

Continuité en topologie symplectique.

Vincent Humiliere

▶ **To cite this version:**

Vincent Humiliere. Continuité en topologie symplectique.. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2008. Français. NNT : . pastel-00004108

HAL Id: pastel-00004108
https://pastel.hal.science/pastel-00004108

Submitted on 22 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat de l'Ecole Polytechnique

Spécialité :

Mathématiques

Présentée par :

Vincent Humilière

Titre de la thèse :

Continuité en topologie symplectique

Soutenue le 9 juillet 2008

Jury composé de :

M. Patrick BERNARD	Rapporteur
M. Paul BIRAN	Rapporteur
M. Frédéric BOURGEOIS	Rapporteur
M. Emmanuel GIROUX	Examinateur
M. Patrice LE CALVEZ	Examinateur
M. Claude VITERBO	Directeur de thèse

Remerciements

Je remercie chaleureusement Claude Viterbo de m'avoir initié au métier de chercheur. Ses précieux conseils, sa patience, sa disponibilité, la grande liberté dont j'ai pu jouir, et sa bonne humeur ont rendu le travail sous sa direction particulièrement agréable.

J'exprime toute ma reconnaissance à Patrick Bernard, Paul Biran et Frédéric Bourgeois d'avoir accepté de consacrer une partie de leur temps à la lecture attentive de ma thèse, ceci malgré les délais très courts que je leur ai imposés. Je remercie également Emmanuel Giroux et Patrice Le Calvez, de me faire l'honneur d'être dans mon jury de thèse.

Les membres du Centre de Mathématiques Laurent Schwarz (CMLS) m'ont accueilli comme l'un des leurs, et ont toujours très gentiment répondu à mes questions. Je les en remercie. Nos discussions lors du déjeuner ou en salle à café, resteront un excellent souvenir. J'envoie un remerciement spécial aux doctorants du CMLS, pour leurs exposés (tous très bons) lors du séminaire des thésards, et pour les bons moments passés. J'exprime toute ma sympathie à Carole Juppin, Claudine Harmide, Michèle Lavallette, Alain Royer, Stéphane Aicardi, Philippe Beauchet, Florence Hamet, et les remercie pour leur extrême compétence.

C'est avec bonheur que j'ai intégré la communauté des mathématiciens. S'il m'est impossible de nommer ici tous ceux qui, par leurs discussions, mathématiques ou non, ont rendu cette intégration si plaisante, je ne leur en suis pas moins reconnaissant. Merci à Nicolas Roy, pour son amitié et nos innombrables échanges. Merci également aux membres du projet ANR "Symplexe" pour tout ce qu'ils m'ont appris, et pour l'excellente atmosphère qui a régné lors de nos diverses rencontres. Participer à ce projet a été très enrichissant.

Je remercie les différents relecteurs, qui, à des degrés divers, ont chassé les fautes d'orthographes de ce mémoire, faisant ainsi preuve d'un grand courage !

Merci à ceux qui, par leur amitié et les moments inoubliables qu'ils m'ont faits vivre, avant ou pendant cette thèse, m'ont apporté un certain équilibre.

Ils ont eu un rôle déterminant ! Je pense par exemple (mais pas seulement) à mes amis d'enfance Arnaud, Céline, Estelle, Guillaume, ou encore aux joyeux athlètes du Paris Jean Bouin.

Isabelle, mon frère, mes parents et l'ensemble de ma grande famille m'ont toujours apporté un soutien absolument indéfectible. Je les remercie pour cela et pour le reste...

Introduction

De la mécanique classique à la topologie symplectique

Comme de nombreux domaines des mathématiques, la topologie symplectique tire ses origines de la physique, et plus précisément de la mécanique classique.

La mécanique hamiltonienne est issue des travaux de Lagrange à la fin du 18^{e} siècle, et de Hamilton au début du 19^{e} siècle. Il s'agit d'une reformulation des équations établies par Newton au 17^{e} siècle. Les équations du mouvement y sont écrites dans un *espace des phases* à $2n$ dimensions, ayant pour coordonnées (q, p), où $q = (q_1, \ldots, q_n)$ repère la position, et $p = (p_1, \ldots, p_n)$ la quantité de mouvement. La dynamique est ainsi décrite par les *Équations de Hamilton* :

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

où H est une fonction, dite *hamiltonienne*, définie sur l'espace des phases.

Par exemple, le mouvement d'un point matériel dans un champ de potentiel $V(q)$, que la mécanique newtonienne décrivait par l'équation bien connue

$$m\ddot{q} = -\nabla V(q),$$

satisfait, si l'on pose $p = \dot{q}$, aux équations de Hamilton pour la fonction hamiltonienne $H(q, p) = \frac{1}{2m}|p|^2 + V(q)$. Celle-ci représente alors l'énergie totale, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

Les équations de Hamilton déterminent un mouvement du système étudié, c'est-à-dire une transformation de l'espace des phases. Lorsque ce dernier est de dimension 2, il est facile de voir que cette transformation préserve l'aire orientée. En dimension quelconque, on a une propriété analogue, qui s'exprime en termes mathématiques par : *le flot engendré par les équations de Hamilton préserve la forme différentielle* $\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$.

La forme ω_0 donne une *structure symplectique* à l'espace des phases, qui sera ainsi, en général, une *variété symplectique*, c'est-à-dire une variété munie d'une 2-forme différentielle localement équivalente à ω_0. Pour bien comprendre la dynamique hamiltonienne, il est utile d'étudier d'une part les

variétés symplectiques, et d'autre part, pour chacune d'entre elles, le groupe des *symplectomorphismes*, c'est-à-dire des transformations de l'espace des phases qui préservent la structure symplectique. Ceci nous mène à la topologie symplectique...

Rigidité et continuité en topologie symplectique

Si la topologie symplectique se développe dès les années 60, notamment sous l'impulsion de V. Arnold, il faut attendre les années 70 pour voir apparaître les premiers phénomènes de rigidité symplectique en dimension plus grande que 2. M. Gromov démontre que sur toute variété symplectique, l'adhérence pour la topologie C^0, du groupe des symplectomorphismes, dans celui des difféomorphismes est soit le groupe des symplectomorphismes lui-même, soit le groupe des difféomorphismes préservant le volume. Y. Eliashberg conclura sur la première possibilité à la fin des années 70 : la propriété d'être un symplectomorphisme est C^0-rigide, bien qu'elle soit par définition une propriété de type C^1.

Dans les années 80 et 90, de réels progrès sont faits dans la compréhension de la rigidité symplectique. Voici quelques étapes importantes, la liste n'étant bien sûr pas exhaustive.

L'énoncé le plus spectaculaire est sans doute le fameux "Non-squeezing Theorem", dû à M. Gromov en 1985. Celui-ci affirme qu'un plongement symplectique ne peut pas envoyer une boule de rayon donné dans un cylindre de rayon plus petit. Ce résultat montre en particulier que les applications préservant la structure symplectique ne se comportent pas comme celles préservant le volume.

Un peu plus tard, I. Ekeland et H. Hofer introduisent les capacités symplectiques, des invariants mesurant la "taille symplectique" des ensembles. Divers exemples sont construits par la suite : capacités d'Ekeland-Hofer, capacité d'Hofer-Zehnder, énergie de déplacement, etc.

En 1990, H. Hofer construit une distance intrigante sur le groupe hamiltonien (le groupe des symplectomorphismes issus de systèmes hamiltoniens). Cette distance est bi-invariante et se comporte continûment vis-à-vis de la topologie C^0 des fonctions hamiltoniennes.

Au début des années 90, C. Viterbo introduit les invariants spectraux (appelés invariants de min-max dans ce mémoire) sur $\mathbb{R}^{2n}$, à partir de la théorie des fonctions génératrices. Ces invariants sont ensuite généralisés par Y.-G. Oh et M. Schwarz à d'autres variétés, à l'aide d'outils sophistiqués issus des courbes pseudo-holomorphes (théorie de Floer notamment). Les invariants spectraux permettent de construire une distance sur l'espace des lagrangiennes isotopes à la section nulle, ainsi qu'une nouvelle distance bi-

invariante sur le groupe hamiltonien (appelée distance de Viterbo dans le cas de $\mathbb{R}^{2n}$). Ils sont également continus pour la topologie C^0, et constituent dorénavant un outil essentiel dans de nombreux de résultats de rigidité symplectique, en particulier ceux faisant intervenir la topologie C^0.

Étudier la continuité en topologie symplectique

On peut invoquer deux motivations pour une étudier la continuité dans l'univers lisse que constitue la topologie symplectique. La première vient bien sûr de la physique. Certains phénomènes physiques, mécaniques notamment, font intervenir des objets non-différentiables (voire même discontinus). C'est par exemple le cas lors de chocs. Il est donc naturel de chercher à construire un cadre général, portant sur des objets non-nécessairement lisses, dans lequel définir la dynamique hamiltonienne. La deuxième motivation réside simplement dans le fait que cette étude permet de mieux comprendre les objets lisses eux-mêmes. Le théorème de Gromov et Eliashberg cité au paragraphe précédent a ainsi amélioré notre compréhension du groupe des symplectomorphismes, en mettant en évidence leur rigidité.

Plusieurs problèmes (se recoupant un peu) se posent.

1. Quelles sont les propriétés de la topologie symplectique ou de la dynamique hamiltonienne qui sont préservées par limites C^0 ?
2. Quelles sont celles qui restent vraies dans un cadre élargi où les objets sont moins réguliers ?
3. Quels invariants symplectiques se comportent de manière continue pour la topologie C^0 ?
4. Peut-on donner un sens aux notions de flot hamiltonien et de représentation hamiltonienne, lorsque les fonctions hamiltoniennes considérées sont supposées seulement continues, voire même discontinues ?
5. Comment ces phénomènes interagissent-ils dans les applications de la topologie symplectique ?

Au cours de cette thèse, nous avons abordé certaines de ces questions. Nous allons maintenant exposer brièvement les résultats obtenus.

Étant donnée une variété symplectique (M, ω), on appelle *fonction hamiltonienne* sur M, toute fonction H de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times M$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans le produit $\mathbb{R} \times M$, la variable dans $\mathbb{R}$ désigne le temps et celle dans M, l'espace. On note $Ham_c(M)$ l'ensemble des fonctions hamiltoniennes H qui

sont à support compact[1]. Le *gradient symplectique* de H est l'unique champ de vecteur X_H, défini par $\iota_{X_H}\omega = dH$. Ce champ de vecteur engendre une isotopie ϕ_H^t, dite *hamiltonienne*. Les difféomorphismes qui sont des temps un d'isotopies hamiltoniennes sont appelés *difféomorphismes hamiltoniens*. Nous avons vu au début de cette introduction, que ceux-ci préservent la forme symplectique. De plus, ils forment un groupe, noté $\mathcal{H}_c(M,\omega)$.

Le complété de l'espace des applications hamiltoniennes

On se place ici sur la variété symplectique $\mathbb{R}^{2n}$, munie de sa forme symplectique standard. Le but ici recherché est de définir une dynamique hamiltonienne dans un cadre très peu régulier. Pour cela, nous introduisons le complété $\overline{\mathcal{H}}$ de l'espace des difféomorphismes hamiltoniens pour la distance de Viterbo, notée γ.

Sur l'ensemble des fonctions hamiltoniennes $Ham_c(\mathbb{R}^{2n})$, on introduit la distance γ_u, définie par

$$\gamma_u(H,K) = \sup_{t\in[0,1]} \gamma(\phi_H^t, \phi_K^t), \quad H,K \in Ham_c(\mathbb{R}^{2n}).$$

On note ensuite $\overline{Ham}$ le complété de l'espace $Ham_c(\mathbb{R}^{2n})$ pour γ_u. L'application qui, à une fonction hamiltonienne, associe l'isotopie hamiltonienne qu'elle engendre, s'étend naturellement en une application

$$\begin{aligned} \overline{Ham} \times \mathbb{R} &\to \overline{\mathcal{H}}, \\ (H,t) &\mapsto \phi_H^t. \end{aligned}$$

On voit que la situation est analogue au cas usuel de la dynamique hamiltonienne. Nous appelons donc *fonction hamiltonienne généralisée* les éléments de $\overline{Ham}$, et *isotopie hamiltonienne généralisée* le chemin de $\overline{\mathcal{H}}$ qui lui est associé par l'application précédente.

Comme dans le cas lisse, à une isotopie hamiltonienne donnée, est associée une unique fonction hamiltonienne généralisée. Par ailleurs, nous démontrons que l'action naturelle des difféomorphismes hamiltoniens sur l'espace $\mathcal{L}$ des sous-variétés lagrangiennes isotopes à la section nulle, s'étend en une action des éléments de $\overline{\mathcal{H}}$ sur l'espace $\overline{\mathcal{L}}$, défini comme le complété de $\mathcal{L}$ pour la distance de Viterbo sur les lagrangiennes.

Ces constructions faites, notre problème est maintenant de comprendre les propriétés des espaces $\overline{\mathcal{H}}$ et $\overline{Ham}$.

[1] c'est-à-dire pour lesquelles il existe un compact $K \subset M$ tel que $H(t,x) = 0$, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \notin K$

Notre résultat principal est un critère de convergence. Nous définissons un invariant $\xi(K)$, associé à toute partie K de $\mathbb{R}^{2n}$. Celui-ci est construit à partir d'une capacité symplectique (mais n'en est pas une), et donne une nouvelle notion de "taille" pour un ensemble de $\mathbb{R}^{2n}$. Par exemple, les sous-variétés fermées de $\mathbb{R}^{2n}$ de dimension au plus $n-2$ ont un ξ nul, les ouverts ont un ξ infini. Nous conjecturons l'énoncé suivant :

Soit K un compact vérifiant $\xi(K) = 0$. Alors, toute suite d'hamiltoniens lisses qui converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^{2n} - K$, converge dans $\overline{Ham}$, et la suite des difféomorphismes hamiltoniens qu'ils engendrent, converge dans $\overline{\mathcal{H}}$.

Nous prouvons cette conjecture dans un cadre assez général (théorème 2.7). Par conséquent, il devient possible de représenter une large classe d'éléments de $\overline{Ham}$ par des fonctions hamiltoniennes discontinues. Nous prouvons ainsi (théorème 2.9) que $\overline{Ham}$ contient toute fonction $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ vérifiant les trois conditions :

1. l'ensemble des points à l'infini, ne dépend pas du temps t et est de *capacité nulle*,
2. H converge vers 0 à l'infini,
3. H est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Notre étude des espaces complétés se poursuit dans le but de comprendre de manière aussi concrète que possible leurs éléments. En premier lieu, nous montrons qu'il est possible de définir, de deux manières différentes, une notion de support pour les éléments de $\overline{\mathcal{H}}$ et $\overline{Ham}$, qui coïncide avec la notion usuelle pour les objets continus. Nous suggérons ensuite différentes approches pour définir l'image d'un ouvert par un élément de $\overline{\mathcal{H}}$. Nous introduisons une notion de *système intégrable généralisé*, et conjecturons que ceux-ci sont tous représentés par des fonctions hamiltoniennes continues. Enfin, nous proposons des approches aux deux problèmes ouverts suivants :

1. quels sont les compacts de $\overline{\mathcal{H}}$ et $\overline{Ham}$?
2. peut-on représenter tous les éléments de $\overline{\mathcal{H}}$ par des applications mesurables ?

Tous les résultats de ce paragraphe sont vrais pour certaines variantes de la distance de Viterbo, définies dans ce mémoire (définitions 1.24, 1.25 et 1.26). Enfin, mentionnons que bien que nous ayons développé notre théorie dans le cadre de $\mathbb{R}^{2n}$, des résultats analogues pourraient probablement être obtenus sur toute variété symplectiquement asphérique, en remplaçant la distance de Viterbo par celle définie par M. Schwarz sur de telles variétés [48].

L'équation d'Hamilton-Jacobi

A la fois comme motivation et comme application de notre étude des complétés $\overline{\mathcal{H}}$ et $\overline{Ham}$, nous étudions les équations d'Hamilton-Jacobi d'évolution. Celles-ci s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \tag{1}$$

où H est une fonction hamiltonienne donnée, et $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto u(t, x)$ est la fonction inconnue, vérifiant une condition initiale $u(0, x) = u_0(x)$. Pour des hamiltoniens lisses, deux types de solutions faibles sont connues : les *solutions de viscosité* et les *solutions variationnelles*. Notre but est de définir et d'étudier les secondes dans le cadre où la fonction hamiltonienne n'est pas régulière.

Pour cela, nous montrons que l'application qui, à un hamiltonien donné H, associe la solution variationnelle de l'équation (1), s'étend de manière naturelle au complété de $Ham_c(\mathbb{R}^{2n})$ pour une variante de la distance de Viterbo (déjà mentionnée au paragraphe précédent). L'image d'un hamiltonien généralisé est une fonction continue, appelée *solution variationnelle généralisée*. Pour tout hamiltonien généralisé, celle-ci existe et est unique.

Nous étudions enfin le lien de ces solutions avec les solutions de viscosité qui existent aussi dans un cadre peu régulier. Nous prouvons que dans certains cas d'hamiltoniens discontinus, mais convexes en p, les deux notions de solution coïncident, généralisant ainsi le cas lisse.

Les résultats de ce paragraphe ainsi que ceux du précédent ont été publiés dans [29].

Les haméomorphismes et le morphisme de Calabi

Dans [44], S. Müller et Y.-G. Oh donnent une autre approche à l'extension des applications hamiltoniennes. Pour cela, ils introduisent sur toute variété symplectique (M, ω) un groupe d'homéomorphismes, appelés *haméomorphismes* comme contraction de "Hamiltonian homeomorphism", et contenant le groupe $\mathcal{H}_c(M, \omega)$ des difféomorphismes hamiltoniens. Ce groupe est en général assez mal compris ; peu d'exemples d'haméomorphismes sont connus. Par ailleurs, sur les variétés ouvertes, une question importante reste ouverte : le morphisme de Calabi

$$Cal : \mathcal{H}_c(M, \omega) \to \mathbb{R}, \ \phi_H^1 \mapsto \int_0^1 \int_M H(t, x)\, \omega^n dt$$

s'étend-il en un morphisme sur le groupe des haméomorphismes de (M, ω) ?

Le but de notre travail est donc double : donner de nouveaux exemples d'haméomorphismes, et chercher des groupes d'homéomorphismes contenant $\mathcal{H}_c(M,\omega)$, auxquels le morphisme de Calabi s'étend.

Il est bien connu que l'on peut décrire certains difféomorphismes hamiltoniens à l'aide de fonctions génératrices de classe C^∞. Nous appliquons cette idée pour construire des exemples d'haméomorphismes de $\mathbb{R}^{2n}$. Nous considérons les homéomorphismes qui peuvent être décrits par des fonctions génératrices particulières, de classe C^1. Nous démontrons que le groupe engendré par ces homéomorphismes contient la composante neutre $Bilip_c^0(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ du groupe des homéomorphismes symplectiques, bilipschitz et à support compact de $\mathbb{R}^{2n}$. Cela nous permet d'obtenir les résultats suivants.

1. *Le groupe $Bilip_c^0(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ est contenu dans le groupe des haméomorphismes.*
2. *Le morphisme de Calabi s'étend en un morphisme de groupe*
$$Bilip_c^0(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)\to\mathbb{R}.$$

Ce résultat avait déjà été obtenu, seulement en dimension 2, par P. Haïssinsky [23], par des méthodes complètement différentes.

La rigidité C^0 du crochet de Poisson

Le problème étudié ici est le comportement du crochet de Poisson pour la topologie C^0. Celui-ci est défini pour deux fonctions H et K par la formule
$$\{H,K\}=\omega(X_H,X_K).$$
Bien que le crochet de Poisson soit construit à partir des différentielles de H et K, il présente une certaine rigidité vis-à-vis de la topologie C^0. Nous étudions la question suivante :

Soient (F_n), (G_n) des suites de fonctions de classe C^∞, telles que
$$F_n\xrightarrow{C^0}F\in C^\infty,\ G_n\xrightarrow{C^0}G\in C^\infty,\ \{F_n,G_n\}\xrightarrow{C^0}H\in C^\infty.$$
A-t-on alors $\{F,G\}=H$?

La réponse à cette question est en général négative. Cependant, nous montrons qu'elle est positive quand les suites de fonctions cachent une structure d'algèbre de Lie, en un certain sens. Nous définissons ainsi la notion de *pseudo-représentation* comme suit. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. Une pseudo-représentation est une suite d'applications linéaires $\rho_n:\mathfrak{g}\to C_c^\infty(M,\omega)$, telle que pour tous $f,g\in\mathfrak{g}$, on ait
$$\{\rho_n(f),\rho_n(g)\}-\rho_n([f,g])\xrightarrow{C^0}0.$$

Nous prouvons :

Si ρ_n converge, c'est-à-dire si pour tout $f \in \mathfrak{g}$, $\rho_n(f)$ converge uniformément vers $\rho(f) \in C_c^\infty(M)$, alors l'application linéaire limite est une représentation, c'est-à-dire

$$\forall f, g \in \mathfrak{g},\ \{\rho(f), \rho(g)\} = \rho([f, g]).$$

Ceci répond bien à la question dans un cas particulier et généralise un résultat antérieur de F. Cardin et C. Viterbo [8].

Une conséquence de ce résultat est que l'on peut étendre la notion usuelle de représentation hamiltonienne, pour définir une notion de *représentation hamiltonienne C^0*. La démonstration repose essentiellement sur l'existence de la distance de Hofer.

Sur certaines variétés symplectiques ouvertes, on peut construire des exemples de fonctions dont les supports ne sont **pas** compacts, formant une pseudo-représentation dont la limite n'est pas une représentation. Grâce à ces exemples, nous prouvons que, sur ces variétés, le groupe de tous les difféomorphismes hamiltoniens (sans hypothèse de support) n'admet pas de distance ayant les mêmes propriétés que la distance de Hofer (bi-invariance et dépendance continue en la topologie C^0 des hamiltoniens)

Enfin, les méthodes employées donnent une nouvelle démonstration dans $\mathbb{R}^{2n}$, du théorème de Gromov et Eliashberg.

Les résultats de cette partie sont contenus dans [30].

Organisation du mémoire

Le chapitre 1 constitue une introduction aux distances de Viterbo (sur les sous-variétés lagrangiennes et les difféomorphismes hamiltoniens) et de Hofer. La première partie du chapitre en donne leur construction. Dans la deuxième partie, nous listons leurs propriétés utiles par la suite. Nous y prouvons aussi une "inégalité de réduction" (proposition 1.44) pour la distance de Viterbo, également utile par la suite.

Le chapitre 2 est consacré à notre étude des complétés des espaces de fonctions hamiltoniennes et de difféomorphismes hamiltoniens.

Le chapitre 3 contient nos travaux sur les équations d'Hamilton-Jacobi d'évolution, que nous exposons après avoir rappelé la construction des solutions variationnelles.

Dans le chapitre 4, nous donnons une introduction au groupe des haméomorphismes et nous construisons des exemples à l'aide de fonctions génératrices. Nous y discutons aussi l'intérêt d'étudier le morphisme de Calabi dans ce cadre, et prouvons notre résultat d'extension.

Dans le chapitre 5, nous étudions la rigidité C^0 du crochet de Poisson. Nous exposons notre résultat sur les pseudo-représentations, puis en donnons quelques conséquences.

Enfin, pour l'agrément du lecteur, nous exposons en annexe un grand nombre de "prérequis" (définitions, résultats classiques et, parfois, leur démonstration). L'annexe A est une introduction rapide aux outils de géométrie symplectique et de dynamique hamiltonienne utilisés dans ce mémoire. Dans l'annexe B, nous démontrons tous les résultats d'existence de fonctions génératrices nécessaires à nos travaux. Dans l'annexe C, nous exposons et démontrons les résultats de la théorie de Morse-Lusternik-Schnirelmann utiles à la construction de la distance de Viterbo. L'annexe D contient, quant à elle, une preuve de la non-dégénérescence de la distance de Hofer.

Chapitre 1

Des distances remarquables

Dans ce chapitre, nous rappelons la construction des distances de Viterbo et de Hofer, ainsi que leurs propriétés principales.

Nous introduisons également quelques variantes de la distance de Viterbo, et démontrons une "inégalité de réduction", permettant de comparer ces nouvelles distances entre elles.

1.1 Définitions

1.1.1 Invariants de "min-max"

Fonctions génératrices

Soient N une variété différentiable, L une sous-variété lagrangienne de son espace cotangent T^*N, E un espace vectoriel de dimension finie et $S : N \times E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. On suppose que S est quadratique à l'infini, c'est-à-dire qu'il existe une forme quadratique Q sur E, non-dégénérée, et un compact K de $N \times E$, tel que si $(x;\xi) \notin K$, alors $S(x;\xi) = Q(\xi)$.

Définition 1.1. *On dit que S est une* fonction génératrice quadratique à l'infini *ou* f.g.q.i. *de L si celle-ci peut s'écrire*

$$L = \left\{ (x,p) \in T^*N \mid \exists \xi \in E, \frac{\partial S}{\partial \xi}(x,\xi) = 0 \text{ et } \frac{\partial S}{\partial x}(x,\xi) = p \right\}. \tag{1.1}$$

Lorsque l'espace E est trivial, la fonction S sera appelée *fonction génératrice admissible*. Nous ferons peu référence à ce cas particulier dans ce chapitre, mais il interviendra de manière récurrente dans le chapitre 4.

REMARQUE 1.2. D'une manière générale, toute fonction lisse $S : N \times E \to \mathbb{R}$, où N est variété différentiable et E un espace vectoriel de dimension finie, pour laquelle l'application $N \times E \to N \times E^*$, $(x, \xi) \mapsto (x, \frac{\partial S}{\partial \xi}(x, \xi))$ est transverse à $N \times \{0\}$, donne naissance à une sous-variété lagrangienne immergée.

En effet, l'hypothèse de transversalité implique que l'ensemble L défini par la formule 1.1 est une sous-variété immergée de T^*N. Cette sous-variété a de plus la dimension de la base N. Notons $\Sigma_S = \left\{ \xi \in E \mid \frac{\partial S}{\partial \xi}(x, \xi) = 0 \right\}$ et $i_S : \Sigma_S \to T^*N$, $(x, \xi) \mapsto (x, dS(x, \xi)) = (x, \frac{\partial S}{\partial x}(x, \xi))$, de sorte que $L = i_S(\Sigma_S)$. Dans des coordonnées locales $(x, p) \in T^*N$, on peut écrire :

$$i_S^*(dp \wedge dx) = d\, i_S^*(p\, dx) = d\left(\frac{\partial S}{\partial x} dx\right) = d^2 S = 0,$$

ce qui prouve que la forme symplectique s'annule sur L, qui est donc lagrangienne.

Donnons quelques exemples simples mais importants.

EXEMPLE 1.3. La section nulle 0_N admet n'importe quelle forme quadratique non-dégénérée $Q : N \times E \to \mathbb{R}, (x, v) \mapsto Q(v)$ pour fonction génératrice.

EXEMPLE 1.4. Dans le cas où l'espace vectoriel E est trivial, on obtient par cette construction les lagrangiennes qui sont des graphes de différentielles de fonctions sur N.

Cet exemple est important car toute variété lagrangienne qui admet une f.g.q.i. s'écrit comme réduction (cf. lemme A.4) du graphe de la différentielle de sa fonction génératrice. En effet, si L admet une fonction génératrice $S : N \times E \to \mathbb{R}$, on voit facilement qu'elle est la réduction du graphe

$$gr(dS) = \left\{ \left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \xi, \frac{\partial S}{\partial \xi} \right),\ (x, \xi) \in N \times E \right\} \subset T^*(N \times E),$$

par la variété coisotrope $T^*N \times (E \times \{0\})$.

La figure 1.2 (page 20) nous montre les courbes de niveaux d'une f.g.q.i. pour une sous-variété lagrangienne qui n'est pas un graphe.

La question de l'existence et de l'unicité des f.g.q.i. d'une sous-variété lagrangienne donnée se pose naturellement. Le résultat principal d'existence est le suivant [6, 9, 50, 49]. Nous en donnons la preuve dans le cas de $\mathbb{R}^{2n}$, en annexe (B.1).

Théorème 1.5 (Chaperon, Sikorav)**.** *Si L est une sous-variété lagrangienne admettant une f.g.q.i. et si ϕ est un difféomorphisme hamiltonien à support compact, alors la lagrangienne $\phi(L)$ admet une f.g.q.i..*

La question de l'unicité, quant à elle, a été résolue par C. Viterbo [57] (voir aussi [54]) en introduisant les notions suivantes.

Définition 1.6. *Soient $S_1 : N \times E_1 \to \mathbb{R}$, $S_2 : N \times E_2 \to \mathbb{R}$ deux f.g.q.i.. On dira que S_1 et S_2 sont* équivalentes *s'il existe un isomorphisme de fibré $\Phi : N \times E_1 \to N \times E_2$ et un réel C tel que $S_2 \circ \Phi = S_1 + C$.*

Soient $S_1 : N \times E_1 \to \mathbb{R}$ une f.g.q.i. et $q : E_2 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée. Alors, $S_2 : N \times E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$, donnée par $S_2(x, \xi_1, \xi_2) = S_1(x, \xi_1) + q(\xi_2)$ est appelée stabilisation *de S_1.*

On vérifie aisément que si S_2 est équivalente à S_1 ou en est une stabilisation, alors S_2 engendre la même sous-variété lagrangienne que S_1. L'unicité des f.g.q.i. se formule alors ainsi :

Théorème 1.7 (Viterbo [57], Théret [54])**.** *Si S_1 et S_2 sont des f.g.q.i. qui engendrent la même sous-variété lagrangienne $L \subset T^*N$ et si L est une isotopie hamiltonienne de la section nulle, alors, éventuellement après stabilisation et ajout d'une constante, S_2 est équivalente à S_1.*

On notera dorénavant $\mathcal{L}(T^*N)$, l'espace des sous-variétés lagrangiennes qui sont l'image de la section nulle 0_N par un difféomorphisme hamiltonien à support compact.

Remarque 1.8. Un des intérêts majeurs des fonctions génératrices réside dans le fait suivant, qui résulte de manière immédiate des définitions :

Soit L une sous-variété lagrangienne d'un espace cotangent admettant S pour f.g.q.i.. Alors, l'application i_S, définie dans la remarque 1.2, effectue une bijection entre les points critiques de S et les points d'intersection de L avec la section nulle du fibré cotangent.

L'étude des points d'intersection de L avec la section nulle — qui est un cas particulier du problème général d'intersection lagrangienne — se ramène ainsi à l'étude de points critiques. C'est ce problème et cette remarque qui ont motivé l'introduction des invariants dont nous allons parler maintenant.

Définition des invariants

Rappelons la construction des valeurs critiques de min-max "homologique". Nous renvoyons le lecteur à l'annexe C pour plus de détails. Soient

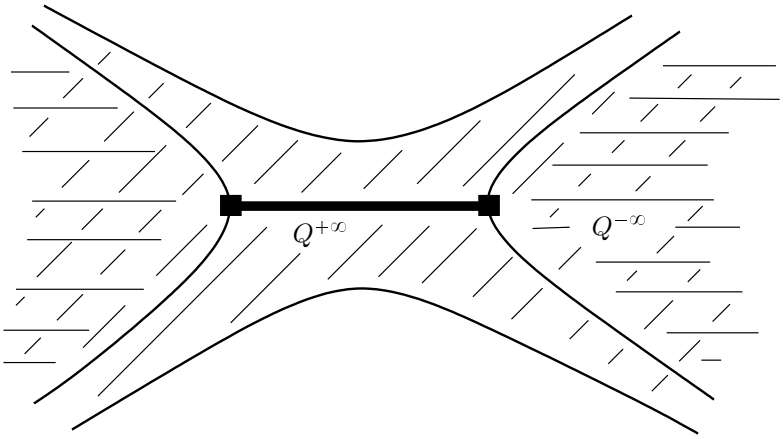


FIG. 1.1 – Équivalence d'homotopie $(Q^{+\infty}, Q^{-\infty}) \simeq (B, \partial B)$. Sur le dessin, l'espace négatif E^- est de dimension 1 et est horizontal.

X une variété différentiable et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 vérifiant une certaine condition de compacité, appelée condition de Palais-Smale (cf. définition C.1). On note $f^\lambda = \{x \in X \mid f(x) \leqslant \lambda\}$ les sous-niveaux de f. Alors pour deux valeurs régulières $a < b$ de f, on peut associer à toute classe de cohomologie non nulle $u \in H^*(f^b, f^a)$, le réel

$$c(u, f) = \inf\{\lambda \in]a, b[\mid u \text{ est non nul dans } H^*(f^\lambda, f^a)\}.$$

Les nombres $c(u, f)$ sont des valeurs critiques de f, car la cohomologie (et donc la topologie) des ensembles f^λ change au passage du niveau $\lambda = c(u, f)$ (cf. [41] ou l'annexe C).

Suivant [57], nous allons appliquer cette construction aux fonctions génératrices pour définir des invariants associés à des sous-variétés lagrangiennes. Soit donc L une lagrangienne admettant une f.g.q.i. S. A l'infini, celle-ci coïncide avec une forme quadratique non-dégénérée Q sur un espace vectoriel E. L'espace E admet une décomposition $E^+ \oplus E^-$ en espaces positifs et négatifs pour Q.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour c assez grand, le type d'homotopie des paires (S^c, S^λ) et (S^λ, S^{-c}) ne dépend pas de c et on les notera donc (S^∞, S^λ) et $(S^\lambda, S^{-\infty})$. Il existe alors un isomorphisme $T : H^*(N) \simeq H^*(S^\infty, S^{-\infty})$.

En effet, $S^{\pm\infty} = N \times Q^{\pm\infty}$. De plus, si B est une boule de E^-, de bord ∂B, la paire $(Q^\infty, Q^{-\infty})$ est homotopiquement équivalente à la paire $(B, \partial B)$ (cf. [42] et la figure 1.1). On a donc par la formule de Künneth

$$H^*(S^\infty, S^{-\infty}) \simeq H^*(N) \otimes H^*(B, \partial B) \simeq H^*(N),$$

cette dernière équivalence étant donnée par l'isomorphisme de Thom appliqué au fibré trivial $N \times E^- \to N$.

Comme les f.g.q.i. vérifient la condition de Palais-Smale, on peut définir nos invariants de la manière suivante.

Définition 1.9 (Viterbo [57]). *Supposons N fermée. Soient L une lagrangienne admettant une f.g.q.i. S et $u \in H^*(N) - \{0\}$.*

$$c(u, L) = c(T(u), S) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, T(u) \text{ est non nul dans } H^*(S^\lambda, S^{-\infty})\}.$$

Remarque 1.10. On vérifie aisément que la quantité $c(T(u), S)$ reste inchangée si l'on remplace S par une stabilisation ou par une autre f.g.q.i. qui lui est équivalente. Par conséquent, le théorème 1.7 implique que $c(u, L)$ ne dépend pas du choix de la fonction génératrice, à constante additive près.

Nous pouvons regrouper quelques propriétés de ces nombres dans la proposition suivante.

Proposition 1.11 (Viterbo [57]). *Soit $L \subset T^*N$ admettant une f.g.q.i. S, avec N fermée.*

1. *Les nombres $c(u, L)$ sont des valeurs critiques de S.*
2. *Si $u, v \in H^*(N) - \{0\}$, il existe deux points $x_u, x_v \in L \cap 0_N$, tels que pour tout chemin c reliant x_u à x_v dans L, on ait*

$$c(u, L) - c(v, L) = \int_c \lambda,$$

   où λ est la 1-forme de Liouville.
3. *Si $u, v \in H^*(N)$, avec $u \neq 0$ et $u \cup v \neq 0$,*

$$c(u \cup v, L) \geqslant c(u, L).$$

   Si $c(u \cup v, L) = c(u, L)$, alors v induit une forme non nulle dans $H^*(U)$, pour tout voisinage U du niveau $c(u \cup v, L) = c(u, L)$ de S.
4. *Si (ψ_t) est un flot hamiltonien qui préserve la section nulle 0_N, alors pour tout t, et toute classe $u \in H^*(N) - \{0\}$,*

$$c(u, \psi_t(L)) = c(u, L).$$

5. *Si* 1 *et* μ *sont les générateurs respectifs de* $H^0(N)$ *et* $H^n(N)$*, alors,*

$$c(\mu, \overline{L}) = -c(1, L),$$

où $\overline{L} = \{(x, -p) \,|\, (x, p) \in L\}$.

6. *Pour tous* $u, v \in H^*(N)$*, et toutes lagrangiennes* L_1 *et* L_2*,*

$$c(u \cup v, L_1 \sharp L_2) \leqslant c(u, L_1) + c(v, L_2),$$

où $L_1 \sharp L_2 = \{(x, p_1 + p_2) \,|\, (x, p_1) \in L_1,\ (x, p_2) \in L_2\}$.

REMARQUE 1.12. L'ensemble $L_1 \sharp L_2$ n'est bien sûr en général pas une sous-variété, mais on vérifie sans difficulté qu'il peut être décrit, au sens de la définition 1.1, par la f.g.q.i.

$$S_1 \sharp S_2 : N \times (E_1 \times E_2) \to \mathbb{R},\ (x, \xi_1, \xi_2) \mapsto S_1(x, \xi_1) + S_2(x, \xi_2),$$

où pour $i = 1, 2$, $S_i : N \times E_i \to \mathbb{R}$ est une f.g.q.i. de L_i. On peut donc lui appliquer la définition 1.9 pour obtenir des nombres $c(u, L_1 \sharp L_2)$.

REMARQUE 1.13. Voici quelques éléments de démonstration de la proposition 1.11.

La première propriété est claire. En vertu de la remarque 1.8, la première propriété implique l'existence des deux points d'intersection x_u et x_v de la deuxième propriété. L'égalité $c(u, L) - c(v, L) = \int_c \lambda$ résulte alors du fait que sur L, la forme de Liouville n'est autre que dS.

La troisième propriété résulte de la théorie de Lusternik-Schnirelmann et en particulier du corollaire C.11, prouvé en annexe.

La quatrième propriété repose sur le lemme de Sard, d'après lequel l'ensemble des valeurs critiques des fonctions génératrices est totalement discontinu et sur un argument de continuité.

Nous renvoyons le lecteur à [57], pour la démonstration complète.

REMARQUE 1.14. Notons que l'énoncé suivant résulte de la troisième propriété de la proposition 1.11.

Pour toute lagrangienne $L \in \mathcal{L}(T^*N)$*, le nombre de points d'intersection de* L *avec la section nulle* 0_N *est au moins* $cl(N) + 1$*, où* $cl(N)$ *est le plus grand entier tel qu'il existe* $u_i \in H^*(N) - H^0(N)$*,* $i \in \{1, \ldots, k\}$*, pour lesquels* $u_1 \cup \ldots \cup u_k \neq 0$.

Ce théorème est dû à Hofer [24]. Il est à comparer avec la remarque C.10 qui se trouve en annexe.

Exemples

Bien que les invariants $c(u, L)$ soient rarement calculables explicitement, nous en donnons ici quelques exemples. Commençons par le plus simple d'entre eux : celui où la sous-variété lagrangienne est un graphe.

EXEMPLE 1.15. Si $L \subset T^*N$ est le graphe de la différentielle d'une fonction $f : M \to \mathbb{R}$, les invariants $c(u, L)$ sont exactement les valeurs critiques de min-max de f. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe C.2 pour quelques exemples de calculs de ces nombres.

On notera en particulier que si 1 et μ sont les générateurs respectifs de $H^0(N)$ et $H^{\dim N}(N)$, alors

$$c(1, gr(df)) = \min f,$$
$$c(\mu, gr(df)) = \max f.$$

Donnons maintenant un exemple un peu plus élaboré.

EXEMPLE 1.16. On suppose que la variété de base est $N = \mathbb{S}_1$, et l'on considère la lagrangienne L représentée sur la figure 1.2. Si l'aire algébrique délimitée par L et par la section nulle est nulle, alors L est exacte et même isotope à la section nulle. Elle admet donc une f.g.q.i. S. Dans cet exemple, l'espace "fibre" E de S est de dimension 1, de sorte que l'on peut représenter les niveaux de S, comme sur la figure 1.2. On voit en particulier, que S admet un minimum global, un maximum local, et deux points selles.

Une fois les niveaux de S connus, il est très facile de calculer les invariants $c(u, L)$.

Lorsque l'on fait décroître c, et que l'on regarde l'homologie de la paire $(S^c, S^{-\infty})$, on voit que la classe d'homologie $\mu \in H^1(N)$ s'annule au passage du deuxième point selle (elle ne s'annule au passage ni du maximum local, ni du premier point selle). Avec les notations de la proposition 1.21, on en déduit que l'on peut situer le point x_μ comme sur la figure 1.2.

Si l'on continue à faire décroître c, on s'aperçoit que la classe $1 \in H^0(N)$ ne s'annule qu'au passage du point minimum. On peut donc placer x_1 comme sur la figure 1.2.

Notons maintenant (x_1, ξ_1) et (x_μ, ξ_μ) les points critiques de S associé aux points x_1 et x_μ. On a alors :

$$c(1, L) = S(x_1, \xi_1),$$
$$c(\mu, L) = S(x_\mu, \xi_\mu).$$

On voit en particulier que $c(\mu, L) - c(1, L) = S(x_\mu, \xi_\mu) - S(x_1, \xi_1)$ correspond à l'aire de la partie hachurée sur la figure 1.2.

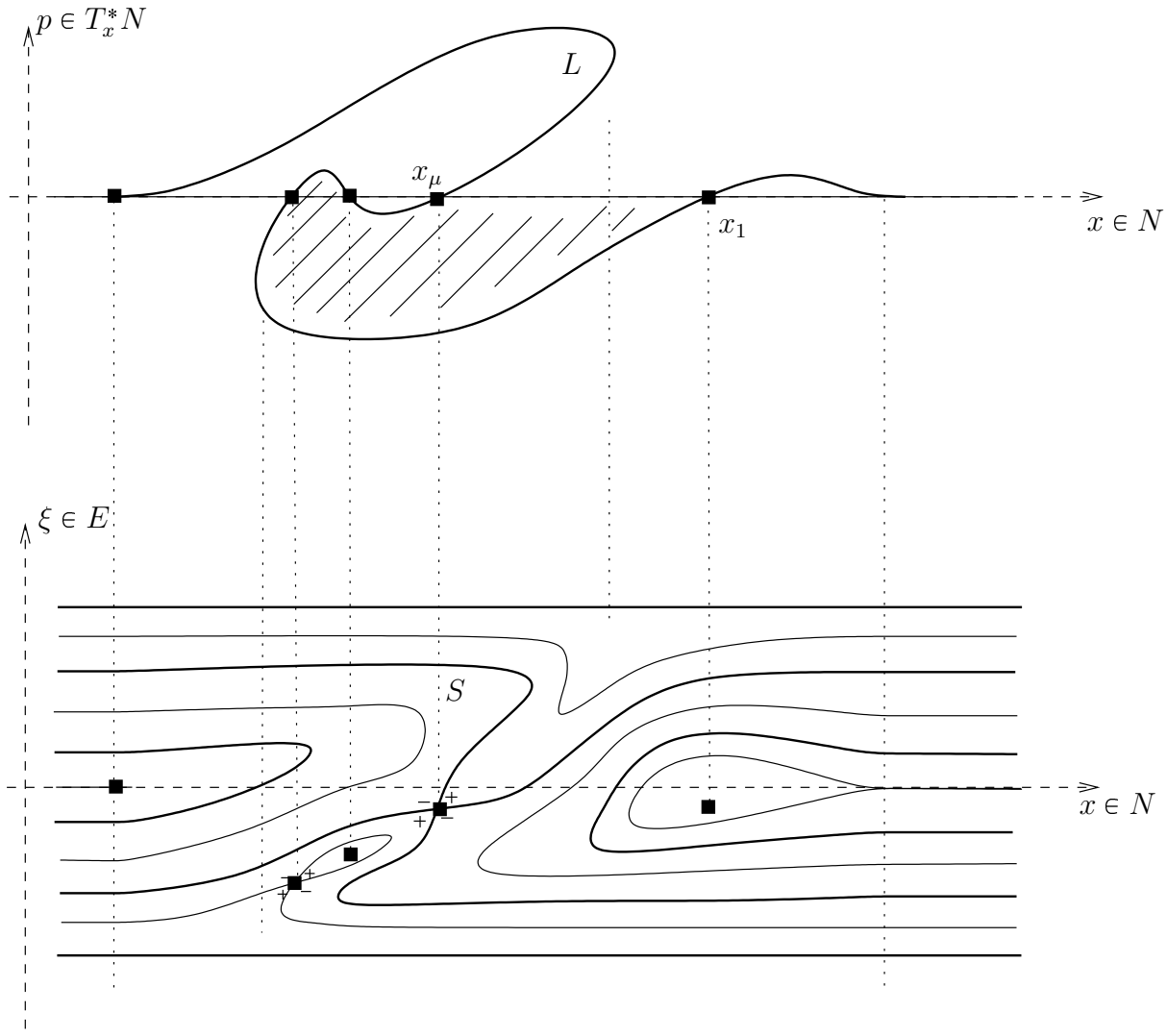


FIG. 1.2 – Niveaux de la fonction génératrice S, d'une lagrangienne L. Ici, la variété base N est un cercle $\mathbb{S}_1$, et l'espace "fibre" de la fonction génératrice E est de dimension 1. On voit clairement la correspondance entre les points intersection de L avec la section nulle et les points critiques de S.

1.1.2 Distance de Viterbo

Distance de Viterbo sur les lagrangiennes

Nous allons utiliser les invariants de "min-max" construits dans la section 1.1.1 pour définir une distance sur l'espace $\mathcal{L}(T^*N)$ des sous-variétés lagrangiennes isotopes à la section nulle.

On dira qu'une variété N admet une compactification lisse, s'il existe une variété différentiable fermée $\hat{N}$, et un plongement $N \to \hat{N}$ tel que N est dense dans $\hat{N}$. Par exemple, $\mathbb{R}^{2n}$ admet la sphère $\mathbb{S}_{2n}$ pour compactification lisse.

Proposition 1.17 (Viterbo [57])**.** *Supposons que N est fermée et de dimension n. Notons 1 et μ les générateurs respectifs de $H^0(N)$ et $H^n(N)$. On pose alors*

$$\gamma(L) = c(\mu, L) - c(1, L).$$

Si N admet une compactification lisse $\hat{N}$ et si L coïncide avec la section nulle hors d'un compact, alors L se prolonge en une sous-variété lagrangienne $\hat{L}$ de $T^*\hat{N}$, admettant une f.g.q.i., et l'on pose alors

$$\gamma(L) = c(\mu, \hat{L}) - c(1, \hat{L}).$$

Les réels $\gamma(L)$ ne dépendent pas du choix de la fonction génératrice, sont positifs, et sont non-dégénérés : $\gamma(L) = 0$ implique que L coïncide avec la section nulle.

Démonstration — Le fait que $\gamma(L)$ est bien défini résulte de la remarque 1.10. Son caractère positif et non dégénéré n'est qu'une conséquence de la troisième propriété de la proposition 1.11. □

Rappelons que pour deux lagrangiennes L_1 et L_2 isotopes à la section nulle, on peut considérer leur composition

$$L_1 \sharp \overline{L_2} = \{(x, p_1 - p_2) \,|\, (x, p_1) \in L_1,\, (x, p_2) \in L_2\},$$

et lui appliquer les invariants $c(u, L)$ (remarque 1.12).

Proposition 1.18 (Viterbo [57])**.** *Soient L_1 et L_2 deux lagrangiennes isotopes — au moyen d'une isotopie hamiltonienne à support compact — à la section nulle du fibré cotangent T^*N d'une variété différentiable N supposée fermée ou admettant une compactification lisse. Alors, l'application $\gamma : \mathcal{L}(T^*N) \times \mathcal{L}(T^*N) \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\gamma(L_1, L_2) = \gamma(L_1 \sharp \overline{L}_2),$$

est une distance sur $\mathcal{L}(T^*N)$*, appelée* distance de Viterbo. *De plus, pour tout difféomorphisme hamiltonien* ψ *à support compact,*

$$\gamma(\psi(L_1), \psi(L_2)) = \gamma(L_1, L_2).$$

Les exemples 1.15 et 1.16 donnent la valeur de γ dans des cas simples.

Distance de Viterbo sur les difféomorphismes hamiltoniens

Nous allons utiliser la distance γ construite sur l'espace des lagrangiennes isotopes à la section nulle pour obtenir une distance sur les groupes $\mathcal{H}_c(U)$ des difféomorphismes hamiltoniens de $\mathbb{R}^{2n}$, dont le support est compact et inclus dans un ouvert U.

Introduisons quelques notations. Soit $\psi \in \mathcal{H}_c(U)$. Son graphe Γ_ψ est une sous variété lagrangienne de $\overline{\mathbb{R}^{2n}} \times \mathbb{R}^{2n}$ — qui désigne, rappelons-le, la variété $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ munie de la forme symplectique $(-\omega) \oplus \omega$ —, et coïncide hors d'un compact avec la diagonale $\Delta_{2n} = \{(x, x) \,|\, x \in \mathbb{R}^{2n}\}$. En identifiant $\overline{\mathbb{R}^{2n}} \times \mathbb{R}^{2n}$ et $T^*\Delta_{2n}$ au moyen de l'application linéaire symplectique

$$\Phi : (q, p, Q, P) \mapsto \left(\frac{q+Q}{2}, \frac{p+P}{2}; P - p, Q - q \right),$$

on voit que l'image $\widetilde{\Gamma_\psi}$ de Γ_ψ s'identifie à la section nulle de $T^*\Delta_{2n}$, en dehors d'un compact. On peut maintenant compactifier la diagonale Δ_{2n} en une sphère $\mathbb{S}_{2n}$, et appliquer les constructions des paragraphes précédents à la compactification de $\widetilde{\Gamma_\psi}$.

Remarque 1.19. D'après la proposition B.7, ψ admet une fonction génératrice quadratique à l'infini. Il est facile de vérifier que cette fonction est une f.g.q.i. de $\widetilde{\Gamma_\psi}$. Les points critiques de la f.g.q.i. correspondent aux intersections du graphe de ψ avec la diagonale, c'est-à-dire aux points fixes de ψ.

Définition 1.20 (Viterbo [57])**.** *On pose*

$$c_+(\psi) = c(\mu, \widetilde{\Gamma_\psi}),$$

$$c_-(\psi) = c(1, \widetilde{\Gamma_\psi}),$$
$$\gamma(\psi) = c_+(\psi) - c_-(\psi).$$

Donnons quelques propriétés de ces nombres. La plupart ne sont que la traduction des propriétés obtenues dans le cas des lagrangiennes. On rappelle (cf. annexe A.2.4) que l'action hamiltonienne d'un point fixe x_0 d'un difféomorphisme hamiltonien ϕ_H^1, engendré par un hamiltonien H, ne dépend pas du choix du hamiltonien, et est donnée par :

$$\mathcal{A}_H(x_0) = \mathcal{A}(\psi, x_0) = \int_{\{\phi_H^t(x_0)\}} \lambda - H dt,$$

où λ désigne la 1-forme de Liouville.

Proposition 1.21 (Viterbo [57]). *Soit $\psi \in \mathcal{H}_c(U)$.*

1. *Si S est une f.g.q.i. de ψ (cf. proposition B.7), $c_-(\psi)$ et $c_+(\psi)$ sont des valeurs critiques de S.*
2. *Il existe deux points fixes x_+, x_- de ψ dont $\gamma(\psi)$ est la différence des actions hamiltoniennes :*

$$\gamma(\psi) = \mathcal{A}(\psi, x_+) - \mathcal{A}(\psi, x_-).$$

3. *On a $\gamma(\psi) \geqslant 0$. De plus, $\gamma(\psi) = 0$ si et seulement si ψ est l'identité.*
4. *Pour tout difféomorphisme hamiltonien $\phi \in \mathcal{H}_c(U)$, $c_\pm(\phi^{-1}\psi\phi) = c_\pm(\psi)$ et donc $\gamma(\phi^{-1}\psi\phi) = \gamma(\psi)$.*
5. *$c_+(\psi^{-1}) = -c_-(\psi)$ donc $\gamma(\psi^{-1}) = \gamma(\psi)$.*
6. *Si ϕ est un autre élément de $\mathcal{H}_c(U)$, alors*

$$\begin{aligned} c_+(\phi \circ \psi) &\leqslant c_+(\phi) + c_+(\psi), \\ c_-(\phi \circ \psi) &\geqslant c_-(\phi) + c_-(\psi), \\ \gamma(\phi \circ \psi) &\leqslant \gamma(\phi) + \gamma(\psi). \end{aligned}$$

7. *Si $H \leqslant K$ sont deux fonctions hamiltoniennes, alors $c_-(H) \leqslant c_-(K)$ et $c_+(H) \leqslant c_+(K)$.*

La plupart de ces propriétés ne sont que la traduction des propriétés analogues pour les sous-variétés lagrangiennes, exprimées dans la proposition 1.11. Nous renvoyons le lecteur à [57] pour les autres propriétés et pour les détails.

De la proposition 1.21, on tire l'existence d'une distance remarquable sur le groupe $\mathcal{H}_c(U)$.

Proposition 1.22 (Viterbo [57]). *L'application $\gamma : \mathcal{H}_c(U) \times \mathcal{H}_c(U) \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\gamma(\phi, \psi) = \gamma(\psi^{-1}\phi),$$

est une distance sur $\mathcal{H}_c(U)$.

Elle est de plus bi-invariante *: pour tous* $\phi, \psi, \chi \in \mathcal{H}_c(U)$,

$$\gamma(\chi\phi, \chi\psi) = \gamma(\phi\chi, \psi\chi) = \gamma(\phi, \psi).$$

Elle est appelée distance de Viterbo.

Les exemples où l'on sait calculer explicitement la distance de Viterbo, sont assez rares. On sait cependant la décrire dans un voisinage C^1 de l'identité (cf. proposition 1.37). En général, on la calcule en commençant par dresser la liste des valeurs critiques de la fonctionnelle d'action. Lorsque c'est possible, on exclut de la liste certaines valeurs, rendues impossibles par les propriétés connues de c_+ ou c_-. Dans les bons cas, il ne reste que deux valeurs possibles, qui sont précisément celles que prennent c_+ et c_-.

REMARQUE 1.23. La distance de Viterbo n'est définie que sur le groupe hamiltonien de $\mathbb{R}^{2n}$. Cependant, sur certaines variétés symplectiques plus générales, on peut construire une distance tout à fait analogue, en remplaçant la théorie de Morse sur les fonctions génératrices par la théorie de Floer. M. Schwarz a construit une telle distance sur les variétés symplectiquement asphériques, c'est-à-dire telles que $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle = 0$ (cf. [48]).

Une variante

Nous allons introduire dans la suite quelques variantes possibles de la distance de Viterbo. Une motivation pour les introduire est par exemple de formuler plus simplement notre résultat sur l'équation d'Hamilton-Jacobi, présenté dans la partie 3. Voici une première variante.

Définition 1.24 (Cardin-Viterbo [8])**.** *Pour tous difféomorphismes hamiltoniens* ϕ *et* ψ *à supports compacts contenus dans un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^{2n}$*, on pose*

$$\tilde{\gamma}(\phi, \psi) = \sup\{\gamma(\phi(L), \psi(L)) \mid L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})\}.$$

L'application $\tilde{\gamma} : \mathcal{H}_c(U) \times \mathcal{H}_c(U) \to \mathbb{R}$ *ainsi définie est une distance sur* $\mathcal{H}_c(U)$.

La non-dégénérescence et l'inégalité triangulaire vérifiées par $\tilde{\gamma}$ résultent du fait que la distance de Viterbo sur les lagrangiennes (proposition 1.18) vérifie ces mêmes propriétés. Nous prouverons dans la partie 1.2.5 que cette nouvelle distance est plus petite que la distance de Viterbo γ.

D'autres variantes sur l'espace des fonctions hamiltoniennes

On peut utiliser les distances construites sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens pour construire d'autres distances sur l'espace $Ham_c(U)$ des fonctions hamiltoniennes (dépendant du temps), dont le support (à tout temps) est contenu dans un compact d'un ouvert U de $\mathbb{R}^{2n}$.

Les deux premières sont faciles à définir.

Définition 1.25. *Pour tous $H, K \in Ham_c(U)$, on pose*

$$\gamma_u(H,K) = \sup\{\gamma(\phi_H^t, \phi_K^t) \,|\, t \in [0,1]\}$$

et

$$\tilde{\gamma}_u(H,K) = \sup\{\tilde{\gamma}(\phi_H^t, \phi_K^t) \,|\, t \in [0,1]\}.$$

Les applications $\gamma_u, \tilde{\gamma}_u : Ham_c(U) \times Ham_c(U) \to \mathbb{R}$ sont des distances sur $Ham_c(U)$, invariantes sous l'action de $\mathcal{H}_c(U)$ sur $Ham_c(U)$ par composition à droite.

Le "u" en indice signifie "uniforme". On peut définir d'autres distances en ayant recours à des procédés de suspension. Le principe est d'ajouter deux dimensions à notre espace en associant à toute fonction hamiltonienne donnée $H \in Ham_c(U)$, l'une des deux suspensions suivantes, définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2+2n}$:

$$\hat{H}(s;t,\tau,x) = \tau + H(t,x),$$

$$\check{H}(s;t,\tau,x) = tH(st,x).$$

Les fonctions $\hat{H}$ et $\check{H}$ ainsi définies sont des fonctions hamiltoniennes sur $\mathbb{R}^{2n+2}$. Avec ces notations, la nouvelle variable temporelle est s, l'ancienne t devenant une variable d'espace. On voit en particulier que $\hat{H}$ est autonome. L'idée est ensuite de définir des distances "suspendues" en posant $\hat{\gamma}(H,K) = \gamma(\hat{H},\hat{K})$ et $\check{\gamma}(H,K) = \gamma(\check{H},\check{K})$. Cependant, comme $\hat{H}$ et $\check{H}$ ne sont pas à support compact, il faut utiliser une définition légèrement plus subtile.

Définition 1.26. *Soit ρ une fonction réelle définie sur $[0,+\infty)$, supposée positive, lisse, décroissante, à support dans [0,1], plate en 0 et telle que $\rho(0) = 1$. Pour tout entier naturel α et tout réel t, on pose $\rho_\alpha(t) = 1$ si $-\alpha \leqslant t \leqslant \alpha$, et $\rho_\alpha(t) = \rho(|t| - \alpha)$ sinon.*

On note $\hat{H}_\alpha$ et $\check{H}_\alpha$ les fonctions hamiltoniennes sur $\mathbb{R}^{2+2n}$ définies par

$$\hat{H}_\alpha(s;t,\tau,x) = \tau + \rho_\alpha(\tau)H(t,x),$$

et

$$\check{H}_\alpha(s;t,\tau,x) = \rho_\alpha(\tau)tH(st,x).$$

Pour tout $H, K \in Ham$, on pose

$$\hat{\gamma}(H,K) = \limsup_{\alpha \to +\infty} \gamma_u(\hat{H_\alpha}, \hat{K_\alpha}),$$

et

$$\check{\gamma}(H,K) = \limsup_{\alpha \to +\infty} \gamma(\phi_{\check{H_\alpha}}, \phi_{\check{K_\alpha}}).$$

L'hamiltonien $\hat{H_\alpha}$ n'est pas à support compact, mais pour deux hamiltoniens H et K, la composition $\overline{\hat{H_\alpha} \sharp \hat{K_\alpha}}$ l'est. Donc $\hat{\gamma}$ est bien définie.

REMARQUE 1.27. Bien qu'à supports non compacts, les hamiltoniens $\hat{H}$ et $\check{H}$ ont des flots qui s'expriment de manière assez simple en fonction de celui de H. En effet, un calcul sans difficulté montre que

$$\phi^s_{\hat{H}}(t,\tau,x) = (t+s\,,\, \tau + H(t,x) - H(t+s, (\phi_H)^{t+s}_t(x))\,,\, (\phi_H)^{t+s}_t(x)), \tag{1.2}$$

$$\phi^s_{\check{H}}(t,\tau,x) = (t\,,\, \tau - sH(st, \phi^{ts}_H(x))\,,\, \phi^{ts}_H(x)). \tag{1.3}$$

Proposition 1.28. *Les applications $\hat{\gamma}, \check{\gamma} : Ham_c(U) \times Ham_c(U) \to \mathbb{R}$ sont des distances sur $Ham_c(U)$, invariantes sous l'action de $\mathcal{H}_c(U)$ sur $Ham_c(U)$ par composition à droite.*

Démonstration — Le fait que $\hat{\gamma}$ et $\check{\gamma}$ sont bien définies (c'est-à-dire finies), résulte de la proposition 1.39 et du fait que l'énergie de déplacement e vérifie $e(\mathbb{R}^2 \times V) = e(V)$ (cf. remarque 1.41). En effet, si V est un ouvert contenant le support de H, $\mathbb{R}^2 \times V$ contient les supports de $\hat{H_\alpha}$ et $\check{H_\alpha}$, pour tout α. L'inégalité triangulaire vérifiée par γ implique les inégalités triangulaires pour $\hat{\gamma}, \check{\gamma}$. L'axiome de séparation résulte quant à lui des inégalités $\gamma \leqslant \hat{\gamma}$ et $\gamma \leqslant \check{\gamma}$ (proposition 1.52). Enfin, la propriété d'invariance par composition à droite est une conséquence directe de la bi-invariance de γ. □

REMARQUE 1.29. En itérant le procédé, on peut définir d'autres distances sur l'espace des fonctions hamiltoniennes.

1.1.3 Distance de Hofer

Il existe une autre distance bi-invariante bien connue sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens à support compact. Il s'agit de la distance de Hofer, dont nous allons rappeler la définition. Contrairement à la distance de Viterbo, elle est définie sur toute variété symplectique.

Définition 1.30 (Hofer [25]). *Soit (M, ω) une variété symplectique. Si $H : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ est une fonction hamiltonienne sur M, engendrant une isotopie (ϕ_H^t), la* norme de Hofer *de H — aussi appelée* longueur de Hofer *de l'isotopie (ϕ_H^t) — est par définition :*

$$\|H\| = \int_0^1 \left(\max_{x \in M} H(t,x) - \min_{x \in M} H(t,x) \right) dt.$$

La distance de Hofer *entre deux difféomorphismes hamiltoniens à support compact ϕ et ψ est alors l'infimum des longueurs des isotopies hamiltoniennes qui les joignent, soit :*

$$d_H(\phi, \psi) = \inf\{ \|H\| \mid H : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R},\ \phi_H^1 = \psi^{-1}\phi \}.$$

Proposition 1.31 (Hofer [25], Polterovich [46], Lalonde-McDuff [35]). *L'application $d_H : \mathcal{H}_c(M) \times \mathcal{H}_c(M) \to \mathbb{R}$ introduite dans la définition 1.30 est une distance bi-invariante.*

Démonstration — L'inégalité triangulaire est facile à obtenir, à l'aide de la formule de composition des hamiltoniens (lemme A.24). La bi-invariance est tout aussi aisée, une fois établie la formule donnant le hamiltonien qui engendre le conjugué d'un flot hamiltonien donné par un difféomorphisme symplectique (lemme A.24 à nouveau).

Il reste à prouver la non-dégénérescence. Cette propriété est en revanche difficile à démontrer. Nous en donnons une preuve complète et aussi élémentaire que possible, dans le cadre de $\mathbb{R}^{2n}$, dans l'annexe D. □

Remarque 1.32. L. Polterovich a démontré que l'on retrouve la distance de Hofer en prenant pour norme de départ

$$\|H\| = \max_{t \in [0,1]} \{ \max_{x \in M} H(t,x) - \min_{x \in M} H(t,x) \}$$

(voir [47], lemme 5.1.C).

1.2 Propriétés et estimations

1.2.1 Comparaison à d'autres topologies

Dans cette partie, nous comparons les distances de Hofer et de Viterbo à des topologies usuelles.

Comparaison avec la distance C^0 des hamiltoniens

Définition 1.33. *Soit d une distance sur le groupe $\mathcal{H}_c(M,\omega)$ des difféomorphismes hamiltoniens à support compact. On dira qu'elle est de type C^{-1}, si l'application*

$$\begin{aligned} Ham_c(M) \times Ham_c(M) &\to \mathbb{R} \\ (H,K) &\mapsto d(\phi_H^1, \phi_K^1) \end{aligned}$$

est continue lorsque l'on munit l'espace des fonctions hamiltoniennes à support compact $Ham_c(M)$ de la distance C^0.

Cette propriété interviendra de manière cruciale dans le chapitre 5.

Proposition 1.34 (Viterbo [57], Hofer [25])**.** *La distance de Viterbo et la distance de Hofer sont de type C^{-1}. Plus précisément, pour tous hamiltoniens H et K, on a*

$$\begin{aligned} \gamma(\phi_H, \phi_K) &\leqslant \|H - K\|_{C^0}, \\ d_H(\phi_H, \phi_K) &\leqslant \|H - K\|_{C^0}. \end{aligned}$$

Du fait de la remarque 1.32, un corollaire immédiat de la proposition 1.34 est :

Corollaire 1.35. *Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$, la distance de Viterbo sur U est plus petite que la distance de Hofer sur U :*

$$\gamma \leqslant d_H.$$

Comparaison avec la distance C^0 des difféomorphismes

Les distances de Hofer et de Viterbo sont aussi contrôlées par la distance C^0 des difféomorphismes, de la manière suivante.

Proposition 1.36 (Viterbo[57], Hofer [28])**.** *Si V est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{2n}$, alors, il existe une constante C dépendante du diamètre de V, telle que pour tous difféomorphismes hamiltoniens ϕ et ψ, à support dans V, on ait*

$$\gamma(\phi,\psi) \leqslant C \cdot d_{C^0}(\phi,\psi) \quad et \quad d_H(\phi,\psi) \leqslant C \cdot d_{C^0}(\phi,\psi),$$

où γ et d_H désignent respectivement les distances de Viterbo et de Hofer sur $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^{2n})$.

Voisinages de l'identité et fonctions génératrices admissibles

Comme l'ont remarqué M. Bialy et L. Polterovich dans [5], les distances de Viterbo et de Hofer sont décrites par la norme C^0 des fonctions génératrices dans un voisinage C^1 de l'identité.

Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des difféomorphismes hamiltoniens ϕ de $\mathbb{R}^{2n}$, à support compact, tels que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^{2n}} \|d\phi_x - Id\| < 1 \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^{2n}} \|d\phi_x^{-1} - Id\| < 1.$$

On rappelle (voir l'annexe B.1 pour plus de détails) que tout élément ϕ de $\mathcal{V}$ est décrit par une *fonction génératrice admissible* S. Autrement dit, il existe une unique fonction lisse $S : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\phi(x,y) = (\xi,\eta) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \xi = x + \frac{\partial S}{\partial \eta}(x,\eta) \\ y = \eta + \frac{\partial S}{\partial x}(x,\eta) \end{cases} .$$

Remarquons au passage que pour de tels difféomorphismes, l'image du graphe de ϕ dans le cotangent de la diagonale, noté $\widetilde{\Gamma_\phi}$ dans la partie 1.1.2, est le graphe de la différentielle dS de la fonction génératrice. On note pour toute fonction f, $osc(f) = \max f - \min f$.

Proposition 1.37 (Bialy-Polterovich [5])**.** *Pour tous éléments ϕ_1 et ϕ_2 de $\mathcal{V}$, admettant des fonctions génératrices admissibles S_1, S_2, alors*

$$\gamma(\phi_1,\phi_2) = d_H(\phi_1,\phi_2) = osc(S_1 - S_2).$$

Pour γ, ce résultat est immédiat. En effet, pour un élément $\phi \in \mathcal{V}$, la lagrangienne $\widetilde{\Gamma_\phi}$ est le graphe de la fonction génératrice admissible associée à ϕ, et l'on peut appliquer l'exemple 1.15.

M. Bialy et L. Polterovich en déduisent une description des géodésiques de ces distances, qui, en l'occurrence, sont identiques que l'on prenne une distance ou l'autre.

1.2.2 Liens avec les capacités symplectiques

Comme on a pu le voir dans les deux paragraphes précédents, on dispose sans trop de difficulté de majorants de ces distances. Cependant, il est en général difficile d'en obtenir des minorants — les fonctions génératrices nous en donnent, mais dans un cadre restreint. Les capacités symplectiques donnent de tels minorants.

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A.3 pour les notions de bases concernant les capacités symplectiques. Les distances et invariants définis dans la partie 1.1 permettent de construire des capacités symplectiques.

Définition 1.38. *1. (Viterbo [57]) Pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^{2n}$, on note $c(U)$ le réel défini par*

$$c(U) = \sup\{c_+(\phi_H) \,|\, \text{Support}(H) \subset U\}.$$

Si V n'est pas ouvert, on pose $c(V) = \inf\{c(U) \,|\, V \subset U\}$.

2. (Viterbo [57]) Pour tout ouvert borné $K \subset \mathbb{R}^{2n}$, on note $\gamma(K)$ le réel défini par

$$\gamma(K) = \inf\{\gamma(\phi) \,|\, \phi(K) \cap K = \varnothing\}.$$

Si V est ouvert non borné, on pose $\gamma(V) = \sup\{\gamma(K) \,|\, K \subset V\}$. Enfin, pour un ensemble quelconque W, on pose $\gamma(W) = \inf\{\gamma(V) \,|\, W \subset V\}$.

3. (Hofer [25]) Pour tout ouvert borné $K \subset \mathbb{R}^{2n}$, on note $e(K)$ le réel défini par

$$e(K) = \inf\{d_H(\phi, Id) \,|\, \phi(K) \cap K = \varnothing\}.$$

Si V est ouvert non borné, on pose $e(V) = \sup\{e(K) \,|\, K \subset V\}$. Enfin, pour un ensemble quelconque W, on pose $e(W) = \inf\{e(V) \,|\, W \subset V\}$. Le réel $e(W)$ est souvent appelé énergie de déplacement *de W.*

Proposition 1.39 (Viterbo [57], Hofer [25])**.** *Les applications c, γ et e, définies sur l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^{2n}$ et à valeur dans $[0, +\infty]$ sont des capacités symplectiques. De plus, elles vérifient les inégalités*

$$c \leqslant \gamma \leqslant e.$$

L'exemple suivant est instructif.

Exemple 1.40. La capacité d'une sphère est la même que celle de la boule qu'elle entoure. Cette propriété est évidente pour les capacités "de déplacement" que sont γ et e. Pour c, elle est moins évidente, mais vraie.

On voit en particulier que la capacité de la réunion de deux ensembles de capacité petite peut ne pas avoir une capacité petite. En effet, la capacité de chaque hémisphère est nulle, alors que celle de leur réunion est strictement positive.

Remarque 1.41. Il n'est pas très difficile de voir que $e(\mathbb{R}^2 \times W) = e(W)$, ceci pour tout ensemble W. Par ailleurs, C. Viterbo a prouvé dans [58] que l'énergie de déplacement d'un ensemble $W \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2n}$ est ainsi majorée :

$$e(W) \leqslant 2 \sup_{x \in \mathbb{R}^2} e(W \cap (\{x\} \times \mathbb{R}^{2n})).$$

Terminons cette section en mentionnant le résultat suivant, qui montre une inégalité analogue à $c \leqslant \gamma$, pour la distance de Hofer dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Proposition 1.42 (Sikorav [51]). *On considère d_H la distance de Hofer sur $\mathbb{R}^{2n}$, et U un ouvert d'énergie de déplacement $e(U)$ finie. Alors, pour tout difféomorphisme hamiltonien ϕ à support dans U,*

$$d_H(\phi, Id) \leqslant 16\, e(U).$$

Remarque 1.43. Ce résultat n'est *a priori* pas vrai dans n'importe qu'elle variété symplectique. En particulier, il est faux dans les ouverts bornés de $\mathbb{R}^{2n}$.

En effet, dans un ouvert borné, la distance de Hofer est minorée par un multiple — le volume de l'ouvert, pour être précis — de l'invariant de Calabi (cf. annexe A.2.3), qui peut être arbitrairement grand même si le support est petit.

1.2.3 Inégalités de réduction

Une propriété importante des invariants de min-max réside dans le fait qu'ils se comportent bien par réduction. Cela nous sera utile, par exemple dans la partie 1.2.5, pour comparer entre elles les différentes variantes de la distance de Viterbo introduites dans la section 1.1.2. Notre résultat réside dans la proposition suivante.

Proposition 1.44 (Inégalité de réduction). *Pour toute sous-variété lagrangienne $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$, image de la section nulle par une isotopie hamiltonienne à support compact, et tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2n}$ coisotrope W, l'image L_W de L dans la réduction de $\mathbb{R}^{2n}$ par W admet une f.g.q.i.. De plus, avec les notations de la proposition 1.17, on a $c(1, \hat{L}) \leqslant c(1, \widehat{L_W})$, $c(\mu, \hat{L}) \geqslant c(\mu, \widehat{L_W})$ et donc*

$$\gamma(L) \geqslant \gamma(L_W).$$

On commence par prouver le lemme suivant.

Lemme 1.45. *Soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2d+2k}, \omega_0)$. Considérons les sous-variétés coisotropes $X = \mathbb{R}^{2d} \times \{x_0\} \times \mathbb{R}^k$ et $Y = \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^k \times \{0\}$. Les réductions L_X et L_Y de L respectivement par X et Y admettent des f.g.q.i., et*

$$c(1, \widehat{L_X}) \geqslant c(1, \hat{L}), \quad c(1, \widehat{L_Y}) \geqslant c(1, \hat{L}),$$

$$c(\mu, \widehat{L_X}) \leqslant c(\mu, \hat{L}), \quad c(\mu, \widehat{L_Y}) \leqslant c(\mu, \hat{L}).$$

Démonstration — Commençons par montrer que $c(1, \widehat{L_X}) \geqslant c(1, \hat{L})$. Fixons donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et considérons $i : \mathbb{R}^d \simeq \{x_0\} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d+k}$. Soit S :

$\mathbb{R}^{d+k} \times E \to \mathbb{R}$ une f.g.q.i. de L. Alors la fonction $S_X = S|_{(\mathbb{R}^d \times \{x_0\}) \times E}$ est une f.g.q.i. pour L_X. De plus, les fonctions S et S_X s'étendent en des fonctions $\hat{S} : \mathbb{S}_{d+k} \times E \to \mathbb{R}$ et $\widehat{S_X} : \mathbb{S}_d \times \{x_0\} \times E \to \mathbb{R}$ qui sont des f.g.q.i. de $\hat{L}$ et $\widehat{L_X}$.

Comme $\widehat{S_X}$ est une restriction de $\hat{S}$, on a une inclusion des sous-niveaux $\widehat{S_X}^\lambda \subset \hat{S}^\lambda$. Celle-ci induit $i_\lambda : H^*(\hat{S}^\lambda, \hat{S}^{-\infty}) \to H^*(\widehat{S_X}^\lambda, \widehat{S_X}^{-\infty})$. La naturalité de l'isomorphisme de Thom et le fait que les différentes inclusions commutent rendent le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{array}{ccccc}
H^*(\mathbb{S}_d) & \xrightarrow{T} & H^*(\widehat{S_X}^\infty, \widehat{S_X}^{-\infty}) & \xrightarrow{j^*_{X,\lambda}} & H^*(\widehat{S_X}^\lambda, \widehat{S_X}^{-\infty}) \\
{\scriptstyle i^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i_\infty} & & \uparrow{\scriptstyle i_\lambda} \\
H^*(\mathbb{S}_{d+k}) & \xrightarrow{T} & H^*(\hat{S}^\infty, \hat{S}^{-\infty}) & \xrightarrow{j^*_\lambda} & H^*(\hat{S}^\lambda, \hat{S}^{-\infty})
\end{array}$$

Supposons maintenant que $j^*_{X,\lambda} \circ T(1) \neq 0$. Alors, $i_\lambda \circ j^*_\lambda \circ T(1) = j^*_{X,\lambda} \circ T \circ i^*(1) = j^*_{X,\lambda} \circ T(1) \neq 0$, donc $j^*_\lambda \circ T(1) \neq 0$. Ceci prouve l'inégalité $c(1, \widehat{L_X}) \geqslant c(1, \hat{L})$.

Dans le cas de L_Y, nous allons prouver qu'il existe aussi une f.g.q.i. dont les sous-niveaux se plongent dans ceux de la f.g.q.i. associée à L. On conclura ensuite en étudiant le diagramme commutatif analogue au cas de L_X.

Commençons par considérer la fonction $T : \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^k \times E) \to \mathbb{R}$, $(v; x, \xi) \mapsto S(v, x; \xi)$ — la variable base x devient une variable fibre. La fonction T est une fonction génératrice pour L_Y. En revanche, elle coïncide à l'infini avec une forme quadratique Q sur E qui, vue comme une forme quadratique sur $\mathbb{R}^k \times E$ est dégénérée.

Soient K un compact de $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^k \times E)$ en dehors duquel T coïncide avec Q, et q une forme quadratique non-dégénérée et *définie négative* sur $\mathbb{R}^k$. On peut alors choisir une fonction $f : \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^k \times E) \to \mathbb{R}$ lisse, nulle sur un voisinage de K, négative, coïncidant avec $q(x)$ hors d'un compact (plus grand que K bien sûr !) et telle que la fonction $(v, x, \xi) \mapsto f(v, x, \xi) + Q(\xi)$ admette 0 pour unique valeur critique.

On pose maintenant $S_Y = T + f$. Par construction, S_Y est une f.g.q.i. de L_Y. Après compactification, on obtient deux fonctions $\hat{S}$ et $\widehat{S_Y}$, respectivement f.g.q.i. de $\hat{L}$ et $\widehat{L_Y}$. Si l'on regarde les sous-niveaux de ces fonctions, on voit que $T^\lambda \simeq S^\lambda$ donc comme f est négative, on a un plongement $S_Y^\lambda \hookrightarrow S^\lambda$. Comme les niveaux sont compacts, cela nous donne un plongement $\widehat{S_Y}^\lambda \hookrightarrow \hat{S}^\lambda$, et l'on conclut comme dans le cas de L_X.

Enfin, $c(\mu, \widehat{L_X}) \leqslant c(\mu, \hat{L}) = c(\mu, \widehat{L_Y})$ s'obtient de $c(1, \widehat{L_X}) \geqslant c(1, \hat{L}) = c(1, \widehat{L_Y})$ par dualité (proposition 1.11, propriété 5), en remarquant que $\overline{L_X} = \overline{L}_X$ et $\overline{L_Y} = \overline{L}_Y$. $\square$

Lemme 1.46. *Soit W un sous-espace vectoriel coisotrope de $\mathbb{R}^{2n}$. Notons N la section nulle $\mathbb{R}^{2n} = T^*\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une décomposition en somme directe d'espaces isotropes $\mathbb{R}^{2n} = N_1 \oplus V_1 \oplus N_2 \oplus V_2 \oplus N_3 \oplus V_3$, où $N = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$ et chaque $N_i \oplus V_i$, $i = 1, 2, 3$ forme un sous-espace vectoriel symplectique, tel que $W = N_1 \oplus V_1 \oplus N_2 \oplus V_3$.*

Démonstration — Rappelons d'abord que si W est coisotrope, d'orthogonal symplectique $W^\omega \subset W$, tout sous-espace F tel que $F \oplus W^\omega = W$ est symplectique. En effet, comme $F \subset W$, $F \cap F^\omega = F \cap F^\omega \cap W = F \cap (F \oplus W^\omega)^\omega = F \cap W^\omega = \{0\}$.

S'il existe une décomposition comme dans l'énoncé du lemme 1.46, alors $W^\omega = N_2 \oplus V_3$. Posons donc $N_2 = W^\omega \cap N$. Ensuite, on définit N_1 comme un supplémentaire de N_2 dans $W \cap N$, et F_1 comme un supplémentaire de W^ω dans W, contenant N_1. Par la remarque ci-dessus, F_1 est symplectique, et l'on peut choisir V_1 parmi les supplémentaires lagrangiens de N_1 dans F_1.

A présent, définissons V_3 comme un supplémentaire de N_2 dans W^ω. Comme $W \cap N = N_1 \oplus N_2$, $V_3 \cap N = 0$, et on peut définir N_3 comme un supplémentaire de $N_1 \oplus N_2$ dans N. Alors, $F_3 = N_3 \oplus V_3$ est symplectique car c'est un supplémentaire de $(N_1 \oplus N_2 \oplus F_3)^\omega$ dans $N_1 \oplus N_2 \oplus F_3$.

Enfin, on définit F_2 comme étant un supplémentaire de $F_1 \oplus F_3$ dans $\mathbb{R}^{2n}$, contenant N_2. Alors, F_2 est symplectique pour une raison similaire à F_3, et l'on peut choisir V_2 parmi les lagrangiens supplémentaires à N_2 dans F_2. La décomposition $\mathbb{R}^{2n} = N_1 \oplus V_1 \oplus N_2 \oplus V_2 \oplus N_3 \oplus V_3$ satisfait à toutes les hypothèses du lemme 1.46. □

Démonstration de la proposition 1.44 — Comme le groupe linéaire symplectique agit transitivement sur l'ensemble des paires de sous-espaces lagrangiens supplémentaires (voir proposition 7.4 du chapitre 1 de [36]), et comme l'espace des sous-espaces lagrangiens supplémentaires à un lagrangien donné est connexe par arc, il existe une isotopie symplectique Ψ^t de $\mathbb{R}^{2n}$ telle que $\Psi^0 = Id$, et telle que Ψ^1 laisse tous les éléments de N invariants et applique V sur $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$. Comme $\mathbb{R}^{2n}$ est simplement connexe, cette isotopie est hamiltonienne.

La réduction de L par W s'identifie avec la réduction de $\Psi^1(L)$ par $\Psi^1(W)$. Par conséquent, en appliquant deux fois le lemme 1.45, on obtient $c(\mu, \widehat{L_W}) \leqslant c(\mu, \widehat{\Psi^1(L)})$ et $c(1, \widehat{L_W}) \geqslant c(1, \widehat{\Psi^1(L)})$. Cependant, par la proposition 1.11, on a pour toute classe de cohomologie u, $c(u, \hat{L}) = c(u, \widehat{\Psi^1(L)})$. Ceci conclut donc notre démonstration. □

Notons qu'une conséquence immédiate — il suffit de l'appliquer dans le cas où l'espace coisotrope est tout l'espace, la réduction étant donc réduite à un point — de l'inégalité de réduction est :

Corollaire 1.47 (Viterbo [57])**.** *Pour toute lagrangienne $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$,*

$$c(1, \hat{L}) \leqslant 0 \leqslant c(\mu, \hat{L}).$$

1.2.4 La fonction u_L

Dans cette partie, nous allons associer canoniquement à toute sous-variété lagrangienne de $\mathbb{R}^{2n}$ une fonction sur $\mathbb{R}^n$ ayant des propriétés intéressantes. Cette construction interviendra notamment de manière cruciale dans le chapitre 3, pour construire les solutions variationnelles de l'équation d'Hamilton-Jacobi.

Définition 1.48. *Soit L une lagrangienne de $\mathbb{R}^{2n}$ qui admet une f.g.q.i. $S : \mathbb{R}^n \times E \to \mathbb{R}$. Notons 1_x le générateur de $H^0(\{x\})$. On pose alors, avec les notations de la définition 1.9,*

$$u_L(x) = c(T(1_x), S|_{\{x\}\times E}).$$

Proposition 1.49 (Viterbo-Ottolenghi [45])**.** *L'application u_L de la définition 1.48 vérifie les propriétés suivantes :*

1. *u_L est C-lipschitzienne pour tout réel C tel que $L \subset \{(x,p) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |p| \leqslant C\}$.*
2. *Il existe un fermé d'intérieur vide $Z_L \subset \mathbb{R}^n$, tel que u_L est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n - Z_L$.*
3. *En tout point $x \in \mathbb{R}^n - Z_L$, on a $(x, du_L(x)) \in L$.*

Remarque 1.50. Les points où la différentielle de u_L subit un saut, sont des points x, tels qu'il existe deux points distincts ξ, ξ' de E, pour lesquels $u_L(x) = S(x,\xi) = S(x,\xi')$ d'une part, mais d'autre part,

$$\frac{\partial S}{\partial \xi}(x,\xi) = \frac{\partial S}{\partial \xi}(x,\xi') \text{ et } \frac{\partial S}{\partial x}(x,\xi) \neq \frac{\partial S}{\partial x}(x,\xi').$$

Ceci provient de manière évidente de la définition des fonctions génératrices.

Du fait que sur la lagrangienne, la 1-forme de Liouville s'écrit $pdx = \frac{\partial S}{\partial x}dx = dS$, ces points s'interprètent géométriquement : en ces points, l'aire

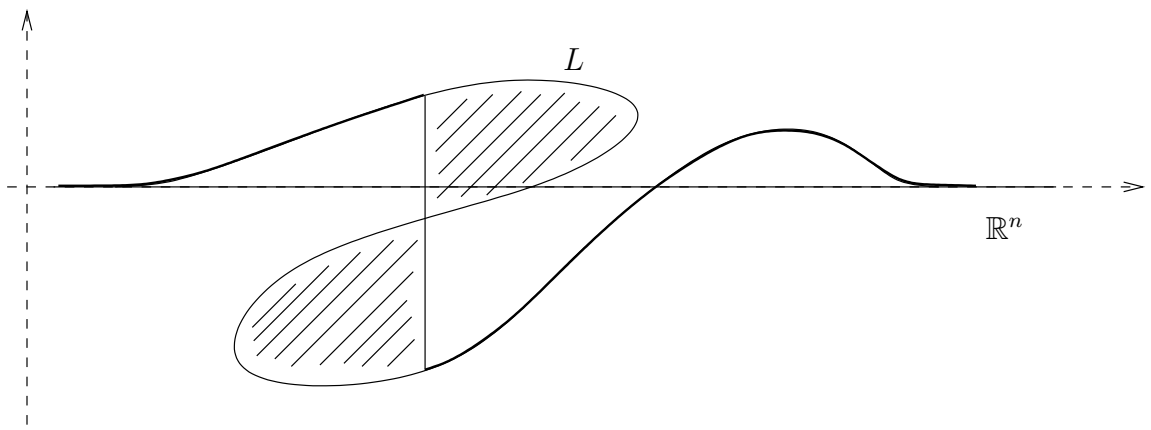


FIG. 1.3 – Le graphe de du_L, représenté en gras, est inclus dans la lagrangienne L. L'aire hachurée, qui correspond au point où du_L est discontinue, est nulle.

symplectique de toute surface délimitée par le segment reliant $(x, \frac{\partial S}{\partial x}(x,\xi))$ à $(x, \frac{\partial S}{\partial x}(x,\xi'))$ et par un chemin inclus dans L reliant ces deux mêmes points, s'annule (voir figure 1.3).

De plus, une conséquence immédiate de notre inégalité de réduction (proposition 1.44), appliquée aux sous-variétés coisotropes $W = \{x\} \times \mathbb{R}^n$ est :

Proposition 1.51. *Pour toutes lagrangiennes $L, L' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$,*

$$\|u_L - u_{L'}\|_{C^0} \leqslant \gamma(L, L').$$

Cette construction nous donne donc un minorant de la distance de Viterbo sur l'espace de lagrangiennes $\mathcal{L}(T^*M)$.

Démonstration — Pour tout point x, $u_L(x)$ est obtenu par réduction par rapport à l'espace coisotrope $\{x\} \times \mathbb{R}^n$. L'inégalité $u_L(x) \geqslant c(1, L)$ est donc une conséquence de l'inégalité de réduction (proposition 1.44).

Remarquons ensuite que la propriété 5 de la proposition 1.11, implique $u_{\overline{L}} = -u_L$. De $u_{\overline{L}}(x) \leqslant c(1, \overline{L})$, on tire donc $u_L(x) \geqslant c(\mu, L)$.

On utilise ensuite la propriété 6 de la proposition 1.11 pour écrire

$$u_L(x) \geqslant c(1, L) \geqslant c(1, L\sharp\overline{L'}) - c(1, \overline{L'}) \geqslant c(1, L\sharp\overline{L'}) + u_{L'}(x).$$

Par dualité, on obtient de même $u_L(x) \leqslant c(\mu, L\sharp\overline{L'}) + u_{L'}(x)$, donc $\gamma(L, L') \geqslant u_L(x) - u_{L'}(x)$. Par symétrie, cela nous donne bien $\gamma(L, L') \geqslant |u_L(x) - u_{L'}(x)|$. □

1.2.5 Comparaison des différentes distances

Dans cette partie, nous démontrons des inégalités entre la distance de Hofer, la distance de Viterbo γ et ses variantes (voir section 1.1.2). Aucune autre inégalité n'est connue à notre connaissance.

Proposition 1.52.

$$\tilde{\gamma} \leqslant \gamma \leqslant d_H,$$
$$\tilde{\gamma}_u \leqslant \gamma_u \leqslant \hat{\gamma} \leqslant \|\cdot\|_{C^0},$$
$$\tilde{\gamma}_u \leqslant \gamma_u \leqslant \check{\gamma} \leqslant \|\cdot\|_{C^0}.$$

Démonstration — Nous avons déjà vu au corollaire 1.35 l'inégalité $\gamma \leqslant d_H$, comme conséquence de l'inégalité $\gamma(\phi_H^1) \leqslant \|H\|_{C^0}$. De cette dernière inégalité, on déduit aussi $\hat{\gamma} \leqslant \|\cdot\|_{C^0}$ et $\check{\gamma} \leqslant \|\cdot\|_{C^0}$. Enfin, une fois prouvé $\tilde{\gamma} \leqslant \gamma$, l'inégalité $\tilde{\gamma}_u \leqslant \gamma_u$ est immédiate. Les autres inégalités vont résulter de l'inégalité de réduction prouvée dans la proposition 1.44.

Démonstration de $\tilde{\gamma} \leqslant \gamma$. Soit φ un difféomorphisme hamiltonien, et $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$. On veut prouver que $\gamma(\varphi(L), L) \leqslant \gamma(\varphi)$. Par hypothèse, la lagrangienne L est l'image de la section nulle N de $\mathbb{R}^{2n} = T^*\mathbb{R}^n$, par une isotopie hamiltonienne ψ^t. Il nous suffit donc de démontrer que pour tout φ, $\gamma(\varphi(N)) \leqslant \gamma(\varphi)$. En effet, on aura alors $\gamma(\varphi(L), L) = \gamma(\varphi \circ \psi^1(N), \psi^1(N)) = \gamma(\psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi^1(N), N)$, et donc $\gamma(\varphi(L), L) \leqslant \gamma(\psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi^1) = \gamma(\varphi)$.

Prouvons maintenant $\gamma(\varphi(N)) \leqslant \gamma(\varphi)$. Notons Δ_p la diagonale de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, et Φ l'identification $\overline{\mathbb{R}^{2n}} \times \mathbb{R}^{2n} \to T^*\Delta_{2n}$. Rappelons que $\widetilde{\Gamma_\varphi}$ est par définition l'image par Φ du graphe Γ_φ de φ. Clairement, $\varphi(N)$ s'identifie à la réduction de $N \times \Gamma_\varphi \subset \mathbb{R}^{6n}$ par le sous-espace linéaire coisotrope $\Delta_{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$. Il s'identifie donc à la réduction de $N \times \widetilde{\Gamma_\varphi}$ par $W = (Id_{\mathbb{R}^{2n}} \times \Phi)(\Delta_{2n} \times \mathbb{R}^{2n})$. Par ailleurs, il est facile de voir que pour tout $L \in \mathcal{L}$, $\gamma(N \times L) = \gamma(L)$. En particulier, $\gamma(\varphi) = \gamma(N \times \widetilde{\Gamma_\varphi})$, et l'inégalité de réduction (proposition 1.44) achève la démonstration de notre inégalité.

Démonstration de $\gamma_u \leqslant \hat{\gamma}$. Donnons-nous deux hamiltoniens H et K. Oublions dans un premier temps le problème des supports compacts et considérons les hamiltoniens $\hat{H}(s; t, \tau, x) = \tau + H(t, x)$ et $\hat{K}(s; t, \tau, x) = \tau + K(t, x)$. Le calcul de leur flot (cf. remarque 1.27) nous donne la formule

$$\phi_{\hat{K}}^{-s}\phi_{\hat{H}}^{s}(t, \tau, x) = (t, \tau + J(s, t, x), (\phi_K)_t^{t-s}(\phi_H)_t^{t+s}(x)),$$

où $J(s,t,x) = I_H(s,t,x) + I_K(-s, t+s, (\phi_H)_t^{t+s}(x))$. On obtient donc

$$\widetilde{\Gamma}_{\phi_{\hat{K}}^{-s}\phi_{\hat{H}}^{s}} = \{(t, J(s,t,x), \tau + \frac{1}{2}J(s,t,x), 0, z(x)) \mid (t,\tau,x) \in \mathbb{R}^{2+2n},\ z(x) \in \widetilde{\Gamma}_{(\phi_K)_t^{t-s}(\phi_H)_t^{t+s}}\}.$$

Si l'on considère maintenant l'espace coisotrope $W = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{4n}$, on voit que $\widetilde{\Gamma}_{\phi_K^{-s}\phi_H^s}$ est la réduction de $\widetilde{\Gamma}_{\phi_{\hat{K}}^{-s}\phi_{\hat{H}}^{s}}$ par W. L'inégalité de réduction nous donne donc $\gamma(\widetilde{\Gamma}_{\phi_K^{-s}\phi_H^s}) \leqslant \widetilde{\Gamma}_{\phi_{\hat{K}}^{-s}\phi_{\hat{H}}^{s}}$.

Il faut cependant prendre en compte le problème des supports, et ne pas considérer $\hat{H}$ et $\hat{K}$ mais $\hat{H}_\alpha$ et $\hat{K}_\alpha$ (cf. définition 1.26). Cependant, il n'est pas très difficile de vérifier que pour α assez grand, $\widetilde{\Gamma}_{\phi_{\hat{K}_\alpha}^{-s}\phi_{\hat{H}_\alpha}^{s}}$ coïncide avec $\widetilde{\Gamma}_{\phi_{\hat{K}}^{-s}\phi_{\hat{H}}^{s}}$ dans un voisinage de W. Par conséquent, $\widetilde{\Gamma}_{\phi_K^{-s}\phi_H^s}$ est la réduction de $\widetilde{\Gamma}_{\phi_{\hat{K}_\alpha}^{-s}\phi_{\hat{H}_\alpha}^{s}}$ par W. Et l'on obtient l'inégalité souhaitée $\gamma(\phi_K^{-s}\phi_H^s) \leqslant \gamma(\phi_{\hat{K}_\alpha}^{-s}\phi_{\hat{H}_\alpha}^{s})$.

Remarque 1.53. La réduction par rapport à $\{t\} \times \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{4n}$ nous aurait donné l'inégalité

$$\gamma((\phi_K)_{t+s}^{t}(\phi_H)_t^{t+s}) \leqslant \gamma(\phi_{\hat{K}_\alpha}^{-s}\phi_{\hat{H}_\alpha}^{s}).$$

Démonstration de $\gamma_u \leqslant \check{\gamma}$. La démonstration est similaire à la précédente. En particulier, le problème des supports compacts n'en est pas un et il suffit de considérer les hamiltoniens $\check{H}(s;t\tau,x) = sH(ts,x)$ et $\check{H}(s;t\tau,x) = sH(ts,x)$. On calcule leur flot (cf. remarque 1.27), et on obtient cette fois :

$$\widetilde{\Gamma}_{\phi_{\check{K}}^{-s}\phi_{\check{H}}^{s}} = \{(t, J(s,t,x), \tau + \frac{1}{2}J(s,t,x), 0, z(x)) \mid (t,\tau,x) \in \mathbb{R}^{2+2n},\ z(x) \in \widetilde{\Gamma}_{\phi_K^{-st}\phi_H^{st}}\}.$$

On en déduit que $\widetilde{\Gamma}_{\phi_K^{-t}\phi_H^t}$ est la réduction de $\widetilde{\Gamma}_{\phi_{\check{K}}{}^{-1}\phi_{\check{H}}}$ par l'espace coisotrope $W = \{t\} \times \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{4n}$, et l'on conclut comme précédemment que, pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(\phi_K^{-t}\phi_H^t) \leqslant \gamma(\phi_{\check{K}}^{-1}\phi_{\check{H}})$. □

Chapitre 2

Extension de la dynamique hamiltonienne

Dans ce chapitre, nous proposons une approche de l'extension de la dynamique hamiltonienne à un cadre où les objets sont très peu réguliers. Pour ce faire, nous introduisons le complété de l'espace des applications hamiltoniennes pour la distance de Viterbo (section 2.1).

Notre résultat principal est un critère de convergence dans ce complété (section 2.2). Essentiellement, ce critère affirme que pour tout ensemble K "petit", les flots d'une suite d'hamiltoniens qui converge uniformément sur tout compact du complémentaire de K, convergent pour la distance de Viterbo. Nous l'utilisons pour représenter de manière concrète certains éléments du complété.

Nous étudions ensuite les propriétés du complété (section 2.3). Comme on va le voir, cette étude soulève de nombreuses questions.

2.1 Complétés

2.1.1 Définitions et notations

Sauf mention contraire, on se place dorénavant sur $\mathbb{R}^{2n}$, et l'on notera pour simplifier $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n})$ et $Ham_c = Ham_c(\mathbb{R}^{2n})$.

Rappelons que le complété d'un espace métrique (E, d) est par définition l'espace quotient, noté $\overline{E}^d$, de l'ensemble de ses suites de Cauchy par la relation d'équivalence donnée par

$$(x_k) \sim (y_k) \quad \Longleftrightarrow \quad d(x_k, y_k) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La distance d s'étend canoniquement en une distance sur le complété $\overline{E}^d$,

également notée d et telle que : $\overline{E}^d$ est un espace métrique complet, et E est dense dans $\overline{E}^d$.

Si E admet de plus une structure de groupe pour laquelle la distance d est bi-invariante, alors $\overline{E}^d$ admet une structure de groupe naturelle, pour laquelle E est un sous-groupe et d s'étend en une distance bi-invariante.

Notation. *On notera* $\overline{\mathcal{L}}$, $\overline{\mathcal{H}}$, $\widetilde{\mathcal{H}}$, $\overline{\mathcal{H}}^{d_H}$, $\overline{Ham}$, $\widetilde{Ham}$, $\widehat{Ham}$ *et* $\widecheck{Ham}$ *les complétés respectifs des espaces métriques* $(\mathcal{L}, \gamma)$, $(\mathcal{H}_c, \gamma)$, $(\mathcal{H}_c, \tilde{\gamma})$, $(\mathcal{H}_c, d_H)$, (Ham_c, γ_u), $(Ham_c, \tilde{\gamma}_u)$, $(Ham_c, \hat{\gamma})$ *et* $(Ham_c, \check{\gamma})$.

Les ensembles $\overline{\mathcal{H}}$, $\widetilde{\mathcal{H}}$ et $\overline{\mathcal{H}}^{d_H}$ ont des structures naturelles de groupes, munis de distances bi-invariantes.

De plus, on note $\mathcal{H}_c^0$ le groupe des homéomorphismes qui sont limites C^0 de suites de difféomorphismes hamiltoniens dont tous les termes sont l'identité hors d'un même compact. Dans le plan, ces homéomorphismes sont exactement les homéomorphismes à support compact et préservant l'aire. Enfin, on note Ham_c^0 l'espace des *hamiltoniens continus*, c'est-à-dire l'espace des fonctions continues H sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ telles qu'il existe un compact K de $\mathbb{R}^{2n}$ contenant tous les supports des application partielles $H(t, \cdot)$, pour $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.1. *Il existe des applications continues naturelles*

$$\begin{array}{ccccc} & & \widecheck{Ham} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ Ham_c^0 & & & & \overline{Ham} \longrightarrow \widetilde{Ham}, \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \widehat{Ham} & & \end{array}$$

et des homomorphismes de groupes

$$\mathcal{H}_c^0 \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}^{d_H} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}\,.$$

Démonstration — Supposons que d_1 et d_2 soient des distances sur le même espace E vérifiant $d_1 \leqslant d_2$. Alors, une suite de Cauchy pour d_2 est également de Cauchy pour d_1. De plus, deux suites de Cauchy équivalentes pour d_2 le sont également pour d_1. On a donc une application naturelle entre complétés

$$\overline{E}^{d_2} \mapsto \overline{E}^{d_1}.$$

Lorsque E est un groupe et que d_1, d_2 sont des distances bi-invariantes, cette application est un morphisme de groupe.

Une fois ces remarques faites, la proposition résulte des inégalités entre distances données par les propositions 1.52, 1.34 et 1.36. □

2.1.2 Extension de la dynamique Hamiltonienne

Proposition 2.2. *Pour tout réel $t \in [0,1]$, l'application qui, à un hamiltonien H, associe le temps t de son isotopie hamiltonienne ϕ_H^t, s'étend de manière unique et naturelle en des applications continues*

$$\begin{aligned} Ham_c^0 &\longrightarrow \overline{\mathcal{H}}^{d_H} \\ \overline{Ham} &\longrightarrow \overline{\mathcal{H}} \\ \widetilde{Ham} &\longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Comme dans le cas lisse, l'image d'un élément (H,t) par l'une de ces flèches sera noté ϕ_H^t, et le chemin $t \mapsto \phi_H^t$ sera appelé *isotopie hamiltonienne généralisée engendrée par H*. L'élément H sera lui appelé *hamiltonien généralisé*.

Il est évident, et même tautologique, que deux hamiltoniens généralisés distincts engendrent des isotopies hamiltoniennes généralisées distinctes.

Démonstration — Il suffit de montrer pour chaque distance que l'application $Ham_c \to \mathcal{H}_c$, $H \mapsto \phi_H^t$ est uniformément continue. Ceci est évident compte-tenu des définitions : dans chacun des cas cette application est 1-lipschitzienne. □

2.1.3 Action sur les lagrangiennes

Proposition 2.3. *L'action naturelle de $\mathcal{H}_c$ sur $\mathcal{L}$ s'étend de manière naturelle en des actions de $\overline{\mathcal{H}}$, $\widetilde{\mathcal{H}}$ et $\overline{\mathcal{H}}^{d_H}$ sur $\overline{\mathcal{L}}$.*

Démonstration — L'application $(\mathcal{H}_c, \tilde{\gamma}) \times (\mathcal{L}, \gamma) \to (\mathcal{L}, \gamma)$, $(\phi, L) \mapsto \phi(L)$ est lipschitzienne. En effet,

$$\begin{aligned} \gamma(\phi_1(L_1), \phi_2(L_2)) &\leqslant \gamma(\phi_1(L_1), \phi_2(L_1)) + \gamma(\phi_2(L_1), \phi_2(L_2)) \\ &\leqslant \tilde{\gamma}(\phi_1, \phi_2) + \gamma(L_1, L_2). \end{aligned}$$

Elle induit donc une application naturelle $\widetilde{\mathcal{H}} \times \overline{\mathcal{L}} \to \overline{\mathcal{L}}$. De plus, comme elle est une action de groupe, l'application induite en est également une.

Les actions de $\overline{\mathcal{H}}$ et $\overline{\mathcal{H}}^{d_H}$ sur $\overline{\mathcal{L}}$ ne sont ensuite que les restrictions de l'action de $\widetilde{\mathcal{H}}$ sur $\overline{\mathcal{L}}$. □

Comme dans le cas lisse, on notera par $\phi(L)$ l'action d'un difféomorphisme généralisé ϕ sur une lagrangienne généralisée L. Pour les hamiltoniens continus, on a un résultat analogue au cas lisse :

Proposition 2.4. *Soient $H \in Ham_c^0$ un hamiltonien continu qui ne dépend pas du temps, et $L \in \mathcal{L}$ une lagrangienne (lisse) isotope à la section nulle sur laquelle H est constant. Alors, L est invariante sous l'action du flot généralisé de H.*

Démonstration — Il suffit de remarquer que H peut être approché par des hamiltoniens lisses, indépendants du temps qui sont constants sur L, et dont les flots préservent donc L. □

2.2 Le critère de convergence

2.2.1 Énoncés

Commençons par définir un nouvel invariant symplectique.

Définition 2.5. *Soit V une partie de $\mathbb{R}^{2n}$. Pour toute fonction hamiltonienne $H \in Ham_c(\mathbb{R}^{2n})$, on pose*

$$\xi_c^H(V) = c\left(\bigcup_{t\in[0,1]} \phi_H^t(V)\right) \quad et \quad \xi_e^H(V) = e\left(\bigcup_{t\in[0,1]} \phi_H^t(V)\right).$$

On définit ensuite

$$\xi_c(V) = \sup_{H\in Ham_c(\mathbb{R}^{2n})} \xi_c^H(V) \quad et \quad \xi_e(V) = \sup_{H\in Ham_c(\mathbb{R}^{2n})} \xi_e^H(V).$$

Lorsque l'on peut considérer indifféremment ξ_c ou ξ_e, on écrira simplement ξ. Notons que de l'inégalité $c \leqslant e$, on tire immédiatement l'inégalité $\xi_c \leqslant \xi_e$. Nous étudierons plus en détail cet invariant dans la section 2.2.2.

Énonçons maintenant une conjecture.

Conjecture 2.6. *Soient K un compact de $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant $\xi_c(K) = 0$, et (H_k) une suite d'hamiltoniens dans $Ham_c(\mathbb{R}^{2n})$, dont les supports sont contenus dans un même compact, et qui converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{2n} - K)$. Alors,*

- *$(\phi_{H_k}^1)$ converge dans $\overline{\mathcal{H}}$ et $\widetilde{\mathcal{H}}$,*
- *(H_k) converge dans $\overline{Ham}$ et $\widetilde{Ham}$,*
- *$(\phi_{H_k}^1(L))$ converge dans $\overline{\mathcal{L}}$, pour toute $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$.*

L'obstacle que nous rencontrons pour prouver cette conjecture provient du défaut de régularité extérieure de l'invariant ξ (voir la section 2.2.2). En revanche, avec quelques hypothèses supplémentaires, une preuve devient possible.

Théorème 2.7. *La conjecture 2.6 est vraie si l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée.*

1. *Il existe une suite de voisinages (U_k) de K, telle que $\xi_c^{H_{k'}}(U_k)$ converge vers 0, lorsque k et k' tendent vers l'infini.*
2. *La limite presque partout de (H_k) est un hamiltonien lisse.*

Sous cette deuxième hypothèse, (H_k) converge pour $\tilde{\gamma}_u$ et γ_u vers sa limite presque partout. Si de plus $\xi_e(K) = 0$, (H_k) converge aussi pour $\hat{\gamma}$ et $\check{\gamma}$.

Nous démontrerons ce théorème dans la section 2.2.4. Par ailleurs, nous verrons dans la section 2.2.5 que l'on ne peut pas remplacer l'hypothèse $\xi(K) = 0$ par l'hypothèse plus faible $c(K) = 0$.

On peut généraliser le point 2 du théorème 2.7 aux cas où la fonction limite admet certains types de discontinuités. Pour cela, introduisons la définition suivante.

Définition 2.8. *On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ qui vérifient les trois conditions suivantes.*

1. *L'ensemble des points à l'infini, ne dépend pas du temps t et est d'énergie de déplacement nulle : $e(\{x \mid H(t,x) \in \{\pm\infty\}\}) = 0$.*
2. *H s'annule à l'infini : $\forall \varepsilon > 0, \exists r, (|x| > r \Rightarrow (\forall t, |H(t,x)| < \varepsilon))$.*
3. *H est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Les fonctions de $\mathcal{F}$ peuvent donc être vues comme des fonctions sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$, continues sauf sur un ensemble de capacité nulle, en les points duquel elles tendent vers l'infini.

Nous donnerons la démonstration du théorème suivant à la partie 2.2.6.

Théorème 2.9. *Soit H un élément de $\mathcal{F}$. Il existe alors un unique élément de $\widetilde{Ham}$, représenté par toute suite (H_k), convergeant vers H uniformément sur les compacts de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}) - H^{-1}(\{\pm\infty\})$.*

L'application qui, à H, associe cet élément, définit une application

$$\iota : \mathcal{F} \to \widetilde{Ham},$$

dont la restriction aux éléments lisses hors des discontinuités est injective.

De plus, l'image de ι est incluse dans $\overline{Ham}$, et même dans $\widehat{Ham}$ et $\widetilde{Ham}$.

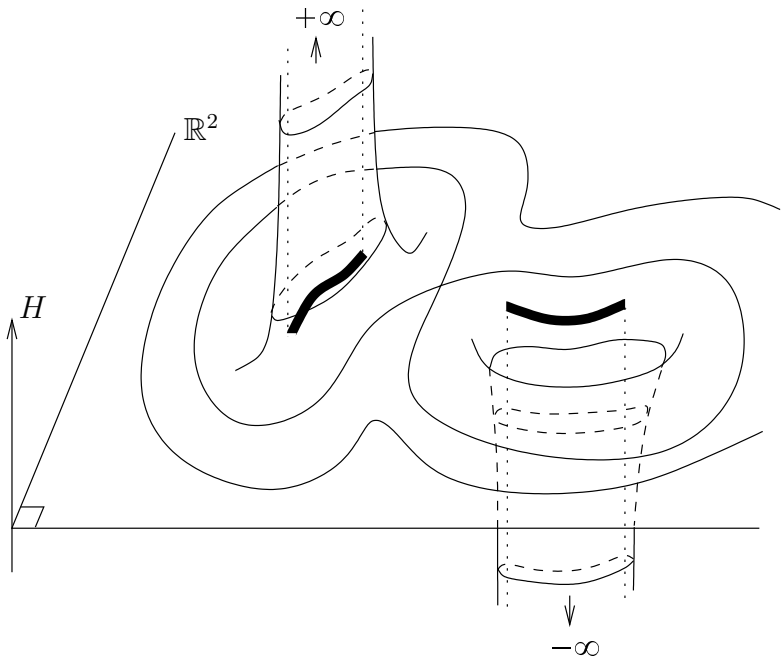


FIG. 2.1 – Représentation graphique d'un élément H de $\mathcal{F}$, sur $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des points de discontinuité, qui est bien de capacité nulle, est tracé en gras.

REMARQUE 2.10. L'ensemble des points de discontinuité d'un élément lisse et indépendant du temps de $\mathcal{F}$ est "stable". Il admet en effet des voisinages invariants par le champ hamiltonien. C'est grâce à cette remarque que l'on peut considérer des fonctions ayant un ensemble de discontinuité plus grand que ce que prévoit la conjecture : $e = 0$ au lieu de $\xi = 0$.

2.2.2 L'invariant ξ

Proposition 2.11. *On a les propriétés suivantes :*

1. $V_1 \subset V_2 \Rightarrow \xi(V_1) \leqslant \xi(V_2)$;
2. $\xi(\phi(V)) = \xi(V)$ *pour tout difféomorphisme hamiltonien* $\phi \in \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^{2n})$;
3. $\xi(\lambda V) = \lambda^2 \xi(V)$ *pour tout réel* $\lambda > 0$.

Démonstration — Ces propriétés résultent de manière immédiate des propriétés analogues vérifiées par les capacités c et e. Pour la troisième, il faut aussi remarquer que

$$\lambda \phi_H^t(U) = \phi_{H(\lambda^{-1}.)}^t(\lambda U).$$

□

Il est facile de trouver des exemples d'ensembles ayant un ξ non nul : n'importe quel ensemble ayant une capacité positive aura cette propriété. Il est tout aussi aisé de trouver des exemples d'ensembles ayant un ξ infini : c'est le cas de n'importe quel ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$. En revanche, il est moins évident de prouver qu'un ensemble non vide donné a un ξ nul. Voici une famille d'exemples.

Proposition 2.12. *Soit V une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^{2n}$ dont la dimension d vérifie $d \leqslant n-2$. Alors $\xi(V) = 0$.*

Démonstration — Soit $H \in Ham_c(\mathbb{R}^{2n})$. Un problème qui se pose est que $\bigcup_{t\in[0,1]} \phi_H^t(V)$ n'est en général pas une sous-variété. Afin de contourner le problème, nous allons ajouter deux dimensions et faire une suspension à l'aide de l'hamiltonien $\check{H}$ dont nous avons déjà parlé dans la section 1.1.2. On note Φ le difféomorphisme hamiltonien de $\mathbb{R}^{2+2n} = \{(t,\tau,x)\}$ engendré par la fonction hamiltonienne

$$\check{H} : [0,1] \times \mathbb{R}^{2+2n} \to \mathbb{R},\ (s;t,\tau,x) \mapsto tH(ts,x).$$

On note aussi $U = \Phi([0,1] \times [-1,1] \times V)$. Le calcul de Φ donne

$$\Phi(t,\tau,x) = (t, \tau - H(t,x), \phi^t(x)).$$

Nous voyons donc que $\bigcup_{t\in[0,1]} \phi_H^t(V)$ s'obtient de U par réduction symplectique par rapport au sous-espace coisotrope $\{\tau = 0\}$. Nous allons donc chercher un difféomorphisme hamiltonien $\phi_K \in \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^{2+2n})$ qui déplace U tout en préservant $\{\tau = 0\}$.

Si K ne dépend pas de la variable t, ϕ_K préserve bien $\{\tau = 0\}$. Comme U est compact, il est suffisant que K vérifie

$$\forall v \in U,\ \mathbb{R}X_K(v) \cap T_vU = \{0\},$$

ce qui est équivalent à

$$\forall v \in U,\ \ker dK(v) \oplus T_vU^\omega = \mathbb{R}^{2+2n}$$

et à

$$\forall v \in U, T_vU^\omega \not\subset \ker dK(v).$$

Cela nous mène à considérer le fibré des 1-jets $J^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1+2n}, \mathbb{R})$ ainsi que sa sous-variété

$$W = \{(s,q;\sigma,p;z) \,|\, (s,q) \in U, z \in \mathbb{R}, T_{(s,q)}U^\omega \subset \ker(\sigma,p)\}.$$

La dimension de W est exactement $2n+1$. En effet, l'espace vectoriel $\{(\sigma,p)\in \mathbb{R}^{2n+2^*} \mid T_{(s,q)}U^\omega \subset \ker(\sigma,p)\}$ a pour dimension $2n+2-\dim(T_{(s,q)}V^\omega)=n$.

Par le théorème de transversalité de Thom (voir [22] par exemple), il existe une fonction L dont le 1-jet vérifie $j^1L \pitchfork W$. Par ailleurs, j^1L peut être vue comme une fonction $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{1+2n}\to J^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{1+2n},\mathbb{R})$, et par le lemme 4.6 page 53 dans [22], on a $j^1L(s,\cdot)\pitchfork W$, pour un choix générique de $s\in\mathbb{R}$. Fixons un tel s et notons $K:\mathbb{R}^{2+2n}\to\mathbb{R}$, $(t,\cdot)\mapsto L(s,\cdot)$

A présent, remarquons que pour tous s,q,p,z, l'ensemble de tous les σ tels que $(s,q;\sigma,p;z)\in W$ est, soit vide, soit $\mathbb{R}$ tout entier. Cela peut se voir par le calcul direct de TU^ω, dont la première composante est toujours $\{0\}$. On en déduit $j^1K\pitchfork W$ — en effet, j^1K diffère de $j^1L(s,\cdot)$ uniquement par sa composante σ, qui est restreinte à $\{0\}$ alors que celle de $j^1L(s,\cdot)$ est $\frac{\partial L}{\partial s}(s,\cdot)$.

Maintenant, comme $(2n+2)+(2n+1)=\dim(j^1K(\mathbb{R}^{2+2n}))+\dim(W)<\dim(J^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{1+2n},\mathbb{R}))=4n+5$, nous obtenons $j^1K(\mathbb{R}^{2+2n})\cap W=\varnothing$. Il s'en suit que K satisfait les deux conditions que sont préserver $\{\tau=0\}$ et vérifier

$$\forall v\in U,\ \mathbb{R}X_K(v)\cap T_vU=\{0\}.$$

Comme U est compact, on a pour ε assez petit $\phi_{\varepsilon K}(U)\cap U=\varnothing$. De plus, εK peut être rendu aussi petit au sens C^0 que l'on veut.

Nous pouvons maintenant faire la réduction par rapport à $\{\tau=0\}$. Comme il préserve $\{\tau=0\}$, εK induit une fonction hamiltonienne sur la réduction $\mathbb{R}^{2n}$. Celle-ci est C^0-petite et engendre donc un difféomorphisme hamiltonien ψ dont la distance de Hofer à l'identité $d_H(\psi,id)$ est également petite $d_H(\psi,id)$, et satisfait

$$\psi\left(\bigcup_{t\in[0,1]}\phi_H^t(V)\right)\cap\bigcup_{t\in[0,1]}\phi_H^t(V)=\varnothing.$$

Cet hamiltonien n'est pas à support compact, mais tout hamiltonien à support compact qui coïncide avec lui sur une boule suffisamment grande, aura les mêmes propriétés. Ceci prouve $e\left(\bigcup_{t\in[0,1]}\phi_H^t(V)\right)=0$, soit $\xi_e^H(V)=0$. □

De nombreuses questions restent ouvertes concernant l'invariant ξ.

Question 2.13. *La dimension obtenue dans la proposition 2.12 est-elle optimale ? Autrement dit, si V est un ensemble contenant un ouvert d'une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n}$ dont la dimension d vérifie $d\geqslant n-1$. A-t-on alors $\xi(V)>0$?*

Question 2.14. *Soit $V\subset\mathbb{R}^{2n}$, tel que $\xi(V)>0$. A-t-on alors nécessairement $\xi(V)=+\infty$?*

2.2.3 Le lemme principal

Nous énonçons ici le lemme qui est à la base des théorèmes 2.7 et 2.9. Il nous a également amené à formuler la conjecture 2.6.

Lemme principal 2.15. *Soit H_1, H_2 deux fonctions hamiltoniennes à support compact. Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^{2n}$, et tout réel $\varepsilon > 0$, tel que*

$$\forall (t,x) \in [0,1] \times (\mathbb{R}^{2n} - U),\ |H_1(t,x) - H_2(t,x)| \leqslant \varepsilon,$$

on a

$$\gamma(\phi_{H_1}, \phi_{H_2}) \leqslant 2\varepsilon + 2\min\{\xi_c^{H_1}(U), \xi_c^{H_2}(U)\}.$$

Le facteur 2 dans l'énoncé du lemme principal n'est peut-être pas optimal. Commençons par démontrer le cas particulier suivant.

Lemme 2.16. *Soit H un hamiltonien sur $\mathbb{R}^{2n}$, à support compact. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ et $\varepsilon > 0$, tels que pour tout $(t,x) \in [0,1] \times (\mathbb{R}^{2n} - U)$, on ait $|H(t,x)| \leqslant \varepsilon$. Alors, $c_+(\phi_H) \leqslant \varepsilon + c(U)$ et $-c_-(\phi_H) \leqslant \varepsilon + c(U)$, donc*

$$\gamma(\phi_H) \leqslant 2\varepsilon + 2c(U).$$

Démonstration — Soient K_1, K_2 des hamiltoniens à support compact, tels que $0 \leqslant K_i \leqslant 1$, $i = 1, 2$, K_1 vaut 1 sur le support de H et K_2 vaut 1 sur le support de K_1. Remarquons au passage qu'alors, $K_1 \leqslant K_2$. Notons ensuite $\psi_{1,\varepsilon}$ le difféomorphisme engendré par $H - \varepsilon K_1$, et $\psi_{2,\varepsilon}$ le difféomorphisme engendré par εK_2.

Comme $(\psi_{2,\varepsilon})^{-1}$ coïncide avec Id hors du support de $H - \varepsilon K_1$, la formule de composition des hamiltoniens (lemme A.24) implique que $\varepsilon K_2 + H - \varepsilon K_1$ est une fonction hamiltonienne qui engendre $\psi_{2,\varepsilon} \circ \psi_{1,\varepsilon}$. Comme par ailleurs, $H \leqslant \varepsilon K_2 + (H - \varepsilon K_1)$, la monotonie (proposition 1.21 7.), l'inégalité triangulaire (proposition 1.21 6.), et le caractère C^{-1} (proposition 1.34) nous donnent

$$c_+(\phi_H) \leqslant c_+(\psi_{2,\varepsilon} \circ \psi_{1,\varepsilon}) \leqslant c_+(\psi_{2,\varepsilon}) + c_+(\psi_{1,\varepsilon}) \leqslant \varepsilon + c_+(\psi_{1,\varepsilon}).$$

Notons à présent $\widetilde{\psi_{1,\varepsilon}}$ un difféomorphisme engendré par un hamiltonien positif, à support dans U et plus grand que $H - \varepsilon K_1$ (voir figure 2.2). La monotonie nous donne, $c_+(\psi_{1,\varepsilon}) \leqslant c_+(\widetilde{\psi_{1,\varepsilon}})$. Et comme $Supp(\widetilde{\psi_{1,\varepsilon}}) \subset U$, on obtient $c_+(\widetilde{\psi_{1,\varepsilon}}) \leqslant c(U)$, et donc $c_+(\phi_H) \leqslant \varepsilon + c(U)$.

En utilisant l'inégalité $H \geqslant -\varepsilon K_2 + (H + \varepsilon K_1)$, on obtient l'inégalité analogue pour c_-. □

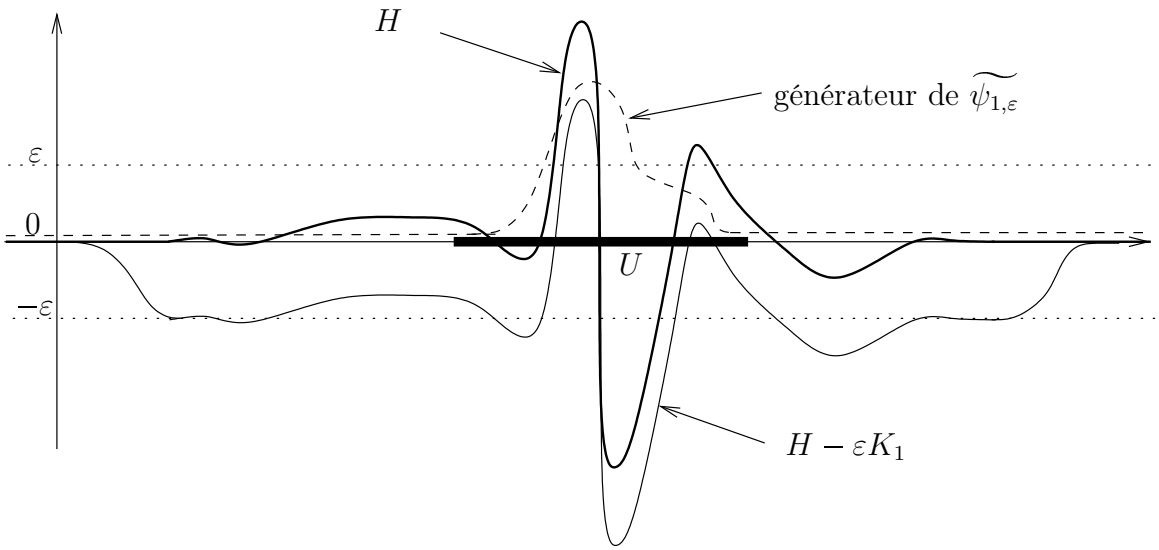


FIG. 2.2 – Démonstration du lemme 2.16.

Démonstration du lemme principal — Supposons par exemple que $\xi^{H_2}(U) \leqslant \xi^{H_1}(U)$. On applique le lemme 2.16 à l'hamiltonien $H(t,x) = H_1(t,\phi_2^t(x)) - H_2(t,\phi_2^t(x))$ — qui, rappelons-le, engendre l'isotopie $(\phi_{H_2}^t)^{-1} \circ \phi_{H_1}^t$ — et à l'ouvert $\bigcup_{t\in[0,1]} (\phi_2^{-1})^t(U)$. En effet, sous nos hypothèses, on a $H(t,x) \leqslant \varepsilon$ dès que $x \notin \bigcup_{t\in[0,1]} (\phi_2^{-1})^t(U)$, donc

$$\gamma(\phi_H) \leqslant 2\,\varepsilon + 2\,c\left(\bigcup_{t\in[0,1]} (\phi_2^{-1})^t(U)\right).$$

Comme, par définition, $\gamma(\phi_{H_1},\phi_{H_2}) = \gamma(\phi_H)$, on obtient bien

$$\gamma(\phi_{H_1},\phi_{H_2}) \leqslant 2\varepsilon + 2\xi_c^{H_2}(U).$$

□

2.2.4 Démonstration du théorème 2.7

Nous allons traiter simultanément les deux hypothèses. Dans les deux cas, la convergence des difféomorphismes ϕ_{H_k} pour γ est une conséquence directe du lemme principal (lemme 2.15).

La première hypothèse implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier k_0, tel que pour $p \geqslant k_0$, $\xi_c^{H_p}(U_{k_0}) \leqslant \varepsilon/4$. Pour p, q suffisamment grands, on a

par ailleurs $|H_p - H_q| \leqslant \varepsilon/4$ hors de U_{k_0}. Donc par le lemme principal, on a pour p, q suffisamment grands :

$$\gamma(\phi_{H_p}, \phi_{H_q}) \leqslant 2 \sup_{\mathbb{R}^{2n} - U_{k_0}} |H_p - H_q| + 2\xi_c^{H_p}(U_{k_0}) \leqslant \varepsilon.$$

La suite (ϕ_{H_k}) est donc bien de Cauchy pour γ.

Pour la seconde hypothèse, nous allons avoir besoin du lemme suivant.

Lemme 2.17. *Pour tout hamiltonien H, ξ^H est extérieurement régulier. Autrement dit, pour tout ensemble $V \subset \mathbb{R}^{2n}$, on a*

$$\xi^H(V) = \inf\{\xi^H(U) \,|\, U \text{ ouvert contenant } V\}.$$

En revanche, étant donné que le ξ d'un ouvert est infini, il est clair que ξ n'est pas extérieurement régulier.

Démonstration — Soit V une partie de $\mathbb{R}^{2n}$. Par régularité extérieure de c et e — qui résultent de leur construction —, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un ouvert W qui contient $\bigcup_{t\in[0,1]} \phi_H^t(V)$ et tel que

$$c(W) > \xi_c^H(V) - \varepsilon \quad \text{et} \quad e(W) > \xi_e^H(V) - \varepsilon$$

Comme le support de H est compact, il existe un ouvert W' qui contient $V \cap \text{support}(H)$ et tel que W contienne $\bigcup_{t\in[0,1]} \phi_H^t(W')$. La définition suivante de U

$$U = W' \cup (W - \text{support}(H)),$$

donne $\xi^H(U) > \xi^H(V) - \varepsilon$. □

Nous pouvons à présent prouver le théorème 2.7, sous la seconde hypothèse. Notons $H \in Ham_c(\mathbb{R}^{2n})$ la limite presque partout de (H_k). Par régularité extérieure de ξ^H (lemme 2.17), on peut choisir un voisinage ouvert U de K tel que $\xi_c^H(U) < \varepsilon/4$. Les hypothèses impliquent de plus que pour k assez grand, $|H_k - H| \leqslant \varepsilon/4$ sur $\mathbb{R}^{2n} - U$, et donc $\gamma(\phi_{H_k}, \phi_H) \leqslant \varepsilon$.

Une fois la convergence pour γ établie, celle pour $\tilde{\gamma}$ est immédiate, étant donnée l'inégalité $\tilde{\gamma} \leqslant \gamma$. Les convergences de (H_k) pour γ_u et $\tilde{\gamma}_u$ s'en déduisent également.

Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$, on a par définition

$$\gamma(\phi_{H_p}(L), \phi_{H_q}(L)) \leqslant \tilde{\gamma}(\phi_{H_p}, \phi_{H_q}),$$

donc $(\phi_{H_k}(L))$ est bien de Cauchy.

Il nous reste à traiter le cas des distances suspendues, sous la deuxième hypothèse. L'idée est similaire, mais nous allons avoir besoin du lemme suivant.

Lemme 2.18. *Pour tout hamiltonien H, et tout entier α,*

$$\xi_e^{\hat{H}_\alpha}(\mathbb{R}^2 \times V) \leqslant 2\xi_e(V),$$
$$\xi_e^{\check{H}_\alpha}(\mathbb{R}^2 \times V) \leqslant 2\xi_e(V).$$

Démonstration — Nous avons donné les expressions des flots des hamiltoniens $\hat{H}$ et $\check{H}$ dans la remarque 1.27. Lorsque l'on considère $\hat{H}_\alpha$ et $\check{H}_\alpha$, les expressions sont plus compliquées. Cependant, si l'on note $\phi^s_{\hat{H}_\alpha}(t,\tau,x) = (\hat{t}(s),\hat{\tau}(s),\hat{x}(s))$, et de même $\phi^s_{\check{H}_\alpha}(t,\tau,x) = (\check{t}(s),\check{\tau}(s),\check{x}(s))$, un calcul simple montre que

$$\frac{d\hat{x}}{ds} = \rho_\alpha(\hat{\tau}(s))X_H(\hat{t}(s),\hat{x}(s)) \quad \text{et} \quad \frac{d\check{x}}{ds} = \rho_\alpha(\check{\tau}(s))\check{t}(s)X_H(s\check{t}(s),\check{x}(s)).$$

Comme le champ de vecteur X_H est hamiltonien, on voit que pour t,τ fixés, $\hat{x}(s)$ et $\check{x}(s)$ sont des isotopies hamiltoniennes de $\mathbb{R}^{2n}$, que l'on notera respectivement $\hat{\psi}^s_{t,\tau}$ et $\check{\psi}^s_{t,\tau}$.

Finissons l'argument pour $\hat{H}_\alpha$, il sera identique pour $\check{H}_\alpha$. Avec ces notations, on peut écrire :

$$\bigcup_{s\in[0,1]} \phi^s_{\hat{H}_\alpha}(\mathbb{R}^2\times V) = \bigcup_{(t,\tau)\in\mathbb{R}^2} \left(\{(t,\tau)\} \times \bigcup_{s\in[0,1]} \hat{\psi}^s_{t,\tau}(V) \right).$$

Comme $\bigcup_{s\in[0,1]} \hat{\psi}^s_{t,\tau}(V)$ est par hypothèse d'énergie de déplacement inférieure à $\xi_e(V)$, pour tout (t,τ), le résultat de C. Viterbo mentionné dans la remarque 1.41 implique bien $\xi_e^{\hat{H}_\alpha}(\mathbb{R}^2 \times V) \leqslant 2\xi_e(V)$. □

Achevons maintenant la démonstration du théorème 2.7. Soit $\varepsilon > 0$. Par le lemme 2.18, on a pour tout α, $\xi_e^{\hat{H}_\alpha}(\mathbb{R}^2\times K) \leqslant 2\xi_e(K)$ et $\xi_e^{\check{H}_\alpha}(\mathbb{R}^2\times K) \leqslant \xi_e(K)$. Donc par régularité extérieure, il existe un voisinage ouvert U_α de $\mathbb{R}^2 \times K$ tel que $\xi_e^{\hat{H}_\alpha}(U_\alpha) < \varepsilon/4$ et $\xi_e^{\check{H}_\alpha}(U_\alpha) < \varepsilon/4$. En fait, l'ouvert U_α peut être choisi indépendant de α. Sur $\mathbb{R}^{2+2n} - U$, on a pour tout k assez grand et tout α, $|\hat{H}_{k,\alpha} - \hat{H}_\alpha| < \varepsilon/4$ et $|\check{H}_{k,\alpha} - \check{H}_\alpha| < \varepsilon/4$. On conclut avec le lemme principal que pour tout α et tout k assez grand,

$$\gamma(\hat{H}_{k,\alpha},\hat{H}_\alpha) \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \gamma(\check{H}_{k,\alpha},\check{H}_\alpha) \leqslant \varepsilon.$$

Par conséquent, on a pour k assez grand,

$$\hat{\gamma}(H_k,H) \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \check{\gamma}(H_k,H) \leqslant \varepsilon.$$

□

2.2.5 Un exemple instructif

Nous allons donner ici un exemple qui montre que le théorème 2.7 (deuxième hypothèse) et le lemme 2.15 sont faux si l'on remplace l'hypothèse $\xi(K) = 0$ par l'hypothèse plus faible $c(K) = 0$ ou $e(K) = 0$.

EXEMPLE 2.19. Rappelons que les capacités c et e de la sphère unité $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \,|\, \|x\| = 1\}$ sont égales à π.

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un hamiltonien H à support dans un petit voisinage U de $\mathbb{S}$, tel que $c_+(\phi_H) > \pi - \varepsilon$. Par la propriété de monotonie (proposition 1.21 7.), H peut être choisi positif. On choisit U^+ un voisinage de l'hémisphère nord $\{x \in \mathbb{S} \,|\, x_1 \geqslant 0\}$ et U^- un voisinage de l'hémisphère sud $\{x \in \mathbb{S} \,|\, x_1 < 0\}$, tels que $U = U^+ \cup U^-$ (voir figure 2.3).

Si U, U^+ et U^- sont assez petits, on a $e(U^\pm) < \varepsilon$ donc aussi $c(U^\pm) < \varepsilon$. A l'aide d'une partition de l'unité subordonnée à la décomposition $U = U^+ \cup U^-$, on obtient deux fonctions H^+ et H^-, à supports respectifs dans U^+ et U^-, et telles que $H = H^+ + H^-$.

On voit alors que H^+ coïncide avec H hors de U^-, dont la capacité vérifie $c(U^-) < \varepsilon$, mais que par ailleurs,

$$\|\gamma(\phi_H) - \gamma(\phi_{H^+})\| \geqslant \gamma(\phi_H, \phi_{H^+}) \geqslant \pi - \varepsilon - \gamma(\phi_{H^-}) \geqslant \pi - 2\varepsilon.$$

Par conséquent, on ne peut remplacer les hypothèses du lemme 2.15 par $c(K) = 0$ ou $e(K) = 0$; sans beaucoup plus de travail, il en est de même pour le théorème 2.7.

REMARQUE 2.20. On note en particulier sur cet exemple que la convergence pour la distance de Viterbo *n'est pas impliquée* par la convergence presque partout.

Remarquons aussi que l'existence d'un tel exemple repose sur le fait que les capacités ne se comportent pas comme le volume : la capacité de l'union de deux ensembles de capacités petites n'est pas nécessairement petite.

2.2.6 Démonstration du théorème 2.9

Commençons par remarquer que les propriétés 2 et 3 de la définition 2.8 impliquent que l'ensemble des discontinuités d'un élément de $\mathcal{F}$ est compact. Nous allons faire la démonstration en plusieurs étapes.

1ÈRE ÉTAPE : L'application ι est bien définie et son image est dans $\overline{Ham}$.

Supposons que $H \in \mathcal{F}$, et notons K la projection sur $\mathbb{R}^{2n}$ de $H^{-1}(\{\pm\infty\})$ l'ensemble des points de discontinuité de H. Par hypothèse, il existe une

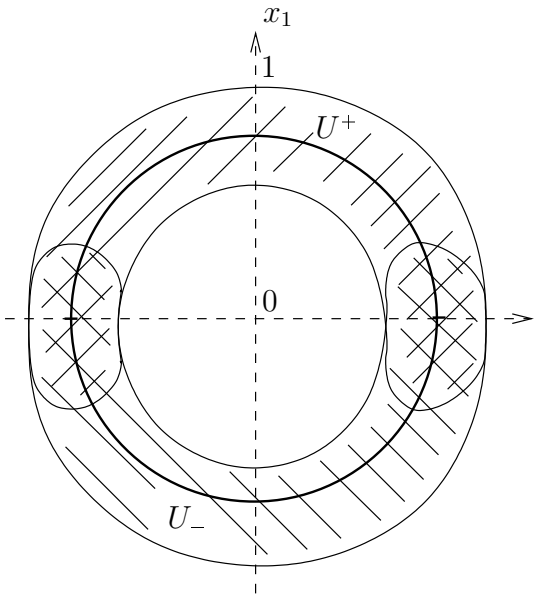


FIG. 2.3 – Les ouverts U^+ et U^- sont de capacité petite, mais celle de leur réunion est voisine de π.

suite de voisinages ouverts (U_k) de K dont l'énergie de déplacement $e(U_k)$ converge vers 0. Pour chaque entier k, il existe une constante C_k telle que

$$\{(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \mid |H(t,x)| \geqslant C_k\} \subset [0,1] \times U_k.$$

On considère maintenant une suite d'hamiltoniens lisses (H_k) qui est constante et vaut C_k sur un petit voisinage V_k de $\{|H| \geqslant C_k\}$ et qui, hors de V_k, est à distance de H plus petite que $1/k$. Pour chaque entier k, le flot de H_k préserve le voisinage V_k, donc si l'on choisit $V_k \subset U_k$,

$$\xi_e^{H_k}(V_k) = e(V_k) \leqslant e(U_k).$$

Le lemme 2.15 affirme donc que pour tous entiers p, q,

$$\gamma_u(H_p, H_q) \leqslant \frac{2}{p} + \frac{2}{q} + 2\min(e(U_p), e(U_q)),$$

ce qui prouve que (H_k) est de Cauchy pour γ_u et donc aussi pour $\tilde{\gamma}_u$.

Considérons maintenant une autre suite (H'_k) d'hamiltoniens lisses, et qui converge uniformément vers H sur les compacts de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{2n} - K)$. Alors, si l'on note ε_k la distance uniforme de H'_k à H_k sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{2n} - K)$, le lemme 2.15 affirme

$$\tilde{\gamma}_u(H'_k, H_k) \leqslant \frac{1}{k} + \varepsilon_k + e(U_k).$$

Cette quantité tend vers 0 quand k tend vers l'infini donc (H'_k) est équivalente à (H_k). Ceci prouve donc que l'application ι est bien définie, et que son image est dans $\overline{Ham}$.

2ÈME ÉTAPE : L'image de ι est incluse dans $\widehat{Ham}$ et $\widetilde{Ham}$.

Pour les distances suspendues, l'idée est similaire. L'argument est cependant légèrement plus subtil car les hamiltoniens $\hat{H}_\alpha$ et $\check{H}_\alpha$ ne vérifient pas complètement la troisième hypothèse de la définition 2.8. En effet, ceux-ci sont discontinus aux points de K dont la coordonnée suivant τ vient à annuler la fonction ρ_α (avec les notations de la définition 1.26).

Considérons U_k, H_k, V_k comme dans la première étape. Prenons un ouvert de la forme $W \times V_k$. A cause du problème de discontinuité que l'on vient de mentionner, cet ouvert n'est fixé ni par le flot de $\hat{H}_{k,\alpha}$, ni par celui de $\check{H}_{k,\alpha}$. Cependant, la discontinuité intervient dans la direction de τ, ces flots fixent donc la direction $\mathbb{R}^{2n}$. On en déduit que

$$\xi_e^{\check{H}_{k,\alpha}}(W \times V_k) \leqslant e(\mathbb{R}^2 \times V_k) = e(V_k) \leqslant e(U_k),$$

et de même pour $\hat{H}_{k,\alpha}$. On conclut ensuite comme dans la première étape.

3ÈME ÉTAPE : La restriction de l'application ι aux éléments lisses est injective.

Supposons que deux éléments distincts lisses H et G de $\mathcal{F}$ aient la même image par ι. Alors, on peut représenter chacun d'entre eux par des suites d'hamiltoniens qui stationnent sur chaque compact ne contenant pas de singularité. Autrement dit, si l'on note K la réunion des points de singularité de H et G, il existe une suite (H_k) (resp. G_k) telle que pour tout compact A de $[0,1] \times (\mathbb{R}^{2n} - K)$, H_k (resp. G_k) coïncide avec H (resp. G) sur A, à partir d'un certain rang.

Pour des temps suffisamment petits, on peut définir presque partout le flot $\psi^t = (\phi_G^t)^{-1}\phi_H^t$. On notera aussi $\psi_k^t = (\phi_{G_k}^t)^{-1}\phi_{H_k}^t$. Fixons un instant t petit. Comme $H \neq G$, il existe un point x tel que $\psi^t(x) \neq x$. Par conséquent, il existe une petite boule B autour de x déplacée par ψ^t.

Pour k assez grand, H_k coïncide avec H et G_k avec G sur $\bigcup_{\tau\in[0,t]} \psi^\tau(B)$, donc on a,

$$\psi_k^t(B) \cap B = \varnothing.$$

Par conséquent,

$$\gamma_u(H_k, G_k) \geqslant \gamma(\psi_k^t) \geqslant \gamma(B) > 0,$$

ce qui montre que (H_k) et G_k ne sont pas des suites équivalentes. □

REMARQUE 2.21. L'injectivité de ι sur tout son domaine de définition reste un problème ouvert.

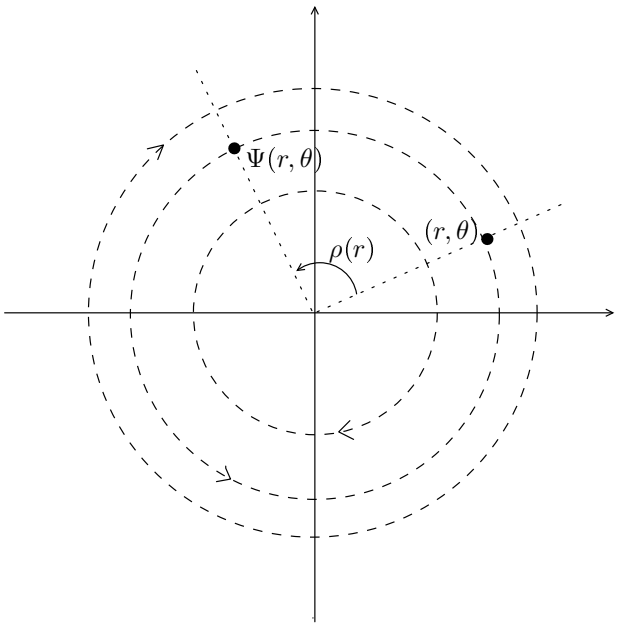


FIG. 2.4 – L'homéomorphisme Ψ : une rotation fibrée.

2.2.7 Exemples de difféomorphismes généralisés

Dans ce paragraphe, nous nous contentons de donner quelques exemples d'éléments des complétions $\overline{\mathcal{H}}$ et $\widetilde{\mathcal{H}}$ que l'on peut voir comme des applications de $\mathbb{R}^{2n}$, éventuellement discontinues. Voici dans un premier temps des exemples d'éléments de $\overline{\mathcal{H}}$ assimilables à des applications continues mais non différentiables.

EXEMPLE 2.22. On considère un homéomorphisme Ψ qui est une rotation fibrée du plan, c'est-à-dire donné en coordonnées polaires par

$$(r,\theta) \mapsto (r, \theta + \rho(r)),$$

où ρ est une fonction lisse à valeurs réelles, définie sur $]0,+\infty[$, et nulle à partir d'une certaine valeur (voir figure 2.4). Sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, Ψ coïncide avec le temps un du flot hamiltonien engendré par la fonction hamiltonienne $H : (r,\theta) \mapsto \int_0^r s\rho(s)ds$.

Lorsque ρ converge vers l'infini en 0, Ψ est un homéomorphisme, mais n'est pas différentiable. Cependant, il est le flot d'un hamiltonien qui, s'il peut ne pas être continu en 0, appartient néanmoins à la famille $\mathcal{F}$ introduite dans la définition 2.8. Par le théorème 2.9, H s'identifie à un élément de $\overline{Ham}$. Le temps un de son flot s'identifie donc à un élément de $\overline{\mathcal{H}}$.

Il est aussi possible de construire une application non-continue identifiable à un élément du complété, au moins en dimension plus grande que 4.

EXEMPLE 2.23. On considère $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$,

$$(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{|\|x_1\|^2 - 1| + \|x_2\|^2} \chi(\|(x_1, x_2)\|),$$

où χ est lisse, à support compact et vaut 1 sur la boule de rayon 2 centrée en zéro. Clairement, $H \in \mathcal{F}$. En effet, $H^{-1}(\{+\infty\}) = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ est d'énergie de déplacement nulle. On peut calculer explicitement le temps un de son flot ϕ, qui est défini presque partout.

En coordonnées cylindriques (r_1, θ_1, x), on obtient en particulier pour $|r_1| < 1$:

$$\phi(r_1, 0, 0) = \left(r_1, \frac{r_1^2}{(1 - r_1^2)^2}, 0 \right).$$

Si l'on fait tendre r_1 vers 1, on voit sur cette équation que ϕ n'est pas continu.

2.3 Étude des complétés

Dans cette partie nous étudions différentes questions relatives aux complétés : Comment définir une notion de support pour leurs éléments (section 2.3.1) ? Peut-on définir l'image d'un ouvert par un élément de $\overline{\mathcal{H}}$ ou $\widetilde{\mathcal{H}}$ (section 2.3.2) ? Quel sens donner à la notion d'intégrale première, et comment caractériser les éléments complètement intégrables (section 2.3.3) ? Quels sont les compacts des complétés (section 2.3.4) ? Peut-on voir tous les éléments de $\overline{\mathcal{H}}$ et $\widetilde{\mathcal{H}}$ comme des applications mesurables (section 2.3.5) ?

2.3.1 Supports

Nous donnons ici deux notions de support (d'autres sont envisageables) pour les éléments des différents complétés. Chacune présente des avantages et des inconvénients.

Une première définition de support

Définition 2.24. *Soit ψ un élément de $\overline{\mathcal{H}}$ ou $\widetilde{\mathcal{H}}$. On définit le support de ψ par*

$$supp_1(\psi) = \bigcap \{F | F \text{ fermé, } \exists (\psi_n) \text{ représentant } \psi, \forall n \in \mathbb{N}, \psi_n|_{\mathbb{R}^{2n} - F} = Id\}.$$

Soit K un élément de $\overline{Ham}$, $\widetilde{Ham}$, $\widehat{Ham}$ ou $\widetilde{Ham}$. On définit le support de K par

$$supp_1(K) = \bigcap \{F | F \text{ fermé, } \exists (K_n) \text{ représentant } K, \forall n \in \mathbb{N}, K_n|_{\mathbb{R}^{2n}-F} = 0\}.$$

Cette définition étend dans une certaine mesure la notion usuelle de support pour les objets lisses, et dans une certaine mesure pour les objets continus.

Proposition 2.25. *Avec la définition 2.24, on a :*

1. *pour tout homéomorphisme $\psi \in \mathcal{H}_c^0$,*

$$supp_1(\psi) \supset \overline{\{x | \psi(x) \neq x\}},$$

   avec égalité si ψ est un difféomorphisme.

2. *pour tout hamiltonien continu $K \in Ham_c^0$,*

$$supp_1(K) = \overline{\{x | K(x) \neq 0\}}.$$

3. *pour tout réel t et tout hamiltonien généralisé H dans $\overline{Ham}$, $\widetilde{Ham}$, $\widehat{Ham}$ ou $\widetilde{Ham}$, alors*

$$supp_1(\phi_H^t) \subset supp_1(H);$$

4. *pour tous ψ, ϕ dans $\overline{\mathcal{H}}$ ou $\widetilde{\mathcal{H}}$,*

$$supp_1(\phi\psi) \subset supp_1(\phi) \cup supp_2(\psi).$$

Démonstration — La première propriété repose sur le fait qu'un homéomorphisme ψ coïncide avec l'identité sur un ouvert donné U si et seulement s'il commute avec tous les difféomorphismes hamiltoniens à support dans U.

En effet, si ψ est l'identité sur U, alors clairement il commute avec tous les éléments de $\mathcal{H}_c(U)$. Réciproquement, s'il existe un point x tel que $\psi(x) \neq x$, on peut alors choisir un élément ϕ de $\mathcal{H}_c(U)$, qui ne fixe pas x mais fixe $\psi(x)$. Alors $\phi^{-1}\psi^{-1}\phi\psi(x) \neq x$ donc ψ ne commute pas avec ϕ, comme annoncé.

Démontrons maintenant que $supp_1(\psi) \supset \overline{\{x | \psi(x) \neq x\}}$. Soit F un fermé de $\mathbb{R}^{2n}$ pour lequel il existe une suite de Cauchy (ψ_n) qui converge vers ψ et qui est l'identité pour tout rang n sur $\mathbb{R}^{2n} - F$, alors, pour tout $\phi \in \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^{2n} - F)$, et tout n,

$$\phi^{-1}\psi_n^{-1}\phi\psi_n = id.$$

En passant à la limite pour γ, on obtient

$$\phi^{-1}\psi^{-1}\phi\psi = id,$$

ce qui prouve que ψ est l'identité sur $\mathbb{R}^{2n} - F$, soit $supp_1(\psi) \supset \overline{\{x|\psi(x) \neq x\}}$. L'inclusion réciproque est claire pour un difféomorphisme, puisqu'il suffit de considérer la suite constante égale à ce difféomorphisme.

Passons au cas des fonctions hamiltoniennes. Soit $K \in Ham_c^0$. L'inclusion $supp_1(K) \subset \overline{\{x|K(x) \neq 0\}}$ est facile : pour tout ouvert U sur lequel K s'annule, on peut trouver une suite de fonctions hamiltoniennes qui converge uniformément vers K et qui s'annule sur U.

L'inclusion réciproque s'obtient de manière similaire au cas des homéomorphismes. On utilise ici le fait qu'un hamiltonien est constant sur un ouvert connexe U si et seulement s'il est invariant par le groupe $\mathcal{H}_c(U)$. En effet, si F est un fermé de $\mathbb{R}^{2n}$ pour lequel il existe une suite de Cauchy (K_n) qui converge vers K et qui est nulle pour tout rang n sur $\mathbb{R}^{2n} - F$. Alors pour tout $\phi \in \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^{2n} - F)$, et tout n,

$$K_n \circ \phi = K_n,$$

donc à tout instant t, $\phi^{-1}\phi_{K_n}^t\phi = \phi_{K_n}^t$. En passant à la limite pour γ, on en déduit $\phi^{-1}\phi_K^t\phi = \phi_K^t$, donc

$$K \circ \phi = K.$$

Par conséquent, K est constant sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^{2n} - F$. Pour prouver que K y est en fait nul, nous allons avoir besoin d'un lemme.

Pour tout ouvert U, on note

$$A(U) = \sup_f\{c_+(\phi_f^1)\},$$

où le supremum porte sur toutes les fonctions f de classe C^∞, à support dans U, qui n'ont pas d'orbite périodique non-triviale, de période plus petite que 1. Notons que $A(U)$ est toujours strictement positif : une fonction dont la norme C^2 est suffisamment petite, n'a pas d'orbite périodique non-triviale, de période plus petite que 1.

Lemme 2.26. *Soient H un hamiltonien à support compact lisse, et U un ouvert tels que H est constant de valeur C sur U avec $|C| \geqslant A(U)$. Alors $\gamma(\phi_H^1) \geqslant A(U)$.*

Démonstration — Supposons sans perte de généralité que $C > 0$ et raisonnons par l'absurde, en supposant que $\gamma(\phi_H^1) < A(U)$. Soit f une fonction à support dans U n'admettant pas d'orbite périodique non-triviale, de période plus petite que 1. Pour $s \in [0, 1]$, on s'intéresse à la famille d'hamiltoniens $H_s = H - sf$. Nous allons prouver que $c_-(\phi_{H_s}^1) = c_-(\phi_H^1)$.

Par construction, les orbites périodiques de H_s sont, soit des orbites périodiques de H, soit des orbites périodiques de $-sf$, c'est-à-dire, encore par hypothèse, des points critiques de $-sf$. On peut alors calculer l'action de H_s pour chacune de ces orbites. Si cette orbite ne rencontre pas U, l'action de H_s est la même que celle de H car f est nulle le long de cette orbite. Sinon, l'orbite est un point critique de H_s dont l'action est la valeur de H_s en ce point. Cette valeur est par hypothèse supérieure à $C - s\max f$, en valeur absolue, donc à $A(U) - c_+(sf) \geqslant 0$.

Par conséquent, l'ensemble E des valeurs critiques négatives de l'action de H_s reste donc invariant lorsque s évolue. Mais l'ensemble E est totalement discontinu. Comme l'application $s \mapsto c_-(\phi^1_{H_s})$ est continue et sa valeur en 0 est par hypothèse dans E, elle est donc constante. Ceci prouve bien l'égalité $c_-(\phi^1_{H_s}) = c_-(\phi^1_H)$.

Maintenant, $\phi^1_{H_s} = \phi^1_H \phi^{-s}_f$, donc par la proposition 1.21,

$$c_+(\phi^1_f) \leqslant c_+(\phi^1_H) + c_+(\phi^{-1}_{H_1}) = \gamma(\phi^1_H).$$

Comme ceci est vrai pour toute fonction f, on obtient alors une contradiction car cela implique $\gamma(\phi^1_H) \geqslant A(U)$. $\square$

Terminons à présent la démonstration du deuxième point de la proposition 2.25. On a prouvé que notre hamiltonien continu K est constant sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^{2n} - F$. Si K est non nul sur l'une de ces composantes connexes W, on peut trouver une suite d'hamiltoniens lisses (K'_n) qui prennent la même valeur que K sur W et qui convergent uniformément vers K. Par ailleurs, on sait que K est limite pour γ_u d'une suite d'hamiltoniens nuls sur tout $\mathbb{R}^{2n} - F$. Maintenant, si l'on note C la valeur de K sur W, et si l'on se donne un petit ouvert U inclus dans W vérifiant $A(U) \leqslant |C|$, on sait que l'on aura par le lemme

$$\gamma(\phi^1_{K'_n}, \phi^1_{K_n}) \geqslant A(U) > 0.$$

Ceci contredit le fait que $\phi^1_{K'_n}$ et $\phi^1_{K_n}$ ont la même limite dans le complété. L'hamiltonien continu K est donc nul sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^{2n} - F$.

La troisième propriété est quasiment évidente. Si F est un fermé de $\mathbb{R}^{2n}$, tel qu'il existe une suite de Cauchy d'hamiltoniens (H_n) convergeant vers H et s'annulant sur $\mathbb{R}^{2n} - F$, alors $(\phi^t_{H_n})$ est une suite de Cauchy convergeant vers ϕ^t_H, et coïncidant avec l'identité sur $\mathbb{R}^{2n} - F$. D'où l'inclusion $supp(\phi^t_H) \subset supp(H)$.

Enfin, si (ϕ_n) et (ψ_n) sont des suites de Cauchy de difféomorphismes hamiltoniens qui convergent respectivement vers ϕ et ψ, en étant l'identité sur

des ouverts respectifs U et V, alors $(\phi_n\psi_n)$ est elle-même une suite de Cauchy, qui converge vers $\phi\psi$ et est l'identité sur $U \cap V$. D'où l'inclusion

$$supp_1(\phi\psi) \subset supp_1(\phi) \cup supp_2(\psi).$$

□

Cette première définition du support est inspirée de la définition du support d'une mesure ou plus généralement d'une distribution. Cependant, contrairement au cas des distributions, on ne dispose pas ici de l'outil que sont les partitions de l'unité. Le support ne se comporte donc pas très bien. Par exemple, les questions suivantes sont ouvertes.

Question 2.27. *Pour tous ψ à support compact dans $\overline{\mathcal{H}}$ ou $\widetilde{\mathcal{H}}$, et toute lagrangienne $L \in \mathcal{L}$, telle que $supp_1(\psi) \cap L = \varnothing$, a-t-on $\psi(L) = L$?*

Question 2.28. *Deux éléments ϕ, ψ dans $\overline{\mathcal{H}}$ ou $\widetilde{\mathcal{H}}$, dont les supports sont disjoints, commutent-ils ?*

Une seconde définition un peu affinée

Soit ψ (resp. K) un élément de $\overline{\mathcal{H}}$ ou $\widetilde{\mathcal{H}}$ (resp. de $\overline{Ham}$, $\widetilde{Ham}$, $\widehat{Ham}$ ou $\widetilde{Ham}$). On note $\mathfrak{F}_\psi$ (resp. $\mathfrak{F}_K$) l'ensemble des fermés F de $\mathbb{R}^{2n}$ pour lesquels il existe une suite de Cauchy de difféomorphismes hamiltoniens (ψ_n) (resp. de fonctions hamiltoniennes (K_n)) qui converge vers ψ (resp. K), et dont tous les éléments sont l'identité (resp. nuls) sur le complémentaire de F.

La relation d'inclusion induit une relation d'ordre sur $\mathfrak{F}_\psi$ (resp. $\mathfrak{F}_K$).

Définition 2.29. *Soit ψ un élément de $\overline{\mathcal{H}}$ ou $\widetilde{\mathcal{H}}$. On définit alors le support de ψ par*

$$supp_2(\psi) = \overline{\bigcup\{\text{éléments minimaux de } (\mathfrak{F}_\psi, \subset)\}}.$$

Soit K un élément de $\overline{Ham}$, $\widetilde{Ham}$, $\widehat{Ham}$ ou $\widetilde{Ham}$. On définit le support de K par

$$supp_2(K) = \overline{\bigcup\{\text{éléments minimaux de } (\mathfrak{F}_K, \subset)\}}.$$

Remarquons d'abord qu'avec ces notations, $supp_1(\psi) = \bigcap \mathfrak{F}_\psi$ et $supp_1(K) = \bigcap \mathfrak{F}_K$, d'où les inclusions

$$supp_1(\psi) \subset supp_2(\psi) \text{ et } supp_1(K) \subset supp_2(K).$$

De plus, avec cette définition du support, on retrouve certaines propriétés valables pour la précédente. On perd la dernière propriété de la proposition 2.25, mais on peut répondre affirmativement aux questions 2.27 et 2.28.

Proposition 2.30. *Avec la définition 2.29, on a :*

1. *pour tout homéomorphisme $\psi \in \mathcal{H}_c^0$,*

$$supp_2(\psi) \supset \overline{\{x|\psi(x) \neq x\}},$$

   avec égalité si ψ est un difféomorphisme ;

2. *pour tout hamiltonien continu $K \in Ham_c^0$,*

$$supp_2(K) = \overline{\{x|K(x) \neq 0\}};$$

3. *pour tout réel t et tout hamiltonien généralisé H dans $\overline{Ham}$, $\widetilde{Ham}$, $\widehat{Ham}$ ou $\widetilde{Ham}$, alors*

$$supp_2(\phi_H^t) \subset supp_2(H);$$

4. *pour tous ψ dans $\overline{\mathcal{H}}$ ou $\widetilde{\mathcal{H}}$, et toute lagrangienne $L \in \mathcal{L}$,*

$$si\ supp_2(\psi) \cap L = \varnothing,\ alors\ \psi(L) = L;$$

5. *pour tous éléments ϕ, ψ dans $\overline{\mathcal{H}}$ ou $\widetilde{\mathcal{H}}$,*

$$si\ supp_2(\psi) \cap supp_2(\phi) = \varnothing,\ alors\ \psi\phi = \phi\psi.$$

Démonstration — Tout d'abord, les inclusions $supp_2(\psi) \supset \overline{\{x|\psi(x) \neq x\}}$ et $supp_2(K) \supset \overline{\{x|K(x) \neq 0\}}$ résultent des inclusions analogues pour $supp_1$ et de l'inégalité $supp_1 \subset supp_2$.

Si ψ est un difféomorphisme hamiltonien, l'ensemble $\overline{\{x|\psi(x) \neq x\}}$ appartient à $\mathfrak{F}_\psi$. Et comme il est aussi égal à $supp_1(\psi)$, il est donc le minimum de $\mathfrak{F}_\psi$, soit l'unique élément minimal. On obtient donc bien l'égalité $supp_2(\psi) = \overline{\{x|\psi(x) \neq x\}}$.

De manière similaire, si K est continu, l'ensemble $\overline{\{x|K(x) \neq 0\}}$ appartient à $\mathfrak{F}_K$, et on conclut comme précédemment que $supp_2(K) = \overline{\{x|K(x) \neq 0\}}$.

Les propriétés 3, 4 et 5 de la proposition sont quasiment évidentes. En effet, si F est un élément minimal de $\mathfrak{F}_H$, alors c'est également un élément minimal de $\mathfrak{F}_{\phi_H^t}$, ce qui prouve la propriété 3.

Si $supp_2(\psi) \cap L = \varnothing$ et si F est un élément minimal de $\mathfrak{F}_\psi$, alors il existe une suite (ψ_n) de difféomorphismes hamiltoniens qui converge vers ψ et dont chacun des termes fixe le complémentaire de F. Comme $F \cap L = \varnothing$, $\psi_n(L) = L$ pour tout n, $\psi(L) = L$ par passage à la limite.

Enfin, si $supp_2(\psi) \cap supp_2(\phi) = \varnothing$, et si F, F' sont deux fermés minimaux respectivement dans $\mathfrak{F}_\psi$ et $\mathfrak{F}_\phi$, il existe deux suites (ψ_n), (ϕ_n) de limites

respectives ψ, ϕ qui sont l'identité sur les complémentaires respectifs de F, F'. Comme $F \cap F' = \varnothing$, ϕ_n et ψ_n commutent pour tout n. Par passage à la limite, ϕ et ψ commutent. □

Une question naturelle — aussi valable pour $supp_1$ — est de savoir si l'inclusion du point 3 de la proposition 2.30 est une égalité. Cette question reste ouverte.

Éléments à supports "petits"

Dans ce paragraphe, on se demande s'il existe des éléments dans les différents complétés considérés, dont le support est très "petit" sans pour autant être vide. Le support considéré ici est celui de la première définition $supp_1$ (définition 2.24) — la deuxième définition $supp_2$ exclut tout support d'intérieur vide non trivial.

Proposition 2.31. *Tout élément H de $\overline{Ham}$, dont le support vérifie*

$$c(supp_1(H)) = 0,$$

est nul.

Démonstration — Ceci résulte directement du critère de convergence donné par le théorème 2.7. En effet, si l'on note H un élément du complété, on peut trouver une suite de Cauchy (H_k) qui converge pour γ_u vers H, et telle que pour tout compact B du complémentaire de $supp_1(H)$, H_k nul sur B à partir d'un certain rang. Par conséquent, H_k converge uniformément vers 0 sur les compacts de $\mathbb{R}^{2n} - supp_1(H)$. Le théorème 2.7 implique alors que si $supp_1(H)$ est de capacité nulle, alors H_k converge vers 0 pour γ_u. □

Nous ne savons pas s'il existe des hamiltoniens généralisés non triviaux supportés sur un ensemble d'intérieur vide, mais de capacité non nulle. Par exemple, la question suivante est ouverte. On note $\mathbb{S}_{2n-1}$ la sphère unité euclidienne de $\mathbb{R}^{2n}$, dont on sait qu'elle est de capacité π.

Question 2.32. *Existe-t'il des éléments non nuls H de $\overline{Ham}(\mathbb{R}^{2n})$ tels que $supp_1(H) = \mathbb{S}_{2n-1}$?*

2.3.2 À la recherche de l'image d'un ouvert

Une fois le support défini, il est facile de donner un sens à l'expression "coïncider sur un ouvert". En effet, on pourra dire que deux éléments ϕ, ψ

de $\overline{\mathcal{H}}$ ou $\widetilde{\mathcal{H}}$ *coïncident sur un ouvert* U si

$$supp_1(\phi^{-1}\psi) \subset \mathbb{R}^{2n} - U.$$

Grâce à la propriété 4 de la proposition 2.25, pour tout ouvert U, la relation "coïncider sur U" est une relation d'équivalence sur $\overline{\mathcal{H}}$ et $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Comme dans le cas des distributions, il est exclu de donner un sens à ce que peut être l'image d'un point par un élément de l'un des complétés. En revanche, l'image d'un ouvert par un élément de $\overline{\mathcal{H}}$, peut être vu abstraitement comme un élément du quotient

$$\overline{\mathcal{H}} \times \{\text{ouverts de } \mathbb{R}^{2n}\} \diagup \sim,$$

où $(\phi, U) \sim (\psi, V)$ si et seulement si $U = V$ et ϕ coïncide avec ψ sur U. Cependant cette définition est trop abstraite pour être utilisée en pratique.

Une autre approche pour considérer l'image d'un ouvert par un élément d'un complété, pourrait venir de la remarque suivante : pour tout difféomorphisme ϕ et tout ouvert U, ϕ déplace tous les compacts inclus dans $U - \phi(U)$ et ϕ^{-1} déplace tous les compacts inclus dans $\phi(U) - U$ (figure 2.5). Par conséquent, $\gamma(\phi)$ est plus grand que la capacité de la plus grande boule symplectique incluse dans la différence symétrique de U et $\phi(U)$. On en déduit l'inégalité

$$\gamma(\phi) \geqslant w(U \Delta\, \phi(U)),$$

où w désigne le "width" de Gromov (cf. exemple A.42), et Δ la différence symétrique de deux ensembles.

Ainsi, par exemple, si (ψ_n) et (ϕ_n) sont deux suites de Cauchy équivalentes, et si U est un ouvert donné, alors $w(\phi_n(U)\Delta\psi_n(U))$ converge vers 0. Ceci suggère l'idée que *deux suites de Cauchy équivalentes agissent essentiellement de la même manière sur un ouvert donné, à des ensembles de capacité petite près*. Cependant, il semble difficile de donner un sens mathématique plus précis à cette idée, et de l'exploiter pour définir de manière concrète l'image d'un ouvert par un élément du complété.

2.3.3 Intégrales premières et systèmes intégrables généralisés

Étant donné un hamiltonien généralisé H, il est facile d'étendre la notion d'intégrale première.

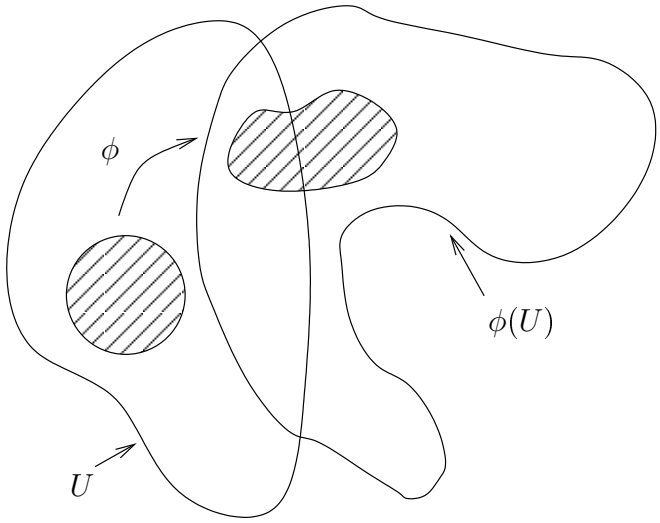


FIG. 2.5 – Compact inclus dans $U - \phi(U)$ et donc déplacé par ϕ.

Définition 2.33. *Soit H un élément de $\overline{Ham}$, $\widetilde{Ham}$, $\widehat{Ham}$ ou $\widetilde{Ham}$. Une intégrale première f de H est un élément de $\overline{Ham}$, $\widetilde{Ham}$, $\widehat{Ham}$ ou $\widetilde{Ham}$ tel que pour tous s, t,*

$$\phi_f^{-s}\phi_H^{-t}\phi_f^s\phi_H^t = id.$$

Il est clair que cette notion étend la notion usuelle dans le cas lisse. On peut ensuite facilement définir ce qu'est un *système intégrable généralisé* comme un hamiltonien généralisé admettant n-intégrales premières lisses presque partout linéairement indépendantes. On peut formuler la conjecture suivante.

Conjecture 2.34. *Tout système intégrable généralisé est un hamiltonien continu.*

Une raison heuristique menant à cette conjecture est la suivante : oublions le problème de la non-compacité des supports, et supposons que $H = H(p)$ est un hamiltonien lisse qui ne dépend pas des variables bases x_i, $i = 1, \ldots, n$ — les fonctions $x_1, \cdots, x_n$ sont des intégrales premières de H. Alors, le flot de H s'écrit

$$\phi_H^t(x,p) = \left(x + t\frac{\partial H}{\partial p}, p\right).$$

Son graphe est donc

$$\Gamma_{\phi_H^t} = \left\{ \left(x, p, x + t\frac{\partial H}{\partial p}, p\right) \,\middle|\, (x,p) \in \mathbb{R}^{2n} \right\},$$

et l'on voit que son image dans le cotangent de la diagonale, $\widetilde{\Gamma_{\phi_H^t}}$, n'est autre que le graphe de dH. Il s'en suit que pour tout t,

$$\gamma(\phi_H^t) = t(\max H - \min H).$$

Ainsi, pour les hamiltoniens ne dépendant que de p, la distance γ_u est équivalente à la distance C^0. Par conséquent, leur complétion ne contient que des éléments continus, ce qui termine notre argument heuristique.

2.3.4 Compacts

Un de nos buts à long terme, est de caractériser l'ensemble des compacts des différents complétés. Nous sommes pour l'instant loin de cet objectif, mais on peut néanmoins faire quelques remarques dans cette direction.

REMARQUE 2.35. Si l'on considère par exemple l'ensemble des lagrangiennes qui sont des graphes de fonctions, on sait que la distance de Viterbo γ est donnée par la distance C^0 de ces fonctions. Ainsi, le critère de compacité sur l'ensemble des graphes est donné par le théorème d'Ascoli, appliqué à l'ensemble des fonctions. On obtient par exemple l'énoncé :

Pour toute constante $C > 0$, l'ensemble des lagrangiennes qui sont des graphes de fonctions, et qui sont incluses dans la bande $\{(x,p) \mid |p| \leqslant C\}$, est relativement compact dans le complété $\overline{\mathcal{L}}$.

La remarque précédente peut être traduite et améliorée dans le cadre des difféomorphismes.

REMARQUE 2.36. Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des difféomorphismes hamiltoniens ϕ qui vérifient en tout point x de $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\|d\phi(x) - Id\| < 1 \quad \text{et} \quad \|d\phi^{-1}(x) - Id\| < 1.$$

Au sens de l'annexe B.1, ces difféomorphismes sont "admissibles" et admettent donc une fonction génératrice admissible S (voir proposition B.2). Le graphe de la différentielle de S n'est autre que $\widetilde{\Gamma_\phi}$, le graphe de ϕ vu dans le cotangent de la diagonale.

La remarque précédente affirme donc que tout ensemble d'éléments de $\mathcal{V}$ dont les supports sont inclus dans un même compact est relativement compact pour la distance de Viterbo γ. On peut améliorer un peu cet énoncé :

Pour tout compact K, et tout entier naturel ν, l'ensemble des difféomorphismes qui s'écrivent comme produit de ν éléments de $\mathcal{V}$ à support dans K, est relativement compact dans $\overline{\mathcal{H}}$.

Il reste bien sûr à caractériser les difféomorphismes hamiltoniens qui sont le produit de ν éléments de $\mathcal{V}$. En dimension 2, une caractérisation résultera probablement du travail de A. Dehove [12]. En dimension plus grande, le problème demeure complètement ouvert.

Enfin, une réponse positive à la question ouverte suivante aiderait peut-être à caractériser les compacts des complétés (voir le paragraphe 1.2.4 pour la définition de la fonction u_L associée à une lagrangienne L).

Question 2.37. *Soit (L_k) une suite dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$, telle que pour tout $\phi \in \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^{2n})$, on ait*

$$u_{\phi(L_k)} \xrightarrow{C^0} u_{\phi(L)}.$$

La suite (L_k) converge-t-elle alors vers L pour γ ?

2.3.5 Des applications L^∞ ?

Toujours dans le but de comprendre de manière plus concrète les éléments des complétés, on se pose ici la question suivante :

Question 2.38. *Peut-on voir tous les éléments — ou éventuellement seulement les éléments à support compact — des complétés $\overline{\mathcal{H}}$, $\widetilde{\mathcal{H}}$ comme des applications L^∞ de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}^{2n}$?*

Cette question est motivée par la remarque suivante, qui peut aussi être vue comme une approche pour y répondre.

Soit (L_k) une suite de lagrangiennes, toutes incluses dans une même bande $\{(x,p) \mid \|p\| \leqslant C\}$, avec $C > 0$. On considère la suite de fonctions (u_{L_k}) obtenue par la construction décrite dans la paragraphe 1.2.4. Par la proposition 1.51, si (L_k) est une suite de Cauchy pour γ, alors la suite (u_{L_k}) est de Cauchy pour la distance C^0, et admet donc une limite continue u_L. De plus, la proposition 1.49 affirme que chaque u_{L_k} est une fonction C-lipschitzienne. La limite u_L est donc aussi C-lipschitzienne.

Considérons maintenant la suite des différentielles du_{L_k}, qui sont définies presque partout. Il s'agit d'une suite bornée (par C) de fonctions L^∞. Elle admet donc une valeur d'adhérence pour la topologie L^∞-faible. Cependant, (du_{L_k}) converge au sens des distributions vers du_L, qui est donc la seule valeur d'adhérence possible. Donc (du_{L_k}) converge au sens L^∞-faible vers du_L.

En résumé, on a montré que si (L_k) est de Cauchy pour γ, alors (u_{L_k}) converge au sens L^∞-faible. Heuristiquement, cela signifie que des "morceaux" des lagrangiennes convergent au sens L^∞-faible.

Le graphe d'un difféomorphisme à support compact, vu dans le cotangent de la diagonale, est inclus dans une bande $\{(x,p) \mid \|p\| \leqslant C\}$. La discussion précédente implique donc que toute suite de difféomorphismes à support compact, qui est de Cauchy pour γ ou $\tilde{\gamma}$, converge au sens L^∞-faible, au moins sur un ensemble de mesure non nulle.

Il est donc naturel de se demander si cette convergence a lieu partout.

Remarque 2.39. L'une au moins des questions 2.32 et 2.38 a une réponse négative. En effet, une application L^∞ dont le support est de mesure nulle est l'identité.

Chapitre 3

Equations d'Hamilton-Jacobi d'évolution

Soit H une fonction hamiltonienne $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$. On peut lui associer l'équation suivante, appelée *équation d'Hamilton-Jacobi* :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \tag{3.1}$$

où $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto u(t, x)$ vérifie la condition initiale $u(0, x) = u_0(x)$.

Pour ce type d'équation, on sait définir deux types de solutions faibles : les solutions de viscosité et les solutions variationnelles. Les premières, bien connues des analystes, furent initialement construites en ajoutant à l'équation (3.1) un terme "de viscosité" $-\varepsilon\Delta u$, en appliquant les théorèmes classiques à cette nouvelle équation, puis en faisant converger vers 0 le paramètre ε (cf. [11] ou [2]). Les secondes sont quant à elles construites par une méthode géométrique — que l'on va rappeler — faisant intervenir de manière naturelle la dynamique hamiltonienne (cf. [10], [56], [45]).

Dans un premier temps, nous allons prouver que les solutions variationnelles s'étendent à certains complétés considérés dans le chapitre 2. Puis nous étudierons le lien de ces solutions "généralisées" avec les solutions de viscosité.

Commençons par rappeler au lecteur la construction des solutions variationnelles.

3.1 Rappels sur les solutions variationnelles

Soit Λ_0 une sous variété lagrangienne de $\mathbb{R}^{2n}$, que l'on appellera *variété initiale*. On note $\Lambda_{0,H} = \{(0, -H(0, x), x) \,|\, x \in \Lambda_0\} \subset \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{2n}$ et on considère,

comme dans la définition 1.26, la suspension de H,

$$\hat{H} : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2n}) \to \mathbb{R},\ (s, t, \tau, x) = \tau + H(t, x),$$

et son hypersurface de niveau

$$\Sigma = \hat{H}^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^{2+2n}.$$

Une *solution géométrique* de (3.1) est par définition une sous-variété lagrangienne de L de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2n}$ vérifiant

$$\Lambda_{0,H} \subset L \subset \Sigma.$$

Il est facile de vérifier — et c'est ce qui justifie la terminologie — qu'une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est solution de (3.1) pour la condition initiale u_0 si et seulement si le graphe de sa différentielle du est solution géométrique de (3.1) pour la variété initiale $\Lambda_0 = graphe(du_0)$.

A l'aide du flot $\phi^t_{\hat{H}}$, on peut construire

$$L_H = \bigcup_{t \in I} \phi^t_{\hat{H}}(\Lambda_{0,H}),$$

où I est un intervalle ouvert contenant $[0, 1]$ et tel que $\rho_\alpha = 1$ sur I. L'ensemble L_H est en réalité une sous-variété lagrangienne qui est de plus isotope à la section nulle, et donc un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2+2n})$.

Maintenant, rappelons que nous avons vu dans la section 1.2.4, que l'on peut associer à toute lagrangienne $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2k})$ une fonction lipschitzienne $u_L : \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}$ qui est de surcroît de classe C^l sur un ouvert dense, pour tout $l \geqslant 1$. De plus, en tout point x où u_L est différentiable, le couple $(x, du_L(x))$ appartient à L.

En appliquant ceci à L_H, on obtient une fonction u_{L_H} différentiable sur un ouvert dense, et qui vérifie sur cet ouvert

$$\Lambda_0 \subset graphe(u_{L_H}) \subset L_H \subset \Sigma.$$

La fonction u_{L_H} vérifie donc bien (3.1) sur son ouvert de différentiabilité. Elle est appelée *solution variationnelle* de l'équation d'Hamilton-Jacobi (3.1).

Nous allons à présent étendre cette notion de solution aux hamiltoniens généralisés construits à la section 2.1.

3.2 Extension des solutions variationnelles

3.2.1 Contrôle des solutions variationnelles

On étudie ici comment évolue la solution variationnelle en fonction du hamiltonien intervenant dans l'équation d'Hamilton-Jacobi (3.1). Nous allons

prouver que la norme uniforme des solutions variationnelles est contrôlée par la distance $\check{\gamma}$ des hamiltoniens (cf. définition 1.26). Je remercie Patrick Bernard de m'avoir suggéré une simplification significative de l'énoncé.

Proposition 3.1. *Soient H et H' deux fonctions hamiltoniennes à support compact, Λ_0 et Λ_0' deux sous-variétés lagrangiennes de $\mathbb{R}^{2n}$, et u, u' les solutions variationnelles respectivement associées par la méthode ci-dessus, aux hamiltoniens H et H' et aux variétés initiales $\Lambda_0$et Λ_0'. Alors, pour tout réel t,*

$$\|u(t,\cdot) - u'(t,\cdot)\|_{C^0} \leqslant \tilde{\gamma}(\phi_H^t, \phi_{H'}^t) + \gamma(\Lambda_0, \Lambda_0') \leqslant \check{\gamma}(H, H') + \gamma(\Lambda_0, \Lambda_0').$$

Démonstration — L'inégalité $\tilde{\gamma}(\phi_H^t, \phi_{H'}^t) \leqslant \check{\gamma}(H, H')$ a déjà été prouvée pour $t \in [0,1]$ dans la proposition 1.52. L'argument donné fonctionne pour tout réel t. Il reste donc à prouver l'inégalité $\|u(t,\cdot) - u'(t,\cdot)\|_{C^0} \leqslant \tilde{\gamma}(\phi_H^t, \phi_{H'}^t) + \gamma(\Lambda_0, \Lambda_0')$. Cela va reposer sur l'inégalité de réduction (proposition 1.44).

Commençons par rappeler l'expression du flot de $\hat{H}$. Pour tout s,

$$\phi_{\hat{H}}^s(t,\tau,x) = (t+s\,,\, \tau + H(t,x) - H(t+s, (\phi_H)_t^{t+s}(x))\,,\, (\phi_H)_t^{t+s}(x)).$$

Par conséquent, on peut écrire L_H sous la forme

$$L_H = \{t, (*), \phi_H^t(x) \,|\, t \in \mathbb{R}, x \in \Lambda_0\},$$

où $(*)$ désigne une expression de t et x qu'il est inutile d'écrire ici. En particulier, à t fixé, la réduction de L_H par l'espace coisotrope $\{t\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ est $\phi_H^t(\Lambda_0)$, et on peut écrire :

$$u_{L_H}(t,\cdot) = u_{\phi_H^t(\Lambda_0)}.$$

Par la proposition 1.51, on a :

$$\begin{aligned}\|u(t,\cdot) - u'(t,\cdot)\|_{C^0} &\leqslant \gamma(\phi_H^t(\Lambda_0), \phi_{H'}^t(\Lambda_0')) \\ &\leqslant \gamma(\phi_H^t(\Lambda_0), \phi_{H'}^t(\Lambda_0)) + \gamma(\phi_{H'}^t(\Lambda_0), \phi_{H'}^t(\Lambda_0')).\end{aligned}$$

L'inégalité voulue suit de la définition de $\tilde{\gamma}$ et de l'invariance sous l'action du groupe hamiltonien de la distance γ sur les lagrangiennes. □

3.2.2 Solutions variationnelles généralisées

La proposition 3.1 nous mène à la définition suivante de solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi associée à un élément du complété de Ham pour la distance $\check{\gamma}$.

Définition 3.2. *Soient $H \in \widetilde{Ham}$ et $\Lambda_0 \in \overline{\mathcal{L}}$. Une fonction continue $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sera appelée* solution variationnelle généralisée *de l'équation d'Hamilton-Jacobi (3.1) pour la condition initiale Λ_0, s'il existe une suite de Cauchy (H_k) dans Ham_c représentant H et une suite de Cauchy $(\Lambda_{0,k})$ dans $\mathcal{L}$ représentant Λ_0 telles que la solution variationnelle u_k, associée aux données H_k et $\Lambda_{0,k}$, converge uniformément vers u.*

De manière équivalente, on peut demander que pour toute suite de Cauchy (H_k) dans Ham_c représentant H, et toute suite de Cauchy $(\Lambda_{0,k})$ dans $\mathcal{L}$ représentant Λ_0, u_k converge uniformément vers u.

Remarque 3.3. Ce type de condition initiale est assez abstrait. Cependant il englobe les conditions initiales continues. En effet, toute fonction continue u_0 à support compact sur $\mathbb{R}^n$ donne naissance à un élément Λ_0 de $\overline{\mathcal{L}}$.

Il suffit, pour s'en convaincre, de remarquer que pour toute suite (u_k) de fonctions lisses, à supports compacts, qui converge uniformément vers u_0, la suite des graphes des différentielles du_k est une suite de Cauchy pour γ. De plus, l'élément du complété ainsi obtenu ne dépend pas du choix de la suite u_k.

Le théorème suivant affirme en particulier l'existence et l'unicité des solutions variationnelles généralisées.

Théorème 3.4. *Soient Λ_0 une condition initiale dans $\overline{\mathcal{L}}$ et H un élément du complété $\widetilde{Ham}$. Alors, l'équation d'Hamilton-Jacobi (3.1) associée à H, de condition initiale Λ_0, admet une unique solution variationnelle généralisée u_{H,Λ_0}.*

De plus, si H est à support compact au sens de la définition 2.29, et si Λ_0 est une sous-variété lagrangienne lisse, alors u_H est lipschitzienne.

Enfin, l'application ainsi construite $\widetilde{Ham} \times \overline{\mathcal{L}} \to C^0$, $(H, \Lambda_0) \mapsto u_{H,\Lambda_0}$, est continue.

Démonstration — Soit $(H_k) \in Ham_c$ une suite de Cauchy pour $\check{\gamma}$ représentant $H \in \widetilde{Ham}$, et $(\Lambda_k) \in \mathcal{L}$ une suite de Cauchy de lagrangiennes représentant Λ_0. Alors, la proposition 3.1 implique que la suite (u_k) des solutions variationnelles associées à ces suites, est de Cauchy pour la norme uniforme,

et converge donc vers une fonction u. Ceci établit l'existence. Pour obtenir l'unicité, il suffit de remarquer que si (H_k) et (H'_k) sont deux suites de Cauchy pour $\check{\gamma}$ équivalentes, et (Λ_k) et (Λ'_k) deux suites de Cauchy équivalentes pour γ, la proposition 3.1 implique que les suites de solutions variationnelles associées (u_k) et (u'_k) sont aussi équivalentes, et convergent donc vers la même limite.

Si H est à support compact au sens de la définition 2.29, il admet par définition un représentant (H_k) dont les supports sont inclus dans un même compact. Il s'en suit que les lagrangiennes L_{H_k} sont contenues dans une bande de la forme $\{|\tau| \leqslant C, |p| \leqslant C\}$, pour une certaine constante C. On conclut ensuite par la proposition 1.49 que $\widetilde{u_H}$ est lipschitzienne.

La continuité de l'application $\widetilde{Ham} \times \overline{\mathcal{L}} \to C^0$ est à nouveau une conséquence de la proposition 3.1. $\square$

3.3 Lien avec les solutions de viscosité

Les solutions de viscosité sont définies dans un cadre général où la fonction hamiltonienne H intervenant dans l'équation (3.1) est seulement localement bornée. Dans ce paragraphe, nous reprenons les notations et définitions de [2].

Pour toute fonction localement bornée α, on notera $\alpha_*(x) = \liminf_{y\to x} \alpha(y)$ et $\alpha^*(x) = \limsup_{y\to x} \alpha(y)$ les enveloppes respectivement semi-continues inférieurement (s.c.i.) et semi-continues supérieurement (s.c.s.) de α. Pour des suites de fonctions $(\alpha_\varepsilon)_\varepsilon$, on notera :

$$\underline{\alpha}(x) = \liminf_{y\to x, \varepsilon\to 0} \alpha_\varepsilon(y) \text{ et } \overline{\alpha}(x) = \limsup_{y\to x, \varepsilon\to 0} \alpha_\varepsilon(y).$$

Les solutions de viscosité sont alors définies ainsi :

Définition 3.5. *Une fonction localement bornée u, s.c.s. sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, est une* sous-solution de viscosité *de (3.1) si et seulement si :*

$$\forall v \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n), \text{ si } u - v \text{ a un maximum local en } (t_0, x_0),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t_0, x_0) + H_* \left(t_0, x_0, \frac{\partial v}{\partial x}(t_0, x_0) \right) \leqslant 0.$$

Une fonction localement bornée u, s.c.i. sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, est une sur-solution de viscosité *de (3.1) si et seulement si :*

$$\forall v \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n), \text{ si } u - v \text{ a un minimum local en } (t_0, x_0),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t_0, x_0) + H^* \left(t_0, x_0, \frac{\partial v}{\partial x}(t_0, x_0) \right) \geqslant 0.$$

Une solution de viscosité *est par définition une sous-solution de viscosité qui est aussi une sur-solution.*

Cette définition est motivée par le principe du maximum, que vérifient les solutions classiques, et dont l'énoncé revient exactement à dire que toute solution classique (c'est-à-dire de classe C^2) de (3.1) est une solution de viscosité. Un résultat fondamental de la théorie (c.f. [2]) est le

Théorème 3.6 (de stabilité discontinue)**.** *On suppose que, pour $\varepsilon > 0$, u_ε est une sous-solution s.c.s. (resp. une sur-solution s.c.i.) de l'équation :*

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t_0, x_0) + H_\varepsilon \left(t_0, x_0, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(t_0, x_0) \right) = 0,$$

où $(H_\varepsilon)_\varepsilon$ est une suite de fonctions uniformément localement bornées dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$. On suppose aussi que les fonctions $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ sont uniformément localement bornées.

Alors, $\overline{u}$ est sous-solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{H} \left(t, x, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0,$$

et $\underline{u}$ est sur-solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \overline{H} \left(t, x, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0.$$

Voyons à présent comment étendre la notion de solution variationnelle dans le cadre d'hamiltoniens convexes en p. Pour simplifier nous allons nous restreindre au cas où la condition initiale Λ_0 est le graphe de la différentielle d'une fonction lisse u_0. Notons $\mathcal{W}$ l'ensemble des hamiltoniens $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, lisses, convexes en p et pour lesquels il existe un compact K_1 de $\mathbb{R}^{2n}$ et une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tels que

$$\forall (t, q, p) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{2n} - K_1), H(t, q, p) = f(p).$$

Comme normalisation, on demande de plus que $f(0) = 0$. On voit en particulier qu'à l'infini, le flot hamiltonien de H préserve la section nulle. Fixons un tel $H \in \mathcal{W}$.

Rappelons la formule donnant le flot de $\hat{H}$:

$$\phi^s_{\hat{H}}(t, \tau, x) = (t+s\,,\, \tau + H(t, x) - H(t+s, (\phi_H)^{t+s}_t(x))\,,\, (\phi_H)^{t+s}_t(x)).$$

On voit alors en particulier que pour tout intervalle de temps de la forme $[-T,T]$, il existe un compact $K_2 \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que

$$L_H \cap ([-T,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}) \subset [-T,T] \times \mathbb{R} \times (K_2 \cup (\mathbb{R}^n \times \{0\})).$$

Par conséquent, si H' et H'' sont deux hamiltoniens à support compacts coïncidant avec H sur $[-T,T] \times K_2$ et préservant la section nulle hors de K_2, alors on aura

$$L_{H'} \cap ([-T,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}) = L_{H''} \cap ([-T,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}),$$

donc la restriction à $[-T,T] \times \mathbb{R}^n$ des solutions variationnelles respectives de H' et H'' coïncideront.

La *solution variationnelle associée à* $H \in \mathcal{W}$ sera donc définie comme suit. On se donne une suite croissante de réels T_ν qui converge vers $+\infty$. Pour chaque indice ν, on fixe un compact K_ν tel que

$$L_H \cap ([-T,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}) \subset [-T,T] \times \mathbb{R} \times (K_\nu \cup (\mathbb{R}^n \times \{0\})),$$

puis un hamiltonien à support compact H_ν qui coïncide avec H sur $[-T,T] \times K_\nu$ et préserve la section nulle hors de K_ν. La restriction u_ν à $[-T_\nu,T_\nu]$ de la solution variationnelle associée à H_ν ne dépend pas des choix de K_ν et H_ν. De plus, si $\nu < \nu'$, alors la restriction de $u_{\nu'}$ à $[-T_\nu,T_\nu]$ coïncide avec u_ν. La suite de fonction (u_ν) définit donc de manière unique une fonction u qui coïncide avec u_ν sur $[-T_\nu,T_\nu]$, pour tout ν. Cette fonction u sera par définition la solution variationnelle associée à H.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 3.7 (Joukovskaïa [32, 3])**.** *Pour $H \in \mathcal{W}$, si u est une fonction continue $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, alors u est solution de viscosité de (3.1) si et seulement si elle est solution variationnelle de (3.1).*

Dans le cas non-convexe, on sait que les solutions variationnelles ne coïncident pas avec les solutions de viscosité (c.f. [45]). Voyons comment étendre ce théorème dans le cadre des solutions variationnelles généralisées définies précédemment (définition 3.2).

On note $\mathfrak{W}$ l'ensemble des fonctions $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, pour lesquelles, il existe deux compacts $K_3, K_4 \subset \mathbb{R}^{2n}$, une fonction convexe lisse $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une suite de voisinages (U_k) de K_4 et une suite de fonctions (H_k) dans $\mathcal{W}$ tels que :

- (H_k) est uniformément localement bornée ;
- $\forall k \in \mathbb{N}, \forall (t,q,p) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{2n} - K_3), H(t,q,p) = H_k(t,q,p) = f(p)$;

– $\xi^{H_k}(U_{k'})$ converge vers 0 lorsque k et k' convergent vers l'infini ;
– H_k converge uniformément vers H sur tous les compacts de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{2n} - D)$;
– $f(0) = 0$.

Ces hypothèses imposent, en particulier, que les éléments de $\mathfrak{W}$ soient des fonctions convexes en p, lisses hors d'un compact et continues à l'intérieur de ce même compact privé d'un compact de ξ nul.

Nous allons démontrer que pour tout intervalle de temps de la forme $[-T, T]$, la suite des solutions variationnelles u_k associées à de telles fonctions H_k convergent uniformément sur $[-T, T] \times \mathbb{R}^n$, vers une fonction continue u_T qui ne dépend pas du choix des H_k. On appellera *solution variationnelle généralisée* associée à H, toute fonction continue qui coïncide sur tout intervalle de temps $[-T, T]$ avec u_T, pour une certaine suite H_k vérifiant les conditions ci-dessus. Démontrons maintenant le fait annoncé.

La condition à l'infini sur H implique qu'il existe un compact K_5 (dépendant de K_3 et de f), contenant K_3 et tel que pour toute fonction lisse H' qui coïncide avec H hors de K_3,

$$L_{H'} \cap ([-T, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}) \subset [-T, T] \times \mathbb{R} \times (K_5 \cup (\mathbb{R}^n \times \{0\})).$$

Fixons une fonction lisse $\rho : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ à support compact et constante égale à 1 sur un voisinage de K_5, et considérons la suite d'hamiltoniens lisses à supports compacts (ρH_k). Par définition, la restriction à $[-T, T] \times \mathbb{R}^n$ de u_k est exactement la restriction à $[-T, T] \times \mathbb{R}^n$ des solutions variationnelles de (ρH_k). Par le théorème 2.7 et la proposition 3.1, la suite (ρH_k) est de Cauchy et la suite de ses solutions variationnelles converge uniformément.

En appliquant les théorèmes 3.7 et 3.6 à la suite (H_k), on obtient immédiatement le résultat suivant.

Théorème 3.8. *Soient $H \in \mathfrak{W}$ et $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une solution variationnelle généralisée associée à H. Alors, u est sous-solution (resp. sur-solution) de viscosité de*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{H}\left(t, x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \ \left(\text{resp. } \frac{\partial u}{\partial t} + \overline{H}\left(t, x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0\right).$$

Remarque 3.9. Sous des hypothèses assurant l'unicité des solutions de viscosité (voir par exemple [2], section 4.4), on obtient l'unicité de la solution variationnelle généralisée.

Chapitre 4

Haméomorphismes

Dans ce chapitre, nous décrivons l'approche de Y.-G. Oh pour l'extension des applications hamiltoniennes. Cette approche exclut dès le début toute discontinuité, que ce soit dans les hamiltoniens ou les "flots" qu'ils engendrent, et diffère en ceci de celle exposée dans le chapitre 2.

Dans [44], S. Müller et Y.-G. Oh définissent une classe d'homéomorphismes appelés *haméomorphismes* — comme contraction de "Hamiltonian homeomorphism" —, qui généralisent la notion de difféomorphisme hamiltonien dans le cadre C^0. Notre apport à la théorie réside dans la construction d'exemples d'haméomorphismes issus des fonctions génératrices. Nous en déduisons que l'invariant de Calabi s'étend à une classe d'homéomorphismes, qui contient notamment les homéomorphismes symplectiques bilipschitz.

Ce chapitre est constitué de résultats personnels de l'auteur, à l'exception des parties 4.1 et 4.3.1, qui reprennent en grande partie un texte rédigé en collaboration avec F. Le Roux dans le cadre du projet de livre du projet ANR "Symplexe" [52].

4.1 Définition, exemples et premières propriétés

4.1.1 Le groupe des haméomorphismes

On se donne une variété symplectique (M, ω). On munit le groupe des homéomorphismes de M à support compact de la distance "C^0" définie par

$$d_{C^0}(\phi, \psi) = \sup_{x \in M} d(\phi(x), \psi(x)) + \sup_{x \in M} d(\phi^{-1}(x), \psi^{-1}(x)),$$

où d désigne une distance issue d'une métrique riemannienne sur M. On considère aussi le groupe des isotopies $(h^t)_{t \in [0,1]}$ issues de l'identité, qui est

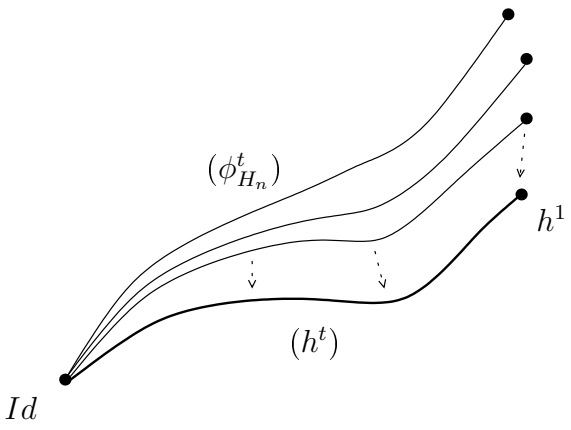


FIG. 4.1 – Haméotopie et haméomorphisme.

muni de la distance

$$d_{C^0}((\phi^t),(\psi^t)) = \sup_{t\in[0,1]} (d_{C^0}(\phi^t,\psi^t)).$$

Nous pouvons à présent définir la notion d'haméomorphisme.

Définition 4.1 (Müller-Oh [44]). *Une isotopie $(h^t)_{t\in[0,1]}$ sera dite* isotopie hamiltonienne topologique *(ou haméotopie) s'il existe une fonction continue à support compact $H : [0,1] \times M \to \mathbb{R}$, dite fonction hamiltonienne continue, un compact K et une suite de fonctions hamiltoniennes lisses (H_n) à support dans K, engendrant des isotopies $(\phi^t_{H_n})_{t\in[0,1]}$, telles que*

(i) la suite de fonctions (H_n) converge uniformément vers la fonction H,

(ii) la suite d'isotopies $(\phi^t_{H_n})$ converge C^0 vers l'isotopie (h^t).

L'homéomorphisme h^1, temps un d'une isotopie hamiltonienne topologique, sera alors appelé haméomorphisme.

On notera $Hameo(M,\omega)$ l'ensemble des haméomorphismes de M. Il est clairement inclus dans l'adhérence C^0, notée $Sympeo_c(M,\omega)$, du groupe des difféomorphismes symplectiques à support compact $Symp_c(M,\omega)$. Notons au passage que les éléments de $Sympeo_c$ sont appelés *homéomorphismes symplectiques à support compact*.

Proposition 4.2 (Müller-Oh [44]). *L'ensemble $Hameo(M,\omega)$ des haméomorphismes de (M,ω) forme un sous-groupe distingué du groupe $\mathcal{G}$ des homéomorphismes symplectiques à support compact dont le flux est nul.*

Ce résultat est particulièrement intéressant dans le cas des surfaces. En effet, dans ce cas, on ne sait pas si le groupe des homéomorphismes qui

préservent l'aire et dont le flux est nul, est un groupe simple ou non — en dimension supérieure, ce groupe est simple, selon un théorème d'A. Fathi [18]. Or, on sait que pour les surfaces, le groupe des homéomorphismes qui préservent l'aire n'est autre que le groupe des homéomorphismes symplectiques [52]. Pour prouver la non-simplicité de $\mathcal{G}$ il suffit donc de prouver que $Hameo$ en diffère, mais de manière surprenante, ceci n'a pu être encore établi.

Donnons rapidement la démonstration du résultat de Y.-G. Oh et S. Müller.

Démonstration — Dans la définition donnée plus haut, l'haméomorphisme h^1 est limite de la suite de difféomorphismes $(\Phi^1_{H_n})$ qui sont hamiltoniens et donc symplectiques et à flux nul. Il est ainsi clair que tout haméomorphisme est dans $\mathcal{G}$.

Le fait que $Hameo$ est un groupe est une conséquence directe des formules de composition des Hamiltoniens A.24.

Pour ce qui est du caractère distingué, on considère un haméomorphisme h et un élément φ de $\mathcal{G}$. Il existe alors une fonction hamiltonienne continue H, limite d'une suite de fonctions lisses H_n, qui engendrent des isotopies convergeant vers une isotopie h^t dont h est le temps un. Par ailleurs, il existe une suite de symplectomorphismes (φ_n) convergeant C^0 vers φ. On voit alors que la suite de fonctions lisses $(H_n(t, \varphi_n(x)))$ converge vers la fonction $H(t, \varphi(x))$. Or, cette suite de fonctions engendre la suite d'isotopies $(\varphi_n^{-1} \circ \phi^t_{H_n} \circ \varphi_n)$ qui converge vers $(\varphi^{-1} \circ h^t \circ \varphi)$. On en déduit que $\varphi^{-1} \circ h \circ \varphi$ est un haméomorphisme. □

Assez peu d'exemples d'haméomorphismes sont connus. De manière évidente, les difféomorphismes hamiltoniens sont des haméomorphismes, ainsi que leurs conjugués par les éléments de $\mathcal{G}$. En considérant des rotations fibrées, on construit facilement des exemples du plan.

Exemple 4.3. Considérons en effet l'homéomorphisme Ψ du plan, donné en coordonnées polaires par $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + \rho(r))$, où ρ est une fonction continue à valeurs réelles, définie sur $]0, +\infty[$ et à support borné (figure 4.2). On sait alors que si l'intégrale $\int_0^{+\infty} r\rho(r)\, dr$ est finie, alors Ψ est un haméomorphisme.

Lorsque l'intégrale ci-dessus n'est pas finie, on conjecture que l'homéomorphisme Ψ n'est pas un haméomorphisme. Nous renvoyons le lecteur à [52] pour plus de détails. Il est intéressant de noter au passage — même si cela est sans conséquence ici — que Ψ appartient toujours à la famille $\mathcal{F}$ (définition 2.8), quelles que soient les hypothèses d'intégrabilité sur le nombre de rotation ρ.

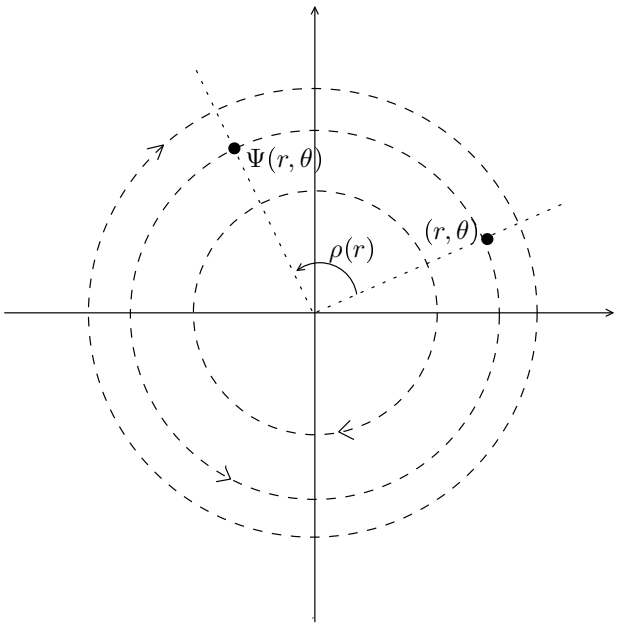


FIG. 4.2 – L'homéomorphisme Ψ : une rotation fibrée.

F. Le Roux a cependant remarqué que même pour des ρ pour lesquels $\int_0^{+\infty} r\rho(r)\,dr$ diverge, il existe des haméomorphismes du plan dont la restriction à un disque coïncide avec l'homéomorphisme Ψ défini ci-dessus.

EXEMPLE 4.4. (Le Roux) Donnons-nous un homéomorphisme Ψ comme ci-dessus ainsi qu'un difféomorphisme hamiltonien φ qui déplace le support de Ψ (qui est compact). Alors, le commutateur $\varphi^{-1}\Psi^{-1}\varphi\Psi$ (voir figure 4.3) coïncide avec Ψ sur le disque qui le supporte. De plus, c'est un haméomorphisme.

En effet, φ est hamiltonien. C'est donc un haméomorphisme, tout comme φ^{-1} et le conjugué $\Psi^{-1}\varphi\Psi$, par la proposition 4.2.

4.1.2 Quelques propriétés

Une extension de la dynamique Hamiltonienne

Dans le cas lisse usuel, on sait qu'il y a une bijection entre hamiltoniens (normalisés) et isotopies hamiltoniennes. Voyons ce qu'il en est dans le cas présent. Deux types de questions se posent : celles concernant l'unicité (une haméotopie donnée est-elle associée à un unique hamiltonien continu ? deux haméotopies distinctes peuvent-elles avoir un même hamiltonien continu ?) et celles concernant l'existence (quels sont les chemins de $Hameo$ qui sont

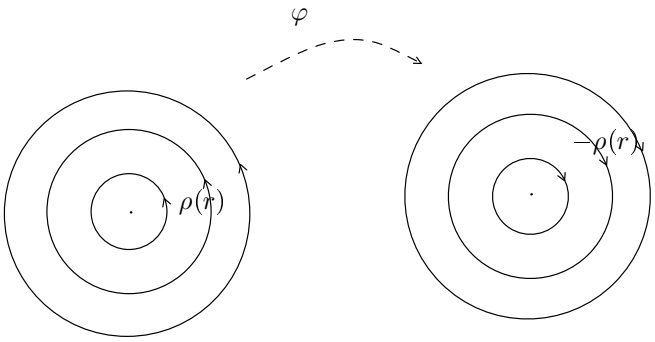


FIG. 4.3 – Commutateur d'un difféomorphisme hamiltonien et d'une rotation fibrée.

des haméotopies ? quels sont les hamiltoniens continus associés à des haméotopies ?).

Si les questions d'existence restent complètement ouvertes — on ne connaît effectivement que très peu d'exemples d'haméotopie, et l'on sait rarement dire si un chemin donné en est une — , les questions d'unicité ont été résolues, comme l'a remarqué Y.-G. Oh.

Proposition 4.5 (Hofer [25], Lalonde-McDuff [35])**.** *Deux haméotopies admettant pour générateur un même hamiltonien topologique sont égales. On pourra donc noter ϕ_H^t l'isotopie engendrée par H quand elle existe.*

Proposition 4.6 (Viterbo [59])**.** *Une isotopie hamiltonienne topologique admet un unique hamiltonien topologique pour générateur.*

Notons que l'unicité permet de démontrer les deux résultats suivants, en tout point analogues au cas lisse :

Proposition 4.7 (Oh [43])**.** *Les haméotopies qui sont des groupes à un paramètre sont exactement celles qui sont engendrées par des fonctions hamiltoniennes topologiques indépendantes du temps.*

De plus, si H est une fonction hamiltonienne topologique qui ne dépend pas du temps, alors pour tout s,

$$H \circ \phi_H^s = H.$$

Un groupe topologique

Outre la topologie C^0 usuelle, on peut munir $Hameo(M, \omega)$ d'une topologie naturelle dite "topologie $Hameo$" que l'on va décrire maintenant.

Cette topologie est décrite par la distance d_{Hameo}, donnée pour deux haméomorphismes ϕ et ψ par :

$$d_{Hameo}(\phi, \psi) = \inf\{\|H - K\| + d_{C^0}(\phi_H^t, \phi_K^t)\},$$

où l'infimum porte sur toutes les haméotopies (ϕ_H^t), (ϕ_K^t) vérifiant $\phi_H^1 = \phi$ et $\phi_K^1 = \psi$.

Deux haméomorphismes h et g seront donc proches si l'on peut trouver deux suites de fonctions hamiltoniennes lisses (H_n) et (G_n) respectivement associées à h et g comme dans la définition des haméomorphismes, avec pour propriétés supplémentaires que pour n assez grand, H_n et G_n soient uniformément proches, et $(\phi_{H_n}^t)$ et $(\phi_{G_n}^t)$ soient proches.

Proposition 4.8 (Oh)**.** *Le groupe Hameo est connexe par arc et localement connexe par arc.*

Ce résultat constitue essentiellement tout ce qui est connu de la topologie $Hameo$. Une des questions posées par Y.-G. Oh est de savoir si $Hameo$ peut être muni d'une structure de groupe de Lie. Par analogie avec le cas lisse, l'algèbre de Lie en serait alors l'espace des fonctions hamiltoniennes continues.

4.2 Nouveaux exemples issus des fonctions génératrices

4.2.1 Idée et énoncé

Dans cette partie, nous construisons des exemples d'haméotopies et d'haméomorphismes à l'aide de fonctions génératrices de classe C^1.

L'idée à la base de cette construction est la suivante. La distance d_{Hameo} décrite plus haut est essentiellement constituée de deux parties : la distance C^0 des hamiltoniens et la distance C^0 des isotopies. Or, on sait (cf. proposition 1.37 ou [5]) qu'au moins dans un voisinage C^1 de l'identité, la métrique de Hofer est décrite par la norme C^0 des fonctions génératrices. Comme par ailleurs, la norme de la différentielle des fonctions génératrices correspond à la distance C^0 des difféomorphismes qu'elles engendrent, il est naturel de s'intéresser à la norme C^1 des fonctions génératrices pour étudier les haméomorphismes.

Nous allons introduire une famille d'homéomorphismes, dit "super-admissibles", qui sont définis par des fonctions génératrices particulières, de classe C^1. En notant $Bilip_c^0(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ l'ensemble des homéomorphismes symplectiques, bilipschitz, isotopes à l'identité et à support compact, et G_{2n} le groupe

engendré par les homéomorphismes super-admissibles de réciproque super-admissible, nous prouvons les inclusions suivantes.

Théorème 4.9.

$$Bilip_c^0(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \subset G_{2n} \subset Hameo(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0).$$

Nous prouverons ce théorème dans la section 4.2.3.

REMARQUE 4.10. Pour toute application lipschitzienne f et toute forme différentielle continue λ, on peut donner un sens à la notation $f^*\lambda$. En effet, f est presque partout différentiable, et sa différentielle est L^∞ donc en particulier L^1_{loc}, de sorte que $f^*\lambda$ est une forme différentielle L^1_{loc} (ce qui définit en particulier un courant).

Par conséquent, dire qu'une application lipschitzienne est symplectique a tout son sens : cela signifie qu'elle préserve la forme symplectique. Par ailleurs, il est facile de voir qu'une application bilipschitz qui est limite C^0 d'une suite de symplectomorphismes est symplectique.

4.2.2 Homéomorphismes associés à des fonctions génératrices admissibles

Définition 4.11. *On appelle* fonction génératrice admissible *toute fonction de classe C^1 à support compact $S : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, telle que*

- *pour tout $\eta \in \mathbb{R}^n$, l'application $x \mapsto x + \frac{\partial S}{\partial \eta}(x, \eta)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ préservant l'orientation,*
- *pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $\eta \mapsto \eta + \frac{\partial S}{\partial x}(x, \eta)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ préservant l'orientation.*

Par exemple, toute fonction de classe C^2, à support compact et petite au sens C^2 est une fonction génératrice admissible.

Proposition 4.12. *A toute fonction génératrice admissible S, on peut associer un homéomorphisme à support compact f par l'équivalence suivante :*

$$f(x,y) = (\xi, \eta) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \begin{cases} \xi_i = x_i + \frac{\partial S}{\partial \eta_i}(x, \eta) \\ y_i = \eta_i + \frac{\partial S}{\partial x_i}(x, \eta) \end{cases} . \qquad (4.1)$$

Pour tout entier $k \geqslant 0$, l'application $\Psi : S \mapsto f$ ainsi construite est une injection continue de l'espace des fonctions génératrices admissibles de classe C^{k+1}, muni de la topologie C^{k+1}, dans l'espace des homéomorphismes de classe C^k, muni de la topologie C^k.

De plus, si S est de classe C^2, alors le C^1-difféomorphisme $\Psi(S)$ est un symplectomorphisme.

Définition 4.13. *Les éléments de l'image de* Ψ *seront appelés* homéomorphismes admissibles.

Les équations (4.1) montrent que cette application Ψ étend la notion usuelle de fonction génératrice pour un difféomorphisme.

Démonstration — Nous allons exposer rapidement la construction de l'application Ψ, repoussant la preuve détaillée à l'annexe B.1.

Soit S une fonction génératrice admissible. On pose

$$\alpha(x,\eta) = x + \frac{\partial S}{\partial \eta}(x,\eta) \text{ et } \beta(x,\eta) = \eta + \frac{\partial S}{\partial x}(x,\eta).$$

L'application

$$f : (x,y) \mapsto (\alpha(x,\beta(x,\cdot)^{-1}(y)), \beta(x,\cdot)^{-1}(y))$$

satisfait alors (4.1) et donne un homéomorphisme (cf. démonstration détaillée dans l'annexe B.1). □

4.2.3 Fonctions génératrices super-admissibles et haméotopies

Commençons par introduire une notion un peu raffinée de fonction génératrice admissible.

Définition 4.14. *On appelle* fonction génératrice super-admissible *toute fonction de classe* C^1 *à support compact* $S : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$*, telle qu'en tout point* $(x,\eta) \in \mathbb{R}^{2n}$*, les applications partielles*

$$x_i \mapsto x_i + \frac{\partial S}{\partial \eta_i}(x,\eta) \text{ et } \eta_i \mapsto \eta_i + \frac{\partial S}{\partial x_i}(x,\eta), \text{ pour } i \in \{1,\dots,n\},$$

sont des homéomorphismes croissants de $\mathbb{R}$*.*

On appelle homéomorphisme super-admissible *tout homéomorphisme admissible associé à une fonction génératrice super-admissible.*

Lemme 4.15. *Toute fonction génératrice super-admissible est en particulier une fonction génératrice admissible. Elle est de plus limite au sens* C^1 *d'une suite de fonctions génératrices admissibles de classe* C^∞*.*

Démonstration — Tout d'abord, une telle fonction est admissible : pour tous $x, \eta \in \mathbb{R}^n$, les applications partielles $\eta \mapsto \eta + \frac{\partial S}{\partial x}(x,\eta)$ et $x \mapsto x + \frac{\partial S}{\partial \eta}(x,\eta)$ sont des homéomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

En effet, il est clair que $\eta \mapsto \eta + \frac{\partial S}{\partial x}(x,\eta)$ est continue et injective. Comme elle est à support compact, elle est aussi propre et c'est donc un homéomorphisme sur son image. Enfin ceci implique qu'elle est surjective, car sinon son image contiendrait des sphères $\mathbb{S}_{n-1}$ non contractiles. On raisonne de même sur $x \mapsto x + \frac{\partial S}{\partial \eta}(x,\eta)$.

Montrons maintenant, que S peut être approchée au sens C^1 par des fonctions génératrices de classe C^∞.

Soit χ une fonction classe C^∞ définie sur $\mathbb{R}^{2n}$, à valeurs réelles positives, dont le support est contenu dans un disque centré en l'origine et d'intégrale 1. Pour tout entier k, on pose ensuite $\chi_k(x) = k^{-1}\chi(x)$. On sait alors que la suite de fonctions lisses (S_k) définie par

$$S_k(x,\eta) = \chi_k * S(s,\eta) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} S(x-u,\eta-v)\chi_k(u,v)\,du\,dv,$$

converge vers S au sens C^1 lorsque k tend vers l'infini. De plus, il existe un compact qui contient tous les supports des S_k.

Commençons par montrer que les S_k sont des fonctions génératrices admissibles. Posons

$$\alpha(x,\eta) = x + \frac{\partial S}{\partial \eta}(x,\eta) \text{ et } \beta(x,\eta) = \eta + \frac{\partial S}{\partial x}(x,\eta).$$

On a alors $\chi_k * \alpha(x,\eta) = x + \frac{\partial \chi_k * S}{\partial \eta}(x,\eta)$ et $\chi_k * \beta(x,\eta) = \eta + \frac{\partial \chi_k * S}{\partial x}(x,\eta)$. Nous voulons donc prouver que pour tous indices i, les applications $x_i \mapsto q_i \circ (\chi_k * \alpha(x,\eta))$ et $\eta_i \mapsto p_i \circ (\chi_k * \beta(x,\eta))$ sont des homéomorphismes croissants de $\mathbb{R}$. Ils sont continus. Comme ils sont l'identité hors d'un compact, il reste à prouver qu'ils sont strictement croissants. La première partie de la démonstration impliquera que les S_k sont admissibles. Nous allons le faire pour $x_1 \mapsto q_1 \circ (\chi_k * \alpha(x,\eta))$. Pour les autres, la démonstration est similaire.

Fixons $(\eta, x_2, \ldots, x_n)$ et $x_1 < x_1'$. Notons aussi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $x' = (x_1', x_2, \ldots, x_n)$. On veut comparer $q_1 \circ (\chi_k * \alpha(x,\eta))$ avec $q_1 \circ (\chi_k * \alpha(x',\eta))$. Par hypothèse, pour tous $(u,v) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$q_1 \circ \alpha(x-u,\eta-v) < q_1 \circ \alpha(x'-u,\eta-v),$$

donc l'intégrale suivante est positive :

$$\int_{R^{2n}} \chi_k(u,v)\,[\,q_1 \circ \alpha(x'-u,\eta-v) - q_1 \circ \alpha(x-u,\eta-v)\,]\,du\,dv.$$

Elle est même strictement positive car c'est l'intégrale d'une fonction continue positive non-identiquement nulle. Or, cette intégrale n'est autre que $q_1 \circ (\chi_k * \alpha(x,\eta)) - q_1 \circ (\chi_k * \alpha(x',\eta))$. L'application $x_1 \mapsto q_1 \circ (\chi_k * \alpha(x,\eta))$ est donc un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$. $\square$

Nous allons maintenant prouver le résultat suivant dont le théorème 4.9 se déduira par la suite.

Proposition 4.16. *Soit $(S_t)_{t\in I}$ un chemin de classe C^1 de fonctions génératrices admissibles, limite au sens C^1 d'un chemin de classe C^∞ de fonctions génératrices admissibles de classe C^∞. Alors, l'isotopie $(\Psi(S_t))$ est une haméotopie.*

De plus, si H est son hamiltonien continu générateur, il vérifie l'équation d'Hamilton-Jacobi :

$$H\left(t, x, \eta + \frac{\partial S_t}{\partial x}(x,\eta)\right) = \frac{d}{dt}(S_t(x,\eta)).$$

Démonstration — On note (S_t^k) le chemin qui approche (S_t), et l'on pose $f_t^k = \Psi(S_t^k)$. Pour chaque entier k, $t \mapsto f_t^k$ est un chemin lisse de difféomorphismes admissibles. C'est donc une isotopie hamiltonienne. De plus, par continuité de Ψ (proposition 4.12), (f_t^k) converge vers $f_t = \Psi(S_t)$ au sens C^0. Pour prouver que (f_t) est une haméotopie, il ne reste plus qu'à démontrer que les hamiltoniens H_k qui engendrent l'isotopie (f_t^k), convergent au sens C^0 lorsque k tend vers l'infini.

Ceci va résulter de l'équation d'Hamilton-Jacobi vérifiée par les fonctions génératrices lisses (voir remarque B.4). En effet, pour chaque entier k et tout $(t,x,\eta) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, on a

$$H_k\left(t, x, \eta + \frac{\partial S_t^k}{\partial x}(x,\eta)\right) = \frac{d}{dt}(S_t^k(x,\eta)),$$

donc pour tout $(t,x,\eta) \in \mathbb{R}^{2n+1}$,

$$H_k(t,x,y) = \left(\frac{dS_t^k}{dt}\right)(x, p \circ f_k^t(x,y).$$

Comme $\frac{dS_t^k}{dt}$ et f_t^k convergent uniformément, H_k converge uniformément vers une fonction H. On voit de plus par passage à la limite que

$$H\left(t, x, \eta + \frac{\partial S_t}{\partial x}(x,\eta)\right) = \frac{d}{dt}(S_t(x,\eta)).$$

□

Il nous reste à finir la preuve du théorème 4.9.

Démonstration du théorème 4.9 — Commençons par prouver l'inclusion $Bilip_c^0(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \subset G_{2n}$. Pour cela il nous suffit de montrer qu'un voisinage de l'identité dans $Bilip_c^0(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ est contenu dans l'ensemble des homéomorphismes super-admissibles.

Le voisinage que nous allons prendre est l'ensemble des éléments f de $Bilip_c^0(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, tels que les applications $f - Id$ et $f^{-1} - Id$ admettent des constantes de Lipschitz strictement plus petites que 1. Commençons par montrer qu'un tel homéomorphisme est admissible, autrement dit, qu'en tous points, toutes les projections d'applications partielles

$$y \mapsto p \circ f(x, y) \text{ et } \xi \mapsto q \circ f^{-1}(\xi, \eta),$$

sont des homéomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

Notons ρ l'une ou l'autre de ces applications partielles. Cette application ρ vérifie pour un certain $C < 1$,

$$\forall y, y' \in \mathbb{R},\ |(\rho - id)(y) - (\rho - id)(y')| \leqslant C|y - y'|.$$

Donc par inégalité triangulaire,

$$|\rho(y') - \rho(y)| \geqslant |y' - y| - |(\rho - id)(y) - (\rho - id)(y')| \geqslant (1 - C)|y' - y|.$$

Par conséquent, ρ est un homéomorphisme sur son image. Comme ρ est l'identité hors d'un compact, ρ est bien un homéomorphisme de $\mathbb{R}$.

Notons que l'on a prouvé au passage que ρ^{-1} est $\frac{1}{1-C}$-lipschitzienne. On déduit alors de

$$\forall y, y' \in \mathbb{R},\ |(\rho - id)(y) - (\rho - id)(y')| \leqslant C|y - y'|,$$

que

$$\forall z, z' \in \mathbb{R},\ |(id-\rho^{-1})(z)-(id-\rho^{-1})(z')| \leqslant C|\rho^{-1}(z)-\rho^{-1}(z')| \leqslant \frac{C}{1-C}|z-z'|,$$

ce qui implique que ρ est en fait proche de l'identité au sens bilipschitz, ce qui impose par ailleurs que ρ préserve l'orientation.

Nous pouvons à présent construire une fonction génératrice pour f. Notons $\alpha(\cdot, \eta)$ et $\beta(x, \cdot)$ les inverses respectives de $q \circ f^{-1}(\cdot, \eta)$ et $p \circ f(x, \cdot)$. Par le lemme B.5, les applications α et β sont continues. L'application f étant

symplectique, la 1-forme $y\,dx - f^*(y\,dx)$ est fermée donc exacte. Par conséquent, la 1-forme continue $\alpha\,d\eta + \beta\,dx = (y\,dx - \eta\,d\xi) + d(\eta\xi)$ est exacte, et est donc la différentielle d'une fonction C^1, notée σ.

Comme f et f^{-1} sont l'identité hors d'un compact, on a, hors de ce compact : $\alpha(x,\eta) = x$ et $\beta(x,\eta) = \eta$, donc $\sigma(x,\eta) = \langle x,\eta\rangle$. On peut donc poser $S(x,\eta) = \sigma(x,\eta) - \langle x,\eta\rangle$. On vérifie sans peine que S est une fonction génératrice admissible et que $\Psi(S) = f$.

Les applications $\alpha(\cdot,\eta)$ et $\beta(x,\cdot)$, inverses respectives de $q\circ f^{-1}(\cdot,\eta)$ et $p\circ f(x,\cdot)$ étant également proches de l'identité au sens Lipschitz. Un argument similaire à celui vu en début de preuve implique que pour tous indices i, les applications $x_i \mapsto q_i\circ\alpha(x,\eta)$ et $\eta_i \mapsto p_i\circ\beta(x,\eta)$ sont des homéomorphismes croissants de $\mathbb{R}$. Ceci prouve bien que f est super-admissible.

Démontrons à présent l'inclusion $G_{2n} \subset Hameo(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$. Soit S une fonction génératrice super-admissible. Alors, d'après le lemme 4.15, le chemin (tS) vérifie les hypothèses de la proposition 4.16, et l'on conclut que $\Psi(S)$ est un haméomorphisme. □

Remarque 4.17. L'argument ci-dessus, appliqué à des chemins continus d'homéomorphismes symplectiques bilipschitz montre en fait que *toute isotopie dans* $Bilip_{c,0}(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ *est une haméotopie.*

4.3 Le problème de l'extension de l'invariant de Calabi

Dans cette partie, nous allons prouver que l'invariant de Calabi s'étend au groupe G_{2n}. Pour une rapide introduction à l'invariant de Calabi, le lecteur peut se référer à l'annexe A.2.3.

Le seul résultat d'extension de l'invariant de Calabi dont nous avons connaissance, est dû à P. Haïssinsky [23]. Celui-ci a prouvé que l'invariant de Calabi s'étend aux homéomorphismes quasi-conformes du plan préservant l'aire, en dimension 2. Nos méthodes sont complètement différentes de celles de P. Haïssinsky. Nous n'avons connaissance d'aucun résultat de ce type en dimension plus grande.

4.3.1 Motivation

Comme nous l'avons déjà signalé, l'un des intérêts du groupe des haméomorphismes réside dans le fait qu'il forme, dans le cas d'une surface (S,ω),

un sous-groupe distingué du groupe $\mathcal{G}(S,\omega)$ des homéomorphismes qui préservent l'aire et dont le flux est nul, groupe dont on ne sait pas s'il est simple. Pour prouver la non-simplicité de $\mathcal{G}(S,\omega)$, il suffit donc de démontrer que $Hameo(S,\omega) \subsetneq \mathcal{G}(S,\omega)$.

Dans le cas du disque, A. Fathi a remarqué qu'il suffirait pour cela de prouver que l'invariant de Calabi s'étend à $Hameo(S,\omega)$. L'idée consiste à exhiber un homéomorphisme sur lequel l'extension de Calabi ne pourrait prendre qu'une valeur infinie. Comme on va le voir, cet homéomorphisme est un exemple de rotation fibrée $(r,\theta) \mapsto (r, \theta+\rho(r))$ dont le nombre de rotation ρ vérifie $\int_0^{+\infty} r\rho(r)\,dr = \infty$ (cf. exemple 4.3).

Proposition 4.18 (Fathi, Oh)**.** *Soit H un sous-groupe de $\mathcal{G}(\mathbb{D}_2,\omega_0)$, contenant les difféomorphismes hamiltoniens. Supposons qu'il existe un morphisme de groupe* $\mathrm{Cal} : H \to \mathbb{R}$ *tel que*

1. *la restriction de* Cal *aux difféomorphismes coïncide avec l'invariant de Calabi ;*
2. *(homogénéité) pour tout $h \in H$ et tout rapport $0 < a < 1$,*

$$\mathrm{Cal}(s_a h s_a^{-1}) = a^4 \mathrm{Cal}(h).$$

où s_a est l'homothétie de rapport a, centrée en 0.

Alors H est un sous-groupe propre de $\mathcal{G}(\mathbb{D}_2,\omega_0)$.

Remarquons que la propriété d'homogénéité est bien sûr déjà vérifiée par l'invariant de Calabi sur les difféomorphismes.

Démonstration — L'idée est de construire un homéomorphisme h pour lequel la propriété d'homogénéité forcerait l'invariant de Calabi à prendre une valeur infinie. Pour cela, on part d'une rotation fibrée R_0, à support dans l'anneau $1 > r > \frac{1}{2}$, autrement dit

$$R_0 : (r,\theta) \mapsto (r, \theta + \rho_r(\theta)),$$

avec $\rho :]0,1[\mapsto \mathbb{R}$ à support dans $]\frac{1}{2},1[$. On peut choisir ρ de façon à ce que l'invariant de Calabi de ce difféomorphisme soit égal à 1. On renormalise cette rotation fibrée en réduisant l'espace et en accélérant le temps, de façon à obtenir encore des rotations fibrées : plus précisément, on définit par récurrence les difféomorphismes R_k pour tout entier $k \geqslant 0$ par la relation

$$R_{k+1} = s_{\frac{1}{2}} \circ R_k^{(2^4)} \circ s_{\frac{1}{2}}^{-1}.$$

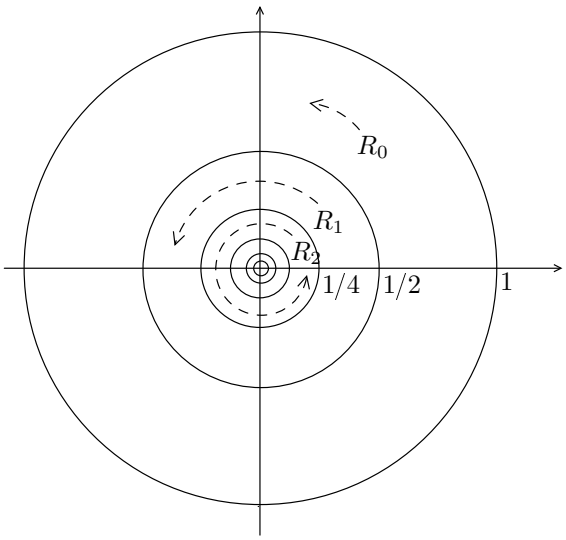


FIG. 4.4 – L'homéomorphisme $h = R_0 \circ R_1 \circ R_2 \circ \cdots$ ne peut pas avoir d'invariant de Calabi.

La renormalisation en temps sert à ce que l'invariant de Calabi prenne encore la valeur 1 sur chaque R_k. Le support de R_k est l'anneau de rayon extérieur 2^{-k} et de rayon intérieur 2^{-k-1}. Ces supports sont deux à deux disjoints, donc on peut définir l'homéomorphisme h comme le composé de toutes les applications $R_k, k \geqslant 0$ (figure 4.3.1). Par construction, h vérifie la relation

$$h = R_0 \circ \left(s_{\frac{1}{2}} \circ h^{(2^4)} \circ s_{\frac{1}{2}}^{-1} \right),$$

(h est le composé de R_0 avec une copie réduite d'un itéré de lui-même).

Démontrons maintenant, par l'absurde, que h ne peut pas appartenir à un sous-groupe sur lequel l'invariant de Calabi s'étend en conservant la propriété d'homogénéité. En effet, sous cette hypothèse, la relation précédente donnerait, en utilisant la propriété de morphisme, l'homogénéité et $\mathrm{Cal}(R_0) = 1$,

$$\mathrm{Cal}(h) = 1 + \mathrm{Cal}(h)$$

ce qui est visiblement absurde. □

REMARQUE 4.19. Dans le cas de la sphère, Y.-G. Oh a remarqué que pour prouver la non-simplicité de $\mathcal{G}(\mathbb{S}_2, \omega)$, il suffit d'étendre à $Hameo(\mathbb{S}_2, \omega)$ le quasi-morphisme construit par M. Entov et L. Polterovich sur $Ham(\mathbb{S}_2, \omega)$ (cf. [14]). Ce quasi-morphisme coïncide avec le morphisme de Calabi sur les

difféomorphismes dont le support est déplaçable. La démonstration de ce fait est similaire au cas du disque.

Cette discussion motive la question suivante :

Question 4.20. *Quels sont les sous-groupes H de $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2, \omega_0)$ auxquels le morphisme de Calabi s'étend en un morphisme de groupe $H \to \mathbb{R}$? Plus généralement, en dimension quelconque, quels sont les groupes d'homéomorphismes auxquels le morphisme de Calabi s'étend ?*

4.3.2 Extension au groupe des homéomorphismes bilipschitz symplectiques

Rappelons que la notation G_{2n} désigne le groupe engendré par les homéomorphismes super-admissibles de $\mathbb{R}^{2n}$. Voici le résultat que nous obtenons.

Théorème 4.21. *Le morphisme de Calabi s'étend en un morphisme de groupe $Cal : G_{2n} \to \mathbb{R}$.*

Démonstration du théorème 4.21 — Soit f un homéomorphisme super-admissible, associé à une fonction génératrice S. Pour tout $t \in]0,1]$ et tout $(x, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$, on pose

$$S_t(x, \eta) = t^2 S\left(\frac{x}{t}, \frac{\eta}{t}\right).$$

Posons $f^t = \Psi(S_t)$. Notons (ce sera utile plus tard) que l'on a l'identité

$$f^t(x, y) = tf\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right),$$

en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$.

D'après le lemme 4.15, le chemin S_t est un chemin C^1 de fonctions génératrices approchable au sens C^1 par un chemin de fonctions génératrices de classe C^∞. D'après la proposition 4.16, l'isotopie $(f^t)_{t\in]0,1]}$ est donc une haméotopie. Notons H son hamiltonien générateur, qui n'est défini que pour les temps strictement positif.

On pose alors

$$\mathrm{Cal}(f) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^{2n}} H(t, x, y)\, \omega_0^n dt. \tag{4.2}$$

Cette intégrale est bien convergente en 0. En effet, par l'équation d'Hamilton-Jacobi,

$$\begin{aligned} H(t, x, y) &= \frac{\partial S_t}{\partial t}(x, p \circ f^t(x, y)) \\ &= (2t - 1) S\left(\frac{x}{t}, p \circ f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)\right). \end{aligned}$$

Donc, si B est une boule centrée en l'origine et contenant le support de $(x,y) \mapsto S(x, p \circ f(x,y))$,

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^{2n}} |H(t,x,y)|\, \omega_0^n dt \leqslant \int_0^1 \int_{tB} t^{2n} |2t-1| \|S\|_{C^0}\, \omega_0^n dt \, < \, \infty.$$

Nous avons défini notre morphisme Cal sur une famille de générateurs de G_{2n}. Étendons-le en un morphisme sur G_{2n} : si $g \in G_{2n}$ est une composition $g = f_1 \circ \cdots \circ f_p$, où chaque f_i est super-admissible, on pose

$$\mathrm{Cal}(g) = \mathrm{Cal}(f_1) + \cdots + \mathrm{Cal}(f_p).$$

Vérifions que cette définition ne dépend pas de la décomposition de g. La preuve sera terminée si l'on prouve que pour toute telle décomposition de l'identité, la somme ci-dessus donne 0. Fixons donc une décomposition de l'identité $Id = f_1 \circ \cdots \circ f_m$. Pour $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $t \in]0,1]$, posons ensuite comme précédemment,

$$f_i^t = t f_i \left(\frac{\cdot}{t} \right).$$

Comme nous l'avons vu, les isotopies $(f_i^t)_{t \in]0,1]}$ sont des haméotopies engendrées par des hamiltoniens continus que l'on notera H_i. Par conséquent, $f_1^t \circ \cdots \circ f_m^t$ est une haméotopie, engendrée par $H_1 \sharp \cdots \sharp H_p$, où $H \sharp K(t,z) := H(t,z) + K(t, \phi_H^{-t}(z))$.

Par ailleurs, $Id = f_1 \circ \cdots \circ f_m$ implique à tout temps $f_1^t \circ \cdots \circ f_m^t = Id$. Le théorème d'unicité du hamiltonien continu (proposition 4.6) implique donc que

$$H_1 \sharp \cdots \sharp H_p = 0.$$

On peut alors faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cal}(f_1) + \cdots + \mathrm{Cal}(f_m) &= \sum_{i=1}^{p} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} H_i(t,x,y)\, \omega_0^n dt \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} (H_1 \sharp \cdots \sharp H_p)(t,x,y)\, \omega_0^n dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que Cal est un morphisme de groupe.

Il reste à montrer que ce morphisme étend le morphisme de Calabi usuel sur les difféomorphismes hamiltoniens. Ceci n'est pas évident car les isotopies considérées ne sont pas lisses en $t = 0$. Cependant, on peut faire le raisonnement suivant : la restriction de Cal au groupe des commutateurs de

$\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^{2n})$ est nécessairement trivial, car ce groupe est simple. Par conséquent, sa restriction à $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^{2n})$ coïncide avec le morphisme de Calabi classique, à composition près par un morphisme du groupe additif $\mathbb{R}$. Ce morphisme est en fait l'identité, car la formule (4.2) implique l'égalité de $\mathrm{Cal}|_{\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^{2n})}$ et du morphisme de Calabi classique sur les difféomorphismes hamiltoniens de la forme

$$f^{-1} \circ (tf(\cdot/t)),$$

pour $t > 0$. $\square$

Chapitre 5

Pseudo-représentations et rigidité du crochet de Poisson

5.1 Le problème de la rigidité C^0 du crochet de Poisson

Rappelons que sur toute variété symplectique, on peut définir le crochet de Poisson de deux fonctions C^∞, H et K par la formule

$$\{H, K\} = \omega(X_H, X_K) = dH \cdot X_K = -dK \cdot X_H.$$

Ce crochet donne une structure d'algèbre de Lie à l'espace $C^\infty(M)$.

Selon un théorème célèbre de M. Gromov et Y. Eliashberg (théorème A.39), pour toute variété symplectique, le groupe des symplectomorphismes $Symp(M, \omega)$ est C^0-fermé dans le groupe des difféomorphismes. Dans $\mathbb{R}^{2n}$, ce résultat peut s'exprimer en terme de crochets de Poisson de la manière suivante (grâce à la remarque A.31).

Théorème 5.1 (Gromov-Eliashberg)**.** *Soient $(f_1^k), \dots, (f_n^k), (g_1^k), \dots, (g_n^k)$ des suites de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{2n}$, vérifiant les trois conditions suivantes :*

1. *pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, les suites (f_i^k) et (g_i^k) convergent uniformément respectivement vers des fonctions f_i et g_i supposées de classe C^∞,*
2. *pour tous i et j dans $\{1, \dots, n\}$, on a $\{f_i^k, g_j^k\} = \delta_{ij}$ où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker, et $\{f_i^k, f_j^k\} = \{g_i^k, g_j^k\} = 0$.*
3. *les $2n$-uplets $(f_1^k, \dots, f_n^k, g_1^k, \dots, g_n^k)$ et $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ forment tous des difféomorphismes.*

Alors, les fonctions limites vérifient les identités $\{f_i, g_j\} = \delta_{ij}$ et $\{f_i, f_j\} = \{g_i, g_j\} = 0$.

Cette façon de voir le théorème de Gromov et Eliashberg suggère la question suivante, dont il apparaît comme un cas particulier (si l'on oublie la troisième hypothèse).

Question 5.2. *Soient (F_n), (G_n) des suites de fonctions de classe C^∞, telles que*

$$F_n \xrightarrow{C^0} F \in C^\infty,$$
$$G_n \xrightarrow{C^0} G \in C^\infty,$$
$$\{F_n, G_n\} \xrightarrow{C^0} H \in C^\infty.$$

A-t-on alors $\{F, G\} = H$?

Comme on pouvait s'y attendre — le crochet de Poisson ne fait intervenir que la différentielle des fonctions et n'a *a priori* rien à voir avec leur norme C^0 — , la réponse à cette question est négative en général, comme le prouve l'exemple suivant.

Exemple 5.3. (Polterovich) Soit χ une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}$, nulle au voisinage de 0. On pose alors, en coordonnées polaires (r, θ) sur $\mathbb{R}^2$, muni de la forme $rdr \wedge d\theta$:

$$F_n(r, \theta) = \frac{\chi(r)r}{\sqrt{n}} \cos(n\theta),$$

$$G_n(r, \theta) = \frac{\chi(r)r}{\sqrt{n}} \sin(n\theta).$$

On voit que F_n et G_n convergent vers 0, mais que leur crochet de Poisson vaut $r\chi(r)\chi'(r) + \chi(r)^2 \neq 0$.(voir figure 5.1)

Cependant, F. Cardin et C. Viterbo ont découvert dans [8] que dans le cas où $H = 0$, la réponse à la question 5.2 est positive, ouvrant ainsi la voie aux recherches sur la rigidité C^0 du crochet de Poisson. Nous allons ici généraliser le résultat de F. Cardin et C. Viterbo en montrant que la question 5.2 a une réponse positive lorsque les suites de fonctions considérées cachent une structure d'algèbre de Lie.

5.2 Pseudo-représentations

5.2.1 Définition et résultat

Dans cette partie, on introduit le concept de pseudo-représentation — la structure d'algèbre de Lie « cachée » mentionnée plus haut — et énonçons notre résultat principal.

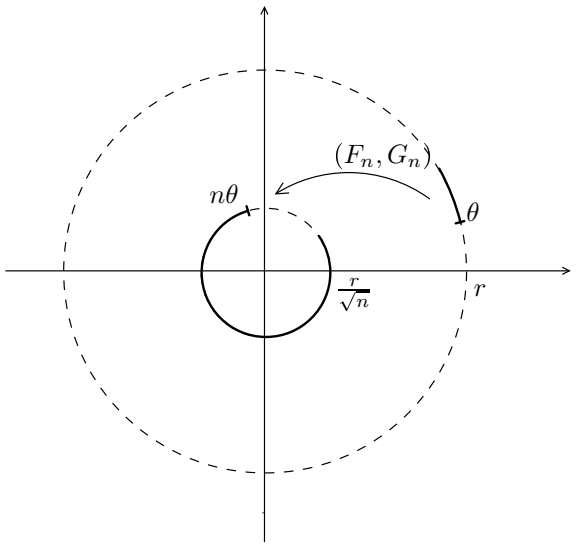


FIG. 5.1 – L'exemple de Polterovich, vu comme une suite d'applications $(F_n, G_n) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

On se donne une algèbre de Lie de dimension finie $\mathfrak{g}$. Par ailleurs, on note C_0^∞ l'espace des fonctions *normalisées* de classe C^∞, c'est-à-dire qui sont
- à support compact si M est ouverte,
- de moyenne nulle si M est fermée.

Définition 5.4. *Une suite d'applications linéaires*

$$\rho_n : \mathfrak{g} \to C_0^\infty(M),$$

sera appelée pseudo-représentation si pour tous $f, g \in \mathfrak{g}$,

$$B_n(f, g) = \{\rho_n(f), \rho_n(g)\} - \rho_n([f, g])$$

converge C^0 vers 0.

Si l'on suppose en outre que la suite (ρ_n) converge vers une application linéaire continue donnée $\rho : \mathfrak{g} \to C_0^\infty(M)$, alors le crochet $\{\rho_n(f), \rho_n(g)\}$ converge vers $\rho([f, g])$, pour tous éléments f et g de $\mathfrak{g}$. La question 5.2 revient alors à se demander si $\{\rho(f), \rho(g)\} = \rho([f, g])$, autrement dit si ρ est une représentation.

Théorème 5.5. *Pour toute variété symplectique, et pour toute algèbre de Lie de dimension finie, la limite C^0 d'une pseudo-représentation convergente est une représentation.*

Ce théorème étend le résultat de F. Cardin et C. Viterbo mentionné plus haut (cf. [8]). En effet, ce dernier n'est autre que le théorème 5.5 dans le cas des algèbres de Lie *abéliennes*.

5.2.2 Démonstration

Comme nous allons le voir, la démonstration du théorème 5.5 repose essentiellement sur l'existence de distances "C^{-1}" et bi-invariantes sur le groupe hamiltonien, comme la distance de Hofer (voir section 1.1.3).

Nous allons devoir établir dans un premier temps une propriété des pseudo-représentations.

Une formule de Hadamard pour les pseudo-représentations

Lemme 5.6. *Soit ρ_n une pseudo-représentation bornée (non-nécessairement convergente) d'une algèbre de Lie de dimension finie $\mathfrak{g}$. Soient $f, g \in \mathfrak{g}$, alors la suite de fonctions hamiltoniennes*

$$\rho_n(f) \circ \phi^s_{\rho_n(g)} \; - \sum_{j=0}^{+\infty} \rho_n(ad(g)^j f) \, \frac{s^j}{j!}$$

converge vers zéro uniformément sur M. De plus, la convergence est uniforme en s sur tout intervalle compact.

Remarque 5.7. Ce lemme est à comparer à la formule de Hadamard :

$$\exp(-Y)X \exp Y = X + [X,Y] + \frac{1}{2!}[[X,Y],Y] + \dots,$$

où X et Y sont deux indéterminées, et où $[X,Y] = XY - YX$.

Remarque 5.8. C'est dans ce lemme qu'intervient l'hypothèse de dimension finie faite sur l'algèbre de Lie dans l'énoncé du théorème 5.5. Par ailleurs, on voit dans ce lemme que l'on utilise bien toute la structure d'algèbre de Lie engendrée par f et g.

Démonstration du lemme 5.6 — On se donne une norme $\| \cdot \|$ sur $\mathfrak{g}$, et l'on note C la norme induite de son crochet de Lie, i.e,

$$\forall f, g \in \mathfrak{g}, \; \|[f,g]\| \leqslant C\|f\|\|g\|.$$

Remarquons d'abord que la série considérée converge. En effet, la norme C^0 de son reste peut être majorée par le reste d'une série positive convergente de la manière suivante :

$$\left\| \sum_{j=N}^{+\infty} \rho_n(ad(g)^j f)\, \frac{s^j}{j!} \right\| \leqslant \sum_{j=N}^{+\infty} R\|f\| \frac{(sC\|g\|)^j}{j!}.$$

où R est un majorant indépendant de n de

$$\|\rho_n\| = \sup\{\|\rho_n(h)\|_{C^0} \mid \|h\| = 1\}.$$

Prouvons maintenant le lemme. L'équation de Poisson nous donne

$$\frac{d}{ds}(\rho_n(f) \circ \phi^s_{\rho_n(g)}) = \{\rho_n(f), \rho_n(g)\} \circ \phi^s_{\rho_n(g)}$$

et donc

$$\rho_n(f) \circ \phi^{s_0}_{\rho_n(g)} = \rho_n(f) + \int_0^{s_0} \{\rho_n(f), \rho_n(g)\} \circ \phi^{s_1}_{\rho_n(g)}\, ds_1$$

$$= \rho_n(f) + \int_0^{s_0} \rho_n([f,g]) \circ \phi^{s_1}_{\rho_n(g)}\, ds_1 + \int_0^{s_0} B_n(f,g) \circ \phi^{s_1}_{\rho_n(g)}\, ds_1.$$

Ensuite, on obtient par une récurrence très simple sur l'entier N :

$$\rho_n(f) \circ \phi^{s_0}_{\rho_n(g)} = \sum_{j=0}^{N} \rho_n(ad(g)^j f)\, \frac{{s_0}^j}{j!} \; + \; R_{N,n}(s_0) \; + \; S_{N,n}(s_0),$$

où,

$$R_{N,n}(s_0) = \int_0^{s_0} \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_N} \rho_n(ad(g)^{N+1} f) \circ \phi^{s_{N+1}}_{\rho_n(g)} ds_{N+1} \cdots ds_1,$$

$$S_{N,n}(s_0) = \sum_{j=0}^{N} \int_0^{s_0} \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_j} B_n(ad(g)^j f, g)) \circ \phi^{s_{j+1}}_{\rho_n(g)} ds_{j+1} \cdots ds_1.$$

Maintenant, si l'on note

$$\|B_n\| = \sup\{\|\{\rho_n(f), \rho_n(g)\} - \rho_n([f,g])\|_{C^0} \mid \|f\| = \|g\| = 1\},$$

$\|B_n\|$ converge vers 0 par hypothèse.

On peut estimer la norme C^0 de ces quantités comme suit :

$$\begin{aligned}\|R_{N,n}(s_0)\|_{C^0} &\leqslant \int_0^{s_0}\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{N-1}} R\|g\|^N C^N \|f\| ds_N \cdots ds_1, \\ &\leqslant R\|f\|\frac{\|g\|^N C^N s_0^N}{N!},\end{aligned}$$

ce qui prouve que $R_{N,n}(s_0)$ converge vers 0 lorsque N tend vers l'infini, ceci uniformément par rapport à n. De même,

$$\|S_{N,n}(s_0)\| \leqslant \sum_{j=0}^{N-2}\int_0^{s_0}\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_j}\|B_n\|\|f\|\|g\|^j ds_{j+1}\cdots ds_1,$$

ce qui implique $\|S_{N,n}(s_0)\| \leqslant \|B_n\|\,\|f\|\exp(s_o\|g\|)$ pour tout N.

Si l'on fait tendre N vers l'infini, on obtient

$$\left\|\rho_n(f)\circ\phi^s_{\rho_n(g)} - \sum_{j=0}^{+\infty}\rho_n(ad(g)^j f)\,\frac{s^j}{j!}\right\| \leqslant \|B_n\|\,\|f\|\exp(s_o\|g\|).$$

Ceci termine la démonstration car le membre de droite converge vers 0. □

Où les distances bi-invariantes C^{-1} interviennent

Terminons la démonstration du théorème 5.5. Le schéma est le suivant : on transforme les hypothèses de convergence sur les hamiltoniens en propriétés sur leurs flots, on applique alors une distance bi-invariante C^{-1}, puis on fait la transformation inverse pour en déduire des conséquences sur les hamiltoniens limites.

Démonstration du théorème 5.5 — Soient $f, g \in \mathfrak{g}$. On veut prouver que $\{\rho(f),\rho(g)\} = \rho([f,g])$. On fixe une distance bi-invariante C^{-1} que l'on notera d, par exemple la distance de Hofer.

Le lemme 5.6 affirme,

$$\rho_n(f)\circ\phi^s_{\rho_n(g)} - \sum_{j=0}^{+\infty}\rho_n(ad(g)^j f)\,\frac{s^j}{j!} \xrightarrow{C^0} 0.$$

Chaque terme de la série converge lorsque n tend vers l'infini, et l'on a vu dans la démonstration du lemme, que la série converge uniformément en n. En conséquence, on a pour tout s,

$$\rho_n(f)\circ\phi^s_{\rho_n(g)} \xrightarrow{C^0} \sum_{j=0}^{+\infty}\rho(ad(g)^j f)\,\frac{s^j}{j!}. \tag{5.1}$$

L'hypothèse de dimension finie implique que la fonction définie par la série normalement convergente $\sum_{j=0}^{+\infty} \rho(ad(g)^j f)\, \frac{s^j}{j!}$ est de classe C^∞ sur M.

En effet, si $(H_i),\ i \in \{1, \ldots, d\}$ est une base de l'image de l'application linéaire ρ, alors il existe des réels a_{ij} tels que $\rho(ad(g)^j f)$ s'écrive $\sum_{i=1}^{d} a_{ij} H_i$. La série de terme général $\rho(ad(g)^j f)\, \frac{s^j}{j!}$ est normalement convergente, donc pour tout i, la série $\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{ij}| \frac{s^j}{j!}$ est convergente. Par conséquent la série de terme général

$$d\left(\rho(ad(g)^j f)\, \frac{s^j}{j!}\right) = \sum_{i=1}^{d} a_{ij} dH_i \frac{s^j}{j!},$$

est également normalement convergente. La fonction $\sum_{j=0}^{+\infty} \rho(ad(g)^j f)\, \frac{s^j}{j!}$ est donc de classe C^1. Par un raisonnement similaire, on montre qu'elle est de classe C^∞.

Comme la distance d est C^{-1}, l'équation (5.1) implique que le flot engendré par $\rho_n(f) \circ \phi^s_{\rho_n(g)}$ converge pour d vers le flot engendré par $\sum_{j=0}^{+\infty} \rho(ad(g)^j f)\, \frac{s^j}{j!}$.

Par ailleurs, le flot de $\rho_n(f) \circ \phi^s_{\rho_n(g)}$ n'est autre que $t \mapsto \phi^{-s}_{\rho_n(g)} \phi^t_{\rho_n(f)} \phi^s_{\rho_n(g)}$, et celui-ci converge pour d vers $\phi^{-s}_{\rho(g)} \phi^t_{\rho(f)} \phi^s_{\rho(g)}$. En effet, $\rho_n(g)$ converge uniformément vers $\rho(g)$ et $\rho_n(f)$ converge uniformément vers $\rho(f)$, ce qui implique que leurs flots respectifs convergent pour d.

Si l'on regroupe les conclusions des deux derniers paragraphes, on voit que l'unicité de la limite pour d — c'est à dire la non-dégénérescence de d — implique que $t \mapsto \phi^{-s}_{\rho(g)} \phi^t_{\rho(f)} \phi^s_{\rho(g)}$ est le flot de $\sum_{j=0}^{+\infty} \rho(ad(g)^j f)\, \frac{s^j}{j!}$. Les fonctions étant supposées normalisées, on en déduit l'égalité

$$\rho(f) \circ \phi^s_{\rho(g)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \rho(ad(g)^j f)\, \frac{s^j}{j!}.$$

Maintenant, en prenant la dérivée par rapport à s, en $s = 0$, on obtient $\{\rho(f), \rho(g)\} = \rho([f, g])$. $\square$

5.3 Quelques conséquences et questions

5.3.1 Une notion de représentation hamiltonienne C^0

Le théorème 5.5 permet — et c'en est la principale motivation — d'étendre la notion de représentation hamiltonienne au cadre continu. On note $C_0(M)$ l'espace des fonctions continues $M \to \mathbb{R}$ normalisées.

Définition 5.9. *On appellera* représentation hamiltonienne C^0 *d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$*, toute application linéaire* $\rho : \mathfrak{g} \to C_0(M)$ *qui est limite au sens* C^0 *d'une pseudo-représentation de* $\mathfrak{g}$*.*

Remarque 5.10. Lorsque l'algèbre de Lie est de dimension finie, la définition 5.9 étend la notion de représentation hamiltonienne usuelle. En effet, le théorème 5.5 affirme dans ce cas qu'une représentation hamiltonienne C^0 à valeur dans l'espace de fonctions lisses $C_0^\infty(M)$ est une représentation.

Exemple 5.11. Si $\rho : \mathfrak{g} \to C_0^\infty(M)$ est une représentation, et si ϕ est un homéomorphisme symplectique, à support compact, alors l'application linéaire

$$\mathfrak{g} \to C_0(M),\ \xi \mapsto \rho(\xi) \circ \phi,$$

est une représentation hamiltonienne C^0 de $\mathfrak{g}$.

En effet, ϕ est par définition la limite C^0 d'une suite de symplectomorphismes (ϕ_n). Si l'on note (ρ_n) la suite d'application linéaire définie par $\rho_n : \xi \to \rho(\xi) \circ \phi_n$, l'invariance symplectique du crochet de Poisson implique que pour chaque n, ρ_n est une représentation. Sa limite est donc bien une représentation hamiltonienne C^0.

Cette notion de représentation hamiltonienne C^0 soulève de nombreuses questions et mériterait une étude plus approfondie. Nous avons défini une notion de représentation pour les algèbres de Lie ; une question naturelle est donc de savoir si cette notion admet une contre-partie pour les groupes de Lie. Cette contre-partie doit peut-être être cherchée du côté du groupe des haméomorphismes (cf. chapitre 4). Notons par ailleurs que la notion d'application moment se transpose bien aux représentations C^0.

En effet, si ρ est une représentation hamiltonienne C^0, on peut considérer son *application moment*, définie, par analogie avec le cas lisse, par :

$$\mu_\rho : M \to \mathfrak{g}^*,\ x \mapsto (g \mapsto \rho(g)(x)).$$

Il serait intéressant d'étudier les propriétés de ces nouvelles applications moments.

5.3.2 Affaiblissement de la convergence

Une question naturelle est de se demander si l'on peut remplacer la convergence C^0 dans toute la théorie des pseudo-représentations par une convergence plus faible. Nous allons exploiter ici les résultats de la partie 2.2 pour améliorer légèrement le théorème 5.5, dans le cas de l'espace symplectique $\mathbb{R}^{2n}$. On reprend les notations de la partie 2.2.

Proposition 5.12. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^{2n}$, vérifiant $\xi(K) = 0$. Si l'on remplace la convergence C^0 dans la définition des pseudo-représentations 5.4 par la convergence C^0 sur tout compact de $\mathbb{R}^{2n} - K$, alors la conclusion du théorème 5.5 reste vraie : la limite au sens C^0 sur tout compact de $\mathbb{R}^{2n} - K$ d'une telle pseudo-représentation, est une représentation.*

Démonstration — D'après le théorème 2.7, il suffit de reprendre complètement la preuve du théorème 5.5 en prenant pour distance bi-invariante C^{-1} la distance de Viterbo. □

5.3.3 Cas des supports non-compacts

Considérons l'exemple suivant, qui n'est qu'une réécriture de l'exemple 5.3.

Exemple 5.13. Plaçons-nous sur la variété symplectique $(\mathbb{R}^2 - \{0\}, rdr \wedge d\theta)$, munie de ses coordonnées polaires et considérons l'algèbre de Lie d'Heisenberg $\mathfrak{h}$ de dimension 3 — c'est à dire l'algèbre de Lie admettant une base à trois éléments f, g et h vérifiant les relations $[f, g] = h$ et $[f, h] = [g, h] = 0$. On pose alors

$$\begin{aligned} \rho_n(f)(r,\theta) &= \frac{r}{\sqrt{n}}\cos(n\theta), \\ \rho_n(g)(r,\theta) &= \frac{r}{\sqrt{n}}\sin(n\theta), \\ \rho_n(h)(r,\theta) &= 1. \end{aligned}$$

Si l'on oublie les conditions de support et de normalisation de la définition des pseudo-représentations (définition 5.4), ρ_n définit alors une pseudo-représentation de $\mathfrak{h}$, qui converge vers une application linéaire ρ vérifiant

$$\begin{aligned} \rho(f) &= 0, \\ \rho(g) &= 0, \\ \rho(h) &= 1. \end{aligned}$$

On voit donc que le théorème 5.5 ne s'étend pas à ce cadre, puisque $\rho([f, g]) \neq \{\rho(f), \rho(g)\}$.

Nous allons exploiter cet exemple pour prouver que sur certaines variétés symplectiques M non-compactes, le groupe $\mathcal{H}(M)$ de tous les difféomorphismes hamiltoniens (non-nécessairement à support compact) n'admet aucune distance bi-invariante C^{-1}.

Théorème 5.14. *Soit $M = \mathcal{S}N$ la symplectisation d'une variété de contact (N, ξ) de dimension au moins 3, admettant une caractéristique fermée. Alors, $\mathcal{H}(M)$ n'admet aucune distance bi-invariante C^{-1}.*

Pour les définitions de base concernant la géométrie de contact, le lecteur peut se référer à l'annexe A.1.5.

Corollaire 5.15. *Pour toute variété compacte B de dimension au moins 2, $\mathcal{H}(T^*B)$ n'admet aucune distance bi-invariante C^{-1}.*

La démonstration du théorème repose sur le lemme suivant.

Lemme 5.16. *Soient M une variété symplectique ouverte, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie normée, et ρ_n une pseudo-représentation de $\mathfrak{g}$ dans $C^\infty(M)$, de limite ρ. Supposons qu'il existe deux éléments f et g de $\mathfrak{g}$, tels que :*

- *chaque fonction $\rho_n(f)$, $\rho(f)$, $\rho_n(g)$, $\rho(g)$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \rho(ad(g)^j f)\, \frac{s^j}{j!}$ a un flot complet,*
- *il existe un ouvert sur lequel toutes les fonctions $\rho_n(f)$, $\rho(f)$, $\rho_n(g)$, $\rho(g)$ sont identiquement nulles.*
- *$\{\rho(f), \rho(g)\} \neq \rho([f, g])$.*

Alors le groupe des difféomorphismes hamiltoniens $\mathcal{H}(M)$ n'admet aucune distance bi-invariante C^{-1}.

Démonstration du lemme 5.16 — Pour s'en convaincre, il suffit de relire attentivement la preuve du théorème 5.5, en remplaçant chaque fois que c'est possible, C^0 convergence par C^0-convergence sur les compacts et C_0^∞ par C^∞. On s'aperçoit alors que les supports compacts s'avèrent nécessaires en exactement trois occasions :

- Chaque fois que l'on considère le flot d'un hamiltonien, il doit être complet. Ceci est automatique pour des hamiltoniens à support compact mais faux en général. Avec les notations de la preuve, les flots nécessaires sont ceux de $\rho_n(f)$, $\rho(f)$, $\rho_n(g)$, $\rho(g)$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \rho(ad(g)^j f)\, \frac{s^j}{j!}$.
- Les fonctions $\rho_n(f)$, $\rho(f)$, $\rho_n(g)$, $\rho(g)$ doivent être normalisées en un certain sens.
- On utilise une distance bi-invariante C^{-1}. Ceci existe sur $\mathcal{H}_c(M)$, mais on n'en connaît aucune à $\mathcal{H}(M)$.

Le lemme 5.16 se déduit aisément de cette discussion. □

Démonstration du théorème 5.14 — Supposons dans un premier temps que N est de la forme $\mathbb{S}^1 \times B$ où B est une boule symplectique de dimension

$2n$. Munissons sa symplectisation de coordonnées $(s, \theta; q, p)$, de sorte que la forme symplectique sur $\mathcal{S}(\mathbb{S}^1 \times B)$ s'écrive $d(e^s(d\theta + pdq))$. On peut adapter l'exemple 5.13 pour qu'il satisfasse toutes les hypothèses du lemme 5.16. On pose en effet

$$\begin{aligned}
\rho_n(f)(s, \theta; q, p) &= \chi(q, p)\frac{e^{s/2}}{\sqrt{n}}\cos(n\theta), \\
\rho_n(g)(s, \theta; q, p) &= \chi(q, p)\frac{e^{s/2}}{\sqrt{n}}\sin(n\theta), \\
\rho_n(h)(s, \theta; q, p) &= \chi(q, p),
\end{aligned}$$

où f, g, h forment une base de l'algèbre de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}$ de dimension 3 et où χ est une fonction lisse non-nulle $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, à support compact inclus dans B.

Soit maintenant $M = \mathcal{S}N$ une variété satisfaisant aux hypothèses du théorème 5.14, c'est à dire qui est la symplectisation d'une variété de contact N de dimension au moins 3 admettant une caractéristique fermée. Nous allons montrer que pour des boules B suffisamment petites, M contient un ouvert U symplectomorphe à $\mathcal{S}(\mathbb{S}^1 \times B)$. Ceci terminera la preuve car l'exemple ci-dessus, prolongé par zéro hors de l'ouvert U, satisfera toutes les conditions du lemme 5.16.

Notons γ une caractéristique fermée de (N, ξ) (voir figure 5.3.3). Le champ de Reeb étant transverse à la structure de contact, il existe un voisinage V de la section nulle du fibré $\xi|_\gamma$, qui est difféomorphe à un voisinage W de γ dans N. Or, le fibré $\xi|_\gamma$ est un fibré symplectique sur $\mathbb{S}^1$ et est donc trivial, de sorte que V peut être choisi de la forme $\mathbb{S}^1 \times B$.

On termine en appliquant un résultat classique sur le voisinage des sous-variétés de contact (cf. [21], exemple 2.33), qui affirme que le voisinage W, difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times B$, lui est en réalité contactomorphe, quitte à prendre un voisinage encore plus petit. □

Démonstration du corollaire 5.15 — Choisissons une métrique riemanienne sur B et considérons la symplectisation $\mathcal{S}\mathbb{S}T^*B$ du fibré en sphère cotangentes $\mathbb{S}T^*M$. Le fibré cotangent T^*B peut être vu comme la compactification de $\mathcal{S}\mathbb{S}T^*B$, l'ensemble à l'infini étant la section nulle de T^*B — ou $\{-\infty\} \times \mathbb{S}T^*M$ si l'on voit $\mathcal{S}\mathbb{S}T^*M$ comme $\mathbb{R} \times \mathbb{S}T^*M$.

Le flot de Reeb de $\mathbb{S}T^*M$ s'identifie au flot géodésique sur M, et ses caractéristiques fermées correspondent aux géodésiques fermées. Or, toute variété fermée admet une géodésique fermée (cf. [34]). On peut donc étendre

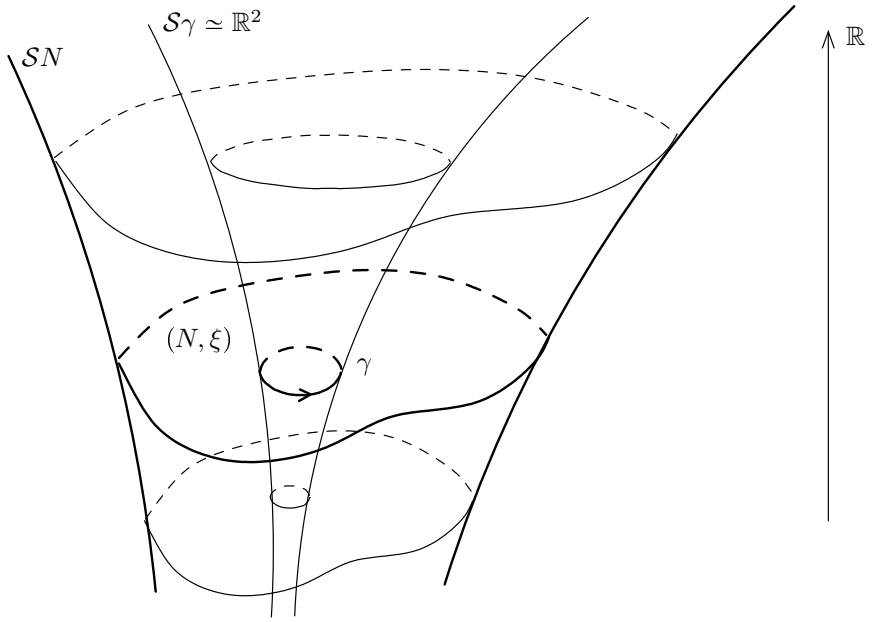


FIG. 5.2 – L'orbite de Reeb γ dans la variété de contact (N, ξ), et leurs symplectisations.

l'exemple de la démonstration précédente. En effet, celui-ci s'étend à la compactification car les fonctions considérées ainsi que toutes leurs dérivées convergent vers 0 lorsque s tend vers $-\infty$. On peut donc finir la démonstration comme pour le théorème 5.14. □

5.3.4 Le théorème de Gromov et Eliashberg revisité

Dans cette partie on montre que la méthode utilisée dans ce chapitre permet de retrouver le théorème de M. Gromov et Y. Eliashberg dans le cas des symplectomorphismes à support compact de $\mathbb{R}^{2n}$.

Comme on va le voir, la théorie des pseudo-représentations n'est pas nécessaire ici, et nous allons nous contenter d'adapter le cas traité par F. Cardin et C. Viterbo. dans [8].

Proposition 5.17. *L'ensemble des applications symplectiques de $\mathbb{R}^{2n}$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions lisses $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ telles que $f^*\omega_0 = \omega_0$, qui sont l'identité hors d'un compact, est C^0-fermé dans l'ensemble de toutes les applications lisses $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$.*

Démonstration — Soit (ϕ_ν) une suite d'applications symplectiques $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ qui converge uniformément vers une application ϕ qui est l'identité hors d'un compact de V.

Notons $(f_i^\nu), (g_i^\nu)$ (resp. f_i, g_i) les fonctions coordonnées de ϕ_ν (resp. ϕ). Elles peuvent être vues comme des fonctions affines à l'infini, c'est-à-dire qu'elles peuvent être écrites sous la forme $H + u$ avec $H \in C_c^\infty(V)$ et u une fonction affine $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$. De plus, pour une suite donnée, (f_i^ν) ou (g_i^ν), la partie affine ne dépend pas de ν.

Comme ϕ_ν est symplectique, on a :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ \{f_i^\nu, g_j^\nu\} = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \{f_i^\nu, f_j^\nu\} = \{g_i^\nu, g_j^\nu\} = 0.$$

Réciproquement, une application qui vérifie ces mêmes égalités est symplectique. En conséquence, la proposition 5.17 résulte du lemme suivant. □

Lemme 5.18. *Soient u, v deux applications affines $\mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}$ et (H_n), (K_n) des suites de fonctions à support compact sur $\mathbb{R}^{2k}$ telles que*

$$H_n \xrightarrow{C^0} H,\ K_n \xrightarrow{C^0} K,\ \{H_n + u, K_n + v\} \xrightarrow{C^0} 0,$$

pour des applications H et K lisses à support compact sur $\mathbb{R}^{2k}$. Alors, $\{H + u, K + v\} = \{u, v\}$.

Considérons une distance d sur $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^{2k})$, bi-invariante, C^{-1} et qui est aussi invariante par l'action des hamiltoniens affines à l'infini. Un telle condition est satisfaite par la distance de Hofer. Pour une suite de difféomorphismes hamiltoniens engendrés par des fonctions hamiltoniennes affines à l'infini dont les parties affines sont stationnaires, on peut parler de sa limite pour d en posant :

$$(\phi_{H_n+u}) \xrightarrow{d} \phi_{H+u} \text{ si et seulement si } d((\phi_{H+u})^{-1}\phi_{H_n+u}, Id) \to 0.$$

De plus, si $(\phi_{H_n+u}) \xrightarrow{d} \phi_{H+u}$ et $(\phi_{K_n+v}) \xrightarrow{d} \phi_{K+v}$, alors

$$(\phi_{H_n+u}\phi_{K_n+v}) \xrightarrow{d} \phi_{H+u}\phi_{K+v}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} & d((\phi_{H_n+u}\phi_{K_n+v})^{-1}(\phi_{H+u}\phi_{K+v}), Id) \\ &= d(\phi_{K+v}^{-1}(\phi_{H+u}^{-1}\phi_{H_n+u})\phi_{K+v}(\phi_{K+v}^{-1}\phi_{K_n+v}), Id) \\ &\leqslant d(\phi_{H+u}^{-1}\phi_{H_n+u}, Id) + d(\phi_{K+v}^{-1}\phi_{K_n+v}, Id). \end{aligned}$$

Enfin, remarquons que si $\|H_n - H\|_{C^0} \to 0$, alors $\phi_{H_n+u} \xrightarrow{d} \phi_{H+u}$.

Nous sommes maintenant près à démontrer le lemme 5.18.

Démonstration du lemme 5.18 — Nous nous contentons d'adapter ici la preuve donnée par F. Cardin et C. Viterbo dans [8] au cas "affine à l'infini".

Remarquons d'abord que les hypothèses impliquent immédiatement qu'à l'infini, $\{H + u, K + v\}$ coïncide avec l'application constante $\{u, v\}$. Par ailleurs, un calcul simple montre que le flot

$$\psi_n^t = \phi_{H_n+u}^t \phi_{K_n+v}^s \phi_{H_n+u}^{-t} \phi_{K_n+v}^{-s}$$

est engendré par la fonction hamiltonienne affine à l'infini

$$\int_0^s \{H_n + u, K_n + v\}(\phi_{K_n+v}^\sigma \phi_{H_n+u}^t(x))d\sigma,$$

qui converge uniformément vers $\{u, v\}$ par hypothèse. Par conséquent, ψ_n^t converge pour tout s et tout t vers Id. Cependant, comme remarqué plus haut, il converge vers $\phi_{H+u}^t \phi_{K+v}^s \phi_{H+u}^{-t} \phi_{K+v}^{-s}$. On a donc $\phi_{H+u}^t \phi_{K+v}^s \phi_{H+u}^{-t} \phi_{K+v}^{-s} = Id$, ce qui prouve que $\{H + u, K + v\}$ est constante donc égale à $\{u, v\}$. □

5.4 Autres approches de la rigidité du crochet de Poisson

5.4.1 Une approche quantitative

Dans [17], M. Entov, L. Polterovich et F. Zapolsky ont proposé une autre approche pour améliorer le résultat de F. Cardin et C. Viterbo mentionné plus haut. En effet, ceux-ci ont introduit la quantité suivante, associée à deux fonctions F et G,

$$\Upsilon(F, G) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \{\|\{F', G'\}\| \mid \|F - F'\|_{C^0} < \varepsilon, \|G - G'\|_{C^0} < \varepsilon\},$$

remarquant que le résultat de F. Cardin et C. Viterbo affirme

$$\Upsilon(F, G) > 0 \iff \{F, G\} \neq 0.$$

Dans ce même article, ils donnent des minorants de la quantité $\Upsilon(F, G)$, comme conséquence de leur théorie des quasi-états symplectiques [15]. Récemment, ce résultat a été amélioré par M. Entov et L. Polterovich qui ont prouvé, en se basant sur les propriétés des géodésiques de la métrique de Hofer :

Proposition 5.19 (Entov-Polterovich [16])**.**

$$\Upsilon(F,G) = \|\{F,G\}\|_{C^0},$$

sur toute variété symplectique et pour toutes fonctions $F, G \in C_c^\infty$*.*

Ce résultat avait été précédemment prouvé par F. Zapolsky dans le cas des surfaces ([61]). Dans [16], M. Entov et L. Polterovich prouvent aussi qu'il n'y a pas de propriété analogue pour les crochets triples de la forme $\{\{F,G\},H\}$. Encore plus récemment, ce résultat a été retrouvé en appliquant finement l'inégalité "énergie-capacité", par L. Buhovski [7].

5.4.2 Quelques remarques utilisant la théorie des distributions

Dans cette partie, nous exposons les conséquences de la théorie des distributions sur le comportement C^0 du crochet de Poisson. Aucune hypothèse de type "algèbre de Lie" n'est faite sur les fonctions, elles sont simplement supposées de classe C^∞.

Proposition 5.20. *Si* (F_n) *converge au sens* C^2 *vers* F *et* (G_n) *converge uniformément vers* G*, alors,* $\{F_n, G_n\}$ *converge vers* $\{F,G\}$ *au sens des distributions. En conséquence, si* $\{F_n,G_n\}$ *converge uniformément vers* H*, alors* $\{F,G\} = H$*.*

Démonstration — Pour toute fonction de classe C^∞ à support compact ϕ,

$$\begin{aligned}\langle\{F_n,G_n\},\phi\rangle &= \int \frac{\partial G_n}{\partial q}\frac{\partial F_n}{\partial p}\phi - \int \frac{\partial G_n}{\partial p}\frac{\partial F_n}{\partial q}\phi \\ &= -\int G_n \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial F_n}{\partial p}\phi\right) + \int G_n \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial F_n}{\partial q}\phi\right).\end{aligned}$$

Par hypothèse, les intégrandes convergent uniformément, donc les intégrales convergent vers $-\int G\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\phi\right) + \int G\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\phi\right)$, soit exactement $\langle\{F,G\},\phi\rangle$. □

Proposition 5.21. *Si* F_n, G_n *convergent uniformément respectivement vers* F*,* G *et si* $\{F_p, G_q\}$ *converge uniformément vers* H *lorsque* p ***et*** q *tendent vers l'infini, alors* $\{F,G\} = H$*.*

Démonstration — On se donne ici encore une fonction de classe C^∞ à support compact ϕ, et l'on écrit

$$\langle \{F_p, G_q\} - \{F, G\}, \phi \rangle = \langle \{F_p - F, G_q\}, \phi \rangle + \langle \{F, G_q - G\}, \phi \rangle.$$

D'après la proposition 5.20, le premier terme converge vers 0, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier q_0 tel que pour tout $q > q_0$, $|\langle \{F, G_q - G\}, \phi \rangle| \leqslant \varepsilon$.

De même, pour tout entier fixé q, il existe un entier p_0 tel que pour tout $p > p_0$, $|\langle \{F_p - F, G_q\}, \phi \rangle| \leqslant \varepsilon$.

En conséquence, pour tout $\varepsilon > 0$ et tous entiers p_1, q_1, on peut trouver $p > p_1, q > q_1$ tels que $|\langle \{F_p, G_q\} - \{F, G\}, \phi \rangle| \leqslant 2\varepsilon$.

On peut donc construire deux extractions χ, ψ telles que $\langle \{F_{\chi(n)}, G_{\psi(n)}\} - \{F, G\}, \phi \rangle$ converge vers 0. Comme $\langle \{F_{\chi(n)}, G_{\psi(n)}\} - H, \phi \rangle \to 0$, cela implique $\langle \{F, G\}, \phi \rangle = \langle H, \phi \rangle$, ceci pour tout ϕ. □

Annexe A

Outils

Le but de cette annexe est d'introduire les objets mathématiques utilisés dans ce mémoire. Nous donnons les définitions et les résultats fondamentaux, illustrés de quelques exemples.

Pour autant, cette annexe ne constitue pas une véritable introduction à la géométrie symplectique ni à la dynamique hamiltonienne. Pour une exposition plus complète, le lecteur pourra se référer à [40].

A.1 Bases de géométrie symplectique

A.1.1 Espaces vectoriels symplectiques

Tous les espaces vectoriels que l'on considérera seront supposés réels.

Définition A.1. *Un* espace vectoriel symplectique *est un couple (E, ω), où E est un espace vectoriel et ω est une forme bilinéaire anti-symétrique et non dégénérée.*

Une application linéaire symplectique *u entre deux espaces vectoriels symplectiques (E, ω) et (E', ω'), est une application linéaire de E dans E' telle que pour tous vecteurs e_1, e_2 de E, on ait*

$$\omega'(u(e_1), u(e_2)) = \omega(e_1, e_2). \tag{A.1}$$

Si l'on se donne deux bases de E et E' et si l'on identifie les applications linéaires et bilinéaires avec leur matrice respective dans ces bases, l'équation (A.1) s'écrit

$$^t u\, \omega' u = \omega.$$

EXEMPLE A.2. Pour tout entier n, l'espace $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la forme ω définie par

$$\omega((q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)\,,\,(q'_1,\ldots,q'_n,p'_1,\ldots,p'_n)) = \sum_{i=1}^{n}(q_ip'_i - p_iq'_i),$$

est un espace vectoriel symplectique.

De plus, l'application linéaire représentée dans la base canonique par la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

est symplectique.

Il est facile de voir qu'un espace vectoriel symplectique de dimension finie est toujours de *dimension paire*. Par ailleurs, si E est un espace vectoriel symplectique de dimension finie $2n$, alors il est *isomorphe* à $\mathbb{R}^{2n}$, c'est-à-dire qu'il existe une application linéaire bijective et symplectique de E vers $\mathbb{R}^{2n}$.

On définit l'*orthogonal* d'un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel symplectique (E,ω) par

$$F^\omega = \{e \in E \,|\, \forall f \in F, \omega(e,f) = 0\}.$$

Comme ω est non-dégénérée, $(F^\omega)^\omega = F$ et $\dim F^\omega = \dim E - \dim F$.

Certains sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels symplectiques sont d'un intérêt particulier.

Définition A.3. *Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel symplectique (E,ω) est dit :*
- symplectique *si* $F^\omega \cap F = \{0\}$,
- isotrope *si* $F \subset F^\omega$,
- coisotrope *si* $F^\omega \subset F$,
- lagrangien *si* $F = F^\omega$.

Tout sous-espace coisotrope donne naissance à un nouvel espace vectoriel symplectique. C'est l'opération de *réduction symplectique*.

Lemme A.4. *Soient (E,ω) un espace vectoriel symplectique et F un sous-espace coisotrope. Le quotient F/F^ω admet une forme symplectique naturelle induite par ω.*

De plus, si L est un sous-espace lagrangien de E, alors, $((L\cap F)+F^\omega)/F^\omega$ est un sous-espace lagrangien de la réduction F/F^ω.

D'une manière général, on appelle *réduction* par F d'une partie X de E, son image dans l'espace vectoriel réduit F/F^ω.

A.1.2 Variétés symplectiques

Définition A.5. *Une* variété symplectique *est un couple* (M, ω) *où* M *est une variété différentiable et* ω *est une 2-forme non-dégénérée et fermée sur* M*.*

En chaque point x de M, l'espace vectoriel tangent T_xM, muni de la forme bilinéaire ω_x, est un espace vectoriel symplectique. La dimension de M est donc nécessairement paire.

Si M est de dimension $2n$, la $2n$-forme $\omega^n = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ ne s'annule en aucun point, et est donc une forme volume. Par conséquent, toute variété symplectique est *orientable*.

Donnons quelques exemples fondamentaux.

Exemple A.6. Tout espace vectoriel symplectique est une variété symplectique. La forme symplectique est alors constante. En particulier, $\mathbb{R}^{2n}$ est une variété symplectique. Sa *forme symplectique standard* est définie comme dans l'exemple A.2 par

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i,$$

où $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ désignent les coordonnées standards sur $\mathbb{R}^{2n}$. On contracte souvent cette formule en écrivant $\omega = dp \wedge dq$.

Exemple A.7. Plus généralement, pour toute variété différentiable N, le fibré cotangent T^*N admet une structure symplectique, dont la forme est construite comme suit.

On note π la projection canonique du fibré cotangent sur sa base. On considère λ la 1-forme sur T^*N définie au point b de T^*N par

$$\lambda(b) = b \cdot d\pi_b.$$

La 1-forme λ est appelée *1-forme de Liouville*. En coordonnées base-fibre (q, p), elle s'écrit $p\,dq$. La forme symplectique sur T^*N est alors la différentielle extérieure de λ, $\omega = d\lambda$.

Il y a beaucoup d'autres exemples. Toutes les surfaces orientables, les tores de dimension paire, les espaces projectifs complexes... On peut aussi construire d'autres exemples par produit, réduction ou encore éclatement.

Comme dans le cas des espaces vectoriels linéaires, certaines sous-variétés sont d'un intérêt particulier.

Définition A.8. *Une sous-variété d'une variété symplectique sera dite lagrangienne (resp. symplectique, isotrope, coisotrope) si son espace tangent est lagrangien (resp. symplectique, isotrope, coisotrope) en chacun de ses points.*

Donnons un exemple de sous-variété lagrangienne qui intervient souvent dans ce mémoire.

EXEMPLE A.9. Soient N une variété différentiable, et f une fonction de classe C^∞ sur N. Alors, le graphe de la différentielle de f est une sous-variété lagrangienne du fibré cotangent T^*N.

A.1.3 Symplectomorphismes

Définition A.10. *Un* symplectomorphisme *est un difféomorphisme ϕ entre deux variétés symplectiques (M, ω) et (M', ω') dont l'application linéaire tangente est symplectique en tout point, ce qui peut s'écrire*

$$\omega = \phi^* \omega'.$$

Étant donnée une variété symplectique (M, ω), on s'intéresse à l'ensemble des symplectomorphismes de M dans M. Cet ensemble est un *sous-groupe* de l'ensemble des difféomorphismes de M, noté $Symp(M, \omega)$ ou simplement $Symp(M)$.

Clairement, tout isomorphisme symplectique linéaire est un symplectomorphisme. Il est aussi facile de voir que tout difféomorphisme préservant l'aire d'une surface orientable est un symplectomorphisme. D'autres exemples sont donnés par les difféomorphismes hamiltoniens (voir section A.2.1 ci-dessous).

REMARQUE A.11. Soit (M, ω) une variété symplectique et $\phi \in Symp(M, \omega)$ un symplectomorphisme de M. Alors le graphe de ϕ

$$\Gamma_\phi = \{(x, \phi(x)) \,|\, x \in M\},$$

est une sous-variété lagrangienne de la variété symplectique $M \times M$, munie de la forme symplectique $\omega \ominus \omega$, définie par la formule

$$(\omega \ominus \omega)_{(x,y)}((u, v), (u', v')) = \omega_x(u, u') - \omega_y(v, v').$$

A.1.4 Le théorème de Darboux

Un théorème fondamental de la géométrie symplectique est le suivant.

Théorème A.12. *(Darboux) Tout point d'une variété symplectique de dimension $2n$ admet un voisinage symplectomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$.*

Toute forme symplectique s'écrit donc localement dans un système de coordonnées locales $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ sous la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

Le théorème de Darboux signifie qu'il n'y a pas d'autres invariants symplectiques de nature locale que la dimension. Cette situation est complètement opposée à celle des variétés riemanniennes pour lesquelles il existe des invariants locaux, comme la courbure.

On ne peut donc espérer distinguer les variétés symplectiques que par des invariants de nature globale, qui existent eux en grand nombre.

A.1.5 Géométrie de contact

Définition A.13. *Une* variété de contact co-orientable *est un couple (N, ξ), où N est une variété différentiable de dimension impaire, et ξ est un champ d'hyperplans sur N, tel qu'il existe une 1-forme α sur N vérifiant les deux propriétés :*

- $\xi = \ker \alpha$,
- $d\alpha|_\xi$ *est non-dégénérée.*

Le champ ξ est appelé structure de contact*, et toute forme α vérifiant ces deux propriétés est appelée* forme de contact*.*

Un contactomorphisme *entre deux variétés de contact (N_1, ξ_1) et (N_2, ξ_2) est un difféomorphisme ϕ entre N_1 et N_2 qui envoie ξ_1 sur ξ_2. Si α_1 et α_2 sont des formes de contact respectives, cela signifie qu'il existe une fonction f ne s'annulant pas telle que*

$$\phi^* \alpha_2 = f \alpha_1.$$

L'exemple fondamental est le suivant.

Exemple A.14. Sur $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z)$, la 1-forme

$$\alpha = dz - \sum_{i=1}^{n} y_i \, dx_i$$

est une forme de contact.

EXEMPLE A.15. Pour toute variété riemanienne (X, g), le fibré unitaire cotangent $\mathbb{S}T^*X$ de X (i.e., l'ensemble des covecteurs de norme 1) admet une structure de contact $\xi = \ker \alpha$, où $\alpha = \lambda|_{\mathbb{S}T^*X}$ est la restriction de la 1-forme de Liouville $\lambda = p\,dq$ définie dans l'exemple A.7.

Les variétés de contact sont étroitement reliées aux variétés symplectiques. Par exemple, on peut construire une variété symplectique à partir de toute variété de contact, par le procédé suivant.

Définition A.16. *La* symplectisation*, notée $\mathcal{S}N$, d'une variété de contact (N, ξ), admettant une forme de contact α est la variété symplectique dont la variété sous-jacente est $\mathbb{R} \times N$ et dont la forme symplectique est $\omega = d(e^t\alpha)$, où t désigne la coordonnée suivant $\mathbb{R}$ dans le produit $\mathbb{R} \times N$.*

Par exemple, il n'est pas très difficile de voir que la symplectisation d'un fibré unitaire cotangent $\mathbb{S}T^*X$ est le fibré cotangent privé de sa section nulle $T^*X - 0_X$.

Étant fixée une forme de contact, il existe un champ de vecteur privilégié associé à cette forme.

Définition A.17. *Le* champ de Reeb *d'une forme de contact α sur une variété de contact (N, ξ), est l'unique champ de vecteur R_α sur N vérifiant $\iota_{R_\alpha} d\alpha = 0$ et $\iota_{R_\alpha}\alpha = 1$.*

Les trajectoires de R_α sont appelées courbes caractéristiques*.*

EXEMPLE A.18. Le flot géodésique d'une variété riemanienne correspond au champ de Reeb de son fibré unitaire cotangent.

On voit en particulier que les caractéristiques sont des courbes transverses à la structure de contact ξ. Une conjecture très célèbre, ayant motivé de nombreux travaux en géométrie de contact et symplectique est la suivante.

Conjecture A.19 (Weinstein)**.** *Toute variété de contact admet une caractéristique fermée.*

La conjecture de Weinstein a maintenant été prouvée dans de nombreux cas (voir par exemple [19], [27], [26], [37], [38], [53], [55],...).

A.2 Dynamique hamiltonienne

La dynamique hamiltonienne, issue de la mécanique classique, est à l'origine de l'apparition de la géométrie symplectique. Celle-ci constitue en effet le cadre général dans lequel la dynamique hamiltonienne a un sens. Aujourd'hui encore, cette dynamique motive une large partie des recherches en géométrie symplectique.

A.2.1 Fonctions et flots hamiltoniens

On se place sur une variété symplectique (M, ω). Voici les définitions de base de la dynamique hamiltonienne.

Définition A.20. *Une* fonction hamiltonienne *(ou* hamiltonien*) sur M est une fonction H de classe C^∞ définie sur $\mathbb{R} \times M$ et prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$. La composante suivant $\mathbb{R}$ est appelée "temps", celle suivant M "espace".*

Un hamiltonien qui ne dépend pas du temps est dit autonome*.*

Le champ de vecteur hamiltonien *(ou* gradient symplectique*), noté X_H, engendré par H, est l'unique champ de vecteur sur M dépendant du temps, qui est défini à tout temps t par*

$$\iota_{X_H(t,\cdot)} = d(H(t,\cdot)).$$

*L'*isotopie hamiltonienne *(ou* flot hamiltonien*) engendrée par H est l'isotopie $((\phi_H)_s^t)_{s,t}$, lorsqu'elle est définie, engendrée par le champ de vecteur X_H.*

Un difféomorphisme hamiltonien *est un difféomorphisme qui est un élément d'une isotopie hamiltonienne, ou, de manière équivalente, le temps un d'une isotopie hamiltonienne.*

Remarque A.21. Dans un système de coordonnées $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ avec la forme symplectique $\omega = dp \wedge dq$, le gradient symplectique de H s'écrit

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}.$$

Par conséquent, le flot hamiltonien de H est solution du système d'équations

$$\boxed{\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}} \tag{A.2}$$

appelées *Équations de Hamilton.*

EXEMPLE A.22. La position q d'un point matériel de masse m, soumis à un champ de potentiel V satisfait, d'après le principe fondamental de la dynamique, à l'équation

$$m\ddot{q} = -\nabla V(q).$$

Si l'on introduit maintenant la quantité de mouvement $p = m\dot{q}$, cette équation est équivalente aux équations de Hamilton écrites pour l'hamiltonien

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}|p|^2 + V(q).$$

Conventions. *Dans ce mémoire, on ne considère que des fonctions hamiltoniennes H pour lesquelles il existe un réel positif T tel que pour tous $(t,x) \in \mathbb{R} \times M$ avec $|t| > T$, on ait $H(t,x) = 0$ — cette restriction n'a lieu que pour des raisons techniques, et est de faible importance.*

Par ailleurs, on dit qu'une fonction hamiltonienne est normalisée *lorsque*

- *H est à support compact si M n'est pas compacte, c'est-à-dire qu'il existe un compact K de M, tel que pour tous $(t,x) \in \mathbb{R} \times (M - K)$, on ait $H(t,x) = 0$,*
- *H est de moyenne nulle si M est compacte, c'est-à-dire*

$$\forall t, \ \int_M H(t,x)\,\omega^n = 0.$$

Enfin, on écrit souvent par abus ϕ_H^t à la place de $(\phi_H)_0^t$.

Notations. *On note*

- *$Ham(M,\omega)$ ou $Ham(M)$ l'ensemble des fonctions hamiltoniennes sur M,*
- *$Ham_c(M,\omega)$ ou $Ham_c(M)$ l'ensemble des fonctions hamiltoniennes sur M qui sont à support compact,*
- *$Ham_0(M,\omega)$ ou $Ham_0(M)$ l'ensemble des fonctions hamiltoniennes sur M qui sont normalisées,*
- *$\mathcal{H}(M,\omega)$ ou $\mathcal{H}(M)$ l'ensemble des difféomorphismes hamiltoniens de M,*
- *$\mathcal{H}_c(M,\omega)$ ou $\mathcal{H}_c(M)$ l'ensemble des difféomorphismes hamiltoniens de M, engendrés par des hamiltoniens à support compact.*

Proposition A.23. *Les ensembles $\mathcal{H}(M,\omega)$ et $\mathcal{H}_c(M,\omega)$ sont des sous-groupes distingués du groupe des symplectomorphismes $Symp(M,\omega)$.*

Ce résultat repose sur des calculs sans difficultés que résume le lemme suivant.

Lemme A.24. *Soient H et K des hamiltoniens, s un réel, et ψ un symplectomorphisme. Alors,*

1. *ϕ_H^{st} est engendrée par $sH(st, x)$,*
2. *$(\phi_H^t)^{-1}$ est engendrée par $\overline{H}(t, x) = -H(t, \phi_H^t(x))$,*
3. *$\phi_H^t \circ \phi_K^t$ est engendrée par $H \sharp K(t, x) = H(t, x) + K(t, (\phi_H^t)^{-1}(x))$,*
4. *$\psi^{-1}\phi_H^t\psi$ est engendrée par $H(t, \psi(x))$.*

Au passage, on voit que $(\phi_H^t)^{-1}\phi_K^t$ est engendrée par $(K-H)(t, \phi_H^t(x))$. Ce lemme est particulièrement utile, tout au long de ce mémoire. Enfin, notons que l'on a le résultat suivant.

Lemme A.25 (Banyaga)**.** *Tout chemin lisse dans $\mathcal{H}(M, \omega)$ est une isotopie hamiltonienne.*

A.2.2 Crochet de Poisson et intégrales premières

L'espace $C^\infty(M)$ des fonctions de classe C^∞ d'une variété symplectique (M, ω) est munie d'une structure d'algèbre de Lie naturelle, que l'on va décrire.

Définition A.26. *Le* crochet de Poisson *de deux fonctions $H, K \in C^\infty(M)$ est donné par*

$$\{H, K\} = \omega(X_H, X_K) = dH \cdot X_K = -dK \cdot X_H.$$

Dans $\mathbb{R}^{2n}$, ou dans une carte locale, on peut écrire le crochet de Poisson de H et K dans le système de coordonnées $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ comme suit :

$$\{H, K\} = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial K}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial K}{\partial q_i} \right).$$

Si l'on voit les fonctions H et K comme des hamiltoniens autonomes sur M, leur crochet de Poisson a une interprétation dynamique. En effet, ils mesurent la commutativité, ou plutôt la non-commutativité, des flots hamiltoniens.

Proposition A.27. *Soient $H, K \in C^\infty(M)$. Alors, $\{H, K\} = 0$ si et seulement si pour tous s et t, les difféomorphismes ϕ_H^t et ϕ_K^s commutent.*

Ce résultat repose sur le lemme A.24 et sur l'identité suivante, connue sous le nom d'*équation de Poisson*, et qui résulte immédiatement de la définition :

$$\frac{d}{ds}(H \circ \phi_K^s) = \{H, K\} \circ \phi_K^s.$$

On voit au passage que si $\{H, K\} = 0$ alors, H est constant sur les orbites du flot ϕ_K^t, et l'on dit alors que H est une *intégrale première de* K. Comme $\{H, H\} = 0$, on voit en particulier que H *est constant sur les trajectoires de son propre flot.*

Proposition A.28. *Le crochet de Poisson est anti-symétrique et vérifie l'identité de Jacobi*

$$\{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0, \ \forall F, G, H \in C^\infty(M),$$

ce qui donne à $C^\infty(M)$ *une* structure d'algèbre de Lie.

Le crochet de Poisson vérifie aussi la double formule de Leibniz :

$$\{F, GH\} = \{F, G\}H + \{F, H\}G,$$

$$\{FG, H\} = G\{F, H\} + F\{G, H\}.$$

Ces identités mènent à la généralisation suivante :

Définition A.29. *Une* variété de Poisson *est une variété différentiable* M*, dont l'espace des fonctions* C^∞ *est muni d'une forme bilinéaire* $\{\cdot, \cdot\}$*, anti-symétrique, vérifiant l'identité de Jacobi et la double formule de Leibniz.*

La proposition A.28 affirme donc que toute variété symplectique est une variété de Poisson. En général, on a le

Théorème A.30 (Kirillov [33])**.** *Toute variété de Poisson* M *est feuilletée par des variétés symplectiques dont le crochet de Poisson est induit par celui de* M*.*

Terminons ces rappels sur le crochet de Poisson par la remarque suivante, qui nous est utile dans la section 5.3.4.

Remarque A.31. Une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^{2n}$ est l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ par un isomorphisme linéaire symplectique si et seulement si elle vérifie les identités

$$\omega(u_i, v_j) = \delta_{ij},$$
$$\omega(u_i, u_j) = \omega(v_i, v_j) = 0,$$

pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

On en déduit aisément une interprétation des symplectomorphismes en termes de crochet de Poisson. Supposons qu'un difféomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^{2n}$ admette pour applications coordonnées $(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$. Alors, *$\phi$ est symplectique si et seulement si pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a les identités*

$$\{f_i, g_j\} = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \{f_i, f_j\} = \{g_i, g_j\} = 0.$$

A.2.3 Invariant de Calabi

On se place ici sur une variété symplectique *ouverte* (M, ω).

Définition A.32. *Pour tout difféomorphisme hamiltonien ϕ à support compact, on définit*

$$Cal(\phi) = \int_0^1 \int_M H(t, x)\omega^n dt,$$

où $H \in Ham_c(M)$ engendre une isotopie hamiltonienne dont ϕ est le temps 1. Le réel $Cal(\phi)$ ne dépend pas du choix du hamiltonien H, et l'application

$$Cal : \mathcal{H}_c(M) \to \mathbb{R}$$

ainsi définie est un morphisme de groupe appelé homomorphisme de Calabi *ou* invariant de Calabi.

Il existe d'autres définitions équivalentes.

Proposition A.33. *Si M est une variété symplectique exacte, c'est-à-dire si la forme symplectique ω admet une primitive λ, alors pour tout difféomorphisme hamiltonien $\phi \in \mathcal{H}_c(M)$, la 1-forme $\phi^*\lambda - \lambda$ est exacte et admet une unique primitive F à support compact, et l'invariant de Calabi s'écrit*

$$Cal(\phi) = \frac{1}{n+1} \int_M F\omega^n.$$

On a aussi l'identité

$$Cal(\phi) = -\frac{1}{n+1} \int_M \phi^*\lambda \wedge \lambda \wedge \omega^{n-1}.$$

En dimension 2, on a une interprétation dynamique de l'invariant de Calabi.

Proposition A.34 (Gambaudo-Ghys [20]). *Soient $\phi \in \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^2)$, et (ϕ_t) une isotopie reliant l'identité à ϕ. L'application*

$$((\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) - diag) \times [0,1] \to \mathbb{S}_1$$

$$(x, y, t) \mapsto Angle(\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{\phi_t(x)\phi_t(y)}),$$

se relève de manière unique en une application $((\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) - diag) \times [0,1] \to \mathbb{R}$. Si l'on note $Ang_\phi : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) - diag \to \mathbb{R}$ sa restriction à $t = 1$, l'invariant de Calabi s'écrit

$$Cal(\phi) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 - diag} Ang_\phi(x, y)\, dx\, dy.$$

Le morphisme de Calabi intervient de manière cruciale dans la structure du groupe hamiltonien.

Théorème A.35 (Banyaga [1]). *Si (M, ω) est une variété symplectique fermée, alors le groupe $\mathcal{H}_c(M, \omega)$ est simple, c'est-à-dire n'a pas de sous-groupe distingué propre non trivial.*

Si (M, ω) est une variété symplectique ouverte, $\mathcal{H}_c(M, \omega)$ n'est pas simple, mais le noyau du morphisme de Calabi $\ker(Cal)$ *est simple.*

A.2.4 Action hamiltonienne

Nous nous contenterons de définir l'action hamiltonienne dans le cadre des variétés (M, ω) symplectiquement asphériques, c'est-à-dire telles que $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle = \{0\}$. On note ΛM un espace de lacets contractiles de M dont on ne précise pas la régularité pour ne pas entrer dans des considérations trop techniques, cela n'ayant que peu d'importance. On peut prendre par exemple C^1, H^1, $H^{1/2}$, etc.

Définition A.36. *L'*action hamiltonienne *associée à un hamiltonien H est l'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_H \ : \ & \Lambda M \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \int_D \omega - \int_0^1 H(t, x(t))dt, \end{aligned}$$

où D désigne n'importe quel disque bordé par x.

Comme la variété est symplectiquement asphérique, la valeur de l'action ne dépend pas du choix du disque D.

Lorsque la variété symplectique est exacte, on peut contracter l'écriture de l'action sous la forme

$$\mathcal{A}_H(x) = \int_x (\lambda - H\,dt),$$

où λ vérifie $d\lambda = \omega$. Dans $\mathbb{R}^{2n}$, si l'on écrit $x = (q,p)$ dans les coordonnées canoniques, on obtient

$$\mathcal{A}_H(x) = \int_0^1 (p(t)\dot{q}(t) - H(t,q(t),p(t)))dt.$$

L'étude de l'action hamiltonienne est au cœur de l'étude des systèmes hamiltoniens, notamment à cause du résultat suivant, qui n'est que l'écriture moderne du classique *principe de Maupertuis*.

Proposition A.37. *Les points critiques de $\mathcal{A}_H$ sont exactement les orbites périodiques contractiles du flot hamiltonien ϕ_H^t.*

Démonstration — Nous ne donnons ici qu'un argument heuristique dans $\mathbb{R}^{2n}$. On considère un lacet $x = (q,p)$, et une perturbation de ce lacet notée $x + \delta x = (q + \delta q, p + \delta p)$. Alors,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_H(x+\delta x) - \mathcal{A}_H(x) \\
&= \int_0^1 ((p+\delta p)(\dot{q} + \dot{\delta q}) - H(t, q+\delta q, p+\delta p) - p\,\dot{q} + H(t,q,p))dt \\
&= \int_0^1 \left(p\,\dot{\delta q} + \dot{q}\,\delta p - \frac{\partial H}{\partial q}\,\delta q - \frac{\partial H}{\partial p}\,\delta p \right) dt + o(\delta x)
\end{aligned}$$

et comme $\int p\,\dot{\delta q} = -\int \dot{p}\,\delta q$ par intégration par partie,

$$= \int_0^1 \left(\left(-\dot{p} - \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q + \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p \right) dt + o(\delta x).$$

On voit ainsi que le lacet x est un point critique de l'action hamiltonienne si et seulement s'il vérifie les équations de Hamilton (A.2). □

Remarque A.38. On peut prouver de plus que la valeur critique associée à une orbite donnée ne dépend pas du hamiltonien H, mais seulement de ϕ_H^1, le temps 1 de son flot.

A.3 Rigidité symplectique

Terminons ces rappels par quelques éléments de rigidité symplectique. La géométrie symplectique est connue pour être une situation intermédiaire entre la très rigide géométrie riemanienne (par exemple, une isométrie transforme une boule de rayon r en une boule de rayon r) et la simple géométrie différentielle qui est, elle, beaucoup plus molle (un difféomorphisme peut par exemple plonger une boule de taille quelconque dans le voisinage tubulaire, de taille quelconque, d'une courbe). Dans le cas symplectique, une certaine rigidité provient bien sûr du volume, mais on observe aussi des résultats de rigidité purement symplectiques.

D'un point de vue historique, le premier résultat de rigidité symplectique est le suivant :

Théorème A.39 (Gromov-Eliashberg)**.** *Le groupe des symplectomorphismes $Symp(M,\omega)$ d'une variété symplectique (M,ω) est C^0-fermé dans le groupe des difféomorphismes de M.*

Le résultat de rigidité le plus célèbre est le théorème de "non-squeezing" de Gromov. On note

$$B^{2n}(r) = \left\{ (q,p) \in \mathbb{R}^{2n} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} q_i^2 + p_i^2 \leqslant r^2 \right\},$$

la boule de rayon r dans $\mathbb{R}^{2n}$, et

$$Z^{2n}(r) = \left\{ (q,p) \in \mathbb{R}^{2n} \;\middle|\; q_1^2 + p_1^2 \leqslant r^2 \right\},$$

le *cylindre symplectique* de rayon r.

Théorème A.40 (Gromov's non-squeezing)**.** *Il existe un plongement symplectique de $B^{2n}(r)$ dans $Z^{2n}(R)$ si et seulement si $r \leqslant R$.*

Ce théorème est à l'origine de l'introduction de la définition des *capacités symplectiques*, qui mesurent la "taille symplectique" des ensembles.

Définition A.41 (Ekeland-Hofer [13])**.** *Une* capacité symplectique *sur $(\mathbb{R}^{2n},\omega)$ est une application qui associe à toute partie $U \subset \mathbb{R}^{2n}$, un nombre $c(U) \in [0,+\infty]$, vérifiant*

1. *si $U \subset V$, alors $c(U) \leqslant c(V)$ (monotonie),*
2. *$c(\phi(U)) = c(U)$, pour tout symplectomorphisme ϕ (invariance symplectique),*
3. *$c(\lambda U) = \lambda^2 c(U)$, pour tout réel $\lambda > 0$ (homogénéité),*

4. $c(B^{2n}(1)) = c(Z^{2n}(1)) = \pi$ *(normalisation).*

EXEMPLE A.42. Par le théorème de non-squeezing A.40, l'application w qui a un ouvert U associe la quantité

$$w(U) = \sup\{r \,|\, B^{2n}(r) \text{ se plonge symplectiquement dans } U\},$$

que l'on étend à tous les ensembles en posant $w(V) = \inf\{w(U) \,|\, U \text{ ouvert }, V \subset U\}$, définit une capacité symplectique sur $\mathbb{R}^{2n}$. Cette capacité est appelée *"width" de Gromov* (largeur de Gromov).

Il existe d'autres exemples de capacités symplectiques, définis en particulier via la dynamique hamiltonienne (voir par exemple la section 1.2.2 de ce mémoire).

REMARQUE A.43. Le théorème A.40 affirme également que pour toute capacité c sur $\mathbb{R}^{2n}$, on a l'inégalité $w \leqslant c$, où w est le "width" de Gromov défini précédemment.

Annexe B

Fonctions génératrices

Dans cette annexe, nous prouvons en détails quelques résultats connus, utiles dans les chapitres 2 et 4.

B.1 Homéomorphismes associés à des fonctions génératrices admissibles

Nous avons introduit dans le chapitre 4 les notions d'homéomorphisme admissible et de fonction génératrice admissible (définitions 4.13 et 4.11). Nous y avons vu en particulier que les difféomorphismes suffisamment proches de l'identité au sens C^1 sont des homéomorphismes admissibles (exemple **??**). Dans cette partie, nous prouvons en détails la proposition 4.12. Rappelons d'abord la définition des objets considérés.

Définition B.1. *On appelle* fonction génératrice admissible *toute fonction de classe C^1 à support compact $S : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, telle qu'en tout point $(x, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$, les applications partielles*

$$x \mapsto x + \frac{\partial S}{\partial \eta}(x, \eta) \text{ et } \eta \mapsto \eta + \frac{\partial S}{\partial x}(x, \eta),$$

sont des homéomorphismes de $\mathbb{R}^n$ préservant l'orientation.

L'intéret des fonctions génératrices admissibles réside dans le fait que l'on peut leur associer des homéomorphismes, comme le montre le résultat suivant.

Proposition B.2. *A toute fonction génératrice admissible S, on peut associer un homéomorphisme à support compact f par l'équivalence suivante :*

$$f(x, y) = (\xi, \eta) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \begin{cases} \xi_i = x_i + \frac{\partial S}{\partial \eta_i}(x, \eta) \\ y_i = \eta_i + \frac{\partial S}{\partial x_i}(x, \eta) \end{cases} . \qquad \text{(B.1)}$$

Pour tout entier $k \geqslant 0$, l'application $\Psi : S \mapsto f$ ainsi construite est une injection continue de l'espace des fonctions génératrices admissibles muni de la topologie C^{k+1}, dans l'espace des homéomorphismes muni de la topologie C^k.

De plus, si S est de classe C^2, alors le C^1-difféomorphisme $\Psi(S)$ est un symplectomorphisme.

Définition B.3. *Les éléments de l'image de Ψ seront appelés* homéomorphismes admissibles.

Remarque B.4. Dans le cas ou les objets sont lisses, il est bien connu et n'est pas difficile à vérifier par le calcul, que le chemin de symplectomorphismes associé à un chemin donné de fonctions génératrices admissibles, est hamiltonien et vérifie l'équation d'Hamilton-Jacobi. Si H est le hamiltonien engendrant l'isotopie $\Psi(S_t)$, pour S_t chemin de fonctions génératrices admissibles, alors on a :

$$\frac{\partial S_t}{\partial t}(x,\eta) = H\left(t, x, \eta + \frac{\partial S}{\partial x}(x,\eta)\right).$$

Pour prouver la proposition B.2, nous allons avoir besoin de deux lemmes.

Lemme B.5. *Soit Λ un compact de R^d et $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ continue telle que*

- *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d - \Lambda$, et tout $t \in \mathbb{R}^k$, $h(\lambda, t) = t$,*
- *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $t \mapsto h(\lambda, t)$ est un homéomorphisme $\mathbb{R}^k$.*

Alors, l'application $(\lambda, t) \mapsto h(\lambda, \cdot)^{-1}(t)$ est continue.

Démonstration — Donnons-nous une suite de couples (λ_n, t_n) dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$, qui converge vers un élément $(\lambda, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$. La première hypothèse faite sur h implique que $(h(\lambda_n, \cdot)^{-1}(t_n))$ est bornée et a une valeur d'adhérence que l'on notera τ. Par continuité de h, $h(\lambda, \tau) = t$. Ceci prouve que la seule valeur d'adhérence possible de $(h(\lambda_n, \cdot)^{-1}(t_n))$ est $h(\lambda, \cdot)^{-1}(t)$. En conséquence, $(h(\lambda_n, \cdot)^{-1}(t_n))$ converge vers $h(\lambda, \cdot)^{-1}(t)$. □

Lemme B.6. *Soient Λ un compact de $\mathbb{R}^d$, et $(h_n) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction h_∞. On suppose que*

- *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d - \Lambda$, tout $t \in \mathbb{R}^k$ et tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $h_n(\lambda, t) = t$,*
- *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$, et tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $t \mapsto h_n(\lambda, t)$ est un homéomorphisme $\mathbb{R}^k$.*

Alors la suite d'application $(\lambda, t) \mapsto h_n(\lambda, \cdot)^{-1}(t)$ *converge uniformément vers* $(\lambda, t) \mapsto h_\infty(\lambda, \cdot)^{-1}(t)$.

Démonstration — Remarquons dans un premier temps que si ϕ est un homéomorphisme d'un espace métrique (X, d), alors

$$\sup_{x \in X} d(\phi(x), x) = \sup_{x \in X} d(\phi \circ \phi^{-1}(x), \phi^{-1}(x)) = \sup_{x \in X} d(x, \phi^{-1}(x)).$$

Autrement dit, la distance uniforme de ϕ à l'identité, égale celle de ϕ^{-1} à l'identité.

Maintenant, soit $\delta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ le module de continuité de l'application uniformément continue $(\lambda, t) \mapsto h_\infty(\lambda, \cdot)^{-1}(t)$, défini par

$$\delta(\varepsilon) = \sup\{|h_\infty(\lambda, \cdot)^{-1}(t) - h_\infty(\lambda', \cdot)^{-1}(t')| \,|\, |\lambda - \lambda'| \leqslant \varepsilon,\ |t - t'| \leqslant \varepsilon\}.$$

Par définition, δ est nul et continu en 0.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$, on a d'après la remarque ci-dessus,

$$\begin{aligned} \|h_n(\lambda, \cdot)^{-1} - h_\infty(\lambda, \cdot)^{-1}\|_{C^0} &= \|h_n(\lambda, \cdot)^{-1} \circ h_\infty(\lambda, \cdot) - id\|_{C^0} \\ &= \|h_\infty(\lambda, \cdot)^{-1} \circ h_n(\lambda, \cdot) - id\|_{C^0} \\ &\leqslant \delta(\, \|h_n(\lambda, \cdot) - h_\infty(\lambda, \cdot)\|_{C^0}). \end{aligned}$$

Le lemme découle de cette inégalité, de la continuité en 0 de δ et du fait que h_n converge uniformément vers h_∞. □

Nous pouvons à présent démontrer notre résultat.

Démonstration de la proposition B.2 — Commençons par construire Ψ. Soit S une fonction génératrice admissible. On peut poser

$$\alpha(x, \eta) = x + \frac{\partial S}{\partial \eta}(x, \eta) \text{ et } \beta(x, \eta) = \eta + \frac{\partial S}{\partial x}(x, \eta).$$

On définit alors $f = \Psi(S)$ par

$$f : (x, y) \mapsto (\alpha(x, \beta(x, \cdot)^{-1}(y)), \beta(x, \cdot)^{-1}(y)) \tag{B.2}$$

— cette définition est en accord avec les formules (B.1).

Montrons que l'application f ainsi définie est un homéomorphisme. Remarquons d'abord que les applications α et β sont continues, car S est de

classe C^1. En appliquant le lemme B.5, on obtient la continuité de f. Remarquons ensuite que les formules (B.1) impliquent que f admet une réciproque donnée par

$$(\xi, \eta) \mapsto (\alpha(\cdot, \eta)^{-1}(\xi), \beta(\alpha(\cdot, \eta)^{-1}(\xi), \eta)).$$

Celle-ci est continue pour les mêmes raisons que f, qui est donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$.

Le fait que f est l'identité hors d'un compact résulte de la compacité du support de S et des formules (B.1).

Prouvons maintenant que Ψ est continue pour les topologies considérées. Nous allons nous contenter de le prouver pour $k = 0$, les autres cas n'étant pas plus difficiles. Soit (S_n) une suite de fonctions génératrices admissibles qui converge au sens C^1 vers une fonction génératrice admissible S_∞. Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on pose

$$\alpha_n(x, \eta) = x + \frac{\partial S_n}{\partial \eta}(x, \eta) \text{ et } \beta_n(x, \eta) = \eta + \frac{\partial S_n}{\partial x}(x, \eta).$$

Comme S_n converge au sens C^1, α_n et β_n convergent uniformément respectivement vers α_∞ et β_∞. Du lemme B.6 et de la formule (B.2), on déduit que $\Psi(S_n)$ converge uniformément vers $\Psi(S_\infty)$. Par le même argument, l'inverse de $\Psi(S_n)$ converge uniformément vers l'inverse de $\Psi(S_\infty)$.

Il nous reste à prouver qu'un difféomorphisme admissible f est symplectique. Pour cela, notons que la 1-forme continue $\alpha\, d\eta + \beta\, dx$ est la différentielle de la fonction $(x, \eta) \mapsto \langle x, \eta \rangle + S(x, \eta)$. Elle est donc fermée. Par ailleurs, elle peut s'écrire en coordonnées $\xi\, d\eta + y\, dx$, donc $d\xi \wedge d\eta + dy \wedge dx = 0$. Mais des formules (B.1), il résulte $d\xi \wedge d\eta = f^*(dx \wedge dy)$. Le difféomorphisme f est donc bien symplectique. □

B.2 Compositions et fonctions génératrices quadratiques à l'infini

Nous allons voir dans cette partie que les homéomorphismes qui s'écrivent comme composition de plusieurs homéomorphismes admissibles, peuvent être décrits par des fonctions génératrices "généralisées".

Le résultat suivant est essentiellement la réécriture dans le cadre des homéomorphismes d'un résultat de M. Chaperon portant sur les difféomorphismes [9].

Proposition B.7. *Toute composition d'homéomorphismes admissibles $g = f_1 \circ \ldots \circ f_n$, admet une* fonction génératrice quadratique à l'infini en les fibres*, c'est-à-dire qu'il existe un espace vectoriel de dimension finie E, une fonction $S : \mathbb{R}^{2n} \times E \to \mathbb{R}$ de classe C^1, une forme quadratique non-dégénérée Q sur E, et enfin pour chaque $(x, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$, un compact $K_{(x,\eta)}$ de E, tel que pour tout $(y, \xi, v) \in \mathbb{R}^{2n} \times E$, on ait*

$$S(x, \eta; v) = Q(v) \text{ si } v \notin K_{(x,\eta)},$$

et

$$g(x, y) = (\xi, \eta) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists v \in E, \begin{cases} \xi = x + \frac{\partial S}{\partial \eta}(x, \eta; v) \\ y = \eta + \frac{\partial S}{\partial x}(x, \eta; v) \\ \frac{\partial S}{\partial v}(x, \eta; v) = 0. \end{cases}$$

Démonstration — La démonstration est identique au cas des difféomorphismes. Soit $g \in G_{2n}$. Nous allons raisonner par récurrence sur l'entier m — appelé *longueur de g* — , le plus petit entier pour lequel g s'écrive $f_1 \circ \cdots \circ f_m$, où chaque f_i est admissible.

Le cas $m = 1$: Dans ce cas, g est admissible. On sait alors (proposition B.2) que g admet une fonction génératrice admissible $S : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ qui vérifie

$$g(x, y) = (\xi, \eta) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \xi = x + \frac{\partial S}{\partial \eta}(x, \eta) \\ \eta = y - \frac{\partial S}{\partial x}(x, \eta). \end{cases}$$

Cette fonction S peut être vue comme une fonction génératrice quadratique à l'infini de g, définie sur $\mathbb{R}^{2n} \times E$ avec pour E, l'espace vectoriel de dimension nulle $\{0\}$.

La deuxième partie de la proposition est immédiate dans ce cas.

Le cas m implique le cas $m + 1$: En effet, supposons g de longueur $m + 1$. Il s'écrit alors $g = fg'$ avec f admissible et g' de longueur m. Il existe donc par hypothèse une fonction génératrice admissible $T : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, et une fonction génératrice quadratique à l'infini en les fibres $U : \mathbb{R}^{2n} \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x', y') = (\xi, \eta) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \xi = x' + \frac{\partial T}{\partial \eta}(x', \eta) \\ \eta = y' - \frac{\partial T}{\partial x'}(x', \eta), \end{cases}$$

et

$$g'(x, y) = (x', y') \quad \Longleftrightarrow \quad \exists v' \in E, \begin{cases} x' = x + \frac{\partial U}{\partial y'}(x, y'; v') \\ y' = y - \frac{\partial U}{\partial x}(x, y'; v') \\ \frac{\partial U}{\partial v'}(x, y'; v') = 0. \end{cases}$$

On considère alors l'application $S : \mathbb{R}^{2n} \times (E \times \mathbb{R}^{2n}) \to \mathbb{R}$, définie par

$$S(x, \eta; v_0, x_0, y_0) = U(x, y_0 + \eta, v_0) + T(x_0 + x, \eta) - \langle x_0, y_0 \rangle. \tag{B.3}$$

Comme U est quadratique à l'infini en les fibres, T est à support compact et la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{2n}$, $(x_0, y_0) \mapsto \langle x_0, y_0 \rangle$ est non dégénérée, on voit aisément que S est quadratique à l'infini en les fibres.

De plus, $g(x, y) = (\xi, \eta)$ si et seulement s'il existe un couple $(x', y') \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $f(x', y') = (\xi, \eta)$ et $g'(x, y) = (x', y')$, c'est-à-dire si et seulement si il existe $(v', x', y') \in E \times \mathbb{R}^{2n}$ tel que

$$\begin{cases} \xi = x' + \frac{\partial T}{\partial \eta}(x', \eta) \\ \eta = y' - \frac{\partial T}{\partial x'}(x', \eta) \\ x' = x + \frac{\partial U}{\partial y'}(x, y'; v') \\ y' = y - \frac{\partial U}{\partial x}(x, y'; v') \\ \frac{\partial U}{\partial v'}(x, y'; v') = 0. \end{cases}$$

Or, on s'aperçoit en calculant les dérivées partielles de S, et en prenant $v_0 = v'$, $x_0 = x' - x$ et $y_0 = y' - \eta$, que ceci équivaut à l'existence de $(v_0, x_0, y_0) \in E \times \mathbb{R}^{2n}$ tel que

$$\begin{cases} \xi = x + \frac{\partial S}{\partial \eta}(x, \eta; v_0, x_0, y_0) \\ \frac{\partial S}{\partial x_0}(x, \eta; v_0, x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial y_0}(x, \eta; v_0, x_0, y_0) = 0 \\ \eta = y - \frac{\partial S}{\partial x}(x, \eta; v_0, x_0, y_0) \\ \frac{\partial S}{\partial v_0}(x, \eta; v_0, x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

La fonction S est donc bien une fonction génératrice quadratique à l'infini en les fibres de g. □

B.3 Fonctions génératrices des sous-variétés lagrangiennes

Dans cette section, nous rappelons brièvement, et seulement dans le cas de $\mathbb{R}^{2n}$, la démonstration du théorème B.10 qui affirme l'existence d'une fonction génératrice pour les sous-variétés lagrangiennes des espaces cotangents, isotopes à la section nulle [50, 49]. Nous suivrons la preuve présentée dans [6].

Rappelons d'abord la définition des fonctions génératrices pour les sous-variétés lagrangiennes.

Définition B.8. *Soient N une variété différentiable, L une sous-variété lagrangienne de son espace cotangent T^*N, E un espace vectoriel de dimension finie et $S : N \times E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞, supposée quadratique à l'infini — i.e. il existe une forme quadratique Q sur E, non-dégénérée, et un compact K de $N \times E$, tel que si $(x, \eta; v) \notin K$, alors $S(x, \eta; v) = Q(v)$. On dit que S est une* fonction génératrice quadratique à l'infini *ou* f.g.q.i. *de L si celle-ci peut s'écrire*

$$L = \left\{ (x, p) \in T^*N \mid \exists \xi \in \mathbb{R}^q, \frac{\partial S}{\partial \xi}(x, \xi) = 0 \text{ et } \frac{\partial S}{\partial x}(x, \xi) = p \right\}.$$

Exemple B.9. La section nulle admet n'importe quelle forme quadratique non-dégénérée $Q : N \times E \to \mathbb{R}, (x, v) \mapsto Q(v)$ pour fonction génératrice.

Théorème B.10 (Chaperon, Sikorav)**.** *Si L est une sous-variété lagrangienne de T^*N admettant une f.g.q.i. et si ϕ est un difféomorphisme hamiltonien à support compact, alors la lagrangienne $\phi(L)$ admet une f.g.q.i.*

Nous allons avoir besoin d'un lemme. Il nous sera à nouveau utile dans la démonstration de la non-dégénérescence de la distance de Hofer, à l'annexe D. On note $\| \cdot \|$ la norme d'opérateur induite par une norme donnée $| \cdot |$.

Lemme B.11 (Viterbo [60])**.** *Soit $S : \mathbb{R}^d \times E \to \mathbb{R}$ une fonction lisse supposée quadratique à l'infini en les fibres, i.e. telle qu'il existe une forme quadratique non-dégénérée Q sur E coïncidant avec S dans chaque fibre $\{x\} \times E$ hors d'un compact qui dépend a priori de la fibre.*

On suppose

- *qu'il existe une constante C telle que $\|S - Q\|_{C^1} \leqslant C$,*
- *que pour tout compact K_1 de E, il existe un compact K_2 de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que pour $(x, \xi) \in (\mathbb{R}^d - K_2) \times K_1$, $S(x, \xi) = Q(\xi)$.*

Alors, il existe une fonction lisse $\tilde{S}$ telle que

- *$\tilde{S}$ est quadratique à l'infini : il existe un compact de $\mathbb{R}^d \times E$ hors duquel $\tilde{S}$ coïncide avec Q,*
- *$\tilde{S}$ a les mêmes points critiques et les mêmes valeurs critiques que S,*
- *si S engendre une sous-variété lagrangienne de $\mathbb{R}^d$, $\tilde{S}$ engendre la même sous-variété lagrangienne.*

Démonstration — Commençons par noter

$$A = \inf_{|\xi|=1} \left\| \frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi) \right\|,$$

de sorte que pour tout $\xi \in E$, on ait $\|\frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi)\| \geqslant A|\xi|$. Comme Q est non-dégénérée, $A > 0$. Choisissons ensuite une fonction $\rho : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$, supposée lisse, à support compact, égale à 1 sur l'intervalle $[0, \frac{C}{A} + 1]$, et telle que $-1 \leqslant \rho' \leqslant 0$.

On pose ensuite

$$\tilde{S}(x,\xi) = (1 - \rho(|\xi|))Q(\xi) + \rho(|\xi|)S(x,\xi).$$

Vérifions que $\tilde{S}$ satisfait aux conclusions du lemme B.11.

Tout d'abord, on voit que si $S(x,\xi) = Q(\xi)$, alors $\tilde{S}(x,\xi) = Q(\xi)$ aussi. De plus, si $|\xi|$ n'est pas dans le support de ρ, alors $\tilde{S}(x,\xi) = Q(\xi)$, et la deuxième hypothèse faite sur S implique donc que $\tilde{S}$ est quadratique à l'infini.

Remarquons ensuite que si l'on écrit $\frac{\partial S}{\partial \xi} = \frac{\partial (S-Q)}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \xi}$, l'hypothèse $\|S - Q\|_{C^1} \leqslant C$ implique que pour $|\xi| \geqslant \frac{C}{A}+1$, $\frac{\partial S}{\partial \xi}(x,\xi)$ n'est jamais nul.

Calculons maintenant la différentielle de $\tilde{S}$ par rapport à ξ :

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi}(x,\xi) = (S-Q)\rho'(|\xi|)\frac{\langle \xi, \cdot \rangle}{|\xi|} + \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \rho(|\xi|)\frac{\partial (S-Q)}{\partial \xi}.$$

De ce calcul et de l'hypothèse $\|S - Q\|_{C^1} \leqslant C$, on déduit que pour $|\xi| \geqslant \frac{C}{A}+1$, $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi}(x,\xi)$ ne s'annule jamais. Par conséquent, $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi}$ ne peut s'annuler que là où $\tilde{S}$ coïncide avec S. D'où :

$$\frac{\partial S}{\partial \xi}(x,\xi) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi}(x,\xi) = 0.$$

D'autre part, comme les points où $\frac{\partial S}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi}$ s'annulent, sont des points où S et $\tilde{S}$ coïncident, on déduit immédiatement le lemme. □

Démonstration du théorème B.10 dans le cas de $\mathbb{R}^{2n}$ — Soient $T : \mathbb{R}^n \times E \to \mathbb{R}$ une f.g.q.i. de L, et $S : \mathbb{R}^{2n} \times E' \to \mathbb{R}$ la f.g.q.i. en les fibres de ϕ^{-1} construite dans la démonstration de la proposition B.7. On peut lui appliquer le lemme B.11 ce qui nous donne une f.g.q.i $\tilde{S}$ de ϕ^{-1}. On vérifie ensuite que la fonction $U : \mathbb{R}^n \times (E \times E' \times \mathbb{R}^{2n}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$U(x; v, v', \xi, \eta) = \tilde{S}(x, \eta; v') + T(x + \xi, v) - \langle \eta, \xi \rangle,$$

est une fonction génératrice de $\phi(L)$.

En effet, $(x,p) \in \phi(L)$ si et seulement s'il existe $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\begin{cases} (x + \xi, \eta) \in L \\ \phi^{-1}(x,p) = (x + \xi, \eta), \end{cases}$$

c'est-à-dire si et seulement si il existe $(v, v', \xi, \eta) \in E \times E' \times \mathbb{R}^{2n}$ tel que

$$\begin{cases} \eta = \frac{\partial T}{\partial x}(x+\xi, v) \\ \frac{\partial T}{\partial v}(x+\xi, v) = 0 \\ x + \xi = x + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \eta}(x, \eta, v') \\ \eta = p - \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x}(x, \eta, v') \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial v'}(x, \eta, v') = 0, \end{cases} \quad \text{donc tel que} \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \xi}(x; v, v', \xi, \eta) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial v}(x; v, v', \xi, \eta) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \eta}(x; v, v', \xi, \eta) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x}(x; v, v', \xi, \eta) = p \\ \frac{\partial U}{\partial v'}(x; v, v', \xi, \eta) = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, U est bien une fonction génératrice de $\phi(L)$. La fonction U n'est pas une f.g.q.i., mais elle est quadratique à l'infini dans les fibres, et on conclut à l'aide du lemme B.11 ci-dessus, dont elle vérifie les hypothèses. $\square$

Annexe C

Valeurs critiques de "min-max"

Dans cette annexe, nous exposons la construction des valeurs critiques dites de "min-max" d'une fonction différentiable. Ces valeurs sont canoniquement définies. Intuitivement, ce sont les valeurs critiques qui sont "visibles" en homologie.

Cette construction est à la base de la distance de Viterbo (cf. chapitre 1). Elle nous sera également utile dans la preuve de la non-dégénérescence de la distance de Hofer que nous exposons dans l'annexe D.

C.1 Définition

On se donne une variété différentiable quelconque V et une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ lisse, disons de classe C^2. Nous allons supposer que f vérifie une certaine condition de compacité (courante en calcul variationnel).

Définition C.1. *On dira que f vérifie la condition de* Palais-smale (PS)*, si toute suite (x_n) de points de V, pour laquelle*
– *$f(x_n)$ converge et*
– *$df(x_n)$ converge vers 0,*
admet une valeur d'adhérence.

Exemple C.2. Toute fonction définie sur une variété close, vérifie bien sûr la condition de Palais-Smale. Une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie vérifie (PS) si et seulement si elle est non-dégénérée.

Plus généralement, si f est une fonction lisse, définie sur le produit d'une variété fermée V par un espace vectoriel de dimension finie E, et si f est *quadratique à l'infini*, c'est-à-dire s'il existe une forme quadratique Q sur E, non-dégénérée, et un compact K de E, tel que $\forall (v, \xi) \in V \times E - K$, $f(v, \xi) = Q(\xi)$, alors f vérifie la condition de Palais-Smale.

Remarque C.3. La condition (PS) implique que les niveaux critiques de la fonction sont compacts. Elle implique aussi que l'ensemble des valeurs critiques est fermé. Ces remarques résultent immédiatement des définitions.

Donnons à présent la définition des valeurs critiques min-max. Pour une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ donnée, on note ses sous-niveaux par

$$f^\lambda = \{x \in V \mid f(x) \leqslant \lambda\}.$$

Définition C.4. *Soit f une fonction vérifiant la condition de Palais-Smale. A tout couple de réels (a, b), avec $a \leqslant b$, et toute classe de cohomologie relative $\alpha \in H^*(f^b, f^a)$ non nulle, on associe le réel*

$$c(\alpha, f) = \sup\{c \mid \alpha \text{ est nul dans } H^*(f^c, f^a)\}.$$

L'intérêt de ces nombres réside dans le

Théorème C.5 (Birkhoff-Morse)**.** *Les nombres $c(\alpha, f)$ sont des valeurs critiques de f. On les appelle* valeurs critiques de min-max *de f.*

Remarque C.6. Tentons d'expliquer l'origine de la terminologie "min-max", sur un exemple. Celle-ci se voit mieux sur la version homologique (au lieu de cohomologique) des nombres $c(\alpha, f)$. Ceux-ci sont associés à une classe d'homologie $\beta \in H_*(f^b, f^a)$ et sont définis par

$$c(\beta, f) = \inf\{c \mid \beta \text{ est dans l'image de } H_*(f^c, f^a) \to H_*(f^b, f^a)\}.$$

Supposons maintenant que β est de degré 1, et représentée par un chemin dans f^a, noté γ, dont les extrémités sont dans f^b. On voit alors (cf. figure C.1) que $c(\beta, f)$ s'écrit effectivement comme un min-max

$$c(\beta, f) = \min_{[\gamma]=\beta} \max f(\gamma).$$

Les nombres $c(\alpha, f)$ sont une généralisation de ce cas, ce qui justifie la terminologie.

Le théorème C.5 repose sur un résultat très classique : une valeur où l'homologie des niveaux (ou des sous-niveaux) change, est une valeur critique. Nous en rappelons la démonstration.

Démonstration — La condition (PS) implique que l'ensemble des valeurs critiques est fermé. Par conséquent, si c est une valeur régulière de f, il existe

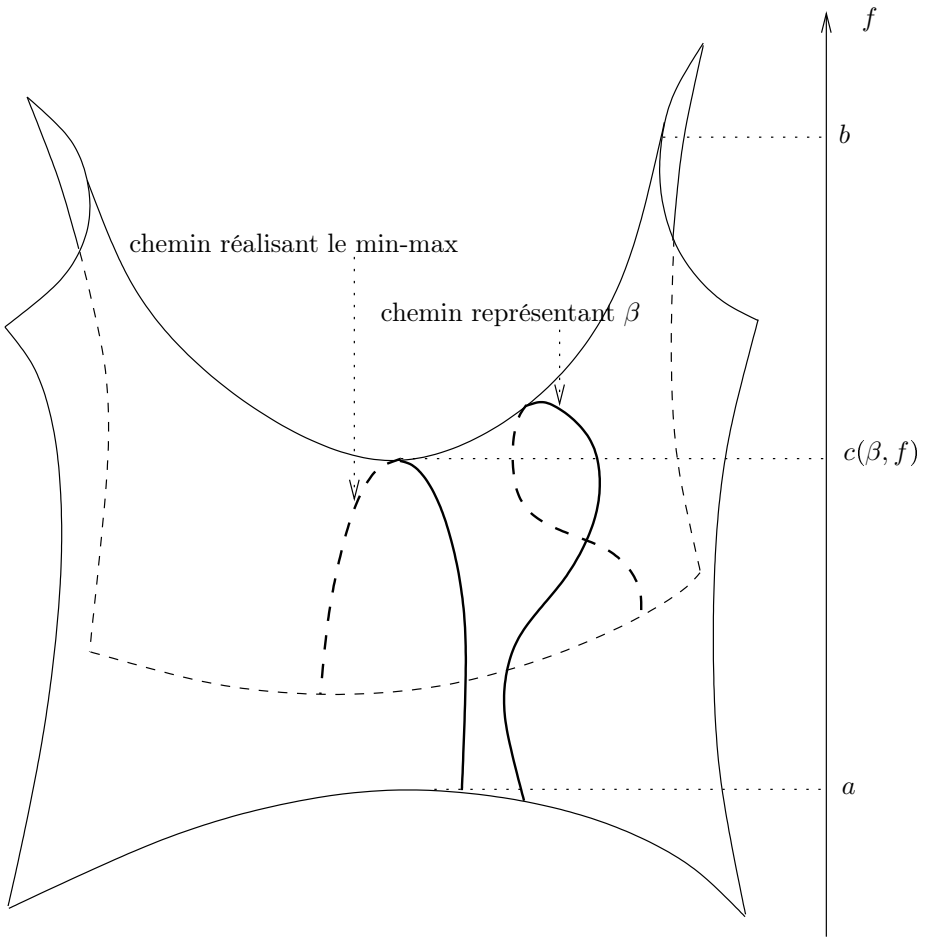


FIG. C.1 – Min-max pour le 1-cycle β.

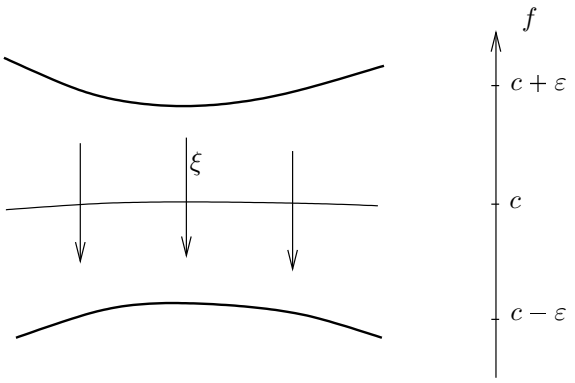


FIG. C.2 – Le flot de ξ envoie le sous-niveau $f^{c+\varepsilon}$ sur le sous-niveau $f^{c-\varepsilon}$.

$\varepsilon > 0$, tel f n'a pas de valeurs critiques dans $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$. Pour la même raison, il existe $\delta > 0$, tel que $|\nabla f| > \delta$ sur $f^{c+\varepsilon} - f^{c-\varepsilon} = f^{-1}([c+\varepsilon, c-\varepsilon[)$.

Notons φ^t le flot du champ de vecteur ξ sur V, défini par

$$\xi = -\chi \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2},$$

où χ est une fonction lisse, positive, à support dans un voisinage assez petit de $f^{c+\varepsilon} - f^{c-\varepsilon}$ valant 1 sur $f^{c+\varepsilon} - f^{c-\varepsilon}$. On a alors dans $f^{c+\varepsilon} - f^{c-\varepsilon}$,

$$\frac{d}{dt}(f(\varphi^t)) = -1.$$

On a donc (figure C.2)

$$\varphi^{2\varepsilon}(f^{c+\varepsilon}) = f^{c-\varepsilon} \text{ et pour tout réel } a,\ \varphi(f^a) \subset f^a.$$

Le difféomorphisme $\varphi^{2\varepsilon}$ induit donc un isomorphisme

$$H^*(f^{c+\varepsilon}, f^a) \simeq H^*(f^{c-\varepsilon}, f^a),$$

et donc nécessairement, $c(\alpha, f) \neq c$. □

C.2 Exemples

Les exemples où l'on sait calculer les valeurs de min-max sont assez rares. Le premier est simple mais important.

Exemple C.7. On suppose que la fonction f est définie sur une variété fermée M, de dimension d. On choisit $b > \max f$ et $a < \min f$, de sorte que $H^*(M) = H^*(f^b, f^a)$, et on note respectivement 1 et μ les générateurs de $H^0(M)$ et $H^d(M)$. Il est alors très facile de voir que

$$c(\mu, f) = \max f \quad \text{et} \quad c(1, f) = \min f.$$

Voyons un exemple un peu plus élaboré.

Exemple C.8. On suppose ici que f est la fonction hauteur sur le tore $\mathbb{T}^2$, représentée dans $\mathbb{R}^3$ comme sur la figure C.3. On voit que f a exactement six valeurs critiques, notées par ordre croissant $c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5 < c_6$. La cohomologie du tore a exactement quatre générateurs : $1 \in H^0(\mathbb{T}^2)$, $\alpha, \beta \in H^1(\mathbb{T}^2)$ et $\mu \in H^2(\mathbb{T}^2)$. Comme on l'a vu dans l'exemple C.7, $c(1, f) = c_1$ et

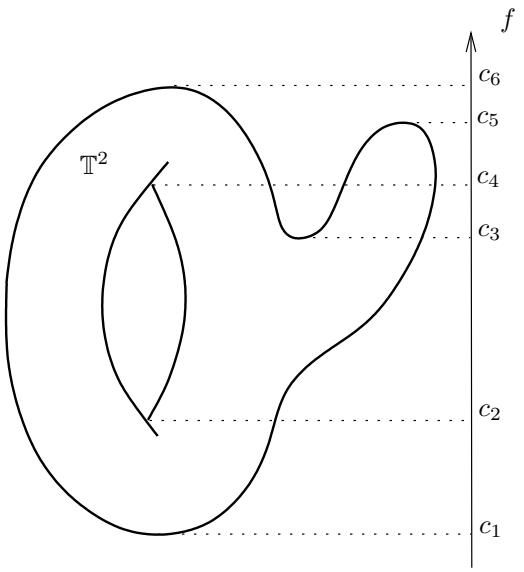


FIG. C.3 – Les valeurs critiques c_1, c_2, c_4 et c_6 sont "attrapées" par min-max.

$c(\mu, f) = c_6$. De plus, il n'est pas très difficile de voir que l'on obtient c_2 et c_4 pour valeurs de min-max associées à α et β.

On peut voir sur cet exemple, que les valeurs critiques c_3 et c_5 — qui semblent moins "essentielles" que les autres — ne sont les min-max d'aucune classe d'homologie. Ceci justifie l'idée qui consiste à dire que *les valeurs de min-max "attrapent" les valeurs critiques "essentielles"*, c'est-à-dire visibles en homologie.

C.3 Théorie de Lusternik-Schnirelmann

Cette théorie nous donne un critère pour que deux valeurs de min-max soient différentes.

Théorème C.9 (Lusternik-Schnirelman [39])**.** *Soit f une fonction sur V vérifiant la condition de Palais-Smale. Soient $\alpha \in H^*(f^b, f^a) - \{0\}$ et $\beta \in H^*(V)$, telles que $\alpha \cup \beta \neq 0$. Alors,*

$$c(\alpha \cup \beta, f) \geqslant c(\alpha, f).$$

De plus, s'il y a égalité, alors β induit une classe de cohomologie non nulle sur tout voisinage du niveau critique associé à la valeur $c(\alpha, f)$.

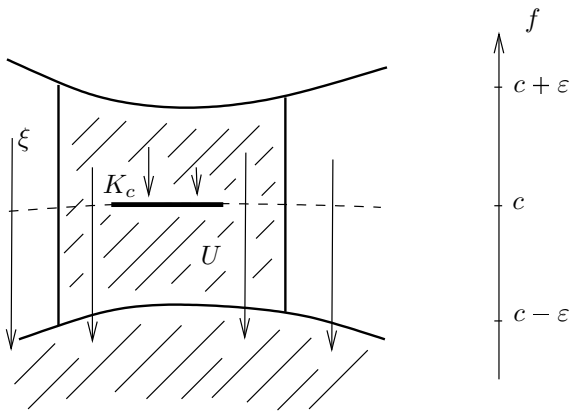


FIG. C.4 – Le flot de ξ envoie le sous-niveau $f^{c+\varepsilon}$ sur l'ensemble $U \cup f^{c-\varepsilon}$ hachuré.

Démonstration — L'inégalité $c(\alpha \cup \beta, f) \geqslant c(\alpha, f)$ est évidente, compte-tenu des définitions. Voyons le cas d'égalité.

Notons $c = c(\alpha, f) = c(\alpha \cup \beta, f)$, et K_c le niveau critique associé à la valeur critique c. D'après la condition de Palais-Smale, K_c est compact. Soit U un voisinage de K_c. Alors, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il n'y a pas de point critique dans $(f^{c+\varepsilon} - f^{c-\varepsilon}) - U$. En effet, dans le cas contraire, on pourrait construire une suite (x_n) dans le complémentaire de U telle que $f(x_n)$ converge vers c et $df(x_n) = 0$. Par (PS), une telle suite aurait une valeur d'adhérence, qui serait par passage à la limite un point critique de niveau c, soit un élément de K_c. On obtiendrait alors une contradiction puisque $(x_n) \notin U$.

Comme dans la démonstration du théorème C.5, introduisons le champ de vecteur

$$\xi = -\chi \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2},$$

où χ est une fonction lisse, positive, à support dans un voisinage assez petit de $f^{c+\varepsilon} - f^{c-\varepsilon}$, valant 1 sur $f^{c+\varepsilon} - f^{c-\varepsilon}$ privé d'un voisinage de K_c contenu dans U, et enfin, nulle sur un voisinage de K_c. Quitte à remplacer U par un ouvert plus petit, on peut supposer que $U \cap (f^{c+\varepsilon} - f^{c-\varepsilon})$ est une réunion de morceaux de trajectoires de ∇f, interceptées par $f^{c+\varepsilon} - f^{c-\varepsilon}$ (voir figure C.4), de sorte que le flot φ^t de ξ envoie U dans $U \cap f^{c-\varepsilon}$. Le difféomorphisme $\varphi^{2\varepsilon}$ envoie alors $f^{c+\varepsilon}$ dans $U \cup f^{c-\varepsilon}$, et induit donc un morphisme $H^*(U \cup f^{c-\varepsilon}, f^a) \to H^*(f^{c+\varepsilon}, f^a)$.

Supposons maintenant que la classe de cohomologie β s'annule dans U. Comme α s'annule dans $f^{c-\varepsilon}$, alors $\alpha \cup \beta$ s'annule dans $U \cup f^{c-\varepsilon}$ donc dans $f^{c+\varepsilon}$. Ceci contredit l'hypothèse $c = c(\alpha \cup \beta, f)$. □

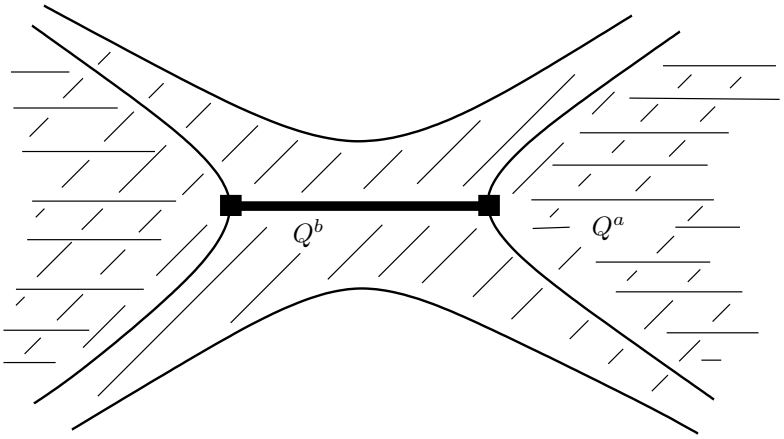


FIG. C.5 – Équivalence d'homotopie $(Q^b, Q^a) \simeq (\mathbb{B}_d, \mathbb{S}_{d-1})$. Sur le dessin, l'espace négatif est de dimension $d = 1$.

REMARQUE C.10. Notons qu'un corollaire immédiat du théorème C.9 est :

Le nombre de points critiques d'une fonction lisse sur une variété fermée V, est minoré par $cl(V) + 1$, où $cl(V)$ est le plus grand entier tel qu'il existe $u_i \in H^*(V) - H^0(V)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, pour lesquels $u_1 \cup \ldots \cup u_k \neq 0$.

Cette quantité $cl(V)$ est appelée *cup-length* de V. Elle vaut par exemple 1 pour la sphère, n pour le tore de dimension n, et à nouveau n pour l'espace projectif complexe de dimension (complexe) n.

Pour notre part, nous allons nous intéresser à un autre corollaire, utilisé à deux reprises dans ce mémoire : dans la proposition 1.17 et dans l'annexe D, lemme D.2. On suppose ici que f est une fonction quadratique à l'infini comme dans l'exemple C.2. Avec les notations de l'exemple C.2, pour b assez grand et a assez petit,

$$H^*(f^b, f^a) = H^*(V) \otimes H^*(Q^b, Q^a).$$

Par ailleurs, si d désigne la dimension de l'espace négatif de Q, la paire (Q^b, Q^a) est homotopiquement équivalente à la paire $(\mathbb{B}_d, \mathbb{S}_{d-1})$ (voir figure C.5). On a donc un isomorphisme $H^*(f^b, f^a) = H^*(V) \otimes H^*(\mathbb{B}_d, \mathbb{S}_{d-1})$. Enfin, si l'on note η le générateur de $H^*(\mathbb{B}_d, \mathbb{S}_{d-1})$, l'application $\alpha \mapsto \alpha \otimes \eta$ induit un isomorphisme $H^*(V) \to H^*(V) \otimes H^*(\mathbb{B}_d, \mathbb{S}_{d-1})$, dont la réciproque est obtenue par intégration le long des fibres de l'application $\pi : V \times \mathbb{B}_d \to V$. On obtient finalement un isomorphisme

$$T : H^*(V) \to H^*(f^b, f^a).$$

Corollaire C.11. *Soient $f : V^m \times E \to \mathbb{R}$ une fonction quadratique à l'infini, T l'isomorphisme décrit précédemment, et respectivement μ et 1 les générateurs de $H^m(V)$ et $H^0(V)$. Si $c(T(\mu), f) = c(T(1), f)$, alors tous les points de V sont la projection de points critiques de f. En particulier, si $E = \{0\}$, alors f est identiquement constante.*

Démonstration — D'après le théorème C.9, si $c(T(\mu), f) = c(T(1), f)$, alors $T(\mu)$ induit une classe non nulle dans un voisinage du niveau critique associé à $c(T(1), f)$. Notons K ce niveau critique. On en déduit que μ induit une classe non-nulle sur tout voisinage de $\pi(K)$. Comme μ est une forme volume, on en déduit $\pi(K) = V$. □

Annexe D

Une preuve de la non-dégénérescence de la distance de Hofer

Dans cette annexe, nous donnons une preuve de la non-dégénérescence de la distance de Hofer sur $\mathbb{R}^{2n}$. Celle-ci est inédite bien qu'elle ne soit que la juxtaposition d'éléments bien connus. Ces éléments sont la théorie de Lusternik-Schnirelmann (déjà exposée dans l'annexe C) et la réduction de Liapounov-Schmidt.

La théorie de Lusternik-Schnirelmann est également à la base de la preuve de la non-dégénérescence de la distance de Viterbo, qui est plus petite que la distance de Hofer. Cela donnerait donc une autre méthode pour prouver la non-dégénérescence de la distance de Hofer, mais celle-ci reposerait également sur le théorème d'unicité des fonctions génératrices (théorème 1.7). La preuve que nous donnons est donc un peu plus "élémentaire".

D.1 Grandes lignes de la démonstration

L'idée de la démonstration est de considérer la fonctionnelle d'action (cf. définition A.36), associée à une fonction hamiltonienne H :

$$\mathcal{A}_H : \Lambda\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_x \lambda - H dt,$$

où $\Lambda\mathbb{R}^{2n}$ désigne l'espace des lacets de $\mathbb{R}^{2n}$ ayant une régularité donnée et λ la forme de Liouville sur $\mathbb{R}^{2n}$. Rappelons (proposition A.37) que les points critiques de $\mathcal{A}_H$ sont exactement les orbites 1-périodiques de l'isotopie ϕ_H^t,

et que la valeur critique associée à un point fixe donné de ϕ_H^1, ne dépend pas du choix de l'isotopie hamiltonienne parmi celles reliant l'identité à ϕ_H^1.

La première étape de notre démonstration sera une réduction à la dimension finie, appelée *réduction de Liapounov-Schmidt*, et due à Amman et Zehnder. Nous en donnerons la preuve à la section D.2.

Lemme D.1 (Réduction de Liapounov-Schmidt)**.** *Il existe un espace vectoriel de dimension finie E, et une fonction lisse $a_H : \mathbb{R}^{2n} \times E \to \mathbb{R}$, quadratique à l'infini — i.e., il existe une forme quadratique Q non-dégénérée sur E et un compact K de $\mathbb{R}^{2n} \times E$, tels que pour tout $(z_0, \xi) \in (\mathbb{R}^{2n} \times E) - K$, $a_H(z_0, \xi) = Q(\xi)$ —, telle que*

- *les points critiques de a_H sont en bijection avec ceux de $\mathcal{A}_H$,*
- *les valeurs critiques de a_H sont les mêmes que celles de $\mathcal{A}_H$.*

Une fois ce lemme prouvé, la non-dégénérescence de la distance de Hofer résulte de la théorie du calcul des niveaux critiques "min-max" introduite dans l'annexe C.

Comme $a_H : \mathbb{R}^{2n} \times E \to \mathbb{R}$ est quadratique à l'infini, on peut la prolonger de manière naturelle en une application, aussi notée a_H, $\mathbb{S}_{2n} \times E \to \mathbb{R}$. On note respectivement μ et 1 les générateurs de $H^{2n}(\mathbb{S}_{2n})$ et de $H^0(\mathbb{S}_{2n})$, et l'on considère la quantité

$$\gamma(a_H) = c(T(\mu), a_H) - c(T(1), a_H),$$

avec les notations du corollaire C.11 — cette définition est bien sûr fortement analogue à celle de la distance de Viterbo (cf. proposition 1.17, par exemple).

Nous prouverons dans la partie D.3 les propriétés suivantes.

Lemme D.2. *1. Pour tout hamiltonien H, $0 \leqslant \gamma(a_H) \leqslant d_H(\phi_H^1, Id)$, où d_H désigne la distance de Hofer.*

2. Si $\gamma(a_H) = 0$, alors $\phi_H^1 = id$.

Une fois ce lemme prouvé, la non-dégénérescence est immédiate.

D.2 Réduction de Liapounov-Schmidt

Dans cette partie, nous prouvons le lemme D.1. On identifie $\mathbb{R}^{2n}$ à $\mathbb{C}^n$, et on se place dans le cadre où la fonctionnelle d'action $\mathcal{A}_H$ est définie sur l'espace de Sobolev de lacets $H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^n)$. Elle s'écrit ainsi

$$\mathcal{A}_H(x) = \frac{1}{2}\langle Bx, x\rangle_{L^2} - \Phi(x),$$

où $B : H^1 \to L^2$, $x \mapsto -i\dot{x}$ et $\Phi(x) = \int_0^1 H(t, x(t))\, dt$.

Pour tout entier k, on note u_k la fonction sur le cercle, définie par $t \mapsto \exp(2i\pi kt)$, de sorte que l'espace $L^2(\mathbb{S}_1, \mathbb{C}^n)$ s'écrive comme somme directe hilbertienne des espaces $E_k = \mathbb{C}^n \cdot u_k$. On pose ensuite

$$Z_N = \bigoplus_{|k| \leqslant N} E_k \quad \text{et} \quad Y_N = \overline{\bigoplus_{|k| > N} E_k}.$$

On a alors la somme directe orthogonale $H^1 = Z_N \oplus (Y_N \cap H^1)$.

Commençons par le

Lemme D.3. *Il existe un entier N_0, tel que pour tout entier $N \geqslant N_0$, et tout $z \in Z_N$, l'équation*

$$\frac{\partial \mathcal{A}_H}{\partial y}(z + y) = 0$$

a une unique solution $y \in Y_N$ que l'on notera $v(z)$. L'application $v : Z_N \to Y_N$ ainsi définie est bornée, ainsi que sa dérivée.

Démonstration — Soit P_N la projection orthogonale sur Y_N. L'application linéaire B agit de manière diagonale sur $Y_N \cap H^1$, avec des valeurs propres de module plus grand que N. On peut donc considérer l'inverse β_N de sa restriction $B|_{Y_N \cap H^1}$. On obtient ainsi un opérateur borné $\beta_N : Y_N \to Y_N \cap H^1$ de norme plus petite que $1/N$. Avec ces notations, nous pouvons à présent écrire pour tout $z \in Z_N$ fixé et tout $y \in Y_N$:

$$\frac{\partial \mathcal{A}_H}{\partial y}(z + y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}\langle B(z + y), z + y\rangle = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(z + y)$$

et comme B est linéaire et laisse stables les facteurs orthogonaux Z_N et Y_N,

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\; B(y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(z + y) \\ &\Leftrightarrow\; B(y) = P_N \nabla_{L^2} \Phi(z + y) \\ &\Leftrightarrow\; y = \beta_N P_N \nabla_{L^2} \Phi(z + y). \end{aligned}$$

Maintenant, comme H est à support compact, $\nabla_{L^2}\Phi$ est borné, et comme la norme de β_N est majorée par $1/N$, on obtient que l'opérateur $L^2 \to L^2$, $y \mapsto \beta_N P_N \nabla_{L^2}\Phi(z + y)$ est contractant pour N assez grand. Il admet donc un unique point fixe que l'on notera $v(z)$.

Par un argument tire-botte, $v(z)$ est un élément de H^1. En effet, par construction,

$$\dot{v(z)} = iB(v(z)) = iP_N \nabla_{L^2}\Phi(z + v(z)).$$

L'équation

$$\frac{\partial \mathcal{A}_H}{\partial y}(z+y) = 0$$

admet donc $v(z)$ pour unique solution.

De plus, le théorème de point fixe à paramètre nous assure que v est différentiable. L'équation

$$v(z) = \beta_N P_N \nabla_{L^2} \Phi(z + v(z))$$

implique quant à elle que v, ainsi que sa différentielle sont bornées. □

Terminons à présent la démonstration du lemme D.1. Considérons pour cela la fonction $a_H : Z_{N_0} \to \mathbb{R}$ définie avec les notations du lemme D.3 par

$$a_H = \mathcal{A}_H(z + v(z)). \tag{D.1}$$

Si l'on identifie l'espace E_0 avec $\mathbb{R}^{2n}$ et si l'on pose $E = \bigoplus_{0<|k|<N_0} E_k$, a_H peut être vue comme une fonction $\mathbb{R}^{2n} \times E \to \mathbb{R}$.

De l'équation (D.1), on tire immédiatement qu'un point z est critique pour a_H si et seulement si $z+v(z)$ est un point critique de $\mathcal{A}_H$. De plus, les valeurs critiques respectives sont identiques. Reste le problème de la quadraticité à l'infini.

La fonction a_H n'est pas quadratique à l'infini, mais elle est quadratique à l'infini en les fibres. Grâce au lemme B.11, dont elle vérifie les hypothèses, on peut donc la remplacer par une fonction quadratique à l'infini ayant les mêmes propriétés. □

D.3 Calcul des niveaux critiques

Dans cette partie nous prouvons le lemme D.2, ce qui achèvera la démonstration de la non-dégénérescence de la distance de Hofer.

On note $L\sharp K(t,x) = L(t,x) + K(t,(\phi_L^t)^{-1}(x))$. Rappelons (lemme A.24) que $L\sharp K$ engendre le flot $\phi_L^t \circ \phi_K^t$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{L\sharp K}(x) &= \int_x \lambda + \int_0^1 L(t,x(t))dt + \int_0^1 K(t,(\phi_L^t)^{-1}(x(t)))dt \\ &= \mathcal{A}_L(x) + \int_0^1 K(t,(\phi_L^t)^{-1}(x(t)))dt.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que L engendre l'identité : $\phi_L^1 = Id$. L'action $\mathcal{A}_L$ est alors nulle, car tous les lacets en sont des points critiques. Par conséquent,

$$\mathcal{A}_{L\sharp K}(x) = \int_0^1 K(t,(\phi_L^t)^{-1}(x(t)))dt.$$

Comme $\gamma(a_H)$ est la différence de deux valeurs de l'action, on en déduit immédiatement

$$\gamma(a_{L\sharp K}) \leqslant \|K\|,$$

où $\|K\|$ désigne la norme de Hofer de K.

Soit maintenant H un hamiltonien fixé. Pour tout hamiltonien K vérifiant $\phi_H^1 = \phi_K^1$, on a l'inégalité

$$\gamma(a_H) = \gamma(a_{H\sharp\overline{K}\sharp K}) \leqslant \|K\|,$$

ce qui prouve bien l'inégalité $\gamma(a_H) \leqslant d_H(\phi_H^1, Id)$.

Passons au deuxième point : $(\gamma(a_H) = 0) \Rightarrow (\phi_H^1 = Id)$. Cela va résulter de la théorie de Lusternik-Schnirelmann, que nous avons exposée dans l'annexe C.3. Supposons donc $\gamma(a_H) = 0$. Si l'on applique directement à a_H le corollaire C.11, on obtient que tous les points de la base $\mathbb{R}^{2n}$ sont les projections de points critiques de a_H dans $\mathbb{R}^{2n} \times E$. Si l'on se rappelle comment est construit a_H, ceci s'interprète comme suit : tous les points de $\mathbb{R}^{2n}$ sont les valeurs moyennes d'orbites 1-périodiques du flot ϕ_H^t. Ceci n'implique pas *a priori* que $\phi_H^1 = Id$, mais nous allons faire les modifications suivantes.

Notons K un compact de $\mathbb{R}^{2n} \times E$ hors duquel a_H est quadratique à l'infini. On considère une application Ψ qui coïncide sur K avec l'application

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^{2n} \times E \to \mathbb{R}^{2n} \times E, \\ &\quad (z_0, \xi) \mapsto (z_0 + (\xi + v(z_0 + \xi))(0)\,,\, \xi) \end{aligned}$$

— intuitivement, celle-ci remplace valeur moyenne par valeur en 0 ; elle est de plus homotope à l'identité —, et qui est l'identité hors d'un voisinage de K contenu dans la différence des niveaux critiques $a_H^b - a_H^a$, pour b et $-a$ suffisamment grands. Une telle application Ψ peut être choisie homotope à l'identité, induit alors un isomorphisme en cohomologie et on a donc $\gamma(a_H \circ \Psi) = \gamma(a_H) = 0$.

Appliquons le corollaire C.11 à $a_H \circ \Psi$. On obtient que tout point de $\mathbb{R}^{2n}$ est la projection d'un point critique de $a_H \circ \Psi$, ce qui s'interprète par : tout point de $\mathbb{R}^{2n}$ est la valeur en 0 d'une orbite 1-périodique. Autrement dit, $\phi_H^1 = id$. $\square$

Index des notations

0_N : section nulle du cotangent T^*N, 14

1 : générateur de $H^0(N)$, 17

$\mathcal{A}_H$: action hamiltonienne associée à H, 118

a_H : réduction de Liapounov-Schmidt de A_H, 140

$Bilip_c^0(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$: composante neutre du groupe des homéomorphismes bilipschitz symplectiques, 79

B_n : $\{\rho_n(\cdot), \rho_n(\cdot)\} - \rho_n([\cdot, \cdot])$ où ρ_n pseudo-représentation, 93

c : capacité symplectique, 30

$c(\alpha, f)$: min-max de f pour la classe de cohomologie α, 132

Cal : invariant de Calabi, 117

c_+,c_- : invariants spectraux associés à un difféomorphisme hamiltonien, 22

$\{\cdot, \cdot\}$: crochet de Poisson, 115

$c(u, L)$: invariants de min-max de la lagrangienne L, 17

d_H : distance de Hofer, 27

d_{Hameo} : distance sur $Hameo(M, \omega)$, 79

e : capacité symplectique (énergie de déplacement), 30

$\mathcal{F}$: famille d'hamiltoniens discontinus, 42

f^λ, $f^{-\infty}$, $f^{+\infty}$: sous-niveaux de la fonction f, 15

$\mathcal{G}$: groupe des homéomorphismes symplectiques de flux nul, 75

G_{2n} : groupe engendré par les homéomorphismes super-admissibles de réciproque super-admissible, 79

γ : capacité symplectique, 30

γ : distance de Viterbo sur les difféomorphismes hamiltoniens, 24

γ : distance de Viterbo sur les lagrangiennes, 22

Γ_ψ : graphe du symplectomorphisme ψ, 22

$\widetilde{\Gamma_\psi}$: graphe de ψ vu dans le cotangent de la diagonale, 22

$\tilde{\gamma}$: variante de γ, 24

γ_u : distance sur $Ham_c(\mathbb{R}^{2n})$ obtenue de γ, 25

$\check{\gamma}$: variante de γ_u obtenue par suspension, 26

$\hat{\gamma}$: variante de γ_u obtenue par suspension, 26

$\tilde{\gamma}_u$: distance sur $Ham_c(\mathbb{R}^{2n})$ obtenue de $\tilde{\gamma}$, 25

$gr(dS)$: graphe de la différentielle de S, 14

$\mathcal{H}(M,\omega)$, $\mathcal{H}(M)$: groupe hamiltonien de M, 114

$\mathcal{H}_c^0$: adhérence C^0 de $\mathcal{H}_c$, 39

$Ham(M,\omega)$, $Ham(M)$: ensemble des hamiltoniens sur M, 114

Ham_c^0 : hamiltoniens continus, 39

$Ham_0(M,\omega)$, $Ham_0(M)$: ensemble des hamiltoniens normalisés de M, 114

$\overline{Ham}$: complété de (Ham_c, γ_u), 39

$Ham_c(M,\omega)$, $Ham_c(M)$: ensemble des hamiltoniens à support compact de M, 114

$\widetilde{Ham}$: complété de $(Ham_c, \check{\gamma})$, 39

$Hameo(M,\omega)$: groupe des haméomorphismes de (M,ω), 75

$\widehat{Ham}$: complété de $(Ham_c, \hat{\gamma})$, 39

$\widetilde{Ham}$: complété de $(Ham_c, \tilde{\gamma}_u)$, 39

$\overline{\mathcal{H}}$: complété de $(\mathcal{H}_c, \gamma)$, 39

$\mathcal{H}_c(M,\omega)$, $\mathcal{H}_c(M)$: groupe hamiltonien à support compact de M, 114

$\check{H}$, $\check{H}_\alpha$: suspensions de H, 25

$\overline{\mathcal{H}}^{d_H}$: complété de $(\mathcal{H}_c, d_H)$, 39

$H \sharp \overline{K}$: composition d'hamiltoniens, 115

$\hat{H}$, $\hat{H}_\alpha$: suspensions de H, 25

$\widetilde{\mathcal{H}}$: complété de $(\mathcal{H}_c, \tilde{\gamma})$, 39

$\mathcal{L}(T^*N)$: ensemble des lagrangiennes isotopes à la section nulle, 15

$L_1 \sharp \overline{L_2}$: composition de lagrangiennes, 18

λ : 1-forme de Liouville, 109

$\overline{\mathcal{L}}$: complété de $(\mathcal{L}, \gamma)$, 39

L_H : lagrangienne solution géométrique de l'équation d'Hamilton-Jacobi, 67

$\hat{L}$: compactification de la lagrangienne L, 21

μ : générateur de $H^n(N)$, 17

F^ω : orthogonal symplectique de F, 108

ω : forme symplectique, 107, 109

ϕ_H^t, $(\phi_H)_s^t$: isotopie hamiltonienne engendrée par le hamiltonien H, 113

R_α : champ de Reeb associé à une forme de contact α, 112

ρ_n : pseudo-représentation, 93

$\mathcal{S}N$: symplectisation d'une variété de contact (N, ξ), 112

$\mathbb{S}T^*X$: fibré en sphère cotangente de X, 112

$supp_1$: première définition de support, 54

$supp_2$: deuxième définition de support, 58

$Symp(M, \omega)$, $Symp(M)$: groupe des symplectomorphismes de (M, ω), 110

T : isomorphisme $H^*(N) \simeq H^*(S^\infty, S^{-\infty})$, 16

u_L : fonction construite à partir de L, 34

w : width de Gromov, 121

X_H : champ de vecteur hamiltonien associé au hamiltonien H, 113

ξ, ξ_c, ξ_e : supremum sur $H \in Ham_c$ de ξ^H, ξ_c^H, ξ_e^H, 41

ξ^H, ξ_c^H, ξ_e^H : capacité de $\bigcup_{t\in[0,1]} \phi_H^t(\cdot)$, 41

Bibliographie

[1] Augustin Banyaga. Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique. *Comment. Math. Helv.*, 53(2) :174–227, 1978.

[2] Guy Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, volume 17 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Paris, 1994.

[3] Olga Bernardi and Franco Cardin. Minimax and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations in the convex case. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 5(4) :793–812, 2006.

[4] Olga Bernardi and Franco Cardin. Poincaré-Birkhoff periodic orbits for mechanical Hamiltonian systems on $T^*\mathbb{T}^n$. *J. Math. Phys.*, 47(7) :072701, 15, 2006.

[5] Misha Bialy and Leonid Polterovich. Geodesics of Hofer's metric on the group of Hamiltonian diffeomorphisms. *Duke Math. J.*, 76(1) :273–292, 1994.

[6] Marco Brunella. On a theorem of Sikorav. *Enseign. Math. (2)*, 37(1-2) :83–87, 1991.

[7] Lev Buhovski. The 2/3 - convergence rate for the poisson bracket, 2008. arXiv.org :math/0802.3792.

[8] Franco Cardin and Claude Viterbo. Commuting Hamiltonians and multi-time Hamilton-Jacobi equations, 2005. arXiv math/0507418.

[9] Marc Chaperon. Une idée du type "géodésiques brisées" pour les systèmes hamiltoniens. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 298(13) :293–296, 1984.

[10] Marc Chaperon. Lois de conservation et géométrie symplectique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 312(4) :345–348, 1991.

[11] Michael G. Crandall and Pierre-Louis Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277(1) :1–42, 1983.

[12] Arnaud Dehove. In preparation.

[13] Ivar Ekeland and Helmut Hofer. Symplectic topology and Hamiltonian dynamics. *Math. Z.*, 200(3) :355–378, 1989.

[14] Michael Entov and Leonid Polterovich. Calabi quasimorphism and quantum homology. *Int. Math. Res. Not.*, (30) :1635–1676, 2003.

[15] Michael Entov and Leonid Polterovich. Quasi-states and symplectic intersections. *Comment. Math. Helv.*, 81(1) :75–99, 2006.

[16] Michael Entov and Leonid Polterovich. C^0-rigidity of poisson brackets, 2007.

[17] Michael Entov, Leonid Polterovich, and Frol Zapolsky. Quasi-morphisms and the Poisson bracket, 2006.

[18] Albert Fathi. Structure of the group of homeomorphisms preserving a good measure on a compact manifold. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(1) :45–93, 1980.

[19] Andreas Floer, Helmut Hofer, and Claude Viterbo. The Weinstein conjecture in $P \times \mathbf{C}^l$. *Math. Z.*, 203(3) :469–482, 1990.

[20] Jean-Marc Gambaudo and Étienne Ghys. Enlacements asymptotiques. *Topology*, 36(6) :1355–1379, 1997.

[21] Hansjörg Geiges. Contact geometry. In *Handbook of differential geometry. Vol. II*, pages 315–382. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2006.

[22] Martin Golubitsky and Victor Guillemin. *Stable mappings and their singularities*. Springer-Verlag, New York, 1973. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14.

[23] Peter Haïssinsky. L'invariant de Calabi pour les homéomorphismes quasiconformes du disque. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(8) :635–638, 2002.

[24] Helmut Hofer. Lagrangian embeddings and critical point theory. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2(6) :407–462, 1985.

[25] Helmut Hofer. On the topological properties of symplectic maps. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 115(1-2) :25–38, 1990.

[26] Helmut Hofer and Claude Viterbo. The Weinstein conjecture in cotangent bundles and related results. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 15(3) :411–445 (1989), 1988.

[27] Helmut Hofer and Claude. Viterbo. The Weinstein conjecture in the presence of holomorphic spheres. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45(5) :583–622, 1992.

[28] Helmut Hofer and Eduard Zehnder. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[29] Vincent Humiliere. On some completions of the space of Hamiltonian maps, 2005. ArXiv math/0511418, à paraître dans Bulletin de la Société Mathématique de France.

[30] Vincent Humiliere. Hamiltonian pseudo-representations, 2007. ArXiv math/0703335, à paraître dans Commentarii Mathematici Helvetici.

[31] Dale Husemoller. *Fiber Bundles*. Springer-Verlag, 1975.

[32] Tatiana Joukovskaia. *Singularité de minimax et solutions faibles d'équations aux dériées partielles*. PhD thesis, Université Paris VII, 1993.

[33] Alexander Kirillov. Local Lie algebras. *Uspehi Mat. Nauk*, 31(4(190)) :57–76, 1976.

[34] Wilhelm Klingenberg. *Closed geodesics on Riemannian manifolds*, volume 53 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1983.

[35] François Lalonde and Dusa McDuff. The geometry of symplectic energy. *Ann. of Math. (2)*, 141(2) :349–371, 1995.

[36] Paulette Libermann and Charles-Michel Marle. *Géométrie symplectique, bases théoriques de la mécanique. Tome I*, volume 21 of *Publications Mathématiques de l'Université Paris VII [Mathematical Publications of the University of Paris VII]*. Université de Paris VII U.E.R. de Mathématiques, Paris, 1986.

[37] Gang Liu and Gang Tian. Weinstein conjecture and GW-invariants. *Commun. Contemp. Math.*, 2(4) :405–459, 2000.

[38] Guangcun Lu. The Weinstein conjecture in the uniruled manifolds. *Math. Res. Lett.*, 7(4) :383–387, 2000.

[39] L. Lusternik, L. et Schnirelmann. *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*. Hermann, 1937.

[40] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *Introduction to symplectic topology*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1998.

[41] John Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.

[42] John Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Based on notes by David W. Weaver, Revised reprint of the 1965 original.

[43] Yong-Geun Oh. The group of hamiltonian homeomorphisms and continuous hamiltonian flows, 2006. arXiv.org :math/0601200.

[44] Yong-Geun Oh and Stefan Muller. The group of Hamiltonian homeomorphisms and C^0 symplectic topology, 2004.

[45] Alberto Ottolenghi and Claude Viterbo. Solutions généralisées pour l'équation d'Hamilton-Jacobi dans le cas d'évolution. Manuscript.

[46] Leonid Polterovich. Symplectic displacement energy for Lagrangian submanifolds. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 13(2) :357–367, 1993.

[47] Leonid Polterovich. *The geometry of the group of symplectic diffeomorphisms*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

[48] Matthias Schwarz. On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds. *Pacific J. Math.*, 193(2) :419–461, 2000.

[49] Jean-Claude Sikorav. Sur les immersions lagrangiennes dans un fibré cotangent admettant une phase génératrice globale. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 302(3) :119–122, 1986.

[50] Jean-Claude Sikorav. Un problème de disjonction par isotopie symplectique dans un fibré cotangent. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 19(4) :543–552, 1986.

[51] Jean-Claude Sikorav. Systèmes hamiltoniens et topologie symplectique. Dipartimento di Matematica dell' Università di Pisa. ETS, EDITRICE PISA, 1990.

[52] Projet ANR "Symplexe". *Les difféomorphismes préservant les aires*. En préparation.

[53] Clifford Henry Taubes. The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture. *Geom. Topol.*, 11 :2117–2202, 2007.

[54] David Théret. A complete proof of Viterbo's uniqueness theorem on generating functions. *Topology Appl.*, 96(3) :249–266, 1999.

[55] Claude Viterbo. A proof of Weinstein's conjecture in $\mathbf{R}^{2n}$. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 4(4) :337–356, 1987.

[56] Claude Viterbo. Solutions d'équations de Hamilton-Jacobi. Séminaire X-EDP, Palaiseau, 1992.

[57] Claude Viterbo. Symplectic topology as the geometry of generating functions. *Math. Ann.*, 292(4) :685–710, 1992.

[58] Claude Viterbo. Metric and isoperimetric problems in symplectic geometry. *J. Amer. Math. Soc.*, 13(2) :411–431 (electronic), 2000.

[59] Claude Viterbo. Erratum to : "On the uniqueness of generating Hamiltonian for continuous limits of Hamiltonians flows" [Int. Math. Res. Not. **2006**, Art. ID 34028, 9 pp. ; mr2233715]. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 38784, 4, 2006.

[60] Claude Viterbo. Symplectic topology and Hamilton-Jacobi equations. In *Morse theoretic methods in nonlinear analysis and in symplectic topology*, volume 217 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, pages 439–459. Springer, Dordrecht, 2006.

[61] Frol Zapolsky. Quasi-states and the Poisson bracket on surfaces. *J. Mod. Dyn.*, 1(3) :465–475, 2007.

Table des matières

Remerciements **2**

Introduction **4**

1 Des distances remarquables **13**
1.1 Définitions 13
1.1.1 Invariants de "min-max" 13
1.1.2 Distance de Viterbo 21
1.1.3 Distance de Hofer 26
1.2 Propriétés et estimations 27
1.2.1 Comparaison à d'autres topologies 27
1.2.2 Liens avec les capacités symplectiques 29
1.2.3 Inégalités de réduction 31
1.2.4 La fonction u_L 34
1.2.5 Comparaison des différentes distances 36

2 Extension de la dynamique hamiltonienne **38**
2.1 Complétés 38
2.1.1 Définitions et notations 38
2.1.2 Extension de la dynamique Hamiltonienne 40
2.1.3 Action sur les lagrangiennes 40
2.2 Le critère de convergence 41
2.2.1 Énoncés 41
2.2.2 L'invariant ξ 43
2.2.3 Le lemme principal 46
2.2.4 Démonstration du théorème 2.7 47
2.2.5 Un exemple instructif 50
2.2.6 Démonstration du théorème 2.9 50
2.2.7 Exemples de difféomorphismes généralisés 53
2.3 Étude des complétés 54
2.3.1 Supports 54

2.3.2 À la recherche de l'image d'un ouvert 60
2.3.3 Intégrales premières et systèmes intégrables généralisés 61
2.3.4 Compacts 63
2.3.5 Des applications L^∞ ? 64

3 Equations d'Hamilton-Jacobi d'évolution 66
3.1 Rappels sur les solutions variationnelles 66
3.2 Extension des solutions variationnelles 67
3.2.1 Contrôle des solutions variationnelles 67
3.2.2 Solutions variationnelles généralisées 69
3.3 Lien avec les solutions de viscosité 70

4 Haméomorphismes 74
4.1 Définition, exemples et premières propriétés 74
4.1.1 Le groupe des haméomorphismes 74
4.1.2 Quelques propriétés 77
4.2 Nouveaux exemples issus des fonctions génératrices 79
4.2.1 Idée et énoncé 79
4.2.2 Homéomorphismes associés à des fonctions génératrices admissibles 80
4.2.3 Fonctions génératrices super-admissibles et haméotopies 81
4.3 Le problème de l'extension de l'invariant de Calabi 85
4.3.1 Motivation 85
4.3.2 Extension au groupe des homéomorphismes bilipschitz symplectiques 88

5 Pseudo-représentations et rigidité du crochet de Poisson 91
5.1 Le problème de la rigidité C^0 du crochet de Poisson 91
5.2 Pseudo-représentations 92
5.2.1 Définition et résultat 92
5.2.2 Démonstration 94
5.3 Quelques conséquences et questions 97
5.3.1 Une notion de représentation hamiltonienne C^0 97
5.3.2 Affaiblissement de la convergence 98
5.3.3 Cas des supports non-compacts 99
5.3.4 Le théorème de Gromov et Eliashberg revisité 102
5.4 Autres approches de la rigidité du crochet de Poisson 104
5.4.1 Une approche quantitative 104
5.4.2 Quelques remarques utilisant la théorie des distributions 105

A Outils **107**
A.1 Bases de géométrie symplectique 107
A.1.1 Espaces vectoriels symplectiques 107
A.1.2 Variétés symplectiques 109
A.1.3 Symplectomorphismes 110
A.1.4 Le théorème de Darboux 111
A.1.5 Géométrie de contact 111
A.2 Dynamique hamiltonienne 113
A.2.1 Fonctions et flots hamiltoniens 113
A.2.2 Crochet de Poisson et intégrales premières 115
A.2.3 Invariant de Calabi 117
A.2.4 Action hamiltonienne 118
A.3 Rigidité symplectique 120

B Fonctions génératrices **122**
B.1 Homéomorphismes associés à des fonctions génératrices admissibles 122
B.2 Compositions et fonctions génératrices quadratiques à l'infini . 125
B.3 Fonctions génératrices des sous-variétés lagrangiennes 127

C Valeurs critiques de "min-max" **131**
C.1 Définition 131
C.2 Exemples 134
C.3 Théorie de Lusternik-Schnirelmann 135

D Une preuve de la non-dégénérescence de la distance de Hofer **139**
D.1 Grandes lignes de la démonstration 139
D.2 Réduction de Liapounov-Schmidt 140
D.3 Calcul des niveaux critiques 142

Index des notations **144**