X}_{B,j}^{t+\Delta t}$ respectivement. On peut ensuite calculer par interpolation des positions des nœuds voisins, les tangentes des deux barres $\vec{t}_{A,i}^{t+\Delta t}$ et $\vec{t}_{B,j}^{t+\Delta t}$ en ces deux points. La direction $\vec{t}_C^{t+\Delta t}$ du connecteur est alors donnée par le produit vectoriel des deux tangentes puisque le connecteur est perpendiculaire aux déformées des deux barres.

$$\vec{t}_C^{t+\Delta t} = \vec{t}_{A,i}^{t+\Delta t} \wedge \vec{t}_{B,j}^{t+\Delta t} \quad (3.44)$$

On sait ensuite que les nœuds i et j sont situés à une distance de $e_C/2$ du centre de gravité de la liaison dans la direction donnée par $\vec{t}_C^{t+\Delta t}$, de sorte que leur position à l'instant $t + \Delta t$ doit être modifiée comme suit :

$$\begin{cases} \vec{X}_{A,i}^{t+\Delta t} &= \frac{1}{2}(\vec{X}_{A,i}^{t+\Delta t} + \vec{X}_{B,j}^{t+\Delta t}) + \frac{e_C}{2} \vec{t}_C^{t+\Delta t} \\ \vec{X}_{B,j}^{t+\Delta t} &= \frac{1}{2}(\vec{X}_{A,i}^{t+\Delta t} + \vec{X}_{B,j}^{t+\Delta t}) - \frac{e_C}{2} \vec{t}_C^{t+\Delta t} \end{cases} \quad (3.45)$$

Il faudrait ensuite tenir compte des modifications des vitesses de ces points du fait du changement de leur position. Une première implémentation en ce sens a été faite et ainsi qu'une seconde qui négligeait les conséquences sur la vitesse de la prise en compte des excentricités. Il est apparu que le comportement dynamique global de la structure était sensiblement le même dans les deux cas, mais que le temps de calcul dans le premier cas était somme toute plus important. C'est donc la seconde solution qui a été retenue pour la version finale de l'algorithme.

3.5 Stabilité et convergence de l'algorithme

3.5.1 Approche simplifiée

La stabilité du schéma explicite d'intégration des équations du mouvement repose sur un choix judicieux des paramètres m_i et Δt . En effet, si la masse m_i est trop faible ou si le pas de temps Δt est trop grand, des instabilités numériques vont apparaître et l'algorithme va diverger. Pour aider à la détermination de ces paramètres, Michael Barnes s'appuie sur un exemple simple [15] qu'on rappelle ci-dessous. Il ne propose cependant pas de démonstration pour des cas de structures plus complexes. Cette démonstration peut être trouvée dans M. Papadrakakis [81] et P. Underwood [103] et fera l'objet du paragraphe suivant.



FIG. 3.13 – Système masses-ressorts vibrant selon sa plus haute fréquence.

La structure que propose d'étudier M. Barnes est composée de masses identiques reliés entre elles par des ressorts tous identiques (cf. figure 3.13). Lorsque ce système est excité selon sa fréquence de vibration la plus élevée, celle qui gouverne les problèmes d'instabilité numérique en dynamique des structures, toutes les masses vibrent en opposition les unes par rapport aux autres. Les vitesses de tous les nœuds i sont alors égales et celles de tous les nœuds j également. Pour analyser ce problème, on note \hat{m} la masse de chacun des nœuds et K la raideur des ressorts. La vitesse du nœud i à l'instant $t + \Delta t/2$ est alors donnée par l'expression (3.10) que l'on rappelle ici :

$$\vec{V}_i^{t+\Delta t/2} = \vec{V}_i^{t-\Delta t/2} + \frac{\Delta t}{\hat{m}} \cdot \vec{R}_i^t$$

Quant à la vitesse à l'instant suivant, elle est donnée par :

$$\vec{V}_i^{t+3\Delta t/2} = \vec{V}_i^{t+\Delta t/2} + \frac{\Delta t}{\hat{m}} \cdot (\vec{R}_i^t - 2K \cdot \Delta t \cdot (\vec{V}_i^{t+\Delta t/2} - \vec{V}_j^{t+\Delta t/2})) \quad (3.46)$$

Dans l'équation (3.46), on a remplacé la résultante des efforts à l'instant $t + 3\Delta t/2$ par son expression en fonction de la résultante à l'instant $t + \Delta t/2$ et des forces élastiques dues aux deux ressorts reliés au nœud i . En soustrayant (3.10) à (3.46), on peut éliminer le terme en \vec{R}_i^t et obtenir :

$$\vec{V}_i^{t+3\Delta t/2} - 2\vec{V}_i^{t+\Delta t/2} + \vec{V}_i^{t-\Delta t/2} = 2K \cdot \frac{\Delta t^2}{\hat{m}} (\vec{V}_i^{t+\Delta t/2} - \vec{V}_j^{t+\Delta t/2}) \quad (3.47)$$

Si on reprend le raisonnement ci-dessus pour l'un des nœud j , on trouve une expression similaire à la précédente :

$$\vec{V}_j^{t+3\Delta t/2} - 2\vec{V}_j^{t+\Delta t/2} + \vec{V}_j^{t-\Delta t/2} = 2K \cdot \frac{\Delta t^2}{\hat{m}} (\vec{V}_j^{t+\Delta t/2} - \vec{V}_i^{t+\Delta t/2}) \quad (3.48)$$

En soustrayant (3.47) à (3.48) et en notant $\vec{V}_{ij} = \vec{V}_j - \vec{V}_i$ la vitesse relative du nœud i par rapport au nœud j , on obtient :

$$\vec{V}_{ij}^{t+3\Delta t/2} - 2\vec{V}_{ij}^{t+\Delta t/2} + \vec{V}_{ij}^{t-\Delta t/2} = 4K \cdot \frac{\Delta t^2}{\widehat{m}} \vec{V}_{ij}^{t+\Delta t/2} \quad (3.49)$$

Le cas limite pour la stabilité de ce système correspond au cas où les vitesses relatives des nœuds i par rapport aux nœuds j à l'instant $t + \Delta t/2$ sont égales et opposées aux vitesses à l'instant $t - \Delta t/2$. En effet, si celles-ci sont plus grandes, alors les inversions successives de ces vitesses relatives peuvent entraîner des déplacements de plus en plus importants et conduire à une divergence de l'algorithme. Les valeurs limites des vitesses sont donc données par : $\vec{V}_{ij}^{t+3\Delta t/2} = -\vec{V}_{ij}^{t+\Delta t/2} = \vec{V}_{ij}^{t-\Delta t/2}$, si bien que la substitution de ces valeurs dans l'équation (3.49) donne la valeur limite du pas de temps Δt_{lim} qui assure la stabilité de l'algorithme :

$$\Delta t_{lim} = \sqrt{\frac{\widehat{m}}{K}} \quad (3.50)$$

On remarque que, dans un calcul dynamique « réel », cette valeur limite du pas de temps correspondrait à la plus grande valeur du pas de temps qui garantirait la stabilité du schéma centré de différences finies. Cependant, dans la méthode de relaxation dynamique, la masse est un paramètre qui n'intervient que dans le comportement dynamique de la structure, elle n'a donc pas besoin de représenter la masse réelle du nœud. Ainsi, l'équation (3.50) peut être utilisée pour déterminer la valeur de la masse affectée à chaque nœud en fonction d'un pas de temps arbitraire (en général, on prend $\Delta t = 1$) et de la raideur des éléments qui sont reliés à ce nœud. Michael Barnes fait alors remarquer que, dans l'exemple précédent, la raideur totale K^{tot} de chaque nœud dans la structure vaut $2K$ si bien que l'expression (3.50) s'écrit finalement : $\Delta t = \sqrt{2\widehat{m}/K^{tot}}$. Il propose ensuite de généraliser cette expression à des structures plus complexes dans lesquelles les nœuds ont plus de degrés de liberté en remplaçant K^{tot} par K_i^{max} , la plus grande valeur de la raideur instantanée de tous les éléments de structure reliés au nœud i . La masse minimale affectée à chaque nœud i est donc définie de la façon suivante :

$$m_i \geq \frac{\Delta t^2}{2} \cdot K_i^{max} \quad (3.51)$$

Il ne donne pas de démonstration de cette formule qu'il considère comme découlant naturellement de (3.50). Il illustre cependant la détermination K_i^{max} pour des réseaux de câbles. Dans ces structures, chaque élément μ ne travaille qu'en traction, seule compte donc leur raideur axiale $(ES/L_0)_\mu$ (où E est le module d'Young de l'élément, S sa section et L_0 sa longueur au repos) et leur raideur géométrique $(T/L)_\mu$ (où T est la tension et L la longueur de l'élément dans la configuration actuelle). La masse affectée au nœud i peut donc être calculée à l'aide de l'expression des raideurs de tous les éléments μ reliés au nœud i selon :

$$m_i \geq \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{\mu} \left[\frac{ES}{L_0} + g \left(\frac{T}{L} \right)^{max} \right]_{\mu} \quad (3.52)$$

Si la raideur axiale est facilement évaluée à partir des caractéristiques géométriques et mécaniques des éléments, la détermination de la raideur géométrique maximale au cours du processus est délicate. M. Barnes a donc été obligé d'introduire un facteur g plus grand que 1 pour assurer la stabilité de son algorithme ; l'estimation de g fait appel à l'expérience de l'utilisateur et procède bien souvent d'une succession d'essais et d'erreurs.

En ce qui concerne les poutres droites en flexion, on a vu dans le modèle du paragraphe 3.3 que les nœuds ne possédaient que trois degrés de liberté en translation. Or la raideur associée au moment de flexion est une raideur angulaire ; pour évaluer la masse au nœud i , il faut donc transformer cette raideur angulaire en une pseudo-raideur équivalente en translation K^{flex} . On va pour cela procéder de la même façon que lors de la transformation du moment fléchissant en couple de forces équivalentes appliquées aux nœuds. L'expression du moment fléchissant (3.38) permet de trouver un majorant du moment fléchissant M_i :

$$M_i = EI_i \frac{2 \sin \alpha_i}{L_{i-1,i+1}} < \frac{2EI_i}{L_{i-1,i+1}} \quad (3.53)$$

À partir de cette expression et de (3.40), on déduit ensuite un majorant des efforts intérieurs équivalents $F_{i,i+1}$ et $F_{i-1,i}$:

$$F_{i,i+1} = \|\vec{F}_{i,i+1}^t\| = \frac{M_i}{L_{i,i+1}} < \frac{2(EI)_i}{L_{i,i+1}L_{i-1,i+1}} \quad \text{et de même} \quad F_{i-1,i} < \frac{2(EI)_i}{L_{i-1,i}L_{i-1,i+1}} \quad (3.54)$$

Ensuite, on suppose que la pseudo-raideur en flexion est donnée par $K^{flex} = F^{flex}/L$. En faisant la somme de l'ensemble des efforts appliqués au nœud i (cf. expression (3.42)), on obtient alors une évaluation de la raideur en flexion au nœud i :

$$K_i^{flex} = \frac{1}{L_{i,i-1}^2} \left(\frac{2(EI)_i}{L_{i-1,i+1}} + \frac{2(EI)_{i-1}}{L_{i-2,i}} \right) + \frac{1}{L_{i,i+1}^2} \left(\frac{2(EI)_i}{L_{i-1,i+1}} + \frac{2(EI)_{i+1}}{L_{i,i+2}} \right) \quad (3.55)$$

Or, dans le calcul de la masse fictive affectée à chaque nœud, seul un majorant de la raideur est nécessaire à la stabilité de l'algorithme. On peut donc simplifier l'expression (3.55) en :

$$K_i^{flex} = \frac{2(EI)_{i-1}}{L_{i-1,i}^3} + \frac{2(EI)_i}{L_{i-1,i}^3} + \frac{2(EI)_i}{L_{i,i+1}^3} + \frac{2(EI)_{i+1}}{L_{i,i+1}^3} \quad (3.56)$$

Ensuite, pour trouver la masse fictive totale, on ajoute cette valeur de la raideur à l'expression des raideurs axiales à l'intérieur des crochets de (3.52) pour chacune des poutres auxquelles le nœud i est connecté. Dans la plupart des structures élancées, la raideur en flexion est très petite devant la raideur en traction, elle est donc souvent négligée. M. Barnes ne mentionne qu'une seule fois dans [15] la possibilité de prendre en compte cette raideur dans le calcul de la masse et suggère d'ajouter un terme en $\Sigma(2EI/L^3)$ correspondant à l'ensemble des poutres connectées au nœud i . Cette approche empirique très simple donne de très bons résultats et, moyennant l'ajustement du paramètre g de (3.52), garantit la convergence de la plupart des calculs. Le paragraphe suivant montrera par une approche plus mathématique qu'en effet l'expression des masses fictives proposée ici est très proche des paramètres optimaux de l'algorithme.

3.5.2 Choix des paramètres optimaux

Reformulation du problème

Les expressions précédentes des masses fictives affectées aux nœuds sont approximatives et sont volontairement surestimées de façon à garantir la stabilité de l'algorithme. Pour déterminer les paramètres de masse optimaux, il faut reformuler le principe de l'algorithme de relaxation dynamique d'un point de vue plus mathématique, c'est-à-dire réécrire les équations (3.8) à (3.51) dans le cadre formalisé classique de la méthode des différences finies ou des éléments finis. On regroupe ainsi l'ensemble des inconnues en déplacement du problème discrétisé (l'équivalent des coordonnées des \vec{X}_j^t) à l'intérieur d'un vecteur \mathbf{u} . Les efforts intérieurs \mathbf{f}_{int} à un instant quelconque du processus sont définis en fonction des déplacements, le plus souvent par dérivation de l'énergie de déformation. Lorsque le problème est linéaire et que l'on note \mathbf{K} la matrice de rigidité linéaire, alors \mathbf{f}_{int} est le plus souvent de la forme :

$$\mathbf{f}_{int} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \quad (3.57)$$

Pour les problèmes non-linéaires, on peut définir \mathbf{f}_{int} de façon incrémentale à l'aide d'une matrice de rigidité tangente $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ et procéder à chaque étape du processus comme dans le cas linéaire.

$$\Delta \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{K}(\mathbf{u}) \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (3.58)$$

Pour simplifier le problème on va supposer que pour toutes les applications qui sont faites dans les parties qui suivent, la relation entre les efforts intérieurs et les déplacements est linéaire à chaque itération et que, par conséquent, les efforts intérieurs \mathbf{f}_{int}^n sont donnés par la relation (3.57). On a vu dans le chapitre précédent que l'algorithme de relaxation dynamique est basé sur l'équation différentielle du second ordre du mouvement dont l'expression la plus courante en mécanique des structures est :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{f}_{int}^n = \mathbf{f} \quad (3.59)$$

Dans (3.59), \mathbf{M} représente la matrice de masse et \mathbf{C} la matrice d'amortissement visqueux, les points sur les lettres indiquent des dérivations par rapport au temps, n désigne le numéro de l'incrément du processus itératif, \mathbf{f}_{int}^n les efforts intérieurs à la n ème itération et \mathbf{f} les efforts extérieurs. On utilise alors, comme précédemment (3.10), un schéma d'approximation centré pour la vitesse et l'accélération :

$$\ddot{\mathbf{u}}^n = (\dot{\mathbf{u}}^{n+1/2} - \dot{\mathbf{u}}^{n-1/2})/h \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{u}}^{n+1/2} = (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)/h \quad (3.60)$$

où h est le pas de temps fixé. Pour la vitesse $\dot{\mathbf{u}}^n$, on suppose qu'elle est égale à la vitesse moyenne entre $n - 1/2$ et $n + 1/2$:

$$\dot{\mathbf{u}}^n = (\dot{\mathbf{u}}^{n+1/2} + \dot{\mathbf{u}}^{n-1/2})/2 \quad (3.61)$$

On substitue alors (3.61) et (3.60) dans l'équation (3.59) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}^{n+1/2} &= \frac{\mathbf{M}/h - \mathbf{C}/2}{\mathbf{M}/h + \mathbf{C}/2} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{n-1/2} + \frac{\mathbf{f} - \mathbf{f}_{int}^n}{\mathbf{M}/h + \mathbf{C}/2} \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + h\mathbf{u}^{n+1/2} \end{cases} \quad (3.62)$$

Pour conserver la forme explicite du système, il faut supposer que les matrices \mathbf{M} et \mathbf{C} sont diagonales. M. Papadrakakis [81] propose de supposer en plus qu'elles sont toutes les deux proportionnelles aux termes de la diagonale principale de \mathbf{K} . On a ainsi $\mathbf{M} = m\mathbf{D}$ et $\mathbf{C} = c\mathbf{D}$. L'expression (3.62) devient alors :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}^{n+1/2} &= \frac{2 - ch/m}{2 + ch/m} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{n-1/2} + \frac{2h}{2 + ch/m} \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}^n) \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + h\mathbf{u}^{n+1/2} \end{cases} \quad (3.63)$$

Comme \mathbf{D} est une matrice diagonale, on peut calculer séparément chaque déplacement inconnu à partir des termes diagonaux $1/K_{ii}$ selon :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_i^{n+1/2} &= \frac{2 - ch/m}{2 + ch/m} \cdot \dot{\mathbf{u}}_i^{n-1/2} + \frac{2h}{K_{ii}(2 + ch/m)} (\mathbf{f}_i - \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_i^n) \\ \mathbf{u}_i^{n+1} &= \mathbf{u}_i^n + h\mathbf{u}_i^{n+1/2} \end{cases} \quad (3.64)$$

On retrouve ainsi, au terme d'amortissement visqueux près, un schéma d'intégration très proche de celui proposé dans l'approche simplifiée de M. Barnes. Exactement de la même façon que dans cette dernière, on voit qu'ici la première itération ne peut être calculée à l'aide de (3.64). Pour initier la récurrence, on suppose que la vitesse moyenne initiale est nulle et par conséquent que $\dot{\mathbf{u}}^{-1/2} = -\dot{\mathbf{u}}^{1/2}$. En introduisant cette hypothèse dans (3.64), on obtient alors :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}^{1/2} &= \frac{h}{2 + ch/m} \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u}^0) \\ \mathbf{u}^1 &= \mathbf{u}^0 + h\mathbf{u}^{1/2} \end{cases} \quad (3.65)$$

On dispose à présent de toutes les étapes nécessaires à la mise en œuvre du calcul de récurrence ; restent à déterminer les paramètres h , m et c qui vont garantir la stabilité et une rapidité de convergence maximale de l'algorithme.

Détermination des paramètres optimaux

Avant d'aller plus loin, on introduit les grandeurs suivantes $\tilde{\alpha} = (2 - ch/m)/(2 + ch/m)$, $\tilde{\beta} = 2h^2/(2 + ch/m)$, $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}$. L'équation (3.63) se transforme donc ainsi :

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \tilde{\alpha}(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) - \tilde{\beta}\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}^n + \tilde{\beta}\mathbf{b} \quad (3.66)$$

Pour étudier la convergence du problème, il est nécessaire de considérer l'erreur à la n ème itération que l'on définit comme l'écart entre la solution du problème \mathbf{u}^* obtenue pour $\mathbf{f} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}^*$ et la position actuelle \mathbf{u}^n . On note $\tilde{\mathbf{u}}^n$ cet écart.

$$\tilde{\mathbf{u}}^n = \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^* \quad (3.67)$$

La substitution de (3.67) dans (3.66) donne l'équation caractéristique de l'évaluation de l'erreur :

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^n + \tilde{\alpha}(\tilde{\mathbf{u}}^n - \tilde{\mathbf{u}}^{n-1}) - \tilde{\beta} \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^n \quad (3.68)$$

La solution de l'équation (3.68) peut être recherchée sous la forme $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{u}}^n$. Le processus ne converge que si $\tilde{\gamma}$ est inférieur à un et il est d'autant plus rapide que $\tilde{\gamma}$ est faible. En introduisant la nouvelle valeur de l'erreur dans (3.68) et en notant $\lambda_{\mathbf{A}}$ n'importe laquelle des valeurs propres de \mathbf{A} , on obtient :

$$\tilde{\gamma}^2 - (1 + \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \lambda_{\mathbf{A}}) \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} = 0 \quad (3.69)$$

Les paramètres optimaux du problème sont donc ceux qui permettront d'avoir un $\tilde{\gamma}$ minimal quelles que soient les valeurs de $\lambda_{\mathbf{A}}$. On va donc étudier les solutions de (3.69) qui minimisent $\tilde{\gamma}$. Pour $(1 + \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \lambda_{\mathbf{A}}) < 2\sqrt{\tilde{\alpha}}$, les racines de (3.69) sont complexes, leur module est indépendant de $\lambda_{\mathbf{A}}$ et il vaut :

$$|\tilde{\gamma}| = \sqrt{\tilde{\alpha}} = \sqrt{\frac{2 - c h / m}{2 + c h / m}} \quad (3.70)$$

Pour $(1 + \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \lambda_{\mathbf{A}}) = 2\sqrt{\tilde{\alpha}}$, les racines sont réelles et égales. Leur module est toujours donné par l'expression (3.70) mais la nullité du discriminant de l'équation (3.69) permet d'obtenir une relation supplémentaire entre $c h / m$ et $\lambda_{\mathbf{A}}$:

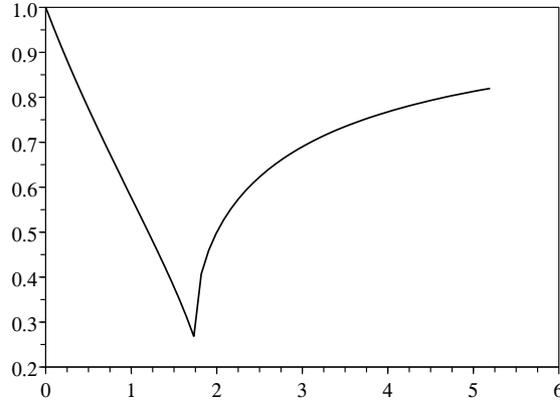
$$(c h / m)^2 = \lambda_{\mathbf{A}} h^2 / m \cdot (4 - \lambda_{\mathbf{A}} h^2 / m) \quad (3.71)$$

Pour $(1 + \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \lambda_{\mathbf{A}}) > 2\sqrt{\tilde{\alpha}}$, les deux racines sont réelles et le module le plus grand des deux est donné par :

$$|\tilde{\gamma}| = \frac{1}{2 + c h / m} \left(|2 - \lambda_{\mathbf{A}} h^2 / m| + \sqrt{\lambda_{\mathbf{A}}^2 h^4 / m^2 - 4 \lambda_{\mathbf{A}} h^2 / m + c^2 h^2 / m^2} \right) \quad (3.72)$$

À partir des expressions (3.70) et (3.72), on peut tracer $|\tilde{\gamma}|$ en fonction de $c h / m$ pour une valeur quelconque de $\lambda_{\mathbf{A}} h^2 / m$ (cf. figure 3.14). On observe alors que $|\tilde{\gamma}|$ est toujours plus petit que 1 et que $|\tilde{\gamma}|$ est toujours minimal lorsque les deux racines sont réelles et égales. Si de plus, on considère l'expression (3.71) comme l'expression de $c h / m$ en fonction de $\lambda_{\mathbf{A}} h^2 / m$, on peut remarquer que cette fonction est symétrique par rapport à l'axe $\lambda_{\mathbf{A}} h^2 / m = 2$ et maximale pour cette valeur. La valeur optimale du rapport h^2 / m est donc celle qui rend les valeurs de la plus grande valeur propre $\lambda_{\mathbf{A}}^{max}$ et de la plus petite valeur propre $\lambda_{\mathbf{A}}^{min}$ symétriques par rapport à $2m / h^2$. C'est-à-dire telle que :

$$(h^2 / m)_{opt} = 4 / (\lambda_{\mathbf{A}}^{max} + \lambda_{\mathbf{A}}^{min}) \quad (3.73)$$

FIG. 3.14 – Relation entre $|\tilde{\gamma}|$ et ch pour $\lambda_{\mathbf{A}}h^2 = 1$.

On en déduit ensuite l'amortissement optimal à partir de (3.71) :

$$(ch/m)_{opt} = 4\sqrt{\lambda_{\mathbf{A}}^{max} \cdot \lambda_{\mathbf{A}}^{min}} / (\lambda_{\mathbf{A}}^{max} + \lambda_{\mathbf{A}}^{min}) \quad (3.74)$$

En outre, on remarque dans l'équation (3.71) que, pour que ces paramètres soient définis et que le processus soit convergent ($|\tilde{\gamma}| < 1$) pour tous les $\lambda_{\mathbf{A}}$, il est nécessaire que : $4 - \lambda_{\mathbf{A}}h^2/m > 0$, ce qui peut se traduire par :

$$(h^2/m)_{opt} < 4/\lambda_{\mathbf{A}}^{max} \quad (3.75)$$

C'est cette expression (3.75) qui gouverne la stabilité de l'algorithme. Elle ne fait pas intervenir la plus petite des valeurs propres $\lambda_{\mathbf{A}}^{min}$; l'évaluation de celle-ci ne présente donc d'intérêt que dans le but d'optimiser le paramètre d'amortissement c et la rapidité de la convergence. Si l'algorithme choisi utilise un « amortissement cinétique », alors il n'y a pas d'amortissement visqueux et la connaissance de la valeur de $\lambda_{\mathbf{A}}^{min}$ n'est pas nécessaire. Les méthodes d'évaluation de $\lambda_{\mathbf{A}}^{min}$ ne sont donc pas développées ici mais on en trouve différentes variantes dans les articles suivants [81, 103, 90, 74]. Pour ce qui est de l'estimation de $\lambda_{\mathbf{A}}^{max}$, c'est avant tout une borne supérieure que l'on cherche. M. Papadrakakis propose d'utiliser la valeur donnée par le théorème de Greshgorin qui stipule que :

$$\lambda_{\mathbf{A}}^{max} < \max_i \sum_{j=1}^N |A_{ij}| \quad (3.76)$$

En tenant compte du fait que $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ avec $M_{ii} = mK_{ii}$ et des équations (3.75) et (3.76), on obtient l'expression du paramètre de masse minimum m qui garantit la stabilité du problème en fonction des termes de la matrice de raideur \mathbf{K} de la structure :

$$m^{opt} > \max_i \sum_{j=1}^N \frac{h^2}{4} \frac{|K_{ij}|}{K_{ii}} \quad (3.77)$$

On remarque la similarité entre l'expression ci-dessus et celle donnée par Michael Barnes (3.52). En effet, pour les structures de câbles présentées dans le paragraphe 3.3, les termes $|K_{ij}|$ avec $j \neq i$ sont les raideurs axiales $(ES/L)_{ij}$ des éléments (i, j) et les termes diagonaux $|K_{ii}|$ sont la somme des raideurs axiales des éléments $\sum (ES/L)_{ij}$ des éléments (i, j) . Ainsi, pour les structures de câbles, $\sum_{j=1}^N |K_{ij}| / |K_{ii}| = 2$ et l'expression (3.77) peut s'écrire $m > h^2/2$. La démonstration de P. Underwood conduit à une valeur optimale de la matrice de masse de $\mathbf{M} = \frac{1}{2}h^2\mathbf{D}$, c'est-à-dire telle que $M_{ii} = \frac{1}{2}h^2K_{ii}$, exactement la même valeur que celle de Barnes $M_i = \frac{1}{2}\Delta t^2 K_i^{max}$. Pour les structures de poutres en flexion, il est plus difficile de conclure : d'une part il est impossible de définir une matrice de raideur avec flexion dans le modèle de Barnes et d'autre part la démonstration ci-dessus ne dit pas comment additionner des termes K_{ij} exprimés dans des unités différentes. Néanmoins, la pseudo-raideur en flexion K^{flex} proposée dans l'expression (3.56) est un majorant du terme supplémentaire à prendre en compte dans (3.77), elle permet donc d'assurer la stabilité de l'algorithme.

Par ailleurs, il faut noter que l'expression (3.77) n'est valable que dans le cas où les efforts intérieurs sont des fonctions linéaires des déplacements et où les valeurs propres de \mathbf{K} sont constantes au cours du processus itératif. Si l'on désire prendre en compte la raideur géométrique des éléments dans la structure actuelle, alors le paramètre de masse doit être réévalué régulièrement selon (3.77) en remplaçant la matrice de raideur linéaire par la matrice de raideur totale de la structure. Pour éviter d'avoir à recalculer trop souvent le paramètre de masse, différentes méthodes de suivi des accélérations ont été proposées sous le nom de méthode de relaxation dynamique adaptative [103, 10, 90, 74]. Ces méthodes sont souvent performantes d'après leurs auteurs mais elles compliquent l'algorithme ; nous avons choisi de ne pas les implémenter.

Cependant, comme le modèle de calcul des efforts présenté dans le paragraphe suivant prend en compte la raideur géométrique des éléments, une certaine adaptation de m est donc nécessaire. Après une première tentative d'implémentation de la méthode de P. Underwood, il a été remarqué qu'en général, entre deux pics d'énergie cinétique, le paramètre de masse m était quasiment constant. En effet, si l'on regarde l'expression (3.52) de la masse fictive optimale, c'est-à-dire $m_i = \frac{1}{2}\Delta t^2 \sum_m (ES/L_0 + gT/L)_m$, on voit qu'entre deux pics d'énergie, seule la raideur géométrique $(T/L)_m$ varie. Si l'on choisit un paramètre g suffisamment grand, on peut ne calculer la masse m_i qu'après chaque pic et se prémunir contre des augmentations éventuelles de la raideur géométrique dans les éléments. En général, un coefficient de sécurité g de 1,05 est suffisant pour assurer la stabilité du problème. On dispose ainsi d'un assez bon compromis entre une adaptation permanente qui requiert des temps de calcul plus grands pour chaque itération et une masse à chaque nœud constante qui requiert un plus grand nombre d'itérations.

3.6 Schéma général de l'algorithme de relaxation dynamique

Les différentes étapes de la méthode de relaxation dynamique ont été présentées dans les paragraphes précédents. Il apparaît cependant nécessaire de les récapituler toutes ici afin d'avoir une vision d'ensemble de l'algorithme tel qu'il a été implémenté dans *Scilab*¹, un logiciel libre de

¹Site internet officiel : <http://www.scilab.org>

calcul scientifique développé en commun par l'Institut National de Recherche en Informatique et Automatique (INRIA) et l'École Nationale des Ponts et Chaussées. Le programme a été baptisé *AlgoRD* ; son mode d'emploi et son fonctionnement sont décrits dans l'annexe A.

1. Définition de la géométrie initiale, de la géométrie au repos et du chargement ;
2. Définition du paramètre de convergence E_c^{lim} ;
3. Initialisation des vitesses $\vec{V}_i = \vec{0}$;
4. Calcul des masses m_i à chaque nœud selon (3.52 et 3.56) ;
5. Nouvelle itération $t = t + \Delta t$:
 - (a) Calcul des efforts intérieurs $\vec{P}_{int,i}^t$ selon (3.42) ;
 - (b) Calcul des vitesses $\vec{V}_i^{t+\Delta t/2}$ selon (3.10) ;
 - (c) Vérification de la compatibilité avec les conditions aux limites selon (3.16) ;
 - (d) Calcul des positions $\vec{X}_i^{t+\Delta t}$ selon (3.11) ;
 - (e) Modification des positions en fonction des excentricités selon (3.45) ;
 - (f) Calcul de l'énergie cinétique $E_c^{t+\Delta t/2}$ selon (3.17) ;
 Si $E_c^{t+\Delta t/2} > E_c^{t+\Delta t/2}$ alors retourner en 5a ;
 Si $E_c^{t+\Delta t/2} < E_c^{t+\Delta t/2}$ alors aller en 6 ;
6. Interpolation des positions \vec{X}_i^{t*} du pic d'énergie cinétique selon (3.20) ;
 Si $E_c^{t+\Delta t/2} > E_c^{lim}$ alors retourner en 3 ;
 Si $E_c^{t+\Delta t/2} < E_c^{lim}$ alors l'équilibre est trouvé ;
7. La position d'équilibre est $\vec{X}_i^{sol} = \vec{X}_i^{t*}$

Le critère de convergence est basée ici sur l'énergie cinétique qui est progressivement dissipée, comme dans les articles de M. Barnes [13], S. Belkacem [21] et M. Salehi [89]. L'énergie cinétique limite E_c^{lim} , au-delà de laquelle on considère que le calcul a convergé, est définie comme une fraction (en général 1/1000) de la valeur du pic d'énergie maximale détectée jusque là. Le critère de convergence est d'autant plus fort que l'énergie cinétique limite est faible, c'est-à-dire que les variations d'énergie potentielle entre deux pics successifs sont petites. On note cependant que certains auteurs (notamment D. Oakley [74], M. Papadrakakis [81] et P. Underwood [103]) n'utilisent pas ce critère mais lui préfèrent un critère basé sur la convergence du résidu relatif des efforts. Les deux méthodes semblent aussi précises et stables l'une que l'autre, et parfois même sont utilisées en parallèle (cf. R. Sauvé et D. Metzger [90], M. Barnes [14]).

Des garde-fous ont par ailleurs été ajoutés afin d'arrêter le calcul si la structure présente une instabilité manifeste (du type de celle décrite dans le paragraphe 3.5.1 avec des oscillations identiques très rapprochées) et si l'algorithme ne semble pas converger, c'est-à-dire si le nombre d'itérations devient trop important (en général supérieur à 10000).

3.7 Validation du programme *AlgoRD*

Avant d'être utilisé pour le calcul de gridshells ou d'autres types de structures élancées pré-contraintes, le programme *AlgoRD* a subi un certain nombre de tests de validation. Le premier consiste à en vérifier la convergence au travers de l'étude de l'influence de la densité et de l'uniformité du maillage. Le deuxième évalue les performances relatives du programme, tant en terme de temps de calcul qu'en terme de précision, en le comparant au logiciel d'éléments finis AbaqusTM. Le troisième est consacré à l'étude de l'influence des excentricités sur les performances générales du programme. Enfin, dans le dernier test, le programme est utilisé comme un outil pour l'analyse structurelle et la recherche de charges critiques de flambement. Les valeurs trouvées sont comparées à celles disponibles dans la littérature.

3.7.1 Convergence de l'algorithme

La première propriété du programme à vérifier est sa convergence. Pour cela, plusieurs séries de tests ont été effectuées sur un problème de structure simple : la recherche de la forme d'équilibre post-flambé d'une poutre sur appuis simples. Cette forme d'équilibre est connue depuis les travaux d'Euler (1744) sous le nom d'*elastica*, elle est l'une des rares solutions analytiques exactes d'un problème de poutre en grandes transformations. Après une rapide présentation de cette courbe et de ses propriétés géométriques, ce paragraphe compare formes théoriques et numériques pour différents modes de chargements et deux types de maillages (un symétrique et un dissymétrique) afin d'étudier l'influence de la densité et de l'uniformité du maillage sur la convergence.

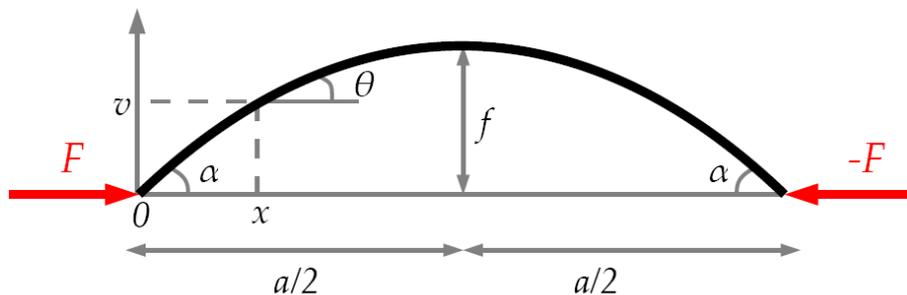


FIG. 3.15 – Schéma de la déformée d'une poutre simple post-flambée.

L'elastica

Les travaux d'Euler sur le flambement dans leur formalisme originel sont difficiles à comprendre aujourd'hui [?] si bien que l'analyse qui suit s'inspire presque exclusivement de la réécriture moderne du problème que l'on peut trouver dans un grand nombre de manuels et d'articles, dont J. Courbon [33] et S. Ariaenssens [2]. On considère donc la poutre de longueur l , d'inertie I et de module d'Young E constants, articulée à ses deux extrémités et soumise à un effort normal de compression F comme indiqué sur la figure 3.15. On suppose que, pour une

raison quelconque (effet du poids propre, de l'excentricité du chargement, d'un défaut dans le matériau), la poutre n'est plus droite et qu'un déplacement transversal $v(x)$ est apparu. L'équilibre local des moments fléchissants sur la configuration déformée de la poutre comporte alors deux termes : le premier $-Fv$ est lié à l'excentricité induite par v sur la force de compression F , et le second est lié à la variation de courbure d^2v/dx^2 dans le cadre de l'hypothèse des petits déplacements.

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} + Fv = 0 \quad (3.78)$$

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme : $v(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ où ω est défini par $\omega^2 = F/EI$. Pour déterminer les constantes A et B , on se sert des conditions aux limites $v(0) = 0$ et $v(l) = 0$. En remarquant que ω croît quand F croît, on constate que, tant que $\omega l < \pi$, la seule solution de (3.78) est $A = 0$ et $B = 0$; l'équilibre est donc stable. Lorsque $\omega l = \pi$, A est toujours nul, mais B est indéterminé, l'équilibre est donc instable pour :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (3.79)$$

Cette valeur F_c est appelée force critique de flambement ou force critique d'Euler. Lorsque F augmente au-delà de cette valeur, l'hypothèse des petits déplacements n'est plus respectée et on ne peut plus assimiler la courbure κ à la dérivée seconde de la flèche d^2v/dx^2 . L'équation différentielle (3.78) se transforme donc en :

$$EI\kappa + Fv = 0 \quad (3.80)$$

Pour résoudre cette équation différentielle, on note θ l'angle entre l'axe des x et la tangente à la fibre moyenne de la déformée. Puis, en remarquant que $\kappa = d\theta/ds$ et $dv/ds = \sin \theta$, on dérive l'équation (3.80) par rapport à l'abscisse curviligne s pour obtenir :

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} = -F \sin \theta \quad (3.81)$$

Ensuite, on multiplie les deux membres de l'équation (3.80) par $2d\theta/ds$ et on intègre par rapport à θ pour trouver :

$$EI \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = F(\cos \theta - \cos \alpha) \quad \text{car} \quad \left(\frac{d\theta}{ds} \right)_0 = 0 \quad (3.82)$$

Comme $d\theta/ds$ est négatif, on peut réécrire l'expression précédente et exprimer l'abscisse curviligne s en fonction de l'angle θ :

$$ds = \frac{-d\theta}{k \sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}} \quad \text{avec} \quad k = \sqrt{\frac{F}{EI}} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{F}{F_c}} \quad (3.83)$$

Soit, en utilisant la relation trigonométrique de l'angle double :

$$ds = \frac{-d\theta}{2k\sqrt{(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2})}} \quad (3.84)$$

Ensuite, il n'y a plus qu'à écrire que la longueur de la poutre est l . On intègre pour cela l'équation (3.84) entre $-\alpha$ et α , et, en remarquant que le problème est symétrique, on obtient :

$$kl = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2})}} \quad (3.85)$$

Soit, en introduisant le changement de variable $\sin \theta/2 = \sin \alpha/2 \cdot \sin \phi$:

$$kl = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \phi)}} \quad (3.86)$$

On reconnaît une intégrale elliptique à la forme canonique de Legendre $I(\sin \frac{\alpha}{2})$ dont les valeurs sont calculables numériquement (ou tabulées). L'expression (3.86) devient ainsi : $kl = 2I(\sin \frac{\alpha}{2})$. On remarque que, quelle que soit la valeur de α , $I(\sin \frac{\alpha}{2}) > \pi/2$ et donc que l'expression (3.86) n'est valable que pour $kl > \pi$, c'est-à-dire pour $F > F_c$ ce qui est cohérent avec le fait que si la force est inférieure à la force critique d'Euler, la seule solution du problème est une poutre droite.

Pour calculer le déplacement maximum à mi-portée, on utilise la relation de cinématique locale $dv = ds \sin \theta$ dans laquelle on remplace ds par sa valeur en fonction de $d\theta$ donné par (3.84). On intègre par rapport à θ et on trouve :

$$f = \frac{1}{2k} \int_0^\alpha \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2})}} \quad (3.87)$$

En utilisant le même changement de variable que précédemment et l'expression (3.86), on obtient :

$$\frac{f}{l} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{I(\sin \frac{\alpha}{2})} \quad (3.88)$$

Pour calculer la distance a entre les deux extrémités de la poutre, autrement dit sa portée, on procède exactement de la même façon en intégrant la relation $dx = ds \sin \theta$. On trouve alors :

$$\frac{a}{l} = 2 \frac{J(\sin \frac{\alpha}{2})}{I(\sin \frac{\alpha}{2})} \quad \text{avec} \quad J(\sin \frac{\alpha}{2}) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \phi} d\phi \quad (3.89)$$

Les différents paramètres adimensionnels caractéristiques de l'*elastica* (F/F_c , f/l et a/l) peuvent donc facilement être calculés en fonction de α et des formules établies en (3.86), (3.88) et (3.89). Les principales valeurs de ces paramètres en fonction de dix-sept valeurs de α variant de 10° à 170° sont présentées dans le tableau 3.1 ; elles serviront de références pour des comparaisons avec les résultats des tests qui sont effectués dans les deux paragraphes suivant.

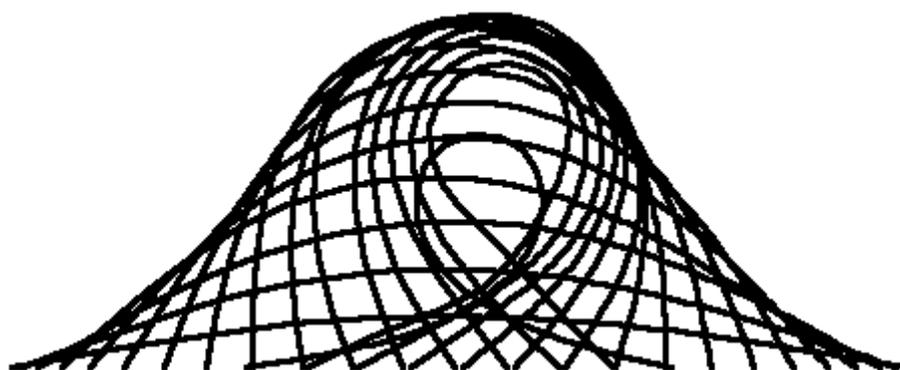
TAB. 3.1 – Valeurs des paramètres caractéristiques de l'*elastica*.

Angle	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
F/F_c	1,004	1,015	1,035	1,064	1,102	1,151	1,214	1,294	1,393
a/l	0,992	0,970	0,932	0,881	0,817	0,741	0,655	0,559	0,457
f/l	0,055	0,110	0,161	0,211	0,256	0,297	0,331	0,360	0,381

Angle	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°
F/F_c	1,518	1,678	1,885	2,160	2,542	3,105	4,030	5,950
a/l	0,348	0,237	0,123	0,008	-0,106	-0,222	-0,340	-0,471
f/l	0,396	0,403	0,402	0,393	0,375	0,349	0,312	0,260

Tests avec déplacement imposé des extrémités

Le premier test s'apparente aux essais à déplacement contrôlé effectués en laboratoire, il consiste à fixer les positions des deux extrémités de la poutre pour une certaine valeur du paramètre a/l et à vérifier que les valeurs des autres paramètres (F/F_c et f/l) de la forme trouvée par la méthode de relaxation dynamique convergent bien vers les paramètres théoriques. Les valeurs de a/l imposées correspondent aux 17 valeurs que prend le paramètre lorsque α varie de 10° à 170° (cf. tableau 3.1). Aucun effort n'est appliqué à la structure en dehors des réactions induites par le blocage des conditions aux limites en translation. La longueur des barres est fixée arbitrairement égale à 20 m, leur inertie à 1 cm⁴, leur section 1 cm² et leur module d'Young à 10 GPa. La forme initiale de la poutre est une parabole de 20 m de portée et de 0,5 m de haut dont la position des extrémités est modifiée pour que la distance qui les sépare soit égale à la valeur théorique de a pour chaque valeur de α .

FIG. 3.16 – Déformées obtenues pour un maillage A non-uniforme de densité $n = 4$.

En prenant exemple sur les tests effectués par Barnes dans [15, 3], il a été choisi d'étudier deux types de maillages. Le premier, noté A , est irrégulier et dissymétrique, il est composé d'une succession de segments dont la taille va en diminuant d'une extrémité à l'autre (n segments de longueur $L/(4 \times n)$, $2n$ segments de longueur $L/(4 \times 2n)$, $4n$ segments de longueur $L/(4 \times 4n)$ et $8n$ segments de longueur $L/(4 \times 8n)$). Le deuxième, noté B , est régulier et symétrique, il possède le même nombre d'éléments que le premier, à savoir $15n$ segments de longueur $L/(15n)$. Le facteur n est augmenté progressivement jusqu'à ce qu'un niveau de convergence suffisant soit atteint, soit trois chiffres après la virgule pour chacun des paramètres f/L et F/F_c . Les

figures 3.17 et 3.16 présentent les géométries obtenues pour différentes valeurs de α et pour une densité de $n = 4$. Il apparaît clairement que la dissymétrie du maillage de la figure 3.16 a une forte influence sur la géométrie de la forme d'équilibre et, par conséquent, que la densité de maillage n'est pas satisfaisante. Toutefois si l'on augmente la densité du maillage, la déformée de la poutre redevient symétrique et le programme finit par converger comme on peut le constater dans les tableaux 3.2 et 3.3 qui montrent les densités de maillage nécessaires respectivement à la convergence des paramètres F/F_c et f/l pour chacune des valeurs de α .

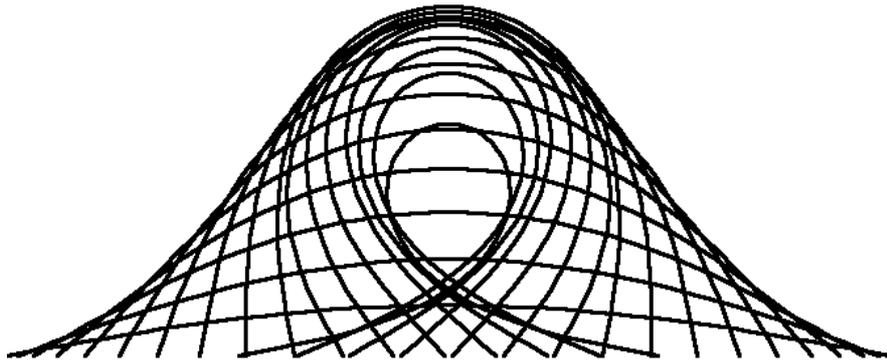


FIG. 3.17 – Déformées obtenues pour un maillage B , uniforme de densité $n = 4$.

TAB. 3.2 – Convergence de F/F_c .

Elastica théorique			Densité convergée	
α	a/l	F/F_c	B	A
10°	0,992	1,004	16	16
20°	0,97	1,015	8	16
30°	0,932	1,035	8	16
40°	0,881	1,064	4	8
50°	0,817	1,102	4	8
60°	0,741	1,151	2	8
70°	0,655	1,214	4	8
80°	0,559	1,294	2	8
90°	0,457	1,393	2	8
100°	0,348	1,518	2	4
110°	0,237	1,678	3	4
120°	0,123	1,885	4	8
130°	0,008	2,16	4	8
140°	-0,106	2,542	4	8
150°	-0,222	3,105	4	16
160°	-0,34	4,03	4	16
170°	-0,471	5,95	4	16

TAB. 3.3 – Convergence de f/l .

Elastica théorique			Densité convergée	
α	a/l	f/l	B	A
10°	0,992	0,055	1	1
20°	0,97	0,11	1	1
30°	0,932	0,161	1	1
40°	0,881	0,211	1	1
50°	0,817	0,256	1	1
60°	0,741	0,297	1	1
70°	0,655	0,331	1	1
80°	0,559	0,36	1	1
90°	0,457	0,381	1	1
100°	0,348	0,396	1	1
110°	0,237	0,403	1	1
120°	0,123	0,402	1	1
130°	0,008	0,393	1	1
140°	-0,106	0,375	1	8
150°	-0,222	0,349	1	4
160°	-0,34	0,312	1	8
170°	-0,471	0,26	1	4

On remarque que quelle que soit la valeur de α choisie les deux maillages convergent : le maillage uniforme rapidement alors que le maillage non-uniforme est plus lent. Il finit cependant par se stabiliser au niveau des valeurs théoriques lorsque les dimensions de son plus grand segment atteignent celles du segment du maillage uniforme minimal pour obtenir la convergence. On remarque également que le paramètre f/l du tableau 3.3 lié aux déplacements et à

la flèche est plus rapide à converger que le paramètre F/F_c du tableau 3.2 qui est lié aux efforts intérieurs. On retrouve là un résultat bien connu de la mécanique numérique : les critères de convergence en effort ou en contrainte sont des critères beaucoup plus exigeants, beaucoup plus sévères que les critères en énergie ou en déplacement. De ce point de vue là, la méthode de relaxation dynamique n'apporte aucun avantage ou désavantage supplémentaire par rapport aux méthodes classiques d'éléments finis.

Tests avec effort imposé aux extrémités

Le second test s'apparente aux essais à force contrôlée car on impose aux extrémités de la poutre des efforts qui correspondent à une certaine valeur du paramètre F/F_c et de α , tandis qu'on laisse les extrémités libres de se déplacer horizontalement selon la ligne d'action de ces forces. On vérifie ensuite la convergence des résultats avec la densité du maillage au travers des paramètres (a/l et f/l) de la forme trouvée par la méthode de relaxation dynamique et des paramètres théoriques. Les caractéristiques géométriques et mécaniques des barres sont identiques à celles des essais précédents, la forme initiale de la poutre est toujours une parabole de 20 m de portée et de 0,5 m de haut. On reprend également les deux mêmes types de maillage non-uniforme (maillage A) et uniforme (maillage B) et on augmente le facteur n de densité du maillage progressivement jusqu'à ce qu'un niveau de convergence suffisant soit atteint (trois chiffres après la virgule).

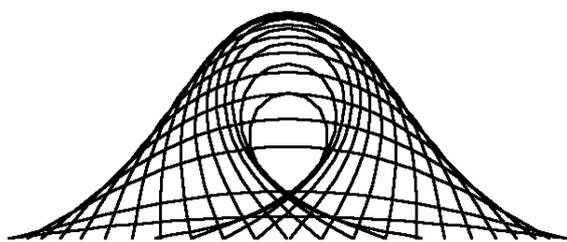


FIG. 3.18 – Déformées obtenues pour un maillage uniforme de densité $n = 2$.

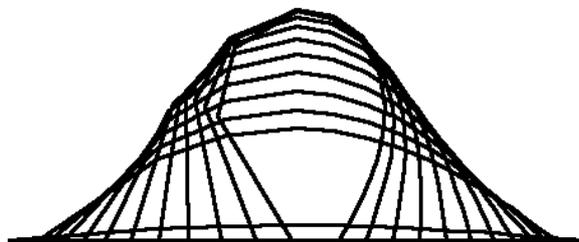


FIG. 3.19 – Déformées obtenues pour un maillage non-uniforme de densité $n = 2$.

Les figures 3.18 et 3.19 présentent les géométries obtenues pour différentes valeurs de α pour une densité de $n = 2$. On constate que, pour le maillage non-uniforme, la boucle de la déformée se défait pour des forces élevées et que la poutre redevient droite. Comme dans le cas des essais en déplacement, si l'on augmente le maillage, la forme bouclée redevient une forme stable et le programme converge vers les valeurs théoriques. Ces résultats qualitatifs sont détaillés dans les tableaux 3.4 et 3.5 qui présentent respectivement les densités de maillage nécessaires à la convergence des paramètres a/l et f/l en fonction du rapport F/F_c .

Les remarques sur les essais à déplacement imposé sont pour l'essentiel valables également pour les essais à force imposée. Quelle que soit la valeur de α choisie, les deux maillages convergent, le maillage uniforme plus rapidement que le maillage non-uniforme. On observe cependant que la convergence est plus lente pour les faibles valeurs de α . Si l'on regarde les premières valeurs théoriques du tableau 3.5, on constate que le phénomène de flambement est

très sensible et que, dès que la force de compression dépasse la force critique d'Euler, les déformations de la poutre deviennent considérables. Ainsi pour un dépassement de 1,5 % seulement de F_c , la flèche à mi-portée atteint déjà 11 % de la longueur de la poutre. Les défauts d'approximation des efforts intérieurs liés à la grossièreté du maillage entraînent donc des variations importantes de la géométrie d'équilibre, qui s'estompent cependant quand on affine le maillage de la poutre. Cette observation n'est pas sans conséquence sur le choix de la meilleure stratégie pour la recherche de forme. Il apparaît en effet clairement que les modèles pilotés en déplacement sont préférables car ils permettent d'obtenir des résultats précis pour des densités de maillage plus faibles et donc pour des temps de calculs moins importants. De tels modèles ne sont pas toujours faciles à construire, voire même impossibles quand aucun point de la géométrie d'équilibre n'est connu comme par exemple avec la méthode de recherche de forme développée au paragraphe 4.3. Dans ces cas, on aura intérêt à remplacer le chargement extérieur de compression par des forces de flexion et à substituer au phénomène de flambement un calcul en flexion simple, moins sensible et moins instable (cf. paragraphe 4.3).

TAB. 3.4 – Convergence de a/l .

Elastica théorique			Densité de maillage	
α	F/F_c	a/l	B	A
10°	1,004	0,992	8	64
20°	1,015	0,97	2	32
30°	1,035	0,932	2	16
40°	1,064	0,881	2	16
50°	1,102	0,817	2	16
60°	1,151	0,741	2	16
70°	1,214	0,655	2	16
80°	1,294	0,559	2	16
90°	1,393	0,457	2	16
100°	1,518	0,348	2	16
110°	1,678	0,237	2	16
120°	1,885	0,123	2	16
130°	2,16	0,008	2	16
140°	2,542	-0,106	2	16
150°	3,105	-0,222	2	16
160°	4,03	-0,34	2	16
170°	5,95	-0,471	2	16

TAB. 3.5 – Convergence de f/l .

Elastica théorique			Densité de maillage	
α	a/l	f/l	B	A
10°	1,004	0,055	8	64
20°	1,015	0,11	2	32
30°	1,035	0,161	2	16
40°	1,064	0,211	2	16
50°	1,102	0,256	2	16
60°	1,151	0,297	2	8
70°	1,214	0,331	1	8
80°	1,294	0,36	1	8
90°	1,393	0,381	1	8
100°	1,518	0,396	1	8
110°	1,678	0,403	1	8
120°	1,885	0,402	1	16
130°	2,16	0,393	2	16
140°	2,542	0,375	2	16
150°	3,105	0,349	2	16
160°	4,03	0,312	2	16
170°	5,95	0,26	2	16

3.7.2 Précision et temps de calcul

La méthode de relaxation dynamique est un outil de calcul non-linéaire de structures parmi d'autres. Ses performances en terme de précision, de stabilité et de rapidité doivent donc être comparées à celles d'autres outils numériques comme le logiciel de calculs aux éléments finis AbaqusTM. Les résultats de deux calculs de structures élancées précontraintes sont donc confrontés ici : le premier reprend le problème plan de la poutre post-flambée (cf. figure 3.20) et le second est un problème de mise en forme d'un gridshell simple (cf. figure 3.21) .

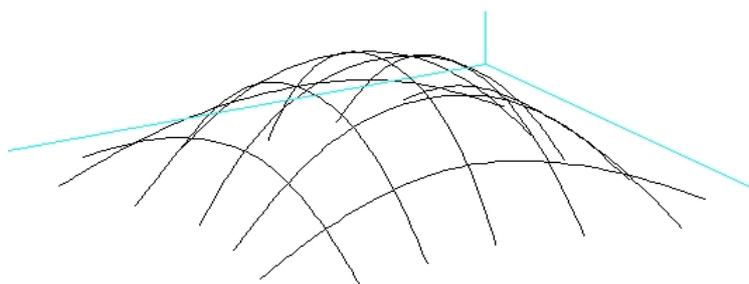
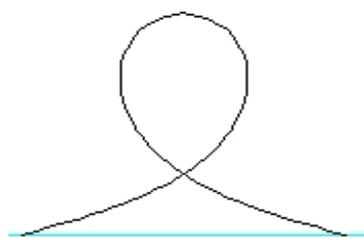


FIG. 3.20 – Poutre post-flambée. FIG. 3.21 – Gridshell élémentaire de deux fois cinq barres.

Structures planes

L'étude du flambement d'une poutre simple en grande transformation est particulièrement intéressante car, on l'a vu, la géométrie finale de la structure est connue analytiquement ce qui permet d'enrichir la comparaison des différents modèles numériques entre eux. La structure test est composée d'une poutre droite de 12 m de long de section circulaire de 50 mm de diamètre et de 2 mm d'épaisseur, ce qui correspond à une inertie de $8,7 \text{ cm}^4$. La poutre est fabriquée dans un matériau homogène isotrope avec un module d'Young de 35 GPa et un coefficient de Poisson de 0,3. Elle est simplement appuyée sur le sol et soumise à deux efforts opposés de 1000 N auxquels une charge linéique de 5 N/m a été ajoutée pour orienter le phénomène de flambement. En remarquant que la force critique de flambement de cette poutre est de 209 N et donc que le rapport F/F_c se situe aux alentours de 5, on déduit d'après le tableau 3.1 que l'effort de compression appliqué devrait provoquer un bouclage de la poutre et converger vers un angle initial proche de 165 degrés.

Le type d'élément de poutre choisi pour la méthode de relaxation dynamique suit une cinématique de Navier-Bernoulli comme indiqué dans le paragraphe 3.3. Celui choisi par défaut dans AbaqusTM est un élément classique de poutre plane de Timoshenko avec trois degrés de liberté par nœud (deux translations et une rotation). Le solveur spécifique aux problèmes avec des non-linéarités géométriques qui a été sélectionné est fondé sur la méthode de Newton-Raphson modifiée (cf. paragraphe 3.1.1). Dans un premier temps, on cherche à évaluer l'influence de la finesse du maillage sur la géométrie et les efforts intérieurs dans la poutre. Pour cela, différents calculs avec un nombre total d'éléments variant de 10 à 100 sont effectués et comparés au calcul de référence de la méthode des éléments finis (MEF) établi sur une structure qui comporte 100 éléments. Le tableau 3.6 montre les résultats de cette comparaison. U_x^{max} et U_z^{max} représentent respectivement le déplacement horizontal maximal de la poutre (obtenu aux extrémités) et son déplacement vertical maximal (obtenu à mi-portée). N^{min} et N^{max} sont les deux valeurs extrêmes des efforts normaux et M^{max} est le moment fléchissant maximal.

Au vu du tableau 3.6, les résultats de la méthode de relaxation dynamique apparaissent très proches de ceux de la méthode des éléments finis puisque l'écart relatif est inférieur à 0,1% tant sur les efforts que sur les déplacements. Les différences qui persistent entre les modèles résident vraisemblablement dans le fait que les énergies élastiques de déformation prises en compte sont différentes. Outre le fait qu'il n'inclue pas de chargement vertical, le modèle analytique ne

prend en compte que les déformations liées au moment fléchissant, la méthode de relaxation dynamique prend aussi en compte les déformations liées à l'effort normal, mais elle néglige encore les déformations de cisaillement qui sont intégrées dans les éléments de Timoshenko du modèle aux éléments finis. On note malgré tout que dès 20 éléments, l'écart entre la méthode des éléments finis de référence (avec 100 éléments) et la méthode de la relaxation dynamique est inférieur à 1%.

TAB. 3.6 – Valeurs caractéristiques d'une *elastica* obtenues par différentes méthodes.

Modèle	Nombre d'éléments	U_z^{max} (en cm)	U_x^{max} (en cm)	N^{min} (en N)	N^{max} (en N)	M^{max} (en N.m)
Relaxation dynamique	10	3,54	8,64	-968	728	3 470
	20	3,52	8,44	-968	938	3 450
	30	3,52	8,41	-969	974	3 450
	40	3,52	8,39	-969	979	3 440
	50	3,52	8,39	-969	992	3 440
	100	3,52	8,39	-969	999	3 440
MEF	100	3,512	8,38	-969	999	3 432
Analytique		3,46	8,42			3 460

Dans un second temps, on cherche à évaluer les performances en terme de temps de calcul entre les deux méthodes numériques. M. Papadrakakis [81] avait déjà effectué des comparaisons entre les différentes méthodes de Newton-Raphson et la méthode de relaxation dynamique avec différents degrés d'optimisation des paramètres dynamiques. Il avait conclu que les deux familles de méthodes avaient des performances comparables pourvu que l'on en utilise les versions les plus performantes : autrement dit, que la rapidité des calculs dépend avant tout de l'optimisation de l'algorithme considéré et de sa maîtrise par l'utilisateur. C'est à des conclusions semblables que conduisent les paragraphes qui suivent et plus particulièrement les comparaisons qui sont faites sur la structure de gridshell.

En effet, si l'on considère le tableau 3.7, on constate que, sur ce problème très simple, l'algorithme de relaxation dynamique est beaucoup plus lent que le logiciel AbaqusTM. Le fait est que, pour trouver la position d'équilibre finale, la méthode de relaxation dynamique résout un problème de dynamique des structures dans lequel le mouvement à effectuer est initié par des efforts purement horizontaux alors que l'essentiel du déplacement est vertical. En revanche, dans la méthode des éléments finis, cet aspect dynamique n'apparaît pas et le problème est résolu très rapidement comme n'importe quel problème non-linéaire géométrique avec peu de degrés de liberté. Si l'on désire améliorer les performances de la méthode de relaxation dynamique, il faut, dans la mesure du possible, lancer le calcul depuis une géométrie initiale plus proche de la forme finale. Cette géométrie pressentie par le concepteur ou l'utilisateur peut être quelconque et même fortement précontrainte, l'essentiel est qu'elle permette d'accélérer le mouvement vers la position d'équilibre. Par exemple, dans le cas de la poutre post-flambée étudiée ici, on peut prendre comme configuration initiale de la poutre droite une parabole de 3,5 m de hauteur et de 12 m de portée ; le temps de calcul pour une poutre de 30 éléments est alors réduit de 256 à 206 secondes et de 12 084 à 9 903 itérations pour le même niveau de précision.

TAB. 3.7 – Comparaison des temps de calcul en 2D.

Nombre d'éléments	Relaxation dynamique		Éléments finis	
	Temps de calcul (en s)	Nombre d'itérations	Temps de calcul (en s)	Nombre d'itérations
10	28	3 374	36	57
20	112	7 580	35	58
30	256	12 084	35	59
40	442	15 409	36	62
50	681	19 779	37	66
100	3 502	50 592	41	70

Structures spatiales

La structure spatiale sélectionnée pour les tests de validation en trois dimensions est un grid-shell composé de deux fois cinq barres dans deux directions perpendiculaires (cf. figure 3.21). Au repos, la grille forme une résille orthogonale de poutres de 12 m espacées de 2 m les unes des autres et articulées entre elles. Les propriétés géométriques et mécaniques sont les mêmes que dans l'exemple précédent : une section tubulaire de 50 mm diamètre et de 2 mm d'épaisseur, un module d'Young de 35 GPa et un coefficient de Poisson de 0,3. Les déplacements des extrémités de chacune des dix barres sont libres dans le plan initial de la grille, bloqués perpendiculairement à celui-ci. Leurs rotations sont complètement libres. Les excentricités entre les barres sont négligées. Une charge de 200 N est appliquée perpendiculairement au plan de la grille à chacun des vingt-cinq points de connection.

Les types d'élément de poutre utilisés dans les modèles numériques sont les mêmes que dans l'exemple précédent : une poutre de Navier-Bernouilli avec trois degrés de liberté en translation pour la relaxation dynamique et une poutre de Timoshenko avec six degrés de liberté (trois en translation et trois en rotation) pour AbaqusTM. Le solveur spécifique aux problèmes avec des non-linéarités géométriques, fondé sur la méthode de Newton-Raphson modifiée, a été une nouvelle fois sélectionné pour la comparaison. Pour évaluer l'influence de la finesse du maillage sur la géométrie et les efforts dans la poutre, on effectue différents calculs avec un nombre total d'éléments variant de 6 à 60 par barre et on compare les résultats à ceux du calcul de la méthode des éléments finis (MEF) établis sur une structure qui comporte 60 éléments. Dans ce dernier, les liaisons entre les deux directions de barre sont modélisées par des « connecteurs » qui lient les degrés de liberté en translation des nœuds des barres au niveau des assemblages dont l'excentricité est considérée comme nulle. La cinématique des liaisons est donc la même dans les deux modélisations.

Le tableau 3.8 montre les résultats de cette comparaison. Le problème étant parfaitement symétrique, les déplacements dans l'une ou l'autre des directions principales de la grille sont identiques ; par conséquent seuls les déplacements maximaux dans la direction x et les déplacements perpendiculaires au plan initial de la grille, respectivement U_x^{max} et U_z^{max} sont présentés. Par ailleurs, l'utilisation de connecteurs dans AbaqusTM rend délicate l'obtention des efforts intérieurs dans les barres ; on se contente donc des réactions d'appuis maximales R_z^{max} .

TAB. 3.8 – Influence de la densité maillage sur la précision de la forme d'un gridshell.

Modèle	Nombre d'éléments	U_x^{max} (en cm)	U_z^{max} (en cm)	R_z^{max} (en N)
Relaxation dynamique	6	1,42	3,41	434
	12	1,37	3,33	450
	24	1,35	3,30	458
	60	1,34	3,29	453
MEF	60	1,36	3,31	459

Comme pour les structures planes, on constate un bon accord entre les valeurs données par les deux méthodes, moins de 1 % d'écart. On constate également que, même pour des densités assez faibles de maillage (24 éléments par barre), les résultats de la méthode de relaxation dynamique atteignent ce niveau de précision. Si l'on observe en parallèle le tableau 3.9, la comparaison des temps de calcul n'est plus de façon évidente en faveur de la méthode des éléments finis. En effet, même si des résultats rapides peuvent être obtenus avec les éléments finis pour le maillage le plus fin, on remarque que, pour les autres densités de maillage, le calcul dure plusieurs jours alors que le nombre de degrés de liberté est très faible. La méthode de relaxation dynamique au contraire converge très rapidement pour les faibles densités de maillage et voit son temps de calcul augmenter avec le nombre de degrés de liberté.

TAB. 3.9 – Comparaison des temps de calcul en 3D.

Nombre d'éléments	Relaxation dynamique		Éléments finis	
	Temps de calcul en s	Nombre d'itérations	Temps de calcul en s	Nombre d'itérations
6	61	1 086	$>3 \cdot 10^5$	$>10^6$
12	345	3 840	$>2,5 \cdot 10^5$	$8,5 \cdot 10^5$
24	938	5 520	$>1,5 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^5$
60	7572	18 392	188	287

Si l'on pousse l'expérience un peu plus loin et qu'on augmente la charge à 400 N pour un maillage à 24 éléments par barre, alors les temps de calcul de la méthode de relaxation dynamique sont plus rapides (on passe de 938 à 667 secondes et de 5 520 à 3 802 itérations) alors que le calcul avec AbaqusTM éprouve de nouveau de grandes difficultés à converger. Pour obtenir un résultat dans un temps acceptable, on est donc obligé de raffiner encore le maillage, d'augmenter le nombre de degrés de liberté ce qui finit à force par rallonger sérieusement le temps de calcul. La stratégie à mettre en œuvre pour diminuer le temps de calcul est donc contradictoire, le maillage le plus efficace risque donc d'être délicat à trouver. Si l'on considère de plus que la structure étudiée ici est une structure symétrique simple avec seulement deux fois cinq barres et que l'objectif est de pouvoir modéliser des structures d'une complexité proche de celle du gridshell de Mannheim (cf. figure 1.14), on doit admettre que les logiciels de calcul du type d'AbaqusTM sont moins performants.

On est ainsi amené à conclure que la définition du maillage est une question délicate pour la méthode « classique » des éléments finis et que l'utilisation de l'algorithme de Newton-Raphson pour la mise en forme des gridshells est possible mais requiert un niveau d'expertise important. En revanche, même si elle n'est pas toujours la plus rapide, la méthode de relaxation dynamique s'avère précise, robuste, stable, et facile à appréhender. Elle a l'avantage de permettre d'obtenir une bonne estimation de la géométrie d'équilibre d'une structure avec des éléments relativement pauvres et avec un niveau d'erreur maîtrisé.

3.7.3 Influence des excentricités sur les performances de l'algorithme

La prise en compte des excentricités dans le processus de recherche de forme introduit une étape supplémentaire dans l'algorithme de relaxation dynamique (cf. paragraphe 3.6). Le but de ce paragraphe est d'évaluer l'augmentation du temps de calcul liée à cette nouvelle étape ainsi que l'ordre de grandeur de l'erreur liée aux approximations géométriques au niveau des liaisons. Pour cela, on compare les résultats de deux simulations obtenues l'une sans excentricité et l'autre avec un connecteur. Deux structures sont testées : la première est le gridshell du paragraphe précédent (cf. figure 3.21) avec une excentricité de 10 cm ; la deuxième est issue d'une grille plane formée de deux fois dix barres de 12 m de long ayant une section tubulaire de 42 mm de diamètre et de 3,5 mm d'épaisseur et un module d'Young de 26,7 GPa (cf. figure 3.22). Les barres sont espacées de 1 m les unes des autres et articulées entre elles avec une excentricité de 8 cm entre les axes des barres. Leurs extrémités sont libres de se déplacer sur le plan initial de la grille. Pour obtenir la forme finale (cf. figure 3.23), une charge uniforme de 40 N/ml est appliquée sur chacune des barres. Pour les deux calculs, le critère de convergence E_c^{lim} est fixé au dix millième de l'énergie cinétique du plus haut pic.

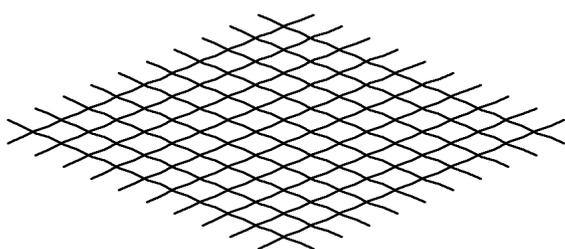


FIG. 3.22 – Grille initiale.

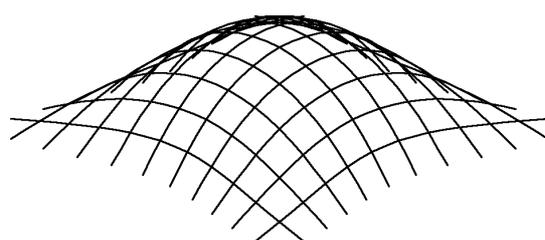


FIG. 3.23 – Résultat de la recherche de forme.

Les résultats de ces deux calculs sont présentés dans le tableau 3.10. On observe tout d'abord que, comme on pouvait s'y attendre, le temps de calcul est de 30 % plus important pour la simulation qui prend en compte les excentricités et ce, même si le nombre d'itérations requises est quasiment identique. Ensuite, on remarque que, en dehors de l'écartement des deux couches de barres, les excentricités n'ont que peu d'influence sur la hauteur générale de l'ouvrage mais qu'elles entraînent une augmentation de 5 % de la contrainte maximale dans les barres ce qui n'est pas complètement négligeable. Enfin on vérifie bien que dans la forme finale, au niveau des intersections, les connecteurs sont perpendiculaires à la tangente aux barres qu'ils relient puisque les angles mesurés entre le connecteur et celles-ci sont de 90° à 10^{-6}° près.

TAB. 3.10 – Comparatif des performances de l'algorithme avec et sans excentricité.

	Grille 5x5		Grille 10x10	
	Sans	Avec	Sans	Avec
Nombre d'itérations	5 361	5 678	4 411	4 485
Temps CPU	787	1 005	1 208	1 598
Hauteur maximum (m)	3,30	3,35	2,77	2,81
Contrainte maximum (MPa)	207,7	211,7	119	124,5

De façon générale, la simulation de la mise en forme des gridshells est une étape relativement « coûteuse » en temps de calcul. Il est donc préférable de négliger l'excentricité entre les barres lors des études préliminaires et de ne la prendre en compte que dans un second temps, une fois que l'allure générale de la forme a été choisie et que l'on cherche à dimensionner l'ouvrage et sa couverture.

3.7.4 Analyse structurelle et charges critiques de flambement

La recherche de forme est un calcul de structure en grands déplacements. Comme l'algorithme de relaxation dynamique s'est avéré efficace pour ce type de calcul, il doit permettre aussi d'obtenir de bons résultats pour des calculs non-linéaires de structures, notamment les valeurs des charges limites des ouvrages. G. Ramesh *et al.* [84] proposent une méthode complète pour l'étude du comportement post-flambé des structures dans laquelle ils couplent la relaxation dynamique avec la méthode de longueur d'arc ou *arc-length*. Après une présentation du modèle, les auteurs réalisent l'analyse du comportement de plusieurs treillis plans et spatiaux déjà couramment étudiés dans la littérature et concluent que leur méthode est d'une précision comparable aux principales autres méthodes, notamment la méthode des éléments finis. Deux de ces exemples ont donc été sélectionnés ici afin de vérifier que le programme *AlgoRD* implémenté pour cette thèse retrouvait les mêmes valeurs.

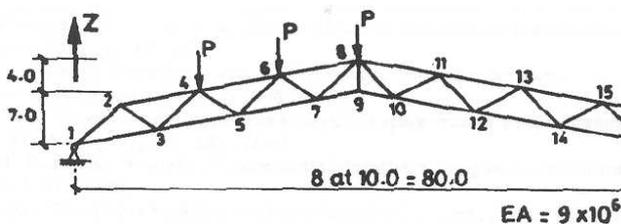


FIG. 3.24 – Poutre treillis dissymétrique.

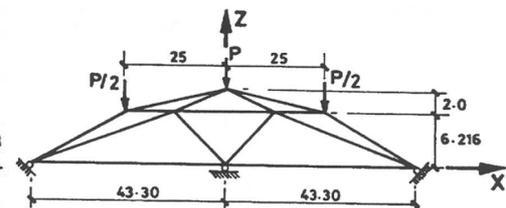


FIG. 3.25 – Dôme hexagonal.

La première structure est une poutre treillis dissymétrique de type Warren de 80 m de portée dont les dimensions caractéristiques sont reportées sur la figure 3.24. Elle est composée de barres d'une raideur axiale ES de 9 MN articulées entre elles. À chacune de ses extrémités, la poutre repose sur des rotules. Elle est soumise à un chargement dissymétrique constitué de trois forces ponctuelles P aux nœuds 4, 6 et 8. Pour l'analyse, la charge P est augmentée progressivement jusqu'à atteindre la charge limite de la structure pour laquelle la poutre se retourne. Pour chaque pas de charge, on mesure le déplacement vertical du nœud 9 situé au point le plus haut de la

membrure inférieure de la poutre. On trace ensuite le courbe force-déplacement caractéristique du comportement de la structure que l'on peut voir sur la figure 3.26. En comparant avec la courbe de l'article [84], on vérifie bien que les déplacements sont identiques pour chaque niveau de chargement et que les charges qui provoquent l'instabilité de la structure sont très proches (37 kN contre 36 kN).

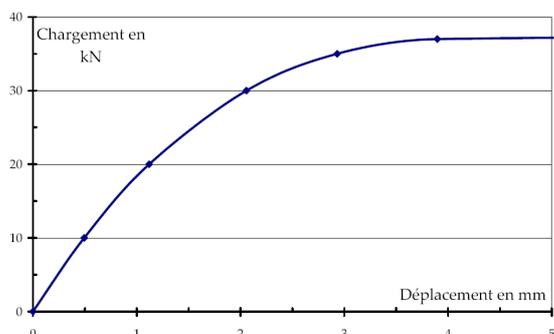


FIG. 3.26 – Comportement de la structure de la figure 3.24.

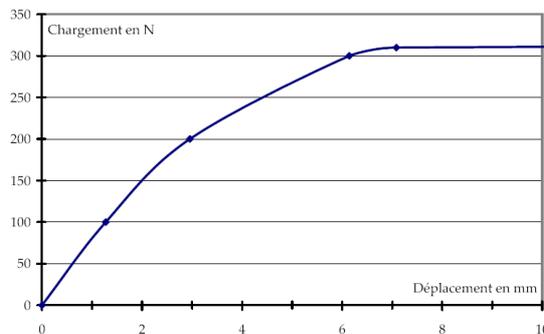


FIG. 3.27 – Comportement de la structure de la figure 3.25.

La deuxième structure est un treillis spatial, un dôme en forme d'étoile à base hexagonale. Ses dimensions principales sont indiquées sur la figure 3.25. Les barres qui constituent ce treillis spatial ont une raideur axiale de 960 kN et sont articulées entre elles. Chacune des branches de l'étoile repose sur une rotule parfaite. Un chargement symétrique est appliqué sur la structure au travers des trois forces représentées sur la figure 3.25 et augmenté progressivement jusqu'à déclencher l'instabilité de la structure. Comme précédemment le déplacement du point central est relevé à chaque itération de façon à tracer la courbe force-déplacement de la figure 3.27. On constate à nouveau la non-linéarité du comportement de la structure et une bonne concordance entre les déplacements de notre modèle et ceux de G. Ramesh [84] pour les différents paliers de chargement, ainsi qu'entre les deux charges critiques (315 contre 333 N). Les résultats de l'article de G. Ramesh [84] ayant été validés par d'autres méthodes de calcul numérique, on peut donc conclure que le programme *AlgoRD* est un outil efficace pour l'analyse non-linéaire des structures et la recherche de la charge critique qui provoque le flambement ou le claquage de la structure. On pourra donc avantageusement utiliser le même programme pour toutes les étapes de la conception des gridshells : de la recherche de forme (cf. paragraphe 4) et l'analyse structurelle des gridshells (cf. paragraphe 5).

3.8 Exemple d'application : les nexorades

La polyvalence de l'algorithme de relaxation dynamique a déjà été évoquée dans le paragraphe 3.1.3. L'exemple présenté ici est cependant très différents des nombreuses applications déjà citées (réseau de câbles, structure hyperélastique, comportement post-flambé des structures) et des études de gridshells à venir. Il s'agit d'introduire un comportement non-linéaire fictif avec la méthode de relaxation dynamique pour résoudre un problème de recherche de forme sur des structures à géométrie complexe : les nexorades.

3.8.1 Définition des nexorades

Les « nexorades » sont une famille de structures spatiales que l'on appelle également structures multi-réciproques. Le nom de *nexorade* est un néologisme proposé par H. Nooshin et O. Baverel [17, 19]. Il dérive du mot latin *nexus* qui signifie « le lien, le nœud » car c'est d'une réflexion sur les connections dans les structures spatiales, en particulier dans les treillis, qu'est né le concept de nexorade. En effet, dans les treillis spatiaux, les connections sont des pièces d'une grande complexité géométrique car de nombreuses barres avec des orientations variables y convergent (cf. figure 3.28). Les connections ont aussi une grande importance pour la stabilité de l'ouvrage dont la bonne tenue au flambement dépend en grande partie de la précision de fabrication de ces pièces. Celles-ci sont par conséquent très coûteuses. Le principe constructif de la nexorade consiste à remplacer cet assemblage complexe par une série d'assemblages très simples dans lesquels les barres reposent mutuellement les unes sur les autres et ne sont jamais liées que deux à deux (cf. figure 3.29) d'où le nom de structures multi-réciproques qu'on leur donne parfois. L'idée de base de ces structures en elle-même n'est pas nouvelle, elle a d'ailleurs été mise en œuvre depuis des millénaires par les Chinois pour la construction de ponts — pour un historique plus complet, on se reportera utilement à la thèse d'Olivier Baverel [17].— Néanmoins les nexorades en sont une tentative de généralisation qui permet de transformer n'importe quel treillis en une structure multi-réciproque. Cette transformation réarrange localement les barres qui ne sont du coup plus concurrentes, la difficulté technologique est alors remplacée par une difficulté géométrique.

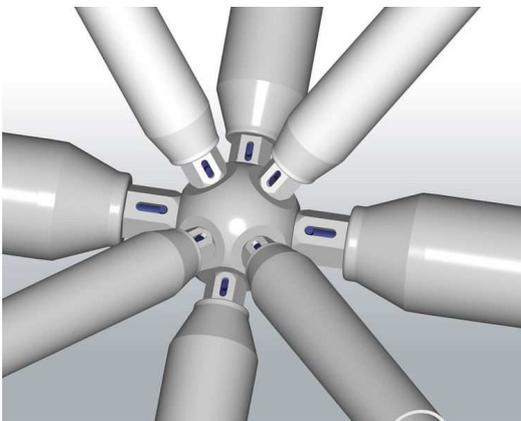


FIG. 3.28 – Assemblage MERO™ typique. FIG. 3.29 – Assemblage typique d'une nexorade.

3.8.2 Recherche de forme des nexorades

Il n'existe pas de solution analytique simple de la transformation d'une structure de poutres en nexorade en dehors de quelques cas particuliers comme les polyèdres réguliers [17, 98]. La recherche de la solution numérique de cette transformation s'apparente donc à un calcul de recherche de forme. Une méthode utilisant l'algorithme génétique a été proposée par Baverel [17, 18], mais elle manque de souplesse. Une méthode alternative fondée sur l'algorithme de relaxation dynamique a donc été proposée. Par rapport à la méthode précédente, les principes

de la transformation sont conservés : on part d'une géométrie initiale dans laquelle les barres sont concourantes (cf. figure 3.30.a) et on la transforme en tordant les barres de sorte qu'elles forment une structure multi-réciproque dans laquelle l'excentricité entre les barres au niveau des liaisons est respectée (cf. figure 3.30.b). Comme cette structure n'est pas en équilibre, elle va se mouvoir jusqu'à ce que toute l'énergie cinétique de la structure ait été dissipée et que la forme d'équilibre soit trouvée (cf. figure 3.30.c).

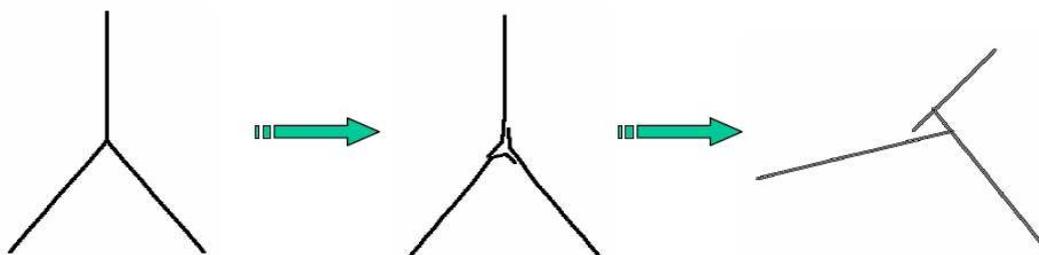


FIG. 3.30 – Principe de la recherche de forme d'une nexorade : a) Barres concourantes ; b) Barres fléchies avec excentricités ; c) Nexorade résultante.

L'utilisation de la méthode de relaxation dynamique pour la recherche de forme des nexorades introduit une notion de comportement mécanique dans un problème au départ purement géométrique. Ce comportement mécanique est fictif et il n'interfère pas avec la géométrie finale lorsque celle-ci n'est composée que de barres droites, c'est-à-dire lorsque la transformation en nexorade existe bel et bien. En revanche, lorsque la géométrie finale présente des barres fléchies, il peut être intéressant de modifier ces paramètres mécaniques (raideur axiale, raideur en flexion) pour assouplir certains éléments et orienter la recherche vers telle ou telle forme d'équilibre non-précontrainte. La figure 3.31 illustre bien cette liberté supplémentaire.

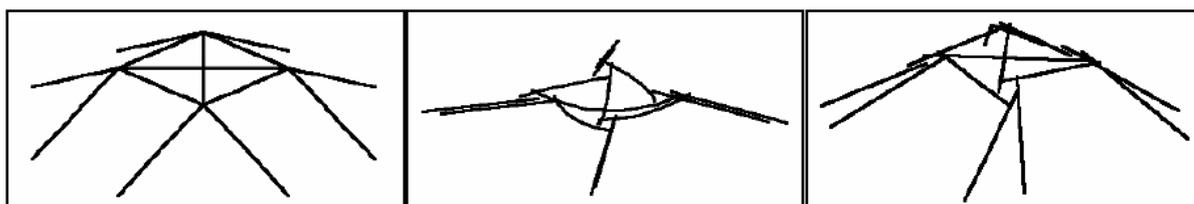


FIG. 3.31 – De l'intérêt du comportement mécanique fictif pour la recherche de forme.

L'image de gauche présente la structure à transformer en nexorade. La figure du centre montre le résultat de la recherche de forme avec des barres de raideurs égales, manifestement les contraintes dans les barres sont importantes. Si l'on divise la section des deux diagonales du carré central par 10000 et que l'on garde leur inertie constante, ses barres sont libres de s'allonger et de se raccourcir ce qui permet à la structure de converger vers la forme de droite. Cette forme est non-précontrainte mais les longueurs des diagonales sont légèrement différentes de celles de la structure de départ ce qui est une conséquence du choix de conception qui a été fait. Ainsi, grâce à la méthode de relaxation dynamique, on a pu trouver une forme en équilibre qui satisfait les contraintes géométriques de la structure de départ. Il semble ainsi que la méthode de relaxation dynamique permette une approche plus déterministe de la forme des nexorades :

3.9 Conclusion

La méthode de relaxation dynamique est donc une méthode originale de résolution de problème de mécanique non-linéaire qui remplace la recherche de l'état d'équilibre statique par un calcul dynamique fictif qui, par amortissements successifs, va conduire à l'état d'équilibre statique. Les principes généraux de son algorithme ont été présentés : d'abord le schéma explicite de différences finis qui règle le calcul dynamique et les détails de la mise en œuvre de l'amortissement cinétique, un amortissement artificiel qui permet d'absorber progressivement toute l'énergie cinétique de la structure. Ensuite, la méthode de calcul des efforts intérieurs a été détaillée, notamment le modèle de poutre fléchie avec seulement trois degrés de liberté en translation dans l'espace. Les hypothèses de ce modèle de poutre (une symétrie de révolution de la section et une rotation libre de la barre dans les assemblages) sont restrictives, mais néanmoins adaptées au type de structure étudié dans cette thèse. Pour pouvoir modéliser d'autres géométries d'éléments et considérer les efforts de torsion, il suffit de changer le mode calcul des efforts intérieurs en enrichissant la cinématique des éléments. Une première étape dans ce sens a été effectuée pour les structures planes sans difficulté théorique nouvelle [72]. Le programme actuel pourra donc rapidement être adapté pour des structures de poutres avec six degrés de liberté par nœud, ce qui permettra d'étendre son domaine d'application, notamment à l'étude de profilés quelconques et au déversement des structures.

Un modèle original pour la prise en compte des excentricités au niveau des liaisons a également été proposé. La cinématique de ce modèle a été développée pour le type particulier de liaison utilisé au laboratoire : des pièces d'assemblage d'échafaudage orientables. Néanmoins, son principe qui repose sur des relations purement géométriques entre les barres est facilement modifiable pour d'autres pièces de liaison. Ce modèle devrait permettre de mieux prévoir d'une part la géométrie des gridshells qui sont effectivement constitués de plusieurs couches de barres superposées et d'autre part la charge critique de flambement de la structure parce qu'il permet de prendre en compte les défauts de symétrie entre les couches induits par les excentricités.

Par ailleurs, une méthode d'optimisation des paramètres de l'algorithme a été décrite. L'objectif du calcul dynamique n'étant pas la description exacte du mouvement, la masse et l'amortissement ne doivent pas obligatoirement représenter les propriétés réelles de la structure. La méthode d'optimisation des paramètres repose donc essentiellement sur l'adaptation progressive de la masse affectée aux nœuds en fonction de la raideur actuelle des éléments de façon à garantir la stabilité de l'algorithme et à minimiser le temps de calcul.

Le programme a ensuite subi une série de tests de validation sur des calculs de structures en grands déplacements. Ont été vérifiées successivement sa convergence avec la densité du maillage, ses performances relatives et sa précision, l'influence des excentricités et sa capacité à être utilisé pour l'analyse des structures et la recherche de charges critiques d'instabilité. Le programme s'est avéré fiable, facile d'emploi et certaine fois plus performant qu'un logiciel de calcul aux éléments finis du commerce. Globalement une vingtaine d'éléments par barre suffit pour obtenir une précision satisfaisante (moins de 1 % d'erreur sur la géométrie et les contraintes). Pour ce qui est des excentricités, l'utilisation de connecteurs d'épaisseur non nulle, entraîne une augmentation de 30 % du temps de calcul. Il est donc recommandé de ne pas

les utiliser durant les premières étapes de la conception des gridshells, notamment celle de la recherche de forme qui est développée au chapitre suivant, et de les introduire ensuite, lorsque la forme générale est connue, pour l'analyse structurelle et la conception de la couverture. Enfin, la polyvalence de l'algorithme a été illustrée à l'aide d'un exemple de recherche de forme sur des structures multi-réciproques, aussi appelées nexorades.

Chapitre 4

Forme et gridshells

Les gridshells sont des structures indissociables de leur processus de montage : leurs formes sont obtenues par déformation élastique d'une grille sans rigidité en cisaillement. La forme d'un gridshell ne peut donc pas être imposée *ex abrupto*, elle est l'unique forme d'équilibre qui satisfait un certain jeu de contraintes géométriques et de conditions d'appui, l'expression de la raideur naturelle de la matière. Pour le concepteur, toute la difficulté consiste donc à trouver les formes en équilibre et les grilles associées qui répondent aux exigences d'un maître d'ouvrage ou d'un maître d'œuvre. C'est cette étape qu'il est convenu d'appeler la recherche de forme, en anglais le *form-finding*.

Malgré une certaine proximité de vocabulaire, la problématique de la recherche de forme est très différente de celle de la mise en forme de pièces mécaniques par application d'un moule (cf. P. Boisse [24]) parce que l'existence d'un moule suppose une connaissance a priori de la forme exacte de la pièce ce qui est impossible pour les gridshells à cause des contraintes imposées par le processus de montage. Pour définir la forme d'un gridshell, il faut donc adopter une stratégie : choisir parmi les paramètres de la grille initiale et de la forme finale les données et les variables sans compromettre la réversibilité du passage de l'une à l'autre. En fonction de la stratégie, trois familles de formes semblent se détacher : les formes funiculaires à contour imposé, les formes funiculaires à contour libre et les formes à surface imposée.

- La première famille de formes a été étudiée par Frei Otto et son équipe de l'*Institut für leichte Flächentragwerke* [78]. Ce sont les premiers à s'être intéressés à la recherche de forme des gridshells, à avoir exploré et tenté de dresser un inventaire des formes réalisables avec ce type de structure particulière. Leur démarche repose sur l'hypothèse que la raideur en flexion des éléments de la grille est négligeable ce qui leur permet de ne travailler que sur des filets suspendus. Les formes de l'IL découlent donc du choix des points de suspension des filets, de l'imposition de leurs contours ce qui explique leur regroupement sous le nom de « formes funiculaires à contour imposé ».
- La deuxième famille de formes est issue d'une stratégie de recherche de forme qui s'inspire de la méthode des filets suspendus. Dans cette stratégie, on conserve l'idée que la forme doit être le funiculaire de son poids propre mais on introduit la raideur en flexion de la grille ce qui permet d'inverser données et variables de la méthode des filets suspendus : la géométrie de la grille à plat n'est plus une variable mais une donnée et les positions des

appuis qui étaient données deviennent variables. Les formes obtenues sont alors désignées comme des « formes funiculaires à contour libre ».

- La troisième famille de formes émane d’une stratégie radicalement opposée à la recherche de formes en compression pure : la surface du gridshell est un trait d’architecte, défini par un processus extérieur de création sans a priori de réalité physique. L’association d’une méthode géométrique de développement des surfaces et de la relaxation dynamique permet de générer une grille en équilibre dont la forme est très proche de cette surface. C’est pourquoi ces formes sont appelées « formes à surface imposée ».

Après un bref rappel des méthodes historiques de recherche de forme, les paragraphes qui suivent examinent successivement chacune de ces trois familles de formes. On s’intéresse tout d’abord aux formes à contour imposé et à la méthode des filets suspendus. Les structures obtenues par cette méthode sont des structures idéales dans lesquelles la raideur en flexion des éléments est négligée. On verra que la méthode de relaxation dynamique permet d’étudier le domaine de validité de cette hypothèse et qu’elle permet d’évaluer les efforts à mettre en œuvre pour limiter l’écart qui sépare la grille réelle de la forme idéale du filet suspendu. On présentera ensuite la nouvelle stratégie de recherche de forme et, à partir de l’étude de l’influence des paramètres de définition de la grille, on établira un certain nombre de conseils pour le concepteur afin de limiter l’aléa lors du passage de la grille à la forme courbe. Enfin, on exposera une démarche très prometteuse qui permettrait aux gridshells de servir de structures pour la « blob architecture » et les bâtiments à surfaces courbes librement définies.

4.1 Historique de la recherche de la forme en compression pure

4.1.1 La recherche de forme à l’*Institut für leichte Flächentragwerke*

Dans *IL10 Gitterschalen* [78], l’ouvrage déjà cité de Frei Otto et son équipe de l’*Institut für leichte Flächentragwerke*, (IL), la définition donnée pour les gridshells est la suivante : « Un gridshell est une structure de barres, courbe dans l’espace. Les barres forment une grille plane avec une maille rectangulaire et un espacement constant entre chaque noeud. La forme du gridshell est déterminée par retournement de la forme d’un filet suspendu. De la même façon que le retournement de la chaînette donne la courbe idéale d’un arc sans flexion, le retournement de la forme du filet conduit à une surface funiculaire dans laquelle le gridshell est sans flexion. » Ce que cherchent Frei Otto et son équipe, c’est la coque en compression pure et un moyen économique de la construire. Avec les gridshells, ils pensent pouvoir y parvenir : l’étude de modèles réduits de filets doit aboutir à la réalisation de filets parfaitement tendus qui, par une opération intellectuelle de retournement, donneront des formes parfaitement comprimées, pendants surfaciques de la chaînette. Si on part d’un filet de mailles carrées et si on suppose que la raideur en flexion des éléments est négligeable, alors on est sûr que cette forme en compression parfaite pourra être obtenue par déformation d’une grille plane qui, après triangulation, deviendra un gridshell.

Ces travaux sur les formes prises naturellement par des filets suspendus s’inscrivent dans la continuité des activités passées de l’Institut pour les structures légères de Stuttgart (IL) dont les

membres sont parmi les premiers à s'intéresser aux problèmes de recherche de forme. Dès les années 1960, ils observent qu'un grand nombre de formes naturelles sont des formes d'énergie minimale, c'est-à-dire des formes dans lesquelles les efforts intérieurs sont minimaux. Ils développent alors des programmes expérimentaux afin d'observer et d'étudier ces formes d'équilibre pour pouvoir à terme les reproduire à une plus grande échelle, dans des structures habitables. Ils s'intéressent à un grand nombre de matériaux dont l'enveloppe est une surface courbe en équilibre : bille de mercure, jaune d'œuf, toile d'araignée, films de savon, etc. Ces derniers les intéressent tout particulièrement parce qu'ils se prêtent facilement à l'expérimentation et que la forme native prise par une bulle de savon sur un contour donné est la surface d'aire minimale qui s'appuie sur ce contour. Ces surfaces ont deux avantages principaux pour la construction de couvertures de bâtiments : elles sont celles qui utilisent le moins de matière pour couvrir l'espace à l'intérieur du contour et elles ont une tension de la surface uniforme ce qui permet d'optimiser le taux de travail du matériau constitutif de la couverture. Un grand nombre de maquettes sont réalisées à l'aide de fils de fer et de films de savon dont celle de la figure 4.1 qui servira vingt ans plus tard de modèle à la réalisation d'une piste de danse couverte à Cologne¹.

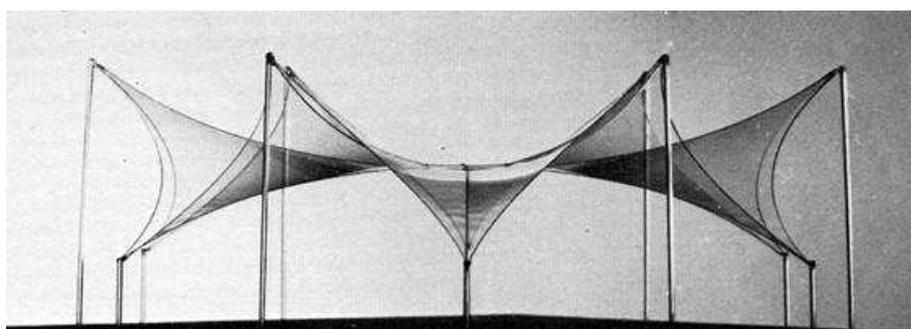


FIG. 4.1 – Maquette en film de savon du Tanzbrunnen de Cologne.

Certaines de ces maquettes trouveront une application dès les années soixante-dix et c'est de l'étude géométrique par photogrammétrie de films de savons que naîtront les formes des couvertures du pavillon allemand de Montréal en 1967 et des bâtiments du stade olympique de Munich de 1972 (cf. figure 4.2). Cependant, à l'époque de la réalisation de ces deux ouvrages, les textiles techniques n'avaient pas atteint un niveau de fiabilité suffisant pour être utilisés dans la construction, si bien que ce sont des structures tendues faites de réseaux de câbles d'acier qui reproduisent les formes issues des films de savon. Or le passage d'une surface continue à une surface discrète entraîne une variation dans le cheminement des efforts puisque l'on passe d'un matériau isotrope à un réseau avec deux directions privilégiées. Pour la structure de Montréal, il semble que cette nouvelle difficulté a été résolue par l'étude d'un modèle réduit du réseau de câbles. Le stade de Munich, dont les dimensions et les efforts dans les câbles sont plus importants, a été construit cinq années plus tard et, dans l'entre-temps, la collaboration entre l'« Institut pour les structures légères »(IL) et l'« Institut pour l'application de la géodésie dans la construction » a donné naissance à une nouvelle méthode de calcul pour les structures tendues : la méthode des densités de force (cf. paragraphe 3.1.2). C'est cette méthode qui fut utilisée pour établir la géométrie d'équilibre exacte des filets suspendus dont sont issus les gridshells.

¹Frei Otto, [79], p. 81.



FIG. 4.2 – La couverture de câbles du stade olympique de Munich.

4.1.2 Les autres approches

La démarche proposée par l'IL pour la recherche de forme des gridsells n'est cependant pas nouvelle et d'autres architectes ont déjà cherché une généralisation de la forme de chaînette pour la construction de grandes couvertures. Parmi les premières tentatives, on peut citer celle de Jacques-Germain Soufflot qui utilise une chaînette de révolution pour définir la forme de la coupole intermédiaire du Panthéon de Paris, mais c'est surtout des travaux de Gaudi pour la structure de la Sagrada Família ou de la crypte de la Colona Güell que s'inspirent les collaborateurs de Frei Otto².

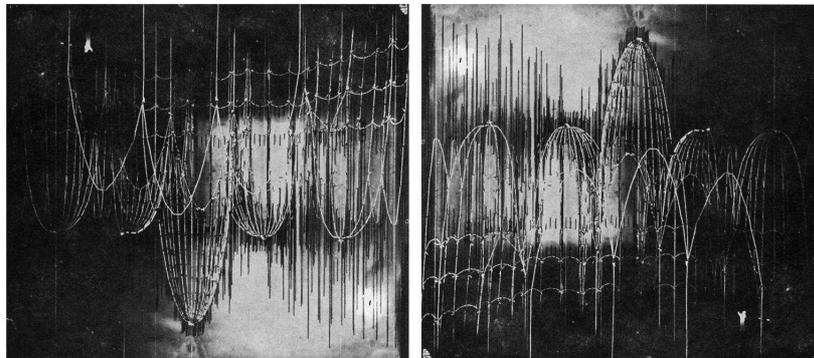


FIG. 4.3 – Maquette suspendue de Gaudi pour l'église de la Colona Güell et son image inversée.

En effet, pour la conception du système porteur de ses deux églises, Gaudi se sert de modèles réduits dans lesquels les poteaux et les arcs sont représentés par des ficelles tandis que de petits sacs de sables ou des fils de billes de plomb figurent le poids propre des éléments et celui de la couverture qu'ils supportent (cf. figure 4.3). Il obtient ainsi une représentation inversée du funiculaire de son bâtiment qu'il redessine ensuite « à l'endroit » à l'aide d'un miroir. Avec ce procédé, il est certain que toutes les colonnes seront toujours comprimées et peut donc sans crainte construire en maçonnerie ses édifices aux piliers inclinés. L'architecture des églises de Gaudi chamboule un ordre vertical établi et rompt avec les schémas habituels de l'arc en plein cintre et de l'arc brisé, mais elle garde toujours la hiérarchie classique entre les différents constituants de la structure et sépare clairement la colonne de la voûte.

²IL10 *Gitterschalen*, [78], p. 10-28.

L'originalité des travaux de l'IL par rapport à ceux de Gaudi réside donc dans la recherche de structures de surface unitaire, de structures non plus constituées d'une juxtaposition d'éléments rectilignes isolés et d'un remplissage mais réellement bidimensionnelles ; en ce sens, cette démarche se rapproche beaucoup de celle de Heinz Isler [87]. Ce dernier est également à la recherche d'une forme en compression parfaite et utilise également des modèles réduits soumis à leur poids propre dont il étudie la géométrie par photogrammétrie avant de les retourner virtuellement. Le matériel sur lequel il travaille est cependant différent : la plupart du temps, H. Isler se sert de tissus assez lâches qu'il charge d'eau ou de plâtre et dont la forme se fige avec le gel ou la prise du matériau. La figure 4.4 montre un exemple d'une maquette réalisée selon la technique d'Isler à partir d'une serviette imbibée d'eau et suspendue aux quatre coins et, figure 4.5, les tennis couverts réalisés à Crissier (Suisse) par H. Isler à partir d'une maquette similaire.



FIG. 4.4 – Forme prise par un tissu gelé dans le style de H. Isler.



FIG. 4.5 – Chantier des tennis couverts de Crissier de H. Isler.

On remarque que ces formes et celle de la figure 4.11 obtenue par inversion d'un filet suspendu aux quatre coins, présentent des différences importantes, notamment au niveau des rives. Celles-ci proviennent en fait directement des procédés et des matériaux mis en œuvre : Heinz Isler se sert de tissus avec une faible résistance en cisaillement et une résistance en flexion nulle alors qu'avec les gridshells et les travaux de l'IL, c'est l'inverse : la raideur en cisaillement est nulle et la raideur en flexion faible. Comme on peut le constater sur les figures 4.4 et 4.5, la méthode de H. Isler conduit naturellement à des formes dont les bords font retour, ce qui leur donne plus de raideur sans qu'il soit nécessaire de trop renforcer la coque. C'est un avantage certain par rapport aux filets inversés dont les bords doivent être rigidifiés par des éléments de structure extérieurs du type de ceux du gridshell de Mannheim (cf. paragraphe 1.3). Les coques en béton de H. Isler ont cependant un inconvénient majeur par rapport aux gridshells : la réalisation de leur coffrage nécessite la fabrication de charpentes complexes à double courbure et par conséquent très coûteuses (cf. figure 4.5) ; en revanche, la construction des gridshells ne requiert qu'un simple assemblage de barres droites et quelques appareils de levage. Les gridshells ont été pensés dès le départ avec leur méthode de montage ce qui est, en plus de l'optimisation de la forme, leur grand intérêt.

4.2 Formes funiculaires à contour imposé

Les formes funiculaires à contour imposé ont été étudiées par Frei Otto et son équipe de l'*Institut für leichte Flächentragwerke* [78]. L'hypothèse selon laquelle la raideur en flexion des éléments de la grille est négligeable est au centre de leur démarche. On verra qu'elle leur permet de ne travailler que sur des maquettes de filets suspendus et d'établir une typologie des gridshells fondée sur le type de contour imposé. Cependant les structures obtenues par cette méthode sont des structures idéales, sans flexion, on étudiera donc le degré d'approximation liée à cette hypothèse et on évaluera les efforts à mettre en œuvre pour limiter l'écart qui sépare la grille réelle de la forme idéale du filet suspendu.

4.2.1 Les formes de filets suspendus

La méthode pratique de l'IL pour la recherche de forme des gridshells comporte quatre temps. Tout d'abord, un filet à maille carrée est construit à partir de chaînes de dix maillons métalliques qui figurent les barres des gridshells et d'anneaux circulaires qui représentent les assemblages. Dans l'étape suivante, un jeu de conditions aux limites est choisi et le filet y est suspendu ; les longueurs des câbles de rives sont modifiées une à une jusqu'à ce que toutes les chaînes soient tendues, qu'aucune ne fasse de « ventre » entre deux anneaux et que la courbure globale soit visuellement satisfaisante. On peut voir sur la figure 4.6 un exemple de grille quadrangulaire suspendue aux quatre coins et en son centre, avec par retournement l'image du gridshell correspondant. Ensuite la géométrie du filet est relevée par photogrammétrie et une première approximation des coordonnées de chaque anneau est calculée. Enfin, dans la dernière étape, les positions que l'on vient d'évaluer sont recalculées avec la méthode des densités de forces de façon à ce que l'équilibre de la structure sous poids propre soit exactement vérifié en chaque point du maillage.

Dans ce processus, les paramètres dont le choix est laissé libre sont les conditions aux limites et le galbe désiré des bulbes formés par le filet. Le pas de la grille est donné et les efforts appliqués sur celle-ci sont invariablement égaux au poids propre. Le contour de la grille et la longueur des dernières chaînes sur les bords du filet sont les paramètres d'ajustement qui vont permettre de réaliser la forme qui satisfait à la fois les conditions aux limites et les attentes du concepteur en terme de courbure. Pour l'équipe de Frei Otto, tout procède donc des conditions aux limites, c'est d'elles que découle la forme des gridshells, la profondeur des poches dessinées par les filets n'étant finalement qu'un paramètre de dilatation verticale de la forme qui n'en change pas la nature. C'est donc fort logiquement que l'exploration des formes de gridshells est menée par type de conditions aux limites et que c'est à l'aide de celles-ci que la classification en famille de l'IL a été établie³ : les filets ponctuellement suspendus, les filets à deux bords rigides, les filets à un bord rigide ouvert, les filets à un bord rigide fermé, les filets avec des bords rigides ouverts ou fermés, les filets avec des points de suspensions intérieur, les filets mixtes avec des éléments comprimés, etc.

³IL10 *Gitterschalen*, [78], p. 68-121.

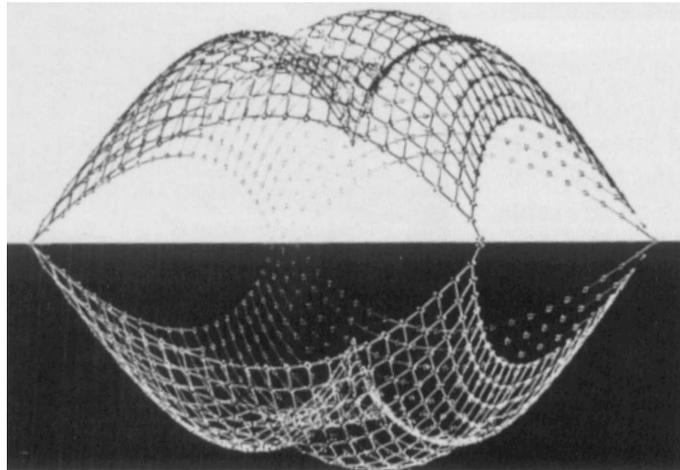


FIG. 4.6 – Maquette suspendue de l'IL et, par retournement, gridshell correspondant.

A partir de cette classification, l'exploration des formes à l'intérieur d'une même famille se fait par modification des positions des points ou des lignes d'appuis, en rapprochant tel ou tel ancrage, en en surélevant un autre, en retardant un câble de rive, etc. Tout part toujours du choix des conditions aux limites, ce sont elles qui permettent de contrôler la forme et qui lui donnent naissance. Tout se passe comme si la structure devait s'adapter aux limites qui lui sont fixées dans un projet virtuel où les emplacements des fondations sont déjà prévus. Dans l'univers de formes créé par Frei Otto, les formes parfaitement comprimées des gridshells sont l'expression de jeux de points d'appuis donnés. Cet univers est très riche comme en attestent les cent cinquante structures présentées dans *IL10 Gitterschalen* [78]. Cependant cet univers repose tout entier sur l'hypothèse que la raideur en flexion est négligeable, il importe donc de déterminer le domaine de validité de cette hypothèse.

4.2.2 Les limites de la méthode du filet inversé

L'hypothèse selon laquelle la raideur en flexion des éléments est négligeable se fonde sur le fait que, dans la structure finale, la raideur de la coque vient de sa forme et que celle-ci a été spécialement étudiée pour reprendre les efforts de poids propre sous forme d'efforts membranaires, c'est-à-dire uniquement sous forme d'efforts normaux dans les éléments du gridshells. Or, on l'a vu dans le paragraphe 1.1.2, la matière résiste bien aux efforts normaux (beaucoup mieux du moins qu'aux efforts de flexion), les dimensions des éléments de la grille peuvent donc être réduites et, par conséquent, le poids total de la structure aussi. Cette diminution des sections s'accompagne d'une diminution de l'inertie de sorte que la raideur en flexion des éléments est faible, ce qui légitime a posteriori l'hypothèse de départ et la recherche de forme à l'aide d'un réseau de câble. Toutefois l'inertie de la grille n'est pas nulle, on va donc déterminer dans quelle mesure elle influence la forme finale du gridshell et sa mise en œuvre grâce à la méthode de la relaxation dynamique et aux éléments de poutre développés au paragraphe 3.3.

On note que la forme finale de la structure est obtenue par une opération virtuelle de retournement à partir d'un filet soumis à l'effet de la gravité et que cette même gravité s'applique sur la grille à déformer. Durant sa mise en forme, la structure ne repose pas sur ces appuis définitifs

contrairement au filet dont elle est issue, elle ne se déforme que sous l'action d'une multitude de forces exercées par un système de levage ou d'échafaudage provisoire qui reproduit les effets inversés de la pesanteur et qui permet le contrôle de la forme. La vraie question autour de la raideur en flexion des éléments n'est donc pas de savoir si elle est négligeable devant le poids propre de la grille. Il s'agit plutôt de savoir quels sont les efforts à mettre en œuvre pour amener la grille dans sa position finale et quand ceux-ci sont négligeables devant le poids de la grille à soulever.

Influence de la raideur en flexion sur la forme d'une barre simple

Pour ce faire, on commence par étudier la forme à l'équilibre d'une poutre simple avec la méthode de la relaxation dynamique. Les conditions de la recherche de forme sont identiques à celles mises en œuvre à l'IL : la position des appuis est imposée et la structure est soumise à son poids propre. La poutre a une longueur de 10 m, une section de 5 cm² et une inertie de 10 cm⁴, son module d'Young est de 30 GPa et elle est soumise à un chargement uniformément réparti de 2 N/ml. Les positions des extrémités sont choisies arbitrairement et fixes. Pour chaque position des appuis, le problème admet deux solutions particulières (cf. figure 4.7) : la première est obtenue lorsque la raideur en flexion est nulle (la courbe est alors une chaînette) et la deuxième lorsque le chargement extérieur est nul (la courbe est alors une *elastica*).

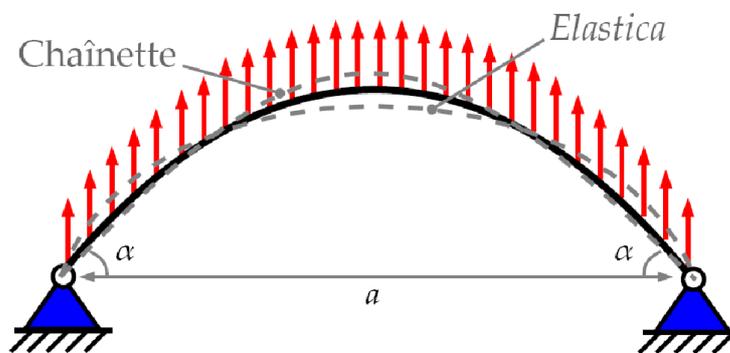


FIG. 4.7 – Poutre fléchie uniformément chargée avec la chaînette et l'*elastica* de référence.

Les différents écartements a des extrémités de la poutre sont déterminés à partir des angles d'attaque caractéristiques de l'*elastica* qui ont été décrits dans le tableau 3.1. Pour chaque écartement, on calcule une première fois la position d'équilibre de la poutre fléchie et l'écart de hauteur entre la poutre et la chaînette. On compare ensuite cet écart à un certain seuil qui est défini comme l'écart en dessous duquel on peut considérer que l'influence de la raideur en flexion sur la forme de la poutre est négligeable. Ici on a choisi deux seuils : $\delta_{max} < 3$ cm et $\delta_{max} < 1$ cm. Si l'écart de hauteur est supérieur au seuil, on divise l'inertie de la poutre par deux et on calcule à nouveau la forme d'équilibre de la poutre fléchie et l'écart de hauteur entre la poutre et la chaînette. Si cet écart est encore supérieur au seuil que l'on s'est fixé, on recommence jusqu'à atteindre l'inertie limite I_{lim} pour laquelle la poutre fléchie et la chaînette sont indiscernables.

À partir des inerties limites trouvées pour chaque écartement, un facteur adimensionnel est construit pour permettre la généralisation de l'étude. Il est défini comme le rapport entre le

chargement appliqué p et la raideur de flexion de la poutre EI_{lim}/L^3 au-delà de laquelle l'écart entre la poutre fléchie et la chaînette est inférieure au seuil choisi. De plus, pour que la valeur initiale du facteur adimensionnel obtenue lors du premier calcul soit entière, on introduit une constante multiplicative. L'expression finale du facteur adimensionnel est donc $3pL^3/2EI_{lim}$. Les valeurs limites de ce facteur pour les différents écartements sont présentés dans le tableau 4.1.

TAB. 4.1 – Rapports $3pL^3/2EI_{lim}$ à partir desquels la flexion est négligeable sur 10 m.

Angle	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Écartement : a/l	0,992	0,970	0,932	0,881	0,817	0,741	0,655	0,559	0,457
Seuil A : $\delta_{max} < 3$ cm	1	32	128	64	1	1	2 048	4 096	16 384
Seuil B : $\delta_{max} < 1$ cm	64	512	1024	1024	512	1 024	8 192	8 192	16 384

On remarque tout d'abord une grande dispersion des résultats. La première ligne du tableau indique cependant que plusieurs *elasticae* (celles obtenues pour 10°, 50° et 60°) sont naturellement très proches des chaînettes correspondantes. En effet, lorsque le facteur adimensionnel $3pL^3/2EI$ est petit (c'est-à-dire proche de 1), cela signifie qu'il n'est pas nécessaire de diminuer beaucoup l'inertie pour satisfaire le critère de forme, la raideur de flexion influence peu la forme de la poutre. En revanche, lorsque celui-ci est grand, l'inertie limite est faible, c'est donc que la raideur en flexion joue un rôle important dans la définition de la forme à l'équilibre. C'est le cas des poutres qui sont construites sur les *elasticae* qui font des angles de 70°, 80° et 90° avec l'horizontale.

On remarque ensuite que, pour augmenter la précision et descendre en dessous du centimètre, les valeurs des rapports chargement appliqué sur raideur en flexion sont du même ordre jusqu'à 60° (entre 512 et 1024). Au-delà, il faut multiplier encore par 8 ou par 16 ces rapports pour pouvoir négliger l'inertie de flexion. On a donc tout intérêt à concevoir des gridshells dans lesquels les barres ont des angles d'attaque inférieur ou égal à 60° parce que la méthode du filet inversé fournira une très bonne approximation de la géométrie réelle de la grille et parce que la géométrie réelle sera très proche du funiculaire de son poids propre. Au-delà de 60°, la raideur en flexion a une grande influence sur la forme; pour atteindre la forme du filet, il faut donc utiliser des éléments très élancés qui n'auront vraisemblablement pas l'inertie suffisante pour assurer la stabilité du gridshell.

Par ailleurs, ces résultats permettent d'obtenir très rapidement une idée de l'ordre de grandeur des efforts à appliquer à une grille (en plus de son poids propre) pour qu'elle épouse la forme d'un filet suspendu. En effet, à partir des caractéristiques de la grille (sa raideur en flexion) et de celles de la forme (l'angle qu'elle fait avec le sol), le tableau 4.1 donne une estimation de la charge répartie en fonction de la précision souhaitée. Par exemple pour le gridshell de Mannheim, on sait d'après E. Happold [48] que la grille est constituée de mailles de 500 x 500 mm formées par deux nappes superposées de barres d'une section de 50 x 50 mm dans chaque direction et que le module d'Young du bois utilisé est de 10,4 GPa. La portée du plus grand dôme est de 60 m et sa hauteur de 30 m. Si on suppose que la coupe transversale le long de la barre la plus longue du dôme est une *elastica* de mêmes proportions, on peut déduire la longueur de cette barre à l'aide du tableau 3.1, c'est-à-dire environ 90 m. On a ainsi tous les éléments nécessaires au calcul de la raideur en flexion d'une poutre de la grille.

Il faut ensuite déterminer de quelle *elastica* la forme se rapproche le plus. Sur la photographie de la figure 1.13, on observe que la pente du gridshell n'excède pas 60° sur les bords., c'est donc cet angle qui est choisi comme référence. D'après l'article de E. Happold [48], la précision souhaitée entre la géométrie du filet suspendu et le gridshell est de 5 cm. En rapportant cette précision au 90 m de long de la barre, on en déduit qu'elle équivaut à une précision de 0,5 cm entre une barre fléchie de 10 m et la chaînette correspondante ($0,5 \text{ cm} \simeq 5 \text{ cm} \cdot 10/90$). Cette précision étant supérieure à celle du tableau 4.1, il faut donc faire de nouveaux calculs pour un angle 60° , on trouve finalement $3pL^3/2EI = 4096$. La charge de levage p par unité de longueur de barre vaut donc $4096 \cdot 2EI/3L^3$.

Il ne reste plus qu'à évaluer la longueur totale de barre reprise par chaque tour de levage. Sachant que celles-ci sont espacées de 9 m les unes des autres et qu'il y a deux nappes de deux barres dans deux directions par mètre de grille, la longueur totale L_{tot} de barres à fléchir est de $8 \times 9 \times 9$ m. L'effort P dans chaque tour donné par $L_{tot}p$ vaut donc :

$$P = L_{tot} 4096 \frac{2EI}{3L^3} \quad \text{soit :} \quad P = 8 \times 9 \times 9 \times 4096 \frac{2}{3} \frac{10,4 \cdot 10^9 \times 5^4 \cdot 10^{-8}}{12 \cdot 90^3} \quad (4.1)$$

L'application numérique donne un effort d'environ 13,1 kN. On note qu'il semble que cet effort n'ait pas été calculé pour le dimensionnement des tours de levage. Il a vraisemblablement été supposé que, de la même façon que la maquette prend sa forme sous son propre poids, la charge extérieure à appliquer pour fléchir la grille serait égale à l'inverse de son propre poids, soit l'équivalent pour chaque tour de $L_{tot}\rho S$, c'est-à-dire 13 kN. Cette valeur est étonnamment proche de la valeur trouvée à l'aide de l'expression (4.1) ce qui légitime a posteriori l'hypothèse faite par E. Happold [48] et le fait que l'on puisse négliger dans ce cas précis la raideur en flexion des éléments.

Influence de la raideur en flexion sur la forme d'une grille rectangulaire

Dans le calcul qui précède sur le gridshell de Mannheim, on a fait l'hypothèse que la grille se comportait comme un assemblage de poutres simples indépendantes et que les rapports $3pL^3/2EI$ calculés pour une poutre simple étaient toujours valables. On vérifie ici cette hypothèse à l'aide d'une grille rectangulaire de 26,2 m par 16,2 m dont les positions des quatre coins sont imposées et qui est soumise à un chargement uniforme vers le haut. À la différence de l'exemple précédant où l'on divisait par deux l'inertie des poutres pour converger vers la chaînette, on multiplie ici progressivement la charge appliquée par dix. D'un point de vue physique, l'effet obtenu est identique, il s'agit toujours de faire varier le rapport adimensionnel pL^3/EI en gardant tous les paramètres constants sauf un. À chaque étape, on mesure la distance moyenne qui sépare la grille en équilibre du filet inversé et on les regroupe dans le tableau 4.2. Comme pour la poutre simple, à mesure que le rapport pL^3/EI augmente, la forme de la grille converge vers celle du filet suspendu et la raideur en flexion devient négligeable lorsque le rapport pL^3/EI est supérieur à 1000.

Au début, pour les faibles valeurs de pL^3/EI , la structure est très plate comme on peut le voir sur la figure 4.8 : les barres centrales sont quasiment droites et seules les barres latérales

sont déformées. En dehors de l'écart qui sépare la forme de la figure 4.8 de celle du filet inversé de la figure 4.11, on remarque qu'elle ne possède qu'une très faible courbure. À propriétés de section égale, elle aura donc, une fois triangulée, une résistance mécanique et une raideur très faibles comparativement à celle du filet inversé.

TAB. 4.2 – Évolution de la distance entre la grille fléchie et le filet inversé avec le rapport pL^3/EI .

pL^3/EI	1,79	17,9	179	1794
δ_{moy} en cm	321,6	258,5	7,8	0,0
δ_{max} en cm	648,7	505,2	17,0	0,1

Quand on augmente légèrement le rapport pL^3/EI , la distance moyenne entre le filet inversé et la grille reste du même ordre de grandeur que celle de la grille précédente : 258 cm pour $pL^3/EI = 17,9$ et 321 cm pour $pL^3/EI = 1,79$. La partie centrale s'arrondit un peu mais la structure reste très plate (cf. figure 4.9). La flèche de la grille dans la partie centrale ne dépasse pas les 5 % de la largeur et 14 % de la longueur de la structure ce qui est encore insuffisant si l'on considère que l'effet coque se produit pour des flèches supérieures à 10 %. Le comportement de cette structure après triangulation devrait donc a priori rester plus proche de celui d'une grille que d'une coque.

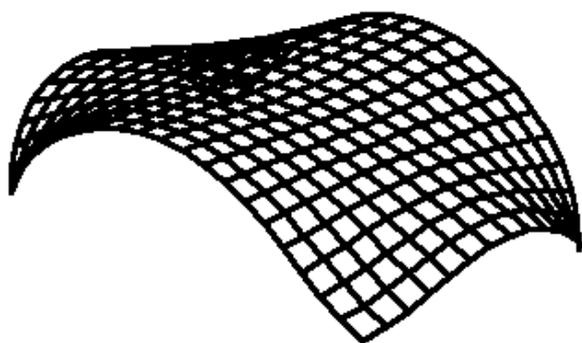


FIG. 4.8 – Grille obtenue pour $pL^3/EI=1,79$.

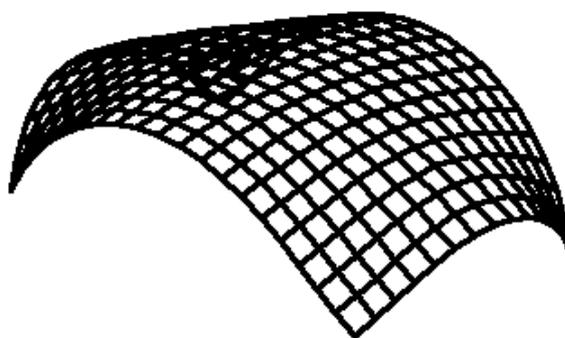


FIG. 4.9 – Grille obtenue pour $pL^3/EI=17,9$.

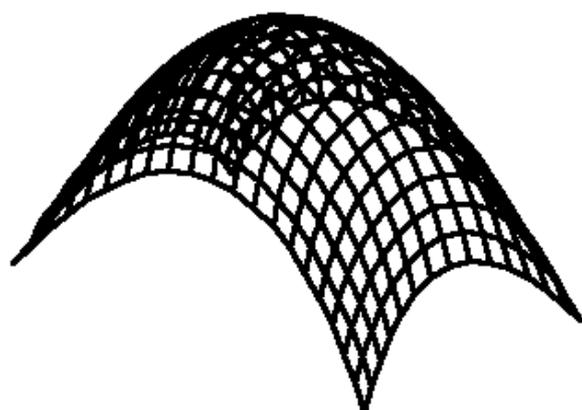


FIG. 4.10 – Grille obtenue pour $pL^3/EI=179$.

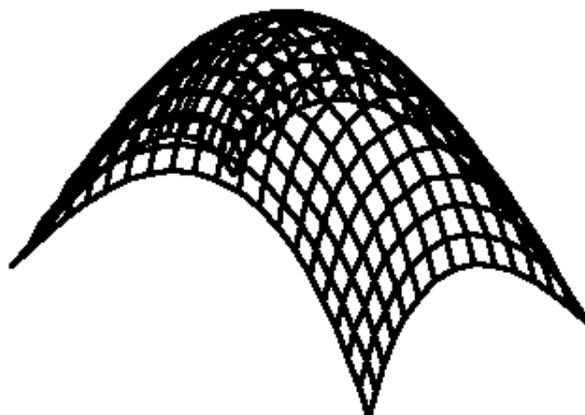


FIG. 4.11 – Filet inversé correspondant.

En multipliant une nouvelle fois par dix le rapport pL^3/EI , les écarts entre la structure et le filet inversé changent d'échelle et il devient délicat à l'œil nu de différencier la grille obtenue pour $pL^3/EI = 179$ de la figure 4.10 et le filet de la figure 4.11. En passant à $pL^3/EI=1794$, la grille et le filet sont indiscernables, les écarts entre les points sont inférieurs au millimètre (cf. tableau 4.2). Le facteur adimensionnel proposé dans ce paragraphe est donc le bon outil pour savoir quels sont les efforts à appliquer sur une grille rectangulaire pour atteindre la forme d'un filet inversé. L'ordre de grandeur de ce facteur dépend de l'angle initial que forment les barres fléchies avec leurs cordes : en deçà de 60° les effets de la raideur en flexion sur la forme sont négligeables pour $pL^3/EI \geq 500$ ou 1000 ; au delà, ils sont négligeables pour $pL^3/EI \geq 5000$ ou 10000 .

Par ailleurs, plus pL^3/EI est grand, plus les formes des grilles et du filet sont proches, le comportement des gridsells correspondants sous chargement de poids propre seront donc proches et leurs raideurs très élevées. Ainsi, même si techniquement l'algorithme de relaxation dynamique permet de concevoir et d'étudier des formes qui reflètent plutôt la raideur naturelle de la grille en flexion que le funiculaire du poids propre de la structure [54], on a intérêt à conserver l'idée générale de la recherche de forme selon Frei Otto et à chercher des formes qui se rapprochent du funiculaire de leur poids propre car c'est le meilleur moyen de concevoir des structures légères, le meilleur moyen d'économiser l'énergie et la matière requises pour la construction d'un bâtiment.

4.3 Formes funiculaires à contour libre

Pour les formes funiculaires à contour imposé, les conditions aux limites sont les points de départ de la recherche de forme : c'est sur un jeu de points et de lignes d'appuis que l'on vient construire la forme d'équilibre du filet suspendu par un ajustement progressif de la longueur des chaînes situées sur le bords de la grille. Le contour de la grille n'est alors que le résultat de tout le processus de définition de la forme. La prise en compte de la raideur des éléments de la grille va permettre le retournement de cette perspective : le contour de la grille va devenir une donnée d'un problème dont les conditions aux limites sont laissées libres de varier dans un certain domaine. La démarche proposée ici est donc nouvelle et rendue possible grâce à l'utilisation de la méthode de relaxation dynamique. Le vecteur de la forme reste une force verticale uniformément répartie de sorte que la structure converge vers une grille proche du funiculaire de son poids propre ce qui garantit les bonnes performances mécaniques de la forme finale. L'étude qui suit a pour objectif la détermination de l'influence des paramètres de cette nouvelle méthode de recherche de forme et l'établissement d'une sorte de guide de conception qui permet de limiter l'aléa du passage de la grille à une forme funiculaire à contour libre.

4.3.1 Les paramètres de définition de la grille

Dès lors que la grille à plat devient le point de départ de la recherche de forme, le problème devient beaucoup plus riche que ne l'était celui du filet suspendu et la définition précise des

paramètres qui caractérisent la grille, indispensable. Les travaux de l'IL ont montré que les seules topologies de grille qui satisfassent à la fois les conditions cinématiques de déployabilité de la grille et les conditions de continuité des barres sont les grilles formées de parallélogrammes⁴. Il y a donc six paramètres pour la recherche de forme :

- le contour dans lequel s'inscrit la grille (carré, circulaire, elliptique, hexagonal ou de forme beaucoup plus complexe) ;
- le pas de la grille : régulier ou non, lâche ou dense ;
- l'orientation des deux directions de barres : à la fois l'une par rapport à l'autre et par rapport aux lignes caractéristiques du contour ;
- les raideurs relatives des éléments entre eux ;
- les conditions d'appui de la grille (appuis fixes ou glissants, sur une ligne droite ou courbe, sur un plan, etc.) ;
- le taux de chargement extérieur.

Les variations de chacune de ces grandeurs sont infinies et une étude systématique des possibilités offertes par la méthode semble vaine. Néanmoins, on peut avec quelques essais se forger une idée de l'influence de l'un ou de l'autre de ces paramètres et ainsi limiter la part d'aléas et orienter la forme dans la direction que l'on souhaite. Pour s'en convaincre, on étudie un certain nombre d'exemples représentatifs construits sur deux contours de grille élémentaires : un carré et un cercle (cf. respectivement figures 4.12 et 4.13).

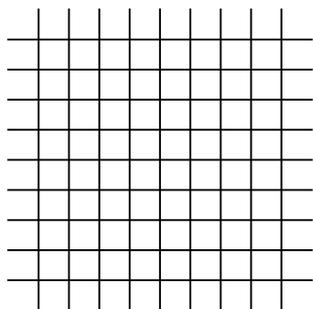


FIG. 4.12 – Grille élémentaire carrée.

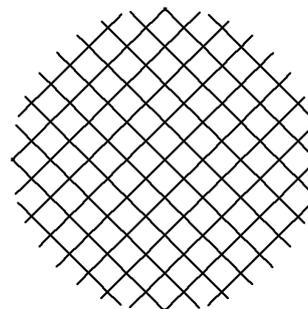


FIG. 4.13 – Grille élémentaire circulaire.

Les deux grilles ont des propriétés semblables : le côté du carré et le diamètre du cercle mesurent dix mètres, le pas des deux grilles est de un mètre, les propriétés des sections sont identiques ($E = 25$ GPa, $S = 4,2$ cm² et $I = 7,9$ cm⁴) et toutes les structures sont soumises à un chargement uniforme p de 120 N/ml dirigé perpendiculairement au plan de la grille (Les raisons de ce choix sont expliquées dans le paragraphe ci-dessous).

4.3.2 Influence du taux de chargement

Pour déterminer l'influence du taux de chargement sur la forme d'une grille, on s'intéresse à la forme que prend naturellement une poutre sur appuis simples sous l'action d'une charge uniformément répartie que l'on augmente progressivement. Chaque forme à l'équilibre est compa-

⁴IL10 *Gitterschalen*, [78], p. 38-45.

rée à la chaînette de même longueur dont les positions des extrémités sont celles des extrémités de la poutre à l'équilibre. Pour chaque étape de chargement, on effectue donc deux calculs : un premier sur une poutre de 10 m de long avec une section de 5 cm², une inertie de 10 cm⁴ et un module d'Young de 30 GPa dont les extrémités sont libres de se déplacer horizontalement (cf. schéma de la figure 4.14) ; un deuxième sur un câble de même longueur et mêmes propriétés géométriques et mécaniques avec les extrémités fixes. On note que le problème étudié ici est différent de celui du paragraphe 4.2.2 : la poutre précédente était hyperstatique et ses conditions aux limites fixes lui imposaient une courbure en l'absence de chargement ; ici, les appuis sont libres horizontalement, la poutre ne se déforme que sous l'action du chargement extérieur. Le but est d'une part d'étudier l'ordre de grandeur des déformations associées au taux de chargement qui est mesuré par le rapport adimensionnel pL^3/EI et d'autre part de voir quelle distance sépare la forme de la poutre fléchie de celle de la chaînette.

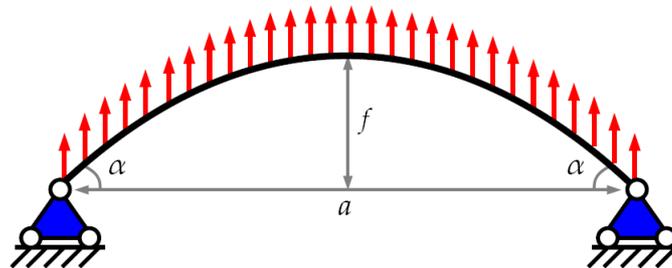


FIG. 4.14 – Méthode d'obtention d'une pseudo-chaînette.

Après chaque calcul, on note l'angle d'attaque α de la barre ainsi que la distance moyenne entre la déformée obtenue et la chaînette correspondante. On peut ainsi tracer les deux graphiques des figures 4.15 et 4.16. Le premier représente l'évolution de l'angle α en fonction du rapport pL^3/EI , elle permet de savoir quelle va être la forme prise par une poutre pour un taux de chargement donné. On constate que, jusqu'à 50° ou 60°, la forme est très sensible au taux de chargement car l'angle α augmente rapidement avec le rapport pL^3/EI . Au delà de 60°, l'angle α augmente beaucoup plus lentement et tend vers sa limite, 90° ; les deux extrémités de la poutre sont alors confondues, la poutre est repliée sur elle-même et parfaitement tendue.

Par ailleurs, la comparaison des valeurs du facteur adimensionnel pL^3/EI de la figure 4.15 avec celles du tableau 4.1 montre que les valeurs des rapports de mise en forme de la poutre sont inférieures (environ dix fois) à celles pour lesquels l'influence de l'inertie de flexion était négligeable. Cela est logique car ici la forme est déterminée par le taux de chargement et il faut pour cela que la raideur en flexion ne soit pas négligeable devant ce dernier, faute de quoi l'angle α tend vers 90° et la poutre se replie sur elle-même.

Le second graphique (cf. figure 4.16) représente la distance moyenne entre la chaînette et la déformée de la poutre en fonction du rapport pL^3/EI . On observe que celle-ci reste inférieure à 3 cm tant que l'angle d'attaque reste inférieur à 65°, avec un optimum vers 57,5°. Ces résultats sont en accord avec ceux du tableau 4.1, tant sur l'ordre de grandeur des rapports pL^3/EI que sur la position du minimum de l'écart relatif de hauteur entre l'*elastica* et la chaînette. Il semble donc que la méthode qui consiste à laisser les extrémités d'une barre soumise à un effort vertical, libres de se déplacer sur un plan horizontal conduise naturellement à des formes quasi-funiculaires

tant que le rapport pL^3/EI reste inférieur à 65. Elle peut donc avantageusement être utilisée pour la recherche de forme de gridshells avec un contour libre. C'est la raison pour laquelle un chargement de 120 N/ml choisi pour les deux grilles de référence (cf. figures 4.12 et 4.13) a été choisi. Il correspond pour les barres les plus longues (celles de dix mètres) à un rapport pL^3/EI de l'ordre de 60, exactement dans la zone dans laquelle la déformée de la poutre est proche de la chaînette. Toutes les formes présentées par la suite auront donc, une fois triangulées, un comportement optimal sous poids propre.

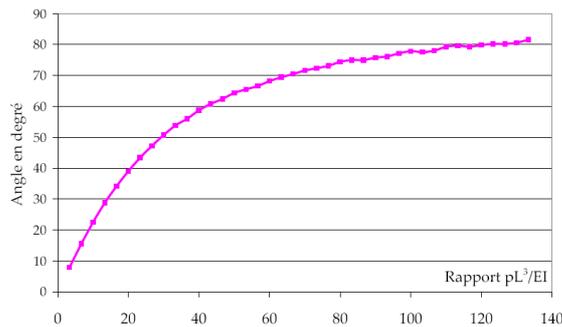


FIG. 4.15 – Évolution de l'angle α avec le rapport pL^3/EI .

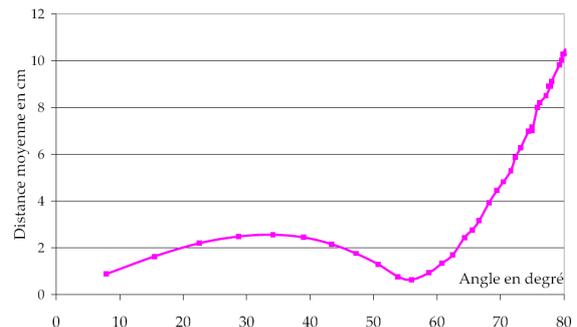


FIG. 4.16 – Évolution de la distance à la chaînette.

4.3.3 Influence des conditions aux limites

Quelle que soit la démarche de recherche de forme, on constate qu'on ne peut pas à la fois imposer le contour de la grille et le contour de la forme en équilibre. Dans le cas d'un filet suspendu, cela conduirait à des structures partiellement détendues et donc à des structures qui n'atteindraient pas l'objectif de la recherche de forme ; ici, la mise en tension de l'ensemble de la structure est préférable (car elle signifie que l'on est proche du funiculaire du poids propre), mais ce n'est pas le seul critère structurel et l'imposition simultanée des deux contours conduit à des barres soumises à de brusques changements de courbure synonymes de zones de fortes contraintes comme l'illustre les exemples qui suivent.

Sur la figure 4.17, on peut voir la forme que prend la grille carrée sous une charge verticale uniforme lorsqu'on maintient les extrémités de toutes les barres dans le plan initial de la grille mais qu'on les laisse libres de se déplacer horizontalement dans ce plan. Cette forme est à comparer à celles des trois figures suivantes. La forme de la figure 4.18 a été obtenue en bloquant complètement les positions des extrémités des barres. Ces positions sont définies par une homothétie de rapport $4/5^e$ des positions précédentes (le rapport $4/5^e$ correspondant à peu près au déplacement moyen des extrémités la grille de la figure 4.17). La forme de la figure 4.19 résulte d'un processus similaire au précédent mais dans lequel les contraintes géométriques sont plus souples : les extrémités des barres sont toujours déplacées artificiellement sur les bords d'un carré dont le côté mesure les quatre cinquièmes du côté de la grille initiale mais cette fois les extrémités des barres glissent librement sur le côté du carré. Enfin, la forme de la figure 4.20 est à nouveau obtenue par un assouplissement des conditions aux limites de la deuxième forme, sur deux côtés opposés, les extrémités glissent désormais librement sur le plan.

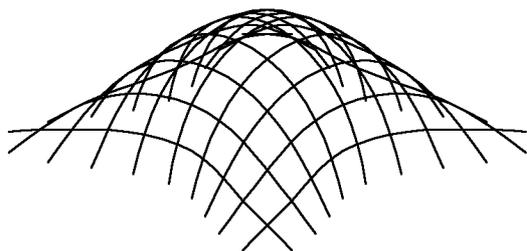


FIG. 4.17 – Grille carrée avec tous les appuis glissants sur le plan.

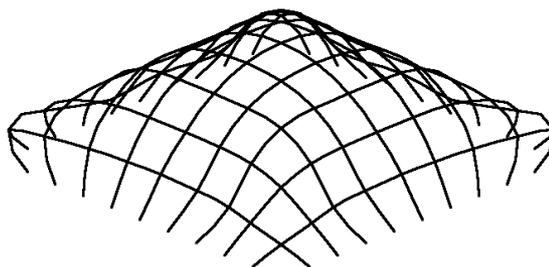


FIG. 4.18 – Grille carrée avec tous les appuis bloqués.

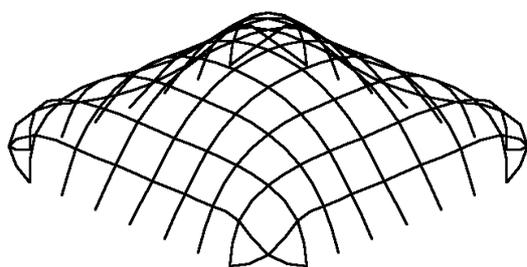


FIG. 4.19 – Grille carrée avec des appuis glissants sur des lignes parallèles aux lignes d'appuis.

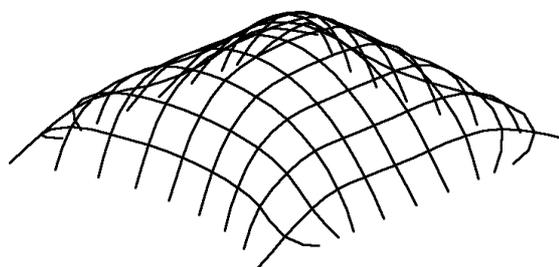


FIG. 4.20 – Grille carrée avec deux lignes opposées glissants sur le plan et deux sur une ligne.

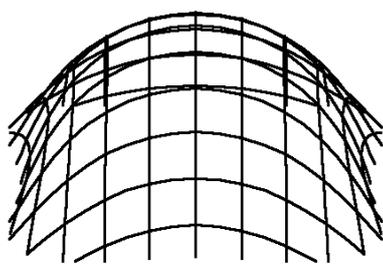


FIG. 4.21 – Grille circulaire avec tous les appuis glissants sur le plan.

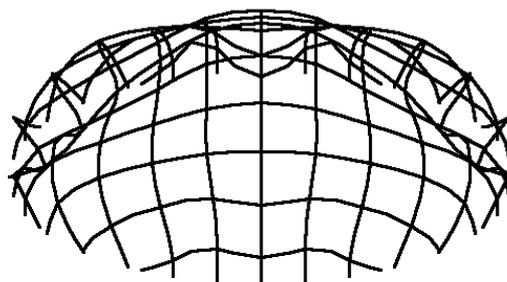


FIG. 4.22 – Grille circulaire avec tous les appuis bloqués.

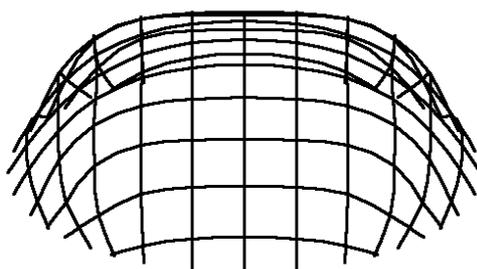


FIG. 4.23 – Grille circulaire avec tous les appuis glissants sur un cercle.

On remarque que moins on bloque de degrés de liberté, plus la courbure générale de la grille est importante et plus la répartition des courbures est uniforme. La partie centrale des formes contraintes est beaucoup plus plate que celle de la forme libre et, de même, les barres dans les angles des figures 4.18, 4.19 et 4.20 sont beaucoup plus fléchies que celles de la figure 4.17.

Les mêmes remarques sont valables dans le cas d'une grille circulaire. En effet, si l'on considère la forme que prend naturellement la grille circulaire sous l'action d'une charge uniformément répartie lorsqu'on laisse les extrémités de ses barres libres de glisser dans le plan de la grille (cf. figure 4.21) et celle qu'elle prend lorsqu'on bloque les positions de ses extrémités sur un cercle homothétique (cf. figure 4.22) ou lorsqu'on les laisse libres de se déplacer sur ce même cercle homothétique (cf. figure 4.23), on constate à nouveau que la forme libre est plus courbe et plus uniformément précontrainte que les deux formes dont les conditions aux limites sont plus ou moins sévèrement imposées.

4.3.4 Influence des singularités du contour

Le contour ou le périmètre dans lequel s'inscrit la grille est défini par une courbe le long de laquelle les conditions aux limites varient. On va voir que pour obtenir des formes performantes mécaniquement, les variations des conditions aux limites doivent être en accord avec les singularités du contour. On précise tout d'abord quelques points de vocabulaire. On désigne par « contour lisse » un contour continu et dérivable, et par « contour singulier » un contour avec des points singuliers. De même, on appelle « conditions d'appui lisses » des conditions d'appui qui ne varient pas brutalement entre deux points d'appui successifs et « conditions d'appui singulières » des conditions d'appui qui varient brutalement. Ainsi le carré est un contour singulier et le cercle un contour lisse ; de même des appuis glissants partout constituent des conditions d'appui lisses et des appuis fixes ponctuellement des conditions d'appuis singulières.

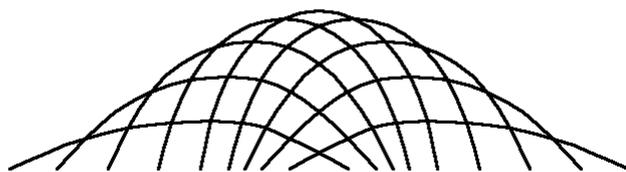


FIG. 4.24 – Profil de la grille carrée avec tous les appuis glissants sur le plan.

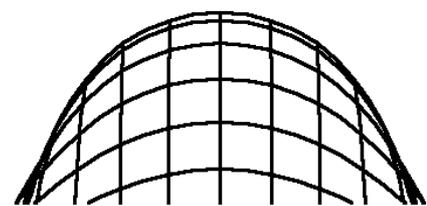


FIG. 4.25 – Profil de la grille circulaire avec tous les appuis glissants sur le plan.

Ces précisions faites, on peut comparer les différentes associations possibles : par exemple, la figure 4.24 et la figure 4.25 qui sont les vues de profil des figures 4.17 et 4.21. La première résulte de l'association d'un contour singulier (le carré) avec des conditions aux limites lisses (les extrémités de toutes les barres glissent librement sur le plan). La seconde résulte de l'association d'un contour lisse (le cercle) avec des conditions aux limites lisses (ici aussi, les extrémités glissent librement sur le plan). On observe que la grille carrée conduit à une forme moins habitable que la grille circulaire, à une forme avec des zones très plates dans les angles qui sont

propices à l'apparition de flexion. Le comportement des formes résultant de l'association d'un contour singulier et de conditions d'appuis lisses semble donc moins performant que celui des formes issues de l'association d'un contour lisse et de conditions d'appui lisses.

Il semble que la réciproque soit également vraie et que l'association d'un contour lisse et de conditions d'appui singulières conduit à des formes tout aussi peu performantes et peu habitables. Par exemple, les figures 4.26 et 4.27 sont obtenues en ajoutant des barres de rives sur les quatre côtés de la grille carrée élémentaire et en fixant ponctuellement le milieu de chaque côté sur le plan de la grille. Dans la première structure, les barres de rive sont interrompues au droit des appuis ce qui introduit une singularité dans le contour de la grille alors que, dans la seconde structure, le contour est lisse parce que les barres de rive sont continues. On observe bien que les ouvertures de la forme avec les rives continues sont plus étroites et plus basses que la forme aux rives brisées qui, par ailleurs, touche le sol avec plus d'élégance. En outre, les poutres de rives de la forme de la figure 4.27 ne permettent pas de retransmettre les efforts verticaux en ligne droite jusqu'aux appuis, elles seront donc soumises à des efforts de flexion importants. Pour optimiser le comportement mécanique de la forme finale, il semble donc préférable d'associer des contours et des conditions aux limites de même nature.

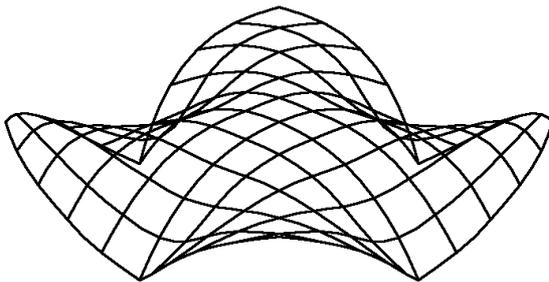


FIG. 4.26 – Grille carrée sur quatre appuis avec des barres latérales interrompues.

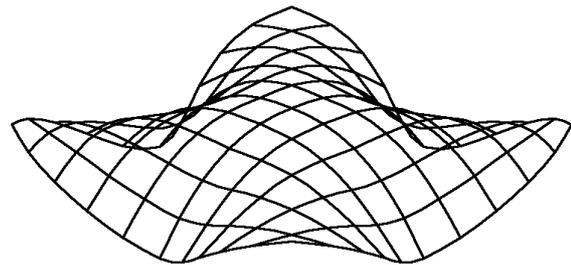


FIG. 4.27 – Grille carrée sur quatre appuis avec des barres latérales continues.

4.3.5 Influence de la régularité du maillage

Aucun exemple pertinent dans lequel la régularité du maillage joue un grand rôle dans la recherche de forme n'a pu être trouvé. Il semble que ce paramètre soit plus lié à la phase de conception et de dimensionnement de la structure qu'à la phase de recherche de forme et que le principe à retenir soit celui d'une redensification du maillage dans les zones à plus faible courbure de façon à compenser le manque de raideur géométrique par une raideur matérielle.

4.3.6 Influence de l'orientation de la grille par rapport à son contour

La grille telle qu'elle est assemblée pour la mise en forme constitue une sorte de « macro-matériau » anisotrope avec deux directions principales et sans rigidité en cisaillement. L'orientation de ces directions par rapport aux éléments caractéristiques du périmètre de la grille, comme les plans de symétrie, joue donc un rôle particulièrement important dans le processus. Ainsi, si l'on opère une rotation de 45° des axes de la grille carrée élémentaire (cf. figure 4.12) à l'intérieur

de son périmètre, on obtient une nouvelle grille représentée sur la figure 4.28. On compare ensuite les déformées des deux grilles sous le même chargement et avec des conditions aux limites glissantes partout et on constate que la forme de la figure 4.29 est très différente de la forme de la figure 4.24. La grille à 45° est moins étalée, plus haute et possède des parois latérales plus verticales, car, dans la grille à 45° , les diagonales sont plus longues que les barres courantes de la grille carrée élémentaire ce qui permet d'atteindre des hauteurs plus importantes.

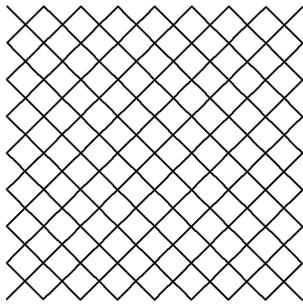


FIG. 4.28 – Variante à 45° de la grille élémentaire carrée.

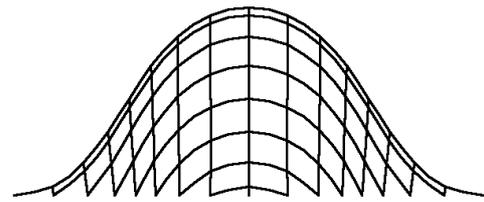


FIG. 4.29 – Profil de la variante de la grille carrée avec tous les appuis glissants.

Une autre illustration du rôle joué par l'orientation réciproque de la grille et de son contour est donnée par les figures 4.30 et 4.31. Les deux formes sont issues respectivement de la grille carrée élémentaire et de la grille à 45° . Dans les deux cas, toutes les extrémités des barres sont libres à l'exception de celles qui arrivent au milieu de chaque côté du carré dont le déplacement vertical est bloqué. Dans la seconde figure, les barres dont le déplacement est bloqué ne passent pas par le centre du carré, elles ne brident donc pas le développement vers le haut de la grille si bien que la forme de la figure 4.31 offre un espace central beaucoup plus vaste que celle de la figure 4.30. Pour dégager de grands volumes, on a donc intérêt à choisir l'orientation de la grille de façon à ce que la plupart de ses barres ne suivent pas les directions de plus forte courbure de la forme finale.



FIG. 4.30 – Profil de la grille carrée sur quatre appuis.

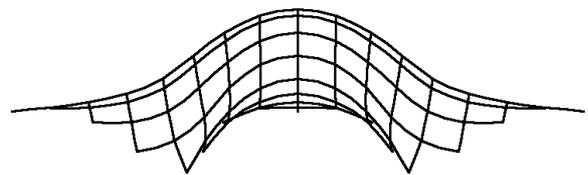


FIG. 4.31 – Profil de la grille carrée à 45° sur quatre appuis.

4.3.7 Influence de l'orientation relative des deux directions de la grille

Le paragraphe précédent a mis en évidence l'importance du choix de l'orientation des directions principales de la grille par rapport à son contour. Dans les exemples présentés jusqu'à maintenant, les deux directions principales du maillage étaient toujours perpendiculaires. Or rien n'impose ce choix et l'angle α entre ces deux directions peut être fixé librement puisque les barres sont articulées entre elles. Pour étudier l'influence de cet angle indépendamment du phé-

nomène précédent, les grilles qui vont être testées ici sont construites sur un périmètre circulaire, c'est-à-dire sur un périmètre qui ne possède pas d'orientation ou de ligne directrice particulière. Quatre angles caractéristiques sont choisis : 90° , 110° , 130° et 150° et les grilles correspondantes sont présentées respectivement sur les figures 4.32, 4.34, 4.36 et 4.38. Les formes d'équilibre que l'on peut voir sur les figures 4.33, 4.35, 4.37 et 4.39 à côté de la grille dont chacune est issue, sont obtenues sous chargement uniforme en laissant les extrémités de toutes les barres libres de se déplacer horizontalement.

On remarque que plus α augmente, plus la grille s'étend dans la direction définie par la bissectrice de α . En effet, la grille possède un degré de liberté en cisaillement dans son propre plan ce qui lui permet notamment d'être mise en forme. Ce degré de liberté peut aussi être utilisé pour faire varier l'angle entre les barres et ainsi modifier le périmètre initial de la grille sans en changer les propriétés intrinsèques, c'est-à-dire sans conséquence sur la forme finale de la structure. La transformation liée à α est équivalente au déploiement d'un système de pantographes dont la direction d'extension est donnée par la bissectrice de l'angle obtus de la grille (l'angle α). Les coordonnées des points de la grille x et y obtenue pour une transformation quelconque d'angle $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$ s'expriment facilement en fonction des coordonnées des points x_0 et y_0 dans la grille de référence d'angle α_0 :

$$x = \frac{\cos(\alpha/2)}{\cos(\alpha_0/2)} x_0 \quad \text{et} \quad y = \frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha_0/2)} y_0 \quad (4.2)$$

Ainsi la forme d'équilibre de la grille circulaire d'angle 130° est équivalente à une ellipse dont les barres sont perpendiculaires et dont le grand axe mesure 1,67 fois le rayon du cercle et le petit axe 0,78 fois le rayon. De même la grille d'angle 150° est équivalente à une ellipse d'axe perpendiculaire de grand axe 2,73 fois le rayon du cercle et de petit axe 0,73 fois le rayon. On explique ainsi une grande partie de l'extension horizontale des formes 4.35, 4.37 et surtout 4.39.

On remarque par ailleurs sur ces quatre figures, un resserrement progressif des barres dans la zone la plus haute de la forme finale et une faible variation de hauteur d'une barre à l'autre dans cette zone. La raison en est que la forme finale de la grille est à peu de chose près obtenue par assemblage d'arcs indépendants dont la déformée a été étudiée dans le paragraphe 4.3.2. Tous les arcs étant soumis au même chargement et tous ayant des sections identiques, leur hauteur ne dépend que de leur longueur. Or plus l'angle α est élevé, plus la longueur des barres voisines des barres qui passent par le centre est proche de la longueur de celles-ci. Les hauteurs de ces barres sont donc très proches. Pour garantir la compatibilité des déformées de deux arcs successifs dans la forme finale, une certaine distance horizontale entre eux est nécessaire et celle-ci croît avec la différence de hauteur. Les arcs du centre étant de longueurs voisines, leurs déformées ont des hauteurs très proches et, par conséquent les distances qui les séparent sont faibles. Les parties centrales des figures 4.37 et 4.39 sont donc logiquement plus denses que celles des figures 4.33 et 4.35. Pour éviter cette densification, il suffirait d'introduire une irrégularité dans le maillage initial afin que la grille soit d'autant plus resserrée que la différence entre la longueur entre deux barres successives est importante.

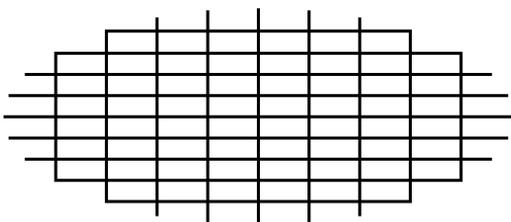
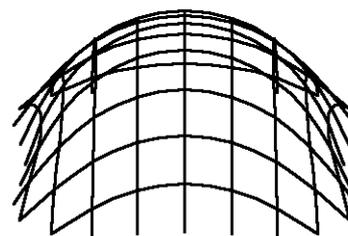
FIG. 4.32 – Grille initiale avec $\alpha=90^\circ$.

FIG. 4.33 – Forme finale correspondante.

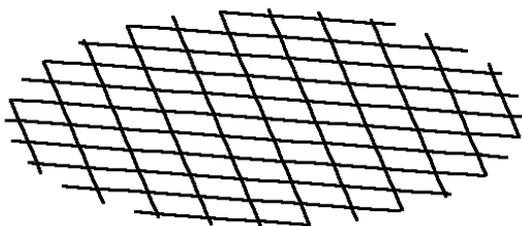
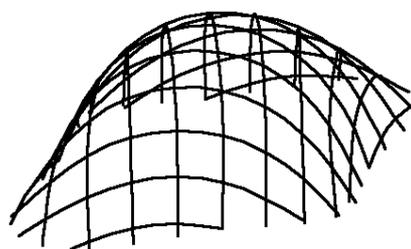
FIG. 4.34 – Grille initiale avec $\alpha=110^\circ$.

FIG. 4.35 – Forme finale correspondante.

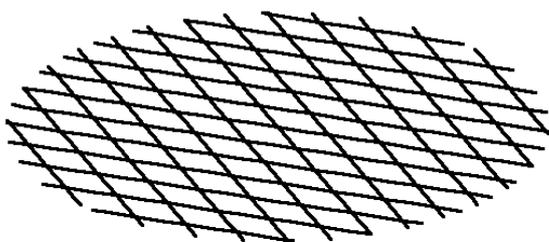
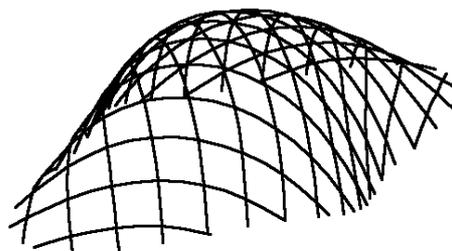
FIG. 4.36 – Grille initiale avec $\alpha=130^\circ$.

FIG. 4.37 – Forme finale correspondante.

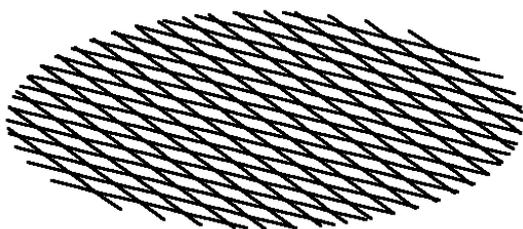
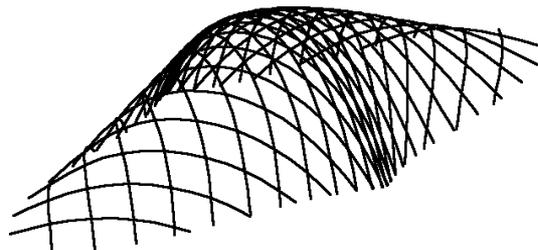
FIG. 4.38 – Grille initiale avec $\alpha=150^\circ$.

FIG. 4.39 – Forme finale correspondante.

4.3.8 Influence de la raideur relative des éléments

On rappelle que, dans ce chapitre, il n'est question que de recherche de forme, que la raideur des éléments ne représente pas forcément les propriétés géométriques et mécaniques des sections de la structure réelle. On peut donc librement faire varier les raideurs relatives des éléments d'une grille pour modifier le résultat de la recherche de forme ; le dimensionnement de la structure est une étape indépendante qui fera l'objet du paragraphe 5.1.

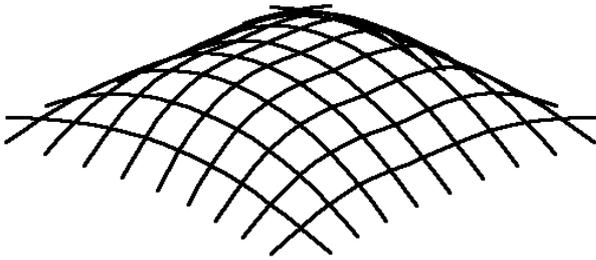


FIG. 4.40 – Grille carrée avec raidisseur.

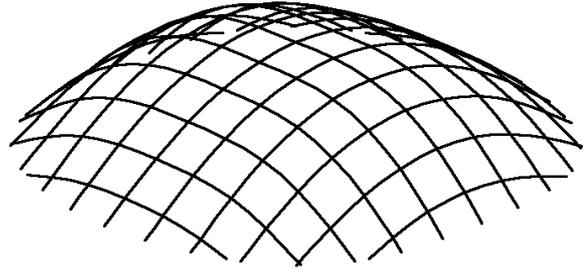


FIG. 4.41 – Grille circulaire avec raidisseur.

On note alors que la raideur d'un élément fléchi est toujours proportionnelle au facteur EI/L^3 , ce qui signifie qu'elle n'est pas seulement liée aux propriétés des sections mais également à la longueur des barres. À section égale, les barres longues sont toujours beaucoup plus souples que les barres courtes. Ainsi, on pourrait penser que d'augmenter l'inertie d'une des barres qui passe par le centre du carré ou du cercle permet d'obtenir une forme avec un double dôme. Or il n'en est rien comme on peut le constater sur les figures 4.40 et 4.41. Ces figures sont les résultats de simulations identiques à celles des figures 4.17 et 4.21 à ceci près qu'on a multiplié l'inertie de l'une des barres par 32. Les mêmes efforts sont appliqués avec les mêmes conditions aux limites. Au lieu de deux dômes jumeaux, on observe un tassement général de la structure.

Dans les deux cas, l'une des barres qui passent par le centre est très rigide, elle se déforme donc peu et se comporte comme un appui semi-rigide pour les barres dans la direction perpendiculaire. Statiquement ces barres sont donc équivalentes à des poutres continues sur trois appuis. Leur portée a donc été divisée par deux et par conséquent leur raideur en flexion multipliée par huit. La charge uniforme appliquée à la structure étant inchangée, elle est incapable de la déformer jusqu'aux hauteurs précédentes. Modifier les raideurs d'une barre dans une direction a donc des effets considérables sur les raideurs effectives des barres dans la direction opposée.

Pour obtenir les structures à deux dômes, on peut par exemple doubler la longueur d'un des côtés de la grille carrée. Si l'on conserve le même niveau de chargement, les mêmes propriétés des sections à l'exception de la barre courte qui passe par le centre dont la raideur vaut trente-deux fois la raideur des autres barres, on converge alors vers la forme d'équilibre de la figure 4.42. De même, en considérant que le cercle est une ellipse et doublant la longueur de son grand axe, la multiplication par 128 de l'inertie d'une des barres qui passent par le centre conduit à la forme de la figure 4.43.

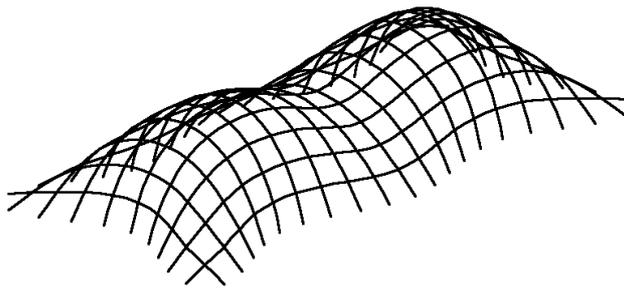


FIG. 4.42 – Grille rectangulaire avec raidisseur.

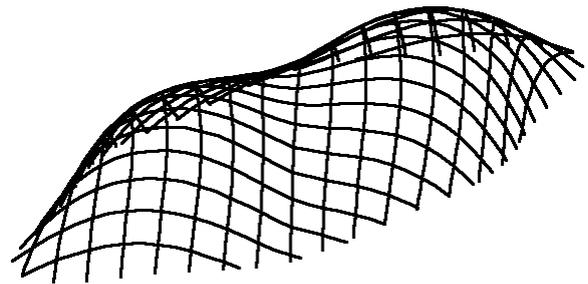


FIG. 4.43 – Grille elliptique avec raidisseur.

4.3.9 Récapitulatifs des conseils de conception

L'ensemble des essais numériques qui viennent d'être effectués a permis de déterminer l'influence des paramètres de cette nouvelle méthode de recherche de forme. En outre, ils ont permis d'établir un certain nombre de conseils pour le concepteur afin de limiter l'aléa lors du passage de la grille à la forme courbe ; en voici les principaux :

- Le comportement mécanique durant la recherche de forme est un comportement virtuel, un simple moyen de parvenir à la forme finale. Les propriétés réelles des sections et des matériaux ne sont introduites que dans l'étape de dimensionnement qui fait l'objet du chapitre suivant.
- Les conditions aux limites doivent être laissées aussi libres que possible pour éviter les formes trop plates et les éléments à trop forts changements de courbure.
- Le périmètre de la grille de départ et les conditions d'appuis doivent être choisis de façon cohérente, c'est-à-dire en associant les singularités entre elles.
- L'orientation des directions principales de la grille définit les directions d'anisotropie de la grille, elle a donc une influence importante sur la forme finale de la structure. Il faut donc choisir en conséquence l'orientation de ces directions par rapport au contour de la grille.
- À l'intérieur d'un périmètre donné, l'angle formé par les directions principales de la grille change les propriétés intrinsèques de la grille. Lorsque les conditions aux limites sont libres, une augmentation de cet angle provoque une dilatation la structure dans la direction définie par la bissectrice de celui-ci et les directions principales de la grille tendent à devenir perpendiculaires.
- Une modification ponctuelle de la raideur a des effets sur l'ensemble de la structure ; elle influence en particulier les barres dans la direction opposée, car elle leur sert d'appui intermédiaire et augmente considérablement par là leur raideur.

4.4 Formes à surface imposée

Les formes funiculaires à contour libre et à contour imposé ont quelque chose de frustrant pour un architecte parce que le processus de création de la forme leur échappe. Ces formes sont pourtant dans l'air du temps et les bâtiments à surfaces courbes connaissent comme on le verra un véritable essor avec la « blob architecture ». On développe donc dans les paragraphes qui

suivent les bases d'une nouvelle méthode de recherche de forme qui va permettre de générer une grille en équilibre dont la forme sera très proche d'une surface imposée.

4.4.1 Des structures pour la « blob architecture »

La « blob architecture » se distingue de l'architecture classique par l'abandon de la verticalité, de la rectitude et de la symétrie. C'est une architecture toute en courbes, fluide et souvent organique que l'on appelle parfois aussi « blobitecture ». À l'origine, *BLOB* (*Binary Large Object*) est un terme technique qui désigne la représentation numérique d'un objet et par extension, les objets conçus grâce à l'outil informatique. Les formes courbes intéressent les architectes depuis plusieurs dizaines d'années, notamment le groupe *Archigram*, mais, avec le développement de l'informatique, elles connaissent aujourd'hui un certain succès et les réalisations se multiplient. On peut citer entre autres l'atrium de la DG Bank de Frank Gehry (figure 4.44) dont la couverture a déjà été mentionnée (cf. paragraphe 1.1.3) et le nouveau musée de Graz (figure 4.45) de Peter Cook, un ancien membre d'*Archigram*.

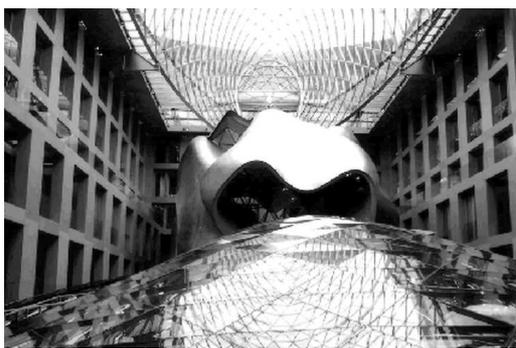


FIG. 4.44 – Intérieur de la DG Bank à Berlin (Allemagne) de Frank Gehry .



FIG. 4.45 – Le nouveau musée de Graz (Autriche) de Peter Cook et Colin Fournier.

L'une des principales difficultés posées par ces formes est celle de la conception d'une structure porteuse adaptée. Pour la couverture du bâtiment de F. Gehry ci-dessus, le bureau d'étude de Jörg Schlaich a proposé une méthode particulièrement élégante de rationalisation de la forme par des jeux d'homothéties et de translations [43]. Cependant cette solution avec ces facettes triangulaires et ses diaphragmes de câbles concentriques est assez coûteuse et difficilement généralisable. Il semble que les gridshells pourraient fournir une solution alternative pertinente pour la construction de telles structures. En effet, une méthode pour la création de grilles orthogonales sur une surface gauche quelconque a été développée par l'IL⁵. Elle est brièvement rappelée ci-dessous et appliquée à une demi-sphère afin d'en montrer la simplicité et le potentiel pour la création de gridshells sur des formes imposées. C'est vraisemblablement la méthode qui a été utilisée pour trouver la grille à plat dont est issue le gridshell de Downland (cf. paragraphe 1.4 et figure 1.18), mais aucune information précise ni aucune étude systématique n'ont pu être trouvées sur le sujet.

⁵IL10 *Gitterschalen*, [78], 1974, p. 140-170.

4.4.2 Développement des surfaces gauches

Les gridshells sont des surfaces à double courbure obtenues par transformation d'une grille plane formée de deux directions de barres. Pour pouvoir être mise en forme, la grille doit être constituée uniquement de parallélogrammes. L'objectif de la méthode de développement des surfaces, dite « méthode du compas », est donc la définition d'une méthodologie de construction d'un réseau de parallélogrammes sur une surface quelconque. La présentation qui en est faite ici s'inspire très largement de l'ouvrage *IL10 Gitterschalen* [78] et de ses figures.

On va commencer par décrire les différentes étapes de la méthode sur une surface plane pour des raisons de clarté évidentes. Tout d'abord on trace sur le plan deux lignes quelconques que l'on appelle directrices (cf. figure 4.46), qui doivent se croiser une et une seule fois et si possible ne pas présenter de variations brusques de courbure. Ces deux lignes sont subdivisées à l'aide d'un compas en segments élémentaires selon un pas qui correspond à la dimension de la maille de la future grille.

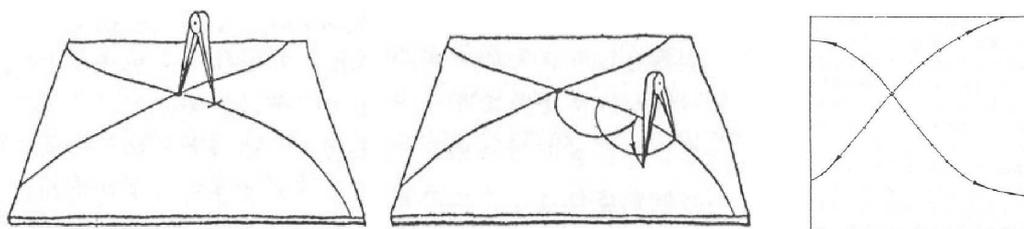


FIG. 4.46 – Étape 1 : Construction et subdivision des directrices.

Ensuite, le plan étant divisé en quatre régions par les deux directrices, on en choisit une et, à partir des deux points les plus proches de l'intersection des directrices, on construit au compas un nouveau point à égale distance de ces deux points. Ces trois points et l'intersection des directrices forment un parallélogramme. Puis, de proche en proche, on construit de nouveaux points à l'aide de deux points existants et d'un compas dont l'écartement reste constant. Différents états d'avancement sont illustrés sur la figure 4.47.

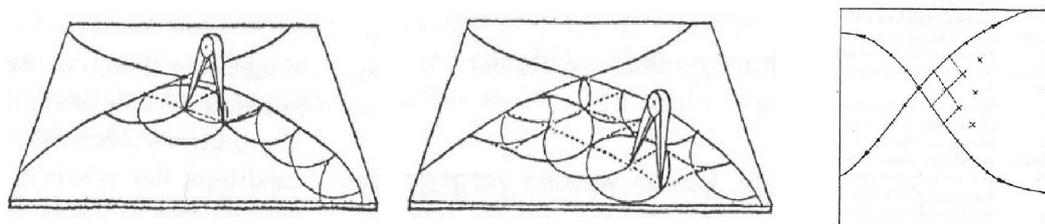


FIG. 4.47 – Étape 2 : Construction du maillage de proche en proche à l'aide d'un compas.

Le processus s'arrête lorsque toute la région est couverte de parallélogrammes. On recommence alors depuis l'intersection des directrices dans chacune des trois autres régions du plan. À la fin, on a réalisé un maillage du plan par des parallélogrammes dont on peut relier les côtés de façon à former des barres continues.

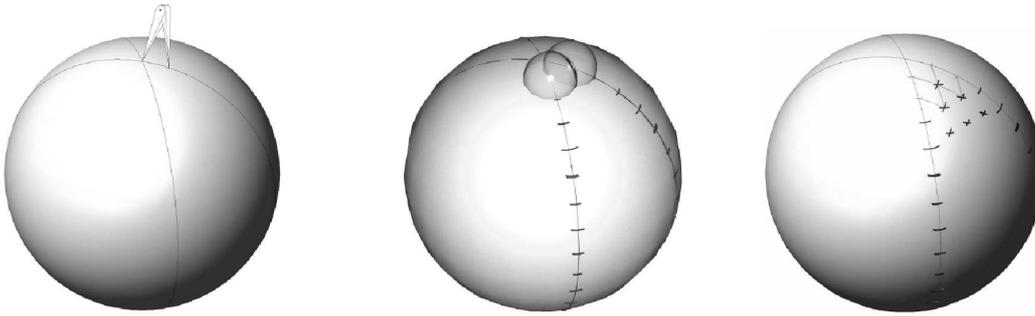


FIG. 4.48 – Schémas de principe du maillage d’une sphère avec la méthode du compas : tracé et subdivision des deux directrices ; création d’un nouveau point à partir de l’intersection et, de proche en proche, création d’un maillage de parallélogrammes.

4.4.3 Construction d’un gridshell hémisphérique

Pour une demi-sphère, le principe de la construction du maillage est exactement le même que dans le plan. On commence par tracer deux lignes directrices sur la demi-sphère, que l’on subdivise en éléments d’égales dimensions. Ensuite, on construit les points du maillage un à un en partant des points les plus proches de l’intersection des directrices. La figure 4.48 montre comment chaque nouveau point est obtenu en calculant l’intersection de la demi-sphère avec deux sphères centrées sur les deux points voisins dont la position est déjà connue et dont le rayon est le pas du maillage. Le processus a été automatisé et implémenté de façon à ce que la structure des données soient compatibles avec *AlgoRD*, le programme de relaxation dynamique développé qui sera présenté au paragraphe A⁶. À la fin du processus, on a construit sur la sphère une grille de barres continues et dont toutes les mailles sont des parallélogrammes. Cette grille peut donc être mise à plat comme le montre la figure 4.49.

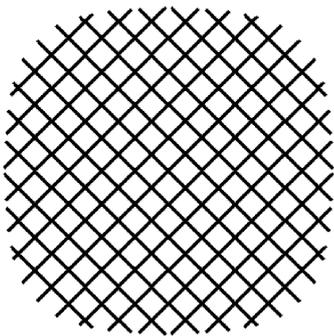


FIG. 4.49 – Mise à plat de la grille hémisphérique de la figure 4.50.

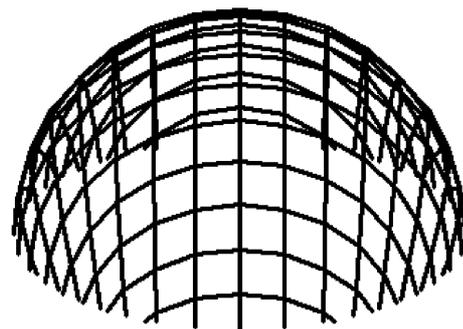


FIG. 4.50 – Gridshell hémisphérique pour un angle de 90° entre les directrices.

On note cependant que la structure obtenue après l’étape de maillage n’est pas en équilibre. En effet, cette étape est purement géométrique et la raideur en flexion des éléments n’a pas été prise en compte. Comme les barres qui constituent la structure sont initialement droites (cf. figure 4.49), elles sont fortement précontraintes dans la configuration de la figure 4.50. Donc, si on introduit dans cette structure la raideur en flexion des éléments ainsi que des conditions aux

⁶Cf. S. Andreatta, [6], 2007, p. 9-11.

limites, les barres vont se déplacer jusqu'à atteindre une position dans laquelle les précontraintes de flexion s'équilibrent entre elles. Pour calculer cette forme d'équilibre, la méthode de relaxation dynamique est un outil particulièrement adapté et elle va permettre de passer d'une simple construction géométrique à une structure en équilibre.

Par exemple, pour une grille dont les directrices forment un angle de 90° et dont toutes les barres sont articulées sur le sol à leurs extrémités, le calcul aboutit à la forme de la figure 4.50. Cette forme n'est pas exactement une demi-sphère, elle est légèrement aplatie sur le dessus. Pour se rapprocher de la sphère parfaite, on pourrait ajouter des conditions aux limites supplémentaires qui correspondraient à autant de points de contrôle ou de systèmes d'échafaudage sur un chantier. On peut aussi garder ces conditions aux limites très simples et modifier le maillage, notamment en variant l'angle formé par les deux directrices. C'est ce que l'on a fait ici pour des angles compris entre 45° et 90° . Après chaque calcul, les valeurs positives et négatives des écarts relatifs au rayon de la sphère ont été mesurés et reportés sur le graphique de la figure 4.51. Selon ce critère, il apparaît que c'est la sphère obtenue pour des directrices perpendiculaires, celle de la figure 4.50, qui est la plus proche de la sphère.

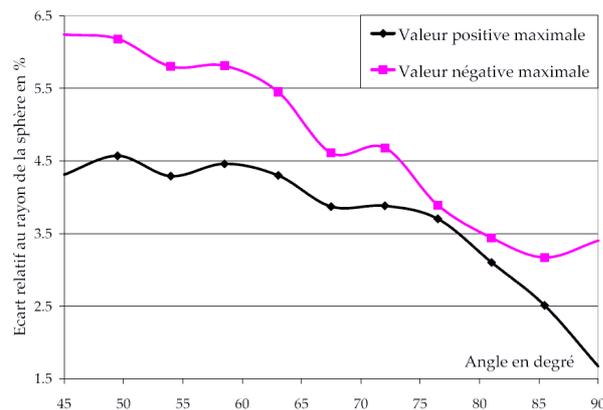


FIG. 4.51 – Évolution de la distance à la sphère en fonction de l'angle formé par les directrices.

4.4.4 Perspectives

Outre le critère de la distance à la forme utilisé dans le paragraphe précédent, de nombreux autres critères sont envisageables pour juger de la pertinence du maillage parmi lesquels on peut citer : la minimisation des contraintes, leur uniformisation, l'homogénéisation du maillage, sa complexité, la minimisation du nombre de points de contrôle, etc. La détermination du critère opportun, de son domaine de validité est encore un sujet de recherche ouvert. Parallèlement se pose la question de la génération du maillage et du choix de ses paramètres : comment tracer les directrices sur une forme quelconque, selon quelles lignes (géodésiques, lignes de courbure moyenne...), quelle est l'influence du pas du maillage, comment optimiser le maillage à partir de solution préexistante, etc. Les pistes là aussi sont nombreuses et n'ont à notre connaissance pas fait l'objet de recherches approfondies à ce jour.

4.5 Conclusion

Le procédé de montage des gridsells à partir d'une grille plane nécessite une étape spécifique de conception dont la finalité est la définition même de la forme de la structure et qu'on appelle la recherche de forme. Toutes les formes n'étant pas équivalentes sur le plan mécanique, Frei Otto a défini comme objectif de la recherche de forme l'optimisation du comportement de la structure vis-à-vis des efforts de poids propre. S'inspirant des maquettes et de l'approche d'Antonio Gaudi, il a mis au point une démarche qui, par le retournement virtuel de filets suspendus, donne des formes en compression pure. La forme du filet étant, dans ce protocole, une conséquence de ses conditions d'appui, il propose donc une classification des gridsells par système de fondation.

La nature physique de ses maquettes et leur absence de raideur en flexion orientent cependant très largement la recherche de forme. Certes on a vu qu'à l'échelle du gridsell de Mannheim, l'inertie des éléments de la grille pouvait être négligée et que les efforts à mettre en œuvre pour déformer la grille étaient de l'ordre du poids propre de celle-ci. Il n'en reste pas moins que cette raideur en flexion existe et que l'on peut s'en servir pour donner naissance à d'autres types de formes dans lesquelles le contour de la forme ou la position finale de ses appuis n'est plus une donnée mais une conséquence de la forme de la grille à plat et de sa raideur. Les paramètres de la recherche de forme deviennent alors beaucoup plus nombreux et il est nécessaire de bien comprendre leur influence. Dans ce chapitre, un certain nombre de simulations ont été effectuées avec l'algorithme de relaxation dynamique qui permet justement de prendre en compte la raideur en flexion des éléments (ce qui n'était pas possible dans les années 1970). Ces essais ont conduit à l'établissement de recommandations pour limiter la part d'aléas et orienter la forme dans la direction que l'on souhaite.

Dans la dernière partie, une troisième méthode, dite « méthode du compas », a été présentée. Elle permet de construire des grilles formées de barres continues et parallèles sur une surface courbe. L'application sur une demi-sphère qui en a été faite et son association avec un calcul avec l'algorithme de relaxation dynamique paraissent très prometteuses. De nombreuses questions restent encore à résoudre avant de pouvoir appliquer cette méthode à n'importe quelle surface courbe ; néanmoins il semble que l'on dispose des moyens théoriques pour concevoir des structures et le système de montage d'une architecture de courbes.

Chapitre 5

Conception et étude numérique du comportement mécanique du premier gridshell en composites

Avant d'illustrer par un exemple les méthodes de recherche de forme du chapitre précédent, on s'efforcera de donner un cadre règlementaire pour l'étude du comportement mécanique des gridshells en composites. Il semble aujourd'hui naturel que le dimensionnement d'un gridshell en composites s'inscrive dans le cadre général des Eurocodes. Comme il n'existe pas de tome spécifiquement dédié aux matériaux composites, des coefficients partiels de sécurité et des critères de vérifications seront proposés sur la base des recommandations trouvées dans le livre de L. Hollaway et P. Head¹.

L'utilisation pratique de ces coefficients sera ensuite mise en lumière par la conception et l'étude numérique du comportement du prototype de gridshell en matériaux composites dont la construction sur le site de l'École Nationale des Ponts et Chaussées ainsi que l'étude expérimentale seront détaillées dans le chapitre 6. Après la première étape de la recherche de forme, on étudiera l'influence des excentricités sur la géométrie finale de la structure ainsi que l'influence du procédé de montage. Ensuite, on montrera que la triangulation à l'aide d'une troisième direction de barres est la solution la plus pertinente pour les gridshells et on proposera une méthode numérique pour la simulation de la mise en place de ces barres supplémentaires. Les performances mécaniques de deux schémas de triangulation seront également comparées. Enfin, on effectuera une vérification de la structure selon les règles préconisées au début du chapitre et on en déduira quelques traits spécifiques du comportement mécanique des gridshells en composites.

¹Cf. L. Hollaway et P. Head, [?], p. 89-105.

5.1 Codes et méthodes de dimensionnement des gridshells en matériaux composites

Le dimensionnement d'un gridshell en composites est une tâche délicate car il n'existe pas de bâtiments de référence. Seuls quelques gridshells en bois ont été construits dans le monde et ces structures atypiques apparaissent encore peu sûres aux yeux de beaucoup de maîtres d'ouvrage, notamment à cause de leur procédé de construction qui induit un état de précontrainte permanente par flexion. De plus, les matériaux composites sont aujourd'hui relativement peu utilisés dans le bâtiment et le génie civil (cf. paragraphes 2.1.3 et 2.1.4) ce qui là aussi entraîne une certaine méfiance des maîtres d'ouvrage et des entreprises de construction. Pour le dimensionnement de la structure, il semble donc important de se rattacher au cadre usuel de la réglementation des Eurocodes.

5.1.1 Définition du cadre réglementaire

Les Eurocodes sont les réglementations européennes unifiées de la construction. Ils définissent un certain nombre de conditions, de performances qu'une structure doit satisfaire dans le cadre de son fonctionnement; ces conditions sont appelées états limites. En fonction de la probabilité d'occurrence d'un chargement, les exigences sur la structure changent. On distingue ainsi principalement deux types d'états limites : l'état limite ultime qui désigne une condition de non-ruine de la structure sous une combinaison de charges de faible probabilité – c'est un critère de sécurité – et l'état limite de service qui désigne une limitation de la réponse des structures sous une combinaison de charge normale – c'est un critère de confort –. La vérification des états limites de service porte en général sur les déformations de la structure (limitation de flèche pour l'acier et le bois ou d'ouverture de fissures pour le béton). La vérification des états limites ultimes porte en général sur la contrainte qui ne doit pas excéder la résistance limite du matériau et sur la stabilité globale de la structure. En dehors de l'étude des cas accidentels, les charges sont majorées par un coefficient de sécurité (1,35 pour les charges permanentes et 1,5 pour les charges variables) et les résistances minorées par un autre coefficient de sécurité qui dépend du matériau.

Les coefficients partiels de sécurité sont fondés sur une étude probabiliste des propriétés des chargements extérieurs et des propriétés des matériaux de structures. Les coefficients de sécurité sur les chargements extérieurs (chargements permanents, d'exploitation, de neige, de vent, effets de la température, etc.) et leurs modes de combinaisons sont définis dans l'Eurocode 1. Ces coefficients de sécurité sont indépendants du matériau de la structure et par conséquent parfaitement utilisables pour le dimensionnement d'un gridshell en composites. Cependant, si l'Eurocode 2 définit les critères de vérification des états limites du béton, l'Eurocode 3 ceux de l'acier, l'Eurocode 5 ceux du bois, il n'existe pas d'Eurocode spécifique pour les composites. Il est donc nécessaire de se tourner vers d'autres ouvrages qui adoptent cette même démarche probabiliste pour la définition des coefficients partiels de sécurité. Le chapitre 4 du livre de L.C. Hollaway et P.R. Head [52] est à ce titre particulièrement intéressant et c'est de ce dernier que sont tirées les valeurs des paragraphes qui suivent.

5.1.2 Définition des coefficients de sécurité des matériaux composites

La principale difficulté rencontrée lors de l'établissement des coefficients de sécurité pour les polymères renforcés par des fibres de verres est liée à la nature composite de ces matériaux et à la grande variabilité de leurs composants (type de fibre et de polymère, fibres longues ou courtes, tissés ou non, caractéristiques de l'interface fibre/résine, etc.) et de leurs procédés d'élaboration (moulage, drapage, pultrusion, etc.) ou d'assemblage (collage, soudure, rivetage, etc.). Néanmoins, la plupart des polymères ont des propriétés similaires qui ne diffèrent que par leur amplitude : ils présentent un comportement viscoélastique prononcé fortement dépendant de l'atmosphère extérieure et de la température. Les renforts de fibres stabilisent le polymère de sorte que le comportement des matériaux composites possède les caractéristiques atténuées de celui de la matrice.

Compte tenu de ses remarques, Hollaway et Head proposent de prendre en compte pour les états limites de services les critères suivants : la déformation des éléments à court et à long terme, l'apparition de la première fissure, le flambement local des éléments et leur comportement post-flambé, les vibrations, la fatigue et la résistance aux impacts. Pour les limites ultimes, ils proposent des critères sur la ruine globale : rupture des sections, flambement global et résistance au feu. Lors du dimensionnement d'une structure en composites, chacun de ces critères doit être vérifié à partir des caractéristiques de la structure et des valeurs appropriées des coefficients de sécurité des matériaux (court terme pour les critères à court terme et long terme pour les critères à long terme).

Les auteurs indiquent ensuite une méthode statistique rigoureuse pour évaluer les effets de la variabilité du matériau, les effets de l'environnement et les effets du vieillissement. Cependant cette méthode nécessite de nombreux essais et les données manquent aujourd'hui pour établir des coefficients de sécurité « définitifs ». Une première tentative a été faite dans l'*Eurocomp Design Code and Standard* [32] qui recommande d'utiliser un coefficient partiel de sécurité γ pour les états limites ultimes qui soit le produit de trois facteurs :

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$$

γ_1 est un coefficient relatif au mode d'identification des propriétés mécaniques, γ_2 est relatif au procédé de production du matériau et γ_3 aux effets de la température et du vieillissement. Les valeurs caractéristiques de ces coefficients sont données respectivement dans les tableaux 5.1, 5.2 et 5.3. D'après les auteurs, quelques réserves doivent être émises : ces valeurs ne prennent pas en compte l'effet de l'humidité, ne précisent pas quels sont les coefficients à appliquer au module d'Young et ne considèrent pas l'anisotropie du matériau.

On peut à l'aide des tableaux 5.1, 5.2 et 5.3, évaluer les valeurs des coefficient de sécurité pour un gridshell en composite construit à partir de profilés pultrudés dont les caractéristiques mécaniques ont été évaluées par des essais. À court terme, on a donc $\gamma_1=1,15$, $\gamma_2=1,1$ et $\gamma_3=1,0$ soit une valeur $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ de 1,27. À long terme, on a $\gamma_3=2,5$ au lieu de 1,0 de sorte que le coefficient de sécurité γ devient égal à 3,18. On remarque que le coefficient de long terme est 2,5 fois plus élevé que le coefficient de court terme ; cela confirme les observations qui ont été faites

au paragraphe 2.3.1 : pour éviter les problèmes de fluages, la contrainte dans le matériau ne doit pas dépasser 30 % de la contrainte à rupture.

TAB. 5.1 – Coefficient partiel de sécurité γ_1 .

Méthode d'identification des propriétés	γ_1
Propriétés des plis, des multicouches et des pultrudés déduites d'un modèle théorique	2,25
Propriétés des plis déduites de tests mécaniques et propriétés des multicouches et des pultrudés déduites d'un modèle théorique	1,5
Propriétés déduites de tests mécaniques	1,15

TAB. 5.2 – Coefficient partiel de sécurité γ_2 .

Procédé d'élaboration	Cure complète en usine	Cure partielle en usine
Moulage par projection	1,4	2,0
<i>Resin transfer moulding</i>	1,2	1,7
Pré-imprégné	1,1	1,7
Enroulement filamentaire	1,1	1,7
Pultrusion	1,1	1,7

TAB. 5.3 – Coefficient partiel de sécurité γ_3 .

Température de service	Distorsion à chaud	Chargement à court terme	Chargement à long terme
25-50	55-80	1,2	3,0
	80-90	1,1	2,8
	>90	1,0	2,5
0-25	55-70	1,1	2,7
	70-80	1,0	2,6
	>80	1,0	2,5

5.2 Conception du prototype

Quatre grands principes ont guidé la phase de conception du prototype du premier gridshell en matériau composite :

- Utilisation optimale des propriétés mécaniques des fibres,
- Simplicité des connections entre les différents éléments,
- Optimisation de la forme de la structure vis-à-vis de son chargement et
- Faible coût de construction via l'utilisation de composants industriels standard.

Ces quatre principes ont conduit à la définition d'un procédé constructif particulier et à la forme de la figure 5.1. Les démarches qui ont mené à ces choix sont décrites dans les deux paragraphes suivants.



FIG. 5.1 – Vue extérieure du prototype de gridshell en composites.

5.2.1 Choix des matériaux du prototype

Pour utiliser au mieux les propriétés mécaniques des fibres, on doit chercher à les orienter uniquement dans le sens des efforts. Dans les gridshells, les barres sont essentiellement fléchies, les contraintes dans le matériau sont des contraintes longitudinales. Des fibres ne sont donc nécessaires que dans la direction de l'axe des barres. L'utilisation de profilés pultrudés tubulaires apparaît ainsi particulièrement indiquée pour cette application car c'est un procédé économique qui permet la production de barres continues dans lesquelles les fibres sont concentrées dans la direction principale du tube (cf. paragraphe 2.1.2). Dans ce procédé, il n'y a pas de limite à la longueur des barres en dehors des dimensions du hangar dans lequel est installée la ligne de pultrusion. En théorie, il est donc possible de fabriquer des barres de la longueur que l'on souhaite et de supprimer ainsi tous les problèmes de rabotage qui existaient sur les barres des gridshells en bois (cf. paragraphes 1.3 et 1.4). En pratique, la longueur est limitée par le gabarit routier maximum autorisé. Ainsi, à moins d'affréter un convoi exceptionnel, on doit se limiter à des barres de 13,4 m, ce que l'on fait ici.

En ce qui concerne les assemblages, le système choisi a déjà été présenté dans la partie relative à la modélisation des connections (cf. paragraphe 3.11) ; il s'agit de pièces d'assemblage d'échafaudage orientables. Ces pièces sont standard, produites en grande quantité et d'une résistance mécanique éprouvée. Elles sont constituées de deux paires de demi-coquilles circulaires assemblées entre elles par une articulation quasiment parfaite. L'axe de cette articulation est perpendiculaire aux axes des deux profilés tubulaires qui s'insèrent dans les demi-coquilles. La liaison ainsi réalisée correspond donc à celle qui est requise pour la construction d'une grille faite de barres continues et sans rigidité en cisaillement dans son plan.

Les montants d'échafaudage standard ont une section circulaire de 48,2 mm ou de 42 mm de diamètre. Les tubes de 48,2 mm sont les plus répandus ce qui fait que les pièces d'assemblage faites pour ces tubes sont deux fois moins chères. Cependant l'objectif ici est de construire le gridshell qui démontrera au mieux les possibilités de mise en forme des composites. À courbure égale, les contraintes sont d'autant plus élevées que le diamètre des barres est important ; il est donc préférable de choisir des tubes de 42 mm. Ce diamètre, courant en construction métallique, est également standard pour les lignes de pultrusion. Les tubes utilisés pour la thèse sont donc des tubes pultrudés avec une section circulaire de 42 mm de diamètre extérieur et de 35 mm de

diamètre intérieur. Ils sont composés d'une couche centrale avec des fibres dans l'axe du tube et de deux couches de mat de protection, une à l'intérieur et une à l'extérieur. L'épaisseur des couches de mat est d'environ 0,5 mm et celle de la partie structurelle est de l'ordre de 2,5 mm.

Les propriétés mécaniques des tubes ont été évaluées dans le paragraphe 2.3.1 et recensées dans le tableau 2.2. Le module d'Young longitudinal est de 26,7 GPa et la résistance à rupture en flexion de 350 MPa. Compte tenu des coefficients de sécurité préconisés au paragraphe 5.1.2, il faudrait réduire la valeur de la résistance à rupture d'un coefficient de 1,27 à court terme et de 3,18 à long terme de sorte que, pour la suite du calcul, on devrait considérer que la contrainte doit toujours être inférieure à $\sigma = 275$ MPa pendant le montage et à 110 MPa pendant le service de l'ouvrage. Cependant le prototype est une structure expérimentale dont la durée de vie est limitée à trois ans. On décide donc prendre une limite en contrainte plus grande que celle préconisée, de sorte que la résistance à long terme est choisie égale à 40% de la résistance à rupture, soit 140 MPa. Ce niveau de sollicitation permettra en outre une expérience de relaxation *in situ* qui ne rentre pas dans le cadre de ce travail mais qui devrait fournir des informations précieuses sur la durabilité des structures de gridshells en matériaux composites

5.2.2 Définition de la forme

Contraintes géométriques et structurelles

La forme théorique du prototype doit prendre en compte l'ensemble des paramètres liés au matériau du paragraphe précédent, mais également un certain nombre d'objectifs géométriques et structurels :

- La structure doit constituer avec le sol les seules limites de l'espace intérieur, elle doit être à la fois toit et mur. On cherche ainsi à donner l'idée la plus vaste possible du potentiel architectural des gridshells qui ne sont pas que des structures de couverture. Cela permet en outre de ne pas avoir à traiter de problème de rigidification d'un bord libre.
- L'espace habitable doit être le plus grand possible. La forme du prototype doit être conçue comme s'il s'agissait d'un vrai bâtiment destiné à accueillir des activités humaines dans lequel l'espace fonctionnel disponible est le plus grand possible, c'est-à-dire dans lequel les parois latérales sont les plus verticales possibles.
- La structure finale doit satisfaire les critères de dimensionnement usuel d'un bâtiment. Ce troisième objectif est le complément réglementaire du deuxième : la résistance et la rigidité de la structure doivent être celles d'un bâtiment considéré comme sûr par les normes en vigueur. Les déplacements doivent être maîtrisés et les contraintes rester en dessous d'un certain seuil.
- La portée minimale doit être la plus grande possible et le poids de la structure doit être minimisé. La performance mécanique d'une structure se mesure en terme de portée maximale franchie et de quantité de matière utilisée : pour un franchissement donné, plus le poids d'une structure est faible, plus la structure est performante (cf. paragraphe 1.1.2). Ces objectifs sont donc le pendant du principe d'optimisation de la forme vis-à-vis de son chargement énoncé en introduction.

Une conséquence immédiate de ces conditions est que le gridshell doit s'appuyer continuellement sur le sol. Les essais qui ont été effectués dans le chapitre précédent ont montré que les grilles dont le périmètre est anguleux et dont les appuis sont continus, présentent des zones peu habitables (cf. figure 4.17). On choisit donc pour le prototype une forme théorique qui soit issue d'une forme arrondie. Le cercle étant trop symétrique, il a été décidé de partir d'une ellipse.

Notations et conventions

Avant d'aller plus loin dans la description du prototype, il est utile de préciser les principales notations et conventions utilisées dans ce chapitre et le suivant. Pour commencer, un repère cartésien orthonormé est associé à la structure. Son centre est le centre de l'ellipse initiale. L'axe des x est orienté le long du grand axe de l'ellipse et l'axe des y selon le petit axe. L'axe des z est défini de telle sorte à ce que le trièdre soit direct et pointe « vers le haut ». La grille à plat est donc située dans le plan $z = 0$. Les plans $x = 0$ et $y = 0$ sont des plans de symétries pour la grille initiale ainsi que pour les deux gridshells des figures 5.3 et 5.4. Cette symétrie est brisée lorsque l'on introduit l'excentricité entre les deux directions de barres ou bien lorsque la structure est soumise à un chargement asymétrique.

Le modèle de poutre utilisé pour la simulation numérique a été présenté dans le chapitre 3. Il s'agit d'une poutre de Navier-Bernouilli sans torsion avec trois degrés de liberté en translation à partir desquels on peut déduire les moments de flexion (cf. paragraphe 3.3). Les déplacements dans chacune des trois directions sont notés respectivement u_x , u_y et u_z ; la norme des déplacements totaux est notée u . Les déplacements sont toujours calculés dans le repère de référence et, sauf indication contraire, leur unité est le mètre sur toutes les figures. Les efforts intérieurs sont les efforts normaux, notés N , les efforts tranchants, notés T et les moments fléchissants, notés M . La contribution des efforts tranchants n'étant pas prise en compte dans le calcul des contraintes axiales totales avec la cinématique de Navier-Bernouilli, ils ne seront en général ni étudiés ni présentés. Les efforts normaux sont mesurés en Newton et comptés positivement lorsque les barres sont en traction. Pour les moments fléchissants, l'inertie des barres étant la même dans toutes les directions, on n'observe que leur norme dans le plan local de flexion de la barre. Elle est mesurée en Newton mètre (N.m). Quand aux contraintes axiales, elles sont évaluées à partir des efforts intérieurs selon les formules classiques de la résistance des matériaux :

$$\sigma_{max} = \frac{N}{S} + \frac{Mv}{I} \quad \text{et} \quad \sigma_{min} = \frac{N}{S} - \frac{Mv}{I} \quad (5.1)$$

où σ_{max} est la valeur maximale de la contrainte axiale, σ_{min} sa valeur minimale. S est la section de la barre, I son inertie et v la distance maximale à l'axe neutre, ici le rayon extérieur du tube. La géométrie du tube est constante le long de son axe et les valeurs respectives de ces paramètres sont : 4,23 cm², 7,91 cm⁴ et 2,1 cm. Une bonne approximation de la valeur de la contrainte maximale, qui est mesurée en MPa, peut donc être obtenue en divisant la valeur du moment par quatre. Enfin, la contrainte de cisaillement est négligeable et négligée par le modèle de Navier-Bernouilli qui a été adopté.

De l'ellipse à la forme

La grille de départ de la forme théorique a donc un périmètre elliptique ; son demi grand axe mesure 12,5 m et son demi petit axe 5,5 m (cf. figure 5.2). Les deux directions de barres font respectivement un angle de $+50^\circ$ et -50° avec la direction du grand axe de l'ellipse. Les barres sont assemblées entre elles tous les 1,2 m ce qui donne une grille avec 17 barres dans chaque direction. Aucune excentricité au niveau des liaisons entre les barres n'est prise en compte. La forme de la structure est obtenue en deux étapes. Dans la première, la méthode de recherche de forme développée au paragraphe 4.3 est mise en œuvre : un chargement uniforme de 33 N/ml dirigé vers le haut est appliqué sur toutes les barres tandis que leurs extrémités sont libres de glisser sur le plan du sol qui est aussi le plan initial de la grille. Cela correspond à un rapport pL^3/EI de 40 pour les barres les plus longues ce qui devraient amener ces barres à former un angle de 57° avec le sol (cf. figure 4.15). En outre, cette valeur de l'angle est la valeur optimale pour laquelle la déformée d'une poutre uniformément chargée est le plus proche d'une chaînette (cf. figure 4.16).

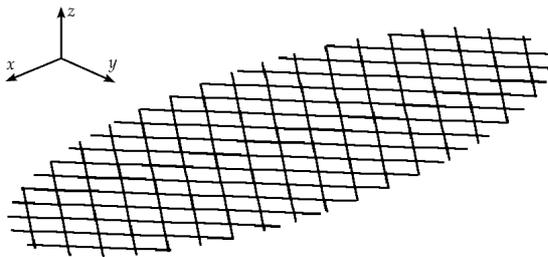


FIG. 5.2 – Forme initiale sur le sol de la grille elliptique choisie.

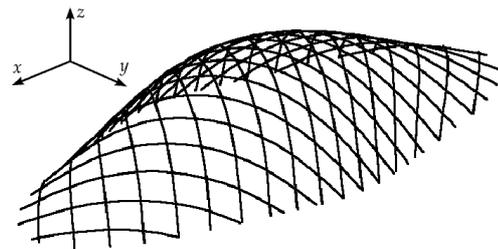


FIG. 5.3 – Première étape de la recherche de forme.

La forme obtenue à la fin de cette étape est présentée sur la figure 5.3. Elle est globalement en accord avec les observations faites dans le paragraphe 4.3 : l'angle formé par les barres les plus longues et le sol est de $54,5^\circ$, il y a un léger resserrement des barres vers le centre et pas de variation notable de la longueur de la structure. En principe, selon la méthode du chapitre 4, la recherche de forme aurait dû s'arrêter à la fin de cette étape : les positions des extrémités des barres auraient dû être bloquées et la forme d'équilibre sous poids propre calculée.

Cependant, sans vraiment de raison particulière, une seconde étape a été ajoutée : le chargement uniforme a été remplacé par le poids propre réel de la structure : 8,4 N/ml de tube et 10 N pour chaque assemblage et, pour éviter que la structure ne se remette à plat, chaque barre a été sous-tendue par un câble dont la longueur est définie à partir de la géométrie d'équilibre de l'étape précédente et dont la raideur est arbitrairement choisie égale à celle des barres de la grille (cf. figure 5.8). Ainsi les extrémités des barres sont toujours libres de se déplacer horizontalement dans le plan du sol, mais l'écartement des points d'appuis est maintenu constant. Les déplacements durant cette étape sont très importants et la géométrie de la structure est beaucoup modifiée (cf. figure 5.4).

Le résultat de la recherche de forme est un gridshell dont le périmètre libre ressemble à une coque de cacahouète (cf. figure 5.5). En dehors de l'aspect esthétique, les deux renforcements

sur les grands côtés augmentent la courbure de la coque et améliorent ainsi ses performances mécaniques. La structure finale mesure : 23,6 m de long, 8,0 m de large et 3,77 m de haut. La portée au niveau du rétrécissement est de 6,6 m.

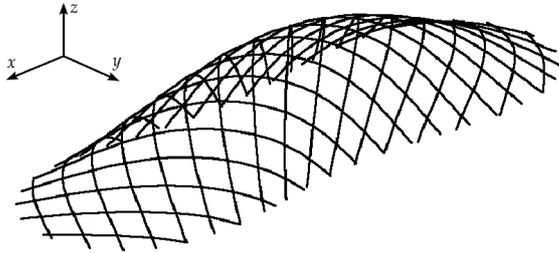


FIG. 5.4 – Forme théorique finale.

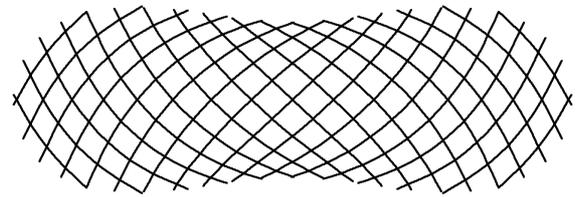


FIG. 5.5 – Forme finale vue de dessus.

La forme finale est relativement allongée et ses deux extrémités sont assez basses et plates si bien que les espaces qu'elles englobent sont peu pratiques et peu performants mécaniquement parlant (cf. paragraphe 5.2.4). C'est une conséquence directe de l'étape supplémentaire de recherche de forme qui a éloigné la structure du funiculaire de son poids propre et augmenté l'inclinaison du plan des barres par rapport à la verticale. On verra dans le paragraphe 6.4 qu'il est facile d'aménager dans ces zones de grandes ouvertures et ainsi de supprimer les points faibles de la forme et d'augmenter significativement le ratio surface couverte sur surface habitable dont la valeur actuelle est de seulement 0,45 (avec une surface habitable de 72,3 m² et une surface totale de 154,7 m²).

Pour le reste, dans la partie centrale, les parois de la grille de la figure 5.4 sont plus verticales que celles de la grille de la figure 5.3 puisque l'angle formé par le gridshell et le sol est supérieur à 60° sur environ 8 m de longueur. Quant à la portée maximale de l'ouvrage (8,0 m), elle est tout à fait acceptable compte tenu de la verticalité des parois et de la portée effective des barres de la grille. En effet, si l'on compare ces valeurs avec les proportions d'une *elastica* (cf. tableau 3.1) : pour une barre de 13,4 m, un angle de 60° correspond à une portée de 9,9 m et une portée de 8 m correspond à un angle de 75°. On se rend compte de la qualité du compromis trouvé.

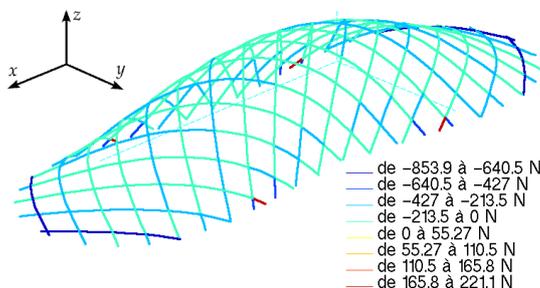


FIG. 5.6 – Efforts normaux sous poids propre.

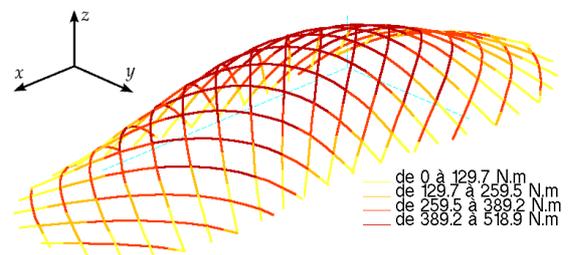


FIG. 5.7 – Moments sous poids propre.

La forme satisfait par ailleurs le critère de contrainte fixé pour le matériau puisque la contrainte maximum dans la structure est de 138 MPa (cf. paragraphe 5.1.2). L'essentiel de la contrainte est dû aux moments fléchissants puisque l'effort normal maximum est de 854 N ce qui correspond à une contrainte de seulement 2 MPa. La contrainte maximale est donc obtenue là où le moment fléchissant est maximum, c'est-à-dire dans la partie centrale de la structure, là où la courbure des

barres est la plus importante (cf. figure 5.7). L'effort normal maximal est observé dans les barres les plus courtes situées aux extrémités de la structures, il vaut 853 N (cf. figure 5.6). Partout ailleurs ou presque, les efforts normaux sont inférieurs à 400 N. Pour les réactions horizontales, on retrouve les mêmes écarts avec des réactions importantes (824 N) au pied des barres des extrémités. En dehors de ces barres, les réactions horizontales sont beaucoup plus faibles puisqu'elles ne dépassent pas 320 N et qu'elles ont une valeur moyenne de 180 N. Cela s'explique facilement en considérant le processus théorique d'obtention de la forme.

En effet, durant la seconde étape, l'écartement entre les extrémités de toutes les barres est maintenu à l'aide d'un câble. Cela induit un effort de compression qui est par construction supérieur à la charge critique de flambement de chaque barre. La formule d'Euler et la longueur de chaque barre permettent d'évaluer cette charge : les barres des extrémités sont les plus courtes (5,08 m), leur charge critique est de : 807 N, alors que la plus petite des autres barres a une longueur de 7,89 m et une charge de flambement de 334 N. Pour les barres les plus courtes, la réaction horizontale est essentiellement due à la compression induite par le câble, alors que celle-ci devient négligeable devant la compression due au poids propre lorsque les barres dépassent 10 m.

À ce stade, la conception du prototype n'est pas terminée : il reste encore à introduire les excentricités et à étudier la mise en place de la triangulation et le comportement de la structure sous charges. Néanmoins la structure semblait remplir la plupart des critères géométriques du cahier des charges ; il a donc été décidé de retransmettre en l'état le plan de fondation du prototype aux ingénieurs géomètres de l'École Nationale des Sciences Géographiques afin qu'ils effectuent le repérage des ancrages des barres sur le sol (cf. paragraphe 6.1.1). Les emplacements de ces ancrages serviront de guides pour le montage du prototype. La structure de celui-ci ne tient donc pas compte des étapes de conception qu'il reste à traiter et des remarques qui seront faites dans les paragraphes suivant.

Introduction des excentricités

La forme sans excentricité est une bonne approximation de la forme générale d'un gridshell. Néanmoins la précision dans la détermination de la géométrie est au moins égale à une excentricité dans un sens ou dans l'autre. Ici, la distance entre axes au niveau d'un assemblage est de 6,8 cm, on sait donc que la structure réelle est comprise dans une enveloppe de plus ou moins 6,8 cm autour de la forme de la figure 5.4. Ce niveau de précision est insuffisant pour faire un plan de fondation pour lequel en général on demande à l'entreprise de gros œuvre une précision centimétrique. C'est également insuffisant pour la fabrication d'une couverture en toile et globalement pour toutes les tâches qui nécessitent une préfabrication. Il est donc nécessaire de pousser la conception à un niveau de détail supérieur et d'introduire les excentricités dans le modèle.

Plusieurs méthodes sont possibles pour cela. On peut reprendre la recherche de forme au début et recommencer les calculs avec les paramètres que l'on a déterminés en prenant cette fois les excentricités en compte. Cette méthode est très gourmande en temps de calcul, notamment parce que les excentricités modifient la dynamique du problème : la rotation des points autour

du centre de gravité de la liaison (cf. paragraphe 3.4) introduit des pics d'énergie cinétique parasites de sorte que la structure n'est plus « libre » d'accélérer comme lorsque les excentricités étaient négligées, des itérations supplémentaires sont donc nécessaires (cf. paragraphe 3.7.3).

Pour gagner du temps, il faut réutiliser au maximum les calculs effectués pour la structure sans excentricité et relancer les calculs à partir de la géométrie d'équilibre de cette dernière en écartant de force les deux directions de barres au niveau des liaisons. L'algorithme converge alors rapidement vers la géométrie d'équilibre avec les excentricités. Pour la structure qui nous intéresse ici, on procède en deux temps, exactement comme pour la recherche de forme sans excentricité. On commence par imposer un écartement de 6,8 cm entre les nœuds reliés deux à deux, tout en maintenant le chargement uniforme de 33 N/ml dirigé vers le haut. Une fois ce calcul terminé, on peut déterminer la longueur des câbles qui maintiennent l'écartement entre les extrémités des barres. Par rapport au cas où les deux couches de barres étaient confondues, on observe un raccourcissement des câbles des barres « intérieures » (celles de la couche inférieure) et un rallongement des câbles des barres « extérieures » (celles de la couche supérieure). Les raccourcissements sont très variables tant en valeurs absolues (de 2,3 cm à 10,1 cm) qu'en valeurs relatives (de 0,46 % à 0,96 %). Les rallongements présentent exactement la même variabilité puisqu'ils sont égaux et opposés à 5% près au raccourcissement du câble qui est symétrique par rapport au grand axe de l'ellipse, l'axe des x .

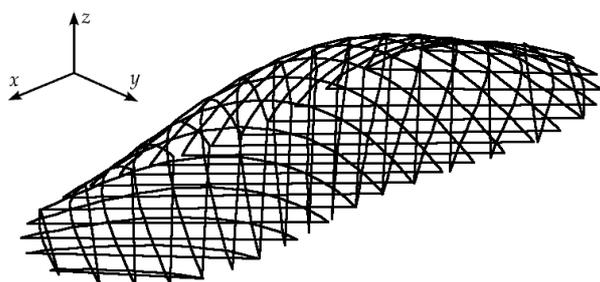


FIG. 5.8 – Vue de la structure avec ses câbles provisoires.

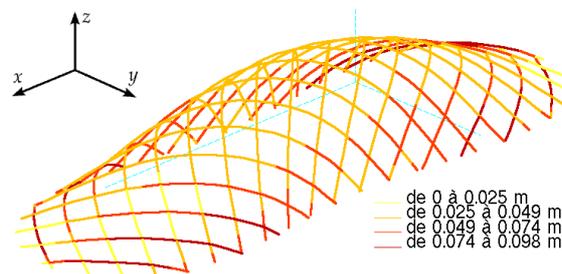


FIG. 5.9 – Déplacements totaux dus à la prise en compte des excentricités.

Ensuite, pour la seconde étape, on part de la géométrie d'équilibre sans excentricité, on impose une distance de 6,8 cm au niveau de chaque assemblage et on modifie la longueur des câbles en fonction des valeurs que l'on vient de déterminer dans l'étape précédente. La figure 5.8 présente une vue de la structure avec ses câbles provisoires. Après convergence, la forme obtenue est celle qui est la plus proche possible de celle de la figure 5.4. En effet, les déplacements maximaux entre les deux géométries sont quasiment symétriques par rapport aux plans $x = 0$ et $y = 0$ et restent de l'ordre de grandeur de l'excentricité (cf. figure 5.9).

Quant aux efforts intérieurs, ils sont presque inchangés comme on peut le constater sur la figure 5.10 des moments fléchissants (519,7 N.m avec excentricité contre 518,9 N.m sans) et sur la figure 5.11 des efforts normaux (-954,7 N avec excentricité contre -853,9 N sans). On observe quand même un moment de flexion important (environ 450 N.m) au niveau de la liaison entre les barres des extrémités et localement de la compression dans les barres au voisinage de certains appuis. Cette compression est essentiellement due au fait que, par endroit, près du sol, la structure forme déjà des triangles ce qui la rend localement indéformable et qui entraîne des

surcontraintes. Le niveau de ces efforts est cependant très faible et sans conséquence sur les fondations et les contraintes totales.

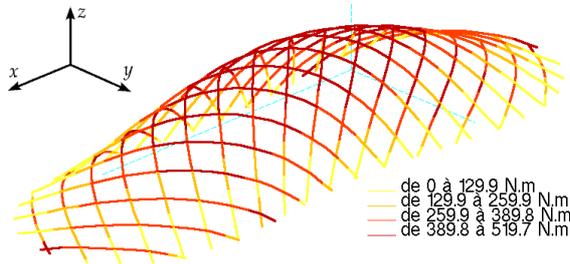


FIG. 5.10 – Moments fléchissants sous poids propre avec prise en compte des excentricités.

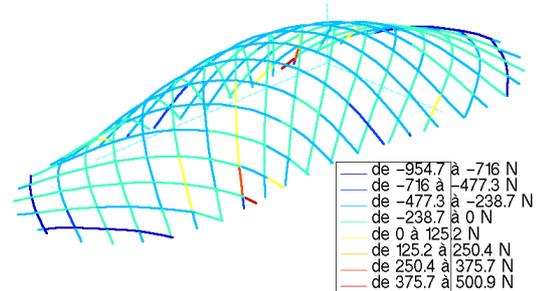


FIG. 5.11 – Efforts normaux sous poids propre avec prise en compte des excentricités.

Etude théorique du montage

Le processus qui a abouti à la forme du prototype est un processus intellectuel, théorique. Pour le montage réel de la structure, les deux étapes de la recherche de forme seront négligées et le montage se fera en une seule fois. La charge répartie dirigée vers le haut sera reproduite avec des étais et l'écartement des extrémités des barres sera piloté avec des tirants et ce d'autant plus facilement que les calculs effectués lors de la recherche de forme montrent que les efforts à mettre en œuvre sont faibles (33 N/ml plus le poids propre). La méthode de construction décrite dans le paragraphe 6.1.2 n'utilisera pas d'autres moyens pour déformer la structure jusqu'à ce que les extrémités des barres atteignent leurs positions définitives. Cette méthode est basée sur l'observation de la forme et sur des corrections ponctuelles de l'altitude de certains points. Tout est fait « au jugé », seules les positions finales des extrémités des barres sont parfaitement contrôlées. Il importe donc de savoir si, pour un contour donné, un jeu de conditions aux limites donné, la forme finale d'équilibre est indépendante du chemin de chargement suivi.

D'un point de vue théorique, le comportement du matériau reste linéaire élastique durant tout le montage, aucune dissipation extérieure n'est introduite car toutes les forces sont conservatives ; on peut donc penser que l'état d'équilibre est indépendant du chemin suivi lors de la mise en forme. Cela semble se vérifier pour une poutre en compression simple : pour un écartement de ses extrémités donné, il existe une infinité de positions d'équilibre qui correspondent chacune à un mode de flambement, mais seule l'*elastica* simple du premier mode est une position d'équilibre stable. Ainsi, on peut émettre l'hypothèse que, si les perturbations introduites lors de la recherche de forme sont suffisamment importantes, alors la forme finale du prototype est la seule configuration d'équilibre stable de la grille pour les conditions aux limites choisies.

Pour tester cette hypothèse, on simule le processus de mise en forme qui sera utilisé lors de la construction du prototype (cf. paragraphe 6.1.2) : la géométrie initiale est celle de la grille à plat que l'on a surélevée d'un mètre à l'exception des extrémités des barres (cf. figure 5.12). Des tirants ont été ajoutés pour relier les deux extrémités de certaines des barres. Leurs longueurs sont celles qui séparent les extrémités des barres de la grille dans la forme finale, elles sont données à la dernière ligne du tableau B.1 en annexe. Les autres barres, celles qui n'ont pas de

tirants, ont des extrémités fixes dont les positions sont celles qu'elles doivent avoir dans la forme finale. Les barres dont la position est imposée sont entourées d'un cercle rouge sur le plan de la figure B.2 en annexe. Le chargement du modèle correspond au poids propre réel de la structure. Le calcul est ensuite lancé de la géométrie initiale depuis laquelle elle oscille librement jusqu'à trouver sa position d'équilibre.

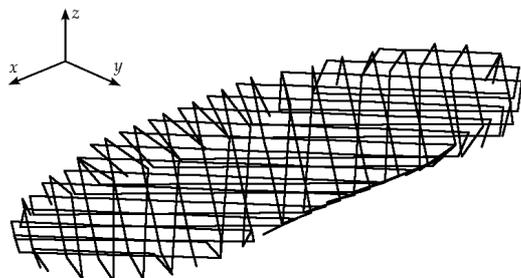


FIG. 5.12 – Géométrie initiale de la simulation du montage

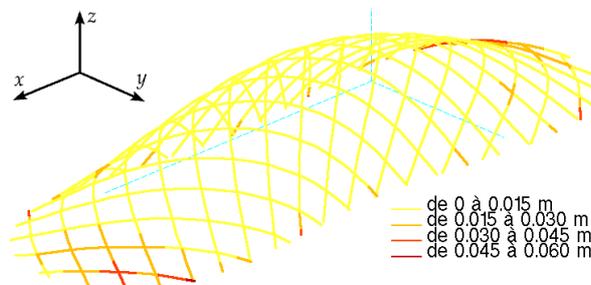


FIG. 5.13 – Distance entre la forme théorique et celle issue de la simulation du montage.

Après convergence du calcul, la forme finale issue de la simulation du montage est très proche de celle du prototype : en dehors de quatre points isolés près des extrémités, la distance entre les deux formes n'excède pas 1,5 cm (cf. figure 5.13). Pour le montage, il semble donc qu'aucun problème théorique lié à la méthode de mise en forme ne risque de se produire.

5.2.3 Triangulation de la structure

À la fin de l'étape de recherche de forme, la grille possède encore son degré de liberté en cisaillement, elle est encore très souple. Pour que son comportement se rapproche de celui d'une coque, il faut donc bloquer la rotation entre les deux directions de la grille, empêcher la déformation des angles formés par ces deux directions. A priori, il n'est pas nécessaire d'empêcher la déformation des angles de toutes les mailles pour bloquer le degré de liberté en cisaillement de l'ensemble de la grille. Cependant les barres de la grille principale sont suffisamment souples pour pouvoir être mises en forme, elles ne peuvent donc pas être considérées comme suffisamment rigides pour retransmettre par flexion les efforts d'une maille contreventée à l'autre. Il est donc préférable de contreventer toutes les mailles.

Choix du type de contreventement

De nombreux systèmes de contreventement existent, mais ils ne sont pas tous adaptés aux gridshells. Une première solution consiste en un blocage des rotations directement au niveau des assemblages par un système de clavettes qui empêchent les pièces de tourner ou par une solidarisation des deux directions de barres comme cela a été fait à Helsinki avec des plaques de clous (cf. paragraphe 1.5.4). Cette solution n'est pas satisfaisante car elle conduit à l'apparition de moments de flexion dans les éléments et, par conséquent, à une augmentation de leur section ce qui va à l'encontre des objectifs de légèreté fixés au paragraphe 1.1.2.

De ce point de vue, le contreventement traditionnel à l'aide de croix de Saint-André est plus acceptable : lorsque la structure est chargée, les câbles des croix assurent un transfert des charges jusqu'à la fondation uniquement sous forme d'effort normal dans les barres. Cependant, le système ne fonctionne que si les câbles sont tendus ; il faut donc les précontraindre. La mise en œuvre de cette précontrainte est délicate car les mailles sont interdépendantes ce qui nécessite le développement d'une technologie coûteuse d'assemblages qui limite les effets de détension des câbles dans les mailles voisines. En outre, la précontrainte doit être stable dans le temps et les matériaux composites fluents (cf. paragraphe 2.3.1) ce qui peut entraîner une légère modification de la forme de la structure et donc une détension de certains câbles. Compte tenu du nombre de câbles, il n'est pas envisageable de venir les retendre régulièrement comme on fait pour les câbles de précontrainte dans les ponts. Ainsi, bien que d'une grande transparence et d'une grande légèreté, cette solution ne semble pas à même d'assurer la rigidification durable d'un gridshell en composites.

Les contreventements par éléments rigides sont donc préférables parce qu'ils travaillent aussi bien en traction qu'en compression et qu'ils ne nécessitent pas de précontrainte. Ces éléments peuvent être discontinus ou continus. Le système discontinu correspond à la mise en place de diagonales indépendantes les unes des autres pour chacune des mailles de la grille. Il conduit à une multiplication du nombre d'éléments qui convergent aux nœuds et donc à la complication de l'assemblage, à l'augmentation de sa taille et de son coût. Les systèmes continus sont donc préférables. Cependant, d'une maille à l'autre, la direction des diagonales change ; le contreventement doit donc être capable de suivre la courbure de la grille. Or le procédé de construction des gridshells a été tout entier développé pour permettre la construction de surfaces courbes à partir d'éléments rectilignes. Introduire des barres courbes dans le contreventement serait par conséquent contraire à cette démarche. Un système de triangulation formé d'éléments rectilignes, rigides en compression et suffisamment souples pour pouvoir épouser la forme de la grille (c'est-à-dire d'éléments très proches de ceux de la grille principale) semble donc bien adapté aux gridshells. C'est la solution qui a été adoptée pour le gridshell de Downland (cf. paragraphe 1.4)

Une autre solution consiste à rigidifier la grille par des éléments non pas linéiques mais surfaciques. La toiture du *Savill Building*, par exemple, est contreventée à l'aide de lattes de bois qui recouvrent la totalité de la surface du gridshell (cf. paragraphe 1.5.2). Ces lattes sont clouées ou vissées directement dans les poutres en bois de la grille. Cette solution n'est donc pas transposable directement aux gridshells en matériaux composites parce que ceux-ci résistent mal au choc et au perçage. Néanmoins ces techniques d'assemblage peuvent être remplacées par du soudage, du collage ou des clips ce qui permet d'éviter les concentrations de contraintes.

Enfin, en prolongeant l'idée que le gridshell doit être contreventé par la couverture elle-même, on peut imaginer une dernière solution dans laquelle le gridshell sert à la fois de forme de coffrage et d'armature pour une coque en béton. Pour cela, la continuité de la surface est tout d'abord réalisée à l'aide d'un matériau suffisamment rigide pour supporter le poids du béton, avec des tôles de métal déployé fixée contre la surface du gridshell par exemple. Ensuite, du béton est projeté sur la grille de façon à noyer les poutres de la grille dans celui-ci. A priori très peu d'armatures supplémentaires sont nécessaires si le processus de définition de la forme a suivi la méthode du paragraphe 4.3. En effet, celle-ci conduit à des formes très proches du

funiculaire du poids propre qui constitue le chargement principal de la coque compte tenu du poids de la couverture en béton. L'ensemble de ce procédé constitue une technique originale et économique pour la construction de coque en béton qui est vraisemblablement adaptable à tout autre mortier hydraulique.

Chacune des trois dernières méthodes de contreventement présente des avantages. Toutefois seule la triangulation à l'aide d'une troisième direction de barres sera étudiée en détail dans les paragraphes suivants, essentiellement parce qu'elle ne nécessite pas de technologie supplémentaire par rapport à celle de la grille et parce qu'elle permet d'utiliser les mêmes éléments rectilignes, les mêmes assemblages et le même type de modèle numérique.

Remarques sur la mise en place numérique de la triangulation

La mise en place pratique de cette triangulation par barre est une chose aisée : il suffit de choisir les emplacements des nouvelles barres sur la grille, de positionner les assemblages sur les deux directions principales aux endroits correspondants et de fléchir les barres pour qu'elles suivent les courbes d'assemblage en assemblage. La mise en place numérique de la triangulation est une étape plus délicate, car elle consiste à venir ajouter des éléments sur une structure déjà déformée. Ce processus de construction par étapes est d'autant plus complexe que la géométrie des éléments à ajouter est inconnue avant la fin de l'étape de la recherche de forme. En effet, si la grille à plat possède des mailles régulières, les diagonales des mailles de la surface gauche ne sont plus égales ce qui est la contrepartie inévitable de la déformabilité de la grille en cisaillement et du processus de construction des gridshells. Il s'agit donc de mettre au point une méthode qui permette la définition de la géométrie et la mise en place de la troisième direction de barres en perturbant le moins possible la géométrie à l'équilibre de la grille et son champ de contraintes.

On remarque tout d'abord que si les mailles de la grille sont irrégulières après la mise en forme, elles forment uniquement des parallélogrammes sur le sol. Il est donc facile de tracer sur la grille à plat, un ensemble de barres parallèles qui assure le contreventement de la grille (cf. figure 5.14). Dans cette configuration initiale, on procède à l'appariement numérique des points de la grille et de la triangulation. À ce stade, la longueur des barres de la triangulation n'est pas adaptée à la forme finale de la grille. Pour qu'elles ne perturbent pas la forme de la grille lors de leur mise en place, on leur affecte une raideur en traction et compression négligeable (un million de fois plus faible que celle des barres de la grille principale) tout en conservant leur raideur en flexion. Ainsi, lors de la mise en place de la triangulation, la grille principale va entraîner dans son mouvement ces barres « molles » qui vont se déformer librement en ne retransmettant à la grille principale que les efforts de flexion de la triangulation réelle.

Après convergence de ce premier calcul, les longueurs « déformées » des barres de la triangulation sont connues : il s'agit des longueurs vraies des barres réelles nécessaires à la triangulation effective du gridshell. On peut donc à partir de celles-ci définir la géométrie au repos réelle de la structure triangulée (cf. figure 5.15). On peut logiquement remarquer que les longueurs des barres de la triangulation réelle sont différentes celles de la triangulation molle (cf. figure 5.14). On relance alors un second calcul avec les longueurs au repos réelles et des rigidités réinitialisées

aux valeurs normales pour la triangulation. Le résultat du calcul est la géométrie de la structure triangulée.

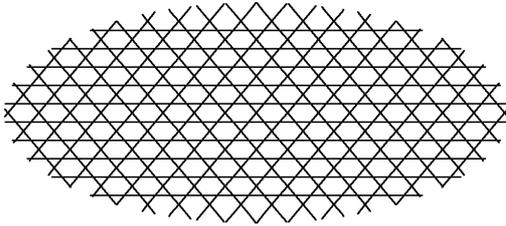


FIG. 5.14 – Géométrie au repos avec la triangulation de barres « molles ».

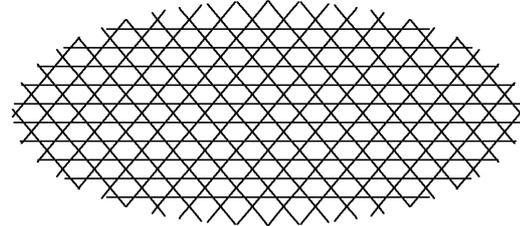


FIG. 5.15 – Géométrie au repos avec la triangulation réelle.

En dehors de son aspect pratique pour la définition des longueurs au repos des barres de la triangulation, cette méthode permet de très peu perturber les efforts intérieurs dans la grille principale. En effet, si la triangulation est mise en place brutalement, c'est-à-dire directement avec la vraie raideur des barres, les efforts de précontrainte dans les nouvelles barres entraînent des variations importantes des efforts normaux comme on peut le voir en comparant les efforts normaux avant (cf. figure 5.11) et après triangulation (cf. figure 5.17) : la compression maximale passe de -954 N à $-4\,347$ N et la traction maximale de 501 N à $1\,062$ N. En outre, un grand nombre de barres qui étaient initialement comprimées se retrouvent tendues ce qui est improbable physiquement puisque la structure soumise à son propre poids dans tous les cas. En revanche avec $-1\,083$ N en compression et 524 N en traction, les efforts normaux de la structure triangulée à l'aide de la méthode en deux temps décrite ci-dessus sont beaucoup plus proches de ceux de la structure non triangulée de la figure 5.11 que ne l'étaient ceux de la figure 5.16.

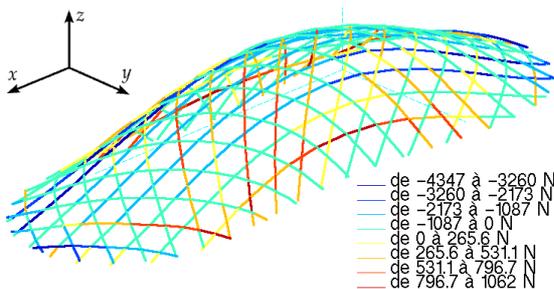


FIG. 5.16 – Efforts normaux par triangulation directe.

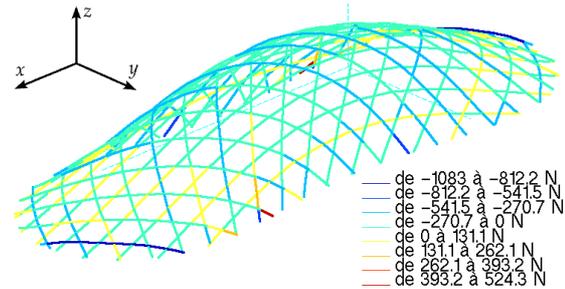


FIG. 5.17 – Efforts normaux avec mise en place de la triangulation en deux étapes.

Les principales étapes de la triangulation sont donc les suivantes :

1. Appariement des nœuds de la grille principale et de la triangulation ;
2. Premier calcul de la structure avec une triangulation « molle », sans raideur en traction-compression ;
3. Évaluation de la géométrie au repos réelle de la triangulation à partir de la géométrie déformée du premier calcul ;
4. Second calcul de structure avec les propriétés réelles de la troisième direction de barres.

Performances comparatives de la triangulation retenue

On remarque que la triangulation réalisée ci-dessus forme un maillage d'hexagones et de triangles. Le choix de ce maillage vient du fait que, pour la construction du prototype, on ne dispose pas de pièces d'assemblage qui permettent de relier trois barres entre elles et ainsi de trianguler exactement les losanges de la grille. Un excentrement de la rigidification étant inévitable, il a été décidé de mettre les fixations de la troisième direction de barres au milieu de deux assemblages successifs, ce qui a abouti au maillage de la figure 5.18. Il est à noter que les deux directions de barre de la grille principale sont superposées et, théoriquement, distantes d'une excentricité même si celle-ci n'est pas prise en compte ici. Les barres de la troisième direction ne peuvent donc matériellement pas être fixées aux barres des deux directions principales mais à une seule de ces directions. Le système de triangulation obtenu est original et n'a jamais été mis en œuvre dans aucune structure de gridshells à notre connaissance.

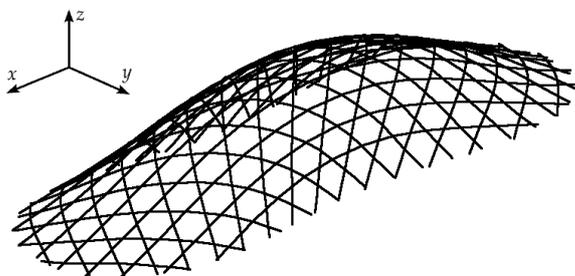


FIG. 5.18 – Triangulation du prototype.

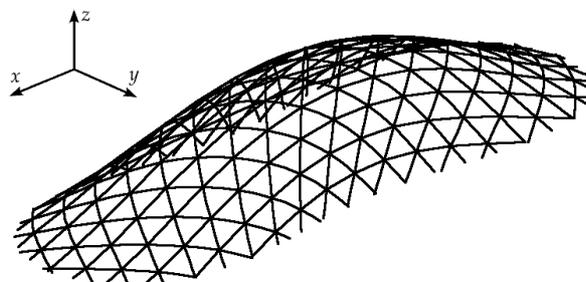


FIG. 5.19 – Triangulation classique.

Pour évaluer les performances mécaniques de ce système de triangulation, on les compare à celles de la structure sans triangulation et à celles du système « classique » de triangulation dans lequel les barres passent au droit des intersections de la grille (cf. figure 5.19). Pour cela on étudie le comportement de ces trois structures sous un chargement croissant appliqué à tous les nœuds dont la hauteur est supérieure à 1,8 m (c'est-à-dire 55 nœuds). Les paliers de chargement sont des paliers de 200 N. À chaque étape, on calcule le déplacement vertical moyen de tous les nœuds chargés ainsi que la moyenne des valeurs absolues des déplacements horizontaux selon y (la moyenne est nulle).

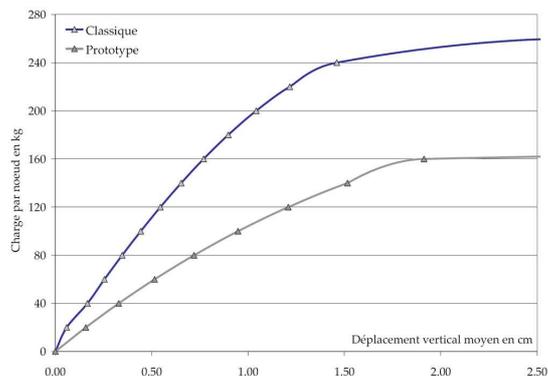


FIG. 5.20 – Comparaison des comportements verticaux des deux triangulations.

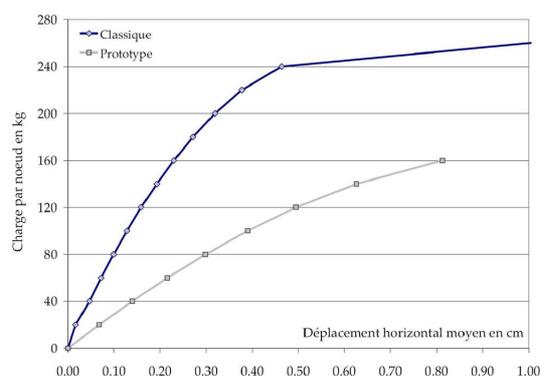


FIG. 5.21 – Comparaison des comportements horizontaux des deux triangulations.

Ces valeurs sont reportées respectivement sur les graphiques des figures 5.20 et 5.21. Le terme « classique » désigne les courbes de comportement de la triangulation de la figure 5.19, le terme « prototype » celles de la triangulation de la figure 5.18. La structure sans triangulation est comparativement trop souple pour pouvoir être portée sur le même graphique. À partir des premières valeurs de chaque courbe, on évalue également les « raideurs » de chaque structure (cf. tableau 5.4). On constate alors l'effet considérable de la triangulation sur la raideur de la structure qui gagne jusqu'à un facteur 100 tant sur les déplacements horizontaux que verticaux. On constate ensuite que la triangulation choisie pour le prototype est beaucoup plus souple que la triangulation classique (environ deux fois plus souple verticalement et trois fois plus souple horizontalement) et que la ruine ou le flambage de la structure se produit plus tôt pour le prototype que pour la structure à triangulation classique (pour une charge de 30 % inférieure). Le mode de flambement des deux structures est cependant assez proche.

TAB. 5.4 – Raideur des différents schémas de triangulation.

en kN/m	Classique	Prototype	Sans Triangulation
Raideur verticale	235	114	1,9
Raideur horizontale	828	274	8,0

Les choix technique et esthétique du prototype ont donc d'importantes conséquences sur le comportement mécanique de la structure. Le fait de fixer la triangulation au milieu des barres de la grille principale introduit des flexions supplémentaires par rapport à la triangulation qui passe directement au droit des intersections de la grille. Si les incidences sur les contraintes générales sont faibles, ce choix entraîne des déplacements au moins deux fois plus importants dans le modèle en hexagones et triangles que dans le modèle classique. Du point de vue de la performance mécanique, il semble donc nécessaire de développer un assemblage qui permette de relier trois barres entre elles avant de passer à la réalisation de gridshell de plus grande portée.

5.2.4 Le comportement sous chargement réglementaire

La forme finale du prototype est fixée, on étudie maintenant son comportement sous chargement réglementaire à l'aide des Eurocodes et des valeurs du paragraphe 5.1.2. Dans les paragraphes suivants, on passe en revue les chargements utilisés et leurs combinaisons, puis les déplacements et les contraintes observées sous charges avant de conclure sur la viabilité du prototype de gridshell en tant que structure de génie civil.

Définition des cas de charges et de leurs combinaisons

Les principaux chargements extérieurs à prendre en compte pour le prototype sont : le poids propre de la structure, le poids de la couverture, la neige et le vent. On rappelle que le poids propre de la structure est de 0,84 kg/ml de tube et 1 kg pour chaque assemblage. Pour la couverture, différentes techniques sont possibles : une couverture traditionnelle avec un système

de voliges et d'ardoises ou de voliges et de zinc comme pour le gridshell de Downland (cf. figure 1.17); une couverture en toile tendue ou assimilé comme le tissu PVC transparent de Mannheim (cf. figure 1.13) ou le papier enduit du pavillon du Japon (cf. figure 1.21). On peut aussi imaginer une couverture gonflable plus facile à tendre sur les surfaces à double courbure positive ou alors un système de grandes tuiles souples en composite qui pourrait se passer de voliges. On peut enfin envisager d'utiliser le gridshell comme support de coffrage pour une coque en béton. Le poids du système de couverture est donc choisi forfaitairement de 20 kg/m^2 , ce qui est l'ordre de grandeur des principaux types de couverture envisagés à l'exception de la couverture en béton que l'on étudiera pas ici.

Pour ce qui est des actions climatiques, le prototype est destiné à être construit sur le site de l'École Nationale des Ponts et Chaussées à Champs-sur-Marne, les valeurs des pressions de référence de la neige et du vent sont donc celle de la Seine-et-Marne : 45 kg/m^2 de neige et 60 kg/m^2 de vent. Deux répartitions de neige sur la structure sont étudiées : la seconde p_{sym}^N est symétrique et la charge maximale est appliquée sur toute la structure, la deuxième p_{asym}^N est asymétrique et la charge maximale n'est appliquée que sur une moitié de la structure (celle des x positifs).

Les pressions exercées par le vent sur le prototype dépendent de sa direction et sont d'autant plus importantes que les parois au vent sont verticales. Le vent le plus défavorable est ici orienté selon l'axe des y ; ce sera le seul cas de vent étudié. Localement la pression de vent p_y^V est définie à partir de la pression de référence p_{ref} et des coefficients de pression partielle internes c_{pi} et externes c_{pe} par $p_y^V = p_{ref}(c_{pe} - c_{pi})$. Les coefficients externes de pression partielle sont extrapolés à partir de ceux qui s'appliquent sur une coupole sphérique dont on peut voir l'allure générale sur la figure 5.22.

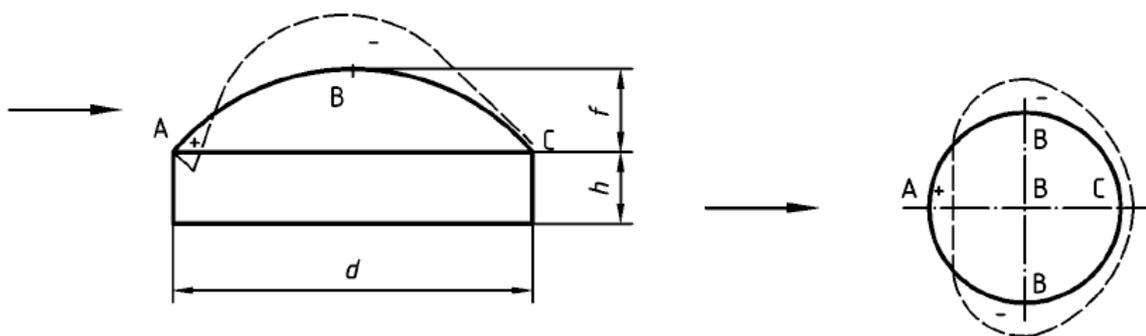


FIG. 5.22 – Pressions de vent sur une coupole sphérique d'après l'Eurocode 1.

Les valeurs caractéristiques A , B et C dépendent de la hauteur h sous la coupole (ici $h=0$) et de l'angle d'attaque de la coupole défini par le rapport entre la flèche f sous la coupole et sa portée d (ici 75°). Ces valeurs sont données par des abaques et valent ici : $A=0,6$, $B=-0,8$ et $C=0$. La paroi au vent subit une pression alors que la partie supérieure et la paroi sous le vent subissent une succion. Les efforts de succion entraînent une mise en tension de la structure, ils sont donc facilement repris par le gridshell. Les pressions en revanche engendrent de la compression dans les éléments ce qui peut éventuellement provoquer des instabilités. Pour la pression interne

(surpression ou dépression), on choisit ensuite l'état plus défavorable de façon à accentuer les efforts de compression dans la partie au vent, c'est-à-dire une pression interne négative et un coefficient partiel $c_{pi} = -0,3$. La pression totale varie donc de 66 kg/m^2 en A, à -30 kg/m^2 en B et 18 kg/m^2 en C.

À partir de ces chargements, on définit trois combinaisons pour les états limites de service (ELS) :

$$\begin{aligned} - q_1^{ELS} &= pp + p^{couv} + p_{sym}^N, \\ - q_2^{ELS} &= pp + p^{couv} + p_{asym}^N, \\ - q_3^{ELS} &= pp + p^{couv} + p_y^V; \end{aligned}$$

et trois combinaisons pour les états limites ultimes (ELU) :

$$\begin{aligned} - q_1^{ELU} &= 1,35pp + 1,35p^{couv} + 1,5p_{sym}^N, \\ - q_2^{ELU} &= 1,35pp + 1,35p^{couv} + 1,5p_{asym}^N, \\ - q_3^{ELU} &= 0,9pp + 0,9p^{couv} + 1,5p_y^V. \end{aligned}$$

Étude des états limites de service

Les trois combinaisons à l'ELS sont appliquées successivement à la structure et les déplacements correspondants sont calculés à l'aide du programme de relaxation dynamique. Ensuite, tout dépend de la nature de la couverture qui doit être posée sur le gridshell. S'il s'agit d'une couverture souple, d'une membrane textile, les vérifications à l'ELS (formation de poche d'eau, déformations excessives à l'œil, etc.) sont principalement du ressort du concepteur de la toile. En revanche, s'il s'agit d'une couverture rigide, il est préférable d'utiliser les limitations usuelles pour les charpentes en bois de sorte que les déplacements verticaux doivent être inférieurs au $1/200^e$ de la portée de la coque et les déplacements horizontaux inférieurs au $1/125^e$ de la hauteur. Si l'on admet que la portée moyenne de l'ouvrage est de 7 m et que sa hauteur maximum est de 3,7 m, les déplacements verticaux du gridshell sont admissibles s'ils demeurent inférieurs à 3,5 cm et les déplacements horizontaux inférieurs à 3,0 cm.

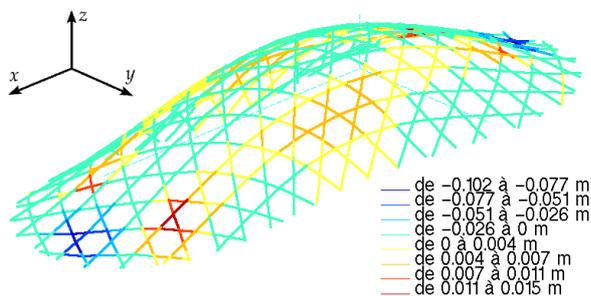


FIG. 5.23 – Déplacement vertical sous charge de neige symétrique.

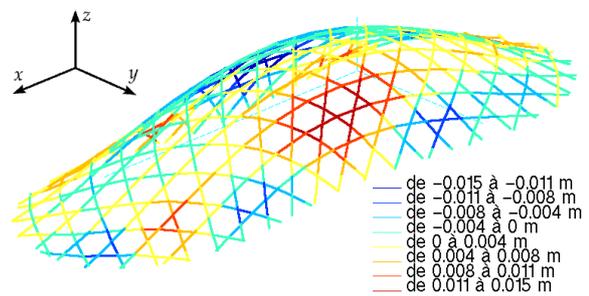


FIG. 5.24 – Déplacement selon y sous charge de neige symétrique.

Les figures 5.23 et 5.24 représentent respectivement les déplacements selon z et selon y . On constate d'une part que les déplacements horizontaux restent admissibles dans l'ensemble de la structure et d'autre part que les déplacements verticaux sont supérieurs à 2,6 cm dans deux zones très localisées près des extrémités de la structure, mais que partout ailleurs ils sont admissibles. Ces deux zones sont de toute évidence les points faibles du gridshell : dans le reste

de la structure, le comportement de la structure est celui d'une coque et le gridshell ne développe que des efforts membranaires alors que dans ces deux zones très plates, la courbure n'est pas suffisante pour pouvoir reprendre les efforts perpendiculaires à la surface dans le plan des tubes et l'apparition de flexions importantes est inévitable.

Sous le chargement de neige asymétrique, on observe exactement le même phénomène avec de grands déplacements verticaux du côté de l'extrémité chargée. Sous le chargement de vent orienté des y négatifs vers les y positifs, les déplacements verticaux sont admissibles partout comme on le voit sur la figure 5.25. En revanche on constate sur la figure 5.26 que le déplacement selon y de la paroi au vent atteint 7,2 cm ce qui est près de deux fois le déplacement autorisé. La raison de ces forts déplacements est identique à la précédente, la courbure de la paroi est faible dans cette zone, le « creux de la cacahouète » n'est pas assez prononcé pour donner un comportement de type coque.

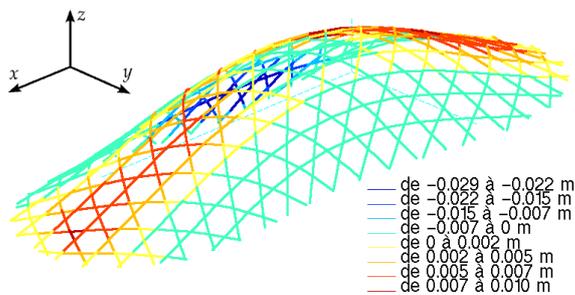


FIG. 5.25 – Déplacement vertical sous chargement de vent selon y .

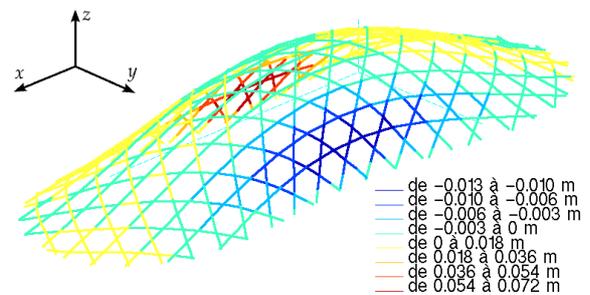


FIG. 5.26 – Déplacement selon y sous chargement de vent selon y .

Encore une fois, ces déplacements importants ne sont pas gênants si la couverture est souple parce qu'une membrane est capable suivre les déformations de la structure, de s'adapter à sa forme. En revanche, il faut admettre qu'en l'état le prototype n'est pas une structure suffisamment rigide pour accueillir une couverture rigide. Il est cependant facile de corriger ces défauts de conception parce que les zones défaillantes sont très localisées. Les extrémités de la structure sont des zones très plates, peu habitables et peu pratiques, une première solution consiste donc à contourner le problème de leur manque de rigidité en les supprimant et en y créant des ouvertures (cf. paragraphe 6.4). En remarquant que la souplesse des extrémités de la structure vient en grande partie de la faiblesse de leur courbure, on peut, dans une seconde solution, améliorer leur forme par une modification des conditions aux limites ou du périmètre de la grille initiale.

On note que cette solution est valable pour les parties latérales du prototype dans lesquelles la courbure est faible également. Dans cette zone, on peut aussi redensifier le maillage pour gagner de la raideur comme cela a été fait dans le gridshell de Downland (cf. figure 1.18). L'étude de ces solutions conduirait sans aucun doute à une forme et une structure qui vérifierait l'ensemble des critères de déplacement, mais les allers-retours qu'elle engendrerait sont l'apanage ordinaire de la démarche de projet ; elle n'a donc pas lieu d'être ici.

Étude des états limites ultimes

Après les vérifications des états limites de service, viennent les vérifications des états limites ultimes. Les critères portent alors sur les contraintes, le risque d'instabilité de l'ouvrage, la sensibilité aux imperfections et éventuellement l'étude de cas de charges accidentels comme ceux liés à la rupture d'un des éléments pour cause de vandalisme ou de choc d'engin. Par manque de temps, seuls les deux premiers critères seront étudiés ici. Pour la sensibilité aux imperfections, il semble que la prise en compte des excentricités dans le modèle en fournisse une bonne estimation au niveau de la raideur de la structure (cf. paragraphe 6.3.3). Il est donc vraisemblable que la modélisation des excentricités et des mécanismes locaux qu'elles introduisent entre les barres permettent également d'appréhender l'augmentation du risque d'instabilité liés aux imperfections qui est d'après V. Gioncu [42] et T. Bulenda [27] un point clef du dimensionnement des gridshells. Pour les cas de charges accidentels, l'expérience acquise au laboratoire dans la construction de gridshell semble indiquer que la structure peut supporter facilement la rupture d'un élément grâce à son degré élevé d'hyperstaticité. En ce qui concerne le critère de contrainte, on rappelle que le paragraphe 5.1.2 recommandait de considérer une contrainte à rupture de 275 MPa à court terme et de 140 MPa à long terme.

Les trois combinaisons q_1^{ELU} , q_2^{ELU} et q_3^{ELU} sont appliquées à leur tour au prototype. Dans les deux premiers cas de charge, le défaut aux extrémités de la structure qui avait été révélé dans l'étude des déplacements provoque le claquage de la coque comme on peut le voir sur la figure 5.27. Le chargement de l'ELS est donc trop proche de celui qui entraîne l'instabilité de la structure pour que l'on puisse considérer la structure comme sûre. On remarque cependant qu'à l'ELS, les contraintes n'augmentent que de 10 % par rapport à la précontrainte initiale et n'atteignent que 152 MPa ce qui est très loin des 275 MPa autorisés pour les chargements de court terme. Pour le troisième chargement, la structure tient la charge et les contraintes passent de 138 MPa à 165 MPa, ce qui est de nouveau nettement inférieur à la résistance à rupture à court terme. De plus, on remarque que, si on augmente progressivement la charge de vent jusqu'à quatre fois la pression de référence, on arrive à la rupture des tubes sans déclencher d'instabilité de la structure.

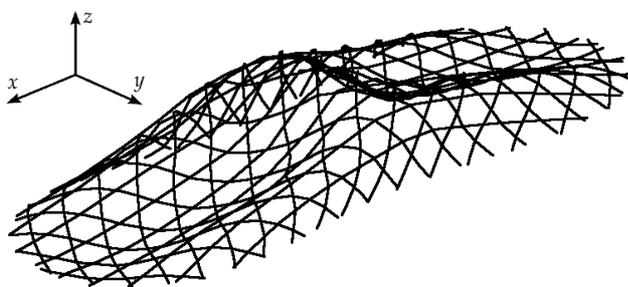


FIG. 5.27 – Claquage symétrique du prototype à l'ELU.

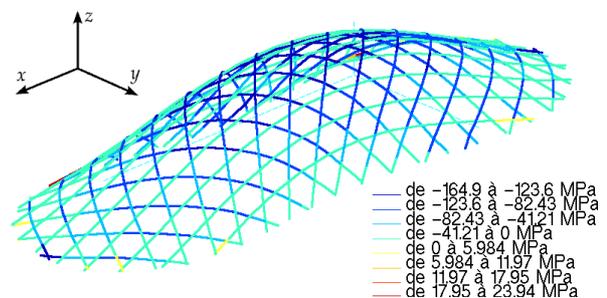


FIG. 5.28 – Contraintes maximales sous chargement de vent à l'ELU.

Deux traits caractéristiques du comportement des gridshells apparaissent donc dans cet exemple. D'une part, les variations de contraintes entre la configuration initiale du prototype et sa configuration déformée sont faibles (environ 10 % d'augmentation). L'essentiel de la contrainte

dans les barres d'un gridshell est donc amené par l'étape de mise en forme, c'est la précontrainte initiale dans les tubes qui est dimensionnante, notamment parce qu'elle correspond à un chargement de long terme. D'autre part le faible module des matériaux de la grille (bois ou composite) et l'importance de leur déformation élastique font que le risque d'instabilité de ces structures est élevé et en général prépondérant par rapport au risque de rupture d'un élément à l'ELU sous chargement de court terme. Après l'état de précontrainte initial, c'est donc sur l'étude des instabilités de la structure qu'il faut porter toute son attention lors de la conception d'un gridshell.

5.3 Conclusion

Dans le domaine du bâtiment qui est le domaine d'application visé par les gridshells en composites, les codes de référence sont les Eurocodes. Il était donc naturel de s'inscrire dans ce cadre. Comme il n'existe pas d'Eurocode dédié aux matériaux composites, des coefficients partiels de sécurité adaptés à leurs spécificités ont été proposés : ils se fondent sur le mode d'identification de leurs propriétés mécaniques, le procédé de production du matériau et les effets de la température et du vieillissement. Le comportement viscoélastique des composites est déterminant dans la définition de ces coefficients : la résistance à rupture est divisée par 2,5 entre un chargement à court terme et un chargement à long terme.

Pour comprendre les implications pratiques de ces variations de coefficients, un exemple de conception de gridshell en composites a été présenté : le prototype dont l'étude expérimentale fera l'objet du chapitre suivant. On a tout d'abord mis en œuvre la méthode du paragraphe 4.3 pour définir la forme finale à partir d'une grille elliptique. On a ensuite constaté que l'introduction des excentricités dans le modèle ne changeait que très peu la forme de la grille et la répartition des efforts dans celle-ci : il n'est donc pas nécessaire de prendre en compte les excentricités pour l'étape de la recherche de forme. Une simulation du montage a également été effectuée. Elle a montré qu'aucun problème lié au procédé constructif ne risquait de se produire lors de la réalisation de la structure réelle.

Il a ensuite été démontré que, dans l'état actuel de la technologie, le système de contreventement le plus pertinent pour les gridshells en composites était une triangulation des mailles de la grille à l'aide de barres dans une troisième direction. Comme les barres de la grille principale, les barres de la triangulation sont droites au repos et doivent être précontraintes par flexion pour être assemblées à la grille. Une méthode numérique originale a été développée pour modéliser cette étape : un calcul en deux temps permet de définir la longueur au repos des barres de la triangulation et de simuler la mise en place de celles-ci de façon à perturber le moins possible la géométrie à l'équilibre de la grille et son état de contrainte.

La vérification des états limites de service a mis en évidence la souplesse du matériau et l'importance du choix de la technique de couverture. En effet, si la couverture est souple, elle pourra supporter les déplacements importants d'un gridshell en composites, ce qui permettra d'obtenir des structures très légères. En revanche, si la couverture est rigide, il faut compenser la souplesse du matériau en densifiant le maillage et en augmentant la double courbure de la surface. La vérification des états limites ultimes a tout d'abord montré que l'augmentation des

contraintes liées aux chargements extérieurs était de l'ordre de 10 % de la contrainte permanente de flexion. Compte tenu de la faible résistance des tubes à long terme, la précontrainte est donc amenée à jouer un rôle prépondérant dans le dimensionnement de la grille. Ensuite, il a été montré que le risque d'instabilité était élevé et en général plus important que le risque de rupture d'un élément sous chargement extérieur. L'étude des instabilités de la structure est donc une étape indispensable de la conception des gridshells en composites.

Chapitre 6

Réalisation et étude expérimentale du premier gridshell en composites

Le prototype de gridshell dont la présentation a été faite dans le chapitre précédent a été construit à l'échelle un sur le site de l'École Nationale des Ponts et Chaussées à Champs-sur-Marne. Ce prototype a fait l'objet d'un programme expérimental en collaboration avec l'École Nationale des Sciences Géographiques. Son but était de mesurer avec la plus grande précision possible la géométrie de la structure et ses déplacements sous divers chargements. Ce chapitre rapporte dans une première partie les étapes de la réalisation du premier gridshell en matériaux composites et détaille l'ensemble des techniques utilisées : techniques d'assemblages et de fondations, techniques de mise en forme de la grille et de contreventement par une troisième direction de barre. La seconde partie est consacrée à l'analyse des résultats des tests de chargement qui ont été effectués sur la structure avant et après triangulation ; elle aboutit à une quantification de l'effet de la triangulation en étoile sur la rigidité effective de l'ouvrage.

Dans la troisième partie, un modèle numérique du prototype est construit à partir du relevé des positions des appuis de la structure réelle. La géométrie du modèle est alors comparée à celle du prototype. Ensuite, des simulations du comportement sous chargement sont effectuées et confrontées aux déplacements réels observés. On teste ainsi la pertinence du modèle pour la prédiction de la forme finale du prototype et ses déformations sous charges. Le modèle numérique est également utilisé pour étudier l'évolution du comportement de la structure avant et après triangulation ainsi que les changements dans la répartition des contraintes dans les barres. Enfin, quelques pistes sont données pour la réalisation d'ouvertures ainsi qu'un bilan des coûts de la construction de ce premier gridshell en matériaux composites.

6.1 Construction du prototype

Cette partie décrit les principales étapes de la construction du prototype de gridshell en matériaux composites qui sera testé dans la partie suivante. Son but est double : on vise d'une part à fournir le plus de détails techniques possible afin d'établir une sorte de méthodologie pour la

construction de gridshells en composites et d'autre part à mettre en évidence les facteurs d'incertitudes, les moyens de les éviter et leurs conséquences pratiques sur les mesures expérimentales qui seront effectuées par la suite.

6.1.1 Réalisation des fondations

La première étape de la construction du prototype est la réalisation des fondations. Le terrain choisi pour le gridshell est situé sur le parking d'appoint de l'École Nationale des Ponts et Chaussées. La surface de ce parking n'est pas goudronnée, mais la terre y a été spécialement compactée pour éviter la formation d'ornières. Le sol est donc très dense sur les quarante premiers centimètres. Les réactions d'appui calculées au paragraphe 6.3.4 étant relativement peu élevées (1800 N horizontalement et 1650 N verticalement en partie courante, un peu plus au niveau des extrémités), un simple système de pieux battus dans le sol a été jugé suffisant. Ces pieux sont constitués de fers à béton, d'un diamètre de 12 mm, d'une longueur de 70 cm dont 50 cm sont ancrés dans le sol, les 20 cm restants servent à la connection entre la structure et ses fondations. Pour faciliter l'ancrage des barres et pour pouvoir utiliser le même type d'assemblage pour les fondations que pour la grille, des tubes métalliques de 42 mm de diamètre sont placés autour des fers et bloqués avec des cales en bois. Le dispositif d'ancrage du gridshell est donc très simple à mettre en place et très peu onéreux.

Une grande partie de la qualité des fondations réside dans la précision du positionnement des pieux en attente, car ce sont les seuls points de repère que l'on possède sur la géométrie de la forme finale et c'est eux qui vont guider toute la mise en forme de la structure. Le repérage des positions des pieux et leur marquage sur le sol est donc un point primordial de la construction du gridshell. Cette opération a été confiée à Laurent Heydel, Didier Bouteloup et Philippe Nicolson, ingénieurs géomètres et enseignants à l'École Nationale des Sciences Géographiques, dans le cadre de la collaboration entre l'École des Ponts et cette dernière. Pour commencer, le plan de fondation que l'on peut voir sur la figure B.2 en annexe, a été établi à partir de la structure de la figure 5.4. L'emplacement de la structure sur le site a été choisi en fonction de l'encombrement des installations existantes (cf. figure B.1 en annexe). Puis, à l'aide de tachéomètres et de cibles de référence dont les positions sur le site sont considérées comme connues et invariables, les emplacements des principaux points d'ancrage de la structure ont été reportés sur le sol et les pieux ont été installés. Ces points caractéristiques sont entourés d'un cercle sur la figure B.2 en annexe. On a choisi de ne pas reporter tous les points d'ancrage sur le sol parce que le gridshell avec ses fondations complètes constitue une structure fortement hyperstatique et qu'il est préférable de se réserver une certaine liberté pour le montage d'une structure dont le comportement est, à ce stade, assez mal connu. On a vu par ailleurs dans le paragraphe 5.2.2 que ce mode opératoire ne changeait pas la forme finale du prototype.

En dehors des incertitudes relatives au placement des fondations sur lesquelles on reviendra dans le paragraphe 6.2.1, des approximations importantes ont déjà été faites à ce stade. Tout d'abord le plan des fondations a été établi à partir d'une structure sans excentricité (cf. paragraphe 5.2.2). La structure réelle qui s'appuiera sur ces fondations ne correspond donc ni à la structure idéale sans excentricité, ni à la structure modifiée du paragraphe 5.2.2 puisque les

positions de ses fondations sont différentes de celles du plan de fondation. Chacune des deux structures ne fournit qu'une approximation de la géométrie réelle ; l'ordre de grandeur de cette approximation est la taille de l'excentricité : 6,8 cm.

Ensuite, le choix de ne planter que 20 pieux induit une limitation du nombre de points de contrôle de la forme. Certes d'autres moyens de contrôle existent, notamment les tirants qui permettent d'ajuster la distance entre deux extrémités d'une barre, mais ils ne permettent d'obtenir qu'un positionnement relatif. Des modifications entre le périmètre au sol de la structure réelle et celui de la structure théorique du paragraphe 5.2 sont donc inévitables. L'incertitude globale sur la géométrie est donc trop importante pour que l'on puisse réutiliser le modèle de la structure théorique de sorte qu'il sera nécessaire de remesurer les positions de tous les points d'ancrage de la structure pour reconstruire un modèle numérique plus proche de la structure réelle.

6.1.2 Montage et mise en forme de la grille

Assemblage de la grille

Une fois les principales fondations réalisées, la construction du gridshell à proprement parler peut commencer. Tout d'abord il faut assembler la grille sur le sol. Comme celle-ci possède un degré de liberté en cisaillement dans son propre plan, l'angle entre les deux directions de la grille n'est pas fixe ; on peut donc choisir la dimension du grand axe sans modifier en rien la forme finale de la structure. Pour limiter l'emprise au sol de la grille et l'encombrement du chantier, on choisit pour le grand axe de l'ellipse initiale une longueur de 23,6 m qui correspond à la longueur finale du prototype. L'angle initial entre les barres est alors de 52,6 degrés. Cependant, si l'angle est libre, il est primordial de conserver les longueurs des barres et les positions des assemblages de grille initiale. La géométrie de la figure 5.2 sert donc de référence pour établir le plan définitif de la structure (cf. figure B.3 en annexe). Les barres sont numérotées et les positions des différentes liaisons le long des barres sont répertoriées (cf. tableau B.1 en annexe). Il ne reste ensuite qu'à préparer les barres et à les assembler entre elles sur le site à proximité des fondations.



FIG. 6.1 – La grille elliptique du prototype en cours d'assemblage.

Les tubes sont tout d'abord mis aux dimensions : comme les composites sont relativement faciles à travailler, une scie à métaux suffit pour la découpe. Les emplacements de tous les

assemblages de la barre sont ensuite marqués avec trois tours de ruban adhésif armé. Celui-ci sert de repère, mais, comme il est pris entre l'assemblage et le tube en composite, il permet également d'éviter d'endommager le composite lors du serrage de l'assemblage, d'empêcher le glissement le long de l'axe du tube par la formation de boudins et de libérer légèrement la rotation autour de l'axe du tube à cause de la souplesse de la colle. On se rapproche ainsi des hypothèses théoriques du modèle de connection utilisé dans l'algorithme de relaxation dynamique (cf. paragraphe 3.4). Après la préparation des barres, le montage de la grille s'effectue rapidement et ne requiert que une demi-journée pour trois personnes, munies de clefs de 22 mm, comme l'illustre la figure 6.1.

Mise en forme

La mise en forme désigne le passage d'une grille à plat à une résille gauche. La grille est déformée par flexion jusqu'à ce que sa forme finale soit atteinte. Pour la construction de notre prototype de gridshell, différents moyens de contrôle de la courbure sont mis en œuvre. Tout d'abord l'allure générale de la géométrie finale est connue et on sait qu'après déformation, elle est quasiment symétrique par rapport aux plans verticaux qui contiennent les deux axes de l'ellipse. Ensuite, les positions définitives des extrémités de certaines barres ont été reportées sur le sol ; pour ces barres, on dispose donc de cibles vers lesquelles leurs extrémités doivent converger. Pour les autres barres, on ne possède pas de repères absolus ; en revanche on connaît l'écartement relatif de leurs extrémités dans la géométrie finale (cf. dernière ligne du tableau B.1 en annexe). Ainsi, on peut faire tendre les écartements de ces barres vers leurs valeurs définitives et maîtriser la position des extrémités des barres qui n'ont pas de fondations en attente. L'ensemble de ces trois méthodes va assurer un niveau de guidage satisfaisant et permettre d'amener la structure jusqu'à la forme souhaitée sans encombre.

D'un point de vue pratique, le poids total de la grille n'est que de 441 kg, soit 2,05 kg/m². Elle est par conséquent facile à soulever localement ce qui permet de procéder par une succession de levages et d'étayages ponctuels. Le rallongement d'un des étais entraîne une déformation de la grille et un soulèvement des étais voisins. Ces derniers n'étant plus en prise, ils peuvent être allongés à leur tour, ce qui provoque le soulèvement d'autres étais, et ainsi de suite. Plus il y a d'étais, moins les efforts à appliquer localement pour soulever la grille sont importants. En utilisant un grand nombre d'étais, les efforts à fournir sont donc moindres ce qui diminue les concentrations de contraintes et les risques de poinçonnement de la grille. Cependant, au fur et à mesure que la structure s'élève, la difficulté pour gagner des centimètres de flèche augmente et la charge reprise par chaque étais est de plus en plus importante. Pour soulever ces derniers, on s'est aidé d'un transpalette pour les derniers instants. En dehors de cela, aucun instrument de levage particulier n'a été nécessaire.

Parallèlement aux étais, des barres supplémentaires sont montées entre les deux extrémités de la plupart des barres, elles tiennent lieu de tirants. Avec les étais placés au centre de la grille, si l'on pèse à chaque bout d'une barre, on la fait fléchir et on ramène facilement ses extrémités sur le sol. Les tirants permettent alors de maintenir les extrémités des barres dans un écartement donné jusqu'à ce qu'une nouvelle phase de levage entraîne un soulèvement général de la structure qui va nécessiter de ramener à nouveau les extrémités des barres jusqu'au sol et

une modification de cet écartement. En plus, de la mesure de l'écartement et de l'avancement du processus de montage, les tirants fournissent donc un moyen très efficace de mise en forme de la structure en association avec un système d'étais. La figure 6.2 illustre une étape intermédiaire du gauchissement de la grille, on y distingue bien les étais verticaux et les tirants sur le sol.



FIG. 6.2 – Mise en forme du prototype au moyen d'étais et de tirants.

Pour atteindre toutes les cibles et fixer les dix barres principales sur leurs fondations, quatre personnes ont travaillé une journée entière. Ensuite les étais ont été démontés, et les tirants remplacés un à un par des fondations, identiques à celles décrites précédemment. L'emplacement de ces fondations est la position que la barre prend naturellement quand on la rapproche du sol. Une fois tous les tirants démontés et toutes les barres ancrées dans le sol, la mise en forme de la structure est terminée, il n'y a plus qu'à la rigidifier.

6.1.3 Mise en place de la triangulation

La triangulation de la structure est une étape essentielle de la construction des gridshells car elle donne toute sa rigidité à la structure. La grille de départ a été conçue spécialement pour contenir un degré de liberté en cisaillement qui rende le passage à une résille gauche possible. Après la mise en forme de la grille, la structure possède toujours un degré de liberté en cisaillement et ses capacités à se déformer sous l'action de charges extérieures sont intactes. Il est donc indispensable de bloquer ce degré de liberté en empêchant la déformation angulaire de chacune des cellules du maillage bidirectionnel de la grille; la triangulation, c'est-à-dire l'introduction d'éléments diagonaux dans chaque quadrangle, est la méthode de rigidification la plus simple compte tenu des choix technologiques faits pour le prototype (cf. paragraphe 5.2.3). Le maillage adopté pour les diagonales forme des hexagones et des triangles. Comme il a été dit dans le paragraphe consacré à la conception théorique du prototype, on ne dispose pas de pièces d'assemblage triple qui permettent de trianguler exactement les losanges de la grille en reliant trois barres entre elles au niveau de chaque nœud. Un excentrement de la rigidification étant inévitable, il a été décidé de mettre les fixations de la troisième direction de barres au milieu de deux assemblages successifs, ce qui a abouti au maillage représenté figure 6.3.

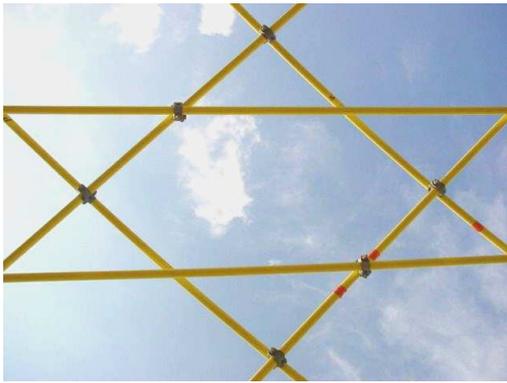


FIG. 6.3 – Le motif en hexagone et triangle. FIG. 6.4 – La triangulation en cours de montage.

Par ailleurs, il faut noter que la triangulation a été mise en place avant que les nouvelles mesures des positions des pieds de toutes les barres soient effectuées. La géométrie de la structure n'était alors pas assez précisément connue pour permettre une préparation des tubes de la triangulation identique à celle des tubes de la grille principale : il était impossible de repérer les emplacements des assemblages par avance. En effet, la surface gauche formée par la grille n'est pas développable et l'angle entre les deux directions de la grille varie d'une maille à l'autre si bien que, pour la troisième direction de barre, les distances entre deux liaisons successives ne sont pas régulières. En revanche, on sait exactement à quel endroit les tubes de la triangulation s'appuient sur la grille principale, on peut donc mettre en place les assemblages sur cette dernière, avant de venir y glisser les barres de rigidification une à une. L'installation de la triangulation est donc une étape d'une grande simplicité. On procède de proche en proche en partant du bas et on peut ainsi s'appuyer sur la structure rigidifiée à mesure que l'on monte et travailler en toute sécurité comme on peut le voir sur la figure 6.4.

Une fois la troisième direction de barres posée, la construction du gridshell est terminée. La structure est rigidifiée, son comportement mécanique apparant s'est amélioré, ce que l'on vérifie au travers des tests de chargements qui suivent.

6.2 Tests de chargement avant et après triangulation

6.2.1 Protocole expérimental

Le dispositif de chargement

Deux séries de tests de chargement sont effectuées sur le prototype, la première avant triangulation et la seconde après ; le but est d'évaluer l'effet de la troisième direction de barre. Chaque série comporte deux tests : un chargement symétrique dont la répartition est proche des efforts de poids propres utilisés pour la mise en forme, et un chargement asymétrique, plus sévère, symbolisant une distribution non-uniforme de neige. Les charges sont appliquées à l'aide de grands seaux remplis d'eau suspendus par des sangles au niveau de certains nœuds de la grille. Le cas de charge symétrique comprend vingt-et-une charges de 50 kg réparties symétriquement de part et d'autre du plan médian du gridshell. Les seaux sont accrochés dans la partie

centrale de la structure (là où elle est la plus courbe) pour éviter de trop solliciter ses extrémités que l'on sait plus plates et plus vulnérables (cf. paragraphe 5.2.4). Le cas de charge asymétrique comprend également vingt-et-une charges de 50 kg, disposées cette fois toutes du même côté du plan médian de la structure, du côté des x négatifs pour la première série de mesure et du côté des x positifs pour la seconde (cf. figure B.4 en annexe pour les emplacements précis de tous les nœuds chargés pour chacun des tests).

Les points de mesure

Pour tous les tests, on mesure les déplacements d'une vingtaine de points caractéristiques répartis sur l'ensemble du prototype. Ces points sont matérialisés par des cibles réfléchissantes dont les positions sont relevées à l'aide de tachéomètres. Les déplacements de ces points sont déduits à partir des différences entre les positions mesurées sur la structure chargée et les positions de référence établies sur la structure au repos, aussi appelée « état 0 ». Pour la première série de mesures, celle qui a lieu avant la triangulation, dix-huit cibles numérotées de A à R sont mises en place et collées sur les tubes exactement au milieu de l'espace qui sépare deux assemblages successifs (cf. figure B.6 en annexe). Or c'est à cet endroit que seront placés les assemblages pour la triangulation. Une partie des cibles de la première série de mesures est donc indisponible pour la seconde série. Un second jeu de vingt cibles, numérotées de AA à TT, a par conséquent dû être ajouté de façon à conserver une certaine uniformité dans la répartition des cibles sur la structure (cf. figure B.7 en annexe). Ce nouveau jeu de cibles remplace le précédent pour la mesure des déplacements. Cette erreur dans la planification de l'expérience a pour principale conséquence d'empêcher la comparaison des déplacements des cibles un à un pour la structure avant et après triangulation ; on ne disposera donc que d'une vision globale de l'effet de la troisième direction de barre.

La précision de la mesure

Les mesures de position sont effectuées avec des tachéomètres, c'est-à-dire des théodolites auxquels on a ajouté un instrument de mesure de distance. Deux appareils sont utilisés pour chaque série de mesures. Ils sont placés en deux points quelconques à l'intérieur du gridshell et leur position est déduite à partir des positions d'une dizaine de cibles de référence qui sont situées aux alentours de la structure et dont les coordonnées sont connues. Ensuite les positions de toutes les cibles collées sur la structure sont mesurées quatre fois par chaque appareil : les mesures sont toutes doublées pour éliminer les défauts de pointage et refaites après double retournement du tachéomètre pour éliminer les défauts d'angle inhérents à l'appareil. Après chaque test, les données (les angles et les distances) sont retraitées sur ordinateur à l'aide d'un logiciel spécifique développé par l'École Nationale des Sciences Géographiques de façon à obtenir pour chacune des cibles, ses coordonnées dans l'espace et leurs incertitudes.

Les mesures faites par chacun des deux appareils sont redondantes ce qui permet d'éliminer relativement facilement les mesures défectueuses et de considérer que la précision de l'appareil

de mesure en lui-même est inférieure au millimètre et à la seconde d'angle. La plus grande partie de l'incertitude de mesure provient donc de la détermination de la position des stations, elle est de l'ordre de ± 3 mm dans toutes les directions, ce qui forme une sphère de 4 mm de rayon autour de la station. La mesure de la position de la cible par l'appareil n'ajoute quasiment pas d'incertitude supplémentaire, on sait que chaque point se trouve dans une sphère de 4 mm de rayon. En croisant les mesures issues de deux tachéomètres, on sait que la position de la cible appartient à l'intersection de deux sphères et on augmente ainsi la précision dans la détermination de la position de la cible comme on le voit sur la figure 6.5. Cette amélioration de l'incertitude est cependant difficile à quantifier et dépend de chaque point, on retiendra donc simplement que la précision générale est inférieure à 4 mm.

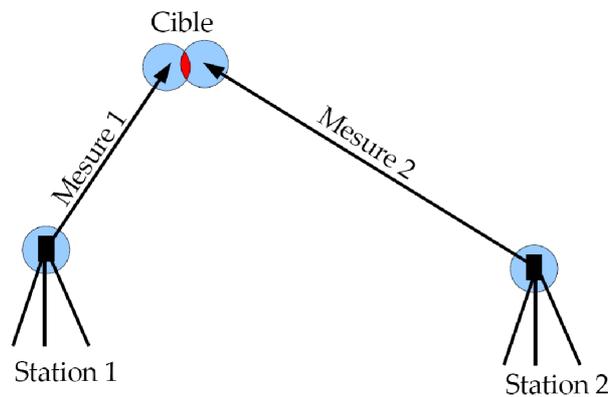


FIG. 6.5 – Amélioration de la précision des mesures à l'aide de deux tachéomètres.

Les incertitudes sur les déplacements sont cependant plus importantes. En effet, les deux séries d'essais ont été effectuées sur trois jours comme on peut le constater sur le calendrier des essais ci-dessous (cf. tableau 6.1). Les emplacements des stations sont modifiées entre la mesure de l'état de référence et la mesure de la position chargée ; les incertitudes liées au positionnement de la station se cumulent donc et, pour les déplacements, elles atteignent ± 6 mm dans chaque direction de l'espace, c'est-à-dire que leur norme est connue à ± 8 mm.

TAB. 6.1 – Calendrier des mesures effectuées sur le prototype.

Première série d'essais	
21 mars 2006	Mesure de l'état 0 des cibles A à R et des extrémités des barres
31 mars 2006	Mesure des positions des cibles A à R sous chargement symétrique
11 avril 2006	Mesure des positions des cibles A à R sous chargement asymétrique
Seconde série d'essais	
5 octobre 2006	Mesure de l'état 0 des cibles AA à TT et des extrémités des barres
11 octobre 2006	Mesure des positions des cibles AA à TT sous chargement symétrique
23 octobre 2006	Mesure des positions des cibles AA à TT sous chargement asymétrique

Pour améliorer cette précision, il ne faudrait plus travailler avec des stations libres, mais avec des stations qui seraient à l'aplomb d'un repère topographique dont la position ne changerait pas d'un test à l'autre. En effet, pour l'étude du comportement, seule une mesure de déplacement est nécessaire : peu importe que la position de référence soit approximativement connue puisque c'est une information relative qui est requise et puisque, lors du calcul du déplacement, les

approximations liées à la position de référence s'annulent par soustraction. Cette modification du protocole expérimental permettrait a priori de descendre à une précision millimétrique pour la mesure des déplacements. En revanche, elle serait sans effet sur l'étude de la géométrie du prototype à l'état 0 qui n'utilise qu'une mesure de position. Une précision centimétrique est suffisante malgré tout suffisante pour la connaissance de la forme du gridshell et la réalisation des fondations ou d'une couverture en toile.

6.2.2 Résultats des tests

Tests avant triangulation

La première série de tests est effectuée sur le gridshell avant triangulation. L'ensemble des déplacements mesurés pour les cas de chargement symétrique et de chargement asymétrique sont présentés en annexe, respectivement dans les tableaux B.4 et B.5. Les tableaux 6.2 et 6.3 en constituent une synthèse. Les quatre premières lignes de ces tableaux indiquent dans l'ordre : le déplacement maximal, le déplacement minimal, la moyenne des déplacements et les écarts types, pour chacune des trois directions de l'espace ainsi que pour leur norme. Les trois lignes suivantes donnent : les déplacements respectivement du « centre » de la structure, des cibles situées dans la zone des x négatifs (la zone chargée dans le cas asymétrique) et des cibles situées dans la zone des x positifs (la zone non chargée dans le cas asymétrique). Aucune cible n'ayant été collée sur le nœud central, le centre désigne ici un point virtuel dont le mouvement est assimilé à la moyenne de celui des points les plus proches du centre de la structure, c'est-à-dire les points Q et R de la figure B.6 en annexe. Toutes les valeurs données pour les déplacements sont en centimètre.

TAB. 6.2 – Déplacement de la structure non-rigidifiée sous chargement symétrique.

Déplacements en cm	u_x	u_y	u_z	u
Maximal	8,2	15,9	6,8	17,5
Minimal	-6,5	-16,1	-15,5	2,4
Moyenne	1,4	1,1	-4,7	11,9
Écart type	4,4	8,0	7,9	4,9
Central	1,1	-0,8	-9,6	9,9
$x > 0$	-2,2	0,1	-4,2	10,2
$x < 0$	5,0	2,0	-5,2	13,5

Dans le tableau ci-dessus, on observe tout d'abord que l'amplitude des déplacements est importante dans chacune des directions et qu'ils atteignent 17,5 cm au maximum. On remarque ensuite que les valeurs extrêmes des déplacements selon x (+8,2 cm et -6,5 cm) et selon y (+15,9 cm et -16,1 cm) sont égales et opposées et que les moyennes de ces déplacements sont nulles (1,4 cm selon x et 1,1 cm selon y). La disposition des cibles de mesure sur la structure étant quasiment symétrique, on vérifie bien que, sous l'action de forces extérieures symétriques, le comportement du gridshell reste symétrique. Ces observations sont confirmées par les trois dernières lignes du tableau : le point central a un déplacement de seulement 1,1 cm selon x et de -0,8 cm selon y ; les déplacements moyens des côtés droit ($x > 0$) et gauche ($x < 0$) de la structure sont quasiment

identiques selon z et égaux et opposés selon x . De plus, si l'on regarde ces déplacements dans le détail (cf. tableau B.4 en annexe), on constate que les points s'éloignent des plans de symétrie $x = 0$ et $y = 0$, et que l'affaissement de la partie centrale chargée provoque un soulèvement des points situés dans la partie la plus verticale ou les parois latérales de la structure.

TAB. 6.3 – Déplacement de la structure non-rigidifiée sous chargement asymétrique.

Déplacements en cm	u_x	u_y	u_z	u
Maximal	26,1	33,2	11,0	48,4
Minimal	-10,3	-32,8	-41,2	4,9
Moyenne	3,6	0,9	-12,6	24,6
Écart type	10,8	14,4	16,6	13,0
Central	-1,9	-2,6	-24,9	25,3
$x > 0$ (non-chargé)	-4,6	-0,1	-7,1	15,9
$x < 0$ (chargé)	11,9	1,8	-18,0	33,2

Les remarques que l'on peut faire sur les résultats du test sous chargement asymétrique sont comparables à celles du paragraphe précédent. Tout d'abord les amplitudes des déplacements sont très importantes puisque le point situé au barycentre des charges appliquées se déplace de presque 50 cm. Ensuite, on vérifie que le déplacement moyen selon y est faible (environ 1 cm) et que le déplacement du point central selon y est faible également (le décalage vers les y négatifs s'explique par la position légèrement excentrée des points qui servent à calculer le déplacement central), la symétrie selon y est bien conservée. En revanche dans les deux autres directions, on constate que les points situés dans la zone des $x < 0$ se déplacent beaucoup plus selon x (-11,14 cm contre 4,12 cm) et selon z (-18,01 cm contre -7,13 cm) que les autres points ce qui est tout à fait attendu puisque ces points sont situés dans la zone chargée.

Tests après triangulation

La seconde série de tests est effectuée sur le gridshell triangulé et les déplacements mesurés pour les cas de chargement symétrique et de chargement asymétrique sont présentés respectivement dans les tableaux 6.4 et 6.5. La structure des tableaux est identique à celle des tableaux précédents avec le déplacement maximal, le déplacement minimal, la moyenne des déplacements, les écarts types et le déplacement central pour chacune des trois directions de l'espace ainsi que pour leur norme. On rappelle que les positions des cibles de mesures sont différentes de celles de la première série mais que leur répartition reste semblable. Le déplacement du nœud central est désormais évalué à partir de la moyenne de celui des points les plus proches du centre de la structure, ici les points AA, BB, CC et DD (cf. en annexe figure B.7). Toutes les valeurs sont en centimètre.

Il faut tout d'abord remarquer que, dans les tableaux 6.4 et 6.5, l'ordre de grandeur des déplacements moyens est respectivement de 0,9 cm et de 1,5 cm ce qui correspond à celui de la précision de la mesure (± 8 mm) si l'on se réfère au paragraphe 6.2.1. Il faut donc prendre des précautions pour les informations que l'on pourra tirer de ces déformations. Il semble que, dans les deux cas de chargement, la symétrie des déplacements selon y soit vérifiée puisque les

déplacements moyens et centraux sont quasiment nuls (entre -0,1 cm et 0,3 cm). Pour le cas de charge symétrique, le déplacement moyen selon x est de -0,1 cm et le déplacement central de -0,1 cm, la symétrie des déplacements selon x est également vérifiée. Comme précédemment la zone chargée, celle des x positifs, se déplace verticalement plus que la zone non chargée (-1,3 cm contre -0,2 cm en moyenne).

ТАВ. 6.4 – Déplacements de la structure rigidifiée sous chargement symétrique.

en cm	u_x	u_y	u_z	u
Maximal	1,5	1,5	0,4	2,3
Minimal	-0,4	-1,2	-1,2	0,3
Moyenne	0,1	0,3	-0,4	0,9
Écart type	0,4	0,6	0,5	0,5
Centre	0,1	0,2	-0,5	0,5
$x < 0$	-0,1	0,4	-0,3	0,8
$x > 0$	0,4	0,1	-0,4	0,9

ТАВ. 6.5 – Déplacement de la structure rigidifiée sous chargement asymétrique.

en cm	u_x	u_y	u_z	u
Maximal	1,8	1,8	0,6	3,6
Minimal	0,0	-2,2	-3,1	0,3
Moyenne	0,6	0,2	-0,7	1,5
Écart type	0,5	0,9	1,1	0,9
Centre	0,4	0,3	-1,3	1,5
$x < 0$ (non chargé)	0,3	0,4	-0,2	0,8
$x > 0$ (chargé)	0,9	-0,1	-1,3	2,3

Enfin, si l'on regarde le détail des déplacements des nœuds des tableaux B.6 et B.7 en annexe, on observe les mêmes déformations qu'avant triangulation avec une descente de la structure sous les deux chargement dans la partie centrale et une légère remontée des points situés dans les parties latérales les plus verticales du gridshell. La zone dans laquelle les déplacements sont maximaux est également identique dans les deux configurations. Il semble que la déformée de la structure contreventée soit très proche de celle de la structure non-contreventée et que ce soit essentiellement l'amplitude des déplacements qui ait changé. Il y a donc eu une augmentation de la raideur de la structure que le paragraphe suivant tente de quantifier.

Effet de la triangulation

On vient de le voir, les déplacements de la structure triangulée sont de l'ordre de grandeur de la précision de la mesure. De plus, les positions des cibles sont légèrement différentes entre la première et la seconde série de mesures. Il est donc difficile de quantifier le phénomène de rigidification de la structure par la troisième direction de barres. Néanmoins, si l'on considère le déplacement vertical moyen des deux points situés dans la partie centrale de la structure avant rigidification, on trouve un déplacement de -9,6 cm sous chargement symétrique et de -24,9 cm sous chargement asymétrique. De la même façon, le déplacement vertical moyen des quatre points centraux après rigidification donne -0,5 cm sous chargement symétrique et -1,3 cm sous chargement asymétrique. En faisant le rapport de ces déplacements, on estime donc que la rigidité de la structure a été multipliée par 19 (cf. tableau 6.6).

En revanche, si l'on considère les déplacements maximaux, l'augmentation de la rigidité est toujours évidente mais elle est moindre, avec une multiplication par 7,5 sous chargement symétrique et par 13,4 sous chargement asymétrique. Il semble donc que l'apport de la triangulation soit plus important dans le second cas. Cela peut s'expliquer par le fait que le cas de charge symétrique n'est pas très éloigné du chargement funiculaire de la coque (un chargement de type « poids propre »). Il est donc repris essentiellement sous forme d'effort normal dans les tubes et

nécessite donc moins de déformation de la structure (17,5 cm de déplacement maximal). Le chargement asymétrique au contraire développe essentiellement des efforts de flexion dont la reprise requiert une grande déformation (48 cm de déplacement maximal). Avant la mise en place de la troisième direction de barres, la structure n'a donc que très peu de raideur en flexion et se comporte comme des arcs accolés entre eux. Après contreventement, les déplacements maximaux observés sont de 2,3 cm sous chargement symétrique et 3,6 cm sous chargement asymétrique. Le comportement de la structure est désormais beaucoup plus proche de celui d'une coque ce qui confirme la validité du principe constructif des gridsells qui permettent de réaliser des coques rigides à partir de grilles souples.

TAB. 6.6 – Quantification expérimentale de l'effet de la triangulation.

Déplacements en cm	Charges symétriques		Charges asymétriques	
	Central vertical	Maximal	Central vertical	Maximal
Avant rigidification	9,6	17,5	24,9	48,4
Après rigidification	0,5	2,3	1,3	3,6
Rapport Avant/Après	19,2	7,5	19,1	13,4

6.3 Comparaison avec un modèle numérique

Dans les deux sections précédentes, on a montré par la construction d'un prototype l'intérêt des structures de gridsell en matériaux composites, tant leur facilité de montage que l'efficacité de leur rigidification. On va maintenant construire un modèle numérique de la structure et comparer sa géométrie avec celle du prototype. On en déduira une évaluation de la précision que l'on peut raisonnablement attendre de la simulation avec le programme décrit au chapitre 3 et dans l'annexe A. Ensuite, on reproduira numériquement les deux précédentes séries de tests de chargement et on comparera les déplacements du modèle et les déplacements réels. Pour expliquer les écarts observés, deux modèles alternatifs seront étudiés. Enfin, on utilisera le modèle numérique pour étudier l'évolution du comportement de la structure et des contraintes dans les éléments.

6.3.1 Choix du modèle de référence

Comme il a été remarqué au paragraphe 6.1.1, le plan de fondation ne prenait pas en compte les excentricités et, pour des raisons pratiques de simplification du montage, plus des deux tiers des emplacements des pieds des barres étaient laissés libres. Il existe donc des écarts importants entre la structure réelle et le modèle qui a servi à la conception de l'ouvrage (cf. paragraphe 5.2). L'ordre de grandeur de ces écarts est au moins égal à l'excentricité entre les barres (6,8 cm) ce qui ne permet pas de faire une comparaison précise entre le prototype et le modèle. Il faut donc construire un nouveau modèle numérique qui soit une représentation plus juste du prototype.

Pour cela, on effectue un relevé systématique de la position des extrémités de chaque barre pour construire le nouveau modèle à partir de ces positions. Les extrémités exactes étant occupées par les assemblages qui relient les barres à leurs fondations, on choisit soixante-huit points

de référence situés à proximité de ces extrémités (cf. figure B.5 en annexe). Un premier calcul est alors lancé à partir de la grille elliptique initiale dont on a modifié et imposé la position de ces soixante-huit points. Il conduit à une géométrie qui semble très proche de celle du prototype mais qui présente des surcontraintes considérables aux extrémités de certaines barres (cf. figure 6.6). Le problème vient de ce que les positions des points de référence correspondent aux positions de cibles collées à la surface des tubes et non à des points sur l'axe des barres, il existe donc un décalage de 2,1 cm dans une direction quelconque de l'espace entre la position que l'on impose et celle que l'on souhaiterait imposer. Ce décalage induit des déformations importantes des extrémités des barres qui sont parfois difficilement compatibles avec les conditions aux limites et qui conduisent aux surcontraintes que l'on observe.

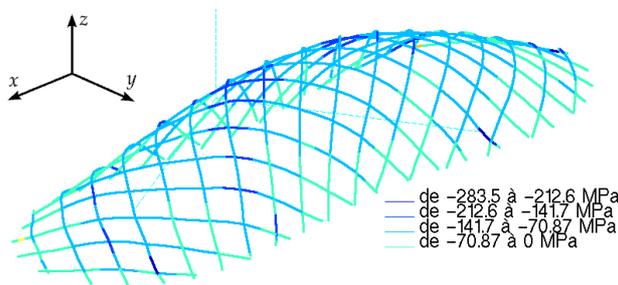


FIG. 6.6 – Le premier modèle avec ses surcontraintes.

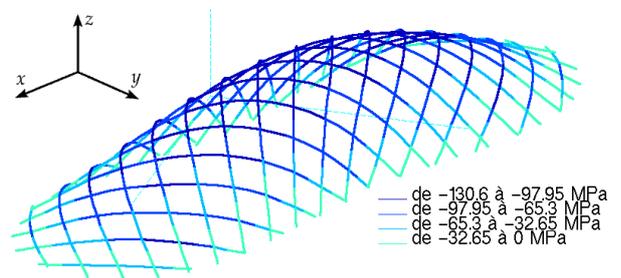


FIG. 6.7 – Les contraintes dans le modèle de référence.

Pour pallier cet inconvénient, on introduit, pour chaque point de référence, un système de fondations élastiques composé de trois barres orientées selon les trois axes du repère $Oxyz$. Ces barres sont constituées de deux nœuds : le premier est relié sans excentricité au point de référence et le second est fixe. Leur raideur est déterminée à partir des réactions du modèle numérique du paragraphe 5.2.2 : on cherche d'abord la valeur moyenne des réactions sur appuis, soit environ 200 N, puis on calcule la raideur correspondante en divisant cette valeur par le déplacement que l'on désire autoriser (ici 2,1 cm). La raideur des appuis introduits est donc de 10 kN/m. Dans ce modèle, la position des points de référence est libre de varier autour de la position mesurée sur le prototype mais elle est bridée. La figure 6.8 présente la structure obtenue avec ses appuis élastiques. Cette figure est très proche de celle du calcul précédent mais les surcontraintes ont disparu comme on peut le constater sur la figure 6.7.

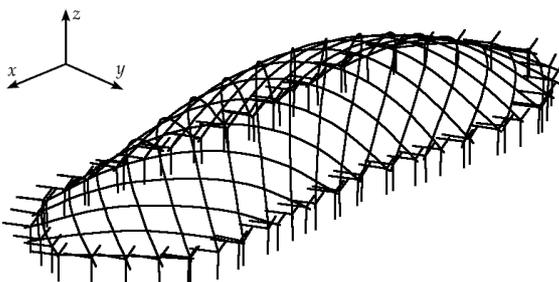


FIG. 6.8 – Le modèle sur appuis élastiques.

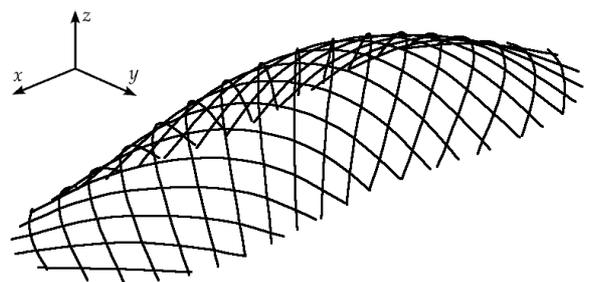


FIG. 6.9 – Le modèle de référence.

Ensuite les appuis élastiques aux points de référence sont remplacés par des rotules aux extrémités des barres. Un dernier calcul est lancé. Après convergence, on étudie les distances entre la position mesurée des cibles sur le prototype et la position calculée de leurs correspondants sur l'axe du tube; le tableau 6.7 montre une synthèse des résultats obtenus. On constate tout d'abord que dans les trois directions, la moyenne des écarts est nulle ce qui semble en accord avec le fait que les cibles sont collées de façon à être visibles de l'intérieur du gridshell et qu'elles pointent donc toutes vers le centre de la structure.

On constate également que la moyenne des distances (2,8 cm) est quasiment égale au rayon du tube (2,1 cm) ce qui est tout à fait acceptable compte tenu du fait que les cibles sont collées à l'extérieur du tube et que leurs correspondants numériques sont sur l'axe des tubes. Les distances atteignent ponctuellement le double ou le triple de la valeur autorisée. L'absence de concentration de contraintes et de réaction d'appuis très importantes incitent cependant à penser que cette structure est bien la plus proche de celle que l'on a effectivement construite. C'est donc ce modèle qui est choisi comme modèle de référence pour les comparaisons avec le prototype.

TAB. 6.7 – Distances entre les points de référence et les points de l'axe du modèle numérique.

Déplacements en cm	Δx	Δy	Δz	Δ
Minimal	-3,2	-5,3	-3,9	1,0
Maximal	3,8	4,5	2,1	6,8
Moyenne	0,1	0,1	-0,7	2,8
Écart type	1,7	2,2	1,4	1,5

6.3.2 Étude de la géométrie

Comparaison avec le modèle de référence

La première étape de la comparaison entre le modèle numérique et le prototype consiste à étudier la capacité du programme à prédire la géométrie de la grille après déformation. Cette géométrie est connue grâce aux deux ensembles de cibles utilisées pour les tests de chargement. Les positions à l'état 0 des dix-huit cibles de la première série (de A à R) et des vingt cibles de la seconde série (de AA à TT) sont donc comparées avec les positions des points correspondants du modèle numérique. La totalité des écarts observés (différence entre la position du modèle et celle du prototype) se trouve dans le tableau B.8 de l'annexe. Le tableau 6.8 ci-dessous présente une synthèse pour les écarts dans les trois directions de l'espace (Δx , Δy , Δz) ainsi qu'en norme (la colonne Δ). Il est constituée de l'écart maximal, de l'écart minimal, de la moyenne des écarts (notée moyenne I) et de l'écart type correspondant, ainsi que de la moyenne des valeurs absolues des écarts (notée moyenne II) et de son écart type. Tous les valeurs sont en centimètres.

Les premières remarques concernent les moyennes des écarts : selon x et selon y elles sont quasiment nulles alors que selon z , on observe un décalage général de 3,8 cm vers le haut du modèle numérique. Si l'on considère que les emplacements des cibles sur le prototype ont été choisis pour être visibles d'un point situé au centre du gridshell, le décalage entre la cible et le point correspondant sur l'axe du tube est globalement radial. Comme il y a autant de cibles

du côté des x positifs que des x négatifs (cf. figure B.6), il semble logique que la somme de ces décalages soit nulle. Le même raisonnement est valable selon y ; en revanche selon z , toutes les cibles sont situées au-dessus du point d'observation, si bien que le décalage entre la cible et le point sur l'axe est toujours positif. C'est ce qui explique la valeur positive de la moyenne des écarts selon z . Cette explication est confirmée lorsqu'on étudie la valeur absolue des écarts : selon x et y , la moyenne II est plus importante que la moyenne I (1,7 cm et 1,7 cm contre respectivement 0,4 cm et 1,0 cm), mais elle est de l'ordre de grandeur du rayon des tubes. Selon z , la moyenne II est quasiment égale à la moyenne I; les écarts sont bien tous dans le même sens.

TAB. 6.8 – Comparaison entre la géométrie du prototype et celle du modèle

Écarts en cm	Δx	Δy	Δz	Δ
Maximal	5,0	7,2	9,7	9,8
Minimal	-3,6	-3,0	-2,2	1,8
Moyenne I	0,4	1,0	3,8	5,1
Écart type I	2,1	2,2	2,4	2,0
Moyenne II	1,7	1,7	4,1	5,1
Écart type II	1,3	1,6	2,0	2,0

Pour ce qui est des écarts types, ils sont compris entre 1,3 cm et 2 cm. Si l'on considère que la précision de la mesure est de $\pm 0,3$ cm pour chaque coordonnée (soit $\pm 0,4$ cm sur la distance) et que la précision du montage est ± 1 cm sur le positionnement des assemblages ou des cibles, on arrive à une incertitude totale sur la connaissance de la position des cibles de 1,3 cm sur chaque coordonnée, c'est-à-dire à peu de chose près la valeur des écarts types dans les trois directions. La comparaison entre la géométrie du modèle numérique et celle du prototype est donc concluante. On peut ainsi affirmer que si la précision des plans de fondations et de montage est respectée, les modèles construits avec l'algorithme de relaxation dynamique sont d'une grande précision pour la recherche de forme des gridshells.

Comparaison avec les modèles de M. Barnes et F. Otto

On a vu dans le chapitre 1 que la recherche de forme du gridshell de Mannheim avait été faite à partir d'une maquette de filet inversée et que celle du gridshell de Downland résultait d'un calcul avec la méthode de relaxation dynamique. Afin de mieux pouvoir juger de l'apport de l'algorithme utilisé, il semble intéressant de comparer le modèle numérique du paragraphe précédent avec des modèles qui reproduisent les deux méthodes « historiques » de recherche de forme des gridshells.

On construit donc un nouveau modèle du prototype identique à celui qu'aurait pu faire M. Barnes, sans tenir compte des excentricités. Pour cela, on suit la même démarche que pour le modèle de référence avec excentricité (cf. paragraphe 6.3.1). Tout d'abord, la forme d'équilibre de la structure sur appuis élastiques est calculée à partir des positions des soixante-huit cibles de référence. Ensuite, à partir de la géométrie obtenue, on calcule de nouveau la forme d'équilibre en remplaçant les appuis élastiques par des rotules.

On construit également un modèle qui reproduit une maquette de filet suspendu à la façon

de l'IL. L'outil de calcul est toujours le programme de relaxation dynamique. Le modèle de filet étant sans excentricité, il est basé sur le modèle sans excentricité précédent : les barres sont remplacés par des câbles sans raideur en flexion et en compression et la direction du poids propre est inversée. Après convergence du calcul, on vérifie bien que tous les éléments du modèle de filet sont tendus.

TAB. 6.9 – Distance entre les deux modèles historiques et le prototype.

Distance en cm	Modèle sans excentricité				Filet inversé			
	u_x	u_y	u_z	u	u_x	u_y	u_z	u
Maximal	5,1	6,9	13,5	13,7	5,0	6,3	13,5	14,7
Minimal	-5,5	-5,9	-1,5	2,4	-5,4	-5,7	-2,4	1,6
Moyenne I	0,4	0,9	5,3	7,3	0,3	0,7	4,9	6,8
Ecart type I	2,8	2,9	4,3	3,2	2,5	2,9	4,4	3,4
Moyenne II	2,3	2,5	5,6	7,3	2,0	2,4	5,2	6,8
Ecart type II	1,6	1,7	3,9	3,2	1,5	1,7	4,0	3,4

On compare ensuite les géométries du modèle sans excentricité et du modèle de filet avec la géométrie du prototype selon la même grille d'analyse que précédemment. On étudie les distances qui séparent les deux ensembles de dix-huit et vingt cibles et qui sont présentées dans le tableau 6.9. Les mêmes observations que pour le modèle de référence sont valables pour le modèle sans excentricité et pour le filet inversé : les écarts selon x et selon y sont globalement symétriques et de moyenne nulle, les écarts selon z sont positifs. Horizontalement les deux modèles historiques sont donc aussi précis que le modèle avec excentricité ; la différence se fait essentiellement sur la position verticale des cibles pour laquelle les écarts moyens sont plus élevés (5,5 cm contre 4,1 cm) ainsi que les écarts types (4 cm contre 2 cm). En effet, on remarque que l'orientation de la plupart des excentricités ne s'écartent pas beaucoup de la verticale, par conséquent, les deux directions de barres qui sont confondues dans le modèle sans excentricité et le modèle de filet, sont simplement l'une en dessous de l'autre.

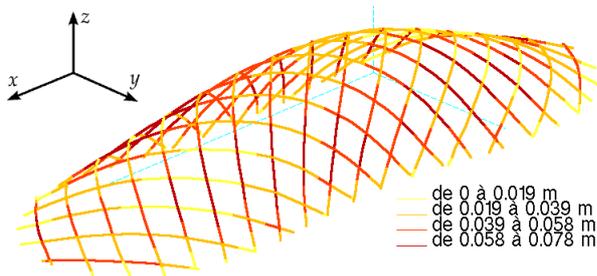


FIG. 6.10 – Distance entre le modèle de référence et le modèle sans excentricité.

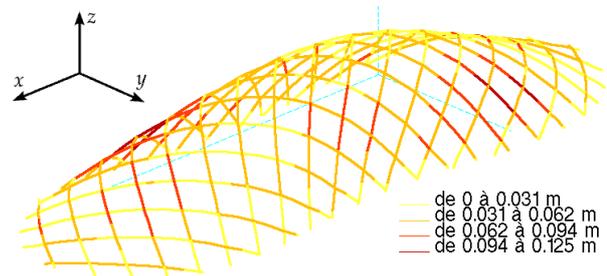


FIG. 6.11 – Distance entre le modèle de référence et le modèle de filet inversé.

Cette observation est confirmée par la comparaison de ces deux modèles avec le modèle numérique de référence. On voit sur les figures 6.10 et 6.11 que les distances entre les modèles sont très faibles (7,8 cm au plus pour le premier et 12,5 cm pour le second). On peut donc considérer que le modèle sans excentricité est une contraction du modèle avec excentricité sur le plan moyen de la nappe supérieure et de la nappe inférieure de la grille. Quant au second, il ne s'écarte du modèle sans excentricité que dans deux zones près des extrémités de la structure,

là où les barres sont les plus courtes et donc les plus raides en flexion. Ainsi on retrouve bien le résultat du paragraphe 4.2.2 : pour les grilles suffisamment souples dont la forme est obtenue par inversion du poids propre (ce qui est le cas du prototype), la méthode de Frei Otto fournit une très bonne approximation de la géométrie de la structure.

Il faut noter cependant que la forme du prototype et notamment son périmètre n'auraient pas pu être trouvés avec la méthode du filet inversé parce qu'ils sont le résultat de la méthode de recherche de forme développée dans le paragraphe 4.3 qui nécessite l'utilisation de la méthode de relaxation dynamique. L'avantage de cet algorithme sur les autres modèles est d'être un outil polyvalent qui peut être utilisé pour tous les types de calculs non-linéaires et que, par conséquent, le même modèle numérique peut être gardé d'un bout à l'autre de l'étude : de la recherche de forme à l'étude des déplacements et des contraintes. De plus, le degré de précision supplémentaire apporté par les excentricités est un atout considérable pour la définition et la préfabrication de la couverture.

6.3.3 Étude des déplacements

La seconde étape de la comparaison confronte les résultats de l'analyse du comportement structurel du prototype à ceux du modèle numérique dont on vient d'étudier la géométrie. On simule donc à l'aide de la méthode de relaxation dynamique, les tests de chargement du paragraphe 6.2 et on compare les déplacements du modèle avec ceux du prototype. La structure de ce paragraphe reprend celle des tests expérimentaux : on s'intéresse d'abord au comportement de la structure avant triangulation, puis à celui de la structure rigidifiée, avant de quantifier l'effet de la triangulation.

Chargement avant triangulation

L'étude numérique du comportement de la structure non-rigidifiée est faite à l'aide des mêmes hypothèses de chargements que celles de la structure réelle. Vingt-et-une charges de 50 kg sont appliquées sur le modèle de référence selon les plans de répartition symétrique et asymétrique que l'on a déjà décrit et qui se trouvent sur la figure B.4 de l'annexe. Après convergence du calcul, les déplacements des dix-huit cibles de A à R sont relevés pour les deux chargements et comparés aux déplacements expérimentaux. Pour savoir si le modèle reproduit correctement la déformation réelle, on étudie l'écart qui sépare le déplacement numérique u^{num} et le déplacement réel u^{exp} .

On construit pour cela deux mesures de cet écart : la première est une mesure absolue constituée de leur différence $|u^{num} - u^{exp}|$. Elle est utile pour le constructeur qui désire poser une couverture sur le gridshell et qui a besoin pour cela de connaître l'ordre de grandeur des déplacements les plus importants et les tolérances associées. La deuxième mesure est relative et constituée du rapport u^{num}/u^{exp} de sorte que si le modèle est précis, cette mesure tend vers un. Cette mesure traite de la même façon les écarts relatifs pour les grands et les petits déplacements, elle permet donc de savoir si le modèle numérique reproduit correctement l'enveloppe de la déformée. Elle est parfois cependant délicate d'emploi : dans les zones où les déplacements

sont de l'ordre de grandeur de la précision de la mesure, le rapport u^{num}/u^{exp} peut atteindre des valeurs importantes (de l'ordre de 20) sans que cela corresponde réellement à un défaut de modélisation. Dans le calcul des valeurs caractéristiques des rapports u^{num}/u^{exp} , il a donc été décidé d'ignorer les valeurs qui correspondent à des déplacements de moins de un centimètre. À ces deux mesures, on ajoute l'angle α que forment les deux déplacements entre eux. Les valeurs de ces grandeurs sont calculées pour toutes les cibles et données exhaustivement dans les tableaux B.9 et B.10 de l'annexe. Le tableau 6.10 présente les moyennes et les écarts types correspondants obtenus pour les chargements symétrique puis asymétrique.

TAB. 6.10 – Comparaison entre les déplacements réels des cibles et ceux du modèle.

	en cm	$ u_x^{num} - u_x^{exp} $	$ u_y^{num} - u_y^{exp} $	$ u_z^{num} - u_z^{exp} $	$ u^{num} - u^{exp} $	α
Chargement symétrique	Moyenne	1,6	0,7	1,5	1,4	10,2°
	Écart type	0,8	0,6	0,9	0,6	4,5°
Chargement asymétrique	Moyenne	2,0	2,6	4,8	6,2	6,6°
	Écart type	1,9	2,0	5,8	5,4	3,1°

On remarque tout d'abord que les directions des déplacements sont correctement prévues par le modèle puisque les angles moyens entre le déplacement numérique et le déplacement expérimental sont de 10,2° et de 6,6° respectivement sous chargement symétrique et asymétrique. Ensuite, dans le cas du chargement symétrique, on constate que les moyennes des écarts $|u^{num} - u^{exp}|$ sont de l'ordre de 1,5 cm dans toutes les directions avec des écarts types de moins de 1 cm. Compte tenu de la précision de la mesure qui est de $\pm 0,6$ cm et de l'ordre de grandeur des déplacements (cf. tableau 6.2), on peut considérer que ces valeurs comme satisfaisantes et que, dans ce cas, le modèle numérique est d'une bonne précision pour les déplacements. Ces observations sont confirmées par la valeur moyenne de la mesure relative qui est exactement de 1,00 avec toutefois un écart type de 0,11 (cf. tableau B.9).

Dans le cas du chargement asymétrique en revanche, les écarts sur les déplacements sont plus importants. Les valeurs moyennes et les écarts types de l'écart absolu selon x et selon y sont plus que doublés et, selon z , la moyenne et l'écart type atteignent 5 cm avec un écart sur le déplacement maximal de 18 cm. Cependant en comparant ces valeurs aux déplacements du prototype (jusqu'à 48 cm), on constate que l'écart relatif u^{num}/u^{exp} vaut en moyenne 0,82 avec un écart type de 0,18 (cf. tableau B.9). Le modèle numérique sous-estime donc d'environ 18 % les déplacements dans le cas asymétrique. Pour expliquer les écarts observés dans le cas asymétrique, on peut évoquer deux raisons.

La première est que le système de fondation n'est en réalité pas infiniment rigide. On peut simuler l'élasticité des appuis en ajoutant des systèmes de trois barres du même type que ceux utilisés dans le paragraphe 6.3.1. La raideur des barres supplémentaires est définie en fonction du déplacement maximal que l'on désire autorisé. Pour un déplacement moyen de 1,5 cm, on obtient les valeurs caractéristiques de $|u^{num} - u^{exp}|$ qui sont présentées dans les deux premières lignes du tableau 6.11. La seconde est que la charge appliquée provoque un aplatissement de la structure et que dans les zones les plus chargées les barres qui étaient en forme de \cap tendent à former un M . Les niveaux de chargement qui séparent ces deux formes caractéristiques sont très proches l'un de l'autre ; une petite variation de la charge entraîne donc de grands écarts sur les

déplacements. C'est ce que l'on constate avec les écarts $|u^{num} - u^{exp}|$ qui ont été calculés pour une augmentation de la charge de 50 kg à 55 kg et qui sont présentés dans les deux dernières lignes du tableau 6.11.

TAB. 6.11 – Rapports entre les déplacements réels des cibles et ceux des deux modèles modifiés.

	en cm	$ u_x^{num} - u_x^{exp} $	$ u_y^{num} - u_y^{exp} $	$ u_z^{num} - u_z^{exp} $	$ u^{num} - u^{exp} $
Fondations élastiques	Moyenne	2,0	1,5	1,9	2,5
	Écart type	1,7	1,2	1,9	2,5
Charges de 55kg	Moyenne	2,1	0,9	2,5	2,8
	Écart type	1,0	0,7	2,1	2,0

Les deux modifications apportées au modèle de référence permettent de se rapprocher des déplacements réels du prototype : dans le premier modèle, les écarts dans les trois directions sont inférieurs à 2,0 cm et dans le second modèle à 2,5 cm. L'écart maximal entre le modèle avec appuis élastique et le prototype n'est plus que de 9,0 cm et l'écart entre le modèle avec une surcharge et le prototype plus que de 7,2 cm. On observe exactement le même phénomène sur les écarts relatifs puisque le rapport u^{num}/u^{exp} de ces deux modèles valent respectivement en moyenne 0,93 et 1,00 avec des écarts types de 0,07 et de 0,13. La précision horizontale du modèle avec des charges de 55 kg étant du même ordre que celle obtenue sous chargement symétrique (cf. tableau 6.10), il est probable que les charges aient été sous évaluées lors des essais. Les dynamomètres utilisés ont une précision de ± 1 kg et l'expérience s'est déroulée en extérieur sur plusieurs jours sans que la quantité d'eau tombée ou évaporée soit mesurée précisément. Ainsi, par une modélisation plus fine de la structure, on parvient à simuler correctement le comportement de la structure réelle de sorte que l'efficacité de la méthode de relaxation dynamique pour l'analyse des structures qui a été démontrée au paragraphe 3.7.4 est une nouvelle fois confirmée.

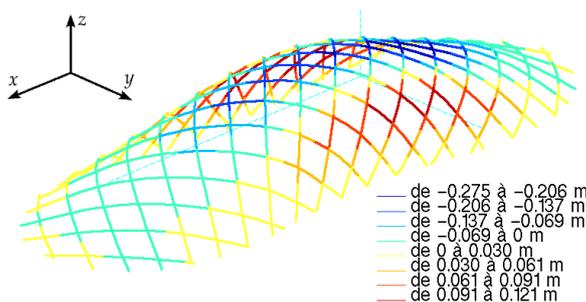


FIG. 6.12 – Le déplacement selon z du gridshell sous chargement asymétrique.

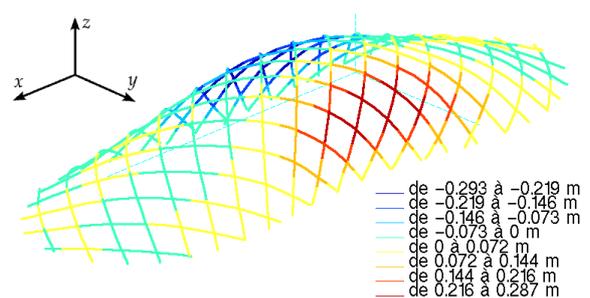


FIG. 6.13 – Le déplacement selon y du gridshell sous chargement asymétrique.

Par ailleurs, dans la mesure où le programme est un outil fiable pour l'étude du comportement des gridshells, on peut l'utiliser pour obtenir une vision d'ensemble de la déformation de la structure sous chargement quand le protocole expérimental n'autorise qu'une mesure ponctuelle. Ainsi les hypothèses présentées à la fin du paragraphe 6.2.2 se trouvent vérifiées : le chargement de la structure provoque bien une descente de la partie centrale du gridshell et un écartement des parois latérales comme on peut le voir sur les deux figures ci-dessous qui illustrent le déplacement selon z (figure 6.12) et le déplacement selon y (figure 6.13). Ce type de

déformée rappelle celle d'un arc chargé verticalement en son centre, ce qui semble logique puisqu'à ce stade de la construction le gridshell sans triangulation n'est encore qu'un assemblage d'arcs.

Chargement après triangulation

On vient de voir que le modèle de relaxation dynamique permet de simuler les déformations de la structure avant triangulation. Or cette étape n'est qu'un état provisoire de la structure qui doit être contreventée dans sa forme définitive. Il importe donc de savoir si, dans cette configuration aussi, le modèle reproduit correctement le comportement du prototype. Les comparaisons sont plus difficiles que dans le paragraphe précédent car les déplacements mesurés sur la structure rigidifiée sont faibles et que, par conséquent, la précision de la mesure a une grande influence sur la qualité de la comparaison entre les déplacements du modèle et ceux du prototype. En effet, dans le cas symétrique, 50 % des déplacements sont inférieurs à 0,8 cm (avec 90 % des déplacements selon x inférieurs à 0,6 cm, 75 % selon y et 60 % selon z); dans le cas de charges asymétriques, 30% des déplacements sont inférieurs à 0,8 cm (avec 75 % des déplacements selon x inférieurs à 0,6 cm, 65 % selon y et 50 % selon z).

Dans ces conditions, il est impossible de faire une comparaison nœud par nœud. Les résultats de l'analyse numérique de la structure rigidifiée sont donc présentés sous forme synthétique : déplacement maximal, déplacement minimal, moyenne des déplacements et écarts types dans chacune des trois directions de l'espace ainsi qu'en norme ; mais également déplacement du « centre » de la structure, déplacements des cibles situées dans la zone des x négatifs (la zone chargée dans le cas asymétrique) et déplacements des cibles situées dans la zone des x positifs (la zone non chargée dans le cas asymétrique). Ces résultats numériques sont regroupés dans les tableaux 6.12 et 6.13, ils sont à comparés avec les résultats expérimentaux des tableaux 6.4 et 6.5.

TAB. 6.12 – Déplacements du modèle rigidifié sous chargement symétrique.

(en cm)	u_x	u_y	u_z	u
Maximal	0,26	0,79	0,29	1,09
Minimal	-0,24	-0,78	-0,88	0,05
Moyenne	0,00	0,01	-0,23	0,50
Écart type	0,14	0,39	0,36	0,34
Centre	0,00	0,02	0,03	0,15
$x > 0$	-0,10	0,13	-0,22	0,48
$x < 0$	0,11	-0,09	-0,21	0,47

TAB. 6.13 – Déplacements du modèle rigidifié sous chargement asymétrique.

(en cm)	u_x	u_y	u_z	u
Maximal	0,11	1,17	0,60	1,37
Minimal	-0,53	-1,23	-1,20	0,09
Moyenne	-0,12	0,00	-0,14	0,58
Écart type	0,15	0,49	0,45	0,41
Centre	-0,07	-0,02	-0,37	0,50
$x > 0$ (chargé)	-0,19	0,12	-0,29	0,85
$x < 0$	-0,04	-0,10	0,01	0,27

On observe logiquement que, pour le chargement symétrique, les déplacements horizontaux sont symétriques : leurs valeurs extrêmes sont égales et opposées : 0,26 cm et -0,24 cm selon x et 0,79 cm et 0,78 cm selon y ; leurs valeurs moyennes sont nulles et le déplacement horizontal du centre de la structure est nul également. On retrouve également la symétrie des déplacements selon y pour le chargement asymétrique avec des valeurs extrêmes égales et opposées et des valeurs moyennes nulles. L'ensemble de la structure descend de façon symétrique lorsque les charges sont symétriques et, lorsque les charges sont asymétriques, la partie chargée descend

plus que la partie non-chargée (-0,29 cm contre 0,01 cm). L'allure générale des déplacements selon z et selon y des figures 6.14 et 6.15 semble juste également et sont assez similaires à celle du cas non-triangulé (cf. figures 6.12 et 6.13). Il reste donc la question des ordres de grandeur.

Les déplacements calculés sont très faibles ; ils sont en moyenne du même ordre de grandeur que ceux du prototype bien qu'en général inférieurs, tant sous chargement symétrique (0,50 cm contre 0,84 cm) que sous chargement asymétrique (0,58 cm contre 1,54 cm). Les tests de validation qui ont été menés à la fin du chapitre 3 incitent à penser que, s'il est possible que le programme sous-estime les déplacements réels de 18 % comme dans le cas de la structure non-rigidifiée, un écart de 60 % est improbable. C'est avant tout le mode opératoire de l'expérience qu'il faut remettre en cause : l'utilisation des tachéomètres en stations libres n'est pas adaptée à la mesure de déplacements aussi petits, il faut utiliser des tachéomètres fixes dont la position est rigoureusement inchangée. Comme indiqué dans le paragraphe 6.2.1 sur la précision des mesures, les déplacements sont des mesures relatives : peu importe que la position de l'appareil soit mal connue, si elle est invariable, l'imprécision n'affectera pas la mesure et on pourrait obtenir le niveau de précision annoncé par le fabricant de tachéomètre, c'est-à-dire le dixième de millimètre. Il n'a malheureusement pas été possible de réaliser des bornes topographiques avant la réalisation d'une ouverture dans le prototype (cf. paragraphe 6.4) ce qui a changé et sa géométrie et son comportement. Si l'on voulait poursuivre la comparaison du modèle et du prototype, on pourrait réaliser une troisième série d'essais sur la structure avec son ouverture, mais cela ne rentrerait pas dans le cadre de cette thèse.

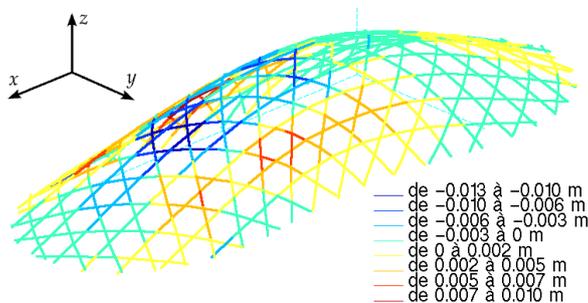


FIG. 6.14 – Le déplacement selon z du gridshell rigidifié sous chargement asymétrique.

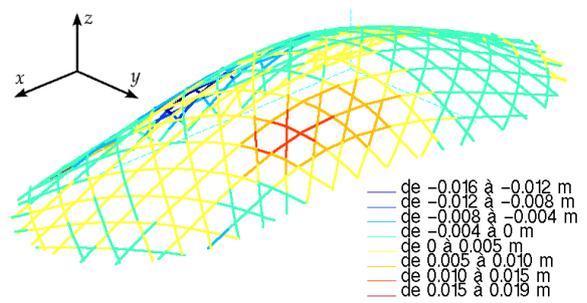


FIG. 6.15 – Le déplacement selon y du gridshell rigidifié sous chargement asymétrique.

Effet de la triangulation

Malgré ces quelques réserves sur la qualité des résultats expérimentaux de la seconde série de mesures, l'effet de la triangulation sur la rigidité de la structure est évident numériquement et expérimentalement. Une première évaluation de l'effet de la triangulation a été obtenue dans le paragraphe 6.2.2 à partir des mesures effectuées sur le prototype. Le facteur d'augmentation de la raideur peut être chiffré à 19 si l'on observe le déplacement central (sous chargement symétrique comme sous chargement asymétrique) ainsi qu'à 7,5 sous chargement symétrique et 13,4 sous chargement asymétrique si l'on observe le déplacement maximal. Il est difficile de déterminer parmi ces trois valeurs laquelle représente le mieux l'amélioration du comportement de la structure. Numériquement, la comparaison point par point des déplacements de la structure

avant et après rigidification n'est pas plus fructueuse parce que, pris séparément, les points ont des comportements très différents. Ainsi la méthode qui apparaît la plus pertinente pour estimer l'effet de la triangulation est la comparaison des énergies de déformations élastiques des deux structures. Celle-ci peut être calculée à partir du travail des efforts extérieurs qui est égal, à une constante multiplicative près (la valeur du chargement), à la somme des déplacements verticaux des points d'application des charges. Les valeurs de ces travaux pour les deux cas de chargement sont présentées dans le tableau 6.14.

TAB. 6.14 – Travaux des efforts extérieurs et influence de la rigidification.

	Avant rigidification	Après rigidification	Rapport Après/Avant
Chargement symétrique	568 J	65,6 J	8,7
Chargement asymétrique	1558 J	70,0 J	22,3

L'impression qui ressortait de la comparaison des déplacements maximaux est confirmée, l'effet de la triangulation est beaucoup plus important sous chargement asymétrique que sous chargement symétrique, puisque l'on trouve un rapport de 22,3 entre l'énergie de déformation de la structure non rigidifiée et celle de la structure rigidifiée pour le premier et de 8,7 pour le second. On remarque cependant que l'effet de la triangulation est ici beaucoup plus faible que dans le tableau 5.4 où le gain de raideur lié à la troisième direction de barre était de 60. Cela vient probablement du fait que la modélisation du paragraphe 5.2.3 ne prend pas en compte les excentricités entre les barres. Or celles-ci introduisent de petits mécanismes entre les barres et agissent sur le comportement de la structure comme des imperfections de montage. Il est donc très important de ne pas négliger les excentricités dans l'étude du comportement des gridsheils.

6.3.4 Étude des efforts intérieurs

Pour expliquer les différences de comportement du paragraphe précédent, on étudie l'évolution des efforts intérieurs dans la structure. Comme aucun appareil de mesure spécifique n'a été posé sur la structure réelle, les valeurs données ici sont celles de la simulation numérique ; compte tenu de la dualité qui existe entre force et forme pour les structures élastiques, si le programme prévoit correctement la géométrie (ce que l'on vient de démontrer), il prévoit correctement les efforts intérieurs et les contraintes.

Dans le cas de chargement symétrique, les charges sont réparties sur l'ensemble de la structure et les dix barres les plus chargées ne supportent que trois charges. Dans le cas de chargement asymétrique, toutes les charges sont du même côté et quatre barres supportent cinq charges. En l'absence de triangulation, la redistribution des charges de ces quatre barres vers les barres voisines s'effectue très mal et elles doivent reprendre seules la quasi totalité des efforts extérieurs. La troisième direction de barre donne une résistance en cisaillement à la surface et permet une collaboration entre les barres qui participent toutes à la reprise du chargement. C'est ce que l'on peut observer sur les figures ci-dessous. Dans la structure avant triangulation, quatre barres concentrent à elles-seules les efforts de compression les plus importants (les barres en bleu foncé sur la figure 6.16). Dans la structure rigidifiée (cf. figure 6.17), la triangulation répartit les efforts

de compression sur huit barres et elle fait coopérer les barres dans la direction opposée en les mettant en traction (les barres en rouge et jaune sur la figure 6.17). Ces remarques sont également valables pour le cas de chargement symétrique, mais comme les concentrations d'efforts y sont moins importantes, l'apport de la triangulation est moins visible.

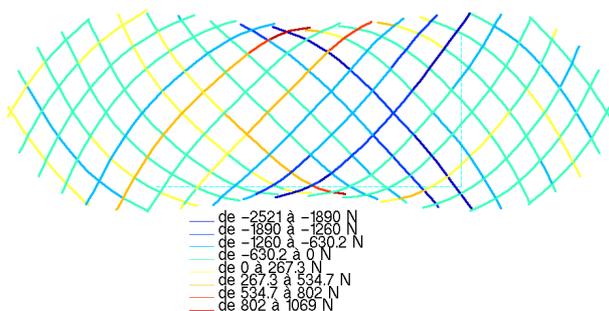


FIG. 6.16 – Efforts normaux dans le gridshell non-rigidifié sous chargement asymétrique.

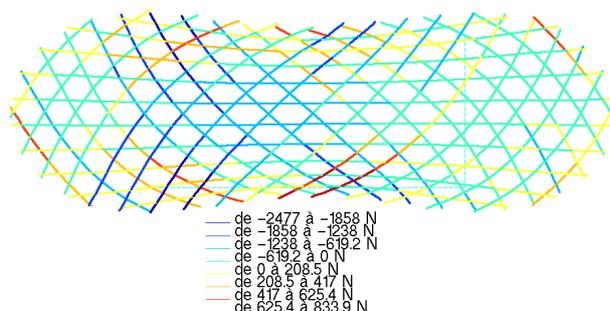


FIG. 6.17 – Efforts normaux dans le gridshell rigidifié sous chargement asymétrique.

On note que la répartition des efforts normaux n'est qu'une partie de l'apport structurel de la triangulation. Sans celle-ci, la structure n'est qu'un assemblage d'arcs. Le chargement symétrique qui leur est appliqué est suffisamment proche du chargement dont ils sont les funiculaires pour qu'il puisse pour l'essentiel être repris sous forme de compression dans les arcs sans introduire de flexion importante. La contrainte maximale n'augmente donc que de 15 MPa comme le montre le tableau 6.15 sur l'évolution des contraintes. Le chargement asymétrique en revanche est très éloigné de ce funiculaire et il entraîne de la flexion dans les arcs : la partie centrale s'aplatit pendant que la courbure s'accroît sur les côtés. La position du moment maximal change et, entre la configuration au repos de la figure 6.18 et la configuration déformée de la figure 6.19, il passe du centre aux parties latérales des arcs. Dans le même temps, leur contrainte maximale passe de 130 MPa à 165 MPa.

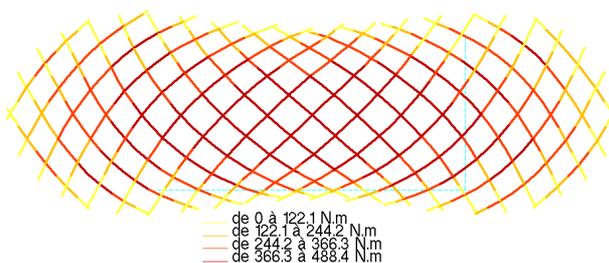


FIG. 6.18 – Moments fléchissants dans le gridshell au repos.

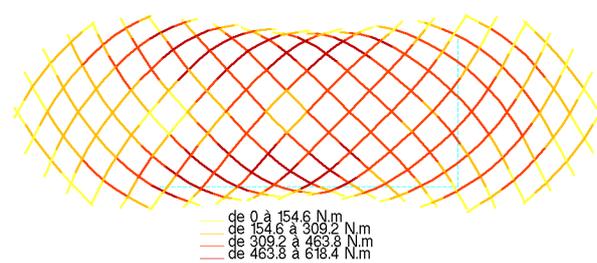


FIG. 6.19 – Moments fléchissants dans le gridshell non-rigidifié sous charges asymétriques.

Avec l'introduction de la triangulation, le comportement d'ensemble de la structure est changé et on passe d'un fonctionnement en arc à un fonctionnement de type coque avec un cheminement essentiellement membranaire des efforts. Les efforts extérieurs qui provoquaient la flexion des barres sont transformés en efforts normaux dans l'épaisseur de la coque et, sous charges, le taux de flexion des éléments dans le gridshell est quasiment inchangé. Les contraintes maximales évoluent très peu : 130 MPa au repos, 134 MPa sous chargement symétrique, 132 MPa sous chargement asymétrique (cf. tableau 6.15).

TAB. 6.15 – Évolution des contraintes maximales dans la structure.

Contraintes en MPa	Structure au repos	Chargement symétrique	Chargement asymétrique
Non-triangulée	130	145	165
Triangulée	130	134	132

La rigidification de la structure constatée dans le paragraphe précédent est donc une conséquence d'un changement radical de comportement mécanique. La grille avec son degré de liberté en cisaillement est facile à mettre en forme mais n'a alors que l'apparence d'une surface : elle est constituée d'un assemblage d'arcs et se comporte comme tel. La mise en place de la triangulation transforme la grille en une coque dans laquelle les efforts perpendiculaires à la surface sont repris sans flexion sous forme membranaire ce qui donne toute sa raideur à la forme finale. Les structures de gridshell avec leur mode de construction en deux étapes permet donc d'allier élégance formelle à performance structurelle.

6.4 Réalisation d'une ouverture

Après rigidification, le comportement du gridshell est semblable à celui d'une coque. La création d'une ouverture dans le prototype obéit donc a priori aux mêmes règles que celles qui gouvernent le percement des coques. Au bord de l'ouverture, on doit donc observer une concentration de contraintes, une fragilisation de la structure et une diminution de sa raideur. Pour éviter la rupture de la coque et lui redonner ces propriétés mécaniques, il suffit en général de renforcer les bords de l'ouverture. Les solutions usuelles (augmentation locale de l'inertie, création d'appuis supplémentaires, etc.) sont a priori applicables aux gridshells et efficaces.

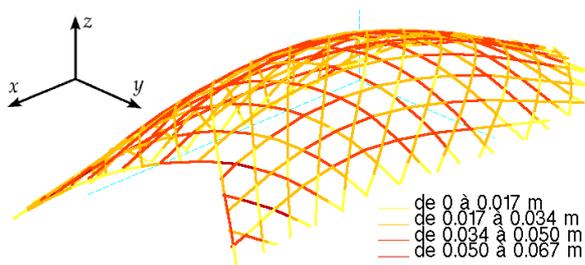


FIG. 6.20 – Déplacement lié à la création de l'ouverture à l'ouest du prototype.



FIG. 6.21 – Le prototype et son ouverture à l'ouest.

L'ouverture que l'on a choisi de pratiquer dans le gridshell, est située à l'ouest du prototype, c'est-à-dire du côté des x négatifs. On coupe les barres le long des barres 7 et 30 de façon à supprimer la partie plate inhabitable de ce côté et à créer un passage de 2,4 m de haut comme on peut le voir sur la figure 6.21. Avant d'intervenir sur la structure réelle, des simulations numériques ont été effectuées afin de vérifier que l'enveloppe du gridshell était bien rigide. Tous calculs faits, l'ouverture entraîne un déplacement maximal de 6,7 cm du point situé à l'intersection des rives formées par les arcs 7 et 30 tandis que partout ailleurs les déplacements ne dépassent pas 4 cm (cf. figure 6.20).

6.5 Coût du prototype

Les aspects économiques de la construction des gridshells en composites ont déjà été évoqués dans le chapitre 2 et on avait alors démontré que les composites verre/résine constituaient par rapport au bois une alternative intéressante tant sur le plan des performances structurelles que sur le plan financier. Par ailleurs, à la fin du paragraphe 1.4.5, on avait cité l'étude réalisée par Harris dans [49] à propos du gridshell de Downland. Il apparaissait que le bâtiment de Downland, malgré son imposant système d'échafaudage était tout à fait concurrentiel et que son prix se situait dans la moyenne des prix des bâtiments avec un programme similaire réalisés par le Buro Happold. De ces deux informations, on peut alors déduire que les gridshells en composites sont a priori des structures dont le coût est concurrentiel voire attractif pour la réalisation de couvertures de moyenne portée (jusqu'à 20 m).

Cette affirmation semble vérifiée avec le prototype présenté ici. En effet, on a recensé dans le tableau 6.16 les coûts de tous les matériaux utilisés pour la construction (tubes pultrudés, assemblages, systèmes de fondation) ainsi que le nombre d'heures nécessaires à l'érection de la structure sur une base de 15 € brut de l'heure et d'un coefficient multiplicatif de 3,2 pour obtenir le coût complet de la main d'œuvre. On arrive ainsi à un coût total de 7 833 € pour l'ensemble de la structure avec des fondations temporaires et sans couverture.

TAB. 6.16 – Coût estimatif de la structure du prototype de gridshell en composites.

	Source	prix €/U	quantité	total (€ HT)	total € TTC
Colliers (42-42) contreventement	Delrez	7,1	213	1 518	1 816
		7,1	152	1 083	1 296
Tubes pultrudés contreventement	Topglass	3,5	442	1 552	1 856
		3,5	281	987	1 181
Tube acier	Weber	3,5	13,6	47,5	
Tige filetée		3,0	25,1	75	147
Total				5 265	6 297
Main d'œuvre montage	nb pers	nb heures	coef divers	tarif brut €/h	total €TTC
	4	8	3,2	15	1 536
Total construction					7 833

TAB. 6.17 – Ratios caractéristiques pour 70,5 m² habitable et de 154,7 m² au sol.

	total €/m ²	total €/m ² hab	total kg/m ²
Colliers (42-42)	11,7 + 8,4	25,8 + 18,4	1,4 + 1,0
Tubes pultrudés (42mm)	12,0 + 7,6	26,3 + 16,8	1,8 + 1,1
Fondations	0,9	2,1	1,3
Total	40,7	89,3	6,5
Main d'œuvre montage	9,4	20,6	
Total construction	50,1	109,9	

Pour pouvoir comparer ce coût, il faut le rapporter à la surface couverte par le bâtiment. Dans le tableau 6.17, on distingue la surface totale (154,7 m²) de la surface habitable (70,5 m²) de sorte que, pour ces deux surfaces, les ratios coût par unité d'aire sont respectivement de 50,1 €/m² et

109,9 €/m². À 50 €/m², le prix de construction des gridshells se rapproche de celui de la structure métallique de hangars industriels qui sont des bâtiments particulièrement économiques. En surélevant légèrement la structure et en optimisant sa courbure, on peut augmenter la surface habitable sous le prototype et ainsi faire tendre le second ratio vers le premier. Le prix du mètre carré habitable devient alors compétitif surtout si l'on note que la forme proposée par le prototype est plus susceptible d'intéresser un architecte que celle d'un banal hangar. On remarque par ailleurs que les assemblages utilisés sont disproportionnés vis-à-vis des efforts qu'ils reprennent et que, depuis la construction du prototype, un modèle d'assemblage plus satisfaisant, cinq fois moins lourd et quatre fois moins cher, a été fabriqué à partir de systèmes de fixation de grosses conduites d'eau.

En dehors de leur coût, un autre avantage des gridshells en composite est leur légèreté : seulement 6,5 kg/m² d'après le tableau 6.17. On note que trois cinquièmes de ce poids (3,2 kg/m²) sont dus à la grille principale et deux cinquièmes à la triangulation (2,2 kg/m²) et que par conséquent une augmentation de la masse de 70 % s'est traduite par une multiplication par 15 de la raideur de la coque. On note également que près 40 % du poids de la structure est due aux assemblages. Or ceux-ci sont surdimensionnés pour l'usage qui en est fait ici, on gagnerait donc une masse considérable en développant un assemblage en composite spécifique aux gridshells ou en les remplaçant par les assemblages mieux adaptés évoqués ci-dessus. En outre, en prévoyant dans cet assemblage la possibilité de connecter trois barres à chaque nœud, on pourrait mettre en œuvre un système de contreventement qui triangule exactement la grille principale et ainsi gagner encore un facteur deux sur la raideur de la coque.

6.6 Conclusion

L'étude du prototype de grande taille qui vient d'être présentée montre la faisabilité d'un gridshell en matériaux composites ainsi que les potentiels structurels et économiques de cette famille de structure. La construction du gridshell a en effet confirmé la pertinence des choix technologiques des chapitres précédents qui ont permis un montage aisé sans aucun moyen de levage particulier. Les tests de chargement effectués sur le prototype avant et après triangulation sont venus conforter l'idée que le contreventement confère ses qualités mécaniques et sa raideur à la structure. Malgré quelques problèmes liés à la précision des mesures, on a estimé expérimentalement que la mise en place de la troisième direction de barres multiplie par dix-neuf la rigidité de l'ouvrage.

Ces résultats ont ensuite été comparés à un modèle numérique établi avec l'algorithme de relaxation dynamique. L'examen des positions de cibles réparties sur la structure au repos a permis de vérifier que la géométrie prévue par le modèle était très proche de la géométrie réelle et par conséquent que l'algorithme était un outil fiable pour la recherche de forme des gridshells. L'étude numérique des déplacements sous chargements symétrique et asymétrique et leur comparaison avec les déplacements expérimentaux a abouti à la même conclusion : l'algorithme prévoit correctement le comportement de la structure, tant en grands déplacements quand la structure est non-rigidifiée qu'en petits déplacements quand elle est rigidifiée. Les simulations

numériques fournissent également une estimation de l'augmentation de raideur liée à la triangulation, on a évalué la raideur de la grille contreventée à 8,7 celle de la grille simple dans le cas symétrique et à 22,2 fois dans le cas asymétrique. La troisième direction de barres redonne une raideur en cisaillement à la grille qui n'en avait pas pour la mise en forme et confère ainsi une véritable raideur à la surface et un comportement proche de celui d'une coque.

On a vu ensuite que, comme les propriétés mécaniques de la forme finale sont celles d'une coque, il est facile d'y aménager des ouvertures, les concentrations de contraintes sur les bords de l'ouverture se traitant comme sur les coques par des renforcements locaux de la structure. On l'a montré par la création d'une entrée sur le côté ouest du prototype. Un bilan des coûts de la construction du prototype a également été exposé afin de démontrer la compétitivité de ce type de structure pour la construction d'abris de moyenne portée.

Conclusion et perspectives

Les matériaux composites sont des matériaux nouveaux dans la construction. Aujourd'hui ils remplacent des matériaux traditionnels plus lourds comme l'acier, mais leur niche est encore à définir, leur domaine d'excellence à inventer. Cependant on remarque que partout où une grande déformabilité et une grande raideur sont exigées, ils se sont imposés. Les structures de bâtiment et de génie civil qui requièrent ces deux propriétés sont peu nombreuses, à vrai dire, les gridshells en sont un bon exemple.

Ces structures sont rares et méconnues. Leur originalité vient de leur processus de montage mis au point par Frei Otto : elles sont issues d'une grille d'éléments rectilignes élancés que l'on a déformée élastiquement jusqu'à obtenir une surface à double courbure dans laquelle les éléments sont précontraints par flexion. Dès 1975, le bâtiment du *Bundesgartenschau* de Mannheim révélait un univers formel radicalement nouveau par rapport aux formes des grandes couvertures construites par le passé. Il démontrait également la validité du concept de gridshell sur le plan mécanique, c'est-à-dire le passage par simple triangulation d'une grille souple à une structure d'une grande rigidité et d'une légèreté exceptionnelle.

À une exception près, la structure de ces bâtiments a été réalisée en bois, car c'est le seul matériau de construction traditionnel à posséder un allongement à rupture et une raideur élevés. Dans ce travail, on a proposé d'utiliser les matériaux alternatifs que sont les matériaux composites à fibres longues dont l'allongement à rupture et la raideur sont bien plus importants. On a donc rappelé les caractéristiques physiques et mécaniques de ces polymères renforcés par des fibres et leurs principales applications dans le génie civil. On a ensuite démontré à l'aide de la méthode de choix des matériaux de Michael Ashby que les composites verre/résine sont bien plus intéressants que le bois pour la construction des gridshells. Leur bilan environnemental est moins bon que celui du bois, mais leurs performances mécaniques nettement supérieures, garanties par un procédé fiable de fabrication industrielle (la pultrusion) et leur facilité d'assemblage par collage en font une alternative très intéressante à étudier.

Le comportement à court et à long terme des composites pultrudés fléchis en grande transformation a été d'abord étudié. Plusieurs points importants ont été mis en évidence. À court terme, le comportement du tube reste linéaire élastique jusqu'à la rupture de la partie comprimée. Lors de la mise en forme des gridshells, il n'y a donc pas de non-linéarités matérielles à prendre en compte dans le calcul. À long terme, la viscoélasticité de la résine entraîne un fluage important qui diminue avec le niveau de sollicitation, de sorte qu'il semble préférable de limiter les contraintes à 30 % de la rupture instantanée. Enfin, l'anisotropie du matériau se traduit par

une très faible raideur transversale du profilé, qui entraîne une ovalisation de la section dans les éléments fléchis ; il convient donc de ne pas trop diminuer l'épaisseur des parois des éléments.

Ensuite, en réponse au fait que les grands déplacements et les non-linéarités géométriques qui apparaissent lors de la mise en forme des gridshells sont difficilement pris en compte par les codes éléments finis classiques, un outil de simulation numérique spécifique a été développé. Il repose sur la méthode de relaxation dynamique, une méthode originale de calcul non-linéaire de structure qui remplace la recherche de l'état d'équilibre statique par un calcul dynamique fictif qui va conduire à l'état d'équilibre statique par amortissements successifs. Les principes généraux de la méthode ont été présentés ainsi qu'une reformulation de l'élément de poutre proposé par Michael Barnes. Un modèle original pour la prise en compte des excentricités entre les barres a été introduit. La cinématique développée correspond à la technique d'assemblage proposée dans ce travail, mais son principe repose sur des contraintes purement géométriques qui peuvent être facilement adaptées à d'autres pièces de liaisons. Ce modèle permet d'une part d'augmenter la précision dans la simulation de la géométrie des gridshells et d'autre part de mieux prévoir la charge critique de flambement de la structure par la prise en compte des dissymétries et des mécanismes liés aux assemblages. Par ailleurs, une méthode adaptative d'optimisation des paramètres de l'algorithme en fonction de la raideur actuelle des éléments a été décrite : elle garantit la stabilité de l'algorithme et minimise le temps de calcul. Sur les bases de cet algorithme, un outil numérique spécifique, appelé *AlgoRD*, a été implémenté et soumis à une série de tests de validation sur une grande variété de calculs de structures en grands déplacements qui illustre également sa polyvalence. Il s'est avéré fiable, facile d'emploi et souvent plus performant qu'un logiciel de calcul aux éléments finis du commerce.

Intégrant ces nouveaux matériaux et ces nouveaux outils numériques, l'étude s'est alors concentrée sur les problèmes spécifiquement liés à la conception des gridshells en matériaux composites. On s'est tout d'abord intéressé à la question de la définition même de la forme de la structure que l'on appelle la recherche de forme. Trois méthodes de recherche de forme ont été exposées. La première a été systématisée par Frei Otto, elle repose sur l'étude de modèles réduits parfaitement tendus et conduits à des formes dont le contour et les conditions d'appui sont imposés. Cette méthode néglige la raideur en flexion des éléments, ce qui n'est certes pas préjudiciable à la construction des gridshells lorsque les éléments sont très élancés comme à Mannheim, mais limite et oriente très largement la recherche de forme. La deuxième méthode a été développée dans ce travail grâce à l'utilisation de la relaxation dynamique et la prise en compte de la raideur en flexion des éléments. Elle conduit à des formes nouvelles dont les contours libres sont l'expression de la raideur naturelle de la grille. Une étude exhaustive sur l'influence des paramètres de cette méthode a été menée afin d'établir une sorte de guide pratique pour le concepteur. La troisième méthode a été esquissée mais semble très prometteuse, elle permet de construire des grilles précontraintes en équilibre sur à peu près n'importe quelle surface courbe dont la forme est imposée.

Après la définition de la forme, on s'est consacré à l'étude du comportement mécanique spécifique des gridshells. Pour cela on s'est appuyé sur l'étude du prototype de gridshell qui a été construit à l'École Nationale des Ponts et Chaussées. La forme de celui-ci a un contour libre qui a été défini à l'aide de la deuxième méthode exposée ci-dessus. Une méthode pratique de

triangulation par une troisième direction de barre a été proposée : elle permet la définition et la mise en place des barres supplémentaires en perturbant le moins possible la géométrie de la grille et son état de contrainte. Deux variantes de ce schéma de triangulation ont été étudiées sans tenir compte des excentricités entre les barres : selon que la troisième direction de barres passe au milieu de chaque barre ou au niveau des intersections de la grille, la raideur du gridshell varie de 60 à 120 fois la raideur de la grille non-contreventée.

Par ailleurs, sur le plan réglementaire, il a semblé nécessaire de s'inscrire dans le cadre des Eurocodes qui sont désormais les références européennes dans le bâtiment. Comme il n'existe pas d'Eurocode dédié aux matériaux composites, des coefficients partiels de sécurité adaptés à leurs spécificités ont été proposés : ils se fondent sur le mode d'identification des propriétés mécaniques, le procédé de production du matériau et les effets de la température et du vieillissement. À cause du comportement viscoélastique de ces matériaux, on recommande de diviser la résistance à rupture par au moins 2,5 entre un chargement à court terme et un chargement à long terme.

Ces coefficients ont ensuite été utilisés pour la vérification des états limites de service du prototype. On a ainsi mis en évidence la souplesse du matériau et l'importance du choix de la technique de couverture. En effet, si la couverture est souple, elle pourra supporter les déplacements importants du gridshell ce qui permettra de conserver des structures très légères. En revanche, si la couverture est rigide, il faut compenser la souplesse du matériau en densifiant le maillage et en augmentant la double courbure de la surface. Par ailleurs, la vérification des états limites ultimes a montré que l'augmentation de contraintes liée aux chargements extérieurs était de l'ordre de 10 % de la contrainte permanente de flexion. Compte tenu de la faible résistance des tubes sur le long terme, la précontrainte est donc amenée à jouer un rôle important dans le dimensionnement de la grille. Il a été également montré que le risque d'instabilité était élevé et en général prépondérant par rapport au risque de rupture d'un élément sous chargement variable de sorte que l'étude des instabilités est indispensable pour ce type de structure.

Enfin, la faisabilité de ce gridshell en matériaux composites, ses bonnes performances mécaniques et son intérêt économique ont été démontrés par la réalisation du prototype sur le site de l'École Nationale des Ponts et Chaussées. Les différentes étapes du montage et les techniques utilisées ont été décrites ainsi que les tests de chargement effectués avant et après triangulation. L'analyse des résultats de ces tests a montré que si l'effet de la triangulation était évident sur la structure réelle (la raideur a été multipliée par 22 sous chargement symétrique), il était moins important qu'escompté du fait des excentricités entre les deux directions de la grille. Le modèle numérique qui a été construit à partir du relevé des positions des extrémités des barres a confirmé ces résultats. On mesure ainsi l'intérêt du modèle d'excentricité qui a été développé dans ce travail. De plus, le modèle numérique a permis l'étude de l'évolution des contraintes dans la structure de sorte qu'on constate que la rigidification de la structure est une conséquence d'un changement radical de comportement mécanique. La grille avec son degré de liberté en cisaillement est facile à mettre en forme mais n'a alors que l'apparence d'une surface : elle est constituée d'un assemblage d'arcs et se comporte comme tel. La mise en place de la triangulation transforme la grille en une coque dans laquelle les efforts perpendiculaires à la surface sont repris sans flexion sous forme membranaire ce qui donne toute sa raideur à la forme finale.

L'ensemble des outils et des méthodes développés ici ouvre la voie vers la réalisation d'un véritable bâtiment de moyenne portée. L'outil numérique actuel ne connaît que des sections axisymétriques, il serait donc intéressant de modifier le calcul des efforts intérieurs pour introduire un modèle capable de prendre en compte des poutres de sections quelconques. Cela augmenterait en outre la polyvalence de l'algorithme et permettrait l'étude de la torsion dans les éléments et de nouveaux phénomènes comme le déversement des structures. Il serait intéressant également d'approfondir la « méthode du compas » qui permet de construire des grilles sur des surfaces quelconques et d'y introduire des méthodes d'optimisation de façon à en faire un véritable outil de conception de structure pour la « blob architecture ». Enfin, la structure du prototype de gridshell permettra une expérience de vieillissement et de relaxation *in situ* des matériaux composites qu'il sera nécessaire d'exploiter et qui devrait donner des informations précieuses sur le comportement à long terme et la durée de vie des gridshells en matériaux composites.

Annexe A

Le programme de relaxation dynamique : *AlgoRD*

A.1 Présentation générale

Le programme de calcul de structures fondé sur l'algorithme de relaxation dynamique a été baptisé *AlgoRD* et implémenté à l'aide du logiciel libre de calcul scientifique *Scilab*. Il permet d'étudier des structures faites de trois types d'éléments : des poutres, des barres et des câbles. Le modèle cinématique utilisé pour le calcul des déformations est celui de Navier-Bernouilli : la géométrie d'un élément est donnée uniquement par son axe neutre, sa section et son inertie le long de celui-ci (cf. paragraphe 3.3). Le comportement des matériaux est toujours linéaire élastique.

D'un point de vue pratique, tous les éléments d'une structure sont définis séparément par un ensemble ordonné de nœuds dont la position est donnée par leurs coordonnées dans le plan ou dans l'espace. La nature de l'élément de structure modélisé (poutre, barre ou câble) définit par défaut entre les nœuds successifs de cet élément des interactions dont le détail a été donné au paragraphe 3.3. Les interactions entre deux éléments de structure distincts sont traitées à part sous forme de contrainte purement géométrique (cf. paragraphe 3.4).

Les données du programme sont donc regroupées sous forme de listes dont chaque élément contient les données relatives à un élément de la structure. Par exemple, pour une structure composée de 10 éléments (cf. figure A.1), la liste X_0 de la géométrie au repos (cf. paragraphe A.2.2) contient 10 éléments, soit autant qu'il y a d'éléments dans la structure. Chaque élément de la liste est une matrice dont le nombre de colonnes est égal au nombre de nœuds de l'élément considéré (dans l'exemple de la figure A.1 la barre 2 a 6 nœuds) et dont le nombre de lignes est égal au nombre de degrés de liberté de chaque nœud (3 lignes dans l'espace et 2 lignes dans le plan). La première colonne du deuxième élément de la liste contient les trois coordonnées $(X_x^{2,1}, X_y^{2,1}, X_z^{2,1})$ du premier nœud de la barre deux. On définit de même les propriétés caractéristiques des sections des barres (module d'Young, inertie, section et distance maximale à l'axe neutre). Pour le module d'Young, par exemple, la cinquième colonne du deuxième élément de la liste E représente le module d'Young de la première barre au voisinage du cinquième nœud.

Cette notion de voisinage est particulière à la méthode de relaxation dynamique, on y reviendra au paragraphe A.2.7. Quant aux liaisons entre les éléments, elles sont également stockées sous forme de liste (cf. figure A.1 et paragraphe A.2.5). Les conditions aux limites enfin sont contenues dans une matrice (cf. paragraphe A.2.4).

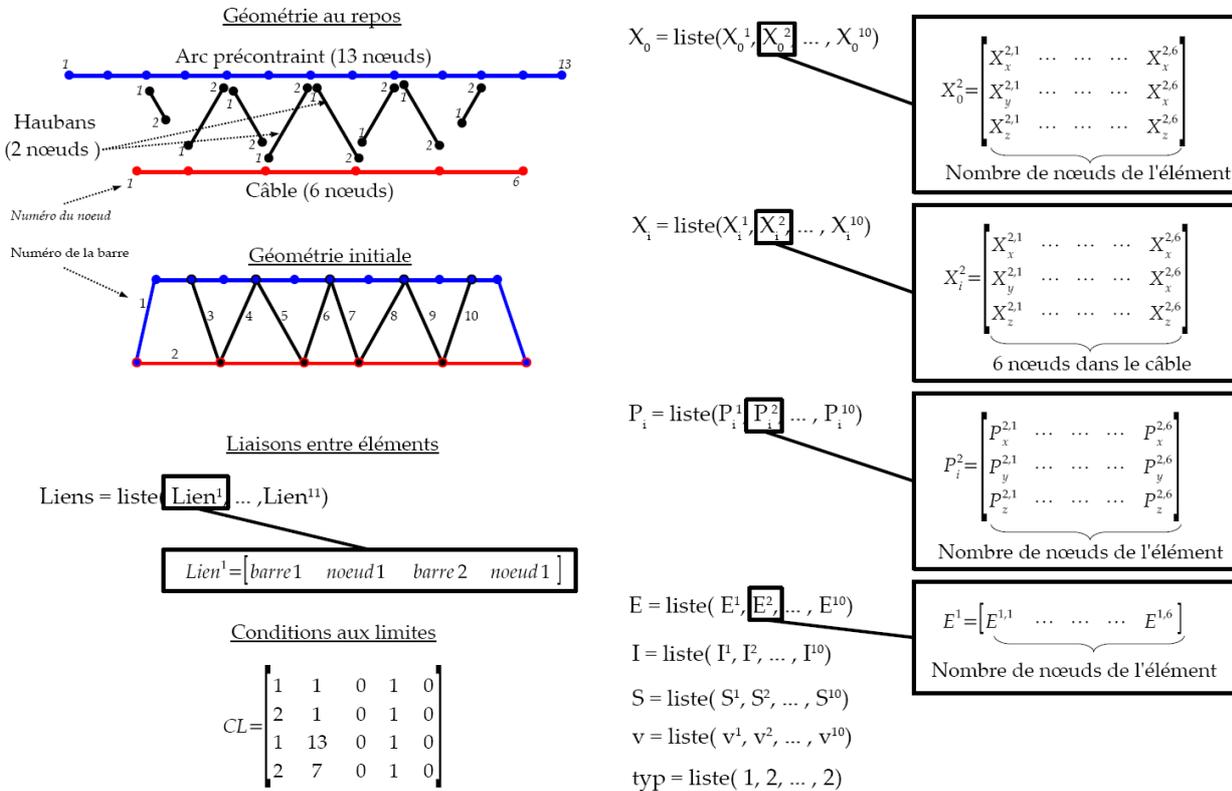


FIG. A.1 – Structure des données d’entrée de *AlgoRD*.

A.2 Définition de la structure

A.2.1 Définitions des paramètres

Le calcul de la position d’équilibre statique d’une structure par l’algorithme de relaxation dynamique, tel qu’il a été implémenté dans *AlgoRD*, nécessite la définition de deux géométries que l’on appelle « géométrie au repos » et « géométrie initiale ». Pour bien comprendre la signification de ces deux géométries, on s’intéresse au problème de la figure A.2 dont l’objectif est la recherche de la position d’équilibre statique de deux ressorts sous l’action de la masse *m* et de la gravité.

Pour résoudre ce problème avec la méthode de la relaxation dynamique, on utilise un calcul dynamique itératif et fictif. On a donc besoin de définir préalablement :

- la position au repos des ressorts, celle dans laquelle ils sont libres de toute contrainte interne (cf. figure A.3) et celle par rapport à laquelle sera effectué le calcul des forces de rappel dans une position quelconque des ressorts.

- la position initiale de l'extrémité des deux ressorts, celle d'où débutera le calcul dynamique itératif ;
- les conditions aux limites des ressorts, ici les extrémités supérieures sont fixes ;
- les nœuds qui sont reliés entre eux, ici les nœuds A et B aux extrémités des ressorts,
- la raideur k des ressorts pour le calcul des forces de rappel ;
- les efforts extérieurs appliqués au ressort, c'est-à-dire ici la masse m qui lui sera suspendue.

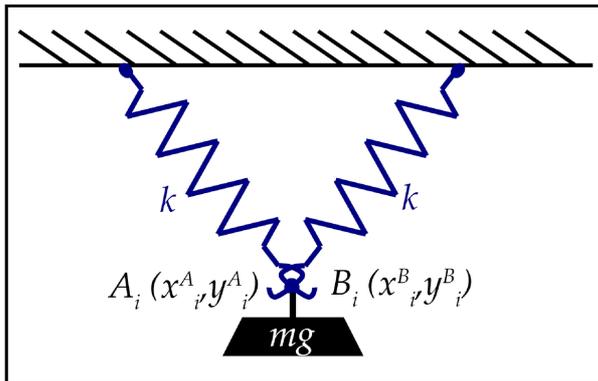


FIG. A.2 – Ressorts en position initiale avant calcul.

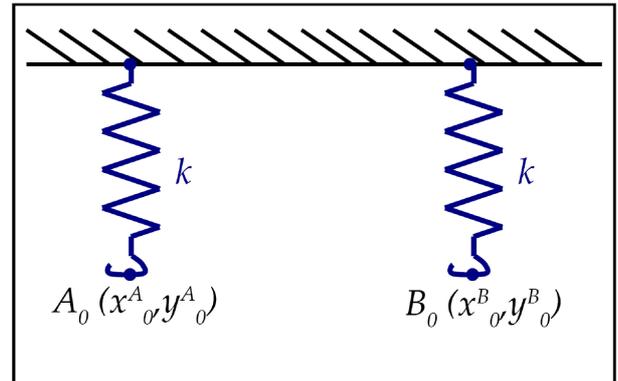


FIG. A.3 – Ressorts en position au repos, libres de contrainte.

Dans la méthode qui a été décrite au chapitre 3, il n'est nécessaire de définir ni la masse du ressort puisque celle-ci est calculée automatiquement à partir de la raideur du ressort (cf. paragraphe 3.5), ni l'amortissement visqueux puisque c'est un amortissement cinétique qui est utilisé (cf. paragraphe 3.2.1). Dans ce problème, il y a donc au total six paramètres dont deux géométries qui peuvent être choisies indépendamment. En effet, si la position initiale de l'extrémité du ressort n'est pas égale à sa position au repos, le résultat du calcul dynamique est inchangé.

Pour les structures plus complexes, celles avec plus de degrés de liberté, le principe de définition de la structure reste le même et il faut fixer les mêmes six grands types de paramètre d'entrée : la géométrie au repos ou les positions au repos de tous les nœuds de la structure (X_0), la géométrie initiale ou les positions de tous les nœuds dans la première itération (X_i), les conditions aux limites de la structure (CL), les liaisons qui existent entre les différents éléments (*Liens*), les caractéristiques de la raideur des différents éléments (E , I , S et ν) et les efforts extérieurs (F) (cf. figure A.1 et paragraphes suivants). La géométrie au repos est toujours la géométrie de référence pour le calcul des efforts intérieurs. La géométrie initiale est la géométrie de la première étape du calcul dynamique. La raideur des éléments est constituée par les caractéristiques géométriques et mécaniques des sections (module d'Young, inertie et section). Les critères de définition de ces paramètres, en particulier les deux géométries seront détaillés dans les paragraphes ci-dessous.

A.2.2 Le choix de la géométrie au repos

Comme indiqué auparavant, la géométrie au repos est la géométrie de référence pour le calcul des efforts intérieurs. Dans le modèle d'élément présenté dans le paragraphe 3.3, ce calcul repose sur la dualité qui existe en permanence entre forme et force dans une structure élastique.

La connaissance de l'état de déformation à un instant donné du processus de mise en forme ainsi que des propriétés géométriques et mécaniques des sections suffisent pour calculer les efforts intérieurs dans la structure à cet instant. L'état de déformation de la structure quant à lui est déduit de la différence entre la géométrie actuelle et une géométrie de référence ou géométrie « au repos » dans laquelle les éléments sont sans contraintes. Ainsi, dans le modèle de poutre de Navier-Bernouilli standard, les expressions algébriques des efforts normaux N et des moments fléchissants M s'expriment très simplement en fonction du module d'Young E , de l'inertie I , de la section S , de la géométrie actuelle et au repos :

$$N = ES \frac{L - L_0}{L_0} \quad \text{et} \quad M = EI \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \quad (\text{A.1})$$

Si l'on observe les équations ci-dessus et celles du paragraphe 3.3, on constate que cette géométrie au repos n'intervient qu'indirectement dans l'expression des efforts intérieurs. En effet, le calcul des efforts normaux ne requiert que la connaissance de la longueur au repos L_0 de chaque élément (cf. expression (3.22)). Pour le calcul des efforts de flexion, il faut distinguer deux cas : selon que le problème est plan ou spatial. Dans l'espace, le modèle de poutre utilisé suppose par défaut que les éléments sont rectilignes au repos (c'est-à-dire $1/R_0 = 0$), le calcul des moments de flexion ne nécessite alors aucune autre information que la géométrie actuelle. On rappelle que le calcul de poutre courbe dans l'espace requiert la prise en compte de la torsion ce qui n'est pas possible avec le modèle à trois degrés de liberté en déplacement par nœud utilisé dans ce travail. En revanche, dans le cas des structures planes soumises à un chargement plan, les moments de flexion sont toujours perpendiculaires au plan et il n'y a pas d'apparition de torsion. Le modèle du paragraphe 3.3 permet donc malgré tout de calculer des problèmes plans avec des poutres à courbure non nulle au repos. On remarque alors que le calcul du moment de flexion requiert la connaissance de la géométrie actuelle et des courbures des éléments au repos (cf. expression (3.43)).

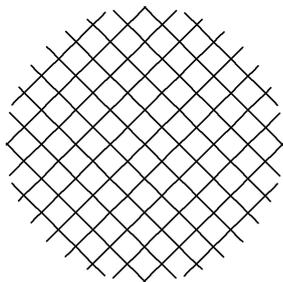


FIG. A.4 – Géométrie au repos du gridshell de la figure 4.21.

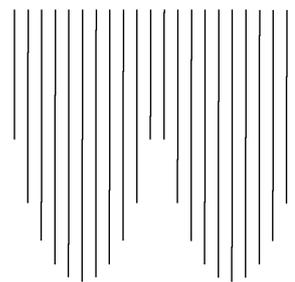


FIG. A.5 – Autre géométrie au repos du gridshell de la figure 4.21.

Dans les problèmes tridimensionnels, la géométrie de référence n'intervient donc que pour le calcul des longueurs au repos des éléments et, dans les problèmes bidimensionnels, pour le calcul des longueurs et des courbures au repos. La position des éléments dans le plan ou dans l'espace peut donc être quelconque, les éléments de structures peuvent être dissociés les uns des autres, seule compte la position relative des nœuds appartenant à la même poutre. De plus, dans l'espace, le programme ne connaît que les poutres droites de sorte que la courbure des

éléments dans la géométrie au repos est toujours négligée. Ainsi, il est indifférent de considérer la géométrie au repos de la figure A.4 ou de la figure A.5 car les longueurs des barres sont les mêmes dans les deux configurations.

A.2.3 Le choix de la géométrie initiale

La géométrie initiale est la géométrie de la première itération, celle depuis laquelle le calcul dynamique itératif est lancé. Cette géométrie peut être tout à fait quelconque du moment qu'elle respecte les conditions aux limites. Il n'est cependant pas nécessaire que les nœuds qui appartiennent à une même liaison soient confondus ou séparés d'une excentricité : le programme les « recollera » automatiquement à la première itération de façon à ce qu'ils soient effectivement confondus ou distants d'une excentricité.

Par ailleurs la géométrie initiale peut être fortement précontrainte, mais ne doit pas être trop éloignée de la position d'équilibre. En effet, avec l'algorithme de relaxation dynamique, on n'est pas sûr de converger vers le minimum absolu de l'énergie potentielle mais seulement vers un minimum de l'énergie potentielle qui peut être local (cf. paragraphe 3.2.1). Le choix de la géométrie initiale étant très libre, il faut se fixer une stratégie pour sa définition. Une solution assez efficace en terme de temps de calcul et de temps de modélisation consiste à choisir une géométrie simple qui soit aussi proche que possible de l'intuition que l'on a de la géométrie d'équilibre.

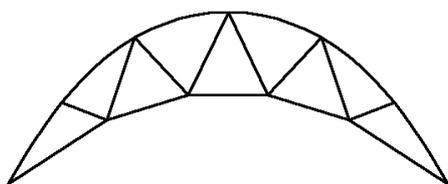


FIG. A.6 – Arc en bow-string précontraint.



FIG. A.7 – Géométrie au repos de la structure de la figure A.6.

On considère, par exemple, la structure de la figure A.6 qui est une structure similaire à la passerelle en composites étudiée par Saskia Jülich [55] (cf. figure 2.5). L'arc de ce bow-string est une poutre droite que l'on fléchit à l'aide d'un câble de sous-tension situé sous le tablier. Quant aux haubans, ils incurvent légèrement la trajectoire du câble et sont mis en tension par l'intermédiaire de ce dernier. Une des géométries au repos possibles est présentée figure A.7. On constate que pour connecter les différents éléments entre eux, on est obligé de les précontraindre. Comme on ignore la position d'équilibre de la structure, il faut choisir arbitrairement une géométrie initiale et les éléments que l'on va précontraindre. La figure A.8 montre une solution très simple de ce problème. Seul le câble de sous-tension de 10 m a une géométrie identique à sa géométrie au repos. La poutre de l'arc a été placée arbitrairement à 4 m au dessus du câble et ses extrémités ont été ramenées artificiellement au niveau des extrémités du câble de sous-tension. Pour les haubans, on s'est contenté de mettre en vis-à-vis leurs points d'ancrage avec les points correspondants de la poutre et du câble, sans tenir compte de leur longueur au repos. Cette géométrie

reproduit la topologie et l'allure générale de la passerelle, elle a toutes les chances de converger rapidement vers la forme de la figure A.6.

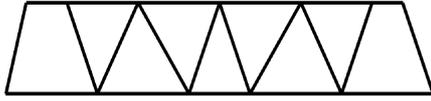


FIG. A.8 – Géométrie initiale de la structure de la figure A.6.

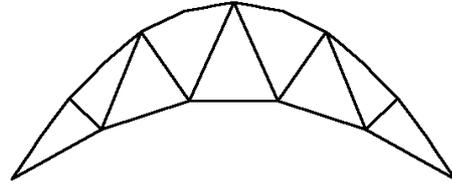


FIG. A.9 – Autre géométrie initiale de la structure de la figure A.6.

Pour améliorer le temps de calcul, on peut choisir une géométrie initiale qui soit plus proche de la géométrie attendue de la passerelle à l'équilibre, par exemple en choisissant que l'altitude du câble et de la poutre soient des fonctions paraboliques de l'abscisse (cf. figure A.9). La position des haubans est toujours déterminée de façon à assurer la concordance des points de liaisons.

A.2.4 Les conditions aux limites

Le modèle de poutre implémenté dans *AlgoRD* ne possède que des degrés de libertés en translation. S'il permet de calculer des poutres droites en flexion, ses hypothèses stipulent qu'aucun moment ponctuel ne doit être appliqué au nœud parce que cela nécessiterait de prendre en compte les efforts de torsion. Avec ce modèle de poutre, il est donc impossible de bloquer une rotation au niveau d'un appui. Les conditions aux limites du modèle sont donc seulement des conditions aux limites en translation. En outre, on remarque que le but affiché aux paragraphes 4.1.1 et 4.3 pour la recherche de forme des gridshells est l'obtention d'une structure dans laquelle les efforts de flexion sous chargement vertical sont minimaux. Introduire des moments d'encastrement dans la structure serait donc en complète contradiction avec le comportement membranaire recherché. Les appuis bloquant les rotations ne sont donc ni nécessaires ni souhaitables et la conception des gridshells ne nécessite la modélisation que de trois sortes d'appui (cf. figure 3.5) :

- la rotule dans laquelle on bloque les trois degrés de liberté en translation,
- l'appui glissant sur une ligne dans lequel les déplacements sont bloqués dans deux directions et libres dans une troisième dont l'orientation dans l'espace peut être quelconque,
- l'appui glissant sur un plan dans lequel le déplacement dans une direction quelconque de l'espace est bloqué et les déplacements dans le plan perpendiculaire sont libres.

On note par ailleurs qu'au niveau d'une liaison un nœud a été défini sur chaque barre (cf. paragraphe 3.4) et que le programme ne détecte pas automatiquement le recouvrement qu'il peut exister entre les liaisons internes et les appuis. Au niveau d'une liaison, il est donc nécessaire de définir les conditions aux limites identiques pour tous les nœuds qui appartiennent à la liaison. Pour la structure de la figure A.6, les deux extrémités de la structure reposent sur des appuis glissants. Au niveau de chacune d'elles, il faut donc définir une condition aux limites pour le nœud à l'extrémité de l'arc et pour le nœud à l'extrémité du câble (cf. figure A.1).

A.2.5 La création des liaisons entre les éléments

Dès que l'on cherche à modéliser des structures qui comportent plusieurs éléments, la question de leurs liaisons se pose. Avec le programme *AlgoRD*, la liaison par défaut est l'articulation pour des raisons similaires à celles évoquées pour les conditions aux limites : d'une part le programme a été développé pour les gridshells dans lesquels toutes les liaisons entre éléments sont des articulations et d'autre part, pour pouvoir modéliser des encastresments dans l'espace, il faut pouvoir appliquer des moments ponctuels aux poutres ce qui est incompatible avec les hypothèses du modèle à trois degrés de liberté en translation (cf. paragraphe 3.3).

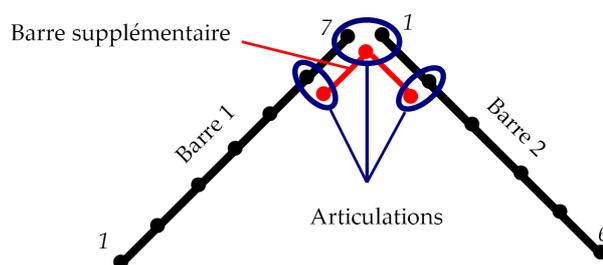


FIG. A.10 – Schéma de principe pour la réalisation d'un encastrement dans les problèmes plans.

Toutefois, pour les problèmes plans, on a vu au paragraphe 3.3.3 que l'on pouvait calculer des poutres dont la géométrie au repos est courbe et leur appliquer des moments ponctuels parce que cela n'entraîne pas de flexion. Il est donc techniquement possible de simuler un encastrement entre deux éléments de structure. Pour cela, on ajoute un élément à trois nœuds dont on connecte le nœud central à l'articulation et les deux extrémités aux nœuds adjacents des deux barres comme indiqué sur la figure A.10. Les nœuds en vis-à-vis sont ensuite reliés entre eux par des articulations. En remarquant que d'après le paragraphe 3.3.3 le moment aux extrémités d'une poutre est toujours nul, on déduit que les efforts de flexion introduits par le nouvel élément sont liés uniquement à la variation de courbure au voisinage du nœud central, c'est-à-dire à la variation d'angle entre les deux barres à encastres. En ajustant la raideur de l'élément supplémentaire à trois nœuds, on peut donc simuler un encastrement plus ou moins souple entre deux barres. Le cas plan est cependant un cas particulier et, en général, les seules liaisons modélisables sont les articulations.

D'un point de vue pratique, une liaison entre plusieurs éléments de structure est un tableau qui contient les numéros des nœuds à relier et les numéros des barres auxquelles ils appartiennent (cf. tableau A.3). Sur de petites structures, il est possible de créer manuellement la liste des nœuds à relier, mais cela devient vite fastidieux lorsque la structure comporte beaucoup d'éléments. Une méthode automatique de définition des liaisons a donc été incluse dans le programme. Elle repose sur l'idée que des nœuds voisins doivent être connectés entre eux. Pour générer la liste des liaisons, on choisit donc l'une des deux géométries dont on dispose (la géométrie au repos ou la géométrie initiale) et on recherche automatiquement pour tous les nœuds de cette géométrie s'il y a d'autres nœuds qui sont situés à moins d'une certaine distance à définir. Le programme crée ensuite des liaisons entre tous les nœuds voisins. Par exemple, si l'on lance le programme de génération automatique des nœuds sur la figure A.1, on obtient que

le nœud 1 de la barre 1 est connecté au nœud 1 de la barre 2, que le nœud 2 de la barre 2 est connecté au nœud 1 de la barre 3 et au nœud 2 de la barre 4, etc.

Lorsque l'on étudie des structures précontraintes, il est en général difficile de définir une géométrie au repos dans laquelle les éléments à connecter soient confondus (cf. figure A.7). En revanche, dans la géométrie initiale, on peut étirer les éléments à volonté et ainsi facilement amener en vis-à-vis les nœuds à connecter. Pour la structure de la figure A.8, c'est donc la géométrie initiale qui a été choisie pour la définition automatique des liaisons. Pour d'autres structures comme les gridshells, si l'on décide de prendre en compte l'excentricité entre les deux directions de barres, alors les nœuds d'une même liaison ne peuvent ne plus être confondus dans la géométrie initiale (cf. paragraphe 3.4). En revanche, comme la géométrie au repos ne doit pas satisfaire ces conditions géométriques liées aux excentricités mais seulement être libre de contrainte, il est donc possible d'y définir les deux directions de la grille sur un même plan afin que les nœuds d'une même liaison soient confondus. On peut alors générer automatiquement les liaisons sur la géométrie au repos. On voit ici un autre intérêt du fait de disposer de deux géométries au début du calcul avec la méthode de la relaxation dynamique.

A.2.6 Les efforts extérieurs

L'algorithme de relaxation dynamique présenté au chapitre 3 est construit entièrement autour des nœuds et de l'évolution de leur position. Les efforts extérieurs sont donc uniquement des efforts ponctuels appliqués aux nœuds. Pour modéliser une charge uniformément répartie sur une barre, il faut la transformer en un ensemble d'efforts ponctuels équivalents appliqués à chacun des nœuds de la barre. Des moments ponctuels peuvent être appliqués dans le plan mais pas dans l'espace parce que ce type d'effort n'est pas compatible avec l'élément de poutre choisi (cf. paragraphe 3.3).

On note que numériquement, les efforts ont la même structure que la géométrie et qu'ils suivent le schéma de la figure A.1. L'élément i de la liste P représente les efforts dans les trois directions de l'espace qui sont appliqués à chacun des nœuds de la barre i .

A.2.7 Les propriétés des sections

Comme les efforts extérieurs, les propriétés des sections (module d'Young, inertie et section) sont définies au nœud et regroupées respectivement dans les listes E , I et S . Pour les modules d'Young de la structure de la figure A.1 par exemple, la liste E comprend autant d'éléments qu'il y a de barres (c'est-à-dire dix) et chaque élément est une matrice à une ligne et à autant de colonnes qu'il y a de nœuds dans la barre (le premier élément comprend donc six colonnes).

Cette modélisation atypique des propriétés des sections a été guidée par une volonté de simplification de la mise en œuvre de l'algorithme à partir d'un fichier où toutes les grandeurs sont définies au nœud. Ce choix peut paraître troublant au premier abord, notamment pour se représenter qu'elle est la réalité physique de ces grandeurs ponctuelles. Cependant on remarque que, dans tout le calcul des efforts intérieurs du paragraphe 3.3, le module d'Young, l'inertie et

la section n'apparaissent jamais seuls, mais toujours sous forme d'un produit pour exprimer une raideur axiale ES ou une raideur flexionnelle EI . Les grandeurs E , I et S ne sont donc que des intermédiaires dans le calcul des raideurs. C'est donc le rôle joué par ces raideurs dans le calcul des efforts normaux et des efforts de flexion qui va guider le choix pour leur définition.

Les efforts normaux sont liés à la déformation axiale de la barre élémentaire qui relie le nœud i au nœud j et à sa raideur axiale $ES_{i,j}$ (cf. expression (3.21)). Les efforts normaux sont calculés dans la barre élémentaire, il faut par conséquent définir sa raideur axiale en fonction des propriétés qui ont été définies au nœud i et au nœud j . On choisit arbitrairement de prendre la valeur moyenne de ces propriétés de sorte que la raideur axiale de la barre élémentaire s'exprime ainsi :

$$(ES)_{i,j} = \frac{1}{2} (E_i S_i + E_j S_j) \quad (\text{A.2})$$

Les efforts de flexion sont liés à la variation de courbure que l'on définit par rapport à la variation d'angle entre trois points successifs d'une barre, ainsi que la raideur en flexion de cet angle EI_i (cf. expression (3.38)). Le moment dans la barre est donc calculé au nœud et pas dans la barre comme les efforts normaux. On peut donc facilement définir la raideur en flexion de la poutre comme la raideur attachée à l'angle formé par deux barres élémentaires successives, comme une grandeur attachée au point commun de ces deux barres :

$$(EI)_i = E_i I_i \quad (\text{A.3})$$

On a ainsi transformé les propriétés caractéristiques des sections aux nœuds (E , I et v) en grandeurs physiques qui représentent d'une part la raideur axiale d'une barre élémentaire et la raideur en flexion de l'angle formé par les barres adjacentes du nœud i .

A.2.8 La précontrainte imposée

On a vu dans le paragraphe 3.3.2 qu'il pouvait être intéressant d'imposer un certain niveau de précontrainte axiale dans les structures de câbles, notamment pour assurer une raideur minimale à la structure dans sa forme finale. Cette précontrainte est un effort normal constant qui s'applique aux deux extrémités d'une barre élémentaire. Or elle est définie au nœud pour des raisons de simplification du programme, il faut donc procéder comme pour la raideur axiale (cf. expression (A.2)), et calculer la précontrainte $T_{i,j}^0$ dans l'élément (i, j) à partir des précontraintes T_i^0 et T_j^0 spécifiées au nœud i et au nœud j :

$$T_{i,j}^0 = \frac{1}{2} (T_i^0 + T_j^0) \quad (\text{A.4})$$

A.2.9 Le choix du type d'élément

Les propriétés caractéristiques des sections ci-dessus permettent de définir des éléments qui ont une raideur en traction-compression et/ou une raideur en flexion. Avec le programme *AlgoRD*, il est donc possible de modéliser quatre types d'éléments :

TAB. A.3 – Tableau des liaisons entre les éléments.

Nœud 1		Nœud 2		Nœud 3		Nœud 4	
n° barre	n° nœud						
1	3	2	12	3	5	5	1
1	5	2	14	0	0	0	0
...

Ces trois tableaux, générés à l'aide de n'importe quel tableur, doivent être enregistrés en format texte pour pouvoir être lus par le programme. Les séparateurs entre deux colonnes seront de préférence des espaces et les nombres à virgule devront impérativement être écrits avec la notation anglo-saxonne (par exemple 2.5 et non 2,5).

A.3 Définition des paramètres de l'algorithme

Une fois la structure définie, les trois tableaux ou les listes équivalentes remplis, il faut choisir les paramètres de calcul de l'algorithme. Ceux-ci sont au nombre de quatre :

- le pas de temps : sa valeur n'a pas de grande importance puisque le mouvement décrit par l'algorithme est fictif et que le paramètre choisi pour garantir la stabilité de l'algorithme est la masse (cf. paragraphe 3.5.1).
- le coefficient de masse. Il a été démontré au paragraphe 3.5.1 que, pour garantir la stabilité de l'algorithme, la masse affectée à chaque nœud doit être supérieure à une certaine masse critique calculée à partir de la raideur totale des éléments qui arrivent à ce nœud (cf. expression (3.51)). La masse de chaque nœud est donc prise égale à cette masse critique multipliée par un coefficient de masse supérieur à un. Ce coefficient est identique pour toute la structure et est en général compris entre 1,05 et 1,5. En outre, comme la masse critique est réévaluée après chaque pic d'énergie cinétique (cf. paragraphe 3.6), il s'agit d'estimer au mieux les évolutions de la raideur entre deux pics en sachant que plus la valeur du coefficient de masse est élevée, plus la convergence est lente.
- le seuil de convergence. Comme dans toutes les méthodes de calcul approchées, il faut définir le seuil de convergence de l'algorithme. L'énergie cinétique étant au centre de la méthode de relaxation dynamique avec amortissement cinétique, c'est sur cette dernière qu'a été choisi le critère de convergence si bien que le calcul s'arrête lorsque les deux derniers pics d'énergie cinétique sont inférieurs à une fraction (en général $1/10000^e$) de la valeur du plus haut pic d'énergie cinétique (cf. paragraphe 3.6).
- le nombre maximal d'itérations. Pour éviter qu'en cas d'instabilité de l'algorithme ou de non convergence, le calcul ne dure indéfiniment, un nombre maximal d'itérations doit être donné. Lorsque celui-ci est atteint, le calcul s'arrête automatiquement.

En général, les paramètres proposés par défaut dans le programme assurent la stabilité de l'algorithme et permettent de converger dans un temps raisonnable.

A.4 Analyse des résultats

Une fois que le calcul a convergé ou que le nombre maximal d'itérations a été atteint, le calcul s'arrête. La première chose à faire est donc de vérifier la raison de l'arrêt du calcul. L'historique du calcul et l'allure de la courbe de l'énergie cinétique sont pour cela des outils très utiles, ils permettent d'observer l'amplitude des pics en fonction du temps et de remarquer un comportement dynamique anormal et, si besoin est, de relancer le calcul jusqu'à la convergence effective de la structure vers son état d'équilibre.

Lorsqu'on est sûr d'avoir atteint le minimum de l'énergie potentielle, *AlgoRD* calcule automatiquement les déplacements et les efforts intérieurs dans les éléments. Deux représentations sont alors possibles : les résultats peuvent être affichés sur la structure finale sous forme de graphique ou bien répertoriés dans des tableaux. Dans la présentation graphique les valeurs sont calculées au niveau des barres élémentaires alors que dans les tableaux les valeurs des grandeurs sont calculées au niveau des nœuds (cf. modélisation de la structure paragraphe 3.3.1). Or avec le modèle de poutre du paragraphe 3.3, les efforts normaux sont calculés au niveau des barres élémentaires et les moments fléchissants au niveau des nœuds. Il est donc nécessaire d'interpoler les moments dans la représentation graphique et les efforts normaux dans les tableaux. Les fonctions d'interpolation choisies sont les plus simples possibles de sorte que le moment $M_{i,i+1}$ dans la barre $(i, i + 1)$ et l'effort normal N_i au nœud i sont donnés par :

$$M_{i,i+1} = \max(M_i, M_{i+1}) \quad \text{et} \quad N_i = \max(N_{i-1,i}, N_{i,i+1}) \quad (\text{A.5})$$

Comme les efforts tranchants ne sont pas calculés directement dans le modèle de Navier-Bernouilli, ils doivent être déduits à partir de la dérivée du moment fléchissant. Ainsi l'effort tranchant dans la barre $(i, i + 1)$ et l'effort tranchant au nœud i sont donnés par les expressions suivantes :

$$T_{i,i+1} = \frac{\|M_{i+1} - M_i\|}{L_{i,i+1}} \quad \text{et} \quad T_i = \max(T_{i-1,i}, T_{i,i+1}) \quad (\text{A.6})$$

Les contraintes intérieures, quant à elles, sont déduites des valeurs correspondantes des efforts intérieurs à l'aide des relations usuelles de la mécanique des structures et des propriétés géométriques des sections :

$$\sigma_i = \frac{N_i}{S_i} \pm \frac{M_i v_i}{I_i} \quad \text{et} \quad \sigma_{i,i+1} = \frac{N_{i,i+1}}{S_{i,i+1}} \pm \frac{M_{i,i+1} v_{i,i+1}}{I_{i,i+1}} \quad (\text{A.7})$$

Pour la représentation graphique des déplacements, *AlgoRD* procède exactement de la même façon que pour les efforts intérieurs. Les déplacements sont tout d'abord calculés au niveau des nœuds à partir des positions de la géométrie finale et des positions de la géométrie initiale ou repos. Ensuite, ils sont interpolés au niveau de la barre $(i, i + 1)$ pour calculer la valeur à afficher sur le graphique :

$$U_{i,i+1}^0 = \max(U_i^0, U_{i+1}^0) \quad \text{et} \quad U_{i,i+1}^i = \max(U_i^i, U_{i+1}^i) \quad (\text{A.8})$$

Annexe B

Plans et mesures du premier gridshell en matériaux composites

B.1 Plan d'exécution du prototype

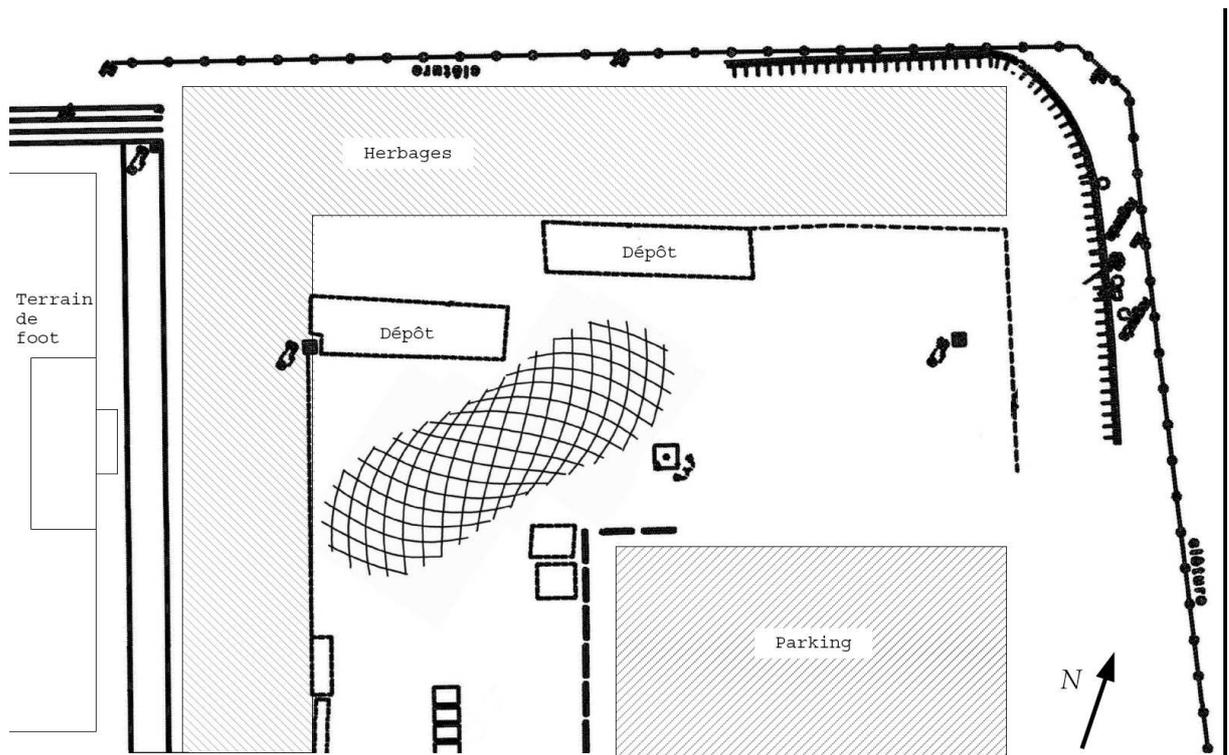


FIG. B.1 – Implantation du gridshell sur le site de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.

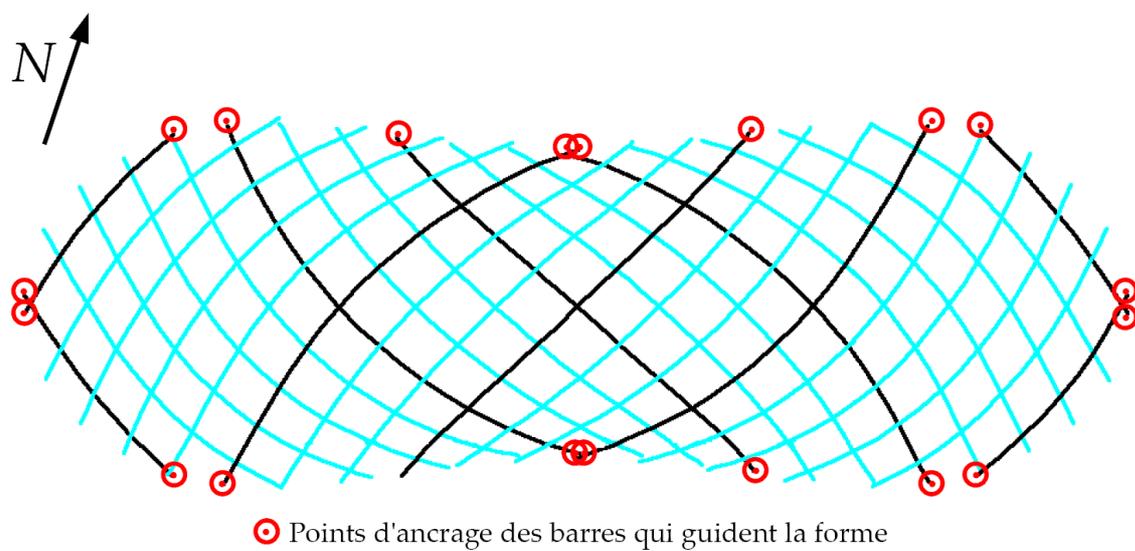


FIG. B.2 – Plan d'implantation des fondations.

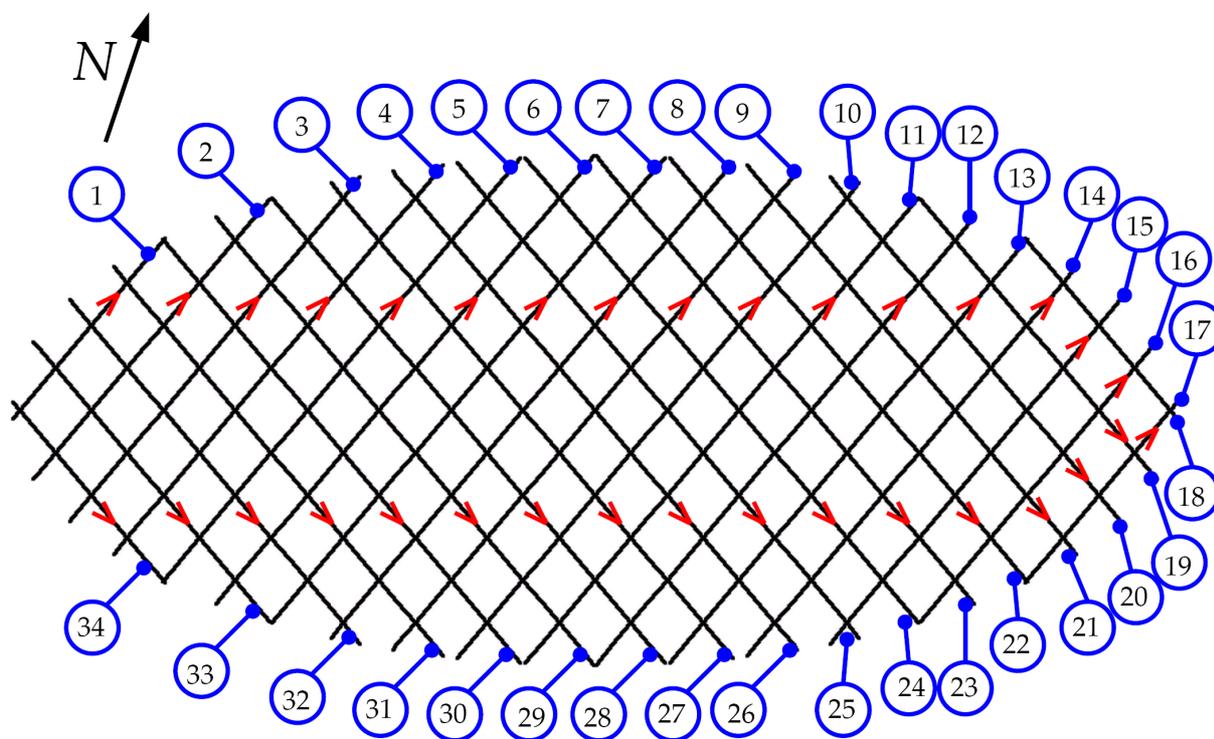


FIG. B.3 – Plan de la grille à plat avec l'orientation des barres.

TAB. B.1 – Longueurs des barres de la grille principale.

numéro nombre	1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4	7 4	8 4	9 2
nœud 1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
nœud 2	0,236	0,130	0,118	0,453	0,309	0,326	0,576	0,402	0,135
nœud 3	0,836	0,730	0,718	1,053	0,618	0,652	1,176	1,002	0,735
nœud 4	1,436	1,330	1,318	1,653	1,218	1,252	1,776	1,602	1,335
nœud 5	2,036	1,930	1,918	2,253	1,818	1,852	2,376	2,202	1,935
nœud 6	2,636	2,530	2,518	2,853	2,418	2,452	2,976	2,802	2,535
nœud 7	3,236	3,130	3,118	3,453	3,018	3,052	3,576	3,402	3,135
nœud 8	3,836	3,730	3,718	4,053	3,618	3,652	4,176	4,002	3,735
nœud 9	4,436	4,330	4,318	4,653	4,218	4,252	4,776	4,602	4,335
nœud 10	4,757	4,930	4,918	5,253	4,818	4,852	5,376	5,202	4,935
nœud 11	5,079	5,530	5,518	5,853	5,418	5,452	5,976	5,802	5,535
nœud 12		6,130	6,118	6,453	6,018	6,052	6,576	6,402	6,135
nœud 13		6,730	6,718	7,053	6,618	6,652	7,176	7,002	6,735
nœud 14		7,330	7,318	7,653	7,218	7,252	7,776	7,602	7,335
nœud 15		7,892	7,918	8,253	7,818	7,852	8,376	8,202	7,935
nœud 16			8,518	8,853	8,418	8,452	8,976	8,802	8,535
nœud 17			9,118	9,453	9,018	9,052	9,576	9,402	9,135
nœud 18			9,690	10,050	9,618	9,652	10,180	10,000	9,735
nœud 19				10,650	10,220	10,250	10,780	10,600	10,340
nœud 20				10,980	10,820	10,850	11,380	11,200	10,940
nœud 21					11,420	11,450	11,980	11,800	11,540
nœud 22					11,940	12,050	12,580	12,400	12,140
nœud 23						12,630	13,100	13,000	12,740
nœud 24								13,380	13,340
nœud 25									13,470
Longueur totale	5,079	7,892	9,69	10,98	11,94	12,63	13,1	13,38	13,47
Longueur cible	5,011	7,559	8,962	9,775	10,21	10,42	10,5	10,52	10,52

B.2 Plans du protocole expérimental

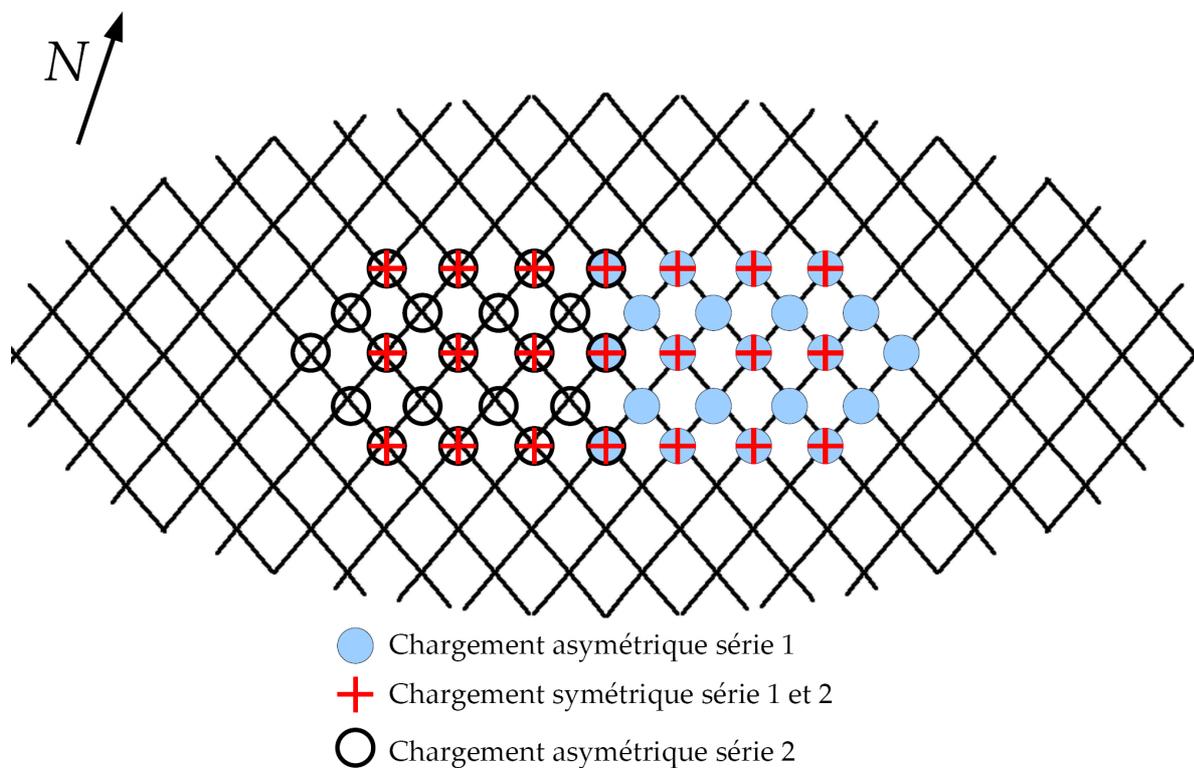


FIG. B.4 – Emplacement des charges pour les deux séries de tests.

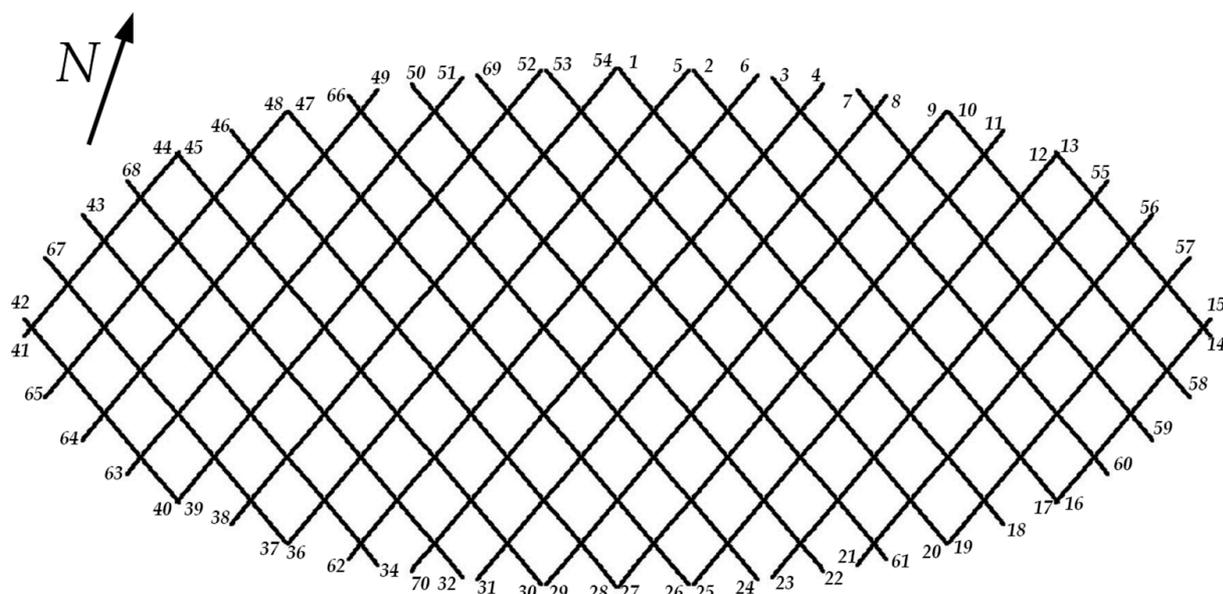


FIG. B.5 – Emplacement des cibles aux extrémités des barres.

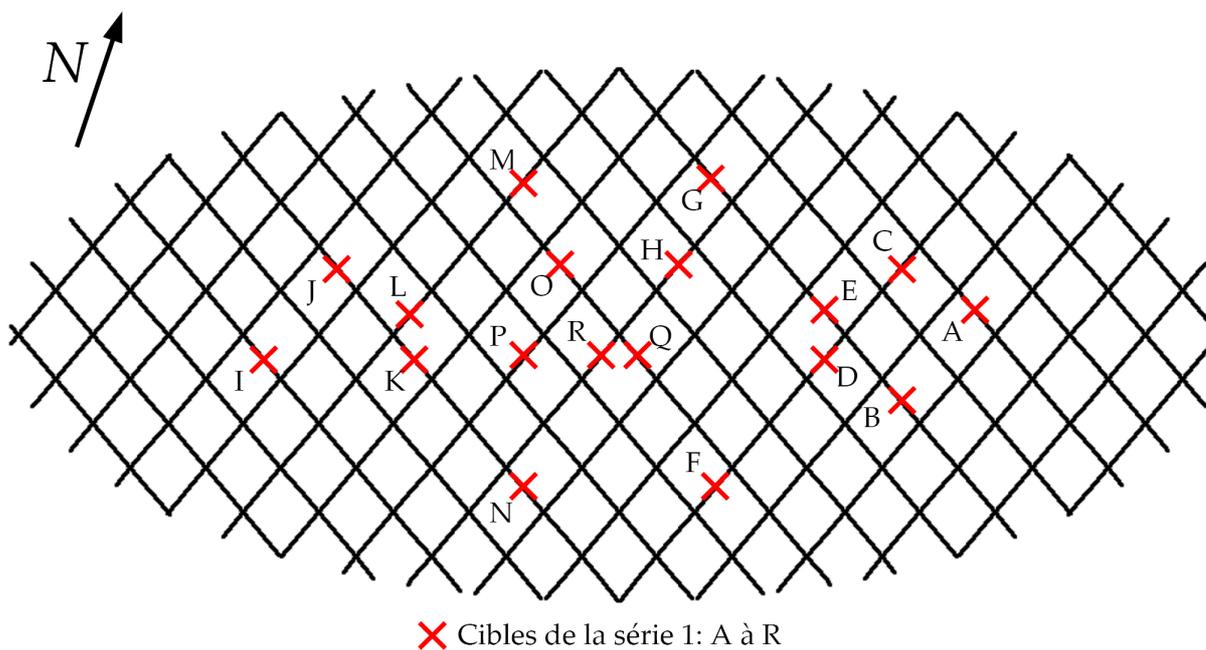


FIG. B.6 – Emplacement des cibles pour la première série de tests.

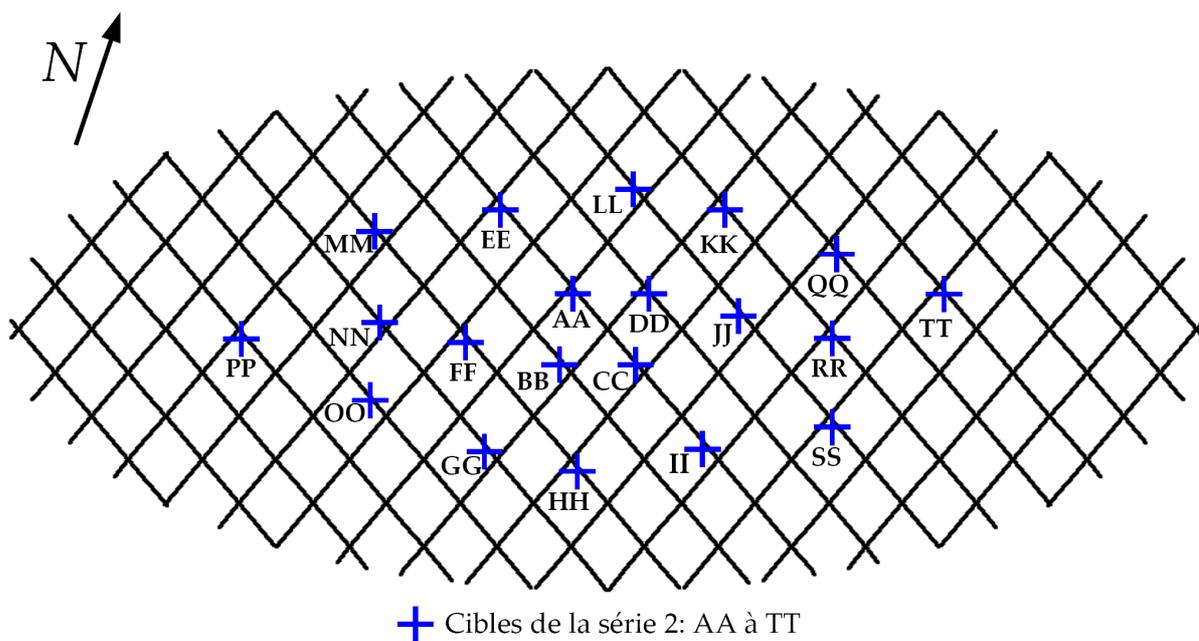


FIG. B.7 – Emplacement des cibles pour la second série de tests.

B.3 Résultats des mesures effectuées sur le prototype

N.B. : Dans les tableaux B.2 et B.3, les cibles 33 et 35 étaient trop éloignées du pied de la barre, elles ont été remplacées respectivement par les cibles 70 et 62.

TAB. B.2 – Positions des marques au pied des barres.

Cible	X	Y	Z	Barre	Nœud	Distance
1	-0,039	3,211	0,004	12	1	9
2	1,282	3,252	0,054	13	1	8
3	2,831	3,500	0,084	14	1	14,5
4	3,676	3,670	0,098	26	25	-12
5	1,140	3,357	0,141	28	23	-21
6	2,456	3,444	0,097	27	24	-15
7	4,446	3,705	0,031	15	1	10
8	4,971	3,784	0,071	25	24	-9,5
9	6,254	3,877	0,128	24	23	-14,5
10	6,460	3,875	0,058	16	1	11,5
11	7,526	3,844	0,070	23	23	-8,5
12	8,675	3,699	0,067	17	1	4,5
13	8,700	3,611	0,174	22	22	-6,5
14	11,749	0,095	0,157	18	11	-15
15	11,661	0,078	0,114	17	2	7
16	8,735	-3,538	0,186	18	1	14
17	8,622	-3,505	0,169	13	22	-10,5
18	7,433	-3,794	0,159	12	20	-9
19	6,537	-3,888	0,236	19	1	22
20	6,289	-3,805	0,210	11	23	-11
21	4,704	-3,708	0,200	20	1	25,5
22	3,756	-3,502	0,145	9	25	-14,5
23	2,999	-3,524	0,165	21	1	15,5
24	2,604	-3,391	0,111	8	24	-11
25	1,526	-3,382	0,266	22	1	24,5
26	1,285	-3,287	0,161	7	23	-14,5
27	0,112	-3,243	0,281	23	1	26
28	-0,034	-3,150	0,127	6	23	-17,5
29	-1,142	-3,423	0,161	24	1	14,5
30	-1,318	-3,340	0,093	5	22	-11
31	-2,422	-3,482	0,083	25	1	15,5
32	-2,892	-3,462	0,088	4	20	-19,5
33	-3,497	-3,398	0,443	26	1	58
34	-4,507	-3,676	0,023	3	18	-11,5
35	-4,911	-3,576	0,272	27	2	5

TAB. B.3 – Positions des marques au pied des barres (suite).

Cible	X	Y	Z	Barre	Nœud	Distance
36	-6,309	-3,792	0,082	28	1	6
37	-6,539	-3,774	0,006	2	15	-20
38	-7,579	-3,780	-0,014	29	1	6
39	-8,707	-3,558	0,077	30	1	15
40	-8,839	-3,600	0,109	1	11	-16
41	-11,711	-0,032	0,021	1	2	8
42	-11,521	0,464	0,121	34	2	49,5
43	-10,624	2,416	-0,046	3	1	22,5
44	-8,775	3,592	-0,033	34	11	-14
45	-8,678	3,545	-0,065	5	1	9,5
46	-7,576	3,783	-0,068	6	1	11,5
47	-6,388	3,782	-0,049	7	1	10
48	-6,427	3,914	-0,057	33	15	-4
49	-4,660	3,767	-0,010	32	18	-15
50	-3,800	3,585	-0,036	9	1	9
51	-3,076	3,502	0,086	31	20	-24,5
52	-1,572	3,355	0,147	30	22	-22
53	-1,331	3,227	0,068	11	1	17
54	-0,139	3,310	0,136	29	23	-21,5
55	9,643	3,140	0,104	21	20	-12,5
56	10,542	2,477	0,107	20	18	-12
57	11,276	1,473	0,129	19	15	-15,5
58	11,249	-1,325	0,174	16	15	-26,5
59	10,498	-2,258	0,213	15	18	-30,5
60	9,595	-2,960	0,172	14	20	-22,5
61	5,053	-3,639	0,209	10	24	-18,5
62	-5,034	-3,705	0,074	27	1	11
63	-9,638	-2,970	0,157	31	1	32
64	-10,449	-2,112	0,179	32	1	48,5
65	-11,191	-1,164	0,129	33	1	50,5
66	-5,040	3,672	0,029	8	1	18
67	-11,243	1,268	0,035	2	1	44,5
68	-9,636	2,987	-0,021	4	1	22
69	-2,661	3,431	0,027	10	1	15
70	-3,675	-3,599	0,111	26	1	16

TAB. B.4 – Déplacements en cm des cibles de A à R sous chargement symétrique.

Cible	u_x	u_y	u_z	u
A	-0,42	1,74	6,77	7
B	-0,35	-0,58	-2,51	2,6
C	-0,61	0,51	-2,22	2,36
D	-6,27	0,21	-11,83	13,39
E	-6,51	-1,21	-12,17	13,85
F	0,69	-16,12	5,57	17,07
G	-1,32	14,73	3,67	15,24
H	-2,57	5,8	-4,54	7,8
I	2,61	3,61	6,07	7,53
J				
K	7,81	2,12	-15,51	17,49
L	8	1,03	-13,25	15,51
M	2,24	15,87	5,11	16,82
N	2,54	-14,01	3,72	14,71
O	5,64	7,19	-4,87	10,36
P	8,2	-0,39	-13,13	15,49
Q	-0,53	-2,33	-9,37	9,67
R	2,8	0,76	-9,78	10,2
Maximum	8,2	15,87	6,77	17,49
Minimum	-6,51	-16,12	-15,51	2,36
Moyenne	1,4	1,07	-4,69	11,88
Écart type	4,42	7,98	7,94	4,87
Centre	1,13	-0,79	-9,57	9,94
Droite	-2,18	0,13	-4,17	10,25
Gauche	4,98	2,02	-5,2	13,51

TAB. B.5 – Déplacements en cm des cibles de A à R sous chargement asymétrique.

Cible	u_x	u_y	u_z	u
A	0,06	1,32	5,95	6,1
B	-2,25	0,18	-4,3	4,85
C	-2,6	-0,95	-4,68	5,44
D	-9,82	0,02	-13,69	16,85
E	-10,31	-1,91	-15,06	18,35
F	0,13	-21,63	7,77	22,98
G	-2,04	20,9	5,52	21,71
H	-5,74	6,99	-9,72	13,28
I	15,19	3,32	-13,56	20,63
J				
K	25,47	0,63	-41,15	48,4
L	26,11	1,57	-38,67	46,69
M	4,64	33,25	11,03	35,34
N	4,52	-32,79	9,97	34,57
O	6,59	12,85	-14,16	20,22
P	11,87	-3,45	-30,62	33,02
Q	-4,2	-4,44	-22,92	23,72
R	0,43	-0,72	-26,94	26,95
max	26,11	33,25	11,03	48,4
min	-10,31	-32,79	-41,15	4,85
moy	3,62	0,86	-12,57	24,56
ec	10,78	14,44	16,61	12,98
centre	-1,88	-2,58	-24,93	25,34
droite	-4,6	-0,11	-7,13	15,9
gauche	11,85	1,83	-18,01	33,23

TAB. B.6 – Déplacements en cm des cibles de AA à TT sous chargement symétrique.

Cible	u_x	u_y	u_z	u
AA	0,04	0,14	-0,5	0,52
BB	0,18	0,09	-0,6	0,63
CC	0,18	0,09	-0,3	0,36
DD	-0,05	0,31	-0,5	0,59
EE	0,03	0,58	0,1	0,59
FF	0,71	0,15	-0,8	1,08
GG	0,36	-0,26	-0,4	0,6
HH	0,07	-1,21	0,4	1,27
II	-0,08	-0,49	0,4	0,64
JJ	-0,15	0,49	-1	1,12
KK	-0,24	0,89	0	0,92
LL	-0,21	1,47	0,3	1,52
MM	0,22	0,23	-0,4	0,51
NN	0,48	0,37	-0,6	0,85
OO	1,49	1,24	-1,2	2,28
PP	0,4	0,1	-0,1	0,42
QQ	-0,35	-0,19	-1	1,08
RR	-0,28	0,31	-0,7	0,81
SS	-0,24	0,67	-0,8	1,07
TT	0,08	0,27	0,1	0,3
Maximum	1,49	1,47	0,4	2,28
Minimum	-0,35	-1,21	-1,2	0,3
Moyenne	0,14	0,27	-0,37	0,88
Écart type	0,42	0,58	0,48	0,47
Centre	0,09	0,16	-0,47	0,53
Droite	-0,13	0,38	-0,35	0,84
Gauche	0,4	0,14	-0,41	0,88

TAB. B.7 – Déplacements en cm des cibles de AA à TT sous chargement asymétrique.

Cible	u_x	u_y	u_z	u
AA	0,35	0,19	-1,8	1,84
BB	0,35	0,41	-2	2,07
CC	0,58	0,19	-0,7	0,93
DD	0,3	0,5	-0,8	0,99
EE	0,32	1,75	0,4	1,82
FF	1,16	0,16	-2,5	2,76
GG	0,48	-1,55	0	1,63
HH	0,27	-2,23	0,6	2,33
II	0,37	-0,48	0,5	0,79
JJ	0,51	0,95	-1	1,47
KK	-0,02	0,67	-0,1	0,68
LL	0,05	1,61	0,4	1,66
MM	0,74	0,96	-0,4	1,27
NN	1,74	0,13	-3,1	3,56
OO	1,79	-0,18	-2	2,69
PP	1,43	-0,15	-2,2	2,63
QQ	0,22	0,01	-0,4	0,46
RR	0,27	0,14	-0,1	0,32
SS	0,17	0,32	-0,3	0,47
TT	0,53	0,28	0,3	0,67
Maximum	1,79	1,75	0,6	3,56
Minimum	-0,02	-2,23	-3,1	0,32
Moyenne	0,59	0,18	-0,71	1,54
Écart type	0,53	0,91	1,12	0,91
Centre	0,4	0,32	-1,32	1,46
Droite	0,3	0,42	-0,22	0,84
Gauche	0,86	-0,05	-1,3	2,26

B.4 Comparaisons entre les déplacements du modèle et du prototype

TAB. B.8 – Écart sur les positions au repos des cibles A à R et AA à TT en cm.

Cible	Δx	Δy	Δz	Δ
A	5,05	2,49	9,17	10,8
B	4,21	0,32	4,46	6,1
C	3,90	-0,76	4,34	5,9
D	1,42	0,35	4,06	4,3
E	1,75	0,59	2,50	3,1
F	1,51	-0,50	1,29	2,1
G	1,15	2,27	-0,91	2,7
H	1,36	4,68	3,33	5,9
I	-2,50	0,76	11,04	11,3
J				
K	-1,92	0,34	2,84	3,4
L	-2,17	0,68	3,37	4,1
M	-1,30	2,63	1,90	3,5
N	-1,25	-0,03	-1,25	1,8
O	0,14	2,88	5,02	5,8
P	0,90	1,25	5,68	5,9
Q	-0,48	-0,46	3,28	3,3
R	5,00	4,91	4,70	8,4

Cible	Δx	Δy	Δz	Δ
AA	-0,34	1,67	6,68	6,9
BB	-2,47	2,86	6,57	7,6
CC	3,41	-3,05	2,69	5,3
DD	-1,08	2,29	6,05	6,6
EE	-0,94	0,92	4,14	4,3
FF	0,82	1,27	9,69	9,8
GG	3,90	-1,55	2,71	5,0
HH	-1,31	0,72	1,06	1,8
II	2,80	-3,03	-2,18	4,7
JJ	-3,61	4,49	6,08	8,4
KK	-1,60	1,01	2,91	3,5
LL	-0,91	2,35	3,08	4,0
MM	0,57	-0,92	6,52	6,6
NN	-0,88	-0,25	4,79	4,9
OO	1,70	1,00	7,17	7,4
PP	-2,15	-1,92	4,38	5,2
QQ	0,47	0,35	3,23	3,3
RR	0,57	0,49	4,30	4,4
SS	0,84	0,38	6,31	6,4
TT	-0,07	7,22	2,62	7,7

Cible	Δx	Δy	Δz	Δ
Maximum	5,0	7,2	9,7	9,8
Minimum	-3,6	-3,0	-2,2	1,8
Moyenne	0,4	1,0	3,8	5,1
Écart type	2,1	2,2	2,4	2,0

TAB. B.9 – Écarts sur les déplacements de la structure non-triangulée sous chargement symétrique.

Cible	Écarts relatifs u^{num}/u^{exp}				Écarts absolus $ u^{num} - u^{exp} $				Angle
	Δx	Δy	Δz	Δ	Δx	Δy	Δz	Δ	α
A	3.07	0.03	-0.22	0.28	0.02	1.91	8.26	5.02	
B	7.77	-1.18	1.41	1.74	2.68	0.01	1.03	1.91	36.47°
C	4.23	-1.17	1.44	1.76	1.22	1.91	0.98	1.79	31.40°
D	1.47	3.42	1.03	1.14	2.86	0.93	0.31	1.88	9.50°
E	1.35	0.55	0.98	1.07	2.27	0.58	0.26	0.96	8.62°
F	-3.39	1.02	1.18	1.04	2.54	1.66	1.02	0.76	10.22°
G	2.28	1.05	1.42	1.09	1.81	0.18	1.53	1.31	7.18°
H	1.78	1.08	0.69	1.07	1.99	0.54	1.41	0.56	17.33°
I	0.67	0.00	-0.34	0.36	0.92	3.61	8.12	4.84	113.19°
J									
K	1.17	0.22	0.75	0.85	1.96	0.82	3.84	2.65	12.47°
L	1.17	-0.79	0.86	0.95	2.06	0.99	1.88	0.76	10.85°
M	0.99	1.05	1.25	1.07	0.37	0.63	1.28	1.10	3.25°
N	1.20	1.08	1.54	1.12	0.99	0.78	1.99	1.77	5.74°
O	0.94	1.02	0.73	0.94	0.38	0.05	1.32	0.65	6.94°
P	1.07	2.39	0.77	0.86	0.76	0.21	3.06	2.10	9.40°
Q	4.16	1.16	0.87	0.91	1.32	1.11	1.26	0.84	12.19°
R	0.73	-2.96	0.82	0.84	0.72		1.78	1.54	16.14°
Maximum	7.77	3.42	1.54	1.76	2.86	3.61	8.12	4.84	19.53°
Minimum	-3.39	-2.96	-0.34	0.28	0.37	0.01	0.26	0.56	3.25°
Moyenne	1.72	0.50	0.96	1.05	1.60	0.74	1.53	1.37	10.25°
Écart type	2.26	1.46	0.52	0.37	0.83	0.56	0.93	0.63	4.46°
Centre	2.44	-0.90	0.84	0.88	1.02	0.56	1.52	1.19	

TAB. B.10 – Écarts sur les déplacements de la structure non-triangulée sous chargement asymétrique.

Cible	Écarts relatifs u^{num}/u^{exp}				Écarts absolus $ u^{num} - u^{exp} $				Angle
	Δx	Δy	Δz	Δ	Δx	Δy	Δz	Δ	α
A	-16,80	-0,07	-0,29	0,32	0,27	1,74	7,65	4,13	
B	1,63	5,46	1,05	1,21	1,62	0,06	0,21	1,03	13,60°
C	1,44	1,46	1,03	1,15	0,80	0,91	0,14	0,81	8,97°
D	1,05	20,48	0,90	0,95	0,61	0,13	1,36	0,78	4,44°
E	0,98	0,47	0,85	0,89	0,26	1,01	2,30	2,07	4,80°
F	-18,39	0,82	0,90	0,83	4,06	2,31	0,81	3,83	7,66°
G	1,70	0,83	1,00	0,85	0,39	3,80	0,01	3,18	6,08°
H	1,05	0,84	0,65	0,79	0,29	1,15	3,40	2,78	11,15°
I	0,78	0,08	1,25	1,00	1,51	4,27	3,44	0,10	15,80°
J									
K	0,75	-2,21	0,57	0,63	4,75	4,82	17,61	18,11	7,94°
L	0,74	0,19	0,61	0,65	5,34	4,26	15,05	16,12	5,55°
M	0,53	0,83	0,93	0,84	0,74	6,06	0,73	5,82	3,50°
N	0,80	0,81	1,00	0,83	3,69	5,05	0,01	5,94	3,60°
O	0,48	0,74	0,65	0,67	1,45	4,56	5,01	6,66	6,59°
P	0,61	0,74	0,61	0,61	4,53	1,37	11,85	12,75	1,20°
Q	1,16	0,69	0,72	0,74	1,22	0,89	6,32	6,15	5,89°
R	-2,96	3,44	0,71	0,72	0,70	3,00	7,82	7,63	
Maximum	1,70	20,48	1,25	1,21	5,34	6,06	17,61	18,11	13,60°
Minimum	-18,39	-2,21	-0,29	0,32	0,26	0,06	0,01	0,10	1,20°
Moyenne	-0,48	2,23	0,84	0,84	2,03	2,63	4,84	6,24	6,57°
Écart type	6,17	4,99	0,33	0,21	1,86	1,99	5,80	5,44	3,12°
Centre	-0,90	2,07	0,72	0,73	0,96	1,94	7,07	6,89	6,70°

Liste des notations

Les pages qui suivent rassemblent l'ensemble des notations rencontrées dans les chapitres 2 et 3. Les autres chapitres ne comprennent pas ou peu de démonstrations mathématiques et les quelques variables introduites sont en général définies dans les paragraphes de la page considérée; il n'était donc pas utile de rappeler leurs significations ici. L'ordre de présentation des symboles est le même pour les deux chapitres avec d'abord les minuscules ensuite les majuscules, d'abord les lettres latines ensuite les lettres grecques et d'abord les lettres simples, puis les vecteurs avec une flèche et enfin les vecteurs en caractères gras.

Chapitre 2 : Les matériaux composites

a :	Portée de l' <i>elastica</i> .
a_c :	Longueur caractéristique des micro-fissures.
d :	Diamètre caractéristique de l'élément.
e :	Épaisseur du tube.
e_{exp} :	Excentricité de la force de traction.
f :	Flèche de l' <i>elastica</i> à mi-portée.
l :	Longueur du tube.
p :	Pression transversale d'ovalisation.
p_{cr} :	Pression critique de flambement d'un cylindre soumis à une pression radiale.
q_{ELU} :	Pression extérieure réglementaire appliquée à la structure.
r :	Rayon de courbure.
r_{min} :	Rayon de courbure minimal.
u :	Déplacement le long de l'axe du tube.
v :	Déplacement tangentiel.
w :	Déplacement radial.
w_{max} :	Déplacement radial maximal.
y :	Distance à l'axe neutre du tube.
C :	Constante dépendant de la géométrie de la pièce et de la fissure.
C_1 :	Constante d'intégration.
C_2 :	Constante d'intégration.
C_R :	Coût relatif d'un matériau par unité de masse.
E :	Module de Young.

E_L :	Module de Young dans le sens longitudinal.
E_T :	Module de Young dans le sens transverse.
F :	Force axiale appliquée aux extrémités de la poutre.
F_c :	Force critique de flambement d'Euler.
G_{LT} :	Module de glissement.
I_1 :	Indice de performance relatif aux possibilités de mise en forme du matériau.
I_2 :	Indice de performance relatif à la rigidité du matériau.
\widehat{I}_2 :	Indice de performance I_2 modifié par le facteur de forme.
I_3 :	Indice de performance relatif à la fragilité du matériau.
I_4 :	Indice de performance relatif au prix rapporté à la raideur du matériau.
I_5 :	Indice de performance relatif au contenu énergétique rapporté à la raideur.
I_6 :	Indice de performance relatif au bilan écologique rapporté à la raideur.
I_7 :	Indice de performance relatif à la durabilité du matériau.
I :	Inertie par unité de longueur.
I_{ref} :	Inertie de référence.
I_T :	Inertie de la portion de tube prise dans le sens de l'épaisseur.
K_{exp} :	Raideur transverse expérimentale du tube.
K_{th} :	Raideur transverse théorique du tube.
K_{Ic} :	Ténacité.
L :	Longueur du tube utilisé pour l'expérience de la figure 2.17.
L_{tot} :	Longueur totale de barres dans la structure.
M_1 :	Moment de flexion dû au couple unitaire appliqué en pied.
M_p :	Moment de flexion dû au chargement d'ovalisation p .
M_P :	Moment de flexion dû au chargement $P/2$.
M_T :	Moment de flexion total dans la poutre.
N_{zz} :	Force de compression axiale par unité de longueur.
N_{zz}^{cr} :	Force de compression axiale critique par unité de longueur.
P :	Force de compression transversale appliquée par la presse.
P^{rupt} :	Force de compression transversale maximale appliquée par la presse.
Q :	Contenu énergétique relatif d'un matériau par unité de masse.
R :	Rayon moyen du tube.
\widehat{R} :	Rayon du cylindre équivalent.
S :	Section d'un élément.
U :	Énergie totale d'ovalisation.
U_o :	Énergie de déformation d'ovalisation.
U_L :	Énergie de déformation de flexion longitudinale.
U^{def} :	Énergie de déformation de flambement cylindrique.
U^{ext} :	Énergie potentielle liée aux efforts extérieurs.
U^{flamb} :	Énergie potentielle totale du flambement cylindrique.
Y :	Éco-indicateur relatif d'un matériau par unité de masse.

α :	Angle initial de l' <i>elastica</i> .
β :	Facteur sans dimension reliant le carré de la section à l'inertie.
γ_{TL} :	Angle de glissement dans le plan (T, L) .
δ :	Déplacement du point d'application de la charge P .
ϵ_f :	Déformation maximale.
ϵ_L :	Déformation longitudinale.
ϵ_T :	Déformation axiale du tube pris dans le sens transverse.
ζ :	Paramètre d'ovalisation du tube.
η :	Épaisseur variable comprise entre $-e/2$ et $+e/2$.
θ :	Paramètre angulaire lié à l'abscisse curviligne.
κ :	Courbure longitudinale normalisée en fonction de l'anisotropie du matériau.
$\bar{\kappa}$:	Courbure longitudinale normalisée en fonction des dimensions de l'élément.
κ_L :	Variation de courbure longitudinale.
κ_T :	Variation de courbure du tube pris dans le sens transverse.
ν_{LT} :	Coefficient de Poisson dans le plan (L, T) .
ν_{TN} :	Coefficient de Poisson dans le plan (T, N) .
ρ :	Masse volumique.
σ_e :	Contrainte limite élastique.
σ_f :	Contrainte à rupture.
σ^{max} :	Contrainte maximale de flexion.
σ_L :	Contrainte longitudinale.
σ_T :	Contrainte transverse.
τ_{LT} :	Cisaillement dans le plan (L, T) .
σ_L^{flex} :	Contrainte longitudinale à rupture en flexion.
σ_L^{rupt} :	Contrainte longitudinale à rupture.
σ_L^{trac} :	Contrainte longitudinale à rupture en traction.
σ_T^{comp} :	Contrainte transverse à rupture en compression.
σ_T^{rupt} :	Contrainte transverse à rupture.
σ_T^{trac} :	Contrainte transverse à rupture en traction.
τ_{LT}^{rupt} :	Cisaillement à rupture dans le plan (L, T) .
ϕ_f :	Facteur de forme pour un tube fléchi.
\mathbf{e}_r :	Vecteur radial unitaire.
\mathbf{e}_y :	Vecteur unitaire perpendiculaire à l'axe du tube et à la direction de flexion.
\mathbf{e}_z :	Vecteur unitaire orienté le long de l'axe du tube.
\mathbf{e}_T :	Vecteur tangentiel unitaire.

Chapitre 3 : La méthode de relaxation dynamique

- a : Portée de la poutre déformée.
 c : Coefficient reliant l'amortissement visqueux \mathbf{C} et à la diagonale des raideurs \mathbf{D} .
 e_C : Excentricité de la liaison réalisée par le connecteur C .
 f : Flèche à mi-portée.
 h : Incrément de temps.
 k : Paramètre caractéristique de l'elastica ($\sqrt{F/EI}$).
 l : Longueur totale de la poutre.
 m : Coefficient reliant matrice de masse \mathbf{M} et matrice diagonale des raideurs \mathbf{D} .
 m^{opt} : Coefficient m optimal.
 m_i : Masse associée au nœud i .
 \hat{m} : Masse nodale des ressorts en série.
 q_{i5} : Coefficient de densité de force de l'élément $(i, 5)$, avec i variant de 1 à 4.
 r_i^t : Rayon de courbure au nœud i à l'instant t .
 s : Abscisse curviligne de la poutre.
 t : Instant quelconque du processus itératif.
 t^* : Instant du pic d'énergie cinétique.
 v : Déplacement perpendiculaire à l'axe initial de la poutre.
 x_i : Abscisse du $i^{\text{ème}}$ nœud, avec i variant de 1 à 5.
 x : Abscisse d'un point quelconque de la poutre.
 y_i : Ordonnée du $i^{\text{ème}}$ nœud, avec i variant de 1 à 5.
- A_{ij} : Élément de la matrice \mathbf{A} .
 C : Couple de torsion à l'abscisse s .
 E : Module de Young.
 E_c^t : Énergie cinétique à l'instant t .
 $(ES)_{i,j}$: Raideur axiale de l'élément (i, j) .
 $(EI)_i$: Raideur en flexion de l'élément au voisinage du nœud i .
 F : Effort axial appliqué aux extrémités de la poutre.
 F_c : Force critique de flambement d'Euler.
 I : Inertie de la poutre.
 I_{yy} : Inertie de flexion autour de l'axe y de l'élément à l'abscisse s .
 I_{zz} : Inertie de flexion autour de l'axe z de l'élément à l'abscisse s .
 K : Raideur caractéristique des ressorts en série.
 K_i^{max} : Raideur caractéristique de l'ensemble des éléments connectés au nœud i .
 K_i^{flex} : Raideur nodale équivalente de flexion au nœud i .
 K_{ij} : Élément de la matrice de raideur \mathbf{K} .
 L_{i5} : Longueur de l'élément $(i, 5)$, avec i variant de 1 à 4.
 $L_{i,j}^0$: Longueur de l'élément (i, j) au repos.
 $L_{i,j}^t$: Longueur de l'élément (i, j) à l'instant t .
 $L_{i-1,i+1}^t$: Longueur de la corde joignant les nœuds $i - 1$ et $i + 1$ à l'instant t .

- M^{max} : Moment fléchissant maximal.
 M_i^t : Intensité du moment fléchissant au nœud i à l'instant t .
 M_y : Moment fléchissant autour de l'axe \mathbf{i}_y .
 M_z : Moment fléchissant autour de l'axe \mathbf{i}_z .
 N : Effort normal à l'abscisse s .
 N^{min} : Effort normal minimal.
 N^{max} : Effort normal maximal.
 R_z^{max} : Réaction maximale sur appuis selon z .
 $T_{i,j}^0$: Effort imposé de précontrainte axiale dans l'élément (i, j) .
 $T_{i,j}^t$: Tension dans l'élément (i, j) à l'instant t .
 T_y : Effort tranchant selon l'axe \mathbf{i}_y de l'élément à l'abscisse s .
 T_z : Effort tranchant selon l'axe \mathbf{i}_z de l'élément à l'abscisse s .
 U_x^{max} : Déplacement maximal selon x .
 U_z^{max} : Déplacement maximal selon z .
- α : Angle initial de l'*elastica*.
 $\tilde{\alpha}$: Paramètre de calcul ($\alpha = (2 - ch/\mu)/(2 + ch/\mu)$).
 α_i^t : Angle formé par les vecteurs $\vec{X}_{i-1,i}^t$ et $\vec{X}_{i,i+1}^t$ à l'instant t .
 $\tilde{\beta}$: Paramètre de calcul ($\beta = 2h^2/(2 + ch/\mu)$).
 $\tilde{\gamma}$: Paramètre de convergence de l'erreur.
 Δt : Incrément de temps.
 $\epsilon_{i,j}^t$: Déformation axiale de l'élément (i, j) à l'instant t .
 θ : Angle quelconque entre les tangentes à la déformée et à la poutre initiale.
 κ : VAriation de courbure de la poutre.
 κ_y : Variation de courbure autour de l'axe \mathbf{i}_y .
 K_y : Courbure initiale de l'axe \mathbf{i}_y .
 κ_z : Variation de courbure autour de l'axe \mathbf{i}_z .
 K_z : Courbure initiale de l'axe \mathbf{i}_z .
 λ_A : Valeur propre quelconque de la matrice \mathbf{A} .
 λ_A^{max} : Plus grande des valeurs propres de la matrice \mathbf{A} .
 λ_A^{min} : Plus petite des valeurs propres de la matrice \mathbf{A} .
 ϕ' : Torsion de l'axe de l'élément par unité de longueur.
 Φ' : Torsion initiale de l'axe de l'élément par unité de longueur.
- $\vec{t}_{A,i}$: Tangente au nœud i de la déformée de la barre A à l'instant t .
 $\vec{t}_{B,i}$: Tangente au nœud j de la déformée de la barre B à l'instant t .
 \vec{t}_C : Vecteur directeur du connecteur C .
 \vec{u}_{i5} : Vecteur unitaire associé à l'élément $(i, 5)$, avec i variant de 1 à 4.
 \vec{x} : Vecteur directeur du repère de référence.
 \vec{y} : Vecteur directeur du repère de référence.
 \vec{z} : Vecteur directeur du repère de référence.

- \vec{A}_i^t : Accélération du nœud i à l'instant t .
 $\vec{F}_{i,i+1}^t$: Effort appliqué au nœud i lié au moment \vec{M}_i^t dans l'élément $(i, i + 1)$.
 $\vec{F}_{i+1,i}^t$: Effort appliqué au nœud $i + 1$ lié au moment \vec{M}_i^t dans l'élément $(i, i + 1)$.
 $\vec{F}_{i+1,i}^t$: Résultante des efforts intérieurs au nœud i à l'instant t .
 \vec{M}_i^t : Moment fléchissant au nœud i à l'instant t .
 \vec{R}_i^t : Résidu des efforts au nœud i à l'instant t .
 \vec{T}_{i5} : Tension dans l'élément $(i, 5)$, avec i variant de 1 à 4.
 $\vec{T}_{i,j}^t$: Effort de traction-compression exercé par le nœud j sur le nœud i à l'instant t .
 \vec{U}_i^t : Déplacement du nœud i à l'instant t .
 \vec{V}_i^t : Vitesse t du nœud i à l'instant t .
 \vec{X}_i^t : Position du nœud i à l'instant t .
 $\vec{X}_{A,i}^t$: Position du nœud i de la barre A à l'instant t .
 $\vec{X}_{i,j}^t$: Position relative du nœud j par rapport au nœud i à l'instant t .
- b** : Matrice désignant le produit $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}$.
f : Vecteur des efforts extérieurs.
f_{int} : Vecteur des efforts intérieurs.
i_x : Vecteur directeur du repère local orienté selon la tangente à la déformée.
i_y : Vecteur directeur du repère local orienté selon la normale à la déformée.
i_z : Vecteur directeur du repère local orienté selon la binormale à la déformée.
m : Vecteur des moments extérieurs par unité de longueur.
p : Vecteur position du point à l'abscisse s dans le repère global.
q : Vecteur des efforts extérieurs par unité de longueur.
u : Vecteur des déplacements.
u* : Vecteur des déplacements solutions du problème.
uⁿ : Vecteur des déplacements à la n ème itération.
uⁿ : Vecteur des vitesses à la n ème itération.
uⁿ : Vecteur des accélérations à la n ème itération.
uⁿ : Vecteur des erreurs à la n ème itération.
- A** : Matrice désignant le produit $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$.
C : Matrice d'amortissement visqueux.
D : Matrice diagonale des raideurs.
K : Matrice de raideur de la structure dans la configuration initiale.
K(u) : Matrice de raideur tangente de la structure correspondant aux déplacements **u**.
M : Matrice de masse.
Rⁿ : Vecteur du résidu des efforts extérieurs au n ème incrément.

Liste des figures

1.1	Coupe de la voûte du trésor d'Atrée.	8
1.2	Œil de la voûte du Panthéon à Rome.	8
1.3	L'auditorium Kregse du MIT de Eero Saarinen.	9
1.4	L'église de l'Atlantide à Montevideo de E. Dieste.	10
1.5	Modèle du pavillon Philipps de Y. Xenakis.	10
1.6	Le restaurant <i>Los Manantiales</i> de F. Candela en construction.	10
1.7	Coques de Heinz Isler au-dessus d'une station service.	11
1.8	Couverture des quais de la gare de Lourdes.	12
1.9	Vue extérieure de la serre du Bicton Garden, 1825.	13
1.10	Coupole sphérique de la piscine de Neckarsulm.	14
1.11	Couverture de la cour intérieure du British Museum.	14
1.12	Génération de la forme de la maison des hippopotames à Berlin.	15
1.13	Vue aérienne du gridshell de Mannheim.	19
1.14	Maquette inversée du gridshell de Mannheim.	19
1.15	Détail du dispositif de fixation de la grille sur un câble.	21
1.16	Les tours de levage et les répartiteurs en H de Mannheim.	21
1.17	Couverture du gridshell de Downland en court de montage.	23
1.18	La structure du gridshell de Downland après analyse des contraintes.	25
1.19	Système de connection du gridshell de Downland.	26
1.20	La structure du gridshell de Downland en cours de montage.	27
1.21	Intérieur du pavillon du Japon de Shigeru Ban.	28
1.22	Intérieur du Savill building.	29
1.23	Ancrages de la couverture.	29
1.24	Maquette d'étude du gridshell.	30
1.25	Couverture végétale de Pishwanton.	30
1.26	Tour d'observation du zoo d'Helsinki.	31

2.1	Schéma de principe d'une ligne de pultrusion.	35
2.2	Chantier de renforcement d'un pont sur l'autoroute A6 près de Toutry.	37
2.3	La passerelle de Laroin, France.	38
2.4	La passerelle d'Aberfeldy, Écosse.	38
2.5	Maquette de la passerelle tout composite développée au LAMI.	39
2.6	Maquette du centre Yitzhak Rabin à Tel-Aviv.	40
2.7	Carte Module d'Young/Résistance avec deux domaines délimités par les droites $I_1 = 0,2$ et $I_2 = 9$ GPa.	47
2.8	Carte Ténacité/Module d'Young avec deux domaines délimités par les droites $I_2 = 9$ GPa et $I_3 = 0,025$	49
2.9	Carte module d'Young-prix relatif par unité de volume avec deux domaines délimités par les droites $I_2 = 9$ GPa et $I_4 = 0,01$	49
2.10	Carte module d'Young-contenu énergétique par unité de volume avec deux domaines délimités par les droites $I_2 = 9$ GPa et $I_5 = 0,01$	51
2.11	Résistance des matériaux à six environnements courants.	51
2.12	Plan du bâti de fluage développé dans [28].	55
2.13	Protocole expérimental pour l'étude des tubes composites en grande transformation.	55
2.14	Comportement d'un tube fléchi	57
2.15	Comparaisons des angles initiaux	57
2.16	Rupture caractéristique d'un tube fléchi.	58
2.17	Expérience de flexion transverse d'un tube	58
2.18	Essai de compression d'un anneau	59
2.19	Système isostatique associé à 2.18	59
2.20	Ovalisation d'un quart de cercle	63
2.21	Système isostatique associé à 2.20	63
2.22	Variation du critère de Tsai-Hill en fonction de l'angle θ	67
2.23	Critère de Tsai-Hill en fonction de la courbure longitudinale κ_L	67
2.24	Flambement symétrique d'un cylindre (notations).	69
3.1	Schéma de résolution sans et avec itérations d'équilibre.	77
3.2	Structure de quatre câbles et un nœud libre.	78
3.3	Variation de l'énergie cinétique.	83
3.4	Pendule oscillant sans frottement.	83
3.5	Différents types d'appui dans le plan et dans l'espace.	85
3.6	Interpolation parabolique de l'énergie cinétique autour du pic.	86

3.7	Ensemble de nœuds d'un élément de structure.	87
3.8	Repère local d'une poutre dans l'espace.	89
3.9	Calcul du rayon de courbure local d'une poutre droite.	92
3.10	Équilibre d'un segment de poutre fléchie.	93
3.11	Assemblage orientable.	95
3.12	Modèle cinématique des connecteurs.	95
3.13	Système masses-ressorts vibrant selon sa plus haute fréquence.	97
3.14	Relation entre $ \tilde{\gamma} $ et ch pour $\lambda_A h^2 = 1$	103
3.15	Schéma de la déformée d'une poutre simple post-flambée.	106
3.16	Déformées obtenues pour un maillage A non-uniforme de densité $n = 4$	109
3.17	Déformées obtenues pour un maillage B , uniforme de densité $n = 4$	110
3.18	Déformées obtenues pour un maillage uniforme de densité $n = 2$	111
3.19	Déformées obtenues pour un maillage non-uniforme de densité $n = 2$	111
3.20	Poutre post-flambée.	113
3.21	Gridshell élémentaire de deux fois cinq barres.	113
3.22	Grille initiale.	117
3.23	Résultat de la recherche de forme.	117
3.24	Poutre treillis dissymétrique.	118
3.25	Dôme hexagonal.	118
3.26	Comportement de la structure de la figure 3.24.	119
3.27	Comportement de la structure de la figure 3.25.	119
3.28	Assemblage MERO™ typique.	120
3.29	Assemblage typique d'une nexorade.	120
3.30	Principe de la recherche de forme d'une nexorade : a) Barres concourantes ; b) Barres fléchies avec excentricités ; c) Nexorade résultante.	121
3.31	De l'intérêt du comportement mécanique fictif pour la recherche de forme.	121
4.1	Maquette en film de savon du Tanzbrunnen de Cologne.	127
4.2	La couverture de câbles du stade olympique de Munich.	128
4.3	Maquette suspendue de Gaudi pour l'église de la Colona Güell et son image in- versée.	128
4.4	Forme prise par un tissus gelé dans le style de H. Isler.	129
4.5	Chantier des tennis couverts de Crissier de H. Isler.	129
4.6	Maquette suspendue de l'IL et, par retournement, gridshell correspondant.	131

4.7	Poutre fléchie uniformément chargée avec la chaînette et l' <i>elastica</i> de référence. . .	132
4.8	Grille obtenue pour $pL^3/EI=1,79$	135
4.9	Grille obtenue pour $pL^3/EI=17,9$	135
4.10	Grille obtenue pour $pL^3/EI=179$	135
4.11	Filet inversé correspondant.	135
4.12	Grille élémentaire carrée.	137
4.13	Grille élémentaire circulaire.	137
4.14	Méthode d'obtention d'une pseudo-chaînette.	138
4.15	Évolution de l'angle α avec le rapport pL^3/EI	139
4.16	Évolution de la distance à la chaînette.	139
4.17	Grille carrée avec tous les appuis glissants sur le plan.	140
4.18	Grille carrée avec tous les appuis bloqués.	140
4.19	Grille carrée avec des appuis glissants sur des lignes parallèles aux lignes d'appuis.	140
4.20	Grille carrée avec deux lignes opposées glissantes sur le plan et deux sur une ligne.	140
4.21	Grille circulaire avec tous les appuis glissants sur le plan.	140
4.22	Grille circulaire avec tous les appuis bloqués.	140
4.23	Grille circulaire avec tous les appuis glissants sur un cercle.	140
4.24	Profil de la grille carrée avec tous les appuis glissants sur le plan.	141
4.25	Profil de la grille circulaire avec tous les appuis glissants sur le plan.	141
4.26	Grille carrée sur quatres appuis avec des barres latérales interrompues.	142
4.27	Grille carrée sur quatres appuis avec des barres latérales continues.	142
4.28	Variante à 45° de la grille élémentaire carrée.	143
4.29	Profil de la variante de la grille carrée avec tous les appuis glissants.	143
4.30	Profil de la grille carrée sur quatres appuis.	143
4.31	Profil de la grille carrée à 45° sur quatres appuis.	143
4.32	Grille initiale avec $\alpha=90^\circ$	145
4.33	Forme finale correspondante.	145
4.34	Grille initiale avec $\alpha=110^\circ$	145
4.35	Forme finale correspondante.	145
4.36	Grille initiale avec $\alpha=130^\circ$	145
4.37	Forme finale correspondante.	145
4.38	Grille initiale avec $\alpha=150^\circ$	145
4.39	Forme finale correspondante.	145

4.40	Grille carrée avec raidisseur.	146
4.41	Grille circulaire avec raidisseur.	146
4.42	Grille rectangulaire avec raidisseur.	147
4.43	Grille elliptique avec raidisseur.	147
4.44	Intérieur de la DG Bank à Berlin (Allemagne) de Frank Gehry	148
4.45	Le nouveau musée de Graz (Autriche) de Peter Cook et Colin Fournier.	148
4.46	Étape 1 : Construction et subdivision des directrices.	149
4.47	Étape 2 : Construction du maillage de proche en proche à l'aide d'un compas. . .	149
4.48	Schémas de principe du maillage d'une sphère avec la méthode du compas : tracé et subdivision des deux directrices ; création d'un nouveau point à partir de l'intersection et, de proche en proche, création d'un maillage de parallélogrammes. .	150
4.49	Mise à plat de la grille hémisphérique de la figure 4.50.	150
4.50	Gridshell hémisphérique pour un angle de 90° entre les directrices.	150
4.51	Évolution de la distance à la sphère en fonction de l'angle formé par les directrices. 151	
5.1	Vue extérieure du prototype de gridshell en composites.	157
5.2	Forme initiale sur le sol de la grille elliptique choisie.	160
5.3	Première étape de la recherche de forme.	160
5.4	Forme théorique finale.	161
5.5	Forme finale vue de dessus.	161
5.6	Efforts normaux sous poids propre.	161
5.7	Moments sous poids propre.	161
5.8	Vue de la structure avec ses câbles provisoires.	163
5.9	Déplacements totaux dus à la prise en compte des excentricités.	163
5.10	Moments fléchissants sous poids propre avec prise en compte des excentricités. .	164
5.11	Efforts normaux sous poids propre avec prise en compte des excentricités.	164
5.12	Géométrie initiale de la simulation du montage	165
5.13	Distance entre la forme théorique et celle issue de la simulation du montage. . . .	165
5.14	Géométrie au repos avec la triangulation de barres « molles ».	168
5.15	Géométrie au repos avec la triangulation réelle.	168
5.16	Efforts normaux par triangulation directe.	168
5.17	Efforts normaux avec mise en place de la triangulation en deux étapes.	168
5.18	Triangulation du prototype.	169
5.19	Triangulation classique.	169

5.20	Comparaison des comportements verticaux des deux triangulations.	169
5.21	Comparaison des comportements horizontaux des deux triangulations.	169
5.22	Pressions de vent sur une coupole sphérique d'après l'Eurocode 1.	171
5.23	Déplacement vertical sous chargement de neige symétrique.	172
5.24	Déplacement selon y sous chargement de neige symétrique.	172
5.25	Déplacement vertical sous chargement de vent selon y	173
5.26	Déplacement selon y sous chargement de vent selon y	173
5.27	Claquage symétrique du prototype à l'ELU.	174
5.28	Contraintes maximales sous chargement de vent à l'ELU.	174
6.1	La grille elliptique du prototype en cours d'assemblage.	179
6.2	Mise en forme du prototype au moyen d'étais et de tirants.	181
6.3	Le motif en hexagone et triangle.	182
6.4	La triangulation en cours de montage.	182
6.5	Amélioration de la précision des mesures à l'aide de deux tachéomètres.	184
6.6	Le premier modèle avec ses surcontraintes.	189
6.7	Les contraintes dans le modèle de référence.	189
6.8	Le modèle sur appuis élastiques.	189
6.9	Le modèle de référence.	189
6.10	Distance entre le modèle de référence et le modèle sans excentricité.	192
6.11	Distance entre le modèle de référence et le modèle de filet inversé.	192
6.12	Le déplacement selon z du gridshell sous chargement asymétrique.	195
6.13	Le déplacement selon y du gridshell sous chargement asymétrique.	195
6.14	Le déplacement selon z du gridshell rigidifié sous chargement asymétrique.	197
6.15	Le déplacement selon y du gridshell rigidifié sous chargement asymétrique.	197
6.16	Efforts normaux dans le gridshell non-rigidifié sous chargement asymétrique.	199
6.17	Efforts normaux dans le gridshell rigidifié sous chargement asymétrique.	199
6.18	Moments fléchissants dans le gridshell au repos.	199
6.19	Moments fléchissants dans le gridshell non-rigidifié sous charges asymétriques.	199
6.20	Déplacement lié à la création de l'ouverture à l'ouest du prototype.	200
6.21	Le prototype et son ouverture à l'ouest.	200
A.1	Structure des données d'entrée de <i>AlgoRD</i>	212
A.2	Ressorts en position initiale avant calcul.	213

A.3	Ressorts en position au repos, libres de contrainte.	213
A.4	Géométrie au repos du gridshell de la figure 4.21.	214
A.5	Autre géométrie au repos du gridshell de la figure 4.21.	214
A.6	Arc en bow-string précontraint.	215
A.7	Géométrie au repos de la structure de la figure A.6.	215
A.8	Géométrie initiale de la structure de la figure A.6.	216
A.9	Autre géométrie initiale de la structure de la figure A.6.	216
A.10	Schéma de principe pour la réalisation d'un encastrement dans les problèmes plans.	217
B.1	Implantation du gridshell sur le site de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.	225
B.2	Plan d'implantation des fondations.	226
B.3	Plan de la grille à plat avec l'orientation des barres.	226
B.4	Emplacement des charges pour les deux séries de tests.	228
B.5	Emplacement des cibles aux extrémités des barres.	228
B.6	Emplacement des cibles pour la première série de tests.	229
B.7	Emplacement des cibles pour la seconde série de tests.	229

Liste des tableaux

2.1	Propriétés mécaniques des constituants des composites fibre/résine [41]	34
2.2	Propriétés mécaniques des tubes fournies par le fabricant.	61
3.1	Valeurs des paramètres caractéristiques de l' <i>elastica</i>	109
3.2	Convergence de F/F_c	110
3.3	Convergence de f/l	110
3.4	Convergence de a/l	112
3.5	Convergence de f/l	112
3.6	Valeurs caractéristiques d'une <i>elastica</i> obtenues par différentes méthodes.	114
3.7	Comparaison des temps de calcul en 2D.	115
3.8	Influence de la densité maillage sur la précision de la forme d'un gridshell.	116
3.9	Comparaison des temps de calcul en 3D.	116
3.10	Comparatif des performances de l'algorithme avec et sans excentricité.	118
4.1	Rapports $3pL^3/2EI_{lim}$ à partir desquels la flexion est négligeable sur 10 m.	133
4.2	Évolution de la distance entre la grille fléchie et le filet inversé avec le rapport pL^3/EI	135
5.1	Coefficient partiel de sécurité γ_1	156
5.2	Coefficient partiel de sécurité γ_2	156
5.3	Coefficient partiel de sécurité γ_3	156
5.4	Raideur des différents schémas de triangulation.	170
6.1	Calendrier des mesures effectuées sur le prototype.	184
6.2	Déplacement de la structure non-rigidifiée sous chargement symétrique.	185
6.3	Déplacement de la structure non-rigidifiée sous chargement asymétrique.	186
6.4	Déplacements de la structure rigidifiée sous chargement symétrique.	187
6.5	Déplacement de la structure rigidifiée sous chargement asymétrique.	187

6.6	Quantification expérimentale de l'effet de la triangulation.	188
6.7	Distances entre les points de référence et les points de l'axe du modèle numérique.	190
6.8	Comparaison entre la géométrie du prototype et celle du modèle	191
6.9	Distance entre les deux modèles historiques et le prototype.	192
6.10	Comparaison entre les déplacements réels des cibles et ceux du modèle.	194
6.11	Rapports entre les déplacements réels des cibles et ceux des deux modèles modifiés.	195
6.12	Déplacements du modèle rigidifié sous chargement symétrique.	196
6.13	Déplacements du modèle rigidifié sous chargement asymétrique.	196
6.14	Travaux des efforts extérieurs et influence de la rigidification.	198
6.15	Évolution des contraintes maximales dans la structure.	200
6.16	Coût estimatif de la structure du prototype de gridshell en composites.	201
6.17	Ratios caractéristiques pour 70,5 m ² habitable et de 154,7 m ² au sol.	201
A.1	Tableau des données sur les éléments de structure.	220
A.2	Tableau des conditions aux limites.	220
A.3	Tableau des liaisons entre les éléments.	221
A.4	Structure du tableau des déplacements	223
A.5	Structure du tableau des efforts intérieurs.	223
B.1	Longueurs des barres de la grille principale.	227
B.2	Positions des marques au pied des barres.	230
B.3	Positions des marques au pied des barres (suite).	231
B.4	Déplacements en cm des cibles de A à R sous chargement symétrique.	232
B.5	Déplacements en cm des cibles de A à R sous chargement asymétrique.	232
B.6	Déplacements en cm des cibles de AA à TT sous chargement symétrique.	233
B.7	Déplacements en cm des cibles de AA à TT sous chargement asymétrique.	233
B.8	Écart sur les positions au repos des cibles A à R et AA à TT en cm.	234
B.9	Écarts sur les déplacements de la structure non-triangulée sous chargement symétrique.	235
B.10	Écarts sur les déplacements de la structure non-triangulée sous chargement asymétrique.	236

Bibliographie

- [1] B. ABDEL-MAGID, R. LOPEZ-ANIDO et S. SMITH, G. and Trofka : Flexure creep properties of e-glass reinforced polymers. *Composite Structures*, 62:247–253, 2003.
- [2] S. ADRIAENSSENS, M.R. BARNES et C.J.K. WILLIAMS : A new analytic and numerical basis for the form-finding and analysis of spline and grid-shell structures. In B. KUMAR et B.H.V. TOPPING, éditeurs : *Computing developpements in civil and structural engineering*, pages 83–90. Civil-Comp. Press. Edimburgh, 1999.
- [3] S.M.L. ADRIAENSSENS et M.R. BARNES : Tensegrity spline beam and grid shell structures. *Engineering structures*, 23:29–36, 2001.
- [4] AFGC : Réparation et renforcement des structures en béton au moyen de matériaux composites. recommandation provisoires. Rapport technique, AFGC, 2007.
- [5] A. ALAOUI-SOULIMANI, K. SAB et F. PRADEL : Molecular dynamic for the finite deformation of random elastic grids. *Mechanics of materials*, 36(12):1231–1245, december 2004.
- [6] S. ANDREATTA : Conception d'un gridshell hémisphérique. Rapport de stage de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Juillet-août 2007.
- [7] M.F. ASHBY : *Choix des matériaux en conception mécanique*. Dunod, traduction de : Materials Selection in Mechanical Design, 2^{ème} édition, 2000.
- [8] AT : The UK's largest timber gridshell combines traditional and modern materials. *Architecture Today*, 175:72, 2007.
- [9] O. BACCO et C. BORRI : Post-buckling behaviour of perfect and randomly imperfect grid shell structures. In *Space structures 4*, pages 9–15, London, 1993. Thomas Telford.
- [10] J. P. BARDET et J. PROUBET : Adaptative dynamic relaxation for statics of granular materials. *Computers and structures*, 39(3/4):221–229, 1991.
- [11] G. BAREFOOT et F. MATTA : Rapid bridge deck construction with frp reinforcing grids. *JEC Composites Magazine*, 33:47–49, 2007.
- [12] M. BARNES : *Form finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation*. Thèse de doctorat, The City University, London, 1977.
- [13] M.R. BARNES : Applications of dynamic relaxation to the topological design and analysis of cable, membrane and pneumatic structures. In *Second international conference on space structures*, pages 211–219, 1975.
- [14] M.R. BARNES : Form and stress engineering of tension structures. *Structural engineering review*, 6(3-4):175–202, 1994.

- [15] M.R. BARNES : Form finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation. *International journal of space structures*, 14(2):89–104, 1999.
- [16] H. BAUDRILLER, B. MAURIN et P. CAÑADAS : Form-finding of complex tensegrity structures : application to cell cytoskeleton modelling. *Comptes rendus mécanique*, 334:662–668, 2006.
- [17] O. BAVEREL : *Nexorades : a family of interwoven space structures*. Thèse de doctorat, University of Surrey, 2000.
- [18] O. BAVEREL, H. NOOSHIN et Y. KUROIWA : Configuration processing of nexorades using genetic algorithm. *Journal of the International Association of space structures*, 45:99–108, 2004.
- [19] O. BAVEREL, H. NOOSHIN, Y. KUROIWA et G. A. R. PARKE : Nexorades. *International Journal of Space Structures*, 15:155–159, 2000.
- [20] Z. BAZANT et L. CEDOLIN : *Stability of structures*, chapitre 7, Plates and shell. Dover publications, dover édition, 2003.
- [21] S. BELKACEM : *Recherche de forme par relaxation dynamique des structures réticulées spatiales autocontraintes*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse, France, 1987.
- [22] D.P. BILLINGTON : *Thin shell concrete structures*, chapitre 9, Stability and safety. Mac Graw Hill, mcgraw-hill book company édition, 1982.
- [23] P. BINSE : Fabrication de profilés en composites par pultrusion. Rapport technique, Techniques de l'ingénieur, 1995.
- [24] P. BOISSE, B. ZOUARI et JL DANIEL : Importance of in-plane shear rigidity in finite element analyses of woven fabric composite preforming. *Composites part A-Applied science and manufacturing*, 31:2201–2212, 2006.
- [25] L. BOUHAYA : Optimisation environnementale de ponts de moyenne portée. Mémoire de D.E.A., École Nationale des Ponts et Chaussées, 2007.
- [26] L.G. BRAZIER : On the flexure of thin cylindrical shell and other 'thin' sections. *In Proceedings of the royal society, Series A 116*, pages 104–114, 1927.
- [27] T. BULENDA et J. KNIPPERS : Stability of grid shells. *Computers and structures*, 79:1161–1174, 2001.
- [28] J.F. CARON et T.Q. SON : Creep of pultruded composite pipes under permanent bending. In B. BENMOKRANE et E. EL-SALAKAWY, éditeurs : *Third International Conference on durability of Composites for construction*, pages 67–74. Quebec, Canada, mai 2007.
- [29] S. CHATAIGNER, J. F. CARON et C. AUBAGNAC : Conception et dimensionnement d'un ancrage de hauban plat en composites. *In Comptes rendus des Quinzièmes Journées Nationales sur les Composites*, 2007.
- [30] M. CHATAIN : Matériaux composites : présentation générale. Rapport technique, Techniques de l'ingénieur, traité sur les plastiques et les composites, 1993.
- [31] A. CHATEAUNEUF : *Comprendre les éléments finis*. ellipses, 2005.
- [32] J.L. CLARKE : *Structural Design of Polymer Composites*. EUROCOMP, Design Code and Standard. Spon, London, 1996.

- [33] J. COURBON : Stabilité de l'équilibre élastique. Rapport technique, Techniques de l'ingénieur, traité de construction, 1984.
- [34] P. A. CUNDALL : A computer model for simulating progressive large scale movements in block rock systems. In *Symposium International of the Society of Rock Mechanics, Nancy, France, 1971*.
- [35] P.A. CUNDALL : Explicit-finite difference methods in geomechanics. In *Proceedings of E.F. Conference on numerical methods in geomechanics*, pages 132–150, Jun. 1976.
- [36] A. S. DAY : An introduction to dynamic relaxation. *The engineer*, 29:218–221, 1965.
- [37] A. S. DAY et J. BUNCE : The analysis of hanging roofs. *Arup Journal*, Sept., 1969.
- [38] C.E. DEMERS : Fatigue strength degradation of e-glass frp composites and carbon frp composites. *Construction and building materials*, 12:311–318, 1998.
- [39] M. EEKHOUT et R. VISSER : Grp sandwich structures for 'liquid design' architecture. In *IASS Symposium*, 2005.
- [40] A. EHRLACHER : Modèle de matériaux composites. Cours de l'ENPC, mai 1999.
- [41] D. GAY : *Matériaux composites*. Hermès, 1989.
- [42] V. GIONCU et N. BALUT : Instability behaviour of single layer reticulated shells. *International journal of space structures*, 7:243–252, 1992.
- [43] J. GLYPH, D. SHELDEN, C. CECCATO, J. MUSSEL et H. SCHOBER : A parametric strategy for free-form glass structures using quadrilateral planar facets. *Automation in construction*, 13:187–202, 2004.
- [44] P. D. GOSLING et W. J. LEWIS : Optimal structural membranes part ii : Form-finding of prestressed membranes using a curved quadrilateral finite element for surface definition. *Computer and structures*, 61:885–895, 1996.
- [45] J. GRAF : The development of grid shell in the past two centuries. Notes de conférence à l'École Nationale des Ponts et Chaussées, mai 2003.
- [46] P. HAMELIN : Renforcement des ouvrages d'art par matériaux composites. Rapport technique, Techniques de l'ingénieur, traité de construction, 2002.
- [47] S.-E. HAN et K.-S. LEE : A study of the stabilizing process of unstable structures by dynamic relaxation method. *Computers and structures*, 81:1677–1688, 2003.
- [48] E. HAPPOLD et W.I. LIDDELL : Timber lattice roof for the Mannheim Bundesgartenschau. *The Structural Engineer*, 53(3):99–135, march 1975.
- [49] R. HARRIS, J. ROMER, O. KELLY et S. JOHNSON : Design and construction of the Downland Gridshell. *Building research and information*, 31(6):427–454, Nov-dec 2003.
- [50] A. HOLGATE : *The Work of Jorg Schlaich and His Team : The Art of Structural Engineering*. Axel Menges, 1997.
- [51] J. A. HOLLAND : Dynamic relaxation applied to local effects. In ICE, éditeur : *Conference on prestressed concrete, pressure vessels*, 1967.
- [52] L.C. HOLLOWAY et P.R. HEAD : *Advanced polymer composites and polymers in the civil infrastructure*. Salusbury, I., 2001.

- [53] J. HRISTOVA, V. VALEVA et J. IVANOVA : Aging and filler effects on the creep model parameters of thermoset composites. *Composites science and technology*, 62:1097–1103, 2002.
- [54] D. ITSKHOKINE et C. LE GALL : Composites : conception et étude d'un gridshell. Rapport de MODEX de l'École Polytechnique, Juin 2007.
- [55] A. S. JÜLICH SAAVEDRA : *Contrôle de forme de passerelle composite*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2006.
- [56] S.A. KARAMANOS : Bending instabilities of elastic tubes. *International journal of solid and structures*, 39:2059–2085, 2002.
- [57] A. KARRECH, D. DUHAMEL, G. BONNET, J.-N. ROUX, F. CHEVOIR, J. CANOU, J.-C. DUPLA et K. SAB : A computational procedure for the prediction of settlement in granular materials under cyclic loading. *Computer Method in applied mechanics and engineering*, 2007.
- [58] O. KELLY, R. HARRIS, M. DICKSON et J. ROWE : Construction of the Downland Gridshell. *The Structural Engineer*, 79(17):25–33, September 2001.
- [59] J. KNIPPERS, T. BULENDA et M. STEIN : Zum Entwurf und zur Berechnung von Stabschalen. *Stahlbau*, 66(1):31–37, 1997.
- [60] A. LE VAN et C. WIELGOSZ : Bending and buckling of inflatable beams : Some new theoretical results. *Thin-Walled Structures*, 43:1166–1187, 2005.
- [61] W. J. LEWIS : *Tension structures, Form and behaviour*. Thomas Telford, 2003.
- [62] K. LIAO, C.R. SCHULTHEISZ et D.L HUNSTON : Effects of environmental aging on the properties of pultruded gfrp. *Composite : part B*, 30:485–493, 1999.
- [63] O. LIMAM, G. FORET et A. EHRLACHE : Strengthening of unidirectionally reinforced concrete slabs with composite material - theoretical and experimental study. *PLASTICS RUBBER AND COMPOSITES*, 32:153–159, 2003.
- [64] O. LIMAM, V. T. NGUYEN et G. FORET : Numerical and experimental analysis cfrp of two-way slabs strengthened with strips. *ENGINEERING STRUCTURES*, 27:841–845, 2005.
- [65] K. LINKWITZ et H. J. SCHEK : A new method of analysis of prestressed cable networks and its use to the roofs of the olympic games facilities in munich. *In 9th Congress of IABSE*, 1972.
- [66] A. E. H. LOVE : *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. CUP, 4th édition, 1927.
- [67] M. MALINOWSKI : Structures textiles. Rapport technique, Techniques de l'ingénieur, traité de construction, 1993.
- [68] B. MAURIN et R. MOTRO : Density methods for thin-shell shape-finding. *In IASS Symposium, Montpellier*, 2004.
- [69] M. MAURIN et R. MOTRO : The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes. *Engineering structures*, 20(8):712–719, 1998.
- [70] MCBAGONLURI, K. GARCIA, M. HAYNES, K.N.E. VERGHESE et J.J. LESKO : Characterization of fatigue and combined environment on durability performance of glass/vinyl ester composite for infrastructure applications. *International journal of fatigue*, 22:53–64, 2000.

- [71] R. MOTRO : *Tensegrity, Structural systems for the future*. 2003.
- [72] S. T. NGUYEN : Calcul des poutres courbes par la méthode de relaxation dynamique. Mémoire de D.E.A., École Nationale des Ponts et Chaussées, 2007.
- [73] N. NOGUE : Des courbures et des plis : les voiles en tôles de Bernard Lafaille. In Etienne PONCELET, éditeur : *Les couvertures métalliques : matériaux et techniques*, pages 23–36. Les cahiers de la section française de l'ICOMOS, 1997.
- [74] D. R. OAKLEY et N. F. JR. KNIGHT : Adaptive dynamic relaxation algorithm for non linear hyperelastic structures, Part I : Formulation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 126:67–89, 1995.
- [75] D. R. OAKLEY et N.F.Jr. KNIGHT : Adaptive dynamic relaxation algorithm for non linear hyperelastic structures, Part II : single-processor implementation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 126:91–109, 1995.
- [76] J. R. H. OTTER, A. C. CASSEL et R. E. HOBBS : Dynamic relaxation. In *Proc. ICE*, volume 35, pages 633–656, 1966.
- [77] J. R. H. OTTER et A. S. DAY : Tidal computations. *The engineer*, Jan, 1960.
- [78] F. OTTO : *IL10 Gitterschalen*. Institut für leichte Flächentragwerke (IL), 1974.
- [79] F. OTTO et B. RASCH : *Finding form, towards an architecture of the minimal*. Axel Menges, 1992.
- [80] M. PAPADRAKAKIS : *Gradient and relaxation non-linear techniques for the analysis of cable supported structures*. Thèse de doctorat, The City University, London, 1978.
- [81] M. PAPADRAKAKIS : A method for the automatic evaluation of the dynamic relaxation parameters. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 25:35–48, 1981.
- [82] K. PAPAIOANNOU et J. BOUSQUET : *L'art grec*. Mazenod, 1972.
- [83] A. PETEL : étude du comportement en fluage, relaxation et rupture de pultrudés verre-résine précontraints en flexion. Mémoire de master (mse), École Centrale de Paris, France, 2005.
- [84] G. RAMESH et C. S. KRISHNAMOORTHY : Post-buckling analysis of structures by dynamic relaxation. *International journal for numerical methods in engineering*, 36:1339–1364, 1993.
- [85] G. RAMESH et C. S. KRISHNAMOORTHY : Inelastic post-buckling analysis of truss structures by dynamic relaxation method. *International journal for numerical methods in engineering*, 37:3633–3657, 1994.
- [86] E. RAMM et R. REITINGER : Force follows form in shell design. In NK SRIVASTAVA, éditeur : *IASS-CSCE International Congress on innovative large span structures*, Toronto, pages 11–27, July 1992.
- [87] E. RAMM et E. SCHUNK : *Heinz Isler Schalen*. Gesellschaft für Ingenieurbaukunst ETH Höggerberg, 2002.
- [88] K. R. RUSHTON : DR solution for large deflection of plates with specified boundary stresses. *Journal of strain analysis*, 4(2), 1969.
- [89] M. SALEHI et H. AGHAEI : Dynamic relaxation large deflection analysis of non-axisymmetric circular viscoelastic plates. *Computer and structures*, 83:1878–1890, 2005.

- [90] R.G. SAUVÉ et D.R. METZGER : Advances in dynamic relaxation techniques for non-linear finite element analysis. *Computer Technology : Advances and applications, ASME*, 234:59–64, 1992.
- [91] H.-J. SCHEK : The force density method for form-finding and computation of general networks. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 3:115–134, 1974.
- [92] J. SCHLAICH : *Leicht und weit - Light structures - Jörg Schlaich / Rudolf Bergermann*, chapitre Leichtbau, wieso und wie? Prestel Verlag, Munich, 2004.
- [93] J. SCHLAICH et H. SCHOBER : Verglaste Netzkuppeln. *Bautechnik*, 69(1):3–10, 1992.
- [94] J. SCHLAICH et H. SCHOBER : Glaskuppel für die Flusspferde im Zoo Berlin. *Stahlbau*, 67(4):307–312, 1998.
- [95] H. SCHOBER : Geometrie-Prinzipien für wirtschaftliche und effiziente Schalentragerwerke. *Bautechnik*, 79(1):16–24, 2002.
- [96] O. SEIFERT, S. SCHIMACHER et A. HANSEN : Viscoelastic properties of a glass fabric composite at elevated temperatures : experimental and numerical results. *Composites : Part B*, 34:571–586, 2003.
- [97] A. W. SIGNOR, M. R. VANLANDINGHAM et J. W. CHIN : Effects of ultraviolet radiation exposure on vinyl ester resins : characterization of chemical, physical and mechanical damage. *Polymer degradation and stability*, 79:359–368, 2003.
- [98] B. SÉNÉCHAL : Nexorades, analyses géométriques et constructions. Mémoire de stage scientifique de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Mai-Juillet 2006.
- [99] J.-C. THOMAS et C. WIELGOSZ : Deflections of highly inflated fabric tubes. *Thin-Walled Structures*, 42:1049–1066, 2004.
- [100] J.C. THOMAS, Z. JIANG et C. WIELGOSZ : Continuous and finite element methods for the vibrations of inflatable beams. *International Journal of Space Structures*, 21:197–222, 2006.
- [101] S.P. TIMOSHENKO et J.M. GERE : *Theory of elastic stability*, chapitre 11, Buckling shells. Mac Graw Hill, mcgraw-hill book company édition, 1961.
- [102] B. H. V. TOPPING : *The application of dynamic relaxation to the design of modular space structures*. Thèse de doctorat, The City University, London, 1978.
- [103] P. UNDERWOOD : Dynamic relaxation. In B. BELYTSCHKO et Hughes T.J.R., éditeurs : *Computational method for transient analysis*, chapitre 5, pages 245–265. Elsevier Science Publisher B.V., 1983.
- [104] D. S. WAKEFIELD : *Pretensioned networks supported by compression arches*. Thèse de doctorat, The City University, London, 1980.
- [105] D. S. WAKEFIELD : Engineering analysis of tension structures : theory and practice. *Engineering structures*, 21:680–690, 1999.
- [106] R. D. WOOD : A simple technique for controlling element distortion in dynamic relaxation form-finding of tension membranes. *Computers and structures*, 80:2115–2120, 2002.
- [107] T. YAMASHITA et S. KATO : Elastic buckling characteristics of two-way grid shells of single layer and its application in design to evaluate the non-linear behavior and ultimate strength. *Journal of constructional steel research*, 57:1289–1308, 2001.

-
- [108] W. ZHANG, T. HISADA et H. NOGUCHI : Post-buckling analysis of shell and membrane structures by dynamic relaxation method. *Computer mechanics*, 26:267–272, 2000.

**ÉTUDE DE STRUCTURES ÉLANCÉES PRÉCONTRAINTES
EN MATÉRIAUX COMPOSITES :
APPLICATION À LA CONCEPTION DES GRIDSHELLS**

Résumé de la thèse :

Les matériaux composites sont des matériaux nouveaux qui possèdent une grande déformabilité et une grande raideur. Les structures de bâtiment qui requièrent ces deux propriétés sont peu nombreuses et les gridshells en sont un bon exemple. En effet, ces structures à double courbure sont obtenues par déformation élastique puis rigidification d'une grille plane sans raideur en cisaillement. Les grands déplacements et les grandes rotations qui surviennent durant la phase de montage de ces structures élancées précontraintes nécessitent la prise en compte de non-linéarités géométriques importantes. Un outil numérique spécifique reposant sur la méthode de la relaxation dynamique est donc développé et validé. Il permet une nouvelle approche de la forme des gridshells et la mise au point d'une méthode de recherche de forme originale. Il est également utilisé pour l'étude géométrique et l'analyse structurelle de prototypes de gridshells en matériaux composites construits sur le site de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.

Mots clés : Gridshell, matériaux composites, méthode de relaxation dynamique, recherche de forme, analyse non-linéaire, prototype expérimental.

**STUDY OF SLENDER PRESTRESSED STRUCTURES
IN COMPOSITE MATERIALS :
APPLICATION TO THE CONCEPTION OF GRIDSHELLS**

Abstract of the thesis :

Composite materials are new materials with high deformability and high stiffness. In civil engineering, structures that require these two properties are rare and gridshells are a good example of such buildings. Indeed these structures with double curvature are obtained by elastic deformation and then bracing of a plane grid with no shear rigidity. The large displacements and the large rotations that occur during the phase of assembly of these slender prestressed structures require consideration of important geometrical non-linearities. A specific numerical tool based on the dynamic relaxation method is therefore developed and validated. It provides a new approach to the form of gridshells and enables the development of an original form-finding method. It is also used for the geometrical study and structural analysis of a prototypes of gridshell in composite materials built on the site of the École Nationale des Ponts et Chaussées.

Keywords : Gridshell, composite materials, dynamic relaxation method, form-finding, non-linear analysis, experimental prototype.