



**HAL**  
open science

# Contributions à l'étude théorique des bruits quantiques et classiques dans les amplificateurs Raman distribués

Shifeng Jiang

► **To cite this version:**

Shifeng Jiang. Contributions à l'étude théorique des bruits quantiques et classiques dans les amplificateurs Raman distribués. domain\_other. Télécom ParisTech, 2008. English. NNT: . pastel-00004073

**HAL Id: pastel-00004073**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00004073>**

Submitted on 10 Apr 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

présentée pour obtenir le grade de docteur  
de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications

Spécialité : Communication et Électronique

**Shifeng JIANG**

**Contributions à l'étude théorique  
des bruits quantiques et classiques  
dans les amplificateurs Raman distribués**

Soutenue le 14 février 2008 devant le jury composé de :

Gowind P. AGRAWAL	Rapporteurs
Jean-Philippe POIZAT	
Dominique BAYART	Examineurs
Guy MILLOT	
Klaus PETERMANN	
Francisco J. MENDIETA	Invité
Philippe GALLION	Directeur de thèse





## Résumé

*Les amplificateurs Raman à fibres optiques apparaissent aujourd'hui comme une solution très prometteuse pour augmenter la capacité de transmission des réseaux optiques WDM longues distances et hauts débits. Afin de dégager les caractéristiques des amplificateurs Raman, ce travail de thèse propose une étude théorique approfondie permettant de comprendre et modéliser les processus de génération de bruit dans ce type d'amplificateurs optiques, et analyser les performances en terme de qualité de transmission.*

La diffusion Raman stimulée est un processus nonlinéaire de la diffusion de lumière. Afin d'établir un modèle quantifié pour l'amplification Raman dans les fibres optiques, nous avons tout d'abord proposé une nouvelle description quantique de l'optique nonlinéaire macroscopique, utilisant une approche fondée sur une quantification canonique de l'interaction champ-matière. Les résultats de cette approche dont la limite, lorsque les variables de champ sont traitées de manière classique, est tout à fait en accord avec la théorie semi-classique de l'optique nonlinéaire. Ils répondent à une question importante de l'optique nonlinéaire quantifiée portant sur l'ordre des opérateurs correspondant au champ électrique. Avec ces résultats, nous avons réussi à établir un modèle unidimensionnel de propagation des opérateurs de champ quantiques dans les fibres optiques.

L'amplification Raman distribuée dans les fibres optiques de transmission est intrinsèquement de faible bruit. Pour mieux apprendre ce problème, nous avons tout d'abord reformuler, d'une manière générale, les propriétés quantiques du champ optique, les limites quantiques des dispositifs optiques linéaires et insensibles à la phase, les statistiques quantiques du photocourant, et les différentes définitions du facteur de bruit pour les dispositifs amplificateurs. Nous avons ensuite caractérisé le gain et le facteur de bruit des amplificateurs Raman, permettant de comparer les performances de bruit intrinsèque en fonction de la configuration de pompage choisie. Nous avons également effectué une analyse de l'impact de la nonlinéarité et de la saturation de gain sur la génération de bruit intrinsèque.

En complément au bruit quantique intrinsèque, nous avons étudié deux autres sources de bruit classique importantes dans les amplificateurs Raman, qui sont la rétrodiffusion Rayleigh et le transfert de bruit de la pompe vers le signal. Prenant en compte la diffusion Rayleigh, nous avons établi un modèle de propagation bidirectionnelle. Notre modélisation de la diffusion Rayleigh dans les fibres optiques monomodes est corroborée par sa consistance avec les expressions analytiques déjà connues. Un programme pour la simulation numérique de la propagation bidirectionnelle des densités spectrales de puissance a été développé. Il permet d'étudier l'impact de la rétrodiffusion Rayleigh sur la génération de bruit intrinsèque et sur la saturation de gain. Nous avons aussi étudié les propriétés statistiques du bruit en présence de la rétrodiffusion Rayleigh. Ces résultats nous ont permis d'analyser l'impact de la rétrodiffusion Rayleigh sur les performances des systèmes. En ce qui concerne le transfert de bruit de la pompe vers le signal, nous avons étudié le modèle vectoriel de l'amplification Raman dans les fibres optiques monomodes. Puisque l'amplification Raman dépend de la polarisation, après une courte révision de la théorie traditionnelle de transfert de RIN de la pompe vers le signal, nous avons porté notre attention sur l'impact de la dispersion modale de polarisation (PMD) sur le transfert de bruit. Nous avons montré que, à cause des fluctuations temporelles de l'état de polarisation, la pompe Raman dépolarisée peut induire des bruits supplémentaires au signal avec l'assistance de la PMD. Les impacts sur les performances des systèmes de ces bruits supplémentaires ont été finalement analysés.

# Sommaire

<b>Introduction générale et plan de thèse</b>	<b>1</b>
<b>1. Théorie quantique de l'optique nonlinéaire</b>	<b>5</b>
1.1. Introduction à la quantification canonique des champs	5
1.2. Rappel sur la quantification de la décomposition modale	7
1.3. Théorie quantique de l'optique macroscopique nonlinéaire	9
1.3.1. Lagrangien de l'interaction champ-matière	10
1.3.2. Hamiltonien multipolaire	11
1.3.3. Quantification de l'interaction champ-matière	15
1.3.4. Théorie complètement quantifiée de l'optique nonlinéaire	17
1.3.5. Comparaison entre les théories semi-classique et quantique	22
1.4. Bruit quantique en optique linéaire et théorème de fluctuation-dissipation	25
1.5. Conclusion	28
Références	29
<b>2. Théorie quantique des fibres optiques</b>	<b>31</b>
2.1. Optique nonlinéaire dans les verres de silice	31
2.2. Modèle quantique pour les fibres optiques	34
2.2.1. Modèle unidimensionnel et diffusion Rayleigh	34
2.2.2. Diffusions Raman et Brillouin	38
2.3. Modèle pour les amplificateurs Raman à fibres	43
2.3.1. Modèle de propagation	43
2.3.2. Théorème de fluctuation-dissipation pour les amplificateurs Raman	46
2.4. Conclusion	49
Références	50
<b>3. Bruits quantiques des amplificateurs optiques linéaires et insensibles à la phase</b>	<b>51</b>
3.1. Descriptions et propriétés quantiques du rayonnement	51
3.1.1. Représentation modale du champ	51

3.1.2.	Rappels sur les états quantiques du rayonnement	54
3.1.3.	Densités de quasi-probabilité des deux quadratures	58
3.2.	Bruits intrinsèques des amplificateurs optiques linéaires et insensibles à la phase	61
3.2.1.	Relation entrée-sortie quantique	61
3.2.2.	Modèle de propagation pour les amplificateurs linéaires et insensibles à la phase	65
3.3.	Performance en bruit des amplificateurs optiques	67
3.3.1.	Statistiques des photons ASE et du photo-courrant	67
3.3.2.	Deux définitions du facteur de bruit	72
3.4.	Conclusion	75
	Références	76
<b>4.</b>	<b>Gain et performance en bruit intrinsèque des Amplificateurs Raman</b>	<b>77</b>
4.1.	Présentation simplifiée de l'amplification Raman dans les fibres optiques à silice	77
4.2.	Gain des amplificateurs Raman	80
4.2.1.	Gain en régime petit signal	80
4.2.2.	Gain en régime de saturation	81
4.3.	Facteur de bruit des amplificateurs Raman	83
4.3.1.	Expression de facteur de bruit des amplificateurs Raman	83
4.3.2.	Notion de facteur de bruit équivalent et vérification expérimentale	87
4.4.	Impact de la saturation de gain et de la nonlinéarité sur la génération de bruit intrinsèque	89
4.4.1.	Modèle et solution	89
4.4.2.	Corrélations quantiques	92
4.4.3.	Densité spectrale de puissance du bruit du flux de photon	94
4.5.	Conclusion	96
	Références	97
<b>5.</b>	<b>Rétrodiffusion Rayleigh dans les amplificateurs Raman</b>	<b>99</b>
5.1.	Modèles de propagation	100
5.1.1.	Rappels et coefficient différentiel de rétrodiffusion Rayleigh	100
5.1.2.	Quelques expressions analytiques – vérification du modèle	101
5.1.3.	Equations de propagation des densités spectrales de puissance	103
5.2.	Théorie vectorielle sur la double rétrodiffusion Rayleigh	108
5.2.1.	Filtre vectoriel de double rétrodiffusion Rayleigh	108
5.2.2.	Propriétés de polarisation de la double rétrodiffusion Rayleigh	112
5.3.	Estimation de l'impacts combinés de l'ASE et du DRB sur les performances des systèmes	115

---

5.3.1. Propriétés statistiques du bruit total	115
5.3.2. Impacts combinés de l'ASE et du DRB sur le taux d'erreur binaire	116
5.3.3. Un exemple	118
5.3.4. Pénalité de la rétrodiffusion Rayleigh sur le facteur de qualité	121
5.4. Conclusion	123
Références	124
<b>6. Impacts des bruits de pompe sur le signal</b>	<b>127</b>
6.1. Modèle vectoriel de l'amplification Raman dans les fibres	127
6.2. Impacts des pompes Raman polarisées	132
6.2.1. Propriétés statistiques du vecteur de biréfringence relative et de l'état de polarisation de signal	132
6.2.2. Influence d'une pompe Raman polarisée sur le signal	133
6.3. Transfert de RIN de la pompe vers le signal	136
6.3.1. Modèle de transfert de RIN	136
6.3.2. Propriétés de la fonction de transfert de RIN	138
6.3.3. Pénalités liées au transfert de RIN	140
6.4. Transfert des bruits de pompe vers le signal assisté par PMD	142
6.4.1. Fonction vectorielle de transfert des fluctuations de l'état de polarisation de pompe	142
6.4.2. Impacts des fluctuations temporelles de l'état de polarisation de pompe sur le RIN du signal amplifié	144
6.4.3. Estimation de la dégradation de performance du système	146
6.5. Conclusion	148
Références	150
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>151</b>
<b>Annexe A</b>	<b>155</b>
<b>Annexe B</b>	<b>157</b>
<b>Annexe C</b>	<b>161</b>
<b>Annexe D</b>	<b>163</b>



# Introduction Générale et Plan de Thèse

L'amplification optique est une solution permettant d'améliorer le rapport signal sur bruit optique pour obtenir un niveau de bruit satisfaisant à la sortie du circuit électronique bruyant de post-détection. Par rapport aux régénérateurs optique-électronique-optique qui n'agissent que sur un canal à la fois, les amplificateurs optiques permettent d'amplifier collectivement plusieurs canaux, et sont, donc, plus rentables. Ils sont aussi moins sophistiqués à déployer, et plus fiables. Aujourd'hui, l'amplification optique devient indispensable dans les systèmes WDM (Wavelength Division Multiplexing), technologie ayant rendu possible la révolution des communications par fibres optiques durant les années 1990. Malgré l'éclatement de la "bulle d'Internet" en 2001, le trafic Internet n'a cessé d'augmenter, conduisant à une demande d'amélioration des performances des amplificateurs optiques.

Aujourd'hui, en fonction du mécanisme physique d'amplification, nous pouvons distinguer trois types d'amplificateurs optiques : les amplificateurs à l'inversion de population, les amplificateurs à diffusions inélastiques et les amplificateurs paramétriques. Les amplificateurs optiques à semi-conducteur (SOA, Semiconductor Optical Amplifier) et les amplificateurs à fibres dopées à l'erbium (EDFA, Erbium Doped Fibre Amplifier) sont du premier type, et les amplificateurs Raman sont du second. Bien qu'attrayant pour leur intégrabilité, les SOAs sont limités par le problème fondamental de l'intermodulation entre canaux, rendant actuellement leur utilisation en tant qu'amplificateur en-ligne difficile. Aujourd'hui, ce sont principalement les EDFAs et les amplificateurs Raman que les systèmes WDM déploient ou vont déployer.

L'amplification Raman fait appel à l'effet Raman, c'est-à-dire la diffusion Raman, qui est un phénomène de diffusion inélastique omniprésente dans les milieux moléculaires. Ce phénomène de la diffusion de la lumière fut découverte en 1928, dans les liquides et vapeurs avec la lumière de soleil fortement focalisée, par le physicien indien C.V. Raman, qui a reçu le prix Nobel de physique en 1930 pour son travail sur la diffusion de la lumière et la découverte de l'effet éponyme. Depuis, l'effet Raman a été appliqué dans divers domaines d'applications. Dans l'étude des structures moléculaires, par exemple, la spectroscopie Raman est un outil puissant et largement utilisée. Au début des années 1970, l'amplification Raman dans les fibres optiques a été déjà démontrée, et un certain nombre de publications des années 1980 ont montré l'intérêt des amplificateurs Raman à fibres optiques.

Vers la fin des années 1980 et jusqu'au milieu des années 1990, l'attention a été surtout portée vers les EDFAs. Ceci est dû d'une part au fait que l'amplification Raman dans les fibres optiques nécessite des pompes lasers de fortes puissances dont la technologie n'était pas encore au point à l'époque pour les applications en communication. D'autre part, déjà mature technologiquement au début des années 1990, les EDFAs apparaissaient comme une solution d'amplification optique assez satisfaisante, au niveau du gain, du bruit et de la bande passante, pour les besoins en communications. A titre d'exemple, il a été démontré en 2000 la possibilité de transmettre  $180 \times 10$  Gb/s sur une distance de 7000 km, en utilisant toute la bande-C, des EDFAs à gains équilibrés et la technique de FEC (Forward Error Correction). Actuellement, les EDFAs sont largement utilisés dans les systèmes optiques de transmission en service.

Dans les dernières années 90, l'avancement technologique de pompes lasers de fortes puissances a permis la maturité des pompes lasers Raman et à leur disponibilité commerciale, ayant suscité le regain d'intérêt pour l'amplification Raman. De nombreuses études expérimentales et théoriques ont montré les avantages particuliers et incontestables de l'amplification Raman :

- Le gain Raman existe dans toutes les fibres optiques à n'importe quelle longueur d'onde optique et est facile à obtenir.
- Dans les fibres à silice, le spectre de gain Raman a une très large étendue fréquentielle. Quand plusieurs pompes sont utilisées, il peut aussi couvrir toute la fenêtre optique à faibles pertes, c'est-à-dire, les bandes S, C et L, avec une bonne uniformité spectrale.
- L'amplification Raman est non seulement intrinsèquement à faible bruit, mais corrélativement à l'amplification localisée dont les EDFAs sont l'archétype, elle permet une moindre excursion du niveau de puissance de signal, et donc un meilleur rapport signal sur bruit accompagné de moins de pénalités nonlinéaires. L'amplification Raman, utilisant directement les fibres de transmission comme milieu d'amplification, est fondamentalement distribuée.

En 2003, presque toutes les démonstrations expérimentales sur l'augmentation de la capacité de transmission optique ont utilisé l'amplification Raman. Bien qu'il reste certaines incertitudes liés à l'utilisation des pompes lasers de fortes puissances, l'amplification Raman est désormais une technologie déterminante pour les systèmes WDM.

La capacité de transmission est souvent limitée par le bruit de l'amplificateur. Ainsi, l'analyse de bruit a une importance centrale dans la caractérisation de tout amplificateur. Ce travail de thèse a pour but de réaliser une étude théorique approfondie, destinée à comprendre, modéliser et analyser les mécanismes de la génération de bruit dans les amplificateurs Raman. Dans le premier chapitre, nous rappelons la quantification du champ optique dans le milieu, et une description totalement quantique de l'optique nonlinéaire sera présentée. Au chapitre 2,

---

nous présenterons une théorie quantique des fibres optiques en silice. Un modèle unidimensionnel de la propagation du champ quantifié dans les fibres monomodes sera présenté. Dans ce modèle, nous prendrons en compte la nonlinéarité de type Kerr de la fibre et les diffusions Rayleigh, Raman et Brillouin. Le mécanisme physique et la génération de bruit intrinsèque des diffusions Raman et Brillouin dans les fibres optiques monomodes en silice sera discuté en détails. Au chapitre 3, nous réviserons d'abord les propriétés quantiques de la base du champ optique. Nous étudierons ensuite, d'une manière générale, les propriétés quantiques des amplificateurs optiques linéaires et insensibles à la phase. Il est à mentionner que les études présentées dans ces trois premiers chapitres sont assez générales et donc non uniquement limitée à l'amplification Raman. Au chapitre 4, nous discuterons des caractéristiques fondamentales, les performances en termes bruit intrinsèque et le gain des amplificateurs Raman. Le gain sera discuté à la fois en régime de petit signal et en régime de saturation. Le facteur de bruit des amplificateurs Raman sera discuté en régime de petit signal, ce qui permet de comparer les performances de bruit intrinsèque en fonction de la configuration de pompage. Dans ce chapitre, les impacts de la saturation de gain et de la nonlinéarité de fibre seront également étudiés. Au chapitre 5, après la vérification de la consistance théorique du modèle, établi dans le chapitre 2, sur la diffusion Rayleigh dans les fibres optiques monomodes, nous étudierons l'impact de la rétrodiffusion Rayleigh dans l'amplification Raman. Le renforcement de la génération du bruit intrinsèque et la double rétrodiffusion Rayleigh du signal y seront discutés en détails. Au dernier chapitre, nous étudierons l'impact des bruits de pompe sur le signal. Après un bref rappel sur le transfert de RIN (Relative Intensity Noise) de la pompe vers le signal, l'accent sera mis sur l'impact de PMD (Polarization Mode Dispersion). De nouveaux processus de transfert de bruit de la pompe vers le signal y seront présentés et étudiés. Cette thèse se terminera par quelques conclusions majeures et de brèves perspectives.



# Chapitre 1

## Théorie Quantique de l'Optique Nonlinéaire

L'optique quantique occupe une part très importante dans l'optique moderne. Aujourd'hui, la théorie quantique de l'optique dans les milieux est un sujet très intéressant [1]-[10]. Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord rappeler la procédure de la quantification canonique des champs et la quantification modale du champ optique dans les milieux diélectrique linéaire et non absorbant. Ensuite, nous présenterons une approche nouvelle, différente des approches phénoménologiques [5][7][10], ayant pour le but de quantifier le champ optique dans les milieux, basée sur une description *ab initio* de l'interaction champ-matière. Une description totalement quantifiée de l'optique nonlinéaire apparaîtra naturellement dans notre approche. Enfin, nous discuterons brièvement le théorème de fluctuation-dissipation dans le cadre de l'optique linéaire.

### 1.1 Introduction à la quantification canonique des champs

Dans la théorie quantique, l'univers peut être décrit par les états quantiques et les opérateurs quantiques, définis mathématiquement dans un espace d'Hilbert. Nous savons que dans la théorie quantique, pour un système unidimensionnel de multi-particules, les opérateurs de coordonnée et de quantité de mouvement ne commutent pas, et leurs relations de commutation sont données par

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = \hat{x}_j \hat{p}_k - \hat{p}_k \hat{x}_j = i\hbar \delta_{jk} \quad (1.1)$$

où  $\hat{x}_k$  et  $\hat{p}_k$  sont les opérateurs de coordonnée et de quantité de mouvement pour chaque particule,  $\delta_{jk}$  est le symbole de Kronecker et  $\hbar$  est le constant de Planck. Comment s'exprime alors ce postulat fondamental pour les champs ?

Pour répondre à cette question, nous devons utiliser le langage de la mécanique analytique. Dans la théorie des champs, nous pouvons étudier un champ  $A(\mathbf{r}, t)$  (nous nous limitons ici au cas scalaire pour alléger l'exposé) à l'aide de sa densité Lagrangienne  $\mathcal{L}$ , qui est une fonction de la variable de champ  $A$  et de ses dérivées. Formellement, nous pouvons écrire

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(A, \partial_\mu A)$ , où  $\partial_\mu$ , avec  $\mu = \{0, 1, 2, 3\}$ , est la dérivée par apport au temps ( $\partial_0 = \partial_t$ ) ou à l'espace ( $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ ). Dans la théorie classique, à l'aide du principe d'action moindre, nous pouvons obtenir les équations de mouvement du champ à partir des équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = \sum_\mu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A)}. \quad (1.2)$$

D'une manière générale, nous considérons le champ  $A(\mathbf{r})$  à tout point de l'espace  $\mathbf{r}$  comme la coordonnée généralisé et lui associer de la quantité de mouvement généralisé, ou le moment conjugué, défini par

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t A)}. \quad (1.3)$$

Une fois le moment conjugué obtenu, nous pouvons trouver l'hamiltonien du système en utilisant la transformation de Legendre sous la forme

$$H = \int [\Pi(\mathbf{r})A(\mathbf{r}) - \mathcal{L}] d^3\mathbf{r} \quad (1.4)$$

Puisque l'espace est continu, nous avons maintenant un système dynamique de degré de liberté infini. Ayant trouvé les coordonnées et les quantités de mouvement généralisées, nous pouvons imposer les relations de commutation canonique fondamentales

$$\hat{A}(t, \mathbf{r})\hat{\Pi}(t, \mathbf{r}') - \hat{\Pi}(t, \mathbf{r}')\hat{A}(t, \mathbf{r}) = [\hat{A}(t, \mathbf{r}), \hat{\Pi}(t, \mathbf{r}')] = i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.5)$$

quand le champ est bosoniques, ou

$$\hat{A}(t, \mathbf{r})\hat{\Pi}(t, \mathbf{r}') + \hat{\Pi}(t, \mathbf{r}')\hat{A}(t, \mathbf{r}) = [\hat{A}(t, \mathbf{r}), \hat{\Pi}(t, \mathbf{r}')]_{+} = i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.6)$$

quand le champ est fermionique. Dans ces deux égalités,  $\hat{A}$  et  $\hat{\Pi}$  sont les opérateurs de champs et  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  est la fonction de Dirac <sup>1</sup>. Il est à noter que dans ces deux égalités, indépendantes du temps (ETCR – Equal Time Commutation Relations), nous avons exprimé les opérateurs en représentation d'Heisenberg.

Ainsi, nous quantifions le champ en appliquant la procédure de quantification canonique, d'abord proposée par Dirac pour convertir la théorie classique du champ électromagnétique en théorie quantique. Si nous considérons la fonction de Dirac comme une extension naturelle du symbole de Kronecker, nous constatons que la théorie quantique décrit les champs et les

---

<sup>1</sup> Ces relations de commutation fondamentales ne sont données que formellement. Comme nous allons le voir, la fonction de Dirac peut être modifiée dans les cas concrets.

particules d'une manière unifiée.

## 1.2 Rappel sur la quantification de la décomposition modale

Revenons maintenant aux équations de Maxwell macroscopiques. En absence de sources libres elles s'écrivent sous formes locales

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \text{ et } \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0, \quad (1.7)$$

où  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont les champs électrique et magnétique,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  sont les inductions électrique et magnétique. Dans un milieu quelconque, nous avons les relations constitutives générales entre les champs

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \text{ et } \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1.8)$$

où  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  sont la permittivité et la perméabilité du vide, et les champs  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{M}$  sont les densités de polarisation et de d'aimantation. Les deuxième et troisième équations de (1.7) impliquent que nous pouvons décrire le champ électromagnétique ( $\mathbf{EM}$ ) en utilisant deux variables de champ nouvelles : le potentiel scalaire  $\varphi$  et le potentiel-vecteur  $\mathbf{A}$ , qui sont définis par les relations locales

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \text{ et } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.9)$$

Puisque les potentiels ne sont pas uniquement définis à partir de ces relations, une condition de jauge est nécessaire pour fixer les relations entre les potentiels et les variables de champ physiques  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .

Quand le milieu peut être considéré comme linéaire, non-dispersive et non-absorbant, la relation de constitution entre  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  se réduit à

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (1.10)$$

où  $\varepsilon(\mathbf{r})$  est la permittivité relative, une fonction réelle de position  $\mathbf{r}$ . Il est à noter que nous avons supposé que le milieu est isotrope pour simplifier. Nous supposons, en plus, que l'aimantation soit négligeable. Choisisant la jauge générale de Coulomb :  $\nabla \cdot [\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] = 0$  [2], nous trouvons l'équation de mouvement à partir de (1.7)-(1.10) sous la forme

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.11)$$

dont la transformée de Fourier temporelle <sup>2</sup> est donnée par

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{A}} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\mathbf{r}) \underline{\mathbf{A}} = 0. \quad (1.12)$$

Alors, la densité lagrangienne du système dynamique, dont l'équation de mouvement est (1.11), peut s'écrire [2]

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[ \varepsilon(\mathbf{r}) |\partial_t \mathbf{A}|^2 - c^2 |\nabla \times \mathbf{A}|^2 \right], \quad (1.13)$$

Avec cette densité lagrangienne, nous pouvons trouver le moment conjugué au potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  par

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_t \mathbf{A}} = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \partial_t \mathbf{A} = -\mathbf{D}, \quad (1.14)$$

L'hamiltonien du système est donc

$$H = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \left[ \frac{|\mathbf{\Pi}|^2}{\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r})} + c^2 |\nabla \times \mathbf{A}|^2 \right] d^3 \mathbf{r} = \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} d^3 \mathbf{r} \quad (1.15)$$

Ce système est prêt à être quantifié. Puisque nous avons choisi la jauge générale de Coulomb, et que le champ  $\mathbf{EM}$  est bonsonique, la relation de commutation fondamentale (1.5) doit s'écrire, en représentation de Schrödinger, sous les formes

$$\left[ \hat{A}_j(\mathbf{r}), \hat{\Pi}_k(\mathbf{r}') \right] = -\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}') \left[ \hat{A}_j(\mathbf{r}), \hat{E}_k(\mathbf{r}') \right] = i\hbar \delta_{\varepsilon, jk}^\perp(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.16)$$

où  $\delta_\varepsilon^\perp$  est la fonction vectorielle de Dirac transversale généralisée <sup>3</sup>. Il est montré dans [2] que nous pouvons écrire les opérateurs des champs sous les formes

<sup>2</sup> Dans cette thèse, les symboles soulignés désignent la transformée de Fourier et nous adoptons la convention suivante :

- la transformée de Fourier temporelle et son inverse sont définies comme

$$\underline{\mathbf{A}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(t) \exp(i\omega t) dt \quad \mathbf{A}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \underline{\mathbf{A}}(\omega) \exp(-i\omega t)$$

- la transformée de Fourier spatiale (3D) et son inverse sont définies comme

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) = \int_{\mathfrak{R}^3} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3 \mathbf{k}$$

<sup>3</sup> C'est-à-dire que nous avons  $\int d^3 \mathbf{r}' \delta_\varepsilon^\perp(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{f}(\mathbf{r}') = \mathbf{f}(\mathbf{r})$  pour toute fonction  $\mathbf{f}$  satisfaisant la condition transversale généralisée :  $\nabla \cdot [\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{f}(\mathbf{r})] = 0$ .

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_k A_k [\hat{a}_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) + \hat{a}_k^\dagger(t) \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r})] \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i \sum_k \omega_k A_k [\hat{a}_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) - \hat{a}_k^\dagger(t) \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r})] \quad (1.17)$$

où  $A_k = \sqrt{\hbar/2\varepsilon_0\omega_k}$ . Dans (1.17),  $\omega_k$  et  $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$  sont respectivement la valeur propre et la fonction propre de l'équation différentielle:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_k = \frac{\varepsilon(\mathbf{r})\omega_k^2}{c^2} \mathbf{u}_k, \quad \text{avec} \quad \nabla \cdot [\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{u}_k(\mathbf{r})] = 0 \quad (1.18)$$

où  $k$  est l'indice de mode. Nous savons que la group des solutions de (1.18),  $\{\mathbf{u}_k\}$ , peut constituer d'une base orthonormale complète, sur l'espace de fonctions satisfaisant la condition transversale généralisée, telle que [2]

$$\int d^3\mathbf{r} \varepsilon(\mathbf{r}) [\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_{k'}^*(\mathbf{r})] = \delta_{kk'}, \quad \text{et} \quad \sum_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}') \varepsilon(\mathbf{r}') = \delta_\varepsilon^\perp(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.19)$$

Nous voyons que (1.17) est alors une généralisation de la quantification de décomposition modale dans le vide que nous rencontrons souvent dans les publications. Les opérateurs  $\hat{a}_k$  et  $\hat{a}_k^\dagger$  sont alors ceux d'annihilation et de création pour chaque mode, qui satisfont la relation de commutation familière [2]

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_k] = \delta_{kk'}, \quad \text{et} \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \quad (1.20)$$

Remplaçant (1.17) dans (1.15), et faisant appel à (1.18) et (1.19), nous obtenons l'opérateur hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_k \hbar \omega_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger) = \sum_k \hbar \omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \quad (1.21)$$

Il a aussi déjà été montré que la décomposition modale ci-dessus n'est pas unique [2]. Si le champ est décomposé sur une base autre que celle des fonctions propres  $\{\mathbf{u}_k\}$  obtenues avec (1.18), les expressions de (1.17) sont maintenues formellement avec des fonctions de mode différentes, mais l'hamiltonien (1.21) n'est plus une forme diagonale. Alors que dans la représentation d'Heisenberg, un hamiltonien diagonalisé, comme (1.21), implique que les opérateurs d'annihilation oscillent harmoniquement dans le temps.

### 1.3 Théorie quantique de l'optique macroscopique nonlinéaire

L'approche introduite dans la section précédente est très utile pour décrire le champ dans le milieu linéaire non-dispersif. Mais, ses limites sont évidentes : il ne peut y avoir ni dispersion ni absorption/amplification dans cette approche, sans parler des effets non-linéaires. En fait, l'inconvénient de cette approche vient du fait que nous avons utilisé une relation constitutive

excluant la liberté dynamique de la matière. Dans la suite de ce chapitre, nous allons montrer une approche débutant par une description *ab initio* d'interaction champ-matière.

### 1.3.1 Lagrangien de l'interaction champ-matière

Nous considérons les électrons et noyaux constituant la matière comme les particules ponctuelles chargées. Si nous négligeons le spin, le lagrangien champ-matière non-relativiste fondamental, dit de couplage minimal (Minimal-Coupling) [11], s'écrit sous la forme

$$L_0 = \int \frac{\epsilon_0 |\dot{\mathbf{A}} + \nabla \varphi|^2 - \mu_0^{-1} |\nabla \times \mathbf{A}|^2}{2} d^3 \mathbf{r} + \frac{1}{2} \sum_{s,\alpha} m_{s\alpha} \dot{\mathbf{x}}_{s\alpha}^2 + \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} - \rho \varphi) d^3 \mathbf{r}, \quad (1.22)$$

avec

$$\mathbf{J} = \sum_{s,\alpha} e_{s\alpha} \dot{\mathbf{x}}_{s\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_{s\alpha}) \text{ et } \rho = \sum_{s,\alpha} e_{s\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_{s\alpha}), \quad (1.23)$$

où  $\dot{\mathbf{x}}$  signifie la dérivée totale par rapport au temps,  $\mathbf{x}_{s\alpha}$ ,  $e_{s\alpha}$  et  $m_{s\alpha}$  sont les coordonnées (vecteur cartésien), la charge et la masse d'une particule dans une assemblée  $s$  (atomes, molécules, ions, etc.). La conservation de charge,  $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial_t \rho = 0$ , est vérifiée automatiquement par ces définitions des densités de courant et de charge. Utilisant les équations d'Euler-Lagrange, nous pouvons vérifier que (1.22) donne en effet les équations de mouvement pour le champ et les particules. Pour les potentiels, faisant appel aux équations d'Euler-Lagrange pour les champs et en utilisant le calcul variationnel

$$\frac{\delta L}{\delta A_k} = \sum_{\mu} \partial_{\mu} \frac{\delta L}{\delta (\partial_{\mu} A_k)}, \quad (1.24)$$

où  $\delta$  désigne les variations, nous obtenons

$$\epsilon_0 \partial_t (\dot{\mathbf{A}} + \nabla \varphi) + \mu_0^{-1} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} \text{ et } \epsilon_0 \nabla \cdot (\dot{\mathbf{A}} + \nabla \varphi) = -\rho.$$

Avec les définitions des potentiels (1.9), nous retrouvons les deux équations de Maxwell microscopiques suivantes (les deux autres sont vérifiées automatiquement par les définitions des potentiels)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \text{ et } \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (1.25)$$

Pour les particules, utilisant  $\nabla_{\mathbf{x}_{s\alpha}} L - d_t (\nabla_{\dot{\mathbf{x}}_{s\alpha}} L) = 0$  et l'égalité

$$\dot{\mathbf{x}}_{s\alpha} \times (\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}) = \nabla_{\mathbf{r}} (\dot{\mathbf{x}}_{s\alpha} \cdot \mathbf{A}) - (\dot{\mathbf{x}}_{s\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{A},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
m_{s\alpha}\ddot{\mathbf{x}}_{s\alpha} &= e_{s\alpha} \int \left( \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_{s\alpha}) (\varphi - \dot{\mathbf{x}}_{s\alpha} \cdot \mathbf{A}) - \frac{d}{dt} [\mathbf{A} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_{s\alpha})] \right) d^3 \mathbf{r} \\
&= e_{s\alpha} \int \left[ -\nabla_{\mathbf{r}} \varphi - \dot{\mathbf{A}} + \nabla_{\mathbf{r}} (\dot{\mathbf{x}}_{s\alpha} \cdot \mathbf{A}) - (\dot{\mathbf{x}}_{s\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{A} \right] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_{s\alpha}) d^3 \mathbf{r} \\
&= e_{s\alpha} [\mathbf{E}(\mathbf{x}_{s\alpha}) + \dot{\mathbf{x}}_{s\alpha} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_{s\alpha})]
\end{aligned} \tag{1.26}$$

qui n'est rien d'autre que la force de Lorentz. Il est à noter que ces résultats sont obtenus indépendamment de la condition de jauge (invariance de jauge).

### 1.3.2 Hamiltonien multipolaire

Nous allons ensuite introduire deux champs auxiliaires qui sont les champs des densités de polarisation et d'aimantation, qui doivent être les sommes de ceux de toutes les assemblés, c'est-à-dire

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sum_s \mathbf{P}_s(\mathbf{r}) \text{ et } \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \sum_s \mathbf{M}_s(\mathbf{r}) \tag{1.27}$$

Considérons une assemblée  $s$ . Nous définissons son centre de masse, sa masse totale et sa charge totale par

$$\mathbf{R}_s = M_s^{-1} \sum_{\alpha} m_{s\alpha} \mathbf{x}_{s\alpha}, \quad M_s = \sum_{\alpha} m_{s\alpha} \text{ et } Q_s = \sum_{\alpha} e_{s\alpha} \tag{1.28}$$

Sa densité de polarisation peut être alors définie par

$$\mathbf{P}_s(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} e_{s\alpha} (\mathbf{x}_{s\alpha} - \mathbf{R}_s) \int_0^1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_s - \mu(\mathbf{x}_{s\alpha} - \mathbf{R}_s)) d\mu + Q_s \mathbf{R}_s \int_0^1 \delta(\mathbf{r} - \mu \mathbf{R}_s) d\mu \tag{1.29}$$

où le premier terme est la densité de polarisation de la molécule où de l'atome, et le deuxième terme est dû à l'ionisation. Similairement, la densité d'aimantation est définie par

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_s(\mathbf{r}) &= \sum_{\alpha} e_{s\alpha} (\mathbf{x}_{s\alpha} - \mathbf{R}_s) \times (\dot{\mathbf{x}}_{s\alpha} - \dot{\mathbf{R}}_s) \int_0^1 \mu \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_s - \mu(\mathbf{x}_{s\alpha} - \mathbf{R}_s)) d\mu \\
&\quad + \sum_{\alpha} e_{s\alpha} (\mathbf{x}_{s\alpha} - \mathbf{R}_s) \times \dot{\mathbf{R}}_s \int_0^1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_s - \mu(\mathbf{x}_{s\alpha} - \mathbf{R}_s)) d\mu + Q_s \mathbf{R}_s \times \dot{\mathbf{R}}_s \int_0^1 \mu \delta(\mathbf{r} - \mu \mathbf{R}_s) d\mu
\end{aligned} \tag{1.30}$$

où le premier terme est la densité de magnétisation de la molécule où l'atome, le deuxième terme est lié au courant de Röntgen et le dernier est dû à l'ionisation. Si l'ensemble des assemblés est électriquement neutre, c'est-à-dire  $\sum_s Q_s = 0$ , à l'aide des égalités suivantes

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\mu}\delta(\mathbf{r}-\mu\mathbf{x}) &= -(\mathbf{x}\cdot\nabla_{\mathbf{r}})\delta(\mathbf{r}-\mu\mathbf{x}) \\ \frac{d}{dt}\delta[\mathbf{r}-\mathbf{x}(t)] &= -[\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\nabla_{\mathbf{r}}]\delta[\mathbf{r}-\mathbf{x}(t)] \\ \nabla_{\mathbf{r}}\times[(\mathbf{A}\times\mathbf{B})f(\mathbf{r})] &= \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\nabla_{\mathbf{r}})f(\mathbf{r})-\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\nabla_{\mathbf{r}})f(\mathbf{r})\end{aligned}$$

nous pouvons vérifier les deux relations ci-dessous.

$$\nabla\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r})=-\rho(\mathbf{r}) \quad \frac{d\mathbf{P}(\mathbf{r})}{dt}+\nabla\times\mathbf{M}(\mathbf{r})=\mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.31)$$

Maintenant, puisque tous les champs peut être décomposés en parties transversale et longitudinale <sup>4</sup>,  $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\perp}+\mathbf{A}^{\parallel}$ , nous pouvons réécrire le Lagrangien (1.22) en termes transversale et longitudinale sous la forme

$$\begin{aligned}L_0 &= \int \left( \frac{|\varepsilon_0\dot{\mathbf{A}}^{\perp}|^2}{2\varepsilon_0} - \frac{|\nabla\times\mathbf{A}^{\perp}|^2}{2\mu_0} + \mathbf{A}^{\perp}\cdot\nabla\times\mathbf{M} \right) d^3\mathbf{r} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{s,\alpha} m_{s\alpha} \dot{\mathbf{x}}_{s\alpha}^2 + \int \left( \frac{\varepsilon_0|\dot{\mathbf{A}}^{\parallel}+\nabla\phi|^2}{2} + \mathbf{A}^{\perp}\cdot\dot{\mathbf{P}}^{\perp} + \mathbf{A}^{\parallel}\cdot\dot{\mathbf{P}}^{\parallel} - \rho\phi \right) d^3\mathbf{r}\end{aligned} \quad (1.32)$$

où nous avons utilisé les relations

$$\mathbf{J}^{\parallel}(\mathbf{r})=\dot{\mathbf{P}}^{\parallel}(\mathbf{r}) \quad \text{et} \quad \mathbf{J}^{\perp}=\dot{\mathbf{P}}^{\perp}+\nabla\times\mathbf{M}^{\perp} \quad (1.33)$$

Il est connu [11] que, quand une dérivée totale par rapport au temps est rajoutée dans le lagrangien, les équations du mouvement restent intactes, et donc que la dynamique du système reste identique. Nous pouvons alors construire un nouveau lagrangien sous la forme

$$\begin{aligned}L_1 &= L_0 - \frac{d}{dt} \int \mathbf{A}\cdot\mathbf{P}d^3\mathbf{r} = \int \left( \frac{|\varepsilon_0\dot{\mathbf{A}}^{\perp}|^2}{2\varepsilon_0} - \frac{|\nabla\times\mathbf{A}^{\perp}|^2}{2\mu_0} + \mathbf{A}^{\perp}\cdot\nabla\times\mathbf{M} \right) d^3\mathbf{r} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{s,\alpha} m_{s\alpha} \dot{\mathbf{x}}_{s\alpha}^2 + \int \left( \frac{\varepsilon_0|\dot{\mathbf{A}}^{\parallel}+\nabla\phi|^2}{2} - \dot{\mathbf{A}}^{\perp}\cdot\mathbf{P}^{\perp} - \dot{\mathbf{A}}^{\parallel}\cdot\mathbf{P}^{\parallel} - \rho\phi \right) d^3\mathbf{r}\end{aligned}$$

Ce nouveau lagrangien étant indépendant de  $\mathbf{A}^{\parallel}$  (mais pas  $\dot{\mathbf{A}}^{\parallel}$ ), nous avons, à l'aide des équations d'Euler-Lagrange (1.24),

<sup>4</sup> Dans l'espace réciproque (Fourier), la partie transversale d'un champ vectorielle est parallèle au vecteur d'onde et la partie longitudinale est lui perpendiculaire.

$$\partial_t \frac{\delta L_1}{\delta \dot{\mathbf{A}}^\parallel} = \partial_t [\varepsilon_0 (\dot{\mathbf{A}}^\parallel + \nabla \varphi) - \mathbf{P}^\parallel] = \frac{\delta L_1}{\delta \dot{\mathbf{A}}^\parallel} = 0 \quad (1.34)$$

Rappelant la définition (1.8), nous voyons que la partie transversale de l'induction électrique

$$\varepsilon_0 (\dot{\mathbf{A}}^\parallel + \nabla \varphi) - \mathbf{P}^\parallel = -\varepsilon_0 \mathbf{E}^\parallel - \mathbf{P}^\parallel = -\mathbf{D}^\parallel \quad (1.35)$$

est indépendant du temps,  $\dot{\mathbf{D}}^\parallel = 0$ . Nous pouvons maintenant éliminer  $\dot{\mathbf{A}}^\parallel$  de  $L_1$  comme montré ci-dessous :

$$\begin{aligned} L_R &= L_1 - \frac{d}{dt} \int \frac{\delta L_1}{\delta \dot{\mathbf{A}}^\parallel} \cdot \mathbf{A}^\parallel d^3 \mathbf{r} = L_1 + \int \mathbf{D}^\parallel \cdot \dot{\mathbf{A}}^\parallel d^3 \mathbf{r} \\ &= \int \left( \frac{|\varepsilon_0 \dot{\mathbf{A}}^\perp|^2}{2\varepsilon_0} - \frac{|\nabla \times \mathbf{A}^\perp|^2}{2\mu_0} + \mathbf{A}^\perp \cdot \nabla \times \mathbf{M} - \dot{\mathbf{A}}^\perp \cdot \mathbf{P}^\perp - \frac{|\mathbf{P}^\parallel - \mathbf{D}^\parallel|^2}{2\varepsilon_0} \right) d^3 \mathbf{r} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{s,\alpha} m_{s\alpha} \dot{\mathbf{x}}_{s\alpha}^2 - \int \varphi [\nabla \cdot (\mathbf{P}^\parallel - \mathbf{D}^\parallel) + \rho] d^3 \mathbf{r} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Ce que nous venons d'obtenir est appelé le Routhien [11]. Encore une fois, appliquant les équations d'Euler-Lagrange, nous avons pour le potentiel scalaire

$$\frac{\delta L_R}{\delta \varphi} = -\nabla \cdot (\mathbf{P}^\parallel - \mathbf{D}^\parallel) - \rho = \partial_t \frac{\delta L_R}{\delta \dot{\varphi}} = 0 \quad (1.37)$$

En fait, le potentiel scalaire devient ici un multiplicateur de Lagrange [11], qui nous amène à une condition de contrainte sur la variation. Le dernier terme de (1.36) disparaît donc. Compte tenu de (1.31), nous avons  $\mathbf{D}^\parallel = 0$ . L'induction électrique est transversale, ce qui résulte du fait qu'il n'y pas de charge libre. Finalement, le Routhien s'écrit sous la forme

$$L_R = \int \left( \frac{|\varepsilon_0 \dot{\mathbf{A}}^\perp|^2}{2\varepsilon_0} - \frac{|\nabla \times \mathbf{A}^\perp|^2}{2\mu_0} + \mathbf{M} \cdot \nabla \times \mathbf{A}^\perp - \dot{\mathbf{A}}^\perp \cdot \mathbf{P}^\perp \right) d^3 \mathbf{r} + \frac{1}{2} \sum_{s,\alpha} m_{s\alpha} \dot{\mathbf{x}}_{s\alpha}^2 - V_{\text{Coulomb}} \quad (1.38)$$

où

$$V_{\text{Coulomb}} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int |\mathbf{P}^\parallel|^2 d^3 \mathbf{r} \quad (1.39)$$

est l'interaction de Coulomb entre les particules. Cela peut être vérifié en résolvant l'équation de Poisson (1.37). Ceci dit, il est connu qu'il y a également des singularités non-physiques dans  $V_{\text{Coulomb}}$  interprétées comme les actions sur les particules venant du champ créé par les

particules elles-mêmes. Ce problème, dû à la description ponctuelle des particules, ne pose pas de problème dans le cadre de l'optique macroscopique et sera ignoré dans la suite. Il mérite d'être mentionné que ce Routhien, indépendant du choix de jauge, n'est qu'une fonctionnelle du champ  $\mathbf{EM}$  (vecteur-potentielle) transversal.

Maintenant, nous pouvons trouver directement les moments conjugués au potentiel vecteur transversal par

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\delta L_R}{\delta \dot{\mathbf{A}}^\perp} = \epsilon_0 \dot{\mathbf{A}}^\perp - \mathbf{P}^\perp = -\epsilon_0 \mathbf{E}^\perp - \mathbf{P}^\perp = -\mathbf{D}^\perp = -\mathbf{D} \quad (1.40)$$

où nous avons utilisé la relation :  $\mathbf{E}^\perp = -\dot{\mathbf{A}}^\perp$ . Il est intéressant de noter que ce résultat coïncide avec (1.14). Les moments conjugués aux coordonnées des particules sont également trouvés sous la forme

$$\mathbf{p}_{s\alpha} = \nabla_{\dot{\mathbf{x}}_{s\alpha}} L_R = m_{s\alpha} \dot{\mathbf{x}}_{s\alpha} + \int \mathbf{N}_{s\alpha} \times \mathbf{B} d^3 \mathbf{r} \quad (1.41)$$

où le champ  $\mathbf{N}_{s\alpha}(\mathbf{r})$  est défini par

$$\mathbf{N}_{s\alpha}(\mathbf{r}) = -e_{s\alpha} (\mathbf{x}_{s\alpha} - \mathbf{R}_s) \int_0^1 \frac{m_{s\alpha} + (M_s - m_{s\alpha})\mu}{M_s} \delta[(\mathbf{r} - \mathbf{R}_s) - \mu(\mathbf{x}_{s\alpha} - \mathbf{R}_s)] d\mu - \frac{Q_s}{N_s} \mathbf{R}_s \int_0^1 \mu \delta(\mathbf{r} - \mu \mathbf{R}_m) d\mu \quad (1.42)$$

avec  $N_s$  étant le nombre de particules dans l'assemblée  $s$ . Avec ces résultats, nous construisons le Hamiltonien comme

$$\begin{aligned} H &= \int \mathbf{\Pi} \cdot \dot{\mathbf{A}} d^3 \mathbf{r} + \sum_{s,\alpha} \mathbf{p}_{s\alpha} \cdot \dot{\mathbf{x}}_{s\alpha} - L_R \\ &= \int \frac{\epsilon_0^{-1} |\mathbf{\Pi} + \mathbf{P}^\perp|^2 + \mu_0^{-1} |\mathbf{B}|^2}{2} d^3 \mathbf{r} + \sum_{s,\alpha} \frac{1}{2m_{s\alpha}} \left| \mathbf{p}_{s\alpha} - \int \mathbf{N}_{s\alpha} \times \mathbf{B} d^3 \mathbf{r} \right|^2 + \int \frac{|\mathbf{P}^\parallel|^2}{2\epsilon_0} d^3 \mathbf{r} \\ &= \int \left( \frac{|\mathbf{\Pi}|^2}{2\epsilon_0} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \right) d^3 \mathbf{r} + \sum_{s,\alpha} \frac{p_{s\alpha}^2}{2m_{s\alpha}} + \int \frac{|\mathbf{P}^\parallel|^2}{2\epsilon_0} d^3 \mathbf{r} + \int \left( \frac{\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{M}_1 \right) d^3 \mathbf{r} + \sum_{s,\alpha} \frac{\left| \int \mathbf{N}_{s\alpha} \times \mathbf{B} d^3 \mathbf{r} \right|^2}{2m_{s\alpha}} \end{aligned} \quad (1.43)$$

avec

$$\mathbf{M}_1 = \sum_{s,\alpha} \frac{\mathbf{p}_{s\alpha}}{m_{s\alpha}} \times \mathbf{N}_{s\alpha} \quad (1.44)$$

Ce hamiltonien est appelé comme l'hamiltonien multipolaire [11][12]. La première intégration est l'énergie totale du champ EM transversal ; le deuxième et le troisième sont l'énergie cinétique et l'énergie potentielle totale du matériau (particules) ; les deux derniers sont pour l'interaction champs-particules. Il est à noter dans ce hamiltonien que tout d'abord, il y a non seulement l'interaction transversale de Coulomb entre les particules, mais aussi l'interaction longitudinale. Ensuite, il n'y a que les champs EM transversaux qui interagissent avec la matière : les champs longitudinaux, qui ne peuvent pas exister dans l'espace libre, sont en fait un espèce de libertés dynamiques pour le matériau.

### 1.3.3 Quantification de l'interaction champ-matière

Notre système dynamique est prêt pour la quantification. Nous remplaçons les variables dynamiques par les opérateurs quantiques et imposons les relations de commutation sous la forme suivante, en représentation de Schrödinger :

$$[\hat{x}_{r\alpha,j}, \hat{p}_{s\beta,k}] = i\hbar \delta_{r\alpha,s\beta} \delta_{jk} \text{ et } [\hat{A}_j(\mathbf{r}), \hat{\Pi}_k(\mathbf{r}')] = i\hbar \delta_{jk}^\perp(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.45)$$

où  $\delta_{jk}^\perp$  est la fonction de Dirac transversale, qui est liée à la fonction de Dirac transversale généralisée (voir section 1.2.1) par

$$\delta_{jk}^\perp(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \stackrel{\varepsilon(\mathbf{r})=1}{=} \delta_{\varepsilon,jk}^\perp(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

et peut être définie directement par

$$\delta^\perp(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \nabla_{\mathbf{r}} \times \left( \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (1.46)$$

Il est à noter que les relations de commutation des opérateurs des champs (1.45) implique que nous pouvons toujours décomposer les champs en modes sous la forme

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_k \mathbf{A}_k [\hat{a}_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) + \hat{a}_k^\dagger \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r})] \text{ et } \hat{\mathbf{\Pi}}(\mathbf{r}) = i\hbar \sum_k \frac{w(\mathbf{r})}{2\mathbf{A}_k} [\hat{a}_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) - \hat{a}_k^\dagger \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r})] \quad (1.47)$$

où les opérateurs d'annihilation et de création satisfont les relations de commutation suivantes

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \quad (1.48)$$

$w(\mathbf{r})$  est une fonction de pondération réelle, et les fonctions de mode doivent former une base complète telle que

$$w(\mathbf{r}) \sum_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}') = \delta^\perp(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.49)$$

Le Hamiltonien multipolaire quantique s'écrit alors sous la forme

$$\hat{H} = \int \left( \frac{|\hat{\mathbf{P}}|^2}{2\epsilon_0} + \frac{|\hat{\mathbf{B}}|^2}{2\mu_0} \right) d^3\mathbf{r} + \sum_{s,\alpha} \frac{\hat{p}_{s\alpha}^2}{2m_{s\alpha}} + \int \frac{|\hat{\mathbf{P}}|^2}{2\epsilon_0} d^3\mathbf{r} + \int \left( \frac{\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{P}}}{\epsilon_0} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{M}}_1 \right) d^3\mathbf{r} + \sum_{s,\alpha} \frac{|\int \mathbf{N}_{s\alpha} \times \hat{\mathbf{B}} d^3\mathbf{r}|^2}{2m_{s\alpha}} \quad (1.50)$$

Nous devons mentionner que nous pouvons aussi obtenir un autre hamiltonien directement à partir du lagrangien (1.28). C'est l'hamiltonien de couplage minimal. Il a déjà été montré que ces deux hamiltoniens sont strictement équivalents [12]. Il y a deux principaux aspects intéressants de l'hamiltonien (1.53). D'abord, il est libre du choix de jauge. Ensuite, c'est que, quand l'ionisation est négligeable, nous avons approximativement

$$\int \frac{|\hat{\mathbf{P}}|^2}{2\epsilon_0} d^3\mathbf{r} \approx \sum_s \int \frac{|\hat{\mathbf{P}}_s|^2}{2\epsilon_0} d^3\mathbf{r} \quad (1.51)$$

Cela signifie que les recouvrements entre les polarisations moléculaires, fortement localisées, sont négligeables, et, qu'en fait, les moléculaires interagissent exclusivement en échangeant des photons transversaux [11].

Puisque dans (1.50), les intégrations sont sur tout l'espace réel, et que les opérateurs y sont hermitiens, nous pouvons transformer (1.50) en espace réciproque (transformée de Fourier) à l'aide du théorème de Parseval. Nous avons, par exemple,

$$\int \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \int \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{P}}(-\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} \quad (1.52)$$

Ce qui implique que nous pouvons décomposer ces intégrations en parties microscopique et macroscopique sous la forme

$$\int \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{P}} d^3\mathbf{r} = \int_{mac} \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{P}} d^3\mathbf{r} + \int_{mic} \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{P}} d^3\mathbf{r} \quad (1.53)$$

avec

$$\int_{mac} \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{P}} d^3\mathbf{r} = \int_{k < \frac{2\pi}{\Lambda_c}} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{P}}(-\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} \quad \text{et} \quad \int_{mic} \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{P}} d^3\mathbf{r} = \int_{k \geq \frac{2\pi}{\Lambda_c}} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{P}}(-\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} \quad (1.54)$$

où  $\Lambda_c$  est une largeur caractéristique qui est bien supérieure aux dimensions moléculaires,  $\Lambda_a$ , et bien inférieure aux longueurs d'ondes optiques  $\lambda$ ,  $\Lambda_a \ll \Lambda_c \ll \lambda$ . De cette manière, nous pouvons réécrire (1.50) sous la forme

$$\hat{H} = \hat{H}_{em}^{mac} + \hat{H}_{mic} + \hat{H}_{int} \quad (1.55)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{H}_{mic} &= \int_{mic} \frac{\epsilon_0^{-1} |\hat{\mathbf{\Pi}} + \hat{\mathbf{P}}|^2 + \mu_0^{-1} |\hat{\mathbf{B}}|^2}{2} d^3\mathbf{r} + \sum_{s,\alpha} \frac{1}{2m_{s\alpha}} \left| \hat{\mathbf{p}}_{s\alpha} - \int_{mic} \hat{\mathbf{N}}_{s\alpha} \times \hat{\mathbf{B}} d^3\mathbf{r} \right|^2 \\ \hat{H}_{em}^{mac} &= \int_{macro} \frac{\epsilon_0^{-1} |\hat{\mathbf{\Pi}}|^2 + \mu_0^{-1} |\hat{\mathbf{B}}|^2}{2} d^3\mathbf{r} \\ \hat{H}_{int} &= \frac{1}{\epsilon_0} \int \hat{\mathbf{\Pi}} \cdot \hat{\mathbf{P}} d^3\mathbf{r} + \frac{1}{2\epsilon_0} \int |\hat{\mathbf{P}}|^2 d^3\mathbf{r} \end{aligned} \quad (1.56)$$

où  $\hat{H}_{mic}$  est l'hamiltonien des mécaniques microscopiques ;  $\hat{H}_{em}^{mac}$  est celui du champ EM macroscopique libre ; et  $\hat{H}_{int}$  est celui d'interaction entre le champ EM macroscopique et le matériau. Nous supposons maintenant que le système microscopique  $\hat{H}_{mic}$  soit stable. C'est-à-dire qu'en absence d'interaction avec le champ EM macroscopique, les particules chargées et le champ EM microscopique peuvent constituer un matériau stable. C'est-à-dire aussi que les interactions de longues portées ( $\sim \Lambda_c$ ) entre les particules sont supposées négligeables. Il est à noter que nous avons négligé les interactions magnétiques au niveau macroscopique. Finalement, puisque dans l'espace réciproque, la commutation (1.45) peut s'écrire sous la forme

$$[\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}), \hat{\mathbf{\Pi}}(\mathbf{k}')] = i\hbar \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \right) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (1.57)$$

nous avons

$$[\hat{H}_{em}^{mac}, \hat{H}_{mic}] = 0 \quad (1.58)$$

### 1.3.4 Théorie complètement quantifiée de l'optique nonlinéaire

Les opérateurs dans (1.55) sont en représentation de Schrödinger. Dans cette représentation, les états quantiques du système évoluent dans le temps comme

$$i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (1.59)$$

et les opérateurs ne varient pas en temps. La dépendance temporelle des grandeurs physiques est due à celle des états quantiques. Il y a une autre façon de représenter la réalité physique. C'est la représentation d'Heisenberg, où les états n'évoluent plus en temps et les opérateurs sont transformés par une transformation unitaire. Quand l'hamiltonien du système ne dépend

pas explicitement du temps, ce qui est le cas pour notre système (1.55), cette transformation s'écrit sous la forme

$$\hat{O}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}t\right) \hat{O} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t\right) \quad (1.60)$$

et l'équation de mouvement pour les opérateurs d'Heisenberg est donnée par

$$\partial_t \hat{O}(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}(t)] \quad (1.61)$$

Alors, nous pouvons trouver les équations de mouvement pour les opérateurs des variables dynamiques du champ **EM** sous la forme

$$\partial_t \hat{\mathbf{A}}^\perp = \varepsilon_0^{-1} (\hat{\mathbf{\Pi}} + \hat{\mathbf{P}}^\perp) \text{ et } \partial_t \hat{\mathbf{\Pi}} = -\mu_0^{-1} \nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{A}}^\perp \quad (1.62)$$

Utilisant les relations :

$$\hat{\mathbf{E}}^\perp = -\partial_t \hat{\mathbf{A}}^\perp \text{ et } \hat{\mathbf{D}}^\parallel = \varepsilon_0 \hat{\mathbf{E}}^\parallel + \hat{\mathbf{P}}^\parallel = 0 \quad (1.63)$$

nous trouvons finalement l'équation de propagation pour l'opérateur du champ électrique dans le milieu macroscopique non-magnétique

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{E}} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \hat{\mathbf{E}} = -\mu_0 \partial_t^2 \hat{\mathbf{P}} \quad (1.64)$$

Il est utile d'introduire une autre représentation, la représentation d'interaction, lors que le hamiltonien du système peut être décomposé en deux parties comme suivant

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} \quad (1.65)$$

et que  $\hat{H}_{int}$  peut être considéré comme une petite perturbation sur le système décrit originalement par  $\hat{H}_0$ . Dans cette représentation, les opérateurs sont en fait les opérateurs d'Heisenberg du système non-perturbé. Quand  $\hat{H}_0$  ne dépend pas du temps, nous avons

$$\hat{O}^I(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right) \hat{O} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right) \quad (1.66)$$

et les états évoluent comme

$$i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle^I = \hat{H}_{int}^I(t) |\psi(t)\rangle^I \quad (1.67)$$

où l'exposant "I" est pour la représentation d'interaction, et  $\hat{H}_{int}^I(t)$  est défini par

$$\hat{H}_{int}^1(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right) \hat{H}_{int} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t\right) \quad (1.68)$$

Maintenant, nous pouvons définir un opérateur d'évolution reliant l'état à l'instant  $t_0$  à celui à  $t$  sous la forme

$$|\psi(t)\rangle^I = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle^I \quad (1.69)$$

A l'aide de (1.70), cet opérateur est trouvé comme

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) &= \mathbf{T} \left[ \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t ds \hat{H}_{int}^1(s) \right] \right] \\ &= 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t ds_1 \hat{H}_{int}^1(s_1) + \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t ds_1 \int_{t_0}^{s_1} ds_2 \hat{H}_{int}^1(s_1) \hat{H}_{int}^1(s_2) \\ &\quad + \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^3 \int_{t_0}^t ds_1 \int_{t_0}^{s_1} ds_2 \int_{t_0}^{s_2} ds_3 \hat{H}_{int}^1(s_1) \hat{H}_{int}^1(s_2) \hat{H}_{int}^1(s_3) + \dots \end{aligned} \quad (1.70)$$

où  $\mathbf{T}(\ )$  signifie l'opération qui ordonne les opérateurs selon le temps (time-ordering), le plus récent à gauche. Voici quelques propriétés de cet opérateur

$$\hat{U}(t, t) \equiv 1, \quad \hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{U}(t_0, t) \quad \text{et} \quad \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t_0, t) = \hat{U}(t_0, t) \hat{U}^\dagger(t, t_0) = 1 \quad (1.71)$$

Avec ces définitions, nous pouvons montrer que les opérateurs d'Heisenberg sont liés aux opérateurs d'interaction par la relation [13]

$$\hat{O}(t) = \hat{U}(t_0, t) \hat{O}^I(t) \hat{U}(t, t_0) \quad (1.72)$$

Alors, nous avons une relation importante comme suivante

$$\hat{O}(t) = \hat{O}^I(t) + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \hat{U}(t_0, t_1) [\hat{H}_{int}^1(t_1), \hat{O}^I(t)] \hat{U}(t_1, t_0) \quad (1.73)$$

Pour la prouver, nous utilisons tout d'abord l'égalité

$$\int_{t_0}^t dt_1 \frac{\partial}{\partial t_1} [\hat{U}(t_0, t_1) \hat{O}^I(t) \hat{U}(t_1, t_0)] = \hat{U}(t_0, t) \hat{O}^I(t) \hat{U}(t, t_0) - \hat{U}(t_0, t_0) \hat{O}^I(t) \hat{U}(t_0, t_0) \quad (1.74)$$

et ensuite, à partir de (1.70)

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{int}^1(t) \hat{U}(t, t_0), \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t_0, t) = \frac{i}{\hbar} \hat{U}(t_0, t) \hat{H}_{int}^1(t). \quad (1.75)$$

Admettons que le hamiltonien d'interaction soit hermitien. Nous trouvons alors

$$\begin{aligned}
\hat{U}(t_0, t) \hat{O}^I(t) \hat{U}(t, t_0) &= \hat{O}^I(t) + \int_{t_0}^t dt_1 \frac{\partial}{\partial t_1} [\hat{U}(t_0, t_1) \hat{O}^I(t) \hat{U}(t_1, t_0)] \\
&= \hat{O}^I(t) + \int_{t_0}^t dt_1 \left[ \frac{\partial}{\partial t_1} \hat{U}(t_0, t_1) \hat{O}^I(t) \hat{U}(t_1, t_0) + \hat{U}(t_0, t_1) \hat{O}^I(t) \frac{\partial}{\partial t_1} \hat{U}(t_1, t_0) \right] \\
&= \hat{O}^I(t) + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \hat{U}(t_0, t_1) [\hat{H}_{int}^I(t_1), \hat{O}^I(t)] \hat{U}(t_1, t_0)
\end{aligned} \tag{1.76}$$

Revenons à notre système dynamique d'interaction champ-matière. Nous considérons que le système non-perturbé est constitué de la partie microscopique pour le matériau et la partie macroscopique pour le champ **EM**. Nous avons

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_{em}^{mac} + \hat{H}_{mic}, \text{ avec } [\hat{H}_{em}^{mac}, \hat{H}_{mic}] = 0 \tag{1.77}$$

et

$$\hat{H}_{int}^I(t) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \mathbf{\Pi}^I(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{P}}^I(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} + \frac{1}{2\epsilon_0} \int |\hat{\mathbf{P}}^I(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r} \tag{1.78}$$

Dans (1.78), les variables des champs sont les variables macroscopiques. Pour la densité de polarisation, si nous négligeons l'ionisation, c'est-à-dire que  $Q_s = 0$  dans (1.29), nous avons

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{k}) = \sum_s \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_s) \sum_{\alpha} e_{s\alpha} (\mathbf{x}_{s\alpha} - \mathbf{R}_s) \frac{1 - \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_{s\alpha} - \mathbf{R}_s)]}{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_{s\alpha} - \mathbf{R}_s)} \tag{1.79}$$

D'après la discussion dans la section précédente, nous avons  $[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_{s\alpha} - \mathbf{R}_s)] \ll 1$  pour les champs macroscopiques. (1.79) peut donc se simplifier sous la forme

$$\hat{\mathbf{P}}_{dip}(\mathbf{k}) = \sum_s \hat{\mathbf{d}}_s \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_s), \text{ avec } \hat{\mathbf{d}}_s = \sum_{\alpha} e_{s\alpha} \hat{\mathbf{x}}_{s\alpha}. \tag{1.80}$$

ce qui est donc l'approximation dipolaire.

Plaçons maintenant  $t_0$  à  $-\infty$ , où nous lançons adiabatiquement l'interaction et nous avons  $|\psi(-\infty)\rangle^I = |\psi(-\infty)\rangle$ . Pour que ce processus ne pose pas de problème de convergence, nous devons utiliser l'approximation adiabatique [13] constituant à multiplier le hamiltonien d'interaction par une fonction temporelle d'amortissement sous la forme

$$\hat{H}_{int}^I(t) \rightarrow \hat{H}_{int}^I(t) \exp(-\epsilon|t|), \text{ avec } \epsilon \rightarrow 0_+ \tag{1.81}$$

Alors, utilisant (1.76), nous pouvons trouver la polarisation macroscopique sous la forme

$$\begin{aligned}\hat{P}_\mu(\mathbf{r}, t) &= \hat{P}_\mu^1(\mathbf{r}, t) + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt_1 \hat{U}(-\infty, t_1) [\hat{H}_{\text{int}}^1(t_1), \hat{P}_\mu^1(\mathbf{r}, t)] \hat{U}(t_1, -\infty) \\ &= \hat{P}_\mu^1(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{i\hbar} \sum_{\alpha_1} \int d^3\mathbf{r}_1 \int_{-\infty}^t dt_1 \frac{1}{2} \hat{E}_{\alpha_1}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{U}(-\infty, t_1) [\hat{P}_{\alpha_1}^1(\mathbf{r}_1, t_1), \hat{P}_\mu^1(\mathbf{r}, t)] \hat{U}(t_1, -\infty) \\ &\quad + \frac{1}{i\hbar} \sum_{\alpha_1} \int d^3\mathbf{r}_1 \int_{-\infty}^t dt_1 \frac{1}{2} \hat{U}(-\infty, t_1) [\hat{P}_{\alpha_1}^1(\mathbf{r}_1, t_1), \hat{P}_\mu^1(\mathbf{r}, t)] \hat{U}(t_1, -\infty) \hat{E}_{\alpha_1}(\mathbf{r}_1, t_1)\end{aligned}\quad (1.82)$$

où nous avons utilisé  $[\hat{D}_{\alpha_1}^1(\mathbf{r}_1, t_1), \hat{P}_\mu^1(\mathbf{r}, t)] = 0$  et les égalités suivantes

$$\hat{U}(-\infty, t_1) \hat{E}_{\alpha_1}^1(\mathbf{r}_1, t_1) = \hat{E}_{\alpha_1}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{U}(-\infty, t_1) \quad \text{et} \quad \hat{E}_{\alpha_1}^1(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{U}(t_1, -\infty) = \hat{U}(t_1, -\infty) \hat{E}_{\alpha_1}(\mathbf{r}_1, t_1) \quad (1.83)$$

Pour tout opérateur de Hilbert  $\hat{C}$ , nous définissons un opérateur de Liouville [14], affecté du sous indice « + »,

$$\hat{C}_+ \hat{O} = \frac{1}{2} (\hat{C} \hat{O} + \hat{O} \hat{C}) \quad (1.84)$$

Alors, nous pouvons réécrire (1.82) sous la forme

$$\hat{P}_\mu(\mathbf{r}, t) = \hat{P}_\mu^1(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{i\hbar} \sum_{\alpha_1} \int d^3\mathbf{r}_1 \int_{-\infty}^t dt_1 \hat{E}_{\alpha_1,+}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{U}(-\infty, t_1) [\hat{P}_{\alpha_1}^1(\mathbf{r}_1, t_1), \hat{P}_\mu^1(\mathbf{r}, t)] \hat{U}(t_1, -\infty) \quad (1.85)$$

Réitérant le processus ci-dessus en développant le terme  $\hat{U}(-\infty, t_m) [\hat{P}_{\alpha_m}^1(\mathbf{r}_m, t_m), [\bullet]] \hat{U}(t_m, -\infty)$  à l'aide de (1.76), nous arrivons à un développement en série sous la forme

$$\hat{P}_\mu(\mathbf{r}, t) = \hat{P}_\mu^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \hat{P}_\mu^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \hat{P}_\mu^{(2)}(\mathbf{r}, t) + \hat{P}_\mu^{(3)}(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (1.86)$$

où  $\hat{P}_\mu^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \hat{P}_\mu^1(\mathbf{r}, t)$  et la  $n$ ième polarisation est donnée par

$$\begin{aligned}\hat{P}_\mu^{(n)}(\mathbf{r}, t) &= \int d^3\mathbf{r}_1 \cdots d^3\mathbf{r}_n \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n \hat{E}_{\alpha_1,+}(\mathbf{r}_1, \tau_1) \hat{E}_{\alpha_2,+}(\mathbf{r}_2, \tau_2) \cdots \hat{E}_{\alpha_n,+}(\mathbf{r}_n, \tau_n) \\ &\quad \times \hat{G}_{\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \mu}^{(n)}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{n-1}, \dots, \mathbf{r}_1; \tau_n, \tau_{n-1}, \dots, \tau_1; \mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad (1.87)$$

avec la convention d'Einstein adoptée : la sommation se fait automatiquement sur les sous indices répétées; et l'opérateur de Green de  $n$ -points est donné par

$$\begin{aligned}\hat{G}_{\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \mu}^{(n)}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{n-1}, \dots, \mathbf{r}_1; \tau_n, \tau_{n-1}, \dots, \tau_1; \mathbf{r}, t) \\ = \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^n \theta(t - \tau_1) \theta(\tau_1 - \tau_2) \cdots \theta(\tau_{n-1} - \tau_n) [\hat{P}_{\alpha_n}^1(\mathbf{r}_n, \tau_n), [\cdots, [\hat{P}_{\alpha_2}^1(\mathbf{r}_2, \tau_2), [\hat{P}_{\alpha_1}^1(\mathbf{r}_1, \tau_1), \hat{P}_\mu^1(\mathbf{r}, t)]]]]\end{aligned}$$

(1.88)

$\theta(t)$  étant la fonction de Heaviside

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (1.89)$$

Nous voyons que l'opérateur de Green de  $n$ -points est hermitien et causal. Finalement, nous pouvons réécrire (1.87) dans le domaine fréquentiel sous la forme

$$\begin{aligned} \hat{P}_\mu^{(n)}(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^3\mathbf{r}_1 \cdots d^3\mathbf{r}_n \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_n \underline{\hat{E}}_{\alpha_1,+}(\mathbf{r}_1, \omega_1) \underline{\hat{E}}_{\alpha_2,+}(\mathbf{r}_2, \omega_2) \cdots \underline{\hat{E}}_{\alpha_n,+}(\mathbf{r}_n, \omega_n) \\ & \times \underline{\hat{G}}_{\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \mu}^{(n)}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{n-1}, \cdots, \mathbf{r}_1; \omega_n, \omega_{n-1}, \cdots, \omega_1; \mathbf{r}, t) \exp\left(-i \sum_{l=1}^n \omega_l t\right) \end{aligned} \quad (1.90)$$

avec

$$\underline{\hat{E}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} [\underline{\hat{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) + \underline{\hat{E}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) \exp(i\omega t)] d\omega \quad (1.91)$$

et

$$\begin{aligned} & \underline{\hat{G}}_{\alpha_n \cdots \alpha_1 \mu}^{(n)}(\mathbf{r}_n, \cdots, \mathbf{r}_1; \omega_n, \cdots, \omega_1; \mathbf{r}, t) \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n \underline{\hat{G}}_{\alpha_n \cdots \alpha_1 \mu}^{(n)}(\mathbf{r}_n, \cdots, \mathbf{r}_1; \tau_n, \cdots, \tau_1; \mathbf{r}, t) \exp\left(i \sum_{l=1}^n \omega_l (t - \tau_l)\right) \end{aligned} \quad (1.92)$$

### 1.3.5 Comparaison entre les théories semi-classique et quantique

Dans la théorie classique de l'optique non-linéaire, la relation la plus générale entre la densité de polarisation du  $n$ ème ordre et les champs électriques doit s'écrire sous la forme [15]

$$\begin{aligned} P_\mu^{(n)}(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^3\mathbf{r}_1 \cdots d^3\mathbf{r}_n \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n \underline{E}_{\mu_1}(\mathbf{r}_1, \omega_1) \underline{E}_{\mu_2}(\mathbf{r}_2, \omega_2) \cdots \underline{E}_{\mu_n}(\mathbf{r}_n, \omega_n) \\ & \times \mathcal{E}_0 \chi_{\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \mu}^{(n)}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{n-1}, \cdots, \mathbf{r}_1; \omega_n, \omega_{n-1}, \cdots, \omega_1; \mathbf{r}) \exp\left(-i \sum_{l=1}^n \omega_l t\right) \end{aligned} \quad (1.93)$$

où  $\chi_{\alpha_n \cdots \alpha_1 \mu}^{(n)}$  est la susceptibilité du  $n$ ème ordre. La transformée de Fourier inverse de la susceptibilité doit être invariant par translation temporelle et donc indépendant du temps absolu. Elle doit aussi être causale et réelle, car la polarisation et le champ électrique sont réels. Cela donne naissance de la relation de Kramers-Kronig. Nous voyons que (1.90) est en fait une version quantifiée de cette relation.

Pour calculer la susceptibilité, il existe une approche semi-classique, où le matériau est traité quantiquement et que le champ optique est considéré comme classique. L'hamiltonien total du système perturbé s'écrit sous la forme

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}(t) \quad (1.94)$$

où  $\hat{H}_0$  est l'hamiltonien du système non-perturbé (matériau), indépendant du temps, et l'hamiltonien de la perturbation est donné par [15]

$$\hat{H}_{int}(t) = -\int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (1.95)$$

où  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  est le champ électrique classique macroscopique. Nous savons que l'espérance quantique de la densité de polarisation est donné par

$$P_\mu(\mathbf{r}, t) = \text{tr}[\hat{\rho}(t)\hat{P}_\mu(\mathbf{r})] \quad (1.96)$$

où  $\text{tr}[\ ]$  désigne la trace et que  $\hat{\rho}(t)$  est l'opérateur de densité en représentation de Schrödinger. L'équation de mouvement de ce dernier est donnée par

$$\partial_t \hat{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \quad (1.97)$$

Nous supposons que la perturbation soit lancée adiabatiquement à l'instant  $-\infty$ , tout comme dans la section précédente. Nous supposons aussi que le système soit initialement dans l'équilibre thermique. Nous avons alors  $\hat{\rho}(-\infty) = \hat{\rho}_{th}$ , avec

$$\hat{\rho}_{th} = \frac{\exp(-\hat{H}_0 / K_B T)}{\text{tr}[\exp(-\hat{H}_0 / K_B T)]} \quad (1.98)$$

où  $K_B$  et  $T$  sont respectivement le constant de Boltzmann et la température. Les calculs sur l'opérateur de densité et l'espérance (1.96) se trouvent dans les publications classiques [15], et nous n'allons pas les exposer ici. Nous pouvons finalement trouver (1.93) avec

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \chi_{\alpha_n \dots \alpha_1 \mu}^{(n)}(\mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_1; \omega_n, \dots, \omega_1; \mathbf{r}) &= \left\langle \hat{G}_{\alpha_n \dots \alpha_1 \mu}^{(n)}(\mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_1; \omega_n, \dots, \omega_1; \mathbf{r}) \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{G}_{\alpha_n \dots \alpha_1 \mu}^{(n)}(\mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_1; \omega_n, \dots, \omega_1; \mathbf{r}, t) \right\rangle \\ &= \text{tr} \left[ \hat{\rho}_{th} \hat{G}_{\alpha_n \dots \alpha_1 \mu}^{(n)}(\mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_1; \omega_n, \dots, \omega_1; \mathbf{r}, t) \right] \end{aligned} \quad (1.99)$$

où  $\hat{G}_{\alpha_n \dots \alpha_1 \mu}^{(n)}$  est identique à (1.88). Nous constatons que l'espérance de l'opérateur de Green ne dépend pas du temps. Ceci peut être vérifié facilement en utilisant la relation :  $\text{tr}(\hat{B}\hat{C}) = \text{tr}(\hat{C}\hat{B})$ .

Revenons à notre modèle tout quantifié. En représentation de Schrödinger, la densité de polarisation ne dépend que des variables dynamiques du matériau. Compte tenu que  $[\hat{H}_{em}^{mac}, \hat{H}_{mic}] = 0$ , nous avons

$$\mathbf{P}^I(\mathbf{r}, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{mic} t\right) \mathbf{P}(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{mic} t\right) \quad (1.100)$$

Nous supposons que le matériau soit en équilibre thermique en absence de perturbations. Alors, son opérateur de densité est donné par

$$\hat{\rho}_{th} = \frac{\exp(-\hat{H}_{mic} / K_B T)}{\text{tr}[\exp(-\hat{H}_{mic} / K_B T)]} \quad (1.101)$$

Si nous substituons  $\hat{H}_{mic}$  par  $\hat{H}_0$  et  $\hat{E}_{\alpha,+}(\mathbf{r})$  par  $\underline{E}_{\alpha}(\mathbf{r}, t)$  dans (1.93), nous obtenons donc le résultat semi-classique. Il est à noter que l'hamiltonien d'interaction semi-classique (1.95) n'a pas vraiment de preuve théorique stricte, bien que largement adopté. Dans [17], l'hamiltonien de couplage minimal est utilisé, et il se trouve que la densité de polarisation n'est qu'une réponse du champ électronique transversal. Si utilisant directement l'hamiltonien multipolaire (1.50), c'est-à-dire de considérer le 4<sup>ème</sup> terme de (1.50) comme l'hamiltonien de perturbation, nous pouvons constater que la densité de polarisation est une réponse de l'induction électronique, qui est aussi transversale. Alors, nous voyons que l'hamiltonien d'interaction semi-classique (1.95) origine en fait de l'hamiltonien d'interaction entre le champ macroscopique et le milieu (1.78).

Puisque l'opérateur de Green peut se décomposer en parties classique et quantique sous la forme

$$\begin{aligned} & \hat{G}_{\alpha_n \dots \alpha_1 \mu}^{(n)}(\mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_1; \omega_n, \dots, \omega_1; \mathbf{r}, t) \\ &= \varepsilon_0 \mathcal{X}_{\alpha_n \dots \alpha_1 \mu}^{(n)}(\mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_1; \omega_n, \dots, \omega_1; \mathbf{r}) + \varepsilon_0 \Delta \hat{\mathcal{X}}_{\alpha_n \dots \alpha_1 \mu}^{(n)}(\mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_1; \omega_n, \dots, \omega_1; \mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (1.102)$$

avec  $\Delta \hat{\mathcal{X}}_{\alpha_n \dots \alpha_1 \mu}^{(n)}$  qui dépend du temps et représente les fluctuations quantiques du matériau, nous pouvons écrire

$$\hat{P}_{\mu}^{(n)}(\mathbf{r}, t) = \hat{P}_{\mu}^{(n)}(\mathbf{r}, t) + \Delta \hat{P}_{\mu}^{(n)}(\mathbf{r}, t) \quad (1.103)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\mu}^{(n)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_n \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_n \underline{\hat{E}}_{\alpha_1,+}(\mathbf{r}_1, \omega_1) \dots \underline{\hat{E}}_{\alpha_{n-1},+}(\mathbf{r}_{n-1}, \omega_{n-1}) \underline{\hat{E}}_{\alpha_n}(\mathbf{r}_n, \omega_n) \\ &\quad \times \varepsilon_0 \mathcal{X}_{\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \mu}^{(n)}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{n-1}, \dots, \mathbf{r}_1; \omega_n, \omega_{n-1}, \dots, \omega_1; \mathbf{r}) \exp\left(-i \sum_{l=1}^n \omega_l t\right) \end{aligned}$$

(1.104)

et

$$\begin{aligned} \Delta\hat{P}_\mu^{(n)}(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^3\mathbf{r}_1 \cdots d^3\mathbf{r}_n \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_n \hat{E}_{\alpha_1,+}(\mathbf{r}_1, \omega_1) \hat{E}_{\alpha_2,+}(\mathbf{r}_2, \omega_2) \cdots \hat{E}_{\alpha_n,+}(\mathbf{r}_n, \omega_n) \\ & \times \varepsilon_0 \Delta\hat{\chi}_{\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \mu}^{(n)}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{n-1}, \cdots, \mathbf{r}_1; \omega_n, \omega_{n-1}, \cdots, \omega_1; \mathbf{r}, t) \exp\left(-i \sum_{l=1}^n \omega_l t\right) \end{aligned} \quad (1.105)$$

Nous remarquons que  $\hat{P}_\mu^{(n)}$  est en fait le  $n$ ème ordre réponse du matériau au champ électrique et  $\Delta\hat{P}_\mu^{(n)}$  est la partie du battement des fluctuations quantiques du  $n$ ème ordre du matériau (phonons) avec le champ électrique. Finalement, il est important de noter qu'il y a une différence significative entre (1.93) et (1.104). En fait, puisque les variables de champ classiques se commutent, il n'y a, comme montrée ci-dessous, que la partie symétrique de permutation qui contribue dans (1.93)

$$\begin{aligned} & \chi_{\alpha_n \cdots \alpha_p \cdots \alpha_q \cdots \alpha_1 \mu}^{(n)}(\mathbf{r}_n, \cdots, \mathbf{r}_p, \cdots, \mathbf{r}_q, \cdots, \mathbf{r}_1; \omega_n, \cdots, \omega_p, \cdots, \omega_q, \cdots, \omega_1; \mathbf{r}) \\ = & \chi_{\alpha_n \cdots \alpha_q \cdots \alpha_p \cdots \alpha_1 \mu}^{(n)}(\mathbf{r}_n, \cdots, \mathbf{r}_q, \cdots, \mathbf{r}_p, \cdots, \mathbf{r}_1; \omega_n, \cdots, \omega_q, \cdots, \omega_p, \cdots, \omega_1; \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.106)$$

où les arguments et les indices spatiales sont collectivement échangés. Pour (1.104), par contre, cette symétrie n'existe plus, car les opérateurs de champ ne commutent pas.

#### 1.4 Bruit quantique en optique linéaire et théorème de fluctuation-dissipation

A titre d'exemple d'application des résultats obtenus dans la section précédente, nous allons déduire le formulaire de Kubo et le théorème de fluctuation-dissipation dans le cadre d'optique linéaire [13][17][18]. L'application de ces résultats dans les fibres optiques à silice sera le sujet des chapitres suivants. Au 1<sup>er</sup> ordre, la densité de polarisation est la somme de deux termes

$$\hat{P}_\mu(\mathbf{r}, t) = \hat{P}_\mu^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \Delta\hat{P}_\mu(\mathbf{r}, t) \quad (1.107)$$

où le 1<sup>er</sup> est la réponse linéaire du milieu au champ et le 2<sup>ème</sup> représente les fluctuations quantiques du milieu indépendantes du champ. Nous avons

$$\hat{P}_\mu(\mathbf{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int d^3\mathbf{r}_1 d\omega \chi_{\alpha_1 \mu}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \omega, \mathbf{r}) \hat{E}_{\alpha_1}(\mathbf{r}_1, \omega) \exp(-i\omega t) \text{ et } \Delta\hat{P}_\mu(\mathbf{r}, t) = \hat{P}_\mu^{(0)}(\mathbf{r}, t) \quad (1.108)$$

Nous supposons que le milieu diélectrique est isotrope pour simplification, c'est-à-dire,

$$\chi_{\alpha\mu}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \omega_1, \mathbf{r}) = \chi(\mathbf{r}, \omega_1) \delta_{\alpha\mu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \quad (1.109)$$

La relation constitutive quantique entre l'induction et le champ électrique s'écrit alors cette fois sous la forme

$$\hat{D}_{\mu}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 [1 + \chi(\mathbf{r}, \omega)] \hat{E}_{\mu}(\mathbf{r}, \omega) + \Delta \hat{P}_{\mu}(\mathbf{r}, \omega) \quad (1.110)$$

où le dernier terme reflète la liberté dynamique du milieu. ce résultat est largement reconnu [3][8][9][13].

D'après la section précédente, la susceptibilité du 1<sup>er</sup> ordre peut s'exprimer en terme de commutation des fluctuations quantiques comme

$$\chi_{\alpha\mu}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{i\hbar\varepsilon_0} \int_0^{+\infty} d\tau \langle [\Delta \hat{P}_{\alpha}(\mathbf{r}_1, 0), \Delta \hat{P}_{\mu}(\mathbf{r}, \tau)] \rangle \exp(i\omega\tau) \quad (1.111)$$

qui est justement la formule de Kubo [18]. La partie imaginaire de la susceptibilité peut alors être trouvée sous la forme

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\mu}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \omega, \mathbf{r}) - [\chi_{\mu\alpha}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \omega, \mathbf{r})]^* &= 2i \operatorname{Im} \chi(\mathbf{r}, \omega_1) \delta_{\alpha\mu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \\ &= \frac{1}{i\hbar\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \langle [\Delta \hat{P}_{\alpha}(\mathbf{r}_1, 0), \Delta \hat{P}_{\mu}(\mathbf{r}, \tau)] \rangle \exp(i\omega\tau) \end{aligned} \quad (1.112)$$

Cela implique

$$\begin{aligned} \langle [\Delta \hat{P}_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \omega_1), \Delta \hat{P}_{\mu}^{\dagger}(\mathbf{r}_2, \omega_2)] \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \langle [\Delta \hat{P}_{\alpha}(\mathbf{r}_1, t_1), \Delta \hat{P}_{\mu}(\mathbf{r}_2, t_2)] \rangle \exp(i\omega_1 t_1 - i\omega_2 t_2) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \langle [\Delta \hat{P}_{\alpha}(\mathbf{r}_1, 0), \Delta \hat{P}_{\mu}(\mathbf{r}_2, t_2 - t_1)] \rangle \exp(i\omega_1 t_1 - i\omega_2 t_2) \\ &= 2\pi\delta(\omega_1 - \omega_2) \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \langle [\Delta \hat{P}_{\alpha}(\mathbf{r}_1, 0), \Delta \hat{P}_{\mu}(\mathbf{r}_2, t_2)] \rangle \exp(-i\omega_2 t_2) \\ &= 4\hbar\pi\varepsilon_0 \operatorname{Im} \chi(\mathbf{r}, \omega_1) \delta_{\alpha\mu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) \end{aligned} \quad (1.113)$$

Alors, si nous définissons un rapport des corrélations par

$$\frac{\langle \Delta \hat{P}_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \omega_1) \Delta \hat{P}_{\mu}^{\dagger}(\mathbf{r}_2, \omega_2) \rangle}{\langle \Delta \hat{P}_{\mu}^{\dagger}(\mathbf{r}_2, \omega_2) \Delta \hat{P}_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \omega_1) \rangle} = \frac{1 + \bar{n}(\mathbf{r}, \omega_1)}{\bar{n}(\mathbf{r}, \omega_1)} \quad (1.114)$$

en terme d'un nombre,  $\bar{n}(\mathbf{r}, \omega)$ , signifiant le nombre de photon [13], ces corrélations peuvent s'exprimer comme

$$\langle \Delta \hat{P}_\mu^\dagger(\mathbf{r}_2, \omega_2) \Delta \hat{P}_\alpha(\mathbf{r}_1, \omega_1) \rangle = 4\hbar\pi\epsilon_0 \bar{n}(\mathbf{r}, \omega) \text{Im} \chi(\mathbf{r}, \omega) \delta_{\alpha\mu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) \quad (1.115)$$

$$\langle \Delta \hat{P}_\alpha(\mathbf{r}_1, \omega_1) \Delta \hat{P}_\mu^\dagger(\mathbf{r}_2, \omega_2) \rangle = 4\hbar\pi\epsilon_0 [1 + \bar{n}(\mathbf{r}, \omega)] \text{Im} \chi(\mathbf{r}, \omega) \delta_{\alpha\mu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) \quad (1.116)$$

Ceci est justement le théorème de fluctuation-dissipation [13][18], reliant les corrélations des fluctuations quantiques à la partie imaginaire de la susceptibilité, ou encore le taux de dissipation de l'énergie, et le nombre de photon (boson) en équilibre thermique, qui sera discuté au chapitre 3,

$$\bar{n}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\exp(\hbar\omega / K_B T) - 1} \quad (1.117)$$

D'une manière plus générale, le théorème de fluctuation-dissipation relie l'irréversibilité aux fluctuations. Ici, l'irréversibilité est dans le domaine temporel, c'est-à-dire plus concrètement  $\chi(\mathbf{r}, \omega) \neq \chi(\mathbf{r}, -\omega)$ , ou encore  $\text{Im} \chi(\mathbf{r}, \omega) \neq 0$ . Comme illustré sur la figure ci-dessous, quand le sous-système, qui nous intéresse, est en interaction avec un réservoir d'énergie initialement en équilibre thermique, à travers les mécanismes irréversibles de dissipation d'énergie (amplification / atténuation), ses cohérences internes se réduisent à cause des fluctuations couplées du réservoir.

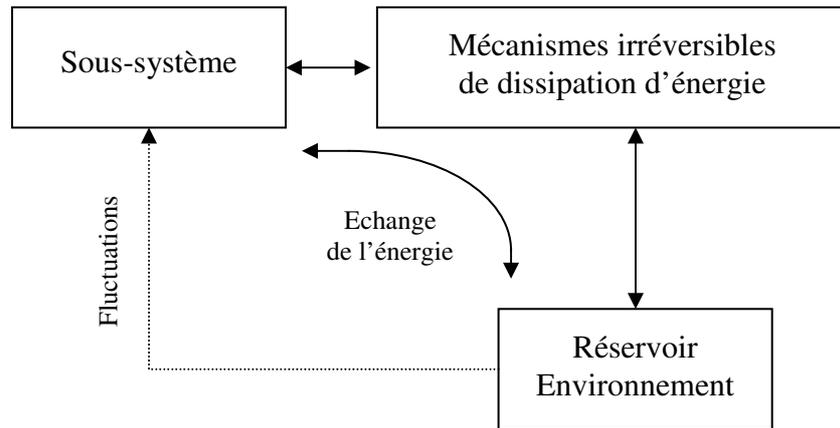


Figure 1.1 Illustration schématique d'un système dissipatif

Finalement, afin d'évaluer les fonctions de corrélations d'ordre supérieur à deux, nous pouvons faire appel au théorème de Wick de la thermodynamique [13], qui dit que : si l'hamiltonien du système est quadratique vis à vis des opérateurs de création et d'annihilation (oscillateurs harmoniques),

- Les espérances quantiques des produits de toute paire d'opérateurs d'annihilation, de toute paire d'opérateurs de création et de toute séquence d'un nombre impair d'opérateurs de création et/ou d'annihilation mélangés sont nuls.
- L'espérance quantique du produit de toute séquence d'un nombre pair d'opérateurs de création et/ou d'annihilation mélangés peut s'écrire comme la somme sur toutes les possibilités d'apparier les opérateurs dans la séquence, en conservant au sein de chaque paire l'ordre initial. Par exemple, nous avons

$$\langle \hat{f}_1 \hat{f}_2 \hat{f}_3 \hat{f}_4 \rangle = \langle \hat{f}_1 \hat{f}_2 \rangle \langle \hat{f}_3 \hat{f}_4 \rangle + \langle \hat{f}_1 \hat{f}_3 \rangle \langle \hat{f}_2 \hat{f}_4 \rangle + \langle \hat{f}_1 \hat{f}_4 \rangle \langle \hat{f}_2 \hat{f}_3 \rangle \quad (1.118)$$

où  $\hat{f}_i$  est l'opérateur de création ou d'annihilation.

En général, nous supposons que les électrons et noyaux sont approximativement dans les oscillations harmoniques en équilibre thermique. Ainsi, le théorème de Wick est aussi applicable à ces opérateurs.

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche nouvelle de la quantification du champ optique macroscopique, basée sur une description *ab initio* d'interaction champ-matière, dont l'hamiltonien est de type multipolaire (1.55). Grâce à l'utilisation de la relation (1.76) et l'hamiltonien de l'interaction entre le champ macroscopique et la matière (1.78), nous avons réussi à établir un modèle pour la description quantique du champ optique macroscopique. Les effets d'optique nonlinéaire ont été quantifiés à tous les ordres. Il est important de distinguer les mécaniques microscopique et macroscopique pour trouver correctement l'hamiltonien d'interaction (1.78). Les résultats principaux de ce chapitre sont (1.92) et (1.102)-(1.105), qui constituent une théorie de base assez générale de la description quantique du champ optique macroscopique que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

**Références:**

- [1] Peter D. Drummond, “Electromagnetic quantization in dispersive inhomogeneous nonlinear dielectrics,” *Phys. Rev. A* **42**, 6845-6857, 1990.
- [2] Roy J. Glauber and M. Lewenstein, “Quantum optics of dielectric media,” *Phys. Rev. A* **43**, 467-491, 1991.
- [3] Bruno Huttner and Stephen M. Barnett, “Quantization of electromagnetic field in dielectrics,” *Phys. Rev. A* **46**, 4306-4322, 1992.
- [4] Reza Matloob, Rodney Loudon, Stephen M. Barnett and John Jeffers, “Electromagnetic field quantization in absorbing dielectrics,” *Phys. Rev. A* **52**, 4823-4838, 1995.
- [5] Lu-Ming Duan and Guang-Can Guo, “Alternative approach to electromagnetic field quantization in nonlinear and inhomogeneous media,” *Phys. Rev. A* **56**, 925-930, 1997.
- [6] Ho Trung Dung, Ludwig Knöll, and Dirk-Gunnar Welsch, “Three-dimensional quantization of the electromagnetic field in dispersive and absorbing inhomogeneous dielectrics,” *Phys. Rev. A* **57**, 3931-3942, 1998.
- [7] Eduard Schmidt, John Jeffers; Stephen M. Barnett, Ludwig Knoll, Dirk-Gunnar Welsch, “Quantum theory of light in nonlinear media with dispersion and absorption,” *J. Modern Optics* **45**, 377-402, 1998.
- [8] Ludwig Knöll, Stefan Scheel, Dirk-Gunnar Welsch, “QDE in dispersing and absorbing media,” arXiv:quant-ph/0006121v5, 2003.
- [9] L.G. Suttorp and Martijn Wubs, “Field quantization in inhomogeneous absorptive dielectrics,” *Phys. Rev. A* **70**, 013816, 2004.
- [10] Stefan Schee and Dirk-Gunnar Welsch, “Quantum theory of light and noise polarization in nonlinear optics,” *Phys. Rev. Lett.* **96**, 073601, 2006.
- [11] E.A. Power and T. Thirunamachandran, “The multipolar Hamiltonian in radiation theory,” *Proc. R. Soc. Lond. A* **372**, 265-273, 1980.
- [12] E.A. Power and T. Thirunamachandran, “Further remarks on the Hamiltonian of quantum optics,” *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1100-1105, 1985.
- [13] C.H. Henry, and R.F. Kazarinov, “Quantum noise in photonics,” *Rev. of Modern Physics* **68**, 801-853, 1996.
- [14] Shaul Mukamel, “Superoperator representation of nonlinear response: Unifying quantum field and mode coupling theories,” *Phys. Rev. E* **68**, 021111, 2003.

- 
- [15] Voir par exemple : R.W. Boyd, *Nonlinear Optics*, 2nd ed., Academic Press, 2003.
- [16] J.A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, and P.S. Pershan, "Interaction between light waves in a nonlinear dielectric," *Phys. Rev.* 127, 1918-1939, 1962.
- [17] Herbert B. Callen and Theodore A. Welton, "Irreversibility and Generalized Noise," *Phys. Rev.* 83, 34-40, 1951.
- [18] R. Kubo, "The fluctuation-dissipation theorem," *Rep. Prog. Phys.* 29, 255-284, 1966.

## Chapitre 2

# Théorie Quantique des Fibres Optiques

Les résultats du chapitre précédent sont assez généraux. Dans ce chapitre, nous allons d'abord discuter de l'optique nonlinéaire dans les verres de silice. Ensuite, nous établirons un model unidimensionnel quantifié, où l'accent sera mis sur la diffusion Rayleigh et les diffusions Raman et Brillouin. Enfin, un model bidirectionnel quantifié pour les amplificateurs Raman à fibres de silice sera établi, et nous allons également établir le théorème de fluctuation-dissipation dans les amplificateurs Raman à fibres optiques.

### 2.1 Optique nonlinéaire dans les verres de silice

Pour que le développement en série (1.86) soit valable, il faut que le champ appliqué de l'extérieur soit bien faible que le champ atomique. Comme ce dernier étant d'ordre de  $10^{10}$  V/m [1], correspondant à une intensité lumineuse d'ordre de  $10 \text{ MW}/\mu\text{m}^2$ , soit 1GW de puissance optique dans les fibres optiques monomodes standards (SMF, Standard Monomode Fibre), cette condition est largement vérifiée en pratique. Puisque que dans les matériaux centrosymétriques tels que les verres de silice, les susceptibilités d'ordres paires sont nulles, nous pouvons écrire la densité de polarisation, en prenant compte des non-linéarités du 3<sup>ème</sup> ordre, sous la forme

$$\hat{P}_\beta(\mathbf{r}, t) = \hat{P}_\beta^{(3)}(\mathbf{r}, t) + \hat{P}_\beta^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \Delta\hat{P}_\beta^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \Delta\hat{P}_\beta^{(1)}(\mathbf{r}, t) \quad (2.1)$$

où les fluctuations sont retenues jusqu'au 1<sup>er</sup> ordre.

Dans l'approximation dipolaires (1.80), la densité de polarisation est la somme de la contribution des électrons et celle des noyaux. L'électron ayant une masse bien plus petite que les noyaux et se déplaçant beaucoup plus rapidement. Ceci a deux conséquences importantes. D'un côté, quand un champ électrique est appliqué sur une molécule, ses électrons s'éloignent du barycentre électrique avec une vitesse beaucoup plus grande que ses noyaux. Nous voyons alors que les contributions électroniques sont prépondérantes dans la susceptibilité du 1<sup>er</sup> ordre [2]. Dans les matériaux diélectriques, comme les électrons sont liés et confinés dans les

espaces sur une échelle microscopique, les réponses électroniques au champ optique macroscopique peuvent être considérées comme tout à fait locales dans l'espace, c'est-à-dire,

$$\chi_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \omega_1; \mathbf{r}) = \chi_{\alpha\beta}^{(1)}(\omega_1, \mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \text{ et } \Delta\hat{\chi}_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \omega_1; \mathbf{r}, t) = \Delta\hat{\chi}_{\alpha\beta}^{(1)}(\omega_1, \mathbf{r}, t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \quad (2.2)$$

Nous pouvons considérer d'une part qu'au cours des transitions électroniques, les noyaux, vus par les électrons, sont stationnaires. Born et Oppenheimer [3] ont montré que la première contribution à l'énergie moléculaire est le mouvement électronique par rapport à des noyaux stationnaires. Les noyaux, pour leur part, voient un nuage d'électrons, fonctionnant comme un potentiel. La vibration nucléaire contribue alors au 2<sup>ème</sup> ordre à l'énergie moléculaire.

Dans les matériaux comme les verres de silice, les fréquences de transitions électroniques sont beaucoup plus élevées que les fréquences optiques, et le champ optique est loin d'être en résonance avec les électrons. Nous pouvons donc négliger la dispersion chromatique liée à la réponse électronique dans  $\Delta\hat{\chi}_{\alpha,\mu}^{(1)}$  et écrire

$$\Delta\hat{\chi}_{\alpha,\mu}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \omega_1; \mathbf{r}, t) \approx \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\Delta\hat{\chi}_{\alpha,\mu}^{(1)}(\mathbf{r}, t). \quad (2.3)$$

Rappelant (1.105), nous trouvons donc

$$\Delta\hat{P}_{\mu}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \hat{E}_{\alpha_1,+}(\mathbf{r}, t)\Delta\hat{\chi}_{\alpha_1,\mu}^{(1)}(\mathbf{r}, t) \quad (2.4)$$

Il est à noter que cette dépendance temporelle des fluctuations de la susceptibilité est en fait due à la dépendance des coordonnées nucléaires [4]. En effet, nous pouvons écrire au 1<sup>er</sup> ordre  $\Delta\hat{\chi}(\mathbf{r}, t) = \sum_i C_i(\mathbf{r})\hat{\mu}_i(t)$ ,  $\hat{\mu}_i$  étant les déplacements nucléaires. En plus, puisque les fréquences optiques sont très inférieures aux celles des transitions électroniques, les électrons voient en fait un champ optique qui est lui aussi stationnaire. Utilisant l'approximation de Born-Oppenheimer et l'approche semi-classique que nous avons montré dans le chapitre précédent, Hellwarth [4] a montré que la susceptibilité optique du 3<sup>ème</sup> ordre pour les matériaux tels que les verres de silice peut s'écrire comme <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\mu}^{(3)}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; \omega_3, \omega_2, \omega_1; \mathbf{r}) &= \sigma_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\mu}(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \\ &+ \underline{d}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\mu}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; \omega_2 + \omega_3)\delta(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

où  $\sigma$  est réel et

---

<sup>1</sup> Il est à mentionner que dans son article, la dépendance spatiale n'est pas prise en compte.

$$d_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\mu}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, t) = \theta(t) \frac{\varepsilon_0}{2i\hbar} \langle [\Delta \hat{\chi}_{\alpha_3\alpha_2}^{(1)}(\mathbf{r}_2, 0), \Delta \hat{\chi}_{\alpha_1\mu}^{(1)}(\mathbf{r}_1, t)] \rangle \quad (2.6)$$

Le 1<sup>er</sup> terme à droite de (2.5) est dû aux nonlinéarités électroniques, et le 2<sup>ème</sup> est la contribution nucléaire. Dans [4], il est montré que de plus pour les matériaux isotropes, nous avons

$$\sigma_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\mu} = \frac{1}{6} \sigma (\delta_{\alpha_1\mu} \delta_{\alpha_3\alpha_2} + \delta_{\alpha_2\mu} \delta_{\alpha_3\alpha_1} + \delta_{\alpha_3\mu} \delta_{\alpha_1\alpha_2}) \quad (2.7)$$

et

$$d_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\mu}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, t) = a_R(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, t) \delta_{\alpha_1\mu} \delta_{\alpha_3\alpha_2} + \frac{1}{2} b_R(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, t) (\delta_{\alpha_3\mu} \delta_{\alpha_1\alpha_2} + \delta_{\alpha_2\mu} \delta_{\alpha_3\alpha_1}) \quad (2.8)$$

où le 1<sup>er</sup> terme à droite de (2.8) vient de la réponse nucléaire isotrope, et le 2<sup>ème</sup> vient de la réponse anisotrope. En pratique, cette dernière est négligeable dans les matériaux comme le verre de quartz [4]. Alors, utilisant  $[\hat{E}_\mu(\mathbf{r}, t), \hat{E}_\alpha(\mathbf{r}, t)] = 0$ , nous trouvons

$$\hat{P}_\mu^{(3)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \sigma(\mathbf{r}) \sum_\alpha \hat{E}_\alpha^2(\mathbf{r}, t) \hat{E}_\mu(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \sum_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \int a_R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}, t - t_1) \hat{E}_{\mu,+}(\mathbf{r}, t) \hat{E}_\alpha^2(\mathbf{r}_1, t_1) dt_1 d^3\mathbf{r}_1 \quad (2.9)$$

La polarisation du 3<sup>ème</sup> ordre dans les verres de silice comporte donc la réponse instantanée électronique, ce qui contribue à l'effets Kerr et a ses manifestations SPM (Self Phase Modulation), XPM (Cross Phase Modulation) et FWM (Four Wavs Mixing), etc. [5], et la réponse nucléaire non-instantanée, responsable des diffusions inélastiques Raman et Brillouin.

Le champ électrique peut se décomposer en champs de signal et de pompe. Pour simplification, nous supposons que le champ électrique total est linéairement polarisé (les effets liés à la polarisation seront discutés dans le chapitre 6). Nous pouvons alors écrire  $\hat{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{E}_s(\mathbf{r}, t) + \hat{E}_p(\mathbf{r}, t)$ , où les indices spatiaux sont ignorés. Ainsi, le produit cubique des champs dans l'intégration de (2.9) devient

$$\hat{E}_+(\mathbf{r}, t) \hat{E}^2(\mathbf{r}_1, t_1) = 2\hat{E}_+(\mathbf{r}, t) \hat{E}_{p,+}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{E}_s(\mathbf{r}_1, t_1) + \hat{E}_+(\mathbf{r}, t) [\hat{E}_p^2(\mathbf{r}_1, t_1) + \hat{E}_s^2(\mathbf{r}_1, t_1)] \quad (2.10)$$

où le 1<sup>er</sup> terme décrit les diffusions inélastiques, et le 2<sup>ème</sup> terme contribue à l'effet Kerr, des contributions non-instantanés nucléaires négligeables devant les contributions instantanés électroniques [6]. Les densités de polarisation Raman/Brillouin aux fréquences de signal et de pompe s'écrivent alors, respectivement, sous les formes

$$\hat{P}_{s,R/B}(\mathbf{r}, t) = 2\varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} a_{R/B}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}, t - t_1) \hat{E}_{p,+}(\mathbf{r}, t) \hat{E}_{p,+}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{E}_s(\mathbf{r}_1, t_1) dt_1 \quad (2.11)$$

et

$$\hat{P}_{p,R/B}(\mathbf{r}, t) = 2\varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} a_{R/B}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}, t - t_1) \hat{E}_{s,+}(\mathbf{r}, t) \hat{E}_{s,+}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{E}_p(\mathbf{r}_1, t_1) dt_1 \quad (2.12)$$

## 2.2 Modèle quantique pour les fibres optiques

### 2.2.1 Modèle unidimensionnel et diffusion Rayleigh

Nous supposons que les champs puissent être considérés comme transverses. Alors, prenant en compte de (2.1) et (2.2), nous pouvons écrire la transformée de Fourier temporelle de (1.64) comme

$$\nabla^2 \hat{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \hat{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, \omega) = -\mu_0 \omega^2 [\Delta \hat{\underline{\mathbf{P}}}_L(\mathbf{r}, \omega) + \hat{\underline{\mathbf{P}}}_{NL}(\mathbf{r}, \omega)] \quad (2.13)$$

où  $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = 1 + \chi^{(1)}(\mathbf{r}, \omega)$  est la permittivité relative linéaire ;  $\Delta \hat{\underline{\mathbf{P}}}_L(\mathbf{r}, \omega) = \Delta \hat{\underline{\mathbf{P}}}^{(0)}(\mathbf{r}, \omega)$  est la densité de polarisation linéaire spontanée ; et  $\hat{\underline{\mathbf{P}}}_{NL}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\underline{\mathbf{P}}}^{(3)}(\mathbf{r}, \omega) + \Delta \hat{\underline{\mathbf{P}}}^{(1)}(\mathbf{r}, \omega)$  est la densité de polarisation nonlinéaire. Nous savons qu'à part les pertes dues à l'absorption optique, il existe dans les fibres une grande proportion de perte provenant de la diffusion Rayleigh [7]. Cette diffusion élastique est due aux fluctuations de l'indice de réfraction aux échelles très inférieures aux longueurs d'onde optiques. Afin de modéliser cet effet, nous pouvons introduire dans la permittivité relative linéaire de petites fluctuations  $\Delta\varepsilon(\mathbf{r})$  dont la dispersion est négligée, et nous écrivons

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) + \Delta\varepsilon(\mathbf{r}) \quad (2.14)$$

Nous imposons que ces fluctuations soient réelles, d'une valeur moyenne nulle et delta corrélées en espace:

$$\langle \Delta\varepsilon(\mathbf{r}) \rangle = 0 \text{ et } \langle \Delta\varepsilon(\mathbf{r}_1) \Delta\varepsilon(\mathbf{r}_2) \rangle = \sigma_\Delta^2(\mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (2.15)$$

Nous n'avons pas fait tout de suite l'approximation scalaire sur les champs dans (2.13), car la diffusion Rayleigh est dépendante de la polarisation [8]. Pour estimer correctement la perte de diffusion Rayleigh, il est nécessaire de garder provisoirement les formes vectorielles. Négligeant tout autre défaut structurel de la fibre, nous réécrivons ainsi (2.13) sous la forme

$$\nabla^2 \hat{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, \omega) + k_\omega^2 \bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, \omega) \hat{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, \omega) = -k_\omega^2 [\Delta\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \hat{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, \omega) + \varepsilon_0^{-1} \Delta \hat{\underline{\mathbf{P}}}_L(\mathbf{r}, \omega) + \varepsilon_0^{-1} \hat{\underline{\mathbf{P}}}_{NL}(\mathbf{r}, \omega)]$$

(2.16)

avec  $k_\omega^2 = \omega^2 / c^2$ .

Puisque la partie imaginaire de  $\bar{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega)$  est bien inférieure à sa partie réelle, nous pouvons écrire approximativement

$$k_\omega^2 \bar{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega) = k_\omega^2 n^2(\mathbf{r}, \omega) + ik_\omega \alpha(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.17)$$

où  $n(\mathbf{r}, \omega)$  et  $\alpha(\mathbf{r}, \omega)$  sont, respectivement, l'indice de réfraction et le coefficient d'absorption du guide. Nous choisissons l'axe  $z$  comme la direction de propagation. Alors, dans le guide unidimensionnel idéal, l'indice de réfraction ne dépend pas de  $z$ ,  $n(\mathbf{r}, \omega) = n(\mathbf{x}, \omega)$ ,  $\mathbf{x}$  étant les coordonnées transverses. Les modes pour une fréquence optique donnée sont prêts à définir par l'équation suivante

$$[\nabla_{\mathbf{x}}^2 + k_\omega^2 n^2(\mathbf{x})] \boldsymbol{\varphi}_m(\mathbf{x}) = \beta_m^2 \boldsymbol{\varphi}_m(\mathbf{x}) \quad (2.18)$$

où  $\boldsymbol{\varphi}_m(\mathbf{x})$  et  $\beta_m^2$  sont respectivement la fonction propre vectorielle, colonne 3D, et la valeur propre de chaque mode  $m$ . L'équation différentielle (2.18) étant hermitienne, les fonctions propres  $\boldsymbol{\varphi}_m(\mathbf{x})$  peuvent constituer d'une base orthonormale complète. Dans la suite, nous n'allons pas écrire explicitement la dépendance fréquentielle, sauf si nécessaire. Les champs peuvent alors se décomposer en modes comme

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \sum_m \hat{E}_m(z) \boldsymbol{\varphi}_m(\mathbf{x}), \text{ avec } \hat{E}_m(z) = \int_{\mathcal{R}^2} \boldsymbol{\varphi}_m^*(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) d^2 \mathbf{x} \quad (2.19)$$

Nous supposons que la fibre soit monomode. Pourtant, il y a encore deux modes guidés, dégénérés en polarisation, dans les fibres ayant une symétrie circulaire telles que les fibres SMF [7]. En pratique, nous devons aussi prendre en compte la biréfringence de fibre qui crée un couplage entre ces deux modes et est responsable des effets de polarisation, tels que la PMD (Polarization Mode Dispersion). Dans ce chapitre, elle sera provisoirement négligée, et ses impacts dans les amplificateurs Raman seront étudiés dans les chapitres 5 et 6. Ainsi, nous allons choisir l'un des deux modes guidés, que nous désignons par l'indice 1, et ignorer l'autre. Les champs sont alors les sommes des contributions du mode guidé et de l'ensemble de champ non-guidé. Désignant ce dernier par l'indice 2, nous pouvons écrire, par exemple pour le champ électrique,  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{E}}_1(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r})$ . Ces deux contributions sont alors orthogonales telles que  $\int \hat{\mathbf{E}}_1^\dagger(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}) d^2 \mathbf{x} = 0$ . Nous pouvons assumer que la variation du coefficient d'absorption dans le plan transverse vue par le mode guidé soit négligeable, ce qui implique que nous avons

$$\int \alpha(\mathbf{r}) \boldsymbol{\varphi}_n^*(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x} \approx \delta_{n,1} \alpha(z) \quad (2.20)$$

En fait, il est équivalent de dire qu'entre le champ non-guidé et le mode guidé, le couplage à travers l'absorption est négligeable. Alors, remplaçant les champs décomposés, et faisant appel à l'orthonormalité des fonctions propres, nous trouvons pour le mode guidé

$$\left[ \partial_z^2 + (\beta_1^2 + i\beta_1\alpha_1 + k_\omega^2\Delta_{11}) \right] \hat{\underline{E}}_1(z) = -k_\omega^2 \int \phi_1^*(\mathbf{x}) \Delta \varepsilon(\mathbf{r}) \hat{\underline{E}}_2(\mathbf{r}) d^2\mathbf{x} - \varepsilon_0^{-1} k_\omega^2 \left[ \Delta \hat{\underline{P}}_{L,1}(z) + \hat{\underline{P}}_{NL,1}(z) \right] \quad (2.21)$$

avec

$$\alpha_1(z) = \frac{k_\omega}{\beta_1} \alpha(z), \text{ et } \Delta_{11}(z) = \int_{\mathfrak{R}^2} \Delta \varepsilon(\mathbf{x}, z) |\phi_1(\mathbf{x})|^2 d^2\mathbf{x} \quad (2.22)$$

et pour le champ non guidé au 1<sup>er</sup> ordre

$$\left[ \nabla^2 + k_\omega^2 n^2(\mathbf{r}) + ik_\omega \alpha(\mathbf{r}) \right] \hat{\underline{E}}_2(\mathbf{r}) = -k_\omega^2 \left[ \Delta \varepsilon(\mathbf{r}) \hat{\underline{E}}_1(\mathbf{r}) + \varepsilon_0^{-1} \Delta \hat{\underline{P}}_{L,2}(\mathbf{r}) \right] \quad (2.23)$$

La densité de polarisation nonlinéaire non-guidée,  $\hat{\underline{P}}_{NL,2}$ , est négligée dans (2.23). C'est parce que les modes non-guidés se distribuent sur tout le plan transverse, alors que les effets nonlinéaires se trouvent principalement dans le cœur de fibre

Ensuite, nous définissons une fonction de Green tensorielle, 3D, pour l'ensemble de champ non-guidé

$$\left[ \nabla^2 + k_\omega^2 n^2(\mathbf{r}) + ik_\omega \alpha(\mathbf{r}) \right] G_{jk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta_{jk} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.24)$$

Nous imposons qu'elle soit transverse,  $\nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ , car nous avons supposé que les champs le sont. Cette fonction est symétrique dans le sens  $G_{jk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{kj}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$  [9], et elle a la propriété suivante que nous allons utiliser ultérieurement

$$\begin{aligned} \text{Im } \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \mathbf{G}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{2i} = \frac{1}{2i} \int \left[ \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') - \mathbf{G}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') \right] d^3\mathbf{r}'' \\ &= \frac{1}{2i} \int \left[ \mathbf{G}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla_{\mathbf{r}''}^2 \mathbf{G}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') - \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \nabla_{\mathbf{r}''}^2 \mathbf{G}^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') \right] d^3\mathbf{r}'' \\ &\quad + \int k_\omega \alpha(\mathbf{r}'') \mathbf{G}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \mathbf{G}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'' \\ &= \int k_\omega \alpha(\mathbf{r}'') \mathbf{G}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \mathbf{G}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'' \end{aligned} \quad (2.25)$$

Après avoir défini cette fonction de Green, nous pouvons écrire formellement la solution de (2.23) sous la forme

$$\hat{\underline{E}}_2(\mathbf{r}) = k_\omega^2 \int \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \Delta \varepsilon(\mathbf{r}') \hat{\underline{E}}_1(z') \phi_1(\mathbf{x}') + \varepsilon_0^{-1} \Delta \hat{\underline{P}}_{L,2}(\mathbf{r}') \right] d^3\mathbf{r}' \quad (2.26)$$

Remplaçant l'expression ci-dessus dans (2.21), nous trouvons

$$\begin{aligned} \left[ \partial_z^2 + (\beta_1^2 + i\beta_1\alpha_1 + k_\omega^2\Delta_{11}) \right] \hat{E}_1(z) = & -k_\omega^4 \int \int \phi_1^\dagger(\mathbf{x}) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi_1(\mathbf{x}') \Delta\epsilon(\mathbf{r}) \Delta\epsilon(\mathbf{r}') \hat{E}_\omega(z') d^3\mathbf{r}' d^2\mathbf{x} \\ & - \epsilon_0^{-1} k_\omega^2 \left[ \Delta\hat{P}_1(z) + \hat{P}_{NL,1}(z) \right] \end{aligned} \quad (2.27)$$

avec

$$\Delta\hat{P}_1(z) = \Delta\hat{P}_{L,1}(z) + k_\omega^2 \int \int \Delta\epsilon(z, \mathbf{x}) \phi_1^\dagger(\mathbf{x}) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta\hat{P}_{L,2}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' d^2\mathbf{x} \quad (2.28)$$

qui est la densité de polarisation linéaire spontanée totale dans le mode guidé. Nous voyons que le 2<sup>ème</sup> terme de (2.28) rend compte de la contribution de la densité de polarisation linéaire spontanée non-guidée et diffusée dans le mode guidé.

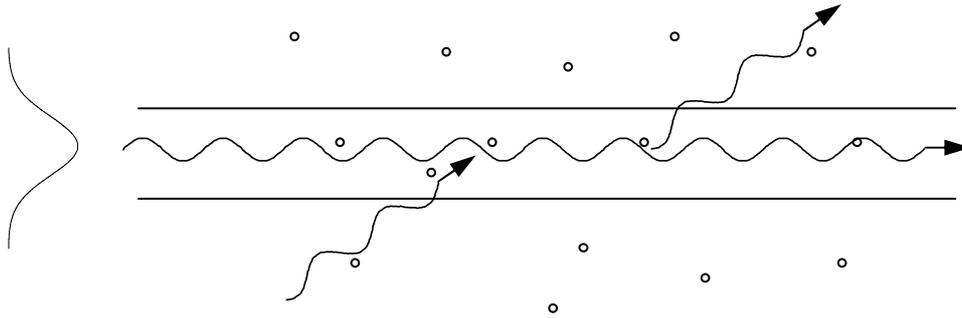


Figure 2.1 Illustration schématique de la diffusion à cause des inhomogénéités du guide

La diffusion du mode guidé a comme conséquence la perte qui doit pouvoir être décrite par le changement de la partie imaginaire du constant de propagation. Le 1<sup>er</sup> terme à droite de (2.27) rend compte de la partie multi-diffusée du mode guidé. C'est-à-dire que la partie diffusée en dehors du mode guidé et re-couplée dedans, comme illustré sur la figure 2.1. Afin d'évaluer le changement de la constante de propagation amené par ce processus, nous remplaçons approximativement  $\Delta\epsilon(\mathbf{r})\Delta\epsilon(\mathbf{r}')$  dans (2.27) par sa valeur moyenne. A l'aide de (2.15), nous trouvons

$$\left[ \partial_z^2 + (\beta_\omega^2 + i\beta_\omega\alpha_\omega + k_\omega^2\Delta_{11}) \right] \hat{E}_1(z) = -\epsilon_0^{-1} k_\omega^2 \left[ \Delta\hat{P}_1(z) + \hat{P}_{NL,1}(z) \right] \quad (2.29)$$

où le coefficient d'atténuation totale est donné par

$$\alpha_\omega = \alpha_1 + \frac{k_\omega^4}{\beta_\omega} \int \phi_1^\dagger(\mathbf{x}) \text{Im} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \phi_1(\mathbf{x}) \sigma_\Delta^2(z, \mathbf{x}) d^2\mathbf{x} \quad (2.30)$$

et le changement de la partie réelle de la constante de propagation est tout à fait négligeable devant  $\beta_1$ , c'est-à-dire que  $\beta_\omega \approx \beta_1$ . Le 2<sup>ème</sup> terme de (2.30) est donc le coefficient d'atténuation de la diffusion Rayleigh. Son expression analytique sera donnée au chapitre 5, et la consistance de nos analyses théoriques y sera également vérifiée. Finalement, il est à noter que comme nous allons le voir, le terme  $k_\omega^2 \Delta_{11}$  dans (2.24) décrit en fait la rétro-diffusion Rayleigh.

### 2.2.2 Diffusions Raman et Brillouin

Dans la suite, puisque nous n'étudions que des champs guidés, l'approximation scalaire sera adoptée. Dans la section 2.1, nous avons montré que la densité de polarisation nonlinéaire dans les verres de silice est donnée par

$$\hat{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \hat{P}^{(3)}(\mathbf{r}, t) + \Delta \hat{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t) \quad (2.31)$$

où  $\Delta \hat{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \Delta \hat{\chi}(\mathbf{r}, t) \hat{E}(\mathbf{r}, t)$  est la densité de polarisation Raman/Brillouin spontanée ; et  $\hat{P}^{(3)}(\mathbf{r}, t)$  est la densité de polarisation induite du 3<sup>ème</sup> ordre, qui est la somme de celle de Kerr et celle de Raman/Brillouin stimulée,  $\hat{P}^{(3)}(\mathbf{r}, t) = \hat{P}_{Kerr}(\mathbf{r}, t) + \hat{P}_{s,R/B}(\mathbf{r}, t) + \hat{P}_{p,R/B}(\mathbf{r}, t)$ . Le champ électrique étant la somme des contributions du signal et de la pompe, nous nous intéresserons aux fréquences de signal par la suite. En fait, puisque (2.11) et (2.12) sont fonctionnellement identiques pour le signal et la pompe, la plupart de résultats dans la suite sont aussi valables pour la pompe. En plus, nous allons considérer la pompe comme un champ classique quasi-monochromatique, se propageant dans la direction  $z$  positive, c'est-à-dire que nous avons

$$E_p(\mathbf{r}, t) = E_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) + c.c., \text{ avec } E_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) = A_p(z, t) \phi_p(\mathbf{x}) \exp i(\beta_p z - \omega_p t) \quad (2.32)$$

Ainsi, la densité de polarisation Raman/Brillouin spontanée s'écrit comme

$$\Delta \hat{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \Delta \hat{\chi}(\mathbf{r}, t) E_p(\mathbf{r}, t) \quad (2.33)$$

et la densité de polarisation Raman/Brillouin stimulée s'écrit comme

$$\hat{P}_{s,R/B}(\mathbf{r}, t) = 2\epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{r}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} a_{R/B}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}, t - t_1) [E_p^{(+)}(z, t) E_p^{(-)}(z_1, t_1) + c.c.] \hat{E}_s(\mathbf{r}_1, t_1) dt_1 \quad (2.34)$$

où les termes contenant  $\exp \pm i[\beta_p(z + z_1) - \omega_p(t + t_1)]$  sont omis.

Le coefficient  $\underline{a}_{R/B}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}, \tau)$  dépend des deux coordonnées spatiales,  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}$ . Nous pouvons donc écrire  $\underline{a}_{R/B}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}, \tau) = \underline{a}_{R/B}(\mathbf{r}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \tau)$ . Cette dépendance de  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$  signifie que la diffusion

Raman/Brillouin n'est généralement pas locale spatialement, et elle sélectionne les vecteurs d'onde. Nous savons bien que c'est ce qui correspond à la diffusion Brillouin. Alors, la dépendance de  $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$  doit être à l'échelle des longueurs d'onde optiques, et nous pouvons faire l'approximation pour les enveloppes lentement variables

$$a_{R/B}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}, t-t_1)A_p(z, t)A_p^*(z_1, t_1) \approx a_{R/B}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}, t-t_1)A_p(z, t)A_p^*(z, t_1) \quad (2.35)$$

dans l'intégration spatiale. En plus, nous allons y remplacer  $A_p(z, t)A_p^*(z, t_1)$  par son moyen statistique

$$\langle A_p(z, t)A_p^*(z, t_1) \rangle = \frac{1}{2}P_p(z)S_p(z, t-t_1) \quad (2.36)$$

où  $P_p(z)$  et  $S_p(z, t-t_1)$  sont, respectivement, la puissance moyenne de la pompe et la fonction d'autocorrélation normalisée de son enveloppe. Les effets liés à la partie temporellement fluctuant de la pompe, que nous venons de négliger, seront discutés au chapitre 6. Alors, la transformée de Fourier temporelle nous donne

$$\begin{aligned} \hat{P}_{s,R/B}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 P_p(z) \int_{-\infty}^{+\infty} [\underline{a}_{R/B}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}, \Omega) \otimes \underline{S}_p(z, \Omega)] (\omega - \omega_p) \\ \times \phi_p(\mathbf{x}) \phi_p^*(\mathbf{x}_1) \hat{E}_s(\mathbf{r}_1, \omega) \exp[i\beta_p(z - z_1)] d^3\mathbf{r}_1 \end{aligned} \quad (2.37)$$

où  $\otimes$  exprime la convolution, et que  $\omega > 0$ . Pour les fréquences négatives, il suffit de prendre le conjugué hermitien de cette équation. Maintenant, nous pouvons écrire la densité de polarisation Raman/Brillouin stimulée dans le mode guidé comme

$$\hat{P}_{R/B,1}(z, \omega) = iP_p(z) \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{K}_{R/B}(z, z_1 - z, \omega - \omega_p) \hat{E}_1(z_1, \omega) \exp[i\beta_p(z - z_1)] dz_1 \quad (2.38)$$

avec le coefficient Raman/Brillouin défini comme

$$\underline{K}_{R/B}(z, z_1 - z, \Omega) = \varepsilon_0 \text{Im}[\underline{S}_p(z, \Omega) \otimes \underline{a}_{R/B}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}, \Omega) \phi_1^*(\mathbf{x}) \phi_p(\mathbf{x}) \phi_p^*(\mathbf{x}_1) \phi_1(\mathbf{x}_1) d^2\mathbf{x} d^2\mathbf{x}_1] \quad (2.39)$$

La partie réelle de cette convolution, entre crochets, peut s'obtenir avec sa contrepartie imaginaire  $\underline{K}_{R/B}$  à l'aide de la relation de Kramers-Kronig. Cette partie réelle, modifiant la constante de propagation et importante pour les applications du ralentissement de la lumière (slow light), sera ignorée par la suite. Il est à mentionner que, dans la définition (2.39), nous n'avons pas pris en compte la dépendance en fréquence absolue du coefficient, provenant de celle de la fonction du mode guidé  $\phi_1(\omega, \mathbf{x})$ .

Supposons maintenant que nous pouvons décomposer  $\hat{E}_1(z, \omega)$  en deux parties se propageant dans les directions positive et négative comme

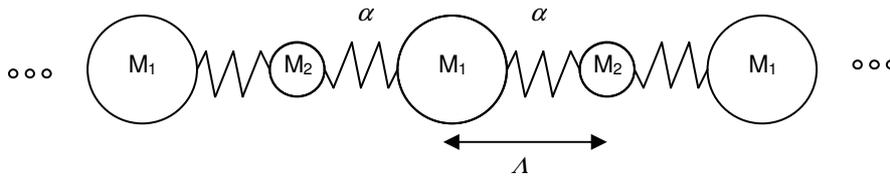
$$\hat{E}_1(z, \omega) = \hat{A}_+(z, \omega) \exp(i\beta_1 z) + \hat{A}_-(z, \omega) \exp(-i\beta_1 z) \quad (2.40)$$

Après l'approximation, pour la même raison que (2.35)

$$K_{R/B}(z, z_1 - z) \hat{A}_\pm(z_1) \approx K_{R/B}(z, z_1 - z) \hat{A}_\pm(z), \quad (2.41)$$

nous trouvons

$$\begin{aligned} \hat{P}_{R/B,1}(z, \omega) = & i \underline{K}_{R/B}(z, \beta_1 - \beta_p, \omega - \omega_p) P_p(z) \hat{A}_+(z, \omega) \exp(i\beta_1 z) \\ & + i \underline{K}_{R/B}(z, \beta_1 + \beta_p, \omega - \omega_p) P_p(z) \hat{A}_-(z, \omega) \exp(-i\beta_1 z) \end{aligned} \quad (2.42)$$



$$\Omega^2 = \frac{\alpha(M_1 + M_2)}{M_1 M_2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} \sin^2(\beta \Lambda / 2)} \right]$$

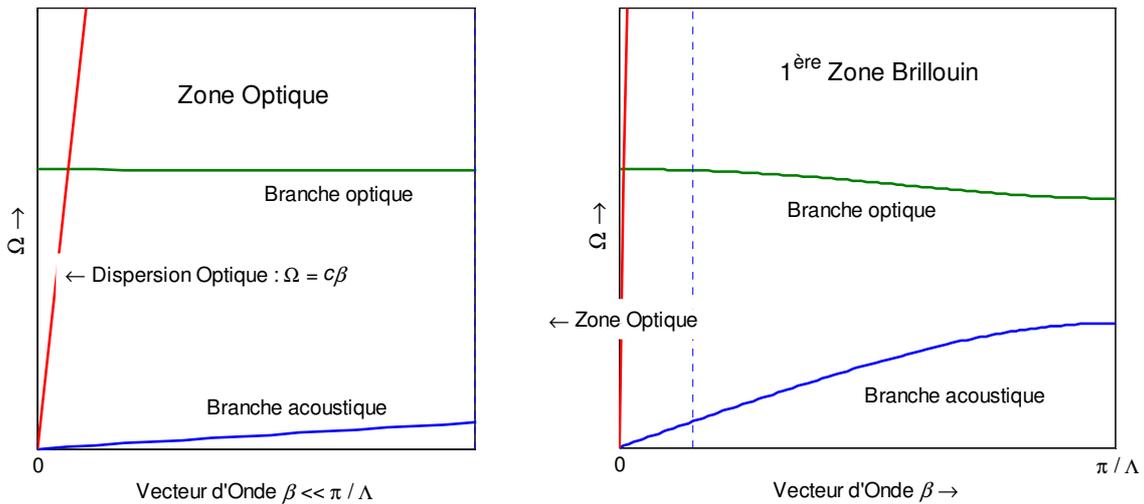


Figure 2.2 - Relations de dispersion des phonons acoustiques et optiques d'une chaîne biatomique

Nous savons que les processus des diffusions Raman et Brillouin couplent les photons aux phonons. Le coefficient d'amplification  $\underline{K}_{R/B}(z, \beta, \Omega)$  doit être proportionnel à la densité des

phonons, et  $(\beta, \Omega)$  doivent évidemment s'interpréter comme la longueur d'onde et la fréquence des phonons. Il est intuitif de considérer les relations de dispersion des phonons optiques et acoustiques d'une chaîne biatomique, illustrées par la figure 2.2. Nous voyons que, dans la zone optique où les longueurs d'onde optiques sont bien supérieure à la distance interatomique  $\Lambda$ , la fréquence est une fonction quasi-linéaire en vecteur d'onde pour la branche acoustique, alors que pour la branche optique, la fréquence est quasi-constante et donc indépendante des longueurs d'ondes. Si l'écart fréquentiel correspond aux fréquences des phonons acoustiques,  $\Omega \sim \Omega_B$ , il ne peut y avoir que les phonons  $(\beta_p + \beta_1, \Omega_B)$  couplés aux photons, car proche de zéro,  $\beta_p - \beta_1$  est trop petit. Nous avons alors, pour la diffusion Brillouin stimulée :  $\underline{K}_{R/B}(\beta_p - \beta_1, \Omega) \approx 0$  et  $\underline{K}_{R/B}(\beta_p + \beta_1, \Omega) = K_B(\Omega)$ , et donc

$$\hat{P}_{B,1}(z, \omega) = i \underline{K}_{R/B}(z, \beta_1 + \beta_p, \omega - \omega_p) P_p(z) \hat{A}_-(z, \omega) \exp(-i\beta_1 z); \quad (2.43)$$

Si l'écart fréquentiel atteint les fréquences des phonons optiques,  $\Omega \sim \Omega_R$ , nous avons pour la diffusion Raman stimulée :  $\underline{K}_{R/B}(\beta_p - \beta_1, \Omega) \approx \underline{K}_{R/B}(\beta_p + \beta_1, \Omega) = K_R(\Omega)$ , et donc

$$\hat{P}_{R,1}(z, \omega) = i K_R(z, \omega - \omega_p) P_p(z) \hat{E}_1(z, \omega) \quad (2.44)$$

Puisque  $\underline{K}_{R/B}(z, \beta, \Omega)$  est indépendant du vecteur d'onde  $\beta$ , quand  $\Omega \sim \Omega_R$ , nous avons

$$\underline{K}_{R/B}(z, z_1 - z, \Omega_R) = K_R(z, \Omega_R) \delta(z_1 - z) \quad (2.45)$$

Tandis que pour les diffusions Raman/Brillouin spontanées, la transformée de Fourier temporelle s'écrit

$$\Delta \hat{P}^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \Delta \hat{\chi}(\mathbf{r}, \omega - \omega_p) A_p(z) \phi_p(\mathbf{x}) \exp(i\beta_p z) \quad (2.46)$$

où  $\omega > 0$  et le terme contient  $\Delta \hat{\chi}(\mathbf{r}, \omega + \omega_p)$  est négligé. Alors, nous avons

$$\underline{\Delta \hat{P}}_{R/B,1}(z, \omega) = \hat{q}(z, \omega - \omega_p) A_p(z) \exp(i\beta_p z) \quad (2.47)$$

avec

$$\hat{q}(z, \Omega) = \varepsilon_0 \int \phi_1^*(\mathbf{x}) \Delta \hat{\chi}(\mathbf{r}, \Omega) \phi_p(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x} \quad (2.48)$$

D'après la section précédente, nous avons

$$\underline{a}_{R/B}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \Omega) = \frac{\varepsilon_0}{2i\hbar} \int_0^{+\infty} \langle \Delta \hat{\chi}(\mathbf{r}_2, 0), \Delta \hat{\chi}(\mathbf{r}_1, t) \rangle \exp(i\Omega t) dt \quad (2.49)$$

Nous rappelons les égalités suivantes

$$\langle \Delta \hat{\chi}(\mathbf{r}_2, t), \Delta \hat{\chi}(\mathbf{r}_1, t + t_1) \rangle = \langle \Delta \hat{\chi}(\mathbf{r}_2, 0), \Delta \hat{\chi}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \text{ et } \Delta \hat{\chi}^\dagger(\mathbf{r}, \Omega) = \Delta \hat{\chi}(\mathbf{r}, -\Omega) \quad (2.50)$$

Alors, de la même manière que pour (1.113) au chapitre précédent, nous pouvons trouver

$$\langle [\Delta \hat{\chi}(\mathbf{r}_1, \Omega_1), \Delta \hat{\chi}^\dagger(\mathbf{r}_2, \Omega_2)] \rangle = -4i\hbar\pi\epsilon_0^{-1}\delta(\Omega_1 - \Omega_2)[a_R(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \Omega_1) - a_R^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Omega_1)] \quad (2.51)$$

et donc

$$\langle [\hat{q}_R(z_1, \Omega_1), \hat{q}_R^\dagger(z_2, \Omega_2)] \rangle = 8\pi\hbar K_R(z_1, \Omega_1)\delta(\Omega_1 - \Omega_2)\delta(z_1 - z_2) \quad (2.52)$$

Nous pouvons alors identifier  $\hat{q}_R(z, \Omega)$  comme l'opérateur d'annihilation pour le champ de phonon optique. En effet, au 1<sup>er</sup> ordre, les noyaux oscillent harmoniquement, et les déplacements nucléaires s'écrit comme  $\hat{\mu}_i(t) = \hat{a}_i(t) + \hat{a}_i^\dagger(t)$ ,  $\hat{a}_i$  étant l'opérateur d'annihilation de phonon. Nous voyons donc  $\hat{q}_R(z, \Omega)$  est proportionnel aux opérateurs d'annihilation de phonon. Maintenant, nous pouvons définir le rapport

$$\frac{\langle [\hat{q}_R^\dagger(z_2, \Omega_2)\hat{q}_R(z_1, \Omega_1)] \rangle}{\langle \hat{q}_R(z_1, \Omega_1)\hat{q}_R^\dagger(z_2, \Omega_2) \rangle} = \frac{1 + \bar{n}_q(z_1, \Omega_1)}{\bar{n}_q(z_1, \Omega_1)} \quad (2.53)$$

Alors, nous avons

$$\langle \hat{q}_R^\dagger(z_2, \Omega_2)\hat{q}_R(z_1, \Omega_1) \rangle = 8\pi\hbar \bar{n}_q(z_1, \Omega_1)K_R(z_1, \Omega_1)\delta(\Omega_1 - \Omega_2)\delta(z_1 - z_2) \quad (2.54)$$

$$\langle \hat{q}_R(z_1, \Omega_1)\hat{q}_R^\dagger(z_2, \Omega_2) \rangle = 8\pi\hbar [1 + \bar{n}_q(z_1, \Omega_1)]K_R(z_1, \Omega_1)\delta(\Omega_1 - \Omega_2)\delta(z_1 - z_2) \quad (2.55)$$

$\bar{n}_q(z_1, \Omega_1)$  étant le nombre de phonon, en équilibre thermique, donné par le statistique de Bose-Einstein

$$\bar{n}_q(z, \Omega) = \frac{1}{\exp(\hbar\Omega / K_B T) - 1} \quad (2.56)$$

Dans les verres de quartz, où l'écart fréquentiel Raman est typiquement d'ordre de 13.2 THz, nous trouvons  $\bar{n}_q(z, \Omega_R) \approx 0.13$  à 300K. Finalement, il est important à noter que dans (2.52), le coefficient Raman est écrit comme  $K_R(z, \omega - \omega_p)$ . En fait, nous devons avoir  $K_R(z, \omega_p - \omega) = -K_R(z, \omega - \omega_p)$ , parce que  $K_R(z, \Omega)$  est la partie imaginaire de la transformée de Fourier d'une fonction réelle. En effet, quand  $\omega > \omega_p$  c'est la diffusion Raman anti-Stokes, nous avons  $K_R(z, \omega - \omega_p) > 0$ , et  $\hat{q}_R(z_1, \omega_p - \omega_s)$  est l'opérateur d'annihilation de phonon ; et quand  $\omega < \omega_p$  c'est la diffusion Raman Stokes, nous avons donc

$K_R(z, \omega_p - \omega) < 0$ , et malgré son apparence,  $\hat{q}_R(z_1, \omega - \omega_p)$  devient l'opérateur de création. Le nombre de phonon devient dans ce dernier cas  $\bar{n}_q(z, \omega - \omega_p) = 1 + \bar{n}_q(z, \omega_p - \omega)$ .

## 2.3 Modèle pour les amplificateurs Raman à fibres

### 2.3.1 Modèle de propagation

D'après les sections précédentes, nous pouvons écrire l'équation de propagation unidimensionnelle pour le champ électrique guidé, dans le domaine fréquentiel, comme

$$\begin{aligned} \left[ \partial_z^2 + \beta(\omega)(\beta(\omega) - ig(z, \omega) + 2\Delta\beta(z, \omega)) \right] \hat{E}(z, \omega) \\ = -\varepsilon_0^{-1} k_\omega^2 \left[ \Delta \hat{P}(z, \omega) + \Delta \hat{P}_R(z, \omega) + \hat{P}_{Kerr}(z, \omega) \right] \end{aligned} \quad (2.57)$$

où  $\omega > 0$  ;

$$g(z, \omega) = C_R(z, \omega_p - \omega) P_p(z) - \alpha(z, \omega), \quad (2.58)$$

où  $C_R$  est le coefficient d'amplification Raman<sup>2</sup>

$$C_R(z, \omega, \omega_p - \omega) = \frac{k_\omega^2}{\beta_\omega \varepsilon_0} K_R(z, \omega_p - \omega); \quad (2.59)$$

qui est, en fait, proportionnel à la fréquence optique  $\omega$ .

$$\Delta\beta(z, \omega) = \frac{k_\omega^2 \Delta_{11}(z)}{2\beta(\omega)} \quad (2.60)$$

représente les fluctuations de la constante de propagation. Dans (2.57), l'indice désignant le mode guidé est ignoré, et nous avons supposé  $\beta \gg (g + 2\Delta\beta)$ . Equation (2.57) étant une équation différentielle d'ordre deux, nous introduisons maintenant un champ auxiliaire  $\hat{B}$  (à ne pas confondre avec le champ magnétique) tel que (2.57) peut être exprimée sous la forme de deux équations différentielles d'ordre un comme montrées ci-dessous

$$\begin{cases} \partial_z \hat{E} = i\beta \hat{B} \\ \partial_z \hat{B} = i(\beta + ig + 2\Delta\beta) \hat{E} + \hat{C} \end{cases} \quad (2.61)$$

avec

<sup>2</sup> Une définition plus conventionnelle du coefficient d'amplification Raman sera donnée au chapitre 6.

$$\hat{\underline{C}}(z, \omega) = i \frac{k_\omega^2}{\beta \epsilon_0} \left[ \Delta \hat{\underline{P}}(z, \omega) + \Delta \hat{\underline{P}}_R(z, \omega) + \hat{\underline{P}}_{Kerr}(z, \omega) \right] \quad (2.62)$$

A l'aide du champ auxiliaire  $\hat{\underline{B}}$ , nous pouvons définir deux enveloppes lentement variables contra-propagatives comme ci-dessous

$$\hat{\underline{A}}_+ = \frac{\hat{\underline{E}} + \hat{\underline{B}}}{2} \exp(-i\beta z) \text{ et } \hat{\underline{A}}_- = \frac{\hat{\underline{E}} - \hat{\underline{B}}}{2} \exp(i\beta z) \quad (2.63)$$

Le champ électrique peut alors s'exprimer comme

$$\hat{\underline{E}}(z, \omega) = \hat{\underline{E}}_+(z, \omega) + \hat{\underline{E}}_-(z, \omega), \text{ avec } \hat{\underline{E}}_\pm(z, \omega) = \hat{\underline{A}}_\pm(z, \omega) \exp[\pm i\beta(\omega)z] \quad (2.64)$$

Avec (2.61), nous trouvons les équations de propagation pour les deux enveloppes sous la forme

$$\begin{aligned} \partial_z \hat{\underline{A}}_+ &= \left( \frac{g}{2} + i\Delta\beta \right) \hat{\underline{A}}_+ + \left( \frac{g}{2} + i\Delta\beta \right) \exp(-2i\beta z) \hat{\underline{A}}_- + \hat{\underline{C}}_+ \\ -\partial_z \hat{\underline{A}}_- &= \left( \frac{g}{2} + i\Delta\beta \right) \hat{\underline{A}}_- + \left( \frac{g}{2} + i\Delta\beta \right) \exp(2i\beta z) \hat{\underline{A}}_+ - \hat{\underline{C}}_- \end{aligned} \quad (2.65)$$

avec

$$\hat{\underline{C}}_+ = \frac{\hat{\underline{C}}}{2} \exp(-i\beta z) \text{ et } \hat{\underline{C}}_- = \frac{\hat{\underline{C}}}{2} \exp(i\beta z) \quad (2.66)$$

Le coefficient  $i\Delta\beta(z)$  dans les premières parenthèses de ces deux équations est négligeable, car il fluctue très rapidement par rapport aux enveloppes de champ. Pour la même raison, les termes  $g(z)\exp(\pm 2i\beta z)$  dans les deuxièmes parenthèses sont aussi négligeables. Nous avons donc en conséquence

$$\begin{aligned} \partial_z \hat{\underline{A}}_+(z, \omega) &= \frac{1}{2} g(z, \omega) \hat{\underline{A}}_+(z, \omega) + \rho(z, \omega) \hat{\underline{A}}_-(z, \omega) + \hat{\underline{C}}_+(z, \omega) \\ -\partial_z \hat{\underline{A}}_-(z, \omega) &= \frac{1}{2} g(z, \omega) \hat{\underline{A}}_-(z, \omega) - \rho^*(z, \omega) \hat{\underline{A}}_+(z, \omega) - \hat{\underline{C}}_-(z, \omega) \end{aligned} \quad (2.67)$$

avec

$$\rho(z, \omega) = i\Delta\beta(z) \exp(-2i\beta z) \quad (2.68)$$

dont la dépendance fréquentielle est négligée. Nous identifions tout de suite  $\rho$  comme le coefficient différentiel de rétrodiffusion Rayleigh [10], que nous allons étudier plus en détails au chapitre 5.

Quand le champ est quasi-monochromatique, nous pouvons faire un développement de Taylor sur la constante de propagation  $\beta(\omega)$  autour de la fréquence optique centrale  $\omega_0$

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \sum_{n>1} \frac{1}{n!} \beta_n (\omega - \omega_0)^n, \text{ avec } \beta_0 = \beta(\omega_0) \text{ et } \beta_n = \left. \frac{d^n \beta}{d\omega^n} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (2.69)$$

Nous redéfinissons deux enveloppes lentement variables sous la forme

$$\hat{E}_{\pm}(z, \omega) = \hat{A}_{\pm}(z, \omega - \omega_0) \exp(\pm i\beta_0 z) \quad (2.70)$$

avec  $\omega > 0$ . Alors, nous avons

$$\hat{A}_{\pm}(z, \omega) = \hat{A}_{\pm}(z, \omega + \omega_0) \exp \pm i [\beta(\omega + \omega_0) - \beta(\omega_0)] z \quad (2.71)$$

A partir de (2.67), nous trouvons les équations de propagation spatio-temporelle pour ces deux enveloppes

$$\begin{aligned} \left( \partial_z + \beta_1 \partial_t - \frac{i}{2} \beta_2 \partial_t^2 \right) \hat{A}_+(z, t) &= \frac{1}{2} g(z) \hat{A}_+(z, t) + \rho(z) \hat{A}_-(z, t) + i\hat{K}_+(z, t) + \hat{F}_+(z, t) \\ \left( -\partial_z + \beta_1 \partial_t - \frac{i}{2} \beta_2 \partial_t^2 \right) \hat{A}_-(z, t) &= \frac{1}{2} g(z) \hat{A}_-(z, t) - \rho^*(z) \hat{A}_+(z, t) - i\hat{K}_-(z, t) - \hat{F}_-(z, t) \end{aligned} \quad (2.72)$$

où nous avons négligé la dépendance fréquentielle de  $g(z)$  et  $\rho(z)$  en supposant que la bande du signal est suffisamment étroite.

$$\hat{F}_{\pm}(z, \omega) = i \frac{k_{\omega}^2}{2\beta\epsilon_0} \left[ \Delta \hat{P}(z, \omega + \omega_0) + \Delta \hat{P}_R(z, \omega + \omega_0) \right] \exp(\pm i\beta_0 z) \quad (2.73)$$

est donc la force de Langevin quantique dans les amplificateurs Raman.

$$\begin{aligned} \hat{K}_{\pm} &= \frac{k_{\omega}^2 \sigma}{4\beta\epsilon_0 A_{eff}} (\hat{A}_{\pm} \hat{A}_{\pm} \hat{A}_{\pm}^{\dagger} + \hat{A}_{\pm} \hat{A}_{\pm}^{\dagger} \hat{A}_{\pm} + \hat{A}_{\pm}^{\dagger} \hat{A}_{\pm} \hat{A}_{\pm} + 6|A_p|^2 \hat{A}_{\pm} \\ &\quad + \hat{A}_{\pm} \hat{A}_{\mp} \hat{A}_{\mp}^{\dagger} + \hat{A}_{\pm} \hat{A}_{\mp}^{\dagger} \hat{A}_{\mp} + \hat{A}_{\mp} \hat{A}_{\pm} \hat{A}_{\mp}^{\dagger} + \hat{A}_{\mp} \hat{A}_{\pm} \hat{A}_{\mp} + \hat{A}_{\mp} \hat{A}_{\mp}^{\dagger} \hat{A}_{\pm} + \hat{A}_{\mp}^{\dagger} \hat{A}_{\mp} \hat{A}_{\pm}) \end{aligned} \quad (2.74)$$

est lié aux effets Kerr. Cette dernière expression est obtenue à partir de (2.9) en négligeant les termes liés au mélange à quatre ondes. La surface effective  $A_{eff}$  dans (2.74) est définie comme  $A_{eff}^{-1} = \int |\phi_1|^4 d^2 \mathbf{x}$ , où la différence entre les fonctions de mode du signal et la pompe est négligée.

### 2.3.2 Théorème de fluctuation-dissipation pour les amplificateurs Raman

La force de Langevin (2.73) constitue deux sources de bruit qui sont la densité de polarisation Raman spontanée (2.47) et la densité de polarisation linéaire spontanée (2.28). Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le théorème de fluctuation-dissipation relie les corrélations des bruits spontanés à l'absorption (amplification) dans le cadre d'optique linéaire. Dans cette section, nous allons montrer que ce théorème reste valable pour les amplificateurs Raman à fibres. Pour la diffusion Raman spontanée, le lien entre le gain Raman et la densité de polarisation Raman spontanée est facile à montrer en évidence. Nous pouvons la trouver directement à partir de (2.47), (2.54) et (2.55) :

$$\begin{aligned} \left\langle \Delta \hat{P}_R^\dagger(z_2, \omega_2) \Delta \hat{P}_R(z_1, \omega_1) \right\rangle \\ = 4\pi \hbar \bar{n}_q(z_1, \omega_1 - \omega_p) K_R(z_1, \omega_1 - \omega_p) P_p(z) \delta(\omega_1 - \omega_2) \delta(z_1 - z_2) \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \Delta \hat{P}_R(z_1, \omega_1) \Delta \hat{P}_R^\dagger(z_2, \omega_2) \right\rangle \\ = 4\pi \hbar [1 + \bar{n}_q(z_1, \omega_1 - \omega_p)] K_R(z_1, \omega_1 - \omega_p) P_p(z) \delta(\omega_1 - \omega_2) \delta(z_1 - z_2) \end{aligned} \quad (2.76)$$

Pour l'atténuation, la densité de polarisation linéaire induite est donnée par

$$\hat{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\omega, \mathbf{r}) \hat{E}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) \quad (2.77)$$

Dans le chapitre précédent, nous avons déjà montré l'égalité suivante

$$\left\langle [\Delta \hat{P}_L(\mathbf{r}_1, \omega_1), \Delta \hat{P}_L^\dagger(\mathbf{r}_2, \omega_2)] \right\rangle = 4\pi \hbar \varepsilon_0 \operatorname{Im} \chi^{(1)}(\mathbf{r}_1, \omega_1) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) \quad (2.78)$$

A l'aide de (1.113) et (2.28), et faisant appel à (2.25) et (2.30), nous obtenons

$$\left\langle [\Delta \hat{P}(z_1, \omega_1), \Delta \hat{P}^\dagger(z_2, \omega_2)] \right\rangle = 4\pi \hbar \varepsilon_0 \left( \frac{c}{\omega_1} \right)^2 \beta(\omega_1) \alpha(z_1, \omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) \delta(z_1 - z_2) \quad (2.79)$$

et donc

$$\left\langle \Delta \hat{P}^\dagger(z_2, \omega_2) \Delta \hat{P}(z_1, \omega_1) \right\rangle = 4\pi \hbar \varepsilon_0 \left( \frac{c}{\omega_1} \right)^2 \beta(\omega_1) \alpha(z_1, \omega_1) \bar{n}_p(z_1, \omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) \delta(z_1 - z_2) \quad (2.80)$$

$$\left\langle \Delta \hat{P}(z_1, \omega_1) \Delta \hat{P}^\dagger(z_2, \omega_2) \right\rangle = 4\pi \hbar \varepsilon_0 \left( \frac{c}{\omega_1} \right)^2 \beta(\omega_1) [1 + \bar{n}_p(z_1, \omega_1)] \alpha(z_1, \omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) \delta(z_1 - z_2) \quad (2.81)$$

où  $\bar{n}_p(z_1, \omega_1)$  s'interprète comme le nombre de photon. Les égalités (2.80) et (2.81) sont précisément deux exemples du théorème de fluctuation-dissipation. Nous rappelons que la densité de polarisation linéaire spontanée  $\Delta\hat{P}_L$ , un champ macroscopique, vient principalement de la contribution électronique. Dans l'approximation dipolaire (1.80), elle est linéaire en coordonnées électroniques  $\hat{x}_i(t)$ , et nous devons pouvoir écrire  $\Delta\hat{P}_L(z, t) = \sum e_i(z)\hat{x}_i(t)$  avec  $e_i(z)$  ayant la dimension de la densité de charge. Puisqu'au 1<sup>er</sup> ordre, les mouvements électroniques peuvent être modélisés comme les oscillateurs harmoniques, nous pouvons écrire  $\hat{x}_i(t) = \ell_i [\hat{a}_i(t) + \hat{a}_i^\dagger(t)]$  avec  $\hat{a}_i$  étant l'opérateur d'annihilation pour l'oscillateur harmonique. Ainsi,  $\Delta\hat{P}_L(z_1, \omega_1)$  est linéaire en  $\hat{a}_i$  et  $\bar{n}_p(z_1, \omega_1)$  signifie le nombre de photon. En équilibre thermique, nous avons

$$\bar{n}_p(z, \omega) = \frac{1}{\exp(\hbar\omega / K_B T) - 1} \quad (2.82)$$

A 300K, ce nombre de photon est d'ordre de  $10^{-14}$  aux fréquences optiques typiquement autour de 200 THz.

Ensuite, nous pouvons supposer qu'au 1<sup>er</sup> ordre, les coordonnées nucléaires commutent avec celles électroniques. Ceci est vérifié, car nous avons vu que dans l'approximation de Born-Oppenheimer, les mouvements nucléaires sont traités une perturbation sur les électrons, et les noyaux ne voient que de nuages électroniques moyennés. Rappelant la définition (2.73), nous trouvons donc

$$\langle [\hat{F}_\pm(z_1, \omega_1), \hat{F}_\pm^\dagger(z_2, \omega_2)] \rangle = -\pi\hbar \frac{k_\omega^2}{\beta\epsilon_0} g(z_1, \omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) \delta(z_1 - z_2) \quad (2.83)$$

et

$$\langle [\hat{F}_\pm(z_1, \omega_1), \hat{F}_\mp^\dagger(z_2, \omega_2)] \rangle = \langle [\hat{F}_\pm(z_1, \omega_1), \hat{F}_\pm^\dagger(z_2, \omega_2)] \rangle \exp(\pm 2i\beta_0 z_1) \quad (2.84)$$

Non stationnaire en  $z$ , cette dernière moyenne est négligeable, parce qu'elle oscille très rapidement. Nous écrivons alors

$$\langle [\hat{F}_\pm(z_1, \omega_1), \hat{F}_\mp^\dagger(z_2, \omega_2)] \rangle = 0 \quad (2.85)$$

De la même manière que pour (1.115) et (1.116), nous pouvons définir formellement un nombre de photon moyen  $\bar{n}_g(z_1, \omega_1)$  et écrire à partir de (2.83)

$$\langle [\hat{F}_\pm^\dagger(z_2, \omega_2) \hat{F}_\pm(z_1, \omega_1)] \rangle = -\pi\hbar \frac{k_\omega^2}{\beta\epsilon_0} \bar{n}_g(z_1, \omega_1) g(z_1, \omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) \delta(z_1 - z_2) \quad (2.86)$$

$$\left\langle \hat{F}_{\pm}(z_1, \omega_1) \hat{F}_{\pm}^{\dagger}(z_2, \omega_2) \right\rangle = -\pi \hbar \frac{k_{\omega}^2}{\beta \mathcal{E}_0} \left[ 1 + \bar{n}_g(z_1, \omega_1) \right] g(z_1, \omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) \delta(z_1 - z_2) \quad (2.87)$$

Ceci constitue le théorème de fluctuation-dissipation unifié pour les amplificateurs Raman à fibres. Ainsi, les corrélations des fluctuations spontanées sont proportionnelles au taux d'échanges de l'énergie.

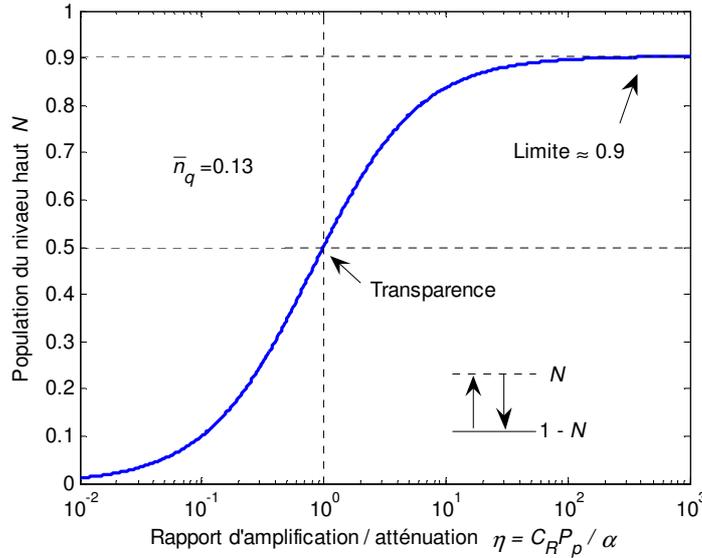


Figure 2.3 - La population du niveau haut virtuel en fonction du rapport d'amplification sur atténuation

Prenant en compte le fait, qu'aux fréquences optiques, nous avons  $\bar{n}_p(z, \omega) \approx 0$ , le nombre de photon moyen défini dans (2.86) et (2.87) peut être trouvé, à l'aide de (2.73), (2.75), (2.76) et (2.81), comme

$$\bar{n}_g(z, \omega) = -\left[ 1 + \bar{n}_q(z, \omega_p - \omega) \right] \frac{C_R(z, \omega, \omega_p - \omega) P_p(z)}{g(z, \omega)} \quad (2.88)$$

Alors, quand  $g(z, \omega) > 0$ , nous avons  $\bar{n}_g(z, \omega) < 0$ . C'est précisément ce qu'il se passe dans les amplificateurs à semi-conducteur lorsque l'inversion de population a lieu [11]. La relation entre ce nombre de photon  $\bar{n}_g$  et la population du niveau haut (niveau de conduction)  $N$  est donnée par [11]

$$\bar{n}_g = \frac{N}{1 - 2N} \quad (2.89)$$

Pour les amplificateurs Raman, nous pouvons alors définir une population virtuelle du niveau haut et l'exprimer par

$$N = \frac{(1 + \bar{n}_q)\eta}{1 + (1 + 2\bar{n}_q)\eta}, \text{ avec } \eta = \frac{C_R P_p}{\alpha} \quad (2.90)$$

La figure 2.3 présente la population virtuelle du niveau haut en fonction du rapport amplification sur atténuation. Logiquement, quand l'amplification est égale à l'atténuation,  $C_R P_p = \alpha$ , nous trouvons la transparence. Avec une valeur typique de  $\bar{n}_q = 0.13$ , la limite de la population virtuelle du niveau haut est environ à 0.9, ce qui implique que l'amplification Raman à fibres doit avoir des performances au niveau de bruit. C'est ce que nous allons étudier dans le chapitre suivant.

## 2.4 Conclusion

Dans les verres de silice, les électrons sont en mouvement beaucoup plus rapide que les noyaux, et, de plus, les champs optiques sont loin d'être en résonance avec les électrons. Cela est essentiel pour comprendre les mécaniques physiques dans les matériaux tels que les verres de silice. Pour décrire correctement la diffusion Rayleigh, les effets vectoriels doivent être pris en compte. Ceci sera encore discuté au chapitre 5. Les diffusions inélastiques Raman et Brillouin ont été étudiées dans par un model unique. Nous avons montré que la diffusion Brillouin dépend des vecteurs d'onde, et la diffusion Raman en est indépendante. Cette différence provient de celle des relations de dispersion des phonons acoustiques et optiques.

Dans ce chapitre, nous avons réussi à établir un modèle bidirectionnel quantifié pour les amplificateurs Raman. Nous avons montré que le théorème de fluctuation-dissipation, (2.86) et (2.87), est aussi applicable aux amplificateurs Raman. A partir de ce théorème, nous avons établi une expression pour la population virtuelle du niveau haut, en comparaison avec les systèmes à deux niveaux réels. Ce concept peut être utile pour une compréhension intuitive des avantages des amplificateurs Raman et des processus de génération de bruit intrinsèque dans ce type d'amplificateurs.

## Références:

- [1] J.A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, and P.S. Pershan, "Interaction between light waves in a nonlinear dielectric," *Phys. Rev.* **127**, 1918-1939, 1962.
- [2] R.W. Boyd, "Order-of-magnitude estimates of the nonlinear optical susceptibility," *J. Modern Opt.* **46**, 367-378, 1999.
- [3] M. Born and J.R. Oppenheimer, "On the quantum theory of molecules," *Ann. Physik* **84**, 457-, 1927.
- [4] R.W. Hellwarth, "Third-order optical susceptibilities of liquids and solids," *Prog. Quant. Electr.* **5**, 1-68, 1977.
- [5] G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, 1989.
- [6] R.W. Boyd, *Nonlinear Optics*, 2nd ed., Academic Press, 2003.
- [7] G.P. Agrawal, *Fiber-Optic Communication Systems*, 2<sup>nd</sup> Ed., Wiley InterScience. 1997.
- [8] E. Brinkmeyer, "Analysis of the backscattering method for single-mode optical fibers," *J. Opt. Soc. Am.* **70**, 1010-1012, 1980.
- [9] Ludwig Knöll, Stefan Scheel, Dirk-Gunnar Welsch, "QDE in dispersing and absorbing media," arXiv:quant-ph/0006121v5, 2003.
- [10] P. Gysel and R. K. Staubli, "Statistical properties of Rayleigh backscattering in single-mode fibers," *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 8, pp. 561-567, 1990.
- [11] C.H. Henry, and R.F. Kazarinov, "Quantum noise in photonics," *Rev. of Modern Physics* **68**, 801-853, 1996.

## Chapitre 3

# Bruits Quantiques des Amplificateurs Optiques Linéaires et Insensibles à la Phase

Il y existe deux types d'amplificateurs utilisables à toutes les fréquences [1] : l'un est basé sur un processus dissipatif, c'est-à-dire le transfert de l'énergie, utilisant un élément de conductance négative, et l'autre est basé sur un processus de mélange cohérent de composantes fréquentielles à l'aide d'un élément de susceptance nonlinéaire. A titre d'exemple, les amplificateurs EDFA (Erbium Doped Fiber Amplifier), SOA (Semiconductor Optical Amplifier) et les amplificateurs Raman et Brillouin font partie de la première classe, tandis que les amplificateurs paramétriques font partie de la seconde. Un amplificateur linéaire est défini par une sortie reliée linéairement à l'entrée. Quand l'amplificateur linéaire ne distingue pas les deux composantes de quadratures du signal, nous disons qu'il est insensible à la phase [2]. Pratiquement, en régime de petit signal, EDFA, SOA et les amplificateurs Raman et Brillouin peuvent être considérés comme linéaire et insensibles à la phase.

### 3.1 Descriptions et propriétés quantiques du rayonnement

Il est connu que la limite quantique du facteur de bruit de tout amplificateur linéaire et insensible à la phase est de 3 dB [1][2][3]. Ceci est étroitement lié au principe d'Heisenberg. Pour bien l'apprendre, ce chapitre commence par un rappel sur les descriptions et les propriétés quantiques du rayonnement.

#### 3.1.1 Représentation modale du champ

Comme nous l'avons montré au 1<sup>er</sup> chapitre, dans le système total, la liberté dynamique du champ électromagnétique peut être décrite par le potentiel-vecteur transverse  $\hat{\mathbf{A}}^\perp$  et son moment conjugué  $\hat{\mathbf{\Pi}}$ . Avec l'approximation scalaire simplificatrice, leur relation de commutation,  $[\hat{A}(\mathbf{r}), \hat{\Pi}(\mathbf{r}')] = i\hbar \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , implique la possibilité de décomposer ces opérateurs de champ dans la représentation de Schrödinger sous les formes

$$\hat{A}(\mathbf{r}) = \sum_k A_k [\hat{a}_k u_k(\mathbf{r}) + \hat{a}_k^\dagger(t) u_k^*(\mathbf{r})] \quad \text{et} \quad \hat{\Pi}(\mathbf{r}) = i\hbar \sum_k \frac{w(\mathbf{r})}{2A_k} [\hat{a}_k u_k(\mathbf{r}) - \hat{a}_k^\dagger(t) u_k^*(\mathbf{r})] \quad (3.1)$$

où  $\hat{a}_k$  et  $\hat{a}_k^\dagger$  sont les opérateurs d'annihilation et de création de chaque mode satisfaisant la relation de commutation suivante

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}, \quad (3.2)$$

$w(\mathbf{r})$  est une fonction de pondération réelle, et les fonctions de mode  $u_k(\mathbf{r})$  forment une base orthonormale et complète. L'opérateur  $\hat{A}_k(\mathbf{r}) = A_k [\hat{a}_k u_k(\mathbf{r}) + \hat{a}_k^\dagger u_k^*(\mathbf{r})]$  correspond aux champs monomodes, éléments de base des champs réels.

Il ne faut pas confondre les champs monomodes avec les champs monochromatiques. D'une manière générale, tous les champs monomodes n'ont pas forcément une dépendance temporelle harmonique. Pour un champ classique scalaire et monomode, nous avons :  $A(\mathbf{r}, t) = \alpha(t)u(\mathbf{r}) + c.c.$ , où  $\alpha(t)$  est l'amplitude complexe, fonction du temps. Ce champ monomode est donc défini par deux paramètres réels : l'amplitude et la phase  $\{\alpha_0, \phi\}$ , tel que  $\alpha = \alpha_0 \exp(-i\phi)$ , ou bien les parties réelle et imaginaire  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ , dites composantes de quadrature. Comme l'illustre dans la figure 3.1, il peut être représenté dans le plan complexe, dont  $\{\alpha_0, \phi\}$  et  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  sont respectivement les coordonnées polaires ou cartésiennes, et les bruits correspondant induisent les incertitudes sur ces paramètres. Il en est de même pour l'opérateur quantique de ce champ monomode,  $\hat{A}(\mathbf{r}) = A[\hat{a} u(\mathbf{r}) + H.C.]$ , qui est entièrement décrit par l'opérateur d'annihilation du mode spatial, annihilation du photon,  $\hat{a}$  et son conjugué hermitien  $\hat{a}^\dagger$ .

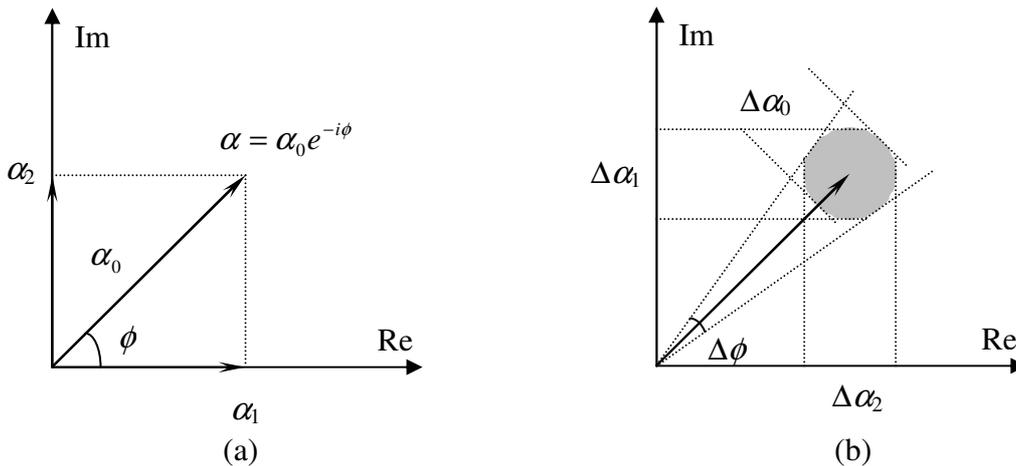


Figure 3.1 – Représentations du champ classique mono-mode (a) et ses bruits (b)

Les opérateurs de création et d'annihilation de photon ont l'importance centrale en optique quantique. Cependant, comme nous allons voir, il est souvent nécessaire d'exprimer le champ en termes d'opérateurs hermitiens. Par analogie avec le champ classique, représentations

polaire et cartésienne sont utilisées. Pour cette dernière, nous pouvons alors décomposer  $\hat{a}$  en deux opérateurs de quadrature hermitiens

$$\hat{a} = \hat{a}_1 + i\hat{a}_2 \quad (3.3)$$

avec

$$\hat{a}_1 = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)/2 \text{ et } \hat{a}_2 = (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)/2i, \quad (3.4)$$

Un rayonnement monomode est donc bien décrit par les deux opérateurs de quadrature hermitiens. Nous trouvons facilement leur relation de commutation sous la forme

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_2] = \frac{i}{2} \quad (3.5)$$

L'utilisation des opérateur d'amplitude et de phase de la représentation polaire présente une difficulté. Suivant Susskind et Glogower [4], nous pouvons écrire formellement l'opérateur d'annihilation comme

$$\hat{a} = \sqrt{\hat{N} + 1} \exp(-i\hat{\phi}) \quad (3.6)$$

avec l'opérateur de nombre

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (3.7)$$

et l'opérateur de phase  $\hat{\phi}$  que nous voulons étudier. La raison pour laquelle nous n'avons pas utilisé  $\sqrt{\hat{N}}$ , dans (3.6), est que l'inverse de  $\hat{N}$  n'existe pas. D'après cette définition, nous avons

$$\exp(-i\hat{\phi}) = \frac{1}{\sqrt{\hat{N} + 1}} \hat{a} \quad (3.8)$$

où il est important de respecter l'ordre des opérateurs dans les égalités. A partir de

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{N} + 1 = \sqrt{\hat{N} + 1} \exp(-i\hat{\phi}) \exp(i\hat{\phi}^\dagger) \sqrt{\hat{N} + 1}, \quad (3.9)$$

nous déduisons

$$\exp(-i\hat{\phi}) \exp(i\hat{\phi}^\dagger) = 1. \quad (3.10)$$

Or, nous pouvons trouver également

$$\exp(i\hat{\phi}^\dagger)\exp(-i\hat{\phi}) = \hat{a}^\dagger \frac{1}{\hat{N}+1} \hat{a} = \sum_{n,m} \hat{a}^\dagger |n\rangle\langle n| \frac{1}{\hat{N}+1} |m\rangle\langle m| \hat{a} = 1 - |0\rangle\langle 0| \neq 1 \quad (3.11)$$

où  $|n\rangle$  désigne les états de Fock (état de nombre) que nous allons introduire à la section suivante, et  $|0\rangle$  est donc l'état du vide. Nous voyons donc que l'opérateur  $\exp(-i\hat{\phi})$  n'est pas unitaire<sup>1</sup>. Bien que le correcteur,  $|0\rangle\langle 0|$ , soit négligeable lorsque le champ peut être considéré comme classique, l'opérateur de phase  $\hat{\phi}$  défini par (3.8) n'est pas hermitien et ne correspond donc pas à une observable physique. Pour ne pas alourdir l'exposé, nous allons nous arrêter ici sur ce point en invitant les intéressés à [5].

### 3.1.2 Rappels sur les états quantiques du rayonnement

Les états quantiques du rayonnement se classifient en états purs et en états mélangés. Un état pur est défini comme un état quantique simple pouvant être représenté par un vecteur d'état dans l'espace de Hilbert. Les états purs du rayonnement peuvent être, comme pour les particules, mono- ou multimodes. Un état pur multimode est un produit tensoriel des états monomodes, c'est-à-dire qu'à partir des vecteurs d'état purs monomodes  $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle, |b_3\rangle, \dots\}$ , nous pouvons construire un vecteur d'état multi-mode tel que

$$|b\rangle = |b_1, b_2, b_3, \dots\rangle = |b_1\rangle \otimes |b_2\rangle \otimes |b_3\rangle \otimes \dots \quad (3.12)$$

Les opérateurs quantiques, monomodes ou multimodes, sont alors définis dans les espaces de Hilbert constitués de ses vecteurs d'état pur. Un état mélangé est défini comme un mélange statistique classique d'un ensemble d'états quantiques purs. Alors, tout état quantique d'un système peut être uniquement décrit par son opérateur de densité  $\hat{\rho}$ , défini comme

$$\hat{\rho} = \sum_k P_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \quad (3.13)$$

où  $|\psi_k\rangle$  un état pur quelconque appartenant à une base complète normalisé mais pas forcément orthogonale.  $P_k$  est la probabilité classique de trouver le système dans l'état pur correspondant. A l'aide de cet opérateur de densité, la valeur moyenne quantique et statistique d'un opérateur quelconque, noté  $\hat{O}$ , se calcule alors avec  $\langle\hat{O}\rangle = \text{tr}[\hat{\rho} \hat{O}]$ , où  $\text{tr}[\ ]$  désigne la trace. Pour tout état quantique, nous avons  $\text{tr}[\hat{\rho}] \equiv 1$ . Les états purs et mélangés peuvent se différencier par :  $\text{tr}[\hat{\rho}^2] = 1$  pour l'état pur, et  $\text{tr}[\hat{\rho}^2] < 1$  pour l'état mélangé.

Nous allons, en suite, rappeler les définitions et les propriétés de deux états purs quantiques du rayonnement que nous rencontrons souvent : état de nombre de photon, ou état de Fock, et état cohérent. Nous allons ignorer, sauf si nécessaires, les indices de mode par la suite. L'état de nombre de photon  $|n\rangle$  est défini comme l'état propre de l'opérateur de nombre de photon

<sup>1</sup> Un opérateur unitaire  $\hat{U}$  quelconque doit satisfaire  $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = 1$ .

(3.7),

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad (3.14)$$

avec  $n$  étant un nombre entier naturel. Alors, nous avons dans un état de nombre  $|n\rangle$  :  $\langle \hat{N} \rangle = n$  et  $\langle \Delta \hat{N}^2 \rangle = 0$ . Puisque  $\hat{N}$  est un opérateur hermitien, les états de nombre constituent une base complète et orthonormale. Dans le cas monomode, nous avons

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm} \text{ et } \sum_n |n\rangle \langle n| = 1 \quad (3.15)$$

Un état pur quelconque peut alors se décomposer sur cette base, sous la forme  $|\psi\rangle = \sum c_n |n\rangle$ , où  $c_n = \langle n|\psi\rangle$ . A partir de  $\hat{N}(\hat{a}|n\rangle) = (n-1)(\hat{a}|n\rangle)$  et  $(\langle n|\hat{a}^\dagger)(\hat{a}|n\rangle) = n$ , nous trouvons<sup>n</sup>

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (3.16)$$

De la même manière, nous pouvons trouver

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (3.17)$$

Tandis que l'état cohérent  $|\alpha\rangle$  est défini comme l'état propre de l'opérateur d'annihilation  $\hat{a}$ ,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (3.18)$$

Comme  $\hat{N}|0\rangle = 0|0\rangle$  et  $\hat{a}|0\rangle = 0|0\rangle$ , nous constatons que le vide  $|0\rangle$  est à la fois un état de nombre et un état cohérent. En fait, nous pouvons montrer que tout état cohérent peut être construit à partir du vide en utilisant  $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle$ , où  $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})$  est appelé comme l'opérateur de déplacement, car nous avons  $\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha$ . Alors, la décomposition d'un état cohérent sur la base d'états de nombre s'écrit comme

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3.19)$$

Les états cohérents sont ceux les plus proches aux conceptions classiques. En effet, pour un état cohérent  $|\alpha\rangle$  quelconque, l'opérateur de champ peut être considéré comme composé des parties classique et de fluctuations quantiques  $\hat{a} = \alpha + \Delta\hat{a}$ , avec  $[\Delta\hat{a}, \Delta\hat{a}^\dagger] = 1$ . Puisque  $\Delta\hat{a}|\alpha\rangle \equiv 0|\alpha\rangle$  pour  $\alpha$  quelconque, nous voyons que le champ dans l'état cohérent peut être considéré comme la superposition du champ classique et du vide quantique.

Comme  $\hat{a}$  n'est pas hermitien, les états cohérents ne sont pas orthogonaux. En effet, utilisant (3.19), nous pouvons trouver

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2} + \alpha^* \beta\right) \text{ et } |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = \exp(-|\alpha - \beta|^2) \quad (3.20)$$

Nous voyons donc que l'orthogonalité entre deux états cohérents dépend de leur distance sur le plan complexe, et le fait que le système soit dans un état cohérent n'exclue pas qu'il soit aussi dans un autre. Pourtant, nous avons toujours la relation de fermeture, car

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} |\alpha\rangle \langle \alpha| d\alpha_1 d\alpha_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} |re^{i\phi}\rangle \langle re^{i\phi}| r dr d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n,m} \frac{1}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle \langle m| \int_0^{+\infty} dr r^{n+m+1} \exp(-r^2) \int_0^{2\pi} \exp[i(n-m)\phi] d\phi \\ &= \sum_n \frac{1}{n!} |n\rangle \langle n| \int_0^{+\infty} dr^2 r^{2n} \exp(-r^2) = \sum_n |n\rangle \langle n| = 1 \end{aligned} \quad (3.21)$$

où  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$  avec  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  réels. Donc, tout état pur peut se décomposer sur les états cohérents comme

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} |\alpha\rangle \langle \alpha| \psi\rangle d^2\alpha = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} f(\alpha) |\alpha\rangle d^2\alpha \quad (3.22)$$

y compris bien sur les états cohérents eux-mêmes.

A la fin de cette section, nous étudions un exemple des états mélanges : état thermique d'un oscillateur harmonique. L'opérateur de densité d'un état thermique est donné par

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = \text{tr}^{-1}[\exp(-\hat{H}/k_B T)] \exp(-\hat{H}/k_B T) \quad (3.23)$$

avec  $T$  la température absolue et  $k_B$  la constante de Boltzmann. Remplaçant l'Hamiltonien d'un oscillateur harmonique de fréquence angulaire  $\omega$ ,  $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2)$ , dans (3.23), et écrivant sous la base d'état de nombre, nous obtenons

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = (1 - e^{-\eta}) \sum_n e^{-n\eta} |n\rangle \langle n|, \text{ avec } \eta = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \quad (3.24)$$

Nous pouvons alors trouver le nombre moyen comme

$$\bar{n}_{\text{th}}(\eta) = \text{tr}[\hat{\rho}_{\text{th}} \hat{N}] = (1 - e^{-\eta}) \sum_n n e^{-n\eta} = (1 - e^{-\eta}) \frac{d}{d\eta} \frac{1}{1 - e^{-\eta}} = \frac{1}{e^\eta - 1} \quad (3.25)$$

qui n'est rien d'autre que le nombre de Bose-Einstein. Réécrivant (3.24) en terme de  $\bar{n}_{\text{th}}$  comme

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = \sum_n |n\rangle P_n \langle n|, \text{ avec } P_n = \frac{\bar{n}_{\text{th}}^n}{(1 + \bar{n}_{\text{th}})^{n+1}} \quad (3.26)$$

nous voyons que la probabilité de trouver un oscillateur harmonique dans l'état thermique dans un état de nombre  $|n\rangle$  suit la distribution de Bose-Einstein. Maintenant, nous pouvons réécrire l'opérateur de densité sous la base d'état cohérent comme

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = \int \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} |\alpha\rangle P(\alpha) \langle \alpha| d^2\alpha \quad (3.27)$$

Cette expression est désignée comme la P-Representation de Glauber-Sudarshan<sup>2</sup> [6][7]. Afin de déterminer l'expression pour  $P(\alpha)$ , nous pouvons d'abord observer l'égalité suivante

$$\langle -\beta | \hat{\rho}_{\text{th}} | \beta \rangle \exp(|\beta|^2) = \int \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} P(\alpha) \exp(-|\alpha|^2) \exp(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha) d^2\alpha \quad (3.28)$$

où nous avons utilisé (3.20). Il se trouve donc que  $\langle -\beta | \hat{\rho}_{\text{th}} | \beta \rangle \exp(|\beta|^2)$  est la transformée de Fourier bidimensionnelle de  $P(\alpha) \exp(-|\alpha|^2)$ . Nous avons donc

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \exp(|\alpha|^2) \int \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \langle -\beta | \hat{\rho}_{\text{th}} | \beta \rangle \exp(|\beta|^2) \exp(\beta^*\alpha - \beta\alpha^*) d^2\beta \quad (3.29)$$

Faisant appel à (3.19) et (3.26), nous trouvons

$$\langle -\beta | \hat{\rho}_{\text{th}} | \beta \rangle = \frac{\exp(-|\beta|^2)}{1 + \bar{n}_{\text{th}}} \sum_n \frac{|\beta|^{2n}}{n!} \left( \frac{\bar{n}_{\text{th}}}{1 + \bar{n}_{\text{th}}} \right)^n = \frac{1}{1 + \bar{n}_{\text{th}}} \exp\left(-\frac{|\beta|^2}{1 + \bar{n}_{\text{th}}}\right) \quad (3.30)$$

et donc

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\exp(|\alpha|^2)}{1 + \bar{n}_{\text{th}}} \int \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \exp\left(\frac{\bar{n}_{\text{th}}}{1 + \bar{n}_{\text{th}}} |\beta|^2\right) \exp(\beta^*\alpha - \beta\alpha^*) d^2\beta = \frac{1}{\pi \bar{n}_{\text{th}}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}_{\text{th}}}\right) \quad (3.31)$$

Finalement, nous trouvons

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = \frac{1}{\pi \bar{n}_{\text{th}}} \int \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} |\alpha\rangle \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}_{\text{th}}}\right) \langle \alpha| d^2\alpha \quad (3.32)$$

---

<sup>2</sup> Il est important de noter qu'en général, cette expression de l'opérateur de densité ne garantit pas que la fonction réelle  $P(\alpha)$  soit toujours supérieure ou égale à zéro.

### 3.1.3 Densités de quasi-probabilité des deux quadratures

Nous savons que tout opérateur quantique décrivant une observable physique, c'est-à-dire une quantité physique mesurable, doit être hermitien. C'est la raison pour laquelle nous avons besoin des opérateurs de quadrature. Si nous faisons une mesure "idéale" sur un observable, disons  $O$ , dans un système quelconque, la valeur moyenne de notre mesure sera  $\langle \hat{O} \rangle = \text{tr}[\hat{\rho}\hat{O}]$ , avec  $\hat{O}$  étant l'opérateur hermitien correspondant, et la variance ou l'incertitude sera  $\langle \Delta\hat{O}^2 \rangle = \langle (\hat{O} - \langle \hat{O} \rangle)^2 \rangle$ . Si nous voulons mesurer à la fois deux observables, disons  $p$  et  $q$ , nous savons que les incertitudes minimales atteignables des deux observables sont limitées par le principe d'incertitude minimum ou le principe d'Heisenberg,

$$\langle \Delta\hat{p}^2 \rangle \langle \Delta\hat{q}^2 \rangle \geq \left| \frac{1}{2} \langle [\hat{p}, \hat{q}] \rangle \right|^2 \quad (3.33)$$

avec  $[\hat{p}, \hat{q}] = \hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p}$ .

Faisant appel à (3.5), nous avons alors pour un champ monomode dans un état quelconque

$$\langle \Delta\hat{a}_1^2 \rangle \langle \Delta\hat{a}_2^2 \rangle \geq \frac{1}{16} \quad (3.34)$$

Alors, bien que tout rayonnement monomode soit totalement décrit par les deux opérateurs de quadrature hermitiens que nous pouvons mesurer expérimentalement, les données de toutes mesures sont intrinsèquement aléatoires. Comme dans la statistique classique, nous pouvons définir leurs Fonctions Génératrices des Moments (FGM) comme

$$\Phi_\mu(x) = \langle \exp(x\hat{a}_\mu) \rangle \quad (3.35)$$

où  $\mu = 1, 2$ . Utilisant le théorème de Baker-Hausdorff<sup>3</sup>, (3.3) et (3.5), nous pouvons trouver pour un état cohérent monomode  $|z\rangle$

$$\Phi_\mu(x; z) = \exp\left(\frac{x^2}{8} + xz_\mu\right), \text{ où } \mu = 1, 2 \quad (3.36)$$

et pour un état de nombre de photon monomode  $|n\rangle$

$$\Phi_1(x; n) = \Phi_2(x; n) = L_n\left(-\frac{x^2}{4}\right) \exp\left(\frac{x^2}{8}\right) \quad (3.37)$$

<sup>3</sup> Nous avons

$$\exp(\hat{A} + \hat{B}) = \exp(\hat{A})\exp(\hat{B})\exp(-\hat{C}/2),$$

quand  $\hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}]$  est commutatif avec  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$

où  $L_n$  est le polynôme de Laguerre. La densité de probabilité étant la transformée de Fourier inverse de la fonction caractéristique  $\Phi_\mu(x) = \Phi_\mu(-2\pi i x)$ , nous pouvons obtenir pour l'état cohérent

$$f_\mu(\alpha_\mu; z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp[-2(\alpha_\mu - z_\mu)^2] \quad (3.38)$$

et l'état de nombre

$$f_\mu(\alpha_\mu; n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp(-2\alpha_\mu^2)}{2^n n!} H_n^2(\sqrt{2}\alpha_\mu) \quad (3.39)$$

où  $H_n$  est le polynôme de Hermite. Nous voyons donc que dans un état cohérent, les deux quadratures sont toutes gaussiennes de variance 1/2 et centrées sur leurs valeurs classiques. Alors que dans l'état de nombre, elles ont la même distribution d'Hermite-Gauss. Quelques exemples de la distribution d'Hermite-Gauss sont montrés ci-dessous.

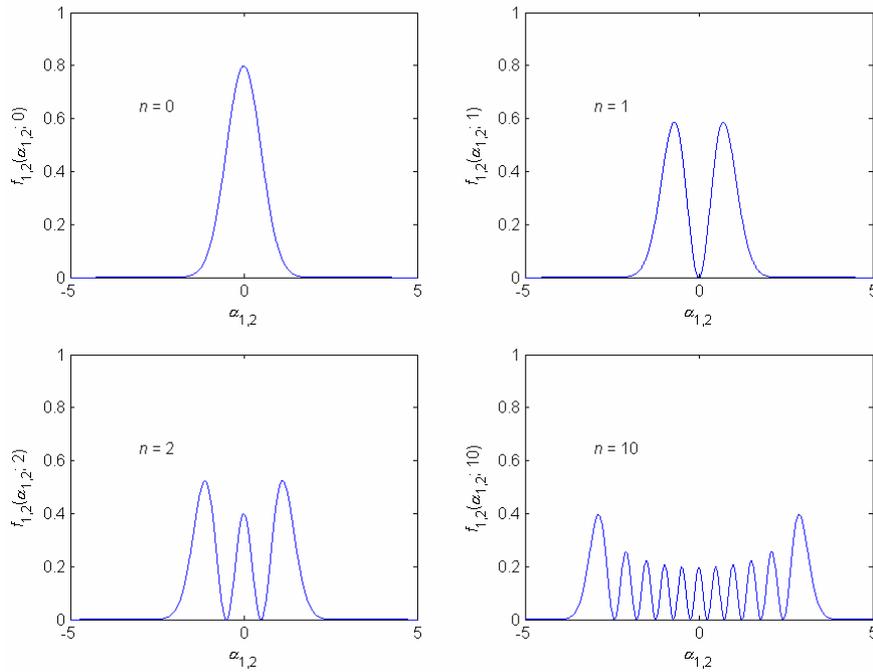


Figure 3.2 – Densité de probabilité des deux quadratures dans l'état de nombre.

Nous avons obtenu les densités de probabilité des deux quadratures séparément. Il est alors naturel de penser à leur densité de probabilité jointe. Pourtant, il y a en fait au moins trois FMG au choix<sup>4</sup> à cause du commutateur non-nulle (3.5). Nous choisissons ici celle de Wigner

<sup>4</sup> Les deux autres peuvent être  $\Phi(x_1, x_2) = \langle \exp(x_1 \hat{a}_1) \exp(x_2 \hat{a}_2) \rangle$  et  $\Phi(x_1, x_2) = \langle \exp(x_2 \hat{a}_2) \exp(x_1 \hat{a}_1) \rangle$

$$\Phi(x_1, x_2) = \langle \exp(x_1 \hat{a}_1 + x_2 \hat{a}_2) \rangle = \left\langle \exp\left(\frac{x^*}{2} \hat{a} + \frac{x}{2} \hat{a}^\dagger\right) \right\rangle \quad (3.40)$$

où  $x = x_1 + ix_2$ . Utilisant une nouvelle fois le théorème de Baker-Hausdorff et les équations (3.3) et (3.5), nous obtenons pour l'état cohérent mono-mode  $|z\rangle$

$$\Phi(x_1, x_2; z) = \exp\left(\frac{x^* z + x z^*}{2}\right) \exp\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{8}\right) \quad (3.41)$$

et pour l'état de nombre de photon mono-mode  $|n\rangle$

$$\Phi(x_1, x_2; n) = L_n\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4}\right) \exp\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{8}\right) \quad (3.42)$$

Pour l'état cohérent, la fonction caractéristique étant gaussienne, nous trouvons la densité de probabilité jointe également gaussienne

$$f(\alpha; z) = \frac{2}{\pi} \exp(-2|\alpha - z|^2) \quad (3.43)$$

Alors que pour l'état de nombre, puisque sa fonction caractéristique est Laguerre-gaussienne, aussi invariante fonctionnellement sous la transformée de Fourier bidimensionnelle, nous trouvons sa densité de probabilité jointe comme

$$f(\alpha_1, \alpha_2; n) = \frac{2}{\pi} L_n(4|\alpha|^2) \exp(-2|\alpha|^2) \quad (3.44)$$

A partir de la densité de probabilité jointe, la densité marginale de l'une des deux variables peut être obtenue en intégrant sur l'autre. Nous pouvons alors vérifier que ces deux densités de probabilité jointes donnent en effet (3.38) et (3.39).

Deux exemples de densité de probabilité jointe pour l'état de nombre sont montrés sur la figure 3.3. Nous voyons que la densité de probabilité jointe de l'état d'un photon peut prendre des valeurs négatives. En fait, l'expression (3.44) nous montre bien que la densité de probabilité jointe de tout état de nombre  $|n > 0\rangle$  peut être négative, parce que le polynôme de Laguerre l'est. Ces résultats en désaccord avec la statistique classique, qui ne permet pas de densité de probabilité négative, impliquent les propriétés non-classiques de l'état de nombre. La densité de probabilité jointe ainsi définie est alors appelée densité de quasi-probabilité jointe. Nous pouvons comprendre les propriétés non-classiques de l'état de nombre  $|n > 0\rangle$  par le raisonnement suivant. Nous savons que la densité de probabilité jointe de deux variables est le produit de la densité marginale d'une variable et la densité de probabilité conditionnelle d'une autre, c'est-à-dire

$$f(\alpha_1, \alpha_2; n) = f_1(\alpha_1; n)f_{21}(\alpha_2|\alpha_1; n) = f_2(\alpha_2; n)f_{12}(\alpha_1|\alpha_2; n) \quad (3.45)$$

Si les deux variables ne sont pas indépendantes, ce qui est le cas pour les états de nombre comme le montre (3.44), la densité de probabilité conditionnelle de l'une des deux variables est aussi fonction de l'autre. En fait, la densité de probabilité conditionnelle nous donne un outil pour prédire la valeur d'une variable, étant donné celle d'une autre. Mais dans la mécanique quantique, le principe d'Heisenberg nous interdit de faire cela sur deux observables non-commutatives, parce qu'une fois connue la valeur exacte de l'une des deux, la variance de l'autre devient infinie.

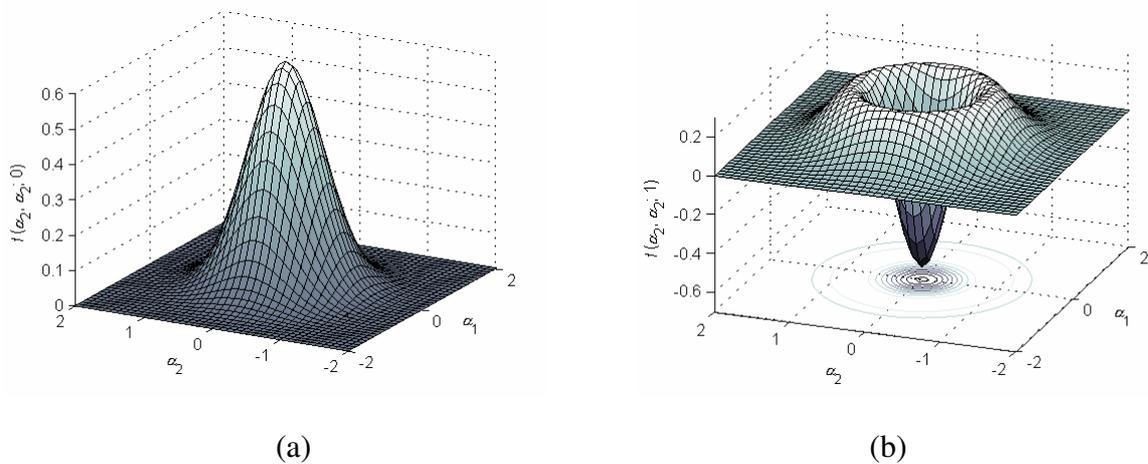


Figure 3.3 – Fonction de densité de probabilité jointe des deux quadratures dans l'état de nombre pour (a) l'état du vide et (b) l'état d'un photon.

## 3.2 Bruits intrinsèques des amplificateurs optiques linéaires et insensibles à la phase

Généralement, les amplificateurs optiques sont de type à ondes progressives utilisant une structure de guidage optique afin d'améliorer l'efficacité. A titre d'exemple, les SOAs (Semiconductor Optical Amplifier), les EDFAs (Erbium Doped Fiber Amplifier) et les amplificateurs Raman font tous partie de ce type. Dans cette section, nous allons d'abord étudier la limite quantique sur le bruit intrinsèque des amplificateurs optiques linéaires et insensibles à la phase et introduire le concept de bruits additifs intrinsèques. Ensuite, nous allons établir le modèle pour la génération de ces bruits et en discuter la signification physique.

### 3.2.1 Relation entrée-sortie quantique

En ce qui concerne la relation d'entrée-sortie des opérateurs de champ optique, nous devons être prudents. La théorie quantique est en effet mieux adaptée pour étudier l'évolution

temporelle, or nous nous intéressons plutôt à la propagation spatio-temporelle en communications optiques [8]. En effet, le champ optique est quantifié en modes spatiaux étendus sur toute l'espace, où se produisent les phénomènes qui nous intéressent, alors que la théorie quantique traite essentiellement le problème où les connaissances sont déjà acquises à un instant initial sur ces modes spatiaux et où nous voulons connaître l'état du champ à un autre instant. Cependant, ce dont nous sommes intéressés en communications optiques, c'est plutôt de prédire l'état du champ à certain endroit dans l'espace et pendant certaine période du temps, étant donné l'état du champ à un autre endroit spatio-temporel. Comme nous allons voir, pour résoudre ce problème, certaines approximations sont nécessaires.

Puisque nous avons la liberté de choisir les fonctions de mode dans la représentation modale de (3.1), nous pouvons définir les modes par l'opérateur différentiel hermitien suivant

$$\left[ \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2(\mathbf{x}) \right] u_\lambda(\mathbf{x}, z, \omega) = 0 \quad (3.46)$$

où  $n_0(\mathbf{x})$  est l'indice de réfraction réel, à la fréquence centrale  $\omega_0$ , d'un guide optique unidimensionnel quelconque,  $\omega^2$  est la valeur propre réelle et  $\lambda$  désigne les modes dégénérés à  $\omega^2$ . Nous pouvons normaliser les fonctions propres de telle manière qu'elles vérifient

$$\int d^3\mathbf{r} n_0^2(\mathbf{x}) u_\lambda^*(\mathbf{r}, \omega) u_{\lambda'}(\mathbf{r}, \omega') = \delta(\omega - \omega') \delta_{\lambda\lambda'} \quad \text{et} \quad \sum_{\lambda} \int_0^\infty d\omega n_0^2(\mathbf{x}) u_\lambda^*(\mathbf{r}, \omega) u_\lambda(\mathbf{r}', \omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.47)$$

où les fréquences  $\omega$  et  $\omega'$  sont positives. Ainsi, (3.1) et (3.2) peuvent être réécrits sous les formes

$$\hat{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega}} \hat{a}_\lambda(\omega) u_\lambda(\mathbf{r}, \omega) + H.C., \quad (3.48)$$

$$\hat{\Pi}(\mathbf{r}) = i \sum_{\lambda} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\hbar \omega \varepsilon_0}{2}} \hat{a}_\lambda(\omega) n_0^2(\mathbf{x}) u_\lambda(\mathbf{r}, \omega) + H.C. \quad (3.49)$$

et

$$[\hat{a}_\lambda(\omega), \hat{a}_{\lambda'}^\dagger(\omega')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\omega - \omega') \quad (3.50)$$

où  $H.C.$  désigne le conjugué hermitien. Pour la simplification, nous ne considérerons que le champ se propageant dans le sens de  $z$  positif. Alors, nous pouvons réécrire la fonction propre sous la forme

$$u_\lambda(\mathbf{x}, z, \omega) = C_\lambda(\omega) \phi_\lambda(x, \omega) \exp i \beta_\lambda(\omega) z \quad (3.51)$$

où  $\phi_\lambda(\mathbf{x}, \omega)$  et  $\beta_\lambda(\omega)$  sont respectivement la fonction propre et la valeur propre définies par

$$\left[ \nabla_{\mathbf{x}}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2(\mathbf{x}) \right] \phi_\lambda(\mathbf{x}, \omega) = \beta_\lambda^2(\omega) \phi_\lambda(\mathbf{x}, \omega) \quad (3.52)$$

Les fonctions propres sont orthonormales telles que  $\int d^2\mathbf{x} \phi_\lambda^*(\mathbf{x}, \omega) \phi_{\lambda'}(\mathbf{x}, \omega) = \delta_{\lambda\lambda'}$ . Pour trouver le coefficient de normalisation  $C_\lambda(\omega)$ , nous pouvons remplacer (3.48) dans (3.47) et multiplier les deux côtés par  $\delta_{\lambda\lambda'}$ . Ainsi, nous trouvons

$$C_\lambda(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n_\lambda^2(\omega)} \partial_\omega \beta_\lambda(\omega)} \quad \text{avec} \quad n_\lambda^2(\omega) = \int d^2\mathbf{x} n_0^2(\mathbf{x}) |\phi_\lambda(\mathbf{x}, \omega)|^2 \quad (3.53)$$

où nous avons supposé  $\partial_\omega \beta_\lambda > 0$ .

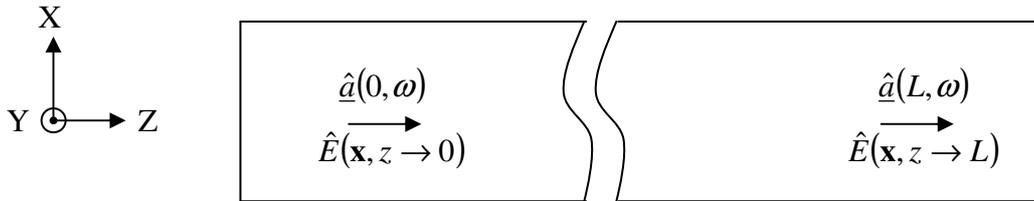


Figure 3.4 – Représentation schématique des opérateurs d'entrée et de sortie

En représentation d'Heisenberg, l'opérateur d'annihilation  $\hat{a}_\lambda(\omega, t)$  n'a généralement pas une dépendance temporelle exponentielle. Toutefois, comme le montre la figure 3.4, nous pouvons supposer que de part et d'autre du guide optique, dont l'indice de réfraction à la fréquence  $\omega_0$  est  $n_0(\mathbf{x})$ , nous pouvons négliger l'atténuation/amplification optique et la dispersion. Ainsi, nous pouvons écrire l'équation de mouvement du champ électrique scalaire dans ces espaces limités approximativement comme

$$\left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} n_0^2(\mathbf{x}) \partial_t^2 \right] \hat{E}(\mathbf{x}, z, t) = 0 \quad (3.54)$$

Alors, puisqu'en approximation scalaire  $\hat{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \hat{A}(\mathbf{r}, t)$ , nous pouvons trouver la partie de fréquences positives du champ électrique peut s'écrire en termes des opérateurs d'annihilation localement comme

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{x}, z, t) = i \sum_\lambda \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{\hbar \omega}{4\pi \epsilon_0 n_\lambda^2(\omega)}} \partial_\omega \beta_\lambda(\omega) \hat{a}_\lambda(\omega) \phi_\lambda(\mathbf{x}, \omega) \exp[i\beta_\lambda(\omega)z - \omega t] \quad (3.55)$$

Nous pouvons vérifier que lorsque  $n_0(\mathbf{x}) = 1$ , (3.55) devient en fait (2.8) de [8]. Donc, la transformée de Fourier du champ électrique s'écrit comme

$$\hat{E}(\mathbf{x}, z, \omega) = i \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{\pi \hbar \omega}{\bar{n}_{\lambda}(\omega) \epsilon_0 c}} \phi_{\lambda}(\omega, \mathbf{x}) \hat{a}_{\lambda}(\omega) \exp i \beta_{\lambda}(\omega) z \quad (3.56)$$

avec

$$\frac{1}{\bar{n}_{\lambda}} = \frac{c}{n_{\lambda}^2} \frac{\partial \beta_{\lambda}}{\partial \omega} \quad (3.57)$$

Nous supposons maintenant que le guide est monomode. Alors, en accord avec les définitions du chapitre 2, les opérateurs des enveloppes lentement variables du mode guidé peuvent s'écrire localement sous la forme

$$\hat{A}(z, \omega - \omega_0) = \left[ \int d^2 \mathbf{x} \phi_1(\mathbf{x}, \omega) \hat{E}(\mathbf{x}, z, \omega) \right] \exp[-i \beta(\omega) z] = \sqrt{\frac{\pi \hbar \omega}{\bar{n}_1(\omega) \epsilon_0 c}} \hat{a}(z, \omega - \omega_0) \quad (3.58)$$

avec  $\hat{a}(z, \omega) = \hat{a}_1(\omega + \omega_0) \exp i [\beta_1(\omega + \omega_0) - \beta_1(\omega_0)] z$ . Donc, à partir de (3.50), nous avons

$$[\hat{a}(z, \omega), \hat{a}^{\dagger}(z, \omega')] = \delta(\omega - \omega') \quad (3.59)$$

Comme le montre la figure 3.4, nous pouvons maintenant identifier  $\hat{a}_m(\omega) = \hat{a}(0, \omega)$  et  $\hat{a}_{out}(\omega) = \hat{a}(L, \omega)$  comme les opérateurs d'entrée et de sortie, qui vérifient

$$[\hat{a}_{in}(\omega), \hat{a}_{in}^{\dagger}(\omega')] = \delta(\omega - \omega') \text{ et } [\hat{a}_{out}(\omega), \hat{a}_{out}^{\dagger}(\omega')] = \delta(\omega - \omega'). \quad (3.60)$$

Pour les amplificateurs linéaires et insensibles à la phase, la relation d'entrée-sortie s'écrit comme

$$\langle \hat{a}_{out}(\omega) \rangle = \sqrt{G(\omega)} \langle \hat{a}_{in}(\omega) \rangle \quad (3.61)$$

Evidemment, cette relation ne peut pas être utilisé directement pour les opérateurs quantiques. Car si nous posons  $\hat{a}_{out}(\omega) = \sqrt{G(\omega)} \hat{a}_{in}(\omega)$ , nous aurons  $[\hat{a}_{out}(\omega), \hat{a}_{out}^{\dagger}(\omega')] = |G(\omega)| \delta(\omega - \omega')$ . Or, nous avons généralement :  $|G(\omega)| \neq 1$  ce qui est en désaccord avec la deuxième relation de commutation de (3.60). Nous pouvons vérifier que la seule façon de résoudre ce problème linéairement est de rajouter l'opérateur de bruit additif,  $\hat{b}(\omega)$ , et d'écrire [9]

$$\hat{a}_{out}(\omega) = \sqrt{G(\omega)} \hat{a}_{in}(\omega) + \hat{b}(\omega) \quad (3.62)$$

où le bruit  $\hat{b}(\omega)$  est indépendant de l'entrée,  $\hat{a}_{in}(\omega)$ . Nous devons avoir  $\langle \hat{b}(\omega) \rangle = 0$  pour que la limite classique (3.61) soit vérifiée. Pour conserver les relations de commutation, nous devons avoir

$$[\hat{b}(\omega), \hat{b}^{\dagger}(\omega')] = [1 - |G(\omega)|] \delta(\omega - \omega') \quad (3.63)$$

Les équations (3.60) et (3.62) associées à (3.63) déterminent la relation d'entrée-sortie des opérateurs quantiques, qui est valable pour tout dispositif linéaire et insensible à la phase. Puisque les opérateurs d'enveloppe lentement variables normalisée,  $\hat{a}_{in}(\omega) = \underline{\hat{a}}(0, \omega)$  et  $\hat{a}_{out}(\omega) = \underline{\hat{a}}(L, \omega)$ , peuvent se considérer localement comme les opérateurs d'annihilation grâce à (3.60), nous pouvons définir localement l'opérateur de densité pour l'entrée  $\hat{\rho}_{in}$  et celui de sortie  $\hat{\rho}_{out}$  [8]. Ce dernier peut alors s'exprimer comme le produit direct de ce premier et celui du bruit additif :  $\hat{\rho}_{out} = \hat{\rho}_{in} \hat{\rho}_b$ .

### 3.2.2 Modèle de propagation pour les amplificateurs linéaires et insensibles à la phase

Pour un amplificateur linéaire et insensible à la phase, nous pouvons alors décrire l'évolution du mode optique guidé par l'équation de Langevin quantique comme suivante

$$\partial_z \underline{\hat{a}}(z, \omega) = \frac{1}{2} g(z, \omega) \underline{\hat{a}}(z, \omega) + \hat{f}(z, \omega) \quad (3.64)$$

où  $\underline{\hat{a}}(z, \omega)$  est l'opérateur du mode guidé, ou encore du signal,  $g(z, \omega)$  est le gain différentiel de l'amplificateur, et  $\hat{f}(z, \omega)$  est la force de Langevin quantique indépendante du signal. Il est à mentionner que dans (3.64), nous n'avons pas pris en compte le couplage des signaux dans les deux sens de propagation. Pour simplifier, nous allons ignorer la dépendance fréquentielle dans la suite de cette section, en supposant que la bande de signal soit suffisamment étroite. Nous posons alors en entrée

$$[\hat{a}(0), \hat{a}^\dagger(0)] = 1 \quad (3.65)$$

La force de Langevin quantique est nécessaire non seulement à cause de la relation d'entrée-sortie, mais aussi du fait que comme nous avons vu aux deux chapitres précédents, les bruits spontanés surgissent automatiquement dans les modèles quantifiés pour l'optique linéaire, c'est-à-dire, l'absorption ou l'amplification à l'inversion de population, et pour les diffusions Raman et Brillouin. Selon le théorème de fluctuation-dissipation, nous pouvons alors écrire les relations suivantes

$$\begin{aligned} [\hat{f}(z), \hat{f}^\dagger(z')] &= C_f(z) \delta(z - z'), \quad \langle \hat{f}(z) \rangle = 0, \\ \langle \hat{f}^\dagger(z') \hat{f}(z) \rangle &= \bar{n}_f(z) C_f(z) \delta(z - z') \quad \text{et} \quad \langle \hat{f}(z') \hat{f}^\dagger(z) \rangle = [1 + \bar{n}_f(z)] C_f(z) \delta(z - z') \end{aligned} \quad (3.66)$$

où  $\bar{n}_f(z)$  est le nombre moyen de photon. Les corrélations d'ordre supérieur à deux peuvent s'évaluer à l'aide du théorème de Wick introduit au chapitre 1. D'après le théorème de fluctuation-dissipation, nous devons avoir

$$C_f(z) = -g(z) \quad (3.67)$$

La solution de (3.63) peut être écrite sous la forme

$$\hat{a}(z) = \sqrt{G(z)} \left[ \hat{a}(0) + \int_0^z \frac{\hat{f}(x)}{\sqrt{G(x)}} dx \right] \quad (3.68)$$

avec le gain local cumulé

$$G(z) = \exp \int_0^z g(x) dx \quad (3.69)$$

A partir de (3.68), nous pouvons vérifier que la relation de commutation

$$[\hat{a}(z), \hat{a}^\dagger(z)] = 1 \quad (3.70)$$

est retenue. Maintenant, la valeur moyenne de nombre de photon  $\hat{N}(z) = \hat{a}^\dagger(z)\hat{a}(z)$  peut s'exprimer comme

$$N(z) = \langle \hat{N}(z) \rangle = G(z) \left[ N(0) - \int_0^z \frac{\bar{n}_f(x)g(x)}{G(x)} dx \right] \quad (3.71)$$

Dérivant les deux côtés de l'équation ci-dessus par rapport à  $z$ , nous trouvons l'équation d'évolution de nombre moyen de photon sous la forme

$$\frac{dN(z)}{dz} = g(z)N(z) - \bar{n}_f(z)g(z) \quad (3.72)$$

Nous identifions immédiatement cette équation comme le formalisme d'émission spontanée amplifiée ou ASE (Amplified Spontaneous Emission), et  $\bar{n}_{sp}(z) = -\bar{n}_f(z)$  comme le facteur de l'émission spontanée, dont l'expression explicite dépend évidemment du mécanisme d'amplification.

Il est maintenant utile de réécrire l'équation (3.71) sous la forme

$$N(z) = G(z)N(0) + N_{ASE}(z) \quad (3.73)$$

avec le nombre de photon ASE défini comme

$$N_{ASE}(z) = G(z) \int_0^z \frac{\bar{n}_{sp}(x)g(x)}{G(x)} dx \quad (3.74)$$

Si le facteur de l'émission spontanée est une constante indépendante de  $z$ ,  $\bar{n}_{sp}(x) \equiv N_{sp}$  nous obtenons alors ce que nous pouvons trouver habituellement dans le littérature [10] :  $N_{ASE} = N_{sp}[G(z)-1]$ . Finalement, pour terminer cette section, nous pouvons aussi trouver l'expression bien connue pour la variance du nombre de photon [10] sous la forme

$$\begin{aligned}\sigma_N^2(z) &= \langle \hat{N}^2(z) \rangle - \langle \hat{N}(z) \rangle^2 \\ &= G^2(z)[\sigma_N^2(0) - N(0)] + N(z) + 2G(z)N(0)N_{ASE}(z) + N_{ASE}^2(z)\end{aligned}\quad (3.75)$$

où le premier terme exprime le bruit d'excès quand le signal à l'entrée n'est pas dans l'état cohérent ; le deuxième terme est le bruit de grenaille ; le troisième est le bruit du battement signal-ASE, qui la source de bruit majeure en pratique ; et le dernier est le bruit du battement ASE-ASE.

### 3.3 Performance en bruit des amplificateurs optiques

Dans cette section, nous allons discuter évaluer les performances de bruit des amplificateurs optiques linéaires et insensibles à la phase. Dans la section 3.3.1, nous allons d'abord montrer comment calculer en pratique la fonction caractéristique du photo-courant détecté à la sortie d'un amplificateur. Ensuite, nous discuterons des deux définitions du facteur de bruit.

#### 3.3.1 Statistiques des photons ASE et du photo-courant

Nous allons d'abord étudier les statistiques des photons ASE. Dans les amplificateurs optiques linéaires, les photons ASE, venant du bruit quantique additif, sont indépendants du signal d'entrée. Nous pouvons alors étudier le bruit ASE des amplificateurs linéaires en absence du signal d'entrée. Toutefois, l'opérateur  $\hat{a}(0)$  dans (3.68) ne peut pas être éliminé, puisqu'il est nécessaire pour conserver la relation de commutation. Ainsi, faisant appel au théorème de Wick, nous pouvons trouver facilement l'égalité suivante

$$\langle [\hat{a}_{ASE}^\dagger(z)]^n [\hat{a}_{ASE}(z)]^n \rangle = n! \langle \hat{a}_{ASE}^\dagger(z) \hat{a}_{ASE}(z) \rangle^n = n! N_{ASE}^n(z) \quad (3.76)$$

Alors, puisque  $[\hat{a}_{ASE}(z), \hat{a}_{ASE}^\dagger(z)] = 1$ , comme nous avons montré dans l'annexe A, (3.76) implique que le nombre de photons ASE suit une distribution de Bose-Einstein (3.27). Cela implique que les photons ASE sont en fait le rayonnement thermique. Alors, comme nous avons montré dans la section 3.1, l'opérateur de densité pour l'émission ASE peut s'écrire en P-représentation comme

$$\hat{\rho}_{ASE} = \frac{1}{\pi N_{ASE}} \int \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} |\alpha\rangle P_N(\alpha, N_{ASE}) \langle \alpha| d^2\alpha, \quad (3.77)$$

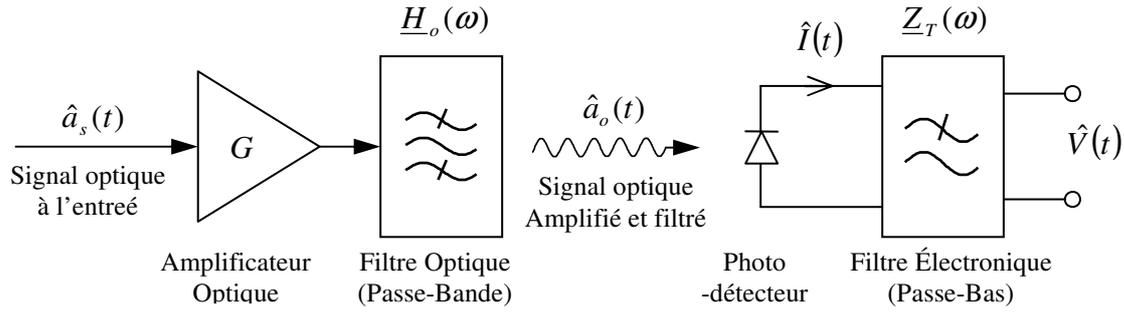


Figure 3.5 – Représentation schématique d'un système de photo-détection directe

avec

$$P_N(\alpha, N_{ASE}) = \frac{1}{\pi N_{ASE}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{N_{ASE}}\right) \quad (3.78)$$

qui est une fonction gaussienne centré bidimensionnelle de variance  $N_{ASE}$ .

Considérons maintenant un système de détection directe illustré sur la figure 3.5. Après l'amplification optique, le signal arrive sur un filtre optique passe-bande. Nous supposons que l'amplificateur est linéaire et insensible à phase. Avant de passer par le filtre optique, l'opérateur de signal s'écrit comme  $\hat{a}(t) = \sqrt{G(z)}\hat{a}_s(t) + \hat{b}_a(t)$ , où  $\hat{b}_a(t)$  est le bruit additif induit par l'amplificateur optique. Il est à noter qu'ici, l'opérateur  $\hat{N}_s(t) = \hat{a}_s^\dagger(t)\hat{a}_s(t)$  doit s'interpréter comme celui du flux de photon, exprimé en photon par seconde. Nous supposons également que le filtre optique est lui aussi linéaire et insensible à la phase. Pour la simplicité mathématique, nous supposons que les opérateurs peuvent s'écrire comme les sommes des composantes fréquentielles discrètes. Par exemple, nous avons  $\hat{a}(t) = (2\pi)^{-1} \sum \hat{a}_k \exp(-i\omega_k t)$ . Les opérateurs des composantes fréquentielles du signal après le filtre optique peuvent donc s'écrire comme  $\hat{a}_{o,k} = \underline{H}_o(\omega_k)\hat{a}_k + \hat{b}_{o,k}$ , où  $\hat{b}_{o,k}$  est le bruit additif à cause du filtrage optique. Alors, nous avons

$$\hat{a}_{o,k} = \sqrt{G}\underline{H}_o(\omega_k)\hat{a}_{s,k} + \hat{b}_k \quad (3.79)$$

avec l'opérateur du bruit additif total

$$\hat{b}_k = \underline{H}_o(\omega_k)\hat{b}_{a,k} + \hat{b}_{o,k} \quad (3.80)$$

Evidemment, nous pouvons considérer l'ensemble de l'amplificateur et le filtre optiques comme un composant unique, dont le gain est  $\sqrt{G}\underline{H}_o(\omega_k)$ . Nous avons donc

$$[\hat{b}_{k'}, \hat{b}_k^\dagger] = G|\underline{H}_o(\omega_k)|^2 \delta_{kk'} \text{ et } \langle \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_{k'} \rangle = N_{ASE,k} \delta_{kk'} \quad (3.81)$$

où  $N_{ASE,k} = |\underline{H}_o(\omega_k)|^2 N_{ASE}$ . D'après la discussion dans les sections précédentes, nous devons avoir  $[\hat{a}_{o,k}, \hat{a}_{o,k'}^\dagger] = \delta_{k'k}$ , ou bien dans le domaine temporel

$$[\hat{a}_o(t), \hat{a}_o^\dagger(t')] = \delta(t-t') \quad (3.82)$$

Maintenant, nous écrivons l'opérateur de densité du signal d'entrée en P-représentation sur la base d'états cohérents multimodes comme

$$\hat{\rho}_s = \int |\cdots \alpha_{k_l}, \alpha_{k_{l+1}}, \cdots\rangle P_s(\cdots, \alpha_{k_l}, \alpha_{k_{l+1}}, \cdots) \langle \cdots, \alpha_{k_l}, \alpha_{k_{l+1}}, \cdots | \cdots d^2\alpha_{k_l} d^2\alpha_{k_{l+1}} \cdots \quad (3.83)$$

qui est une intégration de dimension infinie. L'opérateur de densité du bruit additif total quant à lui peut s'écrire comme

$$\hat{\rho}_b = \prod_k \hat{\rho}_{b,k}, \text{ avec } \hat{\rho}_{b,k} = \int \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} |\beta_k\rangle P_N(\beta_k, N_{ASE,k}) \langle \beta_k | d^2\alpha_k \quad (3.84)$$

Le bruit additif étant indépendant du signal, l'opérateur de densité du système total est le produit direct des opérateurs de densité du signal et du bruit additif total

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_s \hat{\rho}_b \quad (3.85)$$

Le photo-courant du photo-détecteur doit être proportionnel au flux des photons. Négligeant le courant de bruit créé au cours de la conversion photon électrons, nous pouvons écrire l'opérateur de photo-courant comme

$$\hat{I}(t) = \eta \hat{a}_o^\dagger(t) \hat{a}_o(t) \quad (3.86)$$

où  $\eta$  est l'efficacité quantique du photo-détecteur. Alors, après le filtre passe-bas du circuit électronique, le rendement, soit la tension électrique, est donné par

$$\hat{V}(t) = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} H_T(t-\tau) \hat{a}_o^\dagger(\tau) \hat{a}_o(\tau) d\tau + V_e(t) \quad (3.87)$$

avec

$$\underline{H}_T(\omega) = \frac{\underline{Z}_T(\omega)}{\underline{Z}_T(0)} \text{ et } \mu = \eta \underline{Z}_T(0) \quad (3.88)$$

qui est un filtre causal et réel. Cela veut dire que, dans le domaine temporel, nous devons avoir  $H_T(t < 0) = 0$  et  $H_T^* = H_T$ . Dans (3.86),  $V_e(t)$  représente le bruit, indépendant du signal, rajouté par le circuit électronique. Maintenant, nous pouvons calculer la fonction génératrice des moments du rendement par

$$\begin{aligned}\Phi_v(s, t) &= \langle \exp(s\hat{V}(t)) \rangle \\ &= \text{tr}[\hat{\rho} \exp\left(s\mu \int_{-\infty}^{+\infty} H_T(t-\tau) \hat{a}_o^\dagger(\tau) \hat{a}_o(\tau) d\tau\right)] \langle \exp(sV_e(t)) \rangle\end{aligned}\quad (3.89)$$

L'intégration ci-dessus peut se réécrire comme la limite de la somme d'une série

$$\exp\left(s\mu \int_{-\infty}^{+\infty} H_T(t-\tau) \hat{a}_o^\dagger(\tau) \hat{a}_o(\tau) d\tau\right) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \prod_n \exp[s\mu H_T(t-n\Delta\tau) \hat{a}_o^\dagger(n\Delta\tau) \hat{a}_o(n\Delta\tau) \Delta\tau] \quad (3.90)$$

et la relation de commutation (3.80) devient

$$[\hat{a}_o(n\Delta\tau), \hat{a}_o^\dagger(m\Delta\tau)] = \delta_{n,m} \Delta\tau^{-1} \quad (3.91)$$

Faisant appel à l'égalité [11] :  $\exp(\lambda\hat{c}^\dagger\hat{c}) \equiv \exp[\hat{c}^\dagger\hat{c}(e^\lambda - 1)]$  ; si  $[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = 1$ , où  $F(\hat{c}^\dagger, \hat{c})$  signifie l'opération de l'ordonnancement normal (normal ordering)<sup>4</sup>, nous pouvons trouver

$$\begin{aligned}\Phi_v(s, t) &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left\langle : \exp\left[\sum_n \left(e^{s\mu H_T(t-n\Delta\tau)} - 1\right) \hat{a}_o^\dagger(n\Delta\tau) \hat{a}_o(n\Delta\tau) \Delta\tau\right] : \right\rangle \langle \exp(sV_e(t)) \rangle \\ &= \text{tr}[\hat{\rho} : \exp\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{s\mu H_T(t-\tau)} - 1\right) \hat{a}_o^\dagger(\tau) \hat{a}_o(\tau) d\tau\right] :] \langle \exp(sV_e(t)) \rangle\end{aligned}\quad (3.92)$$

Rappelons nous maintenant que l'opérateur du signal devant le photo-détecteur peut s'exprime comme

$$\hat{a}_o(t) = (2\pi)^{-1} \sum_k \left[ \sqrt{G} \underline{H}_o(\omega_k) \hat{a}_{s,k} + \hat{b}_k \right] \exp(-i\omega_k t). \quad (3.93)$$

Alors, puisque les opérateurs de densité peuvent s'écrire sous les bases d'états cohérents comme (3.83) et (3.84), et que nous avons par exemple

$$\begin{aligned}\hat{a}_s(t) |\cdots \alpha_{s,k_i}, \alpha_{s,k_{i+1}}, \cdots\rangle &= \sum_l \alpha_{s,k_l} \exp(-i\omega_{k_l} t) |\cdots \alpha_{s,k_i}, \alpha_{s,k_{i+1}}, \cdots\rangle = \alpha_s(t) |\cdots \alpha_{k_i}, \alpha_{k_{i+1}}, \cdots\rangle \\ \langle \cdots \alpha_{s,k_i}, \alpha_{s,k_{i+1}}, \cdots | \hat{a}_s^\dagger(t) &= \langle \cdots \alpha_{s,k_i}, \alpha_{s,k_{i+1}}, \cdots | \alpha_s^*(t),\end{aligned}$$

il se trouve que l'expression de l'ordonnancement normal (3.92) devient

<sup>4</sup> C'est-à-dire de mettre tous les opérateurs d'annihilation à droite, au sein de chaque terme de  $F(\hat{c}^\dagger, \hat{c})$ , sans prendre en compte les relations de commutation. Par exemple, nous avons :  $\hat{c}^\dagger \hat{c} \hat{c}^\dagger \hat{c} = \hat{c}^\dagger \hat{c}^\dagger \hat{c} \hat{c}$ .

$$\Phi_v(s, t) = \left\langle \exp \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{s\mu H_T(t-\tau)} - 1) |\alpha_o(\tau)|^2 d\tau \right] \right\rangle \langle \exp(sV_e(t)) \rangle \quad (3.94)$$

où  $\alpha_o(t) = \sum_k [\sqrt{G} \underline{H}_o(\omega_k) \alpha_{s,k} + \beta_k] \exp(-i\omega_k t)$ , avec  $\hat{b}_k |\beta_k\rangle = \beta_k |\beta_k\rangle$ , est donc la valeur classique de  $\hat{a}_o(t)$ , et  $\langle \bullet \rangle$  devient donc l'espérance statistique classique. Avec les expressions des opérateurs de densité, nous constatons que la fonction classique  $\alpha_o(t)$  est la somme d'un signal aléatoire amplifié et filtré classique et un bruit gaussien aussi classique. Si le filtrage optique est passif, la valeur classique du bruit additif du filtrage  $\hat{b}_o(t)$  est négligeable. Alors, dans la limite de continuité, nous pouvons écrire

$$\alpha_o(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \underline{H}_o(\omega) [\sqrt{G} \alpha_s(\omega) + \beta_a(\omega)] \exp(-i\omega t) d\omega \quad (3.95)$$

où  $\alpha_s(t)$  est le signal analytique du signal à l'entrée de l'amplificateur, et  $\beta_a(t)$  est une variable aléatoire, gaussienne circulaire complexe de moyenne nulle. Quand la bande du signal est suffisamment étroite,  $\beta_a(t)$  devient un bruit blanc :  $\langle \beta_a^*(t') \beta_a(t) \rangle = N_{ASE} \delta(t-t')$ .

Malgré son apparence classique, l'expression (3.93) est un résultat tout à fait quantique. Cela peut être vérifié en examinant le noyau (kernel) d'intégration :  $e^{s\mu H_T(t-\tau)} - 1$ . Nous allons ignorer le terme contenant  $V_e(t)$  dans la suite. Nous rappelons que la densité de probabilité du rendement classique

$$V(t) = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} H_T(t-\tau) |\alpha_o(\tau)|^2 d\tau, \quad (3.96)$$

est la transformée de Fourier inverse de la fonction génératrice des moments :  $f_v(V, t) = \text{TF}^{-1}[\Phi_v(-2\pi i s, t)]$ . Supposant tout d'abord pour la clarté que le filtrage électronique soit un intégrateur

$$H_T(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| < T/2 \\ 0, & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.97)$$

nous avons

$$\Phi_v(-2\pi i s, t) = \left\langle \exp \left[ \left( e^{-2\pi i s \mu} - 1 \right) N_T(t) \right] \right\rangle, \text{ avec } N_T(t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} |\alpha_o(\tau)|^2 d\tau \quad (3.98)$$

qui est le nombre de photon collecté durant le temps  $T$ . Nous voyons que  $\Phi_v(-2\pi i s, t)$  devient une fonction périodique de période de  $1/\mu$ . Ceci implique le rendement devient une variable discrète. C'est un résultat quantique reflétant clairement l'aspect corpusculaire des photons. Si

nous supposons de plus que la fonction  $N_T(t)$  soit déterminée au sens classique, nous obtenons la probabilité suivante

$$P(V = n\mu) = \frac{N_T^n}{n!} e^{-N_T} \quad (3.99)$$

Ce n'est rien d'autre que la distribution de Poisson. Avec la fonction génératrice des moments (3.94), nous pouvons trouver directement les deux premiers moments comme

$$\left. \frac{d\Phi_v}{ds} \right|_{s=0} = \langle V(t) \rangle \quad \text{et} \quad \left. \frac{d^2\Phi_v}{ds^2} \right|_{s=0} = \mu^2 \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} H_T^2(t-\tau) |\alpha_o(\tau)|^2 d\tau \right\rangle + \langle V^2(t) \rangle \quad (3.100)$$

Alors, nous trouvons l'expression générale de la variance du bruit de grenaille, qui est le premier terme à droite de la 2<sup>ème</sup> égalité ci-dessus. Finalement, quand le bruit de grenaille est négligeable, la contrepartie classique de (3.94) peut se trouver à l'aide de l'approximation

$$e^{s\mu H_T(t-\tau)} - 1 \approx s\mu H_T(t-\tau) \ll 1$$

et nous avons donc l'expression classique

$$\Phi_v(s, t) \approx \langle \exp[sV(t)] \rangle \quad (3.101)$$

### 3.3.2 Deux définitions du facteur de bruit

Le facteur de bruit NF (Noise Factor) est utilisé pour évaluer la dégradation, menée par l'amplificateur, du rapport signal sur bruit SNR (Signal to Noise Ratio) [1][10][12][13]

$$NF = \frac{SNR_{in}}{SNR_{out}} \quad (3.102)$$

Originellement, la définition du facteur de bruit a été développée pour les amplificateurs linéaires travaillant dans les régimes de radiofréquences et de micro-ondes [12][13]. Puisque dans ces régimes, les détecteurs sont linéaires en champs EM, la définition est valable après la détection, c'est-à-dire que nous pouvons calculer directement le facteur de bruit d'un amplificateur, en mesurant directement, avec un détecteur idéal, les rapports signal sur bruit à l'entrée et à la sortie de l'amplificateur,  $SNR_{in}$  et  $SNR_{out}$ . Cette tradition est un héritage pour les amplificateurs optiques.

Comme déjà montrée dans la section précédente, la détection optique est à priori un processus nonlinéaire, car le photon courant est proportionnel au carré du champ électrique, ou bien plus précisément au nombre de photon arrivant sur le détecteur. Supposant que le

signal est dans l'état cohérent en entrée,  $\sigma_N^2(0) = N(0)$ , nous avons alors le rapport signal sur bruit à l'entrée

$$SNR_{in} = \frac{\langle \hat{N}(0) \rangle^2}{\sigma_N^2(0)} = N(0) \quad (3.103)$$

et le rapport signal sur bruit à la sortie exprimé en fonction de (3.75)

$$SNR_{out} = \frac{G^2(z)N^2(0)}{G(z)N(0) + N_{ASE}(z) + 2G(z)N(0)N_{ASE}(z) + N_{ASE}^2(z)} \quad (3.104)$$

Associant (3.102)-(3.104) et utilisant  $N_{ASE} = N_{sp}[G(z)-1]$ , nous trouvons l'expression du facteur de bruit au point de vu de détection

$$NF = \frac{1}{G} + 2N_{sp} \frac{G-1}{G} + \frac{N_{sp}(G-1) + N_{sp}^2(G-1)^2}{G^2N(0)} \quad (3.105)$$

Originellement défini pour évaluer la performance d'un amplificateur linéaire, le facteur de bruit doit être indépendant du signal. Or, l'expression (3.105) ne l'est pas et donc n'est pas en accord avec la standardisation IEEE [12][[3]], bien qu'elle est largement utilisée en pratique pour les cas où le bruit de battement ASE-ASE et le bruit de grenaille de ASE, soit le dernier terme de (3.105), sont négligeables grâce au gain élevé.

Les rapports (3.103) et (3.104) sont en fait ceux des puissances électroniques. Un choix pour éviter cette inconsistance est d'évaluer les rapports de puissances optiques, ou OSNR (Optical Signal to Noise Ratio). Les puissances optiques du signal et son bruit sont les sommes des celles de deux quadratures (3.5), c'est-à-dire,

$$P_o(z) = \langle \hat{a}_1 \rangle^2 + \langle \hat{a}_2 \rangle^2 \quad (3.106)$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_o^2(z) &= (\langle \hat{a}_1^2 \rangle - \langle \hat{a}_1 \rangle^2) + (\langle \hat{a}_2^2 \rangle - \langle \hat{a}_2 \rangle^2) \\ &= G(z)[N(0) - P_o(0)] + N_{ASE}(z) + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.107)$$

où nous avons utilisé (3.73) et  $P_o(z) = G(z)P_o(0)$  pour la seconde ligne de (3.107). L'expression ci-dessus montre clairement que le bruit optique du champ est composé du bruit d'excès amplifié, du bruit de ASE et des fluctuations du vide. Si le signal d'entrée est dans un état cohérent  $|\alpha\rangle$ , nous avons

$$P_o(0) = N(0) = |\alpha|^2, \quad \sigma_o^2(0) = \frac{1}{2} \quad (3.108)$$

et donc

$$\sigma_o^2(z) = N_{ASE}(z) + \frac{1}{2}. \quad (3.109)$$

Nous trouvons alors l'expression du facteur de bruit défini sur OSNR comme

$$NF = \frac{OSNR_{in}}{OSNR_{out}} = \frac{P_o(0)/\sigma_o^2(0)}{P_o(z)/\sigma_o^2(z)} = \frac{2N_{ASE} + 1}{G} = \frac{1}{G} + 2N_{sp} \frac{G-1}{G} \quad (3.110)$$

ce qui est en fait équivalent à (3.105) au gain élevé. Il est nécessaire de noter que (3.110) nous indique qu'en effet, la limite au gain très fort du facteur de bruit d'un amplificateur linéaire et insensible à la phase est de  $2N_{sp}$ . Quand l'inversion de population totale a lieu,  $N_{sp} \rightarrow 0$ , la limite fondamentale de 3 dB est atteint.

L'expression (3.107) mérite plus amples développements. Dans (3.72), le dernier terme à droite doit s'interpréter comme le taux d'émission ou/et diffusion spontanée, non-négatif, et donc doit être proportionnel au coefficient d'émission ou/et diffusion stimulée. Comme, l'émission ou/et la diffusion stimulée est la seule source d'amplification, nous pouvons considérer

$$\beta(z) = \bar{n}_{sp}(z) g(z) \quad (3.111)$$

comme le coefficient d'amplification totale. Le coefficient du gain net différentiel  $g(z)$  doit donc être inférieur à  $\beta(z)$ , puisqu'il y a encore de pertes dues à l'absorption, les diffusion Rayleigh, etc. Nous pouvons alors définir le coefficient d'atténuation totale comme

$$\alpha(z) = [\bar{n}_{sp}(z) - 1] g(z) \quad (3.112)$$

Nous avons donc

$$g(z) = \beta(z) - \alpha(z) \quad (3.113)$$

A l'aide de (3.111), (3.112) et (3.72), nous pouvons écrire la dérivée par rapport à  $z$  de (3.107) sous la forme

$$\frac{d}{dz} \sigma_o^2(z) = [\beta(z) - \alpha(z)] \sigma_o^2(z) + \frac{1}{2} [\beta(z) + \alpha(z)] \quad (3.114)$$

Cette équation a une signification physique importante : les processus d'amplification et d'atténuation introduisent tous les deux du bruit dans le signal, qui n'est rien d'autre que les

fluctuations du vide, comme déjà mentionné au chapitre 1. Cette conclusion est alors en accord avec le théorème de fluctuation-dissipation.

### **3.4 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons d'abord révisé les propriétés quantiques de base du champ optique. Il est intéressant de noter qu'en fait, l'état cohérent est en fait une superposition du champ classique et le vide quantique qui a une caractéristique gaussienne. En plus, il est à noter que ces propriétés d'optique quantique sont en fait basées sur une base de la description modale du champ optique, où les opérateurs d'annihilation et de création jouent un rôle central. Ensuite, nous avons étudié la relation d'entrée-sortie quantique pour les amplificateurs linéaires et insensibles à la phase. Nous avons vu que le bruit additif quantique est nécessaire pour préserver les relations de commutation des opérateurs d'enveloppe lentement variable normalisée, qui peuvent être localement considérés comme les opérateurs d'annihilation et de création.

Finalement, après avoir développé une formule pour le calcul de la fonction caractéristique du photo-courant prenant en compte de l'effet quantique afin de compléter notre discussion, nous avons comparé deux définitions du facteur de bruit. Nous avons vu que la définition basée sur le point de vue de la détection n'est pas en accord avec la standardisation IEEE. Pour la définition basée sur OSNR, il est essentiel de prendre en compte les fluctuations du vide dans le bruit du champ optique. D'après le théorème de fluctuation-dissipation, il est inévitable dans tout processus irréversible, d'amplification ou/et d'atténuation, que les fluctuations du vide soient couplées avec le signal.

**Références:**

- [1] Y. Yamamoto and K. Inoue, "Noise in amplifiers," *J. Lightwave Technol.* **21**, 2895-2915, 2003.
- [2] C. M. Caves, "Quantum limits on noise in linear amplifiers," *Phys. Rev. D* **26**, 1817-1839, 1982.
- [3] H. HEFFNER, "The fundamental noise limit of linear amplifiers," *Proc. IRE*, 50 1604-1608, 1962.
- [4] L. Susskind and J. Glogower, "Quantum mechanical phase and time operator," *Phys.* **1**, 49-61, 1964.
- [5] D. T. Pegg and S. M. Barnett, "Tutorial review Quantum optical phase," *J. Modern Opt.* **44**, 225-264, 1997.
- [6] E. C. G. Sudarshan, "Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams," *Phys. Rev. Letters* **10**, 277-279, 1963.
- [7] R. J. Glauber, "Coherent and incoherent states of radiation," *Phys. Rev.* **131**, 2766-2788, 1963.
- [8] H. P. Yuen and Jeffrey H. Shapiro, "Optical communication with two photon coherent states – Part I: quantum-state propagation and quantum-noise reduction," *IEEE Trans. Info. Theory* **IT-24**, 657-668, 1978.
- [9] H. A. Haus, "From classical to quantum noise," *J. Opt. Soc. Am. B* **12**, 2019-2036, 1995.
- [10] E. Desurvire, *Erbium-Doped Fiber Amplifiers: Principles and Applications*, New York, Wiley-Interscience, 1994.
- [11] Pawel Blasiak, "Combinatorics of boson normal ordering and some applications," PhD. Thesis, 2005.
- [12] H. A. Haus, "The noise figure of optical amplifiers," *IEEE Photon. Techno. Lett.* **10**, 1602-1604, 1998.
- [13] H. A. Haus, "Optimum noise performance of optical amplifiers," *IEEE J. Quantum Electron.* **37**, 813-823, 2001.

## Chapitre 4

# Gain et performance en bruit intrinsèque des Amplificateurs Raman

Il est indispensable de caractériser un amplificateur en termes de gain, de bande passante et de performance en bruit. Dans ce chapitre, nous allons d'abord présenter d'une manière générale et simplifiée l'amplification Raman dans les fibres optiques en silice. Nous analyserons ensuite le gain des amplificateurs Raman en régime petit-signal et en régime de saturation. Faisant suite aux études des chapitres précédents, nous analyserons également les performances en bruit intrinsèque, en terme du facteur de bruit, dans le régime petit-signal. Nous exposerons enfin une étude sur l'impact de la saturation et de la nonlinéarité sur la génération du bruit intrinsèque. Il est à mentionné que, dans ce chapitre, nous ignorerons la rétrodiffusion Rayleigh et les impacts de bruits classiques de pompe, qui font l'objet des deux chapitres suivants.

### 4.1 Présentation simplifiée de l'amplification Raman dans les fibres optiques à silice

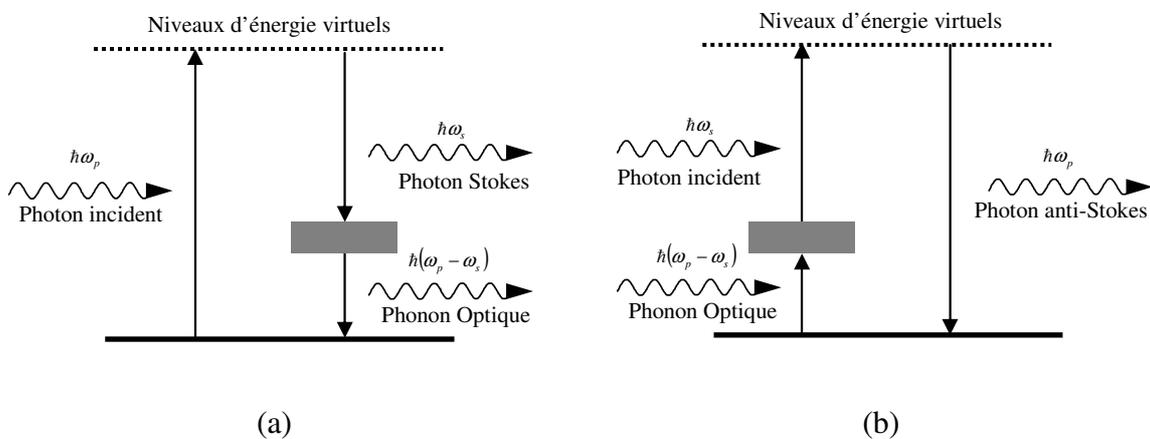


Figure 4.1 – Représentations schématiques des diffusions Raman Stokes (a) et anti-Stokes (b).

Au chapitre 2, nous avons établi un modèle quantique de l'amplification Raman dans les fibres optiques en silice, dont le mécanisme physique est la diffusion Raman stimulée. Nous pouvons considérer, pour simplifier, que cette diffusion inélastique résulte de la modulation de la lumière incidente par les vibrations moléculaires du milieu. D'un point de vue quantique simplifié, la diffusion Raman peut être représentée, comme illustré sur la figure 4.1, par la coexistence de deux phénomènes. Le premier est le rougissement de la lumière incidente, ou la diffusion Raman Stokes, où un photon de pompe  $\hbar\omega_p$  est diffusé, en créant un photon signal  $\hbar\omega_s$  de fréquence inférieure à celle de pompe et un phonon optique  $\hbar(\omega_p - \omega_s)$ . Le deuxième est le bleuissement de la lumière incidente, ou la diffusion Raman anti-Stokes, qui est le processus inverse de la diffusion Raman Stokes. Avec une probabilité proportionnelle au nombre de phonon  $\bar{n}_q$ , dont la valeur typique est de 0.13 comme déjà montré au chapitre 2, la diffusion Raman anti-Stokes est bien moins probable que celle Stokes ayant une probabilité proportionnelle à  $1 + \bar{n}_q$ . C'est d'ailleurs la raison pour laquelle l'amplification Raman est intrinsèquement de faible bruit, comme nous allons voir dans ce chapitre.

A partir des résultats du chapitre 2, un développement des équations de propagation des puissances optiques est exposé au chapitre 6, où la dépendance en polarisation est prise en compte. Si la pompe Raman est dépolarisée, à partir de (6.14), les équations d'évolution stationnaire de ces puissances classiques peuvent être trouvées sous la forme [1][2]

$$\frac{dP_s}{dz} = C_R P_p P_s - \alpha_s P_s \quad (4.1)$$

$$\pm \frac{dP_p}{dz} = -\eta_{sp} C_R P_p P_s - \alpha_p P_p \quad (4.2)$$

où  $P_s$  et  $P_p$  sont les puissances moyennes du signal et de pompe,  $\alpha_s$  et  $\alpha_p$  sont les coefficients d'atténuation de la fibre, respectivement à la longueur d'onde de signal  $\lambda_s$  et à la longueur d'onde de pompe  $\lambda_p$ , et  $\eta_{sp} = \lambda_s / \lambda_p$ . Le signe  $\pm$  rend compte de la configuration de pompage, et celui négatif concerne le pompage contra-directionnel. Le coefficient du gain Raman effectif  $C_R$  est défini comme  $C_R = g_R / 2A_{eff}$ , où le facteur 1/2 rend compte l'effet de dépolarisation,  $A_{eff}$  est la surface effective du mode définie par (6.6) en prenant en compte le recouvrement et le confinement de la pompe et du signal, et  $g_R$  est l'efficacité Raman de co-polarisation (celle de polarisation orthogonale est tout à fait négligeable) dépendante du type (dopant) de fibre ainsi que de l'écart fréquentiel entre la pompe et le signal. Pour le silice pure, la valeur maximale de l'efficacité Raman de co-polarisation est typiquement d'environ  $6 \times 10^{-14}$  m/W [1], ce qui correspond à un coefficient de gain Raman effectif d'environ  $0.4 \text{ W}^{-1} \text{ km}^{-1}$  pour les fibres standards monomodes ayant une surface effective de  $80 \mu\text{m}^2$ . Sur la figure 4.2, un exemple de l'efficacité Raman de co-polarisation normalisée est présenté en fonction de l'écart fréquentiel entre la pompe et le signal. Nous voyons que le pic de l'efficacité Raman est décalé d'environ 13.2 THz par rapport à la longueur d'onde de pompe,

ce qui représente une centaine de nanomètres, pour une longueur d'onde de pompe de 1450 nm. De plus, l'efficacité Raman possède un spectre très étendu, plus de 40 THz soit 280 nm pour  $\lambda_p = 1450$  nm. Ceci est dû au fait que les verres de silice sont les matériaux amorphes, dont le spectre de la densité modale de vibration (phonon), différent que celui des matériaux cristallins, constitue d'un continuum à cause de l'absence d'ordre à moyennes et longues distances. C'est grâce à ce fait, les fibres optiques à silice peuvent être transformées en amplificateurs de large bande [1].

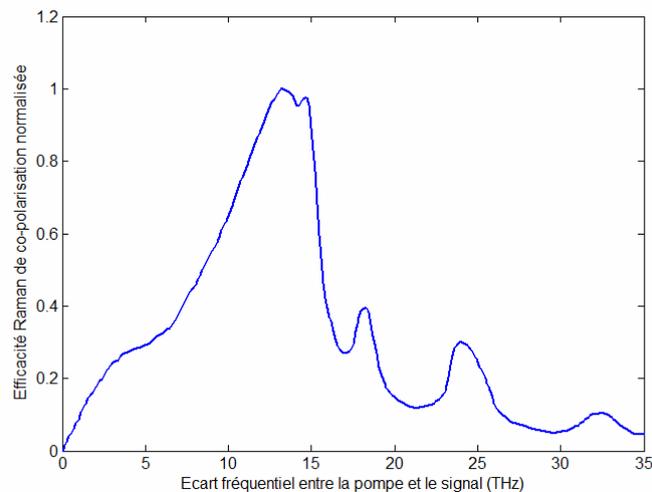


Figure 4.2 – Efficacité Raman de co-polarisation normalisée pour le verre de silice.

Pour transformer une fibre optique de transmission en un milieu amplificateur, il suffit donc d'injecter une pompe laser Raman dans la fibre en même temps que les signaux à transmettre. Puisque, comme nous avons montré au chapitre 2, la diffusion Raman est insensible au sens de propagation de la pompe par rapport au signal, la pompe peut être injectée soit co- soit contra-directionnellement. Quand il n'y a qu'une seule pompe Raman quasi-monochromatique injectée, ce sont les configurations de pompage simple co- ou contra-directionnel. Evidemment, les équations (4.1) et (4.2) ne sont valides que pour ces configurations de pompage simple. Il existe d'autres configurations de pompage où plusieurs pompes Raman différentes sont utilisées, dont la plus simple est celle de pompage bidirectionnel où deux pompes Raman contra-propagatives sont utilisées. La configuration plus élaborée est celle de multi-pompage avec plusieurs pompes de longueurs d'onde et sens de propagation différents. Dans cette dernière configuration de pompage, la distribution du gain Raman peut devenir plus uniforme spectralement et spatialement, grâce à la distribution bidirectionnelle des pompes de différentes longueurs d'onde et l'interaction entre pompes. Une modification relativement simple, que nous n'allons pas exposer ici, doit s'effectuer sur (4.1) et (4.2). Comme nous allons voir, les caractéristiques de bruit et de saturation de gain

sont bien différentes en fonction de la configuration de pompage. Dans cette thèse, seules les configurations de pompage simple et bidirectionnel sont évoquées.

## 4.2 Gain des amplificateurs Raman

Le gain net,  $G_{net}$ , des amplificateurs Raman est défini comme le rapport des puissances optiques moyennes de signal d'entrée et de sortie d'amplificateur. Cette notion de gain net prend en compte le gain apporté par la diffusion stimulée Raman ainsi que l'atténuation de la fibre. Il est donc nécessaire d'étudier l'évolution des puissances moyennes de la pompe  $P_p$  et du signal  $P_s$ . Il est à noter que la puissance de pompe est couplée à la puissance signal via le terme de déplétion de pompe, le 1<sup>er</sup> terme à droite de (4.2). Cette remarque est importante car le régime de saturation dépend directement de la déplétion de la pompe liée à la puissance du signal.

### 4.2.1 Gain en régime petit signal

Dans le régime petit signal ou régime de gain linéaire, le terme de déplétion de la pompe est négligeable devant l'atténuation. Ainsi, la puissance de pompe subit une propagation de type linéaire, et la distribution de puissance de pompe s'exprime par l'équation suivante

$$P_p(z) = P_{p0}e^{-\alpha_p z} \text{ ou } P_p(z) = P_{p0}e^{-\alpha_p(L-z)} \quad (4.3)$$

pour les pompages co- et contra-directionnel, respectivement. Dans ces deux expressions,  $L$  est la longueur de la fibre et  $P_{p0}$  correspond à la puissance de pompe injectée dans la fibre. En combinant (4.3) et (4.1), la puissance de signal peut être obtenue analytiquement, et le gain net de l'amplificateur Raman est alors directement obtenu à la sortie de fibre. Les expressions pour les deux configurations de pompage sont identiques et données par

$$G_{net} = \frac{P_s(L)}{P_{s0}} = \exp(-\alpha_s L) \exp(C_R P_{p0} L_{eff}) = A G_R \quad (4.4)$$

où  $P_{s0}$  représente la puissance du signal injectée d'entrée de l'amplificateur Raman,  $A = \exp(-\alpha_s L)$  correspond à l'atténuation de la fibre et  $G_R$  est le gain Raman, appelé en anglais gain on-off, et défini comme le rapport des puissances de signal en présence et en absence de la pompe Raman. En régime petit signal, la longueur effective de l'amplificateur est donnée par

$$L_{eff} = \int_0^L P_p(z) dz / P_{p0} = \frac{1 - e^{-\alpha_p L}}{\alpha_p} \quad (4.5)$$

Selon le type de fibre de transmission considéré, le gain Raman dépend du coefficient d'absorption de la pompe et de l'efficacité de gain de la fibre. La figure 4.1 illustre le gain Raman pour différents types de fibre de transmission en fonction de la puissance de pompe injectée. Le lien de transmission considéré est constitué de 100 km de fibre. Le gain Raman est limité à une valeur de 30 dB car, d'un point de vue pratique, la saturation de gain interviendra au dessus de cette valeur (voir section 4.1.2). La fibre TrueWave qui est une nouvelle génération de fibre optique présente le meilleur rendement gain/puissance. Cela est à comparer avec la fibre SMF-G652 qui est la fibre de transmission standard actuellement déployée sur la grande majorité de réseaux optiques.

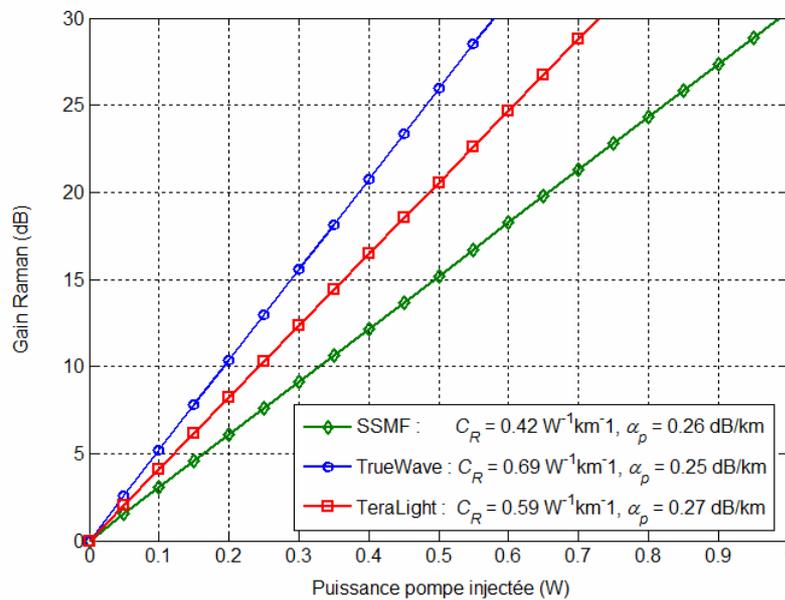


Figure 4.1 - Gain on/off en régime petit-signal pour différents types de fibre de transmission. Le lien de transmission considéré est constitué de 100 km de fibre.

#### 4.2.2 Gain en régime de saturation

La saturation de gain intervient lorsque la puissance signal devient trop élevée dans la fibre optique pour considérer que la pompe s'y propage linéairement. Autrement dit, le terme de déplétion de la puissance de pompe n'est plus négligeable devant l'atténuation de la fibre. La saturation de gain a une influence sur la longueur effective  $L_{eff}$  définie par l'équation (4.5) et se trouve réduite, diminuant ainsi la valeur du gain Raman. En effet, puisque les solutions de (4.2) peuvent s'écrire alors formellement, respectivement, sous les formes

$$P_p(z) = P_{p0} e^{-\eta_{sp} C_R \int_0^z P_s(x) dx - \alpha_p z} \quad \text{et} \quad P_p(z) = P_{p0} e^{-\eta_{sp} C_R \int_z^L P_s(x) dx - \alpha_p (L-z)} \quad (4.6)$$

nous voyons que les intégrations de ces puissances sont toujours inférieures à leurs contreparties en régime petit signal (4.3). Afin de compléter l'étude sur la saturation de gain, il est nécessaire d'envisager un modèle numérique de propagation des puissances pompe et signal correspondant au modèle (4.1) et (4.2). Ce modèle a été implémenté sous le logiciel de programmation MATLAB avec l'aide de la méthode numérique ODE45 pour la configuration de pompage co-directionnel, et la méthode numérique BVP4C pour la configuration de pompage contra-directionnel exposée dans l'annexe B.

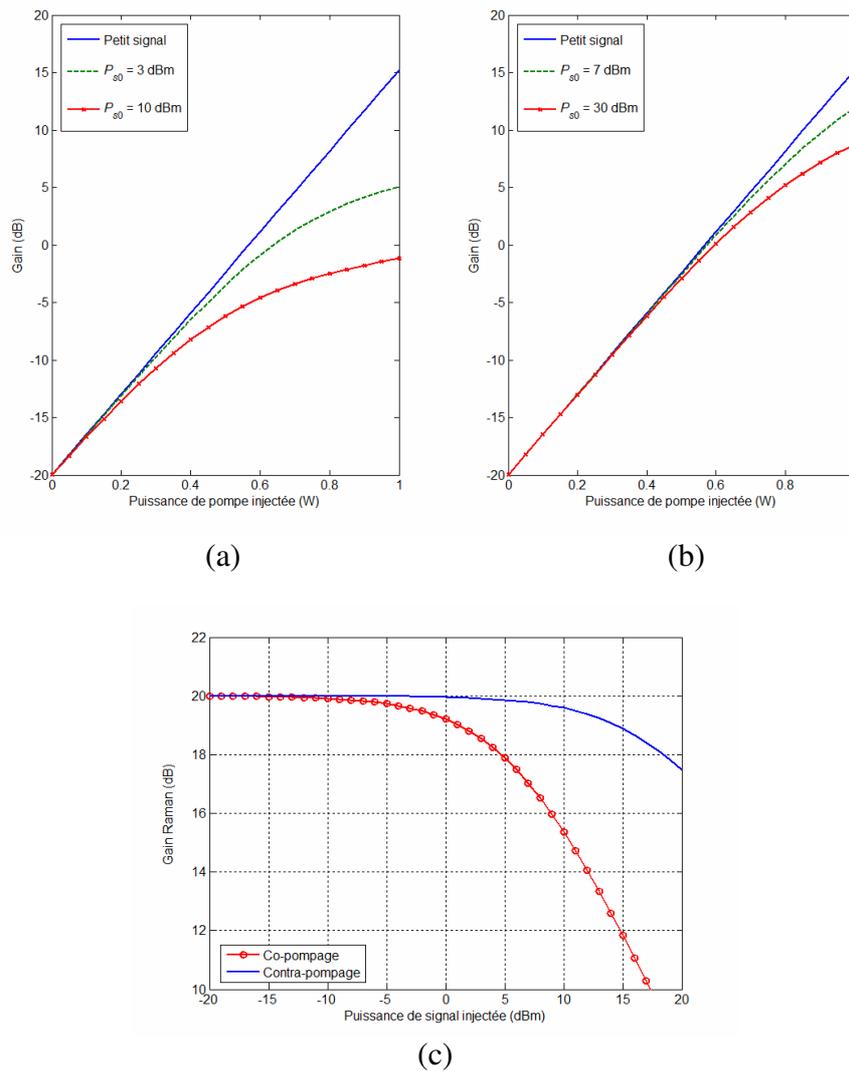


Figure 4.2 - Résultats de simulation sur la saturation de gain pour un amplificateur Raman composé de 100 km de fibre : (a) Gain net en fonction de la puissance de pompe injectée pour le co-pompage ; (b) Gain net en fonction de la puissance de pompe injectée pour le contra-pompage ; (c) Gain Raman en fonction de la puissance de signal injectée, où la puissance de pompe injectée donne un gain Raman de 20 dB en régime petit-signal. Les paramètres de simulation :  $\alpha_{s/p} = 0.2 / 0.26$  dB/km,  $\lambda_{s/p} = 1450 / 1550$  nm et  $C_R = 0.5$  W<sup>-1</sup>.km<sup>-1</sup>.

Les résultats de simulation sont présentés sur la figure 4.2. Il apparaît clairement que plus la puissance du signal d'entrée est élevée, plus la saturation est importante. Il est à noter que la courbure de saturation est d'autant plus marquée que la puissance de pompe est élevée. Cela traduit le fait que, plus le gain Raman est élevé, plus la puissance de saturation d'entrée est faible. Elles montrent aussi que les gains saturés des deux configurations ne sont plus identiques et que le pompage contra-directionnel est moins sensible à la saturation. Dans le cas présenté sur la figure 4.2-(c) par exemple, pour un gain Raman de 20 dB, permettant de compenser globalement l'atténuation de la fibre, la puissance de saturation d'entrée est plus élevée de plus de 10 dB dans le cas contra-directionnel par rapport au cas d'un pompage co-directionnel. Cela se comprend bien par le fait que l'énergie totale du signal dans la fibre est beaucoup plus élevée dans la configuration de pompage co-directionnel que dans celle contra-directionnelle, comme illustré sur la figure ci-dessous.

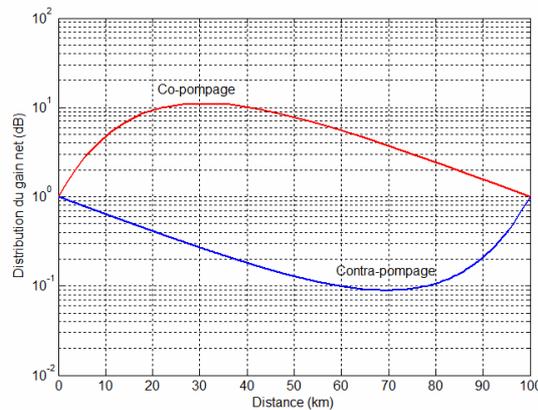


Figure 4.3 - Illustration schématique des distributions de la puissance de signal dans les deux configuration.

### 4.3 Facteur de bruit des amplificateurs Raman

Dans le chapitre précédent, nous avons démontré que tout amplificateur optique linéaire et insensible à la phase nécessite la considération de source de bruit additionnel. En régime petit-signal, les amplificateurs Raman font partie de cette famille d'amplificateurs et, donc, n'échappent pas à ce constat.

#### 4.3.1 Expression de facteur de bruit des amplificateurs Raman

D'après le chapitre précédent, nous pouvons tout d'abord normaliser l'enveloppe lentement variable du signal, se propageant dans la direction de  $Z$  positive, sous la forme

$$\hat{A}_s(z, \omega) = \sqrt{\frac{\pi \hbar \omega_0}{\bar{n} c \epsilon_0}} \hat{a}_s(z, \omega) \quad (4.7)$$

L'opérateur  $\hat{a}_s$  peut alors être considéré comme celui d'annihilation du signal. Négligeant la nonlinéarité de type Kerr, nous pouvons trouver à partir de (2.67) ou (2.72) l'équation d'évolution

$$\partial_z \hat{a}_s(z, \omega) = \frac{1}{2} g(z) \hat{a}_s(z, \omega) + \hat{f}(z, \omega) \quad (4.8)$$

où  $g(z) = C_R P_p(z) - \alpha_s$ , dont la dépendance fréquentielle est négligée. Les corrélations des forces de Langevin peut également être trouvées, à partir de (2.86) et (2.87), sous la forme

$$\langle \hat{f}^\dagger(z_2, \omega_2) \hat{f}(z_1, \omega_1) \rangle = \bar{n}_g(z_1) g(z_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) \delta(z_1 - z_2) \quad (4.9)$$

$$\langle \hat{f}(z_1, \omega_1) \hat{f}^\dagger(z_2, \omega_2) \rangle = [1 + \bar{n}_g(z_1)] g(z_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) \delta(z_1 - z_2) \quad (4.10)$$

avec

$$\bar{n}_g = -(1 + \bar{n}_q) C_R P_p(z) g^{-1}(z) \quad (4.11)$$

où  $\bar{n}_q$  est le nombre moyen des phonons optiques, typiquement  $\bar{n}_q \approx 0.13$  au maximum du coefficient d'amplification Raman et à 300 K.

Le modèle (4.8) néglige en fait la déplétion de pompe. Ceci est nécessaire pour établir une expression du facteur de bruit qui soit indépendante du signal. Ainsi, les résultats du chapitre précédent sont directement applicables aux amplificateurs Raman. Le facteur de diffusion Raman spontanée est donc

$$\bar{n}_{sp} = -\bar{n}_g = (1 + \bar{n}_q) C_R P_p(z) g^{-1}(z) \quad (4.12)$$

et l'équation d'évolution du flux moyen du photon signal s'écrit sous la forme

$$\frac{d}{dz} N_s(z) = g(z) N_s(z) + (1 + \bar{n}_q) C_R P_p(z) \quad (4.13)$$

Alors, nous pouvons trouver le flux du photon ASE sous la forme

$$N_{ASE}(z) = (1 + \bar{n}_q) [G(z) - 1] + \alpha_s (1 + \bar{n}_q) \int_0^z \frac{G(x)}{G(x)} dx \quad (4.14)$$

Faisant appel à (3.110), nous trouvons le facteur de bruit, défini à partir de l'OSNR, des amplificateur Raman de longueur  $L$  comme

$$NF = \frac{2N_{ASE}(L) + 1}{G(L)} = \frac{1}{G(L)} + 2(1 + \bar{n}_q) \frac{G(L) - 1}{G(L)} + 2\alpha_s (1 + \bar{n}_q) \int_0^L \frac{1}{G(x)} dx \quad (4.15)$$

D'après la discussion du chapitre précédent, nous pouvons également trouver les coefficients d'amplification totale et d'atténuation totale des amplificateurs Raman comme

$$\beta(z) = (1 + \bar{n}_q) C_R P_p(z) \text{ et } \alpha(z) = \alpha_s + \bar{n}_q C_R P_p(z) \quad (4.16)$$

Comme il l'a déjà souligné [3], les significations physiques de ces deux expressions sont claires : l'amplification totale dans les amplificateurs Raman est en effet la diffusion Raman Stokes stimulée, et comme ce processus crée des phonons, le taux de diffusion Raman Stokes doit être proportionnel à  $1 + \bar{n}_q$  [3][4]; le deuxième terme du coefficient d'atténuation totale provient de la diffusion Raman anti-Stokes, et comme ce processus consomme des phonons, le taux de diffusion Raman anti-Stokes doit être proportionnel à  $\bar{n}_q$  [3][4].

Le dernier terme à droite de (4.15) dépendant de la distribution du gain, le schéma de pompage peut donc influencer le facteur de bruit des amplificateurs Raman de manière significative. En fait, pour une valeur donnée du gain Raman, le gain net et de l'atténuation, un schéma de pompage co-directionnel permet de minimiser l'accumulation de bruit par rapport au cas du pompage contra-directionnel. Sur la figure 4.4, sont présentées, en pompages co- et contra-directionnels et pour trois valeurs différentes du gain Raman, les évolutions de la population du niveau haut virtuel définie par (2.90), du gain net et de la variance du champ optique. La portée de transmission considérée est composée de 100 km de fibre SMF avec une atténuation globale à 20 et 25 dB, aux longueurs d'onde signal et pompe, respectivement. D'un point de vue système, l'avantage du schéma de pompage co-directionnel s'explique par le fait que le schéma de pompage contra-directionnel ressemble à une solution de post-amplification (amplification après la transmission), alors que le schéma de pompage co-directionnel se rapproche plutôt d'un système avec pré-amplification (amplification avant la transmission). En effet, dans ces figures, nous voyons que, dans le schéma de pompage co-directionnel, l'inversion de population virtuelle a lieu dans les premières dizaines kilomètres de fibre, et que le bruit ASE est ainsi d'abord accumulé et puis atténué ; tandis qu'au schéma de pompage contra-directionnel, ce sont les dernières dizaines kilomètres de fibre où se situe l'inversion de population, et où le bruit ASE est accumulé sans être atténué ultérieurement de manière significative. Cela explique la différence d'environ 10 dB sur la puissance de bruit ASE (le nombre de photon ASE plus 1/2, voir (3.109)) en sortie des deux schémas de pompage.

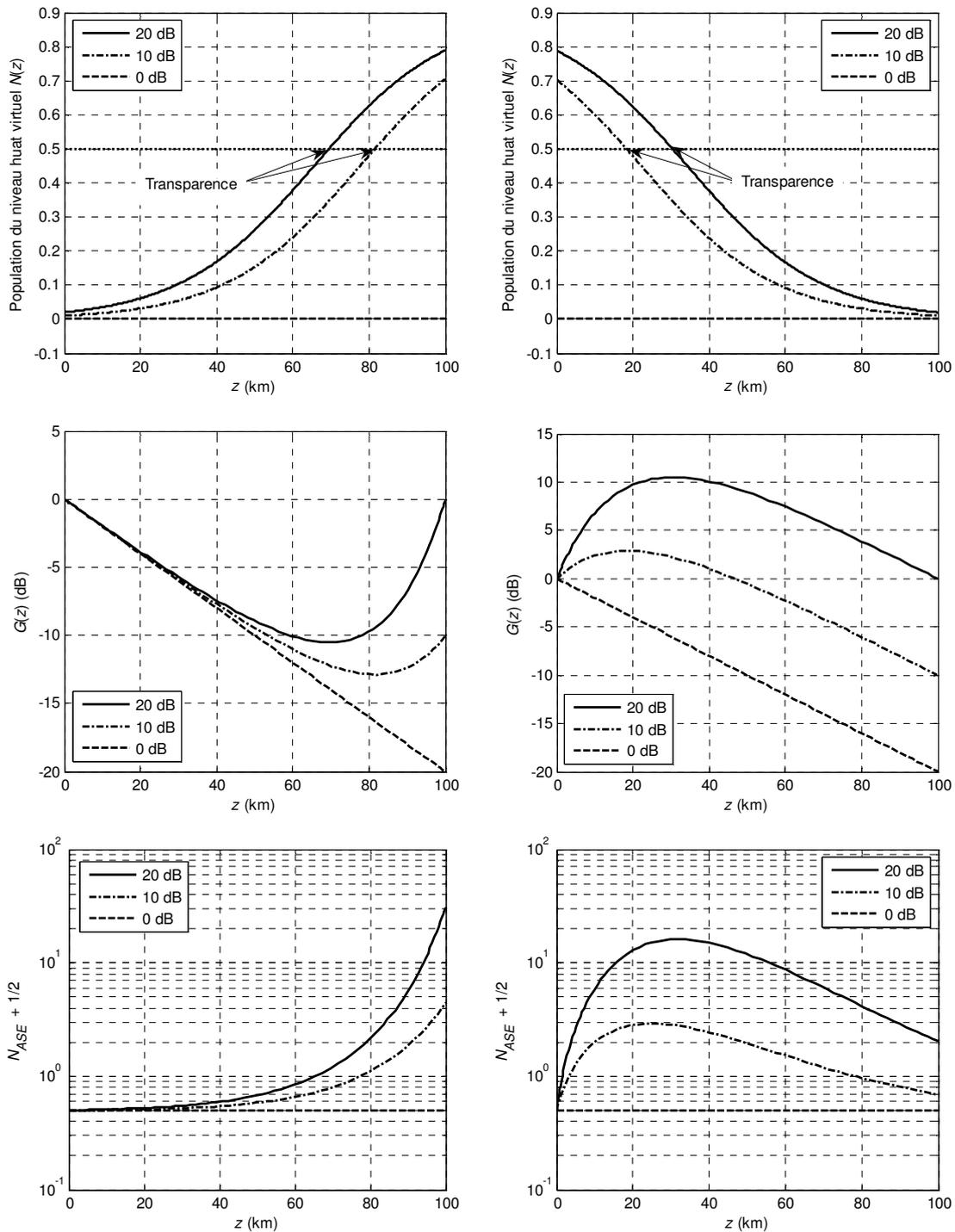


Figure 4.4 – Evolutions de la population du niveau haut virtuel, du gain net et de la variance du champ optique pour un span de transmission de 100 km de fibre SMF dont les atténuations globales sont estimées à 20 et 25 dB, aux longueurs d’onde signal et pompe, respectivement. Trois valeurs du gain Raman sont considérées et marquées sur les figures, dont 0 dB correspond à l’absence de pompe Raman.

Le facteur de bruit du même pas de transmission est représenté sur la figure 4.5, en fonction du gain Raman généré co- et contra-directionnellement. Le schéma de pompage co-directionnel apparaît clairement beaucoup plus avantageux, au niveau du facteur de bruit. Pour des valeurs du gain Raman inférieures à 5 dB, le facteur de bruit en co-pompage est toujours inférieur à 20 dB, ce qui correspond au le facteur de bruit de la fibre passive, alors que le facteur de bruit en contra-pompage est légèrement supérieur à cette valeur. Toutefois, à partir du moment où le gain Raman dépasse 5 dB, ces deux schémas de pompage présentent un intérêt certain. Selon (4.51), la limite du facteur de bruit des amplificateurs Raman pour les hautes valeurs de gain Raman est de  $2(1 + \bar{n}_q) \approx 2.26$ , soit 3.5 dB au maximum du coefficient d'amplification Raman et à 300 K. D'un point de vue pratique, les valeurs très hautes de gain Raman ne sont pas souhaitables. Une raison importante est l'effet de la double rétrodiffusion Rayleigh devient très important pour les hautes valeurs de gain Raman. Nous discuterons ce point au chapitre suivant.

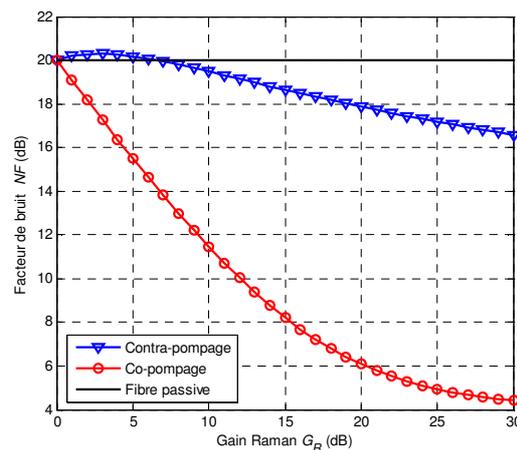


Figure 4.5 - Facteur de bruit en fonction du gain Raman, l'amplificateur Raman est composé du même span de fibre que dans la figure 4.4 et pompé co- ou contra-directionnellement.

### 4.3.2 Notion de facteur de bruit équivalent et vérification expérimentale

Pour les fibres de transmission, la distribution de gain est un avantage incontestable de l'amplification Raman. Pour se rendre compte de cet avantage, il suffit de comparer le facteur de bruit d'une liaison de transmission avec amplification Raman distribué à une liaison de transmission classique avec amplification localisée, de type EDFA par exemple. De cette comparaison, il découle alors la notion de facteur de bruit équivalent  $NF_{eq}$ . La figure ci-après illustre cette notion.

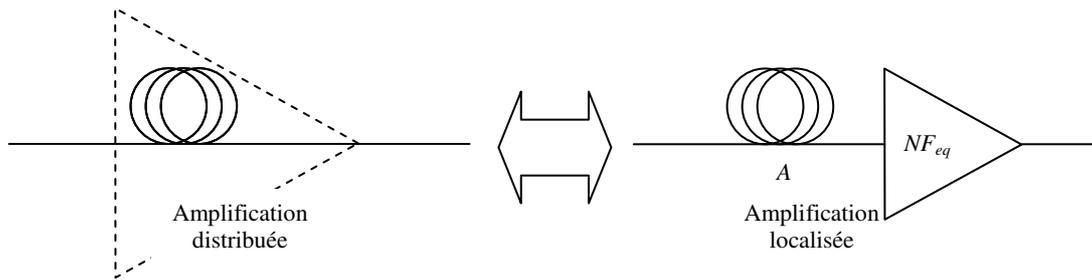


Figure 4.6 - Différents liens de transmission

Considérons une liaison de transmission utilisant la post-amplification localisée, comme montre la figure à droite ci-dessus, où l'atténuation de la fibre est  $A$ , inférieur ou égal à 1. Cherchons un amplificateur localisé en fin de ligne de facteur de bruit  $NF_{eq}$ , conduisant au même bruit total et au même gain net que le lien utilisant l'amplification distribuée. Utilisant la formule de cascading du facteur de bruit, appelée comme la formule de Friis [3][5], nous obtenons

$$NF_{total} = NF_1 + \frac{NF_2 - 1}{G_1} = \frac{1}{A} + \frac{NF_{eq} - 1}{A} = \frac{NF_{eq}}{A} \quad (4.17)$$

$$\Rightarrow NF_{eq} = A \cdot NF_{total}$$

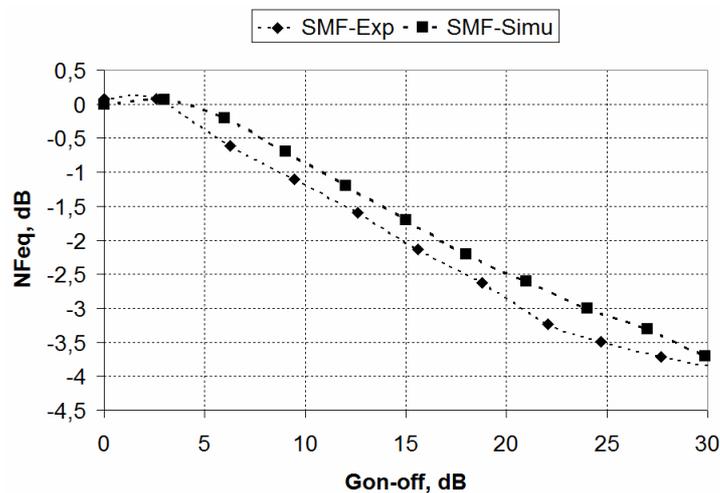


Figure 4.7 - Comparaison entre théorie et expérimentation du facteur de bruit équivalent d'un amplificateur Raman contra-directionnel constitué de 100 km de fibre SMF G-652. Paramètres :  $\alpha_{s/p} = 0.2/0.263$  dB/km,  $\lambda_{s/p} = 1450/1555$  nm et  $C_R = 0.42$  W<sup>-1</sup>km<sup>-1</sup>.

La figure 4.6, nous montre alors que le facteur de bruit équivalent exprimé en décibel est négatif, dès que le gain Raman dépasse 2 dB en pompage contra-directionnel. Dans le cas d'un pompage co-directionnel, le facteur de bruit équivalent est toujours négatif. Cette

négativité du facteur de bruit équivalent montre de l'intérêt d'une solution d'amplification distribuée par rapport à une architecture de transmission avec amplification localisée en bout de transmission. La configuration de pompage co-directionnel profite d'un meilleur facteur de bruit que la configuration de pompage contra-directionnel. Cela revient à illustrer la formule de cascading du facteur de bruit qui préconise un facteur de bruit minimum dès que le premier étage est constitué d'un amplificateur caractérisé par un faible facteur de bruit avec un fort gain. La figure 4.7 montre un bon accord entre l'expérience et la simulation du facteur de bruit [6]. La méthode de mesure est basée sur l'utilisation d'un analyseur de spectre optique permettant de mesurer la puissance d'émission spontanée.

## 4.4 Impact de la saturation de gain et de la nonlinéarité sur la génération de bruit intrinsèque

Dans la section précédente, nous n'avons pris en compte ni la saturation de gain, ni la nonlinéarité de Kerr des fibres. Bien que le facteur de bruit soit suffisant pour caractériser la performance en bruit intrinsèque des amplificateurs Raman travaillant en régime petit signal, il est évidemment nécessaire de caractériser également la génération du bruit intrinsèque en régime de saturation de gain pour comprendre l'impact de la nonlinéarité de Kerr sur cette génération. La notion de facteur de bruit est alors plus adaptée.

### 4.4.1 Modèle et solution

Pour ce faire, nous devons établir un nouvel modèle de propagation, car en présence de la saturation de gain et la nonlinéarité de Kerr, les résultats obtenus dans le chapitre précédent sur les amplificateurs linéaires et insensibles à la phase ne sont plus applicables. D'après le chapitre 2, nous proposons de modéliser la propagation des champs de signal et de pompe par les deux équations différentielles couplées comme suivantes

$$\begin{aligned} \left( \partial_z + \beta_{1s} \partial_t - \frac{i}{2} \beta_{2s} \partial_t^2 \right) \hat{a}_s &= \frac{C_R \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p - \alpha_s}{2} \hat{a}_s + i\kappa (2\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s) \hat{a}_s + \hat{f}_s \\ \left( e_p \partial_z + \beta_{1p} \partial_t - \frac{i}{2} \beta_{2p} \partial_t^2 \right) \hat{a}_p &= -\frac{C_R \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s + \alpha_p}{2} \hat{a}_p + i\kappa (2\hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p) \hat{a}_p + \hat{f}_p \end{aligned} \quad (4.18)$$

où  $\kappa$  est le coefficient Kerr et  $\hat{f}_\mu$  est la force de Langevin quantique. Puisque  $\hat{a}_\mu$  est normalisé de telle manière que  $\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\mu$  représente le flux des photons, le coefficient Raman effectif  $C_R$  est en fait aussi normalisé. Dans ce modèle, l'ordre des opérateurs quantiques est ignoré, car nous allons ensuite linéariser ces deux équations. Il est à noter qu'il est indispensable de prendre en compte la dispersion du 2<sup>ème</sup> ordre, sans laquelle l'impact de la nonlinéarité de Kerr ne peut pas être reflété.

Supposant que les champs de pompe et de signal soient quasi-classiques, nous pouvons décomposer les opérateurs comme

$$\hat{a}_\mu = A_\mu + \Delta\hat{a}_\mu \quad (4.19)$$

où  $A_\mu$  et  $\Delta\hat{a}_\mu$  sont, respectivement, la partie classique et les fluctuations quantiques. Cette dernière est supposée très petite devant la partie classique. En plus, nous supposons que  $A_\mu$  ne dépend que de  $z$ , afin d'effectuer une analyse de petit signal [7][8]. Les forces de Langevin quantiques aux fréquences de signal et de pompe peuvent ainsi s'écrire au 1<sup>er</sup> ordre comme

$$\hat{f}_s = \hat{f}_{L,s} + A_p \hat{q}^\dagger \text{ et } \hat{f}_p = \hat{f}_{L,p} + A_s \hat{q} \quad (4.20)$$

où  $\hat{f}_{L,\mu}$  est lié à l'atténuation linéaire et  $\hat{q}$  est l'opérateur de phonon. Le flux des photons peuvent aussi se décomposer comme

$$\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\mu = N_\mu + \Delta\hat{N}_\mu, \text{ avec } N_\mu = |A_\mu|^2 \quad (4.21)$$

qui est la partie classique et

$$\Delta\hat{N}_\mu = A_\mu^* \Delta\hat{a}_\mu + A_\mu \Delta\hat{a}_\mu^\dagger \quad (4.22)$$

qui est la partie de fluctuations quantiques approximée au 1<sup>er</sup> ordre. Cette dernière est justement ce que nous allons étudier dans la suite. En plus de (4.22), nous avons également besoins d'introduire les trois opérateurs hermitiens définis comme suivants

$$\Delta\hat{M}_\mu = i(A_\mu \Delta\hat{a}_\mu^\dagger - A_\mu^* \Delta\hat{a}_\mu), \hat{F}_{N,\mu} = A_\mu^* \Delta\hat{f}_\mu + A_\mu \Delta\hat{f}_\mu^\dagger \text{ et } \hat{F}_{M,\mu} = i(A_\mu \Delta\hat{f}_\mu^\dagger - A_\mu^* \Delta\hat{f}_\mu) \quad (4.23)$$

Il est à noter que  $\Delta\hat{M}_\mu$  est en fait en quadrature avec  $\Delta\hat{N}_\mu$ . Remplaçant (4.20)-(4.23) dans (4.18), gardant les termes au 1<sup>er</sup> ordre et effectuant la transformé de Fourier, nous trouvons l'équation vectorielle suivante

$$\partial_z \hat{\mathbf{V}}(z, \omega) = \mathbf{H}(z, \omega) \hat{\mathbf{V}}(z, \omega) + \hat{\mathbf{F}}(z, \omega) \quad (4.24)$$

avec

$$\hat{\mathbf{V}}^T(z, \omega) = \left( \frac{\Delta\hat{N}_s}{G_s} \quad \frac{\Delta\hat{M}_s}{G_s} \quad \frac{\Delta\hat{N}_p}{G_p} e^{-i\omega\beta_{ps}z} \quad \frac{\Delta\hat{M}_p}{G_p} e^{-i\omega\beta_{ps}z} \right), \quad (4.25)$$

$$\hat{\mathbf{F}}^T(z, \omega) = \begin{pmatrix} \frac{\hat{F}_{N,s}}{G_s} & \frac{\hat{F}_{M,s}}{G_s} & e_p \frac{\hat{F}_{N,p}}{G_p} e^{-i\omega\beta_{ps}z} & e_p \frac{\hat{F}_{M,p}}{G_p} e^{-i\omega\beta_{ps}z} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

et

$$\mathbf{H}(z, \omega) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega^2 \beta_{2s}}{2} & C_R N_{s0} G_p e^{i\omega\beta_{ps}z} & 0 \\ 2\kappa N_{s0} G_s - \frac{\omega^2 \beta_{2s}}{2} & 0 & 4\kappa N_{s0} G_p e^{i\omega\beta_{ps}z} & 0 \\ -e_p C_R N_{p0} G_s e^{-i\omega\beta_{ps}z} & 0 & 0 & e_p \frac{\omega^2 \beta_{2p}}{2} \\ 4e_p \kappa N_{p0} G_s e^{-i\omega\beta_{ps}z} & 0 & 2e_p \kappa N_{p0} G_p - e_p \frac{\omega^2 \beta_{2p}}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

où  $\beta_{ps} = e_p \beta_p - \beta_s$ ,  $G_\mu = N_\mu / N_{\mu 0}$  et  $N_{\mu 0} = N_\mu(z=0)$ . Les distributions des flux de photons classiques peuvent se calculer par

$$\begin{aligned} d_z N_s &= (C_R N_p - \alpha_s) N_s \\ d_z N_p &= -e_p (C_R N_s + \alpha_p) N_p \end{aligned} \quad (4.28)$$

tout comme dans la section 4.1 pour les puissances moyennes.

L'équation différentielle (4.24) étant linéaire et du 1<sup>er</sup> ordre, sa solution peut s'écrire formellement sous la forme

$$\hat{\mathbf{V}}(L, \omega) = \mathbf{U}(L, \omega) \left[ \hat{\mathbf{V}}(0, \omega) + \int_0^L \mathbf{U}^{-1}(x, \omega) \hat{\mathbf{F}}(x, \omega) dx \right] \quad (4.29)$$

où la matrice d'évolution est définie comme

$$\partial_z \mathbf{U}(z, \omega) = \mathbf{H}(z, \omega) \mathbf{U}(z, \omega), \text{ avec } \mathbf{U}(0, \omega) = \mathbf{I} \quad (4.30)$$

Nous pouvons écrire (4.29) plus explicitement comme

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{V}}_s(L, \omega) \\ \hat{\mathbf{V}}_p(L, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{ss}(L, \omega) & \mathbf{U}_{sp}(L, \omega) \\ \mathbf{U}_{ps}(L, \omega) & \mathbf{U}_{pp}(L, \omega) \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{V}}_s(0, \omega) \\ \hat{\mathbf{V}}_p(0, \omega) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{B}}_s(L, \omega) \\ \hat{\mathbf{B}}_p(L, \omega) \end{pmatrix} \right] \quad (4.31)$$

Nous avons alors

$$\hat{\mathbf{V}}_s(L, \omega) = \mathbf{U}_{ss}(L, \omega) [\hat{\mathbf{V}}_s(0, \omega) + \hat{\mathbf{B}}_s(L, \omega)] + \mathbf{U}_{sp}(L, \omega) [\hat{\mathbf{V}}_p(0, \omega) + \hat{\mathbf{B}}_p(L, \omega)] \quad (4.32)$$

Pour le pompage co-directionnel, c'est donc l'expression finale. Pour le pompage contra-directionnel, une étape en plus est nécessaire car  $\hat{\mathbf{V}}_p(0, \omega)$  n'est pas les valeurs d'entrée de la

pompe contra-directionnelle. L'expression finale pour le contra-pompage peut être facilement trouvée comme

$$\mathbf{V}_s(L, \omega) = \mathbf{T}(L, \omega)[\mathbf{V}_s(0, \omega) + \mathbf{B}_s(L, \omega)] + \mathbf{U}_{sp}(L, \omega)\mathbf{U}_{pp}^{-1}(L, \omega)\mathbf{V}_p(L, \omega) \quad (4.33)$$

avec

$$\mathbf{T}(L, \omega) = \mathbf{U}_{ss}(L, \omega) - \mathbf{U}_{sp}(L, \omega)\mathbf{U}_{pp}^{-1}(L, \omega)\mathbf{U}_{ps}(L, \omega) \quad (4.34)$$

#### 4.4.2 Corrélations quantiques

Nous supposons que le signal et la pompe sont dans les états cohérents en entrée. Alors, puisque toutes les propriétés quantiques proviennent des fluctuations quantiques, nous avons en entrée les relations suivantes

$$\Delta\hat{\underline{a}}_\mu(\omega)|\underline{\alpha}_{\mu 0}(\omega)\rangle = 0 \text{ et } [\Delta\hat{a}_\lambda(\omega), \Delta\hat{a}_\mu^\dagger(\omega')] = \delta_{\lambda\mu}\delta(\omega - \omega') \quad (4.35)$$

Nous pouvons ainsi trouver

$$\begin{aligned} \langle \Delta\hat{N}_\lambda^0(\omega)\Delta\hat{N}_\mu^0(\omega') \rangle &= \delta_{\lambda\mu}N_\mu^0\delta(\omega - \omega'), \quad \langle \Delta\hat{M}_\lambda^0(\omega)\Delta\hat{M}_\mu^0(\omega') \rangle = \delta_{\lambda\mu}N_\mu^0\delta(\omega - \omega') \\ \text{et } \langle \Delta\hat{N}_\lambda^0(\omega)\Delta\hat{M}_\mu^0(\omega') \rangle &= -\langle \Delta\hat{M}_\mu^0(\omega')\Delta\hat{N}_\lambda^0(\omega) \rangle = i\delta_{\lambda\mu}N_\mu^0\delta(\omega - \omega') \end{aligned} \quad (4.36)$$

ou encore sur les formes plus compactes

$$\langle \hat{\mathbf{V}}_\mu(0, \omega)\hat{\mathbf{V}}_\mu^\dagger(0, \omega') \rangle = N_\mu^0\delta(\omega - \omega') \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{C}_{VV,\mu}(0, \omega)\delta(\omega - \omega') \quad (4.37)$$

Pour la pompe contra-directionnelle, nous devons écrire (4.37) comme

$$\langle \hat{\mathbf{V}}_p(L, \omega)\hat{\mathbf{V}}_p^\dagger(L, \omega') \rangle = \frac{N_p^0}{G_p^2(L)}\delta(\omega - \omega') \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{C}_{VV,p}(L, \omega)\delta(\omega - \omega') \quad (4.38)$$

De la même manière, nous pouvons trouver à partir de (4.20)

$$\langle \hat{\mathbf{F}}(z, \omega)\hat{\mathbf{F}}^\dagger(z', \omega') \rangle = \delta(z - z')\delta(\omega - \omega')\mathbf{C}_{FF}(z, \omega) \quad (4.39)$$

avec

$$\mathbf{C}_{FF} = N_{s0}N_{p0} \times \begin{pmatrix} \frac{\alpha_s + (1+2\bar{n}_q)C_R N_p}{G_s N_{p0}} & i \frac{\alpha_s - C_R N_p}{G_s N_{p0}} & e_p (1+2\bar{n}_q)C_R e^{i\omega\beta_{ps}z} & ie_p C_R e^{i\omega\beta_{ps}z} \\ -i \frac{\alpha_s - C_R N_p}{G_s N_{p0}} & \frac{\alpha_s + (1+2\bar{n}_q)C_R N_p}{G_s N_{p0}} & ie_p C_R e^{i\omega\beta_{ps}z} & -e_p (1+2\bar{n}_q)C_R e^{i\omega\beta_{ps}z} \\ e_p (1+2\bar{n}_q)C_R e^{-i\omega\beta_{ps}z} & -ie_p C_R e^{-i\omega\beta_{ps}z} & \frac{\alpha_p + (1+2\bar{n}_q)C_R N_s}{G_p N_{s0}} & i \frac{\alpha_p + C_R N_s}{G_p N_{s0}} \\ -ie_p C_R e^{-i\omega\beta_{ps}z} & -e_p (1+2\bar{n}_q)C_R e^{-i\omega\beta_{ps}z} & -i \frac{\alpha_p + C_R N_s}{G_p N_{s0}} & \frac{\alpha_p + (1+2\bar{n}_q)C_R N_s}{G_p N_{s0}} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{B}}_s(L, \omega) \\ \hat{\mathbf{B}}_p(L, \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{B}}_s^\dagger(L, \omega'), \hat{\mathbf{B}}_p^\dagger(L, \omega') \end{pmatrix} \right\rangle &= \delta(\omega - \omega') \int_0^L \mathbf{U}^{-1}(x, \omega) \mathbf{C}_{FF}(x, \omega) [\mathbf{U}^{-1}(x, \omega)]^\dagger dx \\ &= \delta(\omega - \omega') \mathbf{C}_{BB}(\omega) \end{aligned} \quad (4.41)$$

et finalement

$$\langle \hat{\mathbf{V}}_s(L, \omega) \hat{\mathbf{V}}_s^\dagger(L, \omega') \rangle = \mathbf{C}_{VV,s}(L, \omega) \delta(\omega - \omega') \quad (4.42)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{VV,s}(L, \omega) &= \mathbf{U}_{ss}(L, \omega) [\mathbf{C}_{VV,s}(0, \omega) + \mathbf{C}_{BB,ss}(\omega)] \mathbf{U}_{ss}^\dagger(L, \omega) \\ &+ \mathbf{U}_{sp}(L, \omega) [\mathbf{C}_{VV,p}(0, \omega) + \mathbf{C}_{BB,pp}(\omega)] \mathbf{U}_{sp}^\dagger(L, \omega) \\ &+ \mathbf{U}_{ss}(L, \omega) \mathbf{C}_{BB,sp}(\omega) \mathbf{U}_{sp}^\dagger(L, \omega) + \mathbf{U}_{sp}(L, \omega) \mathbf{C}_{BB,ps}(\omega) \mathbf{U}_{ss}^\dagger(L, \omega) \end{aligned} \quad (4.43)$$

pour le co-pompage, et

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{VV,s}(L, \omega) &= \mathbf{T}(L, \omega) [\mathbf{C}_{VV,s}(0, \omega) + \mathbf{C}_{BB,ss}(\omega)] \mathbf{T}^\dagger(L, \omega) \\ &+ \mathbf{U}_{sp}(L, \omega) \mathbf{U}_{pp}^{-1}(L, \omega) \mathbf{C}_{VV,p}(L, \omega) [\mathbf{U}_{sp}(L, \omega) \mathbf{U}_{pp}^{-1}(L, \omega)]^\dagger \end{aligned} \quad (4.44)$$

pour le contra-pompage. Dans (4.43) et (4.44), nous avons supposé que le signal et la pompe ne sont pas corrélés en entrée.

### 4.4.3 Densité spectrale de puissance du bruit du flux de photon

Avec les fonctions de corrélation de la section précédente, nous pouvons maintenant calculer la densité spectrale de puissance de bruit du flux de photons à la sortie

$$S_N(L, \omega) = \text{TF} \left[ \left\langle \Delta \hat{N}_s(L, t + \tau) \Delta \hat{N}_s(L, t) \right\rangle \right] (\omega) = G_s^2(L) [\mathbf{C}_{VV,s}(\omega)]_{11} \quad (4.45)$$

Les expressions (4.43) et (4.44) nous montrent qu'il y a trois sources de bruits : le bruit du signal d'entrée, le bruit de la pompe d'entrée et le bruit intrinsèque généré au cours d'amplification. En générale, la densité spectrale de puissance de bruit du flux de photons du signal est fonction de fréquence et dépend des puissances signal et pompe injectées. Si nous définissons le bruit relatif d'intensité (RIN) de flux de photons comme

$$RIN(z, \omega) = S_N(z, \omega) / N_s^2(z) \quad (4.46)$$

les performances de l'amplificateur optique peuvent s'évaluer par la fonction de dégradation de RIN définie comme

$$NF(z, \omega) = RIN(z, \omega) / RIN(0, \omega) = S_N(z, \omega) / G_s^2(z) S_N(0, \omega) \quad (4.47)$$

Il est à noter que si l'entrée est dans l'état cohérent pur, la limite en régime petit-signal de cette fonction n'est rien d'autre que le facteur de bruit, constant en fonction de la fréquence. Cette fonction de dégradation de RIN à la sortie de l'amplificateur peut alors se calculer en utilisant (4.45), où le gain et la matrice de corrélation  $\mathbf{C}_{VV,s}(\omega)$  peut être obtenus numériquement.

La figure 4.8 montre les résultats d'une simulation numérique pour un amplificateur Raman en co- et contra-pompage, constitué de 100 km de fibre SMF. Le signal et la pompe sont supposés dans des états cohérents purs pour simplifier, et la puissance de pompe injectée est ajustée chaque fois pour avoir un gain net de 0 dB. Aux basses fréquences, la figure 4.8 montre clairement que le bruit quantique du signal de sortie est comprimé à cause de la saturation. Cet effet de compression de bruit est fonction de la fréquence et disparaît aux hautes fréquences, lorsque l'effet de "walk-off" entre le signal et la pompe devient important. En effet, oscillant très rapidement, les éléments de matrices contenant  $\exp(i\omega\beta_{ps}z)$  dans (4.27), qui sont justement responsables du couplage pompe-signal, devient en moyenne nulle. Dans ces figures, nous voyons que la largeur spectrale de compression de bruit co-directionnelle est bien plus large que dans le cas contra-directionnel. Typiquement, cette largeur est d'ordre de quelques mégahertz pour le co-pompage, contre quelques kilohertz pour le contra-pompage. Cette différence se comprend bien par le fait que le paramètre de "walk-off",  $\beta_{ps}$ , est très différent pour les deux schéma de pompage. Ce point sera à nouveau discuté au chapitre 6, où le transfert de RIN [9] sera évoqué. La profondeur de compression est elle aussi très différente

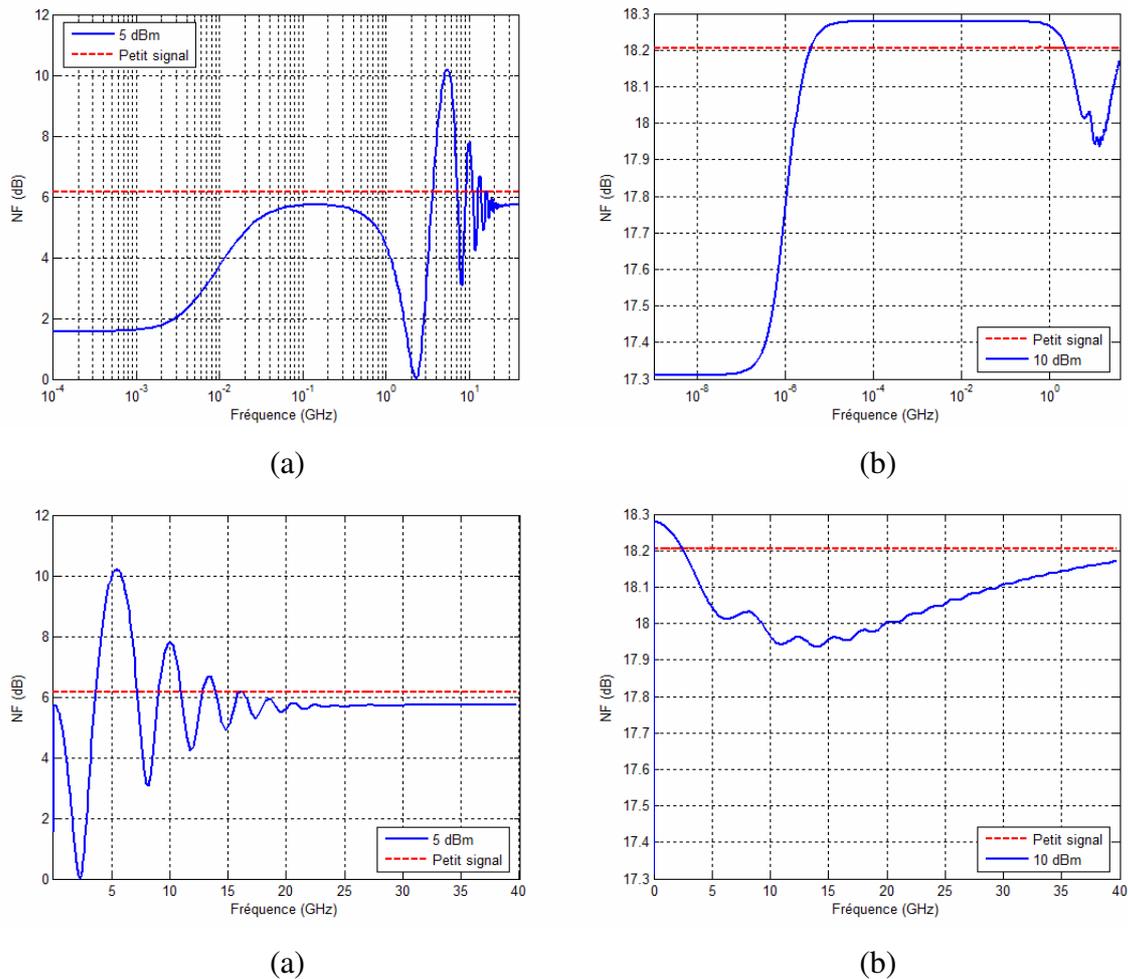


Figure 4.8 - Fonction de dégradation de RIN en fonction de la fréquence (a)(b) en logarithme et (c)(d) linéaire, pour un pas de 100 km d'amplificateur Raman en configuration de (a)(c) co- et (b)(d) contra-pompage. Gain net est maintenu à 0 dB. Paramètres :  $\lambda_{s/p} = 1555 / 1455$  nm,  $\alpha_{s/p} = 0.20 / 0.26$  dB/km,  $C_R = 0.69$  km $^{-1}$ .W $^{-1}$ , vitesse de signal =  $2 \times 10^8$  km/s et dispersion = 15 ps.nm $^{-1}$ .km $^{-1}$ .

pour les deux pompages. Nous voyons que pour le pompage co-directionnel, la dégradation de RIN peut descendre au-dessous de la limite quantique de 3dB. Ceci est bien la preuve que l'amplificateur n'est plus linéaire et insensible à la phase. Tandis que pour le pompage contra-directionnel, la compression est toujours très faible même pour une puissance de signal d'entrée de 10 dBm. Cette différence peut s'expliquer par le fait que la pompe contra-directionnelle est bien plus résistante à la saturation et la nonlinéarité que la pompe co-directionnelle, comme déjà montré dans la section 4.1. A hautes fréquences, la fonction de dégradation de RIN commence à osciller. Ce comportement oscillatoire est dû à la nonlinéarité de fibre accompagnée de la dispersion, qui convertissent le bruit de phase en bruit d'amplitude [7][8], ou bien échange les bruits des quadratures. Le dernier point à noter

est que, comme le montré clairement sus la figure 4.8, les impacts de la saturation de gain et de la nonlinéarité sont pratiquement désassociés.

## 4.5 Conclusion

Quand les pertes optiques sont négligeables devant l'amplification Raman, l'inversion de population virtuelle est environ 0.9, ce qui rend les amplificateurs Raman intrinsèquement de faible bruit. En plus de la bande passante très large et extensible, les amplificateurs Raman sont très avantageux au niveau du facteur de bruit grâce à la distribution du gain. Avec les analyses présentées dans ce chapitre, nous voyons que la configuration de pompage co-directionnel est plus avantageuse au niveau du facteur de bruit, mais aussi plus sensible à la saturation de gain. Finalement, nous avons pu étudier les impacts de la saturation et de la nonlinéarité sur la génération du bruit intrinsèque. Il est clair que les bruits intrinsèques sont comprimés par la saturation et la nonlinéarité. Cet effet de compression dépend de la fréquence et est bien plus important dans la configuration de pompage co-directionnel, où non seulement le niveau de la puissance de signal est plus élevé, mais aussi le temps d'interaction entre la pompe et le signal est bien plus long.

**Références:**

- [1] G.P. Agrawal, Raman Amplification in Fiber Optical Communication Systems, Academic Press, 2004.
- [2] G.P. Agrawal, Nonlinear Fiber Optics, Academic Press, Chap 8, 1995.
- [3] Y. Yamamoto and K. Inoue, "Noise in amplifiers," J. Lightwave Technol. **21**, 2895-2915, 2003.
- [4] A. Yariv, Quantum Electronics, 2<sup>nd</sup> Ed., John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- [5] H. T. Friis, "Noise figure of radio receivers," Proc. IRE, **32**, 419-422, 1944.
- [6] B. Bristiel, S. Jiang, P. Gallion, and E. Pincemin, "New model of noise figure and RIN transfer in fiber Raman amplifiers," IEEE Photon. Technol. Lett. **18**, 980-982, 2006.
- [7] J. Wang, and K. Petermann, "Small signal analysis for dispersive optical fiber communication systems," J. Lightwave Technol. **10**, 96-100, 1992.
- [8] A.V.T. Cartaxo, B. Wedding, and W. Idler, "Influence of fiber nonlinearity on the phase noise to intensity noise conversion in fiber transmission: theoretical and experimental analysis," J. Lightwave Technol. **16**, 1187-1194, 1998.
- [9] C. R. S. Fludger, V. Handerek, and R. J. Mears, "Pump to signal RIN transfer in Raman fiber amplifiers," IEEE J. Lightwave Technol. **19**, 1140-1148, 2001.



## Chapitre 5

# Rétrodiffusion Rayleigh dans les Amplificateurs Raman

Il est bien connu que la diffusion Rayleigh est due aux inhomogénéités aux échelles bien inférieures aux longueurs d'onde optiques. Dans les fibres optiques, à part diffuser le champ guidé en dehors de fibre en engendrant la perte de diffusion Rayleigh, elle peut aussi diffuser une petite portion du champ guidé dans la direction opposé de celui-ci, en engendrant la phénomène de la rétrodiffusion Rayleigh [1][2]. Si une portion rétrodiffusée du signal transmis est rétrodiffusée de nouveaux, c'est donc la double rétrodiffusion Rayleigh (DRB, Double Rayleigh Backscattering). Une copie de signal décalée aléatoirement en temps et en espace, le bruit DRB est une source de bruit qui s'interfère avec le signal au niveau du récepteur et donc engendre la diaphotie (Crosstalk) [3][4]. Bien que ce processus de multi-rétrodiffusion puisse se poursuivre, il est en pratique suffisant de prendre en compte seulement la DRB

La rétrodiffusion Rayleigh peut engendrer de pénalités majeures dans les systèmes déployant l'amplification Raman distribuée. En effet, non seulement la DRB du signal est renforcée par l'amplification compensant l'atténuation distribuée, mais aussi le bruit intrinsèque engendré dans la sens inverse de transmission est rétrodiffusé et amplifié. Dans ce chapitre, nous allons d'abord étudier le modèle de propagation obtenu dans le chapitre 2. Ensuite, la biréfringence de fibre négligée dans ce modèle, sera prise en compte, et un modèle plus complet sera présenté et étudié. Finalement, nous allons analyser l'impact combiné du bruit de DRB et ASE sur les performances des systèmes.

## 5.1 Modèles de propagation

Nous avons obtenu dans le chapitre 2, les équations de propagation pour les opérateurs à enveloppe lentement variable (2.76) dans les directions positive et négative. Dans ce chapitre, nous travaillerons avec les variables classiques.

### 5.1.1 Rappels et coefficient différentiel de rétrodiffusion Rayleigh

Négligeant l'effet Kerr, nous réécrivons les équations de propagation des deux enveloppes lentement variables contra propagative comme ci-dessous

$$\begin{aligned} \left( \partial_z + \beta_1 \partial_t - \frac{i}{2} \beta_2 \partial_t^2 \right) A_+(z, t) &= \frac{1}{2} g(z) A_+(z, t) + \rho(z) A_-(z, t) + F_+(z, t) \\ \left( -\partial_z + \beta_1 \partial_t - \frac{i}{2} \beta_2 \partial_t^2 \right) A_-(z, t) &= \frac{1}{2} g(z) A_-(z, t) - \rho^*(z) A_+(z, t) - F_-(z, t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

où  $g(z) = C_R P_p(z) - \alpha_s$  et  $\rho(z)$  est le coefficient différentiel de diffusion Rayleigh. Il est nécessaire à mentionner que nous pouvons d'ores et déjà supposer que la bande des signaux est suffisamment petite pour que certaines dépendances fréquentielles soient négligeables. Nous normalisons ici les fonctions d'enveloppe de telle façon que les modules carrés des fonctions d'enveloppe  $|A_\pm|^2$  représentent les puissances des signaux se propageant dans les deux sens. Les deux forces de Langevin classiques sont alors les variables aléatoires gaussiennes complexes circulaires (CCG Circular Complex Gaussian) de moyenne nulle. Comme nous avons dit au chapitre 2, les deux bruits blancs sont non-corrélés et donc indépendants, et leurs fonctions de corrélation s'écrivent comme

$$\langle F_\pm^*(z_2, t_2) F_\pm(z_1, t_1) \rangle = \hbar \omega_0 (1 + \bar{n}_q) C_R P_p(z) \delta(t_1 - t_2) \delta(z_1 - z_2) \quad (5.2)$$

Nous rappelons également que le coefficient différentiel de rétrodiffusion Rayleigh est lié aux fluctuations  $\Delta\beta$  de la constante de propagation, par la relation

$$\rho(z, \omega) = i \Delta\beta(z) \exp(-2i\beta_\omega z) \quad (5.3)$$

où  $\beta_\omega$  est la constante de propagation du mode guidé de la fibre monomode. Nous pouvons alors trouver les corrélations suivantes

$$\langle \rho_R(z_1) \rho_I(z_2) \rangle = -\gamma_R \delta(z_1 - z_2) \frac{1}{2} \sin(4\beta_\omega z_1) \quad (5.4)$$

et

$$\langle \rho_R(z_1) \rho_R(z_2) \rangle = \langle \rho_I(z_1) \rho_I(z_2) \rangle = \gamma_R \delta(z_1 - z_2) \frac{1 - \cos(4\beta_\omega z_1)}{2} \quad (5.5)$$

où

$$\gamma_R = \frac{k_\omega^4 C_{11}}{4\beta_\omega^2} \quad (5.6)$$

est le coefficient de rétrodiffusion Rayleigh, avec  $k_\omega = \omega/c$  et le coefficient  $C_{11}$  ayant été défini au chapitre 2 par

$$C_{11}(z) = \int \sigma_\Delta^2(\mathbf{x}, z) |\phi_1(\mathbf{x})|^4 d^2\mathbf{x} \quad (5.7)$$

Rappelons que  $\sigma_\Delta^2(\mathbf{x}, z)$  a été défini par (2.15) comme la variation de la permittivité relative linéaire  $\langle \Delta\mathcal{E}(\mathbf{r}_1)\Delta\mathcal{E}(\mathbf{r}_2) \rangle = \sigma_\Delta^2(\mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ , et  $\phi_1(\mathbf{x})$  est la fonction du mode guidé, normalisée telle que  $\int |\phi_1(\mathbf{x})|^2 d^2\mathbf{x} = 1$ . Comme pour les bruits de Langevin au chapitre 2, Eq. (2.83)-(2.85), nous pouvons négliger sans risque les termes oscillant très rapidement,  $\sin(4\beta_\omega z_1)$  et  $\cos(4\beta_\omega z_1)$  dans (5.4) et (5.5). Ainsi, le coefficient  $\rho$  devient une variable CCG de moyenne nulle, et sa fonction de corrélation peut s'écrire comme

$$\langle \rho^*(z_1)\rho(z_2) \rangle = \gamma_R \delta(z_1 - z_2) \quad (5.8)$$

Cette relation bien connue a déjà été proposée phénoménologiquement dans les littératures [4][5][6].

### 5.1.2 Quelques expressions analytiques – vérification du modèle

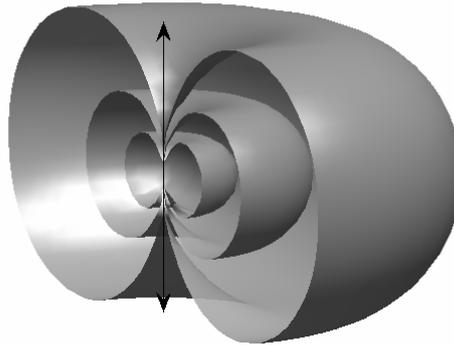


Figure 5.1 – Semi-surfaces d'équi-intensité du champ lointain rayonné par un dipôle électrique ou créé par la diffusion Rayleigh. La polarisation du dipôle où du champ plain incident est indiquée par les flèches dans la figure.

Il est bien connu que la diffusion Rayleigh dépend de la polarisation [1][2][7]. C'est la raison pour laquelle nous avons utilisé un modèle vectoriel pour décrire les effets de diffusion Rayleigh au chapitre 2. Sur la figure 5.1, sont montrées les surfaces d'équi-intensité du champ

lointain créé par la diffusion Rayleigh, où une onde plane est incidente sur un objet de taille bien inférieure à la longueur d'onde. Ces surfaces sont en fait équivalentes aux celles du champ lointain rayonné par un dipôle électrique ayant la même polarisation que le champ incident. En fait, la diffusion Rayleigh peut être décrite en termes de dipôles électriques du milieu, excités par le champ électromagnétique incident [2][6]. Lorsque le milieu est parfaitement homogène, les rayonnements des dipôles interfèrent d'une manière destructive, sauf dans la direction de propagation du champ incident. Les inhomogénéités du milieu introduisent en fait des déphasages détruisant ces interférences destructives. Ainsi, le champ incident est diffusé dans d'autres directions.

Avec l'analyse vectorielle, nous avons montré dans le chapitre 2 que le coefficient d'atténuation dû à la diffusion Rayleigh dans la fibre monomode s'écrit comme

$$\alpha_{1s} = \frac{k_\omega^4}{\beta_\omega} \int \phi_1^\dagger(\mathbf{x}) \text{Im} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \phi_1(\mathbf{x}) \sigma_\Delta^2(z, \mathbf{x}) d^2 \mathbf{x} \quad (5.9)$$

où  $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est la fonction de Green définie par (2.24). Dans les fibres à guidage faible, nous pouvons négliger la différence entre les indices de réfraction du cœur et du gaine de fibre [1][2]. Ainsi, (2.24) devient

$$(\nabla^2 + k_\omega^2 n_\omega^2 + ik_\omega \alpha_\omega) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.10)$$

avec  $\nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$  et  $n_\omega$  étant constant. La solution de (5.10) a déjà été trouvée [8], et nous avons

$$\text{Im} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \frac{n_\omega k_\omega}{6\pi} \mathbf{I} \quad (5.11)$$

L'expression analytique pour le coefficient d'atténuation de diffusion Rayleigh s'écrit alors

$$\alpha_{1s} = \frac{n_\omega k_\omega^5}{6\pi \beta_\omega} \int |\phi_1(\mathbf{x})|^2 \sigma_\Delta^2(z, \mathbf{x}) d^2 \mathbf{x} \approx \frac{(2\pi)^3}{3} c^4 \overline{\sigma_\Delta^2}(z) \lambda^{-4} \quad (5.12)$$

où  $\phi_1(\mathbf{x})$  est le profil scalaire normalisé du mode guidé et  $\overline{\sigma_\Delta^2}(z)$  est la variation moyenne vue par le mode. Puisque nous avons  $n_\omega k_\omega \approx \beta_\omega$ , ce résultat montre que le coefficient d'atténuation Rayleigh est proportionnel à  $\lambda^{-4}$ , ce qui est un résultat bien connu [9].

Généralement, la rétrodiffusion Rayleigh peut être considérée comme un processus où une partie du signal est diffusée en dehors du mode guidé, ce qui produit l'atténuation de la diffusion Rayleigh, et au même temps, une petite portion du signal diffusé est re-capturée dans le mode guidé en se propageant dans le sens inverse du signal. Le coefficient de

rétrodiffusion Rayleigh est donc proportionnel au coefficient d'atténuation de rétrodiffusion Rayleigh, avec un facteur  $S_R$ , dit le facteur de récapture, défini comme [1][2][4]

$$\gamma_R = S_R \alpha_{1s} \quad (5.13)$$

Ayant obtenu les expressions analytiques des deux coefficients, nous pouvons trouver celle du facteur de ré-capture comme

$$S_R = \frac{\gamma_R}{\alpha_{1s}} = \frac{3\pi}{2\beta_\omega k_\omega n_\omega} \frac{\int \sigma_\Delta^2(\mathbf{x}) |\phi_1(\mathbf{x})|^4 d^2\mathbf{x}}{\int \sigma_\Delta^2(\mathbf{x}) |\phi_1(\mathbf{x})|^2 d^2\mathbf{x}} \quad (5.14)$$

Dans le cas d'une symétrie circulaire, nous pouvons réécrire l'expression ci-dessus comme

$$S_R = \frac{3}{4\beta_\omega k_\omega n_\omega} \frac{\int_0^\infty |\phi_1(r)|^4 \sigma_\Delta^2(r, z) r dr}{\int_0^\infty |\phi_1(r)|^2 \sigma_\Delta^2(r, z) r dr \int_0^\infty |\phi_1(r)|^2 r dr} \quad (5.15)$$

où nous avons utilisé  $\int |\phi_1(\mathbf{x})|^2 d^2\mathbf{x} = 1$ . Si nous considérons maintenant approximativement la fonction du mode guidé comme gaussienne

$$\phi_1(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right)$$

et  $\sigma_\Delta^2$  comme constant, nous trouvons

$$S_R = \frac{3}{2\beta_\omega k_\omega n_\omega w_0^2} = \frac{3}{8} \left( \frac{\lambda}{\pi n_{eff} w_0} \right)^2 = \frac{3 \lambda^2}{8\pi n_{eff}^2 A_{eff}}, \text{ avec } n_{eff} = \sqrt{n_\omega \beta_\omega / k_\omega} \quad (5.16)$$

Le facteur de re-capture est donc inversement proportionnel à la surface effective du mode guidé. En pratique, il prend les valeurs d'ordre de  $1.5 \times 10^{-3}$  à 1555nm parmi les fibres SMF. Il est à mentionner que cette expression a déjà été trouvée, d'une manière différente de la notre [1][2], et largement acceptée [4]. Cela montre alors la consistance de nos analyses théoriques. Finalement, il est intéressant de noter que si nous ignorons la nature vectorielle de la diffusion Rayleigh, la version scalaire de (5.11) nous donne  $\text{Im}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = n_\omega k_\omega / 4\pi$ . Utilisant ce résultat pour évaluer le facteur de ré-capture, nous trouvons une valeur 3/2 fois moindre. En fait, ce résultat a aussi été déjà proposé [10], où la dépendance de polarisation de la diffusion Rayleigh était évidemment négligée.

### 5.1.3 Equations de propagation des densités spectrales de puissance

La transformée de Fourier temporelle de (5.1) nous donne

$$\begin{aligned} \partial_z \underline{A}_+(z, \omega) e^{i\Delta\beta_\omega z} &= \frac{1}{2} g(z) \underline{A}_+(z, \omega) e^{i\Delta\beta_\omega z} + \rho(z) e^{2i\Delta\beta_\omega z} \underline{A}_-(z, \omega) e^{-i\Delta\beta_\omega z} + \underline{F}_+(z, \omega) e^{i\Delta\beta_\omega z} \\ -\partial_z \underline{A}_-(z, \omega) e^{-i\Delta\beta_\omega z} &= \frac{1}{2} g(z) \underline{A}_-(z, \omega) e^{-i\Delta\beta_\omega z} - \rho^*(z) e^{-2i\Delta\beta_\omega z} \underline{A}_+(z, \omega) e^{i\Delta\beta_\omega z} - \underline{F}_-(z, \omega) e^{-i\Delta\beta_\omega z} \end{aligned} \quad (5.17)$$

où  $\Delta\beta_\omega = \beta_\omega - \beta_{\omega_0}$  est la différence des constantes de propagation aux différentes fréquences. Ces deux équations de propagation couplées linéairement peuvent être réécrites sous la forme plus compacte comme

$$\partial_z \mathbf{V}(z, \omega) = \mathbf{H}(z, \omega) \mathbf{V}(z, \omega) + \mathbf{F}(z, \omega) \quad (5.18)$$

où

$$\mathbf{V}(z, \omega) = \begin{pmatrix} \underline{A}_+(z, \omega) \frac{1}{\sqrt{G(z)}} e^{i\Delta\beta_\omega z} \\ \underline{A}_-(z, \omega) \sqrt{G(z)} e^{-i\Delta\beta_\omega z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(z, \omega) = \begin{pmatrix} \underline{F}_+(z, \omega) \frac{1}{\sqrt{G(z)}} e^{i\Delta\beta_\omega z} \\ \underline{F}_-(z, \omega) \sqrt{G(z)} e^{-i\Delta\beta_\omega z} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

et

$$\mathbf{H}(z, \omega) = \begin{pmatrix} 0 & \rho(z) \frac{1}{G(z)} e^{2i\Delta\beta_\omega z} \\ \rho^*(z) G(z) e^{-2i\Delta\beta_\omega z} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Maintenant, les bruits de Langevin  $F_\pm$  et le coefficient différentiel de rétrodiffusion Rayleigh  $\rho$  étant delta-corrélés en  $z$  et indépendants, nous pouvons définir deux processus de Wiener infinitésimaux [11],  $d\mathbf{H}(z, \omega)$ ,  $d\mathbf{F}(z, \omega)$ , dont les 2<sup>ème</sup> moments non-nuls sont

$$\begin{aligned} \langle dH_1(z, \omega_1) dH_1^*(z, \omega_2) \rangle &= \gamma_R G^{-2}(z) e^{2i(\Delta\beta_{\omega_1} - \Delta\beta_{\omega_2})z} dz \\ \langle dH_2(z, \omega_1) dH_2^*(z, \omega_2) \rangle &= -\gamma_R G^2(z) e^{-2i(\Delta\beta_{\omega_1} - \Delta\beta_{\omega_2})z} dz \\ \langle d\mathbf{F}(z, \omega_1) d\mathbf{F}^\dagger(z, \omega_2) \rangle &= \hbar \omega_0 (1 + \bar{n}_q) C_R P_p(z) \begin{pmatrix} G^{-1}(z) & 0 \\ 0 & -G(z) \end{pmatrix} \delta(\omega_1 - \omega_2) dz \end{aligned} \quad (5.21)$$

où

$$d\mathbf{H}(z, \omega) = \begin{pmatrix} 0 & dH_1(z, \omega) \\ dH_2(z, \omega) & 0 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Alors, au sens de Stratonovich, nous avons [11]

$$d\mathbf{V}(z, \omega) = d\mathbf{H}(z, \omega)\mathbf{V}\left(z + \frac{dz}{2}, \omega\right) + d\mathbf{F}(z, \omega) \quad (5.23)$$

et donc

$$d\langle \mathbf{V}(\omega_1)\mathbf{V}^\dagger(\omega_2) \rangle = \langle d\mathbf{H}(\omega_1)\langle \mathbf{V}(\omega_1)\mathbf{V}^\dagger(\omega_2) \rangle d\mathbf{H}^\dagger(\omega_2) \rangle + \langle d\mathbf{F}(\omega_1)d\mathbf{F}^\dagger(\omega_2) \rangle \quad (5.24)$$

Nous trouvons alors

$$\begin{aligned} \left[ \pm \frac{\partial}{\partial z} + i(\Delta\beta_{\omega_1} - \Delta\beta_{\omega_2}) - g(z) \right] \langle \underline{A}_\pm(z, \omega_1)\underline{A}_\pm^*(z, \omega_2) \rangle \\ = \gamma_R \langle \underline{A}_\mp(z, \omega_1)\underline{A}_\mp^*(z, \omega_2) \rangle + \hbar\omega_0(1 + \bar{n}_q)C_R P_p(z)\delta(\omega_1 - \omega_2) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Supposant que  $A_\pm(z, t)$  sont stationnaire dans le domaine du temps, et que les densités spectrales de puissance sont définies comme

$$S_\pm(z, \omega) = \text{TF} \left[ \langle \underline{A}_\pm(z, \tau)\underline{A}_\pm^*(z, 0) \rangle \right] (\omega) \quad (5.26)$$

nous trouvons alors à partir de (5.25)

$$\pm \frac{\partial}{\partial z} S_\pm(z, \omega) = g(z)S_\pm(z, \omega) + \gamma_R S_\mp(z, \omega) + \hbar\omega_0(1 + \bar{n}_q)C_R P_p(z) \quad (5.27)$$

Ainsi, nous constatons qu'en moyenne, le spectre du bruit de double rétrodiffusion Rayleigh est identique en forme à celui du signal. Il est à mentionner que ces équations de propagation, obtenues directement de (5.1), ont déjà été proposées phénoménologiquement [12].

Maintenant, il est intéressant de regarder de près la propagation du bruit intrinsèque quantique engendré par les amplificateurs Raman, en présence de rétrodiffusion Rayleigh. Pour l'élucider isolément, nous allons supposer qu'il n'y ait pas de signal à l'entrée de l'amplificateur. Evidemment, le signal subit aussi la rétrodiffusion Rayleigh, et ceci fera l'objet de la section suivante. Les états des entrées, dans les deux directions, sont alors ceux du vide. D'après la discussion du chapitre 4, les densités spectrales des bruits intrinsèques engendrés dans les deux directions de propagation peuvent donc s'écrire comme

$$S_N^\pm(z, \omega) = S_\pm(z, \omega) + \hbar\omega_0 / 2 \quad (5.28)$$

Remplaçant l'expression ci-dessus dans (5.27), nous obtenons

$$\pm \frac{\partial}{\partial z} S_N^\pm = gS_N^\pm + \gamma_R S_N^\mp + \left[ (1 + 2\bar{n}_q)C_R P_p + (\alpha_s - \gamma_R) \right] \frac{\hbar\omega_0}{2} \quad (5.29)$$

Comparée avec (3.114) et (4.16), nous voyons qu'à part les termes de couplage de rétrodiffusion Rayleigh, le bruit d'atténuation est proportionnel à  $\alpha_s - \gamma_R$  au lieu de  $\alpha_s$ . Bien que négligeable pour les fibres de télécommunication, cet écart a une signification physique importante. En fait, dans l'une des deux directions, une partie proportionnelle à  $\gamma_R$  dans perte totale, est couplée à l'autre direction, et cette perte peut être re-couplée de nouveau dans la direction originale. Le coefficient  $\alpha_s - \gamma_R$  ne vaut que pour les vraies pertes, c'est-à-dire qui sont irréversibles. En effet, les deux modes guidés se contra-propageant dans les deux directions appartiennent tous les deux au sous-système qui nous intéresse, montré sur la figure 1.1, et le couplage direct entre eux ne donne pas lieu à un couplage aux fluctuations du vide.

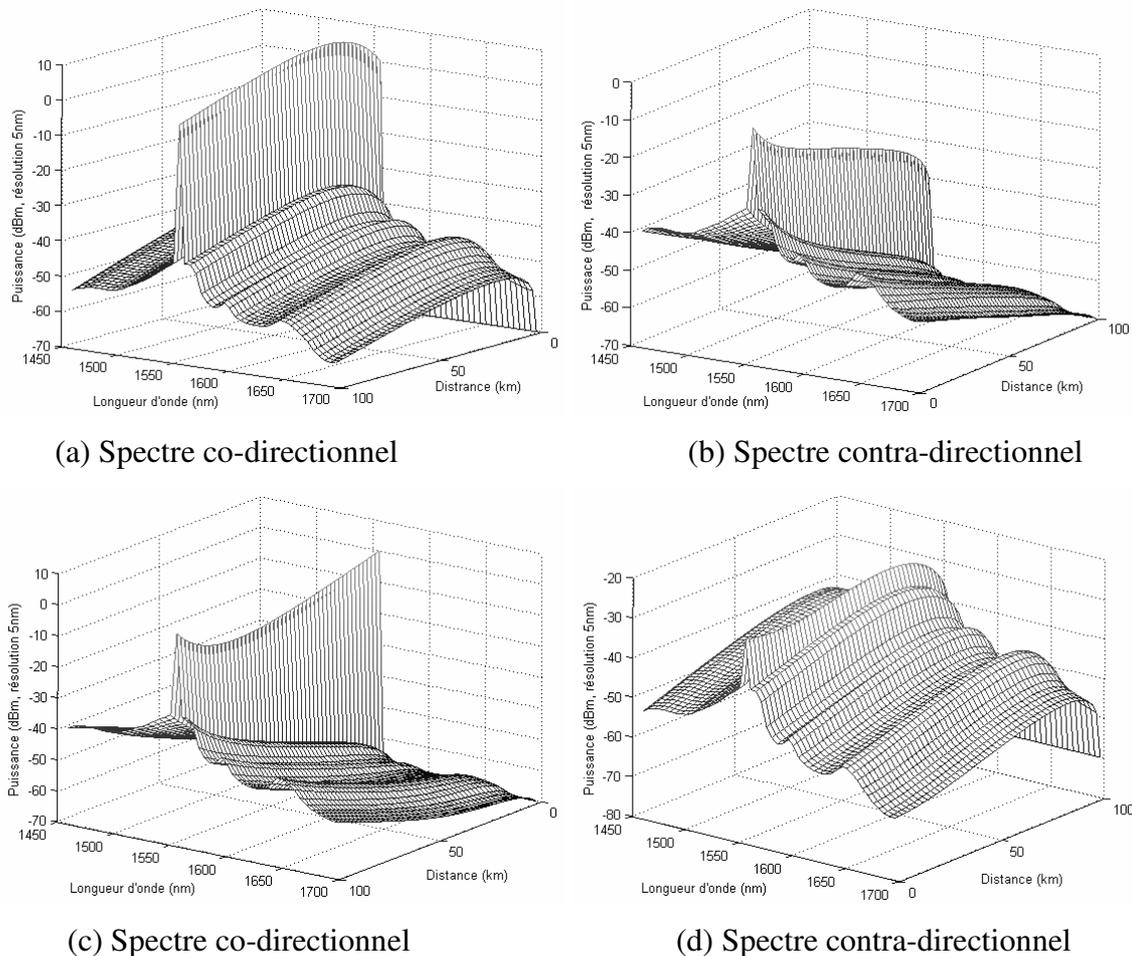


Figure 5.2 – Résultats de simulation sur l'évolution des spectres optique dans un amplificateur Raman, avec co-pompage (a) (b), où contra-pompage (c) (d).

Dans l'annexe B, nous avons montré un programme de simulation pour (5.27), basé sur la méthode BVP4C dans Matlab, où la déplétion de pompe, l'interaction entre toutes les composantes spectrales et les dépendances fréquentielles sont prise en compte. BVP4C est une méthode puissante que nous voudrions recommander pour les problèmes bidirectionnels. Ce programme peut aussi être utilisé pour simuler les lasers Raman à fibre. Figure 5.2 montre des exemples de résultats de simulation sur l'évolution des spectres optiques co- et contra-

directionnel, où la pompe et le signal sont respectivement à 1455 et 1555 nm. Avec ce programme, nous pouvons aussi calculer le gain et le facteur de bruit en présence de la rétrodiffusion Rayleigh, où le gain Raman et la densité spectrale du bruit ASE à la fréquence de signal peuvent s'évaluer comme

$$G_R = \exp\left(C_R \int_0^L [P_{p+}(z) + P_{p-}(z)] dz\right) \quad (5.30)$$

$$S_{ASE}(L, \omega_s) = \frac{1}{2} [S_{ASE}(L, \omega_s + \Delta\omega) + S_{ASE}(L, \omega_s - \Delta\omega)] \quad (5.31)$$

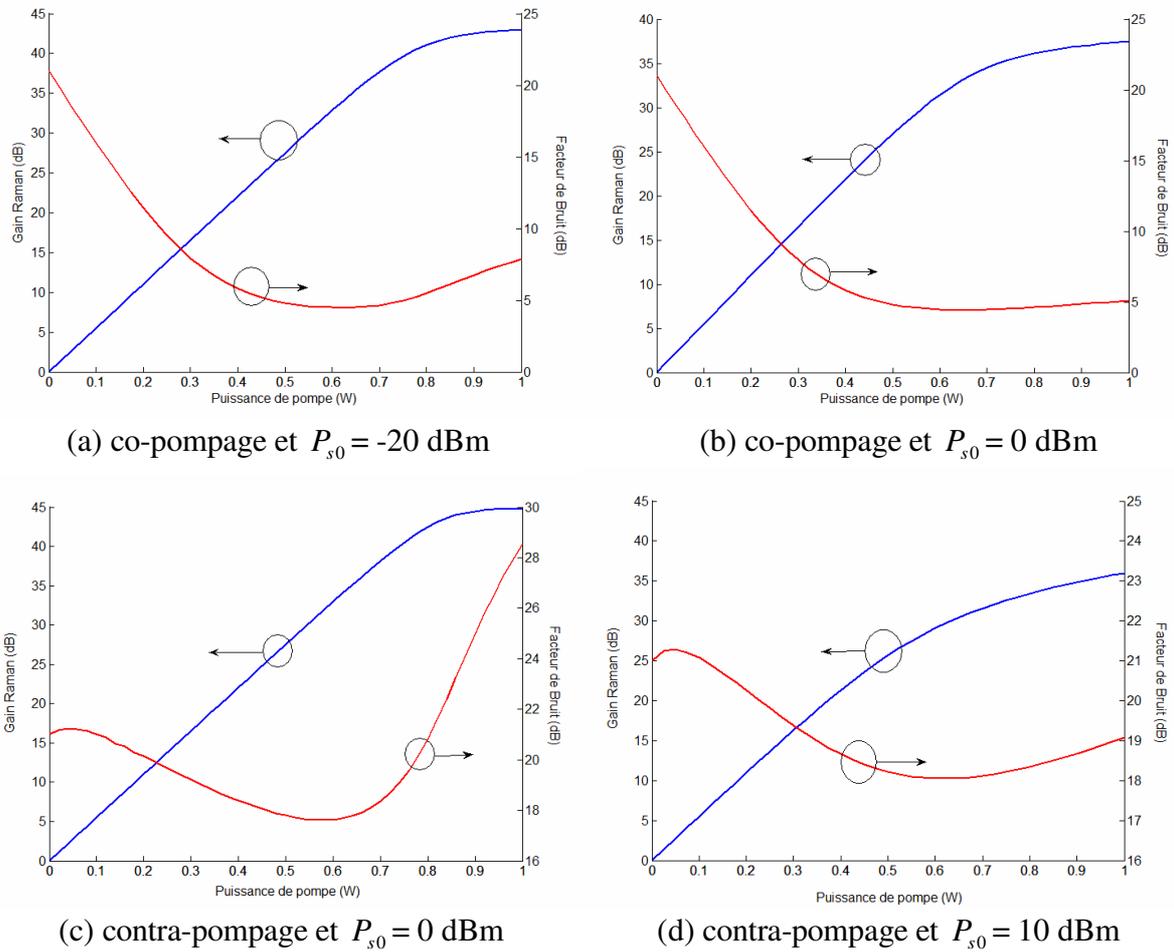


Figure 5.3 – Résultats de simulation sur le gain Raman et le facteur de bruit en fonction de la puissance de pompe injectée, dans une 100 km de fibre Truwave-RS<sup>TM</sup>, avec (a) (b) co-pompage et (c) (d) contra-pompage, et différentes puissances de signal injectées,  $P_{s0}$ . Paramètres :  $\lambda_{s/p} = 1455 / 1555$  nm,  $\gamma_R = 0.8 \times 10^{-7}$  km<sup>-1</sup>,  $\alpha_{s/p} = 0.21 / 0.25$  dB/km, et  $C_R = 0.73$  W<sup>-1</sup>km<sup>-1</sup>.

avec  $\Delta\omega$  étant la résolution spectrale. La figure 5.3 montre des résultats de simulation sur le gain Raman et le facteur de bruit en fonction de la puissance de pompe injectée, dans une

100 km de fibre Truwave-RS<sup>TM</sup>. Nous constatons que pour les hautes valeurs du gain Raman, la saturation de pompe est renforcée par la rétrodiffusion Rayleigh. Quand la puissance de signal est relativement élevée, la pompe est saturée par le signal et la génération de ASE est réduite. En revanche, quand la puissance de signal est relativement faible, c'est plutôt le bruit ASE sur tout le spectre, renforcé par la rétrodiffusion Rayleigh, qui sature la pompe.

## 5.2 Théorie vectorielle sur la double rétrodiffusion Rayleigh

Jusqu'ici, nous avons toujours utilisé l'approximation scalaire des champs optiques dans les fibres monomodes. En fait, à cause de la symétrie circulaire du guidage, il y a deux modes guidés dégénérés en polarisation dans les fibres optiques monomodes dites standards. Ceci dit, il n'y a jamais de symétrie circulaire parfaite dans les fibres. Cela conduit à l'effet bien connu sous le nom de dispersion modale de polarisation (PMD, Polarization Mode Dispersion) [9], où les deux modes de polarisation diffèrent légèrement par leur constantes de propagation. Généralement, c'est un phénomène aléatoire, se manifestant par la présence des biréfringences aléatoires dans la fibre. Dans l'approximation d'un guidage faible, les vecteurs du champ électrique guidé dans les fibres monomodes sont supposés approximativement dans le plan transverse. Nous pouvons alors remplacer les enveloppes vectorielles lentement variables par les vecteurs de Jones, colonnes 2D, noté par  $\mathbf{A}_\mu(z, t) = |A_\mu(z, t)\rangle$  et l'effet de PMD peut être décrit au 1<sup>er</sup> ordre comme [13]

$$\partial_z |A(z)\rangle = -\frac{i}{2} \vec{\beta}(z) \cdot \vec{\sigma} |A(z)\rangle \quad (5.32)$$

où  $\vec{\beta}(z)$  est le vecteur de biréfringence, un vecteur de Stokes (3D), réel et aléatoire, et  $\vec{\sigma} = \sigma_1 \bar{e}_1 + \sigma_2 \bar{e}_2 + \sigma_3 \bar{e}_3$  avec  $\sigma_k$  et  $\bar{e}_k$  qui sont respectivement les matrices de Pauli et les vecteurs de base dans l'espace de Stokes [14]. L'effet PMD a deux conséquences nécessitant des études spécifiques pour les amplificateurs Raman à fibres optiques. L'une est la rotation relative de l'état de polarisation de pompe à celle de signal, et c'est ce que nous allons étudier au chapitre suivant. L'autre est l'impact sur l'état de polarisation du bruit de double rétrodiffusion Rayleigh.

### 5.2.1 Filtre vectoriel de double rétrodiffusion Rayleigh

Nous supposons que les pompes Raman sont dépolarisées, ce qui est en fait toujours nécessaire en pratique pour les raisons que nous allons voir au chapitre suivant. Puisque la biréfringence de fibre ne fait que tourner l'état de polarisation, et que la pompe Raman dépolarisée ne crée que du bruit ASE dépolarisé, nous supposons que la biréfringence de fibre n'a pas d'impact sur l'état de polarisation du bruit ASE. Ainsi, nous allons l'ignorer dans

cette section. En prenant en compte de la biréfringence de fibre, nous pouvons alors écrire les équations de propagation dans le domaine fréquentiel comme

$$\begin{aligned} \left( \partial_z - \frac{g}{2} + \frac{i}{2} \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma} \right) | \underline{A}_+ \rangle e^{i\Delta\beta_\omega z} &= \rho | \underline{A}_- \rangle e^{i\Delta\beta_\omega z} \\ \left( -\partial_z - \frac{g}{2} + \frac{i}{2} \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma} \right) | \underline{A}_- \rangle e^{-i\Delta\beta_\omega z} &= -\rho^* | \underline{A}_+ \rangle e^{-i\Delta\beta_\omega z} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Nous définissons cette fois deux matrices d'évolution comme

$$d_z \mathbf{U}_\pm(z) = \mp \frac{i}{2} (\vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}) \mathbf{U}_\pm(z), \text{ avec } \mathbf{U}_\pm(0) = \mathbf{I} \quad (5.34)$$

Puisque  $\text{tr}[\vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}] = 0$ , nous avons  $d_z |\mathbf{U}_\pm(z)| = 0$ . En plus, nous constatons facilement que  $d_z [\mathbf{U}_\pm^\dagger(z) \mathbf{U}_\pm(z)] = 0$ . Alors, nous trouvons  $\mathbf{U}_\pm^\dagger(z) \mathbf{U}_\pm(z) = \mathbf{I}$  et  $|\mathbf{U}_\pm(z)| \equiv 1$ , ce qui implique que ces deux matrices d'évolution sont unitaires. Après définition de deux nouvelles fonctions vectorielles d'enveloppe comme

$$| \underline{A}_\pm(z, \omega) \rangle = \mathbf{U}_\pm(z) | \underline{A}_{1,\pm}(z, \omega) \rangle e^{\mp i\Delta\beta_\omega z} \quad (5.35)$$

nous réécrivons (5.33) sous le forme

$$\begin{aligned} \left[ \partial_z - \frac{1}{2} g(z) \right] | \underline{A}_{1,+}(z, \omega) \rangle &= \rho(z) \mathbf{V}(z) | \underline{A}_{1,-}(z, \omega) \rangle e^{2i\Delta\beta_\omega z} \\ \left[ \partial_z + \frac{1}{2} g(z) \right] | \underline{A}_{1,-}(z, \omega) \rangle &= \rho^*(z) \mathbf{V}^\dagger(z) | \underline{A}_{1,+}(z, \omega) \rangle e^{-2i\Delta\beta_\omega z} \end{aligned} \quad (5.36)$$

avec  $\mathbf{V}(z) = \mathbf{U}_+^\dagger(z) \mathbf{U}_-(z)$ . Ainsi, dans l'approximation du 1<sup>er</sup> ordre, et négligeant les réflexions discrètes, nous trouve à la sortie de l'amplificateur

$$| \underline{A}_+(L, \omega) \rangle \approx \mathbf{U}_+(L) \left[ | \underline{A}_L(\omega) \rangle + | \underline{A}_{DRB}(\omega) \rangle \right] \quad (5.37)$$

où

$$| \underline{A}_L(\omega) \rangle = \sqrt{G(L)} | \underline{A}_+(0, \omega) \rangle e^{-i\Delta\beta_\omega z} \quad (5.38)$$

est le signal transmis directement et est aligné avec le signal en entrée, et

$$| \underline{A}_{DRB}(\omega) \rangle = \mathbf{H}_{DRB}(\omega) | \underline{A}_L(\omega) \rangle \quad (5.39)$$

est la partie du bruit de double rétrodiffusion Rayleigh (DRB, Double Rayleigh Backscattering) avec

$$\mathbf{H}_{DRB}(\omega) = \frac{\gamma_R L}{2} \mathbf{I} - \int_0^L \int_0^L \rho(z) \rho^*(x) \frac{G(x)}{G(z)} e^{2i\Delta\beta_\omega(z-x)} \mathbf{V}(z) \mathbf{V}^\dagger(x) dx dz \quad (5.40)$$

Equation (5.39) implique que nous pouvons considérer le bruit de DRB comme une réponse linéaire au signal transmis directement. La matrice  $\mathbf{H}_{DRB}(\omega)$  peut alors être considérée comme un filtre que nous allons appeler le filtre DRB. C'est un filtre aléatoire dont la moyenne est nulle,  $\langle \mathbf{H}_{DRB}(\omega) \rangle = \mathbf{0}$ , grâce au 1<sup>er</sup> terme à droite de (5.40). En utilisant l'approximation  $\Delta\beta_\omega \approx \omega/v_s$ , nous trouvons la matrice d'autocorrélation du filtre DRB comme

$$\langle \mathbf{H}_{DRB}(\omega_1) \mathbf{H}_{DRB}^\dagger(\omega_2) \rangle = K_R(\omega_1 - \omega_2) \mathbf{I} \quad (5.41)$$

avec la fonction scalaire d'autocorrélation

$$\begin{aligned} K_R(\omega_1 - \omega_2) &= \gamma_R^2 \int_0^L \int_0^L \frac{G^2(x)}{G^2(z)} \exp\left[2i \frac{\omega_1 - \omega_2}{v_s} (z-x)\right] dx dz \\ &= \gamma_R^2 \int_0^L \int_0^L \frac{G^2(z)}{G^2(x)} \exp\left[-2i \frac{\omega_1 - \omega_2}{v_s} (z-x)\right] dx dz \end{aligned} \quad (5.42)$$

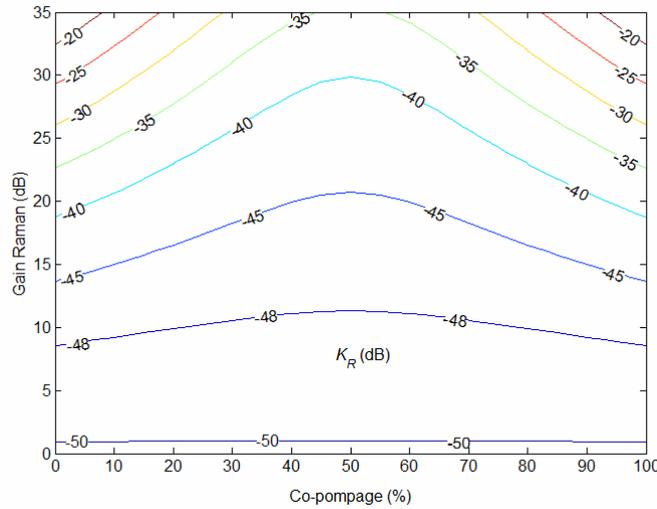


Figure 5.4 – Le coefficient de diaphotie de DRB en fonction du gain Raman et du pourcentage du co-pompage d'un amplificateur Raman composé de 100 km de fibre. Paramètres :  $\gamma_R = 1 \times 10^{-7} \text{ km}^{-1}$ ,  $\alpha_{s/p} = 0.2 / 0.26 \text{ dB/km}$ ,  $\lambda_{s/p} = 1455 / 1555 \text{ nm}$  et  $C_R = 0.69 \text{ W}^{-1} \text{ km}^{-1}$ .

Dans la suite, nous allons écrire  $K_R = K_R(0)$ , qui est appelé couramment coefficient de diaphotie (Crosstalk) de DRB [3][4]. Sur la figure 5.4, nous montrons un exemple de coefficient de diaphotie de DRB en fonction du gain Raman et du pourcentage du co-pompage.

Nous voyons que la diaphotie augmente rapidement avec le gain Raman, et elle est symétrique par rapport à la ligne de 50% de co-pompage, où la génération de DRB est le moindre.

Définissons maintenant deux transformées de Fourier inverses comme

$$\mathbf{h}_{DRB}(t) = \text{TF}^{-1}[\mathbf{H}_{DRB}(\omega)](t), \text{ et } k_R(\tau) = \text{TF}^{-1}[K_R(\omega)](\tau) \quad (5.43)$$

Alors, (5.41) implique que nous trouvons

$$\langle \mathbf{h}_{DRB}(t_1) \mathbf{h}_{DRB}^\dagger(t_2) \rangle = k_R(t_1) \delta(t_1 - t_2) \mathbf{I} \quad (5.44)$$

ce qui signifie que la réponse impulsionnelle du filtre DRB,  $\mathbf{h}_{DRB}(t)$ , est un processus stochastique delta corrélé et non-stationnaire. Nous pouvons de plus constater que la fonction  $k_R(t)$  ne peut prendre des valeurs non-nulles que dans l'intervalle du temps  $0 \leq t \leq T_R$ , où  $T_R = 2L/v_s$  est le temps nécessaire pour que le signal puisse faire un aller-retour dans la fibre. En fait, cette propriété vient directement de la réponse impulsionnelle de DRB,  $\mathbf{h}_{DRB}(t)$ , qui doit à la fois être causale,  $\mathbf{h}_{DRB}(t < 0) = 0$ , et avoir une durée inférieure à  $T_R$ .

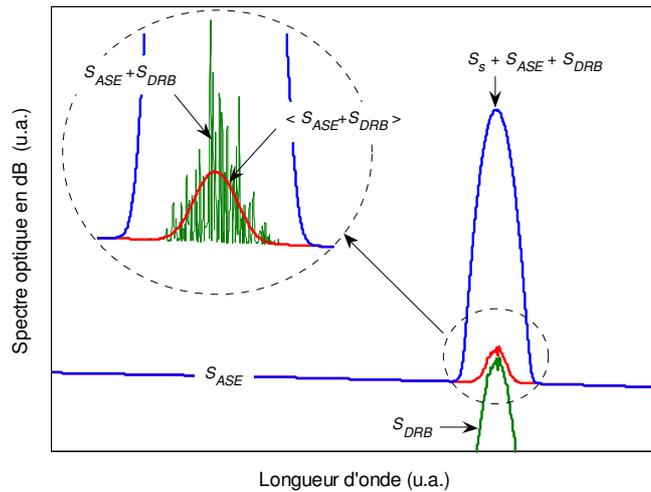


Figure 5.5 - Illustration schématique des différents spectres optiques à la sortie d'un amplificateur Raman en présence de rétrodiffusion Rayleigh

Dans la section 5.1.3, nous avons montré qu'en moyenne, le spectre du bruit DRB est identique en forme à celui du signal. Mais, (5.41) implique qu'en fait, à y regarder de près, nous pouvons constater qu'il doit y avoir des fluctuations très rapides en fonction de longueur d'onde, illustrées sur la figure 5.5. Ceci peut être considéré comme un phénomène de speckle dans le domaine fréquentiel et s'expliquer par la nature aléatoire du coefficient différentiel de rétrodiffusion Rayleigh. Le spectre du bruit DRB varie de plus aussi dans le temps, du fait que

<sup>2</sup> Mais, c'est un processus quasi-stationnaire par rapport au signal. Les fluctuations les plus rapides sont estimées de l'ordre de ms.

la biréfringence de fibre varie temporellement<sup>2</sup> [15]. La corrélation de ces fluctuations en fréquences est la fonction  $K_R(\omega_1 - \omega_2)$ . La largeur fréquentielle de cohérence de ces fluctuations peut alors être estimée à  $\Delta\omega = 2/T = v_s/L$ . Dans les amplificateurs Raman, elle prend les valeurs typiquement d'ordre de kHz. Comme la largeur spectrale du laser de signal est généralement largement supérieure à cette valeur, il est légitime d'approximer le spectre du bruit DRB par sa moyenne.

## 5.2.2 Propriétés de la polarisation de la double rétrodiffusion Rayleigh

Afin de déduire l'expression analytique de la matrice de cohérence du bruit DRB (5.41), nous devons d'abord évaluer l'expression suivante

$$\langle \mathbf{H}_{DRB}(\omega) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{H}_{DRB}^\dagger(\omega) \rangle = \gamma_R^2 \int_0^L \int_z^L \frac{G^2(x)}{G^2(z)} \langle \mathbf{V}(z) \mathbf{V}^\dagger(x) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{V}(x) \mathbf{V}^\dagger(z) \rangle dx dz \quad (5.45)$$

Il est bien connu que les groupes SU(2) et SO(3) sont isomorphes et que les matrices de Jones 2D unitaires,  $\mathbf{U}_\pm(z)$ , sont reliées aux matrices de rotation 3D,  $\mathbf{R}_\pm(z)$ , par [14]

$$\mathbf{R}_\pm(z) \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{U}_\pm^\dagger(z) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{U}_\pm(z) \quad (5.46)$$

ce qui implique que nous avons en plus

$$\mathbf{R}_\pm^{-1}(z) \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}_\pm^T(z) \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{U}_\pm(z) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{U}_\pm^\dagger(z). \quad (5.47)$$

Ainsi, nous pouvons trouver

$$\mathbf{V}(z) \mathbf{V}^\dagger(x) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{V}(x) \mathbf{V}^\dagger(z) = \mathbf{R}_+^T(x) \mathbf{R}_-(x) \mathbf{R}_-^T(z) \mathbf{R}_+(z) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (5.48)$$

et, à l'aide de la relation [14] :  $[\boldsymbol{\sigma}_l, \boldsymbol{\sigma}_m] = 2i\epsilon_{lmn} \boldsymbol{\sigma}_n$ , avec  $\epsilon_{lmn}$  étant le symbole de Levi-Civita, l'équation d'évolution de ces matrices de rotation est trouvée comme

$$d_z \mathbf{R}_\pm(z) = \pm \vec{\beta} \times \mathbf{R}_\pm(z), \text{ avec } \mathbf{R}_\pm(0) = \mathbf{I} \quad (5.49)$$

où  $\vec{\beta} \times$  est écrit sous forme matricielle

$$\vec{\beta} \times = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \beta_3 & 0 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & \beta_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

Définissant maintenant la matrice de réflexion dans l'espace de Stokes

$$\mathbf{M}_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

qui ne change que la composante circulaire d'un vecteur de Stokes [4][16], nous constatons que, si la biréfringence est linéaire, c'est-à-dire  $\beta_3 = 0$ , nous avons

$$\mathbf{M}_r \vec{\beta}_L \times \mathbf{M}_r = -\vec{\beta}_L \times \quad (5.52)$$

Ainsi, puisque  $\mathbf{M}_r \mathbf{M}_r = \mathbf{I}$ , nous trouvons

$$d_z (\mathbf{M}_r \mathbf{R}_\pm \mathbf{M}_r) = \pm \mathbf{M}_r \vec{\beta}_L \times \mathbf{M}_r \mathbf{M}_r \mathbf{R}_\pm \mathbf{M}_r = \mp \vec{\beta}_L \times (\mathbf{M}_r \mathbf{R}_\pm \mathbf{M}_r) \quad (5.53)$$

Tenant en compte de  $\mathbf{M}_r \mathbf{R}_\pm(0) \mathbf{M}_r = \mathbf{I}$ , nous trouvons finalement

$$\mathbf{R}_\mp(z) = \mathbf{M}_r \mathbf{R}_\pm(z) \mathbf{M}_r \quad (5.54)$$

c'est-à-dire que nous avons

$$\mathbf{V}(z) \mathbf{V}^\dagger(x) \vec{\sigma} \mathbf{V}(x) \mathbf{V}^\dagger(z) = \mathbf{R}_+^T(x) \mathbf{M}_r \mathbf{R}_+(x) \mathbf{R}_+^T(z) \mathbf{M}_r \mathbf{R}_+(z) \vec{\sigma} \quad (5.55)$$

Dans la suite, nous allons retenir cette hypothèse de biréfringence linéaire  $\beta_3 = 0$ , qui est en effet justifiée parce que la biréfringence circulaire de la fibre est généralement due soit à la torsion soit au champ magnétique appliqué de l'extérieur, et que ces deux facteurs peuvent tous être éliminés ou bien réduits en pratique. D'autant plus que cette hypothèse nous donnera le résultat largement reconnu<sup>3</sup>.

En plus, nous allons négliger l'autocorrélation  $\langle \mathbf{R}_+(x) \mathbf{R}_+^T(z) \rangle$ , car la longueur de cohérence de la matrice de rotation est bien inférieure à la longueur effective de fibre. Ainsi, nous avons

$$\langle \mathbf{V}(z) \mathbf{V}^\dagger(x) \vec{\sigma} \mathbf{V}(x) \mathbf{V}^\dagger(z) \rangle = \langle \mathbf{R}_+^T(x) \mathbf{M}_r \mathbf{R}_+(x) \rangle \langle \mathbf{R}_+^T(z) \mathbf{M}_r \mathbf{R}_+(z) \rangle \vec{\sigma} \quad (5.56)$$

La matrice de rotation  $\mathbf{R}_+(z)$  est un processus stochastique non-stationnaire. Ceci dit, nous constatons qu'en général, elle atteint rapidement, sur quelques centaines mètres de propagation, son régime asymptotique où ses propriétés statistiques ne s'évoluent plus en  $z$ . Alors, si nous écrivons  $\mathbf{R}_+^T = (\vec{c}_1 \ \vec{c}_2 \ \vec{c}_3)$ , nous pouvons considérer approximativement que tout au long de la fibre, ces vecteurs aléatoires,  $\vec{c}_k$ , colonnes unitaires de Stokes, se distribuent uniformément sur toute la sphère de Poincaré. Nous en déduisons  $\langle \vec{c}_k \vec{c}_k^T \rangle = \mathbf{I}/3$  et

<sup>3</sup> En fait, à notre connaissance, l'auteur du 1<sup>er</sup> article largement cité [16] sur l'étude des propriétés de polarisation en présence de la rétrodiffusion Rayleigh, a fait la même hypothèse en déclarant:

*“ Because optical fiber is reciprocal, the Mueller matrix for backward propagation is the transpose of the Mueller matrix for forward propagation...”*

donc

$$\langle \mathbf{R}_+^T(z) \mathbf{M}_r \mathbf{R}_+(z) \rangle = \mathbf{I} - 2 \langle \tilde{c}_3 \tilde{c}_3^T \rangle = \frac{\mathbf{I}}{3} \quad (5.57)$$

La remplaçant dans (5.56) et puis dans (5.45), nous trouvons

$$\langle \mathbf{H}_{DRB}(\omega) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{H}_{DRB}^\dagger(\omega) \rangle = \frac{1}{9} K_R \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (5.58)$$

Donc, si le signal transmis directement est statistiquement stationnaire avec une matrice de cohérence de la forme

$$\mathbb{E}[A_L(t_1) \langle A_L(t_2) \rangle] = \frac{1}{2} [R_L(t_1 - t_2) \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{S}_L(t_1 - t_2)] \quad (5.59)$$

où  $R_L(t_1 - t_2) = \langle A_L(t_2) | A_L(t_1) \rangle$  et  $\bar{S}_L(t_1 - t_2)$  représente l'état de polarisation, nous trouvons dans le domaine des fréquences

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A_{DRB}(\omega_1) \langle A_{DRB}(\omega_2) \rangle] &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{H}_{DRB}(\omega_1) [R_L(\omega_1) \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{S}_L(\omega_1)] \mathbf{H}_{DRB}^\dagger(\omega_1) \rangle \delta(\omega_1 - \omega_2) \\ &= \frac{K_R}{2} \left[ R_L(\omega_1) \mathbf{I} + \frac{1}{9} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{S}_L(\omega_1) \right] \delta(\omega_1 - \omega_2) \end{aligned} \quad (5.60)$$

et, finalement, nous arrivons à l'expression suivante

$$\mathbb{E}[A_{DRB}(t_1) \langle A_{DRB}(t_2) \rangle] = \frac{K_R}{2} \left[ R_L(t_1 - t_2) \mathbf{I} + \frac{1}{9} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{S}_L(t_1 - t_2) \right] \quad (5.61)$$

Cette expression qui implique que le bruit DRB a la même état de polarisation et son degré de polarisation n'est que 1/9 de celle du signal. En supposant de plus que la polarisation du signal en entrée soit linéaire, c'est-à-dire  $\bar{S}_L(\tau) = [R_L(\tau), 0, 0]$ , nous trouvons

$$\mathbb{E}[A_L(t_1) \langle A_L(t_2) \rangle] = R_L(t_1 - t_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

$$\mathbb{E}[A_{DRB}(t_1) \langle A_{DRB}(t_2) \rangle] = K_R R_L(t_1 - t_2) \begin{pmatrix} 5/9 & 0 \\ 0 & 4/9 \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

et nous voyons donc qu'il n'y a que les 5/9 de bruit DRB qui puisse se battre avec le signal, un résultat largement reconnu [4][6][16]. Dans la suite, nous allons assumer que la polarisation du signal en entrée soit toujours linéaire pour la simplification.

## 5.3 Estimation de l'impacts combinés de l'ASE et du DRB sur les performances des systèmes

### 5.3.1 Propriétés statistiques du bruit total

Nous considérons le champ optique comme classique. Le bruit total est donc la somme des bruits ASE et DRB

$$|A_B\rangle = |A_{DRB}\rangle + |A_{ASE}\rangle \quad (5.64)$$

Comme nous avons montré, le bruit ASE subit aussi de la rétrodiffusion Rayleigh, mais, en tant que bruit dépolarisé, il est exonéré des effets de la biréfringence de fibre. Il a été également montré au chapitre 4 que dans le cas classique, le bruit ASE peut être considéré comme un bruit blanc de moyenne nulle, et traité comme une variable CCG. Quant au bruit DRB, nous savons pour l'instant qu'il est une réponse linéaire du signal directement transmis.

Généralement, nous pouvons exprimer ce dernier comme une suite de bits aléatoires :  $|A_L(t)\rangle = \sum_n \mathbf{c}_n |X_n(t)\rangle$ , où  $\mathbf{c}_n$  est une matrice de Jones, aléatoire et discrète, et  $|X_n(t)\rangle$  est le profil vectoriel des bits, décalé d'un bit à l'autre d'un temps de bit  $T_B$ . Nous pouvons alors écrire le bruit DRB comme

$$|A_{DRB}(t)\rangle = \sum_n [\mathbf{h}_{DRB} \otimes \mathbf{c}_n |X_n\rangle](t) \quad (5.65)$$

Puisque la fonction de réponse impulsionnelle  $\mathbf{h}_{DRB}$  est delta corrélé en temps et possède une durée temporelle généralement largement supérieur au temps de bit,  $T_R \gg T_B$ , nous voyons que le bruit DRB est une somme d'un très grand nombre de variables aléatoires indépendantes. Selon le théorème de la limite centrale [17], ceci signifie que le bruit DRB peut aussi être considéré comme variable CCG. La différence entre ASE et DRB, est que ces bruits sont, respectivement, blanc dépolarisé et coloré polarisé. Le bruit total est donc statistiquement une variable CCG de moyenne nulle de la matrice de cohérence donnée par

$$\begin{aligned} E[|A_B(t_1)\rangle\langle A_B(t_2)|] &= \begin{pmatrix} R_x(t_1-t_2) & 0 \\ 0 & R_y(t_1-t_2) \end{pmatrix} \\ &= S_{ASE} \delta(t_1-t_2) \mathbf{I} + K_R R_L(t_1-t_2) \begin{pmatrix} 5/9 & 0 \\ 0 & 4/9 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.66)$$

où la densité de spectre ASE peut être calculée en utilisant (5.27). La forme diagonalisée de (5.66) nous implique que les bruits sur deux polarisations sont statistiquement indépendants en tant que variable CCG [17].

### 5.2.2 Impacts combinés de l'ASE et du DRB sur le taux d'erreur binaire

Le fait que le bruit DRB soit une variable aléatoire CCG permet une analyse semi-analytique sur le taux d'erreur binaire (BER, Bit-Error-Rate). La configuration de photo-détection directe est celle que nous avons présentée sur la figure 3.5 du chapitre 3. Nous allons la simplifier en supposant que le photo-détecteur peut être considéré comme idéal, et donc tous les autres bruits sont supposés négligeables. Son signal de sortie n'est que la simple réponse à la puissance du champ optique incident sur le photo-détecteur

$$V(t) = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} H_T(t - \tau) \langle A_o(\tau) | A_o(\tau) \rangle d\tau \quad (5.67)$$

avec

$$|A_o\rangle = H_o \otimes |A_+(L)\rangle = \mathbf{U}_+(L)(H_o \otimes [|A_L\rangle + |A_B\rangle]) \quad (5.68)$$

qui est le champ optique total filtré par le filtrage optique. Nous voyons que le rendement (5.67) est indépendant de la matrice  $\mathbf{U}_+(L)$ . Il est donc la somme des deux contributions,  $V(t) = V_x(t) + V_y(t)$ , dont chacune peut s'écrire sous la forme

$$V_k(t) = \iint_{\mathfrak{R}^2} A_k(t - \tau_1) K(\tau_1, \tau_2) A_k^*(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (5.69)$$

où  $A_k$  est la composante du vecteur de Jones du champ optique total  $|A_+(L)\rangle$  à la sortie de l'amplificateur, et le noyau d'intégration est donné par

$$K(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_o(\tau_1 - \tau_3) H_T(\tau_3) H_o(\tau_2 - \tau_3) d\tau_3 \quad (5.70)$$

Nous pouvons obtenir maintenant un groupe de fonctions propres à l'aide de l'équation intégrale de Fredholm du seconde type [18]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau_1, \tau_2) \varphi_n(\tau_2) d\tau_2 = \lambda_n \varphi_n(\tau_1) \quad (5.71)$$

Le noyau d'intégration (5.70) étant réel et symétrique, les valeurs propres,  $\lambda_n$ , sont réelles, et les fonctions propres,  $\varphi_n$ , constituent une base complète et orthonormale [18], telle que

$$\int_{\mathfrak{R}} \varphi_n^*(\tau) \varphi_m(\tau) d\tau = \delta_{nm} \text{ et } \sum_n \varphi_n^*(\tau_1) \varphi_n(\tau_2) = \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (5.72)$$

Sur cette base, nous pouvons alors décomposer les deux composantes vectorielles comme

$$A_k(t - \tau) = \sum_n A_{k,n}(t) \varphi_n(\tau) = \sum_n [S_{k,n}(t) + N_{k,n}(t)] \varphi_n(\tau) \quad (5.73)$$

où  $S_{k,n}$  et  $N_{k,n}$  sont les projections du signal et du bruit. Le bruit étant CCG, il est facile de vérifier que ses projections le sont aussi. En supposant que le signal soit connu à l'instant  $t$ , les projections constituent alors d'un vecteur colonne aléatoire CCG,  $\bar{A}_k(t) = \bar{S}_k(t) + \bar{N}_k(t)$ , de moyenne  $\bar{S}_k(t)$  et dont la matrice hermitienne de covariance  $\mathbf{C}_k$  est donnée par

$$C_{k,mm} = E[N_{k,n} N_{k,m}^*] = \iint_{\mathfrak{R}^2} \varphi_n^*(\tau_1) R_k(\tau_1 - \tau_2) \varphi_m(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (5.74)$$

où  $R_k$  est défini dans (5.66). Alors, la densité de probabilité du vecteur  $\bar{A}_k$  est donné par [17]

$$f_k(\bar{A}_k) = \det^{-1}[\pi \mathbf{C}_k] \exp\left[-(\bar{A}_k^\dagger - \bar{S}_k^\dagger) \mathbf{C}_k^{-1} (\bar{A}_k - \bar{S}_k)\right] \quad (5.75)$$

Finalement, nous réécrivons le rendement en terme du produit intérieur de ce vecteur aléatoire comme

$$V_k(t) = \iint_{\mathfrak{R}^2} A_k(t - \tau_1) K(\tau_1, \tau_2) A_k^*(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \bar{A}_k^\dagger(t) \Lambda \bar{A}_k(t), \text{ avec } \Lambda_{nm} = \lambda_n \delta_{nm} \quad (5.76)$$

Nous avons déjà obtenu la fonction génératrice des moments du rendement total classique dans le chapitre précédent (3.101). Puisque la polarisation du signal est linéaire, nous avons :  $\bar{A}_x = \bar{S}_x + \bar{N}_x$  et  $\bar{A}_y = \bar{N}_y$ . De plus, les bruits sur les deux polarisations sont statistiquement indépendants. Ainsi, nous pouvons écrire la fonction génératrice et trouver, avec le calcul donné dans l'annexe C, son expression analytique à l'aide de la densité de probabilité (5.75) sous la forme

$$\begin{aligned} \Phi(t, s) &= E[\exp[s\mu \bar{A}_x^\dagger(t) \Lambda \bar{A}_x(t)]] E[\exp[s\mu \bar{A}_y^\dagger(t) \Lambda \bar{A}_y(t)]] \\ &= \frac{\exp[s\mu \bar{S}_x^\dagger(t) (\mathbf{I} - s\mu \Lambda \mathbf{C}_x)^{-1} \Lambda \bar{S}_x(t)]}{\det[\mathbf{I} - s\mu \Lambda \mathbf{C}_x] \det[\mathbf{I} - s\mu \Lambda \mathbf{C}_y]} \end{aligned} \quad (5.77)$$

La forme matricielle de cette expression est donnée en vue de la simulation numérique. Comme la valeur propre  $\lambda_n$  décroît, en général, exponentiellement, une bonne précision est envisageable avec une dimension matricielle modérée. Cette expression est légèrement différente que celles dans les littératures [19][20]. Ceci est dû au fait que nous avons pris en compte dans notre modèle non seulement l'ASE mais aussi DRB. Puisque ce premier est blanc et dépolarisé, les deux matrices de covariance de bruit sont identiques et diagonalisées. Dans ce cas-là, nous pouvons vérifier que l'expression se simplifie et redonne le résultat déjà obtenu ailleurs [19][20]. Avec (5.77), et utilisant  $\log(\det[\mathbf{I} - s\mu \Lambda \mathbf{C}_k]) = \det[\log(\mathbf{I} - s\mu \Lambda \mathbf{C}_k)]$ , nous pouvons trouver le moyen et la variance du rendement comme

$$\begin{aligned}\bar{V}(t) &= \frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial s} \Big|_{s=0} = \mu \left( \text{tr}[(\mathbf{C}_x + \mathbf{C}_y) \mathbf{\Lambda}] + \bar{S}^\dagger \mathbf{\Lambda} \bar{S} \right) \\ &= \mu \iint_{\mathfrak{R}^2} \left( A_L(t - \tau_1) A_L^*(t - \tau_2) + \sum_{k=x,y} R_k(\tau_1 - \tau_2) \right) K(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2\end{aligned}\quad (5.78)$$

et

$$\begin{aligned}\sigma_V^2(t) &= \frac{\partial^2 \Phi(t, s)}{\partial s^2} \Big|_{s=0} - \bar{V}^2(t) = \mu^2 \left( 2\bar{S}^\dagger \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}_x \mathbf{\Lambda} \bar{S} + \text{tr}[\mathbf{\Lambda} \mathbf{C}_x \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}_x + \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}_y \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}_y] \right) \\ &= 2\mu^2 \iint_{\mathfrak{R}^4} A_L(t - \tau_1) K(\tau_1, \tau_2) R_x(\tau_2 - \tau_3) K(\tau_3, \tau_4) A_L^*(t - \tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \\ &\quad + \mu^2 \sum_k \iint_{\mathfrak{R}^4} K(\tau_1, \tau_2) R_k(\tau_2 - \tau_3) K(\tau_3, \tau_4) R_k(\tau_4 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4\end{aligned}\quad (5.79)$$

Nous identifions tout de suite les termes des deux dernières lignes de (5.79) comme les bruits de battement signal-bruit et bruit-bruit.

Ignorant le taux d'erreur binaire lié à l'interférence d'inter-symboles [21], les densités de probabilité du rendement pour les symboles '1' et '0',  $f_1(v)$  et  $f_0(v)$ , sont les transformées de Fourier inverses de  $\Phi(2\pi is)$ , étant donnés les fonctions de profil de ces symboles [17]. Une fois obtenu ces densités de probabilités, le taux d'erreur binaire peut se calculer en supposant que les deux symboles sont équiprobables par

$$\text{BER} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{v_o} f_1(v) dv + \frac{1}{2} \int_{v_o}^{+\infty} f_0(v) dv \quad (5.80)$$

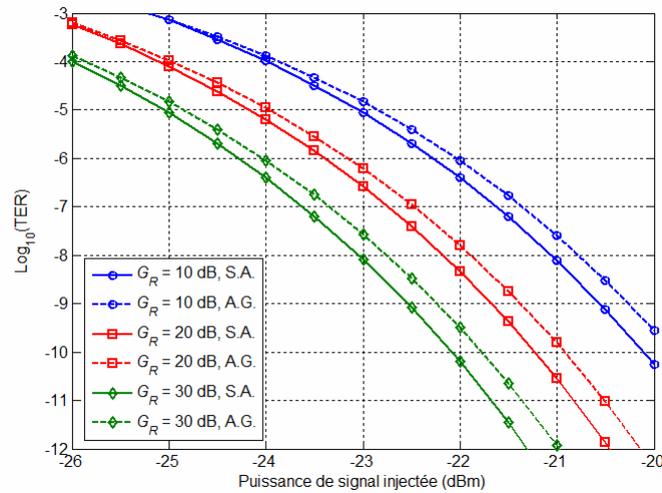
où  $v_o$  est le niveau de décision optimal [9] défini par  $f_1(v_o) = f_0(v_o)$ . Les calculs de transformée de Fourier peuvent s'achever soit analytiquement en utilisant le théorème des résidus et la méthode de descente de gradient (Steepest Descent Method) [18], soit directement à l'aide de simulation numérique.

### 5.2.3 Un exemple

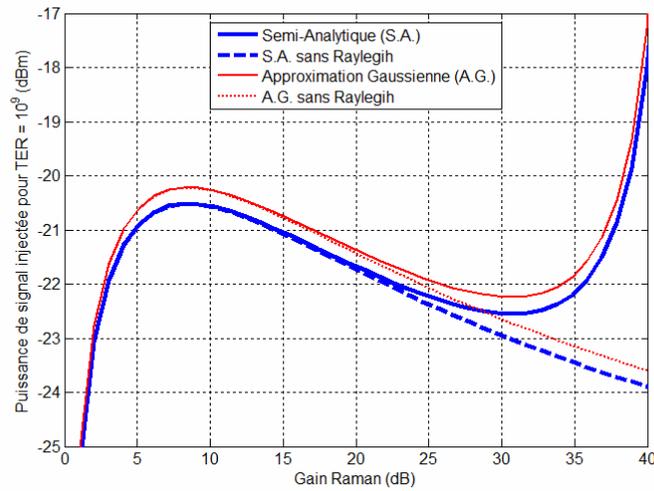
A titre d'exemple, nous allons maintenant utiliser les formulaires obtenues ci-dessus pour évaluer le BER et la sensibilité d'un système à 40 Gbit/s au format RZ à 1555 nm constitué d'un simple span de 100 km de fibre SSMF, utilisant amplification Raman distribuée et contra-pompée. La pompe est de plus supposée non-saturée. La fonction d'auto-corrélation du signal est donnée par [4][21]

$$R_L(\tau) = P_{s0} \left[ U(\tau) + \sum_n U(\tau - nB_s^{-1}) \right] \quad (5.81)$$

où  $P_{s0}$  est la puissance moyenne de signal, et  $U(t) = \int Y(t-\tau)Y(\tau)d\tau/4$  avec  $Y(\tau)$  étant le profil du champ de modulation normalisé tel que  $\int Y^2(\tau)d\tau = 1$ . Le filtre optique est de type lorentzien de bande passante de 0.4 nm,  $f_{3dB} = 50$  GHz. Le filtre électronique est un filtre de Butterworth [21] du 2<sup>ème</sup> ordre avec  $f_{3dB} = 30$  GHz. Le profil d'impulsion du signal est Gaussien en puissance avec une largeur temporelle à mi-hauteur de 6.25 ps, soit 1/4 de la durée de bit. Le temps de décision est choisi au maximum du signal de sortie du circuit électronique. Les densités de probabilité pour les symboles '1' et '0' sont calculées avec (5.77) et la FFT numérique.



(a)



(b)

Figure 5.6 – (a) BER en fonction de la puissance de signal injectée (b) la puissance de signal injectée pour  $BER = 10^{-9}$  en fonction du gain Raman, pour 100 km de fibre SSMF avec les paramètres:  $C_R = 0.42 \text{ W}^{-1}\text{km}^{-1}$ ,  $\alpha_p = 0.25 \text{ dB/km}$ ,  $\alpha_s = 0.20 \text{ dB/km}$  and  $\gamma_R = 6.0 \cdot 10^{-8} \text{ m}^{-1}$ .

Les résultats de simulation avec la méthode semi-analytique (S.A.) sont montrés sur la figure 5.6. Pour les gains Raman de 10, 20 et 30 dB, nous avons calculé le BER en fonction de la puissance de signal injectée. En fonction du gain Raman, nous avons évalué, en plus, la sensibilité, que nous définissons ici pour l'amplification Raman distribuée comme la puissance de signal injectée à laquelle le BER vaut  $10^{-9}$ . Pour comparaison, les valeurs obtenues sans diffusion Rayleigh sont également montrées sur cette figure. Avec ces résultats, nous voyons clairement qu'aux gains Raman très élevés,  $G_R > 30$  dB, la sensibilité est sérieusement dégradée par la diffusion Rayleigh. Alors qu'aux gains Raman inférieurs à 20 dB, l'impact de la diffusion Rayleigh devient négligeable, ce qui correspond à la majorité des cas pratiques. Finalement, nous avons également investi la méthode de l'approximation gaussienne (A.G.) sur les densités de probabilité [9], qui est largement utilisée en pratique pour sa simplicité. Dans cette méthode, le BER se calcule comme [9]

$$\mathbf{BER} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{Q}{\sqrt{2}} \right), \quad (5.82)$$

où  $\operatorname{erfc}(x)$  est la fonction d'erreur complémentaire, et

$$Q = \frac{V_1 - V_0}{\sigma_1 + \sigma_0}, \quad (5.83)$$

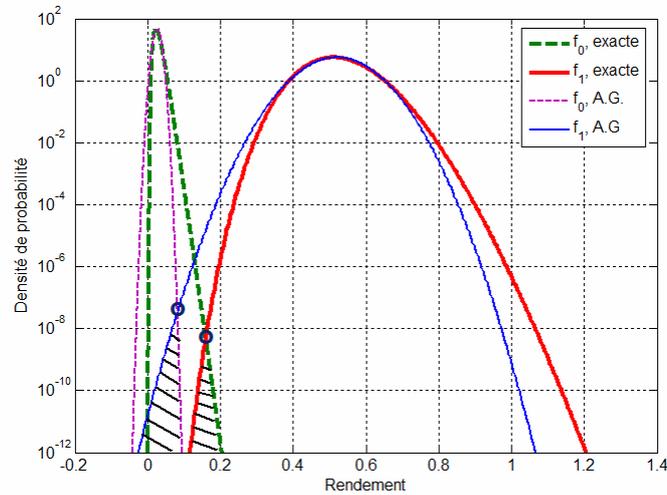


Figure 5.7 – Exemple de comparaison entre les densités de probabilité exactes et approximées comme Gaussiennes avec le moyen et la variance des celles exactes.

est le facteur de qualité, avec  $V_{1/0}$  et  $\sigma_{1/0}$  étant les valeurs moyennes et les écarts types de '1' et '0'. Pour les calculer, nous pouvons utiliser (5.78) et (5.79). Sur les figures, nous constatons que la méthode A.G. surestime systématiquement la sensibilité d'environ 0.3 dB. Ceci montre la légitimité de l'utilisation de cette méthode approximative en pratique. Comme

le montre la figure 5.7, cette erreur systématique vient évidemment du fait que les densités de probabilité réelles ne sont pas symétriques par rapport aux valeurs moyenne, car en absence du bruit thermique du circuit électronique, le rendement ne peut prendre que des valeurs positives. Les cercles marqués sur la figure désignent les positions du niveau de décision optimal.

### 5.2.4 Pénalité de la rétrodiffusion Rayleigh sur le facteur de qualité

La rétrodiffusion Rayleigh est non seulement la cause du bruit de DRB mais elle augmente aussi le niveau du bruit ASE. Pour évaluer sa pénalité sur la performance du système, nous pouvons calculer la pénalité du facteur de qualité, qui peut être définie comme le rapport des facteurs de qualité sans et avec la rétrodiffusion Rayleigh, désignés respectivement par  $Q_S$  et  $Q_R$ . En supposant que le bruit de battement domine, à partir de (5.78) et (5.79), le facteur de qualité s'exprime comme

$$Q \approx \frac{\iint_{\mathfrak{R}^2} X_1(t_o - \tau_1)K(\tau_1, \tau_2)X_1^*(t_o - \tau_2)d\tau_1d\tau_2}{\sqrt{2 \iint_{\mathfrak{R}^4} X_1(t_o - \tau_1)K(\tau_1, \tau_2)R_x(t_2 - t_3)K(\tau_3, \tau_4)X_1^*(t_o - \tau_4)d\tau_1d\tau_2d\tau_3d\tau_4}} \quad (5.84)$$

où  $X_1$  est le profil du champ correspondant au bit '1', et  $t_o$  est l'instant optimal de décision. Ainsi, la pénalité du facteur  $Q$  peut être exprimée, en décibels, comme

$$\Delta Q \text{ (dB}Q) = 10 \log_{10} \left( \frac{Q_S}{Q_R} \right) = 5 \log_{10} \left( 1 + \Delta \eta_{ASE} + \frac{10}{9} \Delta \eta_D K_R Q_S^2 \right) \quad (5.85)$$

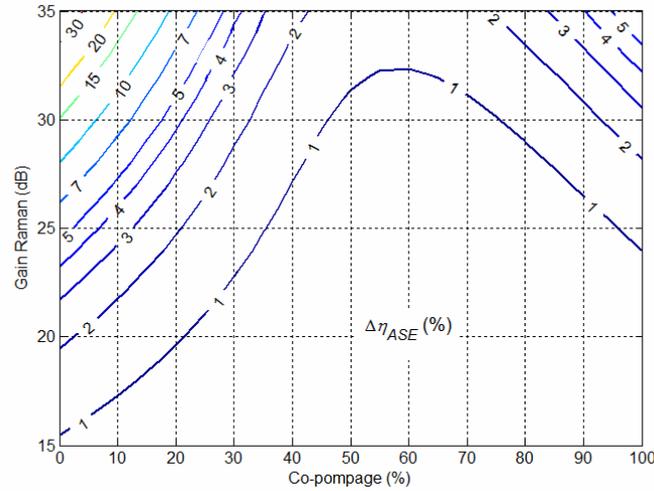
où  $\Delta \eta_{ASE} = S_{ASE} / S_{ASE,0} - 1$  est le facteur d'excès de ASE, que nous définissons comme la différence normalisée entre les densités spectrales de ASE avec et sans la rétro-diffusion Rayleigh, et

$$\Delta \eta_D = \frac{\iint_{\mathfrak{R}^4} X_L(t - \tau_1)K(\tau_1, \tau_2)R_L(\tau_2 - \tau_3)K(\tau_3, \tau_4)X_L^*(t - \tau_4)d\tau_1d\tau_2d\tau_3d\tau_4}{\left[ \iint_{\mathfrak{R}^2} X_L(t - \tau_1)K(\tau_1, \tau_2)X_L^*(t - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \right]^2} \quad (5.86)$$

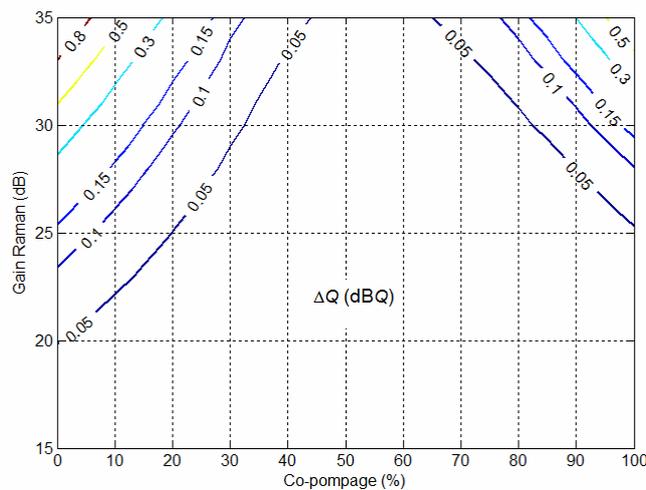
est une constante qui ne dépend que du format de modulation et la configuration de détection.

Sur la figure 5.8, nous montrons le facteur de renforcement de ASE et la pénalité sur le facteur de qualité en fonction du gain Raman et du pourcentage du co-pompage. Pour calculer le facteur de renforcement, nous avons assumé que la simple rétrodiffusion Rayleigh de ASE domine. Ainsi, il peut être calculé comme

$$\Delta\eta_{ASE} \approx \gamma_R \int_0^L \int_0^z \frac{G(z)P_p(z)}{G^2(x)} dx dz \bigg/ \int_0^L \frac{P_p(z)}{G(z)} dz. \quad (5.87)$$



(a)



(b)

Figure 5.8 – (a) Le facteur d'excès de ASE en fonction du gain Raman et du pourcentage du co-pompage d'un amplificateur Raman composé de 100 km de fibre ; (b) la pénalité du facteur de qualité induite par la rétrodiffusion Rayleigh.  $\Delta\eta_D = 0.2$  et les autres paramètres sont identiques aux ceux de la figure 5.4.

Pour calculer la pénalité du facteur, le format de modulation et la configuration de détection sont identiques aux ceux de la section précédente, où nous pouvons trouver  $\Delta\eta_D = 0.2$ . Sur la figure 5.8 (a), nous voyons que, contrairement au coefficient de diaphotie DRB montré sur la figure 5.4, le facteur d'excès n'est plus symétrique et est moindre pour la configuration de pompage co-directionnel, et qu'il en est de même pour la pénalité du facteur de qualité due à

la rétrodiffusion Rayleigh. La figure 5.8 (b) montre clairement que le pompage bidirectionnel avec 50-60% de co-pompage est très intéressant compte tenu de sa tolérance à la rétrodiffusion Rayleigh.

## 5.4 Conclusion

La diffusion Rayleigh est un processus dépendant de la polarisation. Dans ce chapitre, nous avons montré la consistance du modèle sur la diffusion Rayleigh dans les fibres monomodes établi dans le chapitre 2, et vérifier l'expression du facteur de recapture. Ensuite, nous avons montré à partir de ce modèle comment obtenir explicitement les équations d'évolution des spectres optiques dans les deux sens de propagation. Avec un programme de simulation numérique, il est montré que la pompe peut être saturée aux hautes valeurs du gain, à cause de la génération du bruit ASE renforcée par la rétrodiffusion Rayleigh.

Nous avons établi ensuite un modèle plus complet pour prendre en compte l'effet de PMD dans les fibres. Avec ce modèle, le résultat bien connu sur les propriétés de polarisation du bruit DRB est obtenu, mais sous la condition que la biréfringence de la fibre puisse être considérée comme linéaire. Si les propriétés de polarisation du bruit DRB sont largement vérifiées expérimentalement en pratique, l'hypothèse que la biréfringence des fibres optiques soit pratiquement linéaire est vérifiée indirectement. Nous avons également montré que les bruits ASE et DRB sont tous CCG, mais l'un est blanc et l'autre est coloré. En moyenne, le bruit DRB a le même spectre que le signal.

Avec ces propriétés, nous avons pu établir une méthode exacte et semi analytique pour évaluer l'impact combiné des bruits ASE et DRB sur la performance de système, en terme de BER, en présence de la rétrodiffusion Rayleigh. Sur un exemple d'application, nous avons montré que la méthode d'approximation gaussienne est généralement adaptée pour calculer le BER, en présence de la rétrodiffusion Rayleigh. Finalement, nous avons évalué analytiquement la pénalité de la rétrodiffusion Rayleigh sur le facteur de qualité. Il est montré clairement que le pompage bidirectionnel avec 50-60% de co-pompage est très intéressant compte tenu de sa tolérance à la rétrodiffusion Rayleigh.

## Références:

- [1] E. Brinkmeyer, "Analysis of the backscattering method for single-mode optical fibers," *J. Opt. Soc. Am.* **70**, 1010-1012, 1980.
- [2] A. H. Hartog and M.P. Gold, "On the theory of backscattering in single-mode optical fibers," *IEEE J. Lightwave Technol.* **LT-2**, 76-82, 1984.
- [3] M. Nissov, K. Rottwitt, H.D. Kidorf, and M.X. Ma, "Rayleigh crosstalk in long cascades of distributed unsaturated Raman amplifiers," *IEE Electron. Lett.* **35**, 997-998, 1999.
- [4] M. N. Islam and R. W. Lucky, *Raman Amplifiers for telecommunications 2 : Sub-Systems and Systems*, Chap. 15, J. Bromage, P. J. Winzer, and R.-J. Essiambre, Springer-Verlag, 2004.
- [5] P. Gysel and R.K. Staubli, "Statistical properties of Rayleigh backscattering in single-mode fibers," *IEEE J. Lightwave Technol.* **8**, 561-567, 1990.
- [6] P. Wan and J. Conradi, "Impact of double Rayleigh backscatter noise on digital and analog fiber systems," *IEEE J. Lightwave Technol.* **14**, 288-297, 1996.
- [7] B. Chou, *Laser Light Scattering*, New York: Academic, 1974.
- [8] Ludwig Knöll, Stefan Scheel, Dirk-Gunnar Welsch, "QDE in dispersing and absorbing media," arXiv:quant-ph/0006121v5, 2003.
- [9] G.P. Agrawal, *Fiber-Optic Communication Systems*, 2<sup>nd</sup> Ed., Wiley-InterScience, 1997.
- [10] K.-I. Aoyama, K. Nakagawa, and T. ITOH, "Optical time domain reflectometry in a single-mode fiber," *IEEE J. Quant. Electron.* **QE-17**, 862-868, 1981.
- [11] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, 2<sup>nd</sup> Ed., Springer-Verlag, 1985.
- [12] H. Kidorf, K. Rottwitt, M. Nissov, M. Ma, and E. Rabarijaona, "Pump interactions in a 100-nm bandwidth Raman amplifier," *IEEE Photon. Technol. Lett.* **11**, 530-532, 1999.
- [13] Q. Lin and G. P. Agrawal, "Vector theory of stimulated Raman scattering and its application to fiber-based Raman amplifiers," *J. Opt. Soc. Am. B* **20**, 1616-1631, 2003.
- [14] J. P. Gordon and H. Kogelnik, "PMD fundamentals: polarization-mode dispersion in optical fibers," *Proc. Nat. Acad. Sci.* **97**, 4541-4550, 2000.
- [15] H. Bülow, W. Baumert, H. Schmuck, F. Mohr, T. Schulz, F. Küppers, and W. Weiershausen, "Measurement of the maximum speed of PMD fluctuation in installed field fiber," in *Proc. Optic. Fiber Commun. Conf. (OFC'99)*, 1999.

- 
- [16] M. Oskar van Deventer, "Polarisation properties of Rayleigh backscattering in single-mode fibers," *IEEE J. Lightwave Technol.* **12**, 1895-1899, 1993.
- [17] A. Papoulis and S.U. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 4th ed., 2002.
- [18] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 5th ed., Harcourt Academic Press, San Diego, 2001.
- [19] I. T. Monroy and G. Einarsson, "Bit error evaluation of optically preamplified direct detection receivers with Fabry-Perot optical filters," *IEEE J. Lightwave Technol.* **15**, 1546–1553, 1997.
- [20] J. S. Lee and C. S. Shim, "Bit error rate analysis of optically preamplified receivers using an eigenfunction expansion method in optical frequency domain," *IEEE J. Lightwave Technol.* **12**, 1224–1229, 1994.
- [21] A. B. Carlson, *Communication Systems*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1986.



## Chapitre 6

# Impacts des Bruits de Pompe sur le Signal

Dans les chapitres précédents, nous avons négligé les influences des bruits de la pompe sur le signal. Pour compléter la description des performances en bruit des amplificateurs Raman, il est nécessaire de les prendre en compte. Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord établir un modèle vectoriel pour l'amplification Raman dans les fibres optiques. A partir de ce modèle, nous allons tout d'abord discuter l'influence de la pompe polarisée sur le signal et montrer pourquoi il est nécessaire en pratique d'utiliser les pompes Raman dépolarisées. Nous allons ensuite développer la théorie du transfert de bruit relatif d'intensité (RIN, Relative Intensity Noise) de la pompe vers le signal [1][2]. Finalement, puisque les impacts de la dispersion modale de polarisation (PMD, Polarization Mode Dispersion) [3][4] sont ignorés dans cette théorie, nous allons établir un modèle plus complet pour étudier les transferts de bruit de la pompe vers le signal assistés par PMD. De nouveaux processus de transfert de bruit seront mis en évidence, et leurs pénalités de système seront évaluées qualitativement.

### 6.1 Modèle vectoriel d'amplification Raman dans les fibres

Au chapitre 2, nous avons établi un modèle quantique scalaire pour l'amplification Raman dans les fibres optiques. Dans cette section, nous allons établir le modèle vectoriel pour l'amplification Raman dans les fibres optiques, où les champs seront traités comme classique, et les effets Kerr, et les diffusions Rayleigh, Brillouin et Raman spontanée seront temporairement ignorés.

D'après le chapitre 2, prenant en compte de la diffusion Raman stimulée, l'équation de propagation du champ électrique classique dans les fibres optiques s'écrit dans l'approximation du guidage faible sous la forme

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = -\mu_0 \omega^2 \underline{\mathbf{P}}_R(\mathbf{r}, \omega) \quad (6.1)$$

où  $\underline{\mathbf{P}}_R(\mathbf{r}, \omega)$  est la densité de polarisation Raman stimulée

$$\mathbf{P}_R(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \int_{-\infty}^t a_R(\mathbf{r}, t - t_1) |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1)|^2 dt_1 \quad (6.2)$$

qui est la réponse isotrope, nonlinéaire et non-locale dans le temps au champ électrique [4][5]. La réponse anisotrope est négligée pour simplification. Nous supposons que le champ électrique guidé dans la fibre est constitué des champs de signal et de pompe, tous les deux quasi-monochromatiques. C'est-à-dire, nous pouvons écrire

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_p(\mathbf{r}, t), \text{ avec } \mathbf{E}_\mu(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_\mu(z, t) \phi_\mu(\mathbf{x}) \exp i(\beta_\mu z - \omega_\mu t) + c.c. \quad (6.3)$$

où  $\mu = s, p$ , et  $\mathbf{A}_\mu$ ,  $\phi_\mu$ ,  $\beta_\mu$  et  $\omega_\mu$  sont, respectivement, l'enveloppe vectorielle lentement variable, la fonction scalaire de mode normalisée telle que  $\int |\phi_\mu(\mathbf{x})|^2 d^2\mathbf{x} = 1$ , le constant de groupe de propagation et la fréquence angulaire de la porteuse optique. Nous allons négliger les contributions Raman aux effets paramétriques. Alors, de la même manière que pour le champ électrique, la densité de polarisation Raman stimulée peut se décomposer en celle du signal et celle de la pompe comme

$$\mathbf{P}_R(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_s(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_p(\mathbf{r}, t), \text{ avec } \mathbf{P}_\mu(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{P}}_\mu(z, t) \exp i(\beta_\mu z - \omega_\mu t) \phi_\mu(\mathbf{x}) + c.c. \quad (6.4)$$

où  $\bar{\mathbf{P}}_\mu$  est l'enveloppe vectorielle, lentement variable, de la densité de polarisation Raman stimulée. Remplaçant (6.3) et (6.4) dans (6.2), nous trouvons

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_s(z, t) &= \frac{2\varepsilon_0}{A_{eff}} \mathbf{A}_p(z, t) \int_{-\infty}^t a_R(\mathbf{r}, t - t_1) e^{-(\omega_s - \omega_p)(t - t_1)} [\mathbf{A}_p^*(z, t_1) \cdot \mathbf{A}_s(z, t_1)] dt_1 \\ \bar{\mathbf{P}}_p(z, t) &= \frac{2\varepsilon_0}{A_{eff}} \mathbf{A}_s(z, t) \int_{-\infty}^t a_R(\mathbf{r}, t - t_1) e^{-(\omega_s - \omega_p)(t - t_1)} [\mathbf{A}_s^*(z, t_1) \cdot \mathbf{A}_p(z, t_1)] dt_1 \end{aligned} \quad (6.5)$$

où nous avons défini la surface effective comme

$$A_{eff}^{-1} = \int |\phi_s(\mathbf{x})|^2 |\phi_p(\mathbf{x})|^2 d^2\mathbf{x} \quad (6.6)$$

qui est pratiquement égale à la surface du mode guidé. L'effet Raman dans les fibres optiques à silice a un temps de réponse extrêmement court, qui est égal à l'inverse de la largeur spectrale de l'efficacité Raman et donc bien inférieur à la picoseconde ( $10^{-12}$  s). De ce fait, sauf dans le cas d'impulsions ultra courtes, nous pouvons généralement faire sortir des intégrales les produits scalaires des enveloppes dans (6.5) et écrire

$$\bar{\mathbf{P}}_s(z, t) = \frac{g_R}{A_{eff}} \mathbf{A}_p(z, t) [\mathbf{A}_p^*(z, t) \cdot \mathbf{A}_s(z, t)] \text{ et } \bar{\mathbf{P}}_p(z, t) = -\frac{\omega_p}{\omega_s} \frac{g_R}{A_{eff}} \mathbf{A}_s(z, t) [\mathbf{A}_s^*(z, t) \cdot \mathbf{A}_p(z, t)] \quad (6.7)$$

avec l'efficacité Raman aux fréquences optiques de signal

$$g_R = \frac{\omega_s^2 \omega_p}{c^4 \beta_p \beta_s} \text{Im} \underline{a}_R(\omega_p - \omega_s) \quad (6.8)$$

où la partie réelle de  $\underline{a}_R(\omega_p - \omega_s)$  est négligée. Dans (6.7), nous avons déjà normalisé les enveloppes telle que leurs modules carrés deviennent les puissances optiques de signal et de pompe,  $P_\mu(z, t) = |\mathbf{A}_\mu(z, t)|^2$ .

Dans l'approximation du guidage faible, les vecteurs de champ électrique guidé dans les fibres monomodes sont supposés approximativement dans le plan transverse. Nous pouvons alors remplacer les enveloppes vectorielles lentement variables par les vecteurs de Jones, colonnes 2D, comme  $\mathbf{A}_\mu(z, t) = |A_\mu(z, t)\rangle$ . A partir de (6.1), nous pouvons ainsi trouver les équations de propagation pour le signal et la pompe comme

$$\begin{aligned} (\partial_z + v_s^{-1} \partial_t) |A_s(z, t)\rangle &= \frac{1}{2} \left( \frac{g_R}{A_{eff}} |A_p\rangle \langle A_p| - \alpha_s \right) |A_s\rangle \\ (e_p \partial_z + v_p^{-1} \partial_t) |A_p(z, t)\rangle &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega_p}{\omega_s} \frac{g_R}{A_{eff}} |A_s\rangle \langle A_s| + \alpha_p \right) |A_p\rangle \end{aligned} \quad (6.9)$$

où  $v_\mu$  et  $\alpha_\mu$  sont la vitesse de groupe et le coefficient d'atténuation, et  $e_p = \pm 1$  pour le co- et contra-pompage. Comme dans le chapitre précédent, nous allons prendre en compte la biréfringence de fibre pour inclure l'effet de PMD dans notre modèle. Le modèle final de propagation des vecteurs de Jones s'écrit alors comme

$$\begin{aligned} (\partial_z + v_s^{-1} \partial_t) |A_s(z, t)\rangle &= -\frac{i}{2} \bar{\beta}_s \cdot \bar{\sigma} |A_s\rangle + \frac{1}{2} \left( \frac{g_R}{A_{eff}} |A_p\rangle \langle A_p| - \alpha_s \right) |A_s\rangle \\ (e_p \partial_z + v_p^{-1} \partial_t) |A_p(z, t)\rangle &= -\frac{i}{2} \bar{\beta}_p \cdot \bar{\sigma} |A_p\rangle - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_p}{\omega_s} \frac{g_R}{A_{eff}} |A_s\rangle \langle A_s| + \alpha_p \right) |A_p\rangle \end{aligned} \quad (6.10)$$

où  $\bar{\beta}_\mu$  est le vecteur de biréfringence, colonne 3D, aux fréquences de signal ou de pompe, et  $\bar{\sigma}$  est le vecteur de matrices de Pauli [6].

Dans la suite, il est plus commode d'utiliser les puissances optiques et les vecteurs d'état de polarisation (SOP, State of Polarization) définis comme

$$P_\mu = \langle A_\mu | A_\mu \rangle \text{ et } \bar{s}_\mu = \frac{\langle A_\mu | \bar{\sigma} | A_\mu \rangle}{\langle A_\mu | A_\mu \rangle} \quad (6.11)$$

Ce dernier est donc un vecteur Stokes unitaire sur la sphère de Poincaré [6]. Remplaçant ces deux expressions dans (6.10), nous trouvons

$$\begin{aligned}
(\partial_z + v_s^{-1} \partial_t) P_s &= [C_R P_p (1 + \bar{s}_s \cdot \bar{s}_p) - \alpha_s] P_s \\
(\partial_z + v_s^{-1} \partial_t) \bar{s}_s &= \bar{\beta}_s \times \bar{s}_s - C_R P_p \bar{s}_s \times (\bar{s}_s \times \bar{s}_p) \\
(e_p \partial_z + v_p^{-1} \partial_t) P_p &= -[\eta_{ps} C_R P_s (1 + \bar{s}_s \cdot \bar{s}_p) + \alpha_p] P_p \\
(e_p \partial_z + v_p^{-1} \partial_t) \bar{s}_p &= \bar{\beta}_p \times \bar{s}_p + \eta_{ps} C_R P_s \bar{s}_p \times (\bar{s}_p \times \bar{s}_s)
\end{aligned} \tag{6.12}$$

où  $\eta_{ps} = \omega_p / \omega_s$ , et le coefficient effective d'amplification Raman est donc défini comme

$$C_R = g_R / 2A_{eff} \tag{6.13}$$

Nous voyons que la diffusion Raman stimulée ne dépend que de l'orientation relative entre les SOP de signal et pompe, et l'amplification du signal, ainsi que la déplétion de pompe dépendant de l'angle entre ces deux vecteur. L'amplification Raman est maximale quand ils sont dans la même direction, et nulle quand ils sont dans les directions opposées. En plus, comme déjà constaté dans [1], les termes  $\bar{s}_s \times (\bar{s}_s \times \bar{s}_p)$  et  $\bar{s}_p \times (\bar{s}_p \times \bar{s}_s)$  signifient que les vecteurs unitaires s'attirent dans le processus de diffusion Raman stimulée. Nous pouvons simplifier (6.12) formellement en introduisant deux trames de référence : l'une tourne de telle manière que le SOP de pompe ne voit plus la biréfringence de fibre et l'autre se propage à la même vitesse que la pompe. Ainsi, (6.12) se simplifie comme

$$\begin{aligned}
(\partial_z + \beta_{sp} \partial_t) P_s &= [C_R P_p (1 + \bar{s}_s \cdot \bar{s}_p) - \alpha_s] P_s \\
(\partial_z + \beta_{sp} \partial_t) \bar{s}_s &= \bar{b}_{sp} \times \bar{s}_s - C_R P_p \bar{s}_s \times (\bar{s}_s \times \bar{s}_p) \\
\partial_z P_p &= -e_p [\eta_{ps} C_R P_s (1 + \bar{s}_s \cdot \bar{s}_p) + \alpha_p] P_p
\end{aligned} \tag{6.14}$$

avec

$$\beta_{sp} = v_s^{-1} - e_p v_p^{-1} \text{ et } \bar{b}_{sp} = \mathbf{R}^{-1}(\bar{\beta}_s - e_p \bar{\beta}_p) \tag{6.15}$$

où  $\mathbf{R}$  est la matrice de rotation de la 1<sup>ère</sup> trame de référence, évoluant comme

$$e_p d_z \mathbf{R} = \bar{\beta}_p \times \mathbf{R}, \text{ avec } \mathbf{R}(0) = \mathbf{I} \tag{6.16}$$

Nous allons appeler  $\bar{b}_{sp}$  comme le vecteur de biréfringence relative. Il est à noter que s'il n'y a que trois équations dans (6.14), c'est parce que nous avons ignoré le terme représentant l'influence du signal sur le SOP de pompe,  $\eta_{ps} C_R P_s \bar{s}_p \times (\bar{s}_p \times \bar{s}_s)$ . Cette influence proportionnelle à la puissance de signal est généralement très faible, d'autant plus que les

fluctuations rapides en  $z$  du SOP de signal  $\bar{s}_p$  sont, en quelque sorte, amorties par la variation lente de  $P_s$ . Ainsi, la quatrième équation de (6.12) disparaît dans les trames de référence et le SOP de pompe devient indépendant de  $z$

$$\bar{s}_p(z, t) = \bar{s}_{p0}(t) \quad (6.17)$$

Au 1<sup>er</sup> ordre, les vecteurs de biréfringence sont proportionnels aux fréquences optiques [7]. Nous allons alors écrire  $\bar{\beta}_p = \eta_{ps} \bar{\beta}_s$ , et donc  $\bar{b}_{sp}$  devient

$$\bar{b}_{sp} = (1 - e_p \eta_{sp}) \mathbf{R}^{-1} \bar{\beta}_s \quad (6.18)$$

Mathématiquement, le vecteur de biréfringence est un processus stochastique au long de la fibre. Afin de le modéliser, nous adoptons le modèle proposé dans [8] et déjà validé expérimentalement dans [9]. Dans ce modèle, il est proposé de modéliser le vecteur de biréfringence par l'équation différentielle stochastique de Langevin comme suivante

$$d\beta_{sk} / dz = -\alpha_\beta \beta_{sk} + g_k \quad k = 1, 2 \quad (6.19)$$

où  $\alpha_\beta = 1/L_F$  avec  $L_F$  étant la longueur de cohérence de biréfringence [8][9], et  $g_1$  et  $g_2$  sont deux processus réels, indépendants et delta-corrélés

$$\langle g_i(z_1) g_j(z_2) \rangle = \sigma_g^2 \delta_{ij} \delta(z_1 - z_2) \quad (6.20)$$

Par la suite,  $\langle \bullet \rangle$  et  $E[\bullet]$  désigneront, respectivement, les moyens sur la biréfringence et sur le temps. Avec ce modèle, le paramètre de PMD [4][8] est donné par

$$D_p = \frac{\sqrt{32\pi L_F}}{\omega_s L_B} \quad (6.21)$$

où  $L_B = 4\sqrt{\pi\alpha_\beta / \sigma_g^2}$  est la longueur de battement (Beat Length) [9]. Il est important de noter que dans ce modèle, la biréfringence de fibre est supposée linéaire, c'est-à-dire,  $\beta_{s3} = 0$ . Ceci est vérifié en pratique, car une biréfringence circulaire de la fibre serait due soit à une torsion de fibre, soit à un champ magnétique appliqué de l'extérieur [10], deux effets qui peuvent tous être bien réduits en pratique. Pour simplification, nous n'évoquerons pas le cas où la biréfringence circulaire de fibre est introduite artificiellement et a donc une nature déterministe [10].

## 6.2 Impacts des pompes Raman polarisées

Comme dans [4], nous négligerons dans cette section les rétroactions du signal sur la pompe. Puisque, de plus, nous ne nous intéressons qu'aux évolutions spatiales, (6.14) peut se réduire comme

$$\begin{aligned} d_z P_s &= [C_R P_p (1 + \bar{s}_s \cdot \bar{s}_p) - \alpha_s] P_s \\ d_z \bar{s}_s &= \bar{b}_{sp} \times \bar{s}_s - C_R P_p \bar{s}_s \times (\bar{s}_s \times \bar{s}_p) \\ d_z P_p &= -e_p \alpha_p P_p \end{aligned} \quad (6.22)$$

et le SOP de pompe devient constant.

### 6.2.1 Propriétés statistiques du vecteur de biréfringence relative et de l'état de polarisation de signal

Dans l'annexe D, nous avons montré que dans un régime stationnaire asymptotique, le vecteur de biréfringence relative  $\bar{b}_{sp}$  défini dans (6.18) est un processus vectoriel stochastique à 3 dimensions dont la moyenne et la fonction d'autocorrélation sont données par

$$\langle \bar{b}_{sp}(z) \rangle = \bar{0} \quad \text{et} \quad \langle \bar{b}_{sp}(z_1) \bar{b}_{sp}^T(z_2) \rangle = \frac{\mathbf{I}}{3} \Delta\Omega_{sp}^2 D_p^2 \frac{\exp(-|z_1 - z_2|/L_F)}{2L_F} \quad (6.23)$$

avec  $\Delta\Omega_{sp} = \omega_s - e_p \omega_p$ . Par la suite, nous n'étudierons que le cas où l'influence de la pompe sur le SOP du signal  $\bar{s}_s$  est négligeable et que ce dernier ne varie pas temporellement en entrée. Ainsi, l'équation (6.22) devient

$$d_z \bar{s}_s = \bar{b}_{sp} \times \bar{s}_s \quad (6.24)$$

Dans l'annexe D, utilisant la méthode du générateur de Stratonovich [8]-[10], nous avons également montré que dans le régime stationnaire asymptotique, le SOP du signal  $\bar{s}_s$ , décrit par (6.24), est uniformément distribué sur la sphère de Poincaré, et sa fonction d'autocorrélation est donnée par

$$\langle \bar{s}_s(z) \bar{s}_s^T(z+u) \rangle = \frac{\mathbf{I}}{3} C_{ss}(u) = \frac{\mathbf{I}}{3} C_{ss}(-u) \quad (6.25)$$

où  $C_{ss}(u)$  est la fonction d'autocorrélation scalaire, qui peut être évaluée numériquement en utilisant un groupe d'équations récursives (D. ??). Nous pouvons ainsi définir la longueur de cohérence du SOP relatif du signal comme

$$L_d = \int_0^{\infty} C_{ss}(u) du . \quad (6.26)$$

Dans [4], il est proposé de considérer le vecteur de biréfringence relative  $\vec{b}_{sp}$  comme delta-corrélé en  $z$ , ce qui correspond justement à la limite de (6.23) quand  $L_F \rightarrow 0$ . Cette simplification nous amène à l'expression de la fonction d'autocorrélation scalaire [4]

$$C_{ss}(u) = \exp(-|u|/L_d) \quad (6.27)$$

avec  $L_d = 3D_p^{-2}\Delta\Omega_{sp}^{-2}$ . Pour les deux configurations de pompage, la figure 6.1 compare l'expression ci-dessus avec le résultat exact de la simulation numérique de (6.25). Nous voyons clairement que dans le cas d'un co-pompage, nous disposons d'une bonne approximation de  $C_{ss}(u)$ , alors que pour le cas du contra-pompage, (6.27) est loin de la solution exacte. De plus dans ce cas-là, la longueur de cohérence obtenue à partir de (6.27) est un ordre de grandeur moindre que sa valeur exacte. A titre d'exemple, en prenant  $L_B = 20\text{m}$  et  $L_F = 15\text{m}$ , (6.27) nous donne  $L_d = 0.2\text{m}$  et (6.25) nous donne  $L_d = 4.8\text{m}$ .

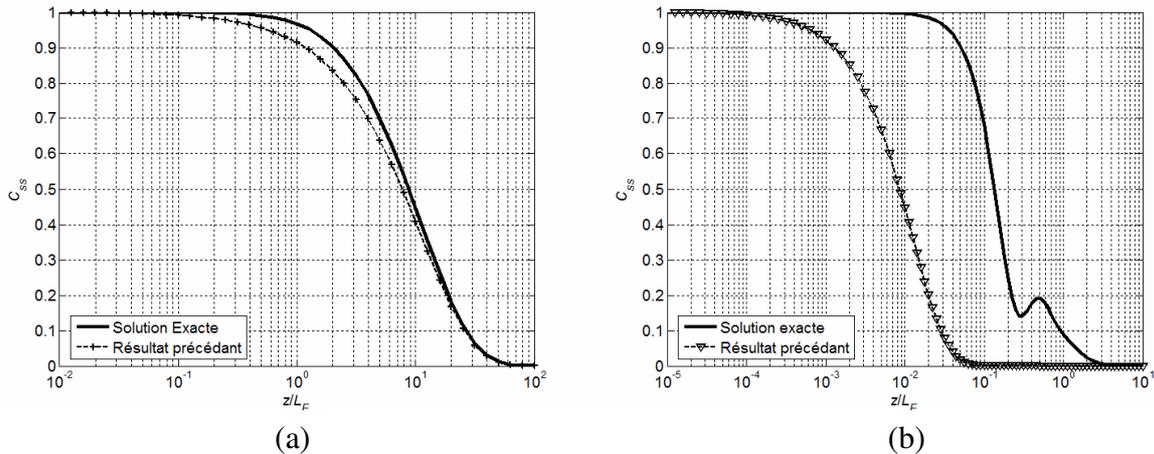


Figure 6.1 – Exemple de comparaison entre les fonctions d'autocorrélation scalaires exacte et approchée comme proposée dans [4], pour les configurations de (a) co-pompage et (b) contra-pompage. Paramètres de simulation :  $\lambda_p = 1455\text{ nm}$ ,  $\lambda_s = 1555\text{ nm}$ ,  $L_B = 20\text{ m}$  et  $L_F = 15\text{ m}$ .

## 6.2.2 Influences d'une pompe Raman polarisée sur le signal

Deux phénomènes importants sont à considérer, lors que les pompes Raman sont polarisées [4] : il s'agit des fluctuations du gain Raman total et la dépendance du gain Raman en fonction de la polarisation du signal d'entrée. A partir de (6.22), le gain Raman cumulé exprimé en décibel se calcule comme

$$G_{\text{dB}} = \alpha \int_0^L C_R P_p(z) [1 + \vec{s}_s(z) \cdot \vec{s}_p] dz \quad (6.28)$$

où  $\alpha = 10/\ln(10) \approx 4.34$  dB, et  $L$  est la longueur de la fibre. Le 1<sup>er</sup> phénomène se comprend bien par le fait qu'à cause de PMD, les SOP de signal et de pompe ont une orientation aléatoire au long de la fibre. Il est à noter que le gain Raman cumulé peut aussi fluctuer quasi-statiqument en temps, car il est connu que la biréfringence de fibre varie généralement sur une échelle de temps d'ordre de 10ms [11]. Le 2<sup>ème</sup> phénomène est la dépendance aléatoire du gain Raman en fonction du SOP du signal injectée. Ceci s'explique par le 2<sup>ème</sup> terme de la 2<sup>ème</sup> équation de (6.22) qui implique que  $\bar{s}_s(z)$  s'évolue en fait nonlinéairement, et aussi par le fait que  $\bar{s}_s(z)$  n'est pas statistiquement stationnaire au début de la fibre. Tout cela signifie que sa distribution est en fonction de sa valeur initiale. La dépendance de polarisation du gain Raman peut être évaluée qualitativement à l'aide du vecteur de PDG (Polarization-Dependent Gain) [4], que nous allons écrire comme  $\bar{\Delta}$ . Ce vecteur est défini de telle manière que sa grandeur  $\Delta$  donne la valeur en décibel de l'écart entre les gains Raman maximal et minimal<sup>1</sup> en fonction du SOP du signal injectée, et que sa direction soit colinéaire avec le SOP du signal à la sortie  $\bar{s}_s(L)$  auquel le gain Raman cumulé prend la valeur maximale. Dans [4], il est montré que quand  $|\bar{\Delta}|$  est bien inférieur à 15dB, le vecteur PDG peut se calculer comme

$$\bar{\Delta} = 2\alpha \mathbf{R}_{sp}^{-1}(L) \left[ \int_0^L C_R P_p(z) \mathbf{R}_{sp}(z) dz \right] \bar{s}_p \quad (6.29)$$

où  $\mathbf{R}_{sp}$  est une matrice de rotation définie par

$$d_z \mathbf{R}_{sp} = \bar{b}_{sp} \times \mathbf{R}_{sp}, \text{ avec } \mathbf{R}_{sp}(0) = \mathbf{I} \quad (6.30)$$

Dans [4], les influences de pompe Raman polarisée sur le signal ont déjà été étudiées d'une manière générale. Ceci dit, en raison de la simplification au cas où la biréfringence relative est considérée comme delta-corrélée, certains résultats de [4] pour la configuration de pompage contra-directionnel sont sujets d'interrogation. Par la suite, nous allons réviser la configuration contra-directionnelle, où l'influence de pompe sur le SOP de signal est négligeable. Cela est largement vérifié en pratique, parce qu'en contra-pompage, l'ordre de grandeur de la biréfringence relative est  $|\bar{b}_{sp}| \approx 2|\bar{\beta}_s| \sim \text{m}^{-1}$ , alors que  $C_R P_p \sim \text{km}^{-1}$ . Dans ce cas-là, le SOP de signal est gouverné par (6.24). Bien qu'à proprement parler, le SOP du signal ne soit pas stationnaire, il atteint le régime stationnaire asymptotique après seulement quelques mètres de propagation, si rapidement que nous pouvons négliger la contribution non-stationnaire. Nous pouvons ainsi constater tout de suite que ces simplifications impliquent que la dépendance de polarisation du gain Raman soit pratiquement négligeable dans la configuration de contra-pompage. Puisque  $\bar{s}_s(z)$  varie beaucoup plus rapidement que la pompe, pour calculer l'intégral de (6.28), nous pouvons considérer  $\bar{s}_s(z)$  comme un

<sup>1</sup> A noter qu'ils sont aussi variables aléatoires.

processus de moyenne nulle et delta-corrélé

$$\langle \bar{s}_s(z) \rangle = \bar{0} \text{ et } \langle \bar{s}_s(z) \bar{s}_s^T(z+u) \rangle = \frac{2\mathbf{I}}{3} L_d \delta(u) \quad (6.31)$$

La moyenne et la variance du gain Raman en décibel normalisé peuvent être ainsi facilement déterminées, respectivement, sous la forme

$$\langle G_{\text{dB}} \rangle = a \int_0^L C_R P_p(z) dz \text{ et } \frac{\langle G_{\text{dB}}^2 \rangle - \langle G_{\text{dB}} \rangle^2}{\langle G_{\text{dB}} \rangle^2} \approx \frac{L_d}{3L_{\text{eff}}} \quad (6.32)$$

où la longueur effective est définie comme  $L_{\text{eff}} = \int_0^L P_p(z) dz / P_{p0}$  avec  $P_{p0}$  étant la puissance de pompe injectée, et où nous avons utilisé la relation :  $\int_0^L P_p^2(z) dz / P_{p0}^2 \approx L_{\text{eff}} / 2$ , valable dans la plupart des cas pratiques. Proportionnelle à la longueur de cohérence  $L_d$ , la variance normalisée doit alors prendre des valeurs d'un ordre de grandeur plus grand que celles obtenues dans [4]. Ceci dit, de l'ordre de  $10^{-4}$  en pratique, elle reste toujours faible.

Comme montré dans [4], les fluctuations et la dépendance de polarisation du gain Raman peuvent être compensés en dépolarisant les pompes Raman. Cela est simple à vérifier. D'une manière générale, quand le SOP de pompe  $\bar{s}_p$  devient lui aussi aléatoire<sup>2</sup>, nous avons, pour la partie fluctuant du gain Raman,  $\Delta G_{\text{dB}} = a \bar{s}_p \cdot \int_0^L C_R P_p(z) \bar{s}_s(z) dz$ , et le vecteur de PDG (6.29), les relations comme suivantes

$$\begin{aligned} E[\Delta G_{\text{dB}}^2] &= a^2 C_R^2 \left[ \int_0^L P_p(z_2) \bar{s}_s^T(z_2) dz_2 \right] E[\bar{s}_p \bar{s}_p^T] \left[ \int_0^L P_p(z_1) \bar{s}_s(z_1) dz_1 \right] \\ E[\bar{\Delta} \bar{\Delta}^T] &= 4a^2 C_R^2 \mathbf{R}_{sp}^{-1}(L) \left[ \int_0^L P_p(z_1) \mathbf{R}_{sp}(z_1) dz_1 \right] E[\bar{s}_p \bar{s}_p^T] \left[ \int_0^L P_p(z_2) \mathbf{R}_{sp}^{-1}(z_2) dz_2 \right] \mathbf{R}_{sp}(L) \end{aligned}$$

Pour les pompes dépolarisées, puisque  $E[\bar{s}_p \bar{s}_p^T] = \mathbf{I}/3$ , leur moyenne en terme de la biréfringence de fibre, normalisée sur  $\langle G_{\text{dB}} \rangle^2$ , deviennent

$$\frac{\langle E[\Delta G_{\text{dB}}^2] \rangle}{\langle G_{\text{dB}} \rangle^2} = \frac{L_d}{3L_{\text{eff}}} \text{ et } \frac{\langle E[\bar{\Delta} \bar{\Delta}^T] \rangle}{\langle G_{\text{dB}} \rangle^2} = \frac{4L_d}{9L_{\text{eff}}} \mathbf{I} \quad (6.33)$$

où nous avons utilisé (6.31), pour  $\bar{s}_s(z)$ , et la relation formellement identique à (6.31), pour  $\mathbf{R}_{sp}^{-1}(L) \mathbf{R}_{sp}(z_1)$ . Nous voyons donc que, puisque  $L_d \ll L_{\text{eff}}$ , ces fluctuations deviennent relativement négligeables. Finalement, il est important de noter que les analyses de cette section restent valable dans le seul régime statique. Quand les pompes Raman sont

<sup>2</sup> Cela n'est pas lié à la biréfringence de fibre, car nous avons adopté la trame de référence de rotation

dépolarisées, leur SOP bien que nul au sens de la moyenne temporelle,  $E[\bar{s}_p] = \bar{0}$ , fluctue évidemment dans le temps sur la sphère de Poincaré. Les influences des fluctuations temporelles de SOP de pompe seront étudiées dans la section 6.4.

### 6.3 Transfert de RIN de la pompe vers le signal

Nous avons vu, qu'à cause du temps de réponse extrêmement court de la diffusion Raman stimulée, les champs signal et pompe interagissent en puissances. De ce fait, les fluctuations temporelles de la puissance de pompe peuvent être transférées vers le signal et engendrer une pénalité importante sur la qualité de transmission. Ce phénomène est connu sous le nom de transfert de bruit de la pompe vers le signal [1][2], souvent appelé transfert de RIN, le bruit de pompe étant caractérisé en terme de RIN (Relative Intensity Noise), c'est-à-dire de bruit d'intensité relatif. Il est défini comme [1][3]

$$\text{RIN}(\omega) = \text{TF} \left[ \text{E} \left( \frac{\Delta P(t + \tau) \Delta P(t)}{\bar{P}^2} \right) \right] (\omega) \quad (6.34)$$

où  $\bar{P}$  et  $\Delta P(t)$  sont respectivement la moyenne et les fluctuations de la puissance. Le RIN d'un signal optique est équivalent à la densité spectrale du photo-courant normalisé, détecté idéalement, et donc peut être mesuré généralement, avec une bonne approximation, avec un photo-détecteur et un oscilloscope électronique. En décibel, l'unité de RIN est dB/Hz.

#### 6.3.1 Modèle de transfert de RIN

Supposant que les pompes sont dépolarisées, nous pouvons utiliser (6.14) pour modéliser les propagations spatio-temporelles

$$\begin{aligned} e_p \partial_z P_p &= -(\eta_{ps} C_R P_s + \alpha_p) P_p \\ (\partial_z + \beta_{sp} \partial_t) P_s &= (C_R P_p - \alpha_s) P_s \end{aligned} \quad (6.35)$$

où nous avons ignoré les effets de polarisation, qui seront pris en compte dans la section 6.4. Tenant compte des fluctuations temporelles, nous pouvons exprimer les puissances optiques comme

$$P_\mu(z, t) = \bar{P}_\mu(z) [1 + m_\mu(z, t)] \quad (6.36)$$

où  $\bar{P}_s$  et  $\bar{P}_p$  sont les puissances moyennes qui se propagent comme

$$\begin{aligned} d_z \bar{P}_s &= (C_R \bar{P}_p - \alpha_s) \bar{P}_s \\ e_p d_z \bar{P}_p &= -(\eta_{ps} C_R \bar{P}_s + \alpha_p) \bar{P}_p \end{aligned} \quad (6.37)$$

$m_s$  et  $m_p$  désignent les indices de modulation représentant les fluctuations temporelles. Remplaçant (6.37) et (6.36) dans (6.35), et négligeant les termes croisés entre les indices de modulation supposées petites, nous trouvons les équations de propagation au 1<sup>er</sup> ordre pour les indices de modulation

$$\begin{aligned} (\partial_z + \beta_{sp} \partial_t) m_s &= C_R \bar{P}_p m_p \\ e_p \partial_z m_p &= -\eta_{ps} C_R \bar{P}_s m_s \end{aligned} \quad (6.38)$$

Après la transformation de Fourier temporelle, nous trouvons

$$\partial_z \underline{\bar{m}}(z, \omega) = \mathbf{H}(z, \omega) \underline{\bar{m}}(z, \omega) \quad (6.39)$$

avec

$$\underline{\bar{m}}(z, \omega) = \begin{pmatrix} \underline{m}_s e^{i\omega\beta_{sp}z} \\ \underline{m}_p \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{H}(z, \omega) = \begin{pmatrix} 0 & C_R \bar{P}_p(z) e^{i\omega\beta_{sp}z} \\ -e_p \eta_{ps} C_R \bar{P}_s(z) e^{-i\omega\beta_{sp}z} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

Définissant une matrice de transfert comme

$$\partial_z \mathbf{T}(z, \omega) = \mathbf{H}(z, \omega) \mathbf{T}(z, \omega), \text{ avec } \mathbf{T}(0, \omega) = \mathbf{I} \quad (6.41)$$

nous pouvons écrire la solution de (6.39) comme  $\underline{\bar{m}}(z, \omega) = \mathbf{T}(z, \omega) \underline{\bar{m}}(0, \omega)$ , ou plus explicitement comme

$$\begin{pmatrix} \underline{m}_s(z, \omega) \\ \underline{m}_p(z, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{ss}(z, \omega) e^{-i\omega\beta_{sp}z} & T_{sp}(z, \omega) e^{-i\omega\beta_{sp}z} \\ T_{ps}(z, \omega) & T_{pp}(z, \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{m}_s(0, \omega) \\ \underline{m}_p(0, \omega) \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

Nous voyons qu'en sortie, les fluctuations de signal dépendent non seulement de celles de la pompe mais aussi de celles du signal injectée. C'est le phénomène d'auto modulation, que nous avons en fait déjà rencontré dans la section 4.3 du chapitre 4. Par la suite, nous ne nous intéressons qu'au transfert de RIN de la pompe vers le signal, et le RIN du signal injectée sera ignoré,  $\underline{m}_s(0, \omega) = 0$ . Ainsi, nous pouvons obtenir

$$\underline{m}_s(z, \omega) = T_{sp}(z, \omega) \underline{m}_p(0, \omega) \exp(-i\omega\beta_{sp}z) \quad (6.43)$$

ce qui est utile pour les pompes co-directionnelles. Pour les pompes contra-directionnelles, dont l'entrée se trouve en  $z = L$ , nous devons relier  $\underline{m}_s(z, \omega)$  à  $\underline{m}_p(L, \omega)$ . Cette relation peut être facilement trouvée comme étant

$$\underline{m}_s(z, \omega) = T_{sp}(z, \omega) T_{pp}^{-1}(L, \omega) \underline{m}_p(L, \omega) \exp(-i\omega\beta_{sp}z) \quad (6.44)$$

Nous pouvons alors écrire, d'une manière générale, la relation entre les indices de modulation du signal en sortie et de la pompe injectée comme

$$\underline{m}_s(L, \omega) = T_{\text{RIN}}(\omega) \underline{m}_{p0}(\omega) \quad (6.45)$$

où la fonction de transfert s'écrit, pour les pompes co- et contra-directionnel, respectivement, comme

$$T_{\text{RIN}}(\omega) = T_{sp}(L, \omega) e^{-i\omega\beta_{sp}L} \quad \text{et} \quad T_{\text{RIN}}(\omega) = T_{sp}(L, \omega) T_{pp}^{-1}(L, \omega) e^{-i\omega\beta_{sp}L} \quad (6.46)$$

D'après la définition (6.34), nous constatons que le RIN est en fait la transformée de Fourier de l'autocorrélation de l'indice de modulation

$$\text{RIN}(\omega) = \text{TF}[E[m(t+\tau)m(t)]](\omega). \quad (6.47)$$

Alors, le RIN transféré de la pompe vers le signal se calcule comme

$$\text{RIN}_s(\omega) = |T_{\text{RIN}}(\omega)|^2 \text{RIN}_{p0}(\omega) \quad (6.48)$$

où  $|T_{\text{RIN}}(\omega)|^2$  est appelé comme la fonction de transfert de RIN. Il est à mentionner que grâce à (6.41) et (6.44), nous sommes capable de transformer le problème de propagation bi-directionnelle (6.38), dans le cas de pompage contra-directionnel, à un problème de propagation uni-directionnelle. Pour calculer les puissances moyennes (6.37), nous allons utiliser la méthode BVP4C que nous expliquons dans l'annexe B.

### 6.3.2 Propriétés de la fonction de transfert de RIN

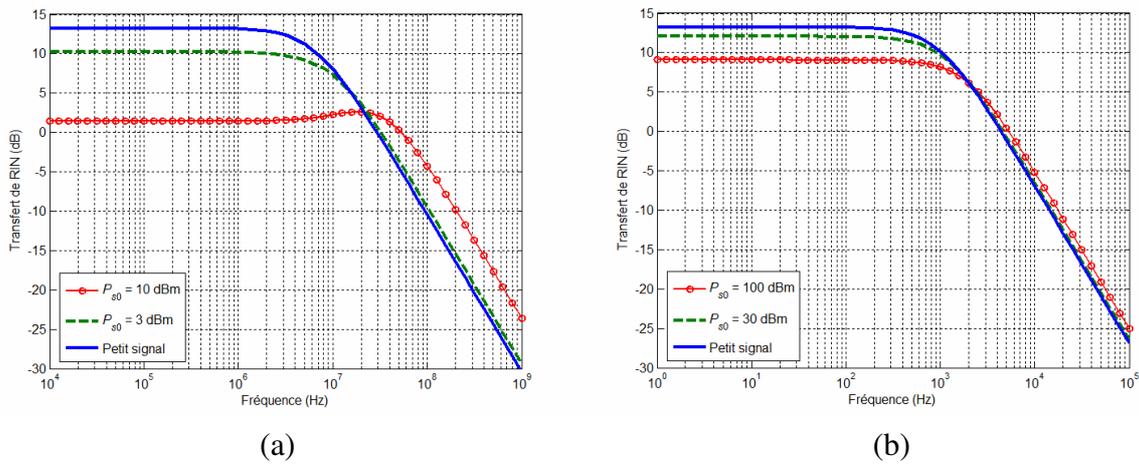


Figure 6.2 – Fonction de transfert de RIN pour de différentes valeurs de la puissance du signal, avec (a) le co-pompage et (b) le contra-pompage. Paramètres:  $\lambda_{pls} = 1455 / 1555$  nm, Longueur de la fibre = 100 km,  $\alpha_{pls} = 0.25 / 0.20$  dB/km et  $C_R = 0.5 \text{ W}^{-1}\text{km}^{-1}$ .

La figure 6.2 montre les résultats d'une simulation numérique de la fonction de transfert de RIN, lorsque la déplétion de pompe est prise en compte. A priori, nous voyons que la fonction de transfert de RIN est un filtrage passe-bas. Ceci se comprend bien par le fait que le signal et la pompe se propagent aux vitesses différentes dans la fibre, ce qui crée un effet de temps d'interaction limité ( walk-off ) plus ou moins important en fonction des fréquences de fluctuation considérées. La décroissance de la fonction de transfert de RIN s'opère autour de quelques KHz pour le pompage contra-directionnel contre quelques MHz pour le pompage co-directionnel, avec un taux d'extinction de  $-20$  dB par décade. La 1<sup>ère</sup> conclusion que nous pouvons tirer tout de suite, c'est que le pompage contra-directionnel est bien moins sensible au transfert de RIN.

En régime petit signal, la deuxième équation de (6.38) est négligeable. Nous pouvons alors trouver facilement l'expression analytique pour la fonction de transfert de RIN sous la forme

$$|T_{\text{RIN}}(\omega)|^2 = \ln^2 G_R \frac{L_{\text{eff}}^{-2}}{\beta_{sp}^2 \omega^2 + \alpha_p^2} \left[ 1 + e^{-2\alpha_p L} - 2 \cos(\beta_{sp} \omega L) e^{-\alpha_p L} \right] \quad (6.49)$$

où les termes entre les crochets sont négligeables pour la transmission sur de longues distances. Aux basses fréquences, la fonction de transfert de RIN est maximum et vaut  $20 \log_{10}(\ln G_R)$  dans toute les deux configurations. D'un point de vue physique, la bande passante étroite du transfert de RIN en pompage contra-directionnel s'explique par le faible temps d'interaction entre la pompe et le signal, qui propagent dans les sens opposés. D'ailleurs, la dispersion chromatique ne joue presque pas de rôle dans le transfert de RIN en pompage contra- directionnel. Seule la vitesse de groupe moyenne est importante et la fréquence de coupure à 3 dB vaut :

$$f_c = \alpha_p v_s / 4\pi \quad (6.50)$$

Par contre en pompage co-directionnel, le temps d'interaction entre la pompe et le signal est bien plus long et dépend exclusivement de la dispersion chromatique. La fréquence de coupure à 3 dB vaut :

$$f_c = \frac{\alpha_p}{2\pi D_d (\lambda_s - \lambda_p)} \quad (6.51)$$

où  $D_d$  est la paramètre de dispersion chromatique.

Sur la figure 6.2, montré également l'influence de la saturation de gain sur la fonction de transfert de RIN, où la puissance de pompe injectée a été ajustée à chaque fois de façon à maintenir un gain Raman de 20 dB. Nous voyons que plus la saturation, où bien la puissance du signal injectée  $P_{s0}$ , est grande, plus le plateau de la fonction de transfert aux basses

fréquences diminue et la fréquence de coupure augmente. Ce dernier point peut se comprendre par le fait que, comme montré par (6.50) et (6.51), la fréquence de coupure est proportionnelle à l'atténuation de pompe. Donc, lors de la déplétion la pompe étant atténuée plus rapidement, le temps d'interaction effectif pompe-signal diminue [2] et la fréquence de coupure augmente. La diminution du plateau aux basses fréquences peut être expliquée par une analyse statique aux basses fréquences. Tenant compte de la déplétion de pompe, le gain Raman est à la fois en fonction des deux puissances injectée, c'est-à-dire,  $G_R = G_R(P_{p0}, P_{s0})$ . Si la puissance de pompe injectée varie d'une petite valeur  $\Delta P_{p0}$ , nous avons au premier ordre l'égalité suivante

$$\frac{G_R(P_{p0} + \Delta P_{p0}, P_{s0})}{G_R(P_{p0}, P_{s0})} \approx 1 + \Delta P_{p0} \frac{\partial \ln G_R}{\partial P_{p0}}(P_{p0}, P_{s0}) \quad (6.52)$$

D'un côté, la puissance du signal amplifié s'écrit comme  $P_{sL} = A_L G_R(P_{p0}, P_{s0}) P_{s0}$ , où  $A_L$  est pour l'atténuation linéaire de la fibre passive. D'un autre, la valeur au carré du rapport de la variation relative du signal amplifié, entraînée par la variation de la puissance de pompe injectée, sur la variation relative  $\Delta P_{p0} / P_{p0}$  n'est rien d'autre que la valeur aux basses fréquences de transfert de RIN. Ainsi, d'après (6.52), nous avons

$$|T_{\text{RIN}}(0)|^2 = \left( \frac{\Delta P_{sL}}{P_{sL}} \right)^2 / \left( \frac{\Delta P_{p0}}{P_{p0}} \right)^2 = \left[ P_{p0} \frac{\partial \ln G_R}{\partial P_{p0}}(P_{p0}, P_{s0}) \right]^2 \quad (6.53)$$

Cette équation implique que  $|T_{\text{RIN}}(0)|^2$  est proportionnelle à la valeur au carré de la pente du gain Raman exprimé en décibel. D'après la caractéristique de la saturation du gain illustrée sur la figure 4.2 du chapitre 4, nous voyons donc que  $|T_{\text{RIN}}(0)|^2$  est constant en régime de petit signal, et diminue avec la saturation de gain.

### 6.3.3 Pénalités liées au transfert de RIN

Nous allons maintenant évaluer la dégradation des performances de transmission introduite par le transfert de RIN. Pour cela, nous allons quantifier la pénalité engendrée par le transfert de RIN sur le facteur de qualité de transmission, qui est défini comme [1][3].

$$Q = \frac{\bar{I}_1 - \bar{I}_0}{\sigma_1 + \sigma_0} \quad (6.54)$$

où  $\bar{I}_{1/0}$  et  $\sigma_{1/0}$  sont, respectivement, le moyen et les écarts types du photo-courant pour les bits 1/0. Supposant que le bruit de battement signal-ASE domine, le facteur de qualité en absence de transfert de RIN vaut

$$Q_s = \frac{\bar{I}_1}{\sigma_1} \quad (6.55)$$

Dans le cadre d'approximation gaussienne, le facteur de qualité dégradé par le transfert de RIN peut être évalué par [1]

$$Q_r = \frac{\bar{I}_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \bar{I}_1^2 \int_{B_e} \text{RIN}_s(2\pi f) df}} = \frac{Q_s}{\sqrt{1 + Q_s^2 \int_{B_e} \text{RIN}_s(2\pi f) df}} \quad (6.56)$$

où  $B_e$  est la bande passante du circuit électronique de post-détection. La pénalité du facteur de qualité en décibel peut alors être définie et évaluée par

$$\Delta Q \text{ (dBQ)} = 10 \log_{10} \frac{Q_s}{Q_r} = 10 \log_{10} \sqrt{1 + Q_s^2 \int_{B_e} \text{RIN}_s(2\pi f) df} \quad (6.57)$$

La pénalité du facteur de qualité dépend donc à la fois du RIN de la pompe injectée, de la bande passante  $B_e$  et du gain Raman, et y compris bien entendu le régime de gain et le schéma de pompage. Sur figure 6.3, la pénalité du facteur de qualité est représentée en fonction du RIN de la pompe injectée, du schéma de pompage et du régime de gain. La figure 6.3 montre bien l'intérêt du contra-pompage en terme de pénalité engendrée par le transfert de RIN. Nous pouvons utiliser la limite communément acceptée de 0.1 dBQ pour fixer les niveaux de RIN acceptable sur les pompes Raman [1][2]. D'après la figure 6.3, nous pouvons alors accepter un niveau de RIN meilleur que  $-120$  dB/Hz en co-pompage, contre –

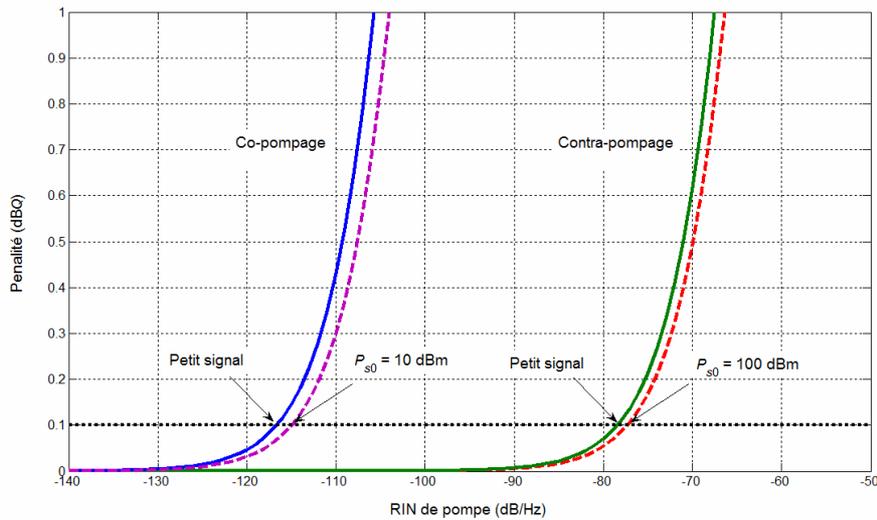


Figure 7.3 – Pénalité du facteur de qualité en fonction du RIN de pompe pour les co- et contra-pompage, et en régimes de petit-signal et de saturation. Paramètres :  $\lambda_{p/s} = 1455 / 1555$  nm,  $L = 100$  km,  $\alpha_{p/s} = 0.25 / 0.20$  dB/km et  $C_R = 0.5 \text{ W}^{-1} \text{ km}^{-1}$ .

80 dB/Hz en contra-pompage. Les impacts de la saturation de gain sont également montrés sur cette figure. Nous voyons que la saturation de gain peut améliorer légèrement les valeurs de RIN acceptables, d'autour de 3 à 4 dB/Hz. Ceci est d'ailleurs bien la preuve que le transfert de RIN initial est moindre en régime de saturation. En effet, c'est parce que les bruits sont comprimés quand la pompe est saturée, tout comme ce que nous avons vu dans le chapitre 4. Finalement, la grande différence entre les valeurs acceptables de RIN de pompe pour les deux configurations laisse présager des technologies laser différentes. Les lasers semi-conducteurs seront privilégiés pour un co-pompage du fait de leur très faible valeur de RIN, pouvant être inférieur à  $-120$  dB/Hz. Pour le contra-pompage, les lasers fibrés sont suffisants avec un RIN de  $-80/-90$  dB/Hz. Bien entendu, ces technologies de lasers de puissance n'ont pas le même coût de production ; les lasers fibrés Raman étant moins coûteux et plus stables que les lasers semi-conducteurs de puissance.

## 6.4 Transfert des bruits de pompe vers le signal assisté par PMD

Comme nous avons montré dans la section 6.2, les pompes Raman doivent être dépolarisées afin de compenser les fluctuations du gain Raman et PDG. Cependant, il est important de noter que le terme « pompe dépolarisée » ne veut dire que la moyenne temporelle du SOP de pompe soit nulle,  $\mathbf{E}[\bar{s}_p] = \bar{0}$ . En effet, les variations instantanés,  $\Delta\bar{s}_p = \bar{s}_p - \mathbf{E}[\bar{s}_p]$ , fluctue évidemment aléatoirement sur la sphère de Poincaré. De l'équation (6.14), nous voyons clairement que ces fluctuations temporelles peuvent introduire du bruits au signal.

### 6.4.1 Fonction vectorielle de transfert des fluctuations de l'état de polarisation de pompe

Comme dans la section 6.3, tenant compte des fluctuations temporelles, nous allons exprimer les puissances optiques comme  $P_\mu(z, t) = \bar{P}_\mu(z)[1 + m_\mu(z, t)]$ , où les équations de propagation des puissances moyennes sont identiques à (6.37). Nous allons négliger la déplétion de pompe et l'influence de pompe Raman sur le SOP de signal, supposée négligeable devant l'effet de la biréfringence relative. Ainsi, de (6.14), nous pouvons trouver au 1<sup>er</sup> ordre

$$(\partial_z + \beta_{sp} \partial_t) m_s = C_R \bar{P}_p (m_p + m_{sp}) \quad (6.58)$$

avec  $m_{sp}(z, t) = \bar{s}_{s0}(z) \cdot \bar{s}_{p0}(t)$ , où  $\bar{s}_{s0}(z)$  et  $\bar{s}_{p0}(z)$  sont, respectivement, le SOP de signal sans influence de pompe, dont l'évolution spatiale est décrite par (6.24), et le SOP instantané de la pompe injecté. La solution de (6.58) peut s'écrire dans le domaine de Fourier comme

$$\underline{m}_s(z, f) = \underline{h}_{\text{RIN}}(z, f) \underline{m}_p(f) + \underline{h}_{\text{SOP}}(z, f) \cdot \bar{s}_{p0}(f) \quad (6.59)$$

avec la fonction de transfert des fluctuations de l'intensité de pompe

$$\underline{h}_{\text{RIN}}(z, f) = \int_0^z C_R \bar{P}_p(x) \exp[2\pi i \beta_{sp}(z-x)f] dx \quad (6.60)$$

qui n'est rien d'autre que (6.49), et la fonction vectorielle de transfert

$$\bar{h}_{\text{SOP}}(z, f) = \int_0^z C_R \bar{P}_p(x) \bar{s}_{s0}(x) \exp[2\pi i \beta_{sp}(z-x)f] dx \quad (6.61)$$

Puisque le RIN est la densité spectrale de l'indice de modulation, le RIN total du signal amplifié transféré de la pompe est donné par

$$\langle \text{RIN}_s(f) \rangle = |\underline{h}_{\text{RIN}}(L, f)|^2 \text{RIN}_p(f) + |\bar{H}_{\text{SOP}}(f)|^2 S_{\text{SOP}}(f) \quad (6.62)$$

où nous avons considéré la valeur moyenne sur PMD, et donc, en utilisant (6.25),

$$\begin{aligned} |\bar{H}_{\text{SOP}}(L, f)|^2 &= \frac{1}{3} \int_0^L \int_0^L C_R^2 \bar{P}_p(x_1) \bar{P}_p(x_2) C_{ss}(x_1 - x_2) \cos[2\pi \beta_{sp}(x_1 - x_2)f] dx_1 dx_2 \\ &\approx \frac{1}{3} C_R^2 \bar{P}_{p0}^2 L_{\text{eff}} C_{ss}(2\pi \beta_{sp} f) \end{aligned} \quad (6.63)$$

que nous allons appeler "fonction de transfert des fluctuations de SOP". Il est à noter que dans la seconde ligne de l'équation ci-dessus, nous avons supposé que la longueur effective reste bien supérieure à la longueur de cohérence définie par (6.26),  $L_{\text{eff}} \gg L_d$ . Dans l'expression (6.62),  $S_{\text{SOP}}(f)$  est défini comme la densité spectrale scalaire du SOP de pompe

$$S_{\text{SOP}}(f) = \text{TF}[\mathbf{E}[\bar{s}_{p0}(t+\tau) \cdot \bar{s}_{p0}(t)]](f) \quad (6.64)$$

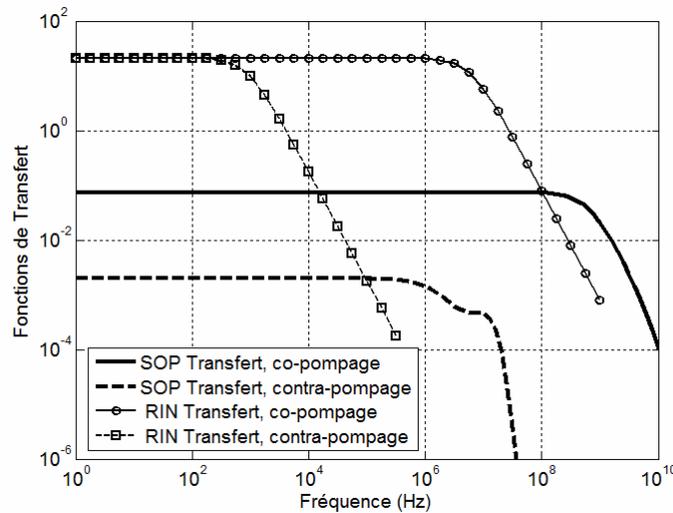


Figure 6.4 – Les fonctions de transfert des fluctuations de SOP et de transfert de RIN, pour les co- et contra-pompage. Paramètres de simulation:  $\lambda_{p/s} = 1455 / 1555$  nm,  $C_R = 0.5$  W<sup>-1</sup>km<sup>-1</sup>,  $P_{p0} = 0.53$  W,  $L = 100$  km,  $L_{eff} = 8.7$  km,  $L_F = 15$  m and  $L_B = 20$  m.

Expression (6.62) montre clairement qu'en plus du transfert de RIN de la pompe vers le signal que nous avons étudié dans la section 6.3, le RIN du signal amplifié est aussi dû aux fluctuations temporelles du SOP de pompe. Deux exemples de la fonction de transfert des fluctuations de SOP sont présentés sur la figure 6.4 pour les co- et contra-pompage. Nous voyons qu'elles sont toutes les deux des filtres passe-bas. Pour la comparaison, nous y avons aussi montré les fonctions de transfert de RIN, "traditionnelles." D'après (6.63), nous avons le maximum de cette nouvelle fonction de transfert

$$|\underline{H}_{SOP}(L,0)|^2 = \frac{2L_d L_{eff} (C_R P_{p0})^2}{3} \quad (6.65)$$

et sa largeur spectrale

$$\Delta f_H = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{|\underline{H}_{SOP}(L,f)|^2}{|\underline{H}_{SOP}(L,0)|^2} df = \frac{1}{2\pi |\beta_{sp}| L_d} \quad (6.66)$$

Cette dernière prend des valeurs typiquement d'ordre de quelques centaines mégahertz pour le co-pompage et quelques mégahertz pour le contra-pompage, ce qui est à comparer avec le transfert de RIN, où nous avons vu que les fréquences de coupure de 3 dB sont typiquement d'ordre de quelques mégahertz pour le co-pompage et quelques kilohertz pour le contra-pompage.

### 6.4.2 Impacts des fluctuations temporelles de l'état de polarisation de pompe sur le RIN du signal amplifié

Nous allons d'abord déterminer l'expression explicite de la densité spectrale du SOP de pompe. D'après la définition (6.11), le SOP de pompe est donné par

$$\bar{s}_p(t) = \frac{1}{P_p(t)} \begin{pmatrix} A_x(t)A_x^*(t) - A_y(t)A_y^*(t) \\ A_x(t)A_y^*(t) + A_y(t)A_x^*(t) \\ iA_x(t)A_y^*(t) - iA_y(t)A_x^*(t) \end{pmatrix} \quad (6.67)$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
S_{\text{SOP}} &= \langle \bar{s}_p(t+\tau) \cdot \bar{s}_p(t) \rangle \\
&= \left\langle \frac{[P_x(t+\tau) - P_y(t+\tau)][P_x(t) - P_y(t)]}{P_p(t+\tau)P_p(t)} \right\rangle \\
&\quad + 2 \left\langle \frac{A_x^*(t+\tau)A_x(t)A_y(t+\tau)A_y^*(t) + A_x(t+\tau)A_x^*(t)A_y^*(t+\tau)A_y(t)}{P_p(t+\tau)P_p(t)} \right\rangle
\end{aligned} \tag{6.68}$$

où  $P_k(t) = |A_k(t)|^2$ , avec  $k = x, y$ , est la puissance de chaque composante vectorielle du champ de pompe. La densité spectrale du SOP de pompe est composée de deux parties. L'une ne dépend que des fluctuations d'intensité de pompe, et l'autre dépend aussi des phases des champs. Afin de passer plus loin l'analyse, nous supposons que les deux composantes vectorielles du champ de pompe sont statistiquement indépendantes. Alors, puisque les fluctuations d'intensité de pompe peuvent en général être considérées faibles, (6.68) devient, au 1<sup>er</sup> ordre

$$S_{\text{SOP}}(f) \approx \text{RIN}_p(f) + S_{xy}(f) \tag{6.69}$$

où  $S_{xy}(f)$  est le battement des densités spectrales de puissance normalisé défini comme

$$S_{xy}(f) = \frac{S_x(f) \otimes S_y(-f) + S_x(-f) \otimes S_y(f)}{2} \tag{6.70}$$

$S_k$  ( $k = x, y$ ) étant la densité spectrale de puissance normalisée de chaque composante,

$$S_k(f) = \text{TF} \left[ \frac{\mathbf{E}[A_k(t+\tau)A_k^*(t)]}{\mathbf{E}[|A_k(t)|^2]} \right](f) \tag{6.71}$$

Ainsi, (6.62) peut se réécrire comme

$$\langle \text{RIN}_s(f) \rangle = |\underline{H}_{\text{RIN}}(L, f)|^2 \text{RIN}_p(f) + |\underline{H}_{\text{SOP}}(f)|^2 S_{xy}(f) \tag{6.72}$$

où la nouvelle fonction de transfert de RIN s'écrit comme

$$|\underline{H}_{\text{RIN}}(L, f)|^2 = |\underline{h}_{\text{RIN}}(L, f)|^2 + |\underline{H}_{\text{SOP}}(L, f)|^2 \tag{6.73}$$

Avec l'expression ci-dessus, les impacts des fluctuations temporelles du SOP de pompe s'interprètent clairement. Premièrement, il y a plus de RIN transféré de la pompe vers le signal que prévu par la théorie de transfert de RIN montrée dans la section 6.3. Deuxièmement, il y a un nouveau bruit transféré vers le signal, qui est le bruit de battement des deux composantes de la pompe dont la densité spectrale est donnée par (6.70). A première vue, ce

dernier point peut paraître surprenant, car il s'agit du battement des deux composantes orthogonales, mais nous pouvons le comprendre avec l'explication qui va suivre. Dans (6.10), nous voyons que le terme pour l'amplification Raman s'écrit comme  $|A_p \rangle \langle A_p | A_s \rangle$ . Nous pouvons alors considérer qu'en tournant, l'enveloppe lentement variable du signal accumule celles de la pompe sur toutes ces deux polarisations. Les deux composantes orthogonales accumulées sur le signal peuvent battre. Un autre point important à noter est que la largeur spectrale de la fonction de transfert  $|\underline{H}_{\text{SOP}}(L, f)|^2$  est bien supérieure à celle de la fonction de transfert de RIN traditionnelle, avec un facteur de  $L_{\text{eff}} / L_d$ . Cela signifie que l'étendue spectrale du RIN transférable augmente de deux ordres de grandeur pour le co-pompage et de quatre ordres de grandeur pour le contra-pompage.

### 6.4.3 Estimation de la dégradation de performance du système

Nous utilisons toujours le formalisme de la pénalité du facteur de qualité (6.57) pour estimer la dégradation de performance du système. Pour toutes les deux configurations de pompage, nous pouvons avoir

$$\int_0^{\infty} |h_{\text{RIN}}(z, f)|^2 df = 3 \int_0^{\infty} |\underline{H}_{\text{SOP}}(z, f)|^2 df \quad (6.74)$$

nous voyons que, si le RIN de pompe peut être considéré comme constant et que la bande passante du circuit électronique de post-détection est bien supérieure à la largeur spectrale de  $|\underline{H}_{\text{SOP}}(z, f)|^2$ , les valeurs acceptables du RIN de pompe, pour les deux configurations de pompage sont réduites d'un facteur de 4/3, soit 1.25 dB, par rapport à celles obtenues dans la section 6.3. Le point plus important est que l'étendue spectrale du RIN transférable est considérablement augmentée, ce qui peut conduire à un impact non négligeable sur l'estimation du facteur de qualité ainsi que sur le niveau du RIN de pompe acceptable. Dans la configuration de co-pompage, puisque l'étendue spectrale atteint les fréquences de quelques centaines mégahertz voir du gigahertz, nous devons être prudents à considérer le RIN de pompe comme constant. Dans la configuration de contra-pompage, la contrainte au niveau de RIN de la pompe peut être remarquablement relâché, de 10 dB/Hz, si nous introduisons avant le photo-détecteur un filtre passe-haut dont la fréquence de coupure est supérieure à celle de la fonction de transfert de RIN contra-directionnelle [2]. C'est le résultat lorsque l'impact de PMD n'est pas pris en compte. En fait, bien que l'intégral du premier terme de (6.73) puisse devenir très petit dans ce cas, le second terme, devenant dominant, ne doit pas être omis.

Afin de discuter l'impact du bruit de battement, nous supposons que les enveloppes des densités spectrales des deux composantes de pompe peuvent tous être considérées approximativement comme lorentziens. Ainsi, nous trouvons

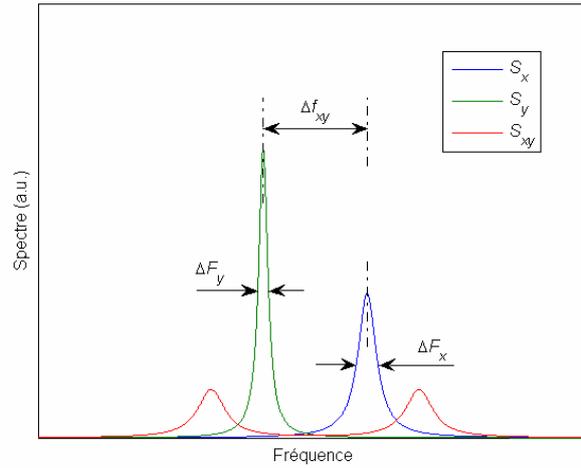


Figure 7.5 – Illustration sur les densités spectrales de puissance optique normalisées (en fonction de fréquence optique) des deux composantes lorentziennes et sur leur battement (en fonction de radio fréquence).

$$S_{xy}(f) = \frac{\Delta F_c}{\Delta F_c^2 + 4\pi^2(f + \Delta f_{xy})^2} + \frac{\Delta F_c}{\Delta F_c^2 + 4\pi^2(f - \Delta f_{xy})^2} \quad (6.75)$$

où comme illustré sur la figure 7.5,  $\Delta f_{xy}$  est l'écart fréquentiel entre les deux composantes de pompe, et  $\Delta F_c = \Delta F_x + \Delta F_y$ , et  $\Delta F_k$  ( $k = x, y$ ) étant la largeur spectrale de chaque composante. D'après la section 6.2, nous voyons que la fonction de transfert des fluctuations du SOP pour la pompe co-propagative est pratiquement lorentzienne

$$|\underline{H}_{\text{SOP}}(L, f)|^2 \approx \frac{2L_d L_{\text{eff}} (C_R P_R)^2}{3} \frac{\Delta f_H^2}{f^2 + \Delta f_H^2} \quad (6.76)$$

Nous trouvons alors

$$\begin{aligned} \int_{B_c} \langle \text{RIN}_s(L, f) \rangle df &= \int_{B_c} |\underline{H}_{\text{SOP}}(L, f)|^2 S_{xy}(f) df \\ &\approx \frac{L_d L_{\text{eff}} (C_R P_{p0})^2}{3} \frac{1 + \Delta F_c / \Delta \Omega_H}{(\Delta f_{xy} / \Delta \Omega_H)^2 + (1 + \Delta F_c / \Delta \Omega_H)^2} \end{aligned} \quad (6.77)$$

où  $\Delta \Omega_H = 2\pi \Delta f_H$ , et où  $B_c$  est ajustée entre 0 et  $+\infty$  pour la seconde ligne. Alors que pour la configuration de contra-pompage, puisque la fonction de transfert est loin d'être lorentzien, la simulation numérique de (6.63) est généralement nécessaire. Toutefois, si la largeur spectrale de la fonction de transfert est bien inférieure à celle de la pompe,  $\Delta f_H \ll \Delta F_c$ , et l'écart fréquentiel est négligeable devant la largeur spectrale de la pompe, nous avons

$$\int_{B_c} \langle \text{RIN}_s(L, f) \rangle df \approx S_{xy}(0) \int_{B_c} |\tilde{H}_{\text{SOP}}(L, f)|^2 df \approx \frac{(C_R P_{p0})^2 L_{\text{eff}} v_s}{6} \frac{\Delta F_c}{\Delta F_c^2 + 4\pi^2 \Delta f_{xy}^2} \quad (6.78)$$

où nous avons utilisé  $\beta_{sp} \approx 2/v_s$ . Il est à noter que ce résultat, indépendant des paramètres de la biréfringence, est valide pour la plupart des cas de la configuration de contra-pompage en pratique, où les lasers fibrés Raman sont déployés.

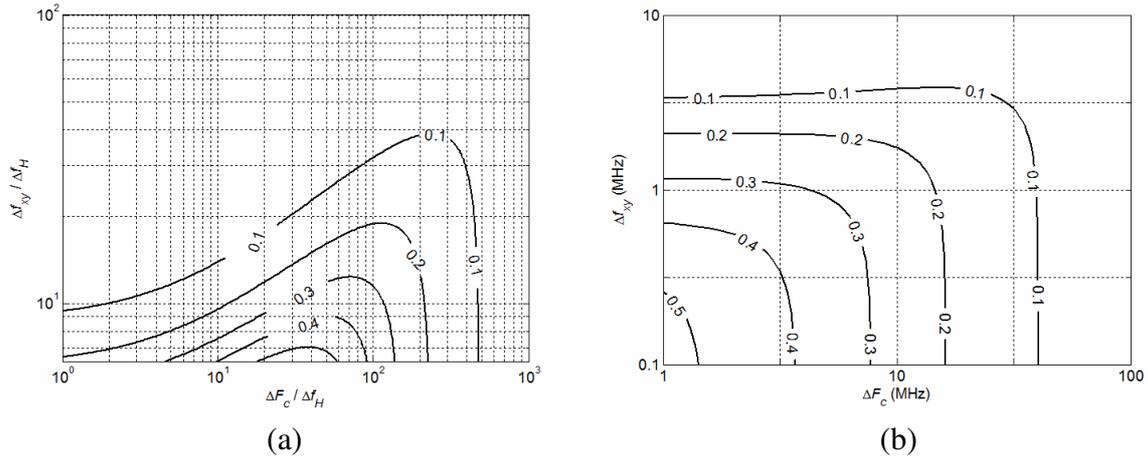


Figure 6.6 – Pénalité de facteur  $Q$  en fonction de la largeur spectrale de la pompe et de l'écart fréquentiel. Paramètres communs:  $\lambda_p = 1455$  nm,  $\lambda_s = 1555$  nm,  $Q_s = 10$ ,  $C_R = 0.5$  W<sup>-1</sup>km<sup>-1</sup>,  $P_{p0} = 0.53$  W,  $L = 100$  km,  $L_{\text{eff}} = 8.7$  km. (a) co-pompage, paramètres :  $L_d = 175$  m et  $D_p = 15$  ps/nm/km ; (b) contra-pompage :  $L_F = 25$  m,  $L_B = 100$  m et  $v_s = 2 \cdot 10^5$  km/s.

Pour les configurations de co- et contra-pompage, figure 6.6 montre deux exemples de pénalité de facteur  $Q$  en fonction de la largeur spectrale de la pompe  $\Delta F_c$  et l'écart fréquentiel  $\Delta f_{xy}$ . Dans la figure 6.6-(a),  $\Delta F_c$  et  $\Delta f_{xy}$  sont normalisés sur la largeur spectrale de la fonction de transfert  $\Delta f_H$ , car l'approximation (6.77) est utilisée. Tandis que pour la figure 6.6-(b), la simulation numérique de (6.63) est utilisée, où les longueurs de battement et de cohérence de la biréfringence de fibre sont, respectivement, 100 m et 25 m, ce qui correspond à une fibre de faible biréfringence avec un paramètre de PMD de 0.013 ps/km<sup>1/2</sup> et une longueur de cohérence du SOP relatif de signal de 16 m. Avec ces figures, nous voyons clairement que la pénalité diminue toujours avec l'écart fréquentiel  $\Delta f_{xy}$ . Alors, il peut être une solution pour annuler le transfert de bruit de battement de séparer en spectre les deux composantes de polarisation de pompe. En effet, c'est ce qu'il est déjà montré expérimentalement dans [12]. Ceci peut être particulièrement utile pour la configuration de co-pompage, où la pénalité de facteur  $Q$  est bien plus importante et la pompe Raman est souvent composée de deux diodes lasers dont les polarisations sont orthogonales [12].

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi un modèle, (6.12), pour décrire les évolutions spatio-temporelles des puissances et SOP de la pompe et signal dans les amplificateurs Raman à fibre. Avec l'aide de l'analyse présentée dans l'annexe D, nous avons trouvé une méthode numérique pour calculer l'autocorrélation du SOP relatif de signal. Il se trouve que l'assomption que la biréfringence locale relative soit delta-corrélée n'est valable que pour la configuration de pompage co-directionnel. Les fluctuations du gain Raman dans la configuration de pompage contra-directionnel en est un ordre de grandeur plus importante que proposée dans [4].

Après réviser la théorie traditionnelle de transfert de RIN de la pompe vers le signal, proposée initialement dans [1], nous avons analysé le rôle de PMD dans le transfert de bruit de la pompe vers le signal. Il est trouvé qu'à cause des fluctuations temporelles de SOP, les pompes Raman dépolarisées peuvent induire des bruits supplémentaires au signal à l'aide de PMD. Il y a deux points importants à noter : premièrement, il y a transfert de RIN additionnel ; secondement, il y a un nouveau bruit, le bruit de battement des deux composantes de polarisation de pompe, qui est transféré vers le signal. Pour le transfert de RIN additionnel, l'accent a été mis sur le fait que sa largeur spectrale est bien plus large que celle traditionnelle. Tandis que pour le bruit de battement, la dégradation de la performance de système a été analysée en terme de la pénalité de facteur  $Q$  avec expressions analytiques. Il se trouve qu'il peut être une solution pour annuler le transfert de bruit de battement de séparer en spectre les deux composantes de polarisation de pompe.

Finalement, nous devons mentionner que la configuration de contra-pompage est bien plus avantageuse que celle de co-pompage, au niveau de transfert de bruit de la pompe vers le signal. C'est non seulement parce que la pompe et le signal ont un temps d'interaction plus long dans la configuration de co-pompage, mais aussi parce que le SOP relatif de signal tourne beaucoup plus rapidement dans la configuration de contra-pompage. Nous voyons que l'avantage de la configuration de co-pompage au niveau de facteur de bruit en est fané, et la configuration de pompage bi-directionnel pourrait être un bon compromis technique en pratique.

## Références:

- [1] C. R. S. Fludger, V. Handerek, and R. J. Mears, "Pump to signal RIN transfer in Raman fiber amplifiers," *IEEE J. Lightwave Technol.* **19**, 1140–1148, 2001.
- [2] M. D. Mermelstein, C. Headley, and J.-C. Bouteiller, "RIN transfer analysis in pump depletion regime for Raman fiber amplifiers," *Electron. Lett.* **28**, 403–404, 2002.
- [3] G. P. Agrawal, *Fiber-Optic Communication Systems*, 2<sup>nd</sup> Ed., Wiley InterScience. 1997.
- [4] Q. Lin and G. P. Agrawal, "Vector theory of stimulated Raman scattering and its application to fiber-based Raman amplifiers," *J. Opt. Soc. Am. B* **20**, 1616-1631, 2003.
- [5] R.H. Stolen, J.P. Gordon, W.J. Tomlinson, and H.A. Haus, "Raman response function of silica-core fibers," *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 1159-1166, 1989.
- [6] J. P. Gordon and H. Kogelnik, "PMD fundamentals: polarization-mode dispersion in optical fibers," *Proc. Nat. Acad. Sci.* **97**, 4541-4550, 2000.
- [7] B. Huttner, C. Geiser, and N. Gisin, "Polarization-induced distortions in optical fiber networks with polarization-mode dispersion and polarization-dependent losses," *IEEE J. Select. Topics Quantum Electron.* **6**, 317–329, 2000.
- [8] P. K. A. Wai and C. R. Menyuk, "Polarization mode dispersion, decorrelation and diffusion in optical fibers with randomly varying birefringence," *IEEE J. Lightwave Technol.* **14**, 148-157, 1996.
- [9] A. Galtarossa, L. Palmieri, M. Schiano, and T. Tambosso, "Statistical characterization of fiber random birefringence," *Opt. Lett.* **25**, 1322-1324, 2000.
- [10] A. Galtarossa and L. Palmieri, "Measure of twist-induced circular birefringence in long single-mode fibers: Theory and experiments," *J. Lightwave Technol.* **20**, 1149–1159, 2002.
- [11] H. Bülow, W. Baumert, H. Schmuck, F. Mohr, T. Schulz, F. Küppers, and W. Weiershausen, "Measurement of the maximum speed of PMD fluctuation in installed field fiber," in *Proc. Optic. Fiber Commun. Conf. (OFC'99)*, 1999.
- [12] C. Martinelli, L. Lorcy, A. Durécu-Legrand, D. Mongardien, S. Borne, and D. Bayart, "RIN transfer in copumped Raman Amplifiers using polarization-combined diodes," *IEEE Photon. Technol. Lett.* **17**, 1836-1838, 2005.

## Conclusion et Perspectives

Ce travail de thèse a permis de réaliser une étude théorique approfondie, permettant de comprendre et de modéliser les processus de génération de bruit dans les amplificateurs Raman distribués, et d'analyser les performances des systèmes et des réseaux les utilisant.

Afin d'établir un modèle quantifié pour l'amplification Raman dans les fibres optiques, une théorie quantique de l'optique nonlinéaire macroscopique a été tout d'abord proposée, en utilisant une nouvelle approche fondée sur une description *ab initio* quantifiée de l'interaction champ-matière. Cette théorie, restant très générale, montre formellement, pour la première fois à notre connaissance, les relations entre les opérateurs d'Heisenberg des densités de polarisation nonlinéaire et du champ électrique. Quand les opérateurs quantiques sont remplacés par leurs valeurs classiques correspondantes, nous retrouvons la théorie semi-classique de l'optique nonlinéaire. Il est important de noter que, dans notre développement, nous avons séparé explicitement les mécanismes micro- et macroscopiques. Ceci est nécessaire pour établir notre formalisme pour l'optique nonlinéaire macroscopique.

Les résultats de notre approche, associés à la théorie de la susceptibilité des verres de silice, permettent d'établir un modèle bidimensionnel de propagation des opérateurs associés au champ électrique dans les fibres optiques, ainsi que pour les amplificateurs Raman distribués. Ce modèle prend simultanément en compte l'atténuation optique, la diffusion Rayleigh, la dispersion, les non-linéarités de type Kerr et les diffusions Raman et Brillouin. Dans notre approche, nous avons noté qu'il est nécessaire de prendre en compte la dépendance de polarisation pour décrire correctement la diffusion Rayleigh dans les fibres optiques. Nous avons également étudié les diffusions Raman et Brillouin dans un modèle physique unifié, ce qui permet de mieux comprendre leurs similarités et leurs différences. Avec ce modèle, nous avons réussi à exprimer le théorème de fluctuation-dissipation pour les amplificateurs Raman distribués, prenant en compte l'amplification Raman et les pertes optiques. En comparaison avec les systèmes réels à deux niveaux, une expression pour la population virtuelle du niveau haut a été proposée. Ce concept peut être utile pour une compréhension intuitive des avantages des amplificateurs Raman et des processus de génération de bruit intrinsèque dans ce type d'amplificateurs.

Afin de mieux appréhender les potentialités dans amplificateurs Raman distribués, nous avons tout d'abord, après un bref rappel des propriétés quantiques du champ optique, formulé d'une manière générale les limites quantiques des dispositifs optiques linéaires et insensibles à la phase, les statistiques quantiques du photocourant, et les différentes définitions du facteur de bruit des dispositifs amplificateurs optiques.

L'amplification Raman dans les fibres optiques est intrinsèquement à faible bruit. Ceci s'explique par le fait que, dans les fibres optiques, la diffusion Raman Stokes est beaucoup plus probable que la diffusion Raman anti-Stokes, ce qui résulte d'une valeur typique de la population virtuelle du niveau haut d'environ à 0.9 quand les pertes optiques sont négligées. L'amplification Raman est, de plus, distribuée au long de la fibre, ce qui est la raison la plus importante pour laquelle elle est plus avantageuse en termes de bruit que l'amplification localisée des amplificateurs à fibres dopées à l'Erbium. Nous avons déterminé le gain et le facteur de bruit dans amplificateurs Raman et comparé, en termes de bruit intrinsèque, les performances des différentes configurations de pompage. Il a été clairement montré que la configuration de pompage co-directionnel est la plus préférable en termes de facteur de bruit, mais également la plus sensible à la saturation de gain.

Nous avons également étudié la rétro-diffusion Rayleigh et le transfert de bruit de la pompe, qui sont deux autres sources importantes de bruit classique dans les amplificateurs Raman. Prenant en compte la diffusion Rayleigh, nous avons établi un modèle de propagation bidirectionnelle du champ. Nous avons corroboré ce modèle en comparant l'expression analytique du facteur de recapture extraite de notre modèle avec celle déjà connue. La simulation numérique des équations de propagation bidirectionnelle pour les densités spectrales de puissance a été effectuée. Elle permet d'étudier l'impact de la rétrodiffusion Rayleigh sur la génération de bruit intrinsèque et sur la saturation de gain. Il a été montré que pour les hautes valeurs du gain Raman, la saturation de pompe est renforcée par la rétrodiffusion Rayleigh. Quand la puissance de signal est relativement élevée, la pompe est saturée par le signal, et, dans le même temps, la génération de ASE est réduite. En revanche, quand la puissance de signal est relativement faible, c'est plutôt le bruit ASE sur tout le spectre, renforcé par la rétrodiffusion Rayleigh, qui sature la pompe. Les propriétés statistiques du bruit en présence de rétrodiffusion Rayleigh ont été étudiées. Il a été montré que les bruits de DRB et d'ASE sont tous les deux gaussiens et indépendants du signal, mais tandis que l'ASE est un bruit blanc et dépolarisé, et le DRB est partiellement polarisé et a une densité spectrale quasi-identique du signal. Avec ces propriétés, nous avons analysé l'impact combiné de l'ASE et du DRB par une méthode semi-analytique afin de calculer le taux d'erreur binaire exact. Nous avons montré qu'aux gains Raman très élevés,  $G_R > 30\text{dB}$ , les performances du système sont considérablement dégradées par la rétrodiffusion Rayleigh. Aux gains Raman inférieurs à 20dB, l'impact de la rétrodiffusion Rayleigh est négligeable. Nous avons également montré que la méthode d'approximation gaussienne pour évaluer le

taux d'erreur binaire est généralement adaptée, en présence de la rétrodiffusion Rayleigh. Nous avons également évalué analytiquement la pénalité de la rétrodiffusion Rayleigh sur le facteur de qualité. Il a été montré que le pompage bidirectionnel avec 50-60% de co-pompage est très intéressant compte tenu de sa tolérance à la rétrodiffusion Rayleigh.

En ce qui concerne le transfert de bruit de la pompe vers le signal, nous avons étudié un modèle vectoriel de l'amplification Raman dans les fibres optiques monomodes. Nous avons développé une méthode numérique pour calculer l'autocorrélation du SOP relatif de signal. Il se trouve que l'hypothèse que la biréfringence locale relative soit delta-corrélée n'est valable que pour la configuration de pompage co-directionnel. Les fluctuations du gain Raman dans la configuration de pompage contra-directionnel sont un ordre de grandeur plus importantes que proposées précédemment. Après avoir révisé la théorie traditionnelle de transfert de RIN de la pompe vers le signal, nous avons analysé le rôle de PMD dans le transfert de bruit de la pompe vers le signal. Il a été montré, qu'à cause des fluctuations temporelles de SOP, les pompes Raman dépolarisées peuvent induire des bruits supplémentaires au signal à l'aide de PMD. Il y a premièrement transfert de RIN additionnel. Il y a aussi un nouveau bruit, le bruit de battement de spectre des deux composantes de polarisation de pompe, qui est transféré. Pour ce transfert de RIN additionnel, nous avons montré que sa largeur spectrale est bien plus large que celle du transfert traditionnel. Pour le bruit de battement, la dégradation de la performance de système a été analysée en terme de la pénalité du facteur  $Q$  avec expressions analytiques. Il apparaît qu'une solution pour annuler le transfert de bruit est de battement de séparer en spectre les deux composantes de polarisation de pompe. La configuration de contra-pompage est bien plus avantageuse que celle de co-pompage, au niveau de transfert de bruit de la pompe vers le signal.

Compte tenu des avantages complémentaires des différentes configurations de pompage pour le facteur de bruit intrinsèque, la rétrodiffusion Rayleigh, et les transferts de bruit de la pompe vers le signal, une configuration de pompage bidirectionnel pourrait être un bon compromis technique en pratique.

Enfin, il y a quelques points qui mériteraient d'avantages de travaux de recherche. Tout d'abord, la vérification expérimentale des résultats théoriques relatifs au transfert de bruit de la pompe vers le signal assisté par la PMD est nécessaire pour compléter cette étude. L'impact des effets nonlinéaires sur les pompes Raman est une prolongation intéressante. Il est évident qu'à cause de la nonlinéarité de type Kerr, le RIN et le SOP de pompe vont être modifiés au long de la fibre. Finalement, comme le déjà mentionné au chapitre 3, la théorie quantique de la relation d'entrée-sortie d'un système optique, ou, plus largement, des communications optiques, nécessite plus d'investigations théoriques.



## Annexe A

Dans cette annexe, nous allons prouver que les relations

$$[a^+, a] = 1 \quad (\text{A.1})$$

et

$$\langle (a^+)^n a^n \rangle = n! \langle a^+ a \rangle^n \quad (\text{A.2})$$

implique que l'opérateur de nombre  $N = a^+ a$  ait une distribution de Bose-Einstein

$$P_{BE}(n) = \frac{\bar{N}^n}{(1 + \bar{N})^{n+1}} \quad (\text{A.3})$$

où  $\bar{N}$  est le nombre moyen. Pour ce faire, il suffit de prouver la relation suivante

$$\langle P_n \rangle = n! \langle N \rangle^n \quad (\text{A.4})$$

avec

$$P_n = N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1) \quad (\text{A.5})$$

D'un côté, nous pouvons maintenant réécrire (A.5) sous la forme

$$P_n = \sum_{i=1}^n C_{n,i} N^i \quad (\text{A.6})$$

où les coefficients  $C_{n,i}$  peuvent être obtenus avec la convention:

$$C_{n,0} = \delta_{n,0} \text{ et } C_{n,i} = 0, \text{ pour } i > n \quad (\text{A.7.a})$$

Et la relation de récurrence

$$C_{n,i} = C_{n-1,i-1} - (n-1)C_{n-1,i} \quad (\text{A.7.b})$$

D'un autre, nous avons l'expression suivante pour les opérateurs de création et d'annihilation de boson satisfaisant (A.1)

$$N^i = \sum_{j=1}^i S_{i,j} (a^+)^j a^j \quad (\text{A.8})$$

où les coefficients  $S_{n,i}$  sont les nombres de Stirling<sup>1</sup> que nous pouvons obtenir avec la convention

$$S_{i,0} = \delta_{i,0} \text{ et } S_{i,j} = 0, \text{ pour } j > i \quad (\text{A.9.a})$$

Et la relation de récurrence

$$S_{i,j} = jS_{i-1,j} + S_{i-1,j-1} \quad (\text{A.9.b})$$

Nous pouvons noter que les matrices triangulaires  $C_{n,i}$  et  $S_{i,j}$  sont inverse l'une de l'autre, c'est-à-dire que nous avons

$$\sum_{j=i}^n C_{n,j} S_{j,i} = \delta_{n,i} \quad (\text{A.10})$$

Avec (A.2), (A.6), (A.8) et (A.10), nous avons alors

$$\begin{aligned} \langle P_n \rangle &= \sum_{i=1}^n C_{n,i} \langle N^i \rangle = \sum_{i=1}^n C_{n,i} \sum_{j=1}^i S_{i,j} \langle (a^+)^j a^j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n C_{n,i} \sum_{j=1}^i j! S_{i,j} \langle N \rangle^j = \sum_{j=1}^n j! \langle N \rangle^j \sum_{i=j}^n C_{n,i} S_{i,j} = \sum_{j=1}^n j! \langle N \rangle^j \delta_{n,j} = n! \langle N \rangle^n \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

---

<sup>1</sup> Pawel Blasiak, "Combinatorics of boson normal ordering and some applications," PhD. Thesis, 2005.

## Annexe B

Prenant en compte les diffusions Raman stimulée et spontanée, la rétrodiffusion Rayleigh, et la dépendance fréquentielle des paramètres, l'équation d'évolution bidimensionnelle pour les composantes spectrales  $P_{\pm}(\omega_i)$ , de largeur spectrale  $\Delta\omega_i$ , s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \pm \frac{d}{dz} P_{\pm}(\omega_i) = & \left\{ \sum_j C_R(\omega_i, \omega_j) [P_+(\omega_j) + P_-(\omega_j)] - \alpha(\omega_i) \right\} P_{\pm}(\omega_i) + \gamma_R(\omega_i) P_{\mp}(\omega_i) \\ & + 2\hbar\Delta\omega_i \sum_j [1 + \bar{n}_q(\omega_i - \omega_j)] C_R(\omega_i, \omega_j) [P_+(\omega_j) + P_-(\omega_j)] \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

où  $\alpha$  et  $\gamma_R$  sont, respectivement, les coefficients d'atténuation et de rétrodiffusion Rayleigh. Le facteur 2 affectant le dernier terme rend compte des contributions des deux polarisations.  $C_R(\omega_i, \omega_j)$  est le coefficient effectif d'amplification Raman. Avec les résultats expérimentaux sur  $C_R(\omega_s, \omega_{p0})$ , où  $\omega_s < \omega_{p0}$  et  $\omega_{p0}$  est la fréquence angulaire de la pompe utilisée dans l'expérience, le coefficient  $C_R(\omega_i, \omega_j)$  peut être déterminé par

$$C_R(\omega_i, \omega_j) \approx \text{sign}(\omega_j - \omega_i) \omega_i \frac{C_R(\omega_{p0} - |\omega_j - \omega_i|, \omega_{p0})}{\omega_{p0} - |\omega_j - \omega_i|} \quad (\text{B.2})$$

$\bar{n}_q(\Delta\omega)$  est le nombre de Bose-Einstein et défini comme

$$\bar{n}_q(\Delta\omega) = \frac{1}{\exp(\hbar\Delta\omega / K_B T) - 1} \quad (\text{B.3})$$

D'après cette définition, nous vérifions facilement  $1 + \bar{n}_q(\Delta\omega) = -\bar{n}_q(-\Delta\omega)$ . Nous avons développé un programme sous Matlab pour résoudre numériquement l'équation différentielle du première ordre (B.1), associée des conditions aux limites  $P_{\pm}(z=0, \omega_i)$  et  $P_{\pm}(z=L, \omega_i)$ . Puisqu'il s'agit d'un système nonlinéaire et bidimensionnel, nous avons utilisé la fonction BVP4C (voir les fichiers de l'aide de Matlab, pour plus d'information sur cette fonction) qui est plus adaptée à notre problème que les méthodes pour les équations différentielles ordinaires, comme la fonction ODE45 par exemple.

## Matlab Codes :

```
function Sol = BVPSolver(Power0L, Power0R, WaveL, Att, CRayl, CR, FL, Sol0)
```

```

%% Input parameters:
% Power0L -- Array vector ( [1xN] ) of the input powers at z = 0
% Power0R -- Array vector ( [1xN] ) of the input powers at z = L
% WaveL -- Array vector ( [1xN] ) of wavelenghtes
% Att -- Array vector ( [1xN] ) of Attenuation coefficients
% CRayl -- Array vector ( [1xN] ) of Rayleigh coefficients
% CR -- Raman coefficient matrix ( [NxN] ) of Raman Coefficients normalised
% FL -- Fibre length
% Sol0 -- Initially guessed solution
%
% Output solution: Sol
% Sol.x -- Positions [1xNZ]
% Sol.y -- Distribution of the powers on Sol.x, [NZx2N]

%% Declaration of global variables
global g_N ... % Number of canals, N, total number is 2N
    g_P0L ... % Array vector ( [1xN] ) of input powers
    g_P0R ... % Array vector ( [1xN] ) of input powers
    g_A ... % Array vector ( [1xN] ) of Attenuation Coefficients
    g_R ... % Array vector ( [1xN] ) of Rayleigh Coefficients
    g_C ... % Matrix of the Raman coefficients, [NxN]
    g_SP ... % Matrix of effective spontaneous emission coefficients, [NxN]
%initialization of global variables
g_N = length(WaveL);
g_P0L = Power0L;
g_P0R = Power0R;
g_A = Att;
g_R = CRayl;
g_C = CR;

hp = 1.055e-34; % Planck's constant
kB = 1.38e-23; % Boltzman's constant

Omiga = 2*pi*3e+8./WaveL; % Angular frequencies
EOmiga = ones(g_N, 1)*Omiga' - Omiga*ones(1, g_N); %Frequency differences matrix

%Effective spontaneous emission coefficient matrix at T = 300K
g_SP = 2*abs(diag(gradient(Omiga,1)/(2*pi).*(hp*Omiga)))*(g_C.*(1+1./(exp(hp*EOmiga/(kB*300))-1 + 1e-12)));
%% 1e-12, because (exp(hp*EOmiga/(kB*300))-1) can be zero

%% Calculating all together

%% BVP4C options setting
Options = bvpset('RelTol', 1e-5, 'AbsTol', 1e-10,...
    'fJacobian', @Jac,...
    'BCJacobian', @BCJac,...
    'Vectorized', 'on', ...
    'NMax', 1e+6, 'Stats', 'off');

%% Initial solution
if isempty(Sol0) %If there is no given initial solution

```

```

P0_init = zeros(2*g_N, 1);
P0_init(1+g_N:2*g_N) = Power0L/10; P0_init(1+g_N:2*g_N) = Power0R/10;
Init_Z = linspace(0, FL, 20);
Sol = bvpinit(Init_Z,P0_init);
else
    Sol = Sol0;
end

Sol = bvp4c(@dPdz, @BC, Sol, Options);

%% Embedded functions

%-----dPdz-----
function dPdz = dPdz(z, P)
global g_N g_POL g_POR g_A g_R g_C g_SP

%initialization
dPdz = zeros(size(P));

rf = 1:g_N; % forward index
rb = rf + g_N; % backward index

P = abs(P); % Because it is possible that the values of P are negative.

AZ = g_A*ones(1, length(z));
dPdz(rf, :) = (g_C*(P(rf, :) + P(rb, :)) - AZ).*P(rf, :) + diag(g_R)*P(rb, :) + g_SP*(P(rf, :) + P(rb, :));
dPdz(rb, :) = -(g_C*(P(rf, :) + P(rb, :)) - AZ).*P(rb, :) - diag(g_R)*P(rf, :) - g_SP*(P(rf, :) + P(rb, :));

%-----Boundary conditions-----
function res = BC(P0, PL)
global g_N g_POL g_POR g_A g_R g_C g_SP

%initialization
res = zeros(size(P0));

rf = 1:g_N; % forward index
rb = rf + g_N; % backward index

res(rf) = P0(rf) - g_POL;
res(rb) = PL(rb) - g_POR; % there is no reflection at z = L

%-----Jacobian of dPdz-----
function Jac = Jac(z, P)
global g_N g_POL g_POR g_A g_R g_C g_SP

%Make powers positive and record their signes
SP = sign(P); P = abs(P);

%initialization
Jac = zeros(g_N*2, g_N*2);

rf = 1:g_N; % forward index
rb = rf + g_N; % backward index

Jac(rf, rf) = diag(g_C*(P(rf) + P(rb)) - g_A) + diag(P(rf))*g_C + g_SP;
Jac(rf, rb) = diag(P(rf))*g_C + diag(g_R) + g_dB;
Jac(rb, rb) = -diag(g_C*(P(rf) + P(rb)) - g_A) - diag(P(rb))*g_C - g_SP;
Jac(rb, rf) = -diag(P(rb))*g_C - diag(g_R) - g_dB;

```

---

```
Jac = Jac*diag(SP); % We have in fact dPdz = dPdz(z, P) = dPdz(z, |P|)
```

```
%-----Jacobian of BC-----
```

```
function [dBCdP0,dBCdPL] = BCJac(P0, PL)
```

```
global g_N g_POL g_POR g_A g_R g_C g_SP
```

```
%initialization
```

```
dBCdP0 = zeros(g_N*2); dBCdPL = zeros(g_N*2);
```

```
rf = 1:g_N; % forward index
```

```
rb = rf + g_N; % backward index
```

```
dBCdP0(rf, rf) = eye(g_N);
```

```
dBCdPL(rb, rb) = eye(g_N);
```

## Annexe C

Dans cette annexe, nous allons prouver l'expression ci-dessous :

$$\Phi(s) = \langle \exp[s\bar{z}^+ \Lambda \bar{z}] \rangle = \frac{1}{\det[\mathbf{I} - s\Lambda \mathbf{C}_{ZZ}]} \exp\left[ \bar{m}_z^+ \frac{1}{\mathbf{I} - s\Lambda \mathbf{C}_{ZZ}} s\Lambda \bar{m}_z \right] \quad (\text{C.1})$$

où  $s$  est réel,  $\Lambda$  est une matrice réelle diagonalisée,  $\bar{z}$  est une variable complexe gaussienne vectorielle, dont la fonction de densité de probabilité est donnée par <sup>1</sup>

$$f_c(\bar{z}) = \frac{1}{\det[\pi \mathbf{C}_{ZZ}]} \exp\left[ -(\bar{z} - \bar{m}_z)^+ \mathbf{C}_{ZZ}^{-1} (\bar{z} - \bar{m}_z) \right] \quad (\text{C.2})$$

avec la moyenne  $\bar{m}_z$  et la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{ZZ}$ .

Afin de prouver (C.1), nous notons tout d'abord que, puisque  $\int f_c(\bar{z}) d\bar{z}^{2n} = 1$ , nous avons

$$\int \exp\left[ -(\bar{z} - \bar{m}_z)^+ \mathbf{C}_{ZZ}^{-1} (\bar{z} - \bar{m}_z) \right] d\bar{z}^{2n} = \det[\pi \mathbf{C}_{ZZ}] \quad (\text{C.3})$$

Ensuite, nous avons

$$\Phi(s) = \langle \exp[s\bar{z}^+ \Lambda \bar{z}] \rangle = \frac{1}{\det[\pi \mathbf{C}_{ZZ}]} \int \exp\left[ -(\bar{z} - \bar{m}_z)^+ \mathbf{C}_{ZZ}^{-1} (\bar{z} - \bar{m}_z) + s\bar{z}^+ \Lambda \bar{z} \right] d\bar{z}^{2n} \quad (\text{C.4})$$

Or,

$$\begin{aligned} & s\bar{z}^+ \Lambda \bar{z} - (\bar{z} - \bar{m}_z)^+ \mathbf{C}_{ZZ}^{-1} (\bar{z} - \bar{m}_z) \\ &= -\bar{m}_z^+ \mathbf{C}_{ZZ}^{-1} \bar{m}_z^+ - \bar{z}^+ (\mathbf{C}_{ZZ}^{-1} - s\Lambda) \bar{z} + (\bar{m}_z^+ \mathbf{C}_{ZZ}^{-1} \bar{z} + \bar{z}^+ \mathbf{C}_{ZZ}^{-1} \bar{m}_z) \\ &= -\left( \bar{z} - \frac{1}{\mathbf{C}_{ZZ}^{-1} - s\Lambda} \mathbf{C}_{ZZ}^{-1} \bar{m}_z \right)^+ (\mathbf{C}_{ZZ}^{-1} - s\Lambda) \left( \bar{z} - \frac{1}{\mathbf{C}_{ZZ}^{-1} - s\Lambda} \mathbf{C}_{ZZ}^{-1} \bar{m}_z \right) + \bar{m}_z^+ \left( \mathbf{C}_{ZZ}^{-1} \frac{1}{\mathbf{C}_{ZZ}^{-1} - s\Lambda} - \mathbf{I} \right) \mathbf{C}_{ZZ}^{-1} \bar{m}_z \end{aligned}$$

<sup>1</sup> A. Papoulis and S.U. Pillai, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, 4th ed., 2002.

(C.5)

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{zz}^{-1} \frac{1}{\mathbf{C}_{zz}^{-1} - s\Lambda} - \mathbf{I} &= \frac{1}{(\mathbf{C}_{zz}^{-1} - s\Lambda)\mathbf{C}_{zz}} - \mathbf{I} = \frac{1}{\mathbf{I} - s\Lambda\mathbf{C}_{zz}} - \mathbf{I} \\
&= \frac{1}{\mathbf{I} - s\Lambda\mathbf{C}_{zz}} [\mathbf{I} - (\mathbf{I} - s\Lambda\mathbf{C}_{zz})] = \frac{1}{\mathbf{I} - s\Lambda\mathbf{C}_{zz}} s\Lambda\mathbf{C}_{zz}
\end{aligned}
\tag{C.6}$$

Remplaçant (C.6) dans (C.5), ensuite (C.5) dans (C.4), et utilisant (C.3), nous avons enfin

$$\begin{aligned}
\Phi(s) &= \frac{1}{\det[\pi \mathbf{C}_{zz}]} \det \left[ \pi \frac{1}{\mathbf{C}_{zz}^{-1} - s\Lambda} \right] \exp \left[ \bar{m}_z^+ \left( \mathbf{C}_{zz}^{-1} \frac{1}{\mathbf{C}_{zz}^{-1} - s\Lambda} - \mathbf{I} \right) \mathbf{C}_{zz}^{-1} \bar{m}_z \right] \\
&= \frac{1}{\det[\mathbf{I} - s\Lambda\mathbf{C}_{zz}]} \exp \left[ \bar{m}_z^+ \frac{1}{\mathbf{I} - s\Lambda\mathbf{C}_{zz}} s\Lambda \bar{m}_z \right]
\end{aligned}
\tag{C.7}$$

## Annexe D

Dans cette annexe, nous allons étudier les propriétés statistiques du SOP relative du signal, et nous allons enfin trouver une méthode exacte pour calculer l'autocorrélation du SOP relative du signal.

### D.1 Formulations de Stratonovich

Considérons l'équation stochastique différentielle

$$d_t \bar{x} = \mathbf{Q}(\bar{x}, t) \bar{g} + \bar{U}(\bar{x}, t) \quad (\text{D.1.1})$$

où  $\bar{x}$  et  $\bar{U}$  sont deux vecteurs  $n$ -dimensionnels, et  $\mathbf{Q}$  est une matrice de dimension  $n \times m$ . le processus  $\bar{g}$  est  $m$ -dimensionnel, de moyenne nulle et delta-corrélée

$$\langle g_j(z) g_k(z') \rangle = \sigma_j^2 \delta_{jk} \delta(z - z') \quad (\text{D.1.2})$$

Pour une fonction régulière quelconque  $\psi$  de  $\bar{x}$ , nous avons alors<sup>1,2</sup>

$$d_t \langle \psi(\bar{x}) \rangle = \langle (\hat{G}\psi)(\bar{x}) \rangle \quad (\text{D.1.3})$$

et

$$\partial_u \langle \psi[\bar{x}(z)] \psi[\bar{x}(z+u)] \rangle = \langle \psi[\bar{x}(z)] (\hat{G}\psi)[\bar{x}(z+u)] \rangle, \text{ pour } u \geq 0, \quad (\text{D.1.4})$$

où  $\hat{G}$  est le générateur de Stratonovich donné par

$$\hat{G} = \sum_j U_j \partial_{x_j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m \sigma_p^2 (\mathcal{Q}_{jp} \mathcal{Q}_{kp} \partial_{x_j} \partial_{x_k} + \mathcal{Q}_{kp} \partial_{x_k} \mathcal{Q}_{jp} \partial_{x_j}) \quad (\text{D.1.5})$$

Ecrivant la matrice de rotation gouvernée par (6.16) sous la forme  $\mathbf{R} = (\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \bar{c}_3)$ , avec  $\bar{c}_3 = \bar{c}_1 \times \bar{c}_2$  et  $\bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2 = 0$ , à partir de (6.16), (6.18), (6.19) et (6.24), nous avons

<sup>1</sup> P. K. A. Wai and C. R. Menyuk, "Polarization mode dispersion, decorrelation and diffusion in optical fibers with randomly varying birefringence," IEEE J. Lightwave Technol. **14**, 148-157, 1996.

<sup>2</sup> A. Galtarossa and L. Palmieri, "Measure of twist-induced circular birefringence in long single-mode fibers: Theory and experiments," J. Lightwave Technol. **20**, 1149-1159, 2002.

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{s}_s \\ \bar{\beta}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{9 \times 2} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_p \eta_{ps} \bar{\beta}_s \times \bar{c}_1 \\ e_p \eta_{ps} \bar{\beta}_s \times \bar{c}_2 \\ \bar{b}_{sp} \times \bar{s}_s \\ -\alpha_\beta \bar{\beta}_s \end{pmatrix} \quad (\text{D.1.6})$$

où  $\Delta \eta_{ps} = 1 - e_p \eta_{ps}$ ,  $\mathbf{O}_{9 \times 2}$  est une matrice nulle de dimension  $9 \times 2$ , et  $\mathbf{I}_{2 \times 2}$  est une  $2 \times 2$  matrice d'identité. Le générateur de Stratonovich pour (D.1.6) est alors donné par

$$\hat{G} = -\alpha_\beta \bar{\beta}_s \cdot \nabla_\beta + \frac{1}{2} \sigma_g^2 \nabla_\beta^2 + e_p \eta_{ps} \sum_{k=1,2} (\bar{\beta}_s \times \bar{c}_k) \cdot \nabla_{c_k} + (\bar{b}_{sp} \times \bar{s}_s) \cdot \nabla_s \quad (\text{D.1.7})$$

où  $\nabla_x$  est le gradient.

## D.2 Densité de probabilité au régime stationnaire asymptotique

A strictement parler,  $\bar{s}_s$  n'est pas un processus stationnaire. Pourtant, les résultats de la simulation numérique de (D.1.7) montrent, qu'après une évolution sur une distance d'ordre de  $L_d$ , il atteint un régime stationnaire asymptotique, où sa fonction de densité de probabilité devient approximativement indépendante de  $z$ . Puisque la fonction de densité de probabilité est la transformée inverse de Fourier de la fonction caractéristique<sup>3</sup>

$$f(z; \bar{x}) = \mathbf{TF}^{-1}[\Phi(z; \bar{v})](\bar{x}) \quad (\text{D.2.1})$$

où  $\bar{x}^T = (\bar{x}_{c_1}^T, \bar{x}_{c_2}^T, \bar{x}_\beta^T, \bar{x}_s^T)$ ,  $\bar{v}^T = (\bar{c}_1^T, \bar{c}_2^T, \bar{\beta}_s^T, \bar{s}_s^T)$  et  $\Phi$  est la fonction caractéristique de  $\bar{v}$ , définie par []

$$\Phi(z; \bar{v}) = \langle \exp(2\pi i \bar{k}_v \cdot \bar{v}) \rangle \quad (\text{D.2.2})$$

avec  $\bar{k}^T = (\bar{k}_{c_1}^T, \bar{k}_{c_2}^T, \bar{k}_\beta^T, \bar{k}_s^T)$ . Supposant que  $\Phi(\bar{v} \rightarrow \infty) = 0$ , nous pouvons trouver, à partir de (D.1.3), (D.1.7) et (D.2.1), l'équation suivante au régime stationnaire asymptotique

$$\partial_z f = \alpha_\beta \bar{x}_\beta \cdot \nabla_\beta f + \frac{1}{2} \sigma_g^2 \nabla_\beta^2 f - \Delta \eta_{ps} (\bar{x}_b \times \bar{x}_s) \cdot \nabla_s f - e_p \eta_{ps} \sum_{k=1,2} (\bar{x}_\beta \times \bar{x}_{c_k}) \cdot \nabla_{c_k} f = 0 \quad (\text{D.2.3})$$

où  $\bar{x}_b = (\bar{x}_{c_1}, \bar{x}_{c_2}, \bar{x}_{c_1} \times \bar{x}_{c_2})^T \bar{x}_\beta$ .

Afin de résoudre (D.2.3), nous allons tout d'abord considérer l'équation suivante

$$\left[ \alpha_\beta \bar{\beta}_s \cdot \nabla_\beta + \frac{1}{2} \sigma_g^2 \nabla_\beta^2 + (\bar{c} \times \bar{r}) \cdot \nabla_r \right] f(\bar{\beta}_s, \bar{r}) = 0 \quad (\text{D.2.4})$$

où  $\bar{c} = \bar{c}(\bar{\beta}_s)$  est une fonction vectorielle quelconque de  $\bar{\beta}_s$ . Utilisant le changement de variable

<sup>3</sup> A. Papoulis and S.U. Pillai, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, 4th ed., 2002.

$$\bar{r}(r, \theta, \phi) = r(\cos \theta \sin \phi \quad \sin \theta \sin \phi \quad \cos \phi)^T \quad (\text{D.2.5})$$

où  $\theta \in [0, 2\pi]$  et  $\phi \in [0, \pi]$ , nous avons<sup>3</sup>

$$f(\bar{\beta}_s, r, \theta, \phi) = J_r f(\bar{\beta}_s, \bar{r}) \quad (\text{D.2.6})$$

avec le Jacobien donné par

$$J_r(r, \theta, \phi) = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial (r, \theta, \phi)} \right| = r^2 \sin \phi \quad (\text{D.2.7})$$

Maintenant, à partir de (D.2.4) avec  $r \equiv 1$ , nous trouvons facilement

$$f(\bar{\beta}_s, \theta, \phi) = f_\beta(\bar{\beta}_s) f_r(\phi, \theta) \quad (\text{D.2.8})$$

avec

$$f_\beta(\bar{\beta}_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_\beta^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\beta^2} |\bar{\beta}_s|^2\right) \quad (\text{D.2.9})$$

et

$$f_r(\theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \sin \phi \quad (\text{D.2.10})$$

où  $\sigma_\beta^2 = \sigma_g^2 / 2\alpha_\beta$ . Nous voyons donc que  $\bar{\beta}_s$  est un processus gaussien bidimensionnel, et  $\bar{r}$  est uniformément distribué sur la sphère de Poincaré et indépendant de  $\bar{\beta}_s$ . Ainsi, avec les changements de variable

$$\bar{s}_s(\theta_s, \phi_s) = (\cos \theta_s \sin \phi_s \quad \sin \theta_s \sin \phi_s \quad \cos \phi_s)^T \quad (\text{D.2.11})$$

et

$$\mathbf{R}(\gamma_p, \phi_p, \theta_p) = \mathbf{R}_z(\gamma_p) \mathbf{R}_y(\phi_p) \mathbf{R}_z(\theta_p) \quad (\text{D.2.12})$$

où  $\mathbf{R}_y$  et  $\mathbf{R}_z$  sont les matrices de rotation dans l'espace de Stokes<sup>4</sup>, la fonction de la densité de probabilité totale, pour  $\mathbf{R}$ ,  $\bar{\beta}_s$  et  $\bar{s}_s$  joints, peut être trouvée sous la forme

$$f = f_\beta(\bar{\beta}_s) f_s(\phi_s, \theta_s) f_p(\gamma_p, \phi_p, \theta_p) \quad (\text{D.2.13})$$

avec

<sup>4</sup> J. P. Gordon and H. Kogelnik, "PMD fundamentals: polarization-mode dispersion in optical fibers," Proc. Nat. Acad. Sci. **97**, 4541-4550, 2000.

$$f_s(\phi_s, \theta_s) = \frac{1}{4\pi} \sin \phi_s \text{ et } f_p(\gamma_p, \phi_p, \theta_p) = \frac{1}{8\pi^2} \sin \phi_p \quad (\text{D.2.14})$$

ce qui implique que  $\bar{c}_1$ ,  $\bar{c}_2$  et  $\bar{s}_s$  sont uniformément distribués sur la sphère de Poincaré, et  $\mathbf{R}_p$ ,  $\bar{\beta}_s$  et  $\bar{s}_s$  sont statistiquement indépendants..

### D.3 Calcul de la fonction d'autocorrélation du SOP relative du signal

Afin de calculer la matrice de cohérence du SOP relative du signal  $\bar{s}_s$ , gouverné par (6.24),

$$\mathbf{C}_s(z, u) = \langle \bar{s}_s(z+u) \bar{s}_s^T(z) \rangle \quad (\text{D.3.1})$$

en régime stationnaire asymptotique, nous allons tout d'abord définir les variables ci-dessous

$$\bar{\zeta}_{n,k}(z) = (-1)^n \frac{|\bar{\beta}_s|^{2n}}{(2\sigma_\beta^2)^n n!} \mathbf{R}_p^{-1}(\bar{\beta}_s \times)^k \mathbf{R}_p \bar{s}_s \quad (\text{D.3.2})$$

$$\bar{\xi}_{n,k}(z) = (-1)^n \frac{|\bar{\beta}_s|^{2n}}{(2\sigma_\beta^2)^n n!} \mathbf{R}_p^{-1}(\bar{\beta}_s \times)^k \mathbf{D} \mathbf{R}_p \bar{s}_s \quad (\text{D.3.3})$$

où  $\mathbf{D} = \text{diag}(0, 0, 1)$  est une matrice diagonalisée. Ensuite, nous définissons

$$\mathbf{x}_{n,k}(z, u) = \langle \bar{\zeta}_{n,k}(z+u) \bar{s}_s^T(z) \rangle \quad (\text{D.3.4})$$

$$\mathbf{y}_{n,k}(z, u) = \langle \bar{\xi}_{n,k}(z+u) \bar{s}_s^T(z) \rangle \quad (\text{D.3.5})$$

Il est à noter que nous avons  $\mathbf{x}_{0,0}(z, u) = \mathbf{C}_s(z, u)$ . A partir de (D.1.4) et (D.1.6), et après de longs calculs, nous pouvons trouver les équations récursives suivantes

$$\begin{aligned} \partial_u \mathbf{x}_{n,0} &= -2n\alpha_\beta \mathbf{x}_{n,0} - 2n\alpha_\beta \mathbf{x}_{n-1,0} + \Delta\eta_{ps} \mathbf{x}_{n,1} \\ \partial_u \mathbf{x}_{n,1} &= -(2n+1)\alpha_\beta \mathbf{x}_{n,1} - 2(n+1)\alpha_\beta \mathbf{x}_{n-1,1} + \Delta\eta_{ps} \mathbf{x}_{n,2} \\ \partial_u \mathbf{x}_{n,2} &= -(2n+2)\alpha_\beta \mathbf{x}_{n,2} - 2(n+2)\alpha_\beta \mathbf{x}_{n-1,2} - \sigma_g^2 \mathbf{x}_{n,0} - \sigma_g^2 \mathbf{y}_{n,0} + 2\Delta\eta_{ps} (n+1)\sigma_\beta^2 \mathbf{x}_{n+1,1} \\ \partial_u \mathbf{y}_{n,0} &= -2n\alpha_\beta \mathbf{y}_{n,0} - 2n\alpha_\beta \mathbf{y}_{n-1,0} + (1-3e_p\eta_{ps}) \mathbf{y}_{n,1} + e_p\eta_{ps} \mathbf{x}_{n,1} \\ \partial_u \mathbf{y}_{n,1} &= -(2n+1)\alpha_\beta \mathbf{y}_{n,1} - 2(n+1)\alpha_\beta \mathbf{y}_{n-1,1} + 2\sigma_\beta^2 (n+1)(1-3e_p\eta_{ps}) \mathbf{y}_{n+1,0} + e_p\eta_{ps} \mathbf{x}_{n,2} \end{aligned} \quad (\text{D.3.6})$$

où  $u \geq 0$ . En plus, à partir de (D.2.9), (D.2.13) et (D.2.14), nous avons

$$\mathbf{x}_{n,0}(0) = \frac{(-1)^n \mathbf{I}}{3}, \quad \mathbf{x}_{n,1}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_{n,2}(0) = (-1)^{n+1} \frac{4\sigma_\beta^2}{9} (n+1) \mathbf{I}, \quad \mathbf{y}_{n,0}(0) = (-1)^n \frac{\mathbf{I}}{9} \text{ et } \mathbf{y}_{n,1}(0) = \mathbf{0} \quad (\text{D.3.7})$$

Nous pouvons écrire maintenant  $\mathbf{C}_s$  de (D.3.1) sous la forme

$$\mathbf{C}_s(z, u) = \frac{\mathbf{I}}{3} C_{ss}(u) \quad (\text{D.3.8})$$

où  $C_{ss}$  est la fonction scalaire d'autocorrélation. Il est à noter, qu'en régime stationnaire asymptotique, nous avons  $C_{ss}(u) = C_{ss}(-u)$ . Afin de calculer  $C_{ss}(u)$ , avec  $u \geq 0$ , nous pouvons calculer l'équation différentielle vectorielle de dimension infinie

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{du} = \mathbf{M}\bar{\mathbf{v}} \quad (\text{D.3.9})$$

où  $\mathbf{M}$  est une matrice constante dont les éléments sont les coefficients constants de (D.3.7), et  $\bar{\mathbf{v}}^T = [\dots, \bar{v}_{n-1}^T, \bar{v}_n^T, \bar{v}_{n+1}^T, \dots]$  est un vecteur colonne avec la condition initiale

$$\bar{v}_n^T(0) = (-1)^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4\sigma_\beta^2}{3}(n+1) & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.3.10})$$

Nous avons donc

$$C_{ss}(u) = v_{0,0}(u) \quad (\text{D.3.11})$$

Il est nécessaire de mentionner, qu'évaluant numériquement (D.3.9), nous avons une bonne convergence numérique lorsque  $n \geq 200$  pour le contra-pompage, à comparer à  $n \geq 50$  pour le co-pompage.

Pour calculer la transformé de Fourier de  $C_{ss}$ , il nous faut noter que la solution générale de (D.3.11) peut s'écrire sous la forme

$$\bar{\mathbf{v}}(z) = \exp(\mathbf{M}z)\bar{\mathbf{v}}(0) \quad (\text{D.3.12})$$

Nous avons donc

$$\underline{C}_{ss}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{ss}(x) \exp(-ikx) dx = 2 \operatorname{Re}[w_{0,0}(k)] \quad (\text{D.3.13})$$

avec

$$\bar{w}(k) = \int_0^{\infty} \bar{\mathbf{v}}(x) \exp(-ikx) dx = -(\mathbf{M} - ik\mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{v}}(0) \quad (\text{D.3.14})$$

Finalement, la longueur de cohérence définie par (6.26) est donnée par

$$L_d = \frac{1}{2} \tilde{C}_{ss}(0) \quad (\text{D.3.15})$$