



HAL
open science

Mise au point d'un essai de compaction dynamique. Application au béton

Kamal Safa

► **To cite this version:**

Kamal Safa. Mise au point d'un essai de compaction dynamique. Application au béton. Engineering Sciences [physics]. Ecole Polytechnique X, 2008. English. NNT : . pastel-00005004

HAL Id: pastel-00005004

<https://pastel.hal.science/pastel-00005004>

Submitted on 21 Apr 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de Doctorat de l'École Polytechnique

Spécialité : **Mécanique**

Présentée par

Kamal SAFA

Pour obtenir le titre de

DOCTEUR de l'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Sujet de la thèse

Mise au point d'un essai de compaction dynamique. Application au béton

Soutenue le 20 Octobre 2008 devant le jury composé de :

M. Laurent DAUDEVILLE	<i>Président</i>
M. Patrice BAILLY	<i>Rapporteur</i>
M. Han ZHAO	<i>Rapporteur</i>
M. Gérard GARY	<i>Directeur de thèse</i>
M. Pascal FORQUIN	<i>Co-directeur de thèse</i>
M. Fabrice GATUINGT	<i>Examineur</i>
M. Michel BORNERT	<i>Examineur</i>
M. Pierre HABIB	<i>Examineur</i>

Remerciements

Ce travail de thèse s'est déroulé au Laboratoire de Mécanique des Solides dans des conditions scientifiques idéales. Je suis reconnaissant tout autant au cadre offert qu'à toutes les personnes que j'ai connues, et auxquelles je voudrais exprimer mes vifs remerciements :

A M. Gérard Gary qui m'a accepté en thèse sous sa direction, et dont la gentillesse, l'amabilité, et la patience, ont été pour moi des sources de motivation aussi intenses que sa continuelle quête au perfectionnement de son travail.

A M. Pascal Forquin qui a co-dirigé cette thèse ; ses conseils précieux et son support inlassable m'ont accompagné tout le long de ces trois années.

A M. Bernard Halphen qui m'a fait confiance et m'a accueilli au sein du LMS.

A tous les membres du jury, au temps et à l'intérêt qu'ils ont consacré à ce travail.

A Messieurs Pierre Bérest, Pierre Collet, Andrei Constantinescu, Dirk Mohr, Minh Phong Luong, et Lev Truskinovsky avec qui j'ai souvent eu des discussions techniques instructives.

Aux amis que je me suis fait et particulièrement Ionut Negreanu.

A M. Vincent De Greef dont la disponibilité et la gentillesse n'ont d'égales que sa virtuosité.

A M. Raymond Barre qui m'a aidé dans la préparation des essais dynamiques.

A l'équipe de l'atelier du LMS dont la précision du travail m'a épargné beaucoup de temps.

A toutes les personnes en dehors du cadre du LMS qui me supportaient.

Table des matières

Introduction générale	5
I Les essais de compaction sur bétons	9
I.1 Les essais triaxiaux sur bétons	9
I.2 Les essais quasi-œdométriques statiques sur bétons	16
I.3 Les essais quasi-œdométriques dynamiques sur bétons	19
I.4 Conclusion	23
II Procédure expérimentale	24
II.1 Introduction aux barres de Hopkinson	24
II.2 Banc d'essais adopté	30
II.3 Procédure de confinement	32
II.4 Les éprouvettes d'essais	35
II.5 Préparation des essais	38
II.6 Déroulement des essais dynamiques et statiques	43
II.6.1 Les essais dynamiques	43
II.6.2 Les essais statiques	50
II.7 Conclusion	51
III La correction de poinçonnement	53
III.1 Situation du problème	53
III.1.1 Formulation du problème mécanique	55
III.1.2 Conditions aux limites et équations d'équilibre	57
III.2 Solution partie I	59
III.3 Solution partie II	73
III.3.1 Solution analytique de la correction de poinçonnement	73

III.3.2 Recherche d'une forme explicite de la correction	79
III.4 Correction du déplacement unidimensionnel	84
III.4.1 Analyse du déplacement corrigé $d(t)$ au voisinage de t_1	85
III.4.2 Validation numérique	87
III.4.3 Remarques sur le délai temporel observé sur la force mesurée	88
III.4.4 Implémentation pratique de la correction de poinçonnement	89
III.4.5 Illustrations expérimentales et applications	91
III.5 Conclusion	94
IV Procédure de dépouillement des essais	95
IV.1 Etude théorique de la cellule de confinement	98
IV.2 Dépouillement des données expérimentales	117
IV.3 Validation expérimentale de l'essai de confinement	124
IV.4 Conclusion	128
V Résultats expérimentaux	130
V.1 Essais dynamiques quasi-œdométriques	131
V.1.1 Essais dynamiques sur bétons secs	132
V.1.2 Essais dynamiques sur bétons saturés	136
V.1.3 Comparaison des comportements dynamiques secs et saturés	139
V.2 Essais statiques quasi-œdométriques	141
V.2.1 Influence de la vitesse sur le comportement des bétons secs	142
V.2.2 Influence de la vitesse sur le comportement des bétons saturés	143
V.3 Influence de la pression interstitielle	145
V.4 Confrontation des résultats avec la Littérature	162
V.5 Conclusion	165

Conclusion générale	167
Perspectives	169
Références bibliographiques	171

Introduction Générale

L'objectif de la présente thèse est la mise au point d'un essai de confinement quasi-œdométrique dynamique et statique pour l'étude du comportement des matériaux fragiles en général, et particulièrement les bétons à hautes performances. Le comportement en dynamique rapide du béton est actuellement mal connu, bien qu'il se manifeste dans des situations courantes comme les chocs, les impacts balistiques et les crashes. En cas de tels chargements, les niveaux de pression dans la zone impactée sont très élevés, et le confinement génère un état de contraintes assez proche de la compression œdométrique. En fait le mode de chargement du béton est plus complexe, et varie selon la situation de la zone considérée par rapport à la paroi sollicitée. Cette zone peut être dans un état de fort confinement, de compression triaxiale, ou même de traction (écaillage) lors de la réflexion des ondes de compression sur la face libre de la paroi [Li et al. 2005, Forquin et al. 2008a]. Nous nous limitons dans ce travail au trajet de chargement uniaxial confiné, comme étant convenablement représentatif de l'état de compaction dynamique. Pour insérer l'étude dans le contexte des récentes analyses sur l'influence de l'état d'humidité interne du béton sur sa résistance [Burlion et al 2005, Vu et al 2007], des éprouvettes saturées et sèches sont soumises à une compaction confinée dynamique, et statique drainée.

Le béton considéré dans le cadre des essais est le « MB50 ». Il s'agit d'un micro-béton qui a fait l'objet de travaux importants dans le cadre du programme GEO intitulé « Comportement des Ouvrages en Dynamique Rapide ». Depuis, plusieurs types d'essais ont été menés telles la compression triaxiale et hydrostatique [Buzaud 1998], la compression œdométrique statique [Burlion 1997], dynamique [Gatuingt 1999, Forquin et al. 2008b]. L'intérêt d'avoir choisi ce béton est de s'aligner sur ces travaux car justement il n'existe pas actuellement dans la littérature une gamme d'essais dynamiques et statiques pour un même béton, et encore moins pour lesquels l'influence de l'eau libre y est discutée.

L'appareil de confinement mis au point consiste en une cellule tubulaire en acier à haute limite élastique, dans laquelle l'éprouvette cylindrique est insérée par le moyen d'un montage précis obéissant à un protocole qui sera décrit par la suite. Des jauges de déformation situées sur sa surface externe permettent l'évaluation de la contrainte radiale exercée par l'éprouvette soumise à la compression ainsi que d'autres éléments considérés dans le dépouillement. Le

dimensionnement de la cellule est basé sur la volonté de lui garder un comportement élastique au long de l'essai ainsi que d'assurer une bonne lisibilité des déformations mesurées par les jauges. Le système des barres de Hopkinson est utilisé pour les essais dynamiques ; des vitesses de déformations comprises entre 70 et 220s⁻¹ couvrent pour les éprouvettes la gamme des chargements appliqués. L'ordre de grandeur maximal des pressions –ou contraintes moyennes- atteintes est de 1000 MPa pour les bétons saturés et 650 MPa pour les bétons secs.

D'une manière générale, la validation et l'interprétation des essais dynamiques ne sont pas simples. On observe souvent une dispersion plus ou moins accentuée, dans le sens que les résultats expérimentaux des essais effectués sur un même matériau -métallique par exemple- ne sont pas toujours identiques. Un grand nombre de paramètres intervient lors d'un essai sur les barres de Hopkinson (calage temporel, transport spatial des ondes du point de mesure au bout de la barre, équilibre des forces aux faces de l'éprouvette...), et dont la maîtrise et la prise en compte sont essentielles. Nous nous pencherons sur ces points au cours de l'étude, d'autant plus que le dépouillement des essais non usuels tels les essais de confinement, requiert l'incorporation de tous ces paramètres.

Le plan suivant est proposé dans ce manuscrit :

Nous aborderons d'abord dans le premier chapitre une revue des travaux expérimentaux accomplis sur la compaction des bétons, et desquels apparaît l'importance de l'influence du confinement latéral. Différents trajets de chargement ont été explorés au moyen d'essais triaxiaux (statiques), et ceci pour des bétons secs et humides. La part des essais dynamiques reste modeste et incomplète, notamment à cause de la difficulté de l'essai et du caractère fragile du matériau qui se rompt dans la phase transitoire du chargement. Le confinement latéral permet le passage du comportement fragile au comportement ductile, et par conséquent élargit le domaine d'exploration en contraintes et déformations.

Dans le deuxième chapitre le dispositif expérimental est décrit ainsi que la procédure de mise en place de l'éprouvette. Le banc d'essais utilisé est celui des « grosses barres » de diamètre 80 mm, et les forces entrantes mises en jeu dépassent 70 tonnes. Vu que ce niveau de chargement est atteint durant quelques centaines de microsecondes, le moindre défaut d'alignement entre les différentes pièces du dispositif peut conduire à leur endommagement. C'est la raison pour laquelle un appareil de montage a été conçu pour permettre la mise en place des éléments du dispositif de confinement, de sorte à minimiser les défauts

d'alignement lors de cette étape délicate. En outre, ce montage permet la standardisation des essais et leur duplication, ne laissant d'autres aléas que les conditions propres de l'essai. Une partie de ce chapitre est consacrée aux différents facteurs qui entrent en jeu lors de l'essai dynamique sur les barres de Hopkinson. La synchronisation et le calage des différentes mesures temporelles effectuées (déformations axiales des barres entrantes et sortantes, réponses des jauges de la cellule) ainsi que l'effet dispersif des ondes, sont abordés sur les plans théoriques et pratiques. La prise en compte de la différence d'impédance entre les barres et les bouchons qui cernent l'éprouvette est incorporée, de sorte à permettre l'acquisition directe des ondes aux faces de l'éprouvette.

Dans le troisième chapitre un problème qui touche à tous les essais sur les barres de Hopkinson est traité. Il consiste à déterminer le déplacement local entre la barre et l'éprouvette au niveau de la surface de contact. Ce déplacement additionnel provient de la différence de diamètres entre la barre et l'éprouvette, et nécessite pour sa prise en compte une étude locale tri-dimensionnelle de mécanique des milieux continus. Les conséquences de l'incorporation de ce déplacement appelé « le poinçonnement élastique » sur la courbe expérimentale du comportement obtenu se sont avérées importantes, permettant de retrouver le module élastique correct du matériau testé. Cette correction est nécessaire pour les matériaux fragiles soumis à des essais de compression non confinée, dont le comportement se trouve alors sérieusement affecté tout le long de l'essai si le déplacement local dû au poinçonnement n'est pas incorporé dans les mesures classiques du déplacement.

Le quatrième chapitre aborde le dimensionnement de la cellule de confinement ainsi que sa validation numérique et expérimentale. Une méthode de dépouillement est exposée, basée sur l'exploitation de toutes les jauges de déformation collées sur la cellule. La pression radiale intérieure, ainsi que la position de l'éprouvette par rapport à la cellule peuvent ainsi être déterminées en fonction du temps pour chaque essai. Outre la validation numérique de la méthode, une validation expérimentale sur des éprouvettes en laiton est effectuée. Le comportement du laiton est identifié par le moyen d'essais dynamiques et statiques uniaxiaux, puis confronté à celui obtenu par les essais quasi-œdométriques.

Finalement le cinquième chapitre expose les résultats obtenus sur des éprouvettes de MB50 saturées, et d'autres éprouvettes soumises à des séchages brusques et progressifs à l'étuve. Les essais dynamiques à des vitesses de déformation comprises entre 80 et 220s⁻¹ sont

effectués ainsi que des essais statiques drainés sur une presse hydraulique de type MTS. Plusieurs résultats ont été obtenus. Les principaux sont la faible dépendance du comportement du béton aux vitesses de chargement, ainsi que les grandes différences en termes de résistance et de compaction entre le béton saturé et sec. Les essais sur béton humides ont fait apparaître un paramètre important qui est le drainage de l'eau libre présente dans les pores ; ce phénomène se manifeste uniquement dans les essais statiques où les temps sont assez longs pour permettre à l'eau de s'évacuer vers l'extérieur. Des essais statiques de durées différentes allant de 55 secondes à 24 heures ont permis de révéler l'influence de la pression de l'eau dans les pores sur le comportement. Une étude de la pression interstitielle, basée sur une adaptation de la théorie de Terzaghi des sols drainés, a fourni des éléments d'analyse qui ont permis de quantifier son influence sur la résistance du béton saturé

Nous terminons cette étude par une conclusion sur le travail effectué, ainsi que par des perspectives de développement basées sur les résultats expérimentaux obtenus.

Chapitre I

Les essais de compaction sur bétons

Lors d'un essai confiné sur béton, deux phénomènes se produisent : l'endommagement de la matrice cimentaire et la fermeture de la porosité. Cette manifestation propre aux géomatériaux et aux matériaux poreux s'accompagne de la diminution irréversible du volume et l'évolution des caractéristiques mécaniques au cours du chargement. Le niveau de confinement latéral a un effet primordial sur le comportement du matériau. Ainsi le comportement du béton peut être décrit comme élastique fragile en compression simple uniaxiale, élasto-plastique endommageable sous faibles niveaux de confinement, et élasto-plastique compactant pour des forts niveaux de confinement. Bien sûr cette schématisation du comportement n'est pas stricte puisque les phénomènes qui interviennent sont complexes, interconnectés et pas totalement identifiés, mais elle permet de souligner l'importance de la pression latérale dans le cadre de l'étude du béton.

Sans vouloir s'étendre sur une bibliographie extensive sur ce sujet, nous présentons une revue spécifique des différents essais effectués en statique et dynamique, ainsi que leurs résultats.

1.1 Les essais triaxiaux sur béton

L'essai triaxial est conçu initialement pour la caractérisation des comportements drainés et non drainés des sols [Bishop et Henkel 1957, Biarez 1962]. Il consiste à soumettre dans une cellule triaxiale une éprouvette cylindrique à une pression hydrostatique par l'intermédiaire d'un fluide, puis d'augmenter la contrainte axiale tout en maintenant la contrainte radiale constante (Figure I.1). Ces deux contraintes constituent les paramètres du chargement ; il est donc possible de décrire l'ensemble des chemins triaxiaux en formulant les trajets de chargement dans le plan désiré. Le principe de l'essai restant le même, la cellule triaxiale a été adaptée pour des matériaux plus durs tels que les roches et les bétons [Hoek et Franklin 1968, Palaniswamy et Shah 1974] ; ces matériaux connus pour leur fragilité sous chargement uniaxial manifestent un comportement plus ou moins ductile selon la pression de confinement. Cette dernière est le plus souvent de quelques dizaines de MPa [Taliencio et al

1999, Sfer et al 2002], ce qui limite la caractérisation de l'effet des trajets de chargement mais suffit à mettre en évidence la transition de comportement fragile-ductile.

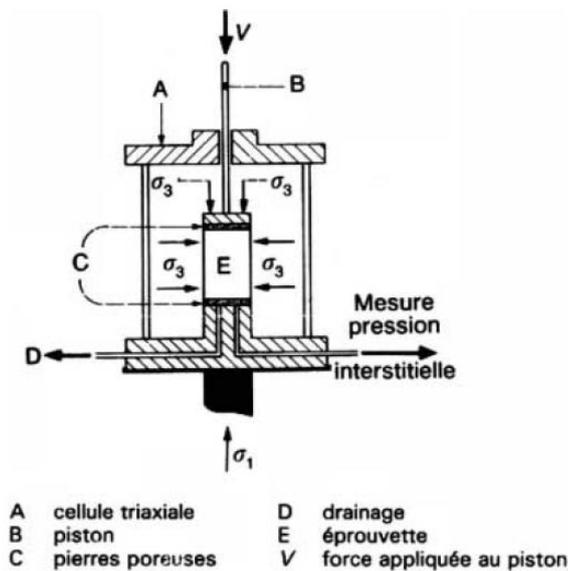


Fig. I.1- Schéma de l'essai triaxial classique

La cellule triaxiale mise au point au Centre d'Etudes de Gramat permettait l'application d'une contrainte axiale maximale de 6 GPa sur des éprouvettes cylindriques de 20 mm de diamètre et 40 mm de hauteur. La pression du fluide utilisé (pétrole ou du lause) pouvait atteindre 2 GPa. Ce dispositif a été utilisé sur des roches et aussi sur du micro-béton MB50 [Buzaud 1998] dont nous présentons dans les figures I.2 et I.3 quelques résultats. Le comportement ductile du béton confiné est clairement exhibé; les déformations axiales atteintes sont de l'ordre de 13% pour un confinement latéral de 800 MPa (figure I.3). La courbe enveloppe déviatorique (différence entre la contrainte axiale et la pression de confinement) tracée en fonction de la pression hydrostatique montre une augmentation de la résistance pour le trajet de chargement étudié. Précédemment, Burlion avait montré lors des essais œdométriques et hydrostatiques [Burlion 1997] l'influence du déviateur sur le comportement volumique du béton (loi de compaction).

Le souci d'étudier l'influence des granulats sur le comportement, ainsi que de travailler sur un béton plus représentatif de la réalité que le micro-béton, a conduit à la conception de machines triaxiales spéciales afin de pouvoir tester des éprouvettes de dimensions plus importantes, avec des granulats plus représentatifs du béton réel.

Ce n'est que récemment [Schmidt 2003, Warren et al 2004] que des essais statiques à des pressions de confinement pouvant atteindre 500 MPa ont été réalisés, et ceci sur des éprouvettes de caractéristiques mécaniques semblables au béton de construction, et des agrégats de taille voisine de 8 mm. Les éprouvettes avaient 50 mm de diamètre et une hauteur de 110 mm [Schmidt 2003].

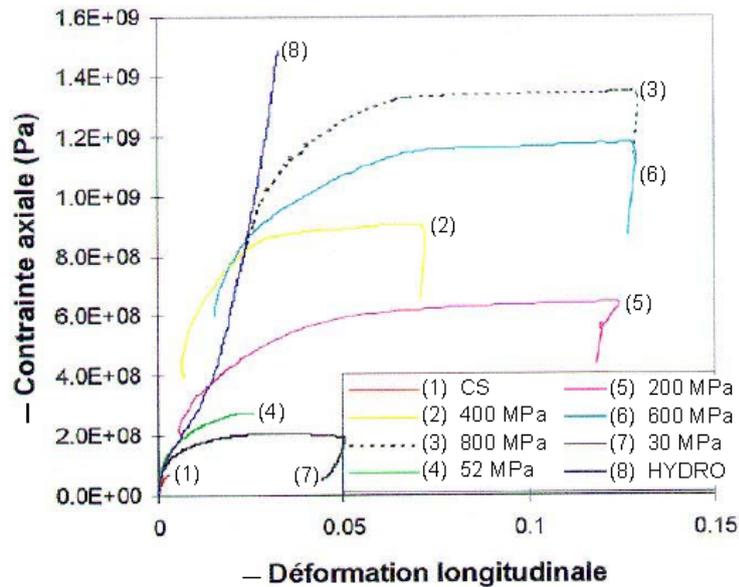


Fig. I.2 - Contraintes axiales pour différentes pressions de confinement [Buzaud 1998]

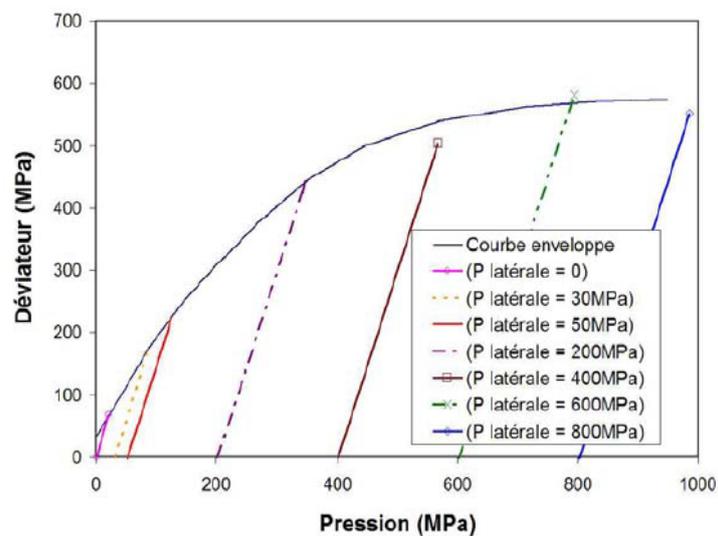


Fig. I.3 - Evolution du déviateur en fonction de la pression [Buzaud 1998]

Nous reproduisons sur la figure I.4 la courbe des contraintes seuils obtenue par Schmidt, et qui est assez semblable à celle de la figure I.3. La similitude provient du fait que dans les deux travaux, il semble que la résistance atteint une limite progressive au fur et à mesure que les pressions de confinement augmentent. De plus, les bétons testés sont différents en constitution et en géométrie (micro-béton Ø20-H40 mm dans la figure I.3; béton normal Ø50-H110 mm dans la figure I.4).

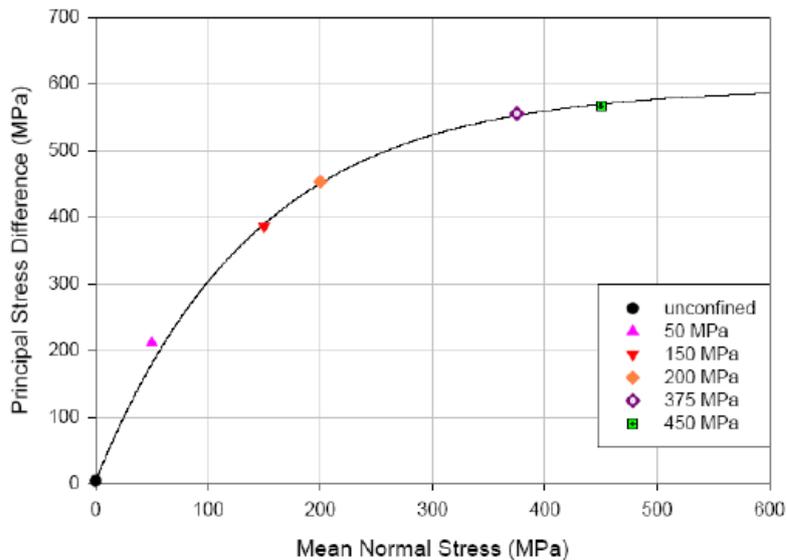


Fig. I.4 -Evolution du déviateur en fonction de la pression [Schmidt 2003]

Outre l'augmentation de la résistance et de la raideur en fonction du confinement, les courbes de déformations volumiques montrent en fin d'essai une dilatation du matériau, d'autant moins visible que le confinement est grand.

Les résultats obtenus ne permettent cependant pas de tirer des conclusions sur les différents aspects du comportement vu que ces études en abordent un aspect correspondant au seul trajet triaxial usuel. Une étude plus complète est réalisée par Gabet [Gabet 2006], dans laquelle plusieurs trajets de chargement supplémentaires sont considérés dont les trajets proportionnels et œdométriques. Le béton utilisé est sec avec un rapport eau-ciment $E/C = 0.64$; la dimension maximale des granulats est de 8 mm. Les éprouvettes ont un diamètre de 7 cm et une hauteur de 14 cm. Une presse de grande capacité est utilisée, permettant d'atteindre des contraintes de l'ordre du GPa. Les essais triaxiaux effectués sont réalisés à des pressions de confinement de 50 à 650 MPa. Ils ont permis de confirmer les tendances déjà observées sur le comportement volumique du béton, notamment le processus de la compaction qui est caractérisé par le

raidissement progressif du matériau au fur et à mesure de l'effondrement de la porosité. Une autre caractéristique est montrée sur la figure I.5 ; elle représente l'augmentation de la compaction durant la phase déviatorique de l'essai triaxial, soit sous les contraintes tangentes.

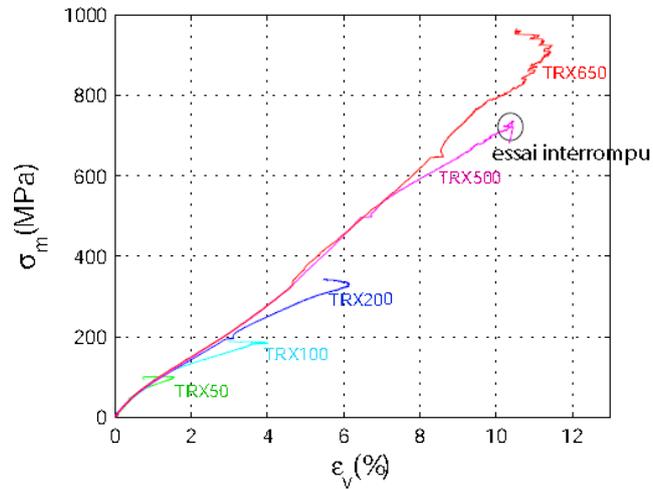


Fig. I.5 -Comportement volumique pour différentes pressions de confinement [Gabet 2006]

Pour les mêmes essais, il est montré que la capacité de chargement du béton augmente de manière significative avec la pression de confinement (figure I.6).

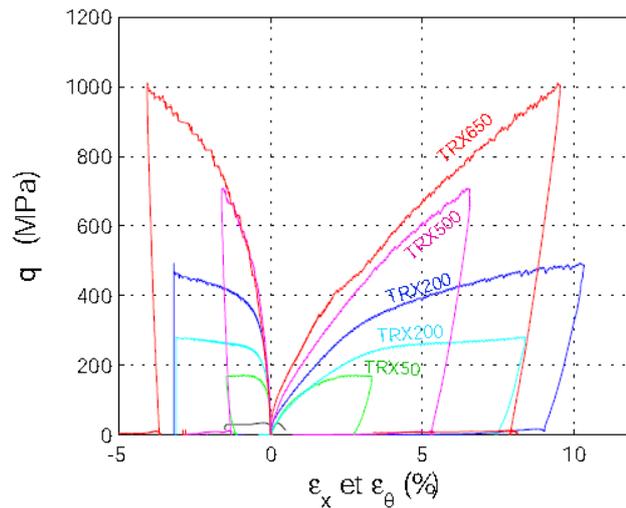


Fig I.6 -Déviateur fonction des déformations (essais triaxiaux) [Gabet 2006]

Finalement, pour définir un état limite, l'auteur choisit celui de la contraction-dilatation (changement du signe de la déformation volumique) observé sur la majorité des comportements volumiques des différents essais. Pour chaque essai, la contrainte déviatorique qui correspond au seuil tel que défini est relevée (figure I.7). La surface seuil est ainsi obtenue pour des bétons secs dans les cas de trajets de chargement triaxiaux et proportionnels. La surface seuil montre que le comportement déviatorique du béton est indépendant du trajet de chargement, et que sa résistance augmente continuellement avec la pression. Dans le même cadre de cette étude, un ensemble d'états limites correspondant à des bétons ayant des degrés de saturation en eau différents est défini par Vu [Vu 2007] (figure I.8). Contrairement au béton sec, la résistance du béton humide est bornée à partir d'un certain niveau de confinement ; l'état limite semble dépendre du degré de saturation. L'explication avancée par l'auteur est qu'à fort confinement, quand la matrice cimentaire est totalement détruite, le béton se comporte comme un ensemble de grains non cohésifs de sorte que les essais humides peuvent être considérés similaires à ceux réalisés sur des sols non drainés. L'eau joue un double rôle dans la diminution de la résistance : d'une part elle lubrifie les grains et diminue leur frottement relatif, et d'autre part elle exerce une grande pression interstitielle dans la porosité résiduelle. Tandis que pour le béton sec le niveau élevé du déviateur est expliqué par le frottement entre les grains [Vu 2007].

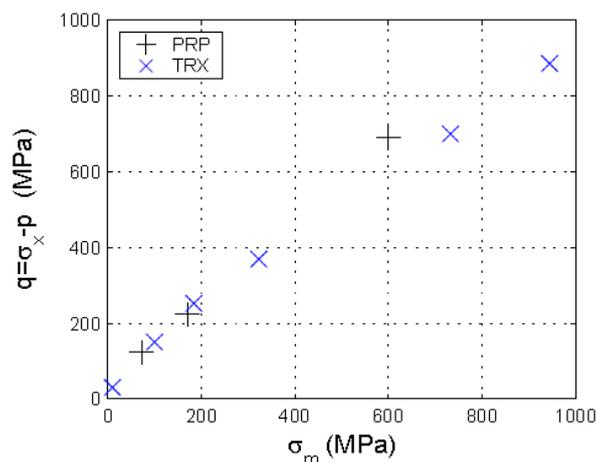


Fig. I.7 – Transitions contraction-dilatation formant la surface seuil pour les bétons secs

[Gabet 2006]

L'augmentation de la résistance du béton et du mortier avec le séchage est aussi observée avec les essais de compression uniaxiale [Burlion et al. 2005] et triaxiale [Yurtdas et al. 2004] à faible confinement latéral, mais elle est attribuée à des raisons différentes. L'évaporation de l'eau ne se fait pas d'une façon homogène et génère des gradients hydriques ; les bords de l'éprouvette se contractent sur son centre et provoquent un confinement de son cœur. Parallèlement, elle provoque une succion capillaire qui conduit à une mise en compression du squelette, soit la création d'une précontrainte qui confère une résistance additionnelle [Yurtdas et al. 2004]. Cependant, compte tenu de la faible perméabilité du béton, la compression des éprouvettes humides provoque une mise en pression de l'eau interstitielle, de là l'importance de l'effet mécanique que peut jouer la porosité. Des essais triaxiaux drainés et non drainés ont été effectués sur des éprouvettes de mortier afin d'évaluer l'effet de la pression interstitielle sur ses caractéristiques élastiques (module de Young et coefficient de Poisson) et sur sa résistance [Skoczylas et al. 2007]. La surpression interstitielle semble n'affecter que la résistance ; elle la diminue en contribuant à l'écartement des microfissures.

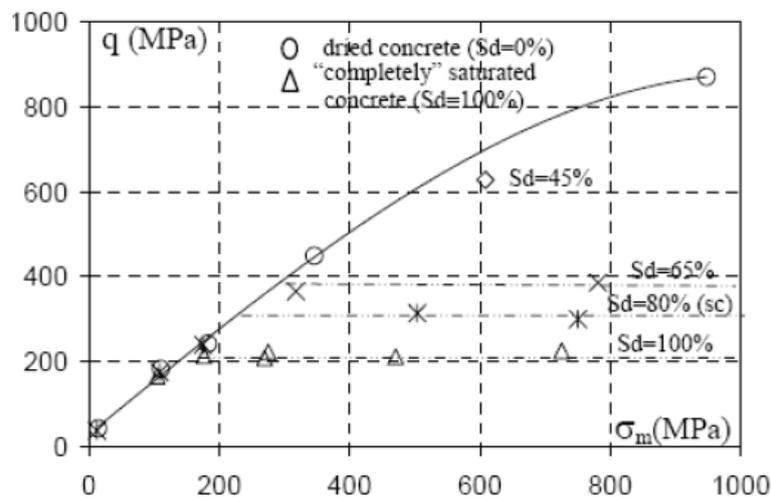


Fig. 1.8 -Surfaces seuil pour bétons secs et à différents degrés de saturation [Vu 2007]

1.2 Les essais quasi-œdométriques statiques sur béton

L'essai œdométrique, à l'instar de l'essai triaxial, est initialement un outil destiné à l'étude de la mécanique des sols. Il permet de reproduire les conditions de déformation des sols dans le cas d'un massif à surface horizontale chargé par une pression uniforme, et où le sol ne peut se déplacer que verticalement. L'hypothèse de la condition de déplacement radial nul ou quasi nul est assez représentative lors d'un choc de l'état au cœur de la structure, où les forces inertielles radiales tendent à s'opposer à l'expansion. Un autre avantage est celui de pouvoir atteindre des contraintes axiales plus élevées que celles obtenues par les essais triaxiaux classiques, vu que la seule condition aux limites sur la surface latérale de l'éprouvette est celle du déplacement.

Un des premiers essais de compression uniaxiale confinée sur béton a été effectué sur des éprouvettes de mortier [Bazant et al. 1986] ; il consistait à comprimer l'éprouvette cylindrique dans un dispositif très rigide permettant de contrôler uniquement la force et la déformation axiales. Une importante amélioration de l'essai a été obtenue en considérant une cellule en acier (figure I.9) dont la rigidité d'une part permet l'application de pressions de plusieurs centaines de MPa, et de l'autre la mesure de la contrainte de confinement [Burlion 1997]. Ainsi les deux comportements sphériques et déviatoriques sont directement obtenus.

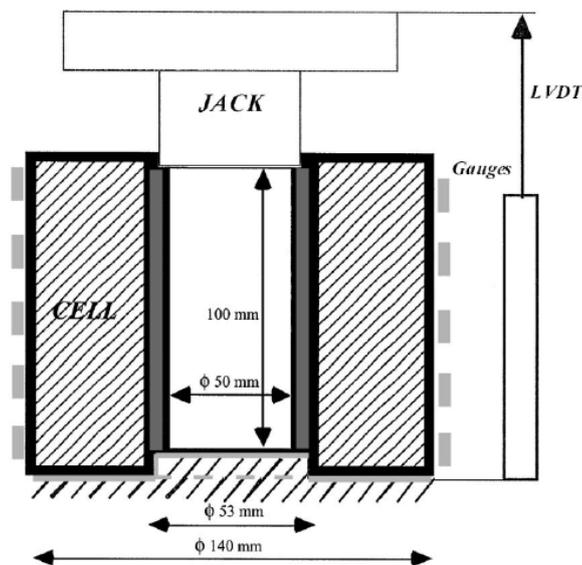


Fig. I.9 -Procédé de compression uniaxiale confinée [Burlion 1997]

La contrainte radiale de confinement supposée uniforme, est obtenue par la mesure des déformations orthoradiales sur la face extérieure de la cellule supposée élastique. Pour éviter tout jeu entre l'éprouvette et la cellule, une résine polymérisante est employée. Des pressions de 600 MPa ont pu être atteintes sur des éprouvettes en béton de 50 mm de diamètre et 100 mm de hauteur [Burlion et al 2001]. Des essais de compaction œdométrique sur micro-béton MB50 ont montré que pour des niveaux de pression élevés (>200 MPa) les déformations volumiques des éprouvettes saturées sont plus faibles que celles des éprouvettes sèches [Burlion 1999].

L'essai de confinement quasi-œdométrique dans une cellule en acier est repris avec une amélioration du dépouillement [Forquin 2003]. Elle consiste à considérer une relation entre les déformations orthoradiales et la pression intérieure qui tient compte du fait que la pression de confinement n'est pas répartie sur toute la hauteur de la cellule, mais sur une partie qui correspond à la hauteur de l'éprouvette. Des simulations numériques effectuées sur la cellule ont permis d'identifier cette relation ainsi que de déterminer avec plus de précision la déformation radiale de l'éprouvette. Pour atteindre des pressions de 550 Mpa, la cellule utilisée d'épaisseur 20mm plastifiait, et le dépouillement en tenait compte en se basant sur une identification préalable du matériau constitutif. La validation de l'essai est faite numériquement, ainsi qu'expérimentalement avec des éprouvettes en Aluminium [Forquin et al. 2007].

Un dispositif œdométrique a été monté [Gabet 2006] afin d'adapter l'essai triaxial à l'essai de confinement. Il consiste à mettre en place l'éprouvette cylindrique de dimensions Ø100-H100mm à l'intérieur d'une épaisse chemise en acier (figure I.10). Le contact entre la chemise et l'éprouvette est assuré par le moyen d'une résine époxy bi-phasique du même type que celle utilisée dans les autres essais de confinement cités ci-haut. Le contrôle de l'œdométrie se fait par l'asservissement de la pression de confinement de sorte que la déformation orthoradiale mesurée sur la surface extérieure de la chemise soit nulle. Des pressions proches de 1 GPa ont été atteintes, avec des déformations volumiques de 12%.

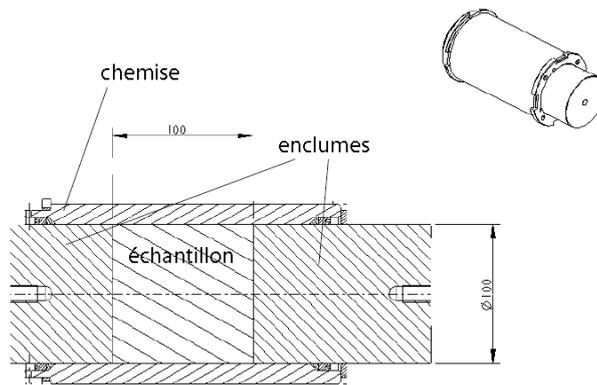


Fig. I.10 -Dispositif de confinement adapté pour essai sur machine triaxiale [Gabet 2006]

La courbe contraintes-déformations (figure I.11) montre que l'essai œdométrique peut être assimilé à un essai proportionnel dans lequel le coefficient de proportionnalité entre la force axiale et latérale varierait au cours du chargement entre 0.3 et 0.5.

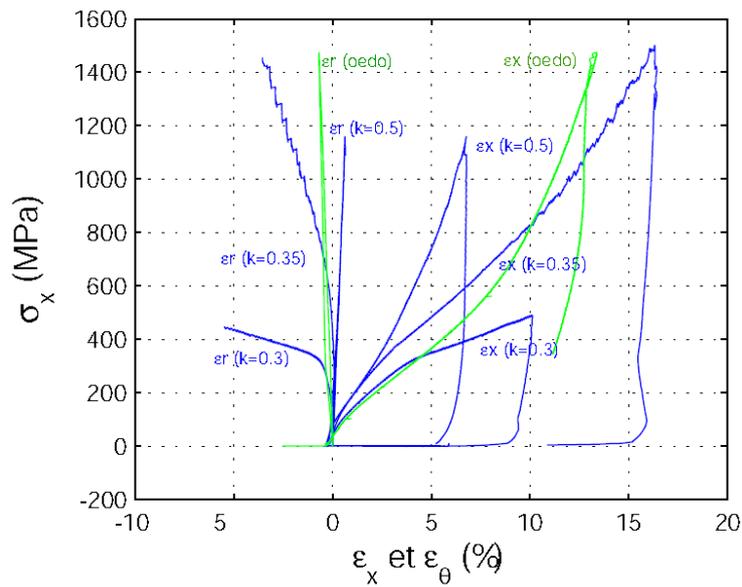


Fig. I.11 -Courbes contraintes-déformations pour les essais proportionnels et œdométrique

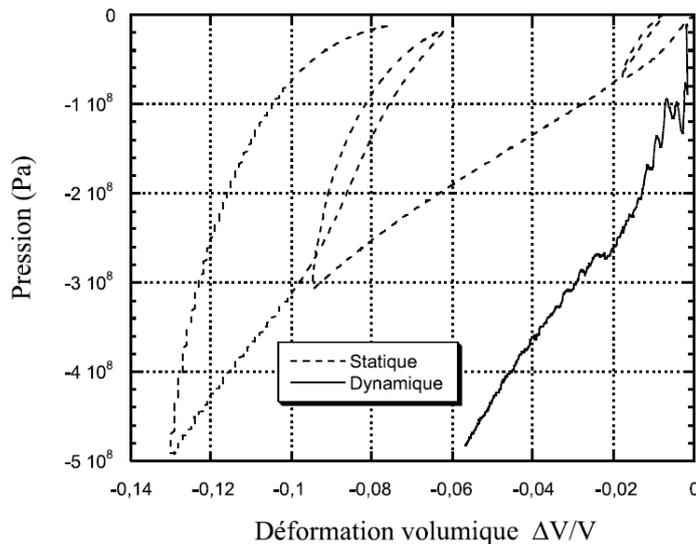
[Gabet 2006]

1.3 Les essais quasi-œdométriques dynamiques sur béton

Il est admis usuellement de considérer pour les bétons un essai comme étant dynamique pour des vitesses de déformation supérieures à 1 s^{-1} . Comme nous l'avons mentionné en introduction, il n'existe pas actuellement une gamme d'essais sur un même matériau comportant à la fois des essais statiques et dynamiques. Les essais dynamiques présentent des complexités qui leur sont propres, telles les réflexions d'ondes, le bruitage, la synchronisation des signaux, qui affectent parfois notablement la qualité des résultats. Les éprouvettes utilisées dans le cadre des essais dynamiques sur les géomatériaux sont contraintes à avoir des dimensions bien plus grandes que celles des métaux. Ceci remet en questions certaines hypothèses d'habitude considérées comme acquises dans le milieu des barres de Hopkinson, telles l'homogénéité des contraintes dans l'éprouvette, l'équilibre des forces entrantes et sortantes, le calage des ondes dans le temps qui se voit moins évident vu la longueur importante de l'éprouvette.

Des essais dynamiques de compression simple par le moyen des barres de Hopkinson et statiques ont déjà été effectués et ont montré une certaine dépendance de la vitesse pour les bétons humides [Gary et Klepaczko 1992] pour des vitesses de déformation comprises entre 10^{-5} et 0.1 s^{-1} . Cette augmentation est attribuée à un effet de viscosité liée à la présence d'eau dans les pores [Toutlemonde 1994]. Au-delà de 10 s^{-1} , la résistance en compression croît brutalement sans que ceci puisse être justifié par la présence d'eau car le même effet est observé pour les bétons secs. Différentes études montrent que cet effet est d'origine structurelle [Weerheijm 1992, Bailly 1994]; l'inertie des blocs de l'éprouvette fissurée retarde la fragmentation grâce à un confinement radial inertiel mécaniquement induit.

Des essais confinés dynamiques et statiques sur micro-béton MB50 ont été effectués [Gatuingt 1999] pour étudier le micro-béton MB50 en statique et dynamique; avec des éprouvettes de diamètre 30mm et hauteur 40mm. Les cellules de confinement en acier et en laiton sont utilisées afin d'explorer plusieurs trajets de chargements. Une grande influence de la vitesse sur le comportement volumique a été observée (figure I.12).



*Fig. I.12 -Comparaison statique-dynamique pour le comportement sphérique du MB50
[Gatuingt 1999]*

Les essais dynamiques sont effectués avec les barres de Hopkinson. Des chargements avec des vitesses de déformation de 100 à 400 s⁻¹ montrent une faible influence sur la réponse dynamique (figure I.13), ce qui est en opposition avec ce qui est observé dans les essais dynamiques de compression uniaxiale. Le confinement radial semble annuler l'effet de l'inertie radiale du matériau. Cet effet est observé par Schmidt [Schmidt 2003] qui a effectué des essais dynamiques à faibles confinements (figure I.14) sur des bétons réels. Des essais dynamiques sur MB50 similaires à ceux entrepris par Gatuingt [Gatuingt 1999], avec des cellules plastifiantes de mêmes dimensions, ont été repris avec une procédure de dépouillement améliorée qui tient compte de l'effet des déformations axiales et radiales de l'éprouvette sur les mesures de déformations des jauges collées sur la cellule [Forquin et al 2008b]. Trois essais à vitesses de chargement différentes sont présentés dans la figure I.15. Le béton semble répondre identiquement sur les plans déviatoriques et sphériques, mais la comparaison avec les essais statiques disponibles (figure I.16) n'a pas pu donner d'explication quant à la cause de la disparité des comportements, si elle est due aux trajets de chargements ou à l'effet dynamique. A priori la différence observée (figure I.16 droite) sur le comportement sphérique entre l'essai hydrostatique effectué par Buzaud [Buzaud 1998] et l'essai quasi-œdométrique effectué par Gatuingt [Gatuingt 1999] est due aux trajets de chargements ; cette différence a été initialement relevée par Burlion [Burlion 1997].

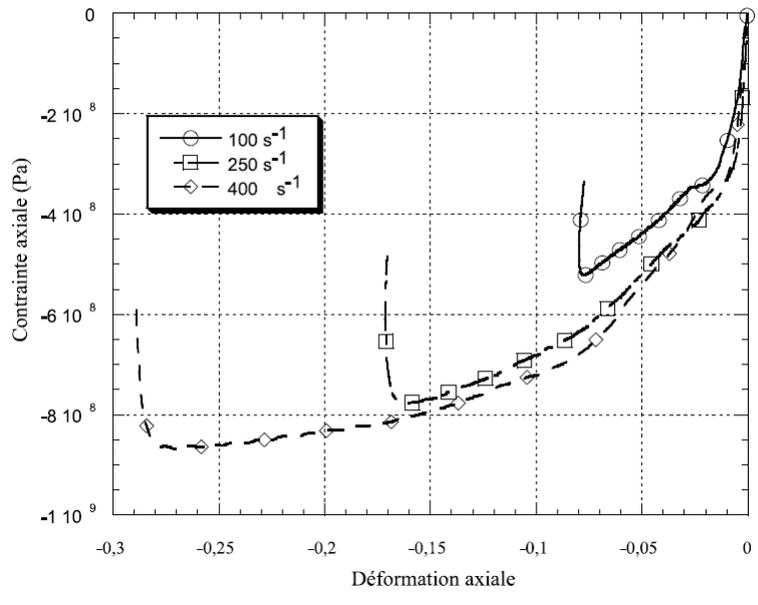


Fig. I.13 - Courbes contraintes-déformations pour les essais dynamiques quasi-œdométriques sur MB50 [Gatuingt 1999]

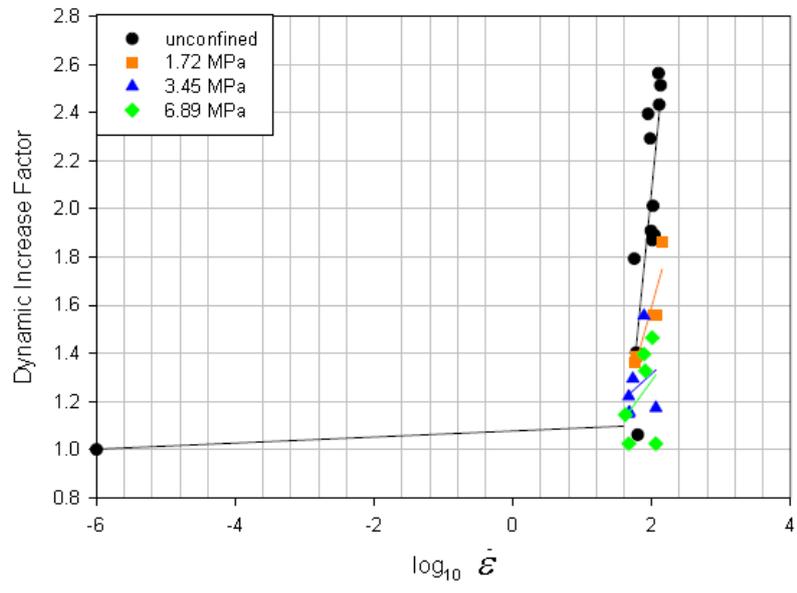


Fig. I.14 - Effet du confinement sur la résistance du béton [Schmidt 2003]

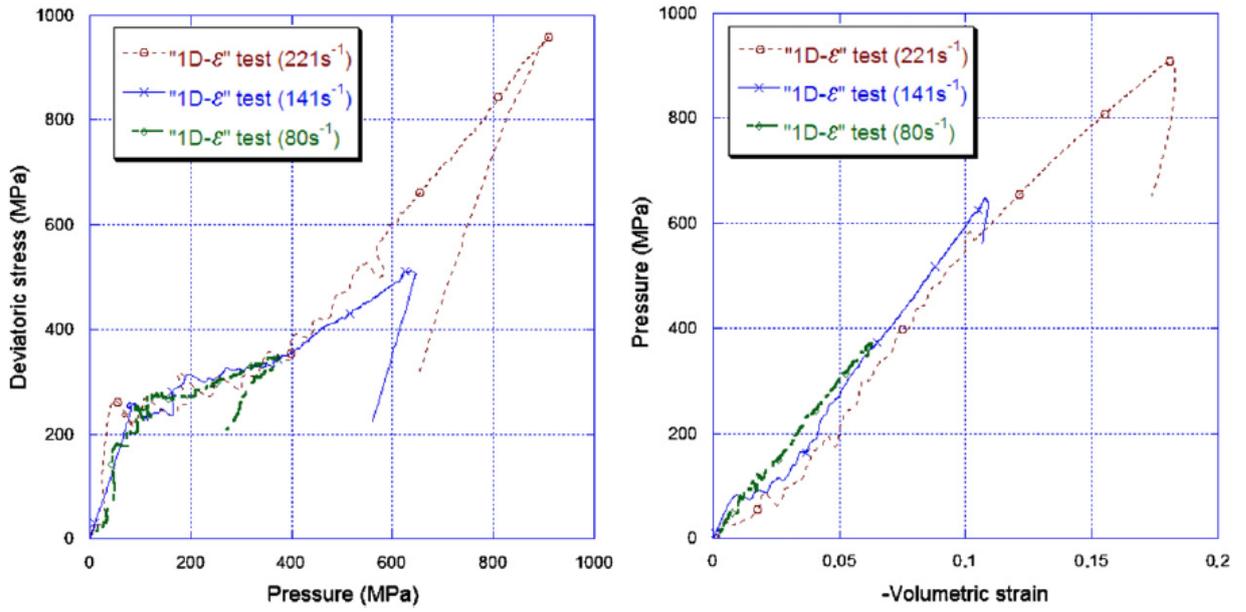


Fig. I.15 -Essais dynamiques confiné sur MB50 (Comportements déviatoriques et volumiques)
[Forquin et al 2008b]

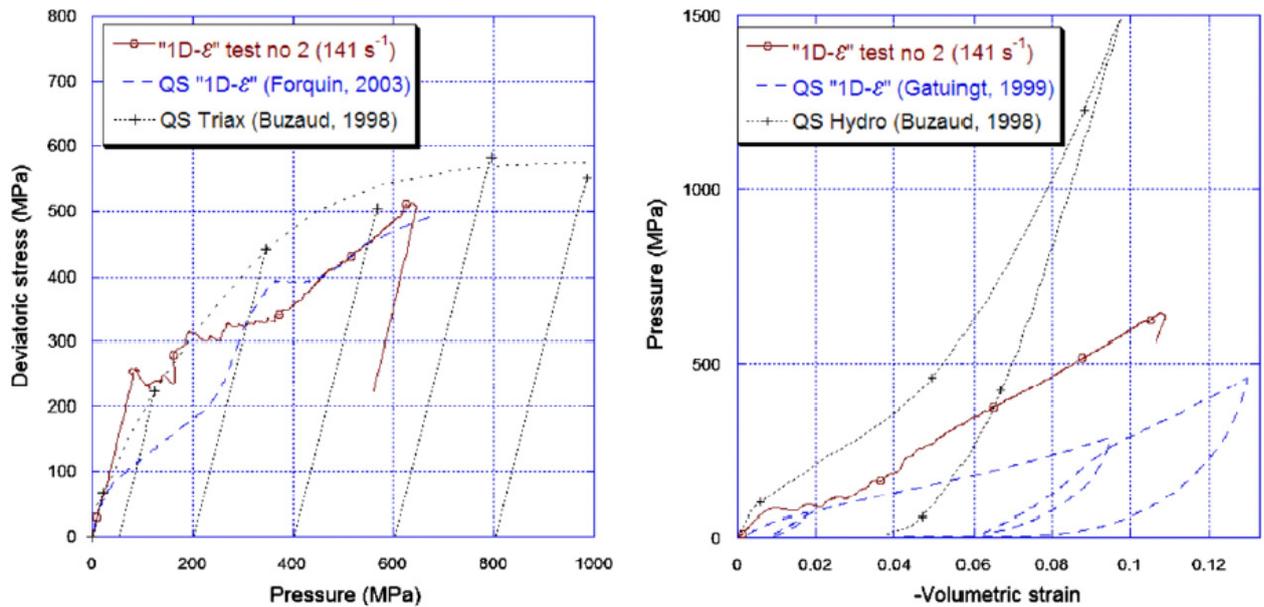


Fig. I.16 -Comparaison des essais dynamiques-statiques [Forquin et al 2008b]

1.4 Conclusion

Cette succincte étude bibliographique permet de faire le point sur l'état actuel des connaissances sur le comportement du béton, pour différents trajets de chargements et conditions hygrométriques. Les bétons étudiés ont des constituions différentes, allant du micro-béton MB50 aux bétons réels ayant une dimension moyenne des granulats de 8mm.

En ce qui concerne les essais statiques, plusieurs trajets de chargement peuvent être mis en œuvre, par le biais des essais triaxiaux et quasi-œdométriques. Les résultats présentés dans cette partie montrent que la résistance du béton sec augmente avec le niveau de confinement, alors qu'elle se sature dans le cas des bétons humides. Ainsi l'eau libre présente dans les pores apparait comme un facteur déterminant dans l'étude du béton. La campagne d'essais systématiques effectués sur des bétons dont la constitution et le degré de saturation sont contrôlés [Gabet 2006, Vu 2007], a fourni des éléments d'explication sur les observations effectuées au préalable sur le comportement du béton.

A l'opposé des essais statiques, les résultats à l'état actuel des essais dynamiques confinés sont confus et parfois contradictoires, d'autant plus qu'aucune distinction n'était faite sur le degré de saturation. Les différents essais ont été réalisés par des cellules différentes (sur le plan géométrique et matériau constitutif), avec des méthodes de dépouillement modifiées, et avec peu de considération à l'état hygrométrique des éprouvettes. L'influence de la vitesse du chargement sur les comportements sphérique et déviatorique est sujette à interprétations. La présence de l'eau libre dans les pores n'est pas considérée comme étant un paramètre clé du problème. Enfin, le phénomène du drainage est tout autant absent dans les essais statiques que dynamiques. Sur le plan expérimental, un moyen pratique et peu couteux pour étudier le béton sous chargements dynamiques élevés consiste à confiner l'éprouvette dans une cellule métallique instrumentée par des jauges de déformation. L'exactitude des résultats dépend considérablement de l'optimisation de la cellule et de son comportement.

La présente étude sur le micro-béton MB50 comprend des essais statiques confinés et drainés, ainsi que des essais dynamiques, et ceci sur des éprouvettes sèches et saturées. Elle a pour but d'étudier le comportement dynamique et statique du béton confiné sous ses états secs et saturés, vu qu'il est apparu essentiel de ne pas dissocier le degré hygrométrique du chargement appliqué.

Chapitre II

Procédure expérimentale

Dans cette partie nous présentons le dispositif expérimental ainsi que les différents éléments de l'essai dynamique confiné. Les barres de Hopkinson et ses principes sont introduits, ainsi que le dispositif de confinement, les étapes du montage, et le déroulement des essais.

II.1 Introduction aux barres de Hopkinson

Le dispositif expérimental des barres de Hopkinson permet d'étudier le comportement des matériaux sous sollicitations dynamiques [Hopkinson 1914, Kolsky 1949]. Dans le cas des essais de compression, l'échantillon à tester est placé entre deux barres appelées barre entrante et sortante ; une troisième barre qui est l'impacteur est projetée sur la barre entrante avec une certaine vitesse mesurée et qui induit ainsi le chargement dynamique (figure II.1).

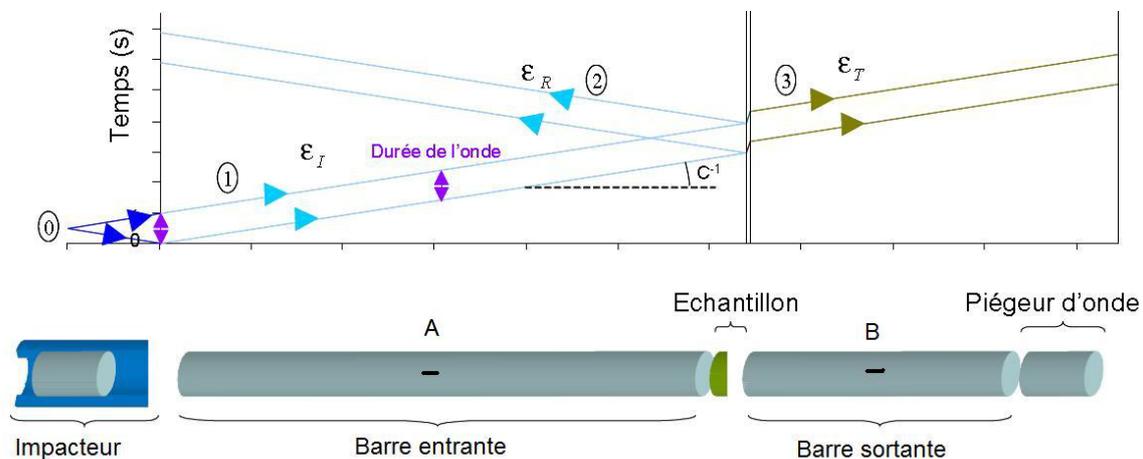


Fig. II.1 -Système de barres Hopkinson

Le projectile provoque une onde incidente élastique de compression dans la barre entrante qui se propage jusqu'à son extrémité. Au contact avec l'éprouvette dont l'impédance est inférieure à celle des barres, une partie de cette onde se réfléchit en une onde de traction et une autre traverse l'échantillon et se propage dans la barre sortante en tant qu'onde de compression. Le traitement des ondes incidentes, réfléchies et transmises qui sont mesurées

par des jauges de déformation aux points A et B des barres respectives permet la détermination du chargement de l'échantillon. Pour éviter la superposition des signaux incident et réfléchi, le point de mesure A est situé au milieu de la barre entrante, et l'impacteur doit avoir une longueur inférieure à la moitié de celle de la barre. La jauge de la barre sortante doit être placée à une distance de l'éprouvette telle que l'effet local tridimensionnel (Saint Venant) soit dissipé, usuellement dix fois le diamètre de la barre. La figure II.2 représente à titre d'illustration un enregistrement des signaux obtenus au niveau des barres entrante et sortante.

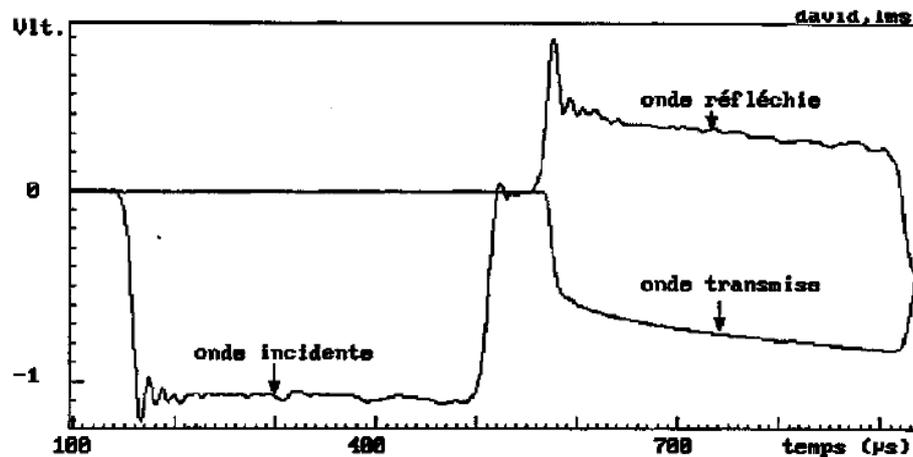


Fig. II.2 -Exemple de signaux de jauges aux points A et B

Le principe des barres de Hopkinson est basé sur la propagation unidimensionnelle des ondes dans une barre. En appliquant la deuxième loi de Newton sur un élément Δx d'une barre de section A (figure II.4) soumise à une force F uniformément distribuée sur sa section nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

En supposant la barre élastique, l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 t}{\partial t^2}$$

Qui est l'expression unidimensionnelle de la propagation des ondes dans une barre fine, appelée aussi équation d'Alembert.

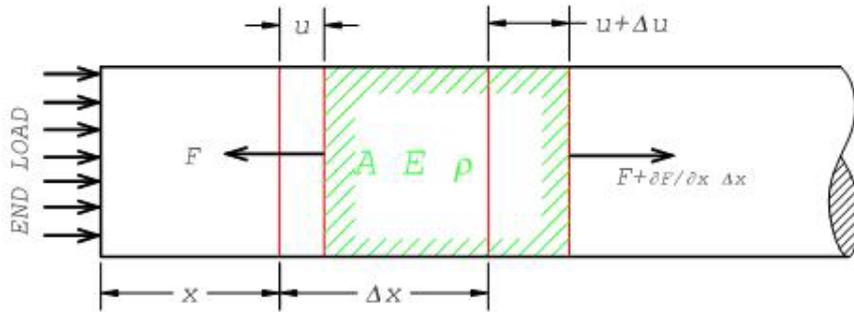


Fig. II.4 - Equilibre d'un élément unidimensionnel de barre.

Cette théorie exprimée en fonction des déformations des barres de Hopkinson nous permet d'obtenir les forces et les vitesses aux points A et B :

Barre entrante : (1)

$$F_i(t) = A_i E_i (\epsilon_i(t) + \epsilon_r(t))$$

$$V_i(t) = -c_i (\epsilon_i(t) - \epsilon_r(t))$$

Barre sortante : (2)

$$F_o(t) = A_o E_o \epsilon_t(t)$$

$$V_o(t) = -c_o \epsilon_t(t)$$

Les indices i et o correspondent respectivement aux barres entrante et sortante. La section est dénotée A , la vitesse des ondes c , le module de Young des barres E , et les déformations $\epsilon(t)$.

Les mesures des forces et vitesses étant faites à l'emplacement des jauges, il est nécessaire des les transporter dans l'espace et dans le temps aux faces de l'échantillon.

La dispersion

Le transport dans l'espace requiert la prise en compte de l'effet de la dispersion. Sur le plan théorique la dispersion signifie que les ondes qui ont des longueurs différentes se propagent dans un milieu à des vitesses différentes. L'effet observable dans le cas des barres de Hopkinson se situe sur deux niveaux qui sont dus au caractère tridimensionnel de la barre qui a en fait un rayon non nul. Le premier niveau est radial : la valeur moyenne de toute grandeur

(déformation, contrainte, déplacement...) au travers d'une section de la barre n'est pas égale à sa valeur mesurée sur sa face extérieure à cause de la non planéité des ondes [Davies 1948].

Le second niveau est longitudinal, directement observable le long de la barre si on suit le signal durant sa propagation. Celui-ci se déforme au fur et à mesure qu'il se propage à cause de l'effet inertiel radial, et ceci se manifeste par la modification de son amplitude (figure II.5).

Nombre d'auteurs ont essayé de résoudre le problème d'impact sur barres en tenant compte de sa géométrie et du premier mode de vibration (mode longitudinal) dont [Love 1927], [Mindlin 1960] et [Skalak 1957]. Des formulations explicites sont obtenues et permettent de représenter correctement l'effet dispersif et d'expliquer le phénomène tel qu'observé expérimentalement. Le transport des ondes au bout de la barre se fait en pratique d'une façon numérique avec l'aide de la Transformée de Fourier Rapide en se basant sur la solution du premier mode de vibration des équations initiales de Pochhammer Chree [Follansbee et Frantz 1983].

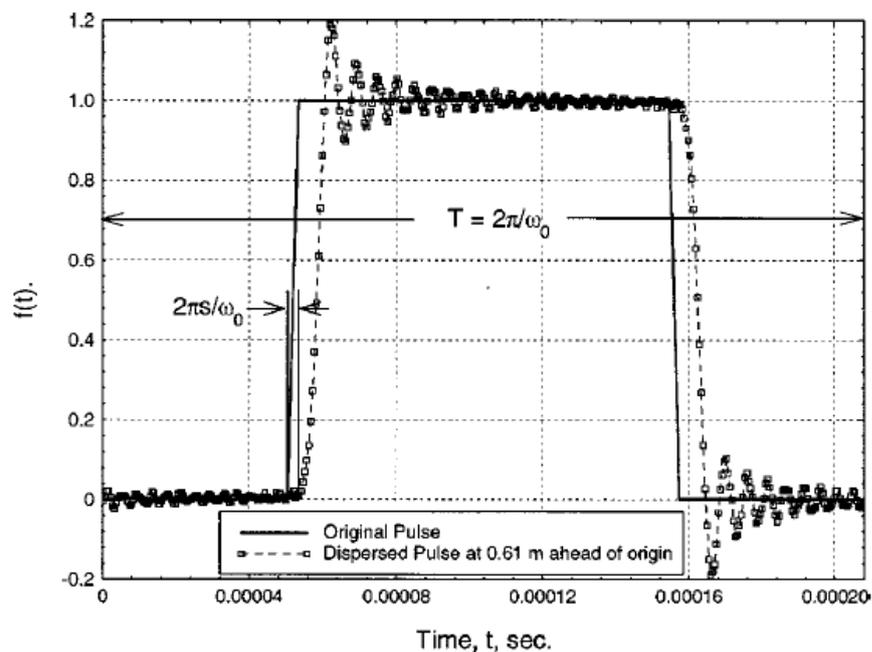


Fig. II.5 - Dispersion longitudinale sur les déformations au cours du temps.

Le calage temporel

Le calage temporel des trois ondes $\epsilon_i, \epsilon_r, \epsilon_t$ consiste à fixer une origine correspondant à l'arrivée de l'onde entrante à l'interface barre-éprouvette. Il constitue une étape importante vu son influence directe sur le comportement du matériau, et notamment sur son début. Théoriquement on aurait tendance à estimer le délai de calage en se basant sur les distances entre les jauges et le bout des barres, connaissant la vitesse de propagation des ondes dans celles-ci. Or la vitesse de propagation des ondes est difficilement mesurée avec exactitude [Lifshitz et Leber 1994] et l'imperfection du contact géométrique barre-éprouvette produit un délai additionnel qui ne peut être mesuré. Pour cela une méthode itérative est proposée [Gary et al 1991], basée sur deux hypothèses. La première stipule que la forme de l'onde est plus fiable que sa position dans le temps. La seconde suppose que le matériau testé exhibe un comportement élastique au début du chargement. En supposant connu le module d'élasticité du matériau, on peut simuler les ondes réfléchies et transmises d'une éprouvette fictive qui aurait un comportement uniquement élastique. En comparant alors les formes des ondes simulées aux ondes mesurées, on peut déplacer ces dernières jusqu'à superposer les parties élastiques des courbes (figure II.6). Bien entendu, la précision du calage dépend de celle du module de Young supposé ; si ce dernier est trop grand ou trop petit, la superposition ne peut avoir lieu. Aussi faut-il noter que si la correction de dispersion n'est pas prise en compte, la simulation ne peut coïncider avec les ondes mesurées quel que soit le module considéré.

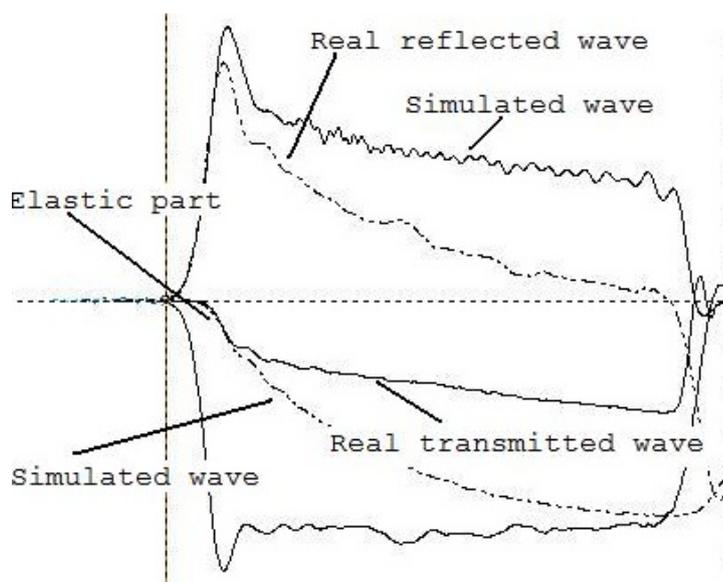


Fig. II.6 – Calage des ondes par la simulation élastique

A partir des forces et des vitesses (1),(2) transportées aux faces de l'éprouvette et calées temporellement, il est possible d'exprimer les valeurs moyennes des vitesses de déformation, des déformations, et des contraintes dans l'éprouvette. Aux cas où les barres entrantes et sortantes ont des diamètres et matériaux identiques:

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{V_o(t) - V_i(t)}{l_S(t)}$$

$$\epsilon(t) = \int_0^T \dot{\epsilon}(t) dt$$

$$\sigma(t) = \frac{F_i(t) + F_o(t)}{2S_S(t)}$$

En supposant l'uniformité des déformations le long de l'éprouvette on peut exprimer les contraintes et les déformations en fonction des trois ondes :

$$\sigma(t) = \frac{AE}{2A_S} [\epsilon_i(t) + \epsilon_r(t) + \epsilon_t(t)] \quad (3)$$

$$\epsilon(t) = -\frac{c_0}{l_S} \int_0^t [-\epsilon_i(\tau) + \epsilon_r(\tau) + \epsilon_t(\tau)] d\tau \quad (4)$$

Où A_S, l_S représentent respectivement la surface et la longueur de l'éprouvette.

Ces expressions constituent le cas général ; elles supposent que les forces entrantes et sortantes ne sont pas en équilibre comme ça peut être le cas pour les matériaux visco-élastiques et fragiles, et sont de ce fait des formules approchées. Au début du chargement l'hypothèse de l'équilibre n'est pas correcte car l'état des contraintes dans l'éprouvette n'est pas uniforme, et ceci s'applique pour tous les essais. Le chargement débute sur une face alors que l'autre est encore au repos, on est temporairement dans le régime transitoire. Ce n'est qu'après plusieurs allers-retours des ondes dans l'éprouvette [Bertholf et Karnes 1975] que l'état des contraintes et déformations dans celle-ci peut être considéré comme uniforme. Dans le cas particulier des matériaux fragiles non confinés, le temps de montée de la vitesse de déformation est comparable à la durée de l'essai, de sorte que celui-ci se déroule complètement durant la période transitoire. Des résultats acceptables peuvent être obtenus en utilisant les trois ondes (3),(4) soit la moyenne des forces entrantes et sortantes [Zhao et Gary

1995]. Une autre façon plus exacte de traiter le problème résultant du non équilibre des forces entrantes et sortantes est l'identification des forces par calcul inverses. Ceci est possible dans le cas des barres de Hopkinson vu que les mesures disponibles (deux forces et deux vitesses) sont redondantes. En considérant comme données les deux vitesses uniquement, et en formulant le comportement du matériaux en fonction de paramètres appropriés, il est possible de caler ces paramètres de sorte à identifier les forces calculées aux forces mesurées [Rota 1997]. L'hypothèse de l'uniformité des contraintes et déformations n'est pas nécessaire dans ce cas.

Donc il est clair que le comportement du matériau ainsi que la longueur de l'éprouvette sont à la source du non équilibre des forces mesurées. Dans l'hypothèse de l'uniformité des contraintes, on retrouve les formules classiques des deux ondes [Kolsky 1949] dans lesquelles l'équilibre des forces (et des barres identiques) entraîne l'égalité entre l'onde transmise et la somme de des ondes incidente et réfléchi ($\epsilon_i + \epsilon_r = \epsilon_t$). Les contraintes axiales moyennes sont exprimées en fonction de l'onde sortante qui est moins oscillante vu l'effet amortissant que produit l'éprouvette.

$$\sigma(t) = \frac{AE}{A_S} \epsilon_t(t)$$

$$\epsilon(t) = -\frac{2c_0}{l_S} \int_0^t \epsilon_r(\tau) d\tau$$

II.2 Banc d'essais adopté

Le banc d'essais utilisé est celui dit des « grosses barres » en acier marval de diamètre 80 mm et de limite élastique 1000 MPa. L'impacteur a une longueur de 2.2 m (permettant une durée d'onde incidente de 850 μ s), la barre entrante de 6m et la barre sortante de 4 m. Les déformations axiales des barres sont mesurées par des jauges de type « Kyowa –KSN-2-120-F3-11 2mm » montées en pont complet, et placées au milieu de la barre entrante et à 82 cm du bout de la barre sortante. Le pont est alimenté par un courant de 8 Volts et les signaux amplifiés avec des gains allant de 100 à 1000. La variation relative incrémentale de la

résistance et la déformation incrémentale de la jauge sont proportionnelles avec un coefficient appelé facteur de jauge, égal à 2.08 à température ambiante. Les signaux sont enregistrés par une carte d'acquisition 12 bits et à dix voies d'entrées de marque National Instruments avec une base de temps de 1 μ s.

La mesure de la vitesse de l'impacteur qui contrôle l'amplitude du chargement, est assurée par un dispositif optique qui permet de relever les instants de son passage en trois points distants de 10 cm (figure II.7). Ainsi une mesure de l'accélération est disponible, et par extrapolation on a la vitesse. Le logiciel d'acquisition (figure II.8) est développé au laboratoire et permet de gérer le déclenchement du chargement ainsi que la sauvegarde des signaux des barres et ceux de la cellule dans un même fichier texte.

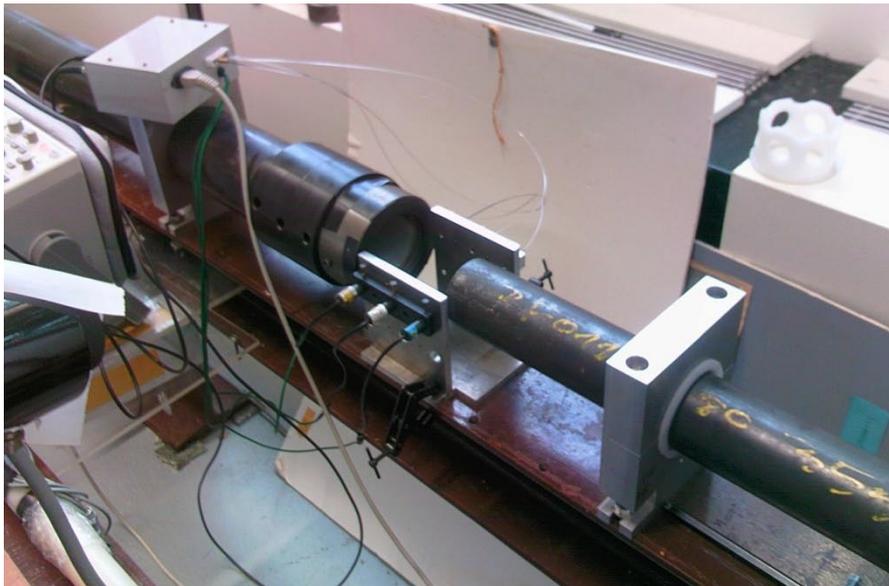


Fig. II.7 –Dispositif optique de mesure de vitesse de l'impacteur

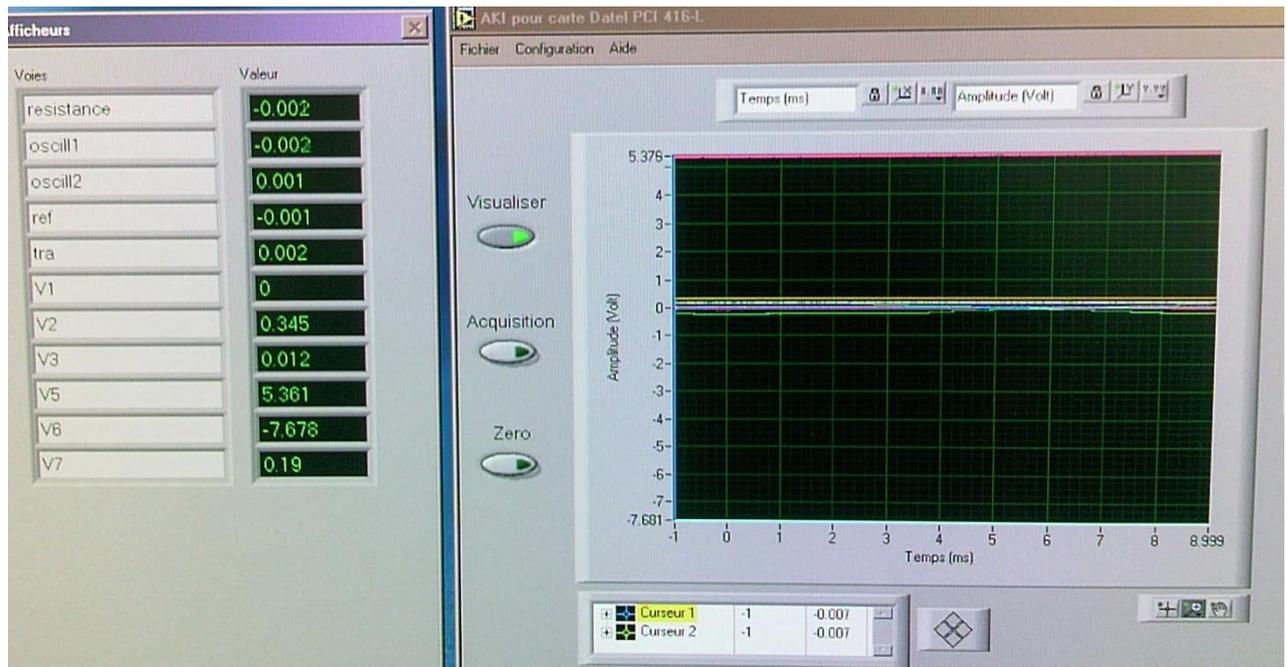


Fig. II.8 –Interface du logiciel d'acquisition

II.3 Procédure de confinement

La technique expérimentale de confinement reprend les mêmes éléments que ceux utilisés initialement par Gatuingt [Gatuingt 1999]. Le principe est basé sur la mise en place d'une éprouvette cylindrique à l'intérieur d'une cellule tubulaire métallique (figure II.9) de sorte à réduire les déformations radiales du matériau testé à une valeur quasi nulle. On obtient ainsi un essai œdométrique en terminologie de mécanique des sols.

La cellule est équipée de deux bouchons cylindriques ($\varnothing 28.6$ -H40 mm) qui ont pour rôle de transmettre le chargement axial à l'éprouvette, ainsi que de deux plaques de protection ($\varnothing 80$ -H20 mm) de même diamètre que les barres de Hopkinson. Ces plaques sont collées au bout des barres (figures II.10 et II.11) et servent à éviter leur poinçonnement en diffusant dans celles-ci des contraintes inférieures à leur limite élastique (1000 MPa), vu que les contraintes axiales dans les bouchons atteignent 1400 MPa pour les chargements les plus élevés.

Ces éléments sont fabriqués par la société SOMEPEP « Société Métallurgique de Précision » avec de l'acier trempé traité thermiquement afin d'atteindre de hautes caractéristiques mécaniques (limite élastique 1700 MPa ; module de Young 205 GPa, coefficient de Poisson 0.3).

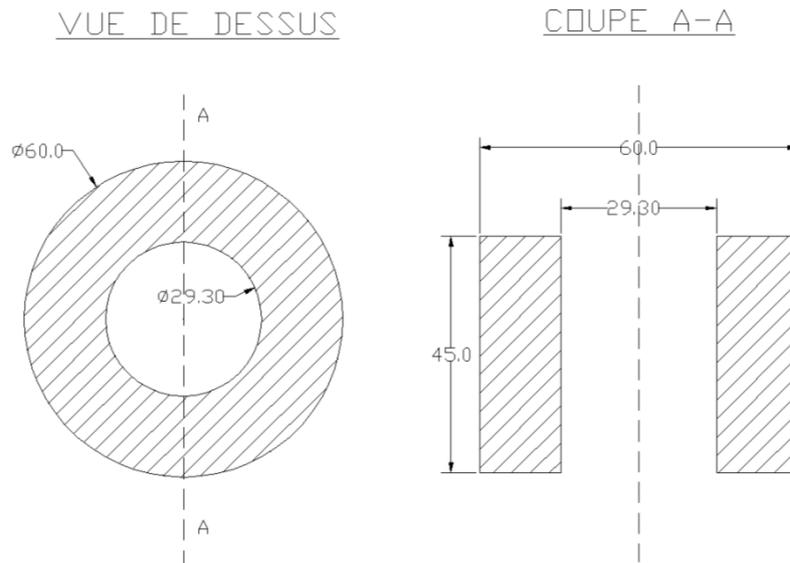


Fig. II.9 – dimensions de la cellule de confinement

Les dimensions de la cellule ont été définies à la suite d'une étude d'optimisation qui fait l'objet du chapitre IV du présent document. Le diamètre intérieur ainsi que la hauteur sont cependant fixés par la taille des éprouvettes carottées ; un jeu radial de 0.2 mm est préservé. La hauteur des éprouvettes étant de 40 mm, celle de la cellule (45 mm) est choisie de façon à uniformiser autant que possible le champ des déformations orthoradiales sur la face extérieure (minimisation de la mise en tonneau de la cellule). Son épaisseur fait l'objet d'un compromis entre la rigidité latérale et la lisibilité des déformations orthoradiales de sa face extérieure, tout en gardant en tout point un niveau de contraintes inférieur à sa limite élastique.

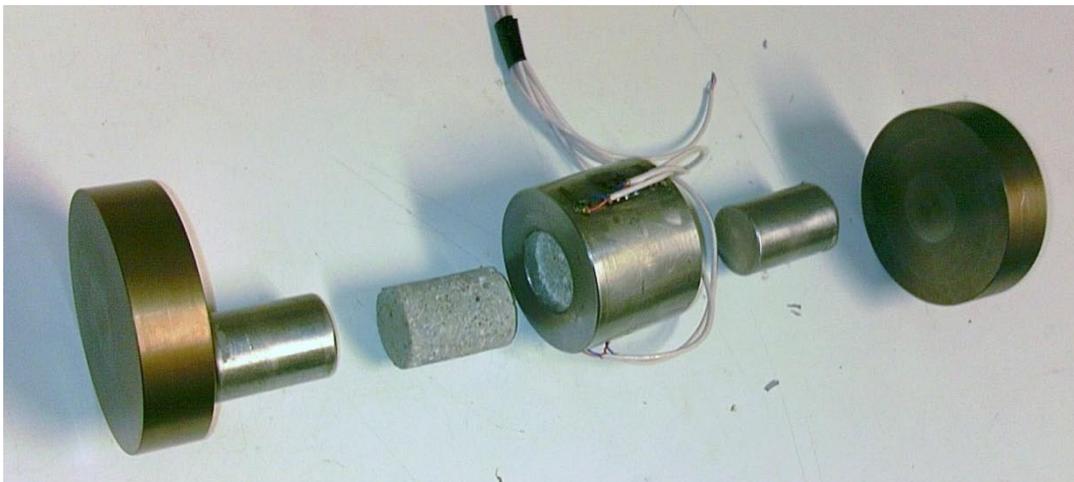


Fig. II.10 – Plaques de protection, bouchons, éprouvette, et cellule

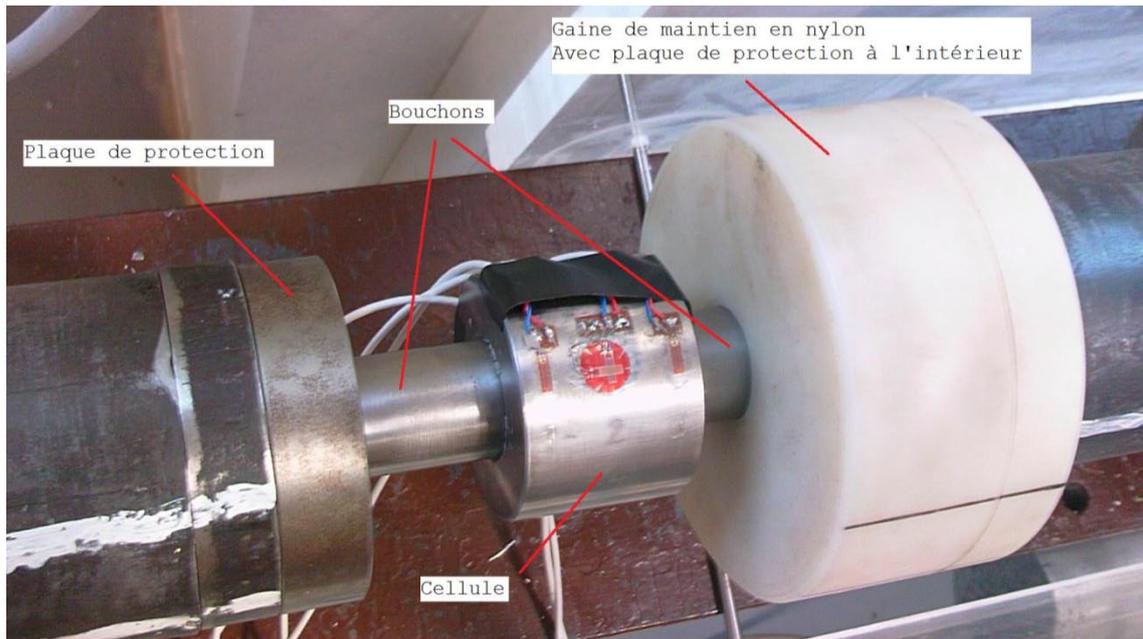


Fig. II.11 –Montage du dispositif de confinement sur les barres de Hopkinson

Deux paires de trois jauges orthoradiales et une paire de jauges axiales (soit huit jauges au total), diamétralement opposées, sont collées sur la surface latérale extérieure de la cellule (figures II.12 et II.13), montées en quart de pont et de même type que celles des barres de Hopkinson.

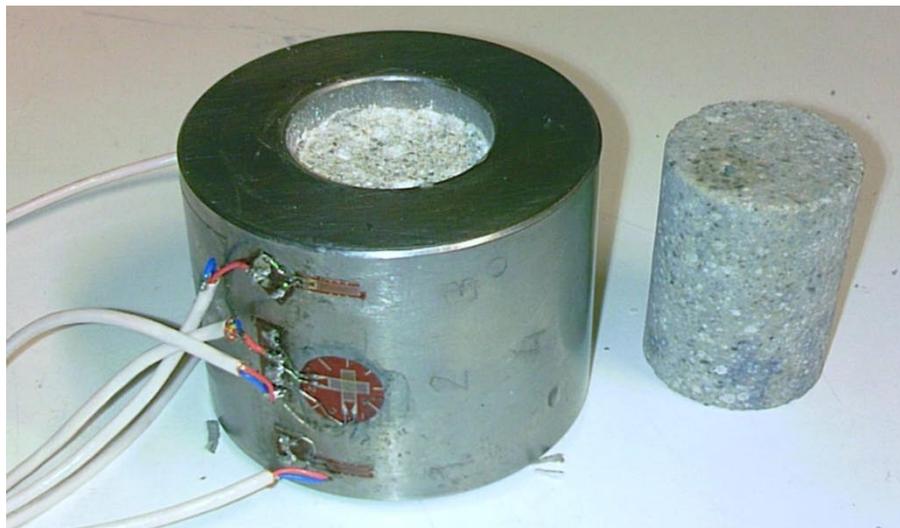


Fig. II.12 –Vue de la cellule et des jauges

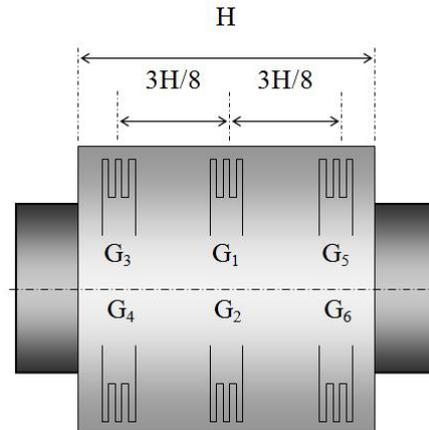


Fig. II.13 –Position des jauges sur la cellule

Les jauges extrêmes sont placées à 5.5 mm des bords, juste pour garder l'espace nécessaire pour leur collage et permettre à la cellule de s'emboîter dans la base inférieure du dispositif de mise en place de l'éprouvette.

II.4 Les éprouvettes d'essais

Les essais confinés dynamiques et statiques pouvant être réalisés par le moyen de la présente procédure concernent les géomatériaux en général. Ainsi divers matériaux ont pu être étudiés, tels le calcaire de Beaucaire qui est une roche tendre, et le calcaire crinoïde bien plus résistant [Grange 2007]. Cependant le matériau qui a subi la grande majorité des essais est le micro-béton MB50 dont le choix est relié à des critères aussi bien historiques que pratiques.

En premier lieu, le MB50 a déjà été l'objet d'essais triaxiaux et dynamiques effectués par différents auteurs mais sous conditions d'humidité interne non contrôlées. De plus la difficulté de l'essai et de son dépouillement s'est répercutée sur les résultats, qui conséquemment manquent souvent de cohérence. Par exemple, le comportement sphérique du MB50 confiné en statique et dynamique (figure I.10) pourrait être interprété comme montrant un important effet de vitesse. Aussi, en comparant les niveaux de contraintes entre les courbes citées et celles de la figure I.16, relatives au même matériau mais pour des vitesses de déformation différentes, nous retrouvons des compacités différentes.

En deuxième lieu, le micro-béton MB50 convient bien aux essais sur machines hydrauliques usuelles, la taille des éprouvettes ($\text{Ø}29\text{-H}40$ mm) permettant d'atteindre des niveaux de

pression assez élevés. La taille moyenne des grains (2 à 3 mm) vis-à-vis de celle de l'éprouvette respecte l'effet d'homogénéité/VER des bétons.

La fabrication du béton ainsi que le carottage des éprouvettes ont eu lieu au laboratoire LMT de Cachan. Les éprouvettes sont carottées dans des blocs rectangulaires (15x25x72 cm³) quarante jours après le coulage dans des moules en bois contreplaqué. Les éprouvettes dont le diamètre est de 28.85 mm et la hauteur 40 mm sont conservées dans un seau d'eau saturée de chaux afin d'éviter la dissolution de la portlandite. Le jour de l'essai, l'éprouvette est retirée de l'eau pour être directement montée dans la cellule, de sorte que son exposition à l'air libre ne dure pas plus d'une heure, comme il sera expliqué dans la suite.

Composition du MB50	
Ciment (kg/ m ³)	400
Sable (kg/ m ³)	1783
Eau (kg/ m ³)	200
Superplastifiant (kg/ m ³)	12
Rapport Eau/ciment	0.5
Propriétés mécaniques	
Résistance à la compression (MPa)	70
Résistance à la traction (MPa)	3.0

Les éprouvettes sont considérées comme saturées car leur conservation dans l'eau est d'au moins six mois. Leur séchage à l'étuve s'est produit de deux façons. Une première campagne d'essais est réalisée avec des éprouvettes soumises immédiatement à 105 °C durant 48 heures ; la deuxième est réalisée avec un séchage progressif étalé sur sept jours, avec une température initiale de 50 °C, augmentée quotidiennement de 10 degrés avec suivi progressif de la masse de l'éprouvette. L'effet de la dessiccation n'a pas été étudié, vu que le séchage à l'air libre à température et humidité contrôlées nécessite des précautions particulières en dehors du cadre de la présente étude [Yurtdas et al. 2004]. Il est connu que le séchage rapide

au four conduit à une microfissuration très importante; ainsi que le séchage à haute température (>50°C) décompose l'ettringite et le silicate de calcium hydraté (CSH) présents dans la pâte de ciment, et modifie donc la structure du matériau [Castelotte 2004]. Les deux modes de séchages n'ont pas donné des résultats différenciables dans le cadre de la compression dynamique confinée. En compression statique triaxiale effectuée sur mortier [Yurtdas et al. 2004] les éprouvettes séchées au four à 60 °C ont montré une légère augmentation de résistance (de l'ordre de 7%) par rapport à celles soumises au séchage naturel durant six mois. En outre, l'effet de l'évaporation complète de l'eau libre sur la résistance du béton sous compression uniaxiale statique produit une augmentation de l'ordre de 28% par rapport au béton saturé [Burlion et al. 2005].

Le séchage à l'étuve avec augmentation progressive de la température a permis de vérifier, grâce à la mesure de la variation relative journalière de masse, que les éprouvettes peuvent être considérées comme sèches. La variation de masse relative sur 24 heures est tombée au-dessous de 0.5% lors du septième et dernier jour de séchage. Le pourcentage de perte totale en masse exprimé comme étant le rapport de la masse d'eau évaporée sur la masse de l'éprouvette saturée $\frac{M_{wet} - M_{dry}}{M_{wet}}$ est quasi identique pour les deux modes de séchage adoptés. Il est à noter que même le béton séché à l'étuve jusqu'à poids constant possède un certain degré d'humidité. Celui-ci provient de l'eau libre non évaporée encore présente dans le cœur de l'éprouvette, et de l'eau liée chimiquement aux CSH. D'après Castellote [Castellote et al. 2004], pour que l'eau constitutive du CSH se libère, le séchage doit se produire à de hautes températures (>120 °C) durant une durée prolongée de plusieurs mois.

La mesure de la porosité accessible à l'eau est déterminée en faisant le rapport entre le volume des pores et le volume apparent de l'échantillon $\eta = \frac{V_{eau}}{V_{app}} = \frac{M_{wet} - M_{dry}}{\rho_{eau} V_{app}}$. Le volume apparent est calculé en mesurant par l'intermédiaire d'un pied à coulisse électronique les dimensions de chaque éprouvette cylindrique. Nous reproduisons dans le tableau ci-dessous la perte relative en masse et la porosité de quelques éprouvettes sèches de diamètre moyen 28.85 mm et hauteur 40 mm.

Référence	Masse saturée (g)	Densité saturée (g/cm ³)	Masse sèche (g)	Perte massique (%)	Porosité (%)
Bsec-1	59.30	2.27	55.68	6.10	13.86
Bsec-2	59.52	2.29	56.06	5.81	13.31
Bsec-3	59.44	2.27	55.88	5.99	13.59
Bsec-4	59.40	2.27	55.70	6.23	14.14
Bsec-5	59.36	2.24	55.75	6.08	13.62

La durée totale de la campagne d'essais a été de 12 mois, durant lesquels les éprouvettes sont gardées immergées dans l'eau contenant de la chaux. Afin de vérifier l'effet d'âge sur le comportement, tous les essais ont été dupliqués à des intervalles d'au moins six mois. La reproduction des résultats n'a pas montré d'effet discernable.

II.5 Préparation des essais

L'appareil de confinement à placer entre les barres de Hopkison –ou entre les plateaux de la presse pour essais statiques- consiste en une cellule à l'intérieur de laquelle se trouve l'éprouvette dont aux extrémités deux bouchons transmettent les forces de compression (figure II.13). Une résine à base d'époxy « Chrysor C6120 » à deux composants, comble une fois polymérisée le jeu radial entre l'éprouvette et la cellule. Plusieurs facteurs pratiques entrent en jeu lors de l'essai, et peuvent avoir une grande influence sur sa réussite. Ces facteurs cités ci-dessous nous ont conduit à concevoir un appareil de montage qui permet d'assembler les différents éléments (bouchons, cellule, éprouvette) d'une façon correcte et reproductible pour tous les essais.

- Les bouchons et l'éprouvette doivent être exactement centrés sur un même axe longitudinal afin d'éviter tout effet de rotation d'ensemble dû à l'excentrement des deux forces de compression.
- Les axes longitudinaux de l'éprouvette et de la cellule doivent être parallèles, et de sorte à ce que ceci soit contrôlable. En effet, le centrage longitudinal des bouchons

et de l'éprouvette n'exclut pas l'oblicité de la cellule. Un défaut de parallélisme compromet l'uniformité des contraintes radiales ainsi que les réponses des jauges supposées relever des déformations orthoradiales identiques.

- La même épaisseur de produit d'interface doit entourer l'éprouvette à l'intérieur de la cellule afin de conserver l'axisymétrie des champs mécaniques. Pour cela le centrage de l'éprouvette par rapport à la cellule est nécessaire. Le jeu sur le rayon étant volontairement minimisé (0.2 mm environ), l'erreur humaine provenant de l'imprécision sur le centrage est facilement du même ordre de grandeur.
- Le contact entre les barres d'Hopkinson et le bouchon n'est pas parfait. Si l'axe du bouchon ne coïncide pas avec celui de la cellule –quand par exemple le bouchon est à 0.1 mm du bord de la cellule- il y a risque de collision lors de l'essai vu que l'éprouvette se déforme de plusieurs mm. Ceci peut entraîner l'endommagement du dispositif.
- Les centres géométriques de la cellule et de l'éprouvette doivent coïncider sinon la distance d'excentrement doit être mesurable. En effet les jauges extrêmes sont très sensibles à la dissymétrie le long de l'axe longitudinal, et interviennent dans la procédure de dépouillement.
- Le remplissage du vide entre l'éprouvette et la cellule se fait par extrusion du produit d'interface. Ceci requiert d'assurer l'étanchéité d'une extrémité de la cellule et ajoute une difficulté supplémentaire.
- Les éprouvettes saturées –ainsi que les éprouvettes sèches qui risquent de se réhydrater- perdent de leur humidité assez rapidement quand elles sont exposées à l'air libre. Il est nécessaire de minimiser ce temps d'exposition et de le normaliser pour tous les essais.
- La procédure de montage doit diminuer autant que possible la contribution de l'erreur humaine afin de standardiser les conditions d'essai. L'utilisation des presses usuelles ne garantit pas la maîtrise des paramètres cités.

Une coupe verticale du dispositif de montage conçu est montrée à la figure II.14. Il permet l'assemblage des différentes pièces constitutives de l'essai d'une façon autonome, indépendamment des conditions d'appui ou d'aplomb extérieures. Les étapes de montage sont les suivantes :

1. L'intérieur de la cellule est d'abord vaporisé de téflon, puis recouvert de scotch fin sur toute sa surface. Le but est d'éviter le contact direct du produit polymérisant avec l'acier de la cellule, qui ainsi lubrifié et protégé, réduit les composantes de frottement qui proviennent de la pression latérale qu'exerce l'éprouvette sur la cellule durant le chargement.
2. L'un des bouchons est inséré au fond de la base inférieure en aluminium 2017A, puis l'anneau en laiton qui sert de base d'appui pour la cellule est engagé dans le bouchon (figure II.15). Il est à noter que les tolérances sur le centrage, la planéité des surfaces, et les dimensions, sont de l'ordre du centième de millimètre, de sorte que l'assemblage des pièces adjacentes ne peut se faire sans l'aide de graisse à vide.

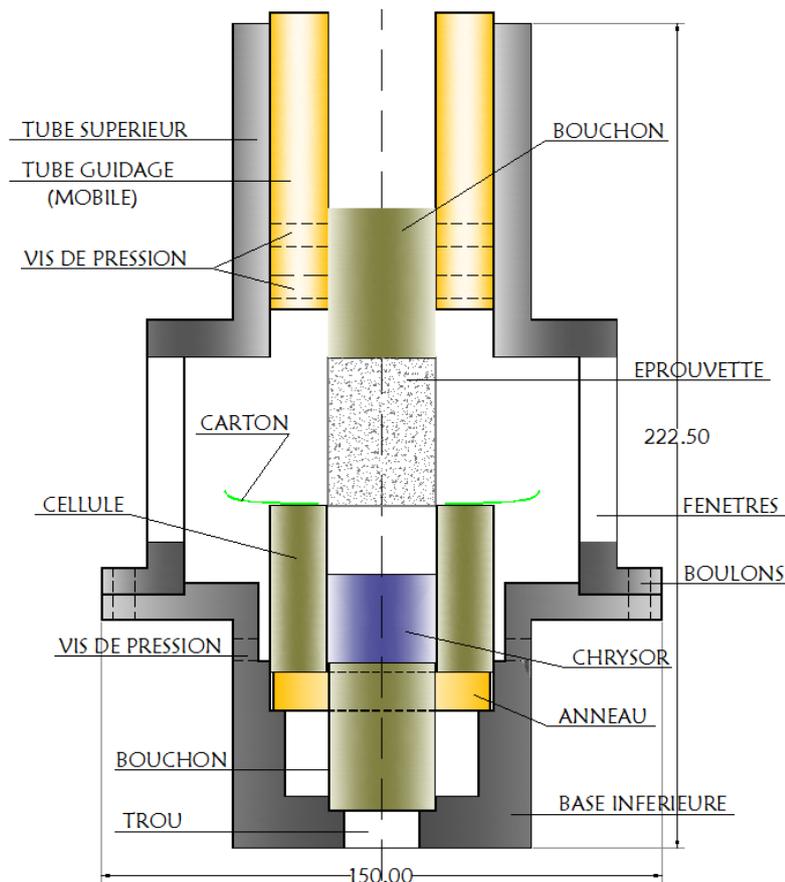


Fig. II.14 – Coupe verticale du dispositif de montage



Fig. II.15 –Base inférieure avec bouchon et anneau montés

3. La cellule est placée sur l'anneau qui lui sert d'assise. Le rayon intérieur de la base inférieure est égal au rayon extérieur de la cellule, de sorte que le centrage axial cellule-bouchon se fasse sans réglage manuel. Des vis de pression latérales empêchent le soulèvement de la cellule lors de l'extrusion de la résine visqueuse, qui se déroule tel que décrit dans les étapes suivantes. L'ensemble cellule-anneau-bouchon constitue un récipient étanche pour la résine. Lors de son extrusion, celle-ci est recueillie sur un disque en carton collé sur le bout de la cellule (figure II.16). Deux anneaux d'épaisseurs différentes sont disponibles, ils servent à contrôler la position de l'éprouvette par rapport à la cellule. Il est possible ainsi de réaliser un excentrement axial initial et d'évaluer son influence sur les mesures des jauges.
4. Le second bouchon est inséré dans le tube de guidage en laiton, et maintenu fixé par l'intermédiaire de vis de pression. Le diamètre intérieur du tube guidage est égal à celui du bouchon, de sorte que la coaxialité de l'ensemble est directement obtenue. L'éprouvette est collée par un scotch double face au bouchon.
5. Aussitôt la résine préparée, elle est versée dans la cellule jusqu'à la moitié de son volume intérieur. Alors le tube supérieur en aluminium 2017A est monté et vissé sur la base inférieure. Le tube guidage (figures II.14 et II.17), après être induit de lubrifiant, est coulissé dans le tube supérieur. La hauteur de la surface de contact est de 8 cm et assure un mouvement linéaire parfait lors de l'insertion de l'éprouvette dans la cellule. Afin de s'assurer que l'éprouvette ne touche pas les parois de la

cellule et ceci jusqu'au contact avec le bouchon inférieur, l'insertion est auparavant simulée sans résine.

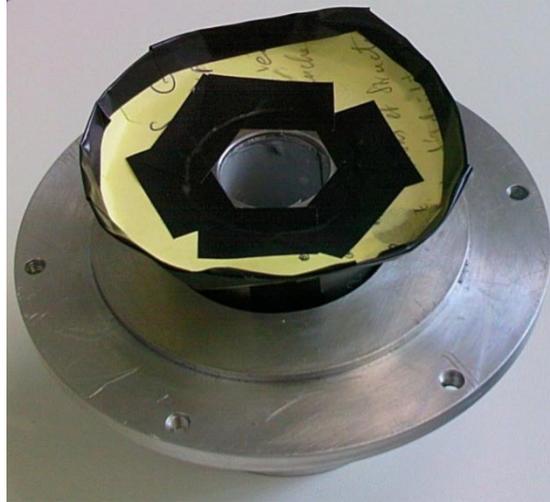


Fig. II.16 –Cellule avec recueil en carton, montée sur la base inférieure



Fig. II.17 –Base inférieure et tube supérieur (Aluminium), tube guidage (laiton)

Le dispositif final (figure II.18) est placé sous une presse manuelle par l'intermédiaire de laquelle la force requise pour l'extrusion de la résine est exercée lentement, sur une durée de 30 minutes. Normalement la résine doit sortir de tout le périmètre de l'éprouvette, afin que la surface latérale de celle-ci soit enveloppée sur sa totalité. Quand l'éprouvette touche le bouchon inférieur, une force de principe est maintenue appliquée durant 24 heures, qui est le temps de durcissement du Chrysor.

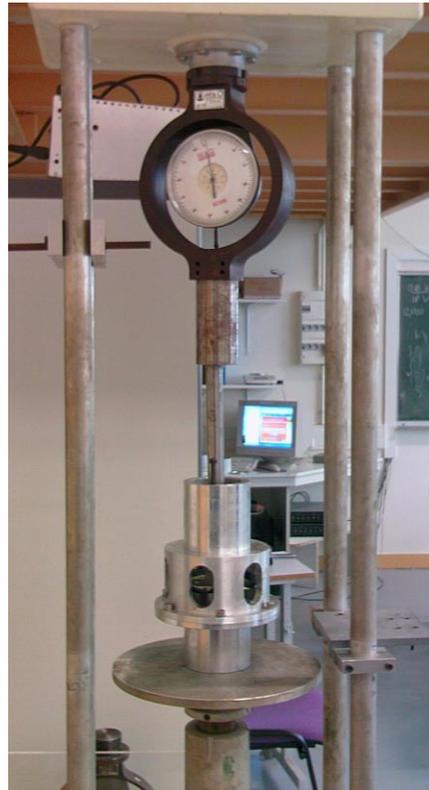


Fig. II.18 –Dispositif de montage final et mise sous presse manuelle

II.6 Déroulement des essais dynamiques et statiques

II.6.1 Les essais dynamiques

Dans les parties II.1 et II.2, nous avons introduit les principes généraux des barres de Hopkinson et présenté le banc d'essai utilisé dans le cadre de cette étude. Les barres de diamètre 80 mm permettent d'atteindre des niveaux de forces importants, à de grandes

vitesse d'impacteur. Afin de préserver le comportement élastique de la cellule le long de tous les essais, une étude préalable (voir chapitre IV) a permis de déterminer la déformation orthoradiale limite sur sa face extérieure, contrôlable pratiquement par les jauges. Cependant il n'est pas évident de relier cette déformation à la vitesse de l'impacteur. Le comportement du béton étant inconnu, si on se donne une contrainte axiale, la contrainte radiale exercée par l'éprouvette sur la cellule ne peut être déterminée. Des simulations numériques en dynamique explicite de l'essai réel ont été effectuées sur Abaqus (figure II.19) avec un modèle simplifié « KST » [Krieg 1978 ; Swenson et Taylor 1983] pour le comportement du béton. Ce modèle décrit le comportement sphérique avec une loi de compaction qui relie la déformation volumique ϵ_v à la pression hydrostatique P :

$$P(\epsilon_v) = P_{i-1} \frac{\epsilon_v - \epsilon_v^i}{\epsilon_v^{i-1} - \epsilon_v^i} + P_i \frac{\epsilon_v - \epsilon_v^{i-1}}{\epsilon_v^i - \epsilon_v^{i-1}}; \quad \epsilon_v^{i-1} > \epsilon_v > \epsilon_v^i$$

Cette description se fait, comme on le remarque dans la formule ci-dessus, par le moyen d'un ensemble de points relié par des segments (interpolation par morceaux). La norme des contraintes déviatoriques –équivalente dans le présent cas à la contrainte Von Mises- est bornée par la surface limite qui est une fonction elliptique de la pression :

$$\sigma_{dev} = \min(\sqrt{a_0 + a_1 P + a_2 P^2}, \sigma_{Mises}^{max})$$

Avec a_0, a_1, a_2 des coefficients identifiés par des essais triaxiaux de compression [Buzaud 1998]. En faisant varier les paramètres du modèle de façon à considérer des bétons à comportements extrêmes (figure II.20), un certain ordre de grandeur de la pression maximale de confinement est obtenu et qui est ainsi relié à l'amplitude de l'onde entrante, soit à la vitesse de l'impacteur. Ceci, en conjonction avec les essais réels, a permis de cerner la vitesse limite de l'impacteur et de déterminer la plage des vitesses intéressantes. Le choix s'est porté sur trois vitesses d'impacteur, 6, 8.5 et 11 m/s auxquelles correspondent des vitesses de déformation moyennes comprises entre 80 et 220 s⁻¹. La limite supérieure est imposée par le critère d'élasticité de la cellule, ce qui rend la plage explorée un peu serrée. Toutefois, les essais statiques permettent de compléter l'étude sur la sensibilité du béton à la vitesse de chargement.

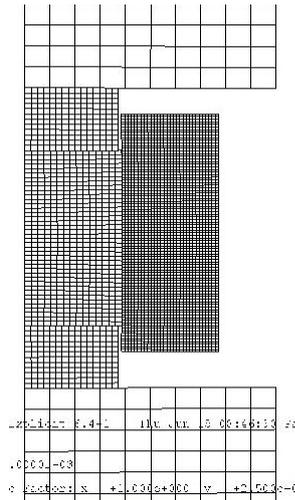


Fig. II.19 –Simulation numérique de l’essai réel en modèle axisymétrique (détail)

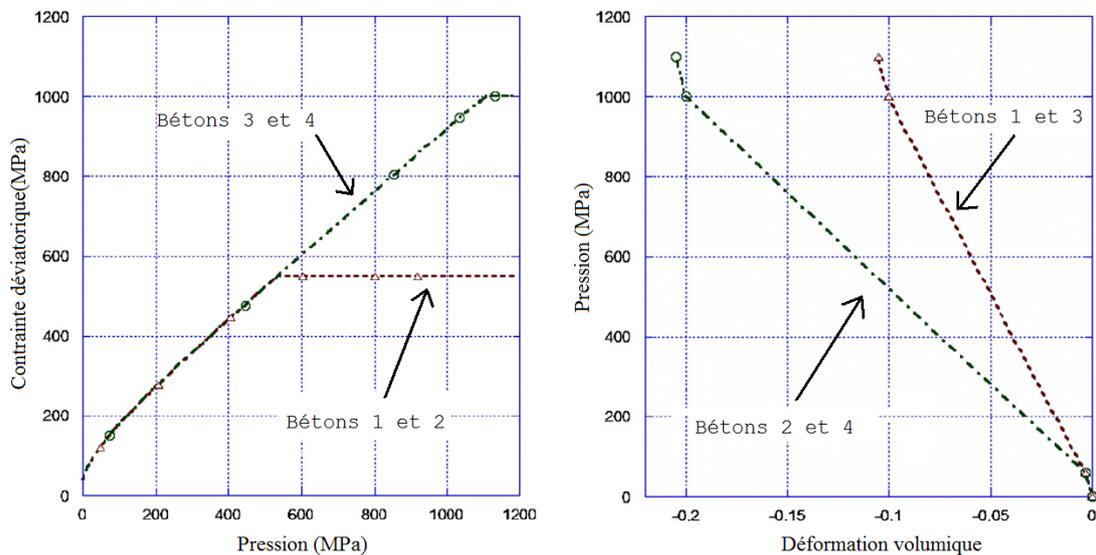


Fig. II.20 –Modèles de comportement pour 4 types de béton utilisés dans les simulations numériques de l’essai réel.

Le relevé des déformations et contraintes dans le cas de la simulation numérique, peut se faire en n’importe quel point des barres et de la cellule, et à un temps quelconque. Ce qui n’est pas le cas de l’essai réel sur barres de Hopkinson, dont nous avons dans la partie II.1 décrit la démarche générale pour obtenir le comportement du matériau à partir des mesures des jauges sur les barres. Outre la spécificité propre à l’essai de confinement qui requiert un dépouillement particulier (chapitre IV), il est nécessaire d’abord d’obtenir les forces et les vitesses correctes aux faces de l’éprouvette et non au bout des barres. En effet, la présence des bouchons crée une rupture d’impédance due à la différence entre le diamètre de la barre et

celui du bouchon. La procédure permettant de retrouver les forces et vitesses aux bords de l'éprouvette est implémentée dans le logiciel de dépouillement DAVID [Gary et De Greef, 2008] (figure II.21), elle est basée sur la propagation des ondes longitudinales dans une barre élastique ayant deux impédances différentes



Fig. II.21 –Vue du schéma barres-bouchons-éprouvette dans DAVID

Il est possible de prendre en compte et de rectifier les erreurs sur les mesures données par les jauges, qui peuvent provenir des jauges elles-mêmes (facteur de jauge par exemple) ainsi que du facteur d'amplification. La calibration de la jauge sur barre entrante requiert la connaissance exacte de la vitesse de l'impacteur au moment du choc, ainsi que de ses dimensions et de sa densité. La vitesse de l'impacteur étant directement reliée à l'amplitude du signal incident, on peut supposer que l'énergie cinétique de l'impacteur doit être égale à l'énergie de l'onde incidente. L'impacteur étant de même densité et diamètre que la barre entrante, l'onde incidente peut être calibrée d'après la relation suivante qui décrit la conservation de l'énergie en négligeant celle dissipée dans l'éprouvette:

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{\pi}{4} \rho c_0^3 D^2 \int_0^T \epsilon_i^2(\tau) d\tau$$

Avec M la masse de l'impacteur, V sa vitesse, ρ et D la densité et le diamètre de la barre entrante, T est la durée de l'onde incidente. On obtient ainsi le facteur de calibration de la jauge entrante qui corrige ainsi les ondes incidentes et réfléchies, et qui ne doit pas dépasser les quelques pourcents (figure II.22). Cette correction est inhérente à l'essai et dépend de ses propres conditions.

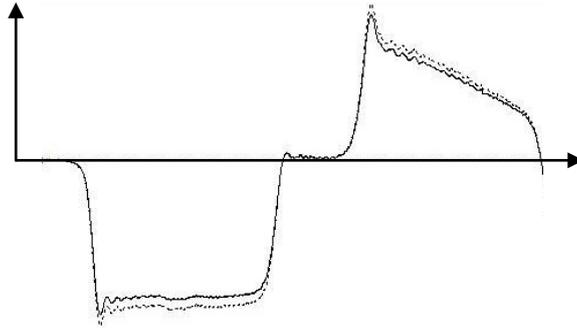


Fig. II.22 – Ondes incidente et réfléchie avant et après calibration

La calibration de la jauge sur la barre sortante se fait par le moyen de la balance des énergies des ondes incidentes, réfléchies et transmises. Donc en fait cette correction sur l'onde transmise est reliée au facteur de correction calculé précédemment sur la jauge de barre entrante. Cette calibration peut aussi être faite à partir d'un essai réalisé sans éprouvette, appelé le « barre-barre » dans lequel uniquement les ondes incidentes et réfléchies interviennent. La balance des énergies avec et sans éprouvette doit donner la même correction pour la jauge sortante.

$$\int_0^T \epsilon_i^2(\tau) d\tau - \int_0^T \epsilon_r^2(\tau) d\tau = \int_0^T \epsilon_t^2(\tau) d\tau$$

Comme pour le coefficient de calibration, le coefficient de transmission qui modifie le niveau de l'onde transmise ne doit pas excéder quelques pourcents.

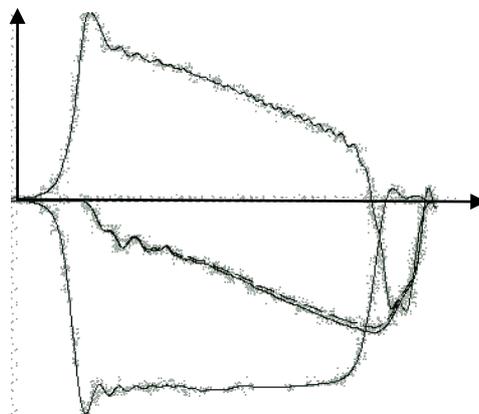


Fig. II.23 – Calibration de l'onde transmise (en traits tirets)

La figure II.24 montre les données expérimentales brutes, telles qu'enregistrées en temps réel, d'un essai effectué à vitesse maximale d'impacteur (11 m/s) sur un béton humide. Les signaux sont exprimés en déformation axiale pour les barres (ondes incidente, transmise, et réfléchie) et en déformations orthoradiales pour les six jauges transversales situées sur la face extérieure de la cellule. La durée du chargement (environ 800 μ s) est égale à celle de l'onde incidente vu que dans un essai œdométrique un état limite de rupture ne peut être atteint. La déformation de la barre sortante (onde transmise) atteint une valeur maximale de 0.7‰ qui représente environ 72 tonnes de force de compression. On en déduit une contrainte axiale dans l'éprouvette de 1100 MPa. La paire des jauges centrales (diamétralement opposées) indiquent raisonnablement un niveau de déformation supérieur à celui des jauges extrêmes. La déformation maximale (2.7‰) indique qu'on a atteint le niveau limite de contraintes Von Mises sur la face intérieure de la cellule, là où les contraintes sont les plus élevées (voir chapitre IV). La réponse des jauges extrêmes n'est pas identique pour les deux paires ; ceci provient de l'excentrement axial initial de l'éprouvette par rapport à la cellule. Le bruit est négligeable par rapport aux niveaux mesurés. Les oscillations du plateau du signal incident proviennent de la dispersion qui est d'autant plus grande que le flanc de montée du chargement est raide. Afin d'augmenter le temps de montée, on interpose entre l'impacteur et la barre entrante un morceau de plomb dimensionné au préalable, et qui sert à adoucir le choc.

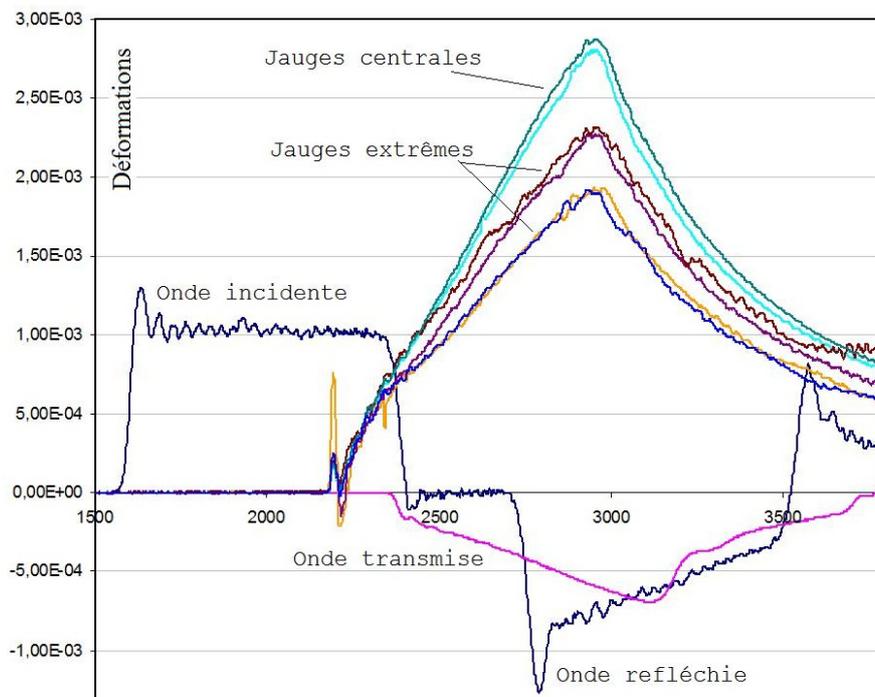


Fig. II.24 – Données expérimentales lors d'un essai à vitesse d'impacteur 11m/s

Les fortes oscillations du début de l'onde incidente disparaissent (figure II.25) et la partie initiale des courbes de contraintes et déformations s'en trouve améliorée.

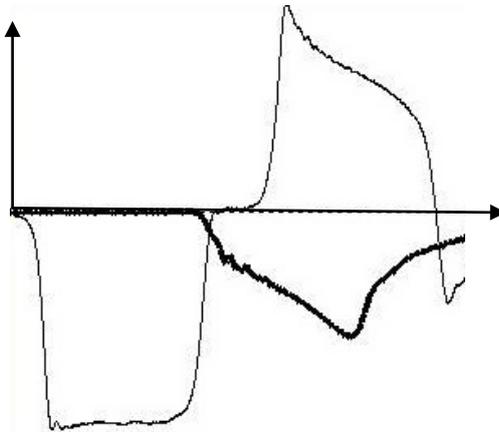


Fig. II.25 – Ondes incidente, réfléchi, et transmise lors d'essai avec « pulse-shaper »

A la figure II.26 nous reproduisons en fonction du temps les forces entrantes et sortantes aux faces de l'éprouvette après dépouillement d'un essai à grande vitesse d'impacteur (11m/s). On constate d'abord que l'équilibre des forces est conservé, et que la force entrante présente une allure fortement oscillante. La force sortante est plus amortie et sera considérée dans le dépouillement comme appliquée sur les deux faces de l'éprouvette, de sorte que l'uniformité des contraintes au cours de l'essai est d'office supposée.

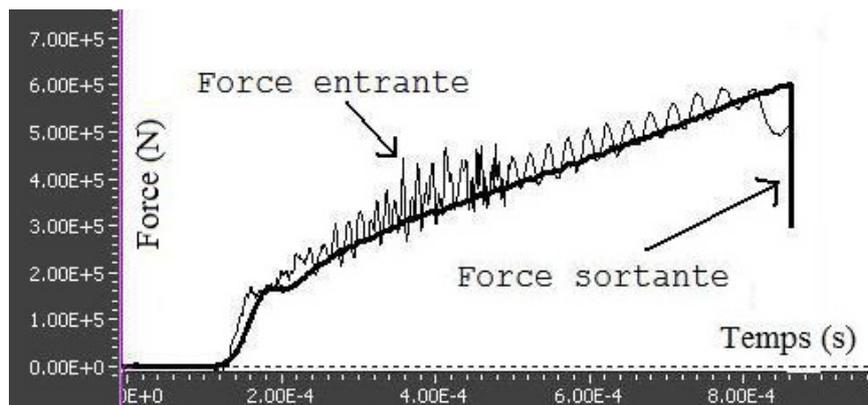


Fig. II.26 – Evolution au cours du temps des forces aux extrémités de l'éprouvette lors d'un essai à grande vitesse d'impacteur (11m/s).

II.6.2 Les essais statiques

Les essais statiques confinés sur éprouvettes sèches et saturées sont effectués sur une presse de type MTS, de capacité 100 T. Deux extensomètres diamétralement opposés sont montés entre les plateaux de la machine, le plus près du dispositif. On retranche les déformations axiales des bouchons en négligeant celles de la machine, qui peuvent provenir de la concentration des contraintes dans les zones de contact. Une précaution est prise à ce sujet, elle consiste à placer entre les plateaux et les bouchons les plaques de protection (figure II.10) à haute limite élastique qui ont pour rôle de diffuser la force de compression sur une surface plus grande. Le système d'acquisition des signaux est identique à celui utilisé pour les essais dynamiques. Le dépouillement, bien que plus simple vu l'absence des problèmes liés aux ondes, utilise la même procédure que celle décrite dans le chapitre IV. Afin d'explorer l'influence du temps de drainage sur le comportement, plusieurs durées d'essais sont adoptées. Le chargement est effectué durant des temps de 55 secondes, 20 minutes, 2 heures et 24 heures. Pour tous les essais saturés, des expulsions d'eau vers l'extérieur de la cellule sont constatées. Le pilotage s'est fait par déplacement axial à vitesse constante, tout en contrôlant les déformations orthoradiales de la surface extérieure de la cellule.

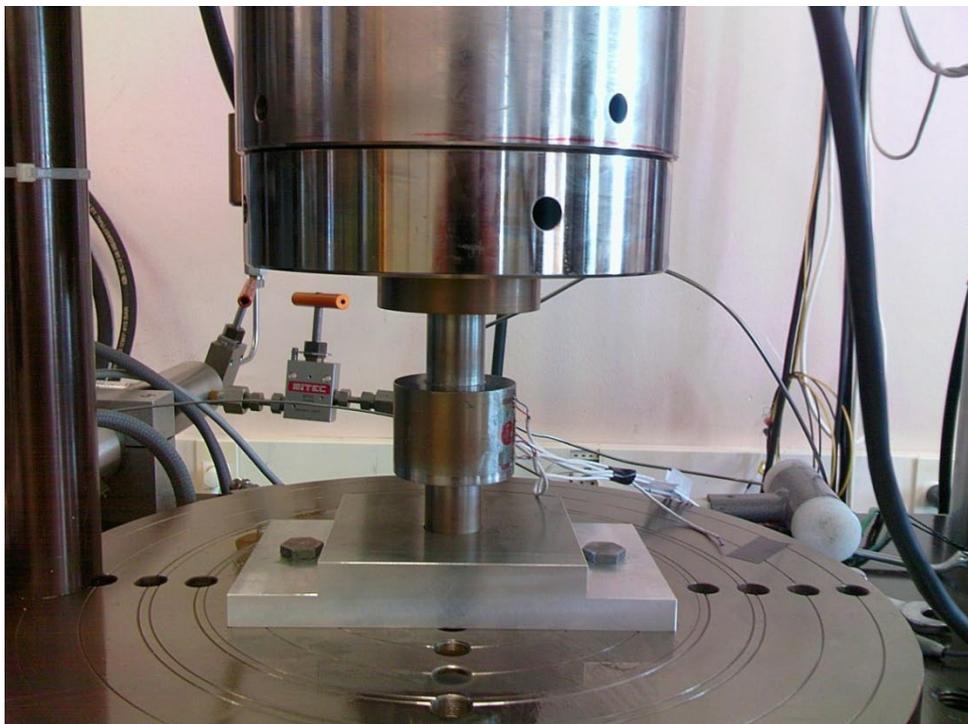


Fig. II.27 –Dispositif de confinement sur presse MTS

II.7 Conclusion

Dans cette partie nous avons présenté le dispositif de confinement, ainsi que les différentes étapes pratiques et théoriques concernant la préparation de l'essai et son déroulement. L'essai sur les barres de Hopkinson requiert la prise en compte d'un grand nombre de paramètres allant de la dispersion des ondes pour leur transport temporel et spatial, en passant par leur calibration par la balance énergétique, jusqu'à finalement la prise en compte de l'impédance et de la longueur des bouchons. La liste n'est pas finie puisque la correction de « poinçonnement » fait l'objet du chapitre suivant. Le but n'est autre que d'obtenir les contraintes axiales et les déformations axiales nominales dans l'échantillon, qui constituent des éléments primordiaux pour le dépouillement ultérieur.

Une deuxième cellule de caractéristiques mécaniques et dimensions identiques à la première, a été commandée, ce qui a permis d'effectuer plus d'une trentaine d'essais et de résoudre plus rapidement les différents problèmes expérimentaux rencontrés. Il est bon de faire le point sur les avantages et inconvénients du dispositif de confinement œdométrique adopté pour les essais dynamiques et statiques.

Avantages

- Le choix d'une même cellule élastique utilisée pour tous les essais élimine les erreurs de dépouillement liées au comportement de son matériau constitutif qui serait sensible aux vitesses de déformations.
- L'erreur sur les résultats finaux est identiquement transportée sur tous les essais sur bétons saturés et secs. Les essais peuvent être comparés entre eux avec grande précision. Plusieurs essais à grande vitesse sont répétés avec duplication des résultats.
- Fiabilité du dépouillement vu que la cellule se comporte en élasticité linéaire. Ceci a permis l'élaboration d'une méthode de dépouillement qui tient compte de toutes les données expérimentales.

- La rigidité d'une cellule qui garde un comportement élastique permet d'explorer le matériau testé pour de grandes pressions de confinement atteignant 850 MPa.
- La mise au point d'un dispositif de montage de grande précision assure la transmission correcte des efforts lors des essais, entre les bouchons et l'éprouvette, et entre celle-ci et la cellule.

Inconvénients

- Un seul trajet de chargement est exploré, de sorte qu'une augmentation de résistance observée dans les essais peut être imputée à l'effet de l'accroissement de la pression de confinement ou à celui de la déformation axiale (écrouissage). Dans l'essai quasi-œdométrique l'évolution des déformations axiales et de cisaillement se fait simultanément avec la pression hydrostatique. La considération d'une cellule ayant une rigidité différente a été envisagée, mais conduit dans un sens ou dans l'autre à sa plastification ou à des déformations orthoradiales extérieures minuscules et difficilement exploitables.
- La conservation du comportement élastique impose une limitation de l'intensité du chargement de sorte que la plage des vitesses de déformations supérieures à 220 s^{-1} n'est pas explorée.
- Le confinement latéral qui se produit lors du chargement induit des contraintes de frottement sur la surface intérieure de la cellule. Leur résultante doit être retranchée à la force axiale mesurée par les barres de Hopkinson ou par la machine MTS. La force effective à laquelle est soumise l'éprouvette est par conséquent inférieure. Bien qu'expérimentalement des précautions sont prises pour diminuer le frottement (chapitre II.5) et que l'approche théorique le considère (chapitre IV), la valeur exacte du coefficient de frottement réel n'a pu être déterminée d'une façon exacte.

Chapitre III

La correction de poinçonnement

Si on considère une barre élastique cylindrique soumise sur sa surface plane à des contraintes normales appliquées sur une partie de sa section, le déplacement axial des points situés sur cette surface n'est pas uniforme le long du rayon, à cause de l'effet de poinçonnement. Ce cas est rencontré dans les barres de Hopkinson, où l'éprouvette a usuellement la forme d'un cylindre dont le diamètre est inférieur à celui des barres qui la maintiennent. Durant l'essai, les contraintes axiales à l'interface barre-éprouvette sont situées sous la surface de l'éprouvette, et conduisent par conséquent la non-planéité géométrique de l'extrémité de la barre. Les jauges situées loin de la zone d'impact fournissent une mesure unidimensionnelle du déplacement de la barre -par le biais de la mesure de sa déformation axiale supposée uniforme au travers de sa section-, et donc ne prennent pas en compte le déplacement local au bout de la barre, qui est dû au poinçonnement. Bien que le matériau des barres garde un comportement élastique au cours de l'essai, il s'est avéré, comme on le verra à la fin de ce chapitre, que la considération de ce déplacement local qui semble négligeable à priori, a des conséquences importantes sur le comportement dynamique du matériau testé, et notamment sur la mesure de son module de Young. Afin de déterminer le déplacement local de la surface de la barre en contact avec l'éprouvette, il est nécessaire de procéder à une étude tridimensionnelle d'une barre élastique semi-infinie, chargée à son extrémité par une pression axi-symétriquement distribuée sur une partie de sa section.

III.1 Situation du problème

Le problème de la barre semi-infinie soumise à un chargement brusque à son extrémité a déjà été abordé sous plusieurs angles. La forme la plus simple est celle de la propagation unidimensionnelle des ondes dans une barre dont l'inertie radiale est négligée (équation de d'Alembert, voir partie II.1). Les ondes qui se propagent sont alors planes et non dispersives, de sorte que le signal initial (chargement) se propage tout en conservant la même forme et amplitude. Des solutions tridimensionnelles plus compliquées ont suivi [Skalak 1957, Folk et

al. 1958, Jones et Norwood 1967] qui abordaient plusieurs aspects théoriques de la propagation des ondes, tels la variation de l'amplitude des ondes le long des coordonnées axiales et radiales du cylindre, ou la comparaison entre le chargement par contraintes et vitesses, etc.... Kennedy et Jones [Kennedy et Jones 1969] ont étudié l'influence sur l'amplitude des ondes mesurées loin de l'impact, du chargement appliqué sur des disques de différents rayons. En faisant varier radialement l'aire d'application des contraintes (mais en gardant la même résultante), les auteurs ont montré qu'à partir d'une distance de l'extrémité de la barre égale à 5 fois son diamètre, les déformations moyennes dans une section donnée seraient indépendantes du diamètre de la surface chargée. Le principe de Saint Venant est ainsi applicable en dynamique tout comme en statique : un chargement en contraintes sur toute la section de la barre produirait, à une grande distance de son extrémité, le même effet qu'une force concentrée de même intensité.

Toutes les études citées ne s'intéressent pas à la zone d'impact qui justement constitue le cadre de la détermination du déplacement local dû au poinçonnement. La non-planéité de la surface d'impact entre la barre et l'éprouvette est constatée par certains auteurs, qui en ont pressenti les conséquences sans pour autant aborder le sujet [Gama et al. 2004].

Les barres de Hopkinson constituent un outil d'excellence pour l'étude du comportement dynamique des matériaux. Le comportement est obtenu d'après les mesures des forces et vitesses aux faces de l'éprouvette, qui elles-mêmes sont fournies par les jauges situées sur les barres entrante et sortante (voir formules (1) (2)). Les forces et les vitesses fournissent des mesures redondantes permettant l'utilisation de méthodes inverses pour investiguer le comportement du matériau [Rota 1997]. Une application simple de ces méthodes consiste à simuler le comportement élastique du matériau [Gary et al. 1991] afin de caler le début temporel des ondes (voir parties II.1 et III.4.5). Cette technique est utilisée depuis longtemps dans le laboratoire LMS pour déterminer l'origine des trois ondes ϵ_i , ϵ_r , ϵ_t , et conduit à la mesure de valeurs pour le module de Young inférieures aux valeurs prévues. De là il a été suspecté que cette erreur systématique est due à une mauvaise mesure de la déformation de l'éprouvette. La face de la barre en contact avec l'éprouvette ne reste pas plane durant l'essai –vue la différence de diamètres-, est ainsi soumise à un « poinçonnement élastique ». Le déplacement local qui y est conséquent est limité à la zone d'impact, et ne peut être mesuré par les jauges qui mesurent une valeur moyenne du déplacement au travers de la section.

Nous proposons de déterminer le déplacement exact de la face de la barre en considérant une approche tridimensionnelle divisée en deux parties. La première partie est basée sur l'analyse transitoire de la propagation des ondes, valide durant les premiers instants du chargement. La seconde partie qui est complémentaire à la première, se place dans le cadre du régime permanent de vibration ; elle suppose que le problème dynamique peut être transposé à une configuration statique dans laquelle les déplacements correspondent à la valeur moyenne des déplacements dynamiques exacts. La juxtaposition temporelle des deux solutions constitue la solution globale du problème.

III.1.1 Formulation du problème mécanique

Une représentation schématique des barres de Hopkinson est montrée à la figure III.1. Trois ondes sont concernées durant l'essai : une onde incidente de compression générée par l'impacteur, une onde réfléchie de traction due à la faible impédance de l'éprouvette, et une onde transmise de compression. Les ondes incidente $\epsilon_i(x, t)$ et réfléchie $\epsilon_r(x, t)$ sont mesurées par la jauge A de la barre incidente ; l'onde transmise $\epsilon_t(x, t)$ est mesurée par la jauge B de la barre sortante.

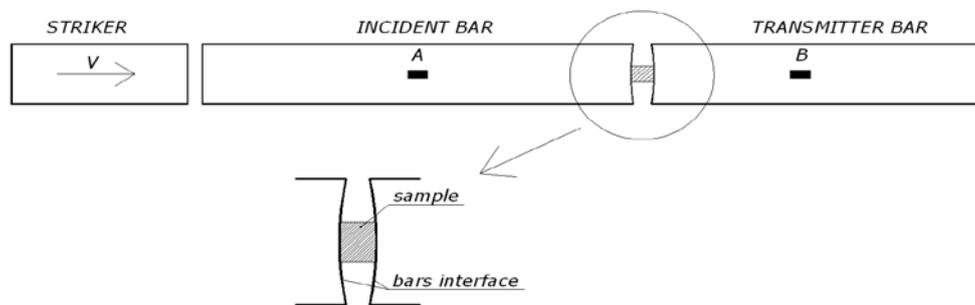


Fig. III.1 – Schéma des barres de Hopkinson avec agrandissement de la zone d'impact

En tenant compte de la dispersion, les ondes mesurées aux jauges A et B sont transportées dans le temps et l'espace au bout des barres, soit aux faces de l'éprouvette. Suite à la théorie unidimensionnelle de propagation des ondes, les forces et vitesses mesurées aux faces de l'éprouvette sont :

Du côté de la barre entrante :

$$\begin{aligned} F_i(t) &= A_i E (\epsilon_i(t) + \epsilon_r(t)) \\ V_i(t) &= -c_{0i} (\epsilon_i(t) - \epsilon_r(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

Du côté de la barre sortante :

$$\begin{aligned} F_o(t) &= A_o E \epsilon_t(t) \\ V_o(t) &= -c_{0r} \epsilon_t(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Où c_{0i}, c_{0r} sont les célérités des ondes longitudinales, A_i, A_o les sections des barres entrantes et sortantes.

En supposant une distribution uniforme des contraintes et déformations dans l'éprouvette, et en considérant que les forces entrantes et sortantes sont égales, le comportement du matériau est classiquement déduit [Kolsky 1949] :

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{V_o(t) - V_i(t)}{l_S}$$

$$\epsilon(t) = \int_0^T \dot{\epsilon}(t) dt$$

$$\sigma(t) = \frac{F_o(t)}{S_S}$$

$l_S; S_S$ représentent la longueur et la section de l'éprouvette.

A la figure III.2, l'éprouvette et la barre entrante (ou sortante) sont montrées dans les configurations initiale et déformée de la barre sous l'application d'une force $F(t)$. $u(t)$ est le déplacement mesuré par les barres de Hopkinson selon les relations (1) ou (2). Il correspond à la formulation unidimensionnelle des déplacements. $p(t)$ est le déplacement local additionnel résultant de la déformation élastique tridimensionnelle de la barre, dénommé par la suite le « poinçonnement élastique ». Il est non nul quand le diamètre de l'éprouvette est inférieur à celui de la barre. La détermination du poinçonnement élastique $p(t)$ permet de corriger la mesure unidimensionnelle $u(t)$ donnée par les barres de Hopkinson, et d'obtenir le déplacement correct à l'interface : $d(t) = u(t) + p(t)$.

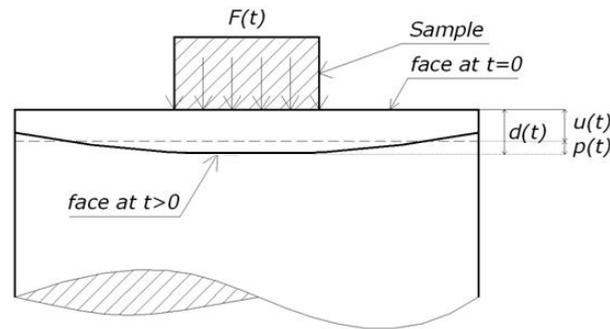


Fig. III.2 –Schéma de la barre en contact avec l'éprouvette

Nous considérons pour la suite les hypothèses suivantes qui sont usuellement acceptées dans la pratique des barres de Hopkinson :

- Le frottement entre l'éprouvette et la barre est négligé, ayant un effet du second ordre.
- Les contraintes axiales dans l'éprouvette sont uniformes.

Par suite, le problème à étudier est déterminé du point de vue mécanique, comme étant celui d'une barre semi-infinie, chargée d'une façon axisymétrique à son extrémité par un disque de contraintes normales appliquées selon une fonction dépendant du temps. La force appliquée $F(t)$ est supposée connue, elle est donnée par les relations (1) ou (2).

III.1.2 Conditions aux limites et équations d'équilibre

Le système de coordonnées cylindriques est représenté par (r, θ, z) . $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{rz}$ sont les composantes du tenseur des contraintes; u_r, u_z sont respectivement les composantes radiales et axiales du déplacement. Comme le problème est à symétrie axiale, la composante tangentielle du déplacement est nulle ($u_\theta = 0$).

En supposant que le diamètre de l'éprouvette reste constant durant l'essai, les contraintes normales appliquées $S(t)$ et la force axiale $F(t)$ vérifient la relation: $S(t) = \frac{F(t)}{\pi a^2}$. La figure III.3 montre l'évolution en fonction du temps de la contrainte axiale $S(t)$ dans l'éprouvette pour un essai typique sur les barres de Hopkinson. On remarque certaines caractéristiques habituelles de l'essai dynamique : d'abord une lente montée de la contrainte, puis une ascension quasi-linéaire qui correspond à la partie élastique du comportement.

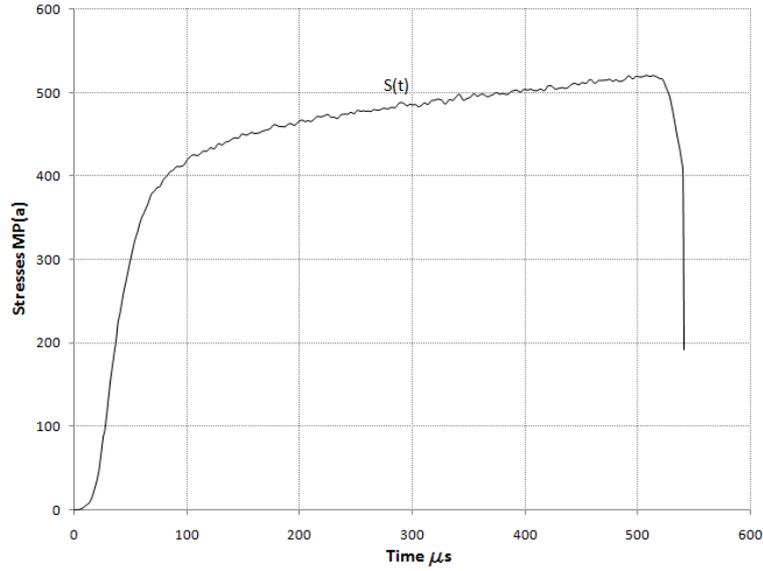


Fig. III.3 – Courbe expérimentale typique des contraintes normales dans l'éprouvette $S(t)$

Les conditions aux limites sont :

Pour $z = 0$;

$$\sigma_z = \begin{cases} S(t) & \text{pour } r < a; \quad t > 0 \\ 0 & \text{pour } r > a \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{rz} = 0$$

Pour $r = R$; $\sigma_r = \sigma_{rz} = 0$

Les équations d'équilibre écrites en fonction du déplacement sont :

$$(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2}\right) + \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (4)$$

λ, μ sont les constantes de Lamé du matériau de la barre.

Les célérités des ondes de dilatation et de cisaillement sont : $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

III.2 Solution partie I

La première partie de la solution concerne la détermination du déplacement durant la phase initiale de l'essai. On peut approximer, durant une courte durée qui sera déterminée par la suite, la partie initiale de la courbe de chargement par une droite de pente $p_0 \tan \alpha$ (figure III.4). Le chargement effectif appliqué est alors linéaire d'expression : $P(t) = p_0 \tan \alpha t$. En procédant comme tel, la partie non linéaire au pied de la courbe est négligée, ce qui correspond à petit décalage temporel.

Par conséquent, les conditions aux limites deviennent :

Pour $z = 0$;

$$\sigma_z = \begin{cases} p_0 \tan \alpha t & \text{pour } r < a; \quad t > 0 \\ 0 & \text{pour } r > a \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{rz} = 0$$

Pour $r = R$; $\sigma_r = \sigma_{rz} = 0$

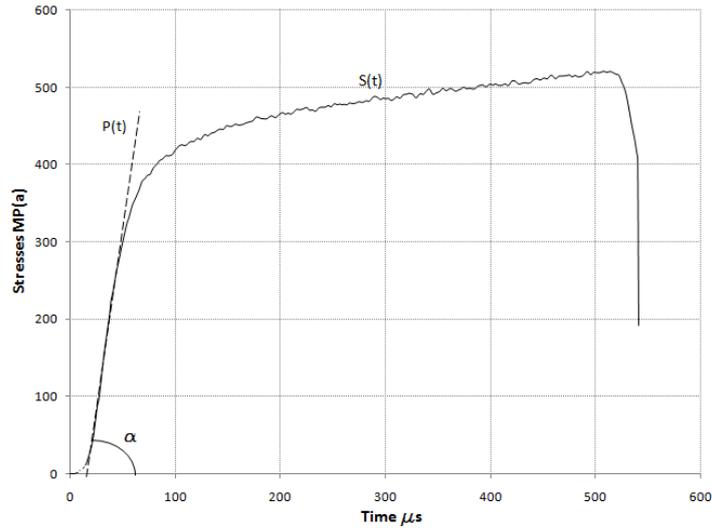


Fig. III.4 – Courbe expérimentale $S(t)$ et chargement linéaire $P(t)$ supposé

On définit la transformée de Laplace et la transformée de Hankel d'une fonction f par les notations respectives suivantes :

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\bar{\bar{f}}(\xi) = \int_0^{\infty} J_n(\xi r) f(r) r dr, \text{ où } J_n(\xi r) \text{ est la fonction de Bessel du 1}^{\text{er}} \text{ genre, d'ordre } n \text{ et}$$

d'argument ξr .

La méthode de résolution utilisée consiste à appliquer les transformées de Laplace et de Hankel aux équations d'équilibre (3) et (4) qui sont aussi appelées équations des ondes. La transformée de Laplace permet de transformer les dérivations par rapport au temps en multiplications. Le second membre des équations d'équilibre qui sont des dérivées par rapport au temps t dans l'espace temporel, deviennent des multiplications fonction de s dans l'espace de Laplace. La transformée de Hankel est une transformée intégrale, pareillement à celle de Laplace et Fourier ; elle s'applique aux variables d'espace. Elle est utilisée dans les problèmes à coordonnées cylindriques du fait des simplifications qu'elle induit à l'opérateur $f'' + f'/r - k^2 f/r^2$ qui apparait dans les équations d'équilibre (3),(4). En effet, la transformée de Hankel appliquée à cet opérateur donne :

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{k^2}{r^2} f \right) J_k(\xi r) r dr = -\xi^2 \bar{f}_k(\xi)$$

Comme on le remarque, le domaine de définition de ces deux transformées est infini en temps pour celle de Laplace, et en espace pour celle de Hankel. En d'autres termes, elles supposent que le rayon du cylindre est infini, identiquement au demi-espace. Par conséquent, la solution qui est exposée dans cette première partie est valide tant que les ondes réfléchies sur la paroi latérale du cylindre n'influencent pas le déplacement recherché, soit jusqu'à un temps t_1 qui sera déterminé par la suite. La procédure qui suit est similaire à celle adoptée dans le cas du demi-espace soumis à un chargement instantané [Mitra 1961, Eason 1966].

En appliquant la transformée de Laplace aux équations des ondes (3),(4) on obtient:

$$c_1^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} - \frac{\bar{u}_r}{r^2} \right) + c_2^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial z^2} + (c_1^2 - c_2^2) \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial r \partial z} = s^2 \bar{u}_r \quad (5)$$

$$(c_1^2 - c_2^2) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} \right) + c_2^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} \right) + c_1^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z^2} = s^2 \bar{u}_z \quad (6)$$

En multipliant (5),(6) par $J_1(\xi r)r$, $J_0(\xi r)r$ respectivement et en intégrant par rapport à r de 0 à ∞ , et en tenant compte de la propriété de la transformée de Hankel on obtient :

$$(c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - c_1^2 \xi^2 - s^2) \bar{u}_r - (c_1^2 - c_2^2) \xi \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

$$(c_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - c_2^2 \xi^2 - s^2) \bar{u}_z - (c_1^2 - c_2^2) \xi \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

Les équations (7),(8) s'appellent équations de Helmholtz et ont la solution générale suivante :

$$\bar{u}_r = A e^{-kz} + B e^{-qz} \quad (9)$$

$$\bar{u}_z = C e^{-kz} + D e^{-qz} \quad (10)$$

$$\text{où } k = \sqrt{\xi^2 + \frac{s^2}{c_1^2}} ; q = \sqrt{\xi^2 + \frac{s^2}{c_2^2}}$$

Les constantes A, B, C, D sont déterminées en utilisant les conditions aux limites de la façon suivante. D'abord on remplace (9) et (10) dans (7) et (8) afin de les relier deux à deux entre elles :

$$C = \frac{k}{\xi}A; D = \frac{\xi}{q}B$$

Alors (9) et (10) deviennent:

$$\bar{u}_r = Ae^{-kz} + Be^{-qz} \quad (11)$$

$$\bar{u}_z = \frac{k}{\xi}Ae^{-kz} + \frac{\xi}{q}Be^{-qz} \quad (12)$$

A et B sont déterminées en appliquant les conditions aux limites pour $\bar{\sigma}_z$ et $\bar{\sigma}_{rz}$ en $z = 0$. Les conditions aux limites pour $r = R$ ne doivent pas intervenir car on s'est placé dans le cas du demi-espace infini.

Les expressions de σ_z et σ_{rz} en coordonnées cylindriques ont la forme suivante:

$$\sigma_z = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}\right) + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (13)$$

$$\sigma_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \quad (14)$$

Il est nécessaire d'exprimer ces contraintes dans l'espace temporel de Laplace et l'espace spatial de Hankel, là où le problème est actuellement formulé. En multipliant (13) et (14) par $rJ_0(\xi r)$ et $rJ_1(\xi r)$ respectivement, puis en appliquant la transformée de Laplace, et en intégrant par rapport à r de 0 à ∞ , on obtient:

$$\bar{\sigma}_z = \lambda\xi\bar{u}_r + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial z} \quad (15)$$

$$\bar{\sigma}_{rz} = \mu\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial z} - \mu\xi\bar{u}_z \quad (16)$$

La condition aux limites pour les contraintes de cisaillement pour $z = 0$ conduit à:

$$\bar{\sigma}_{rz} = 0 \quad (17)$$

La condition aux limites pour les contraintes normales axiales est:

$$\sigma_z = \begin{cases} p_0 \tan \alpha t & \text{pour } r < a; \quad t > 0 \\ 0 & \text{pour } r > a \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

Ce chargement est linéaire en fonction du temps et nul à $t = 0$. Il est néanmoins possible de l'exprimer en termes de fonctions Heaviside de la façon suivante :

$$\sigma_z = p_0 \tan \alpha H(a - r)tH(t) \quad (18)$$

De même, il faut appliquer les transformée de Laplace et Hankel à (18) afin de pouvoir l'identifier à (15) :

$$\bar{\sigma}_z = \frac{p_0 \tan \alpha}{s^2} H(a - r) \quad (19)$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{p_0 a \tan \alpha}{\xi s^2} J_1(\xi a) \quad (20)$$

On remplace dans (15) et (16) les valeurs de \bar{u}_r et \bar{u}_z obtenues par (11) et (12), et on applique les conditions aux limites (17) et (20) ; on obtient alors le système linéaire qui permet de déterminer les constantes A et B :

$$2kqA + \left(\frac{s^2}{c_2^2} + 2\xi^2\right)B = 0 \quad (21)$$

$$\left(\frac{s^2}{c_2^2} + 2\xi^2\right)A + 2\xi^2 B = -\frac{p_0 a \tan \alpha}{\mu s^2} J_1(\xi a) \quad (22)$$

La solution de (21) et (22) donne:

$$A = -\frac{p_0 a \tan \alpha}{\mu s^2} J_1(\xi a) \frac{\frac{s^2}{c_2^2} + 2\xi^2}{\left(\frac{s^2}{c_2^2} + 2\xi^2\right)^2 - 4kq\xi^2} \quad (23)$$

$$B = \frac{p_0 a \tan \alpha}{\mu s^2} J_1(\xi a) \frac{2kq}{\left(\frac{s^2}{c_2^2} + 2\xi^2\right)^2 - 4kq\xi^2} \quad (24)$$

En remplaçant les valeurs de A et B dans (11) et (12), on obtient les expressions des composantes axiales et radiales du déplacement dans les espaces de Laplace et Hankel :

$$\bar{u}_r = \frac{-\frac{p_0 a \tan \alpha}{\mu s^2} J_1(\xi a)}{\left(\frac{s^2}{c_2^2} + 2\xi^2\right)^2 - 4kq\xi^2} \left\{ \left(\frac{s^2}{c_2^2} + 2\xi^2\right) e^{-kz} - 2kq e^{-qz} \right\} \quad (25)$$

$$\bar{u}_z = \frac{k}{\xi} \frac{-\frac{p_0 a \tan \alpha}{\mu s^2} J_1(\xi a)}{\left(\frac{s^2}{c_2^2} + 2\xi^2\right)^2 - 4kq\xi^2} \left\{ \left(\frac{s^2}{c_2^2} + 2\xi^2\right) e^{-kz} - 2\xi^2 e^{-qz} \right\} \quad (26)$$

Nous sommes intéressés par la composante axiale (26) du déplacement. Afin de revenir dans l'espace temporel, il faut appliquer la transformée inverse de Laplace à (26):

$$\tilde{u}_z = -\frac{p_0 a \tan \alpha}{2\pi i \mu} \frac{J_1(\xi a)}{\xi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{k}{s^2} \frac{\left(\frac{s^2}{c_2^2} + 2\xi^2\right) e^{-kz} - 2\xi^2 e^{-qz}}{\left(\frac{s^2}{c_2^2} + 2\xi^2\right)^2 - 4kq\xi^2} e^{st} ds \quad (27)$$

Dans la transformée de Laplace, la variable s est un nombre complexe. L'intégrale ci-dessus est une intégrale complexe semblable à celle obtenue par Eason [Eason 1966] dans le cas du demi-espace soumis à une force instantanée maintenue constante au cours du temps.

D'après (27), l'intégration se fait selon l'axe vertical $Re(s) = \gamma$, avec γ un nombre réel qui doit être plus grand que les parties réelles de toutes les singularités de la fonction intégrée, afin que les points singuliers soient compris à l'intérieur du contour d'intégration (propriété des intégrales complexes). Les points singuliers sont ceux qui annulent le dénominateur de la fonction intégrée, ils sont appelés pôles en analyse complexe. Il y a un pôle d'ordre 2 en $s = 0$, et deux pôles simples en $s = \pm i\xi c_R$ -avec c_R la célérité des ondes de Rayleigh- qui annulent le facteur $\left(\frac{s^2}{c_2^2} + 2\xi^2\right)^2 - 4kq\xi^2$ situé au dénominateur. Les ondes de Rayleigh ou ondes de surface, contrairement aux ondes de volume P et S, se propagent le long de la surface du solide, à une vitesse c_R solution de l'équation fréquentielle $\left(\frac{s^2}{c_2^2} + 2c^2\right)^2 - 4kqc^2 = 0$ [Graff 1991]. Autres que les pôles, les fonctions complexes peuvent avoir des singularités particulières en des points appelés points de branchements. Si en un

point du plan complexe la fonction a plusieurs valeurs, elle est appelée fonction multiforme en ce point. Par exemple, la fonction \sqrt{z} (z pour la présente explication étant un nombre complexe) est multiforme au point $z = 0$; car si on considère le vecteur $z = 4$ qui fait un cercle complet autour de 0, \sqrt{z} passe de +2 à -2. Au numérateur de (27) les variables k et q (9),(10) possèdent des points de branchement en $s = \pm i\xi c_i (i = 1, 2)$. Afin d'éviter que la fonction soit multiforme en ces points, on définit des lignes de branchement qui empêchent l'argument de z de faire un tour complet autour de ce point et d'y avoir ainsi deux valeurs différentes (figure III.5). La solution de l'intégrale (27) se fait par la méthode des résidus en appliquant le théorème de Cauchy. Ce théorème stipule que l'intégrale d'une fonction complexe sur un contour fermé est égale à la somme des résidus de la fonction à intégrer. Le résidu est un nombre complexe qui décrit le comportement de la fonction aux pôles.

Le but est de calculer l'intégrale le long de la ligne verticale d'abscisse γ (27). Nous pouvons considérer dans le plan complexe un contour fermé S qui a la forme de la figure III.5.

Soit I l'intégrale le long de la ligne verticale $Re(s) = \gamma$ (figure III.5), et $g(s)$ la fonction intégrée:

$$I = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{k}{s^2} \frac{(\frac{s^2}{c_2^2} + 2\xi^2)e^{-kz} - 2\xi^2 e^{-qz}}{(\frac{s^2}{c_2^2} + 2\xi^2)^2 - 4kq\xi^2} e^{st} ds = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} g(s) ds \quad (28)$$

En appliquant le théorème des résidus sur le contour fermé S , nous obtenons que l'intégrale sur tout ce contour (dont I fait partie) est égale à la somme des résidus :

$$\oint_S g(s) ds = 2\pi i [Res[g, 0] + Res[g, \pm i\xi c_R]] \quad (29)$$

Le calcul des résidus se fait comme suit :

$$Res[g, 0] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial s} [s^2 g(s)] = \frac{c_1^2 + \xi z (c_1^2 - c_2^2)}{2\xi (c_1^2 - c_2^2)} e^{-\xi z t} \quad (30)$$

$$Res[g, \pm i\xi c_R] = \lim_{s \rightarrow \pm i\xi c_R} \frac{\frac{\partial}{\partial s} \text{num}[g(s)]}{\frac{\partial}{\partial s} \text{denom}[g(s)]} = - \frac{\pi k_1 [(2 - \frac{c_R^2}{c_2^2}) e^{-k_1 \xi z} - 2e^{-q_1 \xi z}]}{4\xi^2 c_R^3 [\frac{1}{c_2^2} (2 - \frac{c_R^2}{c_2^2}) - \frac{q_1}{k_1 c_1^2} - \frac{k_1}{q_1 c_2^2}]} \sin(\xi c_R t) \quad (31)$$

$$\text{où } k_1 = \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}}; q_1 = \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}$$

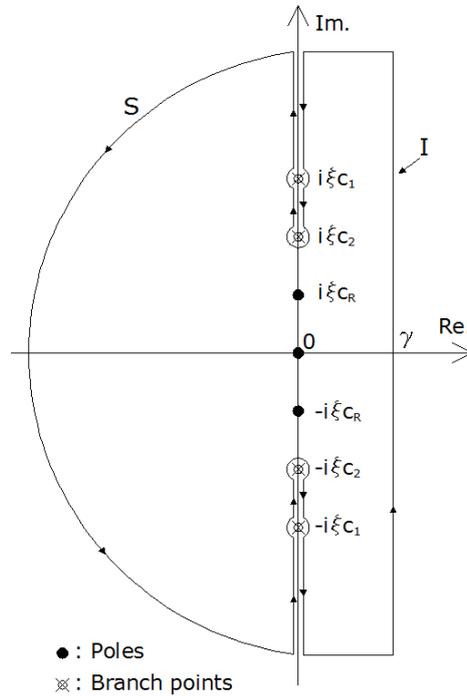


Fig. III.5 –Contour S d'intégration dans le plan complexe

Il s'agit maintenant de déduire l'intégrale I qui est incluse dans (29). Comme les pôles sont situés sur l'axe imaginaire, on peut faire tendre γ vers 0 sachant que les pôles resteront inclus à l'intérieur du contour S . Les intégrales sur les lignes horizontales sont alors nulles. Les intégrales sur les contours circulaires autour des points de branchement s'annulent quand le rayon du cercle tend vers 0. De même, l'intégrale sur le grand demi-cercle à gauche s'annule quand son rayon tend vers l'infini. Il reste alors l'intégrale I et celles situées sur l'axe imaginaire où sont représentées les célérités des ondes de volume et de surface.

Il est possible de donner un sens physique à (29) d'après la figure III.5. Si on considère la partie positive de l'axe imaginaire –qui est symétrique à la partie négative-, on voit que la variable d'intégration s varie de ξc_2 à ξc_1 , puis de ξc_1 à l'infini. La variable s de la transformée de Laplace est assimilable à l'inverse du temps. Ainsi les deux intégrales le long des deux lignes de branchement $[\xi c_2, \xi c_1]$ et $[\xi c_1, +\infty]$ sont assimilables physiquement à des intégrales temporelles le long des intervalles $[0, \frac{1}{\xi c_1}]$ et $[\frac{1}{\xi c_1}, \frac{1}{\xi c_2}]$ avec ξ la variable d'espace dans la transformée de Hankel. Donc elles représentent respectivement –et d'une façon

chronologique- sur ces deux intervalles la contribution en déplacement des ondes de dilatation (jusqu'à $t = \frac{1}{\xi c_1}$), et des ondes de dilatation et de cisaillement (jusqu'à $t = \frac{1}{\xi c_2}$). A partir de $t = \frac{1}{\xi c_2}$ la contribution des ondes volumiques s'annule. Il reste alors uniquement les contributions des ondes surfaciques qui sont les plus lentes à apparaître -vu que la célérité c_R des ondes de Rayleigh est inférieure à c_1 et c_2 - et le déplacement qui correspond à des temps très grands ($s = 0$ soit $t \rightarrow \infty$), donc au régime permanent qu'on peut aussi appeler pseudo-statique. Les déplacements dus aux ondes surfaciques et aux grands temps sont obtenus en étudiant le comportement de $g(s)$ au voisinage de $s = \pm i\xi c_R$ et de $s = 0$, soit en calculant les résidus en ces points (30), (31). Comme nous sommes en train de rechercher le déplacement surfacique, nous allons négliger la contribution des déplacements donnés par les ondes volumiques, vu leurs faibles amplitudes par rapport aux ondes de Rayleigh pour les points situés à la surface du solide [Mitra 1961, Eason 1966].

L'intégrale (28) devient:

$$I \approx \oint_S g(s) ds = 2\pi i [Res[g, 0] + Res[g, \pm i\xi c_R]] \quad (32)$$

En remplaçant (32) dans (27) on obtient:

$$\tilde{u}_z \approx -\frac{p_0 a \tan \alpha}{\mu} \frac{J_1(\xi a)}{\xi} [Res[g, 0] + Res[g, \pm i\xi c_R]] \quad (33)$$

Ce qui donne en fonction de (30) et (31) :

$$\tilde{u}_z \approx -\frac{p_0 a \tan \alpha}{\mu} \frac{J_1(\xi a)}{\xi} \left[\frac{c_1^2 + \xi z (c_1^2 - c_2^2)}{2\xi (c_1^2 - c_2^2)} e^{-\xi z t} - \frac{\pi k_1 \left[\left(2 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right) e^{-k_1 \xi z} - 2e^{-q_1 \xi z} \right] \sin(\xi c_R t)}{4\xi^2 c_R \left[\frac{c_R^2}{c_2^2} \left(2 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right) - \frac{q_1 c_R^2}{k_1 c_1^2} - \frac{k_1 c_R^2}{q_1 c_2^2} \right]} \right]. \quad (34)$$

En appliquant la transformée inverse de Hankel à (34) on obtient :

$$u_z \approx -\frac{p_0 a \tan \alpha}{\mu} \int_0^\infty J_0(\xi r) J_1(\xi a) \left[\frac{c_1^2 + \xi z (c_1^2 - c_2^2)}{2\xi (c_1^2 - c_2^2)} e^{-\xi z t} - \frac{\pi k_1 \left[\left(2 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right) e^{-k_1 \xi z} - 2e^{-q_1 \xi z} \right] \sin(\xi c_R t)}{4\xi^2 c_R \left[\frac{c_R^2}{c_2^2} \left(2 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right) - \frac{q_1 c_R^2}{k_1 c_1^2} - \frac{k_1 c_R^2}{q_1 c_2^2} \right]} \right] d\xi \quad (35)$$

L'expression du déplacement axial (35) comprend la somme de deux intégrales qu'il s'agit de calculer pour $z = 0$; $r \leq a$.

L'intégrale du type $\int_0^\infty \frac{1}{\xi^k} J_i(\xi r) J_j(\xi a) d\xi$ qui apparait dans le premier terme de (35) a pour solution quand $r \leq a$:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\xi} J_0(\xi r) J_1(\xi a) d\xi = \frac{2}{\pi} E\left(\frac{r}{a}\right)$$

Où $E\left(\frac{r}{a}\right)$ est l'intégrale elliptique complète du second genre d'argument $\frac{r}{a}$.

La première intégrale de (35) devient:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\xi} J_0(\xi r) J_1(\xi a) \frac{c_1^2}{2(c_1^2 - c_2^2)} t d\xi = \frac{2(1 - \nu)}{\pi} E\left(\frac{r}{a}\right) t \quad (36)$$

L'intégrale du type $\int_0^\infty \frac{1}{\xi^2} J_0(\xi r) J_1(\xi a) \sin(\xi c_R t) d\xi$ apparait dans le second terme de (35).

En utilisant la propriété :

$$J_0(\xi r) J_1(\xi a) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_1(\xi W) \frac{a - r \cos \phi}{W} d\phi, \text{ où } W = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \phi}, \text{ on obtient:}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\xi^2} J_0(\xi r) J_1(\xi a) \sin(\xi c_R t) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{a - r \cos \phi}{W} \int_0^\infty \frac{J_1(\xi W)}{\xi^2} \sin(\xi c_R t) d\xi d\phi \quad (37)$$

On a que pour $c_R t < (a + r)$:

$$\int_0^\infty \frac{J_1(\xi W)}{\xi^2} \sin(\xi c_R t) d\xi = \frac{1}{2W} (c_R t \sqrt{W^2 - c_R^2 t^2} + W^2 \arcsin \frac{c_R t}{W})$$

Et que pour $c_R t \geq (a + r)$:

$$\int_0^\infty \frac{J_1(\xi W)}{\xi^2} \sin(\xi c_R t) d\xi = \frac{\pi}{4} W$$

Introduisant ces deux résultats dans (37), on obtient:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\xi^2} J_0(\xi r) J_1(\xi a) \sin(\xi c_R t) d\xi = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{a - r \cos \phi}{W^2} (c_R t \sqrt{W^2 - c_R^2 t^2} + W^2 \arcsin \frac{c_R t}{W}) d\phi, & c_R t < (a + r) \\ \frac{\pi}{4} a, & c_R t \geq (a + r) \end{cases} \quad (38)$$

Finalement, en remplaçant (36), (38) dans (35), on obtient l'expression du déplacement axial surfacique sous une éprouvette de rayon a , au point de coordonnée r , et au temps t :

Pour $c_R t < (a + r)$:

$$u_z = -\frac{p_0 a \tan \alpha}{\mu} \left\{ \frac{2}{\pi} (1 - \nu) E\left(\frac{r}{a}\right) t + \frac{k_1 c_R \int_0^\pi \frac{a - r \cos \phi}{W^2} (c_R t \sqrt{W^2 - c_R^2 t^2} + W^2 \arcsin \frac{c_R t}{W}) d\phi}{8c_2^2 \left[\frac{c_R^2}{c_2^2} \left(2 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right) - \frac{q_1 c_R^2}{k_1 c_1^2} - \frac{k_1 c_R^2}{q_1 c_2^2} \right]} \right\} \quad (39)$$

Pour $c_R t \geq (a + r)$:

$$u_z = -\frac{p_0 a \tan \alpha}{\mu} \left\{ \frac{2}{\pi} (1 - \nu) E\left(\frac{r}{a}\right) t + \frac{\pi^2 k_1 c_R a}{16c_2^2 \left[\frac{c_R^2}{c_2^2} \left(2 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right) - \frac{q_1 c_R^2}{k_1 c_1^2} - \frac{k_1 c_R^2}{q_1 c_2^2} \right]} \right\} \quad (40)$$

L'équation (40) montre que le déplacement en tout point $(r, 0)$ est une fonction linéaire du temps quand $t \geq \frac{a+r}{c_R}$, le premier terme étant proportionnel à t , et le second constant. Le facteur qui multiplie le temps dans le premier terme de (40) représente le déplacement statique dans un demi-espace, de la surface chargée par un disque de pression uniforme [Timoshenko et Goodier 1970]. Le second terme de (40) -qui est fonction du temps dans (39) pour $t < \frac{a+r}{c_R}$ -, se réduit à une constante à partir de $t = \frac{a+r}{c_R}$. Il représente la contribution en déplacement des ondes de Rayleigh. L'interprétation physique de l'expression du déplacement tel qu'obtenu en (40) est qu'à partir un temps $t = \frac{a+r}{c_R}$, le déplacement en un point quelconque situé sous la charge est celui du demi-espace soumis à une charge linéaire, moins le déplacement dû aux ondes de surface (le dénominateur du second terme de (40) est

négatif). L'effet des ondes se réduit ainsi à une constante qui devient négligeable par rapport au déplacement du régime permanent du demi-espace (premier terme de (40)), au fur et à mesure que le temps augmente. Au point situé à l'origine ($r = 0$), le temps à partir duquel (40) s'applique est $t = \frac{a}{c_R}$. Donc les points situés sur le périmètre du disque de chargement

($r = a$) définissent la limite inférieure en temps $t_0 = \frac{2a}{c_R}$ à partir de laquelle l'expression (40)

est valide pour n'importe quel point situé dans la surface chargée.

A l'origine, ($r = 0$) l'expression du déplacement (39) pour $c_R t < a$ se réduit à:

$$u_z = -\frac{p_0 a \tan \alpha}{\mu} \left\{ (1 - \nu)t + \frac{\pi k_1 c_R (c_R t \sqrt{a^2 - c_R^2 t^2} + a^2 \arcsin \frac{c_R t}{a})}{8 a c_2^2 \left[\frac{c_R^2}{c_2^2} \left(2 - \frac{c_R^2}{c_2^2} \right) - \frac{q_1 c_R^2}{k_1 c_1^2} - \frac{k_1 c_R^2}{q_1 c_2^2} \right]} \right\} \quad (41)$$

L'intérêt de la solution exposée dans cette partie est de montrer l'existence d'une relation linéaire déplacement-temps (40), qui débute à $t_0 = \frac{2a}{c_R}$ (et non à $t = 0$) soit avec un délai qui correspond au temps mis par les ondes de Rayleigh pour traverser le diamètre chargé. Cette solution commence à perdre sa validité au fur et à mesure que les ondes réfléchies sur la surface latérale du cylindre interfèrent avec celles qui émanent de la source. Alors l'expression pseudo-statique (40) qui correspond au déplacement du demi-espace soumis à un chargement linéaire en temps, n'est plus applicable vu que les conditions aux limites sur la surface latérale du cylindre doivent être satisfaites.

Pour illustrer ceci et évaluer le temps t_1 à partir duquel cette solution diverge de la solution exacte du cylindre (qui est considérée donnée par la simulation numérique), nous représentons à la figure III.6 les déplacements à l'origine ($r = 0$) obtenus par un modèle numérique d'un cylindre de rayon R soumis à une force d'intensité constante appliquée sur des surfaces circulaires de différents rayons a_i . Les solutions données par (40) et (41) sont représentées par les courbes en traits tirés. On remarque qu'à mesure que a_i se rapproche de R ; la solution (40) –qui correspond à la partie linéaire de la courbe en traits-tirés - voit son domaine temporel se rétrécir ($\frac{a_i}{c_R} < t < \frac{R}{c_R}$) de sorte qu'elle disparaisse pour $a_i = R$. Par conséquent, le domaine temporel de la solution pseudo-statique du demi-espace (40) peut être défini pour le point à

l'origine ($r = 0$) comme étant entre $t = \frac{a}{c_R}$ et $t_1 = \frac{R}{c_R}$. Cependant, comme déjà mentionné ci-dessus, la limite inférieure de la validité de (40) pour tout point ($r \leq a$) est conditionnée par les points situés sur le périmètre chargé. Donc finalement l'intervalle temporel d'application de la solution (40) a pour borne inférieure $t_0 = \frac{2a}{c_R}$ et pour borne supérieure $t_1 = \frac{R}{c_R}$. Ce qui implique que la présente solution ne peut pas s'appliquer quand le rayon de l'éprouvette est supérieur à la moitié de celui du cylindre.

Pour $t < t_0$ le déplacement vertical (représenté par la partie courbe en traits tirés) est dû principalement aux ondes de surfaces (39). La différence observée avec la partie courbe en traits continus (solution numérique) provient du fait que la contribution des ondes de volumes a été négligée.

Le déplacement moyen u_0 sous l'éprouvette à un temps t tel que $t_0 \leq t \leq t_1$ peut être obtenu en intégrant (40) le long de $r \leq a$:

$$u_0(t) = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a 2\pi u_z r dr = \frac{F_0 \tan \alpha}{\mu a} \left\{ \frac{8}{3\pi^2} (1 - \nu) t + \frac{\pi k_1 t_0}{32 \left[4q_1 k_1 - \frac{q_1}{k_1} \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} - \frac{k_1}{q_1} \right]} \right\} \quad (42)$$

Où $F_0 = \pi a^2 p_0$; $k_1 = \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}}$; $q_1 = \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}$ et $t_0 = \frac{2a}{c_R} \leq t_1 = \frac{R}{c_R}$

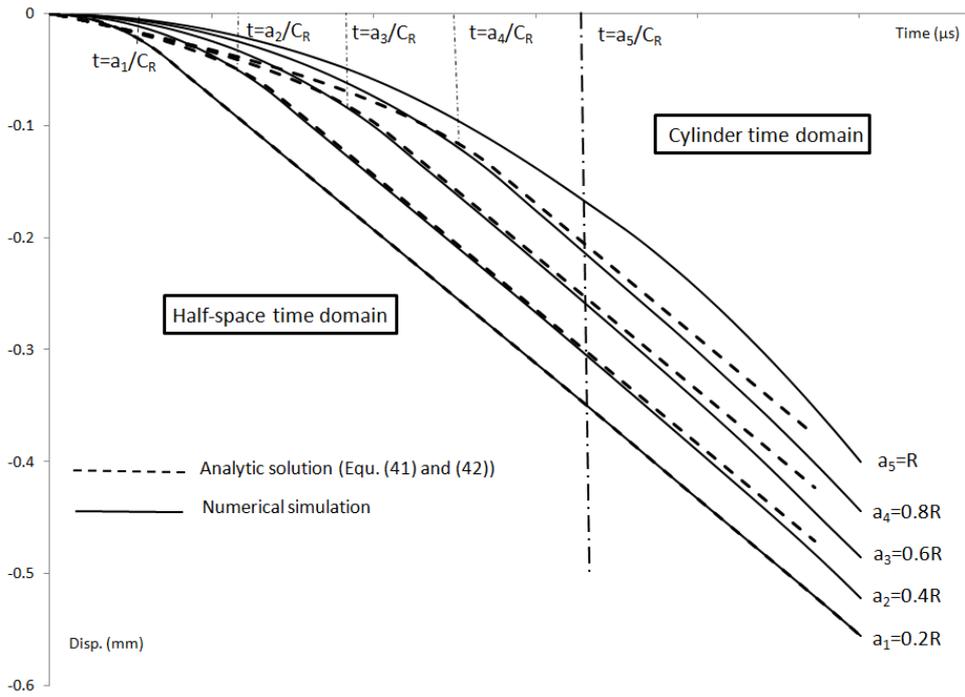


Fig. III.6 –Déplacements axiaux à l'origine $(0, 0)$ pour un cylindre de rayon R soumis à des disques de pressions uniformes de rayons a_i et de même résultante.

L'étape suivante consiste à calculer le déplacement pour $t > t_1$.

III.3 Solution partie II

III.3.1 Solution analytique de la correction de poinçonnement

Dans l'essai aux barres de Hopkinson, les forces $F(t)$ aux faces de l'éprouvette sont données par les relations (1) et (2). Comme déjà indiqué dans la partie III.1, les ondes qui apparaissent dans ces relations résultent des déformations axiales mesurées par les jauges loin de la zone d'impact entre l'éprouvette et les barres. Selon les notations de la figure III.2, le déplacement corrigé en un point de la barre situé sous l'éprouvette est défini par la relation $d(t) = u(t) + p(t)$ où $p(t)$ représente le « poinçonnement élastique ». La partie I de la solution (partie III.2) a permis de déterminer directement le déplacement $d(t)$ (pour $t \leq t_1$) vu que le déplacement $u(t)$ donné par les barres de Hopkinson n'existe pas encore : pour $t \leq t_1$ on est encore dans le demi-espace, les ondes n'ont pas encore reconnu la géométrie de la barre. Le déplacement recherché dans cette partie est plus important, car il concerne la plus grande partie de l'essai dont la durée est d'habitude de plusieurs centaines de μs . En effet, la borne supérieure $t_1 = \frac{R}{c_R}$ de la solution de la partie précédente est de 14 μs pour une barre de rayon 40 mm ; ce qui correspond déjà à une barre de dimensions notables par rapport à celles usuellement utilisées.

L'idée consiste à appliquer simultanément deux forces à l'extrémité de la barre concernée. Ces chargements sont choisis de sorte qu'ils soient de mêmes intensités mais de sens opposés $F(t)$ et $-F(t)$ (figure III.7). La superposition de ces forces auto-équilibrées conduit à un déplacement nul ($u(t) = 0$) en dehors de la zone d'impact (ou région de Saint Venant), à partir d'une distance de quelques diamètres de barre. Le déplacement restant est $p(t)$ qui est non nul à l'intérieur de la zone d'impact.

Afin de déterminer $p(t)$, on transpose le problème de sa configuration dynamique à une configuration statique équivalente, dans laquelle les forces au bout de la barre semi-infinie sont auto-équilibrées ; ce qui rend ce problème statiquement déterminé. En effet, une barre semi-infinie chargée par des forces auto-équilibrées, ne pose pas d'indétermination au sens des conditions aux limites. On se place à un temps tel que l'on puisse supposer au bout de la barre que le régime permanent de vibrations est atteint. On entend par régime permanent un

état stable de vibrations qui n'évolue plus avec le temps, donc qui est en équilibre dynamique, à l'opposé du régime transitoire où les amplitudes des différentes grandeurs évoluent en fonction du temps. Quand le régime permanent est atteint, la configuration statique est capable de fournir en tout temps t la valeur de la correction $p(t)$, qui sera ajoutée au déplacement $u(t)$ mesuré par les barres. Dans cette solution ($t > t_1$), la force appliquée $F(t)$ est quelconque ; elle n'est pas approximée par une charge linéaire en temps.

Le problème du chargement auto-équilibré appliqué sur l'extrémité d'une barre semi-infinie a fait l'objet de nombreux travaux de recherche dans le cadre de la mécanique des milieux continus. La terminologie relative à ce sujet est particulière ; le bref aperçu historique qui suit utilise un vocabulaire simplifié dans le but de la clarté.

Une des premières solutions du problème de la barre soumise à des chargements auto-équilibrés consistait à satisfaire exactement les conditions aux limites sur la surface latérale (contraintes radiales et de cisaillement nulles), et les satisfaire partiellement sur la surface chargée. Ceci est mis en œuvre par la recherche d'une fonction de chargement qui approxime aux moindres carrés le chargement réel appliqué [Lurie 1943]. La solution se présente sous forme de séries dont la base n'est pas orthogonale, de sorte que la méthode requise pour calculer les constantes qui apparaissent dans les séries, et qui dépendent des conditions aux limites, nécessite des efforts laborieux.

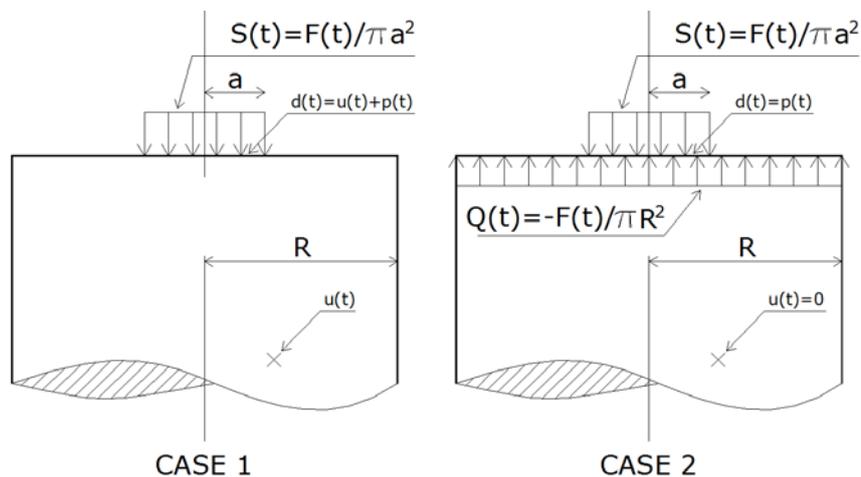


Fig. III.7 – Détermination du poinçonnement $p(t)$ par superposition de contraintes

La solution est améliorée grâce au développement d'une base de vecteurs orthogonaux, dans laquelle les champs mécaniques sont formulés [Little et Childs 1967]. La détermination des constantes présentes dans les séries est faite alors d'une manière directe, dans le cas où les conditions aux limites sur la face chargée sont mixtes (contraintes et déplacements prescrits). Quand uniquement des contraintes sont appliquées sur la face plane du cylindre, les constantes sont déterminées par troncature d'un système infini d'équations linéaires. Une autre approche du problème est basée sur une méthode énergétique variationnelle [Horvay et Mirabal 1958] qui offre l'avantage d'être plus simple, mais conduisait à des singularités dans les valeurs des contraintes aux conditions aux limites. Toutes ces méthodes en fait ont été utilisées pour résoudre des problèmes particuliers à chargements thermiques. Les chargements thermiques convenaient du fait de leur lente variation le long de la surface sur laquelle ils sont appliqués, et de leur continuité. Dans le cas de conditions aux limites discontinues ou irrégulières comme c'est le cas de notre problème, ces méthodes ne donnent que des solutions approchées sinon incorrectes. En effet, il faut que la forme de la fonction mathématique qui exprime le champ des contraintes à l'intérieur du solide, soit capable de reproduire la forme des contraintes sur les conditions aux limites. Si ces dernières sont discontinues, elles seront alors approximées par leur moyenne de sorte que leur torseur uniquement soit respecté.

La façon la plus générale d'exprimer une condition aux limites constitue à l'écrire en séries de Fourier. Si le chargement est appliqué sur la face latérale du cylindre, il est alors fonction de la coordonnée axiale, de sorte qu'interviennent uniquement des fonctions trigonométriques dans son développement en séries. S'il est appliqué sur la surface plane, il est fonction du rayon. Comme les séries de Fourier stipulent implicitement une périodicité qui s'exprime en fonction de la variable choisie, ils sont incapables de reproduire la symétrie radiale. Les conditions aux limites doivent alors être écrites en séries de Fourier-Bessel. Le problème du cylindre comprimé entre deux tampons rigides [Bentham et Minderhood 1972] en constitue un exemple.

Plus récemment, une formulation adéquate du champ des déplacements a permis de résoudre le problème du cylindre soumis à des forces concentrées à ses deux extrémités, et ceci d'une façon simple [Wei et al. 1999]. Cependant, cette solution est appliquée sur un cylindre de hauteur finie. Or le cylindre de hauteur finie est équivalent au cylindre semi-infini quand le chargement sur les extrémités est auto-équilibré, et le rapport hauteur/diamètre du cylindre est

grand. Effectivement, quand le cylindre est de hauteur finie, les deux zones de contraintes au voisinage des régions chargées n'interfèrent pas, la décroissance exponentielle des contraintes fait que le centre du cylindre se trouve dépourvu de toute sollicitation. Alors la hauteur du cylindre n'intervient plus dans la solution, il est considéré comme cylindre « long » à l'opposé du cylindre « court » dans lequel les contraintes dans sa section centrale ne sont pas nulles ou constantes. En général, quand le rapport hauteur/diamètre est supérieur à 2, le cylindre peut être considéré comme long [Lurie 1943], ce qui doit être vérifié à postériori.

Nous considérons un cylindre de diamètre $2R$ et de hauteur $2H$ ($H > 2R$) soumis à ses extrémités à des contraintes auto-équilibrées générées par deux forces $\pm F$ considérées à un temps quelconque ($t > t_1$). L'origine du repère cylindrique (r, θ, z) est située au centre du cylindre (figure III.8).

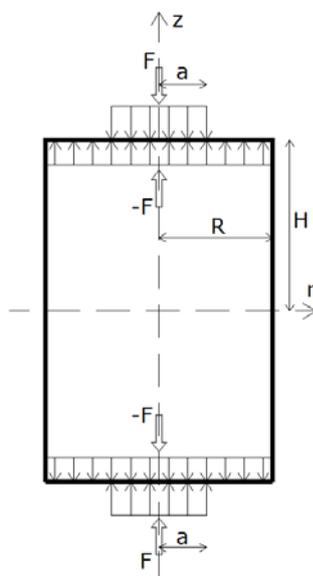


Fig. III.8 –Cylindre long ($H > 2R$) soumis à des contraintes auto-équilibrées de résultantes $\pm F$

Dans un problème axisymétrique, il est possible d'exprimer tous les champs mécaniques en fonction d'un potentiel Φ [Love 1944], appelé potentiel de contraintes ou de déplacements, selon sa formulation.

La composante verticale du déplacement (désignée par p_z) a l'expression suivante :

$$p_z = -[2(1 - \nu)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)\Phi + (1 - 2\nu)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}] \quad (43)$$

Quant aux contraintes normales et de cisaillement :

$$\sigma_z = -2\mu[(2 - \nu)\frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 - \frac{\partial^3}{\partial z^3}]\Phi \quad (44)$$

$$\sigma_{rz} = -2\mu[-(1 - \nu)(\frac{\partial^3}{\partial r^3} + \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial}{r\partial r})) + \nu\frac{\partial^3}{\partial r\partial z^2}]\Phi \quad (45)$$

$$\sigma_r = -2\nu\mu \nabla^2 \frac{\partial\Phi}{\partial z} + 2\mu\frac{\partial^3\Phi}{\partial z\partial r^2} \quad (46)$$

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ est l'opérateur Laplacien.

La formulation du potentiel doit pouvoir permettre aux contraintes et aux déplacements de satisfaire correctement les conditions aux limites. En plus, les équations de compatibilité des déformations doivent être vérifiées, ce qui est une condition essentielle pour que le champ de déplacements obtenu soit compatible avec le champ des déformations.

Si on écrit les équations de compatibilité en fonction de (43) à (46), on aboutit à la condition suivante sur Φ , appelée condition de bi-harmonicité que doit vérifier le potentiel :

$$\nabla^4\Phi = \nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0$$

Le potentiel de déplacement Φ adopté a la forme suivante [Wei et al 1999]:

$$\begin{aligned} \Phi = -\frac{R^3}{2\mu} \left\{ A_0 \frac{\kappa^3 \eta^3}{6} + C_0 \frac{\kappa \eta \rho^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi\eta)}{\beta_n^3} [A_n I_0(\beta_n \rho) + B_n \beta_n \rho I_1(\beta_n \rho)] \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_s \rho)}{\lambda_s^3} [C_s \sinh(\gamma_s \eta) + D_s \gamma_s \eta \cosh(\gamma_s \eta)] \right\} \quad (47) \end{aligned}$$

où $\rho = \frac{r}{R}$; $\eta = \frac{z}{H}$; $\kappa = \frac{H}{R}$; λ_s est le s -ième zéro de J_1 ($J_1(\lambda_s) = 0$); $\gamma_s = \lambda_s \kappa$; $\beta_n = \frac{n\pi}{\kappa}$.

$A_0, C_0, A_n, B_n, C_s, D_s$ sont des coefficients inconnus, à déterminer par le biais des conditions aux limites.

En remplaçant (47) dans (45) et (46), et en appliquant les conditions aux limites $\sigma_{rz} = \sigma_r = 0$ pour $\rho = 1$, on obtient les relations suivantes entre les inconnues:

$$A_0\nu + (2\nu - 1)C_0 = 0 \quad (48)$$

$$E_n + \sum_{s=1}^{\infty} F_s Q_{sn} = 0 \quad (49)$$

Où on a posé que $Q_{sn} = \frac{4(-1)^n \gamma_s (n\pi)^2 J_0(\lambda_s) \sinh^2 \gamma_s}{\Omega_s (\gamma_s^2 + (n\pi)^2)^2}$ et $\Omega_s = \sinh \gamma_s \cosh \gamma_s + \gamma_s$

E_n et F_s sont reliées aux inconnues initiales A_n, B_n, C_s, D_s par les relations suivantes:

$$\frac{A_n}{2(1-\nu)I_1(\beta_n) + \beta_n I_0(\beta_n)} = \frac{B_n}{-I_1(\beta_n)} = \frac{E_n}{[[2(1-\nu) + \beta_n^2]I_1^2(\beta_n) - \beta_n^2 I_0^2(\beta_n)]/\beta_n} \quad (50)$$

$$\frac{C_s}{2\nu \sinh \gamma_s + \gamma_s \cosh \gamma_s} = \frac{D_s}{-\sinh \gamma_s} = \frac{-F_s}{\Omega_s} \quad (51)$$

Les conditions aux limites appliquées sur les surfaces planes ($\eta = \pm 1$) sont :

$$\sigma_z = \begin{cases} -\frac{F}{\pi R^2 \rho_a^2} + \frac{F}{\pi R^2} & \text{pour } \rho \leq \rho_a \quad (\rho_a = \frac{a}{R}) \\ \frac{F}{\pi R^2} & \text{pour } \rho > \rho_a \end{cases} \quad (52)$$

Il est convenable de les développer en séries de Fourier-Bessel, qui constituent une base orthogonale. Il est ainsi possible de trouver de nouvelles relations entre les inconnues, en identifiant les vecteurs propres des conditions aux limites avec ceux des contraintes axiales, et ceci comme suit.

L'expression de (52) sous forme de séries de Fourier-Bessel est:

$$\sigma_z = \frac{2F}{\pi \rho_a R^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_s \rho_a)}{\lambda_s J_0^2(\lambda_s)} J_0(\lambda_s \rho) \quad (53)$$

remplaçant (47) dans (44) et en identifiant avec (53) pour $\eta = \pm 1$, on obtient les relations suivantes entre les inconnues:

$$A_0(1-\nu) + 2(2-\nu)C_0 = 0 \quad (54)$$

$$F_s + \sum_{n=1}^{\infty} E_n R_{sn} = \frac{2F}{\pi \rho_a R^2} \frac{J_1(\lambda_s \rho_a)}{\lambda_s J_0^2(\lambda_s)} \quad (55)$$

$$\text{Où on a posé } R_{sn} = \frac{4(-1)^{(n+1)} \lambda_s^2 \beta_n^2 I_1^2(\beta_n)}{[[2(1-\nu) + \beta_n^2]I_1^2(\beta_n) - \beta_n^2 I_0^2(\beta_n)][\lambda_s^2 + \beta_n^2]J_0(\lambda_s)} \quad (56)$$

Les équations (48),(49),(54),(55) constituent un système d'équations linéaires, d'inconnues A_0, C_0, F_s, E_n . A_0, C_0 peuvent être directement déterminées par les équations (48) et (54), et sont nulles. F_s, E_n sont des inconnues qui dépendent des zéros λ_s de J_1 qui en fait sont de nombre infini. Donc il est nécessaire de tronquer le système (49),(55) de sorte à avoir un nombre suffisant de termes F_s, E_n à partir duquel la solution atteint des niveaux qui ne varient pratiquement plus en contraintes et en déplacements. Pratiquement, la solution converge à partir de 15 termes F_s et E_n .

Pour obtenir le déplacement surfacique sur l'extrémité chargée du cylindre ($\eta = 1$), on remplace (47) dans (43). On a ainsi l'expression analytique du déplacement axial en tout point de coordonnée radiale $\rho = \frac{r}{R}$ de la surface :

$$p_z = \frac{1 - \nu}{\mu} R \sum_{s=1}^{\infty} F_s \frac{J_0(\lambda_s \rho) \sinh^2 \gamma_s}{\lambda_s \Omega_s} \quad (57)$$

Le déplacement obtenu par cette formule constitue la solution du problème statique du cylindre semi-infini (ou cylindre long) soumis à un chargement auto-équilibré à son extrémité. La condition nécessaire pour pouvoir considérer que la solution statique est équivalente en moyenne à la solution dynamique, est l'atteinte du régime permanent, soit de l'équilibre dynamique. Dans la partie III.2 nous avons considéré qu'à partir du temps t_1 , le problème mécanique qui décrirait correctement le déplacement serait celui du cylindre, et non du demi-espace. Le temps d'établissement du régime permanent du cylindre serait situé après le temps t_1 , qu'on va considérer comme une borne inférieure de la présente solution.

III.3.2 Recherche d'une forme explicite de la correction de poinçonnement

Bien que (57) fournisse le déplacement local en tout point situé sous l'éprouvette, il est nécessaire de résoudre numériquement le système d'équations (49) et (55) afin d'obtenir les valeurs des inconnues F_s et E_n . Il est convenable dans le cadre des barres de Hopkinson d'avoir une expression plus simple de la correction de déplacement, qui soit formulée d'une façon explicite, de façon à ce qu'elle soit incorporable au logiciel de dépouillement.

Le déplacement dépend des propriétés mécaniques du matériau : ν , μ ($\mu = G$), et des variables réduites ρ , ρ_a et η ($\rho = \frac{r}{R}$; $\rho_a = \frac{a}{R}$; $\eta = \frac{z}{H}$). La hauteur du cylindre est choisie de sorte à assurer que pour $\eta = 0$ (à la section centrale) les contraintes et les déplacements tendent vers zéro. Ceci est vérifié pour $\frac{H}{R} \geq 3$. Ainsi les valeurs des sollicitations dans tout le cylindre ne dépendent plus de sa hauteur, comme dans le cas du cylindre semi-infini.

La correction du déplacement unidimensionnel donné par les barres de Hopkinson est particulièrement importante dans le cas où le rayon a de l'éprouvette est petit par rapport à celui de la barre. Il est prévisible que la correction p_z devienne négligeable quand le diamètre de l'éprouvette est grand. L'analyse qui suit considère que $0.1 \leq \rho_a \leq 0.5$. Le déplacement recherché concerne les points situés sous l'éprouvette : $0 \leq \rho \leq \rho_a$. Le coefficient de Poisson peut prendre toute valeur régulière : $0.1 \leq \nu \leq 0.4$.

Le coefficient de Poisson intervient dans (57) et dans l'expression de R_{sn} (56). Il est possible d'évaluer l'influence de ν situé à l'intérieur de (56) en écrivant (57) sous la forme: $p_z = \frac{1 - \nu}{\mu} * A$, où le facteur A est calculé pour différentes valeurs de ν . On trouve que A est quasi constant (à 2% près), tous paramètres fixés à part ν . Donc le terme $\frac{1 - \nu}{\mu}$ est suffisant pour décrire les propriétés du matériau en ce qui concerne p_z . Reste alors à étudier le comportement de (57) vis-à-vis des variables restantes qui sont ρ et ρ_a .

Le système d'équations linéaires (55) montre que F_s et E_n sont proportionnelles à $\frac{2F}{\pi\rho_a R^2}$, car ce terme multiplie le second membre du système. Comme le déplacement (57) est généré par une somme linéaire de F_s , alors son expression peut être factorisée par $\frac{2F}{\pi\rho_a R^2}$. En posant $G_s = \frac{\pi\rho_a R^2}{2F} F_s$, on peut écrire (57) de la façon suivante:

$$p_z = \frac{2(1 - \nu)F}{\pi\mu R\rho_a} \sum_{s=1}^{\infty} G_s \frac{J_0(\lambda_s \rho) \sinh^2 \gamma_s}{\lambda_s \Omega_s} = \frac{2(1 - \nu)F}{\pi\mu R\rho_a} M(\rho, \rho_a) \quad (58)$$

Pour identifier le comportement de la série dans (58), on considère la fonction

$$M(\rho, \rho_a) = \sum_{s=1}^{\infty} G_s \frac{J_0(\lambda_s \rho) \sinh^2 \gamma_s}{\lambda_s \Omega_s}$$

que nous traçons en fonction de ρ_a pour différentes valeurs de ρ : ($\rho = 0, \rho = 0.15, \rho = 0.30, \rho = \rho_a$) (Figure III.9).

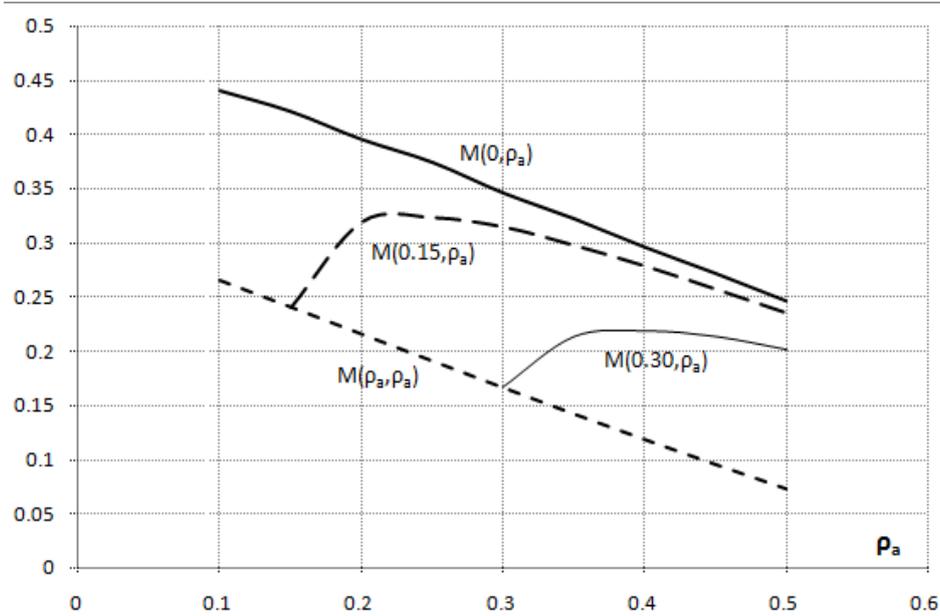


Fig. III.9 – Valeurs de $M(\rho, \rho_a)$ pour $\rho = 0, 0.15, 0.3, \rho_a$

La figure III.9 montre que $M(0, \rho_a)$ et $M(\rho_a, \rho_a)$ ont des formes particulières ; elles apparaissent être des fonctions quasi-linéaires de ρ_a . Les formes des autres courbes ne présentent pas d'aspects caractéristiques. Nous pouvons supposer que $M(0, \rho_a)$ et $M(\rho_a, \rho_a)$ peuvent être formulées de la façon suivante :

$$M(0, \rho_a) = \frac{1}{2} - \frac{\rho_a}{2} \quad (59)$$

$$M(\rho_a, \rho_a) = \frac{1}{\pi} - g(\rho_a)\rho_a \quad (60)$$

A l'origine ($\rho = 0$) l'équation (59) est bien définie et facilement identifiable. Par contre, la pente de la droite d'équation (60), (pour $\rho = \rho_a$) désignée par $g(\rho_a)$, est encore inconnue.

On peut obtenir une expression explicite du déplacement à l'origine $r = 0$, et ceci pour tout rayon d'éprouvette $0.1 \leq \rho_a \leq 0.5$, en remplaçant (59) dans (58) :

$$p_z = \frac{1}{\pi} \frac{1-\nu}{\mu} \frac{1-\rho_a}{R\rho_a} F \quad (61)$$

Afin d'avoir le déplacement en tout point sous l'éprouvette, il faut identifier la fonction $g(\rho)$. Pour cela, nous représentons sur la figure III.10 la fonction $g(\rho_a) = -\frac{1}{\rho_a} [M(\rho_a, \rho_a) - \frac{1}{\pi}]$. Ceci en fait revient à rechercher le comportement de $g(\rho)$ pour $\rho = \rho_a$, soit pour les points situés sur le périmètre de l'éprouvette. Nous remarquons que $g(\rho_a)$ est en fait une courbe, et non une constante, comme le suggérait l'identification (60) qui est basée sur la figure III.9.

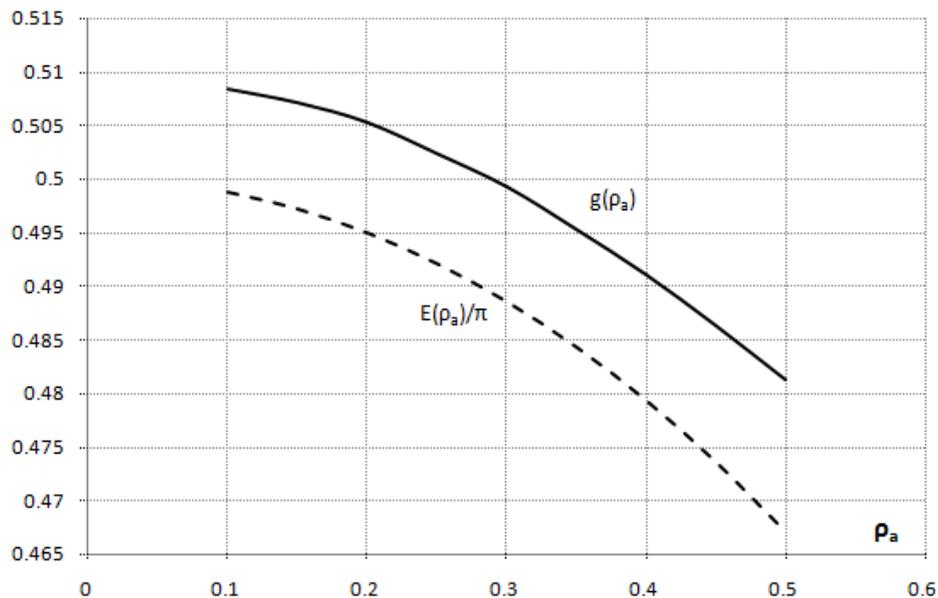


Fig. III.10 – Valeurs de $g(\rho)$ pour $\rho = \rho_a$

La fonction $g(\rho_a)$ doit être identifiée en tenant compte de l'équation (59). En effet, le second terme de (59) suggère que $g(0) = \frac{1}{2}$. La forme de $g(\rho_a)$ sur la figure III.10 ainsi que la condition mentionnée montre que $g(\rho_a)$ peut être approximée par $\frac{E(\rho_a)}{\pi}$, où $E(\rho_a)$ est l'intégrale elliptique complète du second genre $E(\rho_a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \rho_a^2 \sin^2 \theta} d\theta$

On va supposer d'après (59) et (60) que $M(\rho, \rho_a)$ peut être générée par une fonction de la forme:

$$M(\rho, \rho_a) = \frac{1}{\pi}(f(\rho, \rho_a) - E(\rho)\rho_a) \quad (62)$$

Où $f(\rho, \rho_a)$ est une fonction pour laquelle deux valeurs particulières sont connues : $f(0, \rho_a) = \frac{\pi}{2}$ et $f(\rho_a, \rho_a) = 1$ comme on peut le déduire d'après (59) et (60). De la même façon que pour $g(\rho)$, on détermine $f(\rho, \rho_a)$ en traçant la fonction $f(\rho, \rho_a) = \pi M(\rho, \rho_a) + E(\rho)\rho_a$. On trouve que $f(\rho, \rho_a)$ peut être approximée par $E(\frac{\rho}{\rho_a})$ qui vérifie les deux valeurs particulières citées.

Afin de valider la forme trouvée pour $M(\rho, \rho_a) = \sum_{s=1}^{\infty} G_s \frac{J_0(\lambda_s \rho) \sinh^2 \gamma_s}{\lambda_s \Omega_s}$ (58), on trace sur la figure III.11 $M(\rho, \rho_a)$, et la fonction approximative trouvée, qui est désignée par $L(\rho, \rho_a) = \frac{1}{\pi}[E(\frac{\rho}{\rho_a}) - E(\rho)\rho_a]$, et ceci pour toutes les valeurs de ρ et ρ_a qui varient dans les intervalles respectifs $[0; \rho_a]$ et $[0.1; 0.5]$:

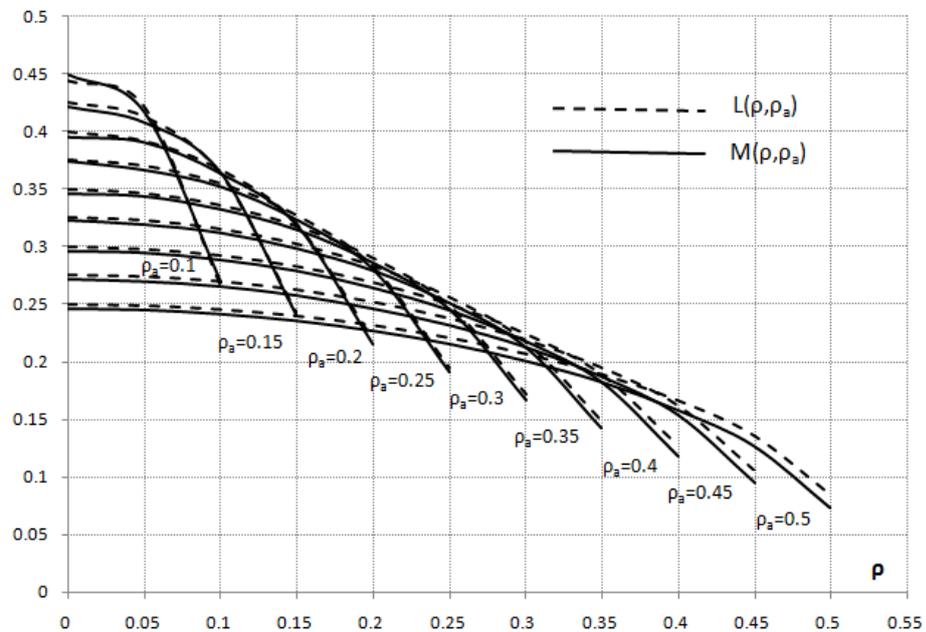


Fig. III.11 – Valeurs de $g(\rho)$ pour $\rho = \rho_a$

On remarque que la fonction $L(\rho, \rho_a)$ approxime bien $M(\rho, \rho_a)$, donc le déplacement p_z (58).

Finalement, en remplaçant dans (58) $M(\rho, \rho_a)$ par $L(\rho, \rho_a)$, on obtient l'expression explicite du poinçonnement élastique ci-dessous, qui est l'approximation de sa formulation analytique initiale (57):

$$p_z = \frac{2}{\pi^2} \frac{1-\nu}{\mu} \frac{1}{R\rho_a} [E(\frac{\rho}{\rho_a}) - E(\rho)\rho_a] F \quad (63)$$

A présent on peut calculer le poinçonnement moyen sous la surface de l'éprouvette en intégrant (63) le long du rayon de celle-ci:

$$p = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a 2\pi p_z r dr = \frac{4}{3\pi^2} \frac{1-\nu}{\mu} \frac{F}{a\rho_a} [2\rho_a - (\rho_a^2 + 1)E(\rho_a) - (\rho_a^2 - 1)K(\rho_a)] \quad (64)$$

Où $K(\rho_a)$ est l'intégrale elliptique complète du premier genre. Les fonctions elliptiques E et K sont bien définies et facilement intégrables dans un code de programmation.

III.4 Correction du déplacement unidimensionnel

Le déplacement uniaxial $u(t)$ donné par les barres de Hopkinson à chaque face de l'éprouvette, peut être corrigé en tenant compte des solutions trouvées pour le demi-espace (42) au tout début de l'essai, et de la solution pour le cylindre en régime permanent (64) :

$$d_{t_0 \leq t \leq t_1}(t) = u_0(t) = \frac{F_0 \tan \alpha}{\mu a} \left\{ \frac{8}{3\pi^2} (1-\nu)t + \frac{\pi k_1 t_0}{32 [4q_1 k_1 - \frac{q_1}{k_1} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} - \frac{k_1}{q_1}]} \right\} \quad (65)$$

$$d_{t > t_1}(t) = u(t) + p(t) = u(t) + \frac{4}{3\pi^2} \frac{1-\nu}{\mu} \frac{F(t)}{a\rho_a} [2\rho_a - (\rho_a^2 + 1)E(\rho_a) - (\rho_a^2 - 1)K(\rho_a)] \quad (66)$$

III.4.1 Analyse du déplacement corrigé $d(t)$ au voisinage de t_1

L'instant de transition $t_1 = \frac{R}{c_R}$ entre les solutions de déplacements relatives au demi-espace et au cylindre (soit le passage du régime transitoire du cylindre à son régime permanent), a été estimé dans la partie III.2 en se basant sur la limite de validité de la solution du demi-espace (65). Il est intéressant d'étudier le comportement de la solution (66) qui est valide pour $t > t_1$, au temps $t = t_1$. D'abord on peut remarquer que $d_{t>t_1}(t) > d_{t_0 \leq t \leq t_1}(t)$ pour toutes valeurs de ρ_a et ν .

On considère la fonction $\epsilon_{t_1} = \frac{d_{t>t_1}(t_1) - d_{t_0 \leq t \leq t_1}(t_1)}{d_{t>t_1}(t_1)}$ qui représente la distance relative entre les solutions (65) et (66) pour $t = t_1$. Afin de calculer cette fonction, on a besoin d'exprimer c_R en fonction de c_1 ou c_2 afin que ϵ_{t_1} soit exprimée en fonction de rapports de célérités. La célérité des ondes de surface est reliée à celle des ondes de cisaillement par la relation $\frac{c_R}{c_2} = \frac{0.87 + 1.12\nu}{1 + \nu}$ [Graff 1991]. Au voisinage de t_1 on a vu qu'on peut approximer la force mesurée par les barres de Hopkinson par un chargement linéaire en une fonction du temps: $F(t) = F_0 \tan \alpha t$, où $F_0 = \pi a^2 p_0$. (voir figure III.4).

Par conséquent il est possible de calculer le déplacement $u(t)$ en appliquant la théorie unidimensionnelle de propagation des ondes : $u(t) = \frac{1}{\pi R^2 \rho c_0} \int_0^t F(\tau) d\tau = \frac{c_0 F_0 \tan \alpha}{4\pi R^2 (1 + \nu) \mu} t^2$

On obtient la fonction ϵ_{t_1} qui dépend uniquement de $\rho_a = \frac{a}{R}$ et ν :

$$\epsilon_{t_1} = \frac{\frac{3\pi\sqrt{2(1+\nu)}\rho_a}{16(1-\nu)(0.87+1.12\nu)} - \frac{(\rho_a^2+1)}{\rho_a}E(\rho_a) - \frac{(\rho_a^2-1)}{\rho_a}K(\rho_a) - \frac{3\pi^3 k_1 \rho_a}{64(1-\nu)[4q_1 k_1 - \frac{q_1}{k_1} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} - \frac{k_1}{q_1}]}{2 + \frac{3\pi\sqrt{2(1+\nu)}\rho_a}{16(1-\nu)(0.87+1.12\nu)} - \frac{(\rho_a^2+1)}{\rho_a}E(\rho_a) - \frac{(\rho_a^2-1)}{\rho_a}K(\rho_a)} \quad (67)$$

La figure III.12 montre que les déplacements donnés par (65) et (66) pour $t = t_1$ ne sont pas égaux. Pour une barre en acier ($\nu = 0.3$) la distance relative entre les deux solutions varie entre 2% et 14%, pour $0.1 \leq \rho_a \leq 0.5$.

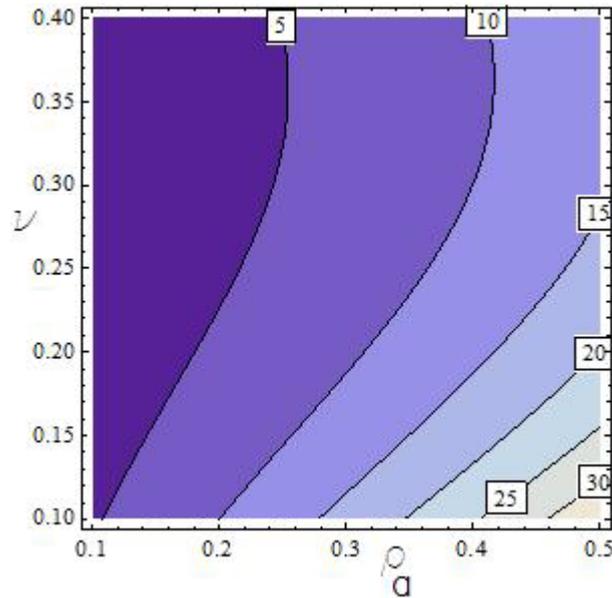


Fig. III.12 – Pourcentage d'erreur relative ($100\epsilon_{t_1}$) sur le déplacement pour $t = t_1$, entre les solutions (65) et (66), en fonction de ρ_a et ν .

Cette différence a lieu au début de l'essai et durant quelques μs . D'autre part, la valeur du déplacement au début de l'essai est minime, de sorte que la discontinuité entre les deux déplacements est peu visible sur l'échelle entière de l'essai, comme on le vérifiera dans l'application numérique suivante.

III.4.2 Validation numérique

Deux simulations dynamiques numériques sont réalisées avec le code Abaqus explicite pour un cylindre de rayon 25 mm, soumis aux deux cas de chargements suivants : un disque de pression de rayon 7.5 mm ($\rho_a = 0.3$), et un autre de rayon 12.5 mm ($\rho_a = 0.5$) ayant la même résultante $F(t)$.

Les détails techniques des simulations sont détaillés ci dessous:

Le code Abaqus-explicit est utilisé ; les éléments finis qui constituent le maillage sont de taille 0.5mm et de type CAX4R à intégration réduite. Le maillage est structuré, généré par la méthode de Coon. Le schéma d'intégration temporelle est offert par le logiciel qui calcule automatiquement le pas d'intégration. La non-linéarité géométrique n'est pas prise en compte vues les faibles déformations mises en jeu. Le chargement surfacique qui est une fonction amplitude-temps est introduit d'une façon tabulée. Le caractère progressif du chargement n'a pas induit des oscillations de hautes fréquences sur les courbes de déplacement. Les déplacements sont relevés pour chaque pas de temps pour tous les nœuds situés sous la surface chargée, puis ils sont transférés vers un classeur Excel pour le calcul du déplacement moyen de la surface chargée.

La courbe de chargement est représentée sur la figure III.13. Sur la même figure sont montrés les déplacements moyens sous le disque chargé, tels que calculés par les relations (65) et (66), et tels qu'obtenus par le calcul numérique. La courbe du déplacement moyen, dans une section de la barre éloignée de la zone de chargement, est aussi tracée. Elle est équivalente à la mesure expérimentale fournie par les jauges qui mesurent un déplacement unidimensionnel.

Les simulations numériques montrent d'abord que la solution explicite approxime avec une grande précision la solution analytique, vue la quasi-superposition des courbes en traits-tirets et en traits continus. Le chargement choisi dure 85 μ s et sa forme simule le comportement d'un matériau fragile. Sa durée est volontairement courte, pour permettre la visualisation sur une échelle convenable des différentes solutions temporelles (demi-espace et cylindre). On remarque que le déplacement moyen $u(t)$ de la section de la barre, tel que relevé à une grande distance de l'impact, a un niveau inférieur au déplacement surfacique moyen $d(t)$ sous l'éprouvette. La différence est $p(t)$, le poinçonnement élastique. On remarque que pour une force de même résultante, mais appliquée sur des surfaces variables, le déplacement $u(t)$ est le

même, alors que le déplacement corrigé $d(t)$ tend vers $u(t)$ au fur et à mesure que le diamètre de l'éprouvette tend vers celui de la barre.

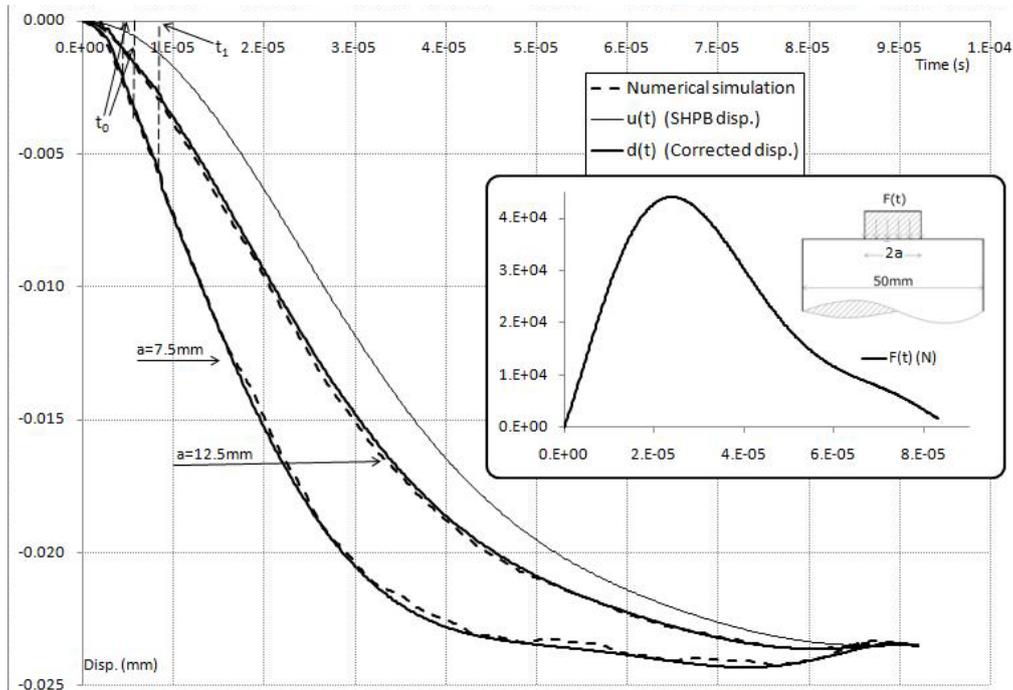


Fig. III.13 –Déplacements moyens analytiques, numériques, et unidimensionnels sous des disques de pression de rayon 7.5 mm et 12.5 mm de même résultante $F(t)$, appliqués sur un cylindre de rayon 25 mm, selon un chargement variable le long du temps.

III.4.3 Remarques sur le délai temporel observé sur la force mesurée

Nous représentons sur la figure III.14 un exemple des déformations axiales mesurées sur la barre de Hopkinson, à grande distance du chargement. En fait ces déformations correspondent au chargement de la figure III.13. Nous remarquons que bien que le chargement soit linéaire au début (figure III.13), la mesure des jauges montre que le signal qui s'est propagé possède un pied de courbe arrondi (voir aussi figure III.3). Cette observation qui est commune à tous les essais expérimentaux, est d'origine physique car elle se manifeste dans les solutions théoriques des problèmes d'impact. Ces solutions montrent clairement que si on applique un signal instantané d'une certaine durée (un créneau) au bout d'une barre, et qu'on relève à une certaine distance les déformations axiales de la barre, on voit que le créneau s'est transformé

en un trapèze avec ses flancs de montée arrondis. Ces flancs de montée représentent un délai temporel puisque le chargement initial atteint son amplitude instantanément, avec un temps de montée nul. Ce délai correspond au temps requis pour atteindre un état de contraintes homogène dans la section de la barre ; il n'est pas observé dans la théorie unidimensionnelle où la dimension radiale de la barre est négligée, soit son caractère tridimensionnel aboli. L'étude présente a montré l'existence d'un délai $t_1 = \frac{R}{c_R}$ au terme duquel la solution du cylindre commence à être applicable. Ceci est en accord avec les théories tridimensionnelles dynamiques des barres [Bancroft 1941, Skalak 1957].

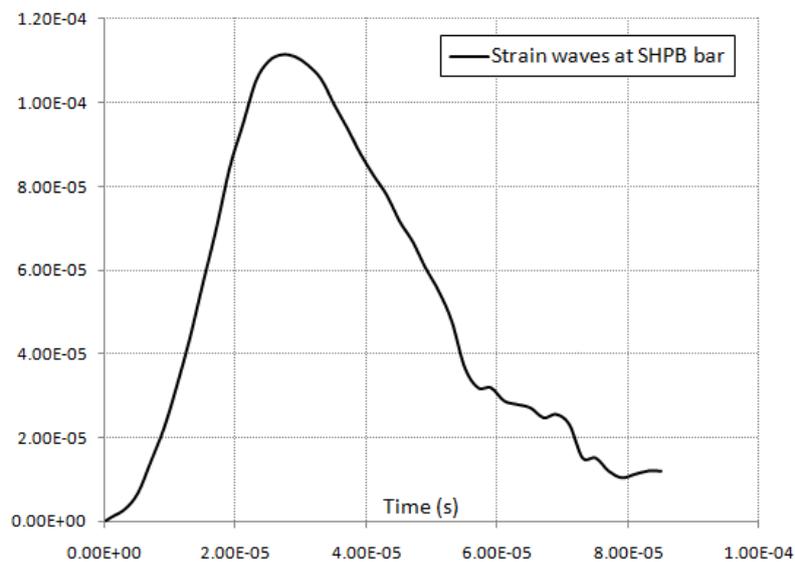


Fig. III.14 –Déformations axiales mesurées par les jauges à une grande distance de l'impact

III.4.4 Implémentation pratique de la correction de poinçonnement

La force appliquée sur les faces des deux barres étant connue (mesurée par l'intermédiaire des barres de Hopkinson), il est possible de déduire la correction $p(t)$ connaissant le diamètre de l'éprouvette. Vu que le poinçonnement a lieu aux faces des deux barres entrante et sortante, le double de sa valeur intervient dans la correction du déplacement unidimensionnel mesuré.

Nous représentons sur la figure III.15 la configuration déformée de la barre entrante à un temps donné. Si on désigne par l_0 la longueur initiale de l'éprouvette, sa longueur au temps t devient : $l(t) = l_0 - 2[u(t) - p(t)]$. La longueur $l_0 - 2u(t)$ qui est fournie par les barres de

Hopkinson sous-estime la longueur réelle; la longueur réelle de l'éprouvette y est supérieure de $2p(t)$. Par conséquent la déformation axiale réelle de l'éprouvette est inférieure à celle donnée par les barres de Hopkinson.

Une conséquence directe de la prise en compte de la correction de poinçonnement est l'amélioration de la mesure du module d'élasticité du matériau testé. En effet, en négligeant l'effet du poinçonnement, le module d'élasticité mesuré est sous-estimé. Ceci confirme la constatation expérimentale systématique de la mesure d'un module d'élasticité inférieur à celui qui est prévu. Pour évaluer l'influence de la correction de poinçonnement sur la valeur mesurée $E_{apparent}$ du module de Young, on incorpore $p(t)$ à la loi de Hooke.

On obtient :

$$\frac{1}{E_{real}} = \frac{1}{E_{apparent}} - \frac{2p(t)}{\sigma(t)l_0} \quad (68)$$

Où E_{real} est le module prévu, et $\sigma(t) = \frac{F(t)}{\pi a^2}$.

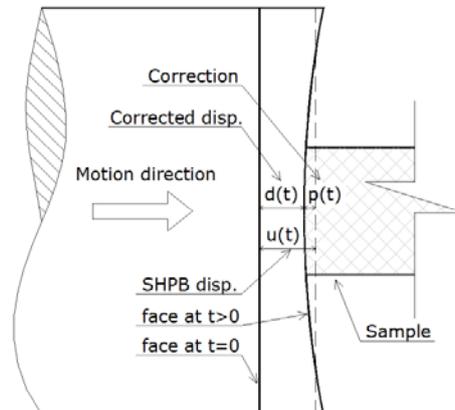


Fig. III.15 – Vue schématique de la barre entrante dans sa configuration déformée

III.4.5 Illustrations expérimentales et applications

Simulation élastique avec correction du poinçonnement

Lors du dépouillement des essais aux barres de Hopkinson, les ondes brutes mesurées aux jauges (figure III.16) sont d'abord transportées aux extrémités des barres (figure III.17), en considérant la dispersion. L'onde incidente étant connue, on suppose que l'éprouvette a un comportement purement élastique. En considérant les dimensions réelles de l'éprouvette, et en choisissant à priori un module d'élasticité, il est possible d'effectuer une simulation unidimensionnelle de l'essai en supposant que l'éprouvette garde un comportement élastique et en supposant le module d'élasticité de l'éprouvette connu. On obtient ainsi les ondes réfléchies et transmises qui résultent du comportement élastique de l'éprouvette. Alors en faisant varier la valeur du module d'élasticité postulé, de sorte à faire coïncider les courbes simulées aux parties élastiques des courbes réelles (figure III.17), il est possible de fixer l'origine des trois ondes avant de procéder au dépouillement final dont résultera la courbe contraintes-déformations (figure III.18).

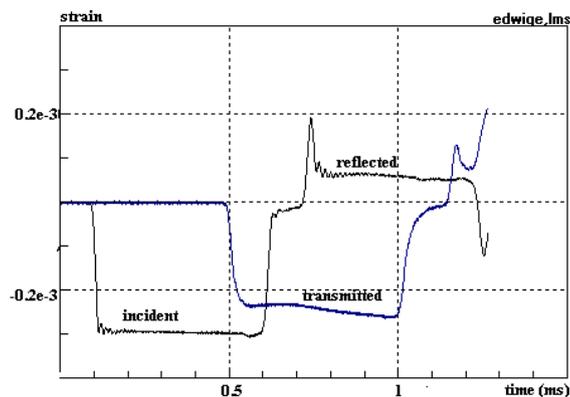


Fig. III.16 – Ondes mesurées aux jauges pour l'essai « STEEL_08 »

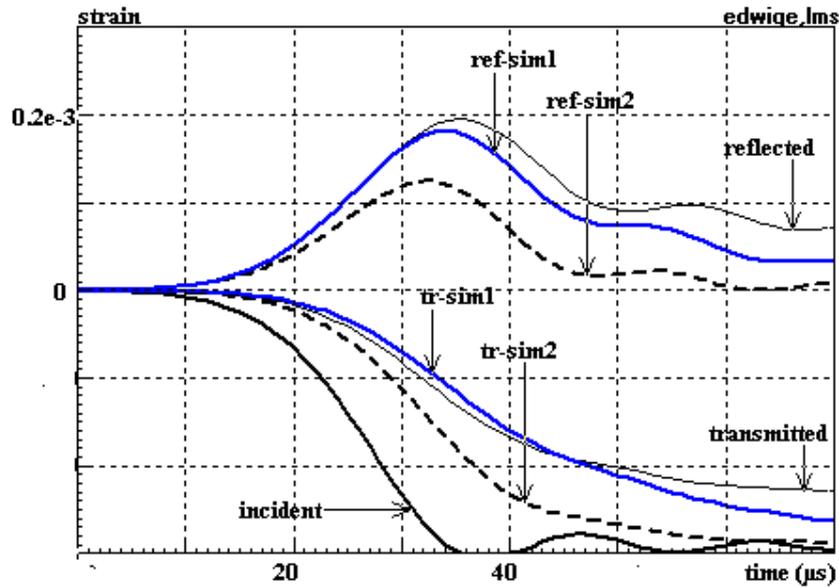


Fig. III.17 –Ondes transportées ; interface de la simulation élastique (Essai « STEEL_08 »)

“incident”, “reflected”, “transmitted” sont les ondes expérimentales réelles transportées aux faces de l’éprouvette

“tr-sim2” and “ref-sim2” sont les ondes simulées transmises et réfléchies en considérant un comportement élastique avec $E = 1.10^{11}$ Pa

“tr-sim1” and “ref-sim1” sont les ondes simulées transmises et réfléchies en considérant un comportement élastique avec $E = 2.10^{11}$ Pa (module correct)

On observe que le module d’élasticité prévu (ou correct) de l’acier correspond aux ondes qui sont différentes des ondes expérimentales ; celles-ci montrent un module d’élasticité deux fois plus faible que le module réel. Ceci est dû à l’effet du poinçonnement expliqué dans la partie III.4.4. Quand le diamètre de l’éprouvette est égal à celui de la barre, on retrouve le module prévu pour le matériau.

La figure III.18 montre que la correction de poinçonnement n’est pas négligeable et qu’elle affecte le comportement du matériau (courbe contraintes-déformations), surtout au début de l’essai. Elle est d’autant plus importante que le diamètre de l’éprouvette est petit et que la

déformation totale n'est pas grande. Dans le cas des essais sur matériaux fragiles non confinés, sa prise en compte devient primordiale.

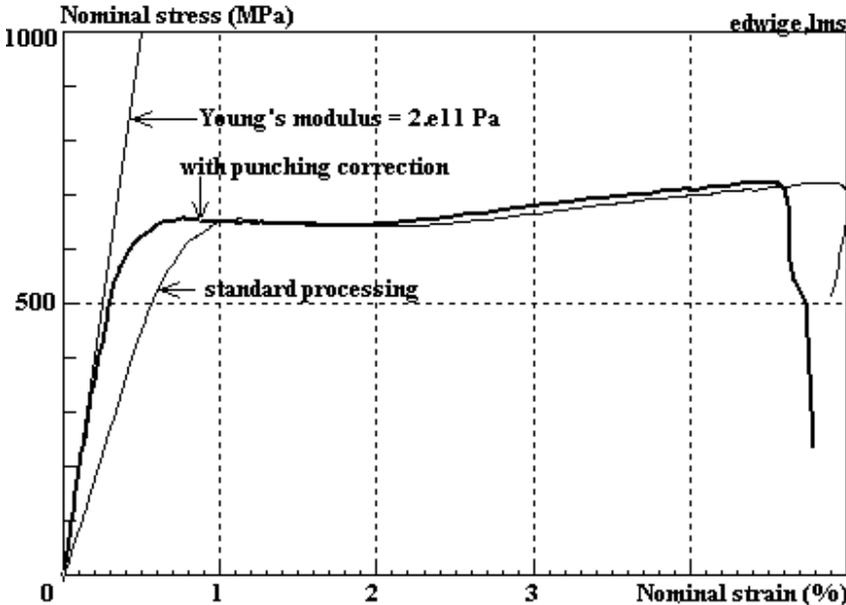


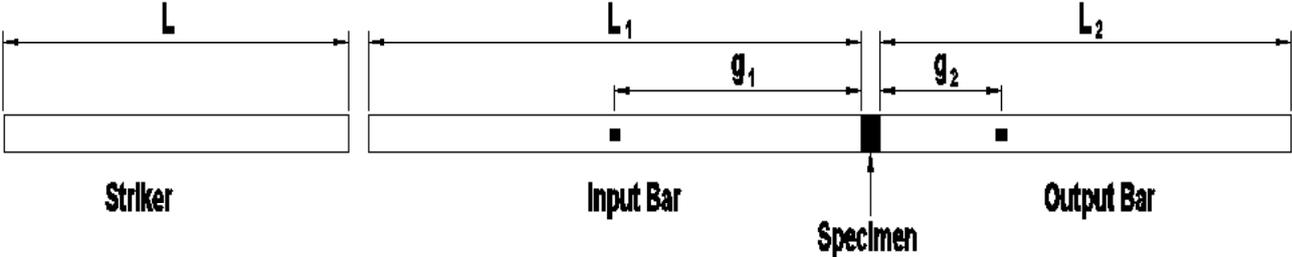
Fig. III.18 – Courbes contraintes-déformations .Influence du poinçonnement.

(Essai « STEEL_08 »)

Détails de l'essai "STEEL_08"

Les caractéristiques de l'éprouvette sont données dans le tableau ci-dessous

- L_i – Longueur des barres et de l'impacteur
- g_i – Distance entre les faces de l'éprouvette et les jauges



Caractéristiques de l'essai "STEEL_08"

Element	Length (m)	Diameter (m)	Mass density (Kg/m³)	Wave Speed (m/s)	Gage Position (m)
Striker	1.204	0.0203	7960	4795	
Input Bar	3.01	0.02017	7960	4795	1.495
Output Bar	2.009	0.02017	79607	4795	0.375
Specimen	0.00645	0.00513	7805		

Vitesse d'impacteur: 2.79 m/s

III.5 Conclusion

Le problème élastique axisymétrique de la barre soumise à une charge dynamique appliquée sur une partie de sa face plane est investigué. Le déplacement axial sur la surface chargée n'est pas uniforme et varie le long du rayon. Une expression analytique du déplacement est trouvée, fonction des propriétés mécaniques de la barre et du chargement (amplitude et diamètre), et correctement approximée par une formule explicite.

Dans le cadre des barres de Hopkinson, l'application de cette formule permet de corriger le déplacement uniaxial mesuré, et par conséquent d'obtenir les propriétés mécaniques correctes du matériau testé.

Chapitre IV

Procédure de dépouillement des essais

Le dépouillement des essais requiert la connaissance du champ des contraintes et des déformations dans l'éprouvette. Les essais dynamiques et statiques permettent la mesure directe des valeurs nominales de contrainte et déformation moyennes axiales aux faces de l'échantillon (chapitre II) en tenant compte de l'influence des bouchons (barres multi-impédances en dynamique ; soustraction des déformations axiales des bouchons en statique). En revanche, la contrainte latérale ainsi que la déformation radiale ne sont pas mesurées d'une façon directe, et nécessitent une étude afin de déterminer des relations qui les relient avec les mesures des jauges situées sur la face extérieure de la cellule. Ces relations doivent aussi tenir compte de la hauteur de l'éprouvette qui est variable durant l'essai. La déformation radiale, bien que négligeable, permet l'obtention de la contrainte axiale effective dans l'éprouvette. Bien entendu, certaines hypothèses sont nécessaires au départ, afin de pouvoir formuler le problème d'une façon simple sans pour autant que ce soit au détriment de la précision.

Le champ de contrainte axiale est-il uniforme dans l'éprouvette ? Cette question se pose dans les essais dynamiques, et a été abordée dans la partie II.1 relative à la présentation théorique des barres de Hopkinson. La face de l'éprouvette du côté de la barre entrante est chargée alors que l'autre est au repos au début de l'essai. Ce n'est qu'après plusieurs aller-retours des ondes que les forces de contact des deux faces de l'éprouvette atteignent un même niveau de contraintes. Afin de déterminer le temps à partir duquel l'uniformité des contraintes peut être supposée, une analyse de la propagation des ondes dans une éprouvette élastique a été effectuée par le moyen de la méthode des caractéristiques [Yang et Shim, 2005]. Pour une onde incidente de forme trapézoïdale, -qui est plus réaliste au vu du temps de montée non nul associé au choc impacteur-barre entrante- le nombre de parcours n de l'onde est obtenu en fonction du rapport d'impédance entre la barre et l'éprouvette $\beta = \frac{A\rho c}{A_0\rho_0c_0}$ (figure IV.1).

Avec respectivement au numérateur et au dénominateur la surface, la densité et la célérité des ondes, pour l'éprouvette et la barre. Dans notre cas c'est l'impédance du bouchon qu'il faut considérer à la place de celle de la barre ; son diamètre est égal à celui de l'éprouvette. En supposant pour l'éprouvette que les grandeurs en question restent constantes au début de

l'essai, nous obtenons : $\beta = \frac{\rho c}{\rho_0 c_0} = \frac{2.2 * 3540 * 10^3}{7.85 * 5110 * 10^3} \approx \frac{1}{5}$, Ce qui montre que 5 parcours de la longueur (soit une durée 55 μ s pour une éprouvette de longueur 40 mm) sont suffisants pour que l'exploitation des résultats soit valable. Ce temps est négligeable par rapport à la durée totale de l'essai qui est de 800 μ s.

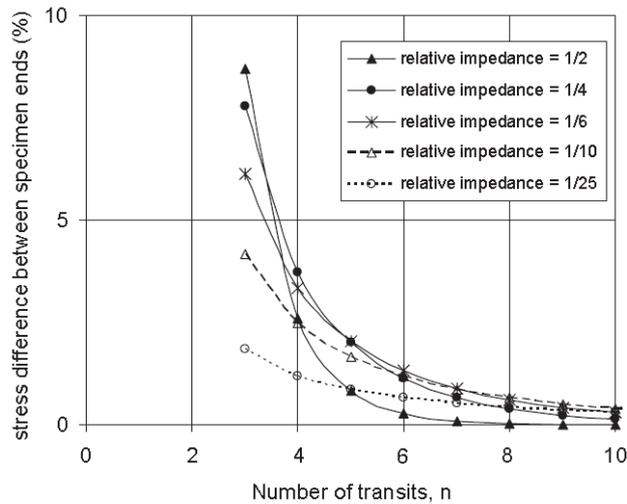


Fig. IV.1 –Variation de l'uniformité des contraintes axiales en fonction du nombre d'allers-retours d'onde, pour différentes impédances relatives [Yang et Shim 2005]

- Dans la mesure où l'éprouvette est en équilibre mécanique ; les contraintes radiales dans l'éprouvette varient-elles le long de sa hauteur ? Autrement dit, à un temps donné, la pression latérale exercée sur la cellule est-elle homogène ? Un moyen simple pour vérifier cette hypothèse consiste à simuler numériquement le problème. Un chargement axial est appliqué sur une éprouvette de matériau homogène isotrope placée dans une cellule métallique élastique (figure IV.2). La contrainte radiale peut être considérée comme uniforme dans la suite de l'étude.

Compte tenu de ces hypothèses, une première tâche consiste à optimiser les dimensions de la cellule à adopter. Pour cela la solution générale de mécanique des milieux continus, d'un tube cylindrique de dimensions arbitraires soumis à un chargement uniforme sur une partie de sa hauteur, a été utilisée. Cette solution permet aussi de relier tous les champs mécaniques entre eux, de sorte qu'il est possible de calculer la pression intérieure à partir des déformations

orthoradiales extérieures. Ensuite, une méthode de dépouillement est proposée en vue de déterminer les comportements sphérique et déviatorique du matériau testé.

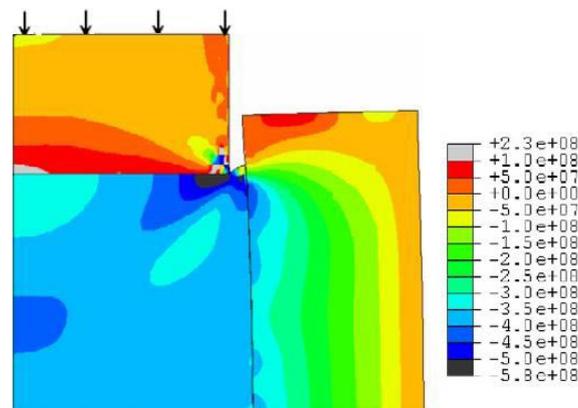


Fig. IV.2 –Champs des contraintes radiales dans l'éprouvette et la cellule, issus d'une simulation numérique avec code Abaqus Explicit.

La validation expérimentale de la méthode de dépouillement est effectuée par des essais de compression quasi-œdométrique sur une éprouvette en laiton. Le comportement du laiton est caractérisé par l'intermédiaire d'essais uniaxiaux statiques et dynamiques. L'intérêt d'utiliser le laiton comme moyen de validation provient du fait qu'il est possible de comparer les essais confinés statiques et dynamiques entre eux, ainsi que de les confronter aux essais uniaxiaux.

Bien que pratiquement des dispositions soient considérées pour minimiser l'effet préjudiciable du produit d'interface éprouvette-cellule –telle la réduction de son épaisseur à 0.2mm-, son influence est évaluée sur le plan expérimental dans la partie IV.3.

Une autre source d'erreur est liée au frottement entre l'éprouvette et la cellule. Sous la force de compression axiale, l'éprouvette applique sur la paroi intérieure de la cellule une pression latérale importante, qui donne naissance à son tour à des contraintes de cisaillement en surface dont la résultante a un sens opposé à la force axiale appliquée. La contrainte axiale effective reprise par l'éprouvette se trouve amoindrie d'une quantité qui dépend du coefficient de frottement entre les deux matériaux. Pratiquement, la précaution qui est adoptée pour amoindrir cet effet consiste à pulvériser sur la face intérieure de la cellule un produit dégrissant (Téflon) et à isoler de la résine d'interface en la recouvrant de bande adhésive fine.

IV.1 Etude théorique de la cellule de confinement

Si on considère un tube cylindrique épais, chargé uniformément sur toute la hauteur de sa face intérieure (figure IV.3), la solution de Lamé permet d'exprimer les contraintes radiales et orthoradiales en tout point (r, z) indépendamment de la hauteur du cylindre :

$$\sigma_r = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) P \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) P \quad (2)$$

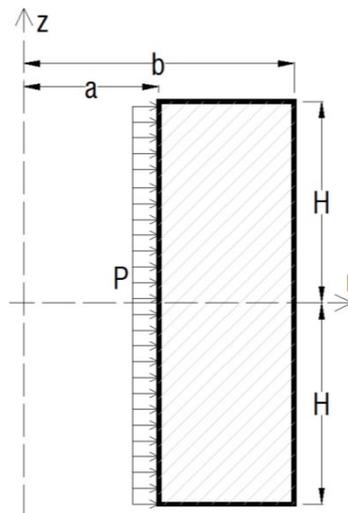


Fig. IV.3 – Vue axisymétrique d'un tube soumis à une pression uniforme interne P

Les équations d'équilibre pour un problème axisymétrique sont les suivantes :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \quad (4)$$

Si on se met dans le cas d'un état de déformations planes qui correspond au cylindre de hauteur infinie, alors les variables ne dépendent que du rayon et la variation des contraintes axiales σ_z disparaît. Les équations d'équilibres se réduisent à une seule :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (5)$$

C'est de cette équation que provient en fait la solution de Lamé (1),(2).

En comparant (5) et (3),(4) on remarque qu'il suffit de considérer que le champ des contraintes de cisaillement σ_{rz} est nul pour que les équations de Lamé soient valides. En appliquant une contrainte latérale sur une partie de la hauteur, des contraintes de cisaillement se créent à l'intérieur de la cellule, et la solution est issue des équations générales d'équilibre (3),(4).

Considérons la configuration de la figure IV.4 où le cylindre est soumis sur une partie de sa hauteur à une pression constante P et à des contraintes de cisaillement T . Celles-ci peuvent être reliées à la pression P par l'intermédiaire du coefficient de frottement $0 \leq \lambda \leq 1$: $T = \lambda P$. (hypothèse du modèle de frottement de Coulomb)

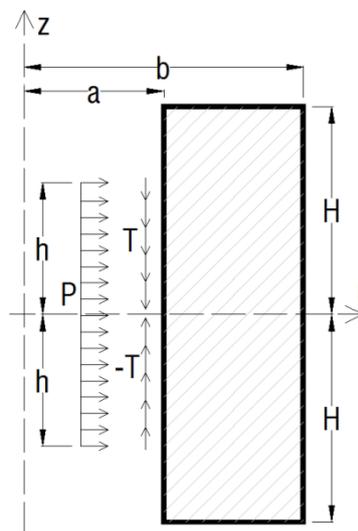


Fig. IV.4 – Géométrie et conditions aux limites

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_r(a, z) = P \text{ si } -h \leq z \leq h ; \sigma_r(a, z) = 0 \text{ si } z > |h| \\ \sigma_{rz}(a, z) = \pm T = \pm \lambda P \text{ si } -h \leq z \leq h ; \sigma_{rz}(a, z) = 0 \text{ si } z > |h| \end{cases} \quad (6)$$

Toutes les contraintes sont nulles sur les surfaces restantes.

La loi de Hooke généralisée relie les déformations aux contraintes en élasticité :

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)}{E} \\ \epsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)}{E} \\ \epsilon_z = \frac{\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)}{E} \\ \epsilon_{rz} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{rz} \end{cases} \quad (7)$$

La première étape consiste à écrire les équations d'équilibre (3) et (4) en fonction d'une seule variable qui est la contrainte de cisaillement, tout en tenant compte des conditions aux limites (6). Il est nécessaire pour cela d'utiliser des équations additionnelles qui relient les déformations entre elles, appelées équations de compatibilité ou de Saint Venant qui les a établies en 1854. Les relations de la cinématique permettent de déterminer les déformations dans un solide connaissant les trois composantes du champ de déplacement. Donc si on se donne trois fonctions arbitraires de déplacement, on peut en déduire les six déformations (quatre dans le cas axisymétrique). Par contre, on ne peut choisir arbitrairement les fonctions de déformation pour en déduire les déplacements ; le problème est indéterminé statiquement (six équations pour trois inconnues dans le cas général). C'est pour cela qu'il existe trois relations (deux dans le cas axisymétrique) qui relient les déformations entre elles, et qui expriment mathématiquement des restrictions sur la forme des fonctions de déformation. Physiquement, elles signifient qu'on ne peut pas choisir arbitrairement le champ des déformations sans altérer la continuité de la matière, car les éléments de volume arbitrairement déformés ne se juxtaposent plus sans discontinuités dans la configuration déformée. De là leur nom d'équations de compatibilité cinématique, qui se réduisent dans le cas axisymétrique à :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_r}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{rz}}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial r^2} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\epsilon_\theta - \epsilon_r}{r} = 0 \quad (9)$$

En remplaçant les équations (7) dans (8) et (9) on obtient :

$$\frac{\partial[\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)]}{\partial r} + \frac{1 + \nu}{r}(\sigma_\theta - \sigma_r) = 0 \quad (10)$$

$$r \frac{\partial^2[\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)]}{\partial z^2} - 2(1 + \nu) \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)]}{\partial r} = 0 \quad (11)$$

L'équation (3) peut s'écrire de cette façon :

$$\sigma_\theta = \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial z} \quad (12)$$

L'intégrale par rapport à z de l'équation (4) en tenant compte des conditions (6) donne :

$$\sigma_z = -\frac{1}{r} \int_z^H \frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial r} dz \quad (13)$$

Ce qui constitue une première expression en fonction de σ_{rz}

En remplaçant (12) et (13) dans (10) et en intégrant deux fois par rapport à r tout en tenant compte des conditions aux limites (6) qui sont $\sigma_r(a, z)$ et $\sigma_{rz}(a, z)$, on obtient l'expression de la contrainte radiale fonction du cisaillement :

$$\begin{aligned} \sigma_r = & -\frac{1 - \nu}{2r^2} \int_a^r r^2 \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} dr - \frac{1 + \nu}{2} \int_a^r \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} dr + \frac{\nu}{r} \int_z^H \sigma_{rz} dz + \frac{r^2 - a^2}{r^2(b^2 - a^2)} \left\{ \frac{1 - \nu}{2} \right. \\ & \left. \int_a^b r^2 \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} dr + \frac{1 + \nu}{2} b^2 \int_a^b \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} dr - a^2 \sigma_r(a, z) + \nu a \int_z^H \sigma_{rz}(a, z) dz \right\} + \frac{1}{r^2} [a^2 \sigma_r(a, z) - \\ & \nu a \int_z^H \sigma_{rz}(a, z) dz] \end{aligned} \quad (14)$$

La contrainte orthoradiale σ_θ , est fonction de σ_r (12), soit fonction de σ_{rz} uniquement, qui aussitôt déterminée permet ainsi l'obtention directe de la totalité du champ des contraintes et par suite des déformations (7). Il est intéressant de remarquer que la solution de Lamé est incluse dans les expressions (12) et (14), dans lesquelles si on annule le cisaillement on retrouve d'office les relations (1) et (2). Reste maintenant à ce que les contraintes de cisaillement vérifient les équations de compatibilité et les conditions aux limites.

En substituant les contraintes orthoradiales, axiales, et radiales obtenues respectivement par les relations (12),(13) et (14), dans la relation (11), on obtient l'équation intégral-différentielle suivante en σ_{rz} uniquement :

$$\int_a^r r^2 \frac{\partial^3 \sigma_{rz}}{\partial z^3} dr - r^2 \int_a^r \frac{\partial^3 \sigma_{rz}}{\partial z^3} dr + 2r \frac{\partial \left[\frac{1}{r} \int_z^H \frac{\partial (r \sigma_{rz})}{\partial r} dz \right]}{\partial r} - 4r \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1-\nu}{b^2-a^2} \left[\frac{a^2}{1-\nu} + \frac{r^2}{1+\nu} \right] \int_a^b r^2 \frac{\partial^3 \sigma_{rz}}{\partial z^3} dr + \frac{b^2(1+\nu)}{b^2-a^2} \left[\frac{a^2}{1-\nu} + \frac{r^2}{1+\nu} \right] \int_a^b \frac{\partial^3 \sigma_{rz}}{\partial z^3} dr = \frac{2a^2}{b^2-a^2} \left[\frac{b^2}{1-\nu} + \frac{r^2}{1+\nu} \right] \frac{\partial^2 \sigma_r(a, z)}{\partial z^2} + \frac{2\nu a}{b^2-a^2} \left[\frac{b^2}{1-\nu} + \frac{r^2}{1+\nu} \right] \frac{\partial \sigma_{rz}(a, z)}{\partial z} \quad (15)$$

Cette relation vérifie les équations de compatibilité et les conditions aux limites qui sont situées au second membre de l'égalité. Le champ de contraintes de cisaillement $\sigma_{rz}(r, z)$ solution de l'équation (15) est donc solution du problème posé. Toutes les autres grandeurs qui sont exprimées en fonction du cisaillement sont alors déduites. La solution de cette équation est obtenue par une méthode dont le principe est exposé ci-dessous, elle a été utilisée pour la détermination des contraintes à l'intérieur de plaques et cylindres de dimensions finies soumis à des chargements thermiques [Mendelson et Roberts 1963]. Elle est basée sur une méthode mathématique d'approximation de la solution exacte d'une équation différentielle aux dérivées partielles [Frazier et al. 1937]. Si une équation différentielle décrit un milieu continu dont les conditions aux frontières sont continues et dérivables, alors il est possible de trouver une solution équivalente à la solution exacte, et qui décrit ce milieu avec une grande précision.

La méthode suppose qu'il existe une fonction $S(r, z)$ qui converge vers la solution exacte $\sigma_{rz}(r, z)$ de l'équation (15), et qui a la forme suivante :

$$S(r, z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_i(r) Q_j(z) t_{ij} + P_a(r) \sigma_{rz}(a, z) \quad (16)$$

$P_i(r)$, $Q_j(z)$ et $P_a(r)$ sont des polynômes définis comme suit :

$$P_i(r) = \frac{(r-a)(r-b) \prod_{1 \leq k \leq n, k \neq i} (r-r_k)}{(r_i-a)(r_i-b) \prod_{1 \leq k \leq n, k \neq i} (r_i-r_k)} \quad (17)$$

$$Q_j(z) = \frac{z^2(z^2-H^2) \prod_{1 \leq k \leq m, k \neq i} (z^2-z_k^2)}{z_j^2(z_j^2-H^2) \prod_{1 \leq k \leq m, k \neq j} (z_j^2-z_k^2)} \quad (18)$$

$$P_a(r) = \frac{(r-a) \prod_{1 \leq k \leq n} (r-r_k)}{(a-b) \prod_{1 \leq k \leq n} (a-r_k)} \quad (19)$$

t_{ij} sont des constantes dont la signification apparait dans la suite. Les couples (r_i, z_j) avec $1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq m$ représentent les coordonnées de points arbitrairement choisis à l'intérieur du solide, appelés stations. Si par exemple $n = 2$; $m = 3$, il y aura 6 stations de coordonnées $(r_i, z_j)_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ situées dans le premier quadrant du solide vue la symétrie du problème. Géométriquement ils forment une grille à 2 colonnes et 3 rangées.

Dans ce cas, les polynômes P_i , Q_j et P_a deviennent :

$$P_1(r) = \frac{(r-a)(r-b)(r-r_2)}{(r_1-a)(r_1-b)(r_1-r_2)} \quad (20)$$

$$P_2(r) = \frac{(r-a)(r-b)(r-r_1)}{(r_2-a)(r_2-b)(r_2-r_1)} \quad (21)$$

$$Q_1(z) = \frac{z^2(z^2-H^2)(z^2-z_2^2)(z^2-z_3^2)}{z_1^2(z_1^2-H^2)(z_1^2-z_2^2)(z_1^2-z_3^2)} \quad (22)$$

$$Q_2(z) = \frac{z^2(z^2-H^2)(z^2-z_1^2)(z^2-z_3^2)}{z_2^2(z_2^2-H^2)(z_2^2-z_1^2)(z_2^2-z_3^2)} \quad (23)$$

$$Q_3(z) = \frac{z^2(z^2-H^2)(z^2-z_1^2)(z^2-z_2^2)}{z_3^2(z_3^2-H^2)(z_3^2-z_1^2)(z_3^2-z_2^2)} \quad (24)$$

$$P_a(r) = \frac{(r-b)(r-r_1)(r-r_2)}{(a-b)(a-r_1)(a-r_2)} \quad (25)$$

Ces polynômes possèdent en fait une propriété particulière due à leur forme :

$$P_i(r_j) = \delta_{ij}; Q_i(z_j) = \delta_{ij}; P_a(a) = 1 \text{ et } P_a(r_i) = 0 \text{ pour tout } r_i \neq a.$$

Autrement dit, ces polynômes ont une valeur nulle partout sauf à la station à laquelle ils sont associés, et où ils ont la valeur unité. En remplaçant (20) à (25) dans l'expression (16) qui représente le champ de contraintes de cisaillement approximatif, nous obtenons l'explication complète de la méthode.

$$S(r, z) = P_1(r)Q_1(z)t_{11} + P_1(r)Q_2(z)t_{12} + P_1(r)Q_3(z)t_{13} + P_2(r)Q_1(z)t_{21} + P_2(r)Q_2(z)t_{22} + P_2(r)Q_3(z)t_{23} + P_a(r)\sigma_{rz}(a, z) \quad (26)$$

Il est simple de vérifier que $S(r_i, z_j) = t_{ij}$. Donc pour chacune des 6 stations choisies (le nombre 6 est donné pour l'illustration) de coordonnées (r_i, z_j) la valeur correspondante du cisaillement est égale à t_{ij} . En d'autres termes, le champ de cisaillement formulé pour tout point du solide a des valeurs particulières aux coordonnées des stations et qui représentent les contraintes de cisaillement en ces points.

Une autre propriété du polynôme $S(r, z)$ est qu'il satisfait les conditions aux limites. En effet, $S(b, z) = S(r, H) = 0$ et $S(a, z) = \sigma_{rz}(a, z)$. Reste à déterminer les valeurs des t_{ij} . Pour que la méthode décrite fonctionne correctement, il est exigé que les contraintes de cisaillement t_{ij} aux points discrets (r_i, z_j) soient approximativement les contraintes réelles données par la solution de l'équation (15). Autrement dit, il faut que pour chaque station de coordonnées (r_i, z_j) , le cisaillement correspondant t_{ij} soit solution de (15). En remplaçant (26) dans (15) pour chacun des 6 couples (r_i, z_j) on obtient un système d'équations linéaires, composé de 6 équations à 6 inconnues t_{ij} . La résolution de ce système permet de déterminer les contraintes de cisaillement t_{ij} aux points de coordonnées (r_i, z_j) . Une fois remplacés dans (26), t_{ij} deviennent des constantes dans l'expression de $S(r, z)$ qui est alors un polynôme fonction uniquement des coordonnées (r, z) . $S(r, z)$ est une représentation du champ de contraintes dans le solide, qui tend vers la solution exacte $\sigma_{rz}(r, z)$ en tout point (r, z) , et y est égale aux stations (r_i, z_j) : $S(r_i, z_j) = \sigma_{rz}(r_i, z_j)$. En remplaçant $S(r, z)$ dans les expressions des contraintes radiales (14), axiales (13) et orthoradiales (12), toutes les contraintes sont

déterminées et par suite les déformations grâce aux relations (7). Le caractère polynomial de (26) rend triviales les opérations de dérivation et d'intégration présentes dans les formules mentionnées.

L'exactitude des résultats dépend du nombre des stations $n * m$ à choisir ainsi que de leur emplacement. Il ne faut pas oublier qu'en fait (26) fournit le champ des contraintes de cisaillement par l'intermédiaire d'un polynôme d'un certain degré, qui quoique exact aux stations et aux frontières du solide, approxime $\sigma_{rz}(r, z)$ dans le restant de la matière. Pour $n = m = 2$, le degré de $S(r, z)$ en r est 3 et 5 en z , ce qui a permis de résoudre des problèmes à chargement thermique avec une grande précision par rapport à des solutions connues [Mendelson et Roberts 1963]. Cependant, quand le champ des contraintes de cisaillement dans le solide varie brusquement, ou qu'il est assez élevé dans une zone restreinte et presque constant dans une autre, alors il est nécessaire d'augmenter le nombre des stations. Dans notre cas, deux types de chargements sont appliqués sur une partie de la surface intérieure de la cellule, où les contraintes radiales et de cisaillement subissent des sauts importants au voisinage de $\pm h$.

La solution de l'équation du problème (15) fait intervenir dans le second membre de l'égalité les dérivées des chargements appliqués $\sigma_{rz}(a, z)$ et $\sigma_r(a, z)$. Or mathématiquement ces chargements ne sont pas dérivables vu leur discontinuité, et conduiraient à des valeurs nulles au cas où on les dériverait en négligeant leur discontinuité locale. On obtiendrait alors pour le système d'équations linéaires un second membre avec des valeurs nulles. Les valeurs des contraintes de cisaillement t_{ij} correspondant aux stations seraient également nulles et la solution serait celle de Lamé où le cylindre est chargé par une contrainte radiale uniforme sur la totalité de sa paroi verticale. Contourner le problème en exprimant le chargement par des séries de Fourier qui d'apparence sont dérivables, conduit à des séries divergentes. Par conséquent, l'approche décrite ne permet pas la détermination des contraintes de cisaillement dans les stations ; un procédé similaire sera adopté. Il consiste à ne pas considérer dans le sens de la discontinuité du chargement (soit le sens vertical) une restriction polynomiale sur le cisaillement. On définit uniquement les coordonnées radiales r_i des stations, de sorte que les valeurs des cisaillements qui y correspondent soient $t_i(z)$, donc variables en fonction de la coordonnée z . Ainsi pour chaque station (r_i, z) , l'équation (15) sera une équation différentielle en $t_i(z)$ au lieu d'être une équation linéaire en t_{ij} .

Le polynôme (16) devient :

$$S(r, z) = \sum_{i=1}^n P_i(r)t_i(z) + P_a(r)\sigma_{rz}(a, z) \quad (27)$$

Vue la discontinuité du chargement, les contraintes au voisinage de la face intérieure de la cellule vont subir localement de grandes variations. Trois stations sont requises dans le sens radial, comme il sera observé par la suite. L'expression de $S(r, z)$ devient :

$$S(r, z) = P_1(r)t_1(z) + P_2(r)t_2(z) + P_3(r)t_3(z) + P_a(r)\sigma_{rz}(a, z) \quad (28)$$

$P_1(r), P_2(r), P_3(r), P_a(r)$ ont pour expression :

$$P_1(r) = \frac{(r-a)(r-b)(r-r_2)(r-r_3)}{(r_1-a)(r_1-b)(r_1-r_2)(r_1-r_3)} \quad (29)$$

$$P_2(r) = \frac{(r-a)(r-b)(r-r_1)(r-r_3)}{(r_2-a)(r_2-b)(r_2-r_1)(r_2-r_3)} \quad (30)$$

$$P_3(r) = \frac{(r-a)(r-b)(r-r_1)(r-r_2)}{(r_3-a)(r_3-b)(r_3-r_1)(r_3-r_2)} \quad (31)$$

$$P_a(r) = \frac{(r-b)(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)}{(a-b)(a-r_1)(a-r_2)(a-r_3)} \quad (32)$$

Afin de déterminer les contraintes exactes dans les trois stations (r_i, z) , il faut remplacer (28) dans (15) pour les trois valeurs de r_i ; nous obtenons les équations suivantes fonctions de z :

$$\begin{aligned} & A_1(r_1)\frac{\partial^3 t_1(z)}{\partial z^3} + A_2(r_1)\frac{\partial t_1(z)}{\partial z} + A_3(r_1)\int_z^H t_1(z)dz + B_1(r_1)\frac{\partial^3 t_2(z)}{\partial z^3} + B_3(r_1)\int_z^H t_2(z)dz \\ & + C_1(r_1)\frac{\partial^3 t_3(z)}{\partial z^3} + C_3(r_1)\int_z^H t_3(z)dz = \frac{2a^2}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2}{1-\nu} + \frac{r_1^2}{1+\nu}\right)\left(\frac{\partial^2 \sigma_r(a, z)}{\partial z^2} + \frac{\nu}{4}\frac{\partial \sigma_{rz}(a, z)}{\partial z}\right) \\ & - D_1(r_1)\frac{\partial^3 \sigma_{rz}(a, z)}{\partial z^3} - D_3(r_1)\int_z^H \sigma_{rz}(a, z)dz \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
& A_1(r_2) \frac{\partial^3 t_1(z)}{\partial z^3} + A_3(r_2) \int_z^H t_1(z) dz + B_1(r_2) \frac{\partial^3 t_2(z)}{\partial z^3} + B_2(r_2) \frac{\partial t_2(z)}{\partial z} + B_3(r_2) \int_z^H t_2(z) dz \\
& + C_1(r_2) \frac{\partial^3 t_3(z)}{\partial z^3} + C_3(r_2) \int_z^H t_3(z) dz = \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{1 - \nu} + \frac{r_2^2}{1 + \nu} \right) \left(\frac{\partial^2 \sigma_r(a, z)}{\partial z^2} + \frac{\nu}{4} \frac{\partial \sigma_{rz}(a, z)}{\partial z} \right) - \\
& D_1(r_2) \frac{\partial^3 \sigma_{rz}(a, z)}{\partial z^3} - D_3(r_2) \int_z^H \sigma_{rz}(a, z) dz \tag{34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_1(r_3) \frac{\partial^3 t_1(z)}{\partial z^3} + A_3(r_3) \int_z^H t_1(z) dz + B_1(r_3) \frac{\partial^3 t_2(z)}{\partial z^3} + B_3(r_3) \int_z^H t_2(z) dz + C_1(r_3) \frac{\partial^3 t_3(z)}{\partial z^3} \\
& + C_2(r_3) \frac{\partial t_3(z)}{\partial z} + C_3(r_3) \int_z^H t_3(z) dz = \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{1 - \nu} + \frac{r_3^2}{1 + \nu} \right) \left(\frac{\partial^2 \sigma_r(a, z)}{\partial z^2} + \frac{\nu}{4} \frac{\partial \sigma_{rz}(a, z)}{\partial z} \right) - \\
& D_1(r_3) \frac{\partial^3 \sigma_{rz}(a, z)}{\partial z^3} - D_3(r_3) \int_z^H \sigma_{rz}(a, z) dz \tag{35}
\end{aligned}$$

Avec les polynômes A_i, B_i, C_i, D_i tels que :

$$\begin{aligned}
A_1(r) &= \int_a^r r^2 P_1(r) dr - r^2 \int_a^r P_1(r) dr + \frac{1 - \nu}{b^2 - a^2} \left(\frac{a^2}{1 - \nu} + \frac{r^2}{1 + \nu} \right) \int_a^b r P_1(r) dr + \\
& \frac{b^2(1 + \nu)}{b^2 - a^2} \left(\frac{a^2}{1 - \nu} + \frac{r^2}{1 + \nu} \right) \int_a^b P_1(r) dr
\end{aligned}$$

$$A_2(r) = -4rP_1(r)$$

$$A_3(r) = 2r \left[\frac{\partial^2 P_1(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_1(r)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} P_1(r) \right]$$

Les polynômes B_i, C_i, D_i sont identiques à A_i avec la différence que P_1 est remplacé respectivement par P_2, P_3, P_a .

En dérivant une fois par rapport à z le système (33),(34),(35) les intégrales sont éliminées :

$$\begin{aligned}
& A_1(r_1) \frac{\partial^4 t_1(z)}{\partial z^4} + A_2(r_1) \frac{\partial^2 t_1(z)}{\partial z^2} - A_3(r_1) t_1(z) + B_1(r_1) \frac{\partial^4 t_2(z)}{\partial z^4} - B_3(r_1) t_2(z) + C_1(r_1) \frac{\partial^4 t_3(z)}{\partial z^4} \\
& - C_3(r_1) t_3(z) = \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{1 - \nu} + \frac{r_1^2}{1 + \nu} \right) \left(\frac{\partial^3 \sigma_r(a, z)}{\partial z^3} + \frac{\nu}{4} \frac{\partial^2 \sigma_{rz}(a, z)}{\partial z^2} \right) - D_1(r_1) \frac{\partial^4 \sigma_{rz}(a, z)}{\partial z^4} \\
& + D_3(r_1) \sigma_{rz}(a, z) \tag{36}
\end{aligned}$$

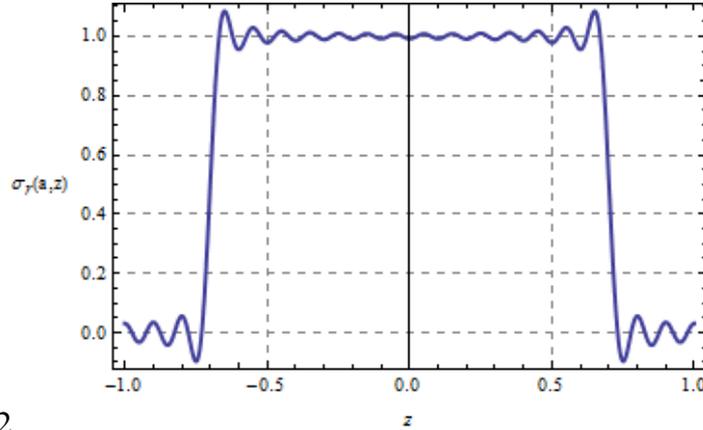
$$\begin{aligned}
& A_1(r_2) \frac{\partial^4 t_1(z)}{\partial z^4} - A_3(r_2) t_1(z) + B_1(r_2) \frac{\partial^4 t_2(z)}{\partial z^4} + B_2(r_2) \frac{\partial^2 t_2(z)}{\partial z^2} - B_3(r_2) t_2(z) + C_1(r_2) \frac{\partial^4 t_3(z)}{\partial z^4} \\
& - C_3(r_2) t_3(z) = \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{1 - \nu} + \frac{r_2^2}{1 + \nu} \right) \left(\frac{\partial^3 \sigma_r(a, z)}{\partial z^3} + \frac{\nu}{4} \frac{\partial^2 \sigma_{rz}(a, z)}{\partial z^2} \right) - D_1(r_2) \frac{\partial^4 \sigma_{rz}(a, z)}{\partial z^4} \\
& + D_3(r_2) \sigma_{rz}(a, z)
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
& A_1(r_3) \frac{\partial^4 t_1(z)}{\partial z^4} - A_3(r_3) t_1(z) + B_1(r_3) \frac{\partial^4 t_2(z)}{\partial z^4} - B_3(r_3) t_2(z) + C_1(r_3) \frac{\partial^4 t_3(z)}{\partial z^4} + C_2(r_3) \frac{\partial^2 t_3(z)}{\partial z^2} \\
& - C_3(r_3) t_3(z) = \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{1 - \nu} + \frac{r_3^2}{1 + \nu} \right) \left(\frac{\partial^3 \sigma_r(a, z)}{\partial z^3} + \frac{\nu}{4} \frac{\partial^2 \sigma_{rz}(a, z)}{\partial z^2} \right) - D_1(r_3) \frac{\partial^4 \sigma_{rz}(a, z)}{\partial z^4} \\
& + D_3(r_3) \sigma_{rz}(a, z)
\end{aligned} \tag{38}$$

Les conditions aux limites (6) peuvent être exprimées à l'aide de séries de Fourier (figures IV.5 et IV.6) :

$$\sigma_r(a, z) = P \left[\frac{h}{H} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi h}{H}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{H}\right) \right] \tag{39}$$

$$\sigma_{rz}(a, z) = T \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin^2\left(\frac{n\pi h}{2H}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right) \right] \tag{40}$$



32

Fig. IV.5 – Expression normalisée de $\sigma_r(a, z)$ en séries de Fourier ($n=20$)

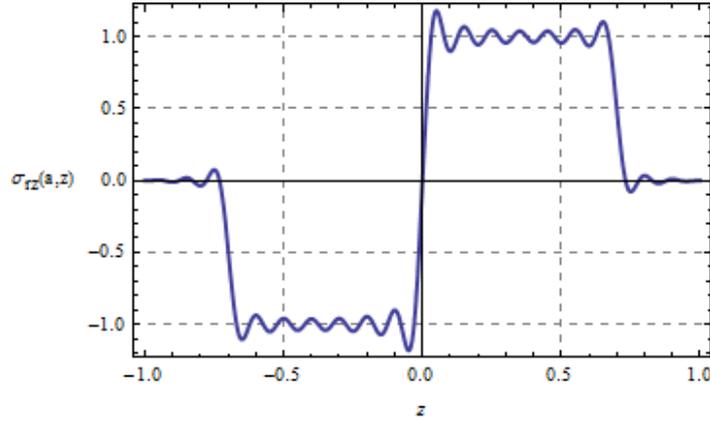


Fig. IV.6 – Expression normalisée de $\sigma_{rz}(a, z)$ en séries de Fourier ($n=20$)

Nous supposons que la solution $t_i(z)$ du système d'équations (36),(37),(38) peut s'écrire sous la forme de séries de Fourier de coefficients inconnus à déterminer :

$$t_1(r_1, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n \sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right) \quad (41)$$

$$t_2(r_2, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{b}_n \sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right) \quad (42)$$

$$t_3(r_3, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n \sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right) \quad (43)$$

En remplaçant $t_i(z)$ et les conditions aux limites (39),(40) dans les équations (36) à (38) on remarque que comme la différentiation est d'ordre pair pour (40) à (43) et d'ordre impair pour (39), la variable z s'écrit uniquement en fonction de $\sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right)$, qui peut être simplifié des deux membres de chaque équation, de sorte que le système (36) à (38) se ramène à un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues qui sont a_n, b_n, c_n :

$$\begin{aligned} & [A_1(r_1)\left(\frac{n\pi}{H}\right)^4 - A_2(r_1)\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 - A_3(r_1)]\mathbf{a}_n + [B_1(r_1)\left(\frac{n\pi}{H}\right)^4 - B_3(r_1)]\mathbf{b}_n + [C_1(r_1)\left(\frac{n\pi}{H}\right)^4 - \\ & C_3(r_1)]\mathbf{c}_n = \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{1 - \nu} + \frac{r_1^2}{1 + \nu} \right) \left[\frac{2(n\pi)^2}{H^3} P \sin\left(\frac{n\pi h}{H}\right) - \frac{\nu n\pi}{H^2} T \sin^2\left(\frac{n\pi h}{2H}\right) \right] + \\ & 4T \sin^2\left(\frac{n\pi h}{2H}\right) \left[\frac{1}{n\pi} D_3(r_1) - \frac{(n\pi)^3}{H^4} D_1(r_1) \right] \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned}
& [A_1(r_2)(\frac{n\pi}{H})^4 - A_3(r_2)]\mathbf{a}_n + [B_1(r_2)(\frac{n\pi}{H})^4 - B_2(r_2)(\frac{n\pi}{H})^2 - B_3(r_2)]\mathbf{b}_n + [C_1(r_2)(\frac{n\pi}{H})^4 - \\
& C_3(r_2)]\mathbf{c}_n = \frac{2a^2}{b^2 - a^2}(\frac{b^2}{1 - \nu} + \frac{r_2^2}{1 + \nu})[\frac{2(n\pi)^2}{H^3}P \sin(\frac{n\pi h}{H}) - \frac{\nu n\pi}{H^2}T \sin^2(\frac{n\pi h}{2H})] + \\
& 4T \sin^2(\frac{n\pi h}{2H})[\frac{1}{n\pi}D_3(r_2) - \frac{(n\pi)^3}{H^4}D_1(r_2)] \quad (45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [A_1(r_3)(\frac{n\pi}{H})^4 - A_3(r_3)]\mathbf{a}_n + [B_1(r_3)(\frac{n\pi}{H})^4 - B_3(r_3)]\mathbf{b}_n + [C_1(r_3)(\frac{n\pi}{H})^4 - C_2(r_3)(\frac{n\pi}{H})^2 - \\
& C_3(r_3)]\mathbf{c}_n = \frac{2a^2}{b^2 - a^2}(\frac{b^2}{1 - \nu} + \frac{r_3^2}{1 + \nu})[\frac{2(n\pi)^2}{H^3}P \sin(\frac{n\pi h}{H}) - \frac{\nu n\pi}{H^2}T \sin^2(\frac{n\pi h}{2H})] + \\
& 4T \sin^2(\frac{n\pi h}{2H})[\frac{1}{n\pi}D_3(r_3) - \frac{(n\pi)^3}{H^4}D_1(r_3)] \quad (46)
\end{aligned}$$

Les inconnues a_n, b_n, c_n dépendent de l'entier n uniquement –mis à part les autres variables qui en fait sont les données du problème- et peuvent facilement être calculée du système ci-dessus. Par suite les valeurs particulières du cisaillement sont obtenues (41),(42),(43) pour les points dont les coordonnées radiales sont r_1, r_2, r_3 et la coordonnée axiale z quelconque. Il est intéressant à ce stade de comparer les contraintes de cisaillement données aux points (r_i, z) par (41),(42),(43) à celles données par la simulation numérique avec le code Abaqus standard (maillage quadrangulaire à intégration réduite, de taille 0.5 mm). Pour cela nous considérons une cellule qui a les mêmes dimensions que celle utilisée pour les essais : $a = 14.65$ mm; $b = 30$ mm; $H = 22.5$ mm; sur la face intérieure est appliquée une contrainte radiale de 1000 MPa sur une hauteur $h = 17.5$ mm. Le champ des contraintes de cisaillement obtenu par la simulation numérique est reproduit à la figure IV.7 (1^{er} quadrant de la cellule). Aussi, les abscisses radiales des stations (r_i, z) sont indiquées.

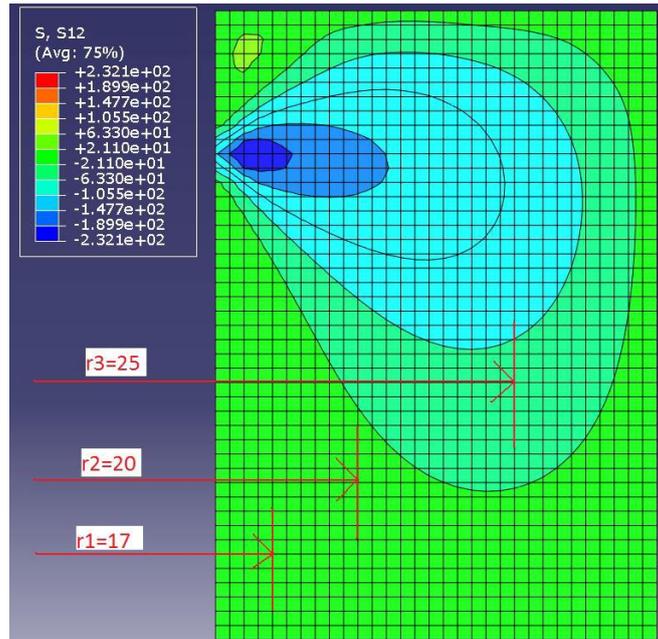


Fig. IV.7 – Contraintes de cisaillement données par Abaqus et choix de stations r_i

A l'endroit de ces abscisses ($r_1 = 17$ mm; $r_2 = 20$ mm; $r_3 = 25$ mm) sont effectuées des coupes qui montrent l'évolution du cisaillement le long de z pour chaque r_i . La figure IV.8 montre les trois courbes correspondant aux champs de cisaillement de la figure IV.7 ; elles sont générées par Abaqus. Sur la figure IV.9 sont reproduites les solutions (41),(42),(43). La variation le long de z du cisaillement pour la courbe $t_1(17, z)$ montre un pic plus pointu que celui de la simulation numérique –situé à $h = 17.5$ mm, en face de la discontinuité du chargement appliqué $\sigma_r(a, z)$ – et qui représente le saut de contraintes de cisaillement conséquent à la discontinuité du chargement. L'analyse numérique ne peut reproduire ce saut correctement dont le niveau dépend du raffinement du maillage. 15 termes de la série sont nécessaires pour t_1 vue sa proximité vis-à-vis de la surface chargée, alors que 5 termes sont suffisants pour t_2 et t_3 . Les équations des trois courbes sont :

$$t_1(z) = 69.1519\text{Sin}[0.139626z] - 59.4515\text{Sin}[0.279253z] + 37.2823\text{Sin}[0.418879z] - 11.1651\text{Sin}[0.558505z] - 8.57445\text{Sin}[0.698132z] + 16.8965\text{Sin}[0.837758z] - 15.2033\text{Sin}[0.977384z] + 7.98992\text{Sin}[1.11701z] + 8.723781137207595 \cdot 10^{-15}\text{Sin}[1.25664z] - 5.43738\text{Sin}[1.39626z] + 7.0196\text{Sin}[1.53589z] - 5.26479\text{Sin}[1.67552z] + 1.79244\text{Sin}[1.81514z] + 1.55997\text{Sin}[1.95477z] - 3.4669\text{Sin}[2.0944z]$$

$$t_2(z) = 104.6\text{Sin}[0.139626z] - 60.7267\text{Sin}[0.279253z] + 23.9969\text{Sin}[0.418879z] - 4.92776\text{Sin}[0.558505z] - 2.85336\text{Sin}[0.698132z]$$

$$t_3(z) = 81.7119\text{Sin}[0.139626z] - 36.9472\text{Sin}[0.279253z] + 8.47344\text{Sin}[0.418879z] - 0.484379\text{Sin}[0.558505z] + 0.394012\text{Sin}[0.698132z]$$

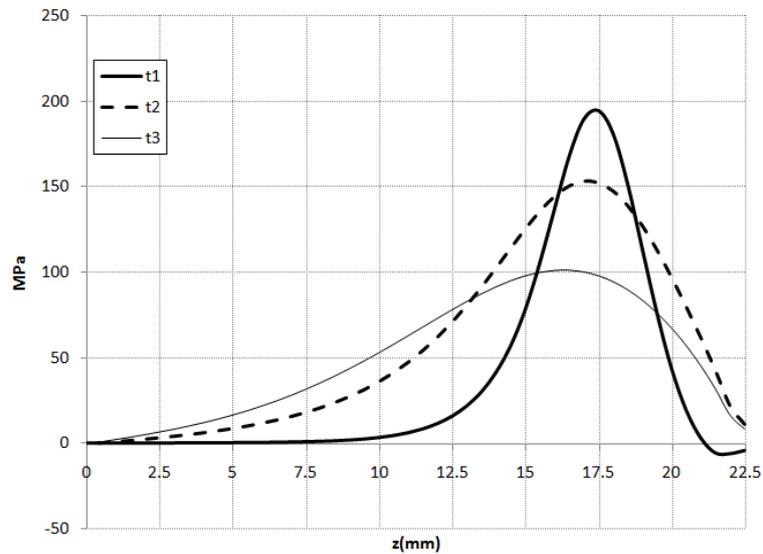


Fig. IV.8 – Contraintes de cisaillement aux abscisses $r_1 = 17$; $r_2 = 20$; $r_3 = 25$ mm (Abaqus)

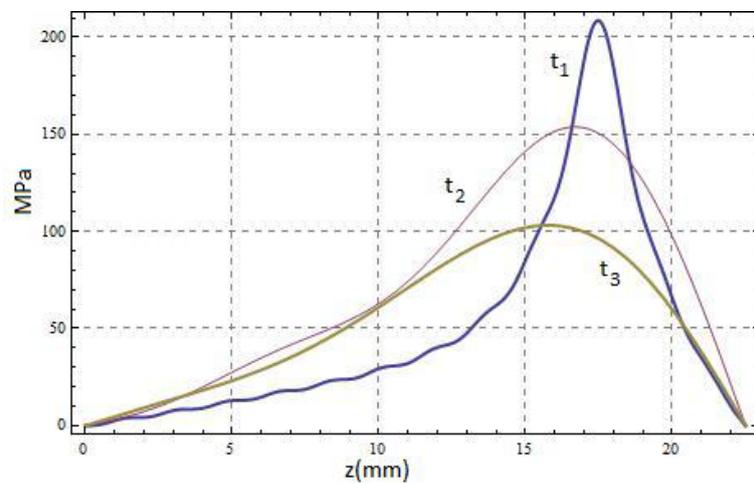


Fig. IV.9 – Solutions (41),(42),(43) pour $r_1 = 17$; $r_2 = 20$; $r_3 = 25$ mm

La solution analytique concorde bien avec celle numérique, ce qui permet de supposer qu'il est possible de choisir de chaque courbe –soit pour chaque r_i - trois (par exemple) coordonnées axiales z_i en notant pour chacune la valeur du cisaillement correspondant $t_i(r_i, z_j) = t_{ij}$ si on veut conserver la même notation qu'en (16). On a ainsi les 6 points

(r_i, z_j) où l'on connaît la valeur exacte du cisaillement t_{ij} de sorte qu'on puisse revenir à la solution polynomiale approximative (16) :

$$S(r, z) = P_1(r)Q_1(z)t_{11} + P_1(r)Q_2(z)t_{12} + P_1(r)Q_3(z)t_{13} + P_2(r)Q_1(z)t_{21} + P_2(r)Q_2(z)t_{22} + P_3(r)Q_1(z)t_{31} + P_3(r)Q_2(z)t_{21} + P_3(r)Q_3(z)t_{33} + P_2(r)Q_3(z)t_{23} + P_a(r)\sigma_{rz}(a, z) \quad (47)$$

Il est à noter que le choix de la position des stations n'influe pas sur la solution au cas où elles sont distribuées de façon équilibrée dans tout le solide. Leurs coordonnées peuvent être exprimées en fonction de la hauteur et du rayon du cylindre de sorte à les rendre adimensionnelles. Toutes les répartitions homogènes conduisent à des résultats très proches. Par exemple on peut prendre $r_1 = 17; r_2 = 20; r_3 = 25; z_1 = 9; z_2 = 15; z_3 = 20$ ou $r_1 = 19; r_2 = 23; r_3 = 27; z_1 = 5; z_2 = 12; z_3 = 17$ avec des résultats assez similaires.

Les polynômes $P_i(r)$ et $Q_j(z)$ sont :

$$P_1(r) = \frac{(r-a)(r-b)(r-r_2)(r-r_3)}{(r_1-a)(r_1-b)(r_1-r_2)(r_1-r_3)}$$

$$P_2(r) = \frac{(r-a)(r-b)(r-r_1)(r-r_3)}{(r_2-a)(r_2-b)(r_2-r_1)(r_2-r_3)}$$

$$P_3(r) = \frac{(r-a)(r-b)(r-r_1)(r-r_2)}{(r_3-a)(r_3-b)(r_3-r_1)(r_3-r_2)}$$

$$Q_1(z) = \frac{z(z^2 - H^2)(z^2 - z_2^2)(z^2 - z_3^2)}{z_1(z_1^2 - H^2)(z_1^2 - z_2^2)(z_1^2 - z_3^2)}$$

$$Q_2(z) = \frac{z(z^2 - H^2)(z^2 - z_1^2)(z^2 - z_3^2)}{z_2(z_2^2 - H^2)(z_2^2 - z_1^2)(z_2^2 - z_3^2)}$$

$$Q_3(z) = \frac{z(z^2 - H^2)(z^2 - z_1^2)(z^2 - z_2^2)}{z_3(z_3^2 - H^2)(z_3^2 - z_1^2)(z_3^2 - z_2^2)}$$

$$P_a(r) = \frac{(r-b)(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)}{(a-b)(a-r_1)(a-r_2)(a-r_3)}$$

Le champs des contraintes de cisaillement $S(r, z)$ à l'intérieur du premier quadrant de la cellule est calculé d'après (47) en considérant les même hypothèse que ci-dessus (figure IV.10). Il peut être comparé aux isocontours donnés par Abaqus (figure IV.7).

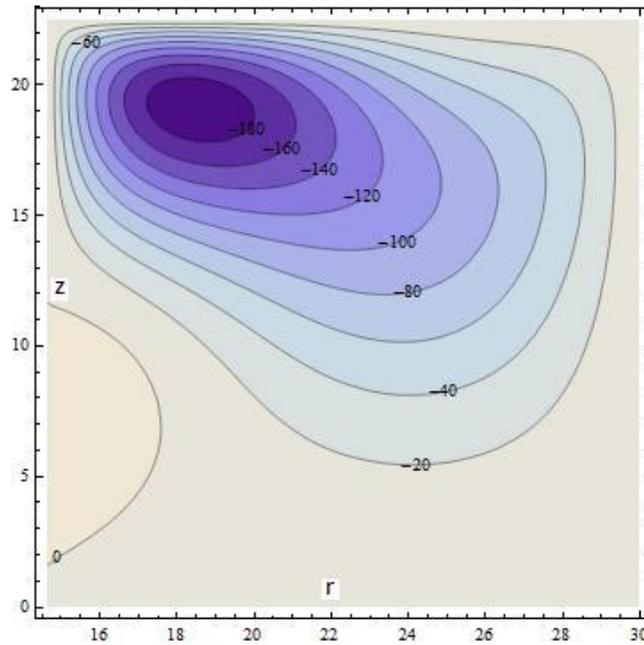


Fig. IV.10 –Contrainte de cisaillement $S(r, z)$ dans le 1^{er} quadrant de la cellule (Sol. anal.)

Les conditions aux limites sur la face intérieure ne sont pas parfaitement respectées dans la simulation numérique, de sorte que les contraintes de cisaillement ne sont pas nulles auprès de la discontinuité du chargement appliqué. En remplaçant (47) dans (13) on obtient le champ de contrainte axiale (figure IV.11)

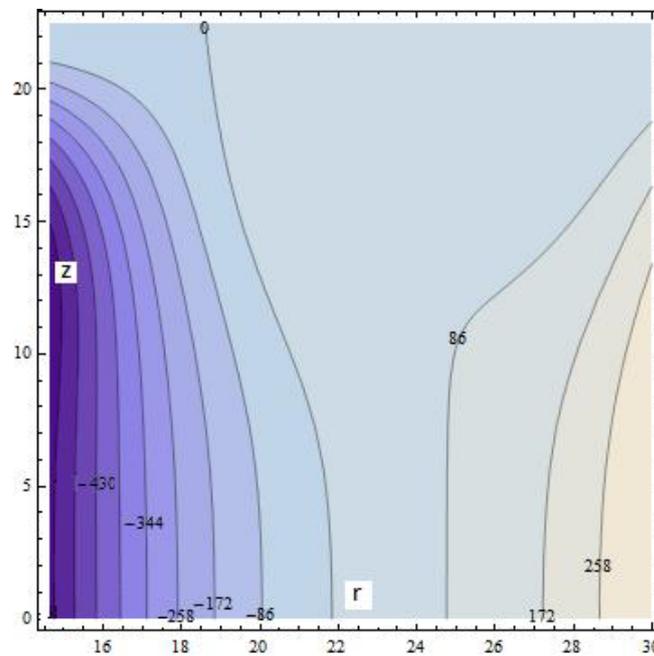


Fig. IV.11 –Contrainte axiale σ_z dans le 1^{er} quadrant de la cellule (Sol. anal.)

Ce champ peut être comparé à celui obtenu par simulation numérique (figure IV.12). On remarque une bonne concordance tant du point de vue la forme du champ que concernant les niveaux des contraintes.

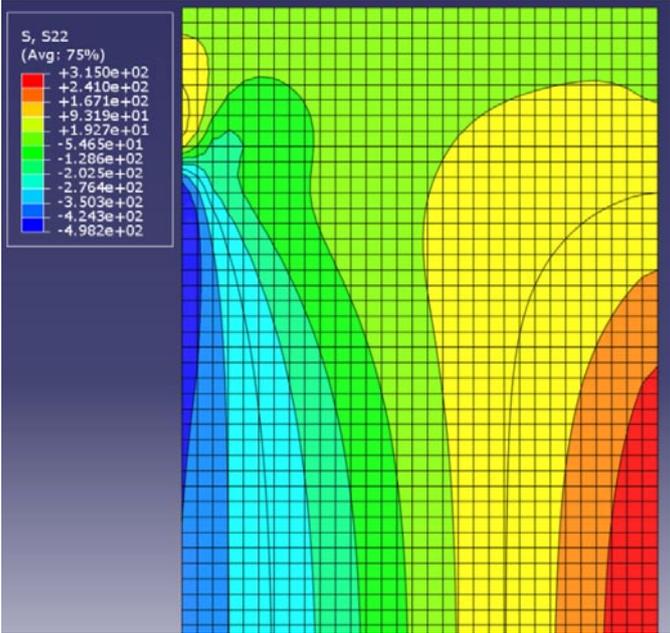


Fig. IV.12 –Contraintes axiales σ_z (Abaqus)

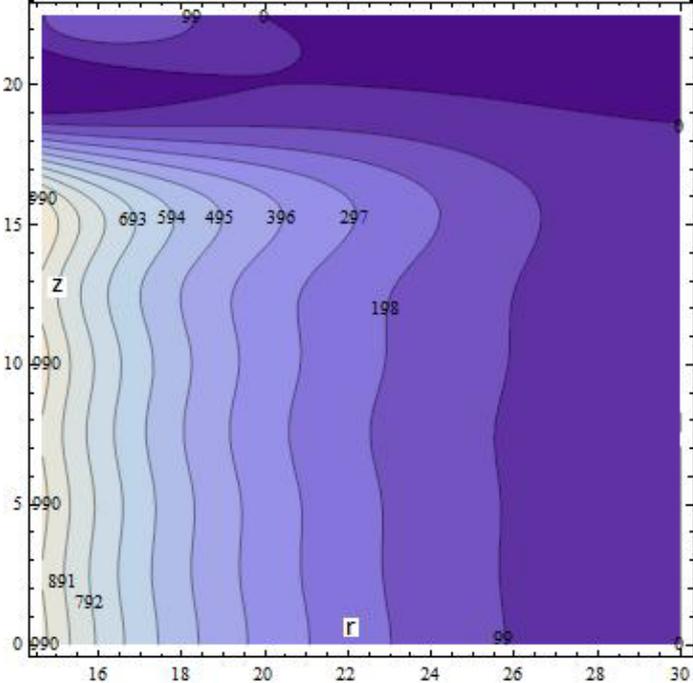


Fig. IV.13 –Contraintes radiales σ_r dans le 1^{er} quadrant de la cellule. (Sol. anal.)

L'expression de la contrainte radiale (14) comprend de multiples dérivations et intégrations de la contrainte de cisaillement. Sur les figures IV.13 et IV.14 sont représentées ses valeurs d'après (14) et selon le calcul numérique.

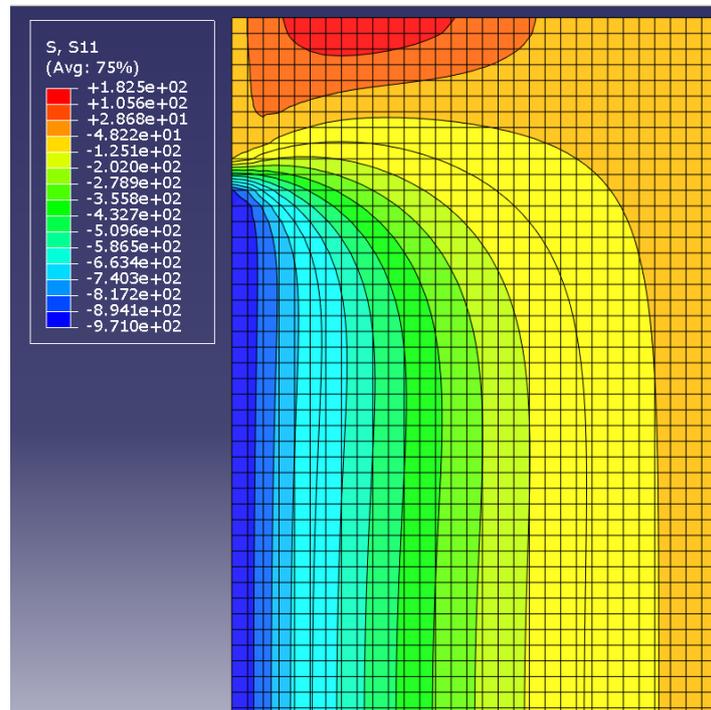


Fig. IV.14 – Contraintes radiales σ_r (Abaqus)

Connaissant le champ des contraintes dans la cellule quelles que soient ses dimensions, il est alors possible en faisant varier les paramètres non fixés tels que le rayon extérieur de la cellule et la hauteur du chargement –en supposant que le diamètre et la hauteur de l'éprouvette connues- de sorte à choisir une épaisseur optimale de cellule selon la limite élastique imposée. Dans le choix de l'épaisseur de la cellule intervient un critère qui n'est pas relié à la méthode décrite dans cette partie. Les déformations orthoradiales sur la face externe de la cellule doivent garder un niveau qui soit confortablement mesuré par les jauges de déformations tout le long de l'essai. Une cellule épaisse permettrait des pressions radiales plus élevées –et donc des chargements plus importants- mais se déformerait peu, de sorte que les mesures de déformation seraient inexploitable. Donc le compromis épaisseur-déformations est sujet à la subjectivité et au calcul ; le choix s'est finalement porté sur une cellule de rayon extérieur 60mm donc d'épaisseur 15.35 mm. La méthode exposée dans cette partie sert de base à la procédure de dépouillement exposée ci-après.

IV.2 Dépouillement des données expérimentales

Les données expérimentales temporelles comprennent la déformation et la force axiales dans l'éprouvette ainsi que les déformations des jauges sur la cellule. Si on suppose que l'éprouvette est correctement centrée par rapport à la cellule, l'inconnue principale est la contrainte radiale σ_r exercée par l'éprouvette sur la cellule. Il est nécessaire de trouver une expression entre les déformations orthoradiales externes sur la cellule et la contrainte radiale σ_r , faisant intervenir la hauteur $2h$ de l'éprouvette au cours du temps, qui est directement déduite –connaissant sa hauteur initiale h_0 – de la déformation axiale mesurée ϵ_{ax} par les barres de Hopkinson : $2h = h_0(1 + \epsilon_{ax})$

D'abord il faut écrire les contraintes de cisaillement calculées aux 6 stations en fonction de h, P et λ (coefficient de frottement voir (6)) à partir des relations (41),(42),(43) :

$$t_1(r_1, z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_{n,1} \sin\left(\frac{n\pi z_1}{H}\right)$$

$$t_1(r_1, z_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_{n,2} \sin\left(\frac{n\pi z_2}{H}\right)$$

$$t_1(r_1, z_3) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_{n,3} \sin\left(\frac{n\pi z_3}{H}\right)$$

$$t_2(r_2, z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{b}_{n,1} \sin\left(\frac{n\pi z_1}{H}\right)$$

$$t_2(r_2, z_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{b}_{n,2} \sin\left(\frac{n\pi z_2}{H}\right)$$

$$t_2(r_2, z_3) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{b}_{n,3} \sin\left(\frac{n\pi z_3}{H}\right)$$

$$t_3(r_3, z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_{n,1} \sin\left(\frac{n\pi z_1}{H}\right)$$

$$t_3(r_3, z_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_{n,2} \sin\left(\frac{n\pi z_2}{H}\right)$$

$$t_3(r_3, z_3) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,3} \sin\left(\frac{n\pi z_3}{H}\right)$$

Bien que tout le problème soit formulé en variables symboliques, on peut exprimer $t_i(r_i, z_j)$ en fonction de h, P et λ en limitant les séries à 5 termes dans ce qui suit :

$$t_1(19, 5) = P (-0.00767247 \square \text{Sin}[0.0698132 h]^2 + 0.0943724 \text{Sin}[0.139626 h] - 0.0504985 \square \text{Sin}[0.139626 h]^2 - 0.0416314 \square \text{Sin}[0.20944 h]^2 + 0.0639942 \text{Sin}[0.279253 h] - 0.0142102 \square \text{Sin}[0.279253 h]^2 + 0.0121332 \square \text{Sin}[0.349066 h]^2 + 0.0312059 \text{Sin}[0.418879 h] + 0.00782086 \text{Sin}[0.558505 h] - 0.00535733 \text{Sin}[0.698132 h])$$

$$t_1(19, 12) = P (-0.0118709 \square \text{Sin}[0.0698132 h]^2 + 0.146013 \text{Sin}[0.139626 h] + 0.0106612 \square \text{Sin}[0.139626 h]^2 + 0.045719 \square \text{Sin}[0.20944 h]^2 - 0.0135104 \text{Sin}[0.279253 h] - 0.0168991 \square \text{Sin}[0.279253 h]^2 - 0.0307224 \square \text{Sin}[0.349066 h]^2 - 0.0342699 \text{Sin}[0.418879 h] + 0.00930071 \text{Sin}[0.558505 h] + 0.0135652 \text{Sin}[0.698132 h])$$

$$t_1(19, 17) = P (-0.00829162 \square \text{Sin}[0.0698132 h]^2 + 0.101988 \text{Sin}[0.139626 h] + 0.0512462 \square \text{Sin}[0.139626 h]^2 - 0.0357243 \square \text{Sin}[0.20944 h]^2 - 0.0649419 \text{Sin}[0.279253 h] + 0.00289823 \square \text{Sin}[0.279253 h]^2 + 0.022803 \square \text{Sin}[0.349066 h]^2 + 0.0267781 \text{Sin}[0.418879 h] - 0.0015951 \text{Sin}[0.558505 h] - 0.0100685 \text{Sin}[0.698132 h])$$

$$t_2(23, 5) = P (-0.146109 \square \text{Sin}[0.0698132 h]^2 + 0.10297 \text{Sin}[0.139626 h] - 0.0819662 \square \text{Sin}[0.139626 h]^2 - 0.0282595 \square \text{Sin}[0.20944 h]^2 + 0.0508045 \text{Sin}[0.279253 h] - 0.0049846 \square \text{Sin}[0.279253 h]^2 + 0.00233495 \square \text{Sin}[0.349066 h]^2 + 0.0158516 \text{Sin}[0.418879 h] + 0.00249859 \text{Sin}[0.558505 h] - 0.00104949 \text{Sin}[0.698132 h])$$

$$t_2(23, 12) = P (-0.22606 \square \text{Sin}[0.0698132 h]^2 + 0.159315 \text{Sin}[0.139626 h] + 0.0173046 \square \text{Sin}[0.139626 h]^2 + 0.0310342 \square \text{Sin}[0.20944 h]^2 - 0.0107258 \text{Sin}[0.279253 h] - 0.00592777 \square \text{Sin}[0.279253 h]^2 - 0.0059123 \square \text{Sin}[0.349066 h]^2 - 0.017408 \text{Sin}[0.418879 h] + 0.00297136 \text{Sin}[0.558505 h] + 0.00265741 \text{Sin}[0.698132 h])$$

$$t_2(23, 17) = P (-0.22606 \square \text{Sin}[0.0698132 h]^2 + 0.159315 \text{Sin}[0.139626 h] + 0.0173046 \square \text{Sin}[0.139626 h]^2 + 0.0310342 \square \text{Sin}[0.20944 h]^2 - 0.0107258 \text{Sin}[0.279253 h] - 0.00592777 \square \text{Sin}[0.279253 h]^2 - 0.0059123 \square \text{Sin}[0.349066 h]^2 - 0.017408 \text{Sin}[0.418879 h] + 0.00297136 \text{Sin}[0.558505 h] + 0.00265741 \text{Sin}[0.698132 h])$$

$$t_3(27, 5) = P (-0.104671 \square \text{Sin}[0.0698132 h]^2 + 0.0580372 \text{Sin}[0.139626 h] - 0.0484652 \square \text{Sin}[0.139626 h]^2 - 0.0126737 \square \text{Sin}[0.20944 h]^2 + 0.0295505 \text{Sin}[0.279253 h] - 0.00175479 \square \text{Sin}[0.279253 h]^2 + 0.000734891 \square \text{Sin}[0.349066 h]^2 + 0.0100629 \text{Sin}[0.418879 h] + 0.00204108 \text{Sin}[0.558505 h] - 0.00127791 \text{Sin}[0.698132 h])$$

$$t_3(27, 12) = P (-0.161947 \square \text{Sin}[0.0698132 h]^2 + 0.0897952 \text{Sin}[0.139626 h] + 0.0102319 \square \text{Sin}[0.139626 h]^2 + 0.0139181 \square \text{Sin}[0.20944 h]^2 - 0.00623867 \text{Sin}[0.279253 h] - 0.00208682 \square \text{Sin}[0.279253 h]^2 - 0.00186081 \square \text{Sin}[0.349066 h]^2 - 0.0110509 \text{Sin}[0.418879 h] + 0.00242729 \text{Sin}[0.558505 h] + 0.00323578 \text{Sin}[0.698132 h])$$

$$t_3(27, 17) = P (-0.113118 \square \text{Sin}[0.0698132 h]^2 + 0.0627206 \text{Sin}[0.139626 h] + 0.0491829 \square \text{Sin}[0.139626 h]^2 - 0.0108755 \square \text{Sin}[0.20944 h]^2 - 0.0299881 \text{Sin}[0.279253 h] + 0.000357896 \square \text{Sin}[0.279253 h]^2 + 0.00138114 \square \text{Sin}[0.349066 h]^2 + 0.00863505 \text{Sin}[0.418879 h] - 0.000416288 \text{Sin}[0.558505 h] - 0.00240168 \text{Sin}[0.698132 h])$$

En remplaçant dans (47) afin de déterminer le champ de cisaillement puis dans (12),(13),(14) toutes les contraintes sont déterminées. Alors celles-ci peuvent être remplacées dans (7) qui exprime la loi de Hooke qui relie les contraintes aux déformations ; et la déformation orthoradiale sur la face extérieure de la cellule aura la forme suivante, fonction de h, P et λ :

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\theta}(30, z) = & P (-0.0278351 h + (-0.206877 + 0.00201118 z^2 - 3.17633 \times 10^{-6} z^4 + 1.63484 \times 10^{-9} z^6 + 1.77765 \times 10^{-25} z^8) \square \\
& \text{Sin}[0.0698132 h]^2 + (0.214332 - 0.00208366 z^2 + 3.29079 \times 10^{-6} z^4 - 1.69376 \times 10^{-9} z^6 - 2.01615 \times 10^{-24} z^8 - 0.398709 \text{Cos}[0.139626 \\
& z]) \text{Sin}[0.139626 h] + (-0.189553 + 0.00675616 z^2 - 0.0000339607 z^4 + 4.26326 \times 10^{-8} z^6 + 2.35149 \times 10^{-24} z^8) \square \text{Sin}[0.139626 h]^2 - \\
& 0.111268 \square \text{Sin}[0.20944 h]^2 + 0.00624665 z^2 \square \text{Sin}[0.20944 h]^2 - 0.0000462374 z^4 \square \text{Sin}[0.20944 h]^2 + 7.69981 \times 10^{-8} z^6 \square \\
& \text{Sin}[0.20944 h]^2 + 5.2345 \times 10^{-25} z^8 \square \text{Sin}[0.20944 h]^2 + 0.157339 \text{Sin}[0.279253 h] - 0.00560796 z^2 \text{Sin}[0.279253 \\
& h] + 0.0000281892 z^4 \text{Sin}[0.279253 h] - 3.53872 \times 10^{-8} z^6 \text{Sin}[0.279253 h] - 1.11395 \times 10^{-24} z^8 \text{Sin}[0.279253 h] - 0.199354 \\
& \text{Cos}[0.279253 z] \text{Sin}[0.279253 h] - 0.0186391 \square \text{Sin}[0.279253 h]^2 + 0.000176103 z^2 \square \text{Sin}[0.279253 h]^2 + 6.6415 \times 10^{-7} z^4 \square \\
& \text{Sin}[0.279253 h]^2 - 2.43435 \times 10^{-9} z^6 \square \text{Sin}[0.279253 h]^2 + 2.15428 \times 10^{-25} z^8 \square \text{Sin}[0.279253 h]^2 + 0.0273761 \square \text{Sin}[0.349066 h]^2 - \\
& 0.00197339 z^2 \square \text{Sin}[0.349066 h]^2 + 0.0000157589 z^4 \square \text{Sin}[0.349066 h]^2 - 2.70909 \times 10^{-8} z^6 \square \text{Sin}[0.349066 h]^2 + 1.58812 \times 10^{-24} z^8 \square \\
& \text{Sin}[0.349066 h]^2 + 0.0799955 \text{Sin}[0.418879 h] - 0.00449099 z^2 \text{Sin}[0.418879 h] + 0.0000332421 z^4 \text{Sin}[0.418879 h] - \\
& 5.53573 \times 10^{-8} z^6 \text{Sin}[0.418879 h] - 7.88407 \times 10^{-25} z^8 \text{Sin}[0.418879 h] - 0.132903 \text{Cos}[0.418879 z] \text{Sin}[0.418879 h] + 0.0113899 \\
& \text{Sin}[0.558505 h] - 0.000107613 z^2 \text{Sin}[0.558505 h] - 4.05846 \times 10^{-7} z^4 \text{Sin}[0.558505 h] + 1.48758 \times 10^{-9} z^6 \text{Sin}[0.558505 h] - \\
& 1.48129 \times 10^{-25} z^8 \text{Sin}[0.558505 h] - 0.0996771 \text{Cos}[0.558505 z] \text{Sin}[0.558505 h] - 0.0142935 \text{Sin}[0.698132 h] + 0.00103034 z^2 \\
& \text{Sin}[0.698132 h] - 8.22797 \times 10^{-6} z^4 \text{Sin}[0.698132 h] + 1.41446 \times 10^{-8} z^6 \text{Sin}[0.698132 h] + 7.94061 \times 10^{-25} z^8 \text{Sin}[0.698132 h] - \\
& 0.0797417 \text{Cos}[0.698132 z] \text{Sin}[0.698132 h] - 0.0664514 \text{Cos}[0.837758 z] \text{Sin}[0.837758 h] - 0.0569584 \text{Cos}[0.977384 z] \\
& \text{Sin}[0.977384 h] - 0.0498386 \text{Cos}[1.11701 z] \text{Sin}[1.11701 h] - 0.0443009 \text{Cos}[1.25664 z] \text{Sin}[1.25664 h] - 0.0398709 \\
& \text{Cos}[1.39626 z] \text{Sin}[1.39626 h] - 0.0362462 \text{Cos}[1.53589 z] \text{Sin}[1.53589 h] - 0.0332257 \text{Cos}[1.67552 z] \text{Sin}[1.67552 h] - \\
& 0.0306699 \text{Cos}[1.81514 z] \text{Sin}[1.81514 h] - 0.0284792 \text{Cos}[1.95477 z] \text{Sin}[1.95477 h] - 0.0265806 \text{Cos}[2.0944 z] \text{Sin}[2.0944 \\
& h] + 0.11695 \square \text{Sin}[(h \square)/45]^2 + 0.283407 \square \text{Cos}[0.139626 z] \text{Sin}[(h \square)/45]^2 - 0.0292376 \square \text{Sin}[(2 h \square)/45]^2 + 0.195694 \square \\
& \text{Cos}[0.279253 z] \text{Sin}[(2 h \square)/45]^2 + 0.0129945 \square \text{Sin}[(h \square)/15]^2 + 0.179451 \square \text{Cos}[0.418879 z] \text{Sin}[(h \square)/15]^2 - 0.0073094 \square \\
& \text{Sin}[(4 h \square)/45]^2 + 0.173766 \square \text{Cos}[0.558505 z] \text{Sin}[(4 h \square)/45]^2 + 0.00467802 \square \text{Sin}[(h \square)/9]^2 + 0.171134 \square \text{Cos}[0.698132 z] \\
& \text{Sin}[(h \square)/9]^2)
\end{aligned} \tag{48}$$

Ainsi on a une relation explicite qui relie les déformations orthoradiales en tout point de la surface extérieure de la cellule, à la pression radiale P exercée par l'éprouvette sur la cellule sur une hauteur h , tenant compte d'un coefficient de frottement λ entre l'éprouvette et la cellule.

(48) se simplifie dans le cas où le coefficient de frottement $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\theta}(30, z) = & P (-0.0278351 h + (0.214332 - 0.00208366 z^2 + 3.29079 \times 10^{-6} z^4 - 1.69376 \times 10^{-9} z^6 - 2.01615 \times 10^{-24} z^8 - 0.398709 \\
& \text{Cos}[0.139626 z]) \text{Sin}[0.139626 h] + (0.157339 - 0.00560796 z^2 + 0.0000281892 z^4 - 3.53872 \times 10^{-8} z^6 - 1.11395 \times 10^{-24} z^8 - 0.199354 \\
& \text{Cos}[0.279253 z]) \text{Sin}[0.279253 h] + 0.0799955 \text{Sin}[0.418879 h] - 0.00449099 z^2 \text{Sin}[0.418879 h] + 0.0000332421 z^4 \\
& \text{Sin}[0.418879 h] - 5.53573 \times 10^{-8} z^6 \text{Sin}[0.418879 h] - 7.88407 \times 10^{-25} z^8 \text{Sin}[0.418879 h] - 0.132903 \text{Cos}[0.418879 z] \\
& \text{Sin}[0.418879 h] + 0.0113899 \text{Sin}[0.558505 h] - 0.000107613 z^2 \text{Sin}[0.558505 h] - 4.05846 \times 10^{-7} z^4 \text{Sin}[0.558505 \\
& h] + 1.48758 \times 10^{-9} z^6 \text{Sin}[0.558505 h] - 1.48129 \times 10^{-25} z^8 \text{Sin}[0.558505 h] - 0.0996771 \text{Cos}[0.558505 z] \text{Sin}[0.558505 h] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&0.0142935 \sin[0.698132 h]+0.00103034 z^2 \sin[0.698132 h]-8.22797 \times 10^{-6} z^4 \sin[0.698132 h]+1.41446 \times 10^{-8} z^6 \sin[0.698132 \\
&h]+7.94061 \times 10^{-25} z^8 \sin[0.698132 h]-0.0797417 \cos[0.698132 z] \sin[0.698132 h]-0.0664514 \cos[0.837758 z] \sin[0.837758 \\
&h]-0.0569584 \cos[0.977384 z] \sin[0.977384 h]-0.0498386 \cos[1.11701 z] \sin[1.11701 h]-0.0443009 \cos[1.25664 z] \\
&\sin[1.25664 h]-0.0398709 \cos[1.39626 z] \sin[1.39626 h]-0.0362462 \cos[1.53589 z] \sin[1.53589 h]-0.0332257 \\
&\cos[1.67552 z] \sin[1.67552 h]-0.0306699 \cos[1.81514 z] \sin[1.81514 h]-0.0284792 \cos[1.95477 z] \sin[1.95477 h]- \\
&0.0265806 \cos[2.0944 z] \sin[2.0944 h]) \tag{49}
\end{aligned}$$

Il est possible de tracer l'évolution de $\epsilon_\theta(30, z)$ (49) en fonction de h et z en considérant une pression radiale de référence $P = 1000MPa$ (figure IV.15). Sachant que la hauteur initiale de l'éprouvette est $h_0 = 40$ mm, les valeurs pratiques de $2h$ se situeront entre 40 et 34 mm, soit jusqu'à une déformation axiale nominale de 15%. On note qu'il est intéressant de calculer la pression intérieure à partir de $\epsilon_\theta(30, 0)$ vue la faible sensibilité à h . Deux autres jauges placées à $\pm 17mm$ permettent de mesurer l'excentricité de $2h$ par rapport à la cellule.

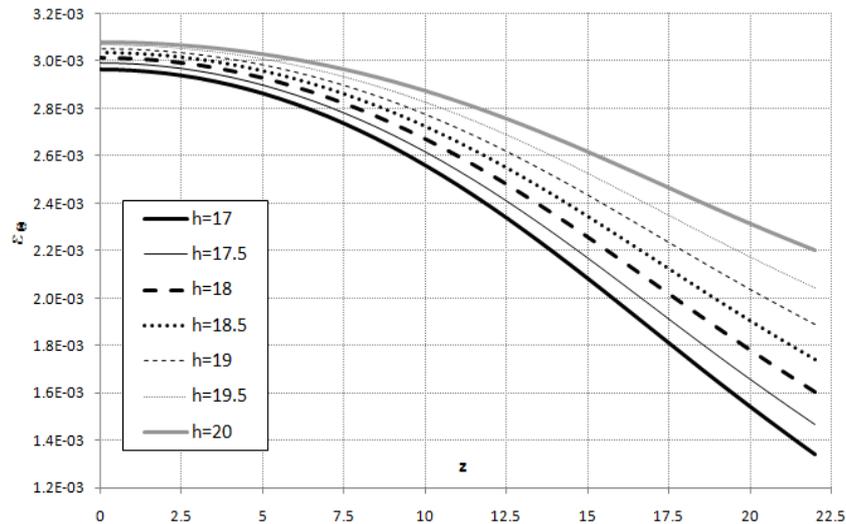


Fig. IV.15 –Déformations orthoradiales de la surface extérieure sous $P = 1000MPa$; $\lambda = 0$

La déformation axiale (7) à la surface extérieure peut aussi être tracée :

$$\begin{aligned}
\epsilon_z(30, z) = P &(0.00835053 h+(-0.50507+0.00277247 z^2-4.46656 \times 10^{-6} z^4+2.70613 \times 10^{-9} z^6-6.06056 \times 10^{-13} z^8+0.119613 \\
&\cos[0.139626 z]) \sin[0.139626 h]+(-0.0585686+0.00361539 z^2-0.0000199396 z^4+3.37042 \times 10^{-8} z^6-1.55269 \times 10^{-11} \\
&z^8+0.0598063 \cos[0.279253 z]) \sin[0.279253 h]-0.123946 \sin[0.418879 h]+0.00260813 z^2 \sin[0.418879 h]-0.0000217699 \\
&z^4 \sin[0.418879 h]+5.15364 \times 10^{-8} z^6 \sin[0.418879 h]-3.11608 \times 10^{-11} z^8 \sin[0.418879 h]+0.0398709 \cos[0.418879 z] \\
&\sin[0.418879 h]-0.0269664 \sin[0.558505 h]+0.000265795 z^2 \sin[0.558505 h]-2.45951 \times 10^{-7} z^4 \sin[0.558505 h]-1.00097 \times 10^{-9} \\
&z^6 \sin[0.558505 h]+1.0892 \times 10^{-12} z^8 \sin[0.558505 h]+0.0299031 \cos[0.558505 z] \sin[0.558505 h]+0.0348806 \\
&\sin[0.698132 h]-0.000669228 z^2 \sin[0.698132 h]+6.79499 \times 10^{-6} z^4 \sin[0.698132 h]-1.80638 \times 10^{-8} z^6 \sin[0.698132 \\
&h]+1.27277 \times 10^{-11} z^8 \sin[0.698132 h]+0.0239225 \cos[0.698132 z] \sin[0.698132 h]+0.0199354 \cos[0.837758 z] \\
&\sin[0.837758 h]+0.0170875 \cos[0.977384 z] \sin[0.977384 h]+0.0149516 \cos[1.11701 z] \sin[1.11701 h]+0.0132903 \\
&\cos[1.25664 z] \sin[1.25664 h]+0.0119613 \cos[1.39626 z] \sin[1.39626 h]+0.0108739 \cos[1.53589 z] \sin[1.53589
\end{aligned}$$

$$h]+0.00996771 \cos[1.67552 z] \sin[1.67552 h]+0.00920097 \cos[1.81514 z] \sin[1.81514 h]+0.00854375 \cos[1.95477 z] \sin[1.95477 h]+0.00797417 \cos[2.0944 z] \sin[2.0944 h]) \quad (50)$$

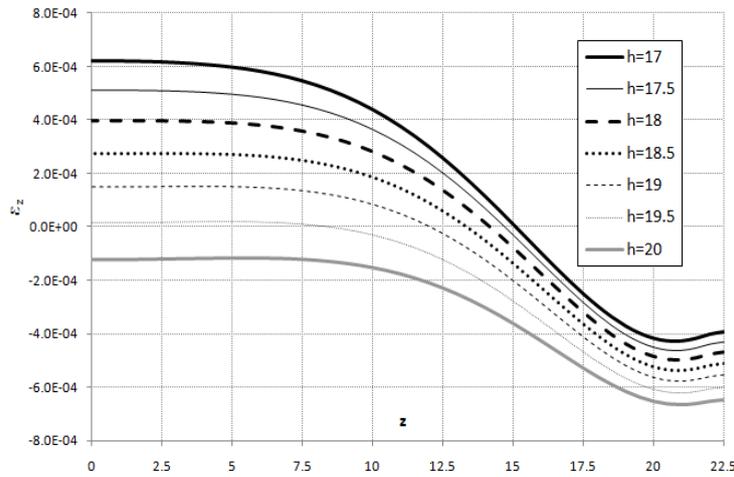


Fig. IV.16 – Déformations axiales de la surface extérieure sous $P = 1000MPa$; $\lambda = 0$

Les déformations axiales sur la surface extérieure de la cellule sont en fait mesurées par les jauges axiales placées à $z = 0$. Comme on le remarque sur la figure ci-dessus, les valeurs de la déformation axiale sont plus modérées que celles de la déformation orthoradiale, et présentent une caractéristique qui les rend peu fiables : Au cours de l'essai, au fur et à mesure que h diminue, $\epsilon_z(30, 0)$ dont la valeur est déjà assez faible pour $h = 20$, change de signe et commence à avoir des valeurs supérieures à $1*10^{-4}$ quand $h < 19$, soit pour des déformations axiales nominales supérieures à 5%. Or, pour la même déformation axiale, les déformations orthoradiales $\epsilon_\theta(30, 0)$ sont 20 fois plus grandes. Dans le cas d'une cellule uniformément chargée sur toute sa hauteur, les déformations axiales sont nulles. Celles-ci expriment physiquement la mise en tonneau de la cellule, d'autant plus accentuée que la hauteur de chargement h est petite. Cependant, si les déformations axiales ne peuvent convenir pour le calcul de la pression radiale, elles pourraient avoir d'autre part un avantage en ce qui concerne l'estimation des forces axiales dues au frottement, en espérant que celles-ci aient un effet plus prépondérant sur les déformations. Pour cela, on représente la déformation axiale (50) au centre de la surface extérieure de la cellule $\epsilon_z(30, 0)$ -à l'endroit exact de la jauge- en fonction de λ et h . En supposant constante la charge radiale appliquée $P = 1000MPa$, et en faisant varier le coefficient de frottement $0 \leq \lambda \leq 0.25$ ainsi que la hauteur d'application du chargement $17 \leq h \leq 20$, il est possible d'estimer l'effet du frottement sur la mesure de la

jauge axiale (figure IV.17). On voit que celui-ci a tendance à comprimer toute la section de la cellule, et donc à diminuer les déformations axiales de traction qui sont générées par la charge normale seule. Par conséquent il est difficile de découpler l'effet du frottement de celui de la pression si on ne se donne pas à priori le coefficient de frottement ainsi qu'un modèle de comportement tel le modèle simple de Coulomb par exemple. Si le frottement dans le cadre des hypothèses considérées a un faible effet sur les mesures des jauges, par contre sa résultante affecte directement la contrainte axiale nominale. En effet, que ce soit par les barres dans le cas de l'essai dynamique, ou par le moyen de la presse hydraulique statique, la force mesurée constitue la somme algébrique de la force effective dans l'éprouvette et de la résultante des forces de frottement.

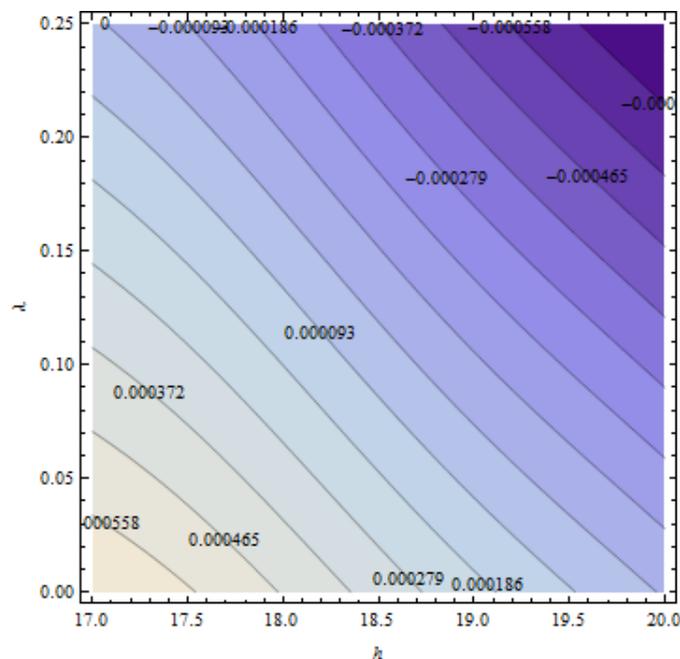


Fig. IV.17 –Variation des déformations axiales $\epsilon_z(30,0)$ en fonction de λ, h sous $P = 1000MPa$

Les dispositions expérimentales en vue de réduire le frottement, ont permis, par le biais d'essais sur matériaux dont le comportement est connu, d'en estimer pratiquement les conséquences. Dans la partie suivante (partie IV.3), une évaluation du coefficient de frottement est proposée.

Il est possible à présent de formuler à tout temps t les grandeurs intervenant dans les lois de comportement du matériau en fonction des formules présentées ci-dessus. La déformation axiale –ou la hauteur h de l'éprouvette- étant directement reliée au temps, les contraintes et

déformations dans l'éprouvette le seront aussi puisque qu'elles sont formulées en fonction des déformations relevées par les jauges de la cellule.

$$\sigma_z^{epr.} = \frac{F_{axiale}}{\pi r_0^2 (1 + \epsilon_{r-moy})^2} \quad (52)$$

Avec F_{axiale} mesurée par le dispositif des barres de Hopkinson ou la presse statique, et r_0 le rayon initial de l'éprouvette. $\sigma_z^{epr.}$ sera désignée dans le reste du manuscrit « σ axiale »

$$\sigma_{deviatorique}^{epr} = |\sigma_z^{epr} - P| \quad (53)$$

P étant la contrainte radiale, déterminée par $\epsilon_\theta(30, 0)$ tirée de (48) ou (49) et désignée « σ radiale » pour la suite. $\sigma_{deviatorique}^{epr.}$ sera désignée dans le reste du manuscrit « σ déviatorique »

$$P_{hydrostatique}^{epr} = -\frac{1}{3}(\sigma_z^{epr} + 2P) \quad (54)$$

$P_{hydrostatique}^{epr.}$ sera désignée dans le reste du manuscrit « Pression »

$$\epsilon_{volumique}^{epr} = (1 + \epsilon_z^{epr})(1 + \epsilon_{r-moy})^2 - 1 \quad (55)$$

Avec ϵ_z^{epr} est la déformation axiale fournie par le dispositif des barres de Hopkinson ou la presse statique. $\epsilon_{volumique}^{epr.}$ sera désignée dans le reste du manuscrit « ϵ volumique »

Ces grandeurs seront utilisées dans le chapitre V pour la formulation du comportement sphérique et déviatorique du béton testé.

IV.3 Validation expérimentale de l'essai de confinement

Un moyen efficace pour valider l'essai de confinement consiste à réaliser cet essai avec un matériau dont le comportement dynamique et statique est caractérisé avec des essais uniaxiaux. Le choix du matériau s'est porté sur le laiton qui possède deux caractéristiques qui conviennent à l'essai de confinement. La première, qui est postulée à priori, est reliée à la propriété des métaux en général à avoir un comportement non sensible à la pression hydrostatique (critère de Von Mises). Le comportement hydrostatique de ces matériaux est toujours élastique ; les pressions et les déformations volumiques étant reliées par le module de compressibilité $K = \frac{E}{2(1-2\nu)}$. La deuxième caractéristique est la non sensibilité du laiton vis-à-vis de la vitesse de déformation. Cette propriété a été vérifiée par le biais d'essais dynamiques à différentes vitesses d'impacteur, complétés par des essais statiques. Sur les figures IV.19 et IV.20 sont représentés le comportement sphérique et la contrainte déviatorique en fonction de la déformation effective (ou équivalente) :

$$\epsilon_{effective} = \frac{2}{3} |\epsilon_{axial} - \epsilon_{radial}|.$$

Quatre essais sont visualisés : deux essais statiques et deux essais dynamiques sous compression uniaxiale et confinée. Tous les essais sont réalisés avec des éprouvettes de même taille ($\emptyset 29$ -H40) et dans les mêmes conditions que les essais sur bétons. Le laiton subit la même procédure de mise en place que celle décrite dans la partie II.5, y compris son confinement par la résine polymérisante. Seul l'essai dynamique uniaxial est effectué avec une éprouvette de petite taille, selon les principes de base des barres de Hopkinson. Le facteur restrictif de la présente méthode de validation consiste à limiter les amplitudes des chargements dynamique et statique lors des essais confinés, de sorte à ne pas dépasser la limite élastique de la cellule. Ceci a conduit à des déformations axiales de l'ordre de quelques pourcents, assez réduites par rapport aux essais sur bétons où elles atteignent 15%. Cependant bien que les déformations totales atteintes avec le laiton sont réduites, elles permettent de mieux représenter le début des essais où le comportement passe de l'élastique à l'élasto-plastique. L'essai statique de compression uniaxiale « UA-Stat. » permet l'identification des propriétés élastiques du laiton, telles le module d'élasticité $E = 80$ GPa et le coefficient de Poisson $\nu = 0.31$. Cet essai est représenté à la figure IV.20. Son comportement sphérique (figure IV.19) consiste en une droite de pente $K = 70$ GPa qui est déduite d'après les

constantes élastiques. Les comportements sphériques des essais dynamiques et statiques quasi-œdométriques « QO-Dyn. » et « QO-Stat. » sont représentés sur la même figure, et montrent un module de compressibilité assez proche de l'essai uniaxial, (61 GPa). La différence est due principalement à l'effet de la résine et celui du frottement. La résine n'est pas incompressible et sa déformation augmente virtuellement la compaction du matériau. Il est à noter en fait que l'erreur sur la déformation volumique est bien moins importante dans le cas du béton, vu que son module de compressibilité est 3 à 4 fois plus faible que celui du laiton.

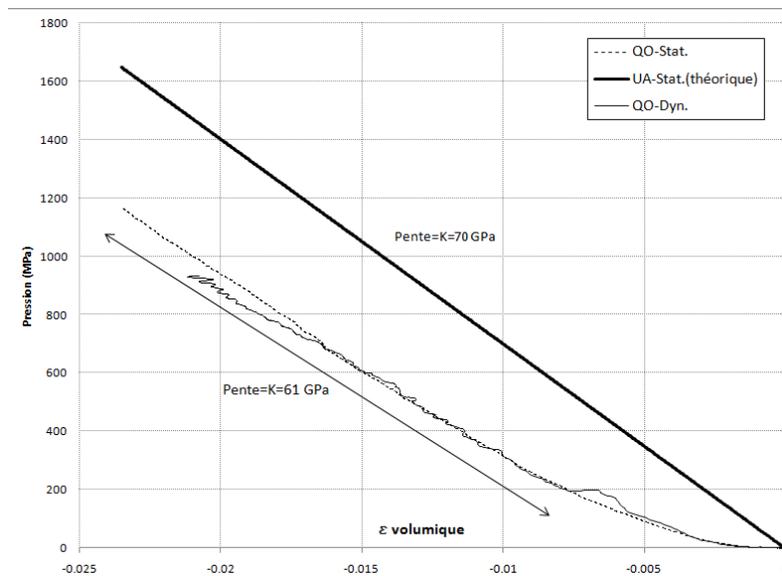


Fig. IV.19 – Comportement sphérique du laiton sous essais confinés et uniaxiaux

L'essai dynamique confiné « QO-Dyn. » a été réalisé à une vitesse de déformation moyenne de 90 s^{-1} correspondant à la vitesse d'impacteur maximale admise par la cellule. L'essai « UA-Dyn. » est réalisé à des vitesses de déformation allant de 50 à 700 s^{-1} sans que le comportement n'en soit affecté.

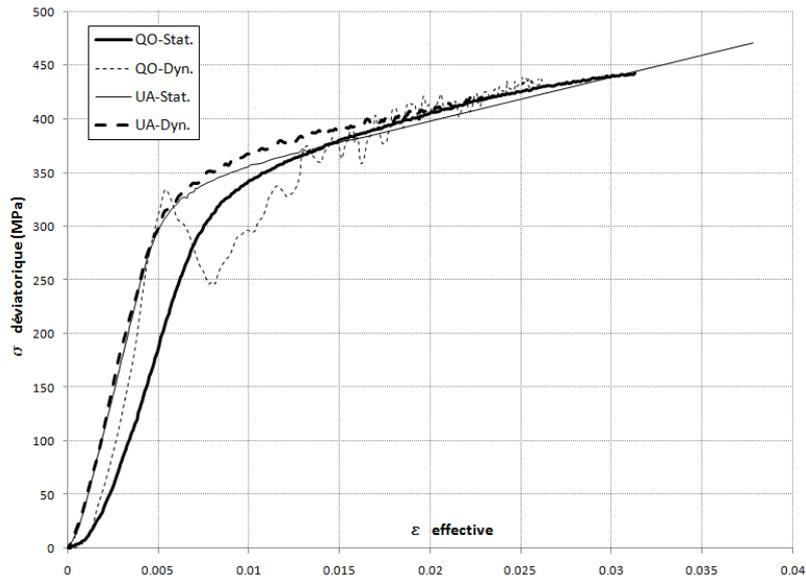


Fig. IV.20 – Contraintes déviatoriques du laiton sous essais confinés et uniaxiaux

Sur la figure IV.20 on observe que pour des déformations effectives inférieures à 1%, les courbes des essais uniaxiaux et quasi-œdométriques sont légèrement différentes. La différence peut provenir de plusieurs facteurs dont le frottement entre l'éprouvette et la cellule, la compressibilité du produit d'interface, et aussi un vide éventuel entre l'éprouvette et la cellule non comblé par le produit. D'autre part, la chute brusque de la résistance observée sur l'essai « QO-Dyn. » située à une déformation effective de 0.5%, est due à un mauvais contact entre la barre entrante et le bouchon, qui produit un double choc et donc une subite variation de la force entrante. La transmission des contraintes radiales de l'éprouvette à la cellule est la même quelle que soit la compressibilité de la résine. Donc si tout le vide est comblé autour de l'éprouvette, la différence de comportement observée sur la figure IV.20 est en grande partie due à l'effet du frottement. L'effet du frottement peut être pris en compte dans le dépouillement (partie IV.2). L'identification expérimentale de ce coefficient ne peut être faite à partir des mesures des jauges durant l'essai, par le fait que la contrainte radiale et de cisaillement appliquées sur la face intérieure de la cellule, ne produisent pas des effets qui puissent les discerner séparément et d'une manière efficace. Il existe cependant un moyen qui permet d'estimer le coefficient de frottement statique, à partir d'une constatation observée lors de l'extraction de l'éprouvette de la cellule, une fois l'essai terminé. Notons que le coefficient statique de frottement constitue une limite supérieure au coefficient de frottement cinématique, vu que la force à fournir pour déclencher le glissement est supérieure à celle requise pour le maintenir.

L'état des contraintes radiales dans l'éprouvette après l'essai n'est pas nul, il est nécessaire d'avoir recours à la presse manuelle pour l'extraire de la cellule. L'éprouvette ayant appliqué de fortes pressions latérales sur la cellule lors de sa compaction, celles-ci ne disparaissent pas aussitôt que le chargement axial est enlevé. La cellule se rétracte sur l'éprouvette afin de recouvrer son état initial, et une sorte de contrainte radiale résiduelle subsiste. Grâce à la presse manuelle dotée d'un dynamomètre ; une force axiale est appliquée progressivement sur l'éprouvette ; son début de chute coïncide physiquement avec l'amorçage du glissement, soit au seuil à partir duquel la résultante des contraintes de frottement ne parvient plus à équilibrer la force axiale. A ce moment on peut écrire que $F_{axiale} = T = \lambda P S_h$ (dans l'hypothèse du frottement de Coulomb) avec P la pression latérale et $S_h = 2\pi r_0 h$ la surface latérale de l'éprouvette en fin d'essai. Sa hauteur h peut être considérée dans le sens de la majoration du coefficient de frottement λ , comme étant 90% de sa hauteur initiale h_0 , soit $h = 0.9h_0$. Afin de déterminer la pression latérale P , on peut avoir recours aux mesures des jauges à la fin de l'essai. Sur la figure IV.21 sont présentées les mesures des jauges à la fin d'un essai dynamique typique. Si l'on considère les jauges orthoradiales situées au milieu de la cellule ($z=0$), on remarque effectivement que le niveau des déformations atteint un plateau correspondant à la réaction résiduelle de l'éprouvette sur la cellule sous forces axiales nulles. Les essais effectués montrent des valeurs de déformations résiduelles assez semblables, celles de la figure IV.21 correspondent à un essai effectué à la plus grande vitesse de chargement. A la déformation $\epsilon_\theta(30, 0) = 1.62 \cdot 10^{-4}$ correspond une pression interne $P = 55 \text{ MPa}$ (voir (49) et figure IV.15). La force nécessaire pour déclencher le glissement est donnée par la presse manuelle, elle est habituellement comprise entre 13 et 17 KN. Pour l'essai en question $F_{axiale} = 15 \text{ KN}$. Le coefficient de frottement moyen est alors déterminé :

$$\lambda = \frac{F_{axiale}}{2\pi r_0 0.9h_0 P} = 0.082.$$

Donc la force axiale effective appliquée à l'éprouvette est : $F_{axiale}^{effective} = F_{axiale} - \pi r_0 0.9h_0 \lambda P$

Sachant que la pression latérale P est inférieure à la contrainte axiale σ_z^{ep} , il est clair que la contrainte axiale effective est assez proche de la contrainte axiale mesurée. Le coefficient de frottement ainsi évalué, il est possible alors de déterminer la pression latérale avec plus de précision, toujours à partir de la jauge centrale orthoradiale $\epsilon_\theta(30, 0)$:

$$\frac{\epsilon_{\theta}(30, 0)}{P} = 1.4773 \times 10^{-7} h - 1.35525 \times 10^{-20} \square + 5.42101 \times 10^{-20} \square \cos[0.139626 h] - 5.0822 \times 10^{-21} \square \cos[0.279253 h] - 4.23516 \times 10^{-22} \square \cos[0.418879 h] - 4.23516 \times 10^{-21} \square \cos[0.558505 h] + 4.23516 \times 10^{-21} \square \cos[0.698132 h] + 1.09796 \times 10^{-6} \square \sin[0.0698132 h]^2 + 9.78542 \times 10^{-7} \square \sin[0.139626 h] + 1.00602 \times 10^{-6} \square \sin[0.139626 h]^2 + 5.90535 \times 10^{-7} \square \sin[0.20944 h]^2 + 2.2299 \times 10^{-7} \square \sin[0.279253 h] + 9.89237 \times 10^{-8} \square \sin[0.279253 h]^2 - 1.45294 \times 10^{-7} \square \sin[0.349066 h]^2 + 2.80796 \times 10^{-7} \square \sin[0.418879 h] + 4.68568 \times 10^{-7} \square \sin[0.558505 h] + 4.99074 \times 10^{-7} \square \sin[0.698132 h] + 3.52679 \times 10^{-7} \square \sin[0.837758 h] + 3.02296 \times 10^{-7} \square \sin[0.977384 h] + 2.64509 \times 10^{-7} \square \sin[1.11701 h] + 2.35119 \times 10^{-7} \square \sin[1.25664 h] + 2.11607 \times 10^{-7} \square \sin[1.39626 h] + 1.9237 \times 10^{-7} \square \sin[1.53589 h] + 1.76339 \times 10^{-7} \square \sin[1.67552 h] + 1.62775 \times 10^{-7} \square \sin[1.81514 h] + 1.51148 \times 10^{-7} \square \sin[1.95477 h] + 1.41072 \times 10^{-7} \square \sin[2.0944 h] - 2.12482 \times 10^{-6} \square \sin[(h \square)/45]^2 - 8.83436 \times 10^{-7} \square \sin[(2 h \square)/45]^2 - 1.02137 \times 10^{-6} \square \sin[(h \square)/15]^2 - 8.83436 \times 10^{-7} \square \sin[(4 h \square)/45]^2 - 9.33091 \times 10^{-7} \square \sin[(h \square)/9]^2$$

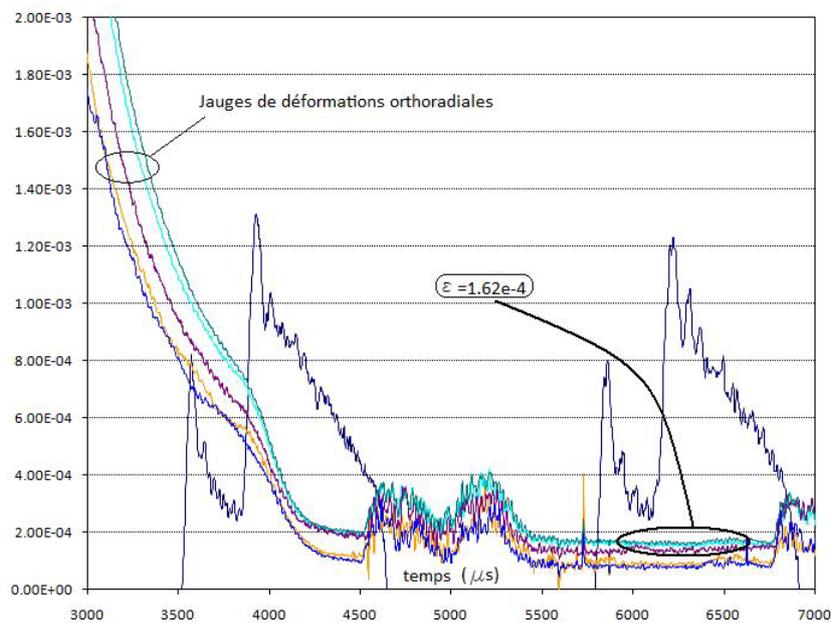


Fig. IV.21 – Mesures expérimentales des jauges de déformation en fin d’essai

IV.4 Conclusion

Le dépouillement des essais quasi-œdométriques requiert la connaissance dans les directions axiales et radiales des contraintes et déformations dans l’éprouvette. Les barres de Hopkinson et la presse statique classique de type MTS fournissent ces grandeurs dans le sens axial uniquement. Une étude analytique de la cellule est entreprise, pour déterminer les contraintes et déformations radiales, en considérant comme hypothèses de chargement une pression latérale ainsi que des contraintes de frottement, appliqués sur une partie de sa surface intérieure. Cette étude a permis d’exprimer les contraintes normales en fonction des contraintes de cisaillement, de sorte que le problème soit formulé en fonction d’une seule

variable sous forme d'équation différentielle. La solution de cette équation se fait par la recherche d'un champ de contraintes, qui soit solution exacte de cette équation en un nombre fini de points, et qui l'approxime sous forme de polynômes par ailleurs. Il est alors possible d'obtenir tout les champs mécaniques à l'intérieur du solide, et particulièrement à l'endroit choisi des jauges. Les équations reliant les variables entre elles font intervenir des fonctions simples. Plusieurs validations numériques sont effectuées au fur et à mesure des étapes de résolution. La détermination de la pression radiale exercée par l'éprouvette sur la cellule se fait grâce à la jauge centrale orthoradiale qui possède le niveau de déformation le plus élevé et le plus stable vis-à-vis de la hauteur de chargement. L'identification analytique de l'effet du frottement entre l'éprouvette et la cellule, à partir des mesures des jauges, s'est avérée non exploitable. Par contre, il est possible d'en tenir compte dans la détermination de la pression latérale intérieure, par l'intermédiaire des mesures des jauges. Une estimation expérimentale du coefficient de frottement a montré que son effet est négligeable sur le comportement du béton. La validation de la méthode de dépouillement s'est faite par la réalisation d'essais dynamiques et statiques uniaxiaux et confinés sur du laiton. Ce matériau est choisi après que sa caractérisation par des essais uniaxiaux statiques et dynamiques a montré sa non sensibilité à l'effet de vitesse. L'évaluation globale de la performance de l'essai oedométrique, compte tenu de la présence de la résine d'interface et du frottement éprouvette-cellule, est satisfaisante au niveau des comportements déviatorique et sphérique.

La principale caractéristique de la procédure de dépouillement présentée, consiste dans le comportement élastique de la cellule de confinement. Il est certes plus difficile et moins exact d'élaborer un dépouillement en tenant compte de la plastification de la cellule durant l'essai. L'élasticité de la cellule a permis la construction de relations basées sur une étude analytique issue de la mécanique des milieux continus. Ainsi les erreurs reliées au comportement plastifiant de la cellule en dynamique sont éliminées. Il est ainsi possible de calculer en temps réel la pression appliquée par l'éprouvette sur la face intérieure de la cellule, ainsi que sa déformation radiale moyenne le long de la hauteur de l'éprouvette. Les principales hypothèses qui sont faites concernent l'uniformité du champ des contraintes radiales appliquées sur la cellule. L'effet du frottement s'est avéré négligeable, grâce aux dispositions expérimentales prises à son égard. Ainsi la méthode analytique de dépouillement, couplée à un dispositif expérimental précis, minimise les sources d'erreurs et réduit la dispersion sur les résultats.

Chapitre V

Résultats expérimentaux

Nous présentons dans ce chapitre les résultats des essais quasi-œdométriques dynamiques et statiques effectués sur le béton MB50 pour des éprouvettes saturées et sèches, ainsi que l'analyse des comportements déviatorique et volumique. L'analyse des comportements se situe à plusieurs niveaux. D'abord l'influence de l'effet de vitesse pour les essais dynamiques est étudiée séparément pour les bétons secs et saturés. Une première conclusion est relative à la sensibilité du béton aux chargements dynamiques. L'influence de la présence de l'eau libre sur le comportement est alors analysée en comparant les résultats des deux bétons.

Afin de cerner l'influence de l'effet dynamique sur le comportement, des essais statiques sont effectués (dans lesquels on a observé l'expulsion de l'eau libre) présente dans les éprouvettes saturées. Il est apparu que le comportement du béton était fortement relié à la durée de l'essai statique ; celui-ci étant caractérisé par l'expulsion de l'eau libre contenue dans les éprouvettes saturées.

Trois niveaux de chargements dynamiques sont adoptés. Ils correspondent à des vitesses d'impacteur de 6, 8.5 et 11 m/s. Nous avons choisi de désigner les essais par les vitesses d'impacteur vu que les vitesses de déformation ne sont pas constantes durant l'essai, quoique facilement discernables pour des essais effectués à des niveaux de chargement différents (tableaux V.1 et V.2).

Référence	Masse (g)	Densité (g/cm ³)	$\dot{\epsilon}_{moy. s^{-1}}$
V6sat	58.30	2.23	93
V8.5sat	59.76	2.28	120
V11sat	59.88	2.29	146
QSsat-55s	60.20	2.30	1.9e-3
QSsat-22mn	59.15	2.27	1.1e-4
QSsat-2h	59.62	2.29	1.7e-5
QSsat-24h	59.10	2.26	1.4e-6

Tableau V.1 –Récapitulatif des essais sur éprouvettes saturées

Les essais quasi-statiques sont dénotés « QS » suivi de la durée de l'essai. La vitesse moyenne de déformation ($\dot{\epsilon}_{moy}$) pour les essais dynamiques est arbitrairement définie comme étant la moyenne des deux points correspondant aux vitesses de déformation maximum (soit au début de l'essai) et nulle (lorsque la déformation atteint son maximum) (voir figure V.3).

Référence	Masse saturée (g)	Densité saturée (g/cm ³)	Masse sèche (g)	Perte massique (%)	$\dot{\epsilon}_{moy}$, s ⁻¹
V6sec	59.30	2.27	55.68	6.10	90
V8.5sec	59.52	2.29	56.06	5.81	114
V11sec	59.40	2.27	55.70	6.23	147
QSsec	59.36	2.24	55.75	6.08	1.1e-4

Tableau V.2 –Récapitulatif des essais sur éprouvettes sèches

V.1 Essais dynamiques quasi-œdométriques

Les valeurs maximales des contraintes axiales et pressions hydrostatiques ont été atteintes pour l'essai sur éprouvette saturée sous vitesse d'impacteur 11m/s (figure V.1).

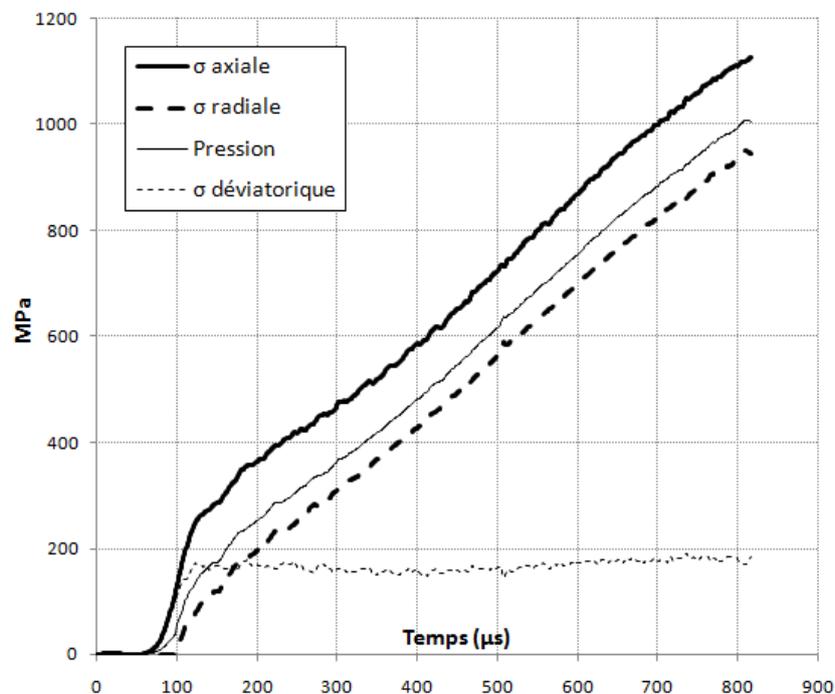


Fig. V.1 –Evolution au cours du temps des contraintes dans l'éprouvette VII1sat

Pour une contrainte axiale de 1100 MPa, la pression hydrostatique atteint une valeur de 1000 MPa. La courbe de contrainte radiale est comparable tant en forme qu'en niveau à celle de la contrainte axiale. Par conséquent la courbe de contrainte déviatorique présente un niveau quasi-constant aux alentours de 170 MPa.

L'évolution des déformations est montrée à la figure V.2. A la fin du chargement, la déformation axiale est de 11% alors que la déformation radiale n'est que 0.73%, et ceci pour une pression de confinement de 900 MPa. Les essais peuvent donc être considérés comme « quasi-œdométriques ».

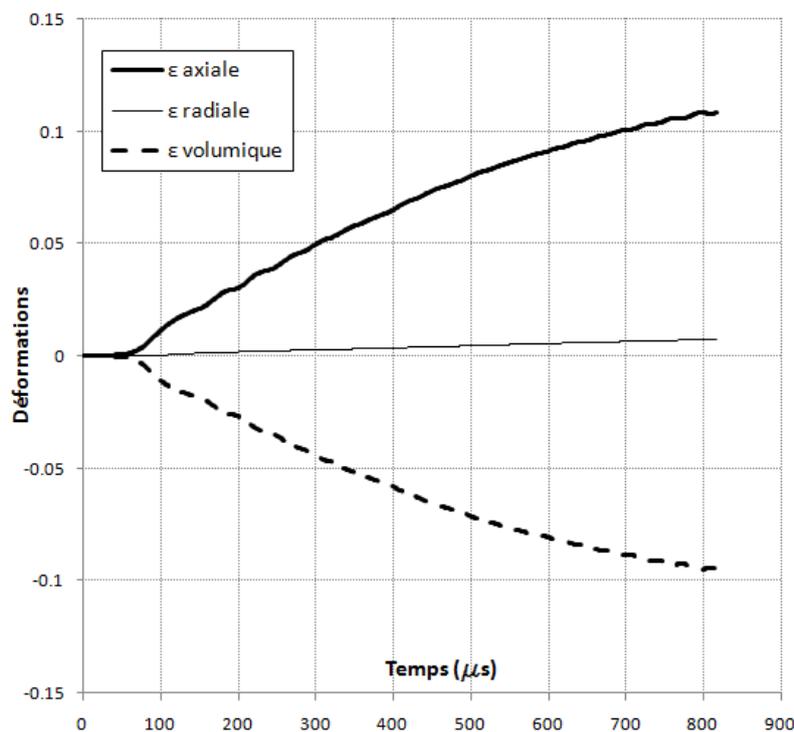


Fig. V.2 – Evolution au cours du temps des déformations dans l'éprouvette VIIIsat

V.1.1 Essais dynamiques sur bétons secs

Les résultats pour les bétons secs sont représentés sur les figures V.3 à V.8. (figure V.3). On constate qu'après avoir atteint un maximum, la vitesse de déformation décroît avec une pente plus douce jusqu'à la fin de l'essai. Le maximum atteint par la vitesse de déformation correspond sur les courbes de contraintes axiales et déviatoriques (figures V.4 à V.6) à un niveau de contraintes à partir duquel une diminution notable de la raideur est observée.

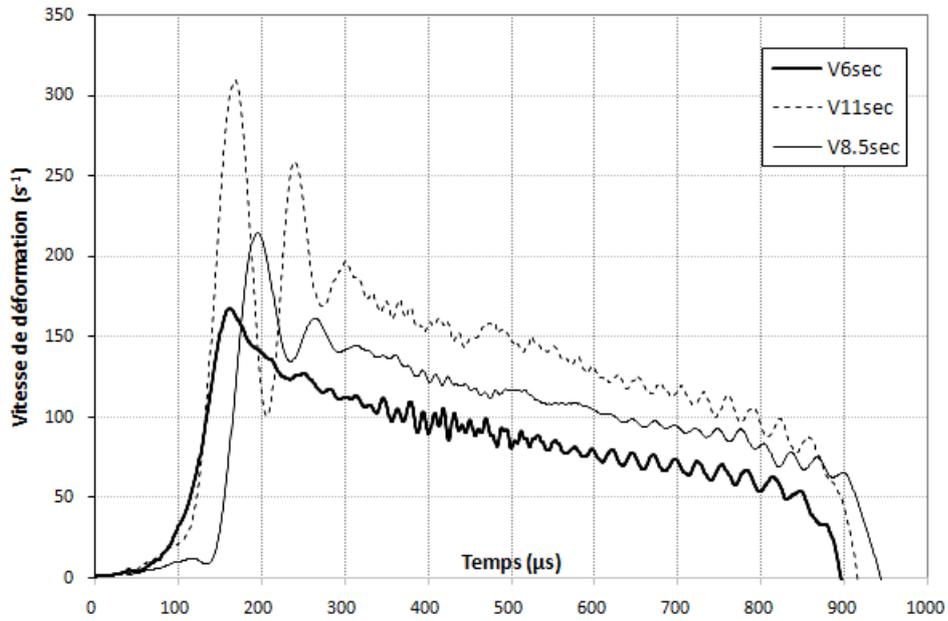


Fig. V.3 – Evolution au cours du temps des vitesses de déformation pour les bétons secs.

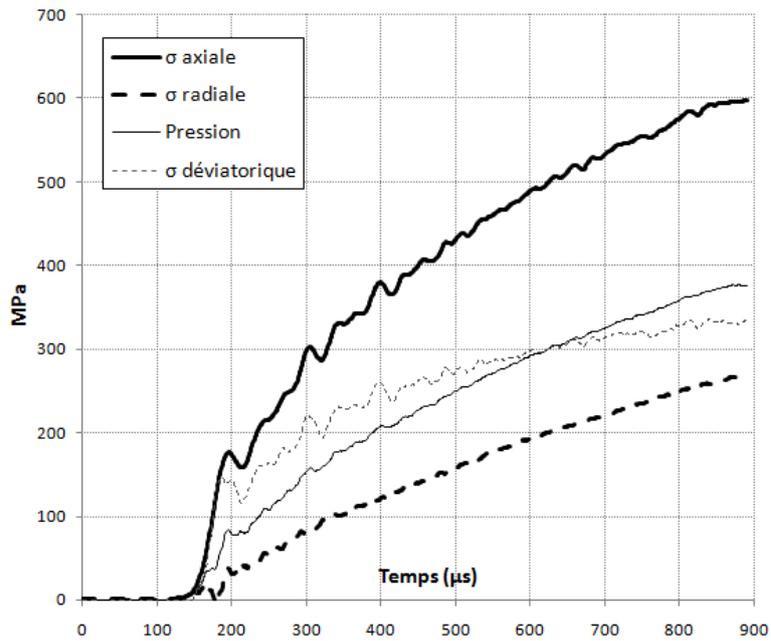


Fig. V.4 – Evolution au cours du temps des contraintes dans l'éprouvette V6sec

Ce niveau de contrainte est situé entre 150 et 220 MPa pour toutes les vitesses de chargement. Le pic de contraintes qui est observé pour l'essai V11sec (figure V.6) est issu d'un problème mécanique provenant du mauvais contact entre la barre entrante et le bouchon. Quand ce

contact n'est pas parfaitement établi, un double choc a lieu entre les deux éléments et se traduit par un pic de contraintes d'autant plus visible que la vitesse du chargement est grande.

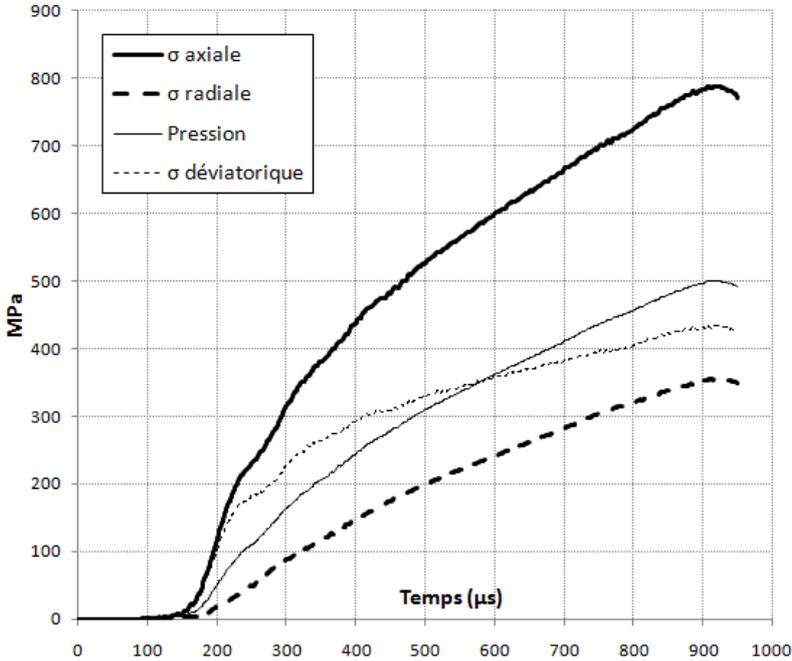


Fig. V.5 –Evolution au cours du temps des contraintes dans l'éprouvette V8.5sec

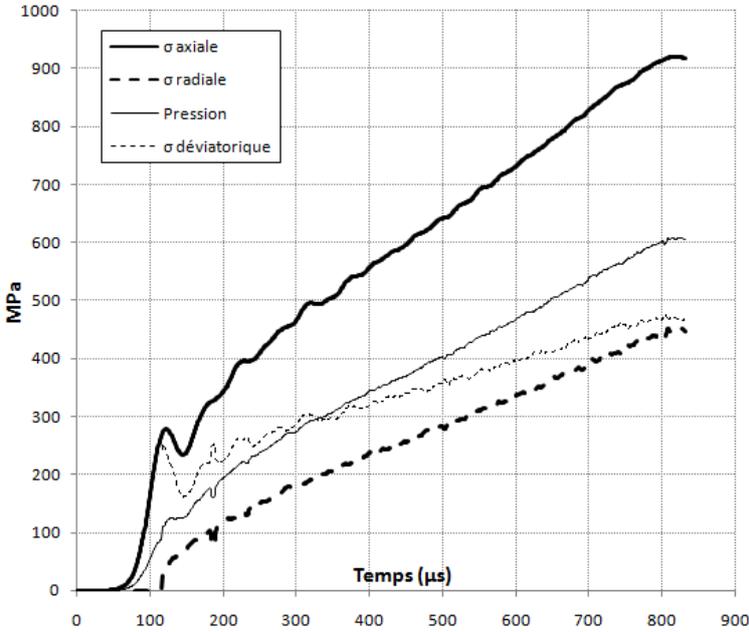


Fig. V.6 –Evolution au cours du temps des contraintes dans l'éprouvette V11sec

L'évolution de la pression hydrostatique en fonction de la déformation volumique est présentée à la figure V.7. Le module de compressibilité paraît constant ; il a une valeur de 6 GPa à partir d'une pression hydrostatique de 100 MPa. L'influence de la vitesse semble négligeable.

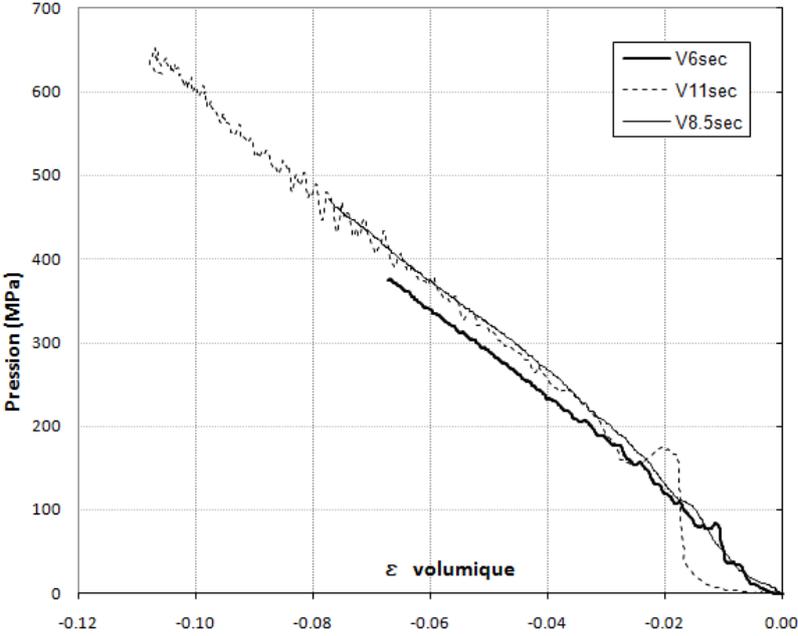


Fig. V.7 –Comportement sphérique des bétons secs

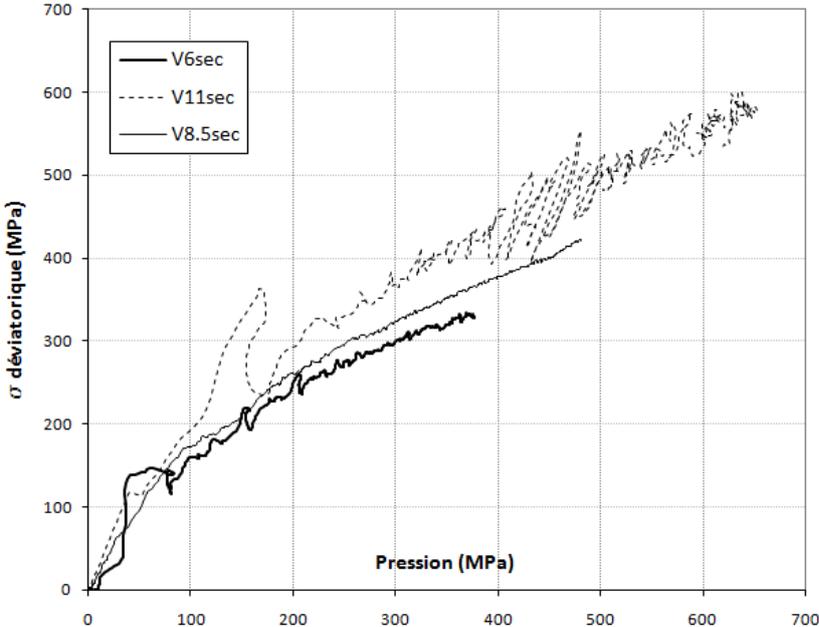


Fig. V.8 –Comportement déviatorique des bétons secs

Une importante augmentation presque linéaire de la résistance est observée pour toutes les vitesses d'impacteur considérées, avec une légère influence de la vitesse. La contrainte déviatorique atteint 600 MPa sous 650 MPa de pression hydrostatique.

V.1.2 Essais dynamiques sur bétons saturés

Les vitesses de déformation des éprouvettes saturées sont très similaires à celles des bétons secs du point de vue de la valeur moyenne (tableau V.1) et de la forme des courbes (figure V.9). La même chute brusque de vitesse de déformation est observée dans les 100 premières μs , suivie d'une décroissance d'autant plus douce que le chargement est faible.

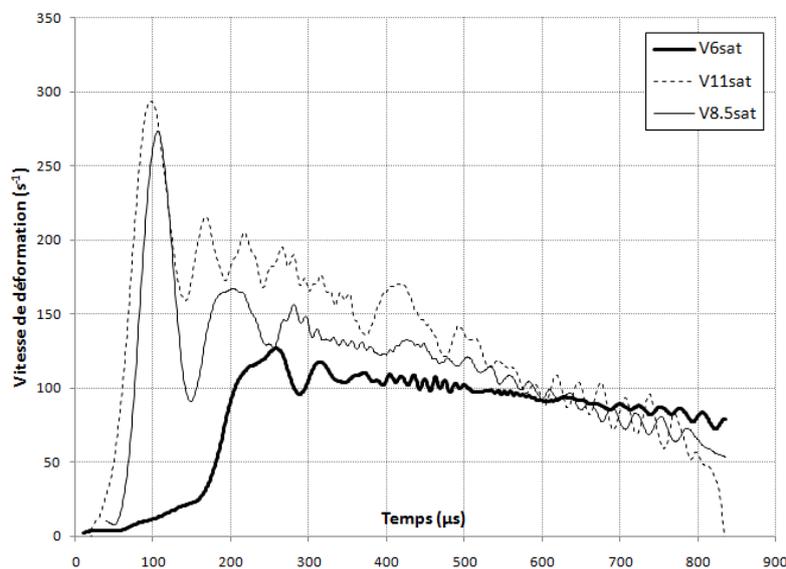


Fig. V.9 – Evolution au cours du temps des vitesses de déformation pour les bétons saturés.

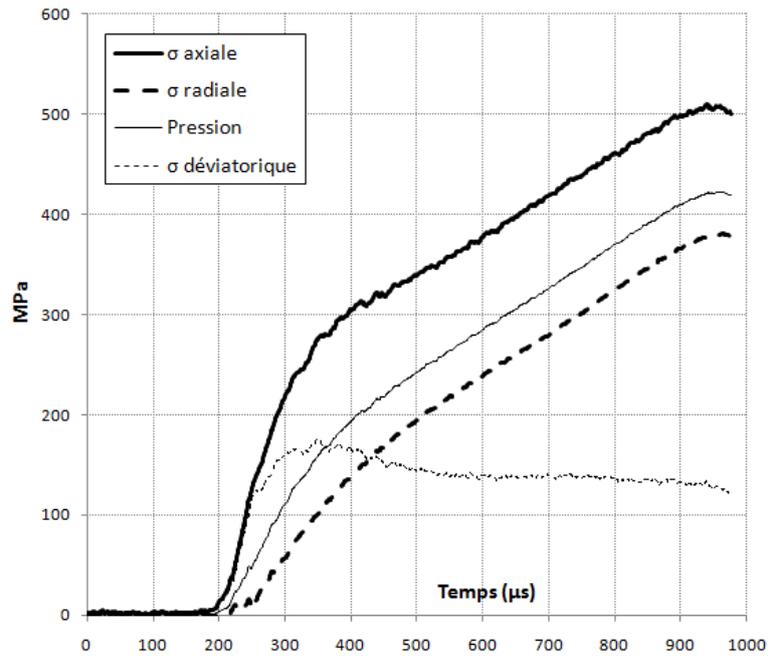


Fig. V.10 – Evolution au cours du temps des contraintes dans l'éprouvette V6sat

Parallèlement, le module tangent de la contrainte axiale diminue subitement lorsque celle-ci atteint une valeur d'environ 250 MPa, puis garde une valeur constante (figures V.10 à V.11). La contrainte radiale croît uniformément avec la contrainte axiale, de sorte que les deux courbes sont presque au cours du chargement

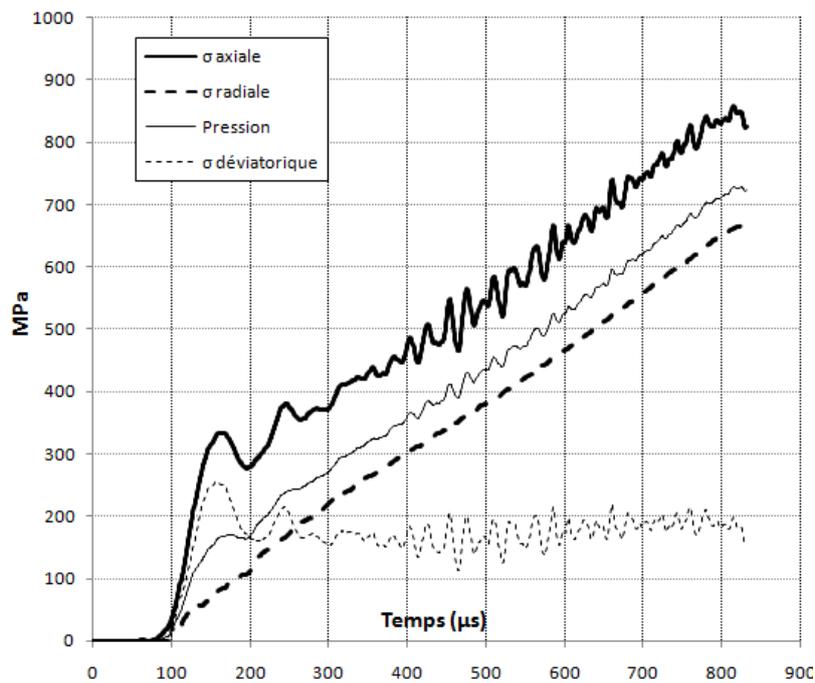


Fig. V.11 – Evolution au cours du temps des contraintes dans l'éprouvette V8.5sat

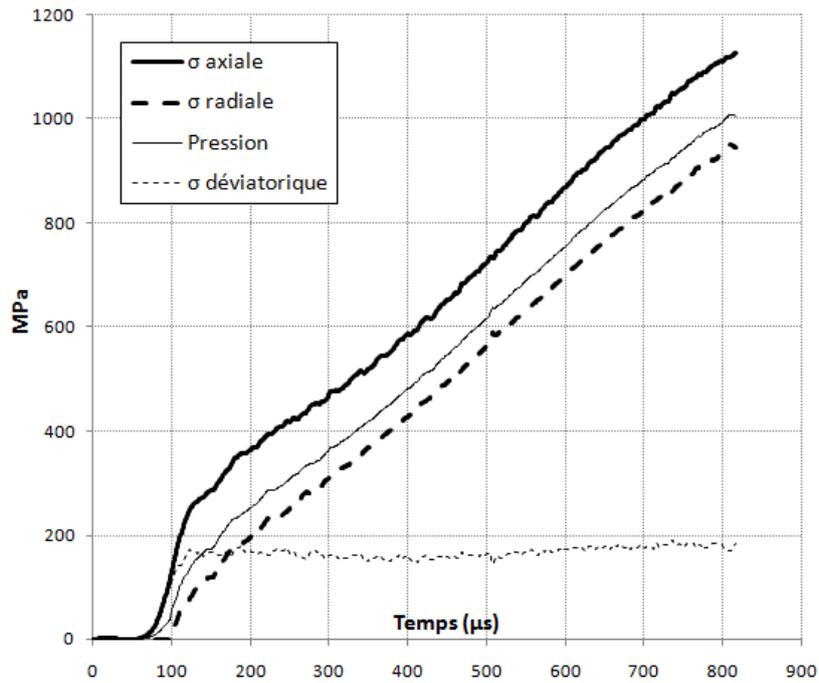


Fig. V.12 – Evolution au cours du temps des contraintes dans l'éprouvette V11sat

Ceci a pour conséquence que la contrainte déviatorique garde un niveau quasi constant le long de l'essai, comme on peut le voir aussi sur la courbe de comportement (figure V.13) qui montre un faible effet de la vitesse autant sur le niveau (entre 150 et 200 MPa pour toutes les vitesses) que sur la non dépendance de la résistance vis-à-vis de la pression.

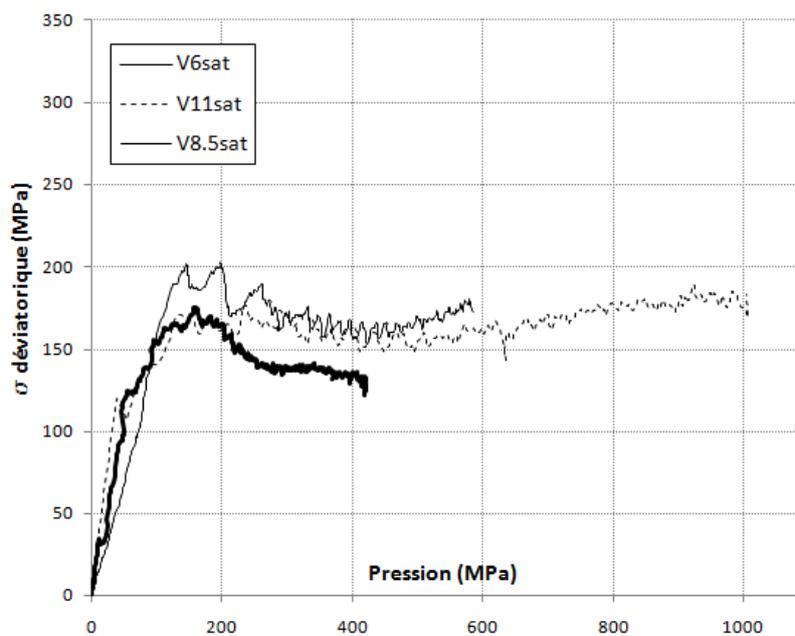


Fig. V.13 – Comportement déviatorique des bétons saturés

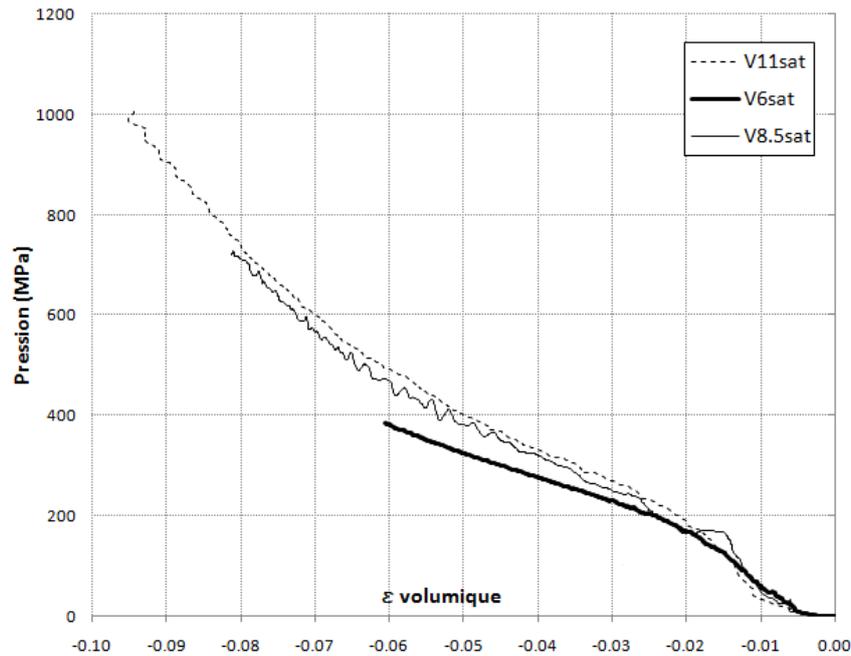


Fig. V.14 –Comportement sphérique des bétons saturés

La courbe de compaction (figure V.14) montre un point d’inflexion situé autour de 250 MPa, à partir duquel le module tangent commence à croître progressivement au fur et à mesure que le phénomène d’effondrement de la porosité se déroule.

V.1.3 Comparaison du comportement dynamique des bétons secs et saturés

Les comportements déviatorique et sphérique des bétons secs et saturés sont représentés aux figures V.15 et V.16 pour quatre essais. Le comportement du béton sec est fortement dépendant de la pression de confinement ; la résistance augmente d’une façon linéaire avec celle-ci. Par contre, la pression de confinement ne semble pas affecter la résistance des bétons saturés qui atteint un plateau de valeur moyenne 170 MPa. Cette limitation de la résistance est évidemment reliée à la présence de l’eau qui est l’unique élément qui différencie les bétons testés. Il est prématuré d’analyser les causes de cette grande influence de l’eau sur la résistance du béton, avant d’avoir effectué les essais statiques.

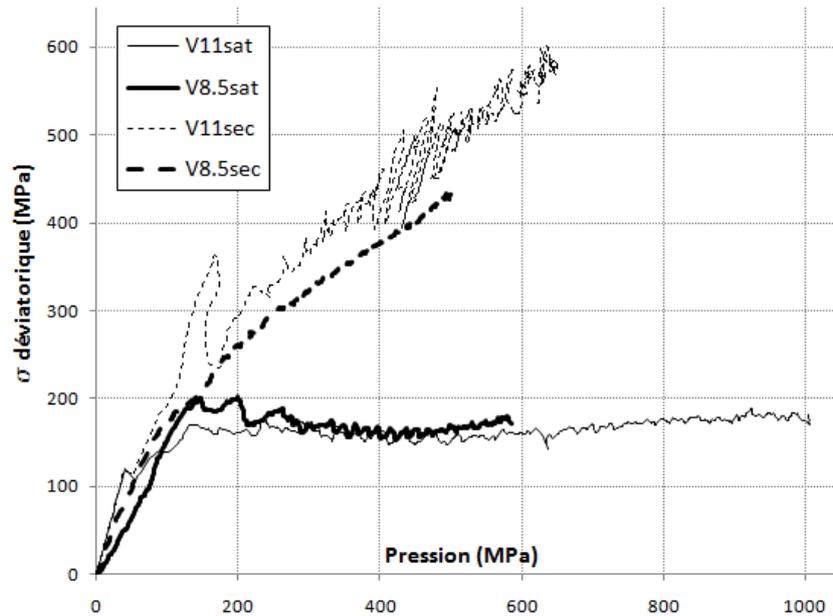


Fig. V.15 –Comportement déviatorique des bétons saturés et secs

Le comportement volumique des bétons secs et saturés (figure V.16) montre une caractéristique habituelle de la compaction des bétons. Celle-ci est liée aux deux phénomènes irréversibles parallèles : l'endommagement de la matrice cimentaire et l'effondrement de la porosité. Pour des pressions inférieures à 150 MPa, la réponse de compaction est encore influencée par la rigidité de sa matrice cimentaire. Les courbes sont alors assez proches comme par ailleurs c'est le cas du comportement déviatorique pour lequel à 150 MPa de pression correspond une résistance moyenne de 170 MPa.

Pour des pressions supérieures à 150 MPa, on observe une chute du module tangent pour les bétons secs et saturés avec toutefois des comportements différents. Le béton saturé présente un caractère moins compactant que le béton sec, et qui s'accroît au fur et à mesure que la déformation volumique augmente. La courbe volumique du béton sec garde un module tangent constant le long de la compaction. Il est clair que la présence de l'eau est à l'origine de la compaction inférieure du béton saturé, ainsi que de l'augmentation de son module de compressibilité au cours de la compaction.

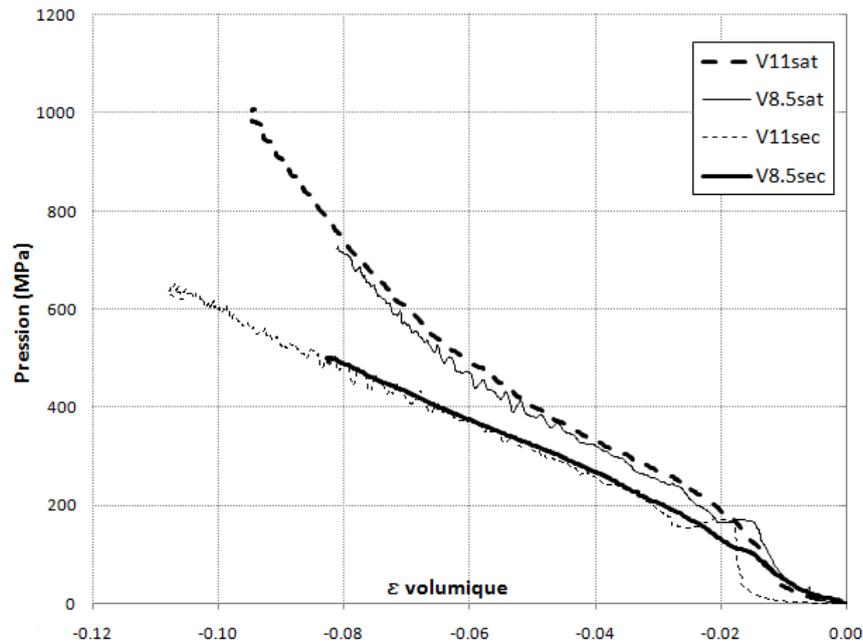


Fig. V.16 –Comportement sphérique des bétons saturés et secs

En premier lieu, il est connu que la compaction conduit à la densification du matériau vu la diminution progressive du volume de vide, ce qui entraîne l'augmentation du module tangent du comportement sphérique [Burlion 1997]. La présence de l'eau non drainée augmente la densité du béton saturé par rapport à celle du béton sec, et explique en partie sa moindre compaction.

V.2 Essais statiques quasi-œdométriques

Le but des essais statiques est de répondre à deux questions soulevées par les essais dynamiques. La première concerne la sensibilité aux vitesses de déformation ; la seconde concerne le rôle que l'eau libre joue dans les différences de comportement observées. Pour cela des essais statiques à différents niveaux de drainage sont effectués en contrôlant les temps d'application de l'effort de compression. L'influence de la vitesse de déformation sur le comportement du béton sec est plus simple à analyser, puisque l'effet de l'eau n'y intervient pas. Par contre, le comportement du béton humide implique des paramètres qui ne sont pas reliés de façon intrinsèque au caractère dynamique du chargement.

V.2.1 Influence de la vitesse sur le comportement des bétons secs

La figure V.17 montre la courbe de compaction statique superposée à celles qui correspondent aux trois vitesses de déformation adoptées lors des essais dynamiques. Ainsi globalement les essais couvrent une plage de vitesses de déformation comprise entre 1.1×10^{-4} et 147 s^{-1} . Pour une pression de 600 MPa, une différence de 25% est observée entre la compaction statique et dynamique (respectivement 12.5% et 10% de déformation volumique), ce qui montre un faible effet de vitesse.

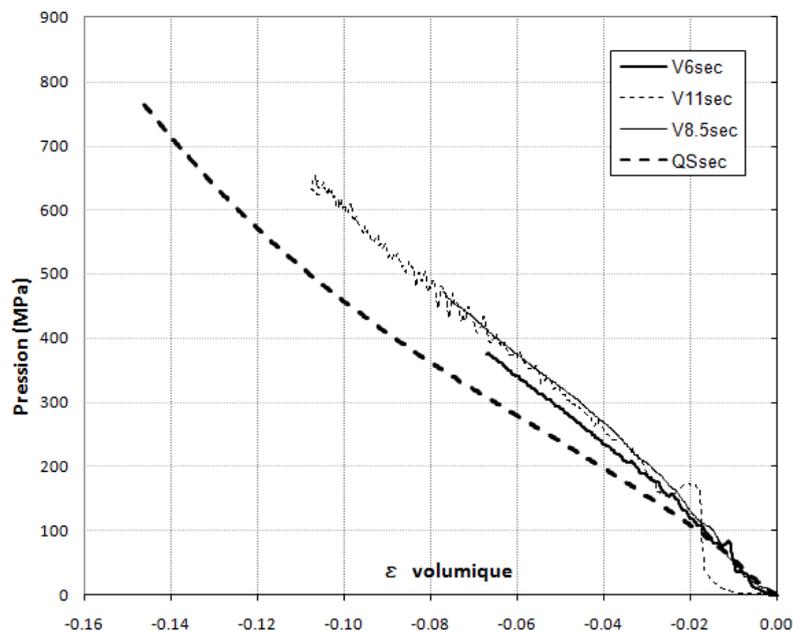


Fig. V.17 –Comportement sphérique des bétons secs pour les essais dynamiques et statiques

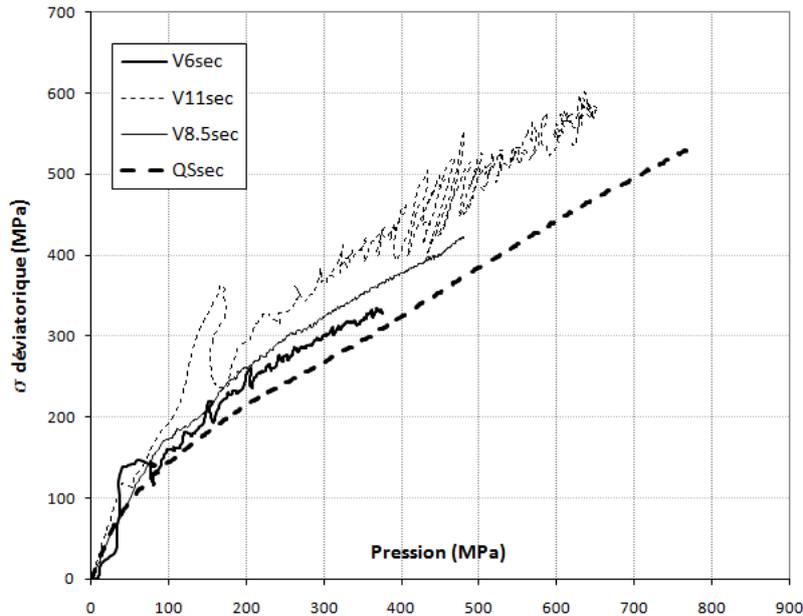


Fig. V.18 –Comportement déviatorique des bétons secs pour les essais dynamiques et statiques

La même conclusion peut être formulée à propos de la résistance (figure V.18) qui semble également peu influencée par le chargement dynamique.

V.2.2 Influence de la vitesse sur le comportement des bétons saturés

Les essais statiques sur bétons saturés sont caractérisés par une expulsion d'eau à travers le jeu entre les bouchons et la cellule, non observée lors des essais dynamiques. En fait ce phénomène ne se manifeste pas juste au début de l'essai, mais après un certain temps relié probablement au début de la compaction des pores. L'eau est alors progressivement drainée en dehors du volume de l'éprouvette, similairement à un écoulement en charge dans un milieu granulaire. Quatre essais statiques sont effectués avec des durées différentes : 55 secondes, 22 minutes, 2 heures, et 24 heures. Les courbes de résistance et de compaction sont présentées aux figures V.19 et V.20, et montrent qu'en fait ces durées ont une influence directe sur le comportement du béton saturé drainé. Plus la vitesse de l'essai est grande, et plus le comportement se rapproche de celui des essais dynamiques sur les mêmes bétons. Et plus la vitesse est lente, plus le comportement tend vers celui des bétons secs. Il est clair qu'il y a un effet poro-mécanique dû à l'eau, qui intervient ostensiblement sur le comportement du béton saturé.

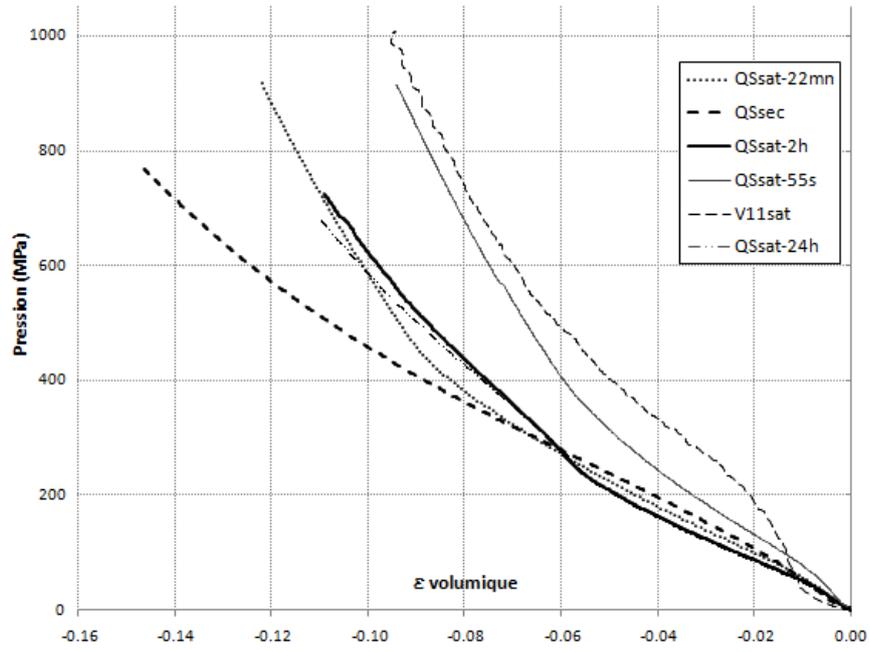


Fig. V.19 –Comportement sphérique des bétons saturés pour différentes durées d’essai

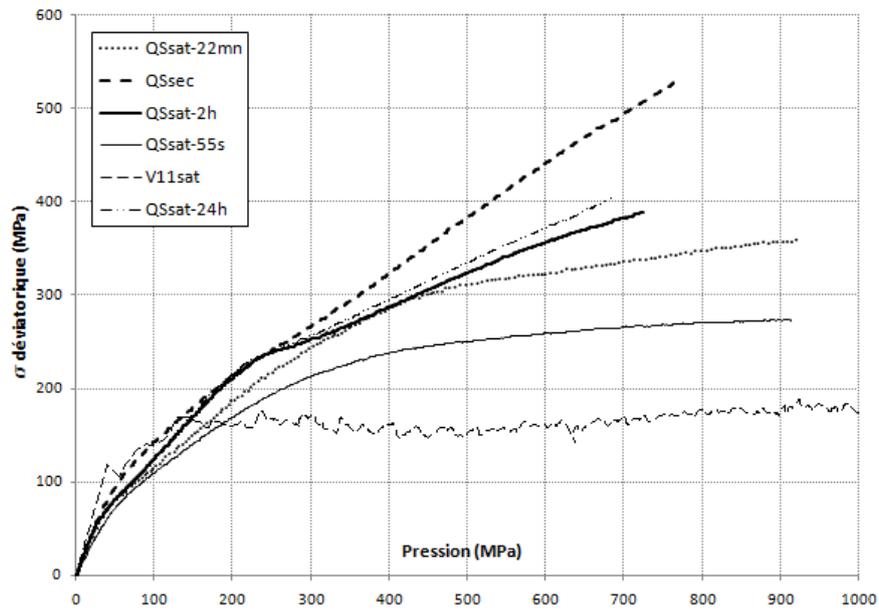


Fig. V.20 –Comportement déviatorique des bétons saturés pour différentes durées d’essai

V.3 Influence de la pression interstitielle

On peut qualitativement expliquer la tendance observée sur le comportement des éprouvettes saturées par l'intermédiaire de la théorie de déformabilité des sols et de leur consolidation. Il est connu que pour des essais œdométriques drainés, la surpression interstitielle Δu est reliée à la contrainte axiale σ_v (prise positive) par l'intermédiaire du degré de consolidation α : $\Delta u = (1 - \alpha)\sigma_v$. Le degré de consolidation $0 < \alpha < 1$ est une fonction croissante du temps t , du coefficient de consolidation c_v et de l'épaisseur de la couche drainée H . Donc la surpression interstitielle constitue une partie de la charge appliquée. La partie restante représente la contrainte effective $\sigma'_v = \alpha \sigma_v$ que reçoit le squelette solide. A partir d'un certain temps t_{drainage} , la pression interstitielle devient négligeable et la contrainte axiale appliquée est totalement reprise par le squelette solide. Si l'essai se déroule dans des conditions d'étanchéité parfaite –comme c'est le cas des essais dynamiques- la pression interstitielle est très élevée et devient proportionnelle au chargement axial appliqué ($\Delta u = (1 - \alpha)\sigma_v$) vu que le coefficient de consolidation ne varie pas en fonction du temps. Par conséquent, aussitôt que le squelette solide s'effondre, l'incrément de chargement axial est repris par l'eau en termes de surpression, ce qui conduit à un incrément nul du déviateur, soit l'état constant observé dans les courbes d'essais dynamiques sur bétons saturés.

L'estimation du temps de drainage t_{drainage} (défini comme le temps à partir duquel la surpression interstitielle est dissipée presque complètement, à 90% par exemple) peut se faire à partir de la théorie de la consolidation unidimensionnelle de Terzaghi en tenant compte des certaines hypothèses qui seront décrites par la suite. L'essai œdométrique utilisé pour la détermination de ce temps consiste à placer dans une étreinte rigide une couche de sol complètement saturée de hauteur H ou $2H$ selon que le drainage se fait sur une ou les deux faces de l'éprouvette (figure V.21). Une contrainte constante $\Delta\sigma_v$ est appliquée sur la face supérieure, de sorte que la diminution du volume des vides se fait sous charge constante au cours du temps, donc sous l'effet du fluage. La résolution des équations de conservation de la masse d'eau et de la masse des particules solides en tenant compte des hypothèses ci-dessous, conduit à la détermination de la variation de la pression interstitielle en fonction du temps, soit la courbe de consolidation assez familière dans le domaine précité.

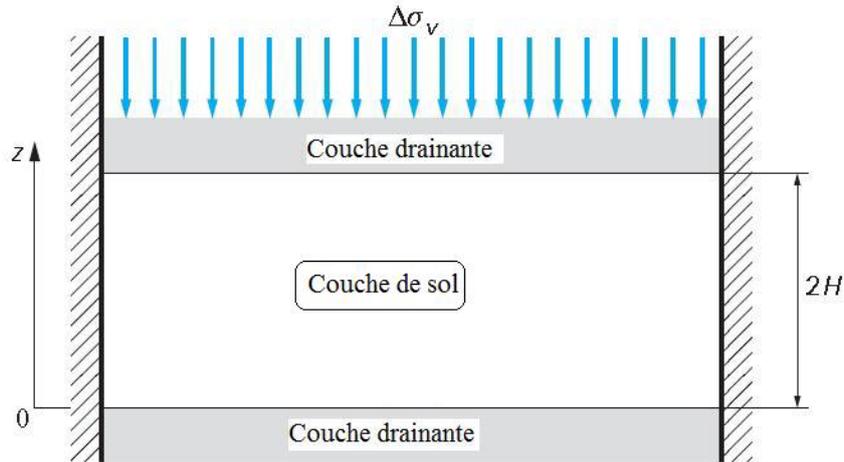


Fig. V.21 –Schéma de l'essai œdométrique doublement drainé

Les conjectures adoptées sont les suivantes :

- Le béton est homogène.
- L'eau et les grains solides sont incompressibles.
- La surcharge $\Delta\sigma_v$ provoquant la consolidation est appliquée instantanément et gardée constante.
- La loi de compressibilité du squelette relie d'une façon linéaire la variation de l'indice des vides Δe à la celle de la contrainte effective $\Delta\sigma'_v$: $\Delta e = -a_v \Delta\sigma'_v$ avec a_v le coefficient de compressibilité du squelette. Pour des variations de contrainte de grandes amplitudes, cette hypothèse est compromise ; la relation entre les deux grandeurs n'est plus linéaire. Cette loi d'état est en fait empirique, dans le cas présent l'hypothèse de l'élasticité n'est évidemment pas respectée.
- Une autre loi d'état est considérée, elle régit l'écoulement dans un milieu poreux. C'est la loi de Darcy : $v = -\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z}$ qui relie la vitesse relative de l'eau au gradient de la pression interstitielle. k est le coefficient de perméabilité considéré constant au cours de la compaction.
- La loi de Terzaghi pour le couplage hydrodynamique est applicable : $\Delta\sigma_v = \Delta\sigma'_v + u$

Le coefficient de perméabilité k est fonction de la perméabilité intrinsèque du béton K , de la viscosité dynamique de l'eau $\mu=10^{-6}$ KN.s/m², et du poids volumique de l'eau γ_w : $k = \frac{K}{\mu} \gamma_w$

La perméabilité intrinsèque du MB50 n'a pas été mesurée. Des valeurs usuelles sont envisagées, correspondant à des bétons conventionnels de rapport eau/ciment 0.43 [SEM 2005] pour lesquels le coefficient de perméabilité mesuré est en moyenne $k = 11.5e-13$ m/s. D'autres grandeurs sont obtenues pour un mortier normalisé de rapport eau/ciment 0.5 [Skoczylas et al. 2007] où l'éthanol est le fluide drainé ; la valeur moyenne du coefficient de perméabilité intrinsèque est $K = 1e-19$ m², soit $k = 9.81e-13$ m/s assez proche de celle obtenue par SEM.

La solution de l'équation de consolidation compte-tenu des hypothèses ci-dessus fournit le temps de drainage correspondant au facteur temps T_v : $t = \frac{H^2}{c_v} T_v$ avec c_v le coefficient de consolidation : $c_v = \frac{k E_{oed}}{\gamma_w}$. Le module œdométrique E_{oed} du squelette est déduit d'après la courbe de compaction du béton sec figure V.17 ; $E_{oed} = 7$ GPa. La hauteur de la couche drainée est égale dans le cas du double drainage à la moitié de la hauteur de l'éprouvette, soit $H = 0.02$ m. Le coefficient de consolidation est proportionnel au coefficient de perméabilité qui est supposé constant lors de la consolidation dans le cas des essais œdométriques usuels. Ceci n'est pas adéquat dans le cadre de nos essais où la sévère compaction change la structure du matériau et réduit progressivement la perméabilité. Toutefois on peut calculer le temps correspondant au degré de consolidation d'après la courbe de Terzaghi, dans laquelle à 90% de consolidation correspond un facteur temps $T_v = 0.85$. Le temps de drainage est alors $t = 7$ minutes.

Avant de comparer ce temps à celui des essais, il est intéressant de prendre en compte certaines hypothèses mieux appropriées. L'objectif est d'évaluer la pression interstitielle tout en tenant compte de la durée effective de l'essai ainsi que de la nature du chargement. En effet, la pression interstitielle telle que formulée dans la théorie de Terzaghi dépend uniquement de la hauteur de la couche drainante et des caractéristiques du sol ; le temps de chargement qui correspond à la durée de l'essai n'intervient pas. Or il est naturel de penser –et ceci est illustré par les résultats des essais- que la vitesse du chargement a une influence sur la pression interstitielle. D'un autre côté, le chargement axial n'est pas appliqué instantanément

et maintenu constant au cours du temps, il est variable, bien qu'il ne soit pas judicieux de raisonner en chargement puisque les essais se déroulent à déplacement imposé. Toutes autres hypothèses maintenues par ailleurs, nous reprenons le problème de l'essai œdométrique tel que suit.

La loi de conservation de la masse, compte tenu de l'incompressibilité des grains et de l'eau se réduit à :

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

Avec $w(z, t)$ le déplacement du squelette et $v(z, t)$ la vitesse de l'eau par rapport au squelette.

La loi de Hooke permet d'écrire :

$$\sigma'_v = E_{oed} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2)$$

σ'_v étant la contrainte effective relié à la pression interstitielle u par la loi de Terzaghi :

$$\sigma'_v = \sigma_v + u \quad (3)$$

En remplaçant (3) dans (2) on obtient :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_v + u}{E_{oed}} \quad (4)$$

En remplaçant (4) dans (1) et en utilisant la loi de Darcy $v = -\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z}$ on obtient finalement :

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

Dans le cas de la théorie de Terzaghi, le chargement appliqué σ_v est maintenu constant le long de l'essai ; alors l'équation (5) relie uniquement la pression interstitielle au coefficient de consolidation c_v , bien entendu avec les variables d'espace et de temps. Dans le cas des essais statiques effectués sur presse hydraulique, le chargement se fait à déplacement imposé à vitesse constante. Nous allons considérer que les contraintes axiales obtenues constituent le chargement σ_v , et que ce dernier peut être sensiblement approximé par une contrainte linéaire en fonction du temps (figure V.22). En normalisant la contrainte appliquée par sa valeur

maximale en fin d'essai σ_0 , il est possible de formuler le chargement de la façon suivante, sachant que t_{essai} représente la durée de l'essai :

$$\sigma_v = \sigma_0 \frac{t}{t_{essai}} \quad (6)$$

L'équation (5) devient :

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma_0}{t_{essai}} \quad (7)$$

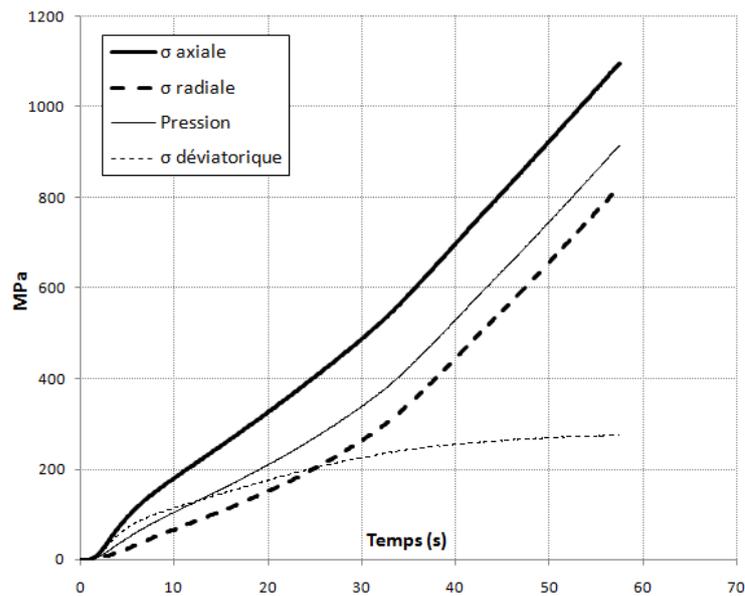


Fig. V.22 – Evolution au cours du temps des contraintes dans l'éprouvette QSat-55s

C'est une équation aux dérivées partielles non homogène. Les conditions aux limites sont :

$$u(0, t) = u(0, 2H) = 0 \quad (8)$$

Ceci considère que la pression au plan inférieur est nulle alors qu'en fait elle est égale à la charge de l'eau. Mais vu les contraintes appliquées, la charge de l'eau peut être négligée.

Les conditions initiales sont nulles $u(z, 0) = 0$ en conformité avec (6).

Nous faisons le même changement de variable que celui effectué dans la solution générale de l'équation de Terzaghi afin de faciliter la comparaison des résultats :

La profondeur réduite $Z = \frac{z}{2H}$ et le facteur temps $T_v = \frac{c_v}{H^2}t$ avec H la distance de drainage de la couche, égale à la demi-hauteur de l'éprouvette dans le cas du double drainage (figure V.21).

L'équation (7) devient :

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} - \frac{\partial u}{\partial T_v} = \frac{\sigma_0}{T_{v-essai}} \quad (9)$$

La nouvelle variable introduite est $T_{v-essai} = \frac{c_v}{H^2}t_{essai}$ qui représente le facteur durée de l'essai, soit la durée normalisée de l'essai.

La solution de cette équation parabolique linéaire du second ordre est de la forme :

$$u(Z, T_v) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(T_v) \sin(n\pi Z) \quad (10)$$

En écrivant le second membre de (9) sous la forme de séries de Fourier on obtient :

$$\frac{\sigma_0}{T_{v-essai}} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\pi Z) \quad (11)$$

$$\text{Avec } F_n = 2 \int_0^1 \frac{\sigma_0}{T_{v-essai}} \sin(n\pi Z) dZ = \frac{2}{n\pi} \frac{\sigma_0}{T_{v-essai}} [\cos(n\pi) - 1] \quad (12)$$

En substituant (10),(11) et (12) dans (9) et en changeant l'indice n en j on obtient :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{d}{dt} u_j(T_v) + \frac{j^2 \pi^2}{4} u_j(T_v) + \frac{2}{j\pi} \frac{\sigma_0}{T_{v-essai}} [\cos(j\pi) - 1] \right\} \sin(j\pi Z) = 0 \quad (13)$$

En multipliant les deux membres de (13) par $\sin(n\pi Z)$ et intégrant de 0 à 1 on obtient :

$$\frac{d}{dt} u_n(T_v) + \frac{n^2 \pi^2}{4} u_n(T_v) = -\frac{2}{n\pi} \frac{\sigma_0}{T_{v-essai}} [\cos(n\pi) - 1] \quad (14)$$

Qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre de solution :

$$u_n(T_v) = \frac{8}{(n\pi)^3} \frac{\sigma_0}{T_{v-essai}} [\cos(n\pi) - 1] [1 - e^{-\frac{n^2\pi^2 T_v}{4}}] \quad (15)$$

En remplaçant (15) dans (10) nous obtenons l'expression de la pression interstitielle pour un essai de durée $T_{v-essai}$ en tout point Z et pour tout facteur temps $T_v \leq T_{v-essai}$

$$u(Z, T_v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(n\pi)^3} \frac{\sigma_0}{T_{v-essai}} [\cos(n\pi) - 1] [1 - e^{-\frac{n^2\pi^2 T_v}{4}}] \sin(n\pi Z) \quad (16)$$

En intégrant (16) sur la hauteur de l'éprouvette, on obtient la valeur moyenne de la pression :

$$u(T_v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(n\pi)^4} \frac{\sigma_0}{T_{v-essai}} [\cos(n\pi) - 1]^2 [1 - e^{-\frac{n^2\pi^2 T_v}{4}}] \quad (17)$$

Le facteur $[\cos(n\pi) - 1]^2$ a une valeur 4 pour les indices impairs et 0 pour les indices pairs. La série (17) peut se simplifier comme suit :

$$u(T_v) = \frac{32\sigma_0}{T_{v-essai}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 T_v}{4}}}{(2n+1)^4\pi^4} \quad (18)$$

La pression interstitielle, à un temps fixé, est proportionnelle à la vitesse de chargement. On peut évaluer la série pour des facteurs temps grands en cherchant sa limite quand $T_v \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{T_v \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 T_v}{4}}}{(2n+1)^4\pi^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4\pi^4} = \frac{1}{96}$$

L'équation (18) devient :

$$u(T_v \rightarrow +\infty) = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{T_{v-essai}}$$

Evidemment, T_v est bornée par $T_{v-essai}$, nous rappelons aussi que pour $T_v = T_{v-essai}$; $\sigma_v = \sigma_0$. En fait à partir de $T_v = 1.2$ (soit $T_{v-essai} \geq 1.2$), la pression interstitielle atteint un seuil constant et l'équation ci-dessus est alors applicable. Cette expression en question montre que la pression interstitielle est proportionnelle à la vitesse du chargement appliqué (pente de la droite contrainte axiale-facteur temps).

La figure V.23 montre l'évolution de la fonction $\frac{u(T_v) T_{v-essai}}{\sigma_0} = 32 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 T_v}{4}}}{(2n+1)^4 \pi^4}$

en fonction du facteur temps. Contrairement à l'essai de fluage dans lequel la pression interstitielle est maximale au début et chute au cours du temps, l'essai à chargement progressif montre que la pression interstitielle est nulle au début puis atteint un seuil constant dont le niveau est proportionnel à la vitesse du chargement. Pour des essais effectués à vitesses de chargement identiques, et dans le cadre des hypothèses précitées, la pression interstitielle garde la même évolution temporelle. Aussi, au-delà d'un certain temps, la pression devient proportionnelle à la vitesse du chargement appliqué, avec un facteur 1/3.

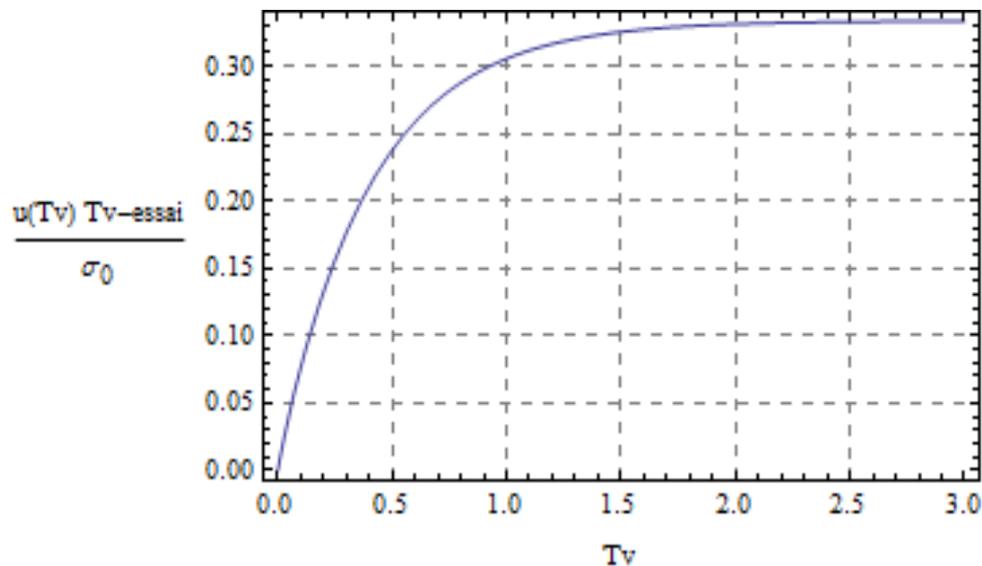


Fig. V.23 – Evolution de la pression interstitielle normalisée par la vitesse du chargement

Il est intéressant de tirer la courbe de consolidation, qui montre l'évolution relative de la pression interstitielle en fonction du facteur temps, indépendamment de la durée de l'essai :

$$\frac{u(T_v)}{\sigma_v} = \frac{u(T_v) T_{v-essai}}{\sigma_0 T_v} = \frac{32}{T_v} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 T_v}{4}}}{(2n+1)^4 \pi^4} \quad (19)$$

La variable T_v figure au dénominateur, il est nécessaire d'étudier le comportement de la fonction (19) pour $T_v = 0$. Pour cela nous développons à l'ordre 3 en séries de Taylor au voisinage de zéro la fonction $e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 T_v}{4}}$.

$$e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 T_v}{4}} = 1 - \frac{1}{4}(2n+1)^2\pi^2 T_v + \frac{1}{32}(2n+1)^4\pi^4 T_v^2 - \frac{1}{384}(2n+1)^6\pi^6 T_v^3 + \dots \quad (20)$$

$$\frac{1 - e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 T_v}{4}}}{T_v(2n+1)^4\pi^4} = \frac{1}{4} \frac{1}{(2n+1)^2\pi^2} - \frac{1}{32} T_v + \frac{1}{384} \frac{T_v^2}{(2n+1)^2\pi^2} + \dots \quad (21)$$

En remplaçant $T_v = 0$ dans (21) on obtient :

$$\lim_{T_v \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 T_v}{4}}}{T_v(2n+1)^4\pi^4} = \frac{1}{4} \frac{1}{(2n+1)^2\pi^2} \quad (22)$$

En remplaçant (22) dans (19) on obtient :

$$\lim_{T_v \rightarrow 0} \frac{u(T_v)}{\sigma_v} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2} = 1 \quad (23)$$

La figure V.24 montre l'évolution de $\frac{u(T_v)}{\sigma_v}$ en fonction du facteur temps, pour le chargement progressif (19) et le chargement instantané maintenu constant [Terzaghi 1961] :

$$\frac{u(T_v)}{\sigma_v} = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 T_v}{4}}}{(2n+1)^2\pi^2} \quad (24)$$

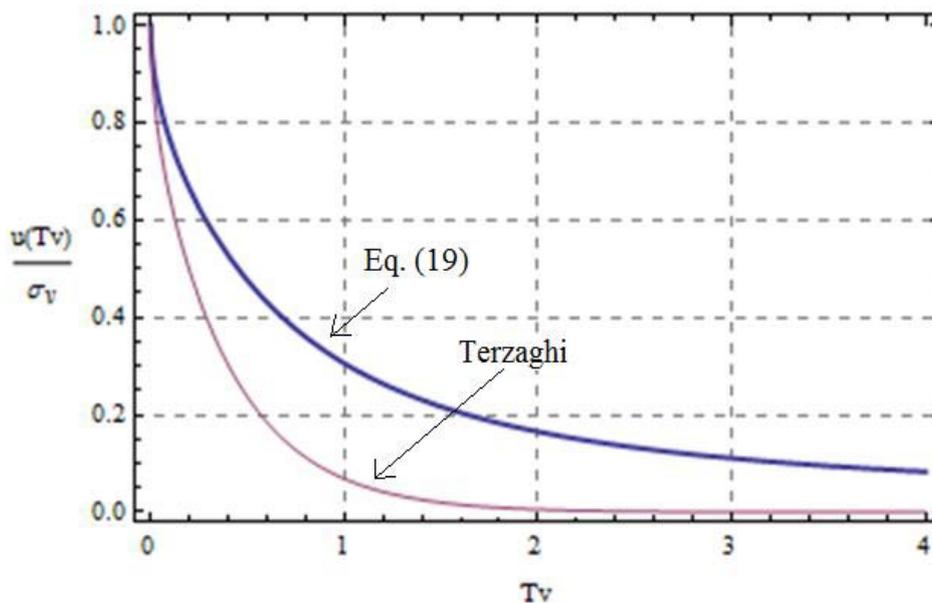


Fig. V.24 – Courbes de consolidation selon (19) et (24)

La pression interstitielle garde un niveau plus élevé au cours de l'essai dans le cas du chargement progressif. Le facteur temps de drainage nécessaire pour que la pression interstitielle se réduise à 10% de la contrainte axiale appliquée est de $T_v=3.5$, soit 4 fois plus long que celui obtenu selon les hypothèses de chargement statique ($T_v=0.85$). Ce qui correspond à une durée d'essai de $t = \frac{H^2}{c_v} T_v = 28$ minutes.

Nous remarquons qu'en fait les essais effectués durant des durées de 55 secondes et 22 minutes (figures V.19 et V.20) montrent effectivement une grande influence de la pression interstitielle sur le comportement. Par contre, les essais à 2h et 24h sont plus proches vu que l'effet poro-mécanique de l'eau est devenu négligeable. Les figures V.25 et V.26 montrent l'évolution de la contrainte effective $\sigma'_v = \sigma_v - u$ reprise par le squelette sous un chargement total $\sigma_v = \sigma_0 \frac{t}{t_{essai}} = \sigma_0 \frac{T_v}{T_{v-essai}}$ avec comme contrainte maximale en fin d'essai $\sigma_0 = 1000$ MPa et ceci pour deux durées d'essais : $t_{essai} = 55$ s. et $t_{essai} = 22$ min. Ces deux temps correspondent respectivement à $T_{v-essai} = 0.125$ et $T_{v-essai} = 2.65$.

Le but de cette étude de l'effet de la pression interstitielle est de présenter des éléments d'explication de façon qualitative et quantitative, tout en se basant sur des hypothèses simplificatrices considérées au départ, et qui sont mieux appropriées aux milieux granulaires non cohésifs qu'au béton confiné. Les relations tirées d'après le calcul permettent de corrélérer les variables entre elles, telles le temps de drainage, la durée de l'essai, et la pression de l'eau dans les pores. Les figures V.25 et V.26 montrent que la pression interstitielle atteint des niveaux de contraintes comparables à ceux de la contrainte totale appliquée, et ceci justement dans l'intervalle de durée d'essais qui correspond à celui dans lequel différents comportements du béton sont observés. Les essais de 2h et 24h étant quasiment identiques, on peut supposer que l'influence de la pression interstitielle est prépondérante pour les essais de durée de moins de 2 heures, comme le montre aussi la présente étude théorique. Au fur et à mesure que la vitesse de chargement de l'essai est lente, la pression de l'eau est moindre, et la contrainte effective est plus élevée. Ceci est bien observé sur la figure V.20.

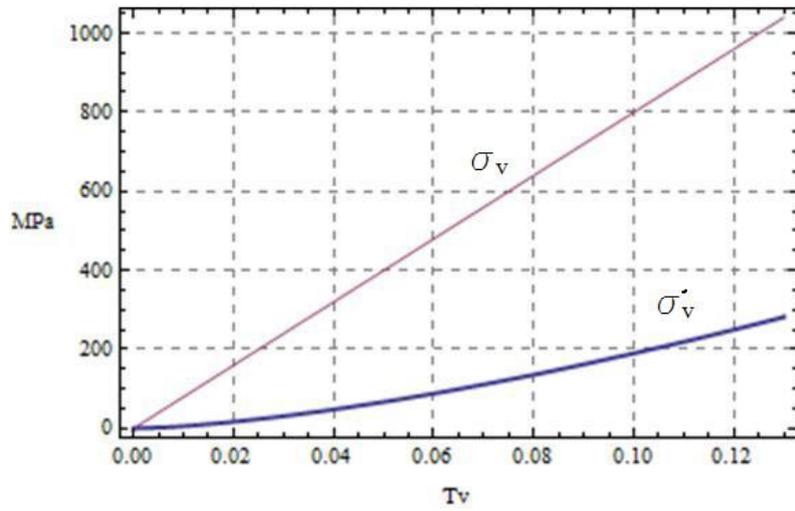


Fig. V.25 $-T_{v-essai} = 0.125$: Contraintes totales et effectives

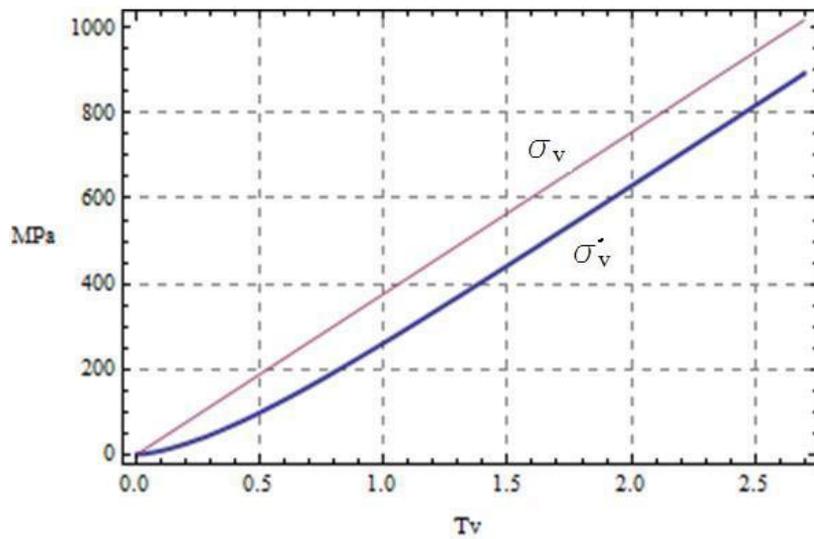


Fig. V.26 $-T_{v-essai} = 2.65$: Contraintes totales et effectives

Dans le sens opposé, plus la durée de l'essai est petite, et plus la pression interstitielle est grande, de sorte que pour les essais «rapides» de 55 secondes, la résistance effective du béton est très faible.

Cas de l'essai dynamique sur béton saturé

L'essai dynamique correspond au cas particulier où l'essai se déroule sans drainage. La pression interstitielle ne peut alors diminuer et reste égale à la contrainte totale appliquée. Ceci est corroboré expérimentalement comme le montrent les figures V.10 à V.12. Après un seuil de résistance compris entre 150 et 200 Mpa et qui correspond probablement à la rupture totale du squelette, les courbes contraintes axiales et radiales ont une évolution quasi identique. Elles sont parallèles, et si on décale pour chaque essai la contrainte axiale de la valeur correspondant à l'effondrement du squelette (environ 200 MPa), on trouve que ces courbes sont superposables. Donc la réponse radiale du matériau est égale au chargement axial, comme dans le cas des fluides qui sont caractérisés par la pression hydrostatique qu'ils génèrent. La conséquence directe est la valeur nulle du déviateur, à une constante près qui correspond à la résistance du squelette (figure V.13). Donc on est amené à penser qu'une fois le processus de compaction des pores déclenché, après la destruction de la résistance du squelette, l'eau dans les pores qui s'oppose à leur renfermement est en train de reprendre toute la charge axiale et de la transmettre telle qu'elle sous forme de composante radiale.

Cas des essais statiques sur béton saturé

L'explication avancée ci-dessus est plus applicable au cas des roches granulaires qu'au cas du béton. Elle rejoint la constatation formulée récemment sur le comportement du béton humide sous fort chargement triaxial, et qui l'identifie comme étant un empilement de grains non cohésifs [Vu 2007]. Cependant, la pression interstitielle n'est pas seule responsable de la différence de comportement entre le béton saturé et sec. En effet, l'essai de durée 24h sur le béton saturé ne rejoint pas l'essai sur béton sec (figure V.20), bien que l'effet de la pression interstitielle à cette vitesse de chargement est négligeable, selon les calculs présentés. L'explication rejoint là aussi celle avancée par le même auteur [Vu 2007], pour expliquer la résistance supérieure du béton sec. L'eau a un effet lubrifiant sur la surface des granulats en contact, de sorte que le frottement induit par les contraintes de cisaillement se voit diminué par rapport au béton sec où les coefficients de frottement sont plus importants. Ainsi la différence de résistance entre les bétons sec et humide peut être schématisée comme étant générée par l'état lubrifié des grains -qui est un terme constant pour un même béton-, et par la pression interstitielle de l'eau, qui dépend de la vitesse du chargement statique dans le cas des essais drainés. Afin de mieux évaluer l'effet de la pression interstitielle sur les essais, nous

reproduisons son évolution en fonction de la déformation axiale sur les courbes V.27 et V.28 qui correspondent respectivement aux essais de durées 55 secondes et 22 minutes.

Dans l'expression de la pression de l'eau $u(T_v) = \frac{32\sigma_0}{T_{v-essai}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 T_v}{4}}}{(2n+1)^4 \pi^4}$, la contrainte maximale en fin d'essai σ_0 est remplacée par la contrainte σ axiale qui est la contrainte axiale dans l'éprouvette au cours du temps. Ceci n'est pas correct de point de vue théorique, vu que dans les hypothèses on a considéré la vitesse de chargement constante le long de l'essai, mais comme la contrainte axiale est presque linéaire dans tous les essais, cette approximation reste exploitable.

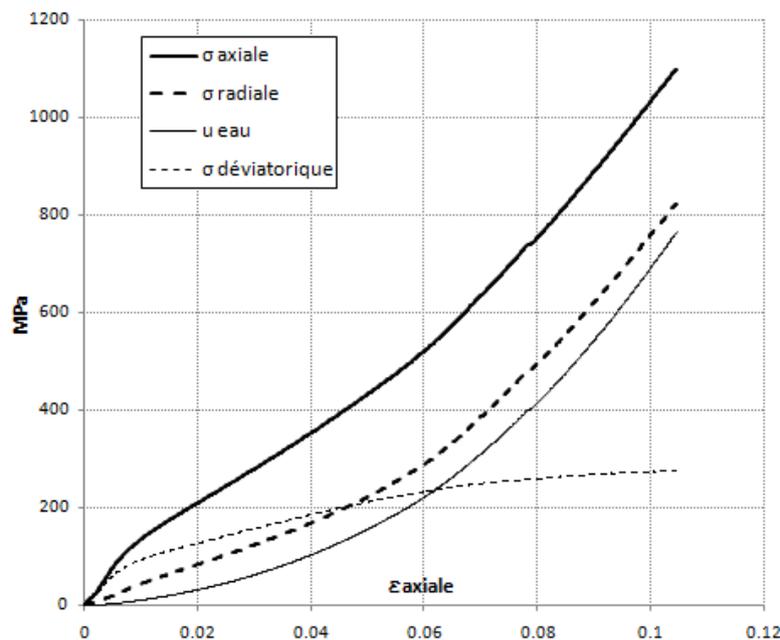


Fig. V.27 – Représentation de la pression interstitielle au cours de l'essai QSsat-55s

Les courbes de contrainte radiale et pression de l'eau sont semblables tant de point de vue forme que niveaux. Par contre, la pression de l'eau a une valeur plus modérée dans l'essai de 22 minutes (figure V.28), ce qui justifie qu'il soit plus proche des essais à 2h et 24h.

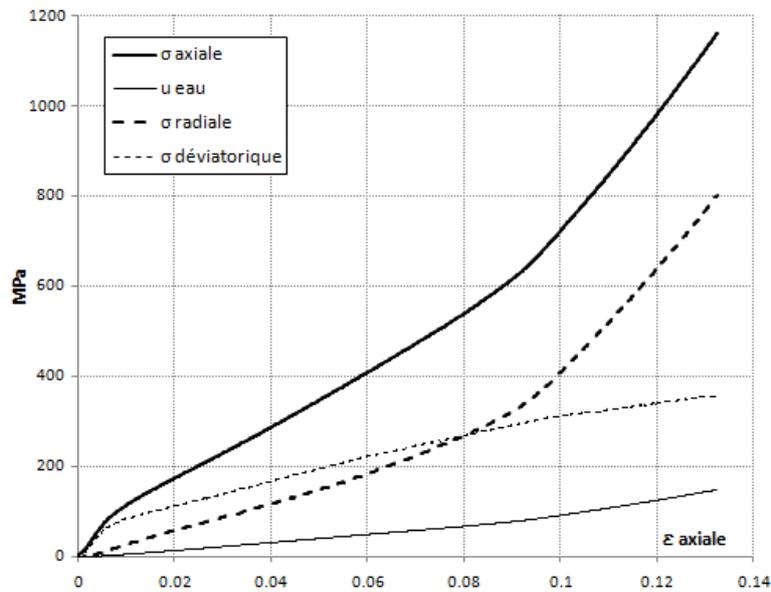


Fig. V.28 – Représentation de la pression interstitielle au cours de l'essai QSsat-22mn

On peut exprimer le comportement déviatorique du béton en fonction des contraintes effectives. Ceci revient à représenter le déviateur en fonction de la pression effective P' à la place de la pression P , sachant que : $P'(t) = P(t) - u(t)$ avec $u(t)$ la pression interstitielle telle que calculée selon les hypothèses adoptées. Comme il y a une incertitude sur le coefficient de perméabilité $k = 11.5e-13$ m/s. qui n'a pas été mesuré pour le MB50, les courbes de « résistance effective » seront tracées pour des valeurs $k' = k$; $k' = k/3$; $k' = 3k$ soit sur un intervalle qui s'étend du tiers au triple de la valeur considérée.

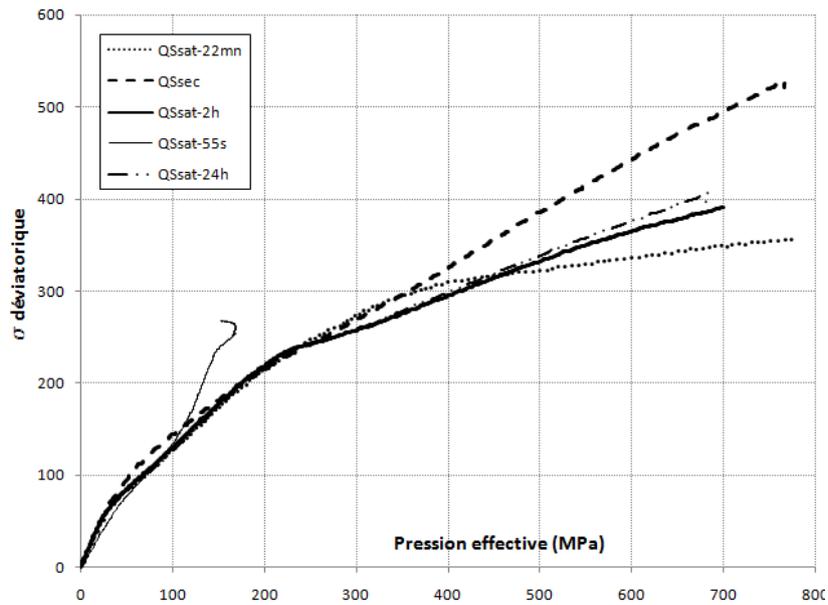


Fig. V.29 – Comportement déviatorique en fonction de la pression effective ; ($k'=k$)

Sur la figure V.29 sont représentées les courbes déviatoriques des essais sur béton saturés en fonction des contraintes effective ; la pression interstitielle est calculée avec la valeur initialement adoptée pour le coefficient de perméabilité. La courbe relative à l'essai sec est aussi montrée, pour une meilleure interprétation de l'effet de la pression de l'eau. En comparant avec les comportements déviatoriques fonction des contraintes totales (figure V.20), on remarque que les comportements des essais effectués durant des durées différentes semblent s'aligner sur l'essai « QSsat-24h ». En fait ce sont les courbes « QSsat-55s » et « QSsat-22mn » qui se sont déplacées, étant le plus affectées par la pression interstitielle. La courbe « QSsat-55s » a subi un déplacement énorme vu sa forte dépendance à la pression interstitielle. Cependant, la valeur du coefficient de perméabilité semble incorrecte pour la deuxième partie de l'essai « QSsat-55s » ; il est probable qu'elle varie au cours de la compaction. La figure V.30 montre les mêmes essais, mais pour une valeur de ce coefficient égale au triple de la valeur adoptée initialement.

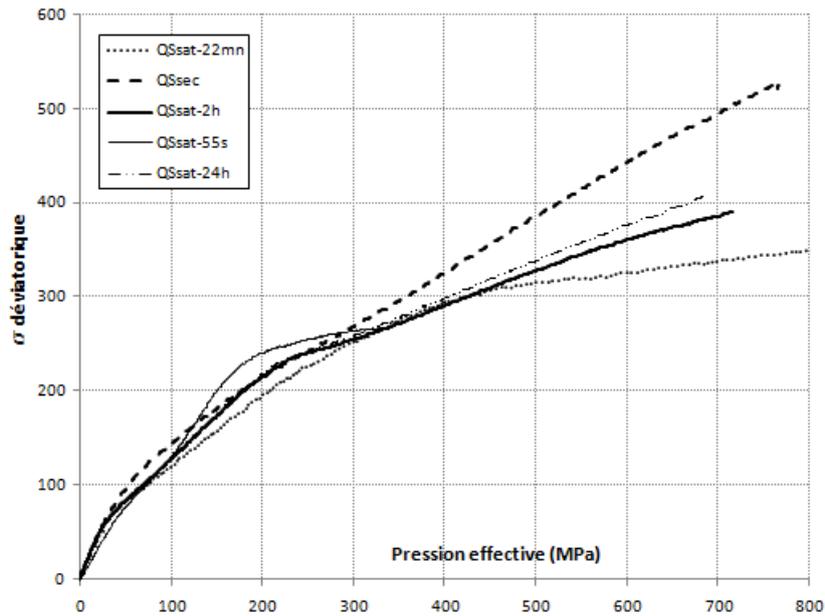


Fig. V.30 – Comportement déviatorique en fonction de la pression effective ; ($k'=3k$)

La seconde partie de l'essai « QSsat-55s » a une allure plus conforme, mais la première partie de l'essai « QSsat-22mn » n'est plus alignée sur l'essai « QSsat-24h ». Ceci confirme le fait que le coefficient de perméabilité varie le long de l'essai, ce qui ne surprend pas. Cependant il est difficile de définir sa loi de variation, qui est probablement non linéaire. Dans la figure V.31, la valeur du coefficient de perméabilité utilisé vaut le tiers de sa valeur initiale. La pression interstitielle semble surestimée au vu des courbes « QSsat-55s » et « QSsat-22mn ».

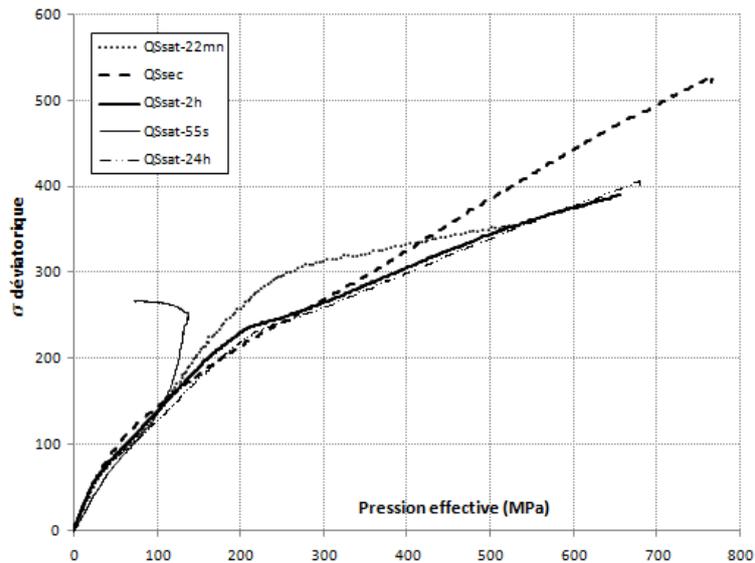


Fig. V.31 – Comportement déviatorique en fonction de la pression effective ; ($k'=k/3$)

Si l'approche de l'analyse du comportement du béton saturé par la pression interstitielle est convenable, alors plusieurs explications peuvent être avancées, basées sur les résultats obtenus.

- La pression interstitielle est à l'origine des différences de résistance observées dans les essais sur béton saturé. Son effet est important dans le cas des essais effectués durant des durées telles que $t_{essai} < \frac{H^2}{c_v} T_v$; avec $T_v = 3.5$ (figure V.24). Pour des valeurs usuelles du coefficient de perméabilité, ces durées sont de l'ordre de dizaines de minutes.
- Si on raisonne en termes de contraintes effectives, les comportements déviatoriques des essais rapides semblent rejoindre celui de l'essai lent effectué durant 24h.
- La différence de résistance effective entre les bétons saturés et secs pourrait donc uniquement provenir de l'effet lubrifiant de l'eau sur les faces des grains solides. Cet effet semble prédominer sur celui de la pression interstitielle pour des pressions supérieures à 400 MPa. Pour des pressions inférieures à 400 MPa, la résistance effective des bétons saturés et secs est très proche, l'effet lubrifiant de l'eau serait faible pour ces niveaux de pressions. Ceci pourrait s'expliquer par le fait que c'est lors du réarrangement granulaire sous fortes pressions, que l'eau dans les pores enveloppe toute la surface du granulat.

V.4 Discussion : Confrontation des résultats avec la Littérature

Le principal intérêt des essais effectués est la mise en évidence de l'effet de l'eau libre sur le comportement statique et dynamique du béton sous haut confinement. Cet effet permet d'expliquer les différences obtenues dans les résultats sur le même béton entre les essais triaxiaux [Buzaud 1998] et quasi-œdométriques [Forquin et al. 2008b]. Les figures V.27 et V.28 montrent le comportement du MB50 sous chargements statiques et dynamiques, pour différents trajets de chargement. Les essais triaxiaux effectués sous pression latérale de 800 MPa [Buzaud 1998] (figure V.27) montrent une résistance maximale d'environ 550 MPa. Cette saturation de la résistance trouve son explication dans le fait que les éprouvettes utilisées lors de ces essais étaient humides, et conservées dans une membrane étanche. Elles peuvent être considérées comme partiellement saturées. D'autre part, les essais dynamiques quasi-œdométriques [Forquin et al. 2008b] sont exécutés avec des éprouvettes séchées à température ambiante durant plusieurs mois. La contrainte déviatorique (figure V.27) augmente continuellement à l'instar de l'essai sur béton sec V11sec. Les deux essais ont aussi un comportement sphérique semblable (figure V.28), alors que l'essai statique hydrostatique effectué par Buzaud montre une compaction moindre, ce qui s'explique par le fait que le cisaillement généré par le trajet de chargement œdométrique accentue la compaction.

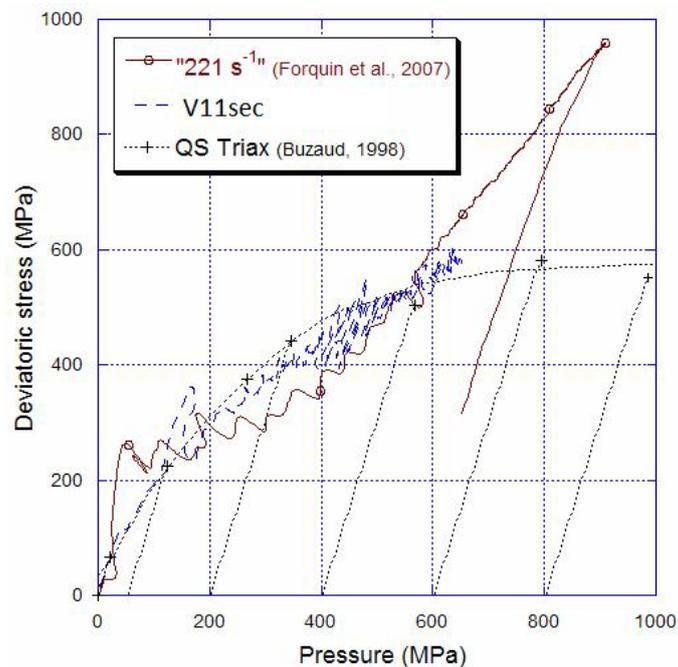


Fig. V.27 –Comportement déviatorique du MB50 pour différents types d'essais

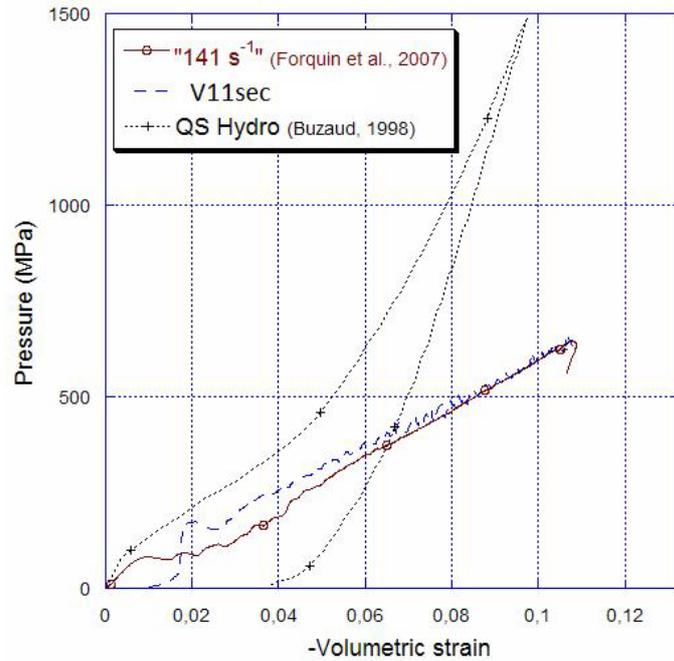


Fig. V.28 –Comportement volumique du MB50 pour différents types d’essais

Des études récentes ont entrepris l’étude d’un béton « réel » dénommé R30A7, de composition semblable à celle des bétons courants, pour différents trajets de chargement et degrés de saturation en eau [Gabet 2006, Vu 2007]. La taille maximale des agrégats est de 8 mm, et les dimensions des éprouvettes sont de Ø70-H140 mm. Les pressions atteintes sont du même ordre de grandeur que celles obtenues dans les essais sur MB50 de la présente étude. Il est intéressant de noter que la résistance du R30A7 sec (figure V.29) sous chargement œdométrique est assez semblable à celle du MB50 sec de la présente étude.

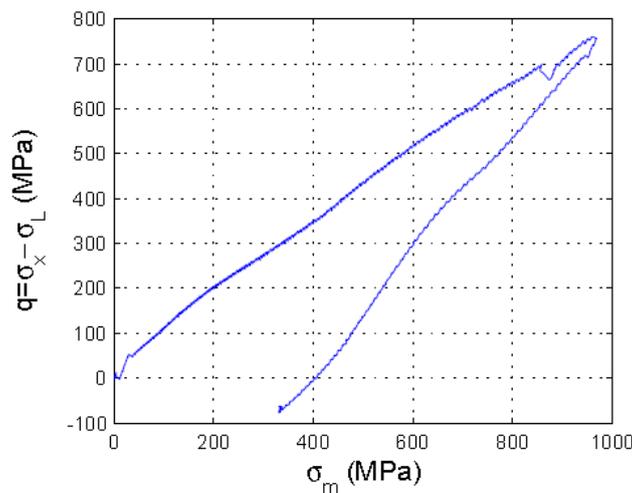


Fig. V.29 –Comportement déviatorique du R30A7sec sous trajet œdométrique [Gabet 2006]

En explorant différents trajets de chargement, l'auteur [Gabet 2006] a mis en évidence le caractère fortement compactant de l'essai œdométrique. L'influence sur le R30A7 de la présence de l'eau libre dans les pores est investiguée en considérant des éprouvettes ayant des degrés de saturation différents [Vu 2007] sur lesquelles sont effectués des essais triaxiaux à pressions de confinement variables. Similairement à nos résultats obtenus sur le MB50, le R30A7 sec a un comportement plus compactant que dans le cas saturé, mais aussi une résistance plus grande. Pour les éprouvettes complètement saturées, la contrainte déviatorique se trouve limitée à 200 MPa (figure V.30), soit le même ordre de grandeur obtenu pour le MB50 saturé. Par contre, celle du béton sec augmente continuellement avec la pression. Le cas du béton à degré de saturation intermédiaire a une résistance justement située entre celle du béton sec et saturé, et garde toutefois un comportement déviatorique semblable à celui de ce dernier aussitôt que les pores vides sont écrasés. Il est intéressant de noter que le comportement du MB50 lors des essais statiques à différentes vitesses de chargement révèle une similitude avec celui du R30A7, où la variable de l'essai est le degré de saturation. Ceci confirme l'importance du rôle joué par la pression interstitielle de l'eau. Le fait de constater autant de similitudes entre les deux bétons MB50 et R30A7 pourtant de constitutions assez différentes, montre qu'effectivement, sous hautes pressions de confinement, le béton se comporterait comme un empilement granulaire et la matrice cimentaire qui constitue le squelette solide n'aurait aucun effet sur le comportement [Vu 2007].

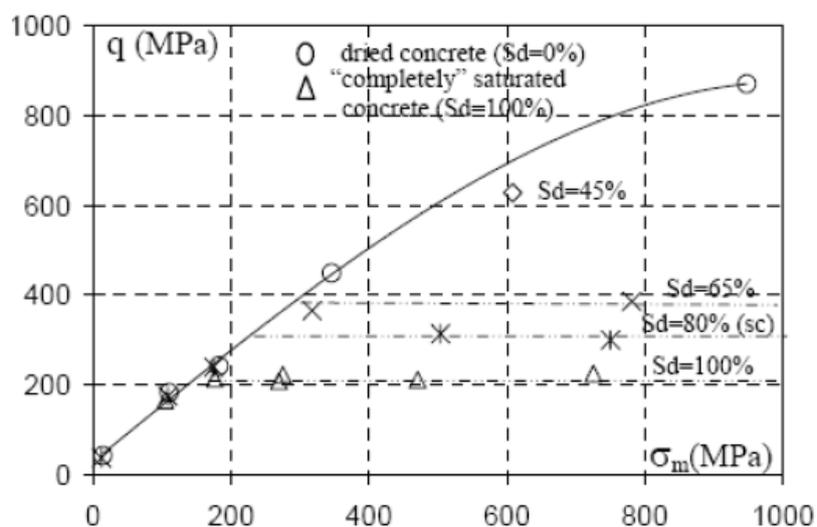


Fig. V.30 –Comportement déviatorique du R30A7 pour différents degrés de saturation

[Vu 2007]

V.5 Conclusion

Des essais quasi-œdométriques statiques et dynamiques sont effectués sur des éprouvettes de micro-béton MB50, sèches et saturées. La vitesse de déformation a un effet négligeable sur le comportement tant sphérique que déviatorique.

L'influence de la pression interstitielle de l'eau libre dans les pores est mise à jour grâce aux essais statiques effectués à des vitesses de chargement différentes. Ces essais ont permis d'expliquer la grande différence observée sur la résistance du béton dans son état sec et saturé. Une limitation de la résistance du béton saturé est observée lors des essais dynamiques effectués à plusieurs intensités de chargement. Ces essais se déroulent dans des conditions d'étanchéité favorisant des pressions interstitielles du même niveau que les contraintes axiales. Les essais statiques drainés effectués à des durées variables exhibent pour le béton un comportement qui est directement conditionné par la pression interstitielle. Au fur et à mesure que le temps de l'essai augmente, la résistance des bétons saturés atteint des niveaux plus grands. L'effet poro-mécanique de l'eau est donc prédominant par rapport au comportement rhéologique. Une tentative d'estimation de la pression interstitielle par le biais de la théorie des milieux granulaires saturés permet de donner des éléments de compréhension du phénomène. Le temps de drainage théorique calculé justifie les différences de comportement observées. En partant d'un coefficient de perméabilité usuel pour les bétons, il est apparu qu'à partir d'une durée d'essai d'environ 28 mn, la pression interstitielle devient très faible (10% de la contrainte axiale). Or les deux essais effectués durant des durées de 2h et 24h sont presque superposables. La résistance effective (contrainte déviatorique correspondant à la pression effective) des bétons saturés semble indépendante de la pression interstitielle, quelle que soit la durée de l'essai. En effet, les courbes de résistance tracées en contraintes effectives peuvent coïncider avec celle de l'essai lent « QSsat-24h », compte tenu de l'incertitude sur le coefficient de perméabilité. Celui-ci semblerait évoluer au cours de la compaction, ce qui est assez probable. Pour des pressions supérieures à 400 MPa, la résistance effective des bétons saturés reste inférieure à celle des bétons secs, pour des valeurs du coefficient de perméabilité comprises entre le tiers et le triple d'une valeur usuelle de référence. Cette différence de résistance serait due à la lubrification des grains par l'eau présente dans les pores.

D'autre part, les résultats obtenus retrouvent certaines constatations relatives au comportement des bétons secs et humides sous haut confinement. L'essai œdométrique se situe au-dessous de la surface seuil caractérisée par la transition contraction-dilatation [Gabet 2006], et il est plus compactant que l'essai hydrostatique [Burlion 1997]. L'incertitude qui prédominait sur les différences de comportement observées le long des essais dynamiques et statiques effectués sur le MB50 par différents auteurs [Buzaud 1998, Gatuingt 1999, Forquin et al. 2008b] est relevée par le biais des essais sur éprouvettes sèches et saturées.

Conclusion générale

La caractérisation expérimentale du comportement dynamique des géomatériaux, et particulièrement du béton, se fait habituellement par le moyen des barres de Hopkinson qui constituent l'outil de mesure privilégié. Le caractère fragile de ces matériaux requiert leur confinement radial, afin d'éviter leur rupture précoce, et de pouvoir explorer leur comportement quand ils sont soumis à des pressions de plusieurs centaines de MPa, comme c'est le cas dans certaines situations accidentelles réelles.

Le procédé de confinement qui consiste à insérer l'éprouvette dans une cellule métallique, a été utilisé par plusieurs auteurs pour l'étude du comportement statique et dynamique du micro-béton MB50. Les résultats obtenus étaient incomplets et souvent disparates, de sorte qu'il a été difficile de tirer des conclusions nettes quant au comportement du MB50. Les sources d'incertitudes soupçonnées sont reliées tout autant à la méthode de dépouillement, qu'à l'état de conservation des éprouvettes auquel peu de précaution était consacré.

La présente étude s'est fixée un but qui constitue à mettre au point une procédure de dépouillement exacte, mise en œuvre sur une cellule élastique dont les dimensions sont soigneusement optimisées au préalable. Le dépouillement repose sur une étude analytique du problème de mécanique des milieux continus de la cellule élastique de dimensions finies, soumise à des contraintes normales et tangentielles appliquées sur sa surface intérieure. Les contraintes normales représentent la pression radiale exercée par l'éprouvette sur la cellule, tandis que les contraintes tangentielles sont générées par le frottement de l'éprouvette sur la cellule, lors de l'essai. Le coefficient de frottement a été évalué par l'intermédiaire d'une presse manuelle statique et s'est avéré négligeable.

Sur le plan expérimental, un dispositif de montage spécial a été conçu pour permettre la mise en place exacte de l'éprouvette dans la cellule, ainsi que l'assemblage des différentes pièces du dispositif de confinement. Grâce à ce dispositif, une remarquable duplication des essais est obtenue, et peu de dispersion dans les résultats est observée. La validation globale de l'essai de confinement s'est faite en l'exécutant sur du laiton, caractérisé au préalable par des essais uniaxiaux de compression dynamique et statique. Le comportement uniaxial du laiton a concouru avec une grande précision à son comportement issu des essais de confinement.

La campagne d'essais concerne en majorité le béton MB50. Des éprouvettes complètement saturées d'eau, ainsi que d'autres séchées à l'étuve jusqu'à masse constante, sont soumises aux essais de confinement statique et dynamique. Une augmentation continue de la résistance est observée pour le béton sec, tandis que le béton saturé a exhibé une limitation de sa résistance à un niveau constant, quelle que soit l'intensité du chargement dynamique appliqué. Les bétons sec et saturé ont montré une dépendance à la vitesse de déformation quasi négligeable. Les essais statiques sur bétons saturés se sont déroulés avec des durées différentes allant de 55 secondes à 24 heures, et sont caractérisés par une expulsion de l'eau libre dans les pores en dehors de la cellule. Ce phénomène qui n'est pas observé dans les essais dynamiques, où les temps réduits mis en jeu ne permettent pas le drainage, a montré que la pression interstitielle de l'eau intervient de manière importante sur le comportement du béton. Le comportement statique du béton saturé a montré une grande dépendance de la vitesse de chargement, qui contrôle en fait le niveau de la pression interstitielle. Au fur et à mesure que la durée de l'essai augmente, le comportement du béton saturé tend vers celui du béton sec.

En s'inspirant de la théorie de consolidation des sols de Terzaghi, et en partant des hypothèses des sols granulaires non cohésifs, l'expression analytique de la pression interstitielle à l'intérieur de l'éprouvette est obtenue, tout en respectant les conditions aux limites des essais statiques effectués. Il a alors été possible d'expliquer d'une façon quantitative et qualitative les différences de comportement observées entre les différents essais sur béton saturé, et entre ces essais et ceux sur béton sec. Le déviateur constant observé dans les essais dynamiques, serait dû à une réponse hydrostatique de l'eau dans les pores, de sorte que la résistance effective du béton se réduirait à celle du squelette solide au début de l'essai. En représentant la contrainte déviatorique en fonction des contraintes effectives (soit en déduisant la pression interstitielle), il est apparu que les courbes de résistance des essais statiques sur béton saturé se superposeraient sur celle de l'essai lent qui est effectué durant une durée de 24h. La différence de résistance entre le béton sec et le béton saturé serait due à l'effet lubrifiant de l'eau sur les grains solides.

Une étude théorique ayant une application directe sur les barres de Hopkinson, est réalisée en parallèle du principal thème du présent mémoire. Elle consiste à trouver le déplacement de la surface plane d'une barre cylindrique, quand elle est chargée d'une façon dynamique par des contraintes normales appliquées de façon axisymétrique sur une partie de sa section. La

configuration déformée de la surface étant non plane (incurvée), elle est dans un état de « poinçonnement élastique ». On retrouve cette même configuration lors d'un essai sur les barres de Hopkinson, où le diamètre de l'éprouvette est inférieur à celui des barres. Le déplacement local à l'interface barre-éprouvette n'est pas mesuré par les jauges qui sont situées bien plus loin sur la barre. La prise en compte de ce déplacement additionnel résultant du poinçonnement permet d'améliorer les résultats, et surtout de mesurer le module de Young correct du matériau.

Perspectives

Les perspectives de ce travail concernent deux aspects :

Le premier est lié à la mesure de la pression interstitielle de l'eau, lors du déroulement des essais quasi-œdométriques statiques et dynamiques. Bien que la mise en œuvre de cette mesure soit compliquée, la détermination même en moyenne de la pression interstitielle est nécessaire, vu son effet primordial autant sur le plan expérimental que sur le plan théorique, dans les expressions mises en jeu.

Le second aspect est d'ordre rhéologique. Le comportement du béton saturé en dynamique et en statique a été abordé selon un point de vue particulier, qui est représenté par une adaptation de la théorie de Terzaghi. Plusieurs hypothèses ont été faites afin de s'aligner sur le comportement des roches granulaires non cohésives. :

- Le comportement de la matrice solide est assumé élastique, les déformations volumiques sont reliées aux pressions par le module œdométrique.
- Les déformations du squelette solide doivent être négligeables par rapport aux vides des porosités renfermées. Des essais de compaction effectués par différents auteurs sur du MB50 ou autre béton, montrent que cette hypothèse n'est pas bien vérifiée.

- Le coefficient de perméabilité ne varie pas au cours de l'essai. La sévère compaction à laquelle est soumis le béton aurait une influence sur ce coefficient. Mais la détermination de son évolution constitue une difficulté supplémentaire.

Donc les travaux ultérieurs devraient se pencher sur ces points, au cas où l'approche de la pression interstitielle serait pareille à celle utilisée dans la présente étude.

Références bibliographiques

- [Bailly 1994] P. Bailly, “Une modélisation d’un matériau fragile avec prise en compte d’effets dynamiques”, *Compte Rendu Académie des Sciences, Série II*, pages 727-732, 1994
- [Bazant et al. 1986] Z.P. Bazant, F.C. Bishop, T.P. Chang “Confined compression tests of cement paste and concrete up to 300 Ksi”, *ACI Journal*, 33: 553-560, 1986
- [Benthem et Minderhood 1972] J.P. Benthem and P. Minderhood, “The problem of the solid cylinder compressed between rough rigid stamps”, *International Journal of Solid Structures*, 8: 1027-1042, 1972
- [Bertholf et Karnes 1975] L.D. Bertholf and J. Karnes, “Two-dimensional analysis of the split Hopkinson pressure bar system”, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 23: 1-19, 1975
- [Biarez 1962] J. Biarez, “Contribution à l’étude des propriétés mécaniques des sols et des matériaux pulvérilents”, PhD thesis, Université de Grenoble, 1962
- [Bishop et Henkel 1957] A.W. Bishop, D.J. Henkel, “The measurement of soil properties in the triaxial test”, Edward Arnold-Publishers-Ltd, 2nd edition, 1957
- [Burlion 1997] N. Burlion, “Compaction des bétons: éléments de modélisation et caractérisation expérimentale”, PhD thesis, ENS Cachan, 1997
- [Burlion et al. 2001] N. Burlion, G. Pijaudier-Cabot, N. Dahan, “Experimental analysis of compaction of concrete and mortar”, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 25: 1467-1486, 2001
- [Burlion et al. 2005] N. Burlion, F. Bourgeois, J-F Shao, “Effects of desiccation on mechanical behavior of concrete”, *Cement and Concrete Composites*, 27: 367-379, 2005
- [Buzaud 1998] E. Buzaud, “Performances mécaniques et balistiques du microbéton MB50”, Rapport scientifique final du groupe de recherche formé dans le cadre du réseau de laboratoires « GEO » ; responsable du projet P. Bailly

- [Castellote et al. 2004] M. Castellote, C. Alonso, C. Andradea, X. Turtillas, J. Campoc, “Composition and microstructural changes of cement pastes upon heating, as studied by neutron diffraction”, *Cement and Concrete Research*, 34: 1633-1644, 2004
- [Davies 1948] R.M. Davies, “A critical study of the Hopkinson pressure bar”, *Philos. Trans. Of the Royal Soc. Of London, A*: 240375-240457, 1948
- [Eason 1966] G. Eason, “The displacements produced in an elastic half-space by a suddenly applied surface force”, *Journal of Applied Mathematics*, 2: 299-326, 1966
- [Follansbee et Franz 1983] P.S. Follansbee and C. Franz, “Wave propagation in the split Hopkinson pressure bar”, *Journal of Eng. and Mater. Techn.* 105: 61-66, 1983
- [Forquin 2003] P. Forquin, “Endommagement et fissuration de matériaux fragiles sous impact balistique ; rôle de la microstructure”, PhD thesis, ENS Cachan, 2003
- [Forquin et al. 2007] P. Forquin, A. Arias, R. Zaera, “An experimental method of measuring the confined compression strength of geomaterials”, *International Journal of Solids and Structure*, 44: 4291-4317, 2007
- [Forquin et al. 2008a] P. Forquin, A. Arias, R. Zaera, “ Role of porosity in controlling the mechanical and impact behaviours of cement-based materials”, *International Journal of Impact Engineering*, 35: 133-146, 2008
- [Forquin et al. 2008b] P. Forquin, G. Gary, F. Gatuingt, “A testing technique for concrete under confinement at high rates of strain”, *International Journal of Impact Engineering*, 35: 425-446, 2008
- [Frazer et al. 1937] R.A. Frazer, W.P. Jones, S.W. Skan, “Approximations to the functions and to the solutions of difference equations”, *Aeronautical Research Council R&M 1799*, 1937
- [Gabet 2006] T. Gabet, “ Comportement triaxial du béton sous fortes contraintes : influence du trajet de chargement”, PhD thesis, Université Joseph Fourier, 2006
- [Gama et al. 2004] B. Gama, S. Lopatnikov, J.W. Gillespie, “Hopkinson bar experimental technique: A critical review”, *Applied Mechanics Reviews.*, 57: 223-250, 2004

- [Gary et al. 1991] G. Gary, J. Klepaczko, H. Zhao, “Correction de dispersion pour l’analyse des petites deformations auz barres de Hopkinson”, Journal de Physique, Tome III, 1: c3-403, 1991
- [Gary et Klepaczko 1992] G. Gary, J. Klepaczko, “Essai de compression dynamique sur béton”, GRECO geomaterial scientific report, pages 105-118, 1992
- [Gary et De Greef 2008] G. Gary and V. De Greef, Logiciel de dépouillement DAVID, LMS, 2008
- [Gatuingt 1999] F. Gatuingt, “Prévision de la rupture des ouvrages en béton sollicités en dynamique rapide”, PhD thesis, ENS Cachan, 1999
- [Graff 1991] K.F. Graff, “Wave motion in elastic solids”, Dover Publications, New York, 1991
- [Grange 2007] S. Grange, “Fragmentation dynamique des roches”, PhD thesis, ENS Cachan, 2007
- [Hoek et Franklin 1968] E. Hoek, J.A Franklin, “Simple triaxial cell for field or laboratory testing of rock”, Trans. Inst. Min. Metall., 77: Section A22, 1968
- [Hopkinson 1914] B. Hopkinson, “A method of measuring the pressure in the deformation of high explosive by impact of bullets”, Philos. Trans. Of the Royal Soc. Of London, 213: 437-456, 1914
- [Horvay et Mirabal 1958] G. Horvay and J.A. Mirabal, “The end problem of cylinders”, Journal of Applied Mechanics, 25: 561-571, 1958
- [Jones et Norwood 1967] O.E. Jones and F.R. Norwood, “Axially symmetric cross-sectional strain and stress distributions in suddenly loaded cylindrical elastic bars”, Journal of Applied Mechanics, 34: 718-724, 1976
- [Kennedy et Jones 1969] L.W. Kennedy and O.E. Jones, “Longitudinal wave propagation in a circular bar loaded suddenly by a radially distributed end stress”, Journal of Applied Mechanics, 36: 470-478, 1969

- [Kolsky 1949] H. Kolsky, “An investigation of mechanical properties of materials at very high rates of loading”, Proceedings of the Phil. Soc. Of London, B: 62676-62700, 1949
- [Krieg 1978] RD. Krieg, “A simple constitutive description for soils and crushable foams”, Report SC-DR-7260883, Sandia National Laboratory, 1978
- [Li et al. 2005] Q. Li, S. Reid, H. Wen and A. Telford, “ Local impact effects of hard missiles on concrete targets”, International Journal of Impact Engineering, 32: 224-284, 2005
- [Lifshitz et Leber 1994] J.M. Lifshitz and H. Leber, “Data processing in the split Hopkinson pressure bar tests”, International Journal of Impact Engineering, 15: 723-733, 1994
- [Love 1927] A.E.H. Love, “A treatise on the mathematical theory of elasticity”, 4th edition, Cambridge University Press, 1927
- [Love 1944] A.E.H. Love, “A treatise on the mathematical theory of elasticity”, 4th edition, Dover, New York, 1944
- [Little et Childs 1967] R.W. Little and S.B. Childs, “Elastostatic boundary region problem in solid cylinders”, Quarter Applied Mathematics, 25: 261-274, 1967
- [Lurie 1943] A.I. Lurie, “Theory of elasticity”, 2nd edition, Springer, 1999
- [Mendelson et Roberts 1963] A. Mendelson and E. Roberts, “The axisymmetric stress distribution in in finite cylinders”, 8th Midwestern Mechanics Conference, pages 40-58, 1963
- [Mindlin 1960] R.D Mindlin and H.D. McNiven, “Axially symmetric waves in elastic rods”, Journal of Applied Mechanics, 27: 145-151, 1960
- [Mitra 1961] M. Von Mitra, “Disturbance produced in an elastic half-space by impulsive normal pressure”, Proc. Camb. Phil. Soc. Math. Phys. Sci., 60: 683-696, 1961
- [Palaniswamy et Shah 1974] R. Palaniswamy, S.P. Shah, “Fracture and stress-strain relationship of concrete under triaxial compression”, Journal of Structural Division, ASCE, ST5: 901-916, 1974
- [Rota 1997] L. Rota, “Application de méthodes inverses au dépouillement de l’essai aux barres de Hopkinson”, PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1997

- [Schmidt 2003] J.M. Schmidt, “High pressure and high strain rate behavior of cementitious materials: experiments and elastic/viscoplastic modeling”, PhD thesis, University of Florida, USA, 2003
- [Sfer et al. 2002] D. Sfer, I. Carol, R. Gettu, “Study of the behavior of concrete under triaxial compression”, *Journal of Engineering Mechanics*, 128(2): 156-163, 2002
- [Skalak 1957] R. Skalak “Longitudinal impact of a semi-infinite circular elastic bar”, *Journal of Applied Mechanics*, 24: 59-64, 1957
- [Skoczylas et al. 2007] F. Skoczylas, N. Burlion, I. Yurtdas, “About drying effects and poro-mechanical behavior of mortars”, *Concrete and Cement Composites*, 29: 383-390, 2007
- [Swenson et Taylor 1983] DV. Swenson and LM. Taylor, “A finite element model for the analysis of tailored pulse stimulation of boreholes”, *Int. Journal of Num. Anal. Meth. Geom.* 7: 469-484, 1983
- [Talienco et al. 1999] A. Talienco, M. Berra, A. Pandolfi, “Effect of high-intensity sustained triaxial stresses on the mechanical properties of plain concrete”, *Mag. Concrete Res.*, 51(6): 437-447, 1999
- [Timoshenko et Goodier 1970] S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, “Theory of elasticity”, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1970
- [Toutlemonde 1994] F. Toutlemonde, “Résistance au choc des structures en béton : du comportement du matériau au calcul des ouvrages”, PhD thesis, ENPC, 1994
- [Vu et al. 2007] X.H. Vu, Y. Malécot, L. Daudeville, “Comportement du béton sous fort confinement : Influence du degré de saturation et du rapport Eau/Ciment”, 25^e rencontres de l’AUGC, 23-25 Mai 2007, Bordeaux
- [Vu 2007] X.H. Vu, “Caractérisation expérimentale du béton sous fort confinement : influences du degré de saturation et du rapport eau/ciment”, PhD thesis, Université Joseph Fourier, 2007
- [Warren et al. 2004] T. Warren, A. Fossum, D. Frew, “Penetration into low-strength (23 MPa) concrete: target characterization and simulations”, *International Journal of Impact Engineering*, 30: 477-503, 2004

[Weerheijm 1992] J. Weerheijm, “Concrete under impact tensile loading and lateral compression”, PhD thesis, Delft University, 1992

[Wei et al. 1999] X.X. Wei, K.T. Chau, R.H.C. Wong, “Analytic solution for axial point loads strength test on solid circular cylinders”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 125, No. 12, pages 1349-1357

[Yang et Shim 2005] L.M. Yang and V.P.W. Shim, “An analysis of stress uniformity in split Hopkinson bar test specimens”, *International Journal of Impact Engineering*, 31: 129-150, 2005

[Yurtdas et al. 2004] I. Yurtdas, H. Peng, N. Burlion, F. Skoczylas, “Triaxial mechanical behavior of mortar: effects of drying”, *Cement and Concrete Research*, 34: 1131-1143, 2004

[Zhao et Gary] H. Zhao and G. Gary, “A three-dimensional analytical solution of longitudinal wave propagation in an infinite linear viscoelastic cylindrical bar. Application to experimental techniques”, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 43: 1335-1348, 1995