

Aspects critiques des fluctuations d'un plasma magnétisé. Proposition de théorie cinétique stochastique

Guillaume Attuel

▶ **To cite this version:**

Guillaume Attuel. Aspects critiques des fluctuations d'un plasma magnétisé. Proposition de théorie cinétique stochastique. Physics [physics]. Ecole Polytechnique X, 2007. English. NNT : . pastel-00004936

HAL Id: pastel-00004936
https://pastel.hal.science/pastel-00004936

Submitted on 27 Mar 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Aspects critiques des fluctuations dans un plasma magnétisé. Proposition de théorie cinétique stochastique.

Par Guillaume Attuel

École Doctorale de l'École Polytechnique

Thèse soutenue le 30 novembre 2007

Devant le jury composé de

PR. STÉPHANE HEURAUX	Président
DR. ANTOINE BRET	Rapporteur
PR. CLAUDE DEUTSH	Rapporteur
DR. MAXIME MIKIKIAN	Invité
DR. AUGUSTIN LIFSHITZ	Invité
DR. MARIE-CHRISTINE FIRPO	Directrice
PR. JEAN-MARCEL RAX	

Laboratoire de Physique et Technologie des Plasmas
C.N.R.S. UMR 7648, École Polytechnique
91128 Palaiseau cedex, France

Aspects critiques des fluctuations dans un plasma magnétisé. Proposition de théorie cinétique stochastique

Guillaume Attuel

04 octobre 2007

Remerciements

La conduite de ma thèse a été pénible. Si je répondais avec constance à certains principes, je me suis pourtant retrouvé en définitive isolé, avec un fort bagage d'erreurs de jugement, et ce, sur le plan humain. Il aura fallu attendre la fin de mon contrat avec le CEA, pour que Xavier Garbet me souffle de me présenter à Marie-Christine Firpo. En cela, l'intervention, quelques mois auparavant, de Michel Chatelier, que Clarisse Bourdelle avait alerté sur ma situation très entravée, a été determinante. Bien entendu, je les en remercie profondément.

Marie-Christine a littéralement inversé le cours des choses et m'a accueilli à bras ouverts. C'est entièrement grâce à Marie-Christine que j'ai pu retrouver la sérénité minimale à la concrétisation de ma démarche. À ses côtés, j'ai trouvé l'ouverture et la finesse d'esprit qui m'ont réappris, par un effort de mimétisme de ma part, à reconnaître dans la rigueur, non pas seulement l'arme d'une preuve irréfutable, mais un renfort, et bientôt un réconfort, à ne dépendre que de soi-même, sobrement prenant le temps nécessaire, en somme, à cette sérénité. Tout autant, je garde bien en souvenir nos échanges, qui ont enrichi mon travail, et mon enthousiasme. En partie pour cela, je lui suis infiniment reconnaissant.

Je veux remercier tous les membres de mon jury de thèse de m'avoir fait l'honneur d'accepter, voire de se proposer, d'en faire partie. J'ajoute un remerciement à l'égard d'Antoine Bret et de Claude Deutsh qui se sont chargés en outre de rapporter mon manuscrit. Je remercie également Stéphane Heuraux pour avoir porté la responsabilité de la présidence du jury, d'autant que Stéphane Heuraux, lors de sa visite au CEA, il y a deux ans de cela a su me redonner courage, en s'intéressant à mon travail. J'ai su apprécier particulièrement les chaleureux encouragements que Maxime Mikikian, et Antoine Bret m'ont adressés, de conserve avec Marie-Christine Firpo et Augustin Lifschitz.

Il va sans dire que des amitiés se sont forgées pendant cette période, et m'ont accompagnées. Mes pensées se tournent vers elles.

Comme il est de coutume, mon travail est dédicacé à mes parents, et c'est

un grand plaisir pour moi.

Enfin, je voudrais clore cet exercice par une citation :

“La béatitude n’est pas la récompense de la vertu, mais la vertu même ; et ce n’est pas parce que nous réprimons les appétits néfastes que nous en éprouvons de la joie ; mais au contraire, c’est parce que nous en éprouvons de la joie que nous pouvons réprimer les appétits néfastes.” Proposition XLII, qui clôt *l’éthique* de B. Spinoza.

Résumé

Ma thèse développe essentiellement la phénoménologie d'une forme particulière de relaxation pour le non équilibre ; d'abord dans le cas du plasma magnétisé, où il est identifié en un sens précis un point critique, autour duquel la relaxation est intermittente, puis dans un cadre plus général.

Dans la conduite de la première partie, je suis amené à reconsidérer la résonance entre ondes de Langmuir et particules (électrons, ions). En effet, je prouve qu'à l'origine de cette résonance, l'instabilité est de même classe que l'instabilité de Rayleigh. Il s'ensuit que "l'amortissement Landau" n'est pas de nature cinétique. La raison principale est simple : le champ est moyen. L'autre manière de le comprendre, faisant écho à l'argument usité, consiste à compter le nombre de degrés de liberté émanant de la distribution des vitesses résonantes :

$$v = \frac{\omega}{k}$$

dont la distribution pertubée est identifiable à la densité des modes.

La preuve est apportée par le calcul des susceptibilités, dans la théorie des perturbations dépendantes du temps, nécessitant la détermination du spectre d'équilibre.

La fermeture n'est pas un obstacle, elle peut se concevoir par analogie avec un choix de jauge, et ne fait que traduire le type d'équilibre décidé une fois pour toute par les contraintes expérimentales, telles que adiabaticité ou température constante, s'appliquant au corps du plasma. Il y a certes des phénomènes cinétiques qui ne seront pas capturés par la mécanique des fluides, mais ceux-ci demeurent non explicités dans la littérature. Ces phénomènes constituent un problème extrèmement délicat, dont l'enjeu réside en ne négligeant pas, dans l'équation de Liouville, les termes de corrélations.

Pour autant, établir cette preuve nécessite de recourir à l'hypothèse de linéarité thermodynamique, pour les régimes faiblement hors équilibres, or l'instabilité de Rayleigh développe une turbulence loin de l'équilibre. À

l'aune de cette remarque, il est sans doute raisonnable de clore un débat, naît à propos d'écarts entre la mesure du coefficient de diffusion et la valeur donnée dans l'approximation quasi-linéaire, reconnaissant que le transport n'est tout simplement pas diffusif.

Il est nécessaire d'aborder la question avec de nouvelles méthodes. Elles ont été développées pour la plupart dans le domaine de la physique de l'état critique. Mais d'abord, pour en illustrer la teneur, je considère l'instabilité convective dite d'échange, analogue pour les plasmas de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Après avoir rappelé une dérivation détaillée du système, je le simplifie pour n'en retenir que les mécanismes essentiels. J'identifie un seuil de transition critique, intuitivement compréhensible comme le seuil d'inversion dans le rapport des forces motrices et dissipatives. Néanmoins ce point se révèle un peu particulier, dans la mesure où ses propriétés caractéristiques persistent bien au delà. Il est possible dans ces régimes d'identifier également des transitions du premier ordre. Je développe un modèle de champ moyen, très succint, de tas de sable pour en expliciter le mécanisme. Il s'avère que dans une description de type Van der Waals, la définition de l'énergie libre est compromise par des coefficients fluctuants : des cycles s'effectuent entre les régions surcritique et métastable.

Enfin, la troisième partie de ce manuscrit tente de théoriser plus quantitativement cette phénoménologie.

Que les propriétés du point critique s'étendent au delà, cela fait irrémédiablement penser à la transition de Kosterlitz-Thouless pour les systèmes de symétrie XY à deux dimensions. L'instabilité de Rayleigh possède en effet cette symétrie, mais réduite fondamentalement au cas unidimensionnel. Pour faire le lien, il faut identifier la présence du champ extérieur, ajoutant en quelque sorte un degré de liberté, qui est ici intrinsèque. Ce champ est à la fois la cause des tansitions du premier ordre, se propageant parfois sous forme de fronts, mais puisque de moyenne nulle, il n'occulte pas le point critique. Je m'appuie sur le modèle XY gaussien pour donner une valeur plausible à la loi asymptotique de décorrélation, servant au calcul des exposants critiques.

D'autre part, je formalise les fluctuations de l'énergie libre. À partir de l'extrapolation de la théorie de Landau, au lieu d'une équation de Langevin pour la cinétique, qu'on associe à la relation de fluctuation-dissipation pour obtenir l'équilibre maxwellien, on obtient un processus brownien fractionnaire géométrique. Dans le régime stationnaire, je me demande s'il est possible de généraliser la notion de relaxation. L'hypothèse d'invariance d'échelle, qu'autorise l'analyse précédente sur la criticalité, per-

met aussi d'associer au processus une généralisation de la relation de fluctuation-dissipation. Cette observation permet d'amorcer une explicitation des distributions stationnaires non maxwelliennes. J'en donne un exemple probant dans ce système. Il n'est dès lors pas inconcevable que la notion d'équilibre, dont dérivent en particulier les relations de Gibbs, soit généralisable.

Centralement, je développe un argument, qui fait suite à une remarque de K. G. Wilson dans son premier article sur la renormalisation du point critique, à propos d'une orbite de renormalisation chaotique . En effet la présence du troisième champ, intrinsèque et non nul, est favorable au chaos. Cet argument m'autorise cependant à postuler pour ce cas-ci la pertinence des exposants critiques, dont je détermine les valeurs. Celles-ci sont notoirement différentes de celles que livrent la théorie statique ou même la théorie dynamique critique. En particulier, je trouve

$$z \approx 1.$$

La raison réside là encore en la présence du champ extérieur, intrinsèque. La relation d'*hyperscaling* n'est plus valable, par exemple, du fait de la généralisation. Je note que les valeurs trouvées sont en totale adéquation avec celles que déterminent empiriquement, par une simulation de la résonance onde-particules, A. V. Ivanov et al. dans un travail indépendant, accréditant par la même occasion les points principaux de ma thèse.

Le lecteur, sans doute, voudra bien excuser les balbutiements de mon propos, qui le rendent un peu confus, notamment dans la troisième partie.

Table des matières

I Phénoménologie de la dynamique critique parallèle au champ magnétique 1

1 Transitions résonantes 11

1.1 Remarques préliminaires comparant la théorie de A. Vlasov et la théorie fluide, toutes deux de champ moyen 11

1.1.1 Deux ensembles statistiques 12

1.1.2 L'hypothèse maxwellienne 14

1.1.3 L'amortissement quasi linéaire 16

1.2 Formation de paquets d'ondes 20

1.2.1 Distribution de probabilité 21

1.2.2 Vitesse de groupe et probabilité de transition 25

1.3 Relation de dispersion 28

1.3.1 Moyenne des interactions 28

1.3.2 Bilan énergétique 31

1.4 Temps de corrélation 33

1.4.1 Scaling avec η 34

1.4.2 L'amortissement "Landau" 35

1.4.2.1 L'équation d'onde 36

1.4.2.2 La méthode de la résolvante 36

2 Equilibre de l'interaction entre ondes et particules 41

2.1 Hamiltonien à M ondes, et N particules. 41

2.1.1 Domaine de validité 42

2.2 Spectre d'équilibre 45

2.2.1 $M = 1$ 46

2.2.2 $M > 1$ 46
2.2.3 Approche de l'équilibre 49
2.3 Paradoxe quasilinéaire ? 51
2.3.1 Conditions numériques hors cadre théorique 51
2.3.2 *Resonance broadening* 53
2.4 Phénoménologie 56
2.4.1 Emission Cerenkov 57
2.4.2 Potentiel chimique 58
2.4.3 Susceptibilité quasi linéaire 61

II Phénoménologie de la dynamique critique perpendiculaire au champ magnétique 73

3 Le modèle d'instabilité d'échange 77
3.1 Dérive électrique 77
3.1.1 Trajectoire de particules chargées dans un champ magnétique uniforme 77
3.1.2 Représentation fluide 79
3.1.3 Polarisation et dérive 81
3.2 Onde de dérive 82
3.2.1 Modèle d'Hasegawa et Mima 83
3.2.2 Onde de Rossby 87
3.3 Dérive de gradient 90
3.3.1 Champ magnétique faiblement inhomogène 90
3.4 Génération de courant et instabilité d'échange 93
3.4.1 Instabilité d'échange 93
3.4.2 Mécanisme 94

4 Phénoménologie du modèle 99
4.1 Séparation d'échelles 99
4.1.1 Limite non dissipative 100
4.1.1.1 Solution stationnaire 100

4.1.1.2 Modes linéaires 104
4.1.2 Période moyenne, et longueur associée 106
4.1.2.1 Equilibre local 106
4.1.2.2 Relation de dispersion quasi linéaire 107
4.1.2.3 Temps et longueur typiques 109
4.2 Dynamique de relaxations 111
4.2.1 Analogie avec la matière molle 111
4.2.2 angle de repos et angle d'avalanche 114
4.3 Transition de phase du second ordre 118
4.3.1 Amplitudes des fluctuations 118
4.3.2 Transition du second ordre 120
4.4 Melange de phases : fronts 125
4.4.1 Cinétique linéaire 125
4.4.2 Argument dynamique 127
4.4.3 Argument thermodynamique 127

III Invariance d'échelles et statistique 141

5 Proposition de théorie cinétique stochastique 145
5.1 Coefficient phénoménologique stochastique 146
5.1.1 Théorie linéaire 146
5.1.1.1 Cinétique 146
5.1.1.2 Complexité du coefficient cinétique 147
5.1.2 Théorie étendue à l'état critique 150
5.1.2.1 Equation cinétique stochastique 150
5.2 Processus 152
5.2.1 Exemple de processus de Levy 152
5.2.2 Méthode de renormalisation 153
5.2.2.1 Pour un processus de Levy 154
5.2.2.2 Pour le processus Brownien fractionnaire . . 156
5.3 Originalité par rapport à une équation de Langevin 157

5.3.1 Criticalité auto-organisée 157
5.3.2 Limites 159
5.3.2.1 Théorème de fluctuation-dissipation et divergences 159
5.3.3 Mapping 163
5.4 Orbite de renormalisation chaotique 165
5.4.1 Espace-temps 165
5.4.2 Système dynamique de renormalisation 167
5.4.3 Dimension critique 169
5.5 Discussion sur le quasi ordre 171
5.6 Récapitulatif de l'amorce de théorie 179
5.7 Statistique 187
5.7.1 Vieillissement 188
5.7.2 Statistique 192
5.7.2.1 Distribution stationnaire 192

Première partie

Phénoménologie de la dynamique critique parallèle au champ magnétique

Introduction

Dans les deux chapitres suivants, j'utiliserai le fait que l'équation de Vlasov n'est pas à l'évidence une équation cinétique, car elle n'inclue aucun effet microscopique (absence de "terme de collisions") et uniquement des effets de champ moyen. L'objectif n'est pas de chercher quelle distribution émergerait à terme de l'équation de Vlasov (quoique j'en discuterai succinctement au premier chapitre) car cela n'aurait pas de sens pour une théorie de champ moyen [1]. Je montrerai l'équivalence de point de vue entre la théorie de A. Vlasov et la théorie fluide, lorsque l'équilibre thermodynamique local est supposé. Je le montre en établissant l'égalité des susceptibilités linéaires des deux théories, censées différentes.

Bref historique

Le long d'une ligne de champ magnétique, les interactions entre les particules chargées d'un plasma chaud sont essentiellement coulombiennes. La polarisation locale due aux mouvements cyclotroniques, influence en effet principalement la dynamique perpendiculaire, c.f. partie II. Les interactions coulombiennes entre particules chargées sont à longues distances, néanmoins pour un plasma à l'équilibre, il existe à cause de l'électroneutralité une longueur caractéristique associée à l'écrantage des charges. À des échelles supérieures, le plasma est composé de pseudo particules (une charge et son "nuage" d'écrantage) aux interactions faibles et locales (par déformation des nuages en contact). Autrement dit, la dynamique des particules chargées se décompose en une partie collective de grande échelle, et une partie individuelle de petite échelle. Cette dernière ne peut être constituée de déplacements purement aléatoires que très loin de l'état fondamental, car, dans ce cas, l'énergie d'excitation des modes collectifs serait bien supérieure à l'énergie d'agitation thermique. Au contraire, la répulsion coulombienne induit une corrélation entre les

1. D'ailleurs, l'équation de Vlasov admet toute distribution de l'énergie comme solution stationnaire. Nous voyons par là, qu'il faut se donner cette distribution a priori.

fluctuations des vitesses, dont la conséquence est le nuage d'écrantage, ou sphère de Debye. Les modes collectifs sont alors à l'équipartition.
Au demeurant, lorsqu'il existe une quantité non négligeable de particules supra thermiques (un faisceau), faute d'un écrantage qui n'a pas le temps de se produire, se forme un sillage ondulant derrière celles-là. Ce sillage est la résultante d'une instabilité de résonance à la pulsation naturelle, de type émission Cerenkov. D. Pines et D. Bohm décrivent ce quasi-équilibre du plasma dans un article fondateur [2].

L'instabilité 'de Landau'

Singularité formelle Le mouvement d'une charge écrantée est ainsi la somme d'oscillations de basses fréquences dans un mode collectif, et d'une trajectoire de centre guide individuelle. Le libre parcours moyen de ce centre guide est très grand par rapport à la longueur de Debye. Prenons donc une telle particule, quasi indépendante des autres, décrite par la position $x(t)$ et la vitesse $v(t)$ de son centre guide. La dynamique du centre guide, i.e. moyenne, peut se formaliser par une équation de Langevin de friction quasi nulle $\nu \to 0$. La force est la force électrique, fluctuante par sa nature intrinsèque. Pour l'ensemble statistique, l'équation de Kramers d'évolution de la probabilité $p(x, v, t)$, se dérive en prenant le couple (x, v) comme variable aléatoire, ce qui sous-entend que les conditions initiales ne sont pas connues, et distribuées selon une probabilité

$$p(x, v, 0) \equiv p_0(x_0, v_0).$$

Cette dynamique couplée à l'équation de Poisson donne le système proposé par A. Vlasov [86]

$$\left(\partial_t + \mathbf{v}\partial_x + \frac{-e}{m}\mathbf{E}\partial_v\right) p = \lim_{\nu\to 0} \nu \left(\partial_v \mathbf{v} + \nu D \partial^2_{v^2}\right) p \tag{1}$$

où $\mathbf{E}$ est le champ électrique, et D est le coefficient de diffusion spatiale. La relation d'Einstein est pour une température stationnaire et uniforme $D\nu = \frac{K_B T}{m}$. Pour ce système, L. D. Landau a proposé un calcul exhibant l'amortissement ou l'instabilité des modes collectifs d'amplitude perturbative, du fait de la résonance entre les particules (supra thermiques) et les phases des modes [65]. Ce calcul est basé sur le prolongement analytique du terme résonant

$$\frac{1}{\omega - kv}$$

Pourtant, comme le système d'équations de Vlasov n'est strictement valide que pour l'ensemble des particules non résonantes, c'est-à-dire dont la charge est écrantée, il est légitime d'émettre un doute sur la validité de la description de la résonance dans ce cadre. Ainsi, ce système n'est pas valide si les particules chargées supra thermiques apportent une perturbation *singulière* au système, c'est-à-dire amenant le plasma dans un état très différent de ce qu'il serait en l'absence de perturbation. La description de Landau met donc au mieux en garde qu'une telle singularité peut exister dans le système de Vlasov. Cette problématique a sans doute en amont pu motiver la recherche plus fine du mécanisme physique des éventuels amortissement ou instabilité. La théorie quasi-linéaire formule l'hypothèse de non singularité pour les très faibles perturbations, l'état thermodynamique du plasma n'étant pas modifié. La description acceptable se ramène alors à traiter les particules supra thermiques comme provenant d'un faisceau de particules *initialement extérieur* au système, c'est-à-dire comme une différente espèce. On parle alors du corps du plasma, couplé au faisceau. C'est seulement le devenir du faisceau et des modes associés qui est l'objet de cette théorie.

Recherche du mécanisme physique D. Bohm et E. P. Gross [12] argumentaient que la fonction dirac qui apparaît par prolongement analytique dans $\mathbb{C}$ autour du pôle

$$\frac{1}{\omega - kv} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega - kv}\right) + i\pi\delta(\omega - kv)$$

doit pouvoir se comprendre comme résultant d'un mécanisme non linéaire, de piégeage des particules proches de la résonance dans les puits de potentiel de l'onde. L'argument pour expliquer la dissipation de l'onde plasmon consiste à invoquer l'échange d'énergie entre les particules et l'onde aux premiers instants : lorsqu'il y a plus de particules accélérées que décélérées, l'onde perd de l'énergie et inversement. C'est l'argument dit du "surfeur", qui me paraît inapproprié. En effet, chaque particule va *rendre* toute l'énergie cinétique qu'elle a acquise, en retombant dans le puits et osciller. Il y a seulement conversion d'une fraction de l'énergie cinétique barycentrique en énergie d'oscillations dans les puits de potentiel de l'onde.

Prolongement analytique La solution stationnaire du système de Vlasov dans le référentiel de la phase de l'onde, donnée par I. B. Bernstein J. M. Greene et M. Kruskal [11], fait apparaître explicitement la distribu-

tion des particules piégées comme un dirac à partir d'un développement en champ perturbatif. On peut remarquer que leur calcul est basé sur l'équation de Poisson (une distribution spatiale donnée du potentiel $\Phi(x)$). Dans l'intention de chercher une meilleure interprétation de l'amortissement, on peut y reconnaître l'indice d'un effet de l'écrantage du champ initial de l'onde par les particules qui tombent dans le puits. Nous remarquons au moins que les effets non linéaires sont importants pour justifier physiquement le prolongement analytique. Mais nous n'avons toujours pas progressé dans la compréhension du mécanisme d'amortissement.

J. M. Dawson considère un ensemble de faisceaux fluides, et cherche par passage à la limite continue à retrouver les résultats précédents [21]. Il trouve autant de pulsations que deux fois le nombre de modes (par symétrie par inversion temporelle), dont les parties complexes tendent vers zéro à la limite continue. Ainsi, on comprend que le prolongement analytique proposé par L. D. Landau peut se justifier par la faible instabilité intrinsèque des faisceaux

$$\omega = \omega_r \pm i\alpha$$

avec $\alpha \to 0$. Hormis ce nouveau point, la démonstration reste aussi formelle, bien qu'il annonce que c'est le mélange de phases de toutes ces pulsations qui se traduit macroscopiquement par l'amortissement d'un mode initialement cohérent.

Mélange de phases N. G. Van Kampen [59] a rappelé que l'analyse de L. D. Landau provient de la théorie de la diffusion résonante (ou inélastique, résumée par P. Dirac [22]) par un exposé formel plus juste. La solution formelle passe par la fonction de Green

$$p(x,v,t) = \int\int dx_0 dv_0 G(x,v \mid x_0,v_0;t) p_0(x_0,v_0).$$

Soit la perturbation initiale statique

$$p_0(v_0)e^{ik_0x}.$$

On voit qu'il y a mélange de phases par superposition de modes

$$n(x,t) \equiv \int dv\ p(x,v,t) = e^{ik_0x} \int\int dvdu\ \Theta(v,u)e^{-ik_0ut}$$

où Θ est la fonction génératrice, transformée de Fourier de $\int dv_0 p_0 G$, et où une vitesse a été mise en évidence $u \equiv \frac{\omega}{k_0}$. Le papier de N. G. Van Kampen est alors consacré en bonne partie à l'expression de $\Theta(u) = \int dv\ \Theta(v,u)$,

qui s'avère une fonction complexe de la distribution $p_0(u)$.

Mais $\Theta(u)$ est aussi la densité spectrale en fréquence, impliquant qu'à la résonance exactement $v_0 = u$, le mélange de phases ne peut se produire. Bien qu'on s'en soit approché, le phénomène réel qui se manifeste par cette diffusion résonante n'est donc toujours pas correctement mis en évidence.

Réponse diélectrique En fait, ces deux derniers articles [21, 59] traitent de la constante diéléctrique, qui caractérise la réponse du plasma à une excitation [2]

$$\epsilon(k, \omega)$$

dans la notation conventionelle. En effet, nous savons bien que dans la théorie de la réponse, $\epsilon(k, \omega)$ est liée à la densité spectrale. Or, un spectre est une distribution d'équilibre : comment alors concilier les résultats de L. D. Landau et de J. M. Dawson valables aux temps courts avec la théorie de la réponse valable aux temps longs ?

Cette remarque est à la base de mon développement. Avant d'y venir, continuons l'aperçu historique.

Systèmes dynamiques Beaucoup plus récemment, D. Escande, Y. Elskens et S. Zékri ont remis le sujet à l'ordre du jour, par la voie des systèmes dynamiques hamiltoniens [30]. Plutôt que supposer la vitesse de chaque faisceau fixée à l'ordre zéro, comme dans [21], ce qui n'est plus valable dès que le régime linéaire est quitté, c'est la pulsation de l'onde qui peut être fixée. En effet, celle-ci est invariante même à la saturation de la perturbation, i.e. une fois qu'il existe des tores stables (dits invariants) de l'espace des phases, déformés par rapport aux tores du hamiltonien non perturbé. Ce sont les tores de KAM (A. Kolmogorov, V. Arnold, et J. Moser). Physiquement pour ce qui nous concerne, ces tores sont associés aux particules piégées dans les puits de potentiel de certains modes. En bref, une condition suffisante pour qu'il existe des tores de KAM est la non dégénérescence, c'est-à-dire que les périodes initiales des trajectoires, ou les pulsations des modes, varient effectivement avec l'action (i.e. dans l'espace des phases). Cela garantit que ces tores de KAM forment un ensemble dense parmi les tores résonants détruits. Les tores de KAM sont d'autant plus stable qu'au sens des petits diviseurs de Poincaré, il existe

2. Les fonctions respectivement $h(k_0, \omega)$ et $Z(k_0, u)$.

$a > 0$, $b > 0$, tel que

$$\left| \sum_{i}^{N+M} m_i \omega_i \right| > \frac{a}{|m|^b}$$

pour tout $|m| = \frac{1}{N+M} \sum_i |m_i|$ entier. Les fréquences ω_i sont les fréquences initiales dans chaque direction d'un tore donné. Ce critère de stabilité extrait les tores dont le rapport de deux fréquences est le plus irrationnel possible.

Dans le plasma, les fréquences ω_i sont définies aussi bien par la relation de Bohm et Gross $\omega_i^2 = \omega_0^2 = \omega_p^2 + \alpha T k_0^2$ (α a la dimension de la constante de Boltzmann), que par la condition de résonance $\omega_i = \omega_l = k_0 v_l$ (l'indice l correspond au l^{ieme}faisceau de particules). Le plasma est donc complètement dégénéré. Il suffit de prendre $m = (1, ..., 1, -1, ..., -1)$ de module $|m| = 1$, pour voir que la condition d'irrationalité n'est pas remplie par les faisceaux proches de la résonance,

$$|\omega_0 - k_0 v_l| \approx 0.$$

Ainsi, le système est pratiquement garanti de se trouver dans un régime stochastique global, dont le coefficient de Lyapunov local est alors une mesure acceptable [38]. Par cet approche, nous percevons une réponse à notre question : la dynamique aux temps courts représente correctement la dynamique aux temps longs, dans un tel plasma, à cause de la dégénérescence.

Effets cinétiques quasi-linéaires et fermeture fluide

Fermeture et équilibre thermodynamique local Commençons par la remarque suivante : la phénoménologie précédente ne peut pas faire la distinction entre une particule réelle, par exemple parmi un faisceau de particules de température nulle (un faisceau chaud peut être vu comme une collection de faisceaux froids c.f. [21]), et une particule fluide, c'est-à-dire le faisceau même. Il en résulte que les équations fluides devraient rendre compte de la même manière de la phénoménologie que le système de Vlasov. En particulier, les deux façons doivent donner la même susceptiblité diélectrique. Il s'agit là du problème de la fermeture fluide.

Revenons par exemple aux équations de Langevin. De celles-ci, on peut tirer à la place de l'équation de Kramers, l'équation de Fokker-Planck sur la probabilité de la position seule $p(x,t)$, couplée à l'équation moyenne de la dynamique $\langle \partial_t v(x,t) \rangle$ (qui n'est pas en général l'équation de la dyna-

mique moyenne $\partial_t \langle v(x,t) \rangle$). Les deux voies contiennent autant d'information, mais pour que la seconde s'écrive explicitement, il est nécessaire de connaître le terme de pression. On aurait affaire à une hiérarchie d'équations sur les moments d'ordres supérieurs (pression, flux de chaleur ...). En fait, la connaissance de l'état d'équilibre thermodynamique (s'il existe) du plasma, par exemple isotherme, adiabatique ou autre, permet d'interrompre cette hiérarchie dès le départ. On dit que l'on ferme sur la pression. Pourtant, si l'on fait ensuite une analyse de stabilité linéaire du système d'équations fluides, rien n'indique un amortissement ou une instabilité : ce fait dérange communément et il est admis que l'information de nature cinétique a été perdue par la fermeture. La littérature compte des efforts trop cantonnés à cette première surprise, qui plutôt que mus par le sens physique pour tenter de lever ce paradoxe formel, ont été absorbé par la volonté d'inclure les effets formels de la résonance dans un terme de pression ad hoc, toujours compliqué (e.g. dans le régime non linéaire [69]). Je dis paradoxe formel à dessein, car un aspect linéaire dans une description donnée n'a pas son équivalent nécessairement dans le régime linéaire d'une autre description.

Et pour cause, poursuivant l'idée de singularité évoquée dans le premier paragraphe, l'opinion généralement adoptée reviendrait à admettre que les effets cinétiques modifient de façon radicale l'état thermodynamique du plasma, par le terme ad hoc de pression, de surcroît aux tout premiers instants. Or, il ne doit pas en être ainsi dans le cas que la théorie se donne à traiter : les particules piégées sont en très petit nombre et ne peuvent avoir d'effet suffisamment marquant sur le comportement des particules appartenant au corps. Par exemple la distribution d'un plasma isotherme demeure une maxwellienne, le plasma conserve la même température avec les résonances, et se réorganise seulement à la fréquence naturelle ω_p.

Phénoménologie Mathématiquement parlant, le système de Vlasov admet comme solution stationnaire dans un référentiel donné, toute distribution de l'énergie (étant donné $\Phi(x)$). Le champ stationnaire peut prendre en conséquence une allure quelconque [11]. La solution stationnaire moins générale proposée par D. Bohm et E. P. Gross est physiquement plus adéquate [12]. En effet, il est montré que les particules piégées freinent la vitesse de phase de l'onde. Ceci résulte de l'écrantage qu'elles produisent, qui induit une légère diminution de la fréquence naturelle du plasma. On s'aperçoit donc que le cadre de l'hypothèse de stationnarité conduit à une conclusion qui en sort : cette solution stationnaire est instable.

Poursuivons leur exemple. Ainsi, dans le nouveau référentiel de moindre vitesse, l'amplitude du champ a diminué. Quelques particules peuvent alors s'échapper du puits, affaiblissant l'écrantage. La vitesse de phase augmente de nouveau. Nous voyons que le système fluctue autour d'un état moyen. Il est aisé de montrer à partir de là que ces fluctuations sont la cause du mélange de phase observé à plus grande échelle.

Fluctuation-dissipation Il fallait donc comprendre l'origine du seuil de l'instabilité

$$kv > \omega_0$$

un peu subtilement comme le seuil de formation du nuage d'écrantage, qui n'ayant pas le temps de s'établir forme un sillage ; et comprendre l'amortissement très naturellement comme un mélange de phase de ces sillages. Ainsi, en anticipant sur le paragraphe (2.4.3), l'expression mathématique du coefficient d'amortissement de L. D. Landau n'est autre que l'expression dans un cas particulier du théorème de fluctuation-dissipation. On aura appris aussi que les particules supra thermiques sont progressivement freinées, par attraction électrostatique préférentiellement dans les puits de potentiel de plus petites longueurs d'ondes, jusqu'à atteindre un voisinage de la vitesse thermique. Ne demeure alors qu'un sillage global cohérent, i.e. une onde devenue d'amplitude macroscopique, par somme de toutes les composantes de petites amplitudes résonantes avec le faisceau initial. La longueur d'onde est nécessairement la longueur d'écrantage de Debye. Si aucun mécanisme n'alimentait ensuite le faisceau en particules supra thermiques, celui-ci pourrait finir par disparaître. L'amortissement serait dû par exemple à la viscosité collisionnelle, non négligeable à ces vitesses relativement faibles (c.f. e.g. [79]). Une coupure à la vitesse thermique finalement existerait dans la distribution du corps.

Cependant, par de nombreux aspects l'équilibre thermodynamique local nous semblera ne pas être une hypothèse valable.

Chapitre 1

Transitions résonantes

Dans ce chapitre, je rappelle que le calcul cinétique d'après L. D. Landau est issu de la méthode dite de la résolvante, développée en électrodynamique quantique [22]. La situation est assez analogue au couplage d'un atome avec le vide [37]. C'est la non-linéarité dans ce cas qui traduit le couplage. Il doit donc en être ainsi pour le plasma. Nous verrons alors que le problème posé est celui de la détermination de la réponse diélectrique modifiée par les non linéarités. La nature du calcul à condition initiale de L. D. Landau est très souvent mal interprétée : elle est statistique. C'est un calcul de la réponse à une fluctuation (i.e. de stabilité thermodynamique), et non pas un calcul de stabilité aux temps courts (c.f. commentaire en introduction).

1.1 Remarques préliminaires comparant la théorie de A. Vlasov et la théorie fluide, toutes deux de champ moyen

À partir d'équations de Langevin, il est possible de dériver le système de Vlasov [86]. Cette façon de faire met en lumière l'équivalence physique de ce système d'équations et d'un système d'équations fluide. Ceci, car les équations de Langevin contenant toute l'information, le contenu de la description statistique, qu'il s'agisse du système de Kramers (à friction nulle) ou qu'il s'agisse du système composé d'une équation de Fokker-Planck couplée à l'équation moyenne de la dynamique (système fluide), est identique. Nous discutons l'erreur généralement commise à propos de l'hypothèse maxwellienne sur la distribution des vitesses.

Sachant qu'une onde peut avoir une extension finie et représenter une pseudo particule se déplaçant à la vitesse de groupe, remarquons d'abord

que ces systèmes fluides présentent tout à fait les résonances entre ondes et pseudo particules, voir par exemple l'article de J. T. Mendonça et al. [1] [70]. Nous n'avons pu trouver qu'un seul article, dû à N. Mattor et S. E. Parker [69] mesurant en partie l'importance de cette remarque, puisque les auteurs parlent d'ailleurs un peu vite "d'avancée majeure", à savoir que seules les particules résonantes sont explicitement prises en compte dans le calcul cinétique de L. D. Landau, mais ils n'en perçoivent pas selon moi le sens physique.

En outre, comme on a dit, dans un cas comme dans l'autre seul le poids statistique est observable, révoquant une comparaison basée sur le nombre de degrés de liberté, apparemment très différent (c.f. e.g. [83, 21]).

1.1.1 Deux ensembles statistiques

Soit l'équation de Langevin à une dimension pour une particule

$$\partial_t \mathbf{v}_i = \frac{-e}{m}\mathbf{E} - \nu \mathbf{v}_i \ + \nu\sqrt{2D}\ \mathrm{f} \tag{1.1}$$

où E est le champ électrique, ν est une friction, et D est le coefficient de diffusion spatiale. Ces deux dernières grandeurs vérifient la relation d'Einstein $D\nu = \frac{K_B T}{m}$. f atteste la présence de fluctuations aléatoires pour la vitesse de chaque particule, modélisées par un bruit blanc $\langle f(t) f(t+\tau)\rangle = \delta(\tau)$. J'emploie la dérivée partielle temporelle pour signifier que la variable $\mathbf{v}_i$ (prenant ses valeurs sur la trajectoire) ne dépend que du temps.

Considérons l'ensemble des particules, labellées par le couple $(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)$, dans un voisinage de la coordonnée spatiale x, assez grand pour que ce soit un ensemble statistique. On définit la moyenne d'une certaine grandeur A comme

$$\langle A \ / \ x\rangle = \frac{1}{N}\sum_i^N A\ \delta(\ x - \mathbf{x}_i\,(t)). \tag{1.2}$$

Notons

$$u = \langle \mathbf{v}_i \ / \ x\rangle$$

et prenons la moyenne de eq. (1.1)

$$\langle \partial_t \mathbf{v}_i \ / \ x\rangle = \frac{-e}{m}\mathbf{E} - \nu u.$$

1. Bien qu'on puisse relever dans cet article une mauvaise définition de la fonction de Wigner, dont l'équation d'évolution ressemble fort à l'équation de Vlasov. En l'occurence, cette fonction peut être négative et ne représente pas telle quelle une densité de probabilité.

En remarquant que $\partial_{\mathbf{x}_i}\delta(x-\mathbf{x}_i(t)) = -\partial_x\delta(x-\mathbf{x}_i(t))$, on peut développer le membre de gauche

$$(\partial_t \mathbf{v}_i)\,\delta(x-\mathbf{x}_i(t)) = \partial_t\ \left(\mathbf{v}_i\delta(x-\mathbf{x}_i(t))\right) - \mathbf{v}_i^2\partial_x\delta(x-\mathbf{x}_i(t))$$

pour faire apparaître, du deuxième terme, le gradient de pression

$$\partial_x \left\langle (\mathbf{v}_i - u)^2 \right\rangle$$

et l'auto-advection

$$u\partial_x u.$$

On obtient ainsi l'équation de Burgers avec friction (analogue à une dimension de l'équation de Navier-Stokes).

Considérons maintenant les particules dans un voisinage de la vitesse u. On peut tout aussi bien définir la moyenne de la grandeur A comme

$$\langle A\ /\ u\rangle = \frac{1}{N}\sum_i^N A\delta(u-\mathbf{v}_i(t)). \tag{1.3}$$

De cette manière, ni le gradient de pression ni l'auto-advection n'apparaissent dans la moyenne de eq. (1.1), mais il reste à restreindre ceci au voisinage de x pour que la force soit bien définie. La distribution est alors composée d'un nombre dénombrable de faisceau $\sum_j \delta(u_j - \mathbf{v}_i(t))$ et pour chacun d'entre eux

$$\partial_t u_j + u_j\partial_x u_j = \frac{-e}{m}\mathbf{E} - \nu u_j. \tag{1.4}$$

Cette approche est celle de J. M. Dawson [21]. Cherchant les solutions en ondes planes de ce système d'équations, on obtient eq. (1.54), de laquelle on tire le coefficient de Landau.

Ainsi, bien entendu la distinction entre ces deux ensembles statistiques ne doit pas avoir de conséquence concernant l'analyse des seuls effets du champ de force *moyen* $-e\mathbf{E}$. Pourtant, il est admis qu'il existe une différence qui résiderait dans le choix de la fermeture, c'est-à-dire le choix du terme de pression [2]. En fait, sans entrer dans les détails, il est légitime de

2. On peut lire aussi souvent que l'équation de Vlasov est réversible. Premièrement, notons que la distribution au sens des probabilités considère que les particules sont *indiscernables* (symétrie dans l'échange de deux particules), ce qui traduit en fait l'incertitude sur les $6N$ conditions initiales $(\{x_i^0\},\{v_i^0\})$, c'est-à-dire l'irréversibilité microscopique fondamentale, c.f. e.g. [84]. Donc toute équation cinétique contient intrinsèquement cette irréversibilité fondamentale. Deuxièmement, concernant l'équation de Vlasov, l'équation est réversible sous la transformation $\begin{matrix} v & \to & -v \\ t & \to & -t \end{matrix}$ seulement si la distribution $f(x,-v,-t)$ est aussi solution. À la limite asymptotique, cela implique que la solution stationnaire qui est fonction du potentiel $\Phi(x)$ doive être symétrique

penser que l'approche de J. M. Dawson formalise plus rigoureusement (le passage à la limite continue) l'argument dont A. Vlasov s'était servi pour justifier son équation [86], car dans cette équation ce sont les trajectoires caractérisitiques (i.e. sans les fluctuations) qui sont considérées.

Il convient donc de suivre l'évolution d'une particule moyenne qui s'apparente à une particule fluide. Le terme de pression n'a qu'un rôle marginal, servant surtout à définir l'état du plasma à l'équilibre local. Notons que la distribution en vitesse du faisceau peut s'écarter largement de la maxwellienne, à cause des fluctuations du champ moyen.

1.1.2 L'hypothèse maxwellienne

Précisons cette ambiguïté statistique sur un exemple. Avant d'en approfondir l'examen à la partie II, prenons le cas des ondes de dérive électronique, dans la direction perpendiculaire à un champ magnétique fort $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Le potentiel des vitesses et le champ électrique Φ s'identifient

$$\mathbf{u} = \nabla \times (\Phi \mathbf{e}_z) \, .$$

Admettons qu'il soit donné, alors il s'agit d'un problème d'advection d'une particule test dans ce champ de vitesses. Simplifions encore en posant qu'il est uniforme dans la direction $\mathbf{e}_x$. Alors, en notant $u_y \equiv \langle v_y \ / \ x \rangle$,

$$\partial_t u_y = 0$$

et la variable cinétique se réduit à[3] v_y. On peut obtenir ainsi une équation de Vlasov, modèle de dérive électronique en champ magnétique pour $p(x, y, v_y, t)$

$$(\partial_t + v_y \partial_y - \partial_y \Phi \partial_x) \, p = 0. \tag{1.5}$$

$\bar{f}(x, -v) = \bar{f}(x, v)$. Dans une situation initiale d'équilibre, nous pouvons prendre une telle configuration, mais, à tout temps ultérieur au temps initial de la perturbation $t > t_0 = 0$, il est évident que $f(x, -v, -t) = \bar{f}(x, -v)$ n'est pas une solution car le potentiel a évolué $\Phi(x, t) \neq \Phi(x, t_0)$. Il ne suffira pas que la distribution perturbée revienne même ultimement à la distribution initiale, par exemple l'équilibre maxwellien. Lorsqu'il y a séparation d'échelles effective, ce sont les collisions miroscopiques qui peuvent éventuellement maintenir cet équilibre maxwellien. La preuve de l'irréversibilité est bien l'amortissement ou la croissance d'une onde plasmon. L'équation ne fait que décrire un système ouvert, et la variation de l'entropie (des particules $\int f \ln f$) sur le volume total, dS, peut être nulle lorsque l'équilibre local est garanti, mais avec une partie d'échange entropique due aux fluctuations $\tilde{f}$, δS_e, et une partie dissipative, de signe opposé, ou de création entropique enregistrée par $\bar{f}$ (ou par l'amortissement du champ électrique), δS_i, $dS = \delta S_e + \delta S_i = 0$. c.f. dans ce sens [41] et voir e.g. [80].

3. Car dans cette manipulation, on a dans la direction $\mathbf{e}_x$ la vitesse fluide non nulle u_x, issue du potentiel des vitesses.

Rappelons la démarche quasi-linéaire. Le potentiel Φ fluctuant dans l'espace est considéré du premier ordre, la distribution est alors décomposée en une partie quasi uniforme et en une partie fluctuante du premier ordre : $p = \bar{p} + \tilde{p}$. $\mathbf{e}_y$ est une direction de symétrie (e.g. topologie de Tokamak) ce qui implique de prendre $\partial_y \bar{p} = 0$. La linéarisation de eq. (1.5), dans la représentation de Fourier selon la coordonnée y, s'écrit ainsi

$$\begin{cases} (\omega - k_y\ v_y)\, \hat{p}\,(\omega,\ k_y;\ x,\ v_y) &= k_y \hat{\Phi}\,(k_y, \omega)\, \partial_x \bar{p}\,(x,\ v_y) \\ \partial_t \bar{p} &= -\partial_x \langle \tilde{p} v_x \rangle \end{cases}$$

où la définition de la moyenne statistique est laissée libre. Les dérivées spatiale et temporelle de $\bar{p}$ sont entendues comme une limite basse fréquence $(\omega, k) \to 0$. La première équation du système permet d'écrire le flux moyen (la composante de Fourier $k_y = 0$)

$$\langle \tilde{p} v_x \rangle = \sum_{\omega} \sum_{k_y} i k_y\ \hat{p}_{k_y,\omega}\ \hat{\Phi}_{-k_y,-\omega} = i \sum_{\omega} \sum_{k_y} \frac{k_y^2 \left| \hat{\Phi}_{k_y,\omega} \right|^2}{\omega - k_y\ v_y} \partial_x \bar{p}.$$

Il existe une singularité, lorsque $\omega = k_y v_y$. Après intégration sur la variable cinétique, la partie principale est nulle par symétrie de $\bar{p}$ (ou par réalité du flux), et la singularité conduit par un prolongement analytique au coefficient de diffusion quasi linéaire

$$D_{CQL} \partial_x \bar{n} = \int dv_y \left(\pi \sum_{k_y,\omega} k_y^2 \left| \hat{\Phi}_{k_y,\omega} \right|^2 \delta(\omega - k_y\ v_y) \right) \partial_x \bar{p}(x, v_y) \tag{1.6}$$

Le coefficient quasi linéaire tiré de l'équation de continuité (i.e. eq. (1.5 intégrée sur v_y), séparée de même en partie quasi uniforme et fluctuante, serait

$$D_{FQL} = \pi \sum_{k_y,\omega} k_y^2 \left| \hat{\Phi}_{k_y,\omega} \right|^2 \delta(\omega - \omega^*) \tag{1.7}$$

où la fréquence diamagnétique est

$$\omega^* = k_y u_y. \tag{1.8}$$

Il y a donc apparemment une différence.

Le point à placer en exergue est qu'au lieu de postuler que $\bar{p}$ est une maxwellienne et d'en inférer une telle différence (c.f. e.g. l'analyse des fonctions poids dans [41] et ref. incluses), nous pouvons voir là inversement un moyen indirect de préciser la distribution $\bar{p}(x, v_y)$.

L'écart à la maxwellienne est en effet causé par la présence de l'advection

$$-\partial_y \Phi \partial_x \bar{p}.$$

L'*identification* des deux résultats eq. (1.6) et eq. (1.7) se fait ici avec la distribution

$$\bar{p}(x, v_y) = \bar{n}(x)\delta\left(v_y - u_y\right). \tag{1.9}$$

Or de l'équation de Burgers pour l'évolution de u_y, nous voyons bien que la seule façon de définir une unique fréquence diamagnétique est l'annulation de la température, soit

$$\left\langle v_y^2 \ / \ x \right\rangle = u_y^2.$$

Supposons au contraire une collection dispersée de faisceaux, il faut donc considérer la distribution des fréquences $g(\omega^*)$ (la densité spectrale) et on peut écrire dans ce cas

$$D_{FQL} = \int d\omega^* \pi \sum_{k_y,\omega} k_y^2 \left|\hat{\Phi}_{k_y,\omega}\right|^2 \delta(\omega - \omega^*) g(\omega^*). \tag{1.10}$$

Il est immédiat alors de faire le lien entre les deux approches

$$g(\omega^*)d\omega^* = \bar{n}^{-1}\bar{p}(v_y)dv_y. \tag{1.11}$$

Il s'est donc avéré futile de distinguer la vitesse fluide $u_y = \frac{\omega^*}{k_y}$ d'un faisceau de la vitesse d'une particule v_y, compte tenu de la résonance $k_y v_y = \omega = \omega^*$. Nous trouvons là le sens physique qui manquait à la remarque de N. Mattor et S. E. Parker [69].

Faisons remarquer enfin qu'il n'y a aucune raison particulière pour que la distribution g soit maxwellienne.

1.1.3 L'amortissement quasi linéaire

Je donne un calcul très souvent enseigné de l'amortissement quasi linéaire. Il permet de préciser encore la remarque précédente et les hypothèses sous jacentes dans l'équation de Vlasov, dont le domaine de validité semble dès lors limité aux tout premiers instants. Son expression correcte met aussi en évidence un élargissement de la résonance (*broadening*).

À partir de la transformée de Fourier de l'équation de Vlasov pour les fluctuations $\tilde{p}$, première ligne du système eq. (1) linéarisée comme précé-

demment,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \hat{p}_k & = & ikv\ \hat{p}_k + \frac{-e}{m}\hat{\mathbf{E}}_k \partial_v \bar{p} \\ \partial_t \bar{p} & = & \frac{-e}{m}\partial_v \sum{}' \frac{1}{k'}\ \hat{p}_{k'} \hat{\mathbf{E}}_{-k'} \end{array} \right.$$

et de l'équation de Poisson, on obtient la relation de dispersion

$$\epsilon_{k,\omega}\hat{\mathbf{E}}_{k,\omega} = \left(k + \frac{e^2}{m\epsilon_0} \int dv \frac{\partial_v \bar{p}}{\omega - k\ v} \right) \hat{\mathbf{E}}_{k,\omega} = 0 \tag{1.12}$$

La partie principale développée pour $|v| \ll \frac{\omega}{k}$, et pour une distribution maxwellienne, est la relation de dispersion de Bohm et Gross (où α possède la dimension de la constante de Boltzmann, et dont la valeur dépend de l'équilibre considéré et de la dimension)

$$\omega_r^2 = \omega_p^2 + \alpha \frac{T}{m} k^2. \tag{1.13}$$

Supposons l'existence d'une petite partie imaginaire $i\gamma = \omega - \omega_r$,

$$|\gamma| \ll \omega_r$$

c'est-à-dire l'onde plane [4], $\hat{\mathbf{E}}_{k,\omega} = \hat{\mathbf{E}}_k(t_0)\delta\left(\omega - \omega_r - i\gamma\right)$,

$$\hat{\mathbf{E}}_k(t) = \int d\omega\ e^{-i\omega t}\hat{\mathbf{E}}_{k,\omega} = \hat{\mathbf{E}}_k(t_0) e^{-i\omega_r t\ +\gamma\ t}.$$

La petitesse de γ assure que la relation de dispersion eq. (1.36) reste valable [5]. Pour trouver son expression, on peut utiliser le prolongement analytique

$$\lim_{\gamma \to 0} \frac{1}{\omega_r - kv + i\gamma} = \mathcal{P}(\frac{1}{\omega_r - kv}) - i\pi\delta(\omega_r - kv) \tag{1.14}$$

et de eq. (1.12) on tire

$$\frac{k}{\omega_r} 2i\gamma = i\frac{e^2}{m\epsilon_0}\pi \int dv\ \partial_v \bar{p} \delta(\omega_r - kv). \tag{1.15}$$

Il n'en demeure pas moins que ce résultat n'est qu'approximatif, car $\gamma \neq 0$. Cette remarque est souvent occultée. Il y a en réalité une Lorentzienne centrée en ω_r et de largeur $\Delta\omega \sim \gamma^{-1}$ à la place du dirac dans le prolongement analytique eq. (1.14), c'est-à-dire en anticipant le vocabulaire qu'on verra par la suite, un *broadening*.

Le prolongement analytique est en fait un calcul quasi linéaire masqué (c'est-à-dire utilisant la deuxième ligne de eq. (1)). Si l'on suppose le

4. Où le dirac de la variable complexe signifie $\delta\left(\Re(\omega) - \omega_r\right)\delta\left(\Im(\omega) - \gamma\right)$, et l'intégration est double $\int d\Re(\omega) \int d\Im(\omega)$.

5. On peut vérifier que $k + \frac{e^2}{m\epsilon_0}\int dv\ \partial_v \bar{p} \frac{1}{\omega}(1 + \frac{kv}{\omega}) \approx \frac{k}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_p^2) \approx \frac{k}{\omega_p} 2i\gamma \ll 1$.

champ oscillant à la fréquence de l'onde ω_r, et la constante d'intégration nulle, on obtient

$$\partial_t \bar{p} = \frac{e^2}{m^2} \partial_v \sum_{k'} \frac{1}{k'} \, e^{i(k'v-\omega_r)t} \int d\tau \; \partial_v \bar{p}(t-\tau) e^{-i(k'v-\omega_r)(t-\tau)} \hat{\mathbf{E}}_{-k'}(t) \hat{\mathbf{E}}_{k'}(t-\tau).$$

En utilisant le fait que la somme de cosinus est non nulle seulement lorsque la phase est proche de zéro, on a

$$\partial_t \bar{p} \approx \partial_v \left(\frac{e^2}{m^2} \sum_k \left| \hat{\mathbf{E}}_k \right|^2 \delta(\omega_r - kv) \partial_v \bar{p} \right). \tag{1.16}$$

Nous reconnaissons la forme générale d'une équation de Fokker-Planck où le coefficient de diffusion des vitesses est

$$D(v) = \frac{e^2}{m^2} \sum_k \left| \hat{\mathbf{E}}_k \right|^2 \delta(\omega_r - kv). \tag{1.17}$$

Cette expression suppose que les électrons ont des trajectoires rectilignes $v = \frac{\omega_r}{k}$, dont l'origine est la linéarisation de l'équation de Vlasov, première ligne de eq. (1), couplée à l'équation de Poisson dans l'approximation de la réponse linéaire

$$\epsilon(k, kv) \approx \epsilon_0 \tag{1.18}$$

or cette approximation n'est valable que dans la limite

$$kv \ll \omega_r.$$

Pour mieux comprendre l'approximation sous-jacente, l'équation eq. (1.16) est un cas particulier de l'équation cinétique plus générale de Balescu et Lénard (c.f. [79, 54, 7]), où $D(v) = \frac{e^2}{m^2} \sum_k \left| \hat{\mathbf{E}}_{k,kv} \right|^2$ et le champ électrique effectif (qui résulte du courant des particules indicées ' , c.f. [54]) est écranté $\left| \hat{\mathbf{E}}_{k,\omega} \right|^2 = k^2 \frac{\left| V_{k,\omega} \right|^2}{\epsilon(k,\omega)^2} = \int dv' \frac{\bar{n} e^2}{\epsilon(k,\omega)^2} f'(v')$,

$$\partial_t f(v) = \frac{e^2}{m^2} \int dv' \sum_k \frac{\left| V_{k,\omega} \right|^2}{\epsilon(k,\omega)^2} k \cdot \partial_v \delta\left(k \cdot (v - v') \right) k \cdot f'(v') \partial_v f(v). \tag{1.19}$$

Pour identifier les deux équations, dans l'approximation eq. (1.18), il faut écrire naturellement

$$f(v) = \bar{p}(v)$$

mais conformément au fait que les électrons du corps du plasma soient écrantés et que ceux d'un faisceau assez rapide ne le soient pas, l'interaction électrostatique se produit entre les particules chargées du corps et

les électrons d'un faisceau

$$f'(v') = \delta(kv' - \omega_r).$$

Nous voyons ainsi, que la distribution fluctuante $\tilde{p}$ est associée à la somme sur les différents modes k présents de ces faisceaux d'électrons résonants.

Comme il peut paraître naturel, l'approximation de la réponse linéaire

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{-e}{\epsilon_0}\tilde{p}$$

néglige implicitement la polarisation $\mathbf{P}$, comme on voit d'après l'équation de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}\right)$$

où $\rho = -e\tilde{p}$ est l'excès local total de charge. Pourtant, chaque faisceau d'électrons est un excès de charges localement, qui polarise le milieu dans son sillage (i.e. que la polarisation déplace les charges du corps du plasma). De plus, chacun d'eux ne demeure pas froid très longtemps. Ainsi, l'identification des fluctuations de charge de polarisation à la charge des faisceaux n'est valable qu'à la limite de fluctuations nulles et de faisceaux vides $n_b = 0$. Sinon, comme on le verra au paragraphe (2.3.2), cette approximation n'est valable qu'aux temps plus petits que le temps de diffusion $\tau_r \approx \omega_{tr}^{-1}$. Au delà le terme collisionnel de Balescu et Lénard doit être pris en compte, dont un effet au moins est le *broadening.* Plus que l'approximation linéaire, c'est donc le système de Vlasov-Poisson qui n'est valable que dans cette approximation, aux temps

$$t \ll \tau_r.$$

On peut retrouver l'expression de γ_k par conservation. Puisqu'il n'y a pas de radiation, on peut supposer que la variation d'énergie cinétique volumique du corps de la distribution égale la variation d'énergie volumique du champ

$$\partial_t \int dv\ mv^2\bar{p} = -2\int dv\ q\mathbf{E}v\bar{p} = 2\partial_t W = -\partial_t\epsilon_0\left\langle E^2\right\rangle \tag{1.20}$$

ainsi [6]

$$\partial_t\left\langle E^2\right\rangle = +\frac{q^2}{\epsilon_0 m}\sum_k |E_k|^2\ \frac{\omega}{k^2}\ \partial_v\overline{f}\big|_{\frac{\omega}{k}}\ .$$

6. Le tenseur diéléctrique est ici réduit à sa réponse linéaire ϵ_0 comme on a dit, ce qui est une hypothèse dite de turbulence faible, et implique en particulier que $\gamma \ll \omega_r$.

On décrit de la sorte un amortissement de l'énergie du champ vers l'énergie incohérente des particules du corps, qui diffusent avec le coefficient eq. (1.17). L'argument désormais classique donné par D. Bohm et E.P. Gross est pourtant différent [12], puisqu'il énonce que ce devait être les particules *résonantes* qui absorbèrent l'énergie du champ. Cette confusion me paraît relever de la discussion précédente concernant la présence de faisceaux froids dans l'approximation linéaire. En réalité comme on le voit plus loin, c'est la corrélation $\langle E(0)E(t)\rangle$ au lieu de l'énergie $\langle E^2\rangle$ qu'il faudrait mettre dans cette expression, traduisant un retard dans la réponse, soit l'intégrale $-\int dv(t)q\mathbf{E}(0)v(t)\bar{p}(v;t)$, et une interprétation aux temps longs (c.f. paragraphe (1.4.2.2)).

Terminons peut être par analyser une autre dérivation de l'équation de Vlasov. La moyenne de toute observable explicitement indépendante du temps, comme par exemple l'impulsion, est définie à partir d'une distribution de probabilité

$$\langle A\rangle(t) = \int dvdx\ A(v,x)p(x,v;\ t).$$

Si on utilise la connaissance des conditions initiales, supposées distribuées selon la distribution d'équilibre $p_0(x^0, v^0\ )$, on peut changer de point de vue et prendre la moyenne sur celles-là

$$\langle A\rangle(t) = \int dv^0dx^0\ A(v(t),x(t))p_0(x^0,v^0).$$

Ce faisant, en dérivant temporellement ces deux définitions, et en utilisant les équations de la dynamique hamiltonienne (de champ moyen) pour la seconde, on obtient par identification l'équation de Vlasov. Serait-ce une remise en cause de l'exposé de ce chapitre ? Au contraire, cette méthode utilise implicitement l'intégrabilité de la dynamique pour qu'à tout temps soit seulement nécessaire la connaissance des conditions initiales. Or, pour ce qui concerne le plasma, la charge et le champ sont liés par l'équation de Poisson, et le temps typique d'intégrabilité est τ_r. On retrouve la borne temporelle de légitimité de l'équation de Vlasov que nous avions trouvé différemment.

1.2 Formation de paquets d'ondes

Ces premières remarques conduisent naturellement à revoir à quel degré de description une théorie de champ moyen peut prétendre. Je rappelle dans ce paragraphe que l'information de champ moyen est basi-

quement contenue dans la relation de dispersion, car celle-ci traduit le travail moyen des fluctuations.

1.2.1 Distribution de probabilité

Le malentendu, qui peut conduire à prendre l'équation de Vlasov pour une équation cinétique, se glisse en présumant de l'analycité d'un certain type de distributions. J'utilise, afin de construire une distribution de probabilité, une hypothèse ergodique sur les trajectoires vraies qui ont diffusé.

Commençons par nous interroger sur le sens de la distribution de Y. L. Klimontovich [61], définie comme

$$f(x,v,t) = \sum_i \delta(x - x_i(t))\delta(v - v_i(t)) \tag{1.21}$$

Remarquons d'abord qu'elle est bien sûr nulle presque partout[7] : sa moyenne temporelle est nulle

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt\ f(x,v,t) = 0.$$

La moyenne ergodique, équivalente à la moyenne sur l'ensemble des trajectoires $\{(x_i(t), v_i(t)) \in \mathcal{O}_{dxdv}\,(x,v)\}$ visitant le voisinage du point $(x, v(x,t))$, $\mathcal{O}_{dxdv}\,(x,v)$ de volume $dxdv$, est donc nulle aussi. Cette subtilité devient une erreur cette fois, dans la dérivation proposée par Y. L. Klimontovich pour justifier l'équation de Vlasov [61]. En effet, tacitement utilisée dans sa dérivation, et communément adoptée sans assez de soin, comme une égalité, il n'est pourtant pas possible d'écrire l'égalité entre les deux membres suivants

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial_{x_i}} \delta(x - x_i(t))\delta(v - v_i(t))\ v_i(t) \neq -v\ \frac{\partial}{\partial_x} \sum_i \delta(x - x_i(t))\delta(v - v_i(t)). \tag{1.22}$$

Par définition de toute distribution, et en particulier de la distribution de Dirac, il est seulement vrai, après intégration sur tout l'espace de trajectoires *virtuelles*, que[8]

$$\int\int \prod_i dv_i dx_i \sum_i \frac{\partial}{\partial_{x_i}} \delta(x - x_i(t))\delta(v - v_i(t))\ v_i(t) A = -v \frac{\partial}{\partial_x} A.$$

7. Le repère est le centre de la particule par exemple, qui peut alors être d'extension finie, sans incohérence avec l'utilisation du dirac.

8. $\frac{\partial}{\partial x}\delta(x - x_i(t)) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(x - x_i(t))$

Ainsi par cette voie, la distribution de Y.L. klimontovich ne peut avoir le sens d'une probabilité, et assez naturellement on ne peut en rester qu'à la description formelle de la collection d'états microscopiques (comme pour l'équation de Liouville). La dépendance explicite par rapport au temps d'une trajectoire donne en effet, après changement de variables, pour $\delta t \ll 1$, $'t \to t'\,'$, $'x_i(t+\delta t) \to x_i(t) + v_i(t)\delta t\,'$ et $'v_i(t+\delta t) \to v_i(t) + \mathbf{a}_i(t)\delta t\,'$:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \partial_{t'} & = & 0 \\ \partial_t & = \partial_{t'} + & v_i(t)\partial_{x_i} + \mathbf{a}_i(t)\partial_{v_i} \end{array} \right.$$

où la première égalité découle de la conservation de la particule le long de sa trajectoire. Ainsi l'équation de Vlasov pour cette distribution se résume seulement à condenser l'écriture des états microscopiques, en champs indifférenciés (ou préscrits d'avance) $v(x,t)$ et $\frac{\mathbf{F}(x,t)}{m} = \frac{d}{dt}v(x,t)$. Elle donne en fait une forme *pseudo*-microscopique à l'équation des champs moyens, où l'on prend garde cette fois d'intégrer sur l'espace réel pour ne considérer que les trajectoires réelles, $Nv(x,t) = \int\int_{\mathcal{O}_{dxdv}} dxdv \sum_i^N (v_i(t)\delta(x - x_i(t))\delta(v - v_i(t)))$ et $N\frac{\mathbf{F}(x,t)}{m} = \int\int_{\mathcal{O}_{dxdv}} dx\ dv \sum_i^N ((\partial_t v_i(t))\,\delta(x - x_i(t))\delta(v - v_i(t)))$, soit :

$$\int\int_{\mathcal{O}_{dxdv}} dxdv \sum_i \left(-v_i(t)\frac{\partial}{\partial x} + v(x,t)\frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{a}_i(t)\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\mathbf{F}(x,t)}{m}\frac{\partial}{\partial v} \right) \delta(x - x_i(t))\delta(v - v_i(t)) = 0.$$

Pour établir une probabilité de présence en x, il faut pouvoir mesurer la fréquentation d'un voisinage de x de petit volume. Par exemple, pour une particule dans un volume fini (conditions périodiques, de rebonds etc), la limite

$$p(x)dx = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\, t_\tau\left(\mathcal{O}_{dx}(x)\right) dx$$

est bien définie, positive, et $p(x) \leq 1$; $t_\tau\left(\mathcal{O}_{dx}(x)\right)$ est le temps que la trajectoire a passé à l'intérieur du voisinage de x d'extension dx pendant le temps[9] τ. Pour ce faire, la distribution doit se constituer à partir des diracs suivants

$$\delta(x_i - x_i(t)) = 1 \tag{1.23}$$

qui suivent effectivement chaque particule, contrairement aux diracs pré-

9. Pour préciser l'exemple, prenons à une dimension une trajectoire rectiligne de vitesse v_0, d'une particule située en $x - \frac{1}{2}dx$, et des conditions aux limites périodiques. Si $\tau < \frac{dx}{v_0}$, alors $\frac{1}{\tau}\, t_\tau\left(\mathcal{O}_{dx}(x)\right) = 1$; si $\tau > \frac{dx}{v_0}$, alors on peut définir

$$t_\tau\left(\mathcal{O}_{dx}(x)\right) = \sum_{t_i}^{N_\tau} \frac{dx}{v_0} = N_\tau \frac{dx}{v_0}$$

où t_i indiquent les temps de passage dans le petit volume centré en x, $\mathcal{O}_{dx}(x)$, et N_τ le nombre de ces passages. N_τ est nécéssairement proportionnel à τ compte tenu de la linéarité de la trajectoire et des conditions périodiques.

cédents eq. (1.21) qui ne faisaient que traduire l'attente désespérée de leur passage. Plus généralement en volume infini, mais dans la limite fluide $\frac{N}{V} = cte$, la probabilité peut se construire avec la 'fonction porte' $\mathcal{P}_i = 1 - \theta(|x_i - x| - dx)$ (θ est la fonction de Heaviside),

$$\overline{\delta(x_i - x_i(t))}^{\tau} \equiv \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} dt\ \frac{1}{N}\sum_i^N \delta(x_i - x_i(t)) \times \mathcal{P}_i\left(x_i(t) \in \mathcal{O}_{dx}\left(x\right)\right) = \frac{1}{\tau}\ t_\tau\left(\mathcal{O}_{dx}\left(x\right)\right) \tag{1.24}$$

Il s'agit alors d'appliquer cette opération à l'équation de Liouville pour obtenir une équation au sens des probabilités. C'est une démarche similaire que suit T. Koga pour rendre consistante la hiérarchie YBBGK [84]. Soit donc N particules, la distribution de Liouville est définie par

$$D^{(N)}\left(\{x_i, v_i\}\,; t\right) = \prod_i^N \delta(x_i - x_i(t))\delta(v_i - v_i(t)) \tag{1.25}$$

L'équation de Liouville

$$\frac{d}{dt}D^{(N)} = 0$$

ne permet pas de connaitre l'évolution de l'état du système, mais relate seulement les trajectoires de chacune des particules, c'est-à-dire son état microscopique. Ce qui va permettre de symétriser les distributions par rapport à l'échange de deux particules, donc leur conférer le sens de probabilités, est communément appelé l'hypothèse du "chaos moléculaire", ou la "*stosszahlansatz*" de L. Boltzmann. Elle revient à appliquer l'opération moyenne introduite plus haut.

Admettons d'abord, une séparation d'échelles entre les temps caractéristiques des fluctuations microscopiques dues aux forces d'interactions entre particules et les temps caractéristiques de relaxation, $\tau_1 \gg \tau_2$. Pour les gaz et les liquides classiques, τ_2 est typiquement le temps de collision, associé à l'échelle microscopique de libre parcours moyen. Les inhomogénéités du fluide sont à une échelle encore plus grande (hydrodynamique) $\tau_0 \gg \tau_1$. Pour un plasma tout au contraire, le libre parcours moyen donne la plus grande échelle du système, lorsqu'il y a écrantage des interactions. Le temps τ_2 est alors la période des oscillations plasmas, associées à une inhomogénéité initiale de charge, dont la taille est typiquement de l'ordre de la longueur de Debye.

Pour T. Koga, l'opération importante est la moyenne (*coarse-graining*) sur un temps intermédiaire $\tau_1 \gg \tau_{12} \gg \tau_2$. On doit considérer la distribution

$$\overline{F^{(1)}(x_i, v_i; t \mid \{(x_j(t), v_j(t)\}_{j\neq i}\ )}^{\tau_{12}} \equiv \overline{\delta(x_i - x_i(t))\delta(v_i - v_i(t))}^{\tau_{12}}.$$

Le temps t est donc considéré normalisé à l'échelle τ_1, i.e. τ_{12} représente à cette échelle un infinitésimal. La distribution $F^{(1)}$ est obtenue par intégration sur tous les degrés de liberté j différents de i. La séparabilité d'échelles est une autre façon de supposer l'ergodicité microscopique. Bénéficiant de cette remarque, on la récrit comme

$$\begin{aligned}\overline{F^{(1)}(x_i,v_i;t \mid \{(x_j(t),v_j(t)\}_{i\neq j}\ )}^{\tau_{12}} &= \overline{\delta(x_i-x_i(t))\delta(v_i-v_i(t))}^{\tau_{12}} \\ &\approx \langle\delta(x_i-x_i(t))\delta(v_i-v_i(t))\rangle_i \\ &= \langle\delta\left(x_i^0-x_i(0)\right)\delta\left(x_i-x_i^0-\delta t v_i(t)\right)\rangle_i\end{aligned} \tag{1.26}$$

où $\delta t \sim \tau_{12}$, c'est-à-dire dans la représentation de Fourier

$$\overline{F^{(1)}(x_i,v_i;t \mid \{(x_j(t),v_j(t)\}_{i\neq j}\ )}^{\tau_{12}} = \int dk \left\langle e^{ik\left(\left(x_i-x_i^0\right)-v_i(t)\delta t\right)}\delta\left(x_i^0-x_i(0)\right)\right\rangle_i .$$

La moyenne est effectuée sur l'ensemble des particules appartenant à la région explorée, avec 'l'opération porte' pendant τ_{12}, eq. (1.24). Que l'exploration du voisinage doive être ergodique suppose que les conditions initiales soient distribuées aléatoirement. L'hypothèse ne permet donc d'étudier de plasma qu'après quelques temps, plusieurs τ_1. On est ainsi passé de la représentation ponctuelle dans l'espace des phases

$$(x_i, v_i)$$

à la représentation équivalente des trajectoires (x_i^0 est la condition initiale)

$$\left(x_i^0,\ \Delta x_i\right)$$

où les trajectoires *vraies* sont très peu perturbées $\Delta x_i \approx v_i\ \delta t$, car, comme on le verra, en présence du champ électrique turbulent, le temps de relaxation τ_1 est de l'ordre d'une période de rebond dans un puits de potentiel. La trajectoire n'est altérée qu'à ces échelles de temps.

La formulation traditionnelle qu'on peut aussi trouver chez T. Koga consiste à isoler des trajectoires fictives de (*pseudo*-)particules $(x, v(x,t))$ sur les temps $t > \tau_{12}$, nommées caractéristiques et possédant la particularité d'être non perturbées. Celles-ci sortent de l'opération de moyenne. C'est à mon sens une opération non contrôlée, annulant la rigueur nécessaire (mais alors fastidieuse) à la définition d'une probabilité, et rappelant la définition hative des champs $v(x,t)$ et $F(x,t)$. Elle amène à confondre les opérateurs différentiels de l'espace des phases (x, v) avec les opérateurs différentiels le long des trajectoires (x_i, v_i).

Les opérateurs différentiels doivent avoir un sens moyen, car, par exemple

pour s'en tenir à la moyenne temporelle, la 'fonction porte' permet de comptabiliser plusieurs particules aux trajectoires très différentes, à différents instants et différentes positions à l'intérieur du même voisinage (x, v). De l'équation de Liouville il est généralement admis d'écrire, après *coarse-graining*, la dérivée lagrangienne comme

$$\overline{(\partial_t + v_i\partial_{x_i})\, F^{(1)}}^{\tau_{12}} = (\partial_t + v_i\partial_{x_i})\, \overline{F^{(1)}}^{\tau_{12}} = \overline{J_i}^{\tau_{12}}$$

où $\overline{J_i}^{\tau_{12}}$ est le terme d'interactions. Cela revient à ne pas considérer les trajectoires réelles des particules, mais leurs caractéristiques. En fait, la vitesse v_i devrait être comprise plus justement comme la vitesse du groupe de particules autour de la position x_i, à dx prés. Le sens moyen des opérateurs différentiels se traduit par la relation de dispersion, comme je montre à présent.

1.2.2 Vitesse de groupe et probabilité de transition

Dans un gaz classique, l'effet des interactions sur le temps $\tau_{12} \gg \tau_2$ est de distribuer les vitesses vraies de façon aléatoire. Ce point est plus délicat a priori pour un plasma, comme on l'a dit, car les particules oscillant (de façon cohérente ou non) à la fréquence plasma (voir paragraphe suivant), la distribution serait périodiquement invariante depuis les conditions initiales. On conservera néanmoins les notations de séparation d'échelles, par commodité.

Supposons donc un groupe de particules centrées en x, à dx prés. La condition initiale est alors contrainte. La distribution eq. (1.26) est dans ce cas

$$\begin{aligned}
\overline{F^{(1)}(x_i, v_i; t)}^{\tau_{12}} &= \langle \delta(x_i - x_i(t))\delta(v_i - v_i(t))\rangle_i \\
&= \langle \delta\left(x_i^0 - (x_i - v_i(t)\ t)\right) \delta\left((x_i - x_i^0) - v_i(t)\ t\right)\rangle_i \\
&= \int dk \left\langle e^{ik\left((x_i - x_i^0) - v_i(t)\ t\right)} \delta\left(x_i^0 - (x_i - v_i(t)\ t)\right)\right\rangle_i
\end{aligned}$$

On doit faire ici attention au fait que

$$\int dk \left\langle e^{ik\left((x_i - x_i^0) - v_i(t)\ t\right)} \delta\left(x_i^0 - (x_i - v_i(t)\ t)\right)\right\rangle_i \neq \int dk \left\langle e^{ik\left((x_i - x_i^0) - v_i(t)\ t\right)}\right\rangle_i$$

c'est-à-dire $\delta\left((y - x_1) - x_0\right) \delta\left(y - (x_1 + x_0)\right) \neq \delta\left(y - (x_1 + x_0)\right)$. Cela est dû à l'indépendance des variables $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ et x_i^0. Celle-ci permet de prendre le produit des moyennes

$$\left\langle \delta\left(x_i^0 - (x_i - v_i(t)\ t)\right) \delta\left(\left(x_i - x_i^0\right) - v_i(t)\ t\right)\right\rangle_i = \left\langle \delta\left(x_i^0 - (x_i - v_i(t)\ t)\right)\right\rangle_i \left\langle \delta\left(\left(x_i - x_i^0\right) - v_i(t)\ t\right)\right\rangle_i .$$

Considérons maintenant le premier terme du produit

$$\left\langle \delta\left(\left(x_i - x_i^0\right) - v_i(t)\ t\right)\right\rangle_i = \int dk \left\langle e^{ik\left(\left(x_i - x_i^0\right) - v_i(t)\ t\right)}\right\rangle_i .$$

Puisque Δx_i est la variable indépendante considérée, prenant ses valeurs selon la distribution de $v_i(t)$, on doit récrire cela ainsi

$$\left\langle \delta\left(\Delta x_i - v_i(t)\ t\right)\right\rangle_i = \int dk e^{ik\Delta x_i} \left\langle e^{-ik\ v_i(t)\ t}\right\rangle_i . \tag{1.27}$$

On reconnait la fonction génératrice

$$\Theta(k) = \left\langle e^{-ik\ v_i(t)\ t}\right\rangle_i .$$

Autrement dit, c'est la probabilité d'avoir transité de Δx_i, et d'être arrivé en x_i en un temps t

$$p\left(\Delta x_i = t\ v_i\ /\ x_i;\ t\right).$$

Comme la vitesse vraie est distribuée de manière aléatoire, d'après l'hypothèse ergodique, nous constatons qu'il s'agit de la probabilité de transition, d'un pas Δx_i, en un temps t, et depuis la position x_i,

$$p(\Delta x_i\ /\ x_i;\ t) \tag{1.28}$$

quelque soit Δx_i.

Quant au second terme, il est constitué, dans la représentation continue symétrisée, de la somme des probabilités d'avoir été au départ à la position $x_i^0 = (x_i - v_i(t)\ t) = x_i - \Delta x_i(t)$. On obtient donc, en laissant tomber les indices,

$$\overline{F^{(1)}(x,v;t)}^{\tau_{12}} = \int d\Delta x \int dk e^{ik\Delta x} p(x - \Delta x, 0) \left\langle e^{-ik\ v\ t}\ \right\rangle . \tag{1.29}$$

Le fait de combiner les deux termes dans l'intégrale sur $\Delta x(t)$ n'est pas contraire à l'indépendance de x_i^0 et Δx_i. Ces variables sont considérées comme telles, puis leur sont assignées les valeurs particulières $x_i^0 = x - \Delta x(t)$ et $\Delta x_i = \Delta x(t)$.

Finalement, cette expression de $\overline{F^{(1)}(x,v;t)}^{\tau_{12}}$ fait apparaître l'identité de Chapman Kolmogorov :

$$\overline{F^{(1)}(x,v;t)}^{\tau_{12}} = p(x,t). \tag{1.30}$$

On a obtenu, tout naturellement la probabilité de présence. Cela n'est pas étonnant puisqu'en effet l'information particulaire sur la vitesse vraie a

été perdue par le *coarse-graining* [10].

La fonction génératrice peut se récrire autrement par les cumulants

$$\left\langle e^{-ik\ v\ t} \right\rangle = e^{-\frac{1}{2}k^2t^2\left\langle v^2\right\rangle}$$

lorsque la moyenne $\langle v \rangle = 0$ et lorsque la distribution n'est pas trop différente d'une gaussienne, ce qu'on peut aisément supposer dans l'hypothèse de l'équilibre local. En remarque, on a ici

$$\left\langle \Delta x^2 \right\rangle = \left\langle v^2 \right\rangle t^2$$

et non pas $\langle \Delta x^2 \rangle = \langle v^2 \rangle \tau_2 t = 2Dt$ car les particules sont en libre parcours ($t < \tau_2$). Définissant maintenant une pulsation pour le mode k par [11]

$$\omega^2 = k^2 \left\langle v^2 \right\rangle \tag{1.31}$$

on arrive à la représentation équivalente d'un mode [12]

$$e^{-i\omega(k)\ t}$$

les dérivées secondes temporelles de $e^{-i\omega(k)\ t}$ et de $e^{-\frac{1}{2}\omega^2k^2t^2}$ étant identiques à l'ordre $\mathcal{O}(t^2)$.

Pour conclure, il faut remarquer que nous avons jusqu'à présent passé sous silence l'interversion de l'intégrale sur k et la moyenne d'ensemble. Or pour être exact, il eût mieux valu écrire

$$\left\langle \delta\left(\Delta x_i - v_i(t)\ t\right)\right\rangle_i = \left\langle \int dk_i e^{ik_i\Delta x_i} e_i^{-ik\ _i v_i(t)\ t} \right\rangle_i$$

k_i étant un mode de déplacement, i.e. un mode normal, de la particule i. Ainsi, l'interversion nécessite de considérer le poids réel du mode k pendant l'intervalle de temps t : $p(k)$, la densité spectrale qui a les propriétés requises d'une mesure de probabilité. Finalement la description équivalente en paquet d'ondes est

$$\overline{F^{(1)}(x,v;\ t)}^{\ \tau_{12}} = p(x;t) = \int d\Delta x \int dk\ p(x-\Delta x,0)p(k)e^{ik\Delta x - i\omega(k)\ t}. \tag{1.32}$$

10. Si on avait assigné une certaine valeur $\Delta x = \Delta x_0$, alors on aurait obtenu $p(x - \Delta x_0, 0)p(\Delta x_0 \ / \ x;\ t)$.

11. Cette variance est finie $\langle v^2 \rangle < \infty$ dans l'hypothèse d'aquilibre local, i.e. dès lors qu'on prend en compte la diffusion dans le champ électrique fluctuant, de coefficient D_u, eq. (2.26).

12. Contrairement à ce qui est souvent affirmé, e.g. [12], il n'y a pas besoin de collisions pour produire des ondes propagatives sonores, comme on le voit. Les forces de pression dans un fluide ne sont pas nécessairement collisionnelles, mais issues des variations de densité et d'énergie cinétique.

Remarquons aussi que nous avons supposé que les interactions étaient fortes en annulant $\langle v_i \rangle = 0$. Le développement reste valide toutefois pour une moyenne non nulle, il faut prendre alors en compte le décalage Doppler dans la relation de dispersion, ou se placer localement dans le référentiel barycentrique. La distribution de probabilité peut finalement inclure la vitesse moyenne locale $v(x,t) = \langle v_i \rangle_i$: $p(x, v;\ t)$. Le choix du référentiel du laboratoire est motivé par l'indépendance du champ électrostatique par rapport à la vitesse. Cependant, si le champ électrique se présente sous forme ondulatoire, le bon référentiel serait celui de la phase, pour les charges qui pourraient être piégées dans le champ. Le plasma se compose alors de deux 'espèces', éventuellemet en interaction. Celle-ci pourrait modifier la relation de dispersion, qu'on aurait pu trouver pour chacune des espèces indépendemment. C'est l'objet de cette partie de comprendre cette interaction et sa prise en compte dans la relation de dispersion.

Pour résumer cette section de manière elliptique, il n'est pas possible de raisonner avec la distribution pseudo microscopique $f(x, v\ ;\ t) = \sum_i \delta(x - x_i(t))\delta(v - v_i(t))$, invariante le long des caractéristiques. Pour l'écrire autrement, la distribution à une particule correcte est, en définissant proprement la moyenne,

$$f(x, v;\ t) = N \left\langle \delta(x_i - x_i(t))\delta(v_i - v_i(t)) \right\rangle_{\mathcal{O}(x,v)} = N p(x, v;\ t)$$

où l'on suit chaque particule dans un certain voisinage de la coordonnée.

1.3 Relation de dispersion

1.3.1 Moyenne des interactions

Si la même opération de moyenne est appliquée au terme collisionnel, alors l'hypothèse de champ moyen résulte naturellement dans la relation de dispersion.

Le terme 'collisionnel' s'écrit à l'étape du *coarse-graining*

$$\overline{J_i}^{\tau_{12}} = \frac{1}{\tau_{12}} \int_0^{\tau_{12}} dt\ \frac{1}{N} \sum_{i \neq j}^{N} \int dx_j dv_j\ \frac{\mathbf{F}_{ij}}{m_i} \partial_{v_i} F^{(2)}(x_i, v_i, x_j, v_j; t) \times \mathcal{P}_i\left(x_i(t), v_i(t) \in \mathcal{O}_{dx,dv}\left(x, v\right)\right)$$

où $\mathbf{F}_{ij}$ est la force d'interaction entre particules. Les interactions vont

modifier la relation de dispersion précédente de la façon suivante

$$\begin{aligned}\overline{J_i}^{\tau_{12}} &= \left\langle \sum_j \int dx_j dv_j \, \frac{\mathbf{F}_{ij}}{m_i} \partial_{v_i} \left(\delta(x_i - x_i(t))\delta(v_i - v_i(t))\delta(x_j - x_j(t))\delta(v_j - v_j(t))\right)\right\rangle_i \\ &= \left\langle \sum_j \frac{1}{m} \mathbf{F}\left(|x_i - x_j(t)|\right) \partial_{v_i} \left(\delta(x_i - x_i(t))\delta(v_i - v_i(t))\right)\right\rangle_i .\end{aligned}$$

En fait, comme dans le développement de Vlasov [86], le passage de la première à la seconde ligne cache une hypothèse forte. La distribution que nous considérons n'est pas symétrique par rapport à l'échange des particules i et j ; il faudrait pour cela lui ajouter le 'terme d'échange', par exemple $G^{(2)}(x_i, v_i, x_j, v_j; t) = \langle \delta(x_j - x_i(t))\delta(v_j - v_i(t))\delta(x_i - x_j(t))\delta(v_i - v_j(t))\rangle_{i,j}$, qui ainsi moyenné devrait représenter les corrélations entre ces deux particules. L'omettre signifie que nous faisons l'hypothèse que les corrélations sont négligeables, au moins au delà d'une échelle caractéristique déterminée par τ_2. C'est l'hypothèse hydrodynamique (c.f. conclusion).

Cette hypothèse consiste à donner un statut de particule *test* à l'une d'entre elles, et à suivre sa trajectoire caractéristique, dans le bain électrostatique de toutes les autres. Cette particule test ne peut donc pas participer aux phénomènes collectifs, ce qui s'avère contradictoire pour une description valable du plasma comme collection de particules test.

La force dérive d'un potentiel électrostatique

$$\sum_j \mathbf{F}\left(|x_i - x_j(t)|\right) = -\partial_{x_i} U\left(x_i, t\right).$$

Le changement de variable que nous effectuons modifie les dérivées partielles de la sorte

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_{x_i} & \rightarrow & \partial_{x_i^0} \\ \partial_{v_i} & \rightarrow & t\left(\partial_{\Delta x_i} - \partial_{x_i^0}\right) \end{array} \right. .$$

On a donc

$$\begin{aligned}\partial_{x_i} U\left(x_i\right) &= \partial_{x_i} U\left(x_i^0 + \Delta x_i\right) \\ &= \partial_{x_i^0} U\left(x_i^0 + \Delta x_i\right) \\ &= \partial_{\Delta x_i} U\left(x_i^0 + \Delta x_i\right)\end{aligned}$$

la dernière égalité venant par indépendance des variables. De même

$$\partial_{x_i^0} p\left(x_i - \Delta x_i\right) = -\partial_{\Delta x_i} p\left(x_i - \Delta x_i\right).$$

Nous pouvons donc intégrer par partie (l'intégrale sur Δx) l'expression, à x_i^0 fixée,

$$\begin{aligned}&\left\langle -\delta\left(x_i^0 - (x_i - v_i t)\right) \partial_{\Delta x_i} U\left(x_i^0 + \Delta x_i\right) 2t \partial_{\Delta x_i} \delta\left(\Delta x_i - v_i t\right)\right\rangle_i \\ &= 2t \left\langle \delta\left(x_i^0 - (x_i - v_i t)\right) U\left(x_i^0 + \Delta x_i\right) \, \partial^2_{\Delta x_i^2} \delta\left(\Delta x_i - v_i t\right)\right\rangle_i .\end{aligned}$$

Il y a donc convolution entre le potentiel $U\left(x_i^0+\Delta x_i\right)$ et la dérivée seconde de $\delta\left(\Delta x_i - v_i t\right)$. En représentation de Fourier cela donne le produit des transformées par rapport à Δx_i, évaluées en x_i^0 : $U\left(x_i^0,-k\right) = U\left(x_i^0,k\right)$ et $-k^2 e^{-ik\Delta x_i + ikvt}$. On obtient donc

$$-2t\int d\Delta x\; p(x-\Delta x)\int dk\; e^{ik\Delta x}\left\langle e^{-ikvt}\right\rangle k^2 U(x-\Delta x,\; k). \tag{1.33}$$

L'autre terme

$$-\left\langle v_i\partial_{x_i}\delta\left(x_i - x_i(t)\right)\delta\left(v_i - v_i(t)\right)\right\rangle$$

qu'on pourra nommer terme d'agitation moléculaire se manipule ainsi. Aprés le changement de variables

$$\begin{array}{rl} & -\left\langle \frac{\Delta x_i}{t}\partial_{x_i}\delta\left(\Delta x_i - v_i t\right)\delta\left(x_i^0 - (x_i - v_i t)\right)\right\rangle \\ = & -\frac{1}{t}\int d\Delta x\; \Delta x\partial_{\Delta x}\left(p(x-\Delta x)\int dk\; e^{ik\Delta x}\left\langle e^{-ikvt}\right\rangle\right) \\ = & +\frac{1}{t}\int d\Delta x\;\left(p(x-\Delta x)\int dk\; e^{ik\Delta x}\left\langle e^{-ikvt}\right\rangle\right) \end{array}$$

on constate un problème de divergence en $\frac{\langle v\rangle}{t}$ dans l'expression de la dérivée seconde de $\overline{F^{(1)}}^{\,\tau_{12}}$ si l'on prend un ensemble tel que la vitesse moyenne est non nulle. Soit donc le bon ensemble ou le bon référentiel local, alors la dérivée seconde donne conformément au paragraphe précédent, $-k^2\left\langle v^2\right\rangle$. Ainsi moyénné le terme collisionnel donne la relation de dispersion

$$\omega^2 = k^2\left\langle v^2\right\rangle - 2\; U(k\;; x-\Delta x, t)\; k^2. \tag{1.34}$$

On va maintenant supposer que chaque déplacement est beaucoup plus petit que la longueur d'onde, décrivant les mouvements microscopiques individuels dans le potentiel,

$$\Delta x \ll k^{-1}. \tag{1.35}$$

Ces modes sont dès lors collectifs. Il est possible de cette façon de simplifier la relation eq. (1.34), car le potentiel varie substantiellement sur une longueur d'onde. C'est bien le champ moyen qu'on cherche $\overline{U}$, avec [13]

$$\overline{U}(x_i) = -\frac{Ne^2}{4\pi m\epsilon_0}\int\frac{p(x')}{|x_i - x'|}dx'$$

qu'on peut transformer en équation de Poisson [14]

$$\overline{U}(k\;; x_i, t) = -\omega_p^2(x_i,t)k^{-2}$$

13. À 3 dimensions. Logarithmique à 2 dimensions, et linéaire à une dimension.
14. En toute dimension.

où la pulsation plasma est définie par

$$\omega_p^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m} Np.$$

Ainsi, on obtient à l'ordre $\mathcal{O}(t^2)$ et $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ la relation de dispersion de Bohm et Gross eq. (1.36) [12, 58]

$$\omega^2(x,t) = k^2 \left\langle v^2 \right\rangle + \omega_p^2(x,t). \tag{1.36}$$

donc avec

$$\alpha = 2.$$

Remarquons que les variations de pression ne peuvent être éliminées car elles sont créées et entretenues par les variations du champ. C'est cet aspect qui justifie la pratique du passage, a priori, dans un seul mode de Fourier, pour l'analyse linéaire du système d'équations fluides, à savoir, conférer le même nombre d'onde à des forces a priori indépendantes. Il faut se représenter l'un de ces modes unidimensionnel comme une chaîne d'oscillateurs couplés par une force de rappel élastique. Nous reviendrons sur la relation de dispersion qui peut prendre d'autres formes dans d'autres limites au chapitre (2).

1.3.2 Bilan énergétique

Il est plus commode de se rappeler qu'une relation de dispersion découle de la relation de Gibbs (qu'on peut voir aussi comme un développement du Viriel) et de l'équipartition, ou même plus simplement d'une analyse dimensionelle. Rappelons pour cela, qu'une onde est un processus macroscopique réversible, donc que la variation de travail est égale à la variation d'énergie libre, dans un élément de volume,

$$d\mathcal{W} \equiv \int dx \ \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \delta\vec{\mathbf{l}} = d\mathcal{F}$$

où $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \frac{d^2}{dt^2}\delta\vec{\mathbf{l}}$. Nous voulons nous affranchir des coordonnées normales et passer directement aux vecteurs d'onde. Une astuce consiste à remplacer l'intégrale sur tout le volume par une somme d'intégrales sur des morceaux de taille la longueur d'onde. Si chaque valeur de déplacement n'est comptée qu'une seule fois dans chaque élément, ce qu'on suppose correct dans cet intervalle, il est permis de changer la variable d'intégration (par

réversibilité du changement de variable)

$$\int_0^\lambda dx\ \delta l \leftrightarrow \int d\left(\delta l\ \right)\delta l.$$

Dans ce repère, la coordonnée normale est alors simplement la longueur d'onde [15]

$$iq_k = \int d\left(\delta l\ \right)\delta l e^{ik\delta l} = k^{-1}. \tag{1.37}$$

On a alors la forme désirée

$$\frac{1}{2}\sum_k \omega_k^2\ q_k^2 = \frac{1}{2}\sum_k \omega_k^2\ k^{-2} = d\mathcal{F}.$$

La variation d'entropie dans un gaz parfait est celle produite par les fluctuations thermiques. Lorsqu'il y a conservation de l'énergie

$$d\mathcal{F} = -Td\mathcal{S}.$$

Celles-ci *organisent* le milieu, par rapport à l'équilibre, c'est d'ailleurs ce qui permet la naissance des ondes. Pour M degrés de liberté et par processus, on a [16] (c.f. e.g. [80])

$$d\mathcal{S} = -\frac{M}{2}.$$

Lorsqu'il y a un champ d'interactions, les fluctuations aux temps longs lui sont dues. La variation d'énergie

$$d\mathcal{E} = -\frac{1}{2}\int dx\ \mathcal{K}\delta l^2 = \frac{1}{2}\mathcal{K}\sum_k k^{-2},$$

la relation de Gibbs

$$d\mathcal{F} = d\mathcal{E} - Td\mathcal{S},$$

et l'équipartition, permettent de retrouver la relation de Bohm et Gross eq. (1.36), avec M modes, $\mathcal{K} = \omega_p^2$ et $T = \frac{1}{2}\langle v^2\rangle$.

Je note que la longueur de Debye

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{3}{4\pi}\frac{\epsilon_0 T}{ne^2}} \tag{1.38}$$

où $n = Np$, n'est pas une véritable longueur de coupure [17]. Pour ce faire

15. Le même argument vaut pour la dynamique perpendiculaire au champ magnétique, premier indice d'une phénoménologie similaire, c.f. partie II.

16. La constante de Boltzmann sera prise égale à $K_B \equiv 1$.

17. Pour les modes $k > \lambda_D^{-1}$, les ondes plasmons deviennent simplement des ondes

l'agitation thermique devrait désordonner le système par rapport à l'équilibre. Il s'agirait d'un amortissement pour tout $k \geq \lambda_D^{-1}$, et la relation de dispersion verrait un signe moins apparaître

$$\omega^2 = \omega_p^2 - Tk^2.$$

La relation de dispersion de Bohm et Gross ne semble donc pas compatible, dans la limite des courtes longueurs d'ondes, avec la théorie d'équilibre statique de Debye-Hückel. Selon cette théorie, λ_D est la longueur d'écrantage d'une charge statique (ou autrement dit dans le contexte dynamique, selon laquelle λ_D est la longueur de corrélation spatiale de la densité, c.f. Bogolioubov [66]). On doit alors remarquer que l'hypothèse d'existence de modes collectifs eq. (1.35) devient hasardeuse pour $k \approx \lambda_D^{-1}$:

$$\Delta x \sim \lambda_D. \tag{1.39}$$

Cette dernière relation est en fait naturelle car le théorème du Viriel, appliqué aux oscillateurs harmoniques ici en première approximation, énonce

$$\omega_p^2 \left\langle \Delta x^2 \right\rangle \sim T.$$

L'écart-type $\sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle}$ représente de surcroît l'espace inter-particulaire moyen n^{-1}, de cette chaîne d'oscillateurs couplés. On peut dès lors remarquer que le coefficient du Viriel dans la théorie de Debye-Hückel [66] et celui trouvé dans le cadre des modes collectifs deviennent bien compatibles (donnés en trois dimensions)

$$\lim_{k \to \lambda_D^{-1}} \frac{ne^2}{4\pi\epsilon_0} n k^{-2} = \frac{ne^2}{4\pi\epsilon_0} \lambda_D^{-1}. \tag{1.40}$$

1.4 Temps de corrélation

Nous avons trouvé que la validité de l'équation de Vlasov tenait sur des temps plus courts que le temps τ_r, et pour résumer, que l'aspect cinétique est illusoire, car la force agissant sur les particules est de champ moyen. La phénoménologie de l'amplification et de la saturation d'un mode permet à elle seule de retrouver sans calcul le principal résultat.

Ils existent deux fréquences caractéristiques du problème, aux échelles hydrodynamiques :

– La pulsation plasma ω_p .

sonores.

– La pulsation de rebond ω_{tr}.

Cette dernière est plus exactement l'incertitude sur la pulsation plasma, dans un cadre autocohérent. Celle-ci résulte des fluctuations de charge, par l'écrantage dû aux quelques particules piégées

$$\omega_{tr} \equiv \sqrt{\frac{e}{m} k_z \mathbf{E}} \approx \sqrt{\left\langle \delta\omega_p^2 \right\rangle} \tag{1.41}$$

où E est le champ électrique fluctuant à la longueur d'onde k_z. Or, l'interprétation naturelle de l'amortissement (resp. l'instabilité) est la désynchronisation (resp. synchronisation) des oscillateurs, soit

$$\gamma \approx \sqrt{\left\langle \delta\omega_p^2 \right\rangle} \approx \omega_{tr}. \tag{1.42}$$

1.4.1 Scaling avec η

Si l'on note la fraction relative de la densité de charge qui est écrantée (a priori la densité du faisceau, s'il est le seul à polariser le plasma)

$$\eta = \frac{\tilde{n}}{n} \tag{1.43}$$

le scaling en fonction de η est d'après eq. (1.42)

$$\gamma \sim \eta^{\frac{1}{2}}. \tag{1.44}$$

Le scaling qu'on trouve à partir de l'équation de Vlasov pour $\omega \neq k_z v_b + ik_z\sqrt{\langle \delta v_b^2 \rangle}$ est en fait $\gamma \sim \eta$. Il correspond aussi au premier ordre du scaling de l'écrantage $\gamma \approx \sqrt{\left\langle \delta\omega_p^2 \right\rangle}$, mais donné avant d'avoir effectué la moyenne sur les fluctuations [18] ($\langle \tilde{n} \rangle = 0$) : $\left\langle \delta\omega_p^2 \right\rangle \approx 2\frac{\delta\omega_p}{\omega_p} \approx \eta$.

Le scaling à la résonance, $\omega = k_z v_b + ik_z\sqrt{\langle \delta v_b^2 \rangle}$, est encore différent (c.f. [76] et paragraphe (2.3.2))

$$\gamma_r \sim \eta^{\frac{1}{3}}.$$

Celui-ci est en fait un taux caractéristique de diffusion microscopique (c.f. paragraphe (2.3.2)). K. Mizuno et S. Tanaka tentent de confirmer expérimentalement dans [72] que ce γ_r est le même γ hydrodynamique ; le calcul présenté, dans [76] par exemple, ne fait pas la distinction clairement. Cependant, il apparaît clair sur la figure fig. (2) de cet article (reproduire), que les conditions expérimentales, si elles peuvent éventuellement être considérées initialement à la résonance, en sortent très tôt, ne serait-ce précisément à cause de l'étalement énergétique du faisceau (dès le point

18. On peut donc dire localement, conformément au domaine de validité $t \leq \gamma^{-1}$.

Z1). Ainsi, je trouve que les valeurs numériques données des taux de croissance spatiale, vitesse de phase et amplitude du puits de potentiel sont aussi bien compatibles avec le scaling hydrodynamique eq. (1.44).

En effet, le rapport des densités vaut $\eta \approx 1.5\ 10^{-2}$, ainsi $\eta^{\frac{1}{2}} \approx 1.2\ 10^{-1}$. Initialement, soit $\omega_p \approx k_z v_b$ à Δv_b près, valant expérimentalement $\Delta v_b \approx 0.2\,(v_{ph} - v_b) \approx 0.02 v_b$. Ainsi après quelque temps à établir l'écrantage

$$v_{ph} \approx v_b \left(1 - \eta^{\frac{1}{2}}\right) \approx 0.88 v_b \pm 0.02 v_b.$$

La valeur expérimentale est $v_{ph} = 0.90 v_b$. De même, le taux spatial de croissance est

$$\kappa = \frac{\gamma}{\omega_p} k_z \approx \eta^{\frac{1}{2}} k_z \approx 0.12 k_z. \tag{1.45}$$

La valeur expérimentale est $\kappa = 0.11 k_z$. Le résultat est ici meilleur qu'avec l'autre scaling pour lequel $\kappa = 0.17 k_z$. Quant à l'amplitude du puits de potentiel, on peut imaginer que l'écart entre les deux bosses de la distribution énergétique au point Z5 en donne la valeur approximativement. C'est ce que confirme les auteurs. Enfin, contrairement à d'autres prédictions théoriques (refs. in [72]) qui situent le rapport $\frac{\omega_{tr}}{\gamma}$ à 1.7 voire 3.2, les auteurs mesurent un rapport de $\frac{\omega_{tr}}{\gamma} \approx 0.83$. En fait, on peut noter que la définition eq. (1.42) implique $\gamma = \kappa v_{ph}$ (améliorant l'accord de eq. (1.45) avec l'expérience car $0.9 \times 0.12 \approx 0.11$) plutôt que celle employée par les auteurs $\gamma = \kappa v_b$. Ainsi, avec une barre d'erreur expérimentale non communiquée, la valeur 0.83 est proche de la valeur minimale $\frac{v_{ph}}{v_b} \geq 0.86$, et semble confirmer que

$$\gamma \approx \omega_{tr}.$$

1.4.2 L'amortissement "Landau"

Il est souvent question, pour illustrer le calcul, d'un amortissement des ondes par les particules résonantes, avec en tête l'image d'innombrables surfeurs, accélérés et donc épuisant une partie de l'énergie de la vague. Ceci est incorrect, il n'y a pas de dissipation d'énergie, mais échanges périodiques pour chacune des particules. Le phénomène est en fait l'écrantage statistique d'un potentiel extérieur (resp. la naissance d'un potentiel de sillage), et possède un temps de décorrélation (resp. un temps de saturation).

1.4.2.1 L'équation d'onde

La relation de dispersion eq. (1.36) conduit à une équation de Klein-Gordon pour la densité n

$$\partial_{tt}^2 n = \left(\omega_p^2 + \left\langle v^2 \right\rangle \partial_{xx}^2\right) n$$

Soit un mode k assez petit. Puisque le réarrangement électronique est rapide, on peut récrire eq. (1.36) sous une forme développée pour la dynamique plus lente à laquelle on s'intéresse. Notons l'action $\hbar \equiv \frac{\left\langle v^2 \right\rangle}{2\omega_p}$, alors pour $k^2 \ll \frac{\omega_p^2}{\langle v^2 \rangle} \approx \lambda_D^{-2}$ on a

$$\omega \approx \omega_p + \hbar k^2. \tag{1.46}$$

Je note que cela correspond à l'approximation non relativiste $\langle v^2 \rangle \ll v_{ph}^2$, qui est aussi le cas de figure académique (la résonance se situant dans la queue de la distribution). On obtient l'équation de Schrödinger

$$i\partial_t n = \omega_p n + \hbar \partial_{xx}^2 n. \tag{1.47}$$

Il existe des variations de pulsation dues aux variations de densité de charge comme on a dit :

$$\omega_p^2 = \bar{\omega}_p^2 + \delta\omega_p^2$$

avec $\bar{\omega}_p^2 = \frac{\bar{n}e^2}{4\pi\epsilon_0 m}$ et $\delta\omega_p^2 = \frac{\tilde{n}e^2}{4\pi\epsilon_0 m}$. En développant perturbativement pour $\delta\omega_p^2 \ll \bar{\omega}_p^2$, i.e. $\tilde{n} \ll \bar{n}$, on a

$$\omega_p \approx \bar{\omega}_p + \delta\omega$$

avec

$$\delta\omega = \frac{\delta\omega_p^2}{2\bar{\omega}_p}. \tag{1.48}$$

Dans l'espace de Fourier, on peut exprimer ces fluctuations comme un couplage entre les différents états d'oscillations, donnant lieux à diverses transitions $\omega_f - \omega_i = \delta\omega_{if}$. C'est cette approche que l'on poursuit maintenant, qui fut d'abord développée pour l'électrodynamique quantique [22].

1.4.2.2 La méthode de la résolvante

Introduisons la fonction de corrélation entre les grandeurs f et g aux temps t_0 et t_1, définie par intégration sur les temps courts de l'ordre de quelques périodes plasma $\tau \propto \omega_p^{-1}$

$$\langle f \mid g \rangle \equiv \int d\tau f^*(\tau, t_0) g(\tau, t_1).$$

Décrivons eq. (1.47) dans la représentation d'interaction, c'est-à-dire en terme d'opérateurs et de champs

$$i\frac{\partial}{\partial t}n = \Omega_p n.$$

Le champ Ω_p a pour vecteurs propres les opérateurs

$$\psi_{\omega_p}(x,t) = n(x,t)e^{-i\left(\omega_p - \hbar\partial_{xx}^2\right)\tau}$$

de valeurs propres $\omega_p + \hbar k^2$. L'état est formé d'une combinaison de ceux-ci, et la transition se lit ici grâce à la corrélation (ou son module au carré, dans le formalisme de la matrice densité)

$$\langle \psi_{\omega_i} \mid n \rangle .$$

On consière dorénavant les vecteurs normalisés. On se place pour un mode donné k dans le référentiel se déplaçant à la vitesse de groupe $v_b = \hbar k$ par simplification. La méthode introduit l'opérateur résolvante

$$G_{\pm}(\omega) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\omega - \omega_p \pm i\alpha}. \tag{1.49}$$

On peut vérifier que l'opérateur d'évolution est alors

$$U(t_1, t_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; e^{-i\omega t}\left(G_-(\omega) - G_+(\omega)\right) \tag{1.50}$$

où $n(t_1) = U(t_1, t_0)n(t_0)$. Ainsi, pour calculer le temps de transition d'un état initial $\psi_{\omega_i}(t_0)$, où $\omega_i = \omega_p(t_0)$, vers un état final quelconque ψ_{ω_f}, où $\omega_f = \omega_p(t_1)$, donc pour $t_1 - t_0 > 0$, on pose à partir de eq. (1.50)

$$\langle \psi_{\omega_i} \mid n \rangle = -\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; e^{-i\omega t} \; \langle \psi_{\omega_i} | G_+(\omega) | \; \psi_{\omega_i} \rangle .$$

Pour la probabilité de transition vers l'état ψ_{ω_i} depuis des temps antérieurs, qui est le cas correspondant à l'instabilité, on utiliserait G_-. Dans un problème perturbatif tel que

$$\Omega_p = \bar{\Omega}_p + V$$

l'opérateur résolvant G se calcule en le renormalisant

$$G = G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G$$

où $G_0 = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\omega-\bar{\omega}_p\pm i\alpha}$, grâce à l'identité $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{A}(B-A)\frac{1}{B}$. On peut remarquer que ce 'potentiel' de couplage eq. (1.48)

$$V(t) \equiv \delta\omega(t)$$

est bien linéairement relié au véritable potentiel électrique, bien sûr par l'équation de Poisson. Les vecteurs propres étant orthogonaux au sens de la corrélation, seuls les termes pairs jouent un rôle. Le résultat est [20]

$$\langle\psi_{\omega_i}|G_+(\omega)|\ \psi_{\omega_i}\rangle = \lim_{\alpha\to 0}\left(\omega-\omega_i+i\alpha-\sum_f \frac{1}{\omega-\omega_f+i\alpha}\left|V_{if}\right|^2\right)^{-1}$$

où l'indice f désigne l'état final. $|V_{if}|$ provient de

$$|V_{if}| \equiv \left\langle\psi_{\omega_i}|V|\ \psi_{\omega_f}\right\rangle = \int d\tau\ e^{i\omega_i\tau}V(t)e^{-i\omega_f\tau} = \sqrt{\frac{e^2}{\pi\epsilon_0 m\ \bar{n}}}\ \tilde{n}_{if}$$

où $\tilde{n}_{if} \equiv \delta(\omega_i-\omega_f)\,\tilde{n}(t)$. Ainsi, le taux de transition γ et le décalage de Lamb ω_L s'écrivent

$$(\omega_L - i\gamma) = \lim_{\alpha\to 0}\sum_f \frac{1}{\omega_i-\omega_f+i\alpha}\left|V_{if}\right|^2. \tag{1.51}$$

Il nous reste à évaluer $|V_{if}|^2$. La prochaine partie traite de ce point en détail :

Pour la résumer, la solution repose sur la réponse diéléctrique. La constante diélectrique est modifiée par un décalage Doppler relativement à la perturbation initiale $\tilde{n}(t)e^{-i\omega_i\tau}$, et tant que $\omega_f \approx \omega_p$ elle vaut

$$\epsilon(\omega_f) \approx 2\epsilon_0\frac{(\omega_f-\omega_i)}{\omega_p}. \tag{1.52}$$

L'equipartition est alors (L est la taille du milieu)

$$L\frac{\epsilon(\omega_f)}{2}\left|E_{if}\right|^2 = \tilde{n}\frac{\langle v^2\rangle}{2}. \tag{1.53}$$

En reportant cela dans l'expression précédente, avec l'équation de Poisson $k^2\left|E_{if}\right|^2 = \frac{e^2}{\epsilon_0^2}\left|\tilde{n}_{if}\right|^2$, on pourra obtenir l'expression

$$(\omega_L - i\gamma) = \frac{\eta e^2}{\epsilon_0 m}\sum_f \frac{\tilde{n}_f}{(\omega_i-\omega_f)^2} \tag{1.54}$$

qui est l'expression explicitée par Dawson par exemple (en remplaçant seulement $\tilde{n}_f$ par la densité du faisceau n_b) [21].

Cette méthode a le mérite de présenter clairement la nature statistique du calcul de L. D. Landau, révélant d'un même trait l'importance des non linéarités. On a eu seulement à identifier le potentiel responsable du couplage. D'autre part, la symétrie temporelle absente dans le calcul de L. D. Landau est restaurée, si bien que γ est un taux de transition pour le signal chaotique, i.e. à partir d'un état cohérent vers un état incohérent (émissions spontanées) ou à partir d'un état incohérent vers un état cohérent (émissions stimulées). Ce taux est bien approché dans le plasma par l'exposant de Lyapunov d'exponentiation de deux trajectoires voisines [19] [30] .

On peut également noter qu'aucun amalgame n'est commis entre γ et α, intermédiare de calcul $\alpha \to 0$.

Enfin, si on avait appliqué l'ypothèse des phases aléatoires

$$\left\langle e^{i\int_t^{t+\Delta t}\delta\omega\ dt'}\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\Delta t\int_0^{\Delta t}\langle\delta\omega\ (0)\delta\omega(\tau)\rangle d\tau}$$

on aurait obtenu un taux de déphasage, eq. (1.42),

$$\gamma = \sqrt{\langle\delta\omega^2\rangle}.$$

Cela peut se récrire ainsi

$$\gamma = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m}\frac{\langle\tilde{n}^2\rangle}{\bar{n}}\ \tau_c \tag{1.55}$$

avec $\langle\tilde{n}^2\rangle\,\tau_c = \frac{1}{2}\int_0^\infty \langle\tilde{n}(0)\tilde{n}(\tau)\rangle\,d\tau$. On reconnaît en fait la somme du décalage de Lamb et du taux de décorrélation eq. (1.51), en considérant formellement que la moyenne porte sur tous les états finaux possibles

$$\frac{\langle\tilde{n}^2\rangle}{\bar{n}}\tau_c = \sum_f^{\Delta\omega}\frac{\eta\tilde{n}_f}{\delta\omega_{if}^2}$$

où $\Delta\omega$ est la largeur spectrale, et $\tau_c \approx \Delta\omega\,\langle\delta\omega^2\rangle^{-1}$. La différence met en avant que les fluctuations comportent une partie cohérente. Définissons

19. C'est la multiciplicité de la résonance qui assure qu'aucun tore de KAM ne survive (c.f. Introduction). Bien que dans cet article, les trajectoire initiales sont celles des tores instables, le résultat de l'exposant de Lyapunov calculé, notons le γ_L, ne dépend pas ou très peu du temps. Par contre, la discussion sur le signe de γ qui est présentée dans cet article me paraît regrettable car en fait on a bien

$$\gamma \to \pm\gamma_L$$

ce qui est cohérent avec le fil directeur de l'argumentation, à savoir que phénoménologiquement la saturation est bien représentée par les tores de KAM.

une mesure de densité de la vitesse, localisée auour de v_{ph}, comme

$$g \equiv \frac{1}{v_{ph}} \sqrt{\langle \tilde{n}^2 \rangle}.$$

Définissons un élargissement en vitesse $\Delta v = k\Delta\omega$. Le résultat eq. (1.55) se met alors sous la forme de l'élargissement de résonance, c.f. paragraphe (1.1.3) et [27],

$$\gamma = \eta \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{\omega_p}{k^2} \frac{\Delta g}{\Delta v}. \tag{1.56}$$

Il n'y a donc pas apport d'information nouvelle à décrire le système avec les probabilités, sur la position et la vitesse $g(x, v;\ t)$, puisque les phénomènes s'opèrent via le champ moyen indépendant de la vitesse [20].

20. Au contraire, c'est en particulier parce que les collisions binaires dépendent de la vitesse que l'équation de Boltzmann demeure un bon modèle de la théorie cinétique des gaz neutres.

Chapitre 2

Equilibre de l'interaction entre ondes et particules

Ce que nous avons présenté dans la partie précédente comme un mélange de phases, resp. un accord de phases, (ou comme une collection de transitions spontanées, resp. une transition induite vers un état harmonique) dû au couplage résonant entre différents états, peut s'exprimer aussi par l'interaction entre un corps de particules et un faisceau. Le corps soutient les oscillations fondamentales issues d'une perturbation, et la vitesse moyenne du faisceau est proche de leur vitesse de phase. Ainsi, on comprendra la correction à la réponse diélectrique qu'entraine le faisceau.

2.1 Hamiltonien à M ondes, et N particules.

L'énergie se compose de l'énergie cinétique et de l'énergie électrique. Cette dernière s'écrit grâce à l'équation de Poisson. C'est par le biais du hamiltonien que l'on va étudier les aspects éventuellement cinétiques du phénomène. La densité d'énergie électrique est

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$$

où D est le champ de déplacement $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$. La différence par rapport à l'énergie du vide provient de la susceptibilité du milieu, qui une fois polarisé en présence d'un champ peut tendre à l'écranter, dans le rapport $\chi = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1$.

L'énergie est la somme de l'énergie cinétique des particules $\sum \frac{p_i^2}{2m}$ et de l'énergie électrique $\int dV\ \mathcal{W}$. Nous pouvons en séparer la composante susceptible sur la base de l'intuition physique du phénomène de piégeage.

L'équation de Poisson est $\nabla \cdot \mathbf{D} = e\,(n_i - n_e) = -e\tilde{n}$, ainsi $\mathcal{W} = -e\int \tilde{n}\ \Phi = \frac{1}{2}\int \epsilon \mathbf{E}^2$, ou encore

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}\int \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\int \chi\epsilon_0 \mathbf{E}^2. \tag{2.1}$$

La susceptibilité traduit la polarisation du milieu, or ce sont les particules suprathermiques, incapables de s'entourer du nuage de Coulomb, qui en sont responsables [2] (du moins dans les premiers instants). En notant leur densité

$$n_b(x)dx \equiv \sum_i^N \delta(x_i - x_i(t)) \times \mathcal{P}\left(x_i \in \mathcal{O}_{dx}(x)\right) \tag{2.2}$$

on peut écrire dans l'approximation linéaire

$$\nabla \cdot \chi\epsilon_0 \mathbf{E} = n_b. \tag{2.3}$$

Ainsi, en combinant le deuxième membre de droite de l'égalité eq. (2.1) et la définition eq. (2.2), on obtient le hamiltonien suivant dans la représentation de Fourier

$$H = \sum_i^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}\epsilon_0 \int dk_j\ \ |\mathbf{E}_j|^2 - e\sum_i^N \int dk_j \frac{i}{k_j}\mathbf{E}_j e^{ik_j x_i(t)}. \tag{2.4}$$

On a vu à la section (1.2) qu'il était important de faire attention à la définition de la distribution de probabilité. Donc, ici la même conclusion s'impose concernant le sens à attribuer à la variable $x_i(t)$, en exposant, qui est une trajectoire moyenne (à dx près), ainsi qu'au champ $\mathbf{E}$ qui est du même effet un champ moyen. Il existe alors une longueur de coupure λ_D associée à la séparation d'échelles.

2.1.1 Domaine de validité

M. Antoni D. Escande et Y. Elskens veulent prouver dans [4] que le hamiltonien eq. (4.12) est réductible à un nombre fini M de modes, à partir des équations du mouvement microscopique. Pourtant, leurs arguments reviennent de fait à des allégations dans l'article, car tout repose sur une majoration qui y est occultée, et qu'on peut trouver seulement dans l'ouvrage (eq. (2.89) de [29]). Cette majoration n'est pas celle escomptée (voir en annexe B le détail et les notations)

$$\frac{1}{N}\sum_r^N |k_s \Delta x_r| \neq \frac{1}{N}\sum_r^N \left|\sum_{n=-M}^{M} \frac{2e}{m}\mathcal{F}_{rn}k_n \cos\int^t \Omega_{rn}\right| \sim M\mathcal{O}(\epsilon_{coupling})$$

car on ne peut pas remplacer $k_s > k_M$ ($s > M$) simplement par k_n. En fait le membre de gauche est d'ordre

$$\frac{1}{N}\sum^{N}|k_s\Delta x_r| \sim \sum_{-M}^{M} k_s k_n^{-1}\mathcal{O}(\epsilon_{coupling}) \sim Lk_sM\ln M\mathcal{O}(\epsilon_{coupling})$$

qui majore par l'infini, car le membre de droite peut devenir aussi grand que souhaité avec k_s. Tronquer à $M < \infty$ modes correspond donc à faire l'hypothèse de champ moyen [1]

$$k_M \max_r(|\Delta x_r|) \ll 1$$

similaire à eq. (1.35) et

$$k_M \leq \lambda_D^{-1}.$$

Ainsi, pour rester dans le cadre des notations de la littérature récente dans le domaine, et parce qu'il est assez commode de le faire, on passe dans les variables angle-action (I_j, θ_j) qui redimensionnent le champ par le facteur $\omega_p^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\eta}{N}}\frac{e}{m}$ (le paramètre $\eta = \frac{n_b}{\bar{n}}$ est ici le rapport de la densité du faisceau à celui du corps du plasma).

$$H = \sum_l^N \frac{1}{2}p_l^2 + \sum_j^M \omega_p I_j - \sqrt{\frac{2\eta\omega_p^3}{N}}\sum_l^N\sum_j^M \frac{\sqrt{I_j}}{k_j}\cos\left(k_j x_l - \theta_j\right).$$

Par exemple, la dynamique est

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_l &=& p_l \\ \dot{p}_l &=& -\sqrt{\frac{2\eta\omega_0^3}{N}}\sum_j^M \sqrt{I_j}\sin\left(k_j x_l - \theta_j\right) \\ \dot{\theta}_j &=& \omega_p + \sqrt{\frac{2\eta\omega_0^3}{N}}\frac{1}{k_j\sqrt{I_j}}\sum_l^N \cos\left(k_j x_l - \theta_j\right) \\ \dot{I}_j &=& \sqrt{\frac{2\eta\omega_0^3}{N}}\frac{\sqrt{I_j}}{k_j}\sum_l^N \sin\left(k_j x_l - \theta_j\right) \end{array}\right. .$$

Le moment cinétique généralisé par particule σ est aussi conservé

$$\sigma = p + \sum_j^M k_j\psi_j \tag{2.5}$$

où

$$p = \frac{1}{N}\sum_l^N p_l.$$

On a introduit la notation $\psi_j = \frac{I_j}{N}$ pour l'intensité réduite de chaque mode.

1. Cela aurait été en effet un résultat profond de prouver pour ces interactions à longues portées, l'exactitude du champ moyen. Ce n'est donc toujours pas le cas a priori, c.f. conclusion pour une discussion à l'encontre.

Ce hamiltonien considère un système fermé de N particules résonantes, or ce nombre est plus certainement variable, incluant celles qui vérifient l'inégalité

$$\left(\frac{1}{m}p_i - \frac{\omega_p}{k_j}\right)^2 \leq 2\frac{e}{m}\frac{\mathbf{E}_j}{k_j} \tag{2.6}$$

On peut néanmoins se contenter de prendre le nombre d'entre elles à saturation, pour ce qui concerne les propriétés d'équilibre qui nous intéressent.

Arrêtons nous un instant à cette expression eq. (2.6), et prenons la limite $M = 1$. Il semble alors que la conservation du moment généralisé eq. (2.5) reflète une autre limite de validité, à savoir aux champs faibles. En effet, dans tous les manuels on peut lire que l'onde gagne, par conservation de l'énergie, la différence d'énergie cinétique que possède une particule (ou le barycentre) entre avant et après son piégeage

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}p_0^2 - m\frac{\omega_p^2}{k^2}\right)$$

où

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{n_b}\left(\frac{\epsilon_0 E_{eq}^2}{2} - \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}\right) = \omega_p\left(\psi_{eq} - \psi_0\right).$$

Lorsque l'intensité initiale est faible, l'impulsion p_0 est proche de la vitesse de phase $\frac{\omega_p}{k}$ d'aprés (2.6). De même, pour $\eta \ll 1$, l'impulsion à l'équilibre p_{eq} est proche de la vitesse de phase, eq. (2.14). Au premier ordre donc

$$\Delta\mathcal{E} = m\,\frac{\omega_p}{k}\left(v_0 - \frac{\omega_p}{k}\right) \tag{2.7}$$

et ainsi dans cette limite de champ faible, on retrouve la différence entre instants initial et final de eq. (2.5)

$$k\left(\psi_{eq} - \psi_0\right) = p_0 - p_{eq}.$$

En fait, la validité aux champs faibles résulte sans doute de l'hypothèse de réponse linéaire pour la polarisation $\epsilon_0\chi\mathbf{E}$.

En fin de compte, il n'y a pas vraiment échange direct d'énergie car les particules résonantes évoluent dans le potentiel ici *extérieur* de l'onde (champ moyen). La différence d'énergie cinétique du barycentre se retrouve dans l'énergie d'oscillations dans le puits. L'intermédiaire de couplage (dit "auto cohérent" par l'équation de Poisson) est l'écrantage des charges positives qui va se produire, les électrons se situant majoritairement dans le creux du potentiel $-e\frac{\mathbf{E}_M}{k_M}$.

2.2 Spectre d'équilibre

L'argument le plus immédiat pour jusitifer l'approche de l'équilibre est l'application du critère de Chirikov pour l'ergodicité, de recouvrement de deux modes voisins [18], bien que celui-ci ne soit pas garanti dans le cas auto cohérent.

Pour $\eta \ll 1$, le couplage infinitesimal permet de séparer virtuellement le système en deux gaz parfaits constitués de N particules et de M ondes respectivement. Avec le postulat microcanonique, on a l'equipartition dans le référentiel au repos (avec $\bar{p_l} = p_l - p$)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sum \omega_j^{'} I_j & = & M\ T \\ \sum \frac{1}{2} \bar{p_l}^2 & = & \frac{1}{2} NT \end{array} \right. \tag{2.8}$$

où la fréquence dans ce référentiel est

$$\omega_j^{'} = \omega_p - k_j p_{eq}.$$

En effet, je rappelle que dans le référentiel au repos le nombre d'états microscopiques est directement relié à l'énergie, et pour $\eta \ll 1$ les deux sous systèmes sont largement indépendants, ce qui en fait le produit de leurs nombres d'états microscopiques respectifs. C'est l'additivité de l'entropie

$$S\left(N,\ M\ ;\ \epsilon,\ \sigma\right) = S_1\left(N\ ;\ \epsilon_1 \equiv \frac{1}{N}\sum \frac{1}{2}\bar{p_l}^2\right) + S_2\left(M\ ;\ \epsilon_2 \equiv \frac{1}{M}\sum \omega_j^{'} I_j\right).$$

L'équilibre s'accompagne de l'égalité des températures, définies par

$$T^{-1} = \frac{\partial S_1}{N \partial \epsilon_1} = - \left. \frac{\partial S_2}{M \partial \epsilon_2} \right|_{M\epsilon_2 = N(\epsilon - \epsilon_1)}.$$

Exprimé en volumes, le comptage des états est aisé

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{V}_N & = & V^N \sim \left(p^2 dp\right)^N \sim \epsilon_1^{\frac{N}{2}} \\ \mathcal{V}_M & = & V^M \sim \epsilon_2^M \end{array} \right.$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S_1 & \approx & \frac{N}{2} \ln \epsilon_1 \\ S_2 & \approx & M \ln \epsilon_2 \end{array} \right. \tag{2.9}$$

ce qui donne bien eq. (2.8). Tant que $\omega_p \neq k_M p_{eq}$, on obtient ainsi le spectre d'équilibre pour $\eta \ll 1$

$$\langle \psi_j \rangle = \frac{T}{N\left(\omega_p - k_j p_{eq}\right)}. \tag{2.10}$$

Remarquons que p_{eq} est nécessairement plus faible que la vitesse de phase minimale, car l'énergie de chaque mode doit rester positive (c.f. [40] pour le calcul explicite microcanonique).

2.2.1 $M = 1$

Pour $M = 1$ lorsque $\sigma \geq \frac{\omega_p}{k_M}$, correspondant à la transition de O'Neil des particules piégées [75, 38, 39], on trouve la singularité $\omega_p = k_M p_{eq}$ [40]. Ceci signifie que les particules se concentrent dans le puits électrostatique, n'éprouvant donc à terme en moyenne aucun champ oscillant. Alors, la conservation du moment généralisé implique

$$\omega_p \langle \psi_M \rangle = \frac{\omega_p}{k_M}(\sigma - \frac{\omega_p}{k_M})$$

(qui est aussi la température lorsque $\sigma \approx p_0$). On peut remarquer la dissymétrie entre un faisceau de particules ralenties $p_0 > p_{eq}$ et un faisceau accéléré $p_0 < p_{eq}$. Le premier cas conduit toujours à l'existence et l'amplification du mode initial, le second cas peut conduire à l'extinction du mode si $k_M \psi_0 < \frac{\omega_p}{k_M} - p_0$. C'est assez différent de l'image des surfeurs.

2.2.2 $M > 1$

Quant au cas $M \geq 2$, le même genre d'argument, ou le calcul canonique, montre qu'aucun mode ne peut être extensif excepté k_M.

Si nous formulons maintenant l'hypothèse que les interactions sont fortes alors que $\eta \to 1$, nous trouvons par le calcul qu'il y a un accrochage en phase (c.f annexe A)

$$\frac{\left\langle \dot{\theta}_j \right\rangle}{k_j} = p_{eq} \ , \ \forall j$$

ce qui n'est certainement pas possible pour tout indice j. Il faudrait pour cela que les corrections de pulsations soient la pulsation dans le référentiel du centre de masse $\delta\omega_j \equiv \omega_p - \left\langle \dot{\theta}_j \right\rangle = \omega_j^{'}$. C'est au contraire à peu prés vrai seulement pour $j = M$, lorsque $\sigma > \frac{\omega_p}{k_M}\left(1 - \frac{1}{2}\eta\beta\left(\frac{\omega_p}{k_M}\right)^2\right)$ et lorsque N est grand (d'autant plus que cela donnerait une énergie d'ordre $\sim O(NM)$). Dans la fig. (2.1) un contre-exemple typique est tracé, montrant la faible modification des vitesses de phase à l'équilibre. Enfin, des interactions fortes impliquent que le spectre ait la forme

$$\langle \psi_j \rangle = \frac{\eta}{2} \frac{\omega_p^3}{k_j^2(\omega_p - k_j p_{eq})^2} \tag{2.11}$$

ce que je n'ai trouvé dans aucune simulation Monte Carlo (le code a été développé par F. Leyvras).

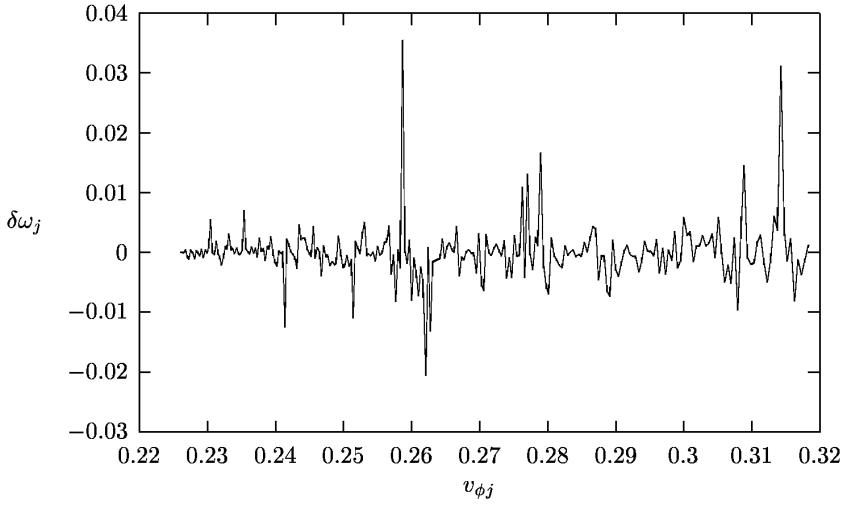


FIGURE 2.1 – Exemple de variations de la pulsation instantannée $\delta\omega_j$ à l'équilibre

Utilisons l'ensemble canonique pour toute valeur de $\eta \leq 1$, et plaçons nous donc dans la limite de faible interaction (du fait du mélange de phase, prouvé en annexe A), dont l'énergie est alors d'ordre $\sim O(1)$. L'énergie libre par particule s'écrit

$$g(\psi) \approx \sum_j^M \psi_j \left(\omega_p - \sigma k_j + \frac{1}{2} k_j \left(\sum_i^M k_i \psi_i \right) - \eta\beta \frac{\omega_p^3}{2k_j^2} \right) \tag{2.12}$$

dénommée ainsi car $F \equiv -\beta^{-1} \ln(Z) = F_{part} + N g(\psi^*)$.

Si $\sigma < \frac{\omega_p}{k_j} \left(1 - \frac{1}{2}\eta\beta \left(\frac{\omega_p}{k_j} \right)^2 \right)$, son maximum est atteint à l'origine $\psi = 0$ avec une pente $\left(\omega_p - k_j p - \eta\beta \frac{\omega_p^3}{2k_j^2} \right)$ dans chaque direction ψ_j. L'équilibre canonique est donc

$$\langle \psi_j \rangle = \frac{T}{N(\omega_p - k_j p_{eq} - \eta\beta \frac{\omega_p^3}{2k_j^2})} \tag{2.13}$$

Si $\sigma > \frac{\omega_p}{k_j} \left(1 - \frac{1}{2}\eta\beta \left(\frac{\omega_p}{k_j} \right)^2 \right)$, son maximum absolu fournit la relation pour tout j

$$\frac{\omega_p}{k_j} - p_{eq} \approx \eta\beta \frac{\omega_p^3}{2k_j^3} \tag{2.14}$$

ce qui est à nouveau impossible. Le spectre est donc aussi dans ce cas de

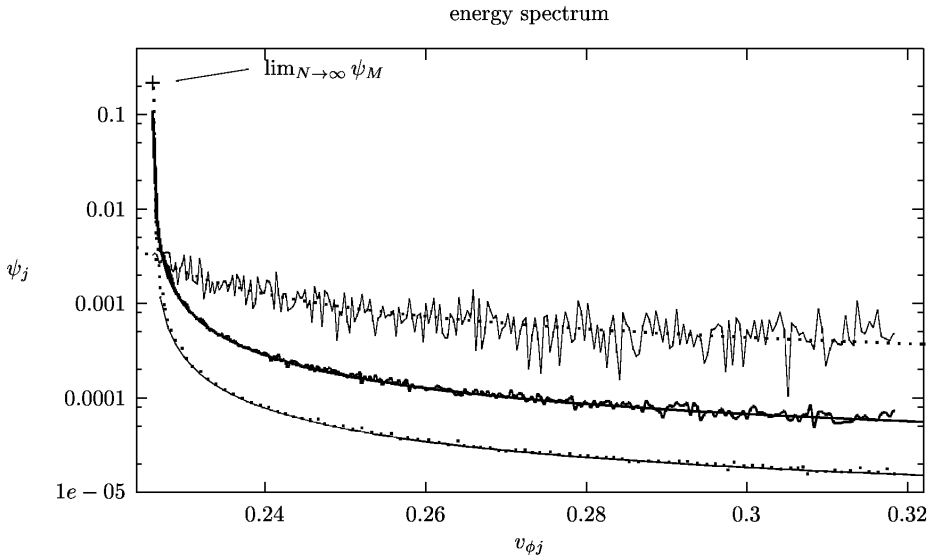


FIGURE 2.2 – Densité spectrale obtenue par simultaion Monte-Carlo, pour N valant : 250 ; 4000 ; 16000. $\eta = 1.10^{-4}$, $\sigma = 1.18$, $\epsilon = 0.28$. Superposés sont les fits d'équipartition. La limite $\psi_M$pour $N \to \infty$ est indiquée.

la forme eq. (2.13). Pourtant, de ce spectre nous avons, puisque $p_{eq} \leq \frac{\omega_p}{k_j}$, k_M est le mode dominant. Pour N assez grand, on peut penser alors que la situation est similaire à $M = 1$ (annexe A), ainsi la relation eq. (2.14) devient une approximation pour le seul mode k_M. C'est alors la même relation de dispersion que dans le modèle particulier étudié par D. Bohm et E. P. Gross [12]

$$\omega \approx \omega_p - \eta\beta\frac{\omega_p^2}{k_M^2}\omega_p$$

où l'on reconnaît l'effet dû à l'écrantage évoqué en introduction. En incluant la correction d'ordre suivant $\sim O(N^{-1})$, c'est assez bien vérifié numériquement, et

$$\langle\psi_M\rangle \approx \frac{1}{k_M}\left(\sigma - \frac{\omega_p}{k_M} + \frac{1}{2}\eta\beta\frac{\omega_p^3}{k_M^3}\right) \tag{2.15}$$

c.f. fig. (2.2). On utilise la forme eq. (2.13) et l'expression suivante de p_{eq}, déduite de la conservation de l'énergie et de l'équipartition dans le référentiel au repos en négligeant l'effet mineur de η, pour fiter les courbes de cette figure,

$$p_{eq} \approx \sigma - \sqrt{\sigma^2 - 2\left(\epsilon_1 + \epsilon_2 - (\frac{1}{2} + \frac{M}{N}T)\right)}$$

formule qui est tout a fait en adéquation avec les simulations.

Nous pouvons relever dans ces résultats qu'aucune condition stricte (c.f.

e.g. [39]) n'est requise quant à la pente de la fonction de distribution, pour qu'un mode au moins sature à une valeur non nulle, contrairement au résultat du calcul dans la théorie cinétique de Vlasov.

2.2.3 Approche de l'équilibre

Du point de vue microscopique, les innombrables interactions entre particules chargées (x_l, p_l) (à l'intérieure d'une sphère de Debye) donnent lieu à la formation de paquets d'ondes (θ_j, I_j), eux-mêmes considérés comme centres diffuseurs, des centres guides $x_l(t)$, à l'approximation du champ moyen. La vitesse de groupe est $v_g = \frac{\partial}{\partial k_M}\dot{\theta}^*_M$ i.e. $-\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial k_M}\frac{\partial}{\partial \psi_M}g(\psi^*)$, où $-g$ est l'énergie libre qu'on doit faire attention d'écrire dans les variables canoniques, et où ψ^* est la valeur au maximum de g,

$$v_g = \eta\beta\frac{\omega_p^3}{k_M^3} = 2(\frac{\omega_p}{k_M} - p_{eq}).$$

Outre le critère de Chirikov, ce point de vue nous rappelle que l'équilibre devrait être atteint sur plusieurs temps d'interaction, typiquement

$$\tau_{int} \approx \frac{1}{\Delta k\,|v_g - p_{eq}|}$$

où Δk est la largeur spectrale, c.f. e.g. [79]. Ce temps τ_{int}, relié à l'échelle de temps microscopique, est nécessairement plus court que le temps τ_{ac}, relié à l'échelle de l'inhomogénéité, défini comme

$$\tau_{ac} \approx \frac{1}{k_M\left|\frac{\omega_p}{k_M} - p_{eq}\right|}.$$

Lorsque $v_g \ll p_{eq}$, le temps $\tau_{int} \approx \frac{1}{\Delta k\ p_{eq}}$ impliquant ici la condition $\frac{\Delta k}{k_M} \gg p_{eq}^{-1}\left|\frac{\omega_p}{k_M} - p_{eq}\right| \approx \frac{1}{2}\eta\beta\frac{\omega_p^2}{k_M^2}$ d'après eq. (2.14), qui paraît cependant douteuse.

Si l'on prend en compte la dispersion avec la relation de Bohm et Gross, il faut reconsidérer cette approche de l'équilibre. Pour que ce modèle de hamiltonien soit le plus consistant, il faut prendre le mode M à l'échelle de coupure $k_M^{-1} = \lambda_D$. De la sorte, la vitesse de groupe est $v_g = \alpha\beta^{-1}\frac{k_M}{\omega_p} + \mathcal{O}(\eta)$ i.e.

$$v_g \approx \alpha\beta^{-\frac{1}{2}}.$$

Le coefficient α est relié à la compressibilité. À une dimension, la situation isotherme donne $\alpha = 1$, comme on a déjà vu eq. (1.36) ; pour une compression adiabatique c'est $\alpha = 3$ [58]. Cette dernière valeur provient

des micro fluctuations de la température d'intensité

$$\beta\delta T = 2\frac{\delta n}{n}.$$

On peut considérer que ces micro fluctuations sont les perturbations dues au faisceau $\frac{\delta n}{n} \approx \eta$. Si nous les avions prises en compte dans l'équipartition microcanonique (adiabatique au lieu d'isotherme), cela aurait modifié la relation eq. (2.14) du même facteur α. Dans tous les cas, il demeure que

$$v_g \approx \frac{\omega_p}{k_M} \approx p_{eq} + \mathcal{O}(\eta).$$

Ceci compromet l'approche de l'équilibre lorsque $\eta \to 0$, car comme nous le voyons le temps d'interaction suit maintenant la loi

$$\tau_{int} \sim \eta^{-1} \to \infty.$$

Ce scaling est à prendre avec la même réserve que précédemment, paragraphe (1.4.1), car c'est l'énergie cinétique des oscillations dans le référentiel de la phase

$$\Delta\mathcal{E}^* \approx \left\langle \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_p}{k_M} - p\right)^2 \right\rangle \tag{2.16}$$

qu'il faut prendre, plutôt que l'approximation $\frac{\omega_p}{k_M}\left(\frac{\omega_p}{k_M} - p\right)$. Prenons par exemple initialement $\psi_M(0) \ll \psi_M^*$ et $\sigma \approx \frac{\omega_p}{k_M}$, cas de figure académique de la résonance, alors d'après l'amplitude d'équilibre eq. (2.15) on a pour $k_M \approx \lambda_D^{-1}$

$$\Delta\mathcal{E} \approx \frac{1}{2}\eta\beta^{-1}. \tag{2.17}$$

D'après eq. (2.16) et eq. (2.17), le scaling devient

$$\tau_{int} \sim \eta^{-\frac{1}{2}}.$$

On peut noter aussi que d'après eq. (1.41) et eq. (2.16)

$$\tau_{ac} \approx \omega_{tr}^{-1}.$$

Un autre obstacle, à formuler l'hypothèse d'équilibre, est alors la convergence des ordres de grandeur des temps censés représenter des échelles séparées

$$\tau_{int} \approx \frac{k_M}{\Delta k}\tau_{ac}$$

lorsque

$$k_M \approx \Delta k.$$

Or, Δk^{-1} représente un ordre de grandeur de la longueur de corrélation, qui est en l'occurence la longueur de Debye $\lambda_D \approx k_M^{-1}$ (voire pire $l_c \approx \eta^{-\frac{1}{2}}\lambda_D \gg \lambda_D$, c.f. plus loin eq. (2.32)).

Ce constat concourt à postuler la criticalité du plasma dans ces conditions (c.f. conclusion).

2.3 Paradoxe quasilinéaire ?

Avant d'en arriver à ce stade de remise en cause de l'équilibre, débattons du paradoxe quasi linéaire qu'avaient soulevés J.C. Adam et. al. [3], et que certains auteurs pensent avoir observé [17, 24]. L'expression de γ est déterminée à l'approximation de la réponse linéaire. Cela restreint à certaines conditions expérimentales ou numériques. Premièrement, je montre que les conditions numériques de [24] sortent de la marge de validité intrinsèque du modèle, qui est la réponse linéaire du corps du plasma. Néanmoins, il est possible d'étendre le résultat en modifiant perturbativement la réponse linéaire ϵ pour y inclure les couplages non linéaires, réponse dénommée dès lors quasi linéaire. Je montre ainsi deuxièmement, que ce "paradoxe" résulte sans mystère d'un développement poussé à un ordre supérieur de la théorie quasi linéaire, dont le calcul a été mené par T. H. Dupree dans [27].

2.3.1 Conditions numériques hors cadre théorique

Les auteurs de [24] dérivent le hamiltonien d'une façon qui illustre bien son domaine de validité. On peut écrire

$$\partial_t \mathbf{E}_k(t) = i\omega\left(k\right)\mathbf{E}_k(t).$$

La constante diélectrique $\epsilon = \epsilon_0(1+\chi)$. La partie réelle χ' représente la réponse cohérente, tandis que la partie imaginaire χ'' la réponse dissipative. La relation de dispersion $\omega(k)$ est le zéro de $\epsilon(\omega, k)$

$$\omega \approx -2i\epsilon_0 \frac{\chi}{\frac{\partial}{\partial\omega}\epsilon}. \tag{2.18}$$

Le champ électrique est déterminé par exemple avec l'équation de poisson pour la polarisation eq. (2.3)

$$-en_b = ik\epsilon_0\chi\mathbf{E}_k.$$

En y substituant eq. (2.18) on a

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\epsilon(\omega,k)\partial_t\mathbf{E}_k = 2e\frac{n_b}{k}. \tag{2.19}$$

Les auteurs utilisent encore l'approximation

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\epsilon(\omega,k) \approx \frac{2}{\omega_p}. \tag{2.20}$$

Or, on peut voir dans [76], ceci pour une distribution lorentzienne du faisceau mais dont l'auteur tire des résultats généraux, que

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \eta\frac{\omega_p^2}{\left(\omega - kv_{eq} + ik\beta^{-\frac{1}{2}}\right)^2}. \tag{2.21}$$

On voit donc que l'approximation eq. (2.20) nécessite à la fois

$$\begin{cases} \left(\omega - kv_{eq} + ik\beta^{-\frac{1}{2}}\right) & \neq & 0 \\ \eta & \to & 0 \end{cases}. \tag{2.22}$$

Explicitons aussi la condition $|\chi''| \ll |1+\chi|$, qui correspond à une dissipation faible $\gamma \ll \omega_p$. À la résonance, c'est-à-dire pour $\omega - kv_{eq} \ll k\beta^{-\frac{1}{2}}$, nous avons [2]

$$\left| iv_{ph}^2\eta \left.\frac{\partial}{\partial v}g\right|_{v_{eq}} \right| \ll \left| 1 + v_{ph}^2\left(\eta\beta - \frac{1}{v_{eq}^2}\right)\right|.$$

Cela donne, avec le résultat $v_{ph} \approx v_{eq} + \mathcal{O}(\eta)$ et $v_{ph}^2 - v_{eq}^2 \approx 2v_{ph}\frac{1}{2}\eta\beta v_{ph}^3$ d'après eq. (2.14), pour le second membre : $v_{ph}^2\eta\beta\left(1 - 1 + \mathcal{O}(\eta)\right)$; et donc pour le premier [3]

$$\mathcal{O}(\eta)\beta \gg \left.\frac{\partial}{\partial v}g\right|_{v_{eq}}. \tag{2.23}$$

Ainsi, les inégalités eq. (2.6), eq. (2.22) et eq. (2.23) forment le domaine de validité du hamiltonien eq. (4.12), et de l'expression classique de L. D. Landau de γ, eq. (1.15).

On peut prendre légitimement en la vitesse d'équilibre v_{eq} une pente nulle, par symétrie du piégeage, mais en nous reportant à la distribution étudiée dans [24], construite de telle sorte à rendre γ indépendant de la vitesse,

2. Dans ma façon de présenter, le corps du plasma est strictement dissocié du faisceau, toute particule ayant une vitesse dans la gamme voisine de v_{ph} y étant incorporée. On trouve plus souvent les notations f pour la distribution du corps et ηg pour celle du faisceau. Lorsque $v_{ph} \gg \beta^{-\frac{1}{2}}$ on a de toute façon $\frac{\partial}{\partial v}f\big|_{v_{ph}} \approx 0$. Ici je note $\eta g \leftrightarrow f + \eta g$.

3. Notons qu'au maximum de la pente, pour une maxwellienne, l'équipartition eq. (2.16) fournit la limite $\frac{\partial}{\partial v}g \approx \eta\beta$.

le respect de eq. (2.23) est simplement

$$\mathcal{O}(\eta)\beta v_{eq}^2 \gg \frac{\gamma}{\eta\omega_p}.$$

Pourtant, il n'est présenté que des cas pour lesquels

$$\begin{cases} \beta v_{eq}^2 & \approx & 30 \\ \frac{\gamma_L}{\eta\omega_p} & \approx & 15 \end{cases}$$

soit seulement un rapport 2. La comparaison quantitative de la valeur théorique de γ aux valeurs numériques n'a donc pas de sens.

Il demeure que les valeurs mesurées et présentées dans l'article sur la fig. (9) varient avec le paramètre η. La distribution est construite afin que la valeur théorique de γ soit aussi indépendante de η, précisément pour effectuer des comparaisons sans biais. Pour leur analyse du "*enhancement*", ils utilisent par contre un mauvais scaling de ce γ théorique en fonction de η, la relation (39). On doit donc lire que leur paramètre $\mu = \omega_{tr}\gamma^{-1}$ scale comme $\mu \sim \eta^{\frac{1}{3}}$ (ou $\sim \eta^{\frac{1}{4}}$ avec la correction des trajectoires vraies eq. (2.26, $D \sim \eta^{\frac{3}{4}}$) et non pas comme indiqué $\mu \sim \eta^{-\frac{2}{3}}$. Le résultat numérique contenu dans la figure fig. (9), i.e. γ numérique croît alors que η décroit, donc, alors que *le véritable μ décroit aussi*, va dès lors à l'encontre des conclusions soutenues par J. C. Adam et al. [3], que la théorie quasi-linéaire n'aurait été valable que dans la limite $\mu \ll 1$.

2.3.2 *Resonance broadening*

Le "*enhancement*" peut être en fait mis en évidence par le mécanisme de "*resonance broadening*", qui tient compte de la dispersion des particules entre les puits de potentiel. Or, la réponse linéaire revient à ne prendre en compte que les trajectoires non perturbées. La réponse qui inclut ces trajectoires perturbées est quasi linéaire. L'argument principal de J. C. Adam et al. [3] était l'importance négligée des couplages de modes dans la théorie quasi linéaire [4]. Or, ceux-ci sont tout à fait nécessaire à la dispersion des trajectoires, et sont justement à la base de l'approximation quasi linéaire. Il est bien sûr possible de pousser le développement perturbatif aux couplages de plus en plus complexes (diagramme de Feynmann). Il n'est pas raisonnable par contre de fonder une critique de cette théorie *approximative* sur des corrections relatives de l'ordre de quelques

4. L'article ressemble fort à une 'transformée de Fourier' de l'article de T. H. Dupree [28], dans lequel l'auteur mettait bien en garde de ne pas prendre trop au sérieux la valeur numérique de la correction à apporter au temps de vie d'un "*clump*", i.e. le temps d'autocorrélation, correction relative proche de 1.

pourcents, voire même de quelques dizaines de pourcents, aux valeurs théoriques à l'ordre zéro ou un, tant il n'est pas commode de calculer la marge que réserve le reste de la série.

Je reviens sur les grandes lignes du formalisme de T. H. Dupree pour la clarté de l'exposé. Nous avons déjà introduit la fonction génératrice, ici pour une particule moyenne

$$\left\langle U(t)e^{-ikx}\right\rangle = \left\langle e^{-ikx(t)}\right\rangle$$

où $U(t)$ est le propagateur adéquate. On définit la fonction de résonance

$$\mathcal{R}_{k,\omega} = \int dt\ e^{i\omega t}\left\langle e^{-ikx(t)}\right\rangle$$

et lorsque les trajectoires sont rectilignes $x(t) = x(0) + vt$, celle-ci est un dirac

$$\mathcal{R}_{k,\omega} = \delta(\omega - kv).$$

Si nous faisons l'hypothèse contraire d'un désordre maximal, la fonction génératrice se développe en cumulants (cette fois-ci au delà du temps de corrélation, c.f. eq. (1.31))

$$\left\langle e^{-ik_j x(t)}\right\rangle \approx e^{-ik_j ut}e^{-k_j^2 D\ t}$$

où une vitesse moyenne et un coefficient de diffusion spatiale apparaissent

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & \frac{\partial}{\partial_t}\langle x\rangle \\ 2D & = & \frac{\partial}{\partial_t}\left(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2\right)\end{array}\right. .$$

Par exemple, la partie imaginaire de la constante diélectrique est alors modifiée par rapport à eq. (1.15) de la façon suivante

$$\chi''(k,\omega) = \eta\frac{\omega_p^2}{k^2}\int dv\ ik\mathcal{R}_{k,\omega}\frac{\partial}{\partial v}g. \tag{2.24}$$

La méthode du calcul du coefficient de diffusion présentée par T. H. Dupree dans un autre article [28] est plus synthétique, à partir de $\mathcal{R}_{k,\omega}$ et χ'', mais équivalente à celle présentée à partir des trajectoires réelles $v(t)$ [27]. Soit le coefficient de diffusion de la vitesse

$$D_u \equiv \frac{1}{2}\partial_t\left(\left\langle v^2\right\rangle - u^2\right) = \frac{e^2}{2m^2}\int dt\,\langle \mathbf{E}(x(0))\mathbf{E}(x(t))\rangle = \eta\omega_p^3\int dt\sum_{k_j}\left\langle \psi_{k_j}(0)e^{i\theta_j(t)}e^{-ik_j(x(t)-x(0))}\right\rangle$$

où $\tau_r^2 D_u = D$. Le temps de corrélation entre deux trajectoires initialement

voisines et de même vitesse moyenne u est

$$\tau_r(u) = \left(k_j^2 D\right)^{-1} = \left(k_j^2 D_u\right)^{-\frac{1}{3}}. \tag{2.25}$$

En comprenant la moyenne comme une intégration sur la condition initiale $t = 0$, il y a convolution de la fonction génératrice et du champ, et pour $\theta_j \approx \omega t$ (fig. (2.1)),D_u s'écrit alors

$$D_u = \eta\omega_p^3 \sum_{k_j} \psi_{k_j,\omega}\mathcal{R}_{k_j,\omega}. \tag{2.26}$$

La fonction de résonance est bien approchée par une Lorentzienne [5]. En laissant de côté les termes en $\omega \approx \omega_p$ et en prenant la résonance pour le mode k_M : $u = \frac{\omega}{k_M}$, alors $\mathcal{R}_{k_M,k_M u} \approx \tau_r$ et eq. (2.26) devient [6]

$$D_u^{\frac{4}{3}} \propto \eta k_M^{-\frac{2}{3}} \Delta k \psi_M^*. \tag{2.27}$$

La largeur spectrale Δk est ici définie différente a priori de λ_D^{-1}, et peut être fixée, indépendemment de η, au moins pendant un transitoire [24]. D'après eq. (2.15), l'amplitude du mode M varie (lorsque N est assez grand) comme $\Delta\psi_M \sim \eta$. Le rapport pour deux valeurs différentes η_1 et η_2 du temps de diffusion est donc

$$\frac{\tau_r(\eta_2)}{\tau_r(\eta_1)} \approx \left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{1}{4}(\eta_2 - \eta_1)\frac{\beta v_{ph}^3}{2(\sigma - v_{ph})}\right). \tag{2.28}$$

Dans les conditions numériques de l'article $\Delta\eta \approx 10^{-4}$, $v_{ph} \approx 3.10^{-1}$ et $\sigma - v_{ph} \approx 10^{-2}$. La température d'équilibre n'a pas été mesurée, si possible, par les auteurs. Pour en pallier, on peut faire tourner le code Monte Carlo microcanonique [40], on obtient dans ces conditions une température

$$\beta \approx 2.5\ 10^3. \tag{2.29}$$

Ainsi la correction relative est d'ordre

$$\frac{\tau_r(\eta_2)}{\tau_r(\eta_1)} \approx 1 + \mathcal{O}(10^3) \times \Delta\eta \approx 1 + \mathcal{O}(0.1). \tag{2.30}$$

5. Pour retrouver l'approximation des trajectoires rectilignes, on oublie par exemple simplement la moyenne sur les conditions initiales, c'est-à-dire $\mathcal{R}_{k,\omega} \approx \frac{\tau_r^{-1}}{k^2\left(u-\frac{\omega}{k}\right)^2+\tau_r^{-2}} \to \delta(ku - \omega)$ alors que $\tau_r \to \infty$. Notons que le dénominateur s'écrit $\tau_{ac}^{-2} + \tau_r^{-2}$.

6. Le coefficient de diffusion scale comme $D \sim \eta$, dans l'approximation des trajectoires rectilignes (où $\mathcal{R}$ est un dirac).

Pour conclure, il faut émettre l'hypothèse que

$$\gamma_{QL}(\eta) \propto \tau_r^{-1}(\eta)$$

alors les valeurs théoriques de la correction, fournies par la variation linéaire en $\Delta\eta$ de eq. (2.30), sont tout à fait compatibles avec les valeurs numériques de l'article, en figure fig. (9).

Cette dernière hypothèse est celle que j'ai faite au paragraphe (1.4.1). En utilisant la conservation quasi linéaire de l'énergie, comme au paragraphe (1.1.3), T. H. Dupree obtient [27] (c.f. commentaire de eq. (1.15))

$$\gamma_{QL} \approx \omega_p v_{ph}^2 \eta \left.\frac{\Delta g}{\Delta v}\right|_{v_{ph}} . \tag{2.31}$$

Avec $k_M \Delta v = \tau_r^{-1}$, ceci s'écrit aussi

$$\gamma_{QL} \approx \tau_r \ \omega_p^2 v_{ph} \eta \ \Delta g \ |_{v_{ph}} .$$

On note que $\gamma_{QL} \propto \tau_r \eta \omega_p^2$ ce qui suggère, c.f. paragraphe (1.4.1) et paragraphe (2.4.2),

$$\gamma_{QL} \approx \tau_r^{-1} \propto \eta^{\frac{1}{2}} \omega_p.$$

Le scaling est cependant différent de celui qu'on obtient avec eq. (4.30) $\gamma_{QL} \sim \eta^{\frac{1}{4}}$. Il s'agit peut être premièrement du fait que $\gamma \approx \tau_{ac}^{-1}$ plutôt que $\tau_r^{-1} \approx \frac{D_u}{\Delta v^2}$, ainsi $\gamma \approx \frac{D_u}{u^2}$. Car si τ_r mesure le temps de diffusion de deux trajectoires réelles $v(t)$ parmi un même ensemble, de vitesse moyenne $u(t)$, τ_{ac} est un ordre de grandeur du temps de diffusion, entre les puits de potentiel, de ces trajectoires moyennes, c.f. e.g. [52]. τ_r est assimilable à τ_{int}. Deuxièmement, la fonction de résonance crée certainement un élargissement de la résonance de l'ordre de $\Delta u \approx \frac{\gamma}{k}$, plutôt que $\Delta v \approx \frac{\tau_r^{-1}}{k}$. Alors on retrouve le même scaling $\gamma \propto D_u \propto \eta \gamma^{-1}$. Quoi qu'il en soit, avec ce scaling la correction relative eq. (2.30) demeure similaire, car $\mathcal{O}(10^3) \times \Delta\eta$ ne serait modifiée que d'un facteur ≈ 2, et comme la température donnée par le code eq. (2.29) n'a que valeur d'ordre de grandeur pour les conditions de l'article, ce facteur n'est pas ici pertinent en pratique.

2.4 Phénoménologie

C'est la physique qui me paraît plausible du phénomène, qui a motivé la recherche de ces précédents résultats. J'en expose maintenant une synthèse, avec en mire l'établissement de l'égalité des susceptibilités de la théorie de Vlasov et de la théorie fluide.

2.4.1 Emission Cerenkov

Comme on l'a vu au paragraphe (1.4.2.2), le formalisme de l'opérateur résolvant appliqué à la fonction de corrélation établit une forte analogie avec une transition par émission stimulée ou spontanée (G_- ou G_+ selon le cas). L'équilibre eq. (2.13) nous apprend en outre, que seul le mode M demeure macroscopique (extensif). Je comprends ces deux aspects de la façon suivante.

Supposons initialement la présence d'une onde plasmon de très faible amplitude, et des densités électronique et ionique uniformes. Dans le référentiel de la phase, les électrons situés à l'arrêt sur les crêtes de l'onde tombent alors dans les puits, et y arrivent au même moment. Ils y écrantent le champ de l'onde. Les électrons restés jusque là piégés dans les puits, parce qu'ils avaient une énergie insuffisante, peuvent alors progresser plus loin. Ces derniers peuvent éventuellement rejoindre les premiers, qui continuant leurs courses se retrouvent de nouveau sur les crêtes. Dès lors, le nombre d'électrons est plus élevé qu'une période auparavant : le champ est amplifié. Ainsi de suite se poursuit ce mécanisme classique de résonance (la balançoire).

Il n'y a aucune dépendance en la pente de la distribution dans ce processus. Il suffit simplement que des électrons résonants existent. On pouvait s'en apercevoir à la lecture du seuil de la transition de l'équilibre pour $M = 1$, qu'ont donné M. C. Firpo et Y. Elskens [38, 39]. Finalement le champ sature proportionellement à la densité de ces électrons résonants, c'est-à-dire à la densité du faisceau, d'après l'équation de Poisson

$$\mathbf{E} \propto n_b.$$

Lorsqu'initialement plusieurs modes sont en présence, il faut comprendre pourquoi c'est le mode de plus petite longueur d'onde qui bénéficie de ce mécanisme, au détriment des autres. La raison, je crois, en est assez simple. À amplitudes similaires (initialement), le champ d'un mode de grande longueur d'onde est assez uniforme à l'échelle d'une petite longueur d'onde. Ainsi, il n'a que peu d'influence sur une petite logueur d'onde. Au contraire, le champ d'une petite longueur d'onde est très variable à l'échelle de la grande longueur d'onde. De plus, la vitesse de phase est d'autant plus rapide que la longueur d'onde est grande. Un mode donné passe donc sur un fond de champ non uniforme, composé des modes de plus petites longueurs d'onde. Ce fond variable, à cause des différents piégeages d'électrons, brouille le champ de grande longueur

d'onde. Le seul mode à ne pas subir du tout ces effets est le mode de la plus petite longueur d'onde possible $k_M \approx \lambda_D^{-1}$. Une façon légèrement différente de le voir, pourrait relever que les particules restent piégées dans tous les puits de potentiel. Le champ dont les crêtes sont les plus espacées se déplace en phase plus vite que celui dont les crêtes sont les plus ressérées, et ne peut donc pas bénéficier de façon cohérente de l'amplification générée par les électrons, capturés entre ces dernières.

Les électrons sont donc piégées à la vitesse acoustique

$$\frac{p_{eq}}{m} \approx \omega_p \lambda_D \approx \beta^{-\frac{1}{2}}.$$

Le champ initial peut provenir d'un électron supersonique, qui pour cette raison est mal écranté. Ce mécanisme n'est pas nouveau, c'est l'émission Cerenkov.

Néanmoins, comment est-il possible que des corrélations spatiales soient infinies alors que les corrélations temporelles sont finies, assurant par là même l'équilibre ? Ni l'analyse précédente, ni le hamiltonien eq. (4.12), ne tiennent compte de la variation de la pulsation naturelle du plasma du fait des électrons piégés

$$\tilde{\omega}_p \approx \omega_{tr} \propto \sqrt{\mathbf{E}}.$$

On peut en déduire l'estimation d'une longueur, qu'il faut associer à la taille typique d'un paquet d'ondes cohérentes

$$l_c \approx v_{ph} \omega_{tr}^{-1} \propto \eta^{-\frac{1}{2}} \lambda_D. \tag{2.32}$$

La vitesse de groupe, d'après la relation de Bohm et Gross eq. (1.36), est la vitesse du son. Elle est à peu près égale à celle du mode λ_D. La légère différence qui subsiste autorise les électrons à être transportés en bout de paquet, et être livrés au milieu. Ce sont ces variations de densité, sur une longueur caractéristique l_c, qui entretiennent les fluctuations de la pulsation naturelle, et par conséquent l'émission Cerenkov. Seuls des mécanismes dissipatifs extérieurs, comme des collisions avec des particules neutres par exemple, peuvent amortir en définitive l'onde générée.

2.4.2 Potentiel chimique

La nature thermodynamique du coefficient d'amortissement γ, dont nous avons eu un aperçu en eq. (1.56), se conçoit à partir de l'expression aca-

démique eq. (1.15), après quelques manipulations de sens physique. Soit

$$\gamma = \frac{\omega_p^3}{k^2} \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{\frac{\omega_p}{k}} \tag{2.33}$$

où la distribution est celle des vitesses vraies

$$v \equiv v(x(t), t).$$

Ainsi, écrivons

$$\left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{\frac{\omega_p}{k}} = \frac{\partial f(\frac{\omega_p}{k})}{\partial x} \left. \frac{dx}{dv} \right|_{\frac{\omega_p}{k}}. \tag{2.34}$$

Pour les particules du corps du plasma

$$\frac{dv}{dx} = \omega_p \tag{2.35}$$

et pour les particules piégées, dans le référentiel de la phase où l'on note $v \to v'$,

$$\left. \frac{dv'}{dx} \right|_{\frac{\omega_p}{k}} = \omega_{tr}.$$

De même, la variation de la densité des particules piégées est périodique, de période la longueur de l'onde en présence

$$\frac{\partial f(\frac{\omega_p}{k})}{\partial x} = k \hat{f}(\frac{\omega_p}{k}). \tag{2.36}$$

L'équation eq. (2.33) se récrit ainsi, en conbinant eq. (2.35) et eq. (2.36) dans eq. (2.34),

$$\gamma = \frac{\omega_p^2}{k} \hat{f}(\frac{\omega_p}{k}).$$

Par définition, $\hat{f}(\frac{\omega_p}{k}) = \eta g(\frac{\omega_p}{k})$ et par conservation du nombre de particules résonantes $\Delta v g(\frac{\omega_p}{k}) \approx 1$. Alors, on a

$$\gamma \approx \omega_p^2 \frac{\eta}{k \Delta v} \tag{2.37}$$

et en notant la largeur spectrale $\Delta\omega = k\Delta v \approx \omega_{tr}$, on obtient finalement

$$\gamma \approx \eta \omega_p^2 \omega_{tr}^{-1} = \omega_{tr}. \tag{2.38}$$

Ce résultat est thermodynamique. c'est-à-dire que le temps d'amortissement d'une onde est le même que le temps de diffusion des charges de coefficient

$$D = \gamma l_c^2 = \omega_p \lambda_D^2. \tag{2.39}$$

De fait, sans même avoir recours au détail de l'interaction, ce résultat pouvait être obtenu à partir de la loi d'Ohm. En effet, la dissipation quasi linéaire eq. (1.20) n'est autre que l'effet Joule

$$\partial_t \mathcal{E} = \sigma^{-1} j^2$$

où la densité d'énergie est deux fois la densité d'energie électrique, du fait de l'équipartition $\mathcal{E} = 2\mathcal{W} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E}^2 = n_b T$. Le courant est d'après la loi d'Ohm

$$j = \sigma \mathbf{E}$$

où σ est la conductivité. Alors eq. (1.20) est encore

$$\partial_t \epsilon_0 \mathbf{E}^2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \epsilon_0 \mathbf{E}^2$$

d'où on obtient, par définition de γ, une première relation

$$\gamma = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{2.40}$$

En remarquant que les charges sont piégées à la vitesse d'équilibre $\bar{v'}$, on peut écrire

$$j \approx -e n_b \bar{v'}. \tag{2.41}$$

L'équilibre entre la dissipation, par diffusion, et la force électrique fournit une vitesse d'équilibre

$$\bar{v'} = \frac{-e\mathbf{E}}{m\omega_{tr}}. \tag{2.42}$$

Par identification de la loi d'Ohm avec eq. (2.41), et en utilisant la dernière égalité, la conductivité est liée au temps diffusif

$$\omega_{tr} \approx \frac{n_b e^2}{\epsilon_0 m} \frac{\epsilon_0}{\sigma}. \tag{2.43}$$

Ainsi, la combinaison des deux relations eq. (2.40) et eq. (2.43) donne bien eq. (2.38). Il faut faire attention cependant à ne pas confondre $\bar{v'}$ avec v_{eq}. En effet, la loi d'Ohm doit s'appliquer dans le référentiel où la phase du champ $\mathbf{E}_k$ est stationnaire. Cette vitesse s'apparente plus à la correction de la dérive des charges dans ce référentiel, dont il faut prendre eq. (2.16) plutôt que eq. (2.14) pour en obtenir un bon scaling, comme on a déjà noté. Or, si on note $\bar{v'} = \frac{\bar{\omega}}{k}$, on a bien d'après eq. (2.42)

$$\bar{\omega}\omega_{tr} = -\frac{ek\mathbf{E}_k}{m} = \frac{e^2 n_k}{\epsilon_0 m} \approx \omega_{tr}^2.$$

Il a donc suffit de faire l'hypothèse, qui fait partie intégrante du problème posé, que les charges étaient résonantes (ou piégées à la vitesse de phase), pour être amené à identifier assez naturellement γ à la largeur spectrale $\Delta\omega = k\Delta v \approx \omega_{tr}$, eq. (2.38). Le phénomène n'est autre que la diffusion de particules dans un relief variable, de longueur de corrélation l_c. La relation d'Einstein eq. (2.44) permet alors d'identifier le potentiel chimique [7] μ_b du faisceau de charges à celui d'un gaz parfait $\mu_b = T \ln n_b$

$$D = \frac{\sigma}{e^2}\frac{\partial \mu_b}{\partial n_b} = \gamma \frac{\epsilon_0 m}{n_b e^2} T \tag{2.44}$$

car aussi $D\omega_{tr} = T$. On peut vérifier que $l_c^2 = \frac{\epsilon_0 m}{n_b e^2} T = \eta^{-1}\lambda_D^2$, eq. (2.32).

Cette analyse thermodynamique recèle cependant quelque imperfection, comme il a été déjà dit à propos de eq. (1.56). Je montre dans le paragraphe suivant une méthode explicite.

2.4.3 Susceptibilité quasi linéaire

Pour achever la démonstration de l'égalité des susceptibilités quasi linéaires, j'ai seulement besoin de l'hypothèse d'équipartition et de l'hypothèse du piégeage des charges.

Lénergie est pour $\eta \ll 1$

$$\sum_i^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}\epsilon_0 \int dk_j \ \mathbf{E}_j^2.$$

Considérer des charges piégées à la vitesse barycentrique v_{eq} revient à considérer une perturbation de charge de fréquence $\omega = k_j v_{eq}$, de type

$$-e\sum_i^N \delta(x_i - v_{eq}t).$$

7. En fait, la loi d'Ohm vaut à l'équilibre. Hors équilibre, comme ici, le courant comprend un terme de thermodiffusion

$$j = \sigma\mathbf{E} + eD\nabla n$$

car, pour une maxwellienne locale, le potentiel électrochimique est

$$\mu_b = e\Phi + T\ln n_b.$$

À l'état stationnaire, le courant est nul, c'est-à-dire que moyenné sur l'échange d'un grand nombre de charges entre puits de potentiel électrique, le potentiel électrochimique devient uniforme (équipartition)

$$\nabla\mu_b = 0.$$

D'où A. Einstein a déduit sa relation eq. (2.44).

La constante diéléctrique est alors modifiée de la sorte

$$\epsilon' = \epsilon_0(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})$$

ce qui reste valable tant que $\eta \to 0$ [76]. On se place alors dans la situation académique qui impose $v_{eq} \approx v_{\phi M} \gg \beta^{-\frac{1}{2}}$ par hypothèse, c'est-à-dire qui impose un petit nombre de modes $k_M \ll \lambda_D^{-1}$. L'énergie s'écrit encore dans le référentiel barycentrique

$$\sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2}\int dk_j \ \epsilon'_j \left|E_j\right|^2 .$$

L'équipartition stipule alors que (L est la taille du système)

$$L\frac{\mathbf{E}_j^2}{2} = \frac{T}{2\epsilon'_j} = \frac{T}{2}\frac{k_j^2 v_{eq}^2}{k_j^2 v_{eq}^2 - \omega_p^2}. \tag{2.45}$$

Ceci signifie bien la prédominance du mode [8] $k_M = \frac{\omega_p}{v_{eq}}$.

Nous pouvons maintenant comprendre l'expression des effets renormalisés du couplage sur la pulsation. Nous avons eq. (1.54)

$$\delta\omega + i\gamma = \sum_f \frac{1}{\omega_p - \omega_f}\left|V_{pf}\right|^2$$

8. Le spectre est en effet la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du champ électrique, qu'on note

$$\mathcal{C}(l) = \langle \mathbf{E}(x)\mathbf{E}(x+l)\rangle .$$

c'est-à-dire ici d'après eq. (2.45)

$$\int dl \ e^{ikl}\mathcal{C}(l) = b\frac{k^2}{k^2 - a^2} \tag{2.46}$$

avec $a = \frac{\omega_p}{v_{eq}}$ et $b = \frac{2mT}{L}$. On peut écrire eq. (2.46) astucieusement avec une distribution de Dirac, pour faire apparaître la transformée de Fourier d'une équation différentielle

$$\int dx \ e^{ikx}\mathcal{C}(x)(1 - \frac{a^2}{k^2}) = b\int dx \ e^{ikx}\delta(x).$$

L'équation que vérifie alors la primitive seconde de $\mathcal{C}^{(-2)}(x)$ est de la forme

$$\triangle\mathcal{C}^{(-2)} + a^2\mathcal{C}^{(-2)} = b\delta$$

dont la solution est sinusoïdale de fréquence

$$k_M = \pm\sqrt{a^2} = \pm\frac{\omega_p}{v_{eq}}. \tag{2.47}$$

On trouve le même résultat avec eq. (2.13) $\psi_k \approx \frac{T}{N(\omega_p - k\ v_{eq})}$, car $\mathcal{C}$ vérifie alors $\left(v_{eq}\frac{\partial}{\partial x} + i\ \omega_p\right)\mathcal{C}(x) \propto\ i\ \delta(x)$

qui peut s'écrire perturbativement en fonction de la susceptibilité

$$\delta\omega + i\gamma = -i\epsilon_0 \frac{\chi}{\frac{\partial}{\partial\omega}\epsilon\big|_{\omega_p}}. \tag{2.48}$$

Dans la théorie de A. Vlasov, χ_V s'écrit ainsi

$$\chi_V(k,\omega) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m}\frac{1}{k^2}\int dv\ \frac{k}{kv-\omega}\frac{\partial}{\partial v}g(v). \tag{2.49}$$

Partant de l'équation fluide eq. (1.47)

$$i\frac{\partial}{\partial t}\tilde{n} = \left(\bar{\omega_p} + \mathcal{V}\right)\tilde{n}$$

où

$$\mathcal{V} = \frac{\bar{\omega_p}}{\bar{n}}\tilde{n}$$

on a en séparant les échelles temporelles rapide et lente $\tilde{n} = \tilde{n}(t)e^{-i\bar{\omega}_p t}$, et pour des conditions initiales évanescente en $t = -\infty$,

$$\delta\left\langle\tilde{n}(t)\right\rangle = \int_{-\infty}^{t} ds\ e^{i\bar{\omega_p}t}\left\langle\tilde{n}(t)\mathcal{V}(s)\right\rangle = \frac{\bar{\omega}_p}{\bar{n}}\int_{-\infty}^{t} ds\ e^{i\bar{\omega_p}(t-s)}\left\langle\tilde{n}(t)\tilde{n}(s)\right\rangle.$$

On arrive au théorème de fluctuation-dissipation

$$\chi_r(k,\bar{\omega}_p) = \int d\nu\ S(k,\nu)\frac{1}{\nu-\bar{\omega}_p} \tag{2.50}$$

par usage de $S(k,\nu)$, densité spectrale des fluctuations $\tilde{n}$. La susceptibilité χ est définie ici, soit par la relation

$$\delta\left\langle\tilde{n}\right\rangle = \frac{\epsilon_0 k^2}{e^2}\chi(k,\bar{\omega}_p)e\Phi(k,\bar{\omega}_p)e^{-i\bar{\omega}_p t} \tag{2.51}$$

soit par la relation

$$\delta\left\langle\tilde{n}\right\rangle = \chi_r(k,\bar{\omega}_p)\frac{\bar{\omega}_p}{\bar{n}}e^{-i\bar{\omega}_p t} \tag{2.52}$$

car le champ conjugué de $\tilde{n}(t)$ pour l'équation de Schrödinger eq. (1.47) est

$$\frac{\mathcal{V}}{\tilde{n}(t)} = \frac{\bar{\omega}_p}{\bar{n}}e^{-i\bar{\omega}_p t}.$$

Le rapport de normalisation entre ces deux définitions équivalentes eq. (2.51) et eq. (2.52) est donc

$$\frac{\chi_r}{\chi} = \frac{\epsilon_0 k^2}{e^2}\frac{\bar{n}}{\bar{\omega}_p}e\Phi(k,\bar{\omega}_p).$$

Vérifions maintenant que les deux expressions eq. (2.49) appliquée à $\omega =$

ω_p, et eq. (2.52) coïncident. Pour des conditions initiales évanescentes, nous avons vu que la conservation impose que $\omega_p \langle \psi_M \rangle = \frac{1}{2}\eta T$, eq. (2.15), i.e.

$$en_b\Phi(k_M, \bar{\omega}_p) = n_b \frac{T}{2}. \tag{2.53}$$

De plus, pour une fréquence ν quelconque, mais relativement proche de $\bar{\omega}_p$,

$$S(k,\nu) = \frac{k^2\epsilon_0^2}{e^2} \left|\mathbf{E}_{k,\nu}\right|^2. \tag{2.54}$$

On peut ainsi changer de variable, sachant que la distribution du faisceau n'est définie que sur une bande $k_M \Delta v \approx \omega_{tr}$ autour de $\bar{v_{eq}}$,

$$'\,\nu = k_M {v_{eq}}'. \tag{2.55}$$

On écrira $k_M v_{eq} \equiv kv$. Reportons eq. (2.53) et eq. (2.54) dans l'expression de χ_r eq. (2.50)

$$\begin{aligned} \chi_r &= \int d\,(kv)\ \ S(k,kv) \tfrac{1}{kv-\bar{\omega}_p} \\ &= \tfrac{k^2\epsilon_0^2}{e^2} \int d\,(kv)\ \ \left|E_{k,kv}\right|^2 \tfrac{1}{kv-\bar{\omega}_p} \quad . \\ &= -\tfrac{k^2\epsilon_0}{Ne^2} \tfrac{mT}{2} \bar{\omega}_p \int d\,(kv)\ \ \tfrac{n_b(kv)}{(kv-\bar{\omega}_p)^2} \end{aligned}$$

La densité de particule $n_b(kv)$ vient de la normalisation $\omega_p\psi_k = \frac{1}{n_b(\omega_p)}\epsilon_0\mathbf{E}_k^2$. En intégrant par partie, avec $\frac{\partial}{\partial kv} n_b(kv) = \frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial v} n_b(v)$ car $n(kv)d(kv) = n(v)dv$, on arrive à

$$\chi_r = \frac{\epsilon_0 m}{Ne^2}\frac{T}{2}\bar{\omega}_p \int dv\ \frac{k}{kv-\bar{\omega}_p}\frac{\partial}{\partial v} n_b(v).$$

La normalisation impose ici d'écrire $n_b = Ng$. On a bien alors

$$\chi = \chi_V(k, \omega_p)$$

soit

$$\frac{\bar{\omega}_p}{\bar{n}}\frac{e^2}{k^2\epsilon_0 m}\chi_r = \frac{T}{2}\frac{e^2}{\epsilon_0 m}\frac{1}{k^2}\int dv\ \frac{k}{kv-\bar{\omega}_p}\frac{\partial}{\partial v} g. \tag{2.56}$$

Pourquoi obtenons-nous, à partir du théorème de fluctuation-dissipation valable aux temps asymptotiques, la dérivée en vitesse de la distribution comme dans la théorie de A. Vlasov, cela alors que nous avons pris garde de noter que sa validité résidait aux temps plus petits que γ^{-1} ? Tout simplement, parce que dans le changement de variable $'\omega = kv'$, les trajectoires des particules ont été supposées implicitement rectilignes.

Annexe A : Calcul canonique de l'équilibre pour tout $\eta \leq 1$.

L'énergie libre est

$$g(\beta,\sigma,\psi,\theta) = \sum_j^M \psi_j \left(\omega_0 - \sigma k_j + \frac{1}{2} k_j \left(\sum_i^M k_i \psi_i \right) \right) - \beta^{-1} \ln I(\beta,\psi,\theta)$$

où

$$I(\beta,\psi,\theta) = \frac{1}{L} \int_0^L dx_l \ \exp\left(\beta \sqrt{2\eta\omega_0^3} \sum_j^M \frac{\sqrt{\psi_j}}{k_j} \cos(k_j x_l - \theta_j) \right)$$

Lorsqe g a son minimum à l'intérieur du domaine $(\psi,\ \theta)$, on peut appliquer la méthode du col pour estimer la valeur d'équilibre de ψ.

Dans un premier temps, on peut également estimer I avec la méthode du col. Le maximum de l'exposant est atteint avec dérivée nulle pour $k_j x_l^* = \theta_j^* \ \ mod\ 2\pi$. La partie d'interaction se réduit alors à

$$\beta^{-1} \ln I(\beta,\psi) \approx \sqrt{2\eta\omega_0^3} \sum_j^M \frac{\sqrt{\psi_j}}{k_j}$$

Le minimum $\frac{\partial}{\partial \psi_k} g = 0$ a lieu lorsque

$$\frac{\omega_p}{k_k} - \sigma + \sum_j^M k_j \psi_j = \frac{\omega_p^2}{k_k^2} \sqrt{\frac{\eta}{2\omega_p \psi_k}}$$

ce qui se traduit par la relation (2.11). Comme indiqué plus haut, cela n'est pas propable, ne serait-ce seulement que la phase $k_j x_l^* = \theta_j^*\ ;\ \forall\,(j,l)$ signifie un piegeage général.

Par contre, il est correcte de développer l'exponentielle en série entière de rayon infini. En résolvant par itération à chaque ordre, il apparaît en fait une série de Taylor en puissance de $\psi \sim O(N^{-1})$, autorisant à ne retenir que les premiers termes.

Tous les produits impairs sont nuls une fois sommés, par exemple : $\frac{1}{L}\int dx\ \ \cos(k_j x - \theta_j) = 0$; $\frac{1}{L}\int dx\ \ \Pi_i^3 \cos(k_{j_i} x - \theta_{j_i}) \neq 0$ **ssi** $\left\{ \begin{array}{rcl} k_j &=& k_i + k_k \\ \theta_j &=& \theta_i + \theta_k \end{array} \right.$, ou $\left\{ \begin{array}{rcl} k_j &=& k_i - k_k \\ \theta_j &=& \theta_i - \theta_k \end{array} \right.$, ou $\left\{ \begin{array}{rcl} k_j &=& k_k - k_i \\ \theta_j &=& \theta_k - \theta_i \end{array} \right.$, ce qui n'est en général pas réalisé. Les termes pairs sont de même, avec un terme de moyenne un demi au premier ordre, trois termes de moyenne un huitième au deuxième

ordre, etc , soit

$$1+\frac{\beta\eta\omega_0^3}{2}\sum_j^M\frac{\psi_j}{k_j^2}+\frac{\beta^2\eta^2\omega_0^6}{16}\sum_{i,j}^M\frac{\psi_i\psi_j}{k_i^2k_j^2}+...$$

Supposons un instant que cette série est un développement limité en puissance de ψ. L'énergie s'écrit alors

$$g(\beta,\sigma,\psi,\theta)\approx\sum_j^M\psi_j\left(\omega_0-\sigma k_j+\frac{1}{2}k_j\left(\sum_i^M k_i\psi_i\right)-\eta\beta\frac{\omega_0^3}{2k_j^2}\right) \tag{2.57}$$

Considérons le cas $M=1$, notons $\omega_0-\sigma k_j-\eta\beta\frac{\omega_0^3}{2k_j^2}\equiv a_j$. On peut décomposer $g=\left(a+k^2\psi^*\right)\psi+k^2\left(\frac{1}{2}\psi-\psi^*\right)\psi$, où ψ^* est un parametre. La fonction de partition est ainsi

$$Z=\int d\psi\exp\left(-\beta N\left(a+k^2\psi^*\right)\psi\right)\exp\left(-\beta Nk^2\left(\frac{1}{2}\psi-\psi^*\right)\psi\right)$$

et cette forme permet d'appliquer la méthode du col. Par consistance on doit prendre $\psi^*=\langle\psi\rangle$.

On a pour $a<0$, $\psi^*=-\frac{a}{k^2}$.

Pour $a>0$,

$$\begin{aligned}Z &\approx \exp\left(\frac{1}{2}\beta Nk^2\psi^*\right)\int_{\psi^*-\epsilon_N}^{\psi^*+\epsilon_N}\psi\exp\left(-\beta N\left(a+k^2\psi^*\right)\psi\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\beta Nk^2\left(\psi-\psi^*\right)^2\right)\\ &\approx \exp\left(-\beta N\left(a+\frac{1}{2}k^2\psi^*\right)\psi^*\right)\frac{(\beta N)^{-1}}{\left(a+k^2\psi^*\right)}\end{aligned}$$

soit

$$\psi^*=\frac{(\beta N)^{-1}}{\left(a+k^2\psi^*\right)}$$

En généralisant à $M>1$, on décompose ainsi
$g=\sum_j\left(a_j+k_j^2\psi_j^*+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}k_i\psi_i\right)\psi_j+k_j^2\left(\frac{1}{2}\psi_j-\psi_j^*\right)\psi_j$. Cherchant la moyenne de ψ_j, lorsque $a_j>0$, $\forall j$; on otient aprés intégration sur ψ_j

$$\begin{aligned}\psi_j^*= \ & \tfrac{1}{Z}\int\Pi_{i\neq j}d\psi_i \quad\left\{e^{-\beta N\sum_{i\neq j}\left(a_i+k_i^2\psi_i^*+\frac{1}{2}\sum_{k\neq i,j}k_k\psi_k\right)\psi_i}e^{-\beta Nk_i^2\left(\frac{1}{2}\psi_i-\psi_i^*\right)\psi_i}\ \times\right.\\ &\left.\frac{1}{\left(a_j+k_j\left(k_j\psi^*+\sum_{i\neq j}k_i\psi_i\right)\right)}e^{-\beta N\left(a_j+\frac{1}{2}k_j^2\psi_j^*+\frac{1}{2}k_j\sum_{i\neq j}k_i\psi_i\right)\psi_j^*}\right\}\end{aligned}$$

soit

$$\psi_j^*=\frac{(\beta N)^{-1}}{\left(a_j+k_j\left(\sum_i k_i\psi_i^*\right)\right)} \tag{2.58}$$

La loi d'échelles $\psi\sim O(N^{-1})$ assure la validité du développement pour N

assez grand qu'on a fait en (2.57). Lorsque $a_j < 0$, $\forall j \leq j_0$, le minimum absolu n'existe pas. Seulement partiellement, sur une direction $j*$, c'est possible, donnant $\psi^*_{j*} = -\frac{a_{j*}}{k^2_{j*}} - \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \frac{k_j}{k_{j*}}\psi^*_j$, ce qu'on obtient aprés intégration sur tous les autres ψ_j, eux-même suivant la loi (2.58).

Ces résultats sont dérivables dans l'ensemble (grand-)canonique avec contraintes, où la maxwellienne généralisée est $\sim e^{-\beta H}e^{-\Lambda p}$, β est l'inverse de la température, Λ est $N\beta p_{eq}$. Ici, p_{eq} serait supposé connu d'emblée et ne pas dépendre de ψ_j, ce qui n'est pas a priori évident, et c'est essentiellement pour cette raison que le calcul est plus aisé pour un nombre de mode fini.

La signification physique est celle du développement du Viriel de l'énergie libre du gaz parfait dans le référentiel au repos [66], avec ici η comme petit paramètre *a priori*, de couplage. Il est interessant de constater qu'il reste valide au delà, pour $\eta \to 1$. Dans cette limite, il suffit de remplacer dans le terme d'interaction $\frac{\omega_p}{2}$ par $\left(\frac{\partial}{\partial\omega}\epsilon(k_j,\omega_j)\right)^{-1}$.

Conclusion

Dans cette section, je crois avoir prouvé explicitement la nature thermodynamique de “l’amortissement Landau”. Quant à l’instabilité, nous en avons donné une phénoménologie plausible, qui la lie à l’amortissement des modes de grandes longueurs d’onde, ce qui explique sans formalisme l’égalité des taux.

Il en résulte un aspect pratique important. Dans l’hypothèse de l’équilibre thermodynamique local, non seulement l’équation de Vlasov n’est pas correcte au delà du temps d’équilibration, mais les équations de conservations (fluides) suffisent à rendre compte tout à fait de ces deux phénomènes, qui résultent des couplages électrochimiques. Mathématiquement, il ne fallait pas confondre la résolution linéaire de l’équation de Vlasov avec l’absence de couplages, puisque le champ moyen de force y est présent, tout au contraire y voir la résolution quasi linéaire, à l’ordre zéro, du système d’équations de conservations. Par exemple, tous les efforts entrepris pour coder les équations de Vlasov-Poisson sont vains, et n’engendreront que des redondances de calculs par les calculateurs, par rapport à de bien moins coûteuses simulations fluides, dont les forces sont bien choisies (pire encore, si la distribution n’est pas contrainte de rester à l’équilibre). Toujours dans l’hypothèse que l’équilibre local soit atteint, un plasma non collisionnel devrait donc présenter une diffusion de ces charges, de coefficient $D = \gamma l_c^2 = \omega_p \lambda_D^2 = \frac{T}{m\omega_p}$.

Toutefois, la prédominance d’un mode dont la longueur d’onde est de l’ordre de la longueur d’écrantage fournit une forte présomption que l’équilibre n’est pas atteint. Toute équation cinétique, dont le terme collisionnel ferait tendre vers l’équilibre maxwellien, qui permette donc aussi de justifier l’hypothèse hydrodynamique, comme l’équation de Balescu-Lénard, est donc suspectée d’avoir à être invalidée.

Discussion sur la criticalité

S. Ichimaru et al. [55] notent que les fluctuations sont critiques près du seuil de l'instabilité onde-particules. Le seuil d'apparition est fonction de la vitesse de dérive des électrons et du mode considéré (figure fig. (1)). Le spectre [9]

$$S(k,\omega) = \frac{S_0(k,\omega)}{|\epsilon(k,\omega)|^2}$$

et donc la susceptibilité divergent, pour ce mode $\Re\left(\epsilon(k,\omega(k))\right) = 0$, marginalement stable $\Im\left(\epsilon(k,\omega(k))\right) = 0$. Avec l'expression de la constante diélectrique eq. (2.21) et pour les modes [10] de Bohm et Gross $\omega(k) \approx \omega_p(1 + \frac{k^2\lambda_D^2}{2})$ ($\Re\left(\epsilon(k,\omega(k))\right) = 0$ dans les conditions eq. (2.22)) on a, après intégration sur les fréquences $\omega \approx \omega(k)$, le facteur de structure

$$S(k) \propto \left(v_{ph} - v_d + v_{ph}\frac{k^2\lambda_D^2}{2}\right)^{-1}.$$

Celui-ci évolue jusqu'à ce que la vitesse de dérive des électrons v_d atteignent v_{eq}. Alors d'après eq. (2.14) et pour $\beta v_{ph}^2 \approx 1$, ce spectre correspond à une énergie libre effective

$$\Delta F = \int dx \left((\nabla n)^2 \pm \eta\lambda_D^{-2}n^2 + u_0 n^4\right). \tag{2.59}$$

Le signe $-$ correspond à l'instabilité, et $u_0 \approx \frac{\bar{n}e^2}{\sigma - v_{ph}}$ d'après eq. (2.15) et d'après l'équation de Poisson pour $\lambda_D^2 k^2 \approx 1$. Cette énergie libre est bien celle associée au potentiel chimique μ_b, car de l'expression

$$\mathcal{F} = \int dx\ \mu_b n_b = Ne\Phi + NT\ln N$$

l'énergie des fluctuations s'écrit, avec l'équation de Poisson d'une part et par un développement du logarithme d'autre part ($N = N_b + \delta N$),

$$\Delta\mathcal{F} = \sum_k \frac{e^2}{\epsilon_0 m}k^{-2}\left|\hat{n}_k\right|^2 + \frac{T}{n_b}\left|\hat{n}_k\right|^2.$$

Nous reconnaissons le même spectre d'équipartition, où nous retrouvons la longueur de corrélations des fluctuations, autour de l'équilibre eq. (2.15) $\bar{n}^2 = \frac{\eta\lambda_D^{-2}}{u_0}$,

$$l_c = \eta^{-\frac{1}{2}}\lambda_D.$$

9. Le spectre est obtenu à partir du spectre dans le vide, avec les charges "habillées" de la constante diélectrique (du nuage de Debye dans le cas statique, par exemple).

10. On peut ajouter la partie imaginaire $-ik\beta^{-\frac{1}{2}}$.

Il est clair que la limite qui devrait être la limite de validité de la réponse linéaire eq. (2.3)

$$\eta \to 0$$

correspond à un point critique, qui invalide l'hypothèse initiale.

Cela étant, lorsque $\eta \neq 0$, la densité n étant une grandeur fluctuante, le théorème de Goldstone s'applique. Il faut s'attendre alors dans la phase ordonnée, pour ce cas en une dimension, à la présence de fluctuations désordonnées de la phase, d'après le théorème de Mermin et Wagner [71], qui détruisent l'ordre initial. On argumentera néanmoins à la partie III, section (5.5), que les corrélations demeurent infinies.

Il faut ajouter, que la densité de charge électronique est liée, d'après l'équation de Poisson, au champ électrique $\mathbf{E}$, qui a trois composantes, et dont nous n'avons considéré jusqu'ici que la composante parallèle. Les fluctuations de sa composante perpendiculaire résultent d'une autre dynamique plus lente, qui est présentée en partie II, et dans ce cas aussi, on verra qu'elles peuvent devenir critiques.

Il faut donc retenir à ce stade que, l'équilibre privilégiant le mode critique k_c, par la nature des fluctuations critiques qui se développent alors, l'équilibre ne devrait pas être garanti. Comment inclure dans la théorie de tels phénomènes ?

Toute l'énergie suprathermique se condenserait donc à l'échelle de coupure de la description du plasma, sous forme cohérente, si l'équilibre était vrai. Or, l'équilibre permet de justifier la séparation d'échelles avec $l_c \approx \lambda_D$. Cela suggère que le terme des corrélations, entre les particules 1 et 2, noté $G^{(2)}(1,2)$ dans l'équation de Liouville, ne peut être négligé à aucune échelle caractéristique. La situation paraît donc plus proche de celle rencontrée dans les systèmes gravitationnels, qui ne bénéficient pas de la notion d'écrantage. Nous pouvons écrire ce qu'implique une telle hypothèse

$$\left(\partial_t + \mathcal{L}_1\right) F^{(1)}(1;t) = \int d2\ \mathcal{V}_{12} \left(1 + \frac{G^{(2)}(1,2;t)}{F^{(1)}(1;t)F^{(1)}(2;t)}\right) F^{(1)}(1;t)F^{(1)}(2;t).$$

L'opérateur $\mathcal{L}_1$ est linéaire, et en l'absence de forces extérieures correspond à l'advection $\mathcal{L}_1 = v_1\partial_{x_1}$. L'opérateur $\mathcal{V}_{12}$ provient de l'interaction $\mathcal{V}_{12} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m}\partial_{v_1}$. Le terme de corrélation $G^{(2)}(1,2;t)$ pourrait provoquer un écrantage dépendant du temps, et, du fait des longues corrélations, être de nature auto-similaire contrairement à l'hypothèse de markovianisation [7]. Il n'y a pas eu d'étude de cet aspect qui me paraît fondamental, jusqu'à aujourd'hui à ma connaissance. Formellement au moins, cela

suggère peut être de modéliser le plasma par une équation cinétique, sur $F^{(1)}(1;t)$ ou au sens thermodynamique sur $n(t)$, dont le coefficient (ou l'opérateur) soit stochastique.

À la partie III, j'étudierai les conséquences d'une telle hypothèse. En particulier, la première problématique résidera dans la détermination des propriétés statistiques de ce coefficient et d'en déduire celle des fluctuations.

Deuxième partie

Phénoménologie de la dynamique critique perpendiculaire au champ magnétique

Introduction

Dans cette partie, je traite de la phénoménologie des fluctuations de densité d'un plasma fortement magnétisé, dans la direction perpendiculaire au champ magnétique. Le premier chapitre revoit la dérivation du modèle de l'instabilité d'échange. C'est une instabilité thermodynamique, issue de la libération d'énergie libre dans l'échange de deux tubes de flux magnétiques, lorsque le champ magnétique et la pression sont inhomogènes. Le modèle peut se comprendre comme la prise en compte d'inhomogénéités spatiales du champ magnétique à partir du modèle d'Hasegawa et Mima [47], qui décrit à plus petite échelle la présence d'ondes de dérive. L'inhomogénéité provoque une instabilité qui génère ces ondes. Aussi, à l'échelle des inhomogénéités, la dynamique de ces ondes est fortement altérée. L'essentiel du mécanisme de génération peut se comprendre comme la dynamique de particules fluides ayant la vitesse de dérive électrique, couplée à la conservation de matière. Le paramètre pertinent est dans ce langage, l'analogue d'une friction (dont l'origine est le courant de dépolarisation, nécessaire à la formation d'une gaine lorsque le champ magnétique intercèpte un conducteur). Cette approche mécanique s'avère utile pour extraire la phénoménologie, comme je le souligne au second chapitre. Dans la limite non dissipative, il y a séparation d'échelles et le système est ordonné. Lorsque la friction augmente, la condition de séparabilité d'échelles est rompue au delà d'un seuil. Le système présente alors un désordre, et le seuil ressemble fort à une transition de phase du second ordre. À la différence que, toujours très au delà du seuil, les propriétés critiques sont conservées (fluctuations larges, corrélations longues ...etc). Pour explorer ce relatif désordre (ou quasi-ordre), l'approche mécanique autorise une analogie avec un modèle dynamique de (pseudo) tas de sable, à l'état instable. Quoique semblable, il est bien plus réaliste qu'un modèle *running sand pile*, car il y intègre une dynamique locale. L'analogie déjà proposée de façon heuristique du tas de sable avec un plasma magnétisé [31, 77], est donc fondée phénoménologiquement. Du fait des caractéristiques d'un tas de sable, c'est une preuve que le plasma de bord d'un Tokamak par exemple, exhibe un transport

anormal de matière. Les résultats expérimentaux vont tout à fait dans ce sens [34, 33]. Je poursuis l'analyse par une discussion sur l'angle d'avalanche, absent d'un modèle sans dynamique. Celui-ci est l'analogue du gradient sur-critique trouvé au bord des Tokamak. Je montre qu'il peut se comprendre comme la signature de multiples transitions du premier ordre, des fronts formant la phase 'liquide' et des plateaux la phase 'gazeuse'. Cependant, ces phases ne sont pas stables, car aucun paramètre comme la température effective, en réalité de nature intrinsèque, ne peut être fixé : il existe des cycles intermittents de 'liquéfaction' et 'd'évaporation' qui parcourent, dans l'espace des phases, l'aire entre la courbe de rosée et la courbe spinodale, en repassant sans cesse par le point critique. Ce sont ces cycles intermittents qui se traduisent par des fluctuations, de corrélations longues. Cet aspect, donne un éclairage nouveau sur la notion de criticalité auto-organisée, ainsi que, à ma connaissance, sur l'hystéresis de la dynamique entre les angles de repos et d'avalanche. En augmentant encore la friction, une nouvelle transition a lieu cette fois vers une phase totalement dissipative, c'est-à-dire totalement désordonnée (évoquant en cela la transition de V. L. Bérézinski, J. M. Kosterlitz et D. J. Thouless, c.f. [9, 63] et reproductions dans [57]).

Chapitre 3

Le modèle d'instabilité d'échange

Un plasma est un milieu diélectrique facilement polarisable. Cette propriété est à l'origine d'une forme de la loi de Lenz qui se manifeste lorsqu'il est baigné par un champ magnétique inhomogène. Le plasma cherche à atténuer un courant, qui prend naissance à cause d'une fluctuation locale de la charge et d'une dérive polaire, que subissent les particules chargées dans le plasma magnétisé. La dérive résulte de l'équilibre entre la force de Lorentz et la force de pression magnétique. La réaction est stabilisante ou déstabilisante, selon le sens du gradient de pression. Dans ce chapitre, je reformule le modèle de cette instabilité comme la dynamique d'un fluide neutre dans un champ de pression, subissant une force de friction.

3.1 Dérive électrique

3.1.1 Trajectoire de particules chargées dans un champ magnétique uniforme

L'application d'une force, par exemple électrique, se combine au mouvement de rotation autour du champ magnétique et fait dériver la particule chargée. En présence d'un champ magnétique B_0 et d'un champ électrique E statiques et uniformes, l'équation du mouvement d'une particule chargée non-relativiste de masse m et de charge q s'écrit

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 + \frac{q}{m}\mathbf{E}. \tag{3.1}$$

La force de Lorentz est perpendiculaire à l'axe magnétique. Il est commode de passer en notation complexe. Soient

$$\underline{v}_\perp = \frac{d\underline{X}}{dt} = v_x + iv_y$$

la vitesse de la particule et

$$\underline{E}_\perp = E_x + iE_y$$

le champ électrique, décomposés dans les deux dimensions perpendiculaires au champ magnétique statique et uniforme B_0. Soit

$$\omega_c = \frac{qB_0}{m}, \tag{3.2}$$

la fréquence cyclotronique. L'équation du mouvement est alors

$$\frac{d\underline{v}_\perp}{dt} = \frac{q}{m}\underline{E}_\perp - i\omega_c\underline{v}_\perp, \tag{3.3}$$

qui s'intègre selon

$$\underline{v}_\perp(t) = \underline{v}_\perp(0)\exp\left(-i\omega_c t\right) + \frac{q\underline{E}_\perp}{im\omega_c}\left[1 - \exp\left(-i\omega_c t\right)\right].$$

En moyenne sur une rotation cyclotronique, la particule dérive à la vitesse

$$\underline{v}_E = \langle\underline{v}_\perp\rangle_t = -i\frac{q\underline{E}_\perp}{m\omega_c}. \tag{3.4}$$

La force de Lorentz a converti la force électrique en accélérations et décélérations qui déforment la rotation dans le sens de la dérive ambipolaire

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}_0}{B_0^2}. \tag{3.5}$$

On remarque que, bien qu'elle ne travaille pas, la force de Lorentz agit comme une force de friction dans l'espace complexe. L'origine de cette propriété étonnante est la covariance de l'électrodynamique : cela traduit la transformation du champ électromagnétique dans le réferentiel de la particule. Dans le cas non relativiste,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}$$
$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}$$

il y a donc dérive uniforme s'il existe un référentiel où $\mathbf{E}' = 0$, c'est-à-dire qu'on retrouve $\mathbf{v}_E$ [1].

Notons $v_\perp = |\underline{v}_\perp|$, le rayon de la giration est le rayon de Larmor

$$\rho_L = \frac{v_\perp^2}{\omega_c}. \tag{3.6}$$

Considérons maintenant une population de particules chargées identiques. La température perpendiculaire est définie comme leur énergie cinétique perpendiculaire, avant l'application du champ $\mathbf{E}$

$$2k_B T = m v_\perp^2(0)$$

et pendant la dérive

$$\underline{v}_\perp = \underline{v}_\perp(0) + \underline{v}_E.$$

En champ magnétique fort, $\left(\frac{E}{B_0}\right)^2 \ll \frac{k_B T}{m}$,

$$v_\perp \approx v_\perp(0) = 2\frac{k_B T}{m}. \tag{3.7}$$

On prendra la température comme unité d'énergie en prenant désormais la constante de Boltzmann égale à $k_B \equiv 1$. On a alors

$$\rho_L = \sqrt{\frac{2mT}{q^2 B_0^2}}.$$

3.1.2 Représentation fluide

Un plasma idéal est caractérisé par une énergie cinétique très supérieure à l'énergie de liaison coulombienne

$$n^{\frac{1}{3}} \frac{e^2}{\epsilon_0} \ll T$$

où n est la densité de l'espèce chargée. Cela confère deux propriétés spécifiques : la première est qu'un plasma idéal est quasiment non collisionnel. Le plasma semble se comporter comme un gaz parfait dans cette limite idéale (bien que nous ayons aperçu qu'elle risquait de n'être pas valable, à la partie I). La seconde est son aspect continu. En effet, de la relation précédente découle que sa densité est élevée dans un volume élémentaire :

1. Si la force $\mathbf{F}$ est d'une autre nature, la dérive est alors $\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{F}\times\mathbf{B}_0}{qB_0^2}$. Dans ce référentiel $q\mathbf{E}' = -\mathbf{F}$.

la sphère de Debye, caractéristique de la quasi neutralité,

$$n\lambda_D^3 \gg 1$$

où la longueur de Debye est

$$\lambda_D^2 = \frac{\epsilon_0 T}{ne^2} = \frac{T}{m\omega_p^2}, \tag{3.8}$$

Dans un Tokamak, la température peut atteindre

$$T \approx 10keV$$

et la densité est en général

$$n \approx 10^{19} cm^{-3}.$$

Alors la longueur de Debye est très courte

$$\lambda_d \approx 10^{-7} m.$$

Le champ magnétique est de l'ordre du tesla

$$\mathbf{B}_0 \sim 1T$$

le rayon de Larmor est donc de l'ordre du dixième de millimètre

$$\rho_L \approx 10^{-4} m.$$

La pulsation naturelle du plasma est issue de la dynamique eq. (3.1) couplée à l'équation de Poisson eq. (3.18)

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m}. \tag{3.9}$$

Dans les mêmes conditions, la fréquence plasma est très grande devant la fréquence cyclotron

$$\omega_p \gg \omega_c$$

pour des densités plus élevées que le vide spatiale de la ionosphère

$$n \gg 10^{13} cm^{-3}.$$

3.1.3 Polarisation et dérive

Le résultat précédent eq. (3.4) n'est exacte qu'en champ statique $\omega = 0$. La solution exacte dans un champ $\underline{E}_\perp = E_0 e^{-i\omega t}$ est la somme des contributions possibles, à ω_c, à $\omega = 0$ et résonante avec $\underline{E}_\perp$ (mode propre ω),

$$\underline{v}_\perp = \underline{v}_\perp(0)e^{-i\omega_c t} - i\frac{q}{m}\frac{1}{\omega_c - \omega}E_0\left(e^{-i\omega t} - e^{-i\omega_c t}\right)$$

où l'on reconnaît après moyenne sur une giration, une oscillation de la dérive électrique

$$\underline{v}_E = -i\frac{q}{m}\frac{\omega_c}{\omega_c^2 - \omega^2}\underline{E}_\perp$$

plus une dérive dite de polarisation ($\partial_t \underline{E}_\perp = -i\omega\underline{E}_\perp$)

$$\mathbf{v}_P = \frac{q}{m}\frac{1}{\omega_c^2 - \omega^2}\partial_t \mathbf{E}. \tag{3.10}$$

Si l'on prend en compte une variation du champ basse fréquence, $\frac{\omega}{\omega_c} \ll 1$ est un petit paramètre, auquel cas la dérive est [2]

$$\mathbf{v}_P = \frac{q}{m\omega_c^2}\partial_t \mathbf{E} = \frac{1}{\omega_c B_0}\partial_t \mathbf{E}. \tag{3.12}$$

La permittivité effective

$$\epsilon = \epsilon_0\left(1 + \chi\right)$$

est différente de celle du vide à cause de la déformation du mouvement cyclotronique qui polarise le plasma. On définit la susceptibilité statique χ par la polarisation

$$qn\underline{\delta X} = \epsilon_0 \chi \underline{E}_\perp.$$

où

$$\underline{\delta X} = \underline{X} - \rho_L e^{-i\omega_c t}.$$

D'aprés eq. (3.3), l'amplitude des oscillations est

$$\underline{\delta X} = \frac{q}{m\omega\left(\omega_c - \omega\right)}\underline{E}_\perp.$$

On retrouve la dérive de polarisation

$$\underline{\delta X}_P = \frac{q}{m\left(\omega_c^2 - \omega^2\right)}\underline{E}_\perp \approx \frac{q}{m\omega_c^2}\underline{E}_\perp$$

2. Si $\omega \gg \omega_c$, et lorsque $\omega_p \gg \omega_c$, la dynamique est celle des oscillations caractéristiques du plasma $\omega = \omega_p$,

$$\mathbf{v}_P = -\frac{q}{m\omega_p^2}\partial_t \mathbf{E}. \tag{3.11}$$

et la variation de la dérive électrique

$$\underline{\delta X}_E = \frac{q\omega_c}{m\omega\left(\omega_c^2 - \omega^2\right)}\underline{E}_\perp \approx \frac{q}{m\omega\omega_c}\underline{E}_\perp.$$

La somme sur les différentes espèces $\sum_s q_s \underline{\delta X}^s$ fournit la polarisation du plasma. À basse fréquence, bien que chaque terme soit grand, la polarisation globale due à la dérive électrique (ambipolaire) est nulle

$$\sum_s q_s \underline{\delta X}^s_E = 0.$$

Les ions étant plus lourds

$$\sum_s q_s \underline{\delta X}^s_P \approx q\underline{\delta X}^i_P$$

et à l'ordre le plus bas [3]

$$qn\underline{\delta X} \approx \frac{q^2 n}{\epsilon_0 m_i \omega_{ci}^2}\epsilon_0\underline{E}_\perp = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2}\epsilon_0\underline{E}_\perp. \tag{3.13}$$

Ainsi la constante diélectrique est ici pratiquement égale à la susceptibilité

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = (1+\chi) = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} \approx \chi. \tag{3.14}$$

C'est dans cette limite, $\omega_p \gg \omega_c$, que le modèle de Hasegawa et Mima que nous allons redériver est valide. Dans la version présentée ici utilisant cette permittivité effective, il n'est cependant pas difficile de le modifier comme on s'aperçoit à l'équation de Poisson eq. (3.18) et eq. (3.21).

3.2 Onde de dérive

Les fluctuations de densité, déphasées entre les différentes espèces, polarisent le plasma et créent un champ électrique fluctuant de basse fré-

3. C'est en fait l'onde d'Alfven, qui correspond à cette polarisation basse fréquence $\omega \ll \omega_{ci}$, de relation de dispersion

$$\omega^2 = k^2 \frac{B_0^2}{\mu_0 N m_i}.$$

Plus généralement que la dérivation "mécanique" présentée, pour une polarisation quelconque $\pm$, le tenseur diélectrique fournit les modes propres $\det\left[\epsilon_{k,\omega} - \epsilon_0 \frac{k^2c^2}{\omega^2}(I - \frac{\mathbf{k}:\mathbf{k}}{k^2})\right] = 0$, où

$$\frac{\epsilon_{k,\omega}}{\epsilon_0} = \begin{bmatrix} 1-\sum_s \chi_P^s & -i\sum_s \chi_E^s & 0 \\ i\sum_s \chi_E^s & 1-\sum_s \chi_P^s & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega_{cs}^2} \end{bmatrix}.$$

quence. Des ondes de densité apparaissent, dont la phase se propage à la même vitesse que la dérive des particules, d'où la dénomination d'onde de dérive. Le modèle d'Hasegawa et Mima, qui devient l'équation d'Euler dans la limite des très petites longueurs d'ondes, peut servir à décrire la turbulence faible (de spectre large en fréquences malgré une faible amplitude des fluctuations) d'un plasma magnétisé de façon homogène [47, 51]. C'est un modèle d'électrons à l'équilibre, qui considère seulement la dynamique ionique de basses fréquences. La justification de ce choix est naturelle : les électrons très mobiles le long de l'axe magnétique de par leur faible inertie, vont relaxer dans le potentiel électrique local de basses fréquences.

3.2.1 Modèle d'Hasegawa et Mima

Pour que l'hypothèse d'équilibre locale soit consistante, d'une part la vitesse de phase parallèle doit être très inférieure à la vitesse thermique des électrons, afin qu'il y en ait un grand nombre et, d'autre part la longueur d'onde parallèle ne doit pas être trop grande, afin que la distribution électronique ait le temps de relaxer vers un équilibre. Si ces hypothèses ne sont pas vérifiées, les électrons résonent au contraire avec l'onde et le modèle n'est pas valable (c.f. partie I). Il résulte alors de cette hypothèse que la force de pression que les électrons subissent s'équilibre avec la force électrique

$$\nabla_\parallel n_e T_e = e n_e \nabla_\parallel \phi \ , \tag{3.15}$$

où ϕ est le potentiel électrostatique, n_e est la densité électronique. Faisons encore l'hypothèse isotherme, alors

$$n_e = N e^{\frac{e\phi}{T_e}}$$

où N est la valeur moyenne. Au premier ordre $e\phi \ll T_e$, les fluctuations de densité et de potentiel sont reliées par la réponse dite [4] "adiabatique"

$$\delta n_e = n_e - N = \frac{eN}{T_e}\phi.$$

L'hypothèse isotherme se justifierait ainsi pour des électrons chauds. Prenons l'équation de conduction de la chaleur dans la direction parallèle

$$\frac{3}{2} n_e \partial_t T_e + \mathbf{v} \cdot \nabla_\parallel T_e = -\nabla \cdot \mathbf{q}$$

4. Alors que c'est une approximation isotherme, au contraire.

où $\mathbf{q}$ est le flux de chaleur. Les faibles collisions induisent un transport de chaleur [16]

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = -\kappa_e \Delta T_e$$

où le coefficient de transport est

$$\kappa_e \propto \frac{n_e T_e}{m_e \nu_e}$$

et la fréquence de collision coulombienne est

$$\nu_e^{-1} \propto \frac{\epsilon_0 m_e^{\frac{1}{2}} T_e^{\frac{3}{2}}}{n_e e^4}.$$

Le critère s'énonce comme suit : le temps de relaxation d'une fluctuation de la température, due par exemple à l'onde de dérive, doit être très bref comparé à la période de l'onde ω^{-1}. Pour un mode parallèle dissipé, la condition est donc [5]

$$\omega \ll k_\parallel^2 \frac{T_e}{m_e \nu_e}. \tag{3.16}$$

La convection joue un rôle majeur dans la conduction de chaleur si [6]

$$\nu_e^{-1} T_e \ll \tau_c \left\langle \delta v_\parallel^2 \right\rangle$$

où le temps de corrélation hydrodynamique τ_c peut être largement plus grand que le temps collisionnel dans un flot turbulent

$$\tau_c \gg \nu_e^{-1}.$$

Néanmoins les fluctuations hydrodynamiques sont ici de faible énergie comparée à la température $\left\langle \delta v_\parallel^2 \right\rangle \ll T_e$. Pour un plasma de Tokamak, on obtient numériquement avec la dissipation seule

$$\omega \ll 10^{-13} k_\parallel^2$$

5. Cela serait d'autant plus valable que la température des électrons était élevée, car le membre de droite varie comme $T_e^{\frac{5}{2}}$. Plus précisément, la condition sur le nombre d'onde parallèle est, d'aprés eq. (3.8) et eq. (3.7),

$$\left(k_\parallel \lambda_D\right)^2 \gg \frac{\omega}{n_e^{-\frac{1}{3}} v_\perp}.$$

6. À titre qualitatif, on peut écrire $\langle \partial_t T_e \rangle \propto \tau_c \left\langle \delta v_\parallel^2 \right\rangle \Delta T_e$, car la vitesse moyenne est nulle (aucun sens privilégié) $\left\langle v_\parallel \right\rangle = 0$.

et pour un plasma froid de réacteur, où $\lambda_D \sim 5.10^{-4}m$, $n_e \approx 10^{11}cm^{-3}$et $v_\perp \sim 3.10^3 ms^{-1}$,

$$\omega \ll 10^{-9} k_\parallel^2.$$

En pratique, il faut donc compter sur la turbulence du flot électronique, lorsque $\tau_c \to \infty$. Cela souligne qu'un modèle plus réaliste devra prendre en compte les fluctations de la température.

L'onde de dérive est une onde de densité. L'équation qui la traduit dérive simplement de l'équation de conservation des ions

$$\partial_t n_i = -\mathbf{v}_E \cdot \nabla n_i. \tag{3.17}$$

Les fluctuations par rapport à la neutralité microscopique $n_e = n_i$ créent localement un excès de charge. L'équation de Poisson est alors

$$\epsilon_{k,\omega} k^2 \phi_{k,\omega} = e\left(n_k^i - n_k^e\right). \tag{3.18}$$

On peut normaliser, comme dans [47], au rayon de Larmor ionique et à la fréquence cyclotronique. En effet, si l'on essaie dans eq. (3.17) et eq. (3.18)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \omega_0 t & = & t' \\ k_0 X & = & X' \end{array} \right. ,$$

on doit vérifier

$$\left\{ \begin{array}{ll} k_0^2 & = \frac{q^2 N}{\epsilon T} = 2\frac{\omega_{ci}^2}{v_\perp^2} = 2\rho_{Li}^{-2} \\ \omega_0 & = \frac{T k_0^2}{q B_0} = \omega_c \end{array} \right. \tag{3.19}$$

où on a utilisé eq. (3.14) à la première ligne. On a aussi utilisé les normalisations suivantes, où le champ magnétique $B_0 \equiv 1$, et la température est l'unité d'énergie

$$\frac{e\phi}{T_e} = \phi'.$$

En utilisant

$$\mathbf{v}_E = -\nabla\phi \times \mathbf{z} \tag{3.20}$$

et la neutralité $n_i = N(x)$, la dynamique du mode k est

$$\left(\frac{\epsilon k^2 \rho_{Li}^{-2} T}{q^2 N} + 1\right) \partial_t \phi_k' = \frac{T \rho_{Li}^{-2} \omega_{ci}^{-1}}{q B_0 N} \left(i\phi_k' \mathbf{k} \times \mathbf{z} \cdot \nabla N + \mathcal{C}_{k,k'} \phi_{k'}' \phi_{k-k'}'\right)$$

où $\mathcal{C}_{k,k'}$ est l'opérateur de couplage des modes (de la convection de la vorticité)

$$\mathcal{C}_{k,k'} = -\sum_{\mathbf{k}'} \frac{\epsilon_{k-k'} \left(k - k'\right)^2 T \epsilon_0 m}{\epsilon_0 m q^2 N} \mathbf{k}' \times \mathbf{z} \cdot \left(\mathbf{k} - \mathbf{k}'\right).$$

On peut vérifier que $\mathcal{C}_{0,k'} = 0$ ($\mathbf{k}' \times \mathbf{z} \cdot \mathbf{k}' = 0$) confirmant l'hypothèse que

$$\partial_t N = 0.$$

De plus, d'aprés eq. (3.19)

$$\begin{cases} \frac{\epsilon k^2 \rho_{Li}^{-2} T}{q^2 N} &= k^2 \\ \frac{T \rho_{Li}^{-2} \omega_{ci}^{-1}}{q B_0 N} &= 1 \end{cases} . \tag{3.21}$$

On obtient donc l'équation de Hasegawa et Mima [7] [47]

$$\partial_t \left(\Delta\phi - \phi \right) = \left(\nabla\phi \times \mathbf{z} \right) \cdot \nabla \left(\Delta\phi - N \right). \tag{3.22}$$

Dans la version originale, Hasegawa et Mima font un développement perturbatif de eq. (3.17) en les vitesses de dérive, et peuvent ainsi obtenir la dérive de polarisation eq. (3.12) (terme $\partial_t \Delta\phi$). Celle-ci rend le fluide ionique compressible $\nabla \cdot \mathbf{v}_P \neq 0$, et l'équation de continuité redonne eq. (3.22). À noter cependant d'aprés eq. (3.14), hormis la précaution à la note (7), que leur version n'est valide qu'à la limite $\omega_{pi} \gg \omega_{ci}$. Dans le cas opposé où $\epsilon \approx 1$, les normalisations seraient alors $k_0 = \lambda_D^{-1}$, et $\omega_0 = \frac{\omega_p^2}{\omega_c}$, car en fait c'est bien la polarisation de plus basse fréquence qui domine la dérive de polarisation, qui serait eq. (3.11). Il est intéressant aussi de constater qu'aux petites longueurs d'ondes $k^2 \gg 1$, la dérive de polarisation correspond à la dérive électrique de vorticité. Alors eq. (3.22) se réduit à l'équation d'Euler en deux dimensions.

Bien que ce modèle isotherme ait des limites, surtout dans les conditions de flot parallèle laminaire, il conserve un aspect qualitatif valable. En effet, les électrons adiabatiques ($\delta n_e = \phi$) devraient subir la dérive diamagnétique, $q\mathbf{v}_d = -\nabla N \times \mathbf{z}$, ce qui apparaît bien aux grandes longueurs d'ondes dans le modèle, pour $k^2 \ll 1$

$$\partial_t \delta n_e = -\left(\nabla\phi \times \mathbf{z} \right) \cdot \nabla N = \left(\nabla N \times \mathbf{z} \right) \cdot \nabla \delta n_e.$$

Les ions aussi subissent cette dérive eq. (3.35), mais il a été supposé implicitement que les ions étaient froids en faisant l'hypothèse dite "adiabatiques" sur les électrons, ce qui la rend négligeable comparée à la dérive électrique et assure eq. (3.17).

Néanmoins, ce modèle se contente de signaler la dérive diamagnétique

7. Les normalisations eq. (3.21) qui utilisent eq. (3.14), c'est-à-dire ω_{pi}, sont dépendantes de N. Les constantes de couplages varient, la limite $\frac{N}{\nabla N} \gg x$ correspond à une approximation du type WKB. La dérivation originale [51] est dans cette limite mais suppose les constantes invariantes. Un $\nabla \ln N$ vient alors remplacer $\frac{\nabla N}{N}$, mais le terme $\frac{n_0}{N}$ devant le laplacien $\Delta\phi$ est omis, où n_0 est une référence quelconque.

sans tenir compte de ses effets. Elle est en fait à l'origine d'un courant qui déphase le potentiel électrique et la densité électronique, rendant le système instable.

3.2.2 Onde de Rossby

Il existe un analogue illustratif à ce modèle de dérive, que je mentionne pour introduire la notion d'instabilité, dans un contexte intéressant pour la physique du climat. Le système atmosphérique présente les mêmes caractéristiques dynamiques que le plasma magnétisé. En effet, la vitesse d'une masse d'air est régie par

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v} = -g\nabla H + 2\mathbf{v}\times\mathbf{\Omega} \tag{3.23}$$

où g est l'accélération de pesanteur, et $\mathbf{\Omega}$ est la composant normale au sol du vecteur rotation de la planète, à une lattitude donnée. La pression hydrostatique de la masse d'air de densité volumique n_0, est proportionnelle à sa hauteur H

$$p = mn_0gH$$

(n_0H est aussi la densité surfacique). La surface est libre, ce qui se traduit par son inertie $\frac{d}{dt}H = 0$,

$$\partial_t H = -\mathbf{v}\cdot\nabla H.$$

La démarche pour dériver l'équation modèle est alors similaire à précédemment [8] [51]. En décomposant en une hauteur d'équilibre et une hauteur fluctuante $H = H_0 + h$, on arrive à l'équation de Hasegawa et Mima pour la fonction de courant ψ d'un écoulement bidimensionelle, définie par $\mathbf{v} = -\nabla\psi\times\mathbf{z}$. La correspondance est

$$\begin{cases} N & \leftrightarrow & H \\ \delta n_e & \leftrightarrow & h \\ \psi & \leftrightarrow & \phi \\ \omega_c & \leftrightarrow & 2\langle\Omega\rangle \end{cases}.$$

Notons que l'unité de longueur à introduire pour obtenir eq. (3.22) est ici

$$\rho = \frac{-g\nabla H}{4\langle\Omega\rangle^2}. \tag{3.24}$$

8. Il faut lire, dans eq. 2.10. de cet article, $\frac{d}{dt}\frac{\nabla\wedge\mathbf{v}}{\Omega+\nabla\wedge\mathbf{v}} \approx \partial_t\frac{\nabla\wedge\mathbf{v}}{\Omega}$ et non pas $\frac{d}{dt}\frac{\nabla\wedge\mathbf{v}}{\Omega}$,car ceci conduirait à modifier le terme $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\nabla\wedge\mathbf{v}$ dans eq. (3.22) par $\mathbf{z}\nabla\cdot(|\nabla\wedge\mathbf{v}|\mathbf{v})$.

Si la longueur de gradient est de l'ordre de ρ

$$\rho \approx L_H \approx \frac{\sqrt{gH}}{2\langle\Omega\rangle} \tag{3.25}$$

car contrairement au plasma chaud, où $\rho_L = \frac{v_\perp}{\omega_c}$, ici

$$v_\perp(0) = 0.$$

L'ordre de grandeur est pour l'atmosphère terrestre $L_H \approx 1000$ km [51]. En fait l'échelle de coupure (l'unité, si elle est bien définie comme une petite échelle) est plutôt de l'ordre de la longueur de gradient des fluctuations (se reporter par exemple à la fig. (1) de [47] qui présente un maximum à $k \sim \rho_L^{-1}$), donc l'unité est mieux définie par

$$\rho_R = \frac{-g\nabla h}{4\langle\Omega\rangle^2} \approx \frac{\sqrt{gh}}{2\langle\Omega\rangle} \tag{3.26}$$

ainsi que l'unité de vitesse des fluctuations (la vitesse du vent)

$$v_\perp = \sqrt{gh}. \tag{3.27}$$

Avec la longueur de gradient de H_0, on trouve

$$c_s = \sqrt{gH_0}$$

qui est en fait la vitesse du son. Il n'est pas étonnant de retrouver la vitesse de propagation des ondes de gravité en eau peu profonde eq. (3.27). Hormis la nature rotationnelle dans ce cas-ci et potentielle dans le cas de la houle, c'est la conservation de l'énergie le long d'une ligne de courant, dans un potentiel de pesanteur similaire, qui façonnent ces ondes.

Ce modèle cependant ne peut pas expliquer l'échange de masse d'air entre les lattitudes. Il faudrait pour cela un déphasage entre h et ψ, pour que la divergence du flux soit non nulle

$$\nabla \cdot (h\nabla\psi \times \mathbf{z}) \neq 0 \tag{3.28}$$

(c.f. schéma). Comme on peut le voir en ajoutant à la réponse dite "adiabatique" un petit écart en opposition de phase

$$\delta h_k = i\delta_k \psi_k \tag{3.29}$$

dans eq. (3.22), le processus est alors instable, de taux de croissance

pour $k\rho_L \ll 1$

$$\gamma_k \approx \omega_D \delta_k.$$

L'amplitude sature par diffusion incohérente, dont on peut donner une estimation en égalant le terme linéaire et le terme diffusif

$$\sum_{k'} \mathbf{k} \times \mathbf{k}' \cdot \mathbf{z} \delta_{k'} \psi_{k'} \psi_{k-k'} \approx \gamma_k h_k.$$

En posant $L_H = \frac{\nabla H}{H}$ ($L_N \leftrightarrow L_H$), la fréquence de dérive s'écrit

$$\omega_D = \frac{k}{L_H} \tag{3.30}$$

et les amplitudes normalisées saturent simplement

$$k^2 \psi_k^2 \delta_k \approx \gamma_k \psi_k$$

à la valeur dite de longueur de mélange

$$h_k \approx \psi_k \approx \frac{1}{k L_H}. \tag{3.31}$$

Si la séparation en valeurs moyenne et fluctuante dans la dérivation de eq. (3.22) signifie séparation d'échelles

$$k \gg L_H^{-1}$$

les fluctuations ne doivent alors pas atteindre de grandes amplitudes. Expérimentalement, il semble bien que ce soit le cas pour $k \gg \rho_R^{-1}$, avec une signature de forte turbulence malgré la faiblesse des fluctuations.

Pourtant à $k\rho_R \lesssim 1$, des fluctuations de fortes amplitudes apparaissent et se couplent avec les valeurs moyennes. Dans l'atmosphère, la longueur de gradient d'une perturbation est en général de l'ordre de $\rho_R < L_h$. Une perturbation atmosphérique présente un gradient caractéristique allant jusqu'à $L_h \gtrsim 100$ km $\sim 0.1\ L_H$, lors des tempêtes. La vitesse du vent augmente dangeureusement lorsqu'on atteint le régime $\rho_R \gtrsim L_h$ (i.e. L_h a diminué, la dépression s'est "creusée"). Il s'agit par exemple de l'oeil des ouragans, avec $v \gtrsim v_\perp \approx 0.1 c_s \approx 100$ km/h. Dans tous ces cas où $L_h \approx \rho_R$, la distribution en un lieu donné du globe, de la magnitude de la vitesse du vent par exemple, n'est pas gaussienne et présente au contraire une forte présence de vents forts. Le phénomène de tempête est donc intermittent mais pas rare.

3.3 Dérive de gradient

Pour inclure ces phénomènes de façon auto-cohérente, il est nécessaire de prendre en compte les inhomogénéités, dans le modèle.

3.3.1 Champ magnétique faiblement inhomogène

Lorsqu'on prend en compte un gradient faible de champ magnétique, le mouvement de giration se déforme encore progressivement pendant la dérive électrique. Il en résulte une dérive perpendiculairement au gradient.

On pose que la variation de la pulsation cyclotronique est selon la direction x

$$\partial_x \omega_c = \omega_c \frac{\partial_x B}{B_0}$$

et qu'elle est faible, autorisant le développement limité sur un rayon de giration

$$\omega(\delta x) = \omega_c + \delta x \partial_x \omega_c$$

où $\delta x = \rho_L \cos(\omega_c t)$. On prend le petit paramètre

$$\rho_L \frac{\partial_x B}{B_0} = \rho_L L_B^{-1} \ll 1.$$

L'équation du mouvement est à présent

$$\partial_t \underline{v}_\perp = \frac{q}{m} \underline{E}_\perp - i\omega_c \underline{v}_\perp - i\rho_L L_B^{-1} \omega_c \cos(\omega_c t) \underline{v}_\perp$$

On développe l'impulsion selon le petit paramètre

$$\underline{v}_\perp = v_0 + v_1$$

avec $v_0 = \underline{v}_E + v_\perp e^{-i\omega_c t}$. Ainsi au premier ordre,

$$\partial_t v_1 = -i\omega_c v_1 - i\rho_L L_B^{-1} \omega_c \cos(\omega_c t) v_0.$$

Les déformations selon la direction x entraînent une dérive polaire dans la direction y, la dérive de gradient,

$$\langle v_1 \rangle = \mp i \frac{1}{2} v_\perp \rho_L L_B^{-1}. \tag{3.32}$$

C'est en fait la dérive issue de la force de pression magnétique

$$\mathbf{F} = \xi \nabla \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

(ξ est une suscéptibilité magnétique) exercée sur un corps diamagnétique plongé dans un champ inhomogène [9]

$$\mathbf{F} = -\mathcal{M} \nabla B$$

où le corps diamagnétique est la particule en giration, et

$$\mathcal{M} = -\xi \frac{B}{\mu_0} \mathbf{z} = -\frac{1}{2} q \rho_L^2 \omega_c \mathbf{z} = -\frac{m v_\perp^2}{2B} \mathbf{z} \tag{3.33}$$

est son moment magnétique, qui est un invariant adiabatique. La vitesse de dérive de gradient est

$$\mathbf{v}_D = -\frac{v_\perp^2}{2\omega_c} \frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B_0^2}. \tag{3.34}$$

S'ajoute à la dérive de gradient une dérive de courbure magnétique du même type (la variation de B est selon z)

$$\mathbf{v}_C = -\frac{v_\parallel^2}{\omega_c} \frac{(\mathbf{z} \cdot \nabla) \mathbf{B} \times \mathbf{B}}{B^2}.$$

Il reste qu'un plasma est diamagnétique : l'aimantation crée un courant qui s'oppose faiblement au champ magnétique. Le courant d'aimantation est

$$\mathbf{j}_M = \nabla \times n\mathcal{M} = -\nabla \times \frac{m n v_\perp^2}{2B} \mathbf{z} = -\frac{\nabla \frac{m n v_\perp^2}{2} \times \mathbf{B}}{B^2} + \frac{m n v_\perp^2}{B} \frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B^2}.$$

Le second terme est à comparer au courant de dérive de gradient

$$\mathbf{j}_D = q n \mathbf{v}_D = -\frac{m n v_\perp^2}{2B} \frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B^2}$$

et le premier terme, au courant de dérive diamagnatique fluide, issue de la force de pression, où $P = \frac{m n v_\perp^2}{2}$,

$$\mathbf{j}_{Dia} = -\frac{\nabla P \times \mathbf{B}}{B^2}. \tag{3.35}$$

9. Dont l'homologue électrostatique est

$$\mathbf{F} = -\mathbf{p} \cdot \nabla E = -\frac{\chi}{n} \nabla \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = -\frac{q^2}{m\omega_c^2} \mathbf{E} \cdot \nabla E$$

dont la moyenne est la force pondéromotrice.

Une configuration de plasma confiné doit vérifier l'équilibre MHD,

$$\mu_0 \nabla P = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

où $\mathbf{j} = \mathbf{j}_D + \mathbf{j}_C + \mathbf{j}_M$.

Dans le cas axisymétrique, si localement $\nabla \times \mathbf{B} \approx 0$ (j circule autour de B), par exemple pour une configuration toroïdale de faible rapport d'aspect, on peut montrer que $\frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{(\mathbf{z}\cdot\nabla)\mathbf{B}\times\mathbf{B}}{B^2}$. Lorsque la température est isotrope, comme il y a deux degrés de liberté perpendiculairement à l'axe magnétique, $v_\perp^2 = 2v_\parallel^2$. Alors,

$$\frac{mnv_\perp^2}{B}\frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{2mnv_\parallel^2}{B}\frac{(\mathbf{z}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}\times\mathbf{B}}{B^2}$$

et nous voyons que

$$\mathbf{j}_M + \mathbf{j}_C = -\mathbf{j}_C + \mathbf{j}_{Dia} \neq \mathbf{j}_{Dia}$$

c'est-à-dire : l'équilibre n'est pas assuré. Physiquement, la dérive de courbure polarise globalement le plasma, ce qui crée une dérive électrique globale. La symétrie toroïdale à l'équilibre est la configuration Tokamak. Elle pallie la polarisation globale par la création d'un courant toroïdal. Le champ magnétique est maintenant hélicoïdal mélangeant les régions internes et externes : la polarisation globale est écrantée, c'est un "screw pinch". Pour l'illustrer, prenons le cas extrême d'un champ magnétique poloïdal, de densité de courant $\mathbf{j} = j_z\mathbf{z}$. En coordonnées cylindrique, le courant de courbure est

$$\mathbf{j}_C = \frac{2v_\theta^2}{2\omega_c r}\mathbf{e}_\theta \wedge \mathbf{e}_r$$

et

$$B = \frac{\mu_0 j_z \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j_z}{2} r.$$

Le courant de gradient est ainsi

$$\mathbf{j}_D = \frac{v_{r,z}^2}{2\omega_c}\mathbf{e}_\theta \wedge \frac{\partial_r B}{B}\mathbf{e}_r = \frac{v_{r,z}^2}{2\omega_c r}\mathbf{e}_\theta \wedge \mathbf{e}_r.$$

Or

$$\mathbf{j}_M = \mathbf{j}_{Dia} - 2\mathbf{j}_D$$

ainsi on vérifie bien que ($v_{r,z}^2 = 2v_\theta^2$)

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_D + \mathbf{j}_C + \mathbf{j}_M = \mathbf{j}_{Dia} + \mathbf{j}_C - \mathbf{j}_D = \mathbf{j}_{Dia}.$$

De plus, le gradient de pression d'équilibre doit vérifier

$$\partial_r P = -B_\theta j_z.$$

Cependant, comme on va voir, l'instabilité demeure localement, et il s'agit de comprendre quel est l'effet sur le confinement (donc hors d'équilibre).

3.4 Génération de courant et instabilité d'échange

3.4.1 Instabilité d'échange

Soit une configuration d'équilibre, le courant est diamagnétique

$$\mathbf{j}_{Dia} = -\frac{\nabla P \wedge \mathbf{B}}{B^2}.$$

Dans le référentiel en mouvement de dérive électrique $\begin{cases} \tau = t \\ X' = X - \int v_E dt \end{cases}$, l'équation de Maxwell-Ampère de conservation de la charge s'écrit

$$\partial_\tau \epsilon \Delta\phi = \nabla \cdot \mathbf{j}_{Dia}.$$

La divergence du courant est

$$\nabla\cdot\mathbf{j}_{Dia} = -\left(\frac{1}{r}\partial_\theta\right) P\, \partial_r B_z^{-1} + B_z^{-1}\left(\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_\theta\right) P + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\partial_\theta\right) P - \left(\frac{1}{r}\partial_\theta\right)\partial_r P\right) = -\frac{B_z^{-1}}{L_{B_z}}\left(\frac{1}{r}\partial_\theta\right) P$$

et dans la mesure où $B_z \gg B_\theta$, alors $L_{B_z} \approx L_B$. On peut reprendre les normalisations précédentes $\mathbf{j} \to \mathbf{j} e n_0 v_\perp$, et les coordonnées cartésiennes par simplicité (repère de Fresnel) [10] ainsi

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{Dia} = \frac{1}{L_B}\partial_y n. \tag{3.36}$$

Dans une configuration de gradient de champ magnétique positif (e.g. "théta pinch"), i.e. opposé au gradient de pression : $L_B > 0$; dans une configuration de gradient négatif (e.g. "screw pinch") : $L_B < 0$. On note

$$g \equiv \left|L_B^{-1}\right|.$$

Les fluctuations de potentiel et de densité électronique étant déphasées,

10. Par un court calcul direct, ou en notant l'identité vectorielle $\nabla \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$ et la dépendance radiale de B : $(\partial_z, \partial_\theta) B = 0$.

cette fois

$$\partial_t N \neq 0.$$

Le modèle, qui dérive de cette dernière inégalité et de eq. (3.36), comporte deux nouvelles équations, par rapport à eq. (3.22), c'est le système d'échange

$$\begin{cases} \partial_\tau \Delta\phi = \pm g \partial_y n_e \\ \partial_t n_e = \nabla\phi \times \mathbf{z} \cdot \nabla N \\ \partial_t N = \langle \nabla\phi \times \mathbf{z} \cdot \nabla n_e \rangle \end{cases} . \tag{3.37}$$

3.4.2 Mécanisme

On n'a gardé dans la seconde équation de ce système que la dérive diamagnétique électronique, cela par cohérence avec la limite $k\rho_L \lesssim 1$ du modèle d'Hasegawa et Mima eq. (3.22). La composante non "adiabatique", ad hoc en eq. (3.29), est ici auto-déterminée par la conservation de la charge eq. (3.36). On a en effet discuté à la section (3.2.2) que l'enjeu d'une nouvelle phénoménologie se situait à ces échelles.

Une perturbation de densité δn, initialement localisée et ambipolaire, se polarise par la dérive électronique diamagnétique $\partial_\tau \Delta\phi \neq 0$. Le mécanisme qui freine la polarisation lui est aussi dû : c'est l'évidement des charges par le flux de dérive électrique de grande échelle

$$\langle \nabla\phi \times \mathbf{z} \cdot \nabla n_e \rangle \neq 0.$$

Compte tenu de la prédominance de la polarisation sur la convection de vorticité à [11] $k\rho_L \lesssim 1$, on peut 'oublier' le passage au référentiel du laboratoire : on remplace

$$\tau \to t.$$

En écrivant $\nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} = \Delta\phi$, on a

$$\partial_y \left(\partial_t v_x \mp g n_e \right) = \partial_x \partial_t v_y. \tag{3.38}$$

11. Pour anticiper une critique éventuelle, d'une part, je mentionne que contrairement à ce qui est parfois allégué sans justification, à deux dimensions le terme de dérive de vorticité $(\nabla\phi \times \mathbf{z}) \cdot \nabla\Delta\phi$, ne semble pas pouvoir donner naissance à des flots de grandes échelles (zonaux), car un ingrédient essentiel du mécanisme analogue à l'effet dynamo est la présence d'hélicité dans le flot (effet "alpha anisotropique" [93]). D'autre part, la cascade direct de condensation vers les grandes échelles, de Kraichnan [64], n'est valable ici que jusqu'à l'échelle $k\rho_L > 1$, en dessous de laquelle l'effet de la polarisation devient dominant sur le terme de convection de vorticité. Ce système est donc un modèle consistant de la dynamique du plasma magnétisé aux échelles $k\rho_L \lesssim 1$.

On peut alors poser

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t v_x & = & \pm g \left(n_e + C_1(x,y,t) \right) \\ \partial_t v_y & = & C_2(x,y,t) \end{array} \right. \tag{3.39}$$

avec

$$C_2(x,y,t) = \int^x dx' \partial_y C_1(x',y,t)$$

On prend des conditions périodiques selon y, alors considérer la moyenne de eq. (3.39) selon cette direction, en notant que (d'après la troisième équation de eq. (3.37))

$$\langle n_e \rangle_y = N(x,t)$$

permet de réduire les fonctions C_1 et C_2 à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_2 & = & 0 \\ C_1(x,t) & = & -N(x,t) \end{array} \right. .$$

C'est alors un modèle moyen en quelque sorte, ou générique des conditions moyennes. Cela va dans le même sens que la méprise $\tau \to t$ entre les deux référentiels, car on peut argumenter que la vorticité convectée $(\nabla\phi \times \mathbf{z}) \cdot \nabla\Delta\phi$ intervient par une isotropisation des phénomènes par rotation du vecteur d'onde k, i.e. $(\mathbf{k} \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{k}'$ aux petites échelles [12] $k\rho_L > 1$. Corroborant ceci, comme en moyenne la charge est nulle $\langle \Delta\phi \rangle = 0$ alors $\langle \partial^2_{xy} v_x \rangle = \langle \partial^2_{xy} v_y \rangle$. En corollaire, bien qu'on ait ici un modèle tel que $\partial_t v_y = 0$, on peut s'attendre à ce que le comportement statistique de v_y soit analogue à celui de v_x.

– L'équation de conservation de la charge se comprend donc comme une équation de la dynamique de la dérive électrique
  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_E$

Le mécanisme de l'instabilité est la détente du plasma, gelé dans le champ magnétique. Le flux magnétique à travers un élément de plasma est conservé. Un déplacement de l'élément de plasma dans le sens du gradient de champ magnétique provoque une expansion. Le plasma aura donc tendance à suivre la pente magnétique si, considéré comme un gaz parfait, il libère de l'énergie libre$\delta F = -P\delta V < 0$. Le critère de l'instabilité doit donc faire intervenir à la fois la longueur de gradient de densité L_N et la longueur de gradient magnétique L_B. L'équation du mouvement est celle d'un ressort, aux temps courts, de raideur négative lorsque le

12. Se référer également à l'effet d'un bruit d'amplitude suffisante dans le terme de force, paragraphe (4.3.1). Comme on le verra là, la présence de bruit peut s'accompagner d'une transition pour le profil de densité. La convection de vorticité, aux échelles $k\rho_L \lesssim 1$, est en première approximation un tel bruit, d'agitation des petites échelles.

produit de ces deux longueurs est positif :

$$\partial_t v = -g\partial_x N \int dt\ v.$$

L'estimation du taux de croissance, pour un équilibre initialement donné par $\partial_x N < 0$, est

$$\gamma^2 = -g\partial_x N \sim \frac{1}{L_B L_N}. \tag{3.40}$$

On s'aperçoit alors que l'équilibre MHD de la configuration "théta pinch" est linéraiement stable $L_B L_N < 0$, alors que la configuration Tokamak ne l'est pas $L_B L_N > 0$. L'instabilité est dite réactive, car la force est dans le sens du déplacement. Ultérieurement, L_N est elle-même modulée par l'instabilité, et nous pouvons nous intérroger sur la phénoménologie qui en résulte. L'instabilité est dénomée échange, car elle manifeste l'échange de tubes de flux magnétique, liés à des densités différentes [13]. C'est en fait l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Une autre correspondance avec le problème de thermoconvection est la suivante [14] : le potentiel électrique est l'homologue de la fonction de courant. La densité prend le rôle de la température. Le terme de gradient magnétique s'apparente à l'accélération de pesanteur. L'équivalent de la poussée d'Archimède est assuré par la divergence du courant $g\partial_y n$.

Pour finir d'établir le modèle, il convient de prendre en compte la dissipation. Celle-ci peut être collisionnelle, auquel cas l'equation de la dynamique de dérive électrique devient

$$\partial_t v = g\delta n - \nu_e v. \tag{3.41}$$

13. Dans le cas des ondes de Rossby, paragraphe (3.2.2), l'equation de Charney eq. (3.22) n'est plus valable car Ω varie

$$\partial_x \Omega \neq 0.$$

D'après l'identité vectorielle $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{v})$, et le rotationel de eq. (3.23), on a [51]

$$\frac{d}{dt}(\nabla\wedge\mathbf{v}) = -(\mathbf{\Omega} + \nabla\wedge\mathbf{v})\,\nabla\cdot\mathbf{v}$$

et au premier ordre en $\Omega^{-1}\partial_t$

$$\partial_t(\nabla\wedge\mathbf{v}) = -\mathbf{\Omega}\nabla\cdot\mathbf{v}.$$

Cette équation donne de même eq. (3.37), où $\phi \leftrightarrow \psi$, la partie négligée contribuant de même à la convection de vorticité $\mathbf{z}\nabla\cdot(|\nabla\wedge\mathbf{v}|\,\mathbf{v})$. La densité de l'air étant supérieure aux latitudes plus élevées, le sens du gradient de la densité et de la force de Coriolis est le même :

$$L_H L_\Omega > 0$$

le système atmosphérique est aussi instable linéairement, comme on l'avait supposé de façon ad hoc au paragraphe (3.2.2). Le déphasage entre ψ et h explique notamment le mélange des masses d'air et leur déplacement par fronts, qui donnent lieu aux précipitations. Près de la surface, la direction du vent coupe d'autant les isobares (isopotentielles de eq. (3.20)) que les frottements sont importants.

14. Cette fois, à trois dimensions ce sont plutôt les nuages !

Pour bon nombre de configurations, la température décroît fortement aux bords et la friction devient donc plus importante. D'autres circonstances peuvent produire les mêmes effets : dans un Tokamak, les lignes de champs aux bords intercèptent les parois assez conductrices, et une gaine apparaît. D'aprés le critère de Bohm, on peut estimer le courant parallèle (ionique) de l'ordre de

$$j_z \propto e n_0 v_\perp.$$

Les pertes de charges peuvent alors facilement écranter les variations du potentiel électrique local

$$\partial_z j_z \propto e n_0 \frac{v_\perp}{L_\parallel}$$

où $L_\parallel$ est la longueur de la ligne de champ magnétique entre les gaines (de connexion). D'après la démarche eq. (3.36) et eq. (3.37), on peut définir le taux d'amortissement

$$\nu \propto \frac{v_\perp}{L_\parallel}. \tag{3.42}$$

– C'est aussi l'effet d'une friction effective pour la dynamique de la dérive électrique.

Comme en général

$$\nu \gg \nu_e$$

celle-ci s'élève brutalement après la dernière surface magnétique fermée. En ajoutant, à titre générique, la diffusion collisionnelle, et un flux entrant $\langle vn \rangle (x = 0) = j_0$, on obtient le modèle suivant en notant $n \equiv \delta n$:

$$\left\{ \begin{array}{rcccc} \partial_t v & = & g n & - & \nu v \\ \partial_t n & = & -v \partial_x N & + & D_1 \partial^2_{xx} n \\ \partial_t N & = & -\partial_x \langle vn \rangle & + & D_0 \partial^2_{xx} N \end{array} \right. . \tag{3.43}$$

Chapitre 4

Phénoménologie du modèle

J'explore à présent la dynamique du modèle avec pour paramètre de contrôle la friction ν, lorsque le système a été normalisé à $j_0 = 1$. J'observe deux transitions en augmentant la friction depuis la valeur nulle. La première transite d'une phase ordonnée à une phase désordonnée, mais aux corrélations longues. L'autre passe de cette phase intermédiaire à une phase purement dissipative. Je montre que la première transition a lieu lorsque la friction est juste suffisante pour contrecarrer la pesanteur $\nu \geq g$, la vitesse fluctuant alors autour d'une valeur nulle. Dans la phase intermédiaire, il n'est pas possible d'extraire une longueur caractéristique 'mésoscopique' (une longueur de corrélation) intermédiaire entre la longueur du système (la longueur de gradient) et la longueur de coupure (une longueur d'onde), car en fait les deux premières se mêlent, et la troisième n'est plus définie. Il en résulte la criticalité. L'analogie qui est donnée précisément avec un modèle de tas de sable, permet d'identifier le gradient moyen de la densité du plasma, qui est surcritique, à la pente du tas de sable à l'angle de 'nucléation'. Cette terminologie est en effet préférable à "angle d'avalanche", car je montre enfin que dans ce modèle, les cycles d'hystérésis entre l'angle de repos et l'angle d'avalanche peuvent s'interpréter comme des cycles de 'liquéfaction' et 'd'évaporation' de la surface du tas de sable.

4.1 Séparation d'échelles

Dans la limite de dissipation nulle, le système d'équations eq. (3.43) se réduit à une seule équation différentielle non linéaire. Elle présente des solutions cohérentes, telles que des ondes lorsque leur vitesse de propagation est en moyenne non nulle et bien supérieure à l'amplitude de ses variations. Dès lors que la vitesse peut changer de signe, on peut constater

numériquement que les solutions cohérentes disparaissent pour laisser place à des remous désordonnés. Or, l'amplitude des ondes reste faible tant que leur longueur d'onde est petite devant une longueur de gradient, typique de la variation moyenne à grande échelle. Dans le cas contraire, où il n'est pas possible de faire la distinction entre variation lente et rapide, les ondes sont instables et les fluctutions de vitesse saturent à des amplitudes comparables à la moyenne.

Dans le système initial, la condition de flux entrant détermine la valeur moyenne. Le carré de celle-ci est alors inversement proportionnelle à la friction. Ainsi, lorsque la friction devient trop élevée, les fluctuations ne devraient pas être négligeables. Si néanmoins, la friction est suffisamment faible pour accepter qualitativement les solutions de l'équation différentielle non linéaire, alors par contraposée, dans ce régime les échelles ne sont plus séparées.

Le système est alors à l'équilibre local, et il n'existe qu'un seul temps caractéristique, et une longueur associée, qui pourra être regardée comme une période moyenne des variations intermittentes.

4.1.1 Limite non dissipative

4.1.1.1 Solution stationnaire

Considérons la limite non dissipative du système (3.43) avec $g \gg \nu$ et $D = 0$. On trouve d'abord

$$g\partial_x N = -\frac{1}{2}\partial^2_{xx} v^2 + C(x)$$

et, pour $C = 0$, une équation sur v

$$\partial^2_{tt} v = v^2 \partial^2_{xx} v + v\left(\partial_x v\right)^2 \tag{4.1}$$

qui est une équation du type de Klein-Gordon, non linéaire. On peut intégrer numériquement cette équation, dont on montre trois exemples en figures fig. (4.1), fig. (4.2) et fig. (4.3).

Sans tenir compte des effets de bords, nous pouvons constater sur ces figures que la valeur nulle, comme conditions aux limites, $v(x_{lim}, t) = 0$ est particulière, où x_{lim} est la coordonnée aux limites. Dans ce cas, la solution numérique semble très tôt se désordonner, comparée aux deux autres solutions, qui sembleraient au contraire stationnaires pour $x_{lim} \to \pm\infty$. Cherchons, pour en comprendre la raison, dans quelle mesure peut-il

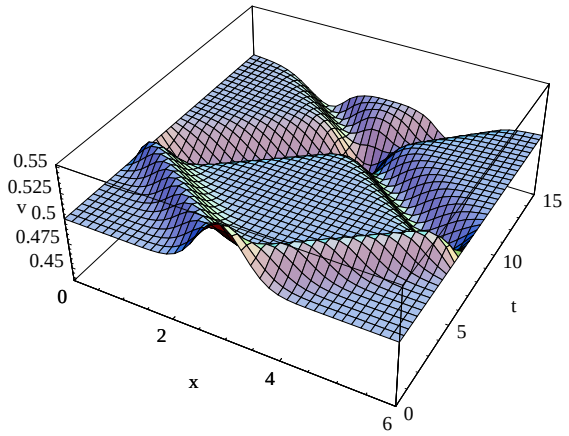


FIGURE 4.1 – Solution numérique (logiciel Mathematica) de l'équation (4.1) pour $x \in [0;6]$ avec les conditions aux limites $v(0,t) = v(6,t) = 0.5$, $v(x,0) = 0.5 + 0.05 * \exp(-3(x-3)^2)$ et $\partial_t v(x,0) = 0$.

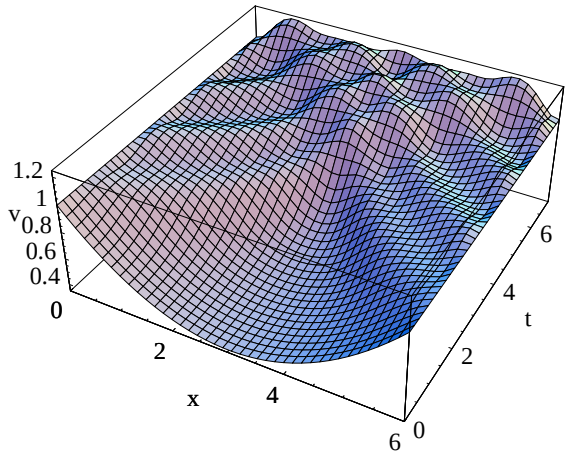


FIGURE 4.2 – Solution numérique de l'équation (4.1) pour $x \in [0;6]$ avec les conditions aux limites $v(0,t) = v(6,t) = 1$, $v(x,0) = 1 + 0.07 * x(x-6)$ et $\partial_t v(x,0) = 0$.

exister une solution de l'équation (4.1) propagative à vitesse constante v_0 et stationnaire.

Dans le changement de référentiel $\begin{cases} x \to X = x - v_0 t \\ t \to \tau = t \end{cases}$, les dérivées sont $\partial_t = \partial_\tau - v_0 \partial_X$ et $\partial_x = \partial_X$, donc $\partial^2_{tt} = \partial^2_{\tau\tau} + v_0^2 \partial^2_{xx}$. La solution stationnaire cherchée se traduit par $\partial_\tau v = 0$. L'équation (4.1) devient ainsi

$$\left(v^2 - v_0^2\right) \partial^2_{xx} v = -v \left(\partial_x v\right)^2 .$$

Il existe une solution triviale $v = Cte$. Lorsque $\partial_x v \neq 0$, l'équation se récrit

$$\frac{v''}{v'} = -\frac{v v'}{v^2 - v_0^2}.$$

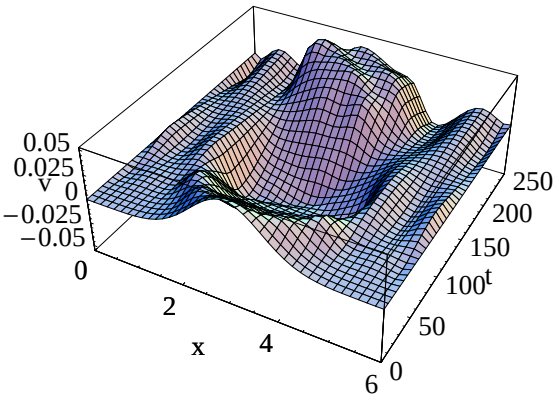


FIGURE 4.3 – Solution numérique de l'équation (4.1) pour $x \in [0;6]$ avec les conditions aux limites $v(0,t) = v(6,t) = 0$, $v(x,0) = 0.05 * \exp(-(x-3)^2)$ et $\partial_t v(x,0) = 0$.

Ceci s'intègre explicitement selon

$$\ln|v'| = -\frac{1}{2}\ln\left|v^2 - v_0^2\right| + C(t)$$

soit, avec $A = \exp(C) > 0$,

$$\frac{d}{dx}v = \frac{A}{\sqrt{|v^2 - v_0^2|}}.$$

La solution $v(x)$ est alors définie implicitement par la relation [1], paramétrée par A,

$$\frac{v}{2}\sqrt{|v^2 - v_0^2|} - \frac{v_0^2}{2}\ln\left|v + \sqrt{|v^2 - v_0^2|}\right| = Ax.$$

Plus simplement, on peut supposer la limite $v \ll v_0$, alors

$$\ln|v'| = -\frac{1}{2}\ln v_0^2 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{v_0^2} + C(t).$$

En utilisant l'identité $\left(\frac{v}{v_0}\right)' = \frac{v'}{v_0} - \frac{v}{v_0}\frac{v_0'}{v_0}$, on obtient l'équation différentielle, en fonction du signe de v',

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)' + \frac{v}{v_0}\frac{v_0'}{v_0} = \pm\frac{A}{v_0}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2}$$

qui, étant donné le petit paramètre $\frac{v}{v_0} \ll 1$, peut être approchée, tant que la solution ne présente pas de divergence séculaire, par

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)' = \pm\frac{A}{v_0}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2}$$

dont, par séparation des variables, la solution est

$$\mathrm{erf}(\frac{v}{v_0}) \approx \frac{v}{v_0} = \pm\frac{A}{v_0}x. \tag{4.2}$$

Cette solution n'est valable que dans la limite $x \ll v_0 A^{-1}$. Lorsque $v \to v_0$, on se rapproche de $x \to v_0 A^{-1}$, et la pente de cette solution se raidit. Le raccord doit se faire avec la limite $v \to v_0$ de la solution pour $v_0 \ll v$. Celle-ci est

$$\ln vv' = D(t)$$

qui, avec $B = \exp(D) > 0$, et pour un raccord en $x_1 < v_0 A^{-1}$, $v(x_1) = v_0$, se récrit comme

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2B\,(x - x_1)}. \tag{4.3}$$

Lorsque la coordonnée devient assez grande $x \gg x_1$, la pente tend doucement vers zéro. Le problème du raccord avec une condition telle que $v'(x_2) = 0$ est alors un problème de couche limite, non résolu ici.

La solution est donc composée d'une rampe assez linéaire de pente positive ou négative, puis d'un front raide, enfin après inflexion d'une pente douce se terminant par une zone plate. Cette zone peut être considérée comme l'origine de la perturbation, dont les fronts se sont éloignés pendant une phase transitoire. C'est en effet ce qu'on peut voir sur la fig. (4.4), issue de eq. (3.43). On peut la comparer à une coupe en $t = 15$ de la solution numérique tracée en figure fig. (4.1).

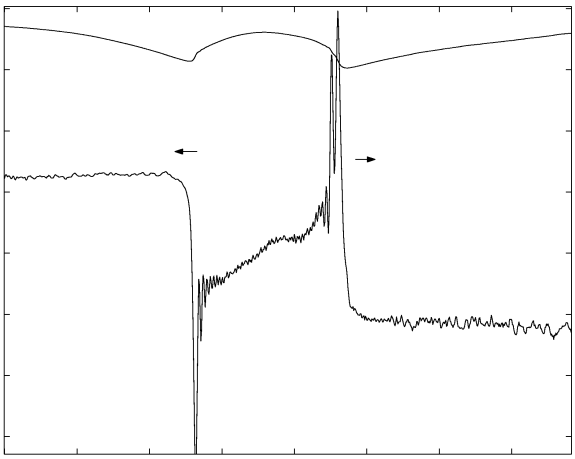


FIGURE 4.4 – Tracé d'un profil de la vitesse $\bar{v}$ autour de $x = 550$, et du profil de densité. L'origine des deux fronts, de propagation opposée, est commune, quelques instants auparavant, en la zone de gradient plat. L'ordonnée est en unités arbitraires. À comparer l'allure du profil de vitesse avec une coupe en $t = 15$ de la solution numérique fig. (4.1). Comme la dissipation est nulle sur la densité ($D = 0$), il existe des fluctuations numériques entre chaque pas d'espace, $\delta x = 1$ ici.

4.1.1.2 Modes linéaires

Cherchons à présent la stabilité des perturbations dans le régime linéaire, c'est-à-dire de faibles amplitudes. Soit $v = \bar{v} + \tilde{v}$, où $\bar{v}$ est la solution précédente,

$$\begin{aligned}\partial_{tt}^2 \tilde{v} = & -\partial_{tt}^2 \bar{v} + \bar{v}^2 \partial_{xx}^2 \bar{v} + \bar{v} \left(\partial_x \bar{v}\right)^2 \\ & + \left(2\bar{v}\partial_{xx}^2 \bar{v} + \left(\partial_x \bar{v}\right)^2 + \bar{v}^2 \partial_{xx}^2 + 2\bar{v}\partial_x \bar{v} \partial_x\right) \tilde{v} \\ & + \mathcal{O}(\tilde{v}^2)\end{aligned}$$

Pour les modes plans de Fourier, avec $i\omega - v_0 \partial_x = \partial_t$, la relation de dispersion est

$$\omega \left(\omega + v_0 k\right) = \left(\bar{v}^2 - v_0^2\right) k^2 + i\partial_x \bar{v}^2 k \ - 2\bar{v}\partial_{xx}^2 \bar{v} - \left(\partial_x \bar{v}\right)^2 . \tag{4.4}$$

Pour ne considérer que le cas d'une nette séparation entre haute et basse fréquences

$$\omega \gg v_0 k \tag{4.5}$$

les parties réelle et imaginaire sont

$$\begin{cases} \omega_r^2 & -\gamma^2 \approx & \left(\bar{v}^2 - v_0^2\right) k^2 + \bar{v}^{2\,''} - \bar{v}^{'\,2} \\ \gamma & \approx & -\frac{\left(\bar{v}^2\right)' k}{2\omega_r} \end{cases}$$

quelque soit la valeur de γ. Dans la limite $\bar{v}^2 k^2 \gg \left(\bar{v}^2\right)' k$, les modes sont marginalement stables ou instables

$$\begin{cases} \gamma & \ll & \omega_r \\ \omega_r^2 & \approx & \bar{v}^2 k^2 \end{cases} . \tag{4.6}$$

Ces ondes sont présentes sur le plateau

$$\bar{v} \gg v_0.$$

L'instabilité $\gamma > 0$, a lieu lorsque

$$\mathrm{sgn}\omega_r \left(\bar{v}^2\right)' = -1$$

c'est-à-dire pour une onde remontante et une pente positive, ou inversement. Elle sature par la convection, traduite dans les termes non linéaires

$$\left(\bar{v}'' + 2\bar{v}\partial_{xx}^2 + \bar{v}'\partial_x\right) \tilde{v}^2 + \bar{v} \left(\partial_x \tilde{v}\right)^2 - \tilde{v}^3 k^2 + \tilde{v} \left(\partial_x \tilde{v}\right)^2$$

qui font apparaître la longueur caractéristique

$$l_c = \frac{\bar{v}}{\bar{v}'}. \tag{4.7}$$

Pour une évaluation, on peut écrire que ces termes compensent la croissance linéaire

$$\tilde{v}^2 \left\{ \left(1 + \frac{\bar{v}}{\tilde{v}}\right) k^2 + \frac{\bar{v}}{\tilde{v}} l_c^{-2} \right\} \sim \gamma^2. \tag{4.8}$$

On peut alors vérifier si l'hypothèse linéaire d'amplitudes faibles $\tilde{v} \ll \bar{v}$ est cohérente. C'est le cas aux petites longueurs d'onde [1] $k \gg l_c^{-1}$, où

$$\tilde{v} \approx \frac{\gamma^2}{\bar{v}^2 k^2} \bar{v} \ll \bar{v}. \tag{4.9}$$

Par contre lorsque $k \ll l_c^{-1}$, ces modes sont instables

$$\begin{cases} \omega_r^2 & \approx & \pm \left(\bar{v}^2\right)' k \\ \gamma & = & \pm \omega_r \end{cases} \tag{4.10}$$

en apparaissant préférentiellement sur la rampe $\bar{v} < v_0$, auquel cas en effet, la séparation d'échelles eq. (4.5) et eq. (4.10) implique $1 \gg \left(\frac{\bar{v}}{v_0}\right)^2 \gg l_c k$. Par exemple pour $k \to l_c$, l'ordre de grandeur est $\bar{v}\tilde{v} \sim l_c \left(\bar{v}^2\right)'$, c'est-à-dire

$$\tilde{v} \sim \bar{v}.$$

Pour résumer ces deux derniers paragraphes, le système peut donc exhiber des solutions non linéaires $\bar{v}$, se propageant à la vitesse v_0, d'extension caractéristique l_c, sur lesquelles se superposent des ondes planes de hautes fréquences, de faibles amplitudes et de vitesse de phase $\bar{v}$, dans la zone plateau $\bar{v} > v_0$. Lorsque le système eq. (3.43) est forcé par un flux entrant j_0 en $x = 0$, que $\nu \neq 0$, et que les fluctuations ne sont pas trop importantes, on peut écrire la vitesse moyenne de dérive indirectement par la conservation de matière $j_0 = \langle nv \rangle \approx \langle n \rangle \langle v \rangle = \frac{\nu}{g} \langle v \rangle^2$, soit en identifiant $v_0 = \langle v \rangle$

$$v_0^2 = \frac{g}{\nu} j_0. \tag{4.11}$$

Tant que ν n'est pas trop grand, la solution $v_0 \gg \tilde{v}$ existe sans problème. On conçoit qu'au delà d'un seuil, la solution ne peut plus satisfaire la condition. En fait, en devançant les prochains paragraphes, la composante stationnaire v_0 n'existe plus :

$$v_0 \leftrightarrow \bar{v}$$

1. Si la taille du système est inférieure à la longueur de coupure $L < l_c$, le système choisit en fait $\bar{v}' = 0$.

(c.f. eq. (4.3)) et $\tilde{v} \sim \bar{v}$,

$$k \sim l_c^{-1}.$$

Cependant, la situation diffère de celle de la rampe, comme on voit numériquement : bien que non-stationnaire la forme de $\tilde{v}$ est qualitativement celle décrite précedemment pour $\bar{v}$. En somme, l'instabilité naît pour $\tilde{v} \ll 1$ et sature ensuite en formant un plateau, fig. (4.5). Le front est alors une borne pour la propagation des ondes, qui y rebondissent et forment divers motifs.

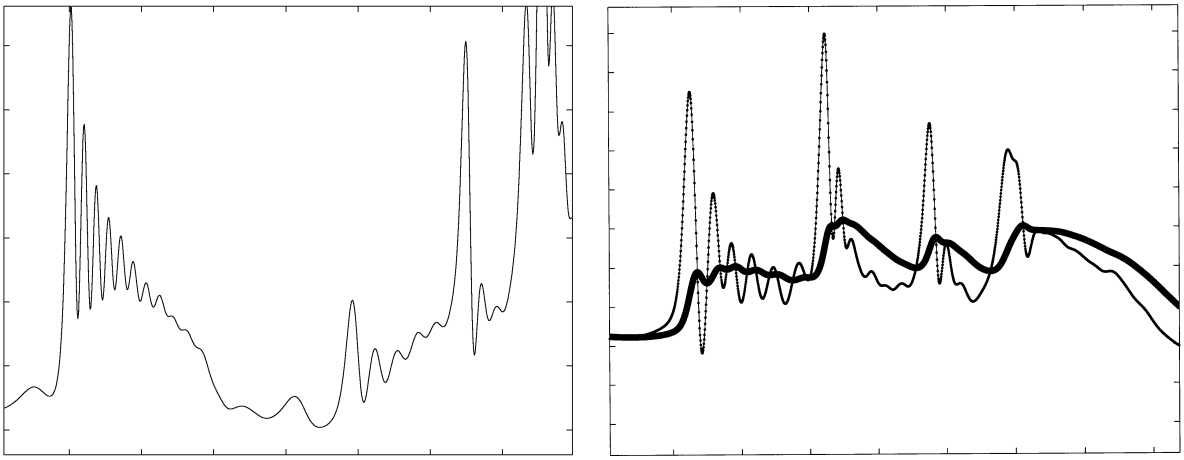


FIGURE 4.5 – Tracés temporels du flux local, dans la zone critique $\nu > g$. On peut visuellement reconnaître, sur la première figure, un mode ayant pris naissance lorsque le flux (ou la vitesse) était proche de zéro, oscillant sur un plateau et ayant rattrapé le front. Il y a seulement dix périodes d'oscillation : le temps d'amortissement et la durée du plateau sont du même ordre. Sur la deuxième figure est superposé le tracé de la vitesse $\bar{v}$. On peut voir l'enchaînement d'un front, derrière quoi la densité est libre d'osciller, et de deux 'puits', dans lesquels la densité ne peut pas osciller : la vitesse piège la densité tel un potentiel. Pour le comprendre, c.f. eq. (4.46), pour n initialement petit, le courant va dans le sens du gradient de $\bar{v}$.

On discute maintenant en détail l_c.

4.1.2 Période moyenne, et longueur associée

4.1.2.1 Equilibre local

L'équation de la dynamique dérive du hamiltonien par particule fluide

$$H = \frac{1}{2}v^2 - g\int dx\ n \tag{4.12}$$

La discussion précédente a révélé une modulation de v (donc n) aux petites échelles, du fait de l'instabilité, non cohérente. La longueur d'onde

dominante $k^{-1} \sim l_c$ pourrait être un bon ordre de grandeur de la longueur de corrélation de ces petites échelles (c.f. ci-après) et le système être considéré dans un état d'équilibre local. Dans la phase ordonnée, cela dépend de l'amplitude des incertitudes sur les conditions aux limites. Dans le voisinage inférieur de la transition $\nu \lesssim g$, on peut voir, sur l'évolution des distributions, comment l'amplitude des modes instables non cohérents sature à des valeurs de plus en plus importantes, jusqu'à atteindre $\tilde{v} \approx \bar{v}$, fig. (4.6). Dès lors qu'on a passé un voisinage du seuil, les instabilités font croîtres les incertitudes aussi petites soient elles à des amplitudes dominantes. La distribution n'est pas gaussienne dans cette phase (c.f. partie III), néanmoins l'hypothèse d'équilibre locale est attestée par exemple sur la figure fig. (5.5) traçant la fonction de corrélation sur une large gamme $\nu > g$, où l'on voit qu'à petite échelle la décroissance est exponentielle.

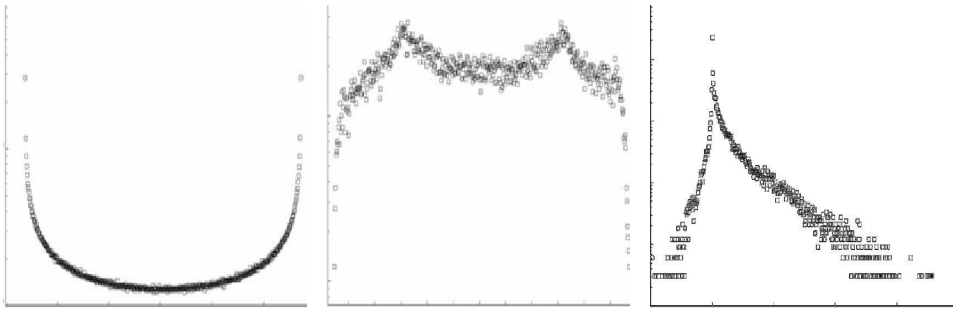


FIGURE 4.6 – Distributions stationnaires dans la phase ordonnée, pour trois valeurs croissantes de ν jusqu'à $\nu > g$. La première reflète l'existence d'un seul mode sinusoïdal, déterminé par les conditions aux bords. La seconde laisse apparaître la modulation incohérente de ce mode par les perturbations instables, qui saturent à une amplitude de l'ordre de la moitié du niveau moyen (c.f. section (5.5)). Dès lors que le régime $\sqrt{\langle \tilde{v}^2 \rangle} \sim v_0$ est atteint, i.e. pour $\nu = g$ la distribution est gaussienne (non représentée). Dès lors que le seuil est dépassé, ellO. Schrame est très nettement anormale.

4.1.2.2 Relation de dispersion quasi linéaire

Définissons à présent l_c comme étant la longueur caractéristique de coupure, i.e. la frontière entre petites échelles où $\bar{v}' \approx 0$, et grandes échelles. Puisqu'il existe cette longueur caractéristique, il doit exister un temps caractéristique associé. Le système est à l'équilibre local ($k \gtrsim l_c^{-1}$) : c'est un bain d'oscillateurs couplés et le théorème du Viriel s'applique. Il donne ici l'égalité des énergies moyennes cinétique et potentielle $\langle E_p \rangle = \langle E_c \rangle$, ce qui va permettre d'établir une relation de dispersion aux échelles $k \sim l_c^{-1}$. En

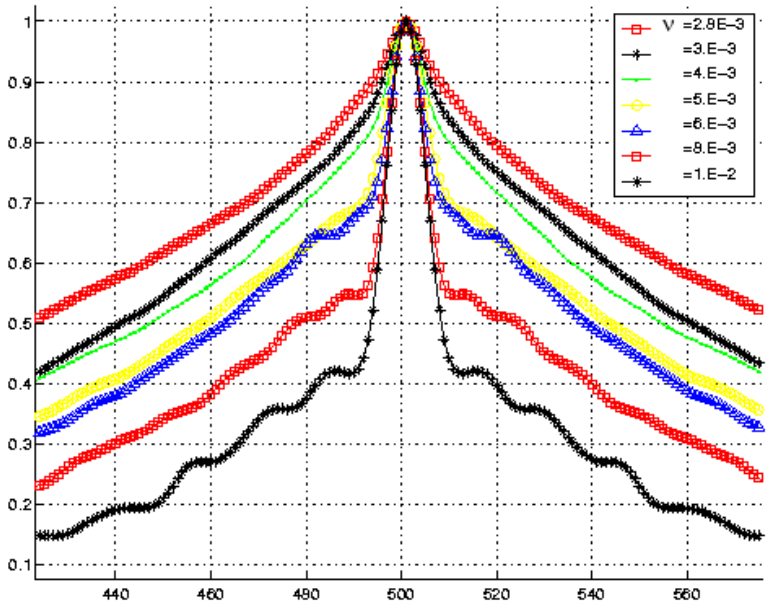


FIGURE 4.7 – Fonctions de corrélation pour différentes valeur de $\nu \geq g$. Echelle de temps normalisée à ν^{-1}. D'autant plus loin du seuil, on peut noter le départ (parabolique puis) exponentielle typique de l'équilibre. Les propriétés critiques se manifestent aux échelles supérieures à $\sim \nu^{-1}$ (c.f. section (5.5))

terme de modes normaux cela s'écrit

$$\sum^{m} \omega_k^2 q_k^2 = \sum^{m} \dot{q_k}^2.$$

Les coordonnées normales q_i sont définies à partir du déplacement par rapport à la position au repos, définie dans le référentiel en mouvement $x_0 = v_E(0)\delta t$,

$$\delta x = x(\delta t) - x_0(\delta t).$$

Ainsi défini, le déplacement révèle les coordonnées normales

$$\delta x = \int_0^{\delta t} dt\ \delta v(x_0) = \int dk\ q_k e^{ikx}$$

c'est-à-dire que $\dot{q_k}$ est simplement la transformée de Fourier de l'écart en vitesse $\delta v = v(\delta t,\ x_0) - v(0,\ x_0)$. On peut identifier cette variation à la grandeur $\delta v = \tilde{v}$, or d'après eq. (4.9) et eq. (4.10)

$$\delta v \approx (kl_c)^{-2}\, \bar{v} \approx (kl_c)^{-2}\, \frac{\omega_r}{k}.$$

Ainsi, à la limite $k \sim l_c^{-1}$, le mode normal s'identifie à la longueur d'onde

$$q_k \approx k^{-1}. \tag{4.13}$$

C'est une température effective T qui est définie par l'énergie cinétique d'agitation du bain, grâce au théorème de Parseval,

$$MT = \frac{M}{2}\left\langle \delta v^2 \right\rangle = \sum_k^M \dot{q_k}^2 \tag{4.14}$$

où M est le nombre de modes. L'autre terme est associé à l'énergie potentielle. Par définition,

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{l_c}\int^{l_c} dx \left(g \int^x dx'\ n \right) = \sum_k^M\ gk^{-1}\hat{n}_k \mathrm{sinc} k l_c \tag{4.15}$$

où la seconde égalité est déduite de la convolution de la fonction porte et du potentiel. En effet, le développement en modes propres n'a de sens qu'au coeur du rayon de corrélation. Ainsi, en identifiant les deux développements eq. (4.13) et eq. (4.15), on obtient la relation de dispersion

$$\omega^2 = k\ g\hat{n}_k \mathrm{sinc} k l_c.$$

Lorsque $kl_c \ll 1$, la limite est

$$\omega^2 \approx kg\hat{n_k} \tag{4.16}$$

qui reste valable qualitativement pour $kl_c \lesssim 1$.

4.1.2.3 Temps et longueur typiques

On retrouve naturellement l'analogie avec les ondes de gravité en eau peu profonde pour[2] $kh \lesssim 1$, évoquée au paragraphe (3.2.2). La hauteur d'eau est alors représentée par

$$kh \leftrightarrow \hat{n}_k.$$

Des crêtes se forment et se mettent à déferler, d'autant plus vite que l'amplitude de la perturbation est importante. La densité n est non stationnaire, car eq. (4.16) interdit de privilégier un référentiel de référence puisque la vitesse de phase est $\sqrt{g\frac{\hat{n_k}}{k}}$. La nouvelle relation de dispersion eq. (4.16) nous enseigne qu'à l'équilibre local (i.e. le système moyenné sur les échelles plus petites que l_c) n et v ne sont pas indépendantes, car

$$\left(\bar{v}^2\right)' \approx g\hat{n_k}. \tag{4.17}$$

2. La relation de dispersion est $\omega^2 = gk\tanh(kh)$.

Lorsque $k \sim l_c^{-1}$, le mode $\hat{n}_k$ est en fait $\langle n \rangle$ ou δN, et ainsi

$$l_c^{-1} \hat{n}_{l_c^{-1}} \leftrightarrow |\partial_x N| \tag{4.18}$$

avec la longueur de gradient

$$L_N \propto l_c.$$

Si l'on considère que l_c représente une longueur de corrélation, on peut l'estimer comme $l_c \approx \bar{v}\nu^{-1}$ (c.f. paragraphe (4.3.2)), alors eq. (4.17) signifie que

$$\nu \bar{v} \approx g \langle n \rangle . \tag{4.19}$$

La relation de dispersion peut donc se comprendre comme une pulsation moyenne

$$\omega_0 = \sqrt{g |\partial_x N|}. \tag{4.20}$$

eq. (4.18) est en fait l'argument de longueur de mélange, qui peut se justifier autrement, à partir de eq. (4.8).

Remarquons que si l'on retourne dans le plan (x, y), les modes précédents voient leur phase non seulement dériver à la vitesse $v_E = \bar{v}$ selon la direction x, mais aussi dériver à la vitesse $v_D = \omega_0 k_y^{-1}$ selon la direction y. Or, d'après eq. (4.20), on s'aperçoit que cette dérive est la dérive diamagnétique électronique, lorsque la longueur de gradient magnétique détermine la longueur de corrélation des petites échelles, i.e. qu'elle est du même ordre que la longueur de gradient de pression

$$L_N \approx g^{-1} = L_B \tag{4.21}$$

soit en effet, d'après cette dernière hypothèse, et eq. (3.36) où l'on voit que dans les normalisations $\omega_{Dia} \sim g$,

$$\omega_0 \approx g^{\frac{1}{2}} L_N^{-\frac{1}{2}} \sim g. \tag{4.22}$$

En fait le critère eq. (4.21)

$$\sqrt{\frac{g}{\nu^3}} \approx g^{-1}$$

correspond au seuil de la transition critique $\nu \approx g$, comme on va voir paragraphe (4.3.2).

Remarquons enfin que eq. (4.16) et eq. (4.20) ($\omega_k \approx \omega_0$ pour tout $k \sim l_c^{-1}$) ne sont compatibles qu'avec le spectre d'équilibre

$$S(k) \propto |\hat{n}_k|^2 \sim k^{-2}$$

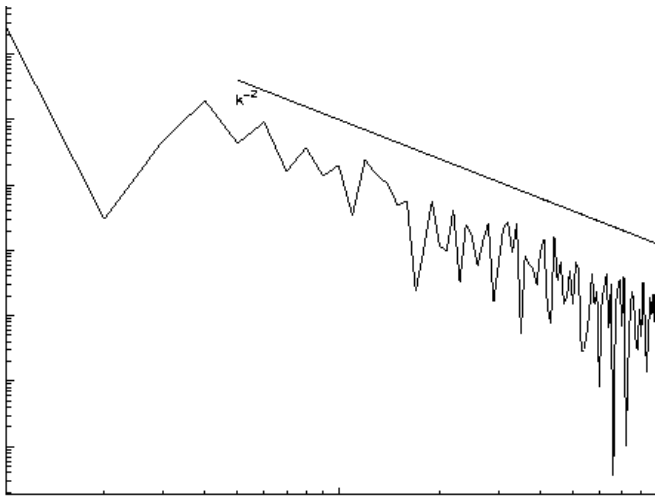


FIGURE 4.8 – Puissance spectrale des fluctuations de densité.

ce dont on a un aperçu numérique sur la fig. (4.8). Le système s'est donc auto-stabilisé par une quadrature des phases de n et N. ω_0^{-1} sera l'unité de temps de grande échelle.

4.2 Dynamique de relaxations

Le titre de cette section cherche à faire contraster l'état statistique dynamique de ce système avec un état stationnaire faiblement hors équilibre, où la *cinétique de relaxation* serait la bonne théorie. Pour mieux le visualiser, j'établis dans cette section une analogie avec ce qui pourrait être un modèle fluide naïf d'un tas de billes en déséquilibre, couplant densité et vitesse. Le but n'est pas de faire un modèle réaliste, mais que celui-ci fasse ressortir au moins un aspect en particulier de la phénoménologie locale : la mémoire de la dernière avalanche. Celle-ci se présente expérimentalement sous la forme d'un hystéresis du flot par rapport à l'angle de la pente du tas. Par conséquent, il existe deux angles, l'angle de repos au dessous duquel toute dynamique cesse, l'angle d'avalanche au dessus duquel une certaine portion de la surface s'écoule sans interruption. Pour ce niveau d'exigence, le modèle évite de recourir explicitement à l'épaisseur variable de cette couche en mouvement, et à une information autre que l'altitude (comme le profil des vitesses à l'intérieur, non accessible par un bilan de matière et quantité de mouvement).

4.2.1 Analogie avec la matière molle

Cherchons à écrire un modèle de hamiltonien pour un tas de billes en déséquilibre, c'est-à-dire posées les unes au dessus des autres par co-

lonnes successives d'altitudes différentes, schéma (). Expérimentalement, le flot d'une avalanche est concentré dans une couche mince variable. La variation d'énergie potentielle d'un grain en mouvement de chute libre est déterminée par la différence d'altitude entre le début de la chute et l'impact. On cherche alors pour le modèle la différence d'altitude moyenne δz, ou en quelque sorte le libre parcours moyen vertical local. On considère pour cela la différence du nombre de billes entre deux colonnes voisines distantes de $\delta x < 2a$, où a est le diamètre moyen d'une bille,

$$n(x)\delta x.$$

Soit alors la différence moyenne d'altitude entre deux billes s, de l'ordre de $s \propto a$, la quantité cherchée peut s'écrire

$$\delta z = sn(x)\delta x. \tag{4.23}$$

Il est alors aisé de déterminer un hamiltonien de champ moyen, valable dans la limite hydrodynamique $a\partial_x n \ll n$,

$$H = \frac{1}{2}v^2 - sg\int dx\ n \tag{4.24}$$

où g est l'accélération de pesanteur. Précisons la dynamique la plus simple que sous-entend ce hamiltonien. Il suppose que les billes d'une même colonne ne sont pas en interaction pendant la chute. Ceci est assez naturelle puisque, à ne considérer qu'une seule colonne, l'impact de chute se produit au temps dépendant de l'altitude initiale $\tau_z = \sqrt{\frac{2z}{g}}$. Bien que des aspects plus riches sont susceptibles aussi de se réduire à ce hamiltonien, la vision la plus simple est celle de petits bouts de colonnes d'extension variables, chutant en blocs. Dans ce cas de figure, l'énergie potentielle utile pour la colonne située en $x_0 - \delta x$, est déterminée par l'extension du bout de la colonne en x_0 qui va se mettre en mouvement $\delta z = n(x_0)\delta x$, ou autrement dit, déterminée par la différence d'altitude entre le bas de sa partie mobile et le haut de la partie immobile de la colonne voisine, schéma (). Nous avons là en fait un modèle qui semble une extension très directe du modèle "*running sand pile*" de P. Bak C. Tang et K. Wiesenfeld [6], par l'inclusion de la dynamique locale au lieu de la règle de l'automate cellulaire. C'est aussi, par cet aspect précisément, un faux jumeau, ne serait-ce que parce que la philosophie des automates étaient de s'affranchir des lois de la dynamique. La règle de l'automate utilise comme paramètre une altitude seuil δz_c, qui peut refléter des paramètres physiques cachés tels que g ou ν, au delà de laquelle une quantité déter-

minée j de la colonne dévale d'un cran (ici δx) la pente, à chaque étape ; par exemple, $\delta z_c = 2s$ et $j = 3s$. Ici, au contraire la quantitée j est libre. C'est cette différence qui s'avère fondamentale dans la compréhension de l'hystéresis (i.e. de l'angle d'avalanche ou du gradient sur-critique dans le cas du plasma). On ne trouve pas ce modèle d'avalanche dans la littérature, à ma connaissance.

S. Douady et al. font dans [23] l'analyse des flots de surface, par bilan de matière et de quantité de mouvement. Pour pouvoir fermer le système d'équation en évitant la théorie cinétique, les auteurs utilisent le profil de vitesse $u(z) = u(z_0 + \delta z) f(\frac{z-z_0}{\delta z})$, où z_0 est l'altitude de la partie immobile du tas. Il pourra refléter les particularités intrinsèques du milieu : profil parabolique dans un écoulement fluide visqueux, ou profil linéaire pour le sable :

$$u = \Gamma \delta z (\frac{z - z_0}{\delta z}).$$

C'est pour ce dernier cas que leur système d'équations (eq. (29) et eq. (30)) est le plus similaire à notre modèle. Ce système s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \partial_t (z_0 + \delta z) & + & \Gamma \delta z \partial_x (\delta z) & = & 0 \\ \partial_t \delta z & + & \Gamma \delta z \partial_x (\delta z) & = & \eta \end{array} \right. .$$

La 'force' η est la résultante de la projection selon x des forces agissant sur les billes : $\eta = -\partial_t z_0$ et détermine la variation du profile statique. La force comporte le terme de pression issu de l'énergie potentielle gravitationelle, plus un terme assez compliqué de friction solide cherchant à modéliser l'hystéresis expérimental.

Ce que je montre par la suite, est que ce terme n'est pas nécessaire à l'obtention d'hystéresis.

Si l'on pouvait supposer seulement que la vitesse d'érosion (ou vitesse verticale) de la surface immobile était

$$\partial_t z_0 = \Gamma \delta z \partial_x z_0 \tag{4.25}$$

alors en divisant simplement par δx

$$\left\{ \begin{array}{ccc} N & \leftrightarrow & z_0 + \delta z \\ n & \leftrightarrow & \delta z \end{array} \right.$$

on aurait

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \partial_t N & + & \Gamma \delta x \; n \partial_x n & = & 0 \\ \partial_t n & + & \Gamma \delta x \; n \partial_x N & = & 0 \end{array} \right. .$$

C'est notre modèle eq. (3.43), sans diffusion, en négligeant les fluctua-

tions autour de la limite de friction (fluide ν) élevée

$$v \approx \frac{g}{\nu} n$$

avec

$$\Gamma \delta x = \frac{g}{\nu}.$$

L'équation eq. (4.25) signifie que l'avalanche érode la surface tant que le profil est suffisamment incliné. Elle a été dérivée sur des considérations phénoménologiques par J.-P. Bouchaud et al. dans [14]. Je reviens plus longuement dessus à présent.

4.2.2 angle de repos et angle d'avalanche

La phénoménologie d'un tas de sable comporte un aspect particulièrement frappant, comme j'ai eu des occasions déjà de répéter, qui est l'hystéresis du flot d'avalanches entre l'angle d'avalanche, de leur déclenchement par rapport à toute perturbation infinitésimale, et l'angle de repos, d'arrêt du flot quelque soit la taille de la perturbation. Je discute maintenant eq. (3.43) sous cet angle [3], en commençant par une comparaison avec le modèle phénoménologique de [14]. Les auteurs définissent un angle d'accrochage, au delà duquel les grains (ou les billes) peuvent être délogés lors de collisions par ceux qui sont déjà en mouvement, et en dessous duquel les grains finissent par s'arrêter. Ils cherchent à montrer l'existence d'un angle "spinodal" strictement plus grand, qui caractérise le déclenchement des avalanches. Je critique ici non pas la capacité du modèle à le faire apparaître, mais le principe de détermination qu'en proposent les auteurs. En fait, comme j'essaie de rendre clair, il manque une phénoménologie de la vitesse d'advection. C'est alors en réalité l'angle de repos du modèle qu'ils déterminent, au lieu de l'angle d'avalanche.

En reprenant les notations précédentes, soit $z_0(x,t)$ la hauteur formée par les grains immobiles ; soit $\delta z(x,t)$ celle des grains mobiles. La construction de l'équation différentielle d'évolution de δz est analogue à celle d'une équation maîtresse. Les arguments sont :

- La symétrie brisée : si la pente est trop faible [4] $\partial_x z_0 > -S_c$, les grains ont tendance à coller. Sinon, ils ont tendance à se mouvoir.
- La linéarité : un grain immobile est mû seulement par un grain mobile qui le déloge $\Rightarrow \ \partial_t \delta z \sim \delta z$. Chaque grain a tendance à coller indépendemment des autres $\Rightarrow \ \partial_t \delta z \sim -\delta z$.

3. Mais lequel !
4. S pour *slope*.

On obtient ainsi, avec pour convention $S_c \equiv 0$,

$$\frac{d}{dt}\delta z = -\Gamma \delta z \partial_x z_0 \tag{4.26}$$

où $\frac{d}{dt} = \partial_t + v\partial_x$. De plus, par conservation du nombre total de grains, le transfert des grains immobiles vers les grains mobiles s'écrit

$$\partial_t z_0 = \Gamma \delta z \partial_x z_0 \tag{4.27}$$

qui est l'équation d'érosion eq. (4.25). C'est cette érosion qui est responsable de la propagation d'une instabilité naissante en amont, par raidissement du gradient de z_0. Soit la densité totale (on prend désormais $dx \equiv 1$, et $\Gamma \delta x \equiv \gamma$) $N = z_0 + \delta z$, et la densité de grains mobiles $n = \delta z$, par addition de eq. (4.26) et eq. (4.27), on a l'équation de conservation (le flux est $j = vn$)

$$\partial_t N = -\partial_x (vn) . \tag{4.28}$$

On peut aussi récrire l'équation sur la densité de grains mobiles

$$\partial_t n = -\gamma n \partial_x N - \partial_x (vn) + \gamma n \partial_x n.$$

Le système eq. (3.43) fait partie de cette classe de systèmes (vérifiant les deux conditions précédentes). Lorsque $\nu > g$ dans eq. (3.43), $\bar{v}$ est bien approché par

$$\bar{v} \approx \frac{g}{\nu} n = \gamma n$$

à δv près [5]. Ce n'est pas clair dans le modèle de [14], bien qu'on s'aperçoive dans ce changement de variable que c'est un choix à priori naturel de v, étant donné que l'advection de n comporte le terme $-\gamma n \partial_x N$. C'est quoi qu'il en soit la décomposition

$$v = \gamma n + \delta v$$

qui s'avère importante, et qui se trouve à la source de ma discussion. Alors,

$$\partial_x (vn) = \gamma n \partial_x n + \partial_x (\delta v n)$$

et

$$\partial_t n = -\gamma n \partial_x N - \partial_x (\delta v n) . \tag{4.29}$$

L'écart δv est le marqueur de l'aléatoire dans le système ; celui-ci peut provenir à la fois de perturbations extérieures, et d'une composante in-

5. C'est un mode propre stable, esclave du mode marginale (c.f. annexe).

trinsèque au système. Cette composante est donc opaque dans le modèle de [14], mais elle résulte en fait de l'instabilité de la dynamique locale (du chaos dans le système de Lorenz local [67] (c.f. annexe)). Si ce bruit est à peu près gaussien, son temps de corrélation est le temps de dissipation (du mode esclave de retour de l'orbite vers la variété centrale) : $\tau_c \sim \nu^{-1}$. Supposons qu'au temps t la stabilité ait été marginale : $\partial_x N(t) = 0$, alors

$$\partial_t n \approx \partial_x \left(\delta v \int^t dt' \ \delta v' \partial_x n' \right).$$

En prenant la moyenne sur les réalisations de δv, on obtient l'équation de la diffusion

$$\partial_t \langle n \rangle = \partial_x D \partial_x \langle n \rangle$$

avec

$$D = \frac{1}{2} \left\langle \delta v^2 \right\rangle \nu^{-1}. \tag{4.30}$$

On ne considèrera alors que ces champ moyen[6] $N \leftrightarrow \langle N \rangle$ et $n \leftrightarrow \langle n \rangle$, c'est-à-dire les temps

$$t \gg \nu^{-1}.$$

En somme, avec la correspondance

$$\gamma = \frac{g}{\nu}$$

le système eq. (3.43), dans la limite de friction élevée, est similaire au système eq. (4.26) & (4.27), c'est-à-dire au système de 'réaction-advection-diffusion'

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t n & = & -\gamma n \partial_x N + D \partial^2_{xx} n \\ \partial_t N & = & -\gamma \partial_x n^2 + D \partial^2_{xx} N \end{array} \right. . \tag{4.31}$$

Notons, pour reprendre une remarque des auteurs, que la symétrie globale

$$z_0 \to z_0 + cte$$

se retrouve naturellement pour N. La symétrie correspond par exemple à ce qu'une surélévation δN se propage à la vitesse $v_0 = \gamma n$, remontant ou descendant la pente selon le signe de n. Par contre, il n'y a pas de telle symétrie pour n, puisque c'est une densité fluctuante de moyenne nulle[7]. En suivant toujours le raisonnement des auteurs, tant que $n =$

6. Notez que $\langle vn \rangle \neq vn$. Si l'on pense aux motifs en rouleaux de convection de l'instabilité de Rayleigh-Bénard, on a plutôt $\langle vn \rangle = \frac{1}{2} vn$, ce qui est plus exactement le cas de figure pour le modèle de [14]. Ce coefficient numérique $\frac{1}{2}$, qu'on peut placer en facteur de γ, n'est pas probant.

7. Comme avec l'équation de burgers pour n, qui est proposée comme limite continue pour le *"running sand pile"* discret dans [53].

0, et même pour $\partial_x N < 0$, le système ne peut pas se décharger : il est métastable. Ce qui perturbe localement le système est l'arrivé de grains mobiles. Le retard au déclenchement qui est associé à cette métastabilité peut expliquer qualitativement l'hystérésis.

Voyons-en l'analyse quantitative que font les auteurs. Considérons une perturbation initiale $n(x,0) = n_0\delta(x-x_0)$, la dynamique est essentiellement d'abord diffusive partout ailleurs que x_0, avant de commencer à engranger une mobilisation plus importante :

$$\begin{cases} \text{étape 1} : n_1 \propto n_0 e^{-\frac{v^2 t}{4D}} \\ \text{étape 2} : n_2 \propto n_0 e^{\gamma|\partial_x N|\ t} \end{cases}$$

Les deux processus indépendants ont lieu en fin de compte sur la même période de temps

$$n \sim n_1 n_2.$$

Ainsi, pour un gradient plus fort que

$$|\partial_x N| > S_d \approx \frac{v^2}{4\gamma D} \tag{4.32}$$

l'instabilité devrait être globale, c'est-à-dire que la surface continuerait de s'éroder après le passage des premiers grains : ce serait une avalanche. L'instabilité est convective dans le cas contraire, c'est-à-dire que des grains mobiles peuvent continuer d'accroître leur effectif en érodant la surface de pente non nulle sur laquelle ils déboulent. La diffusion en fin de compte aura fait saturer cet effectif, le paquet ressemblant alors à une sorte de soliton plus ou moins stationnaire.

Cette description, si elle semble convaincante, recèle pourtant une lacune importante : la pente du tas diminue après le départ des premiers grains. Il n'est donc pas garanti que ce seuil soit numériquement valable. Les auteurs en effet évoquent dans leurs simulations un facteur numérique correctif $\times 20$, provenant assument-ils de cette évolution de $\partial_x N$, quantité surestimé dans le seuil eq. (4.32).

Il faut faire la remarque importante suivante : le coefficient de diffusion D n'est pas un paramètre extrinsèque ici. Il dépend comme on va montrer de γ. Ceci de telle sorte que, si le seuil numérique, constaté dans notre système eq. (3.43), est en effet supérieur à S_d, d'un facteur $\times 100$ pour $\nu > g$, il demeure néanmoins identique si l'on cherche à faire varier un coefficient extrinsèque D_e (en particulier pour $D_e \to 0$, le seuil reste fini).

L'explication que j'avance du facteur numérique prolonge cette remarque sur la diffusion intrinsèque. Je rappelle d'abord que la diffusion n'est pas

seule responsable des perturbations qui permettent de passer à l'étape 2. Ce sont en fait les échanges de grains sous forme *convective* $-\partial_x(vn)$ qui en sont la cause principale. L'argument présuppose donc que les fluctuations δv ne peuvent pas être traitées simplement sous forme diffusive. Bien qu'un coefficient de diffusion puisse être défini, nous allons voir qu'il existe une corrélation entre les fluctuations δv et la moyenne γn. Le facteur numérique est alors quantifiable en théorie, en fonction de ces deux variables.

4.3 Transition de phase du second ordre

Je décris ici la transition, qui a certains aspects d'une transition de second ordre, et je détermine son point critique. Elle correspond dans le langage de l'instabilité Rayleigh-Bénard, à une transition d'un système de rouleaux de convections ordonnés vers un système de "plumes" désordonnées. Elle peut correspondre aussi dans le langage des tas de sables, à une transition d'un système de billes glissant sans frottement vers un système de billes perdant leur énergie cinétique par frottements. Le point critique correspond au cas où ces déperditions énergétiques contrebalancent l'énergie potentielle individuelle locale. En augmentant encore l'amortissement, le flot n'est cependant pas impossible si les billes ont accumulé suffisamment d'énergie potentielle, ceci globalement pour entamer brutalement un mouvement d'ensemble[8]. Les frottements en surface mettent alors beaucoup plus de temps à stopper le flot d'avalanche. L'accumulation de cette énergie nécessite une pente forte.

La pente de repos correspond donc à un seuil collectif, alors que la pente d'avalanches à un seuil individuel.

4.3.1 Amplitudes des fluctuations

Je montre ici à nouveau l'importance des fluctuations, d'une façon différente qu'au paragraphe (4.1.1.2). Le théorème de fluctuation-dissipation, s'il est valide, implique en effet que le système se trouve dans un régime de larges fluctuations (turbulence forte). Il est alors possible de se mettre sur une piste de compréhension de la différence entre le seuil individuel et le seuil collectif, par une discussion sur ces fluctuations.

8. Ceci (le seuil $\nu > g$) a peut être un lointain rapport avec la notion de "frustration" dans les milieux granulaires, caractérisant l'impossibilité *pour tous* les éléments, constitutifs d'un tel milieu, à rejoindre individuellement un minimum d'énergie local.

Montrons d'abord que le seuil eq. (4.32) est le seuil linéaire d'instabilité. Factorisons le membre de droite de eq. (4.31) comme

$$n\left(-\gamma\partial_x N + D\frac{\partial^2_{xx} n}{n}\right)$$

l'instabilité démarre si

$$-\partial_x N > \frac{D}{\gamma}\frac{\partial^2_{xx} n}{n}.$$

L'estimation de longueur de mélange $\partial_x N \approx \partial_x n$ fournit après intégration [9] le seuil eq. (4.32) pour $v \approx \gamma n$

$$-\partial_x n > \frac{\gamma n^2}{2D}.$$

On est tenté d'un autre côté d'estimer dimensionnellement

$$D\partial^2_{xx} \leftrightarrow \frac{D}{l_c^2}$$

car l_c représente la longueur caractéristique des petites échelles. Il y a alors instabilité linéairement si

$$-\gamma\partial_x N > \frac{D}{l_c^2}. \tag{4.33}$$

Ces deux seuils linéaires eq. (4.33) et eq. (4.32) sont identiques, c'est-à-dire que

$$v^2 \approx \frac{2D^2}{l_c^2}$$

et avec le théorème de fluctuation-dissipation eq. (4.30)

$$v^2 \approx \frac{\delta v^4}{l_c^2 \nu^2}. \tag{4.34}$$

Or, le théorème de fluctuation-dissipation peut se formuler aussi de la sorte : la longueur de coupure l_c, qui caractérise la longueur typique de petite échelle des variation des grandeurs, i.e. la longueur caractéristiques des fluctuations, est aussi la longueur de dissipation

$$l_c^2 \approx \frac{D}{\nu} = \delta v^2 \nu^{-2}. \tag{4.35}$$

Ainsi, nous obtenons le régime de turbulence forte

$$\delta v \approx v. \tag{4.36}$$

9. Le seuil diffère d'un facteur $\frac{1}{2}$ à cause du coefficient numérique devant $-\gamma\partial_x n^2$, pris égal à 1 ici.

Ce que cela signifie en particulier, c'est que la vitesse totale devient négative par endroits. Des fronts se forment alors. En effet, autour de cette estimation, lorsque

– $v^2 > \delta v^2$, le seuil linéaire eq. (4.32) pour l'évolution de N

$$\partial_x n < -\frac{v^2}{\delta v^2}\frac{\nu^2}{g}$$

est moins facile à franchir que le seuil linéaire eq. (4.33) pour l'évolution de n

$$\partial_x N < -\frac{\nu^2}{g}.$$

Il y a donc mobilisation de grains assez facilement, alors que le gradient macroscopique $\partial_x N$ demeure proche du seuil.

– $v^2 < \delta v^2$, c'est le cas opposé : il y a immobilisation des grains et augmentation du gradient macroscopique $\partial_x N$. L'immobilisation explique le retard au déclenchement de la relaxation, alors que le gradient macroscopique continue de croître au delà du seuil eq. (4.33). Ensuite, une petite impulsion locale (avec l'arrivée d'un soliton remontant par exemple) suffit à provoquer un mouvement brutal d'ensemble. Les grains vont alors beaucoup accélérer à cause de l'altitude élevée.

Ces deux étapes alternent donc. Il y a écoulement sur une pente au gradient relativement plat à la première, et une accumulation formant une pente au gradient fort à la seconde. Le flot est intermittent. Une illustration de ce mécanisme est donné sur la figure fig. (4.9), où dans la phase ordonnée, nous avons ajouter un bruit δv_e (e pour extérieur) à l'équation de la dynamique. Dès lors que l'amplitude de ce bruit est suffisante, le gradient augmente, et des fronts apparaissent. (c.f. également fig. (4.10)). Pour autant, cet argument n'a pas permis d'établir le gradient d'avalanches explicitement. Je continue d'explorer, dans ce chapitre, ce mécanisme de formation d'une avalanche.

En anticipant, on peut parler de zone 'spinodale' dans le premier cas, puisque toute perturbation $n \sim \epsilon$, aussi faible soit-elle, génère un flot. On peut parler de zone de 'nucléation' dans le second cas, puisqu'une quantité finie de grains $n \sim 1$ va déclencher le flot d'avalanche. Ainsi, il semble plus approprié de parler d'angle de 'nucléation', concernant l'angle d'avalanche, que d'angle 'spinodal'.

4.3.2 Transition du second ordre

Je précise ici que la transition a lieu pour $\nu \approx g$.

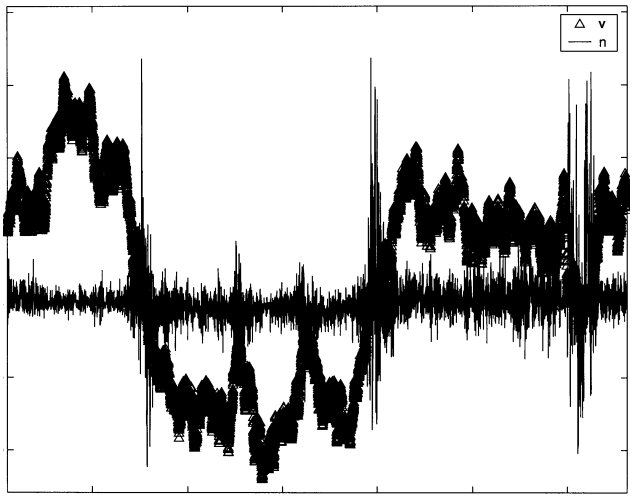


FIGURE 4.9 – Fluctuations forcées de la vitesse, par un générateur pseudo aléatoire, la faisant changer de signe par instant, et créant un front de densité.

Nous voyons sur la figure fig. (4.10) que la longueur de gradient suit une loi

$$L_N \propto \nu^{-\frac{3}{2}}. \tag{4.37}$$

Or, comme l'analyse qu'on a faite au paragraphe précédent le rappelle, on peut aussi écrire $l_c \approx v\nu^{-1}$. Lorsque $\nu < g$, il est légitime de remplacer par la vitesse moyenne $v_0 \leftrightarrow v$. Avec l'estimation eq. (4.11), on trouve

$$l_c \propto \nu^{-\frac{3}{2}}. \tag{4.38}$$

Pour $\nu > g$, la même loi demeure, car l'estimation qui est due à la conservation de matière, est encore valable :
$j_0 = \langle nv \rangle \approx \gamma^{-1} \langle v\,(v - \delta v) \rangle \sim \gamma^{-1} \langle v^2 \rangle = \frac{\nu^3}{g} l_c^2$. La coïncidence des lois numérique et dimensionelle eq. (4.37) et eq. (4.38) constitue donc une bonne preuve de l'estimation de longueur de mélange eq. (4.18). Néanmoins, les fluctuations désormais importantes modifient le coefficient numérique de proportionnalité de la loi, à cause du facteur $v = \gamma n + \delta v$ qui peut prendre la valeur nulle, voir paragraphe (4.4.2). Sur la figure fig. (4.10), on constate aussi que L_N^{-1} présente une discontinuité, de près de deux ordres de grandeur.

Ce raidissement du profil moyen manifeste la présence de fronts de grandes amplitudes, comme on va le voir.

Les cartes spatio temporelles, fig. (4.11), illustrent la transition par le changement de la dynamique allant d'un ordre parfait à un certain désordre. Le paramètre de contrôle ν varie de $\nu \in [10^{-5},\ 5.10^{-2}]$, pour $g = 10^{-4}$, qui sont des valeurs réalistes dans un Tokamak. Le coefficient de diffusion ne peut pas être déterminé de façon autoconsistante par eq. (4.30) dans

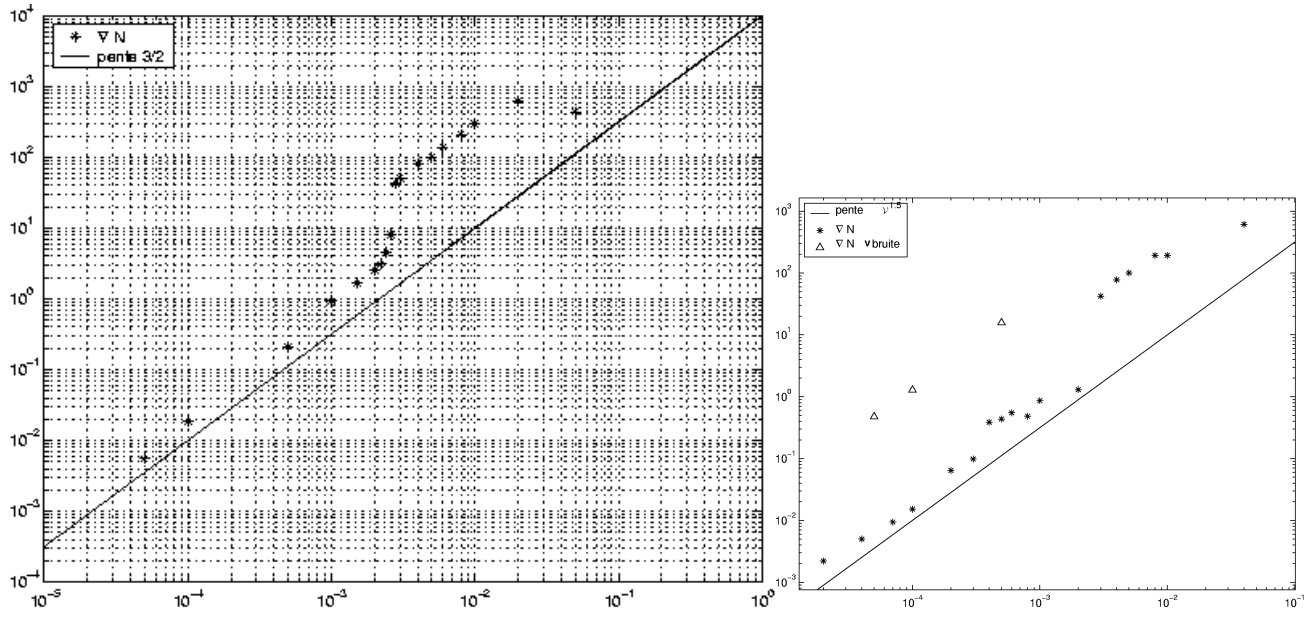


FIGURE 4.10 – Echantillonage de l'inverse de la longueur de gradient selon le paramètre de contrôle ν. On a $L_N \sim \nu^{-\frac{3}{2}}$. La transition se manifeste par la discontinuité de près d'un facteur 10^2. Un autre échantillonage est superposé, sous le seuil spontané, celui de la transition qui se produit pour une valeur du bruit suffisante (triangles).

ce modèle simple. J'ai donc testé plusieurs valeurs allant de $D = 0$ à $D = 10^{-2}$, sans constater de différence notoire de la phénoménologie. Dans la suite je sous-entends que D est défini de façon autoconsistante par eq. (4.30). La taille du système est de 200 à 1000 pas d'espace $\delta x = 1$. En faisant croître ν, on constate que le système passe de la phénoménologie du réseau d'ondes stationnaires, ou du flot continue modulé de grains, à celle de la dynamique de relaxations intermittentes du tas de grains, vers la valeur $\nu \approx g$. En dessous du seuil, les conditions aux limites imposent un motif qui sélectionne k_x (c.f. section (5.5)). En se rapprochant du seuil, il y a une superposition de modes (maximum du spectre) $k_x \to 1$ et d'un mode glogal plus lent (minimum du spectre) $k_x \to \frac{1}{L_N}$, fig. (4.12) et fig. (4.14).

De par la discontinuité du profil, on définit la susceptibilité qui diverge près de $\nu = g$

$$\chi_l = \frac{\partial L_N}{\partial \langle \delta v^2 \rangle} \to \infty$$

c'est-à-dire qu'un bruit infinitésimal (une variation infinitésimale de la température intrinsèque $\langle \delta v^2 \rangle$) suffit à donner une valeur de L_N beaucoup plus grande. En définissant le paramètre d'ordre par

$$\frac{\langle v \rangle}{\sqrt{\langle \delta v^2 \rangle}}$$

on peut alors être tenté d'évoquer une transition du second ordre, voir la figure fig. (4.13). Cette évocation se précise si l'on considère que la symétrie de translation est brisée sous le seuil, par la présence de modes (en particulier pour un système fini), et qu'elle est restaurée au dessus du seuil. Il y a cependant une différence par rapport à une transition du second ordre classique (e.g. ferromagnétisme), car la symétrie est ici restaurée seulement de façon statistique, alors qu'elle l'est de façon microscopique classiquement. On peut très certainement parler de brisure d'ergodicité dans ce système-ci, c'est-à-dire de la présence de structures n'ayant pas les mêmes symétries (et brisant localement la symétrie de transition), par exemple appartenant à différentes classes topologiques, telles des solitons et des fronts. Je précise cette aspect au paragraphe (4.4.3).

Mathématiquement, la transition a lieu lorsqu'une variété centrale [10] apparaît. c'est-à-dire que dans l'espace des phases $(n(t),\ v(t))$, il existe une direction stable et une direction de stabilité marginale. Cela se produit lorsque la plus petite valeur propre négative γ_- est bien plus grande que la valeur propre positive γ_+,

$$\gamma_- \gg \gamma_+$$

Ici,

$$\gamma_- \approx \nu$$

et

$$\gamma_+ \approx \frac{g\,|\partial_x N|}{\nu}. \tag{4.39}$$

Le vecteur stable est défini dans ce cas par

$$v = -g\frac{l_c^2}{D}n \approx -\frac{g}{\nu}n \tag{4.40}$$

la direction centrale est l'opposée

$$v = \frac{g}{\nu}n. \tag{4.41}$$

Cela signifie que la composante rapide de variation de la vitesse δv tend vers zéro en suivant la direction stable, et la composante lente est esclave de la densité sur la direction centrale $\bar{v} = \gamma n$. Lorsqu'au contraire $\gamma_- \ll \gamma_+$, l'orbite est pratiquement périodique, relativement de faible amplitude, autour du point [11] $(0, v_0)$. On retrouve ainsi les solutions en ondes planes.

10. Une surface qui peut devenir complexe, dans l'espace des phases (N, n, v)

11. En annexe, on peut voir que cela reviendrait, pour le système normalisé, à prendre croissant le paramètre de contrôle r de Lorenz lorsque ν va décroissant. On peut voir en effet, par exemple dans [10], qu'au delà d'une certaine valeur de r, l'attracteur est

Dans la situation intermédiaire, $\gamma_- \approx \gamma_+$, la dynamique 'hésite' : l'orbite est chaotique. On peut parler de résonance [12] entre la dynamique d'évolution de $\bar{v}$, de fréquence caractéristique eq. (4.20)

$$\omega_0 = \sqrt{g\,|\partial_x N|}$$

et la dynamique d'évolution de δv, de fréquence caractéristique

$$\nu.$$

La résonance correspond à

$$\nu^2 \approx g\,|\partial_x N|\,. \tag{4.42}$$

Le gradient est bien sûr auto-déterminé, notons le puisqu'on peut s'appuyer sur l'estimation de longueur de mélange $L_N \approx l_c$: $|\partial_x N| = \delta N_0 l_c^{-1}$, où $\delta N_0 = 1$ caractérise l'absence de fronts sous le seuil [13], soit

$$g\,|\partial_x N| = j_0^{-\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{3}{2}}.$$

La transition a lieu donc, pour $j_0 = 1$, à la valeur

$$\nu \approx g. \tag{4.43}$$

On peut encore l'écrire sous cette frome, c.f. eq. (4.21),

$$L_N \approx L_B.$$

Or eq. (4.42) n'est autre que le seuil linéaire d'instabilité eq. (4.33). On retombe sur l'apparent paradoxe, que dans la phase ordonnée on s'attendrait à voir le gradient $-\partial_x N \approx 0$ et, dans la phase désordonnée $-\partial_x N \approx S_d$, en suivant le même raisonnement que dans [14]. Pourtant, on a vu fig. (4.10) qu'en réalité dans la phase ordonnée

$$-\partial_x N \lesssim S_d$$

et dans la phase désordonnée

$$-\partial_x N \approx 100 \times S_d.$$

---

périodique.

12. Dans la partie I, on a discuté les effets similaires d'une autre résonance (c.f. conclusion des parties I&II).

13. N est normalisé par n_0, eq. (3.21)

Intutivement, sans toutefois faire en deux mots de théorie de la statique des tas de sable, ce ne sont pas des forces de liaison mais ce sont les dissipations entre les grains et entre les grains et le support qui créent la pente au repos. Ainsi, il me paraît déjà naturel dans ce modèle, que la pente de repos S_d soit déterminée par les coefficients de dissipation

$$S_d = \frac{\nu^2}{g}. \tag{4.44}$$

Il reste à déterminer la pente de 'nucléation' S_n, en sachant déjà que $S_n \propto S_d$, donc à comprendre le facteur 100.

4.4 Melange de phases : fronts

Dans cette section, je montre d'abord que la cinétique linéaire décrit l'existence des solitons se propageant à l'angle de repos. La théorie n'est donc pas suffisante, comme on sait, pour décrire l'apparition de l'angle d'avalanche. L'argument dynamique d'inversion du signe de la vitesse est écrit explictement, et il est généralisé à l'ensemble statistique des grains, i.e. tout de même à la thermodynamique, la description passant en quelque sorte de δv à $\langle \delta v^2 \rangle$.

Ecrivons pour ce faire la densité d'énergie h. Par définition, la variation de l'énergie par unité de volume, pour une petite variation du nombre de grains mobiles dn, est $dh = Hdn$

$$dh = \frac{1}{2} dn v^2 - gndn\delta x \tag{4.45}$$

4.4.1 Cinétique linéaire

En moyennant, sur les fluctuations δv, la différentielle de h, on cherche à retrouver la relation de Gibbs

$$\begin{aligned} dh &= \tfrac{1}{2} v^2 dn + (nv)\, dv - (gn\delta x)\, dn \\ &= \quad vd\,(nv) - \left(\tfrac{1}{2} v^2 + gn\delta x\right) dn \end{aligned}$$

L'argument consiste à identifier $\langle dh \rangle - \frac{1}{2} \langle \delta v^2 \rangle\, dn$ à la densité d'énergie libre[14] df. En effet, on a déjà défini $T = \frac{1}{2} \langle \delta v^2 \rangle$, et l'entropie statistique est $S = \langle \ln n \rangle$ (moyenné sur les réalisations de δv), donc sa densité de variation $ndS = dn$. On reconnaît ainsi dans le développement, la force

14. Puisque varient le nombre de particules et le volume, à température constante.

thermodynamique $\langle v \rangle$ et le potentiel chimique [15]

$$\mu = -\left(\frac{1}{2}\langle v \rangle^2 + gn\delta x\right). \tag{4.46}$$

Si les relations phénoménologiques linéaires sont valables, on a

$$j = -L_{nn}\partial_x \mu = L_{nn} g n$$

où le coefficient phénoménologique cinétique est $L_{nn} = vg^{-1}$. Définissons n_0, telle que $\langle v \rangle = v_0 = \gamma n_0$ soit $j_0 = \gamma n_0^2$; et définissons le coefficient cinétique

$$L_0 = \sqrt{\frac{j_0}{g\nu}}. \tag{4.47}$$

Soit une fluctuation lente et faible (juste sous le seuil S_d), alors au premier ordre

$$\delta j \approx L_0 g \delta n.$$

Cela indique qu'une petite sous-densité des grains mobiles se remplit par l'amont et se creuse par l'aval, la variation de flux étant dans ce cas négative. Donc une sous-densité remonte la pente. Inversement une surdensité dévale la pente (c.f. [53]).

Cela n'est valable que tant que les échelles de temps sont bien séparées, c'est-à-dire loin au dessous du point critique. Ce qui nous intéresse plus particulièrement c'est le comportement en ce point et au dessus. Les fluctuations fortes empêchent alors de définir le coefficient cinétique linéaire, indépendemment de l'état instantanné comme nous venons de le faire. Qu'obtient-on toutefois avec le même argument ? On prend l'estimation de mélange $\partial_x N \approx \partial_x n$ et $\langle v \rangle \approx \gamma n$. L'inégalité de Clausius-Duhem (sur la variation de la densité d'entropie s), $\frac{d}{dt}s = -j\nabla\mu \geq 0$, est alors ici

$$-j\partial_x \mu \approx j\left(\gamma^2 \partial_x N + g\right) n \geq 0. \tag{4.48}$$

Pour $n > 0$, on voit que le flux est positif $j > 0$ contribuant ainsi à relaxer le gradient, dès lors que

$$-g\partial_x N \geq \nu^2.$$

On retrouve ainsi le seuil S_d du point de vue physiquo-chimique. Par essence, l'inégalité de Clausius-Duhem n' a pas de sens dans le régime des fluctuations fortes, c'est pourquoi seulement le seuil de repos apparaît. Pour comprendre la création des fronts, la thermodynamique semble démunie. J'avance donc d'abord un argument dynamique, que j'essaie en-

15. Au repos il s'agit bien de l'équilibre hydrostatique $\mu_0 = -mg\delta z$.

suite de traduire tout de même dans le langage de la thermodynamique.

4.4.2 Argument dynamique

Comme on a vu au paragraphe (4.3.1), la longueur de gradient s'identifie à la longueur d'arrêt d'un grain mobile

$$l_c = v\nu^{-1}.$$

Dans la phase critique, puisqu'il n'y a plus ni variables lentes ni variables rapides (la résonance), les fluctuations sont du même ordre de grandeur que les valeurs moyennes

$$\delta v \sim v \approx \gamma n.$$

Ainsi, en moyenne on a bien

$$\langle l_c \rangle = \gamma n \nu^{-1} = \sqrt{\frac{\gamma j_0}{\nu}}$$

mais localement, il peut y avoir un raidissement très important lorsque $\delta v \to -\gamma n$, et

$$l_c \to 0.$$

Cet argument est validé sur les figures fig. (4.9) et fig. (4.14), où dans le régime $\nu \ll g$ les fluctuations de la vitesse sont forcées par un bruit. Sans bruit, les ondes sont de faibles amplitudes, $v \approx v_0$ et $n \approx n_0$. Avec le bruit, dès que son intensité satisfait $\delta v \to -\gamma n_0$, il se crée un front. L'ordre de grandeur du gradient gagné au total est d'autant plus important que l'intensité du bruit est grande, car en effet la fréquence des fronts $\delta v \to -\gamma n_0$ augmente. Donc, le facteur numérique 100 est issu de ce que l'écart type doit être de l'ordre

$$\langle |\gamma n - \delta v| \rangle \approx 0,01 \times \gamma n_0.$$

Comment alors prédire cette valeur ? Et prédire sa constance au delà du seuil de transition ? Continuons pour y répondre l'analyse qualitative de la création de fronts, de manière mieux formalisée.

4.4.3 Argument thermodynamique

La phénoménologie décrite précédemment évoque une 'évaporation' de la couche immobile supérieure, lorsque le gradient atteint un seuil de 'nucléation'. Lorsque le gradient est inférieur au seuil dynamique au

contraire, il y a 'condensation' de la couche mobile. La phase 'gazeuse' serait alors mesurée par n et l'autre phase 'liquide' serait mesurée par $N - n$. Sous le point de transition $\nu = g$, le gradient reste figé au seuil de repos $-\partial_x N = S_d$: on ne distingue pas ces phases. Au dessus de ce point, on les distingue nettement. C'est bien un point critique. J'utilise donc la théorie de Van der Waals, et souligne comment l'interpréter lorsque la température est intrinsèque et fluctuante.

Le hamiltonien eq. (4.45) peut aussi être considéré comme un hamiltonien effectif de la théorie de Landau [16]

$$h_{eff} = -\frac{1}{2} g \delta x n^2 + \frac{1}{6} \gamma^2 n^3 + Tn.$$

La condition d'équilibre $n > 0$ et $\partial_n h_{eff} = 0$, fournit par exemple la température intrinsèque d'équilibre [17]

$$T_{eq} = g \delta x n - \frac{1}{2} \gamma^2 n^2. \tag{4.49}$$

Le seuil d'instabilité thermodynamique est donné par

$$\partial_n T_{eq} = 0$$

c'est-à-dire, pour $\partial_x N \approx -\left\langle \frac{n}{\delta x} \right\rangle$, naturellement toujours le seuil dynamique

$$-\partial_x N = \frac{\nu^2}{g}.$$

En particulier, la température seuil ainsi définie est bien du même ordre que l'énergie cinétique, eq. (4.36),

$$T_S = \frac{1}{2} \gamma^2 n^2. \tag{4.50}$$

L'argument dynamique et l'argument du paragraphe (4.3.1) suggèrent que la température joue un rôle prédominant pour comprendre l'apparition de fronts.

Soit le travail effectué par les grains mobiles, décrit à partir du hamiltonien effectif,

$$W = \int dV \left[\left(-\frac{1}{2} g \delta x n + \frac{1}{6} \gamma^2 n^2 \right) n + Tn \right]$$

16. Cette fois-ci, la force thermodynamique v_0 est absente, car on ne peut plus considérer de référentiel galilléen en translation uniforme, $\langle v \rangle \neq v_0 = \sqrt{\gamma j_0}$ et $\delta v \sim v$.
17. Qui prend le rôle joué par le potentiel chimique précédemment.

où le volume d'intégration est la couche mobile. On reconnait la forme

$$W = \int -PdV.$$

Cela correspond à un développement du Viriel à l'ordre trois de la pression

$$P = nT + Bn^2 + Cn^3 \tag{4.51}$$

où en effet, le coefficient

$$B = -\frac{1}{2}g\delta x$$

est la moyenne de l'interaction de pesanteur entre deux colonnes, composées chacune d'une seule particule mobile ; et le coefficient

$$C = \frac{1}{6}\gamma^2$$

représente l'effet moyen des interactions à trois particules : deux particules intéragissent via la pesanteur, et "la troisième", qu'on peut nommer particule de champ moyen, représente l'effet de la friction sur elles, par le biais de $\gamma = \frac{g}{\nu}$.

On peut aussi rapprocher ce développement de l'équation d'état de Van der Waals. Notons

$$A = \frac{1}{6}\langle v \rangle^2$$

on peut alors développer P, dans la limite $A \ll T$, en notant $n = \frac{N_0}{V}$,

$$P = \frac{N_0 T}{(V - N_0 b)} - a\frac{N_0^2}{V^2}. \tag{4.52}$$

Le coefficient

$$b = \frac{A}{nT}$$

n'est cependant pas constant. Le développement de la théorie de Van der Waals n'est donc en toute rigueur pas autorisé. Pourtant, c'est une façon qualitative d'identifier le comportement particulier interessant, par rapport au cas classique.

Remarquons d'abord que si $\frac{A}{T}$ était indépendant de V, il n'existerait pas alors de point critique, car les solutions pour $\partial_V P = 0$ et pour $\partial^2_{V^2} P = 0$ ne coïncideraient pas. Comme $A \equiv \frac{1}{6}\gamma^2 n^2$, si $T \neq T_S$ il existe alors au contraire un tel point critique défini par le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{\gamma^2 n^2}{3(1-\frac{A}{T})^2} &= 2an - \frac{T}{(1-\frac{A}{T})} \\ 4\frac{\gamma^2 n^2}{3(1-\frac{A}{T})^2} &= 4an - \frac{\gamma^4 n^4}{9(1-\frac{A}{T})^3} \end{cases}$$

dont il existe une solution (A implicite)

$$n_c\left(A, T_c\right).$$

Le point critique est le point de coordonnées dans l'espace des phases (c.f. [66])

$$\left\{\begin{array}{lcl} T_c &=& \frac{8}{27}\frac{a}{b} \\ V_c &=& 3N_0 b \\ P_c &=& \frac{1}{27}\frac{a}{b^2} \end{array}\right. . \tag{4.53}$$

La densité critique est donc, pour A fixé formellement

$$n_c = \frac{1}{3b} = \frac{1}{3}\frac{n_c T_c}{A}$$

ce qui correspond à la température

$$T_c = 3A = T_S. \tag{4.54}$$

Ce point critique apparaît donc d'ores et déjà singulier, compte tenu de la remarque [18]. Maintenant, si on intervertit A et T dans la formule de Van der Waals eq. (4.52), i.e. dans la limite contraire $T \ll A$, où le volume exclu serait cette fois

$$V_e = N_0 \frac{A}{nT}$$

on trouve alors

$$3T = A_c. \tag{4.55}$$

En faisant un développement limité autour du point critique, l'allure général de l'équilibre peut être donné. Soit $p = P - P_c$, $t = T - T_c$, et $\delta V = V - V_c$; à l'ordre le plus bas dans les différentes variables

$$p = \alpha t + \beta t \delta V + \zeta \delta V^3 + ... \tag{4.56}$$

où $\alpha = \frac{N_0}{2V_e}$, $\beta = -\frac{N_0}{4V_e^2}$, $\zeta \approx \frac{a}{b^2 V_e^3}$. Donc pour $t < 0$, $p(\delta V)$ est multivaluée. Les termes en δV et δV^2 sont nuls ($\frac{NT_c}{4V_e^2} - 2\frac{Na}{27V_e^3} = 0$, $\frac{NT_c}{8V_e^3} - 3\frac{N^2 a}{81V_e^4} = 0$) à cause de la symétrie du potentiel thermodynamique au point critique. À entropie [19] et volume constants, c'est le potentiel thermodynamique Φ qui détermine

18. Par ailleurs, de eq. (4.53) on a $T_c = \frac{8\times 6}{27\times 2}\frac{g\delta x}{\gamma^2 n_c}T_c$, c'est-à-dire avec un facteur peu différent de 1, ce qui est attribuable à l'ambiguïté du choix de A ou T comme variable, conformément que le gradient seuil est

$$\frac{n_c}{\delta x} = \frac{8}{9}\frac{\nu^2}{g}.$$

19. Le système est ouvert : à l'état stationnaire la variation d'entropie totale est nulle $dS = 0$.

les conditions d'équilibre

$$\Phi = F + PV = \mu N_0.$$

Son minimum, par rapport à une variation de volume, doit redonner eq. (4.56), c'est-à-dire

$$\delta\Phi = (p - \alpha t)\,\delta V + \frac{1}{2}\beta t \delta V^2 + \frac{1}{4}\zeta \delta V^4.$$

La présence de deux phases (notées 1 et 2) est caractérisée par l'équilibre entre elles ($t < 0$)

$$\int_1^2 d\mu = 0.$$

En différentiant Φ, qui est transformée de Legendre de F , cela donne

$$d\mu = \delta V dp$$

ainsi

$$\int_1^2 \delta V dp = \int_1^2 \delta V \left(\beta t + 3\zeta \delta V^2\right) d\delta V = 0.$$

Cela donne seulement que $\delta V_1 = -\delta V_2$, mais avec la condition supplémentaire que la pression doit être égale pour les deux phases, alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p & = & \alpha t \\ \delta V_{eq} & = & \pm\sqrt{\frac{-\beta t}{\zeta}} \approx \pm\frac{3}{4}\sqrt{-\frac{t}{T_c}} \end{array} \right. . \tag{4.57}$$

Nous voyons que, comme V_c correspond au gradient seuil dynamique S_d, l'écart négatif δV_{eq} correspond à un gradient supérieur. Nous lisons que le raidissement est d'autant moins marqué que la température $T \approx T_c$ est élevée. Cette phase condensée correspond à des particules mobiles qui s'immobilisent dans un front. L'autre phase vapeur, pour laquelle le gradient est sous critique, correspond à l'érosion de la surface des grains immobiles. On peut constater que le gradient critique $-\partial_x N = S_d$ est dans la zone thermodynamiquement instable [20].

Dans cette description, l'effet de la friction n'est qu'indirectement pris en compte par l'égalité $\langle v \rangle = \gamma n$: cherchons en la courbe dans l'espace des phases. Celle-ci coupe le point critique comme on voit en eq. (4.54). Ainsi,

20. La limite de métastabilité, i.e. la courbe spinodale, est $\partial_{\delta V} p = 0$, c'est-à-dire

$$\delta V_i = \pm\sqrt{\frac{-\beta t}{3\zeta}}. \tag{4.58}$$

en développant, et car $b = cte$ implique que $\frac{\delta n}{n_c} + \frac{t}{T_c} \approx \frac{\delta A}{A_c}$, on a

$$\frac{\delta V_\nu}{V_c} \lessapprox -\frac{t}{T_c} < \sqrt{-\frac{t}{T_c}}. \tag{4.59}$$

On constate ainsi que pour des températures raisonnables $0 \leq -t \lesssim \frac{1}{2}T_c$, cette courbe est dans la zone instable [21].

Cela fait donc crédit, *a posteriori*, que soit une hypothèse une température non nulle. Cela confirme surtout l'effet *déstabilisant* de la friction, contrairement à ce qu'on pourrait croire trop vite.

Dans la description précédente l'une des deux variables A ou T doit être considérée invariable [22]. Dans le cas plus réel, imaginons la situation dans laquelle la température augmente depuis la valeur critique $T = \frac{1}{3}A$, donc une situation de plus en plus sous-critique $A < A_c$. Il arrivera que $T = A$, faisant permuter le rôle de A pour celui de T, la situation redevenant de moins en moins sous-critique $T < T_c$, jusqu'à atteindre la nouvelle valeur critique $T = 3A$. Mais si la température a crû, alors par conservation de l'énergie pour une énergie potentielle moyenne, c'est que le moment cinétique, donc aussi le flux de matière ont décrû. Pour garantir d'autre part la conservation de matière, le flux doit de nouveau augmenter. C'est ce qui doit se produire une fois le point critique franchi de nouveau en $T = 3A$: les fronts relaxent alors. A augmente alors brutalement. Il s'agit d'un schéma typique de l'intermittence, ici dans le cas spatio-temporelle [10], avec une région critique instable

$$\frac{1}{3}A < T < 3A$$

et une zone de relaminarisation ailleurs. Cette phénoménologie est importante pour la compréhension de l'apparition de lois d'échelles, comme présentées dans la partie III.

21. Dans la zone métastable pour $-t \gtrsim \frac{1}{4}T_c$.

22. Pour tirer ces conclusions, il a fallu supposer $b = \frac{A}{nT} = \frac{\gamma^2}{6}\frac{n}{T} = cte$ constant. Ainsi, prenons par exemple une variation de température telle que $T < T_c$, alors de la seconde égalité $n < n_c$. Mais aussi, de la première $b = \frac{1}{n}\frac{A}{T}$, on a que $n < n_c$ implique que le rapport $\frac{T}{A}$ est plus grand que sa valeur critique 3, et cela signifie au contraire que $T > T_c$. On peut penser que, plus qu'une contradiction cela soit le reflet d'un cycle

$$(T < T_c) \Rightarrow (n < n_c) \Rightarrow (T > T_c) \ldots$$

Conclusion

Si nous avons confiance en l'analogie que nous venons de proposer avec la théorie de Van der Waals, il semble que deux phénomènes alternent : une séparation de phases qui dure tant que $\frac{1}{3}A < T < 3A$, puis une relaxation qui finit par renvoyer le système dans la zone de séparation de phase. Ces deux caractéristiques combinent donc la phénoménologie des transitions du premier et du second ordre. Rappelons seulement que, puisque le système demeure critique, c'est-à-dire dans le régime des fluctuations fortes $\delta v \sim v$ et d'invariance d'échelles, la théorie de Van der Waals est à considérer à titre qualitatif.

Sous le seuil de transition $\nu \ll g$, un faible écart à l'équilibre entraine une réponse cohérente de fréquence caractéristique ω_0, amortie en un temps caractéristique $\nu^{-1} \gg \omega_0^{-1}$. Au dessus du seuil de transition, il y a séparation de deux phases, l'une caractérisant les fronts de condensation, l'autre les plateaux d'érosion. Si au seuil il y a résonance $\nu \approx \omega_0$, au dessus la tendance à recycler fait que ω_0 est mal définie sauf en moyenne, laquelle est alors $\bar{\omega}_0 \sim \sqrt{-g \langle \partial_x N \rangle} \gg \nu \sim \sqrt{g S_d}$. Néanmoins, par intermittence la résonance est atteinte lorsque $T \approx T_c$, où $\partial_x N \approx -S_d$.

On comprend donc un peu mieux comment très loin du point de transition $g = \nu$, le système conserve un comportement critique. Une avalanche se déclenche lorsque le système devient sur-critique au niveau d'un front de condensation, i.e. au préalable sous-critique.

On a vu, à la partie I, un autre exemple de résonance, à proprement parler entre modes propres et particules, qui se déroule cette fois le long d'une ligne de champ magnétique. Elle manifeste en fait exactement la même phénoménologie[23], là dans le référentiel de l'onde v_φ et ici dans le référentiel de la particule v_E, n'en faisant en somme qu'un changement de point de vue.

23. En grandeurs normalisées : si ce sont ici les ondes d'Alfvèn, c'étaient là les ondes de Langmuir.

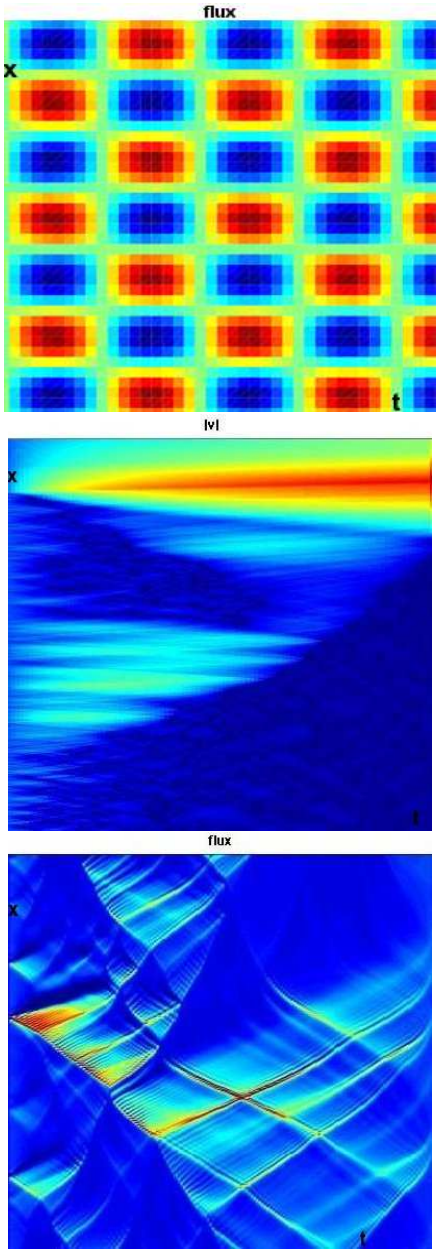


FIGURE 4.11 – Cartes spatio-temporelles pour trois valeurs de ν : $\nu = 0.01g$; $\nu = g$; $\nu = 80g$. Le flux entre par la gauche. Le paramètre ν est à peine au dessus de la valeur seuil pour la figure du milieu.

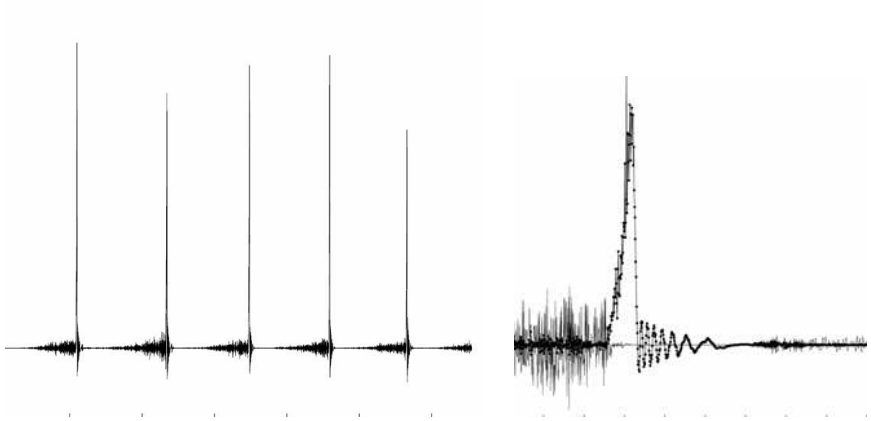


FIGURE 4.12 – Flux au seuil, montrant la superposition des hautes fréquences de plus faibles amplitudes qu'un mode basse fréquence correspondant à la relaxation de tout le plasma. Ce comportement est caractéristique de l'intermittence (de type III).

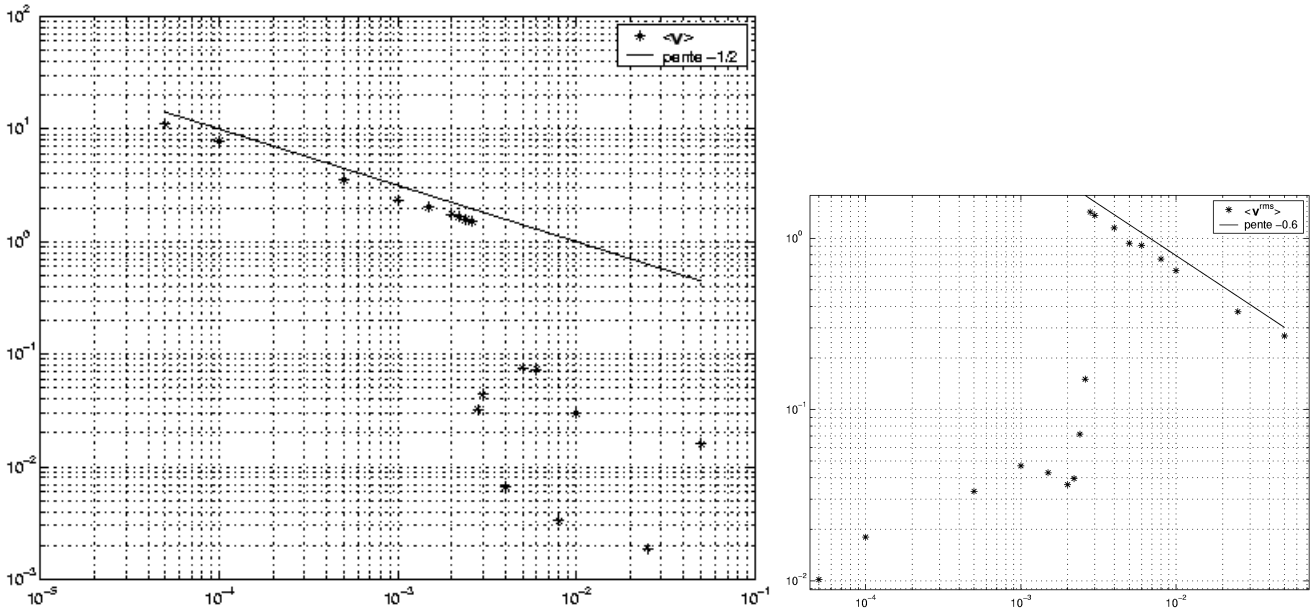
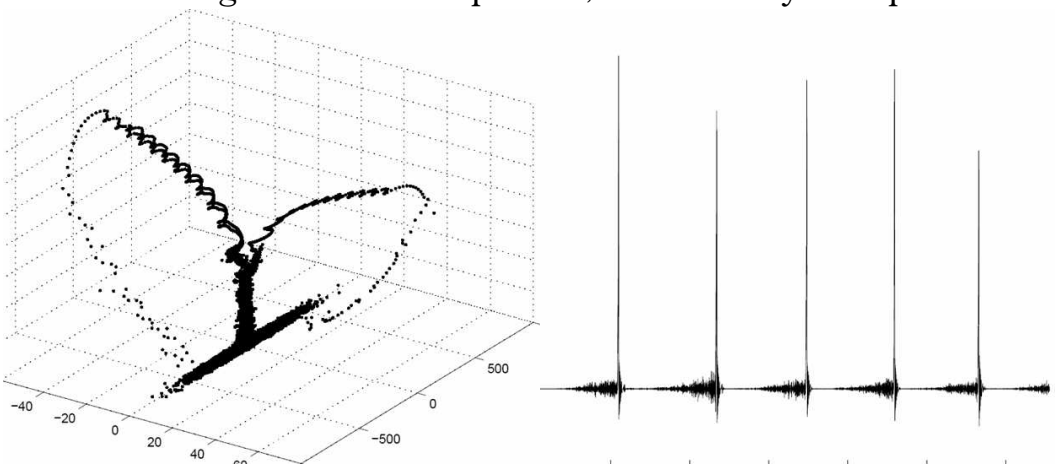
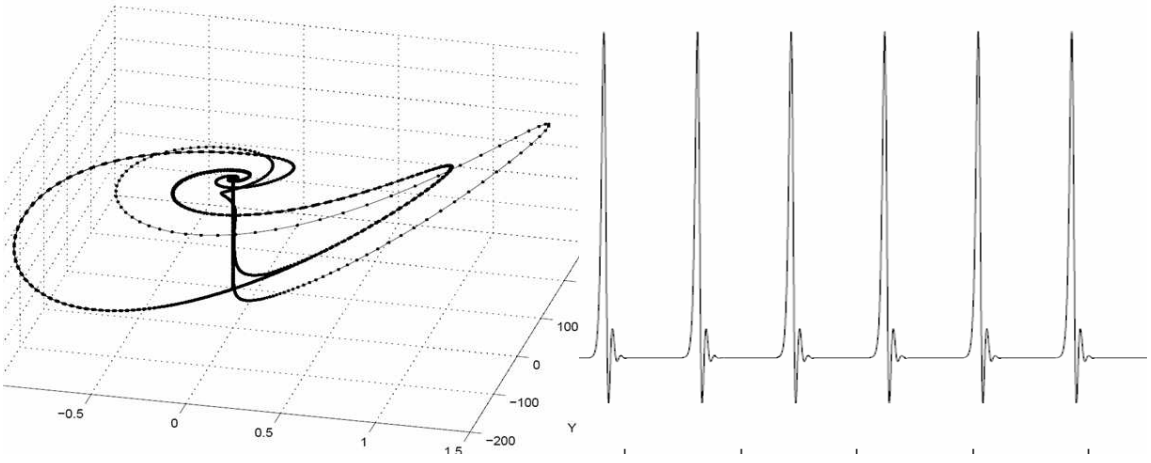


FIGURE 4.13 – Echantillonage de $\langle v \rangle$ et de l'écart-type $\langle \delta v^2 \rangle$.

FIGURE 4.14 – La superposition des deux modes à l'opposée du spectre, dans le régime $\nu \approx g$ est bien visible sur l'attracteur. L'envergure des deux ailes de papillons est très importante. Elles correspondent à des décharges de tout le plasma, i.e. à la dynamique d'ensemble.



Le couplage spatial résulte du transport moyen de matière. Les fluctuations de ce transport reflètent celles de chaque système local, et peuvent donc entrer en résonance avec le système local voisin. Ces résonances accentuent le chaos du système local pris isolément, ce qui donne cet aspect bruité aux plus hautes fréquences, aspect qui nous a permis de postuler une forme d'équilibre local.
À titre de comparaison je donne l'attracteur, et le signal associé, du système de Lorenz, dans le régime du système spatio-temporel pris dans son ensemble (les paramètres renormalisés). Naturellement, on a perdu le mode haute fréquence. Les amplitudes des ailes sont beaucoup moins marquées. La différence traduit l'amplification qui résulte du couplage spatial de tels systèmes : l'avalanche. Une autre dénomination pour le même phénomène est "cascade", signifiant l'amplification d'une variation microscopique en une variation macroscopique. En particulier, pour un système dans l'état critique $T = T_c$, la longueur de corrélation est $l_c = \infty$, alors une toute petite variation, même locale, de température $T' = T_c + \delta T$ résulte en un changement macroscopique pour toutes les échelles $\infty > l > l'_c$, après un temps d'équilibration.
La persistance du chaos dans l'espace des paramètres, pour le système de Lorenz , résulte donc dans une forme d'invariance d'échelles, voir partie III.



Conclusion des parties I & II

Les deux phénoménologies présentées dans les deux précédentes parties sont remarquablement similaires. L'interaction des électrons résonants avec le corps du plasma a fort affaire en effet avec la physique d'une gaine cathodique.

Les électrons mobiles polarisent négativement un conducteur plongé dans un plasma, et l'équilibre électrostatique impose une gaine ionique. Le critère de Bohm énonce l'égalité de la vitesse des ions avec la vitesse thermique à l'entrée de celle-ci. L'électroneutralité n'a plus court dans la gaine. La densité est par conservation de l'énergie et du nombre des charges

$$n_{\mp} \sim \frac{1}{\sqrt{(1 \pm \beta e \Phi)}}.$$

Or, en nous plaçant dans le référentiel ionique d'entrée de gaine, ce sont les électrons (vers la surface du conducteur) qui ont une vitesse supra thermique. Ainsi, la forme précédente de la densité constitue bien, pour les charges piégées, le point de départ de la solution à l'équation de Poisson $\Delta\Phi \sim n_+ - n_-$, dans le système ondes-particules, qu'ont donnée I.B. Bernstein, J. M. Greene et M. Kruskal [11].

En particulier, il en résulte une profonde similitude entre les taux d'amortissement ν et γ. Le premier est estimé par la perte des charges ioniques accélérés dans la gaine, dont la dimension typique est la longueur d'écrantage de Debye

$$\nu \approx \frac{1}{\beta^{\frac{1}{2}} \lambda_D}.$$

Dans le référentiel de la phase de l'onde, seule une fraction η des charges sont concernés, et plongent de même dans les puits de potentiel. Ainsi, on a vu que le second taux était

$$\gamma \approx \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\lambda_D}.$$

Lorsque $\eta \to 0$, la longueur de corrélation $l_c \to \infty$. Bien que cela fournisse une forte présomption de l'invalidité du modèle linéaire, comme

nous avons dit à la partie I, l'existence d'un tel mode de longueur d'onde λ_D n'est a priori pas interdite en principe (c.f. néanmoins section (5.5)), car les phénomènes électrochimiques se produisent à l'échelle l_c bien séparée de l'échelle d'électroneutralité λ_D.

Dans la limite contraire $\eta \to 1$ toutefois, la séparation d'échelles n'est plus vraie $l_c \to \lambda_D$. Il faut donc se demander si les phénomènes électrochimiques, qui ne devraient pas dépendre de la longueur de Debye, ne se manifestent pas de fait avec invariance d'échelles. La réponse penche vers l'affirmative. Un élément peut être apporté par la correspondance, étonnante a priori, qui existe entre l'interaction faisceaux-plasma et l'instabilité d'échange. En effet, le premier peut se résumer au système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t v_{\mathcal{R}} & = & -\frac{e}{m}\mathbf{E} \\ \partial_t \mathbf{E} & = & -i\omega_p \mathbf{E} \end{array} \right.$$

où $v_{\mathcal{R}}$ est la vitesse dans le référentiel de la phase de l'onde, et

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2}{\epsilon_0 m}\left(\bar{n} + \nabla \cdot \mathbf{E}\right)}. \tag{4.60}$$

Le second se résume comme nous avons vu à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t v & = & gn \\ \partial_t n & = & -i\omega_0 n \end{array} \right.$$

où v est la vitesse dans le référentiel de dérive électrique et

$$\omega_0 = \sqrt{g\nabla N}.$$

Les deux systèmes ont la même structure, et il suffit d'écrire la densité moyenne de charge comme donnant accès à un champ électrique $\eta\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E}$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} \equiv \frac{-e}{\epsilon_0}\bar{n}$$

pour faire correspondre ces fréquences ω_p et ω_0, avec $\mathbf{E} \leftrightarrow n$ et $\bar{\mathbf{E}} \leftrightarrow N$. Alors par conservation de chaque espèce, au premier ordre nous avons $\partial_t \bar{n} = \nabla\left(n v_{\mathcal{R}}\right)$, c'est-à-dire aussi, par intégration sur l'espace, que nous retrouvons les trois équations du système d'échange, la troisième étant

$$\partial_t \bar{\mathbf{E}} = \nabla \cdot \left(\mathbf{E} v_{\mathcal{R}}\right).$$

Comme le nom "échange" l'indique, cette correspondance n'est pas aussi étonnante qu'il ne paraît, car exprimés en termes phénoménologiques,

les deux systèmes manifestent l'échange de particules entre puits de potentiel. La criticalité apparaît lorsque

$$\frac{\nu}{g} \to 1.$$

Or, si à ν il correspond $\nu \leftrightarrow \gamma = \eta \frac{e^2}{\epsilon_0 m}$, à g il correspond d'après eq. (4.60)

$$g \leftrightarrow \frac{e^2}{\epsilon_0 m}.$$

Nous trouvons donc que la criticalité apparaît aussi lorsque

$$\eta \to 1. \tag{4.61}$$

Pour un équilibre local maxwellien, on peut estimer que

$$\eta \approx \frac{\int_{\beta^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-\beta \frac{v^2}{2}}}{\int_0^{\beta^{-\frac{1}{2}}} e^{-\beta \frac{v^2}{2}}} \approx 0.4.$$

Pour cette valeur de η, le plasma, à l'intérieur d'un tube de flux magnétique, a donc de forte chance d'être à l'état critique seuil. Les fluctuations déforment ultérieurement la distribution, comme nous verrons à la prochaine partie, en faveur d'une augmentation de η.

Troisième partie

Invariance d'échelles et statistique

Introduction

J'ai suggéré dans les chapitres précédents que la criticalité pouvait être liée à l'apparition d'une résonance entre la dynamique des fluctuations et celle du champ moyen. Cette résonance se manifeste notamment par un chaos local, dont la structure temporelle, invariante d'échelles, peut se propager à tout l'espace, par le couplage qu'offre le transport de matière et d'énergie. Les fluctuations de ce couplage sont elles mêmes chaotiques, et donc invariantes d'échelles en vertu de quoi la distribution des vitesses convectives ne peut pas être maxwellienne. Ce dernier point peut se comprendre en invoquant le théorème limite central, dont les hypothèses excluent l'invariance d'échelles de la variable aléatoire. On peut se référer concernant la généralisation du théorème à l'article de revue de J. P. Bouchaud et A. Georges [15].

Inversement, lorsque la distribution d'une certaine observable n'est pas gaussienne peut-on en inférer l'invariance d'échelles ? De plus, existe-t-il des formes universelles de distributions non gaussiennes, dont on puisse déduire certaines propriétés du milieu, comme c'est le cas pour les distributions gaussiennes ? C'est à ces deux questions que j'essaie d'apporter des éléments de réponse, dans le présent chapitre.

Chapitre 5

Proposition de théorie cinétique stochastique

La théorie de champ moyen, connue aussi comme la théorie de Landau, permet de relier la distribution de Gibbs $p(n)$ des fluctuations d'une observable n (le paramètre d'ordre) à la susceptibilité statique du milieu χ_0 (c.f. [66]) sous une forme gaussienne

$$p(n) \propto e^{-\beta \int dV \frac{\delta n^2}{\chi_0}}.$$

Est-il possible d'étendre la théorie de Landau, le plus simplement, dans le but d'obtenir l'information statistique sur les milieux dans l'état critique (i.e. dans le régime des fluctuations), pour lesquels la susceptibilité statique est infinie ? Je réponds par l'affirmative, et propose de le faire par l'introduction d'une susceptibilité finie stochastique. On pourra voir en ceci une hypothèse ad hoc, à partir de laquelle tenter de faire corroborer des résultats numériques ou expérimentaux, ou y voir une preuve à fournir à partir d'hypothèses plus faibles. La première section traite cette proposition en tant que telle, et sans apporter de véritable preuve, donne une argumentation et un faisceau de résultats en sa faveur. J'amorcerai également une comparaison aux théories existantes qui tentent de décrire les lois d'échelles issue de la dynamique critique. La seconde section la traite comme une hypothèse, dont je tire certaines formes universelles des distributions. Je discute également très brièvement, car c'est un sujet de mémoire en soi, la démarcation que cette hypothèse présente avec l'hypothèse d'équilibre local (violation de second principe et vieillissement).

5.1 Coefficient phénoménologique stochastique

5.1.1 Théorie linéaire

Je rappelle quelques notions utiles de la théorie cinétique. Je reprends aussi l'argument de la dérivation du Hamiltonien effectif à l'échelle macroscopique dû à L. D. Landau (paragraphe 147 de [66]), pour discuter l'inclusion des effets de la partie microscopique de l'énergie dans la théorie cinétique.

5.1.1.1 Cinétique

La cinétique de relaxation, pour une faible perturbation d'un champ extérieur du système à l'équilibre, est déduite de l'hamiltonien effectif F de la théorie de Landau, ou de la relation phénoménologique linéaire entre affinité et flux.

Soit n le champ induit, dans cette théorie, et h le champ extérieur ; χ_0 la susceptibilité statique. Alors, on a la relation de réponse

$$n = \chi_0 h. \tag{5.1}$$

En effet, puisque le système est proche de l'équilibre, la dérivée de [1] $F = F_e + F_i$ par rapport à la variable n est nulle, sauf pour sa partie pertubée par le champ extérieur

$$\frac{\delta F_e}{\delta n} = -h.$$

Puis la valeur de n s'écarte donc un peu de sa valeur d'équilibre. Le développement de F à l'ordre deux conduit, d'après le théorème de fluctuation dissipation ($\beta \langle \delta n^2 \rangle = \chi_0$), à

$$\frac{\delta F_i}{\delta n} = \chi_0^{-1} n.$$

C'est bien compatible avec eq. (5.1), près du nouvel équilibre défini par $\frac{\delta (F_e + F_i)}{\delta n} = 0$.

Tout petit écart dépendant du temps est régi par la relation cinétique linéaire, de l'état stationnaire $\partial_t F_e = -\partial_t F_i$,

$$j = -L \nabla h$$

où L est un coefficient cinétique phénoménologique. Une fois cette relation linéaire intégrée sur un petit élément de volume, pour lequel $\delta h = h$,

1. Les indices, "i" pour "intérieur", et "e" pour "extérieur" ou "échange".

on a

$$\partial_t n = -L\chi_0^{-1} n. \tag{5.2}$$

Par définition de la fonction dissipative[2] $f = L\chi_0^{-1} nh$,

$$\partial_t n = -\frac{\delta f}{\delta n}$$

d'où

$$\partial_t F_e = \frac{\delta F_e}{\delta n}\partial_t n = f = -L\chi_0^{-1} F_e. \tag{5.3}$$

De même pour F_i, à l'état stationnaire.

Tout cela ne fait que définir L qu'il faut mesurer ou calculer ; par exemple dans le cas où $h \equiv n$ il s'agit du coefficient de diffusion. Dans le cas où une fréquence caractéristique est pésente ω_0, le coefficient cinétique de dissipation lente s'écrit alors (c.f. partie I)

$$L = \chi\frac{\chi''}{\partial_\omega \chi} \approx \omega_0 \chi'' \tag{5.4}$$

où $\chi'' \ll \chi$ est la partie imaginaire de $\chi(\omega_0)$. Assez naturellement, ce qui revient à imposer une perturbation harmonique $\partial_t h \leftrightarrow i\omega_0 h$ dans eq. (5.1) et chercher la partie réelle de $\partial_t n$, on a l'amortissement Landau

$$\partial_t n = \lambda_0 h. \tag{5.5}$$

où le coefficient cinétique est

$$\lambda_0 = -\omega_0 \chi''. \tag{5.6}$$

5.1.1.2 Complexité du coefficient cinétique

Dans la théorie linéaire, il y a pour tout processus d'un système ouvert une partie dissipative notée S_i, et une partie d'échange notée S_e, à l'entropie $S = S_i + S_e$. Si un coefficient cinétique doit y être associé, il sera complexe, sa partie réelle décrivant le taux de dissipation et sa partie imaginaire la féquence d'échanges. Revoyons la façon de construire l'énergie libre effective à partir de la fonction de partition microscopique, et prouvons cela.

Soit

$$Z = \int e^{-\beta E_N(q)} dq^{3N}$$

où N est le nombre de particules en interaction dans le volume V, avec

2. Facteur $\frac{1}{2}$ si $h = n$.

l'énergie E_N. Par simplification, j'omets l'échange de particules et le facteur de normalisation $\frac{1}{N!V^N}$.
Pour restreindre l'intégration à une région de l'espace des phases correspondant à une réalisation spatiale donnée du paramètre d'ordre noté $n(x)$, on peut considérer la fonction de partition contrainte

$$Z(n) = \int e^{-\beta E_N(q)} \prod_x \delta\left(n(x) - n(q,N)\right) dq^{3N}$$

où $n(q,N)$ sont les valeurs a priori de l'observable dans l'espace des phases. Le produit continu $\prod_x$ est mal défini, mais dans un volume fini $V \ll \infty$, il suffit de connaître les composantes de Fourier en quantité dénombrable

$$Z(n) = \int e^{-\beta E_N(q)} \prod_k \delta\left(\hat{n}_k - \hat{n}(q,N)\right) dq^{3N}. \tag{5.7}$$

Soit les grandeurs moyenne et fluctuante, respectivement

$$\bar{n}(x) = \sum_{k<k_0} \hat{n}_k e^{ikx},\ \tilde{n}(x) = \sum_{k>k_0} \hat{n}_k e^{ikx}.$$

Ainsi la fonction de partition se factorise en $Z(\bar{n})$ et $Z(\tilde{n})$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Z(\bar{n}) & = & \int e^{-\beta E_N(q)} \prod_{k<k_0} \delta\left(\hat{n}_k - \hat{n}(q,N)\right) dq^{3N} \\ Z(\tilde{n}) & = & \int e^{-\beta E_N(q)} \prod_{k\geq k_0} \delta\left(\hat{n}_k - \hat{n}(q,N)\right) dq^{3N} \end{array} \right. .$$

La fréquence de coupure k_0 est à déterminer et c'est justement ce qui ne sera pas possible dans l'état critique. La contrainte imposée à $Z(\bar{n})$ est incommensurable comparée à celle imposée à $Z(n)$ ou à $Z(\tilde{n})$, car seulement un nombre fini de variables, les k_0 premiers modes, sont fixées.

Lorsque la séparation ci-dessus est valable, l'équilibre est assuré pour la grandeur moyenne $\bar{n}$, par l'exploration de l'infinité de degrés de liberté[3] $k > k_0$. On peut alors définir l'énergie libre effective de Landau

$$F(\bar{n}) = -T \ln(Z(\bar{n})).$$

Elle admet un minimum en $\bar{n}_0$, et un développement dépendant des symétries (méthode du col) $\sim \chi_0^{-1} \delta\bar{n}^2 + ...$, ce qui a servi par exemple au paragraphe (4.4.3). La fonctionnelle

$$F(\tilde{n}) = -T \ln(Z(\tilde{n}))$$

3. Pour un nombre fini de degrés de liberté, on peut penser qu'il en suffirait d'au moins trois en interaction chaotique pour espérer atteindre l'équilibre. Pourtant, il s'agira seulement d'un état stationnaire, ou autrement dit d'un équilibre pour des modes de plus basses fréquences encore. D'où la dénomination moyenne et fluctuante.

ne représente donc pas une énergie libre, mais bien plus un hamiltonien (tel que celui de la partie I)

$$F(\tilde{n}) \equiv H(\tilde{n}).$$

Prenons maintenant l'équation eq. (4.1), son Lagrangien est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_t v\right)^2 - \frac{1}{2}v^2\left(\partial_x v\right)^2.$$

Les variations temporelles sont régies par

$$\begin{cases} \partial_t v &= \frac{\delta}{\delta\pi}\mathcal{H}(v,\pi) \\ \partial_t \pi &= -\frac{\delta}{\delta v}\mathcal{H}(v,\pi) \end{cases} \tag{5.8}$$

où π est le champ conjugué de v

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_t v\right)} = \partial_t v \tag{5.9}$$

et le hamiltonien

$$\mathcal{H} = \pi\partial_t v - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_t v\right)^2 + \frac{1}{2}v^2\left(\partial_x v\right)^2.$$

Comparée à l'expression de l'énergie eq. (4.12) où l'on voit $H \propto v^2$, on s'aperçoit que H et $\mathcal{H}$ semblent être reliés par [4]

$$\mathcal{H} \propto \frac{d^2 H}{dt^2} = \partial_{tt}^2 H. \tag{5.10}$$

Si les équations eq. (5.8), eq. (5.9) et eq. (5.10) ont une forme générique, il est possible d'inclure les fluctuations dans la théorie cinétique.

En effet, retournons au champ $\tilde{n} = \frac{\nu}{g}v$, la forme canonique des équations du mouvement eq. (5.8) rappelle la théorie cinétique si l'on définit f par

$$\delta\mathcal{H} = -\frac{\delta\pi}{\delta\tilde{n}}\delta f.$$

On obtient d'abord la relation suivante, de la dernière équation et de eq. (5.9)

$$\mathcal{H} = -\partial_t f.$$

Avec eq. (5.10), on obtient

$$f \propto -\partial_t H$$

4. La seconde égalité résulte de l'intégration sur le volume. Le hamiltonien ne peut dépendre qu'explicitement du temps.

similaire à eq. (5.3). Il est donc raisonnable de supposer l'égalité des deux membres [5]

$$\partial_t H = -f. \tag{5.11}$$

Cependant, f ne caractérise plus la dissipation mais au contraire les fluctuations réversibles. Le cas le plus simple, et emblématique, est celui d'une oscillation harmonique de fréquence ω_0. La fonctionnelle f peut s'écrire alors

$$f = i\omega_0 \chi^{-1}(\omega_0)\, \tilde{n} h$$

où le coefficient cinétique est maintenant imaginaire. En combinant les résultats pour $\bar{n}$ et $\tilde{n}$ dans une seule et même fonctionnelle

$$\mathcal{F}(n) = F(\bar{n}) + H(\tilde{n}),$$

on peut ainsi prolonger analytiquement dans l'espace des paramètres complexes la théorie cinétique linéaire. L'équation eq. (5.5) est valable mais le coefficient eq. (5.6) est maintenant complexe. Dans le cas plus général avec dépendance spatiale, on a à la place de ω_0 la relation de dispersion $\omega(k)$, éventuellement non linéaire, de même $\lambda(k)$ au lieu de λ_0. Rappelons que le taux d'amortissement $\lambda(k)$ est lié à la largeur spectrale $\Delta\omega(k)$, ce qui indique la méthode pour passer de H à F_i.

Nous avons en fin de compte construit en généralisant eq. (5.2) une équation de Ginzburg-Landau complexe [6] (c.f. par exemple [5]).

5.1.2 Théorie étendue à l'état critique

5.1.2.1 Equation cinétique stochastique

Dans l'état critique, les notions de résonance et de chaos sont importantes, le système est loin de l'équilibre : les fluctuations sont de grandes amplitudes et la fréquence caractéristique n'est pas bien définie, sauf à représenter l'inverse d'un temps moyen séparant deux fluctuations intermittentes. Les eq. (5.2) ou eq. (5.4), comme la forme plus générale

$$\partial_t n = \frac{\delta \partial_t \mathcal{F}_i}{\delta n}$$

5. Ceci à un facteur 2 près si $H \approx v^2$ et compte tenu de la relation qui précède eq. (4.1). Mais la détermination numérique des coefficients n'est pas en jeu ici.

6. En général, la justification de ce type d'équation est purement empirique, et ce prolongement (analytique) naturel de la théorie cinétique n'est pas dérivé à ma connaissance.

ne sont plus très bien définies, car au lieu de dérivée partielle temporelle, il s'agit de variations temporelles chaotiques sans doute non dérivables,

$$\frac{\delta n}{\delta t} = \frac{\delta^2 \mathcal{F}_i}{\delta n \delta t}.$$

La variable n a maintenant une dynamique chaotique, mais aussi, et c'est cela qui est important, la susceptibilité.

En effet, s'il en était autrement on retrouverait les eq. (5.3) ou eq.(5.4) inchangées, confisquant tout pouvoir de généralisation. Cherchons la variation interne d'énergie libre qui annule la variation d'énergie mécanique[7], $\mathcal{F}_i = -\mathcal{F}_e = hn$. Alors que h est fixée formellement[8], si l'on veut que eq. (5.1) reste formellement valable, la susceptibilité χ_0 doit avoir une composante aléatoire (c.f. la signification au paragraphe 5.7.1). Donc, de façon heuristique on peut avoir l'envi de poser

$$\delta_t n = \tilde{\lambda} h \tag{5.12}$$

où $\tilde{\lambda}$ est le coefficient cinétique, ayant acquis une nature stochastique. Il est complexe, par extrapolation de l'analyse précédente. On peut appeler eq. (5.12) une équation de Ginzburg-Landau stochastique. La linéarité formelle n'est pas assurée et la partie déterministe de $\tilde{\lambda}$, c'est-à-dire la moyenne conditionnelle à une valeur de h, $\left\langle \tilde{\lambda} \middle/ h \right\rangle$ est en toute généralité un opérateur

$$\left\langle \tilde{\lambda} h \middle/ h \right\rangle = g(h). \tag{5.13}$$

Par exemple, cette forme diffère de l'équation retenue par S.-K Ma et G. F. Mazenko dans [68], en ceci que le bruit étant intrinsèque, tous les couplages et toute la dynamique sont compris dans le coefficient stochastique. En outre, l'idée est que toute l'information utile est contenue dans g, de façon universelle en généralisant le théorème de fluctuation-dissipation (ou la relation phénoménologique de Gibbs-Duheim). Le travail consiste donc à déterminer ses propriétés.

7. Le premier principe énonce le transfert de l'énergie mécanique (extérieure) à l'énergie de fluctuations (intérieure), dissipée sous la forme de chaleur. Le bilan est

$$F_e + F_i = 0$$

lorsqu'il y a conservation de l'energie totale. Le bilan est ici assumé local, or comme $\mathcal{F}_i$ n'est pas de la chaleur, c'est en fait une étape d'un processus de cascade.

8. C'est un champ extérieur

5.2 Processus

L'équation eq. (5.12) est un processus, c'est-à-dire une marche aléatoire à pas continu, de bruit multiplicatif. C'est un processus de Levy, lorsque ses corrélations sont finies mais que la variance diverge, pour une loi stable du bruit [9]. C'est un processus Brownien fractionnaire dans le cas contraire (lorsque le temps de corrélation diverge). Résolvons formellement cette équation, et notons

$$W_i = e^{\int_{t_i}^{t_i+\delta t} \tilde{\lambda}}$$

nous avons

$$n(t) = \prod_i^N W_i \tag{5.14}$$

où $t = N\delta t$. La moyenne de ces réalisations, sur les chemins suivis par la variable aléatoire $\tilde{\lambda}$,

$$\langle n \rangle (t)$$

est une intégrale de chemin [10].

5.2.1 Exemple de processus de Levy

Pour commencer à faire apparaître les propriétés asymptotiques, définissons

$$a_i = \ln W_i = \int^{\delta t} \tilde{\lambda}_i$$

et passons dans la représentation de Fourier. Par simplicité, dans ce paragraphe on supposera que $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$.

Soit le cas d'un processus de Levy. Pour δt assez grand, on peut considérer les a_i comme des variables indépendantes. La fonction caractéristique de $\ln(n) = \sum_i^N a_i$ est alors (identité de Chapman-Kolmogorov)

$$\Theta(\omega) \equiv \int d(\ln(n))\ \ln(n) e^{i\omega \ln(n)} = \prod_i^N \int da_i\ p(a_i) e^{i\omega a_i} \equiv \prod_i^N \left\langle e^{i\omega a_i} \right\rangle \equiv \prod_i^N \theta_i(\omega).$$

Développons l'exponentielle en série. Excluons d'abord le cas de la ciné-

9. c'est-à-dire dont toute combinaison linéaire de telles variables aléatoires a la même loi.

10. En particulier, une intégrale de Feynman pour $\tilde{\lambda} \in i\mathbb{R}$ et sa distribution de probabilité $p(\tilde{\lambda}) = 1$.

tique linéaire, soit $\tilde{\lambda} = \lambda_0$, et prenons $\left\langle \tilde{\lambda} \right\rangle = 0$. Nous obtenons alors

$$\Theta(\omega) = \prod_i^N \left(1 - \frac{1}{2}\omega^2 \left\langle a_i^2 \right\rangle + \mathcal{O}(\left\langle a_i^4 \right\rangle) \right) \tag{5.15}$$

ce qui reste valable tant que[11] $\partial_{\delta t} \left\langle a_i^2 \right\rangle < \infty$, pour $\delta t \to \infty$. c'est-à-dire, puisque le temps de corrélation du coefficient stochastique est fini $\tau_c < \infty$,

$$\left\langle a_i^2 \right\rangle = \int^{\delta t} dt_i \int^{\delta t} d\tau_j \left\langle \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_{i+j} \right\rangle = \left\langle \tilde{\lambda^2} \right\rangle \tau_c \delta t$$

que la variance est finie

$$\left\langle \tilde{\lambda^2} \right\rangle < \infty.$$

Prenons $\forall i,\ \sigma^2 = \langle a_i^2 \rangle$. Lorsque $N \to \infty$ la fonction caractéristique de la variable réduite $\omega' = \omega N^{-\frac{1}{2}}$ admet une limite gaussienne

$$\lim_{N\to\infty} \Theta'(\omega') = e^{-\frac{\sigma^2}{2}\omega'^2}. \tag{5.16}$$

Cela signifie que le processus $n(t)$ est de distribution log-normale

$$\lim_{t\to\infty} p(\ln(n(t) = n)) = C(t) e^{-\frac{(\ln n)^2}{2\langle \tilde{\lambda}^2 \rangle \tau_c t}}$$

où $C(t)$ sert à la normalisation de p. Ou encore,

$$\langle \ln n \rangle (t) \sim \pm\sqrt{t}.$$

5.2.2 Méthode de renormalisation

Lorsque la variance est infinie, le développement de Taylor précédent est mal défini. Voyons quelle nouvelle forme asymptotique apparaît en utilisant la symétrie de la série par changement d'échelles. La solution peut être trouvée plus directement dans ce cas simple (c.f. par exemple [15]), mais c'est ici un exercice d'introduction à la méthode, dont j'emploie certains résultats par la suite. La méthode si elle réussit assure d'ailleurs qu'il existe une solution, en général introuvable directement sans prouesse. On peut se référer aux exposés de L. P. Kadanoff [57] ou de N. Goldenfeld [46], par exemple.

11. À comparer avec la condition nécessaire pour dériver l'équation de Fokker-Planck associée à Θ, où l'on prend la limite $\delta t \to 0$ (néanmoins $\delta t \gg \tau_c > 0$), soit $\partial_{\delta t} \left\langle a_i^2 \right\rangle > 0$.

5.2.2.1 Pour un processus de Levy

il s'agit de régulariser une série dont les termes divergent individuellement, parce que la série est un développement par rapport à une mauvaise solution [12] eq. (5.15). C'est historiquement dans le contexte de l'électrodynamique quantique que la renormalisation a été développée. M. Gell-Mann et F. E. Low ont inscrit dans [45] la formulation moderne.

La première étape consiste à régulariser d'une façon. Par exemple, on peut introduire une borne d'intégration. Notons alors $Da = p(a)da$ et

$$\left\langle a^2 \right\rangle_T = \int^T Da\ a^2.$$

Nous cherchons la limite $\lim_{T\to\infty} \left\langle a^2 \right\rangle_T$. L'hypothèse de renormalisation consiste à établir une invariance de la précédente quantité, qui contrebalance la divergence, par une remise à l'échelle Z lorsque la limite est en train d'être prise

$$Z(\frac{T'}{T}) \left\langle a^2 \right\rangle_{T'}^{'} = \left\langle a^2 \right\rangle_T . \tag{5.17}$$

La série est renormalisable lorsque la transformation précédente est un point fixe, c'est-à-dire que la série converge en fait uniformément pour $T \to \infty$.

Considérons la probabilité $p(a)$. Connaître tous les moments est équivalent à connaitre la distribution de probabilité, en pratique les deux premiers peuvent suffir. Ainsi seront similaires les distributions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{c} p(a) \sim_{a\to\infty} a^{-(1+\mu)} \\ \mu > 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} p(a) = 0, \quad \forall\, |a| > a_0 \\ p(a) = \frac{1}{2} a_0^{-1}, \quad \forall\, |a| < a_0 \end{array} \right. \tag{5.18}$$

car la correction sur le deuxième moment

$$\left\langle a^2 \right\rangle < \infty$$

est minime. Ce sont les valeurs de μ

$$\mu \leq 2 \tag{5.19}$$

12. On peut donner un analogue historique de ce genre : dans son système géocentrique, Ptolémée a introduit une ou plusieurs épicycloïdes à l'orbite des astres errants pour tenter de sauver les apparences, notamment la rétrogragation et l'éloignement des planètes dans l'observation du ciel. La véritable trajectoire (du moins dans le système solaire) est tout à fait différente. C'est en tentant une nouvelle solution qui lui semblait plus respectueuse des principes physiques (d'Aristote), que Copernic a proposé son système héliocentrique. Il s'est agi de l'amorce d'une révolution scientifique, qui allait renouveler la physique. On peut lire l'exposé passionnant, très riche d'enseignements épistémologiques, par P. Duhem dans [25].

pour lesquelles ce moment diverge, c'est-à-dire aussi $a_0 = \infty$.

Soit alors

$$\frac{T'}{T} = b$$

et soit

$$\epsilon \equiv 2 - \mu \ll 1$$

la remise à l'échelle Z, eq. (5.17), est déterminée par la forme générique de $p(a)$, eq.(5.18), eq. (5.19),

$$Z(b) \approx (1 + \epsilon \ln(b)) \approx b^{\epsilon}. \tag{5.20}$$

Ce résultat est ici en fait exact pour tout ϵ, mais la forme précédente est illustrative de celle rencontrée dans nombre de cas. La renormalisabilité assure un point fixe, ainsi

$$\left\langle a^2 \right\rangle_T^* = b^{\epsilon} \left\langle a^2 \right\rangle_{bT}^* .$$

b étant complètement arbitraire, on peut le prendre égal à

$$b = \omega^{-1}.$$

Ainsi, nous obtenons le scaling anormal

$$\left\langle a^2 \right\rangle_\omega^* = \omega^{-\epsilon} \left\langle a^2 \right\rangle_1^* . \tag{5.21}$$

En réinjectant cette équation dans l'exponentielle, lorsque $N \to \infty$ nous voyons que la variable réduite doit être maintenant

$$\omega' = \omega N^{-\frac{1}{2-\epsilon}} = \omega N^{-\frac{1}{\mu}}.$$

La fonction caractérisitque admet donc une limite

$$\lim_{N\to\infty} \Theta'(\omega') = e^{-\sim\omega'^{\mu}}. \tag{5.22}$$

Aux temps longs, on a alors

$$\langle \ln n \rangle (t) \sim \pm t^{\frac{1}{\mu}}.$$

On retrouve en particulier la cinétique linéaire pour $\mu = 1$, bien que $\sup_{\beta\leq 1} \left\langle \left| \tilde{\lambda} \right|^{\beta} \right\rangle = \infty$, mais $\left\langle \tilde{\lambda} \right\rangle = 0$.

5.2.2.2 Pour le processus Brownien fractionnaire

On ne peut pas négliger les couplages entre a_i et a_j $i \neq j$, ce qui interdit d'utiliser l'identité de Chapman-Kolmogorov. Utilisons l'argument suivant : le résultat ne doit pas dépendre de la séquentialisation, c'est-à-dire de la valeur explicite de δt. Opérons alors une moyenne partielle (*coarse-graining*), sur des blocs de m indices par exemple.

L. P. Kadanoff [35] est à l'origine de l'idée dans le contexte de la recherche des exposants critiques postulés par B. Widom [87]. La méthode par blocs de spins pour le modèle d'Ising (par exemple des blocs triangulaires de trois éléments, en dimension 2) révèle la signification de l'invariance d'échelles. Elle fut reprise et développée par K. G. Wilson [88] avec la compréhension de la singularité au point critique, comme résultant de la limite thermodynamique de transformations analytiques, avec la notion de flot autour d'un point fixe instable dans l'espace des paramètres. Pour l'Hamiltonien de Landau, le premier succès de calcul perturbatif est mené dans l'espace de Fourier, en dimension $d = 4 - \epsilon$ [91]. Le lien avec la version de l'électrodynamique est aussi établi.

Définissons ici le changement d'échelles

$$i \to \frac{i}{m} \tag{5.23}$$

pour lequel $\delta t \to m\delta t$, i.e. lorsqu'on change de variable temps

$$t' = \frac{t}{m}.$$

Chaque étape consiste à regrouper les a_i par blocs de m, et d'effectuer une remise à l'échelle $Z = m^H$

$$\mathcal{R} : a_i \mapsto m^{-H} \left(a_{mi} + a_{mi+1} + ... + a_{(m+1)i-1} \right)$$

enfin, prendre la moyenne conditionelle (connaissant $a'_{i'}$) du carré du transformé, qu'on note avec un indice i',

$$m^{-2H} \left(m \left\langle a_i^2 \right\rangle_{i'} + 2 \sum_j^n (m-j) \left\langle a_i a_j \right\rangle_{i'} \right) = {a'_{i'}}^2 . \tag{5.24}$$

Lorsque les corrélations sont fortes, c'est-à-dire que la fonction de corrélation décroit plus lentement que $(i-j)^{-1}$, soit pour $y < 1$ et $|i-j| \gg 1$

$$\left\langle a_i a_j \right\rangle \approx \left\langle a_i^2 \right\rangle |i-j|^{-y}$$

alors pour $m \gg 1$, le terme dominant dans l'expression de remise à l'échelle eq. (5.24) est [15]

$$2m \sum_{j}^{n} (1 - \frac{j}{m}) \langle a_i a_j \rangle_{i'} \approx m \int^{m} j^{-y} \left\langle a_i^2 \right\rangle_{i'} .$$

Pour qu'il existe un point fixe de la transformation eq. (5.24), l'exposant de Hurst H (l'exposant, "anormal" par rapport à la marche aléatoire brownienne, est $\frac{1}{2} - H = \frac{y-1}{2}$) doit être égal à

$$H = \frac{2-y}{2}. \tag{5.25}$$

Ainsi, sans toutefois connaître explicitement la forme de la distribution, on a

$$\langle \ln n \rangle (t) \sim \pm t^H.$$

On retrouve en particulier la cinétique linéaire pour $y = 0$, ce qui correspond en effet à des corrélations parfaites du coefficient cinétique, et

$$\lambda_0 = \left\langle \left| \tilde{\lambda} \right| \right\rangle .$$

5.3 Originalité par rapport à une équation de Langevin

Ils existent des équations modèles réputées rendre compte des phénomènes hors d'équilibre, dont les propriétés asymptotiques ont été étudiées par la méthode de renormalisation (article de revue de P. C. Hohenberg et B. I. Halperin [49]). Il n'existe pas de telle méthode qui permette de comprendre vraiment les propriétés statistiques et de les calculer en dehors de cas particuliers. C'est d'abord dans ce deuxième but que j'ai tenté d'introduire eq. (5.12). Dans ce paragraphe je compare d'abord la phénoménologie spatio-temporelle de l'équation cinétique stochastique à l'équation de Burgers bruitée. Il y a beaucoup de similitudes satisfaisantes et des différences qui me paraissent aller dans le sens de eq. (5.12).

5.3.1 Criticalité auto-organisée

T. Hwa et M. Kardar ont étudié la criticalité auto-organisée [53], après que P. Bak C. Tang et K. Wiesenfeld avaient introduit cette notion [6]. Le système est un automate cellulaire mimant les rudiments du tas de

sable. Il existe, dans les règles de l'automate, un seuil qui une fois franchi, laisse passer une quantité définie de grains. Le système est alimenté en permanence par un saupoudrage par exemple. La criticalité provient de ce seuil auquel le système semble se maintenir. C. Tang et P. Bak suggéraient que le paramètre d'ordre pourrait être le flux sortant (ref. in [53]) : si le système a tendance à s'établir au seuil, d'où est issue la notion d'auto-organisation, alors ce flux a tendance à s'annuler, sauf en quelques événements aléatoires qui déchargent la quantité accumulée par le saupoudrage : les avalanches. T. Hwa et M. Kardar montrent au contraire que les propriétés importantes d'invariance d'échelles apparaissent pour un flux sortant fini, comme c'est le cas dans les systèmes naturelles. La notion de criticalité auto-organisée en est d'ailleurs renforcée, puisque le système reste malgrès cela accroché au seuil.

Dans les notations de l'article, la probabilité p de déclencher une avalanche doit vérifier un critère de percolation (L dimension du tas), c'est-à-dire de recouvrement des diverses décharges,

$$p \geq L^{-1}$$

ou autrement écrit que le flux entrant J_i vérifie

$$J_i \geq 1.$$

Or, ce seuil est exactement le même que celui de la partie II

$$\nu \geq g$$

comme on peut s'en apercevoir en normalisant [13] ν à j_0. Le mécanisme de déclenchement d'une avalanche est seulement évoqué dans cet article, et ce serait conséquence de l'accumulation de grains, due au scaling du flux sortant $J_s \sim L^{0.25}$ qui ne peut se maintenir que jusqu'à un temps (à flux entrant constant) de l'odre de $\tau \sim L^2$, lorsque la pente a beaucoup changé. En fait cela n'explique que les décharges locales, et ne donne pas à ma connaissance de compréhension de l'exposant 0.25, ni de l'aspect

13. Par exemple, si $g = \alpha^2\nu$, avec $\alpha > 1$, alors opérons le changement d'échelles $\begin{cases} \alpha t' &= t \\ \alpha x' &= x \end{cases}$, et posons $\nu' = \alpha\nu$, dans eq. (3.43). Nous obtenons $g' = \alpha^{-1}g$, ce qui signifie dans les nouveaux paramètres

$$\nu' = g'$$

et

$$j_0' = \alpha^{-1} j_0 < j_0.$$

collectif d'une avalanche. La phénoménologie, que j'ai donnée au dernier paragraphe de la partie II, contient le phénomène d'accumulation, les cycles intermittents précisant un peu plus le sens de criticalité auto-organisée.

5.3.2 Limites

Parmi les différences possibles, l'équation de Burgers est insatisfaisante malgré ces résultats, lorsqu'appliquée au modèle étudié à la partie II avec la présence 'd'évaporation', de taux σ. Cette 'évaporation' peut être présente au bord des Tokamak, pour les même raisons que la présence de friction effective ν, et alors $\sigma \approx \nu$. Le spectre observé n'est pas compatible avec le spectre théorique, c'est-à-dire que les résultats obtenus dans [42, 92, 53] ne sont pas robustes à la présence d'un terme $\partial_t n = ... - \sigma n$, σ aussi petit soit-il. Numériquement, je ne constate pas en effet de modification significative de la phénoménologie avec ou sans 'évaporation'. Pour comprendre ces limitations, reprenons les étapes du cacul de renormalisation [42, 92, 53], dont l'application aux systèmes dynamiques a été introduite par S.-K Ma et G. F. Mazenko [68]. On peut aussi se référer pour une revue de la méthode à l'article de L. M. Smith et S. L. Woodruff [81].

5.3.2.1 Théorème de fluctuation-dissipation et divergences

Comme on a défini le coefficient de diffusion intrinsèque, dans le système d'échange eq. (3.43), par le théorème de fluctuation-dissipation, on peut dire que ce théorème devrait être vérifié par la théorie qui voudrait rendre compte des propriétés asymptotiques de ce modèle. Aux grandes longueurs d'onde, celui-ci stipule, pour un bruit blanc $\tilde{\eta}$,

$$\sigma \left\langle n^2 \right\rangle \approx \left\langle \tilde{\eta}^2 \right\rangle . \tag{5.26}$$

Pour demeurer compatible avec eq. (4.30), l'énergie du bruit devrait être

$$\left\langle \tilde{\eta}^2 \right\rangle \approx \frac{D\nu^3\sigma}{g^2}$$

or c'est en effet ce que l'on trouve pour une équation de Langevin de la vitesse $\partial_t v = \gamma^{-1}\tilde{\eta} = \nu\sqrt{2D}\mathrm{f}$, c.f. eq. (1.1), avec $\sigma \approx \nu$. Pour étudier ce théorème aux petites longueurs d'ondes, considérons la fonction de

réponse linéaire

$$\chi_0(\omega, k) = \frac{1}{\sigma + Dk^2 - i\omega}.$$

Pour que le spectre observé fig. (4.8) corresponde au spectre théorique, dans ce cas standard, on doit avoir (théorème de fluctuation-dissipation)

$$|\hat{n}_k|^2 = \int d\omega \, |\chi_0(\omega, k)|^2 \, |\tilde{\eta}_k|^2 \sim k^{-2} \tag{5.27}$$

c'est-à-dire ou $k^2 > \frac{\sigma}{D}$ et $|\tilde{\eta}_k|^2 \sim k^2$, ou $k^2 < \frac{\sigma}{D}$ et $|\tilde{\eta}_k|^2 \sim k^{-2}$ ($\hat{n}_k$ est un mode "esclave" de $\tilde{\eta}_k$). Notons que ce spectre, près de l'origine $k = 0$, est compatible avec eq. (5.26), car $\int_{L^{-1}}^{l_c^{-1}} dk \;\; |\tilde{\eta}_k|^2 = L \langle \tilde{\eta}^2 \rangle$ et l'intégration $\int_{L^{-1}} dk \; k^{-2} \sim L$.

Néanmoins, le défaut de recourir à la réponse linéaire tient en ce que celle-ci n'autorise pas de comprendre certains traits de l'invariance d'échelles, comme par exemple le spectre "anormal" en fréquences, nommé en général spectre en "1/f" (voir fig. (5.1) et Annexe).

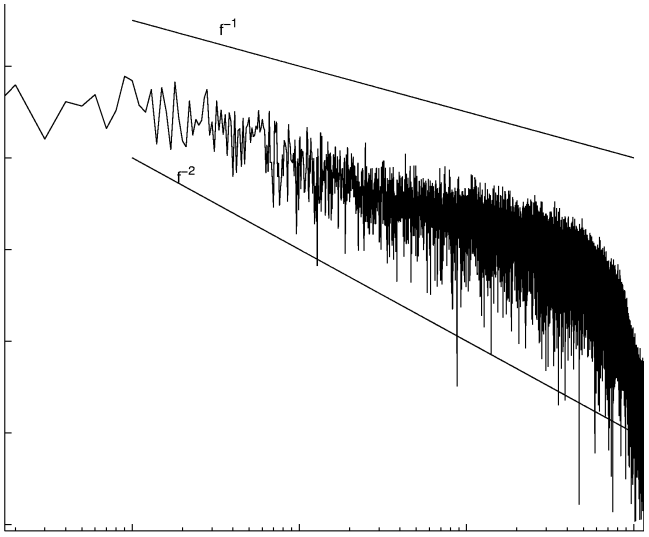


FIGURE 5.1 – Bruit en "1/f" pour les fluctuations de densité du système d'échange.

La prise en compte des non linéarités peut apporter une réponse dans certains cas. Pour savoir si tel est le cas, considérons la correction au premier ordre de la réponse linéaire, par le processus de renormalisation (*"shell to shell"*) sur tous les modes de plus petites longueurs d'ondes que le mode k, et dans la limite asymptotique $\omega \to 0$,

$$\chi_{\mathcal{R}}^{-1}(0, k) = \chi_0^{-1}(0, k) + \Sigma(0, k)$$

où

$$\Sigma(0, k) \propto k^2 \int_k dq \; \frac{q^{d-1} q^y}{1 + aq^2 + bq^4}. \tag{5.28}$$

Le coefficient y caractérise le spectre du bruit, près de $k = 0$. Au numérateur, la diffusion Dk^2 donne le facteur q^4 alors que 'l'évaporation' σ donne le facteur 1. Cette dernière amortit linéairement les grandes échelles. Inversement, la diffusion amortit linéairement les petites échelles. Les loi d'échelles "anormales" apparaissent pour le choix d'un y, tel que cette intégrale eq. (5.28) soit irrégulière, auquel cas les non linéarités dominent la dynamique asymptotique. Nous nous intéressons aux grandes échelles, l'intégrale doit diverger donc dans l'infrarouge, soit lorsque

$$y \leq -d.$$

Notons $\epsilon = -d - y$, le spectre expérimental s'obtient par un ajustement auto-consistant de y (c.f. en l'occurence pour le spectre de Kolmogorov, et $\epsilon = 4 - d - y$, [92]). Le spectre s'obtient, en dimension d, comme

$$|\hat{n}_k|^2 \propto k^{d-1} \int d\omega \frac{k^y}{\omega^2 + (\sigma_k^* + D_k^* k^2)^2} \tag{5.29}$$

où σ_k^* et D_k^* sont les coefficients renormalisés, dépendant a priori de k. C'est la correction "nue" à la réponse, pour $k \to 0$,

$$\Sigma(0, k) \propto k^2 \epsilon^{-1} k^{-\epsilon}$$

qui définit les corrections 'intermédiaires' $\delta\sigma_k$ et $k^2 \delta D_k$, et qui permet de voir que 'l'évaporation' ne serait renormalisée ($\delta\sigma_k \neq 0$) que dans le cas particulier $2 = \epsilon$, i.e. $y = 2 - d$ (si $k^2 > \frac{\sigma}{D}$, y doit valoir $y = 6 - d$). Pour tous les autres cas, le taux 'd'évaporation' est inchangé et le coefficient de diffusion se renormalise sous la forme anormal [14]

$$D_k \sim \epsilon^{-\frac{1}{3}} k^{-\frac{\epsilon}{3}}. \tag{5.30}$$

La forme eq. (5.29) prédit donc une rupture de pentes à nouveau en

$$k^2 \approx \frac{\sigma}{D_k} \sim \epsilon^{\frac{1}{3}} k^{\frac{\epsilon}{3}} \frac{\sigma}{D_0}. \tag{5.31}$$

de $|\hat{n}_k|^2 \sim k^{d-1+y}$ à $|\hat{n}_k|^2 \sim D_k^{-1} k^{d-3+y}$. Le spectre varie en k^{-2}, on doit donc avoir, aux 'petites' longueurs d'ondes $k \gtrsim \epsilon^{\frac{1}{6-\epsilon}}$,

$$\frac{\epsilon}{3} + d - 3 + y = -2 \tag{5.32}$$

14. Où l'analogue à eq. (5.20) est ici ($k' = bk$)

$$\frac{D_b}{D} \approx 1 - \frac{\epsilon}{3} \ln(b) \approx b^{-\frac{\epsilon}{3}}.$$

c'est-à-dire [15], en $d = 1$,

$$y = \frac{1}{2}.$$

Ce résultat contredit largement l'hypothèse initiale de divergence infrarouge $y \leq -d = -1$. C'est aux 'grandes' longueurs d'ondes seulement qu'on a de même que dans le cas standard $d - 1 + y = -2$, c'est-à-dire

$$y = -2$$

qui reste compatible avec l'hypothèse $y \leq -d$.

Pour tester, en plus de cela, l'incertitude sur ce résultat d'incompatibilité, on peut prendre la limite $y = -d$, auquel cas le spectre devrait être en k^{-3}. Il est assez difficile de faire une telle erreur de lecture, expérimentalement, mais si nous admettions qu'elle fût probable, étant donnée la seule décade qui serve à fiter la pente de la figure fig. (4.8), un autre critère discriminant pourrait être l'analyse de l'indice critique dynamique z.

Il est possible de donner la valeur de z, si l'on admet la loi d'échelles que doit suivre la fonction de réponse $\chi(\omega, k)$, dans la limite asymptotique $k \to 0$. Si l'on peut postuler la forme

$$\chi(\omega, k) = k^{\zeta - 2}\phi(\omega k^{-z}) \tag{5.33}$$

où ζ est l'indice critique des corrélations [16], et, où la fonction d'échelles $\phi(x)$ est supposée développable asymptotiquement

$$\lim_{w \to \infty} \phi(w) \sim w^{\frac{\zeta - 2}{z}}.$$

D'après la forme de la réponse linéaire $\chi_0(\omega, 0) = (i\omega)^{-1}$, et l'hypothèse de loi d'échelles sur ϕ, on obtient donc [42]

$$z = 2 - \zeta. \tag{5.34}$$

D'après cette identité, eq. (5.33), et eq. (5.30), on obtient aussi

$$\zeta = \frac{\epsilon}{3}. \tag{5.35}$$

Soit d'après eq. (5.32)

$$z = 2$$

or en se référant à la figure fig. (4.11), il est manifeste que $z \neq 2$, et

15. On note que si $\sigma = 0$, alors $y = -\frac{3}{2}$ de manière tout à fait compatible avec $y \leq 4 - d = 3$.

16. En général noté η.

qu'on attendrait plutôt la valeur $z = 1$. Pour atteindre cette valeur $z = 1$, le spectre expérimental devrait varier cette fois en k^{-5} (et $y = -4$), loi totalement incompatible avec les observations numériques.

Ainsi, rendre compte à la fois du spectre en k et du spectre en ω expérimentaux, du système d'échange avec 'évaporation', n'est pas possible avec ce modèle.

5.3.3 Mapping

Pour terminer, disons deux mots du mapping qui existe entre une équation à bruit multiplicatif du type eq. (5.12) et l'équation de Burgers. Soit

$$\mathcal{A} = \ln(n)$$

alors l'équation d'évolution eq. (5.12) devient

$$\partial_t \mathcal{A} = \tilde{\lambda}. \tag{5.36}$$

L'étude menée au paragraphe (5.2) considérait la partie linéaire $\lambda_0 = 0$. Dans le cas général, λ_0 peut être un opérateur comme $D_0\Delta$. Alors l'équation d'évolution de $\alpha\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ est l'équation de Kardar Parisi Zhang [60]

$$\partial_t \mathcal{B} = D_0 \Delta \mathcal{B} + D_0 \alpha \left(\nabla \mathcal{B}\right)^2 + \tilde{\lambda}$$

et l'équation d'évolution de $-\nabla\mathcal{B}$ est l'équation de Burgers. Supposons que l'équilibre local soit établi [17], dans le même sens qu'on a vu à la partie

17. Il n'est pas garanti que l'on puisse écrire une telle équation, car il faut bien faire attention que l'équilibre local eq. (5.37) implique aussi

$$\beta g \int^{\delta x} n \propto \int^{\delta t} \tilde{\lambda}.$$

En fait, eq. (5.38) montre a posteriori que principalement

$$\tilde{\lambda} \approx \frac{g}{\nu} \partial_x N.$$

On le devinait déjà car cette relation $\nu\tilde{\lambda} \approx \pm\omega_0^2$, où ω_0 n'était bien défini que pour un gradient stationnaire, signifie que $\left\langle \left| \tilde{\lambda} \right| \right\rangle \approx \nu$, d'après l'argument de résonance $\langle |\omega_0| \rangle \approx \nu$. Ainsi, dans le changement de variable $'x = vt'$

$$\int^{\delta t} \tilde{\lambda} dt = \frac{g}{\nu} \int^{\delta x} \frac{\partial_t N}{v^2} dx$$

et moyenné sur le temps caractéristique ν^{-1}, comme $\langle \partial_t N \rangle \approx \nu \delta N$,

$$g \left\langle \frac{1}{v^2} \int^{\delta x} \nu^{-1} \partial_t N dx \right\rangle \approx \beta g \int^{\delta x} n dx.$$

II, alors

$$\mathcal{A} \propto \beta \mathcal{U} = \beta g \int^{\delta x} n \tag{5.37}$$

et la densité n doit vérifier l'équation de Burgers suivante

$$\partial_t n = D\Delta n + D\beta g \nabla n^2 - \nabla \tilde{\lambda}. \tag{5.38}$$

Or, de eq. (4.31) et de la conservation, avec une moyenne appropriée $\partial_t N = -\langle \partial_t n \rangle$, on pourrait aussi écrire une équation de Burgers, et ajouter un bruit ad hoc. Par cohérence, les vertex (coefficient devant la non linéarité), de ces deux dérivations de la même équation, devraient être égaux

$$2D\beta g = \frac{g}{\nu}.$$

On retrouve alors, à travers cette relation de fluctuation-dissipation eq. (4.30), l'hypothèse d'équilibre locale eq. (5.37) qui a fait le lien.

Cela dit, le bruit dans eq. (5.38) n'est en général ni gaussien ni blanc. Enfin, le coefficient cinétique d'équilibre peut comporter un réel

$$\lambda_0 = D\Delta + \sigma$$

auquel cas, la discussion précédente prévaut.

Que ce soient donc la relation de fluctuation-dissipation ou les spectres, l'équation de Burgers bruitée ne semble pas permettre d'y accéder de façon consistante. C'est au contraire ce que la théorie dont eq. (5.12) dérive, comme on va voir simplement, peut achever. En fait il suffit que la relation de fluctuation-dissipation soit partiellement vraie, seulement pour les petites échelles proches de l'échelle de coupure. C'est le sens à accorder à eq. (5.13). Concernant les spectres, l'equation eq. (5.12) est déjà sous la forme d'une cascade, infiniment divisible. Il faut donc s'attendre à des corrections (logarithmiques, voire anormales) du spectre de champ moyen (par exemple de Kolmogorov), c'est-à-dire déterminé par l'analyse dimensionnelle [62], du type de celle déterminée avec l'hypothèse multifractale (ref frisch et autre). On déterminera plus simplement le spectre observé par l'intermédiaire de la distribution des fluctuations. Ce sont surtout ces distributions, aux quelles la théorie eq. (5.12) donne accès simplement.

C'est bien l'équilibre local au sens de la partie II, atteint sur ce temps ν^{-1}.

5.4 Orbite de renormalisation chaotique

Les théories hydrodynamiques (ou fluides) prennet la limite continue de la structure microscopique du système à l'étude. Ceci est autorisé par la séparation d'échelles : les longueurs d'ondes des phénomènes auxquels on s'intéresse, sont 'sans rapport' avec les longueurs microscopiques, telle que la distance inter-moléculaires. Dans l'état critique, toute la gamme des longueurs d'ondes est excitée, entre les deux échelles extrèmes du système, et l'hypothèse de limite continue périclite. K. G. Wilson compare la technique de renormalisation à une généralisation de la technique de dérivée, qui s'applique à l'étude des systèmes continues, sous la dénomination de "*statistical continuum limit*" [90]. La seconde technique fait varier la coordonnée, pour étudier la variation correspondante d'un champ (ou fonction) f des coordonnées, alors que la première fait varier *l'échelle* des coordonnées, pour étudier en général la variation d'une fonctionnelle F des champs du système. Formellement, un point fixe de renormalisation pour une fonctionnelle F, $\mathcal{R}(F) = F$, correspond par exemple à une dérivée linéaire pour une fonction f, $\partial_t(f) = f$ (de coefficient unité, après normalisation). On peut comprendre l'extension de l'équation cinétique linéaire eq. (5.5) à l'équation cinétique stochastique eq. (5.12) comme une utilisation heuristique de cette correspondance à tous les autres cas, appliquée à l'énergie libre $f \equiv F$, comme fonction du temps (ou à la densité d'énergie libre, comme fonction de l'espace aussi).

Pour étayer l'argument qui nous a conduit à la poser, reprenons une remarque faite en fin de [88] A, concernant l'orbite de renormalisation de F (en fait $\mathcal{F}$).

5.4.1 Espace-temps

Commençons par écrire ce que signifie la variation temporelle de F

$$\frac{\delta F}{\delta t} = \frac{1}{\delta t}\int^{\delta t} \partial_t F = \langle \partial_t F \rangle_{\delta t}\,.$$

C'est aussi la moyenne sur toutes les fréquences $\delta t^{-1} < \omega < \tau^{-1}$ de $\partial_t F$, où τ sert d'échelles microscopique de coupure et $\partial_t F \equiv \frac{\delta}{\delta \tau} F$. On peut la définir à partir de la fonction de partition

$$e^{\langle F \rangle_{\delta t}} = \prod_{\omega=\delta t^{-1}}^{\tau^{-1}} \int \prod_{\omega} d\hat{n}_\omega \; e^{F(n)} \tag{5.39}$$

et

$$\langle \partial_t F \rangle_{\delta t} = \delta t^{-1} \langle F \rangle_{\delta t} .$$

Sous cette forme, on peut renormaliser sous le changement d'échelles

$$\delta t \to b_t \delta t'.$$

L'argument consiste à relier les propriétés temporelles locales aux propriétés globales spatiales, dès lors qu'il existe une relation dynamique comme une relation de dispersion (qui sert à définir le transport [18] $D_k = -i\frac{\omega(k)}{k^2}$), soit en loi d'échelles [68]

$$\omega = k^z f(k l_c)$$

et en pratique ici d'identifier formellement $b_t \leftrightarrow b_x^z$. Alors d'identifier [19]

$$\langle F \rangle_{\delta t^{\frac{1}{z}}} \leftrightarrow \langle F \rangle_{\delta x}$$

ce qui permet de raisonner avec la forme explicite de F.

Si l'opération de renormalisation admet un point fixe stable, alors, comme nous le disions en introduction, de la dernière égalité, on voit que la variation temporelle de F^* est simplement proportionnelle à b_t, c'est-à-dire qu'il existe un temps caractéristique de relaxation fini $\lambda_0^{-1} < \infty$, car celui-ci se remet à l'échelle $\lambda_0^{-1} \to b_t \, {\lambda'_0}^{-1}$. La dérivée temporelle peut être alors définie et la cinétique est linéaire, et aux temps longs il est légitime de parler d'équilibre.

Dans le cas contraire, si tous les points fixes de l'espace des phases perdaient leurs stabilités (génériquement cycle limite ou chaos), on ne pourrait pas en dire autant. Intuitivement, si l'orbite passait incessamment près de plusieurs points fixes différents (ou à l'interieur de leurs régions 'd'influence'), il en irait de même pour la dérivée, dont le coefficient de linéarité passerait incessamment près de valeurs différentes, avec les mêmes temps d'attente. Le résultat peut aller d'une courbe lisse à une

18. D'où l'on tire, de $D_k \sim k^{-\frac{\epsilon}{3}}$, $z = 2 - \frac{\epsilon}{3}$

19. En fait, si l'on compare la définition proposée eq. (5.39) à la définition eq. (5.7), il faut noter que les grandeurs sont ici fluctuantes a priori (pas d'hypothèse préalable de séparation d'échelles). On ne peut pas prendre simplement la limite $\omega \to 0$, et ne considérer que $\bar{n}$ à l'intérieur de l'intégrale sur le volume de l'énergie libre, ou $|\hat{n}_k|^2$ par l'identité de Parseval, mais $|\hat{n}_k|^2(t)$. Au contraire, la moyenne spatiale *et* temporelle impose de sommer sur tous les modes (ω, k) entre les échelles de coupures, $|\hat{n}_{k,\omega}|^2$. L'hypothèse de loi d'échelles $|\hat{n}_{k,\omega}|^2 = k^{\zeta-2}\phi(\omega k^{-z})$ permet de poser, heuristiquement à nouveau, que ce qui valait pour la renormalisation spatiale d'un équilibre critique, vaut aussi pour une renormalisation spatio-temporelle, où les changements d'échelles b_t et $b_x = b_t^{\frac{1}{z}}$ s'effectuent en fait en parallèle.

courbe fractale, s'agissant de la fonction F à l'étude. Je note d'ores et déjà que, si l'on admet l'existence d'une valeur moyenne de l'énergie libre malgré ces flucutations incéssantes (état stationnaire), alors certaines de ces fluctuations violent nécessairement le second principe (variations positives de F), voir le paragraphe (5.7).

5.4.2 Système dynamique de renormalisation

Prenons le cas du point critique de [88]A, où les paramètres sont (K_0, q_0) et le champ extérieur est h_0. Ceux-ci se renormalisent formellement, en faisant varier l'échelle infinitésimalement $b \equiv b_x = 1 + \delta l$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{db} K_b & = & b^{-1} u\left(K_b, q_b, h_b\right) \\ \frac{d}{db} q_b & = & b^{-1} v\left(K_b, q_b, h_b\right) \\ \frac{d}{db} h_b & = & b^{-1} h_b w\left(K_b, q_b, h_b\right) \end{array} \right. \tag{5.40}$$

en respectant les symétries. Pour notre système, on peut considérer le hamiltonien effectif de Van der Waals du paragraphe (4.4.3), ou bien, pour introduire les paramètres plus naturels, reprendre h_{eff} du même paragraphe, et le développer autour du seuil d'instabilité :

$$h_{eff} = \left(-\frac{1}{2} g \delta x n + \frac{1}{6} \gamma^2 n^2 \right) n + T n$$

où

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla n - \nabla_c & = & -\nabla \tilde{n} \\ \nabla_c & = & -\frac{\nu^2}{g} \end{array} \right. .$$

Le petit paramètre est l'écart au seuil, or il paraîtrait plausible de proposer que ce petit paramètre possédât un développement limité en $\tilde{n}$, du type fourni par la cinétique linéaire,

$$\nabla \tilde{n} = \delta x \gamma^{-2} \left(r_0 + r_2 \tilde{n}^2 \right) + ... \tag{5.41}$$

On prend $\delta x \equiv 1$. Le développement comporte une composante indépendante de $\tilde{n}^2$,

$$r_0 > 0$$

dont le signe marque la sur-criticalité du gradient moyen (non thermodynamique), et une composante vérifiant la relation phénoménologique thermodynamique [20] :

$$j - j_0 \approx \gamma \tilde{n}^2 = D_{eff} \nabla \tilde{n} \tag{5.42}$$

20. Puisque sous le seuil de la transition, $j = j_0$ et $\nabla n = \nabla_c$.

où

$$r_2 = \gamma^{-1} D_{eff}^{-1}. \tag{5.43}$$

Près du point critique, lorsque les fluctuations sont importantes, ce développement est *par hypothèse*, eq. (5.13), valable. Pour le système d'échange, la mesure numérique donne (en partie seulement, voir section (5.7)) un très bon accord avec eq. (5.41), voir fig. (5.2).

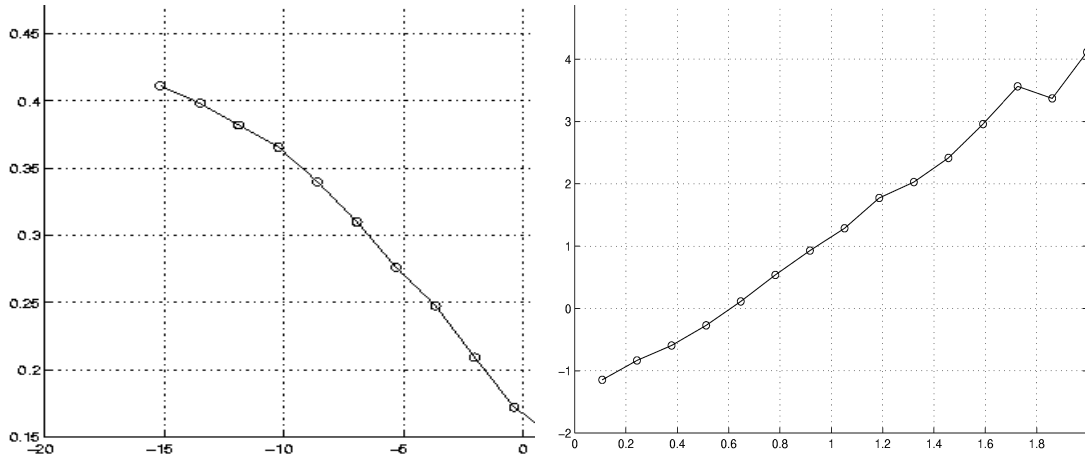


FIGURE 5.2 – Les figures tracent (une partie de) la relation moyenne conditionnelle qui lie le gradient au flux $\langle\ j\ /\ \partial_x N\ \rangle$ et $\langle -\ \partial_x N\ \ /\ j \rangle$ respectivement. Lorsque le gradient vaut le gradient seuil, de module $|\nabla_c| = \frac{\nu^2}{g} \approx 1$, le flux néanmoins est en moyenne plus faible que le flux entrant, $j_0 = 0.5$ sur la figure de gauche. Cela confère à r_0 un signe positif. D'autre part la différence entre ces flux n'est pas négligeable, donc $r_0 \sim 1$, à quoi correspond la sur-criticalité du gradient, ce qu'on peut noter en abscisses. La figure de droite, où $j_0 = 1$, semble contredire sur ce point la figure de gauche, car on a bien là $\langle -\ \partial_x N\ \ /\ j_0 \rangle \approx \nabla_c$, d'où ma discussion à ce propos au paragraphe (5.5).

Ainsi, on peut être tenté de poser comme modèle

$$h_{eff} \approx \frac{1}{2}\left(r_0 \tilde{n}^2 + \frac{1}{2} r_2 \tilde{n}^4 \right) + \tilde{n} T. \tag{5.44}$$

Une composante explicite d'inhomogénéité spatiale peut être introduite en plus $\frac{1}{2} r_{02} \left(\nabla \tilde{n}\right)^2$, où $r_{02} = \chi_0^{-1}$. Ce hamiltonien effectif conduit en effet à une équation de Ginzburg-Landau du type discuté au paragraphe (5.1.1.2).

Ainsi, la correspondance, quoique $T \geq 0$,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} h & \leftrightarrow & T \\ K & \leftrightarrow & r_2 \\ q & \leftrightarrow & r_0 \end{array} \right. .$$

Le système de renormalisation eq. (5.40) est un système dynamique.

Lorsque $h = 0$ exactement, dans le plan (K, q) le flot peut présenter deux point fixes, l'un stable attracteur et l'autre instable (instabilité noeud-col par exemple) comme dans l'article de K. G. Wilson. Mais, il doit exister des valeurs seuils de h telles que le système à un et demi degrés de liberté bifurque sur des orbites quasi périodiques et chaotiques. Comme h est intrinsèque dans notre système, il est fort probable qu'il en soit ainsi[21]. La linéarisation demeure cependant valable lorsque l'orbite passe près du point fixe, ce qui se répète indéfiniment, assurant que l'invariance d'échelles est conservée. Avec l'argument, que je répète ici, de symétrie des propriétés globales et locales par la relation d'échelles

$$t \leftrightarrow x^z$$

on distingue un peu mieux comment l'énergie libre effective ne peut pas être définie autrement que de façon stochastique

$$F \to \tilde{F}.$$

De façon imagée, cet aspect souligne le mélange des échelles dans le système, c'est-à-dire la non séparabilité de $\mathcal{F}$ en un hamiltonien des fluctuations hautes fréquences $H(\tilde{n})$ et, une énergie libre basses fréquences $F(\bar{n})$, paragraphe (5.1.1.2). On pourrait modéliser un tel système par un sous-système déterministe dans un potentiel aléatoire (*quenched potential* non seulement dans l'espace, mais aussi dans le temps).

5.4.3 Dimension critique

Pour clore cet argument, il faut faire attention à la dimensionnalité du système. Je fais ici une remarque sur la dimension seuil d'apparition de flots de renormalisation chaotiques. Je suis pour cela la première partie de [90]. Le hamiltonien de Landau considéré est de la forme eq. (5.44), lorsque le paramètre de contrôle $r_0 \to 0$, mais reste non nul.

En résumé, pour $D_0 \neq 0$, le développement perturbatif, en série de Fourier, autour de la solution de champ moyen est à priori mal fondé lorsque la dimension est $d \leq 4$. Cependant, pour $\epsilon = 4 - d \ll 1$, dans le changement d'échelles $k \to bk'$, le point fixe noeud-col (critique) est atteint en $r_0^* = \mathcal{O}(\epsilon)$ et $r_2^* = \mathcal{O}(\epsilon)$, pour

$$r_{02}^* = Z^2 b^{-(d+2)} r_{02}^*$$

21. En fait le système eq. (3.43) est localement un système de Lorenz. Bien que ceci resterait à prouver, il ne serait pas étonnant que le système eq. (5.40) présentât des propriétés similaires, puisque les paramètres sont en fait intrinsèques, c'est-à-dire des véritables variables dynamiques.

c'est-à-dire

$$Z(b) = b^{\frac{2+d}{2}}.$$

La discussion porte sur le flot de renormalisation lorsque $r_0 \neq r_0^*$. La linéarisation du problème consiste en la détermination des valeurs propres associées à chaque direction légèrement perturbée. On pose

$$\begin{cases} r_0 &= r_0^* + \delta r_0 \\ r_2 &= r_2^* + \delta r_2 \\ r_4 &... \end{cases}$$

les valeurs propres $\{\gamma_{2i}\}$ sont, pour $\epsilon \ll 1$,

$$\begin{cases} \gamma_0 &= b^{2-\frac{\epsilon}{3}} \\ \gamma_2 &= b^\epsilon + (1 - b^{2\epsilon}) \approx b^{-\epsilon} < 1 \end{cases} \tag{5.45}$$

le point fixe (de Wilson-Fisher) est un noeud-col, attracteur dans la direction non gaussienne r_2, et se prête donc à l'analyse par invariance d'échelles. Le point fixe gaussien en $(r_0, r_2) = (0, 0)$ est en revanche un maximum local (c.f. figure 12.2 de [46]).

On peut s'interroger sur la nature du flot lorsque ϵ continue de croître. Un élément de réponse est donné dans l'article. En effet, de même qu'en dimension $d = 4$ le point fixe gaussien perd toute direction stable, c'est-à-dire qu'il peut exister un nouveau point fixe (celui de Wilson-Fisher) noeud-col r_2^*, de même, en dimension $d = 3$ il peut exister à nouveau un point fixe noeud-col r_4^*. Le point fixe de Wilson-Fisher peut demeurer noeud-col ou changer de stabilité [22]. Ainsi de suite en dimensions [23]

$$d = \frac{2i}{i-1} \to 2. \tag{5.46}$$

À chaque étape, la nouvelle direction (c'est-à-dire δr_2 puis δr_4 ...) est d'abord irrelevante (pour que le point fixe soit bien un noeud-col) puis peut perdre sa stabilité (maximum local). On distingue ici le mécanisme d'une cascade de bifurcations, égrenant tous les degrés de liberté du hamiltonien (les termes d'ordre $2i$ dans le développement analytique de Landau). La dimension $d = 2$ est un point d'accumulation de cette série.

Que se passe-t-il à ce stade ? S'il n'y a que des maxima locaux, on ne

22. Je n'ai pas entrepris une telle étude ardue perturbativement, à mesure qu'il faut considérer de plus en plus de diagrammes, et je ne connais pas non plus la littérature qui traiterait éventuellement de cet aspect.

23. Bien que eq. (5.46) soit obtenue à l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$. Les corrections en série de ϵ^n deviennent importante dès que $d \to 3$. Le développement diagrammatique est de toute façon invalide avant cela.

peut plus fixer aucun paramètre car tous les points fixes sont relevants, alors l'invariance d'échelles a totalement disparu, le système étant ou totalement ordonné ou totalement désordonné mais ne présentant aucune transition d'aucun ordre, a fortiori aucun point critique. De façon surprenante je trouve, la dimension limite

$$d_c = 2$$

donnée par cet argument, correspond effectivement à la dimension minimale requise pour que les parois séparant des domaines totalement ordonnés soient stables, dans un modèle à symétrie continue, comme le modèle de Heisenberg ; c'est le théorème de Mermin et Wagner (et Hohenberg) [71, 48].

Si un certain nombre de points fixes ont conservé leur aspect noeud-col, alors le flot passe d'un de ces points à un autre, et peut même y repasser sans cesse par cycles : l'invariance d'échelles est masquée par les nombreux *cross-over* et le système pourrait paraître à première vue plus désordonné qu'au point critique[24]. Ce phénomène de *cross-over* pourrait se manifester ici dès que $d \lesssim 3$.

5.5 Discussion sur le quasi ordre

Notre système analogue est de dimension $d = 1$, est-ce alors surprenant d'après cette analyse qu'il présente un quasi-ordre ? Selon toute apparence oui, car on constate numériquement un gradient sur-critique, c'est-à-dire un coefficient

$$r_0 \sim 1.$$

Ainsi, les fluctuations devraient être relativement faibles, et les corrélations finies de longueur de corrélation $l_c \propto \sqrt{\frac{r_{02}}{r_0}}$.

Toutefois, ces coefficients ne relient que les grandeurs moyennées, et les fluctuations du gradient le font passer régulièrement près du point critique, comme on l'a explicité à la parite II. L'invariance d'échelles de ces cycles induit que le coefficient renormalisé r_0' passe régulièrement près de $r_0' = 0$. En somme, se superposent, et s'intercalent à différentes échelles, du désordre et un ordre critique, qui conserve ici les mêmes caractéristiques aux différentes échelles (présence d'un seul point fixe noeud-col).

Je dois discuter cependant le choix que j'ai fait eq. (5.42) d'écrire la relation phénoménologique pour $j - j_0$ et non pas pour j, sur la base de la

24. Par exemple manifester une invariance multi-fractale ?

comparaison avec la phase sous le point de transition. Sur la base d'une comparaison avec un tas de sable, dont l'analogie est bien adaptée au dessus de la transition, le flux sortant est *nul* à l'angle dynamique, et j'aurais pu choisir d'écrire $j = D_{eff}\nabla\tilde{n}$. Ainsi, on aurait d'après la figure fig. (5.2), où $j > 0$ lorsque $\nabla\tilde{n} = 0$,

$$r_0 < 0$$

et $D_{eff} \approx j_0 \langle\nabla\tilde{n}\rangle^{-1}$. Le système devrait donc être ordonné, comme on le prédisait pour le plasma de Langmuir, eq. (2.59) avec le signe $-\eta\lambda_D^2 \leftrightarrow r_0$.

En fait, cet ordre est impossible en dimensions un et deux d'après le théorème de Mermin et Wagner [71, 48]. Voyons une façon de le comprendre. Le système présente une symétrie globale continue

$$\tilde{n} \to \Re\left(e^{i\varphi_0}\tilde{n}.\right)$$

Prenons une distribution de phase $\varphi(x,t)$ à peu près quelconque, notons en variable complexe $\tilde{n} = |\tilde{n}|\, e^{i\varphi(x,t)}$, alors la variation du hamiltonien eq. (5.44) est, en développant à l'ordre deux autour de la valeur d'équilibre $|\tilde{n}| = \bar{n}^2 = \frac{r_0}{r_2}$,

$$\delta h_{eff} \approx \frac{1}{4} r_2 \left(2\bar{n}\delta\tilde{n}\right)^2 + \frac{1}{2} r_{02} \left(\left(\nabla\delta\tilde{n}\right)^2 + \bar{n}^2 \left(\nabla\varphi\right)^2\right). \tag{5.47}$$

Le coût énergétique dû au gradient de phase est d'autant plus faible que la longueur d'onde est grande. On devrait donc observer facilement des modes $k \to 0$, d'oscillations de la phase autour d'une valeur quelconque d'équilibre φ_0, ayant brisé la symétrie continue. De même, le coût énergétique est minimisé si les fluctuations de l'amplitude restent faibles, autant dire nulles $\delta\tilde{n} = 0$. Ce sont des modes de Goldstone. Pourtant, le gain entropique qui résulte des fluctuations thermiques est supérieur au coût énergétique à une et deux dimensions, et la brisure de symétrie ne peut pas se maintenir. L'argument est dû à L. Landau et E. Lifshitz (c.f. paragraphes 137-138 de [66]) : l'écart-type des fluctuations, calculé dans cet approximation linéaire, diverge pour $d = 1$ ou $d = 2$ avec la taille du système L

$$\left\langle \left(\varphi - \varphi_0\right)^2 \right\rangle \propto \int_{\frac{1}{L}} dk^d \frac{1}{k^2}.$$

N. D. Mermin, H. Wagner et P. C. Hohenberg montrent plus précisément, de façon assez générale [71, 48], que

$$\left\langle \Re(e^{i\varphi}) \right\rangle = 0.$$

Ainsi, la densité $\tilde{n}$ ne peut pas rester proche de sa valeur d'équilibre $\Re\left(\bar{n}e^{i\varphi_0}\right)$, et doit fluctuer autour d'une moyenne nulle (d'où la notation qu'on avait adopté $\tilde{n}$). Les modes de Goldstone ne sont pas stables.

Ces fluctuations peuvent-elles être cohérentes ? À deux dimensions, V. L. Berezinskii, J. M. Kosterlitz et D.J. Thouless ont identifié une transition de phases particulière, qui porte maintenant leurs noms, entre deux phases non ordonnées, mais dont la phase de basses températures présente des corrélations longues ([9, 63], c.f. reproductions dans [57]). À une dimension toutefois, il n'existe même pas de tel quasi-ordre [25].

Nous venons de décrire un aspect sur lequel je n'avais pas encore insisté. Sous le point de transition du système d'échange en effet, on peut constater des modes de Goldstone *stables* dans le système (i.e. $k \approx L^{-1}$). Je rappelle que le hamiltonien, dans la région de paramètre $\nu \ll g$, n'est pas celui qu'on étudie dans cette section. À l'approche de la transition,

25. Remarquons d'abord que l'énergie des modes de Goldstone s'écrit dans un espace discrétisé de pas de réseau $\delta x = a$

$$\frac{1}{2} r_{02} \bar{n}^2 \int dx^d \left(\nabla\varphi\right)^2 \to \frac{1}{2} \frac{r_{02}\bar{n}^2}{a^{2-d}} \sum_{\langle i,j\rangle} \left(\varphi_i - \varphi_j\right)^2 \tag{5.48}$$

avec la notation conventionnelle de la somme sur les plus proches voisins $\langle i,j\rangle$. C'est le modèle gaussien du modèle XY. Pour la clarté, je reprends l'exposé du paragraphe 16.2 de [57]. Le spectre de Fourier de la distribution de Gibbs en chaque maille est donc gaussienne $\propto \sum_m e^{-ym^2}$, où $y = 2\frac{a^{2-d}}{\beta r_{02}\bar{n}^2}$ qui est homogène à 1. La fonction de partition se calcule aisément à une dimension

$$Z = \prod_i^M \int \prod_i^M d\varphi_i \ \sum_m e^{-ym^2} e^{-im(\varphi_i - \varphi_{i+1})} = \prod_i^M (2\pi)$$

de même la fonction de corrélation

$$\left\langle e^{i(\varphi_l - \varphi_k)} \right\rangle = Z^{-1} \prod_i^M \int d\varphi_1 ... \int d\varphi_l \left(e^{i\varphi_l} + e^{-y}\right) \int d\varphi_{l+1} \left(e^{i\varphi_{l+1}} + e^{-y}\right) ...$$
$$... \int d\varphi_k \left(e^{i\varphi_k} e^{-i\varphi_k} + e^{-y} e^{i\varphi_k} e^{-i\varphi_k} e^{-i(\varphi_k - \varphi_{k+1})}\right) \int d\varphi_{k+1} ... \int d\varphi_M$$

où sont omis les modes $m \geq 2$ d'intégration nulle, et où a été laissé l'apparition du mode $m = 1$ par domino à toutes les positions entre k exclu et l inclu. L'intégration du mode $m = 0$ est nulle à ces positions. Donc

$$\left\langle e^{i(\varphi_l - \varphi_k)} \right\rangle = \prod_{i=l}^{k-1} e^{-y} = e^{-y|k-l|}.$$

La longueur de corrélation est finie, indépendante de a bien sûr, et d'ordre

$$l_\varphi = a y^{-1} = \frac{\beta r_{02}}{2} \frac{r_0}{r_2}.$$

L'équipartition à l'échelle de coupure permet de montrer que (c.f. eq. (5.49))

$$l_\varphi \approx l_c.$$

ces modes voient les perturbations de phases croître en amplitude. Les modes de plus basses fréquences sont les plus rapidement détruits, car ils sont plus facilement excitables. Ainsi, le mode observé, pour chaque valeur de ν se rapprochant de g, est le premier mode stable, de longueur d'onde de plus en plus petite. Lorsque $\nu = g$, cette longueur d'onde stable est $k^{-1} \approx a$, i.e. tout le spectre est devenu instable, et l'amplitude des fluctuations de phases est maximale. Les fluctuations thermiques créent alors des défauts topologiques (déphasage rapide de la phase de l'ordre de π) qui se propagent : ce sont les solitons. Leurs amplitudes demeurent cependant relativement faibles, car lorsque $\nu \gtrsim g$ le hamiltonien effectif devient celui qu'on étudie ici eq. (5.44), pour lequel r_2 n'est pas nécessairement petit. Le théorème de Mermin et Wagner s'applique donc, et d'en faire le constat numérique est satisfaisant. Voir les figures fig. (5.3) et fig. (5.4).

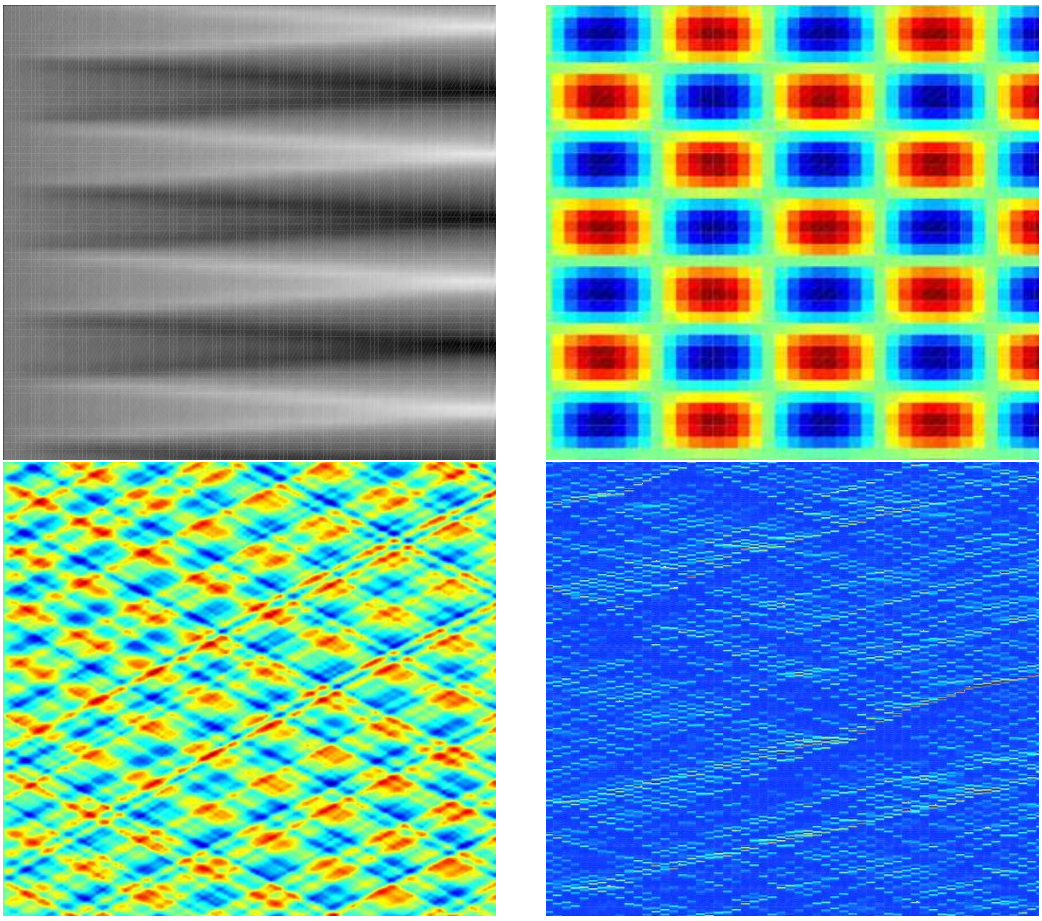


FIGURE 5.3 – Cartes du flux pour différentes valeurs du rapport $\frac{\nu}{g}$. La première carte montre le mode de Goldstone $k \approx L^{-1}$, de fréquence ω_0. La seconde carte se situe vers $\frac{\nu}{g} \approx 0.1$, la troisième et la quatrième $\frac{\nu}{g} \to 1$. On voit la déstabilisation progressive des modes de plus basses fréquences.

Toutefois, on peut voir sur les figures fig. (5.5) et fig. (5.6) que les corrélations sont longues, très au delà même du point de transition $\nu = g$.

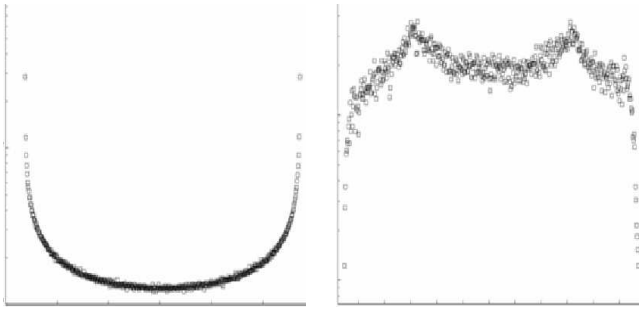


FIGURE 5.4 – Tant que le rapport $\frac{\nu}{g} \lesssim 0.1$, on constate que la distribution du flux est celle du cosinus. Pour un rapport de l'ordre de $\frac{\nu}{g} \gtrsim 0.1$, les modulations de phases désordonnées des basses fréquences rognent les ailes de cette distribution, et pour $\frac{\nu}{g} \approx 1$ la distribution est gaussienne.

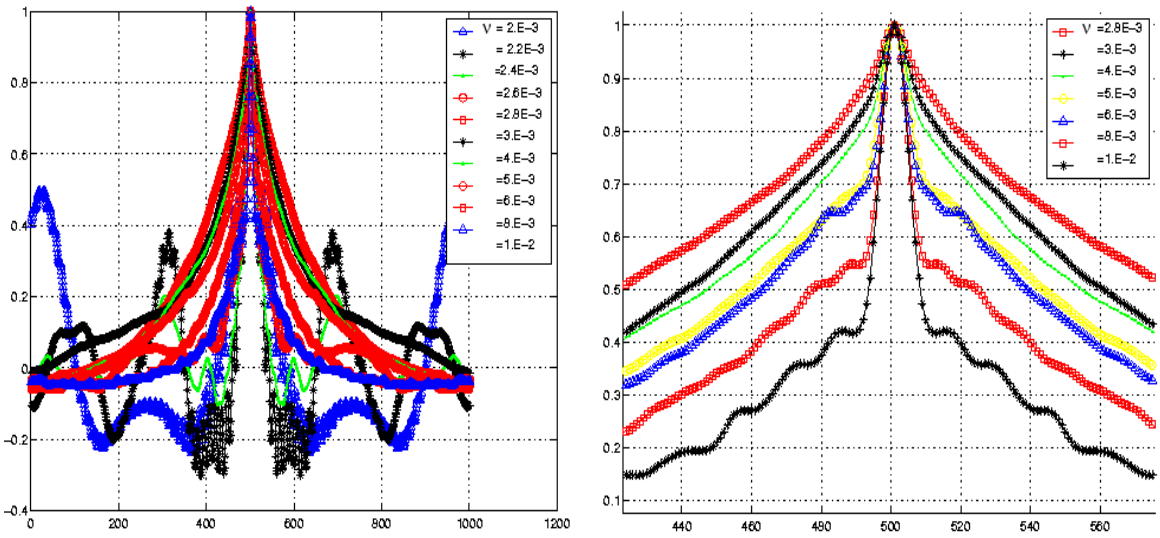


FIGURE 5.5 – Fonctions de corrélations temporelles, superposées pour différentes valeurs croissantes de ν à partir de la transition $\nu \lesssim g$. Le temps est normalisé à ν^{-1}. On peut voir sur le zoom au dessus de $\nu \gtrsim g$, un départ exponentiel $\sim e^{-\nu t}$, caractéristique de l'équilibre local au sens de la partie II, puis des queues algébriques, dont la loi semble universelle.

Le point qui ne vérifie pas crucialement les hypothèses du théorème, et que j'ai passé sous silence jusque là dans la discussion, c'est la présence d'un champ extérieur (bien qu'intrinsèque) h. Celui-ci brise la symétrie du système, et bien que *statistiquement* la symétrie continue soit conservée puisque $\langle h \rangle = 0$, ses fluctuations créent de l'ordre.

Puisque ce champ ajoute un degré de liberté, il est possible de poser la question suivante : le modèle XY en deux dimensions se 'mappe-t-il' dans le modèle XY en une dimension avec la présence d'un champ extérieur (intrinsèque) fluctuant ? La première piste que nous pouvons suivre, pour tenter d'apporter une réponse, se réfère à la dérivation du modèle eq. (3.43), de l'instabilité d'échange en deux dimensions, avec axi-symétrie. La seconde piste est géométrique, mais découle de la nécessité de séparer

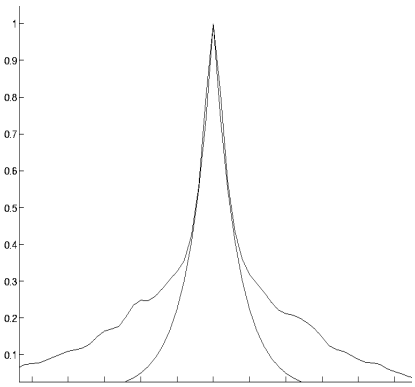


FIGURE 5.6 – Fonction de corrélation spatiale pour $\nu \gg g$. Une exponentielle décroissante est superposée pour marquer les queues algébriques, $e^{-\frac{\delta x}{l}}$ avec $l = 3v_0\nu^{-1} = 3l_c$.

les varialbes globales et locales dans cette réduction unidimensionnelle. Le couplage unidimensionnel entre chaque spin, la variable $|n|\, e^{i\varphi}$, est doublé par un couplage indirect, d'abord avec une grandeur global N puis de nouveau avec la grandeur local n. Ainsi le retard de ce second couplage ajoute une dimension de couplage (sur un schéma, on peut superposer des lignes unidimensionnelles de spins dans des états à différents temps, au delà du temps de relaxation local ν^{-1}).

Je ne réponds donc pas vraiment à cette question, cependant je fais la remarque suivante, qui peut aider un peu plus à suggérer l'affirmative. Dans le modèle gaussien du modèle XY, les corrélations spatiales décroissent algébriquement avec un exposant non-universel, i.e. dépendant du couplage [57, 9, 63]. Ce coefficient est l'inverse du couplage, c'est-à-dire qu'il vaudrait ici y de la note 25.

Le pas du réseau est arbitraire, et il est légitime de le prendre égal à une longueur de coupure typique du système : l_c. Appliquons le théorème d'équipartition au mode $k \approx l_c^{-1}$, dont nous avons vu par ailleurs qu'il pouvait être considéré à l'équilibre local, soit

$$r_{02}\bar{n}^2 l_c^{-2} \left|\hat{\varphi}_{l_c}\right|^2 = \beta^{-1}. \tag{5.49}$$

Supposons pour simplifier que l'énergie soit condensée dans ce mode, et appliquons l'égalité de Parseval sur un élément de longueur l_c, alors

$$l_c^{-1} \left|\hat{\varphi}_{l_c}\right|^2 \approx \left\langle \varphi^2 \right\rangle = 1.$$

La légitimité de cette estimation est renforcée par le fait, signalé en note 25, que la longueur de corrélation des phases ne s'identifie bien à la longueur de corrélation du système $l_\varphi = l_c$ *qu'avec* l'équipartition du mode

l_c^{-1}.

Ce que nous voyons par cet argument d'équipartition à l'échelle de coupure, c'est que l'exposant y des corrélations algébriques devient *indépendant* de la température. Comme à cette échelle on a vu que l'application du théorème de fluctuation-dissipation était légitime $D_{eff}\nu = \beta^{-1}$, le coefficient y est aussi *indépendant* de ν. C'est en effet l'observation qu'on peut faire sur la figure fig. (5.5). De plus, d'après eq. (5.49), on doit s'attendre à ce qu'il ait une valeur de l'ordre de l'unité, mais on ne peut prétendre donner par cet argument une valeur précise. Voir alors la figure fig. (5.7).

Notons qu'il est crucial de savoir, pour l'interaction ondes-particules, si l'énergie d'agitation des électrons devrait être incluse explicitement dans le hamiltonien effectif eq. (2.59), comme nous l'avons fait pour le système d'échange eq. (4.12), puisque c'est la présence du champ $h \leftrightarrow T$ qui est déterminante pour la criticalité. Or, l'équipartition que nous venons d'écrire eq. (5.49) signifie très généralement que la température du milieu considéré, en l'occurence les électrons résonants, est proportionnelle au carré de la densité fluctuante

$$T \propto \bar{n}^2$$

proportionnalité tout à fait analogue à eq. (4.50) $T_S = \frac{1}{2}\gamma^2 n^2$.

J'en conclus (ou je conjecture) que le plasma dans la direction parallèle aux lignes de champ magnétique est aussi dans cet état critique.

Pour résumer cet aspect avec enthousiasme : ce serait donc admirablement l'équilibre local, ou le désordre des hautes fréquences (qui résulte en l'équipartition) qui ferait réémerger un ordre global partiel, disparu dans un tel système à cause de contraintes topologiques (la dimension des interactions), et qui a les traits de la complexité organisée[26] (dont

26. La définition que j'emploie de ce concept est peut être celle due à C. H. Benett, liée à la profondeur logique du système [8]. La pronfondeur est entendue comme le contenu en calcul du programme minimal qui produit l'objet, dont on veut mesurer la complexité. Le contenu en calcul est lié au temps de calcul (temps d'arrêt). Un objet purement aléatoire, d'entropie maximale, ne peut pas être le fruit d'un calcul et, s'il est petit, peut être seulement décrit par exemple avec le programme d'impression. Un objet fractal, ou un nombre tel que π, peuvent être engendrés par des programmes très courts, mais ils demandent beaucoup de temps de calcul pour développer leurs redondances cachées à toutes les échelles. L'effet du désordre perturbant le calcul de tels objets peut être étudié, notamment si la complexité organisée peut s'accroître. Par exemple, un gaz de quelques sphères dures pourrait être simulé, mais sa faible complexité organisée serait très rapidement détruite par un chaos moléculaire, pour atteindre l'état d'entropie maximale. Il n'en va donc pas de même pour le système qu'on étudie ici. En particulier, un maximum d'entropie et une grande complexité organisée ne sont pas deux aspects contradictoires, selon C. H. Bennett. Il se pourrait donc que la profondeur logique ait quelque chose en commun avec la décroissance algébrique des corrélations, entre deux extrêmes : une décroissance exponentielle pour des objets aléatoires très peu complexes,

l'invariance d'échelles). On peut parler ici de structures dissipatives [80].

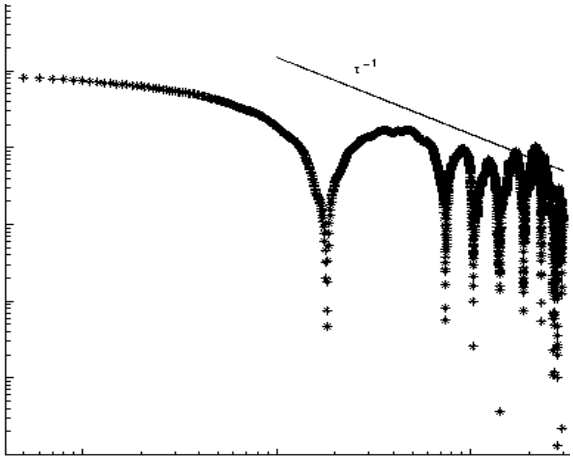


FIGURE 5.7 – Trace en log-log d'une fonction de corrélation temporelle dans la phase $\nu \gtrsim g$. On constate que l'exposant algébrique est $y \approx 1$ (les sautes caractérisent les oscillations de la fonction de corrélation).

Enfin, contrairement au modèle XY l'amplitude de $\tilde{n}$ est libre d'évoluer. Avec l'argument de renormalisation chaotique, non seulement r_0' passe régulièrement près de zéro, mais r_2' pourrait passer aussi régulièrement près de zéro. Ceci pourrait raisonnablement expliquer qualitativement que les fluctuations aient des bouffées de grandes amplitudes. La présence de ces bouffées est associée à celle des fronts, suggérant que l'orbite de r_{02} soit proche de celle de r_2. L'aile de la distribution, des fluctuations de flux par exemple, est très nettement non gaussienne sur la figure fig. (5.8). Pour que cet argument soit valable, il faut que la dynamique du système de renormalisation eq. (5.40) soit semblable à la dynamique du système lui-même, pour que les corrélations des fluctuations conserve leur décroissance algébrique (c.f. note 21).

L'hypothèse de généralisation de la réponse linéaire eq. (5.13) va nous aider à déterminer simplement cette distribution, et nous autorisera à la généraliser dans d'autres cas.

---

et une stationnarité pour des objets ordonnés mais aussi très peu complexes, tel un crystal.

Une autre définition d'une complexité est introduite, dans le domaine des solides amorphes, caractérisant le nombre d'états métastables du système (au lieu du nombre d'états microscopiques pour l'entropie), c.f. par exemple l'introduction de M. Mézard [73]. Celle-ci pourrait s'avérer plus utile dans notre cas, où l'énergie libre n'est pas définie (sauf en moyenne) du fait de la stochasticité des paramètres. Par exemple le "*quenched disorder*" d'un modèle de verre de spins [74], c'est-à-dire le fait que le terme de couplage $J_{i,j}$ du Hamiltonien eq. (5.48) (dans les notations conventionnelles $H \sim \sum_{\langle i,j \rangle} J_{i,j} S_i S_j$) n'est pas fixé mais distribué de façon aléatoire, se retrouve dans notre cas du fait de la stochasticité spatio(-temporelle) de r_0, r_{02} etc... Le "*quenched disorder*" entraine par ailleurs une "frustration" (c.f. introduction de la section (4.3)), i.e. l'impossibilité de rejoindre pour chacun des élements constitutifs du système un minimum local d'énergie.

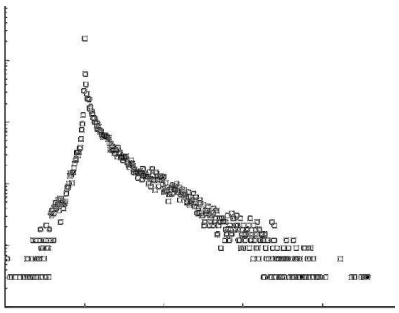


FIGURE 5.8 – Distribution très nettement non gaussienne du flux pour $\nu = 10^2 g$.

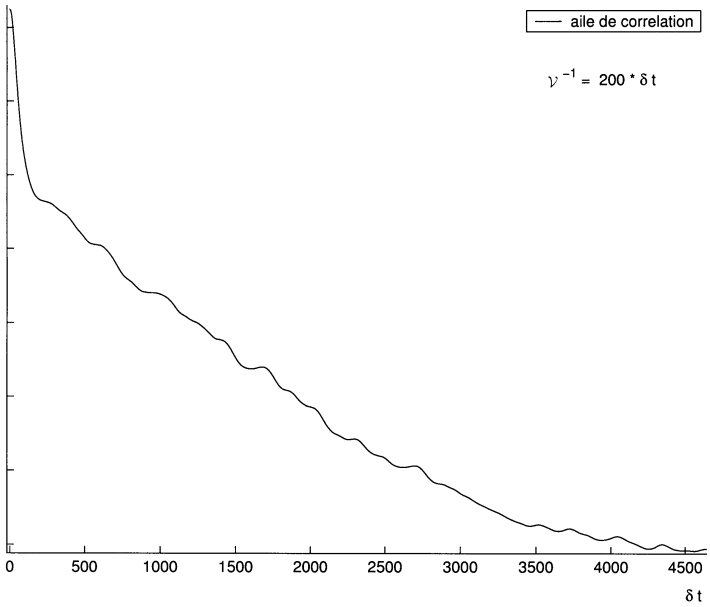


FIGURE 5.9 – Exemple de fonction de corrélation, où l'on peut constater qu'elle coupe l'axe des temps en $\tau_H \approx \nu^{-\frac{1}{H}} \approx \nu^{-2}$. Cependant, la fonction semble continuer à osciller autour de zéro, avec une faible valeur (c.f. fig. (5.5)).

5.6 Récapitulatif de l'amorce de théorie

Dans ce chapitre, j'ai supposé une équation cinétique, dont le coefficient phénoménologique est stochastique. La justification que j'apporte est heuristique par l'extension pure et simple à la section (5.1.2) de la théorie linéaire (voir aussi paragraphe (5.7.1)), et plus phénoménologique à la section (5.4). Ce sont présentés des arguments. Des mises à l'épreuve expérimentales préliminaires du bien fondé de cette approche sont exposées dans la section (5.7).

Ainsi, en combinant les éléments eq. (5.2), eq. (5.3) eq. (5.44) d'une part, et eq. (5.12) eq. (5.13) eq. (5.43), on peut résumer :

– L'équation cinétique étendue est

$$\frac{\delta}{\delta t}|n| = \tilde{\lambda}\,|n|$$

où le coefficient phénoménologique $\tilde{\lambda}$ varie, comme évolue par renormalisation le paramètre de contrôle r_0 du hamiltonien effectif de la théorie. Lorsque ce coefficient est réel, cette équation conserve le signe de la quantité fluctuante, c'est pourquoi, dans ce cas, c'est en fait son module $|n|$ qui évolue (il est possible autrement de considérer la partie réelle d'une évolution dans l'espace complexe).

– Lorsque l'orbite cycle de façon (quasi) périodique ou chaotique, je fais l'hypothèse qu'il soit possible d'extraire la partie déterministe linéaire, avec une moyenne conditionnelle, comme généralisation de la relation phénoménologique de la réponse linéaire

$$\left\langle \tilde{\lambda} \;/n \right\rangle = \lambda_0 + \lambda_2(\mathbf{sgn}(n))n^2 + ...$$

où, bien que sa variation stochastique agisse sur le module de la quantité fluctuante, le coefficient stochastique puisse en dépendre du signe, dans les cas dissymétriques (c.f. section (5.7)).

Discutons d'abord l'équation.

La variable

$$\ln(\frac{|n|}{n_0})$$

subit une évolution selon une équation de Langevin, eq. (5.36), dont le bruit n'est pas blanc et au contraire a de fortes corrélations temporelles et spatiales. L'exposant de Hurst H est l'analogue de l'exposant z^{-1} qui caractérise la diffusion (anormale lorsque $z \neq 2$) dans la limite dite visqueuse de l'équation de Langevin pour une particule. Au paragraphe (5.2.2.2) eq. (5.25), nous avons vu que

$$H = 1 - \frac{y}{2}$$

où l'exposant $y \in]0,1[$ caractérise la décroissance algébrique des corrélations du coefficient stochastique. Nous pouvons formuler cette relation ainsi :

– Plus le désordre est grand pour $\tilde{\lambda}$, i.e. y est proche de 1, plus l'ordre est grand pour $\ln(|n|)$ (dans la limite d'un quasi ordre), i.e. H est proche de $\frac{1}{2}$.

Pour un incrément temporel δt fixé assez petit, par exemple à $\delta t = \nu^{-1}$, l'exposant y caractérise aussi bien, par définition, les corrélations des

fluctuations relatives

$$a_i \approx \frac{\delta |n|}{|n|}(t_i).$$

Or, nous pouvons choisir une séquence temporelle particulière telle que $\forall i,\ |n|(t_i) = |n|(t_0)$, et les corrélations des fluctuations absolues $\delta |n|(t_i)$ seront aussi caractérisées par cette même décroissance algébrique. Il a donc été possible au paragraphe (5.5) d'estimer la valeur de y à partir de sa valeur théorique dans le modèle XY (le modèle gaussien), combinée à un argument d'équipartition.

La compatibilité des formes suivantes

$$\langle \delta |n|(t_i) \delta |n|(t_j) \rangle \sim |t_i - t_j|^{-y}$$

et

$$\langle \ln(|n|(t)) \rangle \sim t^H$$

résulte bien sûr, comme nous l'avons vu au paragraphe (5.2.2.2), de l'intégration cumulée aux temps longs de toutes les fluctuations : $\left\langle (\ln(|n|(t)))^2 \right\rangle \sim \int^t dt_i \int^t dt_j \langle \delta |n|(t_i) \delta |n|(t_j) \rangle$. Si nous pensons, cela dit, au cas limite $y \to 0$, pour lequel les corrélations sont parfaites et définissent un coefficient cinétique linéaire $\lambda_0 \neq 0$, ces corrélations parfaites ne peuvent se maintenir qu'à l'intérieur du temps caractéristique d'amortissement λ_0^{-1}. Nous avions remarqué, par ailleurs, que λ_0 devait être proportionnel à la fréquence caractéristique de la dynamique ω_0 (ou ω_{tr}), donc aussi à ν (ou γ). En somme, bien qu'aux temps plus courts que quelques ν^{-1} les fluctuations de la densité soient bien corrélées (e.g. des oscillations harmoniques), les variations du coefiicent $\tilde{\lambda}$ autour de sa valeur moyenne $\left\langle \tilde{\lambda} \right\rangle = 0$ induisent des décorrélations exponentielles sur le plus long terme. Dans notre cas, la limite se situe à la borne opposée $y \to 1$, et si le même argument s'applique, les corrélations à décroissance algébrique ne peuvent se maintenir qu'aux temps plus courts que

$$|t_i - t_j| \lesssim \tau_H = \nu^{-\frac{1}{H}}.$$

Nous pouvons le vérifier sur la seconde figure de fig. (5.5) et fig. (5.9), où en effet nous pouvons comprendre en partie par cet argument pourquoi les ailes algébriques 'démarrent' de plus en plus bas depuis l'exponentielle locale, à mesure que ν croît. Elles démarrent de telle sorte à se rapprocher de zéro au temps $t \approx \tau_H = \nu^{-2}$ (puisqu'ici $H \approx 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$).

Pour finir, discutons la relation phénoménologique généralisée.

Puisqu'il s'agit dans notre cas d'un phénomène de diffusion, dans un

potentiel chimique auto-cohérent, on écrirait avec la théorie linéaire

$$\lambda_0 = D_0 \Delta. \tag{5.50}$$

On pose, au lieu de cela ici, une relation du type [27]

$$\tilde{\lambda}_{b_t^n} \equiv \frac{b_t^n}{t_0} \int^{b_t^{-n} t_0} dt\ \tilde{\lambda} = b_t^n \frac{1}{t_0'} \int^{t_0'} dt'\ \tilde{\lambda} = \mathcal{R}_{b_x}^{(n)} (D_0 r_0) \tag{5.51}$$

où le changement d'échelles est [28] $t b_t^{-n} = t'$. On a vu (section (5.4) première valeur propre de eq. (5.45)) que pour $r_0 \ll 1$ le scaling anormal (significatif de la présence d'une autre échelle dans le problème L, contribuant comme $\sim L^{-\frac{\epsilon}{3}}$) était

$$r_0 \sim l_c^{-2+\frac{\epsilon}{3}}. \tag{5.52}$$

En récrivant le hamiltonien effectif avec un paramètre de contrôle effectif normal, c'est-à-dire comme le ferait la théorie linéaire $\bar{r_0} \sim l_c^{-2}$, on pourrait donc constater un coefficient effectif de transport

$$D_0 r_0 = D_{eff} \bar{r_0} \tag{5.53}$$

scalant comme

$$D_{eff} \propto D_0 l_c^{\frac{\epsilon}{3}}. \tag{5.54}$$

On obtient aussi directement

$$\tilde{\lambda}_{b_t} \sim b_x^{2-\frac{\epsilon}{3}}$$

c'est-à-dire qu'on obtient l'exposant dynamique

$$z = 2 - \frac{\epsilon}{3}. \tag{5.55}$$

Il est en fait curieux d'obtenir, de manière très différente qu'avec l'équation bruitée de Burgers, les deux mêmes résultats (avec toutefois $\epsilon = 4 - d$, i.e. dans le cas $\sigma = 0$ et $y = 0$) eq. (5.54) et eq. (5.55), soient eq. (5.30) et eq. (5.35). En effet, la théorie de la dynamique critique (qui cure la théorie cinétique de Van Hove, divergente pour les milieux dans l'état critique, par la technique de renormalisation) peut se trouver exposée dans l'article de revue de B. I. Halperin et P.C. Hohenberg [49]. Pour le cas que nous traitons, où le coefficient cinétique traduit la diffusion des particules eq.

27. Si l'on prend $|\bar{n}| = \sqrt{\frac{r_0}{r_2}}$, comme $\frac{\delta|\bar{n}|}{|\bar{n}|} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\delta r_0}{r_0} + \frac{\delta r_2}{r_2}\right)$ et comme la direction δr_2 est contractante (point fixe noeud-col eq. (5.45)) on retrouve bien le même résultat $\tilde{\lambda}_{b_t} \propto \mathcal{R}_{b_x}(\delta r_0)$.

28. Remarquons que la loi de *semi*-groupe $b > 1$, est compatible avec l'irréversiblité.

(5.50), cette théorie donne bien les equations eq. (5.52) et eq. (5.53), mais avec

$$z = 4 - \zeta.$$

Ce point fixe (de renormalisation du coefficient cinétique $D_0 \to D_{eff}$), qui fournit ces trois résultats, est cependant instable [29] à la présence de dissipation du type 'évaporation'

$$\lambda_0 \equiv \sigma \in \mathbb{R}$$

auquel cas le point fixe stable est une dissipation du type 'évaporation', toujours bien de la forme $\lambda_k \sim k^z$, avec cette fois

$$z = 2 - \zeta.$$

Or, c'est bien ce que propose la théorie stochastique, seulement si l'on admet que ce dernier résultat de la théorie dynamique critique est aussi valable pour une valeur fluctuante de λ_0, *y compris si sa moyenne est nulle*. Il semble pourtant acceptable de l'admettre lorsqu'on accepte l'hypothèse d'orbite de renormalisation chaotique (passant indéfiniment près du point fixe noeud-col) compte tenu que les fluctuations ont lieu sur plusieurs cycles, i.e. *entre* les cycles, de renormalisation, alors que la théorie dynamique critique opère *à l'intérieur* d'un seul cycle. Autrement dit c'est une forme de *cross-over,* qui conserve autant l'aspect du point fixe instable de renormalisation des coefficients cinétiques, les relations eq. (5.50), 5.52, et eq. (5.53), qu'il recèle la dynamique critique du point fixe stable eq. (5.55). Ainsi, puisque $\langle \lambda_0 \rangle = 0$, mais que $\lambda_k \sim k^z$, on peut définir un coefficient de diffusion effectif

$$D_{eff}(k) = \lambda_k k^{-2} \sim k^{z-2} = k^{-\zeta}$$

et l'on retrouve bien nos deux résultats eq. (5.55) et eq. (5.54) ensemble, ce qui est important.

Malheureusement, l'indice critique des corrélations ζ de la théorie dynamique critique, qui est celui de la théorie de renormalisation du hamiltonien de la classe d'universalité d'Ising eq. (5.44) [89],

$$\zeta = \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

n'est pas le même que celui qu'on trouve par le modèle d'une équation de

29. Essentiellement pour la même raison qu'en paragraphe (5.3).

Burgers bruitée, ou par la théorie stochastique proposée,

$$\zeta = \mathcal{O}(\epsilon).$$

Rappelons qu'il s'exprime, dans ce dernier cas, à l'aide de l'indice critique[30] υ de la longueur de corrélation, $\zeta = 2 - \upsilon^{-1}$, car nous voyons d'ailleurs, d'après eq. (5.52), que $z = \upsilon^{-1}$. Brièvement, pour la classe d'Ising des systèmes décrits dynamiquement par le hamiltonien eq. (5.44) (la classe "*Model* A" de l'article de B. I. Halperin et P. C. Hohenberg [49]) l'indice est[31] $\upsilon = 1$ (l'écart au point critique est, ici en $d = 1$, en effet $\varepsilon \equiv \nabla\tilde{n}$ et $\nabla\tilde{n} \sim l_c^{-1}$, soit $l_c \sim \varepsilon^{-1}$), et z serait donc égal à $z = 1$; la figure fig. (4.11) semble visuellement attester ce comportement ballistique. Cependant, la théorie dynamique critique fournit $z \approx 2$, ce que semble valider des études expérimentales comme en [26], où l'on peut constater

$$z\upsilon \approx 2.$$

Dans ce type d'expériences néanmoins, c'est le temps de relaxation qui est mesuré, et non la relation de dispersion, puis determiné par une loi d'échelles, ainsi c'est dans notre cas τ_H qui est mesuré. Nous avons vu que $\tau_H \sim \tau_c^{\approx 2}$, comme $z = 1$, d'une part $\tau_c \sim l_c$ et comme $\upsilon = 1$, d'autre part $l_c \sim \varepsilon^{-1}$: nous avons donc

$$\tau_H \sim \varepsilon^{-\approx 2}$$

ce qui fournirait un indice théorique de ralentissement critique expérimental, en accord avec ces mesures,

$$(z\upsilon)_{exp} \approx 2.$$

C'est une problématique, tout juste évoquée, que je laisse ouverte, étant donné mon manque de connaissance en la matière. Concernant les plasmas cependant, il existe un article[32] de A. Ivanov et al. [56] montrant la criticalité du système d'équations Vlasov-Poisson, unidimensionnel, et donnant numériquement les valeurs des indices critiques : ils sont égaux à ceux que je trouve théoriquement ici (en particulier, au premier

30. En général noté ν.

31. Le flux sortant étant nécessairement $\langle j \rangle \approx j_0$, d'après la relation linéaire eq. (5.57), le scaling anormal est $\frac{\nabla N}{\nabla_c} \approx \left(\frac{D_{eff}}{D_0}\right)^{-1} \sim l_c^{-\frac{\epsilon}{3}}$, donnant une égalité

$$\upsilon = \zeta = 2 - \upsilon^{-1}$$

soit, $\upsilon = \zeta = 1$ et $\epsilon = 3$, soit en dimension $d = 1$. En dimension supérieure il faut que $\varepsilon \neq \tilde{\nabla} n$.

32. Je remercie A. Zaslavsky pour m'avoir mis au courant de l'article, au moment de préparer la soutenance de ce mémoire.

ordre, $\upsilon = 1$ et $\zeta = 1$). Je conteste néanmoins l'explication que les auteurs avancent de ce fait. Ils remarquent d'abord en effet un point essentiel, qui permet de les expliciter à partir des relations entre indices (relation de Fisher, de Josephson, de Widom ...etc), à savoir que le propagateur dans ce système est, de la forme eq. (2.15),

$$G(k) \sim \frac{1}{ik \pm \eta^{\frac{1}{2}} \lambda_D^{-1}}$$

au lieu de, forme eq. (2.46),

$$G(k) \sim \frac{1}{k^2 \pm \eta \lambda_D^{-2}}$$

ce qui permet en effet de trouver que (au premier ordre en ϵ)

$$G(k) \sim k^{-2+\zeta}$$

et

$$\zeta = 1.$$

Il ne s'agit pourtant pas comme l'affirment les auteurs de l'effet du très grand nombre de degrés de liberté à prendre en compte par l'ajout de la dimension vitesse pour la distribution [33] ; il s'agit seulement du fait que le système *privilégie un sens* de propagation, droite ou gauche, de l'onde résonante avec les particules. Néanmoins, même cette conclusion me paraît discutable compte tenu du développement précédent, où implicitement nous avons pris en compte les propagations droite *et* gauche dans l'énergie libre eq. (2.59), sans voir que l'indice critique soit égal à $\zeta = 0$. Il nous semble que la différence, entre la classe d'Ising et celle-ci, soit la présence du champ extérieur intrinsèque h, fluctuant et de moyenne nulle. Comme nous avons dit, la symétrie de la classe d'Ising est conservée alors statistiquement seulement, et localement ses fluctuations brisent la symétrie, sous la forme de fronts (type parois de Bloch, pouvant apparaître avec l'équation de Ginzburg-Landau complexe) se propageant dans un sens donné, pour réordonner le système lentement à très grandes échelles (vieillissement). Ainsi la présence de ce champ h fluctuant et la propriété de privilégier, localement, un sens de propagation sont-elles liées.

Ainsi, pour en revenir à une phénoménologie, on pourrait résumer en écrivant que la non-linéarité des équations hydrodynamiques peut se comprendre comme une 'dissipation' fluctuante, de moyenne nulle. Ces

33. Dont j'ai montré l'inutilité pour la détermination du taux de croissance "de Landau".

équations doivent donc pouvoir dériver d'un hamiltonien effectif du type [34] eq. (5.44). Outre le mapping qui existe entre l'équation stochastique eq. (5.12) et l'équation de Burgers (c.f. paragraphe (5.3.3)), l'approche que j'ai exposée ici permet en effet de dériver l'équation de Burgers à partir d'un hamiltonien effectif. Plus exactement, de l'identifier à une équation de Ginzburg-Landau eq. (5.2), dérivant d'une fonction de Lyapunov qui s'identifie à la fonction dissipative : $f = D_0 h_{eff}$. En effet, soit

$$D_0 h_{eff} \approx -\frac{1}{2}\left(\gamma \nabla n\right) n^2$$

bien sûr si l'on dérive tout de suite par rapport à n, on n'obtient rien (c'est pourquoi, il est admis que cette équation ne dérive pas d'une fonction de Lyapunov), mais en notant que la réponse linéaire eq. (5.41) et eq. (5.42) est

$$-\frac{1}{2}\left(\gamma \nabla n\right) \approx \frac{1}{2}\left(\lambda_0 - D_0 \Delta + \nu\right) + \frac{1}{4}\gamma^{-1} D_0 D_{eff}^{-1} n^2$$

où $\lambda_0 = -\gamma \nabla N_0 + D_0 \Delta - \nu$, on peut obtenir le hamiltonien eq. (5.44).

De plus, en notant de telle sorte que

$$\frac{\delta}{\delta t} n = \frac{\delta D_0 h_{eff}}{\delta n} + \left(D_0 \Delta - \nu\right) n \equiv \tilde{\lambda} n$$

on a

$$\left\langle \tilde{\lambda} \ / n \right\rangle = \lambda_0 - \gamma^{-1} D_0 D_{eff}^{-1} n^2 \tag{5.56}$$

avec ici $\lambda_0 \approx 0$. On peut noter que cette relation traduit simplement le régime des fluctuations $\delta n \sim \bar{n}$, car l'équilibre loin du point critique aurait donné $r_0 \approx \frac{1}{2} r_2 \bar{n}^2$, soit dans ce régime $D_0 r_0 \approx \frac{D_0}{2} r_2 \delta n^2$ (ici, on a noté $n \equiv \delta n$).

On peut enfin chercher à retrouver dans ce développement statistique la forme linéaire eq. (5.50) :
Comme nous le faisons pour le mouvement Brownien on peut écrire $\left\langle \tilde{\lambda} \ / n \right\rangle = \langle -\nabla \delta v \ / n \rangle$, et nous pouvons faire apparaître le flux $j = n \delta v$ dans le développement

$$\langle \nabla \delta v \ / n \rangle = \gamma^{-1} D_0 D_{eff}^{-1} j \frac{n}{\delta v}$$

ou encore, non rigoureusement,

$$\langle j \ / n \rangle \approx \gamma D_0^{-1} \left\langle \delta v^{\,2} \ / n \right\rangle D_{eff} \left\langle \nabla n \ / n \right\rangle .$$

Comme d'une part $\langle \delta v^{\,2} \ / n \rangle \approx \langle \delta v^{\,2} \rangle$ et (c.f. eq. (4.30)) d'autre part $D_0 \nu =$

34. En outre, les non linéarités ne sont la trace que des échanges de matière, d'impulsion, ou d'énergie entre diverses régions du fluide (en l'occurence des échanges d'impulsion pour l'équation de Navier-Stokes).

$\langle \delta v^{\,2} \rangle$, nous obtenons la relation de Gibbs-Duheim

$$\langle j \,/n \rangle \approx D_{eff} \nabla n \tag{5.57}$$

ce qui est bien ce que nous cherchions

$$\left\langle \tilde{\lambda} \,/n \right\rangle \approx D_{eff} \Delta. \tag{5.58}$$

C'est en ce sens que la théorie proposée généralise la thermodynamique linéaire.

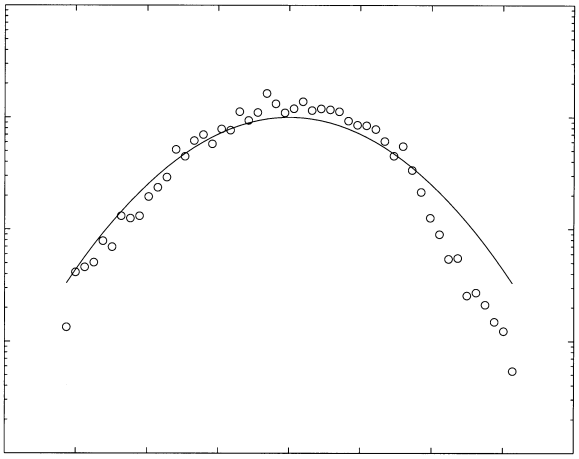


FIGURE 5.10 – Distribution du gradient de densité $\gamma \nabla N$, montrant un bon fit gaussien. Ceci tend à valider l'hypothèse que $\left\langle \tilde{\lambda}^2 \right\rangle < \infty$, et tend à corroborer aussi la nature très aléatoire de $\tilde{\lambda}$, dont la décroissance algébrique des corrélations est à la limite $y \approx 1$ (pour $y > 1$, on ne peut pas distinguer avec un bruit gaussien, de corrélations exponentiellement décroissantes (c.f. section (5.2)).

Cette généralisation de la réponse a la forme d'un développement analytique de $\left\langle \tilde{\lambda} \,/n \right\rangle$. On peut donc imaginer, puisque l'énergie étant une quantité finie, eq. (5.47), $\langle n^2 \rangle < \infty$, qu'elle saurait être valable seulement dans le cas des processus Browniens fractionnaires pour lesquels $\left\langle \tilde{\lambda}^2 \right\rangle < \infty$. Pour un processus de Levy, il faudrait peut être trouver un développement par rapport à une grandeur fluctuante d'écart-type infini.

5.7 Statistique

Je livre un aperçu d'interrogations que suscitent la stochasticité de la généralisation de la théorie cinétique des fluctuations que j'ai présentée dans ce chapitre. La première concerne le lien de l'hypothèse de stochasticité du coefficient phénoménologique avec la caractéristique de vieillissement d'un milieu retournant à l'équilibre thermodynamique. Je pré-

sente quelques résultats préliminaires sur la statistique des fluctuations que la théorie autorise à prédire, avec un fit à une expérience numérique. La seconde interrogation concerne la détermination du coefficient de diffusion effectif D_{eff} qui sert au fit.

5.7.1 Vieillissement

Lorsqu'un système est à l'équilibre, ou très légèrement hors d'équilibre, la cinétique linéaire s'applique. On peut alors relier la susceptibilité statique (ou réponse) à la fonction de corrélation (fluctuation-dissipation)

$$\chi_0(\tau) = \beta \int_0^\tau dt\ \partial_t \mathcal{C}(t). \tag{5.59}$$

Bon nombre de systèmes sont hors d'équilibre et ne répondent pas aux hypothèses de la cinétique linéaire. Par exemple, un milieu ferromagnétique trempé rapidement en $t = 0$, à une température plus basse que la tempéraure critique, et observé quelques temps plus tard en $t = t_w$, au moment où est appliqué un champ extérieur h, semble empiriquement caractérisé par une réponse modifiée de type [19]

$$\chi(t_w;\tau) = \beta \int_{t_w}^{t_w+\tau} dt\ X(t_w;t)\partial_t \mathcal{C}(t). \tag{5.60}$$

Ce milieu est dit "*vieillir*", car il existe une composante lente du retour à l'équilibre que marque la fonction dépendante du temps d'observation t_w, $X(t_w;t)$, superposée à la composante plus rapide, standard. La composante standard traduit toujours le réarrangement local thermodynamique des spins, alors que la composante lente traduit le réarrangement global des domaines ferromagnétiques. Cela rappelle la propagation des fronts de 'condensation' (à la partie II), définissant des domaines (type parois de Bloch), à l'intérieur desquels l'agitation est thermodynamique (et rappelle également l'allure des fonctions de corrélations fig. (5.5)). Une 'trempe' correspond à un passage sous le point critique, de la température intrinsèque fluctuante (à peu près entre deux bornes).

La différence réside donc dans le caractère intrinsèque du champ h, dont on a vu qu'il rendait l'expérience cyclique, ces fronts de 'condensation' pouvant 's'évaporer' lors d'un nouveau passage au dessus du point critique. Les étapes de 'trempe' puis 'd'application' du champ se réalisent sans cesse. La situation est en quelque sorte une succession entretenue de vieillissements et d'arrêts. Les temps de 'trempes' t_{w_i} correspondent aux temps d'attente entre un passage sous-critique et le temps de sor-

tie de l'orbite de h en dehors d'une zone de très faibles valeurs. Ceux-ci sont distribués de manière aléatoire par l'orbite chaotique (voir fig. (5.11)). Ainsi, les valeurs prises par la fonction $X(t_{w_i}, t)$ sont elle-mêmes aléatoirement distribuées sur la courbe $w \mapsto X(w, t)$, et donc celles aussi de la réponse généralisée $\chi(t_{w_i}, \tau)$. Nous avons là une nouvelle argumentation, empirique cette fois, en faveur de l'hypothèse de stochasticité.

De plus la décroissance asymptotique de la fonction de corrélation $\mathcal{C}(t)$ n'est pas différente entre le cas du système vieillissant (on pourrait dire, dans le langage de la turbulence, "*freely decaying*") vers son état d'équilibre et le cas comme ici forcé. Si en effet, dans le cas où le système relaxe librement, la composante aux temps longs est

$$\mathcal{C}(\tau + t_w; t_w) \sim \left(\frac{t_w}{\tau + t_w}\right)^{\theta}$$

alors la fonction de corrélation que l'on mesure dans le cas forcé est

$$\mathcal{C}(\tau) = \overline{\mathcal{C}(\tau + t_w; t_w)}^{t_w} \sim \int dt_w p_{t_w}(t_w) \left(\frac{t_w}{\tau + t_w}\right)^{\theta} \approx \tau^{-\theta} \int dt_w p_{t_w}(t_w) t_w^{\theta} \left(1 - \theta \frac{t_w}{\tau} + ...\right) \sim \tau^{-\theta}$$

où $p_{t_w}(t_w)$ est la distribution des temps d'attente. Ici l'exposant serait $\theta \approx 1$.

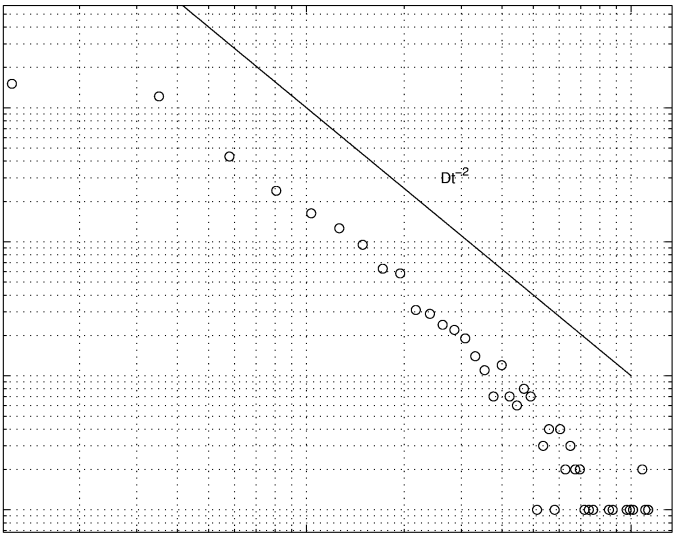


FIGURE 5.11 – Exemple de distribution des temps d'attente, localement entre deux évènements de flux successifs (deux fronts de 'condensation').

Il est possible de déterminer la distribution des temps d'attente si l'on connaît celle des évènements. Prenons pour cela l'équation cinétique que vérifie le flux

$$\frac{\delta j}{\delta t} \approx \tilde{\lambda}_j j.$$

Comme $\langle j \ / n \rangle = \gamma n^2$, on peut essayer de déterminer des relations statis-

tiques à partir de la relation phénoménologique étendue eq. (5.56), soit

$$\frac{\delta j}{\delta t} \approx 2\gamma^{-1} D_0 D_{eff}^{-1} j^2$$

c'est-à-dire qu'un évènement de flux, dû à la divergence en temps fini de la solution de cette équation, a lieu au temps

$$\Delta t \approx \left(2\gamma^{-1} D_0 D_{eff}^{-1} j_0\right)^{-1}$$

où j_0 est une valeur de flux initiale. Nous obtenons donc que la probabilité de distribution de la varaible Δt a la forme

$$p_{\Delta t}(\Delta t) \propto p_j(j_0 = \frac{2\gamma^{-1} D_0 D_{eff}^{-1}}{\Delta t})\Delta t^{-2}$$

où p_j est la distribution de probabilité du flux, que nous déterminerons au prochain paragraphe. Si par exemple une portion de la distribution p_j est algébrique $p_j(j) \propto j^{-a}$, alors une portion correspondante de la distribution $p_{\Delta t}$ est algébrique d'exposant $p_{\Delta t}(\Delta t) \propto \Delta t^{2-a}$, ce qu'on peut vérifier sur les figures fig. (5.12).

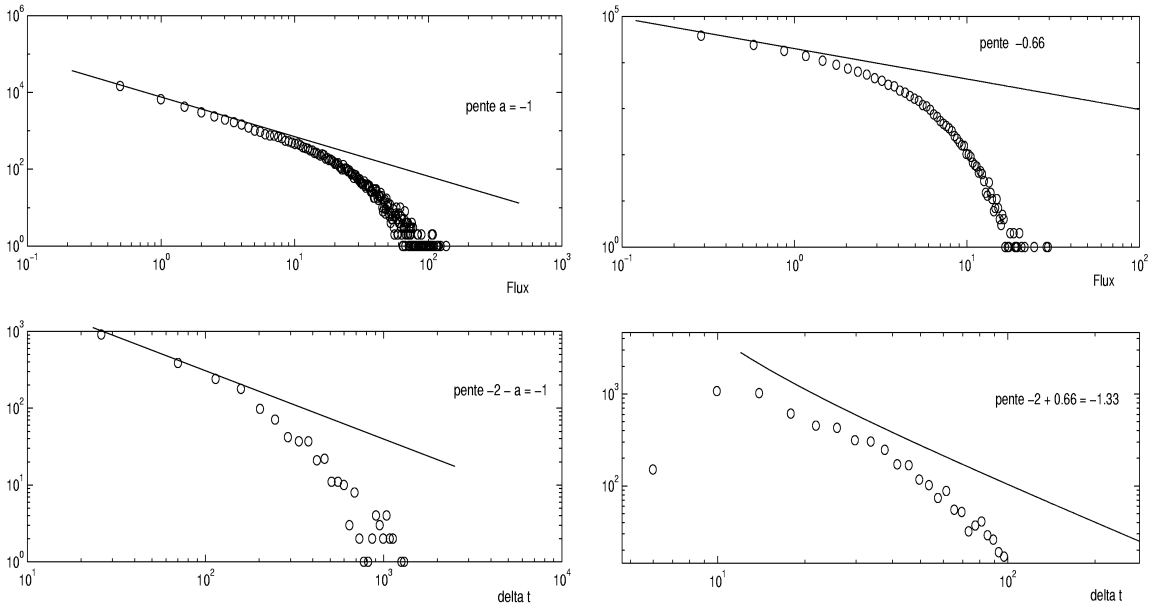


FIGURE 5.12 – Exemple de détermination d'une portion de la distribution des temps d'attente $p_{\Delta t}$ (partie basse des figures), à partir de la distribution du flux p_j (partie haute des figures). La figure de gauche correspond à $\nu = 5.10^{-2}$, celle de droite à $\nu = 2.10^{-2}$, pour $g = 10^{-4}$.

Violation du second principe La forme généralisée eq. (5.60) est souvent référée comme une "violation" du théorème de fluctuation-dissipation (bien que celui-ci ne s'applique qu'à l'équilibre). Ce théorème est très fortement connecté au second principe, comme son nom le laisse entendre.

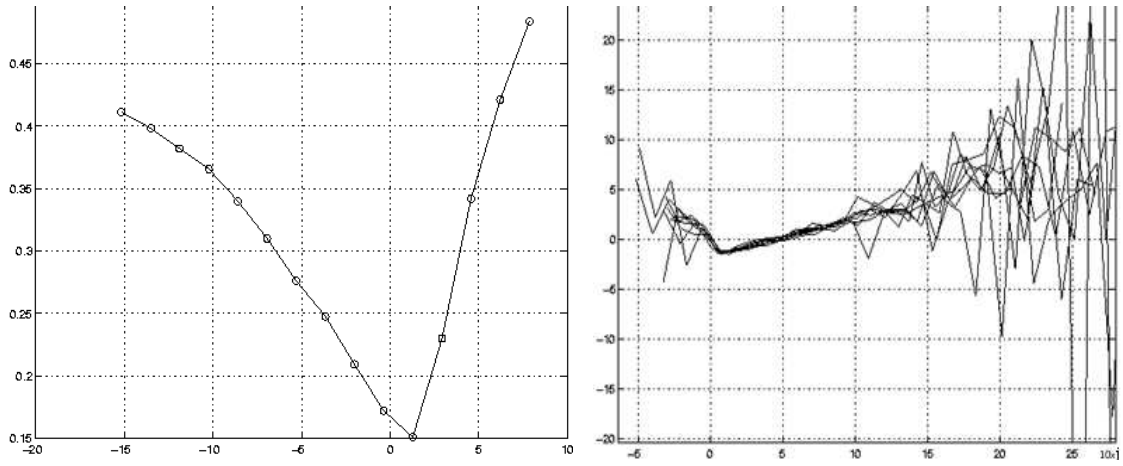


FIGURE 5.13 – La première figure représente l'espérance conditionnelle du flux, fonction du gradient de densité $\langle j \ / \ \nabla N \rangle$(figure fig. (5.2) complétée). La deuxième figure représente l'espérance conditionnelle de l'opposée du gradient, fonction du flux $\langle -\nabla N \ / \ j \rangle$(unités $10 \times j$ en abscisses). Pour la seconde figure, nous avons laissé une superposition de telles moyennes en plusieurs localités, alors que nous en avons effectué la moyenne pour la première (c.f. fig. (5.2) pour la même moyenne de la seconde figure). Pour les deux figures, $\nu = 8.10^{-3}$ et $g = 10^{-4}$, soit $\nabla_c \approx 0.7$. La branche croissante pour la première figure, et la branche décroissante pour la seconde, violent la relation de Gibbs-Duheim, car par exemple, dans ce second cas, le flux est négatif alors que le gradient est très négatif (ou sur-critique). Cette branche est la signature de la *création* non aléatoire des fronts.

Pourtant, il n'était pas nécessaire que cette "violation" s'accompagnât d'une violation de ce principe, or c'est bien ce que la figure fig. (5.13) laisse apparaître, où la relation de Gibbs-Duheim n'est pas du tout respectée pour une des deux branches, où le flux est négatif (au moins relativement au flux sortant moyen) c'est-à-dire qu'il crée un pincement du gradient de densité [35]. La relation fonctionnelle que trace cette branche indique que ces fronts (des 'défauts' topologiques) n'apparaissent pas du tout de façon alétoire, comme on aurait pu le penser par respect du second principe : il y a *création* non aléatoire de fronts (il pourrait donc en être de même concernant par exemple les parois de domaines ferromagnétiques). Ceci reflète la nature particulière de la composante lente de

35. En moyenne, bien sûr le gradient est sur-critique et le flux positif. Si l'on pense par contraste au système de Rayleigh-Bénard, le gradient local de température se redessine avec des gradients plus forts dans les couches limites (augmentant la dissipation due à la viscosité), mais avec un gradient quasi plat au coeur de la cellule convective, du fait même de la convection. À cet endroit, la production d'entropie est nulle car il n'y a pas de dissipation due à la viscosité ; le système thermodynamique étant l'élément fluide en déplacement avec le courant convectif, le flux relatif y est bien quasi nul aussi. Il y a réorganisation du système avec $\Delta S_e \approx -\frac{E}{T}$, où E est l'énergie injectée au système, par exemple pendant une seconde. La cellule de convection est une structure dissipative, notion introduite par I. Prigogine. Ici nous avons bien semble-t-il de telles structures dissipatives, mais qui "violent" en sus le second principe localement.

relaxation, et pour $t_w \to \infty$ (pour les systèmes non entretenus) retrouve-t-on seulement la thermodynamique de l'équilibre, c'est-à-dire la nautre de la composante rapide de relaxation.

5.7.2 Statistique

Venons en à l'établissement de la distribution de probabilité des observables densité n, ou flux j.

5.7.2.1 Distribution stationnaire

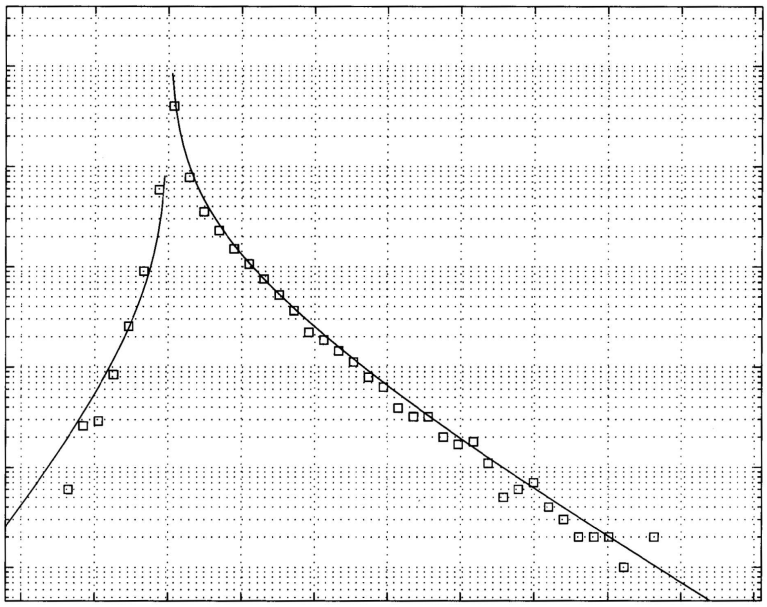


FIGURE 5.14 – Fit de la distribution de probabilité du flux j, obtenue numériquement (carrés) et théoriquement (trait plein). Les valeurs de $\gamma^{-1} l_c^{\frac{\epsilon}{3}}$ (pour la pente positive et la pente négative) et la valeur de τ_c ont été obtenues, respectivement, à partir de la courbe fig. (5.13) et par une mesure directe de l'écart-type, c.f. fig. (5.10). Pour valider le modèle, il faudrait faire varier ν pour que la variation de $l_c^{\frac{\epsilon}{3}}$ correspondante soit vérifiée par le fit, γ^{-1} étant normalement un coefficient numérique indépendant.

Il est possible, à partir du processus stochastique eq. (5.12) et de la relation eq. (5.56), de déterminer la distribution stationnaire des observables par une équation de Fokker-Planck, pour les processus Brownien fractionnaires. Ils ont en effet un écart-type fini $\left\langle \tilde{\lambda}^2 \right\rangle < \infty$. La décroissance algébrique de la fonction de corrélations du coefficient stochastique modifie l'un des termes de cette équation. Le cas plus standard inclue toute décroissance $y < 1$. Supposons qu'il en soit ainsi, et notons τ_c le temps de

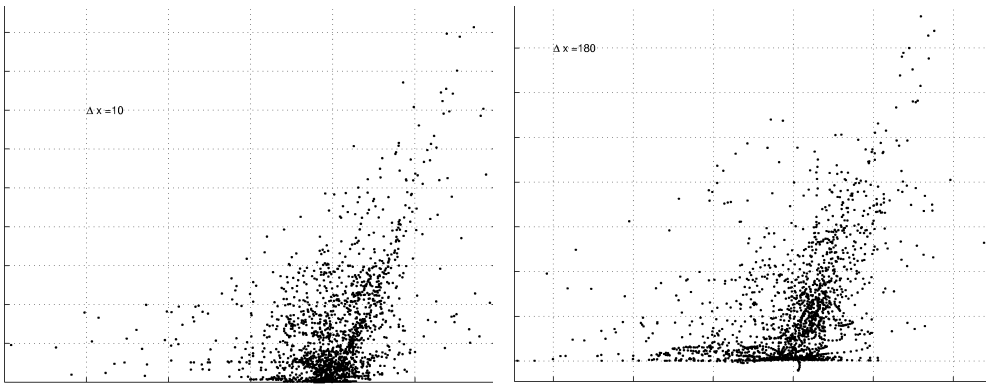


FIGURE 5.15 – Relation linéaire entre j et $\delta^2_{xx} j$, non modifiée pour deux écarts spatiaux de différences finies $\delta x = 10$ et $\delta x = 180$. Ceci accrédite que $f(j)$ soit linéaire si l'on identifiait directement, à partir de l'équation de Burgers par exemple, $\tilde{\lambda} \sim \nabla N$.

corrélation associé à la variable dynamique, alors l'équation de Fokker-Planck est, par exemple pour n, [82]

$$\partial_t p(n,t) = \partial_n \left(- \left\langle \tilde{\lambda} \ / \ n \right\rangle n p(n,t) + \partial_n \left(\tau_c \left\langle \tilde{\lambda}^2 \ / \ n \right\rangle n^2 p(n,t) \right) \right). \tag{5.61}$$

Soit le cas général (correspondance en moyenne avec une équation de Ginzburg-Landau, amplification linéaire, dissipation cubique, ou inversement ; le coefficient λ_0 peut s'identifier aux taux 'd'évaporation' $\lambda_0 \approx \sigma$)

$$\left\langle \tilde{\lambda} \ / \ n \right\rangle = \lambda_0 - \gamma^{-1} D_0 D_{eff}^{-1} n^2$$

et

$$\left\langle \tilde{\lambda}^2 \ / \ n \right\rangle \approx \left\langle \tilde{\lambda}^2 \right\rangle$$

alors, en utilisant eq. (5.54) que $D_0 D_{eff}^{-1} = l_c^{-\frac{\epsilon}{3}}$, la distribution stationnaire a la forme suivante

$$\bar{p}(n) \propto n^{-2+\frac{\lambda_0}{\tau_c \langle \tilde{\lambda}^2 \rangle}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\gamma^{-1}}{l_c^{\frac{\epsilon}{3}} \tau_c \langle \tilde{\lambda}^2 \rangle} n^2}. \tag{5.62}$$

Par un argument de mélange de phases, on devrait avoir

$$\tau_c^{-2} \approx \left\langle \tilde{\lambda}^2 \right\rangle.$$

Ainsi, puisque nous connaissons l_c et ϵ, nous pouvons noter comme seul paramètre à mesurer le produit

$$\lambda_0 \tau_c.$$

Ainsi, puisqu'il existe la relation généralisée eq.(5.56) , il est envisageable de déterminer la distribution d'un champ fluctuant, n, de façon auto-

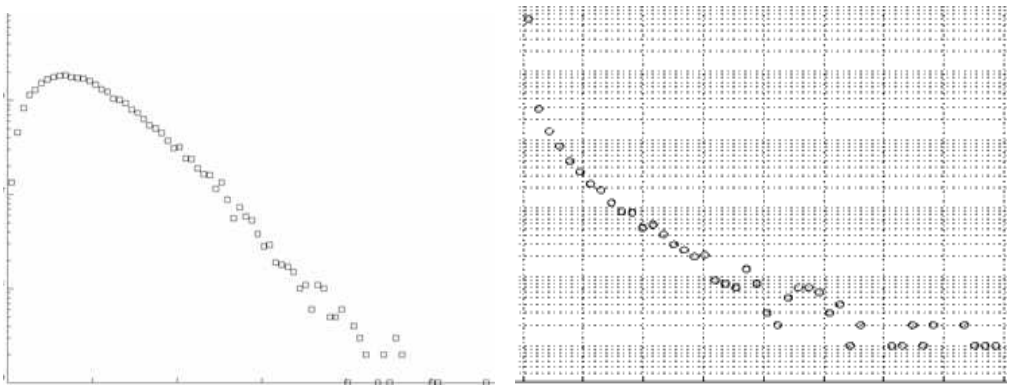
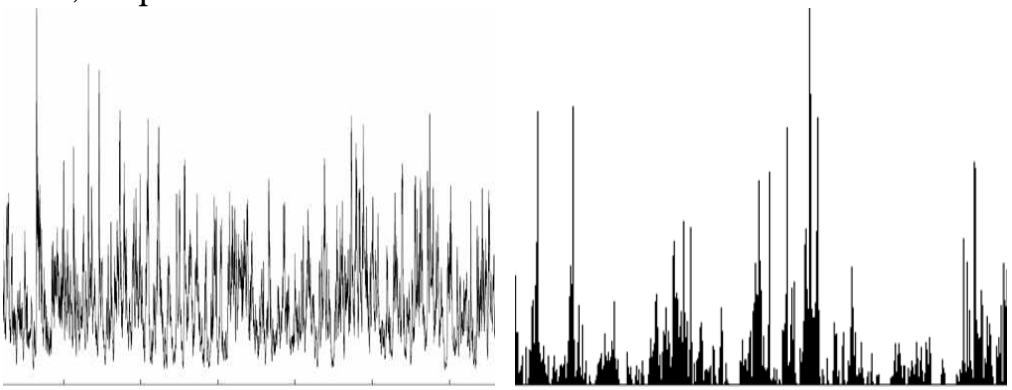


FIGURE 5.16 – Deux exemples de distributions, pour des fluctuations positives issues du système d'équations eq. (5.63), où l'on a varié $\lambda_0\tau_c$ d'une valeur $\lambda_0\tau_c > 2$ à une valeur $\lambda_0\tau_c < 2$. Dans le premier cas la valeur nulle est très rarement atteinte, et la courbe correspond quasiment à la courbe entière qu'on obtiendrait du vrai système. La décroissance asymptotique est bien exponentielle. Elles sont associées aux tracés temporelles de j suivants, respectivement :



nome, i.e. en mesurant uniquement sa déviation et ses corrélations. C'est bien une généralisation de la détermination d'une maxwellienne.

Nous montrons fig. (5.14) un exemple de fit [36].

Pour faire varier λ_0 et τ_c de façon contrôlé, j'ai simulé le processus numériquement par le système d'équations suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t j & = & \tilde{\lambda} j \\ \partial_t \tilde{\lambda} & = & f(j) - \lambda_0 \tilde{\lambda} + \mathcal{B} \end{array} \right. \tag{5.63}$$

où $\mathcal{B}$ est un bruit blanc d'un certain écart-type. La variable $\tilde{\lambda}$ est alors gaussienne de temps de corrélation λ_0^{-1}. Le lien avec la théorie précédente n'est donc valable que lorque $y > 1$. La fonction $f(j)$ est linéaire d'après la généralisation eq. (5.56) (ce qu'on peut vérifier dans les variables dynamiques du système eq. (3.43), fig. (5.15)).

36. Il manque néanmoins pour valider un peu mieux le modèle l'étude des distributions de probabilité avec l_c, i.e. avec ν. Je n'ai pu entreprendre pour l'instant une telle étude, qui devrait être assez rapide, compte-tenu que je n'ai pas eu accès à mes données depuis plus de deux années ni aux logiciels adéquates.

On obtient en faisant varier le produit $\lambda_0\tau_c$ toute une gamme de courbe, dont le comportement algébrique près de l'origine est déterminé par eq. (5.62). Voir fig. (5.16).

On constate que la première distribution de probabilité qui y est tracée, ressemble fort à celle qu'obtiennent expérimentalement beaucoup d'auteurs (par exemple [78, 32, 85]). Ce modèle ne peut prendre en compte uniquement des fluctuations de mêmes signes, compte tenu que la non linéarité moyenne est $f(j)j \sim j^2$.

Ce modèle de détermination des distributions de probabilité est *a priori* différent de tous les modèles proposés jusqu'à présent (c.f. e.g. [13, 36]). Je m'abstiens de commenter d'avantage, en l'état de mes connaissances, bien qu'il me semble qu'un lien étroit existe entre les versions ; cela demeure un travail à faire.

Annexe A : Bruit en "1/f"

Il est aisé, fort de l'expression eq. (5.34) et de l'hypothèse de loi d'échelles eq. (5.33), de montrer la présence de bruit en "1/f", i.e. tout exposant α compris entre 0 et 2 dans la décroissance spectrale $|\hat{n}_\omega|^2 \sim \omega^{-\alpha}$. En particulier l'exposant est $\alpha = 1$ en dimension $d = 1$. L'invariance d'échelles se traduit par un écart au scaling diffusif

$$t \sim x^z$$

avec $z \neq 2$. De même que la fonction de réponse suit une loi d'échelles, la fonction de corrélation suit une loi d'échelles semblable

$$C(x,t) \sim x^{2\chi} c(tx^{-z})$$

où $\lim_{w\to\infty} c(w) = w^{\frac{2\chi}{z}}$, i.e. $C(0,t) \sim t^{\frac{2\chi}{z}}$, et dont l'exposant χ est relié à ζ par

$$2\chi = 2 - \zeta - d.$$

La densité spectrale n'est pas simplement assimilable, comme dans le cas standard, à

$$|\hat{n}_\omega|^2 = \int dt\ e^{-i\omega t} C(0,t)$$

car par l'invariance d'échelles *les effets de bords* sont perceptibles (il n'y a pas séparation d'échelles). Il faut écrire

$$|\hat{n}_\omega|^2 = \int dt\ e^{-i\omega t} \int^{t^{\frac{1}{z}}} dx\ C(x,t) \sim \int dt\ e^{-i\omega t} t^{\frac{1+2\chi}{z}}.$$

Le comportement en ω^{-1} s'obtient donc dans le cas particulier

$$\frac{1+2\chi}{z} = 1$$

c'est-à-dire $\frac{-z}{z} + \frac{d-1}{z} = -1$, soit

$$d = 1. \tag{5.64}$$

Annexe B : Statistique expérimentale du plasma de bord d'un Tokamak

Je présente des mesures, par réfléctométrie[37], de distributions de probabilité de la densité et de ses fluctuations dans le plasma de bord du Tokamak ToreSupra lors du choc ohmique numéro 32022 (i.e. sans ajout de puissance de chauffage). La figure fig. (5.17) montre les distributions de la densité électronique n, en s'éloignant de la zone d'intersection des lignes de champ magnétique avec la paroi (LCFS).

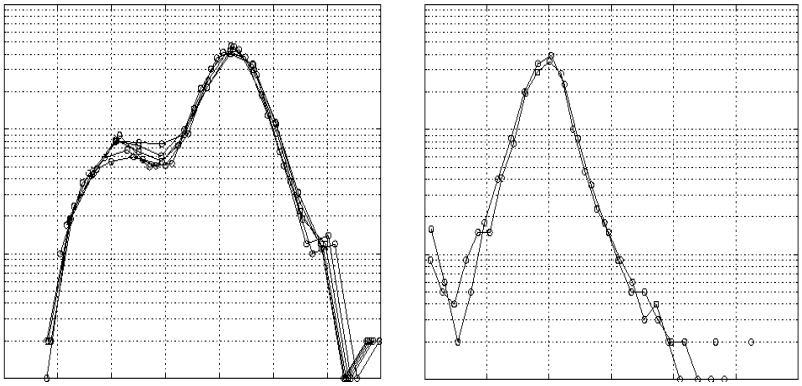


FIGURE 5.17 – Distributions de probabilité des valeurs expérimentales de la phase de l'onde sonde du réflectomètre. Celles-ci doivent être linéairement liées aux valeur de la densité. La LCFS est à gauche de la première figure et la position radiale croît de la gauche vers la droite. On a pu superposer et normaliser des paquets de mesures, définissant ainsi une région proche de la LCFS (figure de gauche) et une région lointaine (figure de droite).

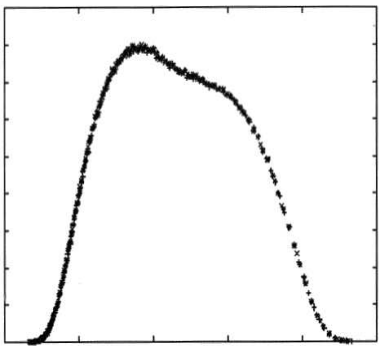


FIGURE 5.18 – Distribution de probabilité de la taille des amas de grains dans une expérience numérique de gaz granulaire, due à N. Maloney, tirée de [50].

On montre la distribution de probabilité de N obtenue numériquement dans le modèle eq. (3.43) en fonction de la position x, fig. (5.19).

37. Pour les détails de la technique de réfléctométrie, se référer par exemple à S. Heuraux.

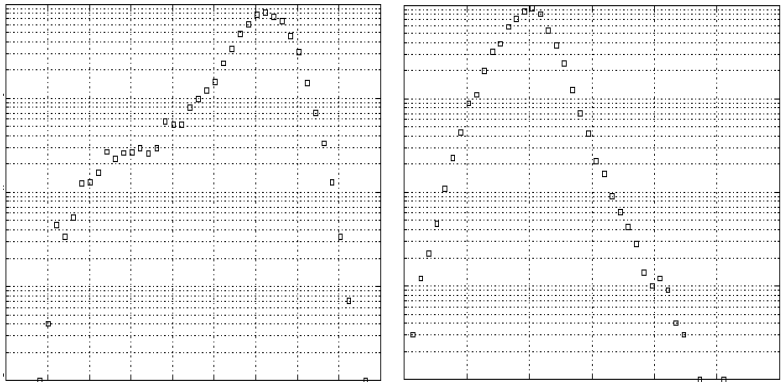


FIGURE 5.19 – Distributions de probabilité de N obtenues numériquement pour le modèle d'échange eq. (3.43). On peut noter la similitude avec le cas expérimental, suggérant que la déformation de la distribution est un effet de bord plus qu'un effet fondamental, i.e. de raréfaction de matière (la densité $N \to 0$).

La figure fig. (5.20) montre les distributions des fluctuations δn en fonction de l'écartement δr (r est la position radiale) des deux points de mesure.

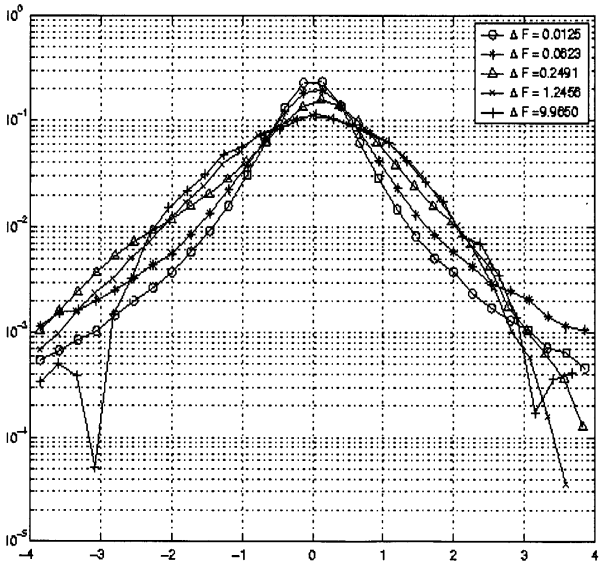


FIGURE 5.20 – Distributions de probabilité des fluctuations de la phase du rélféctomètre en fonction de la fréquence F, celle-ci étant reliée à la position radiale de réflection de l'onde (le point de mesure). On remarque l'une des propriétés de l'intermittence, i.e. la présence d'ailes non-gaussiennes aux plus petites échelles.

Je note pour finir la ressemblance frappante de ces distributions à 'bosses de chameau' avec la distribution de la taille des amas granulaires, fig. (5.18), qui ce forment dans un gaz granulaire (tirée de [50]). Je suppose que la distribution des fluctuations de la taille de tels amas a une forme analogue à celles tracées en fig. (5.16). L'analogue serait la densité N et les fluctuations n.

Annexe C : Spectre et fonction de structure

Je commente rapidement l'aspect de cascade du processus eq. (5.12).

L'équation de la dissipation d'énergie cinétique dans le fluide turbulent est dimensionnellement, en utilisant l'équation de Helmotz,

$$\partial_t \Omega^2 = A\Omega^3 \tag{5.65}$$

où Ω est la vorticité, et A est de l'ordre de l'unité. L'argument de cascade dû à A. N. Kolmogorov [62] consiste, entre autre, à poser la moyenne de cette équation [38]. Les non linéarités ne font que transférer l'énergie d'échelles en échelles jusqu'aux échelles dissipatives. Le taux de transfert moyen $\bar{\epsilon}$ est donc égal au taux de dissipation. Pour une échelle l_n, $\Omega \sim \frac{\delta_n v}{l_n}$, on obtient ainsi dimensionnellement

$$\delta_n v^3 \sim \bar{\epsilon} l_n$$

d'où l'on déduit le spectre de Kolmogorov $|\delta v_k|^2 \sim k^{-\frac{5}{3}}$. Celui-ci est indépendant de la dimension, or nous avons, par exemple à une dimension, un spectre $\sim k^{-2}$. U. Frish et P. Sulem ont proposé un modèle fractale de cascade [39]. Les structures qui s'établissent, mathématiquement à cause des non linéarités, occupent une fraction du volume total, déterminée par une dimension fractale [44]. Dans le cas unidimensionnel, l'équation de Burgers génère des fronts dont la dimension est nulle, la modification du spectre est alors

$$|\delta v_k|^2 \sim k^{-2}. \tag{5.66}$$

Il suffit de remplacer δv par n pour comprendre le spectre fig. (4.8).

Mais puisque ces structures sont donc de nature intermittentes, il semble naturel de proposer que le transfert d'énergie fluctue d'échelles en échelles. A. N. Kolmogorov et A. M. Oboukhov ont donc proposé que le taux de transfert soit distribué de façon log-normale, étant donné le caractère multiplicatif de la cascade,

$$\epsilon_n \sim \lambda_0 \delta_n v^2 \sim \lambda_0 \delta_0 v^2 \prod_i^{n-1} \epsilon_i.$$

La distribution dépend du nombre n d'étapes de cascade jusqu'à l'échelle l_n. L'écart type de $\ln \epsilon_n$ est $\sigma^2_{l_n} = \mu \ln \frac{L}{l_n}$, où μ est le paramètre d'inter-

38. Ici, je m'arrête au champ scalaire, donc je ne considère pas la symétrie galiléenne par exemple.

39. Je ne fais pas mention de la cascade inverse étudiée par R. Kraichnan [64].

mittence. Il en découle une modification du spectre et des fonctions de structures $\langle \delta_n v^p \rangle \sim l_n^{\zeta(p)}$. La moyenne se calcule avec la distribution log-normale, et le spectre de structure $\zeta(p)$ s'obtient en utilisant la forme de l'écart-type : $\zeta(p) = \frac{p}{3} + \frac{1}{2}\mu p(3-p)$, la partie quadratique préservant le résultat (exact pour les équations de Navier Stokes) de Kolmogorov.

Concernant le modèle eq. (5.63), notons qu'il donne également des fonctions de structures modifiées, c.f. fig. (5.21), qui sont semblables à la signature de l'intermittence [43].

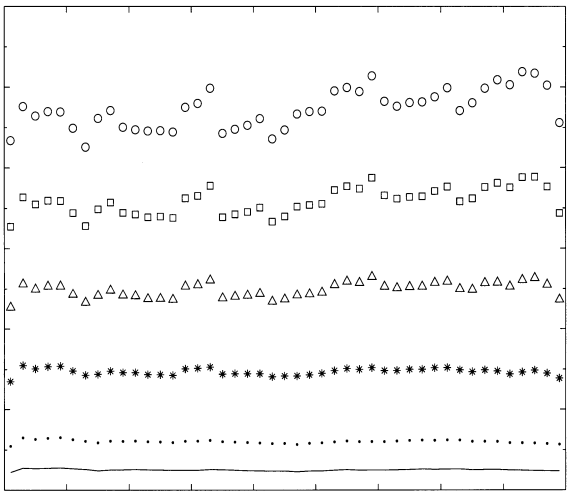


FIGURE 5.21 – Fonctions de structure $\langle \delta_n v^p \rangle$ pour différents p, en fonction de l'échelle l_n dans le système d'équation eq. (5.63). Le meilleur fit (linéaire) est ici $\langle \delta_n v^p \rangle \sim l_n^{\frac{p}{q}}$ avec $q = 5$ ou $q = 6$, alors que la théorie de A.N. Kolmogorov donne $q = 3$.

En fait, il se pourrait aussi que ce soit le taux de relaxation λ_n qui fluctue d'échelles en échelles, donc aussi ϵ_n, comme nous l'avons vu à une dimension pour l'instabilité d'échange. Ces fluctuations doivent caractériser la formation des structures locales, et leur symétrie par changement d'échelle. Ainsi, pour un spectre $\delta v \sim l^\alpha$, l'analogue de eq. (5.56) a la forme

$$\left\langle \tilde{\lambda} \ / \ \delta v \right\rangle \sim \lambda_0 \pm B \delta v^{1-\frac{1}{\alpha}} + ... \tag{5.67}$$

La distribution stationnaire qui en résulte, avec l'équation de Fokker-Planck, est du type [40] χ^2 pour les grandes valeurs de δv^2,

$$p(\delta v^2) \sim \left(\delta v^2\right)^{-C} e^{-2\frac{B}{\alpha-1}\left(\delta v^2\right)^{\frac{\alpha-1}{2}}}$$

où $C = 3 - \frac{1}{\alpha}$. Cette distribution procure aussi un spectre de structure $\zeta(p)$ non linéaire. Notons que si C et B ou μ étaient des paramètres libres, il

40. Il est possible de trouver des lois log-normales approximatives, avec d'autres relations généralisées.

serait possible de faire le fit correct, d'une même distribution expérimentale, avec l'une ou l'autre distribution. C'est pourquoi, déterminer ces paramètres, avec la généralisation de la relation de fluctuation-dissipation eq. (5.56), par une mesure physique est une approche plus satisfaisante.

Il semble donc prometteur qu'une étude approfondie de la turbulence, par le biais du modèle proposé au chapitre III, soit réalisée.

Bibliographie

[1] M. Abramowitz and I. E. Stegun. Handbook of mathematical functions. *Dover*.

[2] D. Pines ad D. Bohm. A collective description of electron interaction : Ii. *Phys. Rev.*, 85(2) :338, 1952.

[3] J.C. Adam, G. Laval, and D. Pesme. Reconsideration of quasilinear theory. *Phys. Rev. Lett.*, 43(22) :1671, 1979.

[4] M. Antoni, Y. Elskens, and D.F. Escande. Explicit reduction of n-body dynamics to self-consistent particle-wave interaction. *Phys. Plasmas*, 5(4) :841, 1998.

[5] I. Aranson and L. Kramer. The world of the complex ginzurg-landau equation. *Rev.Mod. Phys.*, 74 :99, 2002.

[6] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self-organised criticality : An explanation of 1/f noise. *Phys. Rev. Lett.*, 59(4) :381, 1987.

[7] R. Balescu. Statistical dynamics : matter out of equilibrium. *Imperial college press*, 1997.

[8] C. H. Bennett. On the nature and origin of complexity in discrete, homogeneous, locally-interacting systems. *Foundations of Physics*, 16(6) :585, 1986.

[9] V. L. Berezinskii. Destruction of long-range order in one-dimensional and ... *JETP*, 34(3) :610, 1972.

[10] P. Berger, Y Pommeau, and Ch Vidal. L'ordre dans le chaos. *Hermann*, 1988.

[11] I. B. Berstein, J. M. Greene, and M. Kruskal. Exact nonlinear plasma oscillations. *Phys. Rev.*, 108(3) :546, 1957.

[12] D. Bohm and E. P. Gross. Theory of plasma oscillaions. a and b. *Phys. Rev.*, 75(12) :1851–1876, 1949.

[13] J. P. Bouchaud and M. Mézard. Universality classes for the extreme value statistics. *arxiv :cond-mat/9707047v1*, 1997.

[14] J.P. Bouchaud, M.E. Cates, and S.F. Edwards. Hysteresis and metastability in a continuum sandpile model. *Phys. Rev. Lett.*, 74(11) :1982, 1995.

[15] J.P. Bouchaud and A. Georges. Anomalous diffusion i disordered media : ... *Physics Reports*, 195(4) :127, 1990.

[16] S. I. Braginskii. Reviews of plasma physics. *edited M.A. Leontovich, New York*, I :205, 1965.

[17] J.R. Cary, D.F. Escande, and A.D. Verga. Nonquasilinear diffusion far from the chaotic threshold. *Phys. Rev. Lett.*, 65(25) :3132, 1990.

[18] B.V. Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, 52(5) :264, 1979.

[19] L. F. Cugliandolo and J. Kurchan. Analyticalsolution of the off-equilibrium dynamics of a long range spin-glass model. *Phys. Rev. Lett.*, 71 :173, 1993.

[20] J. Dalibard. Mécanique quantique avancée. *Cours http ://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00092950/fr/*, 1999.

[21] J. M. Dawson. *Phys. Rev.*, 118(2) :381, 1960.

[22] P. Dirac. Principles of quantum mechanics. 1938.

[23] S. Douady, B Andreotti, and A. Daerr. On granular surface flow equations. *Eur. Phys. J. B*, 11 :131, 1999.

[24] I. Doxas and J.R. Cary. Numerical observation of turbulence enhanced growth rates. *Phys. Plasmas*, 4(7) :2508, 1997.

[25] P. Duhem. Sauver les apparences. *Libraire philosophique J. Vrin*, Seconde édition.

[26] M. J. Dunlavy and D. Venus. Crtical slowing down in the two-dimensional ising model using ferromagnetic ultrathin films. *Phys. Rev. B*, 71 :144406, 2005.

[27] T. H. Dupree. A perturbation theory for strong plasma turbulence. *Phys. Fluids*, 9(9) :1773, 1966.

[28] T. H. Dupree. Theory of phase space density granulation in plasma. *Phys. Fluids*, 15(2) :334, 1972.

[29] Y. Elskens and D. Escande. Microscopic dynamics of plasma and chaos. *Institute of physics publishing*, 2002.

[30] D.F. Escande, S. Zekri, and Y. Elskens. Intuitive and rigorous je sais plus. *Phys. Plasmas*, 3 :3534, 1996.

[31] B. A. Carreras et al. A model realization of self-organised criticality for plasma confinement. *Physics of Plasmas*, 3(8) :2903, 1996.

[32] C. Chamon et al. Out of equilibrium dynamical fluctuations in glassy systems. *arxiv :cond-mat/0401326v2*, 2004.

[33] G. Y. Antar et al. Experimental evidence of intermittent convection in the edge of magnetic confinement devices. *Phys. Rev. Lett.*, 87(6) :065001, 2001.

[34] K. W. Gentle et al. Strong nonlocal effects in a tokamak pertubative transport experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 74(18) :3620, 1995.

[35] L. P. Kadanoff et al. Static phenomena near critical points : Theory and experiment. *Rev. Mod. Phys.*, 39(2) :395, 1967.

[36] S. T. Bramwell et al. Magnetic fluctuations in the classical xy model : the origin of an exponential tail in a complex system. *Phys. Rev. E*, 63 :041106, 2001.

[37] R.P. Feynman. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 20(2) :367, 1948.

[38] M.-C. Firpo. Etude dynamique et statistique de l'interaction onde-particule. *thèse de doctorat*, univ. provence, 1999.

[39] M.-C. Firpo and Y. Elskens. Phase transition in the collisionless damping regime for wave-particle interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 84(15) :3318, 2000.

[40] M.-C. Firpo, F. Leyvraz, and G. Attuel. Equilibrium statistical mechanics predictions for weak langmuir turbulence. *Phys. Plasmas*, 2006.

[41] E. Fleurence. Calcul cinétique d'une turbulence dans un plasma magnétisé. comparaison à la limite fluide. *Thèse de doctorat*, page Chap. IV, 2005.

[42] D. Forster, D.R. Nelson, and M.J. Stephen. Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid. *Phys. Rev A*, 16 :425, 1977.

[43] U. Frisch. Turbulence. *book Cambridge university press*, 1995.

[44] U. Frisch and P.-L. Sulem. A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. *J. Fluid Mech.*, 87(4) :719, 1978.

[45] M. Gell-Mann and F. E. Low. Quantum electrodynamics at small distances. *Phys. Rev.*, 95(5) :1300, 1954.

[46] N. Goldenfeld. Lectures on phase transitions and the renormalization group. *W.A. Benjamin, inc*, Frontiers in Pysics D. Pines editor, 1992.

[47] A. Hasegawa and K. Mima. Pseudo three dimensional turbulence in magnetized nonuniform plasma. *Phys. Fluids*, 21 :87, 1978.

[48] P. C. Hohenberg. Existence of long-range order in one and two dimensions. *Phys. Rev.*, 158(2) :383, 1967.

[49] P. C. Hohenberg and B. I. Halperin. Theory of dynamic critical phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, 49(3) :435, 1977.

[50] P. Holdsworth. Universality of fluctuations in equilibrium and non-equilibrium systems. *Priv. comm. ;web*, 2006.

[51] W. Horton and A. Hasagawa. Quasi two dimensional dynamics of plasmas and fluids. *Chaos.*, 4(2) :227, 1994.

[52] W. Horton and Y.-H. Ichikawa. Chaos and structures in nonlinear plasmas. *World Scientific*, Chap 4, 1996.

[53] T. Hwa and M. Kardar. Avalanches, hydrodynamics, and discharge events in models of sandpiles. *Phys. Rev. A*, 45 :7002, 1992.

[54] S. Ichimaru. Basic principles of plasma physics. *W.A. Benjamin, inc*, Frontiers in physics D. Pines editor, 1973.

[55] S. Ichimaru, D. Pines, and N. Rostoker. Observation of critical fluctuations associated with plasma-wave instabilities. *Phys. Rev. Lett.*, 8(6) :231, 1962.

[56] A.V. Ivanov, S. V. Vladimorov, and P. A. Robinson. Criticality in vlasov-poisson system : A fermioniclike universality class. *Phys. Rev. E*, 71 :056406, 2005.

[57] L. P. Kadanoff. Statistical physics : Statics, dynamics and remormalization. *World Scientific*, 2000.

[58] N. G. Van Kampen. The dispersion equation for plasma waves. *Physica*, 23 :641, 1957.

[59] N.G. Van Kampen. On the theory of stationary waves in plasmas. *Physica*, XXI :949, 1955.

[60] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys. Rev. Lett*, 56(9) :889, 1986.

[61] Y. L. Klimontovich. Statistical physics. *Harwood publisher*, 1986.

[62] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbuence in incompressibles ... *Doklady*, 30(4) :301, 1941.

[63] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *J. Phys. C*, 6 :1181, 1973.

[64] R. Kraichnan. Inertial ranges in two dimesional turbulence. *J. Fluid Mech*, 10(7) :1417, 1967.

[65] L. Landau. *J. Phys. U.S.S.R.*, 10(25), 1946.

[66] L. Landau and E. M. Lifchitz. Physique statistique. *edition MIR Ellipses*, 4˚ édition, 1994.

[67] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20 :130, 1963.

[68] S.-K. Ma and G. F. Mazenko. Critical dynamics in 6-e dimensions : ... *Phys. Rev. B*, 11(11) :4077, 1975.

[69] N. Mattor and S.E. Parker. Nonlinear kinetic fluid equations. *Phys. Rev. Lett.*, 79(18) :3419, 1997.

[70] J.T. Mendonça, R. Bingham, and P. K. Shukla. Resonant quasiparticles in plasma turbulence. *Phys. Rev. E*, 68 :016406, 2003.

[71] N. D. Mermin and H. Wagner. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one or two ... *Phys. Rev. Lett.*, 17(22) :1133, 1966.

[72] K. Mizuno and S. Tanaka. Experimantal observation of nonlinear wave-particle interactions ... *Phys. Rev. Lett.*, 29(1) :45, 1972.

[73] M. Mézard. First steps in glass theory. *Mezard Homepage*.

[74] M. Mézard. Theory of random solid states. *Mezard Homepage*.

[75] T.M. O'Neil. Collisionless damping of nonlinear plasma oscillations. *Phys. Fluids*, 8(12) :2255, 1965.

[76] T.M. O'Neil and J.H. Malmberg. Transition of the dispersion roots from beam-type to landau tye solutions. *Phys. Fluids*, 11(8) :1754, 1968.

[77] T. S. Hahm P. H. Diamond. On the dynamics of turbulent transport near marginal stability. *Physics of Plasmas*, 2(10) :3640, 1995.

[78] B. Portelli, P. C. W. Holdsworth, and J.-F. Pinton. Intermittency and non-gaussian fluctuations of the global energy transfer in fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 90(10) :104501, 2003.

[79] I. Prigogine. Non-equilibrium statistical mechanics. *Interscience Publisher*, 1962.

[80] I. Prigogine. Introduction à la thermodynamique des processus irréversibles. *Dunod*, 1965.

[81] L. M. Smith and S. L. Woodruff. Renormalization-group analysis of turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30 :275, 1998.

[82] R. L. Stratonovich. Topics in the theory of random noise. *Gordon and Breach science publishers, inc*, I(Second ed.), 1967.

[83] J.L. Tennyson, J.D. Meiss, and P.J. Morrison. Self-consistent chaos in he beam-plasma instabiliy. *Physica D*, 71 :1, 1994.

[84] T.Koga. Introduction to kinetic theory stochastic processes in gaseous systems. *Pergamon Press*, 1970.

[85] B. Ph. van Milligen et al. Additional evidence for the universality of the probability distribution of turbulent... *Phys. of Plasmas*, 12 :052507, 2005.

[86] A. Vlasov. *J. Phys. U.S.S.R.*, 9(25) :130, 1945.

[87] B. Widom. *J. Chem. Phys.*, 43 :3892 3898, 1965.

[88] K. G. Wilson. Renormalization group and critical phenomena. i ... *Phys. Rev. B*, 4(9) :3174 3184, 1971.

[89] K. G. Wilson. Feynman-graph expansion for critical exponents. *Phys. Rev. Lett*, 28 :548, 1972.

[90] K. G. Wilson. The renormalization group : critical phenomena and the kondo problem. *Rev. Mod. Phys.*, 47(4) :773, 1975.

[91] K. G. Wilson and J. Kogut. The renormalization group and the epsilon expansion. *Phys. Rep. C*, 12 :75, 1974.

[92] V. Yakhot and S. A. Orzag. Renormalization-group analysis of turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 57(14) :1722, 1986.

[93] U. Frisch Z.S. and She P.-L. Sulem. Large scale flow driven by the anisotropic kinetic alpha effect. *Physica D*, 28 :382, 1987.