

Loi de Weyl presque sûre et résolvante pour des opérateurs non-autoadjoints

William Bordeaux Montrieux

▶ **To cite this version:**

William Bordeaux Montrieux. Loi de Weyl presque sûre et résolvante pour des opérateurs non-autoadjoints. Mathematics [math]. Ecole Polytechnique X, 2008. English. NNT : . pastel-00005367

HAL Id: pastel-00005367
https://pastel.hal.science/pastel-00005367

Submitted on 4 Sep 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT DE L'ÉCOLE

POLYTECHNIQUE

Spécialité : Mathématiques

présentée par

William Bordeaux Montrieux

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE

Loi de Weyl presque sûre et résolvante pour des opérateurs différentiels non-autoadjoints

Présentée le 12 novembre 2008 devant le jury composé de

Nalini Anantharaman	Examinateur
Nicolas Burq	Examinateur
Frédéric Klopp	Examinateur
Thierry Ramond	Rapporteur
Johannes Sjöstrand	Directeur de thèse
San Vu Ngoc	Examinateur
Maciej Zworski	Rapporteur (excusé)

Loi de Weyl presque sûre et résolvante pour des opérateurs différentiels non-autoadjoints

William Bordeaux Montrieux

Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique
FR 91120 Palaiseau cedex
Bordeaux@math.polytechnique.fr

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Johannes Sjöstrand, de m'avoir initié au métier de chercheur. J'ai été heureux de travailler sous sa direction : j'ai beaucoup apprécié ses qualités humaines, sa disponibilité et sa profondeur d'esprit.

Je veux ensuite remercier Thierry Ramond et Maciej Zworski d'avoir accepté de rapporter cette thèse, et de l'avoir fait dans des délais très courts. Je suis reconnaissant à Thierry Ramond pour les échanges qu'il m'a apportés et Maciej Zworski pour son accueil chaleureux et ses discussions très utiles lors de mon séjour à Berkeley.

Je voudrais également remercier Nalini Anantharaman, Nicolas Burq, Frédéric Klopp et San Vu Ngoc de me m'avoir fait l'honneur de figurer dans mon jury de thèse.

Mes conditions de travail au Centre de Mathématiques Laurent Schwartz ont été particulièrement agréables, avec une bonne ambiance, et je tiens vraiment à remercier tous les membres, en particulier mes collègues thèsards.

Table des matières

1 Introduction **9**
1.1 Instabilité spectrale 9
1.2 Perturbation des opérateurs non-autoadjoints 13
1.3 Enoncé des résultats 18

2 Asymptotique spectrale presque sûre d'un opérateur différentiel non autoadjoint **31**
2.1 Introduction 31
2.2 Pseudospectre 34
2.3 Problème de Grushin 36
2.4 Rappels de notions probabilistes 40
2.5 Variables aléatoires gaussiennes 42
2.6 Perturbations aléatoires 44
2.7 Spectre de l'opérateur perturbé 54
2.8 Asymptotique spectrale 55
2.9 Annexe : Comptage des zéros de fonctions holomorphes 63

3 Loi de Weyl presque sûre pour un système différentiel en dimension 1 **69**
3.1 Introduction 69
3.2 Quelques faits sur les opérateurs pseudodifférentiels matriciels 78
3.3 Spectre et pseudospectre 81
3.4 Problème de Grushin 86
3.4.1 Résolution des problèmes locaux 86
3.4.2 Résolution du problème de Grushin 97
3.5 Perturbations aléatoires 99
3.6 Asymptotique spectrale semiclassique 107
3.7 Asymptotique des grandes valeurs propres 114

4 Perturbation aléatoire d'opérateurs différentiels non autoadjoints et amélioration des bornes de la résolvante 125
4.1 Introduction 125
4.2 Amélioration de la résolvante 132
4.3 Cas d'un opérateur modèle 141
4.3.1 Problème de Grushin près du bord du pseudospectre . 141
4.3.2 Perturbation 150
4.3.3 Asymptotique spectrale 159
4.3.4 Résolvante après la perturbation 162

5 Calculs numériques 165

Chapitre 1

Introduction

1.1 Instabilité spectrale

Dans une série de récents papiers, Davies, Trefethen et autres ont montré que le spectre des opérateurs non-autoadjoints est très instable sous de petites perturbations et ont introduit la notion de pseudospectre qui donne une information sur l'ampleur de l'instabilité, [5, 6, 33, 34]. Cette notion s'est beaucoup développée notamment grâce à l'analyse numérique, où l'on a noté des différences sensibles, dans certains problèmes non-autoadjoints, entre les résultats théoriques et numériques. Nous illustrerons ce fait par des exemples dans la suite.

Le pseudospectre est défini comme l'ensemble des points du plan complexe où la résolvante est de taille significative. De façon précise, on définit le ϵ-pseudospectre, $\sigma_\epsilon(P)$, d'un opérateur P comme l'ensemble

$$\sigma_\epsilon(P) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \|(z-P)^{-1}\| > \frac{1}{\epsilon} \right\}$$

avec la convention que $\|(z-P)^{-1}\| = +\infty$ si z appartient au spectre de P. Le ϵ-pseudospectre d'un opérateur normal est trivial puisqu'il s'agit du ϵ-voisinage du spectre. Cependant, dans le cas non normal, la norme de la résolvante peut être très grande, même loin du spectre. Une description équivalente est que z appartient au ϵ-pseudospectre de P si et seulement si z appartient au spectre d'une perturbation de P, $P+B$, avec $\|B\| < \epsilon$:

$$\sigma_\epsilon(P) = \bigcup_{B \in \mathcal{L}(H),\, \|B\| < \epsilon} \sigma(P+B).$$

Le pseudospectre est donc bien la zone d'instabilité spectrale. Ainsi, si la résolvante est très grande dans des régions éloignées du spectre, cela va induire une très forte instabilité du spectre sous de petites perturbations. On comprend dès lors avec ce point de vue, l'intérêt du pseudospectre lorsque l'on cherche à déterminer numériquement les valeurs propres d'un opérateur. En effet, un calcul numérique ne nous donnera que des valeurs propres approchées (aussi appelées quasimodes) à cause de la discrétisation et des inévitables erreurs d'arrondis.

Donnons deux exemples sur les différences entre les résultats numériques et théoriques dans le cas de la discrétisation des opérateurs non-autoadjoints. Pour l'oscillateur harmonique non-autoadjoint (qui a un spectre discret situé sur une ligne droite passant par l'origine), Zworski, en suivant Davies [5], a observé numériquement que les petites valeurs correspondent aux valeurs exactes, alors que les grandes valeurs propres bifurquent de manière régulière avec un angle constant [40]. Plus étrange encore, avec le cas constant par morceaux : considérons sur $L^2(S^1)$ l'opérateur non-autoadjoint

$$P = f(x)D_x, \quad \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x},$$

avec f constant par morceaux, non réelle et ne s'annulant pas. On suppose que $\int_{S^1} \frac{1}{f(x)} dx \neq 0$, et que l'image de f, c'est à dire un ensemble fini de points, est inclus dans un demi-plan ouvert $\langle z, z_0 \rangle > 0$. Un rapide calcul nous montre que le spectre de P est discret, et donné par

$$\sigma(P) = \{n\langle \frac{1}{f} \rangle^{-1},\, n \in \mathbb{Z}\}, \quad \langle u \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)dx.$$

Le spectre est donc situé sur une droite du plan complexe passant par l'origine. Nous pouvons maintenant essayer de trouver les mêmes valeurs propres numériquement. Nous procédons directement en utilisant *Matlab* ©, et une discrétisation de P donnée par la matrice

$$A = \left(\langle Pe_i, e_j \rangle_{L^2(S^1)}\right)_{-N \leq i,j \leq N}$$

où e_j est la base orthonormée usuelle sur $L^2(S^1)$, $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$. Le résultat

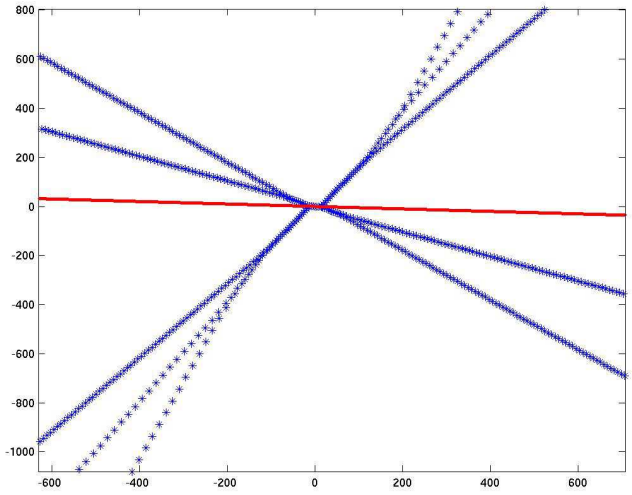


FIG. 1.1 – Compilation des valeurs propres d'un discrétisé de $f(x)D_x$. Le spectre exact est en rouge.

de la compilation est montré dans la figure 1.1 avec comme choix pour f

$$f(x) = \begin{cases} z_1 = 2 - 2i \text{ pour } x \in [0, 0, 5\pi[\\ z_2 = 2 - i \text{ pour } x \in [0, 5\pi, \pi[\\ z_3 = 2 + 3i \text{ pour } x \in [\pi, 1, 5\pi[\\ z_4 = 2 + 4i \text{ pour } x \in [1, 5\pi, 1, 75\pi[\\ z_5 = 2 + 6i \text{ pour } x \in [1, 75\pi, 2\pi[\end{cases}$$

et $N = 1000$. Nous voyons cinq bifurcations symétriques (dont le nombre est égal au cardinal de l'image de f). Ces bifurcations vont s'aligner selon les droites passant par l'origine et z_n. On remarque aussi que les petites valeurs propres sont bien situées sur la droite portant le spectre exact, mais ne correspondent pas aux valeurs propres exactes (figure 1.2), ce qui était pourtant le cas pour l'oscillateur harmonique non-autoadjoint. Plus généralement, d'autres simulations numériques, nous font penser que dans le cas constant par morceaux, si l'image de f compte n points strictement inclus dans un demi-plan séparé par une droite passant par l'origine, alors numériquement nous verrons n bifurcations, comme dans l'exemple ci-dessus.

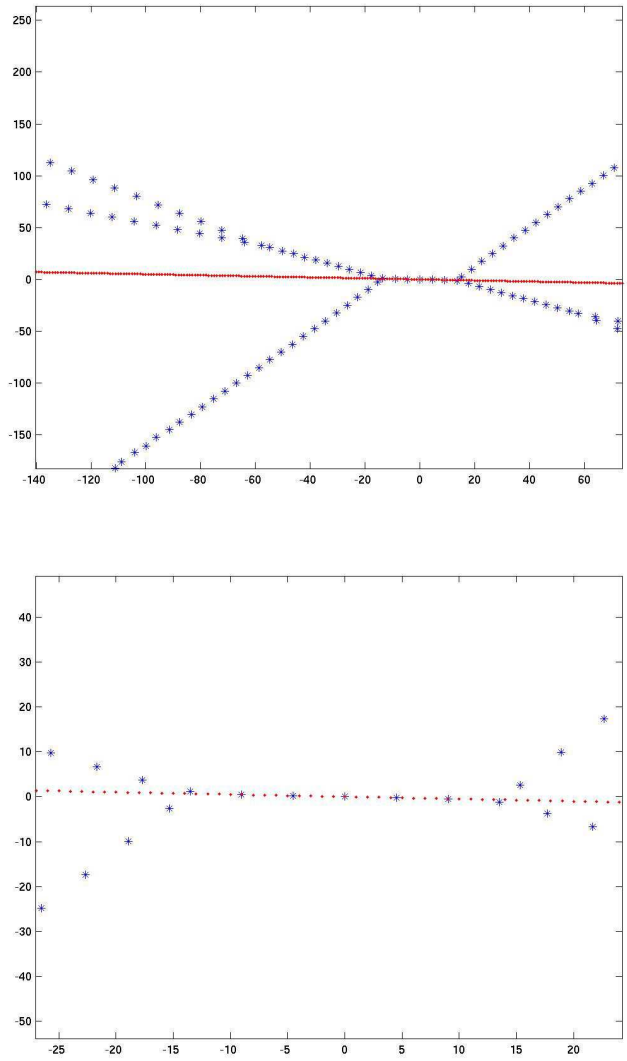


FIG. 1.2 – Petites valeurs propres d'un discrétisé de $f(x)D_x$. Le spectre exact est en rouge.

1.2 Perturbation des opérateurs non-autoadjoints

Soit P un opérateur non-autoadjoint. Une question intéressante est de comprendre comment, sous une petite perturbation, le spectre va se répartir dans le pseudospectre. La question est d'autant plus intéressante pour les opérateurs dont le symbole est analytique, car nous avons une description explicite du spectre en terme de condition de Bohr-Sommerfeld et qu'une perturbation va en général détruire l'analyticité de l'opérateur.

Le premier résultat dans cette direction est du à M. Hager [13]. Il concerne ici la limite semiclassique. Pour le cas semiclassique, on introduit le pseudospectre semiclassique qui se veut pour ce cadre un équivalent du ϵ-pseudospectre dans le cas classique $h = 1$. Il s'agira en général de l'image du symbole principal, ôté d'un ensemble de taille "petite". Pour l'opérateur de Schrödinger $P = -h^2\Delta + V(x)$, Davies [6] a pu construire un quasimode normalisé e_+ de $P - z$, pour tout z dans $\{\xi^2 + V(x);\ \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \mathrm{Im}\, V'(x) \neq 0\}$, impliquant $\|(P - z)e_+\| = \mathcal{O}(h^\infty)$. Zworski [39] a alors remarqué que la construction de Davies était déjà "généralisée" par Hörmander en 1960, l'énoncé plus général pour les opérateurs pseudodifférentiels étant que, sous une hypothèse de positivité sur le crochet de Poisson $\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(\rho)$, il existe un quasimode normalisé e_+ impliquant que l'on ait pour $z = p(\rho)$, $\|(P - z)e_+\| = \mathcal{O}(h^\infty)$. Dans [9], Dencker, Sjöstrand et Zworski ont ensuite donné une construction plus directe et également traité le cas des coefficients analytiques.

Hager a montré, pour un modèle simple $hD_x + g(x)$, sur S^1, perturbé par des noyaux oscillants que, sous certaines hypothèses, les valeurs propres se distribuent selon une loi de Weyl dans l'image du symbole (bien connu dans le cas autoadjoint)

$$\#(\sigma(P_\delta) \cap \Gamma) = \frac{1}{2\pi h}(\mathrm{vol}\,(p^{-1}(\Gamma)) + o(1)), \quad h \to 0 \tag{1.2.1}$$

pour une classe naturelle de domaines Γ, à bords lisses, où $P_\delta = P + \delta Q$, et δQ est une petite perturbation où Q est une somme de noyaux oscillants. La preuve fait appel aux techniques BKW, assez lourdes et peu "flexibles". Pour pallier le manque de souplesse des techniques BKW, elle a utilisé par la suite des perturbations aléatoires, rendant certaines démonstrations plus aisées. Elle a alors traité certaines classes d'opérateurs pseudodifférentiels semiclassiques sur $\mathbb{R}$ (voir [14]) avec des petites perturbations aléatoires. Elle

considère l'opérateur $P_\delta = P + \delta Q_\omega$, où P est un opérateur pseudodifférentiel d'une certaine classe incluant les opérateurs différentiels, et δQ_ω est une petite perturbation aléatoire de la forme $Q_\omega u(x) = q_\omega(x)u(x)$, où q_ω est une combinaison aléatoire de vecteurs propres d'un opérateur autoadjoint auxiliaire, avec des coefficients donnés par des variables aléatoires Gaussiennes indépendantes. Soit un domaine $\Gamma \subset\subset \mathbb{C}$ avec un bord lisse, on suppose que $p^{-1}(z)$ est une collection finie de points pour z dans Γ et pour lequel $\{p, \bar{p}\}(\rho) \neq 0$ si $\rho \in p^{-1}(\Gamma)$. Sous des hypothèses additionnelles, Hager a montré qu'avec une probabilité qui tend vers 1 lorsque $h \to 0$, le nombre de valeurs propres de P_δ dans Γ vérifie pour $\delta = e^{-\epsilon/h}$,

$$|\#(\sigma(P_\delta) \cap \Gamma) - \frac{1}{2\pi h}\mathrm{vol}\,(p^{-1}(\Gamma))| \leq \frac{C\sqrt{\epsilon}}{h} \quad h \to 0. \tag{1.2.2}$$

Pour le modèle simple, les domaines vérifient aussi les hypothèses ci-dessus. Pour la démonstration de ses deux résultats, la méthode repose sur la construction d'un problème de Grushin grâce à la non-annulation du crochet de Poisson $\{p, \bar{p}\}$, qui réduit ensuite l'analyse spectrale à l'étude des zéros d'une fonction, ici l'hamiltonien effectif. Il faut ensuite se ramener à l'étude d'une fonction holomorphe u avec les mêmes zéros. Puis, il s'agit de montrer qu'avec une probabilité proche de 1 (pour le cas probabiliste bien sûr), nous avons pour tout z dans Γ une majoration de $\ln|u|$ par une fonction sous-harmonique $\phi(z)/h$, et, que pour chaque z dans Γ, nous avons avec une probabilité proche de 1 une minoration de $\ln|u|$ du type $(\phi(z) - \epsilon)/h$, où ϵ est très petit. On termine ensuite en appliquant un résultat de Hager sur le comptage des zéros de fonctions holomorphes :

Proposition 1.2.1 *Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$, Γ un domaine à bord lisse et $\phi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Soit u une fonction holomorphe dans Ω vérifiant*

$$|u(z;h)| \leq e^{\phi(z)/h}, \quad z \in \Omega. \tag{1.2.3}$$

Supposons qu'il existe $\tilde{\epsilon} \ll 1, z_k \in \Omega, k \in J$ tels que

$$\partial\Gamma \subset \bigcup_{k\in J} D(z_k, \sqrt{\tilde{\epsilon}}), \quad \#J = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\epsilon}}}), \tag{1.2.4}$$

$$|u(z_k;h)| \geq e^{\frac{1}{h}(\phi(z_k)-\tilde{\epsilon})}, \quad k \in J, \tag{1.2.5}$$

alors

$$\#(u^{-1}(0) \cap \Gamma) = \frac{1}{2\pi h}\iint_\Gamma \Delta\phi\, d(\mathrm{Re}z)d(\mathrm{Im}z) + \mathcal{O}(\frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}}}{h}).$$

L'intégrale du laplacien de ϕ donnera le volume symplectique.

M. Hager, J. Sjöstrand [16] montrent pour une large famille d'opérateurs h-pseudodifférentiels P sur $\mathbb{R}^n$, mais avec une perturbation différente de [14], que la loi de Weyl (1.2.2) tient avec une probabilité $\to 1$, quand $h \to 0$. Ils ont remplacé la non-annulation du crochet de Poisson $\{p, \bar{p}\}$, par une hypothèse plus faible sur les volumes :

$$\begin{gathered}\exists \kappa \in]0,1], \quad \mathrm{Vol}\{\rho \in \mathbb{R}^{2n};\, |p(\rho) - z|^2 \leq t\} = \mathcal{O}(t^\kappa) \\ \text{uniformément pour } z \text{ dans un voisinage de } \Gamma \text{ et } 0 \leq t \ll 1. \end{gathered} \tag{1.2.6}$$

La non-annulation des crochets de Poisson implique que nous avons l'hypothèse (1.2.6) avec $\kappa = 1$. Cette hypothèse permettra en outre de traiter les domaines qui intersectent le bord de l'image du symbole, ce qui n'était pas le cas dans les deux papiers de Hager puisque sur le bord, le crochet de Poisson s'annule. La condition sur les crochets ne tenant plus, ils ont donc, pour la construction du problème de Grushin, instauré une nouvelle approche, en travaillant avec les opérateurs P^*P et PP^* et leur fonctions propres. Comme dans [13] et [14], ils sont donc amenés à étudier une fonction aléatoire holomorphe. Mais, contrairement à [13, 14] où la fonction n'est autre que l'hamiltonien effectif rendu holomorphe, ici il apparaît comme le déterminant d'un opérateur dépendant analytiquement du paramètre spectral. La fonction ϕ (de 1.2.3) trouvée perd son caractère lisse lorsque z est sur le bord de l'image du symbole, elle reste néanmoins continue et sous-harmonique. Pour traiter le cas des domaines intersectant avec le bord, ils ont donc donné une version de la proposition 1.2.1 avec ϕ sous-harmonique. Dans leur cas, la perturbation aléatoire est

$$Q_\omega u(x) = S \sum_{j,k \in \mathbb{N}} \alpha_{j,k}(\omega)(Tu|f_k)e_j,$$

où S, T sont des opérateurs elliptiques h-pseudodifférentiels de norme HS, $\alpha_{j,k}(\omega)$ sont des lois $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes et $e_0, e_1, \ldots, f_{0,}, f_1, \ldots$ sont des bases orthonormées dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ils ont montré que la classe de la perturbation est invariante par changement de bases. Comme il a été souligné dans [31], la conclusion de ce résultat est que nous avons la loi de Weyl pour la "plupart" des opérateurs h-pseudodifférentiels, cependant, puisque la perturbation n'est pas multiplicative, l'interprétation n'est plus valable pour les

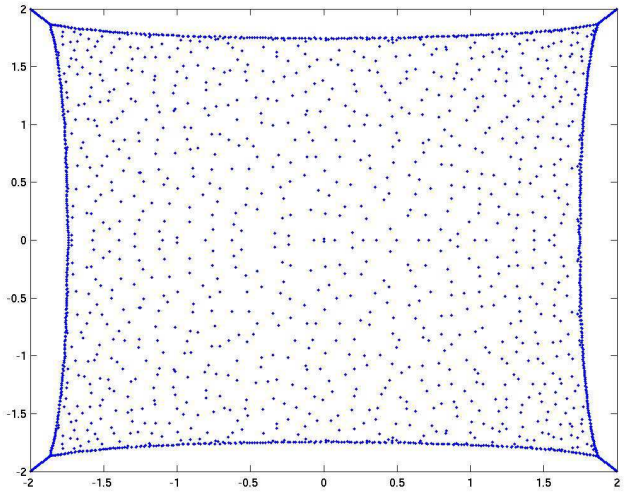


FIG. 1.3 – Valeurs propres de $A + \delta E$, pour $N = 2000$ où E est une matrice gaussienne centrée réduite et $\delta = N^{-4}$.

opérateurs différentiels. Sjöstrand a donc étudié dans [29] le cas des perturbations multiplicatives en dimensions quelconques. Il a en outre amélioré l'aspect probabilistique, en ne considérant plus exclusivement des variables gaussiennes (comme dans les précédents résultats), mais des variables à densité.

Terminons avec les opérateurs analytiques. Depuis les travaux de Melin et Sjöstrand [26], il est bien connu que les valeurs propres des opérateurs pseudodifférentiels en dimension 2, se répartissent souvent selon un réseau déformé. Et d'après ce qui précède, sous perturbations aléatoires, elles se distribuent selon une loi de Weyl. Dans une note [31], Sjöstrand compare ainsi les deux densités obtenues (aussi, elles sont toutes les deux lisses) et montre qu'en général elles sont différentes.

Illustrons les résultats sur les lois de Weyl dans le cas semiclassique avec l'opérateur P dont le symbole est $p(x, \xi) = 2\sin(2\pi x) + 2i\sin(2\pi\xi)$. Pour $2\pi h = 1/N$, P admet la représentation suivante comme une matrice $N \times N$:

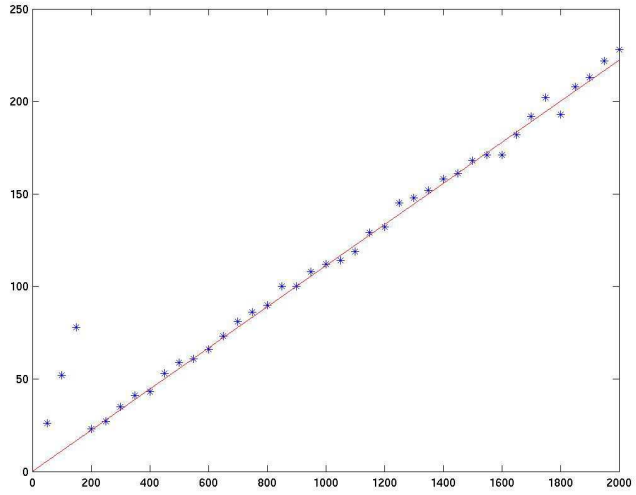


FIG. 1.4 – Nombre de valeurs propres dans $[-1,1] \times [-1,1]$ de $A + \delta E$ en fonction de N .

ici $N = 5$

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & 1 & & & -1 \\ -1 & s_2 & 1 & & \\ & -1 & s_3 & 1 & \\ & & -1 & s_4 & 1 \\ 1 & & & -1 & s_5 \end{pmatrix}$$

avec $s_j = 2 \sin \frac{2\pi j}{N}$. La compilation des valeurs propres de $A + \delta E$ pour $N = 2000$, avec E une matrice gaussienne centrée réduite et $\delta = N^{-4}$, est illustrée sur la figure 1.3. On remarque bien que les valeurs propres se répartissent de façon homogène dans l'image du symbole. Nous voulons vérifier pour le domaine $\Gamma = [-1,1] \times [-1,1]$ si la loi de Weyl est vérifiée numériquement. Nous allons compter le nombre de valeurs propres dans Γ en fonction de N, pour $N = 50$ à 2000 avec un incrément de 50. Grâce au fait que

$$[\frac{1}{12}, \frac{1}{12}] \ni (x, \xi) \mapsto (\mathrm{Re}\, z = 2 \sin 2\pi x,\ \mathrm{Im}\, z = 2 \sin 2\pi\xi) \in [-1,1]$$

est un homéomorphisme de jacobien $16\pi^2(\cos(2\pi x)\cos(2\pi\xi))$, pour le volume

symplectique, un calcul montre donc

$$\begin{aligned}\operatorname{vol} p^{-1}(\Gamma) &= \frac{2}{(4\pi)^2}\Big(\int_{-1}^{1}\frac{dw}{\sqrt{1-w^2/4}}\Big)^2 \\ &= \frac{4}{\pi^2}(\arcsin\frac{1}{2})^2.\end{aligned}$$

La droite, représentant la loi de Weyl, a donc pour équation $Y = \frac{4}{\pi^2}(\arcsin\frac{1}{2})^2 N \simeq 0,1111N$. On a reporté nos résultats sur la figure 1.4, la droite rouge représente la courbe théorique.

1.3 Enoncé des résultats

La motivation principale de notre étude est la distribution des grandes valeurs propres des opérateurs non-autoadjoints. Notre travail se décompose donc en deux parties. La première concerne la distribution des grandes valeurs propres. Nous montrons pour deux types d'opérateurs (un modèle simple et les opérateurs différentiels matriciels) perturbés aléatoirement, que les grandes valeurs propres se répartissent presque sûrement selon une loi de Weyl dans le pseudospectre. La seconde résulte d'une observation faite : la résolvante d'un opérateur s'améliore (dans un sens à préciser) après une perturbation aléatoire (on pense que cela reste vrai dans le cas non aléatoire si la perturbation est assez non-lisse).

Pour démontrer les résultats sur les lois de Weyl, la procédure reste essentiellement la même que [13, 14], c'est à dire la construction d'un problème de Grushin pour se ramener à l'étude des zéros de l'hamiltonien effectif. Pour finir, on appliquera la proposition de comptage 1.2.1, puis le lemme de Borel-Cantelli.

Lois de Weyl presque sûres

Dans un premier chapitre, nous montrons, pour un modèle simple perturbé aléatoirement que les grandes valeurs propres se distribuent presque sûrement selon une loi de Weyl dans l'image du symbole principal classique. Précisément, nous montrons que le terme principal de la fonction de comptage des valeurs propres dans des cônes dilatés du pseudospectre est égal au volume symplectique du cône correspondant. Ce premier chapitre traite d'un cas particulier introductif. Nous avons aussi pu vérifier numériquement pour

ce modèle la loi de Weyl. Il est remarquable de voir que les valeurs propres se répartissent de façon homogène dans l'image du symbole : on observe un nuage de points. Nous avons pu dans un cas, tracer la courbe de la fonction de comptage et vérifier qu'elle était très proche de la courbe théorique.

Nous considérons l'opérateur non-autoadjoint dans $L^2(S^1)$

$$P = f(x)D_x + g(x),\ D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x},\ \mathcal{D}(P) = H^1(S^1),$$

avec $f : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $g : S^1 \to \mathbb{C}$ deux fonctions C^∞, et où f satisfait $\int_0^{2\pi} \frac{1}{f(x)} dx \neq 0$. Nous supposons :

Hypothèse 1.3.1 *On se place dans un des deux cas suivants :*
1er cas : f prend ses valeurs dans un secteur d'angle d'ouverture inférieur à π et différent de 0. On suppose aussi que $\arg f$ *admet seulement deux points critiques $a, b \in S^1$:*

$$\arg f(a) \leq \arg f(x) \leq \arg f(b),\ \forall x \in S^1.$$

2ème cas : $\arg f$ *est strictement croissante, avec* $\arg f(x+2\pi) = \arg f(x)+2\pi$.

Le symbole principal classique est $p(x,\xi) = f(x)\xi$, $(x,\xi) \in T^*(S^1)$. Soit les ensembles

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{f(x)\xi;\ x \in S^1,\ \xi \in \mathbb{R}\}, \\ \Lambda &= \{z \in \Sigma \setminus \{0\};\ \text{si } z = f(x)\xi \text{ alors } \frac{d}{dx}\arg f(x) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Nous avons clairement $\overline{\Lambda} = \Sigma$. Dans le premier cas, Λ est un cône d'angle $< \pi$, et dans le second cas $\Lambda = \mathbb{C}$. Le spectre de P, $\sigma(P)$, est discret et porté par une droite du plan complexe. Les grandes valeurs propres appartiennent à Λ.

Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. La perturbation aléatoire sera de la forme :

$$Q_\omega(u) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a_{j,k}(\omega)\langle u, e_k\rangle e_j, \quad u \in L^2(S^1),$$

où e_k est la base orthonormée usuelle de $L^2(S^1)$ donnée par $e_k(x) = e^{ikx}$, et $a_{j,k}$ des variables aléatoires complexes. Nous adoptons les hypothèses suivantes pour les variables aléatoires :

Hypothèse 1.3.2 *Les $a_{j,k}$ sont des variables aléatoires complexes indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, \sigma_{j,k}^2)$. On demande aussi que $\sigma_{j,k} = \sigma_j \sigma_k$ et qu'il existe $\rho > 1$ et $\tilde{C} > 0$ tels que*

$$\frac{1}{\tilde{C}} \langle j \rangle^{-\rho} \leq \sigma_j^2 \leq \tilde{C} \langle j \rangle^{-\rho}.$$

Dans ces conditions, le spectre de l'opérateur $P + Q_\omega$ est presque sûrement discret dans $\mathbb{C}$ et constitué de valeurs propres de multiplicité algébrique finie.

Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi$, $g, h \in C^1([\theta_1, \theta_2], [0, +\infty[)$ vérifiant $h < g$. Introduisons l'ensemble

$$\Gamma_{\theta_1,\theta_2}(h, g) = \{re^{i\theta}, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad h(\theta) \leq r \leq g(\theta)\}.$$

Dans le cas 1, on imposera $\arg f(a) < \theta_1$ et $\theta_2 < \arg f(b)$. Pour θ_1, θ_2 fixés, on écrira parfois $\Gamma(h, g)$ à la place $\Gamma_{\theta_1,\theta_2}(h, g)$.

Nous considérons la distribution des valeurs propres de $P + Q_\omega$ dans les dilatés d'un profil conique de la forme $\Gamma(0, g) \subset\subset \Lambda$, avec $g > 0$.

Théorème 1.3.3 *Il existe $C_1 > 0, \frac{1}{4} > \delta > 0$ tels qu'il existe $\tilde{M} \subset \mathcal{M}$ avec $\mathbb{P}(\tilde{M}) = 1$ pour lequel le nombre de valeurs propres, $N(P + Q_\omega, \lambda\Gamma(0, g))$, de $P + Q_\omega$ dans $\lambda\Gamma(0, g)$ vérifie*

$$\forall \lambda \geq 0$$
$$|N(P + Q_\omega, \lambda\Gamma(0, g) - \frac{1}{2\pi} \mathrm{vol}\, p^{-1}(\lambda\Gamma(0, g))| \leq C(\omega) + C_1 \lambda^{1-\delta},$$

les valeurs propres étant comptées selon leur multiplicité algébrique.

Dans un second chapitre, nous généralisons au cas des systèmes différentiels les résultats de M. Hager, c'est-à-dire que nous montrons, dans le cas semiclassique, que les valeurs propres se distribuent avec une probabilité qui tend vers 1 lorsque $h \to 0$, selon une loi de Weyl dans le pseudospectre. Puis, après une réduction semiclassique et les arguments développés dans le chapitre précédent, nous montrons l'asymptotique presque sûre pour le cas des systèmes différentiels. La perturbation aléatoire utilisée, pour ce chapitre, est un opérateur différentiel de rang inférieur, ce qui inclut naturellement les perturbations aléatoires multiplicatives.

Asymptotique semiclassique. Nous considérons l'opérateur différentiel non-autoadjoint dans $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$

$$P(h) = \sum_{\alpha \leq m} A_\alpha(x; h)(hD_x)^\alpha, \quad h \in (0, 1], \quad D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \tag{1.3.1}$$

muni du domaine

$$H^m_{sc}(S^1, \mathbb{C}^n) := \{u \in L^2(S^1, \mathbb{C}^n);\ \|u\|^2_{m,h} = \sum_{\alpha \leq m} \|(hD_x)^\alpha u\|^2 < \infty\}.$$

$A_\alpha \in C^\infty(S^1, \mathbb{C}^{n\times n})$ admet la repésentation asymptotique dans $C^\infty(S^1)$,

$$A_\alpha(x) \sim A_{\alpha,0}(x) + hA_{\alpha,1}(x) + h^2 A_{\alpha,2}(x) + \ldots, \quad h \to 0. \tag{1.3.2}$$

Le symbole principal semiclassique de P est donné par

$$p(x, \xi) := \sum_{\alpha \leq m} A_{\alpha,0}(x)\xi^\alpha, \quad (x, \xi) \in T^*S^1. \tag{1.3.3}$$

Nous supposons que P est elliptique (au sens où $\det A_{m,0}$ ne s'annule pas), et que $P - z : \mathcal{D}(P) \to L^2(S^1)$ est bijectif pour au moins une valeur de $z \in \mathbb{C}$. Alors pour h assez petit le spectre de P est discret dans $\mathbb{C}$. Nous notons l'ensemble des valeurs propres du symbole principal p par

$$\Sigma(p) = \bigcup_{(x,\xi)\in T^*S^1} \sigma(p(x, \xi)), \quad \sigma(p(x, \xi)) = \text{spectre de } p(x, \xi). \tag{1.3.4}$$

Pour z fixé, $q_z(x, \xi) := \det(p(x, \xi) - z)$. Nous définissons l'ensemble

$$\Phi = \{z \in \Sigma\ :\ \exists (x, \xi) \in T^*S^1 \text{ avec } z \in \sigma(p(x, \xi)) \text{ et } \{q_z, \bar{q}_z\}(x, \xi) = 0\}. \tag{1.3.5}$$

Nous notons $\Lambda(p) := \Sigma \setminus \Phi$, c'est un ensemble ouvert.

Nous considérons une perturbation aléatoire Q_ω définie sur l'espace de probabilité $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Q_ω est un opérateur différentiel d'ordre inférieur à P de $L^2(S^1)$ dans lui-même, de domaine dense,

$$Q_\omega = \sum_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} Q_\alpha(x; h)(hD_x)^\alpha, \quad 0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq m - 1. \tag{1.3.6}$$

Q_α est une matrice $n \times n$ où chaque élément est une série de Fourier aléatoire,

$$Q^{i,j}_\alpha(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{i,j}_{\alpha,k} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{1.3.7}$$

Hypothèse 1.3.4 *Les coefficients de Fourier $q^{i,j}_{\alpha,k}$ sont des variables aléatoires (pour faire court v.a.) complexes indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,(\sigma^{i,j}_{\alpha,k})^2)$. La variance peut dépendre de h. Ici, pour tout i,j, et α*

$$\sigma^{i,j}_{\alpha,k} \leq \tilde{C}\langle k\rangle^{-\rho}, \tag{1.3.8}$$

et pour $\alpha = \alpha_1$,

$$\sigma^{i,j}_{\alpha_1,k} \geq \frac{1}{\tilde{C}}\langle k\rangle^{-\rho}, \tag{1.3.9}$$

où les constantes $\tilde{C} > 0$ et $\rho > 1$ sont indépendantes de α, i, j et k, et où on utilise la notation standard $\langle k\rangle = (1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}$.

On rappelle que $X \sim \mathcal{N}(m,0)$, avec $m \in \mathbb{C}$, si sa densité est $\delta(z-m)$(masse de Dirac en $z = m$). Sous ces conditions, Q_ω est presque sûrement (p.s.) borné comme opérateur de H^m_{sc} dans L^2, et pour chaque α, i, j, $Q^{i,j}_\alpha(x)$ représente p.s. une fonction continue. Nous avons pour tout $z \in \Lambda(p)$, $q_z^{-1}(0) = \{\rho^j_+(z), \rho^j_-(z),\ j = 1,\dots,\beta(z)\}$ où $\beta(z) < \infty$ est localement constant, et $\pm\frac{1}{2i}\{q_z, \bar{q}_z\}(\rho_\pm) > 0$.

Hypothèse 1.3.5 *Soit $\Omega \subset \Lambda(p)$ et connexe. On demande que pour tout $z \in \Omega$,*

$$\rho^j_\pm(z) = (x^j(z), \xi^j_\pm(z)), \quad x^j \neq x^k, j \neq k. \tag{1.3.10}$$

et que $\xi^j_+ \neq 0$ pour tout j.

Pour $(x,\xi) \in T^*S^1$ et $\Gamma \subset \mathbb{C}$ donné, nous désignons le nombre de valeurs propres de $p(x,\xi)$ dans Γ par

$$m_\Gamma(x,\xi) := \#(\sigma(p(x,\xi)) \cap \Gamma). \tag{1.3.11}$$

Théorème 1.3.6 *Supposons admis les hypothèses 1.3.4 et 1.3.5. Soit $\Gamma \subset\subset \Omega$ un ouvert à bord C^2 par morceaux, et $\epsilon > 0$, $N_0 > 0$. Soit β la valeur constante de $\beta(z)$ sur la composante connexe de $\Lambda(P)$ contenant Ω. Alors il existe une constante positive C telle que pour tout*

$$h^{N_0} < \delta \ll h^{(\rho+\epsilon+\frac{1}{4})\beta+1}, \tag{1.3.12}$$

le nombre $N(P-\delta Q,\Gamma)$ de valeurs propres de $P-\delta Q$ dans Γ satisfait

$$|N(P-\delta Q,\Gamma) - \frac{1}{2\pi h}\iint m_\Gamma(x,\xi)\,dxd\xi| \leq C\frac{\sqrt{h\ln(\frac{1}{\delta})}}{h},$$

avec une probabilité

$$\geq 1 - C\frac{h^{2\epsilon}}{\sqrt{h \ln h^{-1}}}.$$

La probabilité est intéressante si $\epsilon \geq \frac{1}{4}$.

Notons que lorsque $\alpha_1 = \alpha_0 = 0$, nous nous trouvons dans la situation d'une perturbation multiplicative aléatoire. Nous donnerons aussi dans le chapitre 3 une version de ce théorème pour une famille $\mathcal{G}$ de domaines Γ dans Ω.

Asymptotique haute fréquence. Donnons maintenant la version haute-fréquence de ce qui précède. Soit l'opérateur différentiel non-autoadjoint dans $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$

$$P = \sum_{\alpha \leq m} A_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad A_\alpha(x) \in C^\infty(S^1). \tag{1.3.13}$$

Le domaine de définition est l'espace de Sobolev $H^m(S^1, \mathbb{C}^n)$. On impose comme précédemment une hypothèse d'ellipticité, $\det A_m(x) \neq 0$ pour $x \in S^1$, et nous demandons que $P - z$ soit bijectif pour au moins une valeur de z. Nous trouvons alors que le spectre de P est discret dans $\mathbb{C}$. Le symbole principal classique de P est $p_m(x, \xi) := A_m(x)\xi^m$. Nous désignons par $\Sigma(p_m)$ l'ensemble des valeurs propres de p_m,

$$\Sigma(p_m) = \bigcup_{(x,\xi) \in T^*S^1} \sigma(p_m(x, \xi)). \tag{1.3.14}$$

Pour z donné, on écrit $q_{m,z}(x, \xi) = \det(p_m(x, \xi) - z)$. Nous introduisons ensuite l'ensemble

$$\Phi = \{z \in \Sigma,\ \exists (x, \xi) \in T^*S^1 \text{ avec } z \in \sigma(p_m(x, \xi)) \text{ et } \{q_{m,z}, \bar{q}_{m,z}\}(x, \xi) = 0\}. \tag{1.3.15}$$

Notons $\Lambda(p_m) := \Sigma \setminus \Phi$, c'est un cône ouvert qui ne contient pas l'origine. La perturbation aléatoire sera de la forme

$$Q_\omega = \sum_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} Q_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad 0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq m - 1, \tag{1.3.16}$$

où chaque Q_α^{ij} est une série de Fourier aléatoire dont les coefficients $q_{\alpha,k}^{i,j}$ vérifient l'hypothèse 1.3.4. Dans ces conditions $P - Q_w$ est p.s. un opérateur

de Fredholm d'indice zéro avec un spectre discret.

Comme pour le cas modèle, nous sommes intéressés par la distribution des grandes valeurs propres de $P - Q_\omega$ dans les dilatés d'un profil conique inclus dans $\Lambda(p_m)$. Soit Ω, un cône ouvert connexe dans $\Lambda(p_m)$.

Pour tout $z \in \Lambda(p_m)$, $q_{m,z}^{-1}(0) = \{\rho_+^j(z), \rho_-^j(z),\, j = 1, \dots, \beta(z)\}$ avec $\pm\frac{1}{2i}\{q_{m,z}, \bar{q}_{m,z}\}(\rho_\pm) > 0$, où $\beta(z) < \infty$ est constant sur chaque composante connexe de $\Lambda(p_m)$. On fait alors l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1.3.7 *On demande que pour tout $z \in \Omega$,*

$$\rho_\pm^j(z) = (x^j(z), \xi_\pm^j(z)), \quad x^j \neq x^k, j \neq k. \tag{1.3.17}$$

Cette hypothèse n'est d'ailleurs vérifiée que si le degré de P est pair. En particulier, nous avons $\xi_+ = -\xi_-$.

Soit θ_1^0 et θ_2^0 tel que $\Lambda(p_m) \supset \Omega = \{re^{i\theta}; r > 0,\, \theta_1^0 < \theta < \theta_2^0\}$. Prenons $\theta_1, \theta_2 \in]\theta_1^0, \theta_2^0[$, avec $\theta_1 \leq \theta_2$, et $g, h \in C^2([\theta_1, \theta_2], \mathbb{R}_+)$ satisfaisant $h < g$. Nous introduisons alors l'ensemble

$$\Omega \supset\supset \Gamma_{\theta_1,\theta_2}(h, g) := \{re^{i\theta},\, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,\, h(\theta) \leq r \leq g(\theta)\}. \tag{1.3.18}$$

Pour θ_1, θ_2 fixés on écrira parfois $\Gamma(h, g)$ à la place $\Gamma_{\theta_1,\theta_2}(h, g)$. Nous notons pour tout $(x, \xi) \in T^*S^1$ et $\Gamma \subset \mathbb{C}$, $m_\Gamma(x, \xi) := \#(\sigma(p_m(x, \xi)) \cap \Gamma)$.

Théorème 1.3.8 *Soit Ω un cône connexe dans $\Lambda(p_m)$. On suppose que l'hypothèse 1.3.7 est vérifiée et que $m - \alpha_1 - \rho - \frac{3}{4} > 0$. Il existe alors $\tilde{C} > 0$ et $\tilde{M} \subset \mathcal{M}$ avec $\mathbb{P}(\tilde{M}) = 1$ tels que $\forall \omega \in \tilde{M}$, le nombre $N(P - Q_\omega, \lambda\Gamma(0, g))$ de valeurs propres de $P - Q_\omega$ dans $\lambda\Gamma(0, g) \subset\subset \Omega$ satisfait*

$\forall \lambda \geq 0$,

$$|N(P - Q_\omega, \lambda\Gamma(0, g)) - \frac{1}{2\pi}\iint m_{\lambda\Gamma(0,g)}(x, \xi)\, dxd\xi| \leq C(\omega) + \tilde{C}\lambda^{1/(2m)}\sqrt{\ln \lambda}.$$

Un exemple intéressant à traiter serait le cas des variables de Bernoulli dans la série de Fourier aléatoire (1.3.7), $q_{\alpha,k}^{i,j} = \sigma_{\alpha,k}^{i,j} X_{\alpha,k}^{i,j}$, où $X_{\alpha,k}^{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendantes vérifiant

$$\mathbb{P}(X_{\alpha,k}^{i,j} = 1) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(X_{\alpha,k}^{i,j} = -1) = \frac{1}{2} \tag{1.3.19}$$

et $\sigma_{\alpha,k}^{i,j}$ satisfaisant les conditions (1.3.8) et (1.3.9). Dans cette situation, si le théorème 1.3.8 est vrai, alors pour toutes variables aléatoires indépendantes

de la forme $q^{i,j}_{\alpha,k} = \sigma^{i,k}_{\alpha,k} X^{i,j}_{\alpha,k}$, où $X^{i,j}_{\alpha,k}$ est une variable symétrique (c'est-à-dire que X et $-X$ ont la même loi) centrée à densité, le théorème 1.3.8 serait aussi vérifié. Cela résulte de la propriété que si X et E sont des variables indépendantes, avec X symétrique et E une variable de Bernoulli vérifiant (1.3.19), alors X et EX ont la même loi. On ne peut malheureusement inclure toutes les variables symétriques, à cause de (1.3.9). Il est en effet important que p.s. $X^{i,j}_{\alpha,k} \neq 0$.

Ici, nous nous sommes bornés au cas de la variété la plus simple, le cercle, pour lequel les méthodes microlocales sont "simples" par rapport aux autres variétés. En effet localement, on peut se ramener à $\mathbb{R}$, en identifiant les intervalles de S^1 à des intervalles de $\mathbb{R}$. Il serait intéressant de généraliser les lois de Weyl presque sûres au cas des variétés compactes de dimension quelconque.

Il est aussi naturel de se poser la question connexe : Que pouvons-nous dire pour les opérateurs avec des coefficients non réguliers ? Cette question est d'autant plus motivée par le cas autoadjoint : V. Ivrii, L. Zielinski [22, 23, 36, 37] ont montré que la loi de Weyl restait en général vérifiée pour des coefficients moins réguliers que C^∞.

Bornes de la résolvante près du bord de l'image du symbole

Et, dans un chapitre suivant, partant d'un travail de M. Hager et J. Sjöstrand, nous donnons une majoration de la norme de la résolvante pour des opérateurs h-pseudodifférentiels perturbés aléatoirement, et nous montrons que celle-ci est meilleure par rapport aux estimations standard que l'on peut obtenir quand il n'y a pas de perturbation. En dimension 1, on montre même une borne polynomiale quand on se situe à l'intérieur du pseudospectre. Cependant les résultats généraux ne nous ont pas permis de déduire une telle borne près du bord du pseudospectre. Motivés par un problème d'évolution avec déformation de contour, nous avons donc commencé par regarder sur un modèle simple, le comportement de la résolvante près du bord et nous avons montré la borne polynomiale. Cette étude nous a amené à donner une estimation de la résolvante près du bord dans le cas non perturbatif.

Cas général. Soit $m \geq 1$ une fonction d'ordre sur $\mathbb{R}^{2n}$ dans le sens

$$m(\rho) \leq C_0 \langle \rho - \mu \rangle^{N_0} m(\mu), \ \rho, \mu \in \mathbb{R}^{2n},$$

pour des constantes positives fixées C_0, N_0 ou $\langle \rho \rangle = \sqrt{1 + |\rho|^2}$.

Soit

$$S(\mathbb{R}^{2n}, m) = \{a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n});\ |\partial_\rho^\alpha a(\rho)| \leq C_\alpha m(\rho),\ \rho \in \mathbb{R}^{2n},\ \alpha \in \mathbb{N}^{2n}\}. \tag{1.3.20}$$

Posons

$$P(\rho; h) \sim p(\rho) + hp_1(\rho) + \dots \text{ dans } S(\mathbb{R}^{2n}, m). \tag{1.3.21}$$

On garde la notation P pour son h-quantifié de Weyl, $P = P^w(x, hD_x; h)$. Nous fixons $a \in S(m)$ elliptique (dans le sens où $a \in S(m^{-1})$), puis nous définissons l'espace de fonction

$$H(m) := \{u \in S'(\mathbb{R}^n), \quad a^w(x, hD_x; h)u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}, \tag{1.3.22}$$

pour h assez petit. P est muni du domaine $H(m)$.

Nous supposons que $p - z$ est elliptique pour au moins une valeur de $z \in \mathbb{C}$. Soit $\Sigma = \overline{p(\mathbb{R}^{2n})} = p(\mathbb{R}^{2n}) \cup \Sigma_\infty$, où Σ_∞ est l'ensemble des points d'accumulation à l'infini de p. Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C} \setminus \Sigma_\infty$ un ouvert simplement connexe avec $\Omega \not\subset \Sigma$. Dès lors, pour $h > 0$ assez petit, le spectre $\sigma(P)$ de P est discret dans Ω.

Proposition 1.3.9 *Pour tout ouvert $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$, nous avons*

$$\|(P - z)^{-1}\| \leq \exp\left(C_\Omega h^{-n} \ln \frac{1}{g}\right),\ z \in \tilde{\Omega} \setminus \bigcup_{z_j \in \sigma(P)} D(z_j, g), \tag{1.3.23}$$

pour tout $g > 0$ positif et assez petit.

Soit $0 < \tilde{m}, \hat{m} \leq 1$ deux fonctions d'ordre, carrés intégrables, dont une est intégrable, et $\tilde{S} \in S(\tilde{m})$, $\hat{S} \in S(\hat{m})$ deux symboles elliptiques. Prenons aussi $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots$, et $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots$, deux bases orthonormales de $L^2(\mathbb{R}^n)$. La perturbation aléatoire utilisée dans [16] est de la forme $-\delta Q_\omega$, où $0 < \delta \ll 1$,

$$Q_\omega = \hat{S} \circ \sum_{j,k} \alpha_{j,k}(\omega) \hat{e}_j \tilde{e}_k^* \circ \tilde{S}, \tag{1.3.24}$$

où $\alpha_{j,k}$ sont des variables aléatoires complexes indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit $V_z(t) = \text{Vol}\{\rho \in \mathbb{R}^{2n},\ |p(\rho) - z|^2 < t\}$. Pour $\kappa \in]0, 1]$, et $z \in \Omega$ nous considérons

$$V_z(t) = \mathcal{O}(t^\kappa) \text{ et } 0 \leq t \ll 1. \tag{1.3.25}$$

Théorème 1.3.10 *Soit $\Gamma \subset\subset \Omega$ un ouvert à bord lisse. On suppose que (1.3.25) est vérifié uniformément pour z dans un voisinage de Γ. Si δ satisfait la condition $0 < \delta \ll h^{3n+1/2}$, alors il existe $\widetilde{C} \gg 1$, et C_1, C_2 positives telles que si on se donne $C > 0$ il existe $C_0 > 0$ telle que, avec une probabilité*

$$\geq 1 - \frac{C_1}{h(\ln \frac{1}{\delta})^{1/\kappa}} \delta^{\widetilde{C}h^{\kappa-n}} - \frac{1}{\widetilde{C}h(\ln \frac{1}{\delta})^{1/\kappa}} e^{-C_2 h^{-2n}}, \tag{1.3.26}$$

pour tout z dans Γ nous avons

$$\|(P - \delta Q_\omega - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{C_0} h^{\kappa-n-\frac{1}{2}} \delta^{-C_0 h^{\kappa-n}} \prod_{1 \leq j \leq N(\omega)} \frac{1}{|z - w_j(\omega)|}, \tag{1.3.27}$$

où $w_j(\omega)$ sont les valeurs propres de $P - \delta Q_w$ dans $D(z, Ch^{\frac{1}{2}}(\ln \frac{1}{\delta})^{\frac{1}{2\kappa}})$, $N(\omega)$ vérifiant l'estimation $\leq C_0\, h^{\kappa-n} \ln \frac{1}{\delta}$.

Corollaire 1.3.11 *On suppose que $n = 1$. Soit $\Gamma \subset\subset \Omega$ un ouvert à bord lisse. On suppose que (1.3.25) est vérifiée uniformément pour z dans un voisinage de Γ, avec $\kappa = 1$. Si $0 < \delta \ll h^{3n+1/2}$, alors il existe des constantes $\widetilde{C} \gg 1$ et C_1, C_2 positives telles que si on se donne $C > 0$ il existe $C_0 > 0$ tel que avec une probabilité*

$$\geq 1 - \frac{C_1}{h \ln \frac{1}{\delta}} \delta^{\widetilde{C}} - \frac{1}{\widetilde{C}h \ln \frac{1}{\delta}} e^{-C_2 h^{-2}}, \tag{1.3.28}$$

nous avons pour tout z dans Γ

$$\|(P - \delta Q_\omega - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{C_0 h^{1/2} \delta^{C_0}} \prod_{1 \leq j \leq N(\omega)} \frac{1}{|z - w_j(\omega)|}.$$

où $w_j(\omega)$ sont les valeurs propres de $P - \delta Q_w$ dans $D(z_0, Cr)$, avec $r = (h \ln \delta^{-1})^{1/2}$, $N(\omega)$ vérifiant la majoration $N(\omega) \leq C_0 \ln \delta^{-1}$.

Ainsi, par rapport à la proposition 1.3.9, on gagne une petite puissance de h dans le théorème 1.3.10. Comme conséquence, en dimension 1, nous avons une borne polynomiale lorsque $\kappa = 1$, ce qui se produit fréquemment lorsque le paramètre spectral est dans l'intérieur de l'image de symbole. Sur le bord, on ne peut pas déduire une telle borne puisque $\kappa < 1$. On espère cependant qu'en dimension 1, nous avons toujours une borne polynomiale sur le bord. Ainsi, pour débuter nous avons étudié le comportement de la résolvante près du bord pour un opérateur modèle.

Cas d'un opérateur modèle. Nous considérons l'opérateur modèle non-autoadjoint, étudié par M. Hager [13], dans $L^2(S^1)$:

$$P = hD_x + g(x), \quad h \in (0,1], \quad D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}.$$

muni du domaine $H^1_{sc}(S^1) := \{u \in L^2(S^1); \quad \|u\| + \|hD_x u\| < +\infty\}$. Nous imposons :

Hypothèse 1.3.12 $\operatorname{Im} g' \neq 0$, *sauf en deux points critiques de* S^1, *a et b, tels que pour tout point x du cercle,*

$$\operatorname{Im} g(a) \leq \operatorname{Im} g(x) \leq \operatorname{Im} g(b).$$

Nous imposons $\operatorname{Im} g''(a) > 0$, *c'est-à-dire que p est de type fini d'ordre 2 au sens de [9], sur la partie de* $\partial\Sigma$ *donnée par* $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} g(a)$, *où* $\Sigma = \{\operatorname{Im} g(a) \leq \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} g(b)\}$.

Pour simplifier, nous avons pris $a = 0$, $\operatorname{Im} g(a) = 0$ et $\operatorname{Im} g(b) > 1$. Le spectre est discret et porté par la droite d'équation $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Im} g(x)dx$.

Comme on l'a dit auparavant, notre motivation est d'avoir une borne polynomiale près du bord pour la résolvante dans le cas perturbatif. Il est d'abord naturel de voir ce qui se passe dans le cas non perturbatif, puisque cela n'a jamais été fait. Nous savons (théorème 1.4 de [9]) que si $z_0 \in \partial\Sigma$ alors pour tout $z \in D(z_0, h^{2/3}/C)$ nous avons $\|(P-z)^{-1}\| \leq Ch^{-2/3}$. Nous avons pu étendre ce résultat :

Proposition 1.3.13 *Soit* $P = hD_x + g(x)$ *comme ci-dessus. Soit K un compact connexe inclus dans* Σ, *disjoint et situé en dessous de la droite contenant le spectre. Nous avons les assertions suivantes :*
i) ([9]) Il existe $\tilde{C} > 0$ *et* $C > 0$ *tels que*

$$\forall z \in K \text{ avec } \operatorname{Im} z < h^{2/3}/C, \quad \|(P-z)^{-1}\| \leq \tilde{C}h^{-2/3}.$$

ii) Soit $\tilde{C} > 0$ *fixé. Il existe* $C > 0$ *tel que pour tout z de K, vérifiant* $\operatorname{Im} z > h^{2/3}/C$, *nous avons*

$$\|(P-z)^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}}\mathcal{O}(1)e^{C\frac{(\operatorname{Im} z)^{3/2}}{h}}.$$

Nous considérons la perturbation aléatoire Q_ω définie sur l'espace de probabilité $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$$Q_\omega u = \sum_{j,k} a_{j,k}(\omega)\langle u, e_j\rangle e_k, \tag{1.3.29}$$

où e_k est la base orthonormée usuelle de $L^2(S^1)$, $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$ et les variables aléatoires $a_{j,k}$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, \sigma_{j,k})$. De plus, on demande que $\sigma_{j,k} = \sigma_j \sigma_k$, et qu'il existe $\rho > 1$ et $\tilde{C} > 0$ tels que

$$\frac{1}{\tilde{C}}\langle j\rangle^{-\rho} \leq \sigma_j^2 \leq \tilde{C}\langle j\rangle^{-\rho}.$$

Sous les hypothèses ci-dessus, nous avons la probabilité que Q_ω soit large pour la norme Hilbert-Schmidt :

$$\mathbb{P}(\|Q\|_{\mathrm{HS}} \geq \ln h^{-1}) \leq C \exp(-(\ln h^{-1})^2/C).$$

Puisque $(P - z)^{-1} < h^{-2/3}$, $\operatorname{Im} z < h^{2/3}/\widetilde{C}$, alors si $\operatorname{Im} z < h^{2/3}$, et $\delta < h^{2/3+\sigma}$, avec probabilité $\geq 1 - C\exp(-(\ln h^{-1})^2/C$, nous avons

$$\begin{aligned}(P - \delta Q_\omega - z)^{-1} &= (Id - \delta Q_\omega (P - z)^{-1})^{-1}(P - z)^{-1} \\ &= \mathcal{O}(h^{-2/3})\end{aligned}$$

Il suffira alors de considérer pour notre étude le cas où $h^{2/3} < \operatorname{Im} z < 1$. Nous allons donc restreindre le paramètre z à un domaine Γ_α, dépendant de h inclus dans la bande $\{h^{2/3} < \operatorname{Im} z < 1\}$: z_0 est fixé, α est un paramètre compris entre $h^{2/3}$ et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Im} g(x)dx$

$$\Gamma_\alpha = \{z = x + iy, \quad |x - x_0| \leq C,\, c_1 \leq \frac{|y|}{\alpha} \leq c_2\},$$

où $C > 0$ et $1 > c_{1,2} > 0$ sont des constantes indépendantes de α.

Théorème 1.3.14 *Soit $\gamma > 0$ fixé. Soit δ minoré par une puissance de h et vérifiant la condition*

$$\delta \ll \frac{\sqrt{h}\,\alpha^{1/4} h^{2\rho}}{(\ln h^{-1})^3}, \tag{1.3.30}$$

Soit z_0 dans Γ_α, donc $\operatorname{Im} z_0 \simeq \alpha$. Il existe $\hat{C} > 0$ tel que si on se donne des constantes positives $\tilde{C} < C$, alors il existe $C', M > 0$ tels que, avec une

probabilité $\geq 1 - \frac{\hat{C}}{r}h^{2\gamma}$, *avec* $r = (\sqrt{\alpha}\, h \ln h^{-1})^{1/2}$, *nous avons pour tout* z *dans* $D(z_0, \tilde{C}r)$

$$|(P - \delta Q_\omega - z)^{-1}| \leq \frac{1}{\sqrt{h}\,\alpha^{1/4}h^M} \prod_{1\leq j\leq N(\omega)} \frac{1}{|z - w_j(\omega)|},$$

w_j *sont les valeurs propres de* $(P - \delta Q_\omega - z)^{-1}$ *dans* $D(z_0, Cr)$. $N(\omega)$ *vérifie* $\leq C' \ln h^{-1}$.

On espère qu'un tel résultat peut se maintenir pour des opérateurs plus généraux. Au passage, la démonstration de ce théorème, nous a permis d'avoir le résultat suivant qui améliore légèrement un théorème d'Hager, Sjöstrand (théorème 12.3 [16]) :

Théorème 1.3.15 *Soit* $\gamma > 0$ *fixé. Soit* Γ_α *comme au-dessus. Si* δ *est minoré par une puissance de* h *et vérifie la condition (1.3.30), alors il existe* $C, \tilde{C} > 0$ *tels que le nombre* $N(P_\delta, \Gamma_\alpha)$ *de valeurs propres de* P_δ *dans* Γ_α *vérifie pour tout* $0 < r \ll \alpha$

$$|N(P_\delta, \Gamma_\alpha) - \frac{1}{2\pi h}\mathrm{vol}\,(p^{-1}(\Gamma_\alpha))| \leq \frac{C}{h}(\frac{r}{\alpha^{1/2}} + \frac{\tilde{\epsilon}}{r}) \tag{1.3.31}$$

où $\tilde{\epsilon} = C_\rho h \ln(h\delta)^{-1}$, *avec probabilité*

$$\geq 1 - \frac{\tilde{C}}{r}h^{2\gamma}.$$

Le choix du paramètre r optimal dans (1.3.31), c'est à dire lorsque $r \mapsto \frac{r}{\alpha^{1/2}} + \frac{\tilde{\epsilon}}{r}$ est minimal, est $r = \tilde{\epsilon}^{1/2}\alpha^{1/4}$; ce qui entraîne que (1.3.31) devient $\leq \frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}}}{\alpha^{1/4}h}$. De plus, puisque $\mathrm{vol}\,(p^{-1}(\Gamma_\alpha)) \asymp \mathrm{cst}\,\alpha^{1/2}$, le théorème 1.3.15 n'est intéressant que si $\sqrt{\tilde{\epsilon}}/\alpha^{1/4} \ll \mathrm{vol}\,(p^{-1}(\Gamma_\alpha)) = C\alpha^{1/2}$, c'est-à-dire si $\tilde{\epsilon}^{2/3} \ll \alpha$, ou encore en remplaçant $\tilde{\epsilon}$ par son expression, si

$$(\ln \frac{1}{\delta h})^{\frac{2}{3}}\, h^{\frac{2}{3}} \ll \alpha. \tag{1.3.32}$$

Calculs numériques. Finalement dans un dernier chapitre, nous avons illustré nos résultats par des calculs numériques. Nous verrons, pour les exemples traités, que nous obtenons une bonne coïncidence avec les résultats théoriques ; il est surprenant de voir que l'asymptotique de Weyl est vérifiée numériquement dans des régions où les erreurs numériques dominent. De plus, nous donnons les codes Matlab, qui nous ont permis d'avoir les figures 1.1 et 1.4.

Chapitre 2

Asymptotique spectrale presque sûre d'un opérateur différentiel non autoadjoint

2.1 Introduction

Considérons l'opérateur non-autoadjoint dans $L^2(S^1)$

$$P = f(x)D_x + g(x),\ D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x},\ \mathcal{D}(P) = H^1(S^1),$$

avec $f : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $g : S^1 \to \mathbb{C}$ deux fonctions C^∞. On imposera en outre

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{f(x)} dx \neq 0.$$

Hypothèse 2.1.1 *On se place dans l'un des deux cas suivants :*
1er cas : f prend ses valeurs dans un secteur d'angle d'ouverture inférieur à π et différent de 0. On suppose aussi que $\arg f$ *admet seulement deux points critiques $a, b \in S^1$:*

$$\arg f(a) \leq \arg f(x) \leq \arg f(b),\ \forall x \in S^1.$$

2eme cas : $\arg f$ *est strictement croissante, avec* $\arg f(x+2\pi) = \arg f(x)+2\pi$.

Introduisons le symbole $p(x,\xi) = f(x)\xi, (x,\xi) \in T^*(S^1)$ et les ensembles

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{f(x)\xi;\ x \in S^1,\ \xi \in \mathbb{R}\}, \\ \Lambda &= \{z \in \Sigma \setminus \{0\};\ \text{si } z = f(x)\xi \text{ alors } \frac{d}{dx}\arg f(x) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Le spectre de P, noté de $\sigma(P)$, est l'ensemble des points où la résolvante n'existe pas. $\sigma(P)$ est discret et les grandes valeurs propres appartiennent à Λ. En adoptant la convention que $\|(P-\lambda)^{-1}\| = \infty$ si λ est dans le spectre, nous avons le résultat suivant qui sera démontré plus loin.

Proposition 2.1.2 *Soit $z \in \Lambda$ et $\lambda > 0$ alors $\|(P \pm \lambda z)^{-1}\|$ tend vers l'infini plus vite que n'importe quelle puissance de λ quand $\lambda \to +\infty$.*

Proposition 2.1.3 *Σ' un voisinage conique de Σ, alors il existe $C > 0$ si $z \notin \Sigma' \cup D(0, C)$*

$$z \notin \sigma(P), \quad \|(P-z)^{-1}\| \leq \frac{C}{|z|}.$$

Cela se démontre facilement en regardant $P - z$ comme un opérateur elliptique à grand paramètre.

Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On définit ensuite sur cet espace une application

$$\mathcal{M} \ni \omega \mapsto Q_\omega,$$

où Q_ω est un opérateur de $L^2(S^1)$ dans lui-même, de domaine dense. Choisissons pour $u \in L^2(S^1)$

$$Q_\omega(u) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} a_{j,k}(\omega) \langle u, e_k \rangle \, e_j,$$

où e_k est la base orthonormée de $L^2(S^1)$ donnée par $e_k(x) = e^{ikx}$, et $a_{j,k}$ des variables aléatoires complexes. Adoptons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 2.1.4 *Les $a_{j,k}$ sont des variables aléatoires complexes indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, \sigma_{j,k}^2)$.*

Hypothèse 2.1.5 *$\sigma_{j,k} = \sigma_j \sigma_k$ et il existe $\rho > 1$ et $\tilde{C} > 0$ tels que*

$$\frac{1}{\tilde{C}} \langle j \rangle^{-\rho} \leq \sigma_j^2 \leq \tilde{C} \langle j \rangle^{-\rho}.$$

Nous nous intéressons au spectre de l'opérateur $P + Q_\omega$. Celui-ci est presque sûrement discret, cela résultera d'une estimation probabiliste et de la théorie de Fredholm.

Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi$, $g, h \in C^1([\theta_1, \theta_2], [0, +\infty[)$ vérifiant $h < g$. Introduisons l'ensemble

$$\Gamma_{\theta_1,\theta_2}(h, g) = \{re^{i\theta}, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad h(\theta) \leq r \leq g(\theta)\}.$$

Dans le cas 1, on imposera $\arg f(a) < \theta_1$ et $\theta_2 < \arg f(b)$. Pour θ_1, θ_2 fixés, on écrira parfois $\Gamma(h, g)$ à la place $\Gamma_{\theta_1,\theta_2}(h, g)$.

Maintenant, voyons la distribution des valeurs propres de $P + Q_\omega$ dans les dilatés d'un profil conique de la forme $\Gamma(0, g) \subset \Lambda$, avec $g > 0$.

Notre résultat principal est le

Théorème 2.1.6 *Il existe $C_1 > 0$, $\frac{1}{4} > \delta > 0$ tels que $\forall \epsilon > 0$, il existe $M_\epsilon \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(M_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$ et $\forall \omega \in M_\epsilon$ on ait*

$$\forall \lambda \geq 0$$
$$\left| \#(\sigma(P + Q_\omega) \cap \lambda\Gamma(0, g)) - \frac{1}{2\pi} \mathrm{vol}\, p^{-1}(\lambda\Gamma(0, g)) \right| \leq C(\epsilon, \omega) + C_1 \lambda^{1-\delta},$$

les valeurs propres étant comptées selon leur multiplicité algébrique.

En prenant $\tilde{M} = \bigcup_\epsilon M_\epsilon$, nous avons $\mathbb{P}(\tilde{M}) = 1$ et le

Corollaire 2.1.7 *Il existe $C_1 > 0$, $\frac{1}{4} > \delta > 0$ tels que presque sûrement il existe $C(\omega) > 0$ tel que*

$$\forall \lambda \geq 0$$
$$\left| \#(\sigma(P + Q_\omega) \cap \lambda\Gamma(0, g)) - \frac{1}{2\pi} \mathrm{vol}\, p^{-1}(\lambda\Gamma(0, g)) \right| \leq C(\omega) + C_1 \lambda^{1-\delta},$$

les valeurs propres étant comptées selon leur multiplicité algébrique.

M. Hager a étudié en régime semiclassique des opérateurs pseudodifférentiels perturbés. Bien que la loi de Weyl peut ne plus être vérifiée pour les opérateurs non-autoadjoints (citons par exemple l'oscillateur harmonique non-autoadjoint $(hD_x)^2 + cx^2, \mathrm{Im}\, c > 0$), elle a montré que les valeurs propres pour une large classe d'opérateurs non-autoadjoints perturbés se distribuent selon cette loi de Weyl dans le pseudospectre ([13], [14]) avec une probabilité proche de 1.

Dans notre démarche nous avons adopté beaucoup d'éléments de [13]. Le fait nouveau est que **presque sûrement** nous obtenons un contrôle de la distribution des valeurs propres pour des domaines de la forme $\Gamma(0, \lambda g)$.

2.2 Pseudospectre

On garde les hypothèses de la section 1. On note $\|.\|$ la norme L^2 sur $L^2(S^1)$ et $\langle .,. \rangle$ son produit scalaire associé donné par

$$\forall u, v \in L^2(S^1) \times L^2(S^1), \quad \langle u, v \rangle = \int_0^{2\pi} u(x)\bar{v}(x)\frac{dx}{2\pi}. \tag{2.2.1}$$

Considérons l'opérateur non-autoadjoint dans $L^2(S^1)$

$$P = f(x)D_x + g(x)\,,\; D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x},$$

avec $f : S^1 \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et $g : S^1 \to \mathbb{C}$ deux fonctions C^∞. On supposera de plus que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{f(x)}dx \neq 0. \tag{2.2.2}$$

P est défini sur l'espace de Sobolev $H^1(S^1)$. Un rapide calcul nous montre que le spectre de P est discret, et donné par

$$\sigma(P) = \left\{ n\langle\frac{1}{f}\rangle^{-1} + \langle\frac{g}{f}\rangle\langle\frac{1}{f}\rangle^{-1}; \quad n \in \mathbb{Z} \right\},$$

où l'on a posé

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)dx.$$

Le spectre est donc situé sur une droite du plan complexe. On notera que si $\langle\frac{1}{f}\rangle = 0$ alors $\sigma(P) = \emptyset$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que l'on a introduit les ensembles

$$\Sigma = \{f(x)\xi;\; x \in S^1,\; \xi \in \mathbb{R}\}, \tag{2.2.3}$$

et

$$\Lambda = \{z \in \Sigma \setminus \{0\};\; \text{si } z = f(x)\xi \text{ alors } \frac{d}{dx}\arg f(x) \neq 0\}. \tag{2.2.4}$$

Il est clair que Σ et Λ sont des cônes, respectivement fermé et ouvert. Avec nos hypothèses Λ est égal à l'intérieur de $\Sigma \setminus \{0\}$.

Remarque 2.2.1 Si une fonction $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ prend ses valeurs dans un secteur angulaire d'angle inférieur à π alors $\int_a^b g$ appartient à ce secteur. En utilisant ce fait, on montre dans le cas 1, que les valeurs propres de P de module assez grand appartiennent à Λ. La même conclusion est valable dans le cas 2 puisque $\Lambda = \mathbb{C}$.

Adoptons la convention que $\|(P-\lambda)^{-1}\| = \infty$ si λ est dans le spectre.

Proposition 2.2.2 *Soit $z \in \Lambda$ et $\lambda > 0$ alors $\|(P \pm \lambda z)^{-1}\|$ tend vers l'infini plus vite que n'importe quelle puissance de λ quand $\lambda \to +\infty$.*

Preuve. On se ramène a un problème semiclassique en divisant par λ. Pour cela posons $h = \frac{1}{\lambda}$. L'opérateur $hP = f(x)hD_x + hg(x)$ admet comme symbole principal $p(x,\xi) = f(x)\xi$. On construit ensuite des quasimodes en utilisant la condition de positivité sur les crochets de Poisson (voir [6], [9]). Nous avons

$$\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\} = -\mathrm{Im}\ (\bar{f}(x)f'(x)\xi) = -\xi\,|f(x)|^2 \frac{d}{dx}\arg f(x). \tag{2.2.5}$$

Si $z = f(x)\xi$ dont la dérivée en x de $\arg f$ ne s'annule pas alors il existe $(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \in T^*S^1 \setminus \{0\}$ tel que $z = f(\tilde{x})\tilde{\xi}$ avec $\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) > 0$. Il existe donc en ce point un quasimode. □

Nous allons restreindre le paramètre spectral z à un certain domaine :

Définition 2.2.3 *On suppose 2.1.1. Soit Ω_1 un domaine relativement compact dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:*

Pour le cas 1, on demande que Ω_1 soit inclus dans

$$\{z \in \Lambda \setminus \{0\};\ \mathrm{dist}(z,\, \partial\Lambda) \geq \frac{1}{C}\,\}.$$

Pour le cas 2, Ω_1 est inclus dans un secteur d'angle strictement inférieur à π,

On note pour $R \gg 1$, $\Omega_R = R\,\Omega_1$.

Pour $z \in \Omega_R$, nous ramenons l'étude de $P - z$ à un problème semiclassique en divisant par R. En fait, puisque f ne s'annule pas, il est préférable de diviser par $Rf(x)$. Nous sommes donc invités à étudier l'opérateur :

$$T = hD_x + h\frac{g(x)}{f(x)} - \frac{w}{f(x)},\ h = \frac{1}{R},\ w = \frac{z}{R} \in \Omega_1. \tag{2.2.6}$$

Cet opérateur est proche de celui étudié par M. Hager dans [13]. Nous savons que l'inversibilité de $P - z$ est liée à un problème de Grushin. Nous allons donc formuler le problème de Grushin de T puis nous allons voir comment le relier au problème de Grushin de $P - z$.

2.3 Problème de Grushin

Soit T l'opérateur défini en (2.2.6). T dépend d'un paramètre spectral w où $w \in \Omega_1$. Il est défini sur l'espace de Sobolev H^1 avec une norme semiclassique

$$H^1_{sc} := \{u \in L^2(S^1);\ \|u\|^2_{H^1_{sc}} := \|u\|^2 + \|hD_x u\|^2 < \infty\}. \tag{2.3.1}$$

Posons $p(x,\xi) = f(x)\xi$, et rappellons que

$$\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\} = -\xi |f(x)|^2 \frac{d}{dx}\arg\, f(x). \tag{2.3.2}$$

L'hypothèse 2.1.1 implique que dans les deux cas on ait :

$$\forall z \in \Lambda,\ p^{-1}(z) = \{\rho_+(z), \rho_-(z)\},\ \text{avec}\ \pm \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(\rho_\pm) > 0. \tag{2.3.3}$$

On écrira $\rho_\pm = (x_\pm, \xi_\pm)$. $x_\pm = x_\pm(w)$ et $\xi_\pm = \xi_\pm(w)$ sont continues sur Ω_1. L'équation $Te_+ = 0$ admet une solution en général non-périodique de la forme

$$e_+(x, w; h) = c_+(w; h) e^{-i\int_{x_+}^x \frac{g(y)}{f(y)}dy} e^{\frac{i}{h}\int_{x_+}^x \frac{w}{f(y)}dy}. \tag{2.3.4}$$

De plus la fonction

$$\varphi(x) = \int_{x_+}^x \frac{w}{f(y)}dy \tag{2.3.5}$$

vérifie (on utilise 2.3.3) :

$$\varphi(x_+) = 0,\ \varphi'(x_+) = \xi_+ \in \mathbb{R}^*\ \text{et}\ \operatorname{Im}\varphi''(x_+) > 0. \tag{2.3.6}$$

On peut ensuite trouver deux intervalles J_+, J_- ouverts, disjoints et indépendants de w tels que :

$$\overline{x_\pm(\Omega_1)} \subset J_\pm,$$

(Dans le cas 1, $J_+ \subset (b, a + 2\pi)$ et $J_- \subset (a, b)$).

Nous fixons pour la suite $I_\pm = S^1 \setminus \overline{J_\mp}$. On notera que $x_+(w) \in I_+$, $x_-(w) \notin \overline{I_+}$.

Lemme 2.3.1 *Soit φ définie en (2.3.5).* $\operatorname{Im}\varphi(x)$ *est strictement croissant sur* $[x_+(w), x_-(w) + 2\pi]$ *et strictement décroissant sur* $[x_-(w), x_+(w)]$. *En outre* $\operatorname{Im}\varphi(x)$ *est positif sur* $[x_-(w), x_+(w)[\cup]x_+(w), x_-(w) + 2\pi]$.

Preuve. En utilisant (2.3.6), $\mathrm{Im}\varphi(x)$ croît localement de manière quadratique lorsque l'on s'éloigne de x_+. Raisonnons par l'absurde, supposons que $\mathrm{Im}\varphi(x)$ admet un point critique y autre que x_+ et x_-, c'est-à-dire $\mathrm{Im}\frac{w}{f(y)} = 0$. Il existe alors $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $f(y)\xi = w$, soit $(y,\, \xi) = p^{-1}(w)$. On utilise ensuite

$$p^{-1}(w) = \{(x_+, \xi_+),\, (x_-, \xi_-)\},$$

pour montrer une contradiction. Ce qui termine la preuve. □

On peut trouver $c_+ > 0$ (par la méthode de la phase stationnaire) tel que

$$\begin{aligned} &c_+(w;h) \sim h^{-\frac{1}{4}}(c_0(w) + hc_1(w) + \ldots),\ h \to 0,\ c_0 > 0, \\ &\|u\|_{L^2(I_+)} = 1. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Définition 2.3.2 *On appelle $e_+ \in H^1_{sc}(I_+)$ la solution normalisée (2.3.4) dans $L^2(I_+)$ vérifiant $Te_+ = 0$ sur I_+.*

e_+ vérifie donc (2.3.4), (2.3.6) et (2.3.7).

Sur I_-, nous avons $x_-(w) \in I_-$ et $x_+(w) \notin \overline{I_-}$. On a le même type de construction pour T^*.

Définition 2.3.3 *On appelle $e_- \in H^1_{sc}(I_-)$ la solution normalisée dans $L^2(I_-)$ qui vérifie $T^*e_- = 0$ sur I_-.*

e_- est de la forme :

$$e_- = c_-(w;h)e^{-\frac{i}{h}\int_{x_-}^{x} \overline{(\frac{hg(y)-w}{f(y)})}\, dy},$$

c_- verifiant la même estimation (2.3.7) que c_+.

Les constructions détaillées de e_+ et e_- se trouvent dans la thèse [15] (lemme 1.1.2 et 1.1.3).

Nous allons passer à un problème de Grushin. Définissons $\chi_\pm \in C_0^\infty(I_\pm;\mathbb{R})$ avec $\chi_\pm = 1$ sur $\overline{J_\pm}$, tels que $\mathrm{supp}(\chi_+) \cap \mathrm{supp}(\chi_-) = \emptyset$.

On définit pour $u \in H^1_{sc}(S^1)$,

$$R_+u := \langle u, \chi_+e_+\rangle = \int_{I_+} u(x)\chi_+(x)\overline{e_+}(x)\frac{dx}{2\pi}, \tag{2.3.8}$$

pour $v_+ \in \mathbb{C}$,

$$F_+v_+ := \frac{1}{\langle e_+, \chi_+e_+\rangle}v_+e_+, \tag{2.3.9}$$

pour $u_- \in \mathbb{C}$,

$$R_- u_- := u_- \chi_- e_-. \tag{2.3.10}$$

Pour $v \in L^2_{comp}(I_-)$, nous posons :

$$G_- v := \frac{1}{\langle \chi_- e_-, e_- \rangle} \langle v, e_- \rangle. \tag{2.3.11}$$

Proposition 2.3.4

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} T & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H^1_{sc} \times \mathbb{C} \to L^2 \times \mathbb{C},$$

est uniformément borné quand $h \to 0, w \in \Omega_1$, et inversible d'inverse :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H & H_+ \\ H_- & H_{-+} \end{pmatrix} : L^2 \times \mathbb{C} \to H^1_{sc} \times \mathbb{C}.$$

Il existe une constante C telle que :

$$\begin{aligned} &\|H\|_{L^2 \to H^1_{sc}} = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h}}), \\ &\|H_+\|_{\mathbb{C} \to H^1_{sc}} = \mathcal{O}(1), \\ &\|H_-\|_{L^2 \to \mathbb{C}} = \mathcal{O}(1), \\ &\|H_{-+}\| = \mathcal{O}(e^{-\frac{1}{Ch}}). \end{aligned}$$

De façon plus précise, il existe K_+, K_- et $\psi_- \in C^\infty_0(I_-; \mathbb{R})$ tels que :

$$\begin{aligned} &H_+ = (1 - \chi_-) F_+ + K_+, \quad \|K_+\|_{\mathbb{C} \to H^1_{sc}} = \mathcal{O}(e^{-\frac{1}{Ch}}), \\ &H_- = G_- \psi_- + K_-, \quad \|K_-\|_{L^2 \to \mathbb{C}} = \mathcal{O}(e^{-\frac{1}{Ch}}). \end{aligned}$$

De plus H^*_- et H_+ ont une structure similaire impliquant $\|H^*_-\| \asymp \|H_+\|$.

Preuve. Il faut suivre la section 1.2 "énoncé et résolution du problème de Grushin" de [15] et l'appliquer à notre opérateur. Le rôle que joue $-\frac{i}{h}\int g(y) - z$ dans l'article [15] est remplacé ici par $\frac{i}{h}\int \frac{w}{f(y)}$, notre terme en plus $-i\int \frac{g(y)}{f(y)}$ ne joue aucun rôle dans les estimations puisque indépendant de h et borné. □

Remarque 2.3.5 Nous pouvons donner l'expression exacte de H_{-+} comme dans [13] :

$$H_{-+} = \frac{hc_+\bar{c}_-}{iD_-D_+}\left(e^{\frac{i}{h}\int_{x_-}^{x_+}\frac{hg(y)-w}{f(y)}dy} - e^{-\frac{i}{h}\int_{x_+}^{x_-+2\pi}\frac{hg(y)-w}{f(y)}dy}\right), \tag{2.3.12}$$

avec

$$D_+ = \langle e_+, \chi_+ e_+\rangle, \quad D_- = \langle \chi_- e_-, e_-\rangle.$$

Pour $z \in \Omega_R$, nous voyons $P - z$ comme un opérateur envoyant $H^1_{sc}(S^1)$ sur L^2. La norme de cet espace est définie en (2.3.1) et dépend donc du paramètre spectral.

Remarque 2.3.6 Pour la suite, à chaque nouvelle apparition, C désigne une nouvelle constante.

Proposition 2.3.7

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P - z & f \circ R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H^1_{sc} \times \mathbb{C} \to L^2 \times \mathbb{C},$$

est inversible d'inverse :

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix} : L^2 \times \mathbb{C} \to H^1_{sc} \times \mathbb{C}.$$

Il existe une constante C telle que :

$$\begin{aligned}
&E = H \circ \frac{1}{Rf}, \quad \|E\|_{L^2 \to H^1_{sc}} = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{R}}),\\
&E_+ = H_+, \quad \|E_+\|_{\mathbb{C} \to H^1_{sc}} = \mathcal{O}(1),\\
&E_- = H_- \circ \frac{1}{f}, \quad \|E_-\|_{L^2 \to \mathbb{C}} = \mathcal{O}(1),\\
&E_{-+} = R\, H_{-+}, \quad \|E_{-+}\| = \mathcal{O}(e^{-\frac{R}{C}}).
\end{aligned}$$

Plus particulièrement, il existe S_+ et S_- tels que :

$$\begin{aligned}
&E_+ = (1 - \chi_-)F_+ + S_+, \quad \|S_+\|_{\mathbb{C} \to H^1_{sc}} = \mathcal{O}(e^{-\frac{R}{C}}),\\
&E_- = G_- \circ \frac{\psi_-}{f} + S_-, \quad \|S_-\|_{L^2 \to \mathbb{C}} = \mathcal{O}(e^{-\frac{R}{C}}).
\end{aligned}$$

Preuve. Rappelons que $h = \frac{1}{R}$. On remarque que $P - z = Rf \circ T$ (on voit f comme un opérateur de multiplication). Nous avons alors

$$\begin{pmatrix} Rf & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{T} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix} = \mathcal{P},$$

ce qui donne (on utilise la proposition 2.3.4) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \mathcal{T}^{-1} \begin{pmatrix} (Rf)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & H_+ \\ H_- & H_{-+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (Rf)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H & H_+ \\ RH_- & RH_{-+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (Rf)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H \circ (Rf)^{-1} & H_+ \\ H_- \circ f^{-1} & RH_{-+} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

concluant ainsi la preuve. □

2.4 Rappels de notions probabilistes

Nous nous sommes inspirés de [2], [27]. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Un vecteur aléatoire X est une application mesurable de cet espace dans $\mathbb{R}^n$ (muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}^n$) :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^n.$$

On parlera de variable aléatoire réelle lorsque X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Il est possible de considérer une variable aléatoire complexe en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$. La loi de X se définit comme la mesure image $\mathbb{P}_X$ de $\mathbb{P}$ par X, c'est à dire qu'on a :

$$\forall B \in \mathcal{B}^n \quad \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B).$$

Si $\mathbb{P}_X$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, $\mathbb{P}_X = f(x)\mathcal{L}(dx)$, f est appelée la densité de distribution de X.

Soit X une variable aléatoire réelle. Si $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, la quantité $\int_\Omega X d\mathbb{P}$ est appelée l'espérance mathématique de X, et est notée $\mathbb{E}[X]$. Pour une variable à densité f

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \mathcal{L}(dx).$$

On vérifie facilement pour a, $b \in \mathbb{R}$, et $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\,\mathbb{E}[X] + b.$$

Si $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, nous définissons la variance de X par

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}X|^2]. \tag{2.4.1}$$

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X).$$

Soit X un vecteur aléatoire de densité f. Alors pour toute fonction mesurable positive $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, nous avons :

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) dx.$$

Définition 2.4.1 *Soient n variables aléatoires réelles X_k . On dit que les X_k sont indépendantes si :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in B_k)$$

pour toute famille de $(B_1, \ldots, B_n)$ de boréliens de $\mathbb{R}$.

Pour une suite infinie $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, on dira que les X_i sont indépendantes si pour toute suite finie extraite $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$, alors les X_{i_k} sont indépendantes. On a la propriété suivante, si X_1 et X_2 sont indépendantes alors $\mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]$.

Proposition 2.4.2 *Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes. Si chaque X_i admet une densité f_i, alors le vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_n)$ possède une densité f donnée par $\prod f_i(x_i)$. Réciproquement, si X admet une densité f pour laquelle on peut trouver f_i telle que $f(x) = \prod f_i(x_i)$ et $\int_R f_i(x) dx = 1$ alors les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes de densité respective f_i.*

Proposition 2.4.3 *Soit X une variable aléatoire réelle et f une fonction croissante et positive. Si $\mathbb{E}[f(X)]$ est finie, alors on a*

$$\mathbb{P}(|X| \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(x)}.$$

2.5 Variables aléatoires gaussiennes

Définition 2.5.1 *On dira que X est une variable gaussienne standard si sa loi admet la densité*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La variable Y est une variable gaussienne réelle s'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$Y = \sigma X + m.$$

On notera $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, où m et σ^2 représentent respectivement la moyenne et la variance de Y. Similairement, on dira que Z est une variable aléatoire gaussienne complexe, si sa loi admet la densité

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{|z-m|^2}{\sigma^2}}$$

pour un $m \in \mathbb{C}$ et un $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$ fixés, on notera aussi $Z \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Proposition 2.5.2 *Soient $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m', \delta^2)$ deux variables indépendantes réelles ou complexes, alors $X + Y$ suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(m + m', \sigma^2 + \delta^2)$.*

Définition 2.5.3 *Soient $p > 0, \lambda > 0$. Une variable X suit une loi $\Gamma(p, \lambda)$ si sa densité sur $\mathbb{R}$ est :*

$$1_{[0,+\infty)}(x)\, x^{(p-1)} \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x}.$$

Propriétés.

1. Si $X \sim \Gamma(p, \lambda)$, on a alors $\mathbb{E}[X] = \frac{p}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{p}{\lambda^2}$, et de plus :

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^p \text{ pour } t < \lambda.$$

2. Pour $X \sim \Gamma(p, \lambda)$ et $a > 0$, on a $aX \sim \Gamma(p, \frac{\lambda}{a})$.
3. Soient $X \sim \Gamma(p, \lambda)$ et $Y \sim \Gamma(q, \lambda)$ deux variables indépendantes, alors $X + Y \sim \Gamma(p + q, \lambda)$.
4. Si $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors $Y^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dans le cas réel, et $|Y|^2 \sim \Gamma(1, 1)$ dans le cas complexe.

Proposition 2.5.4 *Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables réelles (respectivement complexes) indépendantes, de lois respectives $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$. Si $\sum \sigma_i^2 < \infty$, alors on a, dans le cas réel,*

$$\forall x > 0, \quad \mathbb{P}(\sum_{i\in\mathbb{N}} X_i^2 \geq x) \leq \exp[\frac{C_0}{4s_1} \sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma_i^2 - \frac{x}{4s_1}],$$

et dans le cas complexe,

$$\forall x > 0, \quad \mathbb{P}(\sum_{i\in\mathbb{N}} |X_i|^2 \geq x) \leq \exp[\frac{C_0}{2s_1} \sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma_i^2 - \frac{x}{2s_1}].$$

Ici $s_1 = \max \sigma_i^2$, et C_0 est la même constante dans les deux cas.

Preuve.

Cas réel. Partant de la proposition 2.4.3, nous avons

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(\sum X_i^2 \geq x) = \mathbb{E}\left[\prod e^{tX_i^2}\right] e^{-tx}.$$

Puisque les X_i sont indépendantes, on peut permuter l'espérance et le produit. Remarquons ensuite que $X_i^2 = (\sigma_i Y_i)^2 = \sigma_i^2 Y_i^2$ où Y_i suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Il est facile de voir, en utilisant les propriétés 2 et 4 que $X_i^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma_i^2})$. Ainsi (voir propriété 1) chaque facteur $\mathbb{E}[e^{tX_i^2}]$ est défini pour $t < \frac{1}{2\sigma_i^2}$, si bien que nous avons pour tout $0 < t < \min \frac{1}{2\sigma_i^2}$

$$\mathbb{P}(\sum X_i^2 \geq x) \leq \prod \mathbb{E}[e^{tX_i^2}] \, e^{-tx} = \prod \left(\frac{1}{1 - 2\sigma_i^2 t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-tx}. \tag{2.5.1}$$

Puisque

$$\prod \left(\frac{1}{1 - 2\sigma_i^2 t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-tx} = \exp[-\frac{1}{2} \sum \ln(1 - 2\sigma_i^2 t) - xt],$$

(2.5.1) devient

$$\mathbb{P}(\sum X_i^2 \geq x) \leq \min_{0<s<1} \exp[-\frac{1}{2}\sum \ln(1-\frac{\sigma_i^2}{s_1}s) - \frac{x}{2s_1}s].$$

Plutôt que de chercher le s optimal, on prend $s = \frac{1}{2}$. Pour $0 < y < \frac{1}{2}$, il existe une constante C_0 telle que $-\ln(1-y) \leq C_0\, y$, ce qui donne

$$\mathbb{P}(\sum_{i\in\mathbb{N}} X_i^2 \geq x) \leq \exp[\frac{C_0}{4s_1}\sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma_i^2 - \frac{1}{4s_1}x].$$

Cas complexe. On procède comme ci-dessus, en remarquant que si X_i suit une loi $\mathcal{N}(0,\sigma_i^2)$, alors $|X_i|^2 \sim \Gamma(1, \frac{1}{\sigma_i^2})$. □

Remarque 2.5.5 Une preuve analogue se trouve dans [16], les auteurs utilisent la transformée de Fourier des variables aléatoires.

2.6 Perturbations aléatoires

Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On définit une application

$$\mathcal{M} \ni \omega \mapsto Q_\omega,$$

où Q_ω est un opérateur de $L^2(S^1)$ dans lui-même, de domaine dense, vérifiant pour $u \in L^2(S^1)$

$$Q_\omega(u) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^2} a_{j,k}(\omega)\langle u, e_k\rangle\, e_j,$$

où e_k est la base orthonormée de $L^2(S^1)$ donnée par $e_k(x) = e^{ikx}$, et $a_{j,k}$ des variables aléatoires complexes (le produit scalaire étant défini en (2.2.1)). Remarquons que la norme Hilbert Schmidt de Q_ω vérifie

$$\|Q_\omega\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |a_{j,k}(\omega)|^2$$

(si la série est finie). Rappelons les hypothèses 2.1.4 et 2.1.5

Nous nous intéressons au spectre de l'opérateur $P + Q_\omega$. Soit

$$\mathcal{P}^\omega = \begin{pmatrix} P - z + Q_\omega & f \circ R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad z \in \Omega_R.$$

Nous écrivons $\mathcal{P}^\omega\mathcal{E} = 1 + K^\omega$,

$$K^\omega = \begin{pmatrix} Q_\omega E & Q_\omega E_+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si la norme de K^ω est inférieure à 1 alors $\mathcal{P}^\omega$ est inversible et son inverse $\mathcal{E}^\omega$ est donné par la série de Neumann

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\omega &= \begin{pmatrix} E^\omega & E^\omega_+ \\ E^\omega_- & E^\omega_{-+} \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{E} + \sum_{j\geq 1}(-1)^j \begin{pmatrix} E(Q_\omega E)^j & (EQ_\omega)^j E_+ \\ E_-(Q_\omega E)^j & E_-(Q_\omega E)^{j-1}(Q_\omega E_+) \end{pmatrix}. \quad (2.6.1) \end{aligned}$$

Introduisons les notations

$$E^1_{-+} = -E_- Q_\omega E_+ \quad (2.6.2)$$

$$E^\infty_{-+} = \sum_{j\geq 2}(-1)^j E_- \left(Q_\omega E\right)^{j-1} Q_\omega E_+ \quad (2.6.3)$$

$$E^\omega_{-+} = E_{-+} + E^1_{-+} + E^\infty_{-+}. \quad (2.6.4)$$

Proposition 2.6.1 *Si $\|Q_\omega\| \leq \ln R$ alors pour R très grand, $\mathcal{E}^\omega$ est inversible.*

Preuve. Notons que cette hypothèse n'implique pas $\|K^\omega\| < 1$. De (2.6.1), la série de Neumann de E^ω est donnée par

$$E + \sum_{j\geq 1}(-1)^j E(Q_\omega E)^j.$$

Puisque $\|E\| = \mathcal{O}(1/\sqrt{R})$ (proposition 2.3.7), et puisque le logarithme est négligeable devant les puissances d'exposant > 0 en $+\infty$, la série va converger. Il en est de même pour les séries de Neumann de E^ω_+, E^ω_- et E^ω_{-+}. Ainsi $\mathcal{E}^\omega$ est inversible. □

Proposition 2.6.2 *Si $\|Q_\omega\| \leq \ln R$ alors*

$$\mathcal{E}^\omega - \mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{R}}) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(\ln R) \end{pmatrix}.$$

Afin d'éviter les questions de mesurabilité, nous introduisons la probabilité inférieure de $M \subset \Omega$

$$\underline{\mathbb{P}}(M) = \sup_{A \in \mathcal{A},\, A \subset M} \mathbb{P}(A),$$

et la probabilité supérieure de $M \subset \Omega$

$$\overline{\mathbb{P}}(M) = \inf_{A \in \mathcal{A},\, M \subset A} \mathbb{P}(A).$$

Propriétés.

1. $\forall M \subset \Omega,\ \ \underline{\mathbb{P}}(M) \leq \overline{\mathbb{P}}(M)$
2. $A \subset B \Rightarrow \underline{\mathbb{P}}(A) \leq \underline{\mathbb{P}}(B),\ \ \overline{\mathbb{P}}(A) \leq \overline{\mathbb{P}}(B)$
3. $\forall M \subset \Omega,\ \forall a \in [0,1]$ on a $1 - a \leq \underline{\mathbb{P}}(M) \iff \overline{\mathbb{P}}(M^c) \leq a$

Pour simplifier les notations, nous noterons $\mathbb{P}_R(A) := \underline{\mathbb{P}}(A \cap \{\|Q\| \leq \ln R\})$.

Proposition 2.6.3 *Il existe $M_0 > 0$ et $M_1 > 0$ tels que :*

$$\underline{\mathbb{P}}(\|Q\| \leq \ln R) \geq \mathbb{P}(\|Q\|_{\mathrm{HS}} \leq \ln R) \geq 1 - M_0 \exp[-\frac{(\ln R)^2}{M_1}],$$

où $\|.\|_{\mathrm{HS}}$ désigne la norme Hilbert-Schmidt.

Il en résulte que Q est Hilbert-Schmidt presque sûrement.

Preuve. En utilisant la proposition 2.5.4, on a

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{P}}(\|Q\| > \ln R) &\leq \mathbb{P}(\|Q\|_{\mathrm{HS}}^2 > (\ln R)^2) \\ &\leq \exp[\frac{C_0}{2s_1} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \sigma_{j,k}^2 - \frac{(\ln R)^2}{2s_1}], \end{aligned}$$

avec $s_1 = \max \sigma_{j,k}$. C'est à dire qu'il existe $M_0 > 0$ et $M_1 > 0$ tels que :

$$\underline{\mathbb{P}}(\|Q\| > \ln R) \leq M_0 \exp[-\frac{(\ln R)^2}{M_1}],$$

ce qu'il fallait démontrer. □

D'après la proposition 2.3.7 et (2.3.9) on a :

$$QE_+ = Q\frac{(1-\chi_-)}{\langle e_+, \chi_+ e_+ \rangle} e_+ + QS_+, \quad \|S_+\|_{\mathbb{C} \to H^1_{sc}} = (e^{-\frac{R}{C}}). \tag{2.6.5}$$

Posons alors

$$\tilde{e}_+ := \frac{(1-\chi_-)}{\langle e_+, \chi_+ e_+\rangle} e_+. \tag{2.6.6}$$

D'après (1.2.15) de [15], il existe $C > 0$ tel que $\langle e_+, \chi_+ e_+\rangle = 1 + \mathcal{O}(e^{-\frac{R}{C}})$. Pour les mêmes raisons nous avons $\|(1-\chi_-)e_+\| = 1 + \mathcal{O}(e^{-\frac{R}{C}})$, si bien que

$$\|\tilde{e}_+\| = 1 + \mathcal{O}(e^{-\frac{R}{C}}). \tag{2.6.7}$$

Grâce à la proposition 2.3.7 et (2.3.11)

$$E_- Q = \langle Q\,\bullet, \frac{\psi_-}{\bar{f}\langle \chi_- e_-, e_-\rangle} e_-\rangle + S_- Q, \quad \|S_-\|_{L^2\to\mathbb{C}} = (e^{-\frac{R}{C}}). \tag{2.6.8}$$

On pose alors

$$\tilde{e}_- := \frac{\psi_-}{\bar{f}\langle \chi_- e_-, e_-\rangle} e_-, \tag{2.6.9}$$

et pour les raisons évoquées plus haut il existe $P_1, P_2 > 0$ tels que

$$\frac{1}{P_1} < \|\tilde{e}_-\| < \frac{1}{P_2}.$$

Lemme 2.6.4 *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $z \in \Omega_R$:*

i. si $|k| \leq \frac{R}{C}$ on a $|\langle \tilde{e}_+, e_k\rangle|$, $|\langle \tilde{e}_-, e_k\rangle| = \mathcal{O}(\frac{1}{R^\infty})$,

ii. si $\frac{R}{C} < |k| < CR$ on a $|\langle \tilde{e}_+, e_k\rangle|$, $|\langle \tilde{e}_-, e_k\rangle| = \mathcal{O}(1)$,

iii. si $|k| \geq CR$ on a $|\langle \tilde{e}_+, e_k\rangle|$, $|\langle \tilde{e}_-, e_k\rangle| = \mathcal{O}(\frac{1}{|k|^\infty})$.

Preuve. Pour ii. l'inégalité de Cauchy-Schwartz suffit. Traitons $\langle \tilde{e}_+, e_k\rangle$. Nous utilisons (2.3.2) et (2.6.6) pour montrer que $\langle \tilde{e}_+, e_k\rangle$ est une intégrale de la forme

$$\int_0^{2\pi} e^{i(z\int_{x_+}^x \frac{1}{f(y)}dy - kx)} c_+ \chi(x) dx,$$

avec $\chi \in C_0^\infty(S^1)$ et $c_+ = \mathcal{O}(R^{\frac{1}{4}})$. Ecrivons

$$\varphi(x) = z\int_{x_+}^x \frac{1}{f(y)}dy - kx.$$

Sa dérivée est égale à $\frac{z}{f} - k$ et il existe $C > 0$ pour lequel elle vérifie

$$\forall z \in \Omega_R,\ \forall |k| \notin [\,\frac{R}{C\sup|f(x)|}, \frac{CR}{\inf|f(x)|}\,], \quad |\varphi'(x)| \geq \frac{1}{C}\max(|k|, R). \tag{2.6.10}$$

Introduisons

$$a_n = \left(-\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{\varphi'} \right)^n (\chi).$$

Puisque pour $j > 1$, $|\varphi^j(x)| \leq C_j \max(|k|, R)$, il en résulte que

$$a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\max(|k|, R))^n} \right).$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que des intégrations successives donnent

$$\langle \tilde{e}_+, e_k \rangle = \frac{c_+}{i} \int e^{i\varphi(x)} a_n(x) dx,$$

puis de majorer la valeur absolue de l'intégrale, sans oublier de remarquer que du lemme 2.3.1 $\sup_{x \in S^1} |e^{i\varphi(x)}| = 1$. □

Lemme 2.6.5 *Il existe des constantes strictement positives M_0, M_1, D, C et T_0, des fonctions $\varepsilon_1(R) > 0$ et $s_1(R) > 0$ avec :*

$$\varepsilon_1(R) = \mathcal{O}(e^{-\frac{R}{D}}), \text{ et } \frac{1}{C}\langle R \rangle^{-\rho} \leq s_1(R) \leq C\langle R \rangle^{-\rho},$$

telles que pour $x_1 > 0$, nous avons pour $z \in \Omega_R$ fixé

$$\mathbb{P}_R(\|QE_+\| \leq x_1) \geq 1 - T_0 \exp\left[-\frac{(x_1 - \varepsilon_1(R))_+^2}{2s_1(R)} \right] - M_0 \exp\left[-\frac{(\ln R)^2}{M_1} \right].$$

On a posé pour $x \in \mathbb{R}$, $x_+ = \max\{0, x\}$.

Remarque 2.6.6 Le lemme est intéressant si $x_1 \gg R^{-\frac{\rho}{2}}$.

Preuve. Grâce à (2.6.5) et (2.6.6), écrivons d'abord

$$QE_+ = Q\tilde{e}_+ + QS_+.$$

Si $\|Q\| \leq \ln R$ alors il existe $D > 0$ (on utilise la proposition 2.3.7) tel que :

$$\|QS_+\| \leq \varepsilon_1(R) = \mathcal{O}(e^{-\frac{R}{D}}). \tag{2.6.11}$$

$\varepsilon_1(R)$ ici ne dépend pas de ω. Nous avons ensuite :

$$\|Q\tilde{e}_+\|^2 = \| \sum_{j,k} a_{j,k} \langle \tilde{e}_+, e_k \rangle e_j \|^2 = \sum_j | \sum_k a_{j,k} \langle \tilde{e}_+, e_k \rangle |^2.$$

La somme sur k suit une loi gaussienne car somme de gaussiennes, et sa loi est donnée par :

$$\sum_k a_{j,k} \langle \tilde{e}_+, e_k \rangle \sim \mathcal{N}(0, \hat{\sigma}_j^2),$$

avec

$$\hat{\sigma}_j^2 = \sum_k \sigma_{j,k}^2 |\langle \tilde{e}_+, e_k \rangle|^2 = \sigma_j^2 \sum_k \sigma_k^2 |\langle \tilde{e}_+, e_k \rangle|^2. \tag{2.6.12}$$

Appliquant la proposition 2.5.4, on déduit pour $t > 0$:

$$\mathbb{P}(\|Q\tilde{e}_+\| \geq t) \leq \exp[\frac{C_0}{2s_1} \sum_j \hat{\sigma}_j^2 - \frac{t^2}{2s_1}], \tag{2.6.13}$$

où

$$s_1(R) = \max_j \hat{\sigma}_j^2 = (\max \sigma_j^2) \times \sum_k \sigma_k^2 |\langle \tilde{e}_+, e_k \rangle|^2. \tag{2.6.14}$$

Pour donner un encadrement de s_1 lorsque R tend vers l'infini, commençons par écrire

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k^2 |\langle \tilde{e}_+, e_k \rangle|^2 = \sum_{|k| \leq \frac{R}{C}} \ldots + \sum_{\frac{R}{C} < |k| < CR} \ldots + \sum_{CR \leq |k|} \ldots \tag{2.6.15}$$

D'après le lemme 2.6.4 la première et la troisième somme sont $\mathcal{O}(\frac{1}{R^\infty})$.

Rappelons pour la suite que si $a \in \mathbb{R}^*$ alors

$$\langle aR \rangle^{-\rho} \asymp \langle R \rangle^{-\rho}. \tag{2.6.16}$$

Nous obtenons alors pour la deuxième somme la majoration

$$\sum_{\frac{R}{C} < |k| < CR} \sigma_k^2 |\langle \tilde{e}_+, e_k \rangle|^2 \leq \max_{\frac{R}{C} \leq |j| \leq CR} \sigma_j^2 \sum_{\frac{R}{C} < |k| < CR} |\langle \tilde{e}_+, e_k \rangle|^2 \leq \tilde{C} \left\langle \frac{R}{C} \right\rangle^{-\rho} \|\tilde{e}_+\|^2.$$

De (2.6.7) et (2.6.16) nous avons :

$$\sum_{\frac{R}{C} < |k| < CR} \sigma_k^2 |\langle \tilde{e}_+, e_k \rangle|^2 = \mathcal{O}(\langle R \rangle^{-\rho}). \tag{2.6.17}$$

Puisque la norme de $\tilde{e}_+$ est minorée (voir 2.6.7), il existe $\hat{C} > 0$ tel que pour R assez grand

$$\sum_{\frac{R}{C} < |k| < CR} |\langle \tilde{e}_+, e_k \rangle|^2 = \|\tilde{e}_+\|^2 - \sum_{|k| \leq \frac{R}{C}} |\langle \tilde{e}_+, e_k \rangle|^2 - \sum_{CR \leq |k|} |\langle \tilde{e}_+, e_k \rangle|^2 \geq \frac{1}{\hat{C}}. \tag{2.6.18}$$

Conjugué avec (2.6.16), il existe alors une constante $\check{C} > 0$ telle que

$$\frac{1}{\check{C}}\langle R\rangle^{-\rho} \leq \sum_{\frac{R}{C}<|k|<CR} |\langle \tilde{e}_+, e_k\rangle|^2. \tag{2.6.19}$$

Finalement on regroupe (2.6.14), (2.6.17) et (2.6.19), pour montrer que

$$s_1(R) \asymp \langle R\rangle^{-\rho}.$$

Remarquons ensuite que

$$\mathbb{P}_R(\|QE_+\| \leq x_1) \geq \mathbb{P}_R(\|Q\tilde{e}_+\| + \varepsilon_1(R) \leq x_1).$$

Comme pour tout évènement A et B nous avons la relation :

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B), \tag{2.6.20}$$

cela donne alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_R(\|QE_+\| \leq x_1) \quad &\geq \quad \underline{\mathbb{P}}(\|Q\tilde{e}_+\| + \varepsilon_1(R) \leq x_1) \\ &\quad + \underline{\mathbb{P}}(\|Q\| \leq \ln R) - 1.\end{aligned}$$

Puis, nous utilisons (2.6.13) pour avoir

$$\underline{\mathbb{P}}(\|Q\tilde{e}_+\| \leq x_1 - \varepsilon_1(R)) \geq 1 - \exp[\frac{C_0}{2s_1}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\hat{\sigma}_j^2 - \frac{(x_1 - \varepsilon_1(R))_+^2}{2s_1}].$$

Grâce à (2.6.12) et (2.6.14),

$$\frac{1}{s_1}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{\max_j \sigma_j^2}\sum_j \sigma_j^2$$

est donc bornée. Enfin, on conclut avec la proposition 2.6.3. □

Lemme 2.6.7 *Il existe des constantes strictement positives M_0, M_1, D, C et T_0, des fonctions $\varepsilon_2(R) > 0$ et $s_1(R) > 0$ avec :*

$$\varepsilon_2(R) = \mathcal{O}(e^{-\frac{R}{D}}), \text{ et } \frac{1}{C}\langle R\rangle^{-\rho} \leq s_1(R) \leq C\langle R\rangle^{-\rho},$$

telles que pour $x_2 > 0$, nous avons pour $z \in \Omega_R$ fixé

$$\mathbb{P}_R(\|E_-Q\| \leq x_2) \geq 1 - T_0 \exp\left[-\frac{(x_2 - \varepsilon_2(R))_+^2}{2s_1(R)}\right] - M_0 \exp\left[-\frac{(\ln R)^2}{M_1}\right].$$

Preuve. Résultent du fait que $(E_-Q)^*$ et QE_+ ont la même structure, $a_{j,k}$ et $\bar{a}_{j,k}$ suivent la même loi. □

Proposition 2.6.8 *Nous avons pour tout $t > 0$:*

$$\mathbb{P}(|\langle Q\tilde{e}_+, \tilde{e}_-\rangle| \leq t) = 1 - \exp[-\frac{t^2}{\sigma^2}],$$

où :

$$\sigma^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_k^2 \, |\langle \tilde{e}_+, e_k\rangle|^2 \times \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sigma_j^2 \, |\langle \tilde{e}_-, e_j\rangle|^2.$$

De plus il existe C telle que :

$$\frac{1}{C}\langle R\rangle^{-2\rho} \leq \sigma^2 \leq C\langle R\rangle^{-2\rho}. \tag{2.6.21}$$

Preuve. On écrit :

$$\langle Q\tilde{e}_+, \tilde{e}_-\rangle = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} a_{j,k} \, \langle \tilde{e}_+, e_k\rangle \, \langle e_j, \tilde{e}_+\rangle.$$

On remarque alors que $\langle Q\tilde{e}_+, \tilde{e}_-\rangle$ suit la loi gaussienne (complexe) $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\langle Q\tilde{e}_+, \tilde{e}_-\rangle| \leq t) &= \int_{x^2+y^2\leq t^2} \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp[-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}] \, dxdy \\
&= \frac{2\pi}{\pi} \int_0^t \frac{1}{\sigma^2} r \, \exp[-\frac{r^2}{\sigma^2}] \, dr \\
&= 1 - \exp[-\frac{t^2}{\sigma^2}].
\end{aligned}$$

L'encadrement (2.6.21) se montre similairement à celui de s_1 ((2.6.15),...,(2.6.19)). □

Corollaire 2.6.9 *Il existe des constantes strictement positives M_0, M_1 et D, et une fonction $\varepsilon_3(R) > 0$ avec :*

$$\varepsilon_3(R) = \mathcal{O}(e^{-\frac{R}{D}}),$$

telles que pour $t > 0$ on ait :

$$\mathbb{P}_R(|E_-QE_+| \geq t) \geq \exp\left[-\frac{(t+\varepsilon_3(R))^2}{\sigma^2(R)}\right] - M_0 \exp\left[-\frac{(\ln R)^2}{M_1}\right].$$

$\sigma^2(R)$ est donné par la proposition 2.6.8.

Preuve. Avec la proposition 2.3.2 et (2.6.5), (2.6.8), pour $\|Q\| \leq \ln R$ on a :

$$|E_- Q E_+ - \langle Q\tilde{e}_+, \tilde{e}_- \rangle| \leq \varepsilon_3(R) = \mathcal{O}(e^{-\frac{R}{D}}).$$

Il suffit ensuite de remarquer que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_R(|E_- Q E_+| \geq t) \;\; &\geq \;\; \underline{\mathbb{P}}(|\langle Q\tilde{e}_+, \tilde{e}_- \rangle| - \varepsilon_3(R) \geq t) \\ &\quad + \underline{\mathbb{P}}(\|Q\| \leq \ln R) - 1, \end{aligned}$$

et d'appliquer les propositions 2.6.3 et 2.6.8. □

Proposition 2.6.10 *Il existe une constante $C' > 0$ et une fonction $\gamma_1(R)$ qui décroît vers zéro plus vite que n'importe quelle puissance négative de R lorsque $R \to \infty$, telle que pour R assez grand on ait :*

$$\mathbb{P}_R \left(\sup_{z \in \Omega_R} |E^\omega_{-+}| \leq C' \ln R \right) \geq 1 - \gamma_1(R).$$

Preuve. Puisque (voir (2.6.1))

$$\|Q\| \leq \ln R \Rightarrow \sup_{z \in \Omega_R} |E^\omega_{-+}| = \mathcal{O}(\ln R),$$

on obtient pour une constante C' bien choisie :

$$\mathbb{P}_R \left(\sup_{z \in \Omega_R} |E^\omega_{-+}| \leq C' \ln R \right) \geq \underline{\mathbb{P}}(\|Q\| \leq \ln R).$$

Ainsi avec la proposition 2.6.3, il suffit de poser

$$\gamma_1(R) = M_0 \exp[-\frac{(\ln R)^2}{M_1}].$$

□

Proposition 2.6.11 *Pour tout $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, il existe deux fonctions $t_\alpha(R) > 0$ et $\gamma_\alpha(R)$ vérifiant*

$$t_\alpha(R) = \langle R \rangle^{-\rho} R^{-\alpha}/2, \;\; \gamma_\alpha(R) \asymp R^{-2\alpha},$$

telles que pour R assez grand, et z fixé dans Ω_R

$$\mathbb{P}_R(|E^\omega_{-+}| \geq t_\alpha(R)) \geq 1 - \gamma_\alpha(R).$$

Preuve. Partant de (2.6.3), nous avons

$$E^{\infty}_{-+} = -E_- Q \sum_{j\geq 0} (-1)^{j+2} E\ (QE)^j\ QE_+. \tag{2.6.22}$$

En utilisant le fait que :

$$|E^{\omega}_{-+}| \geq |E^{1}_{-+}| - |E_{-+}| - |E^{\infty}_{-+}|,$$

on voit que pour $t_1, t_0 \in \mathbb{R}$, avec $t_1 - t_0 > 0$:

$$\mathbb{P}_R(|E^{\omega}_{-+}| \geq t_1 - t_0) \geq \mathbb{P}_R(\ \{|E^{1}_{-+}| \geq t_1 + |E_{-+}|\} \cap \{|E^{\infty}_{-+}| \leq t_0\}\ )$$

La relation (2.6.20) donne ensuite :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_R(|E^{\omega}_{-+}| \geq t_1 - t_0\ ) \ \ &\geq \ \ \mathbb{P}_R(|E^{1}_{-+}| \geq t_1 + |E_{-+}|) \\ &\quad + \mathbb{P}_R(|E^{\infty}_{-+}| \leq t_0) - 1. \end{aligned} \tag{2.6.23}$$

Si nous choisissons pour

$$0 < \alpha < \frac{1}{2},\ t_1(R) = \langle R\rangle^{-\rho} R^{-\alpha},$$

le corollaire 2.6.9 affirme alors qu'il existe $\alpha_1(R) > 0$ tel que :

$$\mathbb{P}_R(|E^{1}_{-+}| \geq t_1 + |E_{-+}|) \geq 1 - \alpha_1(R), \quad \alpha_1(R) \asymp R^{-2\alpha}. \tag{2.6.24}$$

Remarquons ensuite qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que, pour $\|Q\| \leq \ln R$ et R assez grand :

$$\|E \sum_{j\geq 0} (-1)^j (QE)^j\| \leq \frac{C_1}{\sqrt{R}}.$$

Grâce à (2.6.22), nous avons alors :

$$\mathbb{P}_R(|E^{\infty}_{-+}| \leq t_0) \geq \mathbb{P}_R\left(\|E_- Q\|\ \frac{C_1}{\sqrt{R}}\ \|QE_+\| \leq t_0\right).$$

Il faut ensuite utiliser (2.6.20), pour montrer :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_R\left(\|E_- Q\|\ \|QE_+\| \leq \frac{t_0\sqrt{R}}{C_1}\right) \\ &\quad \geq \mathbb{P}_R\left(\ \left\{\|E_- Q\| \leq R^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{t_0}{C_1}}\right\} \cap \left\{\|QE_+\| \leq R^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{t_0}{C_1}}\right\}\ \right) \\ &\quad\quad \geq \mathbb{P}_R\left(\ \|E_- Q\| \leq R^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{t_0}{C_1}}\ \right) + \mathbb{P}_R\left(\ \|QE_+\| \leq R^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{t_0}{C_1}}\ \right) - 1. \end{aligned}$$

Puis nous choisissons

$$t_0(R) = \frac{t_1(R)}{2}.$$

Grâce au lemme 2.6.7, il existe une fonction $\alpha_2(R) > 0$, qui décroît plus vite que n'importe quelle puissance négative de R, $\alpha_2 = \mathcal{O}(R^{-\infty})$, pour laquelle

$$\mathbb{P}_R\left(\|E_- Q\| \leq R^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{t_0}{C_1}} \right) \geq 1 - \alpha_2(R). \tag{2.6.25}$$

De même, avec le lemme 2.6.5, il existe $\alpha_3(R) > 0$, $\alpha_3 = \mathcal{O}(R^{-\infty})$, telle que :

$$\mathbb{P}_R\left(\|Q E_+\| \leq R^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{t_0}{C_1}} \right) \geq 1 - \alpha_3(R). \tag{2.6.26}$$

Nous regroupons (2.6.23),...,(2.6.26), pour terminer la preuve. On aura alors posé :

$$t_\alpha(R) = t_1(R) - t_0(R) = \frac{t_1(R)}{2} = \langle R \rangle^{-\rho} R^{-\alpha}/2 > 0,$$

et,

$$\gamma_\alpha(R) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(R) \asymp R^{-2\alpha}.$$

□

2.7 Spectre de l'opérateur perturbé

Puisque $P - z$ est de Fredholm d'indice zéro, et Q_ω est Hilbert-Schmidt presque sûrement, alors $P - z + Q_\omega$ est presque sûrement de Fredholm pour tout $z \in \mathbb{C}$. Il est alors bien connu que le spectre est soit discret, soit égal à $\mathbb{C}$ d'après la théorie analytique de Fredholm voir [24].

Proposition 2.7.1 *Sous les hypothèses 2.1.1, le spectre de $P - z + Q_\omega$ est presque sûrement discret.*

Preuve. La proposition 2.6.11 entraîne pour tout R la probabilité que le spectre soit discret est supérieur à $1 - \gamma_\alpha(R)$. On fait tendre R vers l'infini pour voir que le spectre n'est pas égal à $\mathbb{C}$ avec une probabilité 1. □

La multiplicité algébrique $m(z_0)$ d'une valeur isolée z_0 du spectre de $P + Q_\omega$ (ω fixe) est donnée par

$$\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{D(z_0,\varepsilon)}(z-P-Q_\omega)^{-1}dz\right).$$

Proposition 2.7.2 *La multiplicité algébrique $m(z_0)$ de $z_0 \in \sigma(P+Q_\omega)\cap\Omega_R$ (ω fixe) est égale à la multiplicité $M(z_0)$ de z_0 comme zéro de E^ω_{-+}.*

Pour la preuve, nous introduisons le

Lemme 2.7.3 *Soit γ une courbe fermée C^1 le long de laquelle $P + Q_\omega - z$ est inversible, alors*

$$\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (z-P-Q_\omega)^{-1}dz\right) = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma E^\omega_{-+}(z)^{-1}dE^\omega_{-+}(z)\right),$$

avec

$$dE^\omega_{-+}(z) = \frac{\partial E^\omega_{-+}}{\partial \mathrm{Re}z}d\mathrm{Re}z + \frac{\partial E^\omega_{-+}}{\partial \mathrm{Im}z}d\mathrm{Im}z.$$

Preuve. voir l'appendice A de [26]. □

Preuve de la proposition 2.7.2 Dans notre cas E^ω_{-+} est scalaire et on trouve donc

$$\begin{aligned} m(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{D(z_0,\varepsilon)} E^\omega_{-+}(z)^{-1}dE^\omega_{-+}(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{D(z_0,\varepsilon)} d\ \ln E^\omega_{-+} = M(z_0). \end{aligned}$$

□

2.8 Asymptotique spectrale

Nous rappelons que :

$$E_{-+} = \frac{c_+\bar{c}_-}{iD_-D_+}\left(e^{i\int_{x_-}^{x_+}\frac{g(y)-z}{f(y)}dy} - e^{-i\int_{x_+}^{x_-+2\pi}\frac{g(y)-z}{f(y)}dy}\right).$$

Nous allons utiliser l'argumentation de la section "1.4.1 propriété analytiques de $E^{(0)}_{-+}$" de [15] pour trouver une fonction holomorphe avec les mêmes zéros que E_{-+}. Pour cela, définissons :

$$l_0(z) := i \int_{x_-}^{x_+} \frac{z}{f(y)} dy. \tag{2.8.1}$$

Posons ensuite :

$$l(z) := l_0(z) - i \int_{x_-}^{x_+} \frac{g(y)}{f(y)} dy - \ln \frac{\sqrt{R} c_+ c_-}{D_- D_+}. \tag{2.8.2}$$

Finalement, nous obtenons la fonction holomorphe recherchée :

$$e^{l(z)} E_{-+} = \frac{\sqrt{R}}{i} (1 - e^{-2\pi i (\langle \frac{g}{f} \rangle - z \langle \frac{1}{f} \rangle)}).$$

Lemme 2.8.1 *Pour $\|Q\| \leq \ln R$, Il existe une fonction holomorphe dans Ω_R*

$$l^\omega(z) = l(z) + \mathcal{O}(\sqrt{R} \ln R)$$

telle que $e^{l^\omega(z)} E^\omega_{-+}$ soit holomorphe dans Ω_R.

Preuve. On adapte la section "1.4.2 Propriétés analytiques de E^δ_{-+}" de [15]. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}} E^\omega_{-+} &= -k^\omega(z) E^\omega_{-+}, \\
k^\omega(z) &= E^\omega_-(\partial_{\bar{z}}(f \circ R_-)) + (\partial_{\bar{z}} R_+) E^\omega_+. \qquad (2.8.3) \\
\partial_{\bar{z}} E_{-+} &= -k(z) E_{-+}, \\
k(z) &= E_-(\partial_{\bar{z}}(f \circ R_-)) + (\partial_{\bar{z}} R_+) E_-. \qquad (2.8.4)
\end{aligned}$$

Recherchons ensuite une solution dans Ω_R de $\partial_{\bar{z}} l^\omega(z) = k^\omega(z)$. On aura alors construit une fonction $e^{l^\omega(z)} E^\omega_{-+}$ qui est holomorphe avec les mêmes zéros que E^ω_{-+}. Nous avons déja trouvé une solution de $\partial_{\bar{z}} l(z) = k(z)$ (voir (2.8.2)).

Utilisons les séries convergentes de E^ω_- et E^ω_+, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
k^\omega(z) &= E^\omega_-(\partial_{\bar{z}}(f \circ R_-)) + (\partial_{\bar{z}} R_+) E^\omega_+ \\
&= k(z) + \sum_{j \geq 1} (-1)^j \{ E_-((QE)^j \partial_{\bar{z}}(f \chi_- e_-)) + \langle (EQ)^j E_+, \partial_z(\chi_+ e_+) \rangle \}.
\end{aligned}$$

De là, nous avons :

$$\begin{aligned} |k^\omega(z) - k(z)| &\leq \sum_{j\geq 1} \left(\frac{C\ln R}{\sqrt{R}}\right)^j (\|\partial_{\bar z} e_-\|_{L^2(I_-)} + \|\partial_z e_+\|_{L^2(I_+)}) \\ &\leq \frac{\ln R}{\sqrt{R}}\mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Prenons ensuite comme solution de $\partial_{\bar z} l^\omega(z) = k^\omega(z)$ celle qui vérifie :

$$(l^\omega - l)(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\Omega_R} \frac{(k^\omega - k)(z')}{z - z'} d\mathrm{Re}z' d\mathrm{Im}z'.$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} |(l^\omega - l)(z)| &\leq \|k^\omega - k\|_{L^\infty(\Omega_R)} \int_{\Omega_R} |\frac{1}{z-z'}| d\mathrm{Re}z' d\mathrm{Im}z' \\ &\leq \|k^\omega - k\|_{L^\infty(\Omega_R)} \int_{|w|\leq CR} \frac{1}{|w|}\,\mathcal{L}(dw) \\ &= \|k^\omega - k\|_{L^\infty(\Omega_R)}\, 2\pi \int_0^R \frac{1}{\rho}\,\rho\, d\rho = \mathcal{O}(\sqrt{R}\ln R), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

On rappelle que (voir (2.3.3)) :

$$z = Rw,\ p_0^{-1}(w) = \{(x_+, \xi_+),\ (x_-, \xi_-)\}.$$

Lemme 2.8.2 $\mathrm{Re}\, l_0(w)$ *est strictement sous-harmonique et la forme volume* $\Delta \mathrm{Re}\, l_0(w) d(\mathrm{Re}w) d(\mathrm{Im}w)$ *définit sur* Ω_1 *est égale à* $d\xi_- \wedge dx_- - d\xi_+ \wedge dx_+$.

Preuve. Par un calcul direct, voir le lemme 1.4.1 de [15]. □

Rappelons un résultat de M. Hager (voir proposition 1.8.1 de [15]) qui s'étend au cas des bords C^2 par morceaux.

Proposition 2.8.3 *Soient* $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$, Γ *un domaine de bord* C^2 *par morceaux et* $\phi \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$. *Soit* f *une fonction holomorphe dans* Ω, *vérifiant*

$$|f(z;h)| \leq e^{\phi(z)/h},\ z \in \Omega.$$

Supposons qu'il existe $\epsilon \ll 1$, $z_k \in \Omega$, $k \in J$, *tels que*

$$\partial\Gamma \subset \bigcup_{k\in J} B(z_k, \sqrt{\epsilon}),\ \#J = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}),$$
$$|f(z_k; h)| \geq e^{\frac{1}{h}(\phi(z_k)-\epsilon)},\ k \in J.$$

alors,

$$\#(f^{-1}(0) \cap \Gamma) = \frac{1}{2\pi h}\iint_\Gamma \Delta\phi\ d(\mathrm{Re}z)d(\mathrm{Im}z) + \mathcal{O}(\frac{\sqrt{\epsilon}}{h}).$$

Dans l'annexe on discutera des modifications induites par les bords qui sont seulement C^2 par morceaux.

Avec le lemme 2.8.1 et (2.8.2), on sait qu'il existe $C > 0$ telle que

$$|e^{l^\omega(z)}| \leq e^{\mathrm{Re}\, l_0(z)+C\sqrt{R}\ln R}.$$

Soit C' la constante de la proposition 2.6.10, posons alors

$$F^\omega(z) := \frac{1}{C'\ln R} e^{l^\omega(z)-C\sqrt{R}\ln R} E^\omega_{-+}(z). \tag{2.8.5}$$

Lemme 2.8.4 *Il existe une fonction* $\gamma_1(R)$ *qui décroît vers zéro plus vite que n'importe quelle puissance négative de* R *lorsque* $R \to \infty$, *telle que pour* R *très grand nous avons pour*

$$\underline{\mathbb{P}}\left(\sup_{z\in\Omega_R} |F^\omega(z)| \leq e^{R\,\mathrm{Re}\, l_0(w)}\right) \geq 1 - \gamma_1(R).$$

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition 2.6.10. □

Lemme 2.8.5 *Soit* Γ *un ouvert inclus dans* Ω_1 *de bord* C^2 *par morceaux. Il existe* $C_0 > 0$ *tel que pour*

$$\epsilon(R) = C_0\frac{\ln R}{\sqrt{R}},$$

si on choisit un ensemble de points $w_k \in \Gamma$, $k \in J$, $|J| = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{\epsilon(R)}})$ *avec*

$$\partial\Gamma \subset \bigcup_{k\in J} D(w_k, \sqrt{\epsilon}),$$

alors pour tout $\alpha \in (\frac{1}{8}, \frac{1}{2})$ *il existe*

$$\phi_\alpha(R) \asymp \frac{R^{-2\alpha+\frac{1}{4}}}{\sqrt{\ln R}}$$

telle que

$$\underline{\mathbb{P}}\left(\forall k \in J, \quad |F^\omega(z_k)| \geq e^{R\,(\mathrm{Re}\, l_0(w_k)-\epsilon)}\right) \geq 1-\phi_\alpha(R),\ z_k = Rw_k.$$

Preuve. Nous prenons la fonction t_α de la proposition 2.6.11. Si $|E^\omega_{-+}(z)| \geq t_\alpha$ alors il existe une constante $C_0 > 0$ indépendante de α telle que pour R assez grand :

$$|F^\omega(z)| \geq e^{R\,\mathrm{Re}\, l_0(w) - C_0\sqrt{R}\ln R}. \tag{2.8.6}$$

On choisit $\epsilon = (C_0\sqrt{R}\ln R)/R$, et notre ensemble de points $w_k \in \Gamma$, $k \in J$, $|J| = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{\epsilon(R)}})$ avec

$$\partial\Gamma \subset \bigcup_{k\in J} D(w_k, \sqrt{\epsilon}).$$

On applique ensuite la proposition 2.6.11 et la relation (2.6.20), pour montrer :

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathbb{P}}\left(\bigcap_k \left\{|F^\omega(z_k)| \geq e^{R\,(\mathrm{Re}\, l_0(w_k)-\epsilon)}\right\}\right) \\
&\quad \geq 1 + \sum_k \left[\mathbb{P}_R(|E^\omega_{-+}(z_k)| \geq t_\alpha(R)) - 1\right] \\
&\quad \geq 1 - R^{-2\alpha}\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}).
\end{aligned} \tag{2.8.7}$$

□

Théorème 2.8.6 *Soit* Γ *un ouvert inclus dans* Ω_1 *de bord* C^2 *par morceaux. Pour chaque* $\alpha \in (\frac{1}{8}, \frac{1}{2})$*, il existe* $C > 0$ *tel que pour* R *très grand, avec une probabilité inférieure*

$$\geq 1 - C\frac{R^{-2\alpha+\frac{1}{4}}}{\sqrt{\ln R}}$$

le spectre de $P + Q_\omega$ *est discret et*

$$\left|\#(\sigma(P+Q_\omega)\cap R\Gamma) - \frac{1}{2\pi}\mathrm{vol}(p^{-1}(R\Gamma))\right| \leq CR^{\frac{3}{4}}\sqrt{\ln R}, \tag{2.8.8}$$

les valeurs propres étant comptées selon leur multiplicité.

Preuve. On applique la proposition 2.8.3, en utilisant les lemmes 2.8.4 et 2.8.5. Compte tenu de la proposition 2.7.2, les valeurs propres sont bien sûr comptées selon leur multiplicité algébrique (pour les propositions qui suivront, nous ne le repréciserons pas). □

Corollaire 2.8.7 *Il existe $C > 0$ tel que quelque soit $\epsilon > 0$, il existe $k(\epsilon)$ tel que, avec une probabilité inférieure $\geq 1 - \epsilon$, on ait*

$$\forall R = 2^k,\ k \geq k(\epsilon),$$
$$\left| \#(\,\sigma(P + Q_\omega) \cap R\Gamma\,) - \frac{1}{2\pi}\mathrm{vol}(p^{-1}(R\Gamma)) \right| \leq C R^{\frac{3}{4}} \sqrt{\ln R}.$$

Pour $g, h : [\theta_1, \theta_2] \to [0, +\infty[, 0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi$ introduisons l'ensemble

$$\Gamma_{\theta_1,\theta_2}(g,h) = \{re^{i\theta}, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad g(\theta) \leq r \leq h(\theta)\}$$

dans le cas 1, on imposera $\arg f(a) < \theta_1$ et $\theta_2 < \arg f(b)$.

Nous nous intéressons maintenant à la distribution des valeurs propres de $P + Q$ dans les dilatés d'un profil conique de la forme $\Gamma(0, g)$. On peut supposer sans perte de généralité $\inf_{\theta \in [\theta_1,\theta_2]} g(\theta) = 1$. Maintenant, nous allons faire un découpage dyadique de $\lambda\Gamma(0, h)$ pour de très grandes valeurs de λ ; on utilisera en fait le théorème 2.8.6 pour $R = 2^k$. Prenons $\lambda \gg 1$. Si k_0 est tel que $2^{k_0} \leq \lambda < 2^{k_0+1}$, nous avons le découpage suivant

$$\begin{aligned} \lambda\Gamma(0,g) &= \Gamma(0,1) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{k_0-1} \Gamma(2^k, 2^{k+1}) \right) \cup \Gamma(2^{k_0}, \lambda g) \\ &= \Gamma(0,1) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{k_0-1} 2^k\, \Gamma(1,2) \right) \cup 2^{k_0}\, \Gamma(1, \frac{\lambda}{2^{k_0}} g). \end{aligned} \tag{2.8.9}$$

La majoration (2.8.8) s'applique à $\Gamma = \Gamma(1, 2)$ avec $R = 2^k$, il suffit d'appliquer le théorème 2.8.6 en prenant pour Ω_1 un voisinage de $\Gamma(1, 2)$. Grâce à la remarque 2.9.2 (voir annexe) que l'on tienne compte ou pas du bord, ne pose aucun problème, puisque les estimations ne changent pas.

Nous étendons le résultat de M. Hager (voir p.45 de [14]) à une famille de contours C^2 par morceaux, la preuve sera discutée dans l'annexe.

Proposition 2.8.8 (Cas uniforme de 2.8.6) *Soit un domaine $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$, et $\mathcal{F}$ une famille de domaines inclus dans Ω. Soit $C_0 > 0$ une constante indépendante de $\mathcal{F}$. On suppose que*

$$\forall \Gamma \in \mathcal{F}, \quad \partial\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N} \gamma_j([a_j, b_j]), \quad N \leq C_0,$$

où $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$ est C^2 (γ_j dépend évidemment de Γ) avec

$$\begin{aligned} &\forall j, \quad 0 < a_j < b_j \leq C_0, \\ &\forall j, \quad \frac{1}{C_0} \leq |\dot{\gamma}_j(t)| \leq C_0, \quad |\ddot{\gamma}_j(t)| \leq C_0, \\ &\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}(a_{j+1}),\ j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Soit $\phi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et f une fonction holomorphe dans Ω avec

$$|f(z;h)| \leq e^{\frac{\phi(z)}{h}},\ \forall z \in \Omega.$$

Si on a un réseau quadratique de points $z_k \in \Omega$ de maille $\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}$, $0 < \epsilon \ll 1$ avec

$$\Omega \subset \bigcup_{k \in J} D(z_k, \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}), \quad |J| \leq \frac{C}{\epsilon}$$

et

$$|f(z_k;h)| > e^{\frac{1}{h}(\phi(z_k)-\epsilon)},$$

alors

$$\begin{aligned} &\exists\, D > 0,\ \forall \Gamma \in \mathcal{F}, \\ &|\#(f^{-1}(0) \cap \Gamma) - \frac{1}{2\pi h} \iint_\Gamma \Delta\phi \; d(\mathrm{Re}\; z) d(\mathrm{Im}\; z)| \leq D\frac{\sqrt{\epsilon}}{h}. \end{aligned}$$

Lemme 2.8.9 *Pour chaque $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, il existe $C > 0$ tel que, avec une probabilité inférieure*

$$\geq 1 - C\frac{R^{-2\alpha+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\ln R}},$$

on ait :

$$\begin{aligned} &\forall \kappa \in [1, 2], \\ &\left| \#(\sigma(P + Q_\omega) \cap R\Gamma(1, \kappa g)) - \frac{1}{2\pi} \mathrm{vol}\, p^{-1}(R\Gamma(1, \kappa g)) \right| \leq C R^{\frac{3}{4}} \sqrt{\ln R}. \end{aligned}$$

Preuve. Nous voulons appliquer la proposition ci-dessus. Soit

$$\tilde{\Gamma} := \bigcup_{\kappa\in[1,2]} \Gamma(1,\kappa g).$$

Partons de (2.6.23), choisissons $\epsilon = (C_0\sqrt{R}\ln R)/R$ et réseaux de points w_k de maille $\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}$ avec

$$\tilde{\Gamma} \subset \bigcup_{k\in J} D(w_k, \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}), \quad |J| = \mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon}).$$

Le même calcul que (2.6.24) montre que

$$\underline{\mathbb{P}}\left(\bigcap_k \left\{|F^\omega(z_k)| \geq e^{R\,(\mathrm{Re}\, l_0(w_k)-\epsilon)}\right\}\right) \geq 1 - R^{-2\alpha}\mathcal{O}(\frac{1}{\epsilon}). \tag{2.8.10}$$

On applique ensuite ce qui précède, avec le lemme 2.8.4 et la proposition 2.8.8 pour obtenir le résultat. □

Lemme 2.8.10 *Il existe $C > 0$, $\delta \in (0, \frac{1}{4})$ tels que, quelque soit $\epsilon > 0$, il existe $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, avec une probabilité inférieure $\geq 1-\epsilon$, on ait*

$$\forall \lambda \geq 2^{k(\epsilon)},$$
$$\left|\#(\sigma(P+Q_\omega)\cap\Gamma(2^{k(\epsilon)},\lambda g)) - \frac{1}{2\pi}\mathrm{vol}p^{-1}(\Gamma(2^{k(\epsilon)},\lambda g))\right| \leq C\lambda^{1-\delta}. \tag{2.8.11}$$

Preuve. Lorsque λ grandit, $\forall\ 2^{k_0} \leq \lambda < 2^{k_0+1}$, $\frac{\lambda}{2^{k_0}}$ varie dans $[1,2]$. Notons $B_k, k \in \mathbb{N}$ et $A_\kappa, \kappa \in [1,2]$ les évènements des ω vérifiant l'estimation (2.8.8) respectivement avec $R = 2^k, \Gamma = \Gamma(1,2)$ et $R = 2^{k_0}, \Gamma = \Gamma(1,\kappa g)$. La proposition 2.8.6 et le lemme 2.8.9 entraînent

$$\lim_{k_0\to\infty} \overline{\mathbb{P}}\left(\bigcup_{j\in[1,2]} \mathcal{M}\setminus A_j\right) = 0, \quad \sum_{k\gg 1}^{\infty} \overline{\mathbb{P}}(\mathcal{M}\setminus B_k) < \infty.$$

Il existe alors $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\underline{\mathbb{P}}\left\{\forall\lambda, k_0, \quad 2^{k(\epsilon)} < 2^{k_0} \leq \lambda < 2^{k_0+1}, \quad \left(\bigcap_{k(\epsilon)}^{k_0-1} B_k\right) \cap A(\frac{\lambda}{2^{k_0}})\right\} \geq 1-\epsilon. \tag{2.8.12}$$

Maintenant additionnons les estimations, la différence du cardinal de $\sigma(P+Q)\cap\Gamma(2^{k(\epsilon)},\lambda g)$ avec le volume symplectique est majoré par

$$C\sum_{k(\epsilon)}^{k_0} 2^{\frac{3}{4}k}\sqrt{k\ln 2}+C'2^{\frac{3}{4}k_0}\sqrt{k_0\ln 2}.$$

Il existe $\delta\in(0,\frac{1}{4})$ et $C_1>0$ tel que le nombre ci-dessus soit majoré par $C_1\lambda$ pour tout k_0. □

Théorème 2.8.11 *Il existe $C_1>0,\frac{1}{4}>\delta>0$ tels que $\forall\epsilon>0$, il existe $M_\epsilon\subset\mathcal{M}$ tel que $\underline{\mathbb{P}}(M_\epsilon)\geq 1-\epsilon$ et $\forall\omega\in M_\epsilon$ on ait :*

$$\forall\lambda\geq 0$$
$$\left|\#(\sigma(P+Q_\omega)\cap\lambda\Gamma(0,g))-\frac{1}{2\pi}\mathrm{vol}\,p^{-1}(\lambda\Gamma(0,g))\right|\leq C(\epsilon,\omega)+C_1\lambda^{1-\delta}.$$

Preuve. Il suffit juste de tenir compte du fait que le spectre de $P+Q_\omega$ est discret presque sûrement. □

Finalement, en prenant $\tilde{M}=\bigcup_\epsilon M_\epsilon$, nous avons $\underline{\mathbb{P}}(\tilde{M})=1$ et le

Corollaire 2.8.12 *Il existe $C_1>0,\frac{1}{4}>\delta>0$ tels qu'il existe $\tilde{M}\subset\mathcal{M}$ tel que $\underline{\mathbb{P}}(\tilde{M})=1$ et $\forall\omega\in\tilde{M}$ on ait :*

$$\forall\lambda\geq 0,$$
$$\left|\#(\sigma(P+Q_\omega)\cap\lambda\Gamma(0,g))-\frac{1}{2\pi}\mathrm{vol}\,p^{-1}(\lambda\Gamma(0,g))\right|\leq C(\omega)+C_1\lambda^{1-\delta}.$$

2.9 Annexe : Comptage des zéros de fonctions holomorphes

Le résultat suivant est une légère extension de la proposition 1.8.1 de [15]. Nous montrons qu'elle reste valable pour des contours C^2 par morceaux.

Proposition 2.9.1 *Soient un domaine de $\Gamma\subset\subset\mathbb{C}$ de bord C^2 par morceaux, Ω un voisinage ouvert de $\overline{\Gamma}$. Soient $\phi\in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ et f une fonction holomorphe dans Ω telle que*

$$|f(z;h)|\leq e^{\frac{\phi(z)}{h}},\quad\forall z\in\Omega.$$

On suppose qu'il existe $z_i \in \Omega,\ 0 < r_j, \epsilon_j \ll 1,\ \ j = 1, \dots, N$ *tels que*

$$D(z_j, 3r_j) \subset \Omega \text{ et } \partial\Gamma \subset \bigcup_j D(z_j, r_j)$$

avec

$$|f(z_j; h)| > e^{\frac{1}{h}(\phi(z_j) - \epsilon_j)}.$$

Nous avons alors

$$\#(f^{-1}(0) \cap \Gamma) = \frac{1}{2\pi h} \iint_\Gamma \Delta\phi \; d(\mathrm{Re}\; z) d(\mathrm{Im}\; z) + \sum_j \mathcal{O}(\frac{r_j^2 + \epsilon_j}{h}).$$

Preuve. Reprenons les étapes de la proposition 1.8.1 de [15]. Nous verrons qu'il n'est pas utile d'imposer une condition sur les angles formés de la dérivée à droite et à gauche des points non dérivables.

Nous décomposons $\partial\Gamma$ en coubes disjointes γ_j avec $\gamma_j \subset D(z_j, r_j)$. Si γ_j est C^2, on procède comme dans la démonstration. Supposons alors que γ_j ne contienne qu'un point anguleux. Nous pouvons appliquer les résultats locaux dans $D(z_j, r_j)$ de (1.8.7) jusqu'à (1.8.21) dans [15]. On a bien sûr $|\gamma_j| = \mathcal{O}(r_j)$, et dans (1.8.22) la quantité

$$\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_j} \partial_w \ln(w - w_k) = \mathrm{var}\arg_{\tilde{\gamma}_j}(w - w_k)$$

est elle aussi bornée par 2π. En effet, puisque $\tilde{\gamma}_j$ est localement très proche de la réunion de deux segments de droite, on pourra toujours trouver un chemin qui part de w_j et qui touche le bord $D(z_j, r_j)$ sans couper $\tilde{\gamma}_j$. (1.8.23) et (1.8.24) restent inchangés, pour (1.8.25) il suffit de remarquer que le théorème de Stokes s'applique à des contours C^2 par morceaux. □

Remarque 2.9.2 En fait, la preuve de la proposition donne une estimation sur le nombre de zéros de f sur la frontière de Γ :

$$\exists C > 0, \quad |\#(f^{-1}(0) \cap \partial\Gamma)| \leq C \sum_j \frac{r_j^2 + \epsilon_j}{h}.$$

Lemme 2.9.3 *Soit une famille de lacets simples γ_j ($j \in J$) dans $\mathbb{C}$ de classe C^2. On paramétrise les lacets $\gamma_j : [0,1] \ni t \to \gamma(t) \in \mathbb{C}$. De plus, supposons qu'il existe $C_0 > 0$ tel que*

$$\forall j \in J,\ \forall t \in [0,1], \quad \frac{1}{C_0} \leq |\dot{\gamma}_j(t)| \leq C_0, \quad |\ddot{\gamma}(t)| \leq C_0.$$

Si $z_i \in \mathbb{C}$ avec $d(z_i, \gamma_i) \leq r$, alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $r \ll 1/C_0^3$ chaque composante connexe de $\gamma_j \cap D(z_j, r)$ est de longueur $\leq Cr$ et cela pour tout $j \in J$.

Preuve. Posons $f_j(t) := \frac{1}{2}|\gamma_j(t) - z_j|^2$. Un calcul montre (en omettant les indices) que

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= \langle \gamma(t) - z, \dot{\gamma}(t) \rangle, \\ \ddot{f}(t) &= |\dot{\gamma}(t)|^2 + \langle \gamma(t) - z, \ddot{\gamma}(t) \rangle, \end{aligned}$$

où $\langle ., . \rangle$ représente le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$.

Pour la suite nous travaillons dans $D(z,r)$, c'est à dire que nos t vérifient $\gamma(t) \in D(z,r)$.

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les hypothèses, il existe $C_1 > 0$ tel que pour $r \ll 1/C_0^3$

$$\begin{aligned} \ddot{f}(t) &\geq |\dot{\gamma}(t)|^2 - |\gamma(t) - z|\, |\ddot{\gamma}(t)| \\ &\geq \frac{1}{C_0^2} - rC_0 \geq \frac{1}{C_1} > 0. \end{aligned} \tag{2.9.1}$$

Dans chaque composante connexe de $\gamma \cap D(z,r)$, il existe un temps t_1 pour lequel $f(t)$ est minimum, dès lors $\dot{f}(t_1) = 0$. La formule de Taylor avec reste intégrale donne alors

$$f(t) = f(t_1) + \int_{t_1}^{t} (x - t_1) \ddot{f}(x) dx$$

de là

$$f(t) \geq f(t_1) + \frac{1}{2C_1}(t - t_1)^2.$$

soit

$$|t - t_1| \leq r\sqrt{2C_1}.$$

Ainsi la longueur de chaque composante connexe de $\gamma \cap D(z,r)$ est majorée par

$$\int_{|t|\leq r\sqrt{2C_1}} |\dot{\gamma}(t)|dt \leq r\sqrt{8C_1C_0^2}.$$

(Toutes les estimations sont bien sûr uniformes par rapport à j) $\square$

Proposition 2.9.4 (Cas uniforme) *Soit un domaine $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$, et $\mathcal{F}$ une famille de domaines inclus dans Ω. Soit $C_0 > 0$ une constante indépendante de $\mathcal{F}$. On suppose que*

$$\forall \Gamma \in \mathcal{F}, \quad \partial\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N} \gamma_j([a_j, b_j]), \quad N \leq C_0,$$

où $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$ est C^2 (γ_j dépend évidemment de Γ) avec

$$\begin{aligned}
&\forall j, \quad 0 < a_j < b_j \leq C_0, \\
&\forall j, \quad \frac{1}{C_0} \leq |\dot{\gamma}_j(t)| \leq C_0, \quad |\ddot{\gamma}_j(t)| \leq C_0, \\
&\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}(a_{j+1}),\ j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Soit $\phi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et f une fonction holomorphe dans Ω avec

$$|f(z;h)| \leq e^{\frac{\phi(z)}{h}},\ \forall z \in \Omega.$$

Si on a un réseau quadratique de points $z_k \in \Omega$ de maille $\frac{r}{2}$, $0 < r, \epsilon \ll 1$ avec

$$\Omega \subset \bigcup_{k\in J} D(z_k, \frac{r}{2}), \quad |J| \leq \frac{C}{r^2}$$

et

$$|f(z_k;h)| > e^{\frac{1}{h}(\phi(z_k)-\epsilon)},$$

alors

$$\begin{aligned}
&\exists\, D > 0,\ \forall \Gamma \in \mathcal{F}, \\
&|\#(f^{-1}(0) \cap \Gamma) - \frac{1}{2\pi h} \iint_\Gamma \Delta\phi\ d(\mathrm{Re}\ z)d(\mathrm{Im}\ z)| \leq D\frac{r^2+\epsilon}{rh}.
\end{aligned}$$

Preuve. (voir "2.5.4 preuve du théorème 2.0.11 de [15]") Puisque la norme de $\dot{\gamma}_j$ et les réels a_j, b_j, N sont tous majorés indépendamment de Γ, alors il existe $C > 0$ tel que

$$L(\partial\Gamma) \leq C, \ \forall \Gamma \in \mathcal{F}. \tag{2.9.2}$$

En appliquant le lemme 2.9.3, pour r assez petit $z \in \Omega$ tel que $d(z, \partial\Gamma) \leq r$, alors la longueur de chaque composante connexe de $\partial\Gamma \cap D(z, r)$ est $\leq C'r$ (les points anguleux a_j, b_j, où le bord n'est pas dérivable, ne posent aucun problème puisque de nombre majoré uniformément à Γ : on peut donc les ignorer).

Posons

$$J_\Gamma := \{z_k;\ d(z_k, \partial\Gamma) \leq \frac{r}{2}\},$$

grâce à (2.9.2), il existe $C'' > 0$ tel que

$$\forall \Gamma \in \mathcal{F}, \quad \partial\Gamma \subset \bigcup_{k \in J_\Gamma} D(z_k, \frac{2r}{3}), \quad |J_\Gamma| \leq C'' \frac{1}{r}.$$

Soit $\Pi(\Gamma, z_k)$ l'ensemble des composantes connexes de $\partial\Gamma \cap D(z_k, r)$ dont la distance à z_k est $\leq \frac{2r}{3}$. Il est clair que

$$\forall \alpha \in \Pi(\Gamma, z_k), \quad L(\alpha) \geq \frac{r}{3}. \tag{2.9.3}$$

Nous voulons maintenant montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall \Gamma \in \mathcal{F}$, on peut décomposer $\partial\Gamma$ en au plus $\tilde{J}_\Gamma$ courbes disjointes $\beta_k^j \subset D(z_k, r)$ où $\tilde{J}_\Gamma \leq \frac{C}{r}$.

Partons d'un point de $\alpha \in \Pi(\Gamma, z_k)$, longeons la courbe jusqu'au bord de $D(z_k, r)$, et notons z' ce point d'arrêt. Il existe alors $z'_k \neq z_k$ tel que $d(z'_k, z') \leq \frac{r}{2}$. On suit ensuite $\partial\Gamma$ pour atteindre le bord de $D(z'_k, r)$. On continue ainsi jusqu'à la fermeture de $\partial\Gamma$; et tenant compte de (2.9.2) et (2.9.3) on aura $\tilde{J}_\Gamma \leq \frac{C}{r}$, pour tout Γ.

Jusqu'à l'équation (1.8.21) de [15], tous les calculs sont uniformes par rapport Γ. Nous utilisons pour finir $L(\beta_k^j) \leq C'r$ (voir ce qui suit (2.9.2)) et

$$\text{var arg}_{\beta_k^j}(w - w^*) \leq 2\pi, \quad \forall j, k, \quad \forall w^* \in \Omega \setminus \beta_k^j.$$

La proposition 2.9.1 est donc valable $\forall \Gamma \in \mathcal{F}$ avec un reste uniforme. □

Chapitre 3

Loi de Weyl presque sûre pour un système différentiel en dimension 1

3.1 Introduction

Il est bien connu, depuis le travail H. Weyl, [41], que pour un opérateur différentiel P autoadjoint semi-borné, on a souvent la loi de Weyl. C'est-à-dire que le nombre $N(P,\lambda)$ de valeurs propres inférieures à $\lambda > 0$ vérifie

$$N(P,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint_{p\leq\lambda} dxd\xi + o(\lambda^{\frac{n}{m}}), \quad \lambda \to +\infty.$$

si m est l'ordre de P et $2n$ la dimension de l'espace des phases. On pourra par exemple consulter [12] ou [20]. Dans le cadre semiclassique, plus récent, sous des hypothèses naturelles, on a la loi de Weyl. Le nombre $N(P(h),I)$ de valeurs propres d'un opérateur $P(h)$ autoadjoint, dans un intervalle I, satisfait la relation

$$N(P,I) = \frac{1}{(2\pi h)^n}(\mathrm{vol}\,(p^{-1}(I)) + o(1)), \quad h \to 0,$$

où p est le symbole principal semiclassique de $P(h)$. Ce résultat a été prouvé de façon générale par J. Chazarain [4], B. Helffer-D. Robert [18], et V. Ivrii [21]. (Nous avons suivi la présentation de [7].)

Dans le cas non-autoadjoint il se peut que la loi ne soit plus vérifiée. Un simple exemple (dans le cas semiclassique) pour s'en convaincre est l'oscillateur harmonique non-autoadjoint

$$P = \frac{1}{2}((hD_x)^2 + ix^2) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}),$$

pour lequel le spectre est égal à $\{e^{i\pi/4}(k+\frac{1}{2})h;\, k \in \mathbb{N}\}$. En effet, le nombre de valeurs propres dans un ouvert $\Gamma \subset\subset \mathbb{C}$ qui intersecte le premier quadrant et qui évite la droite $\arg z = \frac{\pi}{4}$, est égal à zéro, alors que le coefficient de Weyl, $\mathrm{vol}\,(p^{-1}(\Gamma))$, ne l'est pas.

Néanmoins, la notion récente de pseudospectre a permis ces dernières années de mieux comprendre les propriétés spectrales des opérateurs non-autoadjoints. Rappelons que le pseudospectre est défini comme les ensembles délimités par les lignes de niveau de la norme de la résolvante. Plus précisément, le ϵ-pseudospectre $\sigma_\epsilon(P)$ d'un opérateur P est

$$\sigma_\epsilon(P) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \|(z-P)^{-1}\| > \frac{1}{\epsilon} \right\},$$

avec la convention $\|(z-P)^{-1}\| = \infty$ si z appartient au spectre $\sigma(P)$ de P. Une description équivalente du pseudospectre montre que z appartient au ϵ-pseudospectre si et seulement si z appartient au spectre de l'opérateur perturbé $P + \delta P$ avec $\|\delta P\| \leq \epsilon$, c'est le théorème de Roch-Silberman [28]

$$\sigma_\epsilon(P) = \bigcup_{B \in \mathcal{L}(H),\, \|B\| < \epsilon} \sigma(P+B).$$

Le pseudospectre est donc la zone d'instabilité spectrale. On comprend dès lors avec ce point de vue l'intérêt du pseudospectre lorsque l'on cherche à déterminer numériquement les valeurs propres d'un opérateur. En effet, un calcul numérique ne nous donnera que des valeurs propres approchées (aussi appelées quasimodes) à cause de la discrétisation et des inévitables erreurs d'arrondis. Pour mettre en évidence la sensibilité du spectre sous de petites perturbations, on cherche à construire dans certaines zones des quasimodes ; cela permet alors de mettre en évidence des régions du plan complexe, qui peuvent pourtant être loin du spectre, pour lesquelles la norme de la résolvante est très grande : voir par exemple le survey de Davies [6]. Nous renvoyons au livre de Trefethen et Embree [33] pour un survol complet

du sujet (le pseudospectre), notons aussi qu'il existe un équivalent de cette notion dans le cadre semiclassique : le pseudospectre semiclassique.

C'est en voulant comprendre de manière théorique certains phénomènes numériques, comme par exemple la migration des valeurs propres vers le bord du pseudospectre mise en évidence dans [40], que M. Hager a entrepris une étude perturbative des valeurs propres des opérateurs non-autoadjoints. Sa principale motivation est donc de comprendre comment le spectre après perturbation se répartit dans le pseudospectre.

Dans un premier travail [13], elle montre, pour un opérateur modèle perturbé par des noyaux oscillants, que les valeurs propres se distribuent selon une loi de Weyl dans le pseudospectre. Elle a ensuite généralisé ce résultat aux opérateurs h-pseudodifférentiels avec des perturbations multiplicatives aléatoires et trouvé une asymptotique de Weyl avec une probabilité très proche de 1. Ces deux travaux concernent l'asymptotique en limite semiclassique.

L'auteur a lui étudié, au précédent chapitre, pour un simple opérateur différentiel perturbé l'asymptotique des grandes valeurs propres. Le fait nouveau (par rapport au cas semiclassique) est que nous obtenons **presque sûrement** une loi de Weyl. Dans ce travail, on va donner une version matricielle de l'asymptotique presque sûre. Nous étudions ici un système différentiel matriciel et une perturbation aléatoire d'ordre inférieur. On se place dans le cadre de S^1 pour des raisons techniques et tant qu'à faire, on regarde aussi les systèmes dans le cas semiclassique, ce qui n'a pas encore été fait.

Asymptotique semiclassique

Considérons l'opérateur différentiel non-autoadjoint dans $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$

$$P(h) = \sum_{\alpha \leq m} A_\alpha(x; h)(hD_x)^\alpha, \quad h \in (0, 1], \quad D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \tag{3.1.1}$$

où chaque A_α est une matrice $n \times n$ complexe dépendant de manière C^∞ de x, et admettant la repésentation asymptotique dans $C^\infty(S^1)$,

$$A_\alpha(x) \sim A_{\alpha,0}(x) + hA_{\alpha,1}(x) + h^2 A_{\alpha,2}(x) + \ldots, \quad h \to 0. \tag{3.1.2}$$

Le domaine de définition $\mathcal{D}(P)$ choisi pour P est l'espace de Sobolev semiclassique $H^m_{sc}(S^1, \mathbb{C}^n)$ défini par

$$\left\{ u \in L^2(S^1, \mathbb{C}^n);\ \|u\|^2_{m,h} = \sum_{\alpha \leq m} \|(hD_x)^\alpha u\|^2 < \infty \right\}. \tag{3.1.3}$$

Le symbole principal semiclassique de P est donné par

$$p(x,\xi) := \sum_{\alpha \leq m} A_{\alpha,0}(x)\xi^{\alpha}, \quad (x,\xi) \in T^*S^1. \tag{3.1.4}$$

Hypothèse 3.1.1 *On suppose que P est elliptique (au sens où* $\det A_{m,0}$ *ne s'annule pas), et qu'il existe un point z_0 pour lequel la résolvante $(P - z_0)^{-1}$ existe.*

Nous notons l'ensemble des valeurs propres du symbole principal p par

$$\Sigma(p) = \bigcup_{(x,\xi)\in T^*(S^1)} \sigma(p(x,\xi)), \quad \sigma(p(x,\xi)) = \text{spectre de } p(x,\xi). \tag{3.1.5}$$

Notons que le dernier point de l'hypothèse ci-dessus est toujours vérifié si $\Sigma(p) \neq \mathbb{C}$. Comme dans le cas scalaire, nous obtenons que le spectre est discret sur $\mathbb{C}$.

Proposition 3.1.2 *Sous l'hypothèse précédente, pour tout z, $P-z : \mathcal{D}(P) \to L^2(S^1)$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. En particulier, nous trouvons que le spectre de P est discret dans $\mathbb{C}$.*

Preuve. Il est connu qu'un opérateur elliptique sur une variété compacte (ici S^1) est de Fredholm. Après multiplication par A_m^{-1}, on est ramené au cas où $A_m = I$. Puis, en utilisant l'invariance de l'indice de Fredholm par déformation elliptique, on obtient que l'indice de $P - z$ est égal à celui de $(hD)^m$; les termes de degré inférieur ont été écrasés. Pour finir, il est clair que l'indice de $(hD)^m$ est zéro. Enfin, il est bien connu, par la théorie de Fredholm analytique, que pour un opérateur A d'indice zéro, dont le spectre n'est pas égal à $\mathbb{C}$, alors le spectre consiste en des valeurs propres discrètes. □

Comme nous l'avons évoqué dans le cadre classique, il se peut que la norme de la résolvante pour des opérateurs non-autoadjoints soit grande dans un ouvert quand $h \to 0$. La région pour laquelle la résolvante est grande dans la limite semiclassique sera notée comme le pseudospectre semiclassique. La définition adoptée par [9] pour cet ensemble pour un opérateur $P(h)$, est l'ensemble $\Lambda(P(h))$ des points z tels que pour $0 < h \leq 1$ il existe $u(h) \in \mathcal{D}(P)$ avec la propriété

$$\|(P(h) - z)u(h)\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^{\infty}),\ \|u\|_{L^2} = 1. \tag{3.1.6}$$

Dans le cas scalaire, depuis [9] et [39], on a un résultat d'existence de quasimodes $u(h)$, satisfaisant (3.1.6), sous une condition portant sur le crochet de Poisson de la partie réelle et imaginaire du symbole principal. Nous allons donner un équivalent dans le cas matriciel, ce qui nous permettra dans ce travail de définir notre pseudospectre semiclassique, néanmoins plus restrictif que $\Lambda(P(h))$.

Proposition 3.1.3 *Soit $P(h)$ un système différentiel dans $C^\infty(S^1, \mathbb{C}^n)$, et $p(x,\xi)$, $(x,\xi) \in T^*S^1$ son symbole principal. Pour z_0 donné dans $\mathbb{C}$, nous notons $q_{z_0}(x,\xi) = \det(p(x,\xi) - z_0)$. S'il existe $(x_0,\xi_0) \in T^*S^1$ tel que $z_0 \in \sigma(p(x_0,\xi_0))$ et*

$$\frac{1}{2i}\{q_{z_0}, \bar{q}_{z_0}\}(x_0,\xi_0) > 0,$$

où $\{q_{z_0}, \bar{q}_{z_0}\}$ désigne le crochet de Poisson de q_{z_0} avec $\bar{q}_{z_0}$, alors il existe $u(h) \in L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$ avec la propriété (3.1.6).

On donnera la preuve dans la section 3.

Comme dans la proposition ci-dessus, pour z fixé, $q_z(x,\xi)$ désigne, dans la suite, le déterminant de $p(x,\xi) - z$. Nous définissons les ensembles

$$\Phi = \{z \in \Sigma \,:\, \exists (x,\xi) \in T^*S^1 \text{ avec } z \in \sigma(p(x,\xi)) \text{ et } \{q_z, \bar{q}_z\}(x,\xi) = 0\}. \tag{3.1.7}$$

et

$$\Lambda_+ = \{z \in \Sigma \,:\, \exists (x,\xi) \in T^*S^1 \text{ avec } z \in \sigma(p(x,\xi)) \text{ et } \frac{1}{2i}\{q_z, \bar{q}_z\}(x,\xi) > 0\}.$$

Nous verrons que Σ, Φ sont fermés et que $\Sigma \setminus \Phi$ est un ensemble ouvert inclus dans Λ_+. Ce qui veut dire que pour tout point z de $\Sigma \setminus \Phi$, il existe un quasimode. Il est donc justifié de définir notre pseudospectre semiclassique de P comme l'ensemble $\Lambda(p) = \Sigma \setminus \Phi$. Nous avons montré que

$$\Sigma(p) \supset \Lambda(P) \supset \Lambda_+(p) \supset \Lambda(p).$$

Nous considérons une perturbation aléatoire Q_ω définie sur l'espace de probabilité $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Q_ω est un opérateur différentiel d'ordre inférieur à P de $L^2(S^1)$ dans lui-même, de domaine dense,

$$Q_\omega = \sum_{\alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1} Q_\alpha(x;h)(hD_x)^\alpha, \quad 0 \le \alpha_0 \le \alpha_1 \le m-1. \tag{3.1.8}$$

Ici Q_α est une matrice $n \times n$ où chaque élément est une série de Fourier aléatoire, c'est-à-dire

$$Q_\alpha^{i,j}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} q_{\alpha,k}^{i,j} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{3.1.9}$$

On adopte l'hypothèse suivante sur les variables aléatoires $q_{\alpha,k}^{i,j}$.

Hypothèse 3.1.4 *Les coefficients de Fourier $q_{\alpha,k}^{i,j}$ sont des variables aléatoires (pour faire court v.a.) complexes indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,(\sigma_{\alpha,k}^{i,j})^2)$. La variance peut dépendre de h. Ici, pour tout i,j, et α*

$$\sigma_{\alpha,k}^{i,j} \leq \tilde{C}\langle k\rangle^{-\rho}, \tag{3.1.10}$$

et pour $\alpha = \alpha_1$,

$$\sigma_{\alpha_1,k}^{i,j} \geq \frac{1}{\tilde{C}}\langle k\rangle^{-\rho}, \tag{3.1.11}$$

où les constantes $\tilde{C} > 0$ et $\rho > 1$ sont indépendantes de α, i, j et k, et où on utilise la notation standard $\langle k\rangle = (1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}$.

On rappelle que X suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ complexe d'espérance $m \in \mathbb{C}$ et de variance $\sigma^2 > 0$, si sa densité est

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{\frac{-|z-m|^2}{\sigma^2}}, & \sigma > 0, \\ \delta(z-m)\,(\text{masse de Dirac en } z=m), & \sigma = 0. \end{cases}$$

La propriété remarquable des v.a. gaussiennes est que la somme de deux gaussiennes reste une gaussienne où les espérances et les variances s'additionnent respectivement.

Sous ces conditions, on montrera que Q_ω est presque sûrement (p.s.) borné comme opérateur de H_{sc}^m dans L^2. On a aussi facilement le résultat suivant concernant la régularité des fonctions $Q_\alpha^{i,j}(x)$:

Proposition 3.1.5 *Sous l'hypothèse précédente, pour chaque α, i, j, $Q_\alpha^{i,j}(x)$ représente p.s. une fonction continue.*

Preuve. Il suffit de remarquer, grâce à l'inégalité de Markov, que

$$\mathbb{P}(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |q_{\alpha,k}^{i,j}| > t) \leq t^{-1}\mathbb{E}(|X|)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_{\alpha,k}^{i,j},$$

où X suit une loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0,1)$. On fait ensuite tendre t vers l'infini pour voir que la série aléatoire (3.1.9) converge normalement presque sûrement, d'où la continuité. □

Nous montrerons, dans la proposition 3.5, que l'image réciproque de zéro par q_z pour z donné dans le pseudospectre $\Lambda(p)$ de P, est un ensemble de la forme

$$\forall z \in \Lambda(p), \quad q_z^{-1}(0) = \{\rho_+^j(z), \rho_-^j(z),\ j = 1, \dots, \beta(z)\} \tag{3.1.12}$$

où $\beta(z) < \infty$ est localement constant, et

$$\pm \frac{1}{2i}\{q_z, \bar{q}_z\}(\rho_\pm) > 0. \tag{3.1.13}$$

Hypothèse 3.1.6 *Soit $\Omega \subset \Lambda(p)$ et connexe. On demande que pour tout $z \in \Omega$,*

$$\rho_\pm^j(z) = (x^j(z), \xi_\pm^j(z)), \quad x^j \neq x^k, j \neq k. \tag{3.1.14}$$

et que $\xi_+^j \neq 0$ pour tout j.

Nous définissons, pour $(x,\xi) \in T^*S^1$ et $\Gamma \subset \mathbb{C}$ donné, le nombre de valeurs propres de $p(x,\xi)$ dans Γ par

$$m_\Gamma(x,\xi) := \#(\sigma(p(x,\xi)) \cap \Gamma). \tag{3.1.15}$$

Nous nous proposons alors d'établir dans la section 6 le résultat suivant

Théorème 3.1.7 *Supposons admises les hypothèses 3.1.4 et 3.1.6. Soit $\Gamma \subset\subset \Omega$ un ouvert à bord C^2 par morceaux, et $\epsilon > 0$, $N_0 > 0$. Soit β la valeur constante de $\beta(z)$ sur la composante connexe de $\Lambda(P)$ contenant Ω. Alors il existe une constante positive C telle que pour tout*

$$h^{N_0} < \delta \ll h^{(\rho+\epsilon+\frac{1}{4})\beta+1}, \tag{3.1.16}$$

le nombre $N(P-\delta Q, \Gamma)$ de valeurs propres de $P - \delta Q$ dans Γ satisfait

$$|N(P-\delta Q,\Gamma) - \frac{1}{2\pi h}\iint m_\Gamma(x,\xi)\,dxd\xi| \leq C\frac{\sqrt{h\ln(\frac{1}{\delta})}}{h},$$

avec une probabilité

$$\geq 1 - C\frac{h^{2\epsilon}}{\sqrt{h\ln h^{-1}}}.$$

La probabilité est intéressante si $\epsilon \geq \frac{1}{4}$.

Notons que, lorsque $\alpha_1 = \alpha_0 = 0$, nous nous trouvons dans la situation d'une perturbation multiplicative aléatoire. Nous donnerons aussi à la fin de la section 6 une version de ce théorème pour une famille $\mathcal{G}$ de domaines Γ dans Ω.

Asymptotique des grandes valeurs propres

Soit l'opérateur différentiel non-autoadjoint dans $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$

$$P = \sum_{\alpha \leq m} A_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad A_\alpha(x) \in C^\infty(S^1). \tag{3.1.17}$$

Le domaine de définition est l'espace de Sobolev $H^m(S^1, \mathbb{C}^n)$. On impose comme précédemment une hypothèse d'ellipticité

$$\det A_m(x) \neq 0, \quad x \in S^1, \tag{3.1.18}$$

rendant l'opérateur $P - z$ de Fredholm d'indice zéro pour tout z. Nous supposons que $P - z$ est bijectif pour au moins une valeur de z, et nous trouvons donc que le spectre de P est discret (La preuve est similaire à celle de la proposition 3.1.2). Le symbole principal classique de P est

$$p_m(x, \xi) := A_m(x)\xi^m. \tag{3.1.19}$$

Nous désignons par $\Sigma(p_m)$ l'ensemble des valeurs propres de p_m, c'est-à-dire

$$\Sigma(p_m) = \bigcup_{(x,\xi) \in T^*S^1} \sigma(p_m(x, \xi)). \tag{3.1.20}$$

Notons que si $\Sigma(p_m) \neq \mathbb{C}$, alors pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma(p_m)$, $P - z$ est bijectif.

Nous avons la proposition suivante, qui se démontre facilement en regardant $P + \lambda z$ comme un opérateur elliptique à grand paramètre :

Proposition 3.1.8 *Si $z \notin \Sigma(p_m)$, alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $\lambda > C$, $P + \lambda z$ est inversible et $\|(P + \lambda z)^{-1}\| \leq 1/\mathrm{dist}(\lambda z, \Sigma)$.*

Pour z donné, on écrit $q_{m,z}(x, \xi)$ pour $\det(p_m(x, \xi) - z)$. Nous introduisons ensuite l'ensemble

$$\Phi = \{z \in \Sigma,\ \exists (x, \xi) \in T^*S^1 \text{ avec } z \in \sigma(p_m(x, \xi)) \text{ et } \{q_{m,z}, \bar{q}_{m,z}\}(x, \xi) = 0\}. \tag{3.1.21}$$

Notre pseudospectre $\Lambda(p_m)$ de P sera défini comme l'ensemble $\Sigma \setminus \Phi$, c'est un cône ouvert qui ne contient pas l'origine. Ramenant notre problème de haute énergie à un problème semiclassique (voir par exemple la section High Energy Spectrum de [6]) on montre la

Proposition 3.1.9 *Pour $z \in \Lambda(p_m)$, $\|(P+\lambda z)^{-1}\|$ tend vers l'infini plus vite que n'importe quelle puissance positive de λ quand $0 < \lambda \to +\infty$, avec la convention que $\|(P+\lambda z)^{-1}\| = \infty$ si λz appartient au spectre de P.*

Nous utilisons la perturbation

$$Q_\omega = \sum_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} Q_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad 0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq m-1, \tag{3.1.22}$$

où chaque Q_α^{ij} est une série de Fourier aléatoire

$$Q_\alpha(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_{\alpha,k}^{i,j}(x) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Nous supposons de plus que les coefficients $q_{\alpha,k}^{i,j}$ vérifient l'hypothèse 3.1.4. La proposition 3.1.5 nous dit alors que Q_ω est un opérateur différentiel dont les monômes sont p.s. continus. Ainsi, quitte à approcher Q_ω par un opérateur différentiel à coefficient C^∞, puisque P et $P - Q_w$ ont le même symbole principal on montre que p.s. $P - Q_w$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro avec un spectre discret.

Nous sommes intéressés ici par la distribution des grandes valeurs propres de $P - Q_\omega$ dans les dilatés de profil conique inclus dans $\Lambda(p_m)$. Choisissons, Ω, un cône ouvert connexe dans $\Lambda(p_m)$.

Pour z fixé dans $\Lambda(p_m)$, l'image réciproque de zéro par $q_{m,z}$ est un ensemble de la forme

$$\forall z \in \Lambda(p_m), \quad q_{m,z}^{-1}(0) = \{\rho_+^j(z), \rho_-^j(z),\ j = 1, \ldots, \beta(z)\} \tag{3.1.23}$$

où $\beta(z) < \infty$ est constant sur chaque composante connexe de $\Lambda(p_m)$, et

$$\pm \frac{1}{2i} \{q_{m,z}, \bar{q}_{m,z}\}(\rho_\pm) > 0. \tag{3.1.24}$$

On fait alors l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.1.10 *On demande que pour tout* $z \in \Omega$,

$$\rho_{\pm}^{j}(z) = (x^{j}(z), \xi_{\pm}^{j}(z)), \quad x^{j} \neq x^{k}, j \neq k. \tag{3.1.25}$$

Cette hypothèse implique, en particulier, que le degré de notre opérateur différentiel P soit pair et donc que $\xi_{+} = -\xi_{-}$. Nous avons toujours $\xi_{+}(z) \neq 0$ si $z \neq 0$.

Soit θ_1^0 et θ_2^0 tel que

$$\Lambda(p_m) \supset \Omega = \{re^{i\theta}; r > 0,\ \theta_1^0 < \theta < \theta_2^0\}.$$

Prenons $\theta_1, \theta_2 \in]\theta_1^0, \theta_2^0[$, avec $\theta_1 \leq \theta_2$, et $g, h \in C^2([\theta_1, \theta_2], \mathbb{R}_+)$ satisfaisant $h < g$. Nous introduisons alors l'ensemble

$$\Omega \supset\supset \Gamma_{\theta_1,\theta_2}(h, g) := \{re^{i\theta},\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,\ h(\theta) \leq r \leq g(\theta)\}. \tag{3.1.26}$$

Pour θ_1, θ_2 fixés on écrira parfois $\Gamma(h, g)$ à la place $\Gamma_{\theta_1,\theta_2}(h, g)$. Nous notons pour tout $(x, \xi) \in T^*S^1$ et $\Gamma \subset \mathbb{C}$

$$m_{\Gamma}(x, \xi) := \#(\sigma(p_m(x, \xi)) \cap \Gamma). \tag{3.1.27}$$

Notre résultat principal est le

Théorème 3.1.11 *Soit* Ω *un cône connexe dans* $\Lambda(p_m)$. *On suppose que l'hypothèse 3.1.10 est vérifiée et que* $m - \alpha_1 - \rho - \frac{3}{4} > 0$. *Il existe alors* $\tilde{C} > 0$ *et* $\tilde{M} \subset \mathcal{M}$ *avec* $\mathbb{P}(\tilde{M}) = 1$ *tels que* $\forall \omega \in \tilde{M}$, *le nombre* $N(P - Q_\omega, \lambda\Gamma(0, g))$ *de valeurs propres de* $P - Q_\omega$ *dans* $\lambda\Gamma(0, g) \subset\subset \Omega$ *satisfait*

$\forall \lambda \geq 0$,

$$|N(P - Q_\omega, \lambda\Gamma(0, g)) - \frac{1}{2\pi} \iint m_{\lambda\Gamma(0,g)}(x, \xi)\, dxd\xi| \leq C(\omega) + \tilde{C}\lambda^{1/(2m)}\sqrt{\ln \lambda}.$$

Pour le cas $m = 2$, le théorème n'est vérifié que pour des perturbations multiplicatives avec $1 < \rho < \frac{5}{4}$.

3.2 Quelques faits sur les opérateurs pseudo-différentiels matriciels

Pour inverser P, nous avons besoin des opérateurs pseudodifférentiels matriciels sur $\mathbb{R}$. Commençons par rappeler quelques faits, dans le cas scalaire on pourra consulter [7], [14], et dans cas le matriciel [3].

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Ecrivons $\rho = (x, \xi)$ et soit m une fonction d'ordre sur $\mathbb{R}^2$ au sens suivant

$$\exists C_0 \geq 1, N_0 > 0 \text{ tel que } m(\rho) \leq C_0 \langle \rho - \mu \rangle^{N_0} m(\mu), \ \forall \rho, \mu. \tag{3.2.1}$$

On introduit la classe $S(\Omega, m; \mathbb{C}^{n\times n})$ des symboles matriciels sur Ω

$$\begin{aligned} \{A(x,\xi) \in & C^\infty(\Omega, \mathbb{C}^{n\times n}); \ \forall i,j, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \ \exists C > 0 \text{ t.q.} \\ & |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta A_{i,j}(x,\xi)| \leq C m(x,\xi), \ (x,\xi) \in \Omega\}. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Pour des symboles $A(x, \xi; h)$ dépendants de h, nous disons que $A \in S(m)$ si $A(.; h)$ est uniformément borné dans $S(m)$ quand $h \in (0, 1]$. Pour $k \in \mathbb{R}$, on pose $S^k(\Omega, m) = h^{-k} S(\Omega, m)$ et $S^{-\infty}(\Omega, m) = \bigcap S^k(\Omega, m)$.

Une représentation asymptotique de $A \in S(\Omega, m)$ est une suite $A_j \in S(\Omega, m)$, $j \geq 0$ vérifiant

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad A(x; h) - \sum_{k \leq N} A_j(x; h) h^j \in S^{-(N+1)}(\Omega, m). \tag{3.2.3}$$

On écrira alors

$$A \sim \sum_{j=0}^{\infty} A_j h^j.$$

Si A et B ont la même représentation asymptotique alors $A - B \in S^{-\infty}(\Omega, m)$.

Lemme 3.2.1 (Resommation) *Si $A_j \in S(m), j \geq 0$ alors il existe $A \in S(m)$ tel que $A \sim \sum A_j h^j$.*

Un symbole $A \in S^m$ est dit classique si $A \sim \sum A_j h^j$, les fonctions matricielles A_j étant indépendantes de h. A_0 est dénommé le symbole principal de A. La classe des symboles classiques est notée $S_{cl}(\Omega, m)$.

Proposition 3.2.2 (Composition) *L'application bilinéaire*

$$\begin{aligned} S(\mathbb{R}^2, m_1) \times S(\mathbb{R}^2, m_2) &\to S(\mathbb{R}^2, m_1 m_2) \\ (A_1, A_2) &\mapsto A_1 \# A_2 \end{aligned}$$

où

$$A_1 \# A_2 = e^{\frac{ih}{2}\sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta)} A_1(x, \xi; h) A_2(y, \eta; h)|_{y=x, \eta=\xi} \tag{3.2.4}$$

est continue. De plus, nous avons la représentation asymptotique

$$(A_1\#A_2)(x,\xi;h) \sim \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\left(\frac{ih}{2}\sigma(D_x,D_\xi;D_y,D_\eta)\right)^k A_1(x,\xi)A_2(y,\eta)\big|_{y=x,\eta=\xi}. \tag{3.2.5}$$

Grâce à (3.2.5), il est possible de définir une composition pour les symboles définis sur Ω

$$S(\Omega,m_1)\times S(\Omega,m_2)\to S(\Omega,m_1m_2)/S^{-\infty}(\Omega,m_1m_2).$$

Proposition 3.2.3 (Parametrix) *Soit $A(x,\xi;h)\in S_{cl}(\Omega,m)$, les trois conditions suivantes sont équivalentes,*

i) A_0 est inversible pour chaque $(x,\xi)\in\Omega$ et vérifie $A_0^{-1}=\mathcal{O}(\frac{1}{m})$.

ii) A_0 est inversible pour chaque $(x,\xi)\in\Omega$ et vérifie $A_0^{-1}\in S(m^{-1})$.

iii) $\exists B\in S(m^{-1})$ tel que

$$\begin{aligned} A\#B &\sim 1 \text{ dans } S(\Omega,1)\\ B\#A &\sim 1 \text{ dans } S(\Omega,1).\end{aligned}$$

Un symbole qui vérifie i) est dit elliptique (au sens semiclassique).

Lorsque $\Omega=\mathbb{R}^2$, on associe à $A\in S(m)$ un opérateur pseudodifférentiel A^w continue de $\mathcal{S}^n\to\mathcal{S}^n$ et de $(\mathcal{S}')^n\to(\mathcal{S}')^n$, défini par

$$A^wu(x):=\frac{1}{2\pi h}\iint e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi}A(\frac{x+y}{2},\xi)u(y)\,dyd\xi. \tag{3.2.6}$$

On écrira

$$A^w=(A^w_{ij})_{1\leq i,j\leq n}. \tag{3.2.7}$$

Théorème 3.2.4 (Composition) *Si $A_i\in S(\mathbb{R}^2,m_i)$ alors*

$$A_1^wA_2^w=(A_1\#A_2)^w:\ \mathcal{S}^n\to\mathcal{S}^n,\ (\mathcal{S}')^n\to(\mathcal{S}')^n.$$

Théorème 3.2.5 *Si $A\in S(\mathbb{R}^2,1)$ alors*

$$A^w:L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^n)\to L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^n)$$

est borné, et sa norme est majorée par une constante indépendante de h.

Des deux théorèmes qui précèdent, on déduit que si $A \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$ est elliptique alors il existe $B \in S(\mathbb{R}^2, m^{-1})$ tel que

$$\begin{aligned} A^w B^w &= 1 + R_1 \in \mathcal{L}(L^2),\ \|R_1\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^n))} = \mathcal{O}(h^\infty), \\ B^w A^w &= 1 + R_2 \in \mathcal{L}(L^2),\ \|R_2\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^n))} = \mathcal{O}(h^\infty). \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Lemme 3.2.6 (Support) *Soit $A \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m), A_{ij} \sim \sum_{k\geq 0} h^k A_{ij,k}$, introduisons*

$$\mathrm{Supp} A_{ij} := \overline{\bigcup_k \mathrm{supp} A_{ij,k}}.$$

Prenons $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, indépendant de h alors

$$\forall i,j, \quad \mathrm{Supp} A_{ij} \cap \mathrm{supp}\chi = \emptyset \Rightarrow \|(A\#\chi)^w\|_{L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(h^\infty).$$

3.3 Spectre et pseudospectre

Rappelons que, dans le cadre semiclassique, on étudie l'opérateur différentiel elliptique non-autoadjoint dans $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$

$$P = \sum_{\alpha \leq m} A_\alpha(x;h)(hD_x)^\alpha, \quad h \in (0,1], \quad D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}. \tag{3.3.1}$$

Les ensembles $\Sigma, \Phi, \Lambda(p)$ et Λ_+ ont été introduits dans la section 1.1. On préfère écrire ici $q(x,\xi,z)$ pour désigner $\det(p(x,\xi) - z) \equiv q_z(x,\xi)$.

Proposition 3.3.1 *Σ, Φ sont fermés, et $\Lambda(p) = \Sigma \setminus \Phi$ est un ensemble ouvert.*

Preuve. Puisque P est elliptique au sens classique, on sait que pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$, il existe $C_K > 0$ tel que si $\sigma(p(x,\xi)) \cap K \neq 0$ alors $|\xi| \leq C_K$. Montrons que Φ est fermé dans $\mathbb{C}$. Soit $z_n \in \Phi$ une suite $z_n \to z_0$ et soit $\rho_n \in T^*S^1$ tel que $z_n \in \sigma(p(\rho_n))$ et $\frac{1}{2i}\{q(.,z_n), \bar{q}(.,z_n)\}(\rho_n) = 0$.

Après passage à une suite extraite, on peut supposer que $\rho_n \to \rho_0$, alors $\frac{1}{2i}\{q(.,z_0), \bar{q}(.,z_0)\}(\rho_0) = 0$, donc $z_0 \in \Phi$. (Idem pour Σ)

Montrons que $\Sigma \setminus \Phi$ est ouvert dans $\mathbb{C}$. Soit $w_0 \in \Sigma \setminus \Phi$, comme Φ est fermé il existe un voisinage U de w_0 dans $\mathbb{C}$ tel que $U \cap \Phi = 0$. Soit $\rho_0 \in T^*S^1$ un

point tel que $w_0 \in \sigma(p(\rho_0))$. Alors $\frac{1}{2i}\{q(.,w_0), \bar{q}(.,w_0)\}(\rho_0) \neq 0$. Le jacobien au point ρ_0 de l'application

$$f_{w_0} : T^*S^1 \ni (x,\xi) \mapsto (\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q) \in \mathbb{R}^2 \tag{3.3.2}$$

est égal à

$$-\{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\}(\rho_0) = \frac{1}{2i}\{q(.,w_0), \bar{q}(.,w_0)\}(\rho) \neq 0. \tag{3.3.3}$$

Le théorème des fonctions implicites montre l'existence d'un voisinage V de w_0 contenu dans Σ. □

Soit z_0 une valeur propre simple de $p(x_0,\xi_0)$, où $(x_0,\xi_0) \in T^*S^1$. Alors il existe un voisinage $U \subset T^*S^1$ de (x_0,ξ_0) et une fonction C^∞, $\lambda : U \to \mathbb{C}$ tels que $\lambda(x,\xi)$ soit une valeur propre simple de $p(x,\xi)$ pour $\forall (x,\xi) \in U$, vérifiant $\lambda(x_0,\xi_0) = z_0$.

Proposition 3.3.2 *Soit z_0 une valeur propre simple de $p(x_0,\xi_0)$, où $(x_0,\xi_0) \in T^*S^1$, alors*

$$\frac{1}{2i}\{q(.,z_0), \bar{q}(.,z_0)\}(x_0,\xi_0) > 0 \iff \frac{1}{2i}\{\lambda, \bar{\lambda}\}(x_0,\xi_0) > 0.$$

Preuve. $q(x,\xi,z)$ se met sous la forme

$$g(x,\xi,z)(z - \lambda(x,\xi))$$

où $g(x,\xi,z)$ est polynomiale en z et ne s'annule pas au point (x_0,ξ_0,z_0). Il faut ensuite remarquer que si $a(x,\xi) = b(x,\xi)c(x,\xi)$ et vérifie au point $\rho_0 = (x_0,\xi_0)$, $a(\rho_0) = c(\rho_0) = 0$ et $b(\rho_0) \neq 0$, alors

$$\frac{1}{2i}\{a,\bar{a}\}(\rho_0) = |b(\rho_0)|^2 \frac{1}{2i}\{c,\bar{c}\}(\rho_0).$$

□

Proposition 3.3.3 *Soit $z_0 \in \sigma(p(\rho_0))$,*
(a) si $\dim \mathcal{N}(p(\rho_0) - z_0) \geq 2$ alors

$$\frac{1}{2i}\{q(.,z_0), \bar{q}(.,z_0)\}(\rho_0) = 0.$$

(b) si $\dim \mathcal{N}(p(z_0) - z_0) = 1$ alors il existe des matrices r_0, s_0 inversibles telles que $r_0^{-1}(p(\rho_0) - z_0)s_0$ admet 0 comme valeur propre simple.

Preuve. (a) Pour une base convenable de $\mathbb{C}^n$, les deux premières colonnes de la matrice $p(\rho_0)-z_0$ s'annulent. On voit donc que $\det(p(\rho)-z_0) = \mathcal{O}(|\rho-\rho_0|^2)$.
(b) Soit $e_1, \dots, e_n$ une base telle que $(p(\rho_0) - z_0)e_1 = 0$. Soit

$$\begin{aligned} f_2 &= (p(\rho_0) - z_0)e_2 \\ &\vdots \\ f_n &= (p(\rho_0) - z_0)e_n \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

et f_1 tel que $f_1, \dots, f_n$ soit une base. Alors pour les bases $e_1, \dots, e_n$, et $f_1, \dots, f_n$ la matrice de $p(\rho_0) - z_0$ devient

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3.5}$$

Il existe donc deux matrices de passage r_0, s_0 pour lesquelles $r_0^{-1}(p(\rho_0)-z_0)s_0$ s'écrit comme dans (3.3.5). □

Soit z donné dans $\Lambda(p)$, l'image réciproque de 0 par q_z^{-1} est donnée par

$$q_z^{-1}(0) = \{\rho_+^i(z), \rho_-^j(z),\ i = 1, \dots, \beta(z), j = 1, \dots, \gamma(z)\} \tag{3.3.6}$$

avec

$$\pm\frac{1}{2i}\{q(.,z), \bar{q}(.,z)\}(\rho_\pm) > 0. \tag{3.3.7}$$

Proposition 3.3.4 *a) Pour chaque $z \in \Lambda$, $\beta(z), \gamma(z) < +\infty$,*
b) pour chaque $z \in \Lambda$, $\beta(z) = \gamma(z)$,
c) si z_1, z_2 appartiennent à une même composante connexe de Λ alors $\beta(z_1) = \beta(z_2)$.

Preuve. Pour *a)* et *c)* c'est clair. z_0 étant fixé, on prend $q(x,\xi) \equiv q(x,\xi,z_0)$. On suppose, pour se fixer les idées, que $q(0,\xi) \neq 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$: il n'y a donc pas de points ρ_+ ou ρ_- au dessus de 0. Nous coupons le cercle $S^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, pour identifier, avec l'application $(x,\xi) \mapsto (\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w)$, le tube $(S^1 \setminus \{0\}) \times \{|\xi| \leq C\}$ à un rectangle K de $\mathbb{C}$. Concrètement, nous pouvons écrire

$$\partial K = \underbrace{\{\xi = -C, x \in [0,2\pi]\}}_{\gamma_1} \cup \underbrace{\{x = 2\pi, |\xi| \leq C\}}_{\gamma_2} \cup \underbrace{\{\xi = C, x \in [0,2\pi]\}}_{\gamma_3} \cup \underbrace{\{x = 0, |\xi| \leq C\}}_{\gamma_4}.$$

Puis nous calculons la variation de l'argument de q le long de la frontière de K dans le sens positif. Premièrement, puisque pour ξ assez grand, il existe $M > 0$ tel que

$$q(x,\xi) = a(x)\xi^M + \mathcal{O}(\xi^{M-1}),$$

nous voyons que pour C assez grand

$$\begin{aligned} \operatorname{var}\arg_{\gamma_1} q &= \operatorname{var}\arg_{S^1} a(x) \\ &= -\operatorname{var}\arg_{\gamma_3} q. \end{aligned}$$

Deuxièmement, comme $q(x,\xi) = q(x+2\pi,\xi)$, nous avons

$$\operatorname{var}\arg_{\gamma_2} q + \operatorname{var}\arg_{\gamma_4} q = 0.$$

Nous avons donc montré que la variation de l'argument de q le long de ∂K est nulle. Après une déformation de contour, nous pouvons aussi écrire, pour ϵ assez petit, que

$$\operatorname{var}\arg_{\partial K} q(x,\xi) = \sum_{z\in q^{-1}(0)} \operatorname{var}\arg_{\partial D(z,\epsilon)} q(x,\xi). \tag{3.3.8}$$

On conclut alors avec le lemme qui suit :

Lemme 3.3.5 *Soit $q(z)$ une fonction sur $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}_x + i\mathbb{R}_\xi$, et C^1 dans un voisinage de 0. Si*

$$q(0) = 0, \quad \pm\frac{1}{2i}\{q,\bar{q}\}(0) := \pm\frac{1}{2i}(\partial_\xi q \partial_x \bar{q} - \partial_x q \partial_\xi \bar{q})(0) > 0 \tag{3.3.9}$$

alors pour ϵ assez petit

$$\operatorname{var}\arg_{\partial D(0,\epsilon)} q(z) = \mp 2\pi. \tag{3.3.10}$$

Preuve. On fait un développement de Taylor de q au voisinage de zéro

$$q = a\,(\xi + ix) + b\,(\xi - ix) + \mathcal{O}(\|(x,\xi)\|^2), \quad a,b \in \mathbb{C}.$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i}\{q,\bar{q}\}(0) &= |a|^2\,\frac{1}{2i}\{\xi+ix,\xi-ix\}(0) + |b|^2\,\frac{1}{2i}\{\xi-ix,\xi+ix\}(0) \\ &= |b|^2 - |a|^2. \end{aligned}$$

Deux cas se présentent. Si $\frac{1}{2i}\{q,\bar{q}\}(0) > 0$ alors $|b| > |a|$ et on voit que $\text{var arg } q = \text{var arg}\,(\xi - ix) = -2\pi$. Si $\frac{1}{2i}\{q,\bar{q}\}(0) < 0$ alors $|b| < |a|$ et on a $\text{var arg } q = \text{var arg}\,(\xi + ix) = +2\pi$. □□

Nous donnons maintenant le résultat d'existence de quasi-mode pour un système différentiel matriciel, qui se généralise facilement pour les opérateurs pseudodifférentiels matriciels.

Proposition 3.3.6 *Nous avons $\Lambda_+(p) \supset \Lambda(p)$, et pour tout z dans $\Lambda_+(p)$ et (x_0,ξ_0) dans T^*S^1 avec*

$$z \in \sigma(p(x_0,\xi_0)), \quad \frac{1}{2i}\{q(.,z),\bar{q}(.,z)\}(x_0,\xi_0) > 0,$$

il existe $0 \neq u(h) \in L^2(S^1)$ tel que

$$\|(P(h) - z)u(h)\| = \mathcal{O}(h^\infty)\|u(h)\|.$$

De plus $u(h)$ a la forme $\chi(x)a(x;h)e^{i\varphi(x)/h}$ où χ est une troncature à support dans un voisinage de x_0.

Preuve. L'inclusion $\Lambda_+(p) \supset \Lambda(p)$ découle de la proposition 3.3.4.

On suppose pour commencer que $z_0 = 0$ est une valeur propre simple de $p(\rho_0)$. On cherche à construire des solutions BKW, $e^{i\varphi(x)/h}a(x;h)$, satisfaisant

$$\begin{aligned} &e^{-i\varphi/h} \circ P \circ e^{i\varphi/h}a = \mathcal{O}(h^\infty), \\ &a(x;h) \sim a_0(x) + ha_1(x) + \dots \text{ dans } C^\infty(S^1,\mathbb{C}^n),\ a_0 \neq 0. \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

La phase doit remplir l'équation eikonale

$$\det p(x,\varphi'(x)) = 0. \tag{3.3.12}$$

Entre autres, si λ est la valeur propre simple C^∞ de $p(x,\xi)$ dans un voisinage de ρ_0 avec $\lambda(x_0,\xi_0) = 0$, la phase vérifie alors

$$\lambda(x,\varphi'(x)) = 0.$$

Dès lors, pour que l'équation eikonale soit résoluble, il faut donc que λ soit analytique en ξ. Les termes a_n satisfont, eux, un système récurrentiel d'équations (les équations de transport). La procédure pour donner les expressions explicites des a_n est décrite dans [10] (p.54) pour $hD_x + A(x)$. Par ailleurs, pour le cas scalaire, on pourra consulter [15], Chapitre 2.

On prendra ensuite comme quasimode $\chi a e^{i\varphi/h}$, où χ est à support compact dans un voisinage de x_0. Pour la normalisation, on procède comme dans le cas scalaire, en remarquant que $\{\lambda, \bar{\lambda}\}(\rho)/2i > 0$, ce qui entraîne que Im $\varphi''(x_0) > 0$ (voir [6]).

Pour le cas où z_0 est une valeur propre multiple, on est ramené au cas d'une valeur propre simple après composition par r_0 et s_0 (proposition 3.3.3). □

Pour une étude plus approfondie de l'existence de quasimodes pour les systèmes d'opérateurs semiclassiques, on consultera [8].

3.4 Problème de Grushin

Pour le problème de Grushin, aucune hypothèse n'est demandée. $q(x, \xi, z)$ désigne le déterminant de $p(x, \xi) - z$. On se place dans le cadre semiclassique. Soit z_0 un point de $\Lambda(p)$, et prenons $\rho_\pm^0$ dans $q_{z_0}^{-1}(0)$ tel que

$$\pm \frac{1}{2i}\{q(., z_0), \bar{q}(., z_0)\}(\rho_\pm^0) > 0. \tag{3.4.1}$$

En plus, (3.3.2) et (3.3.3) montrent qu'il existe un voisinage $U(z_0)$ de z_0 et $\rho_\pm(z) \in C^\infty(U(z_0))$ pour lesquel $q(\rho_\pm(z), z) = 0$, $\rho_\pm(z_0) = \rho_\pm^0$ et

$$\pm \frac{1}{2i}\{q(., z), \bar{q}(., z)\}(\rho_\pm(z)) > 0. \tag{3.4.2}$$

3.4.1 Résolution des problèmes locaux

On suppose pour commencer que 0 est une valeur propre simple de $p(\rho_\pm^0) - z_0$. Dans le cas général dim $\mathcal{N}(p(\rho_\pm^0) - z_0) = 1$, la proposition 3.3.4 montre, qu'après composition par r_0 et s_0, on est ramené au cas d'une valeur propre simple.

Utilisant le paragraphe 3 du Ch.I de [11], on déduit qu'il existe un voisinage $W(z_0)$ de z_0, un voisinage $V_\pm$ de $\rho_\pm$ pour lesquel il existe une matrice $u_\pm(x, \xi)$ inversible pour chaque $(x, \xi) \in V_\pm$, une fonction scalaire $\lambda_\pm(x, \xi)$ vérifiant

$$\lambda_\pm(\rho_\pm(z)) = z, \quad \forall (x, \xi) \neq \rho_\pm(z),\ \lambda_\pm(x, \xi) \neq z, \tag{3.4.3}$$

et une matrice $(n-1) \times (n-1)$, $h_\pm(x, \xi)$, avec

$$\forall (x, \xi) \in V_\pm, \forall z \in W(z_0), \quad \det(h_\pm - z) \neq 0, \tag{3.4.4}$$

tels que

$$\forall (x,\xi)\in V_\pm, \forall z\in W(z_0),$$
$$u_\pm(x,\xi)(p(x,\xi)-z)u_\pm^{-1}(x,\xi)=\begin{pmatrix}\lambda_\pm(x,\xi)-z & 0\\ 0 & h_\pm(x,\xi)-z\end{pmatrix}. \quad (3.4.5)$$

Puisque V est relativement compact, $U, U^{-1}, H, p_\pm \in S(V,1)$. On adapte ensuite un résultat du à M. Taylor [32], voir aussi [19], proposition 3.1.1,

Proposition 3.4.1 *Soit Ω un ouvert de T^*S^1. Soit $A\in S_{cl}(\Omega,1)$, dont le symbole principal vérifie*

$$UA_0U^{-1}=\begin{pmatrix}A_0^{11} & 0\\ 0 & A_0^{22}\end{pmatrix}, \quad U,U^{-1}\in S(\Omega,1),$$

où pour chaque (x,ξ), $A_0^{11}(x,\xi)$ et $A_0^{22}(x,\xi)$ ont des spectres disjoints. Il existe alors $\widetilde{U}\in S_{cl}(\Omega,1)$, $\widetilde{U}^{-1}\in S_{cl}(\Omega,1)$ vérifiant

$$\widetilde{U}\#\widetilde{U}^{-1}\sim 1, \quad \widetilde{U}^{-1}\#\widetilde{U}\sim 1, \quad \widetilde{U}\equiv U \bmod hS_{cl}(\Omega,1),$$

(d'où la puissance -1) dans $S(\Omega,1)$ tels que

$$\widetilde{U}\#A\#\widetilde{U}^{-1}\sim\begin{pmatrix}\widetilde{A}^{11} & 0\\ 0 & \widetilde{A}^{22}\end{pmatrix},$$

avec $\widetilde{A}_0^{jj}=A_0^{jj}$.

Dans notre cas, nous obtenons

Corollaire 3.4.2 *Soit $P(x,\xi)-z$ le symbole de l'opérateur $P-z$, alors il existe $U_\pm, U_\pm^{-1}, H_\pm$, et $\tilde{\lambda}_\pm\in S_{cl}(V_\pm,1)$ tels que*

$$U_\pm(x,\xi,h)\#(P(x,\xi)-z)\#U_\pm^{-1}(x,\xi,h)\sim\begin{pmatrix}\tilde{\lambda}_\pm(x,\xi,h)-z & 0\\ 0 & H_\pm(x,\xi,h)-z\end{pmatrix}$$

où le symbole pricipal de $\tilde{\lambda}_\pm$ est $\lambda_\pm$ et celui de $H_\pm$, $h_\pm$.

Compte tenu de la proposition 3.3.3, le symbole principal $\lambda_\pm$ de $\tilde{\lambda}_\pm$ vérifie pour chaque $z\in W(z_0)$,

$$\rho_\pm(z)\in\lambda_\pm^{-1}(z), \quad \pm\frac{1}{2i}\{\lambda_\pm,\bar{\lambda}_\pm\}(\rho_\pm,z)>0. \quad (3.4.6)$$

On utilise alors la proposition 2.2.3 de [15], pour montrer qu'il existe un voisinage $\widetilde{W} \subset W$ de z_0, un voisinage $\widetilde{V}_\pm \subset V_\pm$ contenant $\rho_\pm(z)$, $z \in \widetilde{W}$, deux symboles

$$q_\pm \in S_{cl}(\widetilde{V}_\pm, 1), \quad g_\pm \in S_{cl}(\pi_x(\widetilde{V}_\pm), 1)$$

qui dépendent de manière C^∞ de $z \in \widetilde{W}$ tels que

$$\tilde{\lambda}_+(x,\xi,h) - z \sim q_+(x,\xi,z,h)\#(\xi + g_+(x,z,h)) \text{ dans } S(\widetilde{V}_+, 1), \tag{3.4.7}$$

$$\tilde{\lambda}_-(x,\xi,h) - z \sim (\xi + g_-(x,z,h))\#q_-(x,\xi,z,h) \text{ dans } S(\widetilde{V}_+, 1), \tag{3.4.8}$$

où pour $z \in \widetilde{W}$,

$$g_{\pm,0}(x_+(z), z) = -\xi_\pm(z), \quad q_{\pm,0}(\rho_+(z), z) \neq 0.$$

$g_\pm$ est définie sur $\pi_x(\widetilde{V}_+)$, on prolonge $g_\pm$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$ de telle sorte que

$$g_\pm(y) = \mp\frac{i}{C_\pm}(y - x_\pm), \quad |y| \geq C, \quad C_\pm > 0, \tag{3.4.9}$$

et aussi

$$\text{Im } g_\pm(y) \neq 0, \quad y \neq x_\pm(z).$$

On s'appuie maintenant sur la section "2.2.2 Quasimodes" de [15]. Soit $f_+ \in L^2(\mathbb{R})$ la solution normalisée de

$$(hD_x + g_+(x,z;h))f_+ = 0. \tag{3.4.10}$$

Remarque 3.4.3 On identifiera fréquemment les intervalles de $\mathbb{R}$ de longueur $< 2\pi$ à des intervalles de S^1. De plus, le produit scalaire, dans cette section, est par défaut sur $L^2(\mathbb{R})$.

f_+ est de la forme

$$f_+(x,z;h) := a_+(x,z;h)e^{\frac{i}{h}\varphi_+(x,z)}, \quad \|f_+\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1, \tag{3.4.11}$$

avec

$$\varphi_+(x_+,z) = 0, \quad \varphi'_+(x_+,z) = \xi_+, \quad \varphi_+(x,z) = -\int_{x_+}^{x} g_{+,0}(y,z)dy, \quad \text{Im } \varphi_+ \geq 0, \tag{3.4.12}$$

où l'amplitude admet un développement en puissances de h

$$a_+(x,z;h) \sim h^{-\frac{1}{4}} \sum_{j\geq 0} a_{+,j}(x,z)h^j \text{ dans } C^\infty(\mathbb{R}), \quad \forall z \in W(z_0). \tag{3.4.13}$$

Il est en effet possible de normaliser f_+, la méthode de la phase stationnaire déterminera alors les constantes $a_{+,j}(x_+,z)$. Un facteur $h^{-1/4}$ apparaîtra dans le développement asymptotique (3.4.13).

Lemme 3.4.4 *Soit $\chi_+ \in C_0^\infty(\widetilde{V}_+)$, indépendant de h, avec $\chi_+ = 1$ près de $\overline{\rho_+(\widetilde{W})}$. Alors*

$$\|(1-\chi_+)^w f_+\|_{L^2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(h^\infty), \tag{3.4.14}$$

c'est-à-dire que f_+ est microlocalement concentré près de $\overline{\rho_+(\widetilde{W})}$, et

$$\|((\tilde{\lambda}_+ - z)\#\chi_+)^w f_+\|_{L^2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(h^\infty). \tag{3.4.15}$$

Preuve. L'égalité (3.4.14) correspond au lemme 2.2.5 de [15]. Pour (3.4.15), il faut remarquer que

$$\begin{aligned}((\tilde{\lambda}_+ - z)\#\chi_+)^w f_+ =&(\chi_+\#q_+)^w(h\xi + g_+)^w f_+ \\ &+ (\tilde{\lambda}_+\#\chi_+ - \chi_+\#\tilde{\lambda}_+)^w f_+ + \mathcal{O}(h^\infty),\end{aligned}$$

dans $L^2(\mathbb{R})$. Le premier terme s'annule, alors que le second est $\mathcal{O}(h^\infty)$ grâce au fait que f_+ est microlocalement concentré près de $\overline{\rho_+(\widetilde{W})}$. □

Lemme 3.4.5 *Soit $\widehat{f}_+ := (f_+, 0, \ldots, 0) \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}^n)$. Et choisissons ϕ_+ dans $C_0^\infty(\pi_x(\widetilde{V}_+))$, indépendant de h et valant 1 près de $\pi_x(\rho_+(\widetilde{W}))$. Désignons par e_+ la fonction de $L^2(S^1)$*

$$\phi_+(U_+^{-1}\#\chi_+)^w \widehat{f}_+. \tag{3.4.16}$$

Alors e_+ est une solution BKW non normalisée, microlocalement concentrée à $\overline{\rho_+(\widetilde{W})}$ telle que

$$\|(P-z)e_+\|_{L^2(S^1)} = \mathcal{O}(h^\infty), \quad \frac{1}{C} \leq \|e_+\| \leq C, \tag{3.4.17}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de h.

Preuve. Puisque f_+ est microlocalement concentrée près de $\overline{\rho_+(\widetilde{W})}$, si deux opérateurs h-pseudodifférentiels, P_1 et P_2, ont leur symbole équivalent près de $\overline{\rho_+(\widetilde{W})}$ (on dit parfois que P_1 et P_2 sont microlocalement équivalents près de $\overline{\rho_+(\widetilde{W})}$) alors nous avons l'équivalence

$$P_1 f_+ = \mathcal{O}(h^\infty) \iff P_2 f_+ = \mathcal{O}(h^\infty).$$

Il résulte alors du corollaire 3.4.2 que $(P-z)\,\phi_+(U_+^{-1}\#\chi_+)^w$est microlocalement équivalent près de $\overline{\rho_+(\widetilde{W})}$ à

$$T := (U_+^{-1}\#\chi_+)^w \begin{pmatrix} ((\tilde{\lambda}_+ - z)\#\chi_+)^w & 0 \\ 0 & ((H_+ - z)\#\chi_+)^w \end{pmatrix}.$$

Aussi $T\widehat{f}_+ = \mathcal{O}(h^\infty)$ grâce à l'égalité (3.4.15), ce qui avec l'équivalence ci-dessus montre la formule (3.4.17). □

Nous allons maintenant voir l'action d'un opérateur pseudodifférentiel sur une fonction de type BKW. Le résultat qui suit se trouve dans [25],

Proposition 3.4.6 *Soit φ une fonction à valeurs complexes C^∞ dans un voisinage de x_0, satisfaisant*

$$\text{Im } \varphi \geq 0, \quad \text{Im } \varphi(x) \geq \text{Im } \varphi(x_0) = 0, \quad \varphi'(x_0) = \xi_0 \in \mathbb{R}. \tag{3.4.18}$$

Soit $u \in C_0^\infty(K)$ où K est un petit voisinage x_0 et $a(x,\xi) \in S(\mathbb{R}^2,1)$, à support compact inclus dans un voisinage de (x_0,ξ_0). Alors pour tout h

$$a^w(x, hD_x)(ue^{\frac{i}{h}\varphi})(x) = e^{\frac{i}{h}\varphi(x)} I(x;h) + r(x;h), \tag{3.4.19}$$

où $I(x;h)$ admet un développement en puissances de h de la forme

$$I(x;h) \sim I_0(x) + hI_1(x) \ldots, \; h \to 0, \tag{3.4.20}$$

et $r(x;h)$ vérifie $D_x^\alpha r = \mathcal{O}(h^N)$, pour tout α, N, uniformément en x.

Corollaire 3.4.7 *e_+ admet une expression de la forme*

$$e^{\frac{i}{h}\varphi_+(x,z)} I_+(x,z;h) + r(x;h), \quad I_+ \in \mathbb{M}_{n,1}, \tag{3.4.21}$$

où $I^i_+(x,z;h)$ est à support compact et admet un développement en puissances de h, localement uniformément en x dans $C^\infty(S^1)$,

$$I^i(x,z,h) \sim h^{1/4}(I^i_0(x,z) + hI^i_1(x,z) + \ldots) \tag{3.4.22}$$

où φ_+ a été introduit en (3.4.12) et $r(x;h)$ vérifie $D^\alpha_x r = \mathcal{O}(h^\infty)$, pour tout α, N, uniformément en x. e_+ est donc microlocalement concentré près de $(x_+(z), \xi_+(z))$.

Proposition 3.4.8 *Pour $P = hD_x + g_+$, $v \in L^2(\mathbb{R})$ et $v_+ \in \mathbb{C}$ le problème*

$$\begin{cases} Pu = v \\ \widetilde{R}_+ u = v_+ \end{cases}$$

avec

$$\widetilde{R}_+ u := \langle u, f_+ \rangle,$$

admet une solution unique

$$u = Fv + \widetilde{F}_+ v_+ \in H^1_{sc}(\mathbb{R})$$

où $\widetilde{F}_+ v_+ := v_+ f_+$, avec

$$\begin{aligned} &\|F\|_{L^2(\mathbb{R}) \to H^1_{sc}(R)} = \mathcal{O}(1/\sqrt{h}), \\ &\|\widetilde{F}_+\|_{\mathbb{C} \to H^1_{sc}(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(1). \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

De plus F ne propage pas les supports au sens où si $\psi_1, \psi_2 \in S(T^*\mathbb{R}, 1)$, indépendants de h, et à support disjoint, alors nous avons

$$\psi_1^\omega F \psi_2^\omega = \mathcal{O}(h^\infty) \text{ dans } \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), H^1_{sc}(\mathbb{R})).$$

Preuve. Correspond à la proposition 2.3.6 et au lemme 2.3.7 de [15]. □

Lemme 3.4.9 *Soit*

$$q_+ \# \widehat{q}_+ \sim 1 \text{ dans } S(V_+, 1).$$

Prenons $\chi_+, \widetilde{\chi}_+ \in C^\infty_0(\tilde{V}_+)$, indépendants de h, avec $\chi_+, \widetilde{\chi}_+ = 1$ près de $\overline{\rho_+(\widetilde{W}_+)}$, et tels que $\chi_+ \prec \widetilde{\chi}_+$, où $\psi \prec \phi$ signifie

$$\operatorname{supp}(\psi) \cap \operatorname{supp}(1 - \phi) = \emptyset. \tag{3.4.24}$$

Alors dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$

$$((\tilde{\lambda}_+ - z) \# \widetilde{\chi}_+)^w F (\widehat{q}_+ \# \chi_+)^w = \chi_+^w + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Preuve. Voir la page 96 de [15] (proposition 2.3.10). □

Proposition 3.4.10 *Posons pour $v \in L^2(\mathbb{R})$ et $v_+ \in \mathbb{C}$*

$$\widehat{R}_+ v = \langle v, \widehat{f}_+ \rangle, \quad \widehat{F}_+ v_+ = v_+ \widehat{f}_+. \tag{3.4.25}$$

Etant donné $\chi_+, \widetilde{\chi}_+, \widehat{\chi}_+$ dans $C_0^\infty(\widetilde{V}_+)$, indépendants de h et $z \in \widetilde{W}$, tels que $\chi_+, \widetilde{\chi}_+, \widehat{\chi}_+ = 1$ près de $\rho_+(\widetilde{W})$, avec $\chi_+ \prec \widetilde{\chi}_+ \prec \widehat{\chi}_+$, choisissons ϕ et $\widetilde{\phi}_+$ appartenant à $C^\infty(\pi_x(\widetilde{V}_+))$ indépendants de h et z, valant 1 près de $\pi_x(\rho_+(\widetilde{W}))$ et satisfaisant $\phi_+ \prec \widetilde{\phi}_+$. Soit

$$q_+ \# \widehat{q}_+ \sim 1 \text{ dans } S(V_+, 1) \tag{3.4.26}$$

$$H_+ \# \widehat{H}_+ \sim 1 \text{ dans } S(V_+, 1) \tag{3.4.27}$$

(on a convenu que $H_+ \equiv H_+ - z$ afin d'alléger les notations) et

$$M_+ = (U_+^{-1} \# \widehat{\chi}_+)^w \begin{pmatrix} F(\widehat{q}_+ \# \widetilde{\chi}_+)^w & 0 \\ 0 & (\widehat{H}_+ \# \widetilde{\chi}_+)^w \end{pmatrix} (U_+ \# \chi_+)^w. \tag{3.4.28}$$

Nous avons

$$\|\widetilde{\phi}_+ M_+ \phi_+\|_{L^2(S^1) \to H^1_{sc}(S^1)} = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h}}). \tag{3.4.29}$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} P - z \\ \widehat{R}_+ (\widehat{\chi}_+ \# U_+)^w \widetilde{\phi}_+ \end{pmatrix} \circ (\widetilde{\phi}_+ M_+ \phi_+ \quad \phi_+ (U_+^{-1} \# \chi_+)^w \widehat{F}_+) \tag{3.4.30}$$
$$= \begin{pmatrix} \widetilde{\phi}_+ \chi_+^w \phi_+ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(h^\infty),$$

et

$$\|\widehat{R}_+ (\widehat{\chi}_+ \# U_+)^w \widetilde{\phi}_+\|_{L^2(S^1) \to \mathbb{C}} = \mathcal{O}(1), \tag{3.4.31}$$

$$\|\phi_+ (U_+^{-1} \# \chi_+)^w \widehat{F}_+\|_{\mathbb{C} \to L^2(S^1)} = \mathcal{O}(1). \tag{3.4.32}$$

Remarquons que pour chaque $v_+ \in \mathbb{C}$

$$(\phi_+ (U_+^{-1} \# \chi_+)^w \widehat{F}_+)\, v_+ = v_+ e_+.$$

Preuve. Il résulte du corollaire 3.4.2 que

$$\begin{aligned}(P-z)\widetilde{\phi}_+M_+\phi_+ &= [P,\widetilde{\phi}_+]M_+\phi_+ + \mathcal{O}(h^\infty)\\ &+ \widetilde{\phi}_+(\widehat{\chi}_+\#U_+^{-1})^w \begin{pmatrix} ((\tilde{\lambda}_+ - z)\#\widehat{\chi}_+)^w & 0\\ 0 & (H_+\#\widehat{\chi}_+)^w \end{pmatrix}\\ &\begin{pmatrix} F(\widehat{q}_+\#\widetilde{\chi}_+)^w & 0\\ 0 & (\widehat{H}_+\#\widetilde{\chi}_+)^w \end{pmatrix}(U_+\#\chi_+)^w\phi_+. \quad (3.4.33)\end{aligned}$$

Puis le lemme 3.4.9 et la formule (3.4.27) entraînent que

$$(P-z)\tilde{\phi}_+M_+\phi_+ = \widetilde{\phi}_+(\widehat{\chi}_+\#U_+^{-1})^w\widetilde{\chi}_+^w(U_+\#\chi_+)^w\phi_+ + \mathcal{O}(h^\infty)$$

dans $\mathcal{L}(L^2(S^1))$. Comme $U_+^{-1}\#U_+ \sim 1$, le calcul symbolique donne alors l'égalité $(P-z)\widetilde{\phi}_+M_+\phi_+ = \widetilde{\phi}_+\chi_+^w\phi_+$.

Au lemme 3.4.5, correspond l'égalité

$$(P-z)\circ(\phi_+(U_+^{-1}\#\chi_+)^w\widehat{F}_+) = (P-z)e_+ = \mathcal{O}(h^\infty).$$

Puisque que $\widehat{f}_+$ est microlocalement concentré près de $\rho_+(\widetilde{W}_+)$ nous avons

$$\begin{aligned}(\widehat{R}_+(\widehat{\chi}_+\#U_+)^w\widetilde{\phi}_+)\circ(\phi_+(U_+^{-1}\#\chi_+)^w\widehat{F}_+)&\\ = \widehat{R}_+\,\widehat{\chi}_+^w(\phi_+\#\chi_+)^w\,\widehat{F}_+ + \mathcal{O}(h^\infty)&\\ = \langle\widehat{f}_+,\widehat{f}_+\rangle + \mathcal{O}(h^\infty)&\\ = 1+\mathcal{O}(h^\infty).&\end{aligned}$$

Il nous reste ensuite à démontrer une égalité pour avoir (3.4.30). On constate que

$$\begin{aligned}&(\widehat{R}_+(\widehat{\chi}_+\#U_+)^w\widetilde{\phi}_+)\circ(\widetilde{\phi}_+M_+\phi_+)\\ &= \widehat{R}_+\,\widehat{\chi}_+^w(\widetilde{\phi}_+\#\widehat{\chi}_+)^w\begin{pmatrix} F(\widehat{q}_+\#\widetilde{\chi}_+)^w & 0\\ 0 & (\widehat{H}_+\#\widetilde{\chi}_+)^w \end{pmatrix}(U_+\#\chi_+)^w\phi_+, \quad (3.4.34)\end{aligned}$$

et donc, comme $\widehat{f}_+$ est microlocalement concentré près de $\rho_+(\widetilde{W}_+)$

$$= \begin{pmatrix} \widetilde{R}_+F(\widehat{q}_+\#\widetilde{\chi}_+)^w & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}(U_+\#\chi_+)^w\phi_+ + \mathcal{O}(h^\infty). \quad (3.4.35)$$

Alors, puisque $\widetilde{R}_+ F = 0$ (proposition 3.4.8), nous obtenons que

$$(\widehat{R}_+(\widehat{\chi}_+ \# U_+)^w \widetilde{\phi}_+) \circ (\widetilde{\phi}_+ M_+ \phi_+) = \mathcal{O}(h^\infty),$$

ce qui conlut la preuve. □

Soit $f_- \in L^2(\mathbb{R})$ la solution normalisée de

$$(hD_x + g_-(x,z;h))^* f_- = (hD_x + \bar{g}_-(x,z;h)) f_- = 0. \tag{3.4.36}$$

Comme pour f_+, f_- de (3.4.36) a une expression de la forme

$$f_-(x,z;h) := a_-(x,z;h) e^{\frac{i}{h}\varphi_-(x,z)}, \quad \|f_-\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1, \tag{3.4.37}$$

la phase satisfaisant

$$\varphi_-(x_-,z) = 0, \quad \varphi_-'(x_-,z) = \xi_-, \quad \varphi_-(x,z) = -\int_{x_-}^{x} g_{-,0}(y,z)dy, \quad \text{Im } \varphi_- \geq 0. \tag{3.4.38}$$

L'amplitude possède un développement similaire à (3.4.13). Il est en effet possible de choisir f_- normée dans $L^2(\mathbb{R})$, la méthode de la phase stationnaire détermine alors les constantes $a_{-,j}(x_-)$. Un facteur $h^{-1/4}$ apparaîtra alors dans le développement asymptotique.

Lemme 3.4.11 *Soit $\chi_- \in C_0^\infty(\widetilde{V}_-)$, indépendant de h, avec $\chi_- = 1$ près de $\overline{\rho_-(\widetilde{W})}$.*

$$\|(1-\chi_-)^w f_-\|_{L^2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(h^\infty), \tag{3.4.39}$$

c'est-à-dire que f_- est microlocalement concentré près de $\overline{\rho_-(\widetilde{W})}$. Et

$$\|(((\tilde{\lambda}_- - z)\#\chi_-)^w)^* f_-\|_{L^2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(h^\infty). \tag{3.4.40}$$

Preuve. (3.4.39) correspond au lemme 2.2.7 de [15]. Pour (3.4.40), nous utilisons la factorisation

$$\begin{aligned}(((\tilde{\lambda}_- - z))^w \# \chi_-)^* f_- =& (\chi_- \# \bar{q}_-)^w (hD_x + g_-)^* f_- \\ &+ (\bar{\tilde{\lambda}}_- \# \chi_- - \chi_- \# \bar{\tilde{\lambda}}_-)^w f_- + \mathcal{O}(h^\infty),\end{aligned}$$

dans $L^2(S^1)$. Le premier terme s'annule et le deuxième terme est $\mathcal{O}(h^\infty)$ grâce à (3.4.39) appliqué avec un nouveau χ_- qui vaut 1 sur le support de l'ancien χ_-. □

Lemme 3.4.12 *Soit $\widehat{f}_- := (f_-, 0, \dots, 0) \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$. Choisissons φ_- appartennant à $C_0^\infty(\pi_x(\widetilde{V}_-))$, indépendant de h et valant 1 près de $\pi_x(\rho_-(\widetilde{W}))$. Désignons par e_- la fonction sur $L^2(S^1)$: $e_- = \phi_-(\chi_-\#U_-^*)^w \widehat{f}_-$. Alors e_- est une solution BKW non normalisée, microlocalement concentrée près de $\overline{\rho_-(\widetilde{W})}$ telle que*

$$\|(P-z)^* e_-\|_{L^2(S^1)} = \mathcal{O}(h^\infty), \quad \frac{1}{C} \leq \|e_-\| \leq C, \tag{3.4.41}$$

où $C > 0$ est indépendant de h.

Preuve. Du corollaire 3.4.2 on tire

$$(U_-^{-1})^* \# (P(x,\xi) - z)^* \# U_-^* \sim \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_-^*(x,\xi,h) - \bar{z} & 0 \\ 0 & H_-^*(x,\xi,h) - \bar{z} \end{pmatrix}$$

dans $S(V_-, 1)$, $*$ désigne l'adjoint. On est ainsi ramené au cas du lemme 3.4.5. □

Proposition 3.4.13 *Pour $P = hD_x + g_-(x), v \in L^2(\mathbb{R})$ le problème*

$$Pu + \widetilde{R}_- u_- = v$$

avec

$$\widetilde{R}_- u_- := u_- f_-, \quad u_- \in \mathbb{C},$$

admet une solution unique dans $H^1_{sc}(\mathbb{R}) \times \mathbb{C}$, donnée par

$$\begin{aligned} u &= Gv, \\ u_- &= \widetilde{G}_- v := \langle v, f_- \rangle, \end{aligned} \tag{3.4.42}$$

avec

$$\|G\|_{L^2(\mathbb{R}) \to H^1_{sc}(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(1/\sqrt{h}). \tag{3.4.43}$$

De plus G ne propage pas les supports au sens où si $\psi_1, \psi_2 \in S(T^*\mathbb{R}, 1)$ indépendants de h, et à support disjoint alors nous avons

$$\psi_1^\omega G \psi_2^\omega = \mathcal{O}(h^\infty) \text{ dans } \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), H^1_{sc}(\mathbb{R})).$$

Preuve. Correspond à la proposition 2.3.8 et au lemme 2.3.9 de [15]. □

Lemme 3.4.14 *Soit*

$$q_-\#\widehat{q}_- \sim 1 \text{ dans } S(V_-,1),$$

et $\chi_-, \widetilde{\chi}_- \in C_0^\infty(\widetilde{V}_+)$, *indépendants de* h *et* $z \in \widetilde{W}$, *vérifiant* $\chi_-, \widetilde{\chi}_- = 1$ *près de* $\rho_-(\widetilde{W})$, *et* $\chi_- \prec \widetilde{\chi}_-$. *Alors dans* $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$

$$((\tilde{\lambda}_- - z)\#\widetilde{\chi}_-)^w(\widehat{q}_-\#\widetilde{\chi}_-)^w G\chi_-^w + \widetilde{R}_-\widetilde{G}_- = \chi_-^w + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Preuve. Voir la page 96 de [15] (proposition 2.3.10). □

Proposition 3.4.15 *Posons pour tout* $v_- \in \mathbb{C}$ *et* $v \in L^2(\mathbb{R})$

$$\widehat{R}_- v_- = v_- \widehat{f}_-, \quad \widehat{G}_- v = \langle v, \widehat{f}_- \rangle. \tag{3.4.44}$$

Prenons $\chi_-, \widetilde{\chi}_-, \widehat{\chi}_-$ *dans* $C_0^\infty(\widetilde{V}_-)$, *indépendants de* h *et* $z \in \widetilde{W}$, *tels que* $\chi_-, \widetilde{\chi}_-, \widehat{\chi}_- = 1$ *près de* $\rho_-(\widetilde{W})$, *avec* $\chi_- \prec \widetilde{\chi}_- \prec \widehat{\chi}_-$. *Choisissons* ϕ_- *et* $\widetilde{\phi}_-$ *dans* $C_0^\infty(\pi_x(\widetilde{V}_-))$, *indépendants de* h *et* z, *valant 1 près de* $\pi_x(\rho_-(\widetilde{W}))$, *avec* $\phi_- \prec \widetilde{\phi}_-$. *Soit*

$$q_-\#\widehat{q}_- \sim 1 \text{ dans } S(V_-,1) \tag{3.4.45}$$

$$H_-\#\widehat{H}_- \sim 1 \text{ dans } S(V_-,1), \tag{3.4.46}$$

(on a convenu que $H_- \equiv H_- - z$*) et posons*

$$M_- = (U_-^{-1}\#\widehat{\chi}_-)^w \begin{pmatrix} (\widehat{q}_-\#\widetilde{\chi}_-)^w G & 0 \\ 0 & (\widehat{H}_-\#\widetilde{\chi}_-)^w \end{pmatrix} (U_-\#\chi_-)^w \tag{3.4.47}$$

On a

$$\|\widetilde{\phi}_- M_- \phi_-\|_{H^1_{sc}(S^1)\to L^2(S^1)} = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h}}).$$

Alors,

$$(P - z \quad \widetilde{\phi}_-(\widehat{\chi}_-\#U_-^{-1})^w \widehat{R}_-) \circ \begin{pmatrix} \widetilde{\phi}_- M_- \phi_- \\ \widehat{G}_-(U_-\#\chi_-)^w \phi_- \end{pmatrix} = \widetilde{\phi}_- \chi_-^w \phi_- + \mathcal{O}(h^\infty), \tag{3.4.48}$$

où

$$\|\widetilde{\phi}_-(\widehat{\chi}_-\#U_-^{-1})^w \widehat{R}_-\|_{\mathbb{C}\to L^2(S^1)} = \mathcal{O}(1), \tag{3.4.49}$$

$$\|\widehat{G}_-(U_-\#\chi_-)^w \phi_-\|_{L^2(S^1)\to\mathbb{C}} = \mathcal{O}(1). \tag{3.4.50}$$

Remarquons que, pour chaque $v \in L^2(S^1;\mathbb{C}^n)$

$$(\widehat{G}_-(U_-\#\chi_-)^w\phi_-)\,v = \langle v, e_-\rangle_{L^2(S^1)} \tag{3.4.51}$$

avec la convention que $\langle u,v\rangle_{L^2(S^1)} = \int_0^{2\pi} u\bar{v}dx$ *pour* $u,v \in L^2(S^1;\mathbb{C})$.

Preuve. Observons que

$$\begin{aligned}(P-z)\widetilde{\phi}_-M_-\phi_- &= [P,\widetilde{\phi}_-]M_-\phi_- + \mathcal{O}(h^\infty)\\ &+ \widetilde{\phi}_-(\widehat{\chi}_-\#U_-^{-1})^w\begin{pmatrix}((\tilde{\lambda}_- - z)\#\widehat{\chi}_-)^w & 0\\ 0 & (H_-\#\widehat{\chi}_-)^w\end{pmatrix}\\ &\begin{pmatrix}(\widehat{q}_-\#\widetilde{\chi}_-)^wG & 0\\ 0 & (\widehat{H}_-\#\widetilde{\chi}_-)^w\end{pmatrix}(U_-\#\chi_-)^w\phi_-, \end{aligned}\tag{3.4.52}$$

et

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\phi}_-(\widehat{\chi}_-\#U_-^{-1})^w\widehat{R}_-)\circ(\widehat{G}_-(U_-\#\chi_-)^w\phi_-)\\ &\qquad = \widetilde{\phi}_-(\widehat{\chi}_-\#U_-^{-1})^w\begin{pmatrix}\widetilde{R}_-\widetilde{G}_- & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(U_-\#\chi_-)^w\phi_-.\end{aligned}\tag{3.4.53}$$

Nous additionnons (3.4.52) et (3.4.53), le facteur conjugué à gauche par $\widetilde{\phi}_-(\widehat{\chi}_-\#U_-^{-1})^w$ et à droite par $(U_-\#\chi_-)^w\phi_-$ est donné par

$$\begin{pmatrix}((\tilde{\lambda}_- - z)\#\widehat{\chi}_-)^w(\widehat{q}_-\#\widetilde{\chi}_-)^wG + \widetilde{R}_-\widetilde{G}_- & 0\\ 0 & (H_-\#\widehat{\chi}_-)^w(\hat{H}_-\#\widetilde{\chi}_+)^w\end{pmatrix}.$$

Donc, grâce à (3.4.46) et au lemme 3.4.14, l'expression (3.4.48) se réduit à

$$\widetilde{\phi}_-(\widehat{\chi}_-\#U_-^{-1})^w\widetilde{\chi}_-^w(U_-\#\chi_-)^w\phi_- + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Nous avons immédiatement l'égalité demandée puisque $U_-^{-1}\#U_- \sim 1$. □

3.4.2 Résolution du problème de Grushin

Sans perte de généralité on suppose que z_0 est une valeur propre simple de $p(\rho^j)$, pour tout $1 \le j \le \beta$ (β est la valeur constante de $\beta(z)$ sur une composante connexe de $\Lambda(p)$). Soient $\widetilde{U}_\pm^j \subset \widetilde{V}_\pm^j$ des voisinages de $\rho_\pm^j$ tels que $\overline{\widetilde{U}_\pm^j} \cap \overline{\widetilde{U}_\pm^k} = \emptyset$, avec $j \neq k$, et

$$\chi_\pm^j \in C_0^\infty(\widetilde{U}_\pm^j) \text{ indépendantes de } h,\ \chi_\pm^j = 1 \text{ près de } \rho_\pm^j(\widetilde{W}),\tag{3.4.54}$$

$$\chi + \sum_j (\chi_+^j + \chi_-^j) = 1 \text{ dans } T^*S^1, \tag{3.4.55}$$

$$\phi_\pm^j \in C_0^\infty(\pi_x(\widetilde{U}_\pm^j)), \text{ indépendantes de } h,\ \phi_\pm^j = 1 \text{ près de } \pi_x(\rho_\pm^j(\widetilde{W})).$$

Et, soient $\chi_\pm^j \prec \widetilde{\chi}_\pm^j \prec \widehat{\chi}_\pm^j \in C_0^\infty(\widetilde{U}_\pm^j)$ satisfaisant $\widetilde{\chi}_\pm^j, \widehat{\chi}_\pm^j = 1$ près de $\rho_\pm^j(\widetilde{W})$, et $\phi_\pm^j \prec \widetilde{\phi}_\pm^j$ tels que $\widetilde{\phi}_\pm^j = 1$ près de $\pi_x(\rho_\pm^j)$. Prenons aussi ψ_1 et ψ_2 à support dans un intervalle de longueur $< 2\pi$ tel que $\psi_1 + \psi_2 = 1$ dans S^1, avec $\psi_1 \prec \widetilde{\psi}_1$ et $\psi_2 \prec \widetilde{\psi}_2$.

Théorème 3.4.16 *Pour tout z dans $\widetilde{W}(z_0)$,*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P - z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H_{sc}^m(S^1; \mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^\beta \to L^2(S^1; \mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^\beta,$$

avec

$$(R_+ u)_j := \widehat{R}_+^j \, (\widehat{\chi}_+^j \# U_+^j)^w \, \widetilde{\phi}_+^j u,$$

et

$$R_- u_- := \sum_{1 \le j \le \beta} \widetilde{\phi}_-^j \, (\widehat{\chi}_-^j \# (U_-^j)^{-1})^w \, \widehat{R}_-^j u_-^j.$$

Soit

$$\mathcal{E}_0 = \begin{pmatrix} E_0 & F_+ \\ G_- & 0 \end{pmatrix} : L^2 \times \mathbb{C}^\beta \to H_{sc}^m \times \mathbb{C}^\beta,$$

où

$$E_0 = \widetilde{\psi}_1 \, (\widetilde{\psi}_1 \widetilde{\chi} \# M_1 \# \chi \psi_1)^w \, \psi_1 + \widetilde{\psi}_2 \, (\widetilde{\psi}_2 \widetilde{\chi} \# M_2 \# \chi \psi_2)^w \, \psi_2 + \sum_{1 \le j \le \beta} (\widetilde{\phi}_+^j M_+^j \phi_+^j + \widetilde{\phi}_-^j M_-^j \phi_-^j), \tag{3.4.56}$$

et M_i est une paramétrique de $P(x,\xi) - z$ dans la bande ouverte $\Omega_i \times \mathbb{R}$ ôtée des points $\rho_\pm^j$, avec Ω_i un voisinage de $\operatorname{supp} \psi_i$

$$M_i \in S(\Omega \times \mathbb{R}, \langle \xi \rangle^{-m}), \quad (P - z) \# M_i \sim 1 \text{ dans } S(\Omega_i \times \mathbb{R}, 1), \tag{3.4.57}$$

Nous posons

$$v_+ \in \mathbb{C}^\beta, \quad F_+ v_+ = \sum_{1 \le j \le \beta} \phi_+^j ((U_+^j)^{-1} \# \chi_+^j)^w \widehat{F}_+^j v_+^j = \sum v_+^k e_+^k \tag{3.4.58}$$

et

$$\forall\, 1 \leq j \leq \beta, \quad (G_- v)_j = \widehat{G}^j_-(U^j_- \# \chi^j_-)^w \phi^j_- v = \langle v, e^j_- \rangle_{L^2(S^1)}. \tag{3.4.59}$$

Alors

$$\mathcal{P}\mathcal{E}_0 = 1 - K$$

avec $K = \mathcal{O}(h^\infty)$ *dans* $\mathcal{L}(L^2(S^1) \times \mathbb{C}^\beta, L^2(S^1) \times \mathbb{C}^\beta)$.

Preuve. Il reste à vérifier que $R_+ E_0 = \mathcal{O}(h^\infty)$, ce qui est clair. □

En inversant $1 - K$, pour h assez petit, on peut trouver $\mathcal{E}$, un inverse exact à droite de $\mathcal{P}$ qui est donné par la série de Neumann

$$\mathcal{E}_0 \sum_{j \geq 0} K^j.$$

De plus, puisque $\mathcal{P}$ est de Fredholm d'indice 0, alors $\mathcal{E}$ est aussi un inverse exact à gauche. Nous avons donc le

Corollaire 3.4.17 *Soit* $z_0 \in \Lambda(p)$. *Il existe un voisinage* $\widetilde{W}(z_0)$ *de* z_0 *tel que pour tout* z *dans* $\widetilde{W}(z_0)$, *il existe*

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix} : L^2(S^1) \times \mathbb{C}^\beta \to H^m_{sc}(S^1) \times \mathbb{C}^\beta, \tag{3.4.60}$$

vérifiant

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(1/\sqrt{h}) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(h^\infty) \end{pmatrix},$$

tel que $\mathcal{P}\mathcal{E} = 1_{L^2 \times \mathbb{C}^\beta}$ *et* $\mathcal{E}\mathcal{P} = 1_{H^m_{sc} \times \mathbb{C}^\beta}$. *On peut choisir*

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{O}(h^\infty), \tag{3.4.61}$$

où $\mathcal{E}_0$ *a été introduit dans le théorème 3.4.16.*

3.5 Perturbations aléatoires

Nous considérons une perturbation aléatoire Q_ω définie sur l'espace de probabilité $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, Q_ω étant un opérateur différentiel d'ordre inférieur à m,

$$Q_\omega = \sum_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} Q_\alpha(x)(hD_x)^\alpha, \quad 0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq m - 1. \tag{3.5.1}$$

Ici, Q_α est une matrice $n \times n$, où chaque entrée est une série de Fourier aléatoire

$$Q_\alpha^{\ell,m}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} q_{\alpha,k}^{\ell,m} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{3.5.2}$$

Les variables aléatoires complexes $q_{\alpha,k}^{\ell,m}$ sont choisies indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0,(\sigma_{\alpha,k}^{l,m})^2)$. La variance peut dépendre de h. Les coefficients satisfont l'hypothèse 3.1.4.

On va, pour commencer, étudier la norme de la perturbation, pour cela nous aurons besoin de rappeler la proposition suivante (section 6 [16] ou 2.5.4 pour une preuve plus simple).

Proposition 3.5.1 *Soit $(Y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables complexes indépendantes de loi $Y_i \sim \mathcal{N}(0,\sigma_i^2)$. Si $\sum \sigma_i^2 < \infty$, alors on a*

$$\forall x > 0, \quad \mathbb{P}(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |Y_i|^2 \geq x) \leq \exp[\frac{C_0}{2s_1}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sigma_i^2 - \frac{x}{2s_1}].$$

Ici $s_1 = \max \sigma_i^2$, et $C_0 > 0$.

Corollaire 3.5.2 *Soit $(Y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables complexes indépendantes de loi $Y_i \sim \mathcal{N}(0,\sigma_i^2)$. Si $\sum \sigma_i < \infty$, alors il existe $C_0 > 0$ tel que*

$$\forall x > 0, \quad \mathbb{P}(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |Y_i| \geq x) \leq \exp\left[\frac{C_0}{2\|\sigma\|_\infty}\|\sigma\|_1 - \frac{x^2}{2\|\sigma\|_\infty\|\sigma\|_1}\right],$$

où $\|\cdot\|_p$ désigne la norme ℓ^p.

Preuve. Par Cauchy-Schwarz

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|Y_i| \geq x\right) \leq \mathbb{P}\left((\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sigma_i)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|\sqrt{\sigma_i}X_i|^2\right)^{1/2} \geq x\right),$$

où $Y_i = \sigma_i X_i$, $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$. On utilise la proposition 3.5.1 pour achever la preuve. □

La norme de $\|Q_\omega\|_{H^m_{sc}(S^1)\to L^2(S^1)}$ est majorée par

$$C \sup_{\alpha_0\leq\alpha\leq\alpha_1,\, x\in S^1} \|Q_\alpha(x)\| \leq \widetilde{C} \sup_{\ell,m,\alpha} \|Q_\alpha^{\ell,m}(x)\|_{L^\infty}, \tag{3.5.3}$$

où $C, \widetilde{C}$ sont des constantes strictement positives et $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Proposition 3.5.3 *On suppose admise l'hypothèse 3.1.4. Il existe $C > 0$ tel que pour chaque $x > 0$, et $0 < h \ll 1$, on ait*

$$\mathbb{P}(\|Q_\omega\|_{H^m_{sc}(S^1)\to L^2(S^1)} \leq x) \geq 1 - \exp(C - \frac{x^2}{C}). \tag{3.5.4}$$

Q_ω est donc bornée presque sûrement.

Preuve. Majorant $\|Q^{\ell,m}_\alpha(x)\|_{L^\infty}$ par la somme des valeurs absolues $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |q^{\ell,m}_{\alpha,k}|$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\|Q\|_{H^m_{sc}(S^1)\to L^2(S^1)} \geq x) &\leq \mathbb{P}(\sum_{\alpha,\ell,m} \|Q^{\ell,m}_\alpha(x)\|_{L^\infty} \geq \frac{x}{\widetilde{C}}) \\ &\leq \mathbb{P}(\sum_{\alpha,\ell,m,k} |q^{\ell,m}_{\alpha,k}| \geq \frac{x}{\widetilde{C}}).\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Nous utilisons le corollaire 3.5.2, (3.5.5) devient alors

$$\leq \exp\left[\frac{C_0}{2\sup \sigma^{\ell,m}_{\alpha,k}} \sum \sigma^{\ell,m}_{\alpha,k} - \frac{x^2}{2\widetilde{C}^2 \sup(\sigma^{\ell,m}_{\alpha,k}) \sum \sigma^{\ell,m}_{\alpha,k}}\right].$$

Puis on conclut avec l'hypothèse 3.1.4. □

Corollaire 3.5.4 *On suppose que l'hypothèse 3.1.4 est vérifiée. Il existe alors $C > 0$ tel que pour tous $0 < h \ll 1$*

$$\mathbb{P}(\|Q_\omega\|_{H^m_{sc}(S^1)\to L^2(S^1)} \leq 1/\sqrt{h}) \geq 1 - Ce^{-1/(Ch)}.$$

Dans la suite l'hypothèse 3.1.4 est satisfaite.

Proposition 3.5.5 *Soit $N_0 \gg 1$. Soit $h^{N_0} \leq \delta \ll h$ un paramètre de perturbation et z_0 dans $\Lambda(p)$. Il existe un voisinage $W(z_0)$ de z_0 inclus dans $\Lambda(p)$ tel que pour tout z dans $W(z_0)$,*

$$\mathcal{P}^\delta = \begin{pmatrix} P - z - \delta Q & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix}$$

avec une probabilité

$$\geq 1 - Ce^{-1/(Ch)}$$

est continu $H^m_{sc}(S^1) \times \mathbb{C}^\beta \to L^2(S^1) \times \mathbb{C}^\beta$ *et admet un inverse* $\mathcal{E}^\delta$ *de la forme*

$$\mathcal{E}^\delta = \mathcal{E}^0 + \begin{pmatrix} \sum_{j\geq 1} E(\delta QE)^j & \sum_{j\geq 1}(E\delta Q)^j E_+ \\ \sum_{j\geq 1} E_-(\delta QE)^j & \sum_{j\geq 1} E_-(\delta QE)^{j-1}(\delta QE_+) \end{pmatrix} \tag{3.5.6}$$

$$= \mathcal{E}^0 + \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\frac{\delta}{h}) & \mathcal{O}(\frac{\delta}{\sqrt{h}}) \\ \mathcal{O}(\frac{\delta}{\sqrt{h}}) & \mathcal{O}(\delta) \end{pmatrix}. \tag{3.5.7}$$

Preuve. Nous avons $\mathcal{P}^\delta \mathcal{E} = 1 + K$ où

$$K = \begin{pmatrix} \delta QE & \delta QE_+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il existe $C > 0$ tel que avec une probabilité supérieure à $1 - Ce^{-1/(Ch)}$ on ait $\|Q\|_{H^m_{sc} \to L^2} \leq 1/\sqrt{h}$, impliquant

$$\|K\| < C\delta \|Q\| \|E\| \ll 1.$$

□

Dans la suite, on suppose que $\|Q\|_{H^m_{sc} \to L^2} \leq 1/\sqrt{h}$, et $\delta \ll h$.

Remarque 3.5.6 Dans cette section et les suivantes, le produit scalaire est pris S^1 **avec la convention que** $\langle u, v\rangle = \int_0^{2\pi} u\bar{v}$ **si** $u, v \in L^2(S^1, \mathbb{C})$.

Un développement perturbatif de E^δ_{-+} donne

$$E^\delta_{-+} = E_{-+} + \delta E^1_{-+} + \frac{1}{h}\mathcal{O}(\frac{\delta^2}{\sqrt{h}}), \quad E^1_{-+} := E_- Q E_+. \tag{3.5.8}$$

Rappelons que $E_{-+} = \mathcal{O}(h^\infty)$. Nous remplaçons $E_\pm$ par les expressions établies au théorème 3.4.16, pour obtenir

$$(E^1_{-+})_{i,j} = (G_- Q F_+)_{i,j} + \mathcal{O}(h^\infty) = \langle Q e^j_+, e^i_-\rangle + \mathcal{O}(h^\infty). \tag{3.5.9}$$

Par suite, si $\frac{1}{h}\frac{\delta^2}{\sqrt{h}}$ est minoré par une puissance de h, alors nous avons

$$\det E^\delta_{-+} = \delta^\beta \sum_{\pi \in S_n} (\prod_j \langle Q e^{\pi(j)}_+, e^j_-\rangle (\mathrm{sign}(\pi)) + \mathcal{O}(1) \left(\frac{\delta}{h}\right) \left(\frac{\delta}{\sqrt{h}}\right)^\beta. \tag{3.5.10}$$

Puisque $\partial_{\bar z}(\mathcal{PE}) = 0$, nous avons

$$\partial_{\bar z} E_{-+} = -E_{-+}(\partial_{\bar z} R_+)E_+ - E_-(\partial_{\bar z} R_-)E_{-+}. \tag{3.5.11}$$

Il est bien connu que

$$\partial_{\bar z} \det E_{-+} = \mathrm{tr}((\partial_{\bar z} E_{-+})E_{-+}^{-1}) \det E_{-+}. \tag{3.5.12}$$

Soit encore, grâce à (3.5.11) et la cyclicité de la trace,

$$\begin{aligned} \partial_{\bar z} \det E_{-+} &= -\mathrm{tr}((\partial_{\bar z} R_+)E_+ + E_-(\partial_{\bar z} R_-)) \det E_{-+} \\ &=: -k_0(z) \det E_{-+}(z). \end{aligned} \tag{3.5.13}$$

Dès lors, si on choisit une solution de l'équation

$$\frac{1}{h}\partial_{\bar z} l_0 = k_0, \quad l_0(z) = \frac{h}{\pi}\int_{W(z_0)} \frac{k_0(z')}{z - z'} d\mathrm{Re} z' d\mathrm{Im} z' \tag{3.5.14}$$

dans un voisinage de $W(z_0)$, nous obtenons une fonction $e^{l_0/h} \det E_{-+}$ holomorphe avec les mêmes zéros que $\det E_{-+}$ dans $W(z_0)$.

Proposition 3.5.7 $\Delta \mathrm{Re}\, l_0(z)$, *défini sur* $W(z_0)$, *est strictement sousharmonique et*

$$(\Delta \mathrm{Re}\, l_0(z) + \mathcal{O}(h))\, d\mathrm{Re}\, z \wedge d\mathrm{Im}\, z = \sum_{1 \le j \le \beta} (d\xi_-^j \wedge dx_-^j - d\xi_+^j \wedge dx_+^j). \tag{3.5.15}$$

Preuve. Rappelons $\Delta := 4\partial_z \partial_{\bar z}$. Nous avons montré que

$$\frac{1}{h}\partial_{\bar z} l_0 = k_0(z) = \sum_{1 \le j \le \beta} ((\partial_{\bar z} R_+)E_+)_{j,j} + (E_-(\partial_{\bar z} R_-))_{j,j}.$$

Reprenant les notations du théorème 3.4.16, nous avons

$$\begin{aligned} ((\partial_{\bar z} R_+)E_+)_{j,j} &= (\partial_{\bar z} \widehat{R}_+^j)(\widehat{\chi}_+^j \# U_+^j)^w \widetilde{\phi}_+^j \circ \phi_+^j ((U_+^j)^{-1} \# \chi_+^j)^w \widehat{F}_+^j + \mathcal{O}(h^\infty) \\ &= \langle (\widehat{\chi}_+^j)^w (\phi_+^j \# \chi_+^j)^w \widehat{f}_+^j, \partial_z \widehat{f}_+^j \rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \mathcal{O}(h^\infty) = \langle \widehat{f}_+^j, \partial_z \widehat{f}_+^j \rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \mathcal{O}(h^\infty) \\ &= \langle f_+^j, \partial_z f_+^j \rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \mathcal{O}(h^\infty), \end{aligned} \tag{3.5.16}$$

puisque $\widehat{f}_+$ est microlocalement concentré près de $\rho_+(W(z_0))$. Et similairement, nous obtenons

$$(E_-(\partial_{\bar z} R_-))_{j,j} = \langle \partial_{\bar z} f_-^j, f_-^j \rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \mathcal{O}(h^\infty). \tag{3.5.17}$$

Soit, finalement,

$$k_0(z) = \sum_{1\le j\le\beta} \langle f_+^j, \partial_z f_+^j\rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \langle \partial_{\bar z} f_-^j, f_-^j\rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \mathcal{O}(h^\infty). \tag{3.5.18}$$

Rappelons que f_+ est normée sur $L^2(\mathbb{R})$ et s'écrit

$$f_+ = h^{-1/4} a_+(x,z,h) e^{i\varphi_+/h},$$

où a_+ admet un développement en puissances de h de la forme

$$a_{+,0}(x,z) + h a_{+,1}(x,z) + \ldots, \quad h \to 0,$$

et la phase vérifie les formules (3.4.12). On a rapidement vu à la section 4, en appliquant le lemme de la phase stationnaire, que $\|f_+\|$ admet un développement asymptotique du type $\|f_+\| \sim f_0 + h f_1 + \ldots$, $f_j \in \mathbb{C}, h \to 0$. Et, comme f_+ est normalisé, il vient que $f_0 = 1$ et $f_k = 0$ pour $k > 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} h\langle f_+^j, \partial_z f_+^j\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = {} & \langle a_+ e^{i\varphi_+/h}, i(\partial_z\varphi_+)(x,z)\, a_+ e^{i\varphi_+/h}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ & + h\langle a_+ e^{i\varphi_+/h}, (\partial_z a_+)\, a_+ e^{i\varphi_+/h}\rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{3.5.19}$$

On fait alors l'observation suivante : soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$; si on peut appliquer le lemme de la phase stationnaire à $\int e^{i\varphi/h} a$, le développement en puissances de h étant $h^{1/2}(I_0 + hI_1 + \ldots)$, $h \to 0$, et x_0 étant supposé le point critique non dégénéré dans le support de a, alors pour b dans $C^\infty(\mathbb{R})$, nous avons $\int e^{i\varphi(x)}(ab)(x)\,dx \sim h^{1/2}(I_0\, b(x_0) + \mathcal{O}(h))$. Dès lors, puisque $f_0 = 1$, nous avons

$$h\langle a_+ e^{i\varphi_+/h}, i(\partial_z\varphi_+)(x,z)\, a_+ e^{i\varphi_+/h}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = -i\,\overline{(\partial_z\varphi_+)(x_+(z),z)} + \mathcal{O}(h),$$

et

$$h\langle a_+ e^{i\varphi_+/h}, (\partial_z a_+)\, a_+ e^{i\varphi_+/h}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(h).$$

Soit $\langle \partial_{\bar z} f_-^j, f_-^j\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = -i\,\overline{(\partial_z\varphi_+)(x_+(z),z)} + \mathcal{O}(h)$. On montre, de même, que

$$\langle \partial_{\bar z} f_-^j, f_-^j\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = i(\partial_{\bar z}\varphi_-)(x_-(z),z) + \mathcal{O}(h).$$

Il ne reste alors plus qu'à achever la preuve avec le

Lemme 3.5.8 *Soit $\varphi_+(x,z)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{C})$ et vérifiant pour tout z*

$$\varphi_+(x_+(z),z)=0,\quad (\partial_x\varphi_+)(x_+(z),z)=\xi_+(z)\in\mathbb{R}, \tag{3.5.20}$$

$$\lambda_+(x_+,\xi_+)-z=0, \tag{3.5.21}$$

alors pour tout z,

$$4\,\mathrm{Im}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{(\partial_z\varphi_+)(x_+(z),z)}\right)(z)\,d\mathrm{Re}\,z\wedge d\mathrm{Im}\,z=-d\xi_+\wedge dx_+. \tag{3.5.22}$$

Preuve. (On a un lemme similaire avec φ_-.) Rappelons que

$$-\frac{1}{2i}dz\wedge d\bar z=d\mathrm{Re}\,z\wedge d\mathrm{Im}\,z. \tag{3.5.23}$$

Commençons par remarquer que, avec $\lambda\equiv\lambda_+$ (Pour simplifier, on n'écrira pas l'indice dans φ_+.)

$$\begin{pmatrix}\lambda'_x & \lambda'_\xi\\ \bar\lambda'_x & \bar\lambda'_\xi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_z x_+\\ \partial_z\xi_+\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \tag{3.5.24}$$

C'est-à-dire après inversion de la matrice carrée dont le déterminant est $\{\bar\lambda,\lambda\}$,

$$\frac{1}{\{\bar\lambda,\lambda\}}\begin{pmatrix}\bar\lambda'_\xi & -\lambda'_\xi\\ -\bar\lambda'_x & \lambda'_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_z x_+\\ \partial_z\xi_+\end{pmatrix}. \tag{3.5.25}$$

Nous en tirons les relations suivantes

$$\partial_z x_+=\frac{1}{\{\bar\lambda,\lambda\}}\bar\lambda'_\xi,\quad \partial_{\bar z}x_+=-\frac{1}{\{\bar\lambda,\lambda\}}\lambda'_\xi, \tag{3.5.26}$$

et

$$\partial_z\xi_+=-\frac{1}{\{\bar\lambda,\lambda\}}\bar\lambda'_x,\quad \partial_{\bar z}\xi_+=\frac{1}{\{\bar\lambda,\lambda\}}\lambda'_x. \tag{3.5.27}$$

De l'équation $\lambda(x,\varphi'_x(x,z))-z=0$, il vient

$$\lambda'_\xi(x,\varphi'_x(x,z))\varphi''_{x,\bar z}(x,z)=0,\ \text{soit}\ \varphi''_{x,\bar z}=0, \tag{3.5.28}$$

et

$$0=\lambda'_x(x,\varphi'_x)+\lambda'_\xi(x,\varphi'_x)\varphi''_{x,x},\ \text{soit}\ \varphi''_{x,x}=-\frac{\lambda'_x}{\lambda'_\xi}(x,\varphi'_x). \tag{3.5.29}$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'égalité (3.5.22). Nous avons facilement

$$\begin{aligned}\Gamma(z) := \mathrm{Im}\,\frac{\partial}{\partial z}\Big(\overline{(\partial_z\varphi)}(x_+(z),z)\Big)(z) &= -\mathrm{Im}\,\frac{\partial}{\partial \bar z}\Big((\partial_z\varphi)(x_+(z),z)\Big)(z)\\ &= -\mathrm{Im}\,(\varphi''_{x,z}(x_+,z)\,\partial_{\bar z}x_+ + \varphi''_{z,\bar z}(x_+,z))\end{aligned}$$

et, aussi sous l'hypothèse $\varphi(x_+,z)=0$,

$$\begin{aligned}\partial_{\bar z}(\varphi(x_+,z)) =&\varphi'_x(x_+,z)\,\partial_{\bar z}x_+ + \varphi'_{\bar z}(x_+,z) = 0,\\ \partial_z\partial_{\bar z}(\varphi(x_+,z)) =&\varphi'_x(x_+,z)\,\partial_z\partial_{\bar z}x_+ + \varphi''_{x,z}(x_+,z)\,\partial_{\bar z}x_+ + \varphi''_{x,x}(x_+,z)\,|\partial_z x_+|^2\\ &+ \varphi''_{x,\bar z}(x_+,z)\,\partial_z x_+ + \varphi''_{z,\bar z}(x_+,z).\end{aligned}$$

Par hypothèse, le terme $\varphi'_x(x_+,z)\partial_z\partial_{\bar z}x_+$ est réel. Et donc, regroupant tout ce qui précède, nous obtenons

$$\begin{aligned}\Gamma(z) =&\mathrm{Im}\ (\varphi''_{x,\bar z}(x_+,z)\,\partial_z x_+) + |\partial_z x_+|^2\ \mathrm{Im}\ \varphi''_{x,x}(x_+,z)\\ =&-\frac{|\lambda'_\xi|^2}{|\{\lambda,\bar\lambda\}|^2}\mathrm{Im}\ \left(\frac{\lambda'_x}{\lambda'_\xi}\right) = -\frac{1}{|\{\lambda,\bar\lambda\}|^2}\mathrm{Im}\ \lambda'_x\bar\lambda'_\xi\\ =&-\frac{1}{|\{\lambda,\bar\lambda\}|^2}\frac{\{\bar\lambda,\lambda\}}{2i} = -\frac{\{\lambda,\bar\lambda\}}{\{\lambda,\bar\lambda\}^2\,2i} = \frac{-1}{2i\{\lambda,\bar\lambda\}},\end{aligned}$$

car $|\{\lambda,\bar\lambda\}|^2 = -\{\lambda,\bar\lambda\}^2$. Le côté gauche de (3.5.22) $= \frac{-2}{i\{\lambda,\bar\lambda\}}d\mathrm{Re}z\wedge d\mathrm{Im}z$. Pour finir, un calcul direct, au moyen de (3.5.26) et (3.5.27), donne $d\xi_+\wedge dx_+ = \frac{1}{\{\lambda,\bar\lambda\}}dz\wedge d\bar z$. □□

Pour le problème perturbé, nous avons

$$\begin{aligned}\partial_{\bar z}\det E^\delta_{-+} &= -\mathrm{tr}((\partial_{\bar z}R_+)E^\delta_+ + E^\delta_-(\partial_{\bar z}R_-))\det E^\delta_{-+} \qquad (3.5.30)\\ &=: -k^\delta(z)\det E^\delta_{-+}.\end{aligned}$$

Alors, grâce à la proposition 3.5.5, et au fait que $\|\partial_z e_+\|, \|\partial_{\bar z}e_-\| = \mathcal{O}(1/h)$, nous obtenons

$$|k^\delta - k^0| = \mathcal{O}(\frac{\delta}{h^2}).$$

Proposition 3.5.9 *Soit l^δ une solution de l'équation $\frac{1}{h}\partial_{\bar z}l^\delta = k^\delta$,*

$$l^\delta(z) = \frac{h}{\pi}\int_{W(z_0)}\frac{k^\delta(z')}{z-z'}d\mathrm{Re}z'd\mathrm{Im}z',$$

rendant $e^{l^\delta}E^\delta_{-+}$ holomorphe, alors $|l^\delta - l^0| = \mathcal{O}(\frac{\delta}{h})$.

Preuve. Nous avons

$$(l^\delta - l^0)(z) = \frac{h}{\pi}\int_{W(z_0)} \frac{(k^0-k^\delta)(z')}{z-z'} d\mathrm{Re}z' d\mathrm{Im}z' \tag{3.5.31}$$

$$|(l^\delta - l^0)(z)| \leq h\|k^\delta - k^0\|_{L^\infty(W(z_0))} \int_{W(z_0)} \frac{1}{|z-z'|} d\mathrm{Re}z' d\mathrm{Im}z' \tag{3.5.32}$$

$$= \mathcal{O}(\frac{\delta}{h}).$$

□

3.6 Asymptotique spectrale semiclassique

Soit $N_0 \gg 1$. Rappelons que $\|Q\|_{H^m_{sc}\to L^2} \leq 1/\sqrt{h}$, et $h^{N_0} \leq \delta \ll h$. On suppose ici que les hypothèses 3.1.4 et 3.1.6 sont vérifiées. Rappelons l'expression (3.5.10)

$$\det E^\delta_{-+} = \delta^\beta \sum_{\pi\in S_n} (\prod_j \langle Q e^{\pi(j)}_+, e^j_-\rangle (\mathrm{sign}(\pi)) + \mathcal{O}(1)\frac{\delta^{\beta+1}}{h^{\beta/2}h}, \tag{3.6.1}$$

où $e_\pm$ sont des quasimodes de $P-z$ et $(P-z)^*$ respectivement.

$e^j_\pm$ est microlocalement concentrée en $(x^j, \xi^j_\pm)$, d'après l'hypothèse 3.1.6. On a alors immédiatement $\langle e^i_+, e^j_-\rangle = \mathcal{O}(h^\infty)$ pour $i \neq j$, et (4.3.57) s'écrit alors

$$\det E^\delta_{-+} = \delta^\beta \prod_j \langle Q e^j_+, e^j_-\rangle + \delta^\beta \mathcal{O}(h^\infty) + \mathcal{O}(1)\frac{\delta^{\beta+1}}{h^{\beta/2}h} \tag{3.6.2}$$

$$= \delta^\beta \prod_j \langle Q e^j_+, e^j_-\rangle + \mathcal{O}(1)\frac{\delta^{\beta+1}}{h^{\beta/2}h}.$$

On cherche maintenant à préciser la loi de probabilité de $\langle Qe_+, e_-\rangle$, où $e_\pm \equiv e^j_\pm$ pour un j fixé. Un calcul direct de $\langle Qe_+, e_-\rangle$ donne

$$\sum_{\ell,m,\alpha} \langle Q^{\ell,m}_\alpha(x)(hD_x)^\alpha e_{+,m}, e_{-,\ell}\rangle = \sum_{\ell,m,\alpha,k} q^{\ell,m}_{\alpha,k} \langle e_k\,(hD_x)^\alpha e_{+,m}, e_{-,\ell}\rangle. \tag{3.6.3}$$

où $e_{\pm,i}$ sont les coordonnées de $e_\pm$ et $e_k := \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$. Dans le dernier terme de 3.6.3, $Q^{\ell,m}_\alpha$ a été remplacé par sa série de Fourier (3.1.8). Il devient alors

évident que $\langle Qe_+, e_-\rangle$ suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, la variance satisfaisant

$$\sigma^2 = \sum_{\ell,m,\alpha,k} (\sigma_{\alpha,k}^{\ell,m})^2 \, |\langle e_k \, (hD_x)^\alpha e_{+,m}, e_{-,\ell}\rangle|^2. \tag{3.6.4}$$

Reste ensuite à donner le comportement de σ^2 lorsque $h \to 0$.

Lemme 3.6.1 *Il existe $C > 0$ tel que pour tout z dans $W(z_0)$, où $W(z_0)$ représente l'ensemble introduit dans la proposition 3.5.5,*
(a) si $|k| \leq \frac{1}{hC}$ on a $|\langle e_k \, (hD_x)^\alpha e_{+,m}, e_{-,\ell}\rangle| = \mathcal{O}(h^\infty)$,
(b) si $\frac{1}{hC} \leq |k| \leq \frac{C}{h}$ on a $|\langle e_k \, (hD_x)^\alpha e_{+,m}, e_{-,\ell}\rangle| = \mathcal{O}(1)$,
(c) si $|k| \geq \frac{C}{h}$ on a $|\langle e_k \, (hD_x)^\alpha e_{+,m}, e_{-,\ell}\rangle| = \mathcal{O}(1/|k|^\infty)$.

Preuve. Une preuve se trouve déjà au chapitre précédent, on donne ici les grandes lignes. Pour (b), on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle e_k \, (hD_x)^\alpha e_{+,m}, e_{-,\ell}\rangle| \leq \sup_{x\in S^1} |e_k(x)| \, \|e_{-,\ell}\| \, \|(hD_x)^\alpha e_{+,m}\| = \mathcal{O}(1).$$

Pour (a) et (c), on remarque d'abord que $\langle e_k \, (hD_x)^\alpha e_{+,m}, e_{-,\ell}\rangle$ est une intégrale du type

$$h^{-1/2} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{i}{h}\phi(x,z)+ikx} \chi(x) dx,$$

où ϕ satisfait $\phi'(x(z)) = \xi_-(z) - \xi_+(z)$ (avec $x(z) = x_+(z) = x_-(z)$), et χ est une troncature à support inclus dans un voisinage de $x(z)$. Posons $\varphi := -\frac{\phi}{h} + kx$. Il existe $C > 0$ pour lequel

$$\forall z \in W(z_0), \quad \forall |k| \notin [\frac{\inf|\phi'|}{hC}, \frac{C \sup|\phi'|}{h}], \quad |\varphi'(z)| \geq \frac{1}{C} \max(|k|, 1/h).$$

On procède par intégration par partie pour trouver

$$\langle e_k \, (hD_x)^\alpha e_{+,m}, e_{-,\ell}\rangle = \frac{1}{i} \int e^{i\varphi(x)} a_n(x) dx, \tag{3.6.5}$$
$$a_n := \left(-\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{\varphi'}\right)^n (\chi) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\max(|k|, \frac{1}{h}))^n}\right).$$

□

Proposition 3.6.2 *Soit Q vérifiant l'hypothèse 3.1.4. Il existe $\tilde{C} > 0$, tel que nous avons $\langle Qe_+, e_-\rangle \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où la variance vérifie*

$$\frac{1}{\tilde{C}} h^{2\rho-1/2} \leq \sigma^2 \leq \tilde{C} h^{2\rho-1/2}.$$

Preuve. Pour la borne inférieure, on va montrer qu'il existe m, et ℓ pour lesquels nous avons pour $\alpha = \alpha_1$,

$$\frac{1}{C} h^{2\rho-1/2} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\sigma^{\ell,m}_{\alpha_1,k})^2 \, |\langle e_k \, (hD_x)^{\alpha_1} e_{+,m}, e_{-,\ell}\rangle|^2 \quad (\leq \sigma^2). \tag{3.6.6}$$

Considérons alors, pour chaque ℓ, m, la somme (3.6.6). On découpe la sommation sur k en trois, suivant $k \gg 1/h$, $k \ll 1/h$, et $k \sim 1/h$, de façon précise la somme dans (3.6.6) devient

$$\sum_{|k|<\frac{1}{hC}, |k|>\frac{C}{h}} (\sigma^{\ell,m}_{\alpha_1,k})^2 \, |\langle e_k \, (hD_x)^{\alpha_1} e_{+,m}, e_{-,\ell}\rangle|^2 + \sum_{\frac{1}{Ch}\leq|k|\leq\frac{C}{h}} (\sigma^{\ell,m}_{\alpha_1,k})^2 \, |\langle e_k \, (hD_x)^{\alpha_1} e_{+,m}, e_{-,\ell}\rangle|^2, \tag{3.6.7}$$

où C est la constante du lemme 3.6.1. Ce dernier montre que le premier terme est $\mathcal{O}(h^\infty)$. Enuite, grâce à l'identité de Parseval et l'hypothèse (3.1.11) sur les variances $\sigma^{\ell,m}_{\alpha,k}$, pour tout ℓ et m, le second terme de (3.6.7) est

$$\geq \frac{1}{\tilde{C}} h^{2\rho} \left(\| ((hD_x)^{\alpha_1} e_{+,m}) \, \bar{e}_{-,\ell} \|^2 - \sum_{|k|<\frac{1}{Ch}, |k|>\frac{C}{h}} |\langle e_k \, (hD_x)^{\alpha_1} e_{+,m}, e_{-,\ell}\rangle|^2 \right). \tag{3.6.8}$$

On fait deux observations : premièrement, puisque $\|e_\pm\| \asymp 1$, certaines coordonnées de $e_\pm$ sont alors elliptiques, c'est à dire de terme principal non nul, et deuxièmement, si $e_{+,m}$ et $e_{+,\ell}$ sont elliptiques, alors nous avons $\|((hD_x)^{\alpha_1} e_{+,m})\bar{e}_{-,\ell}\|^2 \asymp h^{-1/2}$. Par conséquent, si $e_{+,m}$ et $e_{+,\ell}$ sont choisis elliptiques dans (3.6.6), nous avons le résultat demandé. Il suffit d'appliquer la même procédure pour montrer la borne supérieure. □

En fait, seule la borne inférieure de σ^2 nous intéresse dans la suite. On cherche maintenant à minorer la probabilité d'avoir $|\det E^\delta_{-+}(z)| \geq x$, pour $x > 0$ et z fixé dans $W(z_0)$.

Puisque les variables $\langle Qe_+^j, e_-^j\rangle$ ne sont pas indépendantes, on utilise

$$\mathbb{P}(A\cap B)\geq 1+(\mathbb{P}(A)-1)+(\mathbb{P}(B)-1),\quad A,B\in\mathcal{A}, \tag{3.6.9}$$

pour trouver, à partir de (3.6.2) que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\det E_{-+}^{\delta}|\geq x)\geq \sum_{1\leq J\leq\beta}\mathbb{P}\left(|\langle Qe_+^j,e_-^j\rangle|\geq\frac{1}{\delta}\left(x+\mathcal{O}(1)\frac{\delta^{\beta+1}}{h^{\beta/2}h}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)\\ +\mathbb{P}(\|Q\|\leq 1/\sqrt{h})-\beta.\end{aligned}$$

De plus, on sait que si X suit la loi gaussienne complexe $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ alors

$$\mathbb{P}(|X|\geq x)=\exp(-\frac{x^2}{\sigma^2}). \tag{3.6.10}$$

En conséquence, il vient que $\mathbb{P}(|\det E_{-+}^{\delta}|\geq x)$ est minoré par

$$\beta\left(\exp\left(-\frac{1}{h^{2\rho-1/2}\delta^2}\left(x+\mathcal{O}(1)\frac{\delta^{\beta+1}}{h^{\beta/2}h}\right)^{\frac{2}{\beta}}\right)-1\right)+\mathbb{P}(\|Q\|\leq 1/\sqrt{h}). \tag{3.6.11}$$

Résumons la discussion :

Proposition 3.6.3 *Pour tout z dans $W(z_0)$, $\epsilon>0$, si*

$$h^{(\rho+\epsilon-\frac{1}{4})\beta}\delta^{\beta}\gg\frac{\delta^{\beta+1}}{h^{\beta/2}h}\ \textit{c'est-à-dire, si}\ \delta\ll h^{(\rho+\epsilon+\frac{1}{4})\beta+1},$$

alors, nous avons

$$\mathbb{P}(|\det E_{-+}^{\delta}|\geq h^{(\rho+\epsilon-1/4)\beta}\delta^{\beta})\geq 1-Ch^{2\epsilon}. \tag{3.6.12}$$

Grâce à $l^{\delta}=l^0+\mathcal{O}(\frac{\delta}{h})$, on remarque que

$$\begin{aligned}|e^{\frac{l^{\delta}}{h}}\det E_{-+}^{\delta}|\leq e^{\frac{\mathrm{Re}\,l^0}{h}}(1+\mathcal{O}(\frac{\delta}{h^2}))\\ \times(\prod_{1\leq j\leq\beta}\|\delta Q\|\|e_+^j\|\|e_-^j\|+\delta^{\beta}\mathcal{O}(h^{\infty})+\mathcal{O}(1)\frac{\delta^{\beta+1}}{h^{\beta/2}h}).\end{aligned} \tag{3.6.13}$$

Puisque $\|\delta Q\| \ll 1$, il en résulte que

$$|e^{\frac{l^\delta}{h}} \det E^\delta_{-+}| \leq e^{\frac{1}{h}\mathrm{Re}\, l^0}, \quad \forall z \in W(z_0). \tag{3.6.14}$$

Introduisons la fonction holomorphe

$$F_\delta(z,h) = e^{\frac{l^\delta}{h}} \det E^\delta_{-+}, \quad z \in W(z_0). \tag{3.6.15}$$

Corollaire 3.6.4 *Soit z_0 un point de Ω, $N_0 \gg 1$. Il existe un voisinage de z_0 noté $W(z_0)$ inclus dans $\Lambda(p)$ et $C, \tilde{C} > 0$ tels que si*

$$h^{N_0} < \delta \ll h^{(\rho+\epsilon+\frac{1}{4})\beta+1},$$

alors
(a) avec une probabilité $\geq 1 - Ce^{-1/(Ch)}$ nous avons

$$\ln|F_\delta(z,h)| \leq \frac{1}{h}\mathrm{Re}\, l^0(z) \tag{3.6.16}$$

pour tous les z dans $W(z_0)$.
(b) pour chaque z de $W(z_0), \epsilon > 0$ nous avons

$$\begin{aligned}\ln|F_\delta(z,h)| &\geq \frac{1}{h}(\mathrm{Re}\, l^0(z) - C\frac{\delta}{h} - h\beta \ln((h^{\rho+\epsilon-1/4}\delta)^{-1})) \\ &\geq \frac{1}{h}(\mathrm{Re}\, l^0(z) - h(\tilde{C}+\beta)\ln((h^{\rho+\epsilon-1/4}\delta)^{-1}))\end{aligned} \tag{3.6.17}$$

avec une probabilité $\geq 1 - Ch^{2\epsilon}$.

Preuve. (a) découle de (3.6.14) et du corollaire 3.5.4, pour (b) il faut se référer à (3.6.12). □

Nous pouvons maintenant répéter les arguments de [13, 14]. Rappelons la proposition 1.8.1 de [15]

Proposition 3.6.5 *Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$, Γ un domaine à bord C^2 par morceaux et $\phi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Soit f une fonction holomorphe dans Ω vérifiant*

$$|f(z,h)| \leq e^{\phi(z)/h}, \quad z \in \Omega. \tag{3.6.18}$$

Supposons qu'il existe $\tilde{\epsilon} \ll 1, z_k \in \Omega, k \in J$ tels que

$$\partial\Gamma \subset \bigcup_{k\in J} D(z_k, \sqrt{\tilde{\epsilon}}), \quad \#J = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\epsilon}}}), \tag{3.6.19}$$

$$|f(z_k,h)| \geq e^{\frac{1}{h}(\phi(z_k)-\tilde{\epsilon})}, \quad k \in J, \tag{3.6.20}$$

alors

$$\#(f^{-1}(0)\cap\Gamma)=\frac{1}{2\pi h}\iint_\Gamma \Delta\phi\, d(\mathrm{Re}z)d(\mathrm{Im}z)+\mathcal{O}(\frac{\sqrt{\tilde\epsilon}}{h}).$$

Nous pouvons appliquer la proposition avec $\tilde\epsilon = h(\tilde C+\beta)\ln((h^{\rho+\epsilon-1/4}\delta)^{-1})$, $\phi=\mathrm{Re}\, l^0$ et $f=F_\delta$. (3.6.18) tient avec une probabilité comme dans (a) de 3.6.4, (3.6.20) tient avec une probabilité

$$\begin{aligned}&\geq 1-Ch^{2\epsilon}\,(\#J)\\ &\geq 1-\tilde C\frac{h^{2\epsilon}}{\sqrt{h\ln((h^{\rho+\epsilon-1/4}\,\delta)^{-1})}}.\end{aligned}\tag{3.6.21}$$

Par ailleurs, si nous notons pour tout $(x,\xi)\in T^*S^1$ et $\Gamma\subset\mathbb{C}$,

$$m_\Gamma(x,\xi):=\#\{\sigma(p(x,\xi))\cap\Gamma\},\tag{3.6.22}$$

alors, compte tenu de la proposition 3.5.7, nous avons

$$\iint_\Gamma \Delta\mathrm{Re}\, l^0(z)\, d(\mathrm{Re}z)d(\mathrm{Im}z)=\iint m_\Gamma\, dxd\xi+\mathcal{O}(h).$$

Nous sommes maintenant en possession du

Théorème 3.6.6 *Soit z_0 un point de Ω, et $N_0\gg 1$. Il existe un voisinage $W(z_0)$ de z_0, tel que si Γ est un ouvert relativement compact dans $W(z_0)$, à bord C^2 par morceaux, et $\epsilon>0$, alors il existe $C>0$ tel que si*

$$h^{N_0}<\delta\ll h^{(\rho+\epsilon+\frac14)\beta+1},\tag{3.6.23}$$

le nombre $N(P-\delta Q,\Gamma)$ de valeurs propres de $P-\delta Q$ dans Γ satisfait

$$|N(P-\delta Q,\Gamma)-\frac{1}{2\pi h}\iint m_\Gamma\, dxd\xi|\leq C\frac{\sqrt{h\ln\frac1h}}{h}\tag{3.6.24}$$

avec une probabilité

$$\geq 1-C\frac{h^{2\epsilon}}{\sqrt{h\ln\frac1h}}.$$

La minoration est intéressante si $\epsilon>\frac14$.

Soit $\Gamma \subset\subset \Omega$. On peut donc énoncer, en recouvrant Γ par un nombre fini de $\Gamma_j \subset W(z_j)$, le

Corollaire 3.6.7 *Soit $\Gamma \subset\subset \Omega$ un ouvert à bord C^2 par morceaux. Choisissons δ et ϵ comme dans le théorème 3.6.6, alors avec une probabilité*

$$\geq 1 - C\frac{h^{2\epsilon}}{\sqrt{h \ln \frac{1}{h}}}.$$

nous avons (3.6.24). La probabilité est intéressante si $\epsilon > \frac{1}{2}$.

Nous allons maintenant donner un résultat de l'asymptotique de Weyl pour une famille de domaines. Rappelons d'abord la proposition suivante qui est le cas uniforme de la proposition 3.6.5.

Proposition 3.6.8 *Soit un domaine $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$, et $\mathcal{G}$ une famille de domaines inclus dans Ω. Soit $C_0 > 0$ une constante indépendante de $\mathcal{G}$. On suppose que*

$$\forall\, \Gamma \in \mathcal{G}, \quad \partial\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N} \gamma_j([a_j, b_j]), \quad N \leq C_0, \tag{3.6.25}$$

où $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$ est C^2 (γ_j dépend évidemment de Γ) avec

$$\forall j, \quad 0 < a_j < b_j \leq C_0, \tag{3.6.26}$$

$$\forall j, \quad \frac{1}{C_0} \leq |\dot{\gamma}_j(t)| \leq C_0, \quad |\ddot{\gamma}_j(t)| \leq C_0, \tag{3.6.27}$$

$$\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}(a_{j+1}),\ j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}. \tag{3.6.28}$$

Soit $\phi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et f une fonction holomorphe dans Ω avec

$$|f(z;h)| \leq e^{\frac{\phi(z)}{h}},\ \forall z \in \Omega. \tag{3.6.29}$$

Si on a un réseau quadratique de points $z_k \in \Omega$ de maille $\frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}}}{2}$, $0 < \epsilon \ll 1$ avec

$$\Omega \subset \bigcup_{k \in J} D(z_k, \frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}}}{2}), \quad |J| \leq \frac{C}{\tilde{\epsilon}}$$

et

$$|f(z_k;h)| > e^{\frac{1}{h}(\phi(z_k) - \tilde{\epsilon})}, \tag{3.6.30}$$

alors

$$\exists\, D > 0,\ \forall\, \Gamma \in \mathcal{G},$$
$$|\#(f^{-1}(0) \cap \Gamma) - \frac{1}{2\pi h} \iint_{\Gamma} \Delta\phi \; d(\mathrm{Re}\; z) d(\mathrm{Im}\; z)| \leq D \frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}}}{h}.$$

Ce qui nous conduit au résultat suivant :

Théorème 3.6.9 *Soit $\mathcal{G}$ une famille de domaines $\Gamma \subset\subset \Omega$, vérifiant les hypothèses du théorème 3.6.8. Nous supposons que l'hypothèse 3.1.6 est satisfaite. Choisissons δ et ϵ comme dans le théorème 3.6.7, alors avec une probabilité*

$$\geq 1 - C \frac{h^{2\epsilon}}{h \ln \frac{1}{h}}$$

nous avons (3.6.24) avec une constante C indépendante de Γ. La probabilité est intéressante si $\epsilon > \frac{1}{2}$.

3.7 Asymptotique des grandes valeurs propres

On s'intéresse ici à la distribution des grandes valeurs propres de $P - Q_\omega$. On rappelle que P et Q_ω s'écrivent respectivement

$$P = \sum_{\alpha \leq m} A_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad Q_\omega = \sum_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} Q_\alpha(x) D_x^\alpha,$$

où les entrées de Q_α sont des séries de Fourier aléatoires. Q_α satisfait l'hypothèse 3.1.4 et P est elliptique au sens classique. Nous allons pour commencer restreindre le paramètre spectral z au domaine Ω_R.

Définition 3.7.1 *Soit Ω_1 un domaine relativement compact dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. On demande que Ω_1 soit inclus dans*

$$\{z \in \Omega \setminus \{0\}; \quad \mathrm{dist}(z, \partial\Omega) \geq \frac{1}{C}\}$$

où Ω est un cône connexe inclus dans $\Lambda(p_m)$. On note pour $R \gg 1, \Omega_R = R\Omega_1$.

Pour $z \in \Omega_R$, nous ramenons l'étude de $P-z$ à un problème semiclassique en divisant par R. Nous sommes donc invités à étudier, en posant $h^m = R^{-1}$, l'opérateur

$$T - w - \tilde{Q}_\omega = h^m(P - w - Q_\omega), \quad w = \frac{z}{R} \in \Omega_1. \tag{3.7.1}$$

Le symbole principal semiclassique de T est alors p_m. Nous avons

$$\tilde{Q} = \sum_{\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1} h^{m-\alpha} Q_\alpha(x)(hD_x)^\alpha, \quad \tilde{Q} := h^{m-\alpha_1}\tilde{Q}_0. \tag{3.7.2}$$

On reprend les notations δ et $\Lambda(p_m)$ introduites dans le cadre semiclassique. Le symbole principal semiclassique de T satisfait l'hypothèse 3.1.6, la perturbation $\tilde{Q}_0$ vérifie l'hypothèse 3.1.4 et $\Omega_1 \subset \Lambda(p_m)$. Dans ces conditions, on peut appliquer le corollaire 3.6.7 et le théorème 3.6.9, à $T - w - h^{m-\alpha_1}\tilde{Q}_0$, avec $\delta = h^{m-\alpha_1}$. La condition (3.6.23) équivaut ici à

$$m - \alpha_1 > (\rho + \epsilon + \frac{1}{4})\beta + 1. \tag{3.7.3}$$

On rappelle que β est la valeur constante de $\beta(z)$ sur une composante connexe de $\Lambda(p_m)$. Notons pour tout $(x,\xi) \in T^*S^1$ et $\Gamma \subset \mathbb{C}$,

$$m_\Gamma(x,\xi) := \#\{\sigma(p_m(x,\xi)) \cap \Gamma\}. \tag{3.7.4}$$

Théorème 3.7.2 *On suppose l'hypothèse 3.1.10 vérifiée. Soit $\Gamma \subset\subset \Omega_1$ un ouvert à bord C^2 par morceaux, et $\epsilon > 0$ vérifiant la condition (3.7.3). Il existe une constante $C > 0$ telle que le nombre $N(T - \tilde{Q}, \Gamma)$ de valeurs propres de $T - \tilde{Q}$ dans Γ satisfait*

$$|N(T - \tilde{Q}, \Gamma) - \frac{1}{2\pi h}\iint m_\Gamma \, dxd\xi| \leq C\frac{\sqrt{h \ln \frac{1}{h}}}{h} \tag{3.7.5}$$

avec une probabilité

$$\geq 1 - C\frac{h^{2\epsilon}}{\sqrt{h \ln \frac{1}{h}}}.$$

Théorème 3.7.3 *Soit $\mathcal{G}$ une famille de domaines $\Gamma \subset\subset \Omega_1$, vérifiant les hypothèses du théorème 3.6.8. Nous supposons que l'hypothèse 3.1.10 est satisfaite. Choisissons ϵ comme dans le théorème 3.7.2, alors avec une probabilité*

$$\geq 1 - C\frac{h^{2\epsilon}}{h\ln\frac{1}{h}},$$

nous avons (3.7.5) avec une constante C indépendante de Γ. La probabilité est intéressante si $\epsilon > \frac{1}{2}$.

On va voir qu'en travaillant un peu plus, on peut affaiblir la condition (3.7.3). Ω_1 se situe dans le pseudospectre $\Lambda(p_m)$ de T. Donc, puisque $\{q_{m,z}, \bar{q}_{m,z}\}(\rho) \neq 0$ pour $p(\rho) = z$ quelque soit z dans Ω_1, on peut appliquer la section 4. Il en résulte alors la

Proposition 3.7.4 *Soit w_0 fixé dans Ω_1. Il existe un voisinage $W(w_0)$ de w_0 tel que pour tout w dans $W(w_0)$*

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} T-w & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H^1_{sc} \times \mathbb{C} \to L^2 \times \mathbb{C},$$

est uniformément borné quand $h \to 0, w \in \Omega_1$, et inversible d'inverse :

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix} : L^2 \times \mathbb{C} \to H^1_{sc} \times \mathbb{C}.$$

Avec

$$\begin{aligned} &\|E\|_{L^2 \to H^1_{sc}} = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h}}), \\ &\|E_+\|_{\mathbb{C} \to H^1_{sc}} = \mathcal{O}(1), \\ &\|E_-\|_{L^2 \to \mathbb{C}} = \mathcal{O}(1), \\ &\|E_{-+}\| = \mathcal{O}(h^\infty). \end{aligned}$$

Proposition 3.7.5 *Sous la condition 3.1.4, il existe une constante positive C telle que pour tout $x > 0$, nous avons*

$$\mathbb{P}(\|\tilde{Q}\|_{H^m_{sc}(S^1) \to L^2(S^1)} \leq h^{m-\alpha_1} \ln h^{-1}) \geq 1 - Ce^{-(\ln h)^2/C}. \tag{3.7.6}$$

Preuve. Cela découle simplement de la proposition 3.5.2, puisque $\tilde{Q}_0$ satisfait l'hypothèse 3.1.4. □

Corollaire 3.7.6 *Soit w_0 fixé dans Ω_1. Il existe un voisinage $W(w_0)$ de w_0 tel qu'on a avec une probabilité $\geq 1 - Ce^{-(\ln h)^2/C}$, pour tout w dans $W(w_0)$*

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} T - w - \tilde{Q} & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix}$$

est continu $H^1_{sc}(S^1) \times \mathbb{C} \to L^2(S^1) \times \mathbb{C}$, et admet un inverse donné par la série de Neumann

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\omega &= \begin{pmatrix} E^\omega & E^\omega_+ \\ E^\omega_- & E^\omega_{-+} \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{E} + \sum_{j\geq 1} \begin{pmatrix} E(\tilde{Q}_\omega E)^j & (E\tilde{Q}_\omega)^j E_+ \\ E_-(\tilde{Q}_\omega E)^j & E_-(\tilde{Q}_\omega E)^{j-1}(\tilde{Q}_\omega E_+) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.7.7}$$

On a

$$\mathcal{E}^\omega = \mathcal{E} + \begin{pmatrix} \mathcal{O}(h^{m-\alpha_1-1}\ln h^{-1}) & \mathcal{O}(\frac{h^{m-\alpha_1}}{\sqrt{h}}\ln h^{-1}) \\ \mathcal{O}(\frac{h^{m-\alpha_1}}{\sqrt{h}}\ln h^{-1}) & \mathcal{O}(h^{m-\alpha_1}\ln h^{-1}) \end{pmatrix}. \tag{3.7.8}$$

En particulier $|\det E^\omega_{-+}| \leq (Ch^{m-\alpha_1}\ln\frac{1}{h})^\beta$.

Preuve. Il suffit d'avoir $\|\tilde{Q}\| \leq h^{m-\alpha_1}\ln h^{-1}$ pour avoir la conclusion. La condition suffisante pour la convergence, $h^{m-\alpha_1-\frac{1}{2}}\ln\frac{1}{h} \ll 1$, est vérifiée puisque $\alpha_1 \leq m-1$. □

Proposition 3.7.7 *Supposons $m - \alpha_1 - \rho - \frac{1}{4} > 0$. Pour tout $\epsilon \in (0, m - \alpha_1 - \rho - \frac{1}{4})$, et w fixé dans $W(w_0)$ nous avons*

$$\mathbb{P}\left(|\det E^\omega_{-+}| \geq h^{(\rho+m-\alpha_1+\epsilon-1/4)\beta}\right) \geq 1 - Ch^{2\epsilon}, \quad h \to 0. \tag{3.7.9}$$

Preuve. Si on se restreint à $\|\tilde{Q}\| \leq h^{m-\alpha_1}\ln h^{-1}$, on sait alors que E^ω_{-+} s'écrit

$$E_{-+} + E_-\tilde{Q}E_+ + E_-\tilde{Q}\left(\sum_{j\geq 0} E(\tilde{Q}E)^j\right)\tilde{Q}E_+. \tag{3.7.10}$$

Le terme entre parenthèses, que l'on désigne par $\tilde{E}$, est $\mathcal{O}(1/\sqrt{h})$. Nous introduisons les opérateurs $E^j_\pm$ par $E^j_+ v_+ = v_+ e^j_+$ si $v_+ \in \mathbb{C}$, et $E^j_- v = \langle v, e^j_-\rangle$ si $v \in L^2(S^1, \mathbb{C}^\beta)$. On trouve alors

$$\begin{aligned} \det E^\omega_{-+} = &\sum_{\pi\in S_n}\prod_{1\leq j\leq\beta}\left(\langle\tilde{Q}e^{\pi(j)}_+, e^j_-\rangle(\mathrm{sign}(\pi)) + E^j_-\tilde{Q}\,\tilde{E}\,\tilde{Q}E^{\pi(j)}_+\right) \\ &+ \mathcal{O}(h^\infty). \end{aligned} \tag{3.7.11}$$

L'opérateur, $\tilde{E}$, satisfait la condition de non propagation du support au sens défini dans la proposition 3.4.5. Alors, avec l'hypothèse 3.1.10, cela implique que

$$\det E^{\omega}_{-+} = \prod_{1\leq j\leq \beta} \left(\langle \tilde{Q} e^j_+, e^j_- \rangle + E^j_- \tilde{Q}\, \tilde{E}\, \tilde{Q} E^j_+ \right) + \mathcal{O}(h^\infty). \tag{3.7.12}$$

On remarque ensuite, que si

$$|\langle \tilde{Q} e^j_+, e^j_- \rangle| \geq \frac{3}{2} x^{\frac{1}{\beta}}, \text{ et } |E^j_- \tilde{Q}\, \tilde{E}\, \tilde{Q} E^j_+| \leq \frac{1}{2} x^{\frac{1}{\beta}}, \tag{3.7.13}$$

alors nous avons

$$|\langle \tilde{Q} e^j_+, e^j_- \rangle + E^j_- \tilde{Q}\, \tilde{E}\, \tilde{Q} E^j_+| \geq x^{\frac{1}{\beta}}. \tag{3.7.14}$$

Ce qui entraîne la minoration suivante (confère l'inégalité (3.6.9))

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\det E^w_{-+}| \geq x) &\geq \mathbb{P}(\|\tilde{Q}\| \leq h^{m-\alpha_1} \ln h^{-1}) - 2\beta \\ &+ \sum_{1\leq j\leq \beta} (\mathbb{P}(|\langle \tilde{Q} e^j_+, e^j_- \rangle| \geq \frac{3}{2} x^{\frac{1}{\beta}}) + \mathbb{P}(|E^j_- \tilde{Q}\, \tilde{E}\, \tilde{Q} E^j_+| \leq \frac{1}{2} x^{\frac{1}{\beta}})). \end{aligned} \tag{3.7.15}$$

Puisque $\tilde{Q}_0$ satisfait 3.1.4, nous avons la conséquence immédiate de la proposition 3.6.2 :

Lemme 3.7.8 *Soit $\tilde{Q}_\omega$ vérifiant les hypothèses 3.1.4. Il existe $C > 0$ tel que pour tout j, $\langle \tilde{Q} e^j_+, e^j_- \rangle \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $C\sigma^2 \geq h^{2\rho+2(m-\alpha_1)-1/2}$. La formule (3.6.10) impliquant alors*

$$\mathbb{P}(|\langle \tilde{Q} e^j_+, e^j_- \rangle| \geq 3\, x^{\frac{1}{\beta}}/2) \geq \exp\left(-C \frac{x^{2/\beta}}{h^{2(\rho+m-\alpha_1)-1/2}} \right). \tag{3.7.16}$$

Lemme 3.7.9 *Il existe $C, \tilde{C} > 0$, tels que pour tout j,*

$$\mathbb{P}(\|\tilde{Q} e^j_+\| \leq x) \geq 1 - C \exp\left(-\frac{1}{C}\, x^2\, h^{-2(m-\alpha_1)} \right). \tag{3.7.17}$$

La conclusion est la même pour $\|\tilde{Q}^* e^j_-\|$. Soit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|E^j_- \tilde{Q}\, \tilde{E}\, \tilde{Q} E^j_+| \leq x) &\geq 1 - C e^{-(\ln h)^2/C} \\ &- \tilde{C} \exp\left(-\frac{1}{\tilde{C}}\, x\, h^{-2(m-\alpha_1)+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \tag{3.7.18}$$

Preuve. Avec l'aide de (3.5.4), nous trouvons

$$\mathbb{P}(\|\tilde{Q}\| \leq \frac{x}{\|e_+^j\|}) = \mathbb{P}(\|\tilde{Q}_0\| \leq \frac{x}{h^{m-\alpha_1}\|e_+^j\|}) \\ \geq 1 - C\exp(-\frac{x^2}{Ch^{2(m-\alpha_1)}}).$$

pour une constante $C > 0$. Montrons (3.7.18). Nous notons $\tilde{C} > 0$, une constante satisfaisant $\|\tilde{E}\| \leq 1/(\tilde{C}\sqrt{h})$. Nous avons

$$|E_-^j \tilde{Q}\, \tilde{E}\, \tilde{Q} E_+^j| = |\langle \tilde{E}\, \tilde{Q} e_+^j, \tilde{Q}^* e_-^j \rangle| \leq \|\tilde{Q} e_+^j\|\, \|\tilde{Q}^* e_-^j\|\, \tilde{C} h^{-\frac{1}{2}}.$$

On utilise alors l'inégalité (3.6.9), puisque les variables $\tilde{Q}e_+^j$et $\tilde{Q}^* e_-^j$ ne sont pas indépendantes, et (3.7.17) pour déduire (3.7.18). □

Pour finir la démonstration, on applique les estimations (3.7.16) et (3.7.18), à la formule (3.7.15). C'est-à-dire, qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout w fixé dans $W(w_0)$ et $x > 0$ on a $|\det E_{-+}^{\omega}| \geq x$, avec une probabilité

$$\geq 1 + \beta(\exp[-C\frac{x^{2/\beta}}{h^{2(\rho+m-\alpha_1)-1/2}}] - 1) - C\beta\exp[-\frac{x^{1/\beta}}{Ch^{2(m-\alpha_1)-1/2}}]. \quad (3.7.19)$$

Si $m - \alpha_1 - \rho - 1/4 > 0$ et $\epsilon \in (0, m - \alpha_1 - \rho - 1/4)$, alors pour $x = h^{(\rho+m-\alpha_1+\epsilon-1/4)\beta}$, (3.7.19) est minoré par $1 - Ch^{2\epsilon}$, lorsque $h \to 0$, pour une constante $C > 0$ donnée. □

Soit $l^{\omega}(w)$ la fonction rendant holomorphe $e^{\frac{1}{h}l^{\omega}} \det E_{-+}^{\omega}$, et $k^{\omega} = \frac{1}{h}\partial_{\bar{w}} l^{\omega}$, où

$$k^{\omega} = -\mathrm{tr}\,((\partial_{\bar{w}} R_+)E_+^{\delta} + E_-^{\delta}(\partial_{\bar{w}} R_-)).$$

Le corollaire 3.7.6 implique

$$|k^{\omega} - k^0| = \mathcal{O}(\frac{1}{h\sqrt{h}}\, h^{m-\alpha_1} \ln h^{-1}), \quad l^{\omega} = l^0 + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h}}\, h^{m-\alpha_1} \ln h^{-1}). \quad (3.7.20)$$

On introduit la fonction holomorphe

$$F^{\omega}(w) := e^{\frac{l^{\omega}}{h}} \det E_{-+}^{\omega}(w), \quad w \in W(w_0). \quad (3.7.21)$$

Ce qui vient est une conséquence des propositions 3.7.6, 3.7.7 et de (3.7.20) :

Corollaire 3.7.10 *Soit w_0 un point de Ω_1. Il existe un voisinage $W(w_0)$ de w_0 inclus dans Ω_1 et deux constantes positives C et $\tilde{C} > 0$ telles que*
(a) avec une probabilité $\geq 1 - \gamma_1(h)$ nous avons

$$\ln |F^{\omega}(w)| \leq \frac{1}{h}(\mathrm{Re}\, l_0(w) + C\frac{1}{\sqrt{h}} h^{m-\alpha_1} \ln h^{-1} + Ch \ln(h^{m-\alpha_1} \ln h^{-1}))$$
$$:= \frac{1}{h}(\mathrm{Re}\, l_0(w) + u(h)) \tag{3.7.22}$$

pour tout w dans $W(w_0)$, où $0 < \gamma_1(h)$ tend vers zéro plus vite que n'importe quelle puissance de h.
(b) pour chaque w de $W(w_0)$, et $\epsilon \in (0, m-\alpha_1-\rho-\frac{1}{4})$, où $m-\alpha_1-\rho-\frac{1}{4} > 0$, nous avons

$$\ln |F^{\omega}(w)| \geq \frac{1}{h}(\mathrm{Re}\, l_0(w) - C\frac{1}{\sqrt{h}}\, h^{m-\alpha_1} \ln h^{-1} - Ch \ln h^{-1})$$
$$:= \frac{1}{h}(\mathrm{Re}\, l_0(w) - v(h)) \tag{3.7.23}$$

avec une probabilité $\geq 1 - Ch^{2\epsilon}$.

On applique la proposition 3.6.5, avec $f = F^w$, avec $\tilde{\epsilon} = u(h) + v(h)$, et $\phi = \mathrm{Re}\ l_0(w) + u(h)$. Nous avons $\tilde{\epsilon} \asymp h \ln h^{-1}, h \to 0$ puisque, par hypothèse, $m - \alpha_1 - \rho - \frac{1}{4} > 0$ et $\rho > 1$. (3.6.18) tient avec une probabilité comme dans (a), (3.6.20) tient avec une probabilité

$$\geq 1 - C\frac{h^{2\epsilon}}{\sqrt{h \ln \frac{1}{h}}}.$$

Ainsi donc, nous pouvons établir une version affaiblie des théorèmes 3.7.2 et 3.7.3, la condition (3.7.3) étant remplacée par

$$0 < \epsilon < m - \alpha_1 - \rho - \frac{1}{4}. \tag{3.7.24}$$

Théorème 3.7.11 *On suppose l'hypothèse 3.1.10 vérifiée. Soit $\Gamma \subset\subset \Omega_1$ un ouvert à bord C^2 par morceaux, et $\epsilon > 0$ vérifiant la condition (3.7.24). Il existe une constante $C > 0$ telle que le nombre $N(T - \tilde{Q}, \Gamma)$ de valeurs propres de $T - \tilde{Q}$ dans Γ satisfait*

$$|N(T - \tilde{Q}, \Gamma) - \frac{1}{2\pi h} \iint m_{\Gamma}\, dxd\xi| \leq C\frac{\sqrt{h \ln \frac{1}{h}}}{h} \tag{3.7.25}$$

avec une probabilité

$$\geq 1 - C\frac{h^{2\epsilon}}{\sqrt{h\ln\frac{1}{h}}}.$$

Théorème 3.7.12 *Soit $\mathcal{G}$ une famille de domaines $\Gamma \subset\subset \Omega_1$, vérifiant les hypothèses du théorème 3.6.8. Nous supposons que l'hypothèse 3.1.10 est satisfaite. Choisissons ϵ comme dans le théorème 3.7.11, alors avec une probabilité*

$$\geq 1 - C\frac{h^{2\epsilon}}{h\ln\frac{1}{h}},$$

nous avons (3.7.25) avec une constante $C > 0$ indépendante de Γ. La probabilité est intéressante si $\epsilon > \frac{1}{2}$.

Asymptotique presque sûre

Nous avons l'égalité triviale,

$$N(T - \tilde{Q}, \Gamma) = N(P - Q, R\Gamma) \tag{3.7.26}$$

et, grâce à l'homogénéité de degré m en ξ du symbole p_m, l'équivalence suivante pour $z = Rw$, et $R = h^{-m}$,

$$z \in R\Gamma,\ \det(p_m(x,\xi) - z) = 0 \iff w \in \Gamma,\ \det(p_m(x, h\xi) - w) = 0.$$

Ce qui veut dire que $m_\Gamma(x, h\xi) = m_{R\Gamma}(x,\xi)$, où m_Γ a été défini en (3.7.4). Un changement de variable $h\xi \to \xi$ donne alors

$$\frac{1}{2\pi h}\iint m_\Gamma\, dxd\xi = \frac{1}{2\pi}\iint m_{R\Gamma}\, dxd\xi, \tag{3.7.27}$$

Au regard des égalités (3.7.26) et (3.7.27), les théorèmes 3.7.11 et 3.7.12 se réécrivent :

Proposition 3.7.13 *On suppose l'hypothèse 3.1.10 vérifiée. Soit $\Gamma \subset\subset \Omega_1$ un ouvert à bord C^2 par morceaux, et $\epsilon > 0$ vérifiant la condition $\epsilon < m - \alpha_1 - \rho - \frac{1}{4}$. Il existe une constante $C > 0$ telle que le nombre $N(P - Q, R\Gamma)$ de valeurs propres de $P - Q$ dans $R\Gamma$ satisfait*

$$|N(P - Q, R\Gamma) - \frac{1}{2\pi}\iint m_{R\Gamma}\, dxd\xi| \leq CR^{1/(2m)}\sqrt{\ln R} \tag{3.7.28}$$

avec une probabilité

$$\geq 1 - C\frac{1}{R^{\frac{1}{m}(2\epsilon-\frac{1}{2})}\sqrt{\ln R}}.$$

Intéressant pour $\epsilon > \frac{1}{4}$.

Proposition 3.7.14 *Soit* $\mathcal{G}$ *une famille de domaines* $\Gamma \subset\subset \Omega_1$, *vérifiant les hypothèses du théorème 3.6.8. Nous supposons que l'hypothèse 3.1.10 est satisfaite. Choisissons* $\epsilon > 0$ *vérifiant* $\epsilon < m - \alpha_1 - \rho - \frac{1}{4}$. *alors avec une probabilité*

$$\geq 1 - \frac{C}{R^{\frac{1}{m}(2\epsilon-1)}}.$$

nous avons (3.7.28) avec une constante $C > 0$ *indépendante de* Γ. *La probabilité est intéressante si* $\epsilon > \frac{1}{2}$.

Nous nous intéressons maintenant à la distribution des valeurs propres dans les dilatés d'un profil conique de la forme $\Gamma(0, g) \subset \Omega$, $\Gamma_{\theta_1,\theta_2}(g, h)$ a été introduit en (3.1.26). On peut supposer sans perte de généralité que $\inf_{\theta\in[\theta_1,\theta_2]} g(\theta) = 1$.

Pour obtenir l'asymptotique spectrale presque sûre, on reproduit les arguments du chapitre précédent, c'est-à-dire un découpage dyadique de $\Gamma(0, \lambda g)$ pour λ assez large, puis une sommation des contributions de type (3.7.28) pour des ensembles de la forme $2^k\Gamma(1, 2)$.

Procédons au découpage dyadique de $\Gamma(0, \lambda g)$ pour de grandes valeurs de λ. Avec k_0 tel que $2^{k_0} \leq \lambda < 2^{k_0+1}$, on trouve

$$\begin{aligned}\Gamma(0, \lambda g) =& \lambda\Gamma(0, g) = \Gamma(0, 1) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{k_0-1} \Gamma(2^k, 2^{k+1})\right) \cup \Gamma(2^{k_0}, \lambda g) \qquad (3.7.29)\\ =& \Gamma(0, 1) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{k_0-1} 2^k\Gamma(1, 2)\right) \cup 2^{k_0}\Gamma(1, \lambda g/2^{k_0}).\end{aligned}$$

Introduisons le réel $m_1 := m - \alpha_1 - \rho - 3/4$. Une conséquence de la proposition 3.7.14 : on considère la famille $\mathcal{G}$ indexée sur $\kappa \in [1, 2]$ de domaine Γ du type $\Gamma(1, \kappa g)$, Ω_1 sera choisi en sorte que $\Gamma(1, 2) \subset\subset \Omega_1 \subset \Omega$,

Corollaire 3.7.15 *Supposons* $m_1 > 0$. *Pour chaque* $\epsilon \in (0, m_1)$, *il existe* $C > 0$ *tel que l'on ait*

$$\forall\kappa \in [1, 2],$$

$$|N(P - Q, R\Gamma(1, \kappa g)) - \frac{1}{2\pi}\iint m_{R\Gamma(1,\kappa g)}\, dxd\xi| \leq CR^{1/(2m)}\sqrt{\ln R}. \quad (3.7.30)$$

avec une probabilité

$$\geq 1 - \frac{C}{R^{\frac{1}{m}(2\epsilon-1)}}.$$

Lemme 3.7.16 *Supposons $m_1 > 0$. Il existe alors $C > 0$ tel que quelque soit $\tilde{\epsilon} > 0$, il existe $k(\tilde{\epsilon}) \in \mathbb{N}$ tel que avec une probabilité $\geq 1 - \tilde{\epsilon}$, on ait*

$$\begin{aligned}&\forall \lambda \geq 2^{k(\tilde{\epsilon})},\\ &|N(P-Q, \Gamma(2^{k(\tilde{\epsilon})}, \lambda g)) - \frac{1}{2\pi}\iint m_{\Gamma(2^{k(\tilde{\epsilon})}, \lambda g)}\, dx d\xi| \leq C\lambda^{1/(2m)}\sqrt{\ln \lambda}.\end{aligned} \tag{3.7.31}$$

Preuve. Notons A_R l'évènement (3.7.28) et B_R l'évènement (3.7.30). Considérons, pour tout ϵ dans $(0, m_1)$, la somme

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\complement A_{2^k}) + \mathbb{P}(\complement B_{2^k})\\ &\qquad \leq C\sum_{1}^{\infty}(2^{-\frac{k}{m}(2\epsilon-\frac{1}{2})}(\sqrt{\ln 2^k})^{-1} + 2^{-\frac{k}{m}(2\epsilon-1)}(\sqrt{\ln 2^k})^{-1}) < +\infty.\end{aligned} \tag{3.7.32}$$

Puisque la somme est finie, il existe $k(\tilde{\epsilon}) > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=k(\tilde{\epsilon})}^{\infty} \complement A_{2^k} \cup \complement B_{2^k}) \leq \sum_{k=k(\tilde{\epsilon})}^{\infty} \mathbb{P}(\complement A_{2^k}) + \mathbb{P}(\complement B_{2^k}) < \tilde{\epsilon},$$

impliquant

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=k(\tilde{\epsilon})}^{\infty} (A_{2^k} \cap B_{2^k})) \geq 1 - \tilde{\epsilon}.$$

Pour $\lambda \geq 2^{k(\tilde{\epsilon})}$, on pose k_0, tel que $2^{k_0} \leq \lambda < 2^{k_0+1}$. Il suffit de raisonner par l'absurde et d'additionner les quantités (3.7.28) pour $R = 2^{k(\tilde{\epsilon})}, \ldots, 2^{k_0}$, et (3.7.30) avec $R = 2^{k_0}$, le côté droit de (3.7.31) étant alors majoré par

$$C\sum_{k(\tilde{\epsilon})}^{k_0} 2^{\frac{k}{2m}}\sqrt{\ln 2^k} + 2^{\frac{k_0}{2m}}\sqrt{\ln 2^{k_0}} \leq C'\lambda^{\frac{1}{2m}}\sqrt{\ln \lambda},$$

pour montrer que (3.7.31) est toujours vérifié si ω appartient à $\bigcap_{k=k(\tilde{\epsilon})}^{\infty}(A_{2^k} \cap B_{2^k})$. □

Théorème 3.7.17 *Supposons $m_1 > 0$. Il existe $C_1 > 0$ tel que $\forall \epsilon > 0$, il existe $M_\epsilon \subset \mathcal{M}$ tel que $\mathbb{P}(M_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$ et $\forall \omega \in M_\epsilon$ on ait :*

$$\forall \lambda \geq 0,$$
$$|N(P - Q_\omega, \lambda\Gamma(0,g)) - \frac{1}{2\pi} \iint m_{\lambda\Gamma(0,g)}| \leq C(\epsilon, \omega) + C_1 \lambda^{1/(2m)} \sqrt{\ln \lambda}.$$

Finalement, en prenant $\tilde{M} = \bigcup_\epsilon M_\epsilon$, nous avons $\mathbb{P}(\tilde{M}) = 1$ et le

Corollaire 3.7.18 *Supposons $m_1 > 0$. Il existe $C_1 > 0$ et $\tilde{M} \subset \mathcal{M}$ avec $\mathbb{P}(\tilde{M}) = 1$ tels que $\forall \omega \in \tilde{M}$ on ait*

$$\forall \lambda \geq 0,$$
$$|N(P - Q_\omega, \lambda\Gamma(0,g)) - \frac{1}{2\pi} \iint m_{\lambda\Gamma(0,g)}| \leq C(\omega) + C_1 \lambda^{1/(2m)} \sqrt{\ln \lambda}.$$

La somme (3.7.32) est finie, c'est la condition nécessaire pour appliquer le lemme de Borel-Cantelli, rappellé ici

$$\sum_n \mathbb{P}(\complement A_n) < \infty \Rightarrow \liminf A_n = 1,$$

où

$$\omega \in \liminf A_n \iff \exists\, n(\omega) \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n(\omega),\ \omega \in A_k.$$

Le lemme 3.7.16 et le théorème 3.7.17 ne sont autres qu'une redémonstration du lemme de Borel-Cantelli appliqué à nos évènements A_{2^k} et B_{2^k}. Le fait que l'on obtienne une constante $C(\omega)$ dans le corollaire dépendant de ω vient de la constante $n(\omega)$ du lemme de Borel-Cantelli.

Chapitre 4

Perturbation aléatoire d'opérateurs différentiels non autoadjoints et amélioration des bornes de la résolvante

4.1 Introduction

Nous savons, sous des hypothèses raisonnables, qu'en dehors de l'image du symbole principal (que l'on nommera aussi pseudospectre), nous avons, pour les opérateurs h-pseudodifférentiels non-autoadjoints, un bon contrôle de la résolvante. Mais, quand le paramètre spectral z se promène dans le pseudospectre, sous certaines hypothèses, l'estimation que l'on obtient sur la norme de la résolvante ne peut pas être moins précise que $\exp Ch^{-n}$, voir la proposition 4.1.1 pour un énoncé plus précis. Le but de ce travail est de montrer que l'on a une meilleure estimation (que celle citée au-dessus) pour la résolvante après une perturbation aléatoire.

Dans ce chapitre, il est donc question d'opérateurs h-pseudodifférentiels avec des perturbations aléatoires utilisées par Hager et Sjöstrand dans [16]. On montre dans ce cas que la résolvante du problème perturbé est majorée dans le pseudospectre par une borne d'ordre $\exp Ch^{-n+\kappa}$, où $\kappa \in]0,1]$ est un paramètre qui dépend d'une hypothèse géométrique sur le symbole $p-z$. En conséquence, on gagne une petite puissance de h par rapport à l'estimation

donnée au premier paragraphe. De manière générale, le paramètre κ vaut 1 quand z se situe à l'intérieur du pseudospectre. En dimension 1, on déduit donc une borne polynomiale pour la résolvante. Néanmoins, près du bord du pseudospectre, on ne peut pas avoir $\kappa = 1$ et les résultats généraux ne permettent pas de déduire une telle borne. C'est pourquoi on regarde le modèle simple, étudié par Hager dans [13], pour lequel on montre une borne polynomiale près du bord.

La motivation de ce travail est de regarder un problème d'évolution avec déformation de contour (voir [17]) et pour cette raison, on a besoin d'avoir un contrôle polynomiale de la résolvante.

Passons maintenant à l'énoncé des résultats :

Cas général

Rappelons le cadre du papier [16]. On en garde les notations.

Soit $\rho = (x, \xi)$ et $m \geq 1$ une fonction d'ordre sur $\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}$, c'est à dire

$$\begin{aligned} \exists C_0 \geq 1, N_0 > 0 \text{ tel que } m(\rho) \leq C_0 \langle \rho - \mu \rangle^{N_0} m(\mu), \\ \forall \rho, \mu \in \mathbb{R}^{2n}, \text{ où } \langle \rho - \mu \rangle = \sqrt{1 + |\rho - \mu|^2}, \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

et $S(\mathbb{R}^{2n}, m)$ l'espace de symboles correspondant

$$S(\mathbb{R}^{2n}, m) = \{a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n});\ |\partial_\rho^\alpha a(\rho)| \leq C_\alpha m(\rho),\ \rho \in \mathbb{R}^{2n},\ \alpha \in \mathbb{N}^{2n}\}. \tag{4.1.2}$$

Posons

$$P(\rho; h) \sim p(\rho) + h p_1(\rho) + \dots \text{ dans } S(\mathbb{R}^{2n}, m). \tag{4.1.3}$$

Le symbole P est aussi utilisé pour représenter la h-quantification de Weyl

$$Pu(x) = P^w(x, hD_x; h)u(x).$$

Nous fixons $a \in S(m)$ elliptique (voir [7]), puis nous définissons

$$H(m) := \{u \in S'(\mathbb{R}^n), \quad a^w(x, hD_x; h)u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}, \tag{4.1.4}$$

pour h assez petit. Si b est un deuxième symbole avec les mêmes propriétés que a, alors on a toujours le même espace avec une norme uniformément équivalente quand h est assez petit. Nous prenons $H(m)$ comme domaine de définition pour P.

Σ est la fermeture de $p(\mathbb{R}^{2n})$, ainsi $\Sigma = p(\mathbb{R}^{2n}) \cup \Sigma_\infty$, où Σ_∞ est l'ensemble des points d'accumulation à l'infini de p. On suppose qu'il existe un point $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ et C_0 tels que

$$|p(\rho) - z_0| \geq m(\rho)/C_0, \quad \forall \rho \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{4.1.5}$$

Prenons $\Omega \subset\subset \mathbb{C} \setminus \Sigma_\infty$ un ouvert simplement connexe contenant au moins un point de $\mathbb{C} \setminus \Sigma$.

Proposition 4.1.1 *Pour tout ouvert $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$, nous avons*

$$\|(P-z)^{-1}\| \leq \exp\left(C_\Omega h^{-n} \ln \frac{1}{g}\right), \ z \in \tilde{\Omega} \setminus \bigcup_{z_j \in \sigma(P)} D(z_j, g), \tag{4.1.6}$$

pour tout $g > 0$ positif et assez petit.

(Voir lemme 6.1 [9])

Remarque 4.1.2 Nous ne savons pas si la borne est optimale quand $n \geq 2$, c'est-à-dire s'il existe un opérateur h-pseudodifférentiel non-autoadjoint tel que l'on ait l'égalité dans 4.1.6.

Proposition 4.1.3 *(a) Pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$, $K \cap \Sigma = \emptyset$ nous avons $\|(P-z)^{-1}\| \leq C_K$, $z \in K$, h assez petit.*
(b) Si $z \in p(\mathbb{R}^{2n}) \setminus \sigma(P)$ tel qu'il existe $\rho \in T^*\mathbb{R}^n$ vérifiant $p(\rho) = z$ et $\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(\rho) > 0$ alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $C_N > 0$ tel que

$$\|(P-z)^{-1}\| \geq C_N \frac{1}{h^N}, \quad \forall 0 < h \ll 1.$$

(voir [9, 39])

Soit $0 < \tilde{m}, \hat{m} \leq 1$ deux fonctions d'ordre, carrés intégrables, dont une est intégrable, et $\tilde{S} \in S(\tilde{m})$, $\hat{S} \in S(\hat{m})$ deux symboles elliptiques. Prenons aussi $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots,$ et $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots,$ deux bases orthonormales de $L^2(\mathbb{R}^n)$. La perturbation aléatoire utilisée dans [16] est de la forme $-\delta Q_\omega$, où $0 < \delta \ll 1$,

$$Q_\omega = \hat{S} \circ \sum_{j,k} \alpha_{j,k}(\omega) \hat{e}_j \tilde{e}_k^* \circ \tilde{S}, \tag{4.1.7}$$

où $\alpha_{j,k}$ sont des variables aléatoires complexes indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Soit $\Gamma \subset\subset \Omega$ un ouvert à bord lisse. Posons

$$V_z(t) = \mathrm{Vol}\{\rho \in \mathbb{R}^{2n}, \ |p(\rho) - z|^2 < t\}. \tag{4.1.8}$$

On fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.1.4 *Supposons* $\exists \kappa \in]0,1]$ *tel que*

$$V_z(t) = \mathcal{O}(t^\kappa) \text{ uniformément pour } z \text{ dans un voisinage de } \Gamma \text{ et } 0 \leq t \ll 1. \tag{4.1.9}$$

Théorème 4.1.5 *Soit* Ω *et* Γ *comme dans l'introduction. On suppose que l'hypothèse 4.1.4 est vérifiée pour* Γ. *Si* δ *satisfait la condition* $0 < \delta \ll h^{3n+1/2}$, *alors il existe* $\widetilde{C} \gg 1$, *et* C_1, C_2 *positives telles que si on se donne* $C > 0$ *il existe* $C_0 > 0$ *telle que avec une probabilité*

$$\geq 1 - \frac{C_1}{h(\ln \frac{1}{\delta})^{1/\kappa}} \delta^{\widetilde{C} h^{\kappa - n}} - \frac{1}{\widetilde{C} h (\ln \frac{1}{\delta})^{1/\kappa}} e^{-C_2 h^{-2n}}, \tag{4.1.10}$$

pour tout z *dans* Γ *nous avons*

$$\|(P - \delta Q_\omega - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{C_0} h^{\kappa - n - \frac{1}{2}} \delta^{-C_0 h^{\kappa - n}} \prod_{1 \leq j \leq N(\omega)} \frac{1}{|z - w_j(\omega)|}, \tag{4.1.11}$$

où $w_j(\omega)$ *sont les valeurs propres de* $P - \delta Q_w$ *dans* $D(z, Ch^{\frac{1}{2}} (\ln \frac{1}{\delta})^{\frac{1}{2\kappa}})$, $N(\omega)$ *vérifiant l'estimation* $\leq C_0\, h^{\kappa - n} \ln \frac{1}{\delta}$.

On va donner une conséquence en dimension 1 lorsque $\kappa = 1$, ce qui se produit fréquemment lorsque l'on se trouve à l'intérieur du pseudospectre. En effet, les points z de $\mathring{\Sigma}$ pour lesquels l'hypothèse 4.1.3 n'est pas vérifiée avec $\kappa = 1$, est de mesure nulle dans $\mathring{\Sigma}$; ce fait résulte du théorème de Sard.

Corollaire 4.1.6 *On suppose que* $n = 1$ *et que l'hypothèse 4.1.4 est vérifiée pour* $\kappa = 1$. *Si* $0 < \delta \ll h^{3n+1/2}$, *alors il existe des constantes* $\widetilde{C} \gg 1$ *et* C_1, C_2 *positives telles que si on se donne* $C > 0$ *il existe* $C_0 > 0$ *tel que avec une probabilité*

$$\geq 1 - \frac{C_1}{h \ln \frac{1}{\delta}} \delta^{\widetilde{C}} - \frac{1}{\widetilde{C} h \ln \frac{1}{\delta}} e^{-C_2 h^{-2}}, \tag{4.1.12}$$

nous avons pour tout z *dans* Γ

$$\|(P - \delta Q_\omega - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{C_0 h^{1/2} \delta^{C_0}} \prod_{1 \leq j \leq N(\omega)} \frac{1}{|z - w_j(\omega)|}.$$

où $w_j(\omega)$ *sont les valeurs propres de* $P - \delta Q_w$ *dans* $D(z, Cr)$, *avec* $r = (h \ln \delta^{-1})^{1/2}$, $N(\omega)$ *vérifiant la majoration* $N(\omega) \leq C_0 \ln \delta^{-1}$.

Cas d'un opérateur modèle

Nous considérons l'opérateur modèle non-autoadjoint, étudié par M. Hager [13], dans $L^2(S^1)$:

$$P = hD_x + g(x), \quad h \in (0,1], \quad D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}.$$

P admet comme domaine naturel l'espace de Sobolev semiclassique

$$H^1_{sc}(S^1) = \{u \in L^2(S^1); \quad \|u\| + \|hD_x u\| < +\infty\}. \tag{4.1.13}$$

On suppose :

Hypothèse 4.1.7 $\operatorname{Im} g' \neq 0$, *sauf en deux points critiques de* S^1, *a et b, tels que pour tout point* x *du cercle,*

$$\operatorname{Im} g(a) \leq \operatorname{Im} g(x) \leq \operatorname{Im} g(b).$$

Nous imposons $\operatorname{Im} g''(a) > 0$, *c'est-à-dire que p est de type fini d'ordre 2 au sens de [9], sur la partie de* $\partial\Sigma$ *donnée par* $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} g(a)$, *où* $\Sigma = \{\operatorname{Im} g(a) \leq \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} g(b)\}$.

Nous introduisons le symbole semiclassique $p = \xi + g(x)$ de P. Dans la suite, pour simplifier, nous prendrons $a = 0$, $\operatorname{Im} g(a) = 0$, et $\operatorname{Im} g(b) > 1$. Le pseudospectre semiclassique sera défini comme l'ensemble Σ, on peut facilement montrer que le spectre se situe sur la droite $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Im} g(x)dx\}$ qui est à l'intérieur de Σ.

Pour $z \in \mathring{\Sigma}$, nous désignons par $\rho_\pm(z)$ les points $(x_\pm(z), \xi_\pm(z))$ de T^*S^1 vérifiant

$$\rho_\pm(z) \in p^{-1}(z), \quad \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(\rho_\pm) = \mp \operatorname{Im} g'(x_\pm) > 0. \tag{4.1.14}$$

Dans [13], la variable spectrale était restreinte à un domaine Ω indépendant de h avec $\operatorname{dist}(\Omega, \partial\Sigma) > 0$, cette dernière condition permettant de séparer les points x_+ et x_-. Nous souhaitons comprendre ce qui passe près de la droite inférieure du bord du pseudospectre, c'est-à-dire lorsque z s'approche du bord avec h. Cependant, nous savons déjà (théorème 1.4 de [9]) que si $z_0 \in \partial\Sigma$ alors pour tout $z \in D(z_0, h^{2/3}/C)$ nous avons $\|(P-z)^{-1}\| \leq Ch^{-2/3}$. Nous allons donc restreindre le paramètre z à un domaine, une boîte Ω_α, dépendant

de h incluse dans la bande $\{h^{2/3} < \operatorname{Im} z < 1\}$: z_0 est fixé, α compris entre $h^{2/3}$ et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Im} g(x)dx$, $0 < c_{1,2} < 1$

$$\Omega_\alpha = \{z \in \mathbb{C},\ c_1\alpha \leq \operatorname{Im} z \leq c_2\alpha,\ |\operatorname{Re}(z - z_0)| \leq C\}. \tag{4.1.15}$$

Les points $x_+(z)$ et $x_-(z)$ vont se rapprocher lorsque $\operatorname{Im} z \to 0$. Nous avons, en effet

$$x_-(z) - x_+(z) \simeq (\operatorname{Im} z)^{1/2}.$$

Proposition 4.1.8 *Soit $P = hD_x + g(x)$ comme ci-dessus. Soit K un compact connexe inclus dans Σ, disjoint et situé en dessous de la droite contenant le spectre. Nous avons les assertions suivantes :*
i) ([9]) Il existe $\tilde{C} > 0$ et $C \geq 1$ tels que

$$\forall z \in K \text{ avec } \operatorname{Im} z < h^{2/3}/C, \quad \|(P - z)^{-1}\| \leq \tilde{C}h^{2/3}.$$

ii) Soit $\tilde{C} > 0$ fixé. Il existe $C > 0$ tel que pour tout z de K, vérifiant $\operatorname{Im} z > h^{2/3}/C$, nous avons

$$\|(P - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}}\mathcal{O}(1)e^{C\frac{(\operatorname{Im} z)^{3/2}}{h}}.$$

Nous considérons la perturbation aléatoire Q_ω définie sur l'espace de probabilité $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$$Q_\omega u = \sum_{j,k} a_{j,k}(\omega)\langle u, e_j\rangle e_k, \tag{4.1.16}$$

où e_k est la base orthonormée usuelle de $L^2(S^1)$, $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$ et les variables aléatoires $a_{j,k}$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, \sigma_{j,k})$. De plus, on demande que $\sigma_{j,k} = \sigma_j\sigma_k$, et qu'il existe $\rho > 1$ et $\tilde{C} > 0$ tels que

$$\frac{1}{\tilde{C}}\langle j\rangle^{-\rho} \leq \sigma_j^2 \leq \tilde{C}\langle j\rangle^{-\rho}.$$

Soit $C, C_1, C_2 > 0$ des constantes indépendantes de α. Nous désignons par Γ_α un ensemble relativement compact dans Ω_α pour lequel

$$\Gamma_\alpha = \{z = x + iy, \quad |x - x_0| \leq C,\ C_1 \leq \frac{|y|}{\alpha} \leq C_2\}, \quad \Gamma_\alpha \subset\subset \Omega_\alpha.$$

Nous montrerons plus loin $\operatorname{vol}(p^{-1}(\Gamma_\alpha)) \asymp \operatorname{cst}\alpha^{1/2}$.

Théorème 4.1.9 *Soit Γ_α comme au-dessus, soit $\beta \gg 1$ et $\gamma > 0$. Si δ, un petit paramètre, vérifie les conditions suivantes*

$$\delta \ll \frac{\sqrt{h}\,\alpha^{1/4}h^{2\rho}}{(\ln h^{-1})^3}, \text{ et } h^\beta \leq \delta, \tag{4.1.17}$$

alors il existe $C, \tilde{C} > 0$ tels que, pour tout $0 < r \ll \alpha$, le nombre $N(P_\delta, \Gamma_\alpha)$ de valeurs propres de P_δ dans Γ_α vérifie

$$|N(P_\delta, \Gamma_\alpha) - \frac{1}{2\pi h}\mathrm{vol}\,(p^{-1}(\Gamma_\alpha))| \leq \frac{C}{h}(\frac{r}{\alpha^{1/2}} + \frac{\tilde{\epsilon}}{r}) \tag{4.1.18}$$

où $\tilde{\epsilon} = C_{\rho,\gamma}h\ln(h\delta)^{-1}$, avec probabilité

$$\geq 1 - \frac{\tilde{C}}{r}h^{2\gamma}.$$

Le choix du paramètre r optimal dans (4.1.18), c'est à dire lorsque $r \mapsto \frac{r}{\alpha^{1/2}} + \frac{\tilde{\epsilon}}{r}$ est minimal, est $r = \tilde{\epsilon}^{1/2}\alpha^{1/4}$; ce qui entraîne que (4.1.18) devient $\leq \frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}}}{\alpha^{1/4}h}$.

Remarquons que le théorème 4.1.9 n'est intéressant que si $\sqrt{\tilde{\epsilon}}/\alpha^{1/4} \ll \mathrm{vol}\,(p^{-1}(\Gamma_\alpha)) = C\alpha^{1/2}$, c'est à dire si $\tilde{\epsilon}^{2/3} \ll \alpha$, ou encore en remplacant $\tilde{\epsilon}$ par son expression, si

$$(\ln\frac{1}{\delta h})^{\frac{2}{3}}\, h^{\frac{2}{3}} \ll \alpha. \tag{4.1.19}$$

Théorème 4.1.10 *Soit $\gamma > 0$ fixé. Soit δ vérifiant la condition (4.1.17), de plus on suppose que δ est minoré par une puissance de h. Soit z_0 dans Ω_α, donc $\mathrm{Im}\, z_0 \simeq \alpha$. Il existe $\hat{C} > 0$ tel que si on se donne des constantes positives $\tilde{C} < C$, alors il existe $C', M > 0$ tels que, avec une probabilité $\geq 1 - \frac{\hat{C}}{r}h^{2\gamma}$, avec $r = (\sqrt{\alpha}\,h\ln h^{-1})^{1/2}$, nous avons pour tout z dans $D(z_0, \tilde{C}r)$*

$$|(P - \delta Q_\omega - z)^{-1}| \leq \frac{1}{\sqrt{h}\,\alpha^{1/4}h^M}\prod_{1\leq j\leq N(\omega)}\frac{1}{|z - w_j(\omega)|},$$

w_j sont les valeurs propres de $(P - \delta Q_\omega - z)^{-1}$ dans $D(z_0, Cr)$. $N(\omega)$ vérifie $\leq C'\ln h^{-1}$.

L'organisation du papier est la suivante : dans la section qui suit nous montrons à partir des résultats d'Hager et Sjöstrand l'amélioration de la

résolvante après une perturbation aléatoire (théorème 4.1.5). Les sections suivantes seront ensuite consacrées au modèle simple $hD_x + g(x)$, pour lequel une étude fine du problème de Grushin sera faite lorsque l'on est près du bord du pseudospectre. Nous en déduirons alors que la résolvante ne croît pas plus vite qu'une puissance négative de h (théorème 4.1.10).

4.2 Amélioration de la résolvante

Lemme 4.2.1 (p.11, 12 de [16]) *Il existe un symbole $\tilde{p}(\rho)$ tel que $\tilde{p}(\rho) - z$ soit elliptique (au sens (4.1.5)) uniformément pour $z \in \Omega$, avec $\tilde{p} - p \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.*

Posons ensuite

$$\tilde{P} = \tilde{p} + hp_1 + h^2 p_2 + \dots . \tag{4.2.1}$$

Soit $\delta > 0$ un paramètre de perturbation, Les auteurs de [16] ont étudié la distribution des valeurs propres de $P - \delta Q_\omega$ dans les ensembles $\Gamma \subset\subset \Omega$.

On écrit pour $z \in \Omega$,

$$P_\delta(z) := (\tilde{P} - z)^{-1}(P - \delta Q_\omega - z), \tag{4.2.2}$$

puis on observe que Q_ω est presque sûrement Hilbert-Schmidt et de classe trace. On peut alors introduire la fonction holomorphe

$$F_\delta(z, h) = \det P_\delta(z), \quad z \in \Omega. \tag{4.2.3}$$

Soit $\Gamma \subset\subset \Omega$ un ouvert à bord lisse. Posons

$$V_z(t) = \mathrm{Vol}\{\rho \in \mathbb{R}^{2n},\ |p(\rho) - z|^2 < t\}. \tag{4.2.4}$$

On suppose que l'hypothèse 4.1.4 est vérifiée.

Proposition 4.2.2 ([16], Théorème 9.3) *Soit $\Gamma \subset\subset \Omega$ un ouvert à bord lisse. On suppose admise l'hypothèse 4.1.4. Soit δ satisfaisant la condition*

$$0 < \delta \ll h^{3n+1/2}. \tag{4.2.5}$$

Alors il existe des constantes $C, C_0, \tilde{C} > 0$ telles que :
(a) Avec une probabilité $\geq 1 - Ce^{C_0 h^{-2n}}$, nous avons

$$\ln |F_\delta(z, h)| \leq \frac{1}{(2\pi h)^n}(I(z) + Ch^\kappa \ln \frac{1}{h}), \tag{4.2.6}$$

pour tout z dans Γ, $I(z)$ étant donné par

$$\int_{\mathbb{R}^2} \ln |(\tilde{p}(\rho) - z)^{-1}(p(\rho) - z)| d\rho. \tag{4.2.7}$$

(b) Pour tout z dans Γ et $\epsilon > 0$ nous avons

$$\ln |F_\delta(z,h)| \geq \frac{1}{(2\pi h)^n}(I(z) - Ch^\kappa(\ln \frac{1}{h} + \ln \frac{1}{\delta}) - \epsilon), \tag{4.2.8}$$

avec une probabilité $\geq 1 - Ce^{-\epsilon(2\pi h)^{-n}} - \tilde{C}e^{-C_0 h^{-2n}}$.

Commençons par donner une estimation classique de la norme de la résolvante du problème non perturbé. En suivant la preuve du lemme 6.1 de [9], nous sommes en mesure de trouver un majorant de la résolvante :

Proposition 4.2.3 *Pour tout ouvert $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$, nous avons*

$$\|(P - z)^{-1}\| \leq \exp\left(C_\Omega h^{-n} \ln \frac{1}{g}\right),\ z \in \tilde{\Omega} \setminus \bigcup_{z_j \in \sigma(P)} D(z_j, g), \tag{4.2.9}$$

pour tout $g > 0$ assez petit.

Preuve. Il faut d'abord remarquer que pour $z \in \Omega$, nous avons

$$P_0(z) = (\tilde{P} - z)^{-1}(P - z) = 1 + K(z),$$

où $K(z)$ est un opérateur à trace et $(\tilde{P} - z)^{-1}$ est majorée par une constante indépendante de h. Puis, on conclut en suivant la fin de la preuve du lemme 6.1 de [9]. □

On va maintenant énoncer deux lemmes utiles pour la démonstration du théorème 4.1.5.

Lemme 4.2.4 *Soit $C_1 > C_2 > C_3 > 0$, pour r positif soit $\Omega = D(z_0, C_1 r)$. Soit ϕ une fonction continue et sousharmonique dans un voisinage de Ω et $u = u(z, \tilde{h})$ une fonction holomorphe vérifiant*

$$\tilde{h} \ln |u(z)| \leq \phi(z) \quad \forall z \in \Omega, \tag{4.2.10}$$

et au point z_0

$$\tilde{h} \ln |u(z_0)| \geq \phi(z_0) - \tilde{\epsilon}, \quad 0 < \tilde{\epsilon} \ll 1. \tag{4.2.11}$$

On introduit le noyau de Green G_r associé au disque fermé $\overline{D}(z_0, C_1 r)$, et la mesure $\mu(dw) = \Delta\phi(w) d\mathrm{Re}\, w\, d\mathrm{Im}\, w$. Alors il existe $C > 0$, indépendant de h et r tel que

$$\forall z \in D(z_0, C_3 r) \setminus u^{-1}(0),$$
$$|u(z, \tilde{h})| \geq \exp\left(\frac{\phi(z)}{\tilde{h}} - \frac{C}{\tilde{h}}(\tilde{\epsilon} - \int_\Omega G_r(z_0, w)\mu(dw))\right) \prod_{1 \leq k \leq N} |z - w_k|, \tag{4.2.12}$$

où w_k sont les zéros de u dans $D(z, C_2 r)$, N vérifiant l'estimation

$$N \leq \frac{C}{\tilde{h}}(\tilde{\epsilon} + \int_\Omega -G_r(z_0, w)\mu(dw)). \tag{4.2.13}$$

Le résultat qui suit n'est autre que la version C^2 du lemme précédent :

Corollaire 4.2.5 *Dans ce cas ϕ est C^2. Alors il existe $C > 0$ indépendant de h et r tel que*

$$\forall z \in D(z_0, C_3 r) \setminus u^{-1}(0),$$
$$|u(z, \tilde{h})| \geq \exp\left(\frac{\phi(z)}{\tilde{h}} - \frac{C}{\tilde{h}}(\sup_{z \in \Omega} |\phi''(z)| r^2 + \tilde{\epsilon})\right) \prod_{1 \leq k \leq N} |z - w_k|,$$

où w_k sont les zéros de u dans $D(z, C_2 r)$, N vérifiant l'estimation

$$N \leq \frac{C}{\tilde{h}}(\sup_{z \in \Omega} |\phi''(z)| r^2 + \tilde{\epsilon}).$$

Preuve. Supposons démontré le lemme 4.2.4. Si $\phi \in C^2$, alors $\mu(dw) = \mathcal{O}(1) L(dw)$. Ainsi $\int_\Omega G_r(z_0, w)\mu(dw) = \int_\Omega G_r(z_0, w)\mathcal{O}(1)L(dw)$. Ici

$$G_r(z_0, w) = G_{D(0, C_1 r)}(0, w - z_0) = G_{D(0,1)}(0, \frac{w - z_0}{C_1 r})$$

(En général, $G_{r\Omega} = G_\Omega(\frac{z}{r}, \frac{w}{r})$). Donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega G_r(z_0, w)\mu(dw) &= \int_{D(0, C_1 r)} G_{D(0,1)}(0, \frac{w}{C_1 r})\mathcal{O}(1)L(dw) \\ &= (C_1 r)^2 \int_{D(0,1)} G_{D(0,1)}(0, \tilde{w})L(d\tilde{w}) = \mathcal{O}(r^2).\end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'appliquer le lemme 4.2.4. □

Preuve du lemme 4.2.4. On reprend les notations de la section 11 de [16]. On a déjà introduit le noyau de Green associé au disque fermé $\overline{D}(z_0, C_1 r)$. G_r vérifie les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} &G_r(z,w) < 0 \text{ sur } \Omega \times \Omega \\ &G_r(z,w) = 0 \text{ sur } (\Omega \times \partial\Omega) \cup (\partial\Omega \times \Omega). \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Introduisons la fonction harmonique

$$\Phi(z) = \phi(z) + \int_\Omega -G_r(z,w)\mu(dw). \tag{4.2.15}$$

Grâce au lemme 11.1 de [16], on sait que pour tout $C_2 \in]0, C_1[$ il existe $\tilde{C}$ tel que le nombre N de zéros de u dans $D(z_0, C_2 r)$, est

$$\leq \frac{\tilde{C}}{\tilde{h}}(\tilde{\epsilon} + \int_\Omega -G_r(z_0,w)\mu(dw)).$$

Dans ce qui suit, on s'appuie sur les arguments développés pour la preuve de la proposition 1.8.1 de [15]. Nous effectuons un changement de coordonnées

$$w := \frac{z - z_0}{r},$$

et posons $\tilde{u}(w) = u(z)$, $\tilde{\phi}(w) = \phi(z)$, $\tilde{\Phi}(w) = \Phi(z)$. $\tilde{u}$ s'écrit dans $D(0, C_2)$

$$\tilde{u}(w) = g(w) \prod_{1 \leq k \leq N} (w - w_k),$$

avec g holomorphe et ne s'annulant pas. w_k sont les zéros de $\tilde{u}$ dans $D(0, C_2)$. Grâce à (1.8.17) et (1.8.18) de [15], on montre similairement à (1.8.15), que pour tout $\widetilde{C}_3 < C_2$, il existe $\widetilde{C}_3 < C_3(h) < C_2$ tel que pour $|w| = C_3(h)$

$$\prod_{k=1}^{N} |w - w_k| \geq e^{-NC}.$$

On cherche à avoir un minorant de g. Le principe du maximum donne pour $|w| \leq \widetilde{C}_3 < C_3(h)$

$$\begin{aligned} &\ln|g(w)| \leq \tilde{\phi}(w)/\tilde{h} + NC \leq \tilde{\Phi}(w)/\tilde{h} + NC, \\ &\ln|g(0)| \geq (\tilde{\phi}(0) - \tilde{\epsilon})/\tilde{h} - NC. \end{aligned}$$

Puisque $\tilde{\Phi}$ est harmonique, $\tilde{\Phi}/\tilde{h}+NC-\ln|g|$ est une fonction harmonique positive. Les inégalités de Harnarck donnent alors dans un disque diminué

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}/\tilde{h}+NC-\ln|g| &\leq \tilde{C}(\tilde{\Phi}(0)+NC-\ln|g(0)|)\\ &\leq \tilde{C}((\tilde{\Phi}(0)-\tilde{\phi}(0)+\tilde{\epsilon})/\tilde{h}+2NC). \qquad (4.2.16)\end{aligned}$$

Soit dans ce disque, en utilisant l'égalité (4.2.15) et le fait que $\Phi>\phi$, il existe $C>0$ tel que

$$\begin{aligned}\ln|g(w)| &\geq \frac{1}{\tilde{h}}(\tilde{\Phi}(w)-\tilde{C}(\tilde{\Phi}(0)-\tilde{\phi}(0))+\tilde{\epsilon})-NC\\ &\geq \frac{1}{\tilde{h}}(\tilde{\Phi}(w)-\tilde{C}(\Phi(z_0)-\phi(z_0))+\tilde{\epsilon})-NC\\ &\geq \frac{1}{\tilde{h}}\left(\tilde{\phi}(w)-\widehat{C}(\tilde{\epsilon}+\int_\Omega -G_r(z_0,\tilde{w})\mu(d\tilde{w}))\right)-NC, \qquad (4.2.17)\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Lemme 4.2.6 *Soit $\mu(dw)=\Delta I(w)d\mathrm{Re}\,w\,d\mathrm{Im}\,w$, où $I(w)$ a été introduit en 4.2.7. On note Ω le disque $D(z_0,\epsilon)$ et G_ϵ le noyau de Green associé. On suppose que l'hypothèse 4.1.4 est vérifée pour Ω. Alors il existe une constante $C>0$ telle que pour chaque $\epsilon>0$ assez petit, on a*

$$\int_\Omega -G_\epsilon(z_0,w)\mu(dw)\leq C\epsilon^{2\kappa}. \qquad (4.2.18)$$

Preuve. On reproduit les arguments de [16]. Pour ϵ assez petit, nous avons l'égalité

$$-G_\epsilon(z_0,w)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\epsilon}{|z_0-w|},$$

Soit

$$W_z(t):=\int_{D(z,t)}\mu(dw).$$

Et donc,

$$\begin{aligned}\int_\Omega -G_\epsilon(z_0,w)\mu(dw) &= \mathcal{O}(1)\int_0^\epsilon \ln\frac{\epsilon}{s}dW_{z_0}(s)\\ &= \mathcal{O}(1)([\ln(\frac{\epsilon}{s})W_{z_0}(s)]_0^\epsilon+\int_0^\epsilon\frac{1}{s}W_{z_0}(s)ds)\\ &= \mathcal{O}(1)\epsilon^{2\kappa}.\end{aligned}$$

Pour avoir la dernière égalité, il suffit de remarquer que ((10.3) de [16])

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Omega \Delta I(z)L(dz) = \mathrm{Vol}\, p^{-1}(\Omega).$$

Dès lors si on tient compte de l'hypothèse 4.1.3, nous trouvons que $W_{z_0}(t) = 2\pi V_{z_0}(t^2) = \mathcal{O}(t^{2\kappa})$, pour t assez petit. □

Théorème 4.2.7 *Soit Ω comme dans l'introduction. Supposons que l'hypothèse 4.1.4 soit vérifiée pour un voisinage de z_0. Soit $C > \tilde{C} > 0$. Il existe C_0, C_1, C_2, C_3, positives telles que pour tout*

$$\epsilon \gg h^\kappa \ln\frac{1}{\delta}, \tag{4.2.19}$$

avec une probabilité

$$\geq 1 - C_1 e^{-\frac{\epsilon}{2}(2\pi h)^{-n}} - C_2 e^{-C_3 h^{-2n}}, \tag{4.2.20}$$

pour tout z dans $D(z_0, \tilde{C}\epsilon^{1/(2\kappa)})$, nous avons

$$\|(P - \delta Q_\omega - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{C_0} h^{\kappa - n - \frac{1}{2}} \exp(C_0\, \epsilon h^{-n}) \prod_{1\leq j\leq N(\omega)} \frac{1}{|z - w_j(\omega)|}.$$

où $w_j(\omega), 1 \leq j \leq N(\omega)$, sont les valeurs propres de $P - \delta Q_w$ dans $D(z_0, C\epsilon^{1/(2\kappa)})$, $N(\omega)$ vérifiant l'estimation $\leq C_0\, \epsilon h^{-n}$.

Preuve. On fixe les constantes $C > \tilde{C} > 0$. Grâce aux estimations (4.2.6) et (4.2.8), nous pouvons appliquer le lemme 4.2.4 avec

$$\phi(z) = I(z) - Ch^\kappa \ln\frac{1}{h},$$

$r = \epsilon^{1/(2\kappa)}$, et $\tilde{h} = (2\pi h)^n$, et $\tilde{\epsilon}$ dans (4.2.11) remplacé par

$$\mathcal{O}(1)(h^\kappa \ln\frac{1}{h} + h^\kappa \ln\frac{1}{\delta} + \epsilon). \tag{4.2.21}$$

Nous voulons que ϵ soit le terme dominant dans la dernière expression. En d'autres termes, nous prenons

$$\epsilon \gg h^\kappa \ln\frac{1}{\delta}, \tag{4.2.22}$$

en rappelant que $\ln \delta^{-1} \geq \ln h^{-1}$. Alors, utilisant le lemme 4.2.6, on montre qu'il existe $C_1, C_2, C_3 > 0$, tels que avec une probabilité

$$\geq 1 - C_1 e^{-\frac{\epsilon}{2}(2\pi h)^{-n}} - C_2 e^{-C_3 h^{-2n}}, \tag{4.2.23}$$

nous avons pour tout z dans le disque $D(z_0, \tilde{C}r)$,

$$|F_\delta(z,h)| \geq \exp\left(\frac{1}{(2\pi h)^n}(\phi(z) - C_0\epsilon)\right) \prod_{1\leq j\leq N(\omega)} |z - w_j(\omega)|, \tag{4.2.24}$$

où w_j sont les zéros de $F_\delta(z,h)$ dans $D(z_0, Cr)$, et $C_0 > 0$ est une constante indépendante de ω et r. Nous rappelons que les zéros de $F_\delta(z,h)$ sont aussi les valeurs propres de $P - \delta Q$. En combinant (8.24) et (8.25) de [16], nous obtenons

$$\begin{aligned}\ln|F_\delta(z,h)| &= \frac{1}{(2\pi h)^n}(I(z) + \mathcal{O}(1)h^\kappa \ln\frac{1}{h}) + \ln|\det E^\delta_{-+}| \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^n}(\phi(z) + \mathcal{O}(1)\epsilon) + \ln|\det E^\delta_{-+}|.\end{aligned}$$

Rappelons ici que E^δ, $E^\delta_\pm$ et E^δ_{-+} sont des opérateurs qui arrivent dans l'inversion d'un problème auxiliaire de type Grushin. E^δ_{-+} est de rang fini : $E^\delta_{-+} \in \mathbb{M}_{N(\alpha)}(\mathbb{C})$, où $N(\alpha) = \mathcal{O}(\alpha^\kappa h^{-n})$, avec $\alpha = Ch, C \gg 1$. De plus, nous avons les estimées

$$\|E^\delta\|, \|E^\delta_+\|, \|E^\delta_-\|, \|E^\delta_{-+}\| \leq \frac{C}{\sqrt{\alpha}}.$$

Et donc, avec une probabilité minorée comme dans (4.2.23), nous avons pour chaque z dans $D(z_0, \tilde{C}\sqrt{\epsilon})$

$$|\det E^\delta_{-+}| \geq \exp(-C_0\,\epsilon h^{-n}) \prod_{1\leq j\leq N(\omega)} |z - w_j(\omega)|. \tag{4.2.25}$$

Lemme 4.2.8

$$\forall M \in GL_p(\mathbb{C}), \quad \|M^{-1}\| \leq \frac{p\|M\|^{p-1}}{|\det M|}, \tag{4.2.26}$$

$\|\cdot\|$ *est la norme opérateur usuelle.*

Puisque nous n'avons pas trouvé de référence, on va alors donner une preuve.

Preuve. Soit ${}^{\mathrm{co}}M = (M_{j,k})$. Alors $|M_{j,k}| \leq \|M\|^{p-1}$. Donc $\|{}^{\mathrm{co}}M\|^2_{\mathrm{HS}} = \sum_{j,k} |M_{j,k}|^2 \leq p^2(\|M\|^{p-1})^2$. Donc $\|{}^{\mathrm{co}}M\|^2 \leq \|{}^{\mathrm{co}}M\|^2_{\mathrm{HS}} \leq p\|M\|^{p-1}$ et il suffit d'utiliser que $M^{-1} = \frac{1}{\det M}{}^{\mathrm{co}}M$. □

Revenons sur la preuve du théorème 4.2.7. On veut maintenant appliquer le lemme précédent. Nous avons

$$\|(E^\delta_{-+})^{-1}\| \leq \tilde{C}h^{\kappa-n}\frac{\|E^\delta_{-+}\|^{N(\alpha)-1}}{|\det E^\delta_{-+}|}.$$

Il existe $C \gg 1$ tel que

$$\|E^\delta_{-+}\|^{N(\alpha)-1} \leq \frac{\sqrt{\alpha}}{\widehat{C}}\left(\frac{\widehat{C}}{\sqrt{\alpha}}\right)^{N(\alpha)} \leq C\sqrt{h}\exp(Ch^{\kappa-n}\ln\frac{1}{Ch})$$

Ce qui veut dire que, sous la condition (4.2.22), on obtient

$$\begin{aligned}\|E^\delta_{-+}\|^{N(\alpha)-1} &\leq Ch^{\frac{1}{2}+\kappa-n}\exp(Ch^{\kappa-n}\ln\frac{1}{Ch})\\ &\leq Ch^{\frac{1}{2}+\kappa-n}\exp(C\epsilon h^{-n})\end{aligned}$$

Résumons la discussion : avec une probabilité comme dans (4.2.23), il existe $C_0 > 0$ tel que nous avons pour chaque z dans $D(z_0, \tilde{C}r)$

$$\|(E^\delta_{-+})^{-1}\| \leq C_0 h^{\frac{1}{2}+\kappa-n}\exp(C_0\,\epsilon h^{-n})\prod_{1\leq j\leq N(\omega)}\frac{1}{|z-w_j(\omega)|}. \tag{4.2.27}$$

D'après [16], nous avons ici $P^{-1}_\delta = E^\delta - E^\delta_+(E^\delta_{-+})^{-1}E^\delta_-$. Si bien qu'avec une probabilité similaire à (4.2.23), il existe $C_0 > 0$ tel que nous avons pour chaque z dans $D(z_0, \tilde{C}r)$

$$\|P^{-1}_\delta\| \leq \frac{1}{C_0}h^{\kappa-n-\frac{1}{2}}\exp(C_0\,\epsilon h^{-n})\prod_{1\leq j\leq N(\omega)}\frac{1}{|z-w_j(\omega)|}. \tag{4.2.28}$$

On rappelle que P_δ a été introduit en (4.2.2). Puisque $\tilde{P} - z$ est uniformément borné dans Ω par ellipticité, la résolvante de $P + \delta Q_\omega - z$ vérifie avec une probabilité

$$\geq 1 - C_1 e^{-\frac{\epsilon}{2}(2\pi h)^{-n}} - C_2 e^{-C_3 h^{-2n}} \tag{4.2.29}$$

l'estimation (4.2.28) pour tout z dans $D(z_0, \tilde{C}r)$. □

Corollaire 4.2.9 *Soit Ω et Γ comme dans l'introduction. On suppose que l'hypothèse 4.1.4 est vérifiée pour Γ. Il existe C_1, C_2, C_3 positives telles que si on se donne $C > 0$ il existe $C_0 > 0$ telle que pour tout*

$$\epsilon \gg h^\kappa \ln \frac{1}{\delta}, \tag{4.2.30}$$

avec une probabilité

$$\geq 1 - \frac{C_1}{\epsilon^{1/\kappa}} e^{-\frac{\epsilon}{2}(2\pi h)^{-n}} - \frac{C_2}{\epsilon^{1/\kappa}} e^{-C_3 h^{-2n}}, \tag{4.2.31}$$

pour tout z dans Γ nous avons

$$\|(P - \delta Q_\omega - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{C_0} h^{\kappa - n - \frac{1}{2}} \exp(C_0\, \epsilon h^{-n}) \prod_{1 \leq j \leq N(\omega)} \frac{1}{|z - w_j(\omega)|}, \tag{4.2.32}$$

où $w_j(\omega)$ sont les valeurs propres de $P - \delta Q_w$ dans $D(z, C\epsilon^{1/(2\kappa)})$, $N(\omega)$ vérifiant l'estimation $\leq C_0\, \epsilon h^{-n}$.

Le théorème 4.1.5 s'obtient en remplaçant ϵ par sa valeur $Ch^\kappa \ln \frac{1}{\delta}$ avec $C \gg 1$.

Preuve. On considère un recouvrement fini d'un voisinage de Γ par des ensembles $D(z_j, \tilde{C}\epsilon^{1/(2\kappa)})$, $(j \in I,\ |I| = \mathcal{O}(1/\epsilon^{1/\kappa}))$, où $\tilde{C} < C$, de telle sorte que pour tout z dans Γ, $D(z, \tilde{C}\epsilon^{1/(2\kappa)})$ est recouvert par un nombre fini de $D(z_k, \tilde{C}\epsilon^{1/(2\kappa)})$, $k \in J$. Il est clair que $|J| > 0$ est majoré indépendamment de z et ϵ. Par la théorie des fonctions holomorphes, il existe donc $C_0 > 0$ indépendant de z, h et ω tel que nous avons

$$\|(P - \delta Q_\omega - z)^{-1} \prod_{1 \leq j \leq N(\omega)} |z - w_j(\omega)|\| \leq \frac{1}{C_0} h^{\kappa - n - \frac{1}{2}} \exp(C_0\, \epsilon h^{-n})$$

où $w_j(\omega)$ sont les valeurs propres de $P - \delta Q_w$ dans $D(z, C\epsilon^{1/(2\kappa)})$. $\square$

4.3 Cas d'un opérateur modèle

4.3.1 Problème de Grushin près du bord du pseudo-spectre

Nous considérons l'opérateur modèle non-autoadjoint, étudié par M. Hager [13], dans $L^2(S^1)$:

$$P = hD_x + g(x), \quad h \in (0,1], \quad D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}.$$

P admet comme domaine naturel l'espace de Sobolev semiclassique

$$H^1_{sc}(S^1) = \{u \in L^2(S^1); \quad \|u\| + \|hD_x u\| < +\infty\}. \tag{4.3.1}$$

On suppose que l'hypothèse 4.1.7 est vérifiée. Rappelons que pour tout point $z \in \mathring{\Sigma}$, nous désignons par $\rho_\pm(z)$ les points $(x_\pm(z), \xi_\pm(z))$ de T^*S^1 vérifiant

$$\rho_\pm(z) \in p^{-1}(z), \quad \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(\rho_\pm) = \mp \mathrm{Im}\, g'(x_\pm) > 0. \tag{4.3.2}$$

Nous restreignons le paramètre spectral z à un domaine, une boîte Ω_α, dépendant de h inclus dans la bande séparée par la droite d'équation $\mathrm{Im}\, z = h^{2/3}$ et la droite contenant le spectre $\mathrm{Im}\, z = c$: z_0 est fixé, α compris entre $h^{2/3}$ et c

$$\Omega_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, \ \frac{1}{C}\alpha \leq \mathrm{Im}\, z \leq C\alpha, \ |\mathrm{Re}\,(z - z_0)| \leq \tilde{C}\}. \tag{4.3.3}$$

Les points $x_+(z)$ et $x_-(z)$ vont se rapprocher lorsque $\mathrm{Im}\, z \to 0$. Nous avons, en effet

$$x_-(z) - x_+(z) \simeq (\mathrm{Im}\, z)^{1/2}.$$

Remarque 4.3.1 On identifiera fréquemment les intervalles de $\mathbb{R}$ de longueur $< 2\pi$ à des intervalles de S^1.

On peut trouver des intervalles J_+ et J_- tels que

$$x_\pm(\Omega_\alpha) \subset J_\pm, \quad \mathrm{dist}(J_+, J_-) > \frac{1}{C}h^{1/3}.$$

On pose $I_\pm = S^1 \setminus \overline{J_\mp}$, de plus nous notons $I_+ = (a_+, b_+)$, $a_+ < 0$ peut être choisit indépendant de h tandis que $b_+ > 0$ est d'ordre $\simeq h^{1/3}$, et $I_- = (b_-, a_-)$, avec $a_- > 0$ indépendant de h, et $0 > b_- \simeq -h^{1/3}$.

Considérons sur I_+, la fonction

$$e_+ := c_+(z,h)e^{-\frac{i}{h}\int_{x_+}^x (g(y)-z)dy} = c_+ e^{\frac{i}{h}\varphi_+}. \tag{4.3.4}$$

Lemme 4.3.2 *On désigne par $e_+ \in H^1_{sc}(I_+)$ la solution normalisée dans $L^2(I_+)$ de $(P-z)e_+ = 0$ sur I_+. Nous avons la représentation asymptotique suivante pour $h \to 0$ et $h^{2/3} < \operatorname{Im} z \to 0$,*

$$e_+ \sim \frac{(\operatorname{Im} z)^{1/8}}{h^{1/4}} \left(\text{cst} + \mathcal{O}(\frac{h}{(\operatorname{Im} z)^{1/2}}) \right) e^{-\frac{i}{h}\int_{x_+}^x (g(y)-z)dy}.$$

De manière analogue nous avons :

Lemme 4.3.3 *On désigne par $H^1_{sc}(I_-) \ni e_- = c_- e^{\frac{i}{h}\varphi_-}$ la solution normalisée dans $L^2(I_-)$ de $(P-z)^* e_- = 0$ sur I_-. e_- admet la représentation asymptotique suivante pour $h \to 0$ et $h^{2/3} < \operatorname{Im} z \to 0$,*

$$e_- \sim \frac{(\operatorname{Im} z)^{1/8}}{h^{1/4}} \left(\text{cst} + \mathcal{O}(\frac{h}{(\operatorname{Im} z)^{1/2}}) \right) e^{-\frac{i}{h}\int_{x_-}^x \overline{(g(y)-z)}\, dy}.$$

La preuve de ces lemmes résultera du même changement de variable, que l'on fera plus loin, combiné avec la phase stationnaire :

Proposition 4.3.4 (Phase stationnaire) *Soit $a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Supposons que $0 \in K = \operatorname{supp}(a)$ et*

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) \neq 0.$$

Supposons en plus que $\varphi'(x) \neq 0$ sur $K - \{0\}$. Posons $g(x) = \varphi(x) - \varphi''(0)x^2/2$. Alors, nous avons le développement asymptotique explicite, lorsque $h \to 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\varphi(x)/h} a(x)dx \sim$$
$$\left(\frac{2\pi i h}{\varphi''(0)}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k\geq 0}\sum_{\ell \geq 0} \left(\frac{h}{2i\varphi''(0)}\right)^k \frac{1}{\ell!}\frac{1}{k!}\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}((i/h)^\ell g^\ell a)(0). \tag{4.3.5}$$

Pour une preuve, on pourra consulter [38] p.36.

Décomposition en problèmes locaux

Proposition 4.3.5 *Pour $v \in L^2(I_+)$, $v_+ \in \mathbb{C}$, le problème de Cauchy $(P - z)u = v, u(x_+) = 0$, admet la solution unique $u = \tilde{F}v$ avec*

$$\|\tilde{F}\|_{L^2(I_+)\to H^1_{sc}(I_+)} \leq \frac{C}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}}.$$

Preuve. $\tilde{F}$ admet le noyau intégral

$$k(x,y) = \frac{i}{h} e^{-\frac{i}{h}\int_y^x (g(\tilde{x})-z)\,d\tilde{x}} 1_{\{x_+\leq y\leq x\}} - \frac{i}{h} e^{-\frac{i}{h}\int_y^x (g(\tilde{x})-z)\,d\tilde{y}} 1_{\{x\leq y\leq x_+\}}. \quad (4.3.6)$$

La norme L^2 de $\tilde{F}$ est majorée (lemme de Schur) par

$$\left(\sup_x \int |k(x,y)|dy\right)^{1/2} \left(\sup_y \int |k(x,y)|dx\right)^{1/2}. \quad (4.3.7)$$

Pour x dans un voisinage de x_+, $(Cx_+, C^{-1}x_+) := V_{x_+}$, où $C \gg 1$, nous faisons le changement de variable

$$x_+ y = x, \quad \frac{1}{x_+} D_y = D_x.$$

Le problème initial devient alors, pour $y \in (C^{-1}, C)$,

$$(\frac{h}{x_+ \operatorname{Im} z} D_y + \frac{g(yx_+)}{\operatorname{Im} z} - (\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} + i))u = \frac{v}{\operatorname{Im} z}, \quad u(1) = 0. \quad (4.3.8)$$

Avec la condition $\operatorname{Im} z > h^{2/3}$, et puisque $x_+(z) \simeq \sqrt{\operatorname{Im} z}$, $\frac{h}{x_+ \operatorname{Im} z} \asymp \frac{h}{\operatorname{Im} z^{3/2}}$ est notre nouveau paramètre semiclassique noté $\tilde{h}$. Soit

$$(\tilde{h} D_y + \tilde{g}(y) - (\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} + i))\, u = \frac{v}{\operatorname{Im} z}, \quad u(1) = 0. \quad (4.3.9)$$

avec $\tilde{g} = g(x_+ y)/\operatorname{Im} z$. $\operatorname{Im} \tilde{g} - 1$ a un unique zéro non-dégénéré en 1. De plus, pour tout $y \in (C^{-1}, C)$ et $h^{2/3} < \operatorname{Im} z$ pour $\operatorname{Im} z$ assez petit, nous avons

$$\frac{1}{\tilde{C}} \leq -\frac{\operatorname{Im} \tilde{g}(y) - 1}{y - 1} \leq \tilde{C},$$

puisque $\operatorname{Im}\tilde{g}(y) \simeq y$. Nous pouvons alors appliquer les estimations obtenues par M. Hager dans [15] (lemme 1.2.2) pour le problème de Cauchy (4.3.9). Ramenée au noyau de $\tilde{F}$, nous obtenons la borne

$$\left(\sup_{x\in V_{x_+}}\int_{V_{x_+}}|k(x,y)|dy\right),\left(\sup_{y\in V_{x_+}}\int_{V_{x_+}}|k(x,y)|dx\right)$$
$$=\frac{\mathcal{O}(1)}{\tilde{h}^{1/2}\operatorname{Im}z}=\mathcal{O}(1)\frac{(x_+\operatorname{Im}z)^{1/2}}{h^{1/2}\operatorname{Im}z}=\frac{\mathcal{O}(1)}{h^{1/2}(\operatorname{Im}z)^{1/4}}. \quad (4.3.10)$$

Il nous reste donc à estimer le noyau de $\tilde{F}$, grâce au lemme de Schur, lorsque x ou y n'appartiennent pas à un voisinage de x_+.

Pour $x \in (a_+, Cx_+)$, nous avons pour $\tilde{C} > 0$,

$$\operatorname{Im}(g(x)-z) \geq \operatorname{Im}(g(Cx_+)-z) \geq \frac{1}{\tilde{C}}\operatorname{Im}z.$$

Ce qui implique, pour $x \in (a_+, Cx_+)$,

$$\begin{aligned}\int_x^{Cx_+}|k(x,y)|dy &= \frac{1}{h}\int_x^{Cx_+}e^{-\frac{1}{h}\int_x^y \operatorname{Im}(g(\tilde{x})-z)d\tilde{x}}dy\\ &\leq \frac{1}{h}\int_x^{Cx_+}e^{-\frac{1}{\tilde{C}h}(\operatorname{Im}z)(y-x)}dy\\ &= \mathcal{O}(1)\frac{1}{\operatorname{Im}z}e^{-\frac{\operatorname{Im}z}{\tilde{C}h}(Cx_+-x)}=\mathcal{O}(\frac{1}{\operatorname{Im}z}). \quad (4.3.11)\end{aligned}$$

Pour $y \in (a_+, Cx_+)$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{a_+}^{y}|k(x,y)|dx &= \frac{1}{h}\int_{a_+}^{y}e^{-\frac{1}{h}\int_x^y \operatorname{Im}(g(\tilde{x})-z)d\tilde{x}}dx\\ &\leq \frac{1}{h}\int_{a_+}^{y}e^{-\frac{1}{\tilde{C}h}(\operatorname{Im}z)(y-x)}dx\\ &= \mathcal{O}(1)\frac{1}{\operatorname{Im}z}e^{-\frac{\operatorname{Im}z}{\tilde{C}h}(y-a_+)}=\mathcal{O}(\frac{1}{\operatorname{Im}z}). \quad (4.3.12)\end{aligned}$$

Pour $x \in (C^{-1}x_+, b_+)$, nous avons pour un $\tilde{C} > 0$,

$$\operatorname{Im}(g(x)-z) \leq \max_{y=\frac{x_+}{C},b_+}\operatorname{Im}(g(y)-z) \leq -\frac{1}{\tilde{C}}\operatorname{Im}z.$$

Ce qui implique, pour $x \in (C^{-1}x_+, b_+)$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{x_+}{C}}^{x} |k(x,y)|dy &= \frac{1}{h}\int_{\frac{x_+}{C}}^{x} e^{-\frac{1}{h}\int_x^y \mathrm{Im}\,(g(\tilde{x})-z)d\tilde{x}}dy \\ &\leq \frac{1}{h}\int_{\frac{x_+}{C}}^{x} e^{-\frac{1}{Ch}(\mathrm{Im}\,z)(x-y)}dy \\ &= \mathcal{O}(1)\frac{1}{\mathrm{Im}\,z}e^{-\frac{\mathrm{Im}\,z}{Ch}(x-\frac{x_+}{C})} = \mathcal{O}(\frac{1}{\mathrm{Im}\,z}). \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Pour $y \in (C^{-1}x_+, b_+)$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{y}^{b_+} |k(x,y)|dx &= \frac{1}{h}\int_{y}^{b_+} e^{-\frac{1}{h}\int_x^y \mathrm{Im}\,(g(\tilde{x})-z)d\tilde{x}}dx \\ &\leq \frac{1}{h}\int_{y}^{b_+} e^{-\frac{1}{Ch}(\mathrm{Im}\,z)(x-y)}dx \\ &= \mathcal{O}(1)\frac{1}{\mathrm{Im}\,z}e^{-\frac{\mathrm{Im}\,z}{Ch}(b_+-y)} = \mathcal{O}(\frac{1}{\mathrm{Im}\,z}). \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

En recollant (4.3.10)-(4.3.14), nous trouvons que l'expression (4.3.7) est

$$\leq \frac{C}{h^{1/2}(\mathrm{Im}\,z)^{1/4}}, \quad h, h^{2/3} < \mathrm{Im}\,z \to 0.$$

La norme L^2 de $\tilde{F}$ est donc majorée par $C/(h^{1/2}(\mathrm{Im}\,z)^{1/4})$, lorsque $\mathrm{Im}\,z > h^{2/3}$. Il ne reste plus qu'à conclure comme dans le lemme 1.2.2 de [13] pour achever la preuve. □

Soit $\chi_\pm \in C_0^\infty(I_\pm)$ avec $\chi_\pm = 1$ sur $J_\pm$ tels que $\mathrm{supp}\,\chi_+ \cap \mathrm{supp}\,\chi_- = \emptyset$.

Il est clair que les troncatures $\chi_\pm$ dépendent de $\mathrm{Im}\,z$, et par conséquent de h. Etant donné que la distance qui sépare $J_\pm$ de l'origine est de l'ordre de $h^{1/3}$, les troncatures $\chi_\pm$ peuvent être choisies de telle sorte qu'au voisinage de 0 nous avons $\mathrm{supp}(\chi_+) \subset (-C, 0)$ et $\mathrm{supp}(\chi_+) \subset (0, C)$, avec

$$|\chi_\pm^{(n)}| = \mathcal{O}(h^{-n/3}). \tag{4.3.15}$$

Nous définissons l'opérateur $R_+ : L^2(I_+) \to \mathbb{C}$ par

$$R_+u := \langle u, \chi_+ e_+\rangle = \int_{I_+} u(x)\chi_+\overline{e_+}(x)dx. \tag{4.3.16}$$

Corollaire 4.3.6 *Pour $v \in L^2(I_+)$, $v_+ \in \mathbb{C}$ le problème*

$$\begin{cases} (P-z)u = v \\ R_+ u = v_+ \end{cases} \tag{4.3.17}$$

admet la solution unique

$$u = Fv + F_+ v_+ \in H^1_{sc}(I_+)$$

où

$$F_+ v_+ := \frac{1}{\langle e_+, \chi_+ e_+ \rangle} v_+ e_+ =: \frac{1}{D_+} v_+ e_+, \quad Fv = (1 - F_+ R_+)\tilde{F} v. \tag{4.3.18}$$

De plus,

$$\|F\|_{L^2(I_+) \to H^1_{sc}(I_+)} \leq \frac{C}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}}, \quad \|F_+\|_{\mathbb{C} \to H^1_{sc}(I_+)} = \mathcal{O}(1). \tag{4.3.19}$$

Près de x_- la situation de $(P-z)^*$ est analogue à $(P-z)$ pour x_+. On procède comme dans la proposition 4.3.5 et en se référant au lemme 1.2.3 de [15] pour montrer :

Proposition 4.3.7 *Pour $v \in L^2_{\mathrm{comp}}(I_-)$ le problème*

$$(P-z)u + R_- u_- = v$$

où

$$R_- u_- := u_- \chi_- e_-, \quad u_- \in \mathbb{C}$$

admet la solution unique $(u, u_-) \in H^1_{sc,\,\mathrm{comp}}(I_-) \times \mathbb{C}$

$$u = Gv, \quad u_- = G_- v.$$

où

$$G_- v := \frac{1}{\langle \chi_- e_-, e_- \rangle} \langle v, e_- \rangle = \frac{1}{D_-} \langle v, e_- \rangle.$$

De plus, en tant qu'opérateur $L^2_{\mathrm{comp}}(I_-) \to H^1_{\mathrm{comp}}(I_-)$,

$$\|G\|_{L^2 \to H^1_{sc}} \leq \frac{C}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}}$$

et en tant qu'opérateur $L^2_{\mathrm{comp}}(I_-) \to \mathbb{C}$,

$$\|G_-\|_{L^2 \to \mathbb{C}} = \mathcal{O}(1).$$

Inverse global

On reproduit les arguments de la section "1.2.3 Inverse global" de [15] pour construire un inverse à droite.

Nous choisissons une partition de l'unité $\psi_\pm \in C_0^\infty(I_\pm)$, telle que $\chi_\pm \prec \psi_\pm$, où $\psi \prec \phi$ signifie

$$\mathrm{supp}\,(\psi) \cap \mathrm{supp}\,(1-\phi) = \emptyset.$$

Proposition 4.3.8 *Pour tout $z \in \Omega_\alpha$.*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P-z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible d'inverse

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} E &= G\left(\psi_- + \frac{h}{i}\chi_-' F\psi_+\right) + (1-\chi_-)F\psi_+ \qquad (4.3.20)\\ E_+ &= (1-\chi_-)F_+ + G\frac{h}{i}\chi_-' F_+ \\ E_- &= G_-(\psi_- + \frac{h}{i}\chi_-' F\psi_+) \\ E_{-+} &= G_-\frac{h}{i}\chi_-' F_+ = -\frac{h}{iD_-D_+}\langle \chi_-' e_+, e_-\rangle. \end{aligned}$$

Les normes vérifient

$$\|E\|_{L^2\to H^1_{sc}} = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h}\,(\mathrm{Im}\,z)^{1/4}}),\ \|E_+\| = \mathcal{O}(1),\ \|E_-\| = \mathcal{O}(1), \qquad (4.3.21)$$

$$\|E_{-+}\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{h}\,(\mathrm{Im}\,z)^{1/4} e^{-\frac{(\mathrm{Im}\,z)^{3/2}}{Ch}}\right). \qquad (4.3.22)$$

Preuve. Pour (4.3.20), ce n'est autre que la proposition 1.2.4, [15], pour laquelle on a reproduit les arguments. Nous avons donc

$$\begin{aligned} E_{-+} = -\frac{hc_+\bar{c}_-}{iD_+D_-}(&\int_{I_+\cap I_-} \chi_-' e^{\frac{i}{h}\int_{x_-}^{x_+}(g(y)-z)\,dy} dx \\ &+ \int_{(I_++2\pi)\cap I_-} \chi_-' e^{-\frac{i}{h}\int_{x_+}^{x_-+2\pi}(g(y)-z)\,dy} dx), \qquad (4.3.23) \end{aligned}$$

$c_\pm$ a été défini en 4.3.4. Le second terme (4.3.23) est clairement $\mathcal{O}(e^{-\frac{1}{Ch}})$. Nous avons

$$\int_{I_+\cap I_-} \chi_-' dx = \int_{b_-}^{b_+} \chi_-' dx = \chi_-(b_+) - \chi_-(b_-) = 1,$$
$$|\exp(\frac{i}{h}\int_{x_-}^{x_+} g(y) - z\, dy)| = \mathcal{O}(1)\exp\left(-\frac{(\operatorname{Im} z)^{3/2}}{Ch}\right),$$

puisque

$$\operatorname{Im}\int_{x_-}^{x_+}(g(x)-z)\,dx \simeq \int_{x_-}^{x_+}(x^2 - \operatorname{Im} z)\,dx \simeq (\operatorname{Im} z)^{3/2}. \tag{4.3.24}$$

Il suffit ensuite d'utiliser les lemmes 4.3.2 et 4.3.3, qui nous donne l'asymptotique de $c_\pm$, $c_\pm \sim \mathrm{cst}_\pm \frac{(\operatorname{Im} z)^{1/8}}{h^{1/4}}$, pour avoir une estimation de la norme de E_{-+}, soit (4.3.22). Comme $\chi_-' = \mathcal{O}(h^{-1/3})$, nous avons si $h^{2/3} < \operatorname{Im} z$,

$$\begin{aligned} E =& \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}}) + \mathcal{O}(1)h \times h^{-1/3} \times \frac{1}{h(\operatorname{Im} z)^{1/2}} \\ =& \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}}) + \mathcal{O}(1) \times \frac{1}{h^{1/3}(\operatorname{Im} z)^{1/2}} \\ =& \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_+ =& \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)h \times h^{-1/3} \times \frac{1}{h^{1/2}(\operatorname{Im} z)^{1/4}} \\ =& \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) \times \frac{1}{h^{-1/6}(\operatorname{Im} z)^{1/4}} = \mathcal{O}(1). \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

De même pour E_-. □

Remarque 4.3.9 Des calculs préliminaires nous font penser que lorsque p est d'ordre fini, $2k$, sur le bord de Σ, alors dans ce cas (4.3.22) est remplacé par

$$\|E\|_{L^2\to H^1_{sc}} = \mathcal{O}(1)\frac{1}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{\frac{2k-1}{4k}}},\ \|E_+\| = \mathcal{O}(1),\ \|E_-\| = \mathcal{O}(1),$$
$$\|E_{-+}\| = \mathcal{O}\left(\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{\frac{2k-1}{4k}}\exp(-\frac{(\operatorname{Im} z)^{\frac{2k+1}{2k}}}{Ch})\right). \tag{4.3.26}$$

Comme conséquence de la proposition précédente, nous pouvons donner une majoration de la norme de la résolvante lorsque z s'approche du bord du pseudospectre.

Nous avons $D_\pm \asymp 1$, et aussi $|\int_{b_+}^{b_-} \chi' dx| \asymp 1$. Des lemmes 4.3.2 et 4.3.3, nous obtenons les asymptotiques

$$c_\pm \sim \frac{(\operatorname{Im} z)^{1/8}}{h^{1/4}} \left(\mathrm{cst}_\pm + \mathcal{O}(\frac{h}{(\operatorname{Im} z)^{1/2}}) \right).$$

Il est donc facile de voir qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout z dans la boîte Ω_α nous avons

$$|E_{-+}| \geq \frac{1}{C} \sqrt{h} \, (\operatorname{Im} z)^{1/4} e^{-C \frac{(\operatorname{Im} z)^{3/2}}{h}}.$$

Puisque $(P-z)^{-1} = E - E_+ E_{-+}^{-1} E_-$, nous pouvons énoncer la proposition qui suit :

Proposition 4.3.10 *Soit $P = hD_x + g(x)$ comme dans l'introduction vérifiant l'hypothèse 4.1.7. Soit K un compact connexe inclus dans Σ, disjoint et situé en dessous de la droite contenant le spectre. Nous avons les assertions suivantes :*
i) ([9]) Il existe $\tilde{C} > 0$ et $C > 0$ tels que

$$\forall z \in K \text{ avec } \operatorname{Im} z < h^{2/3}/C, \quad \|(P-z)^{-1}\| \leq \tilde{C} h^{2/3}. \tag{4.3.27}$$

ii) Soit $\tilde{C} > 0$ fixé. Il existe $C > 0$ tel que tout z de K, vérifiant $\operatorname{Im} z > C h^{2/3}$, nous avons

$$\|(P-z)^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{h} \, (\operatorname{Im} z)^{1/4}} \mathcal{O}(1) e^{C \frac{(\operatorname{Im} z)^{3/2}}{h}}. \tag{4.3.28}$$

Preuve. Nous savons que (4.3.28) est vérifiée pour $h^{2/3} > \operatorname{Im} z$, soit pour $\operatorname{Im} z = h^{2/3} C$, où C est une grande constante. Ce qui veut dire que (4.3.28) devient

$$\|(P-z)^{-1}\| \leq \frac{C}{\sqrt{h} \, (h)^{1/6}} = \frac{C}{h^{2/3}}. \tag{4.3.29}$$

Il suffit ensuite d'appliquer le lemme des trois droites d'Hadamard pour prouver complètement le point ii). □

Soit ρ tel que $p(\rho) = z$. Etant donné qu'en dimension 1, $P - z$ est microlocalement équivalent près de ρ modulo des opérateurs elliptiques à $hD_x + g(x,z)$, il est raisonnable de conjecturer :

Conjecture 4.3.11 *Ici la dimension est 1. Soit P un opérateur h-pseudodifférentiel de symbole principal p. Supposons que P est de type principal c'est-à-dire*

$$p(m) = 0 \Rightarrow dp(m) \neq 0.$$

Introduisons l'ensemble

$$\Sigma(p) = \overline{p(T^*\mathbb{R})}.$$

Supposons que en un point $z_0 \in \partial\Sigma(p)$,

$$p^{-1}(z_0) = \{\rho_0\},\ \{p, \{p, \bar{p}\}\}(\rho_0) \neq 0,$$

c'est-à-dire que p est d'ordre 2 au point z_0. On désigne par $\alpha(z)$ la distance de z à $\partial\Sigma(p)$, alors pour tout $z \in \Sigma(p)$ dans un voisinage de z_0, tel que $1 > \alpha(z) > h^{2/3}$ nous avons

$$\|(P-z)^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{h}\,(\alpha(z))^{1/4}}\mathcal{O}(1)e^{C\frac{(\alpha(z))^{3/2}}{h}}.$$

Comme il nous l'a été souligné, si on admet plusieurs points dans $p^{-1}(z_0)$, il est probable que la conjecture soit fausse pour une raison simple : le bord de $\Sigma(p)$ n'est pas nécessairement une hypersurface.

4.3.2 Perturbation

Nous considérons la perturbation aléatoire Q_ω définie sur l'espace de probabilité $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$$Q_\omega u = \sum_{j,k} a_{j,k}(\omega)\langle u, e_j\rangle e_k \tag{4.3.30}$$

où e_k est la base orthonormée usuelle de $L^2(S^1)$ et les variables aléatoires $a_{j,k}$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, \sigma_{j,k})$. La variance satisfait $\sigma_{j,k} = \sigma_j\sigma_k$, et on demande qu'il existe $\rho > 1$ et $\tilde{C} > 0$ tels que

$$\frac{1}{\tilde{C}}\langle j\rangle^{-\rho} \leq \sigma_j^2 \leq \tilde{C}\langle j\rangle^{-\rho}.$$

Nous avons la proposition suivante qui découle de la section 6 de [16] :

Proposition 4.3.12 *Soit $M > 0$, il existe alors $C > 0$ pour lequel nous avons*

$$\mathbb{P}(\|Q\|_{\mathrm{HS}} \leq M) \geq 1 - C\exp(-M^2/C).$$

Dans la suite, on prendra

$$M = \ln(h^{-1}). \tag{4.3.31}$$

Proposition 4.3.13 *Soit $\delta \ll \frac{\sqrt{h}\,(\alpha)^{1/4}}{M}$ un paramètre de perturbation. Alors avec une probabilité*

$$\geq 1 - Ce^{-M^2/C},$$

nous avons pour tout z dans Ω_α que

$$\mathcal{P}^\delta = \begin{pmatrix} P - z - \delta Q & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix}$$

est continu $H^m_{sc}(S^1) \times \mathbb{C} \to L^2(S^1) \times \mathbb{C}$ et admet un inverse $\mathcal{E}^\delta$ de la forme

$$\mathcal{E}^\delta = \mathcal{E} + \begin{pmatrix} \sum_{j\geq 1} E(\delta Q E)^j & \sum_{j\geq 1} (E\delta Q)^j E_+ \\ \sum_{j\geq 1} E_-(\delta Q E)^j & \sum_{j\geq 1} E_-(\delta Q E)^{j-1}(\delta Q E_+) \end{pmatrix} \tag{4.3.32}$$

$$= \mathcal{E} + \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\frac{\delta M}{h\,(\operatorname{Im} z)^{1/2}}) & \mathcal{O}(\frac{\delta M}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}}) \\ \mathcal{O}(\frac{\delta M}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}}) & \mathcal{O}(\delta M) \end{pmatrix}. \tag{4.3.33}$$

Preuve. Nous avons $\mathcal{P}^\delta \mathcal{E} = 1 - K$ où

$$K = \begin{pmatrix} \delta Q E & \delta Q E_+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il existe $C > 0$ tel que avec une probabilité supérieure à $1 - Ce^{-M^2/C}$ on a $\|Q\|_{H^m_{sc} \to L^2} \leq M$, impliquant

$$\|K\| < C\delta \|Q\| \|E\| \ll 1.$$

Il suffit alors d'observer que $\mathcal{E}^\delta = \mathcal{E}(1 + K + K^2 + \ldots)$. □

On suit ici de près la section "1.4 Propriétés analytiques de E_{-+}" de [15]. Introduisons les fonctions

$$l_0(z) = -i \int_{x_-}^{x_+} (g(x) - z) dx,$$

et

$$l^0(z) = l_0(z) - h \ln \frac{\sqrt{h}\, c_+ \bar{c}_-}{D_- D_+} = l_0 + \mathcal{O}(h) \ln \frac{1}{h}.$$

Nous savons de la section "Propriétés analytiques de $E^{(0)}_{-+}$" de [13] que la fonction $e^{l^0(z)/h} E_{-+}$ est holomorphe avec les mêmes zéros que E_{-+}, et qu'en plus :

Proposition 4.3.14 $\mathrm{Re}\, l_0(z)$ *est strictement sous-harmonique et nous avons*

$$\Delta \mathrm{Re}\, l_0(z)\, d(\mathrm{Re}\, z) \wedge d(\mathrm{Im}\, z) = d\xi_- \wedge dx_- - d\xi_+ \wedge dx_+.$$

On cherche à trouver ensuite, comme pour E_{-+}, une fonction analytique avec les mêmes zéros que l'hamiltonien effectif, E^δ_{-+}, du problème perturbé. De l'identité $\partial_{\bar z}(P^\delta \mathcal{E}^\delta) = 0$, nous trouvons

$$\begin{aligned}\partial_{\bar z} E^\delta_{-+} &= -(E^\delta_-(\partial_{\bar z} R_-) + (\partial_{\bar z} R_+) E^\delta_+) E^\delta_{-+} \\ &= -k^\delta(z) E^\delta_{-+}.\end{aligned}$$

Nous obtenons ensuite

$$\begin{aligned}k^\delta(z) &= E^\delta_-(\partial_{\bar z} R_-) + (\partial_{\bar z} R_+) E^\delta_+ \\ &= k^0(z) + \sum_{j\geq 1} (E_-((\delta Q E)^j \partial_{\bar z}\chi_- e_-) + \langle (E\delta Q)^j E_+, \partial_z \chi_+ e_+\rangle).\end{aligned}$$

D'où découle alors la majoration

$$\begin{aligned}|k^\delta(z) - k^0(z)| &\leq \sum_{j\geq 1} (\frac{\delta M}{\sqrt{h}\,(\mathrm{Im}\, z)^{1/4}})^j (\|\partial_{\bar z} e_-\| + \|\partial_z e_+\|) \\ &\leq \frac{\delta M}{\sqrt{h}\,(\mathrm{Im}\, z)^{1/4}} \mathcal{O}(\frac{1}{h}).\end{aligned}$$

Proposition 4.3.15 *Il existe une solution l^δ de l'équation $\frac{1}{h}\partial_{\bar z} l^\delta = k^\delta$ rendant $e^{l^\delta/h} E^\delta_{-+}$ holomorphe, telle que*

$$|l^\delta - l^0| = \mathcal{O}(1) \frac{\delta M}{\sqrt{h}\,(\mathrm{Im}\, z)^{1/4}}.$$

Preuve. Nous pouvons définir l^δ par

$$(l^\delta - l^0)(z) = \frac{h}{\pi} \int_{\Omega_\alpha} \frac{(k^0 - k^\delta)(z')}{z - z'} d\mathrm{Re} z' d\mathrm{Im} z' \tag{4.3.34}$$

$$\begin{aligned}|(l^\delta - l^0)(z)| &\leq h \|k^\delta - k^0\|_{L^\infty(\Omega_\alpha)} \int_{\Omega_\alpha} \frac{1}{|z - z'|} d\mathrm{Re} z' d\mathrm{Im} z' \qquad (4.3.35) \\ &= \frac{\delta M}{\sqrt{h}\,(\mathrm{Im}\, z)^{1/4}} \times \mathcal{O}(1).\end{aligned}$$

□

On fait, pour la suite, l'hypothèse que

$$\frac{\delta M}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}} \ll h \tag{4.3.36}$$

pour que $l^\delta = l^0 + \mathcal{O}(h) = l_0 + \mathcal{O}(h)\ln\frac{1}{h}$.

Borne inférieure pour l'hamiltonien effectif

Nous avons

$$\begin{aligned} E^\delta_{-+} &= E_{-+} + \delta E_- Q E_+ + \mathcal{O}(\frac{\delta^2 M^2}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}}) \\ &=: E_{-+} + \delta\widehat{Q} \end{aligned} \tag{4.3.37}$$

Pour ce paragraphe, nous suivons de très près les arguments de la section 9 de [16]. Nous pouvons écrire notre perturbation sous la forme

$$Q_\omega = \widehat{S} \circ \sum_{j,k} \alpha_{j,k} e_j e_k^* \circ \widetilde{S} \tag{4.3.38}$$

avec $\alpha_{j,k} \sim \mathcal{N}(0,1)$ et indépendante, et $\widehat{S}$, $\widetilde{S}$ des opérateurs pseudodifférentiels elliptiques, Hilbert-Schmidt, de norme indépendante de h et représentés respectivement par les opérateurs diagonaux, $\operatorname{diag}(\sigma_j)$, $\operatorname{diag}(\sigma_k)$, dans la base orthonormée (e_j) :

$$\widehat{S}u = \sum \sigma_j \langle u, e_i\rangle e_i, \quad \widetilde{S}u = \sum \sigma_k \langle u, e_k\rangle e_k. \tag{4.3.39}$$

Au regard de la proposition 13.4 de [16], le choix des bases n'affecte pas la classe des opérateurs de la forme (4.3.38). Nous pouvons donc écrire

$$Q_\omega = \widehat{S} \circ \sum_{j,k} \alpha_{j,k} \hat{e}_j \tilde{e}_k^* \circ \widetilde{S} \tag{4.3.40}$$

où $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots$, et $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots$, sont des bases orthonormées quelconques de $L^2(S^1)$.

E_+ et E_-, définis dans la proposition 4.3.8, sont des opérateurs de rang 1, de la forme

$$E_+ v_+ = v_+ t_+, \quad E_- v = \langle v, t_-\rangle, \tag{4.3.41}$$

avec $t_\pm \in L^2(S^1)$. Nous définissons les vecteurs normés $\tilde{t}$ et $\hat{t}$ de la manière suivante

$$\tilde{t} := \frac{\widetilde{S}t_+}{\|\widetilde{S}t_+\|}, \quad \hat{t} := \frac{\widehat{S}^* t_-}{\|\widehat{S}^* t_-\|}. \tag{4.3.42}$$

Nous pouvons alors choisir des bases orthonormées, $(\hat{e}_j)$, $(\tilde{e}_j)$ dans $L^2(S^1)$ telle que $\tilde{e}_0 = \tilde{t}$ et $\hat{e}_0 = \hat{t}$. De (4.3.40), (4.3.41) et (4.3.42), il est alors clair que nous avons

$$E_- Q E_+ = \|\widehat{S}^* t_-\| \, \|\widetilde{S}t_+\| \, \alpha_{0,0}(\omega). \tag{4.3.43}$$

Proposition 4.3.16 *(α est fixé) Pour tout z dans Ω_α, nous avons*

$$\frac{1}{C} h^\rho \leq \|\widetilde{S}t_+\|^2, \, \|\widehat{S}^* t_-\|^2,$$

où $C > 0$ est indépendant de h.

Preuve. Nous avons

$$\|\widetilde{S}t_+\|^2 = \sum_j \sigma_j^2 \, |\langle t_+, e_j \rangle|^2.$$

Par définition t_+ ((4.3.41) et proposition 4.3.8) s'écrit sous la forme

$$t_+ = (1 - \chi_-) \frac{e_+}{D_+} + \frac{h}{iD_+} G \chi'_- e_+. \tag{4.3.44}$$

Puisque e_+ est normalisé, et le dernier terme $\mathcal{O}(h^{1/6}\alpha^{-1/4})$ (voir (4.3.25)), il est clair que si $h^{2/3} < \alpha$ alors il existe $C > 0$ tel que

$$\frac{1}{C} \leq \|t_+\| \leq C.$$

Lemme 4.3.17 *Soit $\varphi_\pm \in C_0^\infty$ à support compact dans $I_\pm$, $\varphi_\pm = 1$ sur $J_\pm$, et satisfaisant $\varphi_\pm^{(n)} = \mathcal{O}(h^{-n/3})$. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $z \in \Omega_\alpha$:*

i. si $|k| < \frac{C}{h}$ on a $|\langle \varphi_+ e_+, e_k \rangle| = \mathcal{O}(1)$, $|\langle G\varphi'_- e_+, e_k \rangle| = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{z}(\alpha)^{1/4}})$,

ii. si $|k| \geq \frac{C}{h}$ on a $|\langle \varphi_+ e_+, e_k \rangle|$, $|\langle G\varphi'_- e_+, e_k \rangle| = \mathcal{O}(\frac{1}{|k|^\infty})$.

Preuve. Le point i se déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour ii : il est clair que $\langle \varphi_+ e_+, e_k \rangle$ est une intégrale de la forme

$$\int_0^{2\pi} e^{-\frac{i}{h}\int_{x_+}^x (f(y)-z)dy - kx} c_+ \varphi_+(x) dx,$$

Ecrivons la fonction

$$\varphi(x) = -\frac{1}{h}\int_{x_+}^{x}(g(y)-z)dy - kx.$$

Sa dérivée par rapport à x est égale à $-\frac{g(x)-z}{h} - k$ et il existe $C > 0$ pour lequel elle vérifie

$$\forall z \in \Omega_\alpha,\ \forall |k| \geq \frac{C}{h}, \quad |\varphi'(x)| \geq \frac{|k|}{C}.$$

La constante $C > 0$ est choisie de telle manière que $C > \sup_{x\in S^1, z\in\Omega_\alpha} |g(x) - z|$. Introduisons

$$a_n = \left(-\frac{d}{dx}\circ\frac{1}{\varphi'}\right)^n(\varphi_+).$$

Puisque pour $j > 1$, $|\varphi^j(x)| \leq C_j|k|$, il en résulte que

$$a_n = \mathcal{O}(\frac{1}{|k|^n}),$$

tenant compte que $\varphi_+^{(n)} = \mathcal{O}(h^{-n/3})$, par hypothèse. Pour conclure, il suffit de remarquer que des intégrations successives donnent

$$\langle \varphi_+ e_+, e_k\rangle = \frac{c_+}{i}\int e^{i\varphi(x)}a_n(x)dx,$$

puis de majorer la valeur absolue de l'intégrale, sans oublier de remarquer que $\sup_{x\in S^1}|e^{i\varphi(x)}| = 1$.

Il est évident que nous avons un résultat équivalent pour $\langle \varphi_- e_-, e_k\rangle$. Pour démontrer ii avec $|\langle G\varphi'_- e_+, e_k\rangle|$, il faut remarquer que $(P-z)G = Id - R_-G_-$; nous avons donc pour $|k| > k_0$, k_0 assez grand

$$\begin{aligned}
\langle G\varphi'_- e_+, e_k\rangle =& \langle (P-z)G\varphi'_- e_+, (ik + \bar g(x) - \bar z)^{-1}e_k\rangle \\
=& \langle \varphi'_- e_+, (ik + \bar g(x) - \bar z)^{-1}e_k\rangle \\
&+ \langle R_-G_-\varphi'_- e_+, (ik + \bar g(x) - \bar z)^{-1}e_k\rangle \\
=& \langle \varphi'_- e_+, (ik + \bar g(x) - \bar z)^{-1}e_k\rangle \\
&+ \frac{1}{D_-}\langle \varphi'_- e_+, e_-\rangle\langle \chi_- e_-, (ik + \bar g(x) - \bar z)^{-1}e_k\rangle,
\end{aligned}$$

ce qui permet de revenir à la situation précédente. Nous avons ainsi démontré totalement le point *ii* du lemme. □

Le lemme au-dessus étant prouvé, nous pouvons continuer la preuve de la proposition. De ce dernier, nous déduisons que

$$\begin{aligned}\|\widetilde{S}t_+\|^2 &= \sum_{|j|\leq \frac{C}{h}} \sigma_j^2 \,|\langle t_+, e_j\rangle|^2 + \mathcal{O}(h^\infty)\\ &\geq \frac{1}{C}h^\rho \sum_{|j|\leq \frac{C}{h}} |\langle t_+, e_j\rangle|^2 + \mathcal{O}(h^\infty)\\ &\geq \frac{1}{C}h^\rho \,(\|t_+\|^2 - \sum_{|j|> \frac{C}{h}} |\langle t_+, e_j\rangle|^2) + \mathcal{O}(h^\infty)\\ &\geq \frac{1}{C}h^\rho \,(\frac{1}{\widetilde{C}} + \mathcal{O}(h^\infty)) + \mathcal{O}(h^\infty),\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. On procédera similairement pour $\widehat{S}^* t_-$. □

Nous allons restreindre notre attention à l'ensemble $\mathcal{Q}_M$ des matrices $(\alpha_{j,k}(\omega))$ tel que

$$\|Q\|_{\mathrm{HS}} \leq M. \tag{4.3.45}$$

$\widehat{Q}$ peut être reformulé comme

$$\widehat{Q}(\alpha) = \|\widehat{S}^* t_-\|\,\|\widetilde{S}t_+\|\,(\alpha_{0,0}(\omega) + \widetilde{T}(\alpha)), \tag{4.3.46}$$

$$\|\widetilde{T}(\alpha)\|_{\mathbb{C}\to\mathbb{C}} \leq \mathcal{O}(1)\frac{\delta M^2}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}\|\widehat{S}^* t_-\|\,\|\widetilde{S}t_+\|}, \tag{4.3.47}$$

pour $(\alpha_{j,k}(\omega)) \in \mathcal{Q}_M$.

$|||(\alpha)_{j,k}|||$ désigne la norme dans (4.3.45) et $\mathcal{H}$ est l'espace de Hilbert des matrices $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Les inégalités de Cauchy impliquent que la différentielle de l'application $\alpha \to \widetilde{T}(\alpha)$ satisfait l'estimation suivante sur $\mathcal{Q}_M$:

$$\|d\widetilde{T}\|_{\mathcal{H}\to\mathbb{C}} = \mathcal{O}(1)\frac{\delta M}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}h^{2\rho}}. \tag{4.3.48}$$

Sur $\mathcal{H}, \mathbb{C}$ nous avons les mesures de probabilité

$$\mu_{\mathcal{H}} = \prod_{j,k}(e^{-|\alpha_{j,k}|^2}\frac{L(d\alpha_{j,k})}{\pi}), \quad \mu_{\mathbb{C}} = e^{-|\alpha|^2}\frac{L(d\alpha)}{\pi}.$$

Nous voulons maintenant estimer $\Pi_*(\mu_{\mathcal{H}})$ sur $\mathcal{Q}_M$, où

$$\Pi = \Pi_0 \circ \kappa, \quad \kappa((\alpha_{j,k})) = (\alpha) + T(\alpha), \quad \Pi_0(\alpha) = \alpha_{0,0}.$$

avec $(T(\alpha))_{0,0} = \widetilde{T}(\alpha)$ et pour $j, k \neq 0$ $(T(\alpha))_{j,k} = 0$.

Adaptons maintenant (9.16) de [16] à notre cas :

$$|\|\kappa(\alpha)\|_{\mathrm{HS}}^2 - \|\alpha\|_{\mathrm{HS}}^2| \leq \mathcal{O}(1)\frac{\delta M^3}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}h^{2\rho}}. \tag{4.3.49}$$

Nous faisons alors l'hypothèse que

$$\frac{\delta M^3}{\sqrt{h}(\operatorname{Im} z)^{1/4}h^{2\rho}} \ll 1. \tag{4.3.50}$$

Nous savons que si A est de rang 1, alors $\|A\|_{\mathrm{tr}} \leq \|A\|$, donc pour le Jacobien de κ, nous obtenons des inégalités de Cauchy (4.3.48) l'estimation

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial \kappa}{\partial \alpha} &= 1 + \mathcal{O}(\|\frac{\partial T(\alpha)}{\partial \alpha}\|_{\mathrm{tr}}) \\ &= 1 + \mathcal{O}(1)\frac{\delta M}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}h^{2\rho}}. \end{aligned} \tag{4.3.51}$$

Si bien que

$$L(d\kappa(x)) = (1 + \mathcal{O}(1)\frac{\delta M}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}h^{2\rho}})L(dx).$$

Combinant ce dernier avec (4.3.49), nous obtenons

$$\kappa_*(\mu_{\mathcal{H}}) \leq (1 + \mathcal{O}(1)\frac{\delta M^3}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}h^{2\rho}})\mu_{\mathcal{H}} \text{ sur } \mathcal{Q}_M$$

et puisque $(\Pi_0)_*\mu_{\mathcal{H}} = \mu_{\mathbb{C}}$, nous avons

$$\Pi_*(\mu_{\mathcal{H}}) \leq (1 + \mathcal{O}(1)\frac{\delta M^3}{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4}h^{2\rho}})\mu_{\mathbb{C}} \text{ sur } \mathcal{Q}_M. \tag{4.3.52}$$

Nous donnons un lemme démontré dans [16] :

Proposition 4.3.18 *Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, pour tout $m \in \mathbb{C}$, $\sigma > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$\mathbb{P}(|m+\sigma X|^2 \leq b^2) \leq \mathbb{P}(|\sigma X|^2 \leq b^2) = 1 - \exp[-\frac{b^2}{\sigma^2}].$$

La $\mu_{\mathbb{C}}(dy)$ mesure de l'ensemble des complexes satisfaisant

$$|\|\widehat{S}^* t_-\|^{-1} \|\widetilde{S} t_+\|^{-1} \frac{1}{\delta} E_{-+} + X| \leq t$$

est $\leq 1 - \exp(-t^2)$. En vue de (4.3.37), (4.3.46) et (4.3.52), c'est aussi une borne supérieure pour la probabilité d'avoir $(\alpha_{j,k}) \in \mathcal{Q}_M$ et

$$|\|\widehat{S}^* t_-\|^{-1} \|\widetilde{S} t_+\|^{-1} (\frac{1}{\delta} E_{-+} + \widehat{Q})| \leq t$$

où équivalent

$$|E^\delta_{-+}| \leq t\delta \, \|\widehat{S}^* t_-\| \, \|\widetilde{S} t_+\|.$$

Résumons la discussion :

Proposition 4.3.19 *Si*

$$\delta \ll \frac{\sqrt{h}\,(\operatorname{Im} z)^{1/4} h^{2\rho}}{M^3}, \tag{4.3.53}$$

alors il existe $C > 0$ tel que nous avons pour tout z dans Ω_α

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|E^\delta_{-+}| \geq t\delta \, \|\widehat{S}^* t_-\| \, \|\widetilde{S} t_+\|) &\geq \mathbb{P}(|E^\delta_{-+}| \geq t\delta h^{2\rho}/C) \\ &\geq e^{-t^2} - Ce^{-M^2}. \end{aligned} \tag{4.3.54}$$

Puisque pour tout z dans Ω_α, $l^\delta(z) = l_0(z) + \mathcal{O}(h)\ln\frac{1}{h}$, et au regard de la proposition 4.3.13 nous avons

$$\begin{aligned} |e^{\frac{1}{h} l^\delta(z)} E^\delta_{-+}(z)| &\leq h^{-C} e^{\frac{1}{h}\operatorname{Re} l_0(z)} \times (E_{-+} + \mathcal{O}(\delta M)) \\ &\leq h^{-C} e^{\frac{1}{h}\operatorname{Re} l_0(z)}. \end{aligned}$$

Nous désignons par F_δ la fonction holomophe $e^{l^\delta/h} E^\delta_{-+}$ (confère proposition 4.3.15). Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant (on aura pris $t = h^\gamma$, $\gamma > 0$, dans la proposition ci-dessus) :

Théorème 4.3.20 *a) Soit δ satisfaisant la condition (4.3.36). Il existe alors une constante $C > 0$ telle que*

$$\ln |F_\delta(z)| \leq \frac{1}{h}(\mathrm{Re}\, l_0(z) + Ch \ln \frac{1}{h}), \quad \forall z \in \Omega_\alpha, \tag{4.3.55}$$

avec probabilité $\geq 1 - Ce^{-M^2}$.
b) Sous l'hypothèse plus forte (4.3.53), alors il existe $C_{\rho,\gamma}, C > 0$ tels que pour tout z dans Ω_α nous avons

$$\ln |F_\delta(z)| \geq \frac{1}{h}(\mathrm{Re}\, l_0(z) - Ch \ln \frac{1}{h} - C_{\rho,\gamma}\, h \ln \frac{1}{h\delta}) \tag{4.3.56}$$

avec une probabilité $\geq 1 - h^{2\gamma} - Ce^{-M^2}$.

4.3.3 Asymptotique spectrale

Nous pouvons alors reproduire les arguments de [13, 14, 16]. Une adaptation de la preuve de la proposition 1.8.1 de [15] donne :

Proposition 4.3.21 *Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$, un domaine à bord C^2 par morceaux et ϕ une fonction $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ et soit f une fonction holomorphe dans Ω vérifiant*

$$|f(z,h)| \leq e^{\phi(z)/h}, \quad z \in \Omega. \tag{4.3.57}$$

Supposons qu'il existe $0 < \tilde{\epsilon}, r \ll 1, z_k \in \Omega, k \in J$ tels que

$$\partial\Gamma \subset \bigcup_{k\in J} D(z_k, \sqrt{\tilde{\epsilon}}), \quad \#J = \mathcal{O}(\frac{1}{r}), \tag{4.3.58}$$

$$|f(z_k,h)| \geq e^{\frac{1}{h}(\phi(z_k)-\tilde{\epsilon})}, \quad k \in J, \tag{4.3.59}$$

alors

$$\#(f^{-1}(0) \cap \Gamma) = \frac{1}{2\pi h} \iint_\Gamma \Delta\phi \, d(\mathrm{Re}z) d(\mathrm{Im}z) + \mathcal{O}(\frac{1}{h}) \left(\sup_k \sup_{z\in D(z_k,r)} |\phi''(z)| r + \frac{\tilde{\epsilon}}{r} \right).$$

Soit $C > 0$, et $1 > c_{1,2} > 0$, des constantes indépendantes de α. Nous désignons par Γ_α un ensemble relativement compact dans Ω_α de la forme

$$\Gamma_\alpha = \{z = x + iy, \quad |x - x_0| \leq C,\, c_1 \leq \frac{|y|}{\alpha} \leq c_2\}, \quad \Gamma_\alpha \subset\subset \Omega_\alpha.$$

Nous supposons que le paramètre de perturbation δ est minoré par une puissance de h : $\delta \gg h^{C_0}$, $C_0 \gg 1$.

Au regard de (4.3.55) et (4.3.56), nous pouvons appliquer la proposition avec $\phi = \mathrm{Re}\, l_0(z) + Ch \ln \frac{1}{h}$, et $f = F_\delta$, et

$$\tilde{\epsilon} = 2Ch \ln h^{-1} + C_{\rho,\gamma}\, h \ln(h\delta)^{-1} \tag{4.3.60}$$

Nous avons

$$\mathrm{Re}\, l_0(z) = \mathrm{Im} \int_{x_-}^{x_+} (g(x) - z)\, dx. \tag{4.3.61}$$

Un calcul explicite (voir (1.4.5) de [15]) donne

$$\begin{aligned} \Delta \mathrm{Re}\, l_0(z) &= (\frac{1}{\mathrm{Im}\, g'(x_-)} - \frac{1}{\mathrm{Im}\, g'(x_+)}) \\ &= \frac{\mathcal{O}(1)}{(\mathrm{Im}\, z)^{1/2}}. \end{aligned} \tag{4.3.62}$$

On vérifie de même que $\nabla_z^2 \mathrm{Re}\, l_0(z) = \frac{\mathcal{O}(1)}{(\mathrm{Im}\, z)^{1/2}}$; ce qui veut dire que si $r \leq \alpha$ et $\mathrm{Im}\, z_k \simeq \alpha$, nous avons $\sup_{z \in D(z_k, r)} |\phi''(z)| \simeq \alpha^{-1/2}$.

Nous sommes maintenant en possession du résultat suivant :

Théorème 4.3.22 *Soit $\gamma > 0$ fixé. Soit Γ_α comme au-dessus. Si δ est minoré par une puissance de h et vérifie la condition (4.3.53) alors il existe $C, \tilde{C} > 0$ tels que le nombre $N(P_\delta, \Gamma_\alpha)$ de valeurs propres de P_δ dans Γ_α vérifie pour tout $0 < r \ll \alpha$*

$$|N(P_\delta, \Gamma_\alpha) - \frac{1}{2\pi h} \mathrm{vol}\,(p^{-1}(\Gamma_\alpha))| \leq \frac{C}{h}(\frac{r}{\alpha^{1/2}} + \frac{\tilde{\epsilon}}{r}) \tag{4.3.63}$$

où $\tilde{\epsilon} = C_{\rho,\gamma}\, h \ln(h\delta)^{-1}$, avec probabilité

$$\geq 1 - \frac{\tilde{C}}{r} h^{2\gamma}.$$

De plus, nous avons l'asymptotique $\mathrm{vol}\,(p^{-1}(\Gamma_\alpha)) \sim \mathrm{cst}\, \alpha^{1/2}$. *La probabilité est intéressante si $h^{2\gamma} < r$.*

(4.3.63) est minimal lorsque $h_0^{-1/2} r^2 = \tilde{\epsilon}$, soit, lorsque $r = \tilde{\epsilon}^{1/2} \alpha^{1/4}$. Le membre de droite de (4.3.63) devient alors

$$\leq \frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}}}{\alpha^{1/4} h}, \tag{4.3.64}$$

ce qui veut dire que la probabilité est intéressante si $h^{2\gamma} < h^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{4}}$.

Remarque 4.3.23 On aurait pu utiliser le théorème 11.5 de [16] pour majorer, pour tout $K > 0$ et $0 < r < h_0$, le membre de droite par

$$\leq \frac{C}{h} (\frac{\tilde{\epsilon}}{r} + C_K r^K + \ln(\frac{1}{r}) \iint_{p^{-1}(\partial\Gamma_\alpha + D(0,r))} dx d\xi) \tag{4.3.65}$$

Après avoir choisi r de la meilleure façon, c'est-à-dire après avoir trouvé r pour lequel (4.3.65) atteint son minimum, (4.3.65) devient $\leq \frac{C}{h} (\ln \frac{1}{\tilde{\epsilon}})^{2/3} \tilde{\epsilon}^{1/3}$. Dans ce cas, compte tenu de la valeur de $\tilde{\epsilon}$, et de $h^{2/3} < \alpha$, l'estimation obtenue est moins bonne que (4.3.64).

Montrons le dernier fait du théorème, soit l'asymptotique du volume symplectique : nous avons, grâce à (4.3.62)

$$\mathrm{vol}\, p^{-1}(\Gamma_\alpha) = \iint_{\Gamma_\alpha} \Delta \mathrm{Re}\, l_0(z) dx d\xi \simeq \mathrm{cst}\ \alpha^{1/2}. \tag{4.3.66}$$

Le même calcul montre que si z_0 est très proche du bord du pseudospectre nous avons $\mathrm{vol}\, p^{-1}(D(z_0, t)) = \mathcal{O}(t^{3/2})$. On retrouve alors dans notre cas, par des calculs explicites, l'exemple 12.1 de [16].

Dans [16], les auteurs ont aussi obtenu une loi de Weyl près du bord du pseudospectre. Cependant, si on se ramène à notre situation, nous gagnons par rapport à [16], Théorème 12.3, une petite puissance de h. Explicitons : à un facteur logarithmique près le membre (4.3.64) est de l'ordre de $h^{1/3}/h$ (nous avons pris α égal à $h^{2/3}$ fois une puissance de $\ln \frac{1}{h}$), comparé à (12.15) de [16] où $\kappa = 3/4$ et $\alpha_0 = 1/2$, le membre de droite à un facteur logarithme près, est de l'ordre de $h^{1/4}/h$.

Remarquons que le théorème 4.3.22 n'est intéressant que si $\sqrt{\tilde{\epsilon}}/\alpha^{1/4} \ll \alpha^{1/2}$ c'est-à-dire si $\tilde{\epsilon}^{2/3} \ll \alpha$, ou encore en remplacant $\tilde{\epsilon}$ par son expression, si

$$(\ln \frac{1}{\delta h})^{\frac{2}{3}}\ h^{\frac{2}{3}} \ll \alpha, \tag{4.3.67}$$

ce qui est conforme aux attentes. En effet puisque $P-z-\delta Q$ s'écrit aussi $(P-z)(Id+\delta Q(P-z)^{-1})$, on aura des valeurs propres que si $\delta M\|(P-z)^{-1}\| \gg 1$, M a été défini en (4.3.31). Soit au regard de la proposition 4.3.14, lorsque

$$\delta \gg \frac{1}{CM}\sqrt{h}\,(\alpha)^{1/4}\,e^{-C\frac{\alpha^{3/2}}{h}}.$$

Comme δ est minoré par une puissance de h, il faut donc que

$$h^{C_0} \gg \frac{1}{CM}\sqrt{h}\,(\alpha)^{1/4}\,e^{-C\frac{\alpha^{3/2}}{h}},\ \text{c'est à dire, si } (\ln\frac{1}{h})^{\frac{2}{3}}\,h^{\frac{2}{3}} < \alpha,$$

(si C_0 est suffisamment grand) qui est plus faible que la condition (4.3.67).

Un dernier constat est que la densité des valeurs propres augmente lorsque que l'on s'approche à une distance $(\ln\frac{1}{h})^{\frac{2}{3}}\ h^{\frac{2}{3}}$ près du bord du pseudospectre. En effet, si on se réfère à l'article [16], loin du bord pseudospectre alors $\mathrm{vol}\,p^{-1}(D(z_0,t)) = \mathcal{O}(t^2)$, alors que très près du bord nous avons $\mathrm{vol}\,p^{-1}(D(z_0,t)) = \mathcal{O}(t^{3/2})$, comme démontré après (4.3.66).

4.3.4 Résolvante après la perturbation

On suppose aussi dans cette section que δ est minoré par une puissance positive de h. Sous cette condition, $\tilde{\epsilon}$ est d'ordre $h\ln h^{-1}$. Soit $\gamma > 0$ fixé. En vue de (4.3.56), nous pouvons appliquer le corollaire 4.2.5 : Soit z_0 dans Ω_α, donc $\mathrm{Im}\,z_0 \simeq \alpha$, et soit $C > 0$ fixé. Il existe $\tilde{C} < C$, et $C', \hat{C}$ telles que pour tout $r \ll \alpha$ nous avons avec une probabilité $\geq 1 - \frac{\hat{C}}{r}h^{2\gamma}$ pour tout z dans $D(z_0, \tilde{C}r)$

$$|(E^\delta_{-+})^{-1}| \leq \exp\left(\frac{C'}{h}(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}r^2 + \tilde{\epsilon})\right)\prod_{1\leq j\leq N(\omega)}\frac{1}{|z-w_j(\omega)|},$$

w_j sont les zéros de E^δ_{-+} dans $D(z_0, Cr)$. On a

$$N(\omega) \leq \frac{C'}{h}(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}r^2 + \tilde{\epsilon}).$$

On choisit r de telle manière que $r^2/\alpha^{1/2} = \tilde{\epsilon}$. Enfin puisque $(P-\delta Q_\omega - z)^{-1} = E^\delta - E^\delta_+(E^\delta_{-+})^{-1}E^\delta_-$, on déduit le :

Théorème 4.3.24 *Soit $\gamma > 0$ fixé. Soit δ vérifiant la condition (4.3.53), de plus on suppose que δ est minoré par une puissance de h. Soit z_0 dans Ω_α, donc $\mathrm{Im}\, z_0 \simeq \alpha$. Il existe $\hat{C} > 0$ tel que si on se donne des constantes positives $\tilde{C} < C$, alors il existe $C', M > 0$ tels que, avec une probabilité $\geq 1 - \frac{\hat{C}}{r} h^{2\gamma}$, avec $r = (\sqrt{\alpha}\, h \ln h^{-1})^{1/2}$, nous avons pour tout z dans $D(z_0, \tilde{C}r)$*

$$|(P - \delta Q_\omega - z)^{-1}| \leq \frac{1}{\sqrt{h}\, \alpha^{1/4} h^M} \prod_{1 \leq j \leq N(\omega)} \frac{1}{|z - w_j(\omega)|},$$

w_j sont les valeurs propres de $(P - \delta Q_\omega - z)^{-1}$ dans $D(z_0, Cr)$. $N(\omega)$ vérifie $\leq C' \ln h^{-1}$.

Application

Dans une rédaction préliminaire, nous avons appliqué les méthodes standards sur la complétude des vecteurs généralisés (voir [1, 35]), combinées avec les résultats du troisième chapitre, et nous pensons avoir démontré le résultat suivant :

Théorème 4.3.25 *Soit P et Q_ω comme énoncé au chapitre 3, (3.1.17) et (3.1.22) vérifiant toutes les hypothèses du paragraphe "Asymptotique des grandes valeurs propres" de l'introduction du chapitre 3 (ellipticité, ensemble résolvant non vide, 3.1.4, 3.1.10). Ici $n = 1$, ce qui correspond au cas scalaire. Si $m - \alpha_1 - \rho - \frac{1}{2} > 0$, alors ps, le spectre de $P - Q_\omega$ est discret et l'espace engendré par les vecteurs propres généralisés de $P - Q_\omega$ est complet :* $\mathrm{sp}(P - Q_\omega) = L^2(S^1)$.

Il s'agira pour démontrer ce théorème de trouver $N > 0$ tel que p.s. il existe au moins 5 chemins le long desquels la résolvante $(P - Q_\omega - z)^{-1}$ ne croît pas plus vite que $|z|^N$.

Chapitre 5

Calculs numériques

Nous allons ici montrer des calculs numériques illustrant les résultats du chapitre 2 et 3.

Illustrons d'abord ceux du chapitre 2. Nous considérons l'opérateur $P = (a + re^{ix})D_x$ dans $L^2(S^1)$, avec $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, $|a| \neq r$, et la perturbation $Q_\omega = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} a_{j,k}(\omega)\langle u, e_k\rangle e_j$ où $e_k = e^{ikx}$ et $a_{j,k} \sim \mathcal{N}(0, (\sigma_j\sigma_k)^2)$. Si a et r sont choisis de telle sorte que $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+re^{ix}}dx \neq 0$, alors l'hypothèse 2.1.1 est clairement vérifiée. De plus lorsque $|a| > r$, nous nous trouvons dans le 1er cas de l'hypothèse 2.1.1, Λ est alors un cône symétrique d'angle inférieur à π. Lorsque $|a| < r$, nous sommes dans le 2ème cas de l'hypothèse 2.1.1, et Λ est égal au plan complexe. On considère une discrétisation $(\langle P + Q_\omega e_i, e_j\rangle)_{-N\leq i,j\leq N} = P_N + Q_N$ de l'opérateur perturbé $P + Q_\omega$. Nous avons pris une base tronquée de $2N + 1$ éléments de (e_j). Nous avons

$$P_N = \begin{pmatrix} -aN & & & \\ -r(N-1) & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & rN & aN \end{pmatrix} \tag{5.0.1}$$

et $Q_N = DED$, où $D = \mathrm{Diag}\,(\sigma_{-N}, \ldots, \sigma_N)$ et E est une matrice aléatoire gaussienne $(2N + 1) \times (2N + 1)$ centrée réduite. On choisit de poser

$$\sigma_k = |k|^{-j},\ \sigma_0 = 1,\ j > \frac{1}{2}.$$

Pour le premier cas de l'hypothèse 2.1.1, les résultats de la compilation sont montrés dans la figure 5.1. On observe bien les valeurs propres se répartir

de façon homogène dans l'image du symbole principal, qui est un cône d'angle $< \pi$. Pour le deuxième cas, les résultats sont montrés dans la figure 5.2, on voit alors que les valeurs propres se distribuent de façon régulière dans tout le plan complexe. Ces observations sont naturellement conforme aux attentes.

Nous voulons maintenant vérifier numériquement la loi de Weyl. Nous nous plaçons dans le deuxième cas, avec $\Gamma(0,g) = D(0,1)$. Le volume symplectique se calcul facilement

$$\operatorname{vol} p^{-1}(D(0,1)) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|f(x)|}dx.$$

Nous allons donc calculer numériquement, pour différentes valeurs de $\lambda > 0$, le nombre de valeurs propres dans $\lambda D(0,1)$, ce qui nous permettra de tracer une courbe, que nous comparerons ensuite à la droite théorique $Y = \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|f(x)|}dx$. Nos résultats pour deux exemples sont reportés sur les figures 5.3 et 5.4, où la droite théorique est en vert. Nous obtenons une très bonne coïncidence.

Considérons le cas où $P = f(x)D_x$, avec f constant par morceaux, $f = z_1$ pour $x \in [0, x_+[$ et $f = z_2$ pour $x \in [x_+, x_- = 2\pi[$ où $z_{1,2}$ sont inclus dans un demi-plan ouvert $\langle z, z_0\rangle > 0$. Sans perte de généralité, nous supposons que $\operatorname{Re} z_{1,2} > 0$ et que $\arg z_2 > \arg z_1$.

Nous voulons montrer que la zone d'instabilité spectrale des grandes valeurs propres est l'ensemble $\Lambda = \{az_1 + bz_2;\, a,b \in \mathbb{R}\}$, qui est un cône symétrique fermé d'angle strictement plus petit que π. Pour cela, il suffit de considérer l'opérateur semiclassique $f(x)hD_x$ et montrer que son pseudospectre semiclassique est Λ. Pour tout z dans l'intérieur de Λ, nous pouvons construire un quasimode de $f(x)hD_x - z$: si $e_+ = \chi_+(x)a_+e^{\frac{i}{h}\int_{x_+}^x \frac{z}{f(x)}dx}$, χ_+ une troncature à support compact contenant x_+ et $a_+ = \mathcal{O}(h^{-1})$ alors

$$\|(f(x)hD_x - z)e_+\| = \mathcal{O}(e^{-\frac{C}{h}}), \quad \|e_+\| = 1.$$

En effet la partie imaginaire de la phase $\int_{x_+}^x \frac{z}{f(x)}dx$ présente un changement de signe en x_+ du - vers le +.

Si $z \notin \Lambda$, alors

$$\begin{aligned}(fhD_x - z)^{-1}v &= \frac{i}{h}\int_0^x e^{\frac{i}{h}\int_y^x \frac{z}{f(\tilde{x})}d\tilde{x}}\frac{v}{f}(y)dy + v_+e^{\frac{i}{h}\int_0^x \frac{z}{f(y)}dy}, \quad v_+(v) \in \mathbb{C}\\ &=: F_1v + v_+e^{\frac{i}{h}\int_0^x \frac{z}{f(y)}dy},\end{aligned}$$

avec

$$v_+ e^{\frac{i}{h}\int_0^x \frac{z}{f(y)}dy} = (e^{\frac{i}{h}\int_{2\pi}^0 \frac{z}{f(y)}dy} - 1)^{-1} \frac{i}{h} \int_0^{2\pi} e^{\frac{i}{h}\int_x^y \frac{z}{f(\tilde{x})}d\tilde{x}} \frac{v}{f}(y)dy$$
$$=: (e^{\frac{i}{h}\int_{2\pi}^0 \frac{z}{f(y)}dy} - 1)^{-1}(F_1 + F_2)v.$$

F_1 et F_2 sont des opérateurs à noyaux, de noyaux respectifs $k_1(x,y)$ et $k_2(x,y)$. Si $z \in \{-az_1 + bz_2;\, a,b > 0\}$, alors il existe $C > 0$ tel que $-\frac{1}{C} < \mathrm{Im}\,(z/f) < -C$. Donc

$$\|F_1\| \leq \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |k_1(x,y)|^2 dydx \leq C' \int_0^{2\pi}\int_0^{x} e^{\frac{C}{h}(x-y)} dydx$$
$$\leq C''(e^{(C2\pi)/h} - 1),$$

et

$$\|F_2\| \leq \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |k_2(x,y)|^2 dydx \leq C' \int_0^{2\pi}\int_{x}^{2\pi} e^{\frac{C}{h}(x-y)} dydx$$
$$\leq C''(1 - e^{-(C2\pi)/h}),$$

et

$$e^{\frac{i}{h}\int_{2\pi}^0 \frac{z}{f(y)}dy} \leq e^{-(2\pi C)/h}.$$

Il en résulte alors que $\|(hfD_x - z)^{-1}\| = \mathcal{O}(1)$. On procédera de même pour $z \in \{az_1 - bz_2;\, a,b > 0\}$, pour lequel il existe $C > 0$ tel que $\frac{1}{C} < \mathrm{Im}\,(z/f) < C$. On a donc montré que pour tout $z \notin \Lambda$, alors la résolvante est bornée par une constante indépendante de h. En clair, Λ est la zone d'instabilité spectrale de hfD_x. Et donc, sous petite perturbation Q, les grandes valeurs propres de $P + Q$ vont se distribuer dans Λ.

Si la perturbation Q_ω est choisie comme au chapitre 2, des calculs préliminaires, nous font penser que l'on peut adapter les arguments du chapitre 2, pour montrer que le nombre de valeurs propres de $f(x)D_x + g(x) + Q_\omega$, (la régularité de g importe peu) dans $\lambda\Gamma(0,g) \subset\subset \Lambda$ est majoré par $C(\omega) + C(\ln\lambda)^2$. On s'attend donc à observer numériquement une migration des valeurs propres vers les droites $z_{1,2}\mathbb{R}$, qui sont les bords de Λ. Numériquement, c'est ce que l'on a vérifié pour $f = 2$ pour $x \in [0,\pi[$, et $f = 2 + 2i$ pour $x \in [\pi, 2\pi[$: voir la figure 5.6. Nous pensons que si f prend plusieurs valeurs z_n, incluses dans un demi-plan ouvert $\langle z, z'\rangle > 0$, alors les valeurs propres vont s'accumuler selon les droites $z_n\mathbb{R}$. Ainsi contrairement au cas lisse, pour

le cadre constant par morceaux, les valeurs propres auraient tendance à s'accumuler selon certaines directions. Pour le cas scalaire, nous avons donné un candidat pour ces directions, pour le cas matriciel, nous n'avons aucune idée.

Nous allons maintenant vérifier les résultats de chapitre 3, dans le cas scalaire, avec une perturbation multiplicative. On pose $P = (a + re^{ix})D_x^\alpha$, avec $|a| < r$ et $Q = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j(\omega)e_j$ où $e_k = e^{ikx}$ et $a_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma_j^2)$. Dans ces conditions, il est facile de voir que $\Lambda(p_\alpha) = \mathbb{C}$. Soit une discrétisation $(\langle P + Q_\omega e_i, e_j\rangle)_{-N\leq i,j\leq N} = P_N + Q_N$ de l'opérateur perturbé $P + Q_\omega$. Nous avons

$$Q_N = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & & a_N \\ a_{-1} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_{-N} & & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Il est facile d'avoir la discrétisation de P_N à partir de (5.0.1) :

$$P_N = \begin{pmatrix} -aN^\alpha & & & \\ -r(N-1)^\alpha & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & rN^\alpha & aN^\alpha \end{pmatrix}.$$

On choisit, comme auparavant, de poser $\sigma_k = |k|^{-j}$ et $\sigma_0 = 1$. On souhaite vérifier la loi de Weyl pour le domaine $\Gamma(0, g) = D(0, 1)$. Le volume symplectique est donné par

$$\operatorname{vol} p^{-1}(D(0,1)) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|f(x)|^\alpha}dx.$$

On calcule alors numériquement le nombre de valeurs propres dans $\lambda D(0, 1)$ pour plusieurs valeurs de λ. Nos résultats sont reportés sur la figure 5.5, pour $\alpha = 4$, $N = 1200$, $a = 1$, $r = 9$, et $j = 0, 55$.

Nous donnons le fichier Matlab qui nous a permis de tracer les figures 5.3 et 5.4.

Fichier Matlab :

```
N=input('entrez N : ');
a=input('entrez a : ');
```

```
r=input('entrez r :');
j=input('entrez j :');
X1=1:1:2*N+1;
X2=2:1:2*N+1;
X3=1:1:2*N;
X1bis=[X1,X2];
X2bis=[X1,X3];
s1=-N:1:N;
s2=-N+1:1:N;
S=[a.*s1,r.*s2];
B=sparse(X1bis, X2bis, S);
%
%
rand=randn(2*N+1,2*N+1);
for l=1:1:2*N+1;
    if l==N+1 c(l)=1;
    else c(l)=abs(l-N-1)^(-j);
    end;
 end;
%
%
T=sparse(X1,X1,c);
Q=T*rand*T;
eigQ=eig(B+Q);
%
%
t=0:0.001:2*pi;
f=2.*(abs((a+r.*(exp(i*t)))).^(-1));
tr=trapz(t,f);
%
p1=zeros(1,10*N);
for p0=1:1:10*N;
  for n=1:1:2*N+1,
      if abs(eigQ(n))<=p0, p1(p0)=p1(p0)+1;
      else p1(p0)=p1(p0);
      end;
  end;
end;
pop=1:1:10*N;
h=0:2:10*N;
g=(tr/(2*pi)).*h;
plot(pop,p1,'*',h,g);
```

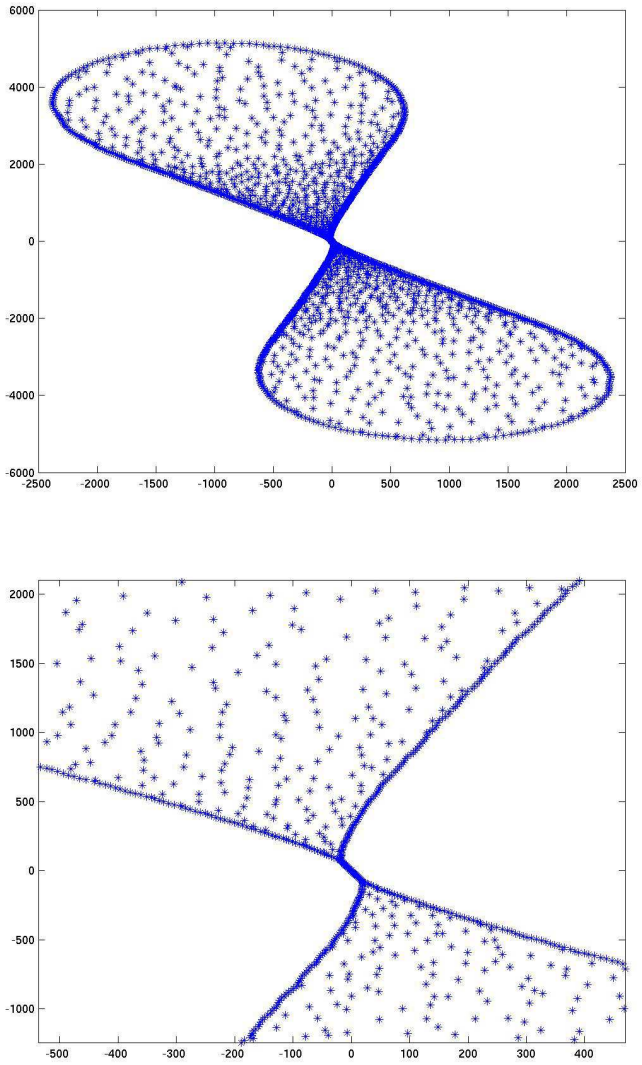


FIG. 5.1 – Valeurs propres de $(a+re^{ix})D_x+Q$, pour $N = 1000$ où $a = -1+4i$, $r = 2$ et $j = 3$.

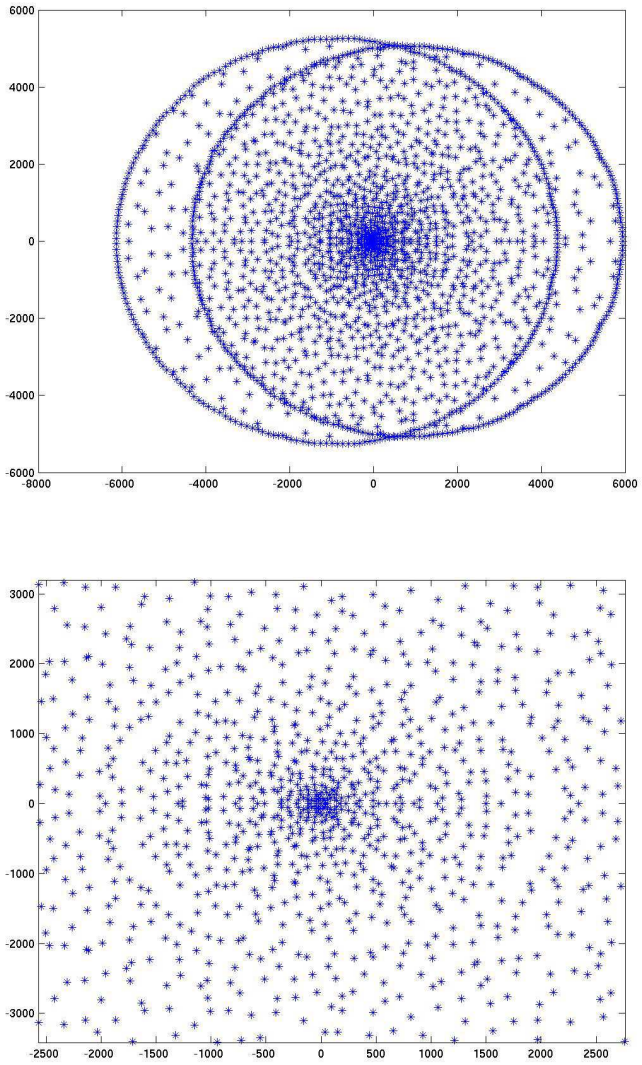


FIG. 5.2 – Valeurs propres de $(a + re^{ix})D_x + Q$, pour $N = 1000$ où $a = 1$, $r = 7$ et $j = 3$.

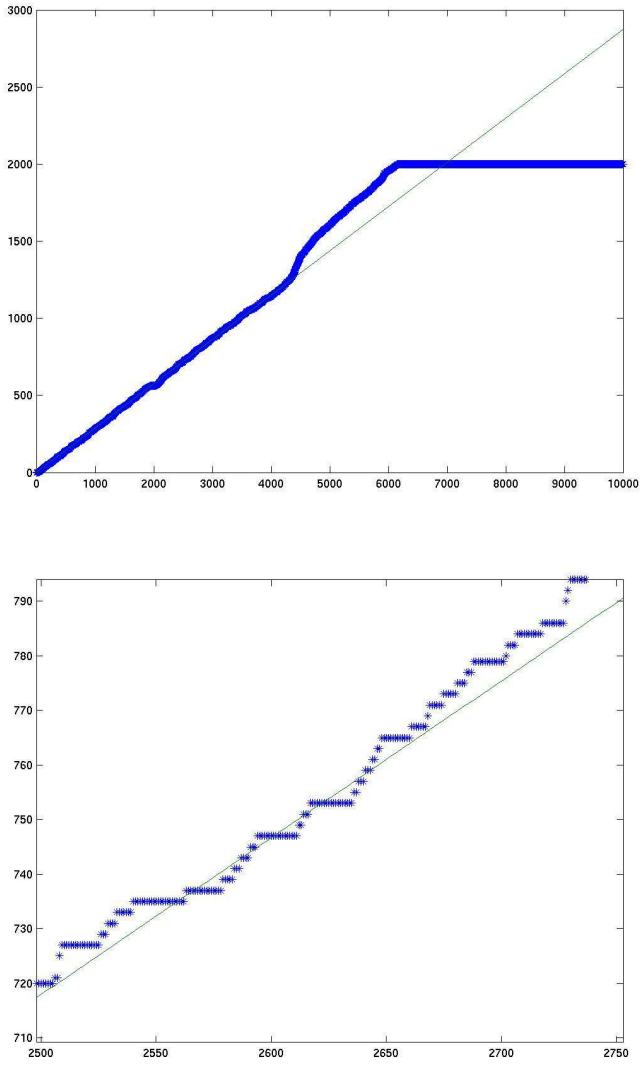


FIG. 5.3 – Nombres de valeurs propres de $(a + re^{ix})D_x + Q$ dans $\lambda D(0, 1)$ en fonction de $\lambda > 0$. $N = 1000$, $a = 1$, $r = 7$ et $j = 3$.

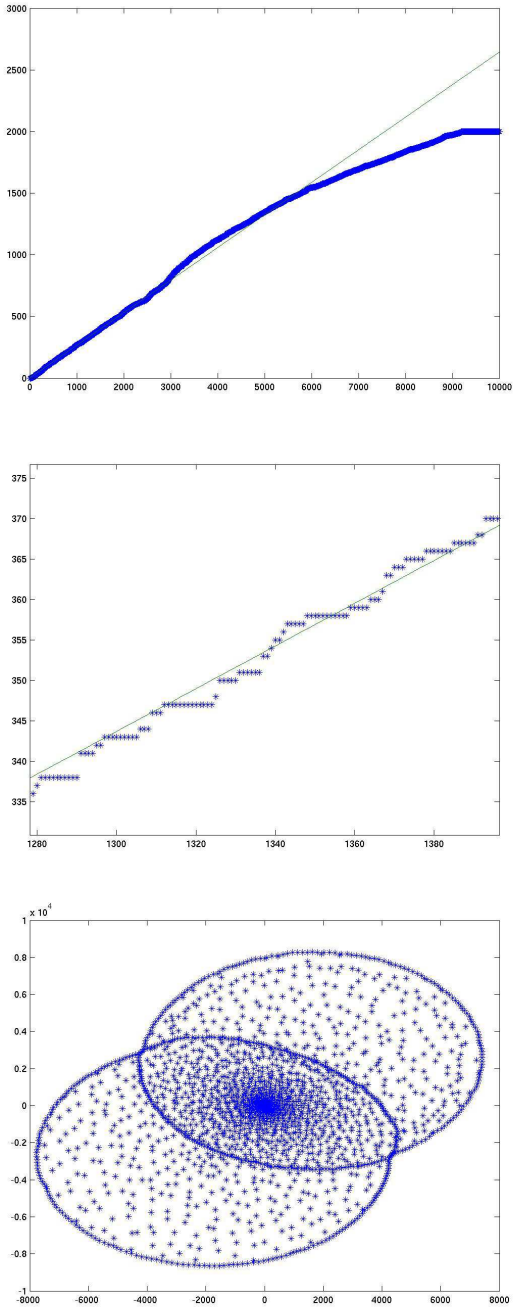


FIG. 5.4 – Nombres de valeurs propres de $(a + re^{ix})D_x + Q$ dans $\lambda D(0, 1)$ en fonction de $\lambda > 0$. $N = 1000$, $a = 2 + 3i$, $r = 8$ et $j = 4$.

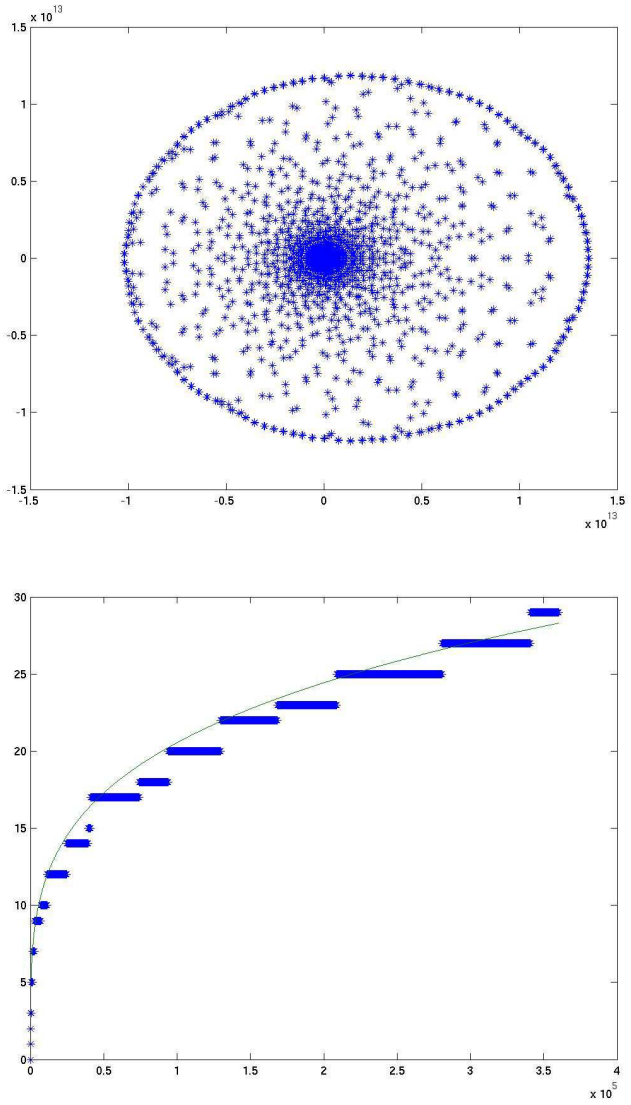


FIG. 5.5 – Nombres de valeurs propres de $(a+re^{ix})D_x^4+Q$ dans $\lambda D(0,1)$ en fonction de $\lambda > 0$. $N = 1200$, $a = 1$, $r = 9$ et $j = 0, 55$.

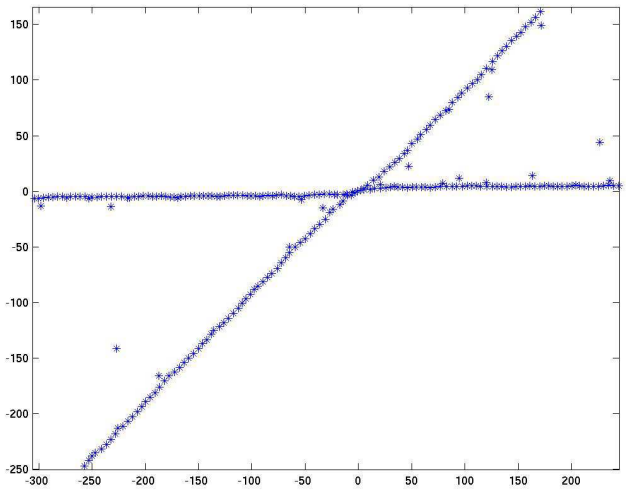


FIG. 5.6 – Valeurs propres de $f(x)D_x + Q$, f constant par morceaux prenant les valeurs 2 et $2+2i$. $N = 1000$, et $j = 0, 55$.

Nous donnons ici les lignes de codes pour calculer les valeurs propres d'un discrétisé $\left(\langle Pe_i, e_j\rangle_{L^2(S^1)}\right)_{-N\leq i,j\leq N}$ (où e_j est la base orthonormée usuelle sur $L^2(S^1)$) de $f(x)D_x$ avec

$$f(x) = \begin{cases} z_1 \text{ pour } x \in [0, x_1[\\ z_2 \text{ pour } x \in [x_1, x_2[\\ z_3 \text{ pour } x \in [x_2, x_3[\\ z_4 \text{ pour } x \in [x_3, x_4[\\ z_4 \text{ pour } x \in [x_4, 2\pi[. \end{cases}$$

Fichier Matlab :

```
z1=input('entrez z1 : ');
z2=input('entrez z2 : ');
z3=input('entrez z3 : ');
z4=input('entrez z4 : ');
z5=input('entrez z5 : ');
x1=input('entrez x1 : ');
x2=input('entrez x2 : ');
x3=input('entrez x3 : ');
x4=input('entrez x4 : ');
```

```
N=input('entrez N : ');
%
%
X1=1:1:2*N+1;
for n=1:2*N+1;
        c(n)=(n-N-1)*(z1*x1+z2*(x2-x1)+...
        +z3*(x3-x2)+z4*(x4-x3)+z5*(2*pi-x4));
end;
D=sparse(X1,X1,c);
X2=0:1:2*N;
To=toeplitz(X2,-X2)+diag(ones(1,2*N+1));
To=To.^(-1)-diag(ones(1,2*N+1));
%
for n=1:2*N+1,
     sx1(n)=exp(i*(n-N-1)*x1);
     sx2(n)=exp(i*(n-N-1)*x2);
     sx3(n)=exp(i*(n-N-1)*x3);
     sx4(n)=exp(i*(n-N-1)*x4);
end;
Tx1=sparse(X1,X1,sx1);
Tx2=sparse(X1,X1,sx2);
Tx3=sparse(X1,X1,sx3);
Tx4=sparse(X1,X1,sx4);
dd=-N:1:N;
Tn=sparse(X1,X1,dd);
%
F1=Tx1*To*(Tx1.^(-1));
F2=Tx2*To*(Tx2.^(-1));
F3=Tx3*To*(Tx3.^(-1));
F4=Tx4*To*(Tx4.^(-1));
%
F=z1.*(F1-To)+z2.*(F2-F1)+...
+z3.*(F3-F2)+z4.*(F4-F3)+z5.*(To-F4);
G=Tn*F;
P=(1/(2*pi)).*(-i.*G+D);
%P est le discrétisé de l'opérateur%
eigP=eig(P);
%
%Valeurs propres exactes$
v1=(1/z1)*x1+(1/z2)*(x2-x1)+...
+(1/z3)*(x3-x2)+(1/z4)*(x4-x3)+(1/z5)*(2*pi-x4);
v2=2*pi*(v1^(-1));
v3=imag(v2)/real(v2);
x=-4*N:1:4*N;
y=v3.*x;
```

```
%Graphique%
plot(real(eigP),imag(eigP),'.',x,y,'r.');
```

Pour la figure 1.3, nous avons utilisé l'algorithme suivant

Fichier Matlab :

```
p1=zeros(1,40),
for p0=1:1:40;
    N=p0*50;
    for n=1:1:N;
        c(n)=2*sin((2*pi*n)/N);
    end;
    X=1:1:N;
    X1=2:1:N;
    X2=1:1:N-1;
    B=sparse(X,X,c);
    B1=sparse(X1,X2,-1*ones(1,N-1),N,N);
    B2=sparse(X2,X1,ones(1,N-1),N,N);
    A=B+B1+B2;
    A(1,N)=-1; A(N,1)=1;
    A=A+zeros(N,N);
    Q=A+N^(-4).*randn(N,N);
    eigQ=eig(Q);
    for n=1:1:N
        if max(abs(real(eigQ(n))),abs(imag(eigQ(n))))<1,
        p1(p0)=p1(p0)+1;
        else p1(p0)=p1(p0);
        end;
    end;
end;
X0=50:50:40*50;
x=0:1:40*50;
y=0,11111.*x;
plot(X0,p1,'.',x,y,'r.');
```

Bibliographie

[1] S. Agmon, *Lectures on elliptic boundary value problems,* Van Nostrand Mathematical Studies, 2.

[2] P. Baldi, J. Lacroix, *Processus stationnaire et prévision,* Cours de Master Mathématiques,
http://proba.jussieu.fr/cours/second_ordre.pdf

[3] J. Bolte, R. Glaser, *A semiclassical Egorov theorem an quantum ergodicity for matrix valued operators,* Comm. Math. Phy. 247 (2004), 391-419.

[4] J. Chazarain, *Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique,* Comm. in P.D.E, 5, 595-644 (1980).

[5] E.B. Davies, *Pseudospectra, the harmonic oscillator and complex resonances,* R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 455, 585-599 (1999).

[6] E.B. Davies, *Semiclassical states for Non-Self-Adjoint Schrödinger Operators,* Commun. Math. Phys. 200 (1999), 35-41.

[7] M. Dimassi, J. Sjöstrand, *Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit,* LMS LN 268, Cambrigde University Press (1999).

[8] N. Dencker, *The Pseudospectrum of Systems of semiclassical Operators,* http://arxiv.org/pdf/0705.4561

[9] N. Dencker, J. Sjöstrand, M. Zworski, *Pseudospectra of (pseudo) differential operators,* Comm. Pure Appl. Math., 57(2004), 384-415.

[10] M. Federiouk, *Méthodes asymptotiques pour les équations différentielles ordinaires linéaires,* Mir, Moscou, 1987.

[11] I.C. Gohberg, M.G. Krein, *Introduction to the Theory of Linear Non-self-adjoint operators,* Translations of Mathematical Monographs 18, A.M.S., Providence, 1969.

[12] A. Grigis, J. Sjöstrand, *Microlocal Analysis for Differential Operators. An introduction,* LMS LN 196, Cambrigde University Press (1994).

[13] M. Hager, *Instabilité spectrale semiclassique pour des opérateurs non-autoadjoints I : un modèle,* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Sér. 6, 15 no. 2 (2006), p. 243-280.

[14] M. Harger, *Instabilité spectrale semiclassique d'opérateurs non-autoadjoints II,* Ann. Henri Poincaré, 2006, vol 7, n°6, 1035-1064.

[15] M. Hager, Thèse (2005),
http://tel.ccsd.cnrs.fr/docs/00/04/87/08/PDF/tel-00010848.pdf

[16] M. Hager, J. Sjöstrand, *Eigenvalue asymptotics for randomly perturbed non-selfadjoint operators,*
http://arxiv.org/abs/math/0601381

[17] F. Hérau, J. Sjöstrand, C.C. Stolk, *Semiclassical analysis for the Kramers-Fokker-Planck equation,*
http://arxiv.org/abs/math/0406275

[18] B. Helffer, D. Robert, *Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles,* J. Funct. Anal., 53 (3), 246-68 (1983).

[19] B. Helffer, J. Sjöstrand, *Analyse semi-classique pour l'équation de Harper II, Comportement semi-classique près d'un rationnel,* Mémoires de la Société Mathématique de France Sér. 2, 40 (1990), p. 1-139.

[20] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operator I,II,III,IV* Sringer, Berlin 1994.

[21] V. Ivrii, *Microlocal analysis and precise spectral asymptotics,* Springer.

[22] V. Ivrii, *Sharp spectral asymptotics for operators with irregular coefficients,* Internat. Math. Res. Notices (2000), 1155-1166.

[23] V. Ivrii, *Sharp spectral asymptotics for operators with irregular coefficients, I : Pushing the lim- its and II : Domains with boundaries and degenerations,* Comm. Partial Differential Equations 28 (2003), 83-102 and 103-128.

[24] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators,* Springer Verlag.

[25] A. Melin, J. Sjöstrand, *Fourier integral operators with complex-valued phase functions,* Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations, Lecture Notes, Springer, n° 459, 120-223.

[26] A. Melin, J. Sjöstrand, *Bohr-Sommerfeld quantization condition for non-selfadjoint operators in dimension 2,* Astérique 284(2003), 181-244. http://xxx.lanl.gov/abs/math.SP/0111293

[27] D. Picard, *Statistique et modèles aléatoires,* Cours de Master Mathématiques : http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/picard/pubps/Poly2006ssbayes.pdf

[28] S. Roch, B. Silbermann, *C^*-algebra techniques in numerical analysis,* J. Oper. Theory 35, 241-280 (1996).

[29] J. Sjöstrand, *Eigenvalue distribution for non-self-adjoint operators with small multiplicative random perturbations,* http://arxiv.org/pdf/0809.4182

[30] J. Sjöstrand, *Some results on non-self-adjoint operators, a survey,* http://arxiv.org/pdf/0804.3701

[31] J. Sjöstrand, *Eigenvalue distributions and Weyl laws for semi-classical non-self-adjoint operators in 2 dimensions,* http://arxiv.org/pdf/0804.4052

[32] M. Taylor, *Reflexion of singularities of solutions to systems of differential equations,* CPAM, Vol.28, p.457-478, (1975).

[33] L.N. Trefethen, M. Embree, *Spectra and Pseudospectra : The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators,* Princeton University Press (2005).

[34] L. Trefethen, M.R. Trummer, *An instability phenomen in spectral methods,* SIAM J. Numer. Anal., 24 :1008-1023, 1987.

[35] S. Yakubov, *Completeness of root functions of regular differential operators,* Essex, England , Longman Scientific and Technical New York , John Wiley and Sons, 1994.

[36] L. Zielinski, *Sharp spectral asymptotics and Weyl formula for elliptic operators with non-smooth coefficients - Part 2,* Colloq. Math. 92 (2002), p.1-18.

[37] L. Zielinski, *Asymptotic distribution of eigenvalues for a class of second order elliptic operators with irregular coefficients in $\mathbb{R}^n$,* Math. Phys., Anal. and Geom. 5 (2002), p. 154-182.

[38] M. Zwoski, L.C. Evans, *Lectures on semiclassical analysis, version 0.3,* http://math.berkeley.edu/~zworski/semiclassical.pdf

[39] M. Zworski, *A remark on a paper of E.B Davies,* Proceedings of the AMS 129 (1999), 2955-2957.

[40] M. Zworski, *Numerical linear algebra and solvavility of partial differential equations,* Comm. Math. Phys. 229 (2002), 293-307.

[41] H. Weyl, *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partiel ler Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraum- strahlung),* Math. Ann., 71(4)(1912), 441-479.