



**HAL**  
open science

# Autoéchauffement, fatigue thermomécanique des élastomères

Yohan Le Chenadec

► **To cite this version:**

Yohan Le Chenadec. Autoéchauffement, fatigue thermomécanique des élastomères. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole Polytechnique X, 2008. Français. NNT: . pastel-00004578

**HAL Id: pastel-00004578**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00004578>**

Submitted on 21 Jul 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# **Autoéchauffement, fatigue thermomécanique des élastomères**

*Thèse présentée pour l'obtention du titre de*

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**

Spécialité : Mécanique

*par*

**YOHAN LE CHENADEC**

*Soutenue le 26 Mai 2008 devant le jury composé de :*

M. André CHRYSOCHOOS	Rapporteur
M. Vince COVENEY	Examineur
M. Franck MOREL	Rapporteur
M. Ida RAOULT	Examineur
M. François SIDOROFF	Président
M. Claude STOLZ	Directeur de thèse



Autoéchauffement,  
fatigue thermomécanique des élastomères.

Yohan Le Chenadec  
[yohan.le-chenadec@polytechnique.edu](mailto:yohan.le-chenadec@polytechnique.edu)

2 décembre 2014



*À mes parents,  
À Elodie et Elouan, mes rayons de soleil.*



# Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier tous les membres du jury pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ces travaux de thèse : François Sidoroff président du jury, André Chrysochoos et Franck Morel qui ont accepté la tâche de rapporteurs, Vince Coveney qui a bien voulu que la soutenance se fasse en français, et bien sûr Claude Stolz, directeur de thèse et Ida Raoult, encadrant industriel.

Je remercie Bernard Halphen, directeur du Laboratoire de Mécanique des Solides, pour m'avoir accueilli au LMS en tant que doctorant. Je remercie mon directeur de thèse, Claude Stolz, qui a accepté de diriger un "breton à la tête dure".

Je souhaite aussi remercier Mac Lan Nguyen, Jean-Jacques Thomas et Laurent Rota pour m'avoir accueilli à PSA Peugeot Citroën au sein de l'équipe Tenue en Service et Fiabilité des Structures, et m'avoir donné leur confiance tout au long de ces trois années.

Mes plus vifs remerciements vont à Ida Raoult, pour la construction de ce sujet de thèse, le suivi permanent de mes travaux et son intérêt scientifique. Ce côté scientifique se complète aussi du côté relationnel : quelle formidable chance de travailler dans une bonne humeur journalière constante (je me demande si je n'en fais pas un peu trop quand même, mais je n'ose pas écrire noir sur blanc la vérité sur Ida, de peur de terribles représailles ; par contre, je suis libre de parler...).

La majeure partie des essais utilisés dans ces travaux ont été effectués par Pierre Charrier, Elisabeth Ostoja-Kuczynski et Thomas Ramade de la société TRELLEBORG à Nantes. Outre leur compétence et leur grande disponibilité, je tiens à saluer la très bonne entente scientifique et humaine qui a contribué à la qualité des mesures expérimentales et de leur interprétation.

Mon séjour à Bristol n'aurait pu s'effectuer sans la volonté de Vince Coveney : je tiens à le remercier vivement ainsi que toute son équipe pour m'avoir permis en trois mois de construire une manipulation expérimentale.

Je salue bien évidemment toute l'équipe à PSA, pour son intérêt scientifique, mais aussi pour tous ces bons moments passés autour d'un café, en face de ce fameux tableau où je dois le rappeler, la bonne humeur se transformait toujours en délices pour nos papilles. Je remercie aussi tout particulièrement Benoit Delattre, pour ses conseils scientifiques. Je remercie tous les doctorants du LMS, pour les quelques moments passés ensemble.

Une partie des résultats numériques de ces travaux provient du travail effectué par des stagiaires : je remercie Q. Tien Ngo et Nicolas Brie pour leur collaboration. J'espère ne pas avoir été un trop mauvais maître de stage.

Enfin, je tiens à remercier mes parents pour leur soutien indéfectible, Elodie pour ce chemin que l'on construit ensemble, et bien sûr Elouan, attentif spectateur de mes répétitions de soutenance du haut de ses quelques jours de vie... Ce mémoire leur est dédié.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Notations</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Généralités</b>	<b>7</b>
<b>1 Généralités sur les élastomères</b>	<b>9</b>
1.1 Polymères et élastomères . . . . .	9
1.2 Premières caractéristiques mécaniques . . . . .	14
1.3 Comportement cyclique . . . . .	15
1.4 Cristallisation . . . . .	19
1.5 Conclusions . . . . .	24
<b>2 Rappels de mécanique</b>	<b>27</b>
2.1 Le milieu continu . . . . .	27
2.2 Formalisme des transformations finies . . . . .	29
2.3 Lois de comportement . . . . .	33
2.4 Modélisation de l'incompressibilité . . . . .	41
2.5 Conclusions . . . . .	42
<b>II Comportement thermomécanique cyclique</b>	<b>43</b>
<b>3 Modélisation thermomécanique des élastomères</b>	<b>45</b>
3.1 Thermoélasticité non-linéaire . . . . .	46
3.2 Analyse thermodynamique pour la traction uniaxiale . . . . .	47
3.3 Écriture générale de l'énergie libre . . . . .	55
3.4 Décomposition de la transformation . . . . .	56
3.5 Modélisation thermomécanique des élastomères : rôle de l'énergie interne . . . . .	58
3.6 Conclusions . . . . .	60
<b>4 Comportement cyclique</b>	<b>61</b>
4.1 Modélisation hyperélastique . . . . .	62
4.2 Comportement en température (cisaillement pur) . . . . .	67

4.3	Comportement en traction biaxiale . . . . .	80
4.4	Conclusions . . . . .	86
<b>III</b>	<b>Autoéchauffement</b>	<b>89</b>
<b>5</b>	<b>Découplage du problème thermomécanique</b>	<b>91</b>
5.1	L'autoéchauffement dans la littérature . . . . .	92
5.2	Analyse du problème thermomécanique . . . . .	95
5.3	Stratégie de résolution adoptée - Loi d'autoéchauffement cyclique . . . . .	97
5.4	Conclusions . . . . .	105
<b>6</b>	<b>Estimation de l'énergie dissipée</b>	<b>107</b>
6.1	Interprétations microscopiques de l'énergie dissipée . . . . .	108
6.2	État de l'art . . . . .	109
6.3	Proposition de mesures énergétiques d'une sollicitation mécanique . . . . .	116
6.4	Identification des fonctions de dissipation . . . . .	125
6.5	Conclusions . . . . .	134
<b>7</b>	<b>Validation des lois d'autoéchauffement</b>	<b>137</b>
7.1	Loi d'autoéchauffement simplifiée dans le cas variable . . . . .	138
7.2	Validation de la loi d'autoéchauffement cyclique dans le cas 1-D . . . . .	141
7.3	Validation de la loi d'autoéchauffement variable dans le cas 1-D . . . . .	147
7.4	Validation des loi d'autoéchauffement dans le cas multi-D . . . . .	149
7.5	Conclusions . . . . .	155
<b>IV</b>	<b>Fatigue thermomécanique</b>	<b>157</b>
<b>8</b>	<b>Introduction au phénomène de fatigue des élastomères</b>	<b>159</b>
8.1	Approche par propagation de fissure . . . . .	160
8.2	Description d'un fond de fissure . . . . .	165
8.3	Approche par amorçage de fissure . . . . .	169
8.4	Phénomène de renforcement en traction-traction . . . . .	176
8.5	Influence de la température . . . . .	180
8.6	Dégradations autres que mécaniques - Vieillessement . . . . .	183
8.7	Conclusions . . . . .	186
<b>9</b>	<b>Proposition d'un modèle de fatigue thermomécanique</b>	<b>189</b>
9.1	Les grandeurs locales prédictives de la durée de vie . . . . .	190
9.2	Essais de fatigue uniaxiale en température . . . . .	194
9.3	Prédiction de la durée de vie . . . . .	198
9.4	Conclusions . . . . .	210
	<b>Conclusions générales - Perspectives</b>	<b>211</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>216</b>

<b>Annexes</b>	<b>231</b>
<b>A Plans des éprouvettes diabolo</b>	<b>231</b>
<b>B Démonstrations</b>	<b>233</b>
B.1 Equations d'équilibre en configuration mixte . . . . .	233
B.2 Le second principe en configuration lagrangienne . . . . .	233
B.3 Analyse du premier principe . . . . .	234
B.4 Formulation générale de l'énergie libre . . . . .	235
B.5 Chaleur spécifique fonction de la température . . . . .	236
B.6 Non-unicité de la déformation d'un essai équibiaxial . . . . .	237
<b>C Comptage Rainflow</b>	<b>239</b>
C.1 Présentation du comptage Rainflow . . . . .	239
<b>D Représentation des essais de caractérisation</b>	<b>241</b>
<b>E Essais</b>	<b>245</b>
E.1 Nomenclature des essais . . . . .	245



# Notations

## a Formats

$x$	Scalaire
$\underline{x}$	Vecteur de composantes $x_i$
$\underline{\underline{X}}$	Tenseur d'ordre 2 de composantes $X_{ij}$
$\underline{\underline{\underline{X}}}$	Tenseur d'ordre 4 de composantes $X_{ijkl}$

## b Grandeurs mathématiques

$\delta_{ij}$	Symbole de Kronecker
$\underline{\underline{I}}$	Tenseur unité d'ordre 2 $I_{ij} = \delta_{ij}$
$\underline{\underline{\underline{I}}}$	Tenseur unité d'ordre 4 $I_{ijkl} = \delta_{il}\delta_{jk}$

## c Opérateurs

$\cdot$	Produit simplement contracté	$(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})_{ij} = A_{ia}B_{aj}$
$:$	Produit doublement contracté	$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \text{tr}(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = A_{ij}B_{ji}$
		$(\underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\underline{B}}})_{ij} = A_{ijab}B_{ba}$
		$(\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{B}}}})_{ij} = A_{ab}B_{baij}$
$\otimes$	Produit tensoriel	$(\underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}})_{ijkl} = A_{ij}B_{kl}$
$\nabla$	Gradient	$(\nabla V)_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial X_j}$
$\frac{\partial}{\partial \underline{\underline{A}}}$	Dérivée	$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{A}}}\right)_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial A_{ji}}$
dev	Déviateur	$\text{dev } \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\underline{A}} \underline{\underline{I}}$

**d Grandeurs mécaniques**

$\underline{\underline{F}}$	Gradient de la transformation	
$\underline{\underline{U}}$	Distorsion à droite	$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$
$\underline{\underline{V}}$	Distorsion à gauche	$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}}$
$J$	Variation de volume	$J = \det \underline{\underline{F}}$
$\underline{\underline{C}}$	Dilatations de Cauchy Green droit	$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}$
$\underline{\underline{G}}$	Dilatations de Cauchy Green gauche	$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$
$\lambda$	Élongation (dans une direction $\underline{\underline{D}}$ )	$\lambda = \sqrt{\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{D}}}$
$I_1$	Premier invariant de $\underline{\underline{C}}$	$I_1 = \text{tr} \underline{\underline{C}}$
$I_2$	Deuxième invariant de $\underline{\underline{C}}$	$I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr} \underline{\underline{C}})^2 - \text{tr} \underline{\underline{C}}^2)$
$I_3$	Troisième invariant de $\underline{\underline{C}}$	$I_3 = \det \underline{\underline{C}} = J^2$
$\underline{\underline{d}}$	Taux de déformations Eulérien	$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$
$\underline{\underline{E}}$	Déformations de Lagrange	$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}^{(2)} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}})$
$\underline{\underline{\Pi}}$	Contraintes de Piola-Kirchhoff	$\underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{T}}^{(2)} = J \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}$
$\underline{\underline{\sigma}}$	Contraintes de Cauchy	$\underline{\underline{\sigma}} = J^{-1} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$
$\underline{\underline{B}}$	Contraintes de Boussinesq	$\underline{\underline{B}} = J \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}$
$\underline{\underline{E}}^{(1)}$	Déformations de Biot	$\underline{\underline{E}}^{(1)} = \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{I}}$
$\underline{\underline{T}}^{(1)}$	Contraintes de Biot	$\underline{\underline{T}}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{T}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)} \right)$
$\underline{\underline{E}}^{(0)}$	Déformations logarithmiques	$\underline{\underline{E}}^{(0)} = \ln \underline{\underline{U}}$
$\underline{\underline{T}}^{(0)}$	Contraintes conjuguées	
$\underline{\underline{\nabla}}$	Gradient lagrangien	
$\underline{\underline{\text{grad}}}$	Gradient eulérien	

**e Grandeurs thermodynamiques**

$\psi$	Énergie libre massique
$A$	Énergie libre
$e$	Énergie interne massique
$U$	Énergie interne
$s$	Entropie massique
$S$	Entropie interne
$T$	Température

# Introduction

## Contexte

L'industrie automobile attache de plus en plus d'importance à la sécurité (tests Euro NCAP), mais aussi à la réduction de la consommation et des émissions de polluants (normes euro IV et V). Ces contraintes conduisent respectivement à des augmentations de la masse des véhicules, des augmentations de la puissance spécifique des moteurs et des ajouts de systèmes de dépollution. Cela conduit à des élévations de température à proximité des pièces en élastomère comme les supports du moteur et les articulations de reprise de couple. Ces conditions thermiques sévères rendent insuffisantes les méthodes expérimentales actuellement utilisées pour dimensionner ces pièces. Ainsi, il est essentiel de mettre au point une nouvelle approche, tant expérimentale que numérique, permettant d'estimer la durée de vie d'une structure en élastomère soumise à la fois à une histoire de chargement thermique et de chargement mécanique.

Le matériau d'étude est un caoutchouc naturel chargé au noir de carbone, représentatif de ceux utilisés pour les pièces réelles. Ce matériau présente deux caractéristiques importantes à prendre en compte dans le cadre de cette étude. D'une part, sa tenue en endurance se dégrade notablement lorsque la température augmente. D'autre part, en raison de son comportement hystérétique et d'une faible conductivité thermique, il a la propriété de s'échauffer sous l'effet d'une sollicitation mécanique : c'est le phénomène d'autoéchauffement. Ainsi la température du matériau ne dépend pas uniquement des conditions aux limites thermiques mais également mécaniques. Nous pouvons constater cet autoéchauffement sur la figure 1. Nous avons représenté une mesure sur véhicule de la température à cœur d'une pièce de liaison au sol, ainsi que le débattement de la roue associée. Nous constatons, pour chaque passage sollicitant, un autoéchauffement de l'ordre de la dizaine de degrés. Par contre, dès que la sollicitation mécanique est faible, la température diminue car la chaleur est évacuée à l'extérieur.

Garantir la tenue en service d'une structure nécessite, entre autres, de dimensionner cette structure à la fatigue. Les modèles de fatigue thermomécanique permettent d'une part d'estimer la durée de vie d'une structure, et d'autre part de construire des signaux équivalents en endommagement par fatigue au chargement initial. En effet, lors de la conception et validation d'une structure, des essais de fatigue sont souvent menés et durent environ un mois. Cette durée est trop longue dans la phase de conception d'un véhicule : afin d'accélérer ces essais tout en garantissant la même sévérité, des méthodes de réduction de signal sont nécessaires.

Nous présentons sur la figure 2 une analyse de la problématique de détermination de la durée de vie d'une structure. À partir des sollicitations extérieures thermiques et mécaniques, il faut déterminer l'état local de la structure. Dans le cas où les couplages thermomécaniques sont faibles, cette étape peut se résoudre à l'aide d'analyses mécanique et thermique indépendantes. Pour les élastomères, la sollicitation mécanique induit un fort autoéchauffement et la température change les propriétés du

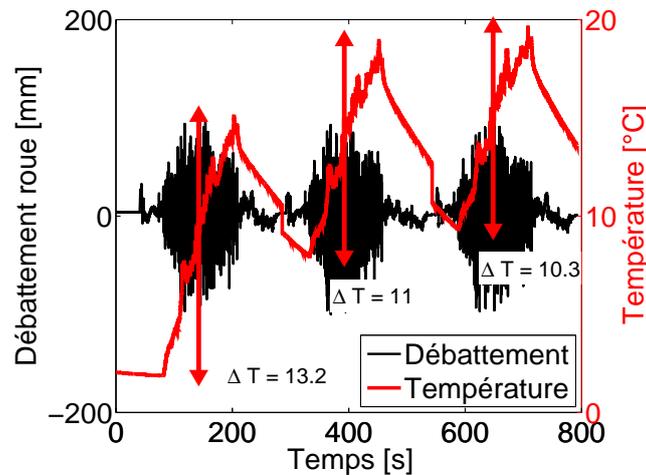


FIGURE 1 – Mesures de température d’une cale de liaison au sol et du débattement roue sur des pistes d’essais.

matériau. Ce couplage thermomécanique rend difficile la détermination du trajet de chargement local en déformations, contraintes et température. Voici donc notre première problématique : étudier les couplages thermomécaniques et construire une méthode de détermination de l’histoire du chargement local mécanique et thermique.

À partir de cette histoire de chargements locaux, un modèle d’endommagement permet d’estimer l’endommagement généré par le chargement et de prédire la durée de vie de la structure. Notre deuxième problématique est donc de construire un modèle de fatigue thermomécanique prenant en compte l’histoire de chargement mécanique et thermique. Notons que pour l’analyse en fatigue, nous nous restreignons dans cette étude à des chargements unidimensionnels.

Ces méthodes de réduction de signal intéressent tout autant les fournisseurs des structures anti-vibratoires que les constructeurs automobiles. C’est pourquoi une collaboration a été engagée entre les sociétés PSA Peugeot Citroën, RSA et Trelleborg-Modyn afin de financer une campagne d’essais d’endurance réalisée par Trelleborg-Modyn. Notre analyse en fatigue se fondera sur ces essais.

## Objectifs

L’objectif de la thèse est de proposer des méthodes d’estimation de la durée de vie et de détermination d’équivalents pour la fatigue thermomécanique des élastomères. Ces équivalents sont des sollicitations équivalentes à la sollicitation initiale pour la fatigue. Afin de répondre à cet objectif, nous devons tout d’abord caractériser les histoires locales de chargements mécanique et thermique en tenant compte des couplages thermomécaniques. Notamment, nous devons étudier le comportement thermomécanique cyclique de l’élastomère, être capables d’estimer la température d’autoéchauffement et analyser tous les couplages thermomécaniques afin de construire un modèle prédictif et simple de mise en œuvre.

Afin de bâtir un modèle de fatigue thermomécanique, nous devons tout d’abord décrire les mécanismes d’endommagement par fatigue des élastomères afin de comprendre l’influence de la température. Puis, nous analyserons la base expérimentale disponible sur l’endurance thermomécanique des élastomères pour construire un modèle d’endommagement.

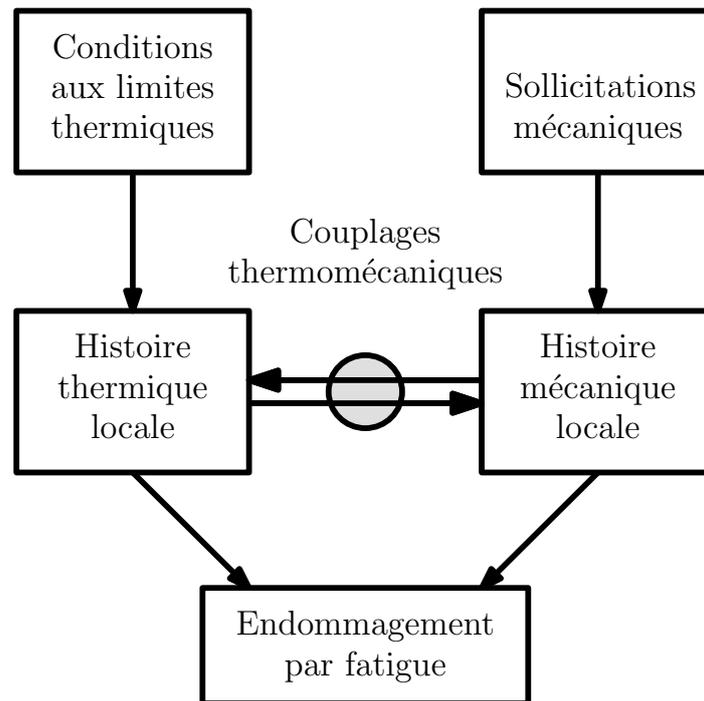


FIGURE 2 – Analyse schématique de notre problématique.

## Démarche

Les élastomères sont des matériaux dont le comportement dépend de l'histoire de chargement. Sous des sollicitations cycliques ou cycliques par morceaux, la description du comportement stabilisé, quand il existe, suffit néanmoins à caractériser les grandeurs représentatives du phénomène de fatigue. En effet, la majeure partie de l'endommagement a lieu après stabilisation. L'influence de la température sur le comportement des élastomères est multiple. L'hypothèse de l'origine entropique des efforts implique que les contraintes soient linéaires de la température. Toutefois, il faut prendre en compte la dilatation thermique afin de rendre compte du comportement réel, avec des phénomènes tels que l'inversion thermoélastique. De plus, les effets visqueux participent aux efforts et sont aussi très dépendants de la température. Dans un premier temps, nous étudions donc le comportement thermo-mécanique cyclique. Notamment, nous nous intéressons à l'influence de la température sur le comportement stabilisé. Pour ce faire, nous exploitons une base expérimentale d'essais cycliques entre 5°C et 100°C. Nous montrons qu'en première approximation, il est possible dans cette gamme de température de négliger l'effet de la température sur le comportement.

Dans un deuxième temps, nous développons des lois d'autoéchauffement. Ces lois permettent d'estimer la température d'une structure soumise à un chargement mécanique, qu'il soit répété ou variable. Elles sont définies par une stratégie de résolution du problème thermomécanique couplé et une estimation locale de l'énergie dissipée. En effet, le problème thermomécanique pour les élastomères est un problème fortement couplé. D'une part, les effets thermoélastiques sont très importants : la température peut varier de plusieurs degrés lors d'un cycle mécanique. De plus, dans le cadre des grandes déformations, la géométrie d'une structure est largement modifiée au cours d'un cycle. D'autre part,

l'élévation de température due à l'autoéchauffement modifie les propriétés mécaniques.

Notre analyse est fondée sur le constat suivant : pour une structure représentative de celles utilisées dans l'industrie automobile, les temps caractéristiques mécanique et thermique sont très différents. La résolution du problème thermomécanique à l'aide d'un couplage faible permet justement l'exploitation de cette différence afin d'obtenir des temps de calculs compatibles avec un bureau d'études. Toutefois, ce couplage faible n'est pas proprement défini dans le cas des grandes déformations. En effet, le découplage entre la variation de géométrie de la structure au cours d'un cycle et la résolution du problème thermique sur une géométrie fixe ne permet pas de résoudre exactement le problème thermomécanique. C'est pourquoi nous étudions une homogénéisation temporelle de l'équation de la chaleur exprimée dans la configuration de référence. Grâce à une approximation justifiée, ce problème thermique homogénéisé permet une résolution exacte et rapide du problème thermomécanique en tenant compte des variations de géométrie au cours d'un cycle mécanique.

Nous modélisons le comportement mécanique avec une loi hyperélastique : nous ne représentons pas l'énergie mécanique dissipée lors d'un cycle. Une estimation de l'énergie dissipée lors d'un cycle mécanique à partir de grandeurs mécaniques se fait en trois points : définition et détermination de cycles, construction d'une grandeur représentative de l'énergie dissipée et détermination de la fonction reliant cette grandeur à l'énergie dissipée. Par exemple, pour certaines sollicitations simples, l'énergie élastique de déformation est un bon prédicteur de l'énergie dissipée. Toutefois, ce n'est pas une grandeur multiaxiale car il est possible de créer des trajets de chargement gardant l'énergie de déformation constante mais dissipant de l'énergie.

Nous proposons donc plusieurs grandeurs énergétiques représentatives de l'énergie dissipée et étudions leur capacité à être multiaxiales, objectives ou à prendre en compte les effets de moyenne. Notamment, nous montrons que dans le cadre des grandes transformations, l'utilisation de grandeurs lagrangiennes permet de garantir l'objectivité de telles grandeurs. L'identification des fonctions reliant ces grandeurs à l'énergie dissipée sur un cycle se fonde sur une base expérimentale uniaxiale et biaxiale à plusieurs températures. Nous avons pour cela proposé, réalisé et utilisé une machine d'essais de traction biaxiale permettant de soumettre une éprouvette à des chargements biaxiaux totalement arbitraires. L'extension des lois d'autoéchauffement dans le cas de signaux variables est fondée sur l'identification des cycles avec une méthode Rainflow.

Afin de valider nos lois d'autoéchauffement, nous avons proposé des essais d'autoéchauffement avec des mesures d'énergie dissipée et de température. Nous avons ainsi validé nos lois cycliques et variables sur des éprouvettes, puis sur des structures automobiles. Dans ce dernier cas notamment, nous avons proposé des lois simplifiées permettant des calculs d'autoéchauffement pour des sollicitations multi-entrée, c'est-à-dire avec plusieurs axes de sollicitations, représentatives des chargements supportés en service. Ces lois sont compatibles avec les exigences d'un bureau d'étude.

Dans un troisième temps, nous dressons un état de l'art de l'étude en fatigue pour les élastomères. Nous constatons que la majeure partie de la durée de vie d'une structure est consacrée à la propagation d'une micro-fissure amorcée dès les premiers cycles vers une macro-fissure menant à la ruine. Dans ce mémoire, nous choisissons de construire un modèle de fatigue permettant d'estimer le nombre de cycles nécessaires à l'amorçage d'une macro-fissure détectable.

Notre matériau d'étude est un caoutchouc cristallisable et de ce fait, de nombreuses propriétés bénéfiques en fatigue peuvent être expliquées par ce phénomène. Par exemple, les caoutchoucs naturels résistent très bien à la propagation de fissures et présentent un phénomène de renforcement très marqué pour des rapports de charge positifs. Or, la température agit directement sur la capacité à cristalliser et donc sur la tenue en endurance. À partir de ces considérations et de données expérimentales composées de courbes de Wöhler et de renforcement à plusieurs températures, nous proposons un mo-

dèle de fatigue thermomécanique physiquement motivé. Nous montrons l'existence d'une température seuil, environ 70°C, à partir de laquelle la tenue en endurance se dégrade avec la température.

Afin d'estimer la tenue en service de structures, un cumul d'endommagement est nécessaire pour traiter des signaux variables. Nous discuterons à partir d'observations expérimentales de l'hypothèse de cumul linéaire dans un cadre anisotherme.

Les trois axes d'étude présentés ci-dessus forment les parties II à IV de ce mémoire. Le premier chapitre de la partie I est consacré à la description des matériaux élastomères et de leurs propriétés. Nous présentons aussi dans un deuxième chapitre le formalisme des transformations finies nécessaire à l'étude des élastomères subissant de grandes déformations. Dans la partie II dédiée au comportement thermomécanique cyclique, nous établissons au premier chapitre un état de l'art sur la modélisation thermomécanique des élastomères. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude, en grande partie expérimentale, du comportement cyclique et de l'influence de la température sur celui-ci. La partie III se divise en trois chapitres permettant une étude complète de l'autoéchauffement. Le premier chapitre pose le problème thermomécanique couplé et définit notre stratégie de résolution de ce problème. Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'estimation de l'énergie dissipée à partir d'un calcul mécanique hyperélastique, qui par définition ne dissipe pas d'énergie. Le dernier chapitre valide par des expériences les lois d'autoéchauffement proposées et illustre l'intérêt des méthodes simplifiées. Quant à la partie IV, centrée sur la fatigue, elle est composée de deux chapitres. Le premier dresse un état de l'art sur la fatigue et notamment sur l'effet de la température sur l'endurance. C'est au cours du deuxième chapitre que nous proposons un modèle de fatigue thermomécanique, fondé sur un grand nombre d'essais.



**Première partie**

**Généralités**



# Chapitre 1

## Généralités sur les élastomères

*Ce chapitre offre une description succincte des élastomères, nécessaire pour comprendre et analyser les phénomènes mis en jeu. Notamment, nous mettons l'accent sur la description du comportement cyclique et sur le phénomène de cristallisation induite par déformation.*

Le caoutchouc n'est pas un matériau récent : les Indiens d'Amérique l'employaient pour la réalisation de balle de sport, de toiles enduites ou de gourde. Ils nommaient ce matériau *cao-o-tchu*, traduit par "bois qui pleure". En effet, le caoutchouc provient du latex, produit par différents arbres dont l'hévéa. Les premières études scientifiques sur le caoutchouc sont menées vers 1735 par Charles de la Condamine, membre de l'Académie des Sciences envoyé en mission en Amérique du Sud, et Fresnau, ingénieur de la Marine Royale en Guyane. Les premières gommés en caoutchouc suivront en 1770. Une avancée importante pour le caoutchouc est la mise au point de la vulcanisation par Charles Goodyear en 1839, qui va permettre la multiplication des applications du caoutchouc. Les caoutchoucs synthétiques voient le jour au début du vingtième siècle, et le noir de carbone est utilisé comme charge renforçante. Depuis, l'utilisation des caoutchoucs n'a fait que progresser, notamment dans l'industrie des transports : pneumatiques, pièces anti-vibratoire, joints d'étanchéité.

Ce chapitre commence par la présentation de généralités sur les élastomères, qui font partie des matériaux polymères. Les premières propriétés mécaniques sont ensuite exposées et nous mettrons l'accent sur la description du comportement cyclique et la cristallisation.

### 1.1 Polymères et élastomères

#### 1.1.1 Les matériaux polymères

Un matériau polymère<sup>1</sup> est constitué de longues chaînes. La cohésion des atomes sur une même chaîne est assurée par des liaisons chimiques fortes, tandis que les liaisons inter chaînes sont plus faibles. Les chaînes macromoléculaires résultent de l'assemblage de monomères lors de l'opération de polymérisation. Certaines températures conditionnent l'état physique du polymère et donc son comportement (FIG. 1.1) :

- la température de transition vitreuse  $T_g$  qui sépare le comportement vitreux à  $T < T_g$  (solide) de l'état caoutchouteux ou élastomère à  $T > T_g$  (liquide) ;

1. Notre analyse dans cette première section se fonde sur les ouvrages suivants : (Carrega, 2000; Rault, 2002; Etienne et David, 2002).

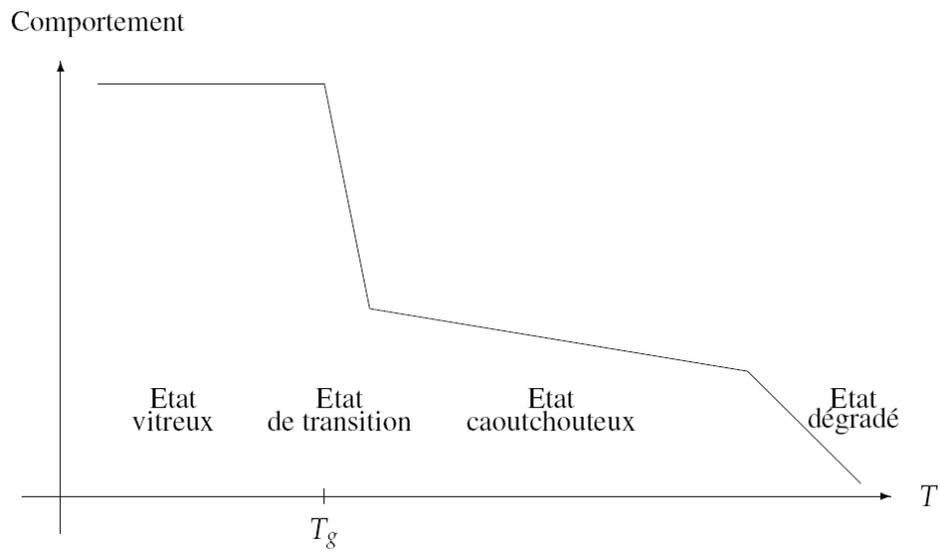


FIGURE 1.1 – Comportement idéalisé d'un polymère en fonction de la température.

- la température de cristallisation  $T_c$  et la température de fusion  $T_f$  qui définissent le domaine d'apparition de structures cristallines (pour un matériau cristallisable) ;
- la température de dégradation thermique où le matériau se dégrade et perd ses propriétés mécaniques : il est dans un état d'écoulement moléculaire et peut se comporter pratiquement comme un fluide.

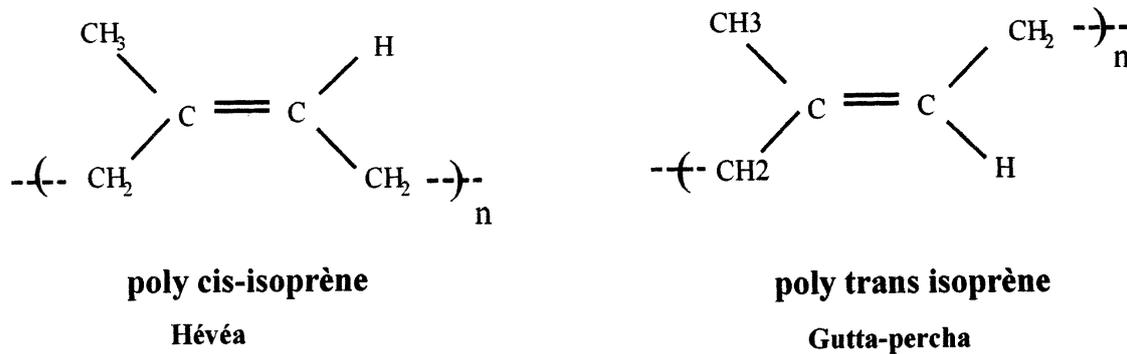


FIGURE 1.2 – Formule de l'élément de répétition pour le caoutchouc naturel provenant des arbres hévéa et gutta.

Il existe trois catégories parmi les matériaux polymères :

- les thermoplastiques (amorphes ou semi-cristallins) ont tendance à avoir un comportement liquide par élévation de température et à redevenir rigide au refroidissement, propriété très utile pour des mises en forme répétées ;
- les thermodurcissables subissent une transformation chimique lorsqu'ils sont chauffés : leurs molécules forment un réseau tridimensionnel réticulé ; ces matériaux ne peuvent subir qu'une seule mise en forme ;
- les élastomères sont utilisés pour leur comportement caoutchouteux existant sur un domaine de température important : ils peuvent être de nature thermodurcissable (réticulation chimique) ou de nature thermoplastique (réticulation physique par cristallites ou domaines à haute température de transition vitreuse).

La présence d'une double liaison carbone dans certaines macromolécules constitue le principal avantage mais aussi désavantage de celles-ci. Par son ouverture, la double liaison permet la vulcanisation pour créer des ponts entre les chaînes. Toutefois, cette double liaison est aussi sujette à l'oxydation qui induit une détérioration des propriétés mécaniques.

## 1.1.2 Les élastomères

### a Les différents types d'élastomères

#### Le caoutchouc naturel (ou NR pour Natural Rubber)

Le caoutchouc naturel existe dans le latex sous forme de globules de diamètre moyen  $0.5 \mu\text{m}$ , en suspension dans un milieu aqueux. Ce latex provenant de la "saignée" de l'hévéa est recueilli dans une coupe en aluminium puis est filtré, coagulé avec de l'acide et enfin lavé et séché. Il est composé chimiquement de polyisoprène de conformation 1,4 cis (FIG. 1.2). Par exemple, l'hévéa *brasiliensis* fournit un latex ayant plus de 98% de poly cis-isoprène. Une autre variété d'arbres, les gutta, donne un autre latex composé de polyisoprène de conformation 1,4 trans qui est le Gutta-percha (FIG. 1.2).

#### Les caoutchoucs synthétiques

Voici une liste non-exhaustive des principaux élastomères synthétiques avec quelques unes de leurs propriétés :

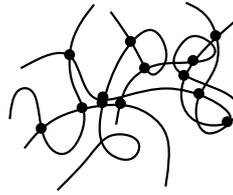


FIGURE 1.3 – Chaînes élastomériques réticulées (ronds noirs).

- BR (Butadiene Rubber) : utilisé dans la fabrication des pneumatiques ;
- CR (Chloroprene Rubber) : il présente une bonne résistance à la chaleur (150°C) et aux produits chimiques, comme les huiles et le pétrole et s'utilise dans la fabrication d'élastomères destinés à l'automobile, aux adhésifs ;
- EPDM (Ethylene-Propylene Diene Rubber) : très bonne résistance à la température (150°C) et à l'ozone ;
- IIR (Isobutene-Isoprene Rubber ou butyl rubber) : il est très peu perméable aux gaz et à l'humidité et présente d'excellentes propriétés isolantes, une bonne résistance à l'ozone ainsi qu'aux intempéries : c'est l'élastomère le plus employé dans la fabrication des chambres à air de pneumatiques ;
- NBR (Nitrile Butadiene Rubber) : il présente une bonne résistance aux hydrocarbures, huiles, graisses imperméables et est souvent utilisé comme joint en contact avec des hydrocarbures ;
- SBR (Styrene Butadiene Rubber) : ce copolymère de butadiène et de styrène est très utilisé dans la fabrication des pneumatiques et possède une grande résistance à l'abrasion, au vieillissement et à l'ozone.

## b Formulation

La formulation est l'art de choisir et d'associer les constituants d'un mélange pour lui conférer des propriétés spécifiques. Cette formulation a pour but de vulcaniser, renforcer et protéger le caoutchouc. Elle est souvent tenue secrète par les industriels.

### Réticulation - vulcanisation

Au-delà de la température de transition vitreuse, l'élastomère est dans l'état caoutchouteux : les chaînes sont capables de s'écouler les unes par rapport aux autres. C'est le phénomène de *cold flow*. Pour supprimer cet écoulement et obtenir les propriétés élastiques du caoutchouc, il est nécessaire de le réticuler, c'est-à-dire de créer des ponts chimiques permanents entre les chaînes (FIG. 1.3). L'ordre de grandeur de ces ponts est d'un pour cent monomères. Notons que des enchevêtrements entre les chaînes peuvent jouer le rôle de réticulation physique.

La vulcanisation est une réticulation qui consiste à relier à chaud (170-200°C) les chaînes par des ponts au soufre entre les doubles liaisons carbone-carbone. Le degré de vulcanisation d'un caoutchouc détermine les caractéristiques du matériau : peu vulcanisé, il ne sera pas résistant, et trop vulcanisé, il deviendra rigide et perdra son élasticité. Des activateurs et des accélérateurs permettent d'accroître la vitesse de vulcanisation et de modifier la nature du réseau.

Il est aussi possible de réticuler l'élastomère avec des peroxydes organiques en créant des liaisons directes entre les atomes de carbone de deux chaînes.

### Renforcement par des charges

Dans la plupart des formulations, des charges sont ajoutées à l'élastomère. L'objectif de ces charges est de renforcer les propriétés mécaniques de l'élastomère : résistance à la rupture et à l'abrasion, augmentation de la rigidité et des propriétés amortissantes. Les charges les plus courantes sont les noirs de carbone (qui confèrent au caoutchouc sa couleur noire), la silice et le kaolin. Leurs proportions peuvent aller de quelques pourcents à plus de 50% pour un élastomère fortement chargé. La taille des particules, leur géométrie, leur surface spécifique et leur chimie de surface permettent de modifier les propriétés des élastomères chargés.

La dénomination des noirs de carbone est normalisée par l'ASTM (1993)<sup>2</sup>. Elle se compose de quatre caractères. Le premier est une lettre, N ou S. Le préfixe N (pour "Normal cure rate") désigne l'effet du noir de carbone sur la vitesse de vulcanisation de l'élastomère. Ces noirs sont typiquement des noirs de four. Le préfixe S (pour "Slow cure rate") désigne les noirs de carbone obtenus de façon différente (par exemple les noirs de contact) permettant une vulcanisation lente. Le deuxième caractère est un chiffre désignant la taille moyenne des noirs de carbone. Le tableau 1.1 détaille les dix groupes ainsi obtenus. Les deux derniers chiffres sont assignés arbitrairement selon d'autres propriétés. De plus amples informations sont disponibles par exemple dans SFMM (1977); Townson et Hallett (2005).

Dénomination ASTM	Diamètre moyen des particules (nm)	Ancienne dénomination
900-999	201-500	MT
800-899	101-200	FT
700-799	61-100	SRF
600-699	49-60	GPF, HMF
500-599	40-48	FEF
400-499	31-39	FF
300-399	26-30	HAF, EPC
200-299	20-25	ISAF
100-199	11-19	SAF
000-099	1-10	-

TABLE 1.1 – Taille moyenne des noirs de carbone pour les dix classes selon la dénomination ASTM.

### Autres ingrédients

Des plastifiants (pour faciliter l'addition et la dispersion des ingrédients dans le mélange), des anti-oxydants (dont la fonction est de protéger le caoutchouc de la dégradation par oxydation), des charges non-renforçantes qui modifient très peu les propriétés du caoutchouc mais permettent de réduire le coût de fabrication sont aussi employées pour la fabrication des caoutchoucs.

### c Mise en œuvre

Le procédé de mise en œuvre se scinde en trois étapes successives. Tout d'abord, le mélangeage, qui consiste à disperser dans le caoutchouc les différents ingrédients de la formulation. Cette étape est importante car elle décide des propriétés futures du matériau, notamment en terme de fatigue.

2. American Society of Testing Materials.

En effet, si les charges sont mal dispersées, des agglomérats de taille importante joueront le rôle de défauts. Vient ensuite l'étape de mise en forme qui est effectuée quand le mélange est dans un état liquide visqueux. L'extrusion, le calandrage ou le moulage sont les principaux moyens de mise en forme. Finalement, la cuisson fait passer le caoutchouc de l'état cru à l'état cuit. C'est au cours de cette cuisson qu'a lieu la vulcanisation.

### 1.1.3 Matériau de l'étude

Nous allons nous intéresser dans cette étude à un caoutchouc naturel réticulé chargé au noir de carbone typique des applications visées dans le domaine automobile. Sa composition<sup>3</sup> est donnée dans le tableau 1.2. Il sera par la suite dénommé NR045. Sa température de transition vitreuse est inférieure à la température ambiante : il est donc utilisé dans son état caoutchouteux.

Ingrédient	Quantité (pce)	Pourcentage en masse (%)
Caoutchouc naturel	100	64.1
Oxyde de zinc	9.95	6.4
Plastifiant	3	1.9
Noir de carbone	34	21.8
Acide stéarique	3	1.9
Antioxydant	2	1.3
Accélérateurs	4	2.6

TABLE 1.2 – Formulation du caoutchouc étudié (NR045).

## 1.2 Premières caractéristiques mécaniques

### 1.2.1 Incompressibilité

Une des principales caractéristiques des élastomères est de se déformer à volume presque constant. Il est ainsi très difficile de mesurer une variation de volume lors d'un essai sur une pièce massive. C'est pourquoi les élastomères sont généralement considérés comme incompressibles. Dans le cas du caoutchouc de notre étude, Chagnon (2003) mesure un module de compressibilité de 231 MPa, alors que le module de cisaillement est de l'ordre de 0.77 MPa. Nous pouvons donc conclure que l'hypothèse d'incompressibilité est réaliste pour notre matériau.

Cependant, une variation de volume peut apparaître suite à des phénomènes de cavitation. Farris (1968) mesure justement ces variations dans un caoutchouc très chargé. Ce phénomène se produit aussi lors d'essais à très grandes déformations ou lors d'essais cycliques. Pour caractériser plus précisément cette variation de volume, il faudrait analyser les phénomènes d'amorçage et de propagation de fissures internes. L'endommagement du matériau pourrait alors être lié à une perte d'incompressibilité (Andrieux et al., 1997; Layouni et al., 2003).

Dès lors, la modélisation de la compressibilité ou de l'incompressibilité requiert une grande attention et doit être justifiée afin de choisir le modèle le plus réaliste. De plus, les contraintes sont fortement liées à l'incompressibilité via le terme de pression. Ainsi, toute étude en contraintes doit se fonder sur une modélisation fine de la pseudo-incompressibilité.

3. La composition d'un caoutchouc est souvent donnée en fonction du pourcentage de la gomme pce ou phr pour *per hundred parts of rubber*.

## 1.2.2 Hyperélasticité

Les élastomères sont remarquables par leur capacité à subir de très grandes déformations. Les déformations à rupture peuvent varier de 300% à 1000% selon le type de caoutchouc étudié. Cette élasticité est aussi fortement non-linéaire. Une loi linéaire approchée est incapable de rendre compte de la variation de la raideur de l'élastomère au cours d'un chargement. Enfin, malgré les grandes déformations subies, les élastomères sont capables de retrouver leur géométrie d'avant chargement presque intégralement. Les déformations résiduelles restent faibles par rapport aux déformations maximales.

Un matériau est dit hyperélastique (Ciarlet, 1986) lorsque les contraintes dérivent d'un potentiel, c'est-à-dire lorsqu'il existe une fonction  $W$ , densité d'énergie, telle que  $\underline{\underline{\Pi}} = \partial W / \partial \underline{\underline{E}}$  (voir le chapitre suivant pour le détail des notations).

Nous présentons au chapitre 4 les lois de comportement hyperélastiques classiquement utilisées. Deux points sont à retenir : les lois de comportement statistiques se basent sur des modèles physiques pour bâtir leur loi de comportement, les modèles phénoménologiques postulent une loi mathématique dont les paramètres sont identifiés expérimentalement.

## 1.2.3 Matériaux dissipatifs

Les élastomères sont des matériaux dissipatifs : une partie de l'énergie mécanique est dissipée sous forme de chaleur. Lors d'un cycle de sollicitation, une boucle d'hystérèse apparaît par exemple dans un diagramme force-déplacement et l'aire de cette boucle représente l'énergie mécanique dissipée sur ce cycle. Ces propriétés dissipatives sont notamment utilisées dans les structures anti-vibratoires.

La dépendance à la vitesse de sollicitation de la réponse d'un élastomère traduit les phénomènes visqueux. Cette viscosité va affecter les contraintes, et les déphaser vis-à-vis de la déformation : il y aura donc dissipation d'énergie mécanique. Les phénomènes visqueux s'observent aussi lors d'essais avec relaxation ; l'éprouvette est maintenue dans un état de déformation fixé et l'état de contrainte varie avec le temps. Cette viscosité intervient sur plusieurs échelles de temps et nécessite une modélisation fine pour rendre compte précisément de tous les phénomènes rencontrés.

## 1.3 Comportement cyclique

Lors de son utilisation, une structure élastomère est la plupart du temps soumise à une histoire de chargement. Ces chargements peuvent être cycliques, mais sont souvent variables. Or, l'élastomère est un matériau dont les propriétés mécaniques dépendent fortement de l'histoire. Il est donc nécessaire d'étudier le comportement cyclique à travers l'effet Mullins aux premiers cycles, mais aussi à plus grand nombre de cycles pour analyser l'autoéchauffement et l'évolution des effets visqueux.

### 1.3.1 Effet Mullins

#### a Description

L'adoucissement<sup>4</sup> du caoutchouc est connu depuis la fin du 19<sup>ème</sup> siècle. Mullins est le premier à décrire précisément ce phénomène (Mullins et Tobin, 1957) ; quatre observations définissent ainsi l'effet Mullins (FIG. 1.4) :

- le matériau s'adoucit après plusieurs extensions à déformation constante ;

---

4. L'adoucissement se constate par une diminution des contraintes pour une même élongation.

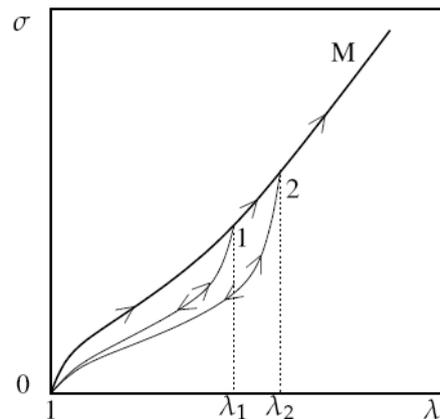


FIGURE 1.4 – L'effet Mullins est souvent représenté de manière idéalisée : lors de la première charge jusqu'à un chargement donné  $\lambda_i$ , la réponse suit la courbe en gras (M) ; les décharges et recharges suivantes s'effectuent selon la courbe (i) de façon réversible tant que le chargement maximal précédemment atteint n'est pas dépassé ; lorsque le chargement devient supérieur à celui-ci, la réponse du matériau revient sur la courbe de première charge.

- le comportement à grandes déformations ne dépend pas de l'histoire du matériau à petites déformations ;
- le comportement se raidit rapidement à l'approche de l'extension maximale atteinte précédemment au cours du chargement ;
- après plusieurs cycles, le comportement s'est adouci et se stabilise : on parlera aussi d'accommodation<sup>5</sup>.

## b Premières interprétations

De multiples interprétations ont été données pour l'effet Mullins et nous nous sommes bornés à ne retenir que les grandes lignes parmi la riche littérature existant sur le sujet. Les différents phénomènes envisagés sont généralement les suivants :

- réarrangement du réseau caoutchouteux ;
- cristallisation-décristallisation sous contrainte (Toki et al., 2000) ;
- glissement de chaînes à la surface des charges ;
- rupture des liaisons matrice-charge.

Selon que le caoutchouc est chargé ou non, ces interprétations peuvent expliquer tout ou une partie de l'effet Mullins. Le terme d'endommagement est souvent utilisé pour qualifier ces phénomènes. Il faut néanmoins faire attention à l'interprétation donnée dans ce cas. L'effet Mullins est en fait partiellement recouvrable. Bueche (1961) constate sur des essais de recouvrement à chaud qu'en quelques jours le matériau peut retrouver en grande partie le comportement à première charge. Chagnon (2003)

5. La stabilisation a lieu lorsque la réponse présente un même cycle qui se répète. On parle d'accommodation en référence à la plus grande élongation vue dans l'histoire du matériau. Ce terme a la même signification que pour les métaux : stabilisation avec une boucle d'hystérèse, à différencier de l'adaptation (stabilisation avec un comportement élastique) et du rochet (pas de stabilisation).

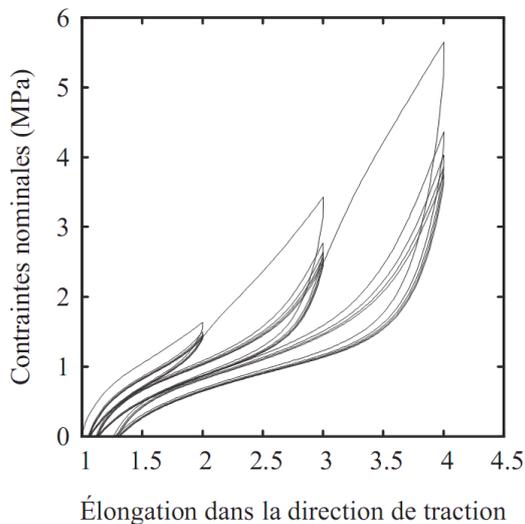


FIGURE 1.5 – Cisaillement pur cyclique contrôlé en déplacement (Raoult, 2005).

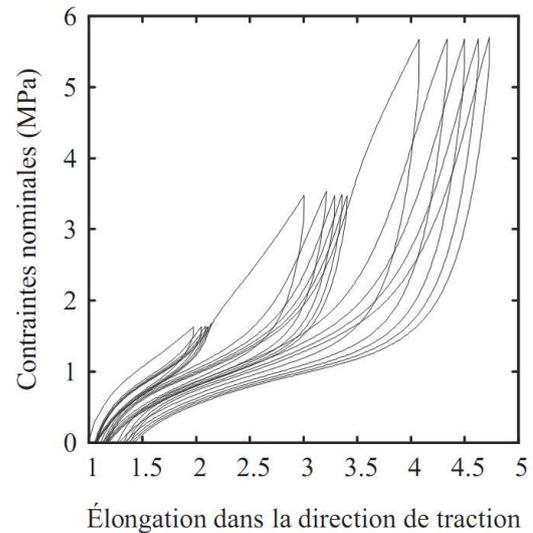


FIGURE 1.6 – Cisaillement pur cyclique contrôlé en effort (Raoult, 2005).

étude le recouvrement à long terme (100 jours) sur un élastomère chargé et montre en tenant compte du vieillissement que l'effet Mullins ne se recouvre pas totalement. Il est donc possible de parler d'endommagement partiel car seule une partie de l'effet Mullins semble recouvrable.

### c Anisotropie

De nombreux auteurs (Martin Borret, 1998; Chagnon, 2003; Raoult, 2005) ont montré expérimentalement que l'effet Mullins introduisait de l'anisotropie dans le matériau. L'accommodation est présente dans la direction de chargement et ne l'est pas ou peu dans les directions transverses.

### d Discussion

L'effet Mullins n'est présent que pendant les premiers cycles d'un chargement, voire seulement le premier selon le point de vue adopté. Raoult (2005) a montré que l'exploitation du comportement cyclique était nécessaire pour une analyse en fatigue. En effet, pour des essais de fatigue pilotés en effort ou en déplacement, ce sont les grandeurs en régime stabilisé et non les grandeurs au premier cycle qui permettent de prédire la durée de vie. Nous pouvons voir par exemple sur les figures 1.5 et 1.6 que si les grandeurs au premier cycle sont identiques pour deux essais contrôlés en déplacement et en effort, ces grandeurs sont différentes après accommodation. La description du comportement cyclique sera donc nécessaire dans la suite de nos travaux.

Les figures 1.7 et 1.8 résument les différents aspects de l'effet Mullins sur un matériau dissipatif. La première courbe illustre l'accommodation et les phénomènes dissipatifs. L'aire assimilée à l'énergie dissipée est très importante à la première charge puis tend à se stabiliser à une valeur plus faible. L'énergie alors dissipée est en partie due aux effets visqueux. La deuxième figure est une illustration expérimentale des constatations de Mullins sur l'influence du maximum de l'histoire de chargement.

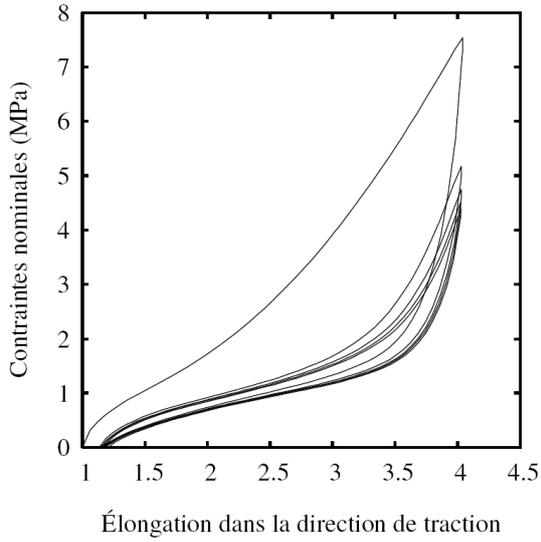


FIGURE 1.7 – Courbe de traction cyclique. Cinq cycles de chargements sont imposés entre effort nul et une déformation maximale de 300% (Raoult, 2005).

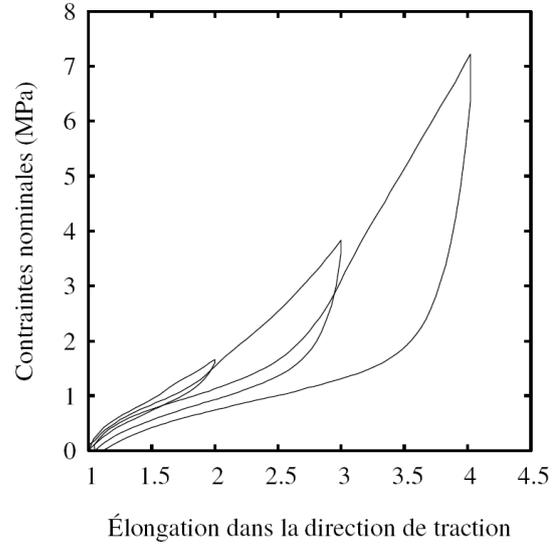


FIGURE 1.8 – Courbe de tractions croissantes. Chaque cycle de chargement est effectué à un niveau de déformation supérieur à celui du cycle précédent (Raoult, 2005).

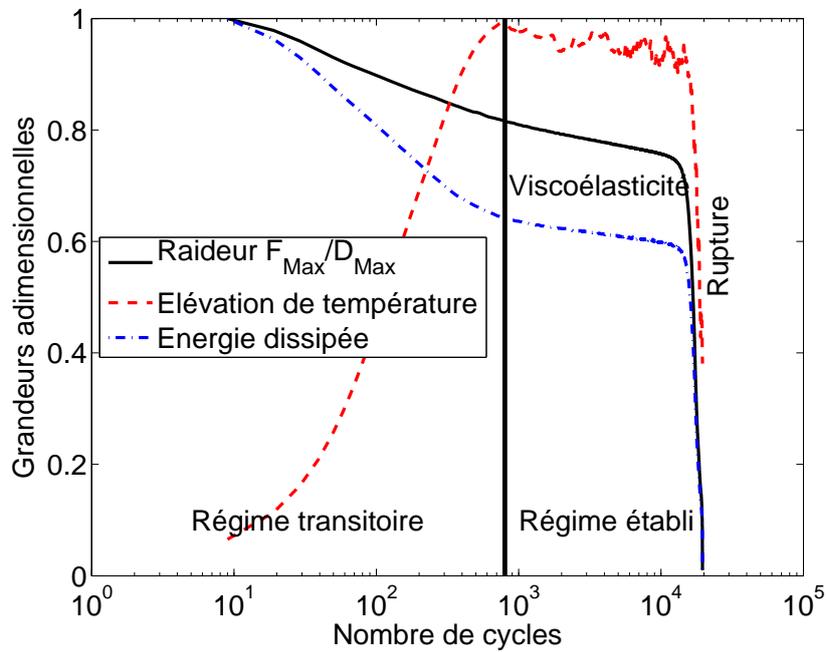


FIGURE 1.9 – Évolution de la raideur (ici définie comme le rapport entre l’effort et le déplacement maximum), de la température et de l’énergie dissipée lors d’un essai cyclique piloté en déplacement.

### 1.3.2 Interprétation d'un essai cyclique

#### a Autoéchauffement

Nous avons tracé sur la figure 1.9 les grandeurs classiquement mesurées lors d'un essai cyclique. Nous observons tout d'abord que la température augmente significativement au début de l'essai puis se stabilise : c'est le phénomène d'autoéchauffement. Cet autoéchauffement est très prononcé pour les élastomères car ces matériaux dissipent beaucoup d'énergie et sont très peu conducteurs. La température se stabilise lorsque l'équilibre thermique est atteint : toute l'énergie dissipée par le matériau est évacuée à l'extérieur.

#### b Comportement stabilisé

Après l'adoucissement aux premiers cycles consécutif à l'effet Mullins (non représenté sur la figure 1.9), nous observons une diminution continue de la raideur : l'effort maximal décroît de façon logarithmique. C'est la manifestation des phénomènes visqueux à long terme. Notons que cette diminution est légèrement plus importante au cours du régime transitoire avec la montée en température.

La variation de l'énergie dissipée est différente. Après une forte baisse lors du régime transitoire due à l'augmentation de la température, nous observons une décroissance logarithmique proche de celle de la raideur (FIG. 1.9) au cours du régime établi, conséquence des effets visqueux.

La rupture de l'éprouvette par fatigue intervient ici vers  $2 \cdot 10^4$  cycles.

#### c Discussion

Lors d'un essai de fatigue, la majorité de la sollicitation se déroule en régime établi. Ainsi est-il nécessaire de connaître les grandeurs stabilisées. C'est pourquoi nous étudierons en détail le comportement cyclique dans la partie II et l'autoéchauffement dans la partie III de ce mémoire.

### 1.3.3 Endommagement

#### a Vieillessement

Le comportement d'un élastomère peut être largement conditionné par son environnement. L'oxydation par l'ozone, le rayonnement ultraviolet, la chaleur sont autant de facteurs qui viennent dégrader le comportement mécanique. Le matériau se rigidifie, se fragilise et perd ainsi ses propriétés hyperélastiques.

#### b Phénomène de fatigue

Des sollicitations cycliques ou variables d'une structure élastomère peuvent entraîner sa rupture, sans que les déformations ou contraintes aient dépassées la limite à rupture : c'est le phénomène de fatigue. La quatrième partie de ce mémoire est consacrée à l'étude de ce phénomène.

## 1.4 Cristallisation

La cristallisation est souvent mise en avant pour expliquer les qualités supérieures des caoutchoucs naturels par rapport aux synthétiques. En effet, ces matériaux peuvent cristalliser dans l'état déformé ce qui influence les caractéristiques mécaniques, telles que le comportement ou l'endurance. Nous

présentons dans cette partie le phénomène de cristallisation au repos et induite par la déformation. Notamment, nous détaillons l'influence de la température sur ce phénomène.

### 1.4.1 Cristallisation au repos

L'aptitude de certains matériaux élastomères à cristalliser tient à la stéréorégularité des chaînes macromoléculaires : si les chaînes sont régulières de conformation cis, elles vont pouvoir s'assembler et former des cristaux de polymères. Ainsi, le caoutchouc naturel est-il composé généralement de plus de 99% de poly cis-isoprène (voir paragraphe a) et a une très bonne aptitude à cristalliser. Certains élastomères synthétiques peuvent aussi cristalliser mais cette propriété est moindre car la régularité de leurs chaînes est plus faible.

Le degré de cristallisation maximal est de l'ordre de 25-30%, le reste étant dans la phase amorphe, ou alignée : les chaînes sont alignées mais ne forment pas de cristaux. Pour les matériaux élastomères, cette cristallisation au repos a lieu à des températures basses, typiquement de l'ordre de  $-25^{\circ}\text{C}$  (Gent et al., 1998), et ne nous intéresse donc pas.

### 1.4.2 Cristallisation induite par déformation

Sous l'effet d'une déformation, les chaînes s'alignent et peuvent cristalliser : c'est la cristallisation induite par déformation. Cet effet peut être expliqué simplement d'un point de vue thermodynamique. En effet, au point de fusion, la température de fusion est liée à l'enthalpie  $H_f$  et l'entropie  $S_f$  de fusion<sup>6</sup> par :

$$T_f = \frac{\Delta H_f}{\Delta S_f} . \quad (1.1)$$

Lorsque l'élastomère est étiré, les chaînes s'alignent et l'entropie diminue, faisant ainsi augmenter la température de fusion. Ainsi, même si à température ambiante le matériau ne cristallise pas au repos, il peut cristalliser dans un état déformé. Contrairement à la cristallisation au repos qui est très lente (temps caractéristique de l'ordre de l'heure), la cristallisation induite par déformation est très rapide : Mitchell et Meier (1968) montrent que le temps de création des cristallites est de l'ordre de 60 ms. Toki et al. (2002) montrent qu'aux très grandes elongations, le taux de phase cristalline est d'environ 20%, celui de la phase amorphe 75% et les 5% restants sont constitués de chaînes alignées.

Cette cristallisation induite par déformation est primordiale car l'augmentation des propriétés mécaniques de certains matériaux est souvent expliquée par ce phénomène. Par exemple, lors de la propagation d'une fissure, une zone cristallisée peut apparaître en fond de fissure car la déformation y est très grande. Cette zone cristallisée fortement anisotrope peut freiner ou bloquer la propagation d'une fissure (voir le chapitre 8 pour une étude détaillée de ces phénomènes).

#### a Modélisation

L'article de Magill (1995) propose une revue assez complète de la cristallisation. Trois approches coexistent pour décrire la cristallisation :

- l'approche thermodynamique (Flory, 1947) ;
- l'approche cinétique fondée sur le modèle d'Avrami ;
- l'approche par modèle de chaîne repliée.

6. L'enthalpie de fusion correspond à la quantité de chaleur nécessaire à un corps pour qu'il change d'état, cette transformation ayant lieu à température et pression constantes.

Dans le modèle proposé par Flory, toutes les chaînes sont supposées gaussiennes et passant par une cristallite. Ce modèle permet par exemple de relier la température de fusion  $T_m$  avec l'élongation  $\lambda$  :

$$\frac{1}{T_m^0} - \frac{1}{T_m} = \frac{R}{\Delta H_f} \left[ \left( \frac{6}{\pi N_c} \right)^{\frac{1}{2}} \lambda - \frac{\lambda^2}{2N_c} - \frac{1}{\lambda N_c} \right] . \quad (1.2)$$

où  $T_m^0$  est la température d'apparition de la cristallisation,  $R$  la constante des gaz parfaits,  $\Delta H_f$  l'enthalpie de fusion et  $n_c$  le nombre moyen de monomères compris entre deux points de réticulation. Toutefois, ce modèle reste qualitatif et ne permet pas de déterminer exactement la cristallinité ou la température de fusion (Trabelsi et al., 2003). L'objet de notre travail n'est pas de modéliser le phénomène de cristallisation, et nous allons dans la suite nous intéresser plus particulièrement aux résultats expérimentaux afin de dégager les principales idées.

## b Évolution de la cristallinité au cours d'un cycle mécanique

De nouvelles méthodes expérimentales telles que la diffraction X permettent de suivre presque en temps réel l'évolution de la cristallinité au cours d'un cycle mécanique. Les expérimentations menées par Toki et al. (2000) utilisent la diffraction des rayons X (30 minutes de temps d'acquisition) sur une éprouvette de caoutchouc placée dans une machine de traction *in situ*. L'utilisation de synchrotrons par plusieurs équipes (Toki et al., 2002; Murakami et al., 2002; Trabelsi et al., 2003) permet d'avoir une mesure instantanée des propriétés cristallines. Ainsi, ces équipes peuvent étudier l'évolution des contraintes et de la cristallinité en fonction de la déformation comme représentée sur la figure 1.10. Un mécanisme de cristallisation associé est proposé par Toki et al. (2000) et est représenté sur la figure 1.11.

Le phénomène de surfusion est ici bien observé : à une température donnée, l'élongation d'apparition des cristallites  $\lambda_a$  lors de la charge est plus grande que l'élongation à la disparition des cristallites  $\lambda_e$  lors de la décharge. Dit autrement, à une élongation donnée, la température de cristallisation est inférieure à la température de fusion. Ce phénomène de surfusion est dissipatif et serait à l'origine de presque toute l'énergie dissipée dans un NR lors d'un cycle mécanique (Toki et al., 2000; Trabelsi et al., 2003).

Nous avons vu que le raidissement observé aux très grandes déformations est caractéristique des matériaux élastomères. Trabelsi et al. (2003) expliquent ce raidissement par une augmentation du taux de réticulation due à la cristallisation : les cristallites joueraient le rôle de points de réticulation et augmenteraient ainsi le taux de réticulation. Appliqué à la théorie de Flory, ce changement dans le taux de réticulation suffirait à expliquer le raidissement, sans introduire la notion de la limite d'extensibilité des chaînes.

## c Influence des charges

L'influence de la présence de charges de noir de carbone a été étudiée par la même équipe (Trabelsi et al., 2003; Marchal, 2006; Rault et al., 2006). Sur les cycles de traction présentés sur la figure 1.12, nous pouvons constater que la cristallisation apparaît beaucoup plus tôt dans un caoutchouc chargé. En effet, les charges amplifient localement les déformations et favorisent la cristallisation.

## d Influence de la température

Trabelsi et al. (2003) effectuent des mesures de cristallinité en fonction de la température à élongations imposées (FIG. 1.13). Ils en déduisent la relation liant la température de fusion  $T_m$  à l'élongation

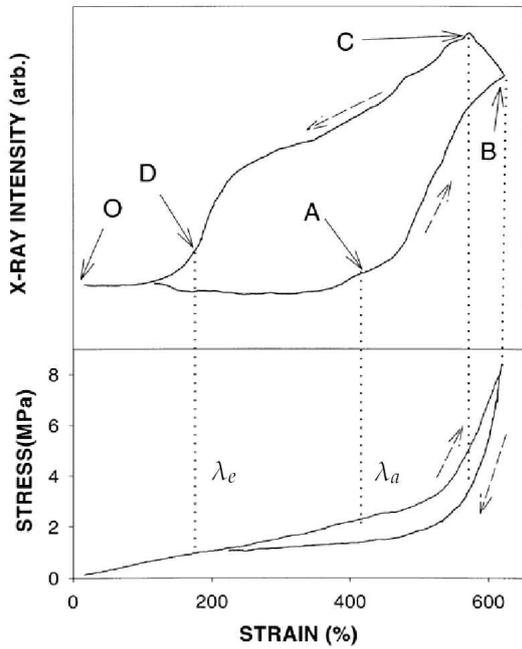


FIGURE 1.10 – Courbes cristallinité-déformation et contrainte-déformation (Toki et al., 2000).

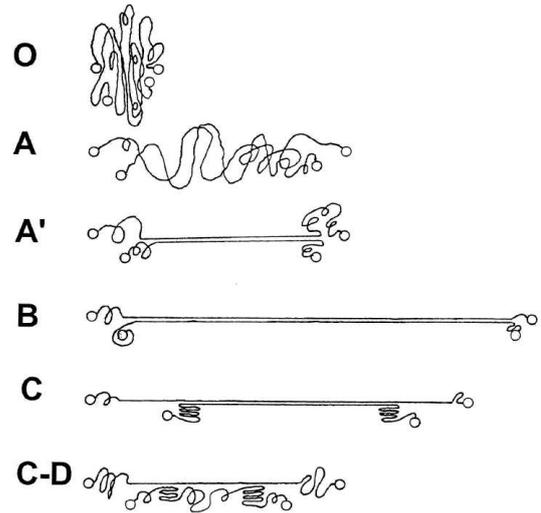


FIGURE 1.11 – Modèle décrivant l'évolution de la cristallisation induite par déformation au cours d'un cycle. Les cercles représentent des points de réticulations et les lignes les chaînes élastomériques (Toki et al., 2000).

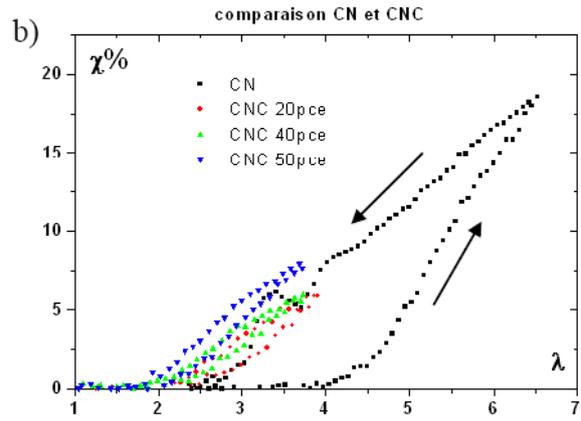
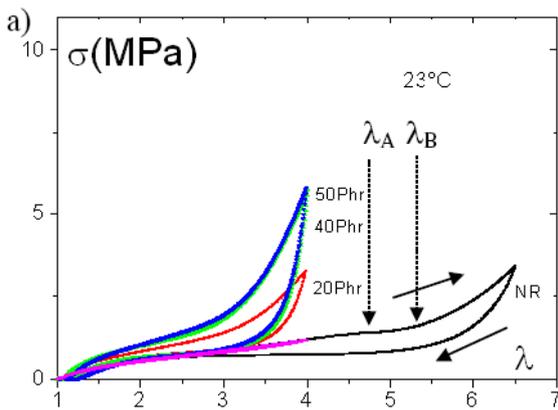


FIGURE 1.12 – a) Cycles de traction sur du NR et du NR chargé à différents taux de noir de carbone. b) Évolution de la cristallinité pour ces mêmes cycles (Marchal, 2006).

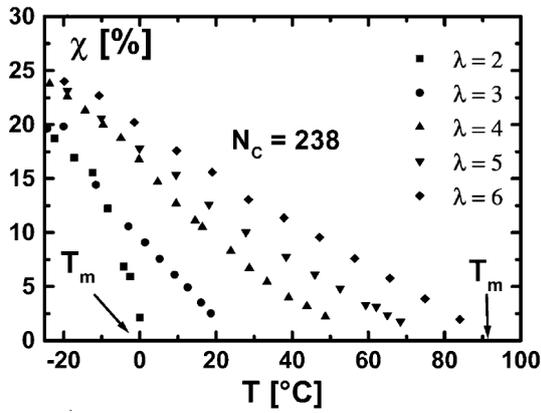


FIGURE 1.13 – Mesure de cristallinité en fonction de la température à diverses elongations (Trabelsi et al., 2003).

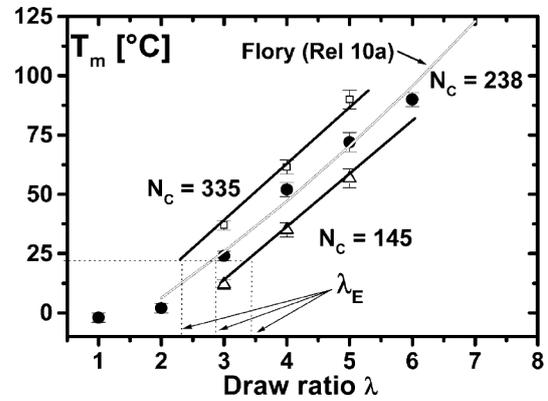


FIGURE 1.14 – Évolution de la température de fusion en fonction de l'elongation pour trois matériaux dont le nombre de monomères  $N_c$  entre deux ponts de réticulation vaut 335, 238 et 145 (Trabelsi et al., 2003).

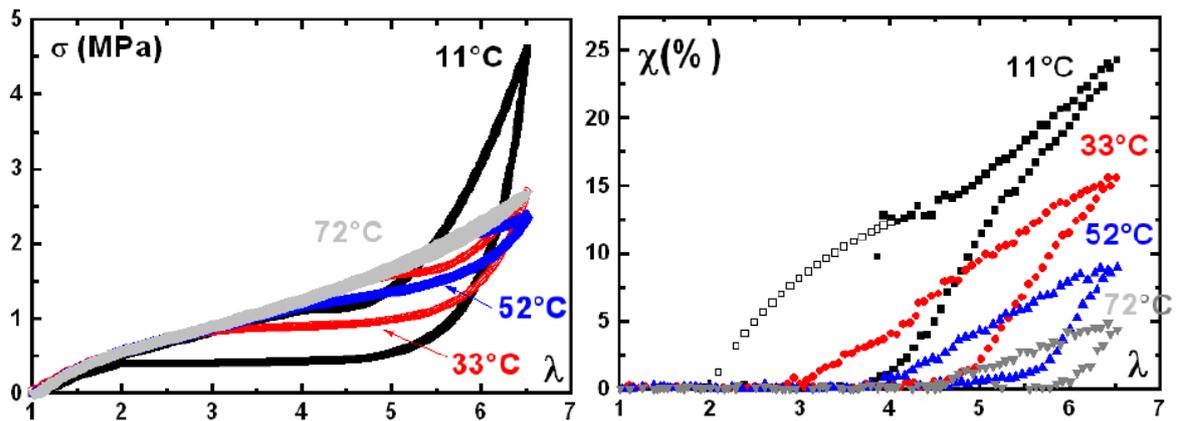


FIGURE 1.15 – Cycles de traction et mesures de cristallinité associées pour un NR à 11, 33, 52 et 72 °C (Marchal, 2006).

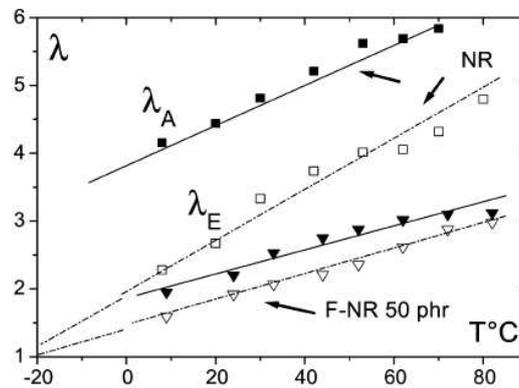


FIGURE 1.16 – Élongations de cristallisation  $\lambda_a$  et de fusion  $\lambda_e$  fonctions de la température pour un NR et un NR chargé (Rault et al., 2006).

$\lambda_e$  (FIG. 1.14) et proposent une modélisation linéaire

$$T_m = T_m^0(N_c) + B_T(\lambda_e - 1); \quad B_T = 32^\circ\text{C}, \quad \text{pour } \lambda_e > 3 \quad . \quad (1.3)$$

Les auteurs constatent que la corrélation entre le modèle de Flory (EQ. 1.2) et leurs mesures est très satisfaisante, mais que les paramètres utilisés pour cette corrélation ne correspondent pas aux paramètres mesurés. Ceci confirme le fait que le modèle de Flory n'est pas prédictif.

Marchal (2006) réalise des essais de traction à plusieurs températures (figure 1.15 pour un NR). Un effondrement de la cristallinité avec la température est constaté, ainsi que l'augmentation des élongations seuils de cristallisation  $\lambda_a$  et de fusion  $\lambda_e$ . Ces élongations ont été déterminées pour un NR non-chargé et un NR chargé au noir de carbone (FIG. 1.16). La relation liant ces élongations et la température est représentée en première approximation par une droite.

Au point de vue du comportement, le matériau se raidit beaucoup moins avec la température, ce qui conforte l'hypothèse selon laquelle les cristallites formées joueraient le rôle de liaisons de réticulation.

## e Discussion

Le principal fait à noter est que la présence de cristallisation induite par déformation est fonction de la température et de l'élongation (FIG. 1.16). Par exemple, si à température ambiante le NR chargé ne cristallise que pour des élongations supérieures à 2, à 80°C, il ne cristallise que pour des élongations supérieures à 3. Nous verrons dans le chapitre 8 que le phénomène de cristallisation a une influence importante sur le phénomène de fatigue d'un matériau cristallisable. Ainsi, l'influence de la température devrait-elle se traduire par un changement notable des propriétés en fatigue.

## 1.5 Conclusions

Nous avons, dans ce chapitre, décrit les caractéristiques générales des élastomères. Les propriétés mécaniques telles que l'incompressibilité, l'hyperélasticité ou les phénomènes dissipatifs font l'originalité de ces matériaux et sont souvent utilisées pour la conception de pièces industrielles. Nous détaillerons dans le prochain chapitre les outils mécaniques nécessaires à l'étude des élastomères.

Ces composants sont soumis en service à une histoire de chargement et nous devons donc caractériser le comportement cyclique. Non seulement ces matériaux présentent un fort adoucissement aux premiers cycles (effet Mullins), mais l'autoéchauffement et les phénomènes visqueux modifient le comportement. La deuxième partie de ce mémoire est consacrée à l'étude et à la modélisation du comportement thermomécanique cyclique des élastomères. La troisième partie présentera une modélisation de l'autoéchauffement.

Enfin, nous avons décrit le phénomène de cristallisation induite par déformation. Cet alignement de chaînes sous contrainte dépend de la déformation imposée mais aussi fortement de la température. Nous nous appuyerons sur cette description dans la suite de ce mémoire pour l'étude du comportement dans la deuxième partie, mais aussi pour l'analyse en fatigue dans la quatrième partie.



# Chapitre 2

## Rappels de mécanique

*Les élastomères ont un comportement original en grandes transformations. Nous allons donc écrire les équations de la mécanique afin d'analyser de façon pertinente la thermodynamique des élastomères et les couplages entre la mécanique et la thermique. Ce chapitre propose une approche lagrangienne des équations de la mécanique en grandes déformations et analyse les résultats donnés par les deux premiers principes de la thermodynamique.*

### Sommaire

---

<b>1.1 Polymères et élastomères</b>	<b>9</b>
1.1.1 Les matériaux polymères	9
1.1.2 Les élastomères	11
1.1.3 Matériau de l'étude	14
<b>1.2 Premières caractéristiques mécaniques</b>	<b>14</b>
1.2.1 Incompressibilité	14
1.2.2 Hyperélasticité	15
1.2.3 Matériaux dissipatifs	15
<b>1.3 Comportement cyclique</b>	<b>15</b>
1.3.1 Effet Mullins	15
1.3.2 Interprétation d'un essai cyclique	19
1.3.3 Endommagement	19
<b>1.4 Cristallisation</b>	<b>19</b>
1.4.1 Cristallisation au repos	20
1.4.2 Cristallisation induite par déformation	20
<b>1.5 Conclusions</b>	<b>24</b>

---

### 2.1 Le milieu continu

Nous reprenons ici la description formulée par [Salençon \(2002\)](#).

### 2.1.1 Modélisation - Volume Élémentaire Représentatif

La notion d'échelle est fondamentale dans l'étude des systèmes physiques. Le plus souvent, à une échelle macroscopique reflétant notre propre expérience, nous considérons qu'un matériau est continu alors qu'il a une structure (atomes, cristaux, chaînes, phases différentes). C'est la notion de Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.).

Le concept de continuité est lié à l'observation de l'évolution du système et requiert pour des particules voisines :

1. qu'elles restent proches géométriquement ;
2. que leurs propriétés physiques évoluent de façon comparable.

Nous verrons plus loin la traduction mathématique de cette continuité.

Notons les tailles des différents constituants d'un élastomère : distance entre les points de réticulation ( $10^{-10}$  m), particules de noir de carbone ( $10^{-9}$  à  $5 \cdot 10^{-7}$  m), agglomérats de noir de carbone ( $10^{-5}$  m), défauts ( $10^{-5}$  m à  $10^{-4}$  m). Cela nous indique que la taille d'un V.E.R. se situe entre  $10^{-4}$  et  $10^{-3}$  m.

### 2.1.2 Descriptions eulériennes et lagrangiennes

Selon le point de vue de l'observateur, le mouvement d'un milieu continu peut se décrire de deux manières :

- chaque particule est indexée par sa position initiale  $\underline{X}$  : c'est la description lagrangienne, c'est-à-dire matérielle ;
- par la donnée, à chaque instant, du champ de vitesses des particules : c'est la description eulérienne, ou géométrique.  $\underline{x}(t)$  est la position de la particule à l'instant  $t$ .

Ces deux points de vue sont bien évidemment équivalents mais selon le problème donné, il peut être plus ou moins aisé d'utiliser une description ou une autre. Dans la suite de ce mémoire, les lettres minuscules renvoient au formalisme eulérien, les majuscules au lagrangien.

### 2.1.3 Référentiel, repère, objectivité

La modélisation du milieu continu nécessite une formulation mathématique qui s'appuie sur la description et le repérage du système étudié au cours du temps. La notion de référentiel est ainsi liée à celle d'observateur : une fois fixée l'échelle du temps, un référentiel  $\mathcal{R}$  est l'ensemble des points de l'espace euclidien animés d'un mouvement de corps rigide de l'observateur.

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , les positions spatiales des particules d'un système sont données dans le repère  $R$  d'origine  $O$ . Ce repère matérialise le référentiel.

L'objectivité (Truesdell et Noll, 1992, Sect. 17) est le caractère intrinsèque vis-à-vis d'un changement de référentiel, c'est-à-dire d'un changement d'observateur (*frame-indifference*). Prenons deux observateurs, c'est-à-dire deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\tilde{\mathcal{R}}$ . La grandeur scalaire "masse volumique" au point  $P$  sera décrite par le premier observateur par  $\rho(P, t)$  et le deuxième par  $\tilde{\rho}(P, t)$ . Or, tous les observateurs attribuent la même masse volumique à une particule, soit  $\rho(P, t) = \tilde{\rho}(P, t)$ . À l'inverse, prenons le module du vecteur vitesse. Les deux descriptions donneront  $\|\underline{v}(\underline{x}, t)\|$  et  $\|\tilde{\underline{v}}(\underline{x}, t)\|$ , ils sont en général différents.

**Définition** Une grandeur scalaire  $s$  est objective si et seulement si elle est identique pour tous les observateurs à l'instant  $t$ , soit  $s(P, t) = \tilde{s}(P, t)$ .

**Définition** Une grandeur vectorielle  $\underline{u}$  est objective si et seulement si les expressions de cette grandeur pour chaque observateur dans son référentiel sont liées par les formules de changement de repère<sup>1</sup>, c'est-à-dire  $\underline{\tilde{u}}(\underline{x}, t) = \underline{Q} \cdot \underline{u}(\underline{x}, t)$ .

**Définition** Une grandeur tensorielle  $\underline{T}$  est objective si et seulement si les expressions obtenues par deux observateurs sont liées par les formules de changement de repères correspondantes.

De plus, une grandeur tensorielle peut être rattachée à des observations effectuées à divers instants, par exemple à l'instant initial de référence  $t_0$  et à l'instant actuel  $t$ . Les formules de changement de repère sont donc liées aux repères  $\mathcal{R}_{t_0}$  et  $\mathcal{R}_t$  pour le premier observateur et  $\tilde{\mathcal{R}}_{t_0}$  et  $\tilde{\mathcal{R}}_t$  pour le second. Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\text{en description eulérienne, } \underline{\tilde{T}} = \underline{Q}_t \cdot \underline{T} \cdot \underline{Q}_t^T, \quad (2.1a)$$

$$\text{en description lagrangienne, } \underline{\tilde{T}} = \underline{Q}_0 \cdot \underline{T} \cdot \underline{Q}_0^T, \quad (2.1b)$$

$$\text{en description mixte, } \underline{\tilde{T}} = \underline{Q}_t \cdot \underline{T} \cdot \underline{Q}_0^T. \quad (2.1c)$$

Selon les auteurs, la définition de l'objectivité ne se traduit pas de la même façon. Certains considèrent que l'objectivité n'est définie que par la formule donnée pour la description eulérienne. D'autres, à l'inverse, considèrent bien des changements de repères à des instants différents et les tenseurs lagrangiens et mixtes peuvent être objectifs. Ainsi, selon le point de vue adopté, certains tenseurs sont ou ne sont pas objectifs (comme par exemple le gradient de la transformation). Dans ce mémoire, nous considérons les changements de repères (EQ. 2.1) pour traduire l'objectivité.

Le principe d'objectivité ou d'indifférence matérielle (Truesdell et Noll, 1992, Sect. 19) postule que les lois de comportement qui caractérisent un matériau doivent être indépendantes de l'observateur, donc du référentiel.

## 2.2 Formalisme des transformations finies

### 2.2.1 Cinématique

Soit un système matériel  $\Omega$  dont on étudie la transformation au cours du temps. Soit  $\underline{X}$  la position (lagrangienne) d'un point matériel à l'instant  $t = t_0$ . La position (eulérienne) à l'instant  $t$  de la particule située à  $t_0$  en  $\underline{X}$  est

$$\underline{x} = \Phi(\underline{X}, t) \quad (2.2)$$

où l'application  $\Phi$  est la transformation subie par le système  $\Omega$ . L'hypothèse du milieu continu indique que  $\Phi$  est une fonction continue et dérivable en temps et en espace<sup>2</sup>.

L'application linéaire tangente associée à cette transformation est définie par  $\underline{F} = \underline{\nabla} \Phi$ . Ce gradient lagrangien permet d'écrire la formule de transport d'une configuration à une autre. Pour un vecteur matériel,

$$d\underline{x} = \underline{F} \cdot d\underline{X} \quad (2.3)$$

1. L'invariance de la distance entre deux points  $\underline{x}$  et  $\underline{x}'$  pour deux observateurs implique l'égalité  $\|\underline{\tilde{x}\tilde{x}'}\| = \|\underline{xx}'\|$ , et donc l'existence d'un tenseur du second ordre orthogonal  $\underline{Q}$  tel que  $\underline{\tilde{x}\tilde{x}'} = \underline{Q} \cdot \underline{xx}'$ .

2. Pour certains problèmes traitant de discontinuité, les hypothèses de continuité sont affaiblies pour devenir *par morceaux*.

$\underline{\underline{F}}$  se décompose de manière unique en un produit d'un tenseur orthogonal et d'un tenseur symétrique défini positif

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}} \quad (2.4)$$

où  $\underline{\underline{R}}$  est orthogonal, et où  $\underline{\underline{U}}$  et  $\underline{\underline{V}}$  sont des tenseurs symétriques définis positifs différents, respectivement appelés distorsion à droite et distorsion à gauche de  $\underline{\underline{F}}$ .

Les tenseurs des dilatations de Cauchy-Green droit et gauche s'expriment respectivement par  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}$  et  $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$ . Le produit simplement contracté est lui transporté comme suit :  $\underline{\underline{dx}} \cdot \underline{\underline{dy}} = \underline{\underline{dX}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{dY}}$ . Notons que les valeurs principales  $\lambda_i$  de  $\underline{\underline{U}}$  (ou  $\lambda_i^2$  de  $\underline{\underline{C}}$ ) sont nommées les dilatations principales.

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}) \quad (2.5)$$

est une mesure des déformations lagrangiennes où  $\underline{\underline{I}}$  est le tenseur identité d'ordre 2. Sa dérivée  $\underline{\underline{\dot{E}}} = (\underline{\underline{\dot{F}}}^T \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{\dot{F}}})/2$  exprime le taux de déformation lagrangien.

En utilisant le déterminant de la transformation  $J = \det \underline{\underline{F}}$ , le transport de l'élément de volume matériel  $dV$  est donné par

$$dv = J dV \quad (2.6)$$

et en utilisant la conservation de la masse, les masses volumiques sont reliées entre elles par

$$J = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (2.7)$$

Une surface matérielle est définie par un vecteur normal  $\underline{\underline{N}}$  et une surface  $dS$ . La surface se transporte en  $(ds, \underline{\underline{n}})$  selon la relation suivante :

$$ds \underline{\underline{n}} = J dS \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{N}} \quad (2.8)$$

Il est à noter que la normale à une surface matérielle ne se transporte pas comme un vecteur matériel.

## 2.2.2 Vitesse de déformation

La vitesse d'une particule initialement en  $\underline{\underline{X}}$  est donnée par

$$\underline{\underline{v}} = \frac{\partial \underline{\underline{x}}}{\partial t} \quad (2.9)$$

et le gradient eulérien de vitesse peut s'écrire sur la configuration actuelle par

$$\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\underline{v}} = \frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial \underline{\underline{X}}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{X}}}{\partial \underline{\underline{x}}} = \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \quad (2.10)$$

Sur la configuration de référence, le gradient lagrangien s'écrit

$$\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{v}} = \frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial \underline{\underline{X}}} = \underline{\underline{\dot{E}}} \quad (2.11)$$

Le gradient est un tenseur du second ordre qui peut se décomposer en une partie symétrique et une anti-symétrique,  $\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\underline{v}} = \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{w}}$  dans le cas eulérien. Les tenseurs  $\underline{\underline{d}}$  et  $\underline{\underline{w}}$  sont appelés respectivement tenseur des vitesses de déformation (ou tenseur des taux de déformation) et tenseur des vitesses de rotation (ou tenseur des taux de rotation). Ils s'expriment en fonction de la transformation par

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\dot{F}}}^T), \quad \text{et} \quad \underline{\underline{w}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} - \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\dot{F}}}^T) \quad (2.12)$$

Les taux de déformation eulérien et lagrangien sont reliés par  $\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$ .

### 2.2.3 Gradients eulériens et lagrangiens

Nous rappelons ici les formules de passage entre les gradients eulériens et lagrangiens. Pour une grandeur scalaire  $T$  :

$$\underline{\nabla} T(\underline{X}, t) = \underline{\text{grad}} T(\underline{x}, t) \cdot \underline{F}(\underline{X}, t) \quad . \quad (2.13)$$

Pour une grandeur vectorielle  $\underline{u}$  :

$$\underline{\nabla} \underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{\text{grad}} \underline{u}(\underline{x}, t) \cdot \underline{F}(\underline{X}, t) \quad . \quad (2.14)$$

### 2.2.4 Modélisation des efforts intérieurs

Les efforts intérieurs sont modélisés par un tenseur des contraintes défini comme le tenseur qui donne la distribution de la densité des efforts surfaciques s'exerçant sur une facette de normale unitaire. Par exemple, avec les notations pour le tenseur de Cauchy :

$$\underline{df} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \, ds \quad . \quad (2.15)$$

Nous pouvons exprimer en description lagrangienne (resp, eulérienne) à la fois la densité d'effort  $\underline{dF}$  (resp,  $\underline{df}$ ) et les éléments de surface ( $dS, \underline{N}$ ) (resp,  $(ds, \underline{n})$ ) . En combinant ces représentations eulériennes et lagrangiennes, quatre formes de tenseur des contraintes peuvent être écrites. Dans la pratique, seules trois sont utilisées :

- le tenseur de Cauchy  $\underline{\sigma}$  en description eulérienne :  $\underline{df} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \, ds$  est symétrique. Il permet d'exprimer l'équilibre en configuration actuelle ;
- le tenseur de Boussinesq  $\underline{B}$  (ou tenseur de Piola-Lagrange) en description mixte :  $\underline{df} = \underline{B} \cdot \underline{N} \, dS$  où  $\underline{B}$  est défini par  $\underline{B} = J \underline{\sigma} \cdot \underline{F}^{-T}$ . Il apparaît naturellement lorsqu'on rapporte le principe des puissances virtuelles ou les équations d'équilibre sur la configuration de référence. Il n'est pas symétrique ;
- le tenseur de Piola-Kirchhoff  $\underline{\Pi}$  en description lagrangienne :  $\underline{dF} = \underline{\Pi} \cdot \underline{N} \, dS$  où  $\underline{\Pi}$  est défini par  $\underline{\Pi} = J \underline{F}^{-1} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{F}^{-T}$ . Il s'utilise naturellement dans l'inégalité de Clausius-Duhem et dans l'obtention des lois de comportement. Il est symétrique.

Les tenseurs de Piola-Kirchhoff et Boussinesq sont reliés par  $\underline{\Pi} = \underline{F}^{-1} \cdot \underline{B}$  . Le tenseur de Cauchy est celui qui est classiquement utilisé avec l'hypothèse HPP<sup>3</sup>. Les deux tenseurs de Cauchy et de Piola-Kirchhoff sont les seuls à être symétriques<sup>4</sup>, ce qui explique leur intérêt pour l'écriture des lois de comportement.

### 2.2.5 Ecriture lagrangienne du principe des puissances virtuelles

La puissance virtuelle des quantités d'accélération pour un mouvement virtuel  $\hat{\underline{U}}$  est définie par

$$\mathcal{A}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}, t) \underline{a}(\underline{X}, t) \cdot \hat{\underline{U}}(\underline{X}, t) \, d\Omega_0 \quad (2.16)$$

avec  $\underline{a}(\underline{X}, t)$  la densité de la quantité d'accélération au point  $\underline{X}$ . La puissance virtuelle des efforts extérieurs est, elle, donnée par

$$\mathcal{P}_e(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}) \underline{F}(\underline{X}, t) \cdot \hat{\underline{U}}(\underline{X}, t) \, d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_0} \underline{T}_\Omega(\underline{X}, t) \cdot \hat{\underline{U}}(\underline{X}, t) \, da \quad (2.17)$$

3. Hypothèses des Petites Perturbations : les déformations et les déplacements sont supposés petits.

4. La symétrie de  $B$  n'a pas de signification car c'est un tenseur mixte.

où la densité surfacique des forces de surface est notée  $\underline{T}_\Omega$  et la densité volumique des forces de volume est  $\underline{F}(\underline{X}, t)$ . En notant  $\mathcal{P}_i$  la puissance virtuelle des efforts intérieurs, le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$\text{dans un référentiel galiléen, } \begin{cases} \forall \hat{\underline{U}} \text{ mouvement virtuel rigidifiant,} & \mathcal{P}_i(\hat{\underline{U}}) = 0 \\ \forall \hat{\underline{U}} \text{ mouvement virtuel,} & \mathcal{A}(\hat{\underline{U}}) = \mathcal{P}_e(\hat{\underline{U}}) + \mathcal{P}_i(\hat{\underline{U}}) . \end{cases}$$

La puissance des efforts intérieurs s'exprime en configuration lagrangienne par

$$\mathcal{P}_i(\hat{\underline{U}}) = - \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\Pi}}(\underline{X}, t) : \hat{\underline{\underline{E}}}(\underline{X}, t) \, d\Omega_0 \quad , \quad (2.18)$$

en configuration mixte par

$$\mathcal{P}_i(\hat{\underline{U}}) = - \int_{\Omega_0} \underline{\underline{B}}^T(\underline{X}, t) : \hat{\underline{\underline{E}}}(\underline{X}, t) \, d\Omega_0 \quad (2.19)$$

et en configuration actuelle par

$$\mathcal{P}_i(\hat{\underline{U}}) = - \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \hat{\underline{\underline{d}}}(\underline{x}, t) \, d\Omega_t \quad . \quad (2.20)$$

## 2.2.6 Tenseurs conjugués

Hill (1968) introduit la notion de tenseurs conjugués. Un tenseur des contraintes  $\underline{\underline{T}}$  est dit conjugué à un tenseur des déformations  $\underline{\underline{E}}$  si et seulement si la puissance des efforts intérieurs est donnée par

$$\dot{w} = J \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{E}} \quad . \quad (2.21)$$

Une classe de tenseurs lagrangiens de la déformation peut être définie par

$$\underline{\underline{E}}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m} (\underline{\underline{U}}^m - \underline{\underline{I}}) & m \neq 0 \\ \ln \underline{\underline{U}} & m = 0 \end{cases} \quad . \quad (2.22)$$

Nous donnons ici les expressions connues des tenseurs conjugués :

- le tenseur des déformations de Green-Lagrange (droit) et le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff

$$\underline{\underline{E}}^{(2)} = \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{U}}^2 - \underline{\underline{I}}) \quad , \quad \underline{\underline{T}}^{(2)} = \underline{\underline{\Pi}} = J \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{F}}^{-T} \quad ; \quad (2.23)$$

- le premier tenseur des déformations de Biot et le tenseur des contraintes de Biot

$$\underline{\underline{E}}^{(1)} = \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{I}} \quad , \quad \underline{\underline{T}}^{(1)} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{T}}^{(2)} \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}} \underline{\underline{T}}^{(2)}) \quad ; \quad (2.24)$$

- le tenseur de Hill droit (ou déformation logarithmique) et le tenseur conjugué des contraintes (dans le cas où les tenseurs sont coaxiaux<sup>5</sup>)

$$\underline{\underline{E}}^{(0)} = \ln \underline{\underline{U}} \quad , \quad \underline{\underline{T}}^{(0)} = J \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{R}} \quad ; \quad (2.25)$$

- les tenseurs conjugués

$$\underline{\underline{E}}^{(-1)} = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{U}}^{-1} \quad , \quad \underline{\underline{T}}^{(-1)} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{T}}^{(2)} \underline{\underline{U}}^{-1} + \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{T}}^{(2)}) \quad ; \quad (2.26)$$

- les tenseurs d'Almansi

$$\underline{\underline{E}}^{(-2)} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{U}}^{-2}) \quad , \quad \underline{\underline{T}}^{(-2)} = J \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{F}} \quad . \quad (2.27)$$

5. Si les tenseurs ne sont pas coaxiaux, il est aussi possible d'exprimer le tenseur des contraintes conjugué (Hoger, 1987) mais l'expression est plus compliquée.

### 2.2.7 Équations d'équilibre

Les équations d'équilibre sont obtenues dans l'annexe B.1 en utilisant le tenseur de Boussinesq non-symétrique :

$$\text{dans } \Omega_0, \quad \text{Div } \underline{\underline{B}} + \rho_0 (\underline{F}(\underline{X}, t) - \underline{a}(\underline{X}, t)) = 0 \quad (2.28a)$$

$$\text{sur } \partial\Omega_0, \quad \underline{\underline{B}} \cdot \underline{N} = \underline{T}_\Omega(\underline{X}, t) \quad . \quad (2.28b)$$

## 2.3 Lois de comportement

### 2.3.1 Thermodynamique des milieux continus

#### a Premier principe

Le premier principe de la thermodynamique postule l'existence d'une fonction d'état  $e$  appelée énergie interne massique. En exprimant la conservation de l'énergie, nous arrivons classiquement à l'équation locale de l'énergie en description eulérienne

$$\rho \dot{e} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + \rho r - \text{div } \underline{q} \quad , \quad (2.29)$$

en description lagrangienne

$$\rho_0 \dot{e} = \underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\dot{E}}} + \rho_0 r - \text{Div } \underline{Q} \quad (2.30)$$

et en description mixte

$$\rho_0 \dot{e} = \underline{\underline{B}}^T : \underline{\underline{\dot{E}}} + \rho_0 r - \text{Div } \underline{Q} \quad . \quad (2.31)$$

Le vecteur lagrangien flux de chaleur  $\underline{Q}$  est défini par  $\underline{Q}(\underline{X}, t) = J \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \underline{q}(\underline{x} = \Phi(\underline{X}, t), t)$  . Le terme  $r$  représente les sources volumiques de chaleur fournies par l'extérieur ou par des phénomènes physico-chimiques internes.

#### b Second principe - Inégalité de Clausius-Duhem

Le second principe est présenté en détail dans l'annexe B.2. Nous retiendrons juste l'expression de la dissipation avec l'inégalité de Clausius-Duhem. La fonction d'état  $\psi = e - Ts$  est appelée énergie libre de Helmholtz ou énergie libre massique. En utilisant cette fonction, la dissipation peut s'écrire

$$\phi = \underbrace{-\rho_0(\dot{\psi} + \dot{T}s)}_{\phi_{int}} + \underbrace{\underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\dot{E}}}}_{\phi_{th}} - \underbrace{\frac{\underline{Q} \cdot \nabla T}{T}}_{\phi_{th}} \geq 0 \quad . \quad (2.32)$$

Le terme  $\phi_{int}$  représente la dissipation intrinsèque, tandis que  $\phi_{th}$  est la dissipation thermique, c'est-à-dire la dissipation engendrée par les échanges thermiques.

### 2.3.2 Méthode de l'état local

Afin d'obtenir les lois de comportement, il est important de clarifier la notion de variables thermodynamiques. La définition d'un potentiel thermodynamique requiert un choix dans les variables d'état, et c'est de ce choix que va dépendre la modélisation des phénomènes.

La méthode de l'état local (Germain, 1973) suppose que l'état thermodynamique d'un milieu matériel en un point et à un instant donné est complètement défini par la connaissance des valeurs,

à cet instant, d'un certain nombre de variables ne dépendant que du point considéré. L'énergie libre est alors donnée par  $\psi = \psi(\chi_1(\underline{x}), \chi_2(\underline{x}), \dots)$  avec  $\chi_i$  les variables d'état. Les dérivées temporelles de ces variables n'intervenant pas pour définir l'état thermodynamique, toute évolution peut donc être considérée comme une succession d'états d'équilibre.

Ces variables se classent en deux catégories : les variables observables et les variables internes. Les variables observables proviennent de la mécanique et de la thermodynamique des milieux continus. La température  $T$  et la déformation  $\underline{E}$  sont les deux variables indépendantes les plus souvent utilisées. Les variables internes représentent souvent des phénomènes dissipatifs. On peut penser à la déformation plastique, visqueuse ou à l'endommagement, l'érouissage ou la rupture.

Dorénavant, l'énergie libre est supposée fonction de la déformation  $\underline{E}$ , de la température  $T$  et de  $n$  variables internes indépendantes  $X_i$ . La signification de ces variables internes n'est pas explicitée pour l'instant.

### 2.3.3 Forces thermodynamiques

En développant la dérivée particulière de l'énergie libre, l'inégalité de Clausius-Duhem (2.32) peut se réécrire en configuration lagrangienne

$$\phi = \underbrace{\left( \underline{\Pi} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{E}} \right) : \dot{\underline{E}} - \rho_0 \left( s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial X_i} \dot{X}_i}_{\phi_{int}} - \underbrace{\frac{Q \cdot \nabla T}{T}}_{\phi_{th}} \geq 0 \quad (2.33)$$

où la convention de sommation sur les indices répétés est utilisée pour les variables internes. Remarquons les termes de dissipation intrinsèque  $\phi_{int}$  et de dissipation thermique  $\phi_{th}$ . Nous supposons que la dissipation résulte uniquement de la déformation, des variables internes et de la conduction thermique. Nous retrouvons alors la loi entropique

$$s = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad . \quad (2.34)$$

Le deuxième principe s'écrit alors

$$\phi = \underbrace{\left( \underline{\Pi} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{E}} \right) : \dot{\underline{E}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial X_i} \dot{X}_i}_{\phi_{int}} - \underbrace{\frac{Q \cdot \nabla T}{T}}_{\phi_{th}} \geq 0 \quad . \quad (2.35)$$

La dissipation peut s'écrire sous la forme d'une somme de produits entre les flux et les forces thermodynamiques associées (voir tableau 2.1). Pour une transformation réversible, la dissipation est nulle.

Flux	$\dot{\underline{E}}$	$\dot{X}_i$	$Q$
Force associée	$\underline{\Pi} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{E}}$	$A_i = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial X_i}$	$-\frac{\nabla T}{T}$

TABLE 2.1 – Variables thermodynamiques et forces associées.

### 2.3.4 Matériaux standards généralisés

Une loi de comportement est dite thermodynamiquement admissible si elle respecte le second principe, c'est-à-dire si la dissipation est positive ou nulle dans toutes évolutions réelles du système autour d'un état d'équilibre. Cette dissipation peut se mettre sous la forme d'une somme de produits entre les variables thermodynamiques et les forces associées. Afin de construire de façon systématique des lois de comportement thermodynamiquement admissibles, il est possible d'appliquer l'hypothèse de dissipativité normale à toutes les variables dissipatives : un potentiel de dissipation  $\varphi(\underline{\dot{E}}, \underline{\dot{X}}_i, \underline{Q})$  convexe de ses variables, non négatif et nul à l'origine est donné et détermine les forces thermodynamiques :

$$\underline{\underline{\Pi}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{E}}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{E}}}, \quad A_i = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial X_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{X}_i}, \quad -\frac{\nabla T}{T} = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{Q}}. \quad (2.36)$$

### 2.3.5 Thermoélasticité

#### a Définition

Un milieu thermoélastique est un milieu qui vérifie un certain nombre d'hypothèses :

- il existe un état naturel isotherme et isobare : toutes les déformations sont mesurées à partir de cet état ;
- la température  $T$  et la déformation sont les deux seules variables d'état indépendantes (les directions d'anisotropie sont rajoutées dans le cas d'un matériau anisotrope). Les quatre variables d'état scalaires indépendantes sont la température et trois invariants d'un tenseur des déformations  $\underline{Y}$  ( $T, Y_I, Y_{II}, Y_{III}$ ), éventuellement complétées par les invariants d'anisotropie. Les variables d'état scalaires indépendantes sont désignées par  $(\chi_0 = T, \chi_1, \dots, \chi_n)$ . La dérivée par rapport à  $\chi_i$  s'exprime par  $\partial_i$ .
- la dissipation intrinsèque est nulle :

$$\phi_{int} = \rho_0(T\dot{s} - \dot{e}) + \frac{1}{2}\underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\dot{C}}} = 0 \quad (2.37a)$$

$$= \rho_0(T\partial_0 s - \partial_0 e)\dot{T} + \rho_0 \sum_{i=1}^n (T\partial_i s - \partial_i e)\dot{\chi}_i + \frac{1}{2}\underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\dot{C}}} = 0 \quad (2.37b)$$

#### b Réversibilité intrinsèque

Dans le cadre d'un matériau thermoélastique, les dérivées particulières des variables d'état  $(\dot{\chi}_1, \dots, \dot{\chi}_n)$  sont indépendantes de  $\dot{\chi}_0 = \dot{T}$ . Il est donc possible de définir une évolution infinitésimale arbitraire autour d'un état en faisant varier  $\dot{T}$  arbitrairement des autres dérivées particulières des variables d'état. Nous obtenons alors la loi entropique et l'équation menant à la loi de comportement :

$$0 = -\partial_0 \psi - s \quad (2.38a)$$

$$0 = -\rho_0 \sum_{i=1}^n \partial_i \psi \dot{\chi}_i + \frac{1}{2}\underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\dot{C}}} \quad (2.38b)$$

Nous avons utilisé dans ces expressions la définition de l'énergie libre  $\psi = e - Ts$ . Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que ce résultat est dû à l'indépendance de  $\dot{T}$  par rapport aux autres dérivées particulières des variables d'état. Il n'est pas par exemple applicable dans le cas de la thermoélasticité « incompressible » étudiée plus bas.

En utilisant le tenseur des dilatations comme mesure des déformations, l'expression (2.38) devient

$$\frac{1}{2}\underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\dot{C}}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\dot{C}}} \quad (2.39)$$

pour toute variation infinitésimale thermoélastique, ce qui permet d'en déduire la loi de comportement thermoélastique isotrope

$$\underline{\underline{\Pi}} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{C}}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{E}}} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{B}}^T = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{F}}} \quad \text{en description mixte.} \quad (2.40)$$

Nous allons maintenant développer l'expression de cette loi de comportement. Pour un tenseur des déformations  $\underline{\underline{Y}}$ , nous pouvons utiliser les invariants suivants :

$$Y_I = \text{tr} \underline{\underline{Y}} \quad (2.41a)$$

$$Y_{II} = \frac{1}{2} \left[ (\text{tr} \underline{\underline{Y}})^2 - \text{tr} \underline{\underline{Y}}^2 \right] \quad (2.41b)$$

$$Y_{III} = \det \underline{\underline{Y}} \quad (2.41c)$$

qui vérifient l'identité de Cayley-Hamilton

$$\underline{\underline{0}} = -\underline{\underline{Y}}^3 + Y_I \underline{\underline{Y}}^2 - Y_{II} \underline{\underline{Y}} + Y_{III} \underline{\underline{I}} \quad (2.42a)$$

$$\Leftrightarrow -\underline{\underline{Y}}^2 + Y_I \underline{\underline{Y}} = Y_{II} \underline{\underline{I}} - Y_{III} \underline{\underline{Y}}^{-1} \quad (2.42b)$$

Les dérivées particulières de ces invariants sont (pour des tenseurs symétriques)

$$\dot{Y}_I = \underline{\underline{I}} : \dot{\underline{\underline{Y}}} = \text{tr} \dot{\underline{\underline{Y}}} \quad (2.43a)$$

$$\dot{Y}_{II} = (Y_I \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{Y}}) : \dot{\underline{\underline{Y}}} \quad (2.43b)$$

$$\dot{Y}_{III} = (Y_{II} \underline{\underline{I}} - Y_I \underline{\underline{Y}} + \underline{\underline{Y}}^2) : \dot{\underline{\underline{Y}}} = (Y_{III} \underline{\underline{Y}}^{-1}) : \dot{\underline{\underline{Y}}} \quad (2.43c)$$

L'équation (2.38) se réécrit avec ces expressions

$$-\rho_0 \left[ (\partial_1 \psi + Y_I \partial_2 \psi) \underline{\underline{I}} - \partial_2 \psi \underline{\underline{Y}} + Y_{III} \partial_3 \psi \underline{\underline{Y}}^{-1} \right] : \dot{\underline{\underline{Y}}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\dot{C}}} = 0 \quad (2.44)$$

Utilisons par exemple le tenseur des dilatations  $\underline{\underline{C}}$  comme mesure de la déformation. L'expression (2.44) s'annule pour toute transformation thermoélastique infinitésimale, ce qui donne la loi de comportement thermoélastique isotrope

$$\underline{\underline{\Pi}} = 2\rho_0 \left[ (\partial_1 \psi + C_I \partial_2 \psi) \underline{\underline{I}} - \partial_2 \psi \underline{\underline{C}} + C_{III} \partial_3 \psi \underline{\underline{C}}^{-1} \right] \quad (2.45)$$

Le comportement thermoélastique isotrope compressible est donc entièrement défini par la donnée de l'énergie libre  $\psi$ .

### c Thermoélasticité avec liaisons internes

**Définition** On dit que le comportement du matériau est assujéti à des liaisons internes si ses évolutions thermomécaniques sont, du point de vue géométrique, astreintes à respecter certaines conditions restrictives (Salençon, 2002).

Ces liaisons internes portent sur un tenseur des déformations, et le nombre de relation indépendantes ne peut dépasser six (si  $n = 6$ , le matériau est indéformable). Par exemple, ces liaisons internes peuvent se traduire par  $n$  relations indépendantes sur  $\underline{\underline{E}}$  :

$$\varphi_p(\underline{\underline{E}}) = 0 \quad p = 1, \dots, n \quad . \quad (2.46)$$

Le premier exemple de liaison est la liaison interne d'isochorie ou d'incompressibilité stricte  $\det \underline{\underline{E}} = 1$  se traduisant par  $\varphi_1(\underline{\underline{E}}) = \det(2\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{I}}) - 1 = 0$ . Un deuxième exemple est la liaison interne d'inextensibilité dans une direction matérielle  $\underline{\underline{D}}$  qui se traduit par  $\varphi_2(\underline{\underline{E}}) = \underline{\underline{E}} : (\underline{\underline{D}} \otimes \underline{\underline{D}}) = 0$ .

Ces liaisons internes réduisent les évolutions thermomécaniques de  $\underline{\underline{E}}$  dans l'inégalité de Clausius-Duhem car  $\underline{\underline{\dot{E}}}$  doit vérifier

$$\dot{\varphi}_p(\underline{\underline{E}}) = \frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{E}})}{\partial \underline{\underline{E}}} : \underline{\underline{\dot{E}}} = 0 \quad p = 1, \dots, n \quad . \quad (2.47)$$

Ces liaisons internes ne changent en rien l'obtention de la loi de conduction et de la loi entropique car  $\dot{T}$  est totalement indépendant des autres variables d'état et de leurs dérivées. Par contre, l'équation (2.47) implique que l'espace des variations admissibles  $\underline{\underline{\dot{E}}}$  est l'orthogonal de  $\partial \varphi_p(\underline{\underline{E}}) / \partial \underline{\underline{E}}$ . La nullité de la dissipation intrinsèque

$$\left( \underline{\underline{\Pi}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{E}}} \right) : \underline{\underline{\dot{E}}} = 0 \quad (2.48)$$

montre que le terme entre parenthèses appartient à l'espace engendré par les  $\partial \varphi_p(\underline{\underline{E}}) / \partial \underline{\underline{E}}$ , c'est-à-dire qu'il existe  $n$  scalaires arbitraires  $\eta_p$ , appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que

$$\underline{\underline{\Pi}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{E}}} = \sum_{p=1}^n \eta_p \frac{\partial \varphi_p(\underline{\underline{E}})}{\partial \underline{\underline{E}}} \quad . \quad (2.49)$$

Cette dernière équation définit les lois de comportement thermoélastiques avec liaisons internes. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que ce raisonnement et ces lois de comportement ne sont pas valides pour un matériau thermoélastique « incompressible » respectant  $\det \underline{\underline{E}} = f_J(T)$ . En effet, la variation de température  $\dot{T}$  n'est plus indépendante des autres variables d'état et il est donc abusif d'utiliser des liaisons internes de ce type. Nous développons ce point de vue dans le prochain paragraphe.

#### d Capacités calorifiques

Lors d'une transformation, la puissance calorifique volumique totale est égale à la somme des puissances calorifiques apportées par l'extérieur et apportées par les phénomènes irréversibles internes :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{cal \ vol} &= \mathcal{P}_{cal \ vol \ ext} + \mathcal{P}_{cal \ vol \ int} \\ &= \rho_0 r - \text{Div } \underline{\underline{Q}} + \phi_{int} \\ &= \rho_0 T \dot{s} \end{aligned} \quad (2.50)$$

avec la définition (EQ. B.10) de la dissipation intrinsèque. En exprimant la dérivée particulière de  $s$ , la capacité calorifique  $c$  est définie par

$$c = \frac{\mathcal{P}_{cal \ vol}}{\rho_0 \dot{T}} = T \frac{\partial s}{\partial T} + \frac{T}{\dot{T}} \frac{\partial s}{\partial \underline{\underline{E}}} : \underline{\underline{\dot{E}}} \quad . \quad (2.51)$$

Cette capacité calorifique est définie pour une transformation infinitésimale non-isotherme. En se plaçant dans une transformation infinitésimale à déformation constante, la capacité calorifique à déformation constante s'écrit

$$c_d = T \frac{\partial s}{\partial T} \quad . \quad (2.52)$$

Cette relation sera exploitée dans les équations B.23a à B.23c. Il est aussi possible de définir la chaleur spécifique à contrainte nulle (Garrigues, 2002).

### 2.3.6 Thermoélasticité « incompressible »

#### a Définition de « l'incompressibilité »

**Définition** *Un milieu thermoélastique est dit « incompressible » si et seulement si la dilatation volumique est uniquement une fonction de la température :*

$$J = \frac{\rho_0}{\rho} = f_J(T - T_0) \quad \text{avec} \quad f_J(0) = 1 \quad . \quad (2.53)$$

Avec l'abus de notation  $f_J(T - T_0) = f_J(T)$ , la vitesse de dilatation volumique est donnée par

$$\frac{\dot{J}}{J} = \frac{f_J'(T)}{f_J(T)} \dot{T} = \text{tr} \underline{\underline{d}} = \text{tr} \left( \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \right) = \frac{1}{2} \text{tr} \left( \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{C}}} \right) \quad . \quad (2.54)$$

Cette relation implique que l'espace des variables d'état indépendantes à une dimension réduite de un. Par exemple, dans le cas isotrope sans liaisons internes, il existe quatre variables d'état scalaires indépendantes : la température et trois invariants de la déformation ( $T, C_I, C_{II}, C_{III}$ ). Pour un matériau thermoélastique « incompressible », l'équation (2.53) implique une relation entre le troisième invariant (ici de  $\underline{\underline{C}}$ ) et la température :  $C_{III} = J^2 = f_J^2(T)$ . L'espace des variables d'état scalaires indépendantes est alors réduit à ( $T, C_I, C_{II}$ ).

Nous ne pouvons donc pas déduire les lois de comportement thermoélastiques comme nous l'avons fait précédemment en exploitant la nullité de la dissipation intrinsèque. Nous présentons<sup>6</sup> maintenant un exemple d'obtention des lois de comportement thermoélastique « incompressible ».

#### b Réversibilité intrinsèque

Nous réécrivons ici l'expression de la dissipation intrinsèque :

$$\phi_{int} = \rho_0 (T \partial_0 s - \partial_0 e) \dot{T} + \rho_0 \sum_{i=1}^n (T \partial_i s - \partial_i e) \dot{\chi}_i + \frac{1}{2} \underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\dot{C}}} = 0 \quad (2.55a)$$

$$= \rho_0 (T \partial_0 s - \partial_0 e) \dot{T} + \rho_0 (T \partial_1 s - \partial_1 e) \dot{C}_I + \rho_0 (T \partial_2 s - \partial_2 e) \dot{C}_{II} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\dot{C}}} \quad . (2.55b)$$

En introduisant l'énergie libre puis en exprimant les dérivées particulières des invariants, la dissipation intrinsèque devient

$$\phi_{int} = -\rho_0 (\partial_0 \psi + s) \dot{T} + \left[ -\rho_0 (\partial_1 \psi + C_I \partial_2 \psi) \underline{\underline{I}} + \rho_0 \partial_2 \psi \underline{\underline{C}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\Pi}} \right] : \underline{\underline{\dot{C}}} = 0 \quad . \quad (2.56)$$

6. Notre analyse se fonde sur le document de Garrigues (2002).

L'hypothèse d'incompressibilité implique une relation entre la trace de  $\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{C}}}$  et  $\dot{T}$ , qui n'était pas présente dans le cas compressible (EQ. 2.37). Nous transformons alors l'expression précédente :

$$\phi_{int} = -\rho_0 (\partial_0 \psi + s) \dot{T} + \left[ -\rho_0 (\partial_1 \psi + C_I \partial_2 \psi) \underline{\underline{C}} + \rho_0 \partial_2 \psi \underline{\underline{C}}^2 + \frac{1}{2} \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\underline{C}} \right] : \left( \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{C}}} \right) = 0 \quad (2.57)$$

puis nous décomposons le tenseur  $\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{C}}}$  en parties sphérique et déviatorique :

$$\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{C}}} = \frac{1}{3} \text{tr} \left( \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{C}}} \right) \underline{\underline{I}} + \text{dev} \left( \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{C}}} \right) = \frac{2f_J'(T)}{3f_J(T)} \dot{T} \underline{\underline{I}} + \text{dev} \left( \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{C}}} \right) \quad . \quad (2.58)$$

En utilisant l'expression suivante pour tout tenseur  $\underline{\underline{Y}}$  :

$$\underline{\underline{Y}} : \left( \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{C}}} \right) = \frac{2f_J'(T)}{3f_J(T)} \text{tr} \underline{\underline{Y}} \dot{T} + \text{dev} \underline{\underline{Y}} : \text{dev} \left( \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{C}}} \right) \quad , \quad (2.59)$$

la dissipation intrinsèque devient

$$\begin{aligned} \phi_{int} = & \left[ -\rho_0 (\partial_0 \psi + s) + \frac{2f_J'(T)}{3f_J(T)} \left( -\rho_0 (\partial_1 \psi + C_I \partial_2 \psi) \text{tr} \underline{\underline{C}} + \rho_0 \partial_2 \psi \text{tr} (\underline{\underline{C}}^2) + \text{tr} \left( \frac{1}{2} \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\underline{C}} \right) \right) \right] \dot{T} \\ & + \left[ -\rho_0 (\partial_1 \psi + C_I \partial_2 \psi) \text{dev} \underline{\underline{C}} + \rho_0 \partial_2 \psi \text{dev} (\underline{\underline{C}}^2) + \text{dev} \left( \frac{1}{2} \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\underline{C}} \right) \right] : \text{dev} \left( \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{C}}} \right) \quad . \quad (2.60) \end{aligned}$$

En exprimant les traces, l'expression se simplifie en

$$\begin{aligned} \phi_{int} = & \left[ -\rho_0 (\partial_0 \psi + s) + \frac{2f_J'(T)}{3f_J(T)} \left( -\rho_0 C_I \partial_1 \psi - 2\rho_0 C_{II} \partial_2 \psi + \text{tr} \left( \frac{1}{2} \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\underline{C}} \right) \right) \right] \dot{T} \\ & + \left[ -\rho_0 (\partial_1 \psi + C_I \partial_2 \psi) \text{dev} \underline{\underline{C}} + \rho_0 \partial_2 \psi \text{dev} (\underline{\underline{C}}^2) + \text{dev} \left( \frac{1}{2} \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\underline{C}} \right) \right] : \text{dev} \left( \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{C}}} \right) \quad . \quad (2.61) \end{aligned}$$

À partir de cette expression, il est possible de tirer les conclusions de la nullité de la dissipation intrinsèque car  $\dot{T}$  et  $\text{dev} \left( \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{C}}} \right)$  sont indépendants. Le comportement thermoélastique isotrope « incompressible » s'écrit donc

$$\frac{1}{2} \text{tr} \left( \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\underline{C}} \right) = 3\rho_0 \frac{f_J(T)}{2f_J'(T)} (\partial_0 \psi + s) + \rho_0 (C_I \partial_1 \psi + 2C_{II} \partial_2 \psi) \quad (2.62a)$$

$$\frac{1}{2} \text{dev} \left( \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\underline{C}} \right) = \rho_0 \left[ (\partial_1 \psi + C_I \partial_2 \psi) \text{dev} \underline{\underline{C}} - \partial_2 \psi \text{dev} (\underline{\underline{C}}^2) \right] \quad . \quad (2.62b)$$

Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est donné par

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Pi}} = & \rho_0 \frac{f_J(T)}{f_J'(T)} (\partial_0 \psi + s) \underline{\underline{C}}^{-1} \\ & + 2\rho_0 \left[ \frac{1}{3} (C_I \partial_1 \psi + 2C_{II} \partial_2 \psi) \underline{\underline{C}}^{-1} + (\partial_1 \psi + C_I \partial_2 \psi) \left( \text{dev} \underline{\underline{C}} \right) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} - \partial_2 \psi \left( \text{dev} \underline{\underline{C}}^2 \right) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \right] \quad . \quad (2.63) \end{aligned}$$

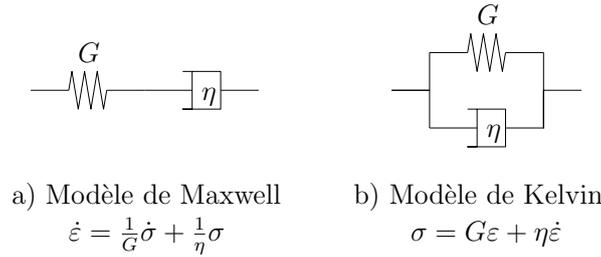


FIGURE 2.1 – Modèles rhéologiques de Maxwell et de Kelvin.

En développant l'invariant  $C_{II}$  puis en regroupant les parties sphériques et déviatoriques, nous obtenons finalement

$$\underline{\underline{\Pi}} = \rho_0 \frac{f_J(T)}{f'_J(T)} (\partial_0 \psi + s) \underline{\underline{C}}^{-1} + 2\rho_0 \left[ \partial_1 \psi \underline{\underline{I}} + \partial_2 \psi \left( C_{II} \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}} \right) \right] . \quad (2.64)$$

Contrairement au comportement thermoélastique compressible, le comportement thermoélastique « incompressible » nécessite de définir deux fonctions d'état :  $(\psi, s)$  ou  $(e, s)$ . En effet, la loi entropique  $s = -\partial_0 \psi$  n'est pas une conséquence de la réversibilité intrinsèque. **Insistons sur le fait que la loi de comportement « incompressible » n'est pas un cas particulier de la loi de comportement thermoélastique compressible (2.45). En particulier, il ne suffit pas de poser  $J = f_J(T)$  dans cette loi de comportement pour tenir compte de l'incompressibilité<sup>7</sup> car les variables d'état sont différentes.**

### c Capacités calorifiques

Dans le cadre de la thermoélasticité « incompressible », il n'est pas possible de définir de capacité calorifique à déformation constante car  $\det \underline{\underline{F}}$  constant implique  $T$  constant, c'est-à-dire une transformation isotherme. **Ainsi, il n'est pas possible de chauffer un milieu thermoélastique « incompressible » tout en bloquant les déformations. Ceci constitue une absurdité physique (Garrigues, 2002) de la modélisation thermoélastique « incompressible ».**

Par contre, il est possible de définir une capacité thermique à contrainte nulle.

### 2.3.7 Modélisation des phénomènes dissipatifs ou irréversibles

L'inégalité de Clausius-Duhem (EQ. 2.35) peut s'interpréter de différentes façons suivant la modélisation adoptée. En notant par les indices  $R$  et  $IR$  les phénomènes réversibles et irréversibles et en adoptant la modélisation HPP, nous pouvons décomposer les contraintes selon  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_R + \underline{\underline{\sigma}}_{IR}$ , avec  $\underline{\underline{\sigma}}_R = \rho \partial \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, T, X_i) / \partial \underline{\underline{\varepsilon}}$ . Comparons par exemple les modèles rhéologiques (FIG. 2.1) de Kelvin (en parallèle) et Maxwell (en série).

Pour le modèle de Kelvin, il n'y a pas de variable interne et  $\underline{\underline{\sigma}}_{IR} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_R$ . La dissipation s'écrit alors  $\phi = \underline{\underline{\sigma}}_{IR} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ .

Dans le modèle de Maxwell, la variable interne  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{IR}$  représente la déformation dans la partie dissipative. Alors  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_R + \underline{\underline{\varepsilon}}_{IR}$ . Ici,  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_R = \rho \partial \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, T, \underline{\underline{\varepsilon}}_{IR}) / \partial \underline{\underline{\varepsilon}}$  et la dissipation s'écrit  $\phi = -\rho_0 (\partial \psi / \partial \underline{\underline{\varepsilon}}_{IR}) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{IR}$ . Nous voyons que selon la modélisation adoptée, nous ne retrouverons pas la

7. Le cas  $J = 1$  fait, lui, intervenir des multiplicateurs de Lagrange.

dissipation sous la même forme : elle peut provenir du premier ou du deuxième terme de la dissipation intrinsèque  $\phi_{int}$  (EQ. 2.35).

### 2.3.8 Équation de la chaleur

Après quelques manipulations (voir annexe B.3), il est possible d'écrire le premier principe (2.30) de la façon suivante :

$$\underbrace{\rho_0 c \dot{T}}_1 + \underbrace{\text{Div } \underline{Q}}_2 = \underbrace{\rho_0 R}_3 + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\dot{E}}} : \underline{\dot{E}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{X}_i} : \dot{X}_i}_4 + \underbrace{T \frac{\partial \underline{\Pi}}{\partial T} : \underline{\dot{E}} - T \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T \partial \underline{\dot{E}}} : \underline{\dot{E}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T \partial \dot{X}_i} : \dot{X}_i \right)}_5 . \quad (2.65)$$

Analysons les termes de cette équation :

- les termes 1 et 2 représentent les termes d'absorption et de fuite de chaleur ;
- le terme 3 est une source de chaleur ;
- la dissipation intrinsèque est ici présente par le terme 4 : ce terme exprime la perte inélastique (plasticité, viscosité...);
- le terme 5 provient des couplages entre les problèmes thermiques et mécaniques, notamment la dépendance des contraintes à la température.

Dans le cadre de la thermoélasticité où la dissipation intrinsèque est nulle, l'expression (2.65) se réduit à

$$\underbrace{\rho_0 c \dot{T}}_1 + \underbrace{\text{Div } \underline{Q}}_2 = \underbrace{\rho_0 R}_3 + \underbrace{T \frac{\partial \underline{\Pi}}{\partial T} : \underline{\dot{E}}}_5 , \quad (2.66)$$

ou en configuration mixte

$$\underbrace{\rho_0 c \dot{T}}_1 + \underbrace{\text{Div } \underline{Q}}_2 = \underbrace{\rho_0 R}_3 + \underbrace{T \frac{\partial \underline{B}^T}{\partial T} : \underline{\dot{E}}}_5 . \quad (2.67)$$

Les termes dissipatifs ont disparu, et le terme 5 représente le couplage thermoélastique.

## 2.4 Modélisation de l'incompressibilité

Il y a deux grandes manières d'aborder l'incompressibilité. La première est de ne considérer que des transformations strictement isochores. L'incompressibilité amène alors une contrainte : le gradient de la transformation a un déterminant  $J = \det \underline{F}$  égal à 1. Cette condition géométrique s'impose via une liaison interne  $\varphi_1(\underline{E}) = 0$  dans le comportement du matériau. La loi de comportement ainsi obtenue est fonction d'un multiplicateur de Lagrange  $\eta_1$  associé à la liaison interne d'incompressibilité

$$\underline{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{E}} + \eta_1 \frac{\partial \varphi_1(\underline{E})}{\partial \underline{E}} \quad (2.68a)$$

$$= \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{E}} + 2J \eta_1 \underline{C}^{-1} . \quad (2.68b)$$

Or nous avons vu que la modélisation thermoélastique « incompressible » n'était pas satisfaisante. En effet, cette modélisation mène à une absurdité physique : l'impossibilité de chauffer un milieu tout

en maintenant constant son volume. Il est donc nécessaire qu'un matériau thermiquement dilatable soit compressible.

La deuxième manière d'aborder l'incompressibilité est donc de considérer le matériau comme faiblement compressible et d'introduire une fonction de pénalisation dans l'écriture de l'énergie libre. Celle-ci s'écrit par exemple comme la somme d'un potentiel de distorsion et d'un potentiel de dilatation :

$$\psi = \psi(\underline{\underline{F}}) + U(J) \quad (2.69)$$

où  $\underline{\underline{F}}$  est défini par

$$\underline{\underline{F}} = (J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{I}}) \tilde{\underline{\underline{F}}} \quad (2.70)$$

Doll et Schweizerhof (2000) donnent une revue des fonctions  $U(J)$  classiquement utilisées dans la littérature. Leur forme est toujours la même

$$U(J) = \kappa_0 \mathcal{G}(J) \quad (2.71)$$

Le module de compressibilité  $\kappa_0$  est très grand et impose donc de minimiser la fonction  $\mathcal{G}(J)$  qui s'annule pour  $J = 1$ . Cette fonction doit être convexe afin d'assurer la polyconvexité<sup>8</sup> de l'énergie potentielle. Nous détaillerons cette modélisation dans le prochain chapitre.

## 2.5 Conclusions

Nous avons décrit le formalisme des transformations finies, nécessaire à l'étude des élastomères. Notamment, nous avons rappelé la notion d'objectivité nécessaire dans le cadre des transformations finies à cause des grandes rotations rigidifiantes. L'écriture du second principe de la thermodynamique permet l'obtention des lois de comportement, tandis que le premier principe mène à l'équation de la chaleur. Cette équation fait apparaître de nombreux termes qui devront être analysés lors de la résolution du problème d'autoéchauffement.

Nous avons attiré l'attention du lecteur sur la modélisation de l'incompressibilité. Dans le cas d'un matériau strictement incompressible impliquant la liaison interne  $\det \underline{\underline{F}} = 1$ , l'utilisation d'un multiplicateur de Lagrange permet d'obtenir la loi de comportement thermoélastique à partir du second principe. Dans le cas d'un matériau thermoélastique « incompressible » vérifiant  $\det \underline{\underline{F}} = f_J(T)$ , il n'est plus possible d'exploiter de la même façon le second principe car une variation infinitésimale de la déformation n'est plus indépendante de la variation de température : l'espace des variables d'état scalaires indépendantes est réduit d'une dimension. À partir de ce constat, il est possible d'exploiter le second principe avec les nouvelles variables d'état et d'obtenir une loi de comportement thermoélastique « incompressible ». Insistons sur le fait que cette loi de comportement n'est pas obtenue à partir d'une loi strictement incompressible en posant simplement  $\det \underline{\underline{F}} = f_J(T)$ . Toutefois, l'hypothèse de comportement thermoélastique « incompressible » mène à une absurdité physique : l'impossibilité de chauffer un milieu tout en maintenant constant son volume. Il est donc nécessaire qu'un matériau thermiquement dilatable soit compressible ! L'étude de ce type de comportement est présentée dans le prochain chapitre.

---

8. Définie au paragraphe 3.1.2.

## **Deuxième partie**

# **Comportement thermomécanique cyclique**



## Chapitre 3

# Modélisation thermomécanique des élastomères

*Ce chapitre propose une analyse de la littérature sur la modélisation thermomécanique des élastomères. Nous présenterons différents aspects spécifiques aux élastomères : élasticité entropique, phénomène d'inversion thermoélastique, écriture de l'énergie libre.*

### Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Le milieu continu</b>	<b>27</b>
2.1.1	Modélisation - Volume Élémentaire Représentatif	28
2.1.2	Descriptions eulériennes et lagrangiennes	28
2.1.3	Référentiel, repère, objectivité	28
<b>2.2</b>	<b>Formalisme des transformations finies</b>	<b>29</b>
2.2.1	Cinématique	29
2.2.2	Vitesse de déformation	30
2.2.3	Gradients eulériens et lagrangiens	31
2.2.4	Modélisation des efforts intérieurs	31
2.2.5	Ecriture lagrangienne du principe des puissances virtuelles	31
2.2.6	Tenseurs conjugués	32
2.2.7	Équations d'équilibre	33
<b>2.3</b>	<b>Lois de comportement</b>	<b>33</b>
2.3.1	Thermodynamique des milieux continus	33
2.3.2	Méthode de l'état local	33
2.3.3	Forces thermodynamiques	34
2.3.4	Matériaux standards généralisés	35
2.3.5	Thermoélasticité	35
2.3.6	Thermoélasticité « incompressible »	38
2.3.7	Modélisation des phénomènes dissipatifs ou irréversibles	40
2.3.8	Équation de la chaleur	41
<b>2.4</b>	<b>Modélisation de l'incompressibilité</b>	<b>41</b>
<b>2.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>42</b>

Nous étudions dans ce chapitre la modélisation thermomécanique des élastomères. Le comportement des élastomères est tout d'abord marqué par de très fortes non-linéarités. Ainsi, il est nécessaire d'étudier la thermoélasticité non-linéaire. Dans un deuxième temps, nous détaillons une approche thermodynamique de l'élasticité dans un cas particulier : la traction simple. Les notions importantes telles que l'élastomère idéal, l'inversion thermoélastique ou encore la contribution énergétique des efforts sont introduites et expliquées grâce à cet exemple. La suite du chapitre se placera dans un cadre plus général et détaillera quelques modélisations thermomécaniques des élastomères. Ces modélisations sont fortement liées d'une part aux grandeurs mesurées lors des expériences, et d'autre part aux hypothèses effectuées sur la formulation de l'énergie libre.

### 3.1 Thermoélasticité non-linéaire

#### 3.1.1 Thermoélasticité linéaire

Dans le cadre de la thermoélasticité linéaire, les déformations et la variation de température sont supposées petites :  $\|\underline{\underline{E}}\| \ll 1$  et  $(T - T_0)/T_0 \ll 1$ . L'énergie libre est supposée être quadratique des déformations et de la variation de température. Pour un matériau isotrope, l'énergie libre est nécessairement fonction des seuls invariants  $I_1 = \text{tr}\underline{\underline{\epsilon}}$ ,  $I_2 = \frac{1}{2}\text{tr}\underline{\underline{\epsilon}}^2$  et  $I_3 = \frac{1}{3}\text{tr}\underline{\underline{\epsilon}}^3$ . Elle s'écrit dans la configuration naturelle (sans contraintes initiales)

$$\rho_0\psi = 2\mu_0 I_2 + \frac{\lambda_0}{2} I_1^2 - \frac{\alpha_0}{3} I_1 (T - T_0) - \frac{c_0}{2T_0} (T - T_0)^2 \quad (3.1)$$

où  $\mu_0$  et  $\lambda_0$  sont les coefficients élastiques de Lamé,  $\alpha_0$  est le coefficient de dilatation thermique et  $c_0$  la chaleur spécifique à déformation constante.

La modélisation thermoélastique linéaire n'est bien évidemment pas applicable aux élastomères dans le cadre des grandes déformations.

#### 3.1.2 Thermoélasticité non-linéaire

L'énergie libre est une fonction du gradient de la transformation et de la température :  $\psi(\underline{\underline{E}}, T)$ . Sous l'hypothèse d'un matériau isotrope, l'énergie libre  $\psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, T)$  est fonction seulement des dilatations principales  $\lambda_i$ .

La solution du problème d'équilibre thermoélastique en grandes transformations doit vérifier trois conditions :

- le champ de contraintes doit être statiquement admissible (respect de l'équilibre et des conditions aux limites) ;
- le champ de déplacement doit être cinématiquement admissible (respect des conditions aux limites) ;
- ces deux champs doivent être reliés par la loi de comportement.

Dans le cas d'un problème H.P.P., les théorèmes généraux montrent l'existence et l'unicité de la solution à ce problème d'équilibre thermoélastique. Dans le cadre des grandes transformations, il est difficile de trouver une solution directe et il existe peu de résultats d'existence d'une solution au problème d'équilibre. L'existence ainsi que l'unicité de la solution au problème n'est pas garantie (voir par exemple la traction biaxiale en annexe B.6). Toutefois, sous la propriété de polyconvexité de l'énergie, l'existence d'un minimum de l'énergie potentielle totale du système sur les champs de déplacement cinématiquement admissibles garantit l'existence d'une solution au problème élastique

non-linéaire (Ball, 1977). Une énergie  $\psi$  est dite polyconvexe si elle peut s'exprimer comme une fonction  $\psi^*$

$$\psi(\underline{F}) = \psi^*(\underline{F}, \text{Adj } \underline{F}, J) \quad \text{où} \quad \text{Adj } \underline{F} = J\underline{F}^{-1} \quad (3.2)$$

convexe de ces arguments.

## 3.2 Analyse thermodynamique pour la traction uniaxiale

Nous présentons dans cette section l'étude thermodynamique de l'extension uniaxiale d'un cylindre de caoutchouc. Ce cas d'école est une très bonne introduction à la thermoélasticité des élastomères.

### 3.2.1 Premier et second principe de la thermodynamique

Le premier principe permet d'écrire la variation de l'énergie interne  $dU$

$$dU = dQ + dW \quad (3.3)$$

en fonction de la chaleur absorbée par le système  $dQ$  et du travail fourni par les efforts extérieurs  $dW$ . Dans le cas d'un processus réversible, le second principe définit la variation d'entropie  $dS$  par

$$T dS = dQ \quad . \quad (3.4)$$

La variation d'énergie interne peut alors s'écrire

$$dU = T dS + dW \quad . \quad (3.5)$$

Nous considérons deux variables décrivant les forces extérieures : la force uniaxiale  $f$  et la pression uniforme  $p$ . Ainsi la variation de travail est donnée par

$$dW = f dL - p dV \quad . \quad (3.6)$$

### 3.2.2 Élasticité d'un élastomère

L'énergie libre  $A$  du matériau est définie par

$$A = U - TS \quad . \quad (3.7)$$

La différenciation de cette équation mène successivement à

$$dA = dU - T dS - S dT \quad (3.8a)$$

$$= f dL - p dV - S dT \quad . \quad (3.8b)$$

Cette dernière équation permet d'écrire les relations suivantes

$$f = \left( \frac{\partial A}{\partial L} \right)_{T,V} = \left( \frac{\partial U}{\partial L} \right)_{T,V} - T \left( \frac{\partial S}{\partial L} \right)_{T,V} \quad (3.9a)$$

$$p = - \left( \frac{\partial A}{\partial V} \right)_{T,L} \quad (3.9b)$$

$$S = - \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right)_{L,V} \quad . \quad (3.9c)$$

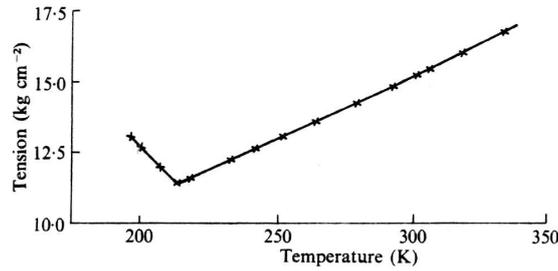


FIGURE 3.1 – Relation linéaire entre la force à déformation imposée (350%) et la température (Meyer (1935)).

### Les relations de Maxwell

En utilisant la relation suivante entre les dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial L} \left( \frac{\partial A}{\partial T} \right)_{L,V} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial A}{\partial L} \right)_{T,V} , \quad (3.10)$$

nous pouvons démontrer les relations de Maxwell suivantes :

$$\left( \frac{\partial S}{\partial L} \right)_{T,V} = - \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_{L,V} \quad (3.11a)$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{T,L} = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{L,V} \quad (3.11b)$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial V} \right)_{T,L} = - \left( \frac{\partial p}{\partial L} \right)_{T,V} . \quad (3.11c)$$

### 3.2.3 Origine entropique des efforts - Élastomère idéal

Pour un élastomère idéal, l'énergie interne ne dépend que de la température. La totalité des efforts provient de la variation d'entropie lors de la déformation : les chaînes de polymères peuvent tourner librement et l'énergie interne  $U$  ne change pas avec la déformation. Cela se traduit par l'annulation du terme  $(\partial U / \partial L)_{T,V}$  dans l'équation (3.9). Ainsi les contraintes sont-elles linéaires de la température. Les premières expériences de Meyer et Ferri (1935) ont montré que cette propriété était vérifiée au moins pour des déformations suffisamment grandes (FIG. 3.1). Par contre, aux faibles déformations, les expériences d'Anthony et al. (1942) infirment cette propriété (FIG. 3.2 et 3.3). De plus, un changement de signe dans la pente des droites est observé aux alentours de 10% de déformation : c'est un aspect de l'inversion thermoélastique qui sera détaillé dans la suite. L'explication de ce phénomène réside dans la dilatation thermique du caoutchouc. En effet, dans l'état non-déformé, une augmentation de la température conduit à une augmentation du volume et donc de la longueur (si la dilatation est libre) du caoutchouc. Aux faibles déformations, la diminution de l'effort avec la température est ainsi expliquée par ce phénomène. Donc l'élastomère ne peut pas être considéré comme idéal et la variation d'énergie interne contribue aussi aux efforts.

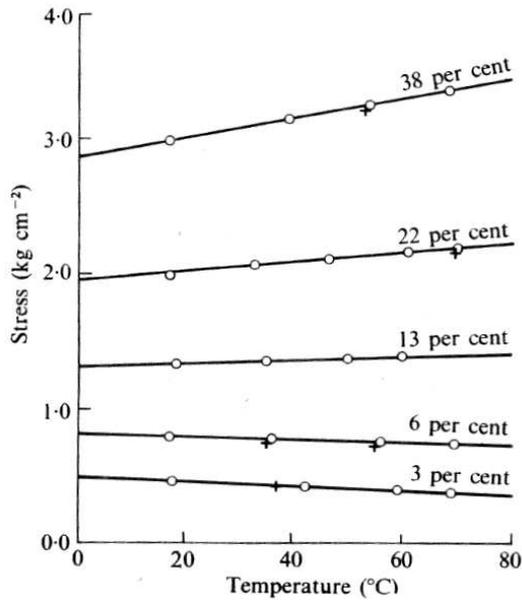


FIGURE 3.2 – Force à déplacement constant en fonction de la température (Anthony et al., 1942).

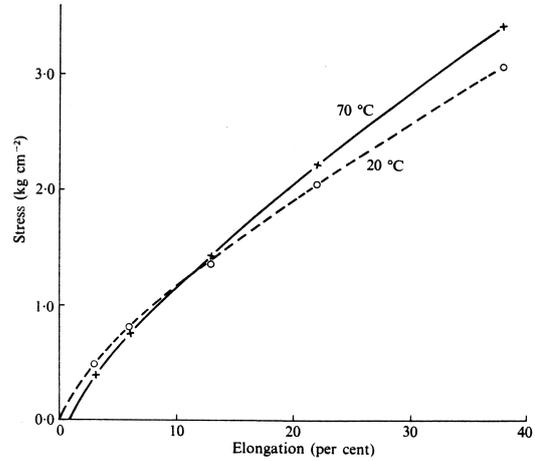


FIGURE 3.3 – Courbes de traction à 20°C et 70°C (Anthony et al., 1942).

### 3.2.4 Origine énergétique des efforts - Élastomère réel

#### a Les premières analyses

Les premières analyses (Anthony et al., 1942) négligent la variation de volume dans le travail des forces extérieures par rapport au travail de la force de traction. Les efforts d’origine énergétique dénommés  $f_e$  sont donc donnés par

$$f_e = \left( \frac{\partial U}{\partial L} \right)_T = f - T \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_L \quad (3.12)$$

Les résultats expérimentaux d’Anthony et al. (1942) (FIG. 3.4) indiquent que l’énergie interne contribue de façon significative à la force. Aux faibles déformations, la contribution énergétique est plus grande que la contribution entropique. C’est la manifestation de l’importance de la dilatation thermique, déjà observée dans les relations force-température à déplacement imposé. Cet effet peut être corrigé en travaillant à élancement  $\lambda$  fixée.

#### b Essais à volume constant

Des variations de volume accompagnent généralement la déformation d’un caoutchouc. Ces variations sont petites mais réaliser un essai à volume constant implique d’ajuster la pression au cours de l’essai pour compenser les effets de dilatation. Allen et al. (1963) ont réalisé ce type d’essai, qui a l’avantage de donner une expression exacte<sup>1</sup> des efforts d’origine énergétique

$$f_e = \left( \frac{\partial U}{\partial L} \right)_{T,V} = f - T \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_{L,V} \quad (3.13)$$

1. Nous verrons dans le paragraphe suivant qu’analyser un essai à pression constante suppose de connaître la relation force-déplacement.

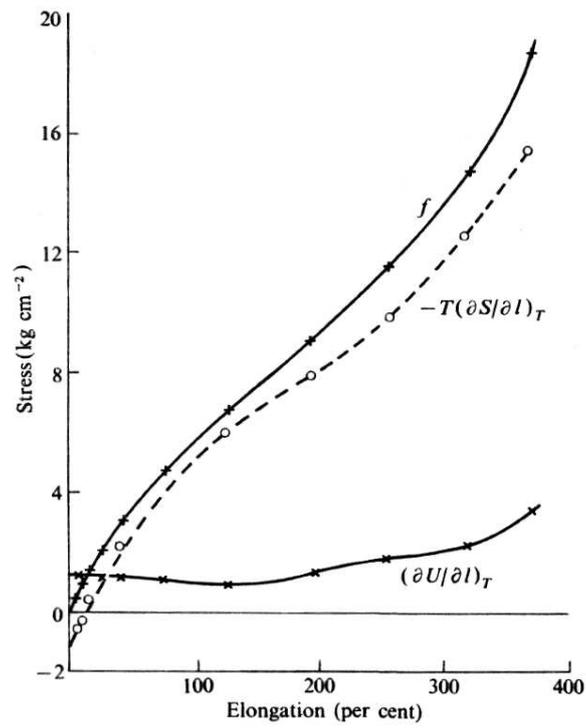


FIGURE 3.4 – Composantes énergétique et entropique de la force de traction en fonction de la déformation (Anthony et al., 1942).

Le ratio entre ces efforts d'origine énergétique par rapport à la force élastique est donné par

$$\frac{f_e}{f} = -T \left( \frac{\partial \ln(f/T)}{\partial T} \right)_{L,V} . \quad (3.14)$$

Les résultats indiquent que le rapport  $f_e/f$  est proche de 0.2 mais la dispersion causée par la difficulté d'une telle expérience ne permet pas une étude quantitative précise.

### c Essais à pression constante

Réaliser un essai à pression constante est beaucoup plus facile qu'un essai à volume constant. Toutefois, exprimer la relation entre les grandeurs à volume constant et à pression constante nécessite la connaissance de la relation force-élongation et ne permettra pas une détermination exacte de  $f_e/f$ . Nous reprenons ici la relation force-élongation fondée sur la théorie de Flory (Flory et al., 1960) :

$$f = \frac{\nu k T}{L_i} \left( \frac{V}{V_0} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \lambda^* - \lambda^{*-2} \right) \quad (3.15)$$

où  $\nu$  est le nombre de chaînes dans le réseau,  $k$  la constante de Boltzmann,  $\lambda^* = L/L_i$  l'élongation avec  $L_i$  la longueur de l'éprouvette au repos dont le volume serait égal au volume  $V$  de l'éprouvette déformée (donc  $L_i$  n'est pas la longueur de l'éprouvette au repos).  $L$  est la longueur de l'éprouvette déformée. L'utilisation de cette relation permet d'obtenir la relation entre les grandeurs à volume constant et à pression constante (Flory et al., 1960) :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_{L,V} = \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_{L,p} + \frac{\alpha f}{\lambda^{*3} - 1} \quad (3.16)$$

où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation volumique à pression constante

$$\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{L,p} . \quad (3.17)$$

La contribution énergétique des efforts (EQ. 3.14) se réécrit alors

$$\frac{f_e}{f} = -T \left( \frac{\partial \ln(f/T)}{\partial T} \right)_{L,p} - \frac{\alpha T}{\lambda^{*3} - 1} \quad (3.18)$$

et permet une détermination expérimentale du rapport  $f_e/f$ . Toutefois, aux petites déformations, le dernier terme diverge et cette équation peut difficilement être appliquée à cause de l'erreur sur la mesure de  $\lambda^*$  (Shen, 1969). Une autre formulation est aussi possible où cette fois-ci c'est l'élongation  $\lambda^*$  qui reste constante :

$$\frac{f_e}{f} = -T \left( \frac{\partial \ln(f/T)}{\partial T} \right)_{\lambda,p} + \frac{\alpha T}{3} . \quad (3.19)$$

### 3.2.5 Phénomène d'inversion thermoélastique

Dans cette sous-section, nous allons analyser en détail l'inversion thermoélastique. Ce phénomène fait l'objet dans la littérature d'une attention particulière (Chadwick, 1974; Ogden, 1987; Pellicer et al., 2001). Si pour l'instant nous nous étions dispensé d'exprimer les équations d'état, l'analyse de l'inversion thermoélastique suppose de connaître leurs expressions.

Nous supposons ici que la contrainte axiale est donnée par un modèle statistique

$$\sigma = kT \left( \frac{L}{L_0} - \left( \frac{L_0}{L} \right)^2 \right) . \quad (3.20)$$

### a Coefficient de dilatation linéique à force constante

Une première manifestation de l'inversion thermoélastique est le phénomène suivant : lorsqu'une bande de caoutchouc étirée par un poids est chauffée, sa longueur peut augmenter ou diminuer selon la charge appliquée (Anthony et al., 1942). Le coefficient de dilatation linéique à effort constant s'obtient par dérivation de l'équation (3.20) :

$$\lambda_{\sigma,V} = \frac{1}{L} \left( \frac{\partial L}{\partial T} \right)_{\sigma,V} = \lambda_0 - \frac{1}{T} \frac{(L/L_0(T))^3 - 1}{(L/L_0(T))^3 + 2} \quad (3.21)$$

où  $\lambda_0$  est le coefficient de dilatation linéique à force nulle, qui est constant. La variation de  $L_0$  (longueur au repos) avec la température est donnée par intégration de  $\lambda_0$  :

$$\lambda_0 = \frac{1}{L_0} \frac{dL_0}{dT}, \quad \text{d'où} \quad L_0(T) = L_0(T_0) \exp [\lambda_0(T - T_0)] . \quad (3.22)$$

Le premier terme de (3.21) est la dilatation thermique, et le second décrit le comportement thermoélastique des forces entropiques. Comme nous pouvons le constater sur la figure 3.5, ce coefficient varie en fonction de l'élongation : d'abord positif et prenant la valeur de  $\lambda_0$ , il s'annule puis devient négatif. Ce changement de signe de  $\lambda_{\sigma,V}$  est connu comme l'inversion thermoélastique. A une température donnée  $T_i$ , l'élongation d'inversion est donnée par

$$\alpha_i^3 = \frac{1 + 2\lambda_0 T_i}{1 - \lambda_0 T_i} \exp [3\lambda_0(T_i - T_0)] . \quad (3.23)$$

Des élongations d'inversion de 1.05 à 1.1 sont des valeurs typiques. Notons que pour un élastomère idéal où  $\lambda_0$  est nul, il n'y a pas de phénomène d'inversion car  $\lambda_{\sigma,V}$  est toujours négatif.

### b Variation de la contrainte avec la température à déplacement imposé

Un autre aspect bien connu de l'inversion thermoélastique est le changement de comportement en température selon le déplacement imposé. En supposant la contrainte de la forme (3.20), en la dérivant et en utilisant les relations (3.21) et (3.22), nous obtenons l'expression suivante pour la dérivée des contraintes par rapport à la température à déplacement constant (ou élongation  $\alpha_0 = L/L_0(T_0)$  constante) :

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_{L,V} = -kT \lambda_{\sigma,V} \left( \alpha_0 \exp [-\lambda_0(T - T_0)] + \frac{2}{\alpha_0^2} \exp [2\lambda_0(T - T_0)] \right) . \quad (3.24)$$

Les données expérimentales d'Anthony et al. (1942) représentées sur la figure 3.2, indiquent que la pente des courbes décroît avec l'élongation, jusqu'à devenir négative aux faibles élongations. L'inversion se retrouve sur les courbes de traction à 20°C et 70°C (FIG. 3.3) où aux faibles déformations, la courbe de traction à 20°C est au-dessus de celle à 70°C, l'inversion se situant vers 10%.

Ce phénomène d'inversion est aussi lié à celui du coefficient de dilatation linéique car  $(\partial \sigma / \partial T)_{L,V}$  est du signe opposé à  $\lambda_{\sigma,V}$ .

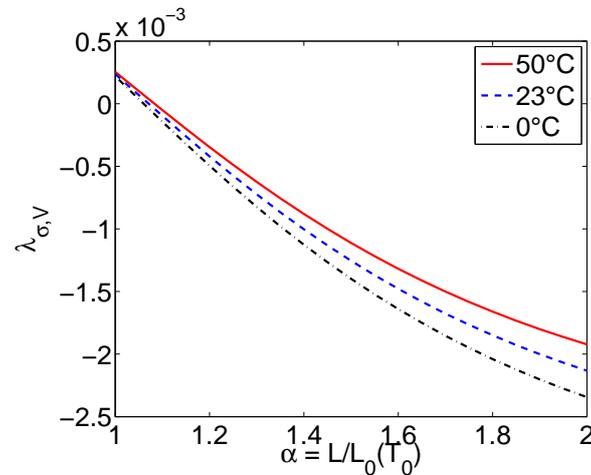


FIGURE 3.5 – Coefficient de dilatation volumique fonction de l'élongation.

### c Effet thermique de l'extension ou effet Gough-Joule

Une des manifestations les plus marquantes de l'élasticité des élastomères est la variation de température obtenue par l'élongation du caoutchouc. [Gough \(1805\)](#) est le premier à décrire ce phénomène. Lorsqu'il étire rapidement une bande de caoutchouc et la pose sur ses lèvres, il note une sensation de chaleur. Cette augmentation de température à l'élongation est réversible puisqu'elle disparaît avec la rétractation. Cet effet thermique est étudié en détail par [Joule \(1859\)](#) avec une mesure de l'échauffement causé par l'élongation (FIG. 3.6). L'auteur constate d'abord un très faible refroidissement de l'échantillon, puis une augmentation de la température. Ces données sont confirmées par les expériences de [Dart et Guth \(1945\)](#).

L'allure de la courbe d'échauffement souligne la compétition entre les phénomènes énergétiques et entropiques. Le refroidissement initial est à rapprocher du refroidissement d'un gaz se dilatant, alors que l'augmentation de température est liée à la diminution de l'entropie (si l'énergie interne ne varie pas avec la déformation, alors le travail des forces extérieures  $-dW = dQ$  se transforme en chaleur).

#### Calcul de l'élévation de température

Considérons une transformation adiabatique, donc réversible, allant d'un état initial  $(T_0, L_0)$  à un état final  $(T, L)$ . Notre objectif ici est de calculer la variation de température lors de l'élongation d'un caoutchouc. Pour cela, nous allons introduire un état fictif  $(T_0, L)$ , et considérer la succession de transformations suivante :

$$S(T_0, L_0) \xrightarrow{\Delta S_1} S(T_0, L) \xrightarrow{\Delta S_2} S(T, L) \quad . \quad (3.25)$$

La première transformation est isotherme alors qu'il n'y a pas de variation de longueur dans la deuxième.

Comme la transformation totale est réversible, la variation d'entropie totale est nulle ce qui implique que  $\Delta S_1 = -\Delta S_2$ . La variation d'entropie  $\Delta S_1$  est donnée par

$$\Delta S_1 = S(T_0, L) - S(T_0, L_0) = \int_{L_0}^L \left( \frac{\partial S}{\partial L} \right)_{T,V} dL = - \int_{L_0}^L \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_{L,V} dL \quad (3.26)$$

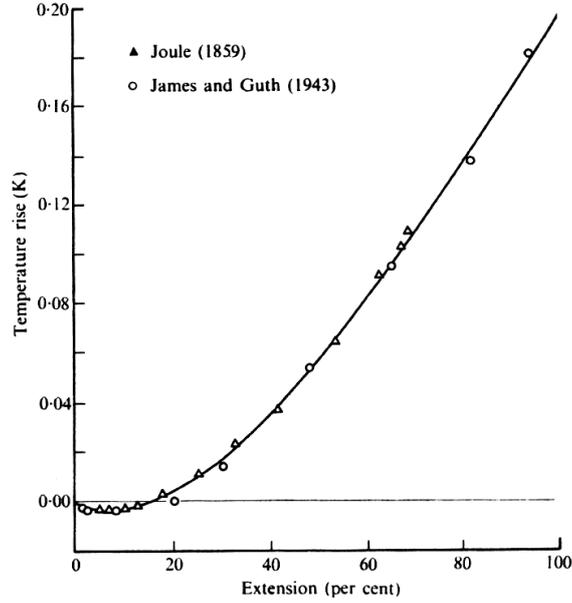


FIGURE 3.6 – Augmentation de température dans l’extension adiabatique (Treloar, 1975).

où la relation de Maxwell (3.11) a été utilisée pour l’obtention de la dernière expression. La variation d’entropie  $\Delta S_2$  est donnée par

$$\Delta S_2 = S(T, L) - S(T_0, L) = \int_{T_0}^T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{L,V} dT = \int_{T_0}^T \frac{C_{L,V}}{T} dT \quad (3.27)$$

où  $C_{L,V}$  est la chaleur spécifique à déformation constante

$$C_{L,V} = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{L,V} . \quad (3.28)$$

En supposant que la chaleur spécifique ne dépend pas de la température et en intégrant (3.26) en utilisant (3.24), nous obtenons la variation de température pour l’elongation d’un caoutchouc

$$\ln \frac{T}{T_0} = \frac{kL_0}{C_{L,V}} \left[ \frac{\alpha_0^2}{2} + \frac{1}{\alpha_0} - \frac{3}{2} - \lambda_0 T_0 \left( \frac{\alpha_0^2}{2} - \frac{2}{\alpha_0} + \frac{3}{2} \right) \right] . \quad (3.29)$$

Une autre façon d’analyser l’effet thermique est d’écrire la dérivée de la température par rapport au déplacement, soit

$$\left( \frac{\partial T}{\partial L} \right)_{S,V} \stackrel{\text{maxwell}}{=} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial S} \right)_{L,V} = \frac{T}{C_{L,V}} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_{L,V} . \quad (3.30)$$

Le signe de  $(\partial T / \partial L)_{S,V}$  est donc égal au signe de  $(\partial \sigma / \partial T)_{L,V}$  donné par l’équation (3.24) : la température diminue jusqu’à atteindre son minimum au point d’inversion puis augmente.

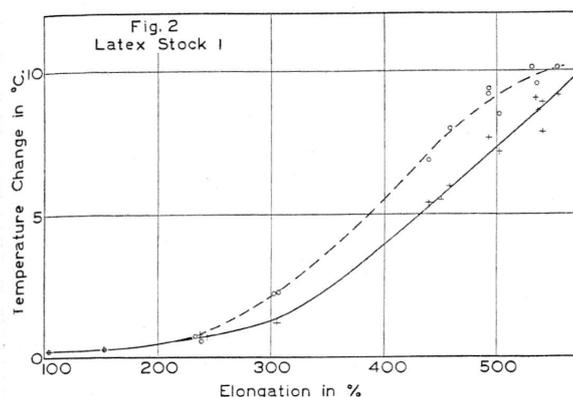


FIGURE 3.7 – Mesure de l'effet thermique lors de la charge (+) et de la décharge (●) d'un caoutchouc cristallisable (Dart et al., 1942).

### Dégagement de chaleur par la cristallisation

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que l'augmentation de température était due au travail d'extension transformé en chaleur. Pour les matériaux cristallisables, la cristallisation sous contraintes aux grandes élongations s'accompagne d'un dégagement de chaleur, et la disparition de la phase cristalline provoque l'absorption de chaleur. Ce phénomène se traduit par une non réversibilité de la température en fonction de l'élongation au cours d'un cycle charge-décharge, comme présenté sur la figure 3.7.

## 3.3 Écriture générale de l'énergie libre

Dans un modèle hyperélastique, les contraintes dérivent directement de l'énergie libre. Nous avons vu dans la section précédente l'importance de l'expression des contraintes et donc de l'énergie libre. Notamment, les choix de modélisation de l'énergie interne permettent ou non de représenter certains phénomènes. Dans la suite du chapitre, nous allons discuter des modélisations thermomécaniques, c'est-à-dire de l'expression de l'énergie libre et des conséquences associées.

Un modèle thermomécanique anisotherme peut se construire en reliant l'énergie libre à une température quelconque en fonction de celle donnée à une température de référence. L'énergie libre à une température de référence  $T_0$  s'exprime par  $\psi_0 = \psi(\underline{E}, T_0)$ . Dans l'annexe B.4, nous intégrons cette équation afin d'obtenir l'expression générale de l'énergie libre  $\psi = \psi(\underline{E}, T)$  à une température quelconque (Chadwick, 1974) :

$$\psi = \frac{T}{T_0} \psi_0 - \left( \frac{T}{T_0} - 1 \right) e_0(\underline{E}, T_0) - \int_{T_0}^T c(\underline{E}, \hat{T}) \left( \frac{T - \hat{T}}{\hat{T}} \right) d\hat{T}. \quad (3.31)$$

Cette formulation exacte répond à une double exigence : s'appuyer sur  $\psi_0$ , caractérisée classiquement lors d'analyses isothermes, et proposer une dépendance à la température la plus générale possible. Pourtant, elle est inapplicable en pratique à cause des difficultés d'identification des variations de l'énergie interne et de la chaleur spécifique avec la déformation. Plusieurs démarches simplificatrices visant à expliciter l'équation (3.31) vont donc être discutées dans la suite du chapitre.

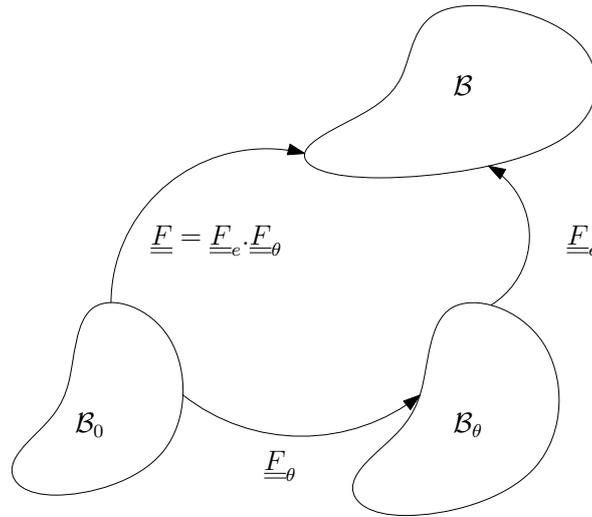


FIGURE 3.8 – Décomposition multiplicative d’une transformation.

### 3.4 Décomposition de la transformation

La décomposition de la transformation est liée aux grandeurs mesurées lors des essais thermomécaniques. Par exemple, si l’essai consiste à chauffer puis solliciter mécaniquement l’éprouvette, il est naturel d’introduire une décomposition multiplicative de la transformation. Mais si la variation de volume est mesurée, une décomposition en termes de dilatation et de distorsion peut être utilisée.

Les lois identifiées et l’expression de l’énergie libre dépendent ainsi de la décomposition de la transformation, et donc de la manière d’analyser des essais thermomécaniques. Nous proposons dans la suite d’étudier les décompositions multiplicatives et la décomposition en terme de dilatation et de distorsion.

#### 3.4.1 Décompositions multiplicatives

Pour modéliser le comportement thermoélastique, une configuration intermédiaire  $\mathcal{B}_i$  peut-être introduite entre la configuration initiale  $\mathcal{B}_0$  et la configuration finale  $\mathcal{B}$ .

##### a Dilatation thermique puis déformation mécanique isotherme

Une majorité d’auteurs (Lu et Pister, 1975; Humphrey et Rajagopal, 1997) considère que l’échantillon est d’abord soumis à une dilatation thermique puis à une déformation mécanique isotherme. La configuration intermédiaire  $\mathcal{B}_\theta$  est alors obtenue à partir de la configuration actuelle par le déchargement total des efforts effectué de manière isotherme (FIG. 3.8). Ainsi le gradient de la transformation élastique isotherme de  $\mathcal{B}_\theta$  à  $\mathcal{B}$  est  $\underline{F}_e$  et le gradient de la transformation thermique de  $\mathcal{B}_0$  à  $\mathcal{B}_\theta$  est  $\underline{F}_\theta$ . Le gradient total se décompose donc selon

$$\underline{F} = \underline{F}_e \cdot \underline{F}_\theta \quad . \quad (3.32)$$

Pour un matériau isotrope, la partie thermique de la transformation est souvent donnée par

$$\underline{F}_\theta = k(T) \underline{I} \quad (3.33)$$

où  $k(T)$  est l'élongation thermique dans n'importe quelle direction matérielle. Ce coefficient est relié à la dilatation linéique thermique  $\alpha(T)$  par

$$\alpha(T) = \frac{1}{T} \frac{dk}{dT} \quad , \quad \text{soit } k(T) = \exp \left( \int_{T_0}^T \alpha(s) ds \right) \quad . \quad (3.34)$$

Cependant, certains auteurs considèrent en plus de la dilatation thermique une transformation mécanique isochore : l'incompressibilité du matériau est introduite par des multiplicateurs de Lagrange. Cette modélisation n'est pas rigoureuse<sup>2</sup> car ces auteurs supposent que  $\underline{\underline{F}}$  et  $T$  sont les variables d'état indépendantes alors qu'ils imposent  $\det \underline{\underline{F}} = f_J(T)$ . Dans le cas faiblement compressible, [Imam et Johnson \(1998\)](#); [Lubarda \(2004\)](#) ont proposé des modélisations appropriées fondées sur la décomposition (3.32).

## b Décomposition en dilatation et distorsion

Il est possible de décomposer ([Ogden, 1984](#)) le gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}$  en deux parties. La première  $J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{I}}$  représente la dilatation, la deuxième  $\underline{\underline{\tilde{F}}}$  est purement isochore et est définie par  $\underline{\underline{F}} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{\tilde{F}}}$ . Le gradient de transformation  $\underline{\underline{\tilde{F}}}$  est bien défini comme ayant un déterminant unitaire. Afin de distinguer les parties volumique et isochore, [Ogden \(1987\)](#) introduit les "dilatations modifiées" par

$$\lambda_i^* = J^{-\frac{1}{3}} \lambda_i \quad (3.35)$$

où les  $\lambda_i$  sont les dilatations principales. Ainsi, l'énergie libre peut-elle s'écrire (matériau isotrope)

$$\hat{\psi}(\lambda_1^*, \lambda_2^*, J, T) = \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, T) \quad . \quad (3.36)$$

Par exemple, dans le cas des contraintes planes ( $\sigma_3 = 0$ ), l'auteur obtient les relations suivantes pour les contraintes principales de Cauchy  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$

$$\sigma_1 = \frac{\lambda_1^*}{J} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \lambda_1^*} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{\lambda_2^*}{J} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \lambda_2^*} \quad , \quad \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial J} \quad . \quad (3.37)$$

Ces expressions suffisent pour déterminer  $\hat{\psi}$ . L'avantage est qu'elles sont plus précises aux faibles déformations qu'une formulation en invariant car elles ne font pas intervenir de différence de carrés au dénominateur.

Avec ces notations, nous pouvons faire l'hypothèse que l'énergie libre se décompose en deux parties, volumique et isochore :

$$\psi(\underline{\underline{F}}, T) = \psi_{vol}(J, T) + \psi_{iso}(\underline{\underline{\tilde{F}}}, T) \quad . \quad (3.38)$$

Par exemple, en anticipant les futures descriptions, l'écriture (3.44) de l'énergie libre peut devenir

$$\psi = \underbrace{f(T) \psi_{0vol} - \left( \frac{T}{T_0} - 1 \right) e_0(J) + \bar{c} t(T)}_{\psi_{vol}(J, T)} + \underbrace{f(T) \psi_{0iso}}_{\psi_{iso}(\underline{\underline{\tilde{F}}}, T)} \quad . \quad (3.39)$$

Voici quelques expressions proposées dans la littérature pour les potentiels volumique et isochore. [Ogden \(1972a\)](#) écrit  $\psi_{0vol} = \kappa_0 \mathcal{G}(J)$  avec  $\mathcal{G}(J)$  une fonction définie par  $\mathcal{G}(J) = \beta^{-2}(\beta \ln J +$

2. Nous avons abordé ce sujet dans le paragraphe 2.3.6.

$J^{-\beta} - 1$ ) où  $\beta$  est un coefficient strictement positif. [Chadwick \(1974\)](#) préfère utiliser la forme donnée par Murnaghan (1951)  $\mathcal{G}(J) = \frac{1}{\beta} \left( J + \frac{1}{\beta-1} J^{-\beta+1} - \frac{\beta}{\beta-1} \right)$  avec  $\beta > 1$ . [Miehe \(1995\)](#) et [Reese et Govindjee \(1998\)](#) utilisent la forme donnée par Ogden pour leur implémentation numérique. Notons que ces fonctions n'assurent pas la polyconvexité, sauf dans un domaine autour de l'état  $J = 1$ .

Ogden propose un potentiel isochoire  $\psi_{0\text{iso}}$  identique à la loi d'Ogden (EQ. 4.20) en calculant les élongations principales à partir de la partie isochoire de la transformation. Ce potentiel a, par la suite, été largement utilisé dans la littérature.

### 3.5 Modélisation thermomécanique des élastomères : rôle de l'énergie interne

#### 3.5.1 Élasticité purement entropique

Expérimentalement, il est constaté que l'énergie interne varie très peu avec la déformation. L'hypothèse de l'élasticité entropique revient à considérer cette variation comme nulle. En se fondant sur l'équation (B.23a), la chaleur spécifique devient fonction de la seule température. De plus, l'énergie interne à la température de référence s'annule. L'expression de l'énergie libre massique devient alors

$$\psi = \frac{T}{T_0} \psi_0 - \int_{T_0}^T c(\hat{T}) \left( \frac{T - \hat{T}}{\hat{T}} \right) d\hat{T}. \quad (3.40)$$

Une deuxième hypothèse plus forte est souvent formulée : la chaleur spécifique est considérée comme constante,  $c(T) = c_0$ . Le terme intégral de (3.40) devient alors  $c_0((T - T_0) - T \ln T/T_0)$ .

[Chadwick et Creasy \(1984\)](#) montrent l'équivalence entre différentes descriptions de l'élasticité entropique. Ainsi est-il équivalent de considérer

- i) des contraintes provenant exclusivement de la variation d'entropie ;
- ii) des contraintes linéaires de la température ;
- iii) une énergie interne ne dépendant que de la température.

Plusieurs courbes dans le diagramme contraintes déformations ont été tracées pour différentes températures sur la figure 3.9. L'évolution linéaire des contraintes avec la température y est représentée.

Cette forme d'énergie libre est relativement simple mais ne représente pas les dilatations thermiques. Ainsi, elle ne prédit pas le phénomène d'inversion thermodynamique. Il faut alors faire l'hypothèse que l'énergie interne dépend de la déformation. Les paragraphes suivants vont donc étudier de quelle manière il est possible d'incorporer à l'énergie interne une dépendance à la déformation.

#### 3.5.2 Dépendance de l'énergie interne à la variation de volume

Supposons que l'énergie interne dépende de la déformation seulement à travers la dilatation volumique  $J$ , soit  $e_0(\underline{E}, T_0) = e_0(J)$ .

Une modélisation possible est d'écrire l'énergie interne ([Chadwick, 1974](#); [Ogden, 1992](#)) comme

$$e_0(\underline{E}, T_0) = \alpha_0 \kappa_0 T_0 (J - 1) \quad (3.41)$$

où  $\alpha_0$  et  $\kappa_0$  sont respectivement le coefficient de dilatation thermique et le coefficient de compressibilité dans l'état naturel. Cette expression modélise naturellement les dilatations thermiques et retrouve

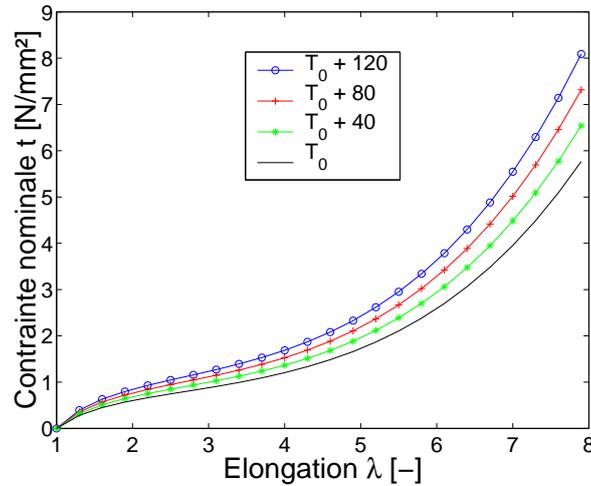


FIGURE 3.9 – Courbes contrainte-élongation à quatre températures données (élasticité entropique).

le point d'inversion thermoélastique pour

$$\lambda = 1 + \frac{1}{3}\alpha_0 T_0 \quad . \quad (3.42)$$

### 3.5.3 Entropie modifiée

Chadwick et Creasy (1984) définissent qu'un matériau a une entropie modifiée si et seulement si son énergie interne est la somme d'une fonction de la déformation et d'une autre fonction de la température, soit

$$e(\underline{E}, T) = e_1(\underline{E}) + e_2(T) \quad . \quad (3.43)$$

Cette définition inclut la modélisation précédente proposée par Chadwick (1974) où l'énergie interne est seulement fonction de la variation de volume. Cette modélisation (Chadwick, 1974, Sect. 3(c)) est une première approximation et ne permet pas de reproduire la contribution énergétique aux contraintes : l'énergie interne dépend aussi de l'état de distorsion (Allen et al., 1963). Cette décomposition permet de modéliser la partie énergétique des efforts <sup>3</sup>.

### 3.5.4 Chaleur spécifique dépendant de la déformation

Nous avons vu que l'hypothèse d'élasticité entropique impliquait une relation linéaire entre les contraintes et la température mais qu'elle n'était pas vérifiée pour certaines expériences. Reese et Govindjee (1998) supposent la dépendance de la chaleur spécifique à la déformation en rajoutant un terme supplémentaire dans son expression, dans le but d'obtenir une dépendance à la température plus générale. Pour ce faire, les auteurs proposent (voir annexe B.5) la forme suivante pour l'énergie libre (EQ. 3.31)

$$\psi = f(T)\psi_0 - \left(\frac{T}{T_0} - 1\right) e_0(\underline{E}, T_0) + \bar{c} t(T) \quad . \quad (3.44)$$

Cette formulation est intéressante car les contraintes ne sont plus fonctions linéaires de la température.

3. Ceci est très bien expliqué par Ogden (1992, Exemple 2).

### 3.6 Conclusions

Les élastomères ont essentiellement un comportement entropique : la force résultante d'une déformation provient de la diminution de l'entropie. Toutefois, une partie des efforts est d'origine énergétique. Ainsi, la dilatation volumique et le phénomène d'inversion thermoélastique sont-ils liés. L'étude de la thermoélasticité non-linéaire pour les élastomères nécessite la définition d'une énergie libre et d'une énergie interne. De la définition de ce potentiel dépendront les caractéristiques mécaniques de l'élastomère étudié.

# Chapitre 4

## Comportement cyclique

*Dans ce chapitre, nous décrivons le comportement cyclique de l'élastomère de l'étude à différentes températures.*

### Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Thermoélasticité non-linéaire</b>	<b>46</b>
3.1.1	Thermoélasticité linéaire	46
3.1.2	Thermoélasticité non-linéaire	46
<b>3.2</b>	<b>Analyse thermodynamique pour la traction uniaxiale</b>	<b>47</b>
3.2.1	Premier et second principe de la thermodynamique	47
3.2.2	Élasticité d'un élastomère	47
3.2.3	Origine entropique des efforts - Élastomère idéal	48
3.2.4	Origine énergétique des efforts - Élastomère réel	49
3.2.5	Phénomène d'inversion thermoélastique	51
<b>3.3</b>	<b>Écriture générale de l'énergie libre</b>	<b>55</b>
<b>3.4</b>	<b>Décomposition de la transformation</b>	<b>56</b>
3.4.1	Décompositions multiplicatives	56
<b>3.5</b>	<b>Modélisation thermomécanique des élastomères : rôle de l'énergie interne</b>	<b>58</b>
3.5.1	Élasticité purement entropique	58
3.5.2	Dépendance de l'énergie interne à la variation de volume	58
3.5.3	Entropie modifiée	59
3.5.4	Chaleur spécifique dépendant de la déformation	59
<b>3.6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>60</b>

Nous avons mis en évidence au début de ce mémoire la nécessité d'étudier le comportement cyclique thermomécanique des élastomères. À cette fin, une campagne d'essais a été lancée par PSA en partenariat avec la société TRELLEBORG. Une deuxième campagne a aussi été réalisée à Bristol en partenariat avec l'University of the West of England (UWE) pour étudier les effets multiaxiaux. Dans ce cadre, j'ai défini, construit et utilisé un banc d'essai biaxial lors d'un séjour de trois mois sur place.

Ce chapitre débute par une présentation des modélisations hyperélastiques. En effet, nous motivons le choix de la modélisation hyperélastique dans la suite de ce mémoire. Puis, nous étudions l'influence de la température sur le comportement stabilisé pour les deux campagnes d'essais. Notons

que l'objet de ce chapitre est bien la modélisation hyperélastique du comportement cyclique, mais que l'étude de la dissipation hystérétique effectuée sur les mêmes essais imposent quelques restrictions.

Nous rappelons aussi dans cette introduction que le comportement des élastomères est dispersé. Cette dispersion s'observe entre les pièces d'un même lot matière, mais aussi entre plusieurs lots matières. Nous pouvons considérer une dispersion de l'ordre de 15%.

## 4.1 Modélisation hyperélastique

L'hyperélasticité ayant été définie au paragraphe 1.2.2, nous étudions dans cette section les lois de comportement, qui se classent en deux grandes familles. La première étudie de façon statistique la disposition des chaînes à l'intérieur du réseau macromoléculaire. Elle permet de remonter par intégration à l'énergie libre du matériau. Ce sont les modèles statistiques. Les modèles phénoménologiques s'appuient eux sur une modélisation du comportement à partir de l'expérience. Des modèles mathématiques plus ou moins complexes sont donc déduits de considérations expérimentales. Nous terminerons par la présentation d'un modèle de comportement cyclique.

### 4.1.1 Modèles statistiques

#### a Fondements - Élasticité entropique

Ces modèles s'appuient sur les techniques de calcul d'entropie et de distribution d'équilibre de chaînes macromoléculaires. Le comportement de l'élastomère est ainsi relié aux changements de conformation macromoléculaire.

La principale hypothèse porte sur le caractère entropique de l'élasticité. Dans le cas des caoutchoucs, la force de rappel est due à la diminution d'entropie causée par la baisse du nombre de conformations possibles pour les chaînes. En effet, en considérant une transformation isotherme et réversible, le travail associé et la variation d'énergie libre sont liés par

$$dW = f dl = dE - T dS \quad (4.1)$$

avec  $f$  la force exercée pour allonger l'élément étudié de la longueur  $dl$ . La force  $f$  s'exprime alors par

$$f = \left( \frac{\partial E}{\partial l} \right)_T - T \left( \frac{\partial S}{\partial l} \right)_T . \quad (4.2)$$

Ces deux termes sont respectivement un terme d'énergie interne et un terme entropique. Dans le cas des élastomères (cf chapitre précédent), des essais de traction à différentes températures montrent que la courbe  $f(T)$  est une droite passant généralement par l'origine. On peut alors faire l'hypothèse que le terme d'énergie interne est négligeable devant le terme entropique. Les statisticiens se sont appuyés sur ce résultat pour bâtir leurs modèles. L'entropie  $S$  est ainsi fonction de la probabilité de la configuration  $P$  du système par la loi de Boltzmann

$$S = k \ln P \quad (4.3)$$

où  $k$  est la constante de Boltzmann.

L'hypothèse de déplacement affine du réseau est aussi formulée. Les chaînes sont supposées être entre deux liens physiques, formés soit par les ponts de réticulation, soit par les ramifications du réseau. Chaque nœud physique suit linéairement la déformation globale. L'élongation d'une chaîne peut donc être confondue avec la dilatation macroscopique du matériau dans la direction définie à

partir de la chaîne. Si la structure d'un élastomère est représentée par un ensemble de chaînes à  $n$  maillons élémentaires de même longueur  $a$  sans interaction entre eux, l'énergie de l'ensemble des chaînes contenues dans l'angle solide  $\Omega$  est donnée par la somme

$$W = \int_{\Omega} \int_n p(n, d\Omega) w(n, \lambda) dn d\Omega \quad (4.4)$$

où  $p(n, d\Omega)$  est la probabilité de trouver une chaîne de  $n$  monomères dans l'angle solide  $d\Omega$  et  $w(n, \lambda)$  est l'énergie libre conformationnelle d'une chaîne de  $n$  monomères et d'élongation  $\lambda$ .

### b Statistique gaussienne

En supposant que les probabilités suivent une répartition gaussienne, l'énergie libre se calcule (Treloar, 1943a,b) en fonction du premier invariant  $I_I$  de la transformation

$$W = \frac{1}{2} NkT(I_I - 3) \quad (4.5)$$

où  $N$  est le nombre de chaînes par unité de volume et  $T$  la température. C'est le modèle néo-hookéen. Ce modèle est relativement fidèle pour les déformations ne dépassant pas 50%. Il n'est en revanche pas en mesure de rendre compte du raidissement aux grandes déformations. En effet, les chaînes ont une extension limite avant rupture qui n'est pas prise en compte dans la distribution gaussienne. C'est pourquoi d'autres modèles statistiques ont été proposés en considérant l'extension limite des chaînes.

### c Statistique non gaussienne

Kuhn et Gr $\ddot{u}$  n (1942) introduisent la fonction de Langevin pour calculer la densité d'énergie libre conformationnelle d'une chaîne

$$w = nkT \left( \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \beta + \ln \frac{\beta}{\sinh \beta} \right) - w_0 \quad (4.6)$$

avec  $n$  le nombre d'éléments de la chaîne,  $w_0$  une constante arbitraire,  $\beta = \mathcal{L}^{-1}(\lambda/\sqrt{n})$  et  $\mathcal{L}$  la fonction de Langevin définie par  $\mathcal{L}(x) = \coth x - 1/x$ . Il faut noter qu'il n'existe pas d'expression analytique de l'inverse de la fonction de Langevin.

Pour calculer l'énergie libre du modèle, plusieurs auteurs ont eu recours à des simplifications du modèle en introduisant des modèles à chaînes. Nous ne citerons ici qu'une liste non exhaustive.

#### Modèle à trois chaînes

Les chaînes se situent le long des directions principales eulériennes. Wang et Guth (1952) trouvent une énergie libre sous la forme

$$W_{3ch} = \frac{NkT}{3} \sqrt{n} \sum_{i=1}^3 \left( \lambda_i \beta_i + \sqrt{n} \ln \frac{\beta_i}{\sinh \beta_i} \right) \quad (4.7)$$

avec  $N$  la densité de chaînes.

#### Modèle à quatre chaînes

Flory et Rehner (1943) puis Treloar se basent sur une géométrie tétraédrique où les quatre chaînes naissent à un sommet et se rejoignent au centre.

### Modèle à huit chaînes

Dans ce modèle, les huit chaînes sont sur les diagonales d'un cube défini par les directions principales : elles relient le centre du cube à un sommet. L'élongation d'une chaîne s'écrit en fonction des élongations principales

$$\lambda_{ch}^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 = \frac{I_I}{3} . \quad (4.8)$$

Arruda et Boyce (1993) proposent de mettre la fonction d'énergie sous la forme

$$W_{8ch} = NkT\sqrt{n} \left( \lambda_{ch}\beta_{ch} + \sqrt{n} \ln \frac{\beta_{ch}}{\sinh \beta_{ch}} \right) \quad (4.9)$$

avec

$$\beta_{ch} = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\lambda_{ch}}{\sqrt{n}} \right) . \quad (4.10)$$

En utilisant le développement en série de l'inverse de la fonction de Langevin donné par Treloar, Arruda et Boyce écrivent la densité d'énergie sous la forme

$$W_{8ch} = NkT \left( \frac{1}{2}(I_I - 3) + \frac{1}{20n}(I_I^2 - 9) + \frac{11}{1050n^2}(I_I^3 - 27) + \frac{19}{7000n^3}(I_I^4 - 81) \right) + \dots \quad (4.11)$$

Perrin (2000) utilise l'approximation de Padé au premier ordre pour l'inverse de la fonction de Langevin et fournit un modèle de comportement isotrope intégrable.

### Discussion

Treloar (1975) observe que la réponse avec un modèle tétraédrique peut dépendre de l'orientation de l'élément de volume par rapport aux directions principales. Les modèles à trois chaînes introduisant aussi de l'anisotropie, Treloar propose donc de considérer un système avec un grand nombre de directions pour éliminer l'anisotropie introduite par des directions privilégiées.

#### 4.1.2 Modèles phénoménologiques

A la différence des modèles statistiques où la structure microscopique de la matière est étudiée, les modèles phénoménologiques s'appuient sur des identifications mathématiques à partir d'essais expérimentaux. Les potentiels hyperélastiques sont développés soit à partir des invariants, soit à partir des élongations principales. Les lois peuvent faire intervenir ces coefficients de manière linéaire ou sous forme de loi puissance ; il y a donc un grand nombre de compositions possibles.

##### a En fonction des invariants

En considérant un milieu isotrope, l'énergie de déformation élastique  $W$  peut s'écrire en fonction des invariants  $I_I$ ,  $I_{II}$  et  $I_{III}$  du tenseur de Cauchy-Green droit  $\underline{\underline{C}}$ . La forme polynomiale la plus générale (Treloar, 1975) peut se mettre sous la forme

$$W(I_I, I_{II}, I_{III}) = \sum_{ijk} C_{ijk} (I_I - 3)^i (I_{II} - 3)^j (I_{III} - 1)^k . \quad (4.12)$$

Ce modèle ne prend pas en compte l'incompressibilité du matériau. Pour un matériau incompressible, le troisième invariant  $I_{III}$  est fixé à 1 et la loi s'écrit sous une forme plus simple

$$W(I_I, I_{II}) = \sum_{ij} C_{ij} (I_I - 3)^i (I_{II} - 3)^j \quad (4.13)$$

généralement appelée loi de Rivlin. Des lois plus simples sont souvent préférées et nous pouvons citer par exemple le modèle néo-hookéen<sup>1</sup>

$$W(I_I) = C_{10}(I_I - 3) \quad , \quad (4.14)$$

et le modèle de Mooney-Rivlin qui est en accord avec un certain nombre de résultats expérimentaux

$$W(I_I, I_{II}) = C_{10}(I_I - 3) + C_{01}(I_{II} - 3) \quad . \quad (4.15)$$

L'identification des deux paramètres est aisée sur un essai de traction uniaxiale puisque la force  $f$  est donnée par

$$f = 2S \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad . \quad (4.16)$$

Les deux constantes sont facilement identifiables en traçant les points expérimentaux dans un diagramme  $1/\lambda - f/(\lambda - 1/\lambda^2)$ .

Le modèle de [Hart-Smith \(1966\)](#) fait intervenir les coefficients élastiques sous une forme non linéaire. Cette loi présente l'avantage de n'avoir que trois coefficients à identifier et rend bien compte du raidissement aux grandes déformations des élastomères tout en modélisant la courbure à l'origine

$$W(I_I, I_{II}) = C_1 \int \exp(C_3(I_I - 3)^2) dI_I + C_2 \ln \left( \frac{I_{II}}{3} \right) \quad . \quad (4.17)$$

Plus récemment [Gent \(1996\)](#) a développé un modèle où  $J_m$  représente la valeur de  $I_I - 3$  pour laquelle le matériau atteint un état limite

$$W(I_I) = -\frac{G}{2} J_m \ln \left( 1 - \frac{I_I - 3}{J_m} \right) \quad . \quad (4.18)$$

L'énergie tend vers l'infini ainsi que les contraintes : ce modèle prend donc bien en compte le raidissement observé aux très grandes déformations. Aux petites déformations, ce modèle est équivalent au modèle néo-hookéen.

## b En fonction des élongations principales

Le modèle de [Valanis et Landel \(1967\)](#) suppose et vérifie de manière empirique la séparabilité des élongations principales

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^3 w(\lambda_i) \quad . \quad (4.19)$$

De meilleurs résultats pour les grandes déformations ont été obtenus à partir des lois d'Ogden. Elles sont formulées à partir des élongations principales  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$  et peuvent être développées à différents ordres ([Ogden, 1972b](#))

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_n \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \quad . \quad (4.20)$$

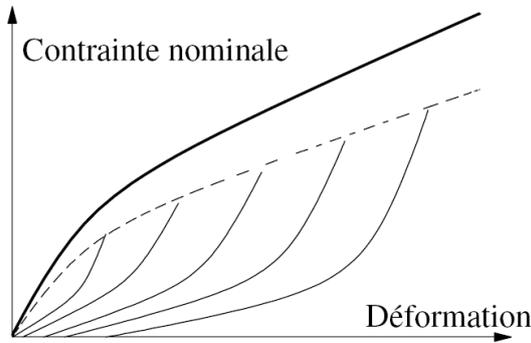


FIGURE 4.1 – La courbe en pointillés correspond à l’enveloppe du comportement stabilisé. La courbe en gras est la courbe de première charge et est bien différente de l’enveloppe (Raoult, 2005).

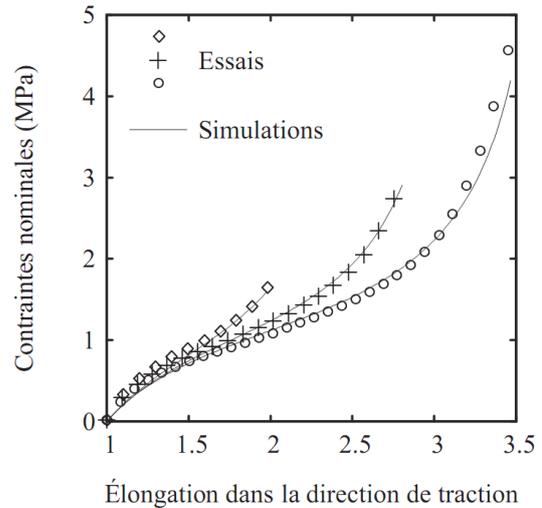


FIGURE 4.2 – Comparaison entre le comportement cyclique expérimental et simulé en traction uniaxiale (Raoult, 2005).

### 4.1.3 Un modèle de comportement cyclique

Raoult (2005) s’inspire des modèles de Martin Borret (1998), d’Arruda et Boyce (1993) et de Gent (1996) pour proposer un modèle statistique fondé sur l’extension limite des chaînes. L’auteur suppose que dans une direction donnée, toutes les chaînes ont la même extension limite, ce qui donne l’expression suivante pour la densité d’énergie :

$$W = \int_{\Omega} w(\lambda_l(\mathbf{d}\Omega), \lambda(\mathbf{d}\Omega)) \mathbf{d}\Omega \quad . \quad (4.21)$$

Les contraintes s’obtiennent par dérivation

$$\underline{\underline{B}}^T = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{F}}} = \int_{\Omega} \frac{\partial \lambda}{\partial \underline{\underline{F}}} \frac{\partial w}{\partial \lambda}(\lambda, \lambda_l) \mathbf{d}\Omega \quad . \quad (4.22)$$

L’extension limite des chaînes  $\lambda_l$  dans une direction est choisie comme une fonction de l’élargissement maximale  $\lambda_m$  vue auparavant dans cette direction  $\lambda_l = \sqrt{\lambda_m^2 + a}$ . La densité d’énergie  $w(\lambda, \lambda_l)$  est alors choisie grâce à des arguments phénoménologiques. Le terme  $\frac{\partial w}{\partial \lambda}$  s’écrit alors

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda}(\lambda, \lambda_m) = \frac{G}{1 - \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda_m^2 + a - 1}} \quad (4.23)$$

où  $G$  (MPa) et  $a$  (sans dimension) sont les deux seuls paramètres de la loi. Sur la figure 4.1 est représenté le comportement accommodé jusqu’à une certaine élongation dans une direction. Le comportement dépendra donc de la déformation maximale.

1. Il y a deux interprétations possibles pour ce modèle : cette interprétation phénoménologique et l’interprétation statistique (Eq. 4.5).

Cette loi nécessite une implantation spécifique dans un code de calcul, mais a l'avantage de correspondre particulièrement bien au comportement cyclique du caoutchouc de l'étude (FIG. 4.2). De plus, elle n'a que deux paramètres dont l'identification est simple de mise en œuvre.

#### 4.1.4 Discussion

Les modèles phénoménologiques ont l'avantage d'être souvent disponibles dans les codes de calcul. Si les modèles néo-hookéens ou Mooney-Rivlin représentent une première approximation, les modèles plus complets sont plus représentatifs lorsque les déformations deviennent importantes. Il y a souvent un compromis simplicité/corrélation à trouver. En effet, une des principales difficultés est l'identification des coefficients de ces lois. Plus la loi est complexe, plus les essais doivent être nombreux pour valider ces valeurs caractéristiques. L'unicité de la famille de ces coefficients n'est d'ailleurs pas garantie.

Les modèles à chaînes permettent de relier physiquement le comportement microscopique au comportement macroscopique. Ils conviennent particulièrement pour modéliser l'effet Mullins et l'anisotropie.

Lors de ses travaux de thèse, Raoult (2005) a développé une loi originale permettant de modéliser le comportement stabilisé et a montré les avantages de cette modélisation pour l'analyse en fatigue (voir explication au paragraphe 1.3.1 d). Nous choisissons donc d'utiliser cette loi de comportement.

## 4.2 Comportement en température (cisaillement pur)

Nous avons défini tous les essais de cette campagne. Ils ont été réalisés par Elisabeth Ostojak-Kuczynski et Pierre Charrier<sup>2</sup> dans leurs locaux à Carquefou-Nantes (Loire-Atlantique).

### 4.2.1 Protocole expérimental

#### a Éprouvette et pilotage

Nous avons choisi de réaliser des essais de cisaillement pur pour plusieurs raisons :

- obtention d'une température uniforme avec une éprouvette fine ;
- état de déformation homogène ;
- matériel disponible pour le banc d'essai.

La première raison nous donne le choix entre l'éprouvette haltère (a) et celle de cisaillement pur (c) (FIG. 4.3) car elles sont toutes deux très fines (épaisseur de 2 mm). L'état de déformation est dans chaque cas homogène. L'inconvénient de ces éprouvettes est de ne pas pouvoir faire des essais avec une déformation nulle à l'origine. En effet, l'existence de déformations rémanentes impose une mise en compression de l'éprouvette, qui flamberait alors. Nous avons finalement choisi l'éprouvette de cisaillement pour des raisons de facilité de traitement des mesures.

Le pilotage en déplacement est préféré à celui en effort car la stabilisation de la réponse se fait beaucoup plus rapidement (FIG. 1.5 et 1.6). Pour la gestion des déformations rémanentes lorsqu'on impose une déformation nulle, nous avons choisi de piloter le minimum en effort ou en déformation selon la machine d'essai utilisée. Nous ne pourrions donc jamais obtenir un essai avec une déformation minimale strictement nulle. Quelques essais ont néanmoins été pilotés en effort afin de revenir à effort nul.

2. Société MODYN, groupe TRELLEBORG AUTOMOTIVE

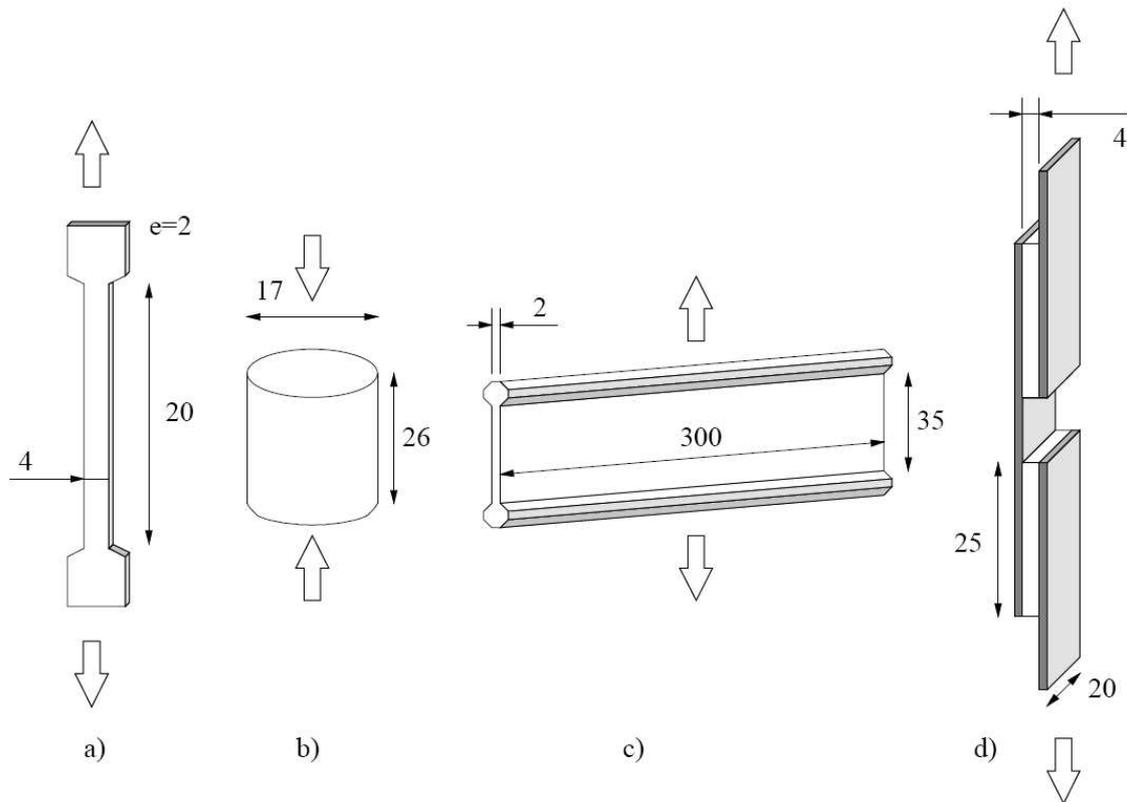


FIGURE 4.3 – Quatre éprouvettes classiquement utilisées pour des essais d’identification (dimensions en millimètres). La première (a) est une éprouvette lanière, la deuxième (b) un plot de compression, la troisième (c) une éprouvette de cisaillement pur et la dernière (d) une éprouvette double de cisaillement simple.

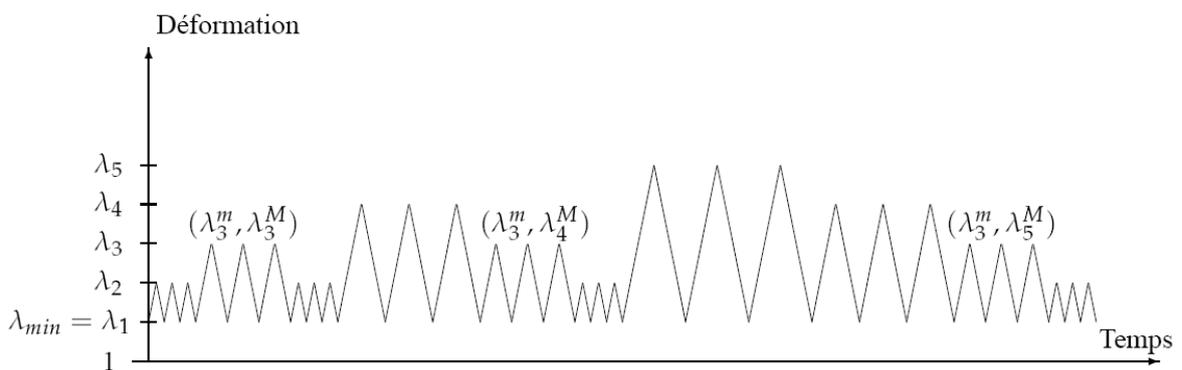


FIGURE 4.4 – Représentation des cycles pour un niveau de déformation minimale  $\lambda_{min}$  donné. Le  $\lambda^m$  représente l’élargissement maximal sur le cycle, le  $\lambda^M$  l’élargissement maximal vu sur tous les cycles auparavant. Trois cycles sont ici représentés pour chaque sollicitation (nombre variable dans les véritables essais).

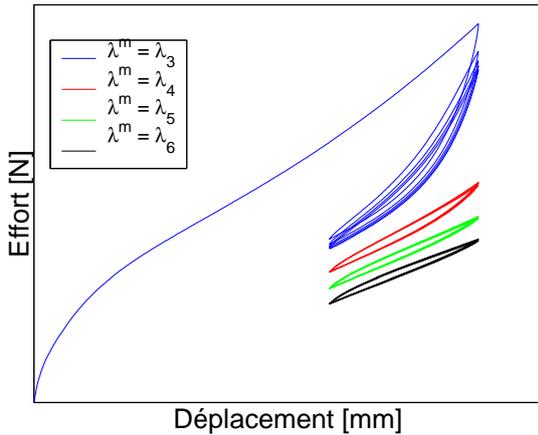


FIGURE 4.5 – Traction paramétrée par le couple  $(\lambda_{min}, \lambda^m)$  pour différents  $\lambda^M$ . Cinq cycles sont effectués pour chaque  $\lambda^M$ .

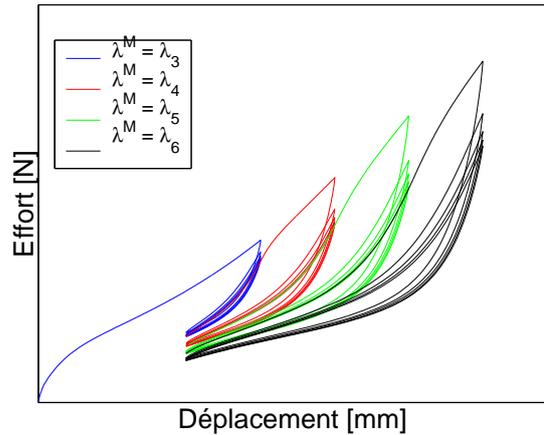


FIGURE 4.6 – Premières tractions à un niveau de déformation jamais atteint ( $\lambda^M = \lambda^m$ ). Cinq cycles sont effectués pour chaque  $\lambda^m$ .

Les essais se déroulent dans une enceinte à température régulée. Ainsi est-il possible de contrôler précisément la température extérieure pendant l’essai. Deux capteurs nous donnent la température en peau de l’éprouvette et la température de l’enceinte. Nous avons choisi une gamme de températures représentative des conditions d’utilisation des élastomères et adaptée aux moyens d’essais, soit 5, 23, 40, 60, 80 et 100°C. Nous avons fait une caractérisation complète pour la température de référence 23°C, et nous avons regardé l’évolution du comportement à travers un nombre d’essais plus faible à chaque température.

Raoult (2005) a montré que la vitesse de sollicitation influençait peu le comportement dans le domaine étudié. Nous avons choisi une vitesse moyenne (2500 mm/min) qui permet un compromis entre la durée de l’essai et l’élévation de température. Les quelques degrés de cet autoéchauffement ont toujours été maîtrisés grâce à une mesure de la température en peau de l’éprouvette.

**b Comportement cyclique**

Nous considérons que l’effet Mullins n’apparaît plus après le premier cycle. Cependant, le comportement continue à s’adoucir même après quelques cycles. Raoult (2005) choisit d’étudier le comportement stabilisé après 5 cycles. Toutefois, nous avons choisi de ne pas faire cette hypothèse. Nous allons donc étudier l’énergie dissipée en fonction du nombre de cycles afin de définir un critère de stabilisation de la réponse cyclique moins arbitraire. Nous avons défini une série d’essais pour caractériser l’influence du nombre de cycles sur le comportement.

Nous avons choisi d’étudier le comportement du matériau pour différents niveaux d’accommodation. Nous définissons  $\lambda^m$  comme l’élongation maximale sur un cycle,  $\lambda^M$  l’élongation maximale sur l’histoire précédant le cycle. Il faut, pour un même chargement  $\lambda_{min}$  (élongation minimale) et  $\lambda^m$  fixés, avoir des élongations maximales  $\lambda^M$  différentes pour analyser l’effet de l’accommodation sur le comportement. La figure 4.4 représente la suite de cycles choisie pour les identifications. Pour un même essai, le niveau de déformation minimale est fixé. Ensuite, des cycles à  $\lambda^m$  fixé sont réalisés pour  $\lambda^M \geq \lambda^m$  : c’est la suraccommodation. Ces cycles sont représentés sur la figure 4.5. Ainsi un cycle à un certain  $\lambda^m$  est-il suivi de cycles à plus petits  $\lambda^m$ .

La suite de cette section rassemble l’ensemble des analyses expérimentales pour le comporte-

ment en cisaillement pur. Nous travaillerons donc sur le comportement, l'évolution de la dissipation, l'influence de la température, le raidissement en traction-traction.

Notre démarche est la suivante : tout d'abord, nous étudions l'influence du nombre de cycles sur le comportement afin de définir le cadre de l'étude. Nous testons ensuite une hypothèse de l'effet Mullins pour le comportement cyclique. Cette hypothèse affirme que le comportement du matériau ne dépend que du maximum atteint, et permet d'étudier plusieurs accommodations sur la même éprouvette. Nous étudions ensuite le comportement en traction relaxante et non relaxante.

#### 4.2.2 Existe-t-il un comportement stabilisé ?

##### a Présentation de la base d'essais à 10 000 cycles

Nous avons choisi d'étudier tout d'abord l'influence du nombre de cycles sur le comportement. En effet, le comportement ne se stabilise jamais complètement : le matériau est fortement viscoélastique et nous ne pouvons pas définir de stabilisation au sens strict du terme. Toutefois, nous pouvons chercher un comportement représentatif de la vie du matériau, par exemple de la mi-vie ou d'un nombre de cycles arbitraire.

Nous avons donc choisi dans un premier temps d'étudier le comportement à 10 000 cycles. Nous avons trois types d'essais : en accommodation, en suraccommodation et en température, respectivement nommés THERM\_Y\_01, THERM\_Y\_02 et THERM\_Y\_03 (voir le tableau E.2 en annexe).

##### b Résultats

###### Décroissance de la raideur

**Définition** Nous étudions ici la raideur apparente notée  $K$ , c'est-à-dire la force maximale au cours du cycle divisée par le déplacement maximal.

Pour le comportement accommodé (série THERM\_Y\_01), nous retrouvons classiquement une décroissance de la raideur en fonction du nombre de cycles  $N$  (FIG. 4.7). Cette décroissance viscoélastique (nous faisons l'hypothèse que l'effet Mullins n'intervient qu'au premier cycle) est logarithmique, du type  $K = -a \log N + c$ . Nous retrouvons bien des droites dans le diagramme semi logarithmique (FIG. 4.8). Dorénavant, nous utiliserons toujours cette représentation pour présenter les résultats en fonction du nombre de cycles.

Toutefois, nous observons une variation dans la vitesse de décroissance en fonction de la sollicitation. En normalisant par rapport au cinquième et au centième cycle (FIG. 4.9 et 4.10), nous pouvons étudier cette variation. Nous pouvons noter que l'essai relaxant<sup>3</sup> dont la déformation maximale atteint 250% est incomplet car l'éprouvette a cassé par fatigue.

Voici les premiers constats :

- la décroissance par rapport au cinquième cycle peut atteindre 30% ;
- la décroissance augmente avec la déformation ;
- la décroissance n'est vraiment logarithmique qu'à partir du centième cycle.

###### Décroissance de l'énergie dissipée

Nous pouvons étudier de même l'énergie dissipée par cycle (FIG. 4.11 et 4.12). Voici les premiers constats :

- la décroissance par rapport au cinquième cycle peut atteindre 50% ;

3. Un essai relaxant est un essai dont le rapport de charge est nul.

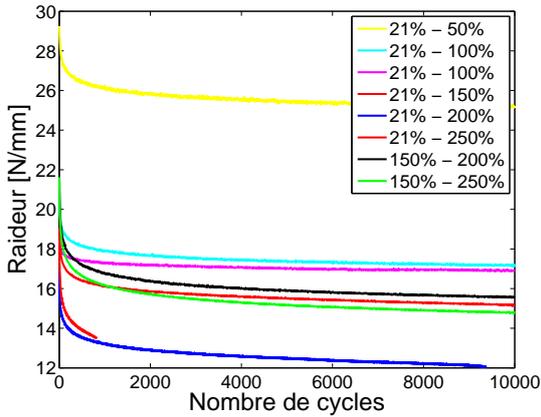


FIGURE 4.7 – Raideur en fonction du nombre de cycles pour le comportement accommodé à 23°C.

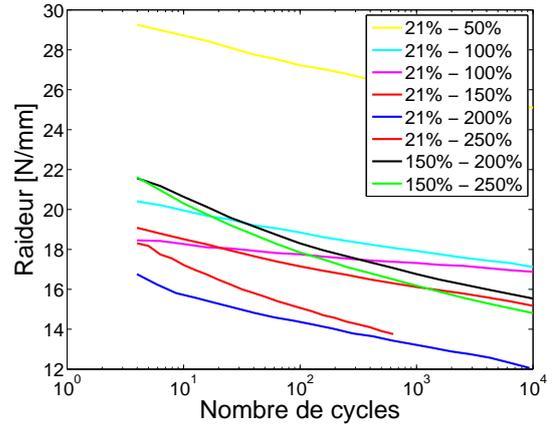


FIGURE 4.8 – Raideur en fonction du nombre de cycles pour le comportement accommodé à 23°C. Échelle semi logarithmique.

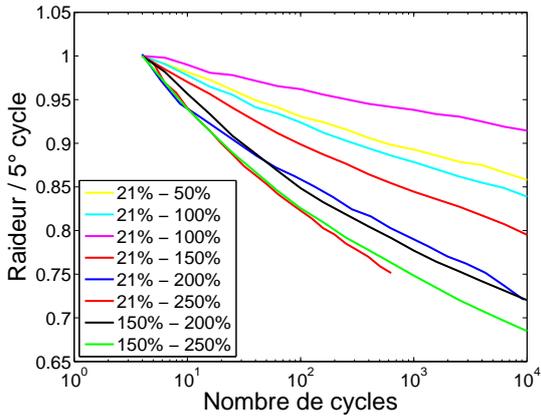


FIGURE 4.9 – Variation de raideur par rapport au 5ème cycle.

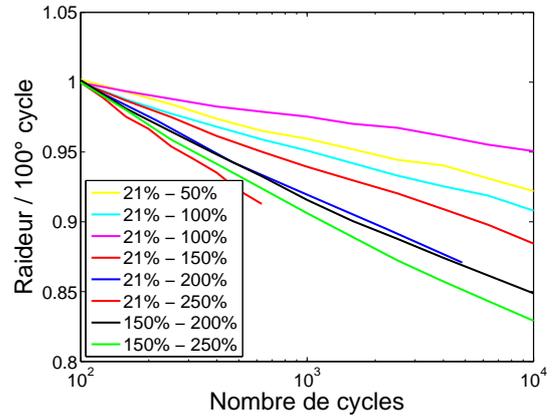


FIGURE 4.10 – Variation de raideur par rapport au 100ème cycle.

- la décroissance augmente avec la déformation ;
- la décroissance n'est vraiment logarithmique qu'à partir du centième cycle ;
- la décroissance semble être plus importante pour un essai non relaxant que pour un essai relaxant.

**Effet d'une suraccommodation**

Nous traitons ici la série THERM\_Y\_02 qui propose des essais suraccommodés. Après une accommodation de vingt cycles à 250% (et au même minimum que la suite de l'essai), 10 000 cycles sont joués. Nous observons le phénomène de relaxation cyclique inverse pour la raideur (FIG. 4.13) : la raideur ne diminue plus comme pour un essai en accommodation, mais remonte pour se stabiliser à un niveau supérieur. Cet effet est connu et était attendu.

L'énergie dissipée par cycle (FIG. 4.14) varie de façon différente. En effet, après généralement une forte baisse (sauf pour l'essai 21%-50%), l'énergie dissipée diminue de façon logarithmique et cette diminution est du même ordre de grandeur que pour les essais en accommodation.

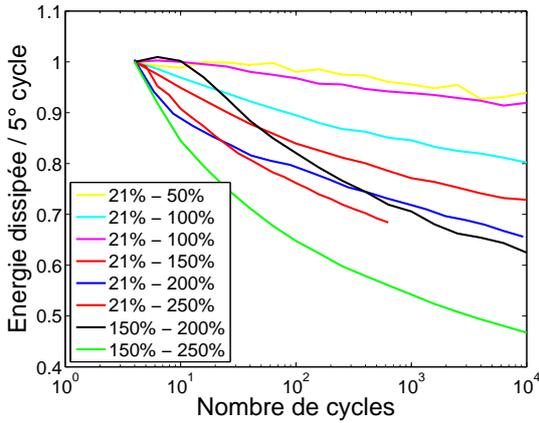


FIGURE 4.11 – Variation de l'énergie dissipée par rapport au 5ème cycle.

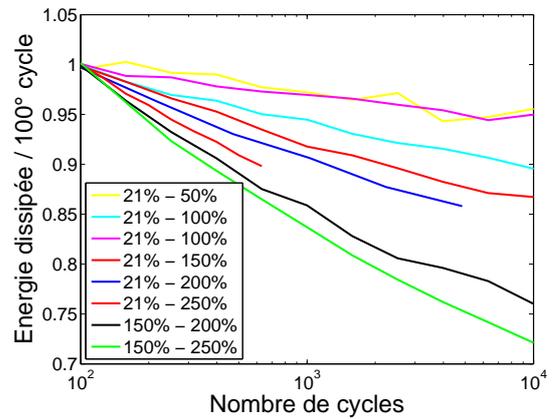


FIGURE 4.12 – Variation de l'énergie dissipée par rapport au 100ème cycle.

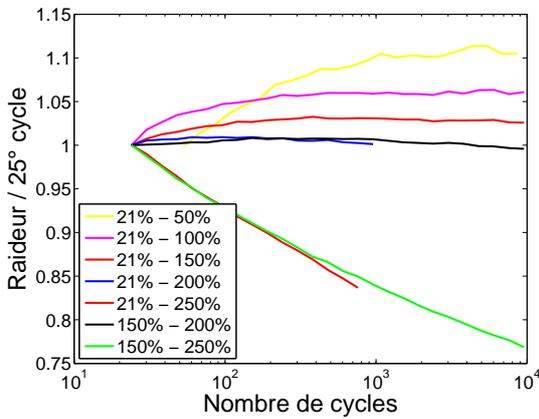


FIGURE 4.13 – Variation de raideur pour le comportement suraccommodé à 23°C.

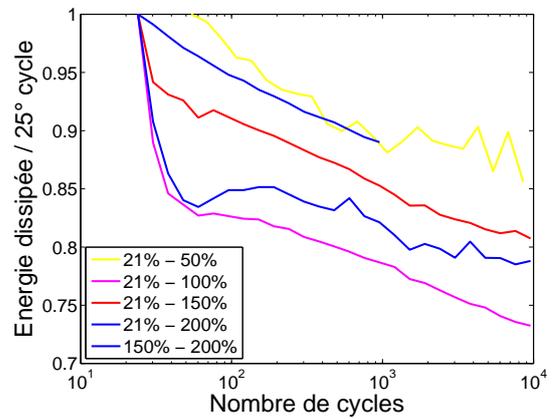


FIGURE 4.14 – Variation de l'énergie dissipée pour le comportement suraccommodé à 23°C.

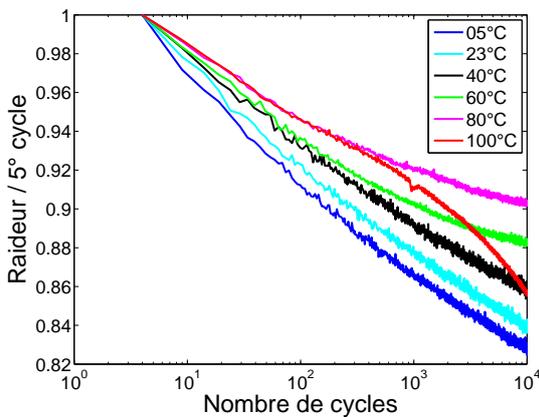


FIGURE 4.15 – Raideurs moyennes par rapport au 5ème cycle.

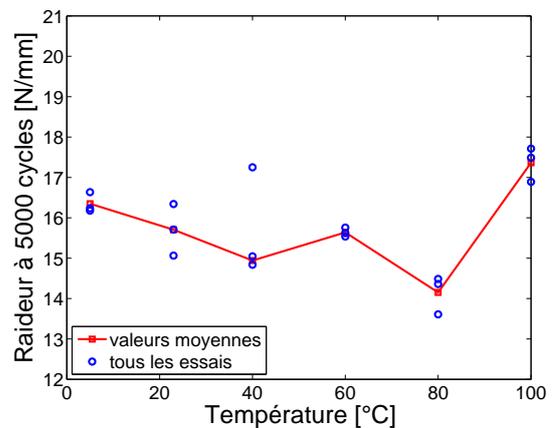


FIGURE 4.16 – Raideurs et raideurs moyennes à 5000 cycles en fonction de la température.

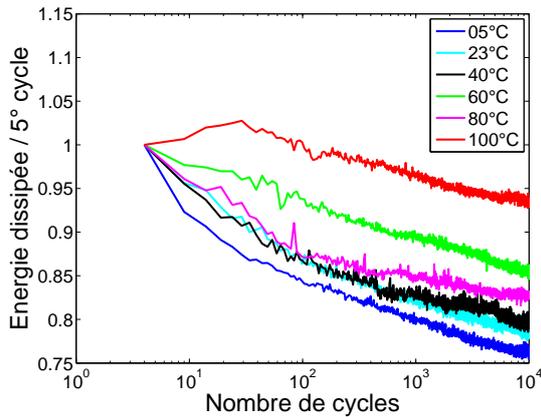


FIGURE 4.17 – Energies dissipées moyennes par rapport au 5ème cycle.

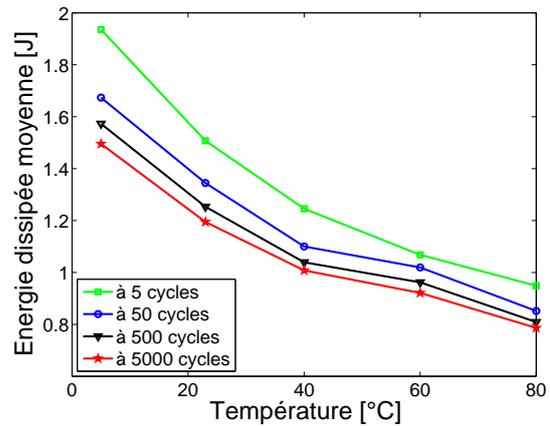


FIGURE 4.18 – Energies dissipées moyennes à 5, 50, 500 et 5000 cycles.

**Influence de la température**

Pour déterminer le comportement anisotherme, il est essentiel d'étudier l'influence du nombre de cycles en fonction de la température. Nous avons ainsi choisi un essai de référence 25%-100% qui a été réalisé à différentes températures. La série THERM\_Y\_03 contient cet essai à 6 températures. Chaque essai a ici été réalisé trois fois, ce qui nous permet de considérer les valeurs moyennes.

**Raideur.** La figure 4.16 montre que la raideur décroît avec la température, si on exclue l'essai à 100°C que nous traiterons à part. Nous pouvons déduire de la figure 4.15 que la relaxation est plus importante à faible température qu'à haute température.

Toutefois, il faut noter que les variations de raideur ne sont pas très importantes par rapport à la dispersion expérimentale. La question de sa prise en compte peut donc être soulevée.

**Énergie dissipée.** Nous constatons finalement sur la figure 4.18 que l'énergie dissipée par cycle décroît avec la température, et ceci pour tous les nombres de cycles. Nous pouvons aussi noter une décroissance moyenne de l'ordre de 15 à 20% entre le cinquième cycle et le cinq millième cycle. Entre cinq et cent cycles, cette décroissance est très différente selon les températures (FIG. 4.17) : elle est plus prononcée pour les températures froides. À partir d'une centaine de cycles, cette décroissance semble plus homogène entre les températures (courbe non tracée).

**Interprétation de l'essai à 100°C.** Nous avons constaté sur les essais de cisaillement pur<sup>4</sup> des changements importants à 100°C. En effet, les raideurs et l'énergie dissipée ne suivent pas les tendances des autres températures. Nous expliquons ces différences par le vieillissement du matériau. En effet, la température joue le rôle d'accélérateur dans le vieillissement, qui a comme conséquences le durcissement et le raidissement de l'élastomère. Nous atteignons ici la "limite" en température du matériau de l'étude, et nous ne prendrons pas en compte les essais réalisés à la température de 100°C. En effet, le mélange étudié n'est pas censé être utilisé à ces températures. De plus, nous mettons en évidence la nécessité d'étudier le vieillissement pour ces températures.

4. Durée de l'essai : environ cinq heures.

### c Discussion

Nous constatons que le comportement ne se stabilise jamais dans l'intervalle étudié en accommodation, que ce soit pour la raideur ou pour l'énergie dissipée. Le comportement à 5 cycles, même s'il reproduit les tendances générales, surestime toujours, de façon imprécise, les valeurs à un plus grand nombre de cycles.

Cette étude préliminaire met en évidence la nécessité d'étudier le comportement au-delà de la centaine de cycles. Nous avons choisi pour la suite de l'étude d'aller jusqu'à 1000 cycles. En effet, même si le comportement n'est pas stabilisé à 1000 cycles, il reproduit fidèlement les tendances à un plus grand nombre de cycles. Nous pouvons faire comme reproche à ce choix de ne pas tenir compte de la différence entre les niveaux de sollicitation. Ainsi 1000 cycles ne représentent pas la même sollicitation en fatigue pour une déformation maximale de 50% que pour une déformation maximale de 250%. Toutefois, nous évitons d'étudier le comportement à faible nombre de cycles, là où les différences sont les plus marquées.

Nous avons montré que la température ne joue pas un rôle prépondérant dans la cinétique de relaxation cyclique. Nous pouvons étendre ces premières conclusions à l'ensemble des températures étudiées.

Contrairement au comportement accommodé, le comportement suraccommodé se stabilise assez rapidement. Nous pouvons donc l'étudier sur un petit nombre de cycles.

Dorénavant, nous choisissons d'étudier le comportement accommodé à 1000 cycles (200 cycles pour une déformation de 250% à cause du phénomène de fatigue). Le comportement suraccommodé sera étudié à 100 cycles. Ce choix représente pour nous un bon compromis entre le temps de l'essai, la représentativité du comportement et la précision souhaitée.

## 4.2.3 Influence des cycles précédant l'accommodation

### a Essais de type a, a1 et a2

Dans l'optique d'étudier différentes accommodations, nous proposons une histoire avec des maxima successifs suivis d'une plage descendante comme présenté sur la figure 4.4. Nous constatons que sur une même éprouvette plusieurs accommodations ont lieu. Ainsi, lorsque nous accommodons à un niveau élevé, l'éprouvette a-t-elle déjà vu un grand nombre de cycles à un niveau inférieur. La théorie de l'effet Mullins prédit que le comportement ne dépend que du dernier maximum atteint. Nous voulons vérifier cette hypothèse sur un grand nombre de cycles, car la viscoélasticité joue ici un rôle important. Nous proposons donc deux essais supplémentaires pour confirmer ou infirmer cette hypothèse.

Nous avons ici choisi d'étudier l'accommodation et suraccommodation à 250%. Le premier essai, de type a1 propose de ne pas jouer l'accommodation à 200% (FIG. 4.19). Le deuxième essai, dit de type a2, commence directement par l'accommodation à 250%. Nous avons donc trois séquences identiques d'accommodation à 250% qui diffèrent seulement par l'histoire du matériau : deux essais avec un nombre de cycles différent, et un essai sans cycle précédant l'accommodation.

Nous constatons sur les figures 4.21 et 4.22 que l'influence est très faible (c'est de plus une moyenne sur trois essais). Si pour la raideur une légère différence existe, elle est de l'ordre de grandeur de la dispersion expérimentale. Du point de vue de l'énergie dissipée, la différence est quasi-inexistante.

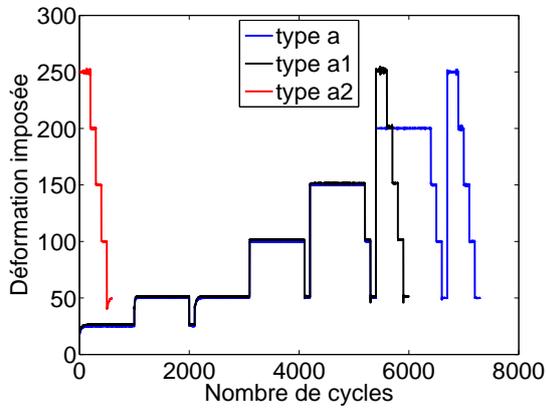


FIGURE 4.19 – Description des essais de type a, a1 et a2.

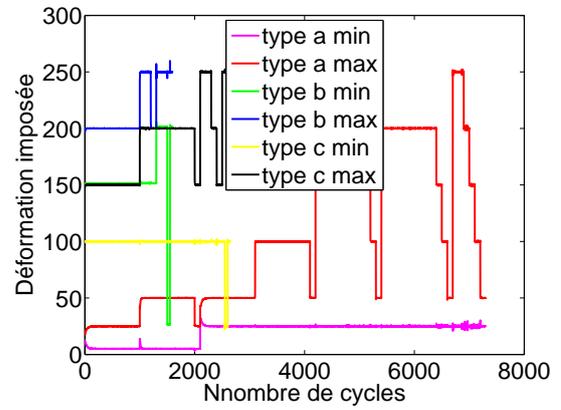


FIGURE 4.20 – Description des essais de type a, b et c.

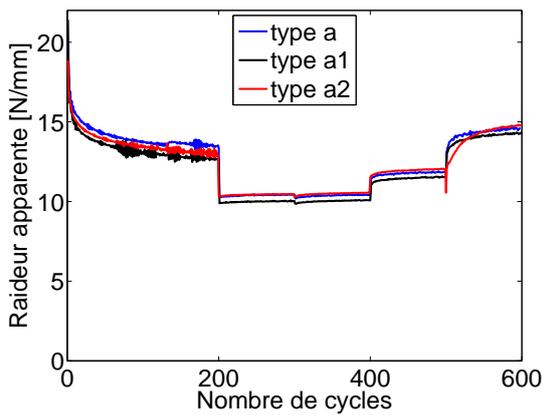


FIGURE 4.21 – Raideur moyenne pour les essais de type a, a1 et a2.

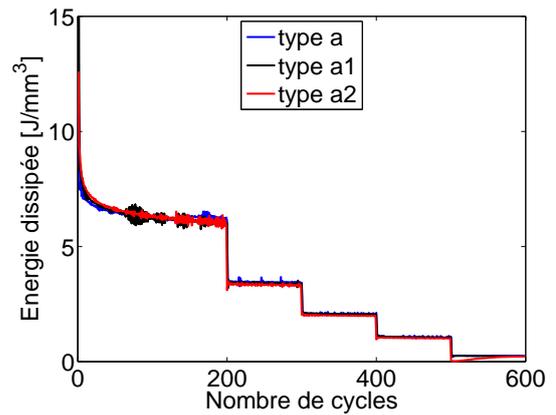


FIGURE 4.22 – Energie dissipée moyenne pour les essais de type a, a1 et a2.

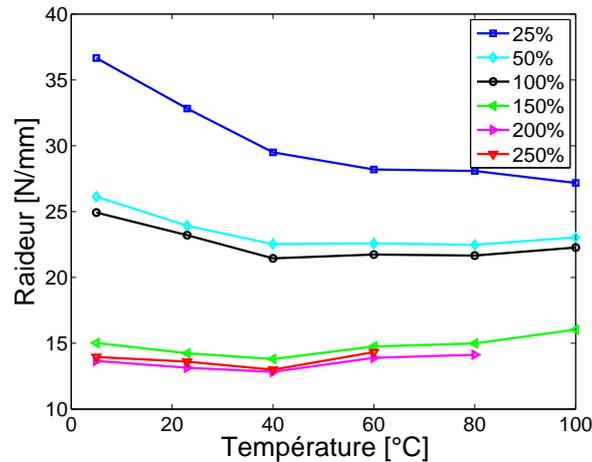


FIGURE 4.23 – Raideurs moyennes stabilisées pour les essais de type a en fonction de la température.

#### b Base d'essai adoptée

Nous pouvons conclure que les cycles précédant une accommodation ne modifient en rien celle-ci. Ce résultat est de première importance car il autorise à jouer plusieurs accommodations sur une même éprouvette, et valide ainsi le protocole expérimental envisagé. Nous proposons les essais de type a, b et c présentés sur la figure 4.20 pour étudier différentes accommodations en faisant varier le rapport de charge. La répartition des essais effectués en fonction de la température est présentée dans le tableau E.3 en annexe.

### 4.2.4 Comportement en traction répétée

Nous allons étudier ici les résultats des séries THERM\_Y\_04 à THERM\_Y\_11 afin d'analyser, caractériser et quantifier l'influence de la température sur le comportement en traction répétée.

#### a Raideur

##### Description

L'évolution de la raideur en fonction de la température est très marquée. Nous constatons sur la figure 4.23 que le phénomène est complexe. L'évolution la plus marquée se manifeste aux petites déformations, soit 25 et 50%. Le comportement est ainsi plus raide à froid qu'à chaud. Nous pouvons, par contre, noter une légère croissance de la raideur à partir de 60°C pour les sollicitations les plus fortes.

##### Discussion

Plusieurs hypothèses peuvent expliquer ce comportement :

1. viscoélasticité dépendante de la température et de la déformation ;
2. changement des propriétés du matériau (vieillessement à haute température).

Notamment, la diminution de la raideur apparente lors d'un cycle est en contradiction avec les modèles hyperélastiques statistiques où la raideur est linéaire de la température. Ce fait confirme notre

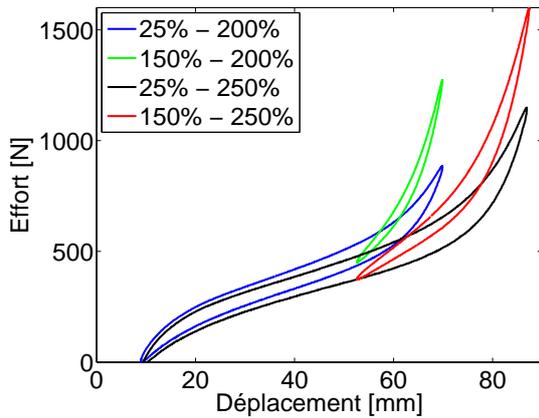


FIGURE 4.24 – Comportement en TT pour un minimum de déformation de 150% à 5°C.

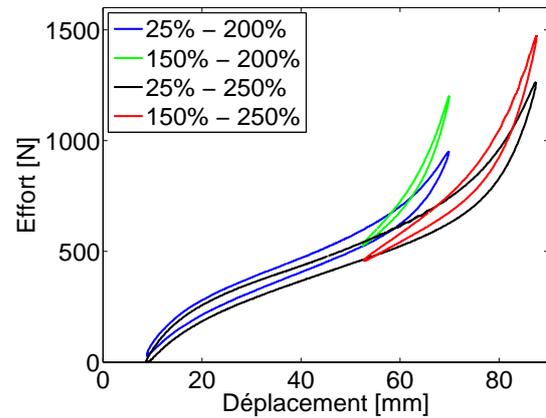


FIGURE 4.25 – Comportement en TT pour un minimum de déformation de 150% à 23°C.

hypothèse selon laquelle les effets visqueux sont très importants et rendent difficile la modélisation de l'influence de la température sur le comportement.

En observant que la variation du comportement reste faible (surtout aux grandes élongations), nous choisissons de ne pas représenter l'influence de la température dans le comportement. Les premières conséquences sont les suivantes :

- pas de variation de comportement pour une structure avec une température homogène ;
- pas de redistribution de contraintes pour une structure avec une température inhomogène.

#### 4.2.5 Comportement en traction-traction (TT)

##### a Raidissement

Nous avons observé en traction-traction un raidissement assez important du matériau par rapport au comportement en traction répétée. Il existe une valeur à partir de laquelle le raidissement devient important. Nous ne pouvons chiffrer précisément cette valeur, mais elle se situe entre 100 et 150%. Les figures 4.24 à 4.28 montrent ce phénomène pour un minimum en déformation de 150% où les cycles en traction-traction sont comparés avec des cycles en traction relaxante. Le raidissement est très important à 5°C, et diminue avec la température pour disparaître à partir de 60°C. Avec un minimum de 100%, le raidissement est beaucoup moins marqué à 23°C (FIG. 4.29) et n'apparaît pas à 60°C (FIG. 4.30).

##### b Influence d'un passage relaxant

Nous venons de constater dans le paragraphe précédent un raidissement en traction-traction. Lors de ces essais, l'éprouvette est en traction-traction depuis le premier cycle : il n'y a eu aucun passage relaxant à rapport de charge nul.

Nous voulons donc connaître l'influence de cycles relaxants pour un essai de traction-traction. Les essais proposés sont de type b et c. Après un grand nombre de cycles en traction-traction, cinquante cycles relaxants sont joués au même niveau de déformation maximale puis à nouveau cinquante cycles en traction-traction. L'allure des courbes en déplacement-effort est montrée sur les figures 4.31 à 4.35. L'ordre de réalisation des cycles est celui de la légende.

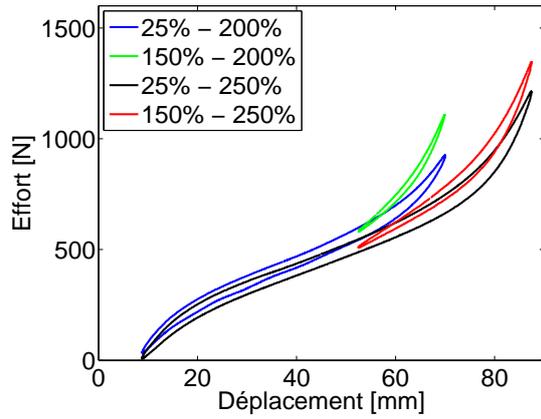


FIGURE 4.26 – Comportement en TT pour un minimum de déformation de 150% à 40°C.

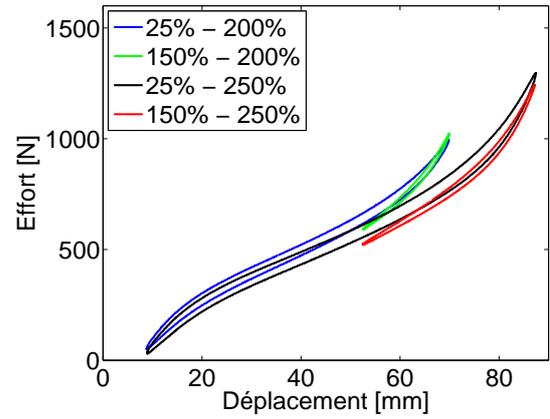


FIGURE 4.27 – Comportement en TT pour un minimum de déformation de 150% à 60°C.

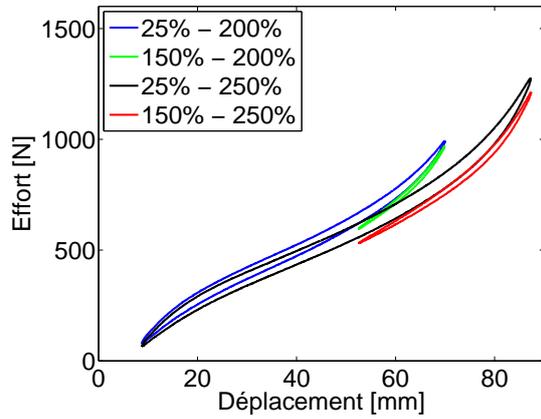


FIGURE 4.28 – Comportement en TT pour un minimum de déformation de 150% à 80°C.

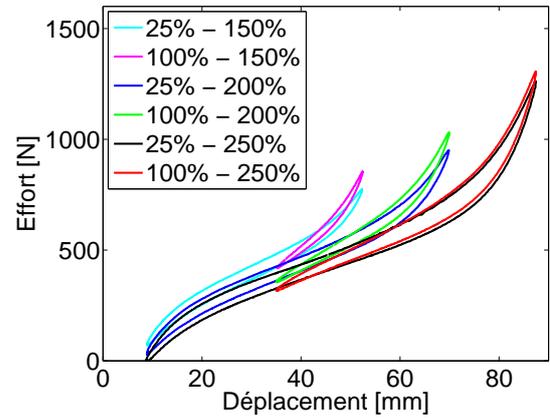


FIGURE 4.29 – Comportement en TT pour un minimum de déformation de 100% à 23°C.

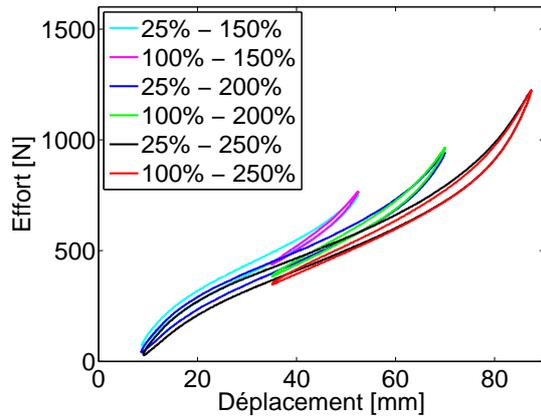


FIGURE 4.30 – Comportement en TT pour un minimum de déformation de 100% à 60°C.

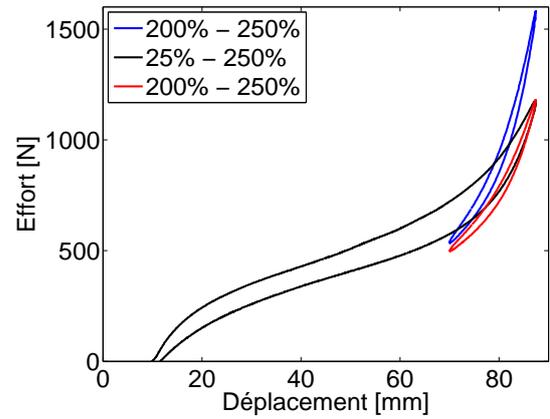


FIGURE 4.31 – Variation du comportement en TT après un passage relaxant à 5°C.

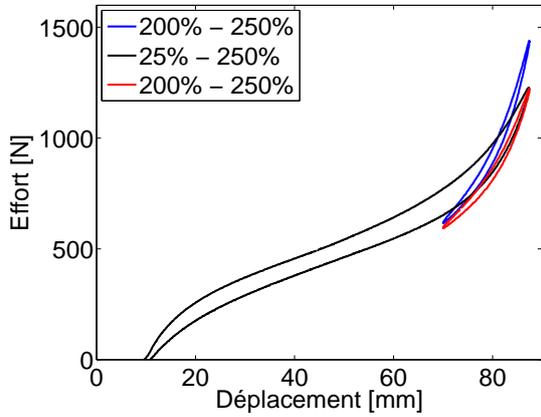


FIGURE 4.32 – Variation du comportement en TT après un passage relaxant à 23°C.

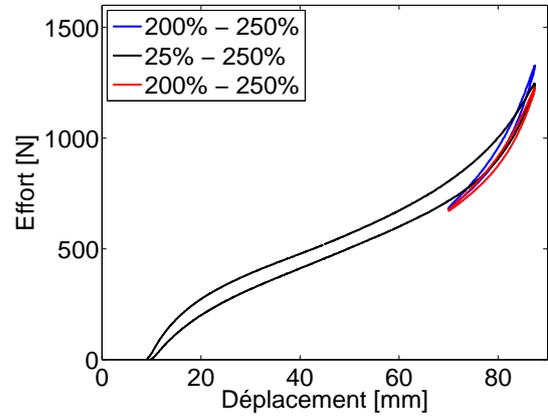


FIGURE 4.33 – Variation du comportement en TT après un passage relaxant à 40°C.

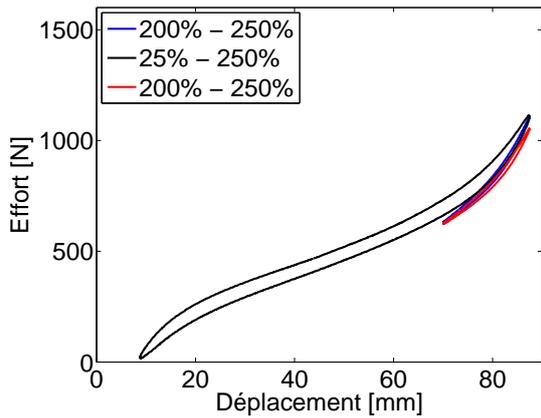


FIGURE 4.34 – Variation du comportement en TT après un passage relaxant à 60°C.

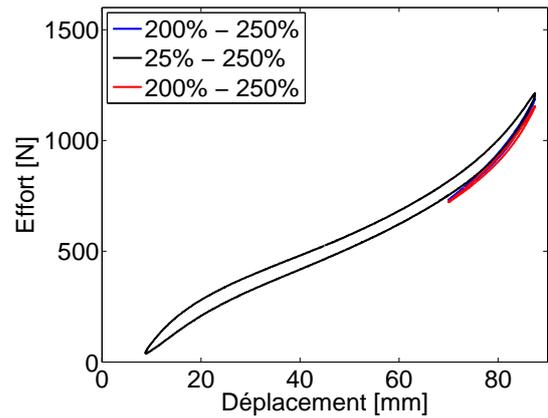


FIGURE 4.35 – Variation du comportement en TT après un passage relaxant à 80°C.

Nous constatons que le raidissement disparaît totalement après un passage relaxant. L'influence de la température est ici la même que pour l'étude précédente : le raidissement est maximum à 5°C, puis diminue avec la température pour ne plus apparaître à 60°C.

### c Discussion sur le raidissement observé en TT

Nous proposons une hypothèse pour analyser ce phénomène : le raidissement observé serait dû à un retard de l'effet Mullins causé par la cristallisation sous contrainte.

En supposant que les mécanismes sous-jacents à l'effet Mullins interviennent dans les tout premiers cycles (et non uniquement dans le premier), l'essai non relaxant ne permettrait pas à l'effet Mullins de s'accomplir totalement. Il faut attendre un passage relaxant afin de perdre cette raideur en traction-traction. Le fait de solliciter en non relaxant après le passage relaxant ne modifie pas en première approximation le comportement. Nous sommes donc confrontés à un mécanisme dépendant des tous premiers cycles de chargement.

Une explication de ce phénomène peut être avancée grâce à la cristallisation sous contrainte. Nous observons en effet une dépendance du phénomène à la température. Notamment à 60°C et à 80°C où la cristallisation est faible, l'influence des cycles relaxants est presque nul : l'effet Mullins est total. Par contre à température plus basse, où la cristallisation est plus importante, l'effet Mullins a besoin de cycles relaxants pour être total.

Des mesures de cristallinité pour un cycle de chargement (Toki et al., 2000; Saintier, 2001; Tribelsi et al., 2003) ont montré que les cristallites apparaissent au-delà d'une certaine déformation (dépendante de la formulation du matériau). Pour les chargements non relaxants, Saintier (2001) propose de cumuler la cristallisation : si au minimum de déformation en décharge la décristallisation n'est pas complète, la cristallinité pourrait être plus importante lors de la charge suivante par rapport à une première charge depuis une déformation nulle. Nous reprenons cette hypothèse impliquant une cristallisation plus importante et toujours présente dans le cas d'un chargement fortement non relaxant par rapport à un chargement relaxant.

S'il est admis que la cristallisation raidit le matériau, l'effet observé dans notre étude dépend aussi de l'histoire de chargement par les minima des cycles. Nous formulons l'hypothèse que la cristallisation sous contrainte a empêché les mécanismes de l'effet Mullins.

Nous pouvons donc supposer que la cristallisation sous contrainte a protégé le matériau et n'a pas permis à l'effet Mullins d'être total lors des premiers cycles non relaxants. Le passage relaxant a lui endommagé le matériau classiquement, et le raidissement n'apparaît plus après.

## 4.3 Comportement en traction biaxiale

La réalisation d'essais de comportement biaxial a fait l'objet d'une collaboration entre PSA et l'University of the West of England (UWE Bristol). Lors d'un séjour de trois mois sur place, j'ai défini, construit le banc d'essais et réalisé la campagne d'essais avec Vince Coveney. L'objet de cette campagne était l'étude de la dissipation sous une sollicitation biaxiale présentée dans le chapitre 6. Nous présentons dans cette section le moyen d'essais, et n'étudions que brièvement le comportement biaxial.

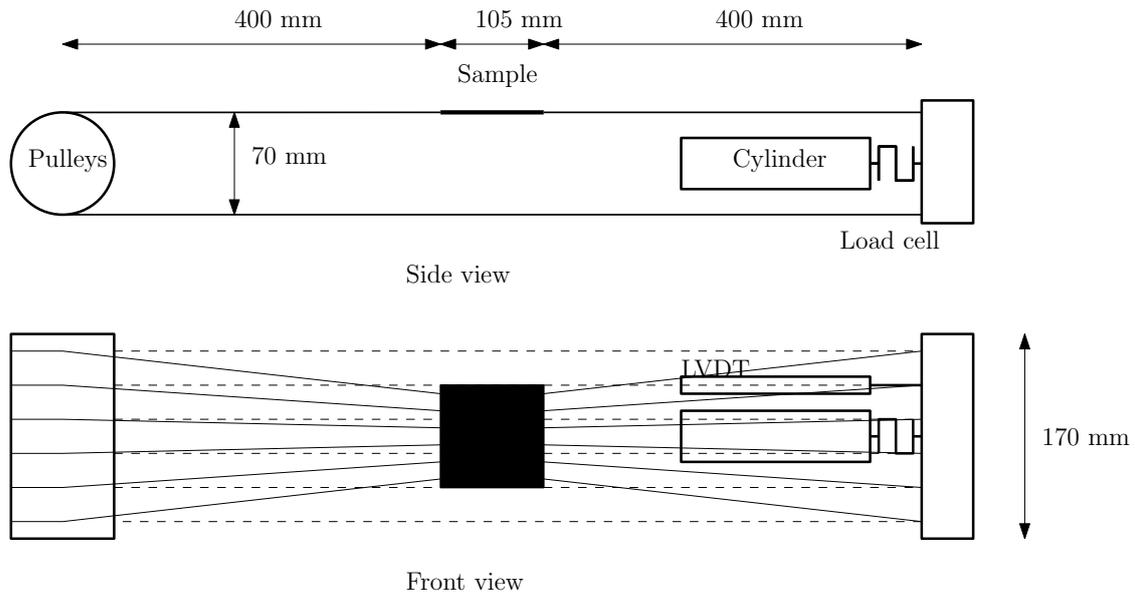


FIGURE 4.36 – Vue de côté et de dessus d’un axe du montage biaxial.

### 4.3.1 Description du moyen d’essais

#### a Banc d’essais

Nous avons obtenu un état de déformation biaxial en utilisant deux axes de sollicitation pilotés indépendamment. Un axe est constitué (FIG. 4.36) d’un vérin hydraulique (course 100 mm) et d’un capteur d’effort ( $\pm 2.5$  kN) relié à un bloc en aluminium. Ce bloc constitue l’attache de 12 câbles (6 de chaque côté, en acier tressé de 2 mm de diamètre) qui sont reliés à l’éprouvette. La poulie permet ainsi de multiplier par deux le déplacement du vérin et de garder l’éprouvette centrée. En position initiale, les câbles ne sont pas parallèles. En effet, en sollicitant l’éprouvette sur un seul axe, les extrémités des câbles non sollicités décriront un arc de cercle. La position initiale des câbles est alors choisie pour minimiser la flèche induite (de l’ordre du millimètre).

Le deuxième axe est installé perpendiculairement au premier (FIG. 4.37). Le tout est fixé sur une structure en acier supposée indéformable.

La chaîne d’acquisition est constituée des capteurs d’effort, des amplificateurs associés, et des capteurs de déplacement du vérin amplifiés (LVDT : Linear Variable Displacement Transducer) reliés à une centrale d’acquisition en temps réel. Le contrôle est effectué par comparaison PID<sup>5</sup> de la mesure du déplacement avec le signal imposé. Les photos 4.39 et 4.40 montrent le banc d’essai en fonctionnement.

Une enceinte thermique permet de contrôler la température à  $\pm 2^\circ\text{C}$ . Toutefois, cette enceinte est rudimentaire et nous avons constaté une différence de température allant de 5 à  $10^\circ\text{C}$  entre celle de l’éprouvette et celle imposée. Cette différence est principalement due à la façon de chauffer l’enceinte : un pistolet thermique est mis en marche dès que la température mesurée par quatre capteurs répartis dans l’enceinte passe en dessous d’un seuil, et est coupé au dessus d’un autre seuil. Le temps de réponse de la commande, et la chaleur intense dégagée par le pistolet explique le manque de précision du contrôle en température.

5. Proportionnel, Intégral et Différentiel

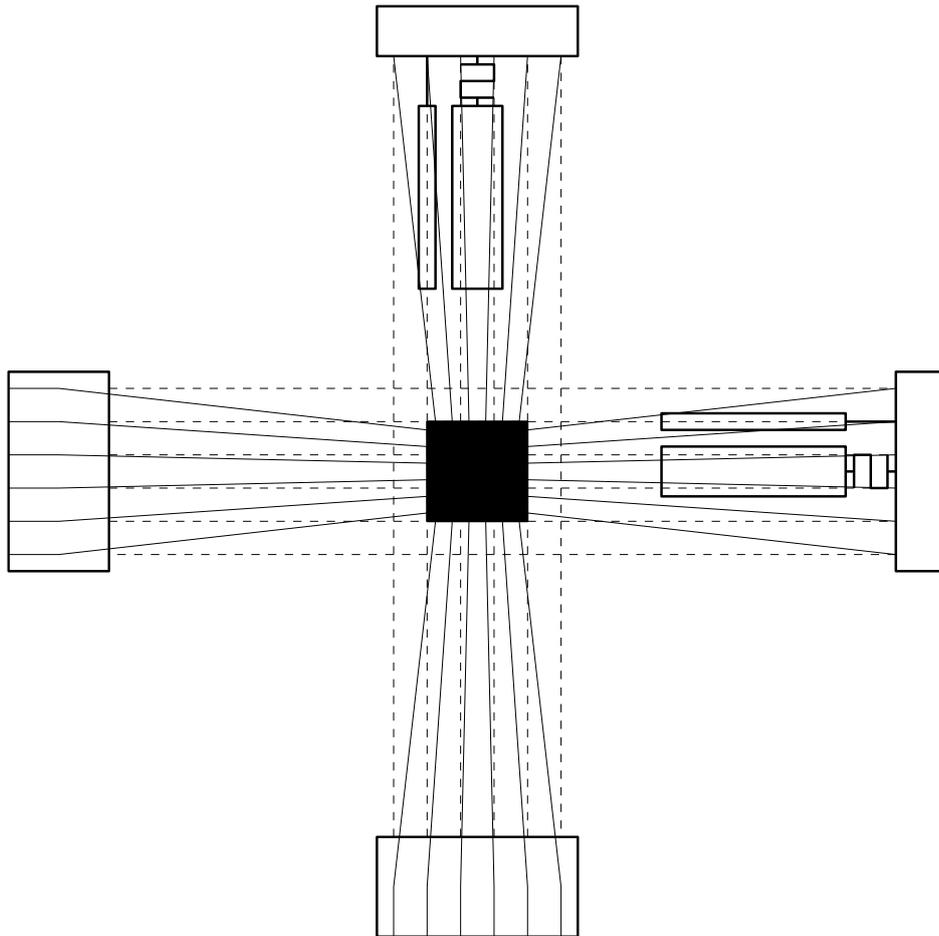


FIGURE 4.37 – Vue de dessus des deux axes du montage biaxial.

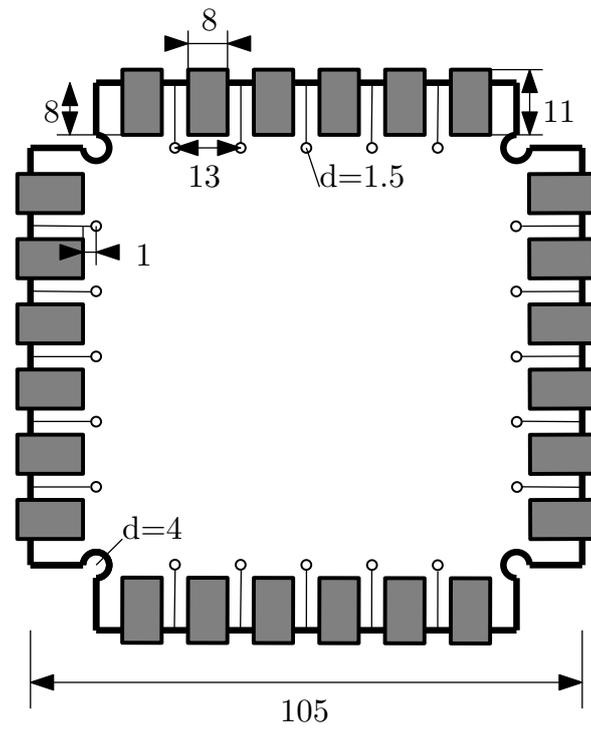


FIGURE 4.38 – Schéma de l'éprouvette biaxiale.

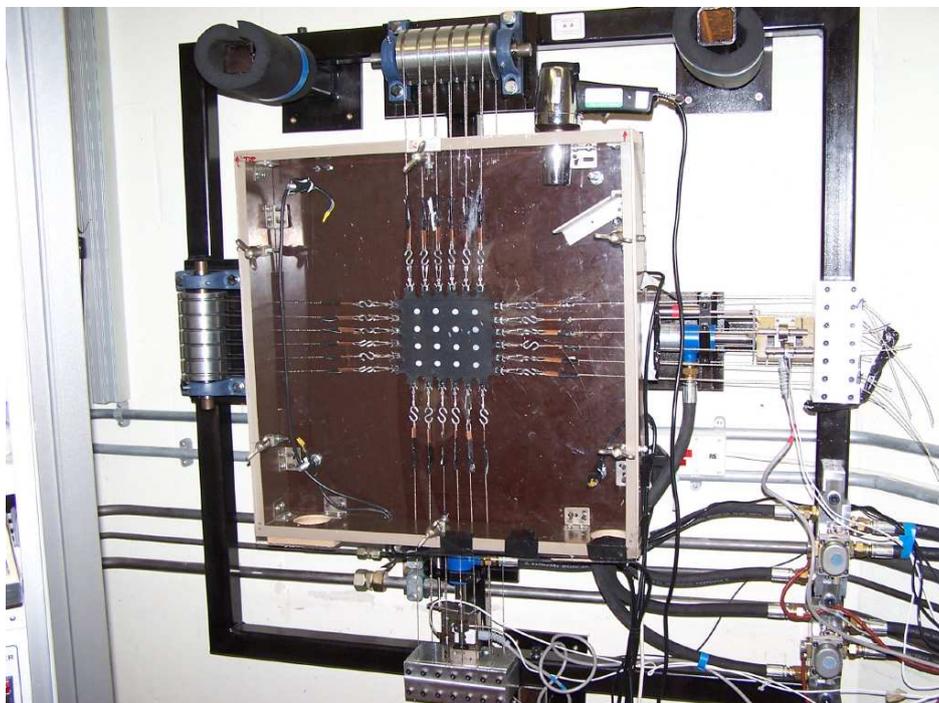


FIGURE 4.39 – Photo générale du banc d'essais biaxial.

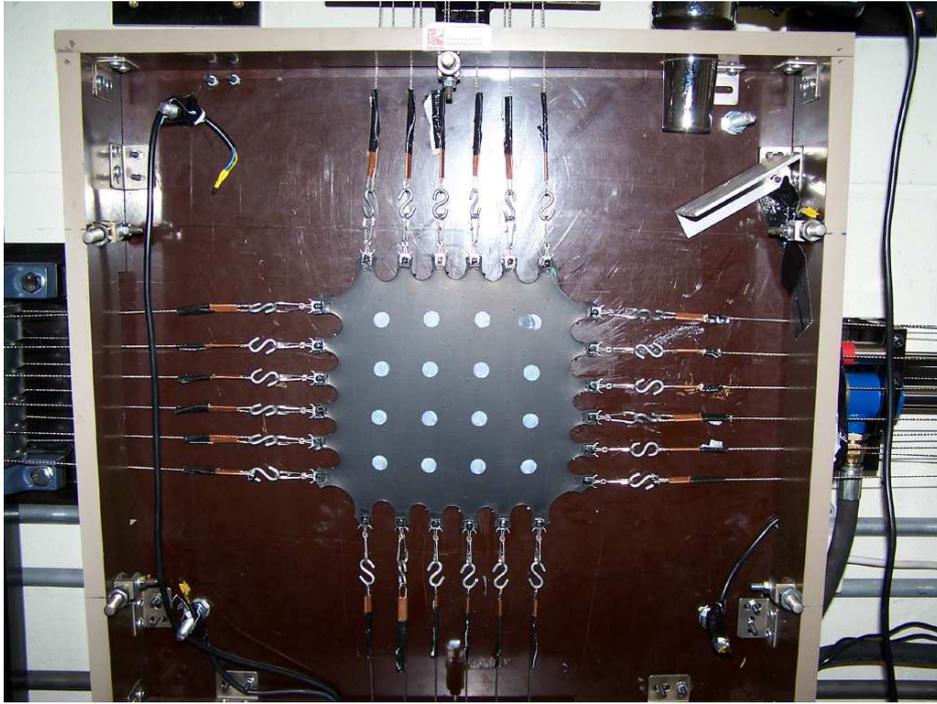


FIGURE 4.40 – Epreuve biaxiale déformée avec les 16 cercles blancs.

La déformation réelle de l'éprouvette est mesurée grâce à un suivi optique : une caméra enregistre l'éprouvette sur laquelle ont été peints 16 cercles blancs (FIG. 4.40). Un post-traitement de la vidéo réalisé avec le logiciel Matlab permet de connaître la déformation en fonction du temps. Cette étape utilise le fort contraste entre l'éprouvette noire et les cercles blancs pour faire une recherche automatique du centre des cercles et calculer l'état de déformation de l'éprouvette.

### b Éprouvette

Nous reprenons le schéma de principe proposé par Treloar (1975), en l'adaptant aux capacités du banc (FIG. 4.38). Le système d'attache est composé d'un clip collé puis pressé sur la partie non-utile de l'éprouvette. Des crochets permettent de relier l'éprouvette aux câbles.

Il faut noter l'importance des fentes introduites dans la partie non utile. En effet, ces fentes facilitent la déformation de l'éprouvette près des bords et améliorent grandement l'homogénéité de la déformation. Toutefois, elles introduisent des concentrations de contraintes qui font casser l'éprouvette par fatigue : des dépôts de fissure sont toujours visibles et la fissuration brutale de l'éprouvette a toujours comme point de départ les cercles de diamètre 1.5 mm. Un compromis a été trouvé pour le rayon de courbure entre la tenue à la fatigue (un rayon plus grand diminue les contraintes) et la déformation utile (diminuer la section augmente la déformation dans la partie non utile).

Nous pouvons considérer qu'il existe une zone de l'éprouvette dans laquelle l'état de déformation est quasiment homogène. Cette hypothèse s'appuie sur les photos 4.41 et 4.42 qui montrent l'éprouvette non déformée puis dans un état déformé. Nous avons ainsi choisi un carré de 55 mm de côté, dont les quatre coins coïncident avec quatre cercles blancs, pour mesurer la déformation homogène dans la partie utile de l'éprouvette.

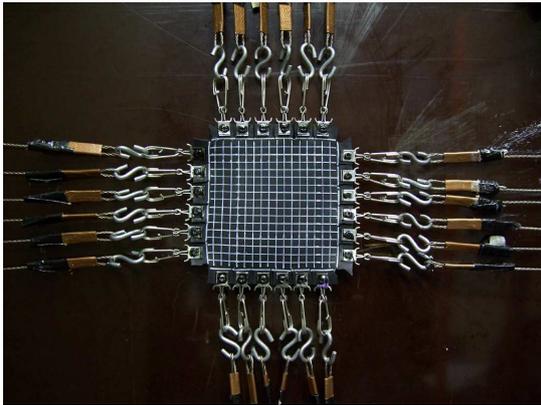


FIGURE 4.41 – Photo de l'éprouvette biaxiale dans l'état non déformé.

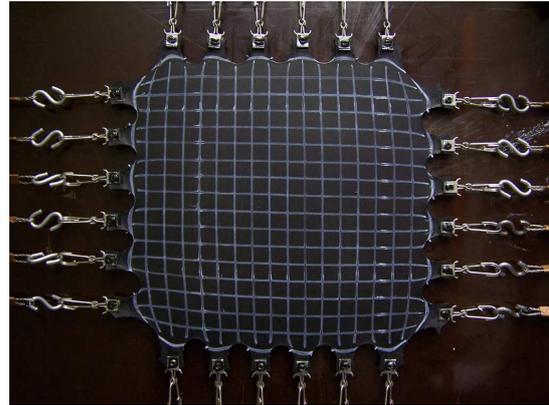


FIGURE 4.42 – Photo de l'éprouvette biaxiale dans un état déformé.

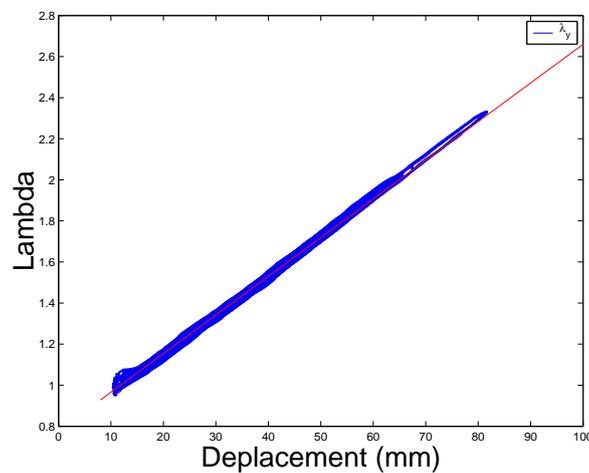


FIGURE 4.43 – Elongation ( $\lambda$ ) en fonction de la position du vérin.

**c Sollicitation**

Nous reprenons les mêmes principes que pour les essais de cisaillement pur :

- pilotage en déplacement ;
- nombre de cycles : dix en accommodation puis trois cycles par niveau ;
- accommodation à un niveau puis étude en surraccommodation ;
- température variable de 23°C à 70°C ;
- vitesse de sollicitation : 60% par seconde.

Nous pouvons noter par exemple pour que un essai biaxial piloté en effort, il n'y a pas unicité de la déformation (annexe B.6).

**d Calcul de la déformation**

Nous pouvons faire des hypothèses *a posteriori* pour le post-traitement des essais. La première consiste à calculer de manière simple la déformation dans la partie homogène de l'éprouvette connais-

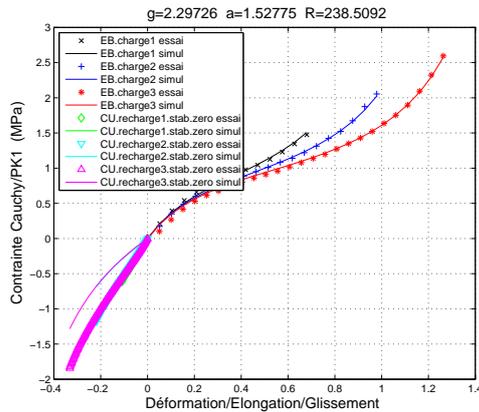


FIGURE 4.44 – Identification de la loi de comportement de Raoult (2005) avec les essais équibiaxiaux.

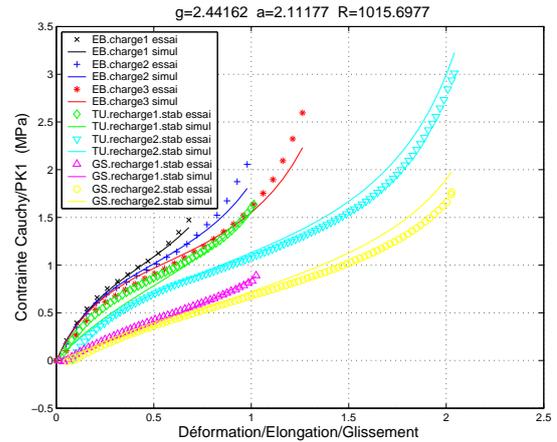


FIGURE 4.45 – Identification de la loi de comportement de Raoult (2005) avec les essais équibiaxiaux, de traction uniaxiale et de glissement simple.

sant le déplacement du vérin. Une relation affine suffit très largement à corréliser les deux mesures (FIG. 4.43) pour tous les essais. Nous utiliserons donc pour le traitement la relation  $\lambda = 0,77 + 0,195$  déplacement. Notons que l'état initial ( $\lambda = 1$ ) est atteint pour le vérin sorti à 12 mm, permettant ainsi en revenant à zéro de détendre complètement le montage afin de permettre la mise en place de l'éprouvette.

### 4.3.2 Identification de la loi de comportement à cinq cycles

Un logiciel interne, SICLOP, permet l'identification par une méthode de minimisation des moindres carrés d'une loi de comportement à partir de données expérimentales. La figure 4.44 présente les paramètres optimaux ( $G = 2.30$  MPa et  $a = 1.53$ ) de la loi de Raoult (2005) pour les seuls essais équibiaxiaux à 23°C. Nous constatons sur cette figure que la loi identifiée ne correspond pas pour des essais en compression uniaxiale, bien que l'état de déformation entre un essai équibiaxial et de compression soit le même. La seule différence est l'état de pression, qui pourrait donc avoir une influence sur le comportement.

Nous avons aussi travaillé avec des essais de traction uniaxiale et de glissement simple (FIG. 4.45) réalisés lors des travaux de thèse de Raoult (2005). Nous avons identifié le jeu de paramètres suivant  $G = 2.44$  MPa et  $a = 2.11$  et ces paramètres seront utilisés pour les travaux numériques sur le comportement.

Nous pouvons noter que le comportement décrit par la loi de comportement est moins raide que les essais en traction équibiaxiale, et légèrement plus raide en traction uniaxiale. Toutefois, ces différences sont tout à fait acceptables compte tenu de la simplicité de la loi qui ne nécessite que deux paramètres.

## 4.4 Conclusions

Le comportement de l'élastomère étudié est viscoélastique : nous ne pouvons pas définir à proprement parlé de stabilisation car les efforts et l'énergie dissipée diminuent continûment de façon logarithmique. Nous mettons en évidence la nécessité d'étudier l'énergie dissipée non pas à cinq

cycles, mais à un plus grand nombre pour être représentatif de la température au cours d'un essai de fatigue.

Concernant le comportement accommodé et suraccommodé, le comportement et l'énergie dissipée ne varient pas dans le même sens : après le phénomène de relaxation cyclique inverse, les efforts semblent constants alors que l'énergie dissipée continue de diminuer. L'influence de la température sur le comportement est mesurable, surtout aux petites déformations. Toutefois, la diminution des efforts constatée avec la température va à l'encontre de la théorie statistique de l'élasticité. Ainsi les effets viscoélastiques sont-ils très importants et nécessitent une modélisation fine du comportement.

Un phénomène de raidissement en traction-traction a été observé et une explication physique proposée en prenant en compte l'effet Mullins. Grâce à la cristallisation sous contrainte en traction-traction, le matériau est protégé en partie de l'effet Mullins lors des premiers cycles de chargement. Un passage relaxant annule cet effet. Ce phénomène n'a, à notre connaissance, jamais été rapporté.

Le comportement biaxial a été étudié et inclus dans la base d'identification de la loi de comportement cyclique proposé par [Raoult \(2005\)](#).

Finalement, nous faisons ici le choix de ne pas représenter l'influence de la température sur le comportement. En effet, l'erreur commise par cette approximation (15%) est de l'ordre de grandeur de la dispersion entre différents lots matière du même mélange.

En revanche, nous avons montré que l'énergie dissipée était très affectée par la température (variations de 50%). Cette influence sera donc prise en compte dans l'estimation de la dissipation dans la méthode de calcul de l'autoéchauffement.



**Troisième partie**

**Autoéchauffement**



## Chapitre 5

# Découplage du problème thermomécanique

*Nous analysons ici le problème thermomécanique couplé afin de définir une stratégie de résolution pour estimer l'autoéchauffement. Afin de garantir la validité du couplage faible en grande déformation, nous résolvons un problème thermique homogénéisé en temps sur la configuration de référence.*

### Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Modélisation hyperélastique</b>	<b>62</b>
4.1.1	Modèles statistiques	62
4.1.2	Modèles phénoménologiques	64
4.1.3	Un modèle de comportement cyclique	66
4.1.4	Discussion	67
<b>4.2</b>	<b>Comportement en température (cisaillement pur)</b>	<b>67</b>
4.2.1	Protocole expérimental	67
4.2.2	Existe-t-il un comportement stabilisé ?	70
4.2.3	Influence des cycles précédant l'accommodation	74
4.2.4	Comportement en traction répétée	76
4.2.5	Comportement en traction-traction (TT)	77
<b>4.3</b>	<b>Comportement en traction biaxiale</b>	<b>80</b>
4.3.1	Description du moyen d'essais	81
4.3.2	Identification de la loi de comportement à cinq cycles	86
<b>4.4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>86</b>

Le chargement d'une structure est à la fois mécanique à travers des déplacements, angles, efforts ou couples imposés, mais aussi thermique par les conditions aux limites. L'autoéchauffement induit un couplage entre la sollicitation mécanique et la température. Une des caractéristiques essentielles de ce problème d'autoéchauffement dans les élastomères est la différence entre les temps caractéristiques mécanique et thermique. En effet, pour une sollicitation mécanique typique des applications visées (1 à 20 Hz), le temps de montée en température d'une structure est de l'ordre de quelques minutes. De nombreuses méthodes de la littérature exploitent cette propriété : il est judicieux de séparer la

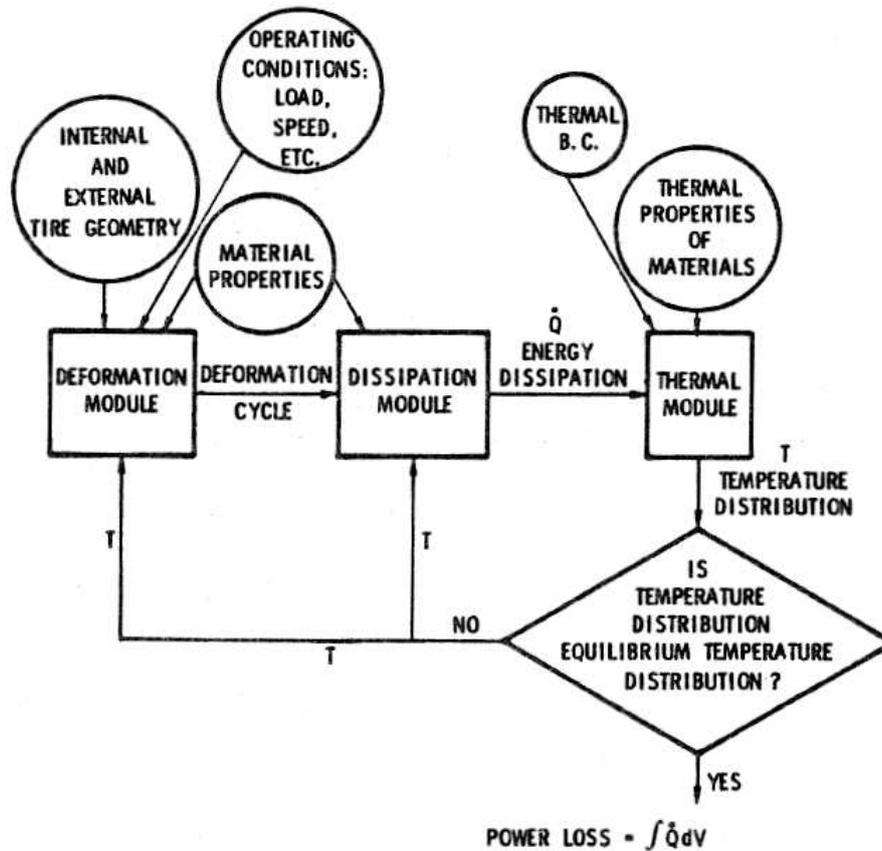


FIGURE 5.1 – Représentation d’un modèle itératif de calcul thermomécanique pour un pneumatique (Whicker et al., 1981).

résolution des problèmes mécaniques et thermiques car ils n’ont pas les mêmes temps caractéristiques. Par exemple, un cycle de chargement mécanique pourra être considéré en première approximation comme isotherme.

Les méthodes de découplage proposées se fondent sur des hypothèses simplificatrices. Nous allons dans ce chapitre discuter de ces hypothèses et adopter une stratégie de résolution du problème thermomécanique couplé. Notamment, nous présenterons une méthode permettant de prendre en compte la variation de la géométrie d’une structure au cours d’un cycle de chargement mécanique dans la résolution du problème thermique. Cette méthode se fonde sur l’écriture puis l’approximation cyclique justifiée de l’équation de la chaleur dans la configuration de référence.

## 5.1 L’autoéchauffement dans la littérature

### 5.1.1 Couplage faible

Les premiers algorithmes numériques d’autoéchauffement ont été présentés par Segalman (1981); Browne et Arambages (1981); Whicker et al. (1981) et appliqués sur des pneumatiques. Dans le cas stationnaire, ces auteurs proposent un couplage faible pour la résolution du problème thermoméca-

nique couplé fondée sur trois modules (FIG. 5.1) :

1. le module mécanique détermine le cycle de déformation mécanique ;
2. le module de dissipation estime les sources de chaleur sur un cycle à partir de la déformation calculée ;
3. le module thermique donne le champ de température.

L'algorithme propose de réaliser séquentiellement en boucle ces trois modules de façon itérative jusqu'à obtenir l'équilibre thermique. Cette méthode s'appuie sur l'hypothèse d'un chargement cyclique et a été largement reprise dans la littérature (Sarkar et al., 1987).

Nous détaillons dans les paragraphes suivants les trois étapes du couplage faible dans le cas cyclique. Notamment, nous insistons sur les hypothèses de calcul et de couplage entre ces modules.

#### a Résolution du problème mécanique

Deux démarches existent pour résoudre le problème mécanique : une modélisation hyperélastique ou une modélisation hystérétique. La première modélise le comportement du matériau par une loi hyperélastique afin d'obtenir des grandeurs mécaniques caractéristiques de la dissipation au sein du matériau (Sarkar et al., 1987; Mac Allen et al., 1996a; Ebbott et al., 1999). L'avantage de cette méthode est que le calcul mécanique est facilement mis en œuvre. Toutefois, elle nécessite un modèle d'estimation des sources de chaleur.

La deuxième démarche modélise le comportement dissipatif du matériau par des lois de type visco-hyperélastique (Lion, 1997; Boukamel et al., 2001). La dissipation est alors directement connue pour un cycle de sollicitation mécanique. Toutefois, cette démarche nécessite une modélisation fine du comportement mécanique, et plus particulièrement de la boucle d'hystérèse.

Selon la modélisation adoptée, les sources de chaleur s'obtiendront à partir de contributions de natures différentes dans l'équation de la chaleur : dissipation intrinsèque (EQ. 2.65, terme 4) pour la modélisation hystérétique, ou sources externes (EQ. 2.65, terme 3) pour la modélisation hyperélastique.

La dépendance des lois de comportement à la température peut être prise en compte (Ebbott et al., 1999; Méo, 2000) ou au contraire être négligée (Sarkar et al., 1987). Dans le premier cas, un bouclage du problème thermique vers le problème mécanique peut s'avérer nécessaire afin de mettre à jour la température dans le modèle et effectuer à nouveau un calcul mécanique. Toutefois, Ebbott et al. (1999) montrent que ce couplage n'apporte pas, dans leur cas, de véritables modifications à la solution du problème thermomécanique. Dans la pratique, la majorité des auteurs considèrent un comportement mécanique indépendant de la température.

#### b Estimation des sources de chaleur

Ce point est crucial lorsque la dissipation n'est pas représentée dans la représentation mécanique. C'est pourquoi nous consacrerons le prochain chapitre à son étude. Néanmoins, la littérature est unanime sur deux points : il faut que l'estimation de la dissipation soit cohérente avec le type de chargement mécanique (linéaire, non-linéaire, uniaxial, multiaxial, rotation des directions principales), et que l'influence de la température sur l'énergie dissipée soit prise en compte.

### c Calcul thermique

Pour le couplage faible, le calcul thermique - à notre connaissance - est toujours réalisé sur une géométrie fixe. Le plus souvent, le calcul est effectué sur la géométrie non déformée<sup>1</sup>. Kerchman et Shaw (2003), quant à eux, effectuent ce calcul sur la géométrie du chargement moyen. Lion (1997) calcule le champ thermique sur la géométrie initiale mais suppose que la loi de conduction de Fourier est constante dans la configuration de référence.

Ceci constitue une approximation par rapport à un calcul couplé, cette approximation n'étant pas souvent soulignée par les auteurs. En effet, la géométrie et les conditions aux limites du problème thermomécanique évoluent au cours d'un cycle mécanique dans le cadre des grandes déformations. Cet aspect n'est jamais pris en compte. Nous proposerons dans la suite de ce chapitre une formulation rigoureuse du calcul thermique en grandes déformations, fondée sur une approximation cyclique (homogénéisation en temps) de l'équation de la chaleur.

#### 5.1.2 Approche couplée

L'approche couplée se propose de résoudre à chaque incrément de temps le problème mécanique et le problème thermique. Cette approche a été appliquée avec succès (Bérardi et al., 1996; Meo et al., 2002) avec des algorithmes semi-couplés. Toutefois, elle ne s'appuie plus sur la différence des temps caractéristiques mécanique et thermique et impose des temps de calcul importants. En effet, ce type d'approche nécessite de décrire toute la déformation mécanique pour obtenir la température. Par ailleurs, nous verrons dans la section suivante que ce type d'algorithme est stable sous certaines conditions.

#### 5.1.3 Méthode de validation de la modélisation de l'autoéchauffement

Cette dernière étape dans la modélisation de l'autoéchauffement est très importante. En effet, il faut s'assurer que la modélisation adoptée est fidèle à l'expérience, c'est-à-dire que la température estimée et la température mesurée sont corrélées. Par exemple, Berardi et al. (1997) constatent que leur première modélisation surestime largement la température. Les auteurs décident d'inclure l'influence de la température sur les sources de chaleur en utilisant une méthode inverse. Une discussion intéressante est aussi proposée par Sae-Oui et al. (1999a) sur les conditions aux limites à adopter. Ces auteurs identifient le coefficient de convection avec l'air par un essai de refroidissement. Leur discussion montre l'importance de la connaissance des conditions aux limites. Ebbott et al. (1999) vérifient que la température estimée est correcte mais aussi que la prédiction de l'énergie dissipée concorde avec l'expérience. De plus, un essai de refroidissement permet aussi aux auteurs de vérifier la validité des conditions aux limites dans ces conditions.

#### 5.1.4 Discussion

Pour des estimations de l'autoéchauffement sur des structures complexes, nous avons mis en évidence deux principales approches. La première, le couplage faible, s'appuie sur l'hypothèse d'un chargement cyclique pour effectuer les calculs mécaniques et thermiques de façon séquentielle. D'abord, un calcul mécanique est effectué sur un cycle afin d'estimer les sources de chaleur. Ces sources de chaleur sont ensuite utilisées dans un calcul thermique. La différence entre les temps caractéristiques

---

1. Pour les pneumatiques, le calcul thermique peut être effectué sur la géométrie résultante de la mise en pression du pneumatique.

mécanique et thermique est ici exploitée car le calcul thermique est généralement effectué avec un pas de temps supérieur au temps caractéristique mécanique. Nous pouvons noter que bien que cette démarche donne des résultats très satisfaisants, il n'est pas démontré à notre connaissance qu'elle permette de résoudre exactement le problème thermomécanique.

Les approches couplée ou semi-couplée, quant à elles, résolvent les problèmes mécaniques et thermiques sur le même pas de temps et sont donc beaucoup plus coûteuses en temps de calcul. Leur avantage est de prendre en compte la déformation de la géométrie dans le calcul thermique. Ces approches permettent de résoudre exactement le problème thermomécanique avec des schémas inconditionnellement stables ou stables sous certaines conditions.

Enfin, pour valider une modélisation de l'autoéchauffement, s'il est bien sûr nécessaire de vérifier que les températures estimées sont conformes à l'expérience, il est tout aussi important de s'assurer de la bonne prédiction de l'énergie dissipée que de la cohérence des conditions aux limites (avec un essai de refroidissement par exemple). La vérification sur l'énergie dissipée est rarement proposée et est, nous semble-t-il, indispensable pour construire une modélisation représentative des phénomènes étudiés.

## 5.2 Analyse du problème thermomécanique

Dans les problèmes d'autoéchauffement, le problème thermomécanique est rarement bien posé et les hypothèses de découplage tant du point de vue du calcul que du comportement sont souvent omises, voire injustifiées. C'est pourquoi nous analysons dans cette section le problème thermomécanique couplé, avec les stratégies de résolution possibles et les hypothèses de découplage.

### 5.2.1 Présentation du problème

Un problème thermomécanique est dit couplé lorsque la mécanique et la thermique dépendent l'une de l'autre à tout instant. Nous avons vu dans les chapitres précédents que dans le cadre des élastomères, le problème thermomécanique est nécessairement couplé : effet Gough-Joule, autoéchauffement. Un problème thermomécanique couplé est donc défini dans le cadre général par :

- la donnée d'une énergie libre

$$\psi = \psi(\underline{E}, T, X_i) \quad (5.1)$$

- d'un pseudo-potentiel de dissipation

$$\varphi = \varphi(\underline{\dot{E}}, \underline{E}, \underline{\dot{X}}_i, \underline{Q})^* \quad (5.2)$$

- les équations constitutives
  - loi de comportement

$$\underline{\underline{B}}^T = \rho_0 \frac{\partial \psi(\underline{E}, T, X_i)}{\partial \underline{E}} + \frac{\partial \varphi(\underline{\dot{E}}, \underline{E}, \underline{\dot{X}}_i, \underline{Q})}{\partial \underline{\dot{E}}} \quad (5.3)$$

- loi entropique

$$s = - \frac{\partial \psi(\underline{E}, T, X_i)}{\partial T} \quad (5.4)$$

---

\*. Car le tenseur taux de déformation  $\underline{\dot{E}}$  s'exprime en fonction de  $\underline{\dot{E}}$  et de  $\underline{E}$ .

– lois d'évolution

$$\rho_0 \frac{\partial \psi(\underline{E}, T, X_i)}{\partial X_i} = - \frac{\partial \varphi(\underline{\dot{E}}, \underline{E}, \dot{X}_i, \underline{Q})}{\partial \dot{X}_i} \quad (5.5)$$

– flux de chaleur

$$\frac{\nabla T}{T} = - \frac{\partial \varphi(\underline{\dot{E}}, \underline{E}, \dot{X}_i, \underline{Q})}{\partial \underline{Q}} \quad (5.6)$$

• les équations d'équilibre et leurs conditions aux limites

– mécanique

$$\text{Div } \underline{B} + \rho_0 \underline{F} = \rho_0 \underline{a} \quad (5.7)$$

– thermique

$$\rho_0 T \dot{s} = -\text{Div } \underline{Q} + \phi_{int} + \rho_0 r \quad (5.8)$$

où le terme de couplage  $\phi_{int}$  est défini par l'équation (2.35).

### Trois formes de couplages

Les équations (5.7) et (5.8) définissent un couplage dans les deux sens. En effet, les contraintes en fonction de la température sont explicitement données par l'équation (5.3). En développant l'équation de l'énergie sous la forme (2.65), nous obtenons deux termes de dissipation. Le premier est la dissipation anélastique qui provient des phénomènes irréversibles. Cette dissipation représente les effets inélastiques comme la viscosité ou la plasticité par exemple. Le deuxième terme exprime le couplage classique dans les processus non-isothermes entre le problème mécanique et le problème thermique. Il est à l'origine de la variation de la température en fonction de la déformation en thermoélasticité par exemple. Pour résumer clairement ces idées, nous pouvons rassembler les couplages existant en trois points :

- contraintes fonction de la température (Type I) ;
- dissipation anélastique (Type II) ;
- dissipation d'un processus non-isotherme ou dissipation thermoélastique (Type III).

Selon les auteurs et les théories, les termes couplage et découplage peuvent revêtir une ou plusieurs des significations énoncées ci-dessus, en plus du type de résolution adoptée. Nous utiliserons donc les termes couplage I (resp II ou III) et découplage I (resp II ou III) pour caractériser le maintien ou non du couplage de type I (resp II ou III). Cette notation est personnelle et a pour but d'aider à la compréhension du document.

### 5.2.2 Résolution du problème thermomécanique

Il existe deux approches pour résoudre un problème thermomécanique couplé (Armero et Simo, 1992) :

- la résolution couplée : les inconnues mécaniques et thermiques sont calculées en même temps, souvent par des schémas implicites d'intégration inconditionnellement stables ;
- la résolution semi-couplée : le problème couplé est scindé en deux sous-problèmes (typiquement température et déplacement) et chaque sous problème est résolu par un algorithme différent.

Bien que la résolution couplée soit inconditionnellement stable, elle ne s'appuie pas sur la différence entre les temps caractéristiques du problème et peut mener à des systèmes difficilement résolubles (formulations non-symétriques par exemple). Les résolutions semi-couplées n'ont pas ces inconvénients mais mènent parfois à des algorithmes stables sous conditions.

Deux algorithmes semi-couplés sont ainsi proposés par [Armero et Simo \(1992\)](#). Le premier est classiquement utilisé dans la littérature et décompose le problème en une première phase mécanique isotherme, suivie par une seconde phase thermique de résolution de l'équation de la chaleur. Les auteurs montrent que cet algorithme est stable sous certaines conditions. Le deuxième algorithme décompose le problème en une première phase mécanique adiabatique, suivie par une phase de conduction. La conséquence est que l'effet thermoélastique est modélisé dans la première phase, et que toute la dissipation anélastique est reportée dans la phase thermique. Cette décomposition a l'avantage d'être inconditionnellement stable. Ces algorithmes présentés dans le cas élastique ont été étendus à des cas dissipatifs, notamment à de la thermo-plasticité non-linéaire ([Armero et Simo, 1993](#)).

### 5.3 Stratégie de résolution adoptée - Loi d'autoéchauffement cyclique

Compte tenu de la différence entre les temps caractéristiques mécaniques et thermiques, nous choisissons le couplage faible (FIG. 5.2) pour résoudre le problème thermomécanique d'autoéchauffement. Cette méthode repose sur le fait que le chargement mécanique de la structure étudiée est cyclique. Dans un premier temps, nous allons définir la température d'autoéchauffement. Puis, nous détaillerons chacune des trois étapes du couplage faible. Notamment, nous présenterons une nouvelle façon d'aborder le problème thermique afin de prendre en compte la variation importante de géométrie d'une structure au cours d'un cycle de chargement mécanique.

#### 5.3.1 Définition de la température d'autoéchauffement

Nous présentons sur la figure 5.3 l'évolution de la température d'une structure soumise à un chargement mécanique répété. Après la période transitoire où la température augmente, l'équilibre thermique est atteint<sup>2</sup> : toute l'énergie dissipée par le matériau est évacuée à l'extérieur. C'est cette évolution globale de la température qui nous intéresse dans le problème d'autoéchauffement. Un agrandissement de la partie encadrée de la figure 5.3 est représentée sur la figure 5.4 : nous avons représenté la température en peau d'une éprouvette AE42 enregistrée par thermographie infrarouge. Nous constatons ici que l'effet Gough-Joule est très prononcé : l'élévation de la température lors de l'élongation de l'élastomère atteint plus d'un degré. Toutefois, seule la variation de température à l'échelle du temps caractéristique thermique nous intéresse. C'est pourquoi nous définissons la température d'autoéchauffement comme suit :

**Définition** La température d'autoéchauffement est la température actuelle diminuée de la variation de température au cours de l'extension (effet Gough-Joule). Pour un chargement mécanique relaxant ( $R=0$ ), c'est donc l'enveloppe inférieure de la température, en négligeant le léger refroidissement lié à l'inversion thermoélastique au début de l'extension.

Nous remarquons que les termes de couplage III thermoélastique (terme 5 dans l'équation 2.66 de la thermoélasticité) ne sont pas négligeables ([Reese, 2003](#); [Honorat, 2006](#)). En effet, ce sont eux qui participent à l'effet thermique de l'extension et permettent une variation de température de plusieurs degrés en un cycle mécanique, alors que les termes dissipatifs n'entraînent qu'une élévation de quelques dixièmes de degrés en un cycle (FIG. 5.4, voir aussi notre analyse expérimentale au paragraphe 6.4.4). De plus, l'intégrale de ces termes sur une période n'est pas nulle. En effet, [Reese \(2003\)](#)

2. Dans le cas de composants automobiles limités en déplacement, l'équilibre thermique est toujours atteint car l'énergie dissipée diminue avec la température. Le problème serait autre pour des pièces non limitées soumises à des efforts, où l'équilibre thermique existe sous certaines conditions ([Molinari et Germain, 1996](#)). En effet, si le matériau s'assouplit avec la température, les sources de chaleur peuvent augmenter avec la température en tenant compte du couplage I.

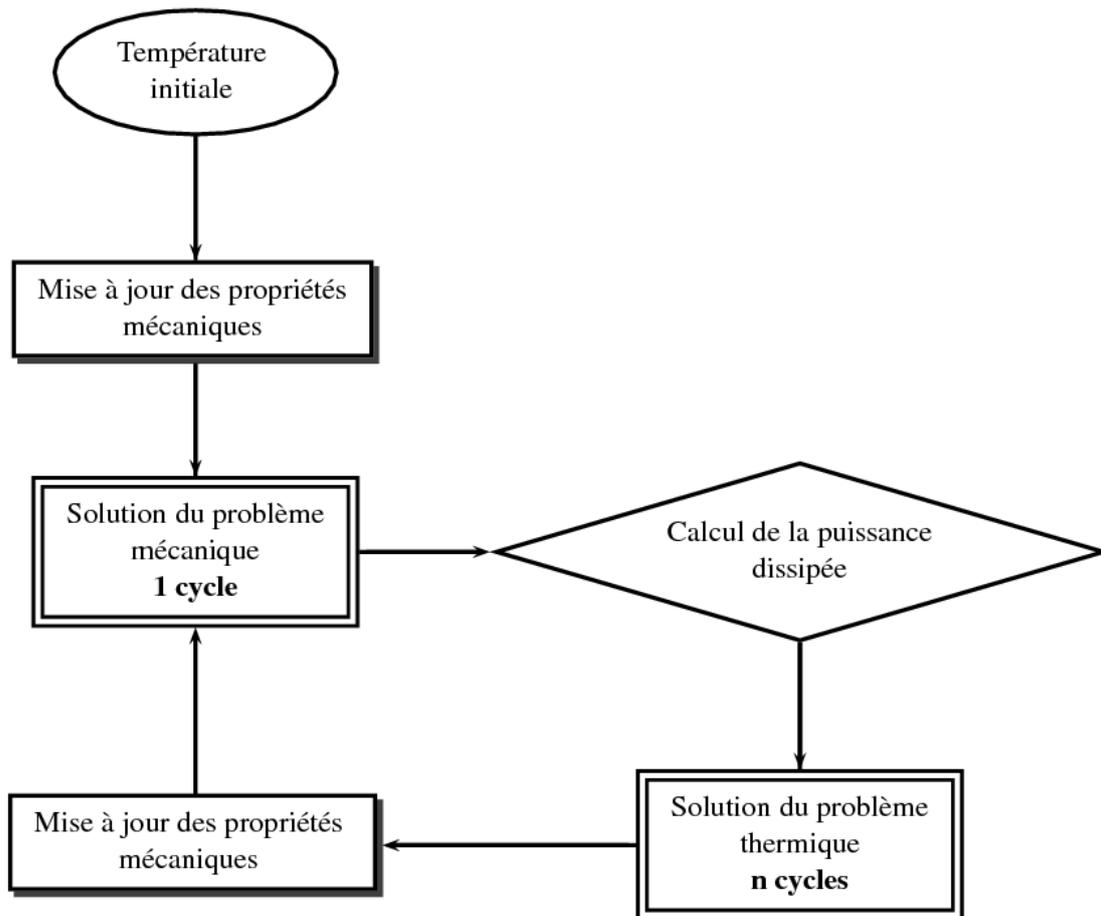


FIGURE 5.2 – Résolution du problème thermomécanique d’autoéchauffement par un couplage faible.

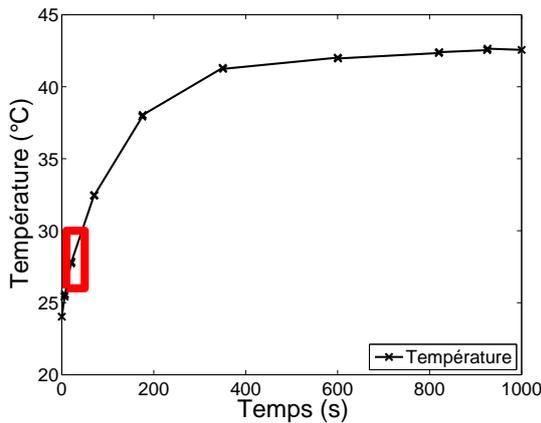


FIGURE 5.3 – Élévation de la température d'une structure soumise à un chargement mécanique répété.

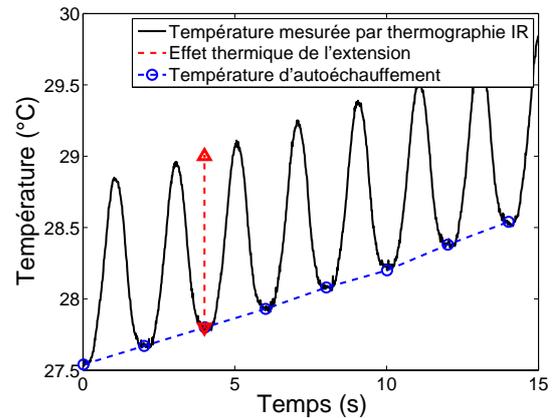


FIGURE 5.4 – Variation de la température d'une structure soumise à un chargement mécanique répété.

montre par exemple qu'une élévation de température sur plusieurs cycles est possible sans introduire aucune dissipation, si ce n'est ces termes de couplage III. Nous pouvons aussi critiquer notre définition de la température d'autoéchauffement car elle ne représente pas la température moyenne : à l'équilibre thermique, la température d'autoéchauffement sera donc légèrement inférieure (de la moitié de l'effet thermique dans un cas relaxant, plus pour de la traction-traction) à la température moyenne. Toutefois, cette définition de température est cohérente avec l'ensemble du modèle dans l'hypothèse où les termes de couplage III ne sont pas représentés. En effet, nous constaterons au chapitre suivant que l'élévation de température d'autoéchauffement est imputable entièrement (à l'erreur expérimentale près) à l'énergie dissipée mécaniquement par la boucle d'hystérèse. Nous choisissons donc de ne pas représenter ces termes (hypothèse de découplage III).

### 5.3.2 Module mécanique - Estimation des sources de chaleur

Le calcul mécanique doit fournir les grandeurs mécaniques nécessaires à l'estimation des sources de chaleur. Nous avons vu que deux options étaient possibles : une modélisation hyperélastique ou une modélisation hystérétique. L'argument déterminant pour choisir entre ces deux modélisations est le suivant : considérons que la structure n'est plus soumise à un chargement mécanique périodique mais variable stationnaire<sup>3</sup>. Calculer l'énergie dissipée par tout le signal avec un modèle hystérétique nécessite de calculer tout le signal, ce qui n'est pas compatible avec les temps de calcul d'un bureau d'étude. Par contre, si la modélisation du comportement stabilisé est hyperélastique, un seul calcul suffit pour décrire l'état stabilisé de la structure. Un traitement du signal variable est nécessaire afin d'estimer les sources de chaleur. Nous présenterons un tel traitement dans le chapitre suivant.

**Nous choisissons donc d'adopter une modélisation hyperélastique du comportement de notre matériau. La conséquence la plus importante est que nous ne modéliserons pas les pertes hystérétiques au cours d'un cycle de chargement mécanique. Afin de pouvoir effectuer un calcul thermique, nous devons définir une estimation de la puissance dissipée. Nous présentons dans le prochain chapitre une telle estimation.**

3. Ce type de chargement est typique des sollicitations mécaniques imposées aux structures anti-vibratoires automobiles. Ces structures atteindront leur état stabilisé au cours du rodage du véhicule.

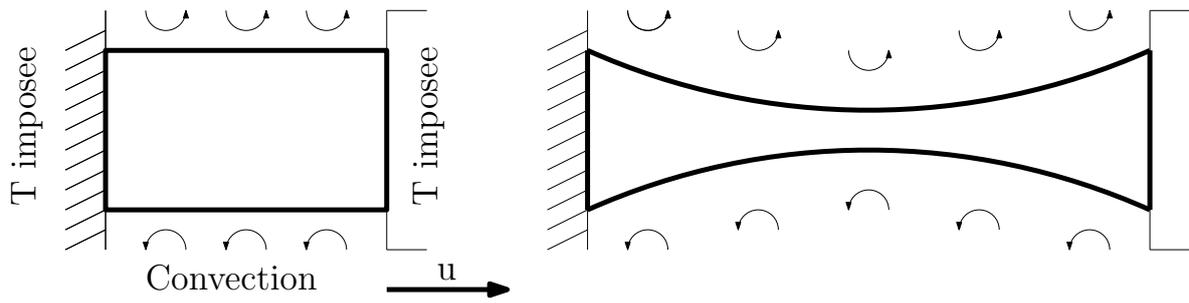


FIGURE 5.5 – Exemple de géométries initiale et déformée avec les conditions aux limites.

Nous devons, de plus, lever d’autres inconnues : quelle est l’influence de la température sur le comportement (couplage I) ? Faut-il représenter l’effet Mullins ? Nous répondrons à ces questions dans les chapitres suivants en nous fondant sur des constatations expérimentales.

**5.3.3 Discussion sur le calcul thermique lors d’un couplage faible**

Dans l’approche semi-couplée, la résolution du problème thermique s’effectue sur une géométrie fixe. Or, dans le cadre des grandes déformations, cette géométrie évolue au cours d’un cycle de chargement mécanique (FIG. 5.5) et effectuer le calcul sur la géométrie initiale n’est pas plus pertinent que pour toute autre géométrie. Notre problématique est donc la suivante : résoudre le problème thermique en tenant compte de la variation de géométrie au cours d’un cycle mécanique.

Le plan de notre analyse pour l’approximation cyclique de l’équation de la chaleur est le suivant :

1. écrire le problème thermique sur la configuration de référence ;
2. définir des variables moyennes telles que la température d’autoéchauffement ;
3. moyenner l’équation de la chaleur et les conditions aux limites sur une période ;
4. approximer les équations obtenues afin d’obtenir un problème thermique ne dépendant plus du temps mécanique.

Notre objectif est ici d’extraire des termes moyens de l’équation de la chaleur.

**5.3.4 Approximation cyclique de l’équation de la chaleur**

**a Problème thermique sur la configuration de référence**

L’équation de la chaleur et les conditions aux limites dans la configuration actuelle sont données par

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \rho r - \text{div } \underline{q} \tag{5.9}$$

$$\underline{q} \cdot \underline{da} = h \ da \ (T - T_\infty) \tag{5.10}$$

où  $c$  est la chaleur spécifique,  $r(\underline{x}, t)$  les sources de chaleur,  $\text{div}$  l’opérateur divergence dans la configuration actuelle et  $\underline{q}(\underline{x}, t)$  le vecteur flux de chaleur. Ce dernier est relié à la température par la loi de Fourier selon

$$\underline{q}(\underline{x}, t) = -\underline{k}(\underline{G}, T) \cdot \text{grad } T \tag{5.11}$$

où  $\underline{k}(\underline{G} = \underline{F}\underline{F}^T, T)$  est le tenseur de conductivité thermique et  $\underline{\text{grad}}$  l'opérateur gradient en configuration actuelle. Notons que les conditions aux limites représentent soit la convection naturelle avec le coefficient de convection  $h$  et la température externe  $T_\infty$ , soit une température imposée si  $h \rightarrow \infty$ . Ces équations s'écrivent dans la configuration de référence :

$$\rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} = \rho_0 R - \text{Div } \underline{Q} \quad (5.12)$$

$$\underline{Q} \cdot \underline{dA} = \underbrace{\frac{da}{dA} h}_{H(\underline{X}, t)} dA (T - T_\infty) \quad (5.13)$$

où  $\text{Div}$  est l'opérateur divergence dans la configuration de référence,  $R(\underline{X}, t) = r(\underline{x}, t)$  les sources de chaleur externes et  $\underline{Q}$  le transporté du vecteur flux de chaleur donné par

$$\underline{Q}(\underline{X}, t) = J(\underline{X}, t) \underline{F}^{-1}(\underline{X}, t) \cdot \underline{q}(\underline{x}, t) \quad . \quad (5.14)$$

La loi de Fourier et la relation  $\underline{\text{grad}} T = \underline{F}^{-T} \cdot \underline{\nabla} T$  entre les gradients eulérien et lagrangien mènent à l'expression lagrangienne du flux de chaleur

$$\underline{Q}(\underline{X}, t) = -J(\underline{X}, t) \left( \underline{F}^{-1} \cdot \underline{k}(\underline{G}, T) \cdot \underline{F}^{-T} \right) (\underline{X}, t) \cdot \underline{\nabla} T(\underline{X}, t) \quad . \quad (5.15)$$

La conductivité thermique lagrangienne est donnée par

$$\underline{K}(\underline{F}, T) = J(\underline{X}, t) \left( \underline{F}^{-1} \cdot \underline{k}(\underline{G}, T) \cdot \underline{F}^{-T} \right) (\underline{X}, t) \quad . \quad (5.16)$$

Le coefficient de convection  $H$  dans la configuration de référence dépend du temps et décrit la variation de surface d'échange au cours de la déformation. Son expression est donnée par

$$H(\underline{X}, t) = h \frac{da}{dA} = h J \sqrt{\underline{N}^T \cdot \underline{C}^{-1} \cdot \underline{N}} \quad (5.17)$$

avec  $\underline{N}$  la normale à la surface dans la configuration de référence.

## b Définition des termes moyens

Supposons que la déformation soit périodique de période  $P$ . La température moyenne glissante  $T_m$  fonction du temps  $t$  (thermique) est définie par

$$T_m(\underline{X}, t) = \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} T(\underline{X}, t + \tau) d\tau \quad (5.18)$$

et l'oscillation de la température autour de cette température glissante est donnée par

$$T_a(\underline{X}, t, \tau) = T(\underline{X}, t + \tau) - T_m(\underline{X}, t) \quad . \quad (5.19)$$

Par extension, les variables moyennes et oscillantes sont décrites par les indices  $m$  et  $a$ . Pour une question de lisibilité, la variable d'espace  $\underline{X}$  ne sera dorénavant plus écrite. Le tenseur moyen de conductivité à une température fixée  $T_m(t)$  est donné par

$$\boxed{\underline{K}_m(t) = \underline{K}_m(T_m(t)) = \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} \underline{K}(\underline{F}(t + \tau), T_m(t)) d\tau} \quad . \quad (5.20)$$

Nous définissons l'écart de la conductivité à la moyenne glissante par

$$\underline{\underline{K}}_a(t, \tau) = \underline{\underline{K}}(\underline{E}, T)(t + \tau) - \underline{\underline{K}}_m(t) \quad . \quad (5.21)$$

Au temps  $t$  donné, l'équation de la chaleur devient

$$\rho_0 c \frac{\partial T}{\partial \tau}(t + \tau) = \rho_0 R(t + \tau) + \text{Div} \left[ \left( \underline{\underline{K}}_m(t) + \underline{\underline{K}}_a(t, \tau) \right) \cdot (\underline{\nabla} T_m(t) + \underline{\nabla} T_a(t, \tau)) \right] \quad . \quad (5.22)$$

### c Homogénéisation en temps de l'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur pour  $T_m$  est obtenue par intégration de (5.22) sur une période  $P$  :

$$\begin{aligned} \rho_0 c \frac{\partial T_m}{\partial t} = \rho_0 R_m + \text{Div} \left( \underline{\underline{K}}_m(t) \cdot \underline{\nabla} T_m(t) \right) + \underbrace{\text{Div} \left( \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} \underline{\underline{K}}_m(t) \cdot \underline{\nabla} T_a(t, \tau) \, d\tau \right)}_{=0} \\ + \underbrace{\text{Div} \left( \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} \underline{\underline{K}}_a(t, \tau) \cdot \underline{\nabla} T(t + \tau) \, d\tau \right)}_{A(t)} \quad . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Le terme de gauche se développe en

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} = \frac{\partial \left( \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} T(t + \tau) \, d\tau \right)}{\partial t} = \frac{T(t + P/2) - T(t - P/2)}{P} = \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} \frac{\partial T(t + \tau)}{\partial \tau} \, d\tau \quad . \quad (5.24)$$

Concernant les conditions aux limites, le même raisonnement mène à

$$\begin{aligned} -\underline{\underline{K}}_m(t) \cdot \underline{\nabla} T_m(t) \, \underline{dA} = H_m(t) \, \underline{dA} (T_m(t) - T_\infty) + \underbrace{\frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} \underline{\underline{K}}_m(t) \cdot \underline{\nabla} T_a(t, \tau) \, \underline{dA} \, d\tau}_{=0} \\ + \underbrace{\frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} \left( H_a(t, \tau) T_a(t, \tau) \, \underline{dA} + \underline{\underline{K}}_a(t, \tau) \cdot \underline{\nabla} T(t + \tau) \cdot \underline{dA} \right) \, d\tau}_{B(t)} \quad . \end{aligned} \quad (5.25)$$

### d Approximation

Dans le problème d'autoéchauffement d'une structure élastomère, les termes  $A(t)$  et  $B(t)$  sont négligeables. Cette approximation est justifiée par l'hypothèse sur les temps caractéristiques : le temps caractéristique mécanique  $t_{meca}$  est faible devant le temps caractéristique thermique  $t_{therm} = \rho c L^2 / k$  où  $L$  est la dimension caractéristique de la structure, centimétrique.

En effet, la diffusivité thermique est de l'ordre de  $k / \rho c \simeq 1.10^{-7}$ . Les temps typiques mécaniques sont de l'ordre de 0.1 s et 1 s, soit des fréquences entre 1 et 10 Hz. La longueur caractéristique thermique correspondante à ce temps mécanique est alors  $\sqrt{(k t_{meca}) / (\rho c)} \simeq 0.3 \text{ mm} \ll L$ . Cela signifie que la variation de température due à la déformation au cours du cycle mécanique est limitée à cette échelle. Nous pouvons conclure qu'à l'échelle macroscopique (de l'ordre du millimètre), l'oscillation de température due au changement cyclique des conditions aux limites et de la conductivité thermique est faible par rapport à la température moyenne :  $T_a \ll T_m$ . La régularité de l'équation de la chaleur donne  $\underline{\nabla} T_a \ll \underline{\nabla} T_m$ . Ces deux expressions impliquent qu'à l'échelle macroscopique, les

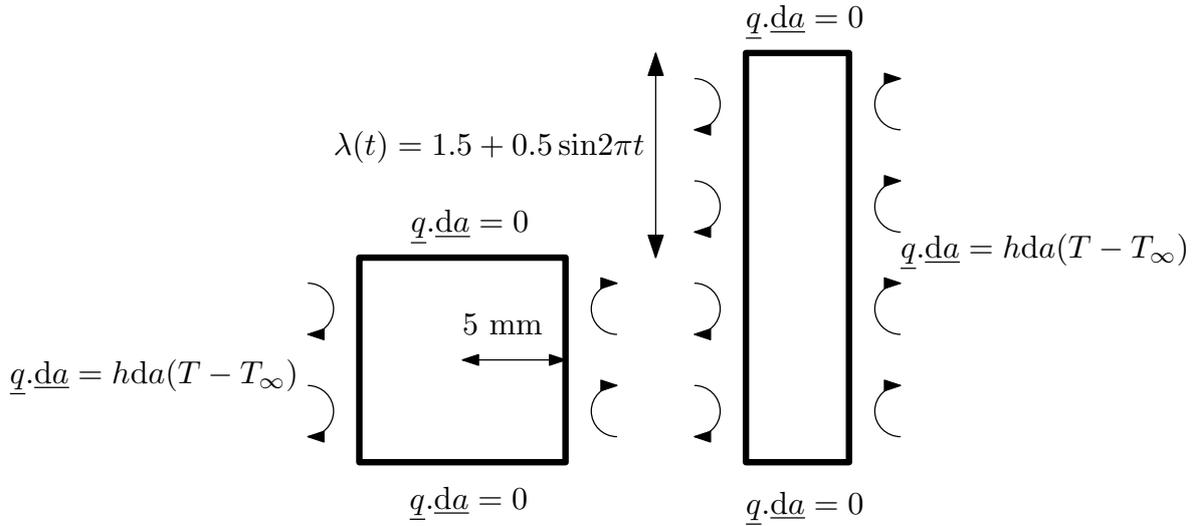


FIGURE 5.6 – Représentation de la géométrie et des conditions aux limites du problème illustrant l'approximation de l'équation de la chaleur.

termes  $A(t)$  et  $B(t)$  sont négligeables. Le problème thermique sur les termes moyens est alors défini exactement sur la configuration de référence.

Cette approximation mène finalement à une équation de la chaleur homogénéisée en temps

$$\rho_0 c \frac{\partial T_m}{\partial t} = \rho_0 R_m + \text{Div} \underline{\underline{K}}_m(T_m) \cdot \nabla T_m \quad (5.26)$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$-\underline{\underline{K}}_m(T_m) \cdot \nabla T_m \cdot \underline{\underline{dA}} = H_m \, dA (T_m - T_\infty) \quad (5.27)$$

où le vecteur flux de chaleur est défini par  $\underline{Q}_m = -\underline{\underline{K}}_m(T_m) \cdot \nabla T_m$ .

Ce problème est défini sur la configuration de référence avec des paramètres thermiques constants : il ne dépend plus du temps mécanique. Le tenseur de conductivité thermique est anisotrope et traduit la moyenne du trajet thermique à effectuer lors d'un cycle. Le coefficient de convection moyen représente la moyenne des échanges avec l'extérieur.

### e Illustration numérique

L'homogénéisation temporelle de l'équation de la chaleur a été testée par une modélisation éléments finis. La géométrie test est un cylindre à base circulaire de 5 mm de rayon (FIG. 5.6). Un déplacement sinusoïdal sur la surface supérieure est imposé entre les élongations  $\lambda = 1$  et  $\lambda = 2$ . Les sources de chaleur sont supposées homogènes et indépendantes de la température. La conductivité thermique et le coefficient de convection sur la surface latérale sont supposés constants sur la configuration déformée. Une condition de flux nul est imposée sur les deux surfaces horizontales. Quatre calculs ont été effectués jusqu'à l'équilibre thermique (1000 s) :

- résolution couplée (50 pas de calcul par cycle mécanique de fréquence 1 Hz) ;
- résolution semi-couplée sur la géométrie initiale ;

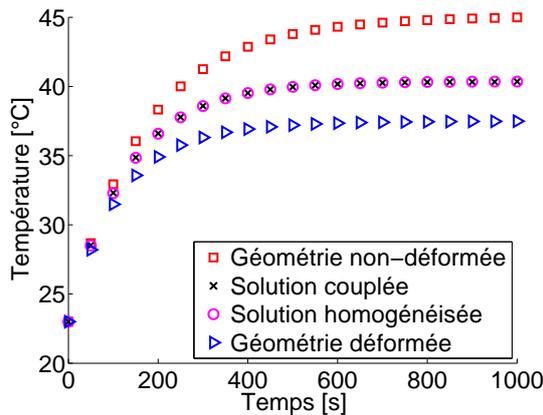


FIGURE 5.7 – Évolution de la température à cœur en fonction du temps pour les quatre résolutions.

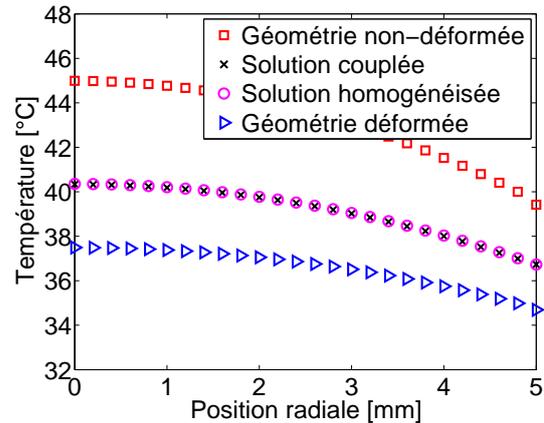


FIGURE 5.8 – Évolution de la température stabilisée sur un rayon pour les quatre résolutions.

- résolution semi-couplée sur la géométrie déformée ;
- résolution semi-couplée avec l'équation de la chaleur homogénéisée.

Le pas de temps du calcul thermique était libre pour les trois résolutions semi-couplées. Le premier constat est la différence entre les temps de calcul : le calcul couplé dure environ une journée alors que la résolution semi-couplée prend environ une minute<sup>4</sup>.

Les résultats des calculs sont présentés sur les figures 5.7 et 5.8. La première figure représente l'évolution de la température à cœur en fonction du temps. Le calcul avec l'équation homogénéisée donne le même résultat que le calcul couplé, alors que les calculs semi-couplés sur les deux géométries extrêmes impliquent une erreur de l'ordre de 25% comparée à la résolution couplée qui sert de référence. Le gradient radial de température à l'équilibre thermique est représenté sur la deuxième figure. Les résultats rejoignent les conclusions précédentes.

Cette simulation numérique illustre l'approximation cyclique de l'équation de la chaleur : elle donne le même résultat que pour un calcul couplé mais avec des temps de calcul environ 1000 fois plus petits.

### 5.3.5 Paramètres du calcul thermique

#### a Conductivité thermique

Si la conductivité thermique est généralement isotrope dans l'état naturel, elle peut devenir anisotrope avec la déformation. Plusieurs modèles (van den Brule, 1989; van den Brule et O'Brien, 1990) fondés sur la théorie du réseau (description des chaînes macromoléculaires) expriment la relation entre la conductivité thermique et la déformation. Des mesures (Tautz, 1959; Broerman et al., 1999) ont montré que la conductivité thermique des élastomères est modifiée par l'état de déformation : la conductivité est plus grande dans une direction étirée, et plus petite dans une direction compressée. L'amplitude de ce phénomène dépend du matériau mais peut varier de 10 à 100% pour une élongation  $\lambda = 2$ . C'est pourquoi nous avons supposé dans les paragraphes précédents que le tenseur de conductivité thermique  $\underline{\underline{k}}(\underline{\underline{G}}, T)$  dépendait de la déformation.

4. Avec un ordinateur de bureau.

Toutefois, nous n'avons pas pu mettre en place de mesure de la conductivité thermique en fonction de la déformation, et nous supposons qu'elle est constante dans l'état déformé et vaut pour notre matériau d'étude  $k = 0.22 \text{ W} \cdot \text{C}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### b Chaleur spécifique

La littérature considère généralement que la chaleur spécifique est affine de la température. [Wunderlich et Baur \(1970\)](#) font, par exemple, un travail expérimental assez détaillé sur les polymères. Une caractérisation expérimentale du matériau de l'étude confirme cette hypothèse et donne la variation de la chaleur spécifique  $c$  en fonction de la température (unité :  $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}$ ) :  $c(T) = 4.9 T + 1350$ .

### c Coefficients de convection et de rayonnement

Ces deux coefficients constituent les inconnues du problème pour les conditions aux limites du modèle. Le coefficient de convection porte sur les échanges thermiques entre le matériau et l'environnement extérieur. Le rayonnement d'un corps chaud peut aussi être pris en compte. L'émissivité de l'élastomère est proche de 0.95. Par contre, le coefficient de convection nécessite une étude détaillée qui sera présentée dans les chapitres suivants. En effet, soit il est connu par un essai de refroidissement, soit il faut l'identifier sur un essai d'autoéchauffement. D'ailleurs, pour une structure qui présente une surface importante de convection, le résultat du calcul thermique est très sensible à la valeur du coefficient de convection.

## 5.4 Conclusions

Nous avons dans ce chapitre défini une loi d'autoéchauffement cyclique. Calculer l'autoéchauffement d'une structure nécessite de résoudre un problème thermomécanique couplé. Pour simplifier ce problème et obtenir une stratégie de résolution utilisable en bureaux d'étude, il est nécessaire d'adopter un couplage faible pour résoudre le problème thermomécanique. Cette résolution se fonde sur l'hypothèse d'un chargement cyclique et distingue trois étapes successives.

D'abord un calcul mécanique permet d'obtenir la réponse mécanique stabilisée de la structure au chargement. Nous choisissons ici une modélisation hyperélastique de cette réponse stabilisée afin de prendre en compte des chargements variables et non plus cycliques. Nous ne modélisons pas dans ce cas la dissipation dans le calcul mécanique. Cependant, nous devons estimer la puissance dissipée et les sources de chaleur afin d'estimer l'autoéchauffement. Cette estimation repose sur les valeurs des quantités mécaniques déterminées précédemment. Le lien entre ces quantités et la dissipation est présenté dans le chapitre suivant. Cette estimation fournit les sources de chaleur du calcul thermique.

La résolution de l'équation de la chaleur a fait l'objet d'une étude détaillée. En effet, l'approche semi-couplée du problème thermomécanique résout le problème thermique sur une géométrie fixe : l'effet de la variation des conditions aux limites et de la géométrie de la structure au cours d'un cycle de chargement mécanique n'est pas pris en compte. En écrivant le problème thermique sur la configuration de référence, puis en intégrant sur une période du chargement mécanique, nous obtenons, moyennant quelques approximations justifiées à l'échelle macroscopique, un problème thermique homogénéisé en temps défini sur la configuration de référence et prenant en compte les variations cycliques de la conductivité ou des conditions aux limites. Une simulation illustre l'intérêt de cette méthode qui permet d'obtenir la même solution qu'avec un calcul couplé.



## Chapitre 6

# Estimation de l'énergie dissipée

*Nous présentons dans ce chapitre une estimation de l'énergie dissipée au cours d'un cycle mécanique hyperélastique stabilisé.*

### Sommaire

<b>5.1</b>	<b>L'autoéchauffement dans la littérature</b>	<b>92</b>
5.1.1	Couplage faible	92
5.1.2	Approche couplée	94
5.1.3	Méthode de validation de la modélisation de l'autoéchauffement	94
5.1.4	Discussion	94
<b>5.2</b>	<b>Analyse du problème thermomécanique</b>	<b>95</b>
5.2.1	Présentation du problème	95
5.2.2	Résolution du problème thermomécanique	96
<b>5.3</b>	<b>Stratégie de résolution adoptée - Loi d'autoéchauffement cyclique</b>	<b>97</b>
5.3.1	Définition de la température d'autoéchauffement	97
5.3.2	Module mécanique - Estimation des sources de chaleur	99
5.3.3	Discussion sur le calcul thermique lors d'un couplage faible	100
5.3.4	Approximation cyclique de l'équation de la chaleur	100
5.3.5	Paramètres du calcul thermique	104
<b>5.4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>105</b>

Le chapitre précédent concluait sur la loi d'autoéchauffement cyclique adoptée. À partir d'une modélisation hyperélastique de la réponse mécanique qui ne dissipe pas d'énergie par essence, nous devons trouver une méthode d'estimation de l'énergie dissipée au cours d'un trajet de chargement mécanique. Cette estimation nécessite de définir trois points :

1. la définition de cycles mécaniques ;
2. la détermination d'une grandeur représentative de l'énergie dissipée sur un cycle ;
3. la proposition d'une fonction de dissipation reliant cette grandeur à l'énergie dissipée.

Ceci repose bien entendu sur une conception de l'état stabilisé où la définition de grandeurs caractéristiques est suffisante pour décrire notre problème.

Nous commençons ce chapitre par un rappel des origines microscopiques de l'énergie dissipée. Un état de l'art sur l'estimation de l'énergie dissipée est aussi proposé. Notamment, nous détaillons l'hypothèse de viscoélasticité linéaire.

Nous présentons ensuite notre estimation de l'énergie dissipée. Afin de prendre en compte les non-linéarités et les grandes transformations, nous proposons des mesures énergétiques représentatives de l'énergie dissipée, dénommées énergies cycliques. Notamment, nous discutons de la multiaxialité et de l'objectivité de ces prédicteurs de l'énergie dissipée. Ce travail est d'abord effectué pour des cas de chargements cycliques puis étendu aux chargements variables. Dans une dernière partie, nous identifions à partir d'une base expérimentale originale la fonction de dissipation sur des cas de chargement uniaxiaux et biaxiaux.

## 6.1 Interprétations microscopiques de l'énergie dissipée

L'énergie dissipée au cours d'un cycle se remarque classiquement par une hystérèse dans le plan force-déplacement. L'aire de cette hystérèse nous donne une mesure expérimentale de la perte d'énergie. L'origine de cette perte est multiple et complexe à qualifier. Plusieurs descriptions peuvent être introduites pour classer ces différentes origines :

1. l'effet Mullins et toutes ses interprétations possibles ;
2. un endommagement quelconque ;
3. le caractère visqueux de l'élastomère ;
4. des frictions internes ;
5. des phénomènes d'interaction microscopique comme la cristallisation sous contraintes ([Toki et al., 2000](#)).

Les deux premiers points sont représentatifs d'une énergie dissipée par des changements de propriétés mécaniques et des variations d'énergie bloquée. La dissipation des trois derniers phénomènes se fait plutôt sous forme de chaleur.

[Medalia \(1991\)](#) reprend et analyse toutes les méthodes classiquement utilisées pour mesurer les propriétés dynamiques des élastomères. Du point de vue macroscopique, le glissement des chaînes, et donc la perte d'énergie, peut être atténué avec un réseau plus dense. Medalia ainsi que [Meinecke \(1991\)](#) étudient aussi l'effet du noir de carbone sur la dissipation.

[Park et al. \(2000\)](#) vérifient expérimentalement que l'élévation de température est d'autant plus importante que l'élastomère est chargé en noir de carbone. Ce noir de carbone crée un réseau qui se déforme sous de petites sollicitations. A plus grande amplitude, ce réseau se rompt et se reforme pour s'adapter. On observe donc un comportement cyclique hystérétique. [Park et al](#) corrèlent bien l'augmentation du module de perte avec la hausse de température pour différents matériaux.

### Modélisation

Les sources possibles de dissipation sont nombreuses et il est impossible actuellement de quantifier une répartition entre ces différents mécanismes. Il est toutefois admis dans la littérature que la majeure partie de l'énergie dissipée en un cycle stabilisé l'est sous forme de chaleur. Cette hypothèse peut être vérifiée expérimentalement. En effet, si nous maîtrisons les conditions du calcul thermique (conditions aux limites, coefficients matériau), il est possible d'estimer l'élévation de température pour deux conditions :

1. pour un cycle mécanique stabilisé en faisant l'hypothèse d'adiabaticité : lors des tous premiers cycles de chargement, l'élévation de température reste faible et les pertes par conduction et convection peuvent être négligées ;

2. pour un cycle mécanique stabilisé en régime thermique stabilisé : toute l'énergie dissipée est évacuée à l'extérieur.

Une comparaison calcul-essai permet d'estimer dans les deux cas la part d'énergie dissipée qui sert réellement à autoéchauffer la structure. **Dans un premier temps, nous faisons l'hypothèse que toute l'énergie dissipée l'est sous forme de chaleur.**

## 6.2 État de l'art

### 6.2.1 Viscoélasticité linéaire

L'hypothèse de linéarité implique que si la déformation  $\varepsilon$  est sinusoïdale, alors la contrainte  $\sigma$  le sera aussi. Du fait de la non-linéarité du matériau, les contraintes sont seulement périodiques et se décomposent selon une série de Fourier

$$\sigma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + B_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) . \quad (6.1)$$

Une hypothèse souvent formulée pour les élastomères est la quasi-linéarité : les coefficients d'ordre supérieur ou égal à 2 sont petits devant ceux de l'ordre 1. Ainsi, la viscoélasticité linéaire est très utilisée même dans le cas des faibles non-linéarités.

#### a Modèles viscoélastiques

Dans le cas d'un comportement purement visqueux, il y a proportionnalité entre les contraintes et le gradient de vitesse (ou vitesse de déformation). L'exemple du cisaillement simple donnerait  $\sigma = G\varepsilon$  dans le cas élastique et  $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$  dans le cas purement visqueux. D'une manière générale, le comportement visqueux est décrit par une équation de la forme

$$\sum_{i=1,n} a_i \frac{\partial^i \varepsilon}{\partial t^i} = \sum_{i=1,m} b_i \frac{\partial^i \sigma}{\partial t^i} . \quad (6.2)$$

Des modèles rhéologiques simples sont souvent utilisés pour décrire le comportement viscoélastique (FIG. 6.1). Les modèles simples de Maxwell et de Kelvin-Voigt ne décrivent pas de manière satisfaisante le comportement de matériaux réels : le modèle de Maxwell ne présente pas de phénomène de recouvrement à contraintes nulles tandis que le modèle de Kelvin-Voigt ne présente aucune déformations élastiques instantanées. Le modèle de Zener permet de pallier l'insuffisance des deux premiers modèles, et le modèle de Burgers ajoute au précédent modèle des déformations rémanentes.

Les élastomères ont un comportement complexe en fonction du temps et de la température qui ne peut être correctement représenté par un modèle de Burgers à quatre paramètres (FIG. 6.1). Des modèles à distribution continue de temps caractéristiques sont alors utilisés (Grandcoïn et Boukamel, 2007). Par exemple, le modèle de Maxwell généralisé est un groupe d'élément de Maxwell en parallèle dont les contraintes subies sont la somme des contraintes élémentaires

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \sum_i G_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \quad (6.3)$$

ou la somme d'une distribution continue

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 G_r + \varepsilon_0 \int_0^{\infty} h(\tau) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) d\tau \quad (6.4)$$

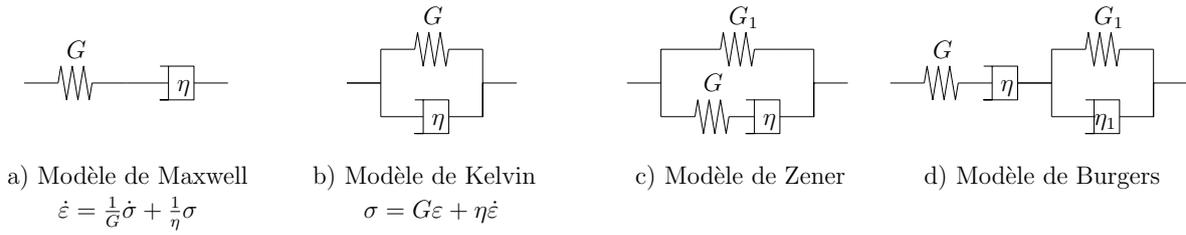


FIGURE 6.1 – Modèles rhéologiques couramment utilisés.

avec  $h(\tau)$  une fonction de distribution homogène à un module et  $G_r$  le module relaxé. Afin de représenter les différences d'ordre de grandeur dans les temps caractéristiques, une échelle logarithmique peut être utilisée

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 G_r + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} H(\ln \tau) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) d \ln \tau \quad . \quad (6.5)$$

Le modèle de Kelvin-voigt généralisé est une association en série d'éléments de Kelvin-Voigt. Les déformations de l'élément soumis à une contrainte  $\sigma_0$  sont

$$\varepsilon(t) = \sum_i \frac{1}{G_i} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \right] \quad . \quad (6.6)$$

L'hypothèse de linéarité permet d'appliquer le principe de superposition de Boltzmann : la réponse à une excitation  $\varepsilon(t) = \sum_i \varepsilon_i(t)$  ou  $\sigma(t) = \sum_i \sigma_i(t)$  sera donnée par la somme des solutions élémentaires des  $\varepsilon_i(t)$  ou  $\sigma_i(t)$ .

### b Domaine fréquentiel

Nous avons présenté ces modèles dans le domaine temporel. Dans le domaine fréquentiel, contraintes et déformations sont des fonctions sinusoïdales

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cos(\omega t), \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t - \phi) \quad (6.7)$$

avec  $\phi$  le retard de phase des déformations par rapport aux contraintes et  $\omega$  la pulsation. Les notations complexes sont utilisées pour l'étude du régime permanent

$$\sigma^*(j\omega) = \sigma_0 \exp(j\omega t), \quad \varepsilon^*(j\omega) = \varepsilon_0 \exp[j(\omega t - \phi)] \quad . \quad (6.8)$$

Le module dynamique est défini par

$$E^*(j\omega) = \frac{\sigma^*(j\omega)}{\varepsilon^*(j\omega)} = \frac{1}{J^*(j\omega)} \quad (6.9)$$

et s'écrit sous la forme

$$E^*(j\omega) = E'(\omega) + jE''(\omega) = E'(\omega)[1 + j \tan \phi(\omega)], \quad \text{avec } \tan \phi(\omega) = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} \quad . \quad (6.10)$$

Le module élastique  $E'$  et le module de perte  $E''$  définissent ainsi l'angle de perte  $\phi$ .

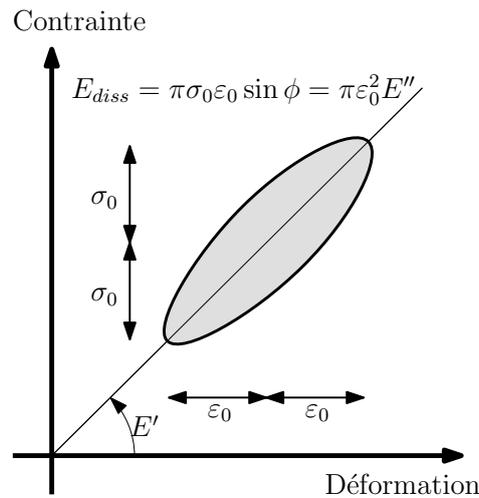


FIGURE 6.2 – Boucle d’hystérèse dans le cas linéaire.

### c Energie dissipée

L'énergie dissipée sur un cycle est

$$E_{diss} = \int_{Cycle} \sigma d\varepsilon = \pi \sigma_0 \varepsilon_0 \sin \phi = \pi \varepsilon_0^2 E'' \quad (6.11)$$

Dans le cas linéaire, la boucle d’hystérèse est une ellipse (FIG. 6.2) et l'énergie dissipée est directement proportionnelle au produit de l'amplitude des déformations et des contraintes. Sous certaines hypothèses, l'énergie dissipée est donc directement proportionnelle à l'énergie élastique de déformation.

### d Discussion

Dans le cadre linéaire et dans le cadre H.P.P., l'estimation de l'énergie dissipée à partir d'un modèle élastique est directe. A partir de la connaissance de la sollicitation en termes d'amplitude et de fréquence, l'énergie dissipée est directement donnée par le module de perte  $E''(\omega)$ . L'application du principe de superposition de Boltzmann permet de traiter les sollicitations complexes.

Notons aussi que pour une sollicitation relaxante, l'énergie dissipée est proportionnelle à l'énergie élastique de déformation. Cette énergie vaut  $\varepsilon_0^2 E'$ . Par contre, dans le cas général où une précontrainte est appliquée, l'énergie dissipée n'est pas proportionnelle à la variation d'énergie de déformation au cours d'un cycle. Par exemple, [Clark et Dodge \(1985\)](#) appellent de façon abusive la grandeur  $U = \varepsilon_0^2 E'$  variation d'énergie de déformation. Nous discuterons aussi dans la suite de l'énergie de déformation pour des sollicitations multiaxiales.

Toutefois, les modèles viscoélastiques linéaires se heurtent à deux obstacles qui les confinent au cadre linéaire :

- les grands déplacements et les grandes rotations ;
- les non-linéarités de comportement en grande déformation.

Le premier obstacle est lié à la perte d'objectivité. En effet, il ne faut pas qu'un mouvement rigidifiant implique une dissipation d'énergie. Or, de nombreux auteurs utilisent les contraintes de Cauchy et

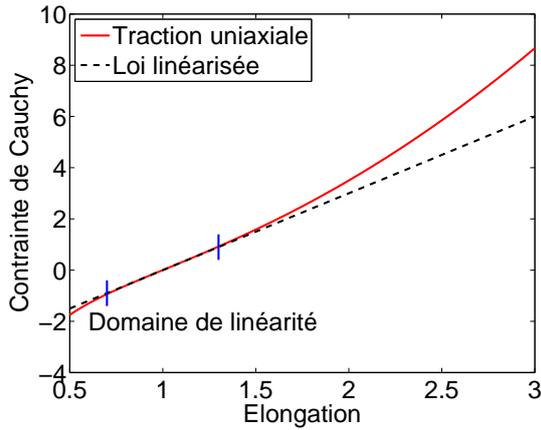


FIGURE 6.3 – Courbe contrainte-déformation et l’approximation linéaire pour de la traction uniaxiale avec une loi néo-hookéenne.

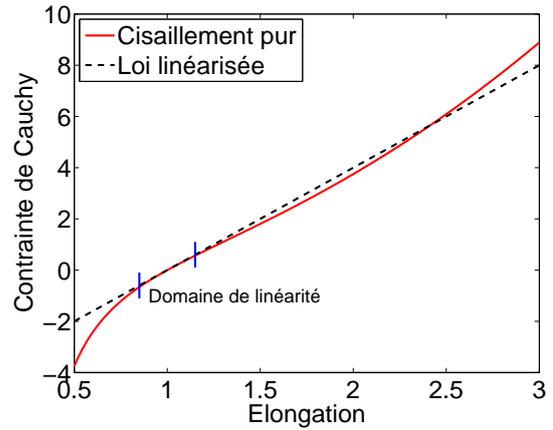


FIGURE 6.4 – Courbe contrainte-déformation et l’approximation linéaire pour du cisaillement pur avec une loi néo-hookéenne.

n’explicitent pas formellement le calcul de l’amplitude des contraintes ou des déformations. Supposons que cette amplitude s’écrive

$$\underline{\underline{\sigma}}_a = \underline{\underline{\sigma}}(t_2) - \underline{\underline{\sigma}}(t_1) \tag{6.12}$$

où  $t_1$  et  $t_2$  sont des temps différents. Cette écriture n’a pas de sens physique car les deux tenseurs de Cauchy ne sont pas définis sur la même configuration. C’est pourquoi, dès lors que l’amplitude d’une variable doit être calculée, des grandeurs lagrangiennes doivent être utilisées, comme par exemple les tenseurs conjugués de Hill (1968) (paragraphe 2.2.6).

Le deuxième obstacle est l’hypothèse de linéarité du comportement. Cette hypothèse n’est valable que pour des déformations suffisamment faibles. Par exemple, le comportement en traction simple s’écrit pour la loi néo-hookéenne

$$\sigma = \mu \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \tag{6.13a}$$

$$= \mu (3\varepsilon + \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3)) \tag{6.13b}$$

et en cisaillement pur

$$\sigma = \mu \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \tag{6.14a}$$

$$= \mu (4\varepsilon - 3\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)) \tag{6.14b}$$

où  $\lambda = 1 + \varepsilon$ . Sur une certaine plage de déformation, l’approximation de la relation  $\sigma - \varepsilon$  par une loi linéaire est justifiée (FIG. 6.3 et 6.4). En dehors de cette plage, l’approche linéaire n’est plus valide. Comme les structures automobiles travaillent en partie dans la plage non-linéaire dans les zones critiques, l’hypothèse de linéarité n’est pas valide.

Notons de plus que la notion de linéarité est liée à la représentation utilisée pour la contrainte et la déformation. En effet, dans le cas de la traction simple, les contraintes et les déformations associées

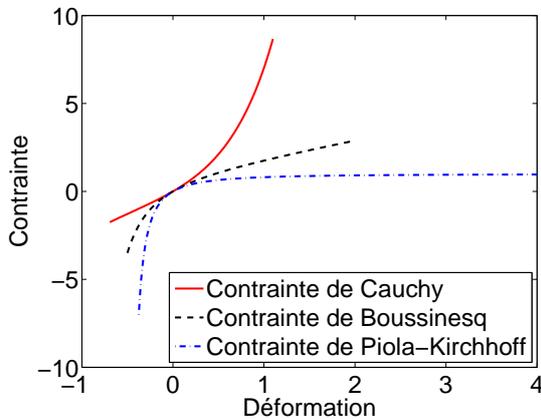


FIGURE 6.5 – Courbes contrainte-déformation en traction simple pour différentes mesures des contraintes avec une loi néo-hookéenne.

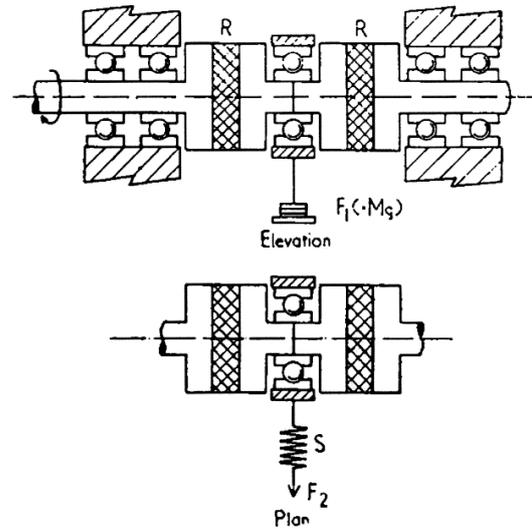


FIGURE 6.6 – Présentation du montage de cisaillement rotatif (Gent, 1961).

de Cauchy, de Boussinesq et de Piola-Kirchhoff s'écrivent :

$$\sigma = \mu \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right), \quad \varepsilon_\sigma = \ln \lambda \quad (6.15a)$$

$$B = \mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right), \quad \varepsilon_B = \lambda \quad (6.15b)$$

$$\Pi = \mu \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right), \quad \varepsilon_\Pi = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) \quad (6.15c)$$

Nous avons représenté sur la figure 6.5 les trois relations contrainte-déformation et nous pouvons noter que bien qu'elles soient équivalentes d'un point de vue énergétique, leurs représentations diffèrent.

## 6.2.2 Mesure énergétique d'un cycle mécanique

Dans cette sous-section, nous étudions les propositions de la littérature pour quantifier l'énergie dissipée lors d'un cycle de déformation. Elles s'appuient sur la définition d'une grandeur représentative de l'énergie dissipée.

### a Energie élastique de déformation

L'énergie élastique de déformation semble être une grandeur naturelle pour quantifier l'énergie dissipée. L'analyse de la viscoélasticité a en effet montré que pour certaines sollicitations, l'énergie dissipée est proportionnelle à l'énergie élastique. Néanmoins, cette idée a été mise en défaut par (Greenwood et al., 1961) : l'énergie dissipée prédite à partir de l'énergie de déformation engendrée par un cylindre ou une sphère métallique roulant sur du caoutchouc est deux à trois fois inférieure à celle mesurée avec la résistance au roulement. Les auteurs suggèrent que l'énergie élastique n'est pas un bon prédicteur pour l'énergie dissipée pour les cas de chargement étudiés.

Greenwood et Tabor (1958) émettent l'hypothèse que sous un chargement maintenant constante l'énergie élastique, il y a dissipation d'énergie. Cette hypothèse est vérifiée par Gent (1961) sur une expérience de cisaillement simple sur un cylindre, la direction de cisaillement tournant continuellement. Le montage expérimental est présenté sur la figure 6.6. L'éprouvette est constituée de deux cylindres de caoutchouc. Les axes droit et gauche sont colinéaires et transmettent le mouvement de rotation. L'élévation de l'axe du milieu permet de mettre en cisaillement le caoutchouc. La force  $F_1$  dans la direction de cisaillement et la force  $F_2$  dans la direction transverse sont mesurées, ainsi que l'entre-axe  $\varepsilon$ . A vitesse de rotation  $\omega$  constante, la force  $F_2$  est une mesure directe de l'énergie dissipée en un cycle puisqu'elle est donnée par le produit  $\varepsilon F_2$  pour une rotation complète, soit  $E_{diss} = 2\pi \varepsilon F_2$ . L'angle de perte se calcule selon  $\tan \delta = F_2/F_1$  et cet essai permet d'identifier simplement les caractéristiques viscoélastiques du matériau. Il permet surtout de démontrer que l'énergie élastique n'est pas une grandeur représentative de la dissipation car le matériau dissipe de l'énergie même quand cette énergie est constante. De plus, un modèle viscoélastique linéaire permet d'estimer avec une bonne approximation l'énergie dissipée lors d'un cycle de cisaillement rotatif ; par application du principe de superposition, l'énergie dissipée est le double de l'énergie dissipée par un cycle de cisaillement de même amplitude dans une direction seulement.

#### b Mesures énergétiques fondées sur des équivalents

Luchini et al. (1994) utilisent la déformation équivalente de Von Mises dans le cas uniaxial. Les auteurs constatent que pour des trajets de chargement multiaxiaux, l'utilisation d'un équivalent scalaire ne permet pas de déduire l'énergie dissipée pour tous les types de chargement. Ils concluent que la déformation équivalente de Von Mises n'est pas adéquate. Ces auteurs montrent aussi que selon le mode de représentation des tenseurs, des mouvements de corps rigide engendreraient de la dissipation. En se plaçant dans le repère RCT (*Radial - Circumferential - Thickness*) pour un pneumatique, les auteurs définissent un vecteur : le cisaillement octaédrique directionnel DOSS, de norme le cisaillement octaédrique et de direction celle de la déformation principale maximale dans le repère RCT. La dissipation est alors calculée à partir de l'analyse sur un cycle des trois coordonnées du vecteur DOSS. Toutefois, ce critère n'est pas capable de prédire une dissipation pour une sollicitation qui garde constante le cisaillement octaédrique et la direction de la déformation principale maximale (par exemple avec un essai de traction biaxial).

Mac Allen et al. (1996b) calculent l'énergie élastique avec  $\int \sigma_e d\varepsilon_e$  avec  $\sigma_e$  et  $\varepsilon_e$  la contrainte et la déformation de Von Mises. Ce critère est fondé sur l'hypothèse que seule la partie distortionnelle de la déformation dissipe de l'énergie.

Sae-Oui et al. (1999b) expriment l'énergie dissipée d'un cycle uniaxial de déformation à partir des valeurs de l'énergie élastique en différents points d'un cycle. Bien que cette expression ne soit valide que pour des chargements uniaxiaux sous certaines conditions, les auteurs l'utilisent dans le cas plus général d'un résultat de calcul par éléments finis.

#### c Mesures énergétiques fondées sur des trajets multiaxiaux

Greenwood et al. (1961) proposent trois méthodes originales pour calculer l'énergie dissipée. À partir d'essais bi-dimensionnels de traction et de torsion sur un tube à paroi mince, les auteurs procèdent à une analyse en fonction de la contrainte de cisaillement  $\tau$  et de traction  $\sigma$ . L'énergie élastique s'écrit

$$\frac{1}{2G} \left[ \tau^2 + \left( \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \quad (6.16)$$

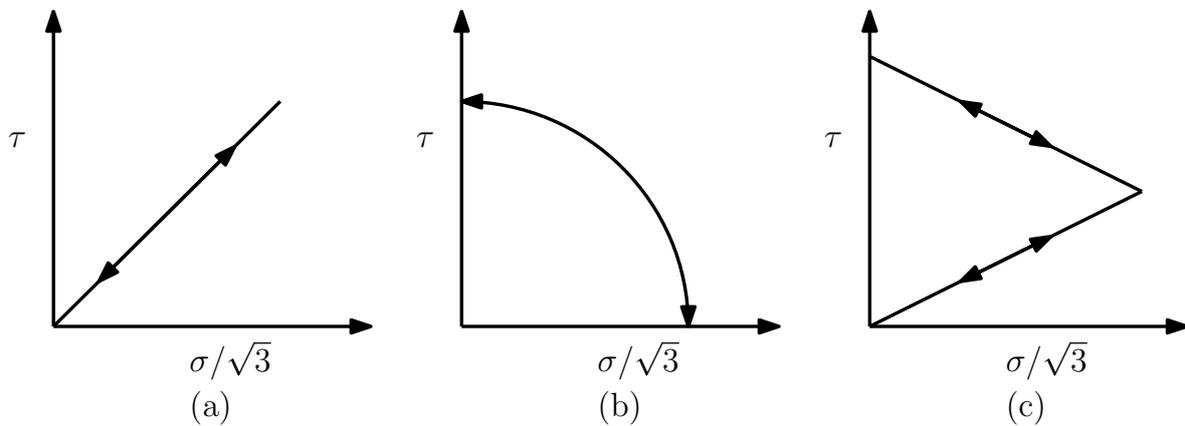


FIGURE 6.7 – Représentation de trois trajets de chargements étudiés par [Greenwood et al. \(1961\)](#).

avec  $G$  le module de cisaillement. L'étude des trajets de chargement se fait alors dans un diagramme  $(\sigma/\sqrt{3}, \tau)$ . Après avoir constaté que la part d'énergie dissipée dans l'énergie élastique était identique pour un essai de traction et un essai de torsion, les auteurs proposent trois grandeurs pour estimer l'énergie dissipée :

- Grandeur 1 : la somme des carrés des amplitudes des contraintes de cisaillement et de traction, soit  $G1 = (\tau_{max} - \tau_{min})^2 + (\sigma_{max}/\sqrt{3} - \sigma_{min}/\sqrt{3})^2$ . Notons que cette grandeur est équivalente à une analyse en viscoélasticité linéaire pour des chargements sinusoïdaux ;
- Grandeur 2 : le carré de la longueur du trajet de chargement dans le diagramme  $(\sigma/\sqrt{3}, \tau)$ , soit  $G2 = (\int_{min}^{max} dl)^2$  avec  $dl = \sqrt{(d\tau)^2 + (d\sigma/\sqrt{3})^2}$  ;
- Grandeur 3 : l'intégrale suivante :  $G3 = \int O'X dl$ ,  $O'X$  étant la distance entre un point d'origine  $O'$  et le point courant  $X$ .

Comparons tout d'abord les deux premières méthodes. Pour prendre en compte les allers et retours et être cohérent avec  $G2$ , la grandeur  $G1$  doit être multipliée par un facteur 4. Dans ce cas, ces deux grandeurs sont équivalentes dans le cas d'un chargement représenté par une droite (FIG. 6.7 (a)) dans le diagramme  $(\sigma/\sqrt{3}, \tau)$ . Toutefois, elles donnent des résultats différents pour des chargements plus complexes, comme par exemple à énergie élastique constante, représenté par un arc de cercle (FIG. 6.7 (b)). Dans ce cas,  $G1 = 2\tau_0^2$  et  $G2 = \pi^2/4d^2 \approx 1.25G1$ . Les essais menés par les auteurs confirmeraient la deuxième méthode. Cette conclusion va à l'encontre de celle donnée par Gent quant à l'application de la viscoélasticité linéaire dans ce type de chargement. Toutefois, nous pouvons noter que la précision des mesures est proche de l'écart existant entre les deux modélisations. Une autre différence entre ces deux méthodes est mise en évidence sur des trajets de chargement en V où plusieurs cycles sont effectués dans une direction lors d'un cycle de l'autre direction (FIG. 6.7 (c)). Dans ce cas, la grandeur  $G1$  est cohérente avec l'analyse des boucles d'hystérèse réelles alors que  $G2$  ne l'est pas.

Un dernier exemple est donné par les auteurs : celui d'un trajet de chargement de forme carré avec une rotation des axes de  $45^\circ$ .  $G2$  resterait constant alors que  $G1$  serait deux fois plus grand pour le carré tourné. Les auteurs concluent que  $G1$  n'est pas recevable. Cependant, nous ne partageons pas l'interprétation des auteurs : ce qu'ils appellent une rotation des axes n'est pas un simple changement de repère matériel. Toutefois, l'exemple d'un trajet de chargement de forme carré tournant d'un angle de  $45^\circ$  dans le même repère montre bien une différence entre les deux grandeurs.

Un défaut partagé par  $G1$  et  $G2$  est qu'elles nécessitent l'identification d'un cycle. Ainsi, pour  $n$  cycles répétés, il faut calculer  $n$  fois les grandeurs et non pas calculer les grandeurs sur le chemin parcouru par les  $n$  cycles. Ce défaut est gommé par la grandeur  $G3$ , puisqu'elle donnera  $n$  fois la grandeur d'un cycle en parcourant le chemin parcouru par  $n$  cycles. Cette grandeur a comme principal désavantage l'identification de l'origine  $O'$ . En effet, cette grandeur y est très dépendante.

### 6.3 Proposition de mesures énergétiques d'une sollicitation mécanique

Nous avons fait le choix de ne pas représenter l'énergie dissipée directement dans le calcul mécanique. Nous devons alors trouver une méthode pour l'estimer à partir des grandeurs hyperélastiques. L'idée maîtresse est de relier l'énergie dissipée à une mesure énergétique d'un cycle de chargement. Nous proposons donc des approches énergétiques, estimant la dissipation à partir d'une identification expérimentale. Nous commençons par étudier les chargements cycliques, puis nous étendons notre démarche aux chargements variables.

#### 6.3.1 Premières expériences - Influence de la moyenne

Pour un essai de traction uniaxiale avec  $f$  l'effort et  $l$  le déplacement, l'énergie élastique globale de charge se définit comme

$$E_{el} = \int_{l_{min}}^{l_{max}} f dl \quad (6.17)$$

et l'énergie dissipée sur un cycle

$$E_{diss} = \int_{Cycle} f dl \quad . \quad (6.18)$$

Graphiquement, l'énergie dissipée est l'aire comprise entre la courbe de charge et de décharge (aire grisée sur la figure 6.8), et l'énergie élastique de charge l'aire comprise entre la courbe de charge et l'axe des abscisses (aire hachurée verticalement sur la figure 6.8). De façon à étudier la taille de l'hystérèse, un taux de dissipation est classiquement défini par le rapport entre l'énergie dissipée et l'énergie élastique de charge (ou de décharge).

Nous définissons une nouvelle mesure de l'énergie (aire hachurée horizontalement sur la figure 6.8), qui est indépendante des valeurs moyennes et qui ne prend en compte que la forme de la courbe de charge (ou de décharge). Cette énergie peut s'interpréter comme l'énergie nécessaire au système pour se déformer au delà de la déformation minimale imposée au cours du cycle, c'est-à-dire la différence entre l'énergie totale de déformation et l'énergie nécessaire pour imposer  $l_{min}$  au cours du cycle. Cette énergie cyclique est ainsi donnée par

$$E_{cyc} = \int_{l_{min}}^{l_{max}} (f - f_{min}) dl \quad . \quad (6.19)$$

Un essai simple suffit à justifier le choix de l'énergie cyclique comme grandeur pour évaluer l'énergie dissipée. Pour une même amplitude de déformation, l'énergie élastique est beaucoup plus grande que pour un essai de traction simple. Qu'en est-il de l'énergie dissipée ? Anticipons la présentation des résultats expérimentaux : nous représentons l'énergie dissipée en fonction de l'énergie élastique sur la figure 6.9. Nous constatons une grande dispersion pour les faibles valeurs d'énergie. Nous pouvons donc conclure que l'énergie élastique n'est pas une bonne mesure de l'énergie dissipée dans les cas de chargement étudiés.

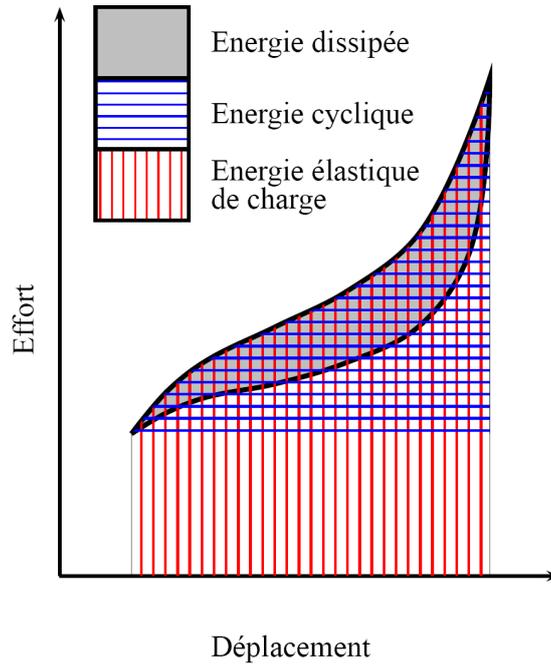


FIGURE 6.8 – Représentation des différentes énergies.

Au contraire, l'énergie cyclique définie par l'équation (6.19) est beaucoup plus pertinente pour ces essais (FIG. 6.10). En effet, cette énergie a un caractère d'indépendance vis-à-vis de la traction-traction par rapport à la traction simple. Pour deux transformations ayant la même amplitude de déplacement et d'effort et se différenciant seulement par leur rapport de charge, l'énergie cyclique calculée pour ces deux transformations serait du même ordre de grandeur alors que l'énergie élastique de charge serait beaucoup plus grande pour la transformation ayant le plus grand rapport de charge. De plus, l'énergie cyclique est égale à l'énergie élastique dans le cas de la traction simple.

Nous pouvons noter que l'énergie cyclique n'est pas l'amplitude de l'énergie élastique, car cette dernière est tout simplement l'énergie élastique du trajet de chargement considéré ( $\int_{t_1}^{t_2} = \int_0^{t_2} - \int_0^{t_1}$ ).

L'énergie cyclique est donc beaucoup mieux adaptée pour prendre en compte l'influence de la moyenne. Dans une démarche de simplification, nous pouvons retenir la loi qui consiste à ne considérer que les extrema du cycle. L'énergie cyclique simplifiée s'écrit ainsi

$$E_{simpl} = \frac{1}{2} (f_{max} - f_{min}) (l_{max} - l_{min}) . \tag{6.20}$$

Nous pouvons faire ici le parallèle entre l'énergie cyclique simplifiée et l'écriture des lois viscoélastiques qui donnent l'énergie dissipée en fonction du produit de l'amplitude des contraintes et des déformations  $\Delta\sigma_0 \Delta\varepsilon_0$ .

Dans un cadre multidimensionnel en présence d'un couple  $\underline{C}$  et d'une rotation  $\underline{\theta}$ , nous pouvons écrire l'énergie cyclique et l'énergie cyclique simplifiée avec des grandeurs vectorielles :

$$E_{cyc} = \int_{l_{min}}^{l_{max}} (\underline{f} - \underline{f}_{min}) \cdot \underline{dl} + \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} (\underline{C} - \underline{C}_{min}) \cdot \underline{d\theta} \tag{6.21a}$$

$$E_{simpl} = \frac{1}{2} (\underline{f}_{max} - \underline{f}_{min}) \cdot (\underline{l}_{max} - \underline{l}_{min}) + \frac{1}{2} (\underline{C}_{max} - \underline{C}_{min}) \cdot (\underline{\theta}_{max} - \underline{\theta}_{min}) . \tag{6.21b}$$

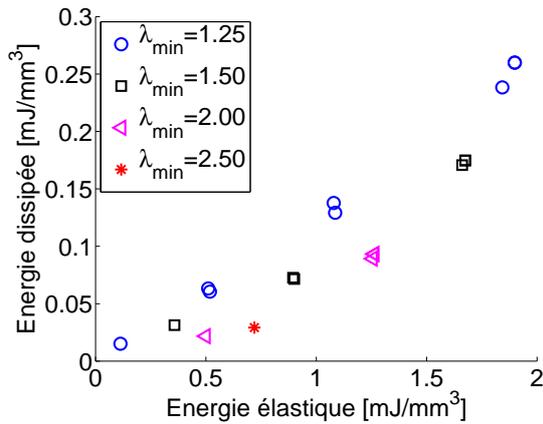


FIGURE 6.9 – Énergie dissipée fonction de l'énergie élastique pour plusieurs minima.

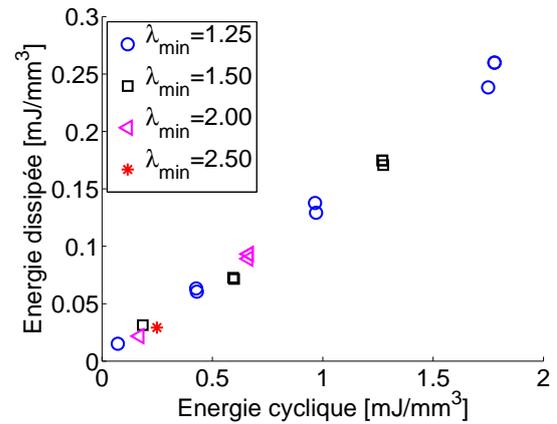


FIGURE 6.10 – Énergie dissipée fonction de l'énergie cyclique pour plusieurs minima.

### 6.3.2 Définition des énergies cycliques

Les grandeurs présentées s'appuient sur des paramètres globaux. Nous devons maintenant transformer cette grandeur en une grandeur locale afin de l'exploiter en calcul des structures.

#### a Hypothèse cyclique

Nous supposons que nous travaillons sur une configuration telle que nous pouvons définir deux instants  $t_{min}$  et  $t_{max}$  vérifiant ces conditions :

- pour chaque composante des tenseurs étudiés, les extrema correspondent à  $t_{min}$  et  $t_{max}$  ;
- pour chaque composante des tenseurs étudiés, il n'y a qu'une seule charge ou décharge entre  $t_{min}$  et  $t_{max}$  ( $\Leftrightarrow$  les composantes sont monotones).

En particulier, la loi s'applique dans le cas d'un chargement global unidimensionnel cyclique<sup>1</sup> sur une structure simple. Nous pouvons noter que nous ne faisons pas d'autres hypothèses sur la dépendance temporelle des composantes (par exemple celle qui consisterait à prendre la même fonction du temps pour toutes les composantes).

#### b Passage global-local - Objectivité

Un passage global-local permet de calculer au niveau local les densités d'énergies cycliques (EQ. 6.21) :

$$\frac{dE_{cyc}}{d\Omega_0} = \int_{\underline{F}_{min}}^{\underline{F}_{max}} (\underline{B} - \underline{B}_{min})^T : d\underline{F} \quad (6.22a)$$

$$\frac{dE_{simpl}}{d\Omega_0} = \frac{1}{2} (\underline{B}_{max} - \underline{B}_{min})^T : (\underline{F}_{max} - \underline{F}_{min}) \quad (6.22b)$$

Mais cette écriture n'a pas de sens mécanique car les grandeurs sont mixtes et ne sont donc pas définies sur la même configuration. Afin de garantir l'objectivité de nos grandeurs énergétiques, il est nécessaire de se fonder sur des grandeurs lagrangiennes afin de pouvoir soustraire des quantités

1. Nous faisons bien la différence ici entre un chargement global unidimensionnel, et le chargement local éventuellement multiaxial qui s'en déduit.

définies à des temps différents. Nous utilisons donc naturellement les tenseurs lagrangiens de Hill (paragraphe 2.2.6). Cette famille de tenseurs définit une famille de densités d'énergies cycliques

$$\frac{dE_{cyc}^{(m)}}{d\Omega_0} = \int_{\underline{E}_{min}^{(m)}}^{\underline{E}_{max}^{(m)}} \left( \underline{T}^{(m)} - \underline{T}_{min}^{(m)} \right) : d\underline{E}^{(m)} \quad . \quad (6.23)$$

Nous rappelons que ces grandeurs conjuguées définissent les mêmes énergies élastiques, mais que les énergies cycliques (FIG. 6.8) seront différentes à cause de l'introduction de  $\underline{T}_{min}^{(m)}$  et des différences entre les relations contrainte-déformation (FIG. 6.5). Le choix de l'énergie cyclique la plus représentative de l'énergie dissipée se fondera sur l'expérience et sera présenté dans la prochaine section.

### c Positivité et multiaxialité

Nous pouvons critiquer l'écriture (6.23) des énergies cycliques. En effet, quelque soit le chargement - charge ou décharge - nous devons trouver une valeur positive pour pouvoir interpréter cette énergie en terme de dissipation (voir les essais biaxiaux hors phase présentés dans la prochaine section). Nous proposons d'ajouter la contribution positive de chaque composante  $ij$  des tenseurs pour assurer la positivité tout en maintenant la multiaxialité des énergies cycliques :

$$\frac{dE_{cyc}^{(m)+}}{d\Omega_0} = \sum_{ij} \left| \int_{ijE_{min}^{(m)}}^{ijE_{max}^{(m)}} \left( ijT^{(m)} - ijT_{min}^{(m)} \right) d^{ij}E^{(m)} \right| \quad . \quad (6.24)$$

Cependant, ces expressions positives ne sont plus objectives. En effet, selon l'observateur, les contributions négatives diffèrent et la somme des valeurs absolues sera alors différente (les composantes d'un tenseur objectif ne sont pas des scalaires objectifs). Ces quantités vont donc être différentes d'un observateur à un autre.

### d Ecriture avec les valeurs principales

Afin de concilier la multiaxialité et l'objectivité, nous proposons d'écrire les grandeurs énergétiques à l'aide des valeurs principales des tenseurs. Nous faisons dans la suite l'hypothèse d'un matériau isotrope, ce qui a pour conséquence que les tenseurs des déformations et des contraintes possèdent les mêmes directions principales.

#### Directions principales fixes

Nous notons  ${}^iE^{(m)}$  et  ${}^iT^{(m)}$  les valeurs propres des tenseurs des déformations et des contraintes associés. La décomposition du tenseur des déformations donne par exemple

$$\underline{E}^{(m)} = \underline{R}^T \cdot {}^i\underline{E}^{(m)} \cdot \underline{R} \quad (6.25)$$

avec  $\underline{R}$  le tenseur de passage de base initiale à la base des vecteurs propres et  ${}^i\underline{E}^{(m)} = \sum_{i=1}^3 {}^iE^{(m)} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i$  le tenseur diagonal écrit dans la base principale. Si les directions principales restent fixes au cours du chargement, l'énergie cyclique peut s'écrire

$$\frac{dE_{cyc}^{(m)}}{d\Omega_0} = \int_{{}^i\underline{E}_{min}^{(m)}}^{{}^i\underline{E}_{max}^{(m)}} \left( {}^iT^{(m)} - {}^iT_{min}^{(m)} \right) : d{}^i\underline{E}^{(m)} \quad . \quad (6.26)$$

L'écriture multiaxiale de l'énergie cyclique

$$\frac{dE_{cyc}^{(m)+}}{d\Omega_0} = \sum_{i=1}^3 \left| \int_{iE_{min}^{(m)}}^{iE_{max}^{(m)}} \left( iT^{(m)} - iT_{min}^{(m)} \right) d^i E^{(m)} \right| \quad (6.27)$$

reste objective car elle est fondée sur les valeurs principales qui sont des scalaires objectifs. En particulier, quelque soit l'observateur, ces quantités resteront fixes.

### Rotation du repère principal

En tenant compte de la rotation du repère principal exprimée par l'équation 6.25, les énergies cycliques s'écrivent

$$\frac{dE_{cyc}^{(m)}}{d\Omega_0} = \int_{iE_{min}^{(m)}}^{iE_{max}^{(m)}} \left( i\underline{T}^{(m)} - \underline{R} \cdot \underline{R}^T \cdot i\underline{T}_{min}^{(m)} \cdot \underline{R}_{min} \cdot \underline{R}^T \right) : d^i \underline{E}^{(m)} \quad . \quad (6.28)$$

L'écriture multiaxiale des énergies cycliques donne

$$\frac{dE_{cyc}^{(m)+}}{d\Omega_0} = \sum_{i=1}^3 \left| \int_{iE_{min}^{(m)}}^{iE_{max}^{(m)}} \left[ iT^{(m)} - \left( \underline{R} \cdot \underline{R}^T \cdot i\underline{T}_{min}^{(m)} \cdot \underline{R}_{min} \cdot \underline{R}^T \right) : \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i \right] d^i E^{(m)} \right| \quad . \quad (6.29)$$

Le tenseur  $\underline{R}_{min} \cdot \underline{R}^T$  représente la rotation du repère principal entre le moment *min* et le moment actuel et est donc indépendant d'un changement d'observateur. Cette dernière écriture est donc aussi objective. Toutefois, cette grandeur est nulle lorsque les valeurs principales restent fixes alors que les directions principales tournent. Ainsi, elle n'est pas en mesure de représenter une énergie dissipée lors d'un essai de cisaillement rotatif (Gent, 1961) car elle est nulle (pas de variation dans les valeurs principales).

### e Discrétisation sur les directions matérielles

Nous avons montré qu'avec les écritures précédentes, il n'était pas possible d'avoir une grandeur qui soit à la fois objective et représentative des cas de chargements multiaxiaux . Nous proposons ici une solution à cette problématique. Nous nous fondons sur l'écriture des lois de comportement avec les directions matérielles. En effet, pour la construction des potentiels hyperélastiques statistiques, l'énergie d'un ensemble de chaînes est parfois donnée par une intégrale sur l'espace (EQ. 4.4). En supposant que toutes les chaînes ont la même longueur et sont soumises dans une direction  $\underline{D}_\Omega$  à la même élongation  $\lambda^2 = \underline{C} : (\underline{D}_\Omega \otimes \underline{D}_\Omega)$ , cette intégrale se simplifie en

$$W = \int_{\Omega} p(d\Omega) w(\lambda) d\Omega \quad . \quad (6.30)$$

La principale difficulté est alors le calcul de cette intégrale sur la sphère unité. Elle peut s'approximer par une somme sur  $m$  directions privilégiées ( $\underline{D}^\alpha$ ) avec ( $\lambda^\alpha$ ) les élongations et ( $p^\alpha$ ) les poids associés

$$W = \sum_{\alpha=1}^m p^\alpha w(\lambda^\alpha) \quad . \quad (6.31)$$

Ces directions ont comme propriété

$$\sum_{\alpha=1}^m p^\alpha \underline{D}^\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha=1}^m p^\alpha \underline{D}^\alpha \otimes \underline{D}^\alpha = \frac{1}{3} \underline{I} \quad . \quad (6.32)$$

Par exemple, des directions régulièrement réparties dans l'espace sont les normales des faces de polyèdres réguliers. Il n'existe que cinq polyèdres réguliers convexes : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre définissant avec leurs sommets respectivement 4, 4, 3, 10 et 6 directions. Il est néanmoins possible d'intégrer avec un plus grand nombre de directions (Bažant et Oh, 1986). Pour un matériau élastique isotrope, Elata et Rubin (1994) montrent que six directions sont suffisantes pour caractériser le comportement.

### Écriture avec la loi de Raoult (2005)

En utilisant la loi de Raoult (2005), les tenseurs des contraintes usuels sont donnés par

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sum_{\alpha} p^{\alpha} \frac{w'(\lambda^{\alpha})}{\lambda^{\alpha}} (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{D}}^{\alpha}) \otimes (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{D}}^{\alpha}) - \eta \underline{\underline{I}} \quad (6.33a)$$

$$\underline{\underline{B}} = \sum_{\alpha} p^{\alpha} \frac{w'(\lambda^{\alpha})}{\lambda^{\alpha}} (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{D}}^{\alpha}) \otimes \underline{\underline{D}}^{\alpha} - \eta \underline{\underline{F}}^{-T} \quad (6.33b)$$

$$\underline{\underline{\Pi}} = \sum_{\alpha} p^{\alpha} \frac{w'(\lambda^{\alpha})}{\lambda^{\alpha}} \underline{\underline{D}}^{\alpha} \otimes \underline{\underline{D}}^{\alpha} - \eta \underline{\underline{C}}^{-1} \quad (6.33c)$$

où  $\eta$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la condition d'incompressibilité. Les tenseurs des contraintes de Hill sont donnés par (approximation pour  $\underline{\underline{T}}^{(0)}$  car la loi de comportement n'est pas isotrope) :

$$\underline{\underline{T}}^{(0)} = \sum_{\alpha} p^{\alpha} \frac{w'(\lambda^{\alpha})}{\lambda^{\alpha}} (\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{D}}^{\alpha}) \otimes (\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{D}}^{\alpha}) - \eta \underline{\underline{I}} \quad (6.34a)$$

$$\underline{\underline{T}}^{(1)} = \sum_{\alpha} p^{\alpha} \frac{w'(\lambda^{\alpha})}{\lambda^{\alpha}} \frac{1}{2} \left( (\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{D}}^{\alpha}) \otimes \underline{\underline{D}}^{\alpha} + \underline{\underline{D}}^{\alpha} \otimes (\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{D}}^{\alpha}) \right) - \eta \underline{\underline{U}}^{-1} \quad (6.34b)$$

$$\underline{\underline{T}}^{(2)} = \underline{\underline{\Pi}} \quad (6.34c)$$

En exprimant le tenseur identité comme une somme sur les directions matérielles, l'énergie élastique de déformation peut s'écrire sous trois formes différentes :

$$\sum_{\alpha} p^{\alpha} \left[ \int_{\underline{\underline{E}}_{min}^{(0)}}^{\underline{\underline{E}}_{max}^{(0)}} \underbrace{\left( \frac{w'(\lambda^{\alpha})}{\lambda^{\alpha}} (\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{D}}^{\alpha}) \otimes (\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{D}}^{\alpha}) - \frac{\eta}{3} \underline{\underline{D}}^{\alpha} \otimes \underline{\underline{D}}^{\alpha} \right)}_{\alpha \underline{\underline{T}}^{(0)}} : d\underline{\underline{E}}^{(0)} \right] \quad (6.35a)$$

$$\sum_{\alpha} p^{\alpha} \left[ \int_{\underline{\underline{E}}_{min}^{(1)}}^{\underline{\underline{E}}_{max}^{(1)}} \underbrace{\left( \frac{w'(\lambda^{\alpha})}{2\lambda^{\alpha}} \left( (\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{D}}^{\alpha}) \otimes \underline{\underline{D}}^{\alpha} + \underline{\underline{D}}^{\alpha} \otimes (\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{D}}^{\alpha}) \right) - \frac{\eta}{3} \underline{\underline{D}}^{\alpha} \otimes (\underline{\underline{U}}^{-1} \cdot \underline{\underline{D}}^{\alpha}) \right)}_{\alpha \underline{\underline{T}}^{(1)}} : d\underline{\underline{E}}^{(1)} \right]$$

$$\sum_{\alpha} p^{\alpha} \left[ \int_{\underline{\underline{E}}_{min}^{(2)}}^{\underline{\underline{E}}_{max}^{(2)}} \underbrace{\left( \frac{w'(\lambda^{\alpha})}{\lambda^{\alpha}} \underline{\underline{D}}^{\alpha} \otimes \underline{\underline{D}}^{\alpha} - \frac{\eta}{3} (\underline{\underline{U}}^{-1} \cdot \underline{\underline{D}}^{\alpha}) \otimes (\underline{\underline{U}}^{-1} \cdot \underline{\underline{D}}^{\alpha}) \right)}_{\alpha \underline{\underline{T}}^{(2)}} : d\underline{\underline{E}}^{(2)} \right] \quad (6.35b)$$

et les énergies cycliques deviennent alors

$$\frac{dE_{cyc}^{(m)}}{d\Omega_0} = \sum_{\alpha} p^{\alpha} \left[ \int_{\underline{\underline{E}}_{min}^{(m)}}^{\underline{\underline{E}}_{max}^{(m)}} \left( \alpha \underline{\underline{T}}^{(m)} - \alpha \underline{\underline{T}}_{min}^{(m)} \right) : d\underline{\underline{E}}^{(m)} \right] \quad (6.36)$$

Afin d'assurer la multiaxialité de ce critère, nous prenons la contribution positive sur chaque direction matérielle :

$$\frac{dE_{cyc}^{(m)+}}{d\Omega_0} = \sum_{\alpha} p^{\alpha} \left| \int_{\underline{E}_{min}^{(m)}}^{\underline{E}_{max}^{(m)}} \left( {}^{\alpha}\underline{T}^{(m)} - {}^{\alpha}\underline{T}_{min}^{(m)} \right) : d\underline{E}^{(m)} \right| . \quad (6.37)$$

Pour chaque direction, l'instant minimal du cycle est déterminé par le minimum sur  $\lambda^{\alpha}$ .

### Extension pour d'autres lois de comportement

Afin d'étendre les définitions des énergies cycliques à d'autres lois de comportement qui ne sont pas fondées sur une discrétisation spatiale, nous pouvons discrétiser l'écriture des contraintes sur les directions matérielles par multiplication avec le tenseur identité

$$\underline{\underline{T}}^{(m)} = \sum_{\alpha} p^{\alpha} \underbrace{3\underline{\underline{T}}^{(m)} \cdot (\underline{D}^{\alpha} \otimes \underline{D}^{\alpha})}_{{}^{\alpha}\underline{\underline{T}}^{(m)}} . \quad (6.38)$$

Finalement, quelque soit la loi de comportement, l'énergie cyclique peut s'écrire

$$\boxed{\frac{dE_{cyc}^{(m)}}{d\Omega_0} = \sum_{\alpha} p^{\alpha} \left| \int_{\underline{E}_{min}^{(m)}}^{\underline{E}_{max}^{(m)}} \left( {}^{\alpha}\underline{\underline{T}}^{(m)} - {}^{\alpha}\underline{\underline{T}}_{min}^{(m)} \right) : d\underline{E}^{(m)} \right|} . \quad (6.39)$$

## f Discussion

Pour les cas de chargements étudiés en cisaillement pur ou en traction biaxiale, les énergies cycliques discrétisées sont équivalentes aux énergies cycliques non-discrétisées. Pour des chargements multiaxiaux, les énergies discrétisées permettent de concilier multiaxialité et objectivité, ce qui apporte une contribution intéressante par rapport aux énergies non-discrétisées. Nous présentons dans le tableau 6.1 une synthèse des énergies cycliques proposées.

D'un point de vue pratique, c'est l'énergie cyclique (6.24) qui sera utilisé dans la suite pour les calculs éléments finis (les lois en valeurs principales et discrétisées ont été proposées tardivement).

Énergie cyclique	multiaxialité	objectivité	commentaires
6.23	non	oui	
6.24	oui	non	
6.27	oui	oui	directions principales fixes
6.29	oui	oui	nulle pour le cisaillement rotatif
6.39	oui	oui	discrétisation sur des directions matérielles

TABLE 6.1 – Synthèse des énergies cycliques proposées.

## g Ces lois dans la littérature

### Énergie cyclique

Kerchman et Shaw (2003) proposent de décomposer la transformation de façon multiplicative en  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_a \cdot \underline{\underline{F}}_m$ , avec  $\underline{\underline{F}}_m$  la transformation moyenne statique et  $\underline{\underline{F}}_a$  la transformation dite cyclique. Ils

associent l'énergie dissipée à l'énergie élastique fondée sur la partie cyclique  $\underline{F}_a$  du chargement. Leur application dans un cas de glissement simple s'avère pertinente.

Toutefois, il n'est pas possible d'étendre cette modélisation. En effet, le premier problème consiste en la définition de la transformation moyenne  $\underline{F}_{\underline{m}}$  ; il n'est pas possible d'effectuer de manière quelconque une moyenne. Il faut alors définir  $\underline{F}_{\underline{m}}$  comme la transformation à un instant représentatif de la sollicitation. Mais alors la grandeur calculée dépendra de l'instant choisi et de la moyenne.

### Energie cyclique simplifiée

Gurvich et al. (2002) proposent et étudient une mesure énergétique définie par

$$U_a = \varepsilon_{axx}\sigma_{axx} + \varepsilon_{ayy}\sigma_{ayy} + \varepsilon_{azz}\sigma_{azz} + \gamma_{axy}\tau_{axy} + \gamma_{axz}\tau_{axz} + \gamma_{ayz}\tau_{ayz} \quad (6.40)$$

où l'indice  $a$  fait référence à l'amplitude. Nous retrouvons ici la définition de l'énergie cyclique simplifiée (bien que les grandeurs tensorielles ne soient pas clairement définies par les auteurs).

L'originalité de leur travail est de ne plus considérer une relation linéaire entre l'énergie dissipée et l'énergie cyclique du type  $\Delta W = VU_a$ , mais une relation non-linéaire  $\Delta W = V_1U_a + V_2U_a^2 + \dots$ . L'ordre deux suffit amplement pour corrélérer les expériences uniaxiales et biaxiales relaxantes menées par les auteurs sur un SBR. Notons que les données sont étudiées au vingtième cycle de sollicitation.

### 6.3.3 Cas d'une sollicitation variable

Dans le cas d'une sollicitation variable, Luchini et al. (1994) cherchent les points d'inversion de la contrainte et définissent des cycles entre ces points d'inversion. Cette méthode n'est pas équivalente à l'extraction de cycles par un algorithme Rainflow (Endo et Matsuishi en 1968) qui permet de retrouver les boucles d'hystérèse (annexe C).

Nous proposons d'appliquer l'algorithme de comptage Rainflow aux énergies cycliques. Dans le cas uni-dimensionnel, sous l'hypothèse de monotonie des variables locales par rapport à la variable globale, il suffit d'appliquer le comptage Rainflow sur la variable globale pour identifier tous les cycles  $(\underline{E}_{\underline{min}}^{(m)}, \underline{E}_{\underline{max}}^{(m)})$ . La densité d'énergie dissipée sera alors donnée par la somme des densités de chaque cycle extrait :

$$\left( \frac{dE_{cyc}^{(m)}}{d\Omega_0} \right)_{Rflw} = \sum_{\substack{\text{Cycles Rflw} \\ (\underline{E}_{\underline{min}}^{(m)}, \underline{E}_{\underline{max}}^{(m)})}} \frac{dE_{cyc}^{(m)}}{d\Omega_0} \left( \underline{E}_{\underline{min}}^{(m)}, \underline{E}_{\underline{max}}^{(m)} \right) \quad (6.41)$$

Dans les autres cas - multi-dimensionnel ou uni-dimensionnel non monotone - le comptage Rainflow doit s'effectuer sur les variables locales utilisées par les mesures énergétiques. Par exemple, en reprenant l'expression des énergies cycliques avec les valeurs principales (cas où le repère principal ne tourne pas), nous obtenons

$$\left( \frac{dE_{cyc}^{(m)}}{d\Omega_0} \right)_{Rflw} = \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{\text{Cycles Rflw} \\ (iE_{\underline{min}}^{(m)}, iE_{\underline{max}}^{(m)})}} \left| \int_{iE_{\underline{min}}^{(m)}}^{iE_{\underline{max}}^{(m)}} \left( iT^{(m)} - iT_{\underline{min}}^{(m)} \right) d^iE^{(m)} \right| \quad (6.42)$$

Nous montrerons dans la section suivante les validations expérimentales de ces méthodes.

En ce qui concerne l'écriture de l'énergie cyclique avec une discrétisation sur des directions matérielles, la définition des cycles se fait pour chaque élongation dans une direction matérielle :

$$\left( \frac{dE_{cyc}^{(m)}}{d\Omega_0} \right)_{Rflw} = \sum_{\alpha} p^{\alpha} \sum_{\substack{\text{Cycles Rflw} \\ (\lambda^{\alpha}_{\underline{min}}, \lambda^{\alpha}_{\underline{max}})}} \left| \int_{\underline{E}_{\underline{min}}^{(m)}}^{\underline{E}_{\underline{max}}^{(m)}} \left( \alpha \underline{T}^{(m)} - \alpha \underline{T}_{\underline{min}}^{(m)} \right) : d\underline{E}^{(m)} \right| \quad (6.43)$$

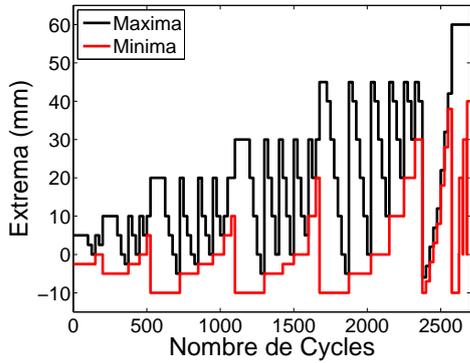


FIGURE 6.11 – Représentation du chargement des séries THERM\_06.

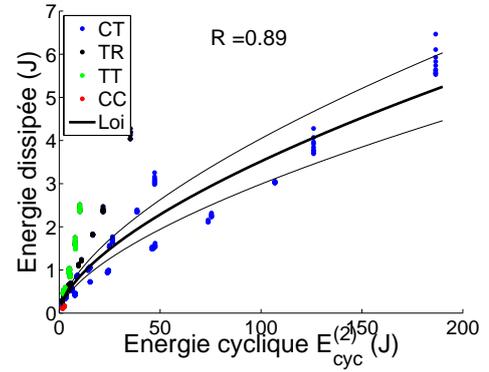


FIGURE 6.12 – Relation entre l'énergie dissipée et l'énergie cyclique  $E_{cyc}^{(2)}$ .

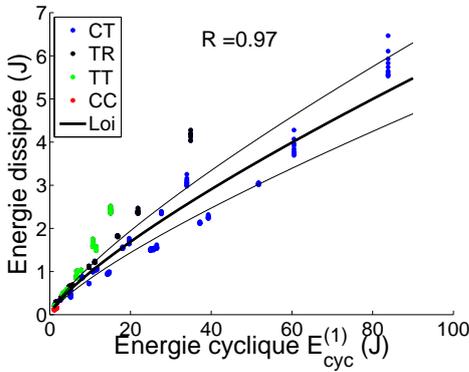


FIGURE 6.13 – Relation entre l'énergie dissipée et l'énergie cyclique  $E_{cyc}^{(1)}$ .

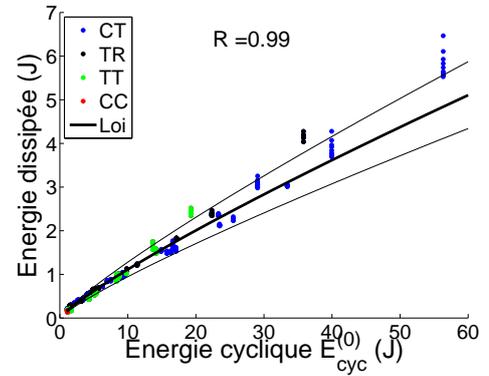


FIGURE 6.14 – Relation entre l'énergie dissipée et l'énergie cyclique  $E_{cyc}^{(0)}$ .

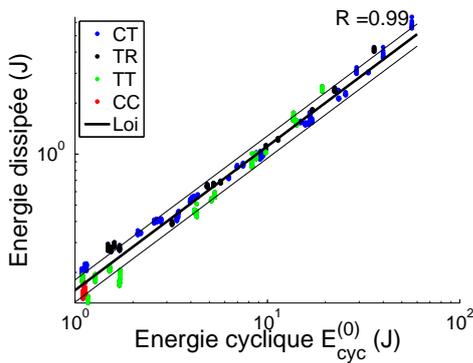


FIGURE 6.15 – Relation entre l'énergie dissipée et l'énergie cyclique  $E_{cyc}^{(0)}$  (échelle logarithmique).

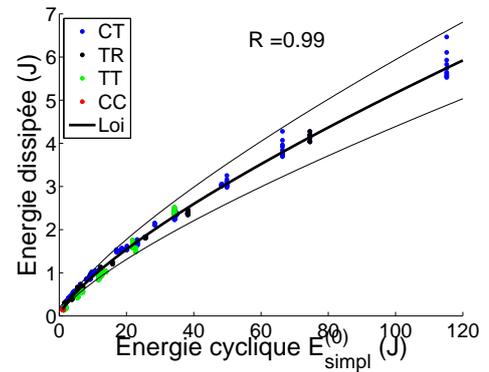


FIGURE 6.16 – Relation entre l'énergie dissipée et l'énergie cyclique  $E_{simpl}^{(0)}$ .

## 6.4 Identification des fonctions de dissipation

### 6.4.1 Choix de l'énergie cyclique

Pour une sollicitation relaxante ( $\underline{T}_{min}^{(m)} = \underline{0}$ ), les énergies cycliques donnent la même valeur. Par contre, pour un cycle dont le minimum en contrainte n'est pas nul, ces énergies vont donner des résultats très différents. En effet, si nous observons les relations contrainte-déformation (FIG. 6.5), nous constatons que notamment pour une contrainte minimale négative, les énergies cycliques ne donneront pas les mêmes résultats. Ainsi, il est nécessaire d'avoir des essais avec de la compression pour balayer tous les rapports de charge. C'est pourquoi nous allons identifier l'énergie cyclique la plus représentative de l'énergie dissipée avec des essais sur éprouvette AE42.

Nous avons proposé une série d'essais (dénommée THERM\_06) pour identifier l'énergie dissipée sur des cycles pour l'AE42. Cette série est constituée de cycles (FIG. 6.11) en compression-compression (CC), traction relaxante (TR), traction-compression (TC) et traction-traction (TT). L'éprouvette est aussi soumise à plusieurs accommodations. Nous étudions la relation entre l'énergie dissipée totale (aire de l'hystérèse) et la somme des densités d'énergies cycliques sur tout le volume, exprimant l'énergie cyclique de toute la structure. Nous cherchons une loi puissance entre ces deux grandeurs.

Nous représentons sur les figures 6.12 à 6.15 les relations pour trois énergies cycliques, et la loi puissance à  $\pm 15\%$  identifiée sur ces courbes. Nous constatons que le coefficient de régression<sup>2</sup> calculé sur les logarithmes est maximal pour  $E_{cyc}^{(0)}$ . En effet, les résultats tracés sur une échelle logarithmique indiquent une très bonne corrélation (FIG. 6.15). De plus, nous observons que les énergies cycliques  $E_{cyc}^{(2)}$  et  $E_{cyc}^{(1)}$  ne permettent pas d'estimer l'énergie dissipée (FIG. 6.12 et 6.13) car les résultats dépendent fortement du type de sollicitation appliquée. Notons que les résultats pour  $E_{cyc}^{(-1)}$  et  $E_{cyc}^{(-2)}$  ne sont pas meilleurs.

De même, c'est l'énergie simplifiée  $E_{simpl}^{(0)}$  qui donne la meilleure estimation pour les énergies simplifiées (FIG. 6.16).

**Nous concluons que  $E_{cyc}^{(0)}$  et  $E_{simpl}^{(0)}$  sont les grandeurs les mieux corrélées avec l'énergie dissipée. Dorénavant, nous utiliserons exclusivement ces grandeurs.**

### 6.4.2 Cisaillement pur

Nous traitons ici les séries d'essais en cisaillement pur THERM\_Y\_04 à THERM\_Y\_08 (voir détails en annexe E) qui ont été réalisés de 5°C à 80°C.

#### a Influence de l'accommodation

Nous montrons sur la figure 6.17 la relation entre l'énergie dissipée et l'énergie cyclique  $E_{cyc}^{(0)}$  pour différentes accommodations : quatre cycles ont donc été étudiés à plusieurs niveaux d'accommodation. Nous constatons que l'énergie cyclique est bien une grandeur représentative de l'énergie dissipée quelque soit l'accommodation du matériau. Si la loi de comportement représente l'effet Mullins, alors une seule fonction de dissipation suffira à décrire tous les états d'accommodation. Dans la suite, nous travaillerons donc avec tous les cycles : accommodés et suraccommodés.

2. Le coefficient de régression linéaire  $R = \text{cov}(x, y) / (\sigma(x)\sigma(y))$  est donné par le rapport entre la covariance des deux ensembles de points  $x$  et  $y$  et leurs écart-type  $\sigma(x)$  et  $\sigma(y)$ .

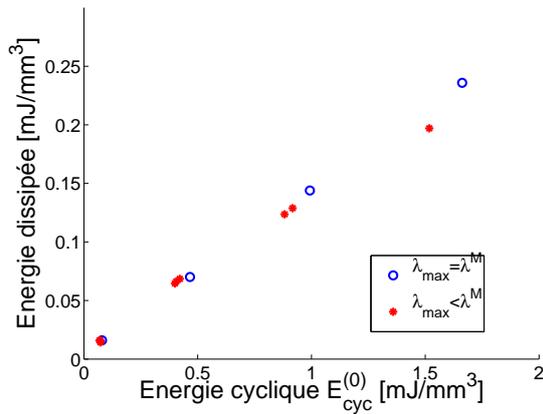


FIGURE 6.17 – Influence de l'accommodation sur la relation entre l'énergie dissipée et l'énergie cyclique  $E_{cyc}^{(0)}$ .

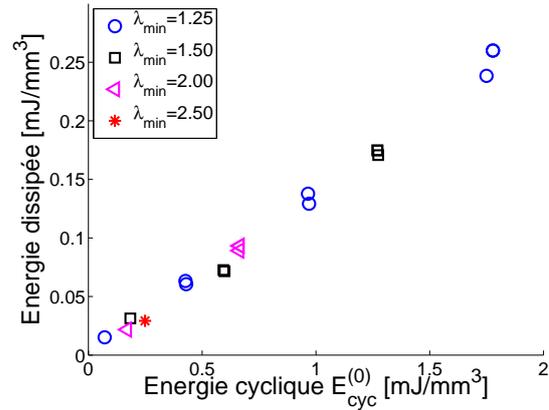


FIGURE 6.18 – Influence de l'élongation minimale d'un cycle sur l'énergie dissipée.

## b Influence de la moyenne

Nous avons tracé sur la figure 6.18 l'énergie dissipée en fonction de l'énergie cyclique  $E_{cyc}^{(0)}$  pour différentes élongations minimales afin d'étudier l'effet de la moyenne du chargement. Nous pouvons conclure que la moyenne n'influence pas la relation entre ces deux grandeurs.

## c Influence de la température

Nous avons représenté sur la figure 6.19 l'énergie dissipée en fonction de l'énergie cyclique expérimentale  $E_{cyc}^{(0)}$  pour les cinq températures d'essais. Nous constatons que l'énergie dissipée diminue fortement avec la température. Nous avons identifié la loi puissance

$$\frac{dE_{diss}}{d\Omega_0} = k(T) \left( \frac{dE_{cyc}}{d\Omega_0} \right)^\alpha \quad (6.44)$$

à chaque température. Il apparaît que le coefficient  $\alpha$  peut être considéré comme indépendant de la température (FIG. 6.20) et que la décroissance de  $k$  avec la température se modélise avec une fonction logarithme (FIG. 6.21). Le même travail a été fait à partir de l'énergie cyclique numérique calculée avec la loi de comportement de Raoult (2005), afin d'estimer les paramètres de la fonction de dissipation à utiliser lors d'un calcul EF. Les résultats sont présentés sur les figures 6.22 et 6.23.

## 6.4.3 Traction biaxiale

### a Sollicitations en phase

Nous avons repris le même principe d'essai que précédemment : étude des chargements relaxant et non relaxant à plusieurs niveaux d'accommodation.

### Influence de la biaxialité

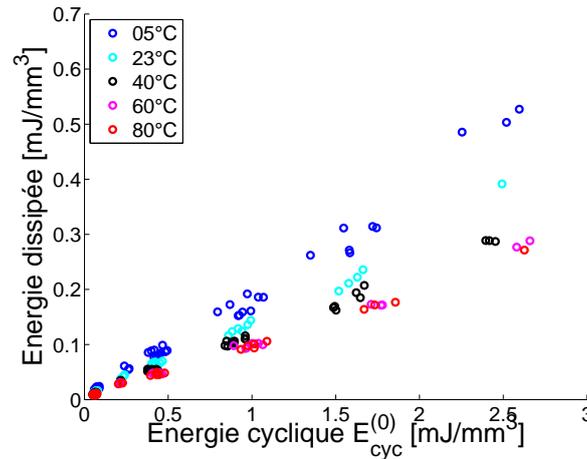


FIGURE 6.19 – Energie dissipée en fonction de l'énergie cyclique  $E_{cyc}^{(0)}$  pour différentes températures.

Nous avons tout d'abord étudié l'influence du taux de biaxialité<sup>3</sup> sur l'énergie dissipée. Nous montrons sur la figure 6.24 l'identification des fonctions de dissipation pour quatre taux de biaxialité (0.2, 0.5, 0.8 et 1). Ces fonctions sont très proches et nous pouvons conclure que le taux de biaxialité n'a pas d'influence sur la fonction de dissipation.

### Fonction de dissipation

Les paramètres de la fonction de dissipation ont été identifiés sur la base expérimentale à chaque température et comparés à la fonction de dissipation obtenue sur les essais de cisaillement pur. Toutefois, ces deux types d'essais ne sont pas directement comparables car les essais biaxiaux se font à petit nombre de cycles (10 en accommodation et 3 sinon), tandis que les essais de cisaillement pur se font à grand nombre de cycles (1000). En accord avec les résultats expérimentaux du chapitre 4, nous avons supposé que le coefficient  $k$  diminuait de 20% entre les premiers cycles et un millier de cycles. Les résultats sont tracés sur les figures 6.25 et 6.26. Nous constatons que les résultats des deux séries d'essais concordent. La même fonction de dissipation peut donc être utilisée pour des sollicitations uniaxiales ou multiaxiales en phase.

### b Sollicitations hors phase

#### Précharge sur un axe

Nous étudions tout d'abord l'influence d'une précharge sur un axe. Nous travaillons sur cinq essais biaxiaux : équibiaxial, cisaillement pur, précharge 1, précharge 2 et précharge 3 représentés sur la figure 6.27. Les trajets de chargement dans le diagramme  $I1-I2$  (FIG. 6.28) indiquent que l'état de déformation passe par le cisaillement pur et l'équibiaxial. L'énergie dissipée estimée par la fonction de dissipation est comparée à celle mesurée : l'écart ne dépasse pas 10%.

#### Cycles déphasés

Nous avons étudié quatre chargements distincts sur l'éprouvette biaxiale ayant les même minima et maxima sur les deux axes :

3. Le taux de biaxialité est défini comme le rapport entre les élongations dans les deux directions perpendiculaires.

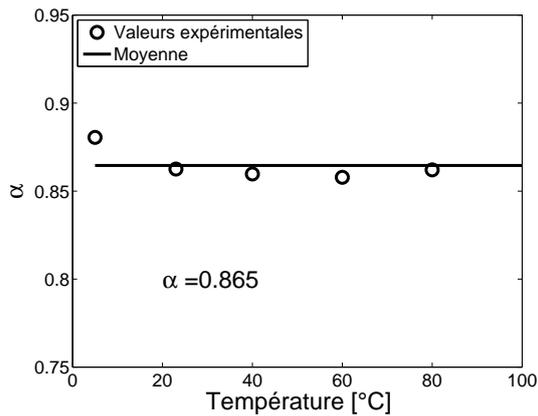


FIGURE 6.20 – Évolution du paramètre  $\alpha$  en fonction de la température (identification avec l'énergie cyclique expérimentale).

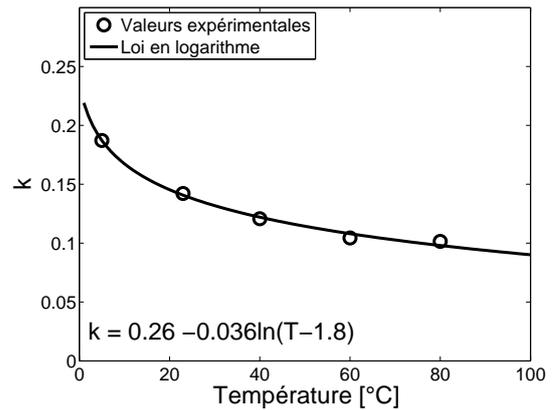


FIGURE 6.21 – Évolution du paramètre  $k$  en fonction de la température (identification avec l'énergie cyclique expérimentale).

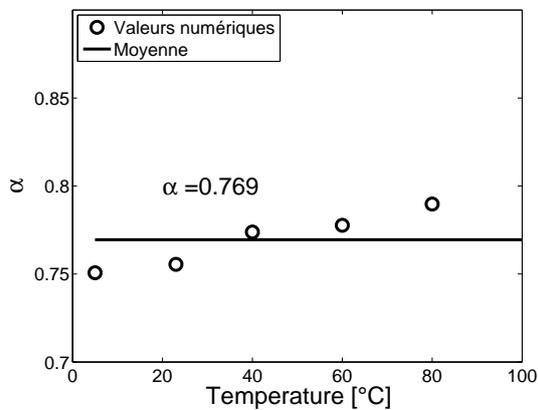


FIGURE 6.22 – Évolution du paramètre  $\alpha$  en fonction de la température (identification avec l'énergie cyclique numérique).

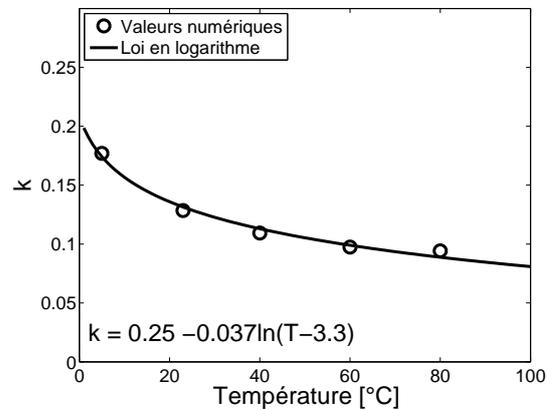


FIGURE 6.23 – Évolution du paramètre  $k$  en fonction de la température (identification avec l'énergie cyclique numérique).

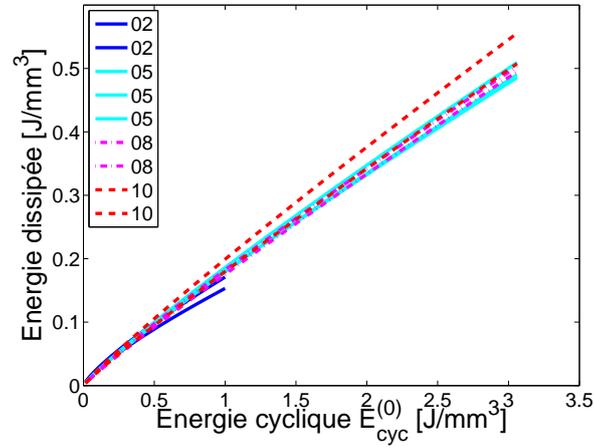


FIGURE 6.24 – Évolution de l'énergie dissipée en fonction de l'énergie cyclique  $E_{cyc}^{(0)}$  pour les quatre taux de biaxialité (régression sur les données expérimentales, deux essais par taux de biaxialité).

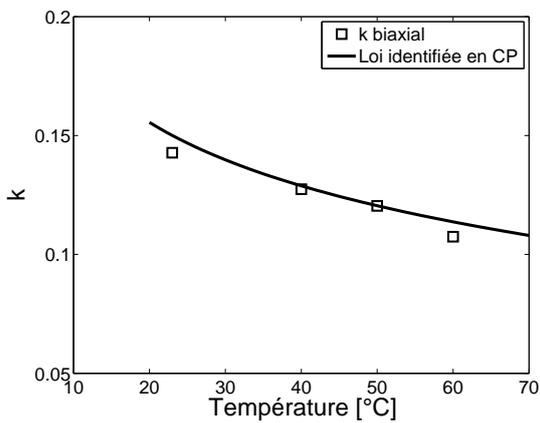


FIGURE 6.25 – Évolution du paramètre  $k$  identifié sur les essais biaxiaux en fonction de la température.

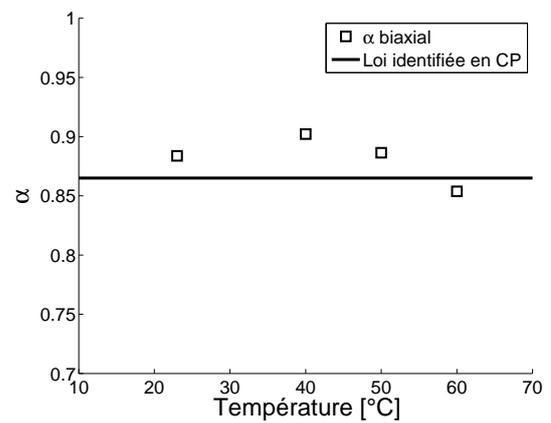


FIGURE 6.26 – Évolution du paramètre  $\alpha$  identifié sur les essais biaxiaux en fonction de la température.

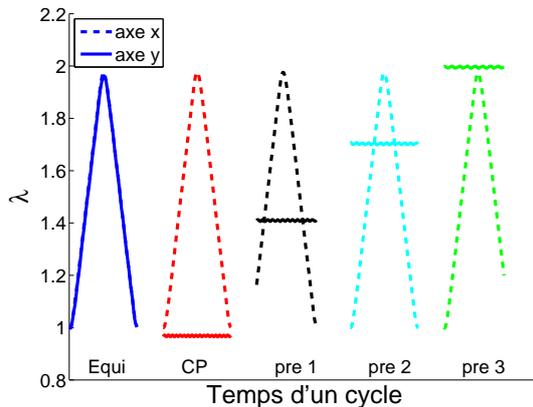


FIGURE 6.27 – Représentation des élongations des deux axes pour les cinq chargements étudiés.

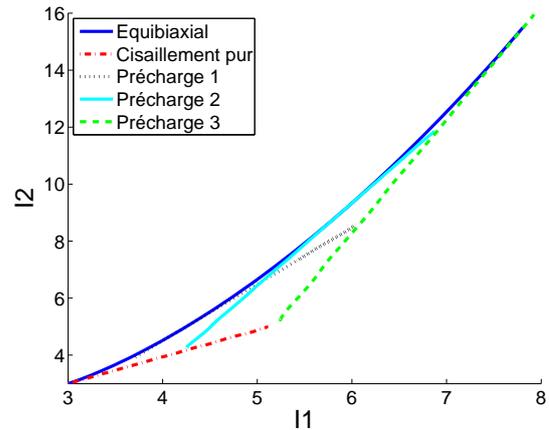


FIGURE 6.28 – Représentation des trajets de chargement dans le diagramme  $I1-I2$ .

- équibiaxial ;
- cisaillement pur ;
- biaxial déphasé à  $180^\circ$
- $I1$  constant.

Nous avons représenté la consigne en élongation de ces quatre chargements sur la figure 6.29. Une autre description du chargement est donnée dans un diagramme  $I1-I2$  sur la figure 6.30. Si les axes sont sollicités de la même façon en terme d'élongation pour tous les essais excepté un axe pour l'essai CP, le déphasage introduit modifie complètement le trajet énergétique.

Si nous modélisons l'énergie de déformation à partir des invariants, cet essai permet d'étudier des trajets de chargement à énergie constante (à l'erreur expérimentale près). Ainsi, si un critère de dissipation se fondait sur l'énergie élastique, nous devrions trouver des énergies dissipées fondamentalement différentes entre nos deux types d'essais (équibiaxial et CP d'une part, biaxial déphasé et  $I1$  constant d'autre part). L'analyse de l'énergie dissipée dans les boucles d'hystérèse ne révèle pas de différences d'ordre de grandeur entre les essais. De plus, nous avons utilisé la fonction de dissipation identifiée dans les paragraphes précédents pour estimer l'énergie dissipée. Les erreurs commises pour les quatre essais sont (dans l'ordre des essais) +3%, +8%, -3% et -5% ce qui rend valide notre loi même pour les chargements déphasés. De plus, nous pouvons affirmer qu'une loi de dissipation fondée sur l'énergie de déformation n'est pas capable de représenter l'énergie dissipée, par exemple lorsque l'énergie de déformation reste constante au cours d'un chargement.

### c Sollicitations variables en phase et hors phase

Le montage biaxial permet de solliciter l'éprouvette biaxiale indépendamment sur les deux axes. Nous avons donc appliqué des signaux variables sur chacun des axes (FIG. 6.31 et 6.32). Nous appliquons la loi d'autoéchauffement multiaxiale variable directement sur les mesures expérimentales. Un comptage Rainflow est effectué sur chaque axe, puis l'énergie dissipée totale du signal est estimée (EQ. 6.42) et comparée avec celle mesurée. La différence de l'énergie dissipée estimée et celle mesurée n'excède pas 15%.

D'un point de vue expérimental, nous pouvons donc valider l'utilisation d'un comptage Rainflow sur chaque composante pour estimer la dissipation pour une sollicitation multiaxiale variable. Notons

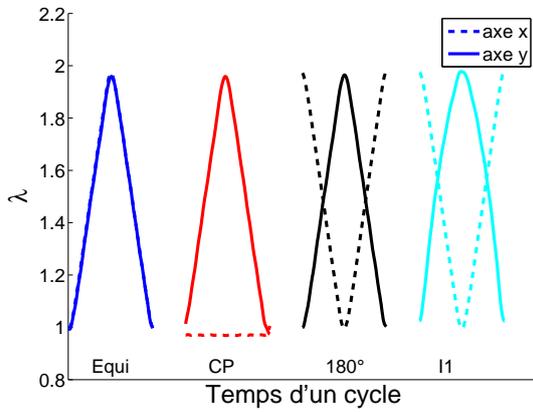


FIGURE 6.29 – Représentation des élongations des deux axes pour les quatre chargements étudiés.

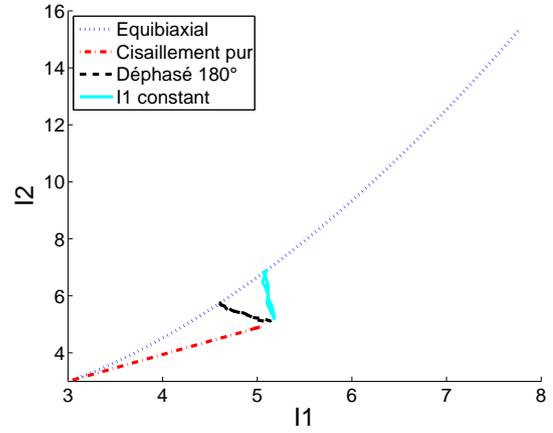


FIGURE 6.30 – Représentation des trajets de chargement dans le diagramme  $I1$ - $I2$ .

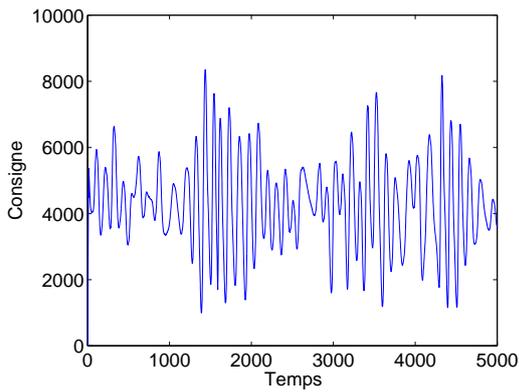


FIGURE 6.31 – Exemple de signal aléatoire unidimensionnel.

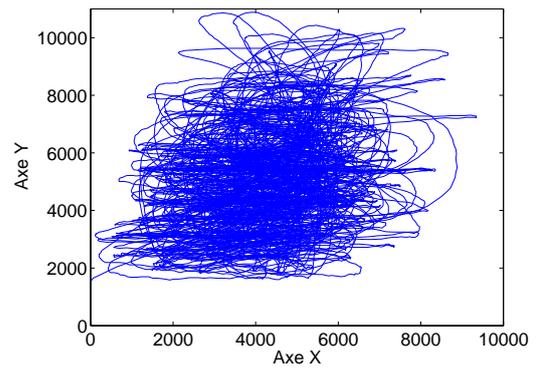


FIGURE 6.32 – Exemple de signal aléatoire multidimensionnel appliqué sur le montage biaxial.

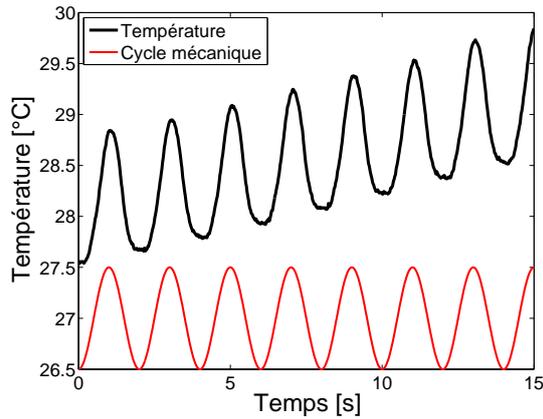


FIGURE 6.33 – Évolution temporelle de la température en un point au cours de cycles mécaniques (traction 0-40 mm sur AE42).

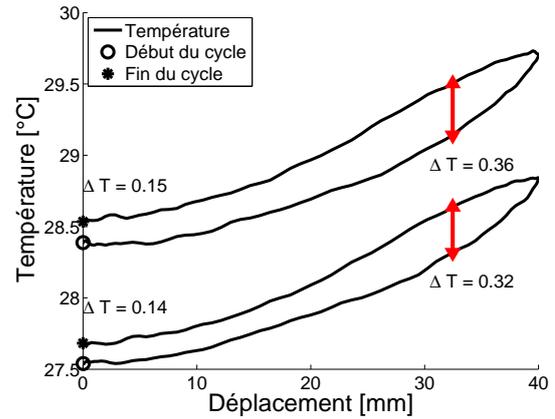


FIGURE 6.34 – Évolution de la température en un point au cours de deux cycles.

que cette validation est restreinte au cas de chargements où les directions principales restent fixes.

#### d Discussion

Nous pouvons affirmer que la loi de dissipation proposée donne une bonne estimation dans les cas multiaxiaux étudiés. Elle est indépendante du taux de biaxialité, du déphasage entre les composantes et des précharges. De plus, nous avons montré qu'une loi de dissipation fondée uniquement sur l'énergie de déformation ne peut estimer l'énergie dissipée.

#### 6.4.4 Estimation des sources de chaleur par thermographie infrarouge

Des mesures de température d'autoéchauffement par thermographie infrarouge ont été réalisées par PSA sur AE42. Ce type de mesure permet d'avoir accès à plusieurs informations : le suivi de température au cours d'un cycle mécanique, le profil de température à un instant donné ou encore l'écart de température entre deux cycles mécaniques. Nous allons exploiter ces résultats afin d'étudier les sources de chaleur.

En effet, en se plaçant dans des conditions adiabatiques réalistes d'un début d'essai, l'équation de la chaleur 2.65 relie directement la dérivée temporelle de la température à la puissance dissipée instantanée :

$$\rho_0 c \dot{T} = P_{diss} \quad . \quad (6.45)$$

En connaissant l'élévation de température  $\Delta T$  sur un cycle, il est possible d'estimer la quantité d'énergie dissipée sous forme de sources de chaleur sur un cycle par

$$\rho_0 c \Delta T = E_{diss} \quad . \quad (6.46)$$

#### a Suivi de la température sur un cycle mécanique

Nous avons représenté sur la figure 6.33 l'évolution temporelle de la température en un point en peau d'une AE42 soumise à des cycles de traction (0-40 mm). L'effet Gough-Joule est bien visible, et la lente élévation de température sur plusieurs cycles traduit l'autoéchauffement. Le traitement des

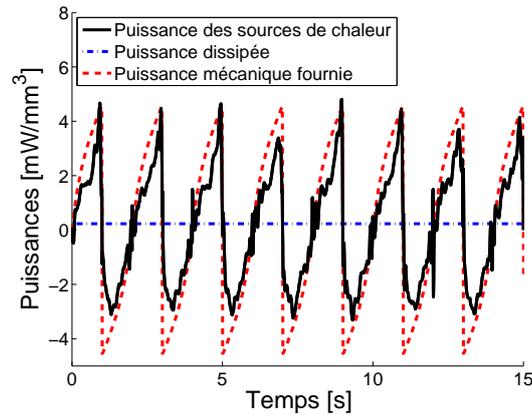


FIGURE 6.35 – Évolution des puissances des sources de chaleur, de la puissance dissipée moyenne et de la puissance mécanique (ici estimée avec un calcul hyperélastique) en un point au cours de cycles mécaniques.

données expérimentales ne permet pas de retrouver le phénomène d'inversion, et nous ne pouvons pas conclure sur sa manifestation.

À partir de ces données, nous avons tracé l'évolution de la température au cours d'un cycle (FIG. 6.34) en fonction du déplacement imposé à l'éprouvette. Pour les deux cycles représentés, nous constatons un autoéchauffement d'environ  $0.15^{\circ}\text{C}$  entre le début et la fin des cycles. Toutefois, cette élévation de température n'est pas du tout répartie uniformément dans le cycle, puisque des différences de plus de  $0.3^{\circ}\text{C}$  sont observées entre la décharge et la charge à un déplacement donné. Ce fait est à rapprocher des constatations expérimentales de [Dart et al. \(1942\)](#) (FIG. 3.7) et traduit le phénomène de cristallisation sous contrainte. Un dégagement de chaleur accompagne la cristallisation et une absorption la décristallisation. Nous avons aussi rappelé au chapitre 1 que la cristallisation est hystérétique : le taux de cristallisation est plus élevé à la décharge qu'à la charge. La température sera donc plus élevée à la décharge.

### b Détermination des puissances

À partir de ce suivi de température et de l'équation (6.45), nous avons déterminé la puissance instantanée des sources de chaleur au cours des cycles mécaniques (FIG. 6.35). Sur la même figure, nous avons tracé la puissance mécanique fournie estimée à l'aide d'un calcul EF hyperélastique. De même, nous avons estimé la puissance moyenne dissipée au cours d'un cycle (EQ. 6.46). Nous constatons que la puissance instantanée des sources de chaleur suit la puissance mécanique fournie, et est beaucoup plus importante que la puissance moyenne dissipée. Cela montre bien que les termes de couplage thermoélastique ne sont pas du tout négligeables sur un cycle mécanique.

### c Estimation des sources de chaleur moyennes sur un cycle

À partir des profils de température de l'AE42 enregistrés au même instant de cycles successifs (FIG. 6.36), il est possible d'obtenir l'écart de température entre deux cycles. Cet écart de température permet d'estimer la source de chaleur moyenne sur un cycle mécanique. Nous avons représenté sur la figure 6.37 ces sources de chaleur en fonction de l'énergie cyclique calculée en peau de l'éprouvette.

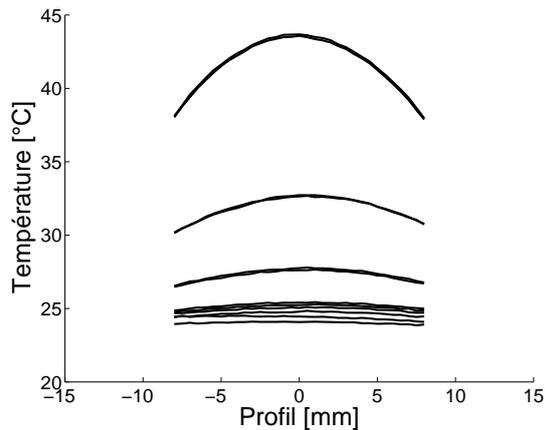


FIGURE 6.36 – Profils de température enregistrés au minimum de cycles successifs sur AE42 sur la partie utile.

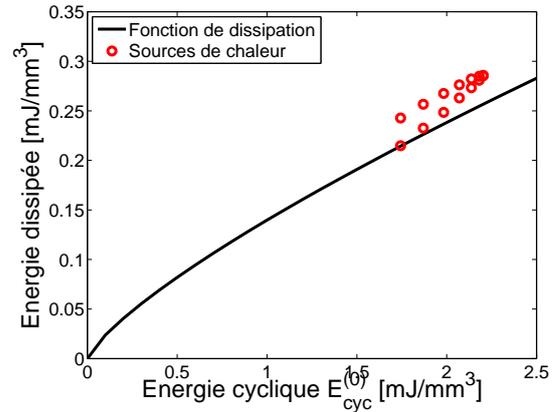


FIGURE 6.37 – Comparaison entre les sources de chaleur moyennes sur un cycle et notre estimation de l'énergie dissipée.

Nous constatons que ces sources de chaleur concordent avec l'énergie dissipée estimée par notre fonction de dissipation. Nous pouvons ici conclure qu'à l'ordre un, l'énergie dissipée mesurée avec la boucle d'hystérèse mécanique est dissipée en chaleur.

## 6.5 Conclusions

À cause des grandes déformations, les méthodes classiques de type visco-linéaire d'estimation de l'énergie dissipée à partir des déformations et des contraintes ne sont plus applicables. En effet, les mouvements de corps rigide ne sont pas forcément pris en compte et les non-linéarités de comportement aux grandes déformations sont importantes.

L'objectif de ce chapitre est d'estimer l'énergie dissipée lors d'un cycle mécanique en ne se fondant que sur des grandeurs hyperélastiques qui ne modélisent pas la dissipation. Une telle méthode d'estimation nécessite la description de trois points : une méthode d'identification de cycles, une grandeur prédictive de l'énergie dissipée sur un cycle et enfin une loi ou fonction de dissipation reliant cette grandeur à l'énergie dissipée. Nous avons dans un premier temps développé cette méthode pour des chargements mécaniques cycliques, puis nous l'avons étendue aux chargements variables.

Nous avons proposé des grandeurs énergétiques appelées énergies cycliques vérifiant : positivité, objectivité et multiaxialité. Ces grandeurs ont comme première originalité d'être prédictives de l'énergie dissipée quelque soit la moyenne du chargement. Elles sont écrites avec des grandeurs lagrangiennes telles que les tenseurs conjugués de Hill (1968) afin de garantir dans un premier temps l'objectivité. En effet, nous travaillons avec des tenseurs définis à des instants différents et il est nécessaire qu'ils soient définis sur la même configuration. Nous avons montré sur des essais biaxiaux que pour les cas de chargements multiaxiaux déphasés, il fallait prendre la contribution positive de chaque axe, ce qui revient à écrire les énergies cycliques comme des sommes de valeurs positives. Ce faisant, l'objectivité n'est plus garantie. Afin de pallier ce problème, nous pouvons, dans l'hypothèse où le repère principal ne tourne pas, écrire les énergies cycliques avec les valeurs principales. Dans un cadre plus général, afin de concilier multiaxialité et objectivité, nous proposons d'écrire les énergies cycliques à l'aide d'une discrétisation dans  $n$  directions de l'espace.

Nous avons montré expérimentalement que l'énergie cyclique fondée sur le tenseur des défor-

mations logarithmique lagrangien est la grandeur qui prédit le mieux l'énergie dissipée. La fonction de dissipation reliant ces deux grandeurs a été identifiée de 5°C à 80°C et se présente sous la forme d'une fonction puissance avec deux paramètres : une puissance  $\alpha$  indépendante de la température et un coefficient  $k$  fonction seulement de la température. Cette estimation de l'énergie dissipée présente l'avantage de ne pas dépendre de l'état d'accommodation du matériau et de la multiaxialité des déformations.

Pour un chargement variable, nous identifions les cycles sur chaque composante avec une méthode Rainflow. Les résultats expérimentaux dans le cas biaxial (chargements variables décorrélés sur chaque axe) valident cette hypothèse. Dans un dernier temps, nous avons montré (à la précision expérimentale près) à l'aide d'identification de sources de chaleur par thermographie infrarouge que l'énergie dissipée lors des boucles d'hystérèse mécaniques était bien dissipée sous forme de chaleur.

Finalement, nous avons dans ce chapitre proposé des lois d'autoéchauffement cyclique et variable en construisant la méthode d'estimation de l'énergie dissipée mécaniquement.



## Chapitre 7

# Validation des lois d'autoéchauffement

*Dans ce chapitre, nous validons expérimentalement les lois d'autoéchauffement, cycliques et variables. Pour des signaux variables, nous proposons une approximation globale de ces lois.*

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Interprétations microscopiques de l'énergie dissipée</b>	<b>108</b>
<b>6.2</b>	<b>État de l'art</b>	<b>109</b>
6.2.1	Viscoélasticité linéaire	109
6.2.2	Mesure énergétique d'un cycle mécanique	113
<b>6.3</b>	<b>Proposition de mesures énergétiques d'une sollicitation mécanique</b>	<b>116</b>
6.3.1	Premières expériences - Influence de la moyenne	116
6.3.2	Définition des énergies cycliques	118
6.3.3	Cas d'une sollicitation variable	123
<b>6.4</b>	<b>Identification des fonctions de dissipation</b>	<b>125</b>
6.4.1	Choix de l'énergie cyclique	125
6.4.2	Cisaillement pur	125
6.4.3	Traction biaxiale	126
6.4.4	Estimation des sources de chaleur par thermographie infrarouge	132
<b>6.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>134</b>

---

Les lois d'autoéchauffement présentées dans le chapitre précédent nécessitent d'utiliser des calculs EF. Notamment, pour des signaux variables, il est nécessaire de calculer tous les trajets de chargement. Cette méthode n'est pas applicable en l'état en bureau d'étude pour deux raisons : coûts de calcul et problèmes de convergence des calculs. Nous présentons au début de ce chapitre des méthodes simplifiées pour calculer l'autoéchauffement pour des signaux variables.

Nous avons proposé de nombreux essais afin de tester les lois d'autoéchauffement cycliques et variables proposées dans le chapitre précédent et au début de ce chapitre. L'information la plus riche est un profil de température mesuré avec une caméra thermique. Notons que lorsque cela était possible, nous avons validé nos lois à la fois en termes de température et d'énergie dissipée, et que les coefficients de convection ont été déterminés expérimentalement.

## 7.1 Loi d'autoéchauffement simplifiée dans le cas variable

Les méthodes présentées dans le chapitre précédent pour calculer l'autoéchauffement pour des chargements variables nécessitent de faire toute l'analyse (comptage Rainflow, estimation de la puissance dissipée) au niveau local. S'il est envisageable de tester cette méthode pour une sollicitation 1-D, elle reste néanmoins très gourmande en calcul sur une structure automobile (nombre de DDL de l'ordre de  $10^4$ ). Pour une sollicitation multi-D, le nombre de calculs et la quantité d'information à stocker pour connaître les trajets de chargement locaux sont très importants, et nous n'avons pas testé cette méthode sur une structure automobile.

Le deuxième argument pour simplifier notre démarche pour les sollicitations variables est la difficulté à faire converger les calculs EF (contact et incompressibilité). En effet, dans l'état actuel de nos connaissances, nous ne savons calculer que peu de pièces jusqu'aux maxima des signaux effectivement appliqués aux pièces et les méthodes précédentes sont donc inapplicables.

Notre problématique est la suivante : déterminer une méthode simplifiée pour estimer l'autoéchauffement pour des signaux variables. Cette méthode est fondée sur la puissance dissipée totale par toute la structure. Nous faisons donc ici une approximation sur la répartition de cette puissance dissipée (à cause des non-linéarités).

### 7.1.1 Loi d'autoéchauffement simplifiée pour une sollicitation 1-D

#### a Démarche

Nous présentons la loi d'autoéchauffement simplifiée pour une sollicitation uni-dimensionnelle :

1. hypothèse 1 : l'énergie dissipée totale d'un signal est la somme des énergies dissipées par chaque cycle extrait par la méthode Rainflow  $E_{diss}^{total} = \sum_{Cycles} E_{diss}$  ;
2. hypothèse 2 : l'énergie dissipée lors d'un cycle est une fonction des paramètres globaux (déplacement, force)  $E_{diss} = \mathcal{F}(L, F)$  ;
3. calcul des chargements simplifiés (fréquence, déplacement et force) dissipant la même énergie :  $f_s \mathcal{F}(L_s, F_s) = \frac{E_{diss}^{total}}{\text{temps}}$  ;
4. utilisation de la loi d'autoéchauffement cyclique avec les chargements simplifiés.

Un chargement simplifié est donc défini par la sollicitation mécanique (sinus, sinus par bloc de force ou de déplacement donné, autres). Toutefois, ce chargement ne garantit pas que l'autoéchauffement soit le même entre le signal variable et le signal simplifié à cause des non-linéarités. Ce chargement est alors une approximation pour l'autoéchauffement et nous devons vérifier qu'elle reste acceptable.

L'hypothèse la plus importante, et finalement l'étape de la méthode qui requiert le plus d'attention, est l'estimation de l'énergie dissipée sur un cycle à l'aide des paramètres globaux. Nous pouvons nous inspirer du chapitre précédent pour proposer quelques lois :

- en fonction des amplitudes des paramètres

$$E_{diss} = k (\Delta L \Delta F)^\alpha \quad \text{voire} \quad E_{diss} = k \Delta L^\alpha \quad ; \quad (7.1)$$

- en fonction de l'énergie cyclique globale

$$E_{diss} = k \left( \int_{L_{min}}^{L_{max}} (F - F_{min}) dL \right)^\alpha \quad . \quad (7.2)$$

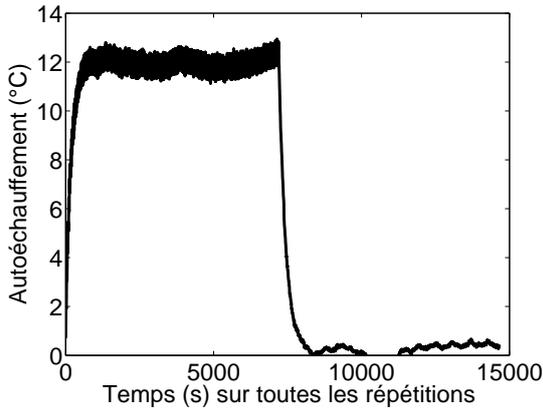


FIGURE 7.1 – Autoéchauffement de l’AE42 pour le signal S1 répété deux heures.

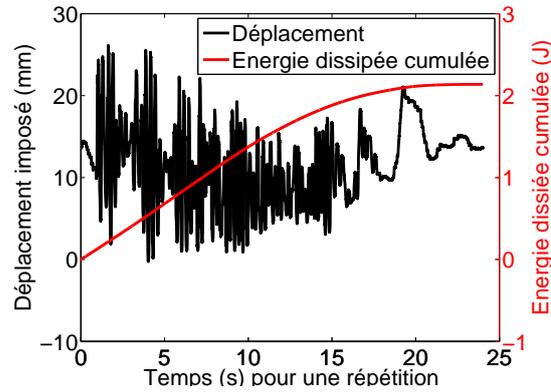


FIGURE 7.2 – Déplacement et cumul de l’énergie dissipée pour une répétition d’un S1.

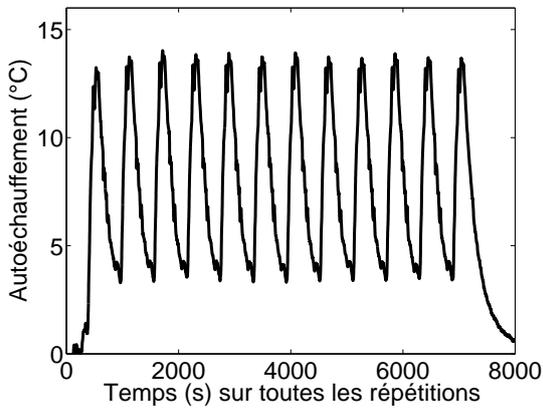


FIGURE 7.3 – Autoéchauffement de l’AE42 pour le signal S2 (12 répétitions).

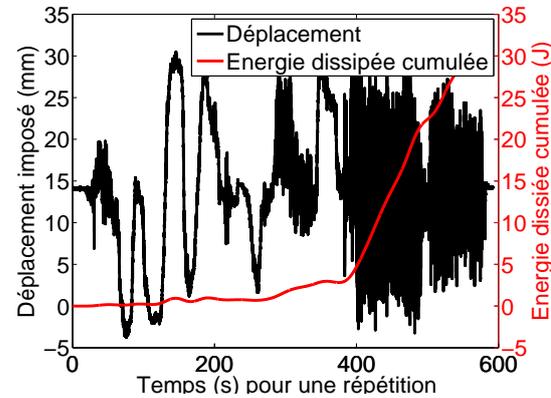


FIGURE 7.4 – Déplacement et cumul de l’énergie dissipée pour une répétition d’un S2.

**b Hypothèse de stationnarité**

Pour un chargement variable, la construction d’un chargement simplifié s’effectue sous l’hypothèse de stationnarité de la puissance dissipée au sens probabiliste. Pour des signaux réels, cette hypothèse n’est pas valide sur tout le signal car le véhicule peut parcourir plusieurs types de route induisant des sollicitations différentes. Il suffira alors de pouvoir tronçonner ce signal en parties stationnaires. L’intérêt de cette méthode sera effectif dès lors que ces tronçons dureront plus que le temps caractéristique thermique de la structure, c’est-à-dire lorsque l’équilibre thermique pourra être atteint.

Nous analysons ici trois types de signaux mesurés avec des véhicules roulant sur des pistes d’essais. Ces signaux sont dilatés pour être appliqués sur l’éprouvette :

- S1 : démarrage fort d’une durée d’environ 25 s ;
- S2 : circuit de type route avec un passage sur des mauvais pavés d’une durée d’environ 600 s ;
- S3 : circuit essentiellement sur mauvais pavés d’une durée d’environ 600 s.

Des essais d’autoéchauffement sur éprouvette AE42 ont été réalisés avec ces trois signaux répétés pendant deux heures. La durée du signal S1 est plus petite que le temps thermique de la structure et nous ne distinguons pas les répétitions sur la mesure de l’autoéchauffement (FIG. 7.1). Notons tout de

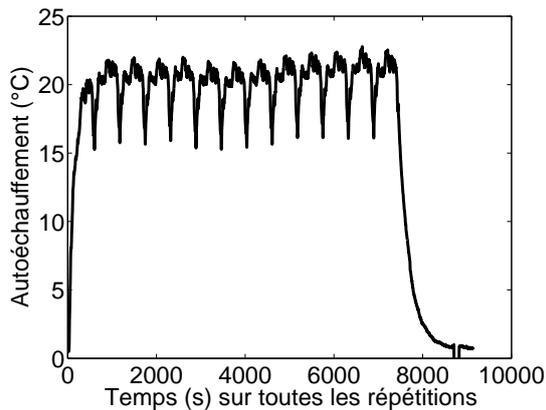


FIGURE 7.5 – Autoéchauffement de l'AE42 pour le signal S3(13 répétitions).

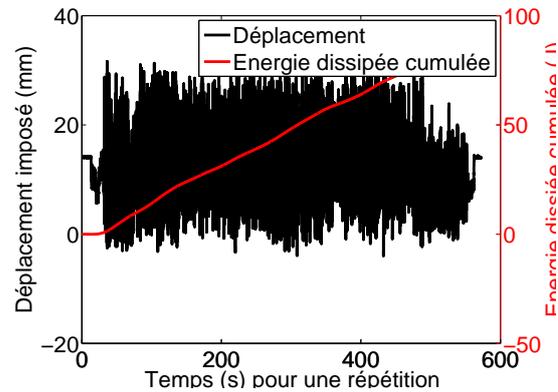


FIGURE 7.6 – Déplacement et cumul de l'énergie dissipée pour une répétition d'un S3.

même que la majeure partie de l'énergie dissipée l'est sur les 15 premières secondes du signal (FIG. 7.2). L'hypothèse de stationnarité est ici valide.

Sur les S2 et S3 qui sont plus longs (10 minutes), les répétitions s'observent sur la mesure de l'autoéchauffement (FIG. 7.3 et 7.5). Si l'autoéchauffement du S3 reste constant à une bonne approximation près, celui du S2 est très variable au cours d'une répétition. Ce fait est la conséquence de la non-stationnarité du signal : presque toute l'énergie est dissipée dans la deuxième partie du signal (FIG. 7.4). L'hypothèse de stationnarité pour ce signal n'est pas valide et il est nécessaire de le décomposer en deux parties stationnaires.

## 7.1.2 Loi d'autoéchauffement simplifiée pour une sollicitation multi-D

### a Démarche

Pour une sollicitation multi-dimensionnelle, la méthode précédente n'est plus applicable car nous ne pouvons pas définir simplement la notion de cycle. Nous nous appuyons sur le fait que la puissance dissipée totale est la somme des puissances dissipées par chaque axe de sollicitation. Voici la démarche adoptée avec les hypothèses formulées :

1. hypothèse forte : la puissance dissipée par chaque axe peut-être estimée indépendamment des autres axes à l'aide d'une estimation uni-dimensionnelle ;
2. un signal simplifié est calculé pour chaque axe suivant la méthode uni-dimensionnelle ;
3. l'autoéchauffement est calculé en sommant les puissances dissipées de chaque signal 1-D simplifié.

L'hypothèse formulée sur l'estimation uni-dimensionnelle est très forte et suppose que les axes de sollicitations soient décorrélés. Le signal simplifié proposé devra aussi être relativement décorrélé (par exemple en choisissant judicieusement les fréquences afin d'éviter les répétitions de motifs trop petits). Nous testerons dans la partie expérimentale la validité de cette hypothèse pour une application réelle et montrerons l'influence des fréquences choisies pour construire le signal simplifié.

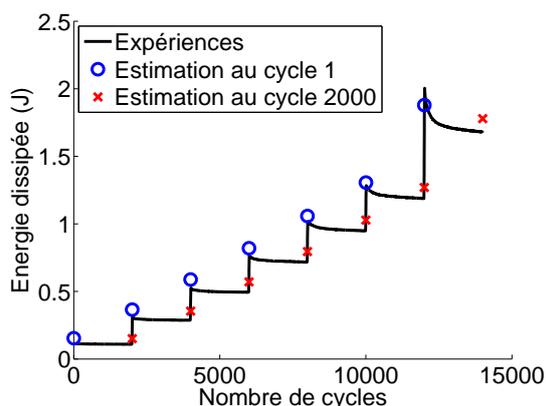


FIGURE 7.7 – Évolution de l'énergie dissipée expérimentale et estimée pour les huit blocs de sinus (la température estimée se fait deux fois pour chaque bloc de sinus : une fois au début et une fois à la fin, la différence entre les deux étant la température).

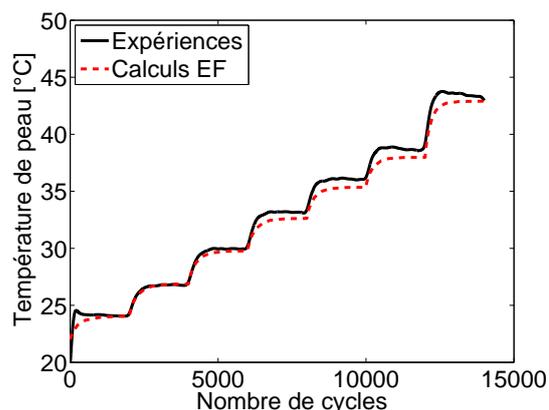


FIGURE 7.8 – Évolution de la température expérimentale et estimée pour les huit blocs de sinus.

## 7.2 Validation de la loi d'autoéchauffement cyclique dans le cas 1-D

### 7.2.1 Essais d'autoéchauffement sur AE42

Des essais d'autoéchauffement ont été réalisés sur AE42. Ils sont constitués de sept blocs de 2000 sinus, les blocs étant d'amplitude croissante. Un suivi de la température maximale en peau et de l'énergie dissipée par cycle est réalisé. Nous comparons tout d'abord l'énergie dissipée expérimentale à celle estimée avec un calcul EF par la loi d'autoéchauffement (FIG. 7.7). La température estimée se fait deux fois pour chaque bloc de sinus : une fois au début et une fois à la fin car il existe une différence de température entre ces deux instants. Nous constatons que l'estimation de l'énergie dissipée est très bonne. La comparaison effectuée entre les températures mesurée et calculée (FIG. 7.8) est tout aussi satisfaisante. Nous pouvons donc conclure que notre loi d'autoéchauffement permet d'estimer la température maximale pour plusieurs sollicitations mécaniques.

Nous avons représenté sur la figure 7.9 une mesure par thermographie infrarouge réalisée par PSA sur AE42 et le même profil estimé numériquement avec la loi d'autoéchauffement. Nous constatons une bonne estimation de l'autoéchauffement sur toute la structure.

### 7.2.2 Essais d'autoéchauffement sur une suspente d'échappement

Lors de mon séjour à Bristol, j'ai réalisé des essais d'autoéchauffement sur une suspente d'échappement de Peugeot 407. Une machine servo-hydraulique a été utilisée afin de soumettre la pièce étudiée à diverses sollicitations :

- sinusoïdales (traction simple, traction-traction, accommodation et sur-accommodation) ;
- sinusoïdales par blocs ;
- variables ;
- refroidissement.

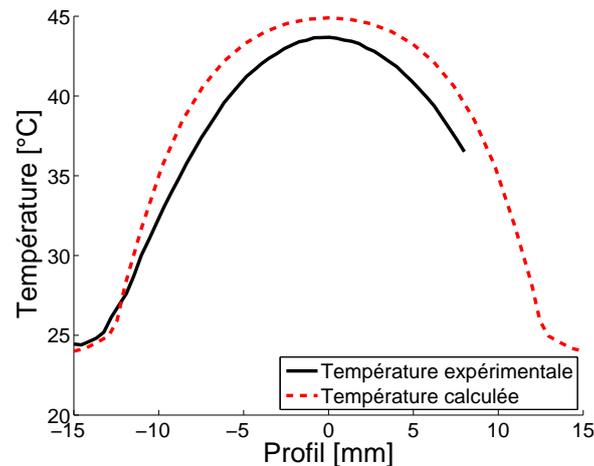


FIGURE 7.9 – Comparaison entre un profil de température d'autoéchauffement mesuré par thermographie IR sur AE42 et une estimation par calcul EF.

#### a Protocole expérimental

Nous apercevons le dispositif expérimental sur la photo 7.10. Une caméra thermique reliée à un écran permet de visualiser et d'enregistrer (photos ou film sur VHS) l'image thermique de la suspente. Cette suspente est accrochée à deux mors dans une enceinte thermique. La machine servo-hydraulique est reliée à un ensemble pilotage-acquisition (non représenté).

Les résultats se présentent sous trois formes : des photos thermiques prises en ceinture ouverte à intervalles réguliers, des séquences vidéos enregistrées par un magnétoscope (qualité moyenne) et l'enregistrement de l'effort et du déplacement au cours de l'essai. Ces deux derniers enregistrements n'étant pas exploitables, nous ne pourrions pas mesurer l'énergie dissipée par cycle pour ces essais.

Nous retirons principalement deux informations des photos numériques : la température maximale, et le profil de température sur la peau du bras central, pris comme l'intersection entre le plan de symétrie et la surface extérieure (FIG. 7.11 et 7.12).

#### Mesure du coefficient de convection

Afin de mesurer le coefficient de convection, nous avons procédé à des essais de refroidissement qui consistent à laisser refroidir dans les conditions expérimentales la suspente. Pour des raisons pratiques, nous avons pris un état initial non homogène (mise en température par autoéchauffement dans une enceinte thermique régulée). Nous pouvons ainsi mesurer la baisse de la température due au phénomène de convection. Un calcul numérique reprenant les mêmes conditions permet d'estimer le coefficient de convection. Une valeur de  $8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  permet d'être fidèle à l'essai (FIG. 7.13 et 7.14).

#### b Sollicitation sinusoïdale

Les figures 7.15 à 7.18 montrent les résultats pour deux essais de traction simple à 0-5 mm et 0-20 mm. Nous constatons une bonne estimation de la température maximale, ainsi qu'une bonne répartition spatiale. Les légers écarts existant pour la répartition peuvent s'expliquer d'une part par la prise de vue de la caméra thermique forcément différente du traitement des résultats numériques,

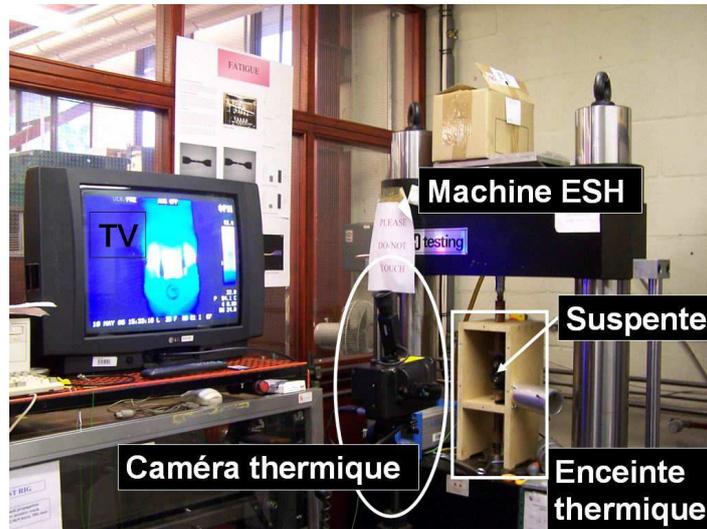


FIGURE 7.10 – Photo du banc d'essais d'autoéchauffement sur la suspenste.

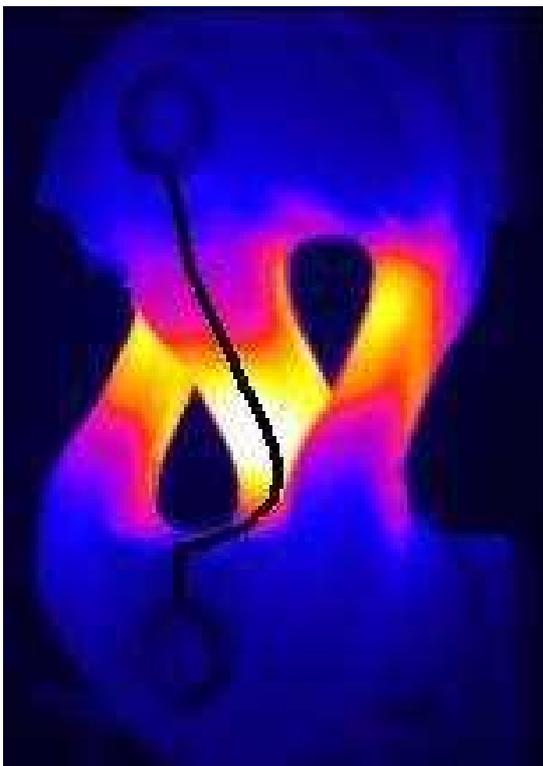


FIGURE 7.11 – Photo caméra thermique. Représentation du profil étudié.

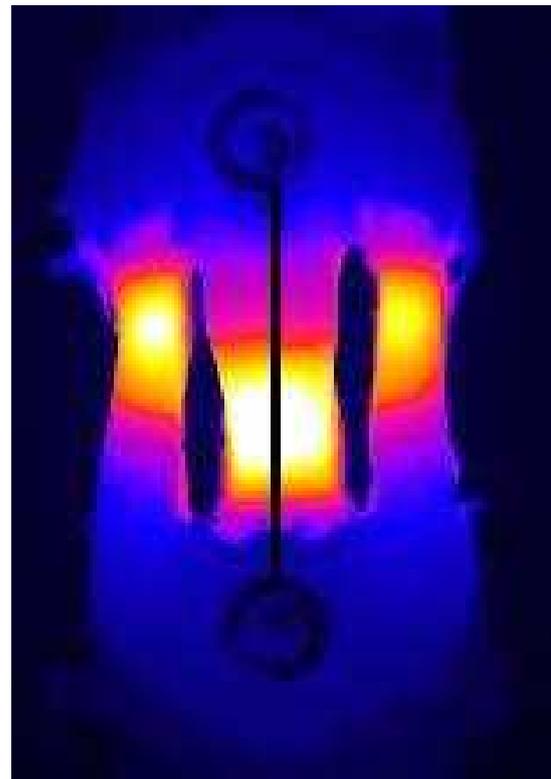


FIGURE 7.12 – Photo caméra thermique. Représentation du profil étudié.

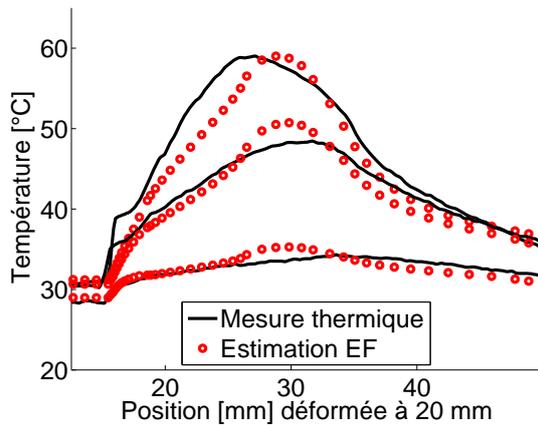


FIGURE 7.13 – Répartition de température à 0 s, 124 s et 574 s. Refroidissement avec  $h = 8 \text{ W.m}^{-2}.\text{C}^{-1}$  (essai H05).

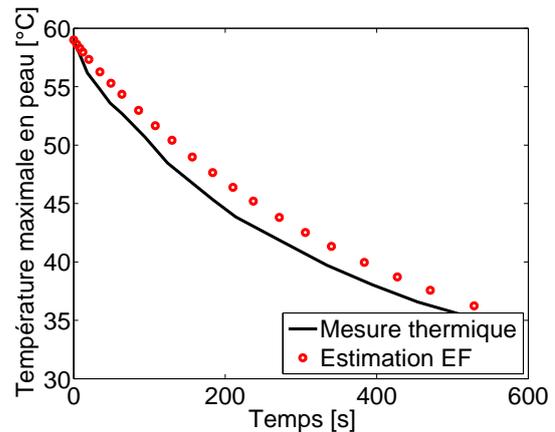


FIGURE 7.14 – Évolution temporelle de la température maximale en peau. Refroidissement avec  $h = 8 \text{ W.m}^{-2}.\text{C}^{-1}$ .

et d'autre part par la déformée du calcul numérique. En effet, nous avons constaté que la déformée mécanique ne correspondait pas précisément à celle observée : le déplacement de la partie élastomère située près des inserts métalliques est surestimé.

Nous montrons sur la figure 7.19 la distribution de la température. Nous remarquons qu'elle est différente de la répartition des sources de chaleur présentée sur la figure 7.20 qui suit l'état de déformation de la structure. Ainsi, le point où l'énergie de déformation est la plus grande n'est pas forcément le point le plus chaud. Il existe un très fort effet de structure sur le problème thermique.

### c Sollicitation sinusoïdale par bloc

La loi d'autoéchauffement n'a pour l'instant été développée que pour une sollicitation sinusoïdale. Nous proposons de l'étendre à un sinus par bloc. Si ce signal est périodique avec une période relativement courte (ne dépassant pas la minute), nous pouvons sommer l'énergie dissipée par tous les cycles de la période et diviser par le temps afin d'obtenir la puissance dissipée.

Nous avons appliqué cette méthode sur la suspente d'échappement avec un sinus par blocs. Pendant trois secondes, cinq cycles de traction répétée 0-5 mm, cinq cycles de 0-10 mm et cinq cycles de 0-15 mm sont effectués. Les résultats thermiques sont présentés sur les figure 7.21 et 7.22. Nous constatons une bonne prédiction de la température.

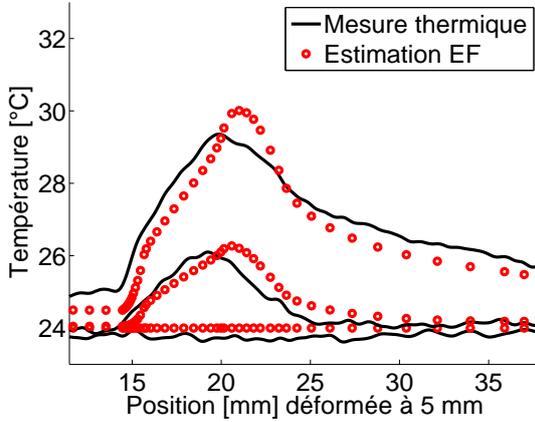


FIGURE 7.15 – Répartition de température à 0 s, 266 s et 1056 s en TS 0-5 mm,  $f = 5$  Hz,  $h = 8 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$  (essai H02).

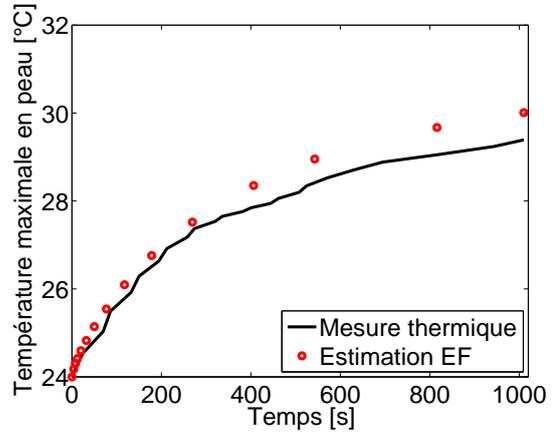


FIGURE 7.16 – Évolution temporelle de la température maximale en peau en TS 0-5 mm,  $f = 5$  Hz,  $h = 8 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$ .

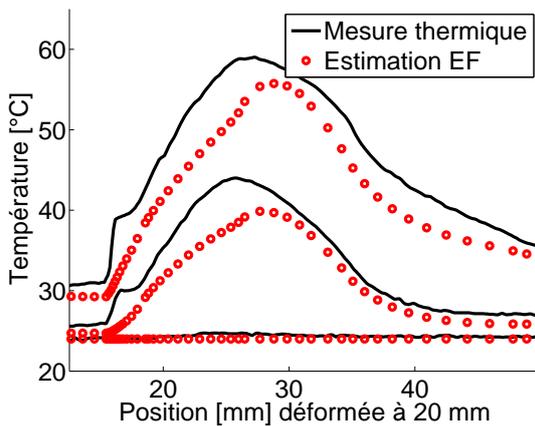


FIGURE 7.17 – Répartition de température à 0 s, 184 s et 1360 s en TS 0-20 mm,  $f = 5$  Hz,  $h = 8 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$  (essai H05).

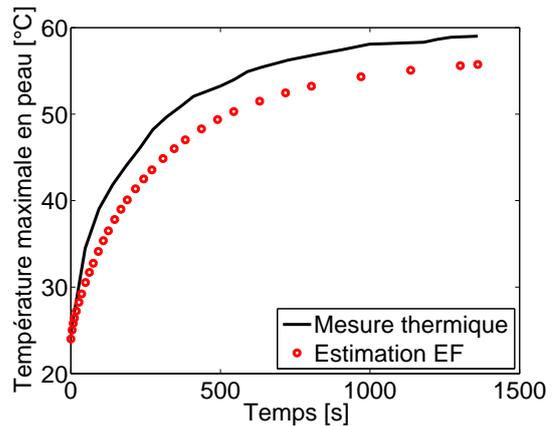


FIGURE 7.18 – Évolution temporelle de la température maximale en peau en TS 0-20 mm,  $f = 5$  Hz,  $h = 8 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$ .

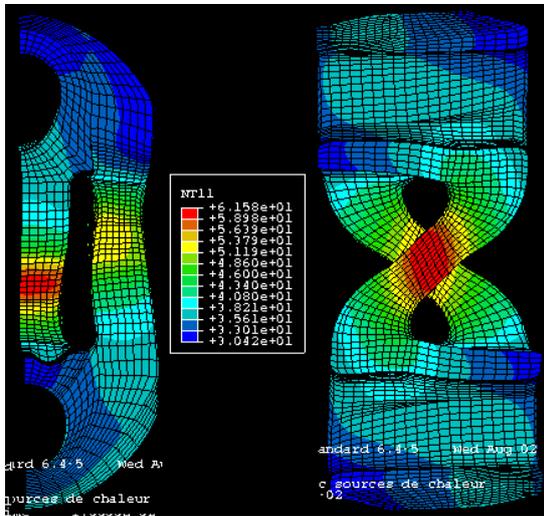


FIGURE 7.19 – Distribution de température en peau et dans le plan symétrique (température interne).

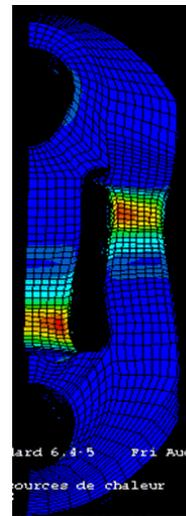


FIGURE 7.20 – Distribution des sources de chaleur.

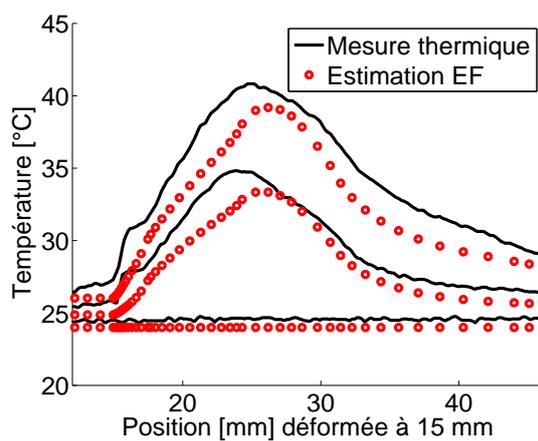


FIGURE 7.21 – Gradient de température à 0 s, 266 s et 1056 s sous la sollicitation sinus par bloc,  $f = 5 \text{ Hz}$ ,  $h = 8 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$  (essai H06).

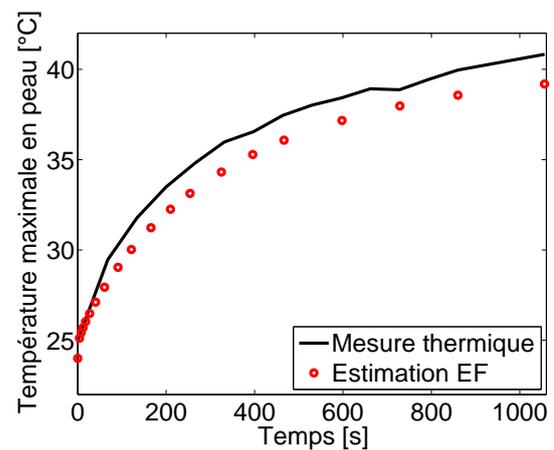


FIGURE 7.22 – Evolution temporelle de la température maximale en peau sous la sollicitation sinus par bloc,  $f = 5 \text{ Hz}$ ,  $h = 8 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$ .

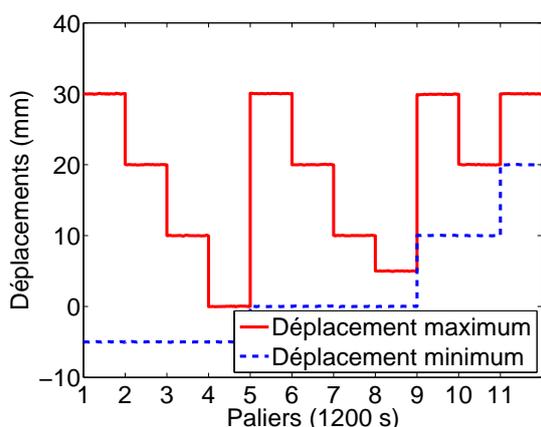


FIGURE 7.23 – Représentation des minima et maxima pour les 11 sinus.

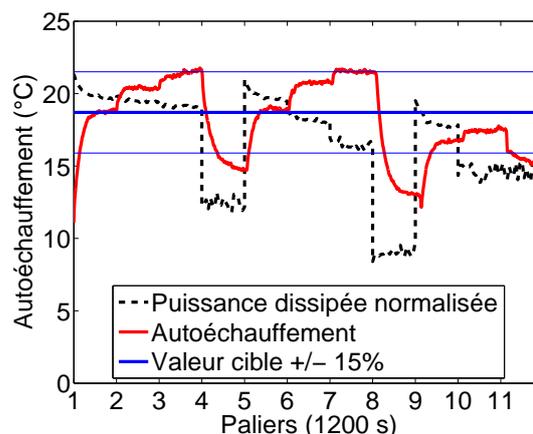


FIGURE 7.24 – Autoéchauffement et puissance dissipée obtenu pour les 11 signaux simplifiés.

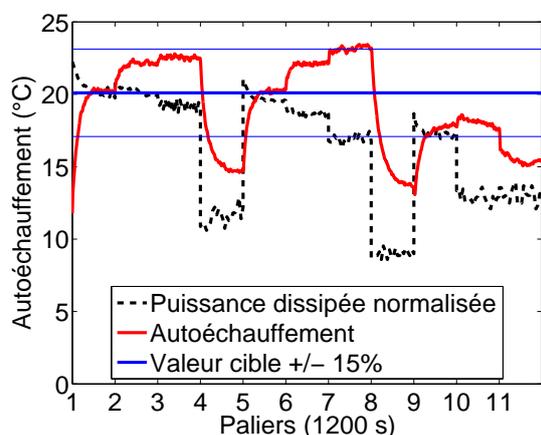


FIGURE 7.25 – Autoéchauffement et puissance dissipée obtenu pour les 11 signaux simplifiés.

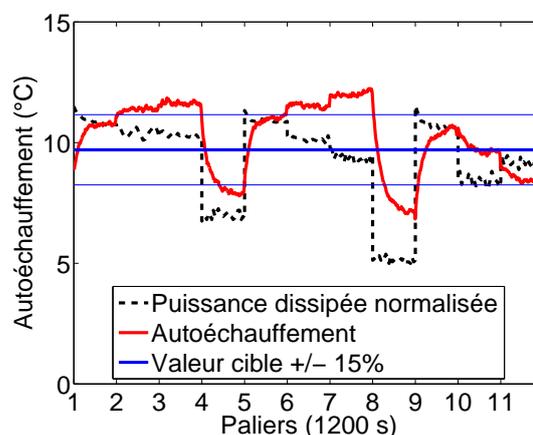


FIGURE 7.26 – Autoéchauffement et puissance dissipée obtenu pour les 11 signaux simplifiés.

### 7.3 Validation de la loi d'autoéchauffement variable dans le cas 1-D

#### 7.3.1 Essais d'autoéchauffement sur AE42

##### a Validation expérimentale de la loi d'autoéchauffement simplifiée

Nous proposons dans un premier temps des essais sur AE42 pour valider l'approximation de la loi d'autoéchauffement simplifiée. Nous avons choisi trois signaux pistes stationnaires et extrait deux informations expérimentales : la puissance dissipée moyenne et l'autoéchauffement moyen. Ces deux grandeurs expérimentales constituent les valeurs cibles. Nous allons donc construire des signaux simplifiés en termes de puissance dissipée globale, et vérifier par un essai si ces signaux donnent le même autoéchauffement.

Nous avons choisi 11 sinus différents qui vont servir à construire les signaux simplifiés (FIG. 7.23). Les énergies dissipées pour ces 11 cycles ont été estimées à partir de la base expérimentale sur

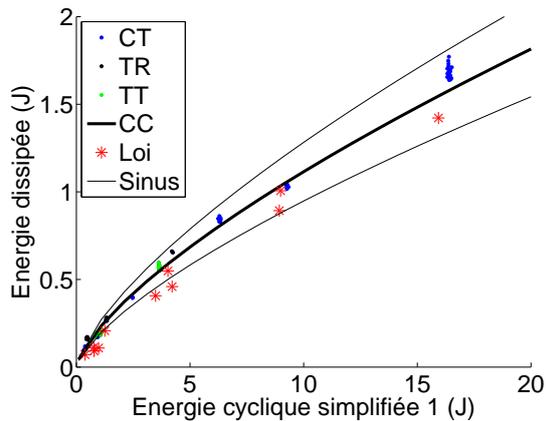


FIGURE 7.27 – Fonction de dissipation pour des cycles répétés.

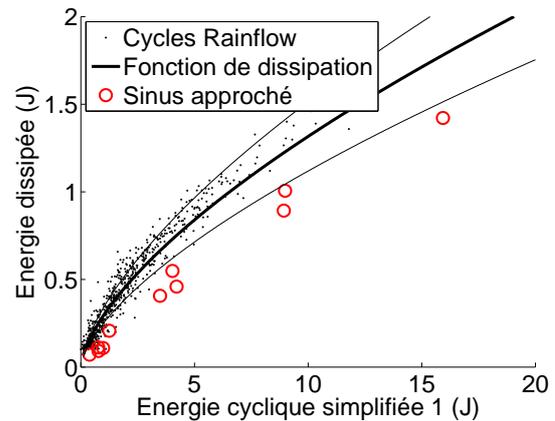


FIGURE 7.28 – Fonction de dissipation pour les cycles extraits par la méthode Rainflow.

AE42 et ont donc permis d'estimer les fréquences de ces sinus. Du fait des conditions expérimentales différentes entre la base expérimentale existante et ces nouveaux essais (en température, nombre de cycles), ces signaux ne donneront pas exactement la même puissance dissipée.

Nous constatons sur les figures 7.24 à 7.26 la bonne corrélation ( $\pm 15\%$ ) entre la puissance dissipée pour les 11 signaux simplifiés et la valeur cible. Toutefois, les signaux 4 et 8 ne donnent pas satisfaction car la puissance dissipée est sous-estimée. Ce fait montre que l'estimation de l'énergie dissipée des cycles de faible amplitude (5 mm) via la base expérimentale existante n'est pas robuste. De même, les cycles 10 et 11 sous-estiment la puissance dissipée.

Les autoéchauffements sont quant à eux proches ( $\pm 15\%$ ) de l'autoéchauffement cible (sauf pour les signaux 4 et 8) ce qui valide notre approximation pour l'autoéchauffement. Toutefois, nous constatons pour ces trois essais que l'autoéchauffement obtenu n'est pas monotone de la puissance dissipée globale. Nous montrons bien que notre méthode ne propose qu'une approximation de l'autoéchauffement.

## b Discussion autour du comptage Rainflow et des fonctions de dissipation globales

Nous avons deux informations au point de vue global : le déplacement et la force. Nous proposons donc naturellement l'énergie cyclique (EQ. 6.19) et l'énergie cyclique simplifiée (EQ. 6.20) comme grandeurs énergétiques pour identifier les fonctions de dissipation. Nous présentons dans la suite de ce paragraphe les résultats obtenus avec l'énergie cyclique simplifiée.

Nous avons identifié sur des essais isothermes à  $40^\circ\text{C}$  (THERM\_Y\_06\_3 accommodé de -10 à 30 mm) la fonction de dissipation :  $k = 0.183$  et  $\alpha = 0.74$  (FIG. 7.27) qui relie l'énergie cyclique simplifiée à l'énergie dissipée. Notons que cette fonction permet d'estimer l'énergie dissipée pour des cycles répétés. Nous avons utilisé cette fonction avec le comptage Rainflow pour estimer l'énergie dissipée sur des signaux variables. Nous avons constaté en moyenne une sous-estimation de 30%.

Afin de comprendre cette différence, nous avons dans un premier temps extrait les boucles d'hystérèse avec la méthode Rainflow d'un signal variable. Nous avons calculé l'énergie dissipée au cours de ces boucles et identifié la fonction de dissipation :  $k = 0.3$  et  $\alpha = 0.65$  (FIG. 7.28). Nous constatons alors que l'énergie dissipée lors d'un cycle répété est environ 30% inférieure à celle dissipée lors d'un cycle extrait d'un signal variable. Nous n'avons pas pour l'instant d'explications.

En conclusion, il semblerait que l'énergie dissipée lors d'un cycle répété soit inférieure à l'énergie

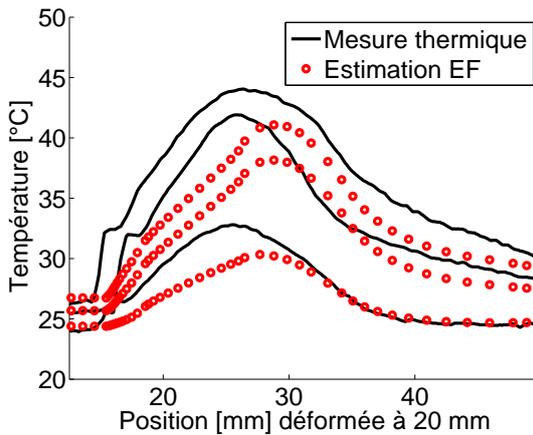


FIGURE 7.29 – Répartition de température sous la sollicitation aléatoire  $h=8 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$  (essai F01).

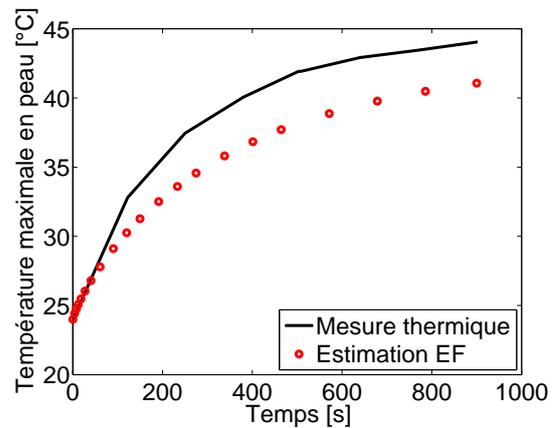


FIGURE 7.30 – Évolution temporelle de la température maximale en peau (essai F01).

dissipée lors d'un cycle extrait d'un signal variable. Lors de la construction de signaux simplifiés constitués de cycles répétés, il est nécessaire de prendre en compte cette différence et donc d'identifier deux fonctions de dissipation : une cyclique et une variable.

### 7.3.2 Essais d'autoéchauffement sur une suspente d'échappement

Nous avons soumis la suspente d'échappement à un essai d'autoéchauffement à partir d'un signal variable. Nous avons appliqué la méthode proposée et calculé la température de la structure avec la loi de dissipation se fondant sur l'énergie cyclique simplifiée. Les résultats sont présentés sur les figures 7.29 et 7.30. Nous constatons une légère sous-estimation de la température. Toutefois, cette méthode est applicable et donne une bonne approximation de la température.

## 7.4 Validation des loi d'autoéchauffement dans le cas multi-D

### 7.4.1 Présentation des essais sur une articulation de train arrière

Des essais d'autoéchauffement ont été réalisés sur une cale de liaison au sol par le Cetim, afin de valider la méthode d'estimation de l'autoéchauffement dans le cas d'une sollicitation variable multi-dimensionnelle. En effet, cette cale est soumise à deux sollicitations : une traction pilotée en effort et une torsion pilotée en angle sur les axes véhicules (FIG. 7.31). Plusieurs sollicitations ont été appliquées :

- blocs de sinus en traction ;
- blocs de sinus en torsion ;
- blocs de sinus en traction-torsion en phase et hors phase ;
- un signal piste normal et un signal piste sévéré.

Des mesures de température par thermocouples ont été effectuées à cœur (FIG. 7.32) et au contact entre la cale et le montage. Ainsi, la différence de ces températures donne l'autoéchauffement<sup>1</sup>. No-

1. Bien que le montage ait une grande inertie thermique, sa température s'élève de quelques degrés. Dans un souci de simplicité, nous retranchons cette élévation de température afin de déterminer l'autoéchauffement avec des conditions aux

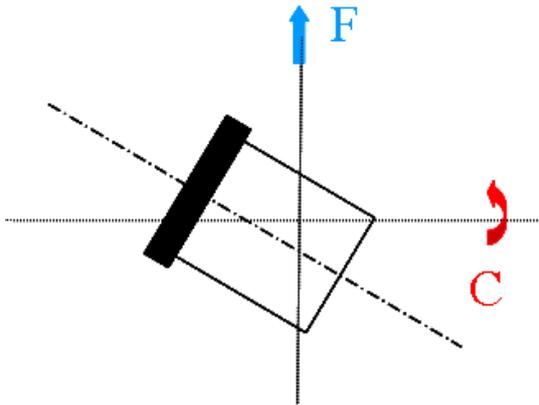


FIGURE 7.31 – Visualisation des deux axes de sollicitations de la cale de liaison au sol.

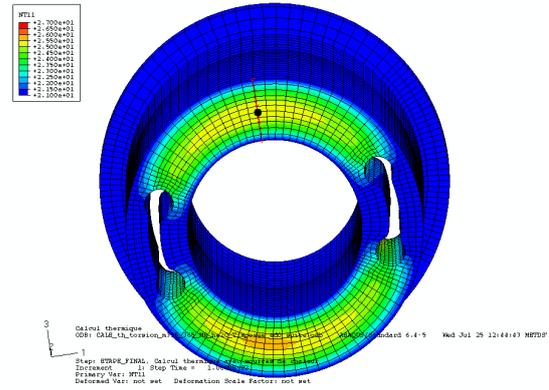


FIGURE 7.32 – Positionnement du thermocouple (●) dans la cale de liaison au sol (coupe à mi-hauteur).

tons que la position exacte du thermocouple à cœur n'est pas connue et nous étudions donc le gradient de température (représenté par les cercles rouges sur la figure 7.32) dans l'épaisseur de la structure afin d'estimer la marge d'erreur.

Les mesures mécaniques concernent en traction l'effort et le déplacement, permettant ainsi de tracer les boucles d'hystérèse et de calculer l'énergie dissipée. Pour la torsion, l'angle et le couple ont aussi été mesurés mais une importante erreur de mesure sur le couple ne permet pas d'obtenir l'énergie dissipée.

### 7.4.2 Estimation des paramètres de la loi d'autoéchauffement

Nous avons opté pour une modélisation hyperélastique de Mooney-Rivlin car cette loi permet d'obtenir les plus grands déplacements et rotations avant que le calcul ne puisse plus converger (problèmes de contact et d'incompressibilité). La grandeur énergétique utilisée pour estimer l'énergie dissipée est l'énergie cyclique  $E_{cyc}^{(0)}$ . La densité d'énergie dissipée est donnée par

$$\frac{dE_{diss}}{d\Omega} = k \left( \frac{dE_{cyc}^{(0)}}{d\Omega} \right)^\alpha \quad (7.3)$$

L'identification des paramètres  $k$  et  $\alpha$  a été effectuée par une minimisation par les moindres carrés de l'écart entre les prédictions numériques et les valeurs expérimentales de quatre cycles différents en traction

$$\min_{(k,\alpha)} \sum_{4 \text{ essais}} \left[ \frac{\sum_{\text{éléments}} k \left( \frac{dE_{cyc}^{(0)}}{d\Omega} \right)^\alpha d\Omega}{E_{diss \text{ exp}}} - 1 \right]^2 \quad (7.4)$$

L'identification donne  $k = 0.19$  et  $\alpha = 0.93$  et une très bonne estimation de l'énergie dissipée globale (l'erreur ne dépasse pas 5%).

---

limites fixes dans le temps.

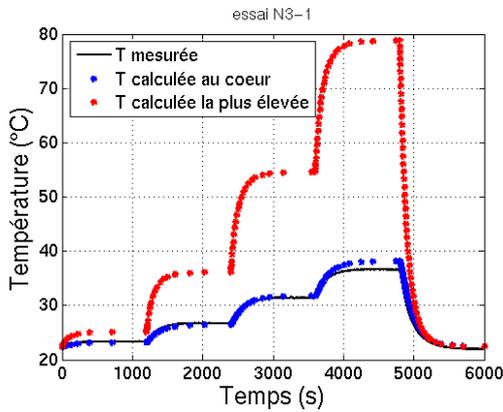


FIGURE 7.33 – Comparaison calcul essai et estimation de la température maximale pour les 4 sinus par blocs successifs en traction.

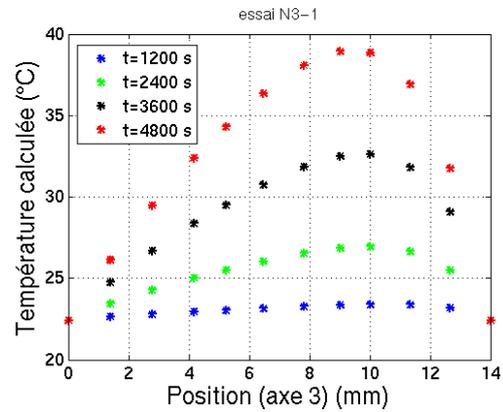


FIGURE 7.34 – Gradient de température dans l'épaisseur de la pièce pour les 4 états stabilisés en traction.

Les conditions aux limites sont les suivantes : température ambiante imposée sur toutes les surfaces en contact (bague intérieure et extérieure) et convection naturelle sur les surfaces libres ( $h = 20 \cdot 10^{-3} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ). Notons que la géométrie de la pièce implique que presque toute l'énergie transmise à l'extérieur l'est par conduction au niveau des bagues de fixation (la convection intervient peu).

### 7.4.3 Loi d'autoéchauffement cyclique en traction

La structure est sollicitée en traction par quatre sinus (fréquence 5 Hz, durée 20 minutes) d'amplitude croissante : -0.65 à 0.55 mm, -1.45 à 1.35 mm, -2.2 à 2.15 mm et -2.85 à 2.85 mm. La puissance dissipée est donc croissante. Une comparaison entre la température mesurée à cœur et celle estimée par la loi d'autoéchauffement cyclique est donnée sur la figure 7.33. Une très bonne corrélation est obtenue. Notons qu'il existe une erreur due à l'implantation du thermocouple. En effet, celui-ci est positionné à  $7 \pm 1$  mm à l'intérieur de la matière et une erreur de  $\pm 2^\circ\text{C}$  est commise (FIG. 7.34).

Notons enfin que la température maximale obtenue par le calcul, proche de  $80^\circ\text{C}$ , est située près des congés à mi-hauteur de la pièce (FIG. 7.35).

Nous pouvons conclure grâce à cet essai (mesure de l'énergie et de la température à cœur en un point) que la loi d'autoéchauffement cyclique permet d'estimer la température pour cette structure soumise à des cycles de traction.

### 7.4.4 Loi d'autoéchauffement cyclique en torsion

La structure est sollicitée en torsion par cinq sinus (fréquence 5 Hz, durée 20 minutes) : 0.85 à 2.9°, 1.65 à 3.3°, -0.1 à 3.5°, -2 à 2° et -3.95 à 3.65°. Une comparaison entre la température mesurée à cœur et celle estimée par un calcul EF est donnée sur la figure 7.36. Une très bonne corrélation est obtenue. L'erreur liée à l'implantation du thermocouple est montrée sur la figure 7.37. Bien que nous n'ayons pas d'informations sur l'énergie dissipée, la loi d'autoéchauffement permet d'estimer la température pour des cycles de torsion.

Notons aussi que la température maximale obtenue par le calcul, proche de  $32^\circ\text{C}$ , est située à cœur à l'extrémité de la pièce (FIG. 7.38 et 7.39). La distribution de température obtenue est très différente de la traction et montre que l'autoéchauffement dépend du type de sollicitation dans le cas multi-D.

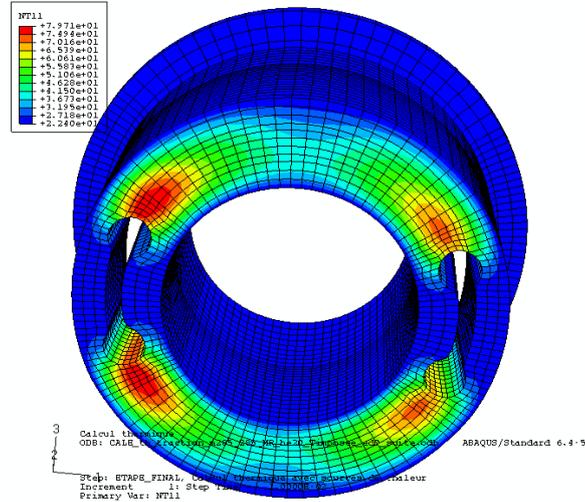


FIGURE 7.35 – Coupe à mi-hauteur de la cale de liaison au sol. La température maximale lors d'une sollicitation en traction se situe près des congés à gauche.

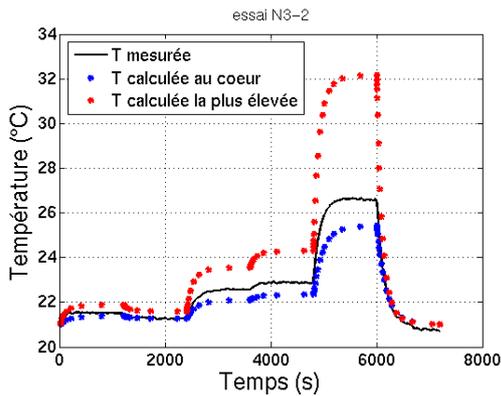


FIGURE 7.36 – Comparaison calcul essai et estimation de la température maximale pour les 5 sinus par blocs successifs en torsion.

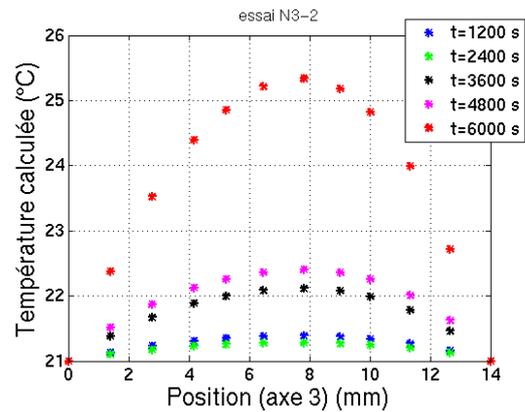


FIGURE 7.37 – Gradient de température dans l'épaisseur de la pièce pour les 5 états stabilisés en torsion.

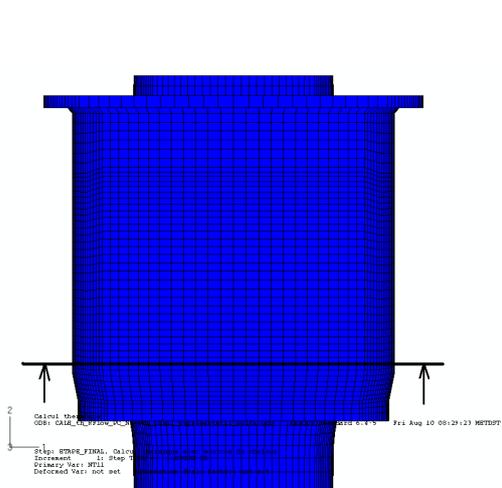


FIGURE 7.38 – Hauteur de la coupe pour la température maximale en torsion.

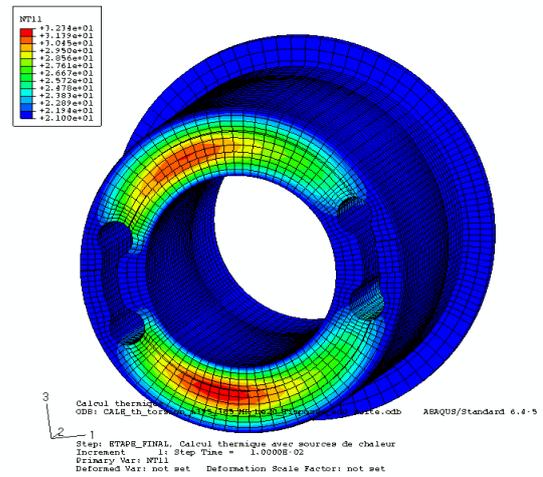


FIGURE 7.39 – Coupe de la cale de liaison au sol. La température maximale lors d’une sollicitation en torsion se situe à cœur.

### 7.4.5 Validation de la loi d’autoéchauffement en traction-torsion

#### a En phase

La structure est sollicitée en traction-torsion en phase, c’est donc une sollicitation uni-dimensionnelle. Trois sinus (fréquence 5 Hz, durée 20 minutes) ont été appliqués : traction -0.6 à 0.55 mm et torsion 0.8 à 2.95°, traction -1.8 à 1.8 mm et torsion -0,1 à 3.5°, traction -2.85 à 2.85 mm et torsion -2 à 2°. Les résultats, toujours calculés avec la loi d’autoéchauffement cyclique, sont présentés sur les figures 7.40 et 7.41. Nous pouvons conclure à la bonne prédiction de la température au point de mesure. La température maximale proche de 85°C est située près d’un congé à mi-hauteur de la pièce.

#### b Hors phase

La structure est sollicitée en traction-torsion hors phase pour cinq chargements. La traction est toujours un sinus de -1.6 à 1.4 mm à 5 Hz, tandis que la torsion va de -2 à 2° avec cinq paliers de fréquences de 1 à 5 Hz (FIG. 7.42). Le dernier palier se compose donc d’une sollicitation en phase.

La méthode de calcul de la puissance dissipée est celle proposée au début de ce chapitre (paragraphe 7.1.2) : la puissance dissipée par chaque axe est calculée indépendamment de l’autre axe, puis les deux répartitions sont sommées pour former le champ de puissance dissipée final. Pour le dernier palier, deux calculs ont été effectués. Le premier par cette méthode, le deuxième avec la loi d’autoéchauffement cyclique uni-dimensionnelle. Les résultats sont présentés sur la figure 7.43.

Nous constatons que la méthode proposée dans le cas multi-dimensionnel permet d’estimer la température pour les cycles de traction-torsion hors phase, mais pas pour les cycles en phase. Pour ce type de cycle, il est nécessaire d’utiliser la méthode de calcul uni-dimensionnelle afin de prendre en compte le couplage entre les axes. Nous montrons ainsi les limites de la méthode multi-dimensionnelle.

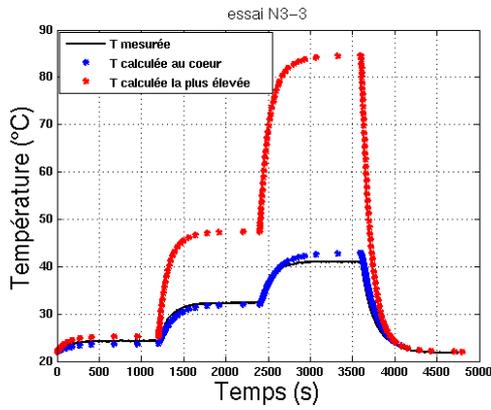


FIGURE 7.40 – Comparaison calcul essai et estimation de la température maximale pour les 3 sinus par blocs successifs en traction-torsion.

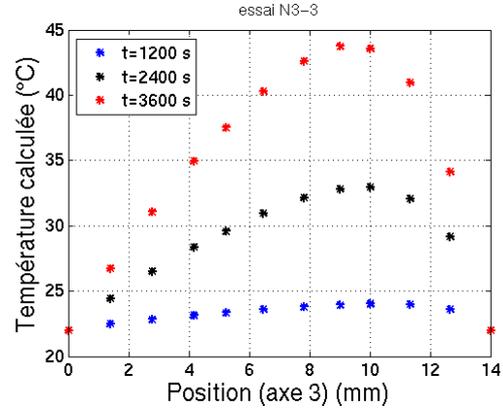


FIGURE 7.41 – Gradient de température dans l'épaisseur de la pièce pour les 3 états stabilisés en traction-torsion.

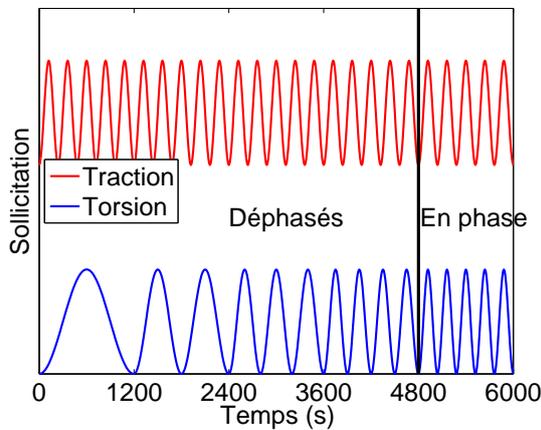


FIGURE 7.42 – Représentation des quatre sinus par blocs successifs en traction-torsion hors phase et du dernier bloc en traction-torsion en phase.

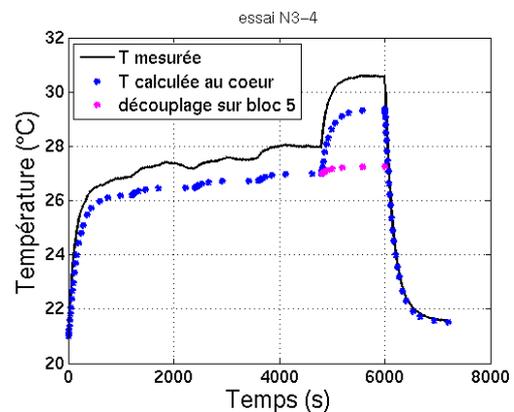


FIGURE 7.43 – Comparaison calcul essai et estimation de la température maximale pour les quatre sinus par blocs successifs en traction-torsion hors phase et le dernier bloc en traction-torsion en phase. La température estimée sans prendre en compte le couplage du dernier bloc est en magenta.

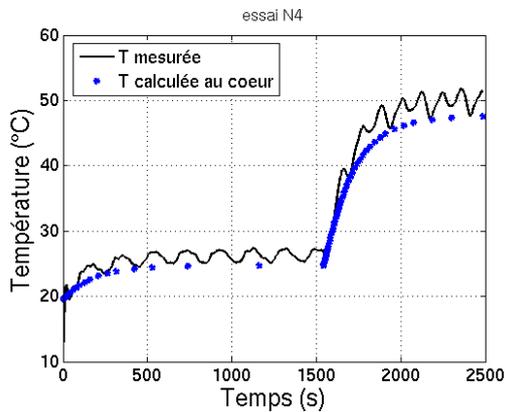


FIGURE 7.44 – Comparaison calcul essai pour le signal piste sévéré.

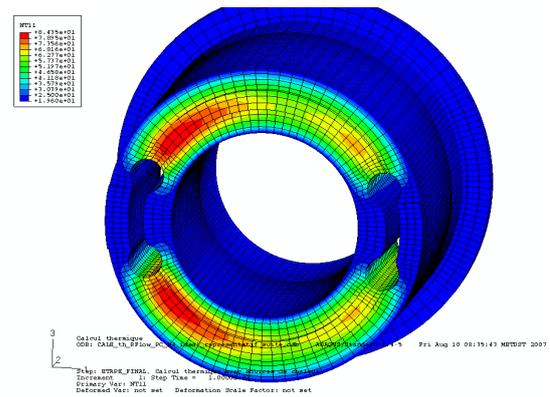


FIGURE 7.45 – Température maximale de la structure lors du signal piste S3 (coupe à un tiers de la hauteur).

#### 7.4.6 Validation de la loi d'autoéchauffement pour un signal variable multi-D

Nous présentons ici l'application la plus intéressante sur la cale de liaison au sol : le calcul de l'autoéchauffement pour un signal piste. Nous appliquons ici la loi d'autoéchauffement simplifiée dans le cas multi-dimensionnel (paragraphe 7.1.2). Nous présentons les résultats pour le signal piste sévéré. Ce signal provient directement de mesures sur circuit mais l'angle a été multiplié par 2.75. En effet, cette multiplication permet d'obtenir une bonne répartition entre l'énergie dissipée par la traction (environ 55%) et la torsion (environ 45%). Ainsi travaillons-nous sur un essai "vraiment" bi-dimensionnel.

La sollicitation est la suivante : 8 S2 + 4 S3. Des signaux simplifiés ont été calculés séparément pour les deux signaux S2 et S3 car le S3 est beaucoup plus énergétique. Nous constatons sur la figure 7.44 que la méthode proposée permet l'estimation de l'autoéchauffement pour les deux signaux. La température maximale est atteinte pour le S3 et vaut 85°C (FIG. 7.45). Plusieurs signaux simplifiés ont été testés (amplitudes des essais de traction et torsion seule) et l'autoéchauffement est toujours estimé avec une erreur ne dépassant pas 15%.

### 7.5 Conclusions

Nous avons proposé des lois d'autoéchauffement simplifiées pour des signaux variables 1-D et multi-D. Ces lois sont fondées sur la puissance dissipée globale et sont donc une approximation pour l'autoéchauffement. Un comptage Rainflow global des cycles et une estimation globale de l'énergie dissipée par cycle permet d'obtenir un signal simplifié, défini par une sollicitation mécanique et une fréquence. Pour les signaux multi-D, un signal est calculé pour chaque axe indépendamment des autres axes.

Afin de valider les lois d'autoéchauffement, de nombreux essais ont été réalisés pour cette thèse. Les essais sur AE42 et sur la suspente d'échappement ont permis de valider le calcul d'autoéchauffement sous les hypothèses cycliques et variables. La loi d'autoéchauffement simplifiée 1-D a aussi été validée sur des signaux réels appliqués à l'AE42. Nous avons conclu que nous pouvions estimer l'autoéchauffement dans le cas 1-D avec une erreur de  $\pm 15\%$ .

La dernière application présentée dans ce chapitre concerne une cale de liaison au sol, sollicitée

sur deux axes. Dans un premier temps, nous avons identifié la loi de dissipation en estimant très précisément l'énergie dissipée pour des cycles de traction. Puis, de nombreux essais en traction, torsion et traction-torsion ont permis de valider la loi d'autoéchauffement dans le cas cyclique. Dans le cas d'un chargement bi-dimensionnel, nous avons validé l'hypothèse de calcul de l'énergie dissipée axe par axe indépendamment des autres axes. Nous avons aussi mis en évidence l'importance de la prise en compte du couplage entre les axes. Finalement, la loi d'autoéchauffement simplifiée pour un signal variable multi-D a été appliquée et validée pour le calcul d'autoéchauffement d'un signal piste. Cette méthode permet de calculer l'élévation de température avec une erreur de 15% .

Ce chapitre valide les méthodes proposées pour calculer l'autoéchauffement et met en évidence l'intérêt de ce type de calcul. En effet, nous avons montré que l'autoéchauffement mesuré à cœur des bras d'une articulation de train arrière n'est pas du tout représentatif de l'autoéchauffement maximal. La température maximale se situe dans des zones très sollicitées mécaniquement pour cette structure. Cet exemple sera d'ailleurs repris dans la partie fatigue de ce mémoire.

**Quatrième partie**

**Fatigue thermomécanique**



## Chapitre 8

# Introduction au phénomène de fatigue des élastomères

*Ce chapitre propose un état de l'art de la fatigue des élastomères. Nous décrivons les mécanismes de fatigue afin de motiver physiquement les modèles présentés au prochain chapitre.*

### Sommaire

<b>7.1</b>	<b>Loi d'autoéchauffement simplifiée dans le cas variable</b> . . . . .	<b>138</b>
7.1.1	Loi d'autoéchauffement simplifiée pour une sollicitation 1-D . . . . .	138
7.1.2	Loi d'autoéchauffement simplifiée pour une sollicitation multi-D . . . . .	140
<b>7.2</b>	<b>Validation de la loi d'autoéchauffement cyclique dans le cas 1-D</b> . . . . .	<b>141</b>
7.2.1	Essais d'autoéchauffement sur AE42 . . . . .	141
7.2.2	Essais d'autoéchauffement sur une suspente d'échappement . . . . .	141
<b>7.3</b>	<b>Validation de la loi d'autoéchauffement variable dans le cas 1-D</b> . . . . .	<b>147</b>
7.3.1	Essais d'autoéchauffement sur AE42 . . . . .	147
7.3.2	Essais d'autoéchauffement sur une suspente d'échappement . . . . .	149
<b>7.4</b>	<b>Validation des loi d'autoéchauffement dans le cas multi-D</b> . . . . .	<b>149</b>
7.4.1	Présentation des essais sur une articulation de train arrière . . . . .	149
7.4.2	Estimation des paramètres de la loi d'autoéchauffement . . . . .	150
7.4.3	Loi d'autoéchauffement cyclique en traction . . . . .	151
7.4.4	Loi d'autoéchauffement cyclique en torsion . . . . .	151
7.4.5	Validation de la loi d'autoéchauffement en traction-torsion . . . . .	153
7.4.6	Validation de la loi d'autoéchauffement pour un signal variable multi-D . . . . .	155
<b>7.5</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>155</b>

Une structure mécanique soumise à des sollicitations cycliques ou variables peut rompre au bout d'un certain temps. Ce phénomène de fatigue apparaît même lorsque la structure ne montre pas de signes de dégradations macroscopiques (phénomènes plastiques ou autres). La première étude en fatigue a été effectuée dans le domaine ferroviaire par Wöhler en 1860 avec des essais de flexion alternée sur des essieux. Les courbes donnant le nombre de cycles  $N$  à la rupture en fonction de la contrainte maximale  $S$  portent ainsi le nom du premier à les avoir tracées.

Le phénomène de fatigue peut se scinder en deux domaines : la fatigue à faible nombre de cycles (LCF pour Low Cycle Fatigue) ou la fatigue à grand nombre de cycles (HCF pour High Cycle Fatigue). La séparation entre ces deux domaines dépend essentiellement des applications visées et des matériaux utilisés mais se situe autour de  $10^4$  cycles. Ainsi, la fatigue à faible nombre de cycles sera caractérisée pour les métaux par l'apparition de phénomènes irréversibles tels que la plasticité ou la viscosité (fatigue oligocyclique). La fatigue à grand nombre de cycles se scinde aussi en deux parties : le domaine de l'endurance limitée où le chargement conduira à la ruine de la structure, et le domaine de l'endurance illimitée où le chargement mécanique ne conduira jamais à la ruine. Notons que l'existence de ce dernier domaine n'est pas toujours prouvée.

Comme pour les métaux, le processus de rupture par fatigue des élastomères est généralement décrit par deux phases : une phase d'amorçage d'une fissure suivie par une phase de propagation de la fissure. Deux approches coexistent donc : l'approche par amorçage de fissure et l'approche par propagation. L'approche par propagation se fonde sur la mécanique de la rupture afin de déterminer la vitesse de propagation d'une fissure. Cette approche se heurte à plusieurs obstacles. D'abord elle suppose l'existence d'une fissure qui doit être donnée par l'approche en amorçage. Ensuite, le lieu, la géométrie, l'orientation de cette fissure doivent être connus. La principale difficulté lors d'un calcul de structure consiste en la représentation de cette fissure. Si les méthodes de remaillage s'adaptant à la géométrie de la fissure ne sont pas applicables d'un point de vue industriel, l'approche par la méthode des éléments finis étendus (Legrain, 2006) permet de s'affranchir du remaillage en enrichissant les éléments avec des fonctions de forme permettant de représenter une fissure. Cette méthode s'avère prometteuse mais n'est pas encore industrialisée.

L'approche par amorçage de fissure se fonde sur la mécanique des milieux continus pour déterminer les conditions d'amorçage d'une fissure. Cette approche nécessite une définition de l'amorçage d'une fissure. L'approche par propagation enrichit cette approche en reliant par exemple le nombre de cycles nécessaire à l'apparition d'une fissure de taille déterminée à la taille des défauts existant dans le matériau.

C'est pourquoi dans une première partie nous rappelons les lignes directrices de l'approche par propagation, puis dans une deuxième partie nous développons l'approche par amorçage. La troisième partie présente le renforcement en traction-traction, et la dernière partie est consacrée à l'étude de l'influence de la température pour le phénomène de fatigue des élastomères.

## 8.1 Approche par propagation de fissure

L'approche par propagation suppose l'existence d'une fissure dans la structure et a pour but de déterminer la vitesse de propagation de cette fissure. Griffith (1920) propose un critère de propagation de fissure en effectuant un bilan d'énergie associant l'énergie potentielle de la structure fissurée et l'énergie de surface créée par l'avancée de la fissure.

### 8.1.1 Taux de restitution d'énergie

Dans le cas d'un matériau élastique, la fissure qui se propage est la seule source de dissipation<sup>1</sup>. Un bilan d'énergie donne :

$$\partial U_{ext} = \partial U_{elas} + \partial U_d + \partial U_K \quad (8.1)$$

où  $\partial U_{ext}$ ,  $\partial U_{elas}$ ,  $\partial U_d$  et  $\partial U_K$  sont les quantités d'énergie apportée, stockée, dissipée et variation d'énergie cinétique. La variation d'énergie potentielle du système en présence d'une fissure de surface

1. Ce sujet est exposé clairement dans la thèse de Martin Borret (1998). Nous reprenons en partie son analyse.

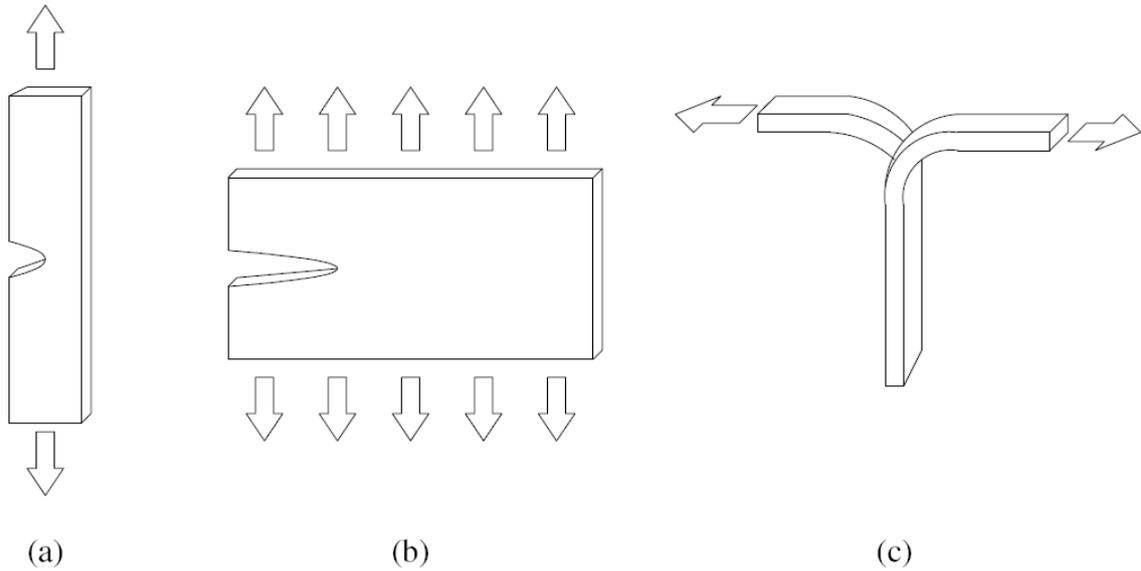


FIGURE 8.1 – Éprouvettes plates classiquement utilisées pour les études de propagation de fissure : (a) éprouvette lanière ; (b) éprouvette de cisaillement pur ; (c) éprouvette pantalon. Il existe pour ces éprouvettes une expression analytique de l'énergie de déchirement.

A définit le taux de restitution d'énergie  $G$  (Griffith, 1920) :

$$G = \frac{\partial U_d}{\partial A} + \frac{\partial U_K}{\partial A} \quad (8.2)$$

Le critère de propagation de fissure est  $G > \frac{\partial U_K}{\partial A}$ .

Dans le cas d'un matériau dissipatif (plasticité et/ou viscosité par exemple), d'autres phénomènes dissipatifs se rajoutent à l'avancée de la fissure. L'approche précédente n'est plus valide mais peut être étendue sous l'hypothèse que les autres phénomènes dissipatifs restent localisés autour de la fissure. Le bilan d'énergie donne :

$$\partial U_{ext} = \partial U_{elas} + \partial U_d + \partial U_f + \partial U_K \quad (8.3)$$

où  $\partial U_f$  est le terme de dissipation locale. Le taux de restitution modifié se définit comme :

$$J = \frac{\partial U_d}{\partial A} + \frac{\partial U_f}{\partial A} + \frac{\partial U_K}{\partial A} \quad (8.4)$$

L'extension aux élastomères de la théorie de Griffith (1920) est l'œuvre de Rivlin et Thomas (1953) qui développèrent des solutions permettant de quantifier l'énergie de déchirement

$$T = -\frac{dU}{dA} \quad (8.5)$$

qui n'est autre que le taux de restitution de l'énergie. Les géométries des éprouvettes couramment utilisées sont représentées sur la figure 8.1. Dans le cas d'un chargement statique, les mêmes auteurs ont montré qu'une fissure ne se propageait pas en dessous d'une valeur critique de l'énergie de déchirement  $T_c$ . Cette approche a été étendue au cas des chargements dynamiques par Thomas (1958) : la

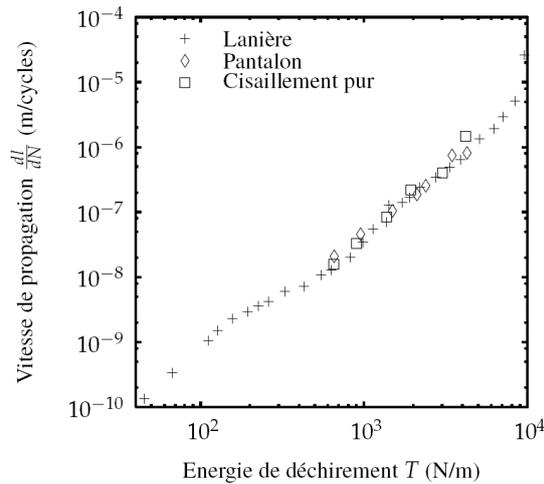


FIGURE 8.2 – Vitesse de propagation d’une fissure en fonction de l’énergie de déchirement  $T$  pour différentes éprouvettes de caoutchouc naturel. Essais publiés par [Gent et al. \(1964\)](#).

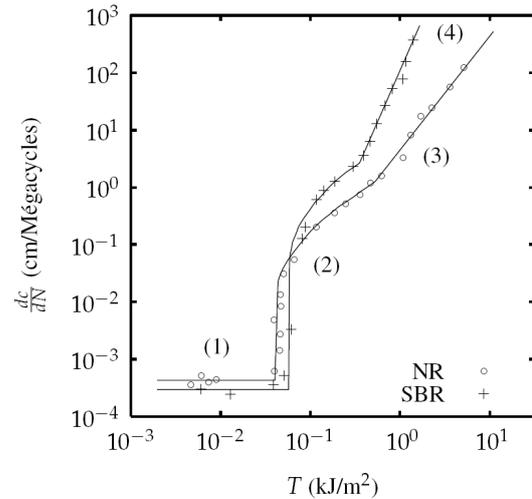


FIGURE 8.3 – Les quatre régimes de propagation d’une fissure en fonction de l’énergie de déchirement  $T$  dans une éprouvette lanière en caoutchouc naturel (NR) ou synthétique (SBR). Essais publiés par [Lake \(1995\)](#).

vitesse de propagation des fissures est régie par le maximum d’énergie de déchirement atteint au cours d’un cycle de fatigue ([Gent et al., 1964](#)) indépendamment de la géométrie de l’éprouvette utilisée et donc du type de sollicitation (FIG. 8.2).

[Lake et Lindley \(1965\)](#) identifient quatre régimes distincts de propagation de fissure (FIG. 8.3) pour des cycles de chargement à rapport de charge nul :

1.  $T < T_0$ ,  $\frac{da}{dN} = r$  : la propagation est seulement due aux attaques chimiques. Ce seuil correspondrait à une limite d’endurance mécanique du matériau ;
2.  $T_0 < T < T_t$ ,  $\frac{da}{dN} = A(T - T_0) + r$  : la vitesse de propagation est linéaire de l’énergie de déchirement ;
3.  $T_t < T < T_c$ ,  $\frac{da}{dN} = BT^C$  : la vitesse de propagation varie selon une loi puissance ;
4.  $T = T_0$ ,  $\frac{da}{dN} = \infty$  : la rupture est brutale.

## 8.1.2 Description de la propagation

### a Steady tearing, stick-slip et knotty-tearing

[Greensmith et Thomas \(1955\)](#) puis [Greensmith \(1956\)](#) ont observé trois types de propagation monotone :

- **le steady-tearing** : la force de déchirement et la vitesse de propagation restent constantes pendant l’essai, comme représenté sur la figure 8.4. La propagation est rectiligne et stationnaire. Les faciès de rupture sont lisses.
- **le stick-slip** : la propagation est saccadée comme en témoigne l’évolution de la force sur la figure 8.4. La vitesse de propagation ne peut pas être imposée. La force appliquée oscille entre une valeur maximale atteinte lentement après un point d’arrêt et une valeur minimale atteinte rapidement. Les faciès de rupture sont irréguliers.

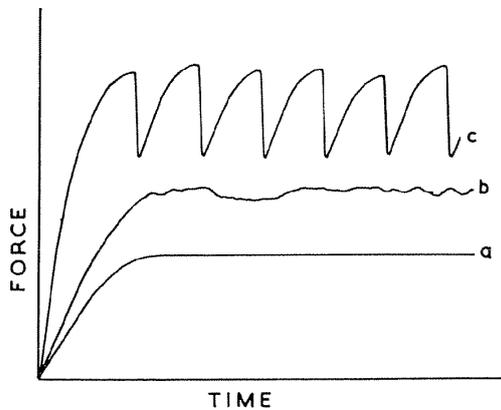


FIGURE 8.4 – Évolution de la force au cours d'un essai pour le steady tearing (a et b) et le stick-slip (c) (Greensmith et Thomas, 1955).

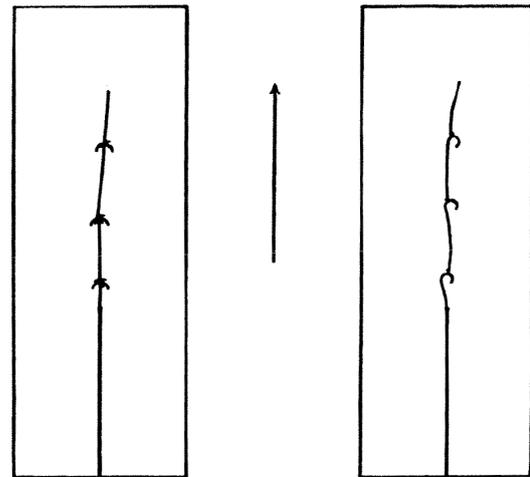


FIGURE 8.5 – Représentation de la propagation d'une fissure pour le knotty-tearing (Greensmith, 1956).

- **le knotty-tearing** : la propagation est de type stick-slip mais avec un développement de fissures secondaires dans la direction de traction, perpendiculairement à l'avancement de la fissure comme présenté sur la figure 8.5.

## b Interprétations de ces phénomènes

Ces phénomènes sont importants car ils sont liés à la notion de renforcement, c'est-à-dire à l'amélioration des propriétés mécaniques. Plus particulièrement, nous nous intéressons à la résistance à la rupture et à la propagation.

La plupart des auteurs attribuent les phénomènes de stick-slip et de knotty-tearing à la présence de charges dans un matériau ou au caractère cristallisable de la matrice. Ces remarques sont en contradiction avec les observations de Greensmith et Thomas (1955) et Greensmith (1956) de knotty-tearing sur des caoutchoucs synthétiques non-chargés. Nous proposons une analyse de la bibliographie afin de déterminer les mécanismes de propagation et de comprendre les zones d'ombre.

### L'approche numérique

[Gent et al. \(1998\)](#) proposent de calculer numériquement le taux de restitution d'énergie pour deux géométries de fissures. La première est une fissure perpendiculaire à la direction de traction se propageant le long de son axe. La deuxième est toujours une fissure perpendiculaire à la direction de traction mais qui cette fois va bifurquer et se propager le long de la direction de traction. Ce dernier cas est représentatif de la rotation de fissure. Les auteurs concluent que le taux de restitution d'énergie est plus faible dans le second cas

### Knotty-tearing et noir de carbone

[De et Gent \(1996\)](#) observent le knotty-tearing sur des matériaux cristallisables et non-cristallisables chargés au noir de carbone. Selon les auteurs, la présence de noirs de carbone est indispensable à l'observation de knotty-tearing qui serait dû à un alignement des particules ou agrégats de noirs de carbone au fond de la fissure. Cet alignement créerait une forte anisotropie et obligerait la fissure à dévier. Ce sont les propriétés d'interaction charge-matrice (taux de vulcanisation, surface spécifique des noirs de carbone, mobilité des chaînes avec la température) qui détermineraient les conditions favorables au knotty-tearing. Entre autres, le caractère cristallisable n'est pas une condition nécessaire pour observer du knotty-tearing.

### Bifurcation de fissure et cristallisation

Une description très précise des trajets de fissures de propagation est donnée par [Hamed et al. \(1996\)](#) pour trois élastomères chargés : un NR, un BR et un composite 50/50 de NR/BR. Deux types de propagation sont observés. Pour le NR et le NR/BR, il y a création de fissures secondaires parallèlement à la direction de traction. Ces fissures secondaires ont tendance à bifurquer et à s'arrêter, jusqu'à ce que l'une d'entre elle entraîne la rupture de l'éprouvette : nous sommes en présence de knotty-tearing. Pour le BR, il n'y a pas de création de fissures secondaires mais seulement la propagation en biais de la fissure initiale. Cette propagation irrégulière est comparable au stick-slip. Les auteurs expliquent cette différence par la cristallisation. En effet, le BR cristallise moins que le NR et l'anisotropie créée en fond de fissure ne serait pas suffisante pour créer des fissures secondaires. Ainsi la cristallisation aurait-elle un effet bénéfique sur le knotty-tearing.

L'influence de la cristallisation sur le renforcement est aussi montrée par [Hamed et Park \(1999\)](#). Des essais de propagation sur SBR chargé et non-chargé indiquent une propagation presque rectiligne et l'inexistence de fissures secondaires (steady tearing). Pareilles observations sont faites pour un NR non chargé : la cristallisation en fond de fissure n'est pas suffisante pour faire bifurquer la fissure. Une seconde observation est relevée : la taille de la fissure initiale influence grandement la contrainte à rupture de ce matériau. En effet, une valeur critique de taille de fissure  $c_{cr}$  est exhibée : passée cette taille de fissure, la contrainte à rupture est divisée d'un facteur 10 environ. Ce fait est imputé à la cristallisation sous contrainte. Les auteurs reprennent les conclusions de [Thomas et Whittle \(1970\)](#) concernant la cristallisation dans le volume de l'éprouvette et non juste en fond fissure. Cette cristallisation existerait pour une taille de fissure n'excédant pas  $c_{cr}$  et éviterait une propagation brutale. Ce fait est aussi constaté pour du NR chargé. De plus, de très nombreuses fissures secondaires et une déviation importante de la fissure est constatée pour  $c < c_{cr}$ , alors que les bifurcations sont moins nombreuses et la déviation plus faible pour  $c > c_{cr}$ .

## c Discussion

Nous proposons une synthèse des observations et des conclusions associées. Dans ce paragraphe, le renforcement est associé à une augmentation de la résistance d'un matériau à la propagation. Ainsi,

le knotty-tearing est-il signe de renforcement puisqu'il ralentit la propagation en faisant bifurquer la fissure. Nous détaillons le rôle du noir de carbone et de la cristallisation sous contrainte les phénomènes de renforcement et de knotty-tearing :

- le renforcement est observé pour des matériaux cristallisables non chargés : la cristallisation sous contrainte en fond de fissure et dans le volume ralentiraient la propagation sans changer le mode de celle-ci ;
- la déviation d'une fissure est liée à la présence de charge de noir de carbone : celles-ci s'aligneraient en fond de fissures créant une forte anisotropie locale et obligeant la fissure à tourner ;
- l'existence de fissures secondaires de bifurcation est liée à la présence de charge de noir de carbone dans un matériau cristallisable : la présence de charge accentue la cristallisation (l'amplification locale des déformations permet une cristallisation sous des déformations moins importantes et les charges seraient des zones de nucléation). La cristallisation ajoutée à l'alignement des charges créent une très forte anisotropie locale menant à la création de fissures secondaires et parfois à une très forte déviation des fissures.

Toutes ces observations doivent être nuancées par la grande variété des matériaux étudiés dans la littérature. En effet, toutes ces observations sont dépendantes de la formulation du matériau, mais aussi des conditions expérimentales (température, vitesse). Nous dégagons seulement une tendance générale, mais pas de conclusions définitives.

## 8.2 Description d'un fond de fissure

### 8.2.1 Mesures de la cristallinité

L'existence d'une zone cristalline en fond de fissure est avérée par [Lee et Donovan \(1987\)](#) pour du caoutchouc naturel. Les auteurs montrent que le taux de cristallisation et la taille de la zone cristalline augmentent avec le taux de noir de carbone. [Trabelsi et al. \(2002\)](#) confirment les observations de [Lee et Donovan](#) et montrent que la cristallisation en fond de fissure débute pour une déformation globale de 30%.

### 8.2.2 Observations au MEB

Grâce à des expériences de micro-découpe du front de fissure suivie par microscopie électronique, [Le Cam \(2005\)](#) propose un mécanisme de propagation de fissure pour le NR. Ce mécanisme est représenté sur les figures <sup>2</sup> 8.6 et 8.7. De nombreuses cavités issues de la décohésion des oxydes avec la matrice sont présentes en front de fissure (FIG. 8.7 (a)). Lorsque la fissure est ouverte, le front de fissure est étiré et se compose de surfaces elliptiques lisses séparées par des ligaments sur les côtés. Des arrachements sont présents en haut et en bas. Des cavités sont présentes derrière ces membranes elliptiques (FIG. 8.6 (b) et 8.7 (a)). Ces membranes rompent et révèlent ainsi les cavités, qui vont se propager perpendiculairement à la direction de sollicitation (FIG. 8.6 (c) et 8.7 (b)). Ces nouvelles cavités coalescent entre elles (FIG. 8.7 (c)). Des ligaments sont ainsi formés (FIG. 8.7 (d)) et leur rupture par les cycles de fatigue conduit à la création d'arrachements. Ces ligaments sont très certainement des zones propices à la cristallisation sous contrainte ([Lee et Donovan, 1987](#); [Saintier, 2001](#); [Trabelsi et al., 2002](#)) ce qui expliquerait le renforcement du matériau sous chargements relaxant et non-relaxant.

2. La chronologie de ces deux figures est différente.

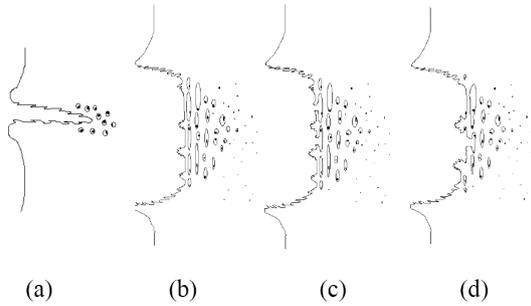


FIGURE 8.6 – Mécanisme de propagation de fissure : vue de côté (Le Cam, 2005). La direction de traction est verticale.

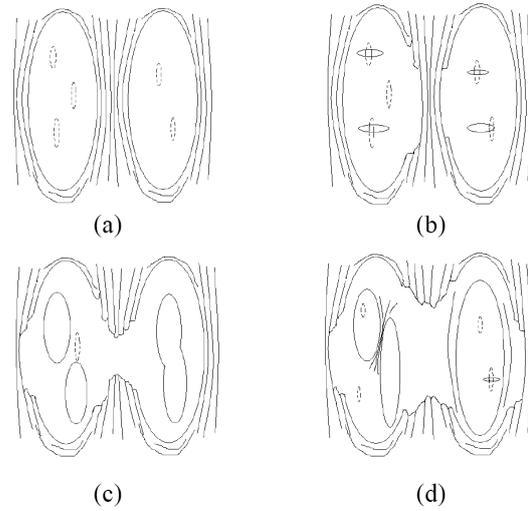


FIGURE 8.7 – Mécanisme de propagation de fissure : vue de face (Le Cam, 2005).

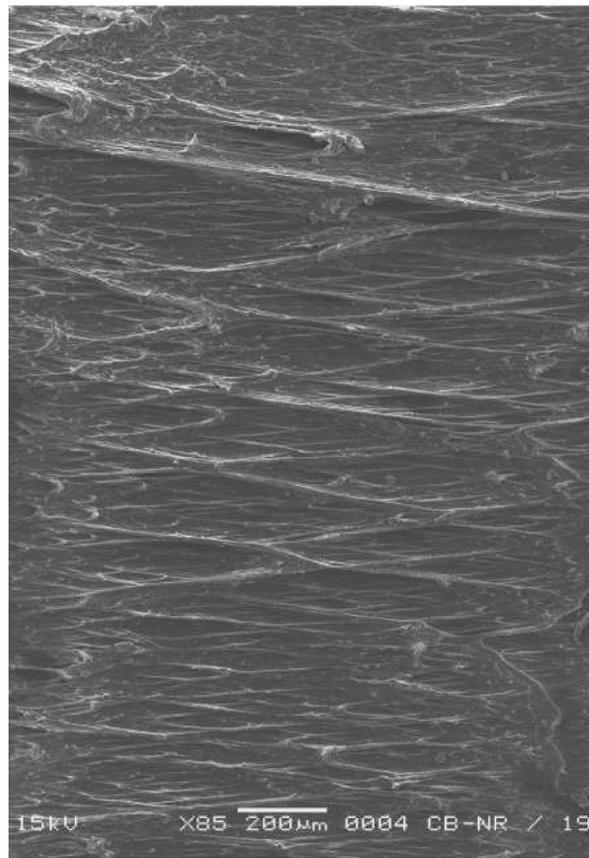


FIGURE 8.8 – Exemple de fond de fissure (Beurrot, 2007). La direction de traction est horizontale.

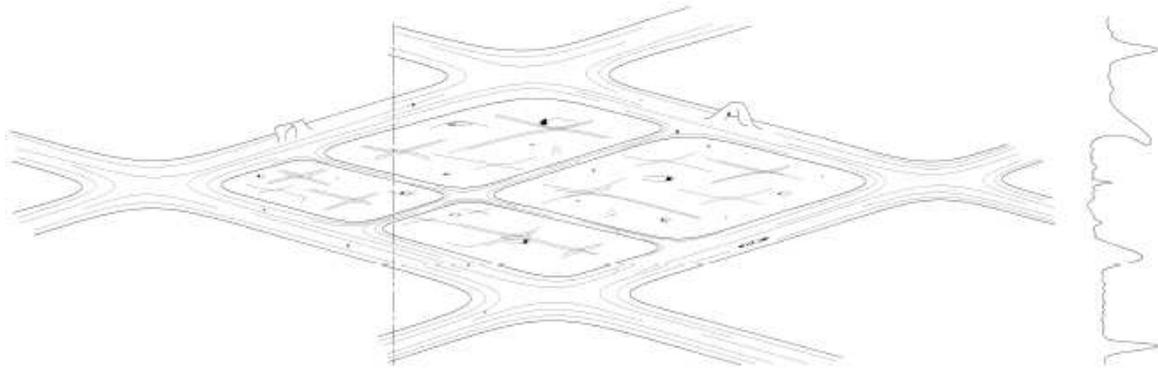


FIGURE 8.9 – Schéma de fond de fissure ouverte, vue de face (direction de traction horizontale) et coupe (Beurrot, 2007).

Le mécanisme proposé par Le Cam a récemment été mis en défaut par Beurrot (2007). L'auteur montre qu'il n'existe pas de cavités présentes derrière les membranes elliptiques. En effet, ces cavités étaient probablement créées par une trop grande intensité du faisceau d'électrons du MEB. Beurrot observe les mêmes éléments caractéristiques dans le fond de fissure d'un NR chargé (045) (FIG. 8.8 et 8.9) :

- un réseau de ligaments orientés dans deux directions (d'où des formes en losange). Ces ligaments sont supposés être des zones cristallines. Ce sont principalement eux qui résistent à la traction et à l'avancée de la fissure. Certains de ces ligaments semblent continuer dans la profondeur du fond de fissure formant ainsi des nappes de matière cristallisée. En effet, pour certains ligaments, leur rupture révèle de la matière cristallisée qui va former de nouveau un ligament.
- des zones en losange sont formées entre les ligaments. Ce sont des zones lisses constituées de matière amorphe qui sont plus profondes que les ligaments.
- de nombreuses inclusions sont présentes sur le fond de fissure. Ces inclusions fragilisent le fond de fissure mais ne changent pas le mécanisme de propagation.

L'auteur propose un mécanisme de propagation (FIG. 8.10) fondé sur la croissance des zones lisses sous l'effet de la déformation. Les ligaments subissent une contrainte plus importante et leur section diminue, amenant certains à la rupture. Le réseau de ligaments s'adapte en quelques cycles à cette nouvelle distribution de contrainte. Notons que ce mécanisme est lent (quelques dizaines de cycles). Enfin, le fond de fissure est diffus, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de ligne de propagation : tout le fond de fissure avance de façon hétérogène mais continue. D'ailleurs, l'auteur montre que le phénomène de ramification (existence de fissures secondaires) s'explique par des différences de vitesse de propagation dans le fond de fissure. Les zones lisses ne sont pas toutes dans le même plan à l'état déformé et forment ainsi des ramifications lorsque la fissure est fermée (FIG. 8.11). Les arrachements présents sur les faciès de rupture seraient selon l'auteur des feuillettes créés par cette ramification.

Des observations sur un SBR chargé ont montré des différences significatives. Le front de fissure est linéaire et la ligne de déchirement forme un axe de symétrie : les cavités ne croissent qu'une fois sur la ligne de déchirement et cette dernière les coupent en deux parties, créant ainsi la symétrie du fond de fissure. Des filaments sont également observés mais ils ne jouent pas de rôle dans le mécanisme

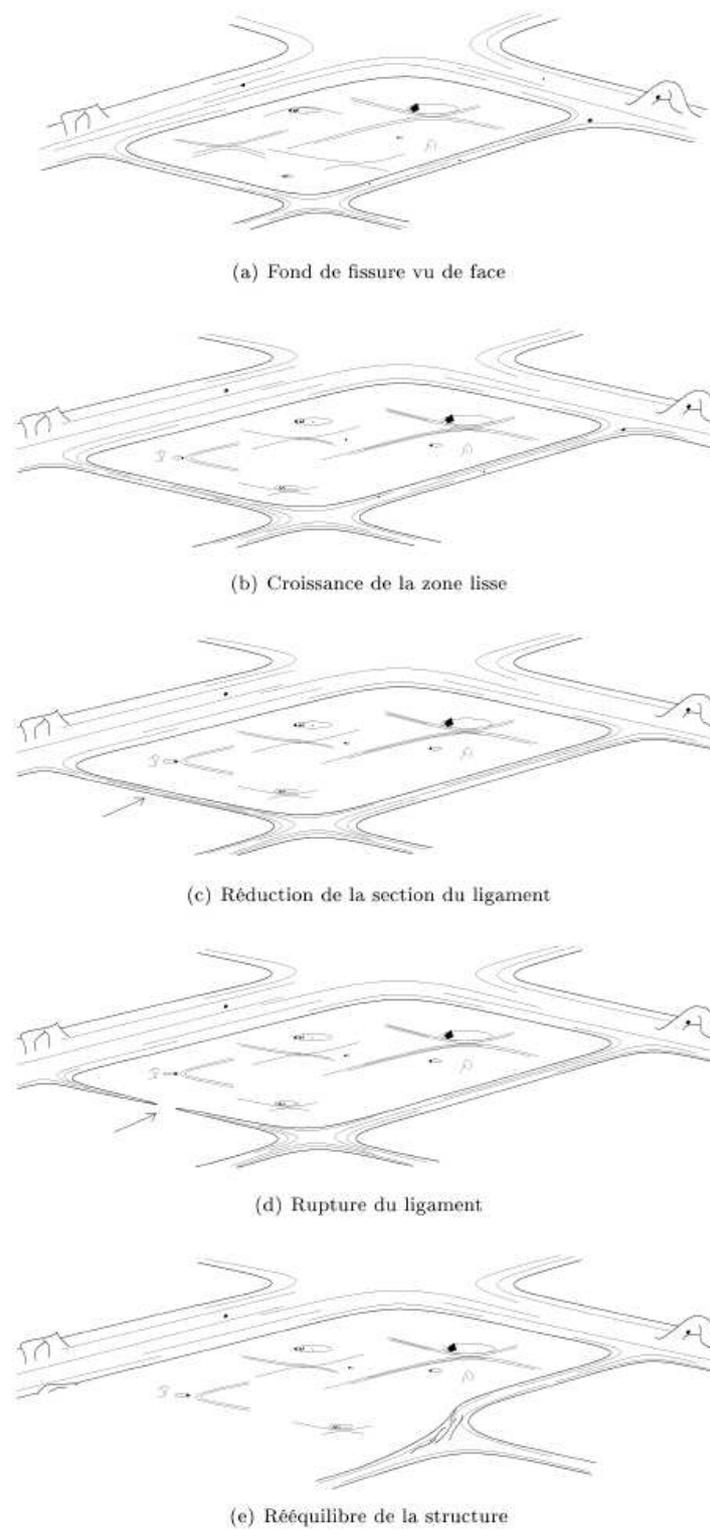


FIGURE 8.10 – Mécanisme de propagation proposé par [Beurrot \(2007\)](#).

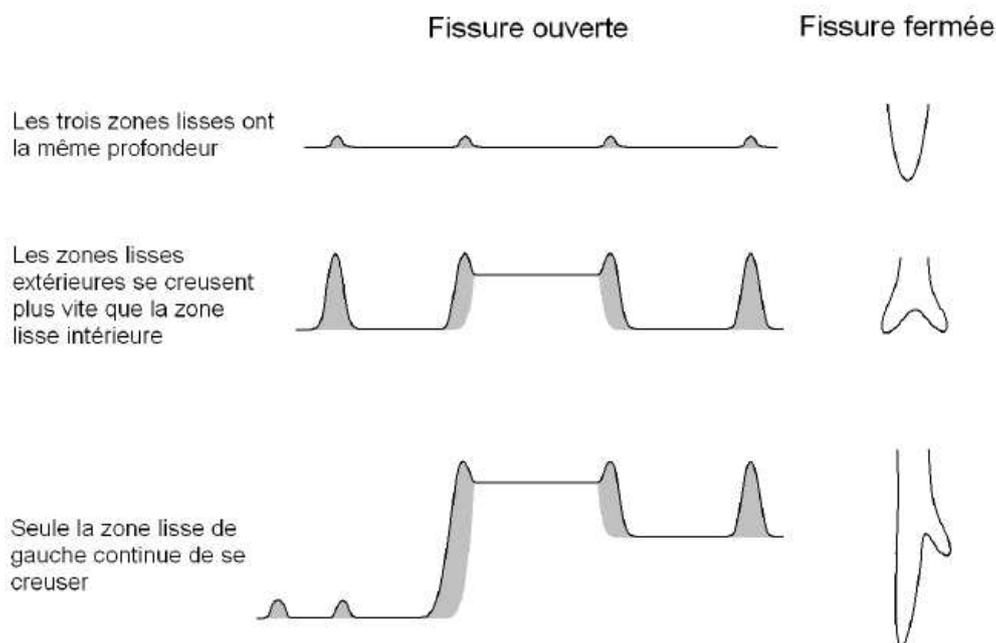


FIGURE 8.11 – Mécanisme de formation des branches secondaires proposé par Beurrot (2007). La direction de traction est horizontale.

de propagation car ils sont très peu résistants. Ces filaments auraient pour origine des hétérogénéités locales (vulcanisation, répartition du noir de carbone). Enfin, l'évolution du fond de fissure est très rapide (une dizaine de cycle) ce qui est cohérent avec les propriétés d'un SBR, moins résistant en propagation qu'un NR.

### Discussion

Les études portant sur la description d'un fond de fissure et des mécanismes de propagation apportent une connaissance très fine de la propagation dans un élastomère. Pour un matériau cristallisable, la cristallisation induite par déformation en fond de fissure joue un rôle essentiel. En effet, des ligaments cristallisés forment une structure très fortement anisotrope en fond de fissure, qui freine l'avancée de la fissure. En effet, pour un matériau non-cristallisable, cette structure n'existe pas et la fissure avance plus rapidement. De plus, la propagation de la fissure étant diffuse sur tout le fond de fissure, des hétérogénéités apparaissent dans l'avancement de la fissure créant ainsi les ramifications, caractéristiques d'un matériau cristallisable.

## 8.3 Approche par amorçage de fissure

La durée de vie d'une structure est définie comme le nombre de cycles nécessaire à l'apparition d'une fissure d'une taille déterminée. Classiquement, la durée de vie est déterminée par l'histoire d'un certain nombre de variables mécaniques locales, comme les contraintes, les déformations ou l'énergie élastique. Cadwell et al. (1940) sont ainsi les premiers à s'intéresser à l'amorçage d'une fissure dans un caoutchouc.

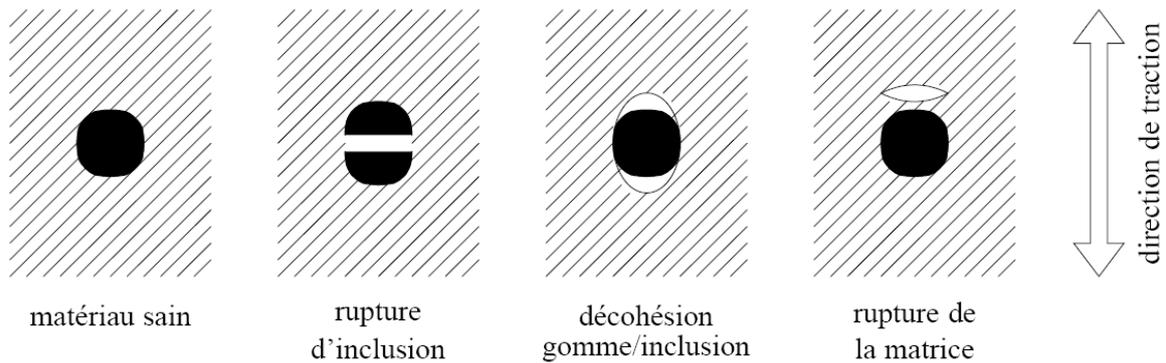


FIGURE 8.12 – Mécanismes d'endommagement à proximité d'une inclusion (développés par [Saintier \(2001\)](#); [Robisson \(2000\)](#)).

Afin de discuter des différentes modélisations proposées par la littérature, nous développons au début de cette section les mécanismes de fatigue.

### 8.3.1 Description des mécanismes d'endommagement par fatigue

#### a Amorçage-nucléation d'une micro-fissure

Il est communément admis dans la littérature que l'amorçage d'une fissure est localisé dans une zone d'inhomogénéité jouant le rôle de concentrateur de contraintes. [Beatty \(1964\)](#) recense par exemple des particules de pigments, des corps étrangers, des polymères en gel, des zones se différenciant par leur taux de vulcanisation ou des agglomérats de charges normalement dispersées dans la matrice comme créant ces zones d'inhomogénéité. Le développement de la microscopie électronique a permis récemment d'étayer ces informations ([Robisson, 2000](#); [Saintier, 2001](#); [Le Cam, 2005](#)).

Les deux premiers travaux identifient trois types d'endommagement sous chargement monotone, tous liés à la présence d'une inclusion (talc, oxydes, agglomérats de noirs de carbone). Ils sont illustrés sur la figure 8.12 :

1. la rupture brutale d'une inclusion apparaît perpendiculairement à la direction de traction pour une déformation macroscopique de l'ordre de 20%. La fissure se propage dans la matrice lorsque la limite de déchirabilité de celle-ci est atteinte ;
2. l'inclusion se désolidarise de la matrice. Cette décohésion est localisée aux pôles de l'inclusion et conduit à l'amorçage de fissures dans la matrice à partir d'une déformation macroscopique de 80% ;
3. une fissure apparaît dans la matrice, près d'un pôle de l'inclusion pour une déformation macroscopique de l'ordre de 20% (phénomène de cavitation). Une seconde fissure apparaît généralement à l'autre pôle. Les deux fissures se rejoignent pour n'en former qu'une seule.

Sous une sollicitation cyclique, [Saintier \(2001\)](#) montre, pour un caoutchouc naturel chargé au noir de carbone, que le point de départ d'une fissure est toujours un phénomène de cavitation ou de décohésion à partir d'inclusions dont la taille varie entre 100 et 500  $\mu\text{m}$ .

[Le Cam \(2005\)](#) s'est intéressé au nombre de cycles nécessaires à la nucléation de ces défauts. Il observe dès le premier cycle la création de cavités par décohésion aux pôles d'oxydes, et des phénomènes

de cavitation aux pôles des agglomérats de noirs de carbone. Ainsi, l'amorçage d'une micro-fissure s'effectue dès les premiers cycles de chargement.

Le Gorju Jago (2007) observe que le processus le plus endommageant n'est pas la cavitation près d'une inclusion mais la cavitation entre deux inclusions, suffisamment proches et alignées avec l'axe de sollicitation.

## b Propagation

Les observations menées par Saintier (2001) tendent à montrer que 20% de la durée de vie est nécessaire à l'apparition de défauts dont la taille avoisine les 120  $\mu m$ . Le Cam (2005) note quant à lui qu'à 25% de la durée de vie, le nombre de cavités issues de la décohésion entre les oxydes et la matrice est sensiblement le même qu'aux premiers cycles, alors que le nombre de cavités au niveau des agglomérats de noirs de carbone a nettement progressé. Le chargement cyclique favorise donc l'amorçage de fissure au niveau des agglomérats de noirs de carbone, tandis que la décohésion des oxydes est principalement fonction de niveau de chargement et non du nombre de cycles. L'auteur montre aussi à 25% de la durée de vie l'existence d'une cavité dont la taille est supérieure à la taille maximale des défauts : c'est donc une micro-fissure en phase de propagation. De même, Le Gorju Jago (2007) estime que 80% de la durée de vie est consacrée à la propagation de micro-fissure. Le phénomène de coalescence n'est observé qu'à la fin de vie.

Les analyses de ces trois auteurs démontrent qu'une grande partie, au moins 75%, de la durée de vie d'une structure est consacrée à la propagation d'une micro-fissure en une macro-fissure facilement détectable.

Le Cam (2005) décrit un faciès de rupture et distingue quatre zones (FIG. 8.13) :

Zone A : zone elliptique contenant le défaut situé à proximité de la surface de l'éprouvette ; notons que la création de cette zone correspond à la majeure partie de la durée de vie (jusqu'à l'image 4 de la figure 8.14) ;

Zone B : partie rugueuse avec la présence d'arrachements, d'abord de petite taille puis grossissant et se redressant au fur et à mesure de l'avancement de la fissure et donc de l'augmentation des contraintes en fond de fissure ;

Zone C : stries de fatigue caractéristiques de ruptures sous chargement monotone (une strie se forme en un cycle) ;

Zone D : rupture sous chargement monotone du ligament final.

Grâce à des expériences de micro-découpe du fond de fissure suivies par microscopie électronique, l'auteur propose un mécanisme de propagation de fissure expliquant la formation des arrachements (paragraphe 8.2.2). L'auteur explique aussi la formation des stries de fatigue par la rupture fragile des zones elliptiques causée par un fort niveau de contrainte. Ces ruptures créent des surfaces libres se présentant sous la forme de stries.

## c Définition de la fin de vie

Le mécanisme d'endommagement des élastomères commence avec l'initiation d'une micro-fissure, se propageant jusqu'à une taille critique et entraînant la ruine de l'éprouvette. Nous devons donc discuter de la définition de la durée de vie expérimentale d'une structure. Le critère le plus simple est la rupture totale de la structure (Cadwell et al., 1940). Toutefois, cette méthode ne permet pas de remonter à une caractéristique intrinsèque au matériau car elle dépend de la géométrie de la pièce et du chargement. De plus, cette méthode n'est pas satisfaisante dans une démarche de dimensionnement où

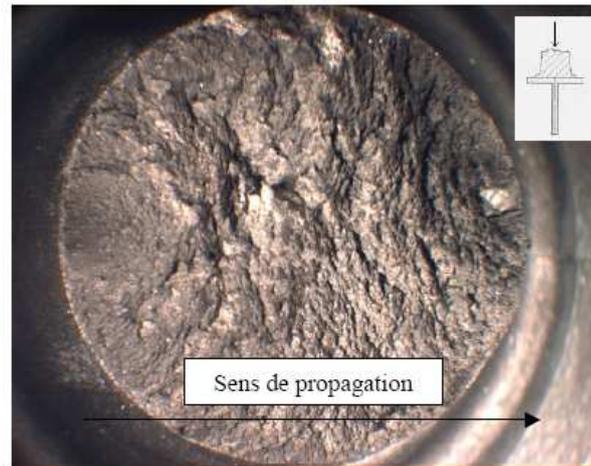
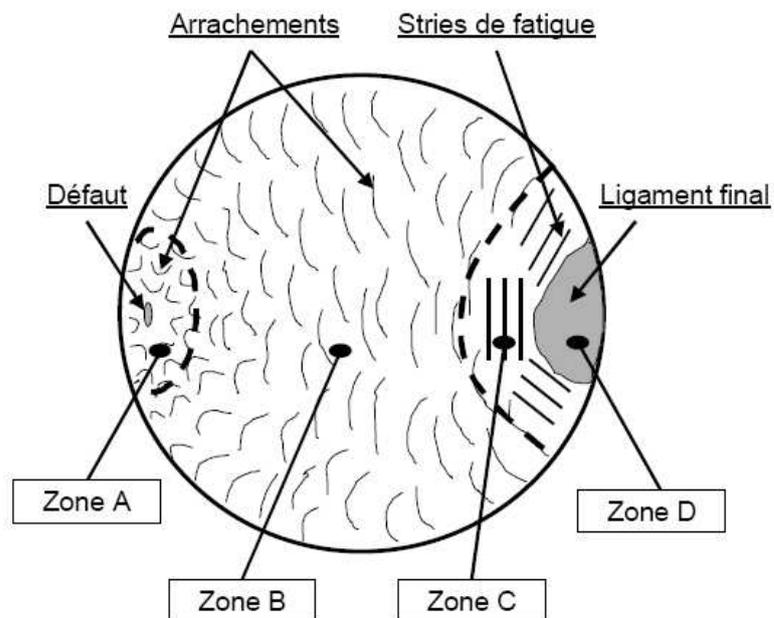
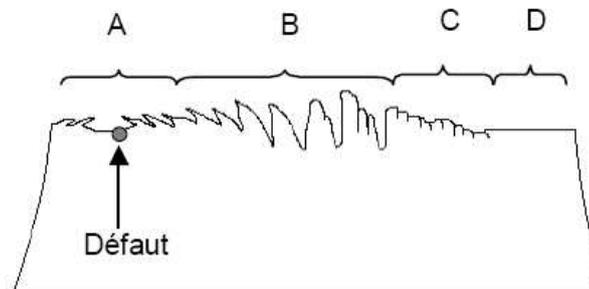
(a) *vue macroscopique.*(b) *schéma de la vue de dessus du faciès.*(c) *schéma de la vue de profil du faciès.*

FIGURE 8.13 – Description générale d'un faciès de rupture pour un essai de traction répétée (Le Cam, 2005).

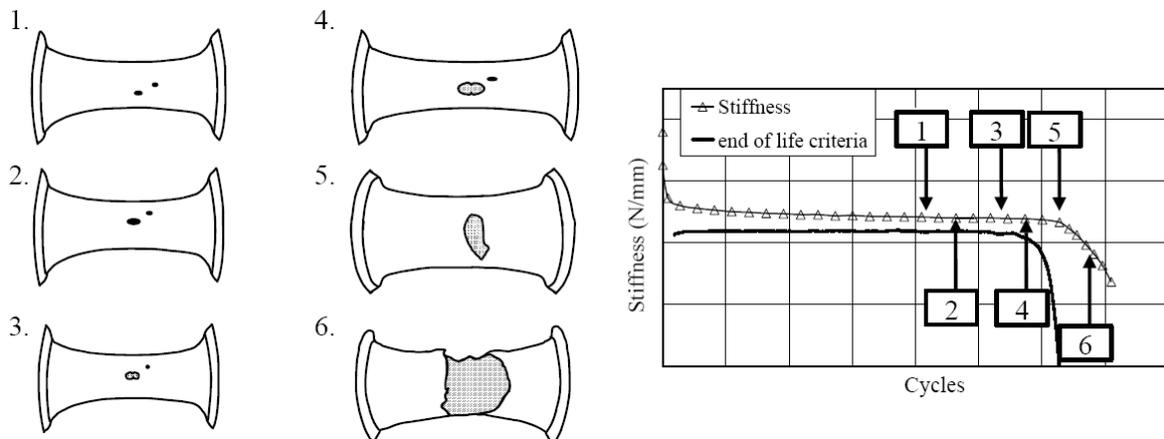


FIGURE 8.14 – Etapes de croissance d’une fissure sur un essai de traction répétée piloté en déplacement et suivi de la raideur et du critère expérimental de fin de vie (Ostojak-Kuczynski et al., 2003).

l’objectif est de garantir la fonction du composant pendant sa durée de vie. Enfin elle allonge parfois inutilement les essais. La définition de la fin de vie comme l’instant où un paramètre (effort (Mars, 2001) ou déplacement (Dong et al., 2004)) atteint un seuil de décroissance ou de croissance est facile à mettre en œuvre. Ce critère définit un ratio entre la taille de fissure et la section utile, mais est très discutable pour des matériaux fortement viscoélastiques. Une troisième proposition est de définir la fin de vie à l’apparition d’une fissure d’une taille déterminée. La taille de la fissure doit faire l’objet d’un compromis entre la représentativité de la ruine de la structure et les mécanismes d’amorçage microscopiques.

Ostojak-Kuczynski et al. (2003) propose une méthode qui fait la synthèse de ces deux dernières approches. Elle est fondée sur la décroissance de la raideur apparente de la pièce

$$K(N) = \frac{F_{max}(N)}{L_{max}(N)} \quad (8.6)$$

et correspond aussi à une fissure d’une certaine taille. En effet, la décroissance de cette raideur est liée à deux phénomènes distincts : la viscoélasticité du matériau et la croissance d’une fissure. La décroissance visqueuse est bien représentée par une relation logarithmique

$$K(N) = A \log(N) + B \quad (8.7)$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes. Cette relation implique que le terme  $N \frac{dK}{dN}$  est constant. Ainsi, la fin de vie est-elle définie comme le moment à partir duquel cette relation n’est plus vérifiée, c’est-à-dire à partir du moment où la propagation d’une fissure prend le pas sur les phénomènes visqueux. Ostojak-Kuczynski et al. montre que si ce critère correspond à l’amorçage d’une fissure d’environ 2 mm pour l’AE42 (étape 4 sur la figure 8.14), il permet surtout de détecter un rapport taille de fissure sur section utile. Le moment d’amorçage détecté, la fissure va rapidement se propager dans le volume et conduire à la rupture de l’éprouvette, ce qui conforte l’idée d’un critère représentatif de la fin de vie.

**Dans la suite de ces travaux, c’est ce critère qui sera utilisé pour définir la fin de vie expérimentale.**

Raoult (2007) propose d'affiner ce critère en calculant directement le rapport entre la surface de la fissure  $S_f$  et la surface utile  $S_0$ . La raideur apparente de la pièce s'écrit alors

$$K(N) = K_0 (1 + \alpha \ln N) \left(1 - \frac{S_f}{S_0}\right) . \quad (8.8)$$

Le rapport entre les surfaces s'obtient directement par

$$\frac{S_f}{S_0} = 1 - \frac{K(N)}{K_0 (1 + \alpha \ln N)} \quad (8.9)$$

où  $\alpha$  est déterminé dans la structure sans fissure

$$\alpha = \left(\frac{K(N)}{K_0} - 1\right) \frac{1}{\ln N} . \quad (8.10)$$

La fin de vie est ainsi directement donnée par le rapport entre la taille de la fissure et la surface utile. L'intérêt de cette démarche est de pouvoir comparer les résultats en fatigue pour des structures différentes.

### 8.3.2 Intégration d'une loi de fissuration

La durée de vie d'une structure est déterminée par le temps nécessaire à une fissure pour atteindre une taille critique menant à la ruine de la structure. Nous avons vu que dès les premiers cycles de fatigue, des micro-fissures apparaissent dans le matériau. Il est donc possible d'intégrer une loi de fissuration (Gent et al., 1964) pour déterminer le nombre de cycles nécessaires  $N_f$  pour qu'un défaut de taille initiale  $a_0$  se propage et atteigne une taille critique  $a_f$  :

$$N_f = \int_{a_0}^{a_f} \frac{dN}{da} da . \quad (8.11)$$

L'intégration de la loi de propagation peut s'effectuer en suivant les différents régimes, mais nous proposons dans l'exemple suivant d'utiliser une loi puissance :

$$N_f = \int_{a_0}^{a_f} \frac{1}{BT^C} da . \quad (8.12)$$

Pour des géométries simples, l'énergie de déchirement  $T$  est connue. Utilisons par exemple une éprouvette de traction uniaxiale entaillée où l'énergie de déchirement est donnée par  $T = 2kWa$ . Le nombre de cycles nécessaires à la croissance de la fissure s'écrit donc :

$$N_f = \int_{a_0}^{a_f} \frac{1}{B(2kWa)^C} da = \frac{1}{C-1} \frac{1}{B(2kW)^C} \left(\frac{1}{a_0^{C-1}} - \frac{1}{a_f^{C-1}}\right) . \quad (8.13)$$

Dans le cas où la taille du défaut initial est petite par rapport à la taille du défaut final, l'expression se simplifie :

$$N_f = DW^{-C} \quad \text{où} \quad D = \frac{1}{C-1} \frac{1}{B(2kW)^C} \frac{1}{a_0^{C-1}} \quad \text{et} \quad C > 1 . \quad (8.14)$$

Cette dernière équation donne la relation entre la durée de vie de la structure  $N_f$  et l'énergie de déformation  $W$  en fonction de la taille du défaut initial. Cette relation se représente par une droite de

pende  $-C$  dans un diagramme en échelle logarithmique. La pente de la courbe de Wöhler est donc seulement fonction de la loi de propagation, tandis que sa position est liée à la taille des défauts : au premier ordre, la durée de vie est inversement proportionnelle à la taille du défaut initial. [Ostoja-Kuczynski \(2005\)](#) montre par exemple que la dispersion obtenue sur les durées de vie dans un essai de fatigue peut s'expliquer par la dispersion de la taille des défauts.

Cette méthode donne de bons résultats pour des essais de traction uniaxiale sur lanières ([Gent et al., 1964](#)) : la pente estimée de la droite correspond à celle mesurée et la taille des défauts initiaux est de l'ordre de grandeur des imperfections de surfaces présentes sur les bords de découpe de l'éprouvette. Elle est cependant mise en défaut par [Roberts et Benzies \(1977\)](#) qui étudient des cas de distorsion différents avec des sollicitations uniaxiales et biaxiales.

Fondée sur la modélisation du phénomène physique de propagation de fissure, cette méthode se heurte à plusieurs difficultés :

- détermination de la taille initiale du défaut ;
- calcul de l'énergie de déchirement pour le cas général ;
- validité de la modélisation quand les essais de propagation sont à l'échelle macroscopique alors que la propagation d'un défaut se fait à l'échelle mésoscopique ;
- incapacité à prendre en compte les différents états de distorsion.

### 8.3.3 Utilisation de la mécanique de l'endommagement

La mécanique de l'endommagement est fondée sur la modélisation de l'endommagement du matériau, c'est-à-dire une détérioration progressive de la matière menant à l'amorçage d'une fissure macroscopique ([Lemaitre et Chaboche, 1985](#)). L'endommagement en fatigue des élastomères correspond à la création et au développement de cavités, fissures. Cet endommagement est représenté dans le cadre des matériaux standards généralisés par une variable interne d'endommagement  $D$ . Lorsque le matériau est vierge,  $D$  vaut 0. La valeur de  $0 < D < 1$  caractérise l'état d'endommagement. Un endommagement égal à 1 signifie l'amorçage macroscopique d'une fissure. La variable d'endommagement représente une densité surfacique de discontinuité et conduit directement à la définition de contrainte effective, c'est-à-dire à la contrainte rapportée à la section qui résiste effectivement aux efforts. Cette contrainte effective  $\underline{T}_0$  est ainsi reliée à un tenseur des contraintes  $\underline{T}$  par

$$\underline{T}_0 = \frac{1}{1-D} \underline{T} \quad (8.15)$$

Dans l'hypothèse où l'endommagement est isotrope, l'évolution de la variable d'endommagement est gouvernée par la loi d'évolution

$$\dot{D} = \frac{\partial \phi^*}{\partial Y} \quad (8.16)$$

où  $\phi^*$  est le potentiel de dissipation et  $Y$  le taux de restitution élastique donné par  $Y = -\frac{\partial W_e}{\partial D}$  ( $W_e$  est la densité d'énergie élastique). La force thermodynamique  $Y$  associée au dommage est donc l'énergie élastique libérée par accroissement de micro-fissures, qui n'est autre que la définition du taux de restitution d'énergie donnée dans la mécanique de la rupture dans le cas élastique.

[Wang et al. \(2002\)](#) utilisent un potentiel de dissipation donné par [Lemaitre et Chaboche \(1985\)](#) à deux coefficients matériau. Les résultats obtenus avec ce modèle pour des essais de traction uniaxiale sont satisfaisants. [Cantournet \(2004\)](#) identifie l'endommagement sur la décroissance des efforts maximaux. L'originalité de la modélisation de l'endommagement est de relier l'évolution du comportement à la durée de vie. Toutefois, les phénomènes visqueux très importants dans les matériaux étudiés rendent difficile l'identification des paramètres seulement liés à l'endommagement.

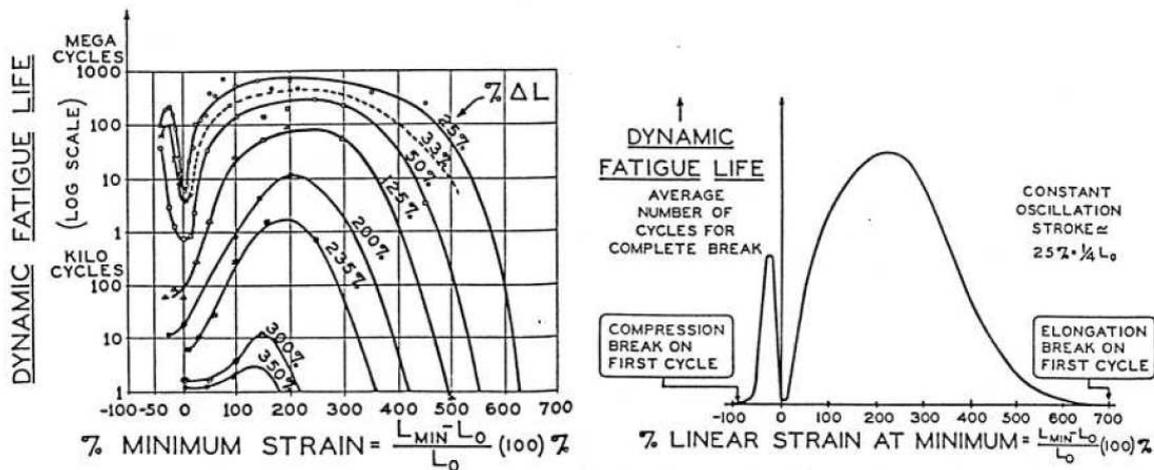


FIGURE 8.15 – Durées de vie pour un chargement d'amplitude constante (Cadwell et al., 1940).

## 8.4 Phénomène de renforcement en traction-traction

Dès les premières études en fatigue, un phénomène de renforcement du caoutchouc a été observé : Cadwell et al. (1940) rapportent pour du caoutchouc naturel chargé au noir de carbone une augmentation de la durée de vie avec la déformation minimale pour une amplitude de sollicitation constante, puis une diminution lorsque le maximum de sollicitation approche de la limite à rupture monotone.

### 8.4.1 Définition - Diagramme de Haigh

Une première analyse de la littérature indique que les définitions et les représentations du renforcement en traction-traction sont nombreuses. Ainsi, Cadwell et al. (1940) tracent-ils à iso-amplitude la relation entre la durée de vie et la déformation minimale (FIG. 8.15).

Nous proposons d'adopter la représentation des résultats en amorçage dans un diagramme de Haigh : lignes iso-durée de vie tracées dans l'espace chargement moyen - amplitude de chargement (FIG. 8.16). Cinq zones fonctions du rapport de charge  $R = Min/Max$  sont définies :

Zone I : compression - compression ;

Zone II : compression répétée ;

Zone III : traction-compression ;

Zone IV : traction répétée ;

Zone V : traction-traction.

Un matériau non-renforçant est défini par des lignes iso-durée de vie de pente  $-1$  dans l'espace traction-traction. Pour ce mémoire de thèse, nous faisons le choix de distinguer parmi les matériaux ceux dont la durée de vie à amplitude de chargement constante augmente avec le minimum de ceux dont la durée de vie n'augmente pas mais se comporte mieux qu'un matériau non-renforçant. Les premiers sont appelés matériaux renforçant (pente comprise entre 0 et 1), les seconds matériaux partiellement renforçant (pente comprise entre -1 et 0). L'existence d'un seuil de renforcement est démontrée pour certains matériaux : le changement dans la durée de vie n'a lieu qu'à partir d'un seuil sur le minimum.

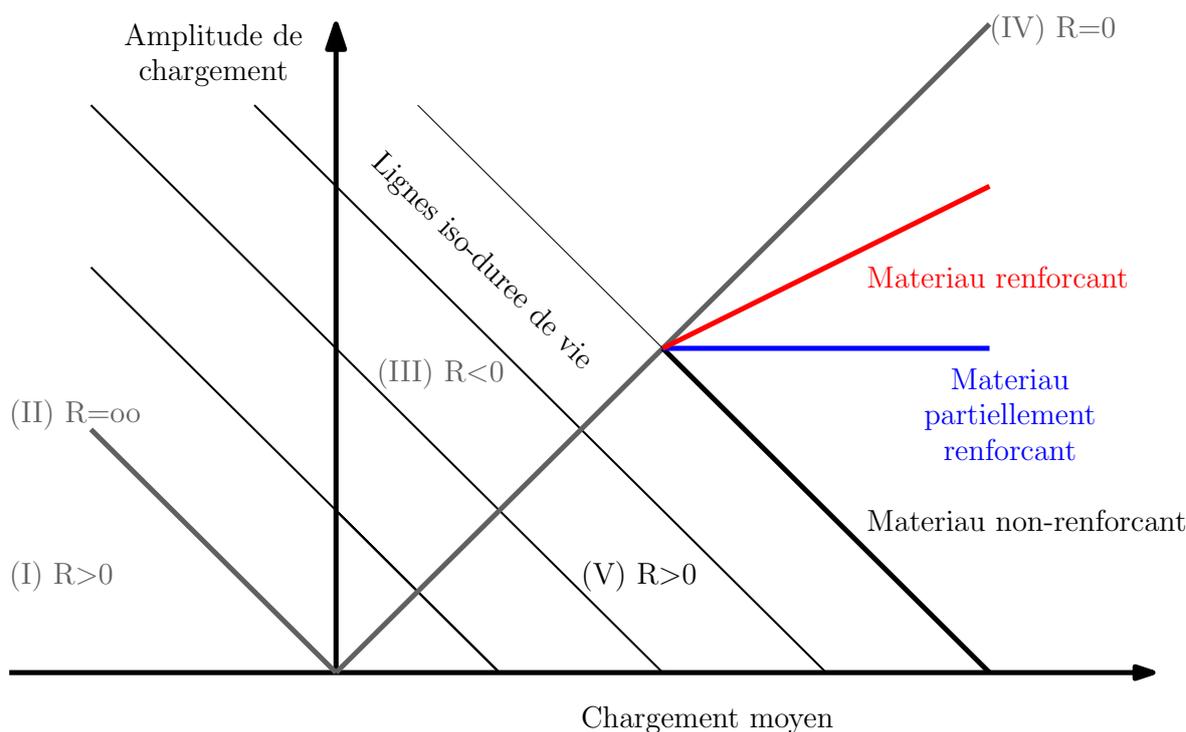


FIGURE 8.16 – Diagramme de Haigh.

Nous pouvons noter que le choix de la grandeur (effort ou déplacement) à partir de laquelle sont définies les moyennes et les amplitudes peut mener à la définition de matériau renforçant ou partiellement renforçant. Cet aspect est causé par les non-linéarités de comportement et du passage global-local.

#### Parallèle avec les métaux

Le diagramme de Haigh est souvent tracé en contraintes pour les métaux. Différentes modélisations existent pour représenter la limite d'endurance dans ce diagramme (FIG. 8.17) :

- la droite de Goodman d'équation  $\sigma_a = \sigma_D \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_m}\right)$  ;
- la droite de Soderberg d'équation  $\sigma_a = \sigma_D \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_e}\right)$  ;
- la parabole de Gerber d'équation  $\sigma_a = \sigma_D \left(1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)^2\right)$  ;

avec  $\sigma_D$  l'amplitude de contrainte à moyenne nulle,  $R_e$  la limite élastique et  $R_m$  la résistance à la traction.

#### 8.4.2 Classement des matériaux

Nous proposons dans le tableau 8.1 une synthèse non-exhaustive des essais disponibles dans la littérature. Nous pouvons en tirer les conclusions suivantes :

- le caoutchouc naturel chargé ou non-chargé est renforçant ;
- le caoutchouc synthétique non-chargé est non-renforçant en amorçage et renforçant en propagation ;

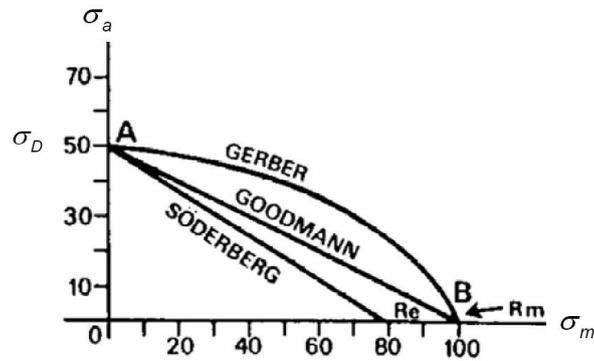


FIGURE 8.17 – Représentation de la droite de Goodman, de la droite de Soderberg et de la parabole de Gerber dans un diagramme de Haigh.

Source	Matériau	Charge	Renforçant
Approche en amorçage			
(Cadwell et al., 1940)	NR	ndc	oui
(Beatty, 1964)	NR	ndc	oui
(Saintier, 2001)	NR	ndc	oui
(Gent, 1992)	NR	non	oui
(Abraham et al., 2005)	SBR et EPDM	ndc	oui
(Robisson, 2000)	SBR	silice	oui
(Beatty, 1964)	SBR	ndc	partiellement
(Fielding, 1943)	SBR	ndc	non
(Abraham et al., 2005)	SBR et EPDM	non	non
Approche en propagation			
(Bathias et al., 1997)	NR	ndc	oui
(Mars et Fatemi, 2003)	NR	ndc	oui
(Lindley, 1973)	NR	non	oui
(Lindley, 1974)	SBR	non	oui

TABLE 8.1 – Classement des matériaux pour leurs propriétés renforçantes.

– la littérature est contradictoire quant au caractère renforçant d'un caoutchouc synthétique chargé. Ces deux dernières conclusions doivent être nuancées par le fait qu'il est difficile de produire une étude comparative : les matériaux ou conditions d'essais sont différents selon les articles. Ces conclusions restent donc des questions ouvertes de la littérature.

### 8.4.3 Explications du renforcement

#### a Parallèle avec des essais statiques

Contrairement au paragraphe 8.1.2, nous parlons ici de renforcement sous des conditions de chargement non-relaxant cyclique. Toutefois, nous pouvons établir un lien très fort entre des essais statiques et des essais cycliques non-relaxant. En effet, nous avons vu que le renforcement et le phénomène de knotty-tearing étaient liés à la création de zones anisotropes en fond de fissure ou dans tout le volume à cause de la cristallisation et/ou des charges renforçantes. Pour un chargement non-relaxant, il est légitime de penser que ces structures anisotropes ne disparaîtront pas faute d'un passage relaxant et donc que les mécanismes de propagation peuvent être sensiblement équivalents.

#### b Description de la propagation

##### Pour les matériaux cristallisables

La capacité du matériau à cristalliser sous contrainte est une condition suffisante pour observer un renforcement en traction-traction, puisque le caoutchouc naturel est toujours renforçant et qu'il n'existe pas, à notre connaissance, de matériau cristallisable non-renforçant. Plusieurs mesures (Lee et Donovan, 1987; Trabelsi et al., 2002) de cristallinité locale en fond de fissure ont montré l'existence d'une zone cristalline. La présence et le taux de charge ont un effet bénéfique sur la taille de la zone cristalline et sur le taux de cristallinité (Lee et Donovan, 1987). Cette cristallisation sous contrainte en fond de fissure se caractérise par l'existence de cristallites se développant dans la direction de traction et implique une très forte anisotropie locale. Ces cristallites jouent le rôle de charges renforçantes et obligent la fissure à s'émousser (FIG. 8.18). Ce phénomène de "branching" est aussi observé par Saintier (2001).

Cette capacité à cristalliser est bénéfique en fatigue car elle ralentit la propagation des fissures. Toutefois, elle n'est pas nécessaire au renforcement.

Pour une sollicitation non-relaxante, Saintier (2001) met en évidence un phénomène de bifurcation et de branchement de fissures, ce qui n'est pas le cas pour une sollicitation relaxante. L'auteur attribue cette bifurcation à l'existence d'une forte anisotropie en fond de fissure associée à la cristallisation : la phase cristalline est maintenue entre les cycles car le matériau n'est pas déchargé.

##### Pour les matériaux non-cristallisables

Pour les matériaux synthétiques qui ne cristallisent pas, la littérature montre qu'il peut y avoir renforcement en traction-traction dans certains cas en présence de charges. Robisson (2000) attribue ce renforcement à un alignement des chaînes polymères, amplifié par la présence de charges. Abraham et al. (2005) observent aussi un renforcement sur un EPDM chargé mais ne propose pas d'interprétation. Notons que les contradictions relevées précédemment dans la littérature pourraient s'expliquer par la différence des propriétés d'interaction charges-matrice entre les matériaux étudiés.

### Discussion

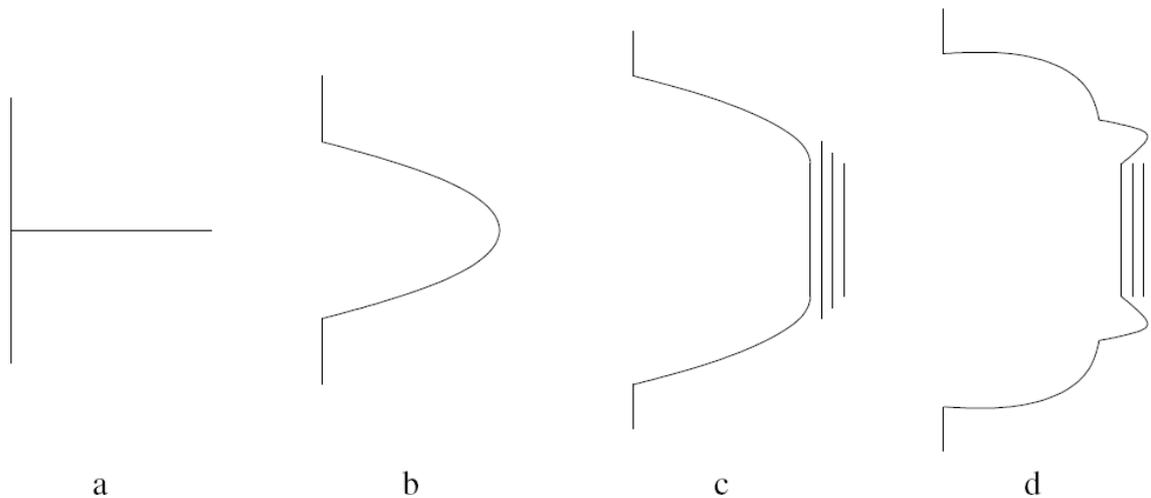


FIGURE 8.18 – (a) La fissure est fermée ; (b) la fissure est ouverte ; (c) les chaînes s’alignent en fond de fissure et forment une cristallite qui se développe dans la direction de traction ; (d) la fissure branche pour contourner la cristallite.

Pour conclure, nous pouvons affirmer que le caractère cristallisable implique le renforcement en traction-traction. Ce renforcement pourrait être expliqué par une forte anisotropie en fond de fissure causée par la cristallisation induite par déformation. Ce phénomène est d’autant plus marqué en traction-traction que la structure cristalline se maintient entre les cycles faute d’une décharge suffisante du matériau.

La présence de charges permet à des caoutchoucs synthétiques de montrer dans certains cas un renforcement ou renforcement partiel. Ce renforcement reste néanmoins moins important que pour un caoutchouc naturel et pourrait s’expliquer par un alignement des chaînes sous contraintes, amplifié par les charges.

Enfin, ces observations sont cohérentes avec les observations sur la propagation statique. En effet, dans les deux cas, les structures renforçantes (cristallisation, alignements) ne disparaissent pas et gouvernent les mécanismes de propagation.

## 8.5 Influence de la température

### 8.5.1 État de l’art

Dès les premières études sur la fatigue des élastomères, l’influence de la température est étudiée. Pour du caoutchouc naturel chargé au noir de carbone, [Cadwell et al. \(1940\)](#) constatent que la durée de vie à un même niveau de déformation est maximale aux alentours de 0°C (FIG. 8.19). La durée de vie entre la température ambiante et 60°C est environ divisée par dix. Notons que la température relevée est celle de l’enceinte et non la température réelle de l’éprouvette qui devrait être plus élevée à cause de l’autoéchauffement.

Concernant la propagation de fissure à chaud ([Greensmith et Thomas, 1955](#); [Greensmith, 1956](#); [Lake et Lindley, 1964](#); [Young, 1986](#); [Gent et al., 1991](#); [Young et Danik, 1994](#)), nous retiendrons ces

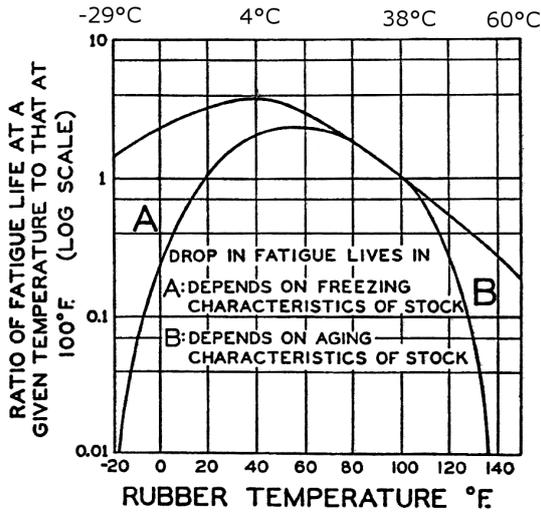


FIGURE 8.19 – Influence de la température sur la durée de vie (Cadwell et al., 1940).

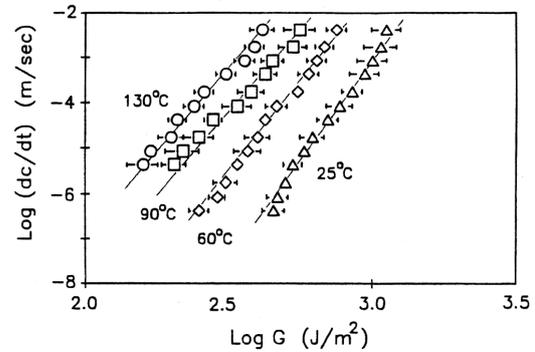


FIGURE 8.20 – Affaiblissement d'un caoutchouc non cristallisable non chargé sous sollicitations monotones (Gent et al., 1991).

deux idées principales : pour un élastomère non-cristallisable (caoutchouc synthétique), la vitesse de fissuration augmente fortement avec la température (non chargé FIG. 8.20 et chargé FIG. 8.21). Pour un élastomère cristallisable sous contrainte (caoutchouc naturel), la vitesse de fissuration augmente faiblement avec la température (chargé FIG. 8.21). La diminution de la durée de vie est aussi observée pour un matériau non chargé (FIG. 8.22).

Les études récentes en amorçage commencent avec Lu (1991). L'auteur trace des courbes de Wöhler pour cinq températures d'enceinte allant de -50°C à 80°C (FIG. 8.23). À même niveau de déformation, la durée de vie est divisée par un facteur variant entre 5 et 40 entre 0°C et 80°C, selon l'élastomère. Cependant, il semble que la durée de vie soit sensiblement la même entre 20°C et 50°C ; il existerait donc un seuil en température à partir duquel la durée de vie diminue. La pente de la courbe de Wöhler ne semble pas être influencée par la température.

Des courbes de Wöhler pour trois températures (23, 60 et 90°C) sont aussi tracées par South (2001) pour un caoutchouc naturel chargé au noir de carbone à 65 phr pour des durées de vie assez faibles (de 100 à 50000 cycles). L'analyse de ces courbes figure 8.24 indique que leur pente ainsi que leur position dans un diagramme logarithmique sont fonctions de la température.

Flamm et Weltin (2002) observent qu'une augmentation de 10°C en température de peau entraîne une réduction de la durée de vie de 20% dans la gamme 30-50°C. L'auteur propose alors de prendre en compte la température pour étudier des essais de cumul et ainsi tenir compte de la différence de température entre les types d'essais. Le cumul est ici linéaire avec la loi de Miner.

Les travaux de Kerchman et Shaw (2003) sur la propagation marquent une avancée car les auteurs s'intéressent à la température en front de fissure. Les mesures par thermographie infrarouge et des calculs numériques d'autoéchauffement sont les fondements de leurs travaux. Ils corrént ainsi la direction de propagation avec la zone la plus chaude. La prise en compte de l'autoéchauffement permet d'expliquer la direction privilégiée de propagation pour une fissure non-débouchante.

Bathias et al. (1997) constatent dans le cas d'un rapport de charge positif que la vitesse de propagation augmente aussi avec la température pour un caoutchouc naturel chargé au noir de carbone. Le seuil de renforcement quant à lui diminue.

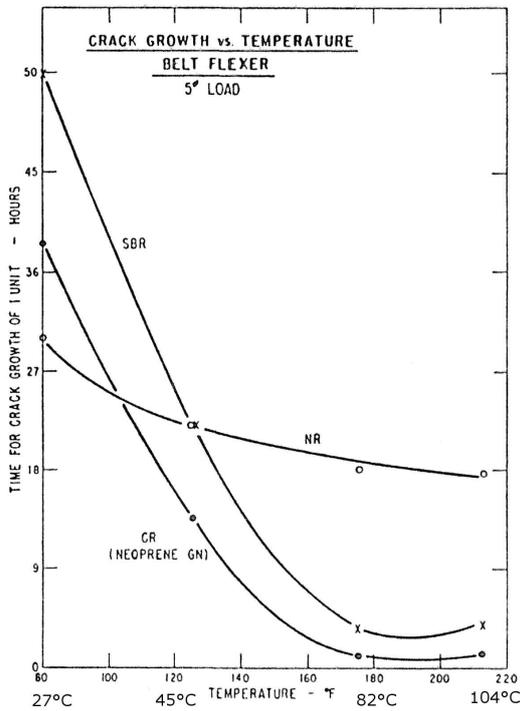


FIGURE 8.21 – Influence de la température sur la vitesse de propagation pour des caoutchoucs chargés au noir de carbone (Beatty, 1964).

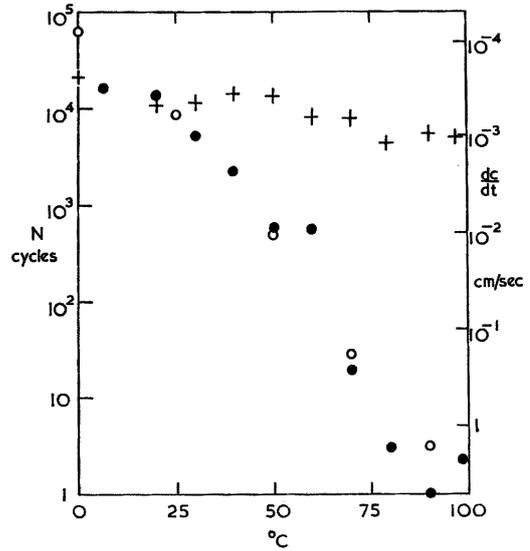


FIGURE 8.22 – Influence de la température sur la durée de vie d'un SBR non chargé (●) et d'un NR non chargé (+) (Lake et Lindley, 1964).

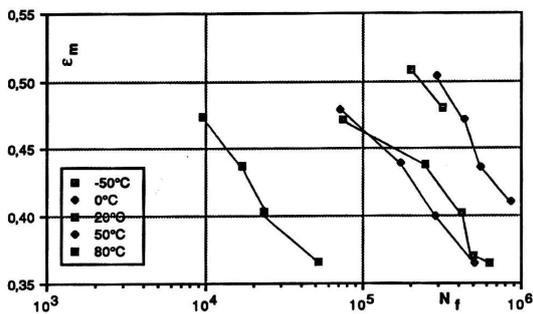


FIGURE 8.23 – Influence de la température représentée dans un diagramme de Wöhler en déformation logarithmique pour un NR chargé au noir de carbone (Lu, 1991).

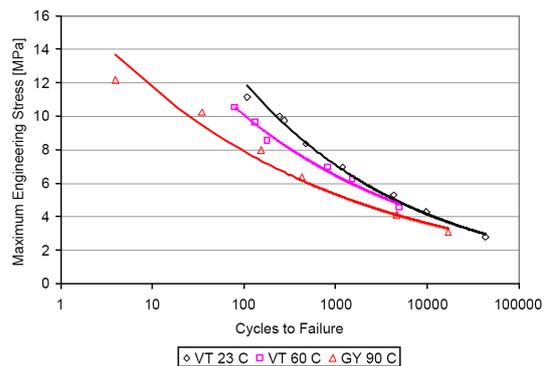


FIGURE 8.24 – Influence de la température représentée dans un diagramme de Wöhler en contrainte pour un NR chargé au noir de carbone (South, 2001).

### 8.5.2 Quelle température choisir ?

Plusieurs températures sont envisageables afin d'analyser un essai de fatigue :

1. une température mesurée lors de l'essai (enceinte, peau) ;
2. une température représentative pour la fatigue (température au point d'amorçage, en fond de fissure), mais qui est souvent difficilement accessible.

Constatant que l'amorçage a presque toujours lieu sous la peau de ses éprouvettes, [Ostoja-Kuczynski et al. \(2003\)](#) choisit la température de peau pour l'analyse des essais. En effet, pour des éprouvettes massives avec un fort autoéchauffement, la température d'enceinte n'est pas représentative de la température vue réellement par le matériau en peau ou à cœur. D'un point de vue physique, la température qui semble la plus pertinente est la température au lieu d'amorçage ou de propagation de la fissure. Toutefois, cette température est difficilement mesurable expérimentalement et ne peut être estimée qu'avec l'aide d'un calcul numérique d'autoéchauffement.

### 8.5.3 Discussion

#### a Sur les mécanismes de propagation

Nous avons dans le début de ce chapitre insisté sur la description des mécanismes de propagation. En effet, nous pouvons supposer que l'effet de la température dans la propagation d'un NR sera double. D'une part, avec la diminution du taux de cristallisation avec la température (voir premier chapitre), la résistance du fond de fissure diminuera sensiblement avec la température. Puis, à partir de la température de fusion où la cristallisation induite par déformation ne sera plus possible, le mécanisme de propagation sera proche d'un matériau non-cristallisable et sa résistance très affaiblie.

De plus, l'étude des faciès de rupture pourrait déterminer des changements dans les mécanismes de propagation en fonction de la température. La présence d'arrachements ou de zones lisses pourrait être caractéristique de la présence ou non de cristallisation.

#### b Sur le renforcement en traction-traction

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, la disparition progressive de la cristallisation induite par déformation avec la température diminuera les propriétés de renforcement en traction-traction de notre matériau. Encore une fois, l'analyse des faciès de rupture pourrait permettre de caractériser l'effet de la température.

## 8.6 Dégradations autres que mécaniques - Vieillessement

Plusieurs phénomènes autres que mécaniques dégradent le matériau au cours de sa vie. Le terme de vieillissement englobe ainsi les dégradations par l'oxygène, l'ozone ou la température. Notons que la température est très souvent un accélérateur de ce vieillissement, caractérisé par une rigidification et une fragilisation du matériau. Ces dégradations n'ont pas été étudiées lors de ces travaux, mais nous proposons dans cette section une brève revue de ces phénomènes car ils définissent parfois la limite d'utilisation des matériaux en température et peuvent expliquer certains phénomènes observés durant nos essais.

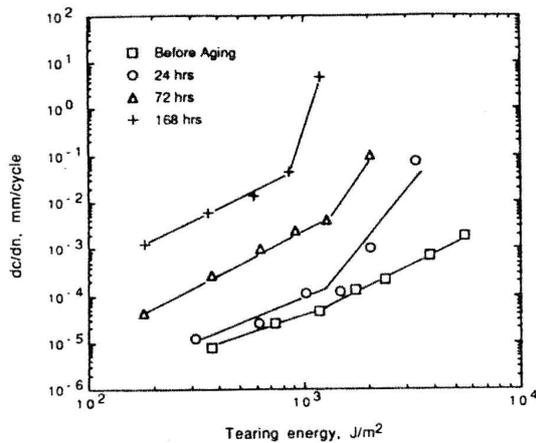


FIGURE 8.25 – Effet du temps de vieillissement à 100°C sur la propagation de fissure d'un caoutchouc naturel non-chargeé (vulcanisation conventionnelle) (Kim et al., 2004).

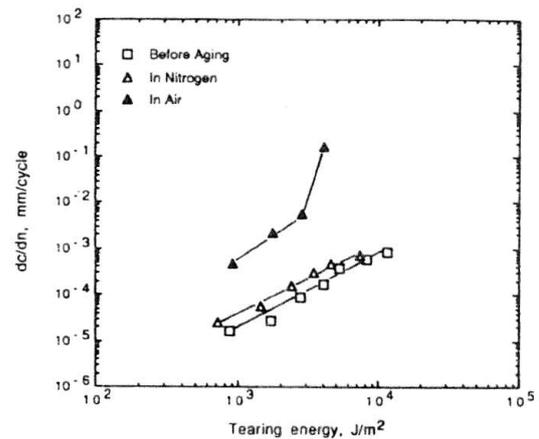


FIGURE 8.26 – Comparaison des vitesses de propagation avant et après vieillissement de 72 heures à 100°C dans l'air et dans de l'azote pour un caoutchouc naturel chargé (vulcanisation conventionnelle) (Kim et al., 2004).

### 8.6.1 Influence du vieillissement sur la propagation de fissure

Les travaux de Kim et Lee (1994) portent sur l'effet du vieillissement sur la propagation d'un caoutchouc naturel (SMR, Standard Malaysian Rubber) non-chargeé et chargé à 40 phr au noir de carbone N330. Les résultats (FIG. 8.25 et 8.26) indiquent que la vitesse de propagation augmente d'un facteur 10 à 1000 avec le vieillissement tant pour le caoutchouc non-chargeé que chargé. De plus, la relation entre la vitesse de propagation et l'énergie de déchirement évolue : la relation linéaire dans un diagramme logarithmique n'est plus valide à partir d'une certaine valeur de l'énergie de déchirement. Ces deux constats laissent penser qu'en termes d'amorçage, la position et la pente des courbes de Wöhler évolueront avec le vieillissement.

Des mesures de densité de réticulation montrent les changements causés par le vieillissement : augmentation de la densité de réticulation, changement du type de réticulation.

Enfin, le vieillissement dans de l'azote influence très peu la vitesse de propagation, ce qui laisse penser que c'est l'oxydation qui diminue principalement les propriétés en fatigue du caoutchouc naturel.

### 8.6.2 Influence du vieillissement sur l'amorçage de fissure

Une étude assez complète (Choi et al., 2005) a récemment déterminé les conséquences du vieillissement sur le comportement, la dureté et l'endurance d'un caoutchouc naturel. Après vieillissement, le matériau est plus raide surtout aux grandes elongations. Ce raidissement est corrélé à une augmentation de la dureté. Une modélisation est proposée afin d'estimer la dureté en fonction de la température et de la durée du vieillissement. Ces observations sont tout à fait cohérentes avec l'augmentation de densité de réticulation généralement observée lors du vieillissement (Kim et Lee, 1994). En effet, cette densification du réseau entraîne l'augmentation du nombre moyen de chaînes (le  $N$  du modèle statistique) et donc l'augmentation de la raideur aux faibles déformations. Cette densification entraîne aussi la diminution de la taille moyenne de ces chaînes et donc de leur limite d'extensibilité, augmentant

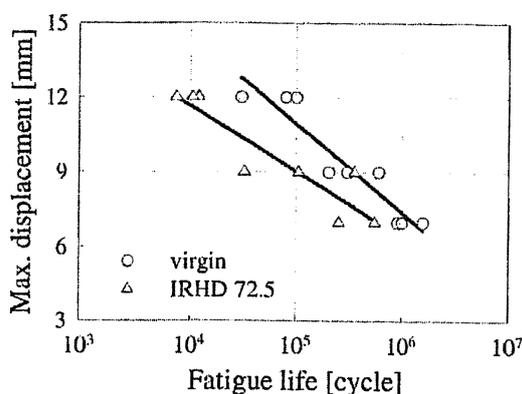


FIGURE 8.27 – Durée de vie d'éprouvettes sablier non-vieillies et vieilles (Choi et al., 2005).

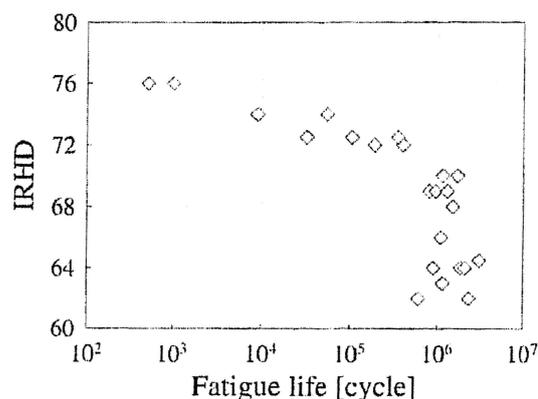


FIGURE 8.28 – Durée de vie d'éprouvettes sablier en fonction de la dureté IRHD pour le même déplacement maximal (Choi et al., 2005).

ainsi le raidissement aux grandes déformations.

Les résultats en fatigue de cette étude (Choi et al., 2005) démontrent que le vieillissement diminue l'endurance du matériau. Pour un vieillissement d'environ <sup>3</sup> 300 heures à 90°C, les durées de vie sont réduites d'un facteur 100 pour leurs essais de glissement simple (apparition d'une fissure de 3 mm) et d'un facteur 10 (voir figure 8.27) pour la traction uniaxiale sur une éprouvette sablier (diminution de la raideur de 50%, exprimant l'atteinte d'une taille critique pour la fissure).

Le deuxième résultat très intéressant est l'étude de la diminution de la durée de vie en fonction du vieillissement exprimée par une mesure de la dureté. Les points expérimentaux de la figure 8.28 montrent l'existence d'un seuil à partir duquel le vieillissement affecte la durée de vie. Les auteurs modélisent à partir de ce seuil l'effet du vieillissement sur la durée de vie comme suit :

$$N_i = \exp(C_1 G + C_{21} \text{IRHD} + C_{22}) \quad (8.17)$$

où  $G$  est la grandeur locale prédictive de la durée de vie et IRHD est la mesure de dureté. Notons que le paramètre  $C_1$  reste constant bien qu'il semble évoluer, comme par exemple sur la figure 8.27 (pente de la droite).

Une autre étude récente (Woo et Kim, 2006) montre que pour un NR cette fois-ci chargé au noir de carbone, la durée de vie est divisée par 10 pour un vieillissement de 90 jours à 85°C (FIG. 8.29). Les auteurs montrent que la grandeur déformation de Green-Lagrange  $\varepsilon_{GL}$  rapportée à la déformation à rupture  $\varepsilon_{EB}$  est une grandeur représentative de la durée de vie (FIG. 8.30).

Azura et al. (2003) ont étudié l'influence du vieillissement sur la capacité d'un caoutchouc naturel à cristalliser sous contrainte. Leurs conclusions sont les suivantes : le vieillissement diminue le taux de cristallinité et de ce fait, diminuerait la résistance à la rupture.

### 8.6.3 Dégradation par l'oxygène et l'ozone

Les deux phénomènes les plus importants sont l'oxydation et la dégradation par l'ozone. L'oxygène réagit avec les radicaux libres des chaînes et produit des radicaux peroxydes. Cette dégradation

3. Ces valeurs sont estimées à partir de la dureté mesurée à 72.5 IRHD.

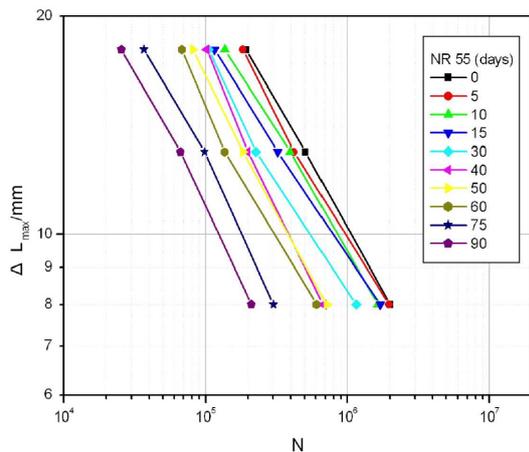


FIGURE 8.29 – Effet du vieillissement sur la durée de vie pour du NR chargé à 55 phr de noir de carbone (Woo et Kim, 2006).

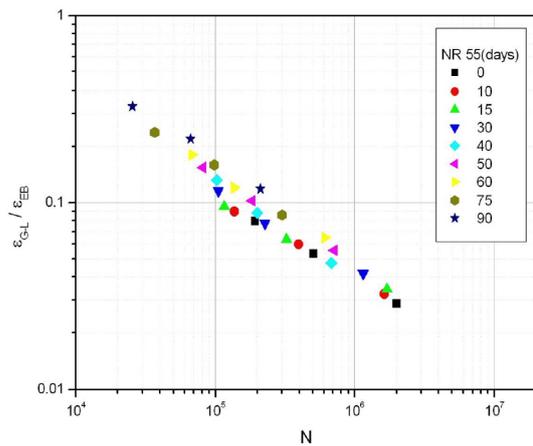


FIGURE 8.30 – La grandeur  $\varepsilon_{GL}/\varepsilon_{EB}$  est représentative de la durée de vie (Woo et Kim, 2006).

se propage aux chaînes voisines et se traduit par une dégradation du caoutchouc naturel. L'oxydation diminue le seuil de la vitesse de propagation et diminue aussi la résistance à l'avancement de fissure (Lake et Lindley, 1965). La présence d'agents antioxydant dans les formulations permet de réduire les effets néfastes de l'oxydation.

L'ozone attaque le caoutchouc naturel et provoque la rupture par clivage des doubles liaisons C=C. De même, l'ozone (Gent et McGrath, 1965; Gent et Hirakawa, 1967) diminue la résistance à l'avancement de fissure.

#### 8.6.4 Dégradation à haute température

Shaw et al. (2005) ont étudié le comportement à haute température (plus de 100°C) d'un caoutchouc naturel chargé. Leurs conclusions rejoignent celles de la littérature sur le sujet : des changements microstructuraux ont lieu à haute température, comme la scission du réseau macromoléculaire ou des points de réticulation. Ces scissions sont causées par une agitation thermique excessive et/ou une oxydation. Lors d'essais de relaxation à haute température, la contrainte se relaxe jusqu'à devenir nulle (temps caractéristique de l'ordre de la dizaine d'heures). L'éprouvette ainsi sollicitée présentait après un retour à température ambiante des déformations résiduelles, attribuées par la formation d'un nouveau réseau de réticulation.

Ces phénomènes ont lieu à des températures extrêmes, censées ne pas être atteintes pour les composants automobiles. Nous n'étudierons donc pas le comportement à très haute température et nous verrons par la suite que les résultats d'essais à 100°C pourraient refléter cette dégradation thermique.

### 8.7 Conclusions

L'étude des mécanismes de fatigue dans les élastomères a montré que dès les premiers cycles de chargement, des micro-fissures ou défauts s'amorcent. Une grande partie de la durée de vie d'une structure est alors consacrée à la propagation de cette micro-fissure en une macro-fissure détectable. Cette macro-fissure va atteindre une taille critique et provoquer la ruine de la structure : c'est l'amorçage macroscopique. Les mécanismes de propagation proposés dans la littérature différencient les

matériaux cristallisables et non-cristallisables. Dans les premiers, une structure cristalline composée de filaments orientés dans la direction de traction assure la résistance du fond de fissure à la propagation. Dans les seconds, la propagation se fait selon une ligne de déchirement et la fissure avance plus rapidement, car elle ne rencontre pas de structure renforçante. Ainsi voyons-nous que les deux approches en propagation et en amorçage s'enrichissent l'une et l'autre. Dans la suite de l'étude qui sera effectuée en amorçage macroscopique, la fin de vie sera définie par le critère proposé par [Ostoja-Kuczynski et al. \(2003\)](#), exprimant le fait que la surface cumulée des fissures présentes dans le matériau atteint une taille critique menant rapidement à la rupture totale.

Nous avons proposé une définition du phénomène de renforcement en traction-traction permettant de distinguer les matériaux renforçants (leur durée de vie augmente avec le minimum à iso amplitude) de ceux partiellement renforçants (leur durée de vie diminue avec le minimum à iso amplitude mais reste supérieure à celle d'un matériau non-renforçant). Cette double définition permet d'analyser plus finement la littérature et ses contradictions : les matériaux cristallisables sont renforçants, les non-cristallisables chargés sont partiellement renforçants et les non-chargés sont non renforçants. La cristallisation sous contrainte joue ici un rôle très important. Sachant que la température diminue la capacité à cristalliser, nous chercherons à mettre en évidence dans les essais de fatigue une diminution du phénomène de renforcement avec la température pour les matériaux cristallisables.

Concernant l'influence de la température sur la durée de vie, la littérature est formelle : augmenter la température diminue la durée de vie. Nous pouvons garder en mémoire l'ordre de grandeur : une durée de vie divisée par dix lorsque la température passe de l'ambient à plus de 80°C. L'existence d'une température seuil (vers 60°C) à partir de laquelle la durée de vie diminue significativement pour le matériau d'étude est soulevée mais n'est pas démontrée. Nous allons donc étudier ce phénomène au chapitre suivant. Notons que nous nous intéressons à la température au point critique qui prend en compte l'autoéchauffement.

Le vieillissement peut avoir un effet catastrophique sur la tenue en fatigue de certains matériaux. Ce vieillissement constitue parfois les bornes de notre étude.



## Chapitre 9

# Proposition d'un modèle de fatigue thermomécanique

*Ce chapitre décrit un modèle de fatigue thermomécanique, fondé sur une large base expérimentale d'essais d'endurance.*

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Approche par propagation de fissure</b>	<b>160</b>
8.1.1	Taux de restitution d'énergie	160
8.1.2	Description de la propagation	162
<b>8.2</b>	<b>Description d'un fond de fissure</b>	<b>165</b>
8.2.1	Mesures de la cristallinité	165
8.2.2	Observations au MEB	165
<b>8.3</b>	<b>Approche par amorçage de fissure</b>	<b>169</b>
8.3.1	Description des mécanismes d'endommagement par fatigue	170
8.3.2	Intégration d'une loi de fissuration	174
8.3.3	Utilisation de la mécanique de l'endommagement	175
<b>8.4</b>	<b>Phénomène de renforcement en traction-traction</b>	<b>176</b>
8.4.1	Définition - Diagramme de Haigh	176
8.4.2	Classement des matériaux	177
8.4.3	Explications du renforcement	179
<b>8.5</b>	<b>Influence de la température</b>	<b>180</b>
8.5.1	État de l'art	180
8.5.2	Quelle température choisir ?	183
8.5.3	Discussion	183
<b>8.6</b>	<b>Dégradations autres que mécaniques - Vieillissement</b>	<b>183</b>
8.6.1	Influence du vieillissement sur la propagation de fissure	184
8.6.2	Influence du vieillissement sur l'amorçage de fissure	184
8.6.3	Dégradation par l'oxygène et l'ozone	185
8.6.4	Dégradation à haute température	186
<b>8.7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>186</b>

---

Nous avons représenté sur la figure 9.1 une démarche de détermination de la durée de vie, ou d'un équivalent fatigue. À partir de la connaissance de la sollicitation thermomécanique<sup>1</sup>, l'histoire de chargement des variables locales est estimée à l'aide d'un calcul EF. Dans l'approche en amorçage que nous avons adoptée, l'objectif est de relier les durées de vie à la température et à une grandeur scalaire. Cette grandeur locale  $E$  doit être prédictive de la durée de vie, c'est-à-dire qu'elle peut être reliée de façon univoque pour une température au nombre  $N$  de cycles nécessaires à l'amorçage d'une fissure. Ensuite, un cumul d'endommagement fondé sur un traitement de l'histoire de cette grandeur permet d'estimer l'endommagement généré par tout le signal. Le cumul le plus simple est linéaire et s'utilise avec une extraction de cycles par un comptage Rainflow. L'enjeu est de savoir si ce cumul linéaire peut toujours s'appliquer dans le cas anisotherme.

Nous considérons dans ce mémoire que deux signaux sont dits équivalents en termes d'endommagement s'ils conduisent à la détermination du même point critique (endommagement maximal) et si les endommagements en ce point sont identiques. Cette définition pourrait être étendue, par exemple lorsque plusieurs points critiques avec un endommagement proche existent dans une structure afin de garantir le même endommagement en plusieurs points.

La première section de ce chapitre analyse la littérature afin d'adopter une grandeur sur laquelle se fondera la suite de l'analyse. La partie la plus importante concerne la modélisation de la durée de vie. À cette fin, de multiples essais d'endurance relaxants et non-relaxants en température ont été réalisés. Les résultats sont présentés dans la deuxième section et nous proposons une modélisation des durées de vie dans la troisième section. Finalement, nous discutons de l'hypothèse de cumul linéaire dans deux cas : isotherme à plusieurs températures et anisotherme.

## 9.1 Les grandeurs locales prédictives de la durée de vie

De nombreuses propositions ont été formulées dans la littérature pour relier les durées de vie à une grandeur scalaire. Les grandeurs naturelles sont liées à un premier constat : pour une sollicitation uniaxiale non-renforçante, une fissure se développe dans un plan particulier : le plan perpendiculaire à la direction la plus sollicitée.

### 9.1.1 Les grandeurs classiques

$\lambda_{max}$  La déformation principale maximale est un critère très classique de la littérature (Cadwell et al., 1940). C'est une grandeur naturelle car il est souvent observé qu'une fissure s'amorce dans le plan normal à la direction de sollicitation maximale : elle traduit l'élongation des chaînes dans la direction la plus sollicitée. Cette grandeur présente l'avantage d'être facilement mesurable expérimentalement ou par un calcul par éléments finis. Elle donne une bonne corrélation entre les résultats en fatigue des essais de traction/torsion (Mars et Fatemi, 2005), mais ne permet pas de prédire la différence existant entre des essais uniaxiaux et biaxiaux (Roberts et Benzies, 1977), sauf dans le cas d'un matériau non-cristallisable non-chargé.

$\sigma_{max}$  La contrainte principale maximale de Cauchy est aussi souvent utilisée (Saintier, 2001) et traduit aussi l'amorçage de fissures dans le plan normal à la direction la plus sollicitée. L'utilisation de la contrainte induit l'absence d'effet de seuil pour le renforcement en traction-traction (voir

---

1. Comme le temps caractéristique thermique est grand par rapport au temps caractéristique mécanique pour les structures étudiées, nous pouvons considérer que les cycles mécaniques s'effectuent à température constante. Cette hypothèse n'est pas exemple pas valide pour certaines applications métalliques (pièces moteur).

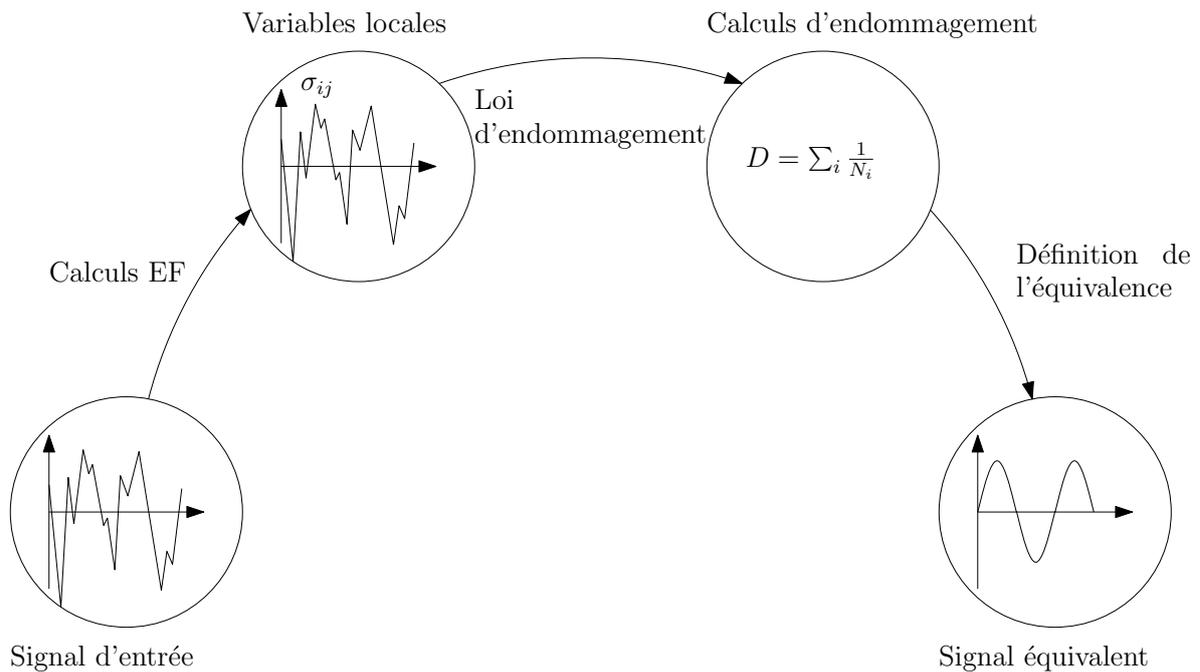


FIGURE 9.1 – Détermination de l’endurance en fatigue d’une structure.

section 8.4) pour peu que le fluage soit modélisé. Dans le cas d’un matériau isotrope, une approche en contrainte principale maximale donnera le même plan critique que la déformation. La différence majeure provient du terme de pression hydrostatique qui pourrait avoir une influence sur la durée de vie. Toutefois, cette grandeur est plus difficilement calculable car elle est étroitement liée à la loi de comportement et à la capacité de celle-ci à prendre en compte les effets de raidissement et de pression hydrostatique. De plus, il est difficile expérimentalement de caractériser l’influence de la pression.

W Nous avons vu que l’approche en propagation permettait sous certaines hypothèses (Lake et Lindley, 1964) de relier directement l’énergie de déformation à la durée de vie. Si cette approche peut donner de bons résultats concernant la prise en compte des effets de moyennes (Abraham et al., 2005), elle ne donne pas d’information sur la direction de fissuration. De plus, cette grandeur ne permet pas de corréliser des essais de traction et de torsion (Mars et Fatemi, 2005; Raoult, 2005).

Lu (1991) propose l’énergie dissipée par cycle et rassemble ainsi dans une même tendance les résultats pour trois élastomères différents. L’auteur exploite ainsi les relations entre l’énergie dissipée et l’endommagement, bien que celles-ci soient difficilement qualifiables et quantifiables.

### 9.1.2 Les grandeurs liées à un mécanisme

Les grandeurs précédentes ne se fondent pas sur une description du phénomène d’amorçage ou de propagation. Les approches suivantes supposent au contraire l’existence de défauts ou de microfissures afin de proposer une grandeur intrinsèque.

#### Cavitation

Gent et Lindley (1959) ont été les premiers à mettre en évidence l'apparition de la cavitation dans le caoutchouc naturel. Le phénomène de cavitation au voisinage d'inclusions rigides a été observé par Gent et Park (1984). La modélisation de la cavitation a été effectuée par Ball (1982). Cette modélisation a récemment été reprise par Diani (1999).

### Densité d'énergie de fissuration

Considérant qu'il existe des défauts dans le matériau, Mars (2001) cherche une grandeur énergétique représentative de l'avancée d'une fissure. La grandeur nommée "Cracking Energy Density" (CED) s'interprète comme la part d'énergie de déformation dissipée lors de la croissance d'une microfissure dans un plan matériel. L'auteur postule que la CED est égale au travail fourni pour déformer une surface. Considérant une normale de surface  $\underline{n}$ , l'effort qui s'exerce sur la facette définie par cette normale est  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ , et le taux de déformation de la facette<sup>2</sup> est  $\underline{d} \cdot \underline{n}$ . Ainsi la puissance de cet effort est-elle donnée par  $\underline{n}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{d} \cdot \underline{n}$ . La CED est définie par l'incrément de travail de l'effort exercé sur cette facette, soit<sup>3</sup>

$$dW_c(\underline{n}) = \underline{n}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{d} \cdot \underline{n} dt \quad \text{et} \quad W_c(\underline{n}) = \int_0^T \underline{n}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{d} \cdot \underline{n} dt \quad . \quad (9.1)$$

Cette énergie permet de définir par exemple différents plans critiques : le plan de  $W_c$  maximal ou le plan admettant la variation  $\Delta W_c$  maximale. Notons que l'écriture de  $W_c$  en configuration initiale par Mars (2001) n'est pas pertinente car l'auteur transporte la normale à une surface comme un vecteur matériel.

Finalement, l'auteur conclut (Mars et Fatemi, 2005) que la déformation principale maximale reste la grandeur qui est la mieux corrélée avec les durées de vie expérimentales.

### La contrainte configurationnelle

Verron et al. (2006) reprennent le concept de Mars (2001) d'une grandeur énergétique représentative de l'avancée d'une fissure et proposent d'utiliser la mécanique d'Eshelby. Alors que les descriptions eulériennes et lagrangiennes sont des descriptions spatiales du mouvement, la mécanique eshelbienne utilise la description matérielle : les forces configurationnelles ou matérielles sont conjuguées à la variation d'une position matérielle. Cette description permet notamment de décrire les forces s'exerçant sur des défauts.

Le tenseur d'Eshelby est défini par  $\underline{\Sigma} = W\underline{I} - \underline{C} \cdot \underline{\Pi}$ . Soit une surface unitaire de normale lagrangienne  $\underline{N}$  et une direction  $\underline{\alpha}$  ; le scalaire  $\underline{\alpha} \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{N}$  est la variation d'énergie élastique au point considéré due à la translation unitaire de la surface dans la direction  $\underline{\alpha}$ . Verron et al. (2006) proposent la grandeur suivante :

$$\Sigma^* = \left| \min \left[ (\Sigma_i)_{i=1,3}, 0 \right] \right| \quad , \quad (9.2)$$

où  $(\Sigma_i)_{i=1,3}$  sont les valeurs propres du tenseur d'Eshelby. Si  $\Sigma^* = 0$ , le défaut microscopique tend à se refermer. Sinon, il tend à se propager dans le plan de normale le vecteur propre associé à  $\Sigma^*$ . Une originalité de cette grandeur est qu'elle représente de manière qualitative le phénomène de renforcement en traction-traction pour la fatigue (Andriyana et Verron, 2007). Toutefois, l'analyse d'Andriyana (2006) des essais de Mars (2001) montre que cette grandeur ne donne pas vraiment de meilleurs résultats que les grandeurs classiques.

2. Tout comme Le Cam (2005), nous sommes réservés quant à la définition de cet incrément de déformation.

3. Notons que  $\underline{d} dt = \underline{d}\underline{\epsilon}$ , afin de rester cohérent avec les notations de l'auteur.

### 9.1.3 Multiaxialité, grandes déformations et loi d'endommagement

Si les critères classiques précédents donnent généralement de bons résultats pour les cas de chargements simples, il est souvent nécessaire d'analyser l'influence de l'état de distorsion, de la rotation du repère principal ou des effets de cumul pour des essais complexes, par exemple bi-dimensionnel en phase ou hors phase. Nous ne proposons pas ici une étude détaillée de ces essais, mais juste les pistes de réflexion actuelles de la littérature.

#### a Multiaxialité ou influence de l'état de distorsion

Une grandeur multiaxiale est une grandeur permettant de prédire la durée de vie indépendamment de l'état de distorsion, ou du trajet de chargement. Nous présentons deux approches de la littérature utilisant des grandeurs développées pour les matériaux métalliques. Notons qu'elles ne se fondent pas sur l'interprétation physique originale de ces grandeurs.

[Saintier \(2001\)](#) compare une adaptation du critère de Crossland à une approche par plan critique avec la contrainte principale maximale, et conclut que l'adaptation du critère de Crossland ne permet pas de prédire la durée de vie de manière satisfaisante. La différence observée entre les deux grandeurs vient de la prise en compte des parties déviatorique et hydrostatique du tenseur des contraintes.

Récemment, [Brunac et Leblond \(2006\)](#) ont proposé une adaptation du critère d'endurance illimitée de [Dang Van \(1971\)](#). L'idée est de ne garder du critère que la formulation mathématique. Ainsi, le rayon  $R$  et le centre  $C$  de la plus petite hypersphère contenue dans l'espace du trajet de chargement du tenseur des contraintes conjugués au tenseur des déformations de Hill droit (afin de garantir l'objectivité de la grandeur) déterminent la contrainte minimale  $C - R$  et maximale  $C + R$  au cours d'un chargement. L'étude avec cette grandeur des essais de [Mars et Fatemi \(2005\)](#) semble donner de bons résultats : leur grandeur calculée sur un cycle élémentaire du chargement semble être prédictive du nombre de cycles à rupture.

#### b Rotation du repère principal

La rotation du repère principal lors d'une sollicitation uniaxiale est causée par les grandes déformations. Par exemple, sous l'hypothèse des petites déformations, la direction associée à la contrainte principale maximale en cisaillement fait un angle de  $45^\circ$  mais augmentera avec les grandes déformations. Ainsi, si un plan critique est défini par le maximum d'une valeur (par exemple la déformation ou la contrainte principale), ce plan changera au cours d'un cycle de chargement. [Saintier \(2001\)](#) définit la normale du plan critique comme la direction associée à la contrainte principale maximale et relève sur des essais de torsion répétée l'angle du plan de fissuration. Une très bonne corrélation est trouvée entre la direction prédite et celle relevée. Pour des essais de torsion alternée, la direction de fissuration est verticale ([Saintier et al., 2006](#)). L'auteur explique ce phénomène par la compétition de la propagation dans deux directions symétriques par rapport à la verticale. Son propos est mis en valeur par des essais de torsion répétée par blocs de 500 cycles à  $[0; -\theta]$  et 500 cycles à  $[0; +\theta]$ . Une propagation en zig-zag est observée.

#### c Existence de cycles secondaires

Les critères en maximum ne prennent pas en compte les cycles secondaires existant lors d'un cycle global de sollicitation, comme par exemple lors d'un essai de torsion alternée. En effet, en se plaçant sur la direction matérielle voyant la plus grande élongation au cours du cycle, l'énergie de fissuration ([Mars, 2001](#)) ou l'élongation ([Raoult, 2005](#)) présentent un deuxième maximum. La réduction de la

durée de vie d'un essai de torsion alternée par rapport à un essai de torsion simple pourrait être imputée à l'existence de ce deuxième cycle.

#### d Loi d'endommagement

Afin d'estimer la durée de vie d'une structure, il est nécessaire de connaître l'endommagement produit par un chargement. À partir de courbes de Wöhler, un endommagement est associé à un cycle de sollicitation et une loi de cumul donne l'endommagement de tout un signal. La loi la plus simple est le cumul linéaire de Miner (Miner, 1945). L'endommagement d'un cycle est donné par l'inverse du nombre de cycles à amorçage d'une courbe de Wöhler à cette sollicitation

$$D_i = \frac{1}{N_i} \quad . \quad (9.3)$$

L'endommagement de tout le signal est donné par la somme des endommagements de tous les cycles

$$D = \sum_i D_i \quad . \quad (9.4)$$

Plusieurs auteurs (Flamm et Weltin, 2002; Steinweger et al., 2003; Flamm et al., 2003) ont validé et utilisé l'hypothèse de cumul linéaire d'endommagement pour des signaux par blocs et variables.

Récemment, une étude (Harbour et al., 2008) sur des chargements multiaxiaux en traction-torsion a montré que pour certains chargements, il est possible de calculer le plan de fissuration en appliquant un cumul linéaire de la variable d'endommagement par plan. Les mêmes auteurs (Harbour et al., 2007) ont aussi validé le cumul linéaire pour l'estimation des durées de vie.

### 9.1.4 Discussion

L'analyse de la littérature met en évidence une carence : celle de la représentation du phénomène d'endommagement par fatigue. Les grandeurs les plus adaptées à la prédiction de la durée de vie sont encore les grandeurs les plus classiques et les nouvelles approches se fondant sur l'existence de défauts ne donnent pas de meilleurs résultats. Les axes de recherche actuels s'orientent vers une étude fine des trajets de chargement locaux, incluant les effets de rotation du repère principal, cumul par plan, ou prise en compte de la multiaxialité.

Les essais de notre étude sont des essais de traction relaxant et non-relaxant. Ainsi, nous ne discuterons pas de tous les effets cités ci-dessus. **Nous utiliserons la déformation principale maximale comme grandeur, car cette grandeur donne les meilleures corrélations de durée de vie (Raoult, 2005; Mars et Fatemi, 2005).**

## 9.2 Essais de fatigue uniaxiale en température

### 9.2.1 Protocole expérimental

Le protocole expérimental est le suivant : l'éprouvette à tester est mise dans l'enceinte climatique de l'essai pendant deux heures, le temps que l'éprouvette atteigne la température de consigne. Comme l'éprouvette n'est pas fixée, la dilatation thermique se fait librement. Elle est fixée aux mors avant le début de l'essai. Le contrôle des essais se fait en déplacement. Le critère utilisé pour la définition de la fin de vie est celui proposé par Ostoja-Kuczynski et al. (2003) et présenté au paragraphe 8.3.1 c.

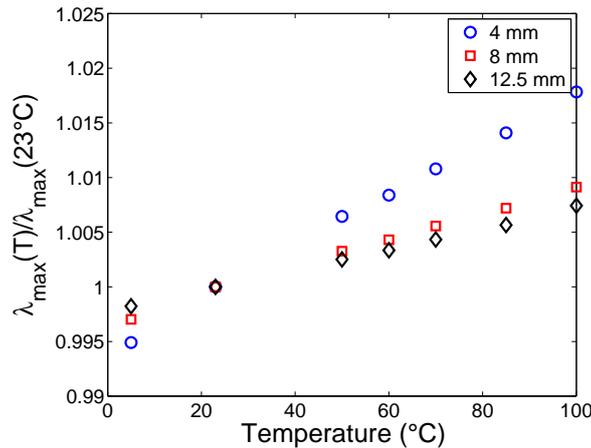


FIGURE 9.2 – Influence de la température sur la déformation principale maximale lors d’un cycle pour trois déplacements maximaux.

L’analyse du comportement montre qu’il est peu influencé par la température. Le seul fait marquant est un raidissement observé à 85°C et 100°C pour les grandes durées de vie. Ce raidissement est imputé au vieillissement. Des mesures de dureté de 65 pt en peau et 58 dans le volume de l’éprouvette (56 sans vieillissement) confirment le vieillissement du matériau à 85°C.

Nous avons choisi l’éprouvette AE2 pour ces essais, car elle présente un faible autoéchauffement et permet ainsi de réaliser des essais à température presque uniforme à des fréquences raisonnables (supérieures à l’Hertz). Les mesures de température en peau lors des essais de fatigue montrent que nous pouvons raisonnablement négliger l’autoéchauffement dans ces essais. Ainsi, nous supposons que la température de l’éprouvette est celle de l’enceinte.

### 9.2.2 Procédure d’analyse

Nous présentons les résultats d’essais en déformation principale maximale. Nous avons dans un premier temps étudié l’influence de la mise en température de l’éprouvette (coefficient de dilatation thermique de  $2.2 \cdot 10^{-4}$ ). Un calcul par éléments finis permet d’obtenir cette grandeur au point critique. Les résultats sont présentés sur la figure 9.2 pour trois déplacements maximaux. Nous constatons que l’écart est faible et ne dépasse pas 2%. C’est pourquoi dans la suite de l’étude nous présenterons les résultats en fonction des grandeurs calculées à 23°C.

### 9.2.3 Résultats

#### a Traction répétée

Nous traçons les résultats dans un diagramme représentant la durée de vie en fonction de la température à iso-sollicitation (FIG. 9.3). Le premier constat est que la durée de vie évolue peu jusqu’à 70°C. Ensuite, plus la sollicitation est importante, plus la durée de vie diminue avec la température. Ces deux faits se retrouvent sur la courbe de Wöhler en déformation (fig. 9.4). En résumé, nous observons que :

- les durées de vie entre 5°C et 70°C sont sensiblement les mêmes ;
- les durées de vie diminuent nettement à 85°C et 100°C ;
- cette réduction de la durée de vie est plus importante aux fortes sollicitations.

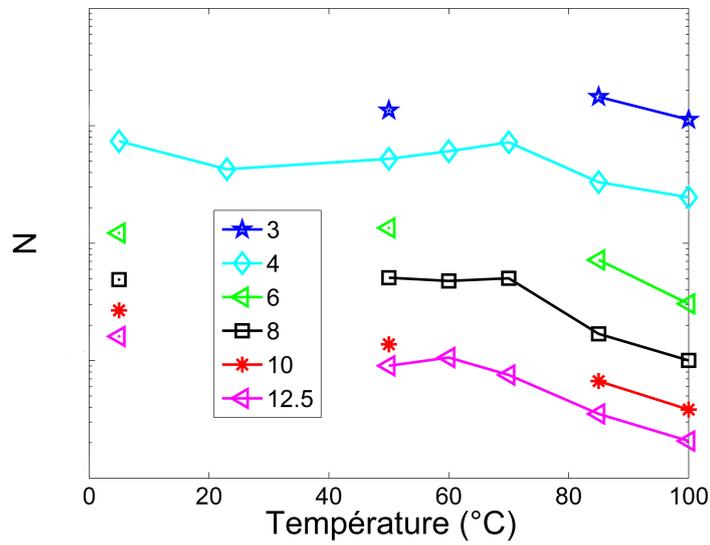


FIGURE 9.3 – Nombres de cycles à l’amorçage (moyenne logarithmique) en fonction de la température pour les types de chargement (déplacement maximal en mm).

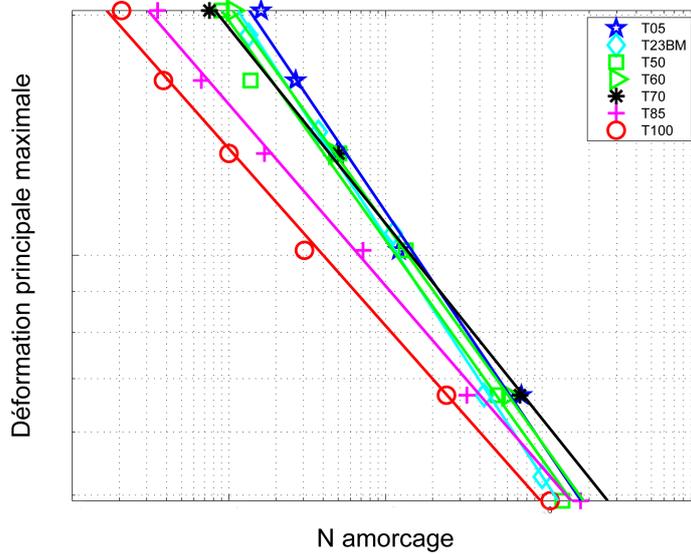


FIGURE 9.4 – Courbes de Wöhler en déformation pour 7 températures.

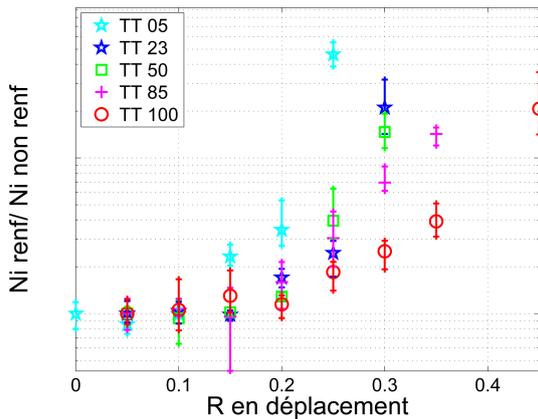


FIGURE 9.5 – Rapport entre la durée de vie sous conditions renforçante et non renforçante en fonction du rapport de charge **en déplacement** pour les cinq températures d’essais.

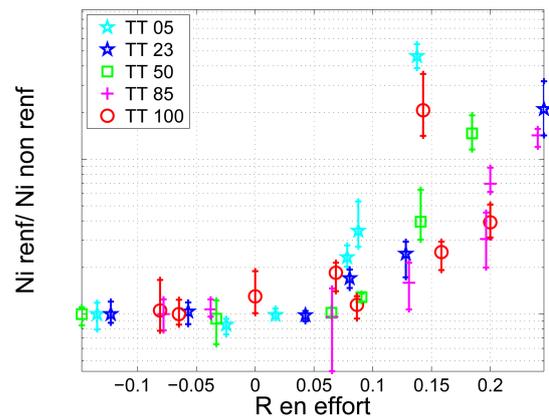


FIGURE 9.6 – Rapport entre la durée de vie sous conditions renforçante et non renforçante en fonction du rapport de charge **en effort** pour les cinq températures d’essais.

**b Traction-traction**

Nous présentons les résultats des essais en traçant le rapport entre la durée de vie sous conditions renforçante et non renforçante en fonction du rapport de charge. Les résultats pour les cinq températures étudiées sont sur les figures 9.5 et 9.6.

Voici les commentaires que nous pouvons donner sur les résultats en déplacement :

- le renforcement diminue avec la température (phénomène très visible par exemple à  $R = 0.3$ ) ;
- le seuil de renforcement augmente avec la température (0.15 pour 5°C, 0.20 pour 23°C et 85°C, 0.25 pour 50 °C et 100°C).

Nous nuancions toutefois ces commentaires par le manque de données expérimentales. En effet, ce ne sont que des tendances et nous insistons sur l’imprécision de la détermination du seuil de renforcement par exemple.

Les résultats en effort apportent d’autres commentaires :

- le renforcement est plus important à 5°C ;
- il est difficile de donner une tendance générale en fonction de la température en terme de renforcement ;
- le seuil de renforcement semble être le même à toutes les températures, soit  $R = 0$ .

Une lecture attentive du graphique indique ce qui semble être au premier abord une aberration : aux alentours de  $R = 0.15$  , nous avons deux résultats distants d’un ordre de grandeur à 100°C. L’essai avec le rapport de charge  $R = 0.45$  en déplacement a en effort un rapport de charge très faible. Ceci s’explique par le comportement lors de cet essai : une décroissance très importante des efforts extrémaux est observée pour cet essai à 100°C.

**Remise en cause de l’hypothèse de comportement stabilisé**

L’hypothèse de comportement stabilisé suppose que le comportement n’évolue plus ou très peu à partir d’un certain nombre de cycles. Pour la plupart des essais d’endurance, cette hypothèse est acceptable car les effets viscoélastiques restent faibles. Par contre, à température élevée, ces effets deviennent importants et nous assistons à une transformation du matériau (Shaw et al., 2005). Cette hypothèse n’est donc pas valide pour des essais longs à 100°C.

## 9.2.4 Analyse des faciès de rupture

Les figures 9.7 et 9.8 représentent des faciès de rupture d'AE42 en traction relaxante pour un NR et un SBR à température ambiante. Le faciès du NR présente des arrachements réguliers que la littérature impute à la cristallisation sous contrainte. Celui du SBR est lisse et est caractéristique des matériaux non-cristallisables.

À partir de ces références, nous allons étudier les faciès de rupture obtenus sur les courbes de Wöhler sur NR. De 5°C jusqu'à 85°C, les faciès de rupture présentent des arrachements réguliers (FIG. 9.9 et 9.10). Par contre, à 100°C, un faciès d'un essai à grande durée de vie (FIG. 9.12) est lisse et est totalement différent des faciès à faible durée de vie (FIG. 9.11) qui présentent toujours des arrachements.

L'absence d'arrachements, donc potentiellement de cristallisation sous contrainte en fond de fissure sur l'essai à grande durée de vie à 100°C, peut être imputée au vieillissement. Le vieillissement de l'éprouvette est visible après l'essai et explique l'absence de cristallisation sous contrainte. Concernant tous les autres essais, de 5°C à 100°C, la présence d'arrachements semble attester de la cristallisation sous contrainte en fond de fissure.

D'autres essais d'endurance en température sur AE42 ont été mis à notre disposition. Pour des températures d'environ 60°C et 80°C, nous observons des faciès de rupture (FIG. 9.13 et 9.14) présentant deux types de mécanisme. Le premier est une propagation classique de la fissure pour un NR et est caractérisé par la présence d'arrachements. Le deuxième est une propagation brutale de la fissure caractérisée par une zone lisse. Cette zone lisse est liée à des températures très élevées. En effet, au début de l'essai, la température à prendre en compte est la température au lieu d'amorçage, c'est-à-dire en peau. Au fur et à mesure de la propagation de cette fissure, les déformations et contraintes deviennent de plus en plus importantes en fond de fissure du fait de la réduction de section : l'autoéchauffement y sera donc plus élevé. Nous avons modélisé très sommairement cette diminution de section par un calcul EF, afin d'avoir un ordre de grandeur de la température lors de ces ruptures thermiques. Nous présentons sur les figures 9.15 et 9.16 les résultats pour une structure saine et une structure avec une diminution de section. Dans la structure saine, la température en peau est de 80°C et 90°C à cœur alors qu'elle atteint plus de 110°C pour la structure endommagée. Ainsi, après amorçage macroscopique, la température augmente fortement et peut provoquer des ruptures brutales dites thermiques.

## 9.3 Prédiction de la durée de vie

### 9.3.1 Cas isotherme

Nous faisons l'hypothèse dans un premier temps d'un chargement isotherme. Pour un chargement d'amplitude constante, la durée de vie est directement donnée par les courbes de Wöhler expérimentales. Nous adoptons la loi de Basquin pour modéliser la relation entre la durée de vie (nombre de cycles  $N_i$  à l'amorçage) et la grandeur  $G$  étudiée par une droite dans un diagramme logarithmique. Cette loi s'écrit :

$$N_i(G) = \frac{1}{e G^m} \quad (9.5)$$

où  $m$  est appelé l'exposant de Basquin. C'est l'opposé du coefficient directeur de la droite (FIG. 9.17). Plus il est grand, plus l'endommagement associé à des sollicitations importantes sera prépondérant devant l'endommagement associé à des sollicitations moins importantes. Le paramètre  $e$  règle la position de la droite dans le diagramme logarithmique.



FIGURE 9.7 – Faciès de rupture d'AE42 pour un NR.



FIGURE 9.8 – Faciès de rupture d'AE42 pour un SBR.



FIGURE 9.9 – Faciès de rupture d'AE2 à 5°C (NR).



FIGURE 9.10 – Faciès de rupture d'AE2 à 85°C (NR).

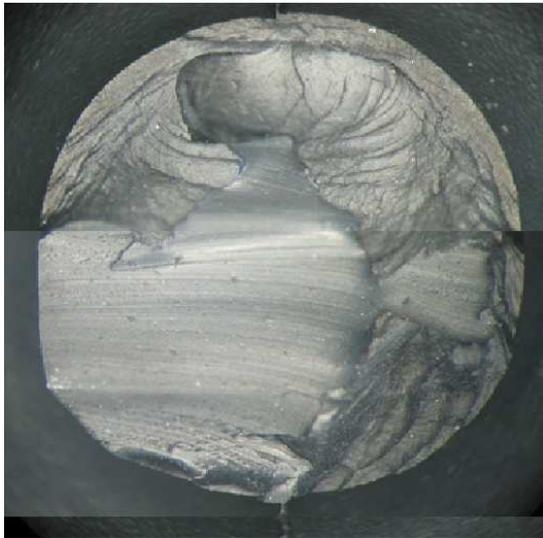


FIGURE 9.11 – Faciès de rupture d'AE2 à 100°C (NR), faible durée de vie.



FIGURE 9.12 – Faciès de rupture d'AE2 à 100°C (NR), grande durée de vie.



FIGURE 9.13 – AE42 à 60°C (NR, 80°C en peau)



FIGURE 9.14 – AE42 à 80°C (NR, 100°C en peau)

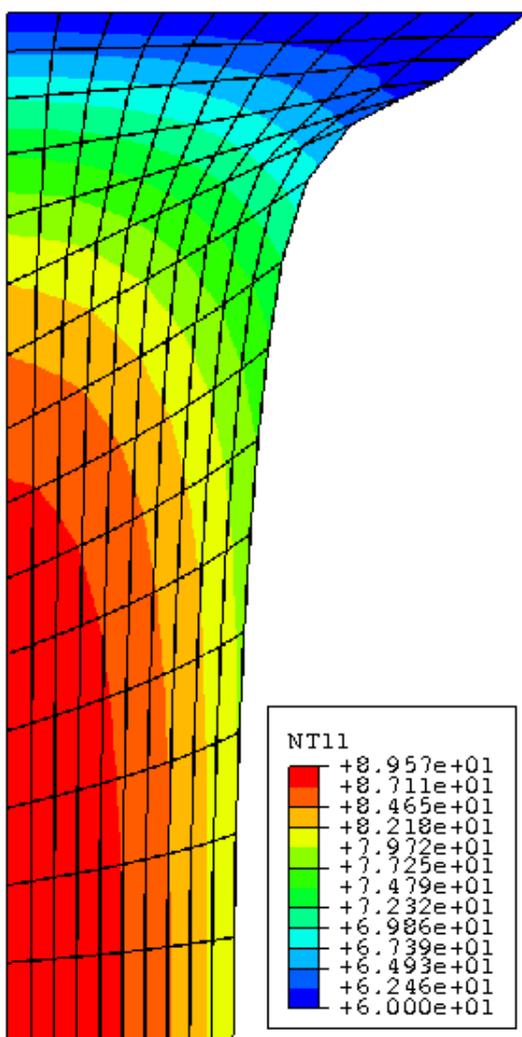


FIGURE 9.15 – Répartition de température dans une AE42 saine.

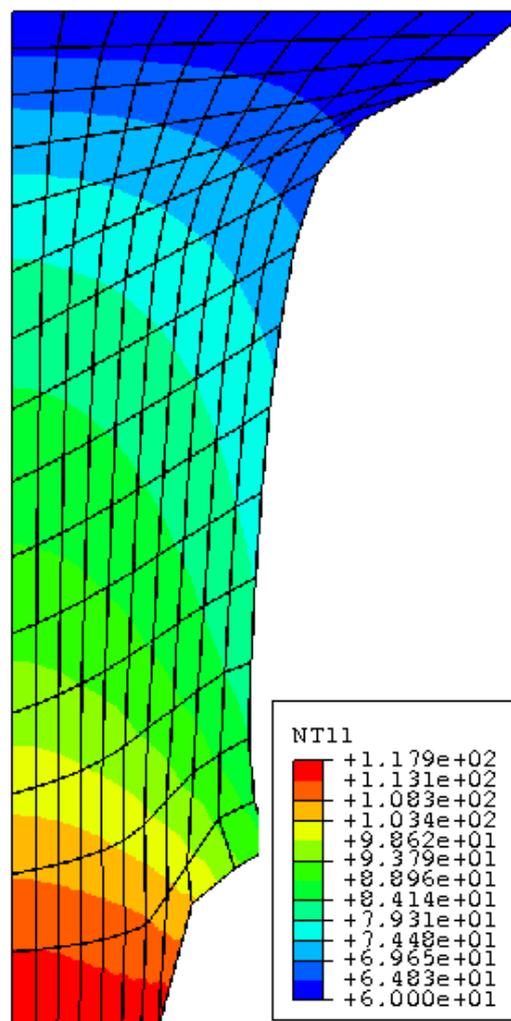


FIGURE 9.16 – Répartition de température dans une AE42 dont la section est réduite.

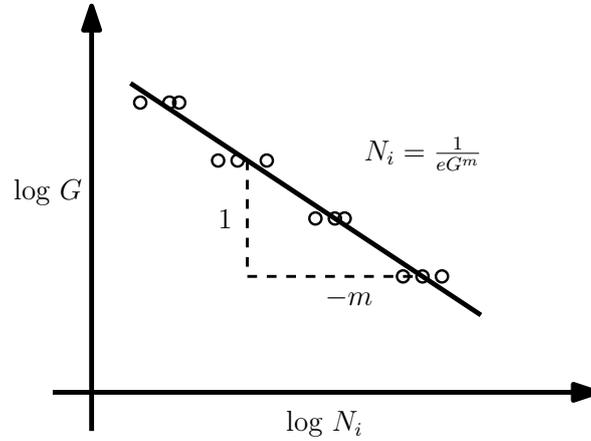


FIGURE 9.17 – Modélisation de Basquin dans un diagramme de Wöhler.

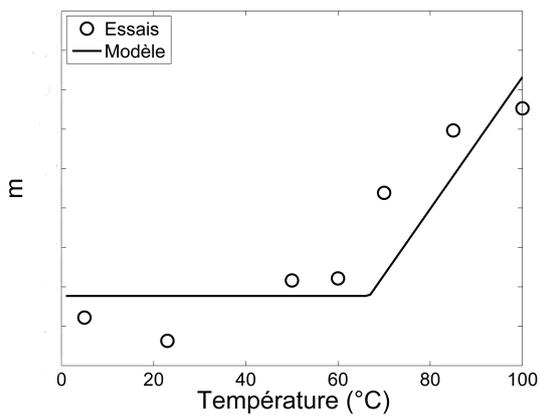


FIGURE 9.18 – Évolution et modélisation adoptée du paramètre  $m$  de la loi de Basquin en fonction de la température.

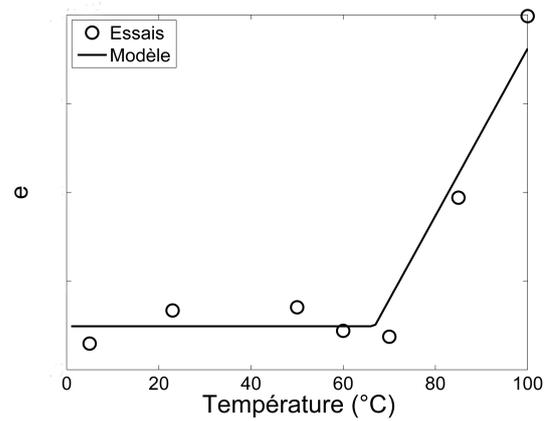


FIGURE 9.19 – Évolution et modélisation adoptée du paramètre  $e$  de la loi de Basquin en fonction de la température.

### a Traction répétée

Nous avons identifié les coefficients de Basquin sur les courbes de Wöhler en déformation (Fig. 9.4). Leur évolution en fonction de la température est représentée sur les figures 9.18 et 9.19. Nous proposons la modélisation suivante pour représenter l'influence de la température : nous supposons que la température n'affecte pas la durée de vie jusqu'à une certaine température  $T_0$  (proche de 70°C dans nos essais), puis que les coefficients de Basquin sont des fonctions affines de la température, soit

$$\text{Si } T < T_0, \quad e = e_0 \quad \text{et} \quad m = m_0 \quad (9.6)$$

$$\text{Si } T > T_0, \quad e = e_1(T - T_0) + e_0 \quad \text{et} \quad m = m_1(T - T_0) + m_0 \quad (9.7)$$

Notons que les paramètres des lois utilisées ont été déterminés par minimisation au sens des moindres carrés du rapport entre les durées de vie prédites et expérimentales.

Cette modélisation traduit l'existence d'une température seuil pour l'apparition d'un effet de la température sur la durée de vie. Nous supposons que la diminution de la cristallisation sous contrainte vers cette température diminue les propriétés de résistance à la propagation de fissure et donc diminue l'endurance du matériau.

L'augmentation de la pente de Basquin après  $T_0$  traduit une diminution de la durée de vie avec la température plus marquée pour les fortes sollicitations.

Ce modèle de fatigue est valide pour des déformations supérieures à 50%. En effet, vue la loi mathématique reliant la durée de vie à la température et à la déformation, il existe une température limite fonction de la déformation à partir de laquelle la durée de vie augmente avec la température, ce que nous n'acceptons pas. Ce point d'inversion est déterminé par la relation suivante

$$G^{\text{inv}} = \exp \left[ \frac{-e_1}{m_1 e_1 T + m_1 e_0} \right] \quad (9.8)$$

Par exemple, pour  $T = T_0$ ,  $G^{\text{inv}} \simeq 5\%$  (endommagement négligeable) et  $G^{\text{inv}} \simeq 50\%$  pour  $T = 100^\circ\text{C}$ .

### b Renforcement en traction-traction

Trois points sont à définir dans la modélisation du phénomène de renforcement en traction-traction :

- les grandeurs représentatives du phénomène ;
- loi de renforcement reliant les grandeurs représentatives à la durée de vie ;
- l'influence de la température sur la modélisation.

Le phénomène de renforcement peut être décrit par une courbe maîtresse fonction du rapport de chargement imposé (indépendamment du niveau de sollicitation appliqué). L'existence d'un seuil de renforcement nul en effort et positif en déplacement (environ 0.15) est avérée. Cette différence pour le seuil entre deux approches en déplacement ou en effort est causée par les phénomènes de fluage et de déformations permanentes. Si la loi de comportement utilisée pour la modélisation macroscopique ne modélise pas ces phénomènes, nous retrouverons ces effets de seuil en déformation et en contrainte.

Nous nous plaçons à l'échelle macroscopique. La démarche naturelle est de chercher si les grandeurs utilisées pour modéliser la durée de vie en traction répétée sont aussi représentatives du renforcement. Nous définissons un rapport de charge en déformation comme le rapport entre la déformation principale maximale au cours du cycle et la déformation minimale dans cette direction atteinte au cours du cycle, soit

$$R = \frac{\lambda_{\text{max}}^\alpha - 1}{\lambda_{\text{min}}^\alpha - 1} \quad (9.9)$$

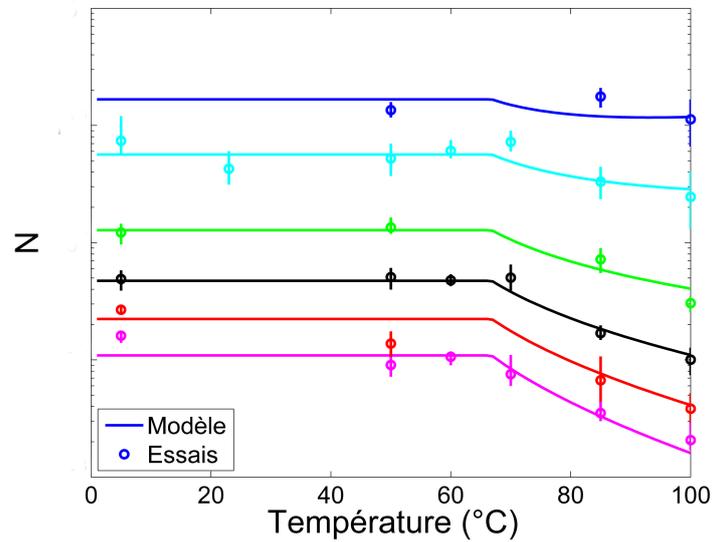


FIGURE 9.20 – Durées de vie pour la modélisation adoptée.

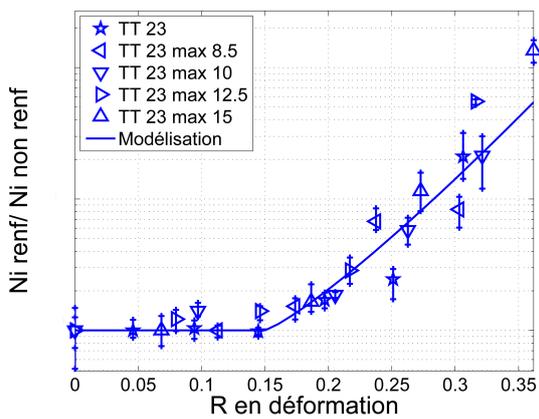


FIGURE 9.21 – Rapport entre la durée de vie sous condition renforçante et non renforçante en fonction du rapport de charge en déformation à 23°C pour différents maxima.

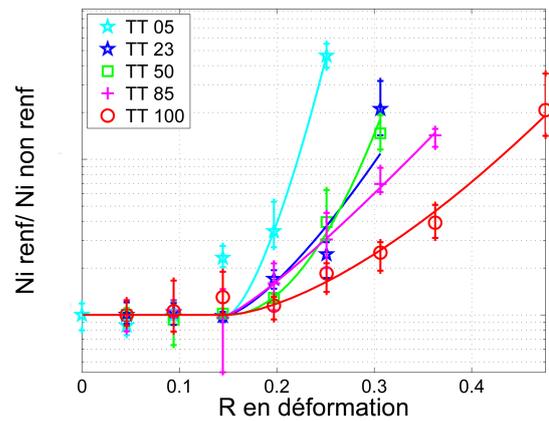


FIGURE 9.22 – Modélisation du renforcement par une loi du type  $\log \frac{N_i \text{ renf}}{N_i \text{ non renf}} = aR^b$ .

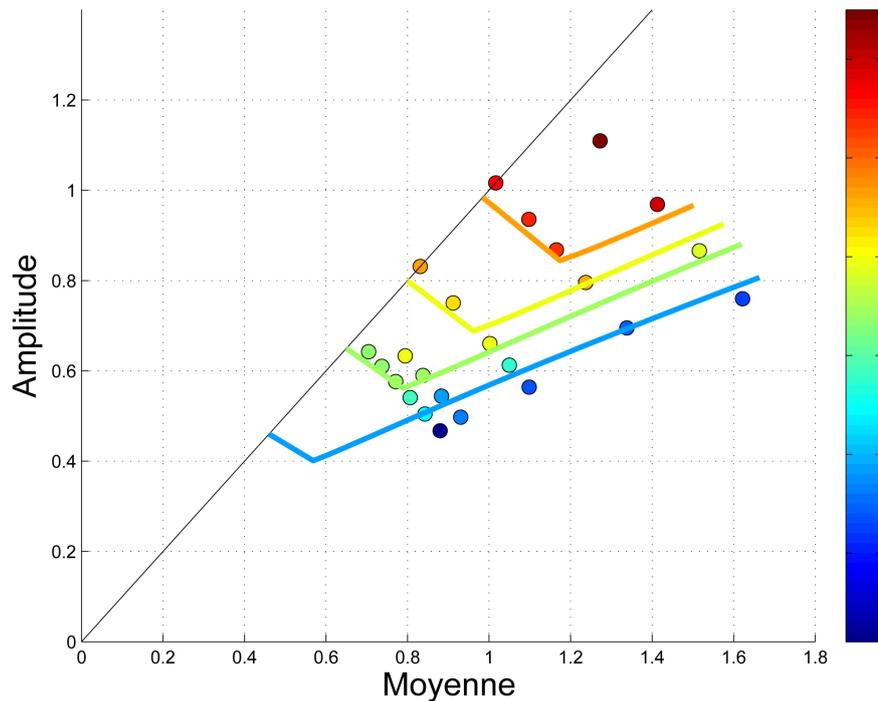


FIGURE 9.23 – Diagramme de Haigh à 23°C : points expérimentaux et lignes iso-durée de vie de la modélisation (9.10). Échelle de couleur en  $\log N$ .

où  $\alpha$  représente la direction principale maximale. La seule différence avec une approche en contrainte est l'existence d'un seuil. Nous pouvons constater sur la figure 9.21 qu'il est possible de définir une courbe maîtresse entre l'allongement de la durée de vie et le rapport de charge en déformation quelque soit la déformation maximale imposée. Nous choisissons de modéliser le renforcement par la loi suivante :

$$\begin{aligned} \text{Si } R < R_{seuil}, \quad \ln \frac{N_i \text{ renf}}{N_i \text{ non renf}} &= 0 \\ \text{Si } R > R_{seuil}, \quad \ln \frac{N_i \text{ renf}}{N_i \text{ non renf}} &= aR^b \quad . \end{aligned} \quad (9.10)$$

Nous avons déterminé les coefficients de cette loi pour chaque température avec  $R_{seuil} = 0.15$ . Les résultats sont présentés sur la figure 9.22. Nous pouvons noter que certaines courbes se croisent, notamment celles à 23, 50 et 85°C, impliquant que le renforcement modélisé n'est pas monotone de la température. Nous discuterons de ce fait dans le prochain paragraphe.

Concernant la notion de renforcement telle que nous l'avons définie dans le chapitre précédent, nous pouvons affirmer à la vue des figures 9.24, 9.23, 9.25 et 9.26 que le matériau présente un renforcement en déformation de 5°C à 85°C. La situation change pour 100°C : les lignes isodurée de vie (Fig. 9.27) sont presque horizontales et le matériau n'est que partiellement renforçant : à iso-amplitude, la durée de vie n'évolue pas en fonction de la moyenne.

## Discussion

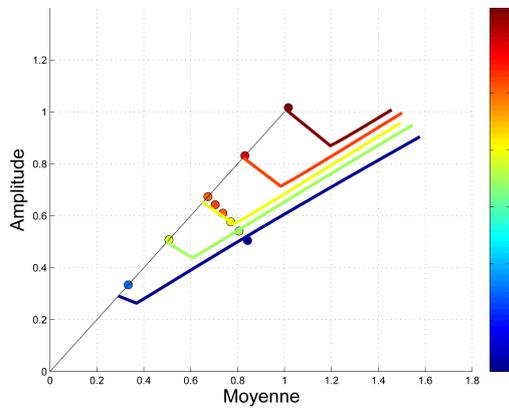


FIGURE 9.24 – Diagramme de Haigh à 5°C.

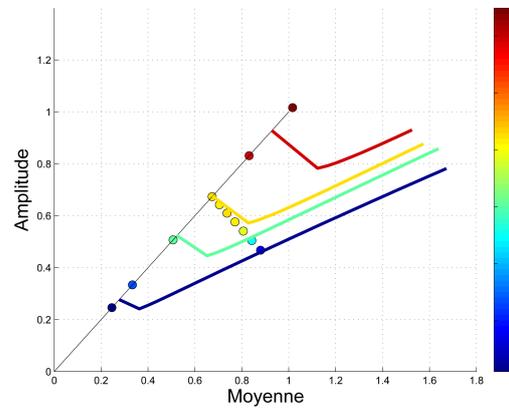


FIGURE 9.25 – Diagramme de Haigh à 50°C.

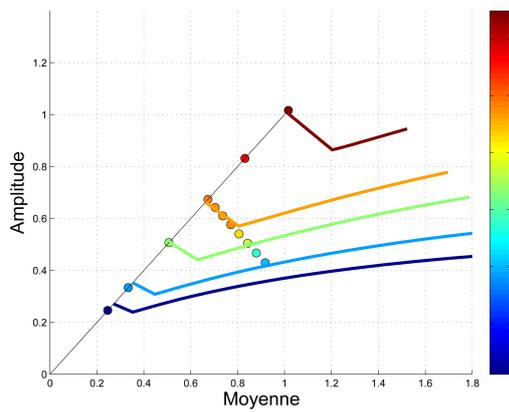


FIGURE 9.26 – Diagramme de Haigh à 85°C.

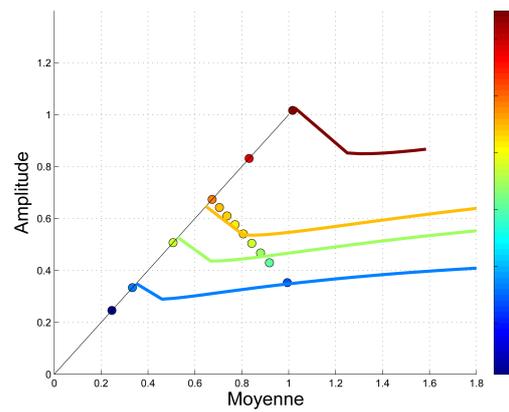


FIGURE 9.27 – Diagramme de Haigh à 100°C.

Une tendance forte se dégage : le renforcement diminue avec la température. Ceci peut s'expliquer si l'on suppose que le phénomène de renforcement est en majeure partie causé par la cristallisation sous contrainte. En effet, nous savons que la capacité à cristalliser diminue avec la température, impliquant une moindre résistance à la propagation de fissure de fatigue du matériau.

Toutefois, nous n'observons pas d'effet de seuil en température sur les durées de vie comme en traction répétée. Entre 23°C et 85°C le renforcement diminue régulièrement avec la température ; il est très important à 5°C et disparaît presque à 100°C.

Malgré le nombre très important d'essais réalisés, nous ne pouvons pas donner de forme générale de la loi de renforcement en température. En effet, si nous nous fondons sur la modélisation (9.10), l'identification des paramètres  $a$  et  $b$  en fonction de la température ne permet pas de définir une courbe maîtresse.

### c L'hypothèse de cumul linéaire dans le cas isotherme est-elle valide ?

#### Le cumul linéaire

Toujours sous l'hypothèse d'un chargement isotherme, nous supposons un chargement mécanique variable. Afin d'estimer l'endommagement de ce chargement, nous supposons qu'à l'état stabilisé, l'extraction de cycles par un comptage Rainflow (annexe C) associée à un cumul linéaire de Miner permet d'estimer la durée de vie d'une structure. Ce cumul linéaire n'est, par exemple, pas valide pour des cas de chargements à deux niveaux (Cantournet, 2004) mais est une bonne approximation lorsque les cycles sont répartis uniformément dans tout le signal, ce qui est le cas pour les chargements appliqués sur les composants automobile étudiés.

L'endommagement d'un cycle est donné par l'inverse du nombre de cycles à amorçage d'une courbe de Wöhler à cette sollicitation

$$D_i = \frac{1}{N_i} = e(T)G_i^m(T) \quad . \quad (9.11)$$

L'endommagement de tout le signal est alors la somme des endommagements de tous les cycles extraits par la méthode Rainflow

$$D = \sum_i e(T)G_i^m(T) \quad . \quad (9.12)$$

#### Essais de cumul : température constante et chargement mécanique variable

Dans un premier temps, nous voulons tester l'hypothèse de cumul linéaire dans le cas isotherme : la température reste constante alors que la sollicitation mécanique est variable (FIG. 9.28). Nous proposons des chargements mécaniques constitués de quatre niveaux, ces niveaux étant mixés par blocs (nombre : 25) afin de limiter les effets d'histoire. Pour chaque température (50°C, 85°C et 100°C), le nombre de cycles de chaque niveau mécanique est déterminé afin que ces cycles produisent un quart de l'endommagement du signal. Ce calcul est fondé sur la courbe de Wöhler à la température étudiée. Si l'endommagement du signal à quatre niveaux  $D = \sum_{i=1}^4 N^i / N_{Wöhler}^i$  n'est pas proche de 1 lors de l'amorçage, c'est que l'hypothèse de cumul linéaire doit être remise en question. Nous présentons dans le tableau 9.1 les résultats moyennés sur cinq essais (la moyenne est effectuée sur les logarithmes) ainsi que les extrema.

Nous constatons qu'à 50°C, l'endommagement est proche de 1 et renforce l'hypothèse de cumul linéaire. Par contre, à 85°C et à 100°C, les chargements durent respectivement 50% et 110% de temps de plus que prévu par le cumul linéaire à partir des courbes de Wöhler. L'hypothèse de cumul linéaire n'est donc pas valide à ces températures.

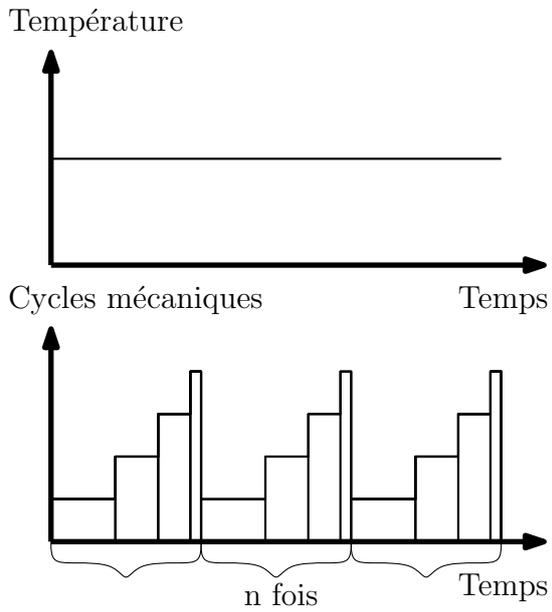


FIGURE 9.28 – Présentation des essais de cumul isothermes.

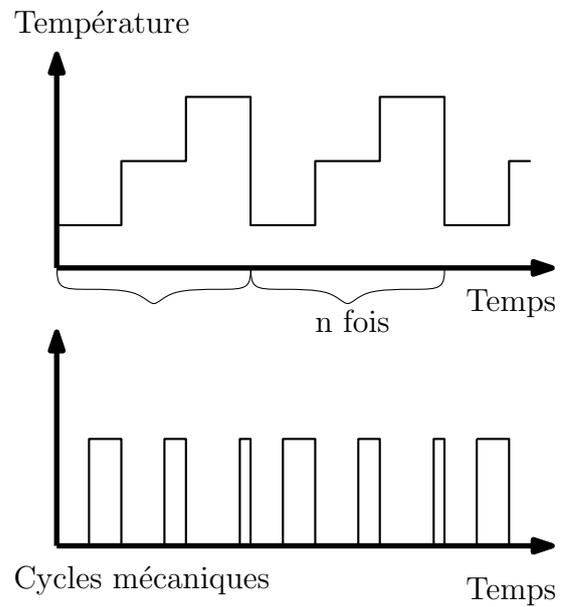


FIGURE 9.29 – Présentation des essais de cumul anisothermes.

Température	50°C	85°C	100°C
Endommagement <b>moyen</b> à amorçage	<b>0.90</b>	<b>1.47</b>	<b>2.12</b>
Endommagement minimal à amorçage	0.65	1.16	1.86
Endommagement maximal à amorçage	1.18	1.96	2.95

TABLE 9.1 – Endommagements à l’amorçage des essais de cumul isotherme calculés à partir des courbes de Wöhler correspondantes.

Analysons plus finement les courbes de Wöhler et les essais par niveaux réalisés, notamment en termes de vieillissement. Une différence essentielle vient de la durée de l'essai. En effet, pour les grandes durées de vie, un essai d'amorçage dure plus d'une journée. Par contre, pour les faibles durées de vie, un essai dure de une à quelques heures. Les essais multi-niveaux durent eux environ une demi-journée. Un niveau est à grande durée de vie, les trois autres niveaux à faible durée de vie. Pour le niveau à grande durée de vie, le temps de l'essai multi-niveaux est inférieur mais reste du même ordre de grandeur que l'essai de la courbe de Wöhler. Par contre, pour les trois autres niveaux dont les courbes de Wöhler durent au plus quelques heures, l'essai multi-niveaux est beaucoup plus long.

Or du vieillissement a été constaté à 85°C et 100°C sur les essais longs des courbes de Wöhler. De plus, notre analyse de la littérature a montré que le vieillissement diminue les durées de vie. Notre analyse tendrait donc à dire que les essais multi-niveaux sont plus endommageants que les courbes de Wöhler car le vieillissement pourrait diminuer la tenue en endurance. Il n'en est rien, bien au contraire ! Les essais multi-niveaux sont moins endommageants. Une explication à ce fait serait alors de dire que le vieillissement dynamique, c'est-à-dire au cours d'un essai et non avant l'essai comme la plupart des analyses sur le vieillissement, augmenterait la tenue en endurance. Nous sommes toutefois très sceptiques devant cette explication.

Afin d'étudier cette problématique, nous proposons comme perspectives de réaliser d'autres essais de cumul respectant cette fois-ci les durées des courbes de Wöhler. De plus, une analyse sur le vieillissement (mesure de dureté, campagne d'essais spécifique) semble nécessaire afin d'expliquer ces essais.

### 9.3.2 Cas anisotherme

#### a Hypothèse de cumul anisotherme linéaire

Dans le cas anisotherme, nous supposons que la règle de cumul linéaire de Miner s'applique toujours, avec l'endommagement d'un cycle calculé avec la température correspondant au cycle extrait. Deux cas sont à examiner pour déterminer la température  $T_i$  d'un cycle Rainflow. Pour la majorité des cycles, les extrema des cycles sont rapprochés et nous pouvons considérer que la température ne varie pas au cours d'un cycle (le temps caractéristique thermique est grand devant le temps caractéristique mécanique). Pour les cycles dont les extrema sont éloignés dans le temps, nous choisissons de considérer la température maximale entre les extrema afin d'être conservatif. Finalement, l'endommagement est donné par :

$$D = \sum_i e(T_i) G_i^m(T_i) \quad . \quad (9.13)$$

#### b Le cumul anisotherme linéaire est-il valide ?

Nous proposons des essais de cumul anisotherme : le chargement mécanique est constant et des blocs de température sont superposés (FIG. 9.29). Nous avons choisi de mixer trois températures : 50°C, 85°C et 100°C en une dizaine de répétitions en répartissant de manière uniforme l'endommagement sur les trois températures. Cet essai est relativement long car des pauses sont insérées entre les blocs pour permettre la mise en température de l'éprouvette. Nous n'avons qu'un seul essai répété trois fois. L'endommagement moyen de cet essai est 1.2 . Ce seul essai ne permet pas de conclure quant à la validité du cumul linéaire d'endommagement. Toutefois, cette valeur légèrement supérieure à l'unité va dans le sens des observations effectuées sur le cumul isotherme. Cette campagne d'essai doit être poursuivie afin de tester plusieurs chargements mécaniques.

## 9.4 Conclusions

Nous pouvons répondre aux questions sur l'influence de la température sur l'endurance soulevées par l'analyse de la littérature du chapitre précédent. La température diminue les propriétés en endurance de notre matériau d'étude. Toutefois, nous venons de montrer qu'il existe une température seuil séparant deux domaines. Entre 5°C et 70°C, la température affecte peu la durée de vie. Par contre, à partir de 70°C, les durées de vie diminuent et cela d'autant plus que la sollicitation mécanique est importante. Nous avons modélisé les courbes de Wöhler à différentes températures à l'aide d'un modèle de Basquin fondé sur la déformation principale maximale. Nous avons alors construit un faisceau de courbes de Wöhler en fonction de la température en se fondant sur la température seuil. La comparaison entre cette modélisation et toutes les expériences est tout à fait satisfaisante.

L'influence de la température sur le renforcement est quant à elle plus régulière. Suivant notre définition du renforcement donnée dans le chapitre précédent, nous pouvons affirmer grâce aux expériences que le renforcement est très prononcé à 5°C, diminue régulièrement jusqu'à devenir partiellement renforçant à 100°C : la moyenne n'influence pas les durées de vie. Nous avons modélisé ce renforcement en reliant l'augmentation de la durée de vie dans les conditions renforçantes au rapport de charge.

La validation d'une hypothèse de cumul est la dernière étape d'un modèle de fatigue thermomécanique. Nous avons testé l'hypothèse de cumul linéaire dans le cas isotherme à plusieurs températures. Si elle est raisonnable à 50°C, elle ne s'applique plus à 85°C et à 100°C : les essais multi-niveaux de cumul ont duré deux fois plus longtemps que l'estimation à partir des courbes de Wöhler. Nous n'avons pas d'explication et proposons de réaliser d'autres essais afin de séparer les effets de fatigue et de vieillissement. Dans le cas anisotherme, le seul essai réalisé ne permet pas de conclure. Toutefois, un endommagement légèrement supérieur à l'unité rejoint les observations effectuées en isotherme.

# Conclusions générales - Perspectives

L'objectif de notre travail était de proposer des méthodes de prédiction de la durée de vie nécessaires à la construction d'équivalents fatigue thermomécanique pour les structures élastomères. Nous avons développé les outils nécessaires à l'étude de l'histoire de chargement, mécanique d'une part et thermique d'autre part avec une méthode de calcul de l'autoéchauffement. Un modèle de fatigue thermomécanique a été construit et l'hypothèse de cumul linéaire dans le cas anisotherme a été discutée.

## Sur le comportement thermomécanique cyclique

Nous avons montré que les effets visqueux sont très importants pour le comportement cyclique. En effet, le comportement ne se stabilise jamais. De plus, la température fait baisser les efforts mesurés alors que l'élasticité entropique prévoit l'inverse. Modéliser précisément le comportement thermomécanique cyclique nécessite donc l'utilisation de modèles dissipatifs, visco-hyperélastiques par exemple.

Afin d'obtenir une modélisation facile de mise en œuvre tant à l'identification expérimentale qu'à l'usage dans les outils numériques, nous avons choisi une modélisation hyperélastique. Nous avons adopté la loi de comportement cyclique de [Raoult \(2005\)](#) permettant de décrire le comportement stabilisé de notre matériau après effet Mullins. Les deux paramètres de cette loi ont été identifiés sur des essais cycliques uniaxiaux et biaxiaux. Comme l'influence de la température sur le comportement est de l'ordre de grandeur de la dispersion de fabrication, nous ne la modélisons pas.

Nous avons, de plus, mis en évidence une dépendance à la température de l'effet Mullins lors de cycles en traction-traction. Nous avons étudié la séquence de cycles suivante : traction-traction, traction répétée, traction-traction. L'adoucissement consécutif à l'effet Mullins est normalement visible après une décharge totale. Nous avons constaté un comportement plus raide lors de la première série des cycles en traction-traction que lors de la deuxième, ce raidissement étant d'autant plus important que la température est faible. De plus, ce raidissement disparaît vers 80°C. C'est donc qu'à chaud, l'effet Mullins a eu lieu lors de la première série de cycles en traction-traction, alors qu'à température ambiante, des cycles répétés sont nécessaires à l'effet Mullins. Nous mettons cet effet sur le compte de la cristallisation sous contrainte qui modifie fortement la structure du matériau lors des cycles de traction-traction à température ambiante. En pratique, il faut donc faire attention à toujours accommoder les structures étudiées afin d'obtenir le comportement stabilisé.

## Sur l'autoéchauffement

L'autoéchauffement est un phénomène bien réel sur des pièces automobiles en service, mais surtout lors d'essais accélérés ou sévérés sur banc. Afin de pouvoir estimer la température au niveau local d'une structure, nous avons développé des lois d'autoéchauffement cycliques et variables.

### Résolution d'un problème thermomécanique couplé

Le problème thermomécanique des élastomères est un problème fortement couplé. En effet, lors d'un cycle mécanique, l'élévation de température due aux effets entropiques peut atteindre plusieurs degrés et est presque totalement réversible. D'un autre côté, l'autoéchauffement peut atteindre plusieurs dizaines de degrés après un grand nombre de cycles. Nous avons choisi de définir la température d'autoéchauffement comme la température instantanée privée des effets thermoélastiques.

Le problème d'autoéchauffement a ainsi la particularité d'avoir un temps caractéristique mécanique (environ 1 s) beaucoup plus petit que le temps caractéristique thermique (environ 1 min). Afin d'exploiter cette différence, il est judicieux d'utiliser un couplage faible pour résoudre le problème thermomécanique : les deux sous-problèmes mécanique et thermique composant le problème thermomécanique sont donc résolus sur des échelles de temps différentes. Le problème mécanique est résolu sur quelques cycles mécaniques afin d'estimer l'énergie dissipée au cycle stabilisé, puis cette énergie dissipée est utilisée comme sources de chaleur dans un calcul thermique effectué sur un grand nombre de cycles.

Toutefois, ce couplage faible n'est pas proprement défini dans le cadre des grandes déformations car la géométrie d'une structure varie au cours d'un cycle mécanique : cette variation n'est pas prise en compte lors d'un calcul thermique effectué sur une géométrie fixe. En d'autres termes, la problématique peut se résumer dans le choix de la géométrie ou des paramètres du calcul thermique pour garantir que la résolution du problème par un couplage faible donne la même solution qu'une résolution couplée. Pour répondre à cette problématique, nous avons proposé une homogénéisation en temps de l'équation de la chaleur écrite sur la configuration de référence. En effet, sur cette configuration, la variation de la géométrie et des conditions aux limites lors d'un cycle mécanique est représentée par des termes dépendants de la transformation mécanique. L'homogénéisation en temps permet de définir des grandeurs moyennes (conductivité thermique, coefficient d'échange) et de s'affranchir de l'échelle de temps mécanique lors de la résolution du problème thermique. Ce nouveau problème thermique homogénéisé permet alors d'utiliser le couplage faible dans le cadre des grandes déformations et de réduire d'un facteur mille les temps de calculs par rapport à une résolution exacte du problème thermomécanique couplé tout en garantissant une excellente approximation.

### Estimation des sources de chaleur

Cette étape requiert une grande attention afin d'obtenir la bonne répartition spatiale de température d'autoéchauffement. La modélisation hyperélastique adoptée pour le comportement apporte un avantage du point de vue calcul numérique : un seul calcul est nécessaire pour caractériser un trajet de chargement alors qu'une modélisation dissipative nécessiterait des temps de calculs beaucoup plus importants. Toutefois, le calcul hyperélastique ne donne aucune information quant à l'énergie dissipée par un cycle « réel ». Nous devons donc construire une méthode permettant d'estimer *a posteriori* l'énergie dissipée lors d'un trajet de chargement hyperélastique.

Trois points sont à définir pour cette estimation : une méthode de détermination des cycles hystériques, une grandeur fondée sur des variables hyperélastiques, prédictive de l'énergie dissipée lors d'un cycle, et enfin la loi ou fonction de dissipation reliant cette grandeur à l'énergie dissipée. Nous avons d'ailleurs montré expérimentalement à l'aide d'identification de sources de chaleur par thermographie infrarouge que l'énergie dissipée mécaniquement sur une boucle d'hystérèse l'était, en première approximation, exclusivement sous forme de chaleur. Cette hypothèse sera aussi discutée lors de la validation des lois d'autoéchauffement.

Nous avons supposé dans un premier temps un chargement cyclique (deux extrema globaux et

aucun extremum local lors du cycle). Un premier constat expérimental nous a permis de montrer que l'énergie élastique de déformation sur un demi cycle n'était pas du tout une mesure prédictive de l'énergie dissipée. Par contre, nous avons défini une grandeur énergie cyclique indépendante du chargement moyen qui est prédictive de l'énergie dissipée. Au niveau local, cette grandeur doit absolument être écrite avec des grandeurs lagrangiennes pour garantir son objectivité car elle fait intervenir des tenseurs définis à des instants différents du cycle mécanique. Pour ce faire, nous avons utilisé la classe des tenseurs de Hill (1968) qui définit alors une classe d'énergies cycliques. Nous avons montré expérimentalement que l'énergie cyclique fondée sur le tenseur de Hill droit (ou déformation logarithmique lagrangienne) était le meilleur prédicteur de l'énergie dissipée. Une campagne expérimentale a permis d'identifier la loi reliant cette énergie et la température à l'énergie dissipée. Cette fonction puissance n'a que deux paramètres : une puissance  $\alpha$ , indépendante de la température et un coefficient multiplicateur  $k(T)$ , dépendant de la température.

Afin d'étudier la multiaxialité d'une telle grandeur, nous avons développé une machine de traction biaxiale grâce à une collaboration avec l'University of the West of England (UWE) à Bristol. L'analyse des trajets de chargements biaxiaux hors phase a montré qu'il était nécessaire de modifier la définition de l'énergie cyclique. En effet, afin de prendre en compte des dissipations d'énergie positives sur chaque axe de sollicitation, nous devons prendre la contribution positive de chaque composante tensorielle de l'énergie cyclique. Ce faisant, cette grandeur devient tout à fait multiaxiale et permet d'estimer l'énergie dissipée à travers un grand nombre de trajets de chargements biaxiaux. Par contre, son objectivité n'est plus garantie. Ce problème d'objectivité peut être levé avec une écriture en valeurs principales lorsque les directions principales restent fixes.

Afin de concilier multiaxialité et objectivité de l'énergie cyclique, nous avons proposé d'utiliser la discrétisation de l'énergie cyclique dans  $n$  directions de l'espace. Lorsque  $n$  tend vers l'infini, l'objectivité de la grandeur est garantie ainsi que la prise en compte de la multiaxialité.

Dans un deuxième temps, sous l'hypothèse d'un chargement variable, nous avons proposé d'extraire par la méthode Rainflow les cycles sur chaque composante du tenseur des déformations et ainsi de sommer les contributions à l'énergie dissipée de chaque cycle identifié. Cette méthode a été validée expérimentalement sur des chargements variables biaxiaux en phase et hors phase (deux signaux variables indépendants appliqués sur les deux axes).

## Validation des lois d'autoéchauffement

La loi d'autoéchauffement variable présentée nécessite une grande puissance de calcul numérique, tant du point de vue de la taille des données (notamment pour un chargement multidimensionnel) que de la complexité des calculs qui ne convergent pas toujours sur toute la plage d'utilisation de la structure. Nous avons donc proposé des méthodes simplifiées afin d'estimer l'autoéchauffement pour des structures réelles soumises à des chargements variables. Dans le cas unidimensionnel, nous faisons l'hypothèse que l'énergie dissipée par tout un signal variable peut être estimée à partir des cycles extraits par un comptage Rainflow. La construction d'une fonction de dissipation reliant l'énergie dissipée d'un cycle global à une grandeur globale du type énergie cyclique est alors nécessaire. Dans le cas d'un chargement stationnaire en termes de puissance dissipée, nous proposons de calculer l'autoéchauffement à partir d'un seul cycle mécanique approchant la puissance dissipée du signal d'origine. Cette méthode fondée sur la puissance globale dissipée ne garantit pas la même répartition de température à cause des non-linéarités du problème. Cette approximation a été validée expérimentalement.

Pour une sollicitation multidimensionnelle, nous appliquons la méthode précédente sur chaque axe de sollicitation indépendamment des autres axes.

La validation des lois d'autoéchauffement est fondée sur des essais d'autoéchauffement avec une

mesure de température (ponctuelle ou sur un profil) et une mesure de l'énergie dissipée. Les coefficients d'échange avec l'extérieur sont généralement déterminés par des essais de refroidissement. De nombreux essais d'autoéchauffement (sur éprouvettes et sur pièces réelles) unidimensionnels ou multidimensionnels ont permis de valider notre estimation de l'autoéchauffement dans tous les cas de chargements étudiés (cycliques, variables) avec une erreur ne dépassant pas 15%. Ainsi, nous pouvons conclure que l'énergie dissipée mécaniquement est en première approximation dissipée sous forme de chaleur.

## Sur la fatigue thermomécanique

### Mécanismes d'endommagement

L'analyse de la littérature a permis d'identifier les mécanismes de fatigue pour les élastomères. Dès les premiers cycles de sollicitation, des micro-fissures s'amorcent. La majorité de la durée de vie est alors consacrée à la propagation de ces micro-fissures en une ou plusieurs macro-fissures détectables provoquant la ruine de la structure. Nous avons fait le choix dans notre étude d'étudier l'amorçage macroscopique.

Pour les matériaux cristallisables, dont le caoutchouc naturel fait partie, il se crée en fond de fissure une structure cristalline qui contribue fortement à la résistance à l'avancement de fissure du matériau. Les matériaux non-cristallisables sont, en effet, moins résistants et présentent un mode de propagation différent. Sachant que la température diminue la cristallisation sous contrainte, la diminution des propriétés d'endurance avec la température pourrait être reliée à ce phénomène.

Certains matériaux élastomères présentent un renforcement lors d'une sollicitation non-relaxante : à iso-amplitude de chargement, la durée de vie augmente avec la moyenne du chargement puis diminue à l'approche de l'élongation à rupture. Ce phénomène est en partie imputable au caractère cristallisable du matériau et est amplifié par la présence de charges. Encore une fois, la température devrait diminuer le renforcement par son effet sur la cristallisation sous contrainte.

### Modèle de fatigue thermomécanique

L'analyse de la littérature indique que la déformation principale maximale est une grandeur représentative de la durée de vie. Nous avons donc utilisé cette grandeur pour notre modèle de fatigue.

Nous avons constaté sur les essais d'endurance l'existence d'un seuil en température : jusqu'à 70°C, la durée de vie évolue peu avec la température. Par contre, à partir de 70°C, les durées de vie diminuent fortement, et cela d'autant plus que la sollicitation est grande. Nous avons choisi de modéliser les courbes de Wöhler en déformation avec un modèle de Basquin, reliant le nombre de cycles à amorçage macroscopique et la déformation principale maximale. Les deux paramètres du modèle de Basquin dépendent de la température à partir de 70°C afin de modéliser la diminution des durées de vie. Cette modélisation permet d'estimer de manière très satisfaisante les durées de vie de 5°C à 100°C.

Les essais d'endurance sous conditions renforçantes ont montré que le renforcement diminuait régulièrement avec la température jusqu'à s'annuler à 100°C. À chaque température, l'augmentation de la durée de vie par rapport aux conditions non-renforçantes a été modélisée avec une courbe maîtresse fondée sur le rapport de charge et analysée dans un diagramme de Haigh.

L'hypothèse de cumul linéaire d'endommagement suppose que l'endommagement affecté à un cycle mécanique est inversement proportionnel au nombre de cycles à amorçage de ce cycle estimé à

partir d'une courbes de Wöhler. L'endommagement d'un signal est alors la somme des endommagements de tous les cycles. Il y aura alors amorçage macroscopique si l'endommagement dépasse l'unité. Nous avons testé cette hypothèse de cumul linéaire dans le cas isotherme (température constante, chargement mécanique variable par blocs) à trois températures. Si cette hypothèse semble valide à 50°C, elle l'est beaucoup moins à 85°C et 100°C où les durées de vie sont multipliées par deux par rapport à l'estimation du cumul linéaire. Dans le cas anisotherme, le seul essai de cumul (chargement mécanique constant, température variable par paliers) laisse supposer aussi que le cumul linéaire ne peut pas s'appliquer.

## Conclusions générales

Nous avons proposé une approche originale de la fatigue thermomécanique des structures élastomères. **Cette approche consiste en une démarche complète d'estimation de la durée de vie d'une structure élastomère soumise à un chargement mécanique et thermique variable.** Nous répondons donc en ce sens à la problématique de ce travail de thèse. En effet, nous avons analysé d'une part le problème thermomécanique couplé afin de déterminer l'histoire locale du chargement thermomécanique, et proposé d'autre part un modèle de fatigue thermomécanique. Un point essentiel est notre attachement à caractériser le comportement cyclique d'une structure. Nous avons ainsi contribué à l'écriture et à la résolution simplifiée du problème d'autoéchauffement en grandes déformations. Notre modèle de fatigue thermomécanique balaye une grande plage de températures et de durées de vie, ainsi que le phénomène de renforcement. Nous avons aussi étudié de façon précise le cumul d'endommagement en fatigue thermomécanique.

## Perspectives

Nous avons montré que l'hypothèse de cumul d'endommagement linéaire n'est pas applicable à l'heure actuelle pour la fatigue thermomécanique. Nous pensons que l'étude du vieillissement statique et surtout dynamique, c'est-à-dire au cours de la sollicitation mécanique est indissociable de l'étude en fatigue, tant d'un point de vue du comportement que des propriétés en fatigue.

Notre modèle de fatigue est fondé sur l'hypothèse d'une sollicitation unidimensionnelle. L'étape suivante est le passage à une sollicitation multidimensionnelle, s'appuyant par exemple sur la détermination du chargement thermomécanique que nous avons proposé dans le cas multidimensionnel.

Plus généralement, l'étude d'autres matériaux avec des caractéristiques mécaniques différentes (forte viscosité, forte dépendance à la température) ou à des températures plus élevées pourrait mener à des choix de modélisation différents.



# Bibliographie

- Abraham, F., Alshuth, T., Jerrams, S., 2005. The effect of minimum stress and stress amplitude on the fatigue life of non strain crystallising elastomers. *Materials and Design* 26, 239–245.  
*3 citations paragraphes 8.4.1, b et 9.1.1*
- Allen, G., Bianchi, U., Price, C., 1963. Thermodynamics of elasticity of natural rubber. *Transactions of the Faraday Society* 59, 2493–2502.  
*2 citations paragraphes b et 3.5.3*
- Andrieux, F., Saanouni, K., Sidoroff, F., 1997. Sur les solides hyperélastiques à compressibilité induite par l'endommagement. *Compte Rendu à l'Académie des Sciences, série II b* 324 (5), 281–288.  
*Cité paragraphe 1.2.1*
- Andriyana, A., 2006. Définition d'une nouvelle grandeur prédictive pour la durée de vie en fatigue des matériaux élastomères. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes. *Cité paragraphe 9.1.2*
- Andriyana, A., Verron, E., 2007. Prediction of fatigue life improvement in natural rubber using configurational stress. *International Journal of Solids and Structures* 44, 2079–2092.  
*Cité paragraphe 9.1.2*
- Anthony, R. L., Caston, R., Guth, E., 1942. Equations of state for natural and synthetic rubber-like materials. I. Unaccelerated natural soft rubber. *The Journal of Physical Chemistry* 46, 826–840.  
*8 citations paragraphes 3.2.3, 3.2, 3.3, a, a, 3.4, a et b*
- Armero, F., Simo, J., 1992. A new unconditionally stable fractional step methods for non-linear coupled thermomechanical problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 35, 737–766.  
*Cité paragraphe 5.2.2*
- Armero, F., Simo, J., 1993. A priori stability estimates and unconditionally stable product formula algorithms for nonlinear coupled thermoplasticity. *International Journal of Plasticity* 9, 749–782.  
*Cité paragraphe 5.2.2*
- Arruda, E., Boyce, M., 1993. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behaviour of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 41 (2), 389–412.  
*2 citations paragraphes c et 4.1.3*
- ASTM, 1993. Standart classification system for carbon blacks used in rubber products. Tech. Rep. D 1765-93, ASTM. *Cité paragraphe b*
- Azura, A., Muhr, A., Göritz, D., Thomas, A., 2003. Effect of ageing on the ability of natural rubber to strain crystallise. In : *Constitutive Models for Rubber III*. pp. 79–84. *Cité paragraphe 8.6.2*

- Ball, J., 1977. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Archives for Rational Mechanics and Analysis* 63 (4), 337–403. *Cité paragraphe 3.1.2*
- Ball, J., 1982. Discontinuous equilibrium solutions and cavitation in nonlinear elasticity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London - Series A* 306, 557–611. *Cité paragraphe 9.1.2*
- Bathias, C., LeGorju, K., Lu, C., Menabeuf, L., 1997. Fatigue crack growth damage in elastomeric materials. In : *Fatigue and Fracture Mechanics : 27th Volume*, ASTM STP 1296, Eds. American Society for Testing and Materials. pp. 505–513. *2 citations paragraphes 8.4.1 et 8.5.1*
- Bažant, Z., Oh, B., 1986. Efficient numerical integration on the surface of a sphere. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 66 (1), 37–49. *Cité paragraphe e*
- Beatty, J. R., 1964. Fatigue of rubber. *Rubber Chemistry and Technology* 37 (5), 1341–1364. *3 citations paragraphes a, 8.4.1 et 8.21*
- Bérardi, G., Jaeger, M., Martin, R., 1997. Finite element modeling of heat transfers in viscoelastic materials for large deformations. *Numerical Heat Transfer, Part A* 32, 37–49. *Cité paragraphe 5.1.3*
- Beurrot, S., 2007. Micromécanisme de propagation de fissure de fatigue dans le caoutchouc naturel (NR) et un caoutchouc synthétique (SBR). Stage de master, École Centrale de Nantes. *5 citations paragraphes 8.8, 8.9, 8.2.2, 8.10 et 8.11*
- Boukamel, A., Méo, S., Débordes, O., Jaeger, M., 2001. A thermo-viscoelastic model for elastomeric behaviour and its numerical application. *Archive of Applied Mechanics* 71, 785–801. *Cité paragraphe a*
- Bérardi, G., Jaeger, M., Martin, R., Carpentier, C., 1996. Modelling of a thermo-viscoelastic coupling for large deformations through finite element analysis. *International Journal of Heat Mass Transfer* 39 (18), 3911–3924. *Cité paragraphe 5.1.2*
- Broerman, A., Venerus, D., Schieber, J., 1999. Evidence of the stress-thermal rule in an elastomer subjected to simple elongation. *Journal of Chemical Physics* 111 (15), 6965–6969. *Cité paragraphe a*
- Browne, A., Arambages, A., 1981. Modeling the thermal state of tires for power loss calculations. *SAE Technical Paper Series* (810163). *Cité paragraphe 5.1.1*
- Brunac, J., Leblond, J., 2006. A new propagation law for elastomers subjected to 3d arbitrary loadings. In : *Proceedings of the International conference SolMech2006*. Krakow (Poland). *Cité paragraphe a*
- Bueche, F., 1961. Mullins effect and rubber-filler interactions. *Journal of Applied Polymer Science* 15, 271–281. *Cité paragraphe b*
- Cadwell, S. M., Merrill, R. A., Sloman, C. M., Yost, F. L., 1940. Dynamic fatigue life of rubber. *Industrial and engineering chemistry* 12 (1), 19–23. *9 citations paragraphes 8.3, c, 8.15, 8.4, 8.4.1, 8.4.1, 8.5.1, 8.19 et 9.1.1*
- Cantournet, S., 2004. Endommagement et fatigue des élastomères. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie. *2 citations paragraphes 8.3.3 et c*
- Carrega, M., 2000. *Matériaux industriels : Matériaux polymères*. Dunod, Paris. *Cité paragraphe 1*

- Chadwick, P., 1974. Thermo-mechanics of rubberlike materials. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 276 (A 1260), 371–403.  
*6 citations paragraphes 3.2.5, 3.3, b, 3.5.2, 3.5.3 et B.4*
- Chadwick, P., Creasy, C. F. M., 1984. Modified entropic elasticity of rubberlike materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 32 (5), 337–357. *2 citations paragraphes 3.5.1 et 3.5.3*
- Chagnon, G., 2003. Modélisation de l'effet Mullins dans les élastomères. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes. *3 citations paragraphes 1.2.1, b et c*
- Choi, J., Kang, H., Jeong, H., Lee, T., 2005. Heat aging effects on the material property and the fatigue life of vulcanized natural rubber, and fatigue life prediction equations. *Journal of Mechanical Science and Technology* 19 (6), 1229–1242. *3 citations paragraphes 8.6.2, 8.27 et 8.28*
- Ciarlet, P., 1986. *Elasticité tridimensionnelle*. Masson. *Cité paragraphe 1.2.2*
- Clark, S. K., Dodge, R. N., 1985. Heat generation in aircraft tires. *Computers and Structures* 20 (1-3), 535–544. *Cité paragraphe d*
- Dang Van, K., 1971. Sur la résistance à la fatigue des métaux. Thèse de doctorat, Université de Paris VI. *Cité paragraphe a*
- Dart, S., Anthony, R., Guth, E., 1942. Rise of temperature on fast stretching of synthetics and natural rubbers. *Industrial and Engineering Chemistry* 34 (11), 1340–1342. *2 citations paragraphes 3.7 et a*
- Dart, S., Guth, E., 1945. Rise of temperature of fast stretching of butyl rubber. *The Journal of Chemical Physics* 13 (1), 28–36. *Cité paragraphe c*
- De, D., Gent, A., 1996. Tear strength of carbon-black-filled compounds. *Rubber Chemistry and Technology* 69 (5), 834–850. *Cité paragraphe b*
- Diani, J., 1999. Contribution à l'étude du comportement élastique et de l'endommagement des matériaux élastomères. Thèse de doctorat, ENS Cachan. *Cité paragraphe 9.1.2*
- Doll, S., Schweizerhof, K., 2000. On the development of volumetric strain energy functions. *Journal of Applied Mechanics* 67, 17–20. *Cité paragraphe 2.4*
- Dong, S., Bathias, C., Legorju, K., Hourlier, F., June 28 - July 1 2004. Experimental research on the fatigue of natural rubber subjected to multiaxial loading. In : 7th ICBMFF - International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture. Berlin, Germany, pp. 323–328. *Cité paragraphe c*
- Ebbott, T., Hohman, R., Jeusette, J.-P., Kerchman, V., 1999. Tire temperature and rolling resistance prediction with finite element analysis. *Tire Science and Technology* 27 (1), 2–21. *2 citations paragraphes a et 5.1.3*
- Elata, D., Rubin, M. B., June 1994. Isotropy of strain energy functions which depend only on a finite number of directional strain measures. *Journal of Applied Mechanics* 61, 284–289. *Cité paragraphe e*
- Etienne, S., David, L., 2002. *Introduction à la physique des polymères*. Dunod, Paris. *Cité paragraphe 1*
- Farris, R. J., 1968. The influence of vacuole formation on the response and failure of filled elastomers. *Transactions of the Society of Rheology* 12 (2), 315–334. *Cité paragraphe 1.2.1*

- Fielding, J. H., December 1943. Flex life and crystallisation of synthetic rubber. *Industrial and Engineering Chemistry* 35 (12), 1259–1261. *Cité paragraphe 8.4.1*
- Flamm, M., Steinweger, T., Weltin, U., 2003. Lifetime prediction of multiaxially loaded rubber springs and bushings. In : *Constitutive Models for Rubber III*. ECCMR, pp. 49–53. *Cité paragraphe d*
- Flamm, M., Weltin, U., 2002. Cumulative damage in rubber materials. 9th International Conference on Composite Engineering, San Diego. *2 citations paragraphes 8.5.1 et d*
- Flory, P., 1947. Thermodynamics of crystallisation in high polymers. I. Crystallisation induced by stretching. *Journal of Chemical Physics* 15 (6), 397–408. *Cité paragraphe a*
- Flory, P., Ciferri, A., Hove, C., 1960. The thermodynamic analysis of thermoelastic measurements on high elastic materials. *Journal of Polymer Science* 45, 235–236. *2 citations paragraphes c et c*
- Flory, P., Rehner, J., 1943. Statistical mechanics of cross-linked polymer networks. *The Journal of Chemical Physics* 11 (11), 512–520. *Cité paragraphe c*
- Garrigues, J., 2002. Mécanique des milieux continus en déformations finies. Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille. *3 citations paragraphes d, 6 et c*
- Gent, A., 1961. Simple rotary dynamic testing machine. *Rubber Chemistry and Technology* 34 (790–795). *3 citations paragraphes 6.6, a et d*
- Gent, A., 1992. *Engineering with rubber. How to design rubber components*. Hanser Publisher. *Cité paragraphe 8.4.1*
- Gent, A., Hirakawa, H., 1967. Effect of temperature on the ozone cracking of butyl rubbers. *Journal of Polymer Science A-2* 5 (1), 157–164. *Cité paragraphe 8.6.3*
- Gent, A., Lindley, P., 1959. Internal rupture of bonded rubber cylinders in tension. *Proceedings of the Royal Society of London A* 249, 195–205. *Cité paragraphe 9.1.2*
- Gent, A., Liu, G., Sueyasu, T., 1991. Effect of temperature and oxygen on the strength of elastomers. *Rubber Chemistry and Technology* 64, 96–107. *2 citations paragraphes 8.5.1 et 8.2.0*
- Gent, A., McGrath, J., 1965. Effect of temperature on ozone cracking of rubbers. *Journal of Polymer Science* 3, 1473–482. *Cité paragraphe 8.6.3*
- Gent, A., Park, B., 1984. Failure processes in elastomers at or near a rigid spherical inclusion. *Journal of Materials Science* 19, 1947–1956. *Cité paragraphe 9.1.2*
- Gent, A. N., 1996. A new constitutive model for rubber. *Rubber Chemistry and Technology* 69, 59–61. *2 citations paragraphes a et 4.1.3*
- Gent, A. N., Kawahara, S., Zhao, J., 1998. Crystallisation and strength of natural rubber and synthetic cis-1,4-polyisoprene. *Rubber Chemistry and Technology* 71 (4), 668–678. *2 citations paragraphes 1.4.1 et b*
- Gent, A. N., Lindley, P. B., Thomas, A. G., 1964. Cut growth and fatigue of rubbers. I. The relationship between cut growth and fatigue. *Journal of Applied Polymer Science* 8, 455–466. *4 citations paragraphes 8.2, 8.1.1, 8.3.2 et 8.3.2*

- Germain, P., 1973. Cours De Mécanique Des Milieux Continus. Masson. *Cité paragraphe 2.3.2*
- Gough, J., 1805. A description of a property of caoutchouc, or indian rubber. Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester, Second series 1, 288–295. *Cité paragraphe c*
- Grandcoin, J., Boukamel, A., 2007. Un modèle Élasto-visco-plastique micro-physiquement motivé pour les élastomères chargés - caractérisation en fatigue. 8e COLLOQUE NATIONAL EN CALCUL DES STRUCTURES, 21-25 Mai 2007, Giens. *Cité paragraphe a*
- Greensmith, H., 1956. Rupture of rubber. IV. Tear properties of vulcanizates containing carbon black. Journal of Polymer Science 21, 175–187. *4 citations paragraphes a, 8.5, b et 8.5.1*
- Greensmith, H., Thomas, G., 1955. Rupture of rubber. III. Determination of tear properties. Journal of Polymer Science 18, 189–200. *4 citations paragraphes a, 8.4, b et 8.5.1*
- Greenwood, J., Minshall, H., Tabor, D., 1961. Hysteresis losses in rolling and sliding friction. Proceedings of the Royal Society of London A 259, 480–207. *3 citations paragraphes a, c et 6.7*
- Greenwood, J., Tabor, D., 1958. The friction of hard sliders on lubricated rubber : The importance of deformation losses. Proc. Phys. Soc. 71, 989–1001. *Cité paragraphe a*
- Griffith, A. A., 1920. The phenomena of rupture and flow in solids. Philosophical Transactions of the Royal Society of London - Series A 221, 163. *3 citations paragraphes 8.1, 8.1.1 et 8.1.1*
- Gurvich, M., Andonian, A., Shaw, C., 2002. Non-linear hysteretic characterization of elastomers under multi-axial loading conditions. Tire Science and Technology 30 (1), 34–44. *Cité paragraphe g*
- Hamed, G., Kim, H., Gent, A., 1996. Cut growth in vulcanizates of natural rubber, cis-polybutadiene, and a 50/50 blend during single and repeated extension. Rubber Chemistry and Technology 69 (5), 807–818. *Cité paragraphe b*
- Hamed, G., Park, B., 1999. The mechanism of carbon black reinforcement of SBR and NR vulcanizates. Rubber Chemistry and Technology 72 (5), 946–959. *Cité paragraphe b*
- Harbour, R., Fatemi, A., Mars, W., 2007. Fatigue life analysis and predictions for NR and SBR under variable amplitude and multiaxial loading conditions. International Journal of Fatigue. *Cité paragraphe d*
- Harbour, R., Fatemi, A., Mars, W., 2008. Fatigue crack orientation in NR and SBR under variable amplitude and multiaxial loading conditions. Journal of Materials Science 43 (6), 1783–1794. *Cité paragraphe d*
- Hart-Smith, L. J., 1966. A pseudo-elastic model for loading, partial unloading and reloading of particle-reinforced rubber. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik 17 (5), 608. *Cité paragraphe a*
- Hill, R., 1968. On constitutive inequalities for simple materials I. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 16, 229–242. *4 citations paragraphes 2.2.6, d, 6.5 et 9.4*
- Hoger, A., 1987. The stress conjugate to logarithmic strain. International Journal of Solids and Structures 23 (12), 1645–1656. *Cité paragraphe 5*

- Honorat, V., 2006. Analyse thermomécanique par mesure de champs des elastomères. Thèse de doctorat, Univ. Montpellier II. *Cité paragraphe 5.3.1*
- Humphrey, J., Rajagopal, K., 1997. Finite thermoelasticity of constrained elastomers subject to biaxial loading. *Journal of Elasticity* 49 (3), 189–200. *Cité paragraphe a*
- Imam, A., Johnson, G., 1998. Decomposition of the deformation gradient in thermoelasticity. *Journal of Applied Mechanics* 65, 362–366. *Cité paragraphe a*
- Joule, J., 1859. On some thermo-dynamic properties of solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 149 (91), 91–131. *Cité paragraphe c*
- Kerchman, V., Shaw, C., 2003. Experimental study and finite element simulation of heat build-up in rubber compounds with application to fracture. *Rubber Chemistry and Technology* 76, 386–405. *3 citations paragraphes c, g et 8.5.1*
- Kim, S., Lee, S., 1994. Effect of crosslink structures on the fatigue crack growth behavior of nr vulcanizates with various aging conditions. *Rubber Chemistry and Technology* 67 (4), 649–661. *2 citations paragraphes 8.6.1 et 8.6.2*
- Kim, W. D., Lee, J. Y., Koh, S.-K., 2004. Fatigue life estimation of an engine rubber mount. *International Journal of Fatigue*. *2 citations paragraphes 8.25 et 8.26*
- Kuhn, W., Grün, F., 1942. Relation between the elasticity constant and extension double diffraction of highly elastic substances. *Kolloid Zeit* 101, 248–271. *Cité paragraphe c*
- Lake, G., Lindley, P., 1964. Cut growth and fatigue of rubbers. II. Experiments on a noncrystallizing rubber. *Journal of Applied Polymer Science* 8, 707–721. *3 citations paragraphes 8.5.1, 8.22 et 9.1.1*
- Lake, G. J., 1995. Fatigue and fracture of elastomers. *Rubber Chemistry and Technology* 68 (3), 435–460. *Cité paragraphe 8.3*
- Lake, G. J., Lindley, P. B., 1965. The mechanical fatigue limit for rubber. *Journal of Applied Polymer Science* 9, 1233–1251. *2 citations paragraphes 8.1.1 et 8.6.3*
- Layouni, K., Laiarinandrasana, L., Piques, R., 2003. Compressibility induced by damage in carbon black reinforced natural rubber. In : *Constitutive Models for Rubber III*. pp. 273–281. *Cité paragraphe 1.2.1*
- Le Cam, J.-B., 2005. Endommagement en fatigue des élastomères. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes. *9 citations paragraphes 8.2.2, 8.6, 8.7, a, a, b, b, 8.13 et 2*
- Le Gorju Jago, K., 2007. Fatigue life of rubber components : 3d damage evolution from x-ray computed microtomography. In : *Constitutive Models for Rubbers V. ECCMR*, pp. 173–178. *2 citations paragraphes a et b*
- Lee, D. J., Donovan, J. A., 1987. Microstructural changes in the crack tip region of carbon-black-filled natural rubber. *Rubber Chemistry and Technology* 60, 910–924. *3 citations paragraphes 8.2.1, 8.2.2 et b*
- Legrain, N., 2006. Extension de l’approche x-fem aux grandes transformations pour la fissuration des milieux hyperélastiques incompressibles. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes. *Cité paragraphe 8*

- Lemaitre, J., Chaboche, J.-L., 1985. Mécanique des matériaux solides. Dunod.  
*2 citations paragraphes 8.3.3 et 8.3.3*
- Lindley, P., 1973. Relation between hysteresis and the dynamic crack growth resistance of natural rubber. *International Journal of Fracture* 9 (4), 449–462. *Cité paragraphe 8.4.1*
- Lindley, P., 1974. Non-relaxing crack growth and fatigue in a non-crystallizing rubber. *Rubber Chemistry and Technology* 47, 1253–1264. *Cité paragraphe 8.4.1*
- Lion, A., 1997. A physically based method to represent the thermo-mechanical behaviour of elastomers. *Acta Mechanica* 123, 1–25. *2 citations paragraphes a et c*
- Lu, 1991. Étude du comportement mécanique et des mécanismes d'endommagement des élastomères en fatigue et fissuration par fatigue. Thèse de doctorat, CNAM.  
*3 citations paragraphes 8.5.1, 8.23 et 9.1.1*
- Lu, S., Pister, K., 1975. Decomposition of deformation and representation of the free energy function for isotropic thermoelastic solids. *International Journal of Solids and Structures* 11, 927–934. *Cité paragraphe a*
- Lubarda, V., 2004. Constitutive theories based on the multiplicative decomposition of deformation gradient : Thermoelasticity, elastoplasticity, and biomechanics. *Applied Mechanics Reviews* 57 (2), 95–108. *Cité paragraphe a*
- Luchini, J., Peters, J., Arthur, R., 1994. Tire rolling loss computation with the finite element method. *Tire Science and Technology* 22, 206–222. *2 citations paragraphes b et 6.3.3*
- Mac Allen, J., Cuitiño, A. M., Sernas, V., 1996a. Numerical investigation of the deformation characteristics and heat generation in pneumatic aircraft tires. Part I. Mechanical modeling. *Finite Elements in Analysis and Design* 23, 241–263. *Cité paragraphe a*
- Mac Allen, J., Cuitiño, A. M., Sernas, V., 1996b. Numerical investigation of the deformation characteristics and heat generation in pneumatic aircraft tires. Part II. Thermal modeling. *Finite Elements in Analysis and Design* 23, 265–290. *Cité paragraphe b*
- Magill, J., 1995. Crystallization and morphology of rubber. *Rubber Chemistry and Technology* 68, 507–539. *Cité paragraphe a*
- Marchal, J., 2006. Cristallisation des caoutchoucs chargés et non chargés sous contrainte : Effet sur les chaînes amorphes. Thèse de doctorat, Université Paris XI. *4 citations paragraphes c, 1.12, 1.15 et d*
- Mars, W., Fatemi, A., 2003. A phenomenological model for the effect of r ratio on fatigue of strain crystallizing rubbers. *Journal of Rubber Chemistry and Technology* 76 (5), 1241–1258. *Cité paragraphe 8.4.1*
- Mars, W. V., 2001. Multiaxial fatigue of rubber. Ph.D. thesis, The University of Toledo.  
*6 citations paragraphes c, 9.1.2, 9.1.2, 9.1.2, 9.1.2 et c*
- Mars, W. V., Fatemi, A., 2005. Multiaxial fatigue of rubber, part ii : Experimental observations and life predictions. *Journal of Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 28 (6), 523–538. *5 citations paragraphes 9.1.1, 9.1.1, 9.1.2, a et 9.1.4*

- Martin Borret, G., 1998. Sur la propagation de fissures dans les élastomères. Thèse de doctorat, École Polytechnique. *3 citations paragraphes c, 4.1.3 et 1*
- Medalia, A., 1991. Heat generation in elastomer compounds : causes and effects. *Rubber Chemistry and Technology* 64, 481–492. *Cité paragraphe 6.1*
- Meinecke, E., 1991. Effect of carbon-black loading and crosslinking density on the heat build-up in elastomers. *Rubber Chemistry and Technology* 64, 269–284. *Cité paragraphe 6.1*
- Meo, S., Boukamel, A., Debordes, O., 2002. Analysis of a thermoviscoelastic model in large strain. *Computers and Structures* 80, 2085–2098. *Cité paragraphe 5.1.2*
- Miehe, C., 1995. Entropic thermoelasticity at finite strains. Aspect of the formulation and numerical implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 120, 243–269. *Cité paragraphe b*
- Miner, M., 1945. Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics* 12, 159–164. *Cité paragraphe d*
- Mitchell, J., Meier, D., 1968. Rapid stress-induced crystallization in natural rubber. *Journal of Polymer Science A-2* 6, 1689–1703. *Cité paragraphe 1.4.2*
- Méo, S., 2000. Modélisation numérique du comportement mécanique de structures en élastomère : de l'élasticité à la thermo-visco-hyperélasticité. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II. *Cité paragraphe a*
- Molinari, A., Germain, Y., 1996. Self heating and thermal failure of polymers sustaining a compressive cyclic loading. *International Journal of Solids and Structures* 33 (23), 3439–3462. *Cité paragraphe 2*
- Mullins, L., Tobin, N. R., 1957. Theoretical model for the elastic behaviour of filler-reinforced vulcanized rubber. *Rubber Chemistry and Technology* 30, 555–571. *Cité paragraphe a*
- Murakami, S., Senoo, K., Toki, S., Kohjiya, S., 2002. Structural development of natural rubber during uniaxial stretching by in-situ wide angle x-ray diffraction using a synchrotron radiation. *Polymer* 43, 2117–2120. *Cité paragraphe b*
- Ogden, R., 1972a. Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London A* 328, 567–583. *Cité paragraphe b*
- Ogden, R., 1972b. Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London A* 326, 565–584. *Cité paragraphe b*
- Ogden, R., 1984. *Non-linear Elastic Deformations*. Ellis Horwood, Chichester. *Cité paragraphe b*
- Ogden, R., 1992. On the thermoelastic modeling of rubberlike solids. *Journal of Thermal Stresses* 15 (4), 533–557. *2 citations paragraphes 3.5.2 et 3*
- Ogden, R. W., 1987. Aspects of the phenomenological theory of rubber thermoelasticity. *Polymer* 28, 379–385. *2 citations paragraphes 3.2.5 et b*

- Ostoja-Kuczynski, E., 2005. Comportement en fatigue des élastomères. Application aux structures antivibratoires pour l'automobile. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes. *Cité paragraphe 8.3.2*
- Ostoja-Kuczynski, E., Charrier, P., Verron, E., Marckmann, G., Gornet, L., Chagnon, G., 15-17 September 2003. Crack initiation in natural rubber : experimental database and macroscopic observations. In : Busfield, Muhr (Eds.), European Conference on Constitutive Models for Rubber III. London, pp. 41–47. *6 citations paragraphes 8.14, c, c, 8.5.2, 8.7 et 9.2.1*
- Park, D. M., Hong, W. H., Kim, S. G., Kim, H. J., 2000. Heat generation of filled rubber vulcanizates and its relationship with vulcanizate network structures. *European Polymer Journal* 36, 2429–2436. *Cité paragraphe 6.1*
- Pellicer, J., Manzanares, J., Zuniga, J., Utrillas, P., Fernandez, J., 2001. Thermodynamics of rubber elasticity. *Journal of Chemical Education* 78 (2), 263–267. *Cité paragraphe 3.2.5*
- Perrin, G., 2000. Analytic stress-strain relationship for isotropic network model of rubber elasticity. *Compte Rendu à l'Académie des Sciences, série II b* 328, 5–10. *Cité paragraphe c*
- Raoult, I., 2005. Structures élastomères sous chargement cyclique : comportement, fatigue, durée de vie. Thèse de doctorat, École Polytechnique, Palaiseau. *22 citations paragraphes 1.5, 1.6, c, d, 1.7, 1.8, 4.1, 4.2, 4.1.3, 4.1.4, a, b, 4.44, 4.45, 4.3.2, 4.4, e, c, 9.1.1, c, 9.1.4 et 9.4*
- Raoult, I., 2007. Non publié. *Cité paragraphe c*
- Rault, J., 2002. Les polymères solides : amorphes, élastomères, semi-cristallins. Cépaduès-éditions. *Cité paragraphe 1*
- Rault, J., Marchal, J., Judeinstein, P., Albouy, P., 2006. Stress-induced crystallization and reinforcement in filled natural rubber : <sup>2</sup>h nmr study. *Macromolecules* 39, 8356–8368. *2 citations paragraphes c et 1.16*
- Reese, S., 2003. A micromechanically motivated material model for the thermo-viscoelastic material behaviour of rubber-like polymers. *International Journal of Plasticity* 19, 909–940. *Cité paragraphe 5.3.1*
- Reese, S., Govindjee, S., 1998. Theoretical and numerical aspects in the thermo-viscoelastic material behaviour of rubber-like polymer. *Mechanics of Time-Dependent Materials* 1, 357–396. *3 citations paragraphes b, 3.5.4 et B.5*
- Rivlin, R. S., Thomas, A. G., 1953. Rupture of rubber. I. characteristic energy for tearing. *Journal of Polymer Science* 10 (3), 291–318. *Cité paragraphe 8.1.1*
- Roberts, B. J., Benzies, J. B., 1977. The relationship between uniaxial and equibiaxial fatigue in gum and carbon black filled vulcanizates. In : *Rubbercon'77*. pp. 2.1–2.13. *2 citations paragraphes 8.3.2 et 9.1.1*
- Robisson, A., 2000. Comportement visco-hyperélastique endommageable d'élastomères SBR et PU : prévision de la durée de vie en fatigue. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. *4 citations paragraphes 8.12, a, 8.4.1 et b*

- Sae-Oui, P., Freakley, P., Oubridge, P., 1999a. Determination of heat transfer coefficient of rubber to air. *Plastics Rubber and Composites* 28 (2), 65–68. *Cité paragraphe 5.1.3*
- Sae-Oui, P., Freakley, P., Oubridge, P., 1999b. Prediction of hysteretic temperature increase in rubber components by finite element analysis. *Plastics Rubber and Composites* 28 (2), 69–73. *Cité paragraphe b*
- Saintier, N., 2001. Prédiction de la durée de vie en fatigue du NR, sous chargement multiaxial. Thèse de doctorat, École des Mines de Paris. *11 citations paragraphes c, 8.2.2, 8.12, a, a, b, 8.4.1, b, 9.1.1, a et b*
- Saintier, N., Cailletaud, G., Piques, R., 2006. Crack initiation and propagation under multiaxial fatigue in a natural rubber. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 28, 61–72. *Cité paragraphe b*
- Salençon, J., 2002. Mécanique des milieux continus. Vol. I et II. Les éditions de l'école polytechnique, Palaiseau. *2 citations paragraphes 2.1 et c*
- Sarkar, K., Kwon, Y., Prevorsek, D., 1987. A new approach for the thermomechanical analysis of tires by the finite element method. *Tire Science and Technology* 15 (4), 261–275. *2 citations paragraphes 5.1.1 et a*
- Segalman, D., 1981. Modeling tire energy dissipation for power loss calculations. SAE Technical Paper Series (810162). *Cité paragraphe 5.1.1*
- SFMM, 1977. Nomenclature et classification usuelles des grades de noir de carbone. Tech. Rep. NF T 45-103, AFNOR. *Cité paragraphe b*
- SFMM, novembre 1993. Fatigue sous sollicitations d'amplitude variable. Méthode Rainflow de comptage des cycles. Principe et utilisation. *Cité paragraphe C.1*
- Shaw, J., Jones, A., Wineman, A., 2005. Chemorheological response of elastomers at elevated temperatures : Experiments and simulations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 53, 2758–2793. *2 citations paragraphes 8.6.4 et b*
- Shen, M., 1969. Internal energy contribution to the elasticity of natural rubber. *Macromolecules* 2, 358–364. *Cité paragraphe c*
- South, J., 2001. Mechanical properties and durability of natural rubber compounds and composites. Ph.D. thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University. *2 citations paragraphes 8.5.1 et 8.24*
- Steinweger, T., Flamm, M., Weltin, U., 2003. A methodology for test time reduction in rubber part testing. In : *Constitutive Models for Rubber III*. ECCMR, pp. 27–32. *Cité paragraphe d*
- Tautz, H., 1959. Bestimmung der wärmeleitfähigkeit von kautschukvulkanisaten in abhängigkeit von der dehnung. *Experimentelle Technik der Physik* 7 (1), 1–14. *Cité paragraphe a*
- Thomas, A., 1958. Rupture of rubber. V. Cut growth in natural rubber vulcanizates. *Journal of Polymer Science* 31, 467–480. *Cité paragraphe 8.1.1*
- Thomas, A., Whittle, J., 1970. Tensile rupture of rubber. *Rubber Chemistry and Technology* 43 (2), 222–228. *Cité paragraphe b*

- Toki, S., Fujimaki, T., Okuyama, M., 2000. Strain-induced crystallisation of natural rubber as detected real-time by wide-angle X-ray diffraction technique. *Polymer* 41, 5423–5429.  
*6 citations paragraphes b, b, 1.10, 1.11, c et 5*
- Toki, S., Sics, I., Ran, S., Liu, L., Hsiao, B., 2002. New insights into structural developments in natural rubber during uniaxial deformation by in situ synchrotron x-ray diffraction. *Macromolecules* 35, 6578–6584.  
*2 citations paragraphes 1.4.2 et b*
- Townson, G., Hallett, J., 2005. An introduction to the terminology used in the carbon black industry. In : *Constitutive Models for Rubber IV*. ECCMR, pp. 471–476. *Cité paragraphe b*
- Trabelsi, S., Albouy, P.-A., Rault, J., 2002. Stress-induced crystallization around a crack tip in natural rubber. *Macromolecules* 35 (27), 10054–10061. *3 citations paragraphes 8.2.1, 8.2.2 et b*
- Trabelsi, S., Albouy, P.-A., Rault, J., 2003. Crystallisation and melting processes in vulcanized stretch natural rubber. *Macromolecules* 36 (20), 7624–7639. *7 citations paragraphes a, b, c, d, 1.13, 1.14 et c*
- Treloar, L. R. G., 1943a. The elasticity of a network of long-chain molecules I. *Transactions of the Faraday Society* 39, 36–64. *Cité paragraphe b*
- Treloar, L. R. G., 1943b. The elasticity of a network of long-chain molecules II. *Transactions of the Faraday Society* 39, 241–246. *Cité paragraphe b*
- Treloar, L. R. G., 1975. *The physics of rubber elasticity*, 3rd Edition. Clarendon Press, Oxford.  
*4 citations paragraphes 3.6, c, a et b*
- Truesdell, C., Noll, W., 1992. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, second edition Edition. Springer-Verlag.  
*2 citations paragraphes 2.1.3 et 2.1.3*
- Valanis, K. C., Landel, R. F., 1967. The strain energy function of a hyperelastic material in terms of the extensions ratios. *Journal of Applied Physics* 38 (7), 2997–3002. *Cité paragraphe b*
- van den Brule, B., 1989. A network theory for the thermal conductivity of an amorphous polymeric material. *Rheologica Acta* 28, 257–266. *Cité paragraphe a*
- van den Brule, B., O'Brien, S., 1990. Anisotropic conduction of heat in a flowing polymeric material. *Rheologica Acta* 29, 580–587. *Cité paragraphe a*
- Verron, E., Le Cam, J.-B., Gornet, L., 2006. A multiaxial criterion for crack nucleation in rubber. *Mechanics Research Communications* 33, 493–498. *Cité paragraphe 9.1.2*
- Wang, B., Lu, H., Kim, G.-h., 2002. A damage model for the fatigue life of elastomeric materials. *Mechanics of Materials* 34, 475–483. *Cité paragraphe 8.3.3*
- Wang, M. C., Guth, E., 1952. Statistical theory of networks of non-gaussian flexible chains. *The Journal of Chemical Physics* 20 (7), 1144–1157. *Cité paragraphe c*
- Whicker, D., Browne, A. L., Segalman, D. J., Wickliffe, L. E., 1981. A thermomechanical approach to tire power loss modeling. *Tire Science and Technology* 9 (1-4), 3–18.  
*2 citations paragraphes 5.1 et 5.1.1*

- Woo, C., Kim, W., 2006. Heat-aging effects on the material properties and fatigue life prediction of vulcanized natural rubber. *e-Journal of Soft Materials* 2, 7–12.  
*3 citations paragraphes 8.6.2, 8.29 et 8.30*
- Wunderlich, B., Baur, H., 1970. Heat capacities of linear high polymers. *Advances in Polymer Science* 7, 260–368.  
*Cité paragraphe b*
- Young, D., 1986. Fatigue crack propagation in elastomer compounds : Effects of strain rate, temperature, strain level, and oxidation. *Rubber Chemistry and Technology* 59, 809–825.  
*Cité paragraphe 8.5.1*
- Young, D., Danik, J., 1994. Effect of temperature on fatigue and fracture. *Rubber Chemistry and Technology* 67, 137–147.  
*Cité paragraphe 8.5.1*

# **Annexes**



## **Annexe A**

# **Plans des éprouvettes diabolo**

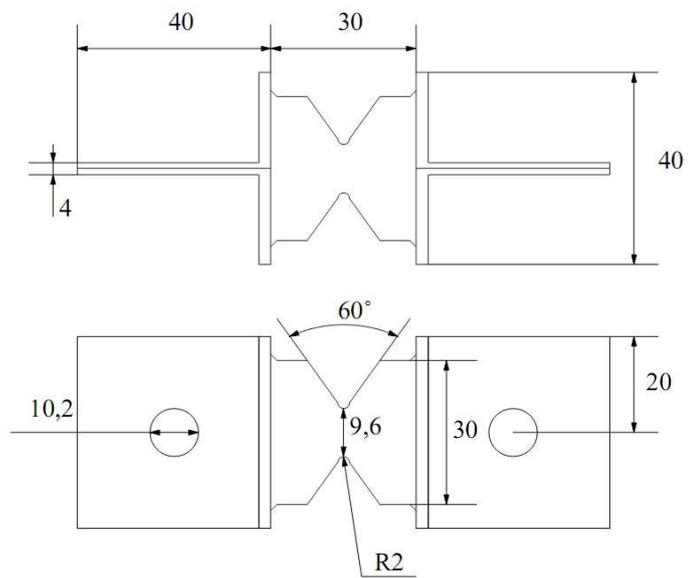


FIGURE A.1 – Éprouvette de type AE2.

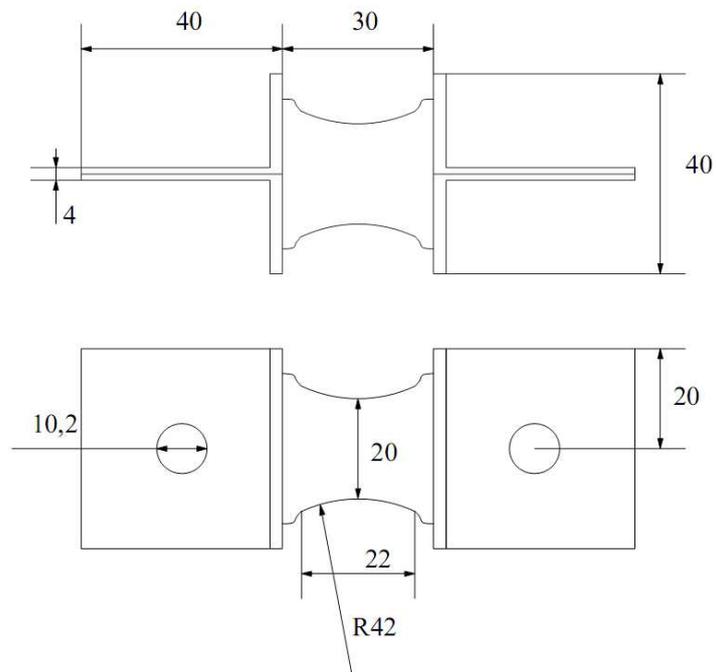


FIGURE A.2 – Éprouvette de type AE42.

## Annexe B

# Démonstrations

### B.1 Equations d'équilibre en configuration mixte

Le principe des puissances virtuelles s'écrit :  $\forall \hat{U}$  mouvement virtuel,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}) \underline{a}(\underline{X}, t) \cdot \hat{U}(\underline{X}, t) \, d\Omega_0 &= \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}) \underline{F}(\underline{X}, t) \cdot \hat{U}(\underline{X}, t) \, d\Omega_0 \\ &+ \int_{\partial\Omega_0} \underline{T}_\Omega(\underline{X}, t) \cdot \hat{U}(\underline{X}, t) \, da - \int_{\Omega_0} \underline{B}^T(\underline{X}, t) : \underline{\nabla} \hat{U}(\underline{X}, t) \, d\Omega_0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Une formule de dérivation classique :

$$- \underline{B}^T : \underline{\nabla} \underline{U} = \underline{U} \cdot \text{Div} \underline{B} - \text{Div} (\underline{B}^T \cdot \underline{U}) \quad (\text{B.2})$$

où Div est la divergence sur la configuration de référence tandis que div est sur la configuration actuelle, permet, par application du théorème de la divergence, d'arriver à l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} (\text{Div} \underline{B}(\underline{X}, t) + \rho_0(\underline{X})(\underline{F}(\underline{X}, t) - \underline{a}(\underline{X}, t))) \cdot \hat{U}(\underline{X}, t) \, d\Omega_0 \\ + \int_{\partial\Omega_0} (\underline{T}_\Omega(\underline{X}, t) - \underline{N}(\underline{X}) \cdot \underline{B}(\underline{X}, t)) \cdot \hat{U}(\underline{X}, t) \, da = 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Compte tenu du caractère arbitraire du champ  $\hat{U}$ , les équations d'équilibre s'obtiennent successivement avec le tenseur de Boussinesq non-symétrique

$$\text{dans } \Omega_0, \quad \text{Div} \underline{B} + \rho_0(\underline{F}(\underline{X}, t) - \underline{a}(\underline{X}, t)) = 0 \quad (\text{B.4a})$$

$$\text{sur } \partial\Omega_0, \quad \underline{B} \cdot \underline{N} = \underline{T}_\Omega(\underline{X}, t) \quad . \quad (\text{B.4b})$$

### B.2 Le second principe en configuration lagrangienne

Le second principe postule l'existence d'une variable d'état scalaire positive et objective  $T$ , appelée température absolue, et d'une fonction d'état scalaire additive et objective  $S$  appelée entropie. Dans une transformation infinitésimale d'un corps à température non uniforme, la variation d'entropie est telle que

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\Omega_0} \frac{\rho_0 r}{T} \, d\Omega_0 - \int_{\partial\Omega_0} \frac{\underline{Q} \cdot \underline{N}}{T} \, dS_0 \quad . \quad (\text{B.5})$$

L'expression locale du second principe en est déduite classiquement

$$\rho_0 \dot{s} \geq \frac{\rho_0 r}{T} - \text{Div} \left( \frac{\underline{Q}}{T} \right) . \quad (\text{B.6})$$

Puis en développant la divergence

$$\rho_0 \dot{s} \geq \frac{\rho_0 r - \text{Div} \underline{Q}}{T} + \frac{\underline{Q} \cdot \nabla T}{T^2} . \quad (\text{B.7})$$

Le taux d'entropie volumique dû aux irréversibilités  $\phi/T$  est introduit par

$$\frac{\phi}{T} = \rho_0 \dot{s} - \frac{\rho_0 r}{T} + \frac{\text{Div} \underline{Q}}{T} - \frac{\underline{Q} \cdot \nabla T}{T^2} \geq 0 . \quad (\text{B.8})$$

Le terme  $\phi$  est appelé dissipation. Cette dissipation volumique peut être séparée en deux termes : un terme thermique

$$\phi_{th} = - \frac{\underline{Q} \cdot \nabla T}{T} \quad (\text{B.9})$$

et un terme intrinsèque

$$\phi_{int} = \rho_0 \dot{s} T - \rho_0 r + \text{Div} \underline{Q} . \quad (\text{B.10})$$

Le second principe peut alors s'écrire : la dissipation  $\phi = \phi_{int} + \phi_{th}$  est non négative. Une autre hypothèse vient s'ajouter sur la dissipation thermique : elle est supposée non négative, soit  $-\underline{Q} \cdot \nabla T / T \geq 0$ .

**Autre expression** En introduisant l'équation de l'énergie dans l'expression de la dissipation, elle peut s'écrire

$$\phi = \underbrace{\rho_0 (T \dot{s} - \dot{e}) + \underline{\Pi} : \dot{\underline{E}}}_{\phi_{int}} - \underbrace{\frac{\underline{Q} \cdot \nabla T}{T}}_{\phi_{th}} \geq 0 . \quad (\text{B.11})$$

**Inégalité de Clausius-Duhem** Une autre fonction d'état  $\psi = e - Ts$  appelée énergie libre de Helmholtz ou énergie libre massique est introduite. Avec cette nouvelle fonction thermodynamique, la dissipation s'écrit

$$\phi = \underbrace{-\rho_0 (\dot{\psi} + \dot{T}s) + \underline{\Pi} : \dot{\underline{E}}}_{\phi_{int}} - \underbrace{\frac{\underline{Q} \cdot \nabla T}{T}}_{\phi_{th}} \geq 0 . \quad (\text{B.12})$$

### B.3 Analyse du premier principe

Le premier principe s'exploite en exprimant la dérivée particulière de l'énergie interne par

$$\dot{e} = \dot{\psi} + \dot{T}s + T\dot{s} . \quad (\text{B.13})$$

La dérivée particulière de l'énergie libre s'écrit en utilisant (2.34)

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{E}} : \dot{\underline{E}} - s\dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial X_i} \dot{X}_i . \quad (\text{B.14})$$

Le premier principe (2.30) peut alors s'écrire sous la forme

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{E}}} : \underline{\underline{\dot{E}}} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{X}}_i} \dot{X}_i + T \dot{s} \right) = \underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\dot{E}}} + \rho_0 R - \text{Div } \underline{\underline{Q}} \quad (\text{B.15})$$

Les lois de comportement (2.36) transforment l'expression en

$$\underbrace{\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{X}}_i}}_{=-A_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{X}}_i}} \dot{X}_i + \rho_0 T \dot{s} = \underbrace{\left( \underline{\underline{\Pi}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{E}}} \right)}_{=\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{E}}}} : \underline{\underline{\dot{E}}} + \rho_0 R - \text{Div } \underline{\underline{Q}} \quad (\text{B.16})$$

Le terme en  $\dot{s}$  se développe pour aboutir à

$$\rho_0 \underbrace{T \frac{\partial s}{\partial T}}_{=c} \dot{T} + \text{Div } \underline{\underline{Q}} = \rho_0 R + \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{E}}} : \underline{\underline{\dot{E}}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{X}}_i} : \dot{X}_i + \rho_0 T \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \underline{\underline{E}}} : \underline{\underline{\dot{E}}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \underline{\underline{X}}_i} : \dot{X}_i \right) \quad (\text{B.17})$$

puis finalement

$$\underbrace{\rho_0 c \dot{T}}_1 + \underbrace{\text{Div } \underline{\underline{Q}}}_2 = \underbrace{\rho_0 R}_3 + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{E}}} : \underline{\underline{\dot{E}}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{X}}_i} : \dot{X}_i}_4 + \underbrace{T \frac{\partial \underline{\underline{\Pi}}}{\partial T} : \underline{\underline{\dot{E}}} - T \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T \partial \underline{\underline{E}}} : \underline{\underline{\dot{E}}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial T \partial \underline{\underline{X}}_i} : \dot{X}_i \right)}_5 . \quad (\text{B.18})$$

Analysons les termes de cette équation :

- les termes 1 et 2 représentent les termes d'absorption et de fuite de chaleur ;
- le terme 3 est une source de chaleur ;
- la dissipation intrinsèque est ici présente par le terme 4 ;
- le terme 5 provient des couplages entre les problèmes thermiques et mécaniques : elle peut supposer une dépendance de  $\varphi$  à la température.

Dans le cadre de la thermoélasticité, l'expression (B.18) se réduit à

$$\underbrace{\rho_0 c \dot{T}}_1 + \underbrace{\text{Div } \underline{\underline{Q}}}_2 = \underbrace{\rho_0 R}_3 + \underbrace{T \frac{\partial \underline{\underline{\Pi}}}{\partial T} : \underline{\underline{\dot{E}}}}_5 . \quad (\text{B.19})$$

ou en configuration mixte

$$\underbrace{\rho_0 c \dot{T}}_1 + \underbrace{\text{Div } \underline{\underline{Q}}}_2 = \underbrace{\rho_0 R}_3 + \underbrace{T \frac{\partial \underline{\underline{B}}^T}{\partial T} : \underline{\underline{\dot{E}}}}_5 . \quad (\text{B.20})$$

Les termes de dissipation anélastiques ont disparu, et le terme 5 représente le couplage thermoélastique.

## B.4 Formulation générale de l'énergie libre

Les relations liant l'énergie libre à l'énergie interne et l'entropie à la température de référence  $T_0$  et à une température quelconque  $T$  sont données par

$$\psi_0 = e_0 - T_0 s_0 \quad (\text{B.21})$$

$$\psi = e - T s \quad (\text{B.22})$$

où l'indice  $_0$  exprime la quantité à la température de référence ( $e_0 = e(\underline{E}, T_0)$ ).

La chaleur spécifique à déformation constante est définie de la manière suivante

$$c(\underline{E}, T) = \frac{\partial e}{\partial T} \quad (\text{B.23a})$$

$$= T \frac{\partial s}{\partial T} \quad (\text{B.23b})$$

$$= -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} . \quad (\text{B.23c})$$

A déformation constante, la variation de l'énergie interne est reliée à la chaleur spécifique en intégrant (B.23a)

$$e - e_0 = \int_{T_0}^T c(\underline{E}, \hat{T}) d\hat{T} . \quad (\text{B.24})$$

De même, à partir de (B.23b)

$$s - s_0 = \int_{T_0}^T \frac{c(\underline{E}, \hat{T})}{\hat{T}} d\hat{T} . \quad (\text{B.25})$$

En exprimant les quantités de (B.22) avec (B.24) et (B.25), on obtient l'expression suivante pour l'énergie libre

$$\psi = e_0 - Ts_0 - \int_{T_0}^T c(\underline{E}, \hat{T}) \left( \frac{T - \hat{T}}{\hat{T}} \right) d\hat{T} . \quad (\text{B.26})$$

En utilisant dans l'expression précédente l'expression de l'entropie (B.21) à la température de référence, la formulation classique pour l'énergie libre à une température quelconque (Chadwick, 1974) est donnée par :

$$\psi = \frac{T}{T_0} \psi_0 - \left( \frac{T}{T_0} - 1 \right) e_0 - \int_{T_0}^T c(\underline{E}, \hat{T}) \left( \frac{T - \hat{T}}{\hat{T}} \right) d\hat{T} . \quad (\text{B.27})$$

## B.5 Chaleur spécifique fonction de la température

Pour trouver la forme (3.44) de l'énergie libre, Reese et Govindjee (1998) supposent que l'énergie libre (3.31) peut se mettre sous la forme

$$\psi = \frac{T}{T_0} \psi_0 - \left( \frac{T}{T_0} - 1 \right) e_0 + \underbrace{\bar{c} \left( T - T_0 - T \ln \frac{T}{T_0} \right)}_{t(T)} + g(T) \psi_0 + \tilde{\psi} \quad (\text{B.28})$$

avec  $\tilde{\psi}$  vérifiant  $\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial T^2} = 0$  et  $\bar{c}$  une constante. La chaleur spécifique est alors donnée par l'équation (B.23c) qui donne

$$c = \bar{c} - T \frac{\partial^2 g}{\partial T^2} \psi_0 . \quad (\text{B.29})$$

Cette dernière équation, utilisée dans (B.27) permet par intégration de retrouver l'expression de  $\tilde{\psi}$

$$\tilde{\psi} = \left( \frac{\partial g}{\partial T} \Big|_{T_0} (T_0 - T) - g(T_0) \right) \psi_0 . \quad (\text{B.30})$$

L'énergie libre s'écrit finalement

$$\psi = \underbrace{\left( \frac{T}{T_0} + g(T) - g(T_0) + \frac{\partial g}{\partial T} \Big|_{T_0} (T_0 - T) \right)}_{f(T)} \psi_0 - \left( \frac{T}{T_0} - 1 \right) e_0 + \bar{c} t(T) \quad . \quad (\text{B.31})$$

L'énergie interne vaut alors

$$e = e_0 + \left( f(T) - T \frac{\partial f}{\partial T} \right) \psi_0 + \bar{c}(T - T_0) \quad (\text{B.32})$$

et cette égalité exprime la dépendance de l'énergie interne à la déformation.

## B.6 Non-unicité de la déformation d'un essai équi-biaxial

Nous allons montrer que lors d'un essai biaxial piloté par exemple en effort, il n'y a pas unicité de la solution. Considérons le modèle de Mooney-Rivlin. Cherchons les solutions de l'équation  $B_{11} = B_{22}$ . Nous obtenons alors

$$0 = \mu_1 (\lambda_1 - \lambda_2) + \mu_2 \left( \lambda_1 \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2} \right) \quad (\text{B.33a})$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_2) \left( \mu_1 + \mu_2 \left( -\lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \right) \quad (\text{B.33b})$$

Nous obtenons une première solution  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Transformons le second terme de l'équation en notant  $\alpha = \mu_1 / \mu_2$  et  $z = \lambda_1 \lambda_2$  :

$$z^3 - \alpha z^2 - 1 = 0 \quad (\text{B.34})$$

Nous devons résoudre une équation du troisième degré. Utilisons la méthode de Cardan. En faisant le changement de variable  $z = x - b/3a$  avec l'équation à résoudre  $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ , nous obtenons

$$x^3 + px + q = 0, \quad p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}, \quad q = \frac{b}{27a} \left( \frac{2b^2}{a^2} - \frac{9c}{a} \right) + \frac{d}{a}. \quad (\text{B.35})$$

Avec nos notations, nous obtenons

$$p = -\frac{\alpha^2}{3}, \quad q = -\frac{2\alpha^3}{27} - 1 \quad (\text{B.36})$$

Le discriminant  $\Delta = q^2 + 4p^3/27$  vaut  $1 + 4\alpha^3/27$ . En supposant  $\Delta > 0$ , nous savons que l'équation possède une solution réelle et deux complexes. La solution réelle s'écrit

$$x_1 = \left( \frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + \left( \frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{B.37})$$

et montre qu'il n'y a pas unicité de la solution au problème posé.



## Annexe C

# Comptage Rainflow

### C.1 Présentation du comptage Rainflow

Le comptage Rainflow (SFMM, 1993) permet d'analyser un signal d'amplitude variable et de reconstituer un signal proche du signal original. Cette méthode est fondée sur l'extraction de cycles. Dans le cas d'un chargement à amplitude constante, un cycle correspond à la variation du minimum au maximum puis du maximum au minimum. Dans le cas d'un chargement à amplitude variable, un cycle correspond à une boucle contrainte-déformation fermée. Un cycle est défini par exemple par son amplitude et sa moyenne.

La première opération lors d'un comptage Rainflow est l'extraction des points de rebroussement du signal d'origine. L'algorithme sera appliqué à ce nouveau signal constitué des points de rebroussement. L'extraction d'un cycle utilise quatre points successifs de ce signal, indicés respectivement 1, 2, 3 et 4. Voici l'algorithme portant sur les valeurs des contraintes  $S$  :

- **si**  $|S_4 - S_3| \geq |S_3 - S_2|$  et  $|S_2 - S_1| \geq |S_3 - S_2|$  (les deux points intermédiaires sont compris entre les deux points extrêmes, FIG. C.1)
  - le cycle représenté par ses valeurs extrêmes  $S_2$  et  $S_3$  est extrait du signal ;
  - les deux points  $S_2$  et  $S_3$  sont éliminés du signal ;
  - les deux parties du signal situées de part et d'autre du cycle extrait sont raccordées.
- **sinon** on décale d'une unité les quatre points considérés et on applique à nouveau le test précédent ;
- la procédure est renouvelée jusqu'au dernier point du signal ; les points restants constituent le résidu.

Un exemple d'application est montré sur la figure C.1 : le premier cycle extrait est le petit cycle (en gris foncé), le deuxième cycle est le grand cycle (en gris clair). Ces cycles correspondent bien à des boucles contrainte-déformation fermées.

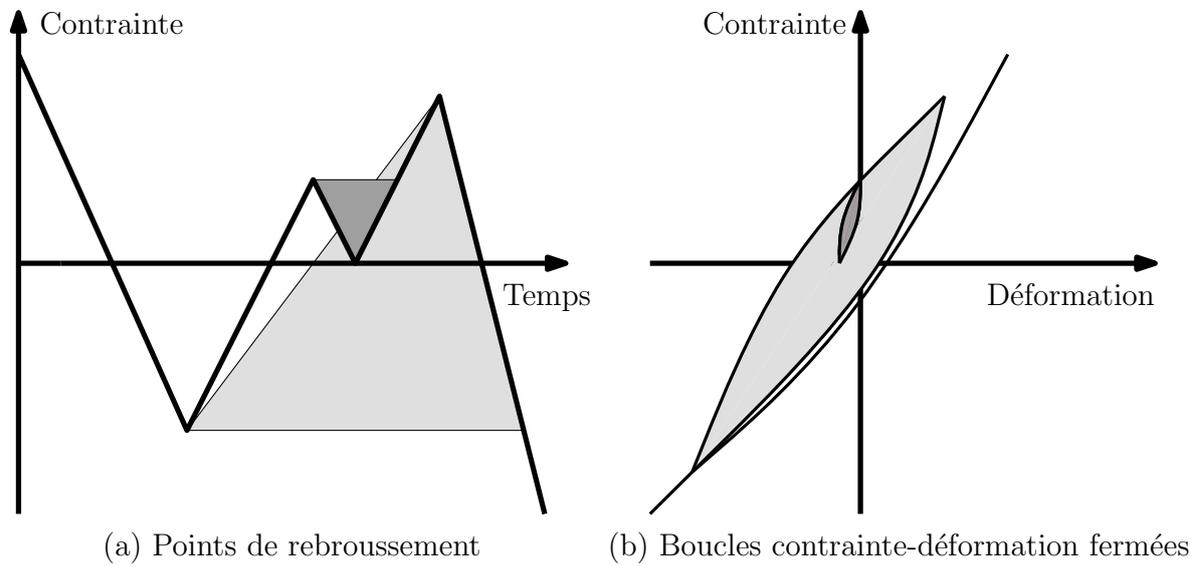


FIGURE C.1 – Extraction des boucles fermées par la méthode Rainflow.

## Annexe D

# Représentation des essais de caractérisation

### D.0.1 Calcul des tenseurs des contraintes

Pour un matériau élastique isotrope incompressible, l'énergie libre ne dépend que des deux premiers invariants

$$I_I = \text{tr} \underline{\underline{C}}, \quad I_{II} = \frac{1}{2} \left\{ (\text{tr} \underline{\underline{C}})^2 - \text{tr} \underline{\underline{C}}^2 \right\} \quad (\text{D.1})$$

du tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}$ . Le tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche est donné par  $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$ .

L'expression du tenseur des contraintes de Cauchy est donnée par

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} \underline{\underline{G}} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} (I_I \underline{\underline{G}} - \underline{\underline{G}}^2) - \eta \underline{\underline{I}} \quad (\text{D.2})$$

où  $\eta$  est le multiplicateur de Lagrange associée à la liaison interne d'isochorie. Le tenseur des contraintes de Boussinesq  $\underline{\underline{B}} = J \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}$  s'obtient par

$$\underline{\underline{B}} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} \underline{\underline{F}} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} (I_I \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{F}}) - \eta \underline{\underline{I}} \underline{\underline{F}}^{-T} \quad (\text{D.3})$$

tandis que le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}$

$$\underline{\underline{\Pi}} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} \underline{\underline{I}} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} (I_I \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}}) - \eta \underline{\underline{I}} \underline{\underline{C}}^{-1} \quad (\text{D.4})$$

Dans les applications que nous allons traiter, le multiplicateur de Lagrange est obtenu en annulant les contraintes sur les bords libres.

### D.0.2 Traction uniaxiale

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad I_I = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}, \quad I_{II} = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2}. \quad (\text{D.5})$$

L'annulation de  $\sigma_{22}$  donne

$$\eta = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} \frac{1}{\lambda} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} \left( \lambda + \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} \right) \quad (\text{D.6})$$

puis

$$B_{11} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \quad (\text{D.7a})$$

$$\sigma_{11} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) . \quad (\text{D.7b})$$

### D.0.3 Cisaillement pur

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_I = I_{II} = 1 + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}. \quad (\text{D.8})$$

L'annulation de  $\sigma_{22}$  donne

$$\eta = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} \frac{1}{\lambda^2} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} \left( \frac{1}{\lambda^2} + 1 \right) \quad (\text{D.9})$$

puis

$$B_{11} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (\text{D.10a})$$

$$\sigma_{11} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \quad (\text{D.10b})$$

et

$$B_{33} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} (\lambda^2 - 1) \quad (\text{D.11a})$$

$$\sigma_{33} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} (\lambda^2 - 1) . \quad (\text{D.11b})$$

Le fait que  $B_{33}$  ne soit pas nul nous indique que pour obtenir un état de cisaillement pur sur une éprouvette, il est nécessaire d'appliquer un effort dans la direction 3. Dans la pratique, cet effort est rarement appliqué et les éprouvettes de cisaillement pur sont longues afin de minimiser ces effets de bord.

### D.0.4 Biaxial

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \end{pmatrix}, \quad I_I = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}, \quad I_{II} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}. \quad (\text{D.12})$$

L'annulation de  $\sigma_{33}$  donne

$$\eta = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \quad (\text{D.13})$$

puis

$$B_{11} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} \left( \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \right) + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} \left( \lambda_1 \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2^2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \quad (\text{D.14a})$$

$$\sigma_{11} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2} \right) + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} \left( \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2} \right) \quad (\text{D.14b})$$

et

$$B_{22} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} \left( \lambda_2 - \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \right) + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} \left( \lambda_1^2 \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \quad (\text{D.15a})$$

$$\sigma_{22} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2^2} \right) + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} \left( \lambda_1^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \quad (\text{D.15b})$$

### D.0.5 Glissement simple

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_I = I_{II} = 3 + \gamma^2. \quad (\text{D.16})$$

L'annulation de  $\sigma_{33}$  donne

$$\eta = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} (2 + \gamma^2) \quad (\text{D.17})$$

puis

$$\underline{\underline{B}} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_I} \begin{pmatrix} -\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{II}} \begin{pmatrix} -\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma + \gamma^3 & -\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.18})$$

et

$$B_{12} = \sigma_{12} = 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_I} + \frac{\partial W}{\partial I_{II}} \right) \gamma \quad (\text{D.19})$$



# Annexe E

## Essais

### E.1 Nomenclature des essais

Cette section donne la nomenclature et la description des tous les essais réalisés. Elle peut-être utile à deux niveaux :

- vue générale des essais pour le lecteur non informé ;
- détails pour la dénomination des essais en fonction de la sollicitation et du type.

#### E.1.1 Essais de cisaillement pur

Essai	Nombre	Température (°C)	Min - Max
Etude de l'accommodation à 5 cycles			
3 8 10	3	23	0%-300%
4 9 11	3	23	50%-300%
5 12 13	3	23	100%-300%
6 14 15	3	23	150%-300%
7 16 à 19	3	23	200%-300%
			Essais incomplets

TABLE E.1 – Essais dit "stage d'option".

#### E.1.2 Essais biaxiaux

Nous détaillons ici la nomenclature de la deuxième partie des essais biaxiaux (tab. E.4 à E.6), celle qui est exploitable pleinement. "Feuille" désigne la feuille de caoutchouc dans laquelle ont été découpées quatre éprouvettes. "Dir" désigne la direction de laminage de l'éprouvette (X pour horizontale, Y pour verticale). "Input" désigne le nom du fichier d'entrée de l'essai (détaillé dans le prochain paragraphe). "Output" est le nom du fichier de sortie, tandis que "Video" désigne le numéro de l'enregistrement vidéo et "Temp" la température.

Le taux de biaxialité de l'essai se retrouve dans son nom : "equi", "bia05" pour un essai équibiaxial et un essai avec un rapport de 0,5 par exemple. La distinction "\_1" et "\_2" désigne le niveau

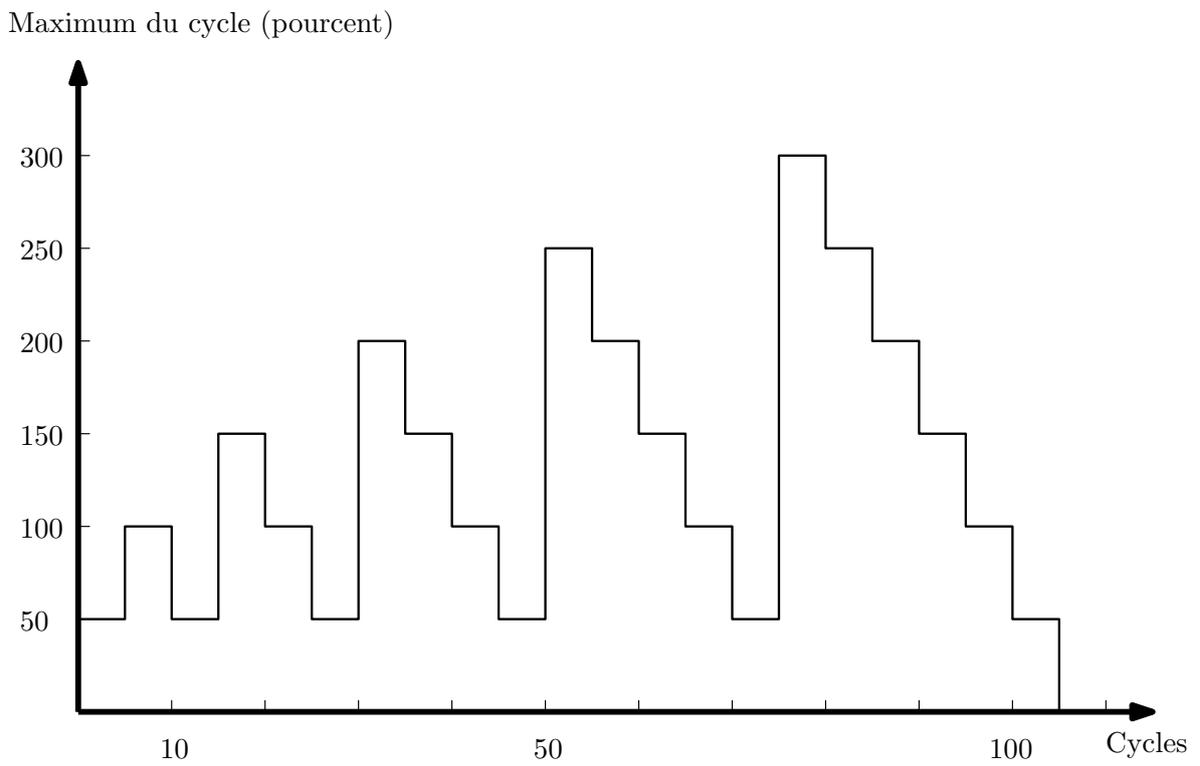


FIGURE E.1 – Description de l'essai 0%-300% de type "stage d'option" effectué sur MTS.

Essai	Nombre	Température (°C)	Min - Max
Accommodation : 10000 cycles au niveau indiqué			
a	1	23	21%-50%
b c	2	23	21%-100%
d	1	23	21%-150%
e	1	23	21%-200%
f	1	23	21%-250%
g	1	23	150%-200%
h	1	23	150%-250%
Suraccommodation : 20 cycles à 250% puis 10000 cycles au niveau indiqué			
a	1	23	25%-50%
b	1	23	25%-100%
c	1	23	25%-150%
d	1	23	25%-200%
e	1	23	150%-200%
Accommodation : 10000 cycles au niveau indiqué			
a b c	3	05	25%-100%
d e f	3	23	25%-100%
g h i	3	40	25%-100%
j k l	3	60	25%-100%
m n o	3	80	25%-100%
p q r	3	100	25%-100%

TABLE E.2 – Nomenclature des essais à 10000 cycles effectués sur la machine servo-hydraulique.

Essai	Nombre	Température (°C)	Type
THERM_Y_04			
a b c	3	23	a
d e f	3	23	a1
g h i	3	23	a2
j k l	3	23	b
m n o	3	23	c
THERM_Y_05			
a b c	3	5	a
d e f	3	5	b
THERM_Y_06			
a b c	3	40	a
d e f	3	40	b
THERM_Y_07			
a b c	3	60	a
d e f	3	60	c
g h i	3	60	b
THERM_Y_08			
a b c	3	80	a
d e f	3	80	b
THERM_Y_09			
a b c	3	100	a
d e f	3	100	c
g h i	3	100	b
j k l	3	100	
THERM_Y_10 Effort imposé			
a b c	3	23	
d e f	3	23	
g h i	3	23	
j k l	3	23	
m n o	3	23	
THERM_Y_11 Divers			
a b c	3	23	déplacement
d e f	3	60	déplacement
g h i	3	23	effort

TABLE E.3 – Nomenclature des essais en température effectués sur la machine servo-hydraulique.

maximal de déformation. En effet, les éprouvettes ont tendance à casser au plus haut niveau d'accommodation. Nous avons donc préféré réaliser les premières accommodations désignées par "\_1", et la dernière par "\_2" afin de jouer d'autres signaux entre ces deux parties. Le suffixe "\_dephase" désigne l'essai où les deux axes de sollicitation sont déphasés de manière contrôlée, c'est-à-dire non aléatoire.

Le signal "SED2" est un signal piste qui peut être joué de deux façons, soit en phase (même signal sur les deux axes), soit déphasé. Le signal "p2biac" est un deuxième signal piste aléatoire pour chaque axe.

Feuille	Dir	Input	Output	Video	Temp
21a	X	equi_1.dat	equi_k01	6901	25
		equi_dephase.dat	equi_k02	6902	25
		SED2_dephase.dat	equi_k03	6904-6905	25
		SED2_phase.dat	equi_k04-05	6906-6908	25
		equi_2.dat	equi_k06	6910	25
21b	Y	equi_1.dat	equi_l01	6926	23-24
		equi_dephase.dat	equi_l04	6927	23-24
		SED2_dephase.dat	equi_l02	6928	23-24
		p2biax.dat	equi_l03	6929	23-24
		SED2_phase.dat	equi_l05	6930	23-24
16a	X	bia08_1.dat	bia8_g01	6931	23-24
		bia08_dephase.dat	bia8_g02	6932	23-24
		bia08_2.dat	bia8_g03	6933	23-24
		p2biax.dat	bia8_g04	6934	23-24
		crack	bia8_g05	6935	23-24
16d	X	bia02_1.dat	bia2_g01	6936	23-24
		bia02_2.dat	bia2_g02	6937	23-24
		therm22500.dat	bia2_g03		23-24
16b	X	bia05_1.dat	bia5_g01	6938	24
		bia05_dephase.dat	bia5_g02	6939	24
		bia05_2.dat	bia5_g03	6940	24
		therm22500	bia5_g04		24
16c	Y	bia05_1.dat	bia5_h01	6941-6942	24
		bia05_dephase.dat	bia5_h02	6943	24
		bia05_2.dat	bia5_h03	6944	24
18d	X	photo	photo_01	6945-6976	24
		photo	photo_02		24
		therm22500	photo_03		24
18c	X	equi_1.dat	equi_m01	6980	40
		equi_dephase.dat	equi_m02	6981	40
		SED2_dephase.dat	equi_m03		40
		p2biax.dat	equi_m04		40
		p2biax.dat	equi_m05		23
		therm22500	equi_m06		23
18b	X	bia05_1.dat	bia5_i01	6989	40
		bia05_dephase.dat	bia5_i02	6990	40
		bia05_2.dat	bia5_i03	6991	40
		therm22500	bia5_i04		40

TABLE E.4 – Tableau récapitulatif des essais Biaxiaux.

Feuille	Dir	Input	Output	Video	Temp
18a	X	equi_1.dat	equi_n01	6999	50
		equi_dephase.dat	equi_n02	7000	50
		SED2_dephase.dat	equi_n03		
		p2biax.dat	equi_n04		
19a	X	bia05_1.dat	bia5_j01	7001	50
		bia05_dephase.dat	bia5_j02	7002	50
		bia05_2.dat	bia5_j03	7003	50
		therm22500	bia5_j04		24
		therm22500	bia5_j05		30
		therm22500	bia5_j06		40
19b	X	equi_1.dat	equi_o01	7004	60
		equi_dephase.dat	equi_o02	7005	60
		SED2_dephase.dat	equi_o03		60
		p2biax.dat	equi_o04		60
		crack.dat	equi_o05		60
19c	X	bia05_1.dat	bia5_k01	7006	60
		bia05_dephase.dat	bia5_k02	7007	60
		bia05_2.dat	bia5_k03	7008	60
		acc_17500.dat	bia5_k04-09	7010-7015	60-23
		crack.dat	bia5_k10		23
Nra	X	equi_1.dat	nr_01	7016	23
		therm22500	nr_02		23
		equi_dephase.dat	nr_03		23
		SED2_dephase.dat	nr_04		23
		p2biax.dat	nr_05		23
		equi_2.dat	nr_06		23
NRb	Y	equi_1.dat	nrb_01	7017	23
		equi_dephase.dat	nrb_02	7019	23
		equi_2.dat	nrb_03	7020	23
		equi_3.dat	nrb_04	7021	23
19d	Y	bia08_1.dat	bia8_h01	7022	23
		bia08_dephase.dat	bia8_h02	7023	23
		crack	bia8_h03		23
20a	Y	bia02_1.dat	bia2_h01	DSCN_1783	23
		bia02_2.dat	bia2_h02	DSCN_1784	23
		SED2_dephase.dat	bia2_h03		23
		p2biax.dat	bia2_h04		23

TABLE E.5 – Tableau récapitulatif des essais Biaxiaux.

Feuille	Dir	Input	Output	Video	Temp
20d	Y	bia08_1.dat	bia8_i01	DSCN_1785	60
		bia08_dephase.dat	bia8_i02	DSCN_1786	60
		SED2_dephase.dat	bia8_i03		60
		p2biax.dat	bia8_i04		60
		SED2_dephase.dat	bia8_i05		60
20c	X	bia02_1.dat	bia2_i01		60
		bia02_2.dat	bia2_i02		60
		bia05_2.dat	bia2_i03		60
		bia08_2.dat	bia2_i04		60
20b	Y	bia05_1.dat	bia5_i01		23
		bia05_dephase.dat	bia5_i02		23
		bia05_2.dat	bia5_i03		23
		SED2_dephase.dat	bia5_i04		23
		SED2_dephase.dat	bia5_i05		23
		p2biax.dat	bia5_i06		23
		p2biax.dat	bia5_i07		23

TABLE E.6 – Tableau récapitulatif des essais Biaxiaux.



---

## Résumé

---

Les élévations de température à proximité des pièces en élastomères automobiles rendent insuffisantes les méthodes expérimentales actuellement utilisées pour dimensionner ces pièces. Ainsi, il est essentiel de mettre au point une nouvelle approche, tant expérimentale que de simulation, permettant d'estimer la durée de vie d'une structure en élastomère soumise à la fois à une histoire de chargement thermique et de chargement mécanique.

Le matériau d'étude est un caoutchouc naturel chargé au noir de carbone. Ce matériau présente deux caractéristiques importantes à prendre en compte dans le cadre de cette étude. D'une part, en raison de son comportement hystérétique, il a la propriété de s'échauffer sous l'effet d'une sollicitation mécanique ; ainsi la température du matériau ne dépend pas uniquement des conditions aux limites thermiques mais également mécaniques. D'autre part, sa tenue en endurance se dégrade notablement lorsque la température augmente.

L'objectif du travail de thèse est de proposer des méthodes d'estimation de la durée de vie et de détermination d'équivalents pour la fatigue thermomécanique des élastomères. Afin de répondre à cet objectif, nous caractérisons tout d'abord les histoires de chargement mécanique et thermique en tenant compte des couplages thermomécaniques. En particulier, nous étudions le comportement thermomécanique cyclique, et développons une méthode d'estimation simple et robuste de la température d'autoéchauffement. Cette méthode est fondée sur un couplage thermomécanique faible, une estimation des sources de chaleur et un problème thermique homogénéisé en temps incluant les effets des grandes déformations. Afin de bâtir un modèle de fatigue thermomécanique, nous caractérisons l'endurance du matériau d'étude à partir de courbes de Wöhler et de renforcement à plusieurs températures. Nous discutons de l'hypothèse de cumul linéaire d'endommagement par fatigue (règle de Miner) pour des cycles thermomécaniques.

---

## Abstract

---

The temperature rises near automotive rubber parts make insufficient experimental methods currently used to design these parts. Thus, it is essential to develop a new approach, both experimental and simulation to estimate the lifetime of an elastomer structure subjected to a history of both thermal loading and mechanical loading.

The material used in this study is a natural rubber filled with carbon black. This material has two main characteristics studied in this work. On the one hand, because of its hysteretic behavior, it has the ability to warm up under the effect of mechanical stress, and the temperature of the material depends not only on the thermal boundary conditions but also mechanical boundary conditions. On the other hand, the fatigue strength degrades significantly when the temperature increases.

The objective of this thesis is to propose methods for estimating the thermomechanical fatigue life and determining equivalence rules for elastomers. To reach this goal, we first characterize the mechanical and thermal loading history taking into account the thermomechanical couplings. In particular, we study the cyclic thermomechanical behavior, and develop a simple and robust method for the self-heating temperature estimation. This method is based on a low thermomechanical coupling, an estimate of the heat sources and heat problem homogenized time including the effects of large deformations. To build an estimation of thermomechanical fatigue life, we characterize at different temperatures the endurance limit of our material with Wöhler curves and fatigue reinforcement. We discuss the assumption of linear cumulative damage (Miner's rule) for thermomechanical cycles.