Analyse mathématique et numérique de problèmes de propagation des ondes dans des milieux périodiques infinis localement perturbés

Sonia Fliss

▶ **To cite this version:**

Sonia Fliss. Analyse mathématique et numérique de problèmes de propagation des ondes dans des milieux périodiques infinis localement perturbés. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2009. Français. NNT : . pastel-00005464

HAL Id: pastel-00005464
https://pastel.hal.science/pastel-00005464

Submitted on 13 Apr 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade
de Docteur de l'École Polytechnique
Spécialité Mathématiques Appliquées

Etude mathématique et numérique de la propagation des ondes dans des milieux périodiques localement perturbés.

Sonia FLISS

soutenue publiquement le mardi 12 mai 2009 devant un jury composé de :

Jean Claude NÉDÉLEC	Président
Eric CANCÈS	Rapporteur
Thorsten HOHAGE	Rapporteur
Isabelle TERRASSE	Examinateur
Toufic ABBOUD	Examinateur
Grégoire ALLAIRE	Examinateur
Eric BONNETIER	Examinateur
Patrick JOLY	Directeur de thèse

à Rim

REMERCIEMENTS

Un seul être vous manque, et tout est dépeuplé

— Alphonse de Lamartine *L'isolement*

J'aimerais tout d'abord remercier Patrick Joly, c'est un véritable honneur de commencer sa vie de chercheur avec une personne aussi brillante. Je le remercie profondément d'avoir essayé de me transmettre, sa rigueur, sa pédagogie et un peu de sa créativité mais aussi de m'avoir soutenu et encouragé pendant ces années. C'est une vraie chance d'avoir eu un directeur de thèse aussi disponible et attentif scientifiquement comme humainement. Je ne suis malheureusement pas autant admirative de ses goûts footballistiques très prononcés pour le Paris Saint Germain. Notre ambiance de travail a souvent vécu au rythme du championnat de foot : inutile donc de préciser ce qu'elle était juste avant une rencontre PSG-OM! Cette thèse a scellé une profonde amitié et j'espère que nous allons continuer à travailler ensemble et cultiver notre amitié.

J'aimerais exprimer de profonds remerciements à mes 2 rapporteurs, Eric Cancès et Thorsten Hohage, qui m'ont fait l'honneur de relire avec beaucoup d'attention ce très long manuscrit. Au fil de plusieurs conférences, Thorsten a manifesté beaucoup d'intérêt dans mon travail et je l'en remercie très chaleureusement. J'ai beaucoup apprécié mes différentes rencontres avec Eric Cancès et ai beaucoup appris de la confrontation entre nos deux approches. Merci également à Jean Claude Nédélec, qui dès notre première rencontre lors d'une conférence s est montré tres attentif à mes résultats et a accepté de présider mon jury, Eric Bonnetier, Benoit Perthame qui n'a pas pu assister pour des questions d'emploi du temps mais qui s'est montré très disponible pour répondre à mes questions, Grégoire Allaire qui avec ses cours à l'X m'a donné le goût des Mathématiques Appliquées et enfin Toufic Abboud et Isabelle Terrasse que je connais depuis ma belle expérience de stage chez EADS et qui n'ont cessé de me soutenir humainement et scientifiquement depuis. Je n'ai jamais connu de discussions scientifiques autour de ma thèse plus sportives qu'avec eux : leur capacité à découvrir le dernier transparent à partir du tout premier m'a toujours beaucoup impressionnée. J'ai une pensée particulière pour Isabelle qui a rapidement cru en moi.

Ma thèse m'a permis de développer deux facettes de ma personnalité scientifique : la facette académique et l'industrielle. Ma fibre académique s'est révélée il y a quelques années au cours d'un stage à Harvard avec Jim Rice et Renata Dmowska, c'est définitivement cette expérience

qui m'a convaincu de continuer dans la recherche et je les en remercie énormément car ils m'en ont donné une formidable image. La rencontre avec Patrick Joly et Anne-Sophie Bonnet-BenDhia m'a instantanément donné envie de travailler avec eux. Anne-Sophie m'a très vite montré l'exemple autant par sa rigueur et sa détermination que par sa douceur et son attention. Très vite, j'ai donc appris à connaître tous les Poets du labo. J'ai rencontré Christophe Hazard avec qui j'ai partagé souvent sans transition, séances de théorie spectrale, distributions aux restos du coeur, débroussaillage de GASON, discussions spirituelles et surtout tellement de cafés! Mais POems c'est également Eric Lunéville, Eliane Bécache, Jéronimo Rodriguez, Christine Poirier, Jean François Mercier, Laurent Bourgeois, Marc Lenoir, Patrick Ciarlet, Gary Cohen, Jing Rebecca Li, Francis Collino mais aussi Jérôme Le Rousseau (merci pour le gentil surnom gros bébé), Houssem Haddar parti trop tôt à l'X, qui m'ont apporté tout autant que les autres. Un grand merci également à Nathalie Bonte qui a fait un travail extraordinaire pour faire en sorte que ma thèse se passe au mieux et qui m'a aidé à organiser ma soutenance. Une des grandes forces de l'UMR POems réside, à mon avis, dans l'apport des doctorants. En arrivant, il y avait Sébastien Tordeux, Jeronimo Rodriguez et Julien Diaz qui terminaient leur thèse et qui par leurs nombreux conseils m'ont beaucoup motivé. Et puis il y a eu Pascal Grob qui m'a rapidement montré que pendant une thèse on pouvait quand même bien se marrer. J'ai vécu ces 3 ans à côté de Xavier et on a réussi à se soutenir et s'entraider pendant toutes les étapes de la thèse. Et puis plus tard, un peu trop tard à mon goût, un groupe important de doctorants et post doctorants est arrivé, plein de dynamisme, de fraîcheur, de gentillesse et de disponibilité : Morgane, Alexandre, Bérangère, Adrien, Jérémi, Benjamin et Lauris puis sont arrivés Julien, Sebastien, Edouard et Juliette. Je pense qu'ils ont une grande chance de vivre cette expérience tous ensemble et je regrette juste qu'ils soient arrivés trop tard. Une petite pensée pour Julien qui va travailler sur les milieux périodiques pendant sa thèse et qui malgré ses doutes va réussir vraiment brillamment. Avec POems, j'ai réussi à découvrir l'UMA de l'Ensta avec Frédéric Jean, Pierre Carpentier, Jérome Pérez, Hasnaa Zidani, Christophe Mathulik et Maurice Diamantini... que j'ai croisé et découvert entre deux cours à l'Ensta, deux cafés ou pendant un des fameux psaume. Je pense que je ne pouvais rêver mieux comme cadre de travail qu'entouré de tous ces nouveaux collègues. En travaillant au bâtiment 13 de l'Inria, j'ai côtoyé nos amis de chez Estime, Jérome Jaffre, Jean Roberts, Jean Charles Gilbert et François Clément. J'ai tout de même réussi à voyager au sein de l'Inria et pour des raisons qui n'échapperont à personne, j'ai beaucoup parcouru les couloirs du bâtiment 16 pour saluer Jean Frédéric Gerbeau, Miguel Fernandez, Marie Doumic, Céline Grandmont pour aller prendre un café, et surtout retrouver mes amis de chez MACS, Marina Vidrascu toujours motivée pour passer sa pause déjeuner avec moi à faire les magasins, Patrick Letallec, Jacques Sainte Marie et Dominique Chapelle. Je remercie Dominique d'être passé d'un potentiel directeur de thèse qui m'impressionnait beaucoup à celui de formidable ami qui m'impressionne toujours autant mais qui en plus me fait beaucoup rire. J'ai beaucoup apprécié, le temps d' une pause café, tous ces débats passionnés autour des films et séries que l'on a vu ou dont on a juste entendu parler, tout ceci ponctué par des "Le week end fut bon?" ou des "Haou aie met ya mozeh'!", mais je suis surtout très fière de lui avoir prouvé qu'on pouvait s'endormir même devant un Star Wars!

Ma découverte de la recherche industrielle s'est faite autour de l'équipe de Fabien Mangeant où Pierre, Jayant, Vincent, Vassili, Stéphane, Youness, François, Anabelle, Guillaume, Nolwenn, Michel, Jérôme, Arnaud, Nabil et surtout Fabien et Eric Duceau ont fait en sorte même si je ne

les voyais à mon goût finalement pas assez, de m'intégrer dans leur équipe chaleureuse et de m'enseigner comment s'articulait la recherche industrielle au sein d'EADS IW. Je remercie également Guillaume Inquiété pour nos discussions autour de nos 2 thèses et plus particulièrement au sujet des matériaux composites. Cette thèse a également bénéficié d'une collaboration avec l'Insitut d'Électronique Fondamental d'Orsay dans le cadre de l'ANR Simnanophot, je remercie donc chaleureusement toute l'équipe du laboratoire et plus particulièrement Suzanne Laval, Eric Cassan et Damien Bernier.

Enfin, sans doute le plus important à mes yeux, j'aimerais remercier toutes les personnes qui m'ont entouré et soutenu pendant ces quelques années. Tous mes amis tout d'abord. Pour avoir tenté à plusieurs reprises de comprendre pour certains en quoi consistait mon travail au jour le jour, pour les autres mon sujet de thèse et pour tous d'avoir subi toutes mes tentatives pour rendre tout ceci le plus sexy possible. Je remercie donc Sarah pour son oreille attentive, Marc, Delphine, Quentin, Céline, Manu, Sophie, Pasca, Sam, Florian, Sandrine, Thomas, Roro, Marine, Ôrel et Véro, Christophe et Bérangère, également Thierry, JC, Céline, Manon, Victor, Florence et Paul mais aussi mes petites championnettes, 2Gé, Rolk et Laetitia. Je les remercie tous pour leur disponibilité et je ne leur dirai jamais assez à quel point j'ai trouvé mon équilibre auprès d'eux. Un merci tout particulier à Ophélie pour avoir consacré du temps pour relire une partie de ma thèse et pour avoir essayé tant bien que mal à la raccourcir mais aussi Sophie pour notre complicité de tous les instants, tous ses chats d'encouragement et pour avoir longtemps tenté d'ouvrir le pdf de ma thèse, en vain. Je n'oublie pas Jean et Hélène Picard qui n'ont jamais raté une occasion pour me rendre service et Françoise Moireau pour son fameux tiramisu aux fruits rouges qui me requinquait pour la semaine et surtout pour toutes ces délicates attentions et ces doux conseils. Et surtout Philippe. Philippe qui s'est intéressé comme personne à mon travail, qui a relu, malgré peu de contreparties, tout mon manuscrit, avec qui, à la surprise de tout le monde, je parlerais de maths jusqu'au bout de la nuit et jusqu'au bout du monde, et surtout qui a eu confiance en moi pour deux, qui a mis de côté ses propres doutes pour m'aider à affronter les miens et qui m'a redonné le sourire toutes les fois où je le perdais. Philippe sans qui je n'aurais peut être pas commencé, sans qui je n'y serais sûrement jamais arrivée. Je ne te remercierai jamais assez pour tout, mais j'ai toute la vie pour le faire!

J'ai une pensée pour mes parents. Je sais à quel point cela a été difficile pour eux de me laisser et me voir évoluer dans un milieu qui leur était inconnu. Et pourtant ils ont toujours su trouver les mots pour que j'arrive à trouver ma place et pour que je m'épanouisse. Je pense aussi beaucoup à ma soeur Sophia, avec qui j'étais inséparable avant de partir pour ma grande aventure à Paris, notre séparation n'a été évidente ni pour moi ni pour elle, il a fallu qu'on apprenne à évoluer indépendamment l'une de l'autre et pourtant je sais que son affection m'a toujours accompagnée et qu'on a su même de loin, veiller l'une sur l'autre, se soutenir et continuer à partager cette intimité et cette complicité qu'aucune distance ne pourra altérer. Et puis il y a Samir, mon grand frère, qui ne cesse de me montrer depuis très longtemps à quel point il est fier de moi et je pense que je n'oublierai jamais son enthousiasme et son bonheur à ma soutenance. Mes beaux frères, Jilani et Zoubaier, m'ont également beaucoup soutenue et j'espère qu'ils comprennent maintenant pourquoi j'ai été si peu disponible ces dernières années pour leur faire ce café turc qui n'est, d'après eux, jamais aussi bon que quand c'est moi qui leur fais! Je remercie également Khadra ma grande alliée parisienne dans la famille! L'arrivée pendant ma thèse de ma toute belle

nièce Rim puis un an plus tard de mes jumeaux préférés Rim et Mohamed Fares a été un vrai petit bonheur, je me réjouis d'avance de tous les cours de maths que je vais leur donner. J'aimerais remercier également Hafedh, Salma et leurs enfants Ahmed, Elyes et Farah qui sont venus d'Italie pour assister à ma soutenance. J'étais très heureuse de les avoir auprès de moi. Je n'oublie pas toute ma famille en Tunisie qui n'a pas arrêté de m'encourager pendant cette période. Je pense notamment à grand mère Arroussia, la première à m'encourager à faire le plus d'études possible pour devenir une femme indépendante, mon oncle Tahar, malheureusement parti trop vite, qui, lui aussi, m'a donné le goût de faire des études. Merci aussi à Nejoua, Tata Saloua, Wahib, Rim, Nesrine, Amti Zohra, Lotfi, Tonton Fethi et Tata Souad, Tonton Mohamed et Issam et tous mes oncles, tantes, cousins, cousines que je n'oublie évidemment pas et qui, chacun à leur façon, m'ont beaucoup apporté pendant cette période.

Et enfin, je n'ai pas arrêté de penser pendant ces quelques années à ma petite soeur Rim. J'aurais tant aimé pouvoir la remercier d'avoir réussi à me soutenir et à m'encourager malgré toutes les épreuves qu'elle traversait, j'aurais tant aimé être plus disponible pour pouvoir la soutenir beaucoup plus, j'aurais aimé qu'elle soit présente pour qu'on partage ce moment mais aussi tous les autres. J'ai essayé de m'inspirer de son dynamisme et sa force pour finir a bien ma thèse. Je ne peux donc que lui dédier ce travail, aussi modeste cela soit-il. J'essaie sans cesse d'apprendre de sa délicatesse, de sa générosité, de sa prévenance et son attention, de son enthousiasme et sa combativité. Avec toutes ces armes, je vais essayer de vivre pour deux et cette thèse n'est qu'un début.

RÉSUMÉ

Les milieux périodiques présentent des propriétés intéressantes dans un grand nombre d'applications (les cristaux photoniques en optique, les matériaux composites en mécanique,...). Dans ces applications, on rencontre souvent ces milieux présentant des défauts localisés, c'est-à-dire des milieux qui diffèrent de milieux périodiques dans des régions bornées. Il nous semble intéressant de proposer des méthodes mathématiques et numériques nouvelles spécifiques au traitement des structures périodiques de grande taille, pouvant présenter des défauts localisés.

Les caractéristiques du problème rendant très souvent les méthodes d'homogénéisation inapplicables, l'idée est d'exploiter la structure particulière des milieux périodiques pour restreindre les calculs au voisinage du défaut. Nous avons donc approfondi la question de trouver des conditions aux bords parfaitement transparentes. C'est pourquoi nous avons cherché à généraliser les techniques de conditions transparentes non locales, de type Neumann-to-Dirichlet, bien établies pour les milieux homogènes à l'extérieur de la perturbation. La difficulté est que lorsque le milieu extérieur est homogène, on ne dispose plus d'une représentation explicite de la solution.

Nous traitons successivement trois situations de difficulté croissante : le cas monodimensionnel qui est un cas classique mais dont l'étude a des vertus pédagogiques, le problème du guide périodique localement perturbé et le problème plus complexe du milieu périodique dans les deux dimensions. Pour chaque situation, la démarche est la même : elle consiste tout d'abord à résoudre le problème pour un milieu absorbant puis pour un milieu non absorbant par absorption limite. Nous pouvons alors montrer que les opérateurs DtN peuvent être caractérisés en utilisant la solution de problèmes de cellule locaux, l'utilisation d'outils mathématiques tels que la Transformée de Floquet-Bloch et la solution d'équations quadratiques et linéaires à valeurs et inconnus opérateurs.

ABSTRACT

Periodic media play a major role in many applications, in particular in optics for micro and nano-technology or in mechanics with composite materials. One of the main interesting features is the possibility offered by such media to select ranges of frequencies for which waves can or cannot propagate. In real applications, the media are not really periodic but differ from periodic media only in bounded regions (small with respect to the total size of the propagation domain). In such applications, there is a need for efficient numerical methods for computing the propagation of waves inside such structures.

To reach this goal, the classical idea is to reduce the pure numerical computations to these regions and to try to take advantage of the periodic structure of the outside problem to construct artificial (but exact) boundary conditions. That is why we investigate the generalization to periodic media of the Neumann-to-Dirichlet approach which has already been well developed in homogeneous media. The new difficulty is that this NtD operator can no longer be determined explicitly and has to be computed numerically.

We consider successively three specific situations of increasing complexity : the one-dimensional case, the case of a locally perturbed periodic waveguide and the more complicated case of a locally perturbed periodic 2D plane. For each situation, the approach is the same : first, we look for the solution of the problem in absorbing media and second we try to solve the problem in non absorbing media using the limiting absorption principle. We show then that the DtN operator can be characterized through the solution of local PDE cell problems, the use of analytical tools such as the Floquet-Bloch transform and the solution of operator-valued quadratic or linear equations.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **1**

CHAPITRE 1 Le cas monodimensionnel **13**

1.1 Introduction 15
1.1.1 Position du problème 15
1.1.2 Rappel : le cas du milieu homogène 16
1.1.3 Retour au cas général 18
1.2 Construction des conditions NtD dans le cas avec absorption 19
1.2.1 Une première caractérisation de la solution 19
1.2.2 Résolution du problème de demi-droite 22
1.2.3 Calcul de r_ε 24
1.2.4 Retour au cas du milieu homogène 26
1.2.5 Le Problème posé en domaine borné 27
1.3 Applications numériques dans le cas avec absorption 28
1.3.1 Détermination des conditions NtD 28
1.3.2 Calcul de la solution 31
1.3.3 Validations 31
1.4 Le cas sans absorption par absorption limite 33
1.4.1 Spectre de l'opérateur à coefficients périodiques 1D et Propriétés 34
1.4.2 Définition de la bonne solution des problèmes de demi-droite 40
1.4.3 Solution du problème de Helmholtz quand $\omega^2 \notin \sigma(A)$ 46
1.4.4 Solution du problème de Helmholtz quand $\omega^2 \in \sigma(A)$ 51
1.5 Applications numériques dans le cas sans absorption 65
1.5.1 Cas où $\omega^2 \notin \sigma(A)$ 66
1.5.2 Cas où $\omega^2 \in \sigma(A)$ 68
1.5.3 Validations 73
1.5.4 Problème de réflexion-transmission 77

CHAPITRE 2 Le guide périodique localement perturbé : Problème avec absorption 83

2.1 Introduction . . . 85
2.1.1 Position du problème . . . 85
2.1.2 Rappel : le cas du guide droit homogène . . . 88
2.1.3 Retour au cas général . . . 89
2.2 Construction des opérateurs NtD dans le cas avec absorption . . . 89
2.2.1 Une première caractérisation de la solution . . . 89
2.2.2 Résolution du problème de demi-guide . . . 91
2.2.3 Caractérisation de l'opérateur R_ε et détermination de Λ_ε . . . 94
2.2.4 Problème posé en domaine borné avec conditions de NtD . . . 101
2.2.5 A propos de l'équation caractéristique . . . 104
2.2.6 Propriétés de l'opérateur NtD Λ_ε^+ . . . 107
2.3 Résolution numérique dans le cas avec absorption . . . 114
2.3.1 Approximation des opérateurs NtD locaux . . . 116
2.3.2 Approximation numérique de l'opérateur R_ε . . . 122
2.3.3 Approximation de l'opérateur NtD Λ_ε^+ . . . 139
2.3.4 Approximation de la solution intérieure . . . 142
2.3.5 Approximation de la solution du problème de départ $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ . . . 146
2.3.6 Validations . . . 148

CHAPITRE 3 Le guide périodique localement perturbé : Principe d'absorption limite 153

3.1 Introduction . . . 155
3.1.1 Position du problème . . . 155
3.1.2 Rappel : le cas du guide droit homogène . . . 156
3.1.3 Retour au cas général . . . 159
3.2 Construction des opérateurs NtD dans le cas sans absorption . . . 159
3.2.1 Vers le passage à la limite dans l'équation $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ . . . 162
3.2.2 Existence et caractérisation de la limite de R_ε et Λ_ε^+ . . . 168
3.2.3 A propos de l'équation caractéristique limite . . . 191
3.2.4 Réduction à un domaine borné quand $\omega^2 \notin \sigma(A)$ . . . 197
3.2.5 Réduction à un domaine borné quand $\omega^2 \in \sigma(A)$ . . . 202
3.3 Résolution numérique dans le cas sans absorption . . . 222
3.3.1 Cas où $\omega^2 \notin \sigma(A)$ . . . 224
3.3.2 Cas où $\omega^2 \in \sigma(A)$ . . . 227
3.3.3 Validations . . . 238
3.3.4 Problème de transmission-réflexion . . . 242

CHAPITRE 4 Le cas des milieux périodiques dans deux dimensions 247

4.1 Introduction . . . 250
4.1.1 Problème modèle . . . 250

4.2 Construction de l'opérateur NtD dans le cas avec absorption . . . 253
4.2.1 Une première caractérisation de la solution . . . 253
4.2.2 Notion de double symétrie . . . 254
4.2.3 Décomposition de l'opérateur Λ_ε . . . 263
4.2.4 Factorisation de chaque opérateur DtN $\Lambda^\varepsilon_{(i,j)}$ . . . 265
4.2.5 Opérateur NtD de demi-espace $\Lambda^{\mathrm{H}}_\varepsilon$ . . . 269
4.2.6 Caractérisation des opérateurs NtN $\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}$ . . . 282
4.2.7 Problème posé en domaine borné avec conditions de NtD . . . 286
4.2.8 A propos de la résolution de l'équation affine $(\mathcal{E}^\varepsilon_{(i,j)})$ . . . 288
4.2.9 Conclusion . . . 293
4.3 Résolution numérique dans le cas avec absorption . . . 293
4.3.1 Discrétisation en espace . . . 295
4.3.2 Discrétisation des variables de Floquet . . . 304
4.3.3 Résultats numériques . . . 315
4.3.4 Applications numériques . . . 321
4.4 Principe d'absorption limite : quelques éléments d'analyse . . . 326
4.4.1 Spectre de l'opérateur périodique . . . 328
4.4.2 Vers le passage à la limite dans l'équation $(\mathcal{P}^e_\varepsilon)$ . . . 330
4.4.3 Principe d'absorption limite pour le plan périodique . . . 341
4.4.4 Liens entre les deux démarches . . . 346
4.5 Principe d'absorption limite numérique . . . 346
4.5.1 Discrétisation de l'équation $\mathcal{Q}^\varphi_{(i,j)}$ . . . 348
4.5.2 Calcul de la solution de $\mathcal{P}$ . . . 353
4.5.3 Perspectives d'améliorations de la méthode . . . 356
4.6 Conclusion . . . 356

Conclusion et perspectives **359**

ANNEXE A Variantes et extensions **363**

A.1 Constante Robin-to-Robin . . . 363
A.1.1 Introduction . . . 363
A.1.2 Cas monodimensionnel . . . 364
A.1.3 Cas du guide . . . 370
A.2 Le cas des milieux périodiques 2D avec un défaut de grande taille . . . 378
A.2.1 Généralisation des résultats théoriques . . . 378
A.2.2 Généralisation de la résolution numérique . . . 383
A.3 Milieu sans symétrie . . . 390
A.3.1 Quatre problèmes de demi espace auxiliaires . . . 390
A.3.2 Détermination de l'opérateur NtD Λ_ε . . . 392

A.4 Problème de transmission-réflexion entre deux demi-espace périodiques 394
A.4.1 Présentation de la méthode 394
A.4.2 Résolution numérique du problème 399
A.4.3 Conclusions 420

ANNEXE B Outils mathématiques **421**

B.1 Transformée de Floquet Bloch 421
B.1.1 Définitions 421
B.1.2 Quelques propriétés 422
B.1.3 Image des espaces $H^r(\mathbb{R})$ par la TFB 425
B.1.4 Images des espaces $L^{2,s}(\mathbb{R})$ par la TFB 429
B.2 Quelques éléments de théorie spectrale des opérateurs non autoadjoints 436
B.2.1 Spectre d'un opérateur linéaire 436
B.2.2 Opérateurs compacts et Propriétés 437
B.2.3 Complétude des v.p. généralisés d'opérateurs compacts non auto-adjoints . 439

BIBLIOGRAPHIE **441**

INTRODUCTION

Motivations et contexte

Ce que l'on entend classiquement par problème physique posé en milieu périodique signifie concrètement que la géométrie et les caractéristiques physiques de ce problème (typiquement les coefficients élastiques pour une structure mécanique ou la permittivité diélectrique ou la perméabilité magnétique pour une structure optique) sont des fonctions périodiques d'une ou plusieurs variables d'espace. Les milieux périodiques apparaissent dans un grand nombre d'applications. Tout d'abord, le matériau à fibre ou composite (dont un exemple est présenté Figure 1) est un assemblage périodique d'au moins deux matériaux (voir par exemple [Christensen (1979) ; Aboudi (1991) ; Kaw (2005)] pour leur modélisation). Le nouveau matériau ainsi constitué possède des propriétés que les éléments seuls ne possèdent pas. Ce phénomène permet d'améliorer la qualité de la matière pour des utilisation spécifiques (légèreté, résistance particulières à certains efforts, ...), ce qui explique l'utilisation croissante de ces matériaux dans différents secteurs industriels, et notamment an aéronautique et aérospatial. Cependant, la modélisation des composites reste complexe du point de vue mécanique et constitue un des objectifs de ce travail. Les milieux périodiques présentent également des propriétés très intéressantes en optique,

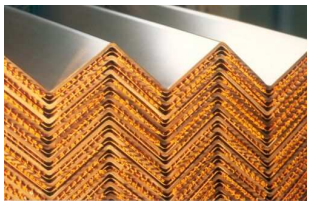


FIG. 1: Un matériau composite

en particulier en microtechnologie et nanotechnologie [Kuchment (2001) ; Joannopoulos *et al.* (1995) ; Johnson & Joannopoulos (2002) ; Sakoda (2001)]. En effet, un des récents sujets porteurs en optique concerne les matériaux à bandes interdites de photons connus sous le nom de cristaux photoniques (voir Figure 2 pour des exemples). Ces derniers sont des structures périodiques composées de matériaux diélectriques et sont soumis à des excitations de longueurs d'onde comparables aux dimensions caractéristiques du matériau (typiquement la période) et

qui présentent un fort contraste d'indice. En particulier de telles structures permettent de sélectionner les bandes de fréquences pour lesquelles les ondes peuvent ou non se propager dans le milieu en question. Du point de vue mathématique, cette propriété s'explique par la structure en bandes du spectre de l'opérateur différentiel intervenant dans la modélisation (pour une présentation mathématique complète d'une telle propriété, nous renvoyons le lecteur à [Kuchment (2004, 2001)]). Même si les conditions nécessaires pour l'existence de bandes interdites ne sont pas connues (sauf pour le cas monodimensionnel [Borg (1946)]), Figotin et Kuchment ont donné un exemple de milieux périodiques à fort contraste d'indice où les bandes interdites existent et peuvent être caractérisées [Figotin & Kuchment (1996*a*,*b*)]. De plus d'autres structures à bandes interdites ont été caractérisées à travers des approches numériques [Figotin & Godin (1997)]. Il semble donc qu'un choix adéquat de la structure du cristal et des matériaux diélectriques le composant permettent de créer des bandes interdites particulières et donc d'un point de vue pratique, bannir du cristal certaines ondes électromagnétiques. De ce fait, les milieux à bandes interdites ont plusieurs applications potentielles, par exemple, dans la réalisation de filtres, d'antennes et de différents composants utilisés en télécommunications. On comprend donc l'intérêt de calculer la solution de l'équation des ondes dans de telles structures.

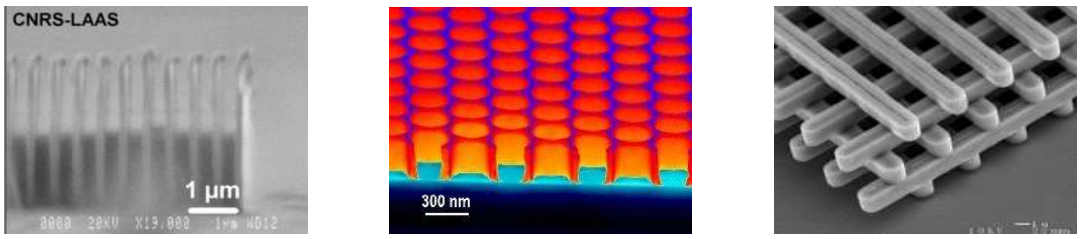


FIG. 2: Exemples de cristaux photoniques 1D, 2D et 3D

Dans ces applications, les milieux périodiques peuvent présenter des défauts, c'est-à-dire des perturbations locales de leur géométrie ou de leurs caractéristiques. On trouve notamment des défauts de structure, des ruptures géométriques ou des fissures, liés à une fabrication défectueuse du matériau ou à la fatigue durant son utilisation. Afin de détecter ces défauts on peut envisager de faire du contrôle non destructif (CND), c'est-à-dire d'émettre des ondes dans le matériau et d'en mesurer les ondes diffractées afin de conclure à l'existence ou non de tels défauts (dont la taille est supérieure à une longueur critique) voir même d'en déduire des informations supplémentaires relatifs à leur nature, taille, forme, etc.... Du point de vue mathématique, cette détection constitue alors un problème inverse. Pour pouvoir traiter le problème inverse il est important d'avoir une très bonne connaissance du problème direct et une méthode numérique adaptée au calcul de la solution du problème de l'équation des ondes sous-jacente dans un milieu périodique localement perturbé à partir d'une source déterminée (typiquement pour le CND, c'est la source émise par un transducteur). C'est exactement l'objectif de cette thèse.

Ces défauts peuvent également être introduits volontairement dans le milieu pour en changer les propriétés. Ainsi, en optique, dans le but de réaliser des lasers, des filtres, des fibres ou des guides d'ondes, il est nécessaire d'avoir des modes autorisés dans les gaps. Ces modes sont obtenus en introduisant des défauts localisés de la périodicité et correspondent, d'un point de vue

mathématique, à des valeurs propres isolées de multiplicité finie à l'intérieur des gaps. Figotin et Klein ont prouvé rigoureusement que l'introduction de défaut dans la structure périodique, c'est-à-dire une perturbation à support compact, peut créer des modes de défaut, qui sont des ondes stationnaires à décroissance exponentielle loin de la perturbation dont la fréquence se situe dans le gap [Figotin & Klein (1997, 1998) ; Figotin & Godin (1997)]. Dans la littérature mathématique existante, les études concernant les milieux périodiques présentant des défauts localisés ont donc surtout trait à des problèmes spectraux et à l'existence de ces modes particuliers. Dans cette thèse, nous allons nous intéresser à une autre classe de problème qui porte sur les propriétés des solutions et leurs simulations numériques. Nous cherchons donc à calculer la solution de l'équation des ondes dans un milieu périodique présentant un défaut avec un terme source qui est une donnée du problème.

Il est donc important de disposer de méthodes numériques efficaces pour calculer la propagation d'ondes dans des milieux qui ne diffèrent de milieux périodiques que dans des régions bornées, en tirant avantage de la structure périodique du problème en dehors de ces régions. Ceci est particulièrement pertinent lorsque la taille de la cellule de périodicité est petite devant la taille du milieu de propagation, ce qui est souvent le cas dans les applications. En effet, dans ce cas, il peut devenir très coûteux de vouloir faire les calculs sur tout le domaine tout en voulant tenir compte de la périodicité. Nous allons donc tenter de définir une méthode adaptée au cas où **la taille du milieu est très grande devant la taille de la cellule de périodicité**. Ainsi la première hypothèse de notre étude sera de considérer un milieu infini. Il existe un certain nombre d'études qui envisage le calcul de la solution de l'équation des ondes que le milieu périodique n'est composé que de quelques cellules de périodicité à l'intérieur d'un domaine homogène non borné[Yuan & Lu (2006, 2007) ; Ehrhardt *et al.* (2008) ; Ehrhardt & Zheng (2008)]. En ce sens, nous nous distinguons de ces travaux, même si il existe quelques similitudes entre les deux méthodes.

De plus lorsque la taille de la cellule le permet (dimensions petites devant les longueurs d'ondes étudiées), on fait traditionnellement appel à la théorie de l'homogénéisation [Bensoussan *et al.* (1978) ; Allaire (2002, 1992)] qui permet de remplacer le milieu périodique par un milieu homogène équivalent dont les caractéristiques physiques sont déterminées en résolvant des problèmes auxiliaires sur la cellule de base (problèmes cellulaires). Cette théorie est maintenant bien connue et largement exploitée à des fins numériques (en particulier pour la modélisation des matériaux composites dans le CND [Potel & De Belleval (1993*b*,*a*) ; Potel *et al.* (2001)]). On peut par exemple concevoir des couplages entre des méthodes de type éléments finis au voisinage de l'hétérogénéité locale et des formules de représentation intégrales exploitant la connaissance explicite des fonctions de Green de l'opérateur de propagation dans un milieu homogène. Les matériaux composites sont à ce jour presque exclusivement traités par cette approche et les méthodes numériques qui en découlent. Pour notre part, une des hypothèses fondamentales de notre étude est que **la longueur d'onde est de l'ordre de la taille de la cellule de périodicité**. Ainsi l'homogénéisation ne saurait s'appliquer. Il est toutefois clair, ne serait-ce qu'intuitivement, que tirer parti de la structure périodique d'un milieu doit pouvoir se traduire en économie substantielle de calculs, en particulier en passant - comme en homogénéisation - par la résolution de problèmes cellulaires comme outil de calcul intermédiaire.

Etant données les deux hypothèses fondamentales de notre étude (milieu infini et longueur d'onde de l'ordre de la taille de la cellule de périodicité), l'idée naturelle est donc d'exploiter la structure particulière des milieux périodiques pour restreindre les calculs numériques à un voisinage du défaut. Dans l'optique de formuler une théorie pertinente pour les milieux périodiques, il est primordial d'avoir en tête le cas particulier du milieu homogène (c'est en quelque sorte un milieu périodique de période arbitraire) pour lequel la problématique de la simulation numérique de la propagation des ondes en domaine non borné est très ancienne. De nombreuses méthodes peuvent être utilisées pour restreindre les calculs dans un domaine borné. La première approche consistent à appliquer une condition aux bords artificiels qui est transparente ou approximativement transparente. Citons par exemple

(i) la condition de radiation locale à distance finie [Engquist & Majda (1979), Bayliss & Turkel (1980)],

(ii) le couplage entre des méthodes volumiques et une représentation intégrale ou la technique d'équation intégrale [Johnson & Nédélec (1980) ; Levillain (1990) ; Hazard & Lenoir (1996) ; Jami & Lenoir (1977)],

(iii) l'approche DtN qui consiste à calculer exactement l'opérateur Dirichlet-to-Neumann associé au milieu extérieur, à condition que la géométrie du bord soit convenablement choisie (typiquement un cercle en 2D).

Les méthodes (ii) et (iii) sont exactes (à une approximation numérique de discrétisation près). La méthode (i) est une méthode approchée mais sa précision s'améliore quand l'ordre de la condition augmente ou que le bord artificiel est de plus en plus éloigné. Cependant, aucune de ces méthodes ne peut être appliquées ou étendue directement à un milieu périodique général car elles sont fondées sur la nature homogène du milieu extérieur. En effet, des formules explicites sont utilisées pour la solution du problème extérieur dans les trois méthodes, la connaissance de la fonction de Green est utilisée dans la méthode (ii) et la technique de séparation des variables est utilisée dans la (iii).

La seconde approche consiste à entourer le domaine de calcul par une couche absorbante dans laquelle la technique des PML (Perfectly matched layers) [Berenger (1994)] est appliquée. Du point de vue physique, cette méthode peut être interprétée comme permettant à une onde venant du domaine de calcul d'entrer sans réflexion dans la couche et de l'absorber pour l'empêcher de revenir dans le domaine de calcul. Ce principe n'est pas adapté *a priori* pour les milieux périodiques pour lesquels une onde quittant le domaine de calcul interagit avec les hétérogénéités du milieu jusqu'à l'infini. C'est la raison pour laquelle la technique des PML standards ne s'appliquent pas en l'état. Cependant, l'espoir d'utiliser ce genre d'approche aux milieux périodiques réside dans les techniques de « Pole condition » [Hohage *et al.* (2003*a*,*b*)], qui peuvent être vues en quelque sorte comme une généralisation de la méthode PML. Des travaux récents de Frank Schmidt vont d'ailleurs dans ce sens.

Il semble y avoir très peu d'études de méthodes de troncature de domaine dans la littérature mathématique pour traiter le cas des milieux périodiques. Toutefois, un problème qui présente des points communs avec celui que nous considérons est le calcul numérique des modes localisés (solution non triviale de l'équation étudiée en l'absence de terme source) qui consiste à résoudre

un problème de valeurs propres en milieu non borné. La méthode de supercell, justifiée mathématiquement dans [Soussi (2005)], a des similitudes avec la condition de radiation à distance finie (méthode (i)) : elle consiste à effectuer les calculs des modes localisés dans un domaine borné de grande taille, les solutions trouvées convergent vers la solution recherchée quand la taille de la cellule tend vers l'infini. Comme les modes localisés sont exponentiellement décroissants, cette convergence est même exponentielle. La méthode de superposition des sources fictives (FSSM) [Botten *et al.* (2006)],...) permet de calculer le mode de défaut en utilisant un principe de sources fictives. Cette méthode utilise la décroissance exponentielle des modes de défauts : elle ne permet donc pas la résolution d'un problème de propagation des ondes dans le cas où il existerait des ondes propagatives.

Au vu de toutes les méthodes déjà existantes et des arguments qu'elles utilisent, nous avons choisi d'approfondir la question de trouver des **conditions aux bords transparentes non locales**, **de type Dirichlet-to-Neumann** pour réduire les calculs numériques à un voisinage de cette perturbation. La notion d'opérateurs DtN apparaît déjà par exemple dans les travaux de Toufic Abboud [Abboud (1993)] pour le problème de diffraction par des réseaux périodiques, par J. Tausch [Tausch & Butler (2000)] pour les guides d'ondes périodiques ouverts ou encore dans la communauté physicienne par Y.Y. Lu [Yuan & Lu (2006, 2007)] pour l'étude des structures périodiques de taille finie. Cependant, dans les deux premiers cas, l'opérateur DtN est utilisé pour traiter le caractère non borné du milieu de propagation dans la ou les direction(s) transverses à la direction de périodicité. Ce n'est donc pas un opérateur DtN de milieu périodique. Dans le troisième cas, le caractère fini du milieu périodique est primordial dans la détermination de l'opérateur DtN. Nous proposons, ici, une approche nouvelle des techniques d'opérateurs DtN : il ne s'agit plus d'en déterminer une expression explicite mais plutôt une caractérisation via la résolution d'équations dont les inconnues sont des opérateurs. L'approximation numérique de ces équations permet alors de réaliser une approximation de l'opérateur DtN exact, laquelle peut alors être utilisée pour la résolution du problème global. Alors que tous nos articles ont traité de la caractérisation, la construction et le calcul d'opérateur DtN, nous avons choisi dans ce mémoire de passer par l'opérateur de Neumann-to-Dirichlet. En effet, cet opérateur va nous placer dans un cadre fonctionnel plus simple et permet d'éviter un certain nombre de difficultés techniques dans la discrétisation et l'analyse numérique. Signalons toutefois

- la méthode peut être étendue à la construction des opérateurs DtN (comme le prouvent nos articles [Joly *et al.* (2006) ; Fliss & Joly (2008)]) moyennant quelques difficultés supplémentaires (notamment au niveau du cadre fonctionnel et de l'approximation numérique) ;
- la construction des opérateurs NtD ou DtN amène à exclure un ensemble dénombrable de fréquences artificielles dans le cas des milieux non absorbants, on peut alors préférer l'emploi de conditions Robin-to-Robin (dont l'utilisation est détaillée Annexe A.1)

Pour des raisons de clarté et pour simplifier la présentation de la méthode, nous avons préféré présenter la méthode pour des opérateurs NtD dans le corps du manuscrit.

Présentation succincte de la thèse

Nous étudions dans cette thèse le problème de propagation des ondes dans un **milieu périodique présentant un défaut**. Le défaut sera modélisé par un obstacle géométrique, une perturbation locale des caractéristiques du milieu ou encore une source à support compact. Nous nous intéresserons exclusivement aux **problèmes harmoniques** en temps, c'est-à-dire que la solution est recherchée sous la forme $ue^{\imath\omega t}$ où la fréquence ω est alors une donnée du problème. On peut voir cette étude comme un premier pas vers la résolution de problèmes temporels. Nous utilisons un modèle unidimensionnel ou bidimensionnel permettant de développer simplement les principes de la méthode et résolvons un problème scalaire où l'inconnue du problème pourra être indifféremment la pression dans un milieu acoustique, une composante du champ électromagnétique dans un milieu diélectrique ou une composante du champ de déplacement pour un milieu élastique. Toutefois, notre méthode s'étend conceptuellement à des milieux 3D et aux équations de Maxwell et de l'élasticité linéaire. La thèse présente la méthode de construction de l'opérateur NtD dans **trois situations de difficulté croissante** : **le cas monodimensionnel**, **le cas d'un guide d'onde bidimensionnel** (domaine borné dans une direction et infini et périodique dans l'autre) et **le cas de l'espace entier en dimension** 2. Pour chacune de ces situations, la démarche générale consiste à considérer tout d'abord le problème dans le cas d'un milieu absorbant puis de considérer celui dans le cas d'un milieu non absorbant par absorption limite.

Le **chapitre 1** est consacré au cas monodimensionnel. Ce chapitre a surtout une vocation pédagogique : les idées, les outils et les notations peuvent être exposées simplement et la méthode est entièrement justifiée du point de vue théorique. Dans ce cas, la méthode peut être vue comme une alternative à la technique des matrices de transfert, classiquement utilisée pour la résolution de problèmes de Cauchy associées à des équations différentielles ordinaires à coefficients périodiques. Cette alternative est pertinente car, contrairement à la technique des matrices de transfert, notre méthode de construction d'opérateurs (en l'occurrence ici de simples coefficients) NtD se généralise en dimension supérieure.

Le **chapitre 2** traite du cas des guides d'ondes en milieu absorbant. L'opérateur NtD recherché, noté Λ est défini sur une section transverse du guide (en l'occurrence une interface fictive entre deux cellules de périodicité). Sa construction repose sur celle d'un opérateur de propagation R_ε qui permet de décrire comment la solution du problème extérieur « se propage » d'une interface à la suivante. On montre que cet opérateur est solution d'une équation quadratique de type Riccati stationnaire, avec contrainte, dont les « coefficients » sont eux-mêmes des opérateurs de type NtD associés à des problèmes de cellule locaux, faciles à résoudre numériquement. La discrétisation des problèmes cellulaires s'effectue par éléments finis mixtes et nous en menons l'étude d'erreur. En conséquence, l'opérateur R_ε est approché en dimension finie par la solution d'une équation de Riccati discrète avec contrainte. La nature de l'équation et la contrainte rendent la résolution de cette équation de Riccati non standard : deux techniques numériques pour sa résolution sont utilisées et validées. L'une passe par une méthode de diagonalisation, l'autre par un algorithme de Newton « modifié ».

Le **chapitre 3** aborde le cas des guides d'ondes sans absorption par une technique d'absorption limite. Le passage à la limite formel dans les diverses étapes du Chapitre 2 est assez simple :

on peut alors établir une équation de Riccati limite dont la limite formelle R des opérateurs de propagation avec absorption est solution. Deux difficultés nouvelles apparaissent toutefois. Tout d'abord, la justification rigoureuse du passage à la limite est délicate, l'extension de la technique utilisée dans le cas 1D ne semblant pas pouvoir se faire aisément. On est alors amené à adapter et améliorer certains résultats de la littérature pour démontrer le principe d'absorption limite dans les guides d'ondes périodiques par une méthode issue de [Agmon (1982)]. La deuxième difficulté est que, après le passage à la limite, on perd l'unicité de la solution de l'équation de Riccati avec contrainte. Il faut alors travailler plus finement sur le passage à la limite pour définir le critère supplémentaire qui va permettre de sélectionner la bonne solution. Ce critère s'interprète comme une condition d'onde sortante à l'infini, notion définie à partir de la vitesse de groupe. Une procédure numérique est mise en place pour appliquer ce critère à l'équation de Riccati en dimension finie obtenue après discrétisation du problème.

Le **chapitre 4** traite du cas des milieux périodiques dans les deux dimensions dans le cas où on fait une hypothèse de double symétrie sur le milieu périodique, ce qui permet de simplifier la présentation de la méthode. La frontière artificielle est un carré, supposé dans ce chapitre de la taille de celle de la cellule de périodicité. L'opérateur NtD se caractérise à partir de cinq opérateurs. Le premier est un opérateur NtD de demi-espace. Pour caractériser et calculer cet opérateur, on utilise la transformation de Floquet Bloch permettant de ramener la détermination de l'opérateur NtD de demi-espace à celle d'une famille d'opérateurs de guide d'onde et donc de se ramener à la méthode introduite au chapitre 2. Les quatre autres opérateurs sont des opérateurs d'extension qui sont, chacun, solutions de quatre équations affines indépendantes. Les coefficients qui interviennent dans ces équations sont à nouveau calculables via la transformée de Floquet Bloch et les outils développé au Chapitre 2. En pratique, la résolution de ces équations affines se ramène à la résolution d'équations intégrales non-standard. Pour le passage à la limite au cas des milieux non-absorbants, un certain nombre de conjectures sont effectuées et sont validées par une procédure de principe d'absorption limite numérique qui est déduite de ces conjectures. En effet, de nombreuses expériences numériques sont réalisées et donnent confiance quant à la validité de ces conjectures et de la démarche.

Enfin le manuscrit s'achève par deux annexes conséquentes. L'Annexe A est consacrée à la présentation de diverses généralisations et variantes des méthodes étudiées dans les quatre chapitres : présentation de la méthode pour la construction de conditions de type RtR (A.1), la généralisation du Chapitre 4 au cas où la frontière artificielle est de taille plus grande que la cellule de périodicité(A.2), l'extension de la méthode du Chapitre 4 au cas des milieux ne présentant aucune symétrie (A.3) et enfin le problème de transmission-réféxion d'un milieu périodique à un autre dans lequel intervient seulement l'opérateur NtD de demi-espace (A.4). L'annexe B est, elle, consacrée à l'énoncé de quelques résultats d'analyse dont le rappel nous a semblé important pour la compréhension globale de ce document.

Introduction à la démarche suivie

Pour chacune des situations étudiées, le problème modèle est globalement le même. En effet, nous étudierons le problème de la propagation des ondes dans un milieu périodique dans une ou deux directions et présentant une perturbation locale. Le domaine de propagation Ω est donc infini au moins dans une direction et la géométrie et les propriétés du matériaux sont périodiques dans 1 ou 2 directions d'espace, sauf dans un domaine borné noté Ω^i.

Nous nous intéressons donc à l'équation des ondes scalaire

$$\rho(x)\,\frac{\partial^2 U(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} - \triangle U(\mathbf{x},t) = F(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in\Omega, t\geq 0.$$

où nous supposons que la source est harmonique avec une fréquence $\omega > 0$: $F(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x})e^{\imath\omega t}$.

REMARQUE 0.0.1
Ce modèle apparaît en électromagnétisme dans le cas d'un milieu 2D quand il est une section d'un milieu 3D, invariant dans la direction z. En électromagnétisme, dans le cas d'une polarisation transverse électrique, la solution U du problème précédent représente la composante z du champ électrique et $\rho(x)\in L^\infty$ est la permittivité diélectrique relative du milieu si la perméabilité magnétique est supposée constante égale à 1.

Nous recherchons une solution harmonique $U(\mathbf{x},t) = u(\mathbf{x})e^{\imath\omega t}$ où la solution u satisfait l'équation de Helmholtz :

$$-\triangle u - \rho(\mathbf{x})\,\omega^2\,u = f, \quad \mathbf{x}\in\Omega, \tag{$\mathcal{P}$}$$

dans le cas où les hypothèses suivantes sont satisfaites.

1. Le domaine de propagation est infini au moins dans une direction et périodique dans cette ou ces directions en dehors d'un domaine borné Ω^i (i pour domaine intérieur). Le domaine que nous qualifierons d'extérieur et qui a des propriétés de périodicité est défini par
$$\Omega^e = \Omega\ \setminus \Omega^i.$$
2. L'indice de réfraction ρ est une fonction strictement positive et une perturbation compacte d'un indice périodique (dans une ou deux directions), la perturbation étant à support inclus dans Ω^i.
3. Le support du terme source f est inclus dans Ω^i.

Tant du point de vue mathématique (existence et unicité de la solution) que numérique (calcul effectif de la solution), afin de caractériser et calculer la solution de ce problème posé sur Ω, l'idée est donc de restreindre le problème dans un domaine borné, typiquement Ω^i en imposant des conditions aux bords transparentes en $\partial\Omega^i = \Sigma^i$ telles que la solution de ($\mathcal{P}$) restreinte à Ω^i soit alors solution du problème suivant dans Ω^i

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u^i - \rho(\mathbf{x})\,\omega^2\,u^i & = & f \quad \text{dans} & \Omega^i, \\ u^i + \Lambda\,\dfrac{\partial u^i}{\partial \mathbf{n}^i} & = & 0 \quad \text{sur} & \Sigma^i, \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}^i$}$$

où $\mathbf{n}^i$ est la normale extérieure de Ω^i. La dernière équation, conditions aux limites absorbantes ou encore condition de type Neumann-to-Dirichlet (noté NtD), découle de la résolution d'un

problème dans Ω^e, c'est-à-dire posé dans un domaine infini. La détermination de cette condition, c'est-à-dire de l'opérateur Λ est un problème en soi pour lequel il sera essentiel d'exploiter la périodicité du milieu extérieur.

La difficulté spécifique posée par l'équation de Helmholtz est de définir la bonne solution du problème $(\mathcal{P})$ (et donc le bon Λ) pour toutes les fréquences ω. Cette difficulté est liée à l'équivalent de la condition de radiation en milieu homogène et au comportement asymptotique de la solution à l'infini qui ne se résume pas à une décroissance vers 0 comme ce serait le cas pour un problème elliptique (cas de l'équation de Helmholtz avec un $\omega^2 < 0$ par exemple). Nous appréhendons donc le problème comme suit : l'opérateur

$$A = -\frac{1}{\rho} \triangle$$

défini sur

$$D(A) = \{u \in H^1(\Omega), \quad \triangle u \in L^2(\Omega)\}$$

est autoadjoint et positif dans l'espace $L^2(\Omega, \rho dx)$ et résoudre $(\mathcal{P})$ peut être vu comme inverser $A - \omega^2 I$. Or le spectre de cet opérateur est continu et inclus dans $\mathbb{R}^+$ (voir [Kuchment (1993, 2001, 2004)] pour des résultats généraux sur le spectre des opérateurs à coefficients périodiques), dans le cas homogène le spectre est même égal à $\mathbb{R}^+$. En d'autres termes, nous ne pouvons inverser dans $L^2(\Omega)$ l'opérateur $(A - \omega^2 Id)$ pour tout $\omega^2 \in \mathrm{Sp}(A)$ (et donc définir directement une solution du problème d'énergie finie). Néanmoins pour z appartenant à l'ensemble résolvant de l'opérateur A, c'est-à-dire le plan complexe privé du spectre de A, $(A - zId)$ est inversible de $D(A)$ dans $L^2(\Omega)$. En d'autres termes, la résolvante de l'opérateur A, $R_z(A) = (A - zId)^{-1}$ a un ensemble de définition présentant une coupure (le spectre de A). On peut très bien se demander si $R_z(A) = (A - zId)^{-1}$ a une limite dans un espace plus grand que L^2 quand z tend vers sa coupure : c'est le principe d'absorption limite. La difficulté, présente de manière générale pour les coupures des fonctions à variables complexes, est que la limite est différente suivant la façon dont z approche la coupure : dans notre cas, suivant que z l'approche par le demi-plan $(Im(z) > 0)$ ou par le demi-plan $(Im(z) < 0)$.

Ici, nous allons chercher la solution u de $(\mathcal{P})$ comme la limite, si elle existe de (u_ε), quand ε tend vers 0 (dans une norme plus faible que la norme L^2 et qui reste à déterminer) :

$$u = \lim_{\varepsilon \searrow 0} u_\varepsilon$$

où u_ε[1] est l'unique solution H^1 de :

$$-\triangle u_\varepsilon - \rho(\mathbf{x}) \, (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \, u_\varepsilon = f. \qquad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

Nous pouvons écrire également

$$u = \lim_{\varepsilon \searrow 0} R_{(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)}(A) \, f.$$

C'est le bon point de vue mathématique pour caractériser la solution « physique ». Pour comprendre la raison pour laquelle la solution que nous cherchons est celle que nous considérons

[1] Dans ce cas, le comportement à l'infini ne fait pas de mystère et est contenu dans le fait que l'on cherche la solution dans H^1.

comme « physique », c'est-à-dire celle qui peut être observée en réalité, il faut voir que cette dernière équation découle de l'équation des ondes en régime temporel

$$\rho(\mathbf{x})\,\frac{\partial^2 U_\varepsilon}{\partial t^2}+\varepsilon\,\rho(\mathbf{x})\,\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}-\triangle U_\varepsilon=F(\mathbf{x},t),\quad \mathbf{x}\in\Omega,t\geq 0, \tag{1}$$

où on a posé $U_\varepsilon=u_\varepsilon\,e^{-\imath\omega t}$. Typiquement, ε est un paramètre typiquement petit par rapport à la fréquence et représente une petite absorption dans le milieu. L'absorption est toujours positive, soit $\varepsilon>0$. La solution « physique » est donc définie comme la limite des solutions des problèmes avec absorption lorsque celle ci tend vers 0. Comme nous l'avons signalé plus haut, la limite, si elle existe, est différente suivant le choix $\varepsilon>0$ ou $\varepsilon<0$.

Les problèmes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}^i)$ étant en quelque sorte équivalents, la définition correcte de l' opérateur Λ est liée à la façon de définir de manière unique la solution « physique » de $(\mathcal{P})$. En effet, nous allons déterminer pour tout $\varepsilon>0$, l'opérateur NtD, $\Lambda_\varepsilon\in\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Sigma^i),H^{1/2}(\Sigma^i))$, tels que la restriction à Ω^i de u_ε, solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, que nous notons u_ε^i soit l'unique solution du problème

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u_\varepsilon^i-\rho(\mathbf{x})\,(\omega^2+\imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^i &=& f & \text{dans}\quad \Omega^i\\ u_\varepsilon^i+\Lambda_\varepsilon\,\dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial \mathbf{n}^i} &=& 0 & \text{sur}\quad \Sigma^i, \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon^i$}$$

où $\mathbf{n}^i$ est la normale extérieure de Ω^i. L'opérateur NtD est alors défini pour toute donnée $\varphi\in H^{-1/2}(\Sigma^i)$ à partir de $u_\varepsilon^e(\varphi)$ l'unique solution H^1 du problème

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u_\varepsilon^e-\rho_p(\mathbf{x})\,(\omega^2+\imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^e &=& 0 & \text{dans}\quad \Omega^e\\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^e}{\partial \mathbf{n}^e} &=& \varphi & \text{sur}\quad \Sigma^i \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon^e$}$$

où $\mathbf{n}^e$ est la normale extérieure de Ω^e comme

$$u_\varepsilon^e(\varphi)\Big|_{\Sigma^i}=\Lambda_\varepsilon\,\varphi \tag{2}$$

Dans chacune des situations étudiées, l'idée est alors, dans un premier temps, de montrer que la famille $\{\Lambda_\varepsilon^+,\ \varepsilon>0\}$ a bien une limite, dans un sens que nous préciserons, notée Λ,

$$\Lambda=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\Lambda_\varepsilon$$

et de trouver une méthode pour la détermination numérique de Λ. Dans un deuxième temps, il est question d'étudier le caractère bien posé du problème $(\mathcal{P}^i)$ avec la condition de NtD qui en découle. La solution, si elle existe, de ce problème est la restriction à Ω^i de la "solution" physique de $(\mathcal{P})$ que nous cherchons.

Pour chacune des situations étudiées, on suit la même démarche consistant dans un premier temps à résoudre le problème dans le cas d'un milieu absorbant puis dans un second temps, de résoudre le cas non absorbant par absorption limite. C'est souvent la justification rigoureuse de cette deuxième étape qui soulève le plus de difficultés mathématiques : alors que l'analyse est complète en 1D et satisfaisante dans le cas du guide, de nombreuses questions restent ouvertes dans le cas de l'espace entier.

REMARQUE 0.0.2
La méthode de construction d'opérateurs NtD peut aisément être étendue à des opérateurs elliptiques plus généraux

$$u \mapsto \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (\mu \nabla u)$$

où μ et ρ sont des perturbations compactes de fonctions périodiques. Ce modèle apparaît en électromagnétisme et en mécanique quand ce milieu 2D est une section d'un milieu 3D, invariant dans la direction z. En électromagnétisme, dans le cas d'une polarisation transverse magnétique, la solution u du problème représente la composante z du champ magnétique et $\mu(x) \in L^\infty$ est l'inverse de la permittivité diélectrique relative du milieu si la perméabilité magnétique est supposée constante égale à 1 et $\rho(x)$ est égale à 1. En mécanique, si le milieu est isotrope et dans le cas d'une résultante de efforts parallèle à la direction z, la solution u du problème précédent représente la composante z du champ de déplacement et $\mu = E/(1+\nu)$ où E est le module de Young et ν le coefficient de Poisson et $\rho(x)$ est la masse volumique.

Le domaine Ω peut aussi être plus complexe et contenir par exemple un ensemble périodique d'obstacles ou « trous ». Dan ce cas, il faut seulement s'assurer que les conditions aux bords de ces trous sont compatibles avec la périodicité du problème.

Pour finir, cette introduction, je me permets de résumer quelques éléments bibliographiques me concernant et liés à cette étude.

♢ ***Articles publiés***

FLISS S., JOLY P. & LI J.R., **Exact boundary conditions for periodic waveguides with a local perturbation**, *Communications in Computational Physics, 1(6) :945-973, 2006.*

FLISS S.& JOLY P., **Exact boundary conditions for time-harmonic wave propagation in locally perturbed periodic media**, *Applied Numerical Mathematics,doi :10.1016/j.apnum.2008.12.013.*

♢ ***Articles en cours de rédaction***

FLISS S., CASSAN E. & BERNIER D., **A new approach to the theoretical study of light refraction at the surface of a photonic crystal**, *probablement soumis à Phys. Rev. (B) ou JOSA.*

FLISS S.& JOLY P., **Wave propagation in locally perturbed periodic media : Numerical analysis**, *probablement soumis à SIAM..*

♢ ***Chapitre de livre en préparation***

Nous avons été sollicité par Matthias Ehrhardt pour rédiger un chapitre d'un ouvrage collectif consacré aux ondes dans les milieux périodiques :

JOLY P., FLISS S. & LI J.R., **Exact boundary conditions for wave propagation problems in periodic media including a local perturbation**, *Wave propagation in periodic media. Analysis, Numerical Techniques and practical Applications, E-Book Series Progress in Computational Physics (PiCP), Volume 1, Bentham Science Publishers, to appear fall 2009.*

♢ ***Actes de conférence***

FLISS S., JOLY P. & LI J.R., **Exact boundary conditions for periodic waveguides**. *in WAVES, Providence, 2005.*[2]

FLISS S., JOLY P. & LI J.R., **Computation of harmonic wave propagation in infinite periodic media**. *Report No.5/2007 of Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach "Computaional Electromagnetism and Acoustics*, Oberwolfach, 2007.

FLISS S., JOLY P. & LI J.R., **Exact boundary conditions for locally perturbed 2d-periodic plane**. *in WAVES, Reading, 2007.*

♢ ***Communications orales***

Communications au groupe de travail "Théorie spectrale" - ENSTA (Paris) - Juin 2005.
Conférence MathmOndes - l'Université de Manchester - Juin 2006 .
Séminaire du LAMSIN - ENIT (Tunis) - Aout 2006.
Séminaire de l'Institut d'Algébre et Géométrie - Université de Karlsruhe - Novembre 2006.
Conférence WONAPDE 2007 - Concepcion (Chili) - Janvier 2007.
Oberwolfach Conference on Computational Electromagnetism and Acoustics - Oberwolfach (Ger) - Février 2007.
Conférence Waves 2007 - l'Université de Reading (UK) - Juin 2007
Workshop "Méthodes pour les problèmes de diffraction" - Université de Pau - Décembre 2007
Conférence "EDP et applications 2008" - Hammamet (Tunisie) - Mars 2008
Séminaire du Cermics - ENPC - Avril 2008.

[2] correspondant à un travail effectué pendant un stage de DEA

CHAPITRE

1

LE CAS MONODIMENSIONNEL

RÉSUMÉ : Dans ce premier chapitre qui a une vocation pédagogique, nous exposons les idées, les outils et les notations de la méthode. Dans un premier temps, l'équation de Helmholtz ($\mathcal{P}_\varepsilon$) avec absorption est étudiée. Dans la section 1.2, nous montrons que les conditions NtD sont caractérisées grâce à la résolution de deux familles de problèmes aux limites elliptiques linéaires (1.8) et (1.9) posés sur une cellule de périodicité du milieu et de la résolution d'une équation caractéristique ($\mathcal{E}_\varepsilon^r$) qui est scalaire, du second degré et dont les coefficients dépendent des solutions des problèmes aux limites en question. C'est l'unique racine r_ε de module strictement inférieur à 1 qui donne les coefficients NtD et l'unique solution H^1.
Avant d'aborder le cas sans absorption, au paragraphe 1.4.1, nous rappelons brièvement les propriétés spectrales des opérateurs à coefficients périodiques et plus particulièrement des courbes de dispersion (voir Figure 1.7). La construction des conditions NtD est moins immédiate dans le cas sans absorption. Elle s'effectue en utilisant les mêmes principes. Cependant l'étude de l'équation caractéristique distingue deux situations différentes : le cas où la fréquence ω est telle que ω^2 n'est pas dans le spectre de l'opérateur périodique (section 1.4.3) et celui où ω^2 est dans le spectre (Section 1.4.4). L'étude du premier cas étant similaire à celle du cas avec absorption, nous nous intéressons plus particulièrement au second cas pour lequel les deux racines de l'équation du second degré sont de module 1. Le principe d'absorption limite permet la sélection de la bonne racine : nous proposons au paragraphe 1.4.4.2 plusieurs techniques de sélection. Après avoir introduit à la Définition 1.4.34 la notion de vitesse de groupe pour les modes de Floquet, nous établissons un lien entre la sélection par le principe d'absorption limite et la vitesse de groupe de l'onde sortante. Enfin le problème intérieur avec conditions NtD ainsi construites est montré bien posé au Théorème 1.4.47 sauf pour une quantité dénombrable de fréquences que nous explicitons à l'aide du spectre de l'opérateur.
Des simulations numériques illustrent la pertinence de la méthode en Section 1.5.

Sommaire du chapitre

1.1 Introduction 15
1.1.1 Position du problème 15
1.1.2 Rappel : le cas du milieu homogène 16
1.1.3 Retour au cas général 18
1.2 Construction des conditions NtD dans le cas avec absorption 19
1.2.1 Une première caractérisation de la solution 19
1.2.2 Résolution du problème de demi-droite 22
1.2.3 Calcul de r_ε 24
1.2.4 Retour au cas du milieu homogène 26
1.2.5 Le Problème posé en domaine borné 27
1.3 Applications numériques dans le cas avec absorption 28
1.3.1 Détermination des conditions NtD 28
1.3.2 Calcul de la solution 31
1.3.3 Validations 31
1.3.3.1 Comparaison avec l'expression explicite du cas constant 32
1.3.3.2 Invariance par rapport aux périodes et au domaine Ω^i choisis . . 32
1.4 Le cas sans absorption par absorption limite 33
1.4.1 Spectre de l'opérateur à coefficients périodiques 1D et Propriétés 34
1.4.1.1 Propriétés générales du spectre 34
1.4.1.2 Analyse précise des bandes spectrales 36
1.4.2 Définition de la bonne solution des problèmes de demi-droite 40
1.4.2.1 Fréquences propres du problème de Neumann 41
1.4.2.2 Passage à la limite des problèmes de cellule 43
1.4.2.3 Equation caractéristique et Discussions 45
1.4.3 Solution du problème de Helmholtz quand $\omega^2 \notin \sigma(A)$ 46
1.4.4 Solution du problème de Helmholtz quand $\omega^2 \in \sigma(A)$ 51
1.4.4.1 Le cas particulier du milieu constant 51
1.4.4.2 Sélection de la bonne racine de $(\mathcal{E}^r)$ dans le cas général 52
1.4.4.3 Réinterprétation du critère en terme de vitesse de groupe 56
1.4.4.4 Caractérisation de la bonne solution de $(\mathcal{P}^+)$ 61
1.4.4.5 Caractérisation de la bonne solution de $(\mathcal{P})$ 62
1.5 Applications numériques dans le cas sans absorption 65
1.5.1 Cas où $\omega^2 \notin \sigma(A)$ 66
1.5.2 Cas où $\omega^2 \in \sigma(A)$ 68
1.5.3 Validations 73
1.5.3.1 Comparaison avec l'expression explicite du cas constant 73
1.5.3.2 Invariance par rapport aux périodes et au domaine Ω^i choisis . . 75
1.5.3.3 Principe d'amplitude limite 76
1.5.4 Problème de réflexion-transmission 77

1.1 Introduction

1.1.1 Position du problème

On considère l'équation des ondes scalaire 1D sur $\mathbb{R}$ en régime harmonique à coefficients variables

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x)\,\omega^2\,u = f. \tag{$\mathcal{P}$}$$

Nous rappelons les hypothèses de l'étude :

1. $0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+$,

2. le milieu est une perturbation compacte d'un milieu périodique $\rho_p(x)$:

$$\exists L > 0, \quad \rho_p(x \pm L) = \rho_p(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{supp}\,(\rho - \rho_p) \subset \Omega^i = [a^-, a^+],$$

3. le terme source f a un support inclus dans Ω^i

La démarche est de chercher la solution u de ($\mathcal{P}$) comme la limite, si elle existe de (u_ε), quand ε tend vers 0 (dans une norme plus faible que la norme L^2 et qui reste à déterminer) :

$$u = \lim_{\varepsilon \searrow 0} u_\varepsilon$$

où u_ε est l'unique solution H^2 de

$$-\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} - \rho(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon = f. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon$}$$

et de déterminer pour tout $\varepsilon > 0$, les deux coefficients de NtD, $\lambda_\varepsilon^\pm$, tels que la restriction à Ω^i de u_ε, solution de ($\mathcal{P}_\varepsilon$), que nous notons u_ε^i soit l'unique solution du problème :

$$\left|\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon^i}{\partial x^2} - \rho(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^i &=& f \quad \text{sur } \Omega^i \\ u_\varepsilon^i - \lambda_\varepsilon^-\,\dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x} &=& 0 \quad \text{en } x = a^- \\ u_\varepsilon^i + \lambda_\varepsilon^+\,\dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x} &=& 0 \quad \text{en } x = a^+ \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon^i$}$$

Les coefficients de NtD sont définis de la façon suivante. Soit $u_\varepsilon^\pm$ l'unique solution H^2 du problème :

$$\left|\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon^\pm}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^\pm &=& 0 \quad \text{sur } \Omega^\pm = (a^\pm, \pm\infty) \\ \mp\dfrac{\partial u_\varepsilon^\pm}{\partial x}(a^\pm) &=& 1 \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon^\pm$}$$

alors

$$u_\varepsilon^\pm(a^\pm) = \lambda_\varepsilon^\pm \tag{1.1}$$

L'idée est alors de montrer que les suites (λ_ε^+) et (λ_ε^-) ont bien une limite que nous notons λ^+ et λ^-,

$$\lambda^\pm = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \lambda_\varepsilon^\pm$$

et d'étudier le caractère bien posé du problème $(\mathcal{P}^i)$ avec les conditions de NtD qui en découlent :

$$\left| \begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} - \rho(x)\,\omega^2\,u^i &=& f \quad \text{sur } \Omega^i \\ u^i - \lambda^- \dfrac{\partial u^i}{\partial x} &=& 0 \quad \text{en } x = a^- \\ u^i + \lambda^+ \dfrac{\partial u^i}{\partial x} &=& 0 \quad \text{en } x = a^+. \end{array} \right. \qquad (\mathcal{P}^i)$$

La solution de ce problème, si elle existe est la restriction à Ω^i de la "solution" physique de $(\mathcal{P})$ que nous cherchons. La limite, si elle existe, est différente suivant le choix $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < 0$ (voir la section 1.1.2 pour un exemple simple).

1.1.2 Rappel : le cas du milieu homogène

Fixons nous quelques idées avec le cas du milieu homogène, qui est un cas très particulier de milieu périodique et pour lequel nous pouvons effectuer des calculs explicites.

Considérons donc le cas où ρ_p est une constante :

$$\rho_p(x) = \alpha^2, \quad (\alpha > 0)$$

On cherche dans ce cas la solution "physique" du problème $(\mathcal{P})$. Nous nous ramenons donc à la bonne définition des coefficients $\lambda^\pm$.

La seule solution de $H^2([a^+, +\infty[)$, u_ε^+ du problème défini par :

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon^+}{\partial x^2} - \alpha^2\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^+ = 0, \quad \text{pour } x > a^+ \\ -\dfrac{\partial u_\varepsilon^+}{\partial x}(a^+) = 1 \end{array} \right.$$

est de la forme :

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma_\varepsilon}\, e^{-\gamma_\varepsilon\,(x - a^+)}$$

où γ_ε est la solution de partie réelle positive de l'équation :

$$\gamma_\varepsilon^2 + \alpha^2(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) = 0.$$

c'est-à-dire :

$$\gamma_\varepsilon = -\imath\alpha\sqrt{\omega^2 + \imath\varepsilon\omega}, \quad \text{avec} \quad \mathrm{Im}(\sqrt{\omega^2 + \imath\varepsilon\omega}) > 0,$$

λ_ε^+ est donc défini par :

$$\lambda_\varepsilon^+ = \frac{1}{\gamma_\varepsilon}.$$

La famille $(\lambda_\varepsilon^+)_\varepsilon$ a une limite quand ε tend vers 0, que nous appelons λ^+ :

$$\lambda^+ = \frac{1}{\gamma_0} = -\frac{1}{\imath\alpha\omega}.$$

De même, la famille (u_ε^+) a une limite dans L^2_{loc} quand ε tend vers 0 définie par :

$$u^+(x) = -\frac{1}{\imath\alpha\omega}\, e^{\imath\alpha\omega(x-a^+)}$$

qui correspond à une onde se propageant vers les x croissants, avec la convention $u(x,t) = u(x)e^{-\imath\omega t}$.

Les solutions générales de l'équation de Helmholtz dans Ω^+

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha^2\, \omega^2 u = f, \quad (x > a^+)$$

sont toutes des combinaisons linéaires des fonctions :

$$u(x) = e^{\imath\alpha\omega x} \quad \text{et} \quad u(x) = e^{-\imath\alpha\omega x}$$

Le principe d'absorption nous permet donc de sélectionner la solution physique, c'est-à-dire celle qui se propage dans le sens des x croissants. Si nous considérons la limite en remplaçant $\varepsilon > 0$ par $-\varepsilon$, nous aurions sélectionné l'onde qui se propageait dans le sens des x décroissants, c'est-à-dire celle qui "vient de l'infini".

Dans le problème $(\mathcal{P}^i)$, nous imposons donc la condition de NtD suivante :

$$u^i \;+\; \lambda^+ \frac{\partial u^i}{\partial x} = 0, \quad \text{en } x = a^+,$$

et de la même façon :

$$u^i \;-\; \lambda^- \frac{\partial u^i}{\partial x} = 0, \quad \text{en } x = a^-,$$

avec $\lambda^- = \lambda^+ = -\dfrac{1}{\imath\alpha\omega}$.

Nous pouvons montrer facilement (sauf pour le cas limite $\omega = 0$) que le problème $(\mathcal{P}^i)$ est bien posé, que son unique solution u^i est bien limite dans H^2 de la suite u^i_ε solution du problème intérieur avec absorption et enfin que la solution « physique » du problème $(\mathcal{P})$, limite des solutions $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ des problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, est caractérisée par :

$$\left|\begin{array}{ll} u(x) = u^i(x), & x \in \Omega^i, \\ u(x) = +\dfrac{1}{\imath\alpha\omega}\,\dfrac{\partial u^i}{\partial x}(a^+)\, e^{\imath\alpha\omega(x-a^+)}, & x \geq a^+, \\ u(x) = -\dfrac{1}{\imath\alpha\omega}\,\dfrac{\partial u^i}{\partial x}(a^-)\, e^{-\imath\alpha\omega(x-a^-)}, & x \leq a^-. \end{array}\right.$$

REMARQUE 1.1.1 (CAS DE LA FRÉQUENCE NULLE)
Pour le cas limite $\omega = 0$, les calculs précédents montrent que le principe d'absorption limite n'est pas possible. Pour s'en persuader, il faut remplacer l'absorption $\varepsilon\omega$ par une absorption indépendante de ω que nous appelons η. Dans ce cas, les solutions u_η^+ des problèmes de demi-droite à fréquence nulle avec absorption vérifient

$$u_\eta = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{\eta}}).$$

Elles n'ont donc pas de limite. On montre de même que les coefficients de NtD $\lambda^\pm$ n'ont pas de limite dans ce cas. Nous verrons que dans le cas général, ce genre de situation arrive et pas seulement pour la fréquence nulle.

1.1.3 Retour au cas général

Dans le cas général périodique, la notion de solution se propageant vers l'infini ou encore "onde sortante" est plus difficile à définir puisqu'il faut imaginer que l'onde "sortante" se propage globalement vers l'infini (ce que nous définirons plus loin (voir Section 1.4.4.3) avec la notion de vitesse de groupe positive) mais subit localement des réflexions à chaque variation de l'indice (la vitesse de phase peut devenir négative).

La question a été très controversée dans la communauté des physiciens : elle était de savoir s'il fallait s'appuyer sur la vitesse de groupe ou la vitesse de phase pour définir l'onde "sortante" (voir [Braga (1992) ; Potel *et al.* (2001)]). Ce qui est trompeur dans le cas constant, c'est que la vitesse de groupe et la vitesse de phase sont égales (dans le cas simple que nous avons étudié précédemment, elles sont égales à $1/\alpha$). Comme la vitesse de phase est plus facile à calculer que la vitesse de groupe, il suffit de regarder le signe de la vitesse de phase pour en déduire celui de la vitesse de groupe et sélectionner enfin l'onde "sortante". Certains physiciens ont donc, à tort, gardé cet automatisme pour les milieux périodiques [Braga (1992)].

Ces notions de vitesse de phase et de groupe seront définies dans la suite. Nous voulons illustrer, ici, la difficulté de prévoir a priori la solution "sortante" par la simulation de la solution de l'équation des ondes en régime temporel dans un cas périodique mais simple. On s'intéresse donc à la résolution numérique de l'équation suivante :

$$\left|\begin{array}{l} \rho(x)\,\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ U(x, t=0) = U_0(x) \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}\,(x, t=0) = 0 \end{array}\right. \tag{1.2}$$

où ρ vérifie :

$$\left|\begin{array}{ll} \rho(x) = \rho_-, & \forall x < 0 \\ \rho(x+L) = \rho(x), & \forall x > 0, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left|\begin{array}{ll} \rho(x) = \rho_+ & \forall x \in [0, \dfrac{L}{2}] \\ \rho(x) = \rho_- & \forall x \in [\dfrac{L}{2}, L] \end{array}\right.$$

Les simulations sont effectuées en utilisant un θ-schéma avec $\theta = 1/2$, les paramètres de la discrétisation sont choisis de façon optimale. Sans entrer dans le détail de la discrétisation, il faut signaler le choix d'un domaine de calcul assez grand $[-M, M]$ et des conditions de Dirichlet artificielles aux bords. Ces conditions ne sont pas physiques mais nous pouvons admettre que tant que l'onde n'a pas atteint les bords ($t < M\sqrt{\rho_-}$), elle correspond à une bonne approximation de la solution exacte. A la Figure 1.1, est représentée la solution à différents instants et nous remarquons que la structure de la solution est assez complexe du fait des réflexions à chaque saut d'indice (représentés dans les figures par les lignes verticales rouges). En regardant l'évolution dans le temps de l'onde se propageant dans le milieu périodique, nous avons l'impression que la solution se propage globalement dans le sens des x croissants dans le milieu périodique (vitesse de groupe positive) et pourtant localement à chaque saut d'indice, il y a une réflexion qui nous donne l'impression que l'onde repart dans le sens des x décroissants (vitesse de phase négative).

La solution « sortante » a donc a priori un comportement qui reste difficile à prévoir : il paraît moins évident que dans le cas homogène de définir une condition de radiation ou de montrer le principe d'absorption limite.

Nous proposons une méthode qui permet de caractériser cette solution « physique ». Nous allons développer tout d'abord Section 1.2 le principe de la méthode dans le cas de l'équation de Helmholtz avec absorption, le cas limite sans absorption sera développé Section 1.4. L'analyse numérique de la méthode sera étudiée Section 1.3 pour le cas avec absorption et Section 1.5 pour le cas sans absorption.

1.2 Construction des conditions NtD dans le cas avec absorption

1.2.1 Une première caractérisation de la solution

On cherche à résoudre dans cette section, le problème suivant :

$$-\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} - \rho(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon = f, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon$}$$

D'après le lemme de Lax-Milgram, le problème ($\mathcal{P}_\varepsilon$) admet une unique solution $u_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R})$, pour tout $\varepsilon > 0$.

Pour résoudre numériquement ($\mathcal{P}_\varepsilon$), la méthode que nous allons présenter repose sur la proposition (triviale) suivante :

PROPOSITION 1.2.1
Le problème ($\mathcal{P}_\varepsilon$) *est équivalent au problème :*

$$\left|\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon^i}{\partial x^2} - \rho(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^i &=& f \quad \textit{sur } \Omega^i =]a^-, a^+[\\ u_\varepsilon^i - \lambda_\varepsilon^-\,\dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x} &=& 0 \quad \textit{en } x = a^- \\ u_\varepsilon^i + \lambda_\varepsilon^+\,\dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x} &=& 0 \quad \textit{en } x = a^+ \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon^i$}$$

FIG. 1.1: Représentation de la solution $U(x,t)$ de (1.2) à différents instants.

dès que λ_ε^+ et λ_ε^- sont définies par :

$$\lambda_\varepsilon^\pm = u_\varepsilon^\pm(a^\pm) \tag{1.3}$$

où $u_\varepsilon^\pm$ est l'unique solution dans $H^2(\mathbb{R}^\pm)$ du problème aux limites :

$$\left|\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon^\pm}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^\pm &=& 0 \quad \textit{sur } \Omega^\pm = (a^\pm, \pm\infty) \\ \mp\dfrac{\partial u_\varepsilon^\pm}{\partial x}(a^\pm) &=& 1 \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon^\pm$}$$

Plus précisément si u_ε est solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ alors la restriction de u_ε à Ω^i est solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$. Réciproquement, si u_ε^i est solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$, on construit u_ε par :

$$\left|\begin{array}{ll} u_\varepsilon(x) = u_\varepsilon^i(x), & x \in \Omega^i \\ u_\varepsilon(x) = -\dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x}(a^+)\,u_\varepsilon^+(x), & x \geq a^+ \\ u_\varepsilon(x) = +\dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x}(a^-)\,u_\varepsilon^-(x), & x \leq a^- \end{array}\right. \tag{1.4}$$

la fonction u_ε ainsi construite est une fonction $H^2(\mathbb{R})$ et est solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

Nous avons donc ramené la résolution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ à la résolution d'un problème posé en domaine borné, à condition d'avoir déterminé les coefficients dits de Neumann-to-Dirichlet (NtD). Le calcul de ces coefficients nécessite la résolution de problèmes posés sur des demi-droites et où la donnée ρ est égale à ρ_p périodique. Nous renvoyons le lecteur aux hypothèses faites au début de ce chapitre. A ce niveau, il est difficile de comprendre l'intérêt que pourrait avoir l'utilisation de ce lemme puisque les problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon^\pm)$ restent définis en domaine non borné. Nous allons cependant exploiter l'hypothèse de périodicité de la fonction ρ_p dans ces milieux pour la caractérisation de λ_ε^+ et λ_ε^-.

Si nous voulons seulement caractériser la restriction de solution u_ε au domaine borné Ω^i alors la seule connaissance des coefficients de NtD suffit. Par contre, si nous voulons en plus reconstruire la solution dans $\mathbb{R}$ à l'aide de (1.4) alors il faut pouvoir caractériser les solutions $u_\varepsilon^\pm$ également. Nous allons montrer que la méthode présentée ci dessous permet sans "coût" supplémentaire la caractérisation des coefficients de NtD et des solutions $u_\varepsilon^\pm$.

REMARQUE 1.2.2
Il est évident que la résolution des problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon^\pm)$ posés dans les domaines Ω^+ et Ω^- de part et d'autre du domaine Ω^i sont indépendants : ils peuvent donc être traités de manière indépendante. C'est la raison pour laquelle notre méthode s'applique notamment aux milieux périodiques présentant un défaut local mais aussi aux milieux qui présentent des périodicités différentes de part et d'autre d'un domaine borné

$$\rho(x) = \rho_p^\pm(x), \quad \pm x > \pm a^\pm$$

où $\rho_p^\pm$ sont des fonctions périodiques différentes (de période $L^\pm$). Nous ferons cependant toutes les démonstrations avec les hypothèses de départ et nous montrerons des applications numériques du cas général.

Nous allons développer dans la suite la méthode de caractérisation du coefficient λ_ε^+ et de la solution u_ε^+. Il va de soi que la méthode est la même pour déterminer le coefficient λ_ε^-.

1.2.2 Résolution du problème de demi-droite

Par souci de clarté et pour simplifier les expressions des équations et des solutions, nous allons supposer que $L = 1$ et $a^+ = 0$.

Nous rappelons que la caractérisation de λ_ε^+ passe par l'étude du problème :

$$\left| \begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon^+}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^+ &=& 0 \quad \text{sur } \Omega^+ = \mathbb{R}^+ \\ -\dfrac{\partial u_\varepsilon^+}{\partial x}(0) &=& 1 \end{array} \right. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon^+$}$$

On rappelle que :

$$\rho_p(x+1) = \rho_p(x), \quad x > 0$$

Dans le cas où la fonction ρ_p est constante, l'équation ($\mathcal{P}_\varepsilon^+$) est une simple EDO à coefficients constants : il est facile de trouver une expression explicite de la seule solution H^2 de l'équation. Dans le cas général, on ne peut plus faire de calcul explicite. Néanmoins, la périodicité de ρ_p nous donne le résultat fondamental suivant :

LEMME 1.2.3
Il existe un unique nombre complexe $r_\varepsilon \neq 0$ tel que $|r_\varepsilon| < 1$ et :

$$\forall x \in \Omega^+, \quad u_\varepsilon^+(x+1) = r_\varepsilon\, u_\varepsilon^+(x) \tag{1.5}$$

Nous donnons une première implication immédiate de ce lemme :

COROLLAIRE 1.2.4
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$u_\varepsilon^+(x+n) = r_\varepsilon^n\, u_\varepsilon^+(x)$$

■ **PREUVE:** Si on dérive en $x = 0$ la relation (1.5) par rapport à x, on obtient comme condition nécessaire :

$$r_\varepsilon = -\frac{\partial u_\varepsilon^+}{\partial x}(1).$$

Posons donc r_ε égal à cette valeur.

Nous pouvons noter tout d'abord que $r_\varepsilon \neq 0$. En effet, la restriction de u_ε^+ à $]1,+\infty[$ est solution de :

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon^+}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^+ = 0, \quad x \geq 1 \\ -\dfrac{\partial u_\varepsilon^+}{\partial x}(1) = r_\varepsilon \end{array} \right.$$

Si $r_\varepsilon = 0$, par le lemme de Lax-Milgram, on en déduirait que $u_\varepsilon^+ = 0$ dans $]1,+\infty[$. La restriction de u_ε^+ à $[0,1]$ serait solution de l'équation de Helmholtz avec pour condition :

$$u_\varepsilon^+(1) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_\varepsilon^+}{\partial x}(1) = 0$$

donc en utilisant le Théorème de Cauchy Lispchitz on aurait $u_\varepsilon^+ = 0$ sur $\mathbb{R}^+$, ce qui contredirait la condition au bord :

$$-\frac{\partial u_\varepsilon^+}{\partial x}(0) = 1.$$

Introduisons maintenant la fonction v_ε définie par :

$$v_\varepsilon(x) = \frac{u_\varepsilon^+(x+1)}{r_\varepsilon}, \quad x \geq 0$$

Notons que :

$$\forall x > 0, \quad \big(-\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2} - \rho_p \, (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \, v_\varepsilon \big)(x) = \frac{1}{r_\varepsilon} \, \big(-\frac{\partial^2 u_\varepsilon^+}{\partial x^2} - \rho_p \, (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \, u_\varepsilon^+ \big)(x+1) = 0$$

du fait de la périodicité de ρ_p.

Comme par construction :

$$-\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}(0) = 1,$$

on en déduit que v_ε est solution H^1 de $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ et par conséquent que $v_\varepsilon = u_\varepsilon^+$, ce qui démontre la formule (1.5). Le corollaire 1.2.4 est une conséquence immédiate de la formule (1.5).

Du corollaire, nous en déduisons que :

$$\|u_\varepsilon^+\|_{L^2(n,n+1)} = |r_\varepsilon|^n \, \|u_\varepsilon^+\|_{L^2(0,1)}$$

Par conséquent :

$$u_\varepsilon^+ \in L^2(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |r_\varepsilon|^n < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad |r_\varepsilon| < 1.$$

■

REMARQUE 1.2.5
Remarquons que pour démontrer que r_ε ne peut pas être nul, nous avons utilisé le Théorème de Cauchy Lipschitz. Dans les dimensions supérieures, cette idée sera généralisée par l'argument de prolongement unique.

REMARQUE 1.2.6
Une idée classique pour résoudre le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ est d'utiliser la méthode de transfert (voir par exemple [Eastham (1973) ; Reed & Simon (1972-1978) ; Weidmann (1987)] pour des résultats généraux ou [Griffiths & Steinke (2001) ; Figotin & Gorentsveig (1998)] pour l'étude d'un milieu périodique 1D localement perturbés) et nous verrons dans la suite que dans le cas monodimensionnel, on peut passer facilement d'une méthode à l'autre. La méthode de transfert se base sur un problème de type Cauchy en la variable spatiale x alors que notre méthode sur un problème aux deux bouts avec un des bout qui est l'infini. L'inconvénient de la première est qu'elle ne se généralise pas aux problèmes en dimensions supérieures, ce que nous ferons ultérieurement avec la méthode développée ici.

Ce lemme est fondamental puisque la détermination de cette constante r_ε permet la caractérisation de λ_ε^+ et la construction de u_ε^+. En effet, supposons connaître r_ε. Pour déterminer de manière unique u_ε^+ sur $\mathbb{R}^+$, le corollaire 1.2.4 nous garantit qu'il suffit de le déterminer sur la période $[0,1]$ pour pouvoir le reconstruire sur chaque période $[n, n+1]$. De plus, on voit aisément

que la restriction de u_ε^+ à $[0,1]$, notée u_ε^r, est l'unique solution du problème

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon^r}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^r = 0, \quad x \in]0,1[, \\ -\dfrac{\partial u_\varepsilon^r}{\partial x}(0) = 1, \quad \text{et} \quad -\dfrac{\partial u_\varepsilon^r}{\partial x}(1) = r_\varepsilon. \end{array}\right. \tag{1.6}$$

u_ε^r est donc la solution d'un problème posé en domaine borné. La détermination de u_ε^r permet de plus la caractérisation de λ_ε^+ puisque

$$\lambda_\varepsilon^+ = u_\varepsilon^r(0). \tag{1.7}$$

Tout repose désormais sur la caractérisation de cette valeur r_ε.

1.2.3 Calcul de r_ε

Nous allons montrer dans cette section que la caractérisation de r_ε ne nécessite que la résolution de **problèmes de cellule**. L'introduction de ces problèmes de cellule est très naturelle et liée à la remarque que nous venons de faire pour le calcul de λ_ε^+ (voir expressions (1.6) et (1.7)). Introduisons tout d'abord le problème local général, (α,β) étant donnés,

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,v = 0, \quad x \in]0,1[\\ -\dfrac{\partial v}{\partial x}(0) = \alpha, \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}(1) = \beta. \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}_{\alpha\beta}$}$$

Pour résoudre ($\mathcal{P}_{\alpha\beta}$), pour tout (α,β), il suffit de connaître e_ε^0 et e_ε^1, les solutions des problèmes de cellule suivants :

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 e_\varepsilon^0}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,e_\varepsilon^0 = 0, \quad x \in]0,1[\\ -\dfrac{\partial e_\varepsilon^0}{\partial x}(0) = 1, \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial e_\varepsilon^0}{\partial x}(1) = 0, \end{array}\right. \tag{1.8}$$

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 e_\varepsilon^1}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,e_\varepsilon^1 = 0, \quad x \in]0,1[\\ -\dfrac{\partial e_\varepsilon^1}{\partial x}(0) = 0, \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial e_\varepsilon^1}{\partial x}(1) = 1. \end{array}\right. \tag{1.9}$$

On a alors par linéarité :

$$v = \alpha\, e_\varepsilon^0 + \beta\, e_\varepsilon^1$$

et en particulier pour u_ε^r solution de (1.6)

$$u_\varepsilon^r = e_\varepsilon^0 - r_\varepsilon\, e_\varepsilon^1. \tag{1.10}$$

On peut même plus généralement déterminer u_ε^+ cellule par cellule, en utilisant le Corollaire 1.2.4 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1], \quad u_\varepsilon^+(x+n) = (r_\varepsilon)^n\, e_\varepsilon^0(x) - (r_\varepsilon)^{n+1}\, e_\varepsilon^1(x). \tag{1.11}$$

Ces dernières relations résument le fait que u_ε^+ est solution de l'équation de Helmholtz cellule par cellule et que sa dérivée est continue en chaque point $x = n$. Il nous reste à imposer la continuité

de u_ε^+ en chaque point n et c'est cette relation qui va permettre de déterminer r_ε. En effet, u_ε^+ est continu sur $\mathbb{R}$, en particulier au point $x = 1$:

$$u_\varepsilon^+\Big|_{[0,1]}(1) = u_\varepsilon^+\Big|_{[1,2]}(1),$$

r_ε est donc solution de l'équation suivante :

$$(r_\varepsilon)^2\, e_\varepsilon^1(0) - r_\varepsilon(e_\varepsilon^0(0) + e_\varepsilon^1(1)) + e_\varepsilon^0(1) = 0.$$

On pose :

$$\left|\begin{array}{ll} t_\varepsilon^{00} = e_\varepsilon^0(0), & t_\varepsilon^{01} = e_\varepsilon^0(1), \\ t_\varepsilon^{10} = e_\varepsilon^1(0), & t_\varepsilon^{11} = e_\varepsilon^1(1), \end{array}\right. \tag{1.12}$$

En général, ces constantes que nous appellerons constantes de NtD locales ne peuvent être calculées explicitement. Elles présentent tout de même des propriétés importantes (nous verrons dans le chapitre suivant comment ces propriétés s'étendent en dimension supérieure).

PROPOSITION 1.2.7 (PROPRIÉTÉS DES CONSTANTES DE NTD LOCALES)
Les constantes $(t_\varepsilon^{00},\ t_\varepsilon^{01},\ t_\varepsilon^{10},\ t_\varepsilon^{11})$ *vérifient les propriétés suivantes quelque soient la fréquence* ω *et la donnée* ρ_p *:*

$$t_\varepsilon^{10} = t_\varepsilon^{01}, \quad \forall (i,j) \in \{0,1\}, \quad t_\varepsilon^{ij} \neq 0, \quad t_\varepsilon^{00} + t_\varepsilon^{11} \neq 0$$

■ **PREUVE:** Pour montrer que $t_\varepsilon^{10} = t_\varepsilon^{01}$, on utilise le wronskien de l'ODE

$$w_\varepsilon = \frac{\partial e_\varepsilon^1}{\partial x} e_\varepsilon^0 - \frac{\partial e_\varepsilon^0}{\partial x} e_\varepsilon^1$$

qui est constant. En particulier, $w_\varepsilon(0) = w_\varepsilon(1)$, ce qui entraîne : $t_\varepsilon^{01} = t_\varepsilon^{10}$.

Pour montrer que $t_\varepsilon^{00} \neq 0$, il suffit de remarquer que, dans le cas contraire, e_ε^0 serait solution du problème suivant :

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 e_\varepsilon^0}{\partial x^2} - \rho_p(x)\ (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\ e_\varepsilon^0 = 0, \quad x \in]0,1[\\ e_\varepsilon^0(0) = 0, \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial e_\varepsilon^0}{\partial x}(1) = 0, \end{array}\right. \tag{1.13}$$

La fonction e_ε^0 serait donc nulle sur $[0,1]$ ce qui contredit la condition au bord :

$$-\frac{\partial e_\varepsilon^0}{\partial x}(0) = 1.$$

On montre de la même façon que nécessairement $t_\varepsilon^{11} \neq 0$.

Pour montrer que $t_\varepsilon^{10} = t_\varepsilon^{01} \neq 0$, il suffit de remarquer que dans le cas contraire e_ε^1 serait solution du problème suivant :

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 e_\varepsilon^1}{\partial x^2} - \rho_p(x)\ (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\ e_\varepsilon^1 = 0, \quad x \in]0,1[\\ -\dfrac{\partial e_\varepsilon^1}{\partial x}(0) = 0, \quad \text{et} \quad e_\varepsilon^1(0) = 0. \end{array}\right. \tag{1.14}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, la fonction e_ε^1 serait donc nulle sur $[0,1]$ ce qui contredit sa condition au bord $x = 1$.

Enfin pour montrer que $t_\varepsilon^{00} + t_\varepsilon^{11} \neq 0$, il suffit d'utiliser les formulations variationnelles des EDO (1.8) et (1.9) en prenant comme fonctions test des fonctions particulières, respectivement e_ε^0 et e_ε^1 :

$$\left| \begin{array}{l} \overline{e_\varepsilon^0(0)} = \displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\partial e_\varepsilon^0}{\partial x}\right|^2 dx - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \int_0^1 \rho_p(x)|e_\varepsilon^0|^2\, dx \\ \overline{e_\varepsilon^1(1)} = \displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\partial e_\varepsilon^1}{\partial x}\right|^2 dx - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \int_0^1 \rho_p(x)|e_\varepsilon^1|^2\, dx \end{array} \right.$$

La somme de ces 2 deux expressions est nécessairement non nulle. ■

Ces quelques propriétés des constantes NtD locales impliquent des propriétés sur l'équation vérifiée par r_ε et nous obtenons le résultat suivant :

THÉORÈME 1.2.8 (EQUATION CARACTÉRISTIQUE DE r_ε)
r_ε est l'unique solution de module strictement inférieur à 1 de l'équation caractéristique :

$$t_\varepsilon^{10} r_\varepsilon^2 - (t_\varepsilon^{11} + t_\varepsilon^{00})\, r_\varepsilon + t_\varepsilon^{01} = 0. \qquad (\mathcal{E}_\varepsilon^r)$$

■ **PREUVE:** Nous avons montré que r_ε ($|r_\varepsilon| < 1$) est bien une solution de l'équation caractéristique. Il nous reste juste à montrer qu'il existe seulement une racine de cette équation de module strictement inférieur à 1.

Les propriétés données Proposition 1.2.7 impliquent que cette équation est strictement de degré 2, possédant deux racines dont le produit vaut 1 et dont une est de module strictement inférieur à 1. r_ε est donc l'unique racine de module strictement inférieur à 1. ■

Pour déterminer r_ε, il suffit donc de résoudre les problèmes de cellules (1.8) et (1.9), de déterminer les constantes de NtD locales (t_ε^{00}, t_ε^{01}, t_ε^{10}, t_ε^{11}) et enfin de sélectionner l'unique racine de module strictement inférieur à 1 de l'équation caractéristique ($\mathcal{E}_\varepsilon^r$).

Finalement, en utilisant les relations (1.11), (1.7), (1.10) et (1.12), la solution du problème de demi-droite ($\mathcal{P}_\varepsilon^+$) et la constante NtD recherchée sont alors définies de manière unique par :

PROPOSITION 1.2.9 (PROBLÈME DE DEMI-DROITE AVEC ABSORPTION)
La solution u_ε^+ du problème de demi-droite ($\mathcal{P}_\varepsilon^+$) est caractérisée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1], \quad u_\varepsilon^+(x+n) = (r_\varepsilon)^n\, e_\varepsilon^0(x) - (r_\varepsilon)^{n+1}\, e_\varepsilon^1(x), \qquad (1.15)$$

et la constante NtD λ_ε^+ l'est par :

$$\lambda_\varepsilon^+ = u_\varepsilon^r(0) = t_\varepsilon^{00} - t_\varepsilon^{10}\, r_\varepsilon \qquad (1.16)$$

1.2.4 Retour au cas du milieu homogène

Reprenons le cas particulier où le milieu est homogène pour illustrer notre caractérisation. On considère de nouveau le cas où ρ_p est constant :

$$\rho_p(x) = \alpha^2, \quad (\alpha > 0)$$

Il est facile de voir que :

$$e_\varepsilon^0(x) = \frac{\cosh\left(\gamma_\varepsilon(1-x)\right)}{\gamma_\varepsilon \sinh \gamma_\varepsilon} \quad \text{et} \quad e_\varepsilon^1(x) = \frac{\cosh\left(\gamma_\varepsilon x\right)}{\gamma_\varepsilon \sinh \gamma_\varepsilon}$$

où on rappelle que γ_ε est la solution de partie réelle positive de l'équation :

$$\gamma_\varepsilon^2 + \alpha^2\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) = 0.$$

On en déduit les constantes NtD :

$$t_\varepsilon^{10} = t_\varepsilon^{01} = \frac{1}{\gamma_\varepsilon \sinh \gamma_\varepsilon} \quad \text{et} \quad t_\varepsilon^{11} = t_\varepsilon^{00} = \frac{\cosh \gamma_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon \sinh \gamma_\varepsilon}$$

l'équation caractéristique $(\mathcal{E}_\varepsilon^r)$ s'écrit donc

$$\frac{1}{\gamma_\varepsilon \sinh \gamma_\varepsilon}\left[r_\varepsilon^2 + 1 - 2r_\varepsilon \cosh \gamma_\varepsilon\right].$$

Les deux solutions de cette équation sont $r_\varepsilon = \exp(\pm\gamma_\varepsilon)$, celle de module inférieur à 1 étant donc $r_\varepsilon = \exp(-\gamma_\varepsilon)$.

Enfin, comme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1], \quad u_\varepsilon^+(x+n) = (r_\varepsilon)^n\, e_\varepsilon^0(x) - (r_\varepsilon)^{n+1}\, e_\varepsilon^1(x).$$

on retrouve

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad u_\varepsilon^+(x) = \frac{exp(-\gamma_\varepsilon x)}{\gamma_\varepsilon}$$

et la constante de NtD :

$$\lambda_\varepsilon^+ = t_\varepsilon^{00} - t_\varepsilon^{10}\, r_\varepsilon = \frac{1}{\gamma_\varepsilon}.$$

1.2.5 Le Problème posé en domaine borné

Soit λ_ε^+ déterminé par la relation (1.16) et λ_ε^- déterminé en utilisant la méthode dans le demi-milieu périodique Ω^-. Commençons par une propriété classique des coefficients de NtD :

PROPOSITION 1.2.10 (QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONSTANTES DE NTD)
Les coefficients $\lambda_\varepsilon^\pm$ sont nécessairement de partie imaginaire strictement positive.

■ **PREUVE:** Nous allons le démontrer seulement pour λ_ε^+ ; pour λ_ε^-, on utilisera les mêmes idées. La formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ en prenant u_ε^+ comme fonction test donne une autre définition de λ_ε^+ :

$$\overline{\lambda_\varepsilon^+} = \int_{\Omega^+} \left|\frac{\partial u_\varepsilon^+}{\partial x}\right|^2 dx - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \int_{\Omega^+} \rho_p(x) |u_\varepsilon^+(x)|^2\, dx.$$

Du fait de l'absorption et comme $u_\varepsilon^+ \neq 0$ la partie imaginaire de λ_ε^+ est donc bien strictement positive. ■

Nous pouvons donc énoncer le résultat très classique suivant concernant le caractère bien posé du problème posé dans Ω^i. Notons que la proposition 1.2.1 concernant l'équivalence entre les problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ et $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ nous donnerait également ce résultat. Mais dans la perspective du cas sans absorption où l'équivalence n'est plus vraie, nous avons voulu montrer directement le caractère bien posé et donner l'idée de la preuve qui sera étendue pour le cas sans absorption.

THÉORÈME 1.2.11 (CARACTÈRE BIEN POSÉ DU PROBLÈME $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$)
Le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ a une unique solution dans $H^2(\Omega^i)$.

■ **PREUVE:** Nous allons montrer que la formulation variationnelle de ce problème rentre bien dans le cadre du théorème de Lax-Milgram.

En effet, le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ est équivalent au problème variationnel :

Trouver $u_\varepsilon^i \in H^2(\Omega^i)$ tel que :

$$\forall v \in H^1(\Omega^i), \quad a_\varepsilon^i(u_\varepsilon^i, v) = \int_{\Omega^i} f(x)v(x)\,dx$$

où a_ε^i est une forme bilinéaire continue définie par :

$$a_\varepsilon^i(u,v) = \int_{\Omega^i} \frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial v}{\partial x}}\,dx - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\int_{\Omega^i} \rho_p(x)u(x)\overline{v(x)}\,dx + \frac{1}{\lambda_\varepsilon^+}u(a^+)\overline{v(a^+)} + \frac{1}{\lambda_\varepsilon^-}u(a^-)\overline{v(a^-)}.$$

Pour montrer que a_ε^i est bien coercive, il faut et il suffit d'utiliser le fait que

$$\mathrm{Im}\Big(\frac{1}{\lambda_\varepsilon^+}\Big) < 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\Big(\frac{1}{\lambda_\varepsilon^-}\Big) < 0$$

On peut alors démontrer facilement que a_ε^i est coercive. ■

Le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ est bien posé. La proposition 1.2.1 nous assure que c'est la restriction de u_ε solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ à Ω^i, l'unique solution. Pour reconstruire u_ε en dehors de Ω^i, il suffit d'utiliser les relations (1.4).

1.3 Applications numériques dans le cas avec absorption

Nous allons présenter dans cette section l'application de la méthode à un cas particulier pour lequel les données ρ et f sont représentées Figure 1.2, et pour lequel les supports compacts de ρ_0 et f sont inclus dans $]-0.5, 0.5[$ et l'absorption ε vaut 0.1 dans toute cette section. En pratique, cela correspond à une absorption faible puisque typiquement une onde plane qui se propage à une fréquence 1 dans un milieu d'indice 1 perd 25% de sa valeur à chaque période. Les milieux à droite et à gauche du domaine Ω^i sont différents. Nous appelons L^+ et L^- les plus petites périodes correspondantes et nous les supposons tout d'abord égales à 1.

1.3.1 Détermination des conditions NtD

Nous allons supposer dans les deux paragraphes qui suivent que $\Omega^i =]-0.5, 0.5[$ et que $L = 1$.

♢ ***Algorithme de résolution du problème de demi-droite***

On déduit de la section 1.2.3 l'algorithme de résolution du problème posé dans $\mathbb{R}^+$, $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ et la détermination de la constante NtD λ_ε^+ :

1. on calcule les solutions e_ε^0 et e_ε^1 des problèmes de cellule (1.8) et (1.9) dont nous donnons quelques précisions sur la discrétisation en Remarque 1.3.1 ;

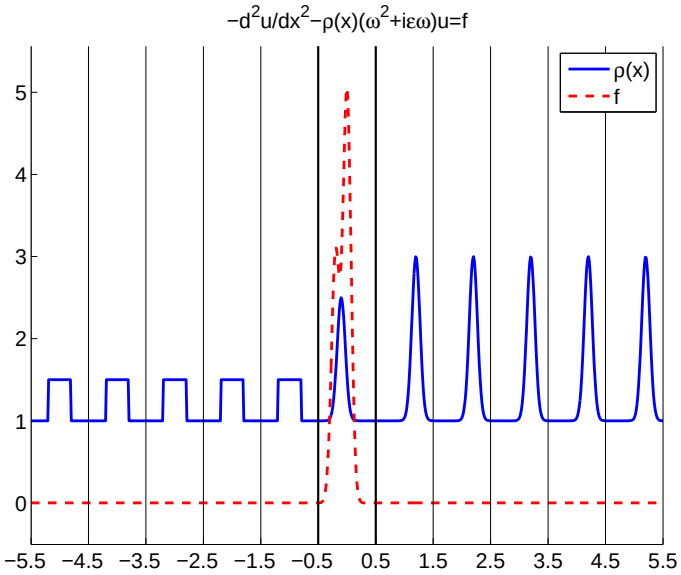


FIG. 1.2: Les fonctions $\rho = \rho_0 + \rho_p$ (en bleu) et f (en rouge) sur $[-5.5, 5.5]$.

2. on en déduit les constantes de NtD locales $(t_\varepsilon^{00},\ t_\varepsilon^{01},\ t_\varepsilon^{10},\ t_\varepsilon^{11})$ définies par (1.12) ;
3. on résout l'équation caractéristique $(\mathcal{E}_\varepsilon^r)$ qui est une équation du 2nd degré en ne sélectionnant que la solution r_ε telle que $|r_\varepsilon| < 1$;
4. on calcule λ_ε^+ :

$$\lambda_\varepsilon^+ = u_\varepsilon^r(0) = t_\varepsilon^{00} - t_\varepsilon^{10}\, r_\varepsilon.$$

REMARQUE 1.3.1 (DISCRÉTISATION DES PROBLÈMES DE CELLULES)
Dans le cas 1D, les équations différentielles sont ordinaires, nous n'allons pas rentrer dans le détail de la discrétisation qui est très classique : notre problème ne présente aucune difficulté particulière de ce point de vue. Nous signalons juste que nous avons choisi une formulation mixte. Ainsi pour la résolution du problème de cellule (1.8) *dont la solution est* e^0*, par exemple, nous nous ramenons à un système du premier ordre en considérant comme inconnues* e_ε^0 *et sa dérivée par rapport à* x*,* $\partial_x\, e_\varepsilon^0$

$$-\frac{\partial E_\varepsilon^0}{\partial x} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \rho_p(x)\big(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega\big) & 0 \end{bmatrix} E_\varepsilon^0 = 0, \quad \textit{dans }]0,1[$$

où

$$E_\varepsilon^0(0) = \begin{bmatrix} e_\varepsilon^0 \\ \dfrac{\partial e_\varepsilon^0}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

La résolution est faite en utilisant un schéma aux différences finies centré pour ce problème en recherchant une approximation de la fonction e_ε^0 *aux points* $(j+1/2)\Delta x$ *et une approximation de sa dérivée aux points* $j\Delta x$ *où* Δx *est le pas de discrétisation choisi en fonction de la fréquence, c'est-à-dire toujours très petit par rapport à la longueur d'onde.*

Nous aurions pu choisir d'autres méthodes de résolution plus classique pour les équations différentielles ordinaires mais nous avons fait ce choix de discrétisation, qui correspond à une discrétisation avec des éléments finis de Raviart-Thomas du premier ordre, car elle se généralise au cas

des dimensions supérieures et est adaptée à la construction d'opérateurs de NtD (voir section 2.3 du chapitre 2).

♢ ***Application numérique : racines de l'équation caractéristique*** $(\mathcal{E}_\varepsilon^r)$

Figure 1.3, sont représentées les valeurs r_ε^- correspondant au problème dans Ω^- (à gauche en rouge), r_ε^+ correspondant au problème dans Ω^+ (à droite en rouge) et également les racines de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}_\varepsilon^r)$ qui sont de module strictement supérieur à 1 (en bleu). On peut

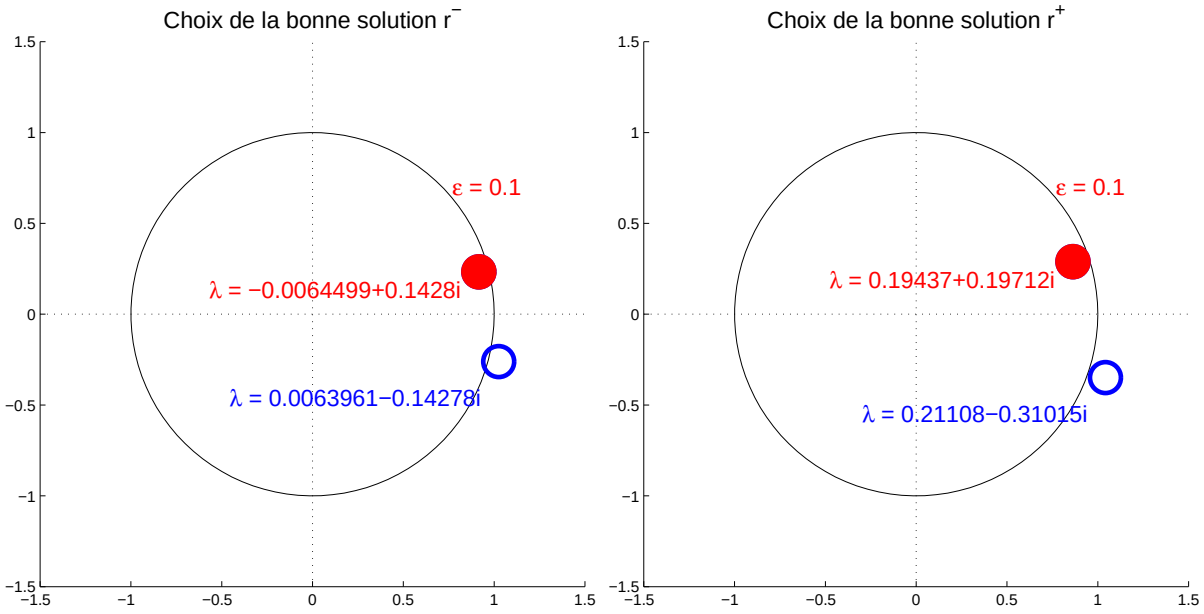


FIG. 1.3: Choix de la bonne racine de l'équation caractéristique pour $\omega = 6$: le cercle rouge représente la bonne solution, le bleu la mauvaise.

donc calculer les constantes de NtD en utilisant la relation (1.16), nous avons écrit en rouge dans la figure 1.3 les constantes NtD correspondantes au problème Ω^- (à gauche) et Ω^+ (à droite). Nous avons également écrit en bleu les constantes de NtD si nous avions choisi par erreur l'autre racine de l'équation. Nous remarquons alors que le bon choix de r_ε est lié au signe de la partie imaginaire des constantes $\lambda_\varepsilon^\pm$ qui doit être nécessairement positif (voir la Proposition 1.2.10 pour cette propriétés des $\lambda_\varepsilon^\pm$). Les mauvaises racines de l'équation $(\mathcal{E}_\varepsilon^r)$ auraient été choisies si on avait remplacé ε par $-\varepsilon$.

Pour éviter de croire que la bonne racine de l'équation caractéristique est toujours celle de partie imaginaire positive, nous représentons dans la figure 1.4 les valeurs r_ε^- (à gauche en rouge) et r_ε^+ (à droite en rouge) correspondant au même problème que précédemment où seule la fréquence a changé $\omega = 8.5$. Ce cas montre que les constantes r_ε peuvent avoir une partie imaginaire négative et que le signe de la partie imaginaire peut être différent suivant la fréquence ou le milieu.

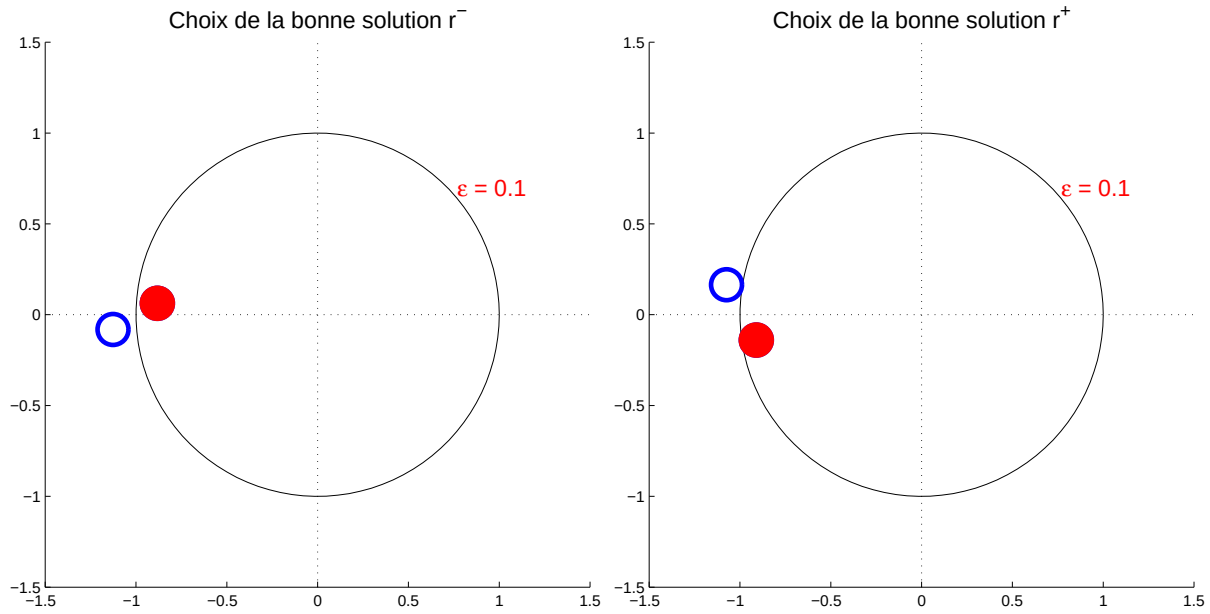


FIG. 1.4: Choix de la bonne racine de l'équation caractéristique pour $\omega = 8.5$: le cercle rouge représente la bonne solution, le bleu la mauvaise.

1.3.2 Calcul de la solution

Après avoir calculé λ_ε^+ et λ_ε^-, on peut résoudre l'équation $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ (en utilisant encore une discrétisation en différences finies adéquates du problème mixte associé) dans le domaine $\Omega^i =]-0.5, 0.5[$ avec conditions de NtD.

Connaissant les solutions des problèmes de cellule $e_\varepsilon^{0,+}$ et $e_\varepsilon^{1,+}$ (resp. $e_\varepsilon^{0,+}$ et $e_\varepsilon^{1,+}$) pour Ω^+ (resp. Ω^-) et les valeurs r_ε^+ (resp. r_ε^-), nous pouvons calculer u_ε^+ (resp. u_ε^-) solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ (resp. $(\mathcal{P}_\varepsilon^-)$) en utilisant la relation (1.15) de reconstruction cellule par cellule :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1], \quad u_\varepsilon^\pm(x+n) = (r_\varepsilon^\pm)^n\, e_\varepsilon^{0,\pm}(x) - (r_\varepsilon^\pm)^{n+1}\, e_\varepsilon^{1,\pm}(x).$$

Enfin pour reconstruire la solution u_ε dans tout $\mathbb{R}$, on utilise les relations (1.4) :

La fonction ainsi trouvée est une approximation de la solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Nous représentons Figure 1.5 la solution obtenue pour deux fréquences différentes $\omega = 6$ (à gauche) et $\omega = 8.5$ (à droite).

1.3.3 Validations

Afin de valider la méthode présentée, nous avons considéré deux tests de validation :

- le premier est de comparer, dans le cas où le milieu est constant, la solution obtenue par la méthode à la solution analytique ;
- la deuxième validation est de vérifier que la solution obtenue est invariante du choix du domaine borné Ω^i et de la période du milieu périodique choisi ;

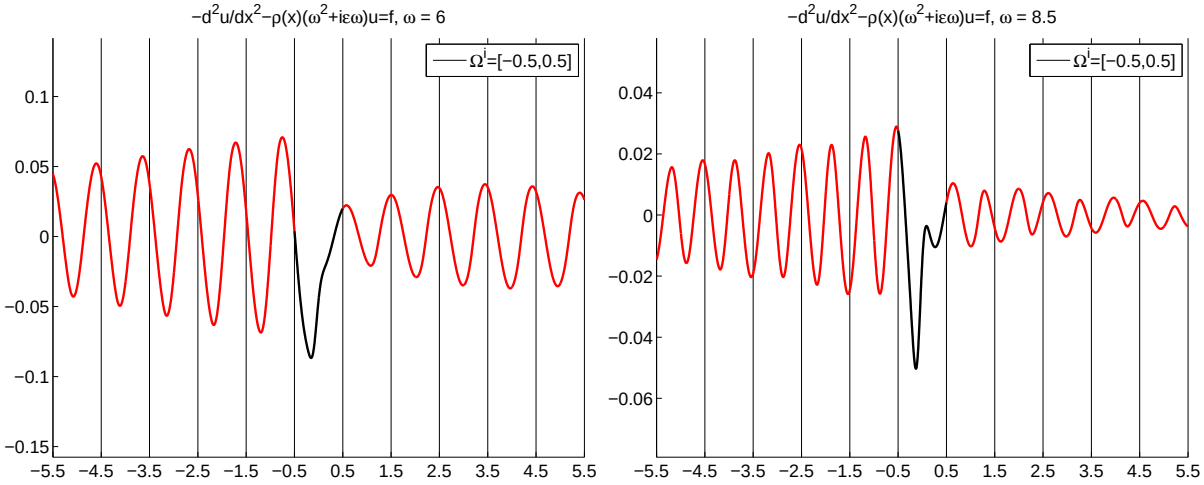


FIG. 1.5: Solution (en noir) du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ calculée sur le domaine borné $[-0.5, 0.5]$ avec les conditions de NtD en $x = -0.5$ et $x = 0.5$. À partir de la solution en $x = -0.5$ et $x = 1.5$, on prolonge (en rouge) sur $]-\infty, -0.5]$ et sur $[+0.5, +\infty[$ grâce aux relations (1.4). Deux fréquences sont représentées : $\omega = 6$ (à gauche) et 8.5 (à droite).

– enfin, la dernière validation est de vérifier le principe d'amplitude limite.

1.3.3.1 Comparaison avec l'expression explicite du cas constant

La première validation est de comparer, dans le cas où le milieu est constant, les résultats obtenus par la méthode avec les résultats exacts obtenus par un calcul explicite (certains des résultats sont donnés en exemple dans la section 1.2.4). Les résultats concordent parfaitement, l'erreur dépendant juste de la discrétisation. Ils sont tellement parfaits que nous avons choisi de ne pas les montrer et demandons au lecteur de nous faire confiance sur ce point.

1.3.3.2 Invariance par rapport aux périodes et au domaine Ω^i choisis

D'autre part, il est évident que la solution calculée ne doit dépendre ni de la période choisie et ni du domaine borné Ω^i. En effet, la solution doit être la même si on utilise n'importe quel multiple de la plus petite période n^+L^+ avec $n^+ \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, les problèmes de cellule seront différents, les constantes NtD locales également, il faudra résoudre une nouvelle équation caractéristique. Mais la solution retenue doit nécessairement être $(r^+)^{n^+}$ si r^+ est la racine retenue dans le cas où on a pris la plus petite période. La constante λ_ε^+ est indépendante de la période choisie pour résoudre les problèmes de cellule et la solution u_ε^+ du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ également. De plus, la solution calculée doit être indépendante du Ω^i choisi à condition qu'il contienne bien le support de la source f et de la perturbation compacte ρ_0. C'est un domaine artificiel que nous avons nous même introduit.

Dans la figure 1.6, nous représentons la solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ (à droite) pour les mêmes donnés que précédemment, pour une fréquence $\omega = 6$ mais dans le cas où $\Omega^i =]-1.5, 1.5[$ et

$L = 2$ (à gauche). Nous avons vérifié que la racine de l'équation caractéristique obtenue pour Ω^+ est bien le carré de celle que nous avions trouvé dans la section 1.3.1 et que la constante NtD λ_ε^+ est inchangée. Nous trouvons exactement la même solution.

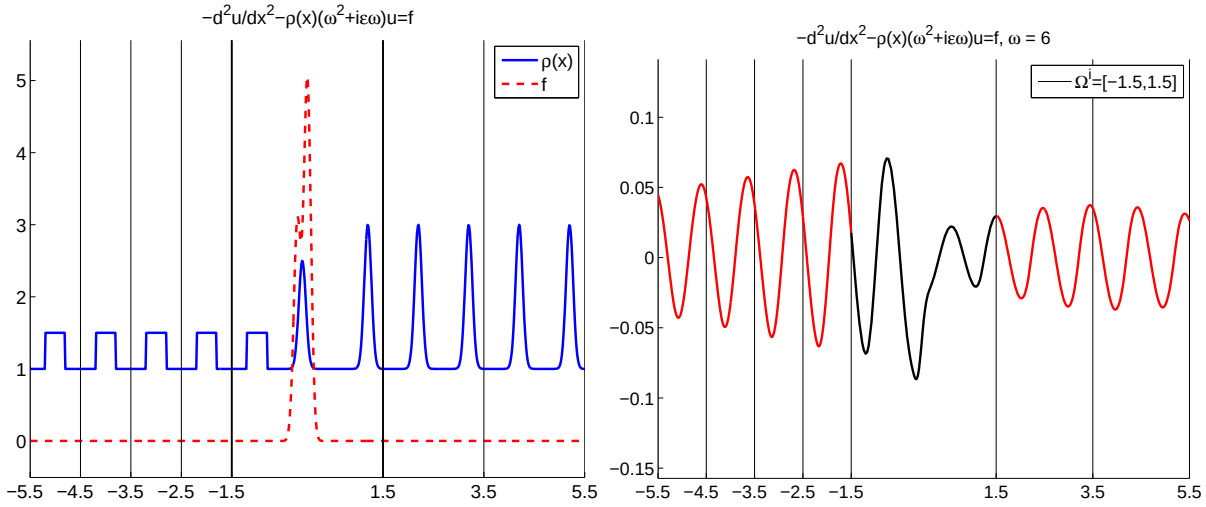


FIG. 1.6: Solution (à droite) du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ calculée dans le cas où $\Omega^i =]-1.5, 1.5[$ et $L = 2$ (voir à gauche).

1.4 Le cas sans absorption par absorption limite

Dans les sections précédentes, nous avons montré comment construire les conditions aux bords de type NtD associés à l'équation de Helmholtz avec absorption $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Nous avons montré en particulier que la restriction à Ω^i de l'unique solution H^2 u_ε du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ posé dans $\mathbb{R}$ est en fait l'unique solution H^2, u_ε^i, du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ posé dans Ω^i avec les conditions aux bords de NtD. On peut reconstruire la solution u_ε en dehors de Ω^i, sur tout $\mathbb{R}$, à partir de la solution u_ε^i et des relations d'extension (1.4).

Nous revenons maintenant au problème de Helmholtz sans absorption $(\mathcal{P})$ posé dans $\mathbb{R}$ et du problème $(\mathcal{P}^i)$ posé en domaine borné Ω^i. L'équation $(\mathcal{P})$, posé sur un domaine infini, ne suffit pas à elle seule à définir une solution « raisonnable ». Un critère supplémentaire doit être trouvé : un critère équivalent à celui de la condition d'onde sortante pour des problèmes standard de guide ou de condition de radiation pour des problèmes de diffraction. Dans ces deux cas, si nous ajoutons un critère supplémentaire, l'équation de Helmholtz posé en domaine infini a une unique solution (sous des hypothèses raisonnables) qui a un sens « physique », c'est-à-dire qui peut être observé dans des phénomènes physiques réels.

Comme nous l'avons expliqué au début de ce chapitre, la notion de solution physique dans des milieux périodiques est beaucoup moins intuitive et nous n'avons pas une interprétation physique simple de celle-ci, contrairement au cas des milieux constants 1D où les solutions « physiques » sont nécessairement « sortantes », c'est-à-dire qu'elles se propagent vers l'infini, par op-

position aux solutions « entrantes » qui elles viendraient de l'infini. A la place, nous avons choisi de nous baser sur le principe d'absorption limite, c'est-à-dire que nous voulons rajouter un critère tel que la solution de $(\mathcal{P})$ existe, est unique et est la limite, dans un sens que nous déterminerons, quand ε (>0) tend vers 0, de u_ε.

Nous allons voir en particulier que ce critère supplémentaire dépend du spectre de l'opérateur elliptique à coefficients périodiques et de ses propriétés. Nous commençons donc cette section par quelques rappels sur la théorie spectrale de ces opérateurs. Nous mettrons en évidence les particularités du cas mono-dimensionnel : certaines propriétés ne seront effectivement pas généralisables aux cas des dimensions supérieures. Nous étudierons ensuite le principe d'absorption limite et le passage à la limite de tous les objets qui sont intervenus dans la méthode pour le problème avec absorption. Nous introduirons ensuite le critère supplémentaire qui rend le problème sans absorption bien posé et nous expliquerons le lien avec les propriétés spectrales de l'opérateur.

1.4.1 Spectre de l'opérateur à coefficients périodiques 1D et Propriétés

1.4.1.1 Propriétés générales du spectre

Soit A l'opérateur à coefficients périodiques, opérateur non borné dans $L^2(\mathbb{R}, \rho_p\, dx)$ (que nous noterons par la suite $L^2(\mathbb{R})$) suivant

$$A = -\frac{1}{\rho_p}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

de domaine de définition :

$$D(A) = H^2(\mathbb{R})$$

Cet opérateur est un opérateur autoadjoint positif dans $L^2(\mathbb{R}, \rho_p dx)$. La théorie de Floquet-Bloch, [Kuchment (1993)], nous permet de relier le spectre de A à ceux (dits spectres quasi-périodiques) de la famille d'opérateurs $A(k),\ k \in]-\pi, \pi[$ tel que :

$$\sigma(A) = \bigcup_{k\in]-\pi,\pi[} \sigma(A(k)). \tag{1.17}$$

Les opérateurs $A(k)$ sont définis sur $L^2(]0,1[, \rho_p dx)$ (noté par la suite $L^2(]0,1[)$ par :

$$\left|\begin{array}{l} D(A(k)) = \{u \in H^2(]0,1[)/ \quad u(1) = e^{\imath k}\, u(0), \quad u'(1) = e^{\imath k}\, u'(0)\} \\ \qquad\qquad \forall u \in D(A(k)), \quad A(k)\, u = -\dfrac{1}{\rho_p}\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{array}\right. \tag{1.18}$$

Chaque opérateur est autoadjoint positif et à résolvante compacte. En conséquence, le spectre est purement ponctuel :

$$\left|\begin{array}{l} \sigma(A(k)) = \{\lambda_n(k), \quad n \geq 1\} \\ \lambda_1(k) \leq \lambda_2(k) \leq \ldots \leq \lambda_n(k) \leq \ldots, \quad \lambda_n(k) \to +\infty \end{array}\right. \tag{1.19}$$

chaque valeur propre étant répétée autant de fois que son ordre de multiplicité.

PROPOSITION 1.4.1 (PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS $\lambda_n(k)$)
Les fonctions $\lambda_n(k)$ sont des fonctions continues, 2π-périodiques et paires pour la variable k.

■ **PREUVE:** (1) Continuité : on renvoie à la section B.1.3 pour la définition de $H^1_k(\mathbb{R})$. Le principe du min-max appliqué aux valeurs propres ordonnées $(\lambda_n(k))_n$ de $A(k)$ donne :

$$\lambda_n(k) = \min_{E\in\mathcal{V}_n(H^1_k)} \max_{v\in E} \frac{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx}{\int_0^1 \rho_p |v(x)|^2 dx}$$

où $\mathcal{V}_n(H^1_k)$ est l'ensemble des s.e.v. de dimension n de H^1_k. Si on note $H^1_{per} = H^1_{k=0}$, on peut remarquer que :

$$v \in H^1_k \Longleftrightarrow e^{-\imath kx} v \in H^1_{per}$$

à partir de quoi on déduit aisément :

$$\lambda_n(k) = \min_{E\in\mathcal{V}_n(H^1_{per})} \max_{v\in E} \frac{\int_0^1 |v'(x) + \imath k v|^2 dx}{\int_0^1 \rho_p |v|^2 dx} \tag{1.20}$$

Notons que :

$$\int_0^1 |\frac{\partial v}{\partial x} + \imath k v|^2 dx = \int_0^1 |\frac{\partial v}{\partial x}|^2 \, dx + k^2 \int_0^1 |v|^2 dx + 2\mathrm{Re}\,(k \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x}\, \overline{v}\, dx)$$

est un polynôme en k, pour toute fonction v donc elle est continue. Les fonctions $\min$ et $\max$ de fonctions continues étant continues, $\lambda_n(k)$ est une fonction continue de k.

(2) Périodicité : on voit tout simplement que $A(k) = A(k + 2\pi m)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ donc il en est de même pour leurs valeurs propres ordonnées de façon croissante.

(3) Parité : Soit $\varphi_n(k)$ un vecteur propre de $A(k)$ associé à la valeur propre $\lambda_n(k)$ alors $\overline{\varphi_n(k)}$ est un vecteur propre de $A(-k)$ associé à la valeur propre $\lambda_n(k)$. Les valeurs propres étant ordonnées, ceci implique nécessairement

$$\lambda_n(k) = \lambda_n(-k).$$

■

Ainsi, l'ensemble des valeurs atteintes par chaque λ_n est donc un intervalle fermé borné :

$$\mathrm{Im}\ \lambda_n(\cdot) = [a_n, b_n]$$

et l'opérateur A a un spectre fermé, inclus dans $\mathbb{R}^+$, défini par [Kuchment (2004)] :

$$\sigma(A) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n]$$

Par conséquent, l'opérateur A ne présente pas de spectre discret et n'a que du spectre essentiel. Les intervalles $S_n = [a_n, b_n]$ sont appelées les zones de stabilité de l'opérateur A. Le spectre $\sigma(A)$ est donc une demi droite $[a, +\infty[$ privée d'une suite (finie ou infinie) (α_n, β_n) d'intervalles ouverts tels que $\alpha_{n+1} > \beta_n$ et $\lim \alpha_n = \infty$ (si la suite est infinie). Ces intervalles sont appelés *gaps* ou *lacunes* ou encore *zones d'instabilité* du spectre.

Dans le cas mono-dimensionnel, les zones d'instabilité satisfont la propriété supplémentaire (démontrée dans la section suivante)

$$b_n \leq a_{n+1}$$

c'est-à-dire que les intervalles peuvent au mieux se toucher. Ceci signifie que l'absence de lacunes est rare. On remarque néanmoins que le spectre de l'opérateur, dans le cas ρ_p constant, n'en présente pas : le théorème d'unicité de Borg [Borg (1946)] donne même que l'absence de lacunes dans le spectre implique que le milieu est homogène (ρ_p constante), (voir la section suivante pour plus de précisions).

REMARQUE 1.4.2
Dans les dimensions supérieures, l'inégalité ci-dessus n'est plus valide. De plus, Bethe et Sommerfeld ont émis la conjecture il y a quelques années que dans ce cas, le nombre de lacunes est toujours « fini ». Cette conjecture a été prouvée par M. Skriganov [Skriganov (1979, 1987)] pour l'opérateur de Schrödinger. Il montre même que si le potentiel est assez petit alors il n'y a pas de lacunes du tout.

REMARQUE 1.4.3
C'est l'existence de lacunes qui fait qu'un cristal est un semi-conducteur et qu'il peut alors être utilisé en électronique.

Nous finissons par donner des propriétés du spectre de l'opérateur à coefficients périodiques localement perturbé. Appelons $\tilde{A}$ l'opérateur à coefficients variables, non borné dans $L^2(\mathbb{R})$

$$\tilde{A} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

où ρ est supposé être une perturbation compacte de ρ_p :

$$\text{supp } (\rho - \rho_p) \subset \Omega^i = [a^-, a^+].$$

Un résultat classique de théorie spectrale (théorème de Weyl) concernant l'invariance du spectre essentiel par toute perturbation compacte nous donne alors que

THÉORÈME 1.4.4
La résolvante de $\tilde{A}$ étant une perturbation compacte de celle de A, le spectre essentiel de $\tilde{A}$ coïncide avec le spectre de A, purement essentiel.

Ainsi le spectre de $\tilde{A}$ coïncide avec celui de A à des valeurs propres isolés de multiplicité finie près.

1.4.1.2 Analyse précise des bandes spectrales

Nous allons développer dans cette section une analyse classique précisant les caractéristiques des fonctions λ_n, en reformulant des résultats bien connus (voir par exemple [Eastham (1973) ; Reed & Simon (1972-1978) ; Weidmann (1987)]), repris plus récemment dans [Kuchment (1993) ; Murata & Tsuchida (2006)]. Cette analyse se base fondamentalement sur la méthode de matrice de transfert, qui est très classique pour les EDO mais qui s'extrapole difficilement au cas des dimensions supérieures.

Il nous a semblé intéressant de développer quelques idées de cette analyse dans cette section pour mettre en évidence les liens entre la méthode de transfert et la notre dans le cas 1D (voir notamment [Griffiths & Steinke (2001) ; Figotin & Gorentsveig (1998)]). Nous ferons de plus dans la suite le parallèle entre ces propriétés et notre étude.

DÉFINITION 1.4.5
On note $(\mu_n)_n$ les valeurs propres ordonnées de $A(k=0)$ et $(\nu_n)_n$ celles de $A(k=\pi)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu_n = \lambda_n(k=0), \quad \nu_n = \lambda_n(k=\pi).$$

PROPOSITION 1.4.6 (PROPRIÉTÉS DU SPECTRE)
Sur l'intervalle $[0,\pi]$. La fonction $k \mapsto \lambda_{2n-1}(k)$ croit de μ_{2n-1} à ν_{2n-1} et $k \mapsto \lambda_{2n}(k)$ décroît de μ_{2n} à ν_{2n}. Les valeurs $(\mu_n)_n$ et $(\nu_n)_n$ sont ordonnées de la façon suivante :

$$-\infty < \mu_1 < \nu_1 \leq \nu_2 < \mu_2 \leq \mu_3 < \nu_3 \leq \dots,$$

ce qui implique que

$$\sigma(A) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Big([\mu_{2n-1}, \nu_{2n-1}] \cup [\nu_{2n}, \mu_{2n}] \Big).$$

On a également les propriétés suivantes :

1. *si $\mu_{2n} < \mu_{2n+1}$, alors μ_{2n} et μ_{2n+1} sont des valeurs propres simples de $A(0)$ et $\lambda'_{2n}(0) = 0$ et $\lambda'_{2n+1}(0) = 0$;*
2. *si $\nu_{2n-1} < \nu_{2n}$, alors ν_{2n-1} et ν_{2n} sont des valeurs propres simples de $A(\pi)$ et $\lambda'_{2n-1}(\pi) = 0$ et $\lambda'_{2n}(\pi) = 0$;*
3. *si $\mu_{2n} = \mu_{2n+1}$ alors μ_{2n} est une valeur propre double de $A(0)$ et $\lambda'_{2n+1}(0+0) \neq 0$ et $\lambda'_{2n}(0+0) \neq 0$;*
4. *si $\nu_{2n-1} = \nu_{2n}$ alors ν_{2n-1} est une valeur propre double de $A(\pi)$ et $\lambda'_{2n-1}(\pi - 0) = 0$ et $\lambda'_{2n}(\pi - 0) = 0$.*

■ **IDÉES DE LA PREUVE:** Nous nous contentons de donner quelques idées de la démonstration, la preuve complète pouvant être trouvée dans [Eastham (1973), chap. 2].

Soit z un complexe. Considérons les solutions $\varphi_j(x,z)$ $(j=1,2)$ de l'équation :

$$-\frac{1}{\rho_p}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = z\psi \quad \text{dans } \mathbb{R} \tag{1.21}$$

satisfaisant les conditions initiales :

$$\varphi_1(0,z) = 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi'_1(0,z) = 0$$
$$\varphi_2(0,z) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi'_2(0,z) = 1$$

où la dérivée est celle par rapport à x et ce sera toujours le cas. Ainsi toutes solutions de (1.21) peuvent s'écrire sous la forme $\psi = \psi(0)\varphi_1 + \psi'(0)\varphi_2$.

Pour $\xi \in \mathbb{C}$, considérons maintenant le problème aux valeurs propres

$$\text{Trouver } \psi \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}),\ \psi \neq 0 \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{\rho_p}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = z\psi, \\ \psi(x+1) = e^{\imath\xi}\psi(x) \quad (\xi - \text{périodicité}). \end{cases} \tag{1.22}$$

Comme ψ est solution du problème (1.21), elle est combinaison linéaire de φ_1 et φ_2 : $\psi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$ et on montre que le problème (1.22) est équivalent à

$$\text{Trouver } \alpha \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad M(z)\alpha = e^{\imath\xi}\alpha$$

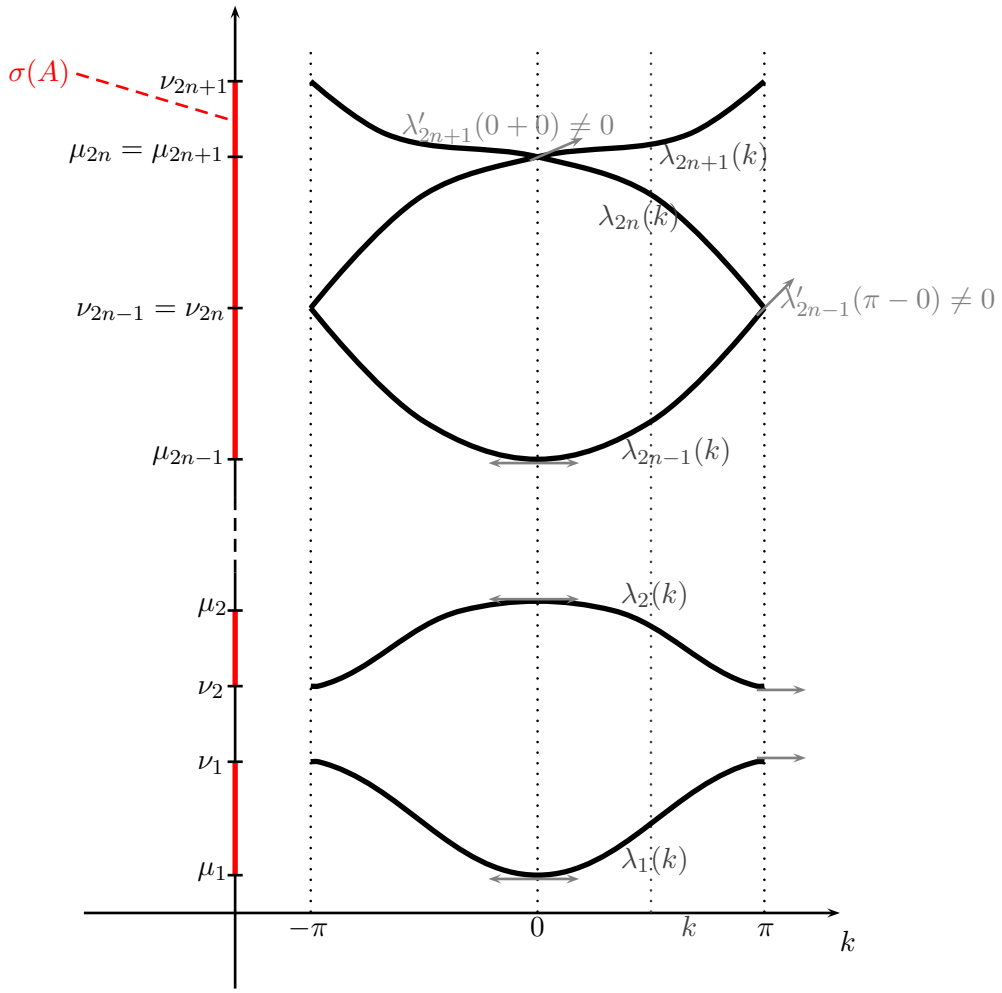


FIG. 1.7: Propriétés des courbes de dispersion $k \mapsto \lambda_n(k)$

où

$$M(z) = \begin{bmatrix} \varphi_1(1,z) & \varphi_2(1,z) \\ \varphi_1'(1,z) & \varphi_2'(1,z) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

On doit donc résoudre l'équation

$$\det\left(M(z) - e^{\imath\xi}\,\mathrm{Id}\right)\alpha = 0$$

et en utilisant que le wronskien de l'équation (égal ici à $\det(M(z))$) est constant égal à 1, on remarque alors que le déterminant est nul si et seulement si :

$$\varphi_1(1,z) + \varphi_2'(1,z) = e^{\imath\xi} + e^{-\imath\xi}.$$

On note $D(z)$ la trace de $M(z)$ c'est-à-dire $\varphi_1(1,z) + \varphi_2'(1,z)$, D est appelé le discriminant. Nous avons donc établi qu'il existe une fonction ξ-périodique H^1_{loc} vecteur propre associée à la valeur propre z si et seulement si

$$D(z) = e^{\imath\xi} + e^{-\imath\xi}.$$

Etant donné que pour tout entier n et tout $k \in]-\pi,\pi]$, $\lambda_n(k)$ est dans le spectre de A et que, par définition de l'opérateur $A(k)$, on peut construire un vecteur propre $k-$ périodique H^1_{loc}, nous en déduisons que $\lambda_n(k)$ vérifie la relation

$$D(\lambda_n(k)) = 2\cos(k). \qquad (\mathcal{D}_\lambda)$$

Réciproquement, si il existe un λ et un $k \in]-\pi,\pi]$ tels que :

$$D(\lambda) = 2\cos(k)$$

alors λ est une valeur propre de l'opérateur $A(k)$. Nous avons donc les caractérisations suivantes :

$$\forall k \in]-\pi,\pi[, \quad \sigma(A(k)) = \{\lambda \in \mathbb{R}, \quad D(\lambda) = 2\cos(k)\}, \quad \text{et} \quad \sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}, \quad |D(\lambda)| \leq 2\}$$

Les propriétés sur les courbes de dispersion $k \mapsto \lambda_n(k)$, énoncées dans la proposition, sont déduites des propriétés sur $D(\lambda)$ et de la relation $(\mathcal{D}_\lambda)$. Nous énonçons, dans la suite, les résultats sur D qui permettent de déduire les résultats de la proposition. Nous donnons seulement des idées de la preuve de ces résultats, la démonstration pouvant être trouvée dans [Eastham (1973), chap. 2].

(1) Il est facile de vérifier que D est une fonction analytique de z, $\varphi_1(\cdot,z)$ $\varphi_2(\cdot,z)$ et leurs dérivés étant eux mêmes des fonctions analytiques de z (d'après les résultats classiques de la théorie des perturbations Kato (1995)).

(2) On prouve, en faisant intervenir les coefficients de l'opérateur et les propriétés des fonctions $z \mapsto \varphi_j(\cdot,z)$ pour $j \in \{1,2\}$:

(a) il existe un nombre Λ tel que pour tout $\lambda < \Lambda$, $D(\lambda) > 2$
(b) D' ne peut pas s'annuler sur les intervalles où $|D(\lambda)| < 2$
(c) Aux points μ_n où $D(\mu_n) = 2$, $D'(\mu_n) = 0$ ssi $\varphi_2(a,\mu_n) = \varphi_1'(a,\mu_n) = 0$. De plus, si $D'(\mu_n) = 0$ alors $D''(\mu_n) < 0$. Un résultat équivalent pour les ν_n, points où $D(\nu_n) = -2$, existe mais on a si $D'(\nu_n) = 0$ alors $D''(\nu_n) > 0$ (cette propriété permet seulement de démontrer les 2 derniers points dans la proposition 1.4.6).

(3) On déduit de ces 3 dernières propriétés le comportement de $D(\lambda)$ par rapport à λ : si on fait croitre λ de $-\infty$ jusqu'à Λ, D reste supérieur à 2, si on continue à faire croître λ, D va atteindre une première fois la valeur 2 et il l'atteint nécessairement en μ_1, plus petite valeur propre de $A(k=0)$. On montre que D' ne peut s'annuler en μ_1 et est nécessairement strictement négatif. D devient donc strictement inférieur à 2, d'après la propriété (b) ci-dessus, D décroit strictement de 2 à -2 qu'il atteint en la valeur $\lambda = \nu_1$. Il sort ensuite de l'intervalle $[-2,2]$ et on ne connaît plus son comportement. On sait néanmoins que D doit repasser par la valeur -2 et qu'il existe $\nu_2 > \nu_1$ où $D(\nu_2) = -2$. Autour de ν_2, si D est localement croissante alors pour les mêmes raisons que précédemment, D va croitre strictement de -2 à 2 dans l'intervalle $[\nu_2,\mu_2]$. On comprend maintenant pourquoi les suites $(\mu_n)_n$ et $(\nu_n)_n$ s'alternent :

$$-\infty < \mu_1 < \nu_1 \leq \nu_2 < \mu_2 \leq \mu_3 < \nu_3 \leq \dots.$$

(4) On retrouve, en utilisant la relation $(\mathcal{D}_\lambda)$, que chaque λ_n est une fonction paire sur $(-\pi,\pi)$. Pour démontrer la monotonie des courbes de dispersion sur $(0,\pi)$, on dérive la relation

$$\forall n \geq 1, \ \forall k \in (0,\pi), \quad D(\lambda_n(k)) = 2\cos(k)$$

par rapport à k :

$$\forall n \geq 1, \ \forall k \in (0,\pi), \quad D'(\lambda_n(k))\lambda_n'(k) = -2\sin(k).$$

Comme nous l'avons évoqué précédemment, les propriétés (a) et (b) donnent que D est une fonction strictement décroissante sur chaque intervalle $]\mu_{2n-1},\nu_{2n-1}[$ et une fonction croissante sur chaque intervalle $]\nu_{2n},\mu_{2n}[$.

La monotonie démontrée, on déduit notamment que

$$\forall j \geq 1, \quad \lambda_{2n-1}([0,\pi]) = [\mu_{2n-1},\nu_{2n-1}], \quad \lambda_{2n}([0,\pi]) = [\nu_{2n},\mu_{2n}]$$

d'où la relation sur le spectre de A.

(5). De la dérivation par rapport à k de la relation $(\mathcal{D}_\lambda)$, on déduit notamment que :

$$\forall n, \quad D'(\lambda_n(0))\lambda_n'(0) = 0, \quad \text{et} \quad D'(\lambda_n(\pi))\lambda_n'(\pi) = 0.$$

On peut montrer que :

$$\mu_{2n} \neq \mu_{2n+1} \Rightarrow D'(\mu_{2n}) \neq 0 \quad \text{et} \quad D'(\mu_{2n+1}) \neq 0$$

μ_{2n} et μ_{2n+1} sont évidemment des valeurs propres simples de $A(0)$ et $\lambda_{2n}'(0) = 0$ et $\lambda_{2n+1}'(0) = 0$. On a un résultat équivalent pour le cas $\nu_{2n-1} \neq \nu_{2n}$.

Si $\mu_{2n} = \mu_{2n+1}$, on peut montrer que $D'(\mu_{2n}) = 0$ mais rien n'empêche pour l'instant λ_{2n}' à s'annuler en 0. On s'en persuade en dérivant cette fois ci deux fois la relation $(\mathcal{D}_\lambda)$ et en prenant la valeur en 0 :

$$D''(\mu_{2n})\big(\lambda_{2n}'(0)\big)^2 + D'(\mu_{2n})\lambda_{2n}''(0) = -2.$$

Le second terme étant nul, le premier ne peut pas l'être et on a même que $D''(\mu_{2n}) < 0$. On a un résultat équivalent pour le cas $\nu_{2n-1} = \nu_{2n}$. ■

De cette proposition, on déduit notamment que si λ est dans l'intérieur de $\sigma(A)$ alors λ vérifie nécessairement l'une des 4 conditions suivantes :

- $\lambda = \lambda_{2n-1}(k) \in (\mu_{2n-1}, \nu_{2n-1})$ pour un certain $k \in (0, \pi)$,
- $\lambda = \lambda_{2n}(k) \in (\nu_{2n}, \mu_{2n})$ pour un certain $k \in (-\pi, 0)$,
- $\lambda = \lambda_{2n-1}(\pi) = \lambda_{2n}(\pi) = \nu_{2n-1} = \nu_{2n}$,
- $\lambda = \lambda_{2n}(0) = \lambda_{2n+1}(0) = \mu_{2n} = \mu_{2n+1}$.

1.4.2 Définition de la bonne solution des problèmes de demi-droite

Comme expliqué au début de ce chapitre, nous cherchons à caractériser la solution « physique » de l'équation de helmholtz $(\mathcal{P})$ comme la limite, dans un sens que nous allons définir, de la suite de solution $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Les idées de la méthode sont donc :

- de définir la « bonne » solution des problèmes de demi-droite périodique :

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 u^\pm}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,\omega^2\,u^\pm = 0, \quad \text{pour } \pm x > a^\pm \\ \mp \dfrac{\partial u^\pm}{\partial x}(a^\pm) = 1 \end{array} \right. \tag{$\mathcal{P}^\pm$}$$

  comme la limite, dans un sens que nous préciserons, des solutions $(u_\varepsilon^\pm)_\varepsilon$ des problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon^\pm)$,

- de définir des conditions de type NtD $\lambda^\pm$ comme la limite des suites des coefficients de NtD pour le problème avec absorption $(\lambda_\varepsilon^+)_\varepsilon$ et $(\lambda_\varepsilon^-)_\varepsilon$,

– de montrer que le problème $(\mathcal{P}^i)$ posé dans Ω^i avec des conditions de NtD :

$$\left|\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} - \rho(x)\,\omega^2\,u^i &=& f \quad \text{dans} \quad \Omega^i \\ u^i - \lambda^- \dfrac{\partial u^i}{\partial x} &=& 0 \quad \text{en} \;\; x = a^- \\ u^i + \lambda^+ \dfrac{\partial u^i}{\partial x} &=& 0 \quad \text{en} \;\; x = a^+ \end{array}\right. \qquad (\mathcal{P}^i)$$

est bien posé, sous certaines conditions,

– de montrer que l'unique solution u^i de $(\mathcal{P}^i)$ est la limite quand ε tend vers 0 de la famille des solutions $(u^i_\varepsilon)_\varepsilon$ des problèmes $(\mathcal{P}^i_\varepsilon)$.

Il suffit ensuite de définir la solution « physique » de $(\mathcal{P})$, limite de la famille des solutions $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ comme suit :

$$\left|\begin{array}{ll} u(x) = u^i(x), & x \in \Omega^i \\ u(x) = -\dfrac{\partial u^i}{\partial x}(a^+)\; u^+(x), & x \geq a^+ \\ u(x) = +\dfrac{\partial u^i}{\partial x}(a^-)\; u^-(x), & x \leq a^- \end{array}\right.$$

où u^i est l'unique solution du problème $(\mathcal{P}^i)$, u^+ est la solution « physique » de $\mathcal{P}^+$ et u^- est la solution « physique » de $\mathcal{P}^-$.

Nous allons montrer que pour presque toutes les fréquences (i.e. toutes les fréquences sauf une quantité dénombrable d'entre elles), le principe d'absorption limite est possible. Nous allons classer l'ensemble discret de fréquences à exclure en deux ensembles :

– un ensemble de fréquences qui est introduit artificiellement par notre méthode. Nous donnons cependant dans l'annexe A.1 une alternative sur la façon de modifier un tant soit peu la méthode, quitte à la rendre plus complexe, pour prendre de nouveau en considération ces fréquences. Nous développons l'explication de l'apparition de cet ensemble dans la section suivante.
– un ensemble de fréquences pour lesquelles le principe d'absorption limite ne peut marcher pour des raisons physiques qui sont indépendantes évidemment de la méthode. On retrouve par exemple de telles fréquences pour des problèmes de guide standard pour lesquels il est impossible de définir une solution sortante. Nous expliquerons l'apparition de ces fréquences quand nous étudierons le caractère bien posé du problème $(\mathcal{P}^i)$ posé en domaine borné.

1.4.2.1 Fréquences propres du problème de Neumann

Nous allons voir en particulier que notre méthode a introduit une quantité dénombrable de fréquences pour lesquelles le passage à la limite, tel quel, ne sera pas possible. Voici la définition de cet ensemble :

DÉFINITION 1.4.7 (FRÉQUENCES PROPRES DU PROBLÈME DE NEUMANN)
Soit A^0 l'opérateur défini par :

$$A^0 = -\frac{1}{\rho_p}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \textit{avec} \quad D(A^0) = \{v \in H^1(0,1),\ -\frac{\partial v}{\partial x}(0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1) = 0\}.$$

Il est autoadjoint, positif, à résolvante compacte. On appelle σ_{Neu} son spectre discret avec pour seul point d'accumulation, l'infini.

C'est dans le passage à la limite des problèmes de cellule que ces fréquences propres peuvent rendre le problème limite mal posé. Nous allons donc exclure jusqu'à la fin de ce chapitre les fréquences ω telles que $\omega^2 \in \sigma_{Neu}$.

REMARQUE 1.4.8
Pour résoudre le problème de demi-droite et pour tirer profit de la périodicité, nous avons introduit des problèmes de cellule artificiels avec des conditions de Neumann. Ce choix de conditions est vraiment arbitraire : il est fait par soucis de clarté et de simplicité de la présentation. Cependant, ce choix rend le passage à la limite plus délicat et exclut les fréquences propres du problème de Neumann. Nous aurions pu éviter cette difficulté en choisissant plutôt des conditions d'impédance par exemple du type :

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial e^0}{\partial x}(0) = 1, \\ (\dfrac{\partial e^0}{\partial x} + \imath\alpha e^0)(1) = 0 \end{array}\right. \quad \textit{et} \quad \left|\begin{array}{l} (\dfrac{\partial e^1}{\partial x} - \imath\alpha e^1)(0) = 0, \\ \dfrac{\partial e^1}{\partial x}(1) = 1 \end{array}\right.$$

en choisissant α réel.

Une autre idée, un peu plus « physique », consiste à chercher des coefficients Robin-to-Robin plutôt que NtD ou même DtN, c'est-à-dire :

$$\Big[\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x} - \imath\sqrt{z}u_\varepsilon^i\Big](a^+) = \lambda_\varepsilon^+\Big[\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x} + \imath\sqrt{z}u_\varepsilon^i\Big](a^+).$$

où $z(x) = \rho(x)(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)$. Les conditions aux bords des problèmes de cellule à résoudre dans ce cas là sont les suivants :

$$\left|\begin{array}{l} \Big[\dfrac{\partial e_\varepsilon^0}{\partial x} + \imath\sqrt{z}e_\varepsilon^0\Big](0) = 1, \\ \Big[\dfrac{\partial e_\varepsilon^0}{\partial x} - \imath\sqrt{z}e_\varepsilon^0\Big](1) = 0 \end{array}\right. \quad \textit{et} \quad \left|\begin{array}{l} \Big[\dfrac{\partial e_\varepsilon^1}{\partial x} + \imath\sqrt{z}e_\varepsilon^1\Big](0) = 0, \\ \Big[\dfrac{\partial e_\varepsilon^1}{\partial x} - \imath\sqrt{z}e_\varepsilon^1\Big](1) = 1 \end{array}\right. .$$

Nous avons développé ce choix de conditions dans l'annexe (voir annexe A.1). C'est exactement l'amélioration qu'ont proposé Ehrhardt et al. [Ehrhardt et al. *(2008)] aux travaux de Yuan et Lu [Yuan & Lu (2007, 2006)] concernant la construction d'opérateurs de DtN pour des milieux périodiques de petite taille (nombre fini de périodes). Dans ce cas également, la construction d'opérateurs de DtN introduit des fréquences propres alors que la construction d'opérateurs Robin-to-Robin n'en introduit pas.*

Les idées de la méthode sont indépendantes du choix des conditions aux limites ; le choix des

conditions de Neumann, contrairement aux conditions d'impédance ou de Robin-to-Robin (voir l'annexe A.1), a l'avantage de rendre les expressions des équations et des solutions plus simples. Nous allons donc garder dans la suite les problèmes de cellule avec conditions de Neumann et garder à l'esprit que nous savons résoudre le problème des fréquences propres.

1.4.2.2 Passage à la limite des problèmes de cellule

Nous expliquons la démarche dans la suite pour la caractérisation de la « bonne » solution u^+ de $(\mathcal{P}^+)$ et du bon coefficient λ^+. Il va de soi que la méthode est la même pour la détermination de u^- et λ^-. Nous allons également supposer dans cette section, par soucis de clarté, que $L = 1$ et $a^+ = 0$.

Pour étudier le passage à la limite $\varepsilon \to 0$, nous allons considérer les solutions de problème de cellule e^i_ε, les coefficients de NtD t^{ij}_ε, le coefficient NtN r_ε comme des fonctions de ε puisque nous nous intéresserons à leur dérivabilité par rapport à ε. C'est pourquoi nous noterons ces fonctions dans la suite, respectivement, $e^i(\varepsilon)$, $t^{ij}(\varepsilon)$ et $r(\varepsilon)$. Nous continuerons par contre à noter u^+_ε et λ^+_ε pour lesquelles seules les limites seront étudiées.

Une fois les fréquences propres du problème de Neumann exclues, le passage à la limite des solutions des problèmes de cellule et des coefficients qui en dépendent ne présente pas de difficulté.

PROPOSITION 1.4.9 (LIMITE DES PROBLÈMES DE CELLULE)
Si $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$, les fonctions $\varepsilon \mapsto e^0(\varepsilon)$ (pour tout ε, $e^0(\varepsilon)$ solution du problème (1.8)) et $\varepsilon \mapsto e^1(\varepsilon)$ (pour tout ε, $e^1(\varepsilon)$ solution du problème (1.9)) tendent dans $H^1(0,1)$, quand ε tend vers 0, respectivement vers e^0 et e^1 solutions respectives des problèmes :

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 e^0}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,\omega^2\,e^0 = 0, \quad x \in]0,1[\\ -\dfrac{\partial e^0}{\partial x}(0) = 1, \quad \dfrac{\partial e^0}{\partial x}(1) = 0 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 e^1}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,\omega^2\,e^1 = 0, \quad x \in]0,1[\\ -\dfrac{\partial e^1}{\partial x}(0) = 0, \quad \dfrac{\partial e^1}{\partial x}(1) = 1 \end{array}\right. \tag{1.23}$$

Plus précisément, il existe une constante $C(\omega)$ qui ne dépend pas de ε telle que :

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \begin{array}{rcl} \|e^0(\varepsilon) - e^0\|_{H^1(0,1)} & \leq & C(\omega)\varepsilon\|e^0\|_{H^1(0,1)} \\ \|e^1(\varepsilon) - e^1\|_{H^1(0,1)} & \leq & C(\omega)\varepsilon\|e^1\|_{H^1(0,1)} \end{array}$$

De plus, les fonctions $e^0(\varepsilon)$ et $e^1(\varepsilon)$ de ε sont dérivables au voisinage de $\varepsilon = 0$ et :

$$\left|\begin{array}{l} e^0(\varepsilon) = e^0 + \varepsilon e^0_1 + \mathcal{O}_{H^1}(\varepsilon^2) \\ e^1(\varepsilon) = e^1 + \varepsilon e^1_1 + \mathcal{O}_{H^1}(\varepsilon^2) \end{array}\right. \tag{1.24}$$

où $\dfrac{\partial e^0}{\partial \varepsilon}(0) = e^0_1$ et $\dfrac{\partial e^1}{\partial \varepsilon}(0) = e^1_1$ sont solutions respectives des problèmes :

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 e^0_1}{\partial x^2} - \rho_p\,\omega^2\,e^0_1 = \imath\omega\,\rho_p\,e^0, \quad x \in]0,1[\\ -\dfrac{\partial e^0_1}{\partial x}(0) = 0, \quad \dfrac{\partial e^0_1}{\partial x}(1) = 0 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 e^1_1}{\partial x^2} - \rho_p\,\omega^2\,e^1_1 = \imath\omega\,\rho_p\,e^1, \quad x \in]0,1[\\ -\dfrac{\partial e^1_1}{\partial x}(0) = 0, \quad \dfrac{\partial e^1_1}{\partial x}(1) = 0, \end{array}\right. \tag{1.25}$$

et où $\mathcal{O}_{H^1}$ signifie que c'est un $\mathcal{O}$ pour la norme $H^1(0,1)$.

■ **PREUVE:** Développons la démonstration pour e^0, l'idée étant la même pour e^1.
Si $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$, le problème de cellule sans absorption est bien posé. Nous nous plaçons dans ce cas maintenant. On appelle e^0 l'unique solution H^1 de ce problème. Nous allons montrer que la fonction $\varepsilon \mapsto e^0(\varepsilon)$ a une limite dans $H^1(0,1)$; sa limite étant nécessairement solution du problème de cellule sans absorption, cela ne peut être que e^0. Notons que $v^0 = e^0(\varepsilon) - e^0$ est solution du problème :

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 v^0}{\partial x^2} - \rho_p\, \omega^2\, v^0 = \imath\omega\varepsilon\, \rho_p\, e^0(\varepsilon), \\ -\dfrac{\partial v^0}{\partial x}(0) = 0, \quad \dfrac{\partial v^0}{\partial x}(1) = 0 \end{array} \right.$$

Ce problème étant également bien posé, il existe donc une constante C indépendante de ε telle que :

$$\|v^0\|_{H^1} \leq C\varepsilon \|e^0(\varepsilon)\|_{H^1},$$

ce qui implique que :

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \|e^0(\varepsilon) - e^0\|_{H^1(0,1)} \leq C(\omega)\varepsilon \|e^0\|_{H^1(0,1)} \qquad (*)$$

On cherche maintenant à montrer que

$$w^0 = e^0(\varepsilon) - (e^0 + \varepsilon e_1^0) = \mathcal{O}_{H^1}(\varepsilon^2)$$

où e_1^0 est l'unique solution H^1 du problème (1.25) et où $\mathcal{O}_{H^1}$ signifie que c'est un $\mathcal{O}$ pour la norme $H^1(0,1)$. On utilise la même idée et on montre que w^0 est solution de

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} - \rho_p\, \omega^2\, w^0 = \imath\omega\varepsilon\, \rho_p\, (e^0(\varepsilon) - e^0), \\ -\dfrac{\partial w^0}{\partial x}(0) = 0, \quad \dfrac{\partial w^0}{\partial x}(1) = 0 \end{array} \right.$$

Il existe donc une constante C indépendante de ε telle que :

$$\|w^0\|_{H^1} \leq C\varepsilon \|e^0(\varepsilon) - e^0\|_{H^1},$$

On conclut en utilisant $(*)$. ■

De cette proposition, en particulier de la convergence en norme H^1, on déduit facilement le passage à la limite pour les coefficients de NtD :

COROLLAIRE 1.4.10
Si $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$, les coefficients de NtD $\varepsilon \mapsto \big(t^{00}(\varepsilon), t^{11}(\varepsilon), t^{01}(\varepsilon), t^{10}(\varepsilon) \big)$ tendent, quand ε tend vers 0, vers les coefficients réels $(t^{00}, t^{11}, t^{01}, t^{10})$ qui sont définis à partir des solutions des problèmes de cellule (1.23) *de la manière suivante :*

$$\left| \begin{array}{ll} t^{00} = e^0(0), & t^{01} = e^0(1), \\ t^{10} = e^1(0), & t^{11} = e^1(1). \end{array} \right. \qquad (1.26)$$

Ces coefficients ont les propriétés suivantes :

$$\forall (i,j) \in \{0,1\}, \quad t^{ij} \neq 0 \text{ (sauf pour une quantité dénombrable de fréquences)},$$

$$t^{10} = t^{01}.$$

Plus précisément, les fonctions $t^{ij}(\varepsilon)$ de ε sont dérivables au voisinage de $\varepsilon = 0$ et :

$$\forall (i,j) \in \{0,1\}, \quad t^{ij}(\varepsilon) = t^{ij} + \varepsilon \frac{\partial t^{ij}}{\partial \varepsilon}(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{1.27}$$

où les dérivées en $\varepsilon = 0$ des fonctions $\varepsilon \mapsto t^{ij}(\varepsilon)$ sont définies par :

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{\partial t^{00}}{\partial \varepsilon}(0) = e_1^0(0), & \dfrac{\partial t^{01}}{\partial \varepsilon}(0) = e_1^0(1), \\ \dfrac{\partial t^{10}}{\partial \varepsilon}(0) = e_1^1(0), & \dfrac{\partial t^{11}}{\partial \varepsilon}(0) = e_1^1(1). \end{array} \right. \tag{1.28}$$

où e_1^0 et e_1^1 sont solutions des problèmes (1.25)*.*

■ **IDÉE DE LA PREUVE:** Le passage à la limite des coefficients de NtD est direct à partir de la convergence H^1 des fonctions $\varepsilon \mapsto e^0(\varepsilon)$ et $\varepsilon \mapsto e^1(\varepsilon)$ de problèmes de cellule avec absorption vers les solutions e^0 et e^1 des problèmes de cellule sans absorption et de la continuité des traces. La définition des limites en découle naturellement. Pour le développement limité des $t^{ij}(\varepsilon)$, il suffit d'utiliser le développement limité des fonctions $e^i(\varepsilon)$.
Pour la première propriété, il suffit d'utiliser les mêmes arguments de la démonstration pour le cas avec absorption. La démonstration fait intervenir d'autres problèmes de cellule, par exemple avec conditions de Dirichlet sur Γ_0 et Neumann sur Γ_1, qui sont bien posés sauf pour une quantité dénombrable de fréquences, qui ne sont pas nécessairement les fréquences propres du problème de Neumann.
Pour la seconde propriété, l'égalité découle du passage à la limite. ■

REMARQUE 1.4.11
Nous avons précisé dans le Corollaire que les coefficients de NtD locaux étaient non nuls sauf pour une quantité dénombrable de fréquences. Cette remarque signifie que pour utiliser ce résultat il faut exclure un ensemble plus grand que σ_{Neu}. Pour comprendre ce point, nous renvoyons le lecteur à la preuve de ce corollaire et celle de la Proposition 1.2.7

1.4.2.3 Equation caractéristique et Discussions

Nous pouvons maintenant énoncer le premier résultat sur la limite quand ε tend vers 0^+ de la fonction $\varepsilon \mapsto r(\varepsilon)$ qui découle du corollaire précédent.

PROPOSITION 1.4.12 (EQUATION CARACTÉRISTIQUE LIMITE)
Si $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$, la fonction $\varepsilon \mapsto r(\varepsilon)$ converge vers r^* avec $|r^*| \leq 1$. De plus, r^* est solution de l'équation caractéristique à coefficients réels suivante :

$$t^{10}(r^2+1) - (t^{11} + t^{00})r = 0 \tag{$\mathcal{E}^r$}$$

■ **PREUVE:** Il suffit d'écrire pour chaque ε, l'expression de $r(\varepsilon)$ solution de $(\mathcal{E}_\varepsilon^r)$ en fonction des coefficients de l'équation $t^{ij}(\varepsilon)$, $(i,j) \in \{0,1\}$:

$$\frac{t^{00}(\varepsilon) + t^{11}(\varepsilon) \pm \imath\sqrt{4t^{01}(\varepsilon)^2 - (t^{00}(\varepsilon) + t^{11}(\varepsilon))^2}}{2t^{10}(\varepsilon)}$$

et d'utiliser le corollaire 1.4.10. ■

REMARQUE 1.4.13
Si $\omega^2 \in \sigma_{Neu}$, on sait que les coefficients de NtD locaux $t^{ij}(\varepsilon)$ n'ont pas de limite. En revanche, on peut montrer (voir l'annexe A.1) que le quotient $t^{10}(\varepsilon)/(t^{11}(\varepsilon)+t^{00}(\varepsilon))$ a une limite quand ε tend vers 0. Ainsi, pour tout ω, la fonction $\varepsilon \mapsto r(\varepsilon)$ converge vers r^* avec $|r^*| \leq 1$ solution de l'équation

$$\frac{t^{10}}{t^{11}+t^{00}}(r^2+1) - r = 0.$$

Cette nouvelle équation caractéristique a deux racines dont le produit vaut 1. Deux cas se présentent : soit le discriminant de $(\mathcal{E}^r)$ est strictement positif et dans ce cas les racines sont réelles[1] et il n'y en a qu'une de module strictement inférieur à 1, soit le discriminant est négatif ou nul et dans ce cas les racines sont complexes conjuguées de module 1 (elles sont donc de la forme $e^{\imath k}$ et $e^{-\imath k}$ avec $k \in]-\pi,\pi]$). Le cas de figure dans lequel nous sommes ne dépend en fait que de la fréquence : c'est l'objet du lemme suivant.

LEMME 1.4.14
Les deux racines de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$ sont toutes deux de module 1 si et seulement si $\omega^2 \in \sigma(A)$.

■ **PREUVE:** Supposons qu'il existe un $k \in]-\pi,\pi]$ tel que $r = e^{\imath k}$ est solution de $(\mathcal{E}^r)$. Alors, par construction, on voit que la fonction définie par :

$$u = e^0 - e^{\imath k} e^1$$

est une fonction propre de $A(k)$ associée à la valeur propre ω^2. La réciproque est immédiate : si $\omega^2 \in \sigma(A)$, il existe $k \in]-\pi,\pi[$ tel que ω^2 appartienne à $\sigma(A(k))$ et on vérifie alors que $r = e^{\imath k}$ est solution de $(\mathcal{E}^r)$. ■

Nous étudions donc les deux cas de figure séparément dans les prochaines sections. Pour chacun des cas, nous caractérisons la « bonne » solution du problème de demi-droite et les « bons » coefficients de NtD. Les arguments étant très différents pour chacun des cas, nous montrerons également que le problème $(\mathcal{P}^i)$ qui en résulte dans Ω^i est bien posé.

1.4.3 Solution du problème de Helmholtz quand $\omega^2 \notin \sigma(A)$

Ce cas de figure est nouveau par rapport au cas standard des milieux constants et très spécifique au spectre des opérateurs à coefficients périodiques présentant des lacunes.

Pour donner une idée de la démarche, plaçons nous dans le cas où $\rho = \rho_p$ c'est-à-dire le cas où il n'y a pas de perturbation du milieu et seulement la source f. La résolution du problème initial $(\mathcal{P})$ est alors directe. En effet, l'opérateur $(A - \omega^2\, Id)^{-1}$ est un opérateur borné de $L^2(\mathbb{R})$ dans $H^2(\mathbb{R})$: le problème $(\mathcal{P})$ est bien posé et a une unique solution dans $H^2(\mathbb{R})$. Dans ce cas de figure, pour définir la bonne solution du problème $(\mathcal{P})$ en domaine non borné, il n'est pas nécessaire de passer par le problème $(\mathcal{P}^i)$ posé en domaine borné.

Dans le cas général du milieu périodique localement perturbé, nous pouvons adopter la même démarche pour l'opérateur $\tilde{A}$ sauf pour une quantité dénombrable de fréquences qui correspond au spectre discret de $\tilde{A}$ inclus dans l'ensemble résolvant de l'opérateur A. Ceci parait légitime

[1] puisque les coefficients de l'équation sont réels

puisque ce sont des fréquences propres de l'opérateur $\tilde{A}$ pour lesquelles le problème a, par définition, une infinité de solutions.

L'idée est donc de montrer que le problème posé en domaine borné $(\mathcal{P}^i)$ est bien posé à partir du caractère bien posé du problème en domaine non borné $(\mathcal{P})$. Encore faut-il pouvoir définir $(\mathcal{P}^i)$ en montrant que les coefficients NtD existent ou encore montrer que si le problème $(\mathcal{P})$ est bien posé, il en est de même pour le problème de demi-droite $(\mathcal{P}^+)$. Ceci est équivalent à montrer l'inclusion de l'ensemble résolvant de A dans l'ensemble résolvant de l'opérateur $A_{Neu,+}$ défini par

$$A_{Neu,+} = -\frac{1}{\rho_p}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad D(A_{Neu,+}) = \Big\{u^+ \in H^2(\mathbb{R}^+), \quad -\frac{\partial u^+}{\partial x}(0) = 0\Big\}.$$

Ce résultat n'est pas évident a priori. Remarquons que l'égalité des ensembles résolvants est évidente dans le cas où ρ_p est symétrique par rapport au milieu de la cellule. Nous pourrions montrer dans le cas général que le spectre essentiel de $A_{Neu,+}$ est inclus dans le spectre de A[2]. Mais a priori, $A_{Neu,+}$ peut avoir également des valeurs propres. On montre néanmoins que en dehors du spectre de A et des valeurs propres de Neumann, $A_{Neu,+}$ n'a pas de valeurs propres[3]. Ces résultats sont résumés (sans démonstration) dans la proposition suivante.

PROPOSITION 1.4.15 (CARACTÈRE BIEN POSÉ DE $(\mathcal{P}^+)$)
Si ω^2 n'est ni dans le spectre de A ni dans l'ensemble des fréquences propres du problème de Neumann, alors le problème de demi-droite $(\mathcal{P}^+)$ est bien posé[4].

Nous ne rentrons pas plus dans le détail de ce résultat qui nécessiterait de plus gros développements. Il est cependant fondamental pour pouvoir montrer que tous le problèmes intervenant dans notre méthode sont bien posés dans le cas $\omega^2 \notin \sigma(A) \cup \sigma_{Neu}$.

THÉORÈME 1.4.16 (CARACTÉRISATION DE LA BONNE SOLUTION QUAND $\omega^2 \notin \sigma(A)$)
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$. La fonction $\varepsilon \mapsto r(\varepsilon)$ tend, quand ε tend vers 0^+, vers l'unique solution r^* de module strictement inférieur à 1 de $(\mathcal{E}^r)$. On a de plus que r^* est réel.

[2]Nous donnons ici les idées de la preuve de ce résultat. Soient $A_{Neu,-}$ défini par

$$A_{Neu,-} = -\frac{1}{\rho_p}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad D(A_{Neu,-}) = \Big\{u^- \in H^2(\mathbb{R}^-), \quad \frac{\partial u^-}{\partial x}(0) = 0\Big\}.$$

et A_{Neu} défini par

$$A_{Neu} = -\frac{1}{\rho_p}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad D(A_{Neu}) = \Big\{u \in H^2(\mathbb{R}), \quad -\frac{\partial u}{\partial x}(0) = 0\Big\}.$$

On a facilement que le spectre de A_{Neu} est l'union du spectre de $A_{Neu,+}$ et de celui de $A_{Neu,-}$. En montrant que la résolvante de A_{Neu} est une perturbation compacte de celle de A, on obtient que le spectre essentiel de A_{Neu} est égal au spectre essentiel (i.e. le spectre) de A.

[3]Nous avons démontré ce résultat seulement dans le cas 1D en mixant notre approche et l'approche "matrice de transfert" développé dans [Eastham (1973)]. Avec un raisonnement par l'absurde, on montre qu'il ne peut pas exister de solution L^2 de $(\mathcal{P}^+)$ avec conditions de Neumann homogène dès que le problème de cellule de Neumann est bien posé.

[4]Notons qu'avec la construction d'opérateurs RtR plutôt que NtD, on aurait montré directement que si le problème $(\mathcal{P})$ est bien posé, il en est de même de $(\mathcal{P}^+)$

La suite $(u_\varepsilon^+)_\varepsilon$ tend en norme H^1 vers l'unique solution u^+ de $H^1(0,+\infty)$ du problème :

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 u^+}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,\omega^2\,u^+ = 0, \quad \textit{pour } x > 0 \\ -\dfrac{\partial u^+}{\partial x}(0) = 1. \end{array} \right. \tag{$\mathcal{P}^+$}$$

La limite u^+ est caractérisée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u^+\Big|_{[n,n+1]} = (r^*)^n\,e^0 - (r^*)^{n+1}\,e^1. \tag{1.29}$$

La suite $(\lambda_\varepsilon^+)_\varepsilon$ tend vers un réel λ^+ caractérisé par :

$$\lambda^+ = u^+(0) = t^{00} - t^{10}\,r^* \tag{1.30}$$

■ **PREUVE:** Comme $\omega^2 \notin \sigma(A)$ alors l'équation caractéristique a une racine de module strictement inférieur à 1 et une racine de module strictement supérieur. La limite r^*, si elle existe, est donc définie de façon unique comme étant l'unique solution de module < 1. Enfin, pour toute suite $(\varepsilon_n)_n$ tendant vers 0, la suite $(r(\varepsilon_n))_n$ est bornée par 1 et ne peut avoir que r^* comme valeur d'adhérence, elle converge donc vers r^*. La fonction $\varepsilon \mapsto r(\varepsilon)$ converge donc vers r^*.

Grâce à la proposition 1.4.9 concernant la limite des solutions de problèmes de cellule, la suite $(u_\varepsilon^+)_\varepsilon$ tend donc en norme H^1_{loc} vers la fonction u^+ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u^+\Big|_{[n,n+1]} = (r^*)^n\,e^0 - (r^*)^{n+1}\,e^1$$

Cette fonction est H^1_{loc} puisque r^* est solution de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$, elle est même $H^1(\mathbb{R}^+)$ puisque $r^* < 1$ et la convergence de $(u_\varepsilon^+)_\varepsilon$ est en norme H^1. u^+ est nécessairement solution de l'équation $(\mathcal{P}^+)$. Reste à montrer que c'est la seule solution. Comme $\omega^2 \notin \sigma(A)$, d'après la Proposition 1.4.15, l'opérateur $A - \omega^2\,Id$ est inversible dans $L^2(\mathbb{R}^+)$: il existe donc une unique solution $H^1(\mathbb{R}^+)$ (et même $H^2(\mathbb{R}^+)$) du problème $(\mathcal{P}^+)$. Caractérisée par (1.29), u^+ est donc l'unique solution H^1 de $(\mathcal{P}^+)$.

Comme la suite $(u_\varepsilon^+)_\varepsilon$ tend en norme H^1 vers u^+ alors en particulier la suite $(\lambda_\varepsilon^+)_\varepsilon$ a une limite λ^+ définie par $\lambda^+ = u^+(0)$. λ^+ est réel puisque la formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P}^+)$ en prenant comme fonction test, la fonction u^+, donne la définition suivante pour λ^+ :

$$\lambda^+ = \int_{\Omega^+} \Big|\frac{\partial u^+}{\partial x}\Big|^2\,dx - \omega^2 \int_{\Omega^+} \rho_p(x)|u^+(x)|^2\,dx.$$

On en déduit alors que r^* défini par :

$$r^* = \frac{t^{00} - \lambda^+}{t^{10}}$$

est également réel. ■

Le théorème précédent s'extrapole de manière évidente à la caractérisation de u^- et λ^-.

REMARQUE 1.4.17

Notons que, même si les milieux de part et d'autre du « défaut » correspondent au même milieu périodique, les deux coefficients λ^+ et λ^- ne sont pas nécessairement égaux. Ils ne sont égaux que si l'indice ρ_p est symétrique par rapport au milieu de la cellule de périodicité. Par contre on peut montrer que les équations caractéristiques correspondant aux problèmes dans Ω^+ et Ω^- ont les mêmes coefficients, les racines r^+ et r^- sont donc identiques.

REMARQUE 1.4.18
Dans le cas où les milieux de part et d'autre de Ω^i sont différents, les opérateurs à coefficients périodiques correspondants sont différents et donc leur spectre également. Dans ce cas, si la fréquence est telle que ω^2 n'est ni dans le spectre de l'un ni dans le spectre de l'autre, le théorème 1.4.16 s'applique pour la résolution du problème de demi-droite à droite et à gauche et nous pouvons utiliser le théorème suivant concernant le caractère bien posé du problème intérieur. Sinon, nous ne pouvons utiliser ce qui va suivre et il faudra utiliser la méthode de caractérisation de la bonne solution développée dans la section suivante.

Nous pouvons maintenant aborder la question du caractère bien posé du problème $(\mathcal{P}^i)$. Elle est évidemment due au caractère bien posé du problème $(\mathcal{P})$: elle exclut donc les fréquences propres de l'opérateur $\tilde{A}$.

THÉORÈME 1.4.19 (CARACTÈRE BIEN POSÉ DU PROBLÈME $(\mathcal{P}^i)$)
Si $\omega^2 \notin \sigma(\tilde{A}) \cup \sigma_{Neu}$, le problème $(\mathcal{P}^i)$ a une unique solution dans $H^1(\Omega^i)$.

■ **PREUVE:** Le problème $(\mathcal{P})$ est bien posé, il a donc une unique solution u dans $H^2(\mathbb{R})$. La restriction de u à Ω^i est donc solution du problème $(\mathcal{P}^i)$. Montrons maintenant que ce problème a une unique solution. Soit v^i une solution non nulle du problème :

$$\left|\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial^2 v^i}{\partial x^2} - \rho(x)\,\omega^2\,v^i &=& 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^i \\ v^i - \lambda^- \dfrac{\partial v^i}{\partial x} &=& 0 \quad \text{en} \quad x = a^- \\ v^i + \lambda^+ \dfrac{\partial v^i}{\partial x} &=& 0 \quad \text{en} \quad x = a^+ \end{array}\right.$$

avec λ^- et λ^+ réels. Nous ne pouvons pas conclure directement sur le caractère bien posé du problème puisque dans ce cas là les coefficients de NtD sont réels, de signe en plus difficile à déterminer. Par contre, on peut conclure en utilisant le caractère bien posé du problème $(\mathcal{P})$ en construisant une fonction v de $H^1(\mathbb{R})$ par :

$$\left|\begin{array}{rcl} v\big|_{\Omega^i} &=& v^i \\ v\big|_{\mathbb{R}^+} &=& -\dfrac{\partial v^i}{\partial x}(a^+)\,u^+ \\ v\big|_{\mathbb{R}^-} &=& +\dfrac{\partial v^i}{\partial x}(a^-)\,u^- \end{array}\right.$$

qui est solution du problème $(\mathcal{P})$ homogène ($f = 0$). Ce problème étant bien posé puisque $\omega^2 \notin \sigma(\tilde{A})$, $v = 0$ et en particulier $v^i = 0$. Le problème $(\mathcal{P}^i)$ est donc bien posé. ■

REMARQUE 1.4.20
Le problème $(\mathcal{P}^i)$ est bien posé dans le cas $\omega^2 \notin \sigma(A)$ à condition que $\omega^2 \notin \sigma(\tilde{A})$. Comme les spectres essentiels de A et $\tilde{A}$ coïncident, nous avons exclu au plus une quantité dénombrable de fréquences qui correspond au spectre discret de $\tilde{A}$ inclus dans l'ensemble résolvant de l'opérateur A

Pour démontrer complètement le principe d'absorption limite, il faut montrer que l'unique solution u^i du problème $(\mathcal{P}^i)$, quand il est bien posé, est bien la limite, dans un certain sens, quand ε tend vers 0 de la famille u^i_ε, solutions des problèmes $(\mathcal{P}^i_\varepsilon)$.

THÉORÈME 1.4.21
Supposons $\omega^2 \notin \sigma(\tilde{A})$. Soit u^i l'unique solution du problème $(\mathcal{P}^i)$ alors on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|u^i_\varepsilon - u^i\|_{H^1(\Omega^i)} = 0.$$

■ **PREUVE:** La démonstration comporte plusieurs étapes :

(1) Supposons tout d'abord qu'il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$\|u^i_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^i)} \leq C.$$

On peut donc extraire une sous suite, encore notée u^i_ε, telle que u^i_ε converge faiblement vers u^i_0 dans $H^1(\Omega^i)$. On va montrer que u^i_0 est solution de $(\mathcal{P}^i)$ et donc que $u^i_0 = u^i$ et donc que toute la suite converge. Soit $v \in H^1(\Omega^i)$. Il est clair que

$$\int_{\Omega^i} \frac{\partial u^i_\varepsilon}{\partial x}\overline{\frac{\partial v}{\partial x}}\,dx - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\int_{\Omega^i}\rho(x)u^i_\varepsilon(x)\overline{v(x)}\,dx \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega^i}\frac{\partial u^i_0}{\partial x}\overline{\frac{\partial v}{\partial x}}\,dx - \omega^2\int_{\Omega^i}\rho(x)u^i_0(x)\overline{v(x)}\,dx$$

et

$$\frac{1}{\lambda^+_\varepsilon}u^i_\varepsilon(a^+)\overline{v(a^+)} + \frac{1}{\lambda^-_\varepsilon}u^i_\varepsilon(a^-)\overline{v(a^-)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\lambda^+}u^i_0(a^+)\overline{v(a^+)} + \frac{1}{\lambda^-}u^i_0(a^-)\overline{v(a^-)}$$

puisque si u^i_ε converge faiblement dans H^1 alors sa trace converge dans $\mathbb{C}$. u^i_0 est bien une solution H^1 de $(\mathcal{P}^i)$, c'est donc nécessairement u^i. Montrons maintenant que u^i_ε converge fortement dans $H^1(\Omega^i)$ vers u^i. Soit $e_\varepsilon = u^i_\varepsilon - u^i$, alors pour tout $v \in H^1(\Omega^i)$, on a :

$$\int_{\Omega^i}\Big[\frac{\partial e_\varepsilon}{\partial x}\overline{\frac{\partial v}{\partial x}} - \omega^2\rho(x)e_\varepsilon(x)\overline{v(x)} - \imath\varepsilon\omega\rho(x)u^i_\varepsilon(x)\overline{v(x)}\Big]\,dx + \frac{1}{\lambda^+_\varepsilon}e_\varepsilon(a^+)\overline{v(a^+)} + \frac{1}{\lambda^-_\varepsilon}e_\varepsilon(a^-)\overline{v(a^-)}$$
$$+\Big(\frac{1}{\lambda^+_\varepsilon} - \frac{1}{\lambda^+}\Big)u^i(a^+)\overline{v(a^+)} + \Big(\frac{1}{\lambda^-_\varepsilon} - \frac{1}{\lambda^-}\Big)u^i(a^-)\overline{v(a^-)} = 0$$

On prend $v = e_\varepsilon$. On sait que $e_\varepsilon \rightharpoonup 0$ dans $H^1(\Omega^i)$ et $e_\varepsilon \to 0$ dans $L^2(\Omega^i)$. On trouve donc que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega^i}|\frac{\partial e_\varepsilon}{\partial x}|^2\,dx = 0.$$

(2) Prouvons maintenant l'hypothèse utilisée dans l'étape (1) et montrons par l'absurde qu'il existe une constante C indépendante de ε telle que :

$$\|u^i_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^i)} \leq C.$$

Supposons qu'il existe une sous suite (notée encore u^i_ε) telle que $\|u^i_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^i)} \to +\infty$ quand $\varepsilon \to 0$ et posons

$$\tilde{u}^i_\varepsilon = \frac{u^i_\varepsilon}{\|u^i_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^i)}}$$

$\tilde{u}^i_\varepsilon$ est de norme 1 pour tout ε et est solution du problème $(\mathcal{P}^i_\varepsilon)$ pour le terme source

$$f_\varepsilon = \frac{f}{\|u^i_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^i)}}$$

Avec les mêmes arguments que dans l'étape (1), on prouve que $\tilde{u}^i_\varepsilon$ converge dans $H^1(\Omega^i)$ vers $\tilde{u}^i$ solution du problème $(\mathcal{P}^i)$ avec $f = 0$. Ce problème étant bien posé, on a nécessairement $\tilde{u}^i = 0$ ce qui est contradictoire avec $\|u^i_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^i)} = 1$. ■

Les théorèmes 1.4.16, 1.4.19 et 1.4.21 nous permettent de définir de manière unique la solution « physique » du problème de Helmholtz $(\mathcal{P})$, limite des solutions des problèmes de Helmholtz avec absorption $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ dans le cas où $\omega^2 \notin \sigma_{Neu} \cup \sigma(\tilde{A})$ par :

PROPOSITION 1.4.22 (« BONNE » SOLUTION DE $(\mathcal{P})$ QUAND $\omega^2 \notin \sigma(\tilde{A})$)
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$. Soit u définie par :

$$\left|\begin{array}{ll} u(x) = u^i(x), & x \in \Omega^i \\ u(x) = -\dfrac{\partial u^i}{\partial x}(a^+)\ u^+(x), & x \geq a^+ \\ u(x) = +\dfrac{\partial u^i}{\partial x}(a^-)\ u^-(x), & x \leq a^- \end{array}\right.$$

où u^i est l'unique solution du problème $(\mathcal{P}^i)$, u^+ est l'unique solution de $\mathcal{P}^+$ et u^- est l'unique solution de $\mathcal{P}^-$. Alors u est la solution « physique » u du problème $(\mathcal{P})$: elle est solution de $(\mathcal{P})$ et limite dans H^1 de la famille u^i_ε, solutions des problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, quand ε tend vers 0.

1.4.4 Solution du problème de Helmholtz quand $\omega^2 \in \sigma(A)$

Pour le second cas de figure, l'étude est plus délicate. En effet, c'est la situation où $|r^*| = 1$ et comme l'équation $(\mathcal{E}^r)$ admet deux solutions complexes conjuguées $e^{\pm \imath\theta}$ et il y a donc à priori deux limites possibles. Il faut ajouter une condition supplémentaire pour déterminer la « bonne » limite quand $\varepsilon \searrow 0$ par valeurs positives. Nous commençons par l'étude du cas ρ_p constant pour lequel des calculs explicites peuvent être effectués et qui constitue un exemple intéressant pour la suite.

1.4.4.1 Le cas particulier du milieu constant

Reprenons dans cette section le cas particulier où $\rho_p = \alpha^2$ avec $\alpha > 0$. Nous pouvons expliciter les deux racines de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r_\varepsilon)$ dans le cas avec absorption :

$$r_\pm(\varepsilon) = e^{\pm \imath\alpha\sqrt{\omega^2 + \imath\varepsilon\omega}}, \quad \mathrm{Im}(\sqrt{\omega^2 + \imath\varepsilon\omega}) > 0$$

La bonne solution $r(\varepsilon) < 1$ (qui rend la solution u^+_ε de carré intégrable dans $\mathbb{R}^+$) est donc donnée par :

$$r(\varepsilon) = r_+(\varepsilon) = e^{\imath\alpha\sqrt{\omega^2 + \imath\varepsilon\omega}}$$

et par conséquent la « bonne » limite est ($\omega > 0$) :

$$r^* = r_+(0) = e^{\imath\alpha\omega} \text{ qui vérifie Im } r > 0.$$

On rappelle le développement limité

$$\sqrt{\omega^2 + \imath\varepsilon\omega} = \omega\sqrt{1 + \frac{\imath\varepsilon}{\omega}} = \omega + \imath\frac{\varepsilon}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

et par suite :

$$r_+(\varepsilon) = e^{\imath\alpha\omega}\, e^{-\varepsilon/2}\left(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) \tag{1.31}$$

$$= e^{\imath\alpha\omega}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right). \tag{1.32}$$

On a donc :

$$\frac{dr_+}{d\varepsilon}(0) = -\frac{r_+(0)}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Re}(\frac{dr_+}{d\varepsilon}(0)\,\overline{r_+(0)}) = -\frac{1}{2} < 0. \tag{1.33}$$

Nous allons voir que cette dernière condition est la condition qu'il faut rajouter pour caractériser dans le cas général la solution de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$ qui est la limite de la suite $(r_\varepsilon)_\varepsilon$ avec $|r_\varepsilon| < 1$. En effet, notons que pour l'autre solution $r_-(\varepsilon)$ on a :

$$r_-(\varepsilon) \;=\; e^{-\imath\alpha\omega}\,\left(1+\frac{\varepsilon}{2}+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) \tag{1.34}$$

et donc :

$$\mathrm{Re}(\frac{dr_-}{d\varepsilon}(0)\,\overline{r_-(0)}) > 0$$

1.4.4.2 Sélection de la bonne racine de l'équation caractéristique dans le cas général

Nous allons généraliser la condition que nous avons déterminée dans le cas particulier du milieu constant. Notons $r_\pm(\varepsilon)$ les solutions de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r_\varepsilon)$ avec pour tout ε, $|r_+(\varepsilon)| < 1$. Rappelons que $r_-(\varepsilon)r_+(\varepsilon) = 1$.

REMARQUE 1.4.23
Nous rappelons que la fonction $\varepsilon \mapsto r_+(\varepsilon)$ n'est rien d'autre que la fonction $\varepsilon \mapsto r(\varepsilon)$ (voir le théorème 1.2.8 concernant la caractérisation de $r(\varepsilon) = r_\varepsilon$). Nous changeons de notation dans cette section seulement parce que nous avons introduit l'autre racine $r_-(\varepsilon)$ de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r_\varepsilon)$ de module strictement supérieur à 1. La racine de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$ que nous voulons caractériser est par définition la limite, si elle existe, de la fonction $r_+(\varepsilon)$ quand ε tend vers 0^+ alors que la racine que nous voulons rejeter est, elle, la limite, si elle existe, de la fonction $r_-(\varepsilon)$. C'est cette différence qui va nous permettre de sélectionner sans aucune ambiguïté la bonne racine.

Commençons pas une propriété simple sur les fonctions $r_\pm(\varepsilon)$:

PROPOSITION 1.4.24
Si $r_+(0) \neq r_-(0)$ alors les fonctions $r_\pm(\varepsilon)$ ont une limite en 0 et sont différentiables pour $\varepsilon \geq 0$.

■ **PREUVE:** Dans le corollaire 1.4.10 nous avons vu que les coefficients NtD locaux $t^{ij}(\varepsilon)$ $((i,j) \in \{0,1\})$ ont une limite en 0 et sont différentiables pour $\varepsilon > 0$ (voir l'expression 1.27). On utilise ensuite que $r_\pm(\varepsilon)$ sont racines de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r_\varepsilon)$ et donc s'exprime en fonction des coefficients $t^{ij}(\varepsilon)$:

$$\frac{t^{00}(\varepsilon)+t^{11}(\varepsilon) \pm \imath\sqrt{\Delta(\varepsilon)}}{2t^{10}(\varepsilon)}$$

où $\Delta(\varepsilon) = 4t^{01}(\varepsilon)^2 - (t^{00}(\varepsilon)+t^{11}(\varepsilon))^2$. On rappelle que par le corollaire 1.4.10, les fonctions $r_\pm(\varepsilon)$ ont nécessairement une limite en 0.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $\Delta(\varepsilon)$ ne peut pas s'annuler (puisque les 2 racines sont nécessairement distinctes pour $\varepsilon > 0$). Les fonctions $r_\pm(\varepsilon)$ sont donc bien différentiables pour $\varepsilon > 0$. Par contre en $\varepsilon = 0$, $\Delta(\varepsilon)$ peut s'annuler si les deux racines $r_+(0)$ et $r_-(0)$ sont égales. Si on exclut ce cas, alors les deux fonctions sont bien différentiables en 0. ■

Jusqu'à la section suivante, faisons l'hypothèse suivante :

$$\text{(H1)} \quad r_+(0) \neq r_-(0)$$

Sous l'hypothèse (H1), la Proposition 1.4.24 nous assure que la fonction $\varepsilon \mapsto r_+(\varepsilon)$ est bien différentiable en 0. Nous avons vu dans le cas constant que le critère qui semblait pouvoir sélectionner la bonne racine $r^* = r_+(0)$ parmi les deux racines de module 1 était l'expression (1.33). Il semble donc naturel, pour pouvoir distinguer les deux racines, de supposer

$$\mathrm{Re}\Big(\frac{dr_+}{d\varepsilon}(0)\overline{r_+(0)}\Big) \neq 0, \tag{1.35}$$

Nous démontrerons, Section 1.4.4.3, quand nous relierons notre méthode aux propriétés spectrales de l'opérateur à coefficients périodiques que

LEMME 1.4.25
Nous avons l'implication suivante :

$$r_+(0) \neq r_-(0) \quad \Rightarrow \quad Re\Big(\frac{dr_+}{d\varepsilon}(0)\overline{r_+(0)}\Big) \neq 0.$$

REMARQUE 1.4.26
Si l'hypothèse (H1) n'est pas vérifiée, les deux racines étant égales, il n'y a aucune ambiguïté pour définir la « bonne » racine de l'équation caractéristique.

Ceci nous conduit à l'objet du lemme suivant.

LEMME 1.4.27 (CARACTÉRISATION DE r QUAND $\omega^2 \in \sigma(A) \setminus \sigma_{Neu}$)
Supposons l' hypothèse (H1) vérifiée, alors $r^* = r_+(0)$, la solution de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$ que nous voulons sélectionner vérifie :

$$Re\Big(\frac{dr_+}{d\varepsilon}(0)\,\overline{r^*}\Big) < 0, \tag{1.36}$$

alors que l'autre racine $r = r_-(0)$ vérifie :

$$Re\Big(\frac{dr_-}{d\varepsilon}(0)\,\overline{r_-(0)}\Big) > 0. \tag{1.37}$$

■ **PREUVE:** Il suffit de remarquer que :

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(|r_\pm(\varepsilon)|^2)(0) = 2\,\mathrm{Re}\Big(\frac{dr_\pm}{d\varepsilon}(0)\overline{r_\pm(0)}\Big).$$

Le terme à gauche est négatif ou nul pour $r_+(\varepsilon)$ puisque $|r_+(0)| = 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $|r_+(\varepsilon)| < 1$, alors que pour $r_-(\varepsilon)$ ce terme est positif ou nul puisque $|r_-(0)| = 1$ mais pour tout $\varepsilon > 0$, $|r_-(\varepsilon)| > 1$. Ces 2 termes sont, de plus, non nuls, par l'hypothèse (H1) et le lemme 1.4.25. ■

REMARQUE 1.4.28
Le critère (1.36) *signifie en particulier que la dérivée en 0^+ de $r_+(\varepsilon)$ dans le plan complexe pointe vers l'intérieur du cercle unité alors que le critère* (1.37) *signifie que la dérivée 0^+ de $r_-(\varepsilon)$ pointe vers l'extérieur.*

La condition (1.36) constitue un critère intéressant pour caractériser la « bonne » racine parce que nous sommes capables de donner une expression explicite des dérivées en 0 des fonctions $r_\pm(\varepsilon)$.

THÉORÈME 1.4.29
Supposons l'hypothèse (H1) vérifiée. Si pour tout $\varepsilon \geq 0$, $r_+(\varepsilon)$ et $r_-(\varepsilon)$ sont solutions de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}_\varepsilon^r)$ alors :

$$\frac{\partial r_\pm}{\partial \varepsilon}(0) = -r_\pm(0)\,\frac{(t^{01})^{-1}\left(t^{00}+t^{11}\right)\dfrac{\partial t^{10}}{\partial \varepsilon}(0) - \left(\dfrac{\partial t^{00}}{\partial \varepsilon}(0) + \dfrac{\partial t^{11}}{\partial \varepsilon}(0)\right)}{2r_\pm(0)t^{10} - \left(t^{00}+t^{11}\right)} \tag{1.38}$$

■ **PREUVE:** Il suffit de dériver par rapport à ε, l'équation $(\mathcal{E}_\varepsilon^r)$ et d'évaluer le résultat en $\varepsilon = 0$:

$$\Big[(r_\pm(0)^2+1)\frac{\partial t^{10}}{\partial \varepsilon}(0) - \Big(\frac{\partial t^{00}}{\partial \varepsilon}(0) + \frac{\partial t^{11}}{\partial \varepsilon}(0)\Big)r_\pm(0)\Big] + \frac{\partial r_\pm}{\partial \varepsilon}(0)\Big[2r_\pm(0)t^{10} - (t^{00}+t^{11})\Big] = 0$$

Si $r_+(0) \neq r_-(0)$ alors le deuxième crochet est non nul et en utilisant ensuite que $t^{10}(r_\pm(0)^2+1) = (t^{00}+t^{11})r_\pm(0)$, on retrouve l'expression 1.38. ■

Sous l' hypothèse (H1), ce critère (1.36) n'est pas juste théorique, il est constructif à condition d'avoir calculer les solutions des nouveaux problèmes de cellule (1.25) et les coefficients de NtD correspondants. Cela nécessite donc la résolution de problèmes supplémentaires. Même si ces calculs ne sont pas très coûteux (ces problèmes ne différant des problèmes de cellule que par leurs seconds membres), on pourrait se demander, en « bonus », si un critère équivalent ne mettant en jeu seulement les solutions e^0 et e^1 des problèmes de cellule (1.23) et les coefficients de NtD correspondants n'existerait pas. Nous n'aurions alors à résoudre que ces deux problèmes de cellule. C'est l'objet de la proposition suivante :

THÉORÈME 1.4.30 (AUTRE CARACTÉRISATION DE r QUAND $\omega^2 \in \sigma(A) \setminus \sigma_{Neu}$)
Supposons l'hypothèse (H1) vérifiée. La bonne solution r est celle dont la partie imaginaire a le même signe que la quantité :

$$t^{01}\int_0^1 \rho_p\left[|e^0|^2 + |e^1|^2\right]dx - (t^{00}+t^{11})\int_0^1 \rho_p\, e^0\, e^1\, dx \tag{1.39}$$

Sous l' hypothèse (H1), cette quantité est nécessairement non nulle.

■ **PREUVE:** Commençons par exprimer les dérivées en 0 des fonctions $\varepsilon \mapsto t^{ij}(\varepsilon)$ en fonction des solutions e^0 et e^1 des problèmes de cellule (1.23). On rappelle que e_1^0 et e_1^1 sont solutions des problèmes (1.25) dont le second membre dépend respectivement de e^0 et e^1. Soit $v \in H^1(0,1)$ une fonction qui satisfait le problème de Helmholtz sans absorption :

$$-\triangle v - \rho_p\omega^2 v = 0$$

On a alors :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\, e_1^0 - \frac{\partial^2 e_1^0}{\partial x^2}\, v = \imath\omega\, \rho_p\, e^0\, v$$

En intégrant cette identité entre 0 et 1, nous obtenons :

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x}\, e_1^0 - \frac{\partial e_1^0}{\partial x}\, v\right]_0^1 = \imath\omega \int_0^1 \rho_p\, e^0\, v\, dx$$

C'est à dire compte tenu de $\frac{\partial e_1^0}{\partial x}(0) = \frac{\partial e_1^0}{\partial x}(1) = 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(1)\, e_1^0(1) - \frac{\partial v}{\partial x}(0)\, e_1^0(0) = \imath\omega \int_0^1 \rho_p\, e^1\, v\, dx.$$

Choisissons $v = e^0$, nous obtenons :

$$\frac{\partial t^{00}}{\partial \varepsilon}(0) = \imath\omega \int_0^1 \rho_p\, |e^0|^2\, dx.$$

Choisissons $v = e^1$, nous obtenons :

$$\frac{\partial t^{01}}{\partial \varepsilon}(0) = \imath\omega \int_0^1 \rho_p\, e^0\, e^1\, dx.$$

De la même façon, en raisonnant avec e_1^1, nous trouvons :

$$\frac{\partial t^{11}}{\partial \varepsilon}(0) = \imath\omega \int_0^1 \rho_p\, |e^1|^2\, dx.$$

Nous avons donc réussi à déterminer les dérivées en 0 des fonctions $\varepsilon \mapsto t^{ij}(\varepsilon)$ en fonction des solutions e^0 et e^1. Nous remarquons en particulier que ces dérivées sont des imaginaires purs.

L'hypothèse (H1) étant vérifiée, on peut utiliser l'expression de la dérivée en 0 de $r_+(\varepsilon)$ du Théorème 1.4.29 et on conclut facilement (puisque $|r_+(0)| = 1$ que la condition (1.36) est équivalente à la condition :

$$\mathrm{Re}\Big(\big((t^{01})^{-1}\, (t^{00} + t^{11}) \frac{\partial t^{10}}{\partial \varepsilon}(0) - (\frac{\partial t^{00}}{\partial \varepsilon}(0) + \frac{\partial t^{11}}{\partial \varepsilon}(0))\big)\, \big(2\overline{r_+(0)} t^{10} - (t^{00} + t^{11})\big) \Big) \;>\; 0$$

Comme les t^{ij} sont tous réels et les dérivées en 0 sont imaginaires purs, cette dernière relation devient :

$$\mathrm{Re}\Big(\overline{r_+(0)} \big((t^{00} + t^{11}) \frac{\partial t^{10}}{\partial \varepsilon}(0) - (\frac{\partial t^{00}}{\partial \varepsilon}(0) + \frac{\partial t^{11}}{\partial \varepsilon}(0)) t^{10}\big) \Big) \;>\; 0$$

comme le terme en facteur de $\overline{r_+(0)}$ est imaginaire pur, la partie imaginaire de $r_+(0)$ est du même signe que :

$$t^{01} \int_0^1 \rho_p \left[|e^0|^2 + |e^1|^2\right] dx - \left(t^{00} + t^{11}\right) \int_0^1 \rho_p\, e^0\, e^1\, dx$$

soit l'expression recherchée. ■

La preuve du dernier théorème nous donne en particulier que les dérivées en 0 des fonctions $\varepsilon \to 0$ sont des imaginaires purs. Ceci nous permet d'élargir les critères (1.36) et (1.37) grâce au corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.4.31
Sous l'hypothèse (H1), nous avons les relations suivantes :

$$\mathit{Re}\Big(\frac{\partial r_+}{\partial \varepsilon}(0)\overline{r_+(0)}\Big) = \frac{\partial r_+}{\partial \varepsilon}(0)\overline{r_+(0)} \quad \mathit{et} \quad \mathit{Re}\Big(\frac{\partial r_-}{\partial \varepsilon}(0)\overline{r_-(0)}\Big) = \frac{\partial r_-}{\partial \varepsilon}(0)\overline{r_-(0)}$$

■ **PREUVE:** Comme les t^{ij} sont tous réels et les dérivées en 0 des fonctions $\varepsilon \to t^{ij}(\varepsilon)$ sont imaginaires purs, le théorème 1.4.29 nous donne la relation suivante :

$$|2r_\pm(0)t^{10} - (t^{00} + t^{11})|^2 \frac{\partial r_\pm}{\partial \varepsilon}(0)\overline{r_\pm(0)} = \\ - \Big((t^{01})^{-1}\, (t^{00} + t^{11}) \frac{\partial t^{10}}{\partial \varepsilon}(0) - (\frac{\partial t^{00}}{\partial \varepsilon}(0) + \frac{\partial t^{11}}{\partial \varepsilon}(0))\Big)\Big(2\overline{r_\pm(0)} t^{10} - (t^{00} + t^{11})\Big)$$

La première parenthèse du terme à droite est donc imaginaire pur quant à la deuxième parenthèse :

$$\mathrm{Re}\Big(2\overline{r_\pm(0)}t^{10} - (t^{00}+t^{11})\Big) = 2t^{10}\mathrm{Re}(r_\pm(0)) - (t^{00}+t^{11}) = 0.$$

car la somme des 2 racines conjuguées de l'équation caractéristique est donnée par $(t^{00}+t^{11})/t^{10}$. ■

Pour déterminer r^*, il suffit donc de résoudre les problèmes de cellules (1.23), de déterminer les coefficients de NtD locaux $(t^{00}, t^{01}, t^{10}, t^{11})$ définies par (1.26) et enfin de déterminer les deux solutions de module 1 de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$. Si les deux racines sont égales, il n'y a aucune ambiguité pour choisir la « bonne » racine. Sinon, pour sélectionner la « bonne » racine parmi les deux candidats distincts, soit on utilise le critère du théorème 1.4.30, soit on utilise le critère du théorème 1.4.27 mais cela nécessite de résoudre les problèmes de cellule (1.25) et de calculer les coefficients de NtD correspondants.

Avant de continuer la démonstration du principe d'absorption limite, nous voulons insister sur le fait que la condition introduite au Théorème 1.4.27 (ce sera la seule condition que nous rajoutons pour caractériser la bonne solution du problème) est équivalente à une condition d'onde sortante. En effet, nous verrons, section suivante, que cette condition a une interprétation physique et semble donc naturelle pour caractériser la solution « physique » du problème de Helmholtz. Nous commenterons également l'hypothèse (H1) que nous avons introduite dans cette section et montrerons en particulier le lemme 1.4.25.

1.4.4.3 Réinterprétation du critère en terme d'une notion de vitesse de groupe

Nous allons montrer ici qu'il existe un lien entre les critères (1.36) et (1.37) et le signe de la vitesse de groupe des ondes de Floquet (que nous définissons ci-après) qui peuvent se propager dans le milieu. On retrouve de cette façon la notion plus traditionnelle d'onde sortante (voir en particulier [Potel *et al.* (2001)]).

Nous montrons dans la suite que notre méthode est liée à la théorie spectrale de l'opérateur autoadjoint non borné à coefficients périodiques A. Nous renvoyons, donc, le lecteur à la section 1.4.1 pour l'étude du spectre de cet opérateur et ses propriétés. Nous rappelons avoir introduit dans cette section notamment la famille d'opérateurs $A(k)$ (voir leur définition (1.18)) ainsi que son spectre discret $(\lambda_n(k))_n$ (voir (1.19)).

D'après la relation (1.17), ω^2 est dans le spectre de A si et seulement si :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists k \in]-\pi,\pi], \quad \omega^2 = \lambda_n(k) \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{\lambda_n(k)} \tag{1.40}$$

C'est la relation de dispersion, liant ω et k. On appelle $\varphi_n(k)$ un vecteur propre de $A(k)$ associé à la valeur propre $\lambda_n(k)$. Une des propriétés des bandes spectrales développées dans la Proposition 1.4.6 est que chaque valeur propre $\lambda_n(k)$ est une fonction continue et paire de la variable $k \in]-\pi,\pi[$, strictement monotone sur $]0,\pi[$. Cela signifie que

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists! k \in [0,\pi], \quad \omega = \sqrt{\lambda_n(k)} = \sqrt{\lambda_n(-k)}.$$

Cherchons maintenant à savoir ce que cela implique sur les solutions générales du problème de Helmholtz périodique,

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) - \rho_p(x)\omega^2 u(x) = 0, \tag{1.41}$$

ou plus particulièrement les solutions générales du problème de demi-droite ($\mathcal{P}^+$). Nous énonçons ici un résultat classique que nous pouvons retrouver dans [Eastham (1973) ; Kuchment (1993)].

LEMME 1.4.32 (MODES DE FLOQUET)
Supposons ω^2 différente des valeurs propres simples de $A(0)$ et $A(\pi)$. Les solutions H^1_{loc} de ($\mathcal{P}^+$) sont combinaisons linéaires des solutions particulières :

$$\left| \begin{array}{l} u^1(x) = \varphi_p^1(x)\, e^{\imath kx} \\ u^2(x) = \varphi_p^2(x)\, e^{-\imath kx} \end{array} \right. \tag{1.42}$$

où φ_p^1 et φ_p^2 sont des fonctions 1-périodiques.

Ces solutions particulières sont appelées **modes de Floquet**.

■ **PREUVE:** Il est évident que l'ensemble des solutions de l'équation (1.41) est de dimension 2. Il suffit donc de trouver deux solutions particulières.

On rappelle avoir noté pour tout k, $\varphi_n(k)$ un vecteur propre de $A(k)$ associé à la valeur propre $\lambda_n(k)$. Par définition, $\varphi_n(k)$ appartient à l'espace H^1_k, en utilisant les résultats de l'annexe B.1 ceci est équivalent à $\varphi_p(x) = \varphi_n(k)e^{-\imath kx}$ dans H^1_{per}. Si on prolonge par périodicité φ_p dans $\mathbb{R}$, on construit une fonction $u(x) = \varphi_p(x)\, e^{\imath kx}$ dans H^1_{loc} qui est vecteur propre généralisé de A pour la valeur propre $\lambda_n(k)$.

En particulier pour l'unique $k \in [0,\pi]$ tel que $\omega^2 = \lambda_n(k) = \lambda_n(-k)$, on peut construire à partir de $\varphi_n(k) = \varphi_p^1(x)\, e^{\imath kx}$ et $\varphi_n(-k) = \varphi_p^2(x)\, e^{-\imath kx}$, deux solutions particulières, u_p^1 et u_p^2, de (1.41). On peut se demander maintenant si ces solutions sont linéairement indépendantes. Deux cas se présentent.

(1) $k \in]0,\pi[$: dans ce cas, les deux vecteurs propres $\varphi_n(k)$ et $\varphi_n(-k)$ sont linéairement indépendants (ils vérifient des conditions aux bords différentes), les deux solutions u_p^1 et u_p^2 forment donc une base et toute solution H^1_{loc} se décompose comme une combinaison linéaire de ces deux solutions particulières.

(2) $k = 0$ ou $k = \pi$ mais par hypothèse $\lambda_n(k)$ est une valeur propre double. Il suffit donc de prendre une base de l'espace propre correspondant et de construire à partir de ces 2 vecteurs propres $\varphi_p^1(x)\, e^{\imath kx}$ et $\varphi_p^2(x)\, e^{\imath kx}$ les deux solutions particulières u_p^1 et u_p^2 comme expliqué précédemment. Elles forment donc une base et toute solution H^1_{loc} se décompose comme une combinaison linéaire de ces deux solutions particulières. ■

REMARQUE 1.4.33
Dans le cas où ω^2 est égale à une des valeurs propres simples de $A(0)$ et $A(\pi)$, on peut montrer (voir dans [Eastham (1973)]) que les solutions H^1_{loc} de ($\mathcal{P}^+$) sont combinaisons linéaires des

solutions particulières :

$$\begin{cases} u^1(x) = \varphi_p^1(x)\, e^{\imath kx} \\ u^2(x) = (x\varphi_p^1(x) + \varphi_p^2(x))\, e^{\imath kx} \end{cases}$$

où $k = 0$ ou $k = \pi$ et φ_p^1 et φ_p^2 sont des fonctions 1-périodiques. Nous n'utiliserons pas ce résultat.

Tout solution, et donc en particulier la solution « physique » que nous recherchons, est donc combinaison linéaire de deux modes de Floquet. Ces modes de Floquet sont l'équivalent en milieu périodique des ondes planes en milieu homogène : ce sont les fonctions propres généralisées de l'opérateur A. Sauf pour une quantité dénombrable de fréquences, nous montrons dans la suite qu'il y en a une de vitesse de groupe positive et une de vitesse de groupe négative.

Commençons par définir la vitesse de groupe. L'analyse des bandes spectrales de la proposition 1.4.6 et les notations introduites Définition 1.4.5, nous permettent alors de la définir.

DÉFINITION 1.4.34 (VITESSE DE GROUPE DES MODES DE FLOQUET)
Sauf pour une quantité dénombrable de fréquences ($\omega^2 \notin \{\mu_p, \nu_p\}_p$), la vitesse de groupe $v_n(k)$ d'un mode de floquet de la forme $u(x) = \varphi_p(x)\, e^{\imath kx}$ est définie sans ambiguïté par :

$$v_n(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k}(k) = \frac{1}{2}\lambda_n(k)^{-1/2}\lambda_n'(k)$$

où k est nécessairement dans l'intervalle $]-\pi, 0[$ ou dans l'intervalle $]0, \pi[$.

Pour $\omega^2 = \mu_{2p} \neq \mu_{2p+1}$ ou $\omega^2 = \nu_{2p-1} \neq \nu_{2p}$ alors k est nécessairement égal respectivement à 0 ou $\pm\pi$ et la vitesse de groupe $v_n(k) = 0$.

Pour $\omega^2 = \mu_{2p} = \mu_{2p+1}$, $k = 0$ et on définit une vitesse de groupe à droite et à gauche, opposée l'une de l'autre :

$$v_n(0^{\pm}) = \pm\frac{1}{2}\mu_{2p}^{-1/2}\, \lambda_n'(0^+) \neq 0.$$

Pour $\omega^2 = \nu_{2p-1} = \nu_{2p}$ alors $k = \pm\pi$, on définit la vitesse de groupe à gauche en π et à droite en $-\pi$ par :

$$v_n(\pm\pi^{\mp}) = \pm\frac{1}{2}\nu_{2p-1}^{-1/2}\, \lambda_n'(\pi^-) \neq 0.$$

REMARQUE 1.4.35
Notons que chaque bande spectrale $\lambda_n(k)$ étant paire, on a évidemment :

$$\forall k \in]0, \pi[, \quad v_n(-k) = -v_n(k).$$

ainsi sauf pour une quantité dénombrable de fréquences (qui correspondent aux valeurs propres simples de $A(0)$ et $A(\pi)$, c'est-à-dire un sous-ensemble de $\{\mu_n, \nu_n\}_n$), parmi les modes de floquet (1.42)*, l'un a une vitesse de groupe positive, l'autre a une vitesse de groupe négative.*

Revenons à notre méthode et cherchons à faire un lien entre notre critère et la vitesse de groupe des modes de Floquet. Pour la suite, rappelons quelques notations : $r_{\pm}(\varepsilon)$ sont les racines de

l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r_\varepsilon)$, avec pour tout $\varepsilon > 0$ $|r_+(\varepsilon)| < 1$ et pour tout $\varepsilon \geq 0$, $r_+(\varepsilon)r_-(\varepsilon) = 1$. Nous avons vu que ces fonctions ont une limite en 0 qui sont les racines de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$ de module 1 (puisque nous supposons ici que $\omega^2 \in \sigma(A)$). Il existe évidemment une fonction $k(\varepsilon) \in \mathbb{C}$ telle que :

$$r_+(\varepsilon) = e^{\imath k(\varepsilon)} \quad \text{avec } \mathrm{Re}\big(k(\varepsilon)\big) \in]-\pi,\pi] \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} k(\varepsilon) = k^* \in]-\pi,\pi]. \tag{1.43}$$

On a donc la racine $r^* = e^{\imath k^*}$ de $(\mathcal{E}^r)$ que nous recherchons et l'autre racine $r_-(0) = e^{-\imath k^*}$.

Comme les modes de Floquet sont H^1_{loc} et vérifient l'équation de Helmholtz (1.41), on montre facilement que, pour $k \in [0,\pi]$, $e^{\imath k}$ et $e^{-\imath k}$ sont solutions de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$. La racine que nous recherchons $r^* = e^{\imath k^*}$ avec $k^* \in]-\pi,\pi]$ est donc l'une de ces deux valeurs, nous avons donc la relation :

$$\text{Soit } k \in [0,\pi],\ \omega^2 = \lambda_n(k) \quad \Rightarrow \quad k^* \in \{k,-k\}. \tag{1.44}$$

Cette relation, pour $k = 0$ ou $k = \pi$, nous permet tout d'abord d'établir un lien simple entre la fréquence et l'hypothèse (H1).

PROPOSITION 1.4.36 (AU SUJET DE L'HYPOTHÈSE (H1))
Avec les notations introduites Définition 1.4.5, nous avons l'équivalence suivante :

$$\omega^2 \in \sigma_{0\pi} = \{\mu_n,\nu_n\}_n \quad \Longleftrightarrow \quad r_+(0) = r_-(0)$$

Nous montrons maintenant que le critère (1.36) qui permet de sélectionner la « bonne » racine entre $e^{\imath k^*}$ et $e^{-\imath k^*}$ permet de sélectionner, sauf pour une quantité dénombrable de fréquences, le mode de floquet, parmi les deux possibles (1.42), qui a une vitesse de groupe positive. Le critère (1.37) sélectionne quant à lui, le mode de Floquet qui a une vitesse de groupe négative.

THÉORÈME 1.4.37 (LIEN AVEC LA VITESSE DE GROUPE)
Supposons que $k^* \in]0,\pi[$ ou $k^* \in]-\pi,0[$ (c'est-à-dire $\omega^2 \notin \sigma_{0\pi}$) :

$$\lambda_n'(k^*)\left(\frac{\partial r_+}{\partial\varepsilon}(0)\overline{r_+(0)}\right) = -\omega, \tag{1.45}$$

et de la même façon :

$$\lambda_n'(-k^*)\left(\frac{\partial r_-}{\partial\varepsilon}(0)\overline{r_-(0)}\right) = -\omega.$$

■ **PREUVE:** Nous limitons la démonstration à r_+, la relation sur r_- pouvant être déduite du fait que pour tout $\varepsilon \geq 0$, $r_+(\varepsilon)r_-(\varepsilon) = 1$.

Tout d'abord, si $\omega^2 \notin \sigma_{0\pi}$ alors l'hypothèse (H1) est vérifiée et la fonction $r_+(\varepsilon)$ et donc la fonction $k(\varepsilon)$ sont différentiables. On peut alors dériver la relation (1.43) entre $r_+(\varepsilon)$ et $k(\varepsilon)$ par rapport à ε, on obtient en particulier pour $\varepsilon = 0$:

$$\frac{\partial r_+}{\partial\varepsilon}(0)\overline{r_+(0)} = \imath k'(0). \tag{1.46}$$

Il faut trouver ensuite le lien entre $\lambda_n'(k^*)$ et $k'(0)$. Comme la fonction $\varepsilon \mapsto k(\varepsilon)$ est continue, quand ε est assez petit, dans un voisinage complexe de k^*, démontrons que la fonction $k \mapsto \lambda_n(k)$ est prolongeable analytiquement sur un voisinage de k^*, avec $k^* \in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$.

Pour ce faire, nous nous appuyons sur la théorie développée notamment par Kato [Kato (1995)] pour l'étude spectrale d'opérateurs dépendant d'un paramètre (ici le nombre k), connue sous le nom de théorie de perturbations. On peut élargir la définition de $A(k)$ au cas où k est complexe et on peut montrer facilement que $A(k)$ est une fonction holomorphe de k. D'après le théorème de Kato-Rellich (voir [Kato (1995)]) théorème VII.3.9) il existe une suite de fonctions réelles positives $(\mu_n(k))_n$ toutes holomorphes sur un voisinage de $]-\pi,\pi[$ telles que pour un certain k, les $\mu_n(k)$ représentent toutes les valeurs propres répétées de $A(k)$. Elles sont ordonnées, non pas par ordre croissant, mais pour être analytique au voisinage de chaque k. Elles ne coïncident donc pas avec les $\lambda_n(k)$. Néanmoins si pour un certain k_0, $\lambda_n(k_0)$ est une valeur propre simple alors elle coïncide sans ambiguïté sur un voisinage de k_0 avec une valeur propre $\mu_{n_0}(k)$. Elle est donc analytique sur un voisinage de k_0.

Si $k^* \in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$, la Proposition 1.4.6 nous donne notamment que $\lambda_n(k^*)$ est une valeur propre simple, la fonction $k \mapsto \lambda_n(k)$ est donc analytique sur un voisinage V^* de k^*. Nous pouvons maintenant démontrer la relation suivante :

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \omega^2 + \imath\varepsilon\omega = \lambda_n(k(\varepsilon))$$

En effet, on rappelle que la fonction u_ε^r introduite dans (1.6) est définie par :

$$u_\varepsilon^r = e_\varepsilon^0 - e^{\imath k(\varepsilon)}\, e_\varepsilon^1 \in H^2(0,1).$$

Elle vérifie, par construction :

$$Au_\varepsilon^r = (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)u_\varepsilon^r \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_\varepsilon^r}{\partial x}(1) = e^{\imath k(\varepsilon)}\, \frac{\partial u_\varepsilon^r}{\partial x}(0)$$

mais comme $e^{\imath k(\varepsilon)}$ est solution de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}_\varepsilon^r)$, elle vérifie également

$$u_\varepsilon^r(1) = e^{\imath k(\varepsilon)}\, u_\varepsilon^r(0).$$

On en déduit que u_ε^r est vecteur propre de l'opérateur $A(k(\varepsilon))$ pour la valeur propre $\omega^2 + \imath\varepsilon\omega$. Etant donné que pour $\varepsilon = 0$, cette valeur propre est $\lambda_n(k^*)$, que $\lambda_n(k)$ est analytique sur le voisinage V^* de k^*, et qu'il existe un ε_0 assez petit tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, $k(\varepsilon) \in V^*$ alors pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ la valeur propre propre $\omega^2 + \imath\varepsilon\omega$ coïncide avec $\lambda_n(k(\varepsilon))$. On a donc en dérivant cette égalité par rapport à ε et en prenant la valeur en 0 :

$$k'(0)\ \lambda_n'(k^*) = \imath\omega \tag{1.47}$$

Les relations (1.46) et (1.47) combinées permettent de conclure. ■

En utilisant la Définition 1.4.34 de la vitesse de groupe et le Théorème précédent, nous obtenons les équivalences suivantes :

COROLLAIRE 1.4.38

$$\forall\, k^* \in]-\pi,0[\,\cup\,]0,\pi[, \qquad \left| \begin{array}{lll} \left(\dfrac{\partial r_+}{\partial \varepsilon}(0)\ \overline{r_+(0)}\right) < 0 & \Longleftrightarrow & v_n(k^*) > 0, \\ \left(\dfrac{\partial r_-}{\partial \varepsilon}(0)\ \overline{r_-(0)}\right) > 0 & \Longleftrightarrow & v_n(-k^*) < 0. \end{array} \right. \tag{1.48}$$

Le critère (1.36) nous permet donc de sélectionner la racine de l'équation caractéristique telle que la solution u^+ du problème $(\mathcal{P}^+)$ a une vitesse de groupe positive, l'autre racine générant une solution de vitesse de groupe négative. Nous venons donc de démontrer que notre critère est équivalent à un critère de positivité de la vitesse de groupe et non de la vitesse de phase. Pour souligner le fait que la vitesse de phase peut être négative, nous utilisons les propriétés des bandes spectrales de la Proposition 1.4.6 et du théorème précédent pour établir le résultat suivant.

COROLLAIRE 1.4.39
Si on fait varier ω^2 de manière croissante telle que $\omega^2 \in \sigma(A)$ alors r^* parcourt le cercle unité dans le sens trigonométrique. La vitesse de phase définie par k^*/ω est donc successivement positive et négative.

■ **PREUVE:** On utilise les notations de la Proposition 1.4.6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si ω^2 croit de μ_{2n-1} à ν_{2n-1}, comme λ'_{2n-1} est positive sur $(0,\pi)$, on a $r^* = \exp(\imath k^*)$ avec $k^* \in (0,\pi)$. Si ω^2 croit de ν_{2n} à μ_{2n}, comme λ'_{2n} est négative sur $(0,\pi)$, on a $r^* = \exp(\imath k^*)$ avec $k^* \in (-\pi,0)$. ■

Cependant le critère (1.36) ne permet de distinguer les deux racines, qu'à condition que (H1) soit vérifiée et qu'il soit, lui même, non nul (voir (1.35)). Nous pouvons démontrer maintenant le résultat du lemme 1.4.25 que nous rappelons ici :

LEMME 1.4.40 (RAPPEL DU LEMME 1.4.25)
Nous avons l'implication suivante :

$$r_+(0) \neq r_-(0) \quad \Rightarrow \quad Re\Big(\frac{dr_+}{d\varepsilon}(0)\,\overline{r_+(0)}\Big) \neq 0.$$

■ **PREUVE:** Pour tout $k^* \in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$, la vitesse de groupe $v_n(k^*)$ est finie non nulle, le Corollaire 1.4.38 et la relation (1.48) nous permet d'établir la relation

$$\frac{\partial r_+}{\partial \varepsilon}(0)\,\overline{r_+(0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^* \in \{0,\pi\} \quad \Rightarrow \quad r_+(0) = r_-(0).$$

Pour conclure, on utilise la Proposition 1.4.36. ■

Ainsi soit (H1) n'est pas vérifiée et les racines sont égales, soit (H1) est vérifiée et elles sont différentes : on peut alors utiliser le critère (1.36) pour sélectionner la « bonne » racine.

REMARQUE 1.4.41
Nous tenons à faire remarquer qu'il peut exister des fréquences $\omega^2 \in \sigma_{0\pi}$ pour lesquelles on pourrait prolonger par continuité la dérivée de $r_+(\varepsilon)$ en 0^+. C'est le cas des fréquences qui sont à l'intérieur du spectre, la relation (1.48) est alors toujours vraie. Pour les fréquences $\omega^2 \in \sigma_{0\pi}$ qui sont au bord du spectre, fréquences pour lesquelles la vitesse de groupe est nulle, la dérivée de $r_+(\varepsilon)$ en 0 tend vers l'infini. Nous ne rentrons pas dans le détail ici de ces considérations car dans ce cas les deux racines de l'équation caractéristique sont égales nous n'avons pas besoin de critère « supplémentaire » pour en sélectionner une.

Nous pouvons conclure notamment de cette section, que si les racines de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$ sont toutes les deux différentes de 1 ou -1, on choisit la « bonne » racine, en utilisant le critère (1.36) de positivité de la vitesse de groupe du mode de floquet induit. Sinon, les deux racines étant égales, il n'y a aucune ambiguïté pour définir r^*.

1.4.4.4 Caractérisation de la bonne solution du problème de demi-droite $(\mathcal{P}^+)$

La « bonne » racine r^* définie de manière unique, la caractérisation de la « bonne » solution de $(\mathcal{P}^+)$ est désormais évidente en assurant qu'elle est bien limite de la suite de solutions $u^+(\varepsilon)$ dans un sens à préciser. De même, on montre que la suite λ^+_ε a, elle aussi, une limite λ^+.

THÉORÈME 1.4.42 (CARACTÉRISATION DE LA BONNE SOLUTION QUAND $\omega^2 \in \sigma(A)$)
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$. La suite $(u_\varepsilon^+)_\varepsilon$ tend en norme H^1_{loc} vers une solution u^+ de $H^1_{loc}(0,+\infty)$ du problème :

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 u^+}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,\omega^2\,u^+ = 0, \quad \textit{pour } x > 0 \\ -\dfrac{\partial u^+}{\partial x}(0) = 1. \end{array} \right. \tag{$\mathcal{P}^+$}$$

La limite u^+ est caractérisée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u^+\Big|_{[n,n+1]} = (r^*)^n\,e^0 - (r^*)^{n+1}\,e^1. \tag{1.49}$$

La suite $(\lambda_\varepsilon^+)_\varepsilon$ tend vers un réel λ^+ caractérisé par :

$$\lambda^+ = u^+(0) = t^{00} - t^{10}\,r^* \tag{1.50}$$

■ **PREUVE:** Comme r^* est solution de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$ et e^0 et e^1 sont des fonctions $H^1(0,1)$, il est facile de montrer que u^+ définie par (1.49) est $H^1_{\text{loc}}(0,+\infty)$ et est solution du problème $(\mathcal{P}^+)$. On rappelle que pour tout $\varepsilon > 0$, u_ε^+ est caractérisée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_\varepsilon^+\Big|_{[n,n+1]} = (r_\varepsilon)^n\,e_\varepsilon^0 - (r_\varepsilon)^{n+1}\,e_\varepsilon^1.$$

D'après la Proposition 1.4.9, e_ε^0 et e_ε^1 tendent en norme $H^1(0,1)$ respectivement vers e^0 et e^1, d'après la proposition 1.4.24, r_ε a une limite que nous avons défini comme étant r^*. On en déduit alors que u_ε^+ tend dans tout les $H^1(n,n+1)$ vers u^+. Comme u^+ est en plus H^1_{loc}, on peut montrer facilement que cette convergence est dans H^1_{loc}.

Puisque la convergence s'effectue dans H^1_{loc}, les coefficients $\lambda_\varepsilon^+ = u_\varepsilon^+(0)$ ont donc bien une limite qui est $\lambda^+ = u^+(0)$. ■

1.4.4.5 Caractérisation de la bonne solution du problème $(\mathcal{P})$

Pour définir la « bonne » solution du problème $(\mathcal{P})$, nous passons par le problème $(\mathcal{P}^i)$ posé en domaine borné. Nous allons faire la démonstration dans le cas où le milieu est une perturbation d'un milieu périodique mais nous signalerons sous forme de remarque ce qui change dans le cas où les milieux de part et d'autre du « défaut » sont différents.

Nous allons tenter de répondre à la question du caractère bien posé de ce problème. Nous allons montrer que le problème est bien posé sauf pour une quantité dénombrable de fréquences :

- l'ensemble des fréquences propres du problème de Neumann, σ_{Neu} pour lesquelles les problèmes de cellule sont mal posés,
- l'ensemble dénombrable de fréquences suivant :

  $$\sigma_{0\pi} = \{\mu_n, \nu_n\}_n$$

  (voir notations Proposition 1.4.6), pour lesquelles c'est le problème $(\mathcal{P}^i)$, que nous étudions dans la suite, qui est mal posé.

REMARQUE 1.4.43
Dans le cas où les milieux de part et d'autre de Ω^i sont différents, on « double » l'ensemble de fréquences à exclure :

- *les problèmes de cellule à droite et à gauche étant différents, il faut exclure l'union des ensembles de fréquences propres des problèmes de Neumann σ^+_{Neu} et σ^-_{Neu},*
- *il faut étudier le spectre de deux opérateurs à coefficients périodiques (celui intervenant à droite et celui intervenant à gauche), ce qui va faire intervenir deux ensembles de fréquences :*

$$\sigma^+_{0\pi} = \{\mu^+_n, \nu^+_n\}_n \quad \textit{et} \quad \sigma^-_{0\pi} = \{\mu^-_n, \nu^-_n\}_n.$$

Nous donnons tout d'abord une propriété importante pour la suite sur les coefficients de NtD :

LEMME 1.4.44
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$. Si $\omega^2 \notin \sigma_{0\pi}$ alors la partie imaginaire de λ^+ et λ^- est strictement positive. Si $\omega^2 \in \sigma_{0\pi}$ alors leur partie imaginaire est nulle.

■ **PREUVE:** Prouvons le résultat pour λ^+, le résultat pour λ se prouvant de la même façon. Il suffit d'utiliser la caractérisation de λ^+

$$\lambda^+ = t^{00} - t^{10} r^*$$

Si $\omega^2 \notin \sigma_{0\pi}$ alors $r^* = e^{\imath k^*}$, avec $k^* \in]0, \pi[$, est de partie imaginaire non nulle. Comme les t^{ij} sont réels, on en déduit que λ^+ est de partie imaginaire non nulle. On utilise ensuite que λ^+ est la limite quand ε tend vers 0 de la suite λ^+_ε, qui d'après la Proposition 1.2.10, sont toutes de partie imaginaire strictement positive. λ^+ a donc nécessairement une partie imaginaire positive.

Si $\omega^2 \in \sigma_{0\pi}$ alors $r^* = \pm 1$ et donc λ^+ est nécessairement réel. ■

REMARQUE 1.4.45
Dans le cas où le milieu est une perturbation compacte d'un milieu périodique, on a même :

$$Im(\lambda^+) = Im(\lambda^-).$$

mais le résultat du lemme suffit pour la suite.

REMARQUE 1.4.46
Notons que, même si les milieux de part et d'autre du « défaut » correspondent au même milieu périodique, les deux coefficients λ^+ et λ^- ne sont pas nécessairement égaux (seules leurs parties imaginaires sont égales). Ils ne sont égaux que si l'indice ρ_p est symétrique par rapport au milieu de la cellule de périodicité. Par contre on peut montrer que les équations caractéristiques correspondant aux problèmes dans Ω^+ et Ω^- ont les mêmes coefficients, les racines r^+ et r^- sont donc identiques.

Ce résultat nous permet de montrer le théorème suivant sur le caractère bien posé du problème $(\mathcal{P}^i)$:

THÉORÈME 1.4.47 (CARACTÈRE BIEN POSÉ DU PROBLÈME $(\mathcal{P}^i)$)
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu} \cup \sigma_{0\pi}$. Il existe une unique solution u^i du problème $(\mathcal{P}^i)$.

■ **PREUVE:** L'équation de Helmholtz en domaine borné rentre dans le cadre de l'alternative de Fredholm donc il suffit de montrer l'unicité de la solution pour en déduire l'existence. Soit donc $v \in H^1$ une solution du problème suivant :

$$\left|\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho(x)\,\omega^2\, v &=& 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^i, \\ v - \lambda^- \dfrac{\partial v}{\partial x} &=& 0 \quad \text{en} \quad x = a^-, \\ v + \lambda^+ \dfrac{\partial v}{\partial x} &=& 0 \quad \text{en} \quad x = a^+, \end{array}\right.$$

et montrons que $v = 0$. La fonction v vérifie nécessairement la relation suivante :

$$\int_{\Omega^i} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dx - \omega^2 \int_{\Omega^i} \rho(x)|v(x)|^2\, dx + \frac{1}{\lambda^+}|v(a^+)|^2 + \frac{1}{\lambda^-}|v(a^-)|^2 = 0$$

Comme $\omega^2 \notin \{\mu_n, \nu_n\}_n$, λ^+ et λ^- sont de partie imaginaire strictement positive d'après le lemme 1.4.44 et $v(a^+) = v(a^-) = 0$. Comme ces deux constantes sont non nulles, on a également :

$$\frac{\partial v}{\partial x}(a^+) = \frac{\partial v}{\partial x}(a^-) = 0$$

d'après le théorème de Cauchy-Lipchitz, la solution v est nécessairement nulle. ■

REMARQUE 1.4.48
Dans le cas où les milieux de part et d'autre de Ω^i sont différents, le résultat précédent est toujours vrai à condition que l'on pose :

$$\sigma_{0\pi} = \sigma_{0\pi}^+ \cap \sigma_{0\pi}^-.$$

En effet, dans la preuve, si la partie imaginaire de λ^- s'annule alors que celle de λ^+ ne s'annule pas, on arrive à la même conclusion en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz en a^+.

REMARQUE 1.4.49
En ce qui concerne l'ensemble des fréquences exclues, nous avons expliqué Section 1.4.2.1 et Annexe A.1, une alternative pour ne pas avoir à exclure les fréquences propres du problème de Neumann, σ_{Neu}.

Quant à l'ensemble de fréquences, $\sigma_{0\pi}$, nous savons a priori seulement que notre démonstration concernant le caractère bien posé du problème $(\mathcal{P}^i)$ ne marche pas. Cela ne signifie pas que la famille u_ε, solutions de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ n'a pas de limite quand ε tend vers 0. Nous montrerons, dans le chapitre suivant, en fait que pour $\omega^2 \in \sigma_{0\pi}$ bord du spectre de A, la famille u_ε n'a pas de limite. On retrouve ce cas de figure dans un milieu homogène avec une fréquence nulle où les solutions u_ε se comportent en $1/\sqrt{\varepsilon}$ (voir remarque 1.1.1). En revanche si $\omega^2 \in \sigma_{0\pi}$ est à l'intérieur du spectre de A, la famille u_ε a bien une limite au sens H^1_{loc}. Nous reviendrons sur ce point et l'explication de ce cas dans le chapitre 3 (voir Remarques 3.2.13 et 3.2.21).

Nous avons donc montré Théorème 1.4.47 que le problème $(\mathcal{P}^i)$ avec conditions de NtD est bien posé à condition que la fréquence ω est telle que $\omega^2 \notin \sigma_{Neu} \cup \sigma_{0\pi}$. Pour démontrer complètement le principe d'absorption limite, il faut montrer que l'unique solution u^i du problème $(\mathcal{P}^i)$, quand il est bien posé, est bien la limite, dans un certain sens, quand ε tend vers 0 de la famille u^i_ε, solutions des problèmes $(\mathcal{P}^i_\varepsilon)$. Ceci est le résultat du théorème suivant. Pour la démonstration nous renvoyons le lecteur au Théorème 1.4.21 qui traite du cas où la fréquence ω est telle que $\omega^2 \notin \sigma(A)$ car les arguments sont exactement les mêmes.

THÉORÈME 1.4.50
Supposons $\omega^2 \notin \sigma_{Neu} \cup \sigma_{0\pi}$. Soit u^i l'unique solution du problème $(\mathcal{P}^i)$ alors on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u^i_\varepsilon - u^i\|_{H^1(\Omega^i)} = 0.$$

Les théorèmes 1.4.42, 1.4.47 et 1.4.21 nous permettent de définir de manière unique la solution « physique » du problème de Helmholtz $(\mathcal{P})$, limite des solutions des problèmes de Helmholtz avec absorption $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ dans le cas où $\omega^2 \in \sigma(A)$.

PROPOSITION 1.4.51 (« BONNE » SOLUTION DU PROBLÈME $(\mathcal{P})$ QUAND $\omega^2 \in \sigma(A)$)
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu} \cup \sigma_{0\pi}$. Soit u définie par :

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = u^i(x), & x \in \Omega^i \\ u(x) = -\dfrac{\partial u^i}{\partial x}(a^+)\ u^+(x), & x \geq a^+ \\ u(x) = +\dfrac{\partial u^i}{\partial x}(a^-)\ u^-(x), & x \leq a^- \end{array} \right. \tag{1.51}$$

où u^i est l'unique solution du problème $(\mathcal{P}^i)$, u^+ est l'unique solution de $\mathcal{P}^+$ et u^- est l'unique solution de $\mathcal{P}^-$. Alors u est la solution « physique » u du problème $(\mathcal{P})$: elle est solution de $(\mathcal{P})$ et limite dans H^1_{loc} de la famille u_ε, solutions des problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, quand ε tend vers 0.

1.5 Applications numériques dans le cas sans absorption

Nous présentons dans cette section un certain nombre de résultats numériques illustrant les résultats présentés dans la section précédente et validant la méthode développée. Nous commençons par expliquer l'algorithme de résolution dans le cas où la fréquence ω est telle que $\omega^2 \notin \sigma(A)$ que nous illustrons par des résultats numériques. Dans la deuxième section, nous aborderons le cas où la fréquence ω est telle que $\omega^2 \in \sigma(A)$. Nous expliquerons comment utiliser le critère supplémentaire (1.36) et comment il s'interprète pratiquement. Plusieurs simulations illustreront, de plus, le lien entre la bonne racine r^* et le spectre de l'opérateur à coefficients périodiques. Un certain nombre de validations de la méthode seront effectuées au fil de la troisième section. Nous finirons par un problème de réflexion-transmission entre deux milieux périodiques différents résolu en utilisant notre méthode.

Nous utilisons la même méthode de discrétisation que celle présentée à la section 1.3. Notre méthode ne présente aucune difficulté particulière de ce point de vue à condition que la fréquence ne soit ni une fréquence propre du problème de Neumann discrétisé ni une fréquence propre de l'opérateur périodique perturbé $\tilde{A}$, ce que nous supposons dans toute cette section.

1.5.1 Cas où $\omega^2 \notin \sigma(A)$

Dans ce cas de figure, nous avons démontré dans la section 1.4.3 que l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$ admet une unique racine r^* strictement inférieur à 1, qui est limite de la famille r_ε. Il suffit donc d'utiliser un algorithme similaire à celui donné dans le cas avec absorption dans la section 1.3.1. Dans ce cas, il n'y a aucune ambiguïté pour définir la solution « physique » du problème : elle ne dépend pas du problème avec absorption. La résolution de ce problème ne nécessite donc pas de résolution au préalable comme ce sera le cas pour $\omega^2 \in \sigma(A)$.

♢ *Algorithme de résolution du problème de demi-droite*

Supposons $\omega^2 \notin \sigma(A)$. On déduit de la section 1.4.3 l'algorithme de résolution du problème $(\mathcal{P})$:

1. on calcule les solutions e^0 et e^1 des problèmes de cellule (1.23) ;
2. on en déduit les coefficients de NtD locaux $(t^{00},\ t^{01},\ t^{10},\ t^{11})$ définis par (1.26) ;
3. on résout l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$, équation du 2nd degré, en ne sélectionnant que la solution r^* telle que $|r^*| < 1$;
4. on calcule λ^+

$$\lambda^+ = t^{00} - t^{10}\, r^*;$$

Nous présentons un exemple d'application de la méthode pour lequel les données ρ et f sont représentées dans la figure 1.8, ρ est dans ce cas-là une perturbation compacte d'une fonction périodique ρ_p (les milieux de part et d'autre du « défaut » sont issus du même milieu périodique). Le support de la perturbation et de la source f est inclus dans $]-0.5, 0.5[$.

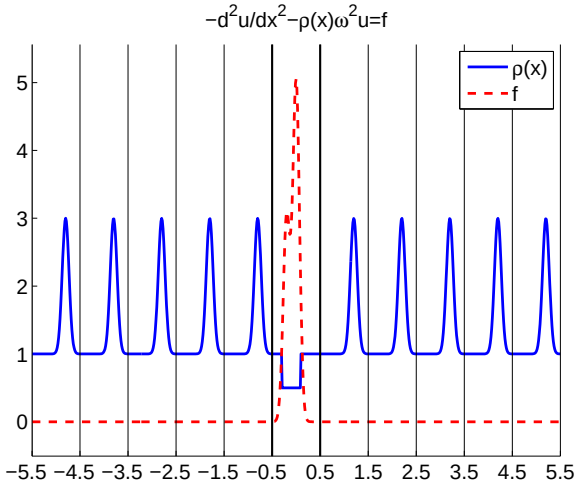


FIG. 1.8: Les fonctions $\rho = \rho_0 + \rho_p$ (en bleu) et f (en rouge) sur $[-5.5, 5.5]$.

♢ *Racines de l'équation caractéristique* $(\mathcal{E}^r)$ *: application numérique*

Nous considérons dans ce cas, la fréquence $\omega = 3$. Comme nous le vérifierons par l'étude du spectre de l'opérateur correspondant à ce milieu périodique ρ_p, cette fréquence est telle que $\omega^2 \notin \sigma(A)$. Etudions d'abord l'équation caractéristique correspondant au problème dans Ω^+. Nous représentons Figure 1.9 les deux racines de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$ (représentées par des cercles) : une est de module strictement inférieur à 1 (en rouge) et l'autre est de module strictement supérieur à 1 (en bleu) : il n'y a donc aucune ambiguïté pour définir la « bonne » solution de l'équation caractéristique qui serait limite du cas avec absorption. On remarque également, comme nous l'avons démontré au théorème 1.4.16 que r^* (ainsi que l'autre racine évidemment) est réel. On peut ensuite calculer le coefficient de NtD correspondant au problème $\mathcal{P}^+$ (notée en rouge près de r^*). Nous avons également noté en bleu le coefficient de NtD si nous avions choisi (par erreur) l'autre racine de l'équation. Comme assuré par le théorème 1.4.16, les deux coefficients sont réels (et positifs) : contrairement au cas avec absorption on ne peut plus voir de lien entre le choix de la « bonne » racine de l'équation et une propriété particulière du « bon » coefficient de NtD.

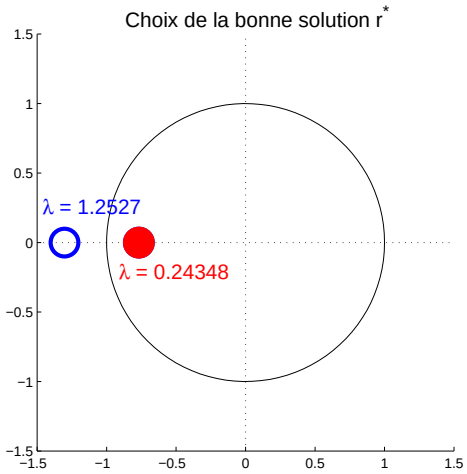


FIG. 1.9: Choix de la bonne racine de l'équation caractéristique pour $\omega^2 \notin \sigma(A)$ ($\omega = 3$) : le cercle rouge représente la bonne solution, le bleu la mauvaise.

♢ *Calcul de la solution de* $(\mathcal{P})$

On calcule donc λ^+ et λ^-. On peut alors résoudre le problème $(\mathcal{P}^i)$ avec conditions de NtD en utilisant la même discrétisation que dans le cas avec absorption à condition que la fréquence soit telle $\omega^2 \notin \sigma(\tilde{A})$ (sinon le problème est mal posé et la matrice de discrétisation non inversible).

Connaissant les solutions des problèmes de cellule $e^{0,+}$ et $e^{1,+}$ (resp. $e^{0,-}$ et $e^{1,-}$) pour Ω^+ (resp. Ω^-) et les valeurs r^+ (resp. r^-), nous pouvons reconstruire la solution u^+ (resp. u^-) du problème

$(\mathcal{P}^+)$ (resp. $(\mathcal{P}^-)$) en utilisant la relation (1.29) de reconstruction cellule par cellule :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1], \quad u^{\pm}(x+n) = (r^{\pm})^n\, e^{0,\pm}(x) - (r^{\pm})^{n+1}\, e^{1,\pm}(x).$$

Enfin pour reconstruire la solution dans tout $\mathbb{R}$, on utilise les relations de la Proposition 1.4.22. Nous représentons, Figure 1.10, la solution obtenue toujours dans le cas où $\omega = 3$.

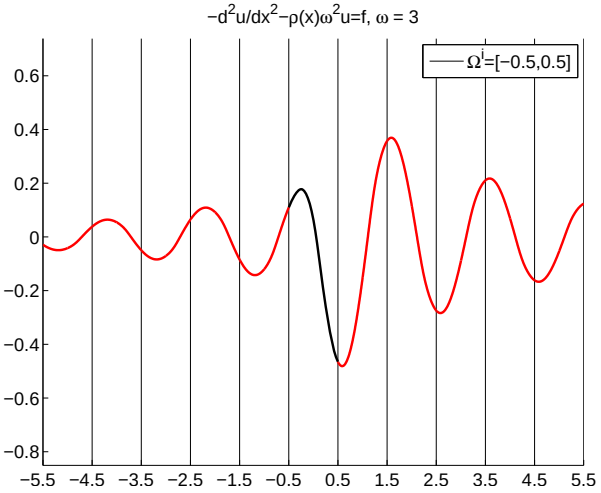


FIG. 1.10: Solution (en noir) du problème $(\mathcal{P}^i_\varepsilon)$ calculée sur le domaine borné $[-0.5, 0.5]$ avec les conditions de NtD en $x = -0.5$ et $x = 0.5$. À partir de la solution en $x = -0.5$ et $x = 1.5$, on prolonge (en rouge) sur $]-\infty, -0.5]$ et sur $[+0.5, +\infty[$ grâce aux relations (1.51).

1.5.2 Cas où $\omega^2 \in \sigma(A)$

Dans ce cas de figure, nous avons montré, Lemme 1.4.14, que l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$ admet deux racines de module 1. Pour pouvoir caractériser la « bonne » racine de l'équation c'est-à-dire celle qui est limite de la famille (r_ε) quand ε tend vers 0, il faut donc utiliser l'un des deux critères équivalents établis au Lemme 1.4.27 et au Théorème 1.4.30. La résolution de ce problème nécessite de nouvelles résolutions exprimant le fait que ce problème est limite de problèmes avec absorption.

♢ *Algorithme de résolution du problème de demi-droite*

On déduit de la section 1.4.4 l'algorithme de résolution du problème $(\mathcal{P})$

1. on calcule les solutions e^0 et e^1 des problèmes de cellule (1.23) ;
2. on en déduit les coefficients de NtD locaux $(t^{00},\ t^{01},\ t^{10},\ t^{11})$ définis par (1.26) ;
3. on résout l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$ en déterminant les deux racines de module 1 candidates. Soit les deux racines sont égales (égales à 1 ou -1), soit elles ne le sont pas et dans ce cas, pour sélectionner la bonne racine r^*, on peut utiliser l'une des deux méthodes :

(a) on résout les problèmes de cellule (1.25), on en déduit les coefficients de NtD correspondants par (1.28) et on utilise le critère du Lemme 1.4.27 ;
(b) on utilise le théorème 1.4.30 en calculant les intégrales intervenant dans (1.39) ;

4. on calcule λ^+

$$\lambda^+ = t^{00} - t^{10}\, r^*;$$

Nous présentons tout d'abord comme exemple d'application celui de la section précédente (voir Figure 1.8).

♢ ***Racines de l'équation caractéristique*** $(\mathcal{E}^r)$ ***: application numérique***

Dans le premier cas, la fréquence $\omega = 6$ et nous étudions l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$ correspondant au problème dans Ω^+. Nous représentons Figure 1.11 les deux racines de l'équation caractéristique (représentées par des cercles), toutes deux de module 1, mais ni égales à 1 ni à -1.

Pour caractériser la « bonne » solution, nous avons présentés deux méthodes équivalentes, résumées dans l'algorithme présenté précédemment (voir le point (3)). La méthode (b) utilise le critère (1.39) qui nécessite le calcul d'intégrale dépendant des solutions e^0 et e^1 mais qui ne requiert pas la résolution de problèmes de cellule supplémentaires. Nous allons lui préférer la méthode (a) qui a une signification pratique. En effet, à la remarque 1.4.28, nous avons noté que la propriété (1.36) signifie que la dérivée en 0 de la fonction $r_+(\varepsilon)$ représentée dans le plan complexe pointe vers l'intérieur du cercle unité alors que la propriété (1.37) signifiait que la dérivée en 0 de la fonction $r_-(\varepsilon)$ pointe vers l'extérieur du cercle unité. En revanche, cette méthode nécessite la résolution de problèmes de cellule supplémentaires (1.25). Ce calcul n'est toutefois pas très coûteux car ces problèmes de cellule ne diffèrent des problèmes de cellule de départ (1.23) que par leur second membre i.e. la matrice de discrétisation est la même. On utilise ensuite la relation (1.38) pour calculer la dérivée en 0 des fonctions r_+ et r_-. Nous ajoutons Figure 1.11 les dérivées en 0 calculées et représentons par le cercle rouge la racine sélectionnée.

Notons qu'un autre moyen pratique de sélectionner la « bonne » racine parmi les deux racines r et $\overline{r}$ est de rajouter un petit peu d'absorption aux problèmes de cellule et de résoudre l'équation caractéristique correspondante. On récupère alors la racine r_ε de module strictement inférieur à 1 et on sélectionne parmi r et $\overline{r}$ la racine la « plus proche » de r_ε. Ainsi, Figure 1.3 à gauche (section 1.3.1) nous avions déterminé la bonne racine r_ε de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r_\varepsilon)$ du problème dans Ω^+ avec absorption pour lequel le milieu périodique est le même que celui considéré ici. Nous vérifions que nous avons sélectionné la racine r^* qui est la plus proche de r_ε. Cependant ce critère n'est pas très rigoureux puisque la notion de « plus proche » est assez floue surtout quand les deux racines r et $\overline{r}$ de l'équation $(\mathcal{E}^r)$ s'approche de 1 ou -1. Nous verrons d'autres limitations à cette méthode au chapitre suivant dans le cas du guide.

La bonne racine r^* sélectionnée, on calcule ensuite le coefficient de NtD correspondant au problème Ω^+ : elle est écrite en rouge près de r^*. Nous avons également écrit en bleu la contante de NtD si nous avions choisi par erreur l'autre racine de l'équation. Nous remarquons, comme

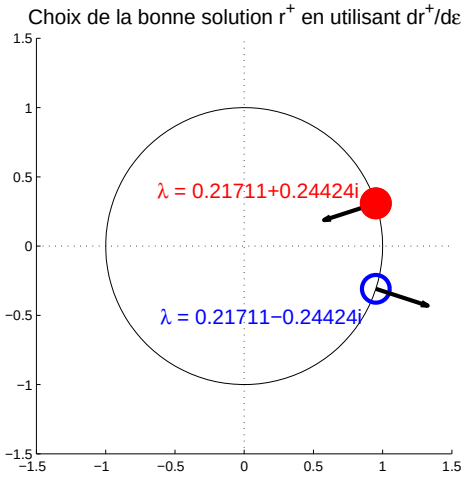


FIG. 1.11: Choix de la bonne racine de l'équation caractéristique pour $\omega^2 \in \sigma(A)$ ($\omega = 6$) : les flèches noires représentent les dérivées des fonctions $r_\pm(\varepsilon)$ en 0. Quand la dérivée pointe vers l'intérieur du cercle unité, c'est la bonne racine $r^* = r_+(0)$ (représentée par le cercle rouge) quand elle pointe vers l'extérieur c'est la mauvaise (représentée par le cercle bleu).

démontré dans le lemme 1.4.44, que , comme $r^* \notin \{1,-1\}$, les deux coefficients sont de partie imaginaire strictement positive : comme dans le cas avec absorption, le choix de la « bonne » racine de l'équation est liée au signe de la partie imaginaire du « bon » coefficient de NtD, λ^+.

Nous considérons ensuite le cas où la fréquence $\omega = 5.1719$ et étudions l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$ correspondant au problème dans Ω^+. Nous représentons, figure de gauche de 1.12, les deux racines de l'équation. C'est en fait une fréquence qui, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, est telle que ω^2 est dans le spectre de A mais se rapproche du bord du spectre. Plus précisément, elle se rapproche d'une valeur propre de $A(k)$ avec $k = 0$ ou encore d'un certain μ_n en reprenant les notations de la Proposition 1.4.6. Les deux racines sont donc très proches de 1. On montre alors que la dérivée de $r_\pm(\varepsilon)$ en 0 tend vers l'infini, le critère (1.36) est de moins en moins fiable, comme le prouve le zoom autour des 2 racines (figure 1.12 à droite) : les vecteurs représentant les dérivées sont de plus en plus petits et il est de moins en moins facile de déterminer quel est le vecteur qui pointe vers l'intérieur du cercle et quel est celui qui pointe vers l'extérieur.

♢ ***Lien avec le spectre de l'opérateur à coefficients périodiques*** A

Nous voulons illustrer ici le lien, expliqué Section 1.4.4.3, entre le choix de la « bonne » racine de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$ grâce au critère (1.36) et le spectre de l'opérateur A à coefficients périodiques ρ_p. Nous calculons tout d'abord le spectre de l'opérateur dans le cas où la fonction ρ_p correspond à la Figure 1.8. Nous calculons plus précisément quelques courbes de

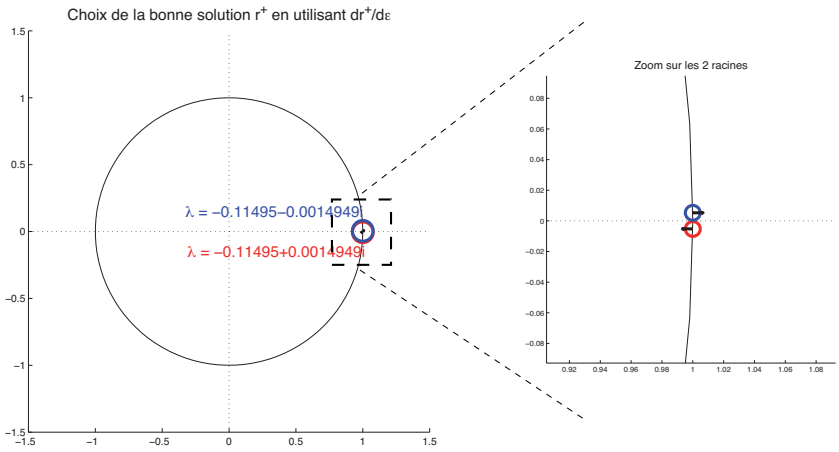


FIG. 1.12: Le critère (1.36) **de choix de la « bonne » racine n'est plus valable quand** ω^2 **tend vers une valeur de** $\sigma_{0\pi}$**.**

dispersion $k \mapsto \lambda_n(k)$ où, comme expliqué Section 1.4.1, pour tout $k \in]-\pi, \pi]$ les $\lambda_n(k)$ sont les valeurs propres ordonnées de manière croissante (voir (1.19)) de l'opérateur $A(k)$ défini dans (1.18). Pour calculer ces valeurs propres, nous utilisons simplement une discrétisation aux différences finies (nous rappelons que dans ce cas les valeurs propres discrètes tendent vers les valeurs propres en $\mathcal{O}(h^2)$ où h est le pas de discrétisation). Les 5 premières courbes de dispersion $k \mapsto \lambda_n(k)$ apparaissent Figure 1.13. Nous retrouvons les propriétés énoncées dans la Proposition 1.4.6 et illustrées Figure 1.7. Nous calculons ensuite la « bonne » racine de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^r)$ pour un intervalle de fréquences ($\omega \in [0.05, 12]$ c'est-à-dire $\omega^2 \in [0.0025, 144]$) : soit les racines de l'équation ne sont pas de module 1 et on choisit celle de module strictement inférieur à 1 (ce qui signifie que $\omega^2 \notin \sigma(A)$), soit elles sont de module 1 et on choisit celle qui satisfait le critère (1.36) (ce qui signifie que $\omega^2 \in \sigma(A)$). On note ici la « bonne » racine pour la fréquence ω, $r(\omega)$. On note également $k(\omega)$ l'argument complexe de $r(\omega)$ ($k(\omega) = -\imath \log(r(\omega))$) avec la convention $\mathrm{Im}(k(\omega)) \in]-\pi, \pi]$.

La partie réelle et la partie imaginaire de $r(\omega)$ en fonction de ω^2 dans le cas où $\omega^2 \in \sigma(A)$ sont représentées Figure 1.14 de gauche. On retrouve le résultat du Corollaire 1.4.39, c'est-à-dire que lorsque ω^2 augmente, $r(\omega)$ parcoure le cercle unité dans le sens trigonométrique, ce qui signifie que la vitesse de phase définie par $k(\omega)/\omega$ est donc successivement positive et négative. Figure 1.14 de droite, c'est la courbe ω^2 en fonction du module de $r(\omega)$ qui est représentée. En comparant avec Figure 1.13 représentant les courbes de dispersion dont l'image correspond aux bandes spectrales, on retrouve le Lemme 1.4.14. En effet, quand la racine $r(\omega)$ est de module 1 alors ω^2 est dans le spectre de A et lorsque $r(\omega)$ est de module strictement inférieur à 1 alors ω^2 est dans un « gap ».

Finalement, ω^2 est tracée en fonction de $k(\omega)$ dans le cas où $\omega^2 \in \sigma(A)$. Nous retrouvons alors une partie des bandes spectrales représentées Figure 1.13 : c'est la partie croissante de chaque courbe de dispersion $k \mapsto \lambda_n(k)$. Nous choisissons donc la « bonne » racine $r(\omega) = \exp(\imath k(\omega))$ qui

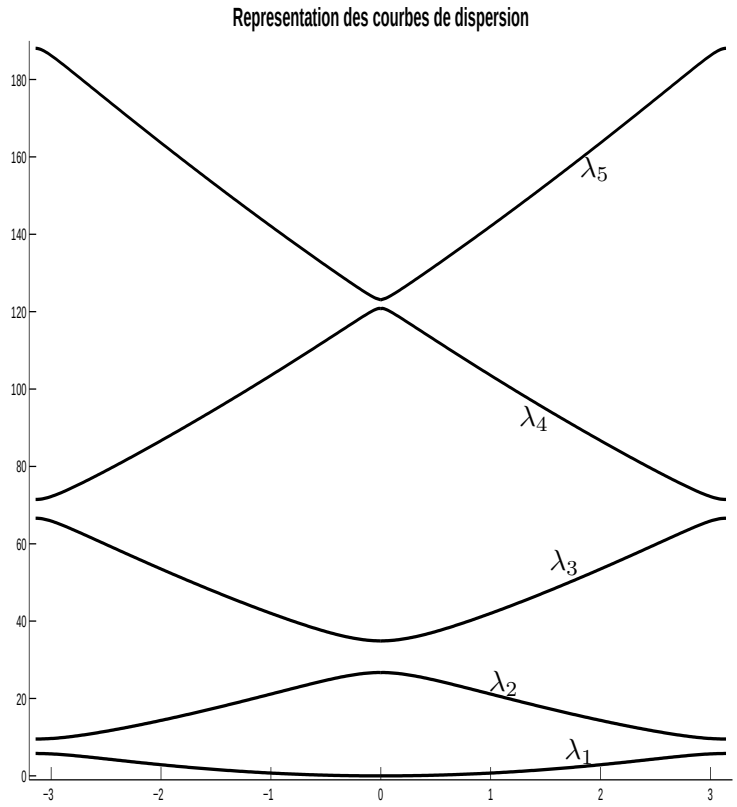


FIG. 1.13: Représentation des 5 premières courbes de dispersion $k \mapsto \lambda_n(k)$ correspondant à l'opérateur A dans le cas où la fonction ρ_p est celle représentée dans la Figure 1.8.

correspond au mode de floquet de vitesse de groupe positive. Nous retrouvons enfin, comme expliqué Proposition 1.4.6, que $k(\omega)$ est dans l'intervalle $]0,\pi[$ quand ω^2 est dans l'image d'une fonction λ_{2n+1} et il est dans l'intervalle $]-\pi,0[$ quand ω^2 est dans l'image d'une fonction λ_{2n}.

♢ *Calcul de la solution de* $(\mathcal{P})$

Après avoir déterminé les coefficients de NtD λ^- et λ^+ correspondants aux domaines respectifs Ω^- et Ω^+, on cherche à résoudre le problème $(\mathcal{P}^i)$ en utilisant la même discrétisation que dans le cas avec absorption à condition que la fréquence soit telle que $\omega^2 \notin \sigma_{0\pi}$.

Connaissant les solutions des problèmes de cellule $e^{0,+}$ et $e^{1,+}$ (resp. $e^{0,+}$ et $e^{1,+}$) pour Ω^+ (resp. Ω^-) et les valeurs r^+ (resp. r^-), nous pouvons reconstruire la solution u^+ (resp. u^-) du problème $(\mathcal{P}^+)$ (resp. $(\mathcal{P}^-)$) en utilisant la relation (1.49) de reconstruction cellule par cellule :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1], \quad u^{\pm}(x+n) = (r^{\pm})^n\, e^{0,\pm}(x) - (r^{\pm})^{n+1}\, e^{1,\pm}(x);$$

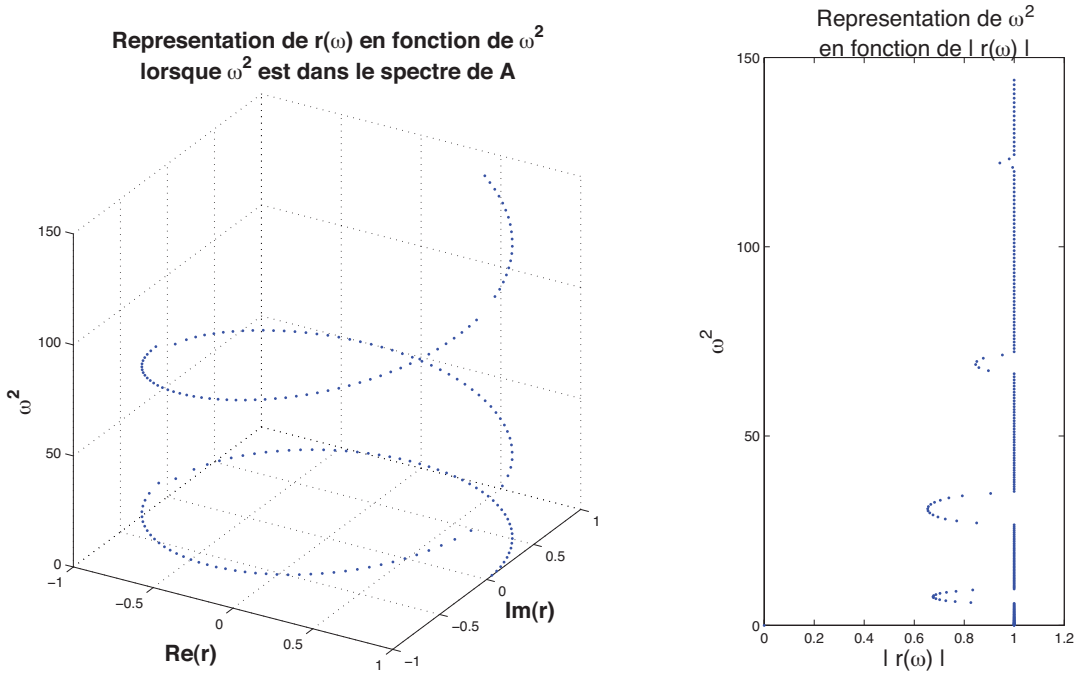


FIG. 1.14: Représentations de la fonction $r(\omega)$ en fonction de ω^2 dans le cas où $\omega^2 \in \sigma(A)$ (à gauche) et de ω^2 en fonction de $|r(\omega)|$ (à droite).

Enfin pour reconstruire la solution dans tout $\mathbb{R}$, on utilise les relations de la Proposition 1.4.51. Nous représentons, Figure 1.16, la solution obtenue dans le cas où $\omega = 6$.

1.5.3 Validations

Afin de valider la méthode présentée, nous avons considéré trois tests de validation :

- le premier est de comparer, dans le cas où le milieu est constant, la solution obtenue par la méthode à la solution analytique ;
- la deuxième validation est de vérifier que la solution obtenue est invariante du choix du domaine borné Ω^i et de la période du milieu périodique choisi ;
- enfin, la dernière validation est de vérifier le principe d'amplitude limite (voir Section 1.5.3.3 pour la définition).

1.5.3.1 Comparaison avec l'expression explicite du cas constant

La première validation consiste à comparer, dans le cas où le milieu est constant, les résultats obtenus par la méthode présentée dans ce chapitre est les résultats exacts obtenus par un calcul explicite, en particulier la constante r^+, le coefficient de NtD λ^+ et la solution u^+ du problème $(\mathcal{P}^+)$. Section 1.4.4.1, on rappelle avoir trouvé, dans le cas où $\rho_p = \alpha^2$:

$$r^* = e^{\imath\alpha\omega} \quad \text{et} \quad \frac{dr_+}{d\varepsilon}(0) = -\frac{r^*}{2}$$

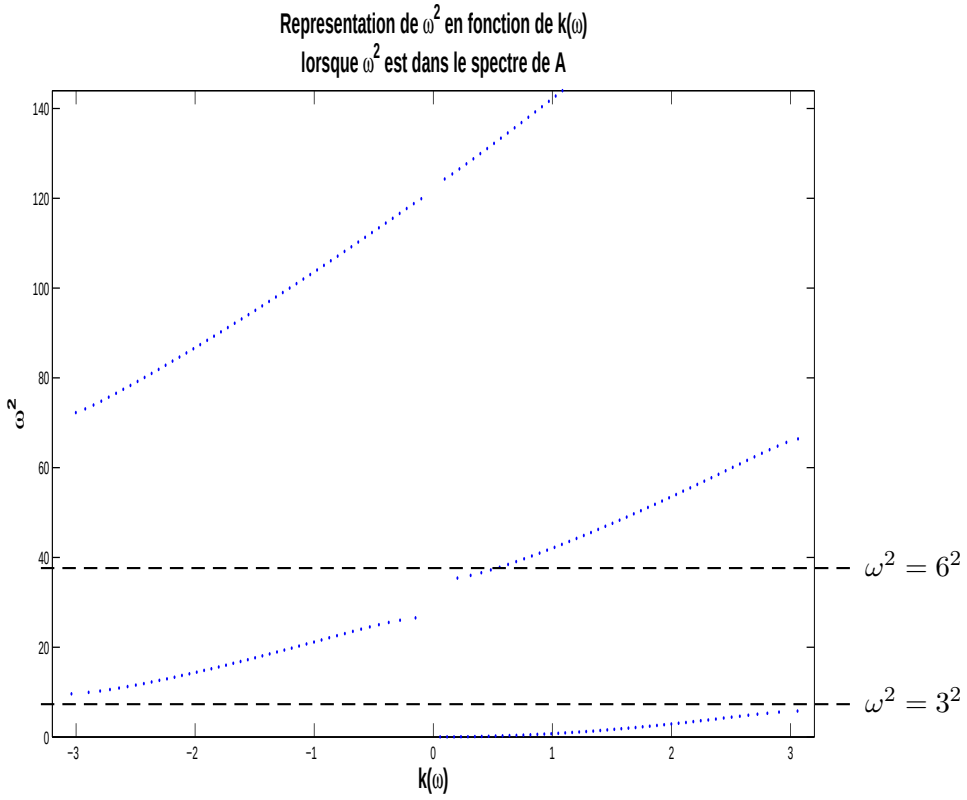


FIG. 1.15: Représentation de ω^2 en fonction de $k(\omega)$: on retrouve la partie croissante des courbes de dispersion présentées dans la figure 1.13.

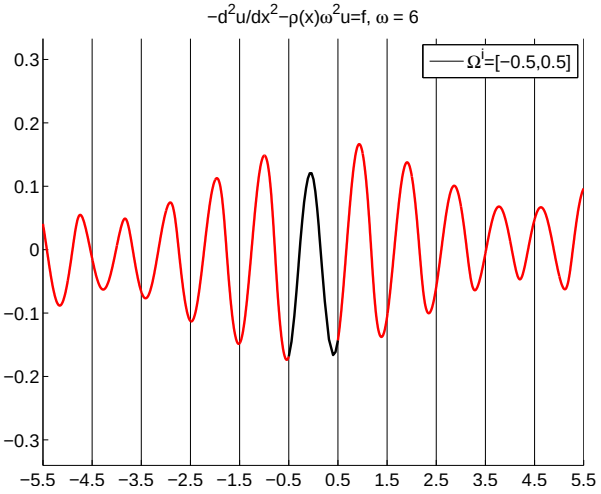


FIG. 1.16: Solution (en noir) du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ calculée sur le domaine borné $[-0.5, 0.5]$ avec les conditions de NtD en $x = -0.5$ et $x = 0.5$. À partir de la solution en $x = -0.5$ et $x = 1.5$, on prolonge (en rouge) sur $]-\infty, -0.5]$ et sur $[+0.5, +\infty[$ grâce aux relations (1.51).

et Section 1.1.2, on avait :

$$\lambda^+ = \frac{-1}{\imath\alpha\omega} \quad \text{et} \quad u^+(x) = \frac{-1}{\imath\alpha\omega} e^{\imath\alpha\omega(x-a^+)}.$$

L'erreur entre les calculs numériques et les calculs exacts sont de l'ordre de l'erreur de discrétisation : les résultats concordent parfaitement. nous avons choisi de ne pas les montrer et demandons au lecteur de nous faire confiance sur ce point.

1.5.3.2 Invariance par rapport aux périodes et au domaine Ω^i choisis

De même que pour les simulations avec absorption, la solution du problème $(\mathcal{P})$ calculée ne doit dépendre ni de la période choisie, ni du domaine borné où nous restreignons les calculs Ω^i. Nous pouvons donc considérer, par exemple pour Ω^+, des cellules de périodicité plus grande (de taille nL^+) et, dans ce cas, les solutions des problèmes de cellule (1.23) et les coefficients de NtD locaux correspondants seront différents. La solution de l'équation caractéristique retenue doit nécessairement être $(r^*)^n$ si r^* est celle que nous trouvons dans le cas où nous considérons la plus petite cellule de périodicité. Le coefficient de NtD λ^+ doit, lui, être indépendant de la taille de la cellule choisie ainsi que la solution u^+ du problème $(\mathcal{P}^+)$.

La solution du problème $(\mathcal{P})$ doit également être indépendante du choix du domaine Ω^i à condition qu'il contient bien le support de la source f et de la perturbation compacte ρ_0.

Figure 1.17, nous représentons la solution du problème $(\mathcal{P})$ pour les mêmes données que jusqu'à présent, pour une fréquence $\omega = 6$ mais dans le cas où on a choisi $\Omega^i =]-1.5, 1.5[$ et $L^+ = 2$ (voir la figure de gauche). Nous avons également vérifié que la racine de l'équation caractéristique obtenue pour Ω^+ est bien le carré de celle obtenue dans la section 1.5.2 (où nous avions choisi $L^+ = 1$) et que le coefficient λ^+ est inchangé. Nous trouvons exactement la même solution.

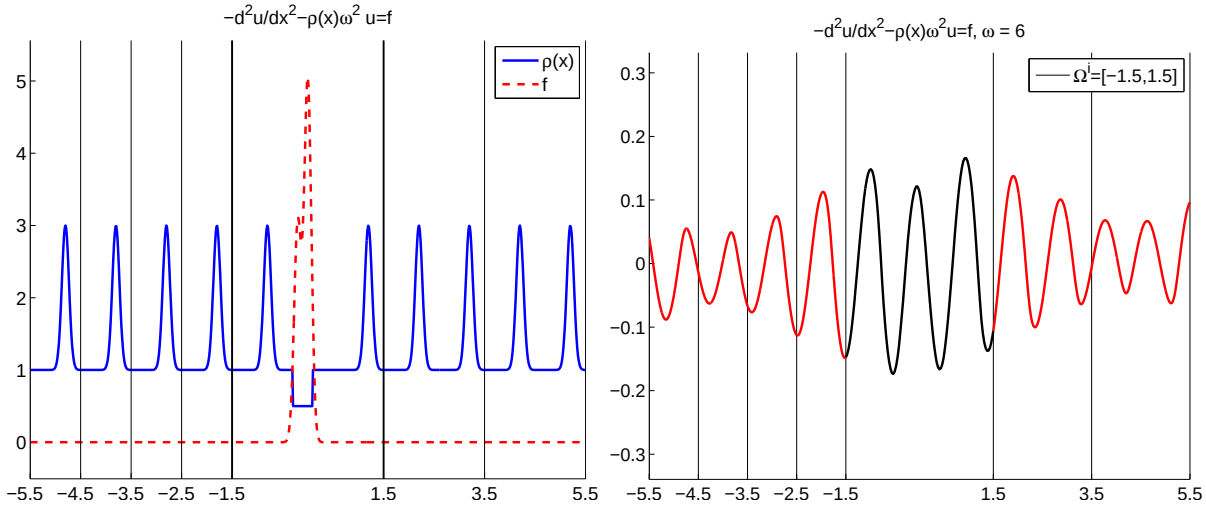


FIG. 1.17: Solution (à droite) du problème $(\mathcal{P})$ calculée dans le cas où $\Omega^i =]-1.5, 1.5[$ et $L = 2$ (voir à gauche).

1.5.3.3 Principe d'amplitude limite

Comme nous l'avons expliqué en l'introduction de ce chapitre le principe d'absorption limite pour l'équation de Helmholtz avec l'introduction de la solution du problème avec absorption permet « a priori » de récupérer le « sens du temps » présent dans l'équation des ondes mais perdu dans l'équation de Helmholtz. Le principe d'amplitude limite [Morgenröther & Werner (1988) ; Èĭdus (1969)] consiste à faire un lien entre la solution $U(x,t)$ de l'équation des ondes :

$$\left|\begin{array}{ll} -\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \rho(x)\,\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = f(x)e^{-\imath\omega t}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ U(x, t=0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(x, t=0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{array}\right. \tag{1.52}$$

et la solution u du problème de Helmholtz $(\mathcal{P})$, limite des solutions des problèmes avec absorption $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Plus précisément, il consiste à établir que, pour $\omega^2 \notin \sigma(\tilde{A})$, le comportement asymptotique quand $t \to +\infty$ de $U(x,t)$ est lié à u par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t\to+\infty} |U(x,t) - u(x)e^{-\imath\omega t}| = 0.$$

Dans le cas homogène, on montre aisément que si u est déterminée en utilisant le principe d'absorption limite alors le principe d'amplitude limite est vrai. La démonstration tient alors sur l'expression explicite de la solution U de l'équation des ondes. Dans le cas des milieux à indice périodique ou plus généralement des milieux à indice variable, la question reste ouverte et ne fait pas l'objet de notre étude.

Cependant, du point de vue purement numérique, si nous arrivons à montrer que U tend bien en temps long vers $u(x)e^{-\imath\omega t}$ alors nous aurons apporter une validation supplémentaire en ce qui concerne le calcul de la solution du problème de Helmholtz.

Nous calculons donc une approximation de la solution de l'équation 1.52 en utilisant une discrétisation aux différences finies par un schéma « saute-mouton ». Soit la solution (u_n^j) du problème

$$\left|\begin{array}{ll} -\dfrac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{dx^2} + \rho(j\,dx)\,\dfrac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{dt^2} = f(j\,dx)\,e^{-\imath\omega n dt}, & \forall j,\ \forall n \\ u_j^0 = 0, & \forall j, \\ u_j^1 = 0, & \forall j, \end{array}\right.$$

les paramètres de la discrétisation étant choisis de manière optimale. Sans entrer dans les détails de la discrétisation, signalons juste que nous avons choisi un domaine de calcul $[-M, M]$ assez grand et avons ajouté des conditions de Dirichlet artificielles aux bords du domaine. Ces conditions ne sont pas physiques mais nous pouvons admettre que tant que l'onde n'a pas atteint les bords ($t < M/\rho_+$), nous calculons une très bonne approximation de la solution exacte.

Nous présentons Figure 1.18, à gauche, les données ρ et f considérées et, à droite, la solution u obtenue en utilisant la méthode que nous avons détaillée dans ce chapitre.

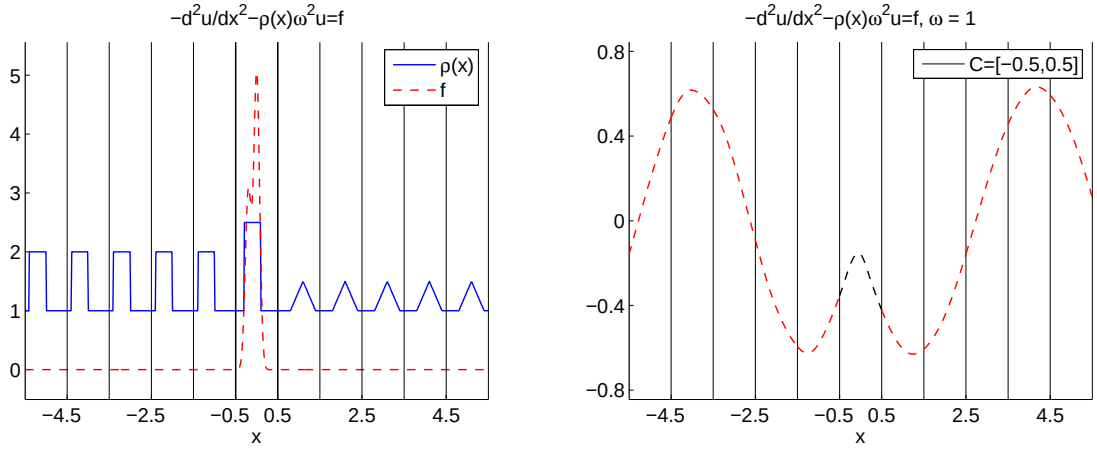


FIG. 1.18: Les fonctions $\rho(x)$ (en bleu) et $f(x)$ (en rouge) sont présentées à gauche, la solution du problème fréquentiel $(\mathcal{P})$ est à droite.

Figure 1.19, nous présentons pour différents instants [5] la fonction $u(x)e^{-\imath\omega t}$ (en bleu et en pointillé dans la figure du haut), la fonction $U(x,t)$ (en noir et en trait plein dans la figure du haut) et la source $F(x,t)$ (en rouge dans la figure du bas). Nous retrouvons alors le lien entre le comportement asymptotique de $U(x,t)$ et la solution calculée en utilisant notre méthode qui repose sur le principe d'absorption limite.

1.5.4 Problème de réflexion-transmission

Nous finissons ce chapitre par une application de cette méthode : celle du problème réflexion-transmission d'un premier milieu périodique dans un autre milieu périodique. Il n'y plus de source localisée, nous considérons ici une onde incidente. Le domaine où nous restreignons les calculs va être un domaine qui inclut la transition entre les 2 milieux.

On cherche donc la solution (que nous appelons champ total) du problème

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x)\,\omega^2\,u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.53}$$

où

$$\exists L_\pm, \quad \rho(x) = \rho_p^\pm(x) = \rho_p^\pm(x \pm L^\pm), \quad \pm x > \pm a^\pm,$$

et où

$$\left|\begin{array}{lll} u = & u_{\text{inc}} + u_{\text{diff}}, & x < a^-, \\ u = & u_{\text{trans}}, & x > a^+. \end{array}\right.$$

Le champ incident u_{inc} est solution du problème

$$-\frac{\partial^2 u_{\text{inc}}}{\partial x^2} - \rho_p^-(x)\,\omega^2\,u_{\text{inc}} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.54}$$

[5] chaque instant correspondant à une figure

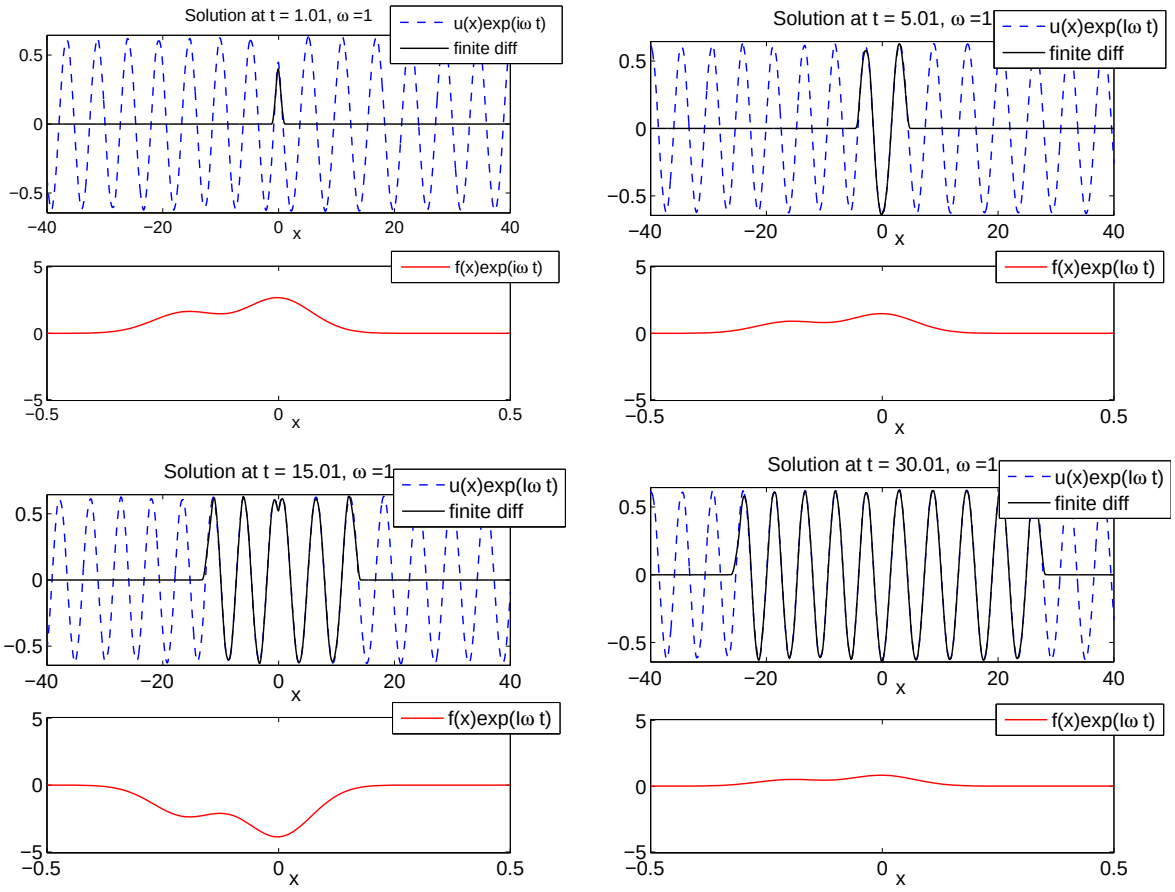


FIG. 1.19: Comparaison sur plusieurs périodes de la fonction (en bleu et en pointillé) Re$\big(u(x)e^{\imath\omega t}\big)$ où u est la solution du problème de Helmholtz et de Re$\big(U(x,t)\big)$ est la solution de l'équation des ondes (en noir et en trait plein) à différents instants : t=1 (en haut à gauche), 5 (en haut à droite), 15 (en bas à gauche) et 30 (en bas à droite). Pour chacun des instants, on représente la fonction Re$\big(f(x)\exp(\imath\omega t)\big)$ (en rouge) .

où

$$\exists L_-, \quad \rho_p^-(x+L^-) = \rho_p^-(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

C'est donc un vecteur propre généralisé de $A^- = -1/\rho_p^- \triangle$ pour la fréquence ω^2. On le choisit « venant » de $-\infty$, c'est-à-dire qu'on choisit le mode de Floquet de vitesse de groupe négative.

On montre que la restriction de u à $\Omega^i =]a^-, a^+[$ est solution du problème suivant :

$$\left|\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x)\,\omega^2\,u &=& 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^i \\ u - \lambda^- \dfrac{\partial u}{\partial x} &=& u_{\text{inc}} - \lambda^- \dfrac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial x} \quad \text{en} \quad x = a^-, \\ u + \lambda^+ \dfrac{\partial u}{\partial x} &=& 0 \quad \text{en} \quad x = a^+ \end{array}\right. \tag{1.55}$$

où λ^- et λ^+ sont les coefficients de NtD correspondant respectivement aux domaines Ω^- et Ω^+, dont le calcul a été développé dans ce chapitre.

On reconstruit u sur tout $\mathbb{R}$ grâce aux expressions suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll} u(x) = -\dfrac{\partial u}{\partial x}(a^+)\ u^+(x), & x \geq a^+ \\ u(x) = +(\dfrac{\partial u}{\partial x}(a^-) - \dfrac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial x}(a^-))\ u^-(x) + u_{\text{inc}}(x), & x \leq a^-. \end{array}\right.$$

où $u^\pm$ est solution du problème $(\mathcal{P}^\pm)$. Plaçons nous dans la situation où l'indice du milieu ρ

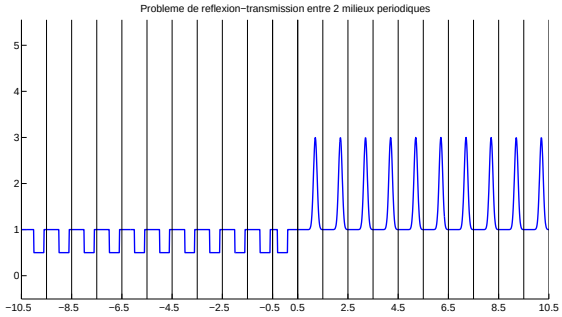


FIG. 1.20: La fonction indice ρ du milieu représenté sur $[-10.5, 10.5]$.

est celui de la figure 1.20. Tout d'abord, nous considérons le cas où la fréquence est $\omega = 6$ et représentons dans la figure 1.21 l'onde incidente. La fréquence est choisie de telle sorte que $\omega^2 \in \sigma(A^-) \cap \sigma(A^+)$ avec $A_\pm = -1/\rho_p^\pm \triangle$. Dans la figure 1.22, nous représentons alors le champ diffracté (en haut à gauche), le champ transmis (en haut à droite) et le champ total (en bas).

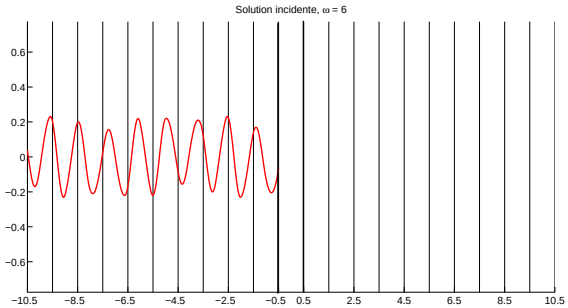


FIG. 1.21: Champ incident pour $\omega = 6$

Nous considérons ensuite le cas où la fréquence est $\omega = 3$ c'est-à-dire une fréquence pour laquelle $\omega^2 \in \sigma(A^-) \setminus \sigma(A^+)$. Nous représentons dans la figure 1.23 l'onde incidente. Dans la figure 1.24, nous représentons alors le champ diffracté (en haut à gauche), le champ transmis (en haut à droite) et le champ total (en bas). Nous retrouvons alors une des applications des milieux périodiques, celle de filtre, c'est-à-dire cette possibilité de laisser passer certaines fréquences et d'en stopper un intervalle d'entre elles.

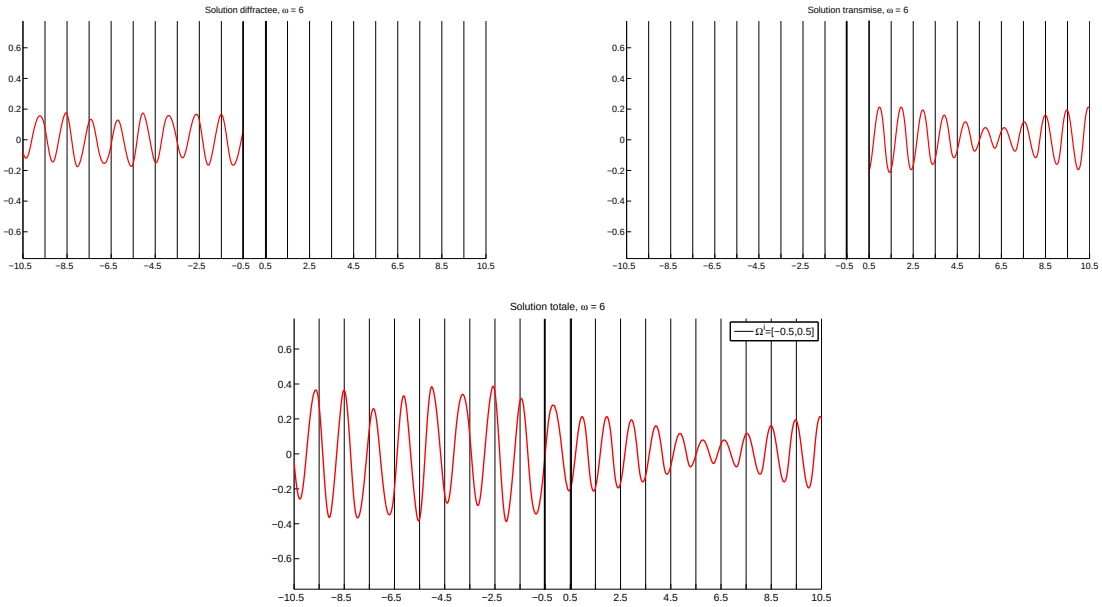


FIG. 1.22: Champs diffracté (en haut à gauche), transmis (en haut à droite) et total (en bas) pour $\omega = 6$

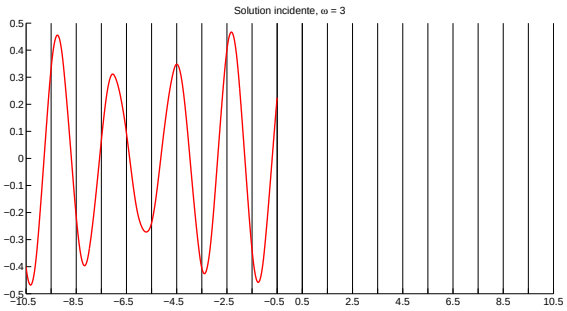


FIG. 1.23: Champ incident pour $\omega = 3$

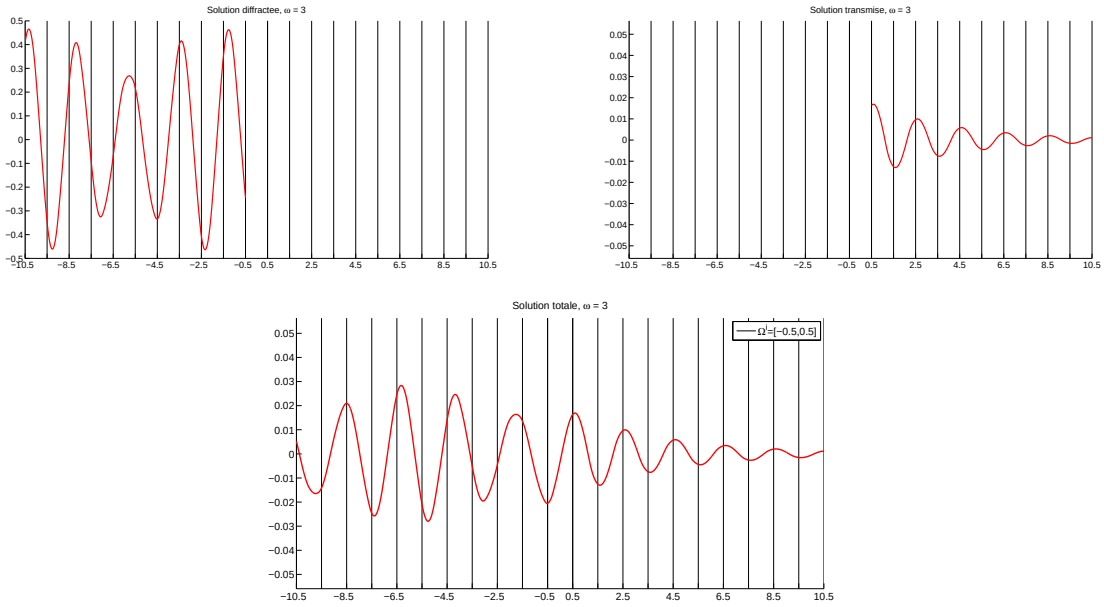


FIG. 1.24: Champs diffracté (en haut à gauche), transmis (en haut à droite) et total (en bas) pour $\omega = 3$

CHAPITRE

2

LE GUIDE PÉRIODIQUE LOCALEMENT PERTURBÉ : PROBLÈME AVEC ABSORPTION

RÉSUMÉ : Dans ce chapitre, nous présentons l'étude du guide d'onde périodique localement perturbé avec conditions de Neumann homogènes dans le cas avec absorption. Nous insistons sur le fait que la méthode se généralise à d'autres conditions aux bords (voir Remarque 2.1.3). Afin de caractériser les opérateurs NtD, il suffit de résoudre deux familles de problèmes aux limites elliptiques linéaires (2.17) et (2.18) posés sur une cellule de périodicité du milieu et déterminer un opérateur compact de rayon spectral strictement inférieur à 1 noté R_ε (voir le théorème 2.2.2 et la relation 2.19). Cet opérateur est appelé opérateur de propagation car il permet de décrire comment la solution du problème périodique « se propage » d'une interface à la suivante et dans un certain sens d'une cellule à la suivante. Il est de plus, d'après le Théorème 2.2.5, l'unique solution d'une équation de Riccati stationnaire ($\mathcal{E}_\varepsilon^R$) dont les « coefficients » sont eux-mêmes des opérateurs NtD locaux associés aux problèmes de cellule. La condition concernant le rayon spectral n'est pas standard : dans ce problème elle est liée au caractère L^2 de la solution.
Nous nous intéressons à la Section 2.2.5 au caractère diagonalisable de l'opérateur R_ε qui réduirait la résolution de l'équation de Riccati à celle d'un problème aux valeurs propres quadratiques usuel. Excepté le cas où l'indice du milieu ne dépend que de x pour lequel l'opérateur R_ε est diagonalisable, la question reste ouverte. Quant aux opérateurs NtD, en utilisant des résultats de la théorie des opérateurs non-autoadjoints rappelés Annexe B.2, nous montrons qu'il existe un système complet de vecteurs propres généralisés.
La discrétisation du problème s'effectue par éléments finis mixtes, elle respecte la périodicité du problème de telle sorte que tous les résultats précédents s'appliquent au cas discret. Nous en menons également l'étude d'erreur (voir Théorèmes 2.3.12, 2.3.26, 2.3.30 et 2.3.33). En conséquence, l'opérateur R_ε est approché en dimension finie par la solution d'une équation de Riccati discrète ($\mathcal{E}_{\varepsilon,h}^R$) avec contrainte. La nature de l'équation et la contrainte rendent la résolution de cette équation non standard : deux techniques numériques pour sa résolution sont utilisées et validées (voir Section 2.3.2.3). L'une passe par une méthode de diagonalisation, l'autre par un algorithme de Newton « modifié ».

Sommaire du chapitre

2.1 Introduction 85
2.1.1 Position du problème 85
2.1.2 Rappel : le cas du guide droit homogène 88
2.1.3 Retour au cas général 89
2.2 Construction des opérateurs NtD dans le cas avec absorption 89
2.2.1 Une première caractérisation de la solution 89
2.2.2 Résolution du problème de demi-guide 91
2.2.3 Caractérisation de l'opérateur R_ε et détermination de Λ_ε 94
2.2.4 Problème posé en domaine borné avec conditions de NtD 101
2.2.5 A propos de l'équation caractéristique 104
2.2.6 Propriétés de l'opérateur NtD Λ_ε^+ 107
2.2.6.1 Factorisation de l'opérateur T_ε^{00} 109
2.2.6.2 Propriétés spectrales de l'opérateur Λ_ε^+ 112
2.3 Résolution numérique dans le cas avec absorption 114
2.3.1 Approximation des opérateurs NtD locaux 116
2.3.1.1 Discrétisation des problèmes de cellule par des EFM 116
2.3.1.2 Exemple : EFM de Raviart-Thomas de plus bas degré 120
2.3.2 Approximation numérique de l'opérateur R_ε 122
2.3.2.1 Un problème de demi-guide discret 122
2.3.2.2 Définition de $R_{\varepsilon,h}$ - Equation caractéristique discrète 124
2.3.2.3 Deux algorithmes pour résoudre $(\mathcal{E}^R_{\varepsilon,h})$ 128
2.3.2.4 Retour à l'exemple des EFM de Raviart-Thomas de plus bas degré 136
2.3.2.5 Validation de la résolution de l'équation caractéristique discrète 137
2.3.3 Approximation de l'opérateur NtD Λ_ε^+ 139
2.3.3.1 Caractérisation de l'opérateur de NtD discret 139
2.3.3.2 Validation de cette caractérisation 141
2.3.4 Approximation de la solution intérieure 142
2.3.4.1 Discrétisation du problème intérieur par EFM 142
2.3.4.2 Exemple des éléments finis de Raviart-Thomas de plus bas degré 145
2.3.4.3 Application numérique 146
2.3.5 Approximation de la solution du problème de départ $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ 146
2.3.6 Validations 148
2.3.6.1 Comparaison avec l'expression explicite du cas constant 148
2.3.6.2 Invariance par rapport aux périodes et au domaine Ω^i choisis . . 150

2.1 Introduction

2.1.1 Position du problème

Nous étudions dans ce chapitre et le suivant le problème de la propagation des ondes dans un guide périodique localement perturbé (voir Figure 2.1 pour un exemple simple). Le domaine de propagation est donc borné dans une direction (la direction y dans notre exemple) et comme dans le premier chapitre, la géométrie et les propriétés des matériaux du guide sont périodiques suivant l'autre direction d'espace (la direction x), sauf dans un domaine borné. Nous montrons comment la méthode développée au chapitre précédent se généralise au cas des guides 2D.

REMARQUE 2.1.1
Il est facile de généraliser cette étude au cas des guides périodiques 3D, c'est-à-dire des domaines de propagation qui sont périodiques dans une direction et borné dans les deux autres.

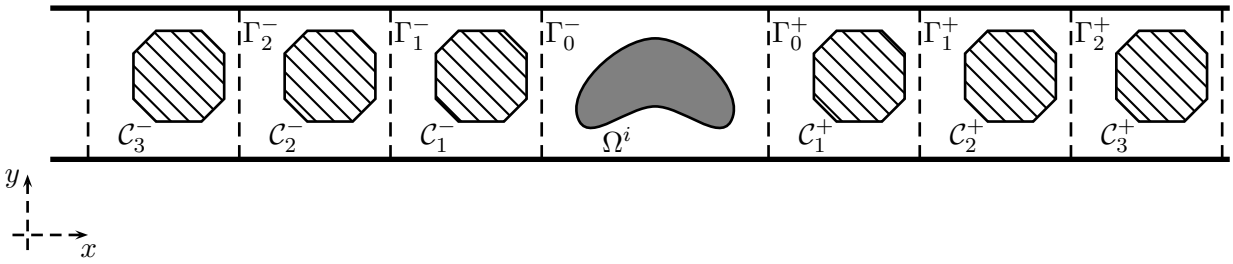


FIG. 2.1: Exemple de guide périodique localement perturbés : la géométrie et les propriétés du guide sont périodiques en dehors d'un domaine borné.

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'équation de Helmholtz avec absorption

$$-\triangle u_\varepsilon - \rho(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon$}$$

Nous faisons un certain nombre d' hypothèses :

1. Le domaine de propagation Ω est borné dans la direction y, infini dans la direction x et périodique en dehors d'un domaine borné $\Omega^i = \Omega \cap \{a^- \leq x \leq a^+\}$. Les deux sous-domaines infinis périodiques $\Omega^\pm = \Omega \cap \{\pm x \geq \pm a^\pm\}$ sont de la forme

$$\Omega^\pm = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{C}_j^\pm, \tag{2.1}$$

où les cellules de périodicité $\mathcal{C}_j^\pm$ sont définies par

$$\forall j \geq 1, \quad \mathcal{C}_j^\pm = \Omega \cap \big\{ \pm(a^\pm \pm (j-1)L) \leq \pm x \leq \pm(a^\pm \pm jL) \big\}. \tag{2.2}$$

Nous supposons les périodes isomorphes, nous notons donc par $\mathcal{C}$ la période de référence sans référence à l'exposant $\pm$ et à l'indice j. Les frontières verticales de ces périodes sont notées :

$$\Gamma_j^{\pm} = \left\{(x,y) \in \Omega, \quad x = a^{\pm} \pm jL\right\} \tag{2.3}$$

elles sont aussi isomorphes et nous notons par Γ la frontière verticale sans référence à la coordonnée $x = a^{\pm} \pm jL$ (voir Figure 2.1 pour les notations).

2. L'indice de réfraction satisfait les deux conditions suivantes :

$$\text{(H1)} \qquad 0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+$$

$$\text{(H2)} \qquad \left| \begin{array}{l} \rho_p(x \pm L, y \pm L) = \rho_p(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega \\ \text{Supp}(\rho - \rho_p) \subset \Omega^i \end{array} \right.$$

3. Le bord du domaine $\partial\Omega$ est C^1 par morceaux et continu Lipschitzien. Les conditions aux bords considérées doivent être compatibles avec la périodicité du problème dans Ω^+ et Ω^-. Nous supposerons dans ce chapitre, afin de simplifier la présentation (en particulier en ce qui concerne l'analyse fonctionnelle) que les conditions aux bords sont de type Neumann homogène

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure de $\partial\Omega$. Toutefois, notre étude se généralise facilement à d'autres conditions aux bords.(voir Remarque 2.1.3).

4. Le support du terme source f est inclus dans Ω^i

REMARQUE 2.1.2
[Au sujet du milieu] Nous allons voir que comme dans le cas 1D, notre méthode s'extrapole au cas des milieux qui présentent des périodicités différentes de part et d'autre d'un domaine borné

$$\rho(x) = \rho_p^{\pm}(x), \quad \pm x \ > \ a^{\pm}$$

où $\rho_p^{\pm}$ sont des fonctions périodiques différentes (de période $L^{\pm}$) et

$$\Omega^{\pm} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{C}_j^{\pm}$$

où les $\mathcal{C}_j^{\pm}$ sont définies par (2.2)*. Nous supposons que les périodes à droite (resp. à gauche) sont isomorphes à une cellule de périodicité de référence $\mathcal{C}^+$ (resp. $\mathcal{C}^-$), mais les cellules $\mathcal{C}^+$ et $\mathcal{C}^-$ peuvent être différentes. Nous donnons un exemple d'un tel milieu Figure 2.2.*

Dans le cas de l'équation de Helmholtz avec absorption étudié dans ce chapitre, il n'y a aucune difficulté de généraliser la méthode à des guides d'ondes plus généraux puisque la détermination des opérateurs NtD de chaque demi-guide se fait de manière indépendante l'une de l'autre et qu'il n'y a aucune ambigité sur le caractère bien posé du problème intérieur. Nous ferons cependant toutes les démonstrations avec les hypothèses de départ et montrerons des applications numériques du cas général. Notons que dans le cas limite, sans absorption, la généralisation est plus ardue (voir Chapitre 3).

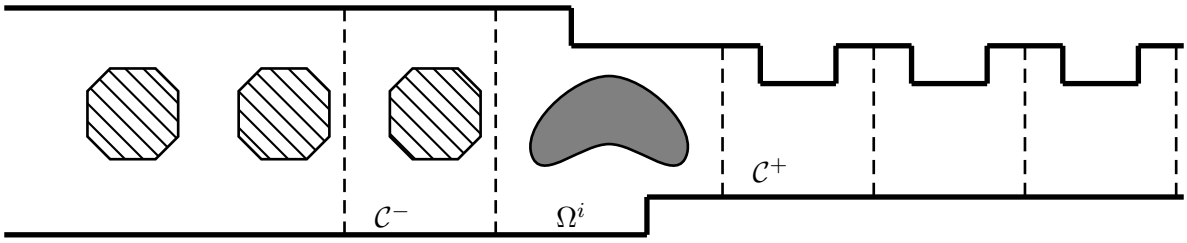


FIG. 2.2: Autre exemple de guide pour lequel la méthode s'applique : il présente des périodicités différentes de part et d'autre d'un domaine borné.

REMARQUE 2.1.3 (LES CONDITIONS AUX BORDS)
Nous considérons dans ce chapitre que les conditions aux bords sont de type Neumann homogène mais nous verrons que la méthode se généralise à d'autres conditions aux bords à condition qu'elles soient compatibles avec la périodicité du problème. Elle se généralise, en particulier, et ce sera important pour le chapitre 4, aux cas des conditions k-quasipériodiques. Ces conditions sont définies, seulement dans le cas où

$$\partial\Omega = \Sigma^- \cup \Sigma^+ \quad \textit{avec } \Sigma^\pm = \big\{(x, y^\pm), \quad x \in \mathbb{R}\big\}$$

par

$$\left| \begin{array}{rcll} u\Big|_{\Sigma^+} & = & e^{\imath k(y^+ - y^-)} & u\Big|_{\Sigma^-}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\Sigma^+} & = & e^{\imath k(y^+ - y^-)} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\Sigma^-}. \end{array} \right.$$

Notre but est de déterminer pour tout $\varepsilon > 0$, les deux opérateurs NtD

$$\Lambda_\varepsilon^\pm \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_0^\pm), H^{1/2}(\Gamma_0^\pm)),$$

tels que la restriction à Ω^i de u_ε, solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, que nous notons u_ε^i soit l'unique solution du problème :

$$\left| \begin{array}{rcll} -\triangle u_\varepsilon^i - \rho(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^i & = & f \quad \text{dans} & \Omega^i \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial \mathbf{n}} & = & 0 \quad \text{sur} & \partial\Omega \cap \Omega^i, \\ u_\varepsilon^i - \Lambda_\varepsilon^- \dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x} & = & 0 \quad \text{sur} & \Gamma_0^-, \\ u_\varepsilon^i + \Lambda_\varepsilon^+ \dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x} & = & 0 \quad \text{sur} & \Gamma_0^+. \end{array} \right. \qquad (\mathcal{P}_\varepsilon^i)$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure de $\partial\Omega$. Les opérateurs de NtD alors définis par

$$u_\varepsilon^\pm(\varphi)\Big|_{\Gamma_0^\pm} = \Lambda_\varepsilon^\pm\,\varphi \qquad (2.4)$$

où pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0^{\pm})$, $u_\varepsilon^{\pm}(\varphi)$ est l'unique solution H^1 du problème :

$$\left|\begin{array}{rcl} -\triangle u_\varepsilon^{\pm} - \rho_p(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^{\pm} &=& 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^{\pm} \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^{\pm}}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \cap \partial\Omega^{\pm}, \\ \mp\dfrac{\partial u_\varepsilon^{\pm}}{\partial x} &=& \varphi \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^{\pm} \end{array}\right. \qquad (\mathcal{P}_\varepsilon^{\pm})$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure de $\partial\Omega$.

Ainsi pour résoudre le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ posé en domaine infini Ω, il suffit de calculer les opérateurs NtD puis de résoudre le problème intérieur $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ posé en domaine borné, Ω^i pour déterminer la restriction u_ε^i de u_ε. Nous montrerons également comment reconstruire la solution u_ε dans tout le guide Ω.

2.1.2 Rappel : le cas du guide droit homogène

Fixons nous les idées avec le cas du guide droit homogène, qui est un cas très particulier de guide périodique et pour lequel nous pouvons effectuer des calculs explicites. Nous donnons ici les très classiques résultats, sans démonstration : ce sont des résultats très classiques, voir par exemple [Harari *et al.* (1998) ; Hagstrom (1999)] et pour des résultats analogues [Lenoir & Tounsi (1988)].

Considérons donc le cas où le milieu de propagation Ω est un guide droit

$$\Omega = \mathbb{R} \times \big]0,1\big[,$$

et où l'indice du milieu ρ_p est une constante :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \rho_p(\mathbf{x}) = \alpha^2, \quad (\alpha > 0).$$

On cherche dans ce cas la solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0^+)$, on s'intéresse à la seule solution $H^1(\Omega^+)$, $u_\varepsilon^+(\varphi)$ du problème défini par

$$\left|\begin{array}{rcl} -\triangle u_\varepsilon^{+} - \alpha^2\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^{+} &=& 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^{+} \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^{+}}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \cap \Omega^{+}, \\ -\dfrac{\partial u_\varepsilon^{+}}{\partial x} &=& \varphi \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^{+} \end{array}\right.$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure de $\partial\Omega^+$. Dans le cas homogène, on peut obtenir une expression explicite de u_ε^+ et Λ_ε^+ en recherchant les solutions du problèmes précédents qui sont à variables séparées. La solution H^1, $u_\varepsilon^+(\varphi)$ du problème précédent est donnée par :

$$u_\varepsilon^+(x,y) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\gamma_n^\varepsilon}\,\big\langle \varphi_n, \varphi \big\rangle\,\varphi_n(y)\,e^{-\gamma_n^\varepsilon (x-a^+)} \qquad (2.5)$$

où

– les φ_n définies par

$$\forall y \in [0,1], \quad \varphi_0(y) = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ \varphi_n(y) = \sqrt{2}\cos(\pi n\, y)$$

sont les vecteurs propres de l'opérateur laplacien transverse avec conditions de Neumann homogène :

$$A_y = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad D(A_y) = \left\{ \varphi \in H^2(0,1), \quad \varphi'(1) = \varphi'(0) = 0 \right\} \tag{2.6}$$

pour la valeur propre

$$\beta_n = n^2\pi^2.$$

La famille $\{\varphi_n,\ n \geq 0\}$ forme une base orthonormale de $H^{1/2}(]0,1[)$;

– γ_n^ε est la solution de partie réelle positive de l'équation :

$$(\gamma_n^\varepsilon)^2 - \beta_n + \alpha^2(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\gamma_n^\varepsilon = -\imath\sqrt{\alpha^2(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) - \beta_n}, \quad \mathrm{Im}\big(\sqrt{\alpha^2(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) - \beta_n}\big) > 0.$$

et où $< \cdot, \cdot >$ est le produit de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$.

On en déduit donc que l'opérateur $\Lambda_\varepsilon^+ \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_0^+), H^{1/2}(\Gamma_0^+))$ est diagonalisable dans la base $\{\varphi_n,\ n \geq 0\}$ et

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0^+), \quad \Lambda_\varepsilon^+ \varphi = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\gamma_n^\varepsilon} \left\langle \varphi_n, \varphi \right\rangle \varphi_n. \tag{2.7}$$

2.1.3 Retour au cas général

La méthode présentée dans ce chapitre reprend les mêmes idées que dans le cas monodimensionnel sauf que certains objets qui intervenaient alors (les coefficients de NtD $\lambda_\varepsilon^\pm$, les coefficients NtN $r_\varepsilon^\pm$ et les coefficients de de NtD locaux t_ε^{ij}) deviennent désormais des opérateurs. Les équations caractéristiques qui apparaissent pour caractériser les coefficients de NtN et qui sont de simples équations du second degré dans $\mathbb{C}$ dans le cas 1D deviennent des équations à valeurs opérateurs et dont les inconnues sont les opérateurs NtN.

Nous allons développer tout d'abord (Section 2.2) le principe de la méthode dans le cas de l'équation de Helmholtz avec absorption. L'analyse numérique de la méthode sera étudiée Section 2.3 pour le cas avec absorption.

2.2 Construction des opérateurs NtD dans le cas avec absorption

2.2.1 Une première caractérisation de la solution

On cherche à résoudre dans cette section l'équation de Helmholtz avec absorption dans Ω :

$$-\triangle u_\varepsilon - \rho(\mathbf{x})\ (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\ u_\varepsilon = f, \quad x \in \Omega. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon$}$$

D'après le lemme de Lax-Milgram, le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ admet une unique solution $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, pour tout $\varepsilon > 0$.

Pour résoudre numériquement $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ et caractériser sa solution, la méthode que nous allons présenter repose sur la proposition (triviale) suivante :

PROPOSITION 2.2.1
Le problème $\mathcal{P}_\varepsilon$ est équivalent au problème :

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u_\varepsilon^i - \rho(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^i &=& f & \textit{dans} \quad \Omega^i, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega \cap \Omega^i, \\ u_\varepsilon^i - \Lambda_\varepsilon^- \dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x} &=& 0 & \textit{sur} \quad \Gamma_0^-, \\ u_\varepsilon^i + \Lambda_\varepsilon^+ \dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x} &=& 0 & \textit{sur} \quad \Gamma_0^+. \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon^i$}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à $\partial\Omega$, dès que Λ_ε^+ et Λ_ε^-, opérateurs linéaires continus de $H^{-1/2}(\Gamma_0^+)$ dans $H^{1/2}(\Gamma_0^+)$ et de $H^{-1/2}(\Gamma_0^-)$ dans $H^{1/2}(\Gamma_0^-)$ respectivement, sont définis par

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0^\pm), \quad u_\varepsilon^\pm(\varphi)\Big|_{\Gamma_0^\pm} = \Lambda_\varepsilon^\pm\,\varphi \tag{2.8}$$

où $u_\varepsilon^\pm(\varphi)$ est l'unique solution dans $H^1(\Omega^\pm)$ du problème aux limites :

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u_\varepsilon^\pm - \rho_p(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^\pm &=& 0 & \textit{dans} \quad \Omega^\pm, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^\pm}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega \cap \Omega^\pm, \\ \mp\dfrac{\partial u_\varepsilon^\pm}{\partial x} &=& \varphi & \textit{sur} \quad \Gamma_0^\pm \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon^\pm$}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à $\partial\Omega$. Plus précisément si u_ε est solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ alors la restriction de u_ε à Ω^i est solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$. Réciproquement, si u_ε^i est solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$, on construit u_ε par :

$$\left|\begin{array}{ll} u_\varepsilon = u_\varepsilon^i, & \textit{dans } \Omega^i, \\ u_\varepsilon = u_\varepsilon^+\big(\varphi_\varepsilon^+\big), & \textit{dans } \Omega^+, \quad \textit{avec } \varphi_\varepsilon^+ = -\dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x}\Big|_{\Gamma_0^+}, \\ u_\varepsilon = u_\varepsilon^-\big(\varphi_\varepsilon^-\big), & \textit{dans } \Omega^-, \quad \textit{avec } \varphi_\varepsilon^- = +\dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x}\Big|_{\Gamma_0^-}. \end{array}\right. \tag{2.9}$$

la fonction u_ε ainsi construite est une fonction $H^1(\Omega)$ et est solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

Nous avons donc ramené la résolution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ à la résolution d'un problème posé en domaine borné, à condition d'avoir déterminé les opérateurs NtD, Λ_ε^+ et Λ_ε^-. La caractérisation de ces opérateurs nécessite la résolution de problèmes posés sur des demi-guides, Ω^+ et Ω^- et où la donnée ρ est égale à ρ_p périodique. Nous renvoyons le lecteur aux hypothèses faites au début de ce chapitre. Comme dans le cas monodimensionnel, nous allons exploiter l'hypothèse de périodicité de la fonction ρ_p dans ces milieux semi-infinis pour la caractérisation des opérateurs Λ_ε^+ et Λ_ε^-.

Nous allons développer dans la suite la méthode choisie pour caractériser l'opérateur Λ_ε^+ et la solution $u_\varepsilon^+(\varphi)$, pour toute donnée φ. Il va de soi que la méthode est la même pour déterminer l'opérateur Λ_ε^- et la solution $u_\varepsilon^-(\varphi)$ pour toute donnée φ.

2.2.2 Résolution du problème de demi-guide

Par souci de clarté et pour simplifier les expressions des équations et des solutions, nous allons supposer que $L = 1$.

Nous rappelons que la caractérisation de l'opérateur Λ_ε^+ passe par l'étude du problème pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0^+)$:

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u_\varepsilon^+ - \rho_p(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^+ &=& 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^+ & \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^+}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \cap \Omega^+, & (\mathcal{P}_\varepsilon^+) \\ -\dfrac{\partial u_\varepsilon^+}{\partial x} &=& \varphi \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^+ & \end{array}\right.$$

Nous rappelons que :

$$\forall (x,y) \in \Omega^+, \quad \rho_p(x+1) = \rho_p(x)$$

et que le demi-guide $\Omega^+ = \Omega \cap \{x \geq 0\}$ est de la forme

$$\Omega^+ = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{C}_j^+, \tag{2.10}$$

où les cellules de périodicité $\mathcal{C}_j^+$ sont définies par

$$\forall j \geq 1, \quad \mathcal{C}_j^+ = \Omega \cap \big\{(j-1) \;\leq\; x \;\leq\; j\big\}. \tag{2.11}$$

et sont isomorphes à $\mathcal{C}$, la période de référence, et où les frontières verticales de ces périodes sont notées :

$$\Gamma_j^+ = \big\{(x,y) \in \Omega, \quad x = j\big\} \tag{2.12}$$

et sont aussi isomorphes à Γ la frontière de référence (voir Figure 2.3 pour les notations). Grâce

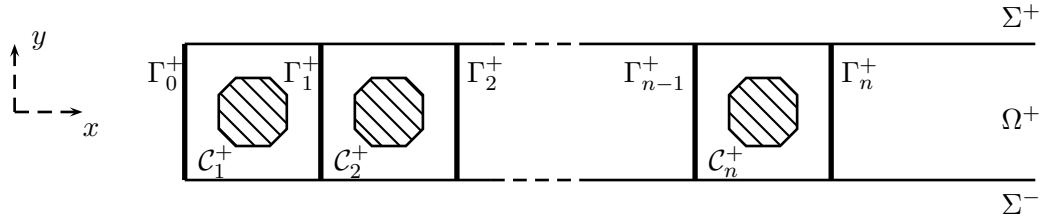


FIG. 2.3: Notations pour le demi-guide Ω^+.

au théorème de Lax-Milgram, on démontre aisément le théorème :

THÉORÈME 2.2.2
Pour tout φ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$, le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ admet une unique solution u_ε^+ dans $H^1(\Omega^+)$ qui possède en outre la régularité intérieure :

$$\forall \delta > 0,\ \forall s \in]1;2], \quad u_\varepsilon^+ \in H^s(\Omega_\delta^+), \quad \text{avec } \Omega_\delta^+ = \{(x,y) \in \Omega^+, x > \delta\}.$$

De plus, on a les estimations :

$$\begin{cases} \|u_\varepsilon^+\|_{H^1(\Omega^+)} \leq C \ \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \\ \|u_\varepsilon^+\|_{H^s(\Omega_\delta^+)} \leq C_{\delta,s} \ \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \quad \forall s \in]1;2]; \end{cases}$$

où C et $C_{\delta,s}$ sont des constantes strictement positives indépendantes de φ.

Dans le cas où ρ_p est constante, l'équation $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ est une EDP à coefficients constants. Il est donc facile de trouver une expression explicite de la seule solution H^1 de l'équation (voir section 2.1.2). Dans le cas général, on ne peut plus faire de calcul explicite. Néanmoins, la périodicité de ρ_p nous donne le résultat fondamental suivant :

LEMME 2.2.3
Il existe deux opérateurs linéaires et continus :

$$\begin{cases} S_\varepsilon \in \mathcal{L}\Big(H^{-1/2}(\Gamma), H^1(\mathcal{C})\Big), \\ R_\varepsilon \in \mathcal{L}\Big(H^{-1/2}(\Gamma)\Big), \end{cases}$$

tels que R_ε soit compact, injectif et ait un rayon spectral strictement inférieur à 1 et enfin tels que pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ la solution $u_\varepsilon^+(\varphi)$ de $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ satisfasse (voir figure 2.4) :

$$\forall j \geq 1, \qquad u_\varepsilon^+(\varphi)\Big|_{\mathcal{C}_j^+} = S_\varepsilon\Big((R_\varepsilon)^{j-1}\varphi\Big) \tag{2.13}$$

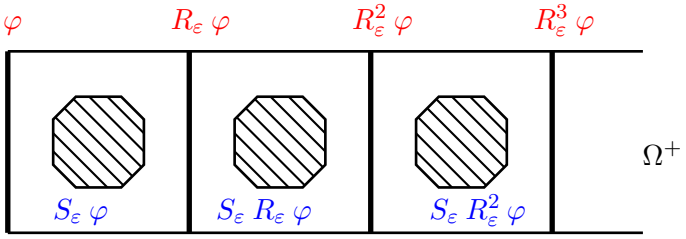


FIG. 2.4: Définitions des opérateurs S_ε et R_ε.

■ **PREUVE:** Les idées sont similaires au cas mono-dimensionnel.

On fixe $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Soit $u_\varepsilon^+(\varphi)$ l'unique solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$, on pose :

$$\begin{cases} S_\varepsilon : \ \varphi \mapsto S_\varepsilon\varphi = u_\varepsilon^+(\varphi)\Big|_{\mathcal{C}_1^+} \\ R_\varepsilon : \ \varphi \mapsto R_\varepsilon\varphi = -\dfrac{\partial}{\partial x} u_\varepsilon^+(\varphi)\Big|_{\Gamma_1^+} \end{cases} \tag{2.14}$$

Par construction, (2.13) est vrai pour $j = 1$. Il suffit de vérifier que c'est vrai pour $j = 2$ puis d'itérer le résultat pour $j \geq 2$. Introduisons la fonction v_ε définie par

$$\forall (x,y) \in \Omega^+, \quad v_\varepsilon(x,y) = u_\varepsilon^+(x+1,y).$$

Notons que : $\forall (x,y) \in \Omega^+$

$$-\triangle v_\varepsilon(x,y) - \rho_p(x,y)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,v_\varepsilon(x,y) = -\triangle u_\varepsilon^+(x+1,y) - \rho_p(x+1,y)\,(\omega^2+\imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^+(x+1,y) = 0,$$

du fait de la périodicité de ρ_p et

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \Omega^+.$$

Par construction et du fait de la définition de R_ε, on a également :

$$-\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}\Big|_{\Gamma_0^+} = R_\varepsilon\,\varphi$$

On en déduit que v_ε est solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ avec une trace de Neumann sur Γ_0^+ égale à $R_\varepsilon\,\varphi$ et par conséquent que

$$v_\varepsilon = u_\varepsilon^+(R_\varepsilon\,\varphi)$$

et en particulier

$$v_\varepsilon\Big|_{\mathcal{C}_1^+} = S_\varepsilon\Big(R_\varepsilon\,\varphi\Big).$$

Par ailleurs, par définition de v_ε, on a :

$$v_\varepsilon\Big|_{\mathcal{C}_1^+} = u_\varepsilon^+\Big|_{\mathcal{C}_2^+}.$$

On retrouve donc la propriété 2.13 pour $j=2$.

R_ε est compact car pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $R_\varepsilon\,\varphi$ est dans $H^s(\Gamma)$ pour tout $s < 1/2$ d'après le théorème 2.2.2 traitant de la régularité de $u_\varepsilon^+(\varphi)$ et le théorème de trace.

Montrons ensuite que R_ε est injectif par l'absurde. Supposons qu'il existe une fonction $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ telle que $R_\varepsilon\varphi = 0$. La solution $u_\varepsilon^+(\varphi)$ du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ vérifie alors le problème suivant :

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u_\varepsilon^+ - \rho_p(\mathbf{x})\,(\omega^2+\imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^+ &=& 0 \quad \text{dans} & \Omega_1^+ = \big\{(x,y)\in\Omega^+,\quad x\geq 1\big\} \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^+}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 \quad \text{sur} & \partial\Omega\cap\Omega_1^+, \\ -\dfrac{\partial u_\varepsilon^+}{\partial x} &=& 0 \quad \text{sur} & \Gamma_1^+ \end{array}\right.$$

On a donc, par unicité de la solution , $u_\varepsilon^+(\varphi) = 0$ dans Ω_1^+. En utilisant le théorème de prolongement unique [Colton & Kress (1998)], $u_\varepsilon^+(\varphi) = 0$ dans tout Ω^+ et en particulier sa trace de Neumann sur Γ_0^+ est nulle, soit $\varphi = 0$.

Enfin, montrons que le rayon spectral de R_ε est strictement inférieur à 1. On rappelle, la définition du rayon spectral, noté $\rho(\mathbb{R}_\varepsilon)$:

$$\rho(R_\varepsilon) = \sup\big\{|r|,\quad r\in\sigma(R_\varepsilon)\big\}$$

où $\sigma(R_\varepsilon)$ est le spectre de l'opérateur R_ε. R_ε étant compact, tout point du spectre autre que 0 est une valeur propre de R_ε.Soit donc une valeur propre r de R_ε, montrons que $|r| < 1$. Notons φ un vecteur propre associé, on a alors

$$\forall j \geq 1, \quad u_\varepsilon^+(\varphi)\Big|_{\mathcal{C}_j^+} = r^{j-1}\,S_\varepsilon^+\,\varphi.$$

Par suite :

$$\int_{\mathcal{C}_j^+} |u_\varepsilon^+(\varphi)|^2\,dx\,dy = |r|^{2(j-1)}\int_{\mathcal{C}_1^+}|S_\varepsilon^+\,\varphi|^2\,dx\,dy$$

et par conséquent,

$$u_\varepsilon^+(\varphi)\in L^2(\Omega^+) \iff \sum_{j=0}^{+\infty}|r|^j < +\infty \iff |r|<1.$$

■

Ce lemme est fondamental puisque la détermination de S_ε et R_ε permet la construction cellule par cellule de la solution u_ε^+, en utilisant la relation (2.13) et donc la détermination de l'opérateur Λ_ε^+. En fait, la seule connaissance de R_ε suffit à la détermination de toutes les inconnues du problème. En effet, supposons connaître l'opérateur R_ε. On voit aisément que pour chaque donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $S_\varepsilon\varphi$ est l'unique solution H^1 du problème

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle S_\varepsilon\varphi - \rho_p(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,S_\varepsilon\varphi &=& 0 & \text{dans} \quad \mathcal{C}_1^+ \\ \dfrac{\partial S_\varepsilon\varphi}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \cap \mathcal{C}_1^+, \\ -\dfrac{\partial S_\varepsilon\varphi}{\partial x} &=& \varphi & \text{sur} \quad \Gamma_0^+, \\ -\dfrac{\partial S_\varepsilon\varphi}{\partial x} &=& R_\varepsilon\varphi & \text{sur} \quad \Gamma_1^+. \end{array}\right. \tag{2.15}$$

$S_\varepsilon\varphi$ est donc l'unique solution d'un problème posé en domaine borné. On peut alors reconstruire u_ε^+ cellule par cellule en utilisant (2.13) et déterminer directement Λ_ε^+ puisque

$$\forall\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \Lambda_\varepsilon^+\,\varphi = S_\varepsilon\,\varphi\Big|_{\Gamma_0^+}. \tag{2.16}$$

Tout repose désormais, comme dans le cas monodimensionnel, sur la caractérisation de l'opérateur R_ε. Nous serons amenés à appeler souvent **opérateur de propagation** car il permet de décrire comment la solution du problème périodique « se propage » d'une interface à la suivante et dans un certain sens d'une cellule à la suivante. Pour l'instant, sa définition (voir (2.14)) repose encore sur la solution u_ε^+ d'un problème posé en domaine non borné. Dans la section suivante, nous donnons une autre caractérisation de R_ε.

2.2.3 Caractérisation de l'opérateur R_ε et détermination de Λ_ε

Nous montrons dans cette section que la caractérisation de l'opérateur R_ε ne nécessite que la résolution de **problèmes de cellule**. L'introduction de ces problèmes de cellule est très naturelle et liée à la remarque que nous venons de faire pour le calcul de S_ε (voir équations (2.15)). Introduisons tout d'abord le problème local général, deux fonctions $(\varphi, \psi) \in L^2(\Gamma)$ étant données,

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle v - \rho_p(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,v &=& 0 & \text{dans} \quad \mathcal{C}_1^+ \\ \dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \cap \mathcal{C}_1^+, \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x} &=& \varphi & \text{sur} \quad \Gamma_0^+ \\ +\dfrac{\partial v}{\partial x} &=& \psi & \text{sur} \quad \Gamma_1^+. \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}_{\varphi\psi}$}$$

Pour résoudre ($\mathcal{P}_{\varphi\psi}$) pour toute donnée (φ, ψ), il suffit de connaître $e_\varepsilon^0(\varphi)$ et $e_\varepsilon^1(\varphi)$, uniques solutions des problèmes de cellule suivants (voir les schémas Figure 2.5, les flèches en gras symbo-

lisent la dérivée normale) :

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle e^0_\varepsilon - \rho_p(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,e^0_\varepsilon &=& 0 \quad \text{dans} & \mathcal{C} \\ \dfrac{\partial e^0_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 \quad \text{sur} & \partial\mathcal{C} \setminus \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \\ -\dfrac{\partial e^0_\varepsilon}{\partial x} &=& \varphi \quad \text{sur} & \Gamma_0, \\ +\dfrac{\partial e^0_\varepsilon}{\partial x} &=& 0 \quad \text{sur} & \Gamma_1. \end{array}\right. \tag{2.17}$$

FIG. 2.5: Définitions des solutions $e^0_\varepsilon(\varphi)$ et $e^1_\varepsilon(\varphi)$ solutions respectives de (2.17) **et** (2.18)**.**

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle e^1_\varepsilon - \rho_p(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,e^1_\varepsilon &=& 0 \quad \text{dans} & \mathcal{C} \\ \dfrac{\partial e^1_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 \quad \text{sur} & \partial\mathcal{C} \setminus \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \\ -\dfrac{\partial e^1_\varepsilon}{\partial x} &=& 0 \quad \text{sur} & \Gamma_0, \\ +\dfrac{\partial e^1_\varepsilon}{\partial x} &=& \varphi \quad \text{sur} & \Gamma_1. \end{array}\right. \tag{2.18}$$

On a alors par linéarité :

$$v = e^0_\varepsilon(\varphi) \;+\; e^1_\varepsilon(\psi)$$

et en particulier pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $S_\varepsilon\,\varphi$ solution de (2.15) vérifie

$$S_\varepsilon\,\varphi = e^0_\varepsilon(\varphi) \;-\; e^1_\varepsilon(R_\varepsilon\,\varphi). \tag{2.19}$$

En utilisant ensuite (2.13) du Lemme 2.2.3, on peut également déterminer, pour toute donnée φ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$, $u^+_\varepsilon(\varphi)$ cellule par cellule (voir Figure 2.6 pour les deux premières cellules)

$$\forall j \geq 1, \quad u^+_\varepsilon(\varphi)\Big|_{\mathcal{C}^+_j} = e^0_\varepsilon(R^{j-1}_\varepsilon\,\varphi) \;-\; e^1_\varepsilon(R^j_\varepsilon\,\varphi). \tag{2.20}$$

Ces dernières relations résument le fait que $u^+_\varepsilon(\varphi)$ est solution de l'équation de Helmholtz cellule par cellule et que sa trace de Neumann sur chaque frontière Γ^+_j est la même suivant que l'on prend sa restriction sur $\mathcal{C}^+_j$ ou sa restriction sur $\mathcal{C}^+_{j+1}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(u^+_\varepsilon(\varphi)\big|_{\mathcal{C}^+_j}\Big)\Big|_{\Gamma^+_j} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(u^+_\varepsilon(\varphi)\big|_{\mathcal{C}^+_{j+1}}\Big)\Big|_{\Gamma^+_j} = -R^j_\varepsilon\,\varphi.$$

Pour exprimer complètement que $u^+_\varepsilon(\varphi)$ est l'unique solution H^1 à laplacien L^2 de l'équation de Helmholtz ($\mathcal{P}^+_\varepsilon$), il nous reste à exprimer le fait que la trace de Dirichlet de u^+_ε sur chaque frontière

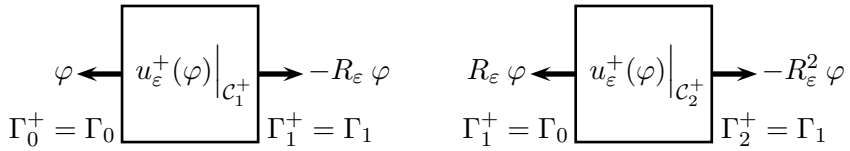


FIG. 2.6: La solution $u_\varepsilon^+(\varphi)$ dans les deux premières cellules.

Γ_j^+ est la même suivant que l'on prend sa restriction sur $\mathcal{C}_j^+$ ou celle sur $\mathcal{C}_{j+1}^+$. Par périodicité, l'exprimer sur $\mathcal{C}_1^+$ et $\mathcal{C}_2^+$ suffit :

$$\Big(u_\varepsilon^+(\varphi)\big|_{\mathcal{C}_1^+}\Big)\Big|_{\Gamma_1^+} = \Big(u_\varepsilon^+(\varphi)\big|_{\mathcal{C}_2^+}\Big)\Big|_{\Gamma_1^+}.$$

C'est cette relation qui va permettre de déterminer l'opérateur R_ε. En effet, en utilisant les relations (2.20) pour $j=1$ et $j=2$, l'égalité précédente donne R_ε solution de

$$e_\varepsilon^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_1} - e_\varepsilon^1(R_\varepsilon\,\varphi)\Big|_{\Gamma_1} = e_\varepsilon^0(R_\varepsilon\,\varphi)\Big|_{\Gamma_0} - e_\varepsilon^1(R_\varepsilon^2\,\varphi)\Big|_{\Gamma_0}. \tag{2.21}$$

Nous notons alors pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ (voir le schéma Figure 2.7) :

$$\left|\begin{array}{ll} T_\varepsilon^{00}\,\varphi = e_\varepsilon^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_0}, & T_\varepsilon^{01}\,\varphi = e_\varepsilon^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_1}, \\ T_\varepsilon^{10}\,\varphi = e_\varepsilon^1(\varphi)\Big|_{\Gamma_0}, & T_\varepsilon^{11}\,\varphi = e_\varepsilon^1(\varphi)\Big|_{\Gamma_1}. \end{array}\right. \tag{2.22}$$

Pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, les solutions des problèmes de cellule $e_\varepsilon^0(\varphi)$ et $e_\varepsilon^1(\varphi)$ sont dans

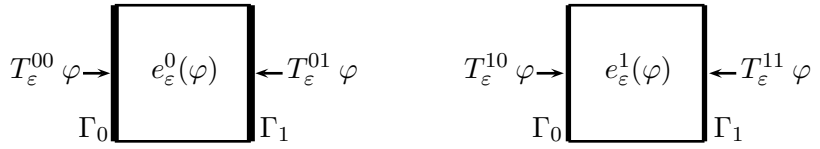


FIG. 2.7: Les opérateurs de NtD locaux T_ε^{ij}.

$H^1(\mathcal{C})$. En utilisant la linéarité de ces problèmes de cellule et le théorème de trace, on montre aisément que ces opérateurs T_ε^{ij} que nous appellerons opérateurs NtD locaux sont des opérateurs bornés, après identification entre Γ_0 et Γ_1, de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)\big)$. En général, ces opérateurs ne peuvent pas être calculés explicitement mais peuvent être aisément numériquement (voir Section 2.3.1.1). Ils présentent de plus des propriétés importantes, que nous utiliserons dans la suite.

Dans ce qui suit, si A est un opérateur fermé de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$, A^* représente son adjoint et $\overline{A}$ son complexe conjugué c'est-à-dire

$$\overline{A}\,\varphi \mapsto \overline{A}(\varphi) = \overline{A(\overline{\varphi})}.$$

PROPOSITION 2.2.4 (PROPRIÉTÉS DES OPÉRATEURS DE NTD LOCAUX)
Les opérateurs $(T_\varepsilon^{00}, T_\varepsilon^{01}, T_\varepsilon^{10}, T_\varepsilon^{11})$ *vérifient les propriétés suivantes quelque soient la fréquence* ω *et la donnée* ρ_p *:*

- *Les opérateurs* T_ε^{00} *et* T_ε^{11} *sont inversibles de* $H^{-1/2}(\Gamma)$ *dans* $H^{1/2}(\Gamma)$*. Ils ne sont pas autoadjoints mais sont « symétriques » c'est-à-dire*

$$\left(T_\varepsilon^{00}\right)^* = \overline{T_\varepsilon^{00}} \quad \textit{et} \quad \left(T_\varepsilon^{11}\right)^* = \overline{T_\varepsilon^{11}}$$

- *Les opérateurs* T_ε^{01} *et* T_ε^{10} *sont des opérateurs compacts injectifs de* $H^{-1/2}(\Gamma)$ *dans* $H^{1/2}(\Gamma)$*. Ils ne sont pas adjoints l'un de l' autre mais sont « symétriques » l'un de l'autre c'est-à-dire*

$$\left(T_\varepsilon^{01}\right)^* = \overline{T_\varepsilon^{10}} \quad \textit{et} \quad \left(T_\varepsilon^{10}\right)^* = \overline{T_\varepsilon^{01}}$$

- *La somme* $T_\varepsilon^{00} + T_\varepsilon^{11}$ *est également bijective de* $H^{-1/2}(\Gamma)$ *dans* $H^{1/2}(\Gamma)$*.*

■ **PREUVE:** (1) Pour montrer l'inversibilité de T_ε^{00} (de même pour T_ε^{11}), il suffit d'exhiber son inverse. Pour cela, on introduit pour tout ψ, la solution $f_\varepsilon^0(\psi)$ de l'équation de Helmholtz dans la cellule $\mathcal{C}$ qui satisfait des conditions de Neumann homogènes sur $\partial\mathcal{C} \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$ et les conditions suivantes sur Γ_0 et Γ_1 :

$$f_\varepsilon^0(\psi)\Big|_{\Gamma_0} = \psi \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial x} f_\varepsilon^0(\psi)\Big|_{\Gamma_1} = 0$$

Pour tout $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$, il existe une unique solution $f_\varepsilon^0(\psi) \in H^1(\mathcal{C})$. On note $\widetilde{T}_\varepsilon^{00}$ l'opérateur défini par :

$$\widetilde{T}_\varepsilon^{00} : \ \psi \ \mapsto \widetilde{T}_\varepsilon^{00}\,\psi = -\frac{\partial}{\partial x} f_\varepsilon^0(\psi)\Big|_{\Gamma_0}$$

C'est un opérateur de $\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma))$. Il existe un lien simple entre f_ε^0 et e_ε^0

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad f_\varepsilon^0\Big(e_\varepsilon^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_0}\Big) = e_\varepsilon^0(\varphi)$$

puisqu'ils vérifient l'équation de Helmholtz avec absorption, avec les mêmes conditions aux bords : des conditions de Neumann homogène sur $\partial\mathcal{C} \setminus \Gamma_0$ et conditions de dirichlet non homogène sur Γ_0 ($T_\varepsilon^{00}\,\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$). En prenant la trace de Neumann sur Γ_0 de l'expression précédente, on a donc, par définition de T_ε^{00} et $\widetilde{T}_\varepsilon^{00}$:

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \widetilde{T}_\varepsilon^{00}\Big(T_\varepsilon^{00}\,\varphi\Big) = \varphi.$$

On a de la même façon :

$$\forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad e_\varepsilon^0\Big(-\frac{\partial}{\partial x} f_\varepsilon^0(\psi)\Big|_{\Gamma_0}\Big) = f_\varepsilon^0(\psi)$$

soit

$$\forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad T_\varepsilon^{00}\Big(\widetilde{T}_\varepsilon^{00}\,\psi\Big) = \psi.$$

T_ε^{00} est donc inversible en tant qu'opérateur linéaire de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. De même pour T_ε^{11}.

Enfin, pour démontrer que T_ε^{00} est « symétrique », soit pour tout $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $v = \overline{e_\varepsilon^0(\overline{\psi})}$. v vérifie l'équation de Helmholtz suivante :

$$-\triangle v \ - \ \rho_p(\omega^2 - \imath\varepsilon\omega)v = 0$$

avec

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{C} \setminus \Gamma_0, \qquad \text{et} \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = \psi \quad \text{sur } \Gamma_0.$$

Par définition :

$$\overline{T_\varepsilon^{00}}(\psi) = \overline{T_\varepsilon^{00}\,\overline{\psi}} = v\Big|_{\Gamma_0}.$$

On écrit la formulation faible de l'équation vérifiée par v avec $e_\varepsilon^0(\varphi)$ comme fonction test et on en prend le conjugué

$$\int_{\mathcal{C}} \overline{\nabla v}\, \nabla e_\varepsilon^0(\varphi) - \rho_p(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\overline{v}\, e_\varepsilon^0(\varphi) = \int_{\Gamma_0} \overline{\psi}\, T_\varepsilon^{00}(\varphi)$$

On reconnaît pour le membre à droite une partie de la formulation faible de l'équation vérifiée par $e_\varepsilon^0(\varphi)$ avec v comme fonction test :

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla e_\varepsilon^0(\varphi)\, \overline{\nabla v} - \rho_p(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) e_\varepsilon^0(\varphi)\, \overline{v} = \int_{\Gamma_0} \varphi\, T_\varepsilon^{00}(\overline{\psi})$$

En faisant correspondre ces deux inégalités, on retrouve bien :

$$(T_\varepsilon^{00})^* = \overline{T_\varepsilon^{00}}.$$

De même pour T_ε^{11}.

(2) Par régularité elliptique intérieure, pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, pour tout $\delta \in]0;1[$, $e_\varepsilon^0(\varphi)$ est dans tous les $H^s(\mathcal{C}_\delta)$ pour tout $s \in [1;2]$ avec

$$\mathcal{C}_\delta = \mathcal{C} \cap \{x, \quad x \geq \delta\}.$$

En utilisant le théorème de trace et le fait que $H^{3/2}(\Gamma)$ s'injecte de manière compacte dans $H^{1/2}(\Gamma)$, on trouve bien que T_ε^{01} est un opérateur compact de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. De même pour T_ε^{10}. Pour l'injectivité, il suffit de supposer qu'il existe une fonction $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ telle que $T_\varepsilon^{01}\, \varphi = 0$. Dans ce cas, $e_\varepsilon^0(\varphi)$ est solution du problème de Helmholtz avec absorption, satisfait des conditions de Neumann homogènes sur $\partial\mathcal{C} \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$ et les conditions suivantes sur Γ_0 et Γ_1 :

$$\frac{\partial}{\partial x} e_\varepsilon^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_1} = 0 \quad \text{et} \quad e_\varepsilon^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_1} = 0.$$

D'après le théorème de prolongement unique, on déduit que $e_\varepsilon^0(\varphi) = 0$ dans $\mathcal{C}$ et donc que $\varphi = 0$.

Pour démontrer que

$$\left(T_\varepsilon^{01}\right)^* = \overline{T_\varepsilon^{10}}$$

On utilise les mêmes arguments que pour la preuve de $(T_\varepsilon^{00})^* = \overline{T_\varepsilon^{00}}$ mais en choisissant $v = \overline{e_\varepsilon^1(\overline{\psi})}$. De même pour $\left(T_\varepsilon^{10}\right)^* = \overline{T_\varepsilon^{01}}$.

(3) Pour démontrer que l'opérateur $T_\varepsilon^{00} + T_\varepsilon^{11}$ est inversible, prouvons tout d'abord que c'est un opérateur de type Fredholm c'est-à-dire qu'il est la somme d'un opérateur compact et d'un opérateur inversible. Pour cela nous allons montrer que T_ε^{00} et T_ε^{11} sont de type Fredholm. Il suffit d'écrire pour cela

$$T_\varepsilon^{00} = G_\varepsilon^0 + H_\varepsilon^0$$

où

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad G_\varepsilon^0\, \varphi = g_\varepsilon^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_0}$$

avec $g_\varepsilon^0(\varphi)$ l'unique solution H^1 de

$$\left| \begin{array}{l} -\triangle g_\varepsilon^0 + g_\varepsilon^0 = 0, \quad \text{dans } \mathcal{C}, \\ -\dfrac{\partial}{\partial x} g_\varepsilon^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_0} = \varphi \qquad \text{et} \qquad \dfrac{\partial}{\partial x} g_\varepsilon^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_1} = 0, \end{array} \right.$$

et $h_\varepsilon^0(\varphi)$ l'unique solution H^1 de

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad H_\varepsilon^0\, \varphi = h_\varepsilon^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_0}$$

avec

$$\left|\begin{array}{l} -\triangle h_\varepsilon^0 + h_\varepsilon^0 = \big(\rho_p(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) + 1\big)\, e_\varepsilon^0(\varphi), \quad \text{dans } \mathcal{C}, \\ -\dfrac{\partial}{\partial x} g_\varepsilon^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_0} = \varphi \qquad \text{et} \qquad \dfrac{\partial}{\partial x} g_\varepsilon^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_1} = 0, \end{array}\right.$$

En utilisant la même démonstration qu'au (1) de cette preuve concernant l'inversibilité de T_ε^{00}, on montre que G_ε^0 est inversible de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. De plus, $e^0(\varphi)$ étant dans $H^1(\mathcal{C})$, h_ε^0 est au moins dans $H^2(\mathcal{C})$. Comme $H^{3/2}(\Gamma)$ s'injecte de manière compacte dans $H^{1/2}(\Gamma)$, H_ε^0 est un opérateur compact de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{3/2}(\Gamma)$. On montre de la même façon que T_ε^{11} est un opérateur de type Fredholm. La somme est donc également de type Fredholm. Pour montrer l'inversibilité, il suffit donc de calculer l'injectivité.

Pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, écrivons les formulations variationnelles des EDP (2.17) et (2.18) en prenant comme fonctions test des foncions particulières, respectivement $e_\varepsilon^0(\varphi)$ et $e_\varepsilon^1(\varphi)$:

$$\begin{array}{rcl} \int_\Gamma \varphi\, \overline{T_\varepsilon^{00}\varphi} & = & \int_{\mathcal{C}} |\nabla e_\varepsilon^0(\varphi)|^2 - \rho_p(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)|e_\varepsilon^0(\varphi)|^2 \\ \int_\Gamma \varphi\, \overline{T_\varepsilon^{11}\varphi} & = & \int_{\mathcal{C}} |\nabla e_\varepsilon^1(\varphi)|^2 - \rho_p(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)|e_\varepsilon^1(\varphi)|^2 \end{array}$$

On a donc

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \mathrm{Im}\big\langle (T_\varepsilon^{00} + T_\varepsilon^{11})\varphi, \varphi \big\rangle = -\varepsilon\omega \int_{\mathcal{C}} \rho_p\big(|e_\varepsilon^0(\varphi)|^2 + |e_\varepsilon^1(\varphi)|^2\big)$$

soit

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \varphi \neq 0 \;\Rightarrow\; \big\langle (T_\varepsilon^{00} + T_\varepsilon^{11})\varphi, \varphi \big\rangle \neq 0$$

où $< \cdot, \cdot >$ est le produit de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$. L'opérateur $T_\varepsilon^{00} + T_\varepsilon^{11}$ est donc injectif de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$ et donc inversible en tant qu'opérateur de type Fredholm. ■

Revenons maintenant à l'équation (2.21) vérifiée par l'opérateur R_ε. Introduisons pour cela l'application

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big) & \to & \mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)\big) \\ X & \mapsto & \mathcal{T}(\varepsilon, X) = T_\varepsilon^{10}\, X^2 - (T_\varepsilon^{00} + T_\varepsilon^{11})\, X + T_\varepsilon^{01} \end{array} \tag{2.23}$$

qui est bien définie d'après les propriétés des opérateurs NtD locaux. Nous noterons, de plus, $\mathcal{K}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big)$ le sous espace de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big)$ des opérateurs compacts. Enonçons maintenant le résultat fondamental de cette section.

THÉORÈME 2.2.5 (EQUATION CARACTÉRISTIQUE POUR R_ε)
L'opérateur R_ε est l'unique solution du problème de Riccati stationnaire

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } X \in \mathcal{K}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big), \\ \mathcal{T}(\varepsilon, X) = 0. \end{array}\right. \tag{$\mathcal{E}_\varepsilon^R$}$$

qui satisfait la condition

$$\rho(X) < 1$$

où $\rho(X)$ est le rayon spectral de X.

■ **PREUVE:** L'équation (2.21) montre que l'opérateur compact R_ε, qui est de rayon spectral strictement inférieur à 1, vérifie l'équation ($\mathcal{E}_\varepsilon^R$). Montrons que c'est la seule solution.

Supposons $\tilde{R}$, tel que $\rho(\tilde{R}) < 1$, vérifiant l'équation ($\mathcal{E}_\varepsilon^R$). Fixons $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ et définissons la fonction $\tilde{u}(\varphi)$ par

$$\forall j \geq 1, \quad \tilde{u}(\varphi)\Big|_{\mathcal{C}_j^+} = e_\varepsilon^0(\tilde{R}^{j-1}\, \varphi) - e_\varepsilon^1(\tilde{R}^j\, \varphi).$$

$\tilde{u}(\varphi)$ est solution de l'équation de Helmholtz dans chaque cellule $\mathcal{C}_j^+$. Sa trace de Neumann sur chaque frontière Γ_j^+ est la même suivant que l'on prend sa définition sur $\mathcal{C}_j^+$ ou celle sur $\mathcal{C}_{j+1}^+$. Comme $\tilde{R}$ est solution de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}_\varepsilon^R)$, la trace de Dirichlet de $\tilde{u}$ est la même sur chaque frontière Γ_j^+ suivant que l'on prend sa définition sur $\mathcal{C}_j^+$ ou sur $\mathcal{C}_{j+1}^+$. $\tilde{u}(\varphi)$ est une solution $H^1_{\text{loc}}(\Omega^+)$ de l'équation $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$. Enfin, le fait que $\rho(\tilde{R}) < 1$ implique que $\tilde{u}(\varphi)$ est dans $H^1(\Omega^+)$. En effet, la propriété (voir [Weidmann (1980)]) :

$$\lim_{n\to+\infty} \|\tilde{R}^n\|^{1/n}_{\mathcal{L}\left(H^{-1/2}(\Gamma)\right)} = \rho(\tilde{R})$$

implique que, pour un certain $\rho_* \in]\rho(\tilde{R}), 1[$ et un certain j_0 :

$$\forall j \geq j_0, \quad \|\tilde{R}^j\|_{\mathcal{L}\left(H^{-1/2}(\Gamma)\right)} \leq \rho_*^j.$$

Ainsi, en posant $C_\varepsilon = \|S_\varepsilon\|_{\mathcal{L}\left(H^{-1/2}(\Gamma),H^1(\mathcal{C})\right)}$,

$$\forall j \geq j_0, \quad \|\tilde{u}(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C}_j)} \leq C_\varepsilon \rho_*^j \, \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Comme $\rho^* < 1$, on en déduit que $\tilde{u}(\varphi)$ est dans $H^1(\Omega^+)$. Par unicité du problème de Helmholtz avec absorption, $\tilde{u}(\varphi)$ n'est rien d'autre que la solution $u_\varepsilon^+(\varphi)$ et ce pour toute donnée φ. En particulier, $\tilde{R}$ est égal à R_ε. ■

REMARQUE 2.2.6
Il existe une infinité de solutions pour l'équation caractéristique $(\mathcal{E}_\varepsilon^R)$. En effet, la démonstration du théorème précédent montre qu'à partir de chaque solution de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}_\varepsilon^R)$, on peut construire une solution de l'équation de Helmholtz qui est seulement H^1_{loc}. Il n'existe qu'une seule solution de l'équation de Helmholtz dans H^1 et elle est construite à partir de l'unique opérateur R_ε de rayon spectral strictement inférieur à 1.

Pour déterminer l'opérateur R_ε, il suffit donc de résoudre les problèmes de cellule (2.17) et (2.18), de déterminer les opérateurs de NtD locaux $(T_\varepsilon^{00}, T_\varepsilon^{01}, T_\varepsilon^{10}, T_\varepsilon^{11})$ et enfin de sélectionner l'unique opérateur de rayon spectral strictement inférieur à 1 de l'équation de Riccati stationnaire $(\mathcal{E}_\varepsilon^R)$. Contrairement au cas monodimensionnel, l'équation caractéristique $(\mathcal{E}_\varepsilon^R)$ de R_ε n'est pas évidente à résoudre : ce n'est pas une simple équation scalaire du second degré, c'est une équation du second degré mais à coefficients opérateurs et l'inconnue recherchée est également un opérateur. Nous développons quelques propriétés de cette équation caractéristique ainsi que de l'opérateur R_ε Section 2.2.5 qui nous donneront des pistes pour la résolution numérique de cette équation Section 2.3.2.3.

Finalement, en utilisant les relations (2.20), (2.16), (2.15) et (2.22), la solution du problème de demi-guide $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ et l'opérateur NtD recherchée Λ_ε^+ sont alors définis de manière unique par :

PROPOSITION 2.2.7 (PROBLÈME DE DEMI-GUIDE AVEC ABSORPTION)
La solution $u_\varepsilon^+(\varphi)$ du problème de demi-guide $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ est caractérisée pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ par :

$$\forall j \geq 1, \quad u_\varepsilon^+(\varphi)\Big|_{\mathcal{C}_j^+} = e_\varepsilon^0(R_\varepsilon^{j-1}\,\varphi) \; - \; e_\varepsilon^1(R_\varepsilon^j\,\varphi), \tag{2.24}$$

et l'opérateur NtD Λ_ε^+ l'est par :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \Lambda_\varepsilon^+\,\varphi = S_\varepsilon\,\varphi\Big|_{\Gamma_0^+} = T_\varepsilon^{00}\,\varphi \; - \; T_\varepsilon^{10} R_\varepsilon\,\varphi \tag{2.25}$$

2.2.4 Problème posé en domaine borné avec conditions de NtD

Nous rappelons que la détermination de Λ_ε^+ dépend des opérateurs de NtD locaux T_ε^{ij}, $\{i,j\} \in \{0,1\}$ et de l'opérateur NtN R_ε

$$\Lambda_\varepsilon^+ = T_\varepsilon^{00} \; - \; T_\varepsilon^{10} R_\varepsilon.$$

REMARQUE 2.2.8
On peut se demander s'il n'existe pas une méthode plus directe pour déterminer l'opérateur NtD recherché. En effet, notre méthode repose entre autres sur la résolution d'une équation caractéristique dont un opérateur R_ε supplémentaire est solution. Nous pouvons donc nous demander si il n'y a pas directement une équation caractéristique dont l'opérateur NtD Λ_ε^+ est « directement » solution. Nous n'avons pas beaucoup développé cette piste qui reviendrait en un certain sens à vouloir inverser l'opérateur T_ε^{10} qui est compact !

Commençons par énoncer quelques propriétés de l'opérateur de NtD Λ_ε^+ qui nous servira à démontrer le caractère bien posé du problème intérieur $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ posé dans Ω^i et avec des conditions de NtD aux bords.

PROPOSITION 2.2.9 (PROPRIÉTÉ DE L'OPÉRATEUR DE NTD Λ_ε^+)
L'opérateur Λ_ε^+ est inversible de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$, son inverse étant l'opérateur Dirichlet-to-Neumann (DtN), noté $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+$. Ces opérateurs vérifient de plus

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma),\ \varphi \neq 0 \quad Im\left\langle \Lambda_\varepsilon^+ \varphi, \varphi \right\rangle > 0, \quad et\ \forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma),\ \psi \neq 0 \quad Im\left\langle \psi, \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+ \psi \right\rangle > 0. \tag{2.26}$$

où $< \cdot, \cdot >$ est le crochet de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Enfin, l'opérateur Λ_ε^+ n'est pas autoadjoint mais symétrique c'est-à-dire

$$(\Lambda_\varepsilon^+)^* = \overline{\Lambda_\varepsilon^+}$$

■ **PREUVE:** La démonstration de ces résultats est similaire à celle développée dans la Proposition 1.2.7, pour T_ε^{00}.

Pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, d'après le théorème 2.2.2 $u_\varepsilon^+(\varphi)$ est dans $H^1(\mathcal{C})$ donc d'après le théorème de trace

$$\Lambda_\varepsilon^+ \varphi \; = \; u_\varepsilon^+(\varphi)\Big|_{\Gamma_0^+} \; \in H^{1/2}(\Gamma).$$

De plus pour tout ψ, on appelle $v_\varepsilon^+(\psi)$ la solution de l'équation de Helmholtz dans Ω^+ qui satisfait des conditions de Neumann homogènes sur $\partial\Omega^+ \setminus \Gamma_0^+$ et la condition suivante sur Γ_0^+ :

$$v_\varepsilon^+(\psi)\Big|_{\Gamma_0^+} = \psi$$

Pour tout $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$, il existe une unique solution $v_\varepsilon^+(\psi) \in H^1(\Omega^+)$.On note $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+$ l'opérateur défini par :

$$\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+ : \; \psi \; \mapsto \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+ \psi = -\frac{\partial}{\partial x} v_\varepsilon^+(\psi)\Big|_{\Gamma_0^+}$$

C'est un opérateur de $\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma))$. C'est l'opérateur DtN et on montre facilement que

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+ \Big(\Lambda_\varepsilon^+ \varphi \Big) = \varphi$$

et de la même façon

$$\forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \Lambda_\varepsilon^+\left(\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+\,\psi\right) = \psi$$

Λ_ε^+ est donc inversible en tant qu'opérateur linéaire de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. Pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, la formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ en prenant $u_\varepsilon^+(\varphi)$ comme fonction test donne :

$$\int_{\Omega^+} |\nabla u_\varepsilon^+(\varphi)|^2 - \rho_p(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,|u_\varepsilon^+(\varphi)|^2 = \int_{\Gamma_0^+} \varphi\,\overline{\Lambda_\varepsilon^+\varphi},$$

on a donc

$$\text{Im}\int_{\Gamma_0^+} \varphi\,\overline{\Lambda_\varepsilon^+\varphi} = -\varepsilon\omega\int_{\Omega^+} \rho_p\,|u_\varepsilon^+(\varphi)|^2$$

soit

$$\varphi \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{Im}\,\langle \Lambda_\varepsilon^+\,\varphi, \varphi\rangle > 0$$

où $< \cdot,\cdot >$ est le crochet de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$. Pour $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+$, il suffit d'écrire, pour tout $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ la formulation variationnelle du problème dont $v_\varepsilon^+(\psi)$ est la solution, avec $v_\varepsilon^+(\psi)$ comme fonction test.

De plus, soit pour tout $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $v = \overline{u_\varepsilon^+(\overline{\psi})}$; v vérifie l'équation de Helmholtz suivante :

$$-\triangle v \;-\; \rho_p(\omega^2 - \imath\varepsilon\omega)v = 0$$

avec

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{C}\setminus\Gamma_0^+, \qquad \text{et} \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = \psi \quad \text{sur } \Gamma_0^+.$$

Par définition :

$$\overline{\Lambda_\varepsilon^+}(\psi) = \overline{\Lambda_\varepsilon^+\,\overline{\psi}} = v\Big|_{\Gamma_0^+}.$$

On écrit la formulation faible de l'équation vérifiée par v avec $u_\varepsilon^+(\varphi)$ comme fonction test et on en prend le conjugué

$$\int_{\Omega^+} \overline{\nabla v}\,\nabla u_\varepsilon^+(\varphi) - \rho_p(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\overline{v}\,u_\varepsilon^+(\varphi) = \int_{\Gamma_0^+} \overline{\psi}\,\Lambda_\varepsilon^+(\varphi)$$

On reconnaît pour le membre à droite une partie de la formulation faible de l'équation vérifiée par $u_\varepsilon^+(\varphi)$ avec v comme fonction test :

$$\int_{\Omega^+} \nabla u_\varepsilon^+(\varphi)\,\overline{\nabla v} - \rho_p(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)u_\varepsilon^+(\varphi)\,\overline{v} = \int_{\Gamma_0^+} \varphi\,\Lambda_\varepsilon^+(\overline{\psi})$$

En faisant correspondre ces deux inégalités, on retrouve bien :

$$(\Lambda_\varepsilon^+)^* = \overline{\Lambda_\varepsilon^+}.$$

■

Soit Λ_ε^+ déterminé par la relation (2.25) et Λ_ε^- déterminé en utilisant la même méthode dans le demi-milieu périodique Ω^-. En utilisant la propriété (2.26) des opérateurs de NtD énoncée Proposition 2.2.9 pour établir un résultat très classique concernant le caractère bien posé du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$. Notons que la proposition 2.2.1 concernant l'équivalence entre les problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ et $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ nous donnerait également ce résultat. Mais dans la perspective du cas sans absorption où l'équivalence n'est plus vraie, nous avons voulu montrer directement le caractère bien posé et donner un aperçu de la preuve qui sera étendue pour le cas sans absorption.

THÉORÈME 2.2.10 (CARACTÈRE BIEN POSÉ DU PROBLÈME $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$)
Le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ a une unique solution dans $H^1(\Omega^i)$.

■ **PREUVE:** Montrons que la formulation variationnelle de ce problème vérifie les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram.

En effet, le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ est équivalent au problème variationnel :

Trouver $u_\varepsilon^i \in H^1(\Omega^i)$ tel que :

$$\forall v \in H^1(\Omega^i), \quad a_\varepsilon^i(u_\varepsilon^i, v) = \int_{\Omega^i} f\overline{v}$$

où a_ε^i est une forme bilinéaire continue définie par :

$$a_\varepsilon^i(u,v) = \int_{\Omega^i} \nabla u \cdot \nabla \overline{v} - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \int_{\Omega^i} \rho_p u\overline{v} + \overline{\langle v, \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^- u\rangle}_{\Gamma_0^-} + \overline{\langle v, \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+ u\rangle}_{\Gamma_0^+}.$$

où $<\cdot,\cdot>_{\Gamma_0^\pm}$ est le crochet de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma_0^\pm)$ et $H^{-1/2}(\Gamma_0^\pm)$ et où $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^-$ et $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+$ sont les opérateurs DtN, inverses respectifs des opérateurs NtD Λ_ε^- et Λ_ε^+. Pour montrer que a_ε^i est bien coercive, il faut et il suffit d'utiliser le fait que

$$\forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma_0^+), \quad \mathrm{Im}\langle \psi, \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+ \psi\rangle_{\Gamma_0^+} > 0 \quad \text{et } \forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma_0^-), \quad \mathrm{Im}\langle \psi, \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^- \psi\rangle_{\Gamma_0^-} > 0$$

On peut alors démontrer facilement que a_ε^i est coercive. ■

Le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ est bien posé. La proposition 2.2.1 nous assure que l'unique solution est la restriction de u_ε solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ à Ω^i. Pour reconstruire u_ε en dehors de Ω^i, il suffit d'utiliser les relations (2.9).

REMARQUE 2.2.11 (OPÉRATEUR DTN OU OPÉRATEUR NTD ?)
La formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$, présentée dans la preuve du théorème précédent, met naturellement en évidence les opérateurs DtN plutôt que les opérateurs NtD. On peut alors se demander pourquoi nous avons préféré passer par la construction des opérateurs de NtD. Comme nous l'avons expliqué en Introduction, l'analyse numérique de la construction de l'opérateur de NtD pour le problème final du plan présenté Chapitre 3 est plus facile à formuler essentiellement parce que c'est un opérateur de $\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma))$ alors que l'opérateur de DtN est un opérateur de $\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma))$. Nous redévelopperons ce point plus précisément au chapitre suivant.

En revanche, signalons que l'opérateur NtD serait intervenu naturellement avec la formulation mixte du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$. En effet, on montre facilement que le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ est équivalent à

$$\text{Trouver } (u_\varepsilon^i, \mathbf{U}_\varepsilon^i) \in L^2(\Omega^i) \times H_{\mathrm{div}}(\Omega^i) \text{ telle que } \forall (v, \mathbf{V}) \in L^2(\Omega^i) \times H_{\mathrm{div}}(\Omega^i)$$

$$\left| \begin{array}{rcrcl} a^i(u_\varepsilon^i, v) & + & b^i(v, \mathbf{U}_\varepsilon^i) & = & -\displaystyle\int_{\Omega^i} f\,\overline{v} \\ \overline{b^i(u_\varepsilon^i, \mathbf{V})} & + & \mathbf{A}^i(\mathbf{U}_\varepsilon^i, \mathbf{V}) & = & 0 \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} a^i(u,v) &= (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \int_{\Omega^i} \rho_p u\overline{v} \\ b^i(u, \mathbf{V}) &= \int_{\Omega^i} \mathrm{div}\,\mathbf{V}\ \overline{u} \\ \mathbf{A}^i(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \int_{\Omega^i} \mathbf{U}\,\overline{\mathbf{V}} + \left\langle \Lambda_\varepsilon^- (\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}), \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\right\rangle_{\Gamma_0^-} + \left\langle \Lambda_\varepsilon^+ (\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}), \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\right\rangle_{\Gamma_0^+} \end{aligned}$$

et où $< \cdot, \cdot >_{\Gamma_0^\pm}$ *est le crochet de dualité entre* $H^{1/2}(\Gamma_0^\pm)$ *et* $H^{-1/2}(\Gamma_0^\pm)$. *Avec la propriété* (2.26) *appliquée aux opérateurs de NtD* Λ_ε^+ *et* Λ_ε^-, *nous pourrions montrer le caractère bien posé du problème mixte précédent. C'est d'ailleurs l'analyse numérique de cette formulation que nous avons choisi d'étudier dans ce mémoire (voir Section 2.3). La construction des opérateurs de NtD plutôt que des opérateurs de DtN prend dans ce cas tout son sens.*

2.2.5 A propos de l'équation caractéristique

Revenons sur l'équation caractéristique (2.21) et tentons d'en donner quelques propriétés qui faciliteront sa résolution numérique.

Même si l'équation caractéristique dans le cas du guide est plus difficile à résoudre que dans le cas monodimensionnel, nous allons tenter de nous rapprocher un peu du cas 1D grâce à la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2.12
Toute valeur r_ε *est une valeur propre de l'opérateur* R_ε *si et seulement si* r_ε *vérifie*

$$\left| \begin{array}{l} \textit{Ker}\left(\mathcal{T}(\varepsilon, r_\varepsilon)\right) \neq \{0\}, \\ |r_\varepsilon| < 1. \end{array} \right. \tag{2.27}$$

On a de plus

$$\textit{Ker}\left(\mathcal{T}(\varepsilon, r_\varepsilon)\right) = \textit{Ker}\left(R_\varepsilon - r_\varepsilon\, \textit{Id}\right).$$

■ **PREUVE:** Supposons r_ε une valeur propre de l'opérateur R_ε alors il existe $\varphi_r \in H^{-1/2}(\Gamma)$ un vecteur propre associé non nul. On a donc

$$\mathcal{T}(\varepsilon, R_\varepsilon) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_\varepsilon^{10}\, R_\varepsilon^2 \varphi_r - (T_\varepsilon^{00} + T_\varepsilon^{11})\, R_\varepsilon \varphi_r + T_\varepsilon^{01} \varphi_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}(\varepsilon, r_\varepsilon)\, \varphi_r = 0.$$

Et par définition comme le rayon spectral de R_ε est strictement inférieur à 1, on a $|r_\varepsilon| < 1$. Nous avons également montré que nécessairement $\varphi_r \in$ Ker $\left(\mathcal{T}(\varepsilon, r_\varepsilon)\right)$ et ceci est vrai pour tous les vecteurs propres associés à la valeur propre r_ε.

Réciproquement, soit r_ε vérifiant (2.27). Soit φ_r un vecteur non nul appartenant à Ker $\left(\mathcal{T}(\varepsilon, r_\varepsilon)\right)$. On construit alors la fonction u_r cellule par cellule de la façon suivante :

$$\forall j \geq 1, \quad u_r\Big|_{\mathcal{C}_j^+} = e_\varepsilon^0(r_\varepsilon^{j-1}\, \varphi_r) - e_\varepsilon^1(r_\varepsilon^j\, \varphi_r).$$

On montre, comme dans la preuve du théorème 2.2.5 que u_r est solution de l'équation de Helmholtz dans chaque cellule $\mathcal{C}_j^+$ que sa trace de Neumann sur chaque frontière Γ_j^+ est la même suivant que l'on considère sa définition sur $\mathcal{C}_j^+$ ou celle sur $\mathcal{C}_{j+1}^+$ et que r_ε vérifiant Ker $\left(\mathcal{T}(\varepsilon, r_\varepsilon)\right) \neq \{0\}$, la trace de Dirichlet de u_r est la même sur chaque frontière Γ_j^+ suivant que l'on prend sa définition sur $\mathcal{C}_j^+$ ou sur $\mathcal{C}_{j+1}^+$. Enfin comme $|r_\varepsilon| < 1$, u_r est dans $H^1(\Omega^+)$. u_r est donc l'unique solution H^1 de l'équation de Helmholtz de demi-guide $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ avec une trace normale sur Γ_0^+ égale à, par définition, la donnée φ_r. On en déduit donc, par définition de u_r que :

$$R_\varepsilon\, \varphi_r = r_\varepsilon\, \varphi_r.$$

Soit donc r_ε valeur propre de R_ε et φ_r vecteur propre associé. ■

Toute valeur propre de R_ε est donc solution d'une équation aux valeurs propres quadratiques.

On retrouve un résultat similaire dans le cas monodimensionnel. De plus, dans le cas monodimensionnel, nous avions montré en utilisant les propriétés des constantes de NtD locales que le produit des solutions de l'équation caractéristique était égal à 1 : il suffisait donc de choisir l'unique racine de module strictement inférieur à 1.

REMARQUE 2.2.13 (CELLULE DE PÉRIODICITÉ COMPORTANT UNE SYMÉTRIE)
Une situation particulière intéressante est celle où l'indice de réfraction ρ_p est symétrique par rapport au milieu de la cellule de périodicité, c'est-à-dire le cas où

$$\forall\, (x,y) \in \mathcal{C} \cap \{x \in]0, \frac{1}{2}[\}, \quad \rho(\frac{1}{2}+x, y) = \rho(\frac{1}{2}-x, y).$$

Par un simple argument de symétrie, il est facile de voir que :

$$T_\varepsilon^{00} = T_\varepsilon^{11}, \quad \textit{et} \quad T_\varepsilon^{01} = T_\varepsilon^{10}.$$

L'équation aux valeurs propres quadratiques (2.27) *se récrit :*

$$\exists \varphi_\varepsilon \neq 0, \quad (r_\varepsilon^2+1) T_\varepsilon^{10}\, \varphi_\varepsilon - 2 r_\varepsilon T_\varepsilon^{00} \varphi_\varepsilon = 0$$

soit encore

$$\exists \varphi_\varepsilon \neq 0, \quad T_\varepsilon^{00} \varphi_\varepsilon = \frac{1}{2}(r_\varepsilon + \frac{1}{r_\varepsilon}) T_\varepsilon^{10} \varphi_\varepsilon$$

ce qui correspond à un problème aux valeurs propres classique en $r_\varepsilon + 1/r_\varepsilon$. On voit alors facilement dans ce cas que si r_ε est solution alors $1/r_\varepsilon$ est solution. On retrouve ainsi l'esprit du cas monodimensionnel.

Dans le cas général, les propriétés des opérateurs de NtD locaux dans le cas du guide donne un résultat équivalent.

THÉORÈME 2.2.14
Pour tout r_ε non nul, l'implication suivante est vérifiée :

$$\textit{Ker}\, \big(\mathcal{T}(\varepsilon, r_\varepsilon)\big) \neq \{0\} \quad \Rightarrow \quad \textit{Ker}\, \big(\mathcal{T}(\varepsilon, \frac{1}{r_\varepsilon})\big) \neq \{0\}$$

■ **PREUVE:** En utilisant la définition (2.23) de $\mathcal{T}$, on suppose que $r_\varepsilon \neq 0$ vérifie

$$\text{Ker}\, \big(r_\varepsilon^2\, T_\varepsilon^{10} - r_\varepsilon\, (T_\varepsilon^{00} + T_\varepsilon^{11}) + T_\varepsilon^{01}\big) \neq \{0\}.$$

Les propriétés des opérateurs de NtD locaux nous donnent que

$$\forall r \neq 0, \quad \overline{r}^2\, \mathcal{T}(\varepsilon, 1/r)^* = \overline{\mathcal{T}(\varepsilon, r)}.$$

En utilisant des résultats classiques sur les opérateurs adjoints, on en déduit que si 0 est une valeur propre de $\mathcal{T}(\varepsilon, r)$ alors 0 est soit une valeur propre de $\mathcal{T}(\varepsilon, 1/r)$, soit dans son spectre résiduel (voir l'annexe B.2 pour la définition). On remarque de plus que pour tout $r \neq 0$, $\mathcal{T}(\varepsilon, r)$ est de type Fredholm puisqu'on peut l'écrire

$$\mathcal{T}(\varepsilon, r) = r\, (T_\varepsilon^{00} + T_\varepsilon^{11}) \Big[I + C(\varepsilon, r) \Big]$$

où $C(\varepsilon, r) = (T_\varepsilon^{00} + T_\varepsilon^{11})^{-1} (r^{-1} T_\varepsilon^{01} + r T_\varepsilon^{10})$ est compact. 0 est donc nécessairement une valeur propre de $\mathcal{T}(\varepsilon, 1/r)$. ■

En d'autres termes, les solutions de l'équation aux valeurs propres quadratique

$$\text{Ker}\,\big(\mathcal{T}(\varepsilon,r)\big) \neq \{0\}$$

peuvent être classées par paires $(r_\varepsilon, 1/r_\varepsilon)$. De chaque paire, il suffit de sélectionner celle qui est de module strictement inférieur à 1 pour récupérer une valeur propre de R_ε.

La question que nous nous posons maintenant est de savoir **si l'opérateur R_ε est diagonalisable ou pas**. Si il l'était alors sa détermination en serait largement simplifiée. En effet, dans ce cas, R_ε serait déterminée de manière unique par ses valeurs propres et les espaces propres associés et il suffirait alors de résoudre l'équation aux valeurs propres quadratique et de récupérer les solutions de module strictement inférieur à 1.
Nous allons tout d'abord exposer un cas simple où il est évident que R_ε est diagonalisable.

PROPOSITION 2.2.15 (CAS OÙ ρ_p NE DÉPEND QUE DE x)
Supposons que Ω^+ est un demi guide périodique droit, typiquement : $\Omega^+ = \mathbb{R}^+ \times [0,1]$ et ρ_p ne dépend que de x. Dans ce cas, l'opérateur R_ε est diagonalisable dans la base orthonormée $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ de vecteurs propres de l'opérateur laplacien transverse avec conditions de Neumann homogène (c'est la même base que dans le cas homogène, voir section 2.1.2) :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad R_\varepsilon\,\varphi = \sum_{n\geq 1} r_{\varepsilon,n} \big\langle \varphi_n, \varphi \big\rangle \varphi_n.$$

où $<\cdot,\cdot>$ représente le crochet de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$, et où chaque $r_{\varepsilon,n}$ est l'unique solution de module strictement inférieur à 1 d'une équation caractéristique de type $(\mathcal{E}^r_\varepsilon)$ correspondant à un problème de demi-droite périodique monodimensionnel qui dépend de n.

■ **PREUVE:** L'idée est que sous l'hypothèse ρ_p ne dépend que d'une variable, il suffit de chercher les solutions à variables séparées comme dans le cas homogène (voir section 2.1.2). On montre que pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, l'unique solution $u^+_\varepsilon(\varphi) \in H^1$ du problème de demi-guide $(\mathcal{P}^+_\varepsilon)$ est donnée par :

$$u^+_\varepsilon(x,y) = \sum_{n\geq 0} \big\langle \varphi_n, \varphi \big\rangle\, \varphi_n(y)\, u_n(x).$$

Les φ_n sont définis comme dans le cas homogène de la section 2.1.2 par :

$$\forall y \in [0,1], \quad \varphi_0(y) = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ \varphi_n(y) = \sqrt{2}\cos(\pi n\, y)$$

ce sont les vecteurs propres de l'opérateur laplacien transverse avec conditions de Neumann défini par (2.6), pour la valeur propre $\beta_n = n^2\pi^2$. Chaque fonction u_n est l'unique solution $H^1(\mathbb{R}^+)$ du problème de demi-droite

$$\left|\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \big(\rho_p(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) - \beta_n\big)\, u_n &=& 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \\ -\dfrac{\partial u_n}{\partial x}(0) &=& 1 \end{array}\right.$$

Le problème à résoudre ici rentre exactement dans le cadre monodimensionnel du Chapitre 1 et, en particulier, de l'étude de l'équation de Helmholtz à coefficients périodiques avec absorption développée Section 1.2. Plus précisément, la détermination de la solution de problème de demi-droite passe par la caractérisation d'un coefficient RtR r_ε (voir Proposition (1.2.9) du Chapitre 1) qui est l'unique solution de module strictement inférieur à 1 d'une équation caractéristique de type $(\mathcal{E}^r_\varepsilon)$ (voir théorème 1.2.8 du Chapitre 2). Les coefficients de l'équation caractéristique dépendent des problèmes de cellule correspondant

au problème de demi-droite ci-dessus : ils dépendent donc de n. On note $r_{\varepsilon,n}$ l'unique racine de module strictement inférieur à 1 et par définition :

$$r_{\varepsilon,n} = -\frac{\partial u_n}{\partial x}(1).$$

On a donc par définition de R_ε le résultat attendu. ■

REMARQUE 2.2.16
Dans le cas particulier $\rho_p = \rho_p(x)$, la preuve précédente nous donne, en fait, un résultat plus fort que celui démontré. En effet, chaque valeur propre de R_ε est non seulement solution de module strictement inférieur à 1 d'une équation aux valeurs propres quadratiques (voir Proposition 2.2.12) mais, comme les opérateurs de NtD locaux T_ε^{ij} sont diagonalisables dans la même base que celle de R_ε, elle est solution d'une équation scalaire du second degré qui correspond à l'équation caractéristique d'un certain problème 1D.

REMARQUE 2.2.17 (CAS OÙ ρ_p NE DÉPEND QUE DE y)
Supposons que Ω^+ est un demi guide périodique droit, typiquement : $\Omega^+ = \mathbb{R}^+ \times [0,1]$ et ρ_p ne dépend que de y. La seule chose que nous savons démontrer dans ce cas est qu'il existe un système complet de vecteurs propres généralisés de R_ε.

Dans ce cas, l'opérateur R_ε est bien normal pour le produit scalaire L^2. Dans le cas général, il est difficile d'imaginer ou de montrer l'existence du produit scalaire pour lequel R_ε serait normal. **La diagonalisabilité de R_ε reste pour l'instant une question ouverte.** Nous n'avons pas réussi à montrer l'équivalence entre résoudre l'équation caractéristique ($\mathcal{E}_\varepsilon^R$) et résoudre l'équation aux valeurs propres quadratiques (2.27). Nous donnerons une réponse dans la version discrète du problème présentée section 2.3.

2.2.6 Propriétés de l'opérateur NtD Λ_ε^+

Nous consacrons cette section à l'étude des propriétés de l'opérateur de NtD Λ_ε^+. Nous rappelons avoir montré, section précédente, que la détermination de Λ_ε^+ dépend des opérateurs de NtD locaux T_ε^{ij}, $\{i,j\} \in \{0,1\}$ et de l'opérateur NtN R_ε

$$\Lambda_\varepsilon^+ = T_\varepsilon^{00} \; - \; T_\varepsilon^{10} R_\varepsilon.$$

Nous pouvons notamment nous poser la même question que pour R_ε concernant le caractère « diagonalisable » de l'opérateur Λ_ε^+. En effet, dans le cas du demi-guide droit homogène, nous avons vu section 2.1.2 que l'opérateur Λ_ε^+ l'était. Nous pouvons aussi le montrer dans d'autres cas particuliers à l'image de ce que nous avons fait pour R_ε, Proposition 2.2.15, nous montrons que Λ_ε^+ est également diagonalisable.

PROPOSITION 2.2.18 (CAS OÙ ρ_p NE DÉPEND QUE DE x)
Supposons que Ω^+ est un demi guide périodique droit, typiquement :

$$\Omega^+ = \mathbb{R}^+ \times [0,1]$$

et ρ_p ne dépend que de x. Dans ce cas, l'opérateur Λ_ε^+ est diagonalisable dans la base orthonormée $\{\varphi_n,\ n \geq 1\}$ qui diagonalise R_ε Proposition 2.2.15 :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \Lambda_\varepsilon^+ \ \varphi = \sum_{n\geq 1} \lambda_{\varepsilon,n}^+ \big\langle \varphi_n, \varphi \big\rangle \varphi_n.$$

où $< \cdot, \cdot >$ représente le crochet de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$ et où chaque $\lambda_{\varepsilon,n}^+$ est le coefficient de NtD correspondant à un problème de demi-droite périodique monodimensionnel qui dépend de n.

■ **PREUVE:** Il suffit de prendre l'expression de $u_\varepsilon^+(\varphi)$ pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ établie dans la preuve de la Proposition 2.2.15 :

$$u_\varepsilon^+(x,y) = \sum_{n\geq 0} \big\langle \varphi_n, \varphi \big\rangle \ \varphi_n(y)\ u_n(x).$$

où les φ_n sont définis comme dans le cas homogène de la section 2.1.2 par :

$$\forall y \in [0,1], \quad \varphi_0(y) = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ \varphi_n(y) = \sqrt{2}\cos(\pi n\, y)$$

et où chaque fonction u_n est l'unique solution $H^1(\mathbb{R}^+)$ du problème de demi-droite

$$\left| \begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \big(\rho_p(x)\ (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) - \beta_n\big)\ u_n & = & 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \\ -\dfrac{\partial u_n}{\partial x}(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

Comme nous l'avons expliqué dans la preuve de la Proposition 2.2.15, ce problème rentre exactement dans le cadre du cas monodimensionnel du Chapitre 1 et de l'étude de l'équation de Helmholtz à coefficients périodiques avec absorption développée Section 1.2. On peut donc appliquer la méthode développée dans cette section pour déterminer le coefficient de NtD correspondant défini par :

$$\lambda_{\varepsilon,n}^+ = u_n(0).$$

On a donc par définition de Λ_ε^+ le résultat attendu. ■

Comme pour R_ε, il semble là encore raisonnable de conjecturer que Λ_ε^+ est diagonalisable mais pour un produit scalaire particulier. Nous avons néanmoins établi un résultat supplémentaire pour Λ_ε^+. Comme il n'est pas autoadjoint, les résultats classiques de théorie spectrale ne s'appliquent pas. Il faut donc faire appel à la théorie spectrale des opérateurs non-autoadjoints dont nous donnons un certain nombre de résultats Annexe B.2 (voir [Gohberg & Kreĭn (1969)] pour plus de détails). Nous montrons dans la suite que dans le cas d'un demi-guide Ω^+ droit :

$$\Omega^+ = \mathbb{R}^+ \times]0,1[,$$

et si sur un voisinage du bord Γ_0^+, l'indice de réfraction ρ_p est constant

$$\exists\, \alpha > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, (x,y) \in]0,\delta[\times]0,1[, \quad \rho_p(x,y) = \alpha^2$$

l'opérateur Λ_ε^+ vérifie les hypothèses du théorème B.2.18 de Keldys présenté Annexe B.2 et qu'il n'est pas nécessairement diagonalisable mais « jordanisable » (voir Définition B.2.16, Annexe B.2).

REMARQUE 2.2.19 (DEMI-GUIDE « UN PEU TORDU »)
Dans le cas où le demi-guide n'est pas droit mais a une géométrie du type de celle représentée Figure 2.2, nous pouvons montrer que ce résultat est encore vrai. En effet, il suffit d'opérer une transformation géométrique ayant des caractéristiques périodiques qui rend le demi-guide droit. Cette transformation change évidemment l'équation : l'opérateur laplacien est transformé en un opérateur elliptique plus général et l'indice de réfraction n'est plus le même mais reste périodique. Nous ne rentrons pas dans le détail de cette étude qui serait trop technique et qui ne présenterait pas trop d'intérêt pour la suite.

Pour démontrer ce résultat sur l'opérateur de NtD, nous allons utiliser sa décomposition avec les opérateurs de NtD locaux et l'opérateurs de NtN R_ε :

$$\Lambda_\varepsilon^+ = T_\varepsilon^{00} \; - \; T_\varepsilon^{10} R_\varepsilon,$$

les propriétés de ces opérateurs (se reporter à la proposition 2.2.4 et au lemme 2.2.3) et plus particulièrement l'étude du spectre de l'opérateur T_ε^{00} de la sous-section suivante.

2.2.6.1 Factorisation de l'opérateur T_ε^{00}

Dans toute section, nous considérons le cas où le demi-guide Ω^+ est droit :

$$\Omega^+ = \mathbb{R}^+ \times]0,1[.$$

et où l'indice de réfraction ρ_p est constant sur un voisinage de Γ_0^+

$$\exists \alpha > 0, \; \exists \delta_0 > 0, \; \forall \, (x,y) \in]0,\delta_0[\times]0,1[, \quad \rho_p(x,y) = \alpha^2.$$

La démarche dans cette section sera de montrer que l'opérateur T_ε^{00} vérifie les hypothèses du théorème B.2.18 de Keldys (cf annexe B.2), c'est-à-dire qu'il se décompose sous la forme :

$$T_\varepsilon^{00} = H(\mathrm{Id} + K)$$

où H est un opérateur autoadjoint de classe $\mathcal{L}_p$ de Carleman (voir Définition B.2.14) et K est un opérateur compact. L'idée est qu'étant donnée l'hypothèse sur l'indice de réfraction, on va pouvoir utiliser les calculs explicites du cas du guide droit homogène.

On suppose tout d'abord que l'indice de réfraction $\rho_p = \alpha^2$ est une constante et on considère le problème posé dans une cellule de périodicité $\mathcal{C}$: pour toute fonction $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, on cherche la solution $u_0(\varphi)$ du problème

$$\left| \begin{array}{rcll} -\triangle u_0 - \alpha^2 \left(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega\right) u_0 & = & 0 \quad \text{dans} & \mathcal{C} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} & = & 0 \quad \text{sur} & \partial\mathcal{C} \setminus \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \\ -\dfrac{\partial u_0}{\partial x} & = & \varphi \quad \text{sur} & \Gamma_0, \\ +\dfrac{\partial u_0}{\partial x} & = & 0 \quad \text{sur} & \Gamma_1. \end{array} \right.$$

D'après la théorie de solution ultra-faible de Lions-Magenes [Lions & Magenes (1968)] et un résultat d'interpolation, pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $u_0(\varphi)$ est dans $H^1(\mathcal{C})$ et possède en plus la régularité :

$$\forall \delta > 0,\ \forall s > 1, \quad u_0(\varphi) \in H^s(\mathcal{C}_\delta), \quad \text{avec } \mathcal{C}_\delta =]\delta, 1[\times]0, 1[.$$

Définissons ensuite l'opérateur T_0 comme suit :

$$T_0 \ : \ \varphi \ \mapsto \ T_0\,\varphi = u_0(\varphi)\Big|_{\Gamma_0}$$

Dans le cas où $\rho_p = \alpha^2$ est constant, ce problème peut être résolu par séparation des variables classiquement utilisé pour les EDP à coefficients constants. En utilisant les mêmes arguments que Section 2.1.2, on montre qu'il existe une base orthonormée qui diagonalise l'opérateur T_0. Cette base est formée des vecteurs propres de l'opérateur laplacien transverse avec conditions de Neumann homogène

$$\forall y \in [0,1], \quad \varphi_0(y) = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ \varphi_n(y) = \sqrt{2}\cos(\pi n\, y)$$

chaque vecteur φ_n étant associé à la valeur propre simple :

$$t_n^0 = \frac{\cosh(\gamma_n^\varepsilon)}{\gamma_n^\varepsilon \sinh(\gamma_n^\varepsilon)},$$

où γ_n^ε est la solution de partie réelle positive de l'équation :

$$(\gamma_n^\varepsilon)^2 - (n\pi)^2 + \alpha^2(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\gamma_n^\varepsilon = -\imath\sqrt{\alpha^2(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) - (n\pi)^2}, \qquad \mathrm{Im}\big(\sqrt{\alpha^2(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) - (n\pi)^2}\big) > 0.$$

On remarque que pour $n > \alpha\omega/\pi$:

$$\frac{1}{\gamma_n^\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{n^2\pi^2 - \alpha^2\omega^2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\imath\varepsilon\alpha^2\omega}{n^2\pi^2 - \alpha^2\omega^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^4})\right)$$

On note $\gamma_n^0 = \sqrt{n^2\pi^2 - \alpha^2\omega^2}$. On montre alors que T_0 s'écrit comme la somme de deux opérateurs H_0 et K_0 qui sont définis sur la base orthonormée $\{\varphi_n,\ n \geq 0\}$:

$$\begin{aligned} H_0(\varphi_n) &= \varphi_n, && n < \frac{\alpha\omega}{\pi} \\ &= \frac{1}{\gamma_n^0}\,\varphi_n, && n > \frac{\alpha\omega}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_0(\varphi_n) &= (t_n^0 - 1)\,\varphi_n, && n < \frac{\alpha\omega}{\pi} \\ &= (t_n^0 - \frac{1}{\gamma_n^0})\,\varphi_n, && n > \frac{\alpha\omega}{\pi} \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.2.20

L'opérateur H_0 est autoadjoint, défini positif et l'opérateur K_0 est compact de $\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma))$.

■ **PREUVE:** (1) H_0 est autoadjoint, défini positif car il est diagonalisable dans une base orthonormée avec des valeurs propres strictement positives.

(2) Soit S_p les opérateurs de rang fini suivant :

$$\begin{aligned} S_p(\varphi_n) &= K_0(\varphi_n), & n \leq p \\ &= 0, & n \geq p \end{aligned}$$

On a alors $\forall p > \frac{\alpha\omega}{\pi}$,

$$\|S_p - K_0\|^2 = \sup_{\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)} \frac{\|S_p\varphi - K_0\varphi\|^2_{H^{1/2}}}{\|\varphi\|^2_{H^{-1/2}}} = \max_{n\geq p} (1+n^2)^{1/2} \|S_p\varphi_n - K_0\varphi_n\|^2_{L^2} = \max_{n\geq p} (1+n^2)^{1/2} |t_n^0 - \frac{1}{\gamma_n^0}|^2$$

or

$$\exists C,\ \exists p_0,\ \forall n \geq p_0, \quad |t_n^0 - \frac{1}{\gamma_n^0}| \leq C \frac{1}{n^6}.$$

On conclut que

$$\exists p_0 > \frac{\alpha\omega}{\pi},\ \forall p \geq p_0, \quad \|S_p - K_0\| \leq \max_{n\geq p} |t_n^0 - \frac{1}{\gamma_n^0}| \leq C \frac{1}{p^5}$$

où C est une constante qui dépend de ε et ω mais qui est indépendante de p. K_0 est donc la limite d'une suite d'opérateurs de rang fini, il est donc compact. ■

Maintenant considérons pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $w(\varphi) = e_\varepsilon^0(\varphi) - u_0(\varphi)$ solution du problème :

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle w - \rho_p\left(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega\right) u_0 &=& \left(\rho_p - \alpha^2\right)\omega^2\, u^0(\varphi) & \text{dans} \quad \mathcal{C} \\ \dfrac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 & \text{sur} \quad \partial\mathcal{C} \setminus \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \\ -\dfrac{\partial w}{\partial x} &=& 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0, \\ +\dfrac{\partial w}{\partial x} &=& 0 & \text{sur} \quad \Gamma_1. \end{array}\right.$$

Pour toute fonction $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, nous avons expliqué pourquoi $u_0(\varphi) \in H^s(C_\delta^+)$, avec $s > 1$ et $\delta > 0$ quelconque. Comme ρ_p est supposée constante sur un voisinage de Γ_0, alors le second membre de l'équation ci dessus est dans $H^s(\mathcal{C})$, pour tout $s > 1$ et donc $w(\varphi)$ est dans $H^{s+2}(\mathcal{C})$. L'opérateur K_1 de $\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma))$ défini par :

$$K_1 \ :\ \varphi \ \mapsto\ K_1\,\varphi = w(\varphi)\Big|_{\Gamma_0}$$

est donc compact. Nous en déduisons la proposition suivante

PROPOSITION 2.2.21 (FACTORISATION DE L'OPÉRATEUR T_ε^{00})
Il existe un opérateur H autoadjoint de classe $\mathcal{L}_1$ de Carleman et K un opérateur compact tels que :

$$T_\varepsilon^{00} = H(Id + K)$$

■ **PREUVE:** On utilise donc les résultats précédents :

$$\forall \varphi \in L^2(\Gamma), \quad T_\varepsilon^{00}\,\varphi = e_\varepsilon^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_0} = w(\varphi)\Big|_{\Gamma_0} + u_0(\varphi)\Big|_{\Gamma_0}$$

par définition de $w(\varphi)$, et donc

$$T_\varepsilon^{00} \ =\ H_0 + K_0 + K_1$$

On pose $H = H_0$ et $K = H_0^{-1}(K_0 + K_1)$. K est compact car K_0 et K_1 le sont. H est autoadjoint et ses valeurs singulières $(s_j(H))_j$ sont données par :

$$\forall n > \frac{\alpha\omega}{\pi}, \quad s_n(H) = \frac{1}{\gamma_n^0} = \mathcal{O}\big(\frac{1}{n^2}\big),$$

on a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} [s_n(H)] < \infty.$$

Par la Définition B.2.14 de l'Annexe B.2, H appartient à la classe de Carleman d'ordre 1. ■

2.2.6.2 Propriétés spectrales de l'opérateur Λ_ε^+

La proposition précédente concernant la factorisation de l'opérateur T_ε^{00} nous permet de montrer que Λ_ε^+ vérifie bien les hypothèses du théorème B.2.18 de Keldys et que cet opérateur est bien « jordanisable » (voir Définition B.2.16 pour cette notion et la définition des vecteurs propres généralisés).

THÉORÈME 2.2.22
Supposons le demi-guide Ω^+ droit

$$\Omega^+ = \mathbb{R}^+ \times]0,1[,$$

et l'indice de réfraction ρ_p constant sur un voisinage du bord Γ_0^+,

$$\exists \alpha > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall\, (x,y) \in]0,\delta[\times]0,1[, \quad \rho_p(x,y) = \alpha^2$$

alors **le système de vecteurs propres généralisés de Λ_ε^+ est complet**.

■ **PREUVE:** On rappelle que

$$\Lambda_\varepsilon^+ = T_\varepsilon^{00} + T_\varepsilon^{10} R_\varepsilon$$

d'après la proposition 2.2.21 concernant la factorisation de T_ε^{00}, on a donc

$$\Lambda_\varepsilon^+ = H\big(\mathrm{Id} + K + H^{-1} T_\varepsilon^{10} R_\varepsilon\big)$$

avec H autoadjoint de classe $\mathcal{L}_1$ de Carleman et K un opérateur compact. Comme Λ_ε^+ est injectif, on peut appliquer le théorème B.2.18 de Keldys. ■

Nous avons donc un résultat de complétude pour la famille de vecteurs propres généralisés de Λ_ε^+. Nous nous sommes posés la question d'un résultat supplémentaire sur la famille de vecteurs propres ; ne formeraient ils pas au moins une base de Riesz (voir Annexe B.2 pour la définition) ? En effet, intuitivement, on se dit que les vecteurs propres de Λ_ε^+ qui correspondent à des ondes très exponentiellement décroissantes, ne voit pas le milieu périodique. Il y a donc des chances qu'ils ressemblent aux vecteurs propres de l'opérateur NtD du cas du guide droit homogène. Nous avons établi un résultat partiel dans la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2.23 (VECTEURS PROPRES DE Λ_ε^+)
Supposons le demi-guide Ω^+ droit

$$\Omega^+ = \mathbb{R}^+ \times]0,1[,$$

et l'indice de réfraction ρ_p constant sur un voisinage du bord Γ_0^+,

$$\textit{(H4)} \qquad \exists \alpha > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall\, (x,y) \in]0,\delta[\times]0,1[, \quad \rho_p(x,y) = \alpha^2.$$

Soit $\Lambda^+_{\varepsilon,\alpha}$ l'opérateur NtD dans le cas du guide droit homogène dont nous avons donné une expression (2.7)*, Section 2.1.2. On a :*

$$\exists C > 0,\ \forall n > \frac{\alpha\omega}{\pi}, \quad \|(\Lambda^+_\varepsilon - \Lambda^+_{\varepsilon,\alpha})\varphi_n\|_{H^{1/2}(\Gamma^+)} \leq C\frac{e^{-n\delta}}{n}.$$

■ **PREUVE:** Pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, nous avons donné une expression (2.5) de l'unique solution H^1 du problème $(\mathcal{P}^+_\varepsilon)$ dans le cas du guide droit homogène que nous notons ici $u^+_{\varepsilon,\alpha}(\varphi)$. On pose :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma^+), \quad w_\varepsilon(\varphi) = u^+_\varepsilon(\varphi) - u^+_{\varepsilon,\alpha}(\varphi)$$

où $u^+_\varepsilon(\varphi)$ est la solution de $(\mathcal{P}^+_\varepsilon)$ dans le cas où le milieu ρ_p est périodique et vérifie l'hypothèse (H4). Pour toute donnée φ, $w_\varepsilon(\varphi)$ est l'unique solution H^1 du problème suivant :

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle w_\varepsilon - \rho_p\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,w_\varepsilon &=& (\rho_p - \alpha^2)\,(\omega^2+\imath\varepsilon\omega)\,u^+_{\varepsilon,\alpha}(\varphi) & \text{dans} \quad \Omega^+ \\ \dfrac{\partial u^+_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega^+. \end{array}\right.$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à $\partial\Omega^+$. On a naturellement :

$$\exists C > 0, \quad \forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma^+), \quad \|w_\varepsilon(\varphi)\|_{H^1(\Omega^+)} \leq C\|(\rho_p - \alpha^2)u^+_{\varepsilon,\alpha}(\varphi)\|_{L^2(\Omega^+)}.$$

On rappelle que pour tout $\varphi = \varphi_n$ où la famille $\{\varphi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une BON de vecteurs propres du laplacien transverse avec conditions de Neumann (voir Section 2.1.2), la solution $u^+_{\varepsilon,\alpha}(\varphi_n)$ est donnée par

$$\forall (x,y) \in \Omega^+, \quad u^+_{\varepsilon,\alpha}(\varphi_n) = \frac{1}{\gamma^\varepsilon_n}\,\varphi_n(y)\,e^{-\gamma^\varepsilon_n x}$$

où

$$\gamma^\varepsilon_n = -\imath\sqrt{\alpha^2(\omega^2+\imath\varepsilon\omega) - n^2\pi^2}, \quad \mathrm{Im}\big(\sqrt{\alpha^2(\omega^2+\imath\varepsilon\omega) - n^2\pi^2}\big) > 0.$$

On remarque donc que :

$$\forall n > \frac{\alpha\omega}{\pi}, \quad \mathrm{Re}\big(\gamma^\varepsilon_n\big) \equiv n.$$

Plaçons nous dans le cas où $n > \alpha\omega/\pi$. En utilisant la séparation de variables, la normalisation de φ_n (pour la première égalité) et l'hypothèse (H4) (pour la seconde égalité), on obtient

$$\|(\rho_p - \alpha^2)u^+_{\varepsilon,\alpha}(\varphi_n)\|^2_{L^2(\Omega^+)} = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_p^{p+1}(\rho_p-\alpha^2)^2 e^{-2\mathrm{Re}(\gamma^\varepsilon_n)x}\,dx = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_{p+\delta}^{p+1} e^{-2\mathrm{Re}(\gamma^\varepsilon_n)x}\,dx.$$

Une simple intégration nous donne alors

$$\|(\rho_p - \alpha^2)u^+_{\varepsilon,\alpha}(\varphi_n)\|^2_{L^2(\Omega^+)} = \frac{e^{-2\mathrm{Re}(\gamma^\varepsilon_n)\delta} - e^{-2\mathrm{Re}(\gamma^\varepsilon_n)}}{2\mathrm{Re}(\gamma^\varepsilon_n)\big(1-e^{-2\mathrm{Re}(\gamma^\varepsilon_n)}\big)}$$

L'équivalent de $\mathrm{Re}\big(\gamma^\varepsilon_n\big)$ dès que n est assez grand donne donc l'estimation

$$\exists C > 0, \quad \|(\rho_p - \alpha^2)u^+_{\varepsilon,\alpha}(\varphi_n)\|^2_{L^2(\Omega^+)} \leq C\frac{e^{-2\delta n}}{n}$$

d'où la même estimation pour $w_\varepsilon(\varphi_n)$. Le théorème de trace nous donne enfin

$$\exists C > 0,\ \forall n > \frac{\alpha\omega}{\pi}, \quad \|(\Lambda^+_\varepsilon - \Lambda^+_{\varepsilon,\alpha})\varphi_n\|_{H^{1/2}(\Gamma^+)} \leq C\frac{e^{-n\delta}}{n}.$$

■

Une partie des vecteurs propres de l'opérateur NtD du guide droit homogène ressemblent donc à des vecteurs propres de l'opérateur du guide périodique. Nous nous rapprochons du résultat de la base de Riesz mais nous n'avons pas trouvé un meilleur résultat que celui-ci pour pouvoir arriver à cette conclusion. Cela reste encore une question ouverte.

Nous avons établi un résultat très intéressant concernant les propriétés spectrales de l'opérateur Λ_ε^+. Nous n'avons pas retrouvé la diagonalisation dans une base orthonormée indépendante de ε, vraie dans le cas particulier du guide droit homogène, qui se révèle importante pour statuer sur le caractère bien posé du problème posé en domaine borné sans absorption. Nous verrons cependant que dans le cas général, le résultat que nous venons de démontrer s'avérera tout de même suffisant.

2.3 Résolution numérique dans le cas avec absorption

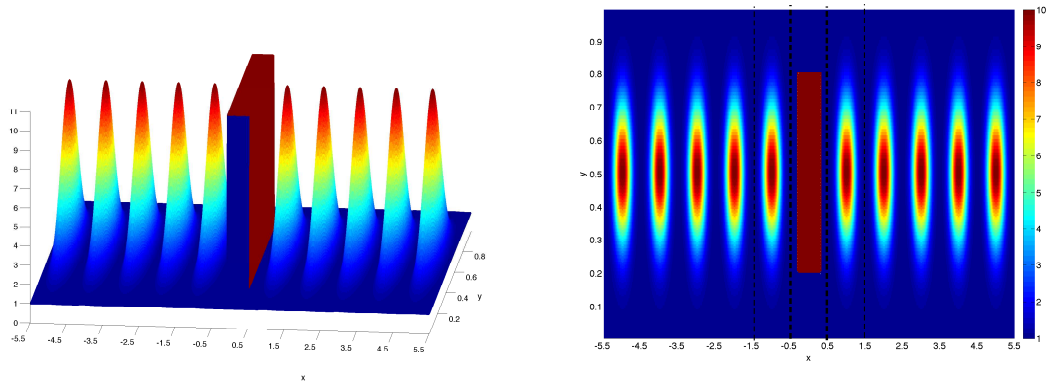
Nous allons présenter dans cette section une méthode de discrétisation et son analyse dans le cas du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ avec absorption. Nous avons montré que les problèmes qui doivent être discrétisés sont essentiellement des problèmes de cellule avec conditions de Neumann et le problème en domaine borné avec conditions de NtD. Un grand nombre de méthodes de discrétisation peuvent évidemment être utilisées pour résoudre ces problèmes qui en eux même ne présentent aucune difficulté. Nous avons choisi des méthodes de discrétisation liées à l'**approche variationnelle** du problème, essentiellement pour conserver les propriétés des opérateurs NtD locaux (les propriétés d'adjoint en particulier) qui reposent essentiellement sur les formules de Green. Nous tenons à ces propriétés qui offrent certaines caractéristiques à l'équation de Riccati stationnaire, le point clé de notre méthode.

En choisissant de construire les opérateurs de NtD, c'est la formulation du problème mixte (voir Remarque 2.2.11) qui fait intervenir naturellement les opérateurs de NtD pour le problème intérieur. Par contre, pour les construire, ce qui nécessite la résolution des problèmes de cellule et le calcul des opérateurs de NtD locaux, c'est la formulation du problème du second ordre qui est le plus naturel. En revanche, si nous avions choisi de construire l'opérateur de DtN, ce qui intervient naturellement c'est la formulation du second ordre pour le problème intérieur (voir la démonstration du théorème 2.2.10) et c'est la formulation mixte pour les problèmes de cellule. Si nous choisissons une formulation en particulier, mixte par exemple, nous aurions plutôt commencé par construire l'opérateur de DtN, puis l'inverser et enfin utiliser l'opérateur de NtD obtenu pour résoudre le problème mixte intérieur. Finalement, le choix importe peu parmi de nombreuses possibilités sensiblement équivalentes.

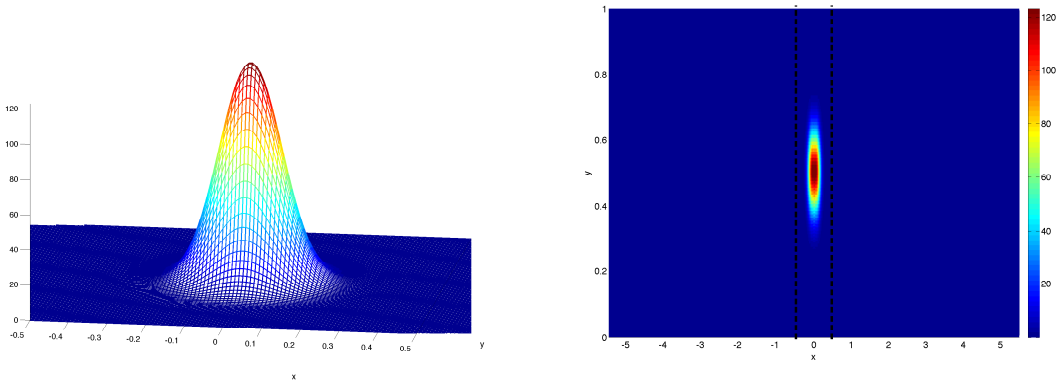
Initialement, nous avions opté pour la simplicité et choisi une **méthode de discrétisation par éléments finis mixtes** pour résoudre tous les problèmes. Elle a l'avantage d'être très simple à mettre en oeuvre (les opérateurs NtD et NtN discrets sont simples à calculer) et suffit pour apporter « une preuve de concept » pour la méthode. L'analyse numérique est un peu technique mais ne présente au fond aucune difficulté. Cette méthode n'est cependant pas très précise et nous

avons été amené, par la suite, à utiliser des méthodes plus performantes et plus précises (des éléments finis spectraux de haut degré notamment). Dans ce mémoire, nous avons cependant décidé, par souci de simplicité dans la présentation, de présenter seulement la discrétisation par éléments finis mixtes. Les résultats peuvent être extrapolés à d'autres méthodes numériques. Ce qui nous semble particulièrement intéressant et original, réside dans la résolution de l'équation de Riccati stationnaire ($\mathcal{E}_\varepsilon^R$) et les questions que cela soulève.

Nous illustrerons l'analyse de la méthode par les résultats obtenus dans le cas d'un guide droit dont les données ρ et f sont représentées respectivement Figures 2.8(a) et 2.8(b), et pour lequel les supports compacts de $\rho - \rho_p$ et f sont inclus dans $]-0.5, 0.5[\times]0, 1[$ et l'absorption vaut 0.1 dans toute cette section. En pratique, cela correspond à une absorption faible puisque typiquement le mode 0 du guide droit homogène d'indice 1 qui se propage à une fréquence 1 perd 25% de sa valeur à chaque période. Nous supposons de plus la période du milieu égale à 1.



(a) Le milieu périodique localement perturbé



(b) La source à support compact

FIG. 2.8: La donnée ρ sur $[-5.5, 5.5] \times [0, 1]$ et la source f sur $[-5.5, 5.5] \times [0, 1]$. Dans un premier temps, $\Omega^i = [-0.5, 0.5] \times [0, 1]$, $\mathcal{C}_1^+ = [0.5, 1.5] \times [0, 1]$ et $\mathcal{C}_1^- = [-1.5, -0.5] \times [0, 1]$

L'algorithme de résolution des problèmes de demi-guide est globalement le même que pour le cas monodimensionnel.

1. on calcule pour tout φ in $H^{-1/2}(\Gamma)$, les solutions $e_\varepsilon^0(\varphi)$ et $e_\varepsilon^1(\varphi)$ des problèmes de cellule (2.17) et (2.18) dont nous expliquons la discrétisation dans la section 2.3.1.1 ;
2. on en déduit les opérateurs de NtD locaux (T_ε^{00}, T_ε^{01}, T_ε^{10}, T_ε^{11}) définies par (2.22) (section 2.3.1) ;
3. on résout l'équation caractéristique ($\mathcal{E}_\varepsilon^R$) en utilisant une des deux méthodes expliquées section 2.3.2 ;
4. on calcule l'opérateur Λ_ε^+ :
$$\Lambda_\varepsilon^+ = T_\varepsilon^{00} - T_\varepsilon^{10}\, R_\varepsilon.$$

Pour discrétiser le problème mixte, nous utilisons plus précisément des éléments finis mixtes de Raviart-Thomas dont les avantages sont avant tout la simplicité ce qui est important pour une simple validation de la méthode et le lien direct avec un problème du second ordre discret équivalent. Le deuxième avantage est important. En effet, comme nous allons le voir dans cette section, à quelques hypothèses sur la discrétisation près, nous allons montrer que la méthode développée peut être transposée directement au problème discret. En particulier, nous allons définir des opérateurs de NtD discret, une équation de Riccati en dimension finie, un opérateur de NtN discret solution de cette équation de Riccati et enfin l'expression de la solution discrète et de l'opérateur de NtD discret. A chaque étape, des estimateurs d'erreur seront formulés entre solutions continue et discrète.

2.3.1 Approximation des opérateurs NtD locaux

2.3.1.1 Discrétisation des problèmes de cellule par des éléments finis mixtes

Nous commençons donc par donner les problèmes mixtes qui sont équivalents aux problèmes de cellule (2.17) et (2.18), nous en étudierons dans la suite la discrétisation et les avantages pour notre problème. Nous ne démontrons pas le résultat classique suivant.

PROPOSITION 2.3.1 (FORMULATION MIXTE DES PROBLÈMES DE CELLULE)
Pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, soient les problèmes de cellule mixtes suivants :

$\forall \ell \in \{0,1\}$, *trouver* $(e_\varepsilon^\ell(\varphi), \mathbf{E}_{\varepsilon,0}^\ell(\varphi)) \in L^2(\mathcal{C}) \times H_{\mathrm{div},0}(\mathcal{C})$ *telle que* $\forall (v, \mathbf{V}) \in L^2(\mathcal{C}) \times H_{\mathrm{div},0}(\mathcal{C})$

$$\left| \begin{array}{rcrcl} a(e_\varepsilon^\ell, v) & + & b(v, \mathbf{E}_{\varepsilon,0}^\ell) & = & -b(v, \mathbf{F}^\ell(\varphi)) \\ \overline{b(e_\varepsilon^\ell, \mathbf{V})} & + & \mathbf{A}(\mathbf{E}_{\varepsilon,0}^\ell, \mathbf{V}) & = & -\mathbf{A}(\mathbf{F}^\ell(\varphi), \mathbf{V}) \end{array} \right. \tag{2.28}$$

avec

$$\begin{aligned} a(u,v) &= (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \int_{\mathcal{C}} \rho_p u \overline{v} \\ b(u, \mathbf{V}) &= \int_{\mathcal{C}} \mathrm{div}\, \mathbf{V}\, \overline{u} \\ \mathbf{A}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \int_{\mathcal{C}} \mathbf{U}\, \overline{\mathbf{V}} \end{aligned}$$

et où

$$H_{\mathrm{div}}^\ell(\mathcal{C}) = \Big\{ \mathbf{V} \in H_{\mathrm{div}}(\mathcal{C}), \quad \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\Big|_{\partial\mathcal{C}\setminus\Gamma_\ell} = 0 \Big\},$$

$$H_{\mathrm{div},0}(\mathcal{C}) = \Big\{ \mathbf{V} \in H_{\mathrm{div}}^\ell(\mathcal{C}), \quad \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\Big|_{\Gamma_\ell} = 0 \Big\},$$

$$\mathbf{F}^\ell(\varphi) \in H^\ell_{\mathrm{div}}(\mathcal{C}), \quad \mathbf{F}^\ell(\varphi)\cdot\mathbf{n}\Big|_{\Gamma_\ell} = \varphi. \tag{2.29}$$

Pour tout $\forall \ell \in \{0,1\}$*, si* $(e^\ell_\varepsilon(\varphi), \mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,0}(\varphi))$ *est solution du problème mixte précédent alors* $e^\ell_\varepsilon(\varphi)$ *est l'unique solution* H^1 *de* (2.17) *pour* $\ell = 0$ *et* (2.18) *pour* $\ell = 1$ *et* $\mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,0}(\varphi) + \mathbf{F}^\ell(\varphi)$ *est l'unique solution* $H^\ell_{\mathrm{div}}(\mathcal{C})$ *du problème :*

$$\left|\begin{array}{rcll} -\nabla(\dfrac{1}{\rho_p(\mathbf{x})}\ \mathrm{div}\,\mathbf{E}^\ell_\varepsilon) - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\ \mathbf{E}^\ell_\varepsilon &=& 0 & \textit{dans} \quad \mathcal{C} \\ \mathbf{E}^\ell_\varepsilon\cdot\mathbf{n} &=& 0 & \textit{sur} \quad \partial\mathcal{C}\setminus\Gamma_\ell, \\ \mathbf{E}^\ell_\varepsilon\cdot\mathbf{n} &=& \varphi & \textit{sur} \quad \Gamma_\ell. \end{array}\right. \tag{2.30}$$

Réciproquement, si $e^\ell_\varepsilon(\varphi)$ *est l'unique solution* H^1 *de* (2.17) *pour* $\ell = 0$ *et* (2.18) *pour* $\ell = 1$ *alors* $(e^\ell_\varepsilon(\varphi), \nabla e^\ell_\varepsilon(\varphi) - \mathbf{F}^\ell(\varphi))$ *est solution du problème mixte précédent.*

Le problème mixte admet par conséquent une solution unique.

REMARQUE 2.3.2
Nous aurions pu montrer directement que le problème mixte, en tant que tel c'est-à-dire sans le relier au problème de départ, est bien posé en utilisant les arguments classiques sur les problèmes mixtes [Brezzi & Fortin (1991)]. Avec ces mêmes arguments, nous pourrions montrer que le problème mixte discrétisé est bien posé sous certaines conditions. L'idée, ici, est avant tout de montrer que la méthode développée Section 2.2 s'extrapole en particulier à notre problème mixte discrétisé et pour ce faire, nous allons trouver à ce dernier un problème équivalent du second ordre pour lequel il sera plus facile de généraliser la méthode.

REMARQUE 2.3.3
Nous n'allons pas revenir sur notre choix de discrétisation mais nous remarquons juste que la formulation mixte du problème de cellule n'est pas très naturelle quand ce sont des conditions de Neumann qui sont imposées. Il faut donc introduire un relèvement de la condition de Neumann non homogène (ici $\mathbf{F}^\ell(\varphi)$*). Au contraire, la formulation du problème du second ordre est plus simple : pour tout* $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$*,*

$\forall \ell \in \{0,1\}$*, trouver* $e^\ell_\varepsilon(\varphi) \in H^1(\mathcal{C})$ *telle que pour tout* $v \in H^1(\mathcal{C})$ *:*

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla e^\ell_\varepsilon\cdot\nabla v - \rho_p(\mathbf{x})\ (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\ e^\ell_\varepsilon\ v\ d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_\ell} \varphi v,$$

L'analyse numérique aurait été d'autant plus simple.

Nous cherchons maintenant à déterminer une approximation des solutions des deux problèmes mixtes de la Proposition précédente. Les espaces d'approximation des solutions doivent être choisis avec précaution afin que nous puissions appliquer la méthode développée section 2.2 dans le cas discret. Pour cela, il suffit de s'assurer que le maillage de la cellule de périodicité conserve les propriétés de périodicité, c'est-à-dire que l'espace de dimension finie approchant $H^{-1/2}(\Gamma_0)$ soit le même que celui approchant $H^{-1/2}(\Gamma_1)$, afin d'identifier les frontières Γ_ℓ et les espaces de fonctions correspondants, comme dans le cas continu. De façon analogue, les espaces d'approximation de $L^2(\mathcal{C})$ et $H_{\mathrm{div}}(\mathcal{C})$ doivent conserver une certaine périodicité. C'est une

contrainte simple qui peut être assurée par un maillage périodique.

Nous introduisons donc

- $\mathcal{M}_h$ un sous-espace de dimension finie de $L^2(\mathcal{C})$;
- $\mathcal{W}_h$ un sous-espace de dimension finie de $H_{\rm div}(\mathcal{C})$ telle que

$$\text{div } \mathcal{W}_h = \mathcal{M}_h. \tag{2.31}$$

  On note $\mathcal{W}_h^\ell$ et $\mathcal{W}_{0,h}$ les intersections entre $\mathcal{W}_h$ et $H^\ell_{\rm div}(\mathcal{C})$ et entre $\mathcal{W}_h$ et $H_{{\rm div},0}(\mathcal{C})$, respectivement ;

- $\mathcal{T}_h$ un sous espace de dimension finie de $H^{-1/2}(\Gamma_0)$ et $H^{-1/2}(\Gamma_1)$. On note $\Pi_{\mathcal{T}_h}$ la projection orthogonale de $H^{-1/2}(\Gamma_0)$ dans $\mathcal{T}_h$. L'analyse de la méthode est plus aisée en choisissant $\mathcal{T}_h$ l'espace des traces normales sur Γ_0 des fonctions de $\mathcal{W}_h$.

La condition (2.31) est importante pour pouvoir relier le problème mixte discrétisé au problème de départ du second ordre discrétisé pour lequel, à quelques hypothèses près sur le maillage, la méthode est facilement transposable. C'est l'hypothèse qui semble la plus contraignante sur les espaces de discrétisation. Nous aurions pu l'éviter en étudiant directement le caractère bien posé du problème mixte et du problème correspondant sans le relier au problème de départ. Ce résultat ne nous semble cependant ni classique, ni évident et il aurait été difficile de relier les opérateurs de NtN et NtD discrets aux opérateurs du problème continu et d'établir un calcul d'erreur.

L'hypothèse (2.31) est finalement peu contraignante puisqu'elle est satisfaite par les éléments finis mixtes de Raviart-Thomas [Raviart & Thomas (1977)]. Nous donnons un exemple d'espaces de discrétisation qui correspond aux éléments finis mixtes d'ordre le plus bas à la fin de cette section. C'est d'ailleurs ce choix que nous avons fait dans un premier temps, quand notre seul soucis n'était pas celui de la précision mais celui de la validation de la méthode.

On considère maintenant le problème discret : Pour tout $\varphi_h \in \mathcal{T}_h$, on cherche

$\forall \ell \in \{0,1\}$, $(e^\ell_{\varepsilon,h}(\varphi_h), \mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,0,h}(\varphi_h)) \in \mathcal{M}_h \times \mathcal{W}_{0,h}$ telle que $\forall (v_h, \mathbf{V}_h) \in \mathcal{M}_h \times \mathcal{W}_{0,h}$

$$\left| \begin{array}{rcrcl} a(e^\ell_{\varepsilon,h}, v_h) & + & b(v_h, \mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,0,h}) & = & -b(v_h, \mathbf{F}^\ell_h(\varphi_h)) \\ \overline{b(e^\ell_{\varepsilon,h}, \mathbf{V}_h)} & + & \mathbf{A}(\mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,0,h}, \mathbf{V}_h) & = & -\mathbf{A}(\mathbf{F}^\ell_h(\varphi_h), \mathbf{V}_h) \end{array} \right. \tag{2.32}$$

où a, b et A sont les formes bilinéaires de la proposition 2.3.1 et où $\mathbf{F}^\ell_h(\varphi_h)$ est définie par :

$$\mathbf{F}^\ell_h(\varphi_h) \in \mathcal{W}^\ell_h, \quad \text{et} \quad \mathbf{F}^\ell_h(\varphi_h) \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_\ell} = \varphi_h. \tag{2.33}$$

On pose $\mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,h}(\varphi_h) = \mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,0,h}(\varphi_h) + \mathbf{F}^\ell_h(\varphi_h)$. Nous pouvons énoncer maintenant un résultat important du caractère bien posé des problèmes de cellule discrétisé, démontré en utilisant un problème du second ordre discrétisé équivalent.

THÉORÈME 2.3.4 (ESTIMATION D'ERREUR POUR LES PROBLÈMES DE CELLULE)
Pour chaque $\ell \in \{0,1\}$, le problème mixte discrétisé (2.32) *est bien posé et nous avons de plus l'estimation d'erreur suivante :*

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma^+), \quad \|\mathbf{E}_\varepsilon^\ell(\varphi) - \mathbf{E}_{\varepsilon,h}^\ell(\Pi_{\mathcal{T}_h}\varphi)\|_{H_{\rm div}(\mathcal{C})} + \|e_\varepsilon^\ell(\varphi) - e_{\varepsilon,h}^\ell(\Pi_{\mathcal{T}_h}\varphi)\|_{L^2(\mathcal{C})} \ \leq \ \varepsilon^\ell(h)$$

où

$$\varepsilon^\ell(h) = C\big[\inf_{\mathbf{V}_h\in\mathcal{W}_h} \|\mathbf{E}_\varepsilon^\ell(\varphi) - \mathbf{V}_h\|_{H_{\rm div}(\mathcal{C})} + \inf_{v_h\in\mathcal{M}_h} \|e_\varepsilon^\ell(\varphi) - v_h\|_{L^2(\mathcal{C})} + \|\varphi - \Pi_{\mathcal{T}_h}\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\ell)}\big],$$

avec C une constante indépendante de h.

■ **PREUVE:** Soit $\varphi_h \in \mathcal{T}_h$. On utilise le fait que $\operatorname{div}\mathcal{W}_h = \mathcal{M}_h$: en choisissant $v_h = \operatorname{div}\mathbf{V}_h/\rho_p$ et en sommant la première équation de (2.32) et la deuxième équation multipliée par $-(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)$, on trouve :

$$\forall \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_{0,h}, \quad \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\rho_p} \operatorname{div}\mathbf{E}_{\varepsilon,0,h}^\ell \, \overline{\operatorname{div}\mathbf{V}_h} - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E}_{\varepsilon,0,h}^\ell \cdot \overline{\mathbf{V}}_h = l_h(\mathbf{V}_h)$$

où l_h est une forme linéaire définie par :

$$\forall \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_h, \quad l_h(\mathbf{V}_h) = -\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\rho_p} \operatorname{div}\mathbf{F}_h^\ell(\varphi_h) \, \overline{\operatorname{div}\mathbf{V}_h} + (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}_h^\ell(\varphi_h) \cdot \overline{\mathbf{V}}_h.$$

avec $\mathbf{F}_h^\ell(\varphi_h)$ défini par (2.33). Ce dernier problème est l'approximation du problème (2.30) par éléments finis avec $\mathcal{W}_h$ comme espace d'approximation. Si on note α la constante de continuité de la forme bilinéaire de ce dernier problème et β la constante de coercivité (qui est proportionnelle à ε), on montre, en utilisant des arguments classiques d'approximation variationnelle que

$$\|\mathbf{E}_\varepsilon^\ell(\varphi) - \mathbf{E}_{\varepsilon,h}^\ell(\varphi_h)\|_{H_{\rm div}(\mathcal{C})} \leq \big(1 + \frac{\alpha}{\beta}\big) \inf_{\mathbf{V}_h\in\mathcal{W}_h} \|\mathbf{E}_\varepsilon^\ell(\varphi) - \mathbf{V}_h\|_{H_{\rm div}(\mathcal{C})} + \frac{1}{\beta} \sup_{\mathbf{V}_h\in\mathcal{W}_h} \frac{|l(\mathbf{V}_h) - l_h(\mathbf{V}_h)|}{\|\mathbf{V}_h\|_{H_{\rm div}(\mathcal{C})}}.$$

où l est la forme linéaire définie par

$$\forall \mathbf{V} \in H_{\rm div}(\mathcal{C}), \quad l(\mathbf{V}) = -\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\rho_p} \operatorname{div}\mathbf{F}^\ell(\varphi) \, \overline{\operatorname{div}\mathbf{V}} + (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}^\ell(\varphi) \cdot \overline{\mathbf{V}}.$$

avec $\mathbf{F}^\ell(\varphi)$ défini par (2.29). On montre facilement que

$$\forall \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_h, \quad |l(\mathbf{V}_h) - l_h(\mathbf{V}_h)| \leq \alpha \|\mathbf{F}_\varepsilon^\ell(\varphi) - \mathbf{F}_{\varepsilon,h}^\ell(\varphi_h)\|_{H_{\rm div}(\mathcal{C})} \, \|\mathbf{V}_h\|_{H_{\rm div}(\mathcal{C})}.$$

En utilisant enfin le théorème de trace pour les fonctions $H_{\rm div}$, on trouve qu'il existe une constante C indépendante de h mais qui explose quand β tend vers 0 c'est-à-dire quand ε tend vers 0 telle que

$$\|\mathbf{E}_\varepsilon^\ell(\varphi) - \mathbf{E}_{\varepsilon,h}^\ell(\varphi_h)\|_{H_{\rm div}(\mathcal{C})} \leq C\big[\inf_{\mathbf{V}_h\in\mathcal{W}_h} \|\mathbf{E}_\varepsilon^\ell(\varphi) - \mathbf{V}_h\|_{H_{\rm div}(\mathcal{C})} + \inf_{\varphi_h\in\mathcal{T}_h} \|\varphi - \varphi_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\ell)}\big],$$

soit pour $\varphi_h = \Pi_{\mathcal{T}_h}\varphi$

$$\|\mathbf{E}_\varepsilon^\ell(\varphi) - \mathbf{E}_{\varepsilon,h}^\ell(\Pi_{\mathcal{T}_h}\varphi)\|_{H_{\rm div}(\mathcal{C})} \leq C\big[\inf_{\mathbf{V}_h\in\mathcal{W}_h} \|\mathbf{E}_\varepsilon^\ell(\varphi) - \mathbf{V}_h\|_{H_{\rm div}(\mathcal{C})} + \|\varphi - \Pi_{\mathcal{T}_h}\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\ell)}\big].$$

On récrit ensuite la première équation de (2.32) :

$$\forall v_h \in \mathcal{M}_h, \quad (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \int_{\mathcal{C}} \rho_p e_{\varepsilon,h}^\ell \, \overline{v}_h = -\int_{\mathcal{C}} \big(\operatorname{div}\mathbf{E}_{\varepsilon,0,h}^\ell + \operatorname{div}\mathbf{F}_h^\ell(\varphi_h)\big) \, \overline{v}_h.$$

qui est une approximation du problème

$$\forall v \in L^2(\mathcal{C}), \quad (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \int_{\mathcal{C}} \rho_p e_\varepsilon^\ell \, \overline{v} = -\int_{\mathcal{C}} \big(\operatorname{div}\mathbf{E}_{\varepsilon,0}^\ell + \operatorname{div}\mathbf{F}^\ell(\varphi_h)\big) \, \overline{v},$$

par éléments finis avec $\mathcal{M}_h$ comme espace d'approximation. On en déduit le résultat attendu en utilisant des arguments classiques d'approximation variationnelle. ■

REMARQUE 2.3.5 (LA DÉPENDANCE DE LA CONSTANTE C PAR RAPPORT À ε)
La constante telle qu'on l'obtient dans la preuve tend vers l'infini quand ε tend vers 0. Cependant, d'autres techniques nous permettraient de montrer que ces estimations sont toujours vraies quand $\varepsilon = 0$ sauf pour une quantité dénombrable de fréquences qui correspond aux fréquences propres du problème de Neumann (voir la définition Section 3.2.1.1).

Nous pouvons définir maintenant de manière faible les opérateurs de NtD locaux discrets :
$\forall \ell \in \{0,1\}, \quad \forall \varphi_h \in \mathcal{T}_h,\ \forall \psi_h \in \mathcal{T}_h,$

$$\begin{aligned} &\exists \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_h^0,\ \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_0} = \psi_h, \quad \int_{\Gamma_0} T_{\varepsilon,h}^{\ell 0}(\varphi_h)\,\psi_h = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E}_{\varepsilon,h}^{\ell}(\varphi_h)\cdot \mathbf{V}_h + \int_{\mathcal{C}} e_{\varepsilon,h}^{\ell}(\varphi_h)\ \mathrm{div}\,\mathbf{V}_h \\ &\exists \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_h^1,\ \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_1} = \psi_h, \quad \int_{\Gamma_1} T_{\varepsilon,h}^{\ell 1}(\varphi_h)\,\psi_h = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E}_{\varepsilon,h}^{\ell}(\varphi_h)\cdot \mathbf{V}_h + \int_{\mathcal{C}} e_{\varepsilon,h}^{\ell}(\varphi_h)\ \mathrm{div}\,\mathbf{V}_h \end{aligned} \tag{2.34}$$

REMARQUE 2.3.6 (EXTENSION DES OPÉRATEURS $T_{\varepsilon,h}^{\ell j}$ À $H^{-1/2}(\Gamma^+)$)
On pourrait étendre les opérateurs $T_{\varepsilon,h}^{\ell j}$ à $H^{-1/2}(\Gamma^+)$ en imposant
$\forall \ell \in \{0,1\}, \quad \forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma^+),\ \forall \psi_h \in \mathcal{T}_h,$

$$\begin{aligned} &\exists \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_h^0,\ \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_0} = \psi_h, \quad \int_{\Gamma_0} T_{\varepsilon,h}^{\ell 0}(\varphi)\,\psi_h = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E}_{\varepsilon,h}^{\ell}(\Pi_{\mathcal{T}_h}\varphi)\cdot \mathbf{V}_h + \int_{\mathcal{C}} e_{\varepsilon,h}^{\ell}(\Pi_{\mathcal{T}_h}\varphi)\ \mathrm{div}\,\mathbf{V}_h \\ &\exists \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_h^1,\ \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_1} = \psi_h, \quad \int_{\Gamma_1} T_{\varepsilon,h}^{\ell 1}(\varphi)\,\psi_h = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E}_{\varepsilon,h}^{\ell}(\Pi_{\mathcal{T}_h}\varphi)\cdot \mathbf{V}_h + \int_{\mathcal{C}} e_{\varepsilon,h}^{\ell}(\Pi_{\mathcal{T}_h}\varphi)\ \mathrm{div}\,\mathbf{V}_h \end{aligned}$$

mais numériquement, nous les avons calculés comme précédemment, l'avantage étant que ces opérateurs sont des matrices carrées dont la taille est la dimension de l'espace $\mathcal{T}_h$.

Nous avons les estimations d'erreur suivantes entre les opérateurs de NtD locaux continus et discrets

THÉORÈME 2.3.7 (ESTIMATION D'ERREUR POUR LES OPÉRATEURS DE NTD LOCAUX)
Pour chaque $(\ell, j) \in \{0,1\}^2$, nous avons les estimations d'erreur suivante :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma^+), \quad \|T_{\varepsilon}^{\ell j}(\varphi) - T_{\varepsilon,h}^{\ell j}(\Pi_{\mathcal{T}_h}\varphi)\|_{H^{1/2}(\Gamma_j)} \ \leq\ \varepsilon^{\ell}(h)$$

où

$$\varepsilon^{\ell}(h) = C\big[\inf_{\mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_h} \|\mathbf{E}_{\varepsilon}^{\ell}(\varphi) - \mathbf{V}_h\|_{H_{\mathrm{div}}(\mathcal{C})} + \inf_{v_h \in \mathcal{M}_h} \|e_{\varepsilon}^{\ell}(\varphi) - v_h\|_{L^2(\mathcal{C})} + \|\varphi - \Pi_{\mathcal{T}_h}\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\ell)}\big],$$

avec C une constante indépendante de h (voir Remarque 2.3.5).

2.3.1.2 Exemple : Eléments finis mixtes de Raviart-Thomas de plus bas degré

Choisissons d'abord un maillage périodique de la cellule par rapport à x tel que le maillage du bord Γ_0 soit le même que celui du bord Γ_1, par exemple un maillage **rectangulaire** régulier. Les frontières Γ_0 et Γ_1 sont discrétisées en N_y segments de longueurs $h > 0$.

Dans le cas le plus simple, $\mathcal{M}_h$ est l'ensemble des fonctions v_h qui sont constantes sur chaque

rectangle $\{R_i,\ 1 \le i \le N_x N_y\}$ (noté classiquement $\mathbb{Q}_0$), la dimension de $\mathcal{M}_h$ est donc le nombre d'éléments. Une base est fournie par les fonctions χ_i telles que :

$$\chi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in R_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quant à $\mathcal{W}_h$ c'est l'ensemble des fonctions $\mathbf{V}_h$ qui sont continues et linéaires sur les deux directions (x et y) sur chaque rectangle, (que l'on peut noter $\mathbb{P}_{0,1} \times \mathbb{P}_{1,0}$), la dimension de $\mathcal{W}_h$ est donc le nombre d'arêtes. Une base est fournie par les fonctions $\mathbf{V}_i$ telles que :

$$\int_{(\text{arête}_j)} (\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{n}_j)_{|\text{arête}_j} = \delta_{i,j}.$$

On remarque facilement que :

$$\text{div } \mathcal{W}_h = \mathcal{M}_h.$$

Nous avons choisi enfin comme espace d'approximation de $H^{-1/2}(\Gamma)$ l'espace des traces normales des fonctions de $\mathcal{W}_h$:

$$\mathcal{T}_{h,\ell} = \left\{ \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_\ell},\quad \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_h \right\},\quad \ell \in \{0,1\}.$$

Comme le maillage est périodique, on remarque facilement que :

$$\mathcal{T}_{h,0} = \mathcal{T}_{h,1} \quad (= \mathcal{T}_h).$$

Le choix de ces éléments finis mixtes simplifie la mise en oeuvre et l'analyse de la méthode discrétisée particulièrement parce que

$$\mathcal{T}_h = \left\{ v_h\Big|_{\Gamma_0^+},\quad v_h \in \mathcal{M}_h \right\} = \left\{ v_h\Big|_{\Gamma_1^+},\quad v_h \in \mathcal{M}_h \right\}.$$

Les traces de l'inconnue scalaire u_h et de sa dérivée normale $\mathbf{U}_h \cdot \mathbf{n}$ appartiennent donc au même espace $\mathcal{T}_h$, c'est-à-dire l'espaces des fonctions qui sont constantes sur chaque segment du maillage de Γ. La dimension de cet espace est N_y. Nous verrons donc que tous les opérateurs de NtD discrets vont être, dans ce cas, naturellement des opérateurs de $\mathcal{L}(\mathcal{T}_h)$, c'est-à-dire des matrices carrées.

Avec ce choix d'espace d'approximation, on montre facilement [Raviart & Thomas (1977)] que

$$\forall e \in H^1(\mathcal{C}),\quad \inf_{v_h \in \mathcal{M}_h} \|e - v_h\|_{L^2(\mathcal{C})} \le C' h\, \|e\|_{H^1(\mathcal{C})}$$

$$\forall \mathbf{E} \in \left(H^1(\mathcal{C})\right)^2, \text{div}\, \mathbf{E} \in H^1(\mathcal{C}),\quad \inf_{\mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_h} \|\mathbf{E} - \mathbf{V}_h\|_{H_{\text{div}}(\mathcal{C})} \le C' h \left[\|\mathbf{E}\|_{H^1(\mathcal{C})} + \|\text{div } \mathbf{E}\|_{H^1(\mathcal{C})}\right].$$

De plus en utilisant un résultat de [Girault & Glowinski (1995)], on montre l'existence d'une constante C indépendante de h telle que :

$$\forall \varphi \in L^2(\Gamma_\ell),\quad \inf_{\varphi_h \in \mathcal{T}_h} \|\varphi - \varphi_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\ell)} \le C' \sqrt{h} \inf_{\varphi_h \in \mathcal{T}_h} \|\varphi - \varphi_h\|_{L^2(\Gamma_\ell)}$$

et enfin en utilisant des résultats classiques d'interpolation

$$\forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_\ell),\quad \inf_{\varphi_h \in \mathcal{T}_h} \|\varphi - \varphi_h\|_{L^2(\Gamma_\ell)} \le C' \sqrt{h} \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_\ell)}.$$

En réunissant tous ces résultats, on montre que les erreurs d'approximation qui apparaissent Théorèmes 2.3.4 et 2.3.7 sont majorées par

$$\varepsilon^\ell(h) \le C'\, h \left[\|\mathbf{E}_\varepsilon^\ell(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C})} + \|\text{div } \mathbf{E}_\varepsilon^\ell(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C})} + \|e_\varepsilon^\ell(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C})} + \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_\ell)}\right],$$

où C' est une constante indépendante de h.

2.3.2 Approximation numérique de l'opérateur R_ε

Pour établir la définition de l'opérateur de propagation R_ε, nous sommes passés par le problème de demi-guide. De la même façon, pour définir l'approximation de l'opérateur de propagation R_ε, nous allons utiliser l'approximation du problème de demi-guide discret.

2.3.2.1 Un problème de demi-guide discret

Commençons tout d'abord par énoncer le problème mixte, équivalent au problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ sans préciser la démonstration.

PROPOSITION 2.3.8 (FORMULATION MIXTE DU PROBLÈME DE DEMI-GUIDE $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$)
Pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, soit le problème mixte suivant :

Trouver $(u_\varepsilon^+(\varphi), \mathbf{U}_{\varepsilon,0}^+(\varphi)) \in L^2(\Omega^+) \times H_{\mathrm{div},0}(\Omega^+)$ telle que $\forall (v, \mathbf{V}) \in L^2(\Omega^+) \times H_{\mathrm{div},0}(\Omega^+)$

$$\left| \begin{array}{rcrcl} a^+(u_\varepsilon^+, v) & + & b^+(v, \mathbf{U}_{\varepsilon,0}^+) & = & -b^+(v, \mathbf{F}^+(\varphi)) \\ \overline{b^+(u_\varepsilon^+, \mathbf{V})} & + & \mathbf{A}^+(\mathbf{U}_{\varepsilon,0}^+, \mathbf{V}) & = & -\mathbf{A}^+(\mathbf{F}^+(\varphi), \mathbf{V}) \end{array} \right. \tag{2.35}$$

avec

$$\begin{aligned} a^+(u, v) &= (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \int_{\Omega^+} \rho_p u \overline{v} \\ b^+(u, \mathbf{V}) &= \int_{\Omega^+} \mathrm{div}\, \mathbf{V}\, \overline{u} \\ \mathbf{A}^+(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \int_{\Omega^+} \mathbf{U}\, \overline{\mathbf{V}} \end{aligned}$$

et où

$$H_{\mathrm{div}}^+(\Omega^+) = \Big\{ \mathbf{V} \in H_{\mathrm{div}}(\Omega^+), \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\Big|_{\partial\Omega^+ \setminus \Gamma_0^+} = 0 \Big\},$$

$$H_{\mathrm{div},0}(\Omega^+) = \Big\{ \mathbf{V} \in H_{\mathrm{div}}^+(\Omega^+), \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_0^+} = 0 \Big\},$$

$$\mathbf{F}^+(\varphi) \in H_{\mathrm{div}}^+(\Omega^+), \quad \mathbf{F}^+(\varphi) \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_0^+} = \varphi.$$

Si $(u_\varepsilon^+(\varphi), \mathbf{U}_{\varepsilon,0}^+(\varphi))$ est solution du problème mixte précédent alors $u_\varepsilon^+(\varphi)$ est l'unique solution H^1 de $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ et $\mathbf{U}_{\varepsilon,0}^+(\varphi) + \mathbf{U}^+(\varphi)$ est l'unique solution $H_{\mathrm{div}}(\Omega^+)$ du problème :

$$\left| \begin{array}{rcrcll} -\nabla(\dfrac{1}{\rho_p(\mathbf{x})}\ \mathrm{div}\, \mathbf{U}_\varepsilon^+) - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\, \mathbf{U}_\varepsilon^+ & = & 0 & \textit{dans} & \Omega^+ \\ \mathbf{U}_\varepsilon^+ \cdot \mathbf{n} & = & 0 & \textit{sur} & \partial\Omega^+ \setminus \Gamma_0^+, \\ \mathbf{U}_\varepsilon^+ \cdot \mathbf{n} & = & \varphi & \textit{sur} & \Gamma_0^+. \end{array} \right. \tag{2.36}$$

Réciproquement, si $u_\varepsilon^+(\varphi)$ est l'unique solution H^1 de $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ alors $(u_\varepsilon^+(\varphi), \nabla u_\varepsilon^+(\varphi) - \mathbf{F}^+(\varphi))$ est solution du problème mixte précédent.

Le problème mixte admet par conséquent une solution unique.

Cherchons maintenant à déterminer une approximation de la solution du problème de demi-guide mixte de la Proposition précédente. Les espaces d'approximation des solutions doivent être choisis de façon à ce que nous puissions appliquer la méthode développée section 2.2 dans le cas discret et en particulier relier la solution discrète du problème de demi-guide discret aux solutions des problèmes de cellule.

Par conséquent, introduisons en fonction des espaces d'approximation $\mathcal{M}_h$, $\mathcal{W}_h$ et $\mathcal{T}_h$ définis lors de la discrétisation des problèmes de cellule

- $\mathcal{M}_h^+$ un sous-espace de $L^2(\Omega^+)$ tel que :

$$\forall\, v_h^+ \in \mathcal{M}_h^+,\ \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad v_h^+\Big|_{\mathcal{C}_j^+} \in \mathcal{M}_h;$$

- $\mathcal{W}_h^+$ un sous-espace de de $H_{\mathrm{div}}(\Omega^+)$ tel que :

$$\forall\, \mathbf{V}_h^+ \in \mathcal{W}_h^+,\ \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{V}_h^+\Big|_{\mathcal{C}_j^+} \in \mathcal{W}_h.$$

  On note $\mathcal{W}_h^{++}$ et $\mathcal{W}_{h,0}^+$ les intersections entre $\mathcal{W}_h^+$ et $H_{\mathrm{div}}^+(\Omega^+)$ et entre $\mathcal{W}_h^+$ et $H_{\mathrm{div},0}(\Omega^+)$, respectivement ;
- $\mathcal{T}_h^+$ un sous espace de dimension finie de $H^{-1/2}(\Gamma_0^+)$ tel que :

$$\mathcal{T}_h^+ = \mathcal{T}_h$$

  puisque $\Gamma_0^+ \sim \Gamma_0 \sim \Gamma_1$. On note $\Pi_{\mathcal{T}_h^+}$ la projection orthogonale de $H^{-1/2}(\Gamma_0^+)$ sur $\mathcal{T}_h^+$.

De tels espaces existent puisque nous nous sommes assurés lors de la construction de $\mathcal{M}_h$ et $\mathcal{W}_h$ qu'ils respectent une certaine condition de périodicité dans la cellule. Comme ces deux derniers espaces vérifient (2.31), nous avons nécessairement

$$\mathrm{div}\ \mathcal{W}_h^+ = \mathcal{M}_h^+.$$

Construisons maintenant des approximations discrètes de S_ε, R_ε et Λ_ε^+ en utilisant la méthode développée section précédente. Il faut donc montrer que tous les résultats obtenus pour le cas continu peuvent être extrapolés au problème discret.

On considère donc le problème discret

$\forall \varphi_h \in \mathcal{T}_h^+$, trouver $(u_{\varepsilon,h}^+(\varphi_h), \mathbf{U}_{\varepsilon,0,h}^+(\varphi_h)) \in \mathcal{M}_h^+ \times \mathcal{W}_{h,0}^+$ telle que $\forall (v, \mathbf{V}) \in \mathcal{M}_h^+ \times \mathcal{W}_{h,0}^+$

$$\left|\begin{array}{rcrcl} a^+(u_{\varepsilon,h}^+, v_h) & + & b^+(v_h, \mathbf{U}_{\varepsilon,0,h}^+) & = & -b^+(v_h, \mathbf{F}_h^+(\varphi_h)) \\ \overline{b^+(u_{\varepsilon,h}^+, \mathbf{V}_h)} & + & \mathbf{A}^+(\mathbf{U}_{\varepsilon,0,h}^+, \mathbf{V}_h) & = & -\mathbf{A}^+(\mathbf{F}_h^+(\varphi_h), \mathbf{V}_h) \end{array}\right. \tag{2.37}$$

où a, b et A sont les formes bilinéaires de la proposition 2.3.8 et où $\mathbf{F}_h^+(\varphi_h)$ est définie par :

$$\mathbf{F}_h^+(\varphi_h) \in \mathcal{W}_h^{++}, \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_h^+(\varphi_h) \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_0^+} = \varphi_h.$$

On pose $\mathbf{U}^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h) = \mathbf{U}^+_{\varepsilon,0,h}(\varphi_h) + \mathbf{F}^+_h(\varphi_h)$.

En appliquant la même démonstration que pour le théorème 2.3.4, on démontre le résultat qui suit sur le caractère bien posé du problème de demi-guide discret :

THÉORÈME 2.3.9 (ESTIMATIONS D'ERREUR POUR LE PROBLÈME DE DEMI-GUIDE)
Le problème mixte discrétisé (2.35) *est bien posé et nous avons de plus l'estimation d'erreur suivante :*

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma^+), \quad \|\mathbf{U}^+_\varepsilon(\varphi) - \mathbf{U}^+_{\varepsilon,h}(\Pi_{\mathcal{T}_h^+}\varphi)\|_{H_{\mathrm{div}}(\Omega^+)} + \|u^+_\varepsilon(\varphi) - u^+_{\varepsilon,h}(\Pi_{\mathcal{T}_h^+}\varphi)\|_{L^2(\Omega^+)} \leq \varepsilon^+(h) \quad (2.38)$$

avec

$$\varepsilon^+(h) = C\big[\inf_{\mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_h^+} \|\mathbf{U}^+_\varepsilon(\varphi) - \mathbf{V}_h\|_{H_{\mathrm{div}}(\Omega^+)} + \inf_{v_h \in \mathcal{M}_h^+} \|u^+_\varepsilon(\varphi) - v_h\|_{L^2(\Omega^+)} + \|\varphi - \Pi_{\mathcal{T}_h^+}\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma^+)}\big],$$

avec C une constante indépendante de h (voir Remarque 2.3.5 pour la dépendance de C par rapport à ε).

2.3.2.2 Définition de $R_{\varepsilon,h}$ - Equation caractéristique discrète

Nous avons donc construit le problème de demi-guide discret pour qu'il conserve les propriétés de périodicité du problème continu. Nous pouvons alors facilement extrapoler le lemme 2.2.3 au problème discret à partir des mêmes arguments utilisés en continu.

LEMME 2.3.10
Il existe trois opérateurs linéaires continus :

$$S_{\varepsilon,h} \in \mathcal{L}\Big(\mathcal{T}_h, \mathcal{M}_h\Big), \quad \mathbf{S}_{\varepsilon,h} \in \mathcal{L}\Big(\mathcal{T}_h, \mathcal{W}_h\Big), \quad R_{\varepsilon,h} \in \mathcal{L}\Big(\mathcal{T}_h\Big),$$

tels que $R_{\varepsilon,h}$ soit injectif et ait un rayon spectral strictement inférieur à 1 et enfin tels que pour toute donnée $\varphi_h \in \mathcal{T}_h$ la solution $(u^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h), U^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h))$ de (2.37) *satisfasse :*

$$\forall j \geq 1, \quad \left| \begin{array}{rcl} u^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h)\Big|_{\mathcal{C}_j^+} & = & S_{\varepsilon,h}\Big((R_{\varepsilon,h})^{j-1}\varphi_h\Big) \\ \mathbf{U}^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h)\Big|_{\mathcal{C}_j^+} & = & \mathbf{S}_{\varepsilon,h}\Big((R_{\varepsilon,h})^{j-1}\varphi_h\Big). \end{array} \right. \quad (2.39)$$

■ **PREUVE:** Les idées sont similaires au cas continu. Nous redonnons juste comment adapter la démonstration.

Soit $\varphi_h \in \mathcal{T}_h$ et soit $(u^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h), U^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h))$ la solution de (2.37), on pose :

$$\begin{cases} S_{\varepsilon,h} : \ \varphi_h \mapsto S_{\varepsilon,h}\varphi_h = u^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h)\Big|_{\mathcal{C}_1^+} \\ \mathbf{S}_{\varepsilon,h} : \ \varphi_h \mapsto \mathbf{S}_{\varepsilon,h}\varphi_h = \mathbf{U}^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h)\Big|_{\mathcal{C}_1^+} \\ R_{\varepsilon,h} : \ \varphi_h \mapsto R_{\varepsilon,h}\varphi_h = \mathbf{U}^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h)\cdot(-\mathbf{e}_x)\Big|_{\Gamma_1^+} \end{cases} \quad (2.40)$$

où $\mathbf{e}_x$ est un vecteur unitaire dans la direction des x. Les restrictions consistent uniquement à projeter sur l'espace de dimension finie adéquat ($\mathcal{M}_h$ pour $S_{\varepsilon,h}$, $\mathcal{W}_h$ pour $\mathbf{S}_{\varepsilon,h}$ et $\mathcal{T}_h$ pour $R_{\varepsilon,h}$). Par construction, les

relations (2.39) sont vraies pour $j = 1$. Il suffit donc, de le montrer pour $j = 2$ et d'itérer ce résultat pour $j \geq 2$. Pour cela, introduisons

$$\forall (x,y) \in \Omega^+, \quad v^+_{\varepsilon,h}(x,y) = u^+_{\varepsilon,h}(x+1,y), \quad \text{et} \quad \mathbf{V}^+_{\varepsilon,h}(x,y) = \mathbf{U}^+_{\varepsilon,h}(x+1,y).$$

Du fait des propriétés périodiques imposées aux espaces $\mathcal{M}^+_h$ et $\mathcal{W}^+_h$, on retrouve bien que $v^+_{\varepsilon,h}$ et $\mathbf{V}^+_{\varepsilon,h}$ appartiennent respectivement à ces deux espaces. Ce couple de fonctions vérifie du fait de la périodicité de ρ_p le problème discret (2.37) où $\mathbf{F}^+_h(\varphi_h)$ est remplacé par $\mathbf{F}^+_h(R_{\varepsilon,h}\ \varphi_h)$. On a donc par unicité de la solution du problème discret

$$\big(v^+_{\varepsilon,h}, \mathbf{V}^+_{\varepsilon,h}\big) \ = \ \big(u^+_{\varepsilon,h}(R_{\varepsilon,h}\ \varphi_h), U^+_{\varepsilon,h}(R_{\varepsilon,h}\ \varphi_h)\big)$$

et on conclut comme dans le cas continu.

Pour l'injectivité de $R_{\varepsilon,h}$, on utilise encore des arguments de prolongement unique.

Quant au rayon spectral de $R_{\varepsilon,h}$, comme que dans le cas continu, il est strictement inférieur à 1 du fait du caractère L^2 de la solution discrète $u^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h)$. ■

REMARQUE 2.3.11 (EXTENSION DE CES OPÉRATEURS À $H^{-1/2}(\Gamma^+)$)
On pourrait étendre les opérateurs $S_{\varepsilon,h}$, $\mathbf{S}_{\varepsilon,h}$ et $R_{\varepsilon,h}$ à $H^{-1/2}(\Gamma^+)$ comme pour les opérateurs NtD locaux discrets (voir Remarque 2.3.6). Mais pour les mêmes raisons, en pratique, nous les avons calculés comme présentés précédemment, l'opérateur $R_{\varepsilon,h}$ étant là encore une matrice carrée de taille la dimension de l'espace $\mathcal{T}_h$.

On peut donc, comme dans le cas continu, à partir des opérateurs $S_{\varepsilon,h}$, $\mathbf{S}_{\varepsilon,h}$ et $R_{\varepsilon,h}$, reconstruire le couple de solutions $(u^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h), \mathbf{U}^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h))$ cellule par cellule. On déduit d'ailleurs de la définition de ces opérateurs, du théorème 2.3.9 et du théorème de trace des éléments $H(\mathrm{div})$, les estimation d'erreurs entre les opérateurs continus et les opérateurs discrets.

THÉORÈME 2.3.12 (ESTIMATIONS D'ERREURS POUR LES OPÉRATEURS)
Nous avons les estimations d'erreur suivantes :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma^+), \quad \left| \begin{array}{rcl} \|S_\varepsilon(\varphi) - S_{\varepsilon,h}(\Pi_{\mathcal{T}^+_h}\varphi)\|_{L^2(\mathcal{C}^+)} + \|\mathbf{S}_\varepsilon(\varphi) - \mathbf{S}_{\varepsilon,h}(\Pi_{\mathcal{T}^+_h}\varphi)\|_{H_{\mathrm{div}}(\mathcal{C}^+)} & \leq & \varepsilon^+(h) \\ \|R_\varepsilon(\varphi) - R_{\varepsilon,h}(\Pi_{\mathcal{T}^+_h}\varphi)\|_{H^{-1/2}(\Gamma^+)} & \leq & \varepsilon^+(h) \end{array} \right.$$

avec

$$\varepsilon^+(h) = C\big[\inf_{\mathbf{V}_h \in \mathcal{W}^+_h} \|\mathbf{U}^+_\varepsilon(\varphi) - \mathbf{V}_h\|_{H_{\mathrm{div}}(\Omega^+)} + \inf_{v_h \in \mathcal{M}^+_h} \|u^+_\varepsilon(\varphi) - v_h\|_{L^2(\Omega^+)} + \|\varphi - \Pi_{\mathcal{T}^+_h}\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma^+)}\big],$$

avec C une constante indépendante de h (voir Remarque 2.3.5 pour la dépendance de C par rapport à ε).

Comme dans le cas continu, la seule connaissance de $R_{\varepsilon,h}$ va suffire à la détermination de toutes les inconnues du système. Du fait de la définition des espaces d'approximation, de la linéarité et du caractère bien posé des problèmes de cellule mixtes discrets, on retrouve l'expression de

$S_{\varepsilon,h}$ et $\mathbf{S}_{\varepsilon,h}$ en fonction des solutions des problèmes de cellule mixtes discrétisés et de l'opérateur $R_{\varepsilon,h}$:

$$\forall \varphi_h \in \mathcal{T}_h, \quad \left| \begin{array}{rcl} S_{\varepsilon,h}\,\varphi_h & = & e^0_{\varepsilon,h}(\varphi_h) \,-\, e^1_{\varepsilon,h}(R_{\varepsilon,h}\,\varphi_h) \\ \mathbf{S}_{\varepsilon,h}\,\varphi_h & = & \mathbf{E}^0_{\varepsilon,h}(\varphi_h) \,-\, \mathbf{E}^1_{\varepsilon,h}(R_{\varepsilon,h}\,\varphi_h) \end{array} \right. \tag{2.41}$$

où pour tout $\ell \in \{0,1\}$, pour tout $\varphi_h \in \mathcal{T}_h$, le couple $(e^\ell_{\varepsilon,h}(\varphi_h), \mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,0,h}(\varphi_h))$ est solution du problème de cellule mixte discret (2.32) et où $\mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,h}(\varphi_h) = \mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,0,h}(\varphi_h) + \mathbf{F}^\ell_{\varepsilon,h}(\varphi_h)$ avec $\mathbf{F}^\ell_{\varepsilon,h}$ défini par (2.33).

Notons d'ailleurs que si $R_{\varepsilon,h}$ est supposé connu, nous pouvons reconstruire cellule par cellule le couple de solutions $(u^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h), \mathbf{U}^+_{\varepsilon,0,h}(\varphi_h))$ d'après (2.39) et (2.41) à partir de $R_{\varepsilon,h}$ et de la solution des problèmes de cellule :

$$\forall j \geq 1, \quad \left| \begin{array}{rcl} u^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h)\Big|_{\mathcal{C}^+_j} & = & e^0_{\varepsilon,h}(R^{j-1}_{\varepsilon,h}\,\varphi_h) - e^1_{\varepsilon,h}(R^j_{\varepsilon,h}\,\varphi_h) \\ \mathbf{U}^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h)\Big|_{\mathcal{C}^+_j} & = & \mathbf{E}^0_{\varepsilon,h}(R^{j-1}_{\varepsilon,h}\,\varphi_h) - \mathbf{E}^1_{\varepsilon,h}(R^j_{\varepsilon,h}\,\varphi_h) \end{array} \right. \tag{2.42}$$

Reste donc à trouver un moyen de caractériser l'opérateur $R_{\varepsilon,h}$. Dans la méthode présentée section 2.2, nous avons établi l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^R_\varepsilon)$ en utilisant l'argument concernant la trace de $u^+_\varepsilon(\varphi)$ sur Γ^+_1 : comme c'est une fonction H^1, sa trace doit être la même suivant que l'on considère sa caractérisation dans la première cellule ou celle dans la deuxième. La solution du problème mixte qui "correspond" à u^+_ε n'est pas H^1 mais seulement L^2, nous ne pouvons donc utiliser tel quel l'argument concernant sa trace.

C'est la définition au sens faible des opérateurs de NtD locaux (voir (2.34)) qui nous "sauve" et nous permet de retrouver le théorème 2.2.5 au sens discret. Introduisons pour cela l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(\mathcal{T}_h) & \to & \mathcal{L}(\mathcal{T}_h) \\ X & \mapsto & \mathcal{T}(\varepsilon,h,X) = T^{10}_{\varepsilon,h}\,X^2 - (T^{00}_{\varepsilon,h} + T^{11}_{\varepsilon,h})\,X + T^{01}_{\varepsilon,h} \end{array} \tag{2.43}$$

qui est bien définie d'après la définition des opérateurs NtD locaux discret.

THÉORÈME 2.3.13 (EQUATION CARACTÉRISTIQUE DISCRÈTE)
L'opérateur $R_{\varepsilon,h}$ est l'unique solution du problème de Riccati stationnaire en dimension finie

$$\left| \begin{array}{l} \textit{Trouver } X \in \mathcal{L}(\mathcal{T}_h), \\ \mathcal{T}(\varepsilon,h,X) = 0. \end{array} \right. \tag{$\mathcal{E}^R_{\varepsilon,h}$}$$

qui satisfait la condition

$$\rho(X) < 1.$$

■ **PREUVE:** Soit $\varphi_h,\ \psi_h \in \mathcal{T}_h$. On construit deux relèvements $\mathbf{V}^1_h,\ \mathbf{V}^2_h\ \in \mathcal{W}^{++}_h$ de ψ_h tels que :

$$\begin{array}{l} \mathbf{V}^1_h \in \mathcal{W}^{++}_h \cap H_{\mathrm{div}}(\mathcal{C}^+_1), \quad \mathbf{V}^1_h \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{x}}\Big|_{\Gamma^+_1} = \psi_h, \quad \mathbf{V}^1_h \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{x}}\Big|_{\Gamma^+_0} = 0; \\ \mathbf{V}^2_h \in \mathcal{W}^{++}_h \cap H_{\mathrm{div}}(\mathcal{C}^+_2), \quad \mathbf{V}^2_h \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{x}}\Big|_{\Gamma^+_1} = \psi_h, \quad \mathbf{V}^2_h \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{x}}\Big|_{\Gamma^+_2} = 0 \end{array}$$

D'après la caractérisation de $u^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h)$ et $\mathbf{U}^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h)$ pour tout $\varphi_h \in \mathcal{T}_h$ en fonction des opérateurs $S_{\varepsilon,h}$, $\mathbf{S}(\varepsilon,h)$ et $R_{\varepsilon,h}$, la définition de $S_{\varepsilon,h}$ et $\mathbf{S}(\varepsilon,h)$ en fonction des solutions des problèmes de cellule mixtes discrets et enfin la définition des opérateurs de NtD locaux discrets (voir (2.34)), on trouve

$$\int_{\Gamma_1^+} \Big(T^{10}_{\varepsilon,h}\, R^2_{\varepsilon,h} - (T^{00}_{\varepsilon,h} + T^{11}_{\varepsilon,h})\, R_{\varepsilon,h} + T^{01}_{\varepsilon,h})\varphi_h\, \overline{\psi_h}$$

$$= \int_{\mathcal{C}_1^+} \mathbf{U}^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h)\cdot \overline{\mathbf{V}^1_h} + \int_{\mathcal{C}_1^+} u^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h)\ \mathrm{div}\,\overline{\mathbf{V}^1_h} + \int_{\mathcal{C}_2^+} \mathbf{U}^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h)\cdot \overline{\mathbf{V}^2_h} + \int_{\mathcal{C}_2^+} u^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h)\ \mathrm{div}\,\overline{\mathbf{V}^2_h} \quad (2.44)$$

Soit $\mathbf{V}_h$ défini par :

$$\mathbf{V}_h = \left| \begin{array}{lll} \mathbf{V}^1_h & \text{dans} & \mathcal{C}_1^+ \\ \mathbf{V}^2_h & \text{dans} & \mathcal{C}_2^+ \\ 0 & \text{dans} & \Omega^+ \setminus (\mathcal{C}_1^+ \cup \mathcal{C}_2^+) \end{array} \right.$$

On montre facilement que $\mathbf{V}_h \in \mathcal{W}^+_{h,0}$. La deuxième relation du problème mixte discret (2.37) nous donne alors que

$$\int_{\Gamma_1^+} \Big(T^{10}_{\varepsilon,h}\, R^2_{\varepsilon,h} - (T^{00}_{\varepsilon,h} + T^{11}_{\varepsilon,h})\, R_{\varepsilon,h} + T^{01}_{\varepsilon,h})\varphi_h\, \overline{\psi_h} = 0.$$

Comme $\Big(T^{10}_{\varepsilon,h}\, R^2_{\varepsilon,h} - (T^{00}_{\varepsilon,h} + T^{11}_{\varepsilon,h})\, R_{\varepsilon,h} + T^{01}_{\varepsilon,h})\, \varphi_h \ \in \mathcal{T}_h$ et que son produit scalaire avec tous les éléments de $\mathcal{T}_h$ est nul alors il est nécessairement nul.

Pour l'unicité, il suffit de supposer qu'un autre opérateur R est solution et de construire, pour chaque φ_h, comme dans le cas continu, un couple de fonction $(u_h, \mathbf{U}_h)$ en fonction des solutions des problèmes de cellule mixte discret et de R :

$$\left| \begin{array}{rcl} u_h\Big|_{\mathcal{C}_j^+} & = & e^0_{\varepsilon,h}(R^{j-1}\,\varphi_h) - e^1_{\varepsilon,h}(R^j\,\varphi_h) \\ \mathbf{U}_h\Big|_{\mathcal{C}_j^+} & = & \mathbf{E}^0_{\varepsilon,h}(R^{j-1}\,\varphi_h) - \mathbf{E}^1_{\varepsilon,h}(R^j\,\varphi_h) \end{array} \right.$$

On montre que ce couple est tel que $(u_h, \mathbf{U}_h) \in \mathcal{M}^+_h \times \mathcal{W}^+_h$ puisque R est de rayon spectral strictement inférieur à 1 et qu'il est solution du problème (2.37). ■

Nous avons donc pu utiliser le caractère périodique que conserve la discrétisation choisie pour montrer que l'équation de Riccati stationnaire discrète a bien une solution unique. Avec une discrétisation quelconque, nous aurions peut être abouti à une équation de ce type mais pour lequel il aurait été plus difficile de montrer l'unicité de la solution de l'équation de Riccati stationnaire discrète avec contrainte sur le rayon spectral. Ce problème est en effet très complexe en soi : sans la contrainte, il existe des résultats d'existence et d'unicité sous certaines hypothèses sur les « coefficients » de l'équation, qui semblent peu évidentes à satisfaire dans notre cas. A fortiori la contrainte rend le problème encore moins standard.

Pour déterminer une approximation $R_{\varepsilon,h}$ de l'opérateur R_ε, il suffit donc de résoudre les problèmes de cellule mixtes discrets (2.32), de déterminer les opérateurs de NtD locaux discrets $(T^{00}_{\varepsilon,h}, T^{01}_{\varepsilon,h}, T^{10}_{\varepsilon,h}, T^{11}_{\varepsilon,h})$ et enfin de sélectionner l'unique opérateur de $\mathcal{L}(\mathcal{T}_h)$ de rayon spectral strictement inférieur à 1 de l'équation de Riccati stationnaire discrète $(\mathcal{E}^R_{\varepsilon,h})$. Cette équation posée en dimension finie devient un peu plus facile à résoudre que dans le cas continu ce que nous aborderons dans la section suivante.

Ce qu'il faut retenir de cette section, c'est que nous avons construit un problème discret bien

posé qui conserve des propriétés de périodicité pour lequel nous avons pu transposer la méthode de la section 2.2 développée pour le cas continu. Toutes les solutions et tous les opérateurs calculés à l'aide de cette discrétisation approchent dans un sens que nous avons précisé dans cette section les solutions et opérateurs du problème continu.

2.3.2.3 Deux algorithmes pour résoudre l'équation caractéristique discrète $(\mathcal{E}^R_{\varepsilon,h})$

Nous avons trouvé au paragraphe précédent une équation caractéristique $(\mathcal{E}^R_{\varepsilon,h})$ discrète à résoudre, c'est-à-dire la même équation caractéristique que dans le cas continu mais posée en dimension finie (la dimension dépendant de la discrétisation choisie, dans le cas développé cela correspond aux nombres de degré liberté à x fixé dans la direction y). Les coefficients de cette équation quadratique sont donc des matrices et l'inconnue est une matrice de même taille. Nous avons montré au Théorème 2.3.13 que cette équation (munie de la contrainte sur le rayon spectral) possède une solution et elle est unique. L'unique solution approche dans un sens que nous avons précisé au paragraphe suivant (voir Théorème 2.3.12) la solution du problème continu. Nous nous sommes donc ramenés à la résolution d'une équation quadratique matricielle avec une contrainte particulière.

Même si nous nous sommes ramenés à un problème en dimension finie, il n'est pas facile à résoudre en soi, la contrainte sur le rayon spectral n'étant pas du tout classique. Nous avons pensé à deux méthodes de résolution, dont la justification, nous allons le voir, présente encore quelques questions ouvertes :

- la première nous l'avons appelée **méthode de décomposition spectrale** car elle consiste à calculer les éléments propres de l'opérateur, la contrainte sur le rayon spectral est plus facile à prendre en compte ;
- la deuxième appelée **méthode de Newton « modifiée »** puisque résoudre l'équation caractéristique, ce n'est, après tout, que chercher le zéro d'une fonction, même si nous avons dû adapter la méthode de Newton pour pouvoir prendre en compte la contrainte.

La justification de ces méthodes, leur mise en oeuvre et toutes les questions qu'elles posent font l'objet des deux paragraphes suivants.

♢ ***Méthode de décomposition spectrale***

L'idée de cette méthode est donc de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $R_{\varepsilon,h}$ pour tenter de déterminer de manière unique l'opérateur. La première question naturelle est de savoir si la connaissance des éléments propres de $R_{\varepsilon,h}$ suffirait à le caractériser. En dimension finie, c'est évident puisque toute matrice admet une décomposition de Jordan, alors qu'en dimension infinie, nous n'avons pu donner que des éléments de réponse. La deuxième question est la prise en compte de la contrainte concernant le rayon spectral de la matrice $R_{\varepsilon,h}$. Là encore, en dimension finie, elle est évidente : toutes les valeurs propres doivent être de module strictement inférieur à 1.

Comme nous avons vu que la méthode développée section 2.2 s'extrapole à notre cas discret, tous les résultats établis Proposition 2.2.12 et Théorème 2.2.14 appliqué au cas discret s'appliquent ici.

Tout d'abord, la Proposition 2.2.12 assure que toute valeur $r_{\varepsilon,h}$ est une valeur propre de $R_{\varepsilon,h}$ si et seulement si $r_{\varepsilon,h}$ vérifie :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Ker } \big(\mathcal{T}(\varepsilon,h,r_{\varepsilon,h})\big) \neq \{0\}, \\ |r_{\varepsilon,h}| < 1. \end{array} \right. \tag{2.45}$$

avec cette propriété sur les vecteurs propres de $R_{\varepsilon,h}$:

$$\text{Ker } \big(\mathcal{T}(\varepsilon,h,r_{\varepsilon,h})\big) = \text{Ker } \big(R_{\varepsilon,h} - r_{\varepsilon,h}\,\text{Id}\big).$$

Nous nous sommes donc ramenés à la résolution d'une équation aux valeurs propres quadratiques :

$$\text{Trouver } r_{\varepsilon,h},\ |r_{\varepsilon,h}|<1, \quad \exists \varphi_{\varepsilon,h} \in \mathcal{T}_h, \quad r_{\varepsilon,h}^2\, T_{\varepsilon,h}^{10}\, \varphi_{\varepsilon,h} - r_{\varepsilon,h}\,(T_{\varepsilon,h}^{00} + T_{\varepsilon,h}^{11})\,\varphi_{\varepsilon,h} + T_{\varepsilon,h}^{01}\,{}_{\varepsilon,h} = 0.$$

En introduisant le vecteur $\psi_{\varepsilon,h} = r_{\varepsilon,h}\,\varphi_{\varepsilon,h}$, nous pouvons récrire ce problème en un problème aux valeurs propres « classique » :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } r_{\varepsilon,h},\ |r_{\varepsilon,h}|<1, \quad \exists \begin{bmatrix} \varphi_{\varepsilon,h} \\ \psi_{\varepsilon,h} \end{bmatrix} \in \mathcal{T}_h^2 \\ \qquad\qquad \begin{bmatrix} T_{\varepsilon,h}^{01} & -(T_{\varepsilon,h}^{11} + T_{\varepsilon,h}^{00}) \\ 0 & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{\varepsilon,h} \\ \psi_{\varepsilon,h} \end{bmatrix} = r_{\varepsilon,h} \begin{bmatrix} 0 & -T_{\varepsilon,h}^{10} \\ Id & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{\varepsilon,h} \\ \psi_{\varepsilon,h} \end{bmatrix}. \end{array} \tag{2.46}$$

Si N_y est la dimension de l'espace $\mathcal{T}_h$ alors le problème matriciel (2.46) est de taille $2N_y$. Il y a donc potentiellement $2N_y$ valeurs propres dont il ne faut retenir que celles de module strictement inférieur à 1. Comme $R_{\varepsilon,h}$ est une matrice de taille $N_y \times N_y$, il y en a donc N_y au plus qui conviennent.

De plus le Théorème 2.2.14 assure que pour toute valeur $r_{\varepsilon,h}$ non nulle :

$$\text{Ker } \big(\mathcal{T}(\varepsilon,h,r_{\varepsilon,h})\big) \neq \{0\} \quad \Rightarrow \quad \text{Ker } \big(\mathcal{T}(\varepsilon,h,\frac{1}{r_{\varepsilon,h}})\big) \neq \{0\}.$$

Cela signifie que les valeurs propres non nulles du problème aux valeurs propres quadratiques se regroupent par paires de la forme $(r_{\varepsilon,h}, 1/r_{\varepsilon,h})$ dont une seule est de module strictement inférieur à 1. Remarquons enfin que $R_{\varepsilon,h}$ étant injectif, il ne peut y avoir de solution nulle au problème aux valeurs propres quadratiques.

Rien ne nous assure dans tout ce que nous avons fait que résoudre l'équation aux valeurs propres quadratiques suffit à caractériser de manière unique l'opérateur $R_{\varepsilon,h}$. En effet, le nombre de couples $(r_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ déterminé en résolvant l'équation (2.45), c'est-à-dire des couples d'éléments propres de $R_{\varepsilon,h}$, n'est pas nécessairement égal à N_y la dimension de l'espace $\mathcal{T}_h$. En d'autres termes, nous savons que toute matrice possède une décomposition de Jordan mais n'est pas nécessairement diagonalisable. Nous ne pouvons dire plus en ce qui concerne la matrice $R_{\varepsilon,h}$. Ce que nous déduisons de ce qui précède, c'est seulement que si $r_{\varepsilon,h}$ est une valeur propre de $R_{\varepsilon,h}$, alors il existe n_r vecteurs $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_r})$ famille orthonormée qui définissent une chaîne de Jordan de $R_{\varepsilon,h}$ pour la valeur propre $r_{\varepsilon,h}$ c'est-à-dire :

$$\varphi_1 \neq 0, \quad R_{\varepsilon,h}\,\varphi_1 = r_{\varepsilon,h}\,\varphi_1 \quad \text{et} \quad R_{\varepsilon,h}\,\varphi_j = r_{\varepsilon,h}\,\varphi_j + \varphi_{j-1}, \quad \forall j = 2, \ldots, n_r.$$

On appelle les vecteurs composant une chaîne de Jordan des **vecteurs propres généralisés**. Si on se ramène à l'équation aux valeurs propres quadratiques, ces vecteurs sont reliés par la relation suivante :

$$\forall j \geq 1, \quad \mathcal{T}\big(\varepsilon, h, r_{\varepsilon,h}\big)\varphi_j = -\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r}(\varepsilon, h, r_{\varepsilon,h})\, \varphi_{j-1} - T^{10}_{\varepsilon,h}\, \varphi_{j-2} \tag{2.47}$$

avec

$$\forall r, \quad \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r}(\varepsilon, h, r) = 2r\, T^{10}_{\varepsilon,h} - (T^{00}_{\varepsilon,h} + T^{11}_{\varepsilon,h}).$$

où on a posé par convention $\varphi_0 = \varphi_{-1} = 0$.

Nous en déduisons l'algorithme de résolution de l'équation de Riccati stationnaire discrète $(\mathcal{E}^R_{\varepsilon,h})$ par la méthode de décomposition spectrale :

1. On résout l'équation aux valeurs propres (2.46) de taille $2N_y \times 2N_y$;
2. On classe toutes les valeurs propres en les répétant autant de fois que leur ordre de multiplicité par couple de la forme $(r_\varepsilon, 1/r_\varepsilon)$;
3. On ne récupère que les valeurs propres de module strictement inférieur à 1, dans ce cas 2 situations peuvent se présenter
   (i) Il y en a N_y : dans ce cas, l'opérateur $R_{\varepsilon,h}$ est diagonalisable et il peut être caractérisé par ses valeurs propres et les vecteurs propres associés ;
   (ii) Il n'y en a moins que N_y et dans ce cas, on cherche les chaînes de Jordan de $R_{\varepsilon,h}$ pour chacune de ses valeurs propres jusqu'à caractériser complètement $R_{\varepsilon,h}$. Ainsi supposons par simplicité que $r_{\varepsilon,h}$ est une valeur propre simple de $R_{\varepsilon,h}$ et $\varphi_{\varepsilon,h}$ un vecteur propre associé. Il existe une chaîne de Jordan comportant plus d'un vecteur pour cette valeur propre si

   $$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r}(\varepsilon, h, r_{\varepsilon,h})\, \varphi_1 \neq \{0\}$$

   et si il existe φ_2 orthogonal à φ_1 telle que

   $$\mathcal{T}\big(\varepsilon, h, r_{\varepsilon,h}\big)\varphi_2 = -\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r}(\varepsilon, h, r_{\varepsilon,h})\, \varphi_1.$$

   Pour savoir si il y a un troisième vecteur dans la chaîne de Jordan on vérifie ensuite que le terme de droite de la relation (2.47) pour $j = 3$ est bien non nul puis qu'on peut bien trouver un vecteur propre orthogonal aux deux premiers qui vérifie la relation (2.47) et on réitère jusqu'à ce que ces deux conditions ne soient plus satisfaites. Cette procédure est effectuée pour chaque valeur propre de $R_{\varepsilon,h}$. Toutes les chaînes de Jordan permettent enfin de reconstruire de manière unique la matrice $R_{\varepsilon,h}$.

REMARQUE 2.3.14

Notons tout de même qu'en pratique, la situation (ii) ne s'est présentée que très rarement : nous nous sommes retrouvés très souvent dans la situation (i) c'est-à-dire celle où l'opérateur $R_{\varepsilon,h}$ est diagonalisable.

♢ ***Méthode de Newton « modifiée »***

On cherche à résoudre directement l'équation d'opérateur suivante :

$$\text{Trouver } X \in \mathcal{L}(L^2(\mathcal{T}_h)), \quad \rho(X) < 1 \quad \text{et} \quad T^{10}_{\varepsilon,h} X^2 - (T^{00}_{\varepsilon,h} + T^{11}_{\varepsilon,h})X + T^{01}_{\varepsilon,h} = 0$$

On décide donc d'utiliser la méthode de Newton. Nous commençons par faire quelques rappels sur la méthode.

Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach, et $F : E_1 \to E_2$ une application de classe C^1.

DÉFINITION 2.3.15
On appelle zéro de F tout x de E_1 tel que $F(x) = 0$. Si de plus $DF(x)$ est inversible, on dit que x est un zéro régulier de F.

Nous voulons étudier des algorithmes d'approximation des zéros de la fonction F. L'idée de la méthode de Newton est de linéariser la fonction F en un point et de prendre le point d'annulation de cette linéarisation comme approximation du zéro recherché. On réitère cette procédure à chaque nouvelle approximation obtenue. Pratiquement, cela consiste à choisir une approximation raisonnable x^0 du zéro recherché puis de former par récurrence une suite $\{x^k,\ k \in \mathbb{N}\}$

$$F(x^k) + DF(x^k)(x^{k+1} - x^k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.48}$$

La suite $\{x^k,\ k \in \mathbb{N}\}$ est donc bien définie si et seulement si pour tout k, l'opérateur $DF(x^k) \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ est inversible.

DÉFINITION 2.3.16
Soit $x \in E_1$ tel que $DF(x)$ est inversible de E_1 dans E_2. On appelle direction de Newton en x la quantité

$$d_N(x) = -DF(x)^{-1}F(x).$$

Avec cette notation, la méthode de Newton s'écrit donc $x^{k+1} = x^k + d_N(x^k)$.

On cherche ensuite à savoir si la suite $\{x^k,\ k \in \mathbb{N}\}$ converge bien vers un zéro de F.

THÉORÈME 2.3.17
Soit x^* un zéro régulier de F.

1. *Si x^0 est assez proche de x^*, alors la suite $\{x^k,\ k \in \mathbb{N}\}$ vérifiant* (2.48) *est bien définie, et converge super-linéairement vers x^*, c'est-à-dire :*

$$\frac{\|x^{k+1} - x^*\|_{E_1}}{\|x^k - x^*\|_{E_1}} \to 0$$

2. *Si de plus :*

$$\|DF(x) - DF(x^*)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_2)} = \mathcal{O}(\|x - x^*\|_{E_1}),$$

(en particulier si DF est localement lipschitzien) alors la convergence est quadratique, c'est-à-dire :

$$\exists c > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|x^{k+1} - x^*\|_{E_1} \leq c\|x^k - x^*\|^2_{E_1}.$$

REMARQUE 2.3.18
L'avantage de la méthode de Newton est sa convergence bien plus rapide que d'autres méthodes. Cependant, chaque itération de la méthode de Newton nécessite la résolution d'un système linéaire, ce qui est en soi coûteux. De plus, la convergence quadratique n'a lieu que si DF est localement lipschitzien et si x^0 est assez proche de x^*, hypothèse assez restrictive. La méthode est très dépendante de la condition initiale x^0 choisie et peut même diverger pour certaines données initiales.

Voyons si cette méthode peut s'appliquer à notre cas. Nous allons présenter, ici, le cas de l'équation caractéristique discrète. Nous nous sommes cependant posés la question, purement théorique, de l'application de la méthode de Newton au cas continu : est ce qu'il est possible de montrer dans le cas général la convergence de cette méthode ? L'idée était au départ de se poser la question dans le cas général pour pouvoir l'appliquer au cas discret. Nous nous sommes heurtés malheureusement à une question assez complexe, issue des problèmes de contrôle et d'automatisme, qui est résolue dans des cas très spécifiques et qui reste ouverte pour beaucoup d'autres cas. La deuxième idée a été de se poser cette question seulement pour le problème discrétisé. Il présente également un certain nombre de questions ouvertes, nous donnerons néanmoins des résultats qui sont pour nous partiels, trouvés dans la littérature et des pistes de réflexion. Nous évoquerons sous forme de remarques le cas continu afin d'expliquer les difficultés supplémentaires et donner quelques références.

Introduisons la fonctionnelle F_h définie par :

$$\text{Soit} \quad \begin{array}{rccc} F_h : & \mathcal{L}(\mathcal{T}_h) & \to & \mathcal{L}(\mathcal{T}_h) \\ & X & \mapsto & T^{10}_{\varepsilon,h}X^2 - (T^{00}_{\varepsilon,h} + T^{11}_{\varepsilon,h})X + T^{01}_{\varepsilon,h}; \end{array}$$

nous vérifions rapidement que F_h est bien définie.

REMARQUE 2.3.19 (CAS GÉNÉRAL : LA FONCTIONNELLE)
Dans le cas continu, la fonctionnelle correspondante est définie par :

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma)) & \to & \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)) \\ & X & \mapsto & T^{10}_{\varepsilon}X^2 - (T^{00}_{\varepsilon} + T^{11}_{\varepsilon})\, X + T^{01}_{\varepsilon}. \end{array}$$

Pour pouvoir appliquer la méthode de Newton, il s'agit tout d'abord de montrer que F_h est bien différentiable.

LEMME 2.3.20 (DIFFÉRENTIELLE DE F_h)
F_h est différentiable au sens de Fréchet et on montre que :

$$\forall X \in \mathcal{L}(\mathcal{T}_h), \quad \begin{array}{rccc} DF_h(X) : & \mathcal{L}(\mathcal{T}_h) & \to & \mathcal{L}(\mathcal{T}_h) \\ & H & \mapsto & T^{10}_{\varepsilon,h}\,(XH + HX) - (T^{00}_{\varepsilon,h} + T^{11}_{\varepsilon,h})\, H. \end{array}$$

REMARQUE 2.3.21 (CAS GÉNÉRAL : DIFFÉRENTIELLE)
Dans le cas général, on montre facilement également que F définie Remarque 2.3.19 est différentiable au sens de Fréchet et :

$$\forall X \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma)), \quad \begin{array}{rccc} DF(X) : & \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma)) & \to & \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)) \\ & H & \mapsto & T^{10}_{\varepsilon}\,(XH + HX) - (T^{00}_{\varepsilon} + T^{11}_{\varepsilon})\, H \end{array}$$

La question maintenant est de savoir si, pour tout X, $DF_h(X)$ est inversible de $\mathcal{L}(\mathcal{T}_h)$ dans lui-même ou dans un voisinage du zéro recherché pour pouvoir calculer la direction de Newton

$$d_N(X^k) = -DF_h(X^k)^{-1}F_h(X^k)$$

à chaque itération X^k. Cette question est le coeur du problème. Pratiquement elle revient à résoudre à chaque itération X^{k+1} en fonction de X^k à partir de la relation de récurrence (2.48) c'est-à-dire

$$\left|\begin{array}{l} T^{10}_{\varepsilon,h}\left(X^kH^{k+1}+H^{k+1}X^k\right)-\left(T^{00}_{\varepsilon,h}+T^{11}_{\varepsilon,h}\right)H^{k+1}=-F_h(X^k) \\ X^{k+1}=X^k+H^{k+1} \end{array}\right. \tag{2.49}$$

Cette question est traitée d'un point de vue très général dans la littérature et elle revient en fait à étudier l'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi_h: & \mathcal{L}(\mathcal{T}_h) & \rightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{T}_h) \\ & H & \mapsto & AHB+CHD \end{array}$$

où A, B, C et D sont des éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{T}_h)$. Le principal résultat d'inversibilité d'une telle application a été donné par K.W.E Chu [Chu (1987)]. Ainsi il existe une unique solution à l'équation :

$$AXB+CXD=E$$

si et seulement si il existe un μ tel que les matrices $A-\mu C$ et $D^*-\mu B^*$ sont inversibles et le spectre de la première et l'opposé du spectre de la deuxième sont disjoints.

Dans le cas présent, les matrices sont, pour chaque itération, $A=T^{10}_{\varepsilon,h}X^k-(T^{00}_{\varepsilon,h}+T^{11}_{\varepsilon,h})$, $B=Id$, $C=T^{10}_{\varepsilon,h}$ et $D=X^k$. Cela paraît difficile de montrer que les hypothèses de [Chu (1987)] sont satisfaites quel que soit le premier itéré X^0 et à chaque itération. Ces hypothèses sont cependant assez explicites et peuvent être prises en compte dans un algorithme.

REMARQUE 2.3.22 (CAS GÉNÉRAL : INVERSIBILITÉ DE LA DIFFÉRENTIELLE)
Dans le cas général, la question de l'inversibilité revient également à étudier l'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma)) & \rightarrow & \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)) \\ & H & \mapsto & AHB+CHD \end{array}$$

J. Anderson [Anderson (1973)] a commencé en 1973 à étudier les opérateurs de la forme $AX-XB$ et a prouvé l'orthogonalité du noyau et de l'image de ces opérateurs dans le cas où A et B sont normaux. Pour $A=B$, si le spectre de A est fini alors l'adhérence de l'image et le noyau de ces opérateurs sont mêmes supplémentaires.

Le résultat de J. Anderson a depuis été généralisé plusieurs fois. Par exemple, D. Keckic [Keckic (2000)] a généralisé le théorème dans le cas des opérateurs de la forme $AXB-CXD$. Ainsi, le noyau et l'image d'un tel opérateur sont orthogonaux si les opérateurs A, B, C et D sont normaux, A et C (B et D respectivement) commutent et ont un noyau disjoint.

De plus, Turnsek [Turnsek (2000)] puis S. Meceri [Meceri (2003)] ont obtenu un résultat équivalent pour les opérateurs $\Delta_{A,B}: X\rightarrow\sum_i A_iXB_i-X$. Ainsi, S. Meceri a supposé que pour $A=(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ et $B=(B_1,B_2,\ldots,B_n)$ dans $B(H)$ (ensemble des opérateurs linéaires

bornés H, espace de Hilbert), $\sum_i A_i^* A_i \leq 1$, $\sum_i A_i A_i^* \leq 1$, $\sum_i B_i^* B_i \leq 1$, $\sum_i B_i B_i^* \leq 1$. Si $\Delta_{A,B} : X \to \sum_i A_i^* X B_i^* - X$ alors pour tout $\mathcal{I}$ idéal bilatère de $B(H)$, l'intersection du noyau de $\Delta_{A,B}|_{\mathcal{I}}$ et de $\Delta^*_{A,B}|_{\mathcal{I}}$ est orthogonal à l'image de $\Delta_{A,B}|_{\mathcal{I}}$.

Tous ces résultats très théoriques sont difficilement applicables à notre cas précis en particulier parce qu'ils se restreignent au cas des opérateurs normaux

L'inversibilité de la différentielle DF_h même locale reste donc une question ouverte. Il nous semble que la clé du problème ne viendrait pas de résultats théoriques sur les fonctions de la forme $AXB - CXD$. En effet, pour montrer que l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^R_{\varepsilon,h})$ a une unique solution vérifiant les contraintes que nous connaissons, nous avons utilisé un résultat d'unicité de la solution d'une EDP particulière. Nous n'avons pas utilisé un résultat sur les équations quadratiques à valeur opérateurs qui ne rendent pas nécessairement compte de la spécificité de notre problème. Nous pensons donc, que de la même façon pour montrer l'inversibilité, il faudrait utiliser la spécificité de notre problème. Nous n'avons malheureusement pas encore trouvé le lien.

Finissons par la dernière difficulté notable résidant dans la contrainte sur le rayon spectral de la solution. En effet, nous ne cherchons pas un simple zéro de la fonctionnelle F_h mais l'unique qui a un rayon spectral strictement inférieur à 1. Une situation simple serait que F_h a un seul zéro. Nous avons évoqué Remarque 2.2.6 la non-unicité de l'équation caractéristique. Dans le cas discret, nous avons même démontré la non-unicité de cette équation matricielle.

COROLLAIRE 2.3.23
L'équation caractéristique discrète $(\mathcal{E}^R_{\varepsilon,h})$ a au moins deux solutions et au plus 2^{N_y} si N_y est la dimension de $\mathcal{T}_h$.

■ **PREUVE:** Nous savons que l'équation caractéristique a au moins une solution $R_{\varepsilon,h}$ que nous notons dans la preuve X_1. Toute matrice ayant au moins une valeur propre, soit r_1 une de ces valeurs propres et φ_1 un vecteur propre associé. La valeur r_1 est solution du problème aux valeurs propres quadratiques correspondant d'après la Proposition 2.2.12 et $r_2 = 1/r_1$ est également solution. En utilisant la décomposition de Jordan de X_1, on peut donc construire facilement une matrice X_2 qui coïncide sur un supplémentaire bien choisi du vecteur φ_1 et qui est telle que :

$$X_2\, \varphi_1 = r_2\, \varphi_1.$$

et qui vérifie l'équation caractéristique. Nous avons donc construit une deuxième solution.

Il est évident que l'équation aux valeurs propres quadratiques a au plus $2N_y$ solutions. Nous pouvons donc construire à partir de $2N_y$ valeurs propres, 2^{2N_y} matrices solutions de l'équation caractéristique. ■

Nous n'avons donc pas unicité du zéro de la fonctionnelle F_h. La première idée est de supposer qu'il suffit peut être de choisir une « condition initiale » de la récurrence (2.49) proche du zéro recherché, c'est-à-dire celui de rayon spectral strictement inférieur à 1 et d'appliquer la méthode de Newton en l'état (c'est-à-dire de résoudre la récurrence (2.49)) en vérifiant que la différentielle est bien inversible à chaque itération. La difficulté est évidemment de donner une bonne estimation de l'opérateur, nous avons donc tout simplement choisi une matrice de rayon spectral strictement inférieur à 1. Malheureusement la **méthode de Newton classique ne permet pas de**

déterminer une approximation de l'opérateur recherché. La raison en est que même en choisissant une matrice ayant les mêmes propriétés de l'opérateur recherché, par exemple $X^0 = 0$, dès la première itération on peut trouver un opérateur qui n'a pas un rayon spectral strictement inférieur à 1.

Nous avons donc développé une **méthode de Newton « modifiée »** pour laquelle à chaque itération, nous « projetons » la matrice obtenue X^k dans l'ensemble de rayon spectral inférieur ou égal à 1. Voici l'algorithme de résolution de l'équation de Riccati stationnaire discrète $(\mathcal{E}^R_{\varepsilon,h})$ par cette méthode de Newton modifiée :

1. Choix d'une « condition initiale » , typiquement $X^0 = 0$;
2. pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on détermine $\tilde{X}^{k+1}$ connaissant X^k :

$$\left| \begin{array}{l} T^{10}_{\varepsilon,h}\,(X^k H^{k+1} + H^{k+1} X^k) - (T^{00}_{\varepsilon,h} + T^{11}_{\varepsilon,h})\,H^{k+1} = -F_h(X^k) \\ \tilde{X}^{k+1} = X^k + H^{k+1} \end{array} \right.$$

   ce problème est donc bien posé si les hypothèses de [Chu (1987)] sont vérifiées, il est résolu en utilisant l'algorithme développé dans [Gardiner *et al.* (1992)]
3. pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on calcule le rayon spectral $\rho(\tilde{X}^{k+1})$ et deux situations peuvent se présenter :
   (i) si $\rho(\tilde{X}^{k+1}) \leq 1$, on pose :
   $$X^{k+1} = \tilde{X}^{k+1};$$
   (ii) si $\rho(\tilde{X}^{k+1}) > 1$, on pose :
   $$X^{k+1} = \frac{\tilde{X}^{k+1}}{\rho(\tilde{X}^{k+1})};$$
   – on arrête l'algorithme quand :
   $$\frac{\|H^{k+1}\|}{\|X^k\|} \quad \text{est assez petit.}$$

Nous n'avons pas pu démontrer la convergence de cette méthode avec cette condition supplémentaire. Cependant, la méthode semble assez naturelle et donne les mêmes résultats que ceux obtenus en utilisant la méthode de décomposition spectrale.

REMARQUE 2.3.24 (JUSTIFICATION POUR LE CAS 1D)
Pour nous clarifier les idées, plaçons-nous dans le cas mono-dimensionnel. Nous avons montré Chapitre 1 que l'équation caractéristique a deux racines de produit égal à 1 : une r_1 est de module strictement inférieur à 1 et l'autre r_2 de module strictement supérieur à 1. Supposons pour simplifier que les deux racines sont réelles positives. Nous savons très bien que la méthode de Newton « classique » converge vers r_1 à condition de choisir la « condition initiale » x^0 telle que :

$$x^0 < \frac{r_1 + r_2}{2} \qquad \Big(F'_h(\frac{r_1 + r_2}{2}) = 0 \Big).$$

Très grossièrement, quand r_1 est proche de 0, la valeur moyenne est loin de 1 donc si on choisit une condition initiale $x^0 < 1$, la méthode classique va converger. En revanche, si r_1 est très proche de 1, r_2 l'est aussi et il ne suffit pas de choisir $x^0 < 1$ pour assurer que x^0 ne dépasse pas la valeur moyenne. L'étape de projection permet avec un choix judicieux de α de se rapprocher

du zéro r_1 recherché.

Le cas monodimensionnel est évidemment plus simple et ne reflète pas toutes les difficultés du cas multidimensionnel mais il a le mérite de montrer qu'il est difficile de trouver une « condition initiale » qui rend la méthode convergente pour tous les cas. L'étape de projection permet néanmoins de revenir au voisinage du zéro recherché.

Comme nous l'avons précisé dans la partie théorique, il reste un bon nombre de questions ouvertes sur cette méthode : l'inversibilité de la différentielle, la convergence de la méthode "avec contraintes" pour la condition initiale choisie.

REMARQUE 2.3.25
Si nous supposons que la méthode présentée converge, qui est la situation que nous avons rencontrée systématiquement en pratique, il faut se rappeler que la méthode de Newton calcule une approximation du zéro de la fonctionnelle avec une tolérance que nous devons fixer. Pour ne pas ajouter une erreur d'approximation à la méthode, il suffit de choisir la tolérance assez petite par rapport à l'erreur d'approximation de $R_{\varepsilon,h}$ pour R_ε (typiquement dans le cas présenté, il suffit de choisir la tolérance de l'ordre de h^2 pour qu'elle soit négligeable par rapport à l'erreur d'approximation).

2.3.2.4 Retour à l'exemple des éléments finis mixtes de Raviart-Thomas de plus bas degré

Le maillage du demi-guide Ω^+ est choisi périodique et toujours rectangulaire régulier. L'espace $\mathcal{M}_h^+$ est l'ensemble des fonctions v_h^+ qui sont constantes sur chaque rectangle. Quant à $\mathcal{W}_h^+$, c'est l'ensemble des fonctions $\mathbf{V}_h$ qui sont linéaires sur les deux directions sur chaque rectangle.

Enfin, comme pour les problèmes de cellules discret, nous pouvons choisir comme espace d'approximation de $H^{-1/2}(\Gamma_0^+)$ l'espace des traces normales des fonctions de $\mathcal{W}_h^+$

$$\mathcal{T}_h^+ = \left\{ \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_0^+}, \quad \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_h^+ \right\} = \left\{ \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_0^+}, \quad \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_h \right\} = \mathcal{T}_h.$$

en remarquant également que :

$$\mathcal{T}_h^+ = \left\{ v_h\Big|_{\Gamma_0^+}, \quad v_h \in \mathcal{M}_h^+ \right\}.$$

dont l'avantage est comme dans le cas des problèmes de cellule la simplicité.

En réunissant tous ces résultats, on montre que les erreurs d'approximation qui apparaissent Théorèmes 2.3.9 et 2.3.12 sont majorées par

$$\varepsilon^+(h) \leq C'\, h\big[\|\mathbf{U}_\varepsilon^+(\varphi)\|_{H^1(\Omega^+)} + \|\text{div }\mathbf{U}_\varepsilon^+(\varphi)\|_{H^1(\Omega^+)} + \|u_\varepsilon^+(\varphi)\|_{H^1(\Omega^+)} + \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma^+)}\big],$$

où C' est une constante indépendante de h.

2.3.2.5 Validation de la résolution de l'équation caractéristique discrète

Commençons par valider les deux méthodes utilisées et expliquées précédemment en comparant le calcul de l'opérateur $R_{\varepsilon,h}$ à l'opérateur R_ε dans le cas d'un guide droit homogène pour lequel ce dernier opérateur est déterminé de manière analytique (voir Proposition 2.2.15). Figure 2.9, nous représentons les courbes d'erreur

$$\log\ h \mapsto \log\ \frac{\|R_\varepsilon\varphi - R_{\varepsilon,h}\Pi_{\mathcal{T}_h^+}\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}}{\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}}$$

pour plusieurs données φ, les premiers modes de l'opérateur laplacien transverse plus exactement. Nous retrouvons les estimations d'erreurs prévue Théorème 2.3.12 pour le cas particulier des éléments finis mixtes de Raviart-Thomas choisis. Les deux méthodes marchent parfaite-

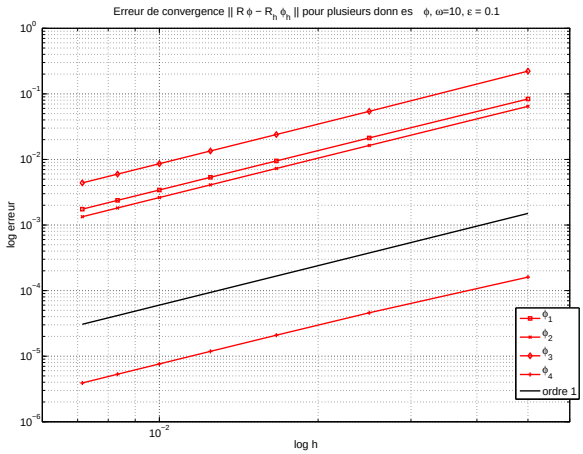


FIG. 2.9: Erreur $\|R_\varepsilon\varphi - R_{\varepsilon,h}\Pi_{\mathcal{T}_h^+}\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}/\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ (en rouge) pour plusieurs données φ ($\{\sqrt{2}\cos(n\pi y),\ n=1,2,3,4\}$) (un symbole par donnée) représentée en échelle logarithmique. Pour la comparaison, la droite noire représente la fonction $\varepsilon(h)=h$.

ment. Pour la méthode de décomposition spectrale, nous trouvons $2N_y$ solutions de l'équation aux valeurs propres quadratiques dont exactement N_y sont de module strictement inférieur à 1. L'opérateur $R_{\varepsilon,h}$ est donc diagonalisable et reconstruit à partir de ces éléments propres. Figure 2.10 sont représentées la valeurs propres de l'opérateur $R_{\varepsilon,h}$ correspondant aux problèmes dans Ω^+ du milieu représenté Figure 2.8 (l'opérateur correspondant au milieu Ω^- est exactement le même) (en rouge) pour des fréquences différentes, et également toutes les autres racines (qui appartiennent à la fenêtre de représentation) qui sont solutions de l'équation aux valeurs propres quadratiques et qui sont de module strictement supérieur à 1 (en bleu). Notons que même si il semble n'y avoir qu'une seule marque proche de 0, c'est, en fait, un certain nombre de valeurs propres qui se regroupent autour de 0 (exactement $1/h$ - le nombre de valeurs propres non nulles). Quant à la méthode de Newton modifiée, elle converge bien vers le même opérateur. Le pas de la discrétisation est ici $h = 1/100$ (ce qui correspond pour $\omega = 20$ à environ 30 points par longueur d'onde). Dans le cas mono-dimensionnel (voir Figures 1.3 et 1.4) où les opérateurs

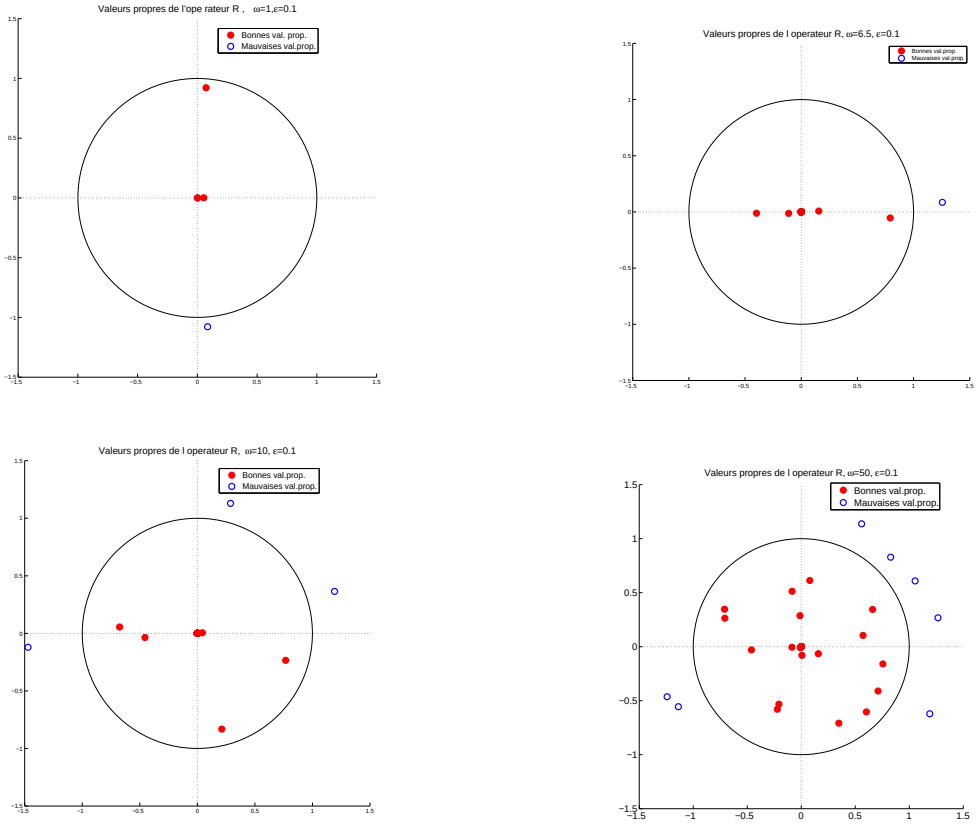


FIG. 2.10: Solutions de l'équation aux valeurs propres quadratiques (2.45) **pour différentes fréquences** $\omega = 1,\ 6.5,\ 10,\ 20$**. Les cercles rouges représentent les bonnes solutions : les valeurs propres de** $R_{\varepsilon,h}$ **et les cercles bleus les solutions de l'équation aux valeurs propres quadratiques de module strictement supérieures à** 1**.**

sont seulement des constantes, nous avions mis en évidence le fait que le bon choix de r_ε est lié au signe positif de la partie imaginaire de l'opérateur NtD λ_ε. Dans le cas du guide homogène, nous pourrions remarquer que les opérateurs R_ε et Λ_ε^+ étant diagonalisables dans la même base, le bon choix d'une valeur propre de R_ε est lié au signe positif de la partie imaginaire d'une des valeurs propres de Λ_ε^+. Dans le cas général, les opérateurs ne sont pas nécessairement diagonalisable et même si ils le sont (en dimension finie par exemple ce cas se présente souvent), ils ne sont pas nécessairement diagonalisables dans la même base. Le seul lien qui peut être fait c'est celui de l'opérateur $R_{\varepsilon,h}$ et de l'équivalent discret de la propriété (2.26) de Λ_ε^+ (Proposition 2.2.9) qui est bien entendue vérifiée, ici.

Numériquement, nous remarquons enfin que plus les valeurs propres de $R_{\varepsilon,h}$ sont proches de 0 plus les vecteurs propres correspondant ressemblent aux vecteurs propres de l'opérateur $R_{\varepsilon,c}$ du milieu constant associés aux valeurs propres proches de 0. C'est sûrement dû au fait que ces vecteurs propres correspondent à des ondes qui décroissent très vite et qui « ne voient pas » le milieu périodique. Ceci nous incite à penser aussi que R_ε est « jordanisable » ou diagonalisable dans une base de Riesz. Cela reste une question ouverte, comme nous l'avons évoqué Section

2.2.3 . Le pas de la discrétisation est ici $h = 1/100$.

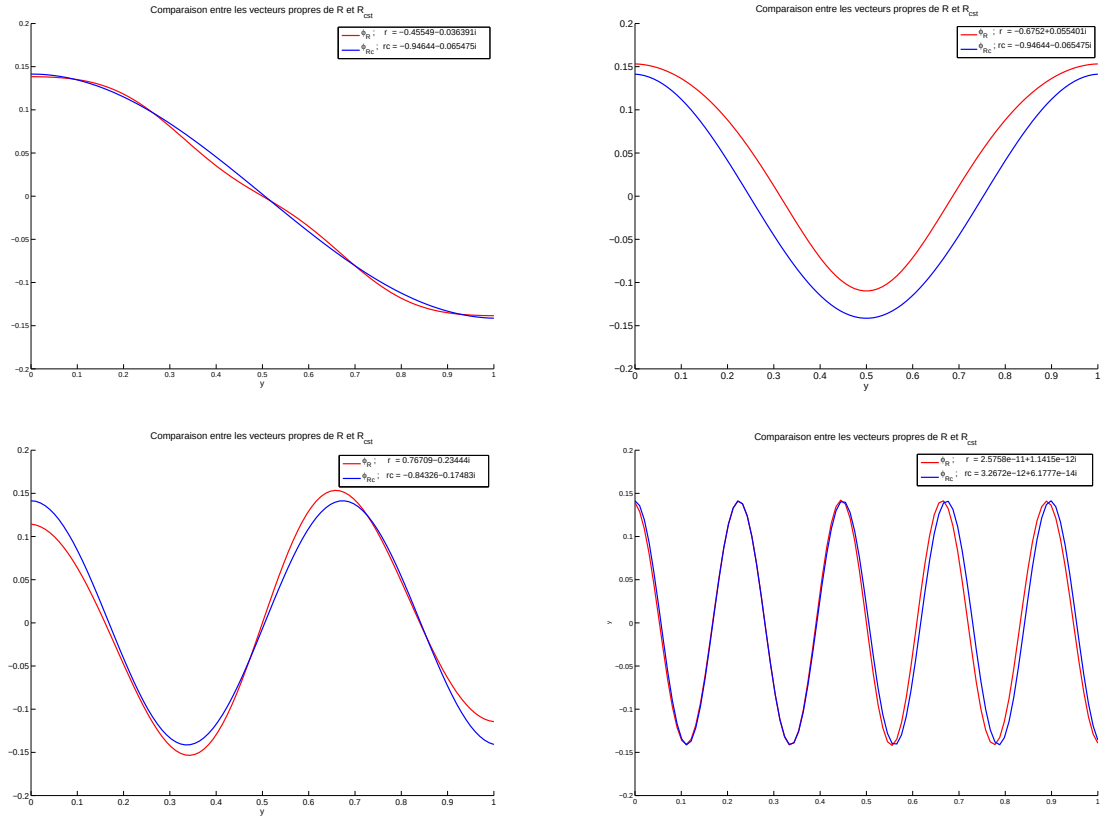


FIG. 2.11: Comparaison entre plusieurs vecteurs propres de l'opérateur $R_{\varepsilon,h}$ associé au milieu périodique (en rouge) et de l'opérateur R_c associé au milieu constant pour $\omega = 10$.

2.3.3 Approximation de l'opérateur NtD Λ_ε^+

2.3.3.1 Caractérisation de l'opérateur de NtD discret

Nous définissons de manière faible l'opérateur de NtD discret $\Lambda_{\varepsilon,h}^+$:

$\forall \varphi_h \in \mathcal{T}_h,\ \forall \psi_h \in \mathcal{T}_h$

$$\exists \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_{h,0}^+,\ \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_0} = \psi_h, \qquad \int_{\Gamma_0} \Lambda_{\varepsilon,h}^+(\varphi_h)\,\psi_h = \int_{\Omega^+} \mathbf{U}_{\varepsilon,h}^+(\varphi_h)\cdot \mathbf{V}_h + \int_{\Omega^+} u_{\varepsilon,h}^+(\varphi_h)\ \mathrm{div}\,\mathbf{V}_h$$

où $\big(u_{\varepsilon,h}^+(\varphi_h), \mathbf{U}_{\varepsilon,0,h}^+(\varphi_h)\big)$ est la solution du problème mixte discrétisé (2.37) et où $\mathbf{U}_{\varepsilon,h}^+(\varphi_h) = \mathbf{U}_{\varepsilon,0,h}^+(\varphi_h) + \mathbf{F}_h^+(\varphi_h)$.

On déduit du théorème 2.3.9 concernant les estimations d'erreur entre les solutions des problèmes de demi-guide mixte continu et discrétisé, une estimation de l'erreur pour les opérateurs de NtD :

THÉORÈME 2.3.26 (ESTIMATIONS D'ERREUR POUR LES OPÉRATEURS DE NTD)
Nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma^+), \quad \|\Lambda_\varepsilon^+ \varphi - \Lambda_{\varepsilon,h}^+ \Pi_{\mathcal{T}_h^+} \varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma^+)} \leq \varepsilon^+(h)$$

avec

$$\varepsilon^+(h) = C\big[\inf_{\mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_h^+} \|\mathbf{U}_\varepsilon^+(\varphi) - \mathbf{V}_h\|_{H_{\mathrm{div}}(\Omega^+)} + \inf_{v_h \in \mathcal{M}_h^+} \|u_\varepsilon^+(\varphi) - v_h\|_{L^2(\Omega^+)} + \|\varphi - \Pi_{\mathcal{T}_h^+}\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma^+)}\big],$$

avec C une constante indépendante de h (voir Remarque 2.3.5 pour la dépendance de C par rapport à ε).

En utilisant la définition de $\Lambda_{\varepsilon,h}^+$, on retrouve les mêmes propriétés que l'opérateur DtN continu Λ_ε^+ :

PROPOSITION 2.3.27 (PROPRIÉTÉ DE L'OPÉRATEUR DE NTD DISCRET $\Lambda_{\varepsilon,h}^+$)
L'opérateur $\Lambda_{\varepsilon,h}^+$ est inversible de $\mathcal{T}_h$ dans $\mathcal{T}_h$, son inverse étant l'opérateur de DtN discret, noté $\tilde{\Lambda}_{\varepsilon,h}^+$. Il vérifie de plus :

$$\forall \varphi_h \in \mathcal{T}_h, \quad Im \int_{\Gamma_0^+} \Lambda_{\varepsilon,h}^+ \varphi_h \, \overline{\varphi}_h > 0.$$

■ **PREUVE:** Pour montrer que $\Lambda_{\varepsilon,h}^+$ est bien inversible, c'est exactement la même démonstration que dans le cas continu, Proposition 2.2.9, il suffit d'introduire un autre problème de demi-guide mixte discret (approchant un problème mixte continu équivalent au problème de demi-guide du 2nd ordre avec conditions de Dirichlet non homogènes introduit dans la preuve de la proposition 2.2.9) et définir un opérateur de DtN (qui est une approximation de l'opérateur DtN continu). On montre alors que l'opérateur ainsi défini est l'inverse de $\Lambda_{\varepsilon,h}^+$. Nous ne développons pas car les idées sont exactement les mêmes.

Quant à la deuxième propriété, par définition, nous avons :

$$\forall \varphi_h \mathcal{T}_h, \quad \int_{\Gamma_0} \Lambda_{\varepsilon,h}^+(\varphi_h)\, \varphi_h = \int_{\Omega^+} |\mathbf{U}_{\varepsilon,h}^+(\varphi_h)|^2 + \int_{\Omega^+} u_{\varepsilon,h}^+(\varphi_h)\ \mathrm{div}\, \overline{\mathbf{U}}_{\varepsilon,h}^+(\varphi_h).$$

La première équation du problème de demi-guide discret (2.37) pour $v_h = u_{\varepsilon,h}$ donne :

$$\int_{\Omega^+} \rho_p(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)|u_{\varepsilon,h}^+(\varphi_h)| \ + \ \int_{\Omega^+} \mathrm{div}\, \mathbf{U}_{\varepsilon,h}^+(\varphi_h)\, \overline{u}_{\varepsilon,h}^+(\varphi_h) \ = \ 0.$$

En prenant le conjugué de cette relation, on retrouve bien la propriété énoncée. ■

Revenons à la définition de $\Lambda_{\varepsilon,h}^+$. Elle est indépendante du choix de $\mathbf{V}_h$ choisi. Ainsi, en prenant un $\mathbf{V}_h$ de support inclus dans la première cellule, on trouve une autre caractérisation de l'opérateur :

$$\exists \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_h^0,\ \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_0} = \psi_h, \qquad \int_{\Gamma_0} \Lambda_{\varepsilon,h}^+(\varphi_h)\, \psi_h = \int_{\mathcal{C}_1^+} \mathbf{S}_{\varepsilon,h}(\varphi_h) \cdot \mathbf{V}_h + \int_{\mathcal{C}_1^+} S_{\varepsilon,h}(\varphi_h)\ \mathrm{div}\, \mathbf{V}_h$$

où on a utilisé la définition des opérateurs $\mathbf{S}_{\varepsilon,h}$ et $S_{\varepsilon,h}$ donnée dans (2.40). En utilisant leur caractérisation (2.41) en fonction des solutions des problèmes de cellule discrets (2.32), la définition des opérateurs de NtD locaux discrets (2.34) et la définition de l'opérateur NtN discret, on trouve l'équivalent discret de la caractérisation (2.25) de Λ_ε^+.

LEMME 2.3.28

$$\Lambda^+_{\varepsilon,h} = T^{00}_{\varepsilon,h} + T^{10}_{\varepsilon,h}\, R_{\varepsilon,h}. \tag{2.50}$$

C'est cette caractérisation qui est utilisée en pratique.

On calcule de façon analogue l'opérateur NtD discret $\Lambda^-_{\varepsilon,h}$ du problème de demi-guide $\mathcal{P}^-_\varepsilon$ posé dans Ω^- et on trouve une estimation d'erreur équivalente à celle dans Ω^-.

2.3.3.2 Validation de cette caractérisation

Commençons par valider la détermination de l'opérateur NtD en comparant le calcul de l'opérateur $\Lambda^+_{\varepsilon,h}$ à l'opérateur Λ^+_ε dans le cas d'un guide droit homogène pour lequel ce dernier opérateur est déterminé de manière analytique (voir Proposition 2.2.18). Figure 2.12, nous représentons les courbes d'erreur :

$$\log\ h \mapsto \log\ \frac{\|\Lambda^+_\varepsilon \varphi - \Lambda^+_{\varepsilon,h}\Pi_{\mathcal{T}_h^+}\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}}{\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}}$$

pour plusieurs données φ, les premiers modes de l'opérateur laplacien transverse plus exactement. Nous retrouvons les estimations d'erreurs prévues Théorème 2.3.26 pour le cas particulier des éléments finis mixtes de Raviart-Thomas choisis. Illustrons numériquement mainte-

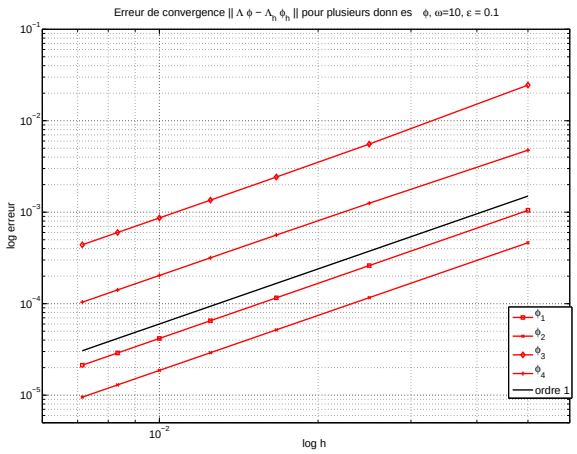


FIG. 2.12: Erreur $\|\Lambda^+_\varepsilon\varphi - \Lambda^+_{\varepsilon,h}\Pi_{\mathcal{T}_h^+}\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}/\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ (en rouge) pour plusieurs données φ ($\{\sqrt{2}\cos(n\pi y),\ n = 1,2,3,4\}$) (un symbole par donnée) représentée en échelle logarithmique. Pour la comparaison, la droite noire représente la fonction $\varepsilon(h) = h$.

nant,Figure 2.13, la propriété de la Proposition 2.2.23 concernant les vecteurs propres de Λ^+_ε : les vecteurs propres $\{\varphi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de l'opérateur NtD $\Lambda^+_{\varepsilon,\alpha}$ du milieu homogène (c'est-à-dire les vecteurs propres du laplacien transverse) « semblent » tendre quand n tend vers l'infini vers des des vecteurs propres de Λ^+_ε. Là encore, c'est sûrement dû au fait que ces vecteurs propres correspondent à des ondes qui décroissent très vite et qui « ne voient pas » le milieu périodique. La

fréquence est égale à 10 ici et le pas de la discrétisation est $h = 1/100$. Ceci nous incite à pen-

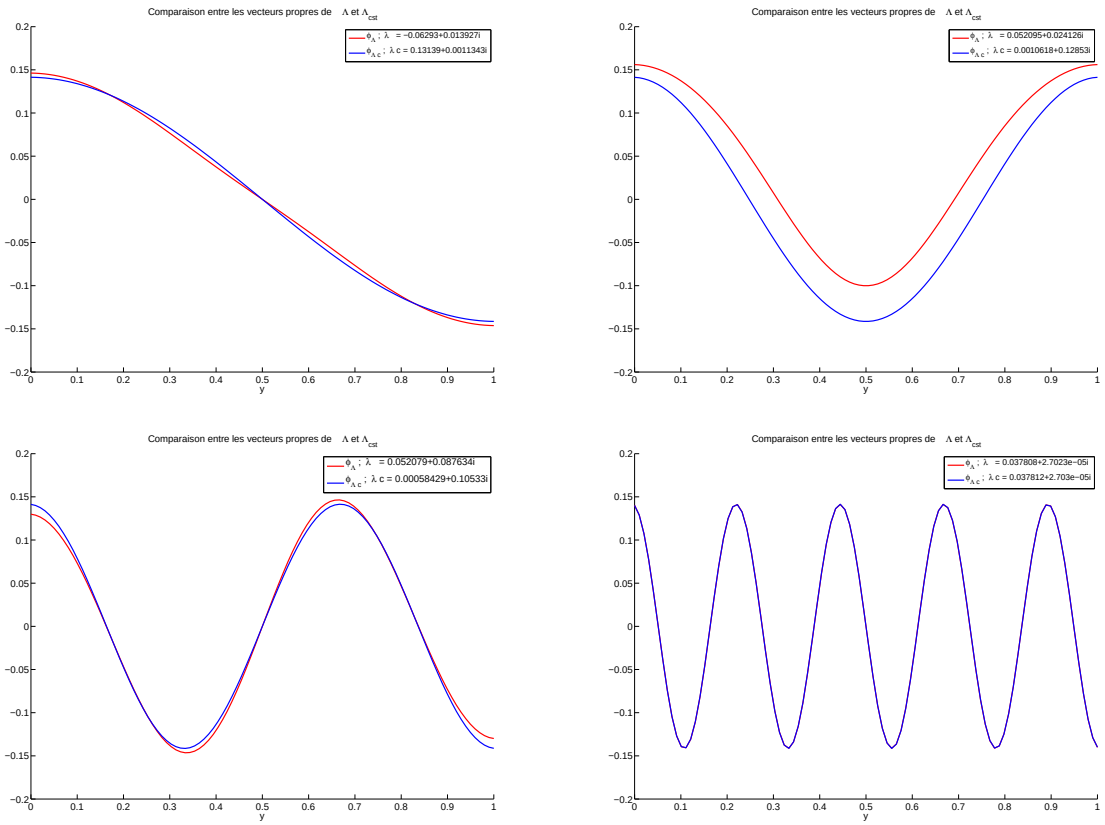


FIG. 2.13: Comparaison entre plusieurs vecteurs propres de l'opérateur $\Lambda^+_{\varepsilon,h}$ associé au milieu périodique (en rouge) et de l'opérateur $\Lambda^+_{\varepsilon,\alpha}$ associé au milieu constant, pour la fréquence $\omega = 10$ (dans la figure en bas à droite, les courbes rouge et bleue sont confondues).

ser aussi que R_ε est « jordanisables » ou diagonalisables dans une base de Riesz. Cela reste une question ouverte, comme nous l'avons évoqué Section 2.2.3 .

2.3.4 Approximation de la solution intérieure

2.3.4.1 Discrétisation du problème intérieur par des éléments finis mixtes

Après avoir calculé les opérateurs de NtD discrets $\Lambda^+_{\varepsilon,h}$ et $\Lambda^-_{\varepsilon,h}$, nous allons résoudre un problème intérieur mixte discret dont la solution va approcher la solution du problème mixte intérieur introduit à la fin de la section 2.2 que nous rappelons ici :

PROPOSITION 2.3.29 (FORMULATION MIXTE DU PROBLÈME INTÉRIEUR ($\mathcal{P}^i_\varepsilon$))
Soit le problème mixte posé en domaine borné Ω^i :

Trouver $(u_\varepsilon^i, \mathbf{U}_\varepsilon^i) \in L^2(\Omega^i) \times H_{\rm div}(\Omega^i)$ *telle que* $\forall (v, \mathbf{V}) \in L^2(\Omega^i) \times H_{\rm div}(\Omega^i)$

$$\left| \begin{array}{rcrcl} a^i(u_\varepsilon^i, v) & + & b^i(v, \mathbf{U}_\varepsilon^i) & = & -\displaystyle\int_{\Omega^i} f\,\overline{v} \\ \overline{b^i(u_\varepsilon^i, \mathbf{V})} & + & \mathbf{A}^i(\mathbf{U}_\varepsilon^i, \mathbf{V}) & = & 0 \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} a^i(u, v) &= (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \int_{\Omega^i} \rho u \overline{v} \\ b^i(u, \mathbf{V}) &= \int_{\Omega^i} \operatorname{div} \mathbf{V}\, \overline{u} \\ \mathbf{A}^i(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \int_{\Omega^i} \mathbf{U}\, \overline{\mathbf{V}} + \left\langle \Lambda_\varepsilon^- \, (\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}), \mathbf{V}\cdot\mathbf{n} \right\rangle_{\Gamma_0^-} + \left\langle \Lambda_\varepsilon^+ \, (\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}), \mathbf{V}\cdot\mathbf{n} \right\rangle_{\Gamma_0^+} \end{aligned}$$

et où $< \cdot, \cdot >_{\Gamma_0^\pm}$ *est le crochet de dualité entre* $H^{1/2}(\Gamma_0^\pm)$ *et* $H^{-1/2}(\Gamma_0^\pm)$.

Si $(u_\varepsilon^i, \mathbf{U}_\varepsilon^i)$ *est solution du problème mixte précédent alors* u_ε^i *est l'unique solution* $H^1(\Omega^i)$ *de* $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ *et* $\mathbf{U}_\varepsilon^i$ *est l'unique solution* $H_{\rm div}(\Omega^i)$ *du problème :*

$$\left| \begin{array}{rcll} -\nabla(\dfrac{1}{\rho(\mathbf{x})} \operatorname{div} \mathbf{U}_\varepsilon^i) - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\, \mathbf{U}_\varepsilon^i &=& \nabla(\dfrac{1}{\rho} f) & \textit{dans} \quad \Omega \\ \mathbf{U}_\varepsilon^i \cdot \mathbf{n} &=& 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega^i \setminus (\Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-) \\ \operatorname{div} \mathbf{U}_\varepsilon^i - \rho(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\, \Lambda_\varepsilon^- \left(\mathbf{U}_\varepsilon^i \cdot \mathbf{n}\right) &=& 0 & \textit{sur} \quad \Gamma_0^-, \\ \operatorname{div} \mathbf{U}_\varepsilon^i - \rho(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\, \Lambda_\varepsilon^+ \left(\mathbf{U}_\varepsilon^i \cdot \mathbf{n}\right) &=& 0 & \textit{sur} \quad \Gamma_0^+. \end{array} \right. \tag{2.51}$$

Réciproquement, si u_ε^i *est l'unique solution* H^1 *de* $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ *alors* $(u_\varepsilon^i, \nabla u_\varepsilon^i)$ *est solution du problème mixte précédent.*

Le problème mixte admet par conséquent une solution unique.

Introduisons les espaces d'approximation des solutions de façon à ce que nous puissions utiliser les opérateurs NtD discrets et montrer que la solution du problème mixte intérieur est la restriction d'un problème discret posé en domaine borné Ω donc de façon à ce que nous puissions reconstruire la solution du problème en domaine non borné à partir de la solution du problème posé dans Ω^i. L'idée est encore ici de construire les espaces d'approximation de façon à extrapoler la méthode du problème continu au problème discret.

Les espaces d'approximation du problème intérieur sont donc définis comme suit :
- $\mathcal{M}_h^i$ un sous-espace de dimension finie de $L^2(\Omega^i)$;
- $\mathcal{W}_h^i$ un sous-espace de dimension finie de $H_{\rm div}(\Omega^i)$ telle que

$$\operatorname{div}\, \mathcal{W}_h^i = \mathcal{M}_h^i.$$

Dans la perspective d'utiliser les opérateurs NtD discrets et afin d'éviter une procédure de projection, supposons de plus que :

$$\left\{ v_h\Big|_{\Gamma_0^\pm}, \quad v_h \in \mathcal{M}_h^i \right\} \;=\; \left\{ \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_0^\pm}, \quad \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_h^i \right\} \;=\; \mathcal{T}_h^\pm \tag{2.52}$$

où on rappelle que $\mathcal{T}_h^\pm$ est l'espace d'approximation de $H^{-1/2}(\Gamma_0^\pm)$. On note $\Pi_{\mathcal{T}_h^\pm}$ la projection orthogonale de $H^{-1/2}(\Gamma_0^\pm)$ sur $\mathcal{T}_h^\pm$.

Considérons maintenant le problème intérieur discret suivant :

Trouver $(u^i_{\varepsilon,h}, \mathbf{U}^i_{\varepsilon,h}) \in \mathcal{M}^i_h \times \mathcal{W}^i_h$ telle que $\forall (v_h, \mathbf{V}_h) \in \mathcal{M}^i_h \times \mathcal{W}^i_h$

$$\left| \begin{array}{rcrcl} a^i(u^i_{\varepsilon,h}, v_h) & + & b^i(v_h, \mathbf{U}^i_{\varepsilon,h}) & = & -\displaystyle\int_{\Omega^i} f\, \overline{v}_h \\ \overline{b^i(u^i_{\varepsilon,h}, \mathbf{V}_h)} & + & \mathbf{A}^i_h(\mathbf{U}^i_{\varepsilon,h}, \mathbf{V}_h) & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.53}$$

où a^i et b^i sont les formes bilinéaires de la Proposition 2.3.29 et où

$$\mathbf{A}^i_h(\mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h) = \int_{\Omega^i} \mathbf{U}_h\, \overline{\mathbf{V}}_h + \int_{\Gamma_0^-} \Lambda^-_{\varepsilon,h}\, (\mathbf{U}_h \cdot \mathbf{n})\, \overline{\mathbf{V}}_h \cdot \mathbf{n} + \int_{\Gamma_0^+} \Lambda^+_{\varepsilon,h}\, (\mathbf{U}_h \cdot \mathbf{n})\, \overline{\mathbf{V}}_h \cdot \mathbf{n}.$$

THÉORÈME 2.3.30 (ESTIMATION D'ERREUR POUR LE PROBLÈME INTÉRIEUR)
Le problème intérieur mixte discrétisé (2.53) *est bien posé et nous avons l'estimation suivante :*

$$\|\mathbf{U}^i_\varepsilon - \mathbf{U}^i_{\varepsilon,h}\|_{H_{\rm div}(\Omega^i)} + \|u^i_\varepsilon - u^i_{\varepsilon,h}\|_{L^2(\Omega^i)} \leq \varepsilon^i(h)$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon^i(h) = C\big[&\inf_{\mathbf{V}_h \in \mathcal{W}^i_h} \|\mathbf{U}^i_\varepsilon - \mathbf{V}_h\|_{H_{\rm div}(\Omega^i)} + \inf_{v_h \in \mathcal{M}^i_h} \|u^i_\varepsilon - v_h\|_{L^2(\Omega^i)}\big] \\ + C\Big[&\inf_{\varphi_h \in \mathcal{T}^+_h} \|(\Lambda^+_\varepsilon - \Lambda^+_{\varepsilon,h})(\varphi_h)\|_{H^{1/2}(\Gamma_0^+)} + \inf_{\varphi_h \in \mathcal{T}^-_h} \|(\Lambda^-_\varepsilon - \Lambda^-_{\varepsilon,h})(\varphi_h)\|_{H^{1/2}(\Gamma_0^-)}\Big]. \end{aligned}$$

avec C une constante indépendante de h (voir Remarque 2.3.5 pour la dépendance de C par rapport à ε).

■ **PREUVE:** Les idées sont les mêmes que pour la preuve du théorème 2.3.4 auxquelles nous ajoutons les propriétés des opérateurs de NtD discrets établis Proposition 2.3.27.

Nous allons utiliser le fait que les espaces d'approximation ont été choisis de sorte que $\operatorname{div} \mathcal{W}^i_h = \mathcal{M}^i_h$. En choisissant $v_h = \operatorname{div} \mathbf{V}_h/\rho$ et en sommant la première équation de (2.53) et la deuxième équation multipliée par $-(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)$, on trouve :

$$\forall \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}^i_h, \quad \int_{\Omega^i} \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{U}^i_{\varepsilon,h}\, \operatorname{div} \overline{\mathbf{V}}_h - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\, \mathbf{A}^i_h(\mathbf{U}^i_{\varepsilon,h}, \mathbf{V}_h) = -\int_{\Omega^i} \frac{1}{\rho} f\, \operatorname{div} \overline{\mathbf{V}}_h.$$

Ce dernier problème est l'approximation du problème (2.51) par éléments finis avec $\mathcal{W}^i_h$ comme espace d'approximation et avec la forme bilinéaire $(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\mathbf{A}^i_h$ qui est coercive, étant donnée la propriété établie Proposition 2.3.27 concernant les opérateurs NtD discrets (pour montrer la coercivité il suffit d'étudier sa partie imaginaire, comme dans le cas continu). Le problème discret est donc bien posé et il existe une constante C indépendante de h (qui tend vers l'infini quand ε tend vers 0) telle que

$$\|\mathbf{U}^i_\varepsilon - \mathbf{U}^i_{\varepsilon,h}\|_{H_{\rm div}(\Omega^i)} \leq C \inf_{\mathbf{V}_h \in \mathcal{W}^i_h} \Big[\|\mathbf{U}^i_{\varepsilon,h} - \mathbf{V}_h\|_{H_{\rm div}(\Omega^i)} + \sup_{\mathbf{W}_h \in \mathcal{W}^i_h} \frac{(\mathbf{A}^i - \mathbf{A}^i_h)(\mathbf{V}_h, \mathbf{W}_h)}{\|\mathbf{W}_h\|_{H_{\rm div}}} \Big].$$

Notons que

$$(\mathbf{A}^i - \mathbf{A}^i_h)(\mathbf{V}_h, \mathbf{W}_h) = \int_{\Gamma_0^-} (\Lambda^-_\varepsilon - \Lambda^-_{\varepsilon,h})\, (\mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n})\, \overline{\mathbf{W}}_h \cdot \mathbf{n} + \int_{\Gamma_0^+} (\Lambda^+_\varepsilon - \Lambda^+_{\varepsilon,h})\, (\mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n})\, \overline{\mathbf{W}}_h \cdot \mathbf{n}.$$

On écrit alors

$$\inf_{\mathbf{V}_h\in\mathcal{W}_h^i}\sup_{\mathbf{W}_h\in\mathcal{W}_h^i}\frac{\int_{\Gamma_0^+}(\Lambda_\varepsilon^+-\Lambda_{\varepsilon,h}^+)(\mathbf{V}_h\cdot\mathbf{n})\,\overline{\mathbf{W}}_h\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{W}_h\|_{H_{\rm div}}}$$
$$\leq C\inf_{\mathbf{V}_h\in\mathcal{W}_h^i}\sup_{\mathbf{W}_h\in\mathcal{W}_h^i}\frac{\|(\Lambda_\varepsilon^+-\Lambda_{\varepsilon,h}^+)(\mathbf{V}_h\cdot\mathbf{n})\|_{H^{1/2}(\Gamma_0^+)}\,\|\mathbf{W}_h\cdot\mathbf{n}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0^+)}}{\|\mathbf{W}_h\|_{H_{\rm div}}}$$
$$\leq C\inf_{\varphi_h\in\mathcal{T}_h^+}\|(\Lambda_\varepsilon^+-\Lambda_{\varepsilon,h}^+)(\varphi_h)\|_{H^{1/2}(\Gamma_0^+)}$$

où la dernière inégalité s'obtient à partir du théorème de trace sur les éléments $H_{\rm div}$ et en utilisant (2.52) . Nous avons donc l'estimation d'erreur

$$\|\mathbf{U}_\varepsilon^i-\mathbf{U}_{\varepsilon,h}^i\|_{H_{\rm div}(\Omega^i)}\leq C\Big[\inf_{\mathbf{V}_h\in\mathcal{W}_h^i}\|\mathbf{U}_{\varepsilon,h}^i-\mathbf{V}_h\|_{H_{\rm div}(\Omega^i)}$$
$$+\inf_{\varphi_h\in\mathcal{T}_h^+}\|(\Lambda_\varepsilon^+-\Lambda_{\varepsilon,h}^+)(\varphi_h)\|_{H^{1/2}(\Gamma_0^+)}+\inf_{\varphi_h\in\mathcal{T}_h^-}\|(\Lambda_\varepsilon^--\Lambda_{\varepsilon,h}^-)(\varphi_h)\|_{H^{1/2}(\Gamma_0^-)}\Big].$$

La première équation se récrit alors

$$\forall v_h\in\mathcal{M}_h^i,\quad(\omega^2+\imath\varepsilon\omega)\int_{\Omega^i}\rho u_{\varepsilon,h}^i\overline{v}_h=-\int_{\Omega^i}\big(\operatorname{div}\mathbf{U}_{\varepsilon,h}^i-f\big)\overline{v}_h$$

qui est une approximation du problème

$$\forall v\in L^2(\mathcal{C}),\quad(\omega^2+\imath\varepsilon\omega)\int_{\Omega^i}\rho u_\varepsilon^i\overline{v}=-\int_{\Omega^i}\big(\operatorname{div}\mathbf{U}_\varepsilon^i-f\big)\overline{v}$$

par éléments finis avec $\mathcal{M}_h$ comme espace d'approximation. On en déduit le résultat attendu. ■

REMARQUE 2.3.31
Pour avoir une estimation de

$$\inf_{\varphi_h\in\mathcal{T}_h^\pm}\|(\Lambda_\varepsilon^\pm-\Lambda_{\varepsilon,h}^\pm)(\varphi_h)\|_{H^{1/2}(\Gamma_0^\pm)},$$

il suffit d'utiliser le théorème 2.3.26 pour $\varphi=\varphi_h$ et on obtient

$$\|(\Lambda_\varepsilon^\pm-\Lambda_{\varepsilon,h}^\pm)(\varphi_h)\|_{H^{1/2}(\Gamma_0^\pm)}\leq C\big[\inf_{\mathbf{V}_h\in\mathcal{W}_h^\pm}\|\mathbf{U}_\varepsilon^\pm(\varphi_h)-\mathbf{V}_h\|_{H_{\rm div}(\Omega^\pm)}+\inf_{v_h\in\mathcal{M}_h^\pm}\|u_\varepsilon^\pm(\varphi_h)-v_h\|_{L^2(\Omega^\pm)}\big]$$

avec la constante C indépendante de h (voir Remarque 2.3.5 pour la dépendance de C par rapport à ε).

2.3.4.2 Exemple des éléments finis de Raviart-Thomas de plus bas degré

Le maillage du domaine Ω^i est rectangulaire régulier de façon à ce qu'il coïncide sur les bords Γ_0^+ et Γ_0^- avec les maillages de Ω^+ et Ω^-. L'espace $\mathcal{M}_h^i$ est l'ensemble des fonctions v_h qui sont constantes sur chaque rectangle. Quant à $\mathcal{W}_h^i$, c'est l'ensemble des fonctions $\mathbf{V}_h$ qui sont linéaires sur les deux directions sur chaque rectangle. dont l'avantage est comme dans le cas des problèmes de cellule la simplicité.

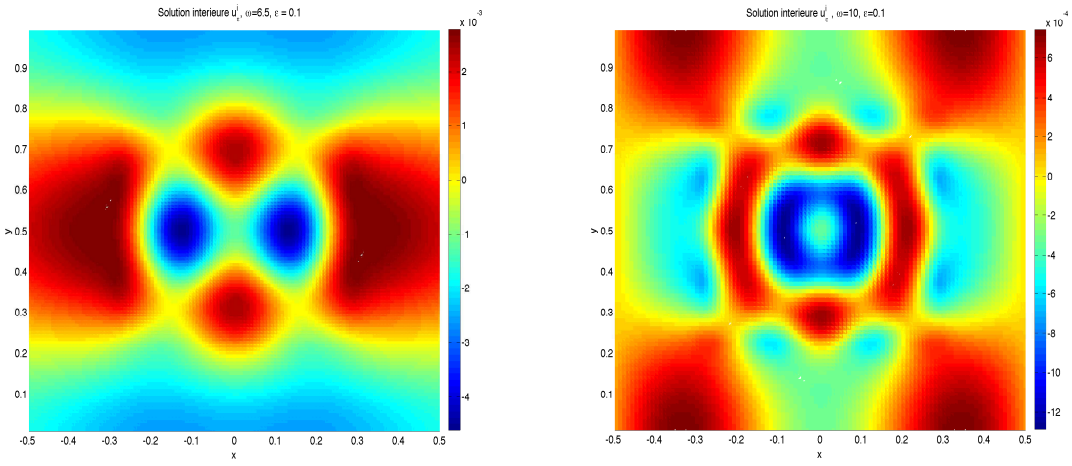
En réunissant tous ces résultats, on montre que l' erreur d'approximation qui apparaît Théorème 2.3.30 est majorée par

$$\begin{aligned}\varepsilon^i(h) \leq C'\,h\big[\|\mathbf{U}^i_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^i)} + \|\mathrm{div}\ \mathbf{U}^i_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^i)} + \|u^i_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^i)}\big],\\ + C'\,h \inf_{\varphi_h\in\mathcal{T}_h^+}\big[\|\mathbf{U}^+_\varepsilon(\varphi_h)\|_{H^1(\Omega^+)} + \|\mathrm{div}\ \mathbf{U}^+_\varepsilon(\varphi_h)\|_{H^1(\Omega^+)} + \|u^+_\varepsilon(\varphi_h)\|_{H^1(\Omega^+)}\big]\\ + C'\,h \inf_{\varphi_h\in\mathcal{T}_h^-}\big[\|\mathbf{U}^-_\varepsilon(\varphi_h)\|_{H^1(\Omega^-)} + \|\mathrm{div}\ \mathbf{U}^-_\varepsilon(\varphi_h)\|_{H^1(\Omega^-)} + \|u^-_\varepsilon(\varphi_h)\|_{H^1(\Omega^-)}\big].\end{aligned}$$

où C' est une constante indépendante de h.

2.3.4.3 Application numérique

Figure 2.14 est représentée la solution $u^i_{\varepsilon,h}$ du problème (2.53), dans le cas où le milieu est celui de la Figure 2.8, pour deux fréquences différentes $\omega = 6.5$ et $\omega = 10$ et pour un pas de discrétisation $h = 1/100$.



(a) La solution $u^i_{\varepsilon,h}$ pour $\omega = 6.5$

(b) La solution $u^i_{\varepsilon,h}$ pour $\omega = 10$

FIG. 2.14: Représentation de la solution intérieure pour les fréquences $\omega = 6.5$ et $\omega = 10$ dans le cas où $\Omega^i =]-0.5, 0.5[\times]0, 1[$.

2.3.5 Approximation de la solution du problème de départ $(\mathcal{P}_\varepsilon)$

On définit le couple de fonctions $(u_{\varepsilon,h}, \mathbf{U}_{\varepsilon,h})$ en utilisant la relation de reconstruction :

$$\left|\begin{array}{lll} u_{\varepsilon,h} = u^i_{\varepsilon,h}, & \text{dans } \Omega^i & \\ u_{\varepsilon,h} = u^+_{\varepsilon,h}(\varphi^+_h), & \text{dans } \Omega^+, & \text{avec } \varphi^+_h = \mathbf{U}^i_{\varepsilon,h}\cdot(-\mathbf{e}_x)\Big|_{\Gamma_0^+} \\ u_{\varepsilon,h} = u^-_{\varepsilon,h}(\varphi^-_h), & \text{dans } \Omega^-, & \text{avec } \varphi^-_h = \mathbf{U}^i_{\varepsilon,h}\cdot(+\mathbf{e}_x)\Big|_{\Gamma_0^-} \end{array}\right. \tag{2.54}$$

et de même

$$\left|\begin{array}{lll} \mathbf{U}_{\varepsilon,h} = \mathbf{U}^i_{\varepsilon,h}, & \text{dans } \Omega^i & \\ \mathbf{U}_{\varepsilon,h} = \mathbf{U}^+_{\varepsilon,h}(\varphi^+_h), & \text{dans } \Omega^+, & \text{avec } \varphi^+_h = \mathbf{U}^i_{\varepsilon,h}\cdot(-\mathbf{e}_x)\Big|_{\Gamma_0^+} \\ \mathbf{U}_{\varepsilon,h} = \mathbf{U}^-_{\varepsilon,h}(\varphi^-_h), & \text{dans } \Omega^-, & \text{avec } \varphi^-_h = \mathbf{U}^i_{\varepsilon,h}\cdot(+\mathbf{e}_x)\Big|_{\Gamma_0^-} \end{array}\right. \tag{2.55}$$

où $(u^i_{\varepsilon,h}, \mathbf{U}^i_{\varepsilon,h})$ est la solution du problème intérieur mixte discret (2.53) et où pour tout $\varphi_h \in \mathcal{T}^+_h$ (resp. $\varphi_h \in \mathcal{T}^-_h$), $(u^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h), \mathbf{U}^+_{\varepsilon,h}(\varphi_h))$ (resp. $(u^-_{\varepsilon,h}(\varphi_h), \mathbf{U}^-_{\varepsilon,h}(\varphi_h))$) est la solution du problème de demi-guide mixte discret (2.37) posé dans Ω^+ (resp. celui posé dans Ω^-) calculé cellule par cellule en utilisant les relations (2.39) et à l'aide des solutions des problèmes de cellule mixte discret et de l'opérateur NtN discret.

La question qui se pose maintenant naturellement est de savoir si ce couple de solutions approche bien la solution du problème mixte posé dans tout Ω introduit dans la Proposition suivante.

PROPOSITION 2.3.32 (FORMULATION MIXTE DU PROBLÈME $(\mathcal{P}_\varepsilon)$)
Soit le problème mixte posé en domaine borné Ω :

Trouver $(u_\varepsilon, \mathbf{U}_\varepsilon) \in L^2(\Omega)\times H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ *telle que* $\forall (v,\mathbf{V}) \in L^2(\Omega)\times H_{\mathrm{div}}(\Omega)$

$$\left|\begin{array}{rcrcl} a^{tot}(u_\varepsilon, v) & + & b^{tot}(v, \mathbf{U}_\varepsilon) & = & -\displaystyle\int_\Omega f\,\overline{v} \\ \overline{b^{tot}(u_\varepsilon, \mathbf{V})} & + & \mathbf{A}^{tot}(\mathbf{U}_\varepsilon, \mathbf{V}) & = & 0 \end{array}\right. \tag{2.56}$$

avec

$$\begin{aligned} a^{tot}(u,v) &= (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\int_\Omega \rho u\overline{v} \\ b^{tot}(u,\mathbf{V}) &= \int_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{V}\,\overline{u} \\ \mathbf{A}^{tot}(\mathbf{U},\mathbf{V}) &= \int_\Omega \mathbf{U}\,\overline{\mathbf{V}} \end{aligned}$$

Si $(u_\varepsilon, \mathbf{U}_\varepsilon)$ est solution du problème mixte précédent alors u_ε est l'unique solution $H^1(\Omega)$ de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ et $\mathbf{U}_\varepsilon$ est l'unique solution $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ du problème :

$$\left|\begin{array}{rcll} -\nabla\left(\dfrac{1}{\rho(\mathbf{x})}\ \mathrm{div}\,\mathbf{U}_\varepsilon\right) - (\omega^2+\imath\varepsilon\omega)\,\mathbf{U}_\varepsilon &=& \nabla\left(\dfrac{1}{\rho}\,f\right) & \textit{dans} \quad \Omega \\ \mathbf{U}_\varepsilon\cdot\mathbf{n} &=& 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{2.57}$$

Réciproquement, si u_ε est l'unique solution H^1 de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ alors $(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)$ est solution du problème mixte précédent.

Le problème mixte admet par conséquent une solution unique.

Tous les espaces d'approximation ont été choisis de sorte que le couple de fonctions défini dans (2.54) et (2.55) soit bien une approximation de la solution du problème mixte précédent. Nous introduisons les espaces d'approximation qui découlent de ceux choisis pour l'approximation

des problèmes intérieurs et de demi-guides

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_h^{\rm tot} &= \Big\{v_h \in L^2(\Omega), \quad v_h\big|_{\Omega^i} \in \mathcal{M}_h^i \quad \text{et} \quad v_h\big|_{\Omega^\pm} \in \mathcal{M}_h^\pm\Big\}\\ \mathcal{W}_h^{\rm tot} &= \Big\{\mathbf{V}_h \in H_{\rm div}(\Omega), \quad \mathbf{V}_h\big|_{\Omega^i} \in \mathcal{W}_h^i \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_h\big|_{\Omega^\pm} \in \mathcal{W}_h^\pm\Big\}.\end{aligned}$$

Nous en déduisons l'estimation d'erreur globale.

THÉORÈME 2.3.33 (ESTIMATION D'ERREUR POUR LA SOLUTION)
Nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$\|\mathbf{U}_\varepsilon - \mathbf{U}_{\varepsilon,h}\|_{H_{\rm div}(\Omega)} + \|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon^{tot}(h)$$

avec

$$\varepsilon^{tot}(h) = C\big[\inf_{\mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_h^{tot}} \|\mathbf{U}_\varepsilon - \mathbf{V}_h\|_{H_{\rm div}(\Omega)} + \inf_{v_h \in \mathcal{M}_h^{tot}} \|u_\varepsilon - v_h\|_{L^2(\Omega)}\big]$$

avec C une constante indépendante de h (qui tend vers l'infini quand ε tend vers 0).

■ **IDÉE DE LA PREUVE:** Pour montrer ce résultat, il suffit de vérifier que $(u_{\varepsilon,h}, \mathbf{U}_{\varepsilon,h})$ est dans l'espace $\mathcal{M}_h^{\rm tot} \times \mathcal{W}_h^{\rm tot}$. On montre ensuite que $(u_{\varepsilon,h}, \mathbf{U}_{\varepsilon,h})$ est solution du problème mixte discrétisé :

Trouver $(u_{\varepsilon,h}, \mathbf{U}_{\varepsilon,h}) \in \mathcal{M}_h^{\rm tot} \times \mathcal{W}_h^{\rm tot}$ telle que $\forall (v_h, \mathbf{V}_h) \in \mathcal{M}_h^{\rm tot} \times \mathcal{W}_h^{\rm tot}$

$$\left|\begin{array}{rcrcl} a^{\rm tot}(u_{\varepsilon,h}, v_h) & + & b^{\rm tot}(v_h, \mathbf{U}_{\varepsilon,h}) & = & -\displaystyle\int_\Omega f\,\overline{v}_h \\ \overline{b^{\rm tot}(u_{\varepsilon,h}, \mathbf{V}_h)} & + & \mathbf{A}^{\rm tot}(\mathbf{U}_{\varepsilon,h}, \mathbf{V}_h) & = & 0 \end{array}\right.$$

où les formes bilinéaires $a^{\rm tot}$, $b^{\rm tot}$ et $\mathbf{A}^{\rm tot}$ sont celles du problème continu. Enfin en utilisant les mêmes arguments que Théorème 2.3.30, on montre que ce problème discret est bien posé et on établit les estimations d'erreur. ■

♢ ***Application numérique***

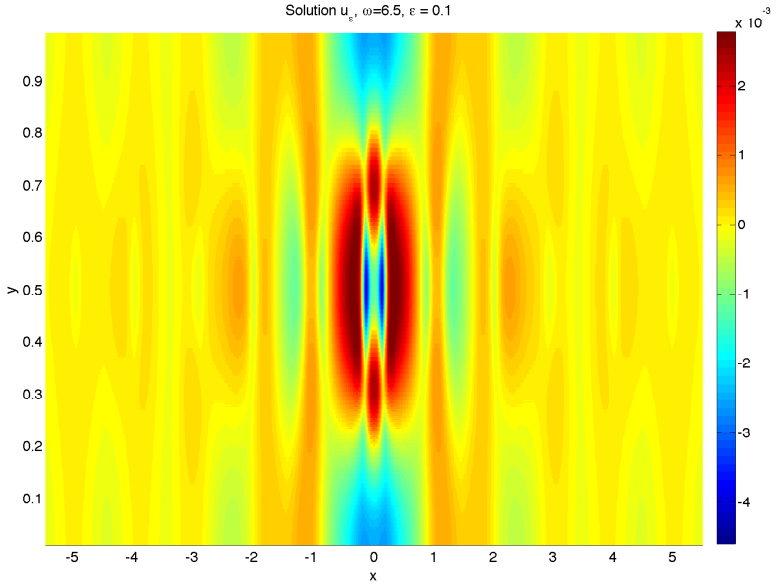
Figure 2.15 est représentée la solution $u_{\varepsilon,h}$ du problème (2.56), dans le cas où le milieu est celui de la Figure 2.8, pour deux fréquences différentes $\omega = 6.5$ et $\omega = 10$ et pour un pas de discrétisation $h = 1/100$.

2.3.6 Validations

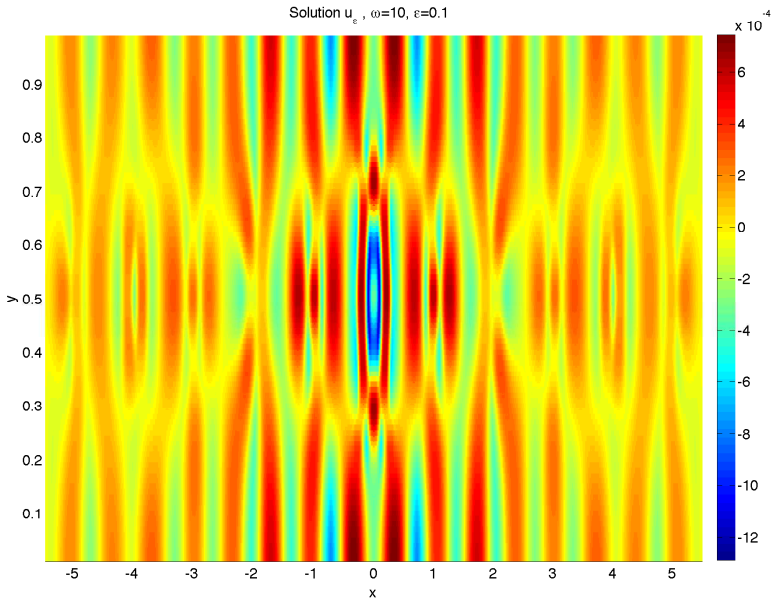
Afin de valider la méthode présentée, nous avons considéré deux tests de validation.

2.3.6.1 Comparaison avec l'expression explicite du cas constant

La première validation est de comparer, dans le cas où le milieu est constant, les résultats obtenus par la méthode avec les résultats exacts obtenus par un calcul explicite (certains des résultats



(a) La solution $u_{\varepsilon,h}$ pour $\omega = 6.5$



(b) La solution $u_{\varepsilon,h}$ pour $\omega = 10$

FIG. 2.15: Représentation de la solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ sur $[-5.5, 5.5] \times [0, 1]$ pour les fréquences $\omega = 6.5$ et $\omega = 10$.

sont donnés en exemple dans la section 2.1.2).

Nous avons déjà donné précédemment les courbes d'erreur pour les opérateurs de propagation Figure 2.9 et les opérateurs NtD Figure 2.12. Nous présentons Figure 2.16(a) la courbe d'erreur

$$\log\ h \mapsto \log\ \frac{\|u_\varepsilon^+(\varphi) - u_{\varepsilon,h}^+(\Pi_{\mathcal{T}_h^+}\varphi)\|_{L^2(\mathcal{C})}}{\|u_\varepsilon^+(\varphi)\|_{L^2(\mathcal{C})}}$$

Figure 2.16(b) la courbe d'erreur

$$\log\ h \mapsto \log\ \frac{\|\mathbf{U}_\varepsilon^+(\varphi) - \mathbf{U}_{\varepsilon,h}^+(\Pi_{\mathcal{T}_h^+}\varphi)\|_{L^2(\mathcal{C})}}{\|\mathbf{U}_\varepsilon^+(\varphi)\|_{L^2(\mathcal{C})}}$$

pour plusieurs données φ, les premiers modes de l'opérateur laplacien transverse $\varphi_n = \sqrt{2}\cos(n\pi y)$ pour $n = 1, 2, 3, 4$. Nous avons tracé ces courbes d'erreurs pour la donnée φ_{int} issue de la résolution du problème intérieur :

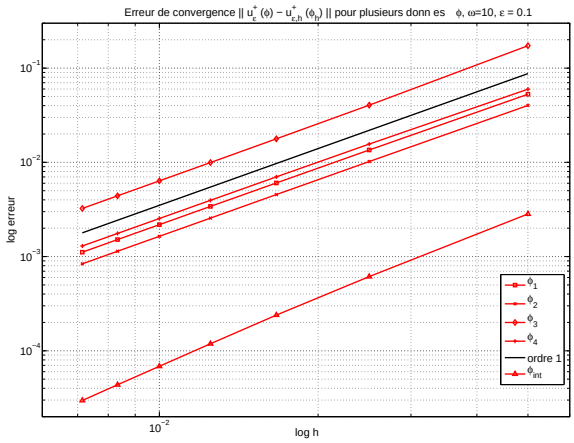
$$\varphi_{int} = \mathbf{U}_{\varepsilon,h}^i \cdot (-\mathbf{e}_x)\Big|_{\Gamma_0^+}.$$

pour laquelle l'erreur n'a pas été calculée seulement sur $\mathcal{C}_1^+$ mais sur $\Omega_3^+ = \mathcal{C}_1^+ \cup \mathcal{C}_2^+ \cup \mathcal{C}_3^+$.

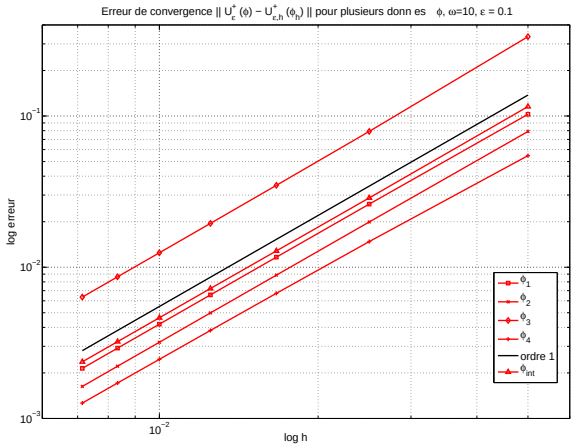
Nous retrouvons les estimations d'erreurs prévues Théorème 2.3.9 dans le cas des éléments finis mixtes de Raviart-Thomas choisis.

2.3.6.2 Invariance par rapport aux périodes et au domaine Ω^i choisis

D'autre part, il est évident que la solution calculée doit être invariante du choix du domaine borné Ω^i et de la période des demi-guides périodiques choisis En effet, la solution doit être la même si on utilise une autre période du domaine Ω^+ et Ω^- ou n'importe quel choix de Ω^i à condition qu'il contient bien le support de la source f et de la perturbation compacte $\rho - \rho_p$.
Figure 2.18, nous représentons la solution du problème intérieur pour les mêmes donnés que précédemment, pour une fréquence $\omega = 6.5$ mais dans le cas où $\Omega^i =]-1.5, 1.5[$ et $L = 2$ (voir Figure 2.17). Nous avons vérifié que l'opérateur $R_{\varepsilon,h}$ calculé avec cette cellule de périodicité est bien le carré de celui obtenu précédemment et que l'opérateur NtD $\Lambda_{\varepsilon,h}^+$ est inchangé. Nous trouvons exactement la même solution.

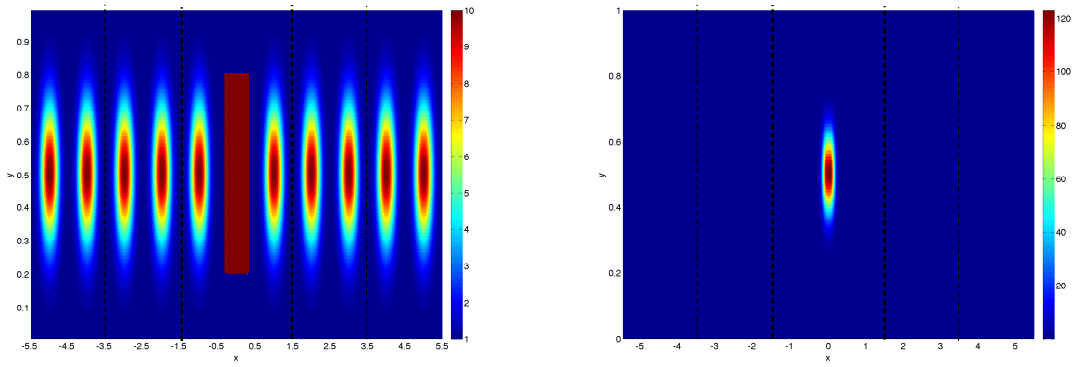


(a) Erreur pour $u_\varepsilon^+(\varphi)$



(b) Erreur pour $\mathbf{U}_\varepsilon^+(\varphi)$

FIG. 2.16: Erreurs pour le couple de solution $(u_\varepsilon^+(\varphi), \mathbf{U}_\varepsilon^+(\varphi))$ (en rouge) pour plusieurs données φ ($\{\sqrt{2}\cos(n\pi y),\ n = 1,2,3,4\}$) et $\varphi = \varphi_{int}$ (un symbole par donnée) représentées en échelle logarithmique. Pour la comparaison, la droite noire représente la fonction $\varepsilon(h) = h$.



(a) Le milieu périodique localement perturbé (b) La source à support compact

FIG. 2.17: La donnée ρ sur $[-5.5, 5.5] \times [0, 1]$ et la source f sur $[-5.5, 5.5] \times [0, 1]$. Ici, $\Omega^i = [-1.5, 1.5] \times [0, 1]$, $\mathcal{C}_1^+ = [1.5, 3.5] \times [0, 1]$ et $\mathcal{C}_1^- = [-3.5, -1.5] \times [0, 1]$

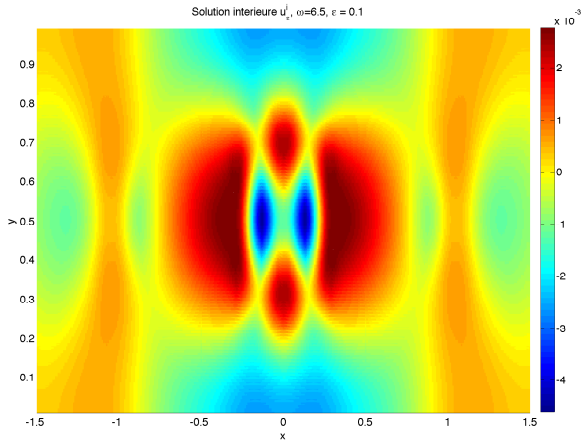


FIG. 2.18: Représentation de la solution intérieure $u^i_{\varepsilon,h}$ pour la fréquence $\omega = 6.5$ dans le cas où $\Omega^i =]-1.5, 1.5[\times]0, 1[$.

CHAPITRE

3

LE GUIDE PÉRIODIQUE LOCALEMENT PERTURBÉ : PRINCIPE D'ABSORPTION LIMITE

RÉSUMÉ : Ce chapitre constitue en quelque sorte la suite de l'étude du guide d'onde périodique localement perturbé avec conditions de Neumann homogènes mais dans le cas sans absorption. L'idée du principe d'absorption est d'étudier dans quel sens tous les objets construits au chapitre précédent, notamment les opérateurs de propagation R_ε et les opérateurs NtD $\Lambda_\varepsilon^\pm$ ont une limite quand ε tend vers 0. La justification rigoureuse du passage à la limite est assez délicate. Nous sommes alors amenés au paragraphe 3.2.2.2 à adapter et améliorer une méthode issue de [Agmon (1982)] pour démontrer le principe d'absorption limite dans les guides d'ondes périodiques. L'idée est d'exprimer la solution du problème de Helmholtz avec absorption en utilisant la base de Floquet Bloch des vecteurs propres généralisés de l'opérateur périodique et de passer à la limite sur cette expression (se reporter au paragraphe 3.2.2.3).
Nous cherchons ensuite à caractériser l'opérateur de propagation limite R et établissons une équation de Ricatti limite ($\mathcal{E}^R$) avec condition sur le rayon spectral dont R est solution. Dans le cas où la fréquence ω est telle que ω^2 est dans le spectre de l'opérateur, R est l'unique solution (voir Section 3.2.4). Dans le cas contraire, on perd l'unicité de la solution et il faut travailler plus finement sur le passage à la limite pour définir au lemme 3.2.48 une condition nécessaire sur la bonne solution. Nous montrons au paragraphe 3.2.5.4 que cette condition s'interprète comme une condition d'onde sortante à l'infini, notion définie à partir de la vitesse de groupe. Reste à savoir si cette condition est suffisante. C'est une question ouverte mais en supposant la conjecture 3.2.52 vraie, elle est résolue.
D'un point de vue numérique, la sélection de la bonne solution est un problème subtil mais nous proposons au paragraphe 3.3.2.1 une démarche efficace. Même si l'analyse numérique de la méthode numérique reste un problème ouvert, les simulations sont concluantes et montrent en particulier (voir Figures 3.9, 3.11 et 3.14) que la méthode converge lorsque le pas de discrétisation tend vers 0, à la même vitesse que dans le cas avec absorption.

Sommaire du chapitre

3.1 Introduction 155
3.1.1 Position du problème 155
3.1.2 Rappel : le cas du guide droit homogène 156
3.1.3 Retour au cas général 159
3.2 Construction des opérateurs NtD dans le cas sans absorption 159
3.2.1 Vers le passage à la limite dans l'équation $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ 162
3.2.1.1 Fréquences propres du problème de Neumann 162
3.2.1.2 Passage à la limite sur les opérateurs T_ε^{ij} 163
3.2.1.3 Difficulté pour le passage à la limite pour les opérateurs R_ε . . . 167
3.2.2 Existence et caractérisation de la limite de R_ε et Λ_ε^+ 168
3.2.2.1 Principe d'absorption limite pour un guide périodique 168
3.2.2.2 Solutions du problème périodique avec absorption 169
3.2.2.3 Passage à la limite pour le problème périodique 177
3.2.2.4 Application au passage à la limite pour R_ε 188
3.2.3 A propos de l'équation caractéristique limite 191
3.2.4 Réduction à un domaine borné quand $\omega^2 \notin \sigma(A)$ 197
3.2.5 Réduction à un domaine borné quand $\omega^2 \in \sigma(A)$ 202
3.2.5.1 Le cas particulier du guide droit homogène 203
3.2.5.2 Lien avec le spectre de l'opérateur A 204
3.2.5.3 Sélection de la bonne racine de $(\mathcal{E}^R)$ dans le cas général 208
3.2.5.4 Lien avec la vitesse de groupe des modes de Floquet 211
3.2.5.5 Caractérisation de la bonne solution de $(\mathcal{P}^+)$ 214
3.2.5.6 Caractérisation de la bonne solution du problème $(\mathcal{P})$ 217
3.3 Résolution numérique dans le cas sans absorption 222
3.3.1 Cas où $\omega^2 \notin \sigma(A)$ 224
3.3.2 Cas où $\omega^2 \in \sigma(A)$ 227
3.3.2.1 Résolution de l'équation caractéristique discrète sans absorption 227
3.3.2.2 Détermination des opérateurs de NtD 235
3.3.2.3 Calcul de la solution de $(\mathcal{P})$ 235
3.3.3 Validations 238
3.3.3.1 Comparaison avec l'expression explicite du cas constant 238
3.3.3.2 Invariance par rapport aux périodes et au domaine Ω^i choisis . . 240
3.3.4 Problème de transmission-réflexion 242

3.1 Introduction

3.1.1 Position du problème

Nous cherchons dans ce chapitre la solution u satisfaisant l'équation de Helmholtz sans absorption

$$-\triangle u - \rho(\mathbf{x})\,\omega^2\,u = f, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{$\mathcal{P}$}$$

dans un guide périodique localement perturbé, déjà considéré au chapitre précédent et dont nous redonnons un schéma, Figure 3.1.

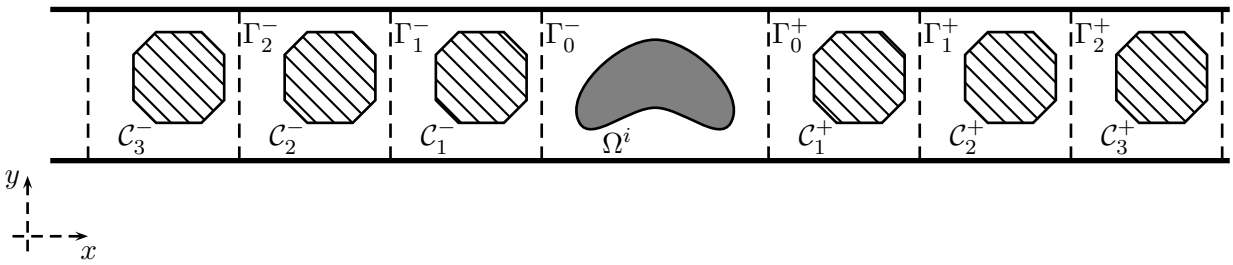


FIG. 3.1: Exemple de guide périodique localement perturbés : la géométrie et les propriétés du guide sont périodiques en dehors d'un domaine borné.

Les hypothèses sont les mêmes qu'au chapitre précédent et nous renvoyons le lecteur à la section 2.1.1 où elles sont énoncées. Nous verrons au cours de ce chapitre qu'il est nécessaire de rajouter une hypothèse de symétrie sur l'indice de réfraction :

$$(H3) \qquad \forall\,(x,y) \in \mathcal{C} \cap \left\{x \in]0, \frac{1}{2}[\right\}, \quad \rho_p(\frac{1}{2}+x, y) = \rho_p(\frac{1}{2}-x, y).$$

REMARQUE 3.1.1 (AU SUJET DU MILIEU)
Nous allons voir que comme dans le cas 1D, notre méthode s'extrapole au cas des milieux qui présentent des périodicités différentes de part et d'autre d'un domaine borné (voir Remarque 2.1.2 et Figure 2.2). Nous ferons cependant toutes les démonstrations avec les hypothèses de départ, évoquerons les différences si elles existent sous forme de remarque et montrerons des applications numériques du cas général.

Comme expliqué dans l'introduction de cette thèse, l'idée est de restreindre le problème dans un domaine borné, typiquement $\Omega^i = \Omega \cap \{a^- \leq x \leq a^+\}$ en imposant des conditions aux bords transparentes en $\Gamma_0^{\pm}$ (c'est-à-dire on le rappelle en $x = a^{\pm}$) telles que la solution de ($\mathcal{P}$) restreinte

à Ω^i soit alors solution du problème sur Ω^i suivant :

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u^i - \rho(\mathbf{x})\,\omega^2\,u^i &=& f \quad \text{dans} & \Omega^i, \\ \dfrac{\partial u^i}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 \quad \text{sur} & \partial\Omega \cap \Omega^i, \\ u^i + \Lambda^- \dfrac{\partial u^i}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 \quad \text{sur} & \Gamma_0^-, \\ u^i + \Lambda^+ \dfrac{\partial u^i}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 \quad \text{sur} & \Gamma_0^+. \end{array}\right. \qquad (\mathcal{P}^i)$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure de $\partial\Omega^i$. Les deux dernières équations découlent de la résolution de problèmes indépendants respectivement sur Ω^- et sur Ω^+. La détermination des opérateurs Λ^+ et Λ^- est un problème en soi pour lequel il sera essentiel d'exploiter la périodicité du milieu extérieur.

La démarche est de chercher la solution u de $(\mathcal{P})$ comme la limite, si elle existe de (u_ε), quand ε tend vers 0 (dans une norme plus faible que la norme L^2 et qui reste à déterminer) :

$$u = \lim_{\varepsilon \searrow 0} u_\varepsilon$$

où u_ε est l'unique solution H^1 de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ dont l'étude a été développée au chapitre précédent.

Les problèmes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}^i)$ étant en quelque sorte équivalents, la définition correcte des opérateurs Λ^+ et Λ^- est liée à la façon de définir de manière unique la solution « physique » de $(\mathcal{P})$. En effet, nous avons déterminé, au chapitre précédent, pour tout $\varepsilon > 0$, les deux opérateurs de NtD, $\Lambda_\varepsilon^\pm \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_0^\pm), H^{1/2}(\Gamma_0^\pm))$, tels que, nous le rappelons, la restriction à Ω^i de u_ε, solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, noté u_ε^i soit l'unique solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$. L'idée est alors de montrer que les suites (Λ_ε^+) et (Λ_ε^-) ont bien une limite, dans un sens que nous préciserons, notées respectivement Λ^+ et Λ^-,

$$\Lambda^\pm = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Lambda_\varepsilon^\pm$$

puis d'étudier le caractère bien posé du problème $(\mathcal{P}^i)$ avec les conditions de NtD qui en découlent. La solution, si elle existe, de ce problème est la restriction à Ω^i de la "solution" physique de $(\mathcal{P})$ que nous cherchons.

3.1.2 Rappel : le cas du guide droit homogène

Pour nous fixer les idées, revenons au cas du guide droit homogène pour lequel nous pouvons effectuer des calculs explicites. Nous donnons ici les résultats, sans démonstration : ce sont des résultats très classiques, voir par exemple [Harari *et al.* (1998) ; Hagstrom (1999)] et pour des résultats analogues [Lenoir & Tounsi (1988)].

Considérons donc le cas où le milieu de propagation Ω est un guide droit

$$\Omega = \mathbb{R} \times \big]0,1\big[,$$

et où l'indice du milieu ρ_p est une constante :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \rho_p(\mathbf{x}) = \alpha^2, \quad (\alpha > 0).$$

On cherche dans ce cas la solution « physique » du problème $(\mathcal{P})$. Nous nous ramenons donc à la bonne définition des opérateurs $\Lambda^{\pm}$.

En réutilisant les notations de la section 2.1.2, rappelons avoir montré que pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0^+)$, l'unique solution H^1 du problème

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u_\varepsilon^+ - \alpha^2\,(\omega^2+\imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^+ &=& 0 \quad \text{dans} & \Omega^+ \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^+}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 \quad \text{sur} & \partial\Omega\cap\Omega^+, \\ -\dfrac{\partial u_\varepsilon^+}{\partial x} &=& \varphi \quad \text{sur} & \Gamma_0^+ \end{array}\right.$$

est donnée par :

$$u_\varepsilon^+(x,y) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\gamma_n^\varepsilon}\,\big\langle \varphi_n,\varphi\big\rangle\,\varphi_n(y)\,e^{-\gamma_n^\varepsilon(x-a^+)}$$

où la famille $\{\varphi_n,\ n\geq 0\}$ est une base orthonormale de vecteurs propres de l'opérateur laplacien transverse avec conditions de Neumann homogène pour la valeur propre $\beta_n = n^2\pi^2$; où pour chaque n, γ_n^ε est la solution de partie réelle positive de l'équation :

$$(\gamma_n^\varepsilon)^2 - \beta_n + \alpha^2(\omega^2+\imath\varepsilon\omega) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\gamma_n^\varepsilon = -\imath\sqrt{\alpha^2(\omega^2+\imath\varepsilon\omega)-\beta_n},\quad \mathrm{Im}\big(\sqrt{\alpha^2(\omega^2+\imath\varepsilon\omega)-\beta_n}\big) > 0;$$

et enfin où $<\cdot,\cdot>$ est le produit de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$.

L'opérateur $\Lambda_\varepsilon^+ \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_0^+), H^{1/2}(\Gamma_0^+))$ est donné par

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0^+),\quad \Lambda_\varepsilon^+\varphi = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{\gamma_n^\varepsilon}\,\big\langle\varphi_n,\varphi\big\rangle\,\varphi_n.$$

En remarquant que

$$\frac{1}{\gamma_n^\varepsilon} = \frac{1}{\gamma_n}\Big(1 - \imath\varepsilon\frac{\alpha^2\omega}{2(\alpha^2\omega^2-n^2\pi^2)} + \mathcal{O}\big(\varepsilon^2\big)\Big) \tag{3.1}$$

où

- $\forall\ n < \dfrac{\alpha\omega}{\pi}$: $\quad \gamma_n = -\imath\xi_n \in \imath\mathbb{R}^-$ avec $\xi_n = \sqrt{\alpha^2\omega^2-\beta_n} \in \mathbb{R}^+$;
- $\forall\ n > \dfrac{\alpha\omega}{\pi}$: $\quad \gamma_n = \sqrt{\beta_n-\alpha^2\omega^2} \in \mathbb{R}^+$.

on déduit qu'excepté une quantité dénombrable de fréquences (celles de la forme $\omega = \sqrt{\beta_n}/\alpha$), d'une part, la famille $(u_\varepsilon^+)_\varepsilon$ a une limite dans H^1_{loc} quand ε tend vers 0 définie par

$$u^+(x,y) = \sum_{n<\alpha\omega/\pi}\frac{\imath}{\xi_n}\,\big\langle\varphi_n,\varphi\big\rangle\,\varphi_n(y)\,e^{\imath\xi_n(x-a^+)} + \sum_{n>\alpha\omega/\pi}\frac{1}{\gamma_n}\,\big\langle\varphi_n,\varphi\big\rangle\,\varphi_n(y)\,e^{-\gamma_n(x-a^+)} \tag{3.2}$$

et d'autre part, la famille d'opérateurs $(\Lambda_\varepsilon^+)_\varepsilon$ de $\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_0^+), H^{1/2}(\Gamma_0^+))$ converge quand ε tend vers 0 dans $\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_0^+), H^{1/2}(\Gamma_0^+))$ muni de la norme

$$|||\Lambda||| = \sup_{\varphi\in H^{-1/2}(\Gamma_0^+)}\frac{\|\Lambda\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_0^+)}}{\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0^+)}}$$

vers un opérateur $\Lambda^+ \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_0^+), H^{1/2}(\Gamma_0^+))$ défini par

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0^+), \quad \Lambda^+ \varphi = \sum_{n<\alpha\omega/\pi} \frac{\imath}{\xi_n} \left\langle \varphi_n, \varphi \right\rangle \varphi_n + \sum_{n>\alpha\omega/\pi} \frac{1}{\gamma_n} \left\langle \varphi_n, \varphi \right\rangle \varphi_n. \tag{3.3}$$

La fonction u^+ est donc la combinaison linéaire

- d'une infinité de modes évanescents ($\varphi_n(y)e^{-\gamma_n(x-a^+)}$ avec $\gamma_n \in \mathbb{R}^+$),
- d'un nombre fini de modes propagatifs ($\varphi_n(y)e^{\imath\xi_n(x-a^+)}$ avec $\xi_n \in \mathbb{R}^+$) qui se propagent dans le sens des x croissants, avec la convention $u(x,t) = u(x)\ e^{-\imath\omega t}$.

Les solutions générales de l'équation de Helmholtz dans Ω^+

$$\left| \begin{array}{rcll} -\triangle u - \alpha^2\,\omega^2\ u^+ & = & 0 \quad \text{dans} & \Omega^+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & = & 0 \quad \text{sur} & \partial\Omega \cap \Omega^+, \end{array} \right.$$

sont toutes des combinaisons linéaires de modes exponentiellement décroissants (évanescents) ou croissants

$$\varphi_n(y)\ e^{-\gamma_n(x-a^+)} \quad \text{et} \quad \varphi_n(y)\ e^{\gamma_n(x-a^+)} \qquad \text{avec } \gamma_n \in \mathbb{R}^+$$

et de modes propagatifs

$$\varphi_n(y)\ e^{\imath\xi_n(x-a^+)} \quad \text{et} \quad \varphi_n(y)\ e^{-\imath\xi_n(x-a^+)} \qquad \text{avec } \xi_n \in \mathbb{R}^+$$

Le principe d'absorption limite nous permet donc de sélectionner la solution « physique », c'est-à-dire celle composé d'une part de modes évanescents et d'autre part de modes se propageant dans le sens des x croissants. Si nous avions considéré la limite en remplaçant ε par $-\varepsilon$, nous aurions sélectionné la solution composée de modes qui se propagent dans le sens des x décroissants, c'est-à-dire celle qui « vient de l'infini ».

Dans le problème $(\mathcal{P}^i)$, nous imposons donc la condition de NtD suivante :

$$u^i + \Lambda^+ \frac{\partial u^i}{\partial x} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^+,$$

et de la même façon :

$$u^i - \Lambda^- \frac{\partial u^i}{\partial x} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^-,$$

avec $\Lambda^- = \Lambda^+$. Avec ces conditions, nous pouvons montrer en utilisant des propriétés des opérateurs de NtD, $\Lambda^\pm$, que le problème $(\mathcal{P}^i)$ relève de l'alternative de Fredholm : un résultat d'unicité suffit pour montrer le caractère bien posé de ce problème. Le résultat d'unicité est ensuite démontré sauf pour une quantité dénombrable de fréquences. Le problème $(\mathcal{P}^i)$ est donc bien posé.

Après s'être assuré que lorsque le problème $(\mathcal{P}^i)$ est bien posé, son unique solution u^i est limite dans H^1 de la suite des solutions $(u^i_\varepsilon)_\varepsilon$ des problèmes intérieurs avec absorption, on montre que

la solution « physique » de $(\mathcal{P})$, limite dans H^1_{loc} des solutions de l'équation de Helmholtz avec absorption $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, est caractérisée par

$$\left|\begin{array}{ll} u(x,y) = u^i(x,y), & (x,y) \in \Omega^i, \\ u(x,y) = -\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\gamma_n} \left\langle \varphi_n, \frac{\partial u^i}{\partial x} \right\rangle \varphi_n(y)\, e^{-\gamma_n (x-a^+)}, & (x,y) \in \Omega^+, \\ u(x,y) = +\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\gamma_n} \left\langle \varphi_n, \frac{\partial u^i}{\partial x} \right\rangle \varphi_n(y)\, e^{\gamma_n (x-a^-)}, & (x,y) \in \Omega^-. \end{array}\right.$$

C'est la seule solution H^1_{loc} qui vérifie les conditions de radiation

$$\forall n, \quad \left\langle \varphi_n, \pm \frac{\partial u}{\partial x} \pm \gamma_n\, u \right\rangle \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0$$

où Γ_x est la section du guide d'abscisse x. C'est la seule solution sortante.

3.1.3 Retour au cas général

Dans le cas général périodique et à l'image du chapitre 1, pour l'étude du cas monodimensionnel, la notion de solution « sortante » est plus difficile à définir et il est moins évident que dans le cas homogène de définir une condition de radiation et de montrer le principe d'absorption limite. Pour le cas du guide, nous verrons que la difficulté est accrue. En effet, la méthode développée dans le cas 1D ne s'applique pas directement au cas du guide : et même si l'esprit reste le même, nous devrons utiliser de nouveaux arguments pour caractériser la solution « physique » de l'équation de Helmholtz $(\mathcal{P})$.

Nous allons démontrer tout d'abord Section 3.2 le principe d'absorption limite, l'analyse numérique de la méthode sera étudiée Section 3.3.

3.2 Construction des opérateurs NtD dans le cas sans absorption

La section 2.2 nous a permis de construire des conditions aux bords de type NtD associées à l'équation de Helmholtz avec absorption $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Nous avons montré en particulier que la restriction à Ω^i de l'unique solution H^1 u_ε du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ posé dans Ω est en fait l'unique solution H^1, u^i_ε, du problème $(\mathcal{P}^i_\varepsilon)$ posé dans Ω^i avec les conditions aux bords de NtD. On peut reconstruire la solution u_ε en dehors de Ω^i, sur tout Ω, à partir de la solution u^i_ε et des relations d'extension (2.9).

Revenons maintenant au problème de Helmholtz sans absorption $(\mathcal{P})$ posé dans Ω et du problème $(\mathcal{P}^i)$ posé en domaine borné Ω^i. L'équation $(\mathcal{P})$, posé sur un domaine infini, ne suffit pas à elle seule à définir une solution « raisonnable ». Un critère supplémentaire doit être trouvé équivalent à celui de la condition d'onde sortante pour des problèmes standard de guide ou de condition de radiation pour des problèmes de diffraction. Dans ces deux cas, en ajoutant une condition supplémentaire, l'équation de Helmholtz posé en domaine infini a une unique solution (sous des hypothèses raisonnables) qui a un sens « physique ».

Comme nous l'avons expliqué au début de ce chapitre, la notion de solution physique dans des milieux périodiques est beaucoup moins intuitive et nous n'avons pas une interprétation physique simple de celle-ci, contrairement au cas des milieux constants où les solutions « physiques » sont nécessairement « sortantes », c'est-à-dire qu'elles se propagent vers l'infini, par opposition aux solutions « entrantes » qui, elles, viendraient de l'infini. Dans le cas périodique monodimensionnel, nous avons montré que la famille $\{u_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ des solutions des problèmes avec absorption a bien une limite dans une certaine norme, que cette limite est bien solution du problème sans absorption et nous avons, enfin, établi une condition, liée aux propriétés spectrales de l'opérateur périodique 1D, pour caractériser cette limite, sans passer par le calcul des solutions du problème avec absorption. Cette condition est l'équivalent de la condition d'onde sortante du cas homogène.

Nous voulons évidemment élargir ce résultat au cas du guide 2D : nous cherchons donc à caractériser la solution « physique » de l'équation de Helmholtz $(\mathcal{P})$ comme la limite, dans un sens à définir, de la famille des solutions $\{u_\varepsilon,\ \varepsilon\}$ des problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Une étude assez théorique a déjà été effectuée dans ce sens par [Levendorskiĭ (1998)] pour le cas du guide périodique localement perturbé. Nous avons voulu donner une autre démonstration de ce résultat, plus constructive, qui s'applique en pratique car elle permet de montrer que la famille des opérateurs NtD $\{\Lambda_\varepsilon^\pm,\ \varepsilon > 0\}$ a également une limite. Les idées de notre méthode sont donc comme dans le cas monodimensionnel :

1. définir la « bonne » solution des problèmes de demi-guide périodique, pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0^\pm)$:

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u^\pm - \rho_p(\mathbf{x})\,\omega^2\,u^\pm &=& 0 \quad \text{dans} & \Omega^\pm \\ \dfrac{\partial u^\pm}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 \quad \text{sur} & \partial\Omega \cap \Omega^\pm, \\ \mp\dfrac{\partial u^\pm}{\partial x} &=& \varphi \quad \text{sur} & \Gamma_0^\pm \end{array}\right. \qquad (\mathcal{P}^\pm)$$

   avec $\mathbf{n}$ la normale extérieure de $\partial\Omega^\pm$, comme la limite, à préciser, des solutions $(u_\varepsilon^\pm(\varphi))_\varepsilon$ des problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon^\pm)$;

2. définir des opérateurs de type Neumann-to-Dirichlet Λ^+ et Λ^- comme les limites, respectivement, des familles des opérateurs de NtD pour le problème avec absorption $\{\Lambda_\varepsilon^+,\ \varepsilon > 0\}$ et $\{\Lambda_\varepsilon^-,\ \varepsilon > 0\}$,

3. montrer que le problème $(\mathcal{P}^i)$ posé dans Ω^i avec des conditions de NtD

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u^i - \rho(\mathbf{x})\,\omega^2\,u^i &=& f \quad \text{dans} & \Omega^i, \\ \dfrac{\partial u^i}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 \quad \text{sur} & \partial\Omega \cap \Omega^i, \\ u^i + \Lambda^-\,\dfrac{\partial u^i}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 \quad \text{sur} & \Gamma_0^-, \\ u^i + \Lambda^+\,\dfrac{\partial u^i}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 \quad \text{sur} & \Gamma_0^+. \end{array}\right. \qquad (\mathcal{P}^i)$$

est bien posé, sous certaines conditions ;

4. montrer que l'unique solution u^i de $(\mathcal{P}^i)$ est la limite quand ε tend vers 0 de la famille des solutions $(u^i_\varepsilon)_\varepsilon$ des problèmes $(\mathcal{P}^i_\varepsilon)$.

Il suffit ensuite de définir la solution « physique » de $(\mathcal{P})$, limite de la famille des solutions $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ comme suit :

$$\left|\begin{array}{lll} u = u^i, & \text{dans } \Omega^i & \\ u = u^+\big(\varphi^+\big), & \text{dans } \Omega^+, & \text{avec } \varphi^+ = -\dfrac{\partial u^i}{\partial x}\Big|_{\Gamma_0^+} \\ u = u^-\big(\varphi^-\big), & \text{dans } \Omega^-, & \text{avec } \varphi^- = +\dfrac{\partial u^i}{\partial x}\Big|_{\Gamma_0^-} \end{array}\right.$$

où u^i est l'unique solution du problème $(\mathcal{P}^i)$, pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0^+)$ $u^+(\varphi)$ est la solution « physique » de $\mathcal{P}^+$ et pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0^-)$, $u^-(\varphi)$ est la solution « physique » de $\mathcal{P}^-$.

Nous verrons que cette étude présente plus de difficultés que dans le cas 1D. Une des difficultés réside dans le fait que dans le cas monodimensionnel la famille $\{r_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ des constantes NtN caractéristiques du problème périodique avec absorption est une famille de $\mathbb{C}$ alors que le cas du guide 2D, la famille $\{R_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ des opérateurs de propagation est une famille de $\mathcal{K}(H^{-1/2}(\Gamma))$, opérateurs compacts de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans lui-même. Ainsi, dans le premier cas nous pouvons appliquer le théorème de Bolzano Weierstrass pour conclure que cette famille bornée par 1 a au moins une valeur d'adhérence alors que dans le deuxième cas, nous n'avons pas d'équivalent. Cette difficulté essentielle pour le passage à la limite est liée à la structure plus complexe de l'opérateur à coefficients périodiques. En effet, alors que dans le cas monodimensionnel les images des courbes de dispersion sont d'intersection au plus égale à un point, dans le cas 2D elles peuvent s'intersecter sur tout un intervalle. De plus, dans le cas monodimensionnel, il est possible d'analyser plus précisément les courbes de dispersion en utilisant une méthode de type « matrice de transfert » qui ne se généralise pas au cas des dimensions supérieures.

Comme nous l'avons expliqué au Chapitre 1, le cas monodimensionnel présente des propriétés qui ne sont malheureusement pas généralisables au cas des dimensions supérieures. Nous expliquerons dans cette section quelles en sont les raisons, en quoi cette étude 1D nous donne cependant des pistes pour aboutir au principe d'absorption limite et enfin quelles sont les questions qui restent ouvertes. Nous commencerons par étudier le passage à la limite des problèmes de cellule, des opérateurs NtD locaux et enfin de l'équation caractéristique que doit satisfaire dans un certain sens la limite, si elle existe, de la famille $\{R_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ des opérateurs NtN quand ε tend vers 0. En utilisant les propriétés spectrales de l'opérateur périodique et au travers d'une étude plus ardue, nous montrerons ensuite que la famille a bien une limite dans un sens que nous préciserons. Nous étudierons ensuite le principe d'absorption limite pour le problème.

Nous allons voir notamment que comme dans le cas monodimensionnel, nous pourrons démontrer le principe d'absorption limite sauf pour une quantité dénombrable de fréquences que nous répartirons en deux classes différentes :

– un ensemble de fréquences introduit artificiellement par notre méthode dont l'apparition sera expliquée dans les sections qui suivent. Cependant les éléments fournis en annexe A.1 permettent au prix d'une complexité algorithmique légèrement accrue d'élargir la méthode à cet ensemble de fréquences ;

– un ensemble de fréquences pour lesquelles le principe d'absorption limite ne peut s'appliquer pour des raisons physiques qui sont indépendantes de la méthode. Nous retrouvons, par exemple, de telles fréquences dans les problèmes de guide homogène perturbé pour lesquels il est impossible de définir une solution sortante. Nous avons caractérisé ces fréquences dans le cas monodimensionnel et nous détaillerons leur apparition lors de l'étude du caractère bien posé du problème $(\mathcal{P}^i)$ posé en domaine borné.

3.2.1 Vers le passage à la limite dans l'équation $(\mathcal{P}_\varepsilon)$

Commençons par montrer que pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0^\pm)$, la famille $\{u_\varepsilon^\pm(\varphi),\ \varepsilon > 0\}$ des solutions des problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon^\pm)$ a bien une limite dans un certain sens quand ε tend vers 0. Rappelons que pour caractériser ces solutions, nous introduisons des problèmes de cellule particuliers dans notre méthode. Nous commençons donc par étudier le passage à la limite pour ces problèmes-là.

Dans ce qui suit, nous nous limitons à la caractérisation de la « bonne » solution u^+ du problème $(\mathcal{P}^+)$ et du « bon » opérateur Λ^+. Il va de soi que la méthode est la même pour la détermination de u^- et Λ^-. Par soucis de simplicité et de clarté, nous prendrons $L = 1$ dans la suite.

3.2.1.1 Fréquences propres du problème de Neumann

Comme dans le cas monodimensionnel, il existe un ensemble de fréquences dénombrable pour lesquelles les solutions des problèmes de cellule avec absorption n'ont pas de limites. Voici la définition de cet ensemble.

DÉFINITION 3.2.1 (FRÉQUENCES PROPRES DU PROBLÈME DE NEUMANN)
Soit A^0 l'opérateur défini par :

$$A^0 = -\frac{1}{\rho_p}\triangle \quad \textit{avec} \quad D(A^0) = \{v \in H^1(\mathcal{C}),\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\mathcal{C}} = 0\}.$$

où $\mathbf{n}$ *est la normale sortante à* $\mathcal{C}$*.*

L'opérateur A^0 est autoadjoint, positif, à résolvante compacte. On appelle σ_{Neu} son spectre discret avec pour seul point d'accumulation, l'infini.

C'est dans le passage à la limite des problèmes de cellule que ces fréquences propres peuvent rendre le problème limite mal posé. Nous allons donc exclure jusqu'à la fin de ce chapitre les fréquences ω telles que $\omega^2 \in \sigma_{Neu}$.

REMARQUE 3.2.2
Nous renvoyons aux remarques effectuées dans le cas monodimensionnel, Remarque 1.4.8. Rappelons tout de même que cet ensemble de fréquences à exclure n'est pas inhérent au problème de départ : nous avons introduit, dans notre méthode, des problèmes de cellule artificiels avec des conditions de Neumann. Ce choix de condition est très arbitraire et a été fait seulement par soucis de clarté et de simplicité. Les idées de la méthode sont indépendantes du choix des conditions aux limites ou des opérateurs à construire. Nous aurions néanmoins pu éviter d'introduire des fréquences « interdites » en choisissant opérateurs RtR plutôt que NtD, c'est-à-dire :

$$\Big(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x} - \imath\sqrt{z}u_\varepsilon^i\Big)\Big|_{\Gamma_0^+} = \Lambda_\varepsilon^+\Big(\Big(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x} + \imath\sqrt{z}u_\varepsilon^i\Big)\Big|_{\Gamma_0^+}\Big)$$

où $z(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)$. *Les conditions aux bords des problèmes de cellule, pour toute donnée* $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ *à résoudre sont dans ce cas là :*

$$\left|\begin{array}{l}\Big(\dfrac{\partial e_\varepsilon^0}{\partial x} + \imath\sqrt{z}e_\varepsilon^0\Big)\Big|_{\Gamma_0} = \varphi,\\ \Big[\dfrac{\partial e_\varepsilon^0}{\partial x} - \imath\sqrt{z}e_\varepsilon^0\Big]\Big|_{\Gamma_1} = 0\end{array}\right. \quad \textit{et} \quad \left|\begin{array}{l}\Big[\dfrac{\partial e_\varepsilon^1}{\partial x} + \imath\sqrt{z}e_\varepsilon^1\Big]\Big|_{\Gamma_0} = 0,\\ \Big[\dfrac{\partial e_\varepsilon^1}{\partial x} - \imath\sqrt{z}e_\varepsilon^1\Big]\Big|_{\Gamma_1} = \varphi\end{array}\right. .$$

Nous avons développé la méthode pour ce choix de conditions dans l'annexe A.1. Nous allons donc exclure dans la suite les fréquences propres du problème de Neumann pour la présentation du principe d'absorption limite mais garderons à l'esprit que nous connaissons une alternative à la méthode qui n'exclut pas cet ensemble de fréquences.

3.2.1.2 Passage à la limite sur les opérateurs T_ε^{ij}

Pour étudier le passage à la limite $\varepsilon \to 0$, nous allons considérer, pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ les solutions des problèmes de cellule $e_\varepsilon^i(\varphi)$, les opérateurs de NtD locaux T_ε^{ij}, l'opérateur de NtN caractéristique R_ε comme des fonctions de ε puisque nous nous intéresserons à leur continuité et leur dérivabilité par rapport à ε. C'est pourquoi nous noterons ces fonctions dans la suite, respectivement

$$\forall\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma),\ \forall\varepsilon > 0, \quad e^i(\varepsilon,\varphi) = e_\varepsilon^i(\varphi), \quad T^{ij}(\varepsilon,\varphi) = T_\varepsilon^{ij}(\varphi), \quad R(\varepsilon,\varphi) = R_\varepsilon(\varphi)$$

Nous continuerons cependant à noter pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ $u_\varepsilon^+(\varphi)$ et Λ_ε^+ pour lesquelles seules les limites seront étudiées.

Une fois les fréquences propres du problème de Neumann exclues, le passage à la limite des solutions des problèmes de cellule et des opérateurs de NtD locaux ne présente pas de difficulté.

PROPOSITION 3.2.3 (LIMITE DES PROBLÈMES DE CELLULE)
Si $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$, *pour toute donnée* $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, *les fonctions* $\varepsilon \mapsto e^0(\varepsilon,\varphi)$ *(pour tout* ε, $e^0(\varepsilon,\varphi)$ *solution du problème* (2.17)*) et* $\varepsilon \mapsto e^1(\varepsilon,\varphi)$ *(pour tout* ε, $e^1(\varepsilon,\varphi)$ *solution du problème* (2.18)*) tendent dans* $H^1(\mathcal{C})$, *quand* ε *tend vers* 0, *respectivement vers* $e^0(\varphi)$ *et* $e^1(\varphi)$ *solutions du problème :*

$$\left|\begin{array}{rcll}-\triangle e^i - \rho_p(\mathbf{x})\,\omega^2\,e^i &=& 0 & \textit{dans} \quad \mathcal{C}\\ \dfrac{\partial e^i}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 & \textit{sur} \quad \partial\mathcal{C}\setminus\Gamma_0\cup\Gamma_1,\end{array}\right. \tag{3.4}$$

qui satisfont les conditions respectives sur Γ_0 *et* Γ_1

$$\left|\begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial e^0}{\partial x} & = & \varphi & \textit{sur} \quad \Gamma_0, \\ +\dfrac{\partial e^0}{\partial x} & = & 0 & \textit{sur} \quad \Gamma_1. \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial e^1}{\partial x} & = & 0 & \textit{sur} \quad \Gamma_0, \\ +\dfrac{\partial e^1}{\partial x} & = & \varphi & \textit{sur} \quad \Gamma_1. \end{array}\right. \tag{3.5}$$

Ces problèmes sont bien posés et on a :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma) \qquad \begin{array}{rcl} \|e^0(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C})} & \leq & C\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ \|e^1(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C})} & \leq & C\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \end{array}$$

Plus précisément, il existe une constante $C(\omega)$ *qui ne dépend ni de* ε *ni de* φ *telle que :*

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,\ \forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma) \qquad \begin{array}{rcl} \|e^0(\varepsilon,\varphi) - e^0(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C})} & \leq & C(\omega)\varepsilon\|e^0(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C})} \\ \|e^1(\varepsilon,\varphi) - e^1(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C})} & \leq & C(\omega)\varepsilon\|e^1(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C})} \end{array}$$

De plus, pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$*, les fonctions* $e^0(\varepsilon,\varphi)$ *et* $e^1(\varepsilon,\varphi)$ *de* ε *sont dérivables au voisinage de* $\varepsilon = 0$ *et :*

$$\left|\begin{array}{l} e^0(\varepsilon,\varphi) = e^0(\varphi) + \varepsilon e_1^0(\varphi) + \mathcal{O}_{H^1}(\varepsilon^2) \\ e^1(\varepsilon,\varphi) = e^1(\varphi) + \varepsilon e_1^1(\varphi) + \mathcal{O}_{H^1}(\varepsilon^2) \end{array}\right. \tag{3.6}$$

et où $\dfrac{\partial e^0}{\partial \varepsilon}(0,\varphi) = e_1^0(\varphi)$ *et* $\dfrac{\partial e^1}{\partial \varepsilon}(0,\varphi) = e_1^1(\varphi)$ *sont solutions des problèmes :*

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle e_1^i - \rho_p(\mathbf{x})\,\omega^2\, e_1^i & = & \imath\omega\rho_p e^i(\varphi) & \textit{dans} \quad \mathcal{C} \\ \dfrac{\partial e_1^i}{\partial \mathbf{n}} & = & 0 & \textit{sur} \quad \partial\mathcal{C}, \end{array}\right. \tag{3.7}$$

avec $i = 0$ *ou* $i = 1$ *et où* $\mathcal{O}_{H^1}$ *signifie que c'est un* $\mathcal{O}$ *pour la norme* $H^1(\mathcal{C})$*, uniformément pour toutes les données* φ*.*

■ **Preuve:** Développons la démonstration pour e^0, l'idée étant la même pour e^1.
Si $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$, le problème de cellule sans absorption est bien posé pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$. On appelle $e^0(\varphi)$ l'unique solution H^1 de ce problème et on a également

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma) \quad \|e^0(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C})} \leq C\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

Nous allons montrer que pour tout φ la fonction $\varepsilon \mapsto e^0(\varepsilon,\varphi)$ a une limite dans $H^1(\mathcal{C})$; sa limite étant nécessairement solution du problème de cellule sans absorption, cela ne peut être que $e^0(\varphi)$. Notons que $v^0(\varphi) = e^0(\varepsilon,\varphi) - e^0(\varphi)$ est solution du problème :

$$\left|\begin{array}{l} -\triangle v^0 - \rho_p\,\omega^2\, v^0 = \imath\omega\varepsilon\,\rho_p\, e^0(\varepsilon,\varphi), \\ -\dfrac{\partial v^0}{\partial x}\Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \dfrac{\partial v^0}{\partial x}\Big|_{\Gamma_1} = 0 \end{array}\right.$$

Ce problème étant également bien posé, il existe donc une constante C indépendante de ε et de φ telle que :

$$\|v^0(\varphi)\|_{H^1} \leq C\varepsilon\|e^0(\varepsilon,\varphi)\|_{H^1},$$

ce qui implique l'existence d'une constante $C(\omega)$ telle que :

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,\ \forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma) \quad \|e^0(\varepsilon,\varphi) - e^0(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C})} \leq C(\omega)\varepsilon\|e^0(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C})} \qquad (*)$$

On cherche maintenant à montrer que

$$w^0(\varphi) = e^0(\varepsilon,\varphi) - (e^0(\varphi) + \varepsilon e_1^0(\varphi)) = \mathcal{O}_{H^1}(\varepsilon^2)$$

où $e_1^0(\varphi)$ est l'unique solution H^1 du problème (3.7) et où $\mathcal{O}_{H^1}$ signifie que c'est un $\mathcal{O}$ pour la norme $H^1(\mathcal{C})$, uniformément pour toutes les données φ. On utilise la même idée et on montre que $w^0(\varphi)$ est solution de

$$\left|\begin{array}{l} -\triangle w^0 - \rho_p\,\omega^2\,w^0 = \imath\omega\varepsilon\,\rho_p\,\big(e^0(\varepsilon,\varphi) - e^0(\varphi)\big), \\ -\dfrac{\partial w^0}{\partial x}\Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \dfrac{\partial w^0}{\partial x}\Big|_{\Gamma_1} = 0 \end{array}\right.$$

Il existe donc une constante C indépendante de ε et de φ telle que :

$$\|w^0(\varphi)\|_{H^1} \leq C\varepsilon\|e^0(\varepsilon,\varphi) - e^0(\varphi)\|_{H^1},$$

On conclut en utilisant $(*)$. ■

De cette proposition, en particulier de la convergence en norme H^1, on déduit facilement le passage à la limite pour les opérateurs de NtD locaux.

COROLLAIRE 3.2.4 (LIMITE DES OPÉRATEURS DE NTD LOCAUX)
Si $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$, les opérateurs de NtD locaux $\varepsilon \mapsto \big(\,T^{00}(\varepsilon), T^{11}(\varepsilon), T^{01}(\varepsilon), T^{10}(\varepsilon)\,\big)$ tendent, quand ε tend vers 0 pour la norme d'opérateurs de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)\big)$ c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in \{0,1\}^2, \quad \|T_\varepsilon^{ij}\| = \sup_{\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)} \frac{\|T_\varepsilon^{ij}\,\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}}{\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}}$$

vers les opérateurs réels $\big(\,T^{00}, T^{11}, T^{01}, T^{10}\,\big)$ qui sont définis à partir des problèmes de cellule (3.4) *et* (3.5) *de la manière suivante :*

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \left|\begin{array}{ll} T^{00}\,\varphi = e^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_0}, & T^{01}\,\varphi = e^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_1}, \\ T^{10}\,\varphi = e^1(\varphi)\Big|_{\Gamma_0}, & T^{11}\,\varphi = e^1(\varphi)\Big|_{\Gamma_1}. \end{array}\right. \tag{3.8}$$

Plus précisément, les fonctions $T^{ij}(\varepsilon)$ de ε à valeurs opérateurs sont dérivables au voisinage de $\varepsilon = 0$ et :

$$\forall (i,j) \in \{0,1\}^2, \quad T^{ij}(\varepsilon) = T^{ij} + \varepsilon T_1^{ij} + \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(\varepsilon^2). \tag{3.9}$$

où les dérivées en $\varepsilon = 0$ des fonctions $\varepsilon \mapsto T^{ij}(\varepsilon)$, $\dfrac{\partial T^{ij}}{\partial \varepsilon}(0) = T_1^{ij}$ sont définies par :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial T^{00}}{\partial \varepsilon}(0,\varphi) = e_1^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_0}, & \dfrac{\partial T^{01}}{\partial \varepsilon}(0,\varphi) = e_1^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_1}, \\ \dfrac{\partial T^{10}}{\partial \varepsilon}(0,\varphi) = e_1^1(\varphi)\Big|_{\Gamma_0}, & \dfrac{\partial T^{11}}{\partial \varepsilon}(0,\varphi) = e_1^1(\varphi)\Big|_{\Gamma_1}. \end{array}\right. \tag{3.10}$$

où pour toute donnée φ, $e_1^0(\varphi)$ et $e_1^1(\varphi)$ sont solutions des problèmes (3.7) *et où $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ signifie que c'est un $\mathcal{O}$ pour la norme d'opérateur de l'espace $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)\big)$.*

■ **PREUVE:** En utilisant la convergence H^1 pour toute donnée φ des fonctions $\varepsilon \mapsto e^0(\varepsilon,\varphi)$ et $\varepsilon \mapsto e^1(\varepsilon,\varphi)$ vers les solutions $e^0(\varphi)$ et $e^1(\varphi)$ des problèmes de cellule sans absorption, la continuité de ces fonctions par rapport à la donné φ et la continuité de l'opérateur trace, on montre qu'il existe des constantes C_1, C_2 et C_3 qui ne dépendent ni de ε et ni de φ telles que pour tout $(i,j) \in \{0,1\}^2$:

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \|(T^{ij}(\varepsilon) - T^{ij})\,\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C_1\|e^i(\varepsilon,\varphi) - e^i(\varphi)\|_{H^1} \leq C_2\varepsilon\|e^i(\varphi)\|_{H^1} \leq C_3\varepsilon\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

Prouvons le développement limité de $T^{00}(\varepsilon)$, l'idée étant évidemment la même pour les autres opérateurs. L'opérateur T_2^{00} défini par :

$$T_2^{00} = T^{00}(\varepsilon) - \Big(T^{00} + \varepsilon\, T_1^{00}\Big)$$

est un $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ pour la norme d'opérateur de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)\big)$, en effet on voit aisément que

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad T_2^{00}\,\varphi = w^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_0}.$$

où $w^0(\varphi)$ est définie à la fin de la preuve de la Proposition 3.2.3. En utilisant l'inégalité trouvée à la fin de cette preuve, la continuité de l'opérateur trace et et la continuité des solutions par rapport à la donnée, on montre qu'il existe des constantes C_1, C_2 et C_3 qui ne dépendent ni de ε et ni de φ telles que :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \|T_2^{00}\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C_1 \|w^0(\varphi)\|_{H^1} \leq C_2 \varepsilon^2 \|e^i(\varphi)\|_{H^1} \leq C_3 \varepsilon^2 \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

■

De ce passage à la limite, on déduit un certain nombre de propriétés des opérateurs NtD locaux.

PROPOSITION 3.2.5
Pour $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$, les opérateurs $\big(T^{00}, T^{11}, T^{01}, T^{10}\big)$ sont réels et vérifient les propriétés suivantes quelle que soit la donnée ρ_p :

- *Les opérateurs T^{00} et T^{11} sont inversibles de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$ (sauf pour une quantité dénombrable de fréquences). Ils sont de plus autoadjoints*
$$\big(T^{00}\big)^* = T^{00} \quad \textit{et} \quad \big(T^{11}\big)^* = T^{11}.$$
- *les opérateurs T^{01} et T^{10} sont des opérateurs compacts de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$. Ils sont injectifs (sauf pour une quantité dénombrable de fréquences). Ils sont de plus adjoints l'un de l'autre*
$$\big(T^{01}\big)^* = T^{10} \quad \textit{et} \quad \big(T^{10}\big)^* = T^{01}.$$

■ **PREUVE:** On montre que les opérateurs T^{00} et T^{11} sont autoadjoints en utilisant le fait qu'ils sont limites des opérateurs $T^{00}(\varepsilon)$ et $T^{11}(\varepsilon)$ qui, eux sont, pour chaque $\varepsilon > 0$, symétrique réels (voir Proposition 2.2.4). De même, les opérateurs T^{01} et T^{10} sont adjoints aussi l'un de l'autre.

Pour montrer que les opérateurs T^{00} et T^{11} sont inversibles de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$ (sauf pour une quantité dénombrable de fréquences), on utilise le même argument que celui utilisé au cours de la preuve de la Proposition 2.2.4. Rappelons le par exemple pour T^{00}. Pour tout ψ, on introduit $f^0(\psi)$ la solution de l'équation de Helmholtz sans absorption dans la cellule $\mathcal{C}$ qui satisfait des conditions de Neumann homogènes sur $\partial\mathcal{C} \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$ et les conditions suivantes sur Γ_0 et Γ_1 :

$$f^0(\psi)\Big|_{\Gamma_0} = \psi \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial x} f^0(\psi)\Big|_{\Gamma_1} = 0$$

Pour tout $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$, le problème est bien posé sauf pour une quantité dénombrable de fréquences (pas nécessairement la même quantité que pour le problème de Neumann). Sauf pour cette quantité de fréquences, nous allons expliciter l'inverse de l'opérateur T^{00}. On note $\widetilde{T}^{00}$ l'opérateur défini par :

$$\widetilde{T}^{00} : \ \psi \ \mapsto \widetilde{T}^{00}\,\psi = -\frac{\partial}{\partial x} f^0(\psi)\Big|_{\Gamma_0}$$

C'est un opérateur de $\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma))$. La relation est simple entre f^0 et e^0

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad f^0\Big(e^0(\varphi)\Big|_{\Gamma_0}\Big) = e^0(\varphi)$$

puisqu'ils vérifient l'équation de Helmholtz avec absorption, avec les mêmes conditions aux bords, conditions de Neumann homogène sur $\partial\mathcal{C} \setminus \Gamma_0$ et conditions de Dirichlet non homogène sur Γ_0 ($T^{00}\ \varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$). En prenant la trace de Neumann sur Γ_0 de l'expression précédente, on a donc, par définition de T^{00} et $\widetilde{T}^{00}$:

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \widetilde{T}^{00}\Big(T^{00}\ \varphi\Big) = \varphi.$$

On a de la même façon :

$$\forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad e^0\Big(-\frac{\partial}{\partial x} f^0(\psi)\Big|_{\Gamma_0}\Big) = f^0(\psi)$$

soit

$$\forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad T^{00}\Big(\widetilde{T}^{00}\ \psi\Big) = \psi.$$

T^{00} est donc inversible en tant qu'opérateur linéaire de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$ sauf pour une quantité dénombrable de fréquences pour lesquels l'opérateur $\widetilde{T}^{00}$ n'est pas défini. Il en va de même pour T^{11}.

Enfin, les opérateurs T^{01} et T^{10} sont des opérateurs compacts de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$ comme la limite d'une suite d'opérateurs compacts (l'ensemble des opérateurs compacts de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)\big)$ est un ensemble fermé). Pour montrer l'injectivité, on utilise comme pour la preuve de la proposition 2.2.4, le théorème de prolongement unique. ■

REMARQUE 3.2.6

Nous avons précisé dans le Corollaire que les opérateurs de NtD locaux étaient inversibles pour les premiers, injectifs pour les seconds, sauf pour une quantité dénombrable de fréquences. Il faut comprendre par cette remarque que pour utiliser ce résultat il faut exclure un ensemble plus grand que σ_{Neu}. Pour comprendre ce point, nous conseillons au lecteur de se reporter à la preuve de cette proposition et à celle de la Proposition 2.2.4.

3.2.1.3 Difficulté pour le passage à la limite pour les opérateurs R_ε

Rappelons que nous cherchons à montrer tout d'abord que pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, la famille de solutions $\{u_\varepsilon^+(\varphi),\ \varepsilon > 0\}$ a bien une limite quand ε tend vers 0 pour une norme qu'il reste à définir. Nous venons de démontrer que les solutions des problèmes de cellule avec absorption et les opérateurs NtD associés ont bien une limite. Du fait de la caractérisation de chaque $u_\varepsilon^+(\varphi)$ en fonction des solutions de problèmes de cellule et de l'opérateur de propagation R_ε (voir (2.9)), il suffirait de montrer que la famille des opérateurs de propagation $\{R_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ a bien une limite quand ε tend vers 0 pour en déduire éventuellement un résultat sur le passage à la limite des solutions des problèmes de demi-guide avec absorption.

Dans le cas monodimensionnel, c'est un résultat de compacité qui nous permettait de conclure quant à l'existence de la limite de la famille $r_\varepsilon,\ \varepsilon > 0$. En effet, la famille étant bornée, elle admet nécessairement une valeur d'adhérence. Il suffit ensuite de caractériser cette valeur puis de montrer que c'est nécessairement la seule. Dans le cas du guide, il n'existe plus ce genre de résultat de compacité : la famille $\{R_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ peut être telle que chaque élément est de rayon spectral strictement inférieur à 1, on ne peut rien déduire concernant son comportement quand ε tend vers 0.

La démonstration de ce passage à la limite, nous le verrons dans la section précédente, n'est pas aisée. Nous allons utiliser de nouveaux arguments qui exploitent une nouvelle expression des solutions u_ε^+ et en particulier des opérateurs R_ε.

3.2.2 Existence et caractérisation de la limite de R_ε et Λ_ε^+

La démonstration du principe d'absorption limite pour le problème de demi-guide n'est pas directe. Nous allons commencer par étudier le principe d'absorption limite pour le problème de Helmholtz à coefficient parfaitement périodique dans un guide infini et en présence d'une source localisée. Pour se faire, nous allons adopter un nouveau point de vue qui va faire intervenir la Transformée de Floquet Bloch (voir Annexe B.1 pour un exposé précis concernant la Transformée de Floquet Bloch et ses propriétés). Nous déduirons ensuite de ce résultat, le principe d'absorption limite pour le problème de demi-guide.

3.2.2.1 Principe d'absorption limite pour un guide périodique

Considérons donc u_ε la solution dans $\Omega = \mathbb{R}\times]0,1[$ du problème suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho_p}\triangle u_\varepsilon - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)u_\varepsilon = f, & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} = 0, & \text{sur } \ \partial\Omega = \{(x,y),\ y=0 \text{ ou } y=1\} \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon$}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à $\partial\Omega$.

REMARQUE 3.2.7 (LES CONDITIONS AUX BORDS)
L'étude que nous développons dans la suite se généralise au cas d'autres conditions aux bords pourvu qu'elles soient compatibles avec la périodicité du problème. Elle se généralise en particulier au cas des conditions k-quasipériodiques.

Pour un $\varepsilon > 0$ fixé, on sait que pour toute source $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. On cherche à savoir si la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ converge quand ε tend vers 0, dans quel sens et enfin si sa limite est solution du problème précédent avec $\varepsilon = 0$.

Nous allons faire les hypothèses suivantes sur la fonction ρ :

$$\text{(H1)} \qquad \forall (x,y)\in\Omega, \quad \rho_p(x+1,y) = \rho_p(x,y)$$

$$\text{(H2)} \qquad \rho_p \in L^\infty(\Omega) \text{ et } \forall (x,y)\in\Omega, \quad 0 < \rho_- \leq \rho_p(x,y) \leq \rho_+$$

Notons

$$A = -\frac{1}{\rho_p}\triangle$$

l'opérateur de $L^2(\Omega, \rho_p\, dx\, dy)$ dans $L^2(\Omega)$ de domaine de définition :

$$D(A) = \{u \in H^1(\Omega), \triangle u \in L^2(\Omega), u \text{ satisfait } B.C. \text{ sur } \partial\Omega\}$$

Cet opérateur est un opérateur autoadjoint positif dans $L^2(\Omega)$, son domaine de définition coïncide avec :

$$D(A) = \{u \in H^2(\Omega), u \text{ satisfait } B.C. \text{ sur } \partial\Omega\}$$

Notons l'opérateur résolvant de A, $R_A(z) = (A - z)^{-1}$. Nous savons que pour tout complexe z non compris dans le spectre de A, l'opérateur résolvant existe. La question du principe d'absorption limite revient à se demander si l'opérateur résolvant est uniformément continu proche du spectre, dans une certaine topologie d'opérateur.

En particulier, dans [Levendorskiĭ (1998)], l'auteur montre que sauf pour une quantité dénombrable de valeurs de ω, l'opérateur résolvant a bien une limite quand z tend vers le spectre de A pour la topologie d'opérateur $B(L^{2,s}(\Omega), L^{2,-s}(\Omega))$ où $s > 1/2$, $B(L, L')$ est l'ensemble de opérateurs linéaires bornés de L dans L' et où on note $L^{2,s}(\Omega)$ l'espace défini par

$$L^{2,s}(\Omega) = \left\{ f \in L^2_{loc}(\Omega), \quad f(x,y)(1+x^2)^{s/2} \in L^2(\Omega) \right\}$$

D'autres résultats provenant de la théorie du scattering et démontrant le principe d'absorption limite pour des normes particulières existent également [Gérard & Nier (1998) ; Karpeshina (1997) ; Birman & Yafaev (1994)]

En adoptant une méthode différente de celle de cet article qui s'inspire de [Agmon (1982)], nous allons essayer d'avoir un résultat similaire mais pour une autre topologie d'opérateur. Du fait des applications de cette étude présentée dans la section 3.2.2.4, nous allons agrandir l'espace dans lequel la source f est prise :

$$\exists\, r \in [0,1[,\ \exists\, s \in]\frac{1}{2}, 1], \quad f \in H^{-r,s}(\Omega) \tag{3.11}$$

Nous rappelons (voir section B.1.4) que si $f \in H^{r,s}(\Omega)$ alors sa transformée de Floquet Bloch $\hat{f}$ est dans $H^s(\mathcal{C}^*, H^r_k(\mathcal{C}))$.

3.2.2.2 Expression des solutions du problème périodique avec absorption

Dans le but de démontrer la proposition 3.2.14, nous introduisons un certain nombre de notations et établissons quelques résultats importants.

On note $\hat{u}_\varepsilon$ la transformée de Floquet Bloch de u_ε et $\hat{f}$ celle de f. En utilisant les propriétés de cette transformation (voir la section B.1.2), on montre que pour presque tout $k \in]-\pi, \pi[$, $\hat{u}_\varepsilon(\cdot, k)$ est solution dans $\mathcal{C}$ du problème suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho_p}\triangle \hat{u}_\varepsilon(\cdot;k) - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\hat{u}_\varepsilon(\cdot;k) = \hat{f}(\cdot;k), & \text{in } \mathcal{C} \\ \hat{u}_\varepsilon(x=0,y;k) = e^{\imath k}\ \hat{u}_\varepsilon(x=1,y;k) & \\ \dfrac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial x}(x=0,y;k) = e^{\imath k}\ \dfrac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial x}(x=1,y;k) & \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} = 0, & \text{sur } \{y=0\} \cup \{y=1\} \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon(k)$}$$

On montre facilement que u_ε est l'unique solution H^1 de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ si et seulement si $\ p.p.t\ k \in]-\pi, \pi[$, $\hat{u}_\varepsilon(\cdot;k)$ est l'unique solution H^1 de $(\mathcal{P}_\varepsilon(k))$. Pour expliciter u_ε, nous allons utiliser les propriétés spectrales de l'opérateur correspondant noté $A(k)$.

♢ ***Propriétés spectrales de l'opérateur*** $A(k)$

On appelle

$$A(k) = -\triangle/\rho_p \tag{3.12}$$

l'opérateur de $L^2(\mathcal{C}, \rho_p\, dx\, dy)$ dans $L^2(\mathcal{C}, \rho_p\, dx\, dy)$ de domaine de définition

$$\begin{aligned} D(A(k)) =& \{u \in H^1(\mathcal{C}), \triangle u \in L^2(\mathcal{C}),\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} = 0 \text{sur } \{y=0\} \cup \{y=1\}, \\ & u(0,y) = e^{\imath k} u(1,y),\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = e^{\imath k} \frac{\partial u}{\partial x}(1,y)\} \end{aligned}$$

Cet opérateur est autoadjoint, positif dans $L^2(\mathcal{C}, \rho_p\, dx\, dy)$ et à résolvante compacte. Le spectre de $A(k)$ est donc purement ponctuel et constitué par une suite :

$$0 < \lambda_1(k) \leq \lambda_2(k) \leq \ldots \leq \lambda_n(k) < +\infty \tag{3.13}$$

telle que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n(k) = +\infty$, chaque valeur propre étant répétée autant de fois que son ordre de multiplicité. En utilisant la même démonstration que pour la cas monodimensionnel (voir la preuve de la Proposition 1.4.1), nous pouvons établir les propriétés suivantes des courbes de dispersion $k \mapsto \lambda_n(k)$.

PROPOSITION 3.2.8 (PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS $\lambda_n(k)$)
Les fonctions $\lambda_n(k)$ sont des fonctions continues, 2π-périodiques et paires pour la variable k.

De plus, il existe une base hilbertienne de $L^2(\mathcal{C}, \rho_p dx dy)$ constituée de vecteurs propres $(\varphi_n(k))_n$:

$$A(k)\varphi_n(k) = \lambda_n(k)\varphi_n(k),$$

chaque vecteur propre appartenant à $H^1_k(\mathcal{C})$ (voir la section B.1.3 pour la définition). On montre de plus facilement, dans le cas où les conditions aux bords B.C. sont de type Neumann, Dirichlet ou quasi-périodique, que la famille $(\varphi_n(k))_n$ est orthogonale dans $H^1(\mathcal{C}, dx\, dy)$ et :

$$\int_{\mathcal{C}} |\nabla \varphi_n(k)|^2\, dx\, dy = \lambda_n(k) \tag{3.14}$$

puis par interpolation, on obtient :

$$\|\varphi_n(k)\|^2_{H^r} = (1 + \lambda_n(k))^r \tag{3.15}$$

En utilisant enfin des résultats classiques de régularité intérieure (voir [Lions & Magenes (1968)] par exemple), on montre que pour tout n, $\varphi_n(k) \in H^2_k(\mathcal{C})$. On a alors facilement que la famille $(\triangle\varphi_n(k))_n$ est orthogonale dans $L^2(\mathcal{C}, \rho_p\, dx\, dy)$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\triangle\varphi_n(k)\| = \lambda_n(k)^2 \tag{3.16}$$

En outre, la théorie de Floquet-Bloch [Kuchment (1993)] nous permet de relier le spectre de A à ceux de la famille d'opérateurs $A(k)$, $k \in]-\pi, \pi]$ tel que :

$$\sigma(A) = \bigcup_{k\in]-\pi,\pi]} \sigma(A(k)).$$

Du fait de la Proposition 3.2.8, l'ensemble des valeurs atteintes par chaque λ_n est un intervalle fermé borné :

$$\text{Im } \lambda_n(\cdot) = [a_n, b_n]$$

et l'opérateur A a un spectre fermé, inclus dans $\mathbb{R}^+$, défini par [Kuchment (2004)]

$$\sigma(A) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n],$$

L'opérateur A ne possède donc pas de spectre discret mais seulement du spectre essentiel. Le spectre de A est donc une demi-droite $[a, +\infty[$ privée d'une suite finie ou infinie (α_n, β_n) d'intervalles ouverts tels que $\alpha_{n+1} > \beta_n$ appelés, on le rappelle, **gaps** ou **lacunes** ou encore **zones d'instabilité** du spectre. Cependant, contrairement au cas monodimensionnel, nous n'avons pas nécessairement l'inégalité

$$b_n \leq a_{n+1}$$

Ainsi, les intervalles $[a_n, b_n]$ peuvent se recouvrir, ce qui rend l'existence de lacunes plus difficiles à prouver [Skriganov (1979, 1987) ; Kuchment (2004)]. De plus, dans [Sommerfeld & Bethe (1933)], les auteurs avaient émis la conjecture que, dans le cas d'un espace de dimension au moins 2, le nombre de lacunes est toujours **fini**. Cette conjecture a été prouvée pour la dimension 2 dans [Skriganov (1979) ; Popov & Skriganov (1981) ; Dahlberg & Trubowitz (1982)] et pour la dimension 3 dans [Skriganov (1983, 1985)]. En fait, si la fonction ρ_p est assez petite, il n'y a pas de lacunes dans le spectre [Skriganov (1985)]. Enfin, elle a été prouvée plus récemment pour n'importe quelle dimension à condition que le potentiel soit suffisamment régulier [Parnovski (2008)].

♢ *Nouvelle caractérisation des espaces* $H^r_k(\mathbb{R})$

Nous rappelons que la définition des espaces $H^r_k(\mathcal{C})$ pour r réel est donnée dans la section B.1.3 et plus particulièrement par la définition B.1.11. Dans cette caractérisation, nous prolongeons les fonctions k- quasi-périodiques en des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ puis nous utilisons la théorie de l'interpolation classique via l'opérateur laplacien défini de $H^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Maintenant que nous avons défini l'opérateur $A(k)$ défini de $H^2_k(\mathcal{C})$ dans $L^2(\mathcal{C})$, autoadjoint positif, ainsi que ses éléments spectraux, nous pouvons l'utiliser directement en tant qu'opérateur d'interpolation. Rappelons tout d'abord que la famille $(\varphi_n(k))_n$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathcal{C}, \rho_p\, dx\, dy)$, on a donc par définition

$$\forall \hat{f} \in L^2(\mathcal{C}), \quad \sum_{n \in N} \left| (\hat{f}, \varphi_n(k)) \right|^2 < +\infty$$

ainsi que la décomposition suivante

$$\forall \hat{f} \in L^2(\mathcal{C}), \quad \hat{f} = \sum_{n \in N} (\hat{f}, \varphi_n(k))\, \varphi_n(k).$$

De plus, $H^2_k(\mathcal{C})$ est l'ensemble de définition de $A(k)$ et sa norme est équivalente à la norme du graphe :

$$\left(\|\hat{f}\|^2 + \|A(k)\hat{f}\|^2 \right)^{1/2}.$$

En utilisant la théorie d'interpolation développée dans [Lions & Magenes (1968)], on peut définir l'espace $H_k^r(\mathcal{C})$ à l'aide de deux opérateurs d'interpolation différents, celui utilisé à la section B.1.3 ou $A(k)$. Il y a donc égalité entre les 2 définitions

$$\begin{aligned} \forall r \in [0,2], \quad H_k^r(\mathcal{C}) &= \Big[H_k^2(\mathcal{C}), L^2(\mathcal{C})\Big]_{1-r/2} = D(A(k)^{r/2}) \\ &= \Big\{\hat{f} \in L^2(\mathcal{C}), \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} (1+\lambda_n(k))^r \Big|(\hat{f}, \varphi_n(k))\Big|^2 < +\infty\Big\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

et équivalence entre la norme H^r et la norme :

$$\|\hat{f}\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} (1+\lambda_n(k))^r \Big|(\hat{f}, \varphi_n(k))\Big|^2 \tag{3.18}$$

On a enfin, par dualité, la même définition pour les H_k^{-r} avec $0 \leq r \leq 2$ et où on remplace le produit scalaire L^2 par le crochet de dualité entre H_k^{-r} et H_k^r :

$$\forall r \in [0,2], \quad H_k^{-r}(\mathcal{C}) = \Big\{\hat{f} \in L^2(\mathcal{C}), \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(1+\lambda_n(k))^r} \Big| < \hat{f}, \varphi_n(k) > \Big|^2 < +\infty\Big\} \tag{3.19}$$

C'est cette caractérisation et cette norme de H_k^{-r} qui va intervenir naturellement dans la suite.

♢ *Analyticité par rapport à* k

Cherchons maintenant à préciser les propriétés des valeurs propres $\lambda_n(k)$ et vecteurs propres $\varphi_n(k)$ en tant que fonctions de k, ce qui nous sera utile pour la suite. Nous nous appuyons sur la théorie de perturbations notamment développée par Kato [Kato (1995)] pour l'étude spectrale d'opérateurs dépendant d'un paramètre (ici le nombre k). Telle quelle la théorie de Kato ne s'applique néanmoins pas aux familles d'opérateurs qui ne sont pas définis sur un domaine fixe, indépendant du paramètre k. Il suffit toutefois de remarquer que chaque opérateur $A(k)$ est isomorphe à l'opérateur : $\widetilde{A}(k) = (\nabla - \imath k)\cdot(\nabla - \imath k)$ défini sur $D(A(0))$, ensemble des fonctions périodiques. En effet, soit $L(k)$ l'opérateur de multiplication par $\exp(\imath k x)$, il est unitaire et il définit un isomorphisme de $D(A(0))$ dans $D(A(k))$. On montre facilement que :

$$\widetilde{A}(k) = L(k)^{-1} A(k) L(k)$$

Comme $A(k)$, l'opérateur $\widetilde{A}(k)$ est autoadjoint, positif et à résolvante compacte. Il a les mêmes valeurs propres que $A(k)$ et ses vecteurs propres sont les $(\exp(-\imath k x)\varphi_n(k))_n$. On peut étendre la définition de $\widetilde{A}(k)$ à des k complexes et on montre que la famille $\widetilde{A}(k)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et en particulier dans un voisinage de l'intervalle réel $]-\pi,\pi[$. Comme nous venons de le signaler chaque opérateur est à résolvante compacte mais seulement pour les k réels. D'après le théorème de Kato-Rellich (voir [Kato (1995)] théorème VII.3.9) toutes les valeurs propres et les vecteurs propres de $\widetilde{A}(k)$ peuvent être ordonnées de façon à être représentées par des fonctions qui sont holomorphes sur un voisinage complexe de $]-\pi,\pi[$. Plus précisément, il existe une suite de fonctions réelles positives $(\mu_n(k))_n$ et une suite de fonctions de $L^2(\mathcal{C})$ $\big(\psi_n(k)\big)_n$ toutes holomorphes sur un voisinage complexe de $]-\pi,\pi[$ telles que pour un certain k, les $\mu_n(k)$ représentent toutes les valeurs propres répétées de $A(k)$ (de $\widetilde{A}(k)$ et donc de $A(k)$) et les $\psi_n(k)$ forment une base hilbertienne de vecteurs propres de cet opérateur. Comme les valeurs propres sont analytiques, on sait en particulier que :

- elles ne peuvent se croiser qu'un nombre fini de fois ou coïncident sur tout l'intervalle,
- une valeur propre non constante ne peut atteindre une valeur fixée qu'un nombre fini de fois, sinon c'est une valeur propre de multiplicité infinie. Cependant, dans le cas du guide, les auteurs de [Sobolev & Walthoe (2002)] montrent qu'une valeur propre de multiplicité infinie ne peut exister.

La question maintenant est de savoir quel est le lien entre ces fonctions analytiques et les fonctions $\lambda_n(k)$ et $\varphi_n(k)$. Une conclusion naïve serait que ces dernières fonctions sont également analytiques. En fait, si les valeurs propres $\lambda_n(k)$ sont simples sur tout l'intervalle $]-\pi,\pi]$ alors ce sont bien des fonctions analytiques, ainsi que les vecteurs propres associés. On comprend par contre que lorsque une valeur propre change d'ordre de multiplicité en un point

$$\exists k_0, \quad \exists n \neq m, \quad \lambda_n(k_0) = \lambda_m(k_0)$$

les fonctions $\lambda_n(k) \leq \lambda_m(k)$ ne sont pas analytiques au voisinage de k_0 mais sont seulement continues. Cependant, il existe une propriété d'analyticité locale sur les λ_n qui découle des propriétés énoncées ci-dessus (elle est également rappelée dans [Levendorskiĭ (1998)]) et que nous serons amenés à utiliser dans la suite.

LEMME 3.2.9
Si $\lambda_n(k)$ est une valeur propre simple de $A(k)$ alors $\lambda_n(k)$ est analytique au voisinage de k.

Dans la littérature, certains auteurs ([Sobolev & Walthoe (2002),Lyford (1978)]) utilisent plutôt les valeurs propres analytiques $\mu_n(k)$ pour prouver des résultats généraux et abstraits sur la théorie spectrale des opérateurs périodiques (l'absence de valeur propre de multiplicité infinie par exemple dans [Sobolev & Walthoe (2002)]) . D'autres auteurs ([Levendorskiĭ (1998)]) utilisent plutôt les valeurs propres classées par ordre croissant $\lambda_n(k)$ (dans ([Levendorskiĭ (1998)]), c'est pour montrer le principe d'absorption limite) pour lesquelles le principe du min-max s'applique :

$$\lambda_n(k) = \min_{\dim F = n} \max_{v \in F} \frac{\Big(A(k)v, v\Big)}{\|v\|^2}$$

où $\big(\cdot,\cdot\big)$ est le produit scalaire dans $L^2(\mathcal{C})$ et $\|\cdot\|$ est la norme associée.

Dans la suite, nous utiliserons surtout les valeurs propres $\lambda_n(k)$ et les vecteurs propres associés. Ce choix est motivé par l'estimation de $\lambda_n(k)$ présenté dans le lemme suivant. Un résultat analogue pour les valeurs propres analytiques $\mu_n(k)$ n'existe pas. Le lemme suivant sera essentiel pour montrer comment certains ensembles utilisés dans la suite sont discrets ou finis.

LEMME 3.2.10
Il existe deux constantes C_1 et C_2 et un rang N tels que pour tout $k \in]-\pi,\pi[$ et pour tout $n \geq N$,

$$C_1\, n \leq \lambda_n(k) \leq C_2\, n$$

■ **IDÉE DE LA PREUVE:** Appelons $\lambda_n^0(k)$ les valeurs propres dans le cas ou ρ_p est une fonction constante égale à 1. En utilisant le principe du min-max et l'hypothèse (H2), on en déduit :

$$\forall k \in]-\pi,\pi[, \quad \frac{\lambda_n^0(k)}{\rho^+} \leq \lambda_n(k) \leq \frac{\lambda_n^0(k)}{\rho^-}$$

On utilise enfin l'estimation de Weyl [Reed & Simon (1972-1978)], vraie quelque soit k :

$$\exists C > 0, \quad \lambda_n^0(k) \sim Cn$$

ce qui implique, en particulier, qu'il existe 2 constantes C_1 et C_2 et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $k \in]-\pi, \pi[$ et pour tout $n \geq N$:

$$C_1\, n \leq \lambda_n^0(k) \leq C_2\, n.$$

■

Nous allons exclure de notre étude un ensemble de fréquences dont nous donnons la définition.

DÉFINITION 3.2.11 (L'ENSEMBLE σ_0)
Soit σ_0, l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}^+$ qui satisfont l'une des deux conditions suivantes :

1. *λ est un extremum local d'un certain λ_j,*
2. *il existe un $k \in]-\pi, \pi[$ et un $n \neq m$ tel que $\lambda_n(k) = \lambda_m(k) = \lambda$*

Pour que notre étude ne perde pas en généralité, il faut s'assurer que cet ensemble n'est pas trop "gros". C'est l'objet du lemme suivant :

LEMME 3.2.12
L'ensemble σ_0 est discret avec pour seul point d'accumulation, $+\infty$.

■ **PREUVE:** Nous allons démontrer ce résultat par l'absurde. Supposons que σ_0 ne soit pas un ensemble discret avec pour seul point d'accumulation $+\infty$. Nous devons étudier alors 2 cas :
(1) Il existe une suite non stationnaire $(a_n)_n$ qui converge vers $a \in \mathbb{R}^+$ tel que a_n est un extremum local d'un certain λ_{i_n} :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists k_n, \quad \exists i_n, \quad a_n = \lambda_{i_n}(k_n) \text{ et } \lambda'_{i_n}(k_n) = 0$$

On suppose que les λ_{i_n} sont simples au voisinage de k_n. Sinon, on se retrouve dans la situation exposée dans le cas (2).
Commençons par montrer que l'ensemble des valeurs propres concernées $(\lambda_{i_n})_n$ est fini : dans ce cas, il existe une valeur propre λ_{j_0} qui a une infinité d'extremum. En effet, nous remarquons tout d'abord que la suite (a_n) converge, elle est donc bornée : appelons M un majorant. En utilisant le lemme 3.2.10, on montre qu'il existe des constantes C_1 et C_2 et un rang I telles que :

$$\forall i \geq I, \quad \forall k \in]-\pi, \pi[, \quad C_1 i \leq \lambda_i(k) \leq C_2 i$$

Il existe donc un rang N à partir du quel les valeurs propres λ_i sont strictement supérieures à M. Par conséquent, la suite des indices i_n est fini et inclus dans l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$. Il existe donc une sous suite qui est constante. Quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que la suite $(i_n)_n$ est constante égale à un indice j_0 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists k_n, \quad a_n = \lambda_{j_0}(k_n) \text{ et } \lambda'_{j_0}(k_n) = 0$$

Comme λ_{j_0} est simple au voisinage de chaque k_n, d'après le lemme 3.2.9, elle est analytique au voisinage de chacun de ses points et donc sa dérivée également. Sa dérivée atteint donc la valeur 0 au moins une infinité de fois, donc elle est constante égale à 0. On en déduit que λ_{j_0} est constante et donc que la suite $(a_n)_n$ est stationnaire, ce que nous avions exclus.
(2) Il existe une suite non stationnaire $(a_n)_n$ qui converge vers $a \in \mathbb{R}^+$ tel que pour chaque a_n, il existe un

k_n et un $i_n \neq j_n$ tel que $\lambda_{i_n}(k_n) = \lambda_{j_n}(k_n) = a_n$. Quitte à extraire une sous suite, en utilisant le même raisonnement qu'en (1), on peut supposer que les suites $(i_n)_n$ et $(j_n)_n$ sont constantes égales respectivement à i_0 et j_0. Les 2 valeurs propres λ_{i_0} et λ_{j_0} se rencontrent donc une infinité de fois. Elles coïncident donc sur tout l'intervalle, ce qui est exclus. ■

Nous allons supposer à partir du paragraphe suivant que $\omega^2 \in \mathbb{R}^+ \setminus \sigma_0$.

REMARQUE 3.2.13 (AU SUJET DES VALEURS PROPRES MULTIPLES (1))
Nous verrons dans la suite que nous avons exclu pour simplifier la présentation les ω^2 de σ_0 qui vérifient la condition (2) de la Définition 3.2.11, c'est-à-dire qu'il existe un $k \in]-\pi,\pi[$ et un $n \neq m$ tel que $\lambda_n(k) = \lambda_m(k) = \omega^2$. Nous expliquerons dans la suite comment nous pouvons cependant élargir le résultat pour inclure également cette configuration.

♢ *Expression des solutions du problème avec absorption*

La famille $(\varphi_n(k))_n$ formant une base hilbertienne de $L^2(\mathcal{C})$, on peut décomposer $\hat{u}_\varepsilon(\cdot;k)$ solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon(k))$ dans cette base :

$$\forall k \in]-\pi,\pi[,\ \forall (x,y) \in \mathcal{C}, \quad \hat{u}_\varepsilon(x,y;k) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{\varepsilon,n}(k)\ \varphi_n(x,y;k)$$

où :

$$u_{\varepsilon,n}(k) = \frac{\left\langle \hat{f}(\cdot,k), \varphi_n(\cdot,k) \right\rangle_{H_k^{-r}(\mathcal{C}),H_k^r(\mathcal{C})}}{\lambda_n(k) - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)}$$

afin de ne pas encombrer les notations, nous ne remettrons plus dans la suite que le produit au numérateur est un crochet de dualité entre $H_k^{-r}(\mathcal{C})$ et $H_k^r(\mathcal{C})$. Connaissant désormais $u_{\varepsilon,n}(k)$ pour presque tout k, en utilisant l'inverse de la Transformée de Floquet Bloch, on peut en déduire l'expression suivante de u_ε cellule par cellule :

PROPOSITION 3.2.14
u_ε solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ s'exprime de la façon suivante :

$$\forall (x,y),\ \forall p \in \mathbb{Z}, \quad u_\varepsilon(x+p,y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left\langle \hat{f}(\cdot,k), \varphi_n(\cdot,k) \right\rangle}{\lambda_n(k) - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)}\ \varphi_n(x,y;k)\ e^{\imath pk}\ dk \tag{3.20}$$

la série convergeant en norme $L^2(\mathcal{C})$.

■ **PREUVE:** Si on applique la transformée de Floquet Bloch inverse à $\hat{u}_\varepsilon$, on trouve que

$$\forall (x,y) \in \mathcal{C},\ \forall p \in \mathbb{Z}, \quad u_\varepsilon(x+p,y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{k=-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} u_{\varepsilon,n}(k)\ \varphi_n(x,y;k)\ e^{\imath pk}\ dk$$

Pour obtenir l'expression recherchée, il faut juste vérifier qu'on puisse bien intervertir somme et intégrale et montrer que la somme des intégrales converge bien dans $L^2(\mathcal{C})$. Pour cela il faut montrer que :

(1) la somme $\sum u_{\varepsilon,n}(k)\ \varphi_n(\cdot;k)$ converge pour presque tout k dans $L^2(\mathcal{C})$. C'est la définition d'une base hilbertienne ;

(2) la somme composée des termes suivants :

$$\| \int_k u_{\varepsilon,n}(k)\ \varphi_n(\cdot;k)\ dk\|_{L^2(\mathcal{C})}$$

converge.

C'est ce que nous démontrons dans la suite.

Pour tout n, $k \mapsto u_{\varepsilon,n}(k)$ est une fonction intégrable sur $]-\pi,\pi[$:

$$|u_{\varepsilon,n}(k)| \leq \|\hat{f}(\cdot,k)\|_{H_k^{-r}(\mathcal{C})} \|\varphi_n(\cdot;k)\|_{H_k^r(\mathcal{C})} \frac{1}{|\lambda_n(k) - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)|}$$

la fonction $k \mapsto \|\hat{f}(\cdot,k)\|$ est L^2 sur $]-\pi,\pi[$, la fonction $k \mapsto \|\varphi_n(\cdot;k)\|$ est continue donc intégrable et enfin la fonction $\lambda_n(k)$ est également continue sur $]-\pi,\pi[$. On a donc, d'après la relation de Cauchy-Schwartz. il existe une constante $C>0$ telle que pour tout N dans $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \| \int_{k=-\pi}^{\pi} u_{\varepsilon,n}(k)\varphi_n(x,y;k)\ e^{\imath pk}\ dk\|^2 &\leq \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathcal{C}} \left[\int_k |u_{\varepsilon,n}(k)||\varphi_n(x,y;k)\ e^{\imath pk}|\ dk \right]^2\ dx\ dy \\
&\leq C \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathcal{C}} \left[\Big(\int_k |u_{\varepsilon,n}(k)|^2 \Big)^{1/2} \Big(\int_k |\varphi_n(x,y;k)|^2 \Big)^{1/2} \right]^2\ dx\ dy \\
&\leq C \sum_{n=1}^{N} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\langle \hat{f}(\cdot,k), \varphi_n(\cdot,k)\rangle|^2}{|\lambda_n(k) - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)|^2}\ dk \Big) \Big(\int_{\mathcal{C}} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(x,y;k)|^2\ dk\ dx\ dy \Big)
\end{aligned}$$

Enfin, en rappelant que pour presque tout k, $\|\varphi_n(\cdot;k)\|_{L^2(\mathcal{C})} = 1$, on trouve :

$$\exists C>0,\ \forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{N} \| \int_{k=-\pi}^{\pi} u_{\varepsilon,n}(k)\varphi_n(x,y;k)\ e^{\imath pk}\ dk\|^2 \leq 2\pi C \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{|\langle \hat{f}(\cdot,k), \varphi_n(\cdot,k)\rangle|^2}{|\lambda_n(k) - \omega^2|^2}\ dk.$$

On reconnaît dans le terme à droite pour chaque k, la norme de $H_k^{-2}(\mathcal{C})$ de $\hat{f}(\cdot;k)$ (voir la caractérisation (3.19) et la norme associée). On aboutit donc à $\exists C>0,\ \forall N \in \mathbb{N},$:

$$\sum_{n=1}^{N} \| \int_{k=-\pi}^{\pi} u_{\varepsilon,n}(k)\varphi_n(x,y;k)\ e^{\imath pk}\ dk\|^2 \leq C \int_{-\pi}^{\pi} \|\hat{f(\cdot;k)}\|^2_{H_k^{-2}}\ dk = C\|\hat{f}\|^2_{L^2((-\pi,\pi),H_k^{-2}(\mathcal{C}))} \leq C\|f\|^2_{H^{-2}}$$

en utilisant les propriétés de la TFB dans H^{-2} (voir la section B.1.3). D'après l'hypothèse (3.11), f est dans un certain $H^{-r,s}(\Omega)$, donc en particulier il est dans $H^{-2}(\Omega)$. ■

REMARQUE 3.2.15

On retrouve dans la démonstration le résultat classique :

$$\forall f \in H^{-2}(\Omega), \quad \textit{la solution de } (\mathcal{P}_\varepsilon),\ u_\varepsilon \in L^2(\Omega).$$

De manière générale, on pourrait démontrer de la même façon que si $f \in H^r(\Omega)$ alors $u_\varepsilon \in H^{r+2}(\Omega)$.

Nous avons donc l'expression de u_ε solution du problème de Helmholtz avec absorption. C'est cette expression qui va nous permettre de caractériser ce que nous considérons être la solution physique du problème sans absorption. L'idée maintenant est d'étudier la limite quand ε tend vers 0 des termes de la série convergeant vers u_ε pour montrer que u_ε a bien une limite dans un sens que nous préciserons dans la suite.

3.2.2.3 Passage à la limite pour le problème périodique

Nous rappelons que nous supposons que la fréquence ω est telle que $\omega^2 \in \mathbb{R}^+ \setminus \sigma_0$.

Si on prend la limite formelle dans l'expression de u_ε dans 3.2.14, on remarque qu'il va falloir traiter les rangs n différemment suivant que la fonction $\lambda_n(k)$ prend la valeur ω^2 ou pas.

Définissons pour tout $\omega^2 \in \mathbb{R}^+ \setminus \sigma_0$, l'ensemble $I(\omega)$ de la manière suivante :

$$I(\omega) = \{n \in \mathbb{N},\ \exists k \in]-\pi, \pi[, \quad \lambda_n(k) = \omega^2\}$$

PROPOSITION 3.2.16
L'ensemble $I(\omega)$ est fini.

■ **PREUVE:** Il suffit d'utiliser le lemme 3.2.10 pour montrer qu'il existe un rang n à partir duquel les valeurs propres λ_n sont toutes strictement supèrieur à ω. ■

Nous allons décomposer de manière évidente u_ε de la façon suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{C}, \forall p \in \mathbb{Z}, \quad u_\varepsilon(x+p,y) = \sum_{n \notin I(\omega)} U_{\varepsilon,n}(\omega; x+p, y) + \sum_{n \in I(\omega)} U_{\varepsilon,n}(\omega; x+p, y) \tag{3.21}$$

où $U_{\varepsilon,n}$ est défini par :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{C},\ \forall p \in \mathbb{Z}, \quad U_{\varepsilon,n}(\omega; x+p, y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{k=-\pi}^{\pi} \frac{\left\langle \hat{f}(\cdot;k), \varphi_n(\cdot;k) \right\rangle}{\lambda_n(k) - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)}\, \varphi_n(x,y;k)\, e^{\imath p k}\, dk. \tag{3.22}$$

On remarque que si l'ensemble $I(\omega)$ est vide (c'est le cas quand $\omega \notin \sigma(A)$) alors le passage à la limite est très simple, on peut montrer que le problème sans absorption à une unique solution dans H^1, que u_ε converge dans H^1 si $f \in H^{-1}(\Omega)$ en utilisant les mêmes arguments que dans la Proposition 3.2.14. La solution n'est formée en somme que de modes évanescents : on se retrouve donc dans le cas coercif.

Si $I(\omega)$ n'est pas vide, il faut comprendre que, quand ε tend vers 0, pour la limite de la première somme dans (3.21), nous allons utiliser les mêmes arguments que dans le cas coercif. Cette somme correspond en quelque sorte aux modes évanescents. Quant à la seconde, le passage à la limite va être très spécifique et technique (c'est pour cette partie là que nous allons utiliser les hypothèses de décroissance à l'infini de la source f) puisque c'est dans cette somme qu'apparaissent les modes propagatifs. Nous allons donc commencer par développer le passage à la limite dans les termes de la seconde somme.

♢ ***Cas où*** $n \in I(\omega)$

Quand ε tend vers 0, la fonction à l'intérieur de l'intégrale définissant $U_{\varepsilon,n}$ (voir (3.22)) n'est pas intégrable au voisinage des points qui vérifie $\lambda_n(k) = \omega^2$. Nous introduisons alors l'ensemble :

$$I(\omega, n) = \{\xi \in]-\pi, \pi[, \quad \lambda_n(\xi) = \omega^2\},$$

LEMME 3.2.17
l'ensemble $I(\omega, n)$ est de cardinal fini.

■ **PREUVE:** Nous allons démontrer le résultat par contraposée. Si l'ensemble n'est pas fini alors il existe une suite $(\xi_j)_j$ non stationnaire telle que $\lambda_n(\xi_j) = \omega^2$ pour tout j, λ_n atteint donc la valeur ω^2 une infinité de fois comme elle est analytique, elle est constante égale à ω^2 sur tout l'intervalle, ω^2 est donc un extremum ce qui est exclus ($\omega^2 \notin \sigma_0$). ■

$I(\omega, n)$ est l'ensemble des points qui va jouer un rôle prépondérant dans le passage à la limite. Au voisinage de ces points, il est possible de calculer l'intégrale quand ε tend vers 0. Pour cela nous utilisons le lemme suivant qui précise le résultat bien connu

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{t - \imath\varepsilon} = p.v.\frac{1}{t} + \imath\pi\delta(t)$$

où la limite est prise au sens des distributions et où les distributions $p.v.\frac{1}{t}$ et $\delta(t)$ sont définies de manière classique par

$$\forall \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}), \qquad \Big\langle p.v\frac{1}{t}, \psi \Big\rangle = \lim_{\eta \to 0^+} \int_{-\infty}^{-\eta} \frac{\psi(t)}{t}\, dt + \int_{\eta}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t}\, dt \qquad \text{et} \qquad \big\langle \delta, \psi \big\rangle = \psi(0).$$

En effet, le lemme suivant donne une estimation de la vitesse de convergence en fonction de ε.

LEMME 3.2.18
Soient $a, b > 0$, $s \in]1/2, 1[$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une constante indépendante de a est b telle que pour tout $\psi \in H^s(]-a, b[)$,

$$\Big| \int_{-a}^{b} \Big[\frac{1}{t - \imath\varepsilon} - (p.v.\frac{1}{t} + \imath\pi\delta(t))\Big]\psi(t)\, dt \Big| \leq C\varepsilon^{s-1/2}\|\psi\|_{H^s} \tag{3.23}$$

L'idée de la preuve de ce lemme est de démontrer le résultat pour des espaces de Hölder

$$\mathcal{C}^{0,\alpha}(]-a, b[) = \Big\{\psi \in \mathcal{C}^0, \quad \sup_{(t,t') \in]-a,b[} \frac{|\psi(t) - \psi(t')|}{|t - t'|^\alpha} \leq +\infty\Big\}.$$

c'est-à-dire de montrer que

$$\Big| \int_{-a}^{b} \Big[\frac{1}{t - \imath\varepsilon} - (p.v.\frac{1}{t} + \imath\pi\delta(t))\Big]\psi(t)\, dt \Big| \leq C\varepsilon^{\alpha}\|\psi\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \tag{3.24}$$

puis d'utiliser le lemme 3.2.19 qui généralise l'inégalité de Morrey [Brezis (1983)] pour les espaces de Sobolev fractionnaires.

LEMME 3.2.19
Pour tout $s \in]1/2,1]$, l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ s'injecte de manière continue dans l'espace de Hölder $\mathcal{C}^{0,s-1/2}(\mathbb{R})$.

De la même façon, pour tout $s \in]1/2,1]$, l'espace de Sobolev $H^s(]-a,b[)$ s'injecte de manière continue dans l'espace de Hölder $\mathcal{C}^{0,s-1/2}(]-a,b[)$.

■ **PREUVE DU LEMME 3.2.19:** Soit $s \in]1/2,1]$. Commençons par remarquer que :

$$\tau \mapsto \frac{e^{\imath\tau}-1}{|\tau|^s} \ \in \ L^2(\mathbb{R}).$$

On montre, en faisant un simple changement de variable, alors qu'il existe une constante C_s telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{e^{\imath t\tau}-1}{|\tau|^s}\Big)^2 \, d\tau = t^{2s-1} C_s$$

Cette remarque est le point essentiel de la preuve. Soient $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\hat{u}$ sa transformée de Fourier, alors

$$u(t)-u(0) = \int_{\mathbb{R}} (e^{\imath t\tau}-1)\hat{u}(\tau)\, d\tau = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\imath t\tau}-1}{|\tau|^s}\, |\tau|^s \hat{u}(\tau)\, d\tau,$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient :

$$|u(t)-u(0)| \leq \| \frac{e^{\imath t\tau}-1}{|\tau|^s} \|_{L^2} \, \| |\tau|^s \hat{u}(\tau) \|_{L^2} \leq C_s t^{s-1/2} \|u\|_{H^s}.$$

Enfin pour conclure de même pour $H^s(]-a,b[)$, il suffit d'utiliser la définition : toute fonction de $H^s(]-a,b[)$ est la restriction à $]-a,b[$ d'une fonction de $H^s(\mathbb{R})$. ■

■ **PREUVE DU LEMME 3.2.18:** Grâce au lemme 3.2.19, nous pouvons donc démontrer le lemme 3.2.18 en justifiant seulement l'expression (3.24) pour $\alpha \in]0,1/2]$.

Soit $\psi \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(]-a,b[)$, alors

$$\Big| \int_{-a}^{b} \frac{\psi(t)}{t-\imath\varepsilon}\, dt - \big(p.v. \int_{-a}^{b} \frac{\psi(t)}{t}\, dt + \imath\pi\psi(0)\big)\Big] \Big| \leq \Big| \int_{-a}^{b} \frac{\psi(t)t}{t^2+\varepsilon^2}\, dt - p.v. \int_{-a}^{b} \frac{\psi(t)}{t}\, dt \Big| + \Big| \int_{-a}^{b} \imath\varepsilon \frac{\psi(t)}{t^2+\varepsilon^2}\, dt - \imath\pi\psi(0) \Big|$$

Pour le premier terme, on a

$$\Big| \int_{-a}^{b} \frac{\psi(t)t}{t^2+\varepsilon^2}\, dx - p.v. \int_{-a}^{b} \frac{\psi(t)}{t}\, dt \Big| \leq \Big| \int_{-a}^{b} \big(\psi(t)-\psi(0)\big) \frac{\varepsilon^2}{(t^2+\varepsilon^2)t}\, dt \Big| + \Big| \int_{+a}^{b} \frac{\varepsilon^2\, \psi(0)}{(t^2+\varepsilon^2)t}\, dt \Big|$$

En utilisant la définition des espaces de Hölder, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \Big| \int_{-a}^{b} \frac{\psi(t)t}{t^2+\varepsilon^2}\, dt - p.v. \int_{-a}^{b} \frac{\psi(t)}{t}\, dt \Big| &\leq \|\psi\|_{C^{0,\alpha}} \int_{-a}^{b} \frac{\varepsilon^2}{t^{1-\alpha}(t^2+\varepsilon^2)}\, dt + \varepsilon^2 |\psi(0)| \int_{+a}^{b} \frac{1}{t^3}\, dt \\ &\leq \varepsilon^\alpha \, \|\psi\|_{C^{0,\alpha}} \int_{-a/\varepsilon}^{b/\varepsilon} \frac{1}{(t^2+1)t^{1-\alpha}} + \varepsilon^2 |\psi(0)| \int_{+a}^{b} \frac{1}{t^3}\, dt \leq C_1 \varepsilon^\alpha \, \|\psi\|_{H^s} \end{aligned}$$

la fonction à l'intérieur de la première intégrale étant intégrable entre 0 et $+\infty$ (pour $\alpha \in]0,1/2]$).

On procède de même pour le second terme

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{-a}^{b} \imath\varepsilon\frac{\psi(t)}{t^2+\varepsilon^2}\,dt - \imath\pi\psi(0)\Big| &= \Big|\int_{-a}^{b} \imath\varepsilon\frac{\psi(t)-\psi(0)}{t^2+\varepsilon^2}\,dt + \imath\int_{-a/\varepsilon}^{b/\varepsilon}\frac{\psi(0)}{t^2+1}dt - \imath\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(0)}{t^2+1}\,dt\Big| \\
&\leq \int_{-a}^{b}\varepsilon\frac{|\psi(t)-\psi(0)|}{t^2+\varepsilon^2}\,dt + \int_{-\infty}^{-a/\varepsilon}\frac{|\psi(0)|}{t^2+1}\,dt + \int_{b/\varepsilon}^{+\infty}\frac{|\psi(0)|}{t^2+1}\,dt \\
&\leq \|\psi\|_{C^{0,\alpha}}\int_{-a}^{b}\varepsilon\frac{t^\alpha}{t^2+\varepsilon^2}\,dt + \varepsilon\int_{-\infty}^{-a}\frac{|\psi(0)|}{t^2+\varepsilon^2}\,dt + \varepsilon\int_{b}^{+\infty}\frac{|\psi(0)|}{t^2+\varepsilon^2}\,dt \\
&\leq \varepsilon^\alpha\|\psi\|_{C^{0,\alpha}}\int_{-a/\varepsilon}^{b/\varepsilon}\frac{t^\alpha}{t^2+1}\,dt + \varepsilon\int_{-\infty}^{-a}\frac{|\psi(0)|}{t^2}\,dt + \varepsilon\int_{b}^{+\infty}\frac{|\psi(0)|}{t^2}\,dt \\
&\leq C_2\varepsilon^\alpha\,\|\psi\|_{C^{0,\alpha}}
\end{aligned}$$

■

Nous voulons utiliser l'estimation du lemme 3.2.18 dans un cadre légèrement différent c'est-à-dire $\psi \in H^s(]-a,b[,X)$ avec $s \in]1/2,1]$ et $X = L^2(\mathcal{C})$ ou $X = H^1(\mathcal{C})$. Il s'avère que dans ces cas là, le lemme se généralise directement

LEMME 3.2.20
Soient $a,b>0$, $s\in]1/2,1[$ et $\varepsilon>0$, $X=L^2(\mathcal{C})$ ou $X=H^1(\mathcal{C})$. Il existe une constante indépendante de a est b telle que pour tout $\psi\in H^s(]-a,b[,X)$,

$$\Big\|\int_{-a}^{b}\Big[\frac{1}{t-\imath\varepsilon}-(p.v.\frac{1}{t}+\imath\pi\delta(t))\Big]\psi(t)\,dt\Big\|_X \leq C\varepsilon^{s-1/2}\|\psi\|_{H^s(]-a,b[,X)} \tag{3.25}$$

■ **IDÉE DE LA PREUVE:** Voici les étapes de la démonstration :

– La démonstration pour $\psi\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(]-a,b[,X)$ avec $\alpha\in]0,1/2]$ où on rappelle que :

$$\mathcal{C}^{0,\alpha}(]-a,b[,X)=\Big\{\psi\in\mathcal{C}^0(]-a,b[,X),\quad \sup_{(t,t')\in]-a,b[}\frac{\|\psi(t,\cdot)-\psi(t',\cdot)\|_X}{|t-t'|^\alpha}\leq+\infty\Big\},$$

est exactement la même que en le faisant pour tout $x\in\mathcal{C}$ puis en prenant la norme de X,

– On rappelle que pour tout $s>0$,

$$H^s(\mathbb{R},X)=\Big\{u\in L^2(\mathbb{R},X),\quad (1+\xi^2)^{s/2}\,\hat{u}(\xi)\in L^2(\mathbb{R},X)\Big\}$$

où $\hat{u}$ est la Transformée de Fourier de $u\in L^2(\mathbb{R},X)$ avec X un espace de Banach. Une généralisation du lemme 3.2.19 est alors : $H^s(\mathbb{R},X)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}^{0,s-1/2}(\mathbb{R},X)$ pour $s\in]1/2,1]$, la démonstration du lemme 3.2.19 s'étendant facilement en utilisant les caractérisations ci-dessus des espaces $H^s(\mathbb{R},X)$ et $\mathcal{C}^{0,s-1/2}(\mathbb{R},X)$ et les normes qui en découlent.

– En particulier : pour $X=L^2(\mathcal{C})$ et $X=H^1(\mathcal{C})$, $H^s(]-a,b[,X)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}^{0,s-1/2}(]-a,b[,X)$ pour $s\in]1/2,1]$.

■

Revenons à l'étude de la limite quand ε tend vers 0 des fonctions $U_{\varepsilon,n}$ (voir leur expression (3.22))

pour $n \in I(\omega)$. On pose

$$\begin{aligned} U_{0,n}(\omega, x+p, y) =& \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, p.v. \int_{k=-\pi}^{\pi} \frac{\left\langle \hat{f}(\cdot;k), \varphi_n(\cdot;k)\right\rangle}{\lambda_n(k)-\omega^2}\, \varphi_n(x,y;k)\, e^{\imath p k}\, dk \\ &+ \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \sum_{\xi \in I(\omega,n)} \frac{\left\langle \hat{f}(\cdot;\xi), \varphi_n(\cdot;\xi)\right\rangle}{|\lambda_n'(\xi)|}\, \varphi_n(x,y;\xi)\, e^{\imath p \xi} \end{aligned} \tag{3.26}$$

REMARQUE 3.2.21 (AU SUJET DES VALEURS PROPRES MULTIPLES (2))
Cette expression permet de comprendre pourquoi nous avons dû exclure les fréquences telles que $\omega^2 \in \sigma_0$ de notre étude. En effet, si ω^2 est un extremum d'une des courbes de dispersion $k \mapsto \lambda_n(k)$ (condition (1)) alors un des quotients dans la somme précédente n'est pas défini (pour $\xi = \xi_0$). De plus, si ω^2 est une valeur propre multiple (condition (2)), c'est-à-dire qu'il existe un $\xi_0 \in]-\pi, \pi[$ et un $n \neq m$ tel que $\lambda_n(\xi_0) = \lambda_m(\xi_0) = \omega^2$, alors les valeurs propres λ_n et λ_m ne sont pas dérivables en ξ_0. On pourrait cependant élargir le résultat obtenu pour cet ensemble de fréquences et utiliser les valeurs propres analytiques $\{\mu_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ pour définir des dérivées à droite (ou à gauche si $k_0 = \pi$) en k_0 des valeurs propres λ_n et λ_m et montrer que le résultat précédent s'étend à ces fréquences si on remplace la dérivée de chaque λ_n par la dérivée à droite.

Nous ne ferons pas la démonstration dans ce cas qui est plus technique mais qui comporte exactement les mêmes idées que celle présentée dans la suite. Nous voulions juste signaler qu'il est possible de réduire encore l'ensemble dénombrable σ_0.

Le lemme 3.2.20 nous permet désormais de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2.22
Si f vérifie l'hypothèse (3.11) *pour un $s \in]1/2, 1]$ alors il existe une constante $C(\omega)$ indépendante de n et p telle que :*

$$\begin{aligned} \|U_{\varepsilon,n}(\omega;\cdot) - U_{0,n}(\omega;\cdot)\|_{L^2(\mathcal{C}_p)} &\leq\ C(\omega)\varepsilon^{s-1/2}\|f\|_{H^{-r,s}(\Omega)} \\ \|U_{\varepsilon,n}(\omega;\cdot) - U_{0,n}(\omega;\cdot)\|_{H^1(\mathcal{C}_p)} &\leq\ C(\omega)\varepsilon^{s-1/2}\|f\|_{H^{-r,s}(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.27}$$

■ **PREUVE:** Il faut tout d'abord remarquer que λ_n étant localement analytique, elle est dérivable au voisinage de tous les points de $I(\omega, n)$. De plus, la dérivée de λ_n ne s'y annule pas car $\omega^2 \notin \sigma_0$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe donc un voisinage autour de chaque point tel que λ_n est inversible. Comme $I(n,\omega)$ est fini, il existe un δ tel que :

$$\forall \xi \in I(\omega, n), \lambda_n \text{ est inversible sur }]\xi - \delta, \xi + \delta[$$

et tels que tous ces intervalles soient disjoints. On appelle alors $\mathcal{O}_\delta$ l'union d'intervalles suivante :

$$\mathcal{O}_\delta =]-\pi, \pi[\setminus \bigcup_{\xi \in I(\omega,n)}]\xi - \delta, \xi + \delta[$$

On obtient

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}\, U_{\varepsilon,n}(\omega;x,y) =& \int_{\mathcal{O}_\delta} \frac{\left\langle \hat{f}(\cdot;k), \varphi_n(\cdot;k)\right\rangle}{\lambda_n(k) - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)}\, \varphi_n(x,y;k)\, e^{\imath p k}\, dk \\ &+ \sum_{\xi \in I(\omega,n)} \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \frac{\left\langle \hat{f}(\cdot;k), \varphi_n(\cdot;k)\right\rangle}{\lambda_n(k) - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)}\, \varphi_n(x,y;k)\, e^{\imath p k}\, dk \end{aligned}$$

On appelle $\mathcal{J}_n(\varepsilon)$ le premier terme dans cette expression et $\mathcal{I}_n(\varepsilon)$ le second que l'on décompose :

$$\mathcal{I}_n(\varepsilon) = \sum_{\xi\in I(\omega,n)} \mathcal{I}_n(\xi,\varepsilon),$$

avec $\mathcal{I}_n(\xi,\varepsilon)$ chaque intégrale entre $]\xi-\delta;\xi+\delta[$.

De même, on peut réécrire $U_{0,n}$ sous la forme

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\,U_{0,n}(\omega;x,y) = &\int_{\mathcal{O}_\delta} \frac{\big\langle \hat f(\cdot;k),\varphi_n(\cdot;k)\big\rangle}{\lambda_n(k)-\omega^2}\,\varphi_n(x,y;k)\,e^{\imath pk}\,dk\\ &+\sum_{\xi\in I(\omega,n)} p.v.\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \frac{\big\langle \hat f(\cdot;k),\varphi_n(\cdot;k)\big\rangle}{\lambda_n(k)-\omega^2}\,\varphi_n(x,y;k)\,e^{\imath pk}\,dk \;+\; \frac{\big\langle \hat f(\cdot;\xi),\varphi_n(\cdot;\xi)\big\rangle}{|\lambda_n'(\xi)|}\,\varphi_n(x,y;\xi)\,e^{\imath p\xi}\end{aligned}$$

où on a utilisé par définition :

$$p.v.\int_{k=-\pi}^{\pi} g(k)\,dk = \int_{\mathcal{O}_\delta} g(k)\,dk + \sum_{\xi\in I(\omega,n)} p.v.\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} g(k)\,dk.$$

De même, on appelle $\mathcal{J}_n(0)$ le premier terme dans cette expression et $\mathcal{I}_n(0)$ le second que l'on décompose :

$$\mathcal{I}_n(0) = \sum_{\xi\in I(\omega,n)} \mathcal{I}_n(\xi,0),$$

Nous allons alors utiliser pour $X = L^2(\mathcal{C}_p)$ ou $H^1(\mathcal{C}_p)$, la relation suivante :

$$\sqrt{2\pi}\,\|U_{\varepsilon,n}(\omega;\cdot)-U_{0,n}(\omega;\cdot)\|_X \le \|\mathcal{J}_n(\varepsilon)-\mathcal{J}_n(0)\|_X + \sum_{\xi\in I(\omega,n)} \|\mathcal{I}_n(\xi,\varepsilon)-\mathcal{I}_n(\xi,0)\|_X$$

de façon à étudier les termes de façon indépendante. Pour les $\mathcal{J}_n$ le passage à la limite va être direct, alors que pour les $\mathcal{I}_n$ on utilisera le lemme 3.2.20.

(1) Passage à la limite pour les $\mathcal{J}_n(\varepsilon)$.
On a simplement dans ce cas :

$$\begin{aligned}|\mathcal{J}_n(\varepsilon)-\mathcal{J}_n(0)| &\le \left|\int_{\mathcal{O}_\delta} \big\langle \hat f(\cdot;k),\varphi_n(\cdot;k)\big\rangle\,\varphi_n(x,y;k)\,e^{\imath pk}\frac{\imath\varepsilon\omega}{(\lambda_n(k)-\omega^2)(\lambda_n(k)-\omega^2-\imath\varepsilon\omega)}\,dk\right|\\ &\le C\int_{\mathcal{O}_\delta} |\big\langle \hat f(\cdot;k),\varphi_n(\cdot;k)\big\rangle|\,|\varphi_n(x,y;k)|\,\frac{\varepsilon\omega}{|\lambda_n(k)-\omega^2|^2}\,dk\\ &\le C\varepsilon\omega\Big(\int_{\mathcal{O}_\delta}\frac{|\big\langle \hat f(\cdot;k),\varphi_n(\cdot;k)\big\rangle|^2}{|\lambda_n(k)-\omega^2|^4}\,dk\Big)^{1/2}\Big(\int_{\mathcal{O}_\delta}|\varphi_n(x,y;k)|^2\,dk\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a donc

$$\begin{aligned}\|\mathcal{J}_n(\varepsilon)-\mathcal{J}_n(0)\|^2_{L^2(\mathcal{C}_p)} &\le C^2\varepsilon^2\omega^2\int_{\mathcal{O}_\delta}\frac{|\big\langle \hat f(\cdot;k),\varphi_n(\cdot;k)\big\rangle|^2}{|\lambda_n(k)-\omega^2|^4}\,dk\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{O}_\delta}|\varphi_n(x,y;k)|^2\,dk\,dx\,dy\\ &\le C^2\varepsilon^2\omega^2\int_{\mathcal{O}_\delta}\frac{\|\hat f(\cdot;k)\|^2_{H_k^{-r}}\|\varphi_n(\cdot;k)\|^2_{H_k^r}}{|\lambda_n(k)-\omega^2|^4}\,dk\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{O}_\delta}|\varphi_n(x,y;k)|^2\,dk\,dx\,dy\end{aligned}$$

comme pour tout k, $\|\varphi_n(\cdot;k)\|_{L^2(\mathcal{C},\rho_p\,dx\,dy)}=1$ et mes$(\mathcal{O}_\delta)\le 2\pi$, on trouve qu'il existe une constante dépendant de ω (et ρ_p) :

$$\|\mathcal{J}_n(\varepsilon)-\mathcal{J}_n(0)\|^2_{L^2(\mathcal{C}_p)} \le C(\omega)\varepsilon^2\int_{\mathcal{O}_\delta}\frac{\|\hat f(\cdot;k)\|^2_{H_k^{-r}}\|\varphi_n(\cdot;k)\|^2_{H^r}}{|\lambda_n(k)-\omega^2|^4}\,dk.$$

De même, comme $\|\varphi_n(\cdot;k)\|^2_{H^1(\mathcal{C}_p)} = \lambda_n(k)$, alors il existe une constante ne dépendant que de ω telle que

$$\|\mathcal{J}_n(\varepsilon) - \mathcal{J}_n(0)\|^2_{H^1(\mathcal{C}_p)} \leq C(\omega)\varepsilon^2 \int_{\mathcal{O}_\delta} \frac{\|\hat{f}(\cdot;k)\|^2_{H_k^{-r}} \|\varphi_n(\cdot;k)\|^2_{H^r}}{|\lambda_n(k)-\omega^2|^4}\, dk \int_{\mathcal{O}_\delta} (\lambda_n(k)+1)\, dk$$

Ensuite il faut comprendre que comme les fonctions $k \mapsto \|\varphi_n(k)\|_{H^r}$ et $k \mapsto \lambda_n(k)$ sont continues et « périodiques » sur $]-\pi,\pi[\supset \mathcal{O}_\delta$, elles sont bornées. Soit

$$C_1(\omega) = \max_{n\in I(\omega)} \left\{ \| \frac{\|\varphi_n(\cdot;k)\|^2_{H^r}}{|\lambda_n(k)-\omega^2|^4} \|_{L^\infty(-\pi,\pi)},\ \|\lambda_n(k)+1\|_{L^\infty(-\pi,\pi)} \right\}$$

une constante qui ne dépend que de ω mais ni de n, ni évidemment de p. On a alors facilement l'existence d'une constante $C_{\mathcal{J}}(\omega)$:

$$\|\mathcal{J}_n(\varepsilon) - \mathcal{J}_n(0)\|_{L^2(\mathcal{C}_p)} \leq C_{\mathcal{J}}(\omega)\varepsilon \|f\|_{H^{-r}(\Omega)}$$
$$\|\mathcal{J}_n(\varepsilon) - \mathcal{J}_n(0)\|_{H^1(\mathcal{C}_p)} \leq C_{\mathcal{J}}(\omega)\varepsilon \|f\|_{H^{-r}(\Omega)}$$

où on a utilisé le théorème B.1.22 de la TFB concernant les espaces $H^{-r}(\Omega)$.

(2) Passage à la limite pour les $\mathcal{I}_n(\xi,\varepsilon)$.

On se fixe donc un $\xi \in I(\omega,n)$. Effectuons un changement de variable $t = \lambda_n(k) - \omega^2$ sur l'intervalle $]\xi-\delta,\xi+\delta[$. On appelle ν_n la fonction $\nu_n(t) = \lambda_n^{-1}(t+\omega^2)$ et les bornes de l'intégrale $-a_n(\xi) = \min(\lambda_n(\xi-\delta)-\omega^2, \lambda_n(\xi+\delta)-\omega^2)$ et $b_n(\xi) = \max(\lambda_n(\xi-\delta)-\omega^2, \lambda_n(\xi+\delta)-\omega^2)$. Notons tout d'abord que la fonction ν_n est analytique sur $]-a_n(\xi), b_n(\xi)[$. On remarque également que $-a_n(\xi) < 0$ et $b_n(\xi) > 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. On obtient alors

$$\mathcal{I}_n(\xi,\varepsilon) = \int_{-a_n(\xi)}^{b_n(\xi)} \frac{\psi(x,y;t)}{t - \imath\varepsilon\omega}\, dt$$

et également

$$\mathcal{I}_n(\xi,0) = p.v. \int_{-a_n(\xi)}^{b_n(\xi)} \frac{\psi(x,y;t)}{t}\, dt + \imath\pi\psi(x,y;0)$$

où

$$\psi(x,y;t) = \left\langle \hat{f}(\cdot;\nu_n(t)), \varphi_n(\cdot;\nu_n(t)) \right\rangle \varphi_n(x,y;\nu_n(t))\, e^{\imath p\nu_n(t)} \frac{1}{|\lambda_n'(\nu_n(t))|}$$

Pour appliquer le lemme 3.2.20 pour $X = L^2(\mathcal{C})$ et $X = H^1(\mathcal{C})$ il nous faut prouver maintenant que ψ appartient à $H^s(]-a_n(\xi), b_n(\xi)[, H^1(\mathcal{C}))$ pour un certain $s \in]1/2, 1]$.

Les applications λ_n et φ_n sont des fonctions C^∞ sur $]\xi-\delta,\xi+\delta[$, la fonction ν_n est également une fonction C^∞ sur $]-a_n(\xi), b_n(\xi)[$. Par conséquent, la régularité de l'application précédente ψ par rapport à t est donnée par la régularité de $\hat{f}$ par rapport à k. Dans la suite nous allons raisonner pour $s = 1$ puis on généralisera en utilisant un résultat d'interpolation.

Montrons que $\psi \in L^2(]-a_n(\xi), b_n(\xi)[, H^1(\mathcal{C}))$ et estimons sa norme :

$$\begin{aligned}
\int_{-a_n(\xi)}^{b_n(\xi)} \|\psi(\cdot;t)\|^2_{H^1(\mathcal{C})}\, dt &\leq \int_{-a_n(\xi)}^{b_n(\xi)} |\left\langle \hat{f}(\cdot;\nu_n(t)), \varphi_n(\cdot;\nu_n(t)) \right\rangle|^2 \frac{1}{|\lambda_n'(\nu_n(t))|^2} \|\varphi_n(\cdot;\nu_n(t))\|_{H^1(\mathcal{C})}\, dt \\
&\leq \int_{-a_n(\xi)}^{b_n(\xi)} \|\hat{f}(\cdot;\nu_n(t))\|^2_{H_k^{-r}} \|\varphi_n(\cdot;\nu_n(t))\|^2_{H^r} \frac{1}{|\lambda_n'(\nu_n(t))|^2} (1+\lambda_n(\nu_n(t)))\, dt \\
&\leq \int_{-a_n(\xi)}^{b_n(\xi)} \|\hat{f}(\cdot;\nu_n(t))\|^2_{H_k^{-r}} \frac{\lambda_n(\nu_n(t))^r}{|\lambda_n'(\nu_n(t))|^2} (1+\lambda_n(\nu_n(t)))\, dt
\end{aligned}$$

Comme pour le (1), les fonctions $t \mapsto \lambda_n(\nu_n(t))$ et $t \mapsto |\lambda_n'(\nu_n(t))|^{-1}$ sont continues sur l'intervalle $]-a_n(\xi), b_n(\xi)[$ donc bornées. Soit

$$C_1(\omega) = \max_{n\in I(\omega)} \max_{\xi\in I(\omega,n)} \left\{ \left\| \frac{\lambda_n(\nu_n(t))^r}{|\lambda_n'(\nu_n(t))|^2} (1+\lambda_n(\nu_n(t))) \right\|_{L^\infty(-a_n(\xi),b_n(\xi))} \right\}$$

qui ne dépend que de ω,mais ni de ξ, ni de n, ni évidemment de p. On obtient donc

$$\int_{-a_n(\xi)}^{b_n(\xi)} \|\psi(\cdot;t)\|^2_{H^1(\mathcal{C})}\,dt \le C_1(\omega) \int_{-a_n(\xi)}^{b_n(\xi)} \|\hat f(\cdot;\nu_n(t))\|^2_{H_k^{-r}}\,dt \le C_1'(\omega) \int_{-\pi}^{\pi} \|\hat f(\cdot;k)\|^2_{H_k^{-r}}\,dk \le C_1''(\omega)\,\|f\|^2_{H^{-r}}$$

Montrons maintenant $\partial_t\psi \in L^2(]-a_n(\xi),b_n(\xi)[,H^1(\mathcal{C}))$ et estimons sa norme. L'idée de la preuve est vraiment la même que pour ψ. Il faut tout d'abord dériver par rapport à t. On peut donc se convaincre, en dérivant tout simplement ψ, que si on arrive à prouver que :

$$(i)\quad t\mapsto \lambda_n(\nu_n(t)),\quad t\mapsto \frac{1}{|\lambda_n'(\nu_n(t))|},\quad t\mapsto \nu_n(t)\quad \in W^{1,\infty}(]-a_n(\xi),b_n(\xi)[)$$

et

$$(ii)\quad k\mapsto \|\varphi_n(\cdot;k)\|_{H^r}\ W^{1,\infty}(]\xi-\delta,\xi+\delta[)\quad\text{et}\quad t\mapsto \varphi_n(\cdot;\nu_n(t))\ \in W^{1,\infty}(]\xi-\delta,\xi+\delta[,H^1(\mathcal{C}))$$

alors il existe deux constantes $C_2(\omega)$ et $C_3(\omega)$ qui ne dépendent ni de ξ, n et p telles que :

$$\int_{-a_n(\xi)}^{b_n(\xi)} \|\psi(\cdot;t)\|^2_{H^1(\mathcal{C})}\,dt \le C_2(\omega)\int_{-a_n(\xi)}^{b_n(\xi)} \|\hat f(\cdot;\nu_n(t))\|^2_{H_k^{-r}}\,dt + \int_{-a_n(\xi)}^{b_n(\xi)} \|\partial_t\hat f(\cdot;\nu_n(t))\|^2_{H_k^{-r}}\,dt$$

On aura donc

$$\int_{-a_n(\xi)}^{b_n(\xi)} \|\psi(\cdot;t)\|^2_{H^1(\mathcal{C})}\,dt \le C_2'(\omega)\int_{-\pi}^{\pi} \|\hat f(\cdot;k)\|^2_{H_k^{-r}}\,dk + C_3'(\omega)\int_{-\pi}^{\pi} \|\partial_k\hat f(\cdot;k)\|^2_{H_k^{-r}}\,dk$$

Le point (i) est alors élémentaire. Il suffit de remarquer que $k\mapsto\lambda_n(k)$ et $k\mapsto|\lambda_n'(k)|^{-1}$ sont des fonctions analytiques sur un voisinage complexe de $(\xi-\delta,\xi+\delta)$, et $t\mapsto\nu_n(t)$ est analytique sur un voisinage complexe de $]-a_n(\xi),b_n(\xi)[$, donc elles sont en particulier bornées et leurs dérivées également. On conclut en rappelant que la composée de 2 fonctions $W^{1,\infty}$ est $W^{1,\infty}$.
Pour le point (ii), on utilise l'analyticité de φ_n au voisinage de l'intervalle $]\xi-\delta,\xi+\delta[$, φ_n étant considérée comme élément de H^1 (on pourrait même avoir mieux que ça), elle est donc en particulier bornée à valeur H^1 et sa dérivée également. Par interpolation, comme elle est bornée à valeurs H^1 et L^2, elle est bornée à valeurs H^r.
On a donc l'existence d'une constante $C(\omega)$ telle que

$$\int_{-a_n(\xi)}^{b_n(\xi)} \|\psi(\cdot;t)\|^2_{H^1(\mathcal{C})}\,dt \le C(\omega)\|f\|^2_{H_1^{-r}}$$

où on a utilisé la propriété de la TFB dans les espaces $H^{r,s}$ (voir théorème B.1.35).
Par interpolation on montre finalement que pour tout $s\in]1/2,1]$ et pour $X=L^2(\mathcal{C})$ ou $H^1(\mathcal{C})$, il existe une constante $C(\omega)$ telle que

$$\|\psi\|_{H^s(-a_n(\xi),b_n(\xi),X)} \le C(\omega)\|f\|_{H^{-r,s}}.$$

On peut finalement utiliser le lemme 3.2.18 pour chaque $\xi\in I(\omega,n)$ sur l'intervalle $]-a_n(\xi),b_n(\xi)[$ pour déduire que, pour tout $s\in]1/2,1]$, il existe une $C_{\mathcal{I}}(\omega)$ indépendante de ξ, de n et de p telle que

$$\|\mathcal{I}_n(\xi,\varepsilon)-\mathcal{I}_n(\xi,0)\|_{L^2(\mathcal{C}_p)} \le C_{\mathcal{I}}(\omega)\varepsilon^{s-1/2}\|f\|_{H^{-r,s}(\Omega)}$$
$$\|\mathcal{I}_n(\xi,\varepsilon)-\mathcal{I}_n(\xi,0)\|_{H^1(\mathcal{C}_p)} \le C_{\mathcal{I}}(\omega)\varepsilon^{s-1/2}\|f\|_{H^{-r,s}(\Omega)}$$

On a finalement pour $X=L^2(\mathcal{C}_p)$ ou $H^1(\mathcal{C}_p)$, la relation

$$\sqrt{2\pi}\,\|U_{\varepsilon,n}(\omega;\cdot)-U_{0,n}(\omega;\cdot)\|_X \le C_{\mathcal{J}}(\omega)\varepsilon\|f\|_{H^{-r}(\Omega)} + \sum_{\xi\in I(\omega,n)} C_{\mathcal{I}}(\omega)\varepsilon^{s-1/2}\|f\|_{H^{-r,s}(\Omega)}$$

qui permet de conclure. ■

♢ ***Expression de la solution limite***

Soit maintenant u_0 la fonction définie pour tout $(x,y) \in \mathcal{C}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$u_0(x+p,y) = \sum_{n \notin I(\omega)} U_{0,n}(\omega; x+p, y) + \sum_{n \in I(\omega)} U_{0,n}(\omega; x+p, y) \tag{3.28}$$

où pour $n \notin I(\omega)$ et $\varepsilon \geq 0$, $U_{0,n}$ est donné par : $\forall (x,y) \in \mathcal{C},\ \forall p \in \mathbb{Z}$,

$$U_{0,n}(\omega; x+p, y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{k=-\pi}^{\pi} \frac{\left\langle \hat{f}(\cdot;k), \varphi_n(\cdot;k) \right\rangle}{\lambda_n(k) - \omega^2}\, \varphi_n(x,y;k)\, e^{\imath p k}\, dk. \tag{3.29}$$

et pour $n \in I(\omega)$, $U_{0,n}$ est défini par (3.26). Les principes de la démonstration de la proposition 3.2.14 et la proposition 3.2.22 nous permettent d'obtenir le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2.23
Si f vérifie l'hypothèse (3.11) *avec un $s \in]1/2, 1]$ et $r \in [0,1]$ alors il existe une constante $C(\omega)$ indépendante de p telle que :*

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\mathcal{C}_p)} &\leq \quad C(\omega)\varepsilon^{s-1/2} \|f\|_{H^{-r,s}(\Omega)} \\ \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\mathcal{C}_p)} &\leq \quad C(\omega)\varepsilon^{s-1/2} \|f\|_{H^{-r,s}(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.30}$$

■ **PREUVE:** Pour $X = L^2(\mathcal{C}_p)$ ou $X = H^1(\mathcal{C}_p)$, on écrit :

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_X \leq \| \sum_{n \notin I(\omega)} U_{\varepsilon,n}(\omega; x+p, y) - U_{0,n}(\omega; x+p, y) \|_X + \sum_{n \in I(\omega)} \|U_{\varepsilon,n}(\omega; x+p, y) - U_{0,n}(\omega; x+p, y)\|_X$$

Pour traiter la somme (finie) sur les $n \in I(\omega)$, nous utilisons directement la proposition 3.2.22 :

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_X \leq \| \sum_{n \notin I(\omega)} U_{\varepsilon,n}(\omega; x+p, y) - U_{0,n}(\omega; x+p, y) \|_X + C(\omega)\varepsilon^{s-1/2} \#(I(\omega))\, \|f\|_{H^{-r,s}}$$

Il reste à traiter la première somme qui est infinie. Comme nous l'avons remarqué au début de la section, les arguments utilisés pour l'étude de la somme sont les mêmes que ceux utilisés dans le cas coercif, en particulier ceux que nous avons utilisé dans la démonstration de la proposition 3.2.14.

Soit N assez grand

$$\sum_{n \notin I(\omega)}^{n \leq N} \sqrt{2\pi} \Big(U_{\varepsilon,n}(\omega; x+p, y) - U_{0,n}(\omega; x+p, y) \Big) = \int_{-\pi}^{\pi} D_\varepsilon(x,y;k)\, dk$$

où pour tout k, D_ε est la TFB de la somme ci-dessus et est défini par :

$$D_\varepsilon(\cdot;k) = \imath\varepsilon\omega \sum_{n \notin I(\omega)}^{n \leq N} \frac{\left\langle \hat{f}(\cdot;k), \varphi_n(\cdot;k) \right\rangle}{(\lambda_n(k) - \omega^2)(\lambda_n(k) - \omega^2 - \imath\varepsilon\omega)} \varphi_n(\cdot;k)\, e^{\imath p k}$$

On utilise ensuite le fait que pour k, $\hat{f}(\cdot;k) \in H_k^{-r}$ et la remarque de la section 3.2.2.2 à propos de la caractérisation des espaces H_k^r à l'aide des éléments propres $(\lambda_n(k), \varphi_n(k))$, on en déduit :

$$\hat{f}(\cdot;k) \in H_k^{-r} \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(1+\lambda_n(k))^r} \Big| < \hat{f}(\cdot;k), \varphi_n(k) > \Big|^2 < +\infty$$

On en déduit que $D_\varepsilon(\cdot;k)$ est dans H_k^{4-r} et qu'il existe une constante $C(\omega)$ telle que

$$\|D_\varepsilon(\cdot;k)\|^2_{H_k^{4-r}} = C(\omega)\varepsilon^2 \sum_{n\notin I(\omega)}^{n\leq N} \frac{\Big| < \hat{f}(\cdot;k), \varphi_n(k) > \Big|^2}{|\lambda_n(k)-\omega^2|^2}(1+\lambda_n(k))^{4-r}$$

Il existe donc une nouvelle constante $C_1(\omega)$ dépendant seulement de ω telle que

$$\|D_\varepsilon(\cdot;k)\|_{H_k^{4-r}} \leq C(\omega)\varepsilon\|\hat{f}(\cdot;k)\|_{H_k^{-r}}$$

On conclut en utilisant les propriétés classiques de la TFB :

$$\left\| \sum_{n\notin I(\omega)}^{n\leq N} \sqrt{2\pi}\Big(U_{\varepsilon,n}(\omega;x+p,y) - U_{0,n}(\omega;x+p,y)\Big) \right\|_{L^2} \leq \|D_\varepsilon\|_{L^2(]-\pi,\pi[,L^2(\mathcal{C}))}$$
$$\leq C(\omega)\varepsilon\|\hat{f}\|_{L^2(]-\pi,\pi[,H_k^{-r})} \leq C(\omega)\varepsilon\|f\|_{H^{-r}}$$

et de même

$$\left\| \sum_{n\notin I(\omega)}^{n\leq N} \sqrt{2\pi}\Big(U_{\varepsilon,n}(\omega;x+p,y) - U_{0,n}(\omega;x+p,y)\Big) \right\|_{H^1} \leq \|D_\varepsilon\|_{L^2(]-\pi,\pi[,H^1(\mathcal{C}))}$$
$$\leq C(\omega)\varepsilon\|\hat{f}\|_{L^2(]-\pi,\pi[,H_k^{-r})} \leq C(\omega)\varepsilon\|f\|_{H^{-r}}$$

Cette estimation étant vraie pour tout N, on retrouve bien le résultat annoncé. ■

REMARQUE 3.2.24
On vient donc de démontrer que u_ε converge vers u dans tous les $H^1(\mathcal{C}_p)$ ce qui équivalent à u_ε converge vers u dans $H^1_{loc}(\Omega)$.

On cherche maintenant à savoir si la fonction u_0 est solution de l'équation de Helmholtz sans absorption :

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho_p}\triangle u_0 - \omega^2\, u_0 = f, & \text{dans } \Omega \\ B.C., & \text{sur } \partial\Omega = \{(x,y),\ y=0 \text{ ou } y=1\} \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_0)$$

dans le cas où nous supposons que f vérifie l'hypothèse (3.11) avec un $s \in]1/2,1]$ et $r \in [0,1]$.

THÉORÈME 3.2.25
Supposons que f vérifie l'hypothèse (3.11) *avec un $s \in]1/2,1]$ et $r \in [0,1]$. La fonction u_0 appartient à $H^1(\mathcal{C}_p,\triangle)$ pour tout p et est une solution au sens des distributions de l'équation de Helmholtz $(\mathcal{P}_0)$. De plus u_ε converge vers u_0 dans tous les $H^1(\mathcal{C}_p,\triangle)$ et il existe une constante $C(\omega)$ indépendante de p telle que*

$$\forall p\in\mathbb{Z}, \quad \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\mathcal{C}_p,\triangle)} \leq C(\omega)\,\varepsilon^{s-1/2}\|f\|_{H^{-r,s}(\Omega)}$$

■ **PREUVE:** La démonstration se décompose en 4 étapes.
(1) Convergence de u_ε vers u_0 dans $L^2(\mathcal{C}_p)$: démontré au théorème 3.2.23.

(2) Convergence de u_ε vers u_0 dans $H^1(\mathcal{C}_p)$: découlant aussi du théorème 3.2.23.

(3) u_0 est solution de l'équation de Helmholtz. Soit ψ une fonction C^∞ à support compact, K , on a

$$\begin{aligned} &\Big(-\frac{1}{\rho_p}\triangle u_\varepsilon - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)u_\varepsilon, \psi\Big) = (f,\psi) \\ \Leftrightarrow \quad &\Big(u_\varepsilon, -\frac{1}{\rho_p}\triangle\psi - (\omega^2+\imath\varepsilon\omega)\psi\Big) = (f,\psi). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Or

$$|\Big(u_\varepsilon,\psi\Big)| \leq \|u_\varepsilon\|_{L^2(K)}\|\psi\|_{L^2},$$

or u_ε converge dans chaque $L^2(K)$ donc est bornée dans chaque $L^2(K)$, il s'ensuit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\Big(u_\varepsilon,\psi\Big) = 0.$$

Par ailleurs

$$|\Big(u_\varepsilon - u, -\frac{1}{\rho_p}\triangle\psi - \omega^2\psi\Big)| \leq \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(K)}\|\frac{1}{\rho_p}\triangle\psi + \omega^2\psi\|_{L^2}.$$

Comme $\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(K)}$ tend vers 0, nous obtenons par passage à la limite dans (3.31)

$$\Big(-\frac{1}{\rho_p}\triangle u_0 - \omega^2 u_0, \psi\Big) = (f,\psi),$$

pour toute fonction C^∞ à support compact. On a donc au sens des distributions

$$-\frac{1}{\rho_p}\triangle u_0 - \omega^2 u_0 = f$$

(4) Convergence dans $H^1(\mathcal{C}_p,\triangle)$. On ne peut pas raisonner comme en (1) et (2). Nous allons alors utiliser les équations satisfaites au sens de distributions par u_0 et u_ε à savoir,

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho_p}\triangle u_\varepsilon - (\omega^2+\imath\varepsilon\omega)u_\varepsilon = f, \\ -\frac{1}{\rho_p}\triangle u_0 - \omega^2 u_0 = f \end{cases}$$

Par différence, on obtient pour $w_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$

$$-\frac{1}{\rho_p}\triangle w_\varepsilon - \omega^2 w_\varepsilon = \imath\varepsilon\omega u_\varepsilon.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on montre facilement que

$$-\frac{1}{\rho_p}\triangle(\varphi w_\varepsilon) = \psi_\varepsilon$$

où ψ_ε est donnée par

$$\psi_\varepsilon = \omega^2\varphi w_\varepsilon - \frac{1}{\rho_p}\triangle\varphi.w_\varepsilon - \frac{2}{\rho_p}\nabla\varphi.\nabla w_\varepsilon + \imath\varepsilon\omega\varphi u_\varepsilon$$

Les points (1) et (2) de la démonstration nous donnent alors que pour tout p, $\psi_\varepsilon \in L^2(\mathcal{C}_p)$ et qu'il existe une constante $C(\omega)$ indépendante de p telle que

$$\forall p\in\mathbb{Z}, \quad \|\psi_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{C}_p)} \leq C_1(\omega)\varepsilon^{s-1/2}\|f\|_{H^{-r,s}(\Omega)}$$

Soit $p\in\mathbb{Z}$, on choisit un $\varphi \geq 0$ tel que $\varphi = 1$ dans $\mathcal{C}_p$ et Supp $(\varphi) \in \mathcal{C}_{p-1}\cup\mathcal{C}_p\cup\mathcal{C}_{p+1}$, on a alors

$$\int_{\mathcal{C}_p}|\triangle w_\varepsilon|^2 \leq \int_{\mathcal{C}_{p-1}\cup\mathcal{C}_p\cup\mathcal{C}_{p+1}}|\triangle(\varphi w_\varepsilon)|^2 \leq \rho_+^2\int_{\mathcal{C}_{p-1}\cup\mathcal{C}_p\cup\mathcal{C}_{p+1}}|\psi_\varepsilon|^2 \leq C(\omega)\varepsilon^{2s-1}\|f\|^2_{H^{-r,s}(\Omega)}$$

Nous avons donc obtenu l'inégalité recherchée pour la norme L^2 sur $\triangle(u_\varepsilon - u_0)$. En utilisant le point (2), nous déduisons l'inégalité pour la norme $H^1(\mathcal{C}_p,\triangle)$ pour tout $p\in\mathbb{Z}$.

■

3.2.2.4 Application au passage à la limite pour R_ε et le problème de demi-guide

La première chose que nous aurions envie de faire avec ce résultat est de le généraliser à notre cas : c'est-à-dire le guide périodique localement perturbé (un défaut de la périodicité ou un obstacle). En effet, pour le milieu constant par exemple, on démontre le principe d'absorption limite pour le milieu parfaitement constant puis on utilise le résultat trouvé pour montrer le principe d'absorption limite dans le cas où le milieu constant est localement perturbé. Levendorskii dans [Levendorskiĭ (1998)] utilise exactement cette démarche pour montrer le principe d'absorption limite dans le cas du guide périodique localement perturbé.

Nous préférons utiliser notre méthode de construction d'opérateurs de NtD pour montrer le principe d'absorption limite. Voici la démarche :

1. Démontrer le principe d'absorption limite pour le problème de demi-guide :
   - La suite $(R_\varepsilon^\pm)$ a une limite $R^\pm$ dans un sens que nous préciserons,
   - la suite $(\Lambda_\varepsilon^\pm)$ a une limite $\Lambda^\pm$ dans un sens que nous préciserons.
2. Démontrer que le problème dans Ω^i avec conditions de Neumann-to-Dirichlet $\Lambda^\pm$ a bien une unique solution,
3. En déduire le principe d'absorption limite pour le problème posé dans tout le guide.

Nous explicitons la démarche et démontrons dans la suite les résultats importants.

Supposons ici, par soucis de clarté, que $a^+ = 0$. Soit $u_\varepsilon^+(\varphi)$ la solution dans Ω^+ du problème

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho_p}\triangle u_\varepsilon^+ - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)u_\varepsilon^+ = 0, & \text{dans } \Omega^+ \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^+}{\partial n} = \varphi, & \text{sur } \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^+}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega^+ \setminus \Gamma_0 \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_\varepsilon^+)$$

Pour un $\varepsilon > 0$, on sait que pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0)$, il existe une unique solution $u_\varepsilon^+(\varphi) \in H^1(\Omega^+)$ de $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$. On cherche à savoir si pour toute donnée φ la suite $(u_\varepsilon^+(\varphi))_\varepsilon$ converge quand ε tend vers 0, dans quel sens et enfin si sa limite est solution du problème précédent avec $\varepsilon = 0$.

On garde les mêmes hypothèses (H1) et (H2) sur ρ_p mais on va avoir besoin d'une hypothèse de symétrie supplémentaire :

$$(H3) \qquad \forall\,(x,y) \in \mathcal{C} \cap \left\{x \in]0, \frac{1}{2}[\right\}, \quad \rho_p(\frac{1}{2}+x, y) = \rho_p(\frac{1}{2}-x, y).$$

La fonction ρ_p est pour l'instant définie sur Ω^+, on la prolonge à tout Ω par périodicité. Remarquons que l'hypothèse (H3) nous donne que la fonction ρ_p est paire. Cette propriété nous permet

de définir un problème posé dans un guide équivalent.

PROPOSITION 3.2.26 (PROBLÈME DE GUIDE ÉQUIVALENT À $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$)
Soit pour tout $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0)$, si $u_\varepsilon^+(\varphi)$ est solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ alors $\tilde{u}_\varepsilon(\varphi)$ défini par :

$$\left|\begin{array}{lcll} \tilde{u}_\varepsilon(\varphi)(x,y) & = & u_\varepsilon^+(\varphi)(x,y), & (x,y) \in \Omega^+ \\ \tilde{u}_\varepsilon(\varphi)(-x,y) & = & u_\varepsilon^+(\varphi)(x,y), & (x,y) \in \Omega^+ \end{array}\right. \tag{3.32}$$

est l'unique solution H^1 du problème $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho_p}\triangle\tilde{u}_\varepsilon - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\tilde{u}_\varepsilon = 2\varphi\delta_{x=0}, & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial\tilde{u}_\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{$\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon$}$$

Réciproquement pour tout $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0)$, si $\tilde{u}_\varepsilon(\varphi)$ est l'unique solution H^1 du problème $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ alors $u_\varepsilon^+(\varphi) = \tilde{u}_\varepsilon(\varphi)\Big|_{\Omega^+}$ est solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$.

■ **PREUVE:** On remarque que $\tilde{u}_\varepsilon(\varphi)$ ainsi définie est telle que sa restriction à Ω^+ est H^1, de même que sa restriction à $\Omega^- = \{(x,y), \quad (-x,y) \in \Omega^+\}$. De plus, elle vérifie l'équation de Helmholtz dans Ω^+ et dans Ω^- du fait de la parité de la fonction ρ_p. Elle présente enfin un saut de sa dérivée normale :

$$\frac{\partial\tilde{u}_\varepsilon(\varphi)}{\partial x}\Big|_{x=0^+} = -\varphi \quad \text{et} \quad \frac{\partial\tilde{u}_\varepsilon(\varphi)}{\partial x}\Big|_{x=0^-} = \varphi$$

donc

$$\Big[\frac{\partial\tilde{u}_\varepsilon(\varphi)}{\partial x}\Big]_{\Gamma_0} = \frac{\partial\tilde{u}_\varepsilon(\varphi)}{\partial x}\Big|_{x=0^+} - \frac{\partial\tilde{u}_\varepsilon(\varphi)}{\partial x}\Big|_{x=0^-} = -2\varphi.$$

La fonction ainsi définie $\tilde{u}_\varepsilon(\varphi)$ vérifie donc la formulation variationnelle suivante

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad \int_\Omega \nabla\tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla v - \int_{\Gamma_0} 2\varphi v - \int_\Omega \rho_p(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\tilde{u}_\varepsilon\, v = 0$$

Réciproquement si $\tilde{u}_\varepsilon(\varphi)$ est l'unique solution du problème $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ alors elle est solution du problème équivalent

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho_p}\triangle\tilde{u}_\varepsilon - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\tilde{u}_\varepsilon = 0, & \text{dans } \Omega^+ \\ -\dfrac{1}{\rho_p}\triangle\tilde{u}_\varepsilon - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\tilde{u}_\varepsilon = 0, & \text{dans } \Omega^- \\ \dfrac{\partial\tilde{u}_\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \\ \Big[\dfrac{\partial\tilde{u}_\varepsilon}{\partial x}\Big]\Big|_{\Gamma_0} = -2\varphi, \end{cases}$$

De plus, on montre facilement du fait de la parité de ρ_p que $\tilde{u}_\varepsilon(x,y)$ et $\tilde{u}_\varepsilon(-x,y)$ sont solutions du même problème. Par unicité de la solution, on déduit la parité de $\tilde{u}_\varepsilon(\varphi)$. On a donc en particulier :

$$\frac{\partial\tilde{u}_\varepsilon}{\partial x}\Big|_{\Gamma_0} = -\varphi.$$

Ainsi la restriction de $\tilde{u}_\varepsilon(\varphi)$ vérifie le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$. ■

Nous pouvons maintenant utiliser le problème de guide équivalent pour en déduire le principe d'absorption limite pour le problème de demi-guide.

THÉORÈME 3.2.27
Soit $\omega^2 \notin \sigma_0$. Soit $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0)$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon^+(\varphi) - u^+(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C}_p,\triangle)} = 0$$

où $u^+(\varphi)$ est une solution $H^1_{loc}(\Omega^+)$ du problème

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho_p}\triangle u^+ - \omega^2\, u^+ = 0, & \text{dans } \Omega^+, \\ \dfrac{\partial u^+}{\partial n} = \varphi, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u^+}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega^+ \setminus \Gamma_0. \end{cases} \qquad (\mathcal{P}^+)$$

On a également pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$\|u_\varepsilon^+(\varphi) - u^+(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C}_p,\triangle)} \leq C(\omega)\sqrt{\varepsilon}\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)}$$

■ **PREUVE:** Soit la fonction $\tilde{u}_\varepsilon(\varphi)$ définie à partir de la fonction $u_\varepsilon^+(\varphi)$ dans (3.32) et solution du problème de guide $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$. Nous allons appliquer les théorèmes 3.2.23 et 3.2.25 à ce problème. En effet, la source $f = 2\varphi\delta_{x=0}$ est bien dans $H^{-1,s}(\Omega)$ avec $s \in]1/2, 1]$ pour toute donnée $\varphi \in L^2(\Gamma_0)$ et

$$\|2\varphi\delta_{x=0}\|_{H^{-1,s}(\Omega)} = \sup_{v\in H^{1,s}(\Omega)} \frac{\int_\Omega (1+x^2)^{s/2}\, 2\varphi\delta_{x=0} v}{\|v\|_{H^{1,s}}} = \sup_{v\in H^{1,s}(\Omega)} \frac{\int_{\Gamma_0} 2\varphi\, v}{\|v\|_{H^{1,s}}} \leq C\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)}$$

d'après le théorème de trace. On applique enfin les théorèmes 3.2.23 et 3.2.25 à $\tilde{u}_\varepsilon(\varphi)$ pour montrer qu'elle tend quand ε tend vers 0 vers la fonction $\tilde{u}(\varphi)$

$$\|\tilde{u}_\varepsilon(\varphi) - \tilde{u}(\varphi)\|_{H^1(\mathcal{C}_p,\triangle)} \leq C(\omega)\sqrt{\varepsilon}\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} \qquad (*)$$

$\tilde{u}(\varphi)$ étant solution H^1_{loc} du problème

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho_p}\triangle\tilde{u} - \omega^2\,\tilde{u} = 2\varphi\delta_{x=0}, & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (\widetilde{\mathcal{P}})$$

Etant limite de fonctions paires pour la variable x, elle est également paire pour la variable x et on montre que sa restriction à Ω^+, notée $u^+(\varphi)$ est solution $H^1_{loc}(\Omega^+)$ du problème $(\mathcal{P}^+)$. De l'estimation (*), on déduit l'estimation sur les fonctions $u_\varepsilon^+(\varphi)$ et $u^+(\varphi)$ pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0)$. ■

On déduit en utilisant le théorème de trace les deux corollaires suivants concernant le passage à la limite pour les opérateurs de propagation R_ε et les opérateurs NtD Λ_ε^+.

COROLLAIRE 3.2.28 (PASSAGE À LA LIMITE POUR LES OPÉRATEURS DE PROPAGATION)
Soit $\omega^2 \notin \sigma_0$. La famille des opérateurs de propagation $\{R_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ tend dans $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big)$, quand ε tend vers 0, vers l'opérateur R de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big)$ défini par :

$$R\,\varphi = -\frac{\partial}{\partial x}u^+(\varphi)\Big|_{\Gamma_1}.$$

Nous avons plus précisément l'existence d'une contante $C(\Omega)$ indépendante de φ telle que :

$$\forall\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0), \quad \|R_\varepsilon\,\varphi - R\,\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C(\omega)\varepsilon^{1/2}\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} \qquad (3.33)$$

COROLLAIRE 3.2.29 (PASSAGE À LA LIMITE POUR LES OPÉRATEURS NTD)
Soit $\omega^2 \notin \sigma_0$. La famille des opérateurs NtD $\{\Lambda_\varepsilon^+,\ \varepsilon > 0\}$ tend dans $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)\big)$, quand ε tend vers 0, vers l'opérateur Λ^+ de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)\big)$ défini par :

$$\Lambda^+ \varphi = u^+(\varphi)\Big|_{\Gamma_0}. \tag{3.34}$$

Nous avons plus précisément l'existence d'une contante $C(\omega)$ indépendante de φ telle que :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0), \quad \|\Lambda_\varepsilon^+ \varphi - \Lambda^+ \varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C(\omega)\varepsilon^{1/2}\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} \tag{3.35}$$

A condition que l'hypothèse (H3) soit satisfaite, nous venons donc de montrer le principe d'absorption limite pour le problème de demi-guide c'est-à-dire que pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, la famille de solutions $\{u_\varepsilon^+(\varphi),\ \varepsilon > 0\}$ des problèmes de Helmholtz dans Ω^+ avec absorption tend dans $H^1_{\text{loc}}(\Omega^+)$, quand ε tend vers 0, vers une solution $u^+(\varphi)$, solution $H^1_{\text{loc}}(\Omega^+)$ du problème $(\mathcal{P}^+)$. Nous avons de plus la convergence de la famille des opérateurs de propagation $\{R_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ pour la norme d'opérateurs de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big)$ et des opérateurs NtD $\{\Lambda_\varepsilon^+,\ \varepsilon > 0\}$ pour la norme d'opérateurs de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)\big)$.

Nous supposons maintenant, sauf mention contraire, que les hypothèses (H1), (H2) et (H3) sont satisfaites.

REMARQUE 3.2.30 (CAS DU DEMI-GUIDE POUR D'AUTRES CONDITIONS NON HOMOGÈNES)
Supposons que nous voulions calculer un opérateur de DtN plutôt qu'un opérateur NtD. Les problèmes de demi-guide que nous considérons changent donc par la condition non homogène de type Dirichlet sur Γ_0. La même démonstration s'applique à condition de définir un problème de guide équivalent. On peut alors montrer, que dans ce cas, la solution du problème équivalent est impaire et c'est sa trace qui comporte un saut en Γ_0.

3.2.3 A propos de l'équation caractéristique limite

Nous venons de montrer que la famille des opérateurs de propagation $\{R_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$, [1] tend vers un opérateur R pour la norme d'opérateurs de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big)$. Le théorème 2.2.5 permet de caractériser chacun des opérateurs R_ε, ce qui nous permet de caractériser par la suite, d'une part, l'unique solution $u_\varepsilon^+(\varphi)$ de $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ pour chaque donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ en utilisant les relations (2.24) et d'autre part, l'opérateur NtD Λ_ε^+ en utilisant la relation (2.25).

Cette section doit donc nous permettre de caractériser l'opérateur limite R. Nous allons voir que R est solution d'une équation caractéristique mais comme dans le cas mono-dimensionnel, il nous manquera un résultat d'unicité. La question sera alors de savoir si nous pouvons introduire une condition à l'image de la relation (1.36) dans le cas 1D qui traduit le fait que R est limite de la famille des opérateurs NtD caractéristiques $\{R_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ et qui, ajoutée à l'équation caractéristique, caractérise de manière unique l'opérateur R.

[1] chacune étant l'unique opérateur compact de rayon spectral strictement inférieur à 1 solution de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}_\varepsilon^R)$

Introduisons l'application

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big) & \to & \mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)\big) \\ X & \mapsto & \mathcal{T}(0,X) = T^{10}\,X^2 - (T^{00}+T^{11})\,X + T^{01} \end{array} \tag{3.36}$$

qui est bien définie d'après les propriétés des opérateurs NtD locaux.

Tout d'abord, l'équation caractéristique limite est la conséquence des passages à la limite des opérateurs NtD locaux (Corollaire 3.2.4) et des opérateurs de propagation (Corollaire 3.2.28).

THÉORÈME 3.2.31 (EQUATION CARACTÉRISTIQUE LIMITE)
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu} \cup \sigma_0$. L'opérateur R limite est un opérateur compact solution du problème de Riccati stationnaire

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } X \in \mathcal{K}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big), \\ \mathcal{T}(0,X) = 0. \end{array} \right. \tag{$\mathcal{E}^R$}$$

et qui satisfait la condition

$$\rho(X) \leq 1$$

où $\rho(X)$ est le rayon spectral de X.

■ **PREUVE:** La preuve de ce théorème découle directement du Corollaire 3.2.4 (si $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$, pour chaque $(i,j) \in \{0,1\}^2$, la famille des opérateurs NtD locaux $\{T^{ij}(\varepsilon),\ \varepsilon > 0\}$ tendent pour la norme d'opérateurs de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)\big)$ vers l'opérateur NtD local T^{ij} défini par (3.8)), du Corollaire 3.2.28 (si $\omega^2 \notin \sigma_0$, la famille des opérateurs de propagation $\{R_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ tend pour la norme d'opérateurs de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big)$ vers R) et enfin du Théorème 2.2.5 (pour chaque $\varepsilon > 0$, R_ε est l'unique opérateur compact de rayon spectral strictement inférieur à 1 solution de l'équation caractéristique ($\mathcal{E}_\varepsilon^R$)).

L'opérateur R est donc compact comme limite d'opérateurs compacts (l'ensemble des opérateurs compacts est un espace fermé dans l'espace $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big)$) et a un rayon spectral inférieur ou égal à 1 (du fait de la continuité de la fonction rayon spectrale, le rayon spectral de R_ε tend vers celui de R quand ε tend vers 0 [2].)

Enfin, du fait du corollaire 3.2.4, on montre facilement que :

$$\forall X \in \mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \|\mathcal{T}(\varepsilon,X) - \mathcal{T}(0,X)\| = 0$$

où $\mathcal{T}(\varepsilon,X)$ est défini dans (2.23) et $\mathcal{T}(0,X)$ dans (3.36) et où $\|\cdot\|$ ci dessus est la norme d'opérateurs de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)\big)$. Supposons maintenant que X_ε tend vers X pour la norme d'opérateurs de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big)$ alors

$$\mathcal{T}(\varepsilon,X_\varepsilon) - \mathcal{T}(0,X) = \mathcal{T}(\varepsilon,X_\varepsilon) - \mathcal{T}(0,X_\varepsilon) + T^{10}\big(X_\varepsilon^2 - X^2\big) - (T^{00}+T^{11})\big(X_\varepsilon - X\big)$$

Les opérateurs T^{ij} étant bornés et R_ε uniformément bornés, on obtient que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\mathcal{T}(\varepsilon,X_\varepsilon) - \mathcal{T}(0,X)\| = 0$$

[2] il suffit d'utiliser la caractérisation du rayon spectral

$$\forall X \in \mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big), \quad \rho(X) = \lim_{n\to+\infty} \|X^n\|^{1/n}$$

D'après le corollaire 3.2.28, R_ε tend vers R pour la norme d'opérateurs de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big)$; d'après le théorème 2.2.5, on a en plus

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathcal{T}(\varepsilon, R_\varepsilon) = 0.$$

D'après ces deux dernières relations, on en déduit que R est solution de l'équation de Riccati stationnaire. ■

Comme indiqué précédemment, il n'y a pas nécessairement unicité de la solution de l'équation caractéristique contrairement au cas avec absorption. C'était déjà le cas pour le problème monodimensionnel. Un exemple explicite en 2D, celui du guide homogène, montre même qu'il peut exister plusieurs opérateurs compacts de rayon spectral inférieur ou égal à 1 solution de l'équation de ricatti stationnaire ($\mathcal{E}^R$).

REMARQUE 3.2.32 (EXEMPLE DU GUIDE DROIT HOMOGÈNE)
Supposons que Ω^+ est un demi guide périodique droit, typiquement :

$$\Omega^+ = \mathbb{R}^+ \times [0,1]$$

et $\rho_p = \alpha^2$ ($\alpha > 0$) est une constante. Dans ce cas, pour tout $\varepsilon > 0$, les opérateurs NtD locaux $T^{ij}(\varepsilon)$ sont diagonalisables dans la même base orthonormée indépendante de ε :

$$\forall y \in [0,1], \quad \varphi_0(y) = 1, \quad \textit{et} \quad \forall n \geq 1, \quad \varphi_n(y) = \sqrt{2}\cos(n\pi y) \tag{3.37}$$

qui est la base de vecteurs propres de l'opérateur laplacien transverse avec conditions de Neumann homogène pour la valeur propre $\beta_n = n^2\pi^2$ (voir sections 2.1.2 et 3.1.2). En effet, en utilisant les mêmes calculs que ceux effectués dans le 1D (voir section 1.2.4), on trouve les relations suivantes :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} T^{10}(\varepsilon)\,\varphi_n = T^{01}(\varepsilon)\,\varphi_n = t_n^{10}(\varepsilon)\varphi_n \quad \textit{avec} \quad t_n^{10}(\varepsilon) = \dfrac{1}{\gamma_n(\varepsilon)\sinh\gamma_n(\varepsilon)} \\ T^{00}(\varepsilon)\,\varphi_n = T^{11}(\varepsilon)\,\varphi_n = t_n^{00}(\varepsilon)\varphi \quad \textit{avec} \quad t_n^{00}(\varepsilon) = \dfrac{\cosh\gamma_n(\varepsilon)}{\gamma_n(\varepsilon)\sinh\gamma_n(\varepsilon)} \end{cases}$$

où $\gamma_n(\varepsilon)$ est la solution de partie réelle positive de l'équation :

$$(\gamma_n(\varepsilon))^2 - \beta_n + \alpha^2(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\gamma_n(\varepsilon) = -\imath\sqrt{\alpha^2(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) - \beta_n}, \quad \textit{Im}\big(\sqrt{\alpha^2(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) - \beta_n}\big) > 0.$$

Résoudre l'équation caractéristique ($\mathcal{E}_\varepsilon^R$) revient à résoudre les équations du second degré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \textit{Trouver } r_n(\varepsilon) \textit{ tel que } |r_n(\varepsilon)| < 1 \textit{ et} \quad r_n(\varepsilon)^2 + 1 - 2r_n(\varepsilon)\cosh\gamma_n(\varepsilon) = 0.$$

Les deux racines de cette équation sont $r = \exp(\pm\gamma_n(\varepsilon))$, celle de module strictement inférieur à 1 étant donc $r_n(\varepsilon) = \exp(-\gamma_n(\varepsilon))$. Ainsi, l'opérateur $R(\varepsilon)$ défini par

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad R(\varepsilon)\,\varphi = \sum_{n\geq 1} \exp(-\gamma_n(\varepsilon))\big\langle \varphi_n, \varphi\big\rangle\varphi_n. \tag{3.38}$$

où $< \cdot,\cdot >$ représente le crochet de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$, est l'unique opérateur compact de rayon spectral strictement inférieur à 1 solution de l'équation ($\mathcal{E}_\varepsilon^R$).

Le passage à la limite dans ce cas est très simple puisque nous avons trouvé une base, indépendante de ε, qui diagonalise tous les opérateurs. On trouve ainsi que l'opérateur R limite des opérateurs $R(\varepsilon)$ est défini par :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad R\,\varphi = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\gamma_n}\big\langle \varphi_n, \varphi\big\rangle \varphi_n, \qquad \gamma_n = -\imath\sqrt{\alpha^2\omega^2 - n^2\pi^2}$$

avec $\gamma_n \in \mathbb{R}^+$ si $n \geq \alpha\omega/\pi$ et $\gamma_n \in \imath\mathbb{R}^-$ si $n < \alpha\omega/\pi$. On montre facilement que l'opérateur R est bien un opérateur compact de rayon spectral égal à 1 (pour $\omega > 0$) solution de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^R)$.

Nous pouvons également montrer facilement que tous les opérateurs de la forme :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad X\,\varphi = \sum_{n<\alpha\omega/\pi} e^{\pm\gamma_n}\big\langle \varphi_n, \varphi\big\rangle \varphi_n + \sum_{n\geq\alpha\omega/\pi} e^{-\gamma_n}\big\langle \varphi_n, \varphi\big\rangle \varphi_n \tag{3.39}$$

sont des opérateurs compacts de rayon spectral égal à 1 et également solutions de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^R)$. **Il n'y a donc pas unicité de la solution de rayon spectral inférieur ou égal à 1 de l'équation caractéristique**, *contrairement au cas avec absorption.*

A partir de l'opérateur R solution [3] nous pouvons construire en utilisant (2.9) *pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ une solution $u^+(\varphi) \in H^1_{loc}(\Omega^+)$ du problème de Helmholtz $(\mathcal{P}^+)$ qui est limite des solutions $u^+_\varepsilon(\varphi)$ des problèmes de Helmholtz avec absorption $(\mathcal{P}^+_\varepsilon)$. Cette solution, dont l'expression est donnée Section 3.1.2, est composée d'une infinité d'ondes évanescentes et d'une quantité finie d'ondes qui se propage dans le sens des x croissants, c'est-à-dire des ondes sortantes. Au contraire, à partir d'une autre solution X de la forme* (3.39)*, nous pourrions construire pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ une solution $u^+(\varphi) \in H^1_{loc}(\Omega^+)$ du problème de Helmholtz $(\mathcal{P}^+)$ qui est composée des mêmes ondes évanescentes mais d'ondes propagatives qui sont pour les unes sortantes pour les autres entrantes. Cette solution est, en fait, limite de solutions de l'équation de Helmholtz avec absorption $(\mathcal{P}^+_\varepsilon)$ qui sont exponentiellement croissantes à l'infini.*

Notre procédure de principe d'absorption limite permet donc de sélectionner l'opérateur R « physique » et de construire la solution de demi-guide correspondante. Cependant, cet opérateur n'est pas caractérisé de façon unique comme l'opérateur de rayon spectral inférieur ou égal à 1 solution de l'équation caractéristique. La non unicité de ce dernier problème est liée à la non unicité de la solution du problème de Helmholtz sans absorption.

Comme dans le cas avec absorption, pour se rapprocher du cas plus simple monodimensionnel, nous nous intéressons aux valeurs propres de l'opérateur R (s'il en possède) et cherchons un moyen de les caractériser directement. C'est l'objet de la proposition suivante.

PROPOSITION 3.2.33
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu} \cup \sigma_0$. Tout nombre complexe r est une valeur propre de l'opérateur R si et seule-

[3] qui ici est limite des opérateurs $R(\varepsilon)$

ment si r vérifie :

$$\left|\begin{array}{l} \textit{Ker}\left(\mathcal{T}(0,r)\right) \neq \{0\}, \\ |r| \leq 1, \\ \exists \varepsilon_0 \forall \varepsilon < \varepsilon_0,\ r(\varepsilon)\ \textit{valeur propre de}\ R(\varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon \to 0} r(\varepsilon) = r \end{array}\right. \tag{3.40}$$

On a de plus

$$\textit{Ker}\left(\mathcal{T}(0,r)\right) = \textit{Ker}\left(R - r\ \textit{Id}\right).$$

■ **PREUVE:** Supposons r une valeur propre de l'opérateur R alors il existe $\varphi_r \in H^{-1/2}(\Gamma)$ un vecteur propre associé non nul. On a donc

$$\mathcal{T}(0,R) = 0 \quad \Rightarrow \quad T^{10}\, R^2 \varphi_r - (T^{00} + T^{11})\, R\varphi_r + T^{01}\varphi_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}(0,r)\, \varphi_r = 0.$$

Et par définition comme le rayon spectral de R est inférieur ou égal à 1, on a $|r| \leq 1$. De plus comme R est limite pour la norme d'opérateur de $\varepsilon \mapsto R(\varepsilon)$ alors d'après la théorie des perturbations [Kato (1995)], il existe un voisinage autour de 0 (qui dépend de r) tel pour tout ε dans ce voisinage on peut construire une fonction $\varepsilon \mapsto r(\varepsilon)$ de valeurs propres de $R(\varepsilon)$ qui tendent vers r lorsque ε tend vers 0. Nous avons également montré que nécessairement $\varphi_r \in$ Ker $\left(\mathcal{T}(0,r)\right)$ et ceci est vrai pour tous les vecteurs propres associés à la valeur propre r.

Réciproquement, soit r vérifiant (3.40). Soit φ_r un vecteur non nul appartenant à Ker $\left(\mathcal{T}(0,r)\right)$.
On construit alors la fonction u_r cellule par cellule par

$$\forall j \geq 1, \quad u_r\Big|_{\mathcal{C}_j^+} = e^0(r^{j-1}\, \varphi_r) - e^1(r^j\, \varphi_r).$$

On montre, comme dans la preuve du théorème 2.2.5, que u_r est solution de l'équation de Helmholtz dans chaque cellule $\mathcal{C}_j^+$ que sa trace de Neumann sur chaque frontière Γ_j^+ est la même suivant que l'on prend sa définition sur $\mathcal{C}_j^+$ ou celle sur $\mathcal{C}_{j+1}^+$ et que r vérifiant Ker $\left(\mathcal{T}(0,r)\right) \neq \{0\}$, la trace de Dirichlet de u_r est la même sur chaque frontière Γ_j^+ suivant que l'on prend sa définition sur $\mathcal{C}_j^+$ ou sur $\mathcal{C}_{j+1}^+$. De plus, nous savons qu'il existe une fonction $\varepsilon \mapsto r(\varepsilon)$ de valeurs propres de $R(\varepsilon)$ pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ qui tend vers r. D'après la théorie des perturbations, il existe des vecteurs propres non nuls φ_ε associés qui tendent vers φ_r quand ε tend vers 0. On peut alors construire les fonctions $u_\varepsilon^+(\varphi_\varepsilon)$ les uniques solutions H^1 des problèmes de Helmholtz avec absorption $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$ cellule par cellule :

$$\forall j \geq 1, \quad u_\varepsilon^+(\varphi_\varepsilon)\Big|_{\mathcal{C}_j^+} = e^0(\varepsilon, r(\varepsilon)^{j-1}\, \varphi_\varepsilon) - e^1(\varepsilon, r(\varepsilon)^j\, \varphi_\varepsilon).$$

Comme $\varepsilon \mapsto r(\varepsilon)$ tend vers r et $\varepsilon \mapsto \varphi_\varepsilon$ tend vers φ_r, on montre d'après la Proposition 3.2.3 concernant le passage à la limite des problèmes de cellule que $u_\varepsilon^+(\varphi_\varepsilon)$ tend dans H^1_{loc} vers u_r. La fonction u_r est donc la solution du problème de Helmholtz « physique » pour la donnée φ_r. Par définition de l'opérateur R, on trouve

$$R\, \varphi_r = u_r\Big|_{\Gamma_1} = r\, \varphi_r$$

r est donc une valeur propre de R et φ_r qui par définition est dans Ker $\left(\mathcal{T}(0,r)\right)$ est également dans Ker $\left(R - r\ \text{Id}\right)$. ■

Toute valeur propre de R est donc, là encore, solution d'un problème aux valeurs propres quadratiques. Cependant, toute solution de ce problème n'est pas valeur propre de R. Pour l'instant, la seule façon de sélectionner les bonnes valeurs propres c'est de vérifier si elles sont bien limites de solutions d'équations aux valeurs propres quadratiques avec absorption (2.27). A l'image des résultats que nous avons établis dans le cas monodimensionnel ou dans le cas du problème de

Helmholtz avec absorption dans un guide, nous cherchons maintenant à montrer que les solutions de cette équation aux valeurs propres quadratiques se regroupent par paires de la forme $(r, 1/r)$.

Rappelons que pour pouvoir parler de l'opérateur R limite, nous avons supposé l'hypothèse (H3) satisfaite c'est-à-dire que la cellule de symétrie présente une symétrie particulière. Dans ce cas, comme pour la remarque 2.2.13, nous allons voir que le résultat évoqué ci-dessus est direct contrairement au cas général.

THÉORÈME 3.2.34
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu} \cup \sigma_0$. Pour tout r non nul, on a la propriété suivante :

$$\textit{Ker}\left(\mathcal{T}(0,r)\right) \neq \{0\} \quad \Rightarrow \quad \textit{Ker}\left(\mathcal{T}(0,\frac{1}{r})\right) \neq \{0\}$$

■ **PREUVE:** Par un simple argument de symétrie, il est facile de voir que

$$T^{00} = T^{11} \quad \text{et} \quad T^{01} = T^{10}.$$

L'équation aux valeurs propres (3.40) se récrit :

$$\exists \varphi \neq 0, \quad (r^2+1)T^{10}\varphi - 2rT^{00}\varphi = 0$$

soit encore

$$\exists \varphi \neq 0, \quad T^{00}\varphi = \frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})T^{10}\varphi$$

ce qui correspond à un problème aux valeurs propres classiques en $r + 1/r$. On voit donc que si r est solution alors $1/r$ est solution. ■

Ainsi, les solutions du problème aux valeurs propres quadratique :

$$\text{Ker}\left(\mathcal{T}(0,r)\right) \neq \{0\}$$

peuvent être classées par paires $(r, 1/r)$. Pour chaque paire, si une des valeurs propres est de module strictement inférieur à 1 alors il suffit de la sélectionner et de rejeter l'autre. Cependant, si elles sont toutes deux de module égal à 1 (elles sont donc de la forme $e^{\imath k}$ et $e^{-\imath k}$ avec $k \in]-\pi, \pi[$), il nous est impossible pour l'instant de les distinguer sauf à dire que la valeur propre recherchée est limite de solutions de module strictement inférieur à 1 des équations aux valeurs propres quadratiques avec absorption

$$\text{Ker}\left(\mathcal{T}(\varepsilon, r_\varepsilon)\right) \neq \{0\}.$$

La question que nous pouvons nous poser est de savoir s'il existe , comme dans le cas monodimensionnel, des conditions supplémentaires permettant de caractériser des « bonnes » solutions de l'équation aux valeurs propres quadratiques ou encore la caractérisation de la « bonne » solution de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^R)$.

Comme dans le cas monodimensionnel, il peut exister des fréquences pour lesquelles il n'est pas nécessaire de rajouter une condition ou encore pour lesquelles il existe un unique opérateur compact de rayon spectral inférieur ou égal à 1 solution de $(\mathcal{E}^R)$: c'est l'objet du lemme 3.2.35.

LEMME 3.2.35
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu} \cup \sigma_0$. Si $\omega^2 \in \sigma(A)$, il existe plusieurs opérateurs de rayon spectral inférieur ou égal à 1 solution de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^R)$.

Si $\omega^2 \notin \sigma(A)$, il existe un unique opérateur de rayon spectral strictement inférieur à 1 solution de $(\mathcal{E}^R)$.

■ **PREUVE:** Supposons $\omega^2 \in \sigma(A)$. Il existe alors, en réutilisant les notations de la section 3.2.2.2, un $k \in [-\pi, \pi]$ et un n telle que :

$$\lambda_n(k) = \omega^2$$

où $\lambda_n(k)$ est la n-ième valeur propre de $A(k)$. Du fait de la parité des fonctions $k \mapsto \lambda_n(k)$ établie Proposition 3.2.8, nous avons de plus

$$\lambda_n(k) = \lambda_n(-k) = \omega^2$$

Soit $e_n(k)$ et $e_n(-k)$ respectivement dans $H^2_k(\mathcal{C})$ et $H^2_{-k}(\mathcal{C})$ les vecteurs propres de $A(k)$ associés aux valeurs propres respectives $\lambda_n(k)$ et $\lambda_n(-k)$. On note

$$\varphi_n(\pm k) = \frac{\partial e_n(\pm k)}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_0}.$$

On montre facilement, par linéarité de l'équation et unicité de sa solution si $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$ que :

$$e_n(\pm k) = e^0(\varphi_n(\pm k)) - e^{\pm \imath k} e^1(\varphi_n(\pm k))$$

qu'on peut prolonger sur $\mathcal{C}_2$ puisque $e_n(\pm k)$ est dans $H^2_{\pm k}(\mathcal{C})$:

$$e_n(\pm k)\Big|_{\mathcal{C}_2} = e^{\pm \imath k}\, e^0(\varphi_n(\pm k)) - e^{2 \pm \imath k}\, e^1(\varphi_n(\pm k)).$$

On montre alors facilement que $e^{\pm \imath k}$ sont toutes deux solutions de l'équation aux valeurs propres quadratiques. On peut donc construire deux opérateurs R_+ et R_- solutions de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^R)$, de rayon spectral égal à 1 et ayant pour l'un $e^{\imath k}$ comme valeur propre pour l'autre $e^{-\imath k}$.

Supposons $\omega^2 \notin \sigma(A)$, dans ce cas pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ il existe une unique solution $u^+(\varphi)$ dans $H^1(\Omega^+)$ solution de $(\mathcal{P}^+)$ puisque l'opérateur $(A - \omega^2\,\mathrm{Id})$ est inversible. Cette solution est nécessairement la limite de la famille de solutions de $(\mathcal{P}^+_\varepsilon)$. L'opérateur R limite qui en découle est solution de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^R)$, son rayon spectral est même strictement inférieur à 1 puisque $u^+(\varphi)$ est dans $H^1(\Omega^+)$ pour tout φ. Il est unique : si il en existait un autre, on pourrait construire, en utilisant la même procédure que celle de la preuve du Théorème 2.2.5 concernant l'équation caractéristique avec absorption, une autre solution $H^1(\Omega^+)$ de $(\mathcal{P}^+)$, ce qui est impossible d'après l'unicité de la solution dans le cas où $\omega^2 \notin \sigma(A)$ ■

Nous allons donc étudier les deux cas de figure séparément dans les prochaines sections. Pour chacun des cas, nous expliciterons la « bonne » solution de l'équation de demi-guide $(\mathcal{P}^+)$ et l'opérateur NtD correspondant. Nous montrerons également que le problème intérieur est bien posé, sous certaines conditions, les arguments utilisés seront à chaque fois différents.

3.2.4 Réduction à un domaine borné quand $\omega^2 \notin \sigma(A)$

Dans ce cas de figure ω^2 est dans $\mathbb{R}^+ \setminus \sigma(A)$, elle est donc dans un des « gaps » du spectre de l'opérateur A. Alors que dans le cas monodimensionnel, le nombre de « gaps » est infini (sauf pour

le cas homogène), en dimensions supérieures, il est fini voire nul dans certains cas. Le résultat de cette section s'applique donc au mieux pour des fréquences contenues dans une union finie d'intervalles. Elle est, au pire, caduc dans les cas où $\sigma(A) = \mathbb{R}^+$.

A l'image de ce que nous avons fait dans le cas monodimensionnel, il n'y a aucune ambiguïté sur la définition de la solution « physique » du problème $(\mathcal{P})$. En effet, afin d'expliquer la démarche, plaçons nous dans le cas où $\rho = \rho_p$, c'est-à-dire le cas où il n'y a pas de perturbation du milieu mais seulement une source localisée f. La résolution du problème initial est alors directe : l'opérateur $(A - \omega^2 \,\mathrm{Id})^{-1}$ est un opérateur borné de $L^2(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$: le problème $(\mathcal{P})$ est bien posé et a une unique solution dans $H^2(\Omega)$. Cette unicité combinée aux mêmes arguments que dans le cas avec absorption assure que la solution de $(\mathcal{P}^i)$ est la restriction à Ω^i de la solution de $(\mathcal{P})$. Celle-ci peut donc être caractérisée à partir de la résolution d'un problème posé en domaine borné. Le principe d'absorption limite est dans ce cas là naturel.

Dans le cas général, il est possible d'adopter la même démarche pour l'opérateur perturbé $\tilde{A}$ sauf pour une quantité dénombrable de fréquences qui correspond au spectre discret de $\tilde{A}$ inclus dans l'ensemble résolvant de A. Il est évidemment légitime de retrouver le fait que, pour des fréquences de résonances, le problème est mal posé.

L'idée est donc de montrer que le problème posé en domaine borné $(\mathcal{P}^i)$ est bien posé à partir du caractère bien posé du problème en domaine non borné $(\mathcal{P})$. Encore faut-il pouvoir définir $(\mathcal{P}^i)$ en montrant que les coefficients NtD existent ou encore montrer que si le problème $(\mathcal{P})$ est bien posé, il en est de même pour le problème de demi-guide $(\mathcal{P}^+)$. Ceci est équivalent à montrer l'inclusion de l'ensemble résolvant de A dans l'ensemble résolvant de l'opérateur $A_{Neu,+}$ défini par

$$A_{Neu,+} = -\frac{1}{\rho_p}\triangle, \qquad D(A_{Neu,+}) = \left\{u^+ \in H^1(\Omega^+), \quad \frac{\partial u^+}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega^+} = 0\right\}.$$

Ce résultat n'est pas évident a priori. Remarquons que l'égalité des ensembles résolvants est évidente dans le cas où ρ_p est symétrique par rapport au milieu de la cellule. C'est exactement l'hypothèse (H3). Ainsi, dans notre cas, si le problème de guide est bien posé, il en est de même pour le problème de demi-guide.[4]

Nous avons déjà montré en Section 3.2.2.4 que, pour chaque donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, la famille $\{u_\varepsilon^+(\varphi),\ \varepsilon > 0\}$ tend dans $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega^+)$ vers $u^+(\varphi)$ une solution H^1_{loc} de $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$, que la fonction $\varepsilon \mapsto R(\varepsilon)$ des opérateurs de propagation tend vers un opérateur R une des solutions de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^R)$ et enfin que la famille $\{\Lambda_\varepsilon^+,\ \varepsilon > 0\}$ des opérateurs NtD tend vers Λ^+. Le principe d'absorption limite est donc déjà établi. Le théorème suivant nous donne une caractérisation de ces limites.

THÉORÈME 3.2.36 (CARACTÉRISATION DE LA BONNE SOLUTION DE $(\mathcal{P}^+)$ QUAND $\omega^2 \notin \sigma(A)$)
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu} \cup \sigma_0$. La fonction $\varepsilon \mapsto R(\varepsilon)$ tend pour la norme d'opérateurs $\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma))$, quand ε tend vers 0^+, vers l'unique solution R de rayon spectral strictement inférieur à 1 de $(\mathcal{E}^R)$.

[4] Dans le cas des milieux périodiques généraux, l'inclusion des ensembles résolvants n'est pas évidente « a priori ». Dans le cas 1D, le résultat est vrai, nous avons donné une idée de la preuve dans la Section 1.4.3 mais elle utilise des résultats donnés par la méthode de matrice de transfert qui ne s'étendent pas au cas des dimensions supérieures.

Pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, la famille $\{u_\varepsilon^+(\varphi),\ \varepsilon > 0\}$ tend dans H^1_{loc} vers l'unique solution $u^+(\varphi) \in H^1(\Omega^+)$ du problème $(\mathcal{P}^+)$, caractérisée par :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma),\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u^+(\varphi)\Big|_{\mathcal{C}_n^+} = e^0(R^{n-1}\,\varphi) - e^1(R^n\,\varphi), \tag{3.41}$$

où e^0 et e^1 sont les solutions des problèmes de cellule sans absorption (3.4)-(3.5)*. La famille d'opérateurs NtD $\{\Lambda_\varepsilon^+,\ \varepsilon > 0\}$ tend vers l'opérateur Λ^+ caractérisé par :*

$$\Lambda^+ = T^{00}\ - T^{10}\,R \tag{3.42}$$

où T^{00} et T^{10} sont des opérateurs NtD locaux définis (3.8)*. L'opérateur NtD Λ^+ est inversible de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$, son inverse étant l'opérateur DtN, noté $\tilde{\Lambda}^+$, limite de la famille d'opérateurs DtN $\{\tilde{\Lambda}_\varepsilon^+,\ \varepsilon > 0\}$, définis Proposition 2.2.9, pour la norme d'opérateur $\mathcal{L}\big(H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma)\big)$. Ces deux opérateurs vérifient de plus*

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad Im\left\langle \Lambda^+\,\varphi, \varphi\right\rangle = 0, \quad et\, \forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad Im\left\langle \tilde{\Lambda}^+\,\varphi, \varphi\right\rangle = 0. \tag{3.43}$$

où $< \cdot, \cdot >$ est le crochet de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$.

■ **PREUVE:** En ce qui concerne l'unicité de la solution de $(\mathcal{E}^R)$ ayant un rayon spectral strictement inférieur à 1, nous renvoyons le lecteur à la preuve du Lemme 3.2.35.

Pour la caractérisation de $u^+(\varphi)$, on récrit d'abord celle de u_ε^+ :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma),\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_\varepsilon^+(\varphi)\Big|_{\mathcal{C}_n^+} = e^0(\varepsilon, R_\varepsilon^{n-1}\,\varphi) - e^1(R_\varepsilon^n\,\varphi),$$

et on utilise le résultat précédent et la Proposition 3.2.3 concernant la convergence H^1 des solutions des problèmes de cellule avec absorption $e^0(\varepsilon,\cdot)$ et $e^1(\varepsilon,\cdot)$ vers e^0 et e^1. On en déduit que $u_\varepsilon^+(\varphi)$ tend pour chaque φ en norme H^1_{loc} vers la fonction caractérisée par le membre à droite de l'égalité de (3.41). Par unicité de la limite, on en déduit la caractérisation de $u^+(\varphi)$. Nous savons déjà (Théorème 3.2.27) que $u^+(\varphi)$ est une des solutions H^1_{loc} de $(\mathcal{P}^+)$. Pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, on montre qu'elle est même H^1. Comme R est de rayon spectral strictement inférieur à 1, en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 2.2.5 concernant l'équation caractéristique avec absorption, on montre que cela implique que $u^+(\varphi)$ est dans H^1.

Cette caractérisation pour $n = 1$ et la définition de Λ^+ (3.34) permettent la caractérisation de l'opérateur NtD. Pour son inversibilité, introduisons pour tout $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$, $v^+(\psi)$ l'unique solution H^1 du problème de helmholtz sans absorption dans Ω^+ qui satisfait des conditions de Neumann homogènes sur $\partial\Omega^+ \setminus \Gamma_0^+$ et la condition sur Γ_0^+

$$v^+(\psi)\Big|_{\Gamma_0^+} = \psi.$$

Elle est unique et elle est dans $H^1(\Omega^+)$ toujours car $\omega^2 \notin \sigma(A)$. On montre en utilisant les mêmes arguments que pour $u_\varepsilon^+(\varphi)$ et $u^+(\varphi)$ Théorème 3.2.27 que $v^+(\psi)$ est limite dans H^1_{loc} de $v_\varepsilon^+(\psi)$ définis Proposition 2.2.9. Soit $\tilde{\Lambda}^+$ de $\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma))$ l'opérateur défini par :

$$\tilde{\Lambda}^+ \ :\ \psi \mapsto -\frac{\partial}{\partial x} v^+(\psi)\Big|_{\Gamma_0^+}$$

C'est l'opérateur DtN, limite des opérateurs DtN $\tilde{\Lambda}_\varepsilon^+$ définis Proposition 2.2.9 d'après les mêmes arguments que le corollaire 3.2.29 concernant les opérateurs NtD. On montre de même que c'est bien l'inverse de Λ^+. Enfin, pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, la formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P}^+)$ avec $u^+(\varphi)$ comme fonction test donne :

$$\int_{\Omega^+} |\nabla u^+(\varphi)|^2 - \rho_p\omega^2 |u^+(\varphi)|^2 = \int_{\Gamma_0^+} \varphi\, \overline{\Lambda^+\varphi}$$

En prenant pour tout $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$, la formulation variationnelle du problème dont $v^+(\psi)$ est solution avec $v^+(\psi)$ comme fonction test, on obtient le résultat pour $\tilde{\Lambda}^+$. ■

REMARQUE 3.2.37
Ce qui est sous entendu dans ce théorème, c'est que quand ω^2 n'est ni dans le spectre de A, ni dans l'ensemble des fréquences propres du problème de Neumann, alors le problème de demi-guide est bien posé. Comme dans le cas 1D, ce résultat est évident quand ρ_p vérifie l'hypothèse de symétrie (H3). Contrairement au cas 1D (voir Proposition 1.4.15), nous ne savons pas si ce résultat est vrai dans le cas général.

Le théorème précédent s'extrapole de manière évidente à la caractérisation de $u^-(\varphi)$ pour toute donnée φ et Λ^-.

REMARQUE 3.2.38
Si les milieux de part et d'autre du « défaut » correspondent au même milieu périodique, les deux opérateurs NtD Λ^+ et Λ^- sont égaux ainsi que les opérateurs de propagation R^+ et R^- et les solutions de demi-guide u^+ et u^-.

Dans le cas où les milieux de part et d'autre du défaut sont différents, les opérateurs à coefficients périodiques correspondants sont différents et donc leur spectre également. Dans ce cas, si la fréquence est telle que ω^2 n'est ni dans le spectre de l'un ni dans le spectre de l'autre, le théorème 3.2.36 s'applique pour la résolution du problème de demi-guide à droite et à gauche et nous pouvons utiliser le théorème suivant concernant le caractère bien posé du problème intérieur. Sinon, nous ne pouvons utiliser ce qui va suivre et il faudra utiliser la méthode de caractérisation de la bonne solution développée à la section suivante.

Nous pouvons maintenant aborder la question du caractère bien posé du problème $(\mathcal{P}^i)$. Elle est évidemment liée au caractère bien posé du problème $(\mathcal{P})$ et exclut donc les fréquences propres de l'opérateur $\tilde{A}$.

THÉORÈME 3.2.39 (CARACTÈRE BIEN POSÉ DU PROBLÈME $(\mathcal{P}^i)$)
Si $\omega^2 \notin \sigma(\tilde{A})$, le problème $(\mathcal{P}^i)$ a une unique solution dans $H^1(\Omega^i)$.

■ **PREUVE:** Le problème $(\mathcal{P})$ est bien posé, il a donc une unique solution u dans $H^2(\mathbb{R})$. La restriction de u à Ω^i est donc solution du problème $(\mathcal{P}^i)$. Montrons maintenant que ce problème a une unique solution. Soit v^i une solution non nulle du problème :

$$\left|\begin{array}{rcl} -\triangle v^i - \rho\,\omega^2\,v^i &=& 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^i \\ v^i - \Lambda^- \dfrac{\partial v^i}{\partial x} &=& 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^- \\ v^i + \Lambda^+ \dfrac{\partial v^i}{\partial x} &=& 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_0^+ \end{array}\right.$$

avec Λ^- et Λ^+ vérifiant la propriété (3.43). Nous ne pouvons pas conclure directement sur le caractère bien posé du problème puisque ici, contrairement au cas avec absorption, les produits de dualité intervenant dans les propriétés (3.43) sont réels, de signe qui plus est difficile à déterminer. Par contre, on peut

conclure en utilisant le caractère bien posé du problème $(\mathcal{P})$ en construisant une fonction v de $H^1(\Omega)$ par :

$$\left|\begin{array}{rcl} v\big|_{\Omega^i} & = & v^i \\ v\big|_{\Omega^+} & = & u^+(\varphi^+), \quad \text{avec } \varphi^+ = -\dfrac{\partial v^i}{\partial x}\Big|_{\Gamma_0^+} \\ v\big|_{\Omega^-} & = & u^-(\varphi^-), \quad \text{avec } \varphi^- = +\dfrac{\partial v^i}{\partial x}\Big|_{\Gamma_0^-} \end{array}\right.$$

qui est solution du problème $(\mathcal{P})$ homogène ($f = 0$). Ce problème étant bien posé puisque $\omega^2 \notin \sigma(\tilde{A})$, $v = 0$ et en particulier $v^i = 0$. Le problème $(\mathcal{P}^i)$ est donc bien posé. ■

REMARQUE 3.2.40
Le problème $(\mathcal{P}^i)$ est bien posé dans le cas $\omega^2 \notin \Sigma(A)$ à condition que $\omega^2 \notin \Sigma(\tilde{A})$. Comme les spectres essentiels de A et $\tilde{A}$ coïncident, nous avons exclu au plus un ensemble discret de fréquences (ensemble dénombrable avec pour seul point d'accumulation l'infini).

Nous avons donc montré Théorème 3.2.39 que le problème $(\mathcal{P}^i)$ avec les conditions de NtD est bien posé à condition que la fréquence ω soit telle que $\omega^2 \in \sigma(\tilde{A})$. Pour démontrer complètement le principe d'absorption limite, il faut montrer que l'unique solution u^i du problème $(\mathcal{P}^i)$, quand il est bien posé, est bien la limite, dans un certain sens, quand ε tend vers 0 de la famille u_ε^i, solutions des problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$.

THÉORÈME 3.2.41
Pour $\omega^2 \notin \sigma(\tilde{A})$, l'unique solution u^i du problème $(\mathcal{P}^i)$ vérifie

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon^i - u^i\|_{H^1(\Omega^i)} = 0.$$

■ **PREUVE:** La démonstration comporte plusieurs étapes et elle est semblable à celle du théorème 1.4.21 :

(1) Supposons tout d'abord qu'il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$\|u_\varepsilon^i\|_{H^1(\Omega^i)} \leq C. \tag{3.44}$$

On peut donc extraire une sous suite, encore notée u_ε^i, telle que u_ε^i converge faiblement vers u_0^i dans $H^1(\Omega^i)$. On va montrer que u_0^i est solution de $(\mathcal{P}^i)$ et donc que $u_0^i = u^i$ par unicité de la solution et donc que toute la suite converge. Soit $v \in H^1(\Omega^i)$. Il est clair que

$$\int_{\Omega^i} \nabla u_\varepsilon^i \, \overline{\nabla v} \; - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \int_{\Omega^i} \rho u_\varepsilon^i \, \overline{v} \; \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \; \int_{\Omega^i} \nabla u_0^i \, \overline{\nabla v} - \omega^2 \int_{\Omega^i} \rho u_0^i \overline{v}$$

et

$$\int_{\Gamma_0^+} \tilde{\Lambda}_\varepsilon^+ u_\varepsilon^i \, \overline{v} + \int_{\Gamma_0^-} \tilde{\Lambda}_\varepsilon^- u_\varepsilon^i \, \overline{v} \; \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \; \int_{\Gamma_0^+} \tilde{\Lambda}^+ u_0^i \, \overline{v} + \int_{\Gamma_0^-} \tilde{\Lambda}^- u_0^i \, \overline{v}$$

puisque si u_ε^i converge faiblement dans H^1 alors sa traces sur $\Gamma_0^\pm$ converge dans $H^{1/2}(\Gamma_0^\pm)$. u_0^i est bien une solution H^1 de $(\mathcal{P}^i)$, c'est donc nécessairement u^i. Montrons maintenant que u_ε^i converge fortement dans $H^1(\Omega^i)$ vers u^i. Soit $e_\varepsilon = u_\varepsilon^i - u^i$, alors pour tout $v \in H^1(\Omega^i)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^i} \left[\nabla e_\varepsilon \, \overline{\nabla v} - \omega^2 \rho e_\varepsilon \overline{v} - \imath\varepsilon\omega\rho u_\varepsilon^i \overline{v}\right] + \int_{\Gamma_0^+} \tilde{\Lambda}_\varepsilon^+ e_\varepsilon \, \overline{v} + \int_{\Gamma_0^-} \tilde{\Lambda}_\varepsilon^- e_\varepsilon \, \overline{v} \\ + \int_{\Gamma_0^+} \left(\tilde{\Lambda}_\varepsilon^+ - \tilde{\Lambda}^+\right) u^i \, \overline{v} + \int_{\Gamma_0^-} \left(\tilde{\Lambda}_\varepsilon^- - \tilde{\Lambda}^-\right) u^i \, \overline{v} = 0 \end{aligned}$$

On prend $v = e_\varepsilon$. On sait que $e_\varepsilon \rightharpoonup 0$ dans $H^1(\Omega^i)$ et $e_\varepsilon \to 0$ dans $L^2(\Omega^i)$. On trouve donc que :

$$\int_{\Omega^i} |\nabla e_\varepsilon|^2 = 0.$$

(2) Prouvons maintenant l'inégalité (3.44) utilisée dans l'étape (1) et montrons qu'il existe une constante C indépendante de ε telle que :

$$\|u_\varepsilon^i\|_{H^1(\Omega^i)} \leq C.$$

On le fait par l'absurde. On suppose qu'il existe une sous suite (notée encore u_ε^i) telle que $\|u_\varepsilon^i\|_{H^1(\Omega^i)} \to +\infty$ quand $\varepsilon \to 0$ et on pose

$$\tilde{u}_\varepsilon^i = \frac{u_\varepsilon^i}{\|u_\varepsilon^i\|_{H^1(\Omega^i)}}$$

On a évidemment que $\tilde{u}_\varepsilon^i$ est de norme 1 pour tout ε et est solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ pour le terme source

$$f_\varepsilon = \frac{f}{\|u_\varepsilon^i\|_{H^1(\Omega^i)}}$$

On peut utiliser les mêmes arguments que dans l'étape (1) à $\tilde{u}_\varepsilon^i$ pour prouver qu'elle converge dans $H^1(\Omega^i)$ vers $\tilde{u}^i$ solution du problème $(\mathcal{P}^i)$ avec $f = 0$. Ce problème étant bien posé, on a nécessairement $\tilde{u}^i = 0$. On aboutit donc à une contradiction :

$$\tilde{u}_\varepsilon^i \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0 \quad \text{et} \quad \|u_\varepsilon^i\|_{H^1(\Omega^i)} = 1.$$

Ceci achève la démonstration. ■

Les théorèmes 3.2.36, 3.2.39 et 3.2.41 nous permettent de définir de manière unique la solution « physique » du problème de Helmholtz $(\mathcal{P})$, limite des solutions des problèmes de Helmholtz avec absorption $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ dans le cas où $\omega^2 \notin \sigma_{Neu} \cup \sigma(\tilde{A})$ par :

PROPOSITION 3.2.42 (« BONNE » SOLUTION DE $(\mathcal{P})$ QUAND $\omega^2 \notin \sigma(\tilde{A})$)
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$. Soit u définie par :

$$\left| \begin{array}{ll} u = u^i, & \text{dans } \Omega^i \\ u = u^+\left(\varphi^+\right), & \text{dans } \Omega^+, \quad \text{avec } \varphi^+ = -\dfrac{\partial u^i}{\partial x}\Big|_{\Gamma_0^+} \\ u = u^-\left(\varphi^-\right), & \text{dans } \Omega^-, \quad \text{avec } \varphi^- = +\dfrac{\partial u^i}{\partial x}\Big|_{\Gamma_0^-} \end{array} \right.$$

où u^i est l'unique solution du problème $(\mathcal{P}^i)$, u^+ est l'unique solution de $\mathcal{P}^+$ et u^- est l'unique solution de $\mathcal{P}^-$. Alors u est la solution « physique » u du problème $(\mathcal{P})$: elle est solution de $(\mathcal{P})$ et limite dans H^1_{loc} de la famille u_ε, solutions des problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, quand ε tend vers 0.

3.2.5 Réduction à un domaine borné quand $\omega^2 \in \sigma(A)$

Pour le second cas de figure, l'étude est plus délicate. En effet, d'après le lemme 3.2.35, c'est la situation où l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^R)$ peut avoir plusieurs solutions de rayon spectral inférieur ou égal à 1. Cela ne suffit de dire que R est une solution de $(\mathcal{E}^R)$ de rayon spectral inférieur ou égal à 1 pour réussir à le caractériser de manière unique. Il faut rajouter des conditions supplémentaires pour déterminer la « bonne » limite quand $\varepsilon \searrow 0$ par valeurs positives.

Nous allons bien sûr utiliser les mêmes idées que dans le cas 1D 1.4.4 et voir comment elles pourraient s'appliquer. Nous allons commencer par les rappeler en les exploitant pour le cas homogène, pour lesquels des calculs explicites peuvent être effectués.

3.2.5.1 Le cas particulier du guide droit homogène

Reprenons le cas particulier où $\rho_p = \alpha^2$ avec $(\alpha > 0)$ dont nous avons déjà donné un certain nombre de résultats Remarque 3.2.32. Rappelons que toutes les solutions de la forme

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad X\,\varphi = \sum_{n<\alpha\omega/\pi} e^{\pm\gamma_n}\big\langle \varphi_n, \varphi\big\rangle \varphi_n + \sum_{n\geq\alpha\omega/\pi} e^{-\gamma_n}\big\langle \varphi_n, \varphi\big\rangle \varphi_n, \quad \gamma_n = -\imath\sqrt{\alpha^2\omega^2 - n^2\pi^2}$$

où $<\cdot,\cdot>$ est le crochet de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$ et où la BON $\{\varphi_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ est définie par (3.37), sont des opérateurs de rayon spectral inférieur ou égal à 1 solutions de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^R)$. On rappelle que nous cherchons à caractériser la « bonne » solution R qui dans ce cas est donnée par

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad R\,\varphi = \sum_{n\in\mathbb{N}} r_n\big\langle \varphi_n, \varphi\big\rangle \varphi_n, \qquad r_n = \exp(-\gamma_n)$$

et qui est limite des opérateurs $R(\varepsilon)$ unique solution de rayon spectral strictement inférieur à 1 de $(\mathcal{E}^R_\varepsilon)$ dont l'expression est

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad R(\varepsilon)\,\varphi = \sum_{n\geq 1} r_n(\varepsilon)\big\langle \varphi_n, \varphi\big\rangle \varphi_n, \qquad r_n(\varepsilon) = \exp(-\gamma_n(\varepsilon))$$

où

$$\gamma_n(\varepsilon) = -\imath\sqrt{\alpha^2(\omega^2+\imath\varepsilon\omega) - \beta_n}, \quad \mathrm{Im}\big(\sqrt{\alpha^2(\omega^2+\imath\varepsilon\omega) - \beta_n}\big) > 0.$$

Notons qu'il y a une ambiguïté sur la définition de la « bonne » solution seulement sur les valeurs propres de module égal à 1. Posons

$$\forall n < \frac{\alpha\omega}{\pi}, \quad r_n^+(\varepsilon) = \exp(-\gamma_n(\varepsilon)) \quad \text{et} \quad r_n^-(\varepsilon) = \exp(+\gamma(\varepsilon)).$$

Comme dans le cas 1D, Section 1.4.4.1, on montre que

$$\forall n < \frac{\alpha\omega}{\pi}, \quad \mathrm{Re}\big(\frac{dr_n^+}{d\varepsilon}(0)\overline{r_n^+(0)}\big) < 0, \tag{3.45}$$

alors que

$$\forall n < \frac{\alpha\omega}{\pi}, \quad \mathrm{Re}\big(\frac{dr_n^-}{d\varepsilon}(0)\overline{r_n^-(0)}\big) > 0.$$

Les condition (3.45) semblent donc, une fois encore, les bonnes conditions pour caractériser la solution de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^R)$ comme limite de $\varepsilon \mapsto R(\varepsilon)$, dans le cas général.

Une des difficultés qui n'apparaît pas dans le cas 1d ou dans le cas du guide droit homogène est que nous ne savons pas si l'opérateur R et mêmes les opérateurs $R(\varepsilon)$ sont diagonalisables. Il paraît donc plus difficile de montrer qu'une condition sur les valeurs propres de l'opérateur R suffise.

Notons que si ω est de la forme $n_0\pi/\alpha$ alors, dans ce cas particulier, la fonction $\varepsilon \mapsto r_{n_0}(\varepsilon)$ n'est pas différentiable en 0. Pour utiliser un critère faisant intervenir la dérivée des valeurs propres, il paraît important d'exclure une quantité dénombrable de fréquences. Notons néanmoins que dans ce cas la valeur propre $r_{n_0} = (r_{n_0})^{-1} = 1$, il n'y a donc aucune ambiguïté pour sélectionner la bonne valeur propre.

3.2.5.2 Lien avec le spectre de l'opérateur A

Nous allons tenter dans les deux sections qui suivent de généraliser la condition présentée avec le guide droit homogène qui correspond à un cas très particulier puisque tous les opérateurs étant diagonalisables dans la même base, résoudre $(\mathcal{E}^R)$ correspond alors à résoudre une famille d'équations du 2nd degré.

Le critère donné dans la section précédente faisant intervenir les valeurs propres des opérateurs $R(\varepsilon)$ et de l'opérateur R, il soulève une première question épineuse : dans le cas général, ces opérateurs ont-ils au moins une valeur propre ? De plus, bien qu'il semble naturel d'utiliser le problème aux valeurs propres quadratiques pour déterminer les valeurs propres de R quand elles existent, rien ne nous assure que dans un couple $(r, 1/r)$ de solutions du problème aux valeurs propres quadratiques (3.40), il y en ait une qui soit bien valeur propre de l'opérateur R. Il faut en plus montrer que l'une des deux est bien limite de valeurs propres des opérateurs $R(\varepsilon)$ (voir Proposition 3.2.33).

Afin d'outrepasser ces difficultés, la seule méthode que nous avons trouvée est d'utiliser les propriétés spectrales de l'opérateur à coefficients périodiques. Nous rappelons que dans le cas 1D, l'équation caractéristique étant une simple équation du second degré, nous avions établi et justifié le critère puis établi un lien entre celui-ci et les courbes de dispersion $k \mapsto \lambda_n(k)$. Dans le cas du guide, il nous semble plus difficile de justifier directement le critère puisque nous n'avons pas montré que les opérateurs R et $R(\varepsilon)$ sont diagonalisables. Nous avons donc pensé à utiliser les propriétés spectrales de l'opérateur directement pour justifier la caractérisation de l'opérateur R recherché.

Nous renvoyons le lecteur à la section 3.2.2.2 pour l'étude du spectre de l'opérateur A et ses propriétés. Nous rappelons avoir notamment introduit dans cette section la famille d'opérateurs $A(k)$ (voir leur définition (3.12)) ainsi que son spectre discret $\big(\lambda_n(k)\big)_n$ (voir (3.13))

Nous supposons dans toute cette section que ω^2 est dans le spectre de A. Introduisons donc les ensembles suivants en utilisant les mêmes notations que celles de la section 3.2.2.3 :

$$I(\omega) = \{n \in \mathbb{N},\ \exists k \in]-\pi, \pi[, \quad \lambda_n(k) = \omega^2\}$$

d'après la proposition 3.2.16, $I(\omega)$ est fini et

$$\forall n \in I(\omega), \quad I(\omega, n) = \{\xi \in]-\pi, \pi[, \quad \lambda_n(\xi) = \omega^2\},$$

d'après le lemme 3.2.17, pour tout $n \in I(\omega)$, l'ensemble $I(\omega, n)$ est également fini. Pour tout $\omega \in \sigma(A)$, il existe donc une quantité finie de relations de dispersion :

$$\forall n \in I(\omega),\ \forall k \in I(\omega, n), \quad \omega = \sqrt{\lambda_n(k)}$$

On appelle $e_n(k)$ un vecteur propre de $A(k)$ associé à la valeur propre $\lambda_n(k)$. Une des propriétés des bandes spectrales développées Proposition 3.2.8 est que chaque valeur propre $\lambda_n(k)$ est une fonction continue et paire de la variable $k \in [-\pi, \pi]$. Cela signifie que

$$\forall n \in I(\omega), \quad k \in I(\omega, n) \Leftrightarrow -k \in I(\omega, n).$$

Cette implication nous rappelle un peu le résultat du Théorème 3.2.34 concernant l'équation aux valeurs propres quadratiques : si r est solution alors son inverse l'est également. Il existe en fait un lien plus fort entre les ensembles $I(\omega,n)$ pour $n \in I(\omega)$ et l'ensemble des solutions de module égal à 1 du problème aux valeurs propres quadratiques (3.40).

PROPOSITION 3.2.43
Soit $\omega \notin \sigma_{Neu}$.

$$\Big\{r,\ |r|=1,\ \textit{Ker}\big(\mathcal{T}(0,r)\big) \neq 0\Big\} = \bigcup_{n\in I(\omega)} \Big\{e^{\imath k},\ k \in I(\omega,n)\Big\}$$

■ **PREUVE:** Supposons r de module égal à 1 tel que $\mathrm{Ker}\big(\mathcal{T}(0,r)\big) \neq 0\Big\}$, on pose $r = e^{\imath k}$ et on appelle φ_r un vecteur appartenant au noyau. Soit u_r défini dans Ω^+ par

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad u_r\Big|_{\mathcal{C}_j^+} = r^{j-1}\, e^0(\varphi_r) - r^j\, e^1(\varphi_r)$$

La fonction u_r est $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega^+)$ par construction puisque r est solution de l'équation aux valeurs propres quadratiques et vérifie donc :

$$A(k)\ (u_r\Big|_{\mathcal{C}}) = \omega^2\ (u_r\Big|_{\mathcal{C}})$$

Il existe donc un n tel que $\omega^2 = \lambda_n(k)$ et $k \in I(\omega,n)$.

Soit maintenant $r = e^{\imath k}$ tel que $k \in I(\omega,n)$ et $n \in I(\omega)$. Soit $e_n(k)$ dans $D(A(k))$ un vecteur propre de $A(k)$ associé à la valeur propre $A(k)$, on a que $e_n(k)$ est dans $H^2_k(\mathcal{C})$. On note

$$\varphi_n(k) = \frac{\partial e_n(k)}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_0}$$

et par linéarité de l'équation et unicité de sa solution si $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$

$$e_n(k) = e^0(\varphi_n(k)) - e^{\imath k} e^1(\varphi_n(k))$$

qu'on peut prolonger sur $\mathcal{C}_2$ puisque $e_n(k)$ est dans $H^2_k(\mathcal{C})$:

$$e_n(k)\Big|_{\mathcal{C}_2} = e^{\imath k}\, e^0(\varphi_n(k)) - e^{2\imath k}\, e^1(\varphi_n(k))$$

On montre donc facilement que $e^{\imath k}$ est telle que

$$\mathcal{T}(0,e^{\imath k})\ \varphi_n(k) = 0.$$

■

Nous avons donc caractérisé toutes les solutions de module 1 de l'équation aux valeurs propres quadratiques. Rien ne nous assure pour l'instant que certaines d'entre elles sont bien des valeurs propres de module 1 de l'opérateur R recherché. Il faudrait montrer qu'elles sont limites de valeurs propres $r(\varepsilon)$ des opérateurs $R(\varepsilon)$. Pour établir un tel résultat, nous allons utiliser la théorie des perturbations [Kato (1995)] pour montrer que chaque valeur propre $k \mapsto \lambda_n(k)$ se prolonge analytiquement autour d'un voisinage de k. Nous avons utilisé ce type d'argument Section 3.2.2 et il paraît naturel d'exclure l'ensemble de fréquences σ_0 introduit avec la Définition 3.2.11 contenant l'ensemble des fréquences pour lesquelles le prolongement analytique ne semble pas assuré.

THÉORÈME 3.2.44
Soit $\omega^2 \notin \sigma_0 \cup \sigma_{Neu}$. Soit $n \in I(\omega)$ et $k \in I(\omega, n)$.

$$\exists! k^* \in \{k, -k\}, \quad e^{\imath k^*} \text{ valeur propre de } R.$$

Nous avons même l'égalité suivante :

$$\Big\{r,\ |r| = 1,\ r \text{ valeurs propres de } R\Big\} = \Big\{e^{\imath k},\ k \in I(\omega, n),\ n \in I(\omega),\ \lambda_n'(k) > 0\Big\}$$

■ **PREUVE:** Nous avons montré que pour tout $n \in I(\omega)$, si $k \in I(\omega, n)$ alors $-k$ également et d'après la Proposition 3.2.43 $e^{\imath k}$ est solution de l'équation aux valeurs propres quadratiques (3.40). De plus, d'après la Proposition 3.2.33, r de module 1 solution de l'équation aux valeurs propres quadratiques (3.40) si et seulement si r est limite d'une fonction $\varepsilon \mapsto r(\varepsilon)$ avec pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ $r(\varepsilon)$ est une valeur propre de $R(\varepsilon)$, pour un certain ε_0. Afin de montrer ce dernier résultat, nous nous appuyons sur la théorie développée notamment par Kato [Kato (1995)] pour l'étude spectrale d'opérateurs dépendant d'un paramètre (ici le nombre k), connue sous le nom de théorie des perturbations. On peut élargir la définition de $A(k)$ au cas où k est complexe et on peut montrer facilement que $A(k)$ est une fonction holomorphe de k. D'après le théorème de Kato-Rellich (voir [Kato (1995)] théorème VII.3.9), il existe une suite de fonctions réelles positives $(\mu_n(k))_n$ toutes holomorphes sur un voisinage de $]-\pi, \pi[$ telles que pour un certain k, les $\mu_n(k)$ sont toutes les valeurs propres répétées de $A(k)$. Elles sont ordonnées, non pas par ordre croissant, mais de façon à être analytique au voisinage de k. Elles ne coïncident donc pas avec les $\lambda_n(k)$. Néanmoins, pour toute fréquence $\omega^2 \in \sigma_0$, $\lambda_n(k)$ est une valeur propre simple et coïncide sur un voisinage de k avec une valeur propre $\mu_p(k)$. Elle est donc analytique sur un voisinage de k.

Pour tout $\omega \notin \sigma_0$, pour tout $n \in I(\omega)$ et pour tout $k \in I(\omega, n)$, $\lambda_n(k)$ est une valeur propre simple, la fonction $k \mapsto \lambda_n(k)$ est donc analytique sur un voisinage V de k. De plus, comme $\omega^2 \notin \sigma_0$, $\lambda_n(k)$ n'est pas un extremum de λ_n. Ainsi pour un ε positif assez petit, λ_n rencontre nécessairement $\omega^2 + \imath\varepsilon\omega$ dans le voisinage V de k. Il existe donc un $k(\varepsilon) \in V$ telle que

$$\exists \varepsilon_0,\ \forall\, \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \omega^2 + \imath\varepsilon\omega = \lambda_n\big(k(\varepsilon)\big) \quad \text{et} \quad \lambda_n(k(\varepsilon)) \text{ valeur propre de } A(k(\varepsilon)) \tag{3.46}$$

La fonction $\varepsilon \mapsto k(\varepsilon)$ est une fonction $C^\infty([0, \varepsilon_0[)$ du fait de la relation (3.46) et de l'analyticité de λ_n sur V et elle a les propriétés suivantes :

$$\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0[, \quad k(\varepsilon) \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad k(\varepsilon) = k_1(\varepsilon) + \imath k_2(\varepsilon) \quad \text{avec } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

où k_1 et k_2 vérifient

$$k_1(0) = k, \quad k_2(0) = 0.$$

En dérivant la relation 3.46, on trouve alors

$$k_1'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_n'(k)\, k_2'(0) = \omega \tag{3.47}$$

Ainsi si $\lambda_n'(k) > 0$, cela signifie que $k_2'(0) > 0$ et donc puisque $k_2(0) = 0$, $k_2(\varepsilon) > 0$ sur un voisinage de $\varepsilon = 0$. Inversement si $\lambda_n'(k) < 0$, $k_2(\varepsilon) < 0$ sur un voisinage de $\varepsilon = 0$.

Prenons maintenant un $k \in I(\omega, n)$ avec $n \in I(\omega)$, nous savons que $-k \in I(\omega, n)$. Comme $\omega^2 \notin \sigma_0$, $\lambda_n'(k)$ est non nul et comme la fonction $k \mapsto \lambda_n(k)$ est paire, nous avons même que $\lambda_n'(k)$ et $\lambda_n'(-k)$ sont de signes opposés. Choisissons donc $k^* \in \{k, -k\}$ tel que $\lambda_n'(k^*) > 0$. Nous venons de montrer que

$$\exists \varepsilon_1 \forall \varepsilon < \varepsilon_1, \quad \omega^2 + \imath\varepsilon\omega = \lambda_n(k(\varepsilon)) \quad \text{avec } \mathrm{Im}(k(\varepsilon)) > 0 \quad \text{et } \lambda_n(k(\varepsilon)) \text{ valeur propre de } A(k(\varepsilon))$$

Il existe donc une fonction $u_\varepsilon^r \in H^1(\mathcal{C})$ telle que

$$A(k(\varepsilon))\, u_\varepsilon^r = (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\, u_\varepsilon^r, \quad u_\varepsilon^r \in D(A(k(\varepsilon)))$$

où on rappelle que

$$u_\varepsilon^r \in D(A(k(\varepsilon))) \quad \Rightarrow u_\varepsilon^r\Big|_{\Gamma_1} = e^{\imath k(\varepsilon)} u_\varepsilon^r\Big|_{\Gamma_1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} u_\varepsilon^r\Big|_{\Gamma_1} = e^{\imath k(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x} u_\varepsilon^r\Big|_{\Gamma_1}.$$

On peut alors montrer que $e^{\imath k(\varepsilon)}$ est solution de l'équation aux valeurs propres quadratiques avec absorption (2.27) et comme Im($k(\varepsilon)$)>0, $|e^{\imath k(\varepsilon)}| < 1$. D'après le théorème 2.2.14, $e^{\imath k(\varepsilon)}$ est donc une valeur propre de $R(\varepsilon)$ et tend vers $e^{\imath k^*}$ de module 1, quand ε tend vers 0 et solution de l'équation aux valeurs propres quadratiques (3.40) d'après la Proposition 3.2.43. C'est donc une valeur propre de R.

C'est en fait la seule valeur propre parmi le couple $\{k, -k\}$. En effet, l'autre valeur propre est telle que $\lambda_n'(-k^*) < 0$ ce qui implique que dans un voisinage de $\varepsilon = 0$, Im($k(\varepsilon)$) < 0. On montre alors de la même façon que $e^{-\imath k^*}$ est limite de solutions de l'équation aux valeurs propres quadratiques avec absorption (2.27) mais qui sont de module strictement supérieur à 1. Cette valeur ne peut être valeur propre de R.

Nous venons de montrer une inclusion : si k^* est tel que $\lambda_n'(k^*) > 0$ alors $e^{\imath k^*}$ est valeur propre de R. Pour l'autre inclusion, nous allons utiliser la Proposition 3.2.43. En effet, toute valeur propre de R de module 1 est solution de l'équation aux valeurs propres quadratiques (3.40), elle s'écrit donc d'après la Proposition 3.2.43 sous la forme $e^{\imath k^*}$. Reste à montrer que $\lambda_n'(k^*) > 0$. Par définition, si r est une valeur propre de R alors elle est limite de $\varepsilon \mapsto r(\varepsilon)$ quand ε tend vers 0 où $r(\varepsilon)$ sont des valeurs propres de $R(\varepsilon)$. Soit la fonction $\varepsilon \mapsto k(\varepsilon)$ telle que $r(\varepsilon) = \exp(\imath k(\varepsilon))$ avec $k(0) = k^*$, Re($k(\varepsilon)$) $\in]-\pi, \pi[$ et Im($k(\varepsilon)$) > 0 pour tout $\varepsilon > 0$ puisque $|(|r(\varepsilon)) < 1$. Soit pour tout ε, $\varphi(\varepsilon)$ un vecteur propre de $R(\varepsilon)$ pour la valeur propre $r(\varepsilon)$. On note

$$u_\varepsilon^r = u_\varepsilon^+(\varphi(\varepsilon))\Big|_{\mathcal{C}_1^+} \in H^1(\mathcal{C}).$$

Comme $r(\varepsilon) = \exp(\imath k(\varepsilon))$ est valeur propre de $R(\varepsilon)$, on montre facilement que $u_\varepsilon^r \in D(A(k(\varepsilon)))$ et que

$$A(k(\varepsilon))\, u_\varepsilon^r = (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\, u_\varepsilon^r.$$

On a donc $\omega^2 + \imath\varepsilon\omega$ est donc une valeur propre de $A(k(\varepsilon))$. Etant donné que pour $\varepsilon = 0$, cette valeur propre est $\lambda_n(k^*)$, que $\lambda_n(k)$ est analytique sur un voisinage V^* de k^*, et qu'il existe un ε_0 assez petit tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, $k(\varepsilon) \in V^*$ alors pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, la valeur propre $\omega^2 + \imath\varepsilon\omega$ coïncide avec $\lambda_n(k)$, on a

$$\exists \varepsilon_0,\ \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \omega^2 + \imath\varepsilon\omega = \lambda_n(k(\varepsilon)).$$

En dérivant cette relation par rapport à ε et en prenant la valeur en 0, on obtient

$$\mathrm{Im}(k)'(0)\ \lambda_n'(k^*) = \omega.$$

Comme Im($k(0)$) $= 0$ et Im($k(\varepsilon)$) > 0 pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, on trouve bien que $\lambda_n'(k^*) > 0$. ■

Ce résultat est très intéressant car il permet notamment de montrer que si $\omega^2 \in \sigma(A)$, l'opérateur R a au moins une valeur propre, que ses valeurs propres sont de module égal à 1 et qu'on les détermine en étudiant le spectre de l'opérateur A. Nous avons donc trouvé une première méthode pour caractériser les valeurs propres de module 1 de R. Elle nécessite néanmoins de calculer le spectre de l'opérateur A.

REMARQUE 3.2.45 (EXISTENCE DE VALEURS PROPRES DE $R(\varepsilon)$)
La démonstration du théorème précédent montre également que $R(\varepsilon)$ pour ε assez petit a également au moins une valeur propre et en a même au moins autant que R en a de module 1.

Nous allons tenter dans la section suivante de donner un autre critère qui est plus simple à mettre en oeuvre, que nous avons utilisé dans le cas 1D et qui a été établi dans le cas du guide droit

homogène (voir 3.45). Notons qu'il fait intervenir la dérivée en $\varepsilon = 0$ de $r(\varepsilon)$ valeurs propres de $R(\varepsilon)$ qui tendent vers une valeur propre de module 1 de R. Encore faut-il montrer que ces fonctions sont bien dérivables en $\varepsilon = 0$.

COROLLAIRE 3.2.46 (DÉRIVABILITÉ EN $\varepsilon = 0$ DES FONCTIONS $\varepsilon \mapsto r(\varepsilon)$)
Soit $\omega^2 \notin \sigma_0$. Soit r une valeur propre de R et la fonction $\varepsilon \mapsto r(\varepsilon)$ qui tend vers r pour ε tendant vers 0 et telle que pour ε assez petit, $r(\varepsilon)$ est une valeur propre de $R(\varepsilon)$. Cette fonction est dérivable en $\varepsilon = 0$.

■ **PREUVE:** Il suffit de reprendre la démonstration du théorème précédent. Nous avions montré qu'il existait un $k(\varepsilon)$ telle que $r(\varepsilon) = \exp(\imath k(\varepsilon))$ et qui était dérivable en $\varepsilon = 0$, à condition que $\omega^2 \notin \sigma_0$. On en déduit que $r(\varepsilon)$ est dérivable en $\varepsilon = 0$. ■

Ce corollaire va nous permettre d'introduire, un critère de sélection des bonnes valeurs propres de module 1 de R.

3.2.5.3 Sélection de la bonne racine de $(\mathcal{E}^R)$ dans le cas général

Nous allons généraliser la condition que nous avons déterminée dans le cas particulier du guide droit homogène (voir (3.45)). Supposons tout d'abord avoir trouvé les valeurs propres de module 1 solution du problème aux valeurs propres quadratiques (3.40) et regroupons les par couples de solutions $(r, 1/r)$. Nous avons montré Proposition 3.2.43 et Théorème 3.2.44 que dans le cas où $\omega^2 \notin \sigma_0$, il y avait nécessairement une valeur r^* qui est valeur propre de R, c'est-à-dire limite d'une fonction que nous notons comme dans le cas 1d $\varepsilon \mapsto r_+(\varepsilon)$, où pour ε assez petit, $r_+(\varepsilon)$ est de module strictement inférieur à 1 valeur propre de $R(\varepsilon)$. Nous avons montré également, lors de la Preuve du théorème 3.2.44, que l'autre valeur $1/r^*$ est limite d'une fonction $\varepsilon \mapsto r_-(\varepsilon)$ où pour ε assez petit, $r_-(\varepsilon)r_+(\varepsilon) = 1$ et $r_-(\varepsilon)$ est solution de l'équation aux valeurs propres quadratiques avec absorption (2.27).

Nous avons montré au Corollaire 3.2.46 que la fonction $\varepsilon \mapsto r^+(\varepsilon)$ est dérivable en $\varepsilon = 0$, la fonction $\varepsilon \mapsto r^-(\varepsilon)$ l'est donc également. De plus, nous avons vu dans le cas du guide droit homogène que le critère (3.45) différencie chaque valeur du couple $(r, 1/r)$. Il semble donc naturel de supposer

$$\mathrm{Re}\Big(\frac{dr_+}{d\varepsilon}(0)\overline{r_+(0)}\Big) \neq 0$$

Section 3.2.5.4, quand nous relierons ce critère aux vitesses de groupe des modes de floquet du milieu, nous démontrerons la caractérisation de cette hypothèse résumée au lemme suivant.

LEMME 3.2.47
Si ω^2 n'appartient pas à l'ensemble σ_0 alors

$$Re\Big(\frac{dr_+}{d\varepsilon}(0)\overline{r_+(0)}\Big) \neq 0$$

Nous pouvons maintenant donner le critère qui permet de sélectionner la « bonne » valeur propre de R parmi le couple $(r, 1/r)$ de solutions du problème aux valeurs propres quadratiques (3.40).

LEMME 3.2.48 (CARACTÉRISATION DES VALEURS PROPRES DE MODULE 1 DE R)
Supposons $\omega^2 \in \sigma(A) \setminus (\sigma_{Neu} \cup \sigma_0)$. La valeur $r^* = r_+(0)$ est valeur propre de l'opérateur R si elle vérifie :

$$Re\Big(\frac{dr_+}{d\varepsilon}(0)\overline{r^*}\Big) < 0 \tag{3.48}$$

alors que $1/r^* = r^-(0)$ vérifie :

$$Re\Big(\frac{dr_-}{d\varepsilon}(0)\overline{r_-(0)}\Big) > 0. \tag{3.49}$$

■ **PREUVE:** Il suffit de remarquer que :

$$\frac{d}{d\varepsilon}(|r_\pm(\varepsilon)|^2)(0) = 2\mathrm{Re}\Big(\frac{dr_\pm}{d\varepsilon}(0)\overline{r_\pm(0)}\Big)$$

Le terme à gauche est négatif ou nul pour $r_+(\varepsilon)$ puisque $|r_+(0)| = 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $|r_+(\varepsilon)| < 1$, alors que pour $r_-(\varepsilon)$ ce terme est positif ou nul puisque $|r_-(0)| = 1$ mais pour tout $\varepsilon > 0$, $|r_-(\varepsilon)| > 1$. Ces 2 termes sont, de plus, non nuls, puisque $\omega^2 \notin \sigma_0$. ■

REMARQUE 3.2.49
Le critère (3.48) *signifie plus précisément que la dérivée en 0^+ de $r_+(\varepsilon)$ dans le plan complexe pointe vers l'intérieur du cercle unité alors que le critère* (3.49) *signifie que la dérivée en 0^+ de $r_-(\varepsilon)$ pointe vers l'extérieur.*

La condition (3.48) constitue un critère intéressant pour caractériser les valeurs propres de module 1 de R et facile à mettre en oeuvre parce que nous pouvons donner une expression explicite des dérivées en 0 des fonctions $\varepsilon \mapsto r_\pm(\varepsilon)$.

THÉORÈME 3.2.50
Supposons $\omega^2 \notin \sigma_0$. Soit r une valeur propre de R de module 1, $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ un vecteur propre correspondant de norme 1. r est limite de la fonction $\varepsilon \mapsto r_+(\varepsilon)$ où $r_+(\varepsilon)$ est une valeur propre de $R(\varepsilon)$ de module strictement inférieur à 1 pour ε assez petit.

$$\frac{dr_+}{d\varepsilon}(0) = -\frac{\mathcal{A}(r,\varphi)}{\mathcal{B}(r,\varphi)}$$

avec

$$\left|\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(r,\varphi) & = & \Big\langle \Big[r^2\dfrac{\partial T^{10}}{\partial\varepsilon}(0) - r\big(\dfrac{\partial T^{11}}{\partial\varepsilon}(0) + \dfrac{\partial T^{00}}{\partial\varepsilon}(0)\big) + \dfrac{\partial T^{01}}{\partial\varepsilon}(0)\Big]\varphi,\varphi\Big\rangle \\ \mathcal{B}(r,\varphi) & = & \Big\langle \Big[2rT^{10} - \big(T^{11}+T^{00}\big)\Big]\varphi,\varphi\Big\rangle \end{array}\right. \tag{3.50}$$

où $<\cdot,\cdot>$ est le produit de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$, les T^{ij} sont les opérateurs de NtD locaux des problèmes de cellule sans absorption définis (3.8) *et les $\partial_\varepsilon T^{ij}(0)$ sont définis* (3.10).

■ **PREUVE:** Pour ε assez petit, $r_+(\varepsilon)$ est une valeur propre de $R(\varepsilon)$, on note $\varphi(\varepsilon)$ un vecteur propre associé de norme 1 tel que $\varphi(\varepsilon)$ tend vers φ quand ε tend vers 0. D'après la théorie de perturbations de Kato, [Kato (1995)], de tels vecteurs propres existent. Nous avons donc

$$\exists\varepsilon_0,\ \forall\varepsilon<\varepsilon_0,\quad \big\langle\varphi(\varepsilon),\varphi(\varepsilon)\big\rangle = 1,\quad \varphi = \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(\varepsilon).$$

D'après la proposition 2.2.12, $\varphi(\varepsilon)$, vecteur propre de $R(\varepsilon)$, est dans le noyau de $\mathcal{T}(\varepsilon, r(\varepsilon))$:

$$\mathcal{T}(\varepsilon, r(\varepsilon))\varphi(\varepsilon) = 0.$$

On dérive cette expression par rapport à ε, on l'évalue en $\varepsilon = 0$ et on prend le produit scalaire avec φ :

$$\langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \varepsilon}(0,r)\,\varphi,\varphi\rangle \;+\; \frac{\partial r_+}{\partial \varepsilon}(0)\langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r}(0,r)\,\varphi,\varphi\rangle \;+\; \langle \mathcal{T}(0,r)\,\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}(0),\varphi\rangle = 0$$

En utilisant les propriétés des opérateurs NtD locaux établis Proposition 3.2.5, on montre que :

$$[\mathcal{T}(0,r)]^* = \overline{r^2}\mathcal{T}(0,\frac{1}{\overline{r}}) = \overline{r^2}\mathcal{T}(0,r), \quad \text{comme } |r|=1,$$

ainsi

$$\langle \mathcal{T}(0,r)\,\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}(0),\varphi\rangle = \overline{r^2}\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}(0),\mathcal{T}(0,r)\,\varphi\rangle = 0.$$

On conclut en remarquant que

$$\langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \varepsilon}(0,r)\,\varphi,\varphi\rangle = \mathcal{A}(r,\varphi) \quad \text{et} \quad \langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r}(0,r)\,\varphi,\varphi\rangle = \mathcal{B}(r,\varphi).$$

■

Quand $\omega^2 \notin \sigma_0$, nous avons donc trouvé le critère (3.48) pour caractériser les « bonnes » valeurs propres de module 1 de l'opérateur R que nous recherchions. De plus, ce critère est en plus constructif sous condition d'avoir calculé les solutions des nouveaux problèmes de cellule (3.7) et les opérateurs NtD correspondants. Cela nécessite donc a priori la résolution de problèmes supplémentaires. Nous verrons section 3.3 des alternatives à cette méthode qui sont moins coûteuses mais dont la justification théorique manque.

REMARQUE 3.2.51
Le théorème 3.2.50 nous donne une expression de la dérivée en 0 *de la fonction* $\varepsilon \mapsto r_+(\varepsilon)$*. Nous pouvons trouver de la même façon une expression de la dérivée en* 0 *de la fonction* $\varepsilon \mapsto r_-(\varepsilon)$ *:*

$$\frac{dr_-}{d\varepsilon}(0) = -\frac{\mathcal{A}(\overline{r},\varphi)}{\mathcal{B}(\overline{r},\varphi)}$$

où $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *sont définis* (3.50) *et où* $\varphi \in Ker(\mathcal{T}(0,\overline{r}))$*.*

Notons également que cette définition est valable uniquement si r *la valeur propre de* R *est de module* 1*.*

En résumé, pour déterminer les valeurs propres de R de module 1, il suffit donc de résoudre les problèmes de cellule sans absorption (3.4)-(3.5), de déterminer les opérateurs de NtD locaux $(T^{00},T^{01},T^{10},T^{11})$ définis par (3.8) et enfin de chercher toutes les solutions de module 1 du problème aux valeurs propres quadratiques (3.40). Ces solutions se regroupent par paires $(r,1/r)$. Si $\omega^2 \notin \sigma_0$, r et $1/r$ sont nécessairement distincts et une des deux valeurs est valeur propre de R, d'après le Théorème 3.2.44. Pour sélectionner la bonne valeur parmi chaque couple, on utilise le critère (3.48) mais cela nécessite de résoudre les problèmes de cellule (3.7) et de calculer les opérateurs NtD correspondants donnés par (3.10).

La question qui se pose maintenant est de savoir si en rajoutant ces conditions sur les valeurs propres de module 1 **de** R**, nous pouvons caractériser de manière unique la solution de l'équation caractéristique** $(\mathcal{E}^R)$. Il semble en effet, au vu du cas du guide droit homogène où des calculs explicites peuvent être effectués (voir Section 3.2.5.1) et où en particulier les opérateurs sont diagonalisables, qu'il existe plusieurs opérateurs R solutions de $(\mathcal{E}^R)$ ayant des valeurs propres de

module 1 potentiellement différentes mais qui ont les mêmes valeurs propres de module strictement inférieur à 1. L'indétermination concerne donc plutôt les valeurs propres de module 1. Comme nous venons de lever cette indétermination grâce à l'étude ci-dessus, il semblerait légitime de penser que nous avons levé l'indétermination sur la « bonne » solution de $(\mathcal{E}^R)$ en même temps. Nous allons résumer ces idées sous la forme d'une conjecture, que nous utiliserons dans le chapitre 4.

CONJECTURE 3.2.52 (A PROPOS DE R)
Il existe deux sous espaces de $H^{-1/2}(\Gamma)$, noté $\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}$ tels que

$$H^{-1/2}(\Sigma^0) = \mathbb{P} \oplus \mathbb{E}, \quad \textit{avec} \quad R\mathbb{P} \subset \mathbb{P}, \quad R\mathbb{E} \subset \mathbb{E}$$

$$\textit{et} \quad \left| \begin{array}{l} \textit{Dim } \mathbb{P} = N(\omega), \quad \mathbb{P} = \textit{vect}(p_1, \ldots, p_{N(\omega)}) \\ \forall j \in [\![1, N(\omega)]\!],\ Rp_j = r_j p_j, |r_j| = 1, r_j \textit{ vérifiant } (3.48) \\ R^E = R\Big|_{\mathbb{E}} \textit{ a un rayon spectral strictement plus petit que } 1 \end{array} \right.$$

On note $\Pi_{\mathbb{P}}$ la projection d'image $\mathbb{P}$ et de noyau $\mathbb{E}$.

La démonstration de cette conjecture reste une question ouverte. Nous donnerons une réponse dans la version discrète du problème présentée section 3.3.

3.2.5.4 Lien avec la vitesse de groupe des modes de Floquet

Nous allons montrer ici qu'il existe un lien entre les critères (1.36) et (1.37) et le signe de la vitesse de groupe des ondes de Floquet (que nous définissons ci-après) qui peuvent se propager dans le milieu. On retrouve de cette façon la notion plus traditionnelle d'onde sortante (voir en particulier [Potel *et al.* (2001)]).

Nous reprenons les notations des sections 3.2.2.3 et 3.2.5.2,

$$I(\omega) = \{n \in \mathbb{N},\ \exists k \in]-\pi, \pi[, \quad \lambda_n(k) = \omega^2\}.$$

D'après la proposition 3.2.16, $I(\omega)$ est fini et

$$\forall n \in I(\omega), \quad I(\omega, n) = \{\xi \in]-\pi, \pi[, \quad \lambda_n(\xi) = \omega^2\},$$

et d'après le lemme 3.2.17, pour tout $n \in I(\omega)$, l'ensemble $I(\omega, n)$ est également fini. Pour tout $\omega \in \sigma(A)$, il existe donc une quantité finie de relations de dispersion :

$$\forall n \in I(\omega),\ \forall k \in I(\omega, n), \quad \omega = \sqrt{\lambda_n(k)}$$

On appelle $e_n(k)$ un vecteur propre de $A(k)$ associé à la valeur propre $\lambda_n(k)$ et $\varphi_n(k)$ sa trace normale sur Γ_0.

LEMME 3.2.53 (MODES DE FLOQUET)
Supposons $\omega^2 \notin \sigma_0$. Une solution particulière H^1_{loc}, notée $u_{n,k}$ de

$$\left| \begin{array}{rcll} -\triangle u_{n,k} - \rho_p(\mathbf{x})\, \omega^2\, u_{n,k} &=& 0 & \textit{dans} \quad \Omega^+ \\ \dfrac{\partial u_{n,k}}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega \cap \Omega^+, \\ \dfrac{\partial u_{n,k}}{\partial \mathbf{n}} &=& \varphi_n(k) & \textit{sur} \quad \Gamma_0^+ \end{array} \right.$$

est donnée par :

$$\forall (x,y) \in \Omega^+, \quad u_{n,k}(x,y) = e_{n,k}(x,y)\, e^{\imath k x}$$

où $e_{n,k}$ est une fonction $1-$périodique qui coïncide avec $e_n(k)$ dans chaque cellule $\mathcal{C}_j^+$.

Ces solutions particulières sont appelées **modes de floquet**.

Ces modes de Floquet sont l'équivalent en milieu périodique des ondes planes en milieu homogène : ce sont les fonctions propres généralisées de l'opérateur A. Nous avons montré lors de la preuve du théorème 3.2.44 que $e^{\imath k}$ est une valeur propre de R avec $\varphi_n(k)$ un vecteur propre associé à condition que $\lambda_n'(k) > 0$. Cela signifie que $u^+(\varphi_n(k))$ est un mode de Floquet et c'est la solution recherchée si cette dernière condition est justifiée. Au contraire, si $\lambda_n'(k) < 0$, la solution particulière u_k n'est pas la solution recherchée. Il existe bien entendu un lien évident avec la vitesse de groupe de chaque onde u_k. Nous allons voir en effet que le premier mode est de vitesse de groupe positive alors que le second est de vitesse de groupe négative.

Commençons par définir la vitesse de groupe en étendant celle donnée dans le cas 1D (voir Définition 1.4.34).

DÉFINITION 3.2.54 (VITESSE DE GROUPE DES MODES DE FLOQUET)
Sauf pour une quantité dénombrable de fréquences ($\omega^2 \notin \sigma_0$), pour tout $n \in I(\omega)$ et pour tout $k \in I(\omega, n)$, la vitesse de groupe $v_n(k)$ d'un mode de floquet de la forme $u_{n,k}(x,y) = e_{n,k}(x,y)\, e^{\imath k x}$ est définie sans ambiguïté par

$$v_n(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k}(k) = \frac{1}{2}\lambda_n(k)^{-1/2}\lambda_n'(k).$$

REMARQUE 3.2.55
Notons que chaque bande spectrale $\lambda_n(k)$ étant paire, on a évidemment

$$\forall \omega^2 \notin \sigma_0,\ \forall n \in I(\omega),\ \forall k \in I(\omega, n), \quad v_n(-k) = -v_n(k).$$

ainsi sauf pour une quantité dénombrable de fréquences parmi les modes de floquet $u_{n,k}$ et $u_{n,-k}$, l'un a une vitesse de groupe positive, l'autre a une vitesse de groupe négative.

REMARQUE 3.2.56 (VITESSE DE GROUPE POUR LES MODES DE FLOQUET AVEC $\omega^2 \in \sigma_0$)
Nous pourrions également définir une vitesse de groupe dans le cas où $\omega^2 \in \sigma_0$. Pour $\omega^2 \in \sigma_0$ si ω^2 est un extremum local d'un certain λ_n en un point k alors la vitesse de groupe $v_n(k) = 0$.

Pour $\omega^2 \in \sigma_0$ si ω^2 est tel que

$$\exists k \in]-\pi, \pi[, \quad \exists n < m, \quad \lambda_n(k) = \lambda_m(k) = \omega^2$$

on définit une vitesse de groupe à gauche

$$v_n(k^-) = \frac{1}{2}\lambda_n(k^-)^{-1/2}\lambda_n'(k^-) \neq 0.$$

et à droite

$$v_m(k^+) = \frac{1}{2}\lambda_m(k^+)^{-1/2}\lambda_m'(k^+) \neq 0.$$

Nous pouvons alors établir le lien entre la vitesse de groupe des modes de Floquet et le critère (3.48). Soit r une valeur propre de module 1 de R et soit $\varepsilon \mapsto r_+(\varepsilon)$ la fonction de valeurs propres de $R(\varepsilon)$ qui tend vers r. Il existe une fonction $\varepsilon \mapsto k(\varepsilon)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que

$$r_+(\varepsilon) = e^{\imath k(\varepsilon)}, \quad \text{avec } \mathrm{Re}(k(\varepsilon)) \in]-\pi,\pi] \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} k(\varepsilon) = k \in]-\pi,\pi[\tag{3.51}$$

avec k qui appartient nécessairement à un ensemble $I(\omega,n)$ pour un certain n dans $I(\omega)$. On sait de plus que $r_-(0) = 1/r = e^{-\imath k}$ est également solution de l'équation aux valeurs propres quadratiques (3.40) et qu'elle est limite d'une fonction de $\varepsilon \mapsto r_-(\varepsilon)$ telle que pour tout ε, $r_+(\varepsilon)r_-(\varepsilon) = 1$.

Nous pouvons montrer maintenant que le critère (3.48) permet de sélectionner, sauf pour une quantité dénombrable de fréquences, la valeur propre de R parmi le couple $(e^{\imath k}, e^{-\imath k})$ de solutions du problèmes aux valeurs propres quadratiques (3.40) tel que le mode de floquet correspondant $u_{n,k}$ a une vitesse de groupe positive. Le critère (3.49) sélectionne, quant à lui, le mode de Floquet qui a une vitesse de groupe négative.

THÉORÈME 3.2.57 (LIEN AVEC LA VITESSE DE GROUPE)
Supposons que $\omega^2 \notin \sigma_0$.

$$\left|\begin{array}{lll} \Big(\dfrac{\partial r_+}{\partial\varepsilon}(0)\,\overline{r_+(0)}\Big) < 0 & \Longleftrightarrow & v_n(k) > 0, \\ \Big(\dfrac{\partial r_-}{\partial\varepsilon}(0)\,\overline{r_-(0)}\Big) > 0 & \Longleftrightarrow & v_n(-k) < 0. \end{array}\right. \tag{3.52}$$

■ **PREUVE:** Nous limitons la démonstration à r_+, la relation sur r_- pouvant être déduite du fait que pour $\varepsilon \geq 0$ assez petit, $r_+(\varepsilon)r_-(\varepsilon) = 1$.

Tout d'abord, si $\omega^2 \notin \sigma_0$ alors d'après le Corollaire 3.2.46, la fonction $r_+(\varepsilon)$ et donc la fonction $k(\varepsilon)$ sont différentiables. On peut alors dériver la relation (3.51) entre $r_+(\varepsilon)$ et $k(\varepsilon)$ par rapport à ε, on obtient en particulier pour $\varepsilon = 0$:

$$\frac{\partial r_+}{\partial\varepsilon}(0)\overline{r_+(0)} = \imath k'(0). \tag{3.53}$$

Rappelons de plus avoir trouvé Preuve du Théorème 3.2.44, la relation (3.47)

$$k'(0)\lambda_n'(k(0)) = \imath\omega \tag{3.54}$$

Ces deux relations combinées permettent de conclure en utilisant la définition 3.2.54 de la vitesse de groupe. ■

Le critère (3.48) permet donc de sélectionner la valeur propre r de module 1 telle que, si on note φ un vecteur propre de R associé à r, la solution $u^+(\varphi)$ est un mode de floquet de vitesse de groupe positive. Nous venons donc de montrer que notre critère est équivalent à un critère de positivité de la vitesse de groupe et ce, indépendamment du signe de la vitesse de phase.

Rappelons que le critère (3.48) ne permet de distinguer les deux racines qu'à condition qu'il soit non nul. Nous pouvons maintenant démontrer le lemme 3.2.47 que nous rappelons ici.

LEMME 3.2.58 (RAPPEL DU LEMME 3.2.47)
Si ω^2 *n'appartient pas à l'ensemble* σ_0 *alors*

$$Re\Big(\frac{dr_+}{d\varepsilon}(0)\overline{r_+(0)}\Big) \neq 0$$

■ **PREUVE:** Si $\omega^2 \notin \sigma_0$, pour tout $n \in I(\omega)$ et pour tout $k \in I(\omega, n)$, $\lambda_n'(k)$ est non nul et fini. Les relations (3.53) et (3.54) établies Preuve du théorème 3.2.57 nous donne donc que

$$\mathrm{Re}\Big(\frac{dr_+}{d\varepsilon}(0)\overline{r_+(0)}\Big) \neq 0$$

■

REMARQUE 3.2.59 (CAS OÙ $\omega^2 \in \sigma_0$)
La définition de la vitesse de groupe dans le cas où $\omega^2 \in \sigma_0$ (voir Remarque 3.2.56) assure que si ω^2 est une valeur propre multiple, i.e.

$$\exists k \in]-\pi, \pi[, \quad \exists n < m, \quad \lambda_n(k) = \lambda_m(k) = \omega^2$$

mais n'est pas un extremum de ces courbes de dispersion, alors nous pouvions montrer que $e^{\imath k}$ et $e^{-\imath k}$ sont toutes les deux des valeurs propres de R car pour chacun il existerait deux modes de Floquet correspondants : un de vitesse de groupe positive et un de vitesse de groupe négative. Il suffirait donc de sélectionner le vecteur propre de R correspondant au mode de Floquet de vitesse de groupe positive.

Tout les résultats présentés se généralisent à l'ensemble de fréquences correspondant à des valeurs propres multiples. Nous ne l'avons pas fait pour ne pas compliquer outre mesure la présentation.

Au contraire, les fréquences correspondant à des extremums de courbes de dispersion représentent une difficulté supplémentaire. Dans le cas 1d, ces fréquences sont exactement le bord du spectre $\sigma(A)$. Dans le cas des dimensions supérieures, comme nous ne connaissons pas l'allure des courbes de dispersion, il est plus difficile de les expliciter. Pour ces fréquences, il existe des modes de Floquet de vitesse de groupe nulle : il est donc difficile de savoir si ce sont des solutions physiques.

3.2.5.5 Caractérisation de la bonne solution de $(\mathcal{P}^+)$

Nous avons déjà montré à la Section 3.2.2.4 que, pour chaque donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, la famille $\{u_\varepsilon^+(\varphi),\ \varepsilon > 0\}$ tend dans $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega^+)$ vers $u^+(\varphi)$ une solution H^1_{loc} de $(\mathcal{P}_\varepsilon^+)$, que la fonction $\varepsilon \mapsto R(\varepsilon)$ des opérateurs de propagation tend vers un opérateur R une des solutions de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^R)$ et enfin que la famille $\{\Lambda_\varepsilon^+,\ \varepsilon > 0\}$ des opérateurs NtD tend vers Λ^+. Le principe d'absorption limite est donc déjà établi. Supposons avoir caractérisé de manière unique l'opérateur R même si cela n'est pour l'instant qu'une conjecture. Le théorème suivant résulte du théorème 3.2.27, des Corollaires 3.2.28 et 3.2.29 et de la Proposition 2.2.7 et nous donne une caractérisation de ces limites à partir de R : il découle

THÉORÈME 3.2.60 (CARACTÉRISATION DE LA BONNE SOLUTION DE $(\mathcal{P}^+)$ QUAND $\omega^2 \in \sigma(A)$)
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu} \cup \sigma_0$. Pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, la famille $\{u_\varepsilon^+(\varphi),\ \varepsilon > 0\}$ tend dans H^1_{loc} vers une solution $u^+(\varphi) \in H^1_{loc}(\Omega^+)$ du problème $(\mathcal{P}^+)$, caractérisée par :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma),\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u^+(\varphi)\Big|_{\mathcal{C}_n^+} = e^0(R^{n-1}\,\varphi) - e^1(R^n\,\varphi), \tag{3.55}$$

où e^0 et e^1 sont les solutions des problèmes de cellule sans absorption (3.4)-(3.5)*. La famille d'opérateurs NtD $\{\Lambda_\varepsilon^+,\ \varepsilon>0\}$ tend vers l'opérateur Λ^+ caractérisé par :*

$$\Lambda^+ = T^{00} - T^{10}\, R \tag{3.56}$$

où T^{00} et T^{10} sont des opérateurs NtD locaux définis (3.8)*.*

La caractérisation précédent s'extrapole de manière évidente à la caractérisation de $u^-(\varphi)$ pour toute donnée φ et Λ^-.

REMARQUE 3.2.61
Si les milieux de part et d'autre du « défaut » correspondent au même milieu périodique, et du fait de l'hypothèse (H3) concernant la symétrie de l'indice ρ_p, les deux opérateurs NtD Λ^+ et Λ^- sont égaux ainsi que les opérateurs caractéristiques R^+ et R^- et les solutions de demi-guide u^+ et u^-.

Nous donnons quelques propriétés sur l'opérateur NtD Λ^+, importantes pour la suite.

PROPOSITION 3.2.62 (PROPRIÉTÉ DE L'OPÉRATEUR Λ^+)
L'opérateur NtD Λ^+ est inversible de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$, son inverse étant l'opérateur DtN, noté $\tilde\Lambda^+$, limite de la famille d'opérateurs DtN $\{\tilde\Lambda_\varepsilon^+,\ \varepsilon>0\}$, définis Proposition 2.2.9, pour la norme d'opérateur $\mathcal{L}\big(H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma)\big)$. Ces deux opérateurs vérifient de plus :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad Im\,\big\langle \Lambda^+\,\varphi, \varphi\big\rangle \geq 0, \quad et \quad \forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad Im\,\big\langle \tilde\Lambda^+\,\varphi, \varphi\big\rangle \geq 0. \tag{3.57}$$

où $<\cdot,\cdot>$ est le crochet de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$.

■ **PREUVE:** En ce qui concerne l'inversibilité de l'opérateur NtD, la preuve est exactement la même que celle du théorème 3.2.36. Quant aux relations (3.57), c'est le passage à la limite des relations (2.26) en utilisant le fait que Λ^+ (resp. $\tilde\Lambda^+$) est limite de la famille d'opérateurs NtD $\{\Lambda_\varepsilon^+,\ \varepsilon>0\}$ pour la norme d'opérateurs de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma^+), H^{1/2}(\Gamma^+)\big)$ (resp. la famille d'opérateurs DtN $\{\tilde\Lambda_\varepsilon^+,\ \varepsilon>0\}$ pour la norme d'opérateurs de $\mathcal{L}\big(H^{1/2}(\Gamma^+), H^{-1/2}(\Gamma^+)\big)$). ■

Nous nous sommes interrogés Section 2.2 sur les propriétés spectrales des opérateurs NtD pour le problème avec absorption. Nous avions conclu au théorème 2.2.22 que ces opérateurs étaient « jordanisables », c'est-à-dire que leur système de vecteurs propres généralisés était complet (voir Définition B.2.16 pour cette notion et la définition des vecteurs propres généralisés). Nous nous demandons donc ici si le passage à la limite conserve cette propriété. Pour ce faire, nous montrons que l'opérateur Λ^+ vérifie, comme les Λ_ε^+, les hypothèses du théorème B.2.18 de Keldys.

THÉORÈME 3.2.63
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$. Supposons le demi-guide Ω^+ droit

$$\Omega^+ = \mathbb{R}^+ \times]0,1[,$$

et l'indice de réfraction ρ_p constant sur un voisinage du bord Γ_0^+,

$$\textit{(H4)} \qquad \exists \alpha>0,\ \exists \delta>0,\ \forall\,(x,y)\in]0,\delta[\times]0,1[, \quad \rho_p(x,y)=\alpha^2$$

alors il existe un opérateur H autoadjoint de classe $\mathcal{L}_1$ de Carleman défini par :

$$\begin{aligned} H(\varphi_n) &= \varphi_n, && n < \frac{\alpha\omega}{\pi}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2\pi^2 - \alpha^2\omega^2}}\,\varphi_n, && n > \frac{\alpha\omega}{\pi}. \end{aligned} \tag{3.58}$$

où $\{\varphi_n,\ n \geq 0\}$ est la BON des vecteurs propres du laplacien transverse avec conditions de Neumann homogène, et K un opérateur compact tel que

$$\Lambda^+ = H\big(Id + K\big)$$

et **le système de vecteurs propres généralisés de Λ^+ est complet**.

De plus, pour tout $\eta > 0$, toutes les valeurs propres de Λ^+ sauf un nombre fini d'entre elles sont dans les secteurs :

$$-\eta < arg(\lambda) < \eta$$

■ **PREUVE:** On rappelle avoir établi preuve du Théorème 2.2.22 que pour chaque $\varepsilon > 0$, l'opérateur Λ_ε^+ se factorise suivant :

$$\Lambda_\varepsilon^+ = H\big(\mathrm{Id} + K_\varepsilon + H^{-1}T_\varepsilon^{10}R_\varepsilon\big)$$

où l'opérateur H est défini lors de la Preuve de la proposition 2.2.21 concernant la factorisation de T_ε^{00}et où l'opérateur K_ε est compact pour chaque $\varepsilon > 0$. H est indépendant de ε, Λ_ε^+, R_ε et T_ε^{10} converge respectivement vers Λ^+, R et T^{10} pour la norme d'opérateurs. On montre donc facilement que K_ε converge quand ε tend vers 0 vers un opérateur K. L'ensemble des opérateurs compacts étant un espace fermé, l'opérateur limite K est donc compact. L'opérateur Λ^+ s'écrit donc

$$\Lambda^+ = H\big(\mathrm{Id} + K_1 + H^{-1}T^{10}R\big)$$

avec H autoadjoint de classe $\mathcal{L}_1$ de Carleman et K_1 un opérateur compact. Il existe donc un opérateur K tel que

$$\Lambda^+ = H\big(\mathrm{Id} + K\big)$$

Comme Λ^+ est injectif, on peut appliquer le théorème B.2.18 de Keldys. Le système de vecteurs propres généralisés de Λ^+ est complet et comme H n'a pas de valeurs propres négatives, il existe seulement un nombre fini de valeurs propres à l'extérieur de tout secteur angulaire $]-\eta, \eta[$ avec $\eta > 0$. ■

Nous avons donc un résultat de complétude pour la famille de vecteurs propres généralisés de Λ^+. Nous nous sommes posés la question d'un résultat supplémentaire sur la famille de vecteurs propres : ne formeraient ils pas une base de Riesz (voir Annexe B.2 pour la définition) ? Question que nous nous sommes déjà posée dans le cas avec absorption (Proposition 2.2.23). En effet, intuitivement, on se dit que les vecteurs propres de Λ^+ qui correspondent à des ondes évanescentes du demi-guide périodique, c'est-à-dire des ondes exponentiellement décroissantes, ne voient pas le milieu périodique. Il y a donc des chances qu'ils ressemblent aux vecteurs propres du laplacien transverse. Nous avons établi un résultat partiel dans la proposition suivante dont la démonstration est exactement la même que celle de la Proposition 2.2.23 qui traite des vecteurs propres des opérateurs NtD dans le cas avec absorption.

PROPOSITION 3.2.64 (VECTEURS PROPRES DE Λ^+)
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}$. Supposons le demi-guide Ω^+ droit

$$\Omega^+ = \mathbb{R}^+ \times]0, 1[,$$

et l'indice de réfraction ρ_p qui vérifie l'hypothèse (H4) Soit Λ_α^+ l'opérateur NtD dans le cas du guide droit homogène dont nous avons donné une expression (3.3)*, Section 3.1.2. On a :*

$$\exists C>0,\ \forall n>\frac{\alpha\omega}{\pi},\quad \|(\Lambda^+-\Lambda_c^+)\varphi_n\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\leq C\frac{e^{-n\delta}}{n}.$$

Les vecteurs propres de l'opérateur NtD du guide droit homogène qui correspondent aux ondes évanescentes du demi-guide ressemblent donc à des vecteurs propres de l'opérateur du guide périodique. Nous nous rapprochons du résultat de la base de Riesz mais nous n'avons pas trouvé un meilleur résultat que celui-ci pour pouvoir arriver à cette conclusion. Cela reste encore **une question ouverte**.

Ces propriétés, qui sont vraies pour Λ^+ et Λ^-, vont nous permettre maintenant de caractériser la « bonne » solution du problème $(\mathcal{P})$.

3.2.5.6 Caractérisation de la bonne solution du problème $(\mathcal{P})$

Pour définir la « bonne » solution du problème $(\mathcal{P})$, nous passons par le problème $(\mathcal{P}^i)$ posé en domaine borné. Nous allons faire la démonstration dans le cas où le milieu est une perturbation d'un milieu périodique mais nous signalerons sous forme de remarque ce qui change dans le cas où les milieux de part et d'autre du défaut sont différents.

Nous allons tenter d'établir le caractère bien posé de ce problème. Nous allons en effet montrer que c'est le cas sauf pour une quantité dénombrable de fréquences :

- l'ensemble des fréquences propres du problème de Neumann, σ_{Neu} pour lesquelles les problèmes de cellule sont mal posés (voir Definition 3.2.1),
- l'ensemble des fréquences σ_0 pour lesquelles nous n'avons pas établi l'existence des opérateurs NtD discrets limites Λ^+ et Λ^- et l'existence des solutions limites u^+ et u^- des problèmes de demi-guide $\mathcal{P}^\pm$,
- un ensemble de fréquences σ^i dénombrables pour lesquelles c'est le problème $(\mathcal{P}^i)$ que nous étudions dans la suite qui est mal posé.

REMARQUE 3.2.65
Dans le cas où les milieux de part et d'autre de Ω^i sont différents, on « double » l'ensemble de fréquences à exclure :

- *les problèmes de cellule à droite et à gauche étant différents, il faut exclure l'union des ensembles de fréquences propres des problèmes de Neumann σ_{Neu}^+ et σ_{Neu}^-,*
- *il faut étudier le spectre de deux opérateurs à coefficients périodiques (celui intervenant à droite et celui intervenant à gauche), ce qui va faire intervenir deux ensembles de fréquences σ_0^+ et σ_0^-.*

Les propriétés des opérateurs NtD $\Lambda^\pm$ (Proposition 3.2.62 et Théorème 3.2.63) nous permettent de montrer le théorème suivant sur le caractère bien posé du problème $(\mathcal{P}^i)$ à condition que les hypothèses concernant l'indice ρ soit vérifiées :

(H1) $\forall(x,y)\in\Omega,\quad \rho_p(x+1,y)=\rho_p(x,y)$,

(H2) $\rho \in L^\infty(\Omega)$ et $\forall (x,y) \in \Omega, \quad 0 < \rho_- \leq \rho(x,y) \leq \rho_+$,

(H3) $\forall\, (x,y) \in \mathcal{C} \cap \left\{x \in]0, \frac{1}{2}[\right\}, \quad \rho_p(\frac{1}{2}+x, y) = \rho_p(\frac{1}{2}-x, y)$,

(H4) $\exists \alpha > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall\, (x,y) \in]0,\delta[\times]0,1[, \quad \rho_p(x,y) = \alpha^2$

THÉORÈME 3.2.66 (CARACTÈRE BIEN POSÉ DU PROBLÈME $(\mathcal{P}^i)$)
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu} \cup \sigma_0$. Le problème $(\mathcal{P}^i)$ relève de l'alternative de Fredholm.

■ **PREUVE:** Montrons que l'équation de Helmholtz en domaine borné rentre dans le cadre de l'alternative de Fredholm. Soit u^i solution de $(\mathcal{P}^i)$, u^i est également solution du problème variationnel

Trouver $u^i \in H^1(\Omega^i)$ tel que

$$\forall v \in H^1(\Omega^i), \quad a^i(u,v) = \int_{\Omega^i} f\overline{v}$$

où a^i est une forme bilinéaire continue définie par

$$a^i(u,v) = \int_{\Omega^i} \nabla u \cdot \nabla \overline{v} - \omega^2 \rho_p\, u\overline{v} + \overline{\langle v, \tilde{\Lambda}^- u\rangle}_{\Gamma_0^-} + \overline{\langle v, \tilde{\Lambda}^- u\rangle}_{\Gamma_0^-}$$

où $<\cdot,\cdot>_{\Gamma_0^\pm}$ est le crochet de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma_0^\pm)$ et $H^{-1/2}(\Gamma_0^\pm)$ et où $\tilde{\Lambda}^-$ et $\tilde{\Lambda}^+$ sont les opérateurs DtN, inverses respectifs des opérateurs Λ^- et Λ^+ (voir Proposition 3.2.62). La forme a^i n'est pas coercive puisque nous savons que

$$\forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma_0^+), \quad \mathrm{Im}\langle \psi, \widetilde{\Lambda}^+ \psi\rangle_{\Gamma_0^+} \geq 0 \quad \text{et } \forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma_0^-), \quad \mathrm{Im}\langle \psi, \widetilde{\Lambda}^- \psi\rangle_{\Gamma_0^-} \geq 0,$$

les inégalités étant au sens large (voir le cas du guide droit homogène 3.1.2 pour s'en convaincre).

Soit le nouveau problème : Chercher $w^i \in \Omega^i$ tel que

$$\forall v \in H^1(\Omega^i), \quad \int_{\Omega^i} \nabla w^i \cdot \nabla \overline{v} + \rho_p\, w^i \overline{v} + \overline{\langle v, H^{-1}\, w^i\rangle}_{\Gamma_0^-} + \overline{\langle v, H^{-1}\, w^i\rangle}_{\Gamma_0^-} = \int_{\Omega^i} f\overline{v}$$

où H est défini par (3.58). Ce problème admet une unique solution puisque la forme bilinéaire qui intervient dans le terme de gauche est coercive. On sait même qu'il existe une constante C telle que

$$\|w^i\|_{H^1(\Omega^i)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega^i)}.$$

Autrement dit l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} R\ : & L^2(\Omega^i) & \to & H^1(\Omega^i) \\ & f & \mapsto & w^i \end{array}$$

est continu. D'après le théorème de Rellich (l'injection $H^1(\omega^i)$ dans $L^2(\Omega^i)$ est compacte), on sait donc que R est un opérateur compact de $L^2(\Omega^i)$ dans lui même.

Du théorème 3.2.63, nous pouvons déduire qu'il existe K compact tel que $\tilde{\Lambda}^+$ et $\tilde{\Lambda}^-$ s'écrivent sous la forme

$$\tilde{\Lambda}^+ = (Id + K)^{-1}\, H^{-1}$$

On montre facilement que pour tout K compact, il existe K_1 également compact tel que

$$(\mathrm{Id} + K)^{-1} = \mathrm{Id} + K_1.$$

On peut donc écrire

$$\tilde{\Lambda}^+ = H^{-1} + K_0$$

avec K_0 un opérateur compact de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$.

On montre enfin que résoudre $(\mathcal{P}^i)$ équivaut à résoudre :

$$u^i = R\big(f + \rho_p(1+\omega^2)u^i + (\gamma_{\Gamma_0^+})^*\, K_0\, \gamma_{\Gamma_0^+} u^i + (\gamma_{\Gamma_0^-})^*\, K_0\, \gamma_{\Gamma_0^-} u^i\big)$$

où $\gamma_{\Gamma_0^\pm}$ sont les opérateurs trace sur $\Gamma_0^\pm$, soit

$$\Big(\mathrm{Id} - R\,\big(\rho_p(1+\omega^2)\mathrm{Id} + (\gamma_{\Gamma_0^+})^*\, K_0\, \gamma_{\Gamma_0^+} + (\gamma_{\Gamma_0^-})^*\, K_0\, \gamma_{\Gamma_0^-}\big)\Big) u^i = R\, f$$

problème qui relève bien sûr de l'alternative de Fredholm dans $L^2(\Omega^i)$. ■

Pour conclure quant au caractère bien posé du problème $(\mathcal{P}^i)$, il suffirait d'avoir soit l'unicité soit l'existence d'une solution du problème $(\mathcal{P}^i)$. Nous avons un résultat partiel concernant le cas où le milieu est parfaitement périodique.

THÉORÈME 3.2.67 (CARACTÈRE BIEN POSÉ DE $(\mathcal{P}^i)$ POUR UN GUIDE PARFAITEMENT PÉRIODIQUE)
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu} \cup \sigma_0$. Le problème $(\mathcal{P}^i)$ est bien posé.

■ **PREUVE:** La démonstration est simple. Comme la source f est supposée à support compacte, elle vérifie l'hypothèse (3.11) avec un $s \in]1/2, 1]$ et $r \in [0,1]$ et la fonction u donnée par (3.28) est limite des solutions des problèmes avec absorption et est solution du problème $(\mathcal{P})$. On montre donc facilement que sa restriction à Ω^i est solution de $(\mathcal{P}^i)$. Il existe donc une solution au problème et d'après l'alternative de Fredholm, elle est unique. ■

Un résultat d'analyticité des opérateurs $\Lambda^\pm(\omega)$ pourrait nous donner le caractère bien posé dans le cas général. C'est évident dans le cas homogène mais dans le cas général, il faudrait reprendre la caractérisation de $\Lambda^\pm$ via les expressions (3.34), (3.28), (3.29) et (3.26). Cela nous semble technique et complexe à démontrer (il est lié à des propriétés particulières des courbes de dispersion) mais c'est ce que nous conjecturons.

CONJECTURE 3.2.68 (CARACTÈRE BIEN POSÉ DU PROBLÈME $(\mathcal{P}^i)$)
Les opérateurs $\Lambda^\pm(\omega)$ étant analytiques par rapport à ω, il existe une unique solution u^i du problème $(\mathcal{P}^i)$ sauf pour une quantité dénombrable de fréquences noté σ^i.

REMARQUE 3.2.69
Dans le cas où les milieux de part et d'autre de Ω^i sont différents, le théorème 3.2.66 est toujours vrai. En effet, nous pouvons réécrire la même preuve avec les opérateurs DtN différents. Il faut juste s'assurer que les indices ρ_p^- et ρ_p^+ satisfont les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4). La conjecture 3.2.68 nous semble également toujours valide.

REMARQUE 3.2.70
En ce qui concerne, l'ensemble des fréquences exclues, nous avons expliqué Section 3.2.1.1 et Annexe A.1, une alternative pour ne pas avoir à exclure les fréquences propres du problème de Neumann, σ_{Neu}.

En ce qui concerne l'ensemble σ_0 qui intervient dans le passage à la limite des problèmes de demi-guide, nous avons expliqué Remarques 3.2.13 et 3.2.21 comment réduire cet ensemble de fréquences interdites (nous pouvons réécrire la preuve pour les fréquences qui correspondent

à des intersections de bandes spectrales). Il reste néanmoins des fréquences (celle qui correspondent aux extremums des bandes spectrales) pour lesquelles l'étude du passage à la limite n'est plus valable. Dans le cas 1D, nous avons établi un résultat équivalent mais en explicitant ces fréquences (voir Remarque 1.4.49).

Enfin, il reste l'ensemble σ^i dont nous avons prouvé l'existence sans expliciter sa définition. Dans le cas du guide droit homogène, nous pouvons expliciter cet ensemble. C'est l'objet de la remarque suivante où nous expliquons également pourquoi dans le cas général, il est plus difficile de définir cet ensemble.

REMARQUE 3.2.71 (L'ENSEMBLE σ^i POUR LE GUIDE DROIT HOMOGÈNE)
Dans le cas du guide droit homogène, nous pouvons définir cet ensemble de fréquences. En effet, rappelons que section 3.1.2 nous avons donné l'expression des opérateurs NtD :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0^{\pm}), \quad \Lambda^{\pm}\varphi = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\gamma_n(\omega)} \left\langle \varphi_n, \varphi \right\rangle \varphi_n. \tag{3.59}$$

où $\{\varphi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une BON de vecteurs propres du laplacien transverse, pour $n < \alpha\omega/\pi$ $\gamma_n(\omega) = -\imath\sqrt{\alpha^2\omega^2 - n^2\pi^2}$ et pour $n > \alpha\omega/\pi$, $\gamma_n(\omega) = \sqrt{\beta_n - \alpha^2\omega^2}$. Comme le problème $(\mathcal{P}^i)$ relève de l'alternative de Fredholm, il suffit de montrer l'unicité. Si on reprend les notations de la preuve du théorème 3.2.66, soit $u \in H^1(\Omega^i)$ tel que

$$\forall v \in H^1(\Omega^i), \quad a^i(u,v) = 0$$

En prenant $v = u$ et la partie imaginaire de cette expression, comme les vecteurs propres de $\Lambda^{\pm}$ forment une BON et que les valeurs propres imaginaires purs sont toutes de mêmes signes, on montre que

$$\forall n < \frac{\alpha\omega}{\pi}, \quad \left\langle \varphi_n, u\big|_{\Gamma_0^{\pm}} \right\rangle = 0.$$

Il nous reste donc

$$\forall v \in H^1(\Omega^i), \quad \int_{\Omega^i} \nabla u \cdot \nabla v + \sum_{n>\alpha\omega/\pi} \gamma_n(\omega) \overline{\left\langle \varphi_n, u\big|_{\Gamma_0^{\pm}} \right\rangle} \left\langle \varphi_n, v\big|_{\Gamma_0^{\pm}} \right\rangle = \omega^2 \int_{\Omega^i} \rho_p u\overline{v}.$$

Il existe donc un opérateur $A^i(\omega)$ autoadjoint qui dépend de ω tel que l'expression précédente est équivalente à

$$A^i(\omega)\, u = \omega^2 u$$

qui implique que $u = 0$ sauf si u est un vecteur propre de $A^i(\omega)$ pour la valeur propre ω^2. Il y a donc unicité sauf quand ω^2 rencontre une des valeurs propres de $A^i(\omega)$. Comme $A^i(\omega)$ est autoadjoint, nous pouvons appliquer le principe du min-max pour exprimer les valeurs propres de $A^i(\omega)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n(\omega) = \min_{\dim F = n} \max_{v \in F} \frac{\left(A^i(\omega)v, v\right)}{\|v\|^2}$$

Les valeurs propres $\lambda_n(\omega)$ varie de la même façon que toutes les $\gamma_n(\omega)$: ce sont donc des fonctions strictement décroissantes de ω. L'ensemble des fréquences pour lesquelles nous ne pouvons montrer que le problème est bien posé correspond donc à l'ensemble des points d'intersection entre la courbe $\omega \mapsto \omega^2$ et les courbes $\omega \mapsto \lambda_n(\omega)$ (voir Figure 3.2). C'est un ensemble dénombrable puisque toutes ces courbes sont strictement monotones. Notons de plus que pour

les fréquences de la forme $\omega = n\pi/\alpha$, nous ne pouvons montrer non plus le caractère bien posé du problème puisque nous ne pourrions avoir de condition sur le terme $< \varphi_n, u|_{\Gamma_0^\pm} >$. Pour ces fréquences, cela ne signifie pas que le problème est nécessairement mal posé : tout dépend ensuite de la perturbation : du domaine Ω^i et de la source f. En effet, on montre que si la géométrie de Ω est telle que $x\mathbf{n}_x \leq 0$, pour tout x où $\mathbf{n}$ désigne la normale extérieure (ce qui correspond à une absence de cavité) alors le problème $(\mathcal{P}^i)$ est bien posé pour tout $\omega > 0$. Nous pouvons par

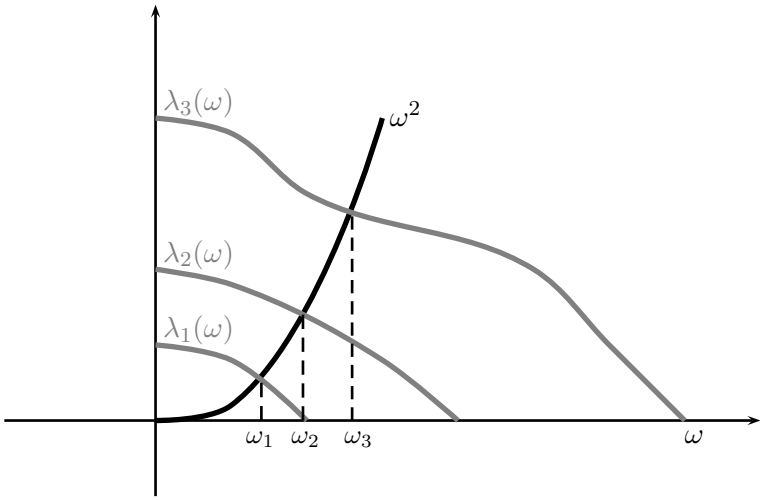


FIG. 3.2: Ensemble des fréquences σ^i dans le cas du guide droit homogène. La courbe $\omega \mapsto \omega^2$ est en noir, les courbes $\omega \mapsto \lambda_n(\omega)$ sont en gris : les points d'intersection sont les fréquences appartenant à σ^i.

conséquent expliciter l'ensemble des fréquences exclues dans le théorème 3.2.66. Dans le cas général, nous ne pouvons appliquer la même démonstration parce que

1. *Les opérateurs $\Lambda^\pm$ ne sont pas diagonalisables dans le cas général. Nous avons montré qu'ils étaient seulement « jordanisables » (voir Théorème 3.2.63) ;*
2. *L'ensemble de leurs vecteurs propres généralisés ne forme pas une BON. La Proposition 3.2.64 nous laisse cependant penser qu'il forme une base de Riesz ;*
3. *les valeurs propres ne sont pas nécessairement toutes de partie imaginaire négative ou toutes de partie réelle positive. Même si de la Proposition 3.2.62, nous avons établi que*

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad Im\left\langle \Lambda^\pm \varphi, \varphi \right\rangle \geq 0.$$

Comme les vecteurs propres ne sont pas nécessairement orthogonaux, nous ne pouvons déduire quoi que ce soit en ce qui concerne les valeurs propres. Cependant de la Proposition 3.2.63, nous savons qu'il existe seulement une quantité finie de valeurs propres à l'extérieur de tout secteur angulaire $]-\eta, \eta[$ avec $\eta > 0$.

Toutes ces raisons font que nous ne pouvons, étant donnés les résultats que nous avons pour l'instant, aller plus loin dans la démonstration du Théorème 3.2.66.

Nous avons donc montré Théorème 3.2.66 que le problème $(\mathcal{P}^i)$ avec conditions de NtD relève de l'alternative de Fredholm à condition que la fréquence ω soit telle que $\omega^2 \notin \sigma_{Neu} \cup \sigma_0 \cup \sigma^i$

et d'après la Conjecture 3.2.68, il est bien posé. Pour démontrer complètement le principe d'absorption limite, il faut montrer que l'unique solution u^i du problème $(\mathcal{P}^i)$, quand il est bien posé, est bien la limite, dans un certain sens, quand ε tend vers 0 de la famille u^i_ε, solutions des problèmes $(\mathcal{P}^i_\varepsilon)$. Ceci est le résultat du théorème suivant. Pour la démonstration nous renvoyons le lecteur au Théorème 3.2.41 qui traite du cas où la fréquence ω est telle que $\omega^2 \notin \sigma(A)$ car les arguments sont exactement les mêmes.

THÉORÈME 3.2.72
Supposons $\omega^2 \notin \sigma_{Neu} \cup \sigma_0 \cup \sigma^i$. Soit u^i l'unique solution du problème $(\mathcal{P}^i)$ alors on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u^i_\varepsilon - u^i\|_{H^1(\Omega^i)} = 0.$$

Les théorèmes 3.2.60, 3.2.66 et 3.2.72 et la conjecture 3.2.68 nous permettent de définir de manière unique la solution « physique » du problème de Helmholtz $(\mathcal{P})$, limite des solutions des problèmes de Helmholtz avec absorption $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ dans le cas où $\omega^2 \in \sigma(A)$.

PROPOSITION 3.2.73 (« BONNE » SOLUTION DU PROBLÈME $(\mathcal{P})$ QUAND $\omega^2 \in \sigma(A)$)
Soit $\omega^2 \notin \sigma_{Neu} \cup \sigma_0 \cup \sigma^i$. Soit u définie par :

$$\left|\begin{array}{lll} u = u^i, & \text{dans } \Omega^i & \\ u = u^+\left(\varphi^+\right), & \text{dans } \Omega^+, \quad \text{avec } \varphi^+ = -\dfrac{\partial u^i}{\partial x}\Big|_{\Gamma_0^+} & \\ u = u^-\left(\varphi^-\right), & \text{dans } \Omega^-, \quad \text{avec } \varphi^- = +\dfrac{\partial u^i}{\partial x}\Big|_{\Gamma_0^-} & \end{array}\right. \tag{3.60}$$

où u^i est l'unique solution du problème $(\mathcal{P}^i)$, u^+ est la solution de $\mathcal{P}^+$ limite des uniques solutions u^+_ε de $\mathcal{P}^+_\varepsilon$ et u^- est la solution de $\mathcal{P}^-$ limite des uniques solutions u^-_ε de $\mathcal{P}^-_\varepsilon$. Alors u est la solution « physique » u du problème $(\mathcal{P})$: elle est solution de $(\mathcal{P})$ et limite dans H^1_{loc} de la famille u_ε, solutions des problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, quand ε tend vers 0.

3.3 Résolution numérique dans le cas sans absorption

Nous présentons dans cette section un certain nombre de résultats numériques illustrant les résultats présentés dans la section précédente et validant la méthode développée. Nous commençons par expliquer l'algorithme de résolution dans le cas où la fréquence ω est telle que $\omega^2 \notin \sigma(A)$, qui est semblable à l'algorithme de résolution dans le cas avec absorption et que nous illustrons par des résultats numériques. Dans la deuxième section, nous aborderons le cas où la fréquence ω est telle que $\omega^2 \in \sigma(A)$. Dans ce cas, il n'y a plus unicité de la solution de rayon spectral inférieur ou égal à 1 de l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^R)$. Nous avons conjecturé qu'il suffisait de rajouter les critères (3.48) pour retrouver l'unicité. Nous expliquerons donc comment utiliser ces critères et comment ils s'interprètent pratiquement. Nous illustrerons également le lien entre les bonnes valeurs propres de module 1 de l'opérateur de propagation et le spectre de l'opérateur à coefficients périodiques. Un certain nombre de validations de la méthode seront effectuées au fil de la troisième section. Nous finirons par un problème de réflexion-transmission entre deux guides périodiques différents résolu en utilisant notre méthode.

Nous rappelons que les problèmes qui doivent être discrétisés sont essentiellement des problèmes de cellule avec condition de Neumann et le problème en domaine borné avec conditions de NtD. Dans le cas de l'équation de Helmholtz avec absorption, nous avons choisi d'utiliser et d'expliquer la discrétisation par éléments finis mixtes qui a l'avantage d'être simple pour valider dans un premier temps la méthode, les résultats pouvant s'extrapoler à des méthodes numériques plus perfectionnées et plus précises. Nous avons notamment effectué une analyse numérique de cette méthode et établi des estimations d'erreur.

Il parait naturel de continuer à utiliser cette méthode dans le cas sans absorption. Notons néanmoins que la même analyse numérique ne peut être effectuée car nous pourrions montrer les constantes intervenant dans les estimations d'erreur dépendent de la coercivité du problème et par conséquent explosent quand il n'y a plus d'absorption. Une autre idée de preuve serait de tenter d'appliquer la preuve du principe d'absorption limite pour le cas continu établie Section 3.2.2 au cas discret et de montrer en particulier que pour un pas de discrétisation h assez petit

- les couples de solutions discrètes $(u^{\pm}_{\varepsilon,h}(\varphi_h), \mathbf{U}^{\pm}_{\varepsilon,h}(\varphi_h))$ a bien une limite dans une certaine norme pour toute donnée φ_h que nous notons $(u^{\pm}_{h}(\varphi_h), \mathbf{U}^{\pm}_{h}(\varphi_h))$, eux même couples de solutions du problème de demi-guide mixte discret (2.37) sans absorption ($\varepsilon = 0$) ;
- les opérateurs de propagation $R^{\pm}_{\varepsilon,h}$ ont bien une limite dans $\mathcal{L}(\mathcal{T}_h)$ que nous notons $R^{\pm}_{h}$ qui est un opérateur de rayon spectral inférieur ou égal à 1, solution d'une équation caractéristique discrète ;
- les opérateurs NtD $\Lambda^{\pm}_{\varepsilon,h}$ ont bien une limite dans $\mathcal{L}(\mathcal{T}_h)$ que nous notons $\Lambda^{\pm}_{h}$.

En utilisant enfin les principes d'absorption limite continu et discret, les caractéristiques de la discrétisation choisie pour approcher le problème avec absorption et en particulier les erreurs d'approximation, nous pensons qu'il est possible de prouver que

- les couples de solutions discrètes $(u^{\pm}_{h}(\varphi_h), \mathbf{U}^{\pm}_{h}(\varphi_h))$ approchent le couple de solutions $(u^{\pm}_{h}(\varphi_h), \mathbf{U}^{\pm}_{h}(\varphi_h))$ du problème mixte (2.35) sans absorption ($\varepsilon = 0$) avec l'estimation d'erreur du Théorème 2.3.9 conservée ;
- les opérateurs de propagation $R^{\pm}_{h}$ approchent les opérateurs de propagation $R^{\pm}$ avec l'estimation d'erreur du Théorème 2.3.12 conservée ;
- les opérateurs NtD Λ^{+}_{h} approchent les opérateurs NtD $\Lambda^{\pm}$ avec l'estimation d'erreur du Théorème 2.3.26 conservée.

Nous pourrions déduire ensuite les résultats équivalents pour le problème intérieur.

Nous ne rentrerons pas plus dans le détail de la discrétisation dans ce cas car **la justification théorique de cette méthode numérique reste pour l'instant une question ouverte.** Notre conjecture est que cette méthode est toujours aussi performante à condition que

- pour les problèmes de cellule que la fréquence ne soit pas une fréquence propre du problème de Neumann discrétisé : $\omega^2 \notin \sigma_{Neu,h}$,
- pour le problème intérieur que la fréquence ne soit pas une valeur propre de l'opérateur périodique perturbé $\tilde{A}$: $\omega^2 \in \sigma(\tilde{A}_h)$,

ce que nous supposons dans toute cette section et que le principe d'absorption limite discret est vrai. Nous montrerons via des résultats numériques que la méthode marche toujours autant et que les erreurs d'approximation sont les mêmes que dans le cas avec absorption.

REMARQUE 3.3.1 (AUTRE MÉTHODE D'APPROXIMATION)
Après la démonstration du principe d'absorption limite qui est venue beaucoup plus tard que les

premiers résultats numériques, nous avons pensé qu'il y aurait peut être une méthode de discrétisation qui découle de l'expression (3.20) *de* u_ε *et de l'expression* (3.28) *de* u *et qui consisterait à trouver une méthode de discrétisation en* k *adéquate (qui remplacerait en pratique les intégrales en* k *par des sommes) et à résoudre un problème aux valeurs propres discret pour déterminer une approximation des valeurs propres* $\lambda_n(k)$ *et vecteurs propres* $\varphi_n(\cdot,\cdot;k)$ *de l'opérateur* $A(k)$ *pour chaque* k *(qui remplacerait en pratique les sommes infinies en* n *par des sommes finies). Une des perspectives de la thèse est d'effectuer l'analyse numérique d'une telle méthode de discrétisation.*

3.3.1 Cas où $\omega^2 \notin \sigma(A)$

Dans ce cas de figure, nous avons montré Section 3.2.4 que l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^R)$ admet un unique opérateur solution compact de rayon spectral inférieur ou égal à 1, qui est limite de la famille d'opérateurs $\{R_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$. Il suffit donc d'utiliser une des méthodes de résolution de l'équation caractéristique données dans le cas avec absorption, Section 2.3.2.3 : la méthode de décomposition spectrale ou la méthode de Newton « modifiée ».

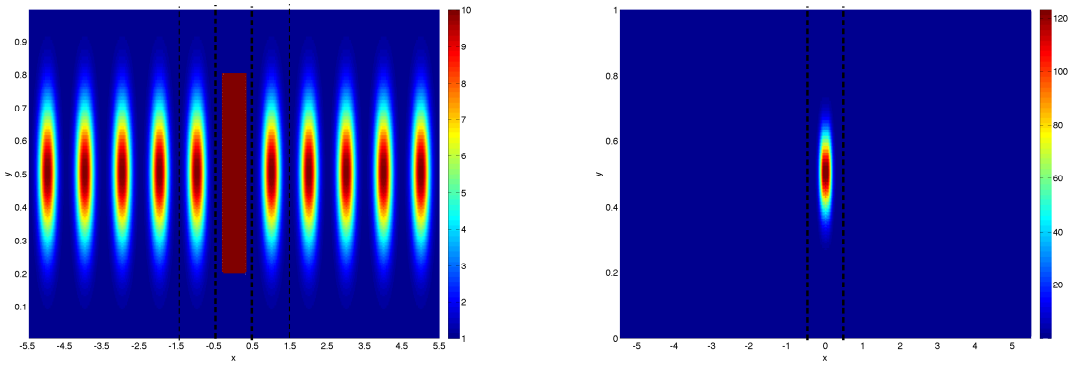
Dans ce cas, il n'y a aucune ambiguïté sur la définition de la solution « physique » du problème : elle ne dépend pas du problème avec absorption. La résolution de ce problème est donc directe et ne nécessite pas de résolution au préalable d'un problème avec absorption (comme ce sera le cas pour $\omega^2 \in \sigma(A)$).

♢ *Algorithme de caractérisation de l'opérateur de NtD et de résolution des problèmes de demi-guide*

L'algorithme de résolution des problèmes de demi-guide est donc exactement le même que celui du cas avec absorption

1. on calcule pour toute donnée φ in $H^{-1/2}(\Gamma)$, une approximation des solutions $e^0(\varphi)$ et $e^1(\varphi)$ des problèmes de cellule (3.4)(3.5) dont la discrétisation est la même que celle développée Section 2.3.1.1 ;
2. on en déduit une approximation des opérateurs de NtD locaux (T_ε^{00}, T_ε^{01}, T_ε^{10}, T_ε^{11}) définies par (3.8), calculée comme dans (2.34) ;
3. on résout l'équation caractéristique $(\mathcal{E}^R)$ discrétisée en utilisant une des deux méthodes expliquées Section 2.3.2.3 :
   – la méthode de décomposition spectrale ;
   – la méthode de Newton « modifiée » ;
4. on calcule une approximation de l'opérateur en utilisant (2.50)

Nous présentons dans la suite les résultats obtenus dans le cas du guide droit de la section 2.3 : nous rappelons les données ρ et f Figures 3.3(a) et 3.3(b). Le milieu est donc une perturbation compacte d'un milieu parfaitement périodique. Notons également que l'indice ρ, en plus de satisfaire les hypothèses (H1) et (H2), satisfait les hypothèses (H3) (et (H4)). Rappelons que le principe d'absorption limite n'a été démontré que dans le cas où l'hypothèse (H3) est vérifiée (l'hypothèse (H4) n'a pas été utile pour établir des résultats dans le cas où $\omega^2 \notin \sigma(A)$, elle n'est



(a) Le milieu périodique localement perturbé (b) La source à support compact

FIG. 3.3: La donnée ρ sur $[-5.5, 5.5] \times [0, 1]$ et la source f sur $[-5.5, 5.5] \times [0, 1]$. Dans un premier temps, $\Omega^i = [-0.5, 0.5] \times [0, 1]$, $\mathcal{C}_1^+ = [0.5, 1.5] \times [0, 1]$ et $\mathcal{C}_1^- = [-1.5, -0.5] \times [0, 1]$

importante que dans le cas de la section suivante où $\omega^2 \in \sigma(A)$).

♢ *Solution de l'équation caractéristique* ($\mathcal{E}^R$) *: Application numérique*

Nous considérons dans ce cas, la fréquence $\omega = 6.5$. Comme nous le vérifierons par l'étude du spectre de l'opérateur correspondant à ce milieu périodique ρ_p, cette fréquence est telle que $\omega^2 \notin \sigma(A)$. Etudions tout d'abord l'équation caractéristique correspondant au problème dans Ω^+.

Les deux méthodes utilisées marchent comme dans le cas sans absorption. Pour la méthode de décomposition spectrale, nous trouvons $2N_y$ solutions de l'équation aux valeurs propres quadratiques dont exactement N_y sont de module strictement inférieur à 1. L'opérateur R_h est donc diagonalisable et reconstruit à partir de ces éléments propres. Figure 3.4, sont représentées toutes les valeurs propres de R_h dont un certain nombre se regroupe autour de 0 et quelques autres valeurs solutions de l'équation aux valeurs propres quadratiques de module strictement supérieur à 1. Quant à la méthode de Newton modifiée, elle converge bien vers le même opérateur en prenant comme « condition initiale » l'opérateur $X^0 = 0$, comme dans le cas avec absorption. On remarque également que les valeurs propres sont toutes proches de l'axe réel (dans le cas 1D où nous avions démontré que la valeur r était purement réelle Théorème 1.4.16).

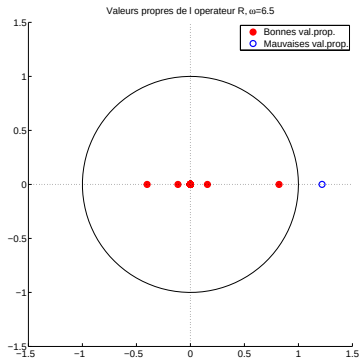


FIG. 3.4: Solutions de l'équation aux valeurs propres quadratiques ($\mathcal{E}^R$) pour la fréquence $\omega = 6.5$ qui est telle que $\omega^2 \notin \sigma(A_h)$. Les cercles rouges représentent les bonnes solutions : les valeurs propres de R_h et les cercles bleus les solutions de l'équation aux valurs propres quadratiques de module strictement supérieur à 1.

♢ ***Calcul de la solution de*** $(\mathcal{P})$

On peut ensuite calculer les opérateurs Λ_h^+ et Λ_h^- en utilisant la relation (2.50). On peut alors résoudre le problème $(\mathcal{P}^i)$ avec conditions de NtD en utilisant toujours la même discrétisation que dans le cas avec absorption à condition que la fréquence soit telle $\omega^2 \notin \sigma(\tilde{A})$ (sinon le problème est mal posé et la matrice de discrétisation non inversible).

Pour reconstruire la solution dans tout Ω, on utilise la relation de reconstruction :

$$\left|\begin{array}{lll} u_h = u_h^i, & \text{dans } \Omega^i & \\ u_h = u_h^+(\varphi_h^+), & \text{dans } \Omega^+, & \text{avec } \varphi_h^+ = \mathbf{U}_h^i \cdot (-\mathbf{e}_x)\Big|_{\Gamma_0^+} \\ u_h = u_h^-(\varphi_h^-), & \text{dans } \Omega^-, & \text{avec } \varphi_h^- = \mathbf{U}_h^i \cdot (+\mathbf{e}_x)\Big|_{\Gamma_0^-} \end{array}\right. \tag{3.61}$$

et de même

$$\left|\begin{array}{lll} \mathbf{U}_h = \mathbf{U}_h^i, & \text{dans } \Omega^i & \\ \mathbf{U}_h = \mathbf{U}_h^+(\varphi_h^+), & \text{dans } \Omega^+, & \text{avec } \varphi_h^+ = \mathbf{U}_h^i \cdot (-\mathbf{e}_x)\Big|_{\Gamma_0^+} \\ \mathbf{U}_h = \mathbf{U}_h^-(\varphi_h^-), & \text{dans } \Omega^-, & \text{avec } \varphi_h^- = \mathbf{U}_h^i \cdot (+\mathbf{e}_x)\Big|_{\Gamma_0^-} \end{array}\right. \tag{3.62}$$

où $(u_h^i, \mathbf{U}_h^i)$ est la solution du problème intérieur mixte discret (2.53) sans absorption et où pour tout $\varphi_h \in \mathcal{T}_h^+$ (resp. $\varphi_h \in \mathcal{T}_h^-$), $(u_h^+(\varphi_h), \mathbf{U}_h^+(\varphi_h))$ (resp. $(u_h^+(\varphi_h), \mathbf{U}_h^+(\varphi_h))$) est la solution du problème de demi-guide mixte discret (2.37) posé dans Ω^+ (resp. celui posé dans Ω^-) sans absorption reconstruit cellule par cellule en utilisant les relations

$$\forall j \geq 1, \quad \left|\begin{array}{rcl} u_h^{\pm}(\varphi_h)\Big|_{\mathcal{C}_j^+} & = & e_h^{0,\pm}(R_h^{j-1}\,\varphi_h) - e_h^{1,\pm}(R_h^j\,\varphi_h) \\ \mathbf{U}_h^{\pm}(\varphi_h)\Big|_{\mathcal{C}_j^+} & = & \mathbf{E}_h^{0,\pm}(R_h^{j-1}\,\varphi_h) - \mathbf{E}_h^{1,\pm}(R_h^j\,\varphi_h) \end{array}\right.$$

où $(e_h^{0,+}(\varphi_h), \mathbf{E}_h^{0,+}(\varphi_h))$ et $(e_h^{1,+}(\varphi_h), \mathbf{E}_h^{1,+}(\varphi_h))$ sont solutions des problèmes de cellule discret sans absorption (resp. $(e_h^{0,-}(\varphi_h), \mathbf{E}_h^{0,-}(\varphi_h))$ et $(e_h^{1,-}(\varphi_h), \mathbf{E}_h^{1,-}(\varphi_h))$) pour $\mathcal{C}^+$ (resp. $\mathcal{C}^-$) et R_h^+ (resp. R_h^-) est l'opérateur de propagation associé à Ω^+ (resp. à Ω^-).

Nous représentons, Figure 3.5, la solution obtenue toujours dans le cas où $\omega = 6.5$.

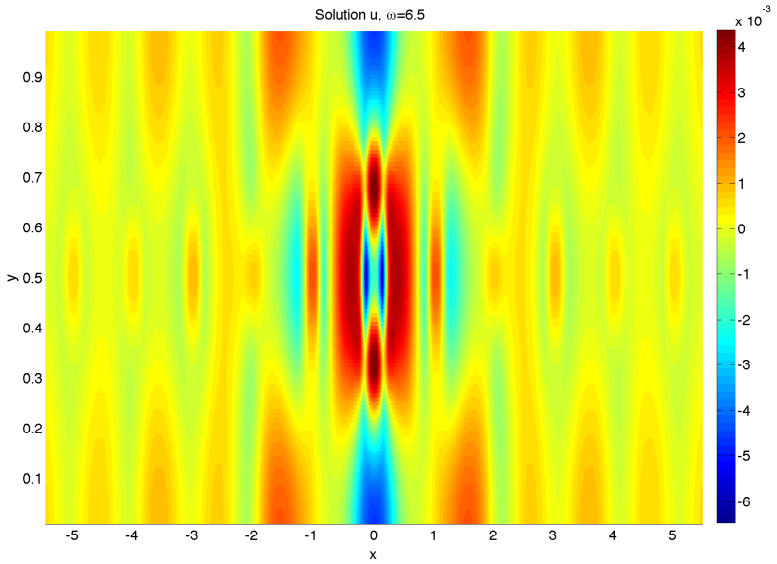


FIG. 3.5: Représentation de la solution du problème $(\mathcal{P})$ sur $[-5.5, 5.5] \times [0, 1]$ pour la fréquence $\omega = 6.5$ qui est telle que $\omega^2 \notin \sigma(A)$

3.3.2 Cas où $\omega^2 \in \sigma(A)$

Dans ce cas, la seule différence avec l'algorithme présenté précédemment est que l'équation caractéristique possède plusieurs solutions de rayon spectral inférieur ou égal à 1. Il faut donc trouver une procédure qui sélectionne le « bon » opérateur c'est-à-dire celui qui est limite de la famille d'opérateurs $\{R_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$. Nous proposons d'adapter les deux méthodes de résolution de l'équation caractéristique avec absorption proposée Section 2.3 en les adaptant à ce cas là de manière à calculer le bon opérateur.

Nous supposons dans la suite que ω^2 n'est pas dans l'équivalent discret de σ_0, c'est-à-dire l'ensemble $\sigma_{0,h}$ défini comme σ_0 mais pour l'opérateur A_h correspondant à la discrétisation de A.

3.3.2.1 Résolution de l'équation caractéristique discrète sans absorption

En utilisant la même discrétisation que celle de la section 2.3, on obtient une équation caractéristique discrète à résoudre qui s'écrit

$$\mathcal{T}(0, h, X) = 0, \qquad (\mathcal{E}_h^R)$$

où :

$$\forall X \in \mathcal{L}\big(\mathcal{T}_h\big), \quad \mathcal{T}(0,h,X) = T_h^{10}\, X^2 - (T_h^{00} + T_h^{11})\, X + T_h^{01} \tag{3.63}$$

c'est-à-dire la même équation que dans le cas continu $(\mathcal{E}^R)$ mais posée en dimension finie $\mathcal{L}\big(\mathcal{T}_h\big)$. Les coefficients de cette équation quadratique sont donc des matrices et l'inconnue est une matrice de même taille. On cherche une solution de cette équation de rayon spectral inférieur ou égal à 1 et plus précisément, puisque nous supposons le principe d'absorption limite discret vrai, la solution qui est limite des opérateurs $R_{\varepsilon,h}$ unique solution de rayon spectral strictement inférieur à 1 de l' équation caractéristique $(\mathcal{E}^R_{\varepsilon,h})$.

Suivant la méthode de résolution choisie, la méthode de décomposition spectrale ou la méthode de Newton « modifiée », une procédure différente sera adoptée pour sélectionner la bonne solution de l'équation caractéristique. Dans le cas de la première méthode, l'équivalent discret des critères (3.48) permettra de sélectionner les bonnes valeurs propres de module 1 de l'opérateur R. Dans le cas de la deuxième méthode, nous utiliserons directement le fait que R_h est limite des opérateurs $R_{\varepsilon,h}$.

♢ ***Méthode de décomposition spectrale***

Nous avons supposé le principe d'absorption limite discret vrai. Nous pourrions alors montrer que tous les résultats établis dans le cas continu pour R s'extrapolent au cas discret et que, par conséquent, l'opérateur R_h vérifie les mêmes propriétés que R. Nous utilisons donc dans la suite tous les résultats établis pour R Section 3.2.

L'idée est ici, nous le rappelons, de caractériser R_h en calculant ses valeurs propres et vecteurs propres en résolvant pour les valeurs propres l'équation aux valeurs propres quadratiques discrètes

$$\mathrm{Ker}\big(\mathcal{T}(0,h,r_h)\big) \neq 0 \tag{3.64}$$

en ne sélectionnant que les valeurs propres de module inférieur ou égal à 1, limite quand ε tend vers 0 des valeurs propres des opérateurs $R_{\varepsilon,h}$ et utilisant la propriété pour les vecteurs propres de R_h associés à la valeur propre r_h

$$\mathrm{Ker}\big(\mathcal{T}(0,h,r_h)\big) = \mathrm{Ker}\big(R_h - r_h\,\mathrm{Id}\big).$$

Nous rappelons que, en pratique, le problème linéaire à résoudre est de type de (2.46) et que si N_y est la dimension de l'espace $\mathcal{T}_h$ alors ce problème est de taille $2N_y$. Il y a donc au plus $2N_y$ valeurs propres pour ce problème.

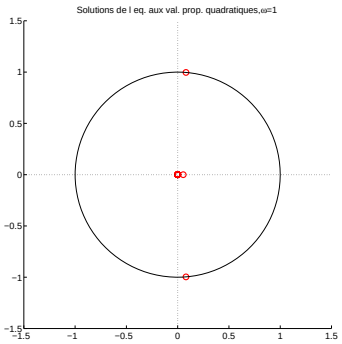
Théoriquement, il est possible que la fréquence soit telle qu'il y ait moins de $2N_y$ valeurs propres, ce qui signifierait que R_h n'est pas diagonalisable. Dans ce cas, il faudrait calculer les vecteurs propres généralisés de R_h qui correspondent à sa décomposition de Jordan et dont la caractérisation est donnée dans (2.47). En pratique, il y a toujours $2N_y$ valeurs propres et notre conjecture et que dès que ω^2 n'est pas dans l'équivalent discret de σ_0, et en particulier que ω^2 n'est pas un extremum d'une courbe de dispersion $k \mapsto \lambda_n(k)$, l'opérateur R_h est diagonalisable.

Nous allons nous placer dans ce cas là par soucis de simplicité et supposer que nous avons déterminé $2N_y$ solutions de l'équation aux valeurs propres quadratiques, il y en a donc au plus N_y qui sont valeurs propres de R_h. De plus le théorème 3.2.34 assure que sauf pour une quantité dénombrable de fréquences, pour toute valeur propres r_h non nulle :

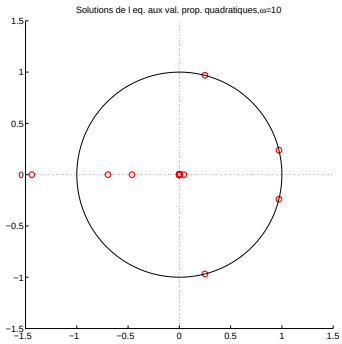
$$\mathrm{Ker}\big(\mathcal{T}(0,h,r_h)\big) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ker}\big(\mathcal{T}(0,h,\frac{1}{r_h})\big).$$

Les solutions non nulles du problème aux valeurs propres quadratiques se regroupent par paires $(r_h, 1/r_h)$. Toutes les solutions du problème aux valeurs propres quadratiques (qui appartiennent à la fenêtre de représentation) correspondant au milieu représenté Figure 3.3 sont présentées Figure 3.6 pour les fréquences $\omega = 1,\ 10,\ \sqrt{113.35},\ 50$. Notons que même si il semble y avoir qu'une seule marque proche de 0, c'est, en fait, un certain nombre de valeurs propres qui se regroupent autour de 0. Deux cas se présentent :

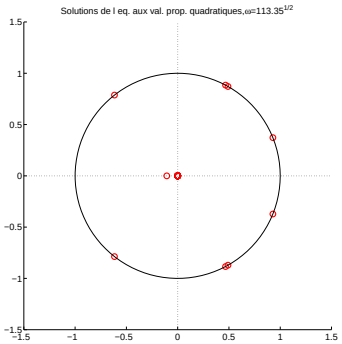
- une des solutions est de module strictement inférieur à 1, elle est nécessairement valeur propre de R_h,



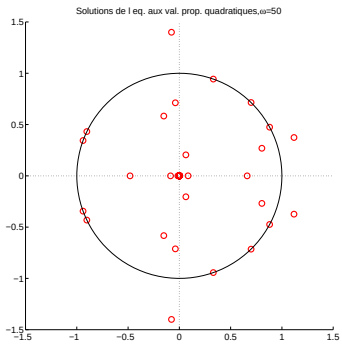
(a) Valeurs propres candidates pour $\omega = 1$



(b) Valeurs propres candidates pour $\omega = 10$



(c) Valeurs propres candidates pour $\omega = \sqrt{113.35}$



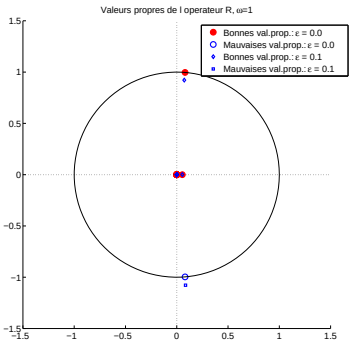
(d) Valeurs propres candidates pour $\omega = 50$

FIG. 3.6: Solutions de l'équation aux valeurs propres quadratiques (3.64) **correspondant au problème de la Figure 3.3 pour les fréquences** $\omega = 1,\ 10,\ \sqrt{113.35},\ 50$**.**

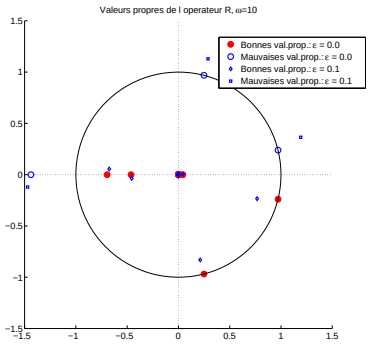
– les deux solutions sont de module égal à 1, il est donc impossible de distinguer ces deux candidates pour l'instant.

La sélection de la bonne valeur propre de module 1 parmi le couple $(r_h, 1/r_h)$ nécessite la résolution d'autres problèmes exprimant le fait que ce problème est limite de problèmes avec absorption.

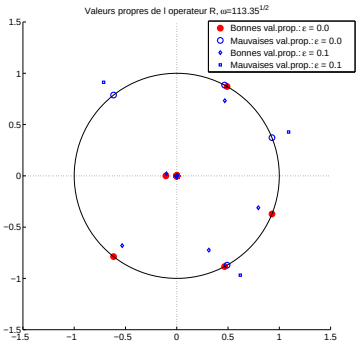
– La première méthode à laquelle nous avons pensé est d'utiliser le fait que R_h est limite des opérateurs $R_{\varepsilon,h}$ et d'en calculer un pour un certain $\varepsilon > 0$. Nous choisissons ensuite les valeurs propres qui sont « proche » des valeurs propres $r_{\varepsilon,h}$ de $R_{\varepsilon,h}$, les mauvaises valeurs propres étant proches des solutions de module strictement supérieur à 1 de l'équation aux valeurs propres quadratique avec absorption. Le critère de la distance est assez arbitraire et en plus n'est pas toujours suffisant : deux candidates, issues du même couple de solutions ou non, peuvent très proches d'une même valeur propre r_ε (voir par exemple Figure 3.7(c)). Il faut alors les départager en comparant les vecteurs propres associés puisque les vecteurs propres de $R_{\varepsilon,h}$ doivent tendre vers ceux de R_h. Cette méthode n'est pas automatique et très dépendante des seuils de proximité choisis.
– La deuxième méthode consiste à utiliser l'équivalent discret des critères (3.48). Ainsi, pour choisir la « bonne » valeur propre parmi le couple de solutions $(r_h, 1/r_h)$, pour φ_h un vecteur propre associé à r_h pour le problème aux valeurs propres quadratique (3.64), on cal-



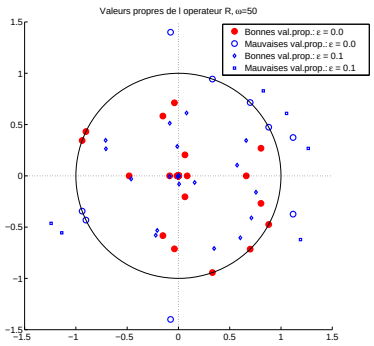
(a) Valeurs propres de R_h pour $\omega = 1$



(b) Valeurs propres de R_h pour $\omega = 10$



(c) Valeurs propres de R_h pour $\omega = \sqrt{113.35}$



(d) Valeurs propres de R_h pour $\omega = 50$

FIG. 3.7: Les valeurs propres de R_h (cercles rouges) sont les solutions de (3.64) qui sont proches des valeurs propres de $R_{\varepsilon,h}$ (points bleus). Les autres solutions de (3.64) (cercles bleus) sont proches des solutions de module strictement supérieur à 1 (carrés bleus) de l'équation aux valeurs propres quadratiques avec absorption.

cule

$$\frac{dr_h}{d\varepsilon}(0) = -\frac{\mathcal{A}_h(r_h,\varphi_h)}{\mathcal{B}_h(r_h,\varphi_h)} \tag{3.65}$$

avec

$$\left|\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_h(r_h,\varphi_h) & = & \Big\langle \Big[r_h^2 \dfrac{\partial T_h^{10}}{\partial\varepsilon}(0) - r_h\big(\dfrac{\partial T_h^{11}}{\partial\varepsilon}(0) + \dfrac{\partial T_h^{00}}{\partial\varepsilon}(0)\big) + \dfrac{\partial T_h^{01}}{\partial\varepsilon}(0)\Big]\varphi_h, \varphi_h\Big\rangle \\ \mathcal{B}_h(r_h,\varphi_h) & = & \Big\langle \Big[2r_h T_h^{10} - \big(T_h^{11} + T_h^{00}\big)\Big]\varphi_h, \varphi_h\Big\rangle \end{array}\right. \tag{3.66}$$

où $\partial_\varepsilon T_h^{ij}(0)$ sont les équivalents discrets de $\partial_\varepsilon T^{ij}(0)$, définis (3.10) et leur calcul nécessite la résolution d'un nouveau problème mixte discret dont on donne la formulation Remarque 3.3.2. Si ω^2 n'est pas dans l'équivalent discret de σ_0, ce que nous supposons, alors le terme

$$\mathrm{Re}\big(\frac{dr_h}{d\varepsilon}(0)\overline{r_h}\big) \tag{3.67}$$

est non nul. Si il est négatif alors c'est r_h la « bonne » valeur propre, si il est positif, c'est $1/r_h$.

REMARQUE 3.3.2
Pour déterminer les opérateurs $\partial_\varepsilon T_h^{ij}(0)$, on résout les problèmes mixtes discrets : pour tout $\varphi_h \in \mathcal{T}_h$, on cherche

$\forall \ell \in \{0,1\}$, $(e^\ell_{1,h}(\varphi_h), \mathbf{E}^\ell_{1,h}(\varphi_h)) \in \mathcal{M}_h \times \mathcal{W}_{0,h}$ *telle que* $\forall (v_h, \mathbf{V}_h) \in \mathcal{M}_h \times \mathcal{W}_{0,h}$

$$\left| \begin{array}{rcrcl} a(e^\ell_{1,h}, v_h) & + & b(v_h, \mathbf{E}^\ell_{1,h}) & = & -\imath\omega \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \rho_p e^\ell_h(\varphi_h)\, \overline{v}_h \\ \overline{b(e^\ell_{1,h}, \mathbf{V}_h)} & + & \mathbf{A}(\mathbf{E}^\ell_{1,h}, \mathbf{V}_h) & = & 0 \end{array} \right. \tag{3.68}$$

où a, b et A sont les formes bilinéaires de la proposition 2.3.1 avec $\varepsilon = 0$ et où $e^\ell_h(\varphi_h)$ est le premier terme du couple solution de (2.32) *avec $\varepsilon = 0$.*

On définit de manière faible $\partial_\varepsilon T_h^{ij}(0)$:
$\forall \ell \in \{0,1\}, \quad \forall \varphi_h \in \mathcal{T}_h,\ \forall \psi_h \in \mathcal{T}_h,$

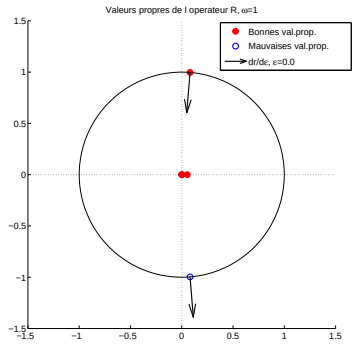
$$\begin{array}{ll} \exists \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}^0_h,\ \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_0} = \psi_h, & \displaystyle\int_{\Gamma_0} \partial_\varepsilon T_h^{\ell 0}(\varphi_h)\, \psi_h = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E}^\ell_{1,h}(\varphi_h) \cdot \mathbf{V}_h + \int_{\mathcal{C}} e^\ell_{1,h}(\varphi_h)\ \mathrm{div}\, \mathbf{V}_h \\ \exists \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}^1_h,\ \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_1} = \psi_h, & \displaystyle\int_{\Gamma_1} \partial_\varepsilon T_h^{\ell 1}(\varphi_h)\, \psi_h = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E}^\ell_{1,h}(\varphi_h) \cdot \mathbf{V}_h + \int_{\mathcal{C}} e^\ell_{1,h}(\varphi_h)\ \mathrm{div}\, \mathbf{V}_h \end{array} \tag{3.69}$$

Nous rappelons (Remarque 3.2.49) que le critère de choix signifie en pratique que les « bonnes » valeurs propres sont celles dont la dérivée en 0 pointe vers l'intérieur du cercle unité dans le plan complexe. Figure 3.8 sont représentées toutes les valeurs propres candidates, ainsi que pour celles qui sont sur le cercle unité, leurs dérivées. Notons que pour deux valeurs propres candidates, si la dérivée de la première pointe vers l'intérieur alors la dérivée de la seconde pointe vers l'extérieur. L'une d'entre elles seulement est valeur propre de R_h. Ici, la difficulté vient quand ω^2 se rapproche de l'ensemble discret approchant σ_0, plus précisément des points qui sont des extremums d'une courbe de dispersion. En effet, le terme 3.67 devient de plus en plus petit et n'a plus de sens quand il est au dessous de l'erreur de discrétisation. Si ω^2 se rapproche d'un point d'intersection entre deux courbes de dispersion (comme pour la Figure 3.8(c)), il n'y a en fait aucun problème pour sélectionner la « bonne » solution et étendre la définition du critère de choix et même celle de la vitesse de groupe (voir Remarque 3.2.56).

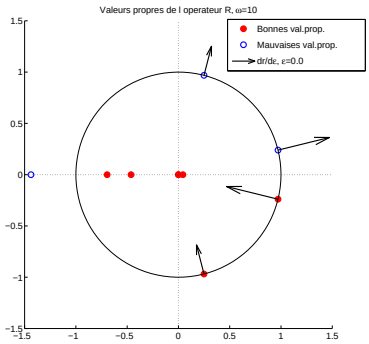
REMARQUE 3.3.3
Notons que l'ensemble des solutions de l'équation aux valeurs propres quadratiques présente une symétrie (celle de l'axe des x). Ce n'est pas une généralité et c'est seulement dû au fait que l'indice ρ_p vérifie l'hypothèse (H3).

♢ *Méthode de Newton modifiée*

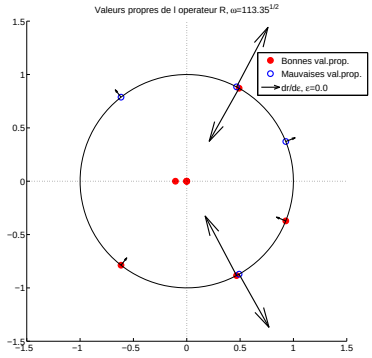
Nous voulons utiliser la méthode de Newton modifiée présentée Section 2.3.2.3 pour résoudre de l'équation de Riccati stationnaire discrète $(\mathcal{E}^R_h)$. Nous avons commencé par essayer la même condition initiale que dans le cas avec absorption, c'est-à-dire $X^0 = 0$ avec une phase de projection sur l'ensemble des opérateurs de rayon spectral inférieur ou égal à 1 mais nous n'arrivons



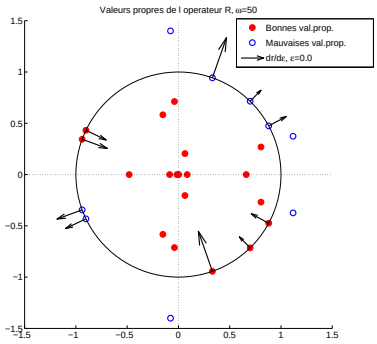
(a) Valeurs propres de R_h pour $\omega = 1$



(b) Valeurs propres de R_h pour $\omega = 10$



(c) Valeurs propres de R_h pour $\omega = \sqrt{113.35}$



(d) Valeurs propres de R_h pour $\omega = 50$

FIG. 3.8: Les valeurs propres de R_h (cercles rouges) sont les solutions de (3.64) **dont la dérivée par rapport à ε définie par** (3.65) **pointe vers l'intérieur du cercle unité. Les autres solutions de** (3.64) **(cercles bleus) voient leur dérivée pointer vers l'extérieur du cercle unité.**

pas avec cette condition initiale à sélectionner la « bonne » solution de l'équation caractéristique.

L'idée est d'utiliser le fait que R_h est limite des opérateurs $R_{\varepsilon,h}$. Nous en calculons un pour un certain $\varepsilon > 0$ en utilisant la méthode de Newton modifiée de la Section 2.3.2.3 telle quelle puis pour calculer R_h nous utilisons l'opérateur calculé $R_{\varepsilon,h}$ comme condition initiale. Voici l'algorithme de résolution pour le cas sans absorption :

1. Détermination des opérateurs NtD locaux $T^{ij}_{\varepsilon,h}$ du problème où on a rajouté un peu d'absorption ($\varepsilon > 0$) ;
2. Calcul de $R_{\varepsilon,h}$ en utilisant la méthode de Newton modifiée de la section 2.3.2.3 ;
3. Détermination des opérateurs NtD locaux T^{ij}_h du problème sans absorption ;
4. Choix de la « condition initiale » , typiquement $X^0 = R_{\varepsilon,h}$;
5. pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on détermine $\tilde{X}^{k+1}$ connaissant X^k :

$$\left| \begin{array}{l} T^{10}_h \left(X^k H^{k+1} + H^{k+1} X^k\right) - \left(T^{00}_h + T^{11}_h\right) H^{k+1} = -F_h(X^k) \\ \tilde{X}^{k+1} = X^k + H^{k+1} \end{array} \right.$$

résolu en utilisant l'algorithme développé dans [Gardiner *et al.* (1992)]

6. pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on calcule le rayon spectral $\rho(\tilde{X}^{k+1})$ et deux situations peuvent se présenter :
   (i) si $\rho(\tilde{X}^{k+1}) \leq 1$, on pose :
   $$X^{k+1} = \tilde{X}^{k+1};$$
   (ii) si $\rho(\tilde{X}^{k+1}) > 1$, on pose :
   $$X^{k+1} = \frac{\tilde{X}^{k+1}}{\rho(\tilde{X}^{k+1})};$$
   – on arrête l'algorithme quand :
   $$\frac{\|H^{k+1}\|}{\|X^k\|} \quad \text{est assez petit.}$$

Cet méthode est beaucoup plus robuste que les deux précédentes, la convergence est atteinte en quelques itérations et nous utilisons seulement le fait que R_h est limite des opérateurs $R_{\varepsilon,h}$.

Pour s'assurer que les méthodes expliquées précédemment donnent la bonne solution R_h, nous comparons le calcul de l'opérateur R_h à l'opérateur R dans le cas d'un guide droit homogène pour lequel ce dernier opérateur est déterminé de manière analytique (voir Section 3.2.5.1). Figure 3.9, nous représentons les courbes d'erreur

$$\log\ h \mapsto \log\ \frac{\|R\varphi - R_h\varphi_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}}{\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}}$$

pour plusieurs données φ, les premiers modes de l'opérateur laplacien transverse plus exactement. Même si nous n'avons pas réussi à montrer la convergence de la méthode des éléments finis mixtes pour le cas sans absorption, nous retrouvons les estimations d'erreurs prévues Théorème 2.3.12.

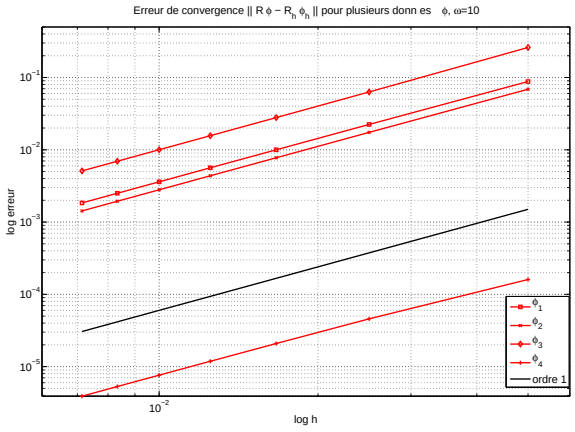


FIG. 3.9: Erreur $\|R\varphi - R_h\varphi_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}/\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ (en rouge) pour plusieurs données φ ($\{\sqrt{2}\cos(n\pi y),\ n = 1,2,3,4\}$) (un symbole par donnée) représentée en échelle logarithmique. Pour la comparaison, la droite noire représente la fonction $\varepsilon(h) = h$.

♢ ***Lien avec le spectre de l'opérateur à coefficients périodiques***

Nous voulons illustrer ici le lien, expliqué Section, entre le choix des « bonnes » solutions de module 1 de l'équation aux valeurs propres quadratiques et le spectre de l'opérateur A à coefficients périodiques ρ_p. Nous calculons donc le spectre de l'opérateur dans le cas où la fonction ρ_p correspond à la Figure 3.3 en utilisant une discrétisation par éléments finis mixtes. Nous ne rentrons pas dans le détail de cette discrétisation ici. Nous calculons plus précisément quelques courbes de dispersion $k \mapsto \lambda_n(k)$ où pour tout $k \in]-\pi,\pi[$, les $\lambda_n(k)$ sont les valeurs propres ordonnées de manière croissante de l'opérateur $A(k)$. Certaines courbes de dispersion apparaissent Figure 3.10.

Notons tout d'abord que la structure du spectre est bien plus complexe que le cas 1D, en particulier les bandes spectrales sont d'intersection non réduites à un point, c'est d'ailleurs liée au fait que l'opérateur R_h peut avoir plusieurs valeurs propres de module 1. Nous retrouvons de plus les propriétés énoncées Théorèmes 3.2.44 et 3.2.57.

3.3.2.2 Détermination des opérateurs de NtD

Si on extrapole ce que nous avons fait pour l'étude avec absorption au cas sans absorption, nous obtenons la caractérisation simple pour l'opérateur NtD correspondant au problème dans Ω^+ :

$$\Lambda_h^+ = T_h^{00} + T_h^{10}\, R_h. \tag{3.70}$$

On calcule de façon analogue l'opérateur NtD discret Λ_h^- du problème de demi-guide $\mathcal{P}^-$ posé dans Ω^-.

Nous pouvons valider la détermination de l'opérateur NtD en comparant le calcul de l'opérateur Λ_h^+ à l'opérateur Λ^+ dans le cas d'un guide droit homogène pour lequel ce dernier opérateur est déterminé de manière analytique (voir par exemple l'expression (3.59)). Figure 3.11, nous représentons les courbes d'erreur :

$$\log\ h \mapsto \log\ \frac{\|\Lambda^+\varphi - \Lambda_h^+\varphi_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}}{\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}}$$

pour plusieurs données φ, les premiers modes de l'opérateur laplacien transverse plus exactement. Même si nous n'avons pas réussi à montrer la convergence de la méthode des éléments finis mixtes pour le cas sans absorption, nous retrouvons les estimations d'erreurs prévues Théorème 2.3.26.

3.3.2.3 Calcul de la solution de $(\mathcal{P})$

Après avoir déterminé Λ^+ et Λ^- correspondants aux domaines respectifs Ω^+ et Ω^-, on cherche à résoudre $(\mathcal{P}^i)$ en utilisant la même discrétisation que dans le cas avec absorption (voir Section 2.3.4) à condition que la fréquence soit telle que ω^2 n'est pas dans l'équivalent discret de σ_0.

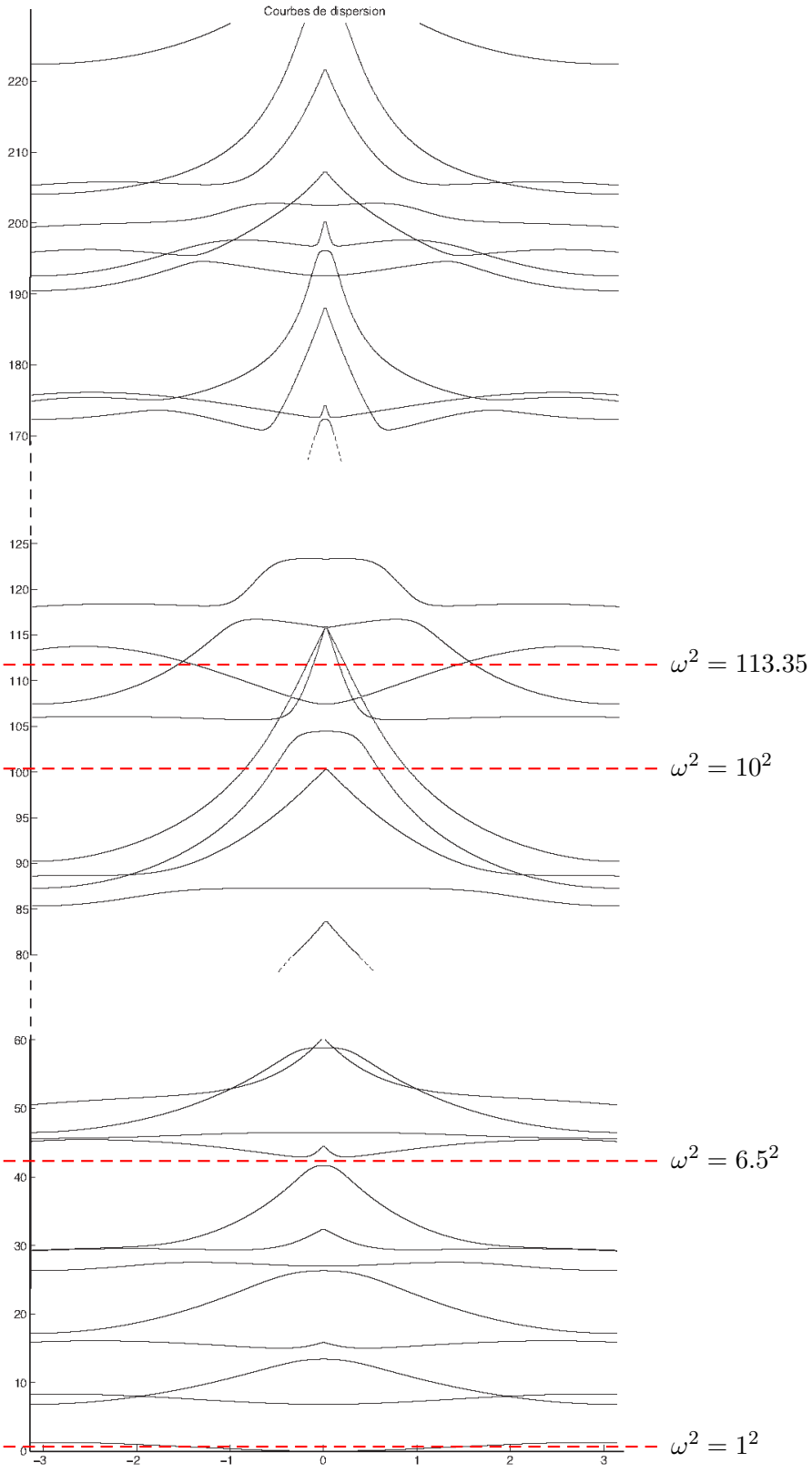


FIG. 3.10: Représentation de plusieurs courbes de dispersion $k \mapsto \lambda_n(k)$ correspondant à l'opérateur A dans le cas où la fonction ρ_p est celle de la Figure 3.3

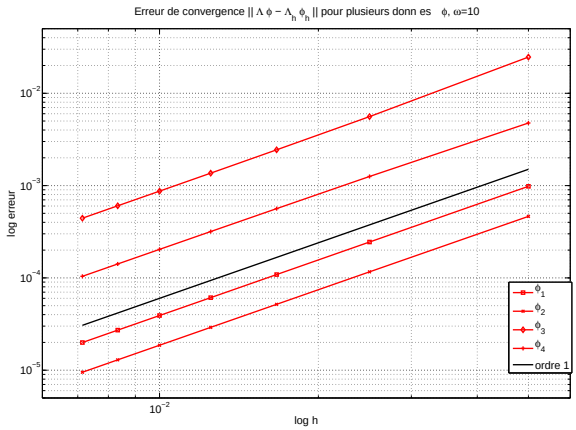
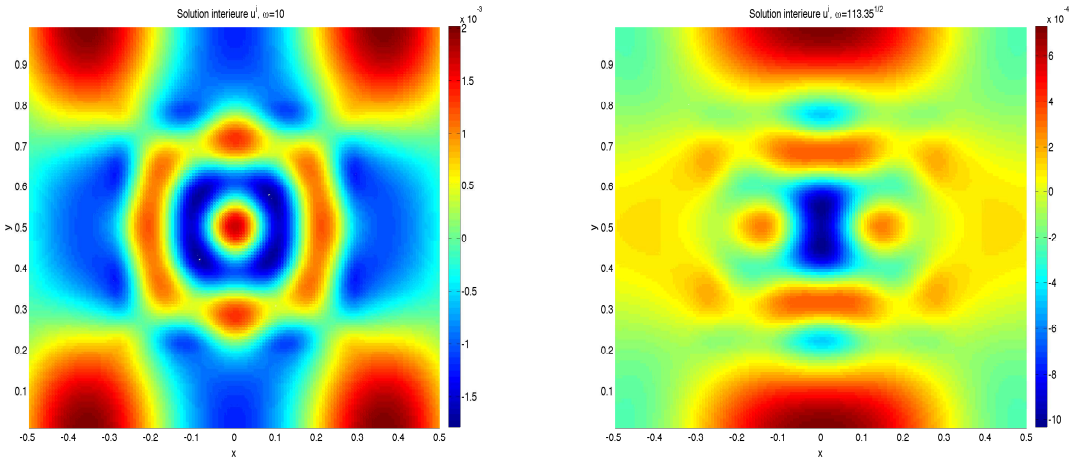


FIG. 3.11: Erreur $\|\Lambda^+\varphi - \Lambda_h^+\varphi_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}/\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ (en rouge) pour plusieurs données φ ($\{\sqrt{2}\cos(n\pi y),\ \ n = 1,2,3,4\}$) (un symbole par donnée) représentée en échelle logarithmique. Pour la comparaison, la droite noire représente la fonction $\varepsilon(h) = h$.

♢ *Application numérique*

Figure 3.12 est représentée la solution u_h^i du problème (2.53) avec $\varepsilon = 0$, dans le cas où le milieu est celui de la Figure 3.3, pour deux fréquences différentes $\omega = 10$ et $\omega = \sqrt{113.35}$ et pour un pas de discrétisation $h = 1/100$.



(a) La solution u_h^i pour $\omega = 10$

(b) La solution u_h^i pour $\omega = \sqrt{113.35}$

FIG. 3.12: Représentation de la solution intérieure pour les fréquences $\omega = 10$ et $\omega = \sqrt{113.35}$ dans le cas où $\Omega^i =]-0.5, 0.5[\times]0, 1[$.

♢ ***Définition de la solution du problème*** $(\mathcal{P})$

On définit le couple de fonctions $(u_h, \mathbf{U}_h)$ en utilisant les relations de reconstruction (3.61) et (3.62) énoncées Section 3.3.1.

♢ ***Application numérique***

Figure 3.13 est représentée la solution $u_{\varepsilon,h}$ du problème (2.56) avec $\varepsilon = 0$, dans le cas où le milieu est celui de la Figure 3.3, pour deux fréquences différentes $\omega = 10$ et $\omega = \sqrt{113.35}$ et pour un pas de discrétisation $h = 1/100$.

3.3.3 Validations

Nous n'avons pas montré la convergence de la méthode dans le cas sans absorption mais nous avons émis la conjecture que sauf pour une quantité dénombrable de fréquences, la méthode est aussi performante que dans le cas avec absorption. Afin de valider cette conjecture, nous avons considéré deux tests de validation :

- le premier est de comparer, dans le cas où le guide est droit et homogène, la solution obtenue par la méthode à la solution analytique ;
- la deuxième validation est de vérifier que la solution obtenue est invariante du choix du domaine borné Ω^i et de la période des demi-guides périodiques choisis.

3.3.3.1 Comparaison avec l'expression explicite du cas constant

La première validation est de comparer, dans le cas où le milieu est constant, les résultats obtenus par la méthode avec les résultats exacts obtenus par un calcul explicite (certains des résultats sont donnés en exemple dans la section 3.1.2).

Nous avons déjà donné précédemment les courbes d'erreur pour les opérateurs de propagation Figure 3.9 et les opérateurs NtD Figure 3.11. Nous présentons Figure 3.14(a) la courbe d'erreur

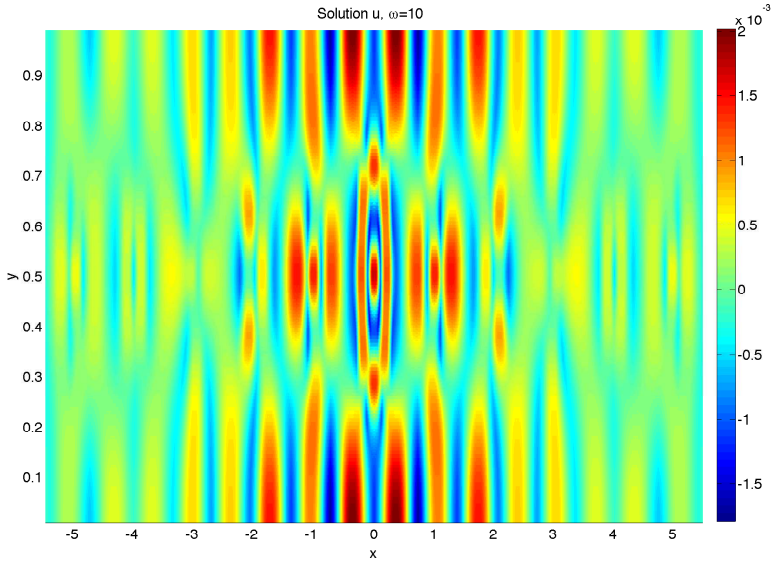
$$\log\ h \mapsto \log\ \frac{\|u^+(\varphi) - u_h^+(\varphi_h)\|_{L^2(\mathcal{C})}}{\|u^+(\varphi)\|_{L^2(\mathcal{C})}}$$

Figure 3.14(b) la courbe d'erreur

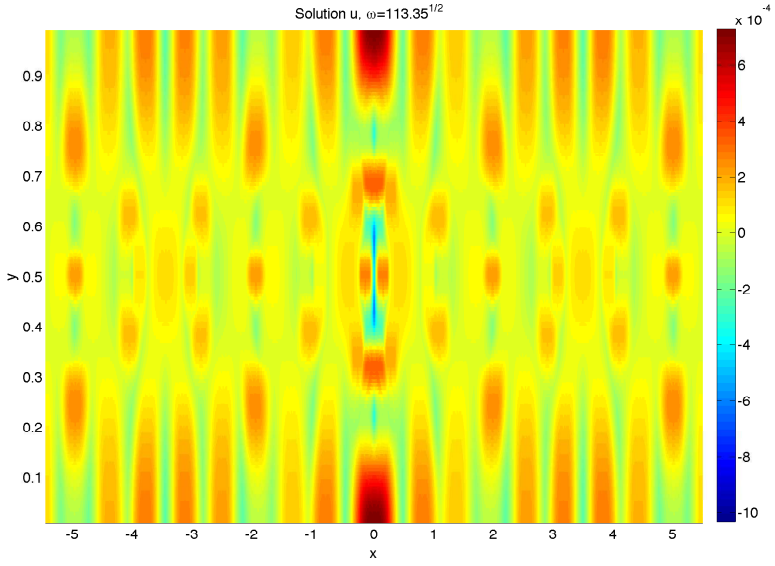
$$\log\ h \mapsto \log\ \frac{\|\mathbf{U}^+(\varphi) - \mathbf{U}_h^+(\varphi_h)\|_{L^2(\mathcal{C})}}{\|\mathbf{U}^+(\varphi)\|_{L^2(\mathcal{C})}}$$

pour plusieurs données φ, les premiers modes de l'opérateur laplacien transverse $\varphi_n = \sqrt{2}\cos(n\pi y)$ pour $n = 1, 2, 3, 4$. Nous avons tracé ces courbes d'erreurs pour la donnée φ_{int} issue de la résolution du problème intérieur :

$$\varphi_{int} = \mathbf{U}_h^i \cdot (-\mathbf{e}_x)\Big|_{\Gamma_0^+}.$$



(a) La solution $u_{\varepsilon,h}$ pour $\omega = 10$

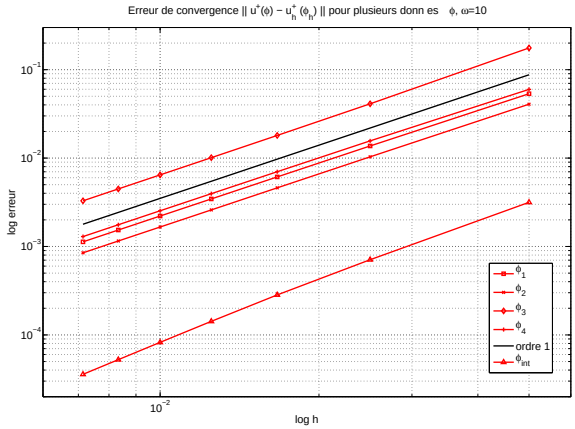


(b) La solution $u_{\varepsilon,h}$ pour $\omega = \sqrt{113.35}$

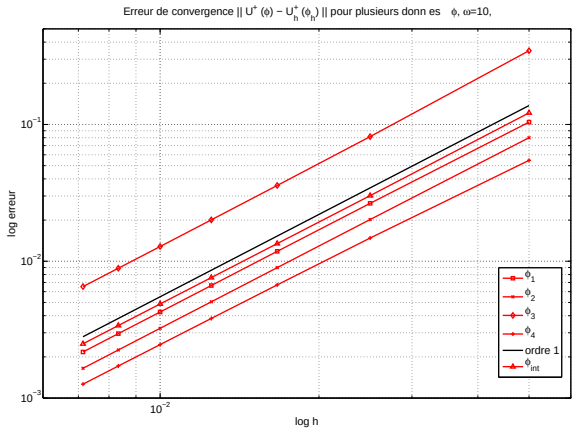
FIG. 3.13: Représentation de la solution du problème $(\mathcal{P})$ sur $[-5.5, 5.5] \times [0, 1]$ pour les fréquences $\omega = 10$ et $\omega = \sqrt{113.35}$.

pour laquelle l'erreur n'a pas été calculée seulement sur $\mathcal{C}_1^+$ mais sur $\Omega_3^+ = \mathcal{C}_1^+ \cup \mathcal{C}_2^+ \cup \mathcal{C}_3^+$.

Nous retrouvons les estimations d'erreurs prévues Théorème 2.3.9.



(a) Erreur pour $u^+(\varphi)$

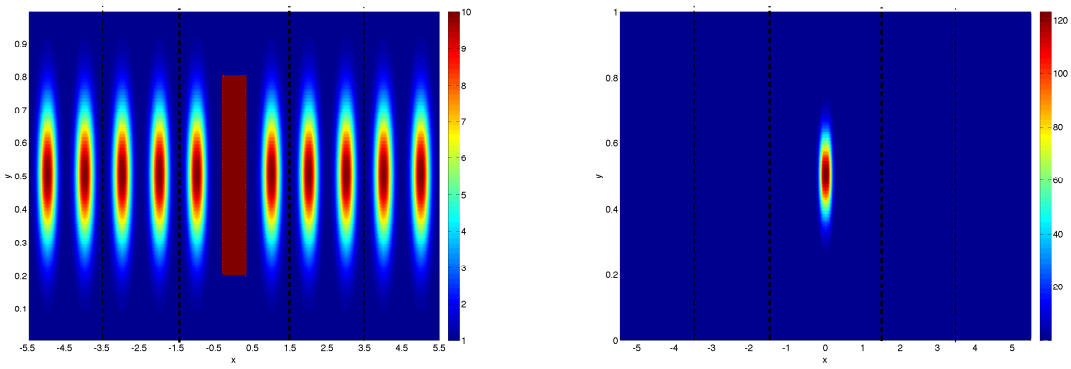


(b) Erreur pour $\mathbf{U}^+(\varphi)$

FIG. 3.14: Erreurs pour le couple de solution $(u^+(\varphi), \mathbf{U}^+(\varphi))$ (en rouge) pour plusieurs données φ ($\{\sqrt{2}\cos(n\pi y),\ n = 1,2,3,4\}$) et $\varphi = \varphi_{int}$ (un symbole par donnée) représentées en échelle logarithmique. Pour la comparaison, la droite noire représente la fonction $\varepsilon(h) = h$.

3.3.3.2 Invariance par rapport aux périodes et au domaine Ω^i choisis

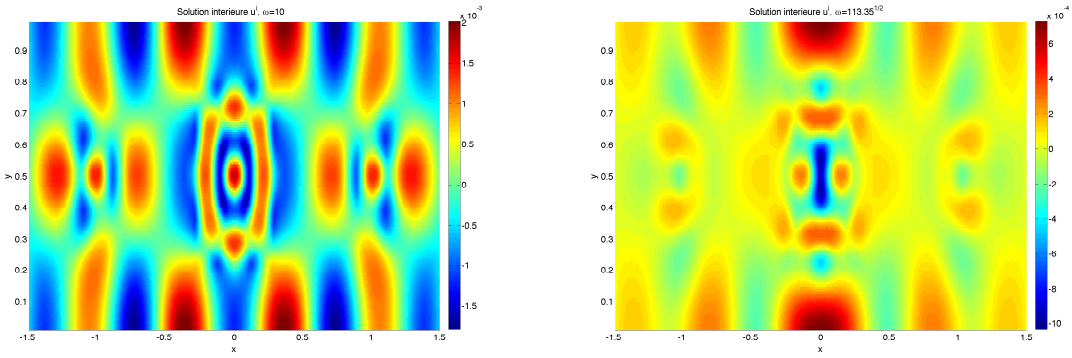
D'autre part, il est évident que la solution calculée ne doit dépendre ni de la période choisie et ni du domaine borné Ω^i. En effet, la solution doit être la même si on utilise une autre période du domaine Ω^+ et Ω^- ou n'importe quel choix de Ω^i à condition qu'il contient bien le support de la source f et de la perturbation compacte $\rho - \rho_p$.
Figure 3.16, nous représentons la solution du problème intérieur pour les mêmes donnés que



(a) Le milieu périodique localement perturbé (b) La source à support compact

FIG. 3.15: La donnée ρ sur $[-5.5,5.5]\times[0,1]$ et la source f sur $[-5.5,5.5]\times[0,1]$. Ici, $\Omega^i=[-1.5,1.5]\times[0,1]$, $\mathcal{C}_1^+=[1.5,3.5]\times[0,1]$ et $\mathcal{C}_1^-=[-3.5,-1.5]\times[0,1]$

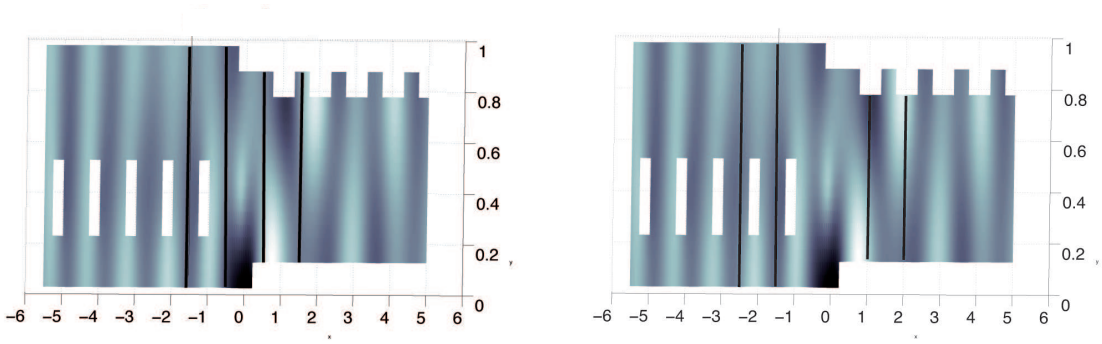
précédemment, pour les fréquences $\omega=10$ et $\sqrt{113.35}$ mais dans le cas où $\Omega^i=]-1.5,1.5[$ et $L=2$ (voir Figure 3.15). Nous avons vérifié que l'opérateur R_h calculé avec cette cellule de périodicité est bien le carré de celui obtenu précédemment et que l'opérateur NtD Λ_h^+ est inchangé. Nous trouvons exactement la même solution.



(a) La solution $u_{\varepsilon,h}$ pour $\omega=10$ (b) La solution $u_{\varepsilon,h}$ pour $\omega=\sqrt{113.35}$

FIG. 3.16: Représentation de la solution intérieure u_h^i pour la fréquence $\omega=10$ et $\sqrt{113.35}$ dans le cas où $\Omega^i=]-1.5,1.5[\times]0,1[$.

Nous terminons cette section par des résultats numériques en présentant des situations un peu moins standards, comme celle présentée Figure 2.2, c'est-à-dire des guides qui n'ont pas la même périodicité à droite et à gauche d'une certaine région Ω^i et qui ont, en plus, une géométrie plus compliquée que celle du guide droit. Nous considérons ici le guide dont la géométrie est donnée Figure 3.17, l'indice de réfraction est ici constant et la source est la même que pour les exemples précédents. Pour valider les calculs, nous les effectuons d'une part dans le cas (1), c'est-à-dire le cas où $\Omega^i=[-0.5,0.5]\times[0,1]\cap\Omega$, $\mathcal{C}_1^+=[0.5,1.5]\times[0,1]\cap\Omega$ et $\mathcal{C}_1^-=[-1.5,-0.5]\times[0,1]\cap\Omega$ et d'autre

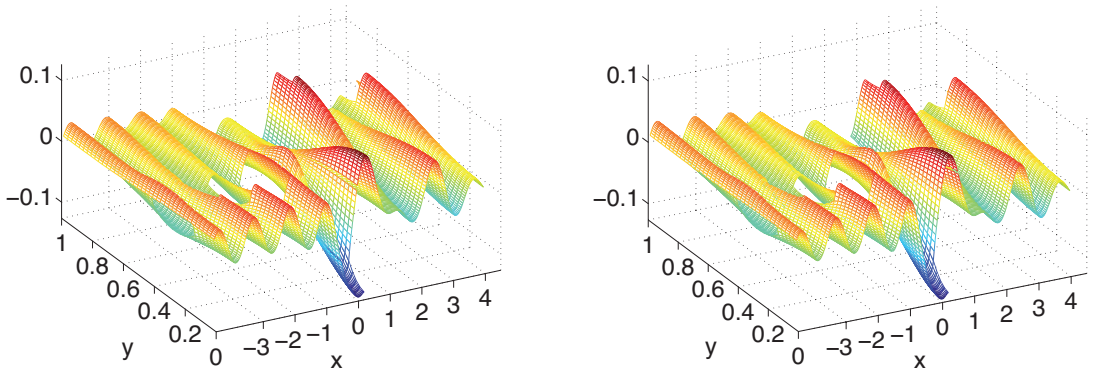


(a) Cas (1) (b) Cas (2)

FIG. 3.17: Géométrie d'un guide moins standard Ω : l'indice est constant, seule la géométrie a des caractéristiques périodiques qui sont différentes de part et d'autre du défaut Ω^i.

part pour le cas (2) où $\Omega^i = [-1.5,1]\times[0,1]\cap\Omega$, $\mathcal{C}_1^+ = [1,2]\times[0,1]\cap\Omega$ et $\mathcal{C}_1^- = [-2.5,-1.5]\times[0,1]\cap\Omega$. Les calculs doivent être indépendant du choix de Ω^i et des périodes. Remarquons que dans ce cas, les frontières $\Gamma_0^{\pm}$ et les cellules de périodicité changent complètement : on ne peut pas faire de lien entre les opérateurs de propagation ou NtD facilement.

Les solutions sont présentées Figure 3.18 et sont exactement les mêmes, comme prévu.



(a) Cas (1) (b) Cas (2)

FIG. 3.18: Représentation des solutions calculées dans le cas où le domaine intérieur Ω^i et les cellules de périodicité $\mathcal{C}^+$ et $\mathcal{C}^-$ sont celles du cas (1) ou du cas (2)

3.3.4 Problème de transmission-réflexion

Nous finissons ce chapitre par une application de cette méthode : celle du problème transmission-réflexion d'un premier milieu périodique dans un autre milieu périodique. Il n'y plus de source

localisée, nous considérons ici une onde incidente. Le domaine où nous restreignons les calculs va être un domaine qui inclut la transition entre les 2 milieux.

On cherche donc la solution (que nous appelons champ total) du problème

$$\left| \begin{array}{ll} -\triangle u - \rho(\mathbf{x})\,\omega^2\,u = f\,, & \text{dans } \Omega; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0\,, & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{3.71}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure de $\partial\Omega$. et où

$$\exists L_{\pm}, \quad \rho(x,y) = \rho_p^{\pm}(x,y) = \rho_p^{\pm}(x \pm L^{\pm}, y), \quad (x,y) \in \Omega^{\pm}$$

et où

$$\left| \begin{array}{ll} u = & u_{\text{inc}} + u_{\text{diff}}, \quad \text{dans } \Omega^-, \\ u = & u_{\text{trans}}, \quad \text{dans } \Omega^+. \end{array} \right.$$

Le champ incident u_{inc} est solution du problème

$$\left| \begin{array}{ll} -\triangle u_{\text{inc}} - \rho_p^-(\mathbf{x})\,\omega^2\,u_{\text{inc}} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \dfrac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial \mathbf{n}} = 0\,, & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{3.72}$$

où

$$\exists L_-, \quad \rho_p^-(x + L^-, y) = \rho_p^-(x,y), \quad (x,y) \in \Omega.$$

C'est donc un vecteur propre généralisé de $A^- = -1/\rho_p^- \triangle$ pour la fréquence ω^2. On le choisit « venant » de $-\infty$, c'est-à-dire qu'on choisit le mode de Floquet de vitesse de groupe négative.

On montre que la restriction de u à Ω^i, noté u^i, est solution du problème suivant :

$$\left| \begin{array}{rcl} -\triangle u^i - \rho(\mathbf{x})\,\omega^2\,u^i & = & 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^i \\ u^i - \Lambda^- \dfrac{\partial u^i}{\partial x} & = & u_{\text{inc}} - \Lambda^- \frac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial x} \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^-, \\ u^i + \Lambda^+ \dfrac{\partial u^i}{\partial x} & = & 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^+ \end{array} \right. \tag{3.73}$$

où Λ^- et Λ^+ sont les opérateurs NtD correspondant respectivement aux domaines Ω^- et Ω^+, dont le calcul a été développé dans ce chapitre.

On reconstruit u dans tout Ω grâce aux expressions suivantes :

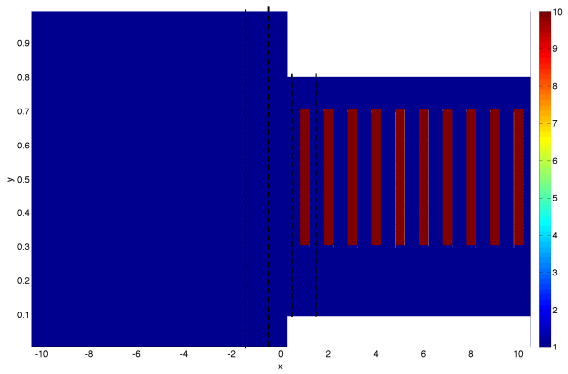
$$\left| \begin{array}{ll} u = u^i, & \text{dans } \Omega^i \\ u = u^+\Big(- \dfrac{\partial u^i}{\partial x}\Big|_{\Gamma_0^+}\Big), & \text{dans } \Omega^+ \\ u = u^-\Big(+ \dfrac{\partial u^i}{\partial x}\Big|_{\Gamma_0^-}\Big), & \text{dans } \Omega^- \end{array} \right.$$

où pour toute donnée φ, $u^{\pm}(\varphi)$ est solution du problème $\mathcal{P}^{\pm}$.

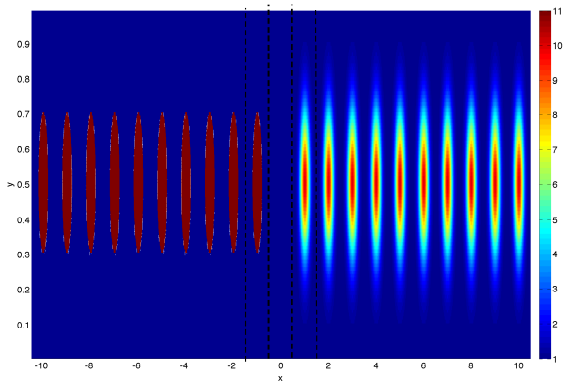
Plaçons nous dans la situation de la transmission entre un demi-guide droit homogène ($\Omega^- =$

$]-\infty,-0.5[\times]0,1[$) et un plus petit demi-guide périodique ($\Omega^+ =]0.5,+\infty[\times]0.1,0.8[$) représentée Figure 3.19(a). Nous ramenons les calculs à la zone de transition Ω^i. Nous considérons le cas où la fréquence est $\omega = 10$ et représentons Figure 3.20 la solution du problème (3.71) dans le cas où l'onde incidente est successivement l 'un des 4 modes propagatifs venant de $-\infty$ du demi-guide droit homogène. Dans ce cas, nous utilisons une expression analytique des différentes ondes incidentes.

Considérons enfin le cas de la transmission entre deux demi-guides réellement périodique, représenté Figure 3.19(b). La fréquence est toujours prise égale à 10. Représentons Figure 3.21 la solution du problème (3.71) dans le cas où l'onde incidente est successivement l 'un des modes de Floquet de vitesse de groupe négative du demi-guide droit périodique (c'est à dire « venant de $-\infty$ »). Le calcul de l'onde incidente est ici numérique : ces modes sont calculés à partir des solutions de module 1 de l'équation aux valeurs propres quadratique, qui ne sont pas valeurs propres de R_h. Nous retrouvons grâce à cet exemple, les propriétés de filtre de certains milieux périodiques : pour une fréquence donnée, les modes de Floquet du premier demi-guide se transmettent plus ou moins bien dans le second.

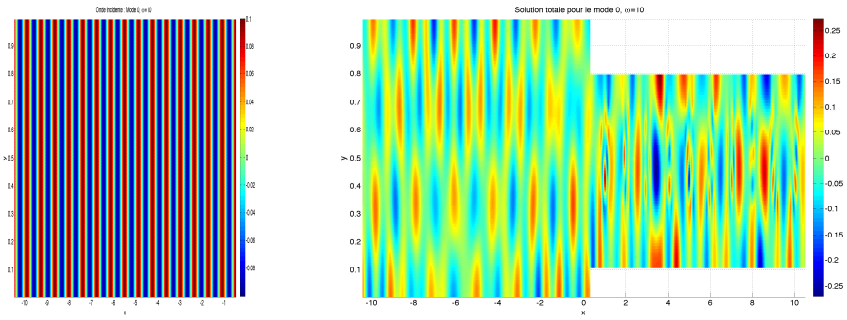


(a) Cas(1)

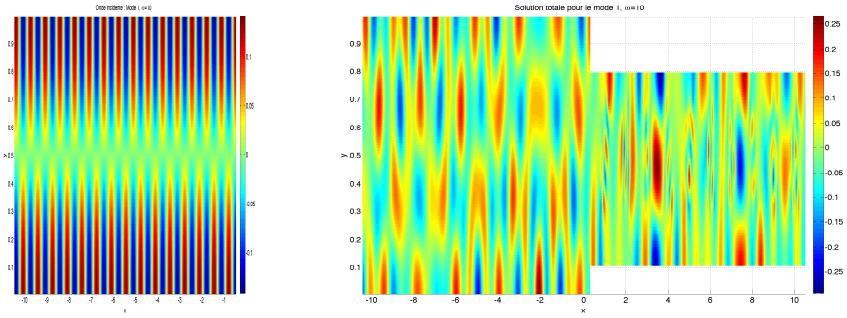


(b) Cas(2)

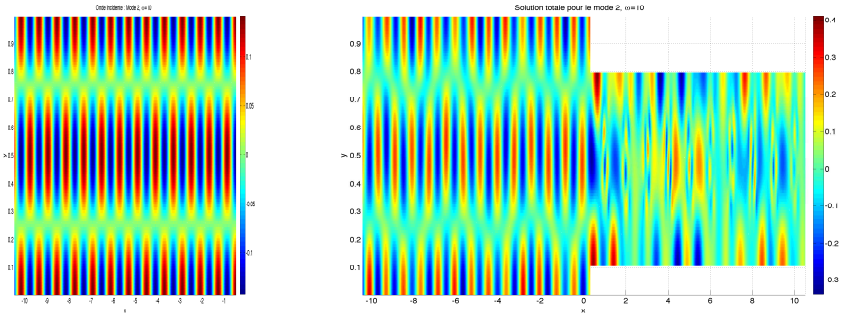
FIG. 3.19: Transmission entre 2 demi-guides périodiques différents



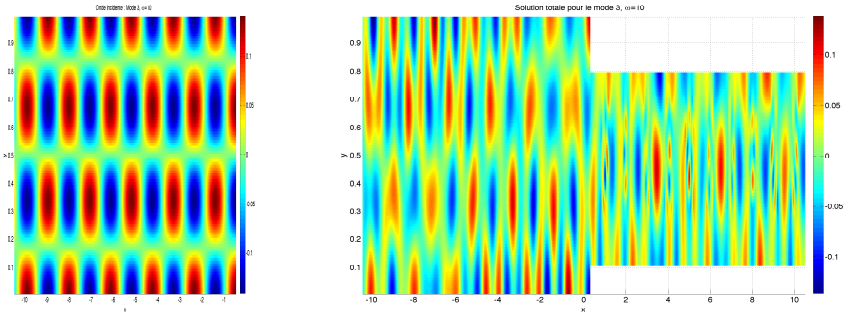
(a) Solution totale (à droite) si l'onde incidente est le mode 0 (à gauche)



(b) Solution totale (à droite) si l'onde incidente est le mode 1 (à gauche)

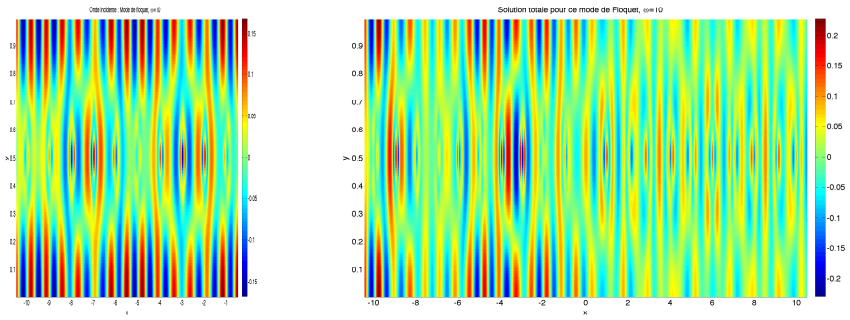


(c) Solution totale (à droite) si l'onde incidente est le mode 2 (à gauche)

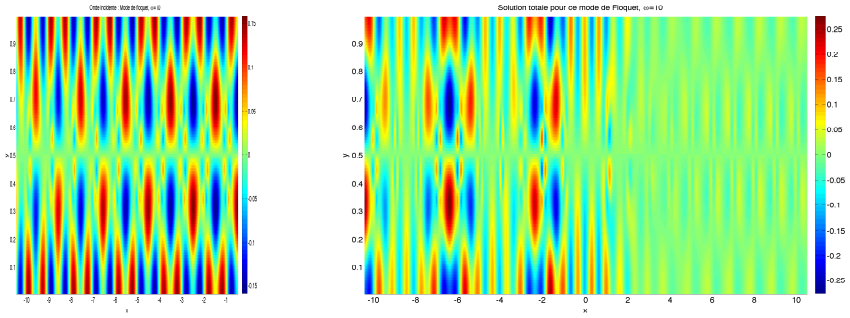


(d) Solution totale (à droite) si l'onde incidente est le mode 3 (à gauche)

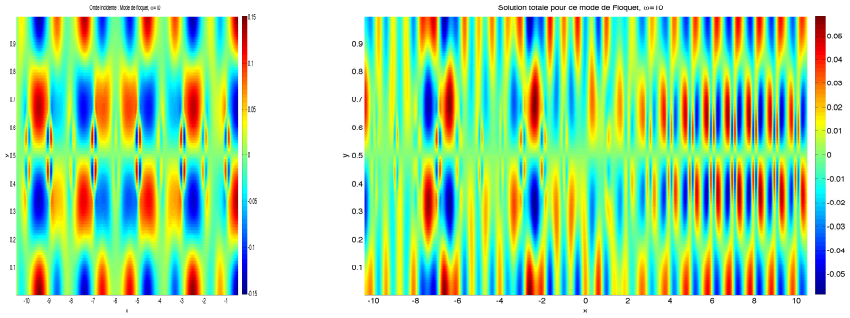
FIG. 3.20: Représentation des solutions totales pour le milieu (1) représenté Figure 3.19(a), pour la fréquence $\omega = 10$ et dans le cas où les ondes incidentes sont l'un des 4 modes propagatifs de vitesse de groupe négative du demi-guide de gauche.



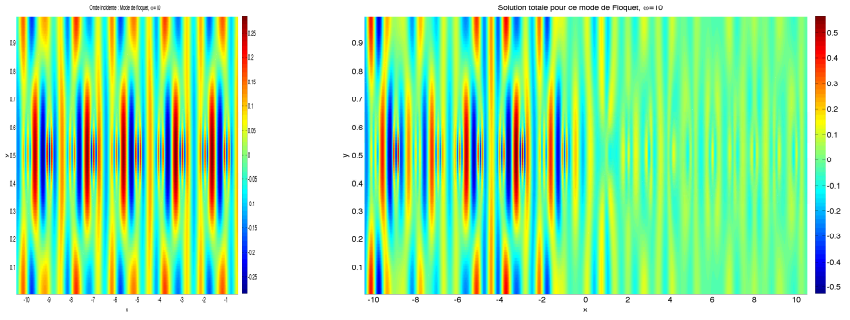
(a) Solution totale (à droite) si u_{inc} est un mode du guide de gauche



(b) Solution totale (à droite) si u_{inc} est un mode du guide de gauche



(c) Solution totale (à droite) si u_{inc} est un mode du guide de gauche



(d) Solution totale (à droite) si u_{inc} est un mode du guide de gauche

FIG. 3.21: Représentation des solutions totales pour le milieu (2) représenté Figure 3.19(b), pour la fréquence $\omega = 10$ et dans le cas où les ondes incidentes sont l'un des 4 modes propagatifs de vitesse de groupe négative du demi-guide de gauche.

CHAPITRE

4 LE CAS DES MILIEUX PÉRIODIQUES DANS DEUX DIMENSIONS

RÉSUMÉ : Nous nous intéressons ici au cas des milieux périodiques 2D localement perturbés. Ainsi, en dehors d'un carré, supposé de la taille de la cellule de périodicité, le milieu et son indice sont périodiques dans les deux directions et présentent dans ce chapitre une double symétrie (voir Définitions 4.2.2 et 4.2.2). En travaillant dans les représentations irréductibles du groupe défini par la double symétrie, nous simplifions à la Proposition 4.2.27 la détermination de l'opérateur NtD et la ramenons à la caractérisation de cinq opérateurs.
Le premier, donné au paragraphe 4.2.4.2, est un opérateur NtD de demi-espace. En utilisant la transformation de Floquet Bloch (voir annexe B.1), nous ramenons au Théorème 4.2.37 la détermination de cet opérateur à celle d'une famille d'opérateurs NtD de demi-guide dont la détermination a déjà été décrite au Chapitre 2.
Les quatre autres opérateurs, définis au paragraphe 4.2.4.1, sont des opérateurs d'extension, solutions de quatre équations affines indépendantes ($\mathcal{E}^{\varepsilon}_{(i,j)}$) dont les « coefficients » sont des opérateurs obtenus grâce à la transformée de Floquet Bloch et la résolution de la famille de problèmes de demi-guide utilisés précédemment (voir Section 4.2.8). En pratique, nous montrons au corollaire 4.2.48 que la résolution de ces équations affines se ramène à celle d'équations intégrales ($\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)}$) qui sont non standard dans le sens où elles ne vérifient pas les résultats classiques de [Kress (1999)].
Nous construisons à la Section 4.3.2.1 un schéma de discrétisation (voir l'expression $\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}$) dont la justification reste à prouver même si elle est validée par un grand nombre de tests numériques au paragraphe 4.3.2.2. La résolution de ce problème discret nécessite l'inversion d'une matrice pleine qu'il reste à améliorer.
Nous abordons enfin le cas du milieu non absorbant pour lequel nous mettons en évidence les nouvelles difficultés qui se posent. Nous effectuons un certain nombre de conjectures 4.4.4, 4.4.12 et 4.4.16 qui sont validées par une procédure numérique (voir Section 4.5.1) de principe d'absorption limite, déduite de ces conjectures. De nombreuses expériences numériques sont réalisées et donnent confiance quant au bien fondé de la démarche et de ces conjectures (voir les figures 4.44). La figure 4.47 indiquent cependant les défauts de la discrétisation. Nous travaillons actuellement à son amélioration et donnons des pistes de travail au paragraphe 4.47.

Sommaire du chapitre

4.1 Introduction 250
4.1.1 Problème modèle 250
4.2 Construction de l'opérateur NtD dans le cas avec absorption 253
4.2.1 Une première caractérisation de la solution 253
4.2.2 Notion de double symétrie 254
4.2.2.1 Ensemble à double symétrie 254
4.2.2.2 Fonctions à double symétrie 255
4.2.3 Décomposition de l'opérateur Λ_ε 263
4.2.4 Factorisation de chaque opérateur DtN $\Lambda^\varepsilon_{(i,j)}$ 265
4.2.4.1 Les opérateurs de type Neumann-to-Neumann 266
4.2.4.2 L'opérateur NtD de demi-espace $\Lambda^{\mathrm{H}}_\varepsilon$ 267
4.2.4.3 Retour à la factorisation de $\Lambda^\varepsilon_{(i,j)}$ 267
4.2.5 Opérateur NtD de demi-espace $\Lambda^{\mathrm{H}}_\varepsilon$ 269
4.2.5.1 D'un problème de demi-espace à des problèmes de demi-guide . 269
4.2.5.2 Rappel de la méthode de résolution pour le problème $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$ . . 273
4.2.5.3 Retour à l'opérateur NtD de demi-espace 276
4.2.5.4 Opérateurs NtN de demi-espace 278
4.2.6 Caractérisation des opérateurs NtN $\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}$ 282
4.2.7 Problème posé en domaine borné avec conditions de NtD 286
4.2.8 A propos de la résolution de l'équation affine $(\mathcal{E}^\varepsilon_{(i,j)})$ 288
4.2.9 Conclusion 293
4.3 Résolution numérique dans le cas avec absorption 293
4.3.1 Discrétisation en espace 295
4.3.1.1 Espaces d'approximation 295
4.3.1.2 Exemple : EFM de Raviart-Thomas de plus bas degré 298
4.3.1.3 Discrétisation de chaque problème de cellule 299
4.3.1.4 Approximation de l'opérateur NtN $R_\varepsilon(k_y)$ 301
4.3.1.5 Approximation de $\Lambda^{\mathrm{H}}_\varepsilon$ et de la solution $u^{\mathrm{H}}_\varepsilon$ de $(\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_\varepsilon)$ 301
4.3.1.6 Semi-discrétisation de l'équation $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)})$ 302
4.3.2 Discrétisation des variables de Floquet 304
4.3.2.1 Discrétisation de l'équation $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)})$ 304
4.3.2.2 Validation de l'opérateur d'extension 308
4.3.2.3 Transformée de Floquet Bloch inverse 315
4.3.3 Résultats numériques 315
4.3.3.1 Construction de l'opérateur de NtD Λ_ε 315
4.3.3.2 Approximation de la solution 316
4.3.3.3 Validation de la solution pour le cas du milieu homogène 317
4.3.4 Applications numériques 321
4.4 Principe d'absorption limite : quelques éléments d'analyse 326
4.4.1 Spectre de l'opérateur périodique 328
4.4.2 Vers le passage à la limite dans l'équation $(\mathcal{P}^e_\varepsilon)$ 330
4.4.2.1 Pour le problème de demi-espace 330
4.4.2.2 Pour les équations affines $(\mathcal{E}^\varepsilon_{(i,j)})$ 334

4.4.3 Principe d'absorption limite pour le plan périodique 341
4.4.3.1 Expression de la solution 341
4.4.3.2 Comportement asymptotique de la solution 345
4.4.4 Liens entre les deux démarches 346
4.5 Principe d'absorption limite numérique 346
4.5.1 Discrétisation de l'équation $\mathcal{Q}^{\varphi}_{(i,j)}$ 348
4.5.2 Calcul de la solution de $\mathcal{P}$ 353
4.5.3 Perspectives d'améliorations de la méthode 356
4.6 Conclusion 356

4.1 Introduction

4.1.1 Problème modèle

Nous étudions dans ce chapitre le problème de la propagation des ondes dans un milieu 2D périodique dans deux directions orthogonales et présentant une perturbation locale (voir Figure 4.1 pour un exemple). Le domaine de propagation Ω est donc infini dans toutes les directions et la géométrie et les propriétés du matériaux sont périodiques dans 2 directions d'espace, noté x et y, sauf dans un domaine borné.

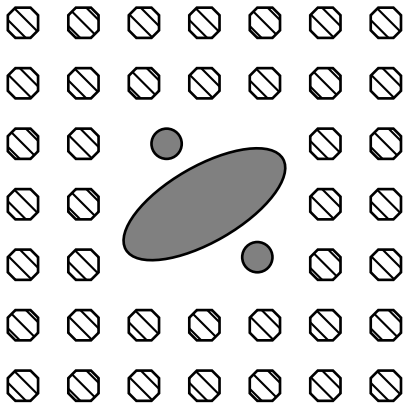


FIG. 4.1: Le domaine de propagation Ω.

Nous nous intéressons donc à l'équation de Helmholtz 2D

$$-\triangle u - \rho(\mathbf{x})\,\omega^2\,u = f, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{$\mathcal{P}$}$$

Nous faisons un certain nombre d'hypothèses :

1. Le domaine de propagation est infini dans les deux directions x et y et périodique dans ces deux directions en dehors d'un domaine borné Ω^i (i pour domaine intérieur). Le domaine que nous qualifierons d'extérieur et qui a des propriétés de périodicité est défini par $\Omega^e = \Omega \setminus \Omega^i$. Nous considérons que la périodicité est la même dans les directions x et y, notons L la période et $\mathcal{C}$ la cellule de périodicité de référence :

   $$\mathcal{C} = \left]-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right[^2.$$

   Sans perte de généralité, le domaine Ω^i est choisi également carré tel que la taille de chaque côté soit un multiple de la taille de la cellule de périodicité :

   $$\Omega^i = \left]-\frac{L}{2},\frac{(2N-1)L}{2}\right[^2.$$

   Pour rendre la présentation de la méthode plus simple, nous allons supposer dans un premier temps que $N = 1$. La généralisation au cas $N > 1$ est présentée Appendice A.2. Notons la frontière de Ω^i $\Sigma^i = \partial\Omega^i$. Voir Figure 4.2 pour les notations

2. L'indice de réfraction satisfait les deux conditions suivantes :

$$\text{(H1)} \qquad 0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+$$

$$\text{(H2)} \qquad \left| \begin{array}{l} \rho_p(x \pm L, y \pm L) = \rho_p(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega \\ \text{Supp}(\rho - \rho_p) \subset \Omega^i \end{array} \right.$$

3. Le support du terme source f est inclus dans Ω^i

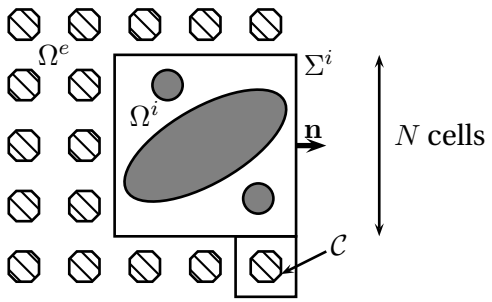


FIG. 4.2: Géométrie et Notations.

Afin de caractériser et calculer la solution du problème $(\mathcal{P})$ posé sur Ω tout entier, nous allons à nouveau utiliser l'idée classique exploitée dans les précédents chapitres, consistant à restreindre le problème dans un domaine borné, typiquement Ω^i en imposant des conditions aux bords transparentes en Σ^i telles que la solution de $(\mathcal{P})$ restreinte à Ω^i soit alors solution du problème suivant dans Ω^i

$$\left| \begin{array}{rcll} -\triangle u^i - \rho(\mathbf{x})\,\omega^2\,u^i & = & f \quad \text{dans} & \Omega^i, \\ u^i + \Lambda\,\dfrac{\partial u^i}{\partial \mathbf{n}^i} & = & 0 \quad \text{sur} & \Sigma^i, \end{array} \right. \qquad (\mathcal{P}^i)$$

où $\mathbf{n}^i$ est la normale extérieure de Ω^i. La dernière équation, conditions aux limites absorbantes ou encore condition de type Neumann-to-Dirichlet (noté NtD), découle de la résolution d'un problème dans Ω^e, c'est-à-dire posé dans un domaine infini. La détermination de l'opérateur Λ est un problème en soi pour lequel il sera essentiel d'exploiter la périodicité du milieu extérieur. En effet, la difficulté est là encore de définir la bonne solution du problème $(\mathcal{P})$ (et donc le bon Λ) pour toutes les fréquences ω. Et là encore, nous allons chercher la solution u de $(\mathcal{P})$ comme la limite, si elle existe de (u_ε), quand ε tend vers 0 (dans une norme plus faible que la norme L^2 et qui reste à déterminer) :

$$u = \lim_{\varepsilon \searrow 0} u_\varepsilon$$

où u_ε est l'unique solution H^1 de :

$$-\triangle u_\varepsilon - \rho(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon = f. \qquad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

Les problèmes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}^i)$ étant en quelque sorte équivalents, la définition correcte de l' opérateur Λ est liée à la façon de définir de manière unique la solution « physique » de $(\mathcal{P})$. En effet, nous allons déterminer pour tout $\varepsilon > 0$, l'opérateur NtD, $\Lambda_\varepsilon \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Sigma^i), H^{1/2}(\Sigma^i))$, tels que la

restriction à Ω^i de u_ε, solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, que nous notons u_ε^i soit l'unique solution du problème

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u_\varepsilon^i - \rho(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^i &=& f & \text{dans} \quad \Omega^i \\ u_\varepsilon^i + \Lambda_\varepsilon\,\dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial \mathbf{n}^i} &=& 0 & \text{sur} \quad \Sigma^i, \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon^i$}$$

où $\mathbf{n}^i$ est la normale extérieure de Ω^i. L'opérateur NtD est alors défini pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Sigma^i)$ à partir de $u_\varepsilon^e(\varphi)$ l'unique solution H^1 du problème

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u_\varepsilon^e - \rho_p(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^e &=& 0 & \text{dans} \quad \Omega^e \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^e}{\partial \mathbf{n}^e} &=& \varphi & \text{sur} \quad \Sigma^i \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon^e$}$$

où $\mathbf{n}^e$ est la normale extérieure de Ω^e comme

$$u_\varepsilon^e(\varphi)\Big|_{\Sigma^i} = \Lambda_\varepsilon\,\varphi \tag{4.1}$$

Dans un premier temps, l'idée est alors de montrer que la famille $\{\Lambda_\varepsilon^+,\ \varepsilon > 0\}$ a bien une limite, dans un sens que nous préciserons, notée Λ,

$$\Lambda = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Lambda_\varepsilon$$

et de trouver une méthode pour la détermination numérique de Λ. Dans un deuxième temps, il est question d'étudier le caractère bien posé du problème $(\mathcal{P}^i)$ avec la condition de NtD qui en découle. La solution, si elle existe, de ce problème est la restriction à Ω^i de la "solution" physique de $(\mathcal{P})$ que nous cherchons.

REMARQUE 4.1.1
Etant donné que le milieu constant est un milieu périodique particulier, notre méthode fournit par conséquent une façon d'obtenir une condition aux bords de type NtD pour un milieu extérieur homogène sur un bord artificiel carré (L'opérateur DtN est classiquement calculé sur un cercle). La méthode est par conséquent originale même dans le cas d'un milieu homogène.

Ainsi, alors que dans les chapitres précédents, le cas du milieu homogène permettait de se fixer les idées, ici la résolution du problème n'est pas classique même dans ce cas particulier.

Dans ce chapitre, nous allons nous restreindre à une situation particulière simplifiant la présentation de la méthode. Nous allons en effet considérer le cas où

(H3) la cellule de périodicité $\mathcal{C}$ a une double symétrie,

(H4) La restriction de la fonction ρ_p à $\mathcal{C}$ est une fonction à double symétrie.

ce qui est souvent le cas dans les applications. Nous renvoyons le lecteur à la section 4.2.2 où la notion de double symétrie est définie. Toutefois, l'extension de la méthode à des situations plus générales est présentée en Annexe A.3.

Nous commençons ce chapitre par énoncer la théorie dans le cas avec absorption et nous mettrons en évidence le fait que la construction de l'opérateur NtD Λ_ε se base encore sur la résolution de problèmes de cellule, d'équations caractéristiques de type Riccati stationnaires mais

également et c'est l'originalité de ce nouveau problème, la résolution d'équations intégrales non standard. Nous verrons en particulier que la construction de l'opérateur NtD Λ passe par la détermination d'un opérateur NtD de demi-espace. Signalons que ce seul opérateur NtD de demi-espace a un intérêt en soi. Il intervient par exemple dans la résolution d'autres problèmes : ceux de transmission-réflexion entre deux demi-espaces périodiques différents comme nous le présentons dans l'annexe A.4. Nous aborderons ensuite la résolution numérique du problème et plus précisément la discrétisation des équations intégrales non standard intervenant dans la méthode. Nous traiterons par la suite le cas du problème sans absorption par une technique d'absorption limite. Cette technique pose encore des questions ouvertes. Sous certaines hypothèses, nous allons néanmoins émettre un certain nombre de conjectures qui vont nous aider à mettre en place un principe d'absorption limite discret. Nous finirons par montrer à l'aide de tests de validation et de résultats numériques convaincants que ces conjectures semblent fondées.

REMARQUE 4.1.2
Le domaine Ω peut aussi être plus complexe et contenir par exemple un ensemble périodique d'obstacles ou « trous ». Dan ce cas, il faut seulement s'assurer que les conditions aux bords de ces trous sont compatibles avec la périodicité du problème.

4.2 Construction de l'opérateur NtD dans le cas avec absorption

4.2.1 Une première caractérisation de la solution

Commençons cette section par résoudre l'équation de Helmholtz avec absorption dans Ω

$$-\triangle u_\varepsilon - \rho(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon = f, \quad x \in \Omega. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon$}$$

D'après le lemme de Lax-Milgram, le problème ($\mathcal{P}_\varepsilon$) admet une unique solution $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, pour tout $\varepsilon > 0$.

Pour résoudre numériquement ($\mathcal{P}_\varepsilon$) et caractériser sa solution, la méthode que nous allons présenter repose sur la proposition (triviale) suivante :

PROPOSITION 4.2.1
Le problème $\mathcal{P}_\varepsilon$ est équivalent au problème :

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u_\varepsilon^i - \rho(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^i &=& f \quad \textit{dans} & \Omega^i \\ u_\varepsilon^i + \Lambda_\varepsilon \dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial \mathbf{n}^i} &=& 0 \quad \textit{sur} & \Sigma^i, \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon^i$}$$

où $\mathbf{n}^i$ est la normale extérieure à Ω^i, dès que Λ_ε, opérateur linéaire continu de $H^{-1/2}(\Sigma^i)$ dans $H^{1/2}(\Sigma^i)$, est défini par

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Sigma^i), \quad u_\varepsilon^e(\varphi)\Big|_{\Sigma^i} = \Lambda_\varepsilon\,\varphi \tag{4.2}$$

où $u_\varepsilon^e(\varphi)$ est l'unique solution dans $H^1(\Omega^e)$ du problème aux limites :

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u_\varepsilon^e - \rho_p(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^e &=& 0 \quad \textit{dans} & \Omega^e \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^e}{\partial \mathbf{n}^e} &=& \varphi \quad \textit{sur} & \Sigma^i \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon^e$}$$

avec $\mathbf{n}^e$ *la normale extérieure à* Ω^e*. Plus précisément si* u_ε *est solution de* $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ *alors la restriction de* u_ε *à* Ω^i *est solution de* $(\mathcal{P}^i_\varepsilon)$*. Réciproquement, si* u^i_ε *est solution de* $(\mathcal{P}^i_\varepsilon)$*, on construit* u_ε *par :*

$$\left|\begin{array}{ll} u_\varepsilon = u^i_\varepsilon, & \text{dans } \Omega^i \\ u_\varepsilon = u^e_\varepsilon(\varphi^i_\varepsilon), & \text{dans } \Omega^e, \quad \text{avec } \varphi^i_\varepsilon = -\frac{\partial u^i_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}^i}\Big|_{\Sigma^i}. \end{array}\right. \tag{4.3}$$

la fonction u_ε *ainsi construite est une fonction* $H^1(\Omega)$ *et est solution de* $(\mathcal{P}_\varepsilon)$*.*

Nous avons donc ramené la résolution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ à la résolution d'un problème posé en domaine borné, à condition d'avoir déterminé l'opérateur NtD, Λ_ε. La caractérisation de cet opérateur est plus complexe que dans le cas des chapitres précédents même si nous allons exploiter, là encore, l'hypothèse de périodicité du milieu extérieur Ω^e et de la fonction ρ_p. Comme signalé en introduction, nous supposons ici les hypothèses (H3) et (H4) satisfaites. L'idée pour construire Λ_ε est d'utiliser l'étude des guides d'ondes en appliquant une transformation adaptée (typiquement la transformée de Floquet-Bloch) et des techniques de symétrisation (exploitant le groupe des symétries laissant invariante la cellule de périodicité).

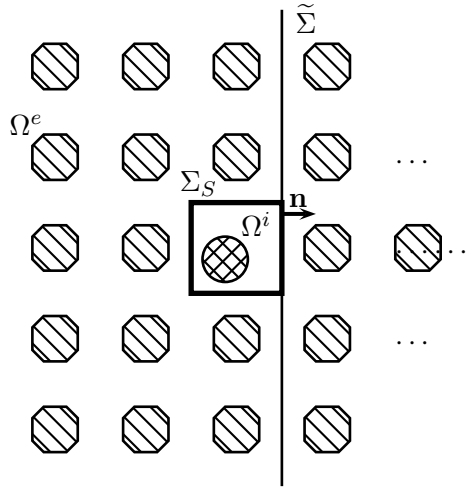


FIG. 4.3: 2D-plane medium.

4.2.2 Notion de double symétrie

Dans la suite, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on désigne par D_α la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = \alpha x$. On note $\mathbf{S}_\alpha$ la symétrie orthogonale par rapport à D_α.

4.2.2.1 Ensemble à double symétrie

Les notions présentées ici sont très simples et classiques mais nous souhaitons les rappeler au moins pour préciser les notations utilisées tout le long de ce chapitre.

DÉFINITION 4.2.2 (ENSEMBLE À DOUBLE SYMÉTRIE)
Un sous ensemble $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ présente une double symétrie si, à une translation du centre de gravité à l'origine près, il est invariant par les symétries $\mathbf{S}_1$ and $\mathbf{S}_{-1}$.

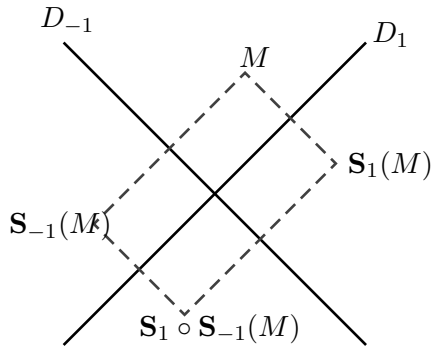


FIG. 4.4: Ensemble à double symétrie

REMARQUE 4.2.3
Notons dès à présent que si un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ est à double symétrie, son bord $\partial\mathcal{O}$ l'est également.

Nous allons considérer dans la suite des ouverts à double symétrie particuliers à savoir :

$$\Omega^i \text{ (et donc } \Sigma^i), \quad \Omega^e, \quad \mathcal{C}.$$

Enfin, il est facile de voir que tout ensemble $\mathcal{O}$ peut être divisé en quatre quadrants, noté :

$$\forall i \in \{0,1,2,3\}, \quad \mathcal{O}_{(i)} = \mathcal{O} \bigcap \mathcal{Q}_{(i)}$$

où les ensembles $\mathcal{Q}_{(i)}$ sont représenté Figure 4.5. Bien entendu, tout ensemble $\mathcal{O}$ à double symé-

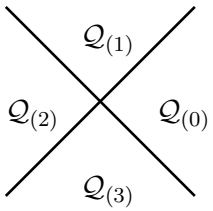


FIG. 4.5: Les quadrants $\mathcal{Q}_{(i)}$ pour $i \in \{0,1,2,3\}$

trie est « engendré » par l'un quelconque de ses quadrants principaux, par exemple :

$$\mathcal{O}_{(0)} = \big\{(x,y) \in \mathcal{O}, \quad 0 \leq |y| \leq x\big\}.$$

4.2.2.2 Fonctions à double symétrie

Soit $\mathcal{O}$ un ensemble à double symétrie.

DÉFINITION 4.2.4 (FONCTIONS À DOUBLE SYMÉTRIE)
Soit une fonction ρ_p définie sur $\mathcal{O}$ (typiquement à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On dira que ρ_p est à double symétrie si et seulement si

$$\rho_p \;=\; \rho_p \circ \mathbf{S}_1 \;=\; \rho_p \circ \mathbf{S}_{-1}.$$

Nous allons considérer dans la suite une fonction ρ_p périodique, telle que sa restriction à chaque cellule de périodicité $\mathcal{C}$ carrée est à double symétrie. Nous dirons dans ce cas que le milieu périodique est à double symétrie. Figure 4.6 sont représentés plusieurs exemples de fonctions périodiques qui rentrent dans ce cadre($\rho_p = \rho_1 > 0$ dans les régions hachurées et $\rho_p = \rho_2 > 0$ sinon). De manière générale, il est possible d'établir des propriétés pour toute fonction définie sur un

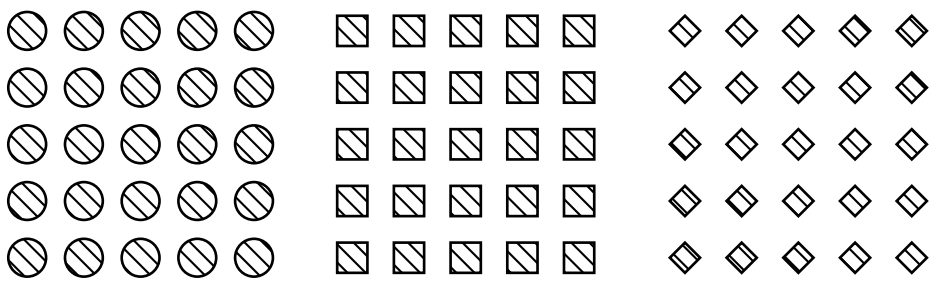


FIG. 4.6: Exemples de milieux périodiques à double symétrie dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^2$.(imaginer que ρ prend deux valeurs, ρ_1 dans les zones hachurées et ρ_2 sinon.)

ouvert à double symétrie. Les propriétés suivantes concernant les espaces fonctionnels sur un tel ensemble peuvent être établies facilement.

PROPOSITION 4.2.5 (ESPACES FONCTIONNELS)
Soit $\mathcal{O}$ (typiquement $\mathcal{C},\ \Omega^i,\ \Omega^e$ ou Σ^i) un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à double symétrie et $H^p(\mathcal{O}),\ p \geq 0$ l'espace de Sobolev associé. On a la décomposition spectrale suivante :

$$H^p(\mathcal{O}) = H^p_{(s,s)}(\mathcal{O}) \oplus H^p_{(s,a)}(\mathcal{O}) \oplus H^p_{(a,s)}(\mathcal{O}) \oplus H^p_{(a,a)}(\mathcal{O}), \tag{4.4}$$

where

$$\left|\begin{array}{lcl}
v \in H^p_{(s,s)}(\mathcal{O}) & \Leftrightarrow & v = \;+v \circ \mathbf{S}_1 = \;+v \circ \mathbf{S}_{-1}, \\
v \in H^p_{(a,a)}(\mathcal{O}) & \Leftrightarrow & v = \;-v \circ \mathbf{S}_1 = \;-v \circ \mathbf{S}_{-1}, \\
v \in H^p_{(s,a)}(\mathcal{O}) & \Leftrightarrow & v = \;+v \circ \mathbf{S}_1 = \;-v \circ \mathbf{S}_{-1}, \\
v \in H^p_{(a,s)}(\mathcal{O}) & \Leftrightarrow & v = \;-v \circ \mathbf{S}_1 = \;+v \circ \mathbf{S}_{-1}.
\end{array}\right.$$

De plus, les espaces $H^p_{(i,j)}(\mathcal{O})$, $(i,j) \in \{s,a\}^2$, sont des sous-espaces fermés de $H^p(\mathcal{O})$ qui sont orthogonaux dans $H^p(\mathcal{O})$.

■ **PREUVE:** Pour la complétude de la somme, il suffit d'écrire

$$\left|\begin{array}{rcll} u(x) & = & \frac{1}{4}\big[u(\mathbf{x})+u(\mathbf{S}_1\mathbf{x})+u(\mathbf{S}_{-1}\mathbf{x})+u(\mathbf{S}_1\circ\mathbf{S}_{-1}\mathbf{x})\big] & \in L^2_{(s,s)}(\mathcal{O}) \\ & + & \frac{1}{4}\big[u(\mathbf{x})-u(\mathbf{S}_1\mathbf{x})-u(\mathbf{S}_{-1}\mathbf{x})+u(\mathbf{S}_1\circ\mathbf{S}_{-1}\mathbf{x})\big] & \in L^2_{(a,a)}(\mathcal{O}) \\ & + & \frac{1}{4}\big[u(\mathbf{x})+u(\mathbf{S}_1\mathbf{x})-u(\mathbf{S}_{-1}\mathbf{x})-u(\mathbf{S}_1\circ\mathbf{S}_{-1}\mathbf{x})\big] & \in L^2_{(s,a)}(\mathcal{O}) \\ & + & \frac{1}{4}\big[u(\mathbf{x})-u(\mathbf{S}_1\mathbf{x})+u(\mathbf{S}_{-1}\mathbf{x})-u(\mathbf{S}_1\circ\mathbf{S}_{-1}\mathbf{x})\big] & \in L^2_{(a,s)}(\mathcal{O}) \end{array}\right.$$

Pour l'orthogonalité, il suffit de le faire pour $p=0$, la généralisation étant directe. Nous pouvons remarquer que si $(u,v)\in L^2_{(i,j)}(\mathcal{O})\times L^2_{(k,l)}(\mathcal{O})$ avec $(i,j)\neq(k,l)$ alors :

$$\forall \mathbf{x}\in\mathcal{O},\quad (u\,v)(\mathbf{S}\mathbf{x})=-(u\,v)(\mathbf{x})\quad \text{pour}\quad \mathbf{S}=S_1 \text{ ou } S_{-1}.$$

En conséquence pour $\mathbf{S}=\mathbf{S}_1$ ou $\mathbf{S}_{-1}$,

$$\int_{\mathcal{O}}(u\,v)(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \;=\; \int_{\mathbf{S}(\mathcal{O})}(u\,v)(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \;=\; -\int_{\mathcal{O}}(u\,v)(\mathbf{S}\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \;=\; -\int_{\mathcal{O}}(u\,v)(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}.$$

où pour la dernière égalité, on a effectué le changement de variable $\mathbf{y}=\mathbf{S}\mathbf{x}$ pour lequel le jacobien vaut 1. On en déduit que l'intégrale est nulle. ■

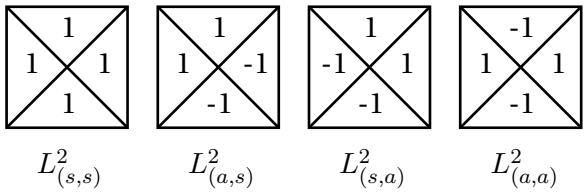


FIG. 4.7: Exemples de fonctions de chaque $L^2_{(i,j)}(\mathcal{O})$ avec $\mathcal{O}=[-1,1]^2$

REMARQUE 4.2.6
Pour comprendre les notations, gardons à l'esprit que les indices s ou a signifient "symétrique" ou "antisymétrique", le premier correspond à la symétrie par rapport à la droite D_1, le second par rapport à D_{-1}. Par exemple, $L^2_{(s,a)}$ est l'ensemble des fonctions L^2 qui sont symétriques par rapport à D_1 et antisymétriques par rapport à D_{-1} et l'ensemble $L^2_{(s,s)}$ est l'ensemble des fonctions L^2 à double symétrie.

Il est naturel de se demander ensuite comment s'extrapole le théorème de trace à ces espaces particuliers.

PROPOSITION 4.2.7 (PREMIER THÉORÈME DE TRACE)
Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à double symétrie (typiquement Ω^e). Pour chaque $(i,j)\in\{s,a\}^2$, la restriction à l'espace $H^1_{(i,j)}(\Omega)$ de l'application trace γ_0 définie par

$$\forall u\in H^1(\mathcal{O}),\quad \gamma_0 u=u|_{\partial\mathcal{O}}$$

est une application continue de $H^1_{(i,j)}(\mathcal{O})$, muni de la norme de $H^1(\mathcal{O})$, dans $H^{1/2}_{(i,j)}(\partial\mathcal{O})$, muni de la norme de $H^{1/2}(\partial\mathcal{O})$ (typiquement $\partial\mathcal{O}=\Sigma^i$)

Nous voulons ensuite étendre la décomposition 4.4 à l'espace $H^1(\triangle;\mathcal{O})$[1]. Il nous faut d'abord rappeler le résultat concernant la commutativité entre l'opérateur de Laplace et les symétries $\mathbf{S}_{\pm 1}$.

THÉORÈME 4.2.8
Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à double symétrie. L'opérateur de Laplace commute avec les transformations unitaires :

$$\forall \mathbf{S} \text{ op. unitaire de } \mathcal{O} \text{ dans } \mathcal{O}, \quad \triangle(u\circ\mathbf{S}) = \triangle u \circ \mathbf{S}.$$

Ainsi, si nous posons,

$$\forall (i,j)\in\{s,a\}^2, \quad H^1_{(i,j)}(\triangle;\mathcal{O}) = H^1(\triangle;\mathcal{O}) \cap H^1_{(i,j)}(\mathcal{O}).$$

alors pour chaque (i,j) l'opérateur de Laplace $\triangle$ envoie $H^1_{(i,j)}(\triangle;\mathcal{O})$ dans $L^2_{(i,j)}(\mathcal{O})$.

■ **PREUVE:** Il suffit d'écrire, pour $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact, que

$$\forall \mathbf{S}\in U, \quad -\int_{\mathbb{R}^2} \triangle(u\circ\mathbf{S})(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{S}\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\nabla(u\circ\mathbf{S}), \nabla(\varphi\circ\mathbf{S})\Big)\,d\mathbf{x}$$

Or la formule de dérivation composée donne

$$\nabla(u\circ\mathbf{S}) = (\mathbf{S}^*\nabla u)\circ T, \quad \text{où } \mathbf{S}^* \text{ est l'adjoint de } \mathbf{S}$$

de telle sorte que

$$\left|\begin{array}{rcll} -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \triangle(u\circ\mathbf{S})(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{S}\mathbf{x})\,d\mathbf{x} &=& \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\mathbf{S}^*\nabla u(\mathbf{S}\mathbf{x}), \mathbf{S}^*\nabla\varphi(\mathbf{S}\mathbf{x})\Big)\,d\mathbf{x} & \\ &=& \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\nabla u(\mathbf{S}\mathbf{x}), \nabla\varphi(\mathbf{S}\mathbf{x})\Big)\,d\mathbf{x} & \text{car } \mathbf{S} \text{ est unitaire} \end{array}\right.$$

On opère enfin le changement de variable $\mathbf{x}' = \mathbf{S}\mathbf{x}$ ($\Rightarrow d\mathbf{x}' = d\mathbf{x}$)

$$\left|\begin{array}{rcll} -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \triangle(u\circ\mathbf{S})(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{S}\mathbf{x})\,d\mathbf{x} &=& \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\nabla u(\mathbf{x}'), \nabla\varphi(\mathbf{x}')\Big)\,d\mathbf{x}' & \\ &=& -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \triangle u(\mathbf{x}')\,\varphi(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' & \text{Formule de Green} \\ &=& -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \triangle u(\mathbf{S}\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{S}\mathbf{x})\,d\mathbf{x} & \text{car} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{S}\mathbf{x} \end{array}\right.$$

■

REMARQUE 4.2.9
Un opérateur du type $u \to \nabla\cdot(a\nabla u)$ commute avec les transformations unitaires $\mathbf{S}$ telles que $a(\mathbf{S}\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})$. Si a est à double symétrie, nous pouvons donc étendre le théorème précédent à ce type d'opérateur elliptique.

COROLLAIRE 4.2.10
La décomposition (4.4) *s'étend aux espaces $H^1(\triangle;\mathcal{O})$ et $H^1_{(i,j)}(\triangle;\mathcal{O})$*

$$H^1(\triangle;\mathcal{O}) = H^1_{(s,s)}(\triangle;\mathcal{O}) \oplus H^1_{(s,a)}(\triangle;\mathcal{O}) \oplus H^1_{(a,s)}(\triangle;\mathcal{O}) \oplus H^1_{(a,a)}(\triangle;\mathcal{O}), \tag{4.5}$$

les espaces $H^1_{(i,j)}(\triangle;\mathcal{O})$, $(i,j)\in\{s,a\}^2$, étant, d'après leur définition, des sous-espaces fermés de $H^1(\triangle,\mathcal{O})$ qui sont orthogonaux dans $H^1(\triangle,\mathcal{O})$.

[1] On rappelle que c'est l'espace des fonctions dans $H^1(\mathcal{O})$ dont le laplacien est dans $L^2(\mathcal{O})$

Le corollaire suivant nous fournit une conséquence du théorème 4.2.8 et de la proposition 4.2.7 nous permettant de comprendre le lien avec l'équation que nous étudions.

COROLLAIRE 4.2.11
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à double symétrie et ρ_p une fonction de $L^\infty(\Omega)$ à valeurs réelles et à double symétrie. Soit $u \in H^1(\triangle;\Omega)$ l'unique solution du problème aux limites ($\varepsilon > 0$) :

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u - \rho_p(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u &=& f \quad \textit{dans} & \Omega, \\ u &=& g \quad \textit{sur} & \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{4.6}$$

alors

$$\left|\begin{array}{l} f \in L^2_{(i,j)}(\Omega) \\ g \in H^{1/2}_{(i,j)}(\Omega) \end{array}\right. \Rightarrow u \in H^1_{(i,j)}(\triangle,\Omega)$$

■ **IDÉE DE LA PREUVE:** Pour montrer que $u \in H^1_{(s,s)}(\triangle;\Omega)$ (resp. $H^1_{(s,a)}(\triangle;\Omega)$, $H^1_{(a,s)}(\triangle;\Omega)$, $H^1_{(a,a)}(\triangle;\Omega)$), il suffit de remarquer que $\big(u(\mathbf{S}_1\mathbf{x}), u(\mathbf{S}_{-1}\mathbf{x})\big)$ (respectivement $\big(u(\mathbf{S}_1\mathbf{x}), -u(\mathbf{S}_{-1}\mathbf{x})\big)$, $\big(-u(\mathbf{S}_1\mathbf{x}), u(\mathbf{S}_{-1}\mathbf{x})\big)$ et $\big(-u(\mathbf{S}_1\mathbf{x}), -u(\mathbf{S}_{-1}\mathbf{x})\big)$) sont également des solutions de (4.6) et conclure par un argument d'unicité. ■

Nous voulons maintenant étendre la Proposition 4.2.5 aux espaces de Sobolev $H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$ (typiquement $\partial\mathcal{O} = \Sigma^i$) et $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à double symétrie.

DÉFINITION 4.2.12 (DEUXIÈME THÉORÈME DE TRACE)
Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à double symétrie. Rappelons que l'application trace γ_1 définie par

$$\forall u \in H^1(\triangle;\mathcal{O}), \quad \gamma_1\, u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\mathcal{O}}$$

est une application continue de $H^1(\triangle;\mathcal{O})$ dans $H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$. $H^1_{(i,j)}(\triangle;\mathcal{O})$ étant un sous-espace fermé de $H^1(\triangle,\mathcal{O})$, nous définissons le sous espace $H^{-1/2}_{(i,j)}(\mathcal{O})$ de $H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$ par

$$\forall (i,j) \in \{s,a\}^2, \quad H^{-1/2}_{(i,j)}(\partial\mathcal{O}) = \gamma_1\Big(H^1_{(i,j)}(\triangle;\mathcal{O})\Big).$$

On munit $H^{-1/2}_{(i,j)}(\mathcal{O})$ de la norme du graphe

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\partial\mathcal{O}), \quad \|\varphi\|_{H^{-1/2}_{(i,j)}(\partial\mathcal{O})} = \sup\big\{\|u\|_{H^1(\triangle,\mathcal{O})}, \quad u \in H^1_{(i,j)}(\triangle;\mathcal{O}),\ \gamma_1\, u = \varphi\big\}.$$

Nous avons par définition la continuité de γ_1 de $H^1_{(i,j)}(\triangle;\mathcal{O})$ muni de la norme de $H^1(\triangle,\mathcal{O})$ dans $H^{-1/2}_{(i,j)}(\partial\mathcal{O})$ muni de la norme du graphe. Une conséquence de cette propriété et du théorème 4.2.8, toujours en lien avec l'équation que nous étudions, peut être énoncée sous la forme du corollaire 4.2.13. La démonstration se fonde sur les mêmes idées que celle du corollaire 4.2.11.

COROLLAIRE 4.2.13
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à double symétrie et ρ_p une fonction de $L^\infty(\Omega)$ à valeurs réelles et à double symétrie. Soit $u \in H^1(\triangle;\Omega)$ l'unique solution du problème aux limites ($\varepsilon > 0$) :

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u - \rho_p(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u &=& 0 \quad \textit{dans} & \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &=& \varphi \quad \textit{sur} & \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{4.7}$$

alors

$$\varphi \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Omega) \Rightarrow u \in H^1_{(i,j)}(\triangle,\Omega)$$

En utilisant la proposition 4.2.5, le théorème 4.2.8 et la définition 4.2.12, nous pouvons alors prouver la proposition suivante.

PROPOSITION 4.2.14
Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à double symétrie. Nous avons

$$H^{-1/2}(\partial\mathcal{O}) = H^{-1/2}_{(s,s)}(\partial\mathcal{O}) \oplus H^{-1/2}_{(s,a)}(\partial\mathcal{O}) \oplus H^{-1/2}_{(a,s)}(\partial\mathcal{O}) \oplus H^{-1/2}_{(a,a)}(\partial\mathcal{O}), \tag{4.8}$$

où on rappelle que chaque espace $H^{-1/2}_{(i,j)}(\partial\mathcal{O})$ est donné par la définition 4.2.12.

De plus $H^{-1/2}_{(i,j)}(\partial\mathcal{O})$ vérifie la propriété

$$\nu \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\partial\mathcal{O}) \quad \Leftrightarrow \quad \Big\langle \nu, \phi \Big\rangle_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad \forall \phi \in H^{1/2}_{(l,m)}(\partial\mathcal{O}),\ (l,m) \neq (i,j). \tag{4.9}$$

où $< \cdot, \cdot >_{\partial\mathcal{O}}$ est le produit de dualité entre $H^{-1/2}(\mathcal{O})$ et $H^{1/2}(\mathcal{O})$.

■ **PREUVE:** Pour obtenir la décomposition, il suffit d'utiliser le corollaire 4.2.10 concernant la décomposition de l'espace $H^1(\triangle, \mathcal{O})$ et de lui appliquer la deuxième application trace. Par définition des espaces $H^{-1/2}_{(i,j)}(\partial\mathcal{O})$, on obtient que toute fonction de $H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$ se décompose sous la forme d'une somme de fonctions, chacune appartenant à un espace $H^{-1/2}_{(i,j)}(\partial\mathcal{O})$.

Soit $\nu \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\partial\mathcal{O})$ et $\phi \in H^{1/2}_{(l,m)}(\partial\mathcal{O})$ tel que $(l,m) \neq (i,j)$. Il existe donc d'après la proposition 4.2.7 et la définition 4.2.12,

$$u \in H^1_{(i,j)}(\triangle, \mathcal{O}),\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\mathcal{O}} = \nu \quad \text{et} \quad v \in H^1_{(l,m)},\ v\Big|_{\partial\mathcal{O}} = \phi.$$

D'après la formule de Green,

$$\Big\langle \nu, \phi \Big\rangle_{\partial\mathcal{O}} = \int_{\mathcal{O}} \triangle u\, v \ + \ \nabla u \cdot \nabla v,$$

et on conclut en utilisant l'orthogonalité des espaces $L^2_{(i,j)}(\mathcal{O})$ et $L^2_{(l,m)}(\mathcal{O})$ dès que $(l,m) \neq (i,j)$. ■

REMARQUE 4.2.15
Notons pour éviter les ambiguïtés que malgré les notations, $H^{-1/2}_{(i,j)}(\partial\mathcal{O})$ n'est pas le dual de l'espace $H^{1/2}_{(i,j)}(\partial\Omega)$. Il est strictement contenu dans $H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$ lui-même strictement inclus dans $\big[H^{1/2}_{(i,j)}(\partial\Omega)\big]'$. Cette inclusion découle du fait que $H^{1/2}_{(i,j)}(\partial\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Désormais, dans ce chapitre, nous pouvons utiliser les propriétés générales de ces espaces de fonctions. Avant de revenir à notre étude, finissons par une dernière remarque : toute fonction définie sur un ensemble $\mathcal{O}$ à double symétrie et présentant, elle-même, des symétries ou des antisymétries peut être caractérisée par sa restriction sur un des quadrants de $\mathcal{O}$ (par exemple $\mathcal{O}_{(0)}$). Nous pouvons donc introduire des opérateurs de restriction (de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}_{(0)}$ par exemple) et d'extension (de $\mathcal{O}_{(0)}$ sur $\mathcal{O}$ par exemple) utiles pour la suite. En particulier, nous utiliserons ces opérateurs pour les fonctions définies sur Σ^i (voir Figure 4.8).

DÉFINITION 4.2.16 (RESTRICTION DE Σ^i SUR $\Sigma^i_{(0)}$)
Soit R l'opérateur de restriction défini par

$$\begin{array}{rccc} R & : L^2\big(\Sigma^i\big) & \to & L^2\big(\Sigma^i_{(0)}\big) \\ & \phi & \mapsto & \phi\big|_{\Sigma^i_{(0)}}. \end{array}$$

On vérifie facilement que

LEMME 4.2.17
Pour chaque $(i,j) \in \{s,a\}^2$, R est un isomorphisme de $L^2_{(i,j)}(\Sigma^i)$ dans $L^2(\Sigma^i_{(0)})$ que nous notons $R_{(i,j)}$:

$$R_{(i,j)} : L^2_{(i,j)}(\Sigma^i) \to L^2(\Sigma^i_{(0)})$$

Son inverse $E_{(i,j)}$ est un opérateur d'extension qui peut être explicité grâce aux symétries, en posant $\varepsilon_s = 1$ et $\varepsilon_a = -1$:

$$\forall \phi \in L^2(\Sigma^i_{(0)}), \quad \left| \begin{array}{lll} E_{(i,j)}\phi|_{\Sigma^i_{(0)}} & = & \phi, \\ E_{(i,j)}\phi|_{S_1\Sigma^i_{(1)}} & = \varepsilon_i & \phi \circ S_1, \\ E_{(i,j)}\phi|_{S_{-1}\Sigma^i_{(4)}} & = \varepsilon_j & \phi \circ S_{-1}, \\ E_{(i,j)}\phi|_{S_1 S_{-1}\Sigma^i(3)} & = \varepsilon_i\varepsilon_j & \phi \circ S_1 \circ S_{-1}, \end{array} \right.$$

Nous voulons utiliser ces opérateurs de restriction et extension plus précisément sur des fonctions de $H^{1/2}(\Sigma^i)$ et les étendre aux espaces $H^{-1/2}(\Sigma^i)$.

DÉFINITION 4.2.18
Pour chaque $(i,j) \in \{s,a\}^2$, nous définissons les espaces suivants :

$$H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)}) = \left\{ R_{(i,j)}\phi, \quad \phi \in H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i) \right\} = \left\{ \phi \in H^{1/2}(\Sigma^i_{(0)}), \quad E_{(i,j)}\phi \in H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i) \right\}$$

REMARQUE 4.2.19
Par définition, $R_{(i,j)}$ est un isomorphisme de $H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$ dans $H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)})$

En utilisant les arguments de [Lions & Magenes (1968), Théorème 11.7, Chapitre 1], la proposition suivante donne une caractérisation plus intrinsèque de ces espaces.

PROPOSITION 4.2.20
Nous avons

$$H^{1/2}_{(s,s)}(\Sigma^i_{(0)}) \;=\; H^{1/2}(\Sigma^i_{(0)}),$$

$$H^{1/2}_{(a,a)}(\Sigma^i_{(0)}) = \left\{ \phi \in H^{1/2}(\Sigma^i_{(0)}), \quad (L^2/4 - y^2)^{-1/2}\, \phi(y) \in L^2(\Sigma^i_{(0)}) \right\},$$
$$H^{1/2}_{(s,a)}(\Sigma^i_{(0)}) = \left\{ \phi \in H^{1/2}(\Sigma^i_{(0)}), \quad (y + L/2)^{-1/2}\, \phi(y) \in L^2(\Sigma^i_{(0)}) \right\},$$
$$H^{1/2}_{(a,s)}(\Sigma^i_{(0)}) = \left\{ \phi \in H^{1/2}(\Sigma^i_{(0)}), \quad (L/2 - y)^{-1/2}\, \phi(y) \in L^2(\Sigma^i_{(0)}) \right\}.$$

REMARQUE 4.2.21
Cette caractérisation nous permet en particulier de montrer les inclusions suivantes

$$H^{1/2}_{(a,a)}(\Sigma^i_{(0)}) \subset H^{1/2}_{(a,s)}(\Sigma^i_{(0)}) \subset H^{1/2}_{(s,s)}(\Sigma^i_{(0)}) \quad \textit{et} \quad H^{1/2}_{(a,a)}(\Sigma^i_{(0)}) \subset H^{1/2}_{(s,a)}(\Sigma^i_{(0)}) \subset H^{1/2}_{(s,s)}(\Sigma^i_{(0)}),$$

ce qui implique

$$H^{-1/2}(\Sigma^i_{(0)}) \subset [H^{1/2}_{(a,s)}(\Sigma^i_{(0)})]' \subset [H^{1/2}_{(a,a)}(\Sigma^i_{(0)})]' \quad \textit{et} \quad H^{-1/2}(\Sigma^i_{(0)}) \subset [H^{1/2}_{(s,a)}(\Sigma^i_{(0)})]' \subset [H^{1/2}_{(a,a)}(\Sigma^i_{(0)})]'.$$

On note enfin que

$$H^{1/2}_{(a,a)}(\Sigma^i_{(0)}) = H^{1/2}_{00}(\Sigma^i_{(0)}).$$

En notant que nous avons

$$\forall (i,j) \in \{s,a\}^2, \quad \forall \phi \in L^2_{(i,j)}(\Sigma^i),\ \forall \psi \in L^2(\Sigma^i_{(0)}), \quad < R_{(i,j)}\phi, \psi >_{\Sigma^i_{(0)}} = \frac{1}{4} < \phi, E_{(i,j)}\psi >_{\Sigma^i}, \tag{4.10}$$

l'opérateur de restriction $R_{(i,j)}$ peut être étendu par dualité à $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$ (voir la Définition 4.2.12, rappelons que dans la remarque 4.2.15 nous avons noté que $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$ est un sous-espace de $[H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)]'$).

$$\forall \phi \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i),\ \forall \psi \in H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)}), \quad < R_{(i,j)}\phi, \psi >_{\Sigma^i_{(0)}} = \frac{1}{4} < \phi, E_{(i,j)}\psi >_{\Sigma^i} . \tag{4.11}$$

PROPOSITION 4.2.22
Pour tout ϕ_1 et ϕ_2 dans $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$,

$$R_{(i,j)}\phi_1 = R_{(i,j)}\phi_2 \ \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$$

■ **PREUVE:** Supposons $R_{(i,j)}\phi_1 = R_{(i,j)}\phi_2$. Cela implique que

$$\forall \psi \in H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)}), \quad < \phi_1 - \phi_2, E_{(i,j)}\psi >_{\Sigma^i} = 0$$

Comme $E_{(i,j)}$ est un isomorphisme de $H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)})$ dans $H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$, on a donc

$$\forall \psi \in H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i), \quad < \phi_1 - \phi_2, \psi >_{\Sigma^i} = 0$$

D'après la propriété (4.9) et la décomposition (4.2.5), alors

$$\forall \psi \in H^{1/2}(\Sigma^i), \quad < \phi_1 - \phi_2, \psi >_{\Sigma^i} = 0$$

Comme $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i) \subset H^{-1/2}(\Sigma)$, on a donc $\phi_1 = \phi_2$. ■

Nous pouvons donc définir l'espace $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)})$.

DÉFINITION 4.2.23
Pour chaque $(i,j) \in \{s,a\}^2$, nous définissons le sous espace de $\left[H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)})\right]'$

$$H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)}) = R_{(i,j)}\Big(H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)\Big), \tag{4.12}$$

muni de la norme

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)}), \quad \|\varphi\|_{H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)})} = \sup_{\psi \in H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)})} \frac{|< \phi, E_{(i,j)}\psi >_{\Sigma^i}|}{\|\psi\|_{H^{1/2}(\Sigma^i_{(0)})}}$$

où ϕ est l'unique élément de $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$ tel que $\varphi = R_{(i,j)}\phi$

Ces espaces ainsi définis, on montre facilement l'application $R_{(i,j)}$ est linéaire continue de $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$ dans $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)})$.

De manière analogue, $E_{(i,j)}$ peut être étendu à un opérateur linéaire continu de $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)})$ dans $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$, en utilisant :

$$\forall \psi \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)}),\ \forall \phi \in H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i), \quad < E_{(i,j)}\psi, \phi >_{\Sigma^i} = 4 < \psi, R_{(i,j)}\phi >_{\Sigma^i_{(0)}} . \tag{4.13}$$

Toutes ces propriétés se résument dans la proposition suivante.

PROPOSITION 4.2.24
L'opérateur $R_{(i,j)}$ est un isomorphisme de $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$ dans $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)})$, d'inverse $E_{(i,j)}$.

REMARQUE 4.2.25 (LES OPÉRATEURS DE RESTRICTIONS)
Dans ce chapitre, nous sommes amenés à utiliser d'autres opérateurs de restriction sur des fonctions $H^{-1/2}$. Nous donnons ici une définition générale et rigoureuse de ces opérateurs de restriction à laquelle nous nous reporterons dès que ce sera nécessaire.

Soit Σ le bord d'un ouvert et Σ^0 un sous-ensemble de Σ. L'opérateur de restriction de Σ sur Σ^0 est défini pour des fonctions $L^2(\Sigma)$

$$\begin{array}{rcl} R \ : L^2\big(\Sigma\big) & \to & L^2\big(\Sigma^0\big) \\ \psi & \mapsto & \psi\big|_{\Sigma^0}. \end{array}$$

On étend sa définition à $H^{-1/2}(\Sigma)$ par dualité. En effet, notons que

$$\forall \psi \in L^2(\Sigma),\ \forall \phi \in L^2(\Sigma^0), \quad \big\langle R\psi, \phi \big\rangle_{\Sigma^0} = \big\langle \psi, E_0 \phi \big\rangle_{\Sigma},$$

où E_0 est l'opérateur de prolongement par 0 :

$$\begin{array}{rcl} E_0 \ : L^2\big(\Sigma^0\big) & \to & L^2\big(\Sigma\big) \\ \psi & \mapsto & \widetilde{\psi} = \left| \begin{array}{ll} \psi & \text{sur } \Sigma^0 \\ 0 & \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma^0 \end{array} \right. \end{array}$$

Ceci suggère une extension de R en un opérateur linéaire continu de $H^{-1/2}(\Sigma)$ dans $[H^{1/2}_{00}(\Sigma^0)]'$ par

$$\forall \psi \in H^{-1/2}(\Sigma),\ \forall \phi \in H^{1/2}_{00}(\Sigma^0), \quad \big\langle R\psi, \phi \big\rangle_{\Sigma^0} = \big\langle \psi, E_0 \phi \big\rangle_{\Sigma}.$$

où $< \cdot, \cdot >_{\Sigma^0}$ est le produit de dualité entre $[H^{1/2}_{00}(\Sigma^0)]'$ et $H^{1/2}_{00}(\Sigma^0)$ et $< \cdot, \cdot >_{\Sigma}$ est le produit de dualité entre $H^{-1/2}(\Sigma)$ et $H^{1/2}(\Sigma)$.

4.2.3 Décomposition de l'opérateur Λ_ε

R appelons que les hypothèses (H3) et (H4) sont satisfaites c'est-à-dire que la cellule de périodicité $\mathcal{C}$ présente une double symétrie et la restriction de l'indice ρ_p à $\mathcal{C}$ est une fonction à double symétrie. De plus Ω^i est choisi de frontière carrée. Tout ceci implique que Ω^e est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à double symétrie. En utilisant les définitions et propriétés des milieux et fonctions à double symétrie et plus particulièrement le Corollaire 4.2.13, nous pouvons montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4.2.26
Pour chaque $(i,j) \in \{s,a\}^2$, Λ_ε envoie $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$ muni de la norme donnée Définition 4.2.12 dans $H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$ muni de la norme $H^{1/2}(\Sigma^i)$ de manière continue.

■ **PREUVE:** Nous développons la preuve pour $(i,j)=(s,s)$, la généralisation aux autres cas étant directe.

Soit φ une fonction de $H^{-1/2}_{(s,s)}(\Sigma^i)$. L'ouvert Ω^e est à double symétrie et la fonction ρ_p définie dans Ω^e également. Ainsi, par le Théorème 4.2.8 et plus précisément le Corollaire 4.2.13, si $u^e_\varepsilon(\varphi)$ est solution de $(\mathcal{P}^e_\varepsilon)$, $u^e_\varepsilon(S_1\,\varphi)$ et $u^e_\varepsilon(S_{-1}\,\varphi)$ sont solutions également. Du fait de l'unicité de la solution d'un tel problème, $u^e_\varepsilon(\varphi)$ est alors dans $H^1_{(s,s)}(\triangle,\Omega^e)$.

Enfin la Définition 4.2.12 de l'espace $H^{-1/2}_{(s,s)}(\Sigma^i)$ nous donne le résultat.

Pour la continuité, il suffit d'utiliser le premier théorème de trace (voir Proposition 4.2.7)

$$\forall\varphi\in H^{-1/2}_{(s,s)}(\Sigma^i),\quad \|\Lambda\|_{H^{1/2}(\Sigma^i)}\leq\|u^e_\varepsilon(\varphi)\|_{H^1(\Omega^e)}$$

puis de conclure par définition de la norme de $H^{-1/2}_{(s,s)}(\Sigma^i)$:

$$\|u^e_\varepsilon(\varphi)\|_{H^1(\Omega^e)}\leq\sup\left\{\|u\|_{H^1(\Omega^e)},\quad u\in H^1_{(s,s)}(\Omega^e),\ \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}^e}=\varphi\right\}$$

■

Introduisons donc

$$\forall(i,j)\in\{s,a\},\quad \Lambda^\varepsilon_{(i,j)}=\Lambda_\varepsilon|_{H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)}\ \in\ \mathcal{L}(H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i),H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)).$$

La décomposition des espaces $H^{\pm1/2}(\Sigma^i)$, donnée Propositions 4.2.5 et 4.2.14, mène à la décomposition suivante de Λ_ε.

PROPOSITION 4.2.27
Nous avons la décomposition diagonale suivante

$$\Lambda=\bigoplus_{i,j}\Lambda^\varepsilon_{(i,j)},\ \textit{dans le sens où}\quad \forall\phi\in H^{-1/2}(\Sigma^i),\quad \Lambda\phi=\sum_{i,j}\Lambda^\varepsilon_{(i,j)}\phi_{(i,j)}$$
$$\textit{où}\quad \phi=\sum_{i,j}\phi_{(i,j)},\quad \textit{avec}\quad \forall(i,j)\in\{s,a\}^2,\quad \phi_{(i,j)}\in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i).$$

REMARQUE 4.2.28 (DÉCOMPOSITION DIAGONALE PAR BLOCS)
La proposition précédente revient à écrire la décomposition diagonale par blocs

$$\Lambda_\varepsilon=\begin{bmatrix}\Lambda^\varepsilon_{(s,s)}&0&0&0\\0&\Lambda^\varepsilon_{(s,a)}&0&0\\0&0&\Lambda^\varepsilon_{(a,s)}&0\\0&0&0&\Lambda^\varepsilon_{(a,a)}\end{bmatrix}\tag{4.14}$$

Les propriétés de symétrie des données du problème permettent donc de ramener la caractérisation de l'opérateur Λ_ε défini sur $H^{-1/2}(\Sigma^i)$ à celle de quatre opérateurs $\Lambda^\varepsilon_{(i,j)}$ définis sur $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$. Les avantages de cette propriété sont multiples :

– les caractérisations de chaque opérateur NtD vont se faire de manière indépendante les unes des autres ;

– ces opérateurs agissent sur des espaces plus petits que $H^{-1/2}(\Sigma^i)$ puisque par (4.12), les espaces $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$ sont isomorphes à $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)})$;

– ils agissent enfin sur des fonctions qui présentent des symétries ou antisymétries et c'est ce qui va nous permettre de définir chaque opérateur.

Nous verrons, Annexe A.3, que dans le cas d'un problème sans ce type de symétries, la détermination de l'opérateur Λ_ε est plus complexe ; il faut imaginer que dans ce cas les blocs extra diagonaux de (4.14) sont non nuls.

4.2.4 Factorisation de chaque opérateur DtN $\Lambda^\varepsilon_{(i,j)}$

Nous introduisons les notations illustrées par la Figure 4.8 :

$$\Omega^{\mathrm{H}} = \Omega^- \cup \Omega^{\mathrm{w}} \cup \Omega^+ \quad \text{où} \quad \left| \begin{array}{l} \Omega^- = \left]\dfrac{L}{2}, +\infty\right[\times \left]-\infty, -\dfrac{L}{2}\right[\\ \Omega^{\mathrm{w}} = \left]\dfrac{L}{2}, +\infty\right[\times \left]-\dfrac{L}{2}, \dfrac{L}{2}\right[\\ \Omega^+ = \left]\dfrac{L}{2}, +\infty\right[\times \left]\dfrac{L}{2}, +\infty\right[\end{array} \right. ; \tag{4.15}$$

de plus

$$\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma}^- \cup \widetilde{\Sigma}^0 \cup \widetilde{\Sigma}^+ \quad \text{où} \quad \left| \begin{array}{l} \widetilde{\Sigma}^- = \left\{x = \dfrac{L}{2}\right\} \times \left]-\infty, -\dfrac{L}{2}\right[\\ \widetilde{\Sigma}^0 = \left\{x = \dfrac{L}{2}\right\} \times \left]-\dfrac{L}{2}, \dfrac{L}{2}\right[\\ \widetilde{\Sigma}^+ = \left\{x = \dfrac{L}{2}\right\} \times \left]\dfrac{L}{2}, +\infty\right[. \end{array} \right. \tag{4.16}$$

Par définition, $\widetilde{\Sigma}^0 = \Sigma^i_{(0)}$.

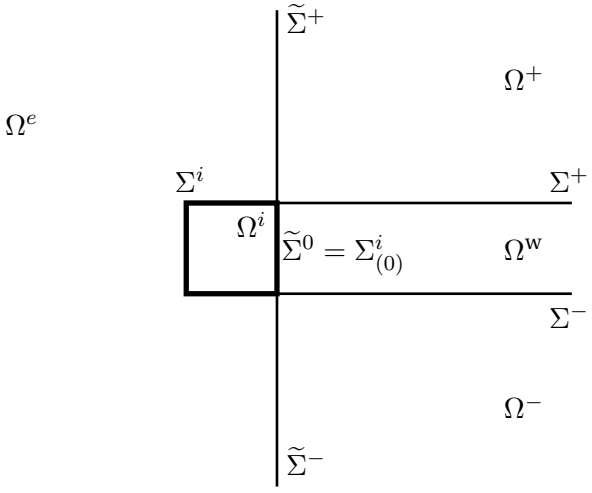


FIG. 4.8: Notations

Commençons par introduire tous les opérateurs qui vont intervenir dans la factorisation de

l'opérateur NtD $\Lambda^{\varepsilon}_{(i,j)}$:

- un opérateur $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}$ qui est un opérateur de type Neumann to Neumann. Cet opérateur, et c'est ce qui explique sa notation, dépend des propriétés de symétrie et d'antisymétrie de l'espace de définition de l'opérateur $\Lambda^{\varepsilon}_{(i,j)}$;

- un opérateur $\Lambda^{H}_{\varepsilon}$ qui est un opérateur de NtD de demi-espace. Nous verrons notamment, qu'il est le même pour chaque opérateur $\Lambda^{\varepsilon}_{(i,j)}$, $(i,j) \in \{s,a\}^2$;

- l'opérateur de restriction à $\Sigma^i_{(0)}$, $\widetilde{R}$, défini de $L^2(\widetilde{\Sigma})$ dans $L^2(\Sigma^i_{(0)})$ qui est le même pour chaque $(i,j) \in \{s,a\}^2$;

- l'opérateur d'extension $E_{(i,j)}$ introduit Lemme 4.2.17.

4.2.4.1 Les opérateurs de type Neumann-to-Neumann

Soit $\widetilde{N}$ l'opérateur Neumann to Neumann (NtN) défini par :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{N}^{\varepsilon} : H^{-1/2}(\Sigma^i) & \to & H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}) \\ \varphi & \mapsto & -\dfrac{\partial}{\partial x} u^e_{\varepsilon}(\varphi)\Big|_{\widetilde{\Sigma}}, \end{array} \tag{4.17}$$

où $u^e_{\varepsilon}(\varphi)$ est la solution du problème $(\mathcal{P}^e_{\varepsilon})$.

Nous introduisons pour chaque $(i,j) \in \{s,a\}^2$ les opérateurs NtN :

$$\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)} = \widetilde{N}^{\varepsilon}\Big|_{H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i), H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})). \tag{4.18}$$

Cet opérateur nous permet donc de passer de la trace de Neumann de u^e_{ε} sur Σ^i à une trace de

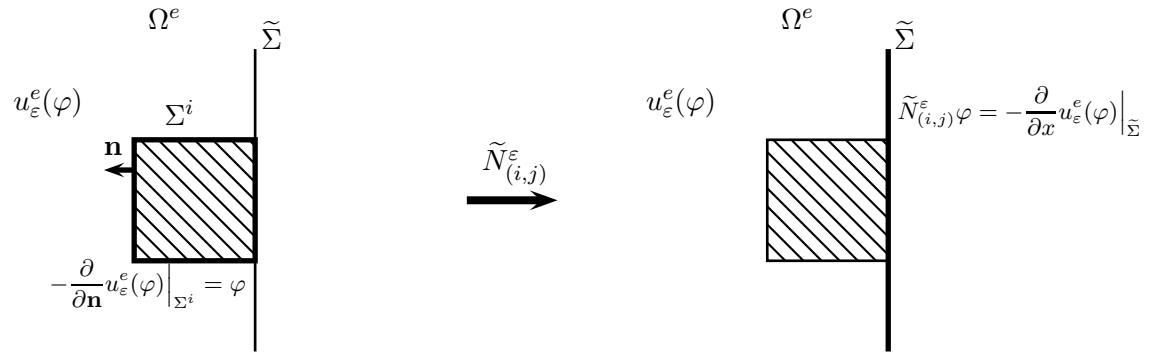


FIG. 4.9: Définition schématique de l'opérateur $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}$.

Neumann sur la droite $\widetilde{\Sigma}$. Pour l'instant, sa définition se fonde sur la solution u^e_{ε} du problème extérieur $(\mathcal{P}^e_{\varepsilon})$ posé dans le domaine infini Ω^e. Nous donnons à la Section 4.2.6 une nouvelle caractérisation de ces opérateurs et expliquons comment les déterminer en pratique (voir Section

4.2.8).

Une propriété simple de ces opérateurs $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}$ est que pour toute donnée φ, la restriction à Σ^0 de $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi$ est égale à la restriction à Σ^0 de φ. Nous renvoyons le lecteur à la remarque 4.2.25 concernant le sens de la restriction de fonctions qui sont seulement $H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$. Notons seulement que l'égalité

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i), \quad \widetilde{R}\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi = R_{(i,j)}\varphi \tag{4.19}$$

a un sens où on rappelle que $R_{(i,j)}$ est l'opérateur de restriction défini par (4.11) envoyant de manière continue $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$ dans $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)})$ et $\widetilde{R}$ est l'opérateur de restriction de $\widetilde{\Sigma}$ à Σ^0 qui d'après la remarque 4.2.25 est un opérateur linéaire continu de $H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$ dans $[H^{1/2}_{00}(\Sigma^i_{(0)})]'$ défini par

$$\forall \psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}),\ \forall \phi \in H^{1/2}_{00}(\Sigma^i_{(0)}), \quad \left\langle \widetilde{R}\psi, \phi \right\rangle_{\Sigma^i_{(0)}} = \left\langle \psi, \widetilde{E}_0\phi \right\rangle_{\widetilde{\Sigma}}.$$

En effet, d'après la définition 4.2.23, chaque espace $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)})$ est inclus dans $[H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)})]'$ qui est lui même inclus dans $[H^{1/2}_{00}(\Sigma^i_{(0)})]'$ d'après la remarque 4.2.21. L'égalité (4.19) a donc un sens dans $[H^{1/2}_{00}(\Sigma^i_{(0)})]'$.

Ces précisions sur l'opérateur de restriction de $\widetilde{\Sigma}$ dans $\Sigma^i_{(0)}$ étant faites, signalons qu'il nous arrivera de noter dans la suite, maintenant sans ambiguïté :

$$\psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}), \quad \widetilde{R}\psi = \psi\big|_{\Sigma^i_{(0)}}.$$

4.2.4.2 L'opérateur NtD de demi-espace $\Lambda^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}$

Soit l'opérateur $\Lambda^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}$ dit NtD de demi-espace périodique défini par :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^{\mathrm{H}}_{\varepsilon} : H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}) & \to & H^{1/2}(\widetilde{\Sigma}) \\ \psi & \mapsto & \Lambda^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}\,\psi = u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}(\psi)\Big|_{\widetilde{\Sigma}}, \end{array} \tag{4.20}$$

où $u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}(\psi)$ est l'unique solution dans $H^1(\triangle, \Omega^{\mathrm{H}})$ de

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}(\psi) - \rho_p(\mathbf{x})\ (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\ u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}(\psi) = 0, & \text{dans } \Omega^{\mathrm{H}}, \\ -\dfrac{\partial}{\partial x} u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}(\psi) = \psi, & \text{sur } \widetilde{\Sigma}, \end{array} \right. \tag{$\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}$}$$

où Ω^{H} et $\widetilde{\Sigma}$ sont représentés Figure 4.8 et définis respectivement par (4.15) et (4.16). Cet opérateur est dit NtD de demi-espace puisque sa définition dépend d'un problème de Neumann de demi-espace ($\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}$), infini et périodique dans la direction y et semi-infini et semi-périodique dans la direction x. Ces propriétés vont nous permettre d'établir, Section 4.2.5, une méthode de calcul pour cet opérateur et plus généralement la résolution du problème de demi-espace ($\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}$).

4.2.4.3 Retour à la factorisation de $\Lambda^{\varepsilon}_{(i,j)}$

Les opérateurs NtN $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}$ et NtD $\Lambda^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}$ introduits, nous pouvons maintenant établir le résultat important pour cette équation.

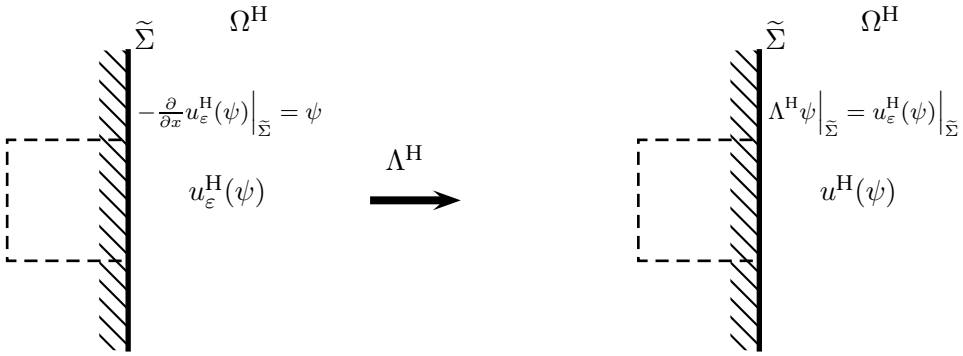


FIG. 4.10: Définition schématique de l'opérateur NtD Λ^H.

THÉORÈME 4.2.29
L'opérateur $\widetilde{R} \circ \Lambda_\varepsilon^H \circ \widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}$ envoie $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$ dans $H^{1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i_{(0)})$ et

$$\Lambda^\varepsilon_{(i,j)} = E_{(i,j)} \circ \widetilde{R} \circ \Lambda_\varepsilon^H \circ \widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)},$$

où

- $\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}$ *est l'opérateur NtN défini par* (4.17) *et* (4.18),
- Λ_ε^H *est l'opérateur NtD défini par* (4.20),
- $\widetilde{R}$ *est l'opérateur de restriction à* $\Sigma^i_{(0)}$ *de* $L^2(\widetilde{\Sigma})$ *dans* $L^2(\Sigma^i_{(0)})$,
- $E_{(i,j)}$ *l'opérateur d'extension introduit Lemme 4.2.17.*

■ **PREUVE:** Soit $(i,j) \in \{s,a\}^2$ et φ une fonction de $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$. Du fait de la définition de $\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}$, $u^e_\varepsilon(\varphi)|_{\Omega^{\mathrm{H}}}$ et $u^{\mathrm{H}}_\varepsilon(\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}\varphi)$ satisfont le problème de Helmholtz de demi-espace $(\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_\varepsilon)$ avec la même condition de Neumann sur $\widetilde{\Sigma}$, c'est-à-dire $\psi = \widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}\varphi$.

Par unicité de la solution de $(\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_\varepsilon)$, nous avons

$$u^e_\varepsilon(\varphi)\Big|_{\Omega^{\mathrm{H}}} = u^{\mathrm{H}}_\varepsilon(\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}\varphi),$$

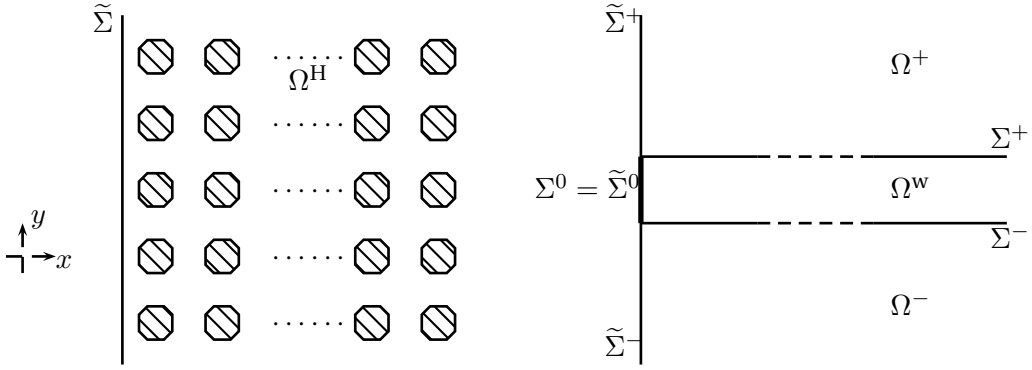
et en particulier, les traces sur $\Sigma^i_{(0)}$ coïncident, ce qui s'écrit comme

$$R_{(i,j)}\big(u^e(\varphi)|_{\Sigma^i}\big) = \widetilde{R} \circ \Lambda^{\mathrm{H}}_\varepsilon \circ \widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}\varphi$$

où l'opérateur de restriction $R_{(i,j)}$ est introduit au Lemme 4.2.17. Cette relation prouve la première partie du théorème. Pour la seconde partie, nous utilisons le fait que $E_{(i,j)}$ est l'inverse de $R_{(i,j)}$ (voir Section 4.2.2). ■

La caractérisation de $\Lambda^\varepsilon_{(i,j)}$ est donc ramenée à celle des opérateurs NtD $\Lambda^{\mathrm{H}}_\varepsilon$ et NtN $\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}$. Nous allons donc commencer par expliquer comment calculer l'opérateur $\Lambda^{\mathrm{H}}_\varepsilon$ à l'aide de la transformée de Floquet-Bloch et de la méthode de détermination des opérateurs de NtD de demi-guide développée au Chapitre 2. Quant à la détermination de $\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}\varphi$ pour toute donnée φ, elle requiert a priori le calcul de la solution $u^e_\varepsilon(\varphi)$ du problème extérieur $(\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_\varepsilon)$ défini sur le domaine non borné Ω^e. Nous trouverons ensuite une autre caractérisation de cet opérateur évitant le calcul de la solution du problème extérieur.

4.2.5 Opérateur NtD de demi-espace $\Lambda_\varepsilon^{\mathbf{H}}$



(a) Le demi-espace périodique. (b) Sa décomposition.

FIG. 4.11: Notations pour le demi-espace.

Dans cette section, nous présentons une méthode pour caractériser l'opérateur NtD de demi-espace $\Lambda_\varepsilon^{\mathrm{H}}$ défini par (4.20) (voir Figure 4.11). Nous allons exploiter le fait que cet opérateur est déterminé à partir du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^{\mathrm{H}})$ de Helmholtz posé dans un demi-espace Ω^{H} qui est

- infini et périodique dans la direction y : nous utiliserons une transformation adaptée pour les milieux périodiques, la Transformée de Floquet-Bloch (voir annexe B.1) ;

- semi-infini et semi-périodique dans la direction x : nous utiliserons la méthode de détermination de l'opérateur de NtD de demi-guide.

4.2.5.1 D'un problème de demi-espace à une famille de problèmes de demi-guide

Reprenons les notations de l'annexe B.1 que nous allons être amenés à utiliser dans cette section et rappelons que

$$C^\infty_{k_y}(\Omega^{\mathrm{w}}) = \Big\{ u \in C^\infty(\Omega^{\mathrm{w}}), \quad u|_{\Sigma^+} = e^{\imath k_y L}\, u|_{\Sigma^-} \Big\},$$

et que $H^1_{k_y}(\Omega^{\mathrm{w}})$ est l'adhérence de $C^\infty_{k_y}(\Omega^{\mathrm{w}})$ dans $H^1(\Omega^{\mathrm{w}})$. Notons de plus $H^1_{k_y}(\triangle, \Omega^{\mathrm{w}})$ le sous-espace fermé des fonctions de $H^1_{k_y}(\Omega^{\mathrm{w}})$ dont le laplacien est dans $L^2(\Omega^{\mathrm{w}})$.

L' espace $H^{1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$ est donné par la définition B.1.11 (avec $n = 1$) :

$$H^{1/2}_{k_y}(\Sigma^0) = \big[H^1_{k_y}(\Sigma^0), L^2(\Sigma^0)\big]_{1/2}$$

On a donc d'après cette définition et le théorème 4.2 du Chapitre 1 de [Lions & Magenes (1968)], le premier théorème de trace.

PROPOSITION 4.2.30 (PREMIER THÉORÈME DE TRACE POUR LES FONCTIONS DE $H^1_{k_y}(\Omega^{\mathrm{w}})$)
La restriction à $H^1_{k_y}(\Omega^w)$ de l'application trace γ_0 définie par :

$$\forall u \in H^1(\Omega^w), \quad \gamma_0 u = u\Big|_{\Sigma^0},$$

est une application continue de $H^1_{k_y}(\Omega^w)$ *dans* $H^{1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$

REMARQUE 4.2.31 (CARACTÉRISATION DE L'ESPACE $H^{1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$)
Pour clarifier les idées au sujet de cet espace, on rappelle qu'il est caractérisé à partir des prolongements quasi-périodiques dans la Proposition B.1.14 par

$$H^{1/2}_{k_y}(\Sigma^0) = \Big\{ f \in H^{1/2}(\Sigma^0), \quad \tilde{f} \in H^r_{loc}(\mathbb{R}) \Big\}$$

où $\tilde{f}$ *est définie par*

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \forall x \in]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}], \quad \tilde{f}(x+mL) = e^{\imath mkL} f(x)$$

et également dans la remarque B.1.17 par :

$$H^{1/2}_{k_y}(\Sigma^0) = \Big\{ \varphi \in H^{1/2}(\Sigma^0), \quad \int_{\Sigma^0} \frac{|\varphi(y) - e^{\imath k_y L}\varphi(-y)|^2}{|y - L/2|}\, dy < +\infty \Big\}.$$

On munit $H^{1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$ *de la norme*

$$\|u\|_{H^{1/2}_{k_y}(\Sigma^0)} = \|u\|_{H^{1/2}(\Sigma^0)} + \int_{\Sigma^0} \frac{|\varphi(y) - e^{\imath k_y L}\varphi(-y)|^2}{|y - L/2|}\, dy.$$

Enfin d'après la Proposition , l'espace $H^{1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$ *est un espace de Hilbert, il est dense et s'injecte de façon continue dans* $H^{1/2}(\mathcal{C})$.

L' espace $H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$ est donné par la définition B.1.11 (avec $n = 1$) et caractérisé par la Proposition B.1.18 comme le dual de $H^{1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$ muni de la norme induite par le produit de dualité :

$$\|f\|_{H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0} = \sup_{g \in H^{1/2}_{k_y}(\Sigma^0)} \frac{\Big\langle f, g \Big\rangle}{\|g\|_{H^{1/2}_{k_y}(\Sigma^0)}}$$

où $< \cdot, \cdot >$ est le crochet de dualité entre $H^{1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$ et $H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$. L'espace $H^{-1/2}(\Sigma^0)$ est contenu strictement et est dense dans $H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$.

On montre alors de la même façon que pour la Proposition 4.2.30 le deuxième théorème de trace.

PROPOSITION 4.2.32 (DEUXIÈME THÉORÈME DE TRACE POUR LES FONCTIONS DE $H^1_{k_y}(\triangle, \Omega^{\mathbf{w}})$)
La restriction à $H^1_{k_y}(\triangle, \Omega^w)$ *de l'application trace* γ_1 *définie par :*

$$\forall u \in H^1(\triangle, \Omega^w), \quad \gamma_1 u = -\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\Sigma^0},$$

est une application continue de $H^1_{k_y}(\triangle, \Omega^w)$ *dans* $H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$

Ces espaces maintenant définis, nous pouvons commencer à établir le résultat important de cette section

Pour une fonction $u(x,y) \in L^2(\Omega^{\mathrm{H}})$, on note $\mathcal{F}_y$ la transformée de FB dans la direction y pour la période L. Alors $\mathcal{F}_y\, u$ est une fonction de trois variables $(x,y;k)$ tel que

$$\forall x \in [\frac{L}{2}, +\infty[, \quad (\mathcal{F}_y u)(x,\cdot;\cdot) = \mathcal{F}_L\big[u(x,\cdot)\big]$$

où $\mathcal{F}_L$ est donnée Définition B.1.1.

REMARQUE 4.2.33
Dans l'annexe B.1, nous avons noté $\mathcal{F}_L$ la transformée de Floquet-Bloch d'une fonction réelle où L est la période caractéristique de la transformée qui intervient dans sa définition. Ici, nous allons fixer la période caractéristique de la transformée à celle du milieu, encore noté L et c'est en prenant cette valeur pour définir la TFB que toutes les propriétés énoncées dans la suite sont vraies. Dans ce qui suit, nous omettrons l'indice L puisqu'il ne changera jamais. En revanche, nous rajouterons l'indice y signifiant que la TFB agit dans la direction y sur des fonctions à deux variables x et y.

Soit $u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)$ la solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^{\mathrm{H}})$ et $\mathcal{F}_y\big(u^{\mathrm{H}}(\psi)\big)$ sa transformée de Floquet-Bloch (TFB) dans la direction y (voir annexe B.1 pour la définition et les propriétés de la transformée de Floquet). Certaines propriétés de la Transformée de FB, énoncées Théorème B.1.20, donnent directement que

$$\mathcal{F}_y\big(u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\big) \in L^2\big(\big]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big[, H^1_{k_y}(\triangle,\Omega^{\mathrm{w}})\big).$$

où on rappelle que

$$L^2\big(\big]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big[, H^1_{k_y}(\triangle,\Omega^{\mathrm{w}})\big) = \big\{\hat{u} \in L^2\big(\big]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big[, H^1(\triangle,\Omega^{\mathrm{w}})\big) \;/\; p.p.\ k_y,\ \hat{u}(\cdot,k_y) \in H^1_{k_y}(\triangle,\Omega^{\mathrm{w}})\ \big\}.$$

Ainsi, la TFB a transformé une fonction $u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)$ défini sur un demi-espace, en une fonction qui pour chaque k_y, est une fonction $\mathcal{F}_y\big(u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\big)(\cdot;k_y)$ définie sur le demi-guide Ω^{w}. Mais nous avons même beaucoup plus que cela. Les propriétés de la transformée de FB conduisent au théorème fondamental concernant cette famille de fonctions $\mathcal{F}_y\big(u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\big)(\cdot;k_y)$.

THÉORÈME 4.2.34
Pour tout $k_y \in]-\pi/L,\pi/L[$, $\mathcal{F}_y u_\varepsilon^H(\psi)\ (\cdot,k_y)$ est l'unique solution dans $H^1_{k_y}(\triangle,\Omega^w)$ du problème de demi-guide :

$$\left|\begin{array}{rcl} -\Delta \hat{u}^H_{\varepsilon,k_y} - \rho_p\ (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\ \hat{u}^H_{\varepsilon,k_y} &=& 0, \quad \textit{dans } \Omega^w \\ -\dfrac{\partial}{\partial x}\ \hat{u}^H_{\varepsilon,k_y}\Big|_{\Sigma^0} &=& \hat{\psi}\ (\cdot;k_y), \\ \hat{u}^H_{\varepsilon,k_y}\Big|_{\Sigma^+} &=& e^{-\imath k_y L}\ \hat{u}^H_{\varepsilon,k_y}\Big|_{\Sigma^-} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\ \hat{u}^H_{\varepsilon,k_y}\Big|_{\Sigma^+} &=& e^{-\imath k_y L}\ \dfrac{\partial}{\partial y}\ \hat{u}^H_{\varepsilon,k}\Big|_{\Sigma^-} \end{array}\right. \qquad (\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$$

où par la Définition B.1.21

$$\forall \psi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \hat{\psi} = \mathcal{F}_y\, \psi \in L^2\big(\big]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big[, H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma)\big)$$

et où de plus $\Sigma^- \cup \Sigma_0 \cup \Sigma^-$ est la frontière de Ω^w.

■ **PREUVE:** Tout d'abord, en utilisant la proposition B.1.6, on montre que pour tout $k_y \in]-\pi/L, \pi/L]$, $\mathcal{F}_y u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\,(\cdot, k_y)$ est solution du problème $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$. En effet, il suffit d'appliquer la TFB à la première équation du problème $(\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_\varepsilon)$ et utiliser le fait qu'elle commute avec les opérateurs différentiels pour les variables physiques x et y :

$$\mathcal{F}_y\Big(\triangle\, u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\Big) = \triangle\Big(\mathcal{F}_y u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\Big).$$

De plus, la TFB commute aussi avec les multiplications par des fonctions périodiques (de même période que la TFB) :

$$\mathcal{F}_y\Big(\rho_p\, u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\Big) = \rho_p\Big(\mathcal{F}_y u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\Big).$$

On a alors que pour tout $k_y \in]-\pi/L, \pi/L[$:

$$\Big[-\Delta\mathcal{F}_y u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi) - \rho_p\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,\mathcal{F}_y u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\Big](\cdot; k_y) = 0, \quad \text{dans } \Omega^{\mathrm{w}}$$

De plus pour tout k_y, $\mathcal{F}_y\, u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\,(\cdot; k_y) \in H^1_{k_y}(\triangle, \Omega^w)$ donc d'après la Proposition 4.2.30,

$$\forall x_0 \geq L/2, \quad \mathcal{F}_y\, u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\,(\cdot; k_y)\Big|_{x=x_0} \;\in\; H^{1/2}_{k_y}(\Gamma)$$

ce qui correspond, au sens des distributions, aux deux dernières conditions de $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$. De plus, d'après la Proposition 4.2.30

$$-\frac{\partial}{\partial x}\,\mathcal{F}_y\, u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\,(\cdot; k_y)\Big|_{\Gamma_0} \;\in\; H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma)$$

et on a

$$\forall k_y \in \,]-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}[,\; -\frac{\partial}{\partial x}\,\mathcal{F}_y\, u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\,(\cdot; k_y)\Big|_{\Sigma_0} = \mathcal{F}_y\,\Big(-\frac{\partial}{\partial x}\, u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\Big|_{\widetilde{\Sigma}}\Big)(\cdot; k_y) \;= \hat{\psi}(\cdot; k_y) \in H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma).$$

d'après la définition B.1.21. Par conséquent, pour tout k, $\mathcal{F}_y u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\,(\cdot, k_y)$ est solution du problème $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$.

En utilisant des arguments classiques [Dautray & Lions (1988)], on montre que ce problème admet au plus une solution dans $H^1_{k_y}(\triangle, \Omega^{\mathrm{w}})$. ■

La Transformée de Floquet Bloch, a donc permis de ramener le problème de demi-espace à une famille de problèmes de demi-guide. Pour déterminer la solution $u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)$ du problème $(\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_\varepsilon)$, il suffit donc de calculer pour chaque $k \in]-\pi/L, \pi/L[$ la solution $\mathcal{F}_y u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\,(\cdot, k_y)$ du problème $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$ et d'utiliser la formule d'inversion donnée par la Proposition B.1.5 :

$$\forall\,(x,y) \in \Omega^{\mathrm{w}},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)(x, y + nL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \mathcal{F}_y u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)(x, y\,; k_y)\, e^{\imath n k_y L}\, dk_y. \tag{4.21}$$

La solution $u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)$ calculée pour toute donnée $\psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$, il suffira alors, pour déterminer l'opérateur NtD de demi-espace Λ^{H}, d'appliquer directement sa définition :

$$\forall \psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}), \quad \Lambda^{\mathrm{H}}_\varepsilon\, \psi = u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\Big|_{\widetilde{\Sigma}}.$$

Enfin, notons que pour chaque k, le problème $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$ est un problème de Helmholtz avec absorption posé dans un demi-guide parfaitement périodique (et droit) et les conditions aux bords respectent la périodicité (voir Remarque 2.1.3). Nous pouvons donc appliquer la méthode développée au Chapitre 2 et plus précisément la section 2.2 qui traite de la détermination de l'opérateur NtD de demi-guide périodique dans le cas où les conditions aux bords sont de type Neumann. Nous rappelons section suivante les grandes lignes de la méthode.

4.2.5.2 Rappel de la méthode de résolution pour le problème $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$

Dans cette section, nous rappelons les grandes lignes de la méthode de résolution du problème $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$ et en particulier de la détermination de l'opérateur de NtD de demi-guide. Nous appliquons l'étude de la section 2.2 dans laquelle les conditions aux bords Σ^+ et Σ^- sont des conditions de Neumann homogènes plus tôt que des conditions k_y-quasi-périodique. Nous en profiterons pour introduire également de nouvelles notations utilisées dans la suite. En particulier, tous les opérateurs et les solutions des problèmes locaux vont devenir des fonctions de $k_y \in]-\pi/L, \pi/L[$.

Nous donnons Figure 4.12 les notations importantes pour cette section et rappelons que le demi-guide périodique est :

$$\Omega^{\mathrm{w}} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{\mathcal{C} + ((n+1)L, 0)\}, \tag{4.22}$$

où on rappelle que la cellule de périodicité de référence est définie par :

$$\mathcal{C} = \left]-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right[^2.$$

Rappelons enfin que les interfaces $\Gamma_n = \Gamma_0 + (nL, 0)$ peuvent être identifiées à $\Gamma\ (= \Gamma_0) \sim [-L/2, L/2]$ et toutes les cellules $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_1 + (nL, 0)$ à $\mathcal{C}(= \mathcal{C}_1)$.

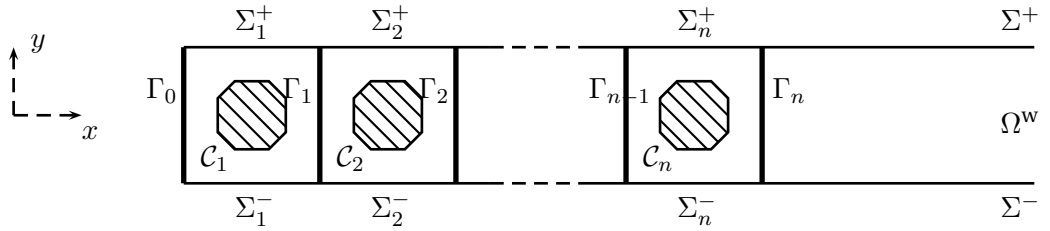


FIG. 4.12: Notations pour le demi-guide

En utilisant la méthode développée Chapitre 2 (plus précisément la Proposition 2.2.7), l'expression de la solution du problème $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$ est donnée pour toute donnée $\psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$ par

$$\forall k_y \in \left]-\frac{\pi}{L}; \frac{\pi}{L}\right[, \quad \forall j \geq 1, \quad \mathcal{F}_y u^{\mathrm{H}}_\varepsilon(\psi)(\cdot, k_y)\Big|_{\mathcal{C}_j} = e^0_\varepsilon(k_y; R_\varepsilon(k_y)^{j-1}\,\hat{\psi}(\cdot; k_y)) \,-\, e^1_\varepsilon(k_y; R_\varepsilon(k_y)^j\,\hat{\psi}(\cdot; k_y)) \tag{4.23}$$

où pour tout k_y et pour toute donnée $\hat{\psi}_{k_y} \in H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma)$, $e^0_\varepsilon(k_y; \hat{\psi}_{k_y})$ et $e^1_\varepsilon(k; \hat{\psi}_{k_y})$ sont les solutions $H^1_{k_y}(\mathcal{C})$ des problèmes de cellule

$$-\Delta e^\ell_\varepsilon(k_y; \hat{\psi}_{k_y}) - \rho_p(\mathbf{x})\ (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\ e^\ell_\varepsilon(k_y; \hat{\psi}_{k_y}) = 0, \quad \text{dans } \mathcal{C}, \tag{4.24}$$

satisfaisant des conditions quasi-périodiques sur Σ_1^+ et Σ_1^-

$$\left|\begin{array}{rcl} e^\ell_\varepsilon(k_y; \hat{\psi}_{k_y})\Big|_{\Sigma_1^+} & = & e^{-\imath k_y L}\ e^\ell_\varepsilon(k_y; \hat{\psi}_{k_y})\Big|_{\Sigma_1^-} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} e^\ell_\varepsilon(k_y; \hat{\psi}_{k_y})\Big|_{\Sigma_1^+} & = & e^{-\imath k_y L}\ \dfrac{\partial}{\partial y} e^\ell_\varepsilon(k_y; \hat{\psi}_{k_y})\Big|_{\Sigma_1^-} \end{array}\right. \tag{4.25}$$

et des conditions de Neumann non homogènes sur Γ_0 et Γ_1

$$\left|\begin{array}{ll} -\dfrac{\partial}{\partial x}e^0_\varepsilon(k_y;\hat\psi_{k_y}) = \hat\psi_{k_y} \quad \text{sur } \Gamma_0, & \dfrac{\partial}{\partial x}e^0_\varepsilon(k_y;\hat\psi_{k_y}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \\ -\dfrac{\partial}{\partial x}e^1_\varepsilon(k_y;\hat\psi_{k_y}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, & \dfrac{\partial}{\partial x}e^1_\varepsilon(k_y;\hat\psi_{k_y}) = \hat\psi_{k_y} \quad \text{sur } \Gamma_1. \end{array}\right. \tag{4.26}$$

L'opérateur $R_\varepsilon(k_y)$, compact de $H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma)$ dans lui même, est appelé opérateur de propagation, qui, d'après le théorème 2.2.5 du chapitre 2, est l'unique opérateur compact qui satisfait la condition

$$\rho(R_\varepsilon(k_y)) < 1 \tag{4.27}$$

solution de l'équation de Riccati stationnaire

$$\left|\begin{array}{l} \text{Trouver } X \in \mathcal{K}\big(H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma)\big), \\ \mathcal{T}(\varepsilon,k_y,X) = 0. \end{array}\right. \tag{$\mathcal{E}^R_{\varepsilon,k_y}$}$$

où

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{L}\big(H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma)\big) & \to & \mathcal{L}\big(H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma), H^{1/2}_{k_y}(\Gamma)\big) \\ X & \mapsto & \mathcal{T}(\varepsilon,k_y,X) = T^{10}_\varepsilon(k_y)\, X^2 - (T^{00}_\varepsilon(k_y) + T^{11}_\varepsilon(k_y))\, X + T^{01}_\varepsilon(k_y). \end{array} \tag{4.28}$$

Nous rappelons enfin que les opérateurs $T^{ij}_\varepsilon(k_y)$ sont des opérateurs de $H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}_{k_y}(\Gamma)$ définis par

$$\begin{array}{ll} T^{00}_\varepsilon(k_y)\ \hat\psi_{k_y} = e^0_\varepsilon(k_y;\hat\psi_{k_y})\Big|_{\Gamma_0}, & T^{01}_\varepsilon(k_y)\ \hat\psi_{k_y} = e^0_\varepsilon(k_y;\hat\psi_{k_y})\Big|_{\Gamma_1}, \\ T^{10}_\varepsilon(k_y)\ \hat\psi_{k_y} = e^1_\varepsilon(k_y;\hat\psi_{k_y})\Big|_{\Gamma_0}, & T^{11}_\varepsilon(k_y)\ \hat\psi_{k_y} = e^1_\varepsilon(k_y;\hat\psi_{k_y})\Big|_{\Gamma_1}, \end{array} \tag{4.29}$$

et appelés opérateurs de NtD locaux.

Pour résoudre le problème $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$, pour chaque k_y, il faut donc calculer la solution des problèmes de cellules avec conditions k-quasi-périodiques pour chaque donnée $\hat\psi_{k_y}$ de $H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma)$, en déduire les opérateurs NtD locaux et enfin résoudre l'équation de Riccati stationnaire avec condition sur le rayon spectral. La solution de $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$ peut ensuite être reconstruite.

Nous finissons cette section en introduisant des résultats et des outils qui n'interviennent pas dans la caractérisation de l'opérateur NtD de demi-espace mais permettent la caractérisation de l'opérateur NtN.

Enonçons tout d'abord un lemme sur les opérateurs de propagation $R_\varepsilon(k_y)$ qui précise la condition 4.27 sur les opérateurs $R_\varepsilon(k_y)$.

LEMME 4.2.35
Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, la famille de rayon spectral des opérateurs $R_\varepsilon(k_y)$ est uniformément bornée en k_y par une constante strictement inférieure à 1. Plus précisément

$$\exists \tau > 0, \quad \forall k_y \in \big]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big], \quad \rho(R_\varepsilon(k_y)) \le e^{-\tau\,\varepsilon}$$

où $\rho(R_\varepsilon(k_y))$ est le rayon spectral de $R_\varepsilon(k_y)$.

■ **PREUVE:** Pour tout $k_y \in]-\pi/L, \pi/L]$ et toute donnée $\hat{\psi}_{k_y} \in H_{k_y}^{-1/2}(\Sigma^0)$, on note ici $u_{\varepsilon,k_y}(\hat{\psi}_{k_y})$ la solution du problème $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$. Commençons par montrer qu'il existe un $\tau > 0$ tel que pour tout k_y et pour toute donnée $\hat{\psi}_{k_y}$, $u_{\varepsilon,k_y}(\hat{\psi}_{k_y})e^{\tau\varepsilon x/2}$ est dans $L^2(\Omega^+)$. On multiplie pour cela la première équation de $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$ par $\overline{u}_{\varepsilon,k_y}(\hat{\psi}_{k_y})e^{\tau\varepsilon x}$ et en appliquant la formule de Green on obtient

$$\int_{\Omega^{\mathrm{w}}} e^{\tau\varepsilon x}\left[|\nabla u_{\varepsilon,k_y}|^2 + \overline{u}_{\varepsilon,k_y}\frac{\partial u_{\varepsilon,k_y}}{\partial x}\tau\varepsilon - \rho_p(\omega^2+\imath\varepsilon\omega)\,|u_{\varepsilon,k_y}|^2\right]dx\,dy = \int_{\Gamma_0}\hat{\psi}_{k_y}\,\overline{u}_{\varepsilon,k_y} \tag{4.30}$$

On note $\omega_\varepsilon = \alpha_\varepsilon + \imath\beta_\varepsilon = \sqrt{\omega^2+\imath\varepsilon\omega}$ telle que $\beta_\varepsilon > 0$. En utilisant l'inégalité $|z| \geq |\mathrm{Im}z|$, notons que pour tout $u \in H^1(\Omega^{\mathrm{w}})$,

$$\Big|\frac{1}{\omega_\varepsilon}\big[|\nabla u|^2 - \rho_p\omega_\varepsilon^2\,|u|^2\big]\Big| \geq \Big|\mathrm{Im}\big[\frac{\overline{\omega_\varepsilon}}{|\omega_\varepsilon|^2}|\nabla u|^2 - \rho_p\omega_\varepsilon\,|u|^2\big]\Big| = \Big|\mathrm{Im}\big[\frac{-\beta_\varepsilon}{|\omega_\varepsilon|^2}|\nabla u|^2 - \rho_p\beta_\varepsilon\,|u|^2\big]\Big|$$

soit

$$\Big||\nabla u|^2 - \rho_p\omega_\varepsilon^2\,|u|^2\Big| \geq \beta_\varepsilon\min(\frac{1}{|\omega_\varepsilon|},\rho_-|\omega_\varepsilon|)\big[|u|^2+|\nabla u|^2\big]$$

On montre facilement que $\beta_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \varepsilon$ et $|\omega_\varepsilon| \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \omega$ donc pour ε suffisamment petit, il existe une constante C qui ne dépend ni de k_y, ni de ε telle que

$$\Big||\nabla u|^2 - \rho_p\omega_\varepsilon^2\,|u|^2\Big| \geq C\varepsilon\big[|u|^2+|\nabla u|^2\big].$$

On a donc

$$\Big||\nabla u|^2 - \rho_p\omega_\varepsilon^2\,|u|^2 + \tau\varepsilon\overline{u}\frac{\partial u}{\partial x}\Big| \geq \Big||\nabla u|^2 - \rho_p\omega_\varepsilon^2\,|u|^2\Big| - \tau\varepsilon\Big|\overline{u}\frac{\partial u}{\partial x}\Big| \geq C\varepsilon\big[|u|^2+|\nabla u|^2\big] - \frac{\tau\varepsilon}{2}\big[|u|^2+|\nabla u|^2\big].$$

En choisissant, $\tau < 2C$, on obtient l'existence d'une constante C_1 telle que

$$\Big||\nabla u|^2 - \rho_p\omega_\varepsilon^2\,|u|^2 + \tau\varepsilon\overline{u}\frac{\partial u}{\partial x}\Big| \geq C_1\varepsilon\big[|u|^2+|\nabla u|^2\big]$$

Si on reporte cette inégalité à la valeur absolue de la relation (4.30) et en utilisant le théorème de trace, on trouve l'existence d'une telle constante C_2 telle que

$$\varepsilon\int_{\Omega^{\mathrm{w}}} e^{\tau\varepsilon x}\big[|u_{\varepsilon,k_y}|^2+|\nabla u_{\varepsilon,k_y}|^2\big] \leq C_2\|\hat{\psi}_{k_y}\|_{H_{k_y}^{-1/2}(\Gamma_0)}\|u_{\varepsilon,k_y}\|_{H^1(\Omega^{\mathrm{w}})}$$

Soit pour $\varepsilon > 0$, pour tout k_y et toute donnée $\hat{\psi}_{k_y}$, $u_{\varepsilon,k_y}(\hat{\psi}_{k_y})\,e^{\tau\varepsilon x/2} \in L^2(\Omega^{\mathrm{w}})$.

Pour k_y fixé, soit $\hat{\psi}_{k_y}$ un vecteur propre de $R_\varepsilon(k_y)$ pour la valeur propre $r_\varepsilon(k_y)$. Par définition, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{\varepsilon,k_y}(\hat{\psi}_{k_y})\Big|_{\mathcal{C}_n} = r_\varepsilon(k_y)^{n-1}u_{\varepsilon,k_y}(\hat{\psi}_{k_y})\Big|_{\mathcal{C}_1}.$$

comme $u_{\varepsilon,k_y}(\hat{\psi}_{k_y})\,e^{\tau\varepsilon x/2} \in L^2(\Omega^{\mathrm{w}})$, on obtient par changement de variable

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\int_{\mathcal{C}_n}|u_{\varepsilon,k_y}(\hat{\psi}_{k_y})|^2\,e^{\tau\varepsilon x}\,dxdy < +\infty \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}^*} r_\varepsilon(k_y)^{n-1}e^{\tau\varepsilon n}\Big[\int_{\mathcal{C}_1}|u_{\varepsilon,k_y}(\hat{\psi}_{k_y})|^2\,e^{\tau\varepsilon x}\,dxdy\Big] < +\infty.$$

On a donc pour tout k_y, pour toute valeur propre $r_\varepsilon(k_y)$ de $R_\varepsilon(k_y)$:

$$|r_\varepsilon(k_y)| < e^{-\tau\varepsilon}$$

où on rappelle que τ est indépendant de k et ε. On retrouve le résultat énoncé. ■

Introduisons enfin les opérateurs Neumann-to-Neumann locaux :

$$N_\varepsilon^{0,\pm}(k_y) \in \mathcal{L}\big(H_{k_y}^{-1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Sigma_1^\pm)\big) \quad \text{et} \quad N_\varepsilon^{1,\pm}(k_y) \in \mathcal{L}\big(H_{k_y}^{-1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Sigma_1^\pm)\big)$$

définis pour tout $\hat{\psi}_{k_y} \in H_{k_y}^{-1/2}(\Gamma)$ par (voir Figure 4.12)

$$\begin{aligned} N_\varepsilon^{0,-}(k_y)\ \hat{\psi}_{k_y} &= \frac{\partial}{\partial y}\, e_\varepsilon^0(k_y;\hat{\psi}_{k_y})\Big|_{\overleftarrow{\Sigma}_1^-}, \quad N_\varepsilon^{0,+}(k_y)\ \hat{\psi}_{k_y} = -\frac{\partial}{\partial y}\, e_\varepsilon^0(k_y;\hat{\psi}_{k_y})\Big|_{\Sigma_1^+}, \\ N_\varepsilon^{1,-}(k_y)\ \hat{\psi}_{k_y} &= \frac{\partial}{\partial y}\, e_\varepsilon^1(k_y;\hat{\psi}_{k_y})\Big|_{\overleftarrow{\Sigma}_1^-}, \quad N_\varepsilon^{1,+}(k_y)\ \hat{\psi}_{k_y} = -\frac{\partial}{\partial y}\, e_\varepsilon^1(k_y;\hat{\psi}_{k_y})\Big|_{\Sigma_1^+}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

où :

$$\Sigma_1^\pm = \big[\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}\big] \times \big\{ \pm \frac{L}{2}\big\} \quad \text{et} \quad \overleftarrow{\Sigma}_1^- = \big[\frac{3L}{2}, \frac{L}{2}\big] \times \big\{ -\frac{L}{2}\big\}$$

FIG. 4.13: Les opérateurs de NtD locaux $N_\varepsilon^{i,\pm}(k_y)$.

REMARQUE 4.2.36
Remarquons que la trace normale sur Σ_1^+ est prise dans le sens des x croissants alors que celle sur $\overleftarrow{\Sigma}_1^-$ est prise dans le sens des x décroissant. Nous comprendrons Section 4.2.5.4 exactement la raison de l'introduction de ces 4 opérateurs NtN locaux.

Notons enfin que ces opérateurs permettent d'exprimer la trace normale de la solution de $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$ sur Σ^+ et $\overleftarrow{\Sigma}^-$, pour toute donnée $\psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$ et pour tout $k_y \in]-\pi/L;\pi/L[: \forall j \geq 0$

$$\left|\begin{array}{l} \text{sur } \Sigma_{j+1}^+ \equiv \big[\frac{L}{2} + jL, \frac{3L}{2} + jL\big] \\ \qquad\qquad -\frac{\partial}{\partial y}\, \mathcal{F}_y u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\,(\cdot,k_y) = \big(N_\varepsilon^{0,+}(k_y)\ -\ N_\varepsilon^{1,+}(k_y)\, R_\varepsilon(k_y)\big)\, R_\varepsilon(k_y)^j\ \hat{\psi}(\cdot;k_y), \\ \text{sur } \overleftarrow{\Sigma}_{j+1}^- \equiv \big[\frac{3L}{2} + jL, \frac{L}{2} + jL\big] \\ \qquad\qquad +\frac{\partial}{\partial y}\, \mathcal{F}_y u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\,(\cdot,k_y) = \big(N_\varepsilon^{0,-}(k_y)\ -\ N_\varepsilon^{1,-}(k_y)\, R_\varepsilon(k_y)\big)\, R_\varepsilon(k_y)^j\ \hat{\psi}(\cdot;k_y). \end{array}\right. \tag{4.32}$$

4.2.5.3 Retour à l'opérateur NtD de demi-espace

De la résolution du problème de demi-guide présentée plus haut et d'après le théorème 4.2.34, nous pouvons également définir un opérateur NtD noté (avec un abus de notation, comme nous

le verrons plus tard) $\widehat{\Lambda}_\varepsilon^{\mathrm{H}}$ par

$$\widehat{\Lambda}_\varepsilon^{\mathrm{H}} : L^2\Big(\big[-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big], H_{k_y}^{-1/2}(\Sigma^0)\Big) \;\to\; L^2\Big(\big[-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big], H_{k_y}^{1/2}(\Sigma^0)\Big)$$

où ces espaces sont définis Théorème B.1.20 et Définition B.1.21 Annexe B.1 et où

$$\forall \psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}),\ \forall k_y \in \big[-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big], \quad \big(\widehat{\Lambda}_\varepsilon^{\mathrm{H}}\,\mathcal{F}_y\psi\big)\,(\cdot;k_y) = \Lambda_\varepsilon^{\mathrm{w}}(k_y)\big(\mathcal{F}_y\psi\,(\cdot;k_y)\big), \tag{4.33}$$

avec $\Lambda_\varepsilon^{\mathrm{w}}(k_y)$ l'opérateur NtD de demi-guide défini par

$$\Lambda_\varepsilon^{\mathrm{w}}(k_y)\big(\mathcal{F}_y\psi\,(\cdot;k_y)\big) = \mathcal{F}_y u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)\,(\cdot,k_y)\Big|_{\Sigma^0}.$$

La définition des opérateurs NtD de demi-guide et la relation (2.25) de la Proposition 2.2.7 plus précisément donne une caractérisation de cet opérateur :

$$\forall k_y \in \big]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big],\ \forall \hat{\psi}_{k_y} \in H_{k_y}^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}), \quad \Lambda_\varepsilon^{\mathrm{w}}(k_y)\hat{\psi}_{k_y} = \Big[T_\varepsilon^{00}(k_y) \;-\; T_\varepsilon^{10}(k_y)\,R_\varepsilon(k_y)\Big]\,\hat{\psi}_{k_y}, \tag{4.34}$$

en identifiant Σ^0 et Γ_0.

Ainsi, en appliquant la transformée de FB inverse à l'expression (4.33) et étant donné le théorème B.1.20, nous montrons le théorème suivant.

THÉORÈME 4.2.37
L'opérateur NtD de demi-espace Λ_ε^H est donné par :

$$\Lambda_\varepsilon^H = \mathcal{F}_y^{-1} \circ \widehat{\Lambda}_\varepsilon^H \circ \mathcal{F}_y \tag{4.35}$$

où $\widehat{\Lambda}_\varepsilon^H$ est caractérisé par (4.34).

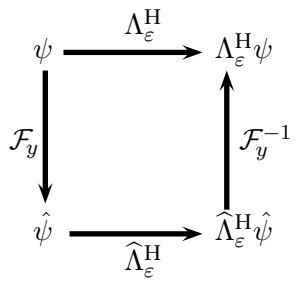


FIG. 4.14: Factorisation de l'opérateur NtD de demi-espace.

Ainsi, l'opérateur NtD de demi-espace $\Lambda_\varepsilon^{\mathrm{H}}$ se construit à l'aide d'une famille d'opérateurs NtD de demi-guide dont nous avons donné la méthode et l'algorithme de calcul Chapitre 2.

REMARQUE 4.2.38 (AUTRE APPLICATION POUR L'OPÉRATEUR NTD DE DEMI-ESPACE)
L'opérateur NtD de demi-espace peut intervenir dans d'autres applications, notamment dans l'étude du problème de transmission-réflexion entre deux demi-espaces différents périodiques à condition que les périodes de chaque espace soient commensurables. Notre approche utilisant des opérateurs NtD est assez originale mais comme ce problème est différent de celui de ce chapitre, nous l'étudions Annexe A.4 et donnons quelques applications numériques qui mettent en évidence les propriétés spectrales des milieux périodiques intéressantes pour les applications.

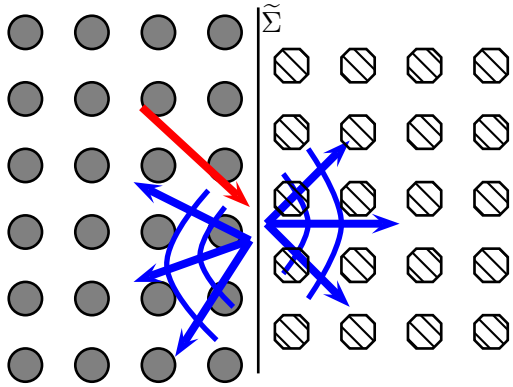


FIG. 4.15: Notations pour le demi-espace.

4.2.5.4 Opérateurs NtN de demi-espace

Nous introduisons dans cette sous-section des opérateurs NtN qui n'interviennent pas dans la caractérisation de l'opérateur NtD de demi-espace Λ^{H} recherché dans cette section mais qui interviendront pour la caractérisation des opérateurs NtN $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}$ qui sera développée à la Section 4.2.6. Ils sont introduits ici parce qu'ils dépendent de la résolution du problème de demi-espace $(\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon})$.

Soit Σ la frontière du domaine Ω^{w} :

$$\Sigma = \overleftarrow{\Sigma}^{-} \cup \Sigma^0 \cup \Sigma^+ \quad \text{où} \quad \left| \begin{array}{l} \overleftarrow{\Sigma}^{-} = \left]+\infty, \dfrac{L}{2}\right[\times \left\{y = -\dfrac{L}{2}\right\} \\ \Sigma^0 = \left]-\dfrac{L}{2}, \dfrac{L}{2}\right[\times \left\{x = \dfrac{L}{2}\right\} \\ \Sigma^+ = \left]\dfrac{L}{2}, +\infty\right[\times \left\{y = +\dfrac{L}{2}\right\} \end{array} \right. . \tag{4.36}$$

où Σ^-, Σ^+ et Σ^0 sont représentés Figure 4.11 et où $\overleftarrow{\Sigma}^{-}$ correspond à Σ^- pris dans le sens des x décroissants.

On peut identifier $\widetilde{\Sigma}$ et Σ (avec $\mathbb{R}$) via la bijection

$$\left| \begin{array}{rccl} \Phi : & \widetilde{\Sigma} & \to & \Sigma \\ & (\dfrac{L}{2}, s) \in \widetilde{\Sigma}^{-} & \mapsto & (-s, \dfrac{L}{2}), \\ & (\dfrac{L}{2}, s) \in \widetilde{\Sigma}^{0} & \mapsto & (\dfrac{L}{2}, s) \in \Sigma^0, \\ & (\dfrac{L}{2}, s) \in \widetilde{\Sigma}^{+} & \mapsto & (s, \dfrac{L}{2}) \in \Sigma^+, \end{array} \right. \tag{4.37}$$

ainsi $\overleftarrow{\Sigma}^{-}$ et $\widetilde{\Sigma}^{-}$, Σ^0 et $\widetilde{\Sigma}^{0}$ et enfin Σ^+ et $\widetilde{\Sigma}^{+}$ peuvent également être identifiés. Pour comprendre pourquoi la demi-droite $\overleftarrow{\Sigma}^{-}$ est prise dans le sens des x décroissants, retenons juste que c'est parce qu'elle est la symétrique de la demi-droite orientée Σ^-.

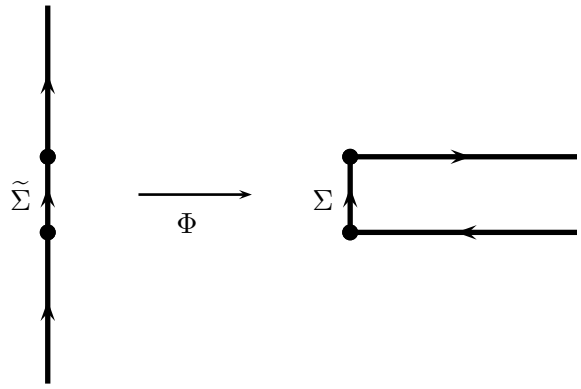


FIG. 4.16: Identification de $\widetilde{\Sigma}$ et Σ.

DÉFINITION 4.2.39
Soit $u_\varepsilon^H(\psi)$ solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon^{\mathrm{H}})$ pour toute donnée $\psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$. Les quatre opérateurs NtN sont définis par :

$$N_{(s,s)}^{\varepsilon,H} : H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}) \longrightarrow H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$$
$$\psi \longmapsto \left| \begin{array}{l} N_{(s,s)}^{\varepsilon,H}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^-} \equiv + \Big[+ \dfrac{\partial}{\partial y}\ u_\varepsilon^H(\psi)|_{\overline{\Sigma}^-} \Big], \\ N_{(s,s)}^{\varepsilon,H}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^0} = \psi|_{\widetilde{\Sigma}^0}, \\ N_{(s,s)}^{\varepsilon,H}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^+} \equiv + \Big[- \dfrac{\partial}{\partial y}\, u_\varepsilon^H(\psi)|_{\Sigma^+} \Big], \end{array} \right.$$

$$N_{(s,a)}^{\varepsilon,H} : H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}) \longrightarrow H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$$
$$\psi \longmapsto \left| \begin{array}{l} N_{(s,a)}^{\varepsilon,H}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^-} \equiv - \Big[+ \dfrac{\partial}{\partial y}\ u_\varepsilon^H(\psi)|_{\overline{\Sigma}^-} \Big], \\ N_{(s,a)}^{\varepsilon,H}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^0} = \psi|_{\widetilde{\Sigma}^0}, \\ N_{(s,a)}^{\varepsilon,H}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^+} \equiv + \Big[- \dfrac{\partial}{\partial y}\, u_\varepsilon^H(\psi)|_{\Sigma^+} \Big], \end{array} \right.$$

$$N_{(a,s)}^{\varepsilon,H} : H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}) \longrightarrow H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$$
$$\psi \longmapsto \left| \begin{array}{l} N_{(a,s)}^{\varepsilon,H}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^-} \equiv + \Big[+ \dfrac{\partial}{\partial y}\ u_\varepsilon^H(\psi)|_{\overline{\Sigma}^-} \Big], \\ N_{(a,s)}^{\varepsilon,H}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^0} = \psi|_{\widetilde{\Sigma}^0}, \\ N_{(a,s)}^{\varepsilon,H}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^+} \equiv - \Big[- \dfrac{\partial}{\partial y}\, u_\varepsilon^H(\psi)|_{\Sigma^+} \Big], \end{array} \right.$$

$$
\begin{array}{rcl}
N^{\varepsilon,H}_{(a,a)} \ : \ H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}) \\
\psi & \longmapsto & \left| \begin{array}{l}
N^{\varepsilon,H}_{(a,a)}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^-} \equiv -\Big[+ \dfrac{\partial}{\partial y}\ u^H_\varepsilon(\psi)|_{\overline{\Sigma}^-}\Big], \\
N^{\varepsilon,H}_{(a,a)}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^0} = \psi|_{\widetilde{\Sigma}^0}, \\
N^{\varepsilon,H}_{(a,a)}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^+} \equiv -\Big[- \dfrac{\partial}{\partial y}\, u^H_\varepsilon(\psi)|_{\Sigma^+}\Big].
\end{array} \right.
\end{array}
$$

REMARQUE 4.2.40
Chaque opérateur $N^{\varepsilon,H}_{(i,j)}$ est bien défini comme un opérateur linéaire continu de $H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$ dans lui même puisque ces opérateurs correspondent tout simplement à la composition entre le deuxième opérateur trace γ_1 sur le bord lipschitzien Σ et l'opérateur qui à une donnée ψ renvoie la solution du problème de demi-espace $u^H_\varepsilon(\psi)$.

Grâce à la section 4.2.5.2, plus particulièrement les relations (4.23) et (4.32), nous pouvons donner une expression semi-analytique des opérateurs $N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}$.

PROPOSITION 4.2.41
Soient $\forall (i,j) \in \{s,a\}^2$, $\hat{N}^{\varepsilon,H}_{(i,j)}$ les opérateurs linéaires de $L^2\big([-\pi/L,\pi/L], H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)\big)$ dans $L^2\big([-\pi/L,\pi/L], H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)\big)$ définis par :

$$\hat{N}^{\varepsilon,H}_{(i,j)} = \mathcal{F}_y \circ N^{\varepsilon,H}_{(i,j)} \circ \mathcal{F}_y^{-1}.$$

Ils sont donnés par $\forall \hat{\psi}_{k_y} \in H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)), \quad \forall k_x \in [-\pi/L,\pi/L]$,

$$\hat{N}^{\varepsilon,H}_{(i,j)}\hat{\psi}_{k_y}\,(\cdot,k_x) = \int\limits_{-\pi/L}^{\pi/L} \mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x,k_y)\hat{\psi}_{k_y}(\cdot;k_y)\,dk_y$$

où le noyau $\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x,k_y) \in \mathcal{L}\big(H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0), H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)\big)$ est donné par

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x,k_y) & = & + \varepsilon_j\ \dfrac{L}{2\pi} e^{\imath L k_x}\Big(N^{0,-}_\varepsilon(k_y) - N^{1,-}_\varepsilon(k_y)R_\varepsilon(k_y)\Big)\Big(\mathbf{I} - R_\varepsilon(k_y)e^{\imath L k_x}\Big)^{-1} \\
& & + \dfrac{L}{2\pi}\,\mathbf{I} \\
& & + \varepsilon_i\ \dfrac{L}{2\pi} e^{-\imath L k_x}\Big(N^{0,+}_\varepsilon(k_y) - N^{1,+}_\varepsilon(k_y)R_\varepsilon(k_y)\Big)\Big(\mathbf{I} - R_\varepsilon(k_y)e^{-\imath L k_x}\Big)^{-1}
\end{array}
\tag{4.38}
$$

avec $\varepsilon_s = 1$, $\varepsilon_a = -1$ et $\mathbf{I} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0))$ est l'opérateur identité.

■ **PREUVE:** Nous limitons la preuve à $(i,j) = (s,s)$, les arguments étant similaires pour les autres cas.

(1) Dans un premier temps, cherchons à démontrer l'expression. Soit ψ une fonction de $H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$. L'expression (4.21) avec $n = 0$ donne

$$u^{\mathrm{H}}_\varepsilon(\psi)|_{\Sigma^\pm} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int\limits_{-\pi/L}^{\pi/L} \mathcal{F}_y u^{\mathrm{H}}(\psi)(\cdot;k_y)|_{\Sigma^\pm}\ dk_y$$

Soit $\overleftarrow{\Sigma}_n^-$ et Σ_n^+ la suite d'intervalles de longueur L :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \begin{array}{rcl} \overleftarrow{\Sigma}_n^- & = &]\dfrac{3L}{2} + (n-1)L, \dfrac{L}{2} + (n-1)L[\times \{\dfrac{-L}{2}\}, \\ \Sigma_n^+ & = &]\dfrac{L}{2} + (n-1)L, \dfrac{3L}{2} + (n-1)L[\times \{\dfrac{L}{2}\}. \end{array} \right.$$

En utilisant la relation (4.32), on obtient

– sur $\overleftarrow{\Sigma}^-$: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\,\psi|_{\overleftarrow{\Sigma}_n^-} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \left(N_\varepsilon^{0,-}(k_y)\, R_\varepsilon(k_y)^{n-1} - N_\varepsilon^{1,-}(k_y)\, R_\varepsilon(k_y)^n \right) \mathcal{F}_y\psi\,(\cdot; k_y)\, dk_y$$

– sur Σ^0 :

$$N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\Sigma^0} = \psi|_{\Sigma^0}$$

– sur Σ^+ : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\,\psi|_{\Sigma_n^+} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \left(N_\varepsilon^{0,+}(k_y)\, R_\varepsilon(k_y)^{n-1} - N_\varepsilon^{1,+}(k_y)\, R_\varepsilon(k_y)^n \right) \mathcal{F}_y\psi\,(\cdot; k_y)\, dk_y$$

L'expression de $N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi$ se fait donc sur des segments de longueur L. L'idée est donc ensuite d' appliquer la transformée de FB à $N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\,\psi$ en utilisant l' identification $\Sigma \sim \mathbb{R}$ (voir Figure 4.17),

$$\mathcal{F}_y(N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi)(\cdot, k_x) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \Big(\sum_{n=-\infty}^{-1} N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\overleftarrow{\Sigma}_{|n|}^-} e^{-\imath n k_x L} + N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\Sigma^0} + \sum_{n=1}^{+\infty} N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\Sigma_n^+} e^{-\imath n k_x L} \Big).$$

Il nous faut maintenant intervertir somme et intégrale. Pour ceci, La démonstration se fait en deux étapes.

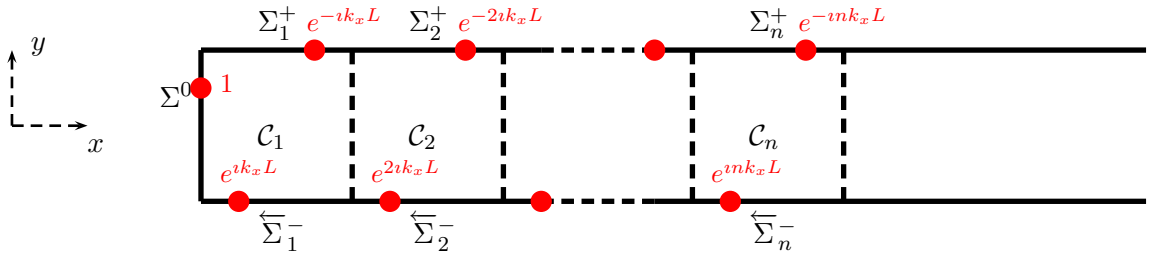


FIG. 4.17: Application de la TFB à $N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi$

(a) Montrons que la somme $\sum_{n\geq 1} A_\varepsilon(k_y)^{n-1}$ avec $A_\varepsilon(k_y) = R_\varepsilon(k_y)e^{\pm\imath L k_x}$ converge simplement dans $\mathcal{L}(H_{k_y}^{-1/2}(\Gamma))$ pour tout $k_y \in]-\pi/L, \pi/L[$.

Pour tout k_y, $R_\varepsilon(k_y)$ est compact et son rayon spectral est strictement inférieur à 1 , ce qui implique que pour tout k_x fixé, les opérateurs $A_\varepsilon(k_y)$ restent compacts avec un rayon spectral strictement inférieur à 1. La propriété

$$\lim_{n\to+\infty} \|A_\varepsilon(k_y)^n\|^{1/n} = \rho(A_\varepsilon(k_y))$$

pour la norme de $\mathcal{L}(H_{k_y}^{-1/2}(\Gamma))$ [Weidmann (1980)] implique qu'il existe un $\rho_* \in]\rho(A_\varepsilon(k_y)), 1[$ et un j assez grand tel que nous ayons

$$\|A_\varepsilon(k_y)^j\| \leq \rho_*^j$$

ce qui engendre la convergence absolue de la série et pour chaque k_y et k_x, $\mathbf{I} - A(k_y)$ est inversible et

$$\sum_{n\geq 1} A_\varepsilon(k_y)^{n-1} = \big(\mathbf{I} - A_\varepsilon(k_y)\big)^{-1}$$

(b) Montrons que

$$\sum_{n\geq 1} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \|A_\varepsilon(k_y)^n\|\, dk_y \quad \text{converge.}$$

Il faut utiliser le lemme 4.2.35 donnant une majoration uniforme des rayons spectraux des opérateurs $R(k_y)$. Ainsi, comme au (a), on montre qu'il existe un $\rho_\varepsilon \in]e^{\varepsilon\tau}, 1[$ où τ est celui du lemme 4.2.35 et un j assez grand tel que nous ayons

$$\forall k_y \in [-\pi/L, \pi/L[, \quad \|A_\varepsilon(k_y)^j\| \leq \rho_\varepsilon^j$$

Ainsi, l'intervalle en k_y étant borné, la somme converge.

Ces deux points démontrés, l'interversion somme-intégrale est donc possible et on obtient donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y(N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(s,s)}\psi)(\cdot,k_x) = & \\
&+ \frac{L}{2\pi} e^{\imath L k_x} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \Big(N_\varepsilon^{0,-}(k_y) - N_\varepsilon^{1,-}(k_y) R_\varepsilon(k_y)\Big)\Big(\mathbf{I} - R_\varepsilon(k_y) e^{\imath L k_x}\Big)^{-1} \mathcal{F}_y\psi(\cdot;k_y)\, dk_y \\
&+ \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\, \psi\Big|_{\Sigma^0} \\
&+ \frac{L}{2\pi} e^{-\imath L k_x} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \Big(N_\varepsilon^{0,+}(k_y) - N_\varepsilon^{1,+}(k_y) R_\varepsilon(k_y)\Big)\Big(\mathbf{I} - R_\varepsilon(k_y) e^{-\imath L k_x}\Big)^{-1} \mathcal{F}_y\psi(\cdot;k_y)\, dk_y
\end{aligned}$$

En remarquant enfin que la formule d'inversion de la TFB (Proposition B.1.5) pour $n = 0$ donne

$$\psi\Big|_{\Sigma^0} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \mathcal{F}_y\psi\ (\cdot;k_y)\, dk_y,$$

on retrouve exactement l'expression recherchée.

(2) Montrons maintenant que le noyau $\mathbf{K}_{(s,s)}(k_x,k_y)$ est bien un opérateur linéaire de $H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$ dans $H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$). En appliquant la transformée de FB à l restriction de $\mathcal{F}_y u^{\mathrm{H}}(\psi)(\cdot;k_y)$ à Σ, en utilisant l' identification $\Sigma \sim \mathbb{R}$ et les mêmes arguments que précédemment, on montre que pour toute donnée $\psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$, on a

$$\mathcal{F}_x\big(\mathcal{F}_y u^{\mathrm{H}}(\psi)(\cdot;k_y)\Big|_\Sigma\big)(\cdot;k_x) = \mathbf{K}_{(s,s)}(k_x,k_y)\, \mathcal{F}_y\psi(\cdot;k_y).$$

On conclut en utilisant la propriété de la TFB (Théorème B.1.22) : pour toute fonction $\nu \in H^{-1/2}(\Sigma)$, $\mathcal{F}_x(\nu)(\cdot;k_x)$ est dans $H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$. ■

L'expression des opérateurs $N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}$ s'effectue donc à partir de leurs transformées de Floquet Bloch.

4.2.6 Caractérisation des opérateurs NtN $\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}$

Rappelons tout d'abord la définition de ces opérateurs

$$\begin{aligned}
\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)} \quad : H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i) \quad &\to \quad H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}), \\
\widetilde{d} \qquad\qquad &\mapsto \quad -\frac{\partial}{\partial x} u^e_\varepsilon(\widetilde{d})|_{\widetilde{\Sigma}}.
\end{aligned}$$

Notons dans un premier temps que par définition de la solution u_ε^e du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^e)$, l'opérateur $\widetilde{N}_{(i,j)}^\varepsilon$ appartient au sous-espace affine :

$$\mathcal{L}_{(i,j)}^0 = \Big\{ L \in \mathcal{L}\Big(H_{(i,j)}^{-1/2}(\Sigma^i), H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})\Big), \quad \forall \widetilde{d},\ L\widetilde{d}\big|_{\Sigma^0} = R_{(i,j)}\widetilde{d} \Big\}.$$

L'opérateur $\widetilde{N}_{(i,j)}^\varepsilon$ est caractérisé par le théorème fondamental suivant.

THÉORÈME 4.2.42
Pour chaque $(i,j) \in \{s,a\}^2$, l'opérateur $\widetilde{N}_{(i,j)}^\varepsilon$ est l'unique solution du problème

$$\text{Trouver } \widetilde{N} \in \mathcal{L}_{(i,j)}^0, \quad \widetilde{N} = N_{(i,j)}^{\varepsilon,H} \circ \widetilde{N}. \tag{$\mathcal{E}_{(i,j)}^\varepsilon$}$$

REMARQUE 4.2.43
Comme $\mathcal{L}_{(i,j)}^0$ est un sous espace affine de $\mathcal{L}\big(H_{(i,j)}^{-1/2}(\Sigma^i), H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})\big)$, les problèmes $(\mathcal{E}_{(i,j)}^\varepsilon)$ sont de type affines même si l'équation est linéaire.

■ **PREUVE:** Nous donnons ci-dessous la preuve faite pour $\widetilde{N}_{(s,s)}^\varepsilon$. L'extension aux autres opérateurs $\widetilde{N}_{(i,j)}^\varepsilon$ est directe.

Existence de la solution. Commençons par montrer que l'opérateur $\widetilde{N}_{(s,s)}^\varepsilon$ est une solution du problème $(\mathcal{E}_{(s,s)}^\varepsilon)$. Nous avons déjà vu dans la preuve du théorème 4.2.29 que

$$u_\varepsilon^e(\varphi)\Big|_{\Omega^{\mathrm{H}}} = u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\widetilde{N}_{(s,s)}^\varepsilon\, \varphi).$$

De plus, $\varphi \in H_{(s,s)}^{-1/2}(\Sigma^i)$ donc $u_\varepsilon^e(\varphi)$ est dans $H_{(s,s)}^1(\Omega^e)$ (voir la preuve du théorème 4.2.26). En particulier

$$\begin{array}{lcll}
\widetilde{\Sigma}^+ = S_1\Sigma^+ & \Rightarrow & -\dfrac{\partial}{\partial x}u_\varepsilon^e(\varphi)|_{\widetilde{\Sigma}^+} & \equiv & -\dfrac{\partial}{\partial y}u_\varepsilon^e(\varphi)|_{\Sigma^+} = -\dfrac{\partial}{\partial y}u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\widetilde{N}_{(s,s)}^\varepsilon\, \varphi)|_{\Sigma^+} \\
\widetilde{\Sigma}^0 = \Sigma^0 & \Rightarrow & -\dfrac{\partial}{\partial x}u_\varepsilon^e(\varphi)|_{\widetilde{\Sigma}^0} & = & -\dfrac{\partial}{\partial x}u_\varepsilon^e(\varphi)|_{\Sigma^0} = \varphi|_{\Sigma^0} \\
\widetilde{\Sigma}^- = S_{-1}\Sigma^- & \Rightarrow & -\dfrac{\partial}{\partial x}u_\varepsilon^e(\varphi)|_{\widetilde{\Sigma}^-} & \equiv & +\dfrac{\partial}{\partial y}u_\varepsilon^e(\varphi)|_{\widetilde{\Sigma}^-} = +\dfrac{\partial}{\partial y}u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\widetilde{N}_{(s,s)}^\varepsilon\, \varphi)|_{\widetilde{\Sigma}^-}
\end{array}$$

En utilisant enfin la définition de $\widetilde{N}_{(s,s)}^\varepsilon$, on obtient bien que $\widetilde{N}_{(s,s)}^\varepsilon$ satisfait $(\mathcal{E}_{(s,s)}^\varepsilon)$.

Unicité de la solution. Supposons $\widetilde{N}_1$ et $\widetilde{N}_2$ deux solutions de $(\mathcal{E}_{(s,s)}^\varepsilon)$. Montrer l'unicité revient à montrer que si $\widetilde{N} = \widetilde{N}_1 - \widetilde{N}_2$ est un opérateur de $H_{(s,s)}^{-1/2}(\Sigma^i)$ dans $H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$ vérifiant

$$\forall \varphi \in H_{(s,s)}^{-1/2}(\Sigma^i), \quad \widetilde{N}\,\varphi\Big|_{\Sigma^0} = \widetilde{N}_1\,\varphi\Big|_{\Sigma^0} - \widetilde{N}_2\,\varphi\Big|_{\Sigma^0} = 0 \tag{4.39}$$

et

$$N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}} \circ \widetilde{N} - \widetilde{N} = 0$$

alors $\widetilde{N}$ est identiquement nul.

Soit $\varphi \in H_{(s,s)}^{-1/2}(\Sigma^i)$, $\psi = \widetilde{N}\varphi$ et $v_1 = u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)$ défini sur $\Omega^{\mathrm{H}} \equiv \Omega_1$ (voir Figure 4.2.6). Nous avons en particulier d'après (4.39) que

$$-\frac{\partial}{\partial x}v_1\Big|_{\Sigma^0} = \psi\Big|_{\Sigma^0} = 0 \tag{4.40}$$

De plus,

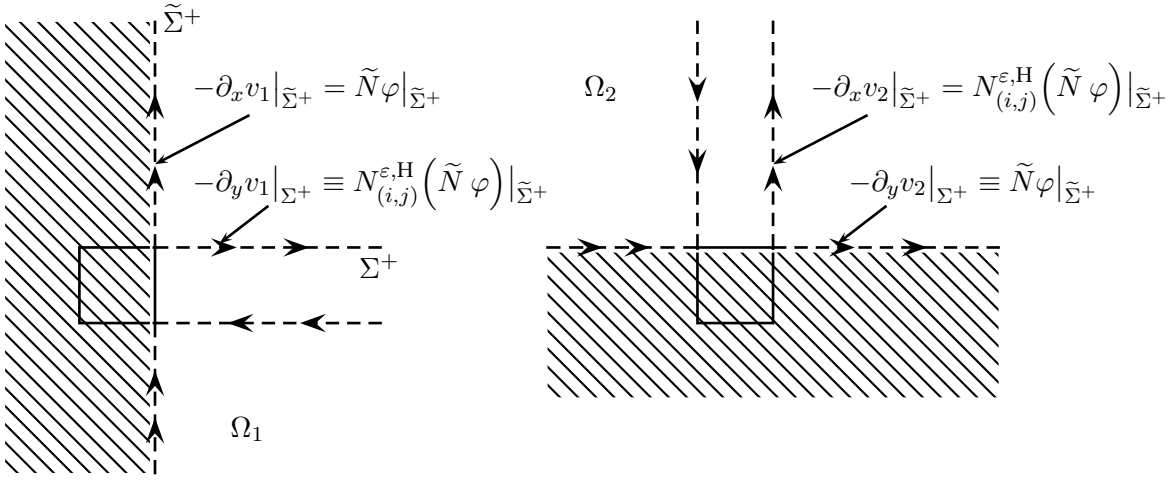
$$-\frac{\partial}{\partial y}v_1\Big|_{\Sigma^+} \underset{(1)}{\equiv} N_{(i,j)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}(\psi)\Big|_{\widetilde{\Sigma}^+} \quad \text{et} \quad -\frac{\partial}{\partial x}v_1\Big|_{\widetilde{\Sigma}^+} \underset{(2)}{=} \psi\Big|_{\widetilde{\Sigma}^+} \tag{4.41}$$

où l'égalité (1) est donnée par la définition 4.2.39 de $N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}$ et l'égalité (2) par la définition de $u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}$ solution de $(\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon})$ et celle de v_1.

Construisons maintenant une fonction du demi-espace $\Omega_2 = S_1\Omega_1$ sous la forme

$$v_2 = v_1(S_1\mathbf{x})$$

(voir Figure 4.2.6).



(a) La solution v_1 (b) La solution v_2

FIG. 4.18: Définition des fonctions v_1 et v_2

Comme ρ_p est à double symétrie, un argument classique de symétrie assure que puisque v_1 est solution de $(\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon})$ dans Ω_1, alors v_2 est clairement solution de

$$-\triangle v_2 - \rho_p(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)v_2 = 0, \quad \text{dans } \Omega_2,$$

la propriété (4.40) implique donc que

$$-\frac{\partial}{\partial y}v_2\Big|_{S_1\Sigma^0} = 0 \tag{4.42}$$

et enfin

$$-\frac{\partial}{\partial x}v_2\Big|_{\widetilde{\Sigma}^+} \underset{(1)}{=} -\frac{\partial}{\partial y}v_1\Big|_{\Sigma^+} \quad \text{et} \quad -\frac{\partial}{\partial y}v_2\Big|_{\Sigma^+} \underset{(2)}{=} -\frac{\partial}{\partial x}v_1\Big|_{\widetilde{\Sigma}^+}$$

où les égalités (1) et (2) sont obtenues par symétrie.

Montrons maintenant que v_1 et v_2 coïncident sur le quadrant $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Etant données les propriétés des deux fonctions (voir Figure 4.18), la différence $d_{12} = v_1 - v_2$ satisfait par linéarité

$$-\triangle d_{12} - n^2(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)d_{12} = 0, \quad \text{dans } \Omega_1 \cap \Omega_2.. \tag{4.43}$$

De plus, on a

$$-\partial_x d_{12}|_{\widetilde{\Sigma}^+} = \left(\psi - N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}\psi\right)|_{\widetilde{\Sigma}^+} \quad \text{et} \quad -\partial_y d_{12}|_{\Sigma^+} = \left(N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}\psi - \psi\right)|_{\Sigma^+}$$

comme $\widetilde{N}$ est supposée solution de $(\mathcal{E}^{\varepsilon}_{(s,s)})$, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}d_{12} = 0, \quad \text{sur } \partial[\Omega_1 \cap \Omega_2] \tag{4.44}$$

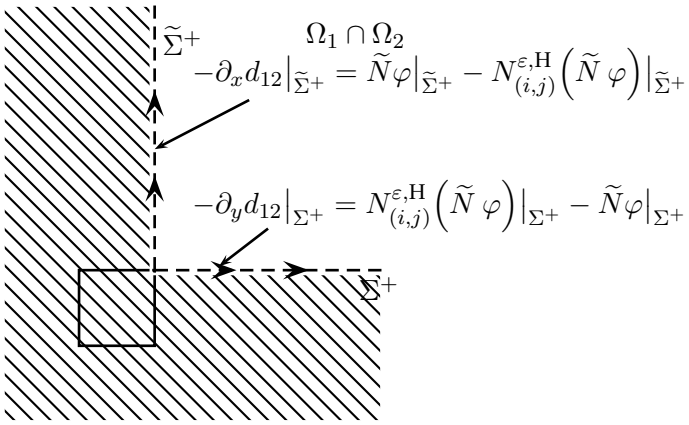


FIG. 4.19: Définition de d_{12}.

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Par unicité de la solution pour le problème de Neumann (4.43)-(4.44), on conclut donc que $v_1 = v_2$ dans $\Omega_1 \cap \Omega_2$.

Avec le même argument, nous pouvons construire pour $j \in \{1,2,3,4\}$, quatre fonctions v_j dans les domaines Ω_j ($\Omega_3 = S_{-1}\Omega_2$ et $\Omega_4 = S_{-1}\Omega_1$) qui sont solutions de l'équation Helmholtz dans leurs domaines respectifs et qui coïncident sur leurs intersections :

$$\forall j \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad v_{j+1} = v_j \quad \text{on } \Omega_j \cap \Omega_{j+1} \tag{4.45}$$

Ainsi, nous pouvons construire sans ambiguïté une fonction u^e_ε défini sur le domaine extérieur Ω^e par

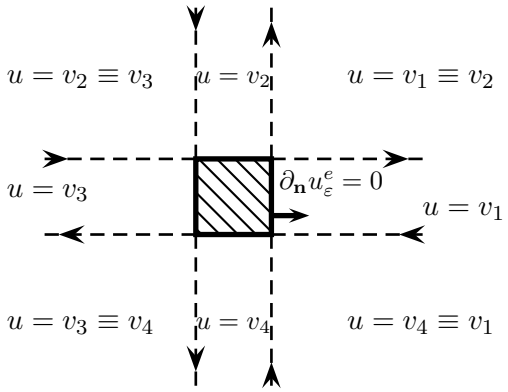


FIG. 4.20: La solution u^e_ε correspondante.

$$u^e_\varepsilon\Big|_{\Omega_j} = v_j \ , \quad j \in \{1,2,3,4\}$$

Grâce à (4.45) et comme v_j est la solution H^1 de l'équation de Helmholtz Ω_j, u^e_ε est alors une fonction de $H^1(\Omega^e)$ qui satisfait

$$-\triangle u^e_\varepsilon - \rho_p(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)u^e_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega^e, \tag{4.46}$$

avec la condition de Neumann homogène

$$u^e = 0, \quad \text{sur } \Sigma^i, \tag{4.47}$$

grâce à (4.40) et (4.42) et par symétrie.

Par unicité de la solution du problème extérieur (4.46) et (4.47), nous en déduisons que $u_\varepsilon^e = 0$ dans Ω^e et par conséquent que

$$\widetilde{N}\varphi\Big|_{\widetilde{\Sigma}^\pm} = -\frac{\partial}{\partial x} u_\varepsilon^e\Big|_{\widetilde{\Sigma}} = 0,$$

ce qui signifie $\widetilde{N} = 0$. ■

REMARQUE 4.2.44
Le fait que $\Sigma^+ = S_1\widetilde{\Sigma}^+$ est un point important qui apparaît dans la deuxième partie de la preuve. De même, $\overleftarrow{\Sigma}^- = S_{-1}\widetilde{\Sigma}^-$, d'où le sens particulier donné à la demi-droite $\overleftarrow{\Sigma}^-$.

Nous avons ainsi établi une nouvelle caractérisation des opérateurs NtN $\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}$ grâce au problème $(\mathcal{E}^\varepsilon_{(i,j)})$. Ce problème semble pour l'instant difficile à résoudre puisque la solution est un opérateur et les « coefficients » ne sont pas explicites. Nous donnons donc section 4.2.8 une autre version du problème $(\mathcal{E}^\varepsilon_{(i,j)})$ qui est résolue en pratique.

4.2.7 Problème posé en domaine borné avec conditions de NtD

Nous rappelons que la détermination de l'opérateur Λ_ε passe par celle des opérateurs $\Lambda^\varepsilon_{(i,j)}$ (voir Proposition 4.2.27) qui, elle, nécessite (voir Théorème 4.2.29) la caractérisation d'un opérateur NtD de demi-espace $\Lambda^{\mathrm{H}}_\varepsilon$ (voir section 4.2.5) et des opérateurs NtN $\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}$ (voir section 4.2.6).

Commençons par énoncer la propriété de l'opérateur Λ_ε qui va nous permettre de montrer le caractère bien posé du problème intérieur $(\mathcal{P}^i_\varepsilon)$.

PROPOSITION 4.2.45 (PROPRIÉTÉ DE L'OPÉRATEUR DE NTD Λ_ε)
L'opérateur Λ_ε est inversible de $H^{-1/2}(\Sigma^i)$ dans $H^{1/2}(\Sigma^i)$, son inverse étant l'opérateur DtN, noté $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon$. Ces opérateurs vérifient de plus

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Sigma^i), \quad Im\left\langle \Lambda_\varepsilon^+ \varphi, \varphi\right\rangle > 0, \quad et \ \forall \psi \in H^{1/2}(\Sigma^i), \quad Im\left\langle \psi, \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+ \psi\right\rangle > 0. \tag{4.48}$$

où $<\cdot,\cdot>$ est le crochet de dualité entre $H^{1/2}(\Sigma^i)$ et $H^{-1/2}(\Sigma^i)$.

■ **PREUVE:** La démonstration de ces résultats est similaire à celle développée dans la Proposition 2.2.9 pour le problème de guide.

Pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Sigma^i)$, $u_\varepsilon^e(\varphi)$ est dans $H^1(\Omega^e)$ donc d'après le théorème de trace

$$\Lambda_\varepsilon \varphi \ = \ u_\varepsilon^e(\varphi)\Big|_{\Sigma^i} \ \in H^{1/2}(\Sigma^i).$$

De plus, pour tout ψ, soit $v_\varepsilon^e(\psi)$ la solution de l'équation de Helmholtz sur Ω^e satisfaisant la condition suivante sur Σ^i

$$v_\varepsilon^e(\psi)\Big|_{\Sigma^i} = \psi$$

Pour tout $\psi \in H^{1/2}(\Sigma^i)$, $v_\varepsilon^e(\psi) \in H^1(\Omega^e)$ est l'unique solution . On note $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon$ l'opérateur linéaire défini de $H^{1/2}(\Sigma^i)$ dans $H^{-1/2}(\Sigma^i)$) par :

$$\widetilde{\Lambda}_\varepsilon : \ \psi \ \mapsto \widetilde{\Lambda}_\varepsilon \, \psi = -\frac{\partial}{\partial x} v_\varepsilon^e(\psi)\Big|_{\Sigma^i}$$

C'est l'opérateur DtN et on montre facilement que

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Sigma^i), \quad \widetilde{\Lambda}_\varepsilon\Big(\Lambda_\varepsilon\, \varphi\Big) = \varphi$$

et de même

$$\forall \psi \in H^{1/2}(\Sigma^i), \quad \Lambda_\varepsilon\Big(\widetilde{\Lambda}_\varepsilon\, \psi\Big) = \psi$$

Ainsi, Λ_ε est inversible en tant qu'opérateur linéaire de $H^{-1/2}(\Sigma^i)$ dans $H^{1/2}(\Sigma^i)$. Pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Sigma^i)$, la formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P}^e_\varepsilon)$ en prenant $u^e_\varepsilon(\varphi)$ comme fonction test donne alors

$$\int_{\Omega^e} |\nabla u^e_\varepsilon(\varphi)|^2 - \rho_p(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\, |u^e_\varepsilon(\varphi)|^2 = \int_{\Sigma^i} \varphi\, \overline{\Lambda^+_\varepsilon \varphi}$$

soit directement

$$\text{Im}\, \big\langle \Lambda^+_\varepsilon\, \varphi, \varphi \big\rangle > 0$$

où $< \cdot, \cdot >$ est le crochet de dualité entre $H^{1/2}(\Sigma^i)$ et $H^{-1/2}(\Sigma^i)$. Pour $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon$, il suffit d'écrire, pour tout $\psi \in H^{1/2}(\Sigma^i)$ la formulation variationnelle du problème dont $v^e_\varepsilon(\psi)$ est la solution, avec $v^e_\varepsilon(\psi)$ comme fonction test. ■

Cette propriété nous permet d'assurer le caractère bien posé du problème intérieur.

THÉORÈME 4.2.46 (CARACTÈRE BIEN POSÉ DU PROBLÈME $(\mathcal{P}^i_\varepsilon)$)
Le problème $(\mathcal{P}^i_\varepsilon)$ a une unique solution dans $H^1(\Omega^i)$.

■ **PREUVE:** Montrons que la formulation variationnelle de ce problème vérifie les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram.

En effet, le problème $(\mathcal{P}^i_\varepsilon)$ est équivalent au problème variationnel :

$$\text{Trouver } u^i_\varepsilon \in H^1(\Omega^i) \text{ tel que} \qquad \forall v \in H^1(\Omega^i), \quad a^i_\varepsilon(u^i_\varepsilon, v) = \int_{\Omega^i} f\overline{v}$$

où a^i_ε est une forme bilinéaire continue définie par :

$$a^i_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega^i} \nabla u \cdot \nabla \overline{v} - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \int_{\Omega^i} \rho_p u\overline{v} + \overline{\big\langle v, \widetilde{\Lambda}_\varepsilon u \big\rangle}_{\Sigma^i}$$

avec $< \cdot, \cdot >_{\Sigma^i}$ est le crochet de dualité entre $H^{1/2}(\Sigma^i)$ et $H^{-1/2}(\Sigma^i)$ et où $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon$ est l'opérateur DtN. Pour montrer que a^i_ε est bien coercive, il faut et il suffit d'utiliser le fait que

$$\forall \psi \in H^{1/2}(\Sigma^i), \quad \text{Im}\big\langle \psi, \widetilde{\Lambda}_\varepsilon\, \psi \big\rangle_{\Sigma^i} > 0,$$

ce qui permet de conclure. ■

La proposition 4.2.1 assure que l'unique solution est la restriction de la solution u_ε du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ à Ω^i, l'unique solution. Pour déterminer u_ε en dehors de Ω^i, il suffit d'utiliser la relation (4.3) que nous rappelons

$$u_\varepsilon = u^e_\varepsilon\Big(- \frac{\partial u^i_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\Sigma^i}\Big), \quad \text{dans } \Omega^e.$$

Pour l'instant, nous avons expliqué comment construire l'opérateur NtD Λ_ε sans passer par le calcul de la solution $u^e_\varepsilon(\varphi)$ du problème extérieur. Mais il est également possible de construire la solution en utilisant la solution $u^{\mathrm{H}}_\varepsilon$ du problème de demi-espace $(\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_\varepsilon)$ et les opérateurs NtN intervenant dans la caractérisation de Λ_ε. Pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Sigma^i)$, les étapes de la construction sont alors :

1. D'après la proposition 4.2.14 φ s'écrit sous la forme

$$\varphi = \sum_{(i,j)\in\{s,a\}^2} \varphi_{(i,j)} \quad \text{avec} \quad \forall (i,j) \in \{s,a\}^2,\ \varphi_{(i,j)} \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$$

et par linéarité :

$$u^e_\varepsilon(\varphi) = \sum_{(i,j)\in\{s,a\}^2} u^e_\varepsilon(\varphi_{(i,j)}) \quad \text{avec} \quad \forall (i,j) \in \{s,a\}^2,\ u^e_\varepsilon(\varphi_{(i,j)}) \in H^1_{(i,j)}(\triangle, \Omega^e)$$

2. Par définition des opérateurs NtN $\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}$,

$$\forall (i,j) \in \{s,a\}^2, \quad u^e_\varepsilon(\varphi_{(i,j)})\Big|_{\widetilde{\Sigma}} = \widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}\varphi_{(i,j)}.$$

3. La solution $u^{\mathrm{H}}_\varepsilon(\psi)$ du problème de demi-espace $(\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_\varepsilon)$ pouvant être calculé, d'après (4.23) semi-analytiquement, pour tout $\psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$, on a :

$$\forall (i,j) \in \{s,a\}^2, \quad u^e_\varepsilon(\varphi_{(i,j)})\Big|_{\Omega^{\mathrm{H}}} = u^{\mathrm{H}}_\varepsilon\big(\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}\varphi_{(i,j)}\big).$$

4. Par des arguments de symétrie, on obtient finalement

$$\forall (i,j) \in \{s,a\}^2, \quad u^e_\varepsilon(\varphi_{(i,j)}) = \begin{cases} u^{\mathrm{H}}_\varepsilon\big(\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}\varphi_{(i,j)}\big), & \text{dans } \Omega^{\mathrm{H}} \\ \varepsilon_i\, S_1\Big(u^{\mathrm{H}}_\varepsilon\big(\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}\varphi_{(i,j)}\big)\Big), & \text{dans } S_1\Omega^{\mathrm{H}} \\ \varepsilon_j\, S_{-1}\Big(u^{\mathrm{H}}_\varepsilon\big(\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}\varphi_{(i,j)}\big)\Big), & \text{dans } S_{-1}\Omega^{\mathrm{H}} \\ \varepsilon_i\varepsilon_j\, S_1\circ S_{-1}\Big(u^{\mathrm{H}}_\varepsilon\big(\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}\varphi_{(i,j)}\big)\Big), & \text{dans } S_1\circ S_{-1}\Omega^{\mathrm{H}}. \end{cases}$$

REMARQUE 4.2.47 (EXTENSION POUR DES MILIEUX AVEC PLUS OU MOINS DE SYMÉTRIES)
Nous pourrions montrer que si le milieu avait plus de symétrie par exemple la symétrie par rapport à l'axe des x ou des y (ce qui est souvent le cas dans les applications) la résolution devient plus simple du fait des propriétés de la Transformée de FB pour les fonctions paires ou impaires (voir Proposition B.1.7). En effet l'intervalle des variables de Floquet à considérer peut être réduit. Typiquement au lieu de considérer $x \in [-L/2, L/2]$ et $k_x \in [-\pi/L, \pi/L]$, le domaine de calcul est restreint à

$$[0, \frac{L}{2}] \times [0, \frac{\pi}{L}].$$

Au contraire avec de moins en moins de symétrie la méthode peut être généralisée mais la résolution est différente. Par exemple, pour un problème qui ne présente aucune symétrie, ce sont quatre opérateurs NtD de demi-espace qui doivent être calculés (et plus un seul) et les équations affines satisfaites par les quatre opérateurs NtN $\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}$ deviennent dépendantes (voir l'annexe A.3 pour plus de détails).

4.2.8 A propos de la résolution de l'équation affine $(\mathcal{E}^\varepsilon_{(i,j)})$

Revenons maintenant au problème affine $(\mathcal{E}^\varepsilon_{(i,j)})$

$$\text{Trouver } \widetilde{N} \in \mathcal{L}^0_{(i,j)}, \quad \widetilde{N} = N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)} \circ \widetilde{N}.$$

dont $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}$ est l'unique solution et étudions maintenant une méthode explicite pour en calculer la solution.

L'opérateur $N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}$ (voir Définition 4.2.39 et Proposition 4.2.41) est défini au travers de sa Transformée de Floquet Bloch. Il semble donc que la formulation du problème $(\mathcal{E}^{\varepsilon}_{(i,j)})$ est plus naturelle en terme des variables de Floquet-Bloch, comme le souligne le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.2.48
Pour chaque $(i,j) \in \{s,a\}^2$, pour toute fonction $\varphi \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$, la fonction

$$\hat{\psi}_{ij} = \mathcal{F}_y\big(\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi\big) \quad \in L^2\big(\big]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big], H^{-1/2}_k(\Sigma^0)\big)$$

est l'unique solution du problème :

$$\text{Trouver } \hat{\psi} \in L^2\Big(\big]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big], H^{-1/2}_k(\Sigma^0)\Big), \text{ tel que}$$

$$\left|\begin{array}{ll} (i) & \hat{\psi} - \hat{N}^{\varepsilon,H}_{(i,j)}\hat{\psi} = 0, \\ (ii) & \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{\psi}(\cdot,k_x)\,dk_x = R_{(i,j)}\varphi \end{array}\right. \tag{4.49}$$

où on rappelle que $R_{(i,j)}$ est l'opérateur de restriction de $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$ dans $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^0)$ (voir section 4.2.2) et $\hat{N}^{\varepsilon,H}_{(i,j)}$ est donné dans la Proposition 4.2.41.

■ **PREUVE:** Pour obtenir l'équation (4.49-(i)), il suffit d'appliquer la transformée de Floquet Bloch à l'équation

$$\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi = N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}\Big(\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi\Big).$$

et d'utiliser la proposition 4.2.41. La relation (4.49-(ii)) exprime en termes de variable de Floquet (voir la formule d'inversion Proposition B.1.5 pour $n=0$) la condition :

$$\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \mathcal{F}_y\big(\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi\big)(\cdot,k_x)\,dk_x = \widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi|_{\Sigma^0} = \varphi|_{\Sigma^0}$$

■

Afin de rendre la condition (4.49-(ii)) homogène, nous introduisons, pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$, une extension (qui n'est évidemment pas unique) $\widetilde{E}\varphi$ dans $H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$ satisfaisant

$$\widetilde{E}\varphi\Big|_{\Sigma^0} = R_{(i,j)}\varphi. \tag{4.50}$$

Dans ce cas $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi - \widetilde{E}\varphi$ est identiquement nul sur Σ^0. Ainsi, si on note

$$\hat{\psi}^0_{ij} = \mathcal{F}_y\Big(\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi - \widetilde{E}\varphi\Big),$$

on montre, par linéarité de la TFB et des opérateurs $\hat{N}^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}$, que c'est l'unique solution du problème

Trouver $\hat{\psi}^0 \in L^2\big(\big]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big],H_k^{-1/2}(\Sigma^0)\big)$, tel que

$$\left|\begin{array}{ll} (i) & \hat{\psi}^0 - \hat{N}^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}\hat{\psi}^0 = \hat{g}_\varphi, \\ (ii) & \displaystyle\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{\psi}^0(\cdot,k_x)\,dk_x = 0 \end{array}\right. \tag{4.51}$$

où l'égalité (ii) a un sens dans $[H^{1/2}_{00}(\Sigma^0)]'$ (voir remarque 4.2.49) et avec

$$\hat{g}_\varphi \in L^2\big(\big]-\pi/L,\pi/L\big],H_k^{-1/2}(\Sigma^0)\big), \qquad \hat{g}_\varphi = -\mathcal{F}_y\widetilde{E}\varphi + \hat{N}^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}\mathcal{F}_y\widetilde{E}\varphi. \tag{4.52}$$

Résoudre le problème (4.49) revient donc à résoudre (4.51).

Notons dans la suite :

$$V^- = L^2\big(\big]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big],H_k^{-1/2}(\Sigma^0)\big), \tag{4.53}$$

$$W^- = \big\{\hat{\psi}^0 \in V^-,\quad \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{\psi}^0(\cdot,k)\,dk = 0\big\}, \tag{4.54}$$

$$V^+ = L^2\big(\big]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big],H_k^{+1/2}(\Sigma^0)\big) \tag{4.55}$$

et

$$W^+ = \big\{\hat{\psi}^0 \in V^+,\quad \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{\psi}^0(\cdot,k)\,dk = 0\big\}. \tag{4.56}$$

Notons que d'après l'annexe B.1, V^- est le dual de V^+.

REMARQUE 4.2.49
D'après la proposition B.1.5, il est évident que

$$W^- = \mathcal{F}_y\Big(\big\{\psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}),\quad \psi \equiv 0 \quad \textit{sur } \Sigma^0\big\}\Big).$$

où on rappelle d'après la remarque 4.2.25 que la restriction de toute fonction de $H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$ est dans $[H^{1/2}_{00}(\Sigma^0)]'$ (l'égalité est donc vraie dans ce dernier espace).

De la même façon,

$$W^+ = \mathcal{F}_y\Big(\big\{\psi \in H^{+1/2}(\widetilde{\Sigma}),\quad \psi \equiv 0 \quad \textit{sur } \Sigma^0\big\}\Big).$$

Nous choisissons de résoudre par une méthode de Galerkin le problème (4.51) qui d'après la proposition 4.2.41 correspond à l'équation intégrale

$$\forall k_x \in \big]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big],\quad \hat{\psi}^0(\cdot;k_x) - \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x,k_y)\,\hat{\psi}^0(\cdot;k_y)\,dk_y = \hat{g}_\varphi(\cdot;k_x) \tag{4.57}$$

où $\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}$ est définie (4.38) avec la contrainte linéaire (4.51-(ii)).

Il reste donc à écrire la formulation variationnelle du problème. Sans connaissance supplémentaire sur les opérateurs, il semble naturel d'utiliser des fonctions tests appartenant à V^+. Ensuite, nous pouvons

- écrire la condition (4.51-(ii)) de manière faible et chercher $\hat{\psi}$ dans V^- . L'équation (4.51-(i)) aboutit à une matrice carrée mais la condition (4.51-(ii)) rend le système à résoudre rectangulaire ;

- écrire la condition (4.51-(ii)) de manière forte en cherchant $\hat{\psi}$ dans W^-. L'équation (4.51-(i)) aboutit à une matrice rectangulaire. (Notons que cette formulation est équivalente à résoudre un problème de minimisation avec contraintes).

Résoudre numériquement le problème (4.51) revient dans les deux cas à inverser une matrice rectangulaire. Ces méthodes ont été d'ailleurs testées, validées et comparées. Cependant, elles n'exploitent pas toutes les propriétés de l'équation et des opérateurs qui interviennent. Nous montrons dans la suite, qu'une formulation variationnelle équivalente à ce problème reviendrait à chercher la solution dans W avec des fonctions tests dans W.

PROPOSITION 4.2.50 (FORMULATION VARIATIONNELLE DE ($\mathcal{E}^{\varepsilon}_{(i,j)}$))
Pour chaque $(i,j) \in \{s,a\}^2$, pour toute fonction $\varphi \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$, la fonction $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi$ s'écrit

$$\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi = \widetilde{E}\varphi + \mathcal{F}_y^{-1}\hat{\psi}^0_{ij}$$

où $\widetilde{E}\varphi$ est défini par (4.50) *et $\hat{\psi}^0_{ij} \in W^-$ est l'unique solution du problème*

Trouver $\hat{\psi}^0 \in W^-$, tel que

$$\Big\langle \big(\mathbf{I} - \hat{N}^{\varepsilon,H}_{(i,j)}\big)\hat{\psi}^0, \hat{\theta}^0 \Big\rangle = \Big\langle \hat{g}_{\varphi}, \hat{\theta}^0 \Big\rangle, \quad \hat{\theta}^0 \in W^+ \tag{$\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)}$}$$

avec $\hat{g}_{\varphi}$ est défini (4.52) *et $< \cdot,\cdot >$ le produit de dualité entre $L^2\big(]-\pi/L,\pi/L[\big), H_k^{-1/2}(\Sigma^0)\big)$ et $L^2\big(]-\pi/L,\pi/L[\big), H_k^{1/2}(\Sigma^0)\big)$.*

■ **PREUVE:** Il est facile de montrer que si $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi$ est donné par le Corollaire 4.2.48 alors $\hat{\psi}^0_{ij}$ est solution de ($\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)}$).

Montrons maintenant que le problème ($\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)}$) admet une unique solution. Soit donc $\hat{\psi}^0$ solution de

$$\Big\langle \big(\mathbf{I} - \hat{N}^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}\big)\hat{\psi}^0, \hat{\theta}^0 \Big\rangle = 0, \quad \hat{\theta}^0 \in W^+ \tag{4.58}$$

et montrons que $\hat{\psi}^0 = 0$. La démonstration s'effectue en 3 étapes.

(1) $(\mathbf{I} - \hat{N}^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)})\hat{\psi}^0 \in W^-$. En effet, rappelons que par définition, pour tout $\psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$,

$$N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)})\psi\Big|_{\Sigma^0} = \psi\Big|_{\Sigma^0}$$

ainsi

$$\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{N}^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)} \mathcal{F}_y\psi\,(\cdot;k_y)\,dk_y = \psi\Big|_{\Sigma^0}$$

alors que la formule d'inversion de la TFB Proposition B.1.5 donne

$$\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\mathbf{I}\,\mathcal{F}_y\psi\,(\cdot;k_y)\,dk_y=\psi\Big|_{\Sigma^0};$$

donc $\mathrm{Im}(\mathbf{I}-\hat{N}^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)})\subset W^-$ et en particulier pour $\hat{\psi}^0$.

(2) $(\mathbf{I}-\hat{N}^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)})\hat{\psi}^0=0$. En effet, nous avons donc d'après l'étape (1) et la relation (4.58), un élément $\hat{\nu}^0=(\mathbf{I}-\hat{N}^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)})\hat{\psi}^0$ de W^- telle que

$$\forall\hat{\theta}^0\in W^+,\quad \Big\langle\hat{\nu}^0,\hat{\theta}^0\Big\rangle=0. \tag{4.59}$$

On a donc par définition de V^+ et W^+

$$\forall\hat{\theta}^0\in V^+,\quad \hat{\theta}^0-\frac{L}{2\pi}\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\hat{\theta}^0(\cdot,k)\,dk\in\ W^+$$

et donc d'après (4.59), $\forall\hat{\theta}^0\in V^+$,

$$\Big\langle\hat{\nu}^0,\hat{\theta}^0\Big\rangle=\Big\langle\hat{\nu}^0,\hat{\theta}^0-\frac{L}{2\pi}\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\hat{\theta}^0(\cdot,k)\,dk\Big\rangle+\Big\langle\hat{\nu}^0,\frac{L}{2\pi}\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\hat{\theta}^0(\cdot,k)\,dk\Big\rangle=\Big\langle\hat{\nu}^0,\frac{L}{2\pi}\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\hat{\theta}^0(\cdot,k)\,dk\Big\rangle,$$

on conclut en écrivant

$$\Big\langle\hat{\nu}^0,\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\hat{\theta}^0(\cdot,k)\,dk\Big\rangle=\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\Big(\hat{\nu^0}(\cdot;\xi),\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\hat{\theta}^0(\cdot,k)\,dk\Big)\,d\xi=\Big(\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\hat{\nu^0}(\cdot;\xi)\,d\xi,\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\hat{\theta}^0(\cdot,k)\,dk\Big)=0$$

d'après la définition de W^-. $\hat{\nu}^0$ est donc un élément de W^-, espace inclus dans V^- lui même dual de V^+, qui s'annule sur tous les éléments de V^+. Il est donc nul.

(3) $\hat{\psi}^0=0$. En effet, l'unicité du problème (4.49) donne

$$\left|\begin{array}{ll}(i) & \hat{\psi}-\hat{N}^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}\hat{\psi}=0,\\ (ii) & \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\hat{\psi}(\cdot,k_x)\,dk_x=R_{(i,j)}\varphi\end{array}\right.\Rightarrow\hat{\psi}=0.$$

ce qui se résume sous la forme $\mathrm{Ker}(\mathbf{I}-\hat{N}^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)})\cap W^-=\{0\}$. D'après le résultat de l'étape (2) $\hat{\psi}^0\in W^-$ est tel que $(\mathbf{I}-\hat{N}^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)})\hat{\psi}^0$. On a donc $\hat{\psi}^0=0$.

■

Ainsi pour déterminer $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi$ pour toute donnée $\varphi\in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$, on doit résoudre le problème $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)})$ qui peut être récrit (d'après la proposition 4.2.41)

Trouver $\hat{\psi}^0\in W^-,$ tel que

$$a^{\varepsilon}_{(i,j)}(\hat{\psi}^0,\hat{\theta}^0)=\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\Big\langle\hat{g}_{\varphi}(\cdot;k_x);\hat{\theta}^0(\cdot;k_x)\Big\rangle\,dk_x,\quad\hat{\theta}^0\in W^+ \tag{$\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)}$}$$

$$\left|\begin{array}{rcl} a^{\varepsilon}_{(i,j)}(\hat{\psi}^0,\hat{\theta}^0) & = & \displaystyle\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \left\langle \hat{\psi}^0(\cdot;k_x);\hat{\theta}^0(\cdot;k_x)\right\rangle dk_x \\ & & \displaystyle -\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \left\langle \mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x,k_y)\ \hat{\psi}^0(\cdot;k_y);\hat{\theta}^0(\cdot;k_x)\right\rangle dk_y\ dk_x \end{array}\right. \tag{4.60}$$

où $<\cdot;\cdot>$ est le produit de dualité entre $H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$ et $H^{1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$ et $\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x,k_y)$ l'opérateur linéaire de $H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$ dans $H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$ défini par (4.38)[2]. C'est ce problème qui est résolu en pratique.

4.2.9 Conclusion

Nous avons donc décrit et analysé une méthode de construction de l'opérateur NtD Λ_ε associé à la résolution du problème de Helmholtz posé sur $\mathbb{R}^2$ privé d'un carré dont la taille est celle de la cellule de périodicité (pour le cas général où la taille du carré est un multiple de celle de la cellule de périodicité, voir Annexe A.2). D'un point de vue numérique, là encore, l'intérêt principal de la méthode tient au fait que tous les calculs sont effectués sur une cellule de périodicité. Une famille d'équations caractéristiques de type Riccati stationnaire doit être résolue : il suffit pour cela d'utiliser les méthodes de résolution utilisée pour le problème du guide. La complexité du problème du plan vient dans la résolution des équations affines $(\mathcal{E}^{\varepsilon}_{(i,j)})$ dont la formulation en terme de variables de Floquet est équivalente à une équation intégrale non standard avec une condition supplémentaire. Les aspects numériques de la méthode sont étudiés dans la suite.

4.3 Résolution numérique dans le cas avec absorption

La méthode présentée section précédente est basée sur l'algorithme suivant :

1. Construction de l'opérateur NtD de demi-espace $\Lambda^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}$
   (i) Pour chaque $k_y \in [-\pi/L,\pi/L]$, résolution des problèmes de cellule (4.24)-(4.25)-(4.26) et calcul des opérateurs NtD locaux (4.29), $T^{ij}_{\varepsilon}(k_y)$. Calcul des opérateurs NtN (4.31), $N^{i,\pm}_{\varepsilon}(k_y)$, qui servira pour l'étape 2-(i).
   (ii) Pour chaque $k_y \in [-\pi/L,\pi/L]$, détermination de l'opérateur de propagation $R_\varepsilon(k_y)$ en résolvant l'équation de Riccati stationnaire $(\mathcal{E}^{R}_{\varepsilon,k_y})$
   (iii) Construction de $\hat{\Lambda}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}$ (4.34)
   (iv) Calcul de $\Lambda^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}$ en utilisant la TFB et la TFB inverse par (4.35),

2. Construction de $\Lambda^{\varepsilon}_{(i,j)}$ pour chaque $(i,j)\in\{s,a\}^2$
   (i) Construire l'opérateur NtN $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}$ en résolvant pour tout $\varphi \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$ le problème variationnel $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)})$,

[2]La propriété établie à la Proposition 4.2.41 concernant le noyau $\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x,k_y)$, opérateur linéaire de $H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$ dans $H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$ rend la deuxième intégrale de (4.60) bien définie.

(ii) Appliquer la relation :

$$\Lambda^{\varepsilon}_{(i,j)} = E_{(i,j)} \circ \widetilde{R} \circ \Lambda^{\mathrm{H}}_{\varepsilon} \circ \widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)},$$

où $\widetilde{R}$ est l'opérateur de restriction de $\widetilde{\Sigma}$ dans $\Sigma^{i}_{(0)}$ et $E_{(i,j)}$ l'opérateur d'extension introduit Lemme 4.2.17.

3. Détermination de l'opérateur NtD Λ^{ε} par (4.2.27) ;

4. Résolution du problème intérieur avec conditions de NtD ;

5. Reconstruction de la solution du problème de Helmholtz avec absorption ($\mathcal{P}_{\varepsilon}$) en utilisant la relation (4.3)

La construction de l'opérateur NtD de demi-espace $\Lambda^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}$ repose a priori sur une famille de problèmes de demi-guide, dont la résolution et la discrétisation sont étudiées Chapitre 2. Elle ne pose donc pas de questions numériques nouvelles sauf a priori l'étape 1-(iv) qui nécessite la construction d'une Transformée de FB inverse discrète.

C'est la détermination des opérateurs NtN $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}$ qui pose ici de nouvelles questions d'analyse numérique. Ainsi, la discrétisation de l'équation ($\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)}$) requiert

– le choix d'un espace d'approximation de W^{-} approprié : en approchant W^{-} par un espace de dimension finie, produit tensoriel entre un espace de fonctions de la variable d'espace et un espace de fonctions de la variable duale, nous verrons que la résolution en sera simplifiée ;

– la construction d'une approximation de chaque forme bilinéaire $a^{\varepsilon}_{(i,j)}$ appropriée qui passera par celle des noyaux $\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x, k_y)$ correspondants.

Pour ces choix, il faut tenir compte du fait que pour chaque k_x et k_y, les noyaux $\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x, k_y)$ sont exprimés à partir des opérateurs NtN locaux $N^{i,\pm}_{\varepsilon}(k_y)$ et de l'opérateur de propagation $R_{\varepsilon}(k_y)$. Pour chaque k_y et chaque $\hat{\psi}_{k_y}$ de $H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$, il faut donc résoudre un problème de demi-guide avec des conditions k_y-quasi-périodiques. Ces noyaux ne sont donc pas connus de manière analytique et doivent être approché numériquement de la même façon que l'opérateur $R_{\varepsilon}(k_y)$. Ils seront alors définis sur un espace d'approximation de $H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$. En outre, l'approximation de $\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x, k_y)$ ne peut être faite que pour des valeurs discrètes de k_y : un choix approprié de la discrétisation de la variable de Floquet doit donc être effectué.

En pratique, la résolution de cette équation intégrale non-standard requiert donc une discrétisation pour les variables d'espace $(x, y) \in]-L/2, L/2[^2$ et pour les variables duales (les quasi-périodes) $(k_x, k_y) \in]-\pi/L; \pi/L[^2$. Nous étudierons successivement chacune de ses discrétisations.

Dans un premier temps, Section 4.3.1, seront traitées la discrétisation des variables d'espace et la résolution des problèmes de demi-guide avec conditions k_y-quasi-périodiques. Ces problèmes sont résolus, pour chaque k_y par les méthodes numériques de la section 2.3 et sont indépendants

pour des valeurs de k_y différentes. Nous aboutirons en particulier à une équation semi-discrète approchant le problème $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)})$.

Dans un deuxième temps, Section 4.3.2, c'est la discrétisation pour les variables duales qui sera abordée et qui constitue une question assez délicate car la discrétisation de l'équation intégrale $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)})$ est non-locale en y et en k (cette fois-ci, les problèmes pour différents k sont couplés). Nous montrerons, Section 4.3.2.2, des cas simples avec lesquels nous pourrons valider le calcul des opérateurs NtN $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}$.

4.3.1 Discrétisation en espace

4.3.1.1 Espaces d'approximation

Un certain nombre d'espaces de dimension finie doivent être choisis pour approcher tous les espaces qui interviennent dans notre méthode : $H^1(\Omega^i)$, $H^1(\Omega^e), \ldots,\ H^1_{k_y}(\Omega^{\mathrm{W}})$ et les espaces de traces $H^{-1/2}(\Sigma^i)$, $H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$, $H^{-1/2}_{(i,j)}(\widetilde{\Sigma}), \ldots,\ H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$. Ils doivent être introduits de manière à respecter les propriétés du problème (périodicité et double symétrie) et les identifications que nous avons effectuées, afin de pouvoir appliquer la méthode développée section précédente au problème discret[3]. Les espaces d'approximation doivent donc introduits avec précaution. Nous allons construire plus précisément les espaces fonctionnels qui interviennent dans les problèmes mixtes et dans le même ordre que celui dans lequel les espaces de fonctions ont été introduits.

Tout d'abord pour le problème intérieur, rappelons que le bord Σ^i est supposé à double symétrie. Nous choisissons donc le maillage de Σ^i avec ces symétries : la discrétisation des segments $\Sigma^i_{(j)}$ avec $j \in [\![1;4]\!]$ doit donc être nécessairement la même. Nous introduisons donc

- $\mathcal{M}^i_h$ un sous-espace de dimension finie de $L^2(\Omega^i)$;
- $\mathcal{W}^i_h$ un sous espace de dimension finie de $H_{\mathrm{div}}(\Omega^i)$ telle que

$$\mathrm{div}\, \mathcal{W}^i_h = \mathcal{M}^i_h$$

- $\mathcal{T}^i_h$ un sous espace de dimension finie de $H^{-1/2}(\Sigma^i)$. L'analyse de la méthode est plus aisée en choisissant $\mathcal{T}^i_h$ l'espace des traces normales sur Σ^i des fonctions de $\mathcal{W}^i_h$.

Il paraît ensuite naturel de définir les espaces des traces normales présentant des symétries ou antisymétries :

$$\mathcal{T}^i_{(i,j),h} = \mathcal{T}^i_h \cap H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i), \quad (i,j) \in \{s,a\}^2$$

et nous avons évidemment la somme directe

$$\mathcal{T}^i_h = \bigoplus_{(i,j)\in\{s,a\}^2} \mathcal{T}^i_{(i,j),h}$$

[3]Nous allons donc choisir les maillages des ensembles et les approximations des espaces afin de pouvoir appliquer la méthode au problème discret. D'autres discrétisations et approximations sont possibles mais l'application de la méthode devient plus difficile.

Il est souhaitable que la discrétisation du problème extérieur conserve les propriétés de symétrie et de périodicité. Il faut donc imposer un maillage de la cellule de périodicité qui est à la fois périodique et à double symétrie. On choisit ensuite

- $\mathcal{M}_h$ un sous-espace de dimension finie de $L^2(\mathcal{C})$;
- $\mathcal{W}_h$ un sous espace de dimension finie de $H_{\rm div}(\mathcal{C})$ telle que

$$\operatorname{div} \mathcal{W}_h = \mathcal{M}_h$$

telle que la discrétisation des bords corresponde à celle choisie pour Σ^i.

En découlent les espaces d'approximation pour le problème extérieur

- $\mathcal{M}_h^e$ un sous-espace de $L^2(\Omega^e)$ tel que

$$\forall v_h \in \mathcal{M}_h^e, \quad \forall\, \mathcal{C} \in \Omega^2,\ v_h\Big|_{\mathcal{C}} \in \mathcal{M}_h$$

- $\mathcal{W}_h^e$ un sous espace de $H_{\rm div}(\Omega^e)$ tel que

$$\forall \mathbf{V}_h \in \mathcal{M}_h^e, \quad \forall \mathcal{C} \in \Omega^2,\ \mathbf{V}_h\Big|_{\mathcal{C}} \in \mathcal{M}_h$$

De tels espaces existent puisqu'une condition de périodicité a été assurée lors de la construction des espaces $\mathcal{M}_h$ et $\mathcal{W}_h$. De plus, nous nous sommes assurés que l'espace des traces normales des fonctions de $\mathcal{W}_h^e$ correspond à l'espace $\mathcal{T}_h^i$.

L'espace

$$\widetilde{\mathcal{T}}_h = \left\{ \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}\Big|_{\widetilde{\Sigma}},\quad \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_h^e \right\}$$

est par définition un sous-espace de $H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$.

Pour le problème de demi-espace, les espaces sont définis à partir de ceux introduits pour le problème extérieur

- $\mathcal{M}_h^{\rm H}$ un sous-espace de $L^2(\Omega^{\rm H})$ tel que

$$\mathcal{M}_h^{\rm H} = \left\{ v_h\Big|_{\Omega^{\rm H}},\quad v_h \in \mathcal{M}_h^e \right\}$$

- $\mathcal{W}_h^{\rm H}$ un sous espace de $H_{\rm div}(\Omega^{\rm H})$ tel que

$$\mathcal{W}_h^{\rm H} = \left\{ \mathbf{V}_h\Big|_{\Omega^{\rm H}},\quad \mathbf{V}_h \in \mathcal{M}_h^e \right\}$$

Il est facile de voir que l'espace des traces normales des fonctions de $\mathcal{W}_h^{\rm H}$ coïncide avec l'espace $\widetilde{\mathcal{T}}_h$.

Toujours grâce à la périodicité imposée pour la construction de tous les espaces d'approximations précédents, on peut montrer qu'il existe

- $\mathcal{M}_h^{\rm w}$ un sous-espace de $L^2(\Omega^{\rm w})$ tel que

$$L^2(]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}[,\mathcal{M}_h^{\rm W}) = \mathcal{F}_y\, \mathcal{M}_h^{\rm H};$$

– $\mathcal{W}^{\mathrm{w}}_{h,k_y}$ un sous-espace de $H_{\mathrm{div},k_y}(\Omega^{\mathrm{w}})$ où

$$H_{\mathrm{div},k_y}(\Omega^{\mathrm{w}}) = \Big\{ \mathbf{V} \in \ H_{\mathrm{div}}(\Omega^{\mathrm{w}}), \quad \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\Big|_{\Sigma^+} = e^{-\imath k_y L}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\Big|_{\Sigma^-} \Big\},$$

tel que

$$L^2(]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}[,\mathcal{W}^{\mathrm{w}}_{h,k_y}) = \mathcal{F}_y\, \mathcal{W}^{\mathrm{H}}_h;$$

– $\mathcal{T}_{h,k_y}$ un sous-espace de dimension finie de $H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$ tel que

$$L^2(]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}[,\mathcal{T}_{h,k_y}) = \mathcal{F}_y\, \widetilde{\mathcal{T}}_h;$$

Les espaces d'approximation $\mathcal{M}^{\mathrm{w}}_h$ et $\mathcal{W}^{\mathrm{w}}_{h,k_y}$ respectivement de $L^2(\Omega^{\mathrm{w}})$ et $H_{\mathrm{div},k_y}(\Omega^{\mathrm{w}})$ respectent une propriété de périodicité dans la direction x. L'ensemble des traces normales des fonctions de $\mathcal{W}^{\mathrm{w}}_{h,k_y}$ constitue l'espace $\mathcal{T}_{h,k_y}$.

On en déduit enfin les espaces d'approximation qui interviendront dans la discrétisation de la formulation mixte des problèmes de cellule

– $\mathcal{M}_h$ un sous-espace de dimension finie de $L^2(\mathcal{C})$ tel que

$$\mathcal{M}_h = \Big\{ v_h\Big|_{\mathcal{C}}, \quad v_h \in \mathcal{M}^{\mathrm{w}}_h \Big\};$$

– $\mathcal{W}_{h,k_y}$ un sous espace de dimension finie de $H_{\mathrm{div},k_y}(\mathcal{C})$ telle que

$$\mathcal{W}_{h,k_y} = \Big\{ \mathbf{V}_h\Big|_{\mathcal{C}}, \quad \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}^{\mathrm{w}}_{h,k_y} \Big\};$$

Le sous-espace $\mathcal{T}_{h,k_y}$ de dimension finie de $H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma_0)$ (on rappelle $\Sigma^0 \sim \Gamma_0$) et également un sous-espace de $H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma_1)$ (par périodicité de la discrétisation de chaque cellule de périodicité). On note $\Pi_{\mathcal{T}_{h,k_y}}$ la projection orthogonale pour le produit scalaire L^2 de $H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma_0)$ dans $\mathcal{T}_{h,k_y}$. Cet espace $\mathcal{T}_{h,k_y}$ correspond à l'espace des traces normales sur Γ_0 des fonctions de $\mathcal{W}_{h,k_y}$.

De plus, la discrétisation de chaque cellule ayant été construite en respectant les propriétés de symétrie, la discrétisation du segment Γ_0^+ (qui par périodicité coïncide avec celle de Γ_0^-) est la même que celle du segment Σ_1^+. Ceci implique, comme nous le verrons plus tard, que les opérateurs NtN locaux discrets sont des matrices carrées. Cela signifie également que la discrétisation des segments Σ_1^- et Σ_1^- est la même, ce qui rendra plus facile la définition de l'espace d'approximation de l'espace $H_{\mathrm{div},k_y}(\mathcal{C})$ des fonctions H_{div} k_y-quasi-périodique.

On note enfin $\mathcal{T}^+_{h,k_y}$ un sous espace de dimension finie de $H^{1/2}_{k_y}(\Gamma_0)$. Cet espace interviendra essentiellement dans la formulation variationnelle de l'équation intégrale $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)})$.

Il est facile de voir enfin qu'il aurait été possible de faire le chemin inverse : à partir du choix des espaces d'approximation pour le problème de cellule, on en déduit tous les autres espaces d'approximation. Nous comprenons d'après ce qui précède qu'il est nécessaire que le maillage de la cellule de périodicité satisfasse une propriété de périodicité et de double symétrie.

Nous donnons un exemple d'espaces de discrétisation qui correspond aux éléments finis mixtes de Raviart-Thomas d'ordre le plus bas dans la section suivante.

4.3.1.2 Exemple : Eléments finis mixtes de Raviart-Thomas de plus bas degré

Choisissons un maillage de la cellule de périodicité carrée qui est périodique (le maillage du bord Γ_0 est le même que celui du Γ_1) et qui est à double symétrie (le maillage du bord Σ_1^+ est le même que celui du bord Σ_1^- et du bord Γ_0). Ces frontières sont discrétisées en N_y segments de longueurs $h > 0$ et les éléments du maillages sont choisis carrés.

Dans le cas le plus simple, l'espace $\mathcal{M}_h$ est comme Section 2.3.1.2 l'ensemble des fonctions constantes sur chaque élément. Quant à $\mathcal{W}_{h,k_y}$ c'est l'ensemble des fonctions qui sont linéaires dans les deux directions sur chaque élément carré respectant les conditions k_y-quasi-périodiques. Enfin, en ce qui concerne l'espace d'approximation de $H_{k_y}^{-1/2}$ l'espace des traces normales des fonctions de $\mathcal{W}_{h,k_y}$:

$$\mathcal{T}_{h,k_y} = \left\{ \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_\ell}, \quad \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_{h,k_y} \right\}, \quad \ell \in \{0,1\}.$$

Cet espace correspond à l'ensemble des fonctions constantes sur chaque segment de longueur h du maillage de Γ_0. On montre facilement que $\mathcal{T}_{h,k_y}$ **est indépendant de** k_y, nous le notons dans la suite $\mathcal{T}_h$. Sa dimension est N_y. Du fait des propriétés du maillage utilisés, on montre que cet espace correspond également à l'espace des traces normales des fonctions de $\mathcal{W}_{h,k_y}$ sur $\Sigma_1^\pm$:

$$\mathcal{T}_{h,k_y} = \left\{ \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Sigma_1^\pm}, \quad \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}_{h,k_y} \right\}$$

On a enfin (comme Section 2.3.1.2) l'identification entre cet espace et l'espace des traces des fonctions de $\mathcal{M}_h$ sur Γ_0, Γ_1 ou encore Σ_1^+ ou Σ_1^-. Notons $\left\{\phi_h^\ell(y),\ \ell \in [\![1; N_y]\!]\right\}$ une base de l'espace $\mathcal{T}_h$.

REMARQUE 4.3.1 ($\mathcal{T}_h$ ESPACE D'APPROXIMATION DE $H_{k_y}^{-1/2}(\Gamma)$)
Malgré son indépendance par rapport à k_y, $\mathcal{T}_h$ est un espace d'approximation de $H_{k_y}^{-1/2}(\Gamma)$ dans le sens où quand h tend vers 0, il est dense dans $H_{k_y}^{-1/2}(\Gamma_0)$. Pour s'en convaincre, notons qu'il ne fait aucun doute qu'il soit dense dans $L^2(\Gamma_0)$. Pour conclure, il suffit d'utiliser la densité de $L^2(\Gamma_0)$ dans $H_{k_y}^{-1/2}(\Gamma_0)$ (qui résulte de la densité de $H_{k_y}^{1/2}(\Gamma_0)$ dans $L^2(\Gamma_0)$ évoquée Proposition B.1.16)

Toutes ces propriétés font que les opérateurs NtD et NtN locaux discrets sont des matrices carrées de taille $N_y \times N_y$.

REMARQUE 4.3.2 (INDÉPENDANCE DE L'ESPACE $\mathcal{T}_{h,k_y}$ PAR RAPPORT À k_y)
Cette propriété va se révéler essentielle dans l'étude de la discrétisation de l'équation intégrale $(\mathcal{E}^\varepsilon_{(i,j)})$. Elle tient à ce que pour calculer l'opérateur NtD, il faut résoudre des problèmes de cellule avec des conditions de Neumann non-homogènes pour lesquels les données sont prises dans $H_{k_y}^{-1/2}(\Gamma)$. Ce dernier peut être approché par $\mathcal{T}_h$, ensemble des fonctions constantes par morceaux sur le maillage de Γ.

Nous rappelons que cette méthode a été effectuée au départ pour caractériser des opérateurs DtN. Ceux ci nécessitent la résolution de problèmes de cellule avec conditions de Dirichlet non homogènes pour lesquels les données sont prises dans $H_{k_y}^{1/2}(\Gamma)$. Ce dernier ne peut pas être approché par $\mathcal{T}_h$, espace qui n'est pas inclus dans $H_{k_y}^{1/2}(\Gamma)$. Il ne pouvait être approché que par un espace qui dépend de k_y. Nous comprendrons dans la suite les raisons pour lesquelles l'analyse

de la discrétisation du problème devenait plus complexe voire impossible.

La première méthode que nous avons trouvée pour pallier ce problème est de considérer une méthode mixte hybride[4] *dans laquelle les données sont considérées de manière faible dans $\mathcal{T}_h$. La deuxième méthode est de construire l'opérateur NtD plutôt que l'opérateur DtN.*

On reconstruit ensuite tous les autres espaces d'approximation à partir de ceux là. Très schématiquement, les fonctions de $L^2(\mathcal{O})$ avec $\mathcal{O} = \mathcal{C}, \Omega^{\mathrm{w}}, \Omega^{\mathrm{H}}, \Omega^e$ ou Ω^i sont des fonctions constantes sur chaque élément (carré) du maillage, les fonctions de $H_{\mathrm{div}}(\mathcal{O})$ sont linéaires dans les deux directions sur chaque élément carré (respectant des conditions k_y-quasi-périodiques ou pas suivant les espaces) et les traces normales de ces dernières fonctions sont constantes par morceaux.

Notons tout de même que les espaces d'approximation choisis ici rendent les opérateurs NtD discrets des matrices carrées.

4.3.1.3 Discrétisation de chaque problème de cellule

Une des étapes importantes de l'algorithme est de résoudre pour chaque $k_y \in]-\pi/L, \pi/L[$, et pour tout $\hat{\psi}_{k_y} \in H_{k_y}^{-1/2}(\Sigma^0)$, les problèmes de cellule (4.24)-(4.25)-(4.26) et les opérateurs NtD et NtN locaux correspondants.

Nous adaptons la discrétisation par éléments finis mixtes de la section 2.3 à ces problèmes avec conditions k_y-quasi-périodique, k_y étant dans cette section fixé. Il est facile de montrer que les formulations mixtes des problèmes de cellule établies Section 2.3.1.1 sont toujours vraies, seuls les espaces d'existence des solutions et des fonctions test changent. Ainsi, la formulation mixte des problèmes de cellule avec conditions k_y-quasi-périodiques est, pour tout $\hat{\psi}_{k_y}$

$\forall \ell \in \{0,1\}$, trouver $(e_\varepsilon^\ell(k_y;\hat{\psi}_{k_y}), \mathbf{E}_{\varepsilon,0}^\ell(k_y;\hat{\psi}_{k_y})) \in L^2(\mathcal{C}) \times H_{\mathrm{div},0,k_y}(\mathcal{C})$ telle que $\forall (v,\mathbf{V}) \in L^2(\mathcal{C}) \times H_{\mathrm{div},0,k_y}(\mathcal{C})$,

$$\left| \begin{array}{rcrcl} a(e_\varepsilon^\ell, v) & + & b(v, \mathbf{E}_{\varepsilon,0}^\ell) & = & -b(v, \mathbf{F}_{k_y}^\ell(\hat{\psi}_{k_y})) \\ \overline{b(e_\varepsilon^\ell, \mathbf{V})} & + & \mathbf{A}(\mathbf{E}_{\varepsilon,0}^\ell, \mathbf{V}) & = & -\mathbf{A}(\mathbf{F}_{k_y}^\ell(\hat{\psi}_{k_y}), \mathbf{V}) \end{array} \right. \tag{4.61}$$

où a, b et $\mathbf{A}$ sont définis Proposition 2.3.1 et où

$$H_{\mathrm{div},k_y}(\mathcal{C}) = \Big\{ \mathbf{V} \in H_{\mathrm{div}}(\mathcal{C}), \quad \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\Big|_{\Sigma_1^+} = e^{-\imath k_y L}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\Big|_{\Sigma_1^-} \Big\},$$

$$H_{\mathrm{div},k_y}^\ell(\mathcal{C}) = \Big\{ \mathbf{V} \in H_{\mathrm{div},k_y}(\mathcal{C}), \quad \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\Big|_{\Gamma_j} = 0,\ j \neq \ell \Big\},$$

$$H_{\mathrm{div},0,k_y}(\mathcal{C}) = \Big\{ \mathbf{V} \in H_{\mathrm{div},k_y}^\ell(\mathcal{C}), \quad \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\Big|_{\Gamma_\ell} = 0 \Big\},$$

$$\mathbf{F}^\ell(\hat{\psi}_{k_y}) \in H_{\mathrm{div},k_y}^\ell(\mathcal{C}), \quad \mathbf{F}^\ell(\hat{\psi}_{k_y})\cdot\mathbf{n}\Big|_{\Gamma_\ell} = \hat{\psi}_{k_y}. \tag{4.62}$$

Ce problème admet une solution unique pour les mêmes raisons que pour le problème avec conditions de Neumann de la Proposition 2.3.1. Si $e_\varepsilon^\ell(\hat{\psi}_{k_y}) \in H_{k_y}^1(\mathcal{C})$ est l'unique solution de

[4] Ce sujet a fait l'objet du stage de master de J.Coatleven. Se reporter à son mémoire pour plus de détails.

(4.24)-(4.25)-(4.26) pour $\ell = 0$ ou $\ell = 1$ alors $(e^\ell_\varepsilon(\hat{\psi}_{k_y}), \nabla e^\ell_\varepsilon(\hat{\psi}_{k_y}) - \mathbf{F}^\ell(\hat{\psi}_{k_y}))$ est solution du problème mixte précédent.

L'approximation des problèmes mixtes précédents repose sur les mêmes idées que Section 2.3.1.1. Nous rappelons que les espaces d'approximation ont été choisis section précédente avec précaution afin d'appliquer en particulier la méthode de résolution du problème de demi-guide périodique au problème discret. On note de plus $\mathcal{W}^\ell_{h,k_y}$ et $\mathcal{W}_{h,0,k_y}$ les intersections entre $\mathcal{W}_{h,k_y}$ et $H^\ell_{\mathrm{div},k_y}(\mathcal{C})$ et entre $\mathcal{W}_{h,k_y}$ et $H_{\mathrm{div},0,k_y}(\mathcal{C})$, respectivement
Le problème discret considéré est alors : Pour tout $\hat{\psi}_{h,k_y} \in \mathcal{T}_{h,k_y}$, on cherche

$\forall \ell \in \{0,1\}$, $(e^\ell_{\varepsilon,h}(k_y;\hat{\psi}_{h,k_y}), \mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,0,h}(k_y;\hat{\psi}_{h,k_y})) \in \mathcal{M}_h \times \mathcal{W}_{h,0,k_y}$ telle que $\forall (v_h, \mathbf{V}_h) \in \mathcal{M}_h \times \mathcal{W}_{h,0,k_y}$

$$\left|\begin{array}{rcrcl} a(e^\ell_{\varepsilon,h}, v_h) & + & b(v_h, \mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,0,h}) & = & -b(v_h, \mathbf{F}^\ell_h(\hat{\psi}_{h,k_y})) \\ \overline{b(e^\ell_{\varepsilon,h}, \mathbf{V}_h)} & + & \mathbf{A}(\mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,0,h}, \mathbf{V}_h) & = & -\mathbf{A}(\mathbf{F}^\ell_h(\hat{\psi}_{h,k_y}), \mathbf{V}_h) \end{array}\right. \tag{4.63}$$

où a, b et A sont les formes bilinéaires de la proposition 2.3.1 et où $\mathbf{F}^\ell_h(\hat{\psi}_{h,k_y})$ est définie par :

$$\mathbf{F}^\ell_h(\hat{\psi}_{h,k_y}) \in \mathcal{W}^\ell_{h,k_y}, \quad \text{et} \quad \mathbf{F}^\ell_h(\hat{\psi}_{h,k_y}) \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_\ell} = \hat{\psi}_{h,k_y}. \tag{4.64}$$

On pose $\mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,h}(\hat{\psi}_{h,k_y}) = \mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,0,h}(\hat{\psi}_{h,k_y}) + \mathbf{F}^\ell_h(\hat{\psi}_{h,k_y})$. Les estimations d'erreur pour ces problèmes de cellule restent les mêmes que Théorème 2.3.4.

Nous pouvons alors définir de manière faible les opérateurs de NtD locaux discrets (comme dans (2.34))
$\forall \ell \in \{0,1\}, \quad \forall \hat{\psi}_{h,k_y} \in \mathcal{T}_{h,k_y}, \ \forall \hat{\phi}_{h,k_y} \in \mathcal{T}_{h,k_y},$

$$\begin{aligned} &\exists \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}^0_{h,k_y}, \ \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_0} = \hat{\phi}_{h,k_y}, \\ &\qquad \int_{\Gamma_0} T^{\ell 0}_{\varepsilon,h}(k_y)\hat{\psi}_{h,k_y}\,\hat{\phi}_{h,k_y} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,h}((k_y;\hat{\psi}_{h,k_y}) \cdot \mathbf{V}_h + \int_{\mathcal{C}} e^\ell_{\varepsilon,h}(k_y;\hat{\psi}_{h,k_y})\ \mathrm{div}\,\mathbf{V}_h \\ &\exists \mathbf{V}_h \in \mathcal{W}^1_{h,k_y}, \ \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Gamma_1} = \hat{\phi}_{h,k_y}, \\ &\qquad \int_{\Gamma_1} T^{\ell 1}_{\varepsilon,h}(k_y)\hat{\psi}_{h,k_y}\,\hat{\phi}_{h,k_y} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,h}((k_y;\hat{\psi}_{h,k_y}) \cdot \mathbf{V}_h + \int_{\mathcal{C}} e^\ell_{\varepsilon,h}((k_y;\hat{\psi}_{h,k_y})\ \mathrm{div}\,\mathbf{V}_h \end{aligned} \tag{4.65}$$

et nous avons les mêmes estimations d'erreur que celles du Théorème 2.3.7.

Nous pouvons également définir les opérateurs NtN locaux

$$\forall \ell \in \{0,1\}, \quad \forall \hat{\psi}_{h,k_y} \in \mathcal{T}_{h,k_y}, \quad N^{\ell,\pm}_{\varepsilon,h}(k_y)\,\hat{\psi}_{h,k_y} = \mathbf{E}^\ell_{\varepsilon,h}((k_y;\hat{\psi}_{h,k_y}) \cdot \mathbf{n}\Big|_{\Sigma^\pm_1}$$

et nous avons l'estimation d'erreur suivante.

THÉORÈME 4.3.3 (ESTIMATION D'ERREUR POUR LES OPÉRATEURS DE NTN LOCAUX)
Pour chaque $\ell \in \{0,1\}$, nous avons les estimations d'erreur suivante :

$$\forall \hat{\psi}_{k_y} \in H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma^+), \quad \|N^{\ell,\pm}_\varepsilon(k_y)(\hat{\psi}_{k_y}) - N^{\ell,\pm}_{\varepsilon,h}(k_y)(\Pi_{\mathcal{T}_{h,k_y}}\hat{\psi}_{k_y})\|_{H^{-1/2}(\Sigma^\pm_1)} \ \leq\ \varepsilon^\ell(h)$$

où

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\ell}(h) &= C\Big[\inf_{\mathbf{V}_h\in\mathcal{W}_{h,k_y}}\|\mathbf{E}^{\ell}_{\varepsilon}(k_y;\hat{\psi}_{k_y})-\mathbf{V}_h\|_{H_{\mathrm{div},k_y}(\mathcal{C})}+\inf_{v_h\in\mathcal{M}_h}\|e^{\ell}_{\varepsilon}(k_y;\hat{\psi}_{k_y})-v_h\|_{L^2(\mathcal{C})}\\ &\qquad +\|\hat{\psi}_{k_y}-\Pi_{\mathcal{T}_{h,k_y}}\hat{\psi}_{k_y}\|_{H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma_\ell)}\Big],\end{aligned}$$

avec C une constante indépendante de h (voir Remarque 2.3.5 pour sa dépendance par rapport à ε).

4.3.1.4 Approximation de l'opérateur NtN $R_\varepsilon(k_y)$

Pour déterminer l'approximation de $R_\varepsilon(k_y)$, nous utilisons les mêmes arguments que ceux utilisés Section 2.3.2. Nous pouvons montrer alors, à l'image du théorème 2.3.13 qu'il existe un opérateur $R_{\varepsilon,h}(k_y)$ qui est l'unique solution de rayon spectral strictement inférieur à 1 du problème de Riccati stationnaire en dimension finie :

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } X\in\mathcal{L}(\mathcal{T}_h),\\ \mathcal{T}(\varepsilon,h,k_y,X)=0.\end{array}\right. \qquad (\mathcal{E}^R_{\varepsilon,h,k_y})$$

où

$$\begin{array}{lcl}\mathcal{L}(\mathcal{T}_h) & \to & \mathcal{L}(\mathcal{T}_h)\\ X & \mapsto & \mathcal{T}(\varepsilon,h,k_y,X)=T^{10}_{\varepsilon,h}(k_y)\,X^2-(T^{00}_{\varepsilon,h}(k_y)+T^{11}_{\varepsilon,h}(k_y))\,X+T^{01}_{\varepsilon,h}(k_y).\end{array} \qquad (4.66)$$

Pour résoudre ce problème de Riccati, nous utilisons l'un des deux algorithmes présentés Section 2.3.2.3.

Nous montrons enfin que l'unique solution de $(\mathcal{E}^R_{\varepsilon,h,k_y})$ est une approximation de l'opérateur $R_\varepsilon(k_y)$ et nous avons les mêmes estimations d'erreur que celles du Théorème 2.3.12.

4.3.1.5 Approximation de $\Lambda^{\mathbf{H}}_\varepsilon$ et de la solution $u^{\mathbf{H}}_\varepsilon$ de $(\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_\varepsilon)$

A partir de cet opérateur de propagation discret et des solutions discrètes des problèmes de cellule avec conditions k_y-quasi-périodiques, la solution du problème de demi-guide discret avec conditions k_y-quasi-périodiques (voir les relations (2.42)) et l'opérateur NtD correspondant peuvent être reconstruits (voir (2.50)).

Etudions tout d'abord l'approximation de la solution $\mathcal{F}_y u^{\mathrm{H}}_\varepsilon(\psi)\,(\cdot,k_y)$ du problème de demi-guide $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$ avec conditions k_y-quasi-périodique qui permettra de déduire l'approximation semi-discrétisée $u^{\mathrm{H}}_\varepsilon(\psi)$ du problème de demi-espace $(\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_\varepsilon)$. A l'image de ce qui est fait Section 2.3.2.1 et à partir des espaces introduits Section 4.3.1.1, une approximation (au sens du théorème 2.3.9) de la solution du problème de demi-guide est $\forall j\geq 1,\ \forall\psi_h\in\widetilde{\mathcal{T}}_h$

$$\left|\begin{array}{ll}\mathcal{F}_y u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,h}(\psi_h)\,(\cdot,k_y)\Big|_{\mathcal{C}_j} &= e^0_{\varepsilon,h}(k_y;\big(R_{\varepsilon,h}(k_y)\big)^{j-1}\hat{\psi}_h(\cdot;k_y))\ -\ e^1_{\varepsilon,h}(k_y;\big(R_{\varepsilon,h}(k_y)\big)^{j}\,\hat{\psi}_h(\cdot;k_y))\\ \mathcal{F}_y \mathbf{U}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,h}(\psi_h)\,(\cdot,k_y)\Big|_{\mathcal{C}_j} &= \mathbf{E}^0_{\varepsilon,h}(k_y;\big(R_{\varepsilon,h}(k_y)\big)^{j-1}\hat{\psi}_h(\cdot;k_y))\ -\ \mathbf{E}^1_{\varepsilon,h}(k_y;\big(R_{\varepsilon,h}(k_y)\big)^{j}\,\hat{\psi}_h(\cdot;k_y))\end{array}\right. \qquad (4.67)$$

Une approximation de l'opérateur NtD de demi-guide est donné par (voir (2.50))

$$\forall \psi_h \in \widetilde{\mathcal{T}}_h, \quad (\hat{\Lambda}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,h}\mathcal{F}_y\psi_h)(\cdot;k_y) = \big[T^{00}_{\varepsilon,h}(k_y) + T^{10}_{\varepsilon,h}(k_y)\, R_{\varepsilon,h}(k_y)\big]\mathcal{F}_y\psi_h(\cdot;k_y). \tag{4.68}$$

Ainsi, une première approximation de la solution du problème de demi-espace est
$\forall\,(x,y) \in \Omega^{\mathrm{w}},\ \forall\, p \in \mathbb{Z}$,

$$\left|\begin{array}{rcl} u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,h}(\psi_h)(x,y+pL) & = & \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \mathcal{F}_y u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,h}(\psi_h)(x,y\,;k_y)\, e^{ipk_yL}\, dk, \\ \mathbf{U}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,h}(\psi_h)(x,y+pL) & = & \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}} \displaystyle\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \mathcal{F}_y \mathbf{U}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,h}(\psi_h)(x,y\,;k_y)\, e^{ipk_yL}\, dk. \end{array}\right. \tag{4.69}$$

et celle de l'opérateur de NtD de demi-espace est

$$\forall \psi_h \in \widetilde{\mathcal{T}}_h, \quad \Lambda^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,h}\psi_h\Big|_{\Sigma^0} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \big(\hat{\Lambda}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,h}\mathcal{F}_y\psi_h\big)(\cdot;k_y)\, dk_y. \tag{4.70}$$

Pour des validations concernant le calcul de l'opérateur NtD de demi-espace et la construction de la solution du problème de demi-espace, nous reportons le lecteur à l'annexe A.4 où sont traités des problèmes spécifiques à ce seul opérateur NtD et à la solution de problèmes de demi-espace.

4.3.1.6 Semi-discrétisation de l'équation $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)})$

D'après la Section 4.2.8, pour déterminer l'unique solution de chaque problème $(\mathcal{E}^{\varepsilon}_{(i,j)})$ avec $(i,j) \in \{s,a\}^2$, il suffit de résoudre le problème équivalent $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)})$. C'est donc ce problème que nous cherchons à approcher. Nous cherchons ainsi une approximation de l'opérateur $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}$.

Introduisons tout d'abord une première approximation de l'espace W^- (espace donné par (4.54) dans lequel est recherchée la solution de $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)})$) :

$$W^-_h = \Big\{\hat{\psi}^0_h \in L^2([-\frac{\pi}{L};\frac{\pi}{L}[,\mathcal{T}_{h,k_y}), \quad \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{\psi}^0_h(\cdot;k_y)\, dk_y = 0\Big\}.$$

et une première approximation de W^+ (espace donné par (4.56) auquel appartiennent les fonctions test de la formulation variationnelle de $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)})$)

$$W^+_h = \Big\{\hat{\psi}^0_h \in L^2([-\frac{\pi}{L};\frac{\pi}{L}[,\mathcal{T}^+_{h,k_y}), \quad \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{\psi}^0_h(\cdot;k_y)\, dk_y = 0\Big\}.$$

De plus, intervient pour chaque problème $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)})$ le noyau $\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}$ dont l'expression est établie (4.38). Pour chaque k_x et k_y, le calcul de chaque noyau $\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x,k_y)$ se fait à partir des opérateurs NtN locaux $N^{i,\pm}_{\varepsilon}(k_y)$ et des opérateurs de propagation $R_{\varepsilon}(k_y)$. Il faut donc en calculer une

approximation qui est simplement donnée par

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(k_x,k_y) &= +\varepsilon_j\ \frac{L}{2\pi}e^{\imath Lk_x}\Big(N^{0,-}_{\varepsilon,h}(k_y)-N^{1,-}_{\varepsilon,h}(k_y)R_{\varepsilon,h}(k_y)\Big)\Big(\mathbf{I}_h-R_{\varepsilon,h}(k_y)e^{\imath Lk_x}\Big)^{-1}\\ &\quad+\frac{L}{2\pi}\,\mathbf{I}_h\\ &\quad+\varepsilon_i\ \frac{L}{2\pi}e^{-\imath Lk_x}\Big(N^{0,+}_{\varepsilon,h}(k_y)-N^{1,+}_{\varepsilon,h}(k_y)R_{\varepsilon,h}(k_y)\Big)\Big(\mathbf{I}_h-R_{\varepsilon,h}(k_y)e^{-\imath Lk_x}\Big)^{-1}\end{aligned} \tag{4.71}$$

où $\mathbf{I}$ est l'opérateur identité de $\mathcal{L}(\mathcal{T}_{h,k_y})$.

Rappelons que la solution de chaque problème $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)})$ $\hat{\psi}^0_{ij}\in W^-$ est déterminée pour une donnée $\varphi\in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$ fixée. Pour déterminer l'image de cette fonction par l'opérateur NtN, il suffit ensuite de calculer :

$$\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi=\mathcal{F}_y^{-1}\hat{\psi}^0_{ij}+\widetilde{E}\varphi\quad\in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$$

où $\widetilde{E}\varphi\in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$ est choisie arbitrairement telle que sa restriction à Σ^0 coïncide avec $R_{(i,j)}\varphi$.

Nous cherchons maintenant une approximation de l'opérateur $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}$, notée $\widetilde{N}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}$, définie sur $\mathcal{T}^i_{(i,j),h}$ et à valeurs dans $\widetilde{\mathcal{T}}_h$. Pour toute donnée, φ_h, on choisit un opérateur d'extension discret $\widetilde{E}_h$ de $\mathcal{T}^i_{(i,j),h}$ dans $\widetilde{\mathcal{T}}_h$ vérifiant

$$\forall\varphi_h\in\mathcal{T}^i_{(i,j),h},\quad \widetilde{E}_h\varphi_h\Big|_{\Sigma^0}=R_{(i,j)}\varphi_h, \tag{4.72}$$

et on cherche $\hat{\psi}^0_{ij,h}=\mathcal{F}_y(\widetilde{N}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}\varphi_h-\widetilde{E}_h\varphi_h)$ la solution du problème semi-discret

Trouver $\hat{\psi}^0_h\in W^-_h,$ tel que

$$a^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(\hat{\psi}^0_h,\hat{\theta}^0_h)=\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\Big\langle\hat{g}_{\varphi_h}(\cdot;k_x);\hat{\theta}^0_h(\cdot;k_x)\Big\rangle\,dk_x,\quad\hat{\theta}^0_h\in W^+_h \tag{$\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon,h}_{(i,j)}$}$$

où

$$\left|\begin{aligned}a^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(\hat{\psi}^0_h,\hat{\theta}^0_h) &= \int_{-\pi/L}^{\pi/L}\Big\langle\hat{\psi}^0_h(\cdot;k_x);\hat{\theta}^0_h(\cdot;k_x)\Big\rangle\,dk_x\\ &\quad-\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\Big\langle\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(k_x,k_y)\ \hat{\psi}^0_h(\cdot;k_y);\hat{\theta}^0_h(\cdot;k_x)\Big\rangle\,dk_y\,dk_x\end{aligned}\right. \tag{4.73}$$

avec $<\cdot;\cdot>$ le produit de dualité de $H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$ et $H^{1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$, $\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(k_x,k_y)$ défini par (4.71) et avec

$$\hat{g}_{\varphi_h}(\cdot;k_x)=-\mathcal{F}_y\widetilde{E}_h\varphi_h\ (\cdot;k_x)+\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\Big(\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(k_x,k_y)\ \mathcal{F}_y\widetilde{E}_h\varphi_h(\cdot;k_y)\,dk_y \tag{4.74}$$

ne dépend que de la donnée φ_h et est donc connu. Notons que nous pourrions montrer en utilisant les arguments de la démonstration de la Proposition 4.2.41 que le noyau discret $\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(k_x,k_y)$

est dans $\in \mathcal{L}\big(\mathcal{T}_{h,k_y}, \mathcal{T}_{h,k_x}\big)$). La deuxième intégrale de la forme bilinéaire (4.73) a donc bien un sens.

Les arguments classiques [Kress (1999)] pour montrer le caractère bien posé de cette équation intégrale semi-discrète ne marchent pas. Ceux-ci se basant souvent sur la compacité du noyau intégral [Colton & Kress (1983)], ils ne s'applique pas ici pour les mêmes raisons que pour le problème continu. On peut néanmoins montrer que ce problème semi-discret admet une solution unique.

PROPOSITION 4.3.4 (CARACTÈRE BIEN POSÉ DU PROBLÈME ($\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon,h}_{(i,j)}$))
Si le maillage et les espaces d'approximation vérifient les propriétés de symétrie et de périodicité du problèmes de départ (voir Section 4.3.1.1 pour un exemple de construction), alors pour toute donnée $\varphi_h \in \mathcal{T}^i_{(i,j),h}$, le problème ($\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon,h}_{(i,j)}$) admet une unique solution $\psi^0_{ij,h}$.

■ **PREUVE:** Il faut utiliser les mêmes arguments que ceux utilisés pour montrer que le problème continu est bien posé. Nous donnons juste l'idée de la démonstration.

Les espaces d'approximation pour construire les problèmes discrets ayant été choisis pour respecter les propriétés de périodicité et de symétrie du problème de départ, on pourrait montrer que cette équation intégrale semi-discrète est équivalente à un problème affine qui découle d'un problème extérieur discret dont la solution présente des symétries ou des antisymétries. En utilisant alors des arguments d'unicité et de symétrie, on pourrait montrer que l'équation affine discrète est bien posée. ■

Pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$, l'erreur d'approximation

$$\|\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi - \widetilde{N}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}\Pi_{\mathcal{T}^i_h}\varphi\|$$

reste une **question ouverte**. Les arguments utilisés dans l'étude des équations intégrales avec noyau compact et leurs discrétisations ne peuvent pas être appliqués. Nous allons supposer dans la suite que l'opérateur calculé est une bonne approximation de l'opérateur recherché, les résultats numériques appuieront cette hypothèse.

Ce n'est cependant pas ce problème qui est résolu en pratique. En effet, comme expliqué précédemment, le noyau $\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(k_x,k_y)$ ne peut être déterminé que pour des valeurs discrètes de k_y. Nous traitons donc dans la suite le choix de la discrétisation de la variable de Floquet.

4.3.2 Discrétisation des variables de Floquet

4.3.2.1 Discrétisation de l'équation ($\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)}$)

Il faut désormais choisir une discrétisation des variables duales k_x et k_y qui va nous permettre de résoudre numériquement ($\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon,h}_{(i,j)}$). Nous comprendrons à la fin de cette question que c'est la résolution de cette équation qui va imposer la discrétisation de la variable duale.

Avant de commencer, reprenons la définition de l'espace semi-discrétisé W_h^-,

$$W_h^- = \Big\{ \hat{\psi}_h^0 \in L^2([-\frac{\pi}{L};\frac{\pi}{L}[,\mathcal{T}_{h,k_y}), \quad \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{\psi}_h^0(\cdot;k_y)\, dk_y = 0 \Big\}.$$

Il paraît difficile de trouver un espace d'approximation de W_h^- telle que la contrainte de moyenne nulle en k_y soit vérifiée et telle que pour k_y fixé, la k_y-quasi-périodicité de la fonction $\hat{\psi}_h^0(\cdot;k_y)$ soit réalisée, surtout si on cherche cet espace comme un produit tensoriel entre un espace de fonctions de la variable k_y et un espace de fonctions de la variable y. Pourtant le produit tensoriel rend le calcul de l'équation intégrale discrétisée plus simple, comme nous allons le voir. Ce choix de produit tensoriel impose de considérer la k_y-quasi-périodicité de manière faible, ce qui est le cas, quand on approche l'espace $H_{k_y}^{-1/2}(\Sigma^0)$ par un espace $\mathcal{T}_h$ indépendant de k_y[5]. Nous allons donc dès à présent réduire notre étude à ce choix d'EFM. D'autres analyses sont possibles pour d'autres choix de discrétisation en espace mais elles n'ont pas été pour l'instant à l'étude et font partie des perspectives d'analyse.

Considérons donc l'espace semi-discrétisé W_h

$$W_h = \Big\{ \hat{\psi}_h^0 = w(k_y)\phi_h(y) \in L^2([-\frac{\pi}{L};\frac{\pi}{L}[,\mathcal{T}_h), \quad \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} w(k_y)\, dk_y = 0 \Big\}.$$

Nous pourrions faire la même remarque pour l'espace W_h^+ des fonctions test défini par

$$W_h^+ = \Big\{ \hat{\psi}_h^0 \in L^2([-\frac{\pi}{L};\frac{\pi}{L}[,\mathcal{T}_{h,k_y}^+), \quad \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \hat{\psi}_h^0(\cdot;k_y)\, dk_y = 0 \Big\}.$$

Cependant contrairement à $H_{k_y}^{-1/2}(\Sigma^0)$ qui contient l'espace $\mathcal{T}_h$, $H_{k_y}^{1/2}(\Sigma^0)$ ne contient pas $\mathcal{T}_h$. Il paraît néanmoins naturel de considérer une approximation non conforme de W^+ par W_h. La formulation variationnelle garde un sens puisque nous nous sommes ramenés en fait à des fonctions L^2.

Ainsi dans la suite, le même espace W_h sera utilisé pour approcher W^- et W^+. Intéressons-nous maintenant à la discrétisation pour la variable duale k_y.

Divisons l'intervalle $]-\pi/L;\pi/L]$ en N_k intervalles égaux de longueur $\Delta k_x = \Delta k_y = 2\pi/LN_k$ et posons

$$\forall j \in [\![0, N_k]\!], \quad k_j = -\frac{\pi}{L} + j\Delta k_x$$

Pour $N_k \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$ fixés, nous introduisons l'espace

$$\mathbb{P}_{N_k,q} = \Big\{ w \in L^2(-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}), \quad \forall j \in [\![0, N_k-1]\!],\ w\big|_{[k_j,k_{j+1}]} \in \mathcal{P}_q, \int_{-\pi/L}^{\pi/L} w(k)\, dk = 0 \Big\} \tag{4.75}$$

[5] comme pour le choix des EFM de Raviart-Thomas d'ordre le moins élevé (voir Remarque 4.3.2)

Notons $\{w^n(k),\ n \in [\![1;N]\!]\}$ avec $N = N_k(q+1)-1$ une base de l'espace $\mathbb{P}_{N_k,q}$.

Nous considérons finalement l'espace d'approximation de W^- et W^+

$$W_{h,N_k,q} = \mathbb{P}_{N_k,q} \otimes \mathcal{T}_h = \text{span}\big[w^n(k)\phi_h^\ell(y)\big]_{1\le n\le N,\ 1\le \ell\le N_y} \tag{4.76}$$

dont la dimension est $N_W = N \times N_y$.

Le problème $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon,h}_{(i,j)})$ semi-discret devient

Trouver $\hat{\psi}^0_{h,N_k,q} \in W_{h,N_k,q},$ tel que $\forall n \in [\![1;N]\!],\ \forall \ell \in [\![1;N_y]\!]$

$$a^{\varepsilon,h,N_k,q}_{(i,j)}(\hat{\psi}^0_{h,N_k,q}, w^n\phi_h^\ell) = \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \Big(\hat{g}_{\varphi_h}(\cdot;k_x);\phi_h^\ell(\cdot)\Big)_{L^2(\Sigma^0)} w^n(k_x)\,dk_x, \qquad (\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon,h,N_k,q}_{(i,j)})$$

où $\forall n \in [\![1;N]\!],\ \forall \ell \in [\![1;N_y]\!]$

$$\left|\begin{array}{l} a^{\varepsilon,h,N_k,q}_{(i,j)}(\hat{\psi}^0_{h,N_k,q}, w^n\phi_h^\ell) = \displaystyle\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \Big(\hat{\psi}^0_{h,N_k,q}(\cdot;k_x);\phi_h^\ell(\cdot)\Big)_{L^2(\Sigma^0)} w^n(k_x)\,dk_x \\ \qquad - \displaystyle\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \Big(\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(k_x,k_y)\,\hat{\psi}^0_{h,N_k,q}(\cdot;k_y);\phi_h^\ell(\cdot)\Big)_{L^2(\Sigma^0)} dk_y\, w^n(k_x)\,dk_x \end{array}\right. \tag{4.77}$$

avec $(\cdot;\cdot)_{L^2(\Sigma^0)}$ le produit scalaire[6] de $L^2(\Sigma^0)$ et $\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(k_x,k_y)$ défini par (4.71).

REMARQUE 4.3.5 (CARACTÈRE BIEN POSÉ DE $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon,h,N_k,q}_{(i,j)})$)
Contrairement au problème semi-discret $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon,h}_{(i,j)})$, le caractère bien posé de ce dernier problème reste une question ouverte. Là encore, les arguments classiques de discrétisation des équations intégrales ne s'appliquent pas.

Choisissons enfin une formule de quadrature qui permettra d'approcher les intégrales intervenant dans la formule variationnelle et de ne calculer le noyau $\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(k_x,k_y)$ que pour des valeurs discrètes de k_x et k_y :

$$\int_0^1 f(\xi)\,d\xi \approx \sum_{m=1}^{M} \omega_m f(\tau_m), \quad 0 \le \tau_1 < \ldots < \tau_M \le 1$$

et introduisons les points de quadrature dans $]-\pi/L;\pi/L]$:

$$\forall j \in [\![0,N_k]\!],\ \forall m \in [\![1,M]\!], \quad k_j^m = k_j + \tau_m \Delta k_x.$$

Le problème discret complet devient pour chaque $\varphi \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$

[6] Du fait des espaces d'approximation choisis (sous espaces de $L^2(\Sigma^0)$), nous pouvons remplacer le produit de dualité entre $H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$ et $H^{1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$ par le produit scalaire de $L^2(\Sigma^0)$

Trouver $\hat{\psi}^0_{h,N_k,q,M} \in W_{h,N_k,q}$, tel que $\forall n \in [\![1;N]\!],\ \forall \ell \in [\![1;N_y]\!]$

$$a^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}(\hat{\psi}^0_{h,N_k,q,M}, w^n\phi^\ell_h) = \frac{2\pi}{NL}\sum_{j_x=0}^{N}\sum_{m_x=1}^{M}\omega_{m_x}\Big(\hat{g}_{\varphi_h}(\cdot;k^{m_x}_{j_x});\phi^\ell_h(\cdot)\Big)_{L^2(\Sigma^0)} w^n(k^{m_x}_{j_x}), \tag{$\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}$}$$

où $\forall n \in [\![1;N]\!],\ \forall \ell \in [\![1;N_y]\!]$

$$\begin{aligned} a^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}(\hat{\psi}^0_{h,N_k,q,M}, w^n\phi^\ell_h) &= \frac{2\pi}{NL}\sum_{j_x=0}^{N}\sum_{m_x=1}^{M}\omega_{m_x}\Big[\Big(\hat{\psi}^0_{h,N_k,q,M}(\cdot;k^{m_x}_{j_x});\phi^\ell_h(\cdot)\Big)_{L^2(\Sigma^0)} w^n(k^{m_x}_{j_x}) \\ &\quad -\frac{2\pi}{NL}\sum_{j_y=0}^{N}\sum_{m_y=1}^{M}\omega_{m_y}\Big(\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(k^{m_x}_{j_x},k^{m_y}_{j_y})\,\hat{\psi}^0_{h,N_k,q,M}(\cdot;k^{m_y}_{j_y});\phi^\ell_h(\cdot)\Big)_{L^2(\Sigma^0)} w^n(k^{m_x}_{j_x})\Big] \end{aligned} \tag{4.78}$$

avec $\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(k^{m_x}_{j_x},k^{m_y}_{j_y})$ défini par (4.71) et avec, on le rappelle, $\hat{g}_{\varphi_h}(\cdot;k^{m_x}_{j_x})$ défini par (4.74).

Ce problème s'écrit finalement

$$\mathbb{A}^{\varepsilon}_{(i,j)}\hat{\Psi}^0 = \hat{G}_{\varphi_h}$$

où $\mathbb{A}$ est une matrice de dimension $NN_y \times NN_y$ dont les coefficients sont donnés par

$\forall (n_1,n_2) \in\in [\![1;N]\!]^2,\ \forall (\ell_1,\ell_2) \in [\![1;N_y]\!]^2,$

$$\mathbb{A}^{\varepsilon}_{(i,j)}(\ell_1+(n_1-1)N_y, \ell_2+(n_2-1)N_y) = a^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}(w^{n_1}(k)\phi^{\ell_1}_h(y), w^{n_2}(k)\phi^{\ell_2}_h(y)).$$

Le caractère bien posé de ce problème reste là encore une question ouverte. Supposons néanmoins que ce problème est bien posé c'est-à-dire que la matrice $\mathbb{A}^{\varepsilon}_{(i,j)}$ est inversible.

C'est une matrice pleine. La résolution de (4.78) pour chaque φ nécessite ainsi l'inversion d'une matrice pleine de taille $(NN_y)^2$. Le coût de la méthode vient principalement de l'inversion de cette matrice, puisque pour l'instant seuls des problèmes EFM et des équations caractéristiques de type Riccati (la taille des matrices étant seulement N_y) ont été résolus. Pour l'instant, des méthodes directes d'inversion de cette matrice ont été testées mais elle conduisent nécessairement à des limitations quant au produit NN_y. Certaines méthodes itératives ont été testées mais aucune n'a semblé pour l'instant adaptée. Pour se débarrasser de cette limitation, une perspective de ce travail est de chercher une méthode itérative adaptée, à l'image de la méthode des multipôles. Les résultats numériques présentés dans la suite ont été obtenus en utilisant des méthodes directes d'inversion.

REMARQUE 4.3.6 (LIMITATION POUR LA DISCRÉTISATION DE LA VARIABLE DUALE)
Du fait des méthodes directes utilisées pour inverser les matrices $\mathbb{A}^{\varepsilon}_{(i,j)}$, le produit NN_y est nécessairement inférieur ou égal à une valeur N_{max} (cette valeur dépend de la machine utilisée et est typiquement de l'ordre de 10000). La valeur N_y est choisie de manière classique en fonction de la fréquence : typiquement il faut choisir 10 points par longueur d'onde. On pose ainsi

$$N_y \approx \frac{1}{10}\frac{2\pi}{\omega\sqrt{\rho^+}},$$

et N est ensuite choisi en fonction de la valeur limite N_{max}.

Pour toute donnée $\varphi_h \in \mathcal{T}_{h,(i,j)}$ l'erreur d'approximation entre la solution

$$\hat{\psi}^0_{ij,h,N_k,q,M} \in \mathbb{P}_{N_k,q} \otimes \mathcal{T}_h.$$

de $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)})$ et la solution

$$\hat{\psi}^0_{ij,h} = \mathcal{F}_y(\widetilde{N}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}\varphi_h - \widetilde{E}_h\varphi_h)$$

du problème semi-discret $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon,h}_{(i,j)})$ reste là encore une question ouverte. Mais là encore, nous supposerons que pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$, la fonction

$$\widehat{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}\varphi_h = \hat{\psi}^0_{ij,h,N_k,q,M} + \mathcal{F}_y(\widetilde{E}_h\varphi_h) \tag{4.79}$$

où φ_h est la projection orthogonale sur $\mathcal{T}_{h,(i,j)}$ de φ, est une bonne approximation de

$$\widehat{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi = \mathcal{F}_y\big(\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi\big)$$

On note

$$\widetilde{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}\,\varphi_h = \mathcal{F}_y^{-1}\big(\widehat{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}\varphi_h\big) \tag{4.80}$$

Cette hypothèse sera confirmée par des résultats numériques.

4.3.2.2 Validation de l'opérateur d'extension

La résolution de l'équation intégrale $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)})$ étant non standard et son analyse numérique n'étant pas complète, il semble indispensable de valider le calcul de l'approximation des opérateurs NtN $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}$. L'idée est d'appliquer cette résolution à un problème en milieu homogène et d'utiliser des solutions analytiques pour comparer les résultats obtenus.

Ainsi, en remarquant que les fonctions de Hankel du premier type sont les uniques solutions H^1 de l'équation de Helmholtz à coefficients constants dans le domaine extérieur pour une donnée particulière sur le bord, on devrait avoir par définition

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u^e_\varepsilon = \mathrm{H}^{(1)}_n\big(\sqrt{\rho_p(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)}\sqrt{x^2+y^2}\big), \quad u^e_\varepsilon\Big|_{\widetilde{\Sigma}} = \widetilde{N}^{\varepsilon}_{(s,s)}\Big(u^e_\varepsilon\Big|_{\Sigma^i}\Big)$$

puisque la fonction de Hankel est à double symétrie si la source est prise au point $(0,0)$. Les applications numériques sont effectuées pour $n = 0$.

Plaçons-nous donc dans le cas où le coefficient $\rho_p = 1$, la fréquence $\omega = 5$ et la période $L = 1$ ce qui implique

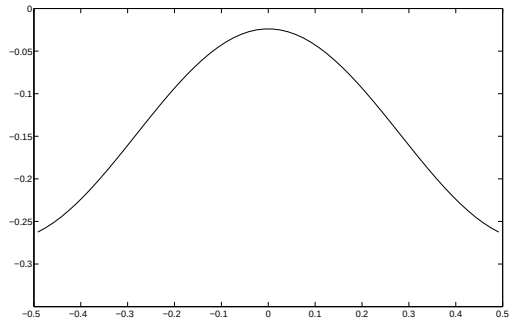
$$\Sigma^i_{(0)} = \big\{(0.5, y),\ y \in [-0.5, 0.5]\big\} \quad \text{et} \quad \widetilde{\Sigma} = \big\{(0.5, y),\ y \in \mathbb{R}\big\}.$$

L'absorption ε prendra les valeurs $\varepsilon = 1,\ 0.5,\ ,0.1,\ 0.05,\ 0.001$ afin de voir l'influence de l'absorption dans la précision de la discrétisation. Nous utilisons dans tout ce qui suit des éléments finis de Raviart-Thomas de plus bas degré pour la discrétisation en espace ($N_y = 60$) et des polynômes de degré 0 pour les fonctions dépendant de la variable duale ($q = 0$ et $N_k = 60$). Dans un premier temps, la méthode des trapèzes est utilisée pour approcher les intégrales intervenant dans la formulation variationnelle $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon,h,N_k,q}_{(i,j)})$ (c'est-à-dire $M = 1$).

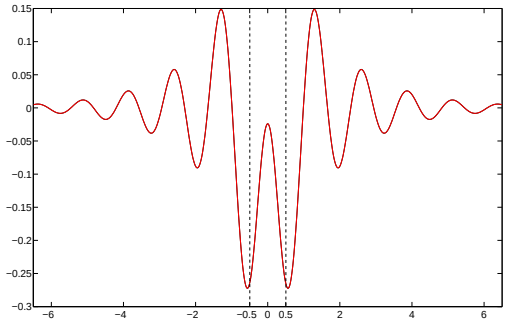
Pour une absorption $\varepsilon = 1$, la figure 4.21 représente sur un intervalle $[-6.5, 6.5]$ en noir la fonction de Hankel et en rouge sa reconstruction $\widetilde{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(s,s)}\,\varphi_h$ (Figure 4.21(b)), où φ_h est la projection sur $\mathcal{T}_h$ de la restriction de la fonction de Hankel sur Σ^i (Figure 4.21(a) est représentée seulement la restriction sur $\Sigma^i_{(0)} \equiv [-0.5, 0.5]$). L'erreur relative sur l'intervalle considéré définie par

$$\frac{\|\widetilde{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(s,s)}\,\varphi_h - \widetilde{N}^{\varepsilon}_{(s,s)}\,\varphi\|_{L^2([-6.5,6.5])}}{\|\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(s,s)}\,\varphi\|_{L^2([-6.5,6.5])}} \tag{4.81}$$

est de $0.11\,\%$ ($\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(s,s)}\,\varphi$ est dans L^2 et du fait des espaces d'approximation choisis $\widetilde{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(s,s)}\,\varphi_h$ également). Les résultats sont donc très satisfaisants. Figure 4.22, sont représentées fonction de



(a) La restriction de la fonction de Hankel à $\Sigma^i_{(0)}$



(b) La fonction de Hankel (en noir) et sa reconstruction sur $\widetilde{\Sigma}$

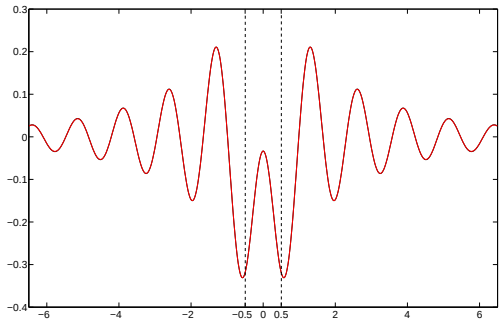
FIG. 4.21: Pour $\varepsilon = 1$, restriction de la fonction de Hankel à $[-0.5, 0.5]$ à gauche à partir de laquelle on calcule son extension sur $[-6.5, 6.5]$ (en rouge) qu'on compare à la fonction de Hankel (en noir). $M = 1$.

Hankel (en noir) et reconstruction (en rouge) pour différentes valeurs de ε, 0.5, 0.1, $0.005\,0.01$ dans le cas où la quadrature est encore choisie d'ordre 1 ($M = 1$). Les erreurs qui sont indiquées sont celles données par la relation (4.81). Il semble que l'approximation calculée $\widetilde{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(s,s)}\,\varphi_h$ se détériore quand ε tend vers 0. La raison est que l'approximation de l'équation intégrale passe par celle du noyau défini par (4.71) et en particulier des termes

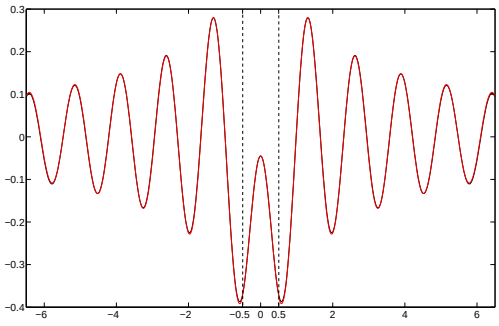
$$\left(\mathbf{I}_h - R_{\varepsilon,h}(k_y)e^{\pm \imath L k_x}\right)^{-1}.$$

Quand ε tend vers 0, il peut exister des k_y pour lesquelles une ou plusieurs valeurs propres de $R_{\varepsilon,h}(k_y)$ tendent vers 1 et donc se rapprochent d'un certain $\exp(\imath\xi(k_y))$. Ainsi, les termes précédents peuvent avoir de grandes variations au voisinage des points $(\pm\xi(k_y), k_y)$. Nous représentons Figure 4.23 la norme du noyau $\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(s,s)}(k_x, k_y)$ dans $\mathcal{L}(L^2(\Sigma^0))$ en fonction de (k_x, k_y) et remarquons qu'elle a de grandes variations autour de certaines courbes[7]. En reliant ce comportement au cas sans absorption étudié Section 4.4, on pourrait même montrer que ces termes tendent

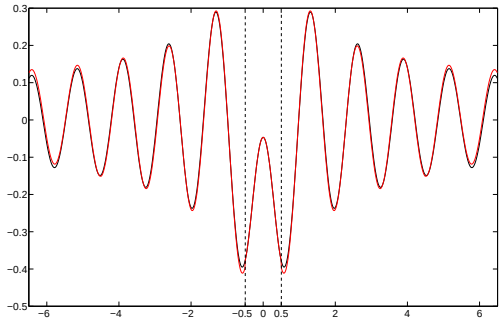
[7] Ces courbes étant l'intersection entre le plan ω^2 et les surfaces de dispersion introduites Section 4.4.



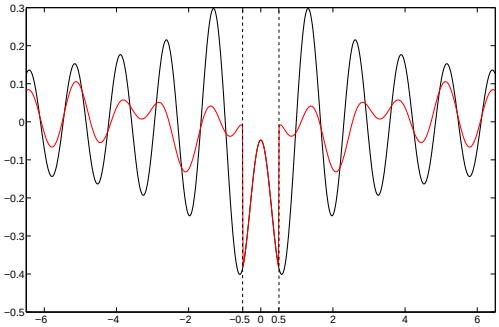
(a) Pour $\varepsilon = 0.5$, erreur = 0.23%



(b) Pour $\varepsilon = 0.1$, erreur = 2.3%



(c) Pour $\varepsilon = 0.05$, erreur = 9%



(d) Pour $\varepsilon = 0.01$, erreur = $60,4\%$

FIG. 4.22: La fonction de Hankel (en noir) et son extension (en rouge) sur $[-6.5, 6.5]$ pour différentes valeurs de ε et pour une quadrature telle que $M = 1$.

quand ε tend vers 0 vers des Dirac. En effet, représentons maintenant Figure 4.24, pour un k_y fixé (ici fixé à 0) et une donnée $\hat{\psi}_h$ fixée, la fonction

$$k_x \mapsto \|\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(s,s)}(k_x, k_y)\ \hat{\psi}_{k_y}\|_{L^2(\Sigma^0)}$$

pour différentes valeurs de ε ($\varepsilon = 1,\ 0.1,\ 0.01$).

Il est donc difficile de rendre compte de ce comportement, en approchant les intégrales par des formules de quadrature d'ordre le plus bas. Figure 4.25, sont représentées fonction de Hankel et reconstruction via l'opérateur $\widetilde{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(s,s)}$ pour des formules de quadrature d'ordre croissant $M = 2,\ 3,\ 4,\ 5$. En augmentant la quadrature, l'approximation de la fonction est meilleure. L'absorption influence donc le choix de la discrétisation : plus ε est petit, meilleure doit être la méthode de quadrature. Il semble également que l'absorption influence le choix de l'espace de discrétisation de W et plus précisément l'espace $P^{N_k,q}$. En effet, pour une absorption et une formule de quadrature fixées, nous augmentons Figure 4.26, l'intervalle de comparaison de la fonction de Hankel et de sa reconstruction à $[-20.5, 20.5]$. Nous remarquons que l'approximation se détériore quelque peu à longue distance, l'erreur d'approximation passant de 7.1% à 13.7%. Ceci s'explique par le comportement à l'infini de la fonction de Hankel. Ainsi quand ε tend vers 0, la trace de la fonction de Hankel sur $\widetilde{\Sigma}$ voit sa norme L^2 croître vers l'infini (pour $\varepsilon = 0$, elle n'est plus

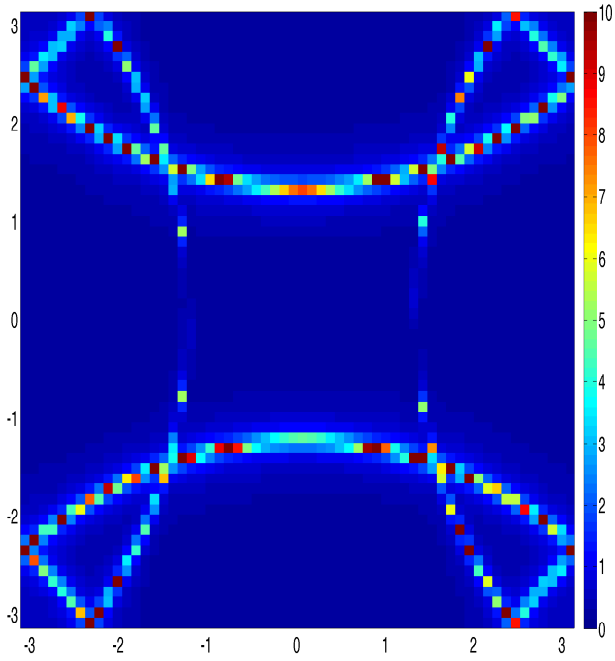


FIG. 4.23: Norme du noyau $\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(s,s)}(k_x,k_y)$ en fonction de (k_x,k_y) pour $\varepsilon = 0.01$.

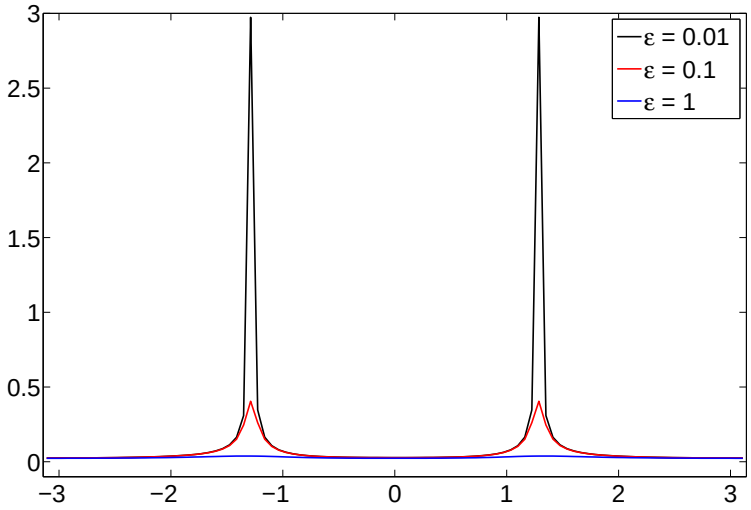
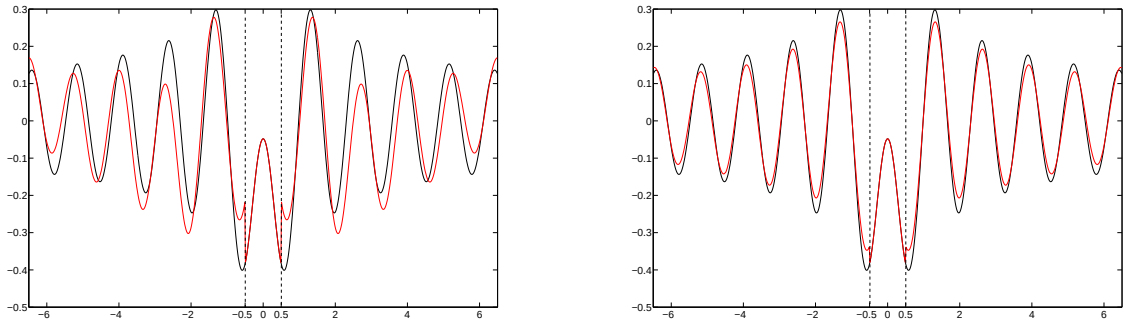
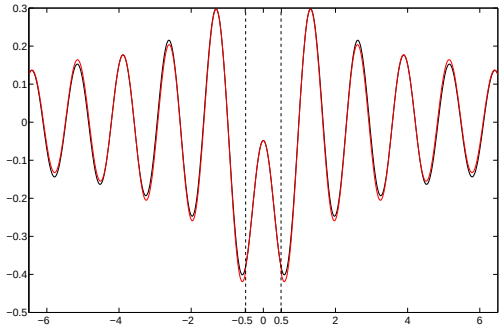


FIG. 4.24: Norme du noyau $\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(s,s)}(k_x,k_y)\hat{\psi}_h$ pour $k_y = 0$ en fonction de k_x pour $\varepsilon = 1$ (en bleu), $\varepsilon = 0.1$ (en rouge) et $\varepsilon = 0.01$ (en noir).

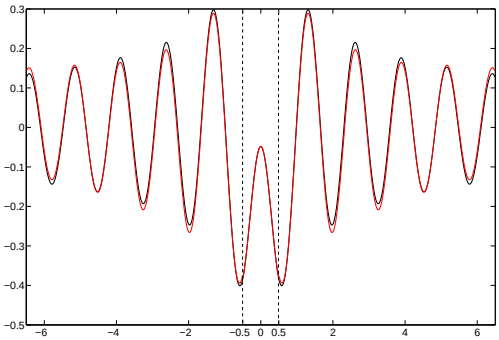


(a) Pour $M = 2$, erreur = 67.1%

(b) Pour $M = 3$, erreur = 10.8%



(c) Pour $M = 4$, erreur = 8.1%



(d) Pour $M = 5$, erreur = 7.1%

FIG. 4.25: La fonction de Hankel (en noir) et son extension (en rouge) sur $[-6.5, 6.5]$ **pour** $\varepsilon = 0.01$ **et pour des formules de quadrature d'ordre croissant** $M = 2,\ 3,\ 4,\ 5$**.**

L^2), ce qui implique que sa TFB est de moins en moins régulière par rapport à la variable duale [8].

En effet, pour l'instant nous avons choisi une formule de quadrature adéquate pour avoir une bonne approximation de l'équation intégrale et du noyau en particulier mais la solution obtenue $\widehat{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}$ est approchée par le produit de fonctions constantes par morceaux en k_y et des fonctions de $\mathcal{T}_h$. Pourtant, on s'attend (voir le cas sans absorption traité Section 4.5) à ce que quand ε tend vers 0, la TFB de $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(s,s)}$ tend vers une fonction qui se comporte comme $1/\sqrt{(k_y - k_0)}$ au voisinage de certains points k_0, fonction que nous cherchons à approcher par des fonctions constantes par morceaux. En effet, représentons maintenant Figure 4.27, pour une donnée φ_h fixée, la fonction

$$k_y \mapsto \|\widehat{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(s,s)} \varphi_h\,(\cdot; k_y)\|_{L^2(\Sigma^0)}$$

pour différentes valeurs de ε ($\varepsilon = 1,\ 0.1,\ 0.01$). Il faudrait donc soit augmenter le nombre d'intervalles N_k soit considérer des polynômes de degré $q > 0$. Ceci constitue une des perspectives de la thèse.

[8] d'après l'annexe B.1, c'est le comportement à l'infini d'une fonction qui implique la régularité de la TFB par rapport à k

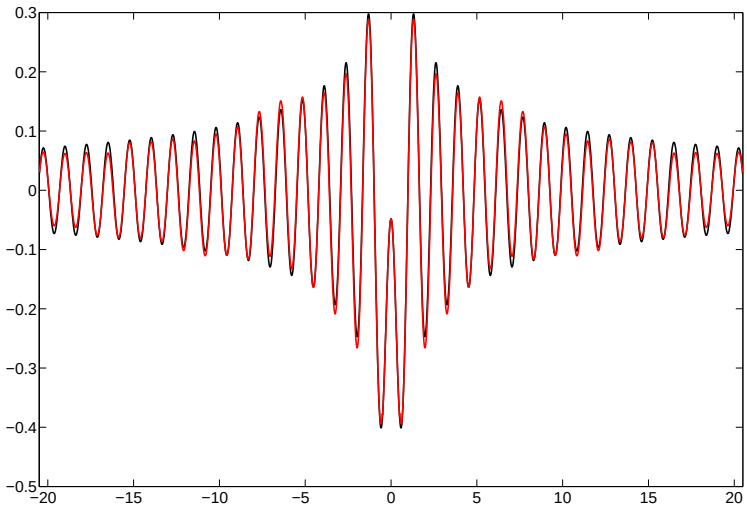


FIG. 4.26: La fonction de Hankel (en noir) et son extension (en rouge) sur $[-20.5, 20.5]$ pour $\varepsilon = 0.01$, pour une formule de quadrature d'ordre $M = 5$. L'erreur d'approximation est ici de 13.7%.

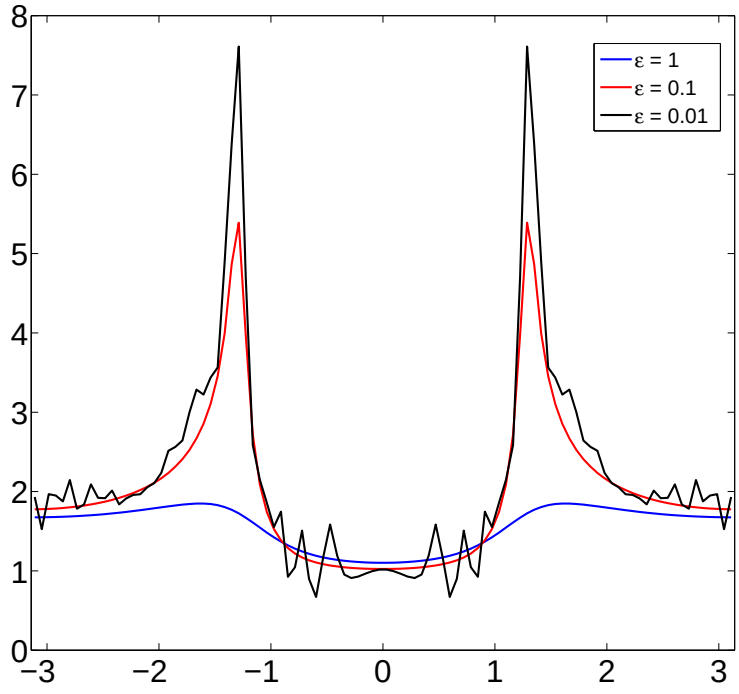


FIG. 4.27: Norme de la fonction $\widehat{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(s,s)}\varphi_h(\cdot;k_y)$ pour une certaine donnée φ_h en fonction de k_y pour $\varepsilon = 1$ (en bleu), $\varepsilon = 0.1$ (en rouge) et $\varepsilon = 0.01$ (en noir).

Retenons donc que pour des petites absorptions, il faut choisir des formules de quadrature d'ordre élevé mais que l'approximation peut être moins bonne à grande distance.

Il est possible enfin de valider tous les opérateurs $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}$, $(i,j) \in \{s,a\}^2$ en utilisant des combinaisons de fonctions de Hankel. Ainsi, si on note

$$\forall (x,y) \in \Omega, \quad H_{x_0,y_0}(x,y) = \mathrm{H}_0^{(1)}\big(\sqrt{\rho_p(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)}\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\big),$$

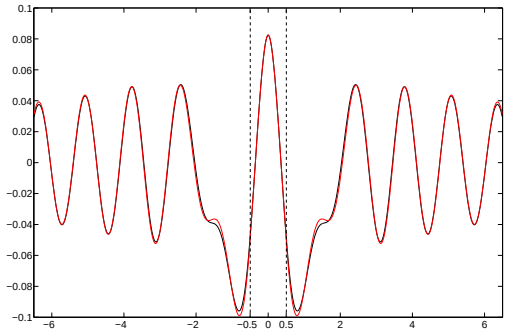
il est facile de voir que

$$\forall (i,j) \in \{s,a\}^2, \quad u^e_{\varepsilon,(i,j)} = H_{L/4,0} + \varepsilon_i\, H_{0,L/4} + \varepsilon_j\, H_{0,-L/4} + \varepsilon_i\varepsilon_j H_{-L/4,0} \quad \in H^1_{(i,j)}(\triangle,\Omega),$$

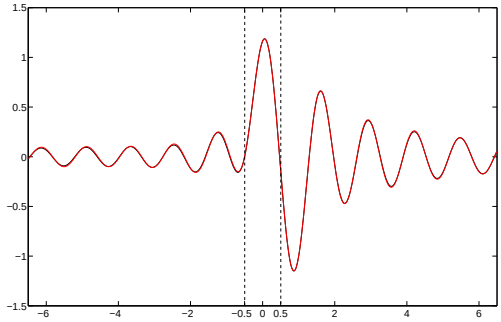
est solution d'un certain problème extérieur et en particulier

$$\forall (i,j) \in \{s,a\}^2, \quad u^e_{\varepsilon,(i,j)}\Big|_{\widetilde{\Sigma}} = \widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\Big(u^e_{\varepsilon,(i,j)}\Big|_{\Sigma^i}\Big).$$

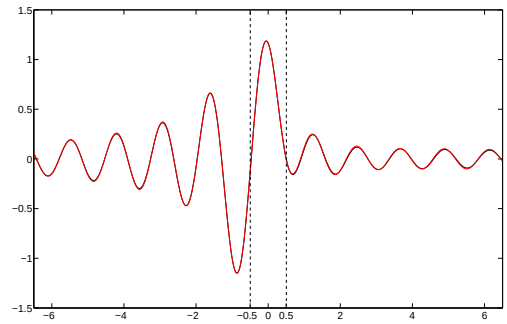
Figure 4.28, sont représentées les comparaisons entre chaque combinaison linéaire de fonctions de Hankel et leurs reconstructions à partir des opérateurs NtN calculés associés.



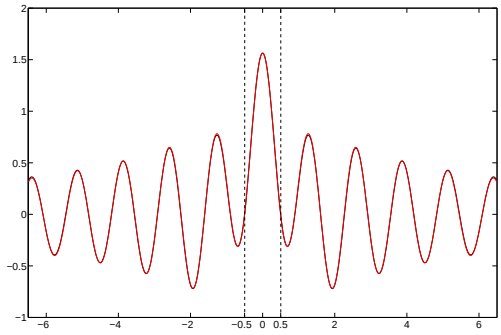
(a) Validation de $\widetilde{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(s,s)}$, erreur = 1.6%



(b) Validation de $\widetilde{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(s,a)}$, erreur = 1.5%



(c) Validation de $\widetilde{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(a,s)}$, erreur = 1.5%



(d) Validation de $\widetilde{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(a,a)}$, erreur = 3%

FIG. 4.28: Validation de tous les opérateurs NtN à partir de combinaisons linéaires de fonctions de Hankel.

4.3.2.3 Transformée de Floquet Bloch inverse

Supposons maintenant avoir choisi une discrétisation pour la variable d'espace et une discrétisation pour la variable duale de façon à ce que l'équation ($\mathcal{Q}_{(i,j)}^{\varphi,\varepsilon,h,N_k,q,M}$) ait pu être résolue (voir Remarque 4.3.6).

Pour pouvoir reconstruire la solution extérieure, nous allons dans la suite être amenés à calculer la transformée de Floquet Bloch inverse de fonctions de $\mathbb{P}_{N,q} \otimes \mathcal{T}_h$ qui nécessite le calcul d'intégrales définies sur l'intervalle borné $]-\pi/L, \pi/L]$. Nous calculerons ces intégrales de manière analytique. Il n'y a donc pas d'erreur d'approximation supplémentaire due à une discrétisation particulière de la TFB inverse.

4.3.3 Résultats numériques

4.3.3.1 Construction de l'opérateur de NtD Λ_ε

Nous avons maintenant tous les outils pour construire l'opérateur de NtD recherché. Une base dans laquelle il semble naturelle d'écrire $\Lambda_{\varepsilon,h}$, est, d'après la Proposition 4.2.27 et la Remarque 4.2.28, une base qui est la concaténation de bases $\{\varphi_{1,(i,j)}, \dots, \varphi_{N_y,(i,j)}\}$ de chaque espace $\mathcal{T}_{h,(i,j)}$:

$$\big\{\varphi_{1,(s,s)}, \dots, \varphi_{N_y,(s,s)}, \varphi_{1,(s,a)}, \dots, \varphi_{N_y,(s,a)}, \varphi_{1,(a,s)}, \dots, \varphi_{N_y,(a,s)}, \varphi_{1,(a,a)}, \dots, \varphi_{N_y,(a,a)}\big\}.$$

On montre en effet que dans le cas des éléments finis de Raviart-Thomas d'ordre le plus bas, la dimension de $\mathcal{T}_{h,(i,j)}$ est égale au quart de la dimension de l'espace. Dans cette base, la matrice $\Lambda_{\varepsilon,h}$ est diagonale par blocs

$$\Lambda_{\varepsilon,h} = \begin{bmatrix} \Lambda_{(s,s)}^{\varepsilon,h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{(s,a)}^{\varepsilon,h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{(a,s)}^{\varepsilon,h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{(a,a)}^{\varepsilon,h} \end{bmatrix} \tag{4.82}$$

où chaque $\Lambda_{(i,j)}^{\varepsilon,h}$ est un opérateur de $\mathcal{T}_{h,(i,j)}$ dans lui-même.

D'après le théorème 4.2.29, chaque $\Lambda_{(i,j)}^{\varepsilon,h}$ est déterminé par la relation

$$\Lambda_{(i,j)}^{\varepsilon,h} = E_{(i,j)} \circ \widetilde{R} \circ \Lambda_{\varepsilon,h}^{\mathrm{H}} \circ \widetilde{N}_{(i,j)}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}$$

Ce n'est cependant pas cette relation qui est en pratique appliquée. En effet, le calcul de $\Lambda_{\varepsilon,h}^{\mathrm{H}}$ nécessite l'application de la TFB et TFB inverse sur $\widehat{\Lambda}_{\varepsilon,h}^{\mathrm{H}}$ qui est calculé directement (voir (4.68)) et la détermination de $\widetilde{N}_{(i,j)}^{\varepsilon,h,N,q,M}$ se fait en appliquant la TFB inverse sur $\widehat{N}_{(i,j)}^{\varepsilon,h,N,q,M}$ qui est déterminé directement à partir de la résolution de l'équation intégrale (voir (4.79)). Pour éviter les calculs successifs de la TFB inverse et la TFB, en utilisant les relations (4.70) et (4.80), notons que :

$$\Lambda_{(i,j)}^{\varepsilon,h} = E_{(i,j)} \circ \widetilde{R} \circ \mathcal{F}_y^{-1} \circ \widehat{\Lambda}_{\varepsilon,h}^{\mathrm{H}} \circ \widehat{N}_{(i,j)}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}$$

soit donc en utilisant (4.68)

$$\forall \varphi_h \in \mathcal{T}_{h,(i,j)}, \quad \Lambda_{(i,j)}^{\varepsilon,h}\varphi_h = E_{(i,j)}\Big(\sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \big(\widehat{\Lambda}_{\varepsilon,h}^{\mathrm{H}} \widehat{N}_{(i,j)}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}\varphi_h\big)(\cdot;k_y)\, dk_y\Big)$$

L'intérêt de cette relation est donc qu'elle ne nécessite qu'un unique calcul de TFB inverse pour $p = 0$ (voir Proposition B.1.5). Notons de plus que nous ne calculons jamais de TFB directe de fonctions qui nécessiterait en pratique une troncature de la somme intervenant dans sa définition.

4.3.3.2 Approximation de la solution

Après avoir calculé l'opérateur NtD discret $\Lambda_{\varepsilon,h}$, nous pouvons résoudre enfin le problème intérieur mixte discret dont la solution $(u^i_{\varepsilon,h}, \mathbf{U}^i_{\varepsilon,h})$ va approcher la solution $(u^i_\varepsilon, \mathbf{U}^i_\varepsilon)$ du problème mixte intérieur, en utilisant les mêmes arguments que Section 2.3.4.

Une approximation $u_{\varepsilon,h}$ du problème de Helmholtz avec absorption $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ s'écrit donc

$$\left| \begin{array}{rcl} u_{\varepsilon,h}\Big|_{\Omega^i} & = & u^i_{\varepsilon,h}, \\ u_{\varepsilon,h}\Big|_{\Omega^e} & = & u^e_{\varepsilon,h}(\varphi^i_h), \quad \text{avec } \varphi^i_h = -\mathbf{U}^i_{\varepsilon,h}\cdot\mathbf{n}\Big|_{\Sigma^i} \end{array} \right.$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à Ω^i.

Pour construire la solution $u^e_{\varepsilon,h}(\varphi^i_h)$ dans Ω^e, nous allons utiliser le même algorithme que celui présenté Section 4.2.7 mais détaillons ici les étapes de calcul.

1. D'après la proposition 4.2.14 φ^i_h s'écrit sous la forme

$$\varphi^i_h = \sum_{(i,j)\in\{s,a\}^2} \varphi_{h,(i,j)} \quad \text{avec} \quad \forall (i,j)\in\{s,a\}^2,\ \varphi_{h,(i,j)} \in \mathcal{T}^i_{h,(i,j)}$$

   et par linéarité :

$$u^e_{\varepsilon,h}(\varphi^i_h) = \sum_{(i,j)\in\{s,a\}^2} u^e_{\varepsilon,h}(\varphi_{h,(i,j)}) \quad \text{avec} \quad \forall (i,j)\in\{s,a\}^2,\ u^e_{\varepsilon,h}(\varphi_{h,(i,j)}) \in H^1_{(i,j)}(\triangle,\Omega^e)\cap\mathcal{M}^e_h$$

2. Pour chaque $(i,j)\in\{s,a\}^2$, on calcule $\widehat{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}\varphi_{h,(i,j)} = \mathcal{F}_y\big(\widetilde{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}\varphi_{h,(i,j)}\big)$ sans jamais calculer $\widetilde{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}\varphi_{h,(i,j)}$.
3. Pour $\hat{\psi}_h = \widehat{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}\varphi_{h,(i,j)}$, on calcule pour tout k_y, la solution du problème de demi-guide $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$ pour la donnée $\hat{\psi}_h(\cdot;k_y)$, en utilisant (4.67). La solution reconstruite cellule par cellule n'est rien d'autre que

$$\big(\mathcal{F}_y\, u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,h}(\psi_h)\big)(\cdot;k_y) \quad \text{pour } \psi_h = \widetilde{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}\varphi_{h,(i,j)}$$

4. On calcule la Transformée de Floquet Bloch inverse de la solution obtenue.
5. On a par définition de $\widetilde{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}$:

$$\forall (i,j)\in\{s,a\}^2, \quad u^e_{\varepsilon,h}(\varphi_{h,(i,j)})\Big|_{\Omega^{\mathrm{H}}} = u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,h}\big(\widetilde{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}\varphi_{h,(i,j)}\big)\Big|_{\Omega^{\mathrm{H}}}.$$

6. Par des arguments de symétrie, on a enfin $\forall (i,j) \in \{s,a\}^2$:

$$u^e_{\varepsilon,h}(\varphi_{(i,j)}) = \begin{cases} u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,h}(\psi_h), & \text{dans } \Omega^{\mathrm{H}} \\ \varepsilon_i\, S_1\left(u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,h}(\psi_h)\right), & \text{dans } S_1\Omega^{\mathrm{H}} \\ \varepsilon_j\, S_{-1}\left(u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,h}(\psi_h)\right), & \text{dans } S_{-1}\Omega^{\mathrm{H}} \\ \varepsilon_i\varepsilon_j\, S_1\circ S_{-1}\left(u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,h}(\psi_h)\right), & \text{dans } S_1\circ S_{-1}\Omega^{\mathrm{H}}. \end{cases}$$

avec $\psi_h = \widetilde{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}\varphi_{h,(i,j)}$

4.3.3.3 Validation de la solution pour le cas du milieu homogène

Commençons par appliquer la méthode de construction de l'opérateur NtD au cas d'un milieu homogène, c'est-à-dire au cas où la fonction ρ_p est constante. Cela nous permettra de vérifier que dans le cas d'une source circulaire, malgré le bord artificiel choisi carré, la solution du problème conserve bien ses propriétés circulaires.

Figure 4.29 est représentée la source f considérée, dont le support est inclus dans $\Omega^i = [-0.5, 0.5]^2$, l'indice $\rho = 1$ dans tout le milieu et nous supposons la période du milieu égale à 1, c'est-à-dire que tous les calculs seront faits dans une cellule de périodicité de longueur 1. En utilisant l'al-

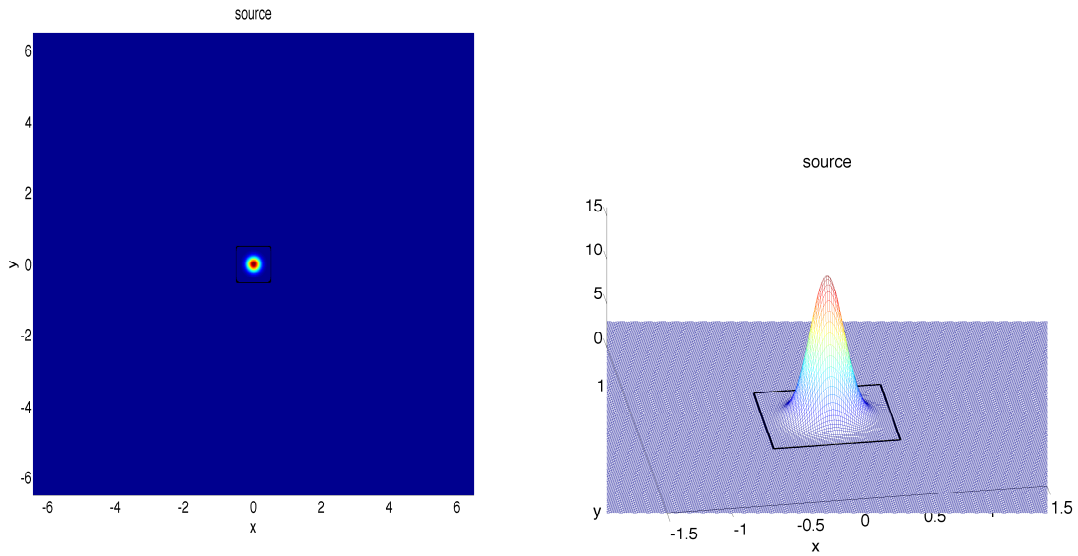


FIG. 4.29: La source f sur $[-6.5, 6.5]^2$ dont le support est inclus dans $\Omega^i = [-0.5, 0.5]^2$

gorithme présenté précédemment, l'opérateur NtD peut être calculé et le problème intérieur résolu. Nous représentons la solution intérieur $u^i_{\varepsilon,h}$ Figure 4.30 dans le cas où la fréquence est $\omega = 5$, l'absorption $\varepsilon = 1$, le pas de discrétisation en espace $h = 1/60$, pour la discrétisation pour les variables duales, les paramètres sont fixés à $N_k = 60$, $q = 0$, $M = 1$ (ils sont choisis de sorte

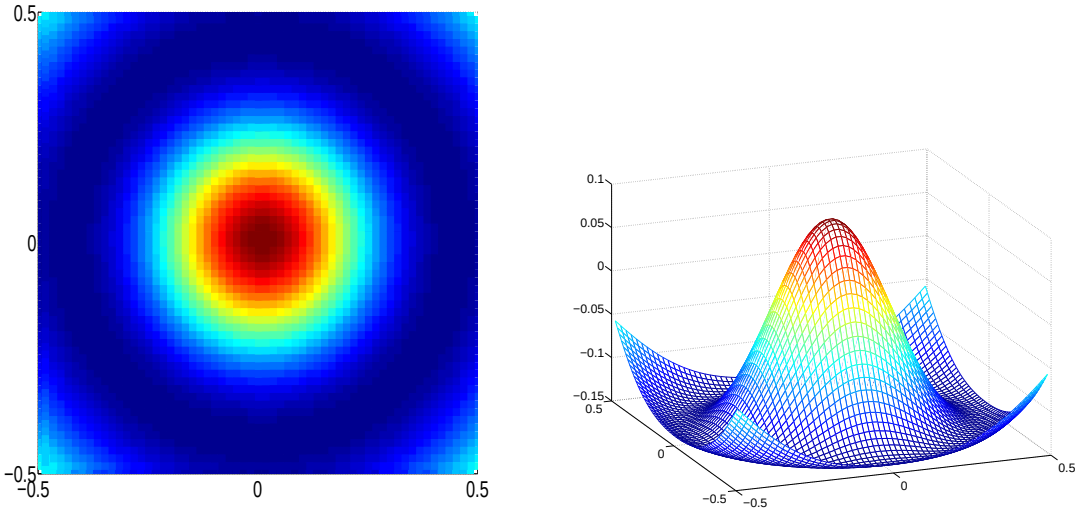
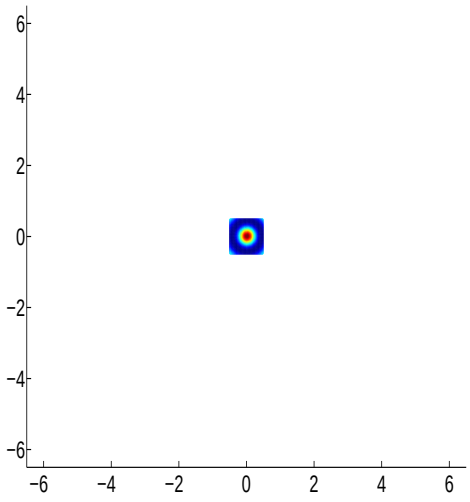


FIG. 4.30: La solution est calculée dans $\Omega^i = [-0.5, 0.5]^2$ en utilisant la construction de l'opérateur NtD calculé $\Lambda_{\varepsilon,h}$

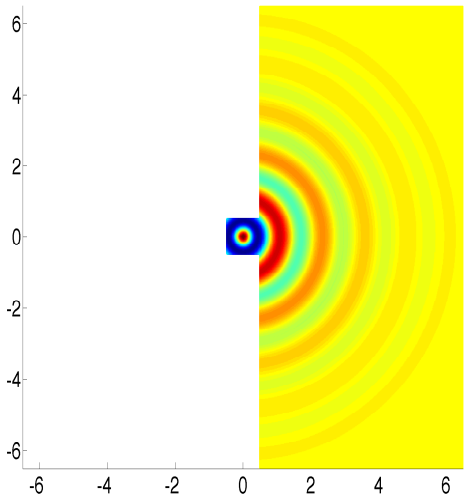
que les tests de validation des opérateurs NtN de la section 4.3.2.2 soient bons). Ainsi, même si le bord artificiel est choisi carré, on retrouve la symétrie de révolution que doit avoir la solution.

Enfin, pour reconstruire la solution, l'algorithme de la section 4.3.3.2 est utilisé. Notons que dans ce cas, la source étant à double symétrie, la solution intérieure $u^i_{\varepsilon,h}$ l'est également (représentée de nouveau Figure 4.31(a)) et en particulier sa trace φ^i_h. Les sommes dans l'algorithme se restreignent donc au terme en (s,s). Seul l'opérateur $\widehat{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(s,s)}$ intervient dans ce cas et après TFB inverse, on calcule la solution de demi-espace u^{H} qui dans ce cas est la restriction de la solution extérieure au demi-espace droite (voir Figure 4.31(b)). Comme la solution extérieure est également à double symétrie, après application de la symétrie par rapport à la droite $(y = x)$, on en déduit la restrictions de u^e au demi-espace haut (voir Figure 4.31(c)). L'égalité de ces deux restrictions dans le quadrant haut-droit (voir Figure 4.31(d)) est précisément dû au fait que l'opérateur NtN $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(s,s)}$ est solution de l'équation affine $\mathcal{E}^{\varepsilon}_{(s,s)}$. Après application de la symétrie S_{-1}, on en déduit la solution du problème représentée Figure 4.32, ici sur $[-6.5, 6.5]^2$. Là encore, nous retrouvons bien la symétrie de révolution d'une solution d'un problème posé en milieu homogène. Présentons maintenant un cas où la source n'est pas à double symétrie (Figure 4.33). Dans ce cas, après construction de l'opérateur NtD $\Lambda_{\varepsilon,h}$ nécessitant le calcul de tous les opérateurs $\Lambda^{\varepsilon,h}_{(i,j)}$, la solution est calculée est représentée Figure 4.34.

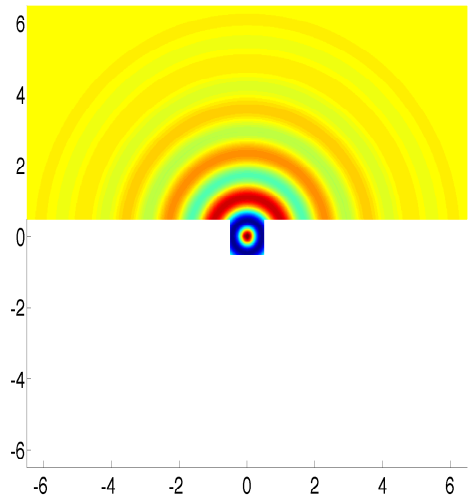
Pour reconstruire la solution à l'extérieur de Ω^i, on récupère la trace φ^i_h de u^i_h (voir Figure 4.35(a)) et on la décompose comme la somme des fonctions $\varphi^i_{h,(i,j)}$ (étape 1 de l'algorithme). Pour chaque donnée, grâce à l'opérateur $\widehat{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}$, une TFB inverse et en sommant toutes les contributions (étapes 1 et 6) on peut reconstruire la restriction de la solution dans le demi-espace de droite



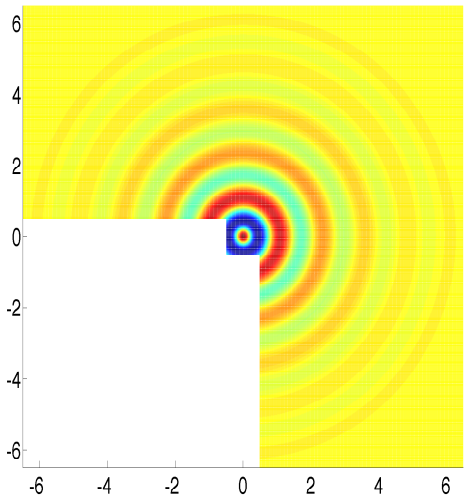
(a) Sa restriction est égale à la solution intérieure $u^i_{\varepsilon,h}$



(b) Sa restriction à ce demi-espace est déduite d'un problème de demi-espace



(c) Sa restriction à ce demi-espace est déduite par symétrie



(d) Les restrictions correspondent grâce à $\mathcal{E}^{\varepsilon}_{(s,s)}$

FIG. 4.31: Construction de la solution dans le domaine $[-6.5, 6.5]^2$ dans le cas où la source est celle de la Figure 4.29.

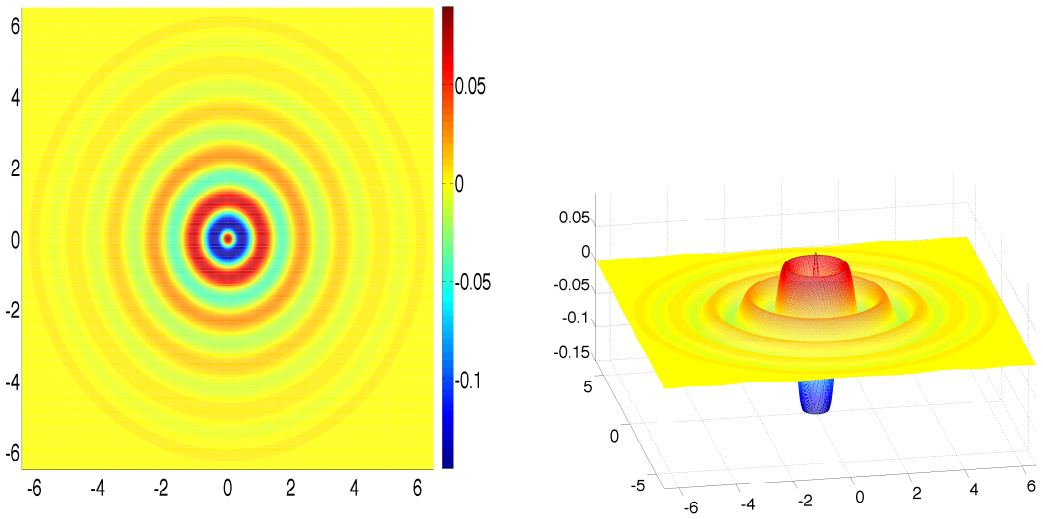


FIG. 4.32: La solution est calculée dans $[-6.5, 6.5]^2$ dans le cas où la source est celle de la Figure 4.29.

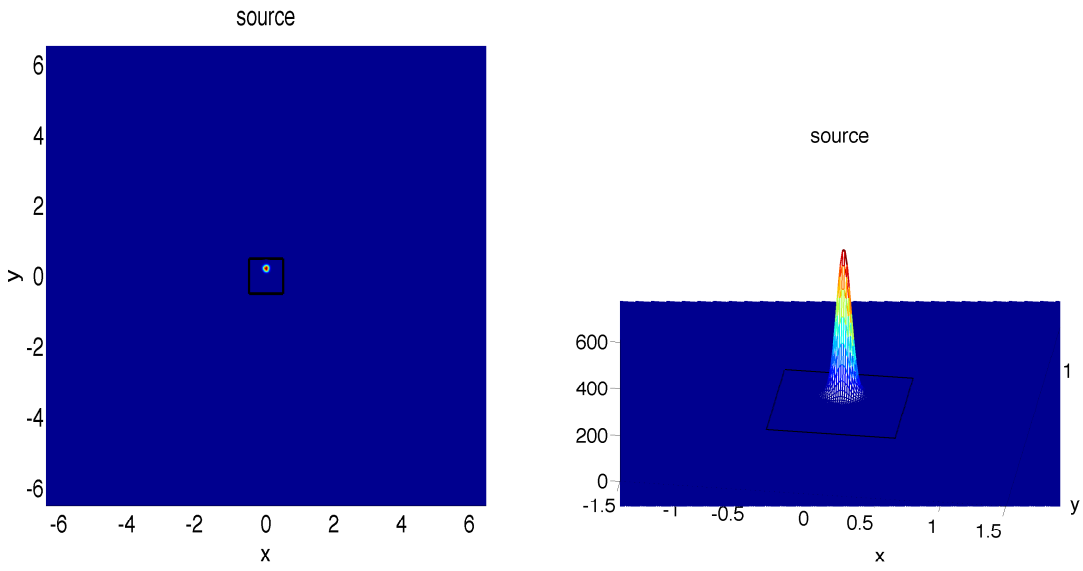


FIG. 4.33: La source f sur $[-6.5, 6.5]^2$ dont le support est inclus dans $\Omega^i = [-0.5, 0.5]^2$

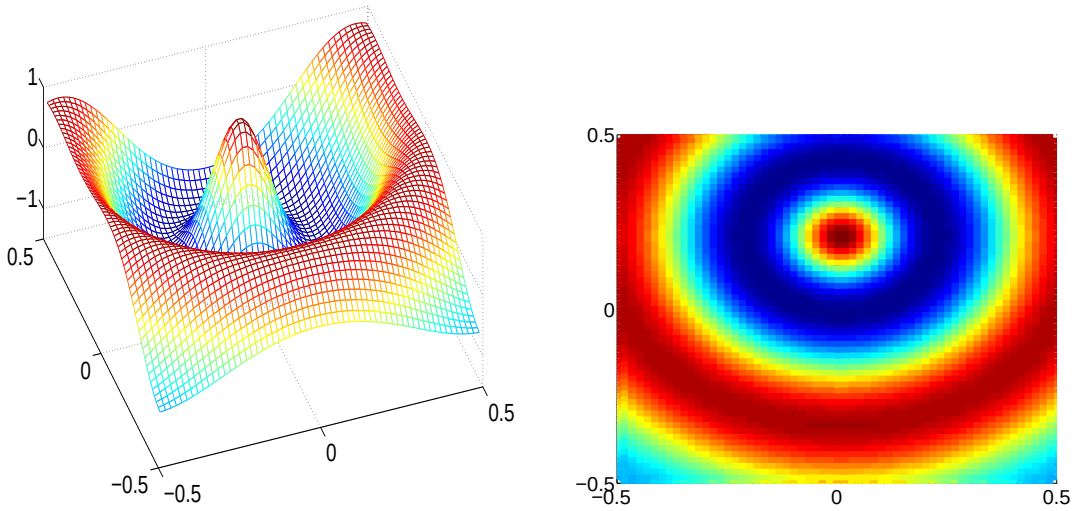
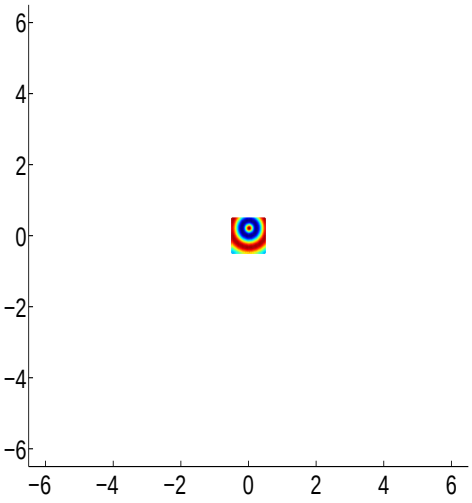


FIG. 4.34: La solution est calculée dans $\Omega^i = [-0.5, 0.5]^2$ dans le cas où la source est celle de la Figure 4.33 en utilisant la construction de l'opérateur NtD $\Lambda_{\varepsilon,h}$

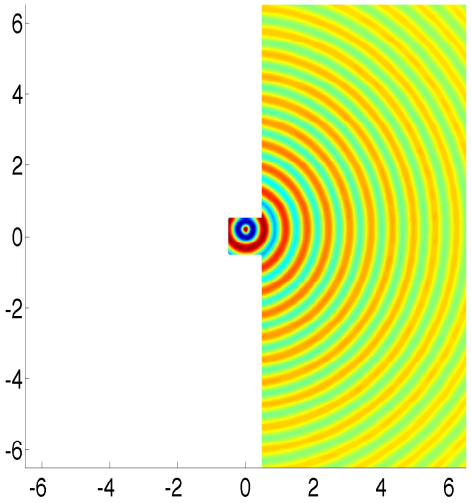
(voir Figure 4.35(b)). En appliquant symétrie ou antisymétrie par rapport à la droite $(y = x)$ aux quatre contributions, on en déduit la restriction de la solution au demi-espace haut (voir Figure 4.35(b)). L'égalité de ces deux restrictions au quadrant haut droit (voir Figure 4.35(c)) est due ici aux quatres équations affines $(\mathcal{E}^{\varepsilon}_{(i,j)})$ dont les opérateurs NtN sont solutions. Après application de symétrie ou antisymétrie par rapport à la droite $(y = -x)$, on en déduit la solution du problème représentée Figure 4.36, ici sur $[-6.5, 6.5]^2$. Même si le bord artificiel a été choisi de sorte que la source ne soit plus à double symétrie, c'est-à-dire que le centre de la source ne soit pas localisé au centre du domaine Ω^i, nous retrouvons les propriétés attendues pour la solution : elle présente une symétrie de révolution, le centre étant celui de la source.

4.3.4 Applications numériques

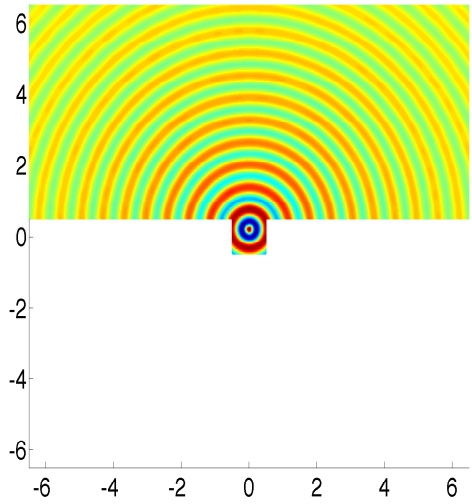
Nous illustrons enfin notre démarche par des résultats numériques obtenus dans le cas où les données ρ et f sont représentées respectivement Figures 4.37(a) et 4.37(b). Les supports compacts de $\rho - \rho_p$ et f sont inclus dans $\Omega^i = [-0.5, 0.5]^2$ et la période de la fonction ρ_p est égale à 1. Les solutions obtenues dans le cas où $\omega = 5$ et $\varepsilon = 1$ dans un premier temps (Figure 4.38(a)) et $\omega = 10$ et $\varepsilon = 0.1$ dans un second temps (Figure 4.38(b)) sont représentées sur le domaine $[-6.5, 6.5]^2$. Enfin, en choisissant une source f qui n'est pas à double symétrie (celle par exemple de la figure 4.33), on calcule la solution obtenue toujours pour le même milieu mais pour la fréquence $\omega = 10$ et une absorption $\varepsilon = 0.1$ (voir figure 4.39). Une manière de valider tous ces calculs en milieu périodique est de vérifier l'invariance de la solution par rapport au domaine Ω^i choisi. Ainsi, en choisissant un domaine Ω^i dont la taille est un multiple plus grand que 1, l'opérateur



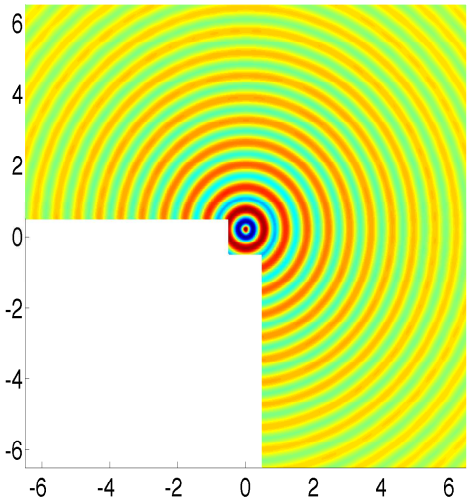
(a) Sa restriction est égale à la solution intérieure $u^i_{\varepsilon,h}$.



(b) Sa restriction à ce demi-espace est déduite de la somme de 4 solutions de demi-espace.



(c) Sa restriction à ce demi-espace est déduite par symétrie ou antisymétrie des 4 solutions.



(d) Les restrictions correspondent grâce aux 4 équations $\mathcal{E}^{\varepsilon}_{(i,j)}$.

FIG. 4.35: Construction de la solution dans le domaine $[-6.5, 6.5]^2$ dans le cas où la source est celle de la Figure 4.33.

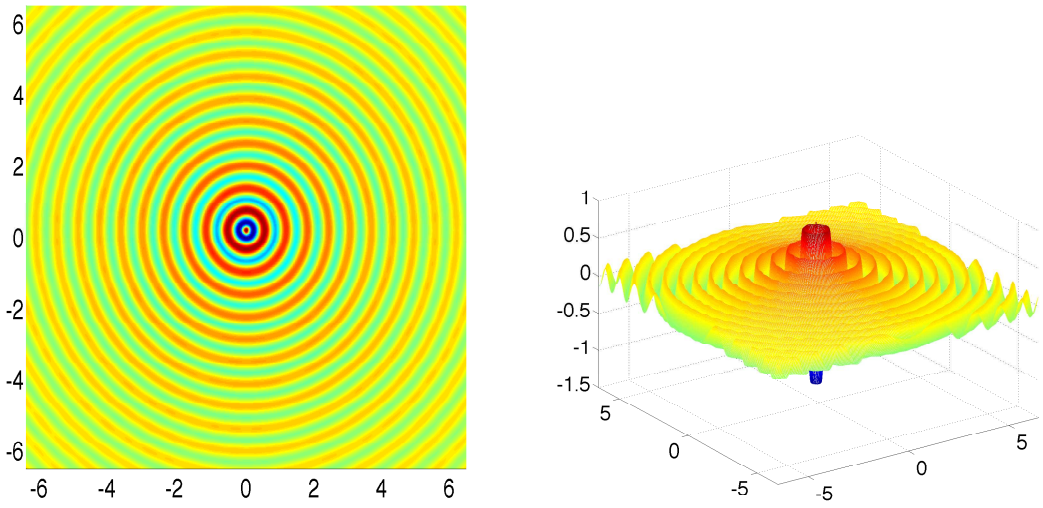
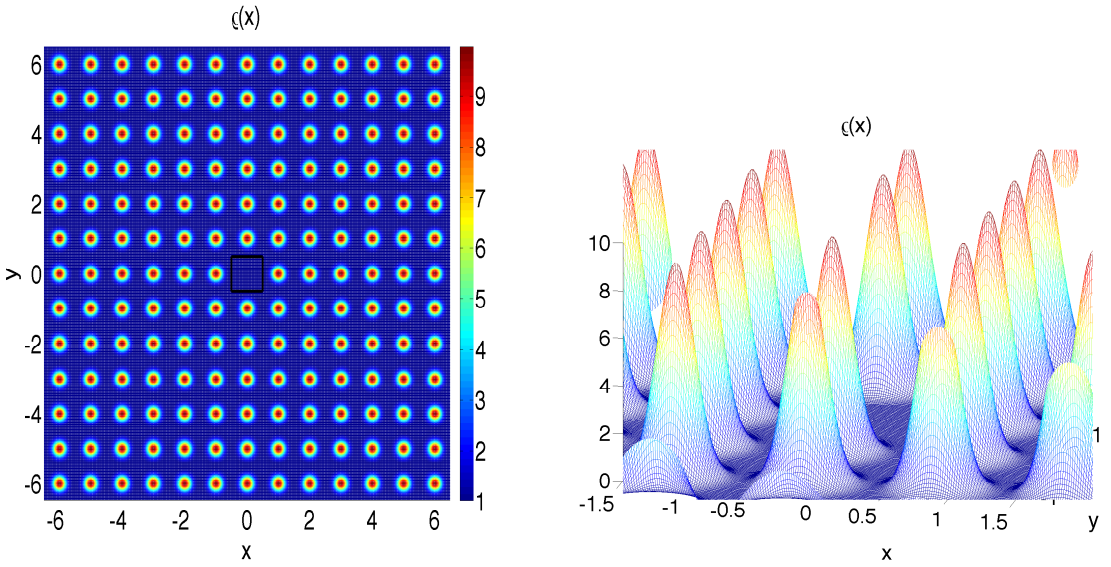
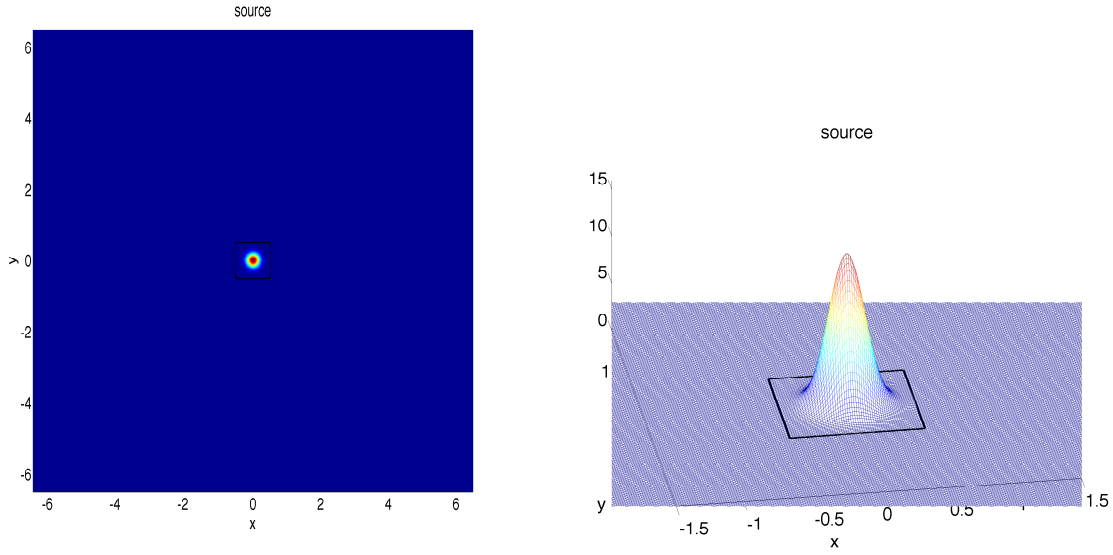


FIG. 4.36: La solution est calculée dans $[-6.5, 6.5]^2$ dans le cas où la source est celle de la Figure 4.33.

NtD est évidemment différent mais la solution doit être inchangée. Nous avons considéré dans ce chapitre pour des questions de simplicité des domaines Ω^i qui sont de la taille de la cellule de périodicité. Nous renvoyons donc le lecteur à l'annexe A.2 dans lequel est traité le cas général et dans lequel nous représentons la solution des problèmes précédents pour des domaines Ω^i différents (se reporter à la section A.2.2 et aux figures A.4, A.5 et A.6).

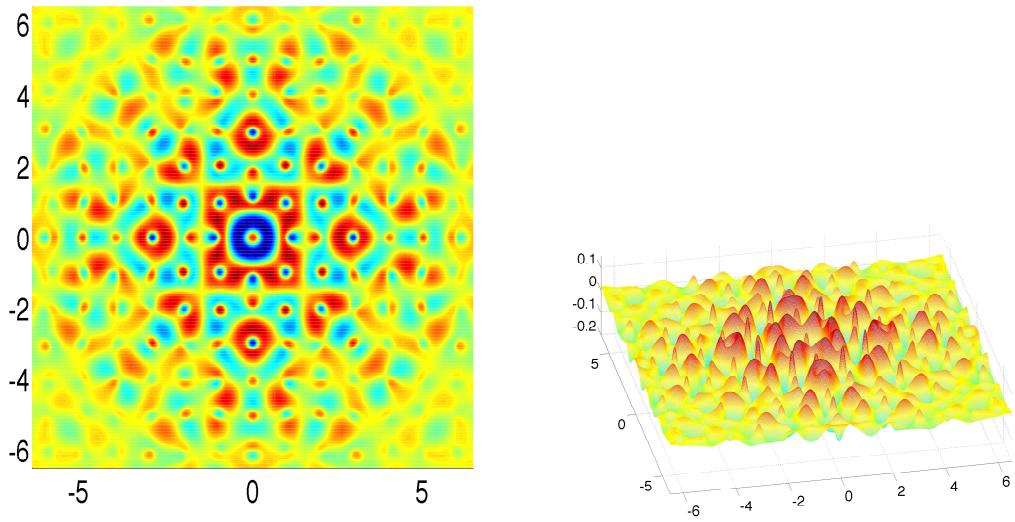


(a) Le milieu périodique localement perturbé

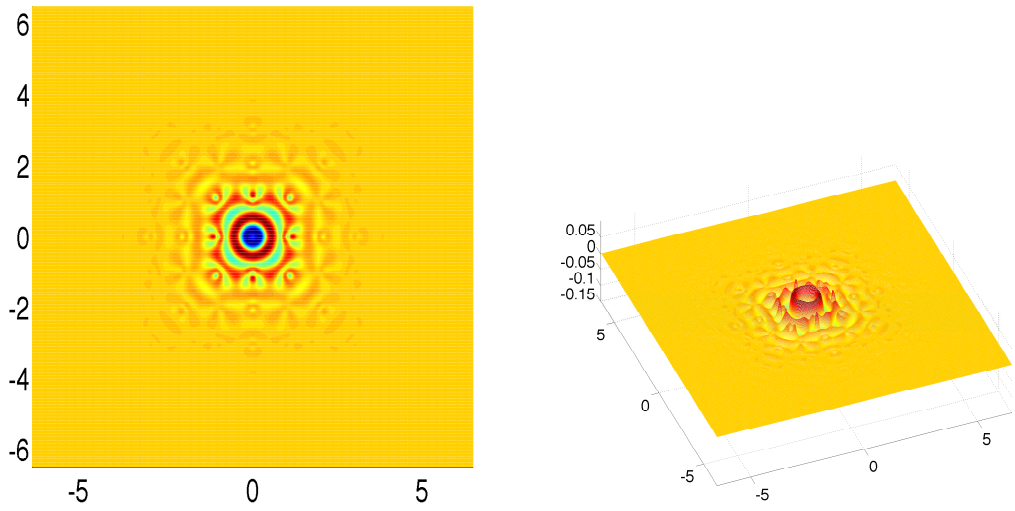


(b) La source à support compact

FIG. 4.37: La donnée ρ sur $[-6.5, 6.5]^2$ et la source f sur $[-6.5, 6.5]^2$.



(a) La solution pour $\omega = 5$ et $\varepsilon = 0.1$



(b) La solution pour $\omega = 10$ et $\varepsilon = 1$

FIG. 4.38: Les solutions obtenues sur $[-6.5, 6.5]^2$ dans le cas où la donnée ρ est celle de la figure 4.37(a) et la source f est celle de la figure 4.37(b).

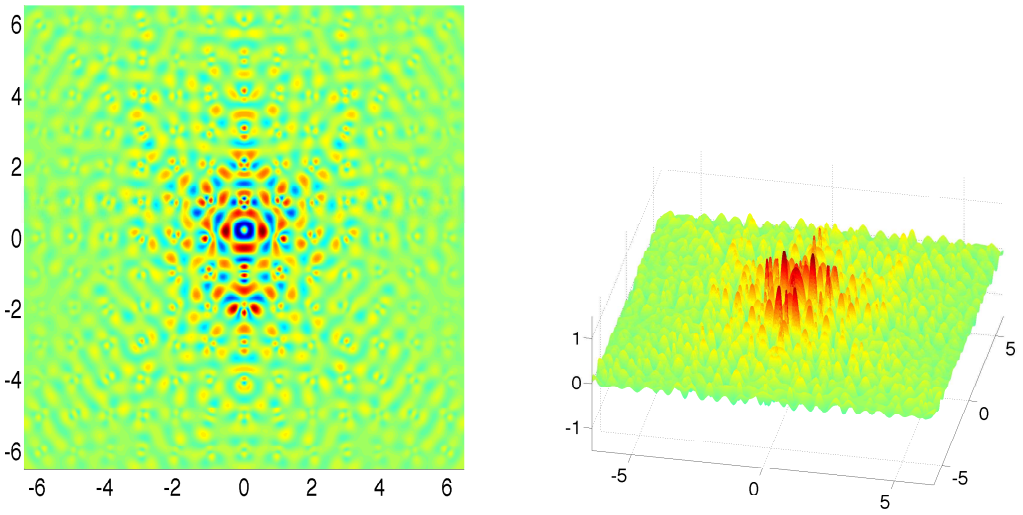


FIG. 4.39: Les solutions obtenues sur $[-6.5, 6.5]^2$ dans le cas où la donnée ρ est celle de la figure 4.37(a), la source f est celle de la figure 4.33, $\omega = 10$ et $\varepsilon = 0.1$.

4.4 Principe d'absorption limite : quelques éléments d'analyse

La section 4.2 nous a permis de construire des conditions aux bords de type NtD associées à l'équation de Helmholtz avec absorption $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Nous avons montré en particulier que la restriction à Ω^i de l'unique solution H^1, u_ε, du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ posé dans Ω est en fait l'unique solution H^1, u_ε^i, du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ posé dans Ω^i avec les conditions aux bords de NtD. On peut reconstruire la solution u_ε en dehors de Ω^i, c'est-à-dire sur tout Ω, à partir de la solution u_ε^i et de l'algorithme présenté Section 4.2.7.

Revenons maintenant au problème de Helmholtz sans absorption $(\mathcal{P})$ posé dans Ω et au problème $(\mathcal{P}^i)$ posé en domaine borné Ω^i. Le problème $(\mathcal{P})$, posé sur un domaine infini dans les deux directions, ne suffit pas à lui seul à définir une solution « raisonnable ».

Dans le cas d'un milieu homogène localement perturbé, on peut montrer que la famille de solutions $\{u_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ des problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ a une limite u dans H^1_{loc}, elle-même solution du problème de Helmholtz sans absorption $(\mathcal{P})$. La démonstration se fonde sur l'expression explicite de la fonction de Green des problèmes avec et sans absorption. Dans ce cas, on peut même déterminer le comportement à l'infini de la solution sous forme d'une onde sphérique en $\mathcal{O}(1/\sqrt{r})$ se propageant vers l'infini. Il s'avère de plus que le théorème de Rellich assure l'unicité de la solution ayant un tel comportement à l'infini. Ce comportement à l'infini est imposé par une condition de radiation, connue sous le nom de condition de Sommerfeld, qui permet donc de sélectionner la solution « sortante » parmi toutes les solutions du problème.

Dans un milieu périodique général, comme nous l'avons expliqué dans les chapitres précédents, la notion de solution physique dans des milieux périodiques est beaucoup moins intuitive et nous n'avons pas une interprétation physique simple de celle-ci, contrairement au cas des mi-

lieux constants où les solutions « physiques » sont nécessairement « sortantes », c'est-à-dire qu'elles se propagent vers l'infini, par opposition aux solutions « entrantes » qui, elles, viendraient de l'infini. Cependant, même si ce comportement à l'infini n'est pas connu, reste la caractérisation de la solution « physique » comme la limite, si elle existe et dans un sens à préciser, de la famille de solutions $\{u_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ des problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Plutôt que d'étudier le passage à la limite de problèmes posés en domaine infini avec des coefficients périodiques localement perturbés, notre méthode passe par la caractérisation de la solution « physique » à partir de la limite Λ, si elle existe, de la famille d'opérateurs NtD $\{\Lambda_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$. En plus de savoir que la solution « physique » existe, nous pourrions la construire en utilisant notre démarche.

Dans le cas du plan, cette démarche présente plus de difficultés que dans les chapitres précédents. Rappelons les hypothèses et les résultats des chapitres précédents.

1. Dans le cas monodimensionnel, nous avons montré qu'excepté pour une quantité dénombrable de fréquences, la famille $\{u_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ des solutions des problèmes avec absorption a bien une limite dans H^1_{loc}, que cette limite est bien solution du problème sans absorption et nous avons, enfin, établi une condition[9], liée aux propriétés spectrales de l'opérateur périodique 1D, pour caractériser cette limite. L'idée de la démarche a été de montrer que les coefficients NtD $\{\lambda^\pm_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ ont bien une limite $\lambda^\pm$ puis que la famille $\{u^i_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ de solutions des problème intérieur a bien une limite dans H^1 qui est solution du problème intérieur sans absorption. Cette étude est la plus aboutie mais inutile de rajouter qu'elle est liée à la simplicité qu'offre le problème 1D.
2. Dans le cas du guide, nous avons montré qu'excepté pour une quantité dénombrable de fréquences, la famille $\{u_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ des solutions des problèmes avec absorption a bien une limite dans H^1_{loc} et que cette limite est bien solution du problème sans absorption à condition que la donnée ρ_p vérifie des hypothèses supplémentaires : elle doit être symétrique par rapport au milieu de la cellule (hypothèse (H3)) et elle est constante près des bords verticaux de la cellule (hypothèse (H4)). Subsistent quelques questions ouvertes concernant la caractérisation de la solution. L'idée de la démarche est la même que dans le cas 1D.

Nous souhaitions élargir cette démarche au cas du plan : nous cherchons donc à caractériser la solution « physique » de l'équation de Helmholtz $(\mathcal{P})$ comme la limite, dans un sens à définir, de la famille des solutions $\{u_\varepsilon,\ \varepsilon\}$ des problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Les idées sont donc :

1. définir la « bonne » solution du problème extérieur, pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Sigma^i)$:

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u^e - \rho_p(\mathbf{x})\,\omega^2\,u^e &=& 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^e & \\ \dfrac{\partial u^e}{\partial \mathbf{n}^e} &=& \varphi \quad \text{sur} \quad \Sigma^i, & \end{array}\right. \qquad (\mathcal{P}^e)$$

   avec $\mathbf{n}^e$ la normale extérieure de Ω^e, comme la limite, à préciser, de la famille de solutions $\{u^e_\varepsilon(\varphi),\ \varepsilon > 0\}$ des problèmes $(\mathcal{P}^e_\varepsilon)$;

2. définir un opérateur de type Neumann-to-Dirichlet Λ comme la limite de la famille des opérateurs de NtD pour le problème avec absorption $\{\Lambda_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$,

[9] équivalente à la condition d'onde sortante du cas homogène

3. montrer que le problème $(\mathcal{P}^i)$ posé dans Ω^i avec des conditions de NtD

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u^i - \rho(\mathbf{x})\,\omega^2\,u^i &=& f & \text{dans} \quad \Omega^i, \\ u^i - \Lambda\,\dfrac{\partial u^i}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 & \text{sur} \quad \Sigma^i, \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}^i$}$$

avec $\mathbf{n}^i$ la normale extérieure de Ω^i, est bien posé, sous certaines conditions ;

4. montrer que l'unique solution u^i de $(\mathcal{P}^i)$ est la limite quand ε tend vers 0 de la famille des solutions $(u^i_\varepsilon)_\varepsilon$ des problèmes $(\mathcal{P}^i_\varepsilon)$.

Il suffit ensuite de définir la solution « physique » de $(\mathcal{P})$, limite de la famille des solutions $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ comme suit :

$$\left|\begin{array}{ll} u = u^i, & \text{dans } \Omega^i \\ u = u^e\big(\varphi^i\big), & \text{dans } \Omega^e, \quad \text{avec } \varphi^i = -\dfrac{\partial u^i}{\partial \mathbf{n}^i}\Big|_{\Sigma^i} \end{array}\right.$$

où u^i est l'unique solution du problème $(\mathcal{P}^i)$, pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Sigma^i)$ $u^e(\varphi)$ est la solution « physique » de $\mathcal{P}^e$.

Nous verrons qu'ici, cette technique d'absorption limite pour traiter le cas de l'équation de Helmholtz sans absorption dans un milieu périodique 2D localement perturbé présente encore plus de difficultés que dans le cas du guide : subsistent un certain nombre de questions ouvertes dans ce cas. Nous nous limiterons donc à énoncer les difficultés rencontrées et à donner quelques éléments d'analyse. Nous présenterons en particulier les deux points de vue adoptés pour proposer une démonstration. Le premier consiste à étudier le passage à la limite de tous les opérateurs qui interviennent dans la caractérisation de Λ_ε, quant au deuxième, il généralise les idées utilisées dans le cas du guide qu'on retrouve également dans [Murata & Tsuchida (2006)], la démarche étant la même que celle utilisée dans [Bamberger *et al.* (1988)] ou dans [Wilcox (1967, 1978)].

Notons enfin que même si le principe d'absorption limite n'a pas été démontré dans le cas continu, nous avons mis en place un principe d'absorption limite discret.

4.4.1 Spectre de l'opérateur périodique

Comme nous avons montré Chapitres 1 et 3, il existe un lien entre le principe d'absorption limite et le spectre de l'opérateur à coefficient périodique ρ_p. Commençons par introduire quelques notations utiles liées au spectre de l'opérateur périodique.

On note

$$A = -\frac{1}{\rho_p}\triangle$$

l'opérateur de $L^2(\Omega, \rho_p\,dx\,dy)$ dans $L^2(\Omega)$ de domaine de définition

$$D\big(A\big) = H^1(\triangle, \Omega).$$

Soit Ω^{G} un guide parfaitement périodique défini par

$$\Omega^{\mathrm{G}} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{\mathcal{C} + (nL, 0)\}$$

où la cellule de périodicité de référence est toujours définie par

$$\mathcal{C} = \left]-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right[^2.$$

On note encore Σ^+ et Σ^- les bords hauts et bas de Ω^{G}.

Pour k_y fixé, on note

$$A(k_y) = -\frac{1}{\rho_p}\triangle$$

l'opérateur de $L^2(\Omega^{\mathrm{G}}, \rho_p\, dx\, dy)$ dans $L^2(\Omega^{\mathrm{G}})$ de domaine de définition

$$D\big(A(k_y)\big) = \big\{u \in H^1(\triangle, \Omega^{\mathrm{G}}),\ u\big|_{\Sigma^-} = e^{\imath k_y L} u\big|_{\Sigma^+},\ \frac{\partial}{\partial y}u\big|_{\Sigma^-} = e^{\imath k_y L}\frac{\partial}{\partial y}u\big|_{\Sigma^+}\ \big\},$$

On peut alors montrer (voir par exemple [Kuchment (1993)]) que

$$\sigma(A) = \bigcup_{k_y\in]-\pi/L,\pi/L]} \sigma\big(A(k_y)\big)$$

Posons enfin pour k_x et k_y fixé dans $]-\pi/L, \pi/L]$,

$$A(k_x, k_y) = -\frac{1}{\rho_p}\triangle \tag{4.83}$$

l'opérateur de $L^2(\mathcal{C}, \rho_p\, dx\, dy)$ dans $L^2(\mathcal{C})$ de domaine de définition

$$D\big(A(k_x, k_y)\big) = \Big\{u \in H^1(\triangle, \mathcal{C}),\ \begin{vmatrix} u\big|_{\Sigma_0^-} = e^{\imath k_y L} u\big|_{\Sigma_0^+},\ \frac{\partial}{\partial y}u\big|_{\Sigma_0^-} = e^{\imath k_y L}\frac{\partial}{\partial y}u\big|_{\Sigma_0^+} \\ u\big|_{\Gamma_0} = e^{\imath k_x L} u\big|_{\Gamma_1},\ \frac{\partial}{\partial x}u\big|_{\Gamma_0} = e^{\imath k_x L}\frac{\partial}{\partial x}u\big|_{\Gamma_1} \end{vmatrix}\ \Big\}, \tag{4.84}$$

où Σ_0^+ et Σ_0^- sont les bords haut et bas de $\mathcal{C}$ et Γ_0 et Γ_1 sont ses bords gauche et droit. Le spectre de l'opérateur $A(k_x, k_y)$ autoadjoint positif et à résolvante compacte est purement discret constitué de la suite

$$0 < \lambda_1(k_x, k_y) \leq \lambda_2(k_x, k_y) \leq \cdots \leq \lambda_n(k_x, k_y) < +\infty$$

telle que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n(k_x, k_y) = +\infty$. De plus, il existe une base hilbertienne de $L^2(\mathcal{C}, \rho_p\, dx\, dy)$ constituée de vecteurs propres $(\varphi_n(k_x, k_y))_n$:

$$A(k_x, k_y)\varphi_n(k_x, k_y) = \lambda_n(k_x, k_y)\varphi_n(k_x, k_y),$$

chaque vecteur propre appartenant à $H^1_k(\mathcal{C})$ (voir la section B.1.3 pour la définition).

Les courbes de dispersion $k_x \mapsto \lambda_n(k_x, k_y)$ ont les mêmes propriétés que celles énoncées Section 3.2.2.2. On peut montrer également (voir [Kuchment (1993)]) que

$$\sigma\big(A(k_y)\big) = \bigcup_{k_x\in]-\pi/L,\pi/L]} \sigma\big(A(k_x, k_y)\big)$$

et donc

$$\sigma(A) = \bigcup_{(k_x,k_y)\in]-\pi/L,\pi/L]^2} \sigma\big(A(k_x,k_y)\big)$$

enfin les fonctions λ_n mais cette fois-ci considérées comme des fonctions des deux variables (k_x,k_y), $(k_x,k_y)\mapsto\lambda_n(k_x,k_y)$, sont appelées surfaces de dispersion de A.

REMARQUE 4.4.1 (ENSEMBLES RÉSOLVANTS)
On déduit notamment de ces égalités que si $R(A)$ est l'ensemble résolvant de A alors

$$\forall k_y \in]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}], \quad R(A)\subset R\big(A(k_y)\big)$$

Enfin, pour tout k_y, on définit l'ensemble ci dessous $\sigma_0(k_y)$, à l'image de la définition 3.2.11.

DÉFINITION 4.4.2 (L'ENSEMBLE $\sigma_0(k_y)$)
Soit pour $k_y\in]-\pi/L,\pi/L]$ fixé, $\sigma_0(k_y)$, l'ensemble des $\lambda\in\mathbb{R}^+$ qui satisfont l'une des deux conditions suivantes :

1. *λ est un extremum local d'un certain $\lambda_j(\cdot,k_y)$,*
2. *il existe un $k\in]-\pi,\pi[$ et un $n\neq m$ tel que $\lambda_n(k,k_y)=\lambda_m(k,k_y)=\lambda$*

Le même raisonnement qu'au lemme 3.2.12 assure que, pour chaque k_y, l'ensemble $\sigma_0(k_y)$ est discret avec pour seul point d'accumulation, l'infini.

4.4.2 Vers le passage à la limite dans l'équation $(\mathcal{P}^e_\varepsilon)$

Etudions ici le passage à la limite du problème extérieur $(\mathcal{P}^e_\varepsilon)$ et plus particulièrement de l'opérateur NtD Λ_ε qui nécessite, d'après la section 4.2, le passage à la limite pour le problème de demi-espace $(\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_\varepsilon)$ et pour les équations affines $(\mathcal{E}^\varepsilon_{(i,j)})$.

4.4.2.1 Pour le problème de demi-espace

D'après la section 4.2.5, la résolution du problème de demi-espace $(\mathcal{P}^{\mathrm{H}}_\varepsilon)$ passe par celle d'une famille de problèmes de demi-guide $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$, pour k_y variant entre $-\pi/L$ et π/L. La passage à la limite du premier problème peut donc se déduire du passage à la limite des problèmes de demi-guide, déjà étudiés au Chapitre 3 avec des conditions de Neumann sur les bords Σ^+ et Σ^-.

En utilisant les mêmes arguments qu'au Chapitre 3, étant donné que ρ_p est une fonction à double symétrie vérifiant en particulier l'hypothèse (H3) introduite Section 3.2.2.4, nous pourrions montrer pour chaque k_y et chaque donnée $\hat{\psi}_{k_y}$, que la famille $\{\hat{u}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y}(\hat{\psi}_{k_y}),\ \varepsilon>0\}$ des solutions a bien une limite $\hat{u}^{\mathrm{H}}_{k_y}(\hat{\psi}_{k_y})$ dans $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega^{\mathrm{w}})$, que la famille $\{R_\varepsilon(k_y),\ \varepsilon>0\}$ des opérateurs de propagation a bien une limite $R(k_y)$ dans $\mathcal{L}(H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma))$ et enfin que la famille $\{\Lambda^{\mathrm{w}}_\varepsilon(k_y),\ \varepsilon>0\}$ d'opérateurs de NtD de demi-guide correspondant a aussi une limite $\Lambda^{\mathrm{w}}(k_y)$ dans $\mathcal{L}(H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma),H^{1/2}_{k_y}(\Gamma))$, excepté pour une quantité dénombrable de fréquences qui appartiennent à $\sigma_0(k_y)$ donné par la définition 4.4.2. Notons que même si les remarques 3.2.13 et 3.2.13 permettent de réduire cet ensemble discret, il reste néanmoins non vide.

Pour le problème de demi-espace, il suffit donc de passer à la limite dans les relations

$$\forall \psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})),\ \forall (x,y) \in \Omega^{\mathrm{w}},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)(x,y+nL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \mathcal{F}_y u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)(x,y;k_y)\, e^{\imath n k_y L}\, dk_y. \tag{4.85}$$

pour la solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon^{\mathrm{H}})$ et

$$\forall \psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})),\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \Lambda_\varepsilon^{\mathrm{H}}\, \psi\Big|_{\widetilde{\Sigma}^n} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \Lambda_\varepsilon^{\mathrm{w}}(k_y) \mathcal{F}_y \psi(\cdot;k_y)\, e^{\imath n k_y L}\, dk_y. \tag{4.86}$$

pour l'opérateur NtD de demi-espace, où

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \widetilde{\Sigma}^n = \widetilde{\Sigma}^0 + (0, nL).$$

En utilisant le principe d'absorption limite pour chaque demi-guide, on en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME 4.4.3 (PRINCIPE D'ABSORPTION LIMITE POUR LE PROBLÈME DE DEMI-ESPACE)
Soit $\omega \notin \sigma_0^H$ *avec*

$$\sigma_0^H = \bigcup_{k_y \in]-\pi/L, \pi/L]} \sigma_0(k_y). \tag{4.87}$$

Soit $\psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$*, on a pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *et* $p \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon^H(\psi) - u^H(\psi)\|_{H^1(\mathcal{C}_{p,n},\triangle)} = 0$$

où $\mathcal{C}_{p,n} = \mathcal{C} + (pL, nL)$ *et* $u^H(\psi)$ *est une solution* $H^1_{loc}(\Omega^H)$ *du problème*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u^H(\psi) - \rho_p(\mathbf{x})\, \omega^2\, u^H(\psi) = 0, & \text{dans } \Omega^H, \\ -\dfrac{\partial}{\partial x} u^H(\psi) = \psi, & \text{sur } \widetilde{\Sigma}, \end{array} \right. \tag{$\mathcal{P}^{\mathrm{H}}$}$$

On a également pour tout $(p,n) \in \mathbb{Z}^2$

$$\|u_\varepsilon^H(\psi) - u^H(\psi)\|_{H^1(\mathcal{C}_{p,n})} \leq C(\omega)\sqrt{\varepsilon}\|\psi\|_{H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})}.$$

De plus, la famille des opérateurs NtD $\{\Lambda_\varepsilon^H,\ \varepsilon > 0\}$ *tend dans* $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}), H^{1/2}(\widetilde{\Sigma})\big)$*, quand* ε *tend vers* 0*, vers l'opérateur* Λ^H *de* $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}), H^{1/2}(\widetilde{\Sigma})\big)$ *défini par*

$$\forall \psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}), \quad \Lambda^H \psi = u^H(\psi)\Big|_{\widetilde{\Sigma}}.$$

Nous avons plus précisément l'existence d'une constante $C(\omega)$ *indépendante de* ψ *telle que*

$$\forall \psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}), \quad \|\Lambda_\varepsilon^H \psi - \Lambda^H \psi\|_{H^{1/2}(\widetilde{\Sigma})} \leq C(\omega)\sqrt{\varepsilon}\|\psi\|_{H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})}.$$

■ **PREUVE:** Pour chaque cellule $\mathcal{C}_{p,n}$, on écrit

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi) - u^{\mathrm{H}}(\psi)\|^2_{H^1(\mathcal{C}_{p,n})} &= \frac{L}{2\pi} \| \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \Big(\mathcal{F}_y u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)(x,y\,;k_y) - \mathcal{F}_y u^{\mathrm{H}}(\psi)(x,y\,;k_y) \Big) e^{\imath n k_y L}\, dk y \|^2_{H^1(\mathcal{C}_{p,0})} \\ &\leq \frac{L}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \|\mathcal{F}_y u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)(\cdot;k_y) - \mathcal{F}_y u^{\mathrm{H}}(\psi)(\cdot;k_y)\|^2_{H^1(\mathcal{C}_{p,0})}\, dky \\ &\leq \frac{L}{2\pi} C^2 \varepsilon \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \|\psi(\cdot;k_y)\|^2_{H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)}\, dky, \qquad \text{d'après le théorème 3.2.27} \\ &\leq C'\varepsilon \|\psi\|_{H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})}, \qquad \text{d'après le théorème B.1.22.} \end{aligned}$$

On conclut pour l'opérateur NtD de demi-espace en utilisant un théorème de trace. ■

Ce théorème représente un premier résultat intéressant mais il est loin d'être suffisant pour montrer le principe d'absorption limite pour le problème de demi-espace. Voici les limitations de ce résultat :

- D'une part, le principe d'absorption limite est donné pour toute donnée $\psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$ alors qu'a priori, ce problème intervient avec des données dans $H^{-1/2}_{\text{loc}}(\widetilde{\Sigma})$ et plus précisément des données de $H^{-1/2,-s}(\widetilde{\Sigma})$ avec $s \in]0,1]$ où on rappelle que ces espaces sont définis Section B.1.4.4 (typiquement les fonctions quasi-périodiques sont dans un tel espace avec $s=1$, voir Remarque B.1.36). Supposons que $\psi \in H^{-1/2,-s}(\widetilde{\Sigma})$, alors sa TFB $\hat{\psi}$ est, d'après le Théorème B.1.35, dans $H^{-s}(]-\pi/L,\pi/l], H^{-1/2}(\Sigma^0))$. La démonstration du théorème 4.4.3 qui s'appuie sur le principe d'absorption limite pour le problème de demi-guide n'est valide qu'avec des fonctions $\hat{\psi}$ dans $L^2(]-\pi/L,\pi/L], H^{-1/2}(\Sigma^0))$.
- D'autre part, contrairement à l'ensemble de fréquences à exclure pour le demi-guide, l'ensemble à exclure a priori pour le problème de demi-espace, σ_0^{H} n'est pas discret et peut contenir mêmes des intervalles entiers. Ce n'est donc pas un résultat très satisfaisant, d'autant plus que nous conjecturons que le principe d'absorption limite pour le problème de demi-espace est vrai sauf pour une quantité dénombrable de fréquences qui correspond à l'équivalent de σ_0 pour le problème de demi-espace, c'est-à-dire essentiellement les extremums des surfaces de dispersion.

Pour la première limitation, nous émettons une conjecture dont l'étude fait partie des perspectives de cette thèse.

CONJECTURE 4.4.4
Soit $s \in]0,1]$. Il existe une constante $C(\omega)$ telle que

$$\forall \psi \in H^{-1/2,-s}(\widetilde{\Sigma}), \quad \|u_\varepsilon^H(\psi) - u^H(\psi)\|_{H^{1,-s}(\Omega^H)} \leq C(\omega)\sqrt{\varepsilon}\|\psi\|_{H^{-1/2,-s}(\widetilde{\Sigma})}$$

$$\forall \psi \in H^{-1/2,-s}(\widetilde{\Sigma}), \quad \|\Lambda_\varepsilon^H \psi - \Lambda^H \psi\|_{H^{1/2,-s}(\widetilde{\Sigma})} \leq C(\omega)\sqrt{\varepsilon}\|\psi\|_{H^{-1/2,-s}(\widetilde{\Sigma})}$$

La solution « physique » du problème de demi-espace est calculée à partir des solutions « physiques » des problèmes de demi-guide :

$$\forall \psi \in H^{-1/2,-s}(\widetilde{\Sigma})),\ \forall (x,y) \in \Omega^{\text{w}},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ u^H(\psi)(x,y+nL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \mathcal{F}_y u^H(\psi)(x,y;k_y)\, e^{ink_yL}\, dk_y. \tag{4.88}$$

et l'opérateur NtD de demi-espace à partir des opérateurs NtD de demi-guide

$$\forall \psi \in H^{-1/2,-s}(\widetilde{\Sigma})),\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \Lambda^H \psi\Big|_{\widetilde{\Sigma}^n} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \Lambda^{\text{w}}(k_y)\mathcal{F}_y\psi(\cdot;k_y)\, e^{ink_yL}\, dk_y. \tag{4.89}$$

Ces difficultés apparaissent, selon nous, parce que nous considérons le problème de demi-espace comme la transformée de Floquet Bloch inverse de la famille de problèmes de demi-guide. Cette famille de problèmes est un intermédiaire intéressant d'un point de vue pratique mais pas d'un point de vue théorique. En effet, cette approche est équivalente à remplacer une surface de dispersion en $\lambda_n(k_x,k_y)$ par une famille de courbes de dispersion en $\{k_x \mapsto \lambda_n(k_x,k_y),\ k_y \in]-\pi/L,\pi/L]\}$, chaque courbe étant l'intersection de la surface avec un plan k_y fixé. En conjecturant que ce sont les extremums qui posent un problème pour le principe d'absorption limite,

typiquement, au lieu d'une seule fréquence interdite correspondant à un extremum de la surface, cette démarche introduit potentiellement une famille de fréquences interdites correspondant à la famille d'extremums des courbes de dispersion.

De plus, la caractérisation des solutions $u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)$ pour toute donnée $\psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$ passe d'après les relations (4.21) et (4.23) par la résolution des problèmes de cellule (4.24)-(4.25)-(4.26) pour tout $k_y \in]-\pi/L, \pi/L]$. Si nous voulons étendre cette caractérisation à la solution du problème sans absorption, il faut étudier le passage à la limite de tous ces problèmes de cellule.

Pour chaque problème de cellule il faut exclure une quantité dénombrable de fréquences.

DÉFINITION 4.4.5 (FRÉQUENCES PROPRES DES PROBLÈMES k_y QUASI-PÉRIODIQUES)
Soit $A^0(k_y)$ l'opérateur défini par

$$A^0(k_y) = -\frac{1}{\rho_p}\triangle$$

$$\text{avec} \quad D\big(A^0(k_y)\big) = \big\{u \in H^1(\triangle, \mathcal{C}),\ \left| \begin{array}{l} u\big|_{\Sigma_0^-} = e^{\imath k_y L} u\big|_{\Sigma_0^+},\ \dfrac{\partial}{\partial y}u\big|_{\Sigma_0^-} = e^{\imath k_y L}\dfrac{\partial}{\partial y}u\big|_{\Sigma_0^+} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}u\big|_{\Gamma_0} = 0,\ \dfrac{\partial}{\partial x}u\big|_{\Gamma_1} = 0 \end{array} \right. \big\},$$

L'opérateur $A^0(k_y)$ est autoadjoint, positif, à résolvante compacte. On note $\sigma_{Neu}(k_y)$ son spectre discret avec pour seul point d'accumulation, l'infini.

Une fois les fréquences propres des problèmes de cellule exclues, le passage à la limite des solutions des problèmes de cellule ne présente pas de difficulté, on renvoie le lecteur à la Proposition 3.2.3. On note $e^0(k_y;\cdot)$ et $e^1(k_y;\cdot)$ la limite, solution des problèmes (4.24)-(4.25)-(4.26) avec $\varepsilon = 0$. On peut alors donner une caractérisation de la solution $u^{\mathrm{H}}(\psi)$ de $(\mathcal{P}^{\mathrm{H}})$.

PROPOSITION 4.4.6 (CARACTÉRISATION DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE DEMI-ESPACE)
Soit $\omega^2 \notin \sigma_0^H \cup \sigma_{Neu}^H$ avec

$$\sigma_{Neu}^H = \bigcup_{k_y \in]-\pi/L, \pi/l]} \sigma_{Neu}(k_y). \tag{4.90}$$

On a la caractérisation $\forall \psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})),\ \forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$,

$$u_\varepsilon^H(\psi)\Big|_{\mathcal{C}_{p,n}} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \Big[e^0(k_y; R(k_y)^{p-1}\, \mathcal{F}_y\psi(\cdot;k_y)) \ -\ e^1(k_y; R(k_y)^p\, \mathcal{F}_y\psi(\cdot;k_y))\Big]\, e^{\imath n k_y L}\, dk_y. \tag{4.91}$$

avec pour tout k_y, $R(k_y)$ est la limite dans $\mathcal{L}\big(H_{k_y}^{-1/2}(\Gamma)\big)$ de la famille $\{R_\varepsilon(k_y),\ \varepsilon > 0\}$ (voir 3.2.28).

Là encore, il faut extraire un ensemble de fréquences $\sigma_{Neu}^{\mathrm{H}}$ qui est l'union d'ensembles discrets mais qui n'a aucune raison d'être discret et peut même contenir des intervalles. Nous renvoyons néanmoins le lecteur à la remarque 3.2.2 et l'annexe A.1 qui permettent de réinclure cet ensemble de fréquences dans l'étude. Il semble donc encore plus important ici que dans les Chapitres 1 et 3 de chercher à calculer des opérateurs RtR plutôt que NtD ou DtN.

4.4.2.2 Pour les équations affines $(\mathcal{E}^{\varepsilon}_{(i,j)})$

Nous nous interrogeons ici sur l'existence de la limite des opérateurs NtN $\{\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)},\ \varepsilon>0\}$. Le passage à la limite dans leurs définitions (4.17) nécessiterait de connaître le principe d'absorption limite pour le problème extérieur, résultat que nous n'avons pas. L'autre idée est d'utiliser leur caractérisation via l'équation affine $(\mathcal{E}^{\varepsilon}_{(i,j)})$, de passer à la limite dans l'équation et de chercher à savoir si cette nouvelle équation a une unique solution. Si la famille $\{\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)},\ \varepsilon>0\}$ a une limite, la limite sera a priori solution de l'équation affine limite.

La question est donc ramenée à savoir si la famille $\{N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)},\varepsilon>0\}$ a une limite. D'après le théorème 4.4.3 et un théorème de trace, nous avons une réponse partielle.

COROLLAIRE 4.4.7 (PASSAGE À LA LIMITE POUR LES OPÉRATEURS NTN DE DEMI-ESPACE)
Si $\omega^2\notin\sigma_0^H$, pour tout $(i,j)\in\{s,a\}$, la famille d'opérateurs a bien une limite $\{N^{\varepsilon,H}_{(i,j)},\varepsilon>0\}$ dans $\mathcal{L}(H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}),H^{-1/2}_{loc}(\widetilde{\Sigma}))$, quand ε tend vers 0, vers l'opérateur $N^H_{(i,j)}$ de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}),H^{-1/2}_{loc}(\widetilde{\Sigma})\big)$ défini par

$$\forall\psi\in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}),\quad \left|\begin{array}{l} N^H_{(i,j)}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^-}\equiv\varepsilon_j\Big[-\dfrac{\partial}{\partial y}\ u^H(\psi)|_{\widetilde{\Sigma}^-}\Big],\\ N^H_{(i,j)}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^0}=\psi|_{\widetilde{\Sigma}^0},\\ N^H_{(i,j)}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^+}\equiv\varepsilon_i\Big[+\dfrac{\partial}{\partial y}\,u^H(\psi)|_{\Sigma^+}\Big],\end{array}\right.$$

avec $\varepsilon_s=1$ et $\varepsilon_a=-1$. Nous avons plus précisément l'existence d'une constante $C(\omega)$ indépendante de ψ telle que

$$\forall\psi\in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}),\quad \|N^{\varepsilon,H}_{(i,j)}\psi-N^H_{(i,j)}\psi\|_{H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}_n)}\leq C(\omega)\sqrt{\varepsilon}\|\psi\|_{H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})}$$

avec $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\widetilde{\Sigma}_n=\widetilde{\Sigma}^0+(0,nL)$

C'est une réponse partielle puisque là encore le principe d'absorption limite est démontré pour des données de $H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$ et pour les mêmes raisons que celles évoquées Section 4.4.2.1, ce n'est pas suffisant, puisque les données pourraient être dans $H^{-1/2}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{\Sigma})$.

Reprenons maintenant la caractérisation des opérateurs $N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}$ en termes de variables de Floquet (voir Proposition 4.2.41) et étudions son extension au cas sans absorption.

$\forall(i,j)\in\{s,a\}^2$, on rappelle que $\hat{N}^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}$ opérateurs linéaires de $L^2([-\pi/L,\pi/L],H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0))$ dans $L^2\big([-\pi/L,\pi/L],H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)\big)$ défini par :

$$\hat{N}^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}=\mathcal{F}_y\circ N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}\circ\mathcal{F}_y^{-1}.$$

est donné par $\forall\hat{\psi}_{k_y}\in H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)),\quad\forall k_x\in[-\pi/L,\pi/L]$,

$$\hat{N}^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}\hat{\psi}_{k_y}(\cdot,k_x)=\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x,k_y)\hat{\psi}_{k_y}(\cdot;k_y)\,dk_y$$

où le noyau $\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x,k_y) \in \mathcal{L}\big(H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0), H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)\big)$ est donné par

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x,k_y) &= +\varepsilon_j\ \frac{L}{2\pi}e^{\imath Lk_x}\Big(N^{0,-}_{\varepsilon}(k_y) - N^{1,-}_{\varepsilon}(k_y)R_{\varepsilon}(k_y)\Big)\Big(\mathbf{I} - R_{\varepsilon}(k_y)e^{\imath Lk_x}\Big)^{-1}\\ &\quad + \frac{L}{2\pi}\,\mathbf{I}\\ &\quad + \varepsilon_i\ \frac{L}{2\pi}e^{-\imath Lk_x}\Big(N^{0,+}_{\varepsilon}(k_y) - N^{1,+}_{\varepsilon}(k_y)R_{\varepsilon}(k_y)\Big)\Big(\mathbf{I} - R_{\varepsilon}(k_y)e^{-\imath Lk_x}\Big)^{-1}\end{aligned} \tag{4.92}$$

avec $\varepsilon_s = 1$, $\varepsilon_a = -1$ et $\mathbf{I} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0))$ est l'opérateur identité.

Le passage à la limite de cette caractérisation nécessite l'étude de la limite des opérateurs $N^{0,\pm}_{\varepsilon}(k_y)$ et $N^{0,\pm}_{\varepsilon}(k_y)$.

COROLLAIRE 4.4.8 (LIMITE DES OPÉRATEURS DE NTN LOCAUX)
Soit $k_y \in]-\pi/L,\pi/L]$. Si $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}(k_y)$ (où $\sigma_{Neu}(k_y)$ est donné par la Définition 4.4.5), les opérateurs NtN locaux $\varepsilon \to \big(N^{0,+}_{\varepsilon}(k_y), N^{0,-}_{\varepsilon}(k_y), N^{1,+}_{\varepsilon}(k_y), N^{1,-}_{\varepsilon}(k_y)\big)$ tendent, quand ε tend vers 0 pour la norme d'opérateurs de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Sigma^0), H^{-1/2}(\Sigma^0)\big)$ vers les opérateurs $\big(N^{0,+}(k_y), N^{0,-}(k_y), N^{1,+}(k_y), N^{1,-}(k_y)\big)$ qui sont définis à partir des problèmes de cellule (4.24)-(4.25)-(4.26) *avec $\varepsilon = 0$ de la manière suivante pour toute donnée $\hat{\psi}_{k_y} \in H^{-1/2}_{k_y}(\Gamma)$*

$$N^{0,-}(k_y)\ \hat{\psi}_{k_y} = -\frac{\partial}{\partial y}\,e^0(k_y;\hat{\psi}_{k_y})\Big|_{\overline{\Sigma}^-_1},\quad N^{0,+}(k_y)\ \hat{\psi}_{k_y} = \frac{\partial}{\partial y}\,e^0(k_y;\hat{\psi}_{k_y})\Big|_{\Sigma^+_1},$$

$$N^{1,-}(k_y)\ \hat{\psi}_{k_y} = -\frac{\partial}{\partial y}\,e^1(k_y;\hat{\psi}_{k_y})\Big|_{\overline{\Sigma}^-_1},\quad N^{1,+}(k_y)\ \hat{\psi}_{k_y} = \frac{\partial}{\partial y}\,e^1(k_y;\hat{\psi}_{k_y})\Big|_{\Sigma^+_1}.$$

Si on exclut l'ensemble $\sigma^{\mathrm{H}}_{Neu}$ défini par (4.90), on a donc que tous les opérateurs NtN $N^{0,\pm}_{\varepsilon}(k_y)$ et $N^{0,\pm}_{\varepsilon}(k_y)$ ont une limite quand ε tend vers 0.

De plus, si on applique le théorème 3.2.28 au problème $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$ pour tout $k_y \in]-\pi/L,\pi/L]$, on en déduit que si $\omega^2 \notin \sigma_0(k_y)$ (où $\sigma_0(k_y)$ est donné par la Définition 4.4.2) alors la famille d'opérateurs de propagation $\{R_{\varepsilon}(k_y),\ \varepsilon > 0\}$ tend dans $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big)$ vers l'opérateur $R(k_y)$ de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big)$ défini à partir de la solution « physique » de $(\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{H}}_{\varepsilon,k_y})$ pour $\varepsilon = 0$. On en déduit simplement le corollaire suivant

COROLLAIRE 4.4.9
Soit pour tout k_y, et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$F^{\pm}_{\varepsilon}(k_y) = N^{0,\pm}_{\varepsilon}(k_y) - N^{1,\pm}_{\varepsilon}(k_y)R_{\varepsilon}(k_y) \in \mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Sigma^0), H^{-1/2}(\Sigma^0)\big) \tag{4.93}$$

Si $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}(k_y) \cup \sigma_0(k_y)$, la famille d'opérateurs $\{F^{\pm}_{\varepsilon}(k_y),\ \varepsilon > 0\}$ tend, quand ε tend vers 0 pour la norme d'opérateurs $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Sigma^0), H^{-1/2}(\Sigma^0)\big)$ vers l'opérateur

$$F^{\pm}(k_y) = N^{0,\pm}(k_y) - N^{1,\pm}(k_y)R(k_y) \in \mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Sigma^0), H^{-1/2}(\Sigma^0)\big). \tag{4.94}$$

En vue de déterminer la convergence (au moins simple) de la famille des noyaux $\{\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)},\ \varepsilon > 0\}$, il reste à étudier les termes $\Big(\mathbf{I} - R_{\varepsilon}(k_y)e^{\pm\imath Lk_x}\Big)^{-1}$. Rappelons que par passage à la limite, le rayon spectral de $R(k_y)$ est tel que pour tout k_y

$$\rho(R(k_y)) \leq 1.$$

On comprend donc que le passage à la limite dans (4.92) ne va pas être possible dans l'espace $\mathcal{L}\big(H_{k_y}^{-1/2}(\Sigma^0), H_{k_x}^{-1/2}(\Sigma^0)\big)$ dès qu'il existe un k_y tel que le rayon spectral de $R(k_y)$ est égal à 1. Cependant, dans le cas où il est toujours strictement inférieur à 1, il sera évident.

PROPOSITION 4.4.10 (LIMITE DES OPÉRATEURS NTN DE DEMI-ESPACE QUAND $\omega^2 \notin \sigma(A)$)
Supposons en plus de $\omega^2 \notin \sigma(A)$ que $\omega^2 \notin \sigma_0^H \cup \sigma_{Neu}^H$. Pour tout $(i,j) \in \{s,a\}^2$, la famille d'opérateurs $\{N_{(i,j)}^{\varepsilon,H}, \varepsilon > 0\}$ a bien une limite $\{N_{(i,j)}^{\varepsilon,H}, \varepsilon > 0\}$ dans $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}), H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})\big)$, quand ε tend vers 0, vers l'opérateur $N_{(i,j)}^H$ de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}), H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})\big)$ caractérisé par

$\forall (i,j) \in \{s,a\}^2$, *on rappelle que $\hat{N}_{(i,j)}^H$ opérateurs linéaires de $L^2\big([-\pi/L, \pi/L], H_{k_y}^{-1/2}(\Sigma^0)\big)$ dans $L^2\big([-\pi/L, \pi/L], H_{k_x}^{-1/2}(\Sigma^0)\big)$ défini par :*

$$\hat{N}_{(i,j)}^H = \mathcal{F}_y \circ N_{(i,j)}^H \circ \mathcal{F}_y^{-1}.$$

est donné par $\forall \hat{\psi}_{k_y} \in H_{k_y}^{-1/2}(\Sigma^0)), \quad \forall k_x \in [-\pi/L, \pi/L]$,

$$\hat{N}_{(i,j)}^H \hat{\psi}_{k_y}(\cdot, k_x) = \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \mathbf{K}_{(i,j)}(k_x, k_y) \hat{\psi}_{k_y}(\cdot; k_y)\, dk_y$$

où le noyau $\mathbf{K}_{(i,j)}(k_x, k_y) \in \mathcal{L}\big(H_{k_y}^{-1/2}(\Sigma^0), H_{k_x}^{-1/2}(\Sigma^0)\big)$ est donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{(i,j)}(k_x, k_y) \;=\; & + \varepsilon_j \; \frac{L}{2\pi} e^{\imath L k_x} \Big(N^{0,-}(k_y) - N^{1,-}(k_y) R(k_y) \Big) \Big(\mathbf{I} - R(k_y) e^{\imath L k_x} \Big)^{-1} \\ & + \frac{L}{2\pi}\, \mathbf{I} \\ & + \varepsilon_i \; \frac{L}{2\pi} e^{-\imath L k_x} \Big(N^{0,+}(k_y) - N^{1,+}(k_y) R(k_y) \Big) \Big(\mathbf{I} - R(k_y) e^{-\imath L k_x} \Big)^{-1} \end{aligned} \tag{4.95}$$

avec $\varepsilon_s = 1$, $\varepsilon_a = -1$ et $\mathbf{I} \in \mathcal{L}(H_{k_y}^{-1/2}(\Sigma^0))$ est l'opérateur identité.

■ **PREUVE:** La démonstration est simple car dans le cas où $\omega^2 \notin \sigma(A)$, d'après la remarque 4.4.1, $\omega^2 \notin \sigma(A(k_y))$ pour tout k_y. D'après le lemme 3.2.35, l'opérateur $R(k_y)$ est de rayon spectral strictement inférieur à 1, pour tout k_y. Les opérateurs $\Big(\mathbf{I} - R(k_y) e^{\pm \imath L k_x}\Big)^{-1}$ sont donc bornés et on montre que le noyau $\mathbf{K}_{(i,j)}^{\varepsilon}$ tend quand ε tend vers 0 vers $\mathbf{K}_{(i,j)}$ dans $\mathcal{L}\big(H_{k_y}^{-1/2}(\Sigma^0), H_{k_x}^{-1/2}(\Sigma^0)\big)$. ■

Cependant, alors que dans le cas monodimensionnel, le nombre de gaps (intervalles de $\mathbb{R}^+$ inclus dans $R(A)$) est génériquement infini, dans le cas des dimensions supérieures, il est fini et peut même être nul. Ce résultat est donc intéressant en soi mais peut ne pas s'appliquer du tout.

Si $\omega^2 \in \sigma(A)$ alors par définition il existe un k_y tel que $\omega^2 \in \sigma(A(k_y))$. Dans ce cas, les choses se compliquent. En effet pour ce k_y, d'après les résultats de la section 3.2.5, il existe un $k^* \in]-\pi/L, \pi/L]$ tel que $e^{\imath k^* L}$ est une valeur propre de $R(k_y)$. Ainsi, on peut montrer que le terme $\Big(\mathbf{I} - R_\varepsilon(k_y) e^{\imath L k_x}\Big)^{-1}$ explose pour $k_x = -k^*$ et le terme $\Big(\mathbf{I} - R_\varepsilon(k_y) e^{-\imath L k_x}\Big)^{-1}$ explose pour $k_x = k^*$.

REMARQUE 4.4.11
Ce comportement est plutôt légitime. En effet, il implique que pour tout $\psi \in \widetilde{\Sigma}$ (on note $\hat{\psi}_{k_y}$ sa TFB) $\hat{N}^H_{(i,j)}\hat{\psi}_{k_y}$ ne peut pas être dans $L^2\big([-\pi/L,\pi/L], H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)\big)$ mais dans un espace plus grand (typiquement $H^{-1}\big([-\pi/L,\pi/L], H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)\big)$), ce qui est attendu puisqu'a priori $N^H_{(i,j)}\psi$ est dans $H^{-1/2}_{loc}(\widetilde{\Sigma})$.

Il paraît donc difficile, dans l'état actuel des choses, d'effectuer un passage à la limite pour la caractérisation de la limite de $N^{\varepsilon,H}_{(i,j)}$ et par la même occasion celle de l'opérateur NtN $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}$.

Devant toutes ces difficultés, nous allons émettre une conjecture qui va nous permettre d'arriver à un résultat qui semble « physique » et surtout qui sera mis en oeuvre d'un point de vue numérique à la Section 4.5. Cette conjecture sera donc seulement validée numériquement.

Il nous semble tout d'abord plus naturel de raisonner sur la formulation variationnelle de $(\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)})$ plutôt que l'équation de départ, cela va permettre de considérer le problème dans son ensemble et pas seulement comme une famille de problèmes à k_x fixé. Nous cherchons donc à étudier le passage à la limite dans le problème

Trouver $\hat{\psi}^0 \in W^-$, tel que

$$a^{\varepsilon}_{(i,j)}(\hat{\psi}^0,\hat{\theta}^0) = \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \Big\langle \hat{g}_{\varphi}(\cdot;k_x);\hat{\theta}^0(\cdot;k_x)\Big\rangle\, dk_x, \quad \hat{\theta}^0 \in W^+ \tag{$\mathcal{Q}^{\varphi}_{(i,j)}$}$$

$$\left|\begin{array}{rcl} a^{\varepsilon}_{(i,j)}(\hat{\psi}^0,\hat{\theta}^0) & = & \displaystyle\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \Big\langle \hat{\psi}^0(\cdot;k_x);\hat{\theta}^0(\cdot;k_x)\Big\rangle\, dk_x \\ & & \displaystyle - \int_{-\pi/L}^{\pi/L}\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \Big\langle \mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x,k_y)\ \hat{\psi}^0(\cdot;k_y);\hat{\theta}^0(\cdot;k_x)\Big\rangle\, dk_y\, dk_x \end{array}\right. \tag{4.96}$$

avec $<\cdot;\cdot>$ le produit de dualité entre $H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$ et $H^{1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$ et $\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x,k_y)$ est l'opérateur linéaire de $H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$ dans $H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$ défini par (4.38).

Reformulons la conjecture 3.2.52 pour chaque opérateur $R(k_y)$, $k_y \in]-\pi/L,\pi/L]$. Pour chaque k_y, il existe deux sous-espaces de $H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$, noté $\mathbb{P}_{k_y}$ et $\mathbb{E}_{k_y}$ tels que

$$H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0) = \mathbb{P}_{k_y} \oplus \mathbb{E}_{k_y}, \quad \text{avec} \quad R(k_y)\mathbb{P}_{k_y} \subset \mathbb{P}_{k_y}, \quad R(k_y)\mathbb{E}_{k_y} \subset \mathbb{E}_{k_y}$$

et
$$\left|\begin{array}{l} \text{Dim } \mathbb{P} = N(\omega,k_y), \quad \mathbb{P}_{k_y} = \text{vect}(p_1(k_y),\dots,p_{N(\omega,k_y)}(k_y)) \\ \forall m \in [\![1,N(\omega,k_y)]\!],\ R(k_y)p_m(k_y) = r_m(k_y)p_m(k_y), |r_m(k_y)| = 1, r_m(k_y) \text{vérifiant (3.48)} \\ R^E(k_y) = R(k_y)\Big|_{\mathbb{E}_{k_y}} \text{ a un rayon spectral strictement plus petit que } 1 \end{array}\right.$$

On note $\Pi_{\mathbb{P}_{k_y}}$ la projection d'image $\mathbb{P}_{k_y}$ et de noyau $\mathbb{E}_{k_y}$. On note également pour tout k_y

$$\forall m \in [\![1,N(\omega,k_y)]\!],\ \exists!\xi_m(k_y) \in]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}], \quad r_m(k_y) = \exp(\imath\xi_m(k_y)L).$$

En utilisant le fait que pour tout $\xi \in]-\pi/L, \pi/L]$

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\frac{f(k_x)}{1-e^{\imath\xi L-\eta e^{\pm\imath k_x L}}}\,dk_x = \text{p.v.}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(k_x)}{1-e^{\imath(\xi\pm k_x)L}}\,dk_x \;+\; \pi f(\mp\xi) \tag{4.97}$$

un certain nombre de calculs formels nous mènent à la conjecture suivante.

CONJECTURE 4.4.12 (A PROPOS DE L'OPÉRATEUR NTN $\widetilde{N}_{(i,j)}$)
Soient

$$W_{-1}^{-} = \big\{\hat{\psi}^0 \in H^{-1}\big(]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}[\big), H_k^{-1/2}(\Sigma^0)\big),\quad \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\hat{\psi}^0(\cdot,k)\,dk = 0\big\}. \tag{4.98}$$

et

$$W_{-1}^{+} = \big\{\hat{\psi}^0 \in H^{-1}\big(]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}[\big), H_k^{+1/2}(\Sigma^0)\big),\quad \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\hat{\psi}^0(\cdot,k)\,dk = 0\big\}. \tag{4.99}$$

Pour toute donnée $\varphi \in H_{(i,j)}^{-1/2}(\Sigma^i)$, pour déterminer $\widetilde{N}_{(i,j)}\varphi \in H_{loc}^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$, on l'écrit

$$\widetilde{N}_{(i,j)}\varphi = \widetilde{E}\varphi + \mathcal{F}_y^{-1}\hat{\psi}^0$$

où

- *$\widetilde{E}$ est un opérateur linéaire de $H_{(i,j)}^{-1/2}(\Sigma^i)$ dans $H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$ tel que*

$$\widetilde{E}\varphi\Big|_{\widetilde{\Sigma^0}} = \varphi\Big|_{\Sigma^i_{(0)}};$$

- *$\hat{\psi}^0$ est dans l'espace W_{-1}^{-} et est l'unique solution du problème*

  Trouver $\hat{\psi}^0 \in W_{-1}^{-}$, tel que

$$a_{(i,j)}(\hat{\psi}^0,\hat{\theta}^0) = \int_{-\pi/L}^{\pi/L}\Big\langle \hat{g}_\varphi(\cdot;k_x);\hat{\theta}^0(\cdot;k_x)\Big\rangle_{k_x} dk_x,\quad \hat{\theta}^0 \in W_{-1}^{+} \tag{$\mathcal{Q}^{\varphi}_{(i,j)}$}$$

avec $<\cdot;\cdot>_{k_x}$ le produit de dualité entre $H_{k_x}^{-1/2}(\Sigma^0)$ et $H_{k_x}^{1/2}(\Sigma^0)$ et où si on écrit $\forall k_y,\ \hat{\psi}^0(\cdot;k_y) = p(\cdot;k_y) + e(\cdot;k_y)$ avec $e(\cdot;k_y) \in \mathbb{E}_{k_y}$ et

$p(\cdot;k_y) = \sum_{m=1}^{N(\omega,k_y)} \hat{\alpha}_m(k_y)\, p_m(k_y) \in \mathbb{P}_{k_y}$,

$$
\left|
\begin{aligned}
a_{(i,j)}(\hat{\psi}^0,\hat{\theta}^0) = & \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \Big\langle \hat{\psi}^0(\cdot;k_x);\hat{\theta}^0(\cdot;k_x)\Big\rangle_{k_x} dk_x \\
& - \int_{-\pi/L}^{\pi/L}\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \Big\langle \mathbf{K}^E_{(i,j)}(k_x,k_y)\, e(\cdot;k_y);\hat{\theta}^0(\cdot;k_x)\Big\rangle_{k_x} dk_x\, dk_y \\
& - \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \textit{v.p.} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \Big\langle \mathbf{K}^P_{(i,j)}(k_x,k_y)\, p(\cdot;k_y);\hat{\theta}^0(\cdot;k_x)\Big\rangle_{k_x} dk_x\, dk_y \\
& - \frac{L}{2}\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \sum_{m=1}^{N(\omega,k_y)} \Big\langle F^-(k_y)e^{-\imath\xi_m(k_y)L}\hat{\alpha}_m(k_y)\, p_m(k_y);\hat{\theta}^0(\cdot;-\xi_m(k_y))\Big\rangle_{-\xi_m(k_y)} dk_y \\
& - \frac{L}{2}\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \sum_{m=1}^{N(\omega,k_y)} \Big\langle F^+(k_y)e^{-\imath\xi_m(k_y)L}\hat{\alpha}_m(k_y)\, p_m(k_y);\hat{\theta}^0(\cdot;+\xi_m(k_y)>_{+\xi_m(k_y)}\ dk_y
\end{aligned}
\right. \tag{4.100}
$$

avec $\mathbf{K}^E_{(i,j)}(k_x,k_y)$ *défini par* $\forall e(\cdot;k_y) \in \mathbb{E}_{k_y}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}^E_{(i,j)}(k_x,k_y)\, e(\cdot;k_y) \;=\; & + \varepsilon_j\ \frac{L}{2\pi} e^{\imath L k_x} F^-(k_y)\Big(\mathbf{I} - R^E(k_y)e^{\imath L k_x}\Big)^{-1} e(\cdot;k_y) \\
& + \frac{L}{2\pi}\, e(\cdot;k_y) \\
& + \varepsilon_i\ \frac{L}{2\pi} e^{-\imath L k_x} F^+(k_y)\Big(\mathbf{I} - R^E(k_y)e^{-\imath L k_x}\Big)^{-1} e(\cdot;k_y)
\end{aligned} \tag{4.101}
$$

avec $\mathbf{K}^P_{(i,j)}(k_x,k_y)$ *défini par* $\forall p(\cdot;k_y) \in \mathbb{P}_{k_y}$, $p(\cdot;k_y) = \sum_{m=1}^{N(\omega,k_y)} \hat{\alpha}_m(k_y)\, p_m(k_y)$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}^P_{(i,j)}(k_x,k_y)p(\cdot;k_y) \;=\; & + \varepsilon_j\ \frac{L}{2\pi} e^{\imath L k_x} F^-(k_y) \sum_{m=1}^{N(\omega,k_y)} \frac{1}{1-\exp(\imath(\xi_m(k_y)+k_x)L)} \hat{\alpha}_m(k_y)\, p_m(k_y) \\
& + \frac{L}{2\pi}\, p(\cdot;k_y) \\
& + \varepsilon_i\ \frac{L}{2\pi} e^{-\imath L k_x} F^+(k_y) \sum_{m=1}^{N(\omega,k_y)} \frac{1}{1-\exp(\imath(\xi_m(k_y)-k_x)L)} \hat{\alpha}_m(k_y)\, p_m(k_y)
\end{aligned} \tag{4.102}
$$

■ **IDÉES DE LA PREUVE FORMELLE:** L'idée est donc de décomposer $\forall k_y,\ \hat{\psi}^0(\cdot;k_y) = p(\cdot;k_y) + e(\cdot;k_y)$ et d'inverser l'intégrale en k_y et l'intervalle en k_x dans la définition (4.96) de $a^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x,k_y)$ et on sépare la formulation pour p et la formulation pour e.

On montre tout d'abord dans la formulation pour e que pour tout k_x et k_y, les opérateurs $\Big(\mathbf{I} - R_\varepsilon(k_y)e^{\imath L k_x}\Big)^{-1}$ restreint à l'espace $\mathbb{E}_{k_y}$ tendent vers des opérateurs bornés $\Big(\mathbf{I} - R^E(k_y)e^{\imath L k_x}\Big)^{-1}$ puisqu'on rappelle que $R^E(k_y)$ est compact de rayon spectral strictement inférieur ou égal à 1.

La formulation pour p est plus difficile à étudier. Notons tout d'abord que d'après la théorie de perturbations [Kato (1995)], pour $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$\left|\begin{array}{l} \exists (p_1^\varepsilon(k_y),\dots,p_{N(\omega,k_y)}^\varepsilon(k_y)), \quad \forall m \in [\![1,N(\omega,k_y)]\!],\ \lim_{\varepsilon\to 0} p_m^\varepsilon(k_y) = p_m(k_y) \quad \text{dans } H_{k_y}^{-1/2}(\Sigma^0) \\ \exists (r_1^\varepsilon(k_y),\dots,r_{N(\omega,k_y)}^\varepsilon(k_y)), \quad \forall m \in [\![1,N(\omega,k_y)]\!],\ \lim_{\varepsilon\to 0} r_m^\varepsilon(k_y) = r_m(k_y) \\ R_\varepsilon p_m^\varepsilon(k_y) = r_m^\varepsilon(k_y)\, p_m^\varepsilon(k_y) \end{array}\right.$$

Si on décompose $p(\cdot;k_y)$ dans la base $(p_1^\varepsilon(k_y),\dots,p_{N(\omega,k_y)}^\varepsilon(k_y))$ alors on montre que par définition

$$p(\cdot;k_y) = \sum_{m=1}^{N(\omega,k_y)} \alpha_m^\varepsilon(k_y) p_m^\varepsilon(k_y) + e_\varepsilon(k_y), \quad \text{avec } \forall k_y\ \lim_{\varepsilon\to 0} e_\varepsilon(k_y) = 0.$$

L'intérêt de cette décomposition est qu'on a remplacé un opérateur

$$\left(\mathbf{I} - R_\varepsilon(k_y) e^{\pm \imath L k_x}\right)^{-1} p(\cdot;k_y)$$

par

$$\sum_{m=1}^{N(\omega,k_y)} \frac{1}{1 - r_m^\varepsilon(k_y) e^{\pm\imath L k_x}} \alpha_m^\varepsilon(k_y) p_m^\varepsilon(k_y) + \left(\mathbf{I} - R_\varepsilon(k_y) e^{\pm \imath L k_x}\right)^{-1} e_\varepsilon(k_y).$$

Pour calculer la limite de

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\pi/L}^{\pi/L}\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \left\langle \mathbf{K}_{(i,j)}^\varepsilon p(\cdot;k_y), \hat\theta^0(\cdot;k_x)\right\rangle dk_x\, dk_y,$$

on calcule la limite pour chaque k_y de l'intégrale intérieure

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \left\langle \mathbf{K}_{(i,j)}^\varepsilon p(\cdot;k_y), \hat\theta^0(\cdot;k_x)\right\rangle dk_x,$$

qui passe par le calcul de la limite d'intégrale de la forme

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \left\langle F_\varepsilon^\pm(k_y) e^{\mp\imath L k_x} \left(\mathbf{I} - R_\varepsilon(k_y) e^{\mp\imath L k_x}\right)^{-1} e_\varepsilon(k_y), \hat\theta^0(\cdot;k_x)\right\rangle dk_x,$$

que nous conjecturons nulle puisque $e_\varepsilon(k_y)$ tend vers 0[10], et le calcul d'un ensemble d'intégrales de la forme

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \left\langle F_\varepsilon^\pm(k_y) e^{\mp\imath L k_x} \frac{1}{1 - r_m^\varepsilon(k_y) e^{\mp\imath L k_x}} \alpha_m^\varepsilon(k_y) p_m^\varepsilon(k_y), \hat\theta^0(\cdot;k_x)\right\rangle dk_x. \tag{4.103}$$

On écrit ensuite pour tout ε, $r_m^\varepsilon(k_y) = \exp(\imath(\xi_m(k_y) + \imath\eta_m(\varepsilon))L)$ avec $\mathrm{Re}(\eta_m(\varepsilon)) > 0$ et $lim_{\varepsilon\to 0}\eta_m(\varepsilon) = 0$. En utilisant la relation (4.97), on trouve que pour tout k_y, pour tout $m \in [\![1,N(\omega,k_y)]\!]$, la limite (4.103) est donnée par

$$\begin{aligned} p.v. \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \left\langle F^\pm(k_y) e^{\mp\imath L k_x} \frac{1}{1 - \exp(\imath(\xi_m(k_y) \mp k_x)L)} \alpha_m(k_y) p_m(k_y), \hat\theta^0(\cdot;k_x)\right\rangle dk_x \\ + \pi \left\langle F^\pm(k_y) e^{-\imath L \xi_m(k_y)} \alpha_m(k_y) p_m(k_y), \hat\theta^0(\cdot;\pm\xi_m(k_y))\right\rangle. \end{aligned}$$

En sommant sur tous les $m \in [\![1,N(\omega,k_y)]\!]$, en intégrant sur tous les k_y, on retrouve la relation donnée. ■

[10] ce résultat ne nous semble néanmoins pas si évident

REMARQUE 4.4.13 (AU SUJET DE LA FORME BILINÉAIRE $a_{(i,j)}$)
Au vu de l'expression de (4.100)*, il existe une situation pour laquelle l'expression de la forme bilinéaire est simplifiée. En effet, si on suppose que $\hat{\theta}^0$ est telle que*

$$\forall k_y \in]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}],\ \forall m \in [\![1, N(\omega,k_y)]\!], \quad \pm\xi_m(k_y) \notin \mathit{Supp}_{k_x}(\hat{\theta}^0)$$

où le support $\mathit{Supp}_{k_x}(\hat{\theta}^0)$ par rapport à k_x de $\hat{\theta}^0$ est le complémentaire de l'ensemble

$$\left\{k_x \in]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}], \quad \hat{\theta}^0(\cdot;k_x)=0\right\}$$

alors pour tout $k_y \in]-\pi/L,\pi/L]$ et tout $k_x \in \mathit{Supp}_{k_x}(\hat{\theta}^0)$, les opérateurs $(\mathbf{I}-R(k_y)e^{\imath Lk_x})$ et $(\mathbf{I}-R(k_y)e^{-\imath Lk_x})$ sont inversibles et la forme bilinéaire s'écrit plus simplement

$$\left|\begin{array}{l} a_{(i,j)}(\hat{\psi}^0,\hat{\theta}^0) = \displaystyle\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \left\langle \hat{\psi}^0(\cdot;k_x);\hat{\theta}^0(\cdot;k_x)\right\rangle dk_x \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\int_{\mathit{Supp}_{k_x}(\hat{\theta}^0)} \left\langle \mathbf{K}_{(i,j)}(k_x,k_y)\ \hat{\psi}^0(\cdot;k_y);\hat{\theta}^0(\cdot;k_x)\right\rangle dk_x\, dk_y \end{array}\right.$$

avec $<\cdot;\cdot>_{k_x}$ le produit de dualité entre $H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$ et $H^{1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$ et $\mathbf{K}_{(i,j)}$ simplement défini par (4.95)*.*

Dès que $\omega^2 \notin \sigma_0^{\mathrm{H}} \cup \sigma^H_{Neu}$, si on suppose les conjectures 4.4.4 et 4.4.12 vraies alors on peut montrer que la famille $\{\Lambda^\varepsilon,\ \varepsilon>0\}$ a bien une limite quand ε tend vers 0 pour la norme d'opérateur de $\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Sigma^0),H^{1/2}(\Sigma^0))$.

Ainsi, il reste un certain nombre de questions ouvertes dans notre démarche de construction de l'opérateur NtD pour le problème de plan. La démonstration des conjectures de cette section fait partie des perspectives de cette thèse. Il nous semble qu'une importante limitation de cette démarche est l'exclusion de toutes les fréquences ω telles que $\omega^2 \notin \sigma_0^{\mathrm{H}}$, l'ensemble σ_0^{H} n'étant a priori pas discret.

4.4.3 Principe d'absorption limite pour le plan périodique

4.4.3.1 Expression de la solution

Une autre approche est de généraliser celle utilisée Section 3.2.2 pour démontrer le principe d'absorption limite pour le problème de Helmholtz dans un plan parfaitement périodique en présence d'une source localisée. L'idée de cette approche est d'appliquer la Transformée de Floquet Bloch dans les deux directions pour se ramener à une famille de problèmes posés dans une cellule de périodicité. C'est l'approche utilisée dans [Murata & Tsuchida (2006)] pour caractériser la fonction de Green d'un milieu périodique et déterminer son comportement asymptotique à l'infini. Les auteurs se restreignent cependant au cas des « basses » fréquences (nous préciserons dans la suite dans quel sens elles sont « basses ») mais cette restriction semble importante seulement pour le comportement asymptotique et pas pour l'expression (voir la section suivante).

Considérons donc u_ε la solution dans $\Omega = \mathbb{R}^2$ du problème suivant :

$$-\frac{1}{\rho_p}\triangle u_\varepsilon - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)u_\varepsilon = f, \quad \text{dans } \Omega \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon$}$$

Pour un $\varepsilon > 0$ fixé, on sait que pour toute source $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ de ($\mathcal{P}_\varepsilon$). On cherche à savoir si la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ converge quand ε tend vers 0, dans quel sens et enfin si sa limite est solution du problème précédent avec $\varepsilon = 0$.

Nous allons faire les hypothèses suivantes sur la fonction ρ :

$$\text{(H1)} \qquad \forall (x,y) \in \Omega, \quad \rho_p(x \pm L, y \pm L) = \rho_p(x,y)$$

$$\text{(H2)} \qquad \rho_p \in L^\infty(\Omega) \text{ et } \forall (x,y) \in \Omega, \quad 0 < \rho_- \leq \rho_p(x,y) \leq \rho_+$$

A l'image de la section 3.2.2, nous allons supposer que la source f est telle que

$$\exists\, r \in [0,1[,\ \exists\, s \in]\frac{1}{2}, 1], \quad f \in H^{-r,s}(\Omega) \tag{4.104}$$

Nous rappelons (voir section B.1.4) que si $f \in H^{r,s}(\Omega)$ alors sa transformée de Floquet Bloch $\hat{f}$ est dans $H^s(\mathcal{C}^*, H^r_k(\mathcal{C}))$ où

$$\mathcal{C}^* = \left]-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}\right[^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left]-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right[^2$$

On note $\hat{u}_\varepsilon$ la transformée de Floquet Bloch de u_ε et $\hat{f}$ celle de f. En utilisant les propriétés de cette transformation (voir la section B.1.2), on montre que pour presque tout $(k_x, k_y) \in \mathcal{C}^*$, $\hat{u}_\varepsilon(\cdot;(k_x,k_y))$ est solution dans $\mathcal{C}$ du problème suivant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho_p}\triangle \hat{u}_\varepsilon(\cdot;(k_x,k_y)) - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\hat{u}_\varepsilon(\cdot;(k_x,k_y)) = \hat{f}(\cdot;(k_x,k_y)), \quad \text{dans } \mathcal{C} \\ \hat{u}_\varepsilon(x = -\frac{L}{2}, y; (k_x,k_y)) = e^{\imath k_x L}\ \hat{u}_\varepsilon(x = \frac{L}{2}, y; (k_x,k_y)) \\ \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial x}(x = -\frac{L}{2}, y; (k_x,k_y)) = e^{\imath k_x L}\ \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial x}(x = \frac{L}{2}, y; (k_x,k_y)) \\ \hat{u}_\varepsilon(x, y = -\frac{L}{2}; (k_x,k_y)) = e^{\imath k_y L}\ \hat{u}_\varepsilon(x, y = \frac{L}{2}; (k_x,k_y)) \\ \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial x}(x, y = -\frac{L}{2}; (k_x,k_y)) = e^{\imath k_y L}\ \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial x}(x, y = \frac{L}{2}; (k_x,k_y)) \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon(k_x,k_y)$}$$

On montre facilement que u_ε est l'unique solution H^1 de ($\mathcal{P}_\varepsilon$) si et seulement si $p.p.t\ (k_x,k_y) \in \mathcal{C}^*$, $\hat{u}_\varepsilon(\cdot;(k_x,k_y))$ est l'unique solution H^1 de ($\mathcal{P}_\varepsilon(k_x,k_y)$). Pour expliciter u_ε, nous allons utiliser les propriétés spectrales de l'opérateur $A(k_x,k_y)$ donné par la définition (4.83)-(4.84).

En utilisant les mêmes arguments que ceux de la preuve de la Proposition 3.2.14, on peut démontrer l'expression pour la solution u_ε.

PROPOSITION 4.4.14
u_ε solution du problème ($\mathcal{P}_\varepsilon$) s'exprime de la façon suivante, $\forall (x,y) \in \mathcal{C},\ \forall (p_x,p_y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$u_\varepsilon(x+p_x, y+p_y) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}^*} \frac{\left\langle \hat{f}(\cdot,(k_x,k_y)), \varphi_n(\cdot,(k_x,k_y))\right\rangle}{\lambda_n((k_x,k_y)) - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)}\ \varphi_n(x,y;(k_x,k_y))\ e^{\imath p_x k_x} e^{\imath p_y k_y}\ dk_x\, dk_y \tag{4.105}$$

la série convergeant en norme $L^2(\mathcal{C})$ où on rappelle que pour tout $(k_x, k_y) \in \mathcal{C}^*$, pour tout n, $\lambda_n(k_x, k_y)$ et $\varphi_n(k_x, k_y)$ sont définis Section 4.4.1.

C'est le passage à la limite qui présente plus de difficultés. Ainsi, dans le cas du guide, nous avons exclut un ensemble de fréquences de l'étude dont l'équivalent pour le cas du plan est donné par la définition suivante.

DÉFINITION 4.4.15 (L'ENSEMBLE σ_0)
Soit σ_0, l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}^+$ qui satisfont l'une des deux conditions suivantes :

1. *il existe un $(k_x, k_y) \in \mathcal{C}^*$ et un n tel que $\lambda_n(k_x, k_y) = \lambda$ et $\nabla\lambda_n(k_x, k_y) = 0$,*
2. *il existe un $(k_x, k_y) \in \mathcal{C}^*$ et un $n \neq m$ tel que $\lambda_n(k_x, k_y) = \lambda_m(k_x, k_y) = \lambda$*

Alors que dans le cas du guide, nous avons montré Lemme 3.2.12 que cet ensemble est discret, dans le cas du plan, ce n'est plus le cas. On pourrait montrer cependant que l'ensemble des extremums constitue un ensemble discret alors que l'ensemble des points d'intersection des surfaces de dispersion ne l'est pas. Mais d'après les remarques 3.2.13 et 3.2.21, en utilisant des arguments techniques, nous pourrions généraliser le principe d'absorption limite pour les fréquences qui correspondent à des valeurs propres multiples.

Ainsi, en utilisant la démonstration de la section 3.2.2, les idées développées dans [Bamberger *et al.* (1988)][11] et la démarche de [Wilcox (1967, 1978)] notre conjecture est que la solution de l'équation $(\mathcal{P})$ dans le cas de coefficients parfaitement périodiques s'exprime comme dans le cas du guide en fonction des valeurs propres et vecteurs propres des opérateurs $A(k_x, k_y)$. Ainsi, d'après l'expression (4.105), certains termes de la somme vont jouer un rôle prépondérant, on définit donc l'ensemble $I(\omega)$ de la manière suivante :

$$I(\omega) = \{n \in \mathbb{N},\ \exists (k_x, k_y) \in \mathcal{C}^*, \quad \lambda_n(k_x, k_y) = \omega^2\}.$$

CONJECTURE 4.4.16 (SOLUTION « PHYSIQUE » DE L'ÉQUATION DE HELMHOLTZ PÉRIODIQUE)
La fonction u_ε définie par (4.105) a une limite dans tous les $H^1(\mathcal{C}_{(p_x,p_y)})$ qui est solution dans H^1_{loc} du problème de Helmholtz sans absorption et qui est définie par $\forall (x, y) \in \mathcal{C},\ \forall (p_x, p_y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$u(x + p_x, y + p_y) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x + p_x, y + p_y) \tag{4.106}$$

avec

- *pour $n \notin I(\omega)$,*

$$U_n(x + p_x, y + p_y) = \int_{\mathcal{C}^*} \frac{\left\langle \hat{f}(\cdot, (k_x, k_y)), \varphi_n(\cdot, (k_x, k_y)) \right\rangle}{\lambda_n((k_x, k_y)) - \omega^2}\, \varphi_n(x, y; (k_x, k_y))\, e^{\imath p_x k_x} e^{\imath p_y k_y}\, dk_x\, dk_y$$

- *pour $n \in I(\omega)$, soit $\Gamma_n(\omega) = \{(k_x, k_y) \in \mathcal{C}^*,\ \lambda_n(k_x, k_y) = \omega^2\}$ l'intersection entre la surface de dispersion et le plan ω^2. On suppose $\nabla\lambda_n(k_x, k_y) \neq 0$ sur $\Gamma_n(\omega)$ (ce qui est vrai si on*

[11] article qui traite du calcul de la fonction de Green pour différents opérateurs laplaciens discrets

exclut les valeurs qui correspondent à un extremum des surfaces de dispersion).

$$U_n(x+p_x, y+p_y) =$$
$$\textit{v.p.} \int_{\mathcal{C}^*} \frac{\left\langle \hat{f}(\cdot,(k_x,k_y)), \varphi_n(\cdot,(k_x,k_y))\right\rangle}{\lambda_n((k_x,k_y)) - \omega^2}\, \varphi_n(x,y;(k_x,k_y))\, e^{\imath p_x k_x} e^{\imath p_y k_y}\, dk_x\, dk_y$$
$$+\imath\pi \int_{\Gamma_n(\omega)} \frac{\left\langle \hat{f}(\cdot,(k_x,k_y)), \varphi_n(\cdot,(k_x,k_y))\right\rangle}{|\nabla\lambda_n((k_x,k_y))|}\, \varphi_n(x,y;(k_x,k_y))\, e^{\imath p_x k_x} e^{\imath p_y k_y}\, dk_x\, dk_y$$

où la valeur principale est définie par

$$\textit{v.p.} \int_{\mathcal{C}^*} \ldots dk_x\, dk_y = \lim_{\delta\to 0} \int_{\mathcal{C}^*\subset\mathcal{O}_\delta} \ldots dk_x\, dk_y$$

avec $\mathcal{O}_\delta$ la famille des voisinages ouverts de $\Gamma_n(\omega)$ défini par

$$\mathcal{O}_\delta = \{(k_x,k_y),\ \textit{dist}(k,\Gamma_n(\omega)) < \delta\}$$

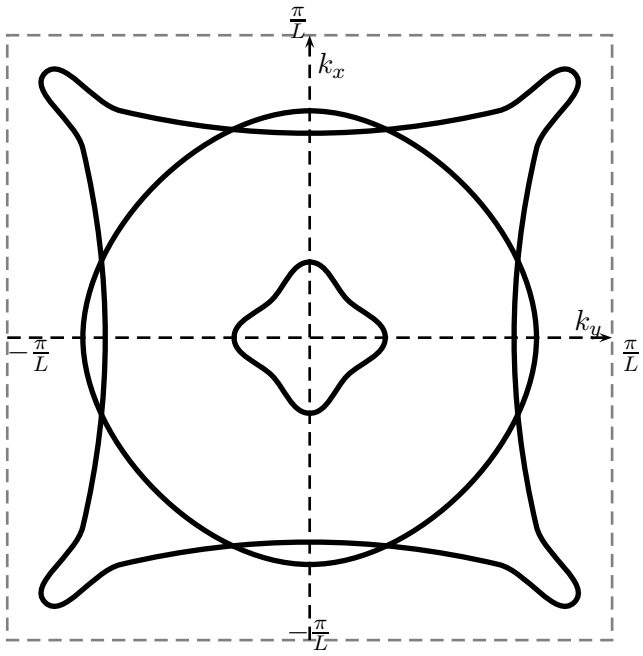


FIG. 4.40: Les courbes $\Gamma_n(\omega)$ pour $n \in I(\omega)$.

Cette conjecture est donc un résultat très intéressant ; cependant elle est difficile à utiliser pour montrer que la famille des opérateurs NtD $\{\Lambda_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ a bien une limite. En effet, dans le cas du guide du Chapitre 3, nous avons montré que pour chaque problème de demi-guide, il existe un problème équivalent de guide avec coefficients parfaitement périodiques à condition que l'indice ρ_p vérifie une hypothèse de symétrie (l'hypothèse (H3)). Dans le cas du plan, cette manipulation est plus difficile : comment trouver un problème de plan parfaitement périodique équivalent au problème posé dans le domaine extérieur ? Ainsi, le principe d'absorption limite pour le cas du plan parfaitement périodique ne nous donne pas de résultat direct à propos de l'existence de la limite de la famille des opérateurs NtD. **Il nous donne cependant l'existence d'une solution du problème de Helmholtz dans un milieu parfaitement périodique.**

4.4.3.2 Comportement asymptotique de la solution

A l'image de ce qui est fait dans [Bamberger *et al.* (1988)], nous avons cherché à exprimer le comportement asymptotique de la solution à l'infini pour deux raisons. La première raison a été de savoir si il était possible de déterminer une condition de radiation à l'infini. La deuxième raison s'est présentée très récemment et concerne un moyen d'enrichir certains de nos espaces d'approximation. Cette idée est encore au stade conceptuel, nous l'abordons Section 4.5.3 mais nous ne l'avons pas encore mis en oeuvre.

Notre conjecture concernant le comportement asymptotique de la solution physique donnée par (4.106) de l'équation de Helmholtz périodique est la suivante.

CONJECTURE 4.4.17 (COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SOLUTION)
$\forall (x,y) \in \mathcal{C},\ \forall (p_x,p_y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$u(x+p_x, y+p_y) = \sqrt{L} e^{\imath\pi/4} \sum_{p\in I(\omega)} \sum_{\varepsilon_p(\omega,\theta)} \frac{A_p(x,y;\omega,\theta)}{\sqrt{r}} \exp(\imath r \overrightarrow{S_p}(\omega,\theta)\cdot\overrightarrow{\theta}) + \mathcal{O}\big(\frac{1}{r^{3/2}}\big) \qquad (4.107)$$

où

- $r = \sqrt{p_x^2+p_y^2}$ *et* $\tan\theta = p_x/p_y$ *;*
- $\varepsilon_p(\omega,\theta)$ *est l'ensemble des points* $\overrightarrow{S_p}(\omega,\theta)$ *de* $\Gamma_p(\omega)$ *dont le vecteur normal unitaire vérifie :*

$$\frac{\nabla\lambda_p(\overrightarrow{k})}{\|\nabla\lambda_p(\overrightarrow{k})\|} = \overrightarrow{\theta}\,;$$

- $\mathcal{C}_p(\omega,M)$ *la courbure de Gauss de* $\Gamma_p(\omega)$ *en* M *;*
- $\forall (x,y) \in \mathcal{C}$,

$$A_p(x,y;\omega,\theta) = \frac{\big\langle \hat{f}(\cdot,\overrightarrow{S_p}(\omega,\theta)), \varphi_p(\cdot,\overrightarrow{S_p}(\omega,\theta))\big\rangle}{\|\nabla\lambda_p(\overrightarrow{S_p}(\omega,\theta))\|\sqrt{\mathcal{C}_p(\omega,\overrightarrow{S_p}(\omega,\theta))}} \varphi_p(x,y;\overrightarrow{S_p}(\omega,\theta))$$

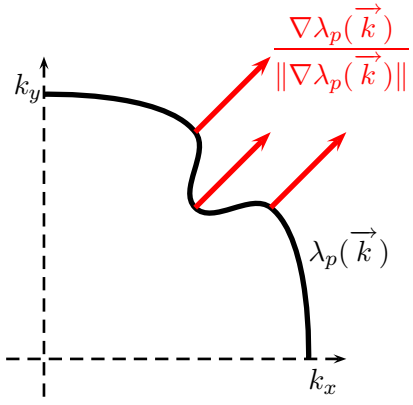


FIG. 4.41: Exemple de points $S_p(\omega,\theta)$ pour $\theta = \pi/4$.

Dans [Murata & Tsuchida (2006)], le cas des basses fréquences a été démontré, c'est-à-dire des fréquences pour lesquelles l'ensemble $I(\omega)$ est restreint au rang $n = 1$, la courbe de dispersion

correspondante est convexe et enfin il existe un vecteur propre positif correspondant à chaque point de $\Gamma_n(\omega)$.

La démonstration de cette conjecture est en cours d'étude mais elle présente un grand nombre de difficultés théoriques et techniques.

4.4.4 Liens entre les deux démarches

D'un point de vue pratique, dans la continuité de ce que nous avons fait jusqu'à présent et même s'il reste un grand nombre de questions théoriques ouvertes, nous avons tenter dans un premier temps de mettre en oeuvre numériquement la première approche. Nous allons voir que les conjectures 4.4.4-4.4.12 peuvent être validées pour l'instant numériquement. Certaines applications montreront cependant que ce n'est pas suffisant : les espaces de discrétisation choisis pour l'instant ne sont pas adaptés. Il nous semble que la deuxième approche résumée par la conjecture 4.4.16 pourrait nous permettre d'enrichir ces derniers espaces par des fonctions de base bien choisies.

Il existe un lien entre ces deux approches. Elles font en effet intervenir de façon différente le spectre de l'opérateur A et plus précisément les intersections entre les surfaces de dispersion et le plan ω^2. Ainsi, d'après les relations de la section 4.4.1

$$\sigma(A) = \bigcup_{k_y \in]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}]} \sigma\big(A(k_y)\big) = \bigcup_{(k_x,k_y)\in\mathcal{C}^*} \sigma\big(A(k_y,k_y)\big)$$

on montre en utilisant la section 3.2.5.4 qui établit le lien entre les valeurs propres de module 1 de chaque opérateur $R(k_y)$ et le spectre de l'opérateur $A(k_x,k_y)$ que

$$\bigcup_{n\in I(\omega)} \Big\{(k_x,k_y)\in\Gamma_n(\omega)\Big\} = \bigcup_{k_y\in]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}]} \bigcup_{m\in[\![1,N(\omega,k_y)]\!]} \Big\{(\pm\xi_m(k_y),k_y),\ \exp \imath\xi_m(k_y) \text{ val.prop. } R(k_y)\Big\}.$$

Il est donc possible de reconstruire les courbes $\Gamma_n(\omega)$ à partir des valeurs propres de module 1 des opérateurs $R(k_y)$. Si nous sommes donc amenés à utiliser la deuxième approche, cela ne nécessitera pas la résolution de nouveaux problèmes mais elle découlera naturellement des résolutions déjà effectuées.

4.5 Principe d'absorption limite numérique

Même si la résolution du problème de Helmholtz sans absorption par une technique d'absorption limite pose encore quelques questions, nous tentons ici d'étendre la résolution numérique du cas avec absorption au cas sans absorption en tenant compte des conjectures 4.4.4 et 4.4.12.

Les étapes de l'algorithme de calcul présenté au début de la section 4.3 sont sensiblement les mêmes. Ainsi la construction de l'opérateur Λ passe par les calculs suivants.

1. Construction de l'opérateur NtD de demi-espace Λ^{H}

(i) Pour chaque $k_y \in [-\pi/L, \pi/L]$, pour toute fréquence ω telle que $\omega^2 \notin \sigma_{Neu}(k_y)$ (ensemble des fréquences propres du problèmes de cellule discrétisé) résolution des problèmes de cellule (4.24)-(4.25)-(4.26) avec $\varepsilon = 0$ et calcul des opérateurs NtD locaux correspondants (4.29), $T^{ij}(k_y)$. Calcul des opérateurs NtN (4.31), $N^{i,\pm}(k_y)$, qui servira pour l'étape 2-(i).
(ii) Pour chaque $k_y \in [-\pi/L, \pi/L]$, pour toute fréquence ω telle que $\omega^2 \notin \sigma_0(k_y)$, détermination de l'opérateur de propagation $R(k_y)$ solution de l'équation de Riccati stationnaire $(\mathcal{E}^R_{\varepsilon,k_y})$ en utilisant les méthodes présentées à la section 3.3.2.1 ;
(iii) Construction de $\widehat{\Lambda}^{\mathrm{H}}$ (4.34)
(iv) Calcul de Λ^{H} en utilisant la TFB et la TFB inverse par (4.35),

2. Construction de $\Lambda_{(i,j)}$ pour chaque $(i,j) \in \{s,a\}^2$

(i) Construire l'opérateur NtN $\widetilde{N}_{(i,j)}$ en résolvant pour tout $\varphi \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$ le problème variationnel $\mathcal{Q}^{\varphi}_{(i,j)}$ où la forme bilinéaire est donnée par (4.100),
(ii) Appliquer la relation :

$$\Lambda_{(i,j)} = E_{(i,j)} \circ \widetilde{R} \circ \Lambda^{\mathrm{H}} \circ \widetilde{N}_{(i,j)},$$

où $\widetilde{R}$ est l'opérateur de restriction de $\widetilde{\Sigma}$ dans $\Sigma^i_{(0)}$ et $E_{(i,j)}$ l'opérateur d'extension introduit Lemme 4.2.17.

3. Détermination de l'opérateur NtD Λ par (4.2.27) ;

4. Résolution du problème intérieur avec conditions de NtD ;

5. Reconstruction de la solution du problème de Helmholtz sans absorption $(\mathcal{P})$ en utilisant la relation (4.3)

La construction de l'opérateur NtD de demi-espace repose sur les mêmes étapes de calcul que dans le cas avec absorption. Il suffit donc d'appliquer au cas $\varepsilon = 0$ la discrétisation des problèmes de cellule k_y- quasi-périodiques étudiée Section 4.3.1.3. La seule différence est la résolution de la famille d'équations de Riccati stationnaire dans le cas sans absorption pour laquelle il suffit d'utiliser les méthodes présentées pour le cas du guide à la section 3.3.2.1. Ce calcul ne présente donc pas de nouvelles difficultés autres que celles déjà rencontrées dans le cas avec absorption ou dans le cas du guide sans absorption.

Les traitements particuliers liés à l'absorption limite interviennent surtout dans la discrétisation pour la variable duale et dans la détermination des opérateurs $\widetilde{N}_{(i,j)}$. En effet, pour le premier point, il va falloir traiter des fonctions qui sont a priori seulement H^{-1} pour la variable duale. Quant au second point, l'expression de la forme bilinéaire donnée par (4.100) suggère une discrétisation particulière.

Les choix de discrétisation concernant les variables physiques et duales à la section 4.3 sont conservées dans cette étude, nous utilisons donc ici les mêmes notations. Nous expliquons dans la suite comment résoudre la nouvelle équation intégrale $\mathcal{Q}^{\varphi}_{(i,j)}$ et montrons des tests de validation.

4.5.1 Discrétisation de l'équation $\mathcal{Q}^{\varphi}_{(i,j)}$

D'après la conjecture 4.4.4, la solution du problème $\mathcal{Q}^{\varphi}_{(i,j)}$ est cherchée dans l'espace W_{-1} dont on rappelle la définition

$$W_{-1}^{-} = \big\{\hat{\psi}^0 \in H^{-1}\big(\big]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big[\big), H_k^{-1/2}(\Sigma^0)\big), \quad \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\hat{\psi}^0(\cdot,k)\,dk = 0\big\}.$$

et les fonctions test sont dans

$$W_{-1}^{+} = \big\{\hat{\psi}^0 \in H^{-1}\big(\big]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big[\big), H_k^{+1/2}(\Sigma^0)\big), \quad \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\hat{\psi}^0(\cdot,k)\,dk = 0\big\}.$$

Comme espace d'approximation de W_{-1}^{-} et W_{-1}^{+}, on utilise l'espace $W_{n,N_k,q}$ défini par (4.76). On rappelle que c'est le produit tensoriel entre un espace de fonctions ne dépendant que de k et un espace de fonctions ne dépendant que de y et on note sa base de la façon suivante

$$W_{n,N_k,q} = \operatorname{span}\big[w^n(k)\phi_h^\ell(y)\big]_{1\le n\le N,\ 1\le \ell\le N_y}.$$

Typiquement, pour $q=0$ les fonctions $w^n(k)$ sont constantes par morceaux et d'intégrale nulle sur $[-\pi/L,\pi/L]$ et ϕ_h^ℓ sont des fonctions constantes par morceaux.

REMARQUE 4.5.1 (L'ESPACE DE DIMENSION FINIE $W_{n,N_k,q}$ ET LES ESPACES $W_{-1}^{\pm}$)
$W_{n,N_k,q}$ n'est pas un bon espace d'approximation pour les espaces $W_{-1}^{\pm}$. En effet, les fonctions

$$u(y,k) = \delta_{k=k_1}u_0(y) \quad \textit{et} \quad u(y,k) = \frac{e^{\imath k_1 y}}{\sqrt{k-k_1}}u_0(y)$$

par exemple, pour $u_0 \in L^2(\Sigma_0)$ est dans W_{-1}^{-} et il est difficile de l'approcher par une combinaison linéaire de fonctions de $W_{n,N_k,q}$. Comme nous le verrons, c'est une des limitations de la méthode numérique présentée ici. Dans un premier temps, nous avons gardé cet espace pour des raisons de simplicité : cet espace facilite l'implémentation numérique. Une des perspectives de cette thèse et d'améliorer l'approximation des espaces $W_{-1}^{\pm}$.

Pour clarifier la présentation, supposons $q=0$ et prenons un exemple de base de fonctions $(w^n(k))_n$

$$\forall n \in [\![1, N_k-1]\!], \quad w^n(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\chi_{[k_{n-1},k_n]} - \chi_{[k_n,k_{n+1}]}\Big], \quad \text{où } k_n = -\frac{\pi}{L} + n\Delta k_x. \tag{4.108}$$

Commençons tout d'abord par utiliser naïvement l'équation intégrale du cas avec absorption ($\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon}_{(i,j)}$) pour $\varepsilon = 0$ et montrons numériquement que la solution calculée n'est pas du tout la solution attendue. Calculons donc la solution du problème ($\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}$) avec la forme bilinéaire

$a_{(i,j)}^{h,N_k,q,M}$ correspondant à la forme bilinéaire $a_{(i,j)}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}$ définie par (4.78) avec $\varepsilon = 0$, en supposant que pour tous les points de quadrature $(k_{j_x}^{m_x}, k_{j_y}^{m_y})$, le noyau $K_{(i,j)}^{\varepsilon,h}(k_{j_x}^{m_x}, k_{j_y}^{m_y})$ peut être calculé pour $\varepsilon = 0$.

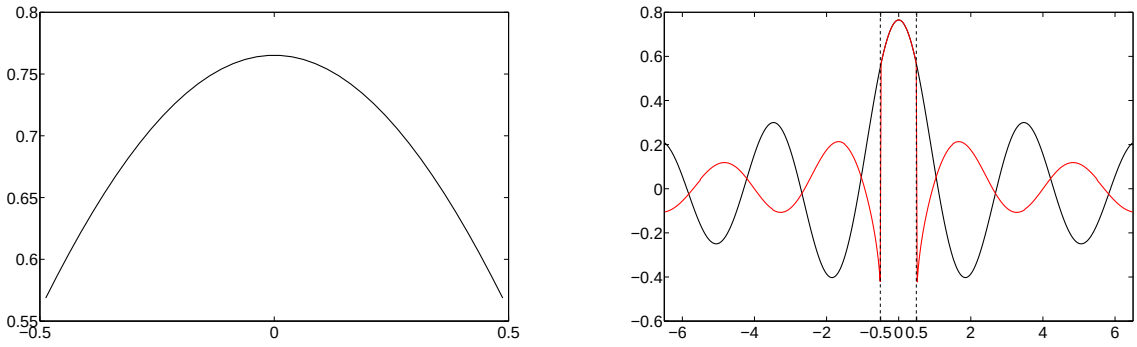
Représentons la solution obtenue pour $(i,j) = (s,s)$ dans le cas particulier du milieu homogène. Comme dans l'étude de la section 4.3.2.2, nous comparons le résultat obtenu aux fonctions de Hankel. En effet, par définition de l'opérateur $\widetilde{N}_{(s,s)}$ recherché, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_\varepsilon^e = \mathrm{H}_n^{(1)}\big(\sqrt{\rho_p \omega^2}\sqrt{x^2+y^2}\big), \quad u^e\Big|_{\widetilde{\Sigma}} = \widetilde{N}_{(s,s)}\Big(u^e\Big|_{\Sigma^i}\Big).$$

Plaçons-nous dans le cas où le coefficient $\rho_p = 1$, la fréquence $\omega = 2$ et la période $L = 1$ ce qui implique

$$\Sigma_{(0)}^i = \big\{(0.5, y),\ y \in [-0.5, 0.5]\big\} \quad \text{et} \quad \widetilde{\Sigma} = \big\{(0.5, y),\ y \in \mathbb{R}\big\}.$$

Nous utilisons dans tout ce qui suit des éléments finis de Raviart-Thomas de plus bas degré pour la discrétisation en espace ($N_y = 40$) et des polynômes de degré 0 pour les fonctions dépendant de la variable duale ($q = 0$ et $N_k = 60$). La formule de quadrature d'ordre $M = 5$ est utilisée pour approcher les intégrales intervenant dans la formulation ($\mathcal{Q}_{(i,j)}^{\varphi,\varepsilon,h,N_k,q,M}$). La figure 4.42 représente



(a) La restriction de la fonction de Hankel à $\Sigma_{(0)}^i$

(b) La fonction de Hankel (en noir) et sa reconstruction sur $\widetilde{\Sigma}$

FIG. 4.42: Pour $\varepsilon = 0$, restriction de la fonction de Hankel à $[-0.5, 0.5]$ à gauche à partir de laquelle on calcule son extension en résolvant le problème $(\mathcal{Q}_{(i,j)}^{\varphi,\varepsilon,h,N_k,q,M})$ pour $\varepsilon = 0$. On compare à droite la solution obtenue sur $[-6.5, 6.5]$ (en rouge) qu'on compare à la fonction de Hankel (en noir). $M = 5$.

sur un intervalle $[-6.5, 6.5]$ en noir la fonction de Hankel et en rouge la reconstruction obtenue en résolvant le problème $(\mathcal{Q}_{(i,j)}^{\varphi,\varepsilon,h,N_k,q,M})$ pour $\varepsilon = 0$ (Figure 4.42(b)) quand φ_h est la projection sur $\mathcal{T}_h$ de la restriction de la fonction de Hankel sur Σ^i (Figure 4.42(a) est représentée seulement la restriction sur $\Sigma_{(0)}^i \equiv [-0.5, 0.5]$). Cette reconstruction en utilisant « naïvement » la formulation du problème avec absorption ne convient absolument pas.

Utilisons maintenant la conjecture 4.4.12 et discrétisons le problème en utilisant $\mathcal{Q}_{(i,j)}^{\varphi}$ la même procédure que dans la Section 4.3.2.1. Pour toute donnée $\varphi_h \in \mathcal{T}_{(i,j)}^i$, on cherche une solution

$\hat{\psi}^0_{h,N_k,q}$ dans $W_{n,N_k,q}$ c'est-à-dire qui s'écrit comme

$$\forall y \in \Sigma^0,\ \forall k_y \in \big[-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\big],\quad \hat{\psi}^0_{h,N_k,q,M} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N_y} \alpha_{n,\ell} w^n(k)\phi_h^\ell(y).$$

Le problème $\mathcal{Q}^{\varphi}_{(i,j)}$ semi-discret devient

Trouver $(\alpha_{n,\ell})_{1\le n\le N,\,1\le \ell\le N_y}$ tel que $\forall n_2 \in [\![1,N]\!],\ \ell_2 \in [\![1,N_y]\!]$

$$\sum_{n_1=1}^{N}\sum_{\ell_1=1}^{N_y} \alpha_{n_1,\ell_1} a^{h,N_k,q,M}_{(i,j)}(w^{n_1}\phi_h^{\ell_1}, w^{n_2}\phi_h^{\ell_2}) = \frac{2\pi}{NL}\sum_{j_x=0}^{N}\sum_{m_x=1}^{M} \omega_{m_x}\Big(\hat{g}_{\varphi_h}(\cdot;k_{j_x}^{m_x});\phi_h^\ell(\cdot)\Big) w^n(k_{j_x}^{m_x}), \tag{$\mathcal{Q}^{\varphi,h,N_k,q,M}_{(i,j)}$}$$

où $\hat{g}_{\varphi_h}$ est définie comme dans le cas avec absorption par (4.74), $a^{h,N_k,q,M}_{(i,j)}$ est une approximation de $a_{(i,j)}$ et les points et poids de Gauss sont définis Section 4.3.2.1. Pour en donner une expression explicite, nous nous restreignons au cas où $q=0$, au cas où la base $(w^n)_n$ est donnée par (4.108). En utilisant l'expression (4.100) et la remarque 4.4.13, on établit la procédure suivante : pour tout $n_1 \in [\![1,N]\!]$ et pour tout $\ell_1 \in [\![1,N_y]\!]$,

1. Pour $j_y \in \{n_1-1,n_1\}$, pour tout $m_y[\![1,M]\!]$, on calcule les éléments propres de $R_h(k_{j_y}^{m_y})$: en gardant les notations de la conjecture 3.2.52, on détermine les espaces $\mathbb{E}_{k_{j_y}^{m_y}}$ et $\mathbb{P}_{k_{j_y}^{m_y}}$, les valeurs propres de module 1 $r_m(k_{j_y}^{m_y}) = \exp(\imath\xi_m(k_{j_y}^{m_y})L)$ et les vecteurs propres correspondants $p_m(k_{j_y}^{m_y})$ pour tout $m \in [\![1,N(\omega,k_{j_y}^{m_y})]\!]$.
2. d'après la remarque, comme w^{n_2} est de support $[k_{n_2-1},k_{n_2+1}]$ si n_2 est tel que

$$\forall j_y \in \{n_1-1,n_1\},\ \forall m_y[\![1,M]\!],\ \forall m \in [\![1,N(\omega,k_{j_y}^{m_y})]\!],\quad \pm\xi_m(k_{j_y}^{m_y}) \notin \big[k_{n_2-1},k_{n_2+1}\big] \tag{4.109}$$

alors d'après la remarque 4.4.13

$$\left|\begin{array}{l} a^{h,N_k,q,M}_{(i,j)}(w^{n_1}\phi_h^{\ell_1}, w^{n_2}\phi_h^{\ell_2}) = \dfrac{2\pi}{NL}\Big[\displaystyle\sum_{j_x=k_{n_1-1}}^{k_{n_1}}\sum_{m_x=1}^{M} \omega_{m_x}\Big(\phi_h^{\ell_1};\phi_h^{\ell_2}\Big) w^{n_1}(k_{j_x}^{m_x}) w^{n_2}(k_{j_x}^{m_x}) \\ -\dfrac{2\pi}{NL}\displaystyle\sum_{j_y=k_{n_1-1}}^{k_{n_1}}\sum_{m_y=1}^{M}\sum_{j_x=k_{n_2-1}}^{k_{n_2}}\sum_{m_x=1}^{M} \omega_{m_x}\omega_{m_y}\Big(\mathbf{K}^h_{(i,j)}(k_{j_x}^{m_x},k_{j_y}^{m_y})\,\phi_h^{\ell_1};\phi_h^{\ell_2}\Big)\, w^{n_2}(k_{j_x}^{m_x})\, w^{n_1}(k_{j_y}^{m_y})\Big] \end{array}\right.$$

où pour tout $k_y \in \{k_{j_y}^{m_y},\ j_y \in \{n_1-1,n_1\},\ m_y[\![1,M]\!]$ et tout $k_x \in \{k_{j_x}^{m_x},\ j_x \in \{n_1-1,n_1\},\ m_x[\![1,M]\!]$, les opérateurs $(\mathbf{I}_h - R_h(k_y)e^{\imath Lk_x})$ et $(\mathbf{I}_h - R_h(k_y)e^{-\imath Lk_x})$ sont inversibles et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^h_{(i,j)}(k_x,k_y) \;=\;& +\varepsilon_j\ \frac{L}{2\pi}e^{\imath Lk_x}\Big(N_h^{0,-}(k_y) - N_h^{1,-}(k_y)R_h(k_y)\Big)\Big(\mathbf{I}_h - R_h(k_y)e^{\imath Lk_x}\Big)^{-1} \\ &+ \frac{L}{2\pi}\,\mathbf{I}_h \\ &+ \varepsilon_i\ \frac{L}{2\pi}e^{-\imath Lk_x}\Big(N_h^{0,+}(k_y) - N_h^{1,+}(k_y)R_h(k_y)\Big)\Big(\mathbf{I}_h - R_h(k_y)e^{-\imath Lk_x}\Big)^{-1} \end{aligned}$$

où $\mathbf{I}_h$ est la matrice unité de $\mathcal{L}(\mathcal{T}_h)$.

3. Si la relation (4.109) n'est pas vérifiée alors l'expression est plus compliquée. On note $e_h^{\ell_1}(k_{j_y}^{m_y})$ la projection de $\phi_h^{\ell_1}$ sur $\mathbb{E}_{k_{jy}^{m_y}}$ et $p_h^{\ell_1}(k_{j_y}^{m_y})$

$$p_h^{\ell_1}(k_{j_y}^{m_y}) = \sum_{m=1}^{N(\omega,k_{jy}^{m_y})} \hat{\alpha}_m^{\ell_1}(k_{j_y}^{m_y})\, p_m^{\ell_1}(k_{j_y}^{m_y})$$

sa projection sur $\mathbb{P}_{k_{jy}^{m_y}}$, on alors

$$\begin{aligned}
&a_{(i,j)}^{h,N_k,q,M}(w^{n_1}\phi_h^{\ell_1}, w^{n_2}\phi_h^{\ell_2}) = \frac{2\pi}{NL}\Big[\sum_{j_x=k_{n_1-1}}^{k_{n_1}} \sum_{m_x=1}^{M} \omega_{m_x} \Big(\phi_h^{\ell_1};\phi_h^{\ell_2}\Big)_{L^2(\Sigma^0)} w^{n_1}(k_{j_x}^{m_x}) w^{n_2}(k_{j_x}^{m_x}) \\
&-\frac{2\pi}{NL} \sum_{j_y=k_{n_1-1}}^{k_{n_1}} \sum_{m_y=1}^{M} \sum_{j_x=k_{n_2-1}}^{k_{n_2}} \sum_{m_x=1}^{M} \omega_{m_x}\omega_{m_y} \Big(\mathbf{K}_{(i,j)}^{E,h}(k_{j_x}^{m_x}, k_{j_y}^{m_y})\, e_h^{\ell_1}(k_{j_y}^{m_y}); \phi_h^{\ell_2}\Big)\, w^{n_2}(k_{j_x}^{m_x})\, w^{n_1}(k_{j_y}^{m_y}) \\
&- \sum_{j_y=k_{n_1-1}}^{k_{n_1}} \sum_{m_y=1}^{M} \text{v.p.} \int_{k_{n_2-1}}^{k_{n_2+1}} \omega_{m_y} \Big(\mathbf{K}_{(i,j)}^{P,h}(k_{j_x}^{m_x}, k_{j_y}^{m_y})\, p_h^{\ell_1}(k_{j_y}^{m_y}); \phi_h^{\ell_2}\Big)\, w^{n_2}(k_x)\, dk_x\, w^{n_1}(k_{j_y}^{m_y}) \\
&-\frac{L}{2} \sum_{j_y=k_{n_1-1}}^{k_{n_1}} \sum_{m_y=1}^{M} \sum_{m=1}^{N(\omega,k_{jy}^{m_y})} \omega_{m_y} \Big(F^-(k_{j_y}^{m_y}) e^{-\imath\xi_m(k_{jy}^{m_y})L} \hat{\alpha}_m(k_{j_y}^{m_y})\, p_m(k_{j_y}^{m_y}); \phi_h^{\ell_2}\Big) w^{n_2}(-\xi_m(k_{j_y}^{m_y})) w^{n_1}(k_{j_y}^{m_y}) \\
&-\frac{L}{2} \sum_{j_y=k_{n_1-1}}^{k_{n_1}} \sum_{m_y=1}^{M} \sum_{m=1}^{N(\omega,k_{jy}^{m_y})} \omega_{m_y} \Big(F^-(k_{j_y}^{m_y}) e^{-\imath\xi_m(k_{jy}^{m_y})L} \hat{\alpha}_m(k_{j_y}^{m_y})\, p_m(k_{j_y}^{m_y}); \phi_h^{\ell_2}\Big) w^{n_2}(+\xi_m(k_{j_y}^{m_y})) w^{n_1}(k_{j_y}^{m_y})\Big]
\end{aligned}$$

avec $\mathbf{K}_{(i,j)}^{E,h}$ l'approximation de $\mathbf{K}_{(i,j)}^{E}$ et pour tout $k_{j_x}^{m_x}$ et $k_{j_y}^{m_y}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{(i,j)}^{P,h}(k_{j_x}^{m_x}, k_{j_y}^{m_y}) p_h(k_{j_y}^{m_y}) \;=\; & + \varepsilon_j \frac{L}{2\pi} F^-(k_{j_y}^{m_y}) \sum_{m=1}^{N(\omega,k_{jy}^{m_y})} \frac{e^{\imath L k_{j_x}^{m_x}}}{1-\exp(\imath(\xi_m(k_{j_y}^{m_y}) + k_{j_x}^{m_x})L)} \hat{\alpha}_m(k_{j_y}^{m_y}) p_m(k_{j_y}^{m_y}) \\
& + \frac{L}{2\pi}\, p(\cdot; k_{j_y}^{m_y}) \\
& + \varepsilon_i \frac{L}{2\pi} F^+(k_{j_y}^{m_y}) \sum_{m=1}^{N(\omega,k_{jy}^{m_y})} \frac{e^{-\imath L k_{j_x}^{m_x}}}{1-\exp(\imath(\xi_m(k_{j_y}^{m_y}) - k_{j_x}^{m_x})L)} \hat{\alpha}_m(k_{j_y}^{m_y}) p_m(k_{j_y}^{m_y})
\end{aligned}$$

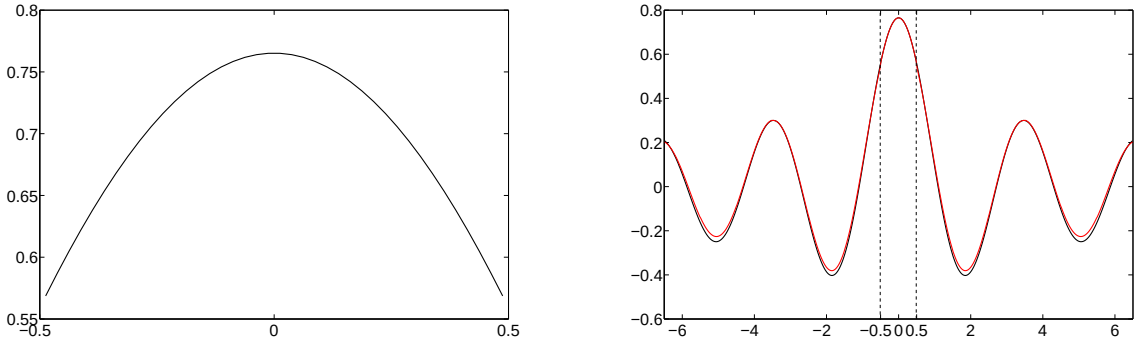
et où la valeur principale de l'intégrale est calculée analytiquement, en utilisant le résultat général

$$\forall a, b > 0, \quad \text{v.p.} \int_{-b}^{a} \frac{e^{\pm\imath k}}{1-e^{\pm\imath k}}\, dk = \pm \ln \frac{1-e^{\pm\imath a}}{1-e^{\mp\imath b}} + 2\imath\pi$$

C'est donc avec cette procédure que nous calculons une approximation des opérateurs $\widetilde{N}_{(i,j)}$.

Afin de valider ce calcul, nous représentons la solution obtenue pour $(i,j) = (s,s)$ en utilisant la conjecture 4.4.12 et le principe d'absorption limite numérique dans le cas particulier du milieu homogène.

Plaçons-nous de nouveau dans le cas où le coefficient $\rho_p = 1$, la fréquence $\omega = 2$ et la période $L = 1$. Nous utilisons dans tout ce qui suit des éléments finis de Raviart-Thomas de plus bas



(a) La restriction de la fonction de Hankel à $\Sigma^i_{(0)}$

(b) La fonction de Hankel (en noir) et sa reconstruction sur $\widetilde{\Sigma}$

FIG. 4.43: Restriction de la fonction de Hankel à $[-0.5, 0.5]$ à gauche à partir de laquelle on calcule son extension en utilisant une approximation de la conjecture 4.4.12. On compare à droite la solution obtenue sur $[-6.5, 6.5]$ (en rouge) qu'on compare à la fonction de Hankel (en noir). $M = 0$**.**

degré pour la discrétisation en espace ($N_y = 40$) et des polynômes de degré 0 pour les fonctions dépendant de la variable duale ($q = 0$ et $N_k = 100$). La formule de quadrature d'ordre $M = 1$ est utilisée. La figure 4.43 représente sur un intervalle $[-6.5, 6.5]$ en noir la fonction de Hankel et en rouge la reconstruction obtenue en utilisant la procédure précédente (Figure 4.43(b)) quand φ_h est la projection sur $\mathcal{T}_h$ de la restriction de la fonction de Hankel sur Σ^i (Figure 4.43(a) est représentée seulement la restriction sur $\Sigma^i_{(0)} \equiv [-0.5, 0.5]$). L'erreur relative est d'environ 9%. La reconstruction est donc très satisfaisante étant donnée les constantes de discrétisation choisies.

Comme expliqué à la fin de la section 4.3.2.2, il est possible enfin de valider tous les opérateurs $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}$, $(i,j) \in \{s,a\}^2$ en utilisant des combinaisons de fonctions de Hankel. Ainsi, on rappelle qu'en notant

$$\forall (x,y) \in \Omega, \quad H_{x_0,y_0}(x,y) = \mathrm{H}_0^{(1)}\big(\sqrt{\rho_p(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)}\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\big),$$

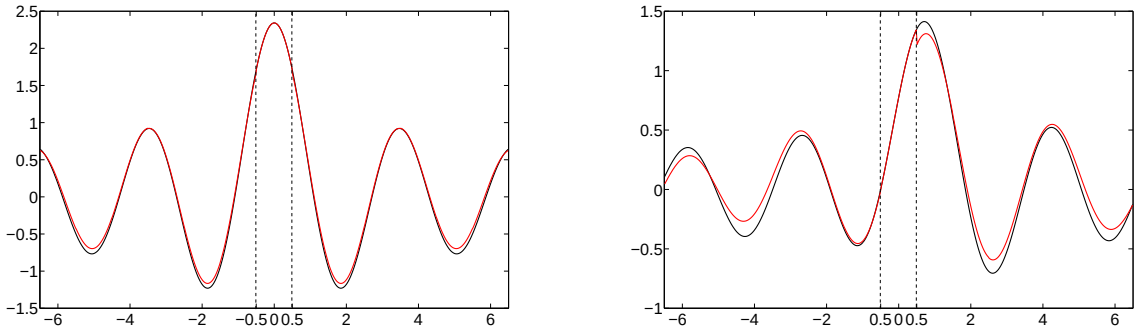
il est facile de voir que

$$\forall (i,j) \in \{s,a\}^2, \quad u^e_{\varepsilon,(i,j)} = H_{L/4,0} + \varepsilon_i\, H_{0,L/4} + \varepsilon_j\, H_{0,-L/4} + \varepsilon_i\varepsilon_j H_{-L/4,0} \quad \in H^1_{(i,j)}(\triangle, \Omega),$$

est solution d'un certain problème extérieur et en particulier

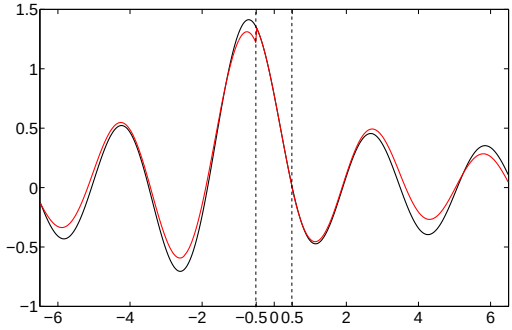
$$\forall (i,j) \in \{s,a\}^2, \quad u^e_{\varepsilon,(i,j)}\Big|_{\widetilde{\Sigma}} = \widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\Big(u^e_{\varepsilon,(i,j)}\Big|_{\Sigma^i}\Big).$$

Figure 4.44, sont représentées les comparaisons entre chaque combinaison linéaire de fonctions de Hankel et leurs reconstructions à partir des opérateurs NtN calculés associés. L'approximation des opérateurs NtN est donc satisfaisante mais elle est loin d'être parfaite. Une des idées pour l'améliorer est dans un premier temps d'augmenter l'ordre M de la formule de quadrature. Cependant, cela n'améliore que très peu la précision et nous atteignons rapidement les limites d'es-

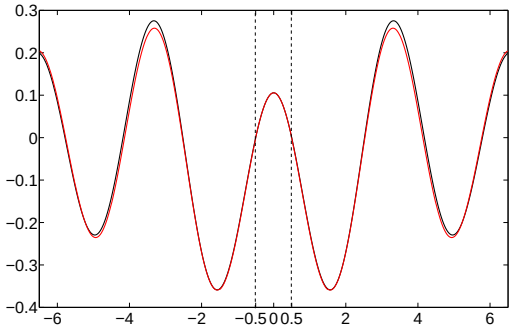


(a) Validation de $\widetilde{N}^{h,N_k,q,M}_{(s,s)}$

(b) Validation de $\widetilde{N}^{h,N_k,q,M}_{(s,a)}$



(c) Validation de $\widetilde{N}^{h,N_k,q,M}_{(a,s)}$



(d) Validation de $\widetilde{N}^{h,N_k,q,M}_{(a,a)}$

FIG. 4.44: Validation de tous les opérateurs NtN à partir de combinaisons linéaires de fonctions de Hankel.

pace mémoire[12]. Nous pensons qu'avant d'améliorer la formule de quadrature, il faudrait améliorer l'approximation des espaces W^-_{-1} et W^+_{-1} qui sont pour l'instant approchés par le produit de fonctions constantes en k par des fonctions constantes en y. En effet, pour l'instant notre procédure de PAL numérique permet seulement de trouver une bonne approximation de la forme bilinéaire $a_{(i,j)}$. Mais nous nous attendons, d'après les résultats du problème avec absorption (voir Figures 4.23, 4.24 et 4.27) et la conjecture 4.4.16, à ce que les fonctions recherchées soient pas très régulières. Il est donc vraiment important d'étudier d'autres espaces d'approximation que ceux utilisés ici. Inutile de rajouter que l'expression des problèmes deviendra encore plus compliquée.

4.5.2 Calcul de la solution de $\mathcal{P}$

Pour calculer l'opérateur NtD, nous utilisons les mêmes arguments et algorithmes que pour le cas avec absorption, Section 4.3.3.1. Enfin pour déterminer la solution, l'algorithme de la section 4.3.3.2 est toujours vrai.

[12] Il faut comprendre que si N_M est le nombre de points k pour lesquels il faut résoudre un problème de demi-guide, il faut garder en mémoire N_M opérateurs R_h, $N_h^{0,\pm}$ et $N_h^{1,\pm}$ de taille N_y par N_y et on atteint rapidement des dizaines de Mo

Commençons par appliquer la méthode de construction de l'opérateur NtD et la solution au cas d'un milieu homogène. Cela nous permettra de valider le calcul.

Figure 4.45 est représentée la source f considérée, dont le support est inclus dans $\Omega^i = [-0.5, 0.5]^2$, l'indice $\rho = 1$ dans tout le milieu et nous supposons la période du milieu égale à 1, c'est-à-dire que tous les calculs seront faits dans une cellule de périodicité de longueur 1. En utilisant l'al-

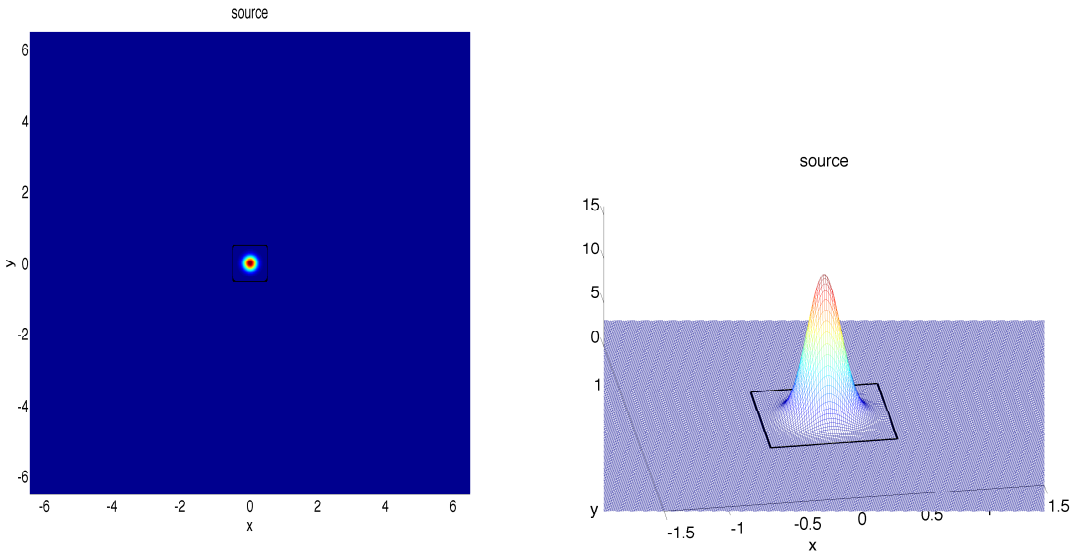


FIG. 4.45: La source f sur $[-6.5, 6.5]^2$ dont le support est inclus dans $\Omega^i = [-0.5, 0.5]^2$

gorithme présenté précédemment, l'opérateur NtD peut être calculé et le problème intérieur résolu. Nous représentons la solution intérieure u_h^i Figure 4.46 dans le cas où la fréquence est $\omega = 2$, le pas de discrétisation en espace $h = 1/40$, pour la discrétisation pour les variables duales, les paramètres sont fixés à $N_k = 100$, $q = 0$, $M = 1$ (ils sont choisis de sorte que les tests de validation des opérateurs NtN de la section 4.3.2.2 soient bons).

Enfin, pour reconstruire la solution, l'algorithme de la section 4.3.3.2 est utilisé. Notons que dans ce cas, la source étant à double symétrie, la solution intérieure u_h^i l'est également (représentée Figure 4.47) et en particulier sa trace φ_h^i. Les sommes dans l'algorithme se restreignent donc au terme en (s, s). Seul l'opérateur $\widehat{N}_{(s,s)}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}$ intervient dans ce cas. On en déduit la solution du problème représentée Figure 4.47, ici sur $[-6.5, 6.5]^2$. La solution calculée n'est pas exactement celle que nous attendions. Là encore, nous pensons que la cause est la mauvaise discrétisation des fonctions dépendant de la variable physique et de la variable duale.

REMARQUE 4.5.2
Cette difficulté est liée à celle rencontrée lorsque nous voulons discrétiser des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ potentiellement régulières qui ne sont pas L^2. En effet, il est souvent difficile pour ces fonctions de bien retranscrire son comportement à l'infini.

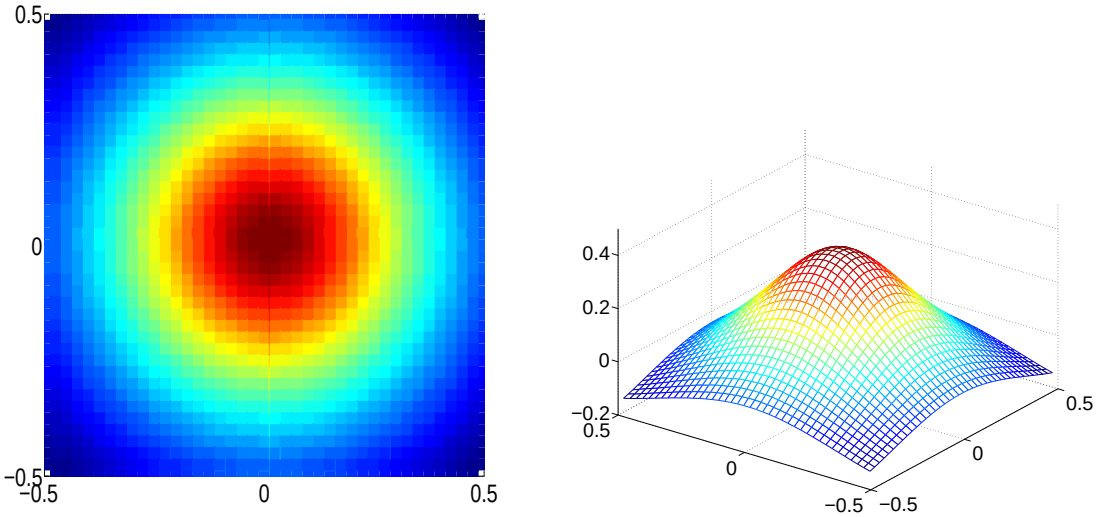


FIG. 4.46: La solution est calculée dans $\Omega^i = [-0.5, 0.5]^2$ en utilisant la construction de l'opérateur NtD calculé Λ_h

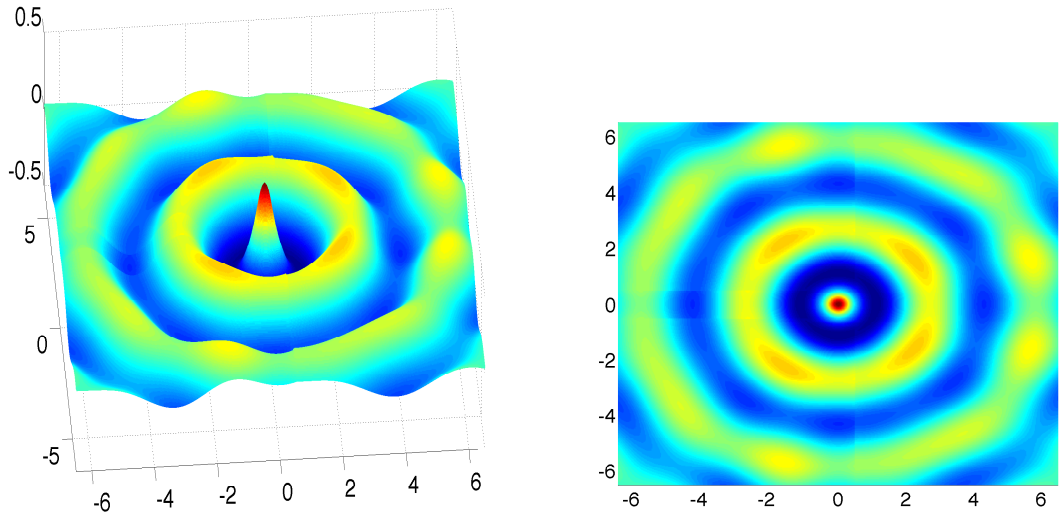


FIG. 4.47: La solution est calculée dans $[-6.5, 6.5]^2$ dans le cas où la source est celle de la Figure 4.45.

Le fait d'appliquer la TFB à ce genre de fonctions n'a pas résolu le problème et l'a seulement modifié. Ainsi, comme pour la transformée de Fourier, la difficulté de discrétiser une fonction régulière et qui n'est pas L^2 est équivalente à celle de discrétiser sa TFB qui est définie sur un ensemble compact mais qui n'est pas régulière.

4.5.3 Perspectives d'améliorations de la méthode

Les améliorations que nous prévoyons utilisent la conjecture 4.4.17 concernant le développement asymptotique de la solution physique du problème de helmholtz parfaitement périodique. L'idée est de montrer que pour chaque donnée φ, le développement asymptotique de $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}\varphi$ dépend de celui donné par (4.107) pour la direction particulière, $\theta = \pi/2$. Ainsi avec les notations de la conjecture 4.4.17, on montrerait que : $\forall y \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}[,\ \forall p_y \in \mathbb{Z}$,

$$N_{(i,j)}\ \varphi\ (y + p_y) = \sqrt{L} e^{\imath\pi/4} \sum_{p \in I(\omega)} \sum_{\varepsilon_p(\omega,\pi/2)} \frac{A_p(L/2, y; \omega, \pi/2)}{\sqrt{y}} \exp(\imath p_y y \overrightarrow{S_p}(\omega, \pi/2) \cdot \overrightarrow{e}_y) + \mathcal{O}\big(\frac{1}{y^{3/2}}\big), \tag{4.110}$$

puis en utilisant des propriétés de la TFB, on imagine bien que $\widehat{N}_{(i,j)}\varphi$ se comporte comme $1/\sqrt{k}$ autour des points $\overrightarrow{S_p}(\omega, \pi/2) \cdot \overrightarrow{e}_y$.

L'idée est donc d'enrichir l'espace de dimension finie $W_{n,N_k,q}$ par des fonctions de type $1/\sqrt{k - k_i}$ pour $k_i = \overrightarrow{S_p}(\omega, \pi/2) \cdot \overrightarrow{e}_y$. L'analyse numérique et la mise en oeuvre sont en cours d'étude.

4.6 Conclusion

Un certain nombre de perspectives sont prévues pour ce chapitre. Tout d'abord d'un point de vue théorique, il reste à prouver les conjectures 4.4.4, 4.4.12, 4.4.16 et 4.4.17. La difficulté la plus importante nous semble être en ce qui concerne les deux premières conjectures la nature de l'ensemble σ^H des fréquences à exclure pour pouvoir définir la limite des opérateurs NtD et NtN de demi-espace. Nous pensons que cette difficulté est inhérente à notre méthode et elle est liée au fait que les intersections avec ω^2 des surfaces de dispersion (ce qui donnent des courbes de dispersion) sont déterminées à partir de l'union sur k_y d'un certain nombre de points. En effet, cette approche consiste en somme à tenter de paramétrer les surfaces de dispersion dans le repère (k_x, k_y) et donne donc un rôle particulier à ces deux directions alors que le paramétrage naturel des courbes de dispersion se ferait plutôt par l'abscisse curviligne (comme d'ailleurs dans la section 4.4.3). La méthode présentée dans cette thèse semble néanmoins être très avantageuse d'un point de vue du coût de calcul, de la possibilité de paralléliser un certain nombre de calculs et de la simplicité de l'implémentation numérique (sauf peut être pour la résolution des équations intégrales). Notre idée très générale pour confirmer les conjectures seraient en fait de tenter de fusionner les approches présentées Sections 4.4.2 et 4.4.3.

D'un point de vue numérique, même si les calculs sont validés dans des cas particuliers, l'analyse numérique de la méthode n'est pas complète pour le problème avec absorption et encore davantage pour le problème sans absorption. D'un point de vue pratique, nous avons pointé

tout le long de ce chapitre, les différentes améliorations possibles à notre démarche numérique, notamment

- Rendre plus performante la méthode d'inversion qui intervient dans la résolution des équations intégrales discrètes. Pour l'instant, l'inversion est directe et donc contraint le nombre de degrés de liberté de notre discrétisation. L'idée est donc de trouver une méthode itérative adaptée à l'image de la méthode des multipôles pour le problème homogène (voir pour une introduction générale [Darve (2000) ; Coifman *et al.* (1993) ; Cheng *et al.* (2006)]).
- Améliorer la discrétisation des fonctions qui dépendent de la variable duale qui pour l'instant sont approchées par des fonctions constantes par morceaux[13]. La limitation de cette discrétisation se ressent déjà pour le problème avec absorption (voir section 4.3.2.2) mais est d'autant plus importante pour le problème sans absorption (se reporter aux sections 4.5.1 et 4.5.2). La perspective est de justifier et appliquer les améliorations présentées Section 4.5.3.

[13] Cette approche a au moins le mérite d'être plus simple à implémenter

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons achevé le dernier chapitre par une note assez pessimiste mais il ne faut surtout pas oublier tous les résultats qui précèdent. En effet, la théorie de construction d'opérateurs NtD pour des **milieux périodiques absorbants** est complète, la méthode est très performante puisque tous les calculs consistent à résoudre des problèmes cellulaires (dans le cas du milieu périodique 2D, la résolution des nombreux problèmes cellulaires peut être parallélisée) puis à résoudre des équations à valeurs et inconnues opérateurs. La résolution de ces équations, les équations de Riccati stationnaires avec contrainte pour le chapitre 2 et 3 auxquelles il faut rajouter les équations intégrales non standard pour le chapitre 4 présentent des questions ouvertes mais les résultats numériques sont très satisfaisants. Un certain nombre de questions d'analyse numérique reste à étudier :

(i) la convergence des méthodes utilisées pour résoudre le problème de Riccati stationnaire ;

(ii) l'analyse numérique (théorique) de l'approximation de l'équation intégrale non standard qui est une question qui reste ouverte en grande partie et nécessite de nouvelles idées et techniques (les équations intégrales en (x,k) sont complétement au delà de la théorie standard de [Kress (1999) ; Colton & Kress (1983)])

(iii) la recherche d'une méthode d'inversion adaptée des matrices pleines qui découlent de la résolution des équations intégrales (pour l'instant, l'inversion se fait de manière directe et cela implque des limitations pour la discrétisation) ;

(iv) l'amélioration de la discrétisation des fonctions qui dépendent de (y,k) qui, pour l'instant, reste élémentaire (mais contrainte par le point précédent) ;

Ces questions sont à notre avis non standard mais d'importance. En particulier, les améliorations suggérées en (iii) et (iv) permettraient par exemple de traiter le cas des milieux 2D ne présentant pas de symétrie (voir Annexe A.3) qui nécessite la résolution d'équations intégrales non standard et couplées, ce qui correspond à l'inversion d'une matrice pleine quatre fois plus grande que celles intervenant dans le cas des milieux avec symétrie. Enfin, pour en finir avec les perspectives concernant la justification et les améliorations des aspects numériques, signalons que nous pensons étudier la possibilité d'utiliser des méthodes de POD ou de bases réduites pour améliorer les performances quant à la discrétisation de la variable de Floquet.

Pour **les milieux périodiques non absorbants** traités par absorption limite, la justification rigoureuse de la méthode soulève beaucoup de difficultés mathématiques : la théorie est complète en 1D et présente quelques questions ouvertes pour le problème de guide mais reste très largement

satisfaisante. Elle devient néanmoins beaucoup plus incomplète pour le cas de l'espace. Nous avons pour l'instant émis des conjectures. Il nous semble donc que du point de vue théorique, restent à prouver

- la décomposition de l'opérateur R contenue dans la conjecture 3.2.52 qui permettrait de montrer que les critères en terme de vitesse de groupe sont suffisants pour caractériser la solution « physique » du problème ;
- la démonstration du caractère bien posé du problème intérieur pour le guide (voir Conjecture 3.2.68) pour lequel un résultat d'analyticité des opérateurs NtD par rapport à ω suffirait ;
- la justification rigoureuse de toutes les conjectures concernant le principe d'absorption limite pour le milieu 2D, l'idée étant d'après nous de tenter de fusionner les approches présentées Sections 4.4.2 et 4.4.3.

Le principe d'absorption limite pose des questions très intéressantes et requiert de plus d'après la section 4.5 du Chapitre 4 une procédure numérique appropriée. Nous avons obtenu de premiers résultats numériques très encourageants mais là encore, plus que dans le cas des milieux absorbants, l'amélioration de la discrétisation des fonctions dépendant de (y, k) est nécessaire.

Nous venons d'identifier un certain nombre de questions encore ouvertes mais ce travail nous laisse envisager des perspectives nombreuses à moyen terme. Tout d'abord, pour des applications réelles en mécanique et en optique, l'extension de la méthode au cas 3D (avec une périodicité dans 2 directions) et à des modèles mathématiques plus compliqués (équations de Maxwell ou de plaques) est nécessaire. En particulier, dans le cas des ondes électromagnétiques, la condition de divergence libre [Monk (2003)] doit impérativement être prise en compte dans la construction de l'opérateur NtD.

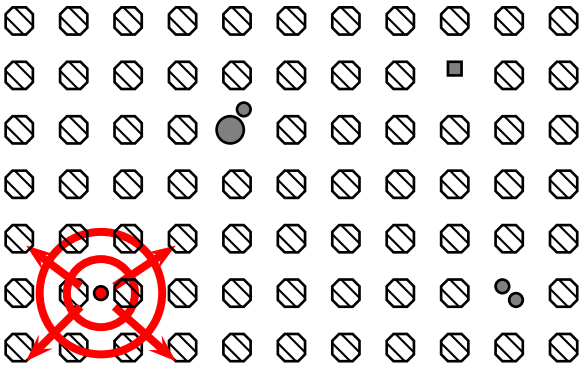


FIG. 4.48: Le problème de scattering multiple.

Une autre perspective qui nous semble intéressante et indispensable est de traiter les problèmes de scattering multiple (voir Figure 4.48), c'est-à-dire la situation dans laquelle plusieurs défauts sont présents mais ne peuvent pas être réunis dans un seul domaine borné suffisamment petit. De récents travaux au sein du laboratoire POems ont montré, en s'appuyant sur la littérature concernant le milieu homogène (voir par exemple [Grote & Kirsch (2004) ; Ben Hassen *et al.* (2007) ; Balabane & Tirel (1997)]) que la solution du problème de scattering multiple peut se décomposer de manière unique comme la superposition de N solutions de problèmes de scatterring simple : ceci mène à une vision unifiée du traitement NtD des problèmes de scattering

multiple. Plus précisément, l'opérateur NtD global (défini sur l'union des bords des N domaines intérieurs) peut être factorisé comme le produit d'un opérateur NtD diagonal par bloc et d'un opérateur de propagation, chacun d'entre eux pouvant être calculé avec la méthode numérique que nous avons implémentée pour le scatterring simple.

Une autre perspective, liée à la précédente, mais plus ambitieuse, est de traiter les situations représentées par la Figure 4.49 qui se rapprochent davantage du problème direct correspondant au contrôle non destructif. L'idée est alors ici de réunir les études effectuées pour le scatterring simple ou multiple avec celles développées dans l'annexe A.4 concernant le problème de transmission-réflexion entre deux milieux périodiques.

FIG. 4.49: Situations se rapprochant du problème direct de CND.

Nous aimerions également traiter des défauts linéiques (c'est-à-dire que la perturbation est infinie dans une direction). Dans la communauté photonique, de tels défauts sont créés pour construire des guides d'ondes ouverts afin de concentrer la lumière. La question de l'existence et du calcul des modes est évidemment un problème crucial. Elle est reliée au problème aux valeurs propres autoadjoint associé à l'EDP dans un domaine non borné (typiquement dans les directions orthogonales à la ligne), ce qui rend l'analyse et le calcul relativement complexe. Nous pensons qu'en adaptant pour ce problème aux valeurs propres l'approche NtD développée pour des problèmes de scattering, nous pourrions proposer une alternative justifiée rigoureusement aux méthodes existantes dans la communauté photonique comme la méthode de superposition des sources fictives [Botten *et al.* (2006)], la méthode de « reflective scattering matrix » [Botten *et al.* (2001) ; Langtry *et al.* (2003)] ou la Supercell method [Soussi (2005)]. Comparée à cette dernière méthode en particulier, nous attendons une grande amélioration en temps de calcul puisque nous pouvons réduire les calculs numériques à un petit voisinage du défaut (alors que la supercell méthode requiert une troncature à grande distance). De plus comme la méthode est exacte, nous attendons également un réel progrès dans la précision pour les modes guidés non bien confinés. Il y a évidemment un prix à payer : la réduction du problème mène à un problème aux valeurs propres non linéaires, de nature point fixe mais le laboratoire POems a déjà beaucoup d'expérience dans ce domaine (voir par exemple [Joly & Poirier (1999)] pour les fibres optiques et [Pedreira & Joly (2001,/)] pour les guides optiques intégrés).

Enfin, les perspectives à plus long terme concernent la construction d'opérateur NtD ou DtN en régime temporel (le régime fréquentiel constituant déjà un premier pas dans cette étude) et pourquoi pas la résolution de problèmes inverses en utilisant par exemple la Linear Sampling Method pour des problèmes de guides [Bourgeois & Lunéville (2008)] ou des problèmes de plan [Colton & Kress (1998)] et qui nécessite un calcul numérique de la fonction de Green.

ANNEXE

A

VARIANTES ET EXTENSIONS

A.1 Constante Robin-to-Robin

A.1.1 Introduction

La méthode que nous avons développée dans les chapitres précédents repose sur la résolution de problèmes de cellule avec des conditions de Neumann. Elle introduit donc une quantité dénombrable de fréquences (correspondant aux fréquences propres du problème de Neumann) pour lequel ces problèmes sont mal posés. Il peut exister des fréquences de résonnance pour lesquelles le problème de départ (la résolution du problème dans tout le domaine infini) est mal posé. Mais elles n'ont a priori rien à voir avec les fréquences propres du problème de Neumann introduites par la méthode. On devrait donc pouvoir définir la solution « physique » du problème pour ces dernières, à condition de changer la méthode et quitte à perdre en simplicité.

Nous développons donc dans cette annexe l'idée que nous avions évoquée en Remarque 1.4.8 du Chapitre 1 consistant à remplacer la détermination des coefficients de NtD par celle de coefficients de RtR. Les problèmes de cellule alors introduits sont toujours bien posés. Nous reprenons ici l'amélioration proposée par Ehrhardt et al [Ehrhardt *et al.* (2008)] aux travaux de Yuan et Lu [Yuan & Lu (2007, 2006)] concernant la construction d'opérateurs de Dirichlet-to-Neumann pour des milieux périodiques de petite taille (nombre fini de périodes). Ces travaux introduisent également des problèmes de cellule et la construction d'opérateurs de Dirichlet-to-Neumann qui excluent, de la même façon, une quantité dénombrable de fréquences correspondant aux fréquences propres du problème de Dirichlet. Pour pallier cette difficulté, Ehrhardt et al. construisent des opérateurs Robin-to-Robin et des problèmes de cellule correspondant qui n'ont pas de fréquences propres.

Nous présentons cette méthode dans le cas du problème mono-dimensionnel ainsi que la version opérateur pour le problème du guide.

A.1.2 Cas monodimensionnel

A.1.2.1 Problème avec absorption

Nous commençons par le problème de Helmholtz avec absorption $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. La méthode que nous présentons dans la suite ressemble évidemment beaucoup à la méthode présentée au Chapitre 1, nous cherchons à déterminer la solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ en restreignant les calculs dans un domaine borné Ω^i avec des conditions qui, cette fois ci, sont de type Robin-to-Robin. Cette idée est résumée dans la proposition suivante.

PROPOSITION A.1.1
Le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ est équivalent au problème

$$\left|\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}^i_\varepsilon}{\partial x^2} - \rho(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,\widetilde{u}^i_\varepsilon &=& f \quad \textit{sur } \Omega^i =]a^-, a^+[\\ \big[\dfrac{\partial \widetilde{u}^i_\varepsilon}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i_\varepsilon\big](a^-) &=& \widetilde{\lambda}^-_\varepsilon \big[\dfrac{\partial \widetilde{u}^i_\varepsilon}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i_\varepsilon\big](a^-) \\ \big[\dfrac{\partial \widetilde{u}^i_\varepsilon}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i_\varepsilon\big](a^+) &=& \widetilde{\lambda}^+_\varepsilon \big[\dfrac{\partial \widetilde{u}^i_\varepsilon}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i_\varepsilon\big](a^+) \end{array}\right. \qquad (\widetilde{\mathcal{P}}^i_\varepsilon)$$

où $z(x) = \rho(x)(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)$ et Re$(\sqrt{z})\geq 0$, dès que les coefficients $\widetilde{\lambda}^\pm_\varepsilon$ sont définis par :

$$\widetilde{\lambda}^\pm_\varepsilon = \big[\frac{\partial \widetilde{u}^\pm_\varepsilon}{\partial x} \mp \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^\pm_\varepsilon\big](a^\pm) \qquad (A.1)$$

où $\widetilde{u}^\pm_\varepsilon$ est l'unique solution dans $H^1(\mathbb{R}^\pm)$ du problème aux limites

$$\left|\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}^\pm_\varepsilon}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,\widetilde{u}^\pm_\varepsilon &=& 0 \quad \textit{sur } \Omega^\pm = (a^\pm, \pm\infty) \\ \big[\dfrac{\partial \widetilde{u}^\pm_\varepsilon}{\partial x} \pm \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^\pm_\varepsilon\big](a^\pm) &=& 1 \end{array}\right. \qquad (\widetilde{\mathcal{P}}^\pm_\varepsilon)$$

Plus précisément si u_ε est solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ alors la restriction de u_ε à Ω^i est solution de $(\widetilde{\mathcal{P}}^i_\varepsilon)$. Réciproquement, si $\widetilde{u}^i_\varepsilon$ est solution de $(\widetilde{\mathcal{P}}^i_\varepsilon)$, on construit u_ε par :

$$\left|\begin{array}{ll} u_\varepsilon(x) = \widetilde{u}^i_\varepsilon(x), & x \in \Omega^i \\ u_\varepsilon(x) = \big[\dfrac{\partial \widetilde{u}^i_\varepsilon}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i_\varepsilon\big](a^+)\ \widetilde{u}^+_\varepsilon(x), & x \geq a^+ \\ u_\varepsilon(x) = \big[\dfrac{\partial \widetilde{u}^i_\varepsilon}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i_\varepsilon\big](a^-)\ \widetilde{u}^-_\varepsilon(x), & x \leq a^-. \end{array}\right. \qquad (A.2)$$

La fonction u_ε ainsi construite est une fonction $H^1(\mathbb{R})$ et est solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

Pour résoudre le problème $(\widetilde{\mathcal{P}}^i_\varepsilon)$, nous devons déterminer les coefficients $\widetilde{\lambda}^+_\varepsilon$ et $\widetilde{\lambda}^-_\varepsilon$ que nous appelons coefficients de Robin-to-Robin. Le calcul de ces coefficients nécessite la résolution de problèmes posés sur des demi-droites et où la donnée ρ_p est périodique.

♢ ***Résolution des problèmes de demi-droite***

Cette section est consacrée à la méthode de caractérisation du coefficient $\widetilde{\lambda}_\varepsilon^+$ et de la solution $\widetilde{u}_\varepsilon^+$. Il va de soit que la méthode est la même pour déterminer $\widetilde{\lambda}_\varepsilon^-$ et $\widetilde{u}_\varepsilon^-$.

Par soucis de clarté et de simplicité, nous allons supposer, sans perte de généralité, que $L = 1$ et $a^+ = 0$.

La caractérisation de $\widetilde{\lambda}_\varepsilon^+$ passe par l'étude du problème

$$\left| \begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}_\varepsilon^+}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,\widetilde{u}_\varepsilon^+ &=& 0 \quad \text{sur } \Omega^+ = \mathbb{R}^+ \\ \big[\dfrac{\partial \widetilde{u}_\varepsilon^+}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^+\big](0) &=& 1 \end{array} \right. \tag{$\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^+$}$$

où, on rappelle que

$$\rho_p(x+1) = \rho_p(x), \quad x > 0.$$

La périodicité de ρ permet d'obtenir le résultat suivant :

LEMME A.1.2
Il existe un unique nombre complexe $\widetilde{r}_\varepsilon \neq 0$ tel que $|\widetilde{r}_\varepsilon| < 1$ et :

$$\forall x \in \Omega^+, \quad \widetilde{u}_\varepsilon^+(x+1) = \widetilde{r}_\varepsilon\ \widetilde{u}_\varepsilon^+(x), \tag{A.3}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\widetilde{u}_\varepsilon^+(x+n) = \widetilde{r}_\varepsilon^n\ \widetilde{u}_\varepsilon^+(x).$$

Ce nombre complexe est défini par

$$\widetilde{r}_\varepsilon = \big[\frac{\partial \widetilde{u}_\varepsilon^+}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^+\big](1). \tag{A.4}$$

■ **PREUVE:** La démonstration repose sur les mêmes idées que celles développées pour le lemme 1.2.3 du Chapitre 1. ■

La détermination de $\widetilde{r}_\varepsilon$ nécessite la résolution de problèmes de cellule

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 \widetilde{e}_\varepsilon^0}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,\widetilde{e}_\varepsilon^0 = 0, \quad x \in]0,1[\\ \big[\dfrac{\partial \widetilde{e}_\varepsilon^0}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{e}_\varepsilon^0\big](0) = 1, \quad \text{et} \quad \big[\dfrac{\partial \widetilde{e}_\varepsilon^0}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{e}_\varepsilon^0\big](1) = 0, \end{array} \right. \tag{A.5}$$

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 \widetilde{e}_\varepsilon^1}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,\widetilde{e}_\varepsilon^1 = 0, \quad x \in]0,1[\\ \big[\dfrac{\partial \widetilde{e}_\varepsilon^1}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{e}_\varepsilon^1\big](0) = 0, \quad \text{et} \quad \big[\dfrac{\partial \widetilde{e}_\varepsilon^1}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{e}_\varepsilon^1\big](1) = 1. \end{array} \right. \tag{A.6}$$

Le caractère bien posé, la linéarité et la périodicité des problèmes étudiés implique que $\widetilde{u}_\varepsilon^+$ se décompose sur chaque cellule comme une combinaison linéaire de $\widetilde{e}_\varepsilon^0$ et $\widetilde{e}_\varepsilon^1$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1], \quad \widetilde{u}_\varepsilon^+(x+n) = \widetilde{r}_\varepsilon^n\ \big(\widetilde{e}_\varepsilon^0(x) + \widetilde{d}_\varepsilon \widetilde{e}_\varepsilon^1\big)$$

où on a posé

$$\widetilde{d}_\varepsilon = \big[\frac{\partial \widetilde{u}_\varepsilon^+}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^+\big](1).$$

$\widetilde{u}_\varepsilon^+$ est continu sur $\mathbb{R}$, en particulier en 1 et sa dérivée également, ce qui est équivalent à

$$\left|\begin{array}{l} \big[\frac{\partial \widetilde{u}_\varepsilon^+}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^+\big]\Big|_{[0,1]}(1) = \big[\frac{\partial \widetilde{u}_\varepsilon^+}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^+\big]\Big|_{[1,2]}(1), \\ \big[\frac{\partial \widetilde{u}_\varepsilon^+}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^+\big]\Big|_{[0,1]}(1) = \big[\frac{\partial \widetilde{u}_\varepsilon^+}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^+\big]\Big|_{[1,2]}(1). \end{array}\right. \tag{A.7}$$

Donnons tout d'abord la définition des coefficients que nous appellerons coefficients de Robin-to-Robin

$$\left|\begin{array}{ll} \widetilde{t}_\varepsilon^{00} = \big[\frac{\partial \widetilde{e}_\varepsilon^0}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{e}_\varepsilon^0\big](0), & \widetilde{t}_\varepsilon^{01} = \big[\frac{\partial \widetilde{e}_\varepsilon^0}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{e}_\varepsilon^0\big](1), \\ \widetilde{t}_\varepsilon^{10} = \big[\frac{\partial \widetilde{e}_\varepsilon^1}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{e}_\varepsilon^1\big](0), & \widetilde{t}_\varepsilon^{11} = \big[\frac{\partial \widetilde{e}_\varepsilon^1}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{e}_\varepsilon^1\big](1), \end{array}\right. \tag{A.8}$$

et établissons la relation sur $\widetilde{r}_\varepsilon$ qui est équivalente aux relations de continuité (A.7).

THÉORÈME A.1.3 (EQUATION CARACTÉRISTIQUE DE $\widetilde{r}_\varepsilon$)
$\widetilde{r}_\varepsilon$ est l'unique solution de module strictement inférieur à 1 de l'équation caractéristique

$$\widetilde{t}_\varepsilon^{10}(\widetilde{r}_\varepsilon)^2 + (\widetilde{t}_\varepsilon^{11}\widetilde{t}_\varepsilon^{00} - \widetilde{t}_\varepsilon^{01}\widetilde{t}_\varepsilon^{10} - 1)\widetilde{r}_\varepsilon + \widetilde{t}_\varepsilon^{01} = 0. \tag{$\widetilde{\mathcal{E}}_\varepsilon^r$}$$

■ **PREUVE:** Commençons par montrer que $\widetilde{r}_\varepsilon$ vérifie cette équation. La première relation de (A.7) où on a écrit $\widetilde{u}_\varepsilon^+$ comme la combinaison linéaire de $\widetilde{e}_\varepsilon^0$ et $\widetilde{e}_\varepsilon^1$ et où on a utilisé la définition des coefficients de RtR locaux donne

$$\widetilde{r}_\varepsilon = \widetilde{t}_\varepsilon^{01} + \widetilde{d}_\varepsilon\, \widetilde{t}_\varepsilon^{11}$$

et la deuxième relation donne

$$\widetilde{d}_\varepsilon = \widetilde{t}_\varepsilon^{00}\widetilde{r}_\varepsilon + \widetilde{r}_\varepsilon\widetilde{d}_\varepsilon\widetilde{t}_\varepsilon^{10}.$$

On montre alors grâce à ces deux relations que $\widetilde{r}_\varepsilon$ est bien solution de l'équation caractéristique ($\widetilde{\mathcal{E}}_\varepsilon^r$). Cette équation a donc bien une racine de module 1, montrons que l'autre racine est de module strictement supérieur à 1.

On rappelle que le wronskien w_ε, défini par

$$w_\varepsilon = \frac{\partial \widetilde{e}_\varepsilon^1}{\partial x}\widetilde{e}_\varepsilon^0 - \frac{\partial \widetilde{e}_\varepsilon^0}{\partial x}\widetilde{e}_\varepsilon^1,$$

est constant. En particulier $w_\varepsilon(0) = w_\varepsilon(1)$ ce qui entraîne $\widetilde{e}_\varepsilon^0(1) = -\widetilde{e}_\varepsilon^1(0)$. En utilisant les conditions aux limites vérifiées par $\widetilde{e}_\varepsilon^0$ et $\widetilde{e}_\varepsilon^1$, on montre que $\widetilde{t}_\varepsilon^{10} = -2\imath\sqrt{z}\widetilde{e}_\varepsilon^1(0)$ et $\widetilde{t}_\varepsilon^{01} = 2\imath\sqrt{z}\widetilde{e}_\varepsilon^0(1)$, ce qui implique que $\widetilde{t}_\varepsilon^{10} = \widetilde{t}_\varepsilon^{01}$. Le produit des racines de l'équation caractéristique ($\widetilde{\mathcal{E}}_\varepsilon^r$) est donc égal à 1. $\widetilde{r}_\varepsilon$ est racine de module strictement inférieur à 1, l'autre est de module strictement supérieur à 1. ■

Pour déterminer $\widetilde{r}_\varepsilon$, il faut donc résoudre ces nouveaux problèmes de cellule (A.5) et (A.6), déterminer les coefficients de RtR locaux ($\widetilde{t}_\varepsilon^{00}$, $\widetilde{t}_\varepsilon^{01}$, $\widetilde{t}_\varepsilon^{10}$, $\widetilde{t}_\varepsilon^{11}$) et enfin sélectionner l'unique racine de module strictement inférieur à 1 de l'équation caractéristique ($\widetilde{\mathcal{E}}_\varepsilon^r$).

La solution du problème de demi-droite ($\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^+$) et le coefficient RtR recherché sont alors définis de manière unique comme indiqué dans la proposition qui suit.

PROPOSITION A.1.4 (PROBLÈME DE DEMI-DROITE AVEC ABSORPTION)
La solution u_ε^+ du problème de demi-droite $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^+)$ est caractérisée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1], \quad \widetilde{u}_\varepsilon^+(x+n) = (\widetilde{r}_\varepsilon)^n \left(\widetilde{e}_\varepsilon^0(x) - \frac{\widetilde{r}_\varepsilon - \widetilde{t}_\varepsilon^{01}}{\widetilde{t}_\varepsilon^{11}}\, \widetilde{e}_\varepsilon^1(x)\right). \tag{A.9}$$

Le coefficient NtD $\widetilde{\lambda}_\varepsilon^+$ est caractérisée par :

$$\widetilde{\lambda}_\varepsilon^+ = \big[\frac{\partial \widetilde{u}_\varepsilon^+}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^+\big](0) = \widetilde{t}_\varepsilon^{00} + \widetilde{t}_\varepsilon^{10}\, \frac{\widetilde{r}_\varepsilon - \widetilde{t}_\varepsilon^{01}}{\widetilde{t}_\varepsilon^{11}}. \tag{A.10}$$

♢ *Problème posé en domaine borné*

Soit $\widetilde{\lambda}_\varepsilon^+$ déterminé par la relation (A.10) et $\widetilde{\lambda}_\varepsilon^-$ déterminé en utilisant la méthode dans le demi-milieu périodique Ω^-. Nous commençons par établir quelques propriétés de ces coefficients.

PROPOSITION A.1.5 (QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COEFFICIENTS DE RTR)
Les coefficients $\widetilde{\lambda}_\varepsilon^\pm$ sont différents de 1 et -1 et ils vérifient

$$Re\Big(\frac{1-\widetilde{\lambda}_\varepsilon^\pm}{\sqrt{z(a^\pm)}(1+\widetilde{\lambda}_\varepsilon^\pm)}\Big) > 0$$

■ **PREUVE:** Ces propriétés sont évidemment liées à la Proposition 1.2.10 qui traite des propriétés des coefficients de NtD $\lambda_\varepsilon^\pm$. En effet, la restriction à Ω^i de la solution u_ε de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ est solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ avec conditions de NtD et du problème $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^i)$ avec conditions de RtR. Elle vérifie en particulier

$$\left|\begin{array}{l} \big[u_\varepsilon \pm \lambda^\pm \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\big](a^\pm) = 0 \\ \big[\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \mp \imath\sqrt{z}u_\varepsilon\big](a^\pm) = \widetilde{\lambda}_\varepsilon^\pm \big[\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \pm \imath\sqrt{z}u_\varepsilon\big](a^\pm) \end{array}\right.$$

ce qui implique que

$$\lambda_\varepsilon^\pm = \imath\, \frac{1-\widetilde{\lambda}_\varepsilon^\pm}{\sqrt{z(a^\pm)}(1+\widetilde{\lambda}_\varepsilon^\pm)}$$

On conclut en utilisant les propriétés de $\lambda_\varepsilon^\pm$ de la Proposition A.1.5. Comme les coefficients $\lambda_\varepsilon^\pm$ sont toujours bien définis et qu'ils sont non-nuls alors les coefficients RtR $\widetilde{\lambda}_\varepsilon^\pm$ sont différents de 1 et -1. Enfin, la deuxième propriété découle directement du fait que la partie imaginaire des coefficients de NtD est strictement positive. ■

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat concernant le caractère bien posé du problème posé dans Ω^i.

THÉORÈME A.1.6 (CARACTÈRE BIEN POSÉ DU PROBLÈME $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^i)$)
Le problème $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^i)$ a une unique solution dans $H^1(\Omega^i)$.

■ **PREUVE:** Nous allons montrer que la formulation variationnelle de ce problème vérifie bien les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram.

En effet, le problème $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^i)$ est équivalent au problème variationnel :

Trouver $u_\varepsilon^i \in H^1(\Omega^i)$ tel que :

$$\forall v \in H^1(0,1), \quad a_\varepsilon^i(u_\varepsilon, v) = \int_{\Omega^i} f(x)v(x)\,dx$$

où a_ε^i est une forme bilinéaire continue définie par :

$$a_\varepsilon^i(u,v) = \int_{\Omega^i} \frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial v}{\partial x}}\,dx - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\int_{\Omega^i} \rho_p(x)u(x)\overline{v(x)}\,dx \\ - \imath\sqrt{z(a^+)}\frac{1+\widetilde{\lambda}_\varepsilon^+}{1-\widetilde{\lambda}_\varepsilon^-}u(a^+)\overline{v(a^+)} - \imath\sqrt{z(a^-)}\frac{1+\widetilde{\lambda}_\varepsilon^-}{1-\widetilde{\lambda}_\varepsilon^-}u(a^-)\overline{v(a^-)}.$$

Pour montrer que a_ε^i est bien coercive, il faut et il suffit de montrer que :

$$\mathrm{Im}\Big(-\imath\sqrt{z(a^+)}\frac{1+\widetilde{\lambda}_\varepsilon^+}{1-\widetilde{\lambda}_\varepsilon^+}\Big) < 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\Big(-\imath\sqrt{z(a^-)}\frac{1+\widetilde{\lambda}_\varepsilon^-}{1-\widetilde{\lambda}_\varepsilon^-}\Big) < 0$$

C'est précisément le résultat de la la Proposition A.1.5. ■

Le problème $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^i)$ est bien posé. La proposition A.1.1 nous assure que c'est la restriction de u_ε solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ à Ω^i, l'unique solution. Pour reconstruire u_ε en dehors de Ω^i, il suffit d'utiliser les relations (A.2).

A.1.2.2 Problème sans absorption

Nous rappelons que nous cherchons à caractériser la solution « physique » de l'équation de Helmholtz $(\mathcal{P})$ comme la limite, dans un sens à préciser, de la suite de solution $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Les idées du principe d'absorption limite transposées à l'utilisation des conditions de RtR sont donc :

- de définir la « bonne » solution physique des problèmes de demi-droite périodique

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2\widetilde{u}^\pm}{\partial x^2} - \rho_p(x)\,\omega^2\,\widetilde{u}^\pm = 0, \quad \text{pour } \pm x > a^\pm \\ \big[\dfrac{\partial\widetilde{u}^\pm}{\partial x} \pm \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^\pm\big](a^\pm) = 1 \end{array}\right. \qquad (\widetilde{\mathcal{P}}^\pm)$$

  comme la limite, dans un sens que nous préciserons, des solutions $(\widetilde{u}_\varepsilon^\pm)_\varepsilon$ des problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon^\pm)$,
- de définir des bonnes conditions de type Robin-to-Robin $\widetilde{\lambda}^\pm$ comme la limite des suites des coefficients de RtR pour le problème avec absorption $(\widetilde{\lambda}_\varepsilon^+)_\varepsilon$ et $(\widetilde{\lambda}_\varepsilon^-)_\varepsilon$,
- de montrer que le problème posé dans Ω^i avec des conditions de NtD

$$\left|\begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial^2\widetilde{u}^i}{\partial x^2} - \rho(x)\,\omega^2\,\widetilde{u}^i &=& f \quad \text{dans} \quad \Omega^i \\ \big[\dfrac{\partial\widetilde{u}^i}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i\big](a^-) &=& \widetilde{\lambda}^-\big[\dfrac{\partial\widetilde{u}^i}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i\big](a^-) \\ \big[\dfrac{\partial\widetilde{u}^i}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i\big](a^+) &=& \widetilde{\lambda}^+\big[\dfrac{\partial\widetilde{u}^i}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i\big](a^+) \end{array}\right. \qquad (\widetilde{\mathcal{P}}^i)$$

  est bien posé ;

– montrer que l'unique solution u^i de $(\widetilde{\mathcal{P}}^i)$ est la limite quand ε tend vers 0 de la famille des solutions $(u^i_\varepsilon)_\varepsilon$ des problèmes $(\widetilde{\mathcal{P}}^i_\varepsilon)$.

Il suffit ensuite de définir la solution « physique » de $(\mathcal{P})$ comme suit

$$\left|\begin{array}{lll} u(x)=\widetilde{u}^i(x), & x\in\Omega^i & \\ u(x)=\widetilde{u}^+\big(\varphi^+\big), & x\in\Omega^+, & \text{avec } \varphi^+=\big[\frac{\partial\widetilde{u}^i}{\partial x}+\imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i\big]\Big|_{\Gamma_0^+} \\ u(x)=\widetilde{u}^-\big(\varphi^-\big), & x\in\Omega^-, & \text{avec } \varphi^-=\big[\frac{\partial\widetilde{u}^i}{\partial x}-\imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i\big]\Big|_{\Gamma_0^-} \end{array}\right. \tag{A.11}$$

où u^i est l'unique solution du problème $(\mathcal{P}^i)$, u^+ est l'unique solution de $(\mathcal{P}^+)$ et u^- est l'unique solution de $(\mathcal{P}^-)$.

Les idées de la méthode sont dont exactement les mêmes que Section 1.4, seules quelques expressions et équations changent. La seule réelle différence vient de la définition de la « bonne » solution du problème de demi-droite. En effet, la solution u^+_ε du problème avec absorption étant exprimée, cellule par cellule, comme une combinaison linéaire des solutions e^0_ε et e^1_ε des problèmes de cellule, il faut passer à la limite dans ces problèmes de cellule pour trouver une expression similaire de la limite de u^+_ε. Cependant, ces problèmes de cellule (qui correspondent à des problèmes de cellule avec conditions de Neumann) sont mal posés pour une quantité dénombrable de fréquences.

Il est important de comprendre que l'ensemble de fréquences introduites afin d'exprimer la limite de u^+_ε comme une combinaison linéaire de solution de problèmes de cellule est absolument artificiel. Même pour ces fréquences, la limite existe, c'est seulement les solutions des problèmes de cellule qui n'existent pas. Ce qui signifie, en somme, que pour ces fréquences, les solutions e^0_ε et e^1_ε explosent quand ε tend vers 0 mais pas la somme $e^0_\varepsilon + r_\varepsilon\, e^1_\varepsilon$.

Nous proposons donc d'autres problèmes de cellule qui ne présentent pas ces désavantages et qui montrent que la limite des solution u^+_ε ou $\widetilde{u}^+_\varepsilon$ existe pour toutes les fréquences. Nous allons montrer notamment que les problèmes de cellule n'ont, à la limite $\varepsilon = 0$, pas de fréquences propres.

PROPOSITION A.1.7
Soit $\widetilde{A}^0$ l'opérateur défini par

$$\widetilde{A}^0=-\frac{1}{\rho_p}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \textit{ avec } \quad D(\widetilde{A}^0)=\{v\in H^1(0,1),\quad \big[\frac{\partial v}{\partial x}+\imath\sqrt{z}v\big](0)=0,\quad \big[\frac{\partial v}{\partial x}-\imath\sqrt{z}v\big](1)=0\}$$

où $\sqrt{z(x)}=\sqrt{\rho_p(x)\omega^2}$. Il n'a aucune valeur propre réelle.

■ **PREUVE:** Soit μ une valeur propre de $\widetilde{A}^0$ et u un vecteur propre associé de norme dans $L^2([0,1],\rho_p\,dx)$ égal à 1. Alors le couple (μ,u) vérifie nécessairement :

$$\mu=\int_0^1\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2-\imath\sqrt{z(1)}\big[|u(1)|^2+|u(0)|^2\big].$$

Si $u(1)=u(0)=0$, comme $u\in D(\widetilde{A}^0)$, on obtient $u'(1)=u'(0)=0$, ce qui impliquerait que $u=0$. Comme ceci est exclu pour un vecteur propre, la partie imaginaire de μ est non nulle. ■

Avec ce dernier résultat, le passage à la limite des solutions de problèmes de cellule et des coefficients de RtR locales ne présente plus de difficulté et s'effectue pour toutes les fréquences puisque les valeurs propres des problèmes de cellule sont de partie imaginaire non nulle.

A l'image de ce que nous avons vu Section 1.4, il suffit de déterminer la limite de la suite $(\widetilde{r}_\varepsilon)_\varepsilon$ pour définir la solution « physique » du problème de demi-droite $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^+)$. Or, cette limite est acquise sans calcul supplémentaire puisque :

LEMME A.1.8
Pour tout $\varepsilon > 0$, r_ε et $\widetilde{r}_\varepsilon$ sont égaux.

■ **PREUVE:** Il faut utiliser la caractérisation de r_ε et $\widetilde{r}_\varepsilon$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad u_\varepsilon^+(x+1) = r_\varepsilon\, u_\varepsilon^+(x), \quad \text{et} \quad \widetilde{u}_\varepsilon^+(x+1) = \widetilde{r}_\varepsilon\, \widetilde{u}_\varepsilon^+(x)$$

et comme u_ε^+ et $\widetilde{u}_\varepsilon^+$ sont proportionnels, on a $\widetilde{r}_\varepsilon = r_\varepsilon$. ■

Il est donc évident qu'on peut retranscrire parfaitement ce que nous avons fait pour caractériser la limite de la suite r_ε. Nous pouvons alors adapter facilement le Théorème 1.4.42 à la caractérisation de la limite de $(\widetilde{u}_\varepsilon^+)_\varepsilon$ en norme H^1_{loc} et à celle de de $\widetilde{\lambda}_\varepsilon^+$.

Enfin pour déterminer la solution « physique » du problème $\mathcal{P}$, il ne reste plus qu'à montrer que le problème $(\widetilde{\mathcal{P}}^i)$ est bien posé sauf pour une quantité dénombrable de fréquences qui correspond à l'ensemble $\sigma_{0\pi} = \{\mu_n, \nu_n\}_n$. Nous ne revenons pas sur cette fin de démonstration car elle comprend exactement les mêmes idées que celle du Théorème 1.4.47.

REMARQUE A.1.9
Dans la démonstration de la Proposition A.1.5, nous avons établi une relation entre le coefficient de NtD $\lambda_\varepsilon^\pm$ et le coefficient de RtR $\widetilde{\lambda}_\varepsilon^\pm$:

$$\lambda_\varepsilon^\pm = \imath\, \frac{1 - \widetilde{\lambda}_\varepsilon^\pm}{\sqrt{z(a^\pm)}(1 + \widetilde{\lambda}_\varepsilon^\pm)}.$$

Puisque nous pouvons montrer que les suites $\widetilde{\lambda}_\varepsilon^\pm$ ont bien une limite pour toutes les fréquences, alors les suites $\lambda_\varepsilon^\pm$ font alors de même. La définition des $\lambda_\varepsilon^\pm$ est, en effet, indépendante des problèmes de cellule que nous avons introduits. Il est donc logique qu'on puisse définir une limite même pour les fréquences propres du problème de Neumann, problème que nous avons introduit pour caractériser ces coefficients de NtD. Rappelons que

$$\lambda_\varepsilon^+ = t_\varepsilon^{00} - t_\varepsilon^{10}\, r_\varepsilon.$$

Cela signifie en somme que les coefficients de NtD locaux t_ε^{00} et t_ε^{10} n'ont pas une limite finie pour une fréquence propre du problème de Neumann mais que, en revanche, la somme $t_\varepsilon^{00} - t_\varepsilon^{10}\, r_\varepsilon$ en a une.

A.1.3 Cas du guide

Nous réutilisons dans cette section les notations utilisées dans les chapitres 2 et 3.

A.1.3.1 Problème avec absorption

Là encore, la méthode qui suit ressemble beaucoup à celle présentée au Chapitre 2. Nous cherchons à déterminer la solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ en restreignant les calculs dans un domaine borné Ω^i avec des conditions qui, ici, dont de type Robin-to-Robin. Cette idée est résumée dans la proposition suivante.

PROPOSITION A.1.10
Le problème $\mathcal{P}_\varepsilon$ est équivalent au problème

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle u_\varepsilon^i - \rho(\mathbf{x})\,(\omega^2+\imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^i &=& f & \textit{dans}\quad \Omega^i,\\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 & \textit{sur}\quad \partial\Omega\cap\Omega^i,\\ \big[\dfrac{\partial \widetilde{u}_\varepsilon^i}{\partial x}+\imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^i\big] &=& \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^-\big[\dfrac{\partial \widetilde{u}_\varepsilon^i}{\partial x}-\imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^i\big] & \textit{sur}\quad \Gamma_0^-,\\ \big[\dfrac{\partial \widetilde{u}_\varepsilon^i}{\partial x}-\imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^i\big] &=& \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+\big[\dfrac{\partial \widetilde{u}_\varepsilon^i}{\partial x}+\imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^i\big] & \textit{sur}\quad \Gamma_0^+. \end{array}\right. \tag{$\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^i$}$$

où $z(x)=\rho(x)(\omega^2+\imath\varepsilon\omega)$ et $Re(\sqrt{z})\geq 0$ dès que $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+$ et $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^-$, opérateurs linéaires continus de $H^{-1/2}(\Gamma_0^+)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma_0^+)$ et de $H^{-1/2}(\Gamma_0^-)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma_0^-)$ respectivement, sont définis par

$$\forall\varphi\in H^{-1/2}(\Gamma_0^\pm),\quad \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^\pm\,\varphi=\big[\frac{\partial\widetilde{u}_\varepsilon^\pm(\varphi)}{\partial x}\mp\imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^\pm(\varphi)\big]\Big|_{\Gamma_0^\pm} \tag{A.12}$$

où $\widetilde{u}_\varepsilon^\pm(\varphi)$ est l'unique solution dans $H^1(\Omega^\pm)$ du problème aux limites

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle\widetilde{u}_\varepsilon^\pm-\rho_p(\mathbf{x})\,(\omega^2+\imath\varepsilon\omega)\,\widetilde{u}_\varepsilon^\pm &=& 0 & \textit{dans}\quad \Omega^\pm,\\ \dfrac{\partial\widetilde{u}_\varepsilon^\pm}{\partial\mathbf{n}} &=& 0 & \textit{sur}\quad \partial\Omega\cap\Omega^\pm,\\ \big[\dfrac{\partial\widetilde{u}_\varepsilon^\pm}{\partial x}\pm\imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^\pm\big] &=& \varphi & \textit{sur}\quad \Gamma_0^\pm \end{array}\right. \tag{$\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^\pm$}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à $\partial\Omega$. Plus précisément si u_ε est solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ alors la restriction de u_ε à Ω^i est solution de $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^i)$. Réciproquement, si $\widetilde{u}_\varepsilon^i$ est solution de $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^i)$, on construit u_ε par

$$\left|\begin{array}{ll} u_\varepsilon=u_\varepsilon^i, & \textit{dans}\ \ \Omega^i,\\ u_\varepsilon=u_\varepsilon^+\big(\varphi_\varepsilon^+\big), & \textit{dans}\ \ \Omega^+,\quad \textit{avec}\ \ \varphi_\varepsilon^+=\big[\dfrac{\partial\widetilde{u}_\varepsilon^i}{\partial x}+\imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^i\big]\Big|_{\Gamma_0^+},\\ u_\varepsilon=u_\varepsilon^-\big(\varphi_\varepsilon^-\big), & \textit{dans}\ \ \Omega^-,\quad \textit{avec}\ \ \varphi_\varepsilon^-=\big[\dfrac{\partial\widetilde{u}_\varepsilon^i}{\partial x}-\imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^i\big]\Big|_{\Gamma_0^-}. \end{array}\right. \tag{A.13}$$

La fonction u_ε ainsi construite est une fonction $H^1(\Omega)$ et est solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

Pour résoudre le problème $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^i)$, il faut déterminer les opérateurs $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+$ et $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^-$ appelés opérateurs RtR. Là encore, le calcul de ces opérateurs nécessite la résolution de problèmes posés sur les demi-guides $\Omega^\pm$ dans lesquels la donnée ρ_p est périodique.

♢ ***Résolution des problèmes de demi-guide***

Cette section est destinée à la caractérisation de l'opérateur $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+$ et de la solution $\widetilde{u}_\varepsilon^+$, la méthode étant la même pour déterminer $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^-$ et $\widetilde{u}_\varepsilon^-$.

Par soucis de clarté et de simplicité, nous allons supposer, sans perte de généralité, que $L = 1$.

La caractérisation de $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+$ passe par l'étude du problème pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0^+)$

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle \widetilde{u}_\varepsilon^+ - \rho_p(\mathbf{x})\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,\widetilde{u}_\varepsilon^+ &=& 0 \quad \text{dans} & \Omega^+ \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}_\varepsilon^+}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 \quad \text{sur} & \partial\Omega \cap \Omega^+, \\ \big[\dfrac{\partial \widetilde{u}_\varepsilon^+}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^+\big] &=& \varphi \quad \text{sur} & \Gamma_0^+ \end{array}\right. \qquad (\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^+)$$

où on rappelle que

$$\forall (x,y) \in \Omega^+, \quad \rho_p(x+1) = \rho_p(x).$$

Pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0^+)$, le problème $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^+)$ admet une unique solution $\widetilde{u}_\varepsilon^+$ dans $H^1(\Omega^+)$. La périodicité de ρ_p nous permet d'obtenir la propriété suivante pour la solution.

LEMME A.1.11
Il existe deux opérateurs linéaires et continus :

$$\begin{cases} \widetilde{S}_\varepsilon \in \mathcal{L}\Big(H^{-1/2}(\Gamma), H^1(\mathcal{C})\Big), \\ \widetilde{R}_\varepsilon \in \mathcal{L}\Big(H^{-1/2}(\Gamma)\Big), \end{cases}$$

tels que $\widetilde{R}_\varepsilon$ soit compact, injectif et ait un rayon spectral strictement inférieur à 1 et enfin tels que pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ la solution $\widetilde{u}_\varepsilon^+(\varphi)$ de $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^+)$ satisfasse :

$$\forall j \geq 1, \qquad \widetilde{u}_\varepsilon^+(\varphi)\Big|_{\mathcal{C}_j^+} = \widetilde{S}_\varepsilon\Big((\widetilde{R}_\varepsilon)^{j-1}\varphi\Big) \tag{A.14}$$

Ces opérateurs sont définis par

$$\begin{cases} \widetilde{S}_\varepsilon :\ \varphi \mapsto \widetilde{S}_\varepsilon\varphi = \widetilde{u}_\varepsilon^+(\varphi)\Big|_{\mathcal{C}_1^+} \\ \widetilde{R}_\varepsilon :\ \varphi \mapsto \widetilde{R}_\varepsilon\varphi = \big[\dfrac{\partial \widetilde{u}_\varepsilon^+(\varphi)}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^+(\varphi)\big]\Big|_{\Gamma_1^+} \end{cases} \tag{A.15}$$

■ **PREUVE:** La démonstration repose sur les mêmes idées que celles développées pour le lemme 2.2.3 du Chapitre 2. ■

La détermination de ces opérateurs nécessite la résolution des problèmes de cellule

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle \widetilde{e}^0_\varepsilon - \rho_p(\mathbf{x})\,(\omega^2+\imath\varepsilon\omega)\,\widetilde{e}^0_\varepsilon &=& 0 \quad \text{dans} & \mathcal{C} \\ \dfrac{\partial \widetilde{e}^0_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 \quad \text{sur} & \partial\mathcal{C}\setminus\Gamma_0\cup\Gamma_1, \\ [\dfrac{\partial \widetilde{e}^0_\varepsilon}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{e}^0_\varepsilon] &=& \varphi \quad \text{sur} & \Gamma_0, \\ [\dfrac{\partial \widetilde{e}^0_\varepsilon}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{e}^0_\varepsilon] &=& 0 \quad \text{sur} & \Gamma_1. \end{array}\right. \tag{A.16}$$

$$\left|\begin{array}{rcll} -\triangle \widetilde{e}^1_\varepsilon - \rho_p(\mathbf{x})\,(\omega^2+\imath\varepsilon\omega)\,\widetilde{e}^1_\varepsilon &=& 0 \quad \text{dans} & \mathcal{C} \\ \dfrac{\partial \widetilde{e}^1_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} &=& 0 \quad \text{sur} & \partial\mathcal{C}\setminus\Gamma_0\cup\Gamma_1, \\ [\dfrac{\partial \widetilde{e}^1_\varepsilon}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{e}^1_\varepsilon] &=& 0 \quad \text{sur} & \Gamma_0, \\ [\dfrac{\partial \widetilde{e}^1_\varepsilon}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{e}^1_\varepsilon] &=& \varphi \quad \text{sur} & \Gamma_1. \end{array}\right. \tag{A.17}$$

Le caractère bien posé, la linéarité et la périodicité des problèmes étudiés implique que pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $\widetilde{u}^+_\varepsilon(\varphi)$ se décompose sur chaque cellule comme une combinaison linéaire de $\widetilde{e}^0_\varepsilon$ et $\widetilde{e}^1_\varepsilon$

$$\forall j \geq 1, \quad \widetilde{u}^+_\varepsilon(\varphi)\Big|_{\mathcal{C}^+_j} = \widetilde{e}^0_\varepsilon(\widetilde{R}^{j-1}_\varepsilon\,\varphi) \;-\; \widetilde{e}^1_\varepsilon(\widetilde{D}_\varepsilon\,\widetilde{R}^{j-1}_\varepsilon\,\varphi). \tag{A.18}$$

où on a posé

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{D}_\varepsilon :\, H^{-1/2}(\Gamma) & \to & H^{-1/2}(\Gamma) \\ \varphi & \mapsto & \widetilde{D}_\varepsilon\varphi = [\dfrac{\partial \widetilde{u}^+_\varepsilon(\varphi)}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^+_\varepsilon(\varphi)]\Big|_{\Gamma^+_1}. \end{array}$$

Les traces de Dirichlet et de Neumann de $\widetilde{u}^+_\varepsilon(\varphi)$ sur chaque frontière sont les mêmes suivant que l'on prend la restriction de $\widetilde{u}^+_\varepsilon$ sur $\mathcal{C}^+_j$ ou celle sur $\mathcal{C}^+_{j+1}$, ce qui est équivalent à

$$\left|\begin{array}{ll} [\dfrac{\partial \widetilde{u}^+_\varepsilon}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^+_\varepsilon]\Big|_{\mathcal{C}^+_j} = [\dfrac{\partial \widetilde{u}^+_\varepsilon}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^+_\varepsilon]\Big|_{\mathcal{C}^+_{j+1}} & \text{sur } \Gamma^+_j, \\ [\dfrac{\partial \widetilde{u}^+_\varepsilon}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^+_\varepsilon]\Big|_{\mathcal{C}^+_j} = [\dfrac{\partial \widetilde{u}^+_\varepsilon}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^+_\varepsilon]\Big|_{\mathcal{C}^+_{j+1}} & \text{sur } \Gamma^+_j. \end{array}\right. \tag{A.19}$$

Avec la définition des opérateurs RtR locaux suivants, pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$

$$\left|\begin{array}{ll} \widetilde{T}^{00}_\varepsilon\,\varphi = [\dfrac{\partial \widetilde{e}^0_\varepsilon(\varphi)}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{e}^0_\varepsilon(\varphi)]\Big|_{\Gamma_0}, & \widetilde{T}^{01}_\varepsilon\,\varphi = [\dfrac{\partial \widetilde{e}^0_\varepsilon(\varphi)}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{e}^0_\varepsilon(\varphi)]\Big|_{\Gamma_1}, \\ \widetilde{T}^{10}_\varepsilon\,\varphi = [\dfrac{\partial \widetilde{e}^1_\varepsilon(\varphi)}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{e}^1_\varepsilon(\varphi)]\Big|_{\Gamma_0}, & \widetilde{T}^{11}_\varepsilon\,\varphi = [\dfrac{\partial \widetilde{e}^1_\varepsilon(\varphi)}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{e}^1_\varepsilon(\varphi)]\Big|_{\Gamma_1}. \end{array}\right. \tag{A.20}$$

on établit la relation sur $\widetilde{R}_\varepsilon$ équivalente aux relations de continuité (A.19) :

$$\left|\begin{array}{l} \widetilde{T}^{01}_\varepsilon + \widetilde{T}^{11}_\varepsilon\,\widetilde{D}_\varepsilon \;=\; \widetilde{R}_\varepsilon \\ \widetilde{D}_\varepsilon \;=\; \widetilde{T}^{00}_\varepsilon\,\widetilde{R}_\varepsilon + \widetilde{T}^{10}_\varepsilon\,\widetilde{D}_\varepsilon\,\widetilde{R}_\varepsilon \end{array}\right.$$

qui donne, en montrant que $\widetilde{T}^{11}_\varepsilon$ est inversible (la preuve est la même que celle de la Proposition 2.2.4)

$$\widetilde{T}^{10}_\varepsilon\,(\widetilde{T}^{11}_\varepsilon)^{-1}\,\widetilde{R}^2_\varepsilon + \big(\widetilde{T}^{00}_\varepsilon - \widetilde{T}^{01}_\varepsilon(\widetilde{T}^{11}_\varepsilon)^{-1}\,\widetilde{T}^{10}_\varepsilon - (\widetilde{T}^{11}_\varepsilon)^{-1}\,\big)\,\widetilde{R}_\varepsilon + (\widetilde{T}^{11}_\varepsilon)^{-1}\,\widetilde{T}^{01}_\varepsilon = 0.$$

Introduisons l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big) & \to & \mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big) \\ X & \mapsto & \widetilde{\mathcal{T}}(\varepsilon, X) \end{array} \tag{A.21}$$

avec

$$\widetilde{\mathcal{T}}(\varepsilon, X) = \widetilde{T}_\varepsilon^{10}\,(\widetilde{T}_\varepsilon^{11})^{-1}\,X^2 + \big(\widetilde{T}_\varepsilon^{00} - \widetilde{T}_\varepsilon^{01}\,(\widetilde{T}_\varepsilon^{11})^{-1}\,\widetilde{T}_\varepsilon^{10} - (\widetilde{T}_\varepsilon^{11})^{-1}\big)\,X + (\widetilde{T}_\varepsilon^{11})^{-1}\widetilde{T}_\varepsilon^{01}$$

Enonçons maintenant le résultat fondamental concernant l'opérateur $\widetilde{R}_\varepsilon$.

THÉORÈME A.1.12 (EQUATION CARACTÉRISTIQUE POUR $\widetilde{R}_\varepsilon$)
L'opérateur $\widetilde{R}_\varepsilon$ est l'unique solution du problème de Riccati stationnaire

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } X \in \mathcal{K}\big(H^{-1/2}(\Gamma)\big), \\ \widetilde{\mathcal{T}}(\varepsilon, X) = 0. \end{array} \right. \tag{$\widetilde{\mathcal{E}}_\varepsilon^R$}$$

qui satisfait la condition

$$\rho(X) < 1$$

où $\rho(X)$ est le rayon spectral de X.

■ **PREUVE:** Nous venons de montrer que $\widetilde{R}_\varepsilon$, opérateur compact de rayon spectral strictement inférieur à 1, est solution de ($\widetilde{\mathcal{E}}_\varepsilon^R$). Pour montrer que c'est la seule solution, c'est la même idée que la preuve du théorème 2.2.5. On construit à partir d'un autre opérateur R solution, une solution du problème ($\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^+$). On conclut en utilisant l'unicité de la solution du problème de Helmholtz avec absorption. ■

Pour déterminer l'opérateur $\widetilde{R}_\varepsilon$, il faut donc résoudre ces nouveaux problèmes de cellule (A.16)-(A.17), de déterminer les opérateurs de RtR locaux ($\widetilde{T}_\varepsilon^{00}$, $\widetilde{T}_\varepsilon^{01}$, $\widetilde{T}_\varepsilon^{10}$, $\widetilde{T}_\varepsilon^{11}$) et enfin de sélectionner l'unique opérateur de rayon spectral strictement inférieur à 1 solution de l'équation caractéristique ($\widetilde{\mathcal{E}}_\varepsilon^R$).

La solution du problème de demi-guide ($\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^+$) et l'opérateur RtR recherché sont alors définis de manière unique comme indiqué dans la proposition qui suit.

PROPOSITION A.1.13 (PROBLÈME DE DEMI-GUIDE AVEC ABSORPTION)
Pour toute donnée φ, la solution $\widetilde{u}_\varepsilon^+(\varphi)$ du problème de demi-guide ($\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^+$) est caractérisée par :

$$\forall j \geq 1, \quad \widetilde{u}_\varepsilon^+(\varphi)\Big|_{\mathcal{C}_j^+} = \widetilde{e}_\varepsilon^0(\widetilde{R}_\varepsilon^{j-1}\,\varphi) \;-\; \widetilde{e}_\varepsilon^1((\widetilde{T}_\varepsilon^{11})^{-1}(\widetilde{R}_\varepsilon + \widetilde{T}_\varepsilon^{01})R_\varepsilon^{j-1}\,\varphi), \tag{A.22}$$

et l'opérateur NtD $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+$ l'est par :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+\,\varphi = S_\varepsilon\,\varphi\Big|_{\Gamma_0^+} = T_\varepsilon^{00}\,\varphi \;+\; T_\varepsilon^{10}(\widetilde{T}_\varepsilon^{11})^{-1}(\widetilde{R}_\varepsilon + \widetilde{T}_\varepsilon^{01})\,\varphi \tag{A.23}$$

◇ *Problème posé en domaine borné*

Soit $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+$ déterminé par la relation (A.23) et $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^-$ déterminé en utilisant la méthode dans le demi-guide périodique Ω^-. Commençons par énoncer une propriété sur les opérateurs de RtR $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^\pm$ qui nous servira à démontrer le caractère bien posé du problème intérieur ($\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^i$) posé dans Ω^i et avec des conditions de RtR aux bords.

PROPOSITION A.1.14 (PROPRIÉTÉS DES OPÉRATEURS RtR)
Les opérateurs $\mathbf{I} - \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^\pm$ *sont inversibles de* $H^{-1/2}(\Gamma^\pm)$ *dans* $H^{1/2}(\Gamma^\pm)$. *On a de plus*

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma),\ \varphi \neq 0 \quad Re\ \big\langle \sqrt{z}(\mathbf{I} - \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^\pm)^{-1}(\mathbf{I} + \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^\pm)\,\varphi, \varphi \big\rangle > 0. \tag{A.24}$$

où $< \cdot, \cdot >$ *est le crochet de dualité entre* $H^{1/2}(\Gamma)$ *et* $H^{-1/2}(\Gamma)$.

■ **PREUVE:** Pour l'inversibilité, il suffit d'utiliser les mêmes arguments que ceux utilisés Proposition 2.2.4 et 2.2.9 en remarquant que

$$\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0^\pm), \quad (\mathbf{I} - \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^\pm)\,\varphi = 2\imath\sqrt{z(x)}\widetilde{u}_\varepsilon^+(\varphi)\Big|_{\Gamma_0^\pm}$$

où $\widetilde{u}_\varepsilon^+(\varphi)$ est solution de $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^+)$.

La propriété concernant le partie réelle est liée à la Proposition 2.2.9 qui traite des propriétés des opérateurs de NtD Λ_ε^+. En effet, la restriction à Ω^i de la solution u_ε de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ est solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ avec conditions de NtD et du problème $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^i)$ avec conditions de RtR. Elle vérifie en particulier

$$\left| \begin{array}{l} \big[u_\varepsilon \pm \Lambda^\pm \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\big]\Big|_{\Gamma_0^+} = 0 \\ \big[\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \mp \imath\sqrt{z}u_\varepsilon\big]\Big|_{\Gamma_0^+} = \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^\pm\big[\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \pm \imath\sqrt{z}u_\varepsilon\big]\Big|_{\Gamma_0^+}, \end{array} \right.$$

ce qui implique que

$$-\imath\sqrt{z(a^\pm)}(1 + \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^\pm)\,\Lambda_\varepsilon^\pm = 1 - \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^\pm$$

On conclut en utilisant les propriétés de $\Lambda_\varepsilon^\pm$ de la Proposition A.1.5 :

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma),\ \varphi \neq 0 \quad \text{Re}\ \big\langle \sqrt{z}(\mathbf{I} - \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^\pm)^{-1}(\mathbf{I} + \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^\pm)\,\varphi, \varphi \big\rangle > 0.$$

■

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat concernant le caractère bien posé du problème posé dans Ω^i.

THÉORÈME A.1.15 (CARACTÈRE BIEN POSÉ DU PROBLÈME $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^i)$)
Le problème $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^i)$ *a une unique solution dans* $H^1(\Omega^i)$.

■ **PREUVE:** Montrons que la formulation variationnelle de ce problème vérifie les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram.

En effet, le problème $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^i)$ est équivalent au problème variationnel :

Trouver $u_\varepsilon^i \in H^1(\Omega^i)$ tel que :

$$\forall v \in H^1(\Omega^i), \quad a_\varepsilon^i(u_\varepsilon^i, v) = \int_{\Omega^i} f\overline{v}$$

où a_ε^i est une forme bilinéaire continue définie par :

$$\begin{aligned} a_\varepsilon^i(u, v) = &\int_{\Omega^i} \nabla u \cdot \nabla \overline{v} - (\omega^2 + \imath\varepsilon\omega) \int_{\Omega^i} \rho_p u\overline{v} \\ &- \imath\big\langle \sqrt{z(x)}(\mathbf{I} - \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^-)^{-1}(\mathbf{I} + \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^-)u, v\big\rangle_{\Gamma_0^-} - \imath\big\langle \sqrt{z(x)}(\mathbf{I} - \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+)^{-1}(\mathbf{I} + \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+)u, v\big\rangle_{\Gamma_0^+}. \end{aligned}$$

où $< \cdot, \cdot >_{\Gamma_0^\pm}$ est le crochet de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma_0^\pm)$ et $H^{-1/2}(\Gamma_0^\pm)$ et où $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+$ et $\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^-$ sont les opérateurs RtR. Pour montrer que a_ε^i est bien coercive, il faut et il suffit d'utiliser le fait que

$$\forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma),\ \varphi \neq 0 \quad \mathrm{Im}\Big(-\imath \left\langle \sqrt{z}(\mathbf{I} - \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^\pm)^{-1}(\mathbf{I} + \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^\pm)\, \varphi, \varphi \right\rangle \Big) < 0,$$

c'est précisément le résultat de la proposition A.1.14. On peut alors démontrer facilement que a_ε^i est coercive. ■

Le problème $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^i)$ est bien posé. La proposition A.1.10 nous assure que c'est la restriction de u_ε solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ à Ω^i, l'unique solution. Pour reconstruire u_ε en dehors de Ω^i, il suffit d'utiliser les relations (A.13).

A.1.3.2 Problème sans absorption

Nous rappelons que nous cherchons à caractériser la solution « physique » de l'équation de Helmholtz $(\mathcal{P})$ comme la limite, dans un sens à préciser, de la suite de solution $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Les idées du principe d'absorption limite transposées à l'utilisation des conditions de RtR sont donc :

- de définir la « bonne » solution physique des problèmes de demi-guide périodique pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma_0^\pm)$,

$$\left| \begin{array}{ll} -\triangle \widetilde{u}^\pm - \rho_p(\mathbf{x})\, \omega^2\, \widetilde{u}^\pm = 0, & \text{dans } \Omega^\pm \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}^\pm}{\partial \mathbf{n}} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \cap \Omega^\pm \\ \big[\dfrac{\partial \widetilde{u}^\pm}{\partial x} \pm \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^\pm\big] = \varphi & \text{sur } \Gamma_0^\pm \end{array} \right. \qquad (\widetilde{\mathcal{P}}^\pm)$$

  avec $\mathbf{n}$ la normale extérieure de $\partial\Omega$, comme la limite, dans un sens à préciser, des solutions $(\widetilde{u}_\varepsilon^\pm)_\varepsilon$ des problèmes $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^\pm)$
- de définir des bons opérateurs de type Robin-to-Robin $\widetilde{\Lambda}^\pm$ comme la limite des suites des coefficients de RtR pour le problème avec absorption $(\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+)_\varepsilon$ et $(\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^-)_\varepsilon$,
- de montrer que le problème posé dans Ω^i avec des conditions de NtD

$$\left| \begin{array}{rcll} -\triangle \widetilde{u}^i - \rho(\mathbf{x})\, \omega^2\, \widetilde{u}^i & = & f \quad \text{dans} & \Omega^i, \\ \big[\dfrac{\partial \widetilde{u}^i}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i\big] & = & \widetilde{\Lambda}^-\big[\dfrac{\partial \widetilde{u}^i}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i\big] \quad \text{sur} & \Gamma_0^-, \\ \big[\dfrac{\partial \widetilde{u}^i}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i\big] & = & \widetilde{\Lambda}^+\big[\dfrac{\partial \widetilde{u}^i}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i\big] \quad \text{sur} & \Gamma_0^+. \end{array} \right. \qquad (\widetilde{\mathcal{P}}^i)$$

  est bien posé, sous certaines conditions ;
- montrer que l'unique solution u^i de $(\widetilde{\mathcal{P}}^i)$ est la limite quand ε tend vers 0 de la famille des solutions $(u_\varepsilon^i)_\varepsilon$ des problèmes $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^i)$.

Il suffit ensuite de définir la solution « physique » de $(\mathcal{P})$ comme suit

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = \widetilde{u}^i(x), & x \in \Omega^i \\ u(x) = \big[\dfrac{\partial \widetilde{u}^i}{\partial x} + \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i\big](a^+)\ \widetilde{u}^+(x), & x \geq a^+ \\ u(x) = \big[\dfrac{\partial \widetilde{u}^i}{\partial x} - \imath\sqrt{z}\widetilde{u}^i\big](a^-)\ \widetilde{u}^-(x), & x \leq a^- \end{array} \right. \qquad (A.25)$$

où u^i est l'unique solution du problème $(\mathcal{P}^i)$, u^+ est l'unique solution de $(\mathcal{P}^+)$ et u^- est l'unique solution de $(\mathcal{P}^-)$.

Les idées de la méthode sont dont exactement les mêmes que Section 3.2, seules quelques expressions et équations changent. La seule réelle différence vient de la définition de la « bonne » solution du problème de demi-guide. En effet, la solution u_ε^+ du problème avec absorption étant exprimée, cellule par cellule, comme une combinaison linéaire des solutions e_ε^0 et e_ε^1 des problèmes de cellule, il faut passer à la limite dans ces problèmes de cellule pour trouver une expression similaire de la limite de u_ε^+. Cependant, ces problèmes de cellule (qui correspondent à des problèmes de cellule avec conditions de Neumann) sont mal posés pour une quantité dénombrable de fréquences.

Il est important de comprendre que l'ensemble de fréquences introduites afin d'exprimer la limite de u_ε^+ comme une combinaison linéaire de solution de problèmes de cellule est absolument artificiel. Même pour ces fréquences, la limite existe, c'est seulement les solutions des problèmes de cellule qui n'existent pas. Ce qui signifie, en somme, que pour ces fréquences, les solutions $e_\varepsilon^0(\varphi)$ et $e_\varepsilon^1(\varphi)$ explosent pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ quand ε tend vers 0 mais pas la somme $e_\varepsilon^0(\varphi) + e_\varepsilon^1(R_\varepsilon\,\varphi)$.

Nous proposons donc d'autres problèmes de cellule qui ne présentent pas ces désavantages et qui montrent que la limite des solution u_ε^+ ou $\widetilde{u}_\varepsilon^+$ existe pour toutes les fréquences. Nous allons montrer notamment que les problèmes de cellule n'ont, à la limite $\varepsilon = 0$, pas de fréquences propres.

PROPOSITION A.1.16
Soit $\widetilde{A}^0$ l'opérateur défini par

$$\widetilde{A}^0 = -\frac{1}{\rho_p}\triangle \textit{avec} \quad D(\widetilde{A}^0) = \{v \in H^1(\mathcal{C}),\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega\cap\mathcal{C}} = 0,\ [\frac{\partial v}{\partial x} + \imath\sqrt{z}v]\Big|_{\Gamma_0} = 0,\ [\frac{\partial v}{\partial x} - \imath\sqrt{z}v]\Big|_{\Gamma_1} = 0\}$$

où $\sqrt{z(\mathbf{x})} = \sqrt{\rho_p(\mathbf{x})\omega^2}$. Il n'a aucune valeur propre réelle.

■ **PREUVE:** Soit μ une valeur propre de $\widetilde{A}^0$ et u un vecteur propre associé de norme dans $L^2(\mathcal{C}, \rho_p\, dx)$ égal à 1. Alors le couple (μ, u) vérifie nécessairement :

$$\mu = \int_{\mathcal{C}} \Big|\nabla u\Big|^2 - \imath\int_{\Gamma_0}\sqrt{z}|u|^2 - \imath\int_{\Gamma_1}\sqrt{z}|u|^2.$$

Si la trace de u est nulle sur Γ_0 et Γ_1, comme $u \in D(\widetilde{A}^0)$, on obtient que la trace de Neumann de u est également nulle sur Γ_0 et Γ_1, ce qui implique, d'après le théorème de prolongement unique que u est identiquement nul dans $\mathcal{C}$. Comme ceci est exclu pour un vecteur propre, la partie imaginaire de μ est non nulle. ■

Avec ce dernier résultat, le passage à la limite des solutions de problèmes de cellule et des coefficients de RtR locales ne présente plus de difficulté et s'effectue pour toutes les fréquences puisque les valeurs propres des problèmes de cellule sont de partie imaginaire non nulle.

A l'image de ce que nous avons vu Section 3.2, il suffit de déterminer la limite de la famille

$\{\widetilde{R}_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ pour définir la solution « physique » du problème de demi-guide $(\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^+)$. Or, cette limite est acquise sans calcul supplémentaire puisque :

LEMME A.1.17
Pour tout $\varepsilon > 0$, on a la relation suivante

$$-R_\varepsilon + \imath\sqrt{z(a^+)}\Lambda_\varepsilon^+ R_\varepsilon = -\widetilde{R}_\varepsilon + \imath\sqrt{z(a^+)}\widetilde{R}_\varepsilon\Lambda_\varepsilon^+$$

■ **PREUVE:** Il faut utiliser la caractérisation de R_ε et $\widetilde{R}_\varepsilon$:

$$\forall\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma),\quad R_\varepsilon\varphi = -\frac{\partial}{\partial x}u_\varepsilon^+(\varphi)\big|_{\Gamma_1^+},\quad \text{et}\quad \widetilde{R}_\varepsilon\varphi = \big[\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{u}_\varepsilon^+(\varphi) + \imath\sqrt{z}\widetilde{u}_\varepsilon^+(\varphi)\big]\Big|_{\Gamma_1^+}$$

On remarque également facilement que

$$\forall\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma),\quad u_\varepsilon^+(\varphi) = \widetilde{u}_\varepsilon^+(-\varphi + \imath\sqrt{z(a^+)}\Lambda_\varepsilon^+\varphi) \tag{A.26}$$

donc

$$\forall\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma),\quad \big[\frac{\partial}{\partial x}u_\varepsilon^+(\varphi) + \imath\sqrt{z}u_\varepsilon^+(\varphi)\big]\Big|_{\Gamma_1^+} = \widetilde{R}_\varepsilon(-\varphi + \imath\sqrt{z(a^+)}\Lambda_\varepsilon^+\varphi).$$

Or

$$\big[\frac{\partial}{\partial x}u_\varepsilon^+(\varphi) + \imath\sqrt{z}u_\varepsilon^+(\varphi)\big]\Big|_{\Gamma_1^+} = R_\varepsilon\varphi + \imath\sqrt{z(a^+)}\Lambda_\varepsilon^+ R_\varepsilon\varphi$$

■

Ainsi puisque nous avons montré Section 3.2.2.4 qu'exceptée une quantité dénombrable de fréquences, les familles $\{R_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ et $\{\Lambda_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ ont une limite quand ε tend vers 0, respectivement dans $\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma))$ et $\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma))$ alors d'après le lemme A.1.17, la famille $\{\widetilde{R}_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ a également une limite dans $\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma))$.

On pourrait également montrer que la famille des solutions $\{\widetilde{u}_\varepsilon^+,\ \varepsilon\}$ a une limite dans H^1_{loc} d'après (A.26) et le théorème 3.2.27 et que celle des opérateurs RtR $\{\widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+,\ \varepsilon\}$ également dans $\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma))$ car on a en prenant la trace sur Γ^0 de la relation (A.26)

$$\mathbf{I} + \imath\sqrt{z(a^+)}\Lambda_\varepsilon = \widetilde{\Lambda}_\varepsilon^+(\mathbf{I} - \imath\sqrt{z(a^+)}\Lambda_\varepsilon) \tag{A.27}$$

Enfin pour déterminer la solution « physique » du problème $\mathcal{P}$, il ne resterait plus qu'à montrer que le problème $(\widetilde{\mathcal{P}}^i)$ est bien posé sauf pour une quantité dénombrable de fréquences. Dans le chapitre 3, nous avons montré seulement que ce problème relève de l'alternative de Fredholm. Le caractère bien posé du problème n'est qu'une conjecture (Conjecture 3.2.68). Nous ne revenons pas sur cette fin de démonstration car elle comprend exactement les mêmes idées que celle du Théorème 3.2.66 et nous ne pensons pas que nous pourrions avoir dans ce cas mieux que dans le cas de la formulation avec opérateurs NtD.

A.2 Le cas des milieux périodiques dans deux dimensions avec un défaut de grande taille

A.2.1 Généralisation des résultats théoriques

Pour le cas général du défaut le plus grand, le raisonnement est le même que celui de la section 4.2 mais l'expression des opérateurs NtN de demi-espace $N_{(i,j)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}$ change.

Commençons par donner de nouvelles notations Figure A.1. Ici la taille du milieu intérieur Ω^i

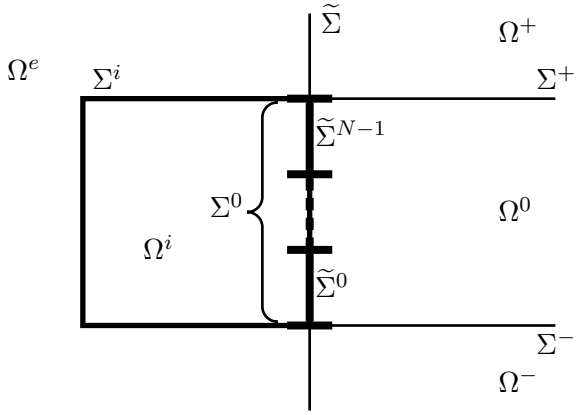


FIG. A.1: Notations générales

est N fois plus grande que la taille de la cellule de périodicité :

$$\Omega^i = \big]-\frac{L}{2},\frac{(2N-1)L}{2}\big[^2.$$

Alors

$$\Sigma^i_{(0)} = \Sigma^i \cap \widetilde{\Sigma} = \big]-\frac{L}{2},\frac{(2N-1)L}{2}\big[= \bigcup_{l=0}^{N-1} \widetilde{\Sigma}^l, \quad \text{où} \quad \widetilde{\Sigma}^l = \big]\frac{(2l-1)L}{2},\frac{(2l+1)L}{2}\big[.$$

Nous rappelons la notation suivante :

$$\Sigma = \overleftarrow{\Sigma}^- \cup \Sigma^0 \cup \Sigma^+ \quad \widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma}^- \cup \bigcup_{l=0}^{N-1} \widetilde{\Sigma}^l \cup \widetilde{\Sigma}^+,$$

où en particulier

$$\overleftarrow{\Sigma}^- = \big]+\infty,\frac{(2N-1)L}{2}\big[\times \big\{-\frac{L}{2}\big\}, \quad \Sigma^+ = \big]\frac{(2N-1)L}{2},+\infty\big[\times \big\{\frac{(2N-1)L}{2}\big\}.$$

Nous identifions toujours Σ et $\widetilde{\Sigma}$ avec $\mathbb{R}$, $\overleftarrow{\Sigma}^-$ avec $\widetilde{\Sigma}^-$ et Σ^+ avec $\widetilde{\Sigma}^+$.

REMARQUE A.2.1
Il est facile de voir qu'on pourrait appliquer directement l'étude de la Section 4.2 en considérant une cellule de périodicité plus grande, de la taille du défaut. Nous cherchons ici à faire tous les calculs sur la cellule de périodicité la plus petite du milieu.

La taille du défaut n'influe ni dans la décomposition de l'opérateur Λ_ε (Proposition 4.2.27) ni dans la factorisation de chaque $\Lambda^\varepsilon_{(i,j)}$ (Théorème 4.2.29) et ni dans la construction de $\Lambda^{\mathrm{H}}_\varepsilon$ (Section 4.2.5). Ces étapes de la méthode sont donc exactement les mêmes.

Pour la caractérisation de chaque opérateur NtN $\widetilde{N}^{\varepsilon}_{(i,j)}$, il est nécessaire d'introduire les opérateurs NtN de demi-espace $N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}$ dont l'expression dépend de N ici. Rappelons la définition de ces opérateurs

$$
\begin{array}{rcl}
N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}: \ H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}) \\
& & \left| \begin{array}{l}
N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^-} \equiv \varepsilon_j \Big[+ \dfrac{\partial}{\partial y}\ u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}(\psi)|_{\overline{\Sigma}^-}\Big], \\
N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}\psi|_{\Sigma^0} = \psi|_{\Sigma^0}, \\
N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^+} \equiv \varepsilon_i \Big[- \dfrac{\partial}{\partial y}\ u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}(\psi)|_{\Sigma^+}\Big],
\end{array} \right. \\
\psi & \longmapsto &
\end{array}
$$

où $\varepsilon_s = +1$ and $\varepsilon_a = -1$.

Grâce à la section 4.2.5.2, plus particulièrement les relations (4.23) et (4.32), nous pouvons donner une expression semi-analytique de ces opérateurs.

PROPOSITION A.2.2
$\forall (i,j) \in \{s,a\}^2$, soient $\hat{N}^{\varepsilon,H}_{(i,j)}$ opérateurs linéaires de $L^2([-\pi/L,\pi/L], H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0))$ dans $L^2\big([-\pi/L,\pi/L], H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)\big)$ défini par :

$$\hat{N}^{\varepsilon,H}_{(i,j)} = \mathcal{F}_y \circ N^{\varepsilon,H}_{(i,j)} \circ \mathcal{F}_y^{-1}.$$

Ils sont donnés par $\forall \hat{\psi}_{k_y} \in H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)), \quad \forall k_x \in [-\pi/L, \pi/L]$,

$$\hat{N}^{\varepsilon,H}_{(i,j)}\hat{\psi}_{k_y}\,(\cdot,k_x) = \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x,k_y)\hat{\psi}_{k_y}(\cdot;k_y)\,dk_y$$

où le noyau $\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x,k_y) \in \mathcal{L}\big(H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0), H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)\big)$ est donné par

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x,k_y) & = & + \varepsilon_j \ \dfrac{L}{2\pi} e^{\imath L k_x}\Big(N^{0,-}_{\varepsilon}(k_y) - N^{1,-}_{\varepsilon}(k_y)R_{\varepsilon}(k_y)\Big)\Big(\mathbf{I} - R_{\varepsilon}(k_y)e^{\imath L k_x}\Big)^{-1} \\
& & + \dfrac{L}{2\pi}\,\mathbf{I}\displaystyle\sum_{l=0}^{N-1} e^{\imath l L(k_y-k_x)} \\
& & + \varepsilon_i \ \dfrac{L}{2\pi} e^{-\imath N L k_x}\Big(N^{0,+}_{\varepsilon}(k_y) - N^{1,+}_{\varepsilon}(k_y)R_{\varepsilon}(k_y)\Big)\Big(\mathbf{I} - R_{\varepsilon}(k_y)e^{-\imath L k_x}\Big)^{-1} e^{\imath(N-1)Lk_y}
\end{array}
\tag{A.28}
$$

avec $\varepsilon_s = 1$, $\varepsilon_a = -1$ et $\mathbf{I} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0))$ est l'opérateur identité.

■ **PREUVE:** Nous écrivons la preuve pour $(i,j) = (s,s)$, les arguments sont similaires pour les autres cas.

Soit ψ une fonction de $H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$. L'expression (4.21) donne avec $n = 0$

$$u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}(\psi)|_{\Sigma^-} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \mathcal{F}_y u^{\mathrm{H}}(\psi)(\cdot;k_y)\big|_{y=-L/2}\,dk_y$$

et avec $n = N-1$

$$u^{\mathrm{H}}_{\varepsilon}(\psi)|_{\Sigma^+} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \mathcal{F}_y u^{\mathrm{H}}(\psi)(\cdot;k_y)|_{y=L/2}\ e^{\imath(N-1)k_y L}\ dk_y$$

Introduisons $\overleftarrow{\Sigma}_n^-$ et Σ_n^+ la suite d'intervalles de longueur L

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \begin{array}{l} \overleftarrow{\Sigma}_n^- = \left]\dfrac{(2N-1)L+(n+1)L}{2}, \dfrac{(2N-1)L+nL}{2}\right[\times \left\{\dfrac{-L}{2}\right\}, \\ \Sigma_n^+ = \left]\dfrac{(2N-1)L+nL}{2}, \dfrac{(2N-1)L+(n+1)L}{2}\right[\times \left\{\dfrac{(2N-1)L}{2}\right\}, \end{array} \right.$$

En utilisant la relation (4.32) de la section 4.2.5.2, nous obtenons

– sur $\overleftarrow{\Sigma}^-$: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\,\psi|_{\overleftarrow{\Sigma}_n^-} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \left(N_\varepsilon^{0,-}(k_y)\, R_\varepsilon(k_y)^{n-1} - N_\varepsilon^{1,-}(k_y)\, R_\varepsilon(k_y)^n \right) \mathcal{F}_y\psi\,(\cdot;k_y)\, dk_y$$

– sur chaque $\widetilde{\Sigma}^l$:

$$N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\,\psi|_{\widetilde{\Sigma}^l} = \psi|_{\widetilde{\Sigma}^l}$$

– sur Σ^+ : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\Sigma_n^+} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \left(N_\varepsilon^{0,+}(k_y)\, R_\varepsilon(k_y)^{n-1} - N_\varepsilon^{1,+}(k_y)\, R_\varepsilon(k_y)^n \right) \mathcal{F}_y\psi\,(\cdot;k_y)\, e^{\imath(N-1)k_yL}\, dk_y$$

L'expression de $N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}$ se fait donc là encore sur des segments de longueur L. L'idée est donc là encore d'appliquer la TFB à $N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}$ en utilisant l'identification $\Sigma \sim \mathbb{R}$ (voir A.2),

$$\mathcal{F}_y(N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi)(\cdot,k_x) = \\ \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\Big(\sum_{n=-\infty}^{-1} N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\overleftarrow{\Sigma}_{|n|}^-} e^{-\imath nk_xL} + \sum_{l=0}^{N-1} N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^l}\, e^{-\imath lLk_x} + \sum_{n=1}^{+\infty} N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\Sigma_n^+} e^{-\imath(n+N-1)k_xL}\Big).$$

En utilisant les mêmes arguments que ceux de la preuve de la Proposition 4.2.41, on montre qu'on peut

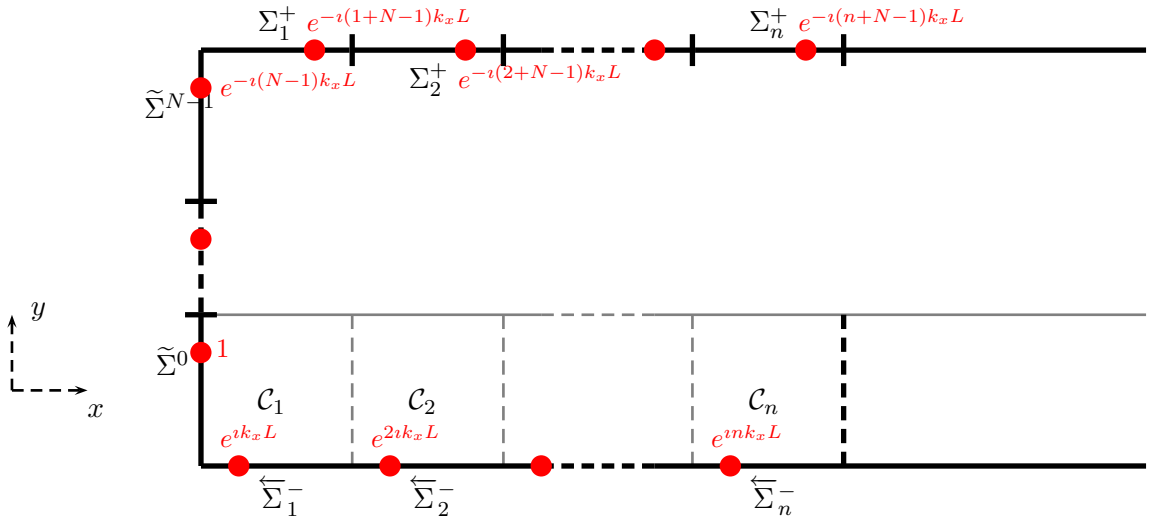


FIG. A.2: Application de la TFB à $N_{(s,s)}^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi$

intervertir sommes et intégrales et on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_y(N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(s,s)}\psi)(\cdot,k_x) = \\ &+ \frac{L}{2\pi}e^{\imath Lk_x}\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\Big(N^{0,-}_\varepsilon(k_y)-N^{1,-}_\varepsilon(k_y)R_\varepsilon(k_y)\Big)\Big(\mathbf{I}-R_\varepsilon(k_y)e^{\imath Lk_x}\Big)^{-1}\mathcal{F}_y\psi(\cdot;k_y)\,dk_y \\ &+ \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{l=0}^{N-1}\psi|_{\widetilde{\Sigma}^l}\,e^{-\imath lk_xL} \\ &+ \frac{L}{2\pi}e^{-\imath NLk_x}\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\Big(N^{0,+}_\varepsilon(k_y)-N^{1,+}_\varepsilon(k_y)R_\varepsilon(k_y)\Big)\Big(\mathbf{I}-R_\varepsilon(k_y)e^{-\imath Lk_x}\Big)^{-1}\mathcal{F}_y\psi(\cdot;k_y)\,e^{\imath(N-1)Lk_y}\,dk_y\end{aligned}$$

En remarquant enfin que la formule d'inversion de la TFB (Proposition B.1.5) pour $n\in[\![0;N-1]\!]$ donne

$$\psi|_{\widetilde{\Sigma}^l}=\sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\mathcal{F}_y\psi\,(\cdot;k_y)e^{\imath lk_yL}\,dk_y,$$

on retrouve exactement l'expression recherchée.

Enfin, avec les mêmes arguments que ceux de la preuve de la Proposition 4.2.41, on montre que le noyau $\mathbf{K}_{(s,s)}(k_x,k_y)$ est bien un opérateur linéaire de $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0),H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)\big)$. ■

La caractérisation des opérateurs NtN $\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}$ s'effectue toujours par l'intermédiaire de l'équation affine $(\mathcal{E}^\varepsilon_{(i,j)})$ mais en utilisant cette nouvelle définition des opérateurs NtN de demi-espace $N^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)}$. En ce qui concerne la résolution de $(\mathcal{E}^\varepsilon_{(i,j)})$, les arguments de la section 4.2.8 sont toujours valides. Ainsi, on pourrait montrer de la même façon que l'équation affine est équivalent au problème suivant.

Pour tout $\varphi\in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$, soit $\widetilde{E}\varphi$ de $H^{-1/2}_{(i,j)}(\widetilde{\Sigma})$ satisfaisant

$$\widetilde{E}\varphi\Big|_{\Sigma^0}=R_{(i,j)}\phi.$$

On introduit

$$W_N^-=\big\{\hat{\psi}^0\in V^-,\quad\forall l\in[\![0;N-1]\!],\quad\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\hat{\psi}^0(\cdot,k_x)e^{\imath lk_xL}\,dk_x=0\big\}. \tag{A.29}$$

où V^- est défini par (4.53) et

$$W_N^+=\big\{\hat{\psi}^0\in V^+,\quad\forall l\in[\![0;N-1]\!],\quad\int_{-\pi/L}^{\pi/L}\hat{\psi}^0(\cdot,k_x)e^{\imath lk_xL}\,dk_x=0\big\}. \tag{A.30}$$

où V^+ est défini par (4.55).

On montre alors que la fonction

$$\hat{\psi}^0_{ij}=\mathcal{F}_y\big(\widetilde{N}^\varepsilon_{(i,j)}\varphi-\widetilde{E}\varphi\big)\in W_N^-$$

est l'unique solution du problème variationnel suivant

Trouver $\hat{\psi}^0 \in W_N^-$, tel que

$$a^{\varepsilon}_{(i,j)}(\hat{\psi}^0, \hat{\theta}^0) = \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \Big\langle \hat{g}_\varphi(\cdot; k_x); \hat{\theta}^0(\cdot; k_x) \Big\rangle \, dk_x, \quad \hat{\theta}^0 \in W_N^+ \tag{$\mathcal{Q}^{\varphi}_{(i,j)}$}$$

$$\left| \begin{array}{rcl} a^{\varepsilon}_{(i,j)}(\hat{\psi}^0, \hat{\theta}^0) & = & \displaystyle\int_{-\pi/L}^{\pi/L} \Big\langle \hat{\psi}^0(\cdot; k_x); \hat{\theta}^0(\cdot; k_x) \Big\rangle \, dk_x \\ & & \displaystyle - \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} \Big\langle \mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x, k_y) \, \hat{\psi}^0(\cdot; k_y); \hat{\theta}^0(\cdot; k_x) \Big\rangle \, dk_y \, dk_x \end{array} \right. \tag{A.31}$$

avec $< \cdot; \cdot >$ le produit de dualité entre $H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$ et $H^{1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$, $\mathbf{K}^{\varepsilon}_{(i,j)}(k_x, k_y)$ opérateur linéaire de $H^{-1/2}_{k_y}(\Sigma^0)$ dans $H^{-1/2}_{k_x}(\Sigma^0)$ défini par (A.28) et

$$\hat{g}_\varphi = -\mathcal{F}_y \widetilde{E} \varphi + \hat{N}^{\varepsilon,\mathrm{H}}_{(i,j)} \mathcal{F}_y \widetilde{E} \varphi. \tag{A.32}$$

A.2.2 Généralisation de la résolution numérique

Là encore, la généralisation du Chapitre 4 pour les défauts de plus grande taille se situe dans l'expression des noyaux discrets $\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(k_x, k_y)$ et la discrétisation de la formulation variationnelle $\mathcal{Q}^{\varphi}_{(i,j)}$.

En reprenant les arguments et les notations de la section 4.3.2.1, considérons la discrétisation du problème $\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(k_x, k_y)$ de la façon suivante. En rappelant les notations

$$\forall j \in [\![0, N_k]\!], \quad k_j = -\frac{\pi}{L} + j\Delta k_x, \quad \Delta k_x = \Delta k_y = 2\pi/LN_k$$

pour $N_k \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$ fixés, nous introduisons l'espace

$$\mathbb{P}^N_{N_k,q} = \Big\{ w \in L^2(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}), \\ \forall j \in [\![0, N_k - 1]\!], \ w\big|_{[k_j, k_{j+1}]} \in \mathcal{P}_q, \quad \forall l \in [\![0; N-1]\!], \ \int_{-\pi/L}^{\pi/L} w(k) e^{ilkL} \, dk = 0 \Big\} \tag{A.33}$$

Notons $\big\{ w^n(k), \ n \in [\![1; N_W]\!] \big\}$ avec $N_W = N_k(q+1) - N$ une base de l'espace $\mathbb{P}^N_{N_k,q}$.

Nous considérons finalement l'espace d'approximation de W_N^- et W_N^+

$$W^N_{h,N_k,q} = \mathbb{P}^N_{N_k,q} \otimes \mathcal{T}_h = \mathrm{span}\big[w^n(k) \phi^\ell_h(y) \big]_{1 \le n \le N_W, \ 1 \le \ell \le N_y} \tag{A.34}$$

dont la dimension est $N_W = N_W \times N_y$. En utilisant les formules de quadrature introduites Section 4.3.2.1, on trouve que le problème discrétisé complet approchant $\mathcal{Q}^{\varphi}_{(i,j)}$ est donné par

$\varphi \in H^{-1/2}_{(i,j)}(\Sigma^i)$

Trouver $\hat{\psi}^0_{h,N_k,q,M} \in W^N_{h,N_k,q}$, tel que $\forall n \in [\![1;N]\!],\ \forall \ell \in [\![1;N_y]\!]$

$$a^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}(\hat{\psi}^0_{h,N_k,q,M}, w^n\phi^\ell_h) = \frac{2\pi}{NL}\sum_{j_x=0}^{N}\sum_{m_x=1}^{M}\omega_{m_x}\Big(\hat{g}_{\varphi_h}(\cdot;k^{m_x}_{j_x});\phi^\ell_h(\cdot)\Big)_{L^2(\Sigma^0)} w^n(k^{m_x}_{j_x}), \tag{$\mathcal{Q}^{\varphi,\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}$}$$

où $\forall n \in [\![1;N]\!],\ \forall \ell \in [\![1;N_y]\!]$

$$\left|\begin{array}{l} a^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(i,j)}(\hat{\psi}^0_{h,N_k,q,M}, w^n\phi^\ell_h) = \dfrac{2\pi}{NL}\displaystyle\sum_{j_x=0}^{N}\sum_{m_x=1}^{M}\omega_{m_x}\Big[\Big(\hat{\psi}^0_{h,N_k,q,M}(\cdot;k^{m_x}_{j_x});\phi^\ell_h(\cdot)\Big)_{L^2(\Sigma^0)} w^n(k^{m_x}_{j_x}) \\ \quad -\dfrac{2\pi}{NL}\displaystyle\sum_{j_y=0}^{N}\sum_{m_y=1}^{M}\omega_{m_y}\Big(\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(k^{m_x}_{j_x},k^{m_y}_{j_y})\,\hat{\psi}^0_{h,N_k,q,M}(\cdot;k^{m_y}_{j_y});\phi^\ell_h(\cdot)\Big)_{L^2(\Sigma^0)} w^n(k^{m_x}_{j_x})\Big] \end{array}\right. \tag{A.35}$$

avec $\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(k^{m_x}_{j_x},k^{m_y}_{j_y})$ défini par

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(k_x,k_y) \;=\;& +\varepsilon_j\ \frac{L}{2\pi}e^{\imath Lk_x}\Big(N^{0,-}_{\varepsilon,h}(k_y)-N^{1,-}_{\varepsilon,h}(k_y)R_{\varepsilon,h}(k_y)\Big)\Big(\mathbf{I}_h-R_{\varepsilon,h}(k_y)e^{\imath Lk_x}\Big)^{-1}\\ &+\frac{L}{2\pi}\,\mathbf{I}_h\sum_{l=0}^{N-1}e^{\imath lL(k_y-k_x)}\\ &+\varepsilon_i\ \frac{L}{2\pi}e^{-\imath NLk_x}\Big(N^{0,+}_{\varepsilon,h}(k_y)-N^{1,+}_{\varepsilon,h}(k_y)R_{\varepsilon,h}(k_y)\Big)\Big(\mathbf{I}_h-R_{\varepsilon,h}(k_y)e^{-\imath Lk_x}\Big)^{-1}e^{\imath(N-1)Lk_y}\end{aligned}$$

et avec, on le rappelle, $\hat{g}_{\varphi_h}(\cdot;k^{m_x}_{j_x})$ défini par

$$\hat{g}_{\varphi_h}(\cdot;k_x) = -\mathcal{F}_y\widetilde{E}_h\varphi_h\,(\cdot;k_x) + \int_{-\pi/L}^{\pi/L}\Big(\mathbf{K}^{\varepsilon,h}_{(i,j)}(k_x,k_y)\,\mathcal{F}_y\widetilde{E}_h\varphi_h(\cdot;k_y)\,dk_y$$

où $\widetilde{E}_h$ est un opérateur d'extension de $\mathcal{T}^i_{(i,j),h}$ dans $\widetilde{\mathcal{T}}_h$ vérifiant

$$\forall\varphi_h\in\mathcal{T}^i_{(i,j),h},\quad \widetilde{E}_h\varphi_h\Big|_{\Sigma^i_{(0)}} = R_{(i,j)}\varphi_h.$$

Pour valider ce calcul, nous appliquons encore ici la méthode au cas particulier du milieu homogène et en comparant le résultat obtenu aux fonctions de Kankel puisque rappelant que par définition

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u^e_\varepsilon = \mathrm{H}^{(1)}_n\big(\sqrt{\rho_p(\omega^2+\imath\varepsilon\omega)}\sqrt{x^2+y^2}\big),\quad u^e_\varepsilon\Big|_{\widetilde{\Sigma}} = \widetilde{N}^\varepsilon_{(s,s)}\Big(u^e_\varepsilon\Big|_{\Sigma^i}\Big)$$

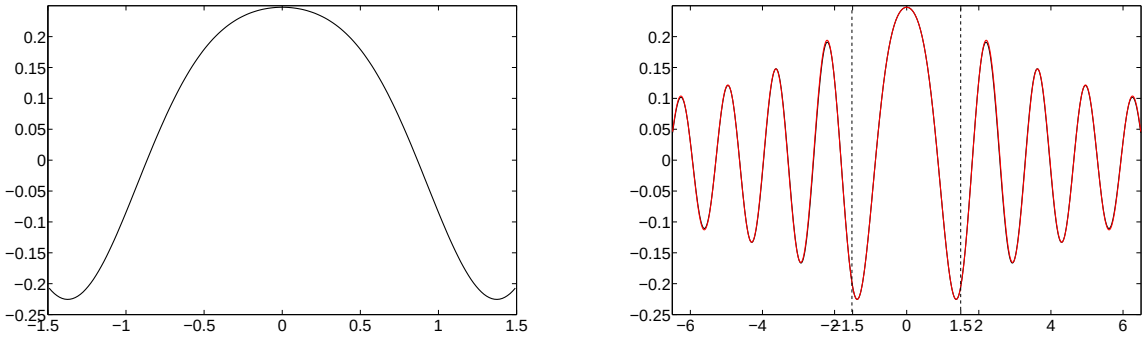
Plaçons nous dans le cas où le coefficient $\rho_p = 1$, la fréquence $\omega = 5$, l'absorption $\varepsilon = 0.1$ et la période $L = 1$. Supposons tout d'abord que $N = 3$, i.e. la taille de $\Sigma^i_{(0)}$ est trois fois plus grande que celle de $\widetilde{\Sigma}^0$. Ceci implique que

$$\Sigma^i_{(0)} = \big\{(1.5,y),\ y\in[-1.5,1.5]\big\}\quad\text{et}\quad \widetilde{\Sigma} = \big\{(1.5,y),\ y\in\mathbb{R}\big\}$$

Nous utilisons dans tout ce qui suit des éléments finis de Raviart-Thomas de plus bas degré pour la discrétisation en espace ($N_y = 60$) et des polynomes de degré 0 pour les fonctions dépendant

de la variable duale ($q = 0$ et $N_k = 60$). La méthode de quadrature est d'ordre 1.

Pour une absorption de $\varepsilon = 0.1$, la figure A.3 représente sur un intervalle $[-6.5, 6.5]$ en noir la fonction de Hankel et en rouge sa reconstruction $\widetilde{N}^{\varepsilon,h,N_k,q,M}_{(s,s)}\varphi_h$ (Figure A.3(b)), où φ_h est la projection sur $\mathcal{T}^i_{(i,j)}$ de la trace de la fonction de Hankel sur Σ^i (Figure A.3(b) est représentée seulement la restriction sur $\Sigma^i_{(0)} \equiv [-1.5, 1.5]$). L'erreur relative est de 2%. Les résultats sont donc satisfaisant. En calculant l'opérateur NtD comme expliqué dans la Section 4.3.3.1, en résolvant le



(a) La restriction de la fonction de Hankel à $\Sigma^i_{(0)}$

(b) La fonction de Hankel (en noir) et sa reconstruction sur $\widetilde{\Sigma}$

FIG. A.3: Pour $\varepsilon = 0.1$, restriction de la fonction de Hankel à $[-1.5, 1.5]$ à gauche à partir de laquelle on calcule son extension sur $[-6.5, 6.5]$ (en rouge) qu'on compare à la fonction de Hankel (en noir). $M = 1$.

problème intérieur et en reconstruisant la solution comme expliqué Section 4.3.3.2, on détermine une approximation de la solution recherchée.

Pour illustrer cette reconstruction, nous avons considéré trois situations

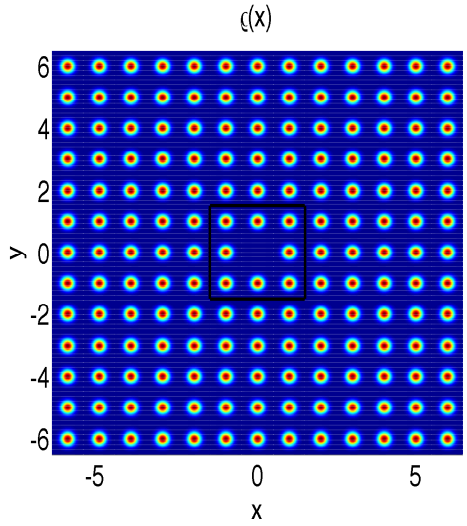
(Cas(1)) Dans le cas où les données ρ et f sont représentés respectivement Figures A.4(a) et A.4(b), le domaine $\Omega^i = [-1.5, 1.5]^2$, la fréquence $\omega = 5$ et l'absorption $\varepsilon = 0.1$, on obtient la solution intérieure représentée Figure A.4(c) et la solution du problème de départ représentée sur le domaine $[-6.5, 6.5]^2$ Figure A.4(d). On vérifie qu'on obtient la même solution que celle représentée Figure 4.38(a).

(Cas(2)) Dans le cas où les données ρ et f sont représentés respectivement Figures A.5(a) et A.5(b), le domaine $\Omega^i = [-0.5, 1.5]^2$, la fréquence $\omega = 10$ et l'absorption $\varepsilon = 1$, on obtient la solution intérieure représentée Figure A.5(c)et la solution du problème de départ représentée sur le domaine $[-6.5, 6.5]^2$ Figure A.5(d). On vérifie qu'on obtient la même solution que celle représentée Figure 4.38(b).

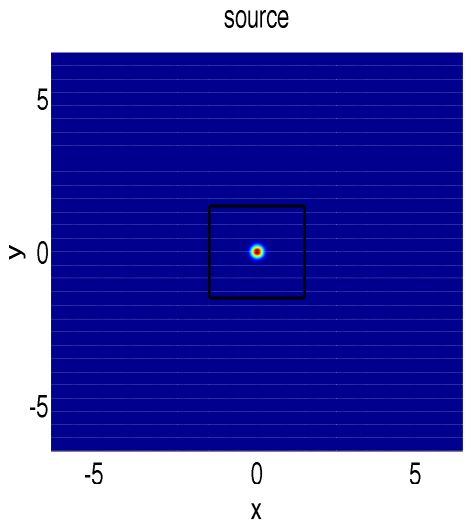
(Cas(3)) Dans le cas où les données ρ et f sont représentés respectivement Figures A.6(a) et A.6(b), le domaine $\Omega^i = [-0.5, 1.5] \times [-1.5, 0.5]$, la fréquence $\omega = 10$ et l'absorption $\varepsilon = 0.1$, on obtient la solution intérieure représentée Figure A.6(c) et la solution du problème

de départ représentée sur le domaine $[-6.5, 6.5]^2$ Figure A.6(d).On vérifie qu'on obtient la même solution que celle représentée Figure 4.3.4.

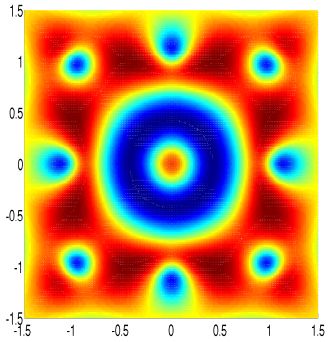
En comparant ces résultats à ceux de la section 4.3, on montre que les calculs sont indépendants du domaine Ω^i choisi. C'est un autre moyen de valider la méthode du Chapitre 4 et également la généralisation aux cas des défauts de plsu grande taille étudiée dans cette annexe.

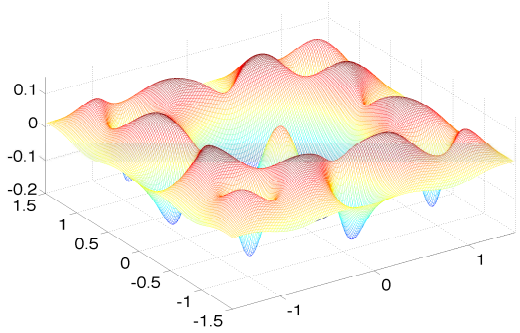


(a) Le milieu périodique localement perturbé

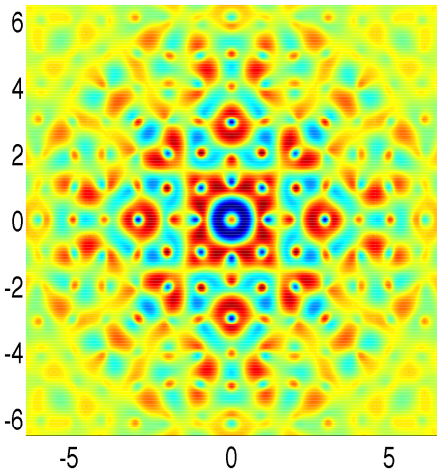


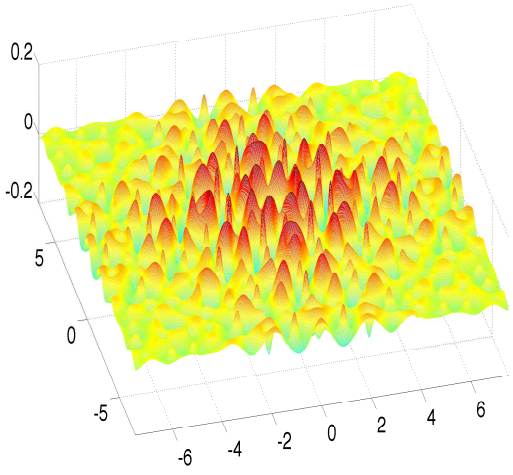
(b) La source à support compact





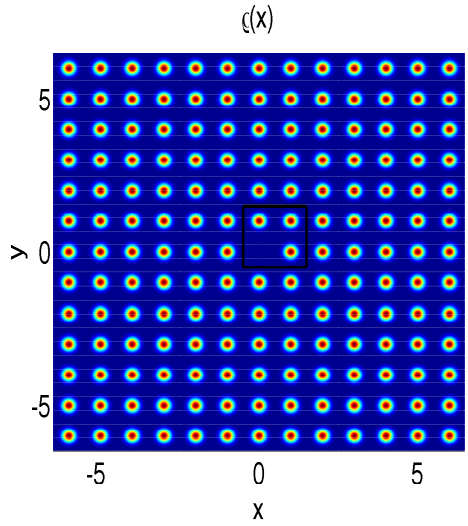
(c) La solution intérieure



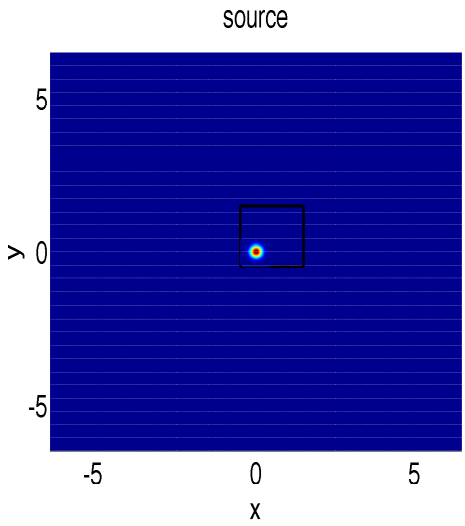


(d) La solution

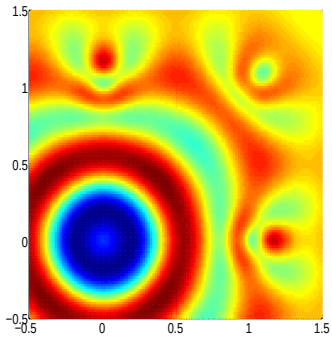
FIG. A.4: Construction de la solution dans le domaine $[-6.5, 6.5]^2$ dans le cas (1), $\Omega^i = [-1.5, 1.5]^2$, $\omega = 5$, $\epsilon = 0.1$.

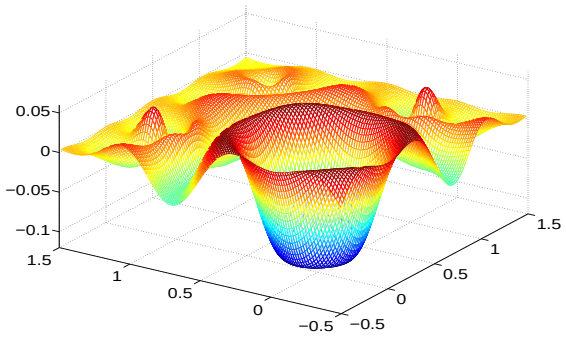


(a) Le milieu périodique localement perturbé

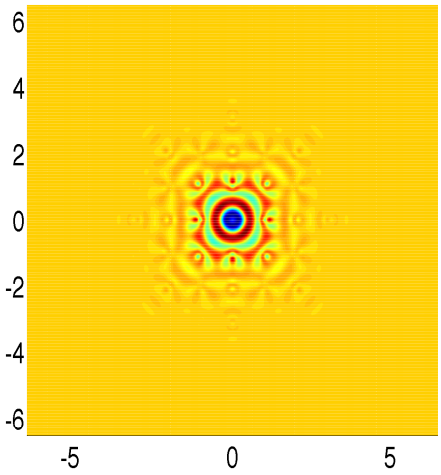


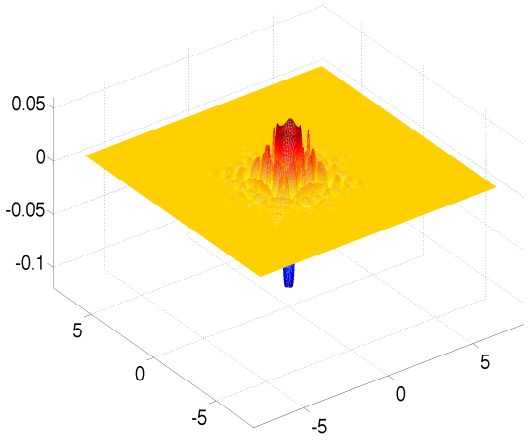
(b) La source à support compact





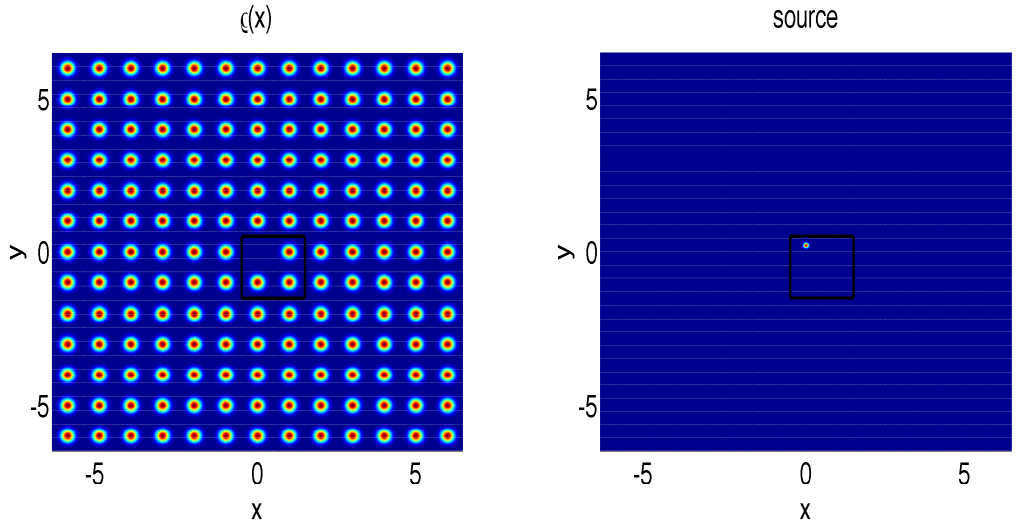
(c) La solution intérieure



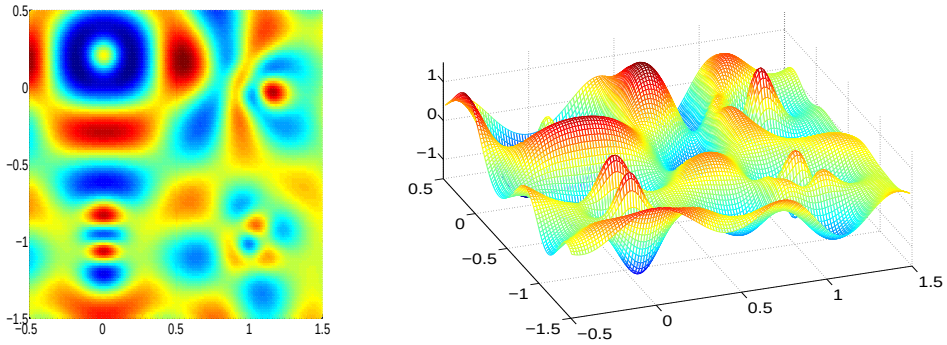


(d) La solution

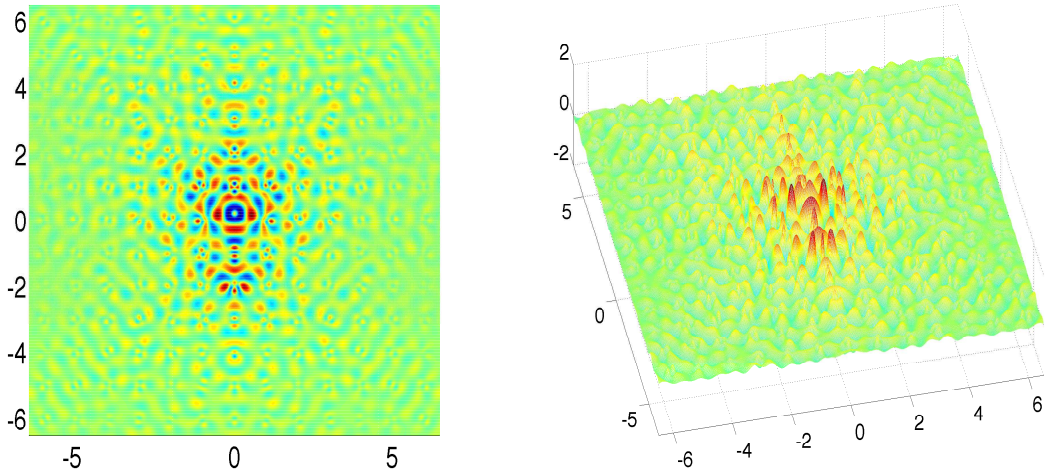
FIG. A.5: Construction de la solution dans le domaine $[-6.5, 6.5]^2$ dans le cas (2), $\Omega^i = [-0.5, 1.5]^2$, $\omega = 10$, $\epsilon = 1$.



(a) Le milieu périodique localement perturbé (b) La source à support compact



(c) La solution intérieure



(d) La solution

FIG. A.6: Construction de la solution dans le domaine $[-6.5, 6.5]^2$ dans le cas (3), $\Omega^i = [-0.5, 1.5] \times [-1.5, 0.5]$, $\omega = 10$, $\epsilon = 0.1$.

A.3 Milieu sans symétrie

Nous considérons ici des milieux qui n'ont aucune symétrie. Il faut néanmoins supposer que les cellules de périodicité sont des carrés, que les côtés du domaine intérieur Ω^i sont des multiples de la taille de la cellule de périodicité. Par soucis de clarté de la présentation, nous supposerons dans la suite que Ω^i est également un carré.

Nous développons ici une stratégie de construction de l'opérateur NtD Λ_ε, introduit Section 4.2.1, qui généralise celle introduite Sections 4.2.3 et 4.2.4 pour le problème présentant deux symétries. Notons que la méthode développée Section 4.2.5 pour construire des opérateurs NtD de demi-espace est indépendante d'hypothèse de symétrie. Nous allons donc la réutiliser ici.

A.3.1 Quatre problèmes de demi espace auxiliaires

Figure A.7 sont introduits quatre demi-espaces $(\Omega_\ell^{\mathrm{H}})_\ell$ et leurs frontières $(\widetilde{\Sigma}_\ell)_\ell$ et $(\Sigma_\ell)_\ell$ défini par

$$\left|\begin{array}{l}\widetilde{\Sigma}_1 = \widetilde{\Sigma}_1^- \cup \Sigma_1^0 \cup \widetilde{\Sigma}_1^+,\\ \widetilde{\Sigma}_2 = \overleftarrow{\widetilde{\Sigma}}_2^- \cup \overleftarrow{\Sigma}_2^0 \cup \overleftarrow{\widetilde{\Sigma}}_2^+,\\ \widetilde{\Sigma}_3 = \overleftarrow{\widetilde{\Sigma}}_3^- \cup \overleftarrow{\Sigma}_3^0 \cup \overleftarrow{\widetilde{\Sigma}}_3^+,\\ \widetilde{\Sigma}_4 = \widetilde{\Sigma}_4^- \cup \Sigma_4^0 \cup \widetilde{\Sigma}_4^+.\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left|\begin{array}{l}\Sigma_1 = \overleftarrow{\Sigma}_1^- \cup \Sigma_1^0 \cup \Sigma_1^+,\\ \Sigma_2 = \overleftarrow{\Sigma}_2^- \cup \overleftarrow{\Sigma}_2^0 \cup \Sigma_2^+,\\ \Sigma_3 = \Sigma_3^- \cup \overleftarrow{\Sigma}_3^0 \cup \overleftarrow{\Sigma}_3^+,\\ \Sigma_4 = \Sigma_4^- \cup \Sigma_4^0 \cup \overleftarrow{\Sigma}_4^+\end{array}\right.$$

où la notation $\overleftarrow{\Sigma}$ est utilisée dans le cas où Σ est pris dans le sens des x ou y décroissants.

Nous avons les relations suivantes

$$\widetilde{\Sigma}_\ell^+ = \Sigma_{\ell+1}^- \quad \text{et} \quad \widetilde{\Sigma}_\ell^- = \Sigma_{\ell-1}^+, \quad \ell \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

Pour chaque $\ell \in [\![1,4]\!]$, pour chaque $\psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}_\ell)$, soit $u_\varepsilon^{\mathrm{H},\ell}(\psi)$ l'unique solution H^1 du problème

$$\left|\begin{array}{ll}-\Delta u_\varepsilon^{\mathrm{H},\ell}(\psi) - \rho_p(x)\,(\omega^2 + \imath\varepsilon\omega)\,u_\varepsilon^{\mathrm{H},\ell}(\psi) = 0, & \text{dans } \Omega_\ell^{\mathrm{H}},\\ -\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\ell} u_\varepsilon^{\mathrm{H},\ell}(\psi) = \psi, & \text{sur } \widetilde{\Sigma}_\ell.\end{array}\right. \qquad (\mathcal{P}_\varepsilon^{\mathrm{H},\ell})$$

où $\mathbf{n}_\ell$ est la normale extérieure à Ω_ℓ^{H}.

Nous définissons l'opérateur NtD $\Lambda_\varepsilon^{\mathrm{H},\ell}$ de demi-espace correspondant

$$\begin{array}{rcl}\Lambda_\varepsilon^{\mathrm{H},\ell} : H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}_\ell) & \to & H^{1/2}(\widetilde{\Sigma}_\ell)\\ \psi & \mapsto & \Lambda_\varepsilon^{\mathrm{H},\ell}\,\psi = u_\varepsilon^{\mathrm{H},\ell}(\psi)\Big|_{\widetilde{\Sigma}_\ell}.\end{array}$$

Nous avons dans ce cas de figure quatre problèmes de demi-espace à résoudre, en utilisant exactement la méthode développée Section 4.2.5.

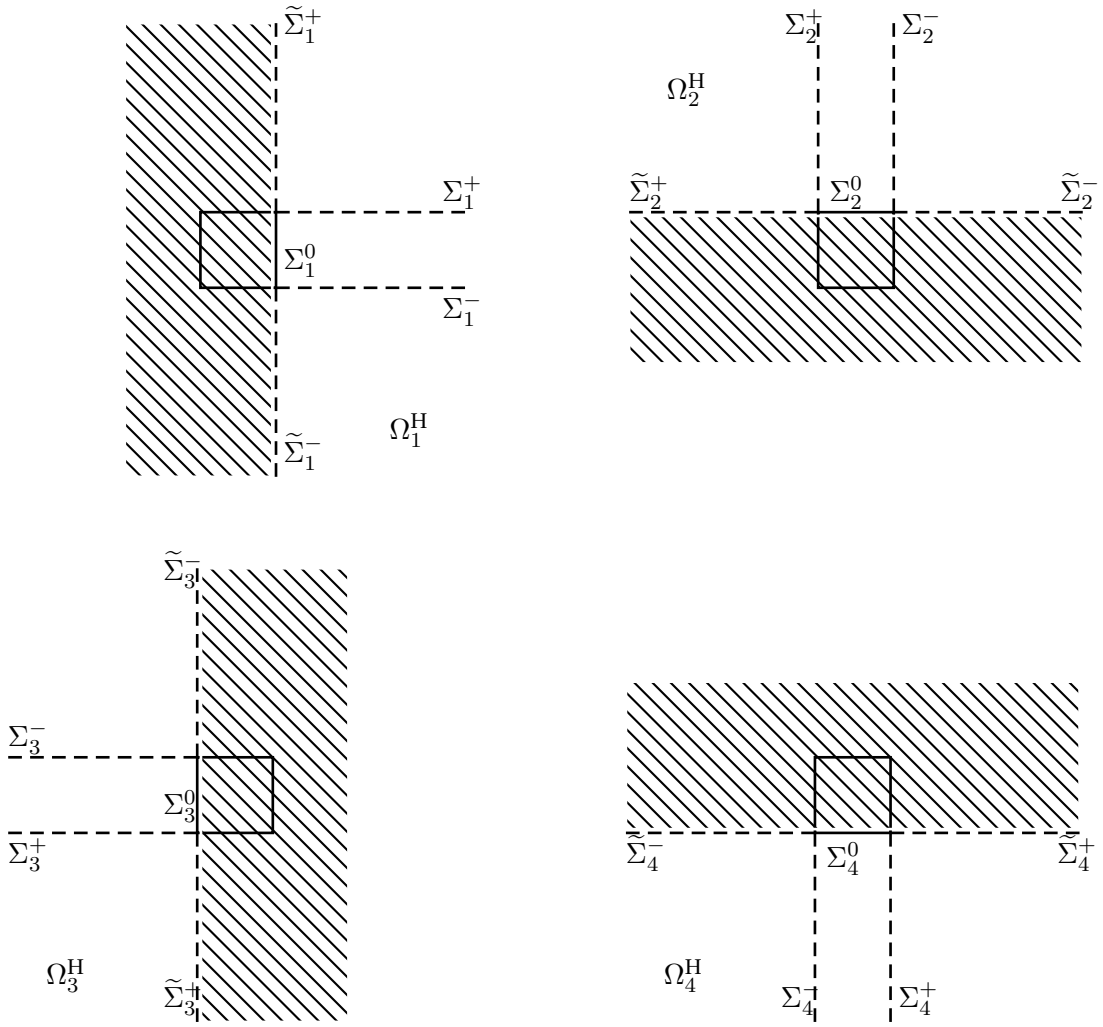


FIG. A.7: Les quatre demi-espaces $(\Omega_\ell^{\mathbf{H}})_\ell$.

Grâce à cette résolution, nous pouvons déterminer de manière semi-analytique quatre opérateurs NtN $(N_\ell^{\varepsilon,\mathrm{H}})_\ell$ défini par

$$
\begin{array}{rcl}
N_1^{\varepsilon,\mathrm{H}} \ : \ H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}_1) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}_1) \\
\psi & \longmapsto & \left| \begin{array}{l}
N_1^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\widetilde{\Sigma}_1^-} \equiv -\Big[-\dfrac{\partial}{\partial y}\ u_\varepsilon^{\mathrm{H},1}(\psi)|_{\overline{\Sigma}_1^-}\Big], \\
N_1^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\widetilde{\Sigma}_1^0} = \psi|_{\widetilde{\Sigma}_1^0}, \\
N_1^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\widetilde{\Sigma}_1^+} \equiv -\Big[+\dfrac{\partial}{\partial y}\, u_\varepsilon^{\mathrm{H}}(\psi)|_{\Sigma_1^+}\Big],
\end{array} \right.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
N_2^{\varepsilon,\mathrm{H}} \ : \ H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}_2) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}_2) \\
\psi & \longmapsto & \left| \begin{array}{l}
N_2^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\widetilde{\Sigma}_2^-} \equiv + \Big[+ \dfrac{\partial}{\partial x}\ u_\varepsilon^{\mathrm{H},2}(\psi)|_{\overline{\Sigma}_2^-} \Big], \\
N_2^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\widetilde{\Sigma}_2^0} = \psi|_{\widetilde{\Sigma}_2^0}, \\
N_2^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\widetilde{\Sigma}_2^+} \equiv + \Big[- \dfrac{\partial}{\partial x}\, u_\varepsilon^{\mathrm{H},2}(\psi)|_{\Sigma_2^+} \Big],
\end{array} \right. \\
N_3^{\varepsilon,\mathrm{H}} \ : \ H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}_3) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}_3) \\
\psi & \longmapsto & \left| \begin{array}{l}
N_3^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\widetilde{\Sigma}_3^-} \equiv - \Big[+ \dfrac{\partial}{\partial y}\ u_\varepsilon^{\mathrm{H},3}(\psi)|_{\overline{\Sigma}_3^-} \Big], \\
N_3^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\widetilde{\Sigma}_3^0} = \psi|_{\widetilde{\Sigma}_3^0}, \\
N_3^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\widetilde{\Sigma}_3^+} \equiv - \Big[- \dfrac{\partial}{\partial y}\, u_\varepsilon^{\mathrm{H},3}(\psi)|_{\Sigma_3^+} \Big],
\end{array} \right. \\
N_4^{\varepsilon,\mathrm{H}} \ : \ H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}_4) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}_4) \\
\psi & \longmapsto & \left| \begin{array}{l}
N_4^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\widetilde{\Sigma}_4^-} \equiv - \Big[- \dfrac{\partial}{\partial x}\ u_\varepsilon^{\mathrm{H},4}(\psi)|_{\overline{\Sigma}_4^-} \Big], \\
N_4^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\widetilde{\Sigma}_4^0} = \psi|_{\widetilde{\Sigma}_4^0}, \\
N_4^{\varepsilon,\mathrm{H}}\psi|_{\widetilde{\Sigma}_4^+} \equiv - \Big[+ \dfrac{\partial}{\partial x}\, u_\varepsilon^{\mathrm{H},4}(\psi)|_{\Sigma_4^+} \Big],
\end{array} \right.
\end{array}
$$

Avec le même raisonnement de Proposition 4.2.41, on montre qu'il existe une expression simple de la transformée de FB de chacun de ces opérateurs qui fait intervenir, pour chaque $\ell \in [\![1,4]\!]$ les opérateurs de propagation $\{R_\varepsilon^\ell(k_y),\ k_y \in]-\pi/L, \pi/L]\}$ et les opérateurs NtN locaux $\{N_\varepsilon^{0,\pm,\ell}(k_y),\ k_y \in]-\pi/L, \pi/L]\}$ et $\{N_\varepsilon^{1,\pm,\ell}(k_y),\ k_y \in]-\pi/L, \pi/L]\}$.

A.3.2 Détermination de l'opérateur NtD Λ_ε

Soit $\Sigma^i = \cup_{\ell=1}^4 \Sigma_\ell^0$. En s'inspirant du Théorème 4.2.29, nous pouvons montrer le théorème suivant concernant la décomposition de Λ_ε

THÉORÈME A.3.1
Pour tout $\varphi \in H^{-1/2}(\Sigma^i)$, pour tout $\ell \in [\![1,4]\!]$, nous avons

$$\Lambda_\varepsilon\varphi|_{\Sigma_\ell^0} = \widetilde{R}_\ell \circ \Lambda_\varepsilon^{H,\ell} \circ \widetilde{N}_\ell^\varepsilon \varphi, \quad \textit{où}$$

• *$\widetilde{N}_\ell^\varepsilon$ est un opérateur NtN défini par*

$$
\begin{array}{rcl}
\widetilde{N}_\ell^\varepsilon \ : H^{-1/2}(\Sigma^i) & \to & H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}_\ell) \\
\varphi & \mapsto & \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\ell} u_\varepsilon^e(\varphi)\Big|_{\widetilde{\Sigma}_\ell},
\end{array}
\tag{A.36}
$$

où $u_\varepsilon^e(\varphi)$ est la solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^e)$;

• *$\Lambda_\varepsilon^{H,\ell}$ est l'opérateur NtD de demi-espace défini Section A.3.1 ;*

• *$\widetilde{R}_\ell$ est l'opérateur restriction défini de $L^2(\widetilde{\Sigma}_\ell)$ dans $L^2(\Sigma_\ell^0)$ et qui, en particulier, envoie continûment $H^{1/2}(\widetilde{\Sigma}_\ell)$ dans $H^{1/2}(\Sigma_\ell^0)$.*

■ **PREUVE:** L'idée de la décomposition est exactement la même que celle de la preuve du Théorème 4.2.29. Cependant, ici, nous devons garantir que pour toute donnée $\varphi \in H^{-1/2}(\Sigma^i)$, nous pouvons reconstruire une fonctions $\Lambda_\varepsilon\varphi \in H^{1/2}(\Sigma^i)$ à partir de chaque restriction $\widetilde{R}_\ell \circ \Lambda_\varepsilon^{\mathrm{H},\ell} \circ \widetilde{N}_\ell^\varepsilon\varphi$ qui appartient à $H^{1/2}(\Sigma_\ell^0)$. En somme, $\widetilde{R}_\ell \circ \Lambda_\varepsilon^{\mathrm{H},\ell} \circ \widetilde{N}_\ell^\varepsilon\varphi$ doit satisfaire des conditions aux angles.

Soit φ une fonction de $H^{-1/2}(\Sigma^i)$. Pour chaque $\ell \in [\![1,4]\!]$, par définition de $\widetilde{N}_\ell^\varepsilon$, $u_\varepsilon^e(\varphi)|_{\Omega_\ell^{\mathrm{H}}}$ et $u_\varepsilon^{\mathrm{H},\ell}(\widetilde{N}_\ell^\varepsilon\varphi)$ satisfont l'équation de Helmholtz $(\mathcal{P}_\varepsilon^{\mathrm{H},\ell})$ avec la même condition de Neumann sur $\widetilde{\Sigma}_\ell$, en l'occurrence $\widetilde{N}_\ell^\varepsilon\varphi$.

Par unicité de la solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon^{\mathrm{H},\ell})$, nous avons

$$u_\varepsilon^e(\varphi)\Big|_{\Omega_\ell^{\mathrm{H}}} = u_\varepsilon^{\mathrm{H},\ell}(\widetilde{N}_\ell^\varepsilon\varphi)$$

et en particulier

$$R_\ell\big(u_\varepsilon^e(\varphi)|_{\Sigma^i}\big) = \widetilde{R}_\ell \circ \Lambda_\varepsilon^{\mathrm{H},\ell} \circ \widetilde{N}_\ell^\varepsilon\varphi,$$

où R_ℓ est l'opérateur restriction de $L^2(\Sigma^i)$ dans $L^2(\Sigma_\ell^0)$ qui, en particulier, envoie continûment $H^{1/2}(\Sigma^i)$ dans $H^{1/2}(\Sigma_\ell^0)$. Si nous recomposons en une fonction de Σ^i, nous obtenons la trace d'une fonction de $H^1(\triangle,\Omega^e)$. ■

Chaque opérateur $\Lambda_\varepsilon^{\mathrm{H},\ell}$ peut être calculé, nous le rappelons, en utilisant la méthode développée Section 4.2.5.

La détermination de Λ est maintenant réduite à celle des quatre opérateurs NtN $\widetilde{N}_\ell^\varepsilon$, $\ell \in [\![1,4]\!]$.

Notons dans un premier temps que par définition de la solution u_ε^e du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon^e)$, chaque opérateur $\widetilde{N}_\ell^\varepsilon$ appartient au sous-espace affine :

$$\mathcal{L}_\ell^0 = \Big\{ L \in \mathcal{L}\Big(H^{-1/2}(\Sigma^i), H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}_\ell)\Big), \quad \forall \phi,\ L\phi\big|_{\Sigma_\ell^0} = \phi\big|_{\Sigma_\ell^0} \Big\}.$$

Avec les mêmes arguments que dans le cas avec double symétrie, nous pouvons prouver le théorème suivant

THÉORÈME A.3.2
L'ensemble des opérateurs $(\widetilde{N}_1^\varepsilon, \widetilde{N}_2^\varepsilon, \widetilde{N}_3^\varepsilon, \widetilde{N}_4^\varepsilon)$ *est l'unique solution du problème*

$$\begin{aligned} &\textit{Trouver } (\widetilde{N}_1^\varepsilon, \widetilde{N}_2^\varepsilon, \widetilde{N}_3^\varepsilon, \widetilde{N}_4^\varepsilon) \in \mathcal{L}_1^0 \times \mathcal{L}_2^0 \times \mathcal{L}_3^0 \times \mathcal{L}_4^0, \\ &\forall \ell \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad \begin{cases} \widetilde{N}_\ell^\varepsilon|_{\widetilde{\Sigma}_\ell^+} = N_{\ell+1}^{\varepsilon,H} \circ \widetilde{N}_{\ell+1}^\varepsilon|_{\Sigma_{\ell+1}^-}, \\ \widetilde{N}_\ell^\varepsilon|_{\widetilde{\Sigma}_\ell^-} = N_{\ell-1}^{\varepsilon,H} \circ \widetilde{N}_{\ell-1}^\varepsilon|_{\Sigma_{\ell-1}^+}. \end{cases} \end{aligned} \tag{$\mathcal{E}_\varepsilon$}$$

Comme les espaces $\mathcal{L}_\ell^0$ pour $\ell \in [\![1,4]\!]$ sont des sous espaces affines de $\mathcal{L}\big(H_{(i,j)}^{-1/2}(\Sigma^i), H_{(i,j)}^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}_\ell)\big)$, le problème $(\mathcal{E}_\varepsilon)$ est de type affine.

La méthode de résolution présente plus de difficultés que dans le cas avec symétrie, en particulier parceque les équations satisfaites par les opérateurs NtN sont couplés. Nous n'avons pas encore de résultats numériques du fait des limitations actuelles évoquées au chapitre 4 concernant les inversions des matrices pleines : ici la matrice est quatre fois plus grande que celles qui inversées dans le chapitre 4. Les limites de discrétisation sont plus vite atteintes dans ce cas.

Dès que nous aurons étudié une méthode d'inversion de matrice plus efficace, nous pourrons implémenter la solution de problèmes de Helmholtz dans des milieux périodiques 2D ne présentant aucune symétrie.

A.4 Problème de transmission-réflexion entre deux demi-espace périodiques

A.4.1 Présentation de la méthode

Au chapitre 4, nous avons montré comment l'opérateur NtD de demi-espace intervient dans la détermination de l'opérateur NtD du milieu périodique 2D localement perturbé. Dans cette section, nous allons montrer que ce seul opérateur NtD de demi-espace a un intérêt en soi. Il intervient dans la résolution d'autres problèmes : ceux de transmission-réflexion entre deux demi-espaces périodiques différents. Nous verrons qu'il est possible de valider sa construction et son calcul en utilisant des situations adaptées.

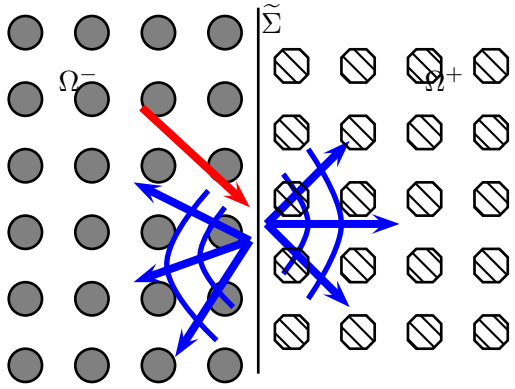


FIG. A.8: Notations pour le demi-espace.

La situation étudiée concerne la transmission et la réflexion d'une onde incidente d'un premier demi-espace périodique (qui sera dans un premier temps considéré homogène) à un autre demi-espace périodique (voir la figure A.8). Ce problème généralise le problème classique de diffraction par un réseau périodique (voir la Figure A.9) qui est largement traité dans la littérature [Petit (1980)], en utilisant par exemple des conditions aux bords transparentes (voir par exemple [Abboud (1993) ; Bao (1997)]) ou une représentation intégrale de la solution (voir entre autres [Meier *et al.* (2000) ; Arens *et al.* (2006)]). La nouveauté ici tient au fait qu'en plus de la réflexion, la transmission de l'onde est étudiée et que le milieu dans lequel l'onde se transmet est périodique dans les deux directions. Les idées fondamentales de cette annexe, qui sont l'utilisation de la Transformée de Floquet Bloch et l'écriture du problème sous la forme d'une équation posée sur l'interface sont très proches des études concernant les milieux à double stratification [Bonnet-Ben Dhia & Tillequin (2000) ; Bonnet-Bendhia & Tillequin (2001*a*,*b*)] (pour lesquelles c'est la transformation de Fourier généralisée qui intervient naturellement) On cherche

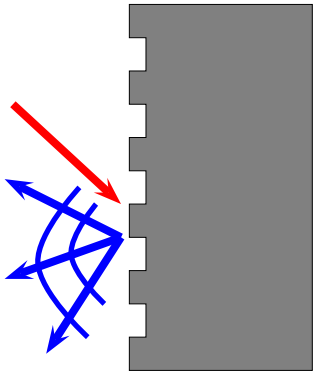


FIG. A.9: Diffraction par un réseau périodique : problème largement traité dans la littérature.

donc la solution (que nous appelons champ total) du problème

$$-\triangle u(\mathbf{x}) - \rho(\mathbf{x})\,\omega^2\,u(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{dans } \Omega \tag{A.37}$$

Nous faisons un certain nombre d'hypothèses :

1. Le domaine de propagation Ω est infini dans les 2 directions x et y et composé de deux demi-espaces
$$\Omega^+ = \Omega \cap \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \Omega^- = \Omega \cap \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}.$$
$\Omega^\pm$ est périodique dans les deux directions x et y avec la même périodicité dans les deux directions, notée $L^\pm$. L^+ et L^- sont supposés commensurables
$$\frac{L^+}{L^-} \in \mathbb{Q}.$$

2. L'indice de réfraction satisfait les deux conditions suivantes
$$0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+$$
$$\rho(x,y) = \begin{vmatrix} \rho_p^+(x,y), & (x,y) \in \Omega^+ \\ \rho_p^-(x,y), & (x,y) \in \Omega^-. \end{vmatrix}$$
avec ρ_p^+ et ρ_p^- des fonctions respectivement L_+ et L_- périodiques dans les deux directions dans Ω.

3. La solution u est considérée
$$\begin{vmatrix} u = & u_{\text{inc}} + u_{\text{diff}}, & \text{dans } \Omega^-, \\ u = & u_{\text{trans}}, & \text{dans } \Omega^+. \end{vmatrix}$$
Le champ incident u_{inc} est par définition une solution du problème
$$-\triangle u_{\text{inc}} - \rho_p^-(\mathbf{x})\,\omega^2\,u_{\text{inc}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{A.38}$$
C'est donc un vecteur propre généralisé de $A^- = -1/\rho_p^- \triangle$ pour la fréquence ω^2 soit encore un mode de Floquet de vitesse de groupe négative, c'est-à-dire venant de $-\infty$.

REMARQUE A.4.1 (PÉRIODICITÉ SUIVANT LES DIRECTIONS x ET y)
Cette étude se généralise au cas des milieux composés de demi-espaces dont la périodicité est différente suivant la direction x ($L_x^{\pm}$) et la direction y ($L_y^{\pm}$). Nous avons considéré des cellules de périodicité carrés par soucis de clarté. Notons que les périodes L_y^+ et L_y^- doivent être commensurables et qu'il n'y a aucune condition sur les périodes L_x^+ et L_x^-.

Les périodes L^+ et L^- étant supposées commensurables, on appelle L le plus petit multiple commun de L^+ et L^-. On considère désormais Ω^+ et Ω^- ainsi que ρ_p^+ et ρ_p^- périodique de période L.

Les fonctions u_{diff} et u_{trans} sont donc solutions des problèmes respectifs de demi-espace suivants

$$-\triangle u_{\text{diff}}(\mathbf{x}) - \rho_p^-(\mathbf{x})\,\omega^2\,u_{\text{diff}}(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{dans } \Omega^- \tag{A.39}$$

et

$$-\triangle u_{\text{trans}}(\mathbf{x}) - \rho_p^+(\mathbf{x})\,\omega^2\,u_{\text{trans}}(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{dans } \Omega^+. \tag{A.40}$$

et sont reliées par les conditions de continuité à travers la droite $\widetilde{\Sigma}$ de la solution u et de sa dérivée normale :

$$\left|\begin{array}{rcl} u_{\text{inc}}\big|_{\widetilde{\Sigma}} + u_{\text{diff}}\big|_{\widetilde{\Sigma}} & = & u_{\text{trans}}\big|_{\widetilde{\Sigma}} \\ \dfrac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial x}\big|_{\widetilde{\Sigma}} + \dfrac{\partial u_{\text{diff}}}{\partial x}\big|_{\widetilde{\Sigma}} & = & \dfrac{\partial u_{\text{trans}}}{\partial x}\big|_{\widetilde{\Sigma}}. \end{array}\right. \tag{A.41}$$

Afin de caractériser la solution de ce problème posé sur Ω tout entier, l'idée est, comme dans [Bonnet-Ben Dhia & Tillequin (2000) ; Bonnet-Bendhia & Tillequin (2001*a*,*b*)] de restreindre les calculs sur la frontière $\widetilde{\Sigma}$ des deux demi-espaces Ω^+ et Ω^-. Pour cela, on rappelle la définition des opérateurs NtD de demi-espace Λ^+ et Λ^-

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^{\pm} : H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}) & \to & H^{1/2}(\widetilde{\Sigma}) \\ \psi & \mapsto & \Lambda^{\pm}\,\psi = u^{\pm}(\psi)\Big|_{\widetilde{\Sigma}}, \end{array} \tag{A.42}$$

avec pour toute donnée $\psi \in H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma})$, $u^{\pm}(\psi)$, solution « physique » du problème

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta u^{\pm}(\psi) - \rho_p^{\pm}(\mathbf{x})\,\omega^2\,u^{\pm}(\psi) = 0, & \text{dans } \Omega^{\pm}, \\ \mp\dfrac{\partial}{\partial x}u^{\pm}(\psi) = \psi, & \text{sur } \widetilde{\Sigma}, \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}^{\pm}$}$$

Nous rappelons que nous appelons solution « physique », la limite de la famille des solutions des problèmes avec absorption. Nous ne revenons pas sur les discussions concernant le principe d'absorption limite largement traité à la section 4.4. Nous supposons la conjecture 4.4.4 satisfaite c'est-à-dire que $u^{\pm}(\psi)$ sont limites dans H^1_{loc} pour toute donnée ψ de la famille de solutions des problèmes de demi-espace avec absorption et $\Lambda^{\pm}$ sont limites dans $\mathcal{L}\big(H^{-1/2}(\widetilde{\Sigma}), H^{1/2}(\widetilde{\Sigma})\big)$ de la famille des opérateurs NtD des problèmes avec absorption.

Ainsi u_{diff} et u_{trans} étant solutions respectives des problèmes (A.39) et (A.40), elles vérifient les relations suivantes

$$\left|\begin{array}{rcl} u_{\text{diff}}\Big|_{\widetilde{\Sigma}} - \Lambda^-\Big(\dfrac{\partial u_{\text{diff}}}{\partial x}\Big|_{\widetilde{\Sigma}}\Big) & = & 0 \\ u_{\text{trans}}\Big|_{\widetilde{\Sigma}} + \Lambda^+\Big(\dfrac{\partial u_{\text{trans}}}{\partial x}\Big|_{\widetilde{\Sigma}}\Big) & = & 0. \end{array}\right.$$

Ces dernières relations et les conditions de continuité (A.41) donnent finalement

$$\big(\Lambda^+ + \Lambda^-\big)\frac{\partial u_{\text{trans}}}{\partial x}\big|_{\widetilde{\Sigma}} = -u_{\text{inc}}\big|_{\widetilde{\Sigma}} + \Lambda^- \frac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial x}\big|_{\widetilde{\Sigma}} \tag{A.43}$$

La résolution des problèmes de demi-espace et la détermination des opérateurs NtD correspondants sont étudiées aux sections 4.2 (pour le cas avec absorption) et 4.4 (pour le cas sans absorption). Nous décrivons maintenant, en utilisant les remarques précédentes, les étapes de la résolution du problème (A.37) seraient :

1. la construction des opérateurs Λ^+ et Λ^- à partir de familles d'opérateurs NtD de demi-guide d'après la conjecture 4.4.4 ;
2. la résolution de l'équation (A.43) à partir de l'onde incidente u_{inc} connue et la détermination de
$$\psi_{\text{trans}} = -\frac{\partial u_{\text{trans}}}{\partial x}\Big|_{\widetilde{\Sigma}};$$
3. la détermination, grâce aux relations de continuité (A.41), de
$$\psi_{\text{diff}} = +\frac{\partial u_{\text{diff}}}{\partial x}\Big|_{\widetilde{\Sigma}};$$
4. la reconstruction de la solution u grâce à la résolution des problèmes de demi-espace à partir de la famille des problèmes de demi-guide d'après la conjecture 4.4.4

$$\left|\begin{array}{lll} u = & u_{\text{inc}} + u^-\big(\psi_{\text{diff}}\big), & \text{dans } \Omega^-, \\ u = & u^+\big(\psi_{\text{trans}}\big), & \text{dans } \Omega^+. \end{array}\right. \tag{A.44}$$

Nous rappelons que les solutions des problèmes de demi-espace et les opérateurs NtD correspondants sont déterminés à partir de leurs transformées de Floquet Bloch. En effet, d'après la conjecture 4.4.4 et la section 4.2.5, la résolution des problèmes de demi-espace nécessite la résolution de la famille des problèmes de demi-guide. Pour tout $k_y \in]-\pi/L, \pi/L]$ et pour toute donnée $\hat{\psi}_{k_y} \in H_{k_y}^{-1/2}(\Sigma^0)$, soit $\hat{u}_{k_y}^{\pm}(\hat{\psi}_{k_y})$ la solution « physique »[1] du problème de demi-guide

$$\left|\begin{array}{rcl} -\Delta \hat{u}_{k_y}^{\pm} - \rho_p^{\pm}\omega^2\, \hat{u}_{k_y}^{\pm} &=& 0, \quad \text{dans } \Omega_0^{\pm} \\ \mp\dfrac{\partial}{\partial x}\, \hat{u}_{k_y}^{\pm}\Big|_{\Sigma^0} &=& \hat{\psi}_{k_y}, \\ \hat{u}_{k_y}^{\pm}\Big|_{\Sigma^{\pm,+}} &=& e^{-\imath k_y L}\, \hat{u}_{k_y}^{\pm}\Big|_{\Sigma^{\pm,-}} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\, \hat{u}_{k_y}^{\pm}\Big|_{\Sigma^{\pm,+}} &=& e^{-\imath k_y L}\, \dfrac{\partial}{\partial y}\, \hat{u}_{k_y}^{\pm}\Big|_{\Sigma^{\pm,-}} \end{array}\right. \tag{$\hat{\mathcal{P}}_{k_y}^{\pm}$}$$

où

$$\Omega_0^{\pm} = \mathbb{R}^{\pm} \times \big]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\big[, \quad \text{et} \left|\begin{array}{rcl} \Sigma^{\pm,-} &=& \mathbb{R}^{\pm} \times \big\{y = -\frac{L}{2}\big\} \\ \Sigma^0 &=& \big\{x = 0\big\} \times \big]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\big[\\ \Sigma^{\pm,+} &=& \mathbb{R}^{\pm} \times \big\{y = +\frac{L}{2}\big\} \end{array}\right.$$

et l'opérateur NtD de demi-guide correspondant $\widehat{\Lambda}_0^{\pm}(k_y) \in \mathcal{L}\big(H_{k_y}^{-1/2}(\Sigma^0), H_{k_y}^{1/2}(\Sigma^0)\big)$

$$\forall \hat{\psi}_{k_y} \in H_{k_y}^{-1/2}(\Sigma^0), \quad \widehat{\Lambda}_0^{\pm}(k_y)\, \hat{\psi}_{k_y} = \hat{u}_{k_y}^{\pm}(\hat{\psi}_{k_y})\Big|_{\Sigma^0}.$$

[1] se reporter au Chapitre 3 pour l'existence et la définition de cette solution physique. C'est la limite de la famille des solutions du même problème avec absorption.

Les solutions de $\hat{u}^{\pm}_{k_y}$ et $\widehat{\Lambda}^{\pm}_0(k_y)$ peuvent être exprimées à partir de solutions de problèmes de cellules correspondants et des opérateurs de propagation. Nous ne revenons pas sur leurs expressions largement étudiées au Chapitre 3. En supposant la conjecture (4.4.4) satisfaite, rappelons seulement l'expression de l'opérateur NtD de demi-espace à partir de ces opérateurs NtD de demi-guide

$$\forall \psi \in H^{-1/2}_{\text{loc}}(\widetilde{\Sigma})),\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \Lambda^{\pm}\,\psi\Big|_{\widetilde{\Sigma}^n} = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \widehat{\Lambda}^{\pm}_0(k_y)\hat{\psi}_{k_y}\, e^{\imath n k_y L}\, dk_y,$$

où $\widetilde{\Sigma}^n = \Sigma^0 + (0, nL)$ et $\hat{\psi}_{k_y} = \mathcal{F}_y\psi(\cdot; k_y)$ ainsi que celle des solutions des problèmes de demi-espace ($\mathcal{P}^{\pm}$)

$$\forall\,(x,y) \in \Omega^{\pm}_0,\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ u^{\pm}(\psi)(x, y + nL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \hat{u}^{\pm}_{k_y}(\hat{\psi}_{k_y})(x, y\,; k_y)\, e^{\imath n k_y L}\, dk_y. \tag{A.45}$$

En l'état l'algorithme précédent nécessite donc le calcul de la TFB inverse pour obtenir les opérateurs NtD, celui de la TFB des fonctions ψ_{trans} et ψ_{diff} afin de calculer les solutions des problèmes de demi-guide pour ces conditions particulières et enfin de nouveau le calcul d'une TFB inverse pour construire les solutions dans chaque demi-espace.

Il semble néanmoins plus naturel d'adapter l'algorithme précédent en termes de variables de Floquet de façon à réduire les calculs de TFB inverse et éviter celui de TFB (qui nécessite en pratique de tronquer une série). On montre donc facilement que l'algorithme précédent est équivalent à celui qui suit :

1. pour tout $k_y \in]-\pi/L, \pi/L]$, on construit les opérateurs $\widehat{\Lambda}^{+}_0(k_y)$ et $\widehat{\Lambda}^{-}_0(k_y)$ en utilisant la méthode développée Chapitre 3 ;
2. on calcule les TFB de sa trace et de la trace de sa dérivée normale sur $\widetilde{\Sigma}$, l'onde incidente u_{inc} étant connue. On montre que l'équation (A.43) est équivalente à la famille d'équations

$$\forall k_y \in \,]-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}], \quad \big(\widehat{\Lambda}^{+}_0(k_y) + \widehat{\Lambda}^{-}_0(k_y)\big)\hat{\psi}^{k_y}_{\text{trans}} = -\mathcal{F}_y\big(u_{\text{inc}}\big|_{\widetilde{\Sigma}}\big)(\cdot; k_y) + \widehat{\Lambda}^{-}_0(k_y)\,\big(\hat{\psi}^{k_y}_{\text{inc}}\big), \tag{A.46}$$

   où

$$\forall k_y \in \,]-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}], \quad \hat{\psi}^{k_y}_{\text{trans}} = \mathcal{F}_y\big(\frac{\partial u_{\text{trans}}}{\partial x}\big|_{\widetilde{\Sigma}}\big)(\cdot; k_y) \quad \text{et} \quad \hat{\psi}^{k_y}_{\text{inc}} = \mathcal{F}_y\big(\frac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial x}\big|_{\widetilde{\Sigma}}\big)(\cdot; k_y)\,;$$

3. on détermine grâce aux relations de continuité (A.41)

$$\forall k_y \in \,]-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}], \quad \mathcal{F}_y\big(\frac{\partial u_{\text{diff}}}{\partial x}\big|_{\widetilde{\Sigma}}\big)(\cdot; k_y) = \hat{\psi}^{k_y}_{\text{diff}} = \hat{\psi}^{k_y}_{\text{trans}} - \hat{\psi}^{k_y}_{\text{inc}}\,;$$

4. pour chaque k_y on reconstruit les solutions $\hat{u}^{+}_{k_y}(-\hat{\psi}^{k_y}_{\text{trans}})$ et $\hat{u}^{-}_{k_y}(\hat{\psi}^{k_y}_{\text{diff}})$ respectivement dans Ω^{+}_0 et Ω^{-}_0 en utilisant la méthode développée Chapitre 3 ;
5. on trouve la solution totale u en combinant (A.45) et (A.44).

REMARQUE A.4.2
Notons qu'avec cet algorithme, comme dans le calcul de l'opérateur NtD du milieu périodique 2D (Chapitre 4), les opérateurs NtD de demi-espace ne sont jamais calculés directement.

CONJECTURE A.4.3
Pour que le problème précédent soit bien posé, nous supposons l'opérateur $\widehat{\Lambda}_0^+(k_y) + \widehat{\Lambda}_0^-(k_y)$ *inversible pour tout* k_y.

REMARQUE A.4.4 (CAS DES MILIEUX HOMOGÈNES)
Dans le cas très particulier où les milieux sont homogènes mais d'indice différents, les opérateurs NtD de demi-guide pouvant être calculés explicitement, il est facile de vérifier que la conjecture est vraie.

En supposant que la méthode de résolution des problèmes de demi-guide et de calcul des opérateurs de demi-guide correspondant est validée, la difficulté de la résolution numérique de ce problème tient donc dans la discrétisation de la variable duale k_y.

A.4.2 Résolution numérique du problème

Nous tentons ici d'expliquer la mise en oeuvre numérique de l'algorithme présenté. Il repose notamment sur la résolution de problème de demi-guide sans absorption avec conditions k_y-quasi-périodiques. La discrétisation de chacun de ses problèmes a été largement traitée Section 3.3. Nous supposons donc dans la suite que la discrétisation satisfait les contraintes imposées Section 2.3 (essentiellement la périodicité suivant la direction x des maillages), que l'espace $H_{k_y}^{-1/2}(\Sigma^0)$ est approché par le sous espace de dimension finie $\mathcal{T}_h$ (voir Section 4.3 pour sa définition et les remarques concernant son indépendance par rapport à k_y) et enfin que pour chaque $k_y \in]-\pi/L, \pi/L]$, nous pouvons calculer une bonne approximation $\widehat{\Lambda}_{0,h}^{\pm}(k_y)$ de l'opérateur $\widehat{\Lambda}_0^{\pm}(k_y)$ et une bonne approximation $\hat{u}_{k_y,h}^{\pm}(\hat{\psi}_h)$ de la solution $\hat{u}_{k_y}^{\pm}(\hat{\psi}_{k_y})$ quand $\hat{\psi}_h$ est la projection sur $\mathcal{T}_h$ de $\hat{\psi}_{k_y}$.

Comme pour le problème de construction de l'opérateur NtD pour le milieu périodique 2D étudié au Chapitre 4, la difficulté de ce problème repose sur le choix de la discrétisation pour la variable duale. Même si dans ce cas, il n'y a pas de limitation quant au nombre de degrés de liberté pour la variable duale[2], il est nécessaire d'approcher des fonctions qui peuvent être a priori seulement H^{-1} pour la variable duale. Cependant, la méthode de discrétisation est plus simple dans ce cas car elle est donnée par l'onde incidente. En effet, en supposant la conjecture A.4.3 vraie, on constate aisément d'après (A.46) que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y\big(u_{\text{inc}}|_{\widetilde{\Sigma}}\big)(\cdot;k_y) = 0 \text{ et } \mathcal{F}_y\big(\frac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial x}|_{\widetilde{\Sigma}}\big)(\cdot;k_y) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{F}_y\big(\frac{\partial u_{\text{trans}}}{\partial x}|_{\widetilde{\Sigma}}\big)(\cdot;k_y) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \mathcal{F}_y\big(\frac{\partial u_{\text{diff}}}{\partial x}|_{\widetilde{\Sigma}}\big)(\cdot;k_y) = 0 \end{aligned} \tag{A.47}$$

[2] puisqu'il n'y a pas, ici, d'équations affines à résoudre et donc de matrices pleines à inverser

A.4.2.1 Validation de la méthode

♢ ***D'un milieu homogène à un autre milieu homogène - cas d'une onde plane.***

Comparons tout d'abord les résultats obtenus dans le cas où les deux milieux périodiques sont deux milieux homogènes

$$\rho_p^- = \rho^- \quad \text{et} \quad \rho_p^+ = \rho^+$$

et considérons une onde incidente plane

$$u_{\text{inc}}(\mathbf{x}) = \exp\big(\imath \mathbf{k}^- \cdot \mathbf{x}\big)$$

avec $\mathbf{k}^- = (k_x^-, k_y^-) = |\mathbf{k}^-|(\cos(\theta^-), -\sin(\theta^-))$ le vecteur d'onde, $|\mathbf{k}^-| = \sqrt{\rho^-\omega^2}$ le nombre d'onde et $\theta^- \in [-\pi/2, \pi/2[$ l'angle d'incidence (par rapport à la normale à $\widetilde{\Sigma}$). On montre que dans ce cas les résultats coïncident avec la loi de Descartes, c'est-à-dire que

- l'onde diffractée est une onde plane de vecteur d'onde $(-k_x^-, k_y^-)$;
- l'onde transmise est une onde plane dont le vecteur d'onde

$$\mathbf{k}^+ = (k_x^+, k_y^+) = |\mathbf{k}^+|(\cos(\theta^+), \sin(\theta^+))$$

vérifie $|\mathbf{k}^+| = \sqrt{\rho^+\omega^2}$ et

$$\sqrt{\rho^-}\sin\theta^- = \sqrt{\rho^+}\sin\theta^+.$$

On voit aisément que dans le cas où l'onde incidente est une onde plane alors

$$\forall (x,y) \in \Omega_0^-, \quad \mathcal{F}_y u_{\text{inc}}(x,y;k_y) = \exp\big(\imath(k_x^- x + k_y^- y)\big)\delta_{k_y = k_y^-\,[2\pi/L]}$$

avec $\mathcal{F}_y$ la TFB dans la direction y, de période L. Prenons ici $L = 1$. Cette dernière relation implique en particulier que

$$\forall\, k_y \in [-\pi,\pi],\ k_y \neq k_y^-\,[2\pi], \quad \mathcal{F}_y\big(u_{\text{inc}}|_{\widetilde{\Sigma}}\big)(\cdot;k_y) = 0 \text{ et } \mathcal{F}_y\big(\frac{\partial u_{\text{inc}}}{\partial x}|_{\widetilde{\Sigma}}\big)(\cdot;k_y) = 0$$

Ainsi, d'après (A.46) et la remarque A.4.4, on a donc

$$\forall\, k_y \in [-\pi,\pi],\ k_y \neq k_y^-\,[2\pi], \quad \hat{\psi}^{k_y}_{\text{trans}} = 0, \quad \text{et donc } \forall k_y \neq k_y^-, \quad \hat{\psi}^{k_y}_{\text{diff}} = 0.$$

soit encore

$$\left|\begin{array}{l} \mathcal{F}_y\big(\dfrac{\partial u_{\text{trans}}}{\partial x}|_{\widetilde{\Sigma}}\big) = \hat{\psi}^{k_y^-}_{\text{trans}}\,\delta_{k_y=k_y^-} \\ \mathcal{F}_y\big(\dfrac{\partial u_{\text{diff}}}{\partial x}|_{\widetilde{\Sigma}}\big) = \hat{\psi}^{k_y^-}_{\text{diff}}\,\delta_{k_y=k_y^-} \end{array}\right. \tag{A.48}$$

Ainsi, dans ce cas particulier, le calcul de la solution ne nécessite que la résolution d'un problème de demi-guide, celui dont les conditions sont k_y^--périodique. En effet, la construction des seuls opérateurs $\widehat{\Lambda}_0^+(k_y^-)$ et $\widehat{\Lambda}_0^-(k_y^-)$ suffit pour déterminer $\hat{\psi}^{k_y^-}_{\text{trans}}$ puis $\hat{\psi}^{k_y^-}_{\text{diff}}$. D'après les relations (A.48), on en déduit que $\hat{u}^+_{k_y}(\hat{\psi}^{k_y}_{\text{trans}})$ et $\hat{u}^-_{k_y}(\hat{\psi}^{k_y}_{\text{diff}})$ sont nulles exceptées pour la valeur $k_y = k_y^-$ et enfin que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega_0^{\pm},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}, \left|\begin{array}{l} u_{\text{diff}}(x, y+nL) = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\hat{u}^-_{k_y^-}(\hat{\psi}_{k_y^-})(x,y\,;k_y^-)\; e^{\imath n k_y^- L} \\ u_{\text{trans}}(x, y+nL) = \sqrt{\dfrac{L}{2\pi}}\hat{u}^+_{k_y^-}(\hat{\psi}_{k_y^-})(x,y\,;k_y^-)\; e^{\imath n k_y^- L} \end{array}\right. \tag{A.49}$$

Finalement, pour résoudre ce seul problème de demi-guide, nous utilisons la méthode numérique de la section 3.3. Nous n'utilisons à aucun moment une expression explicite de la solution ou de l'opérateur NtD, nous les calculons comme ci le demi-guide était périodique quelconque, de période 1.

Considérons maintenant le milieu représenté Figure A.10 composé de deux demi-espaces homogènes tels que $\rho^- = 2$ et $\rho^+ = 1$, la fréquence est fixée ici à $\omega = 5$. La discrétisation en espace est de 35 points par longueur d'onde pour le milieu Ω^- et 50 points pour le milieu Ω^+. Dans un

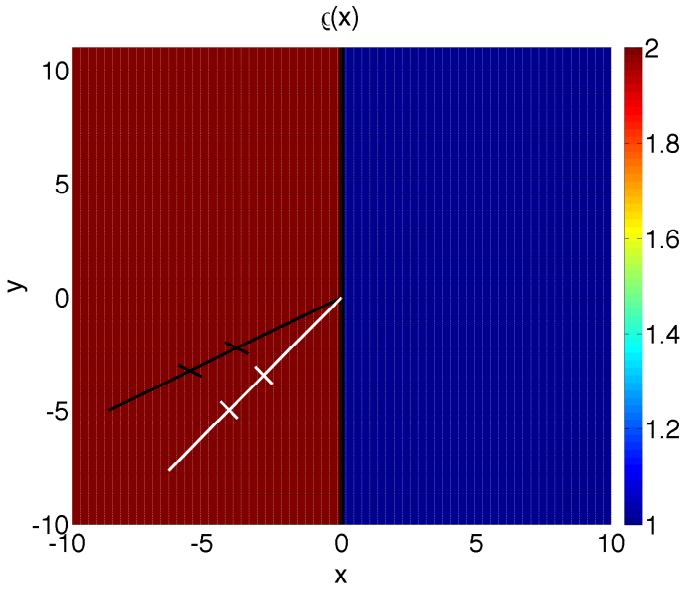
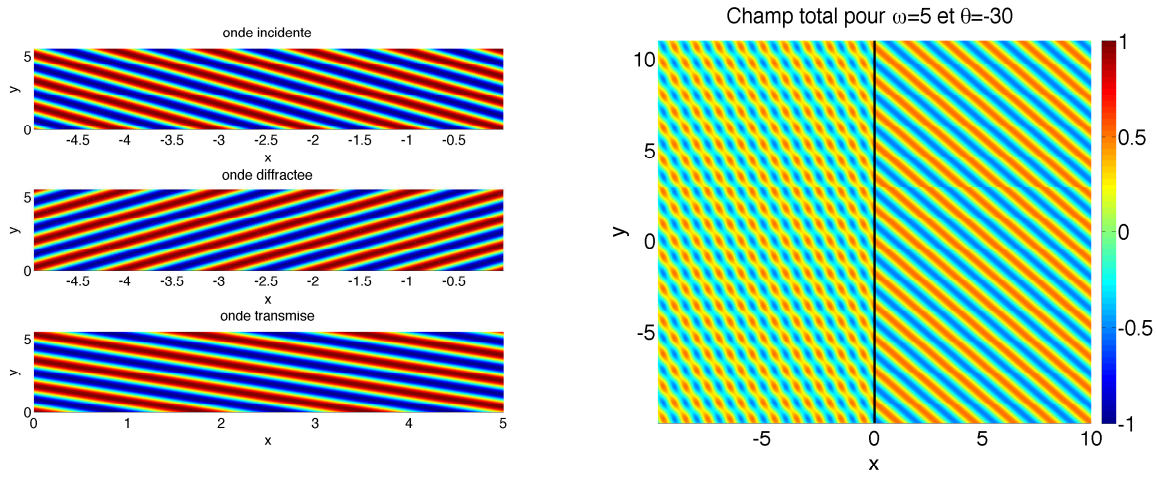


FIG. A.10: Indice de réfraction $\rho(x)$ et directions des ondes planes incidentes considérées, $\theta^- = -30^o$ dans un premier temps (en noir) et $\theta^- = -50^o$ dans un second temps (en blanc).

premier temps, l'onde incidente considérée a une incidence de -30^o par rapport à la normale à $\widetilde{\Sigma}$ (la direction est représentée en noir Figure A.10). Les champs diffracté et transmis calculés en utilisant la méthode expliquée ci-dessus sont représentées Figure A.11(a). On retrouve le résultat concernant les caractéristiques des champs diffracté et transmis. En effet, ce sont des ondes planes (c'est dû aux relations (A.49)), l'onde diffractée vérifie $(-k_x^-, k_y^-)$ (à l'erreur de discrétisation près) et l'onde transmise vérifie

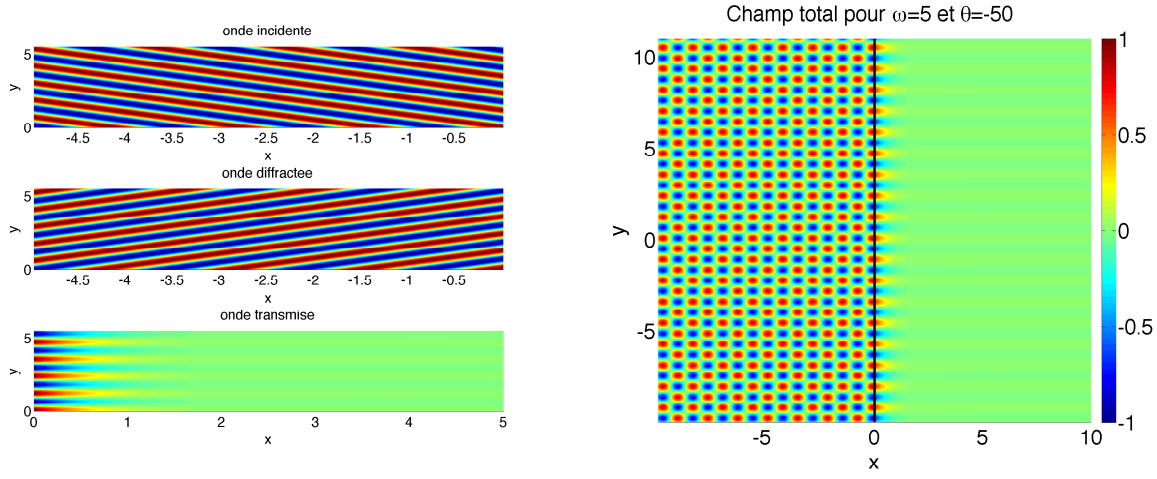
$$\sqrt{\rho^-}\sin\theta^- = \sqrt{\rho^+}\sin\theta^+.$$

où θ^+ est l'angle d'incidence de l'onde plane transmise et vaut ici environ 45^o. Le champ total est quant à lui donné Figure A.11(b) et on vérifie sa continuité au voisinage de $\widetilde{\Sigma}$. Considérons ensuite, pour le même milieu et la même fréquence, une onde, d'angle d'incidence $\theta^- = -50^o$ dont la direction est représentée en blanc Figure A.10. D'après la loi de Descartes, cette onde devrait se réfléchir totalement. Vérifions que nous retrouvons ce résultat avec notre méthode. Les champs diffracté et transmis sont donnés Figure A.12(a) et le champ total Figure A.12(b). Le champ diffracté a bien l'incidence attendue et l'onde transmise est bien évanescente. Le calcul



(a) Champ incident diffracté et transmis (b) Champ total

FIG. A.11: Dans le cas où le milieu est celui de la Figure A.10, $\omega = 5$ et l'onde incidente est une onde plane d'incidence -30^o, représentation des champs incident, diffracté et transmis (à gauche) et du champ total (à droite).



(a) Champ incident diffracté et transmis (b) Champ total

FIG. A.12: Dans le cas où le milieu est celui de la Figure A.10, $\omega = 5$ et l'onde incidente est une onde plane d'incidence -50^o, représentation des champs incident, diffracté et transmis (à gauche) et du champ total (à droite).

nous redonne bien la réflexion totale.

La discrétisation pour la variable duale se restreint donc ici à un point et toute autre discrétisation n'aurait pas été autant satisfaisante. Ainsi, en plus de valider la méthode de calcul du champ total d'un tel problème, cet exemple illustre le fait que la discrétisation pour la variable duale doit être choisie en fonction de l'onde incidente.

♢ ***D'un milieu homogène à un milieu périodique - cas des basses fréquences***

Une autre situation qui nous permet de valider la méthode concerne le problème de réflexion-transmission d'un milieu homogène (d'indice $\rho_p^- = \rho_0^-$) dans un milieu périodique (d'indice ρ_p^+) pour une fréquence telle que la longueur d'onde est très grande par rapport à la cellule de périodicité. Dans ce cas, les hypothèses de l'homogénéisation sont satisfaites et le milieu périodique à droite peut être considéré comme homogène (pour plus de détails sur la théorie de l'homogénéisation, voir [Bensoussan *et al.* (1978) ; Allaire (2002, 1992)]).

Nous comparons donc les résultats obtenus dans le cas où le milieu est considéré comme un vrai milieu périodique d'indice ρ_p^+ (qui nécessite la résolution de problèmes de cellule) et ceux obtenus dans le cas où le milieu est homogène avec une constante dont la valeur est donnée par la théorie de l'homogénéisation

$$\rho_0^+ = \int_{\mathcal{C}} \rho_p^+(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}.$$

Nous considérons encore ici, une onde incidente qui est plane. L'analyse de la section précédente est encore vraie : la résolution de ce problème de demi-espace ne nécessite la résolution que d'un seul problème de demi-guide avec conditions k_y^--quasi-périodique, en gardant les mêmes notations que section précédente. La discrétisation pour la variable duale est encore assez simple.

Considérons le milieu de propagation présenté Figure A.13, l'onde plane incidente arrive avec un angle de 45^o par rapport à la normale de $\widetilde{\Sigma}$ (en noir sur la même figure), la fréquence ω est fixée égale à 1. La longueur d'onde fait donc environ 6 fois la taille de la cellule de périodicité. La solution dans le cas où le milieu de droite est considéré comme périodique est représentée Figure A.14(a) et celle du problème homogénéisé est représentée Figure A.14(b). La discrétisation en espace est en moyenne de 200 points par longueur d'onde. Ces résultats numériques valident encore la méthode.

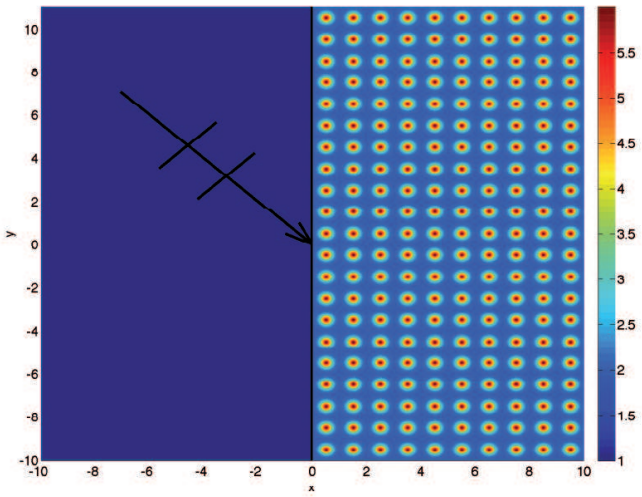
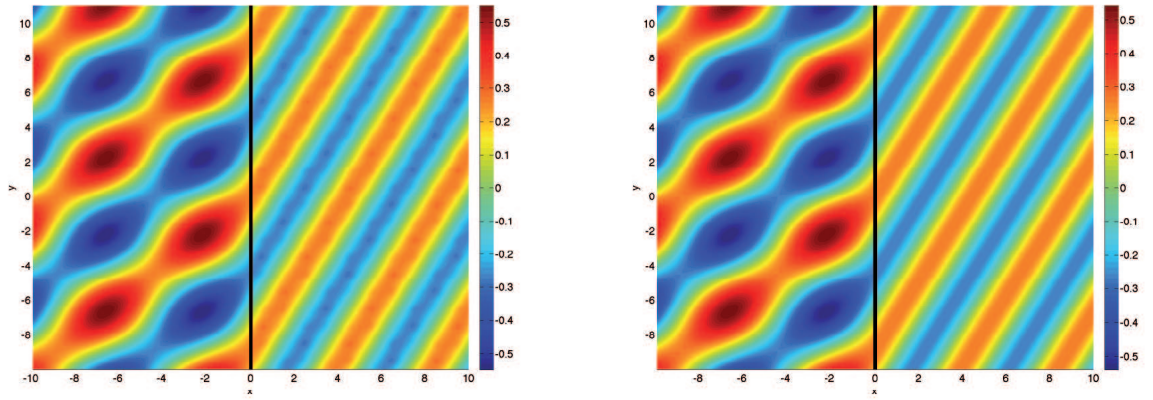


FIG. A.13: Indice de réfraction $\rho(x)$ et direction de l' onde plane incidente considérée, $\theta = \pi/4$



(a) Champ total pour le problème initial

(b) Champ total pour le problème homogénéisé

FIG. A.14: Dans le cas où le milieu est celui de la Figure A.13, $\omega = 1$ et l'onde incidente est une onde plane d'incidence 45^o, représentation du champ total dans le cas où c'est le problème initial qui est résolu (à gauche) et dans le cas où c'est le problème homogénéisé qui l'est (à droite).

A.4.2.2 Résultats numériques pour les milieux périodiques

♢ ***D'un milieu homogène à un milieu périodique : cas d'une onde incidente plane***

La méthode maintenant validée, présentons tout d'abord des résultats numériques pour le problème de transmission-réflexion d'un milieu homogène à un milieu périodique dans le cas où l'onde incidente est une onde plane. Nous verrons en particulier que nous exhibons dans ce problème quelques propriétés spectrales des opérateurs à coefficients périodiques qui s'avèrent très utiles dans les applications.

Considérons tout d'abord le milieu de la section précédente représenté Figure A.13. L'angle d'incidence de l'onde plane est toujours le même, seulement la fréquence change ici, elle est fixée à $\omega = 5$. La longueur d'onde est donc comparable à la taille de la cellule de périodicité, les hypothèses de l'homogénéisation ne sont donc plus satisfaites ici. La discrétisation en espace est en moyenne de 40 points par longueur d'onde. L'onde incidente étant toujours une onde plane, le calcul d'un problème de demi-guide particulier suffit pour détermier la solution représentée Figure A.15. La structure de la solution est bien plus complexe dans ce cas. Il est difficile avec

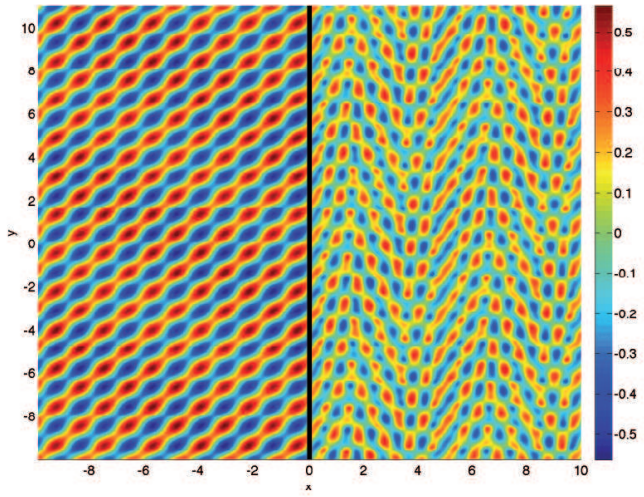


FIG. A.15: Champ total dans le cas où le milieu est celui de la Figure A.13, $\omega = 5$ et l'onde incidente est une onde plane d'incidence 45^o.

cet exemple de commenter les propriétés spectrales de l'opérateur périodique correspondant au milieu de droite.

Dans le cadre de la collaboration entre le laboratoire Poems et l'Institut Fondamental d'Electronique d'Orsay pour le projet ANR "Symnanophot", cette méthode a été utilisée pour calculer la propagation des ondes dans un milieu composé d'un milieu homogène et d'un cristal photonique. Les applications physiques associées à ce problème ont trait aux propriétés de réfraction négative, de super-collimation, de super-lentille et de super-prisme en nanophotonique et

en optique guidée. Ces phénomènes sont en général appréhendés par la méthode FDTD. Cette dernière présente plusieurs limitations importantes tant sur le plan de la compréhension physique (méthode directe et non modale et conditions aux bords non physiques qui créent des réflexions parasites) que sur le plan pratique (limites en termes de temps de calcul et d'espace mémoire). Ils peuvent être également appréhendés par des méthodes modales qui consistent à décomposer la solution dans chaque demi-espace comme une combinaison linéaire de vecteurs propres généralisés de chaque milieu (des modes de Floquet pour le milieu périodique et les ondes planes pour le milieu homogène), les coefficients étant déterminés par des conditions de raccord de champ à l'interface. Cette méthode présente également des limitations car elle est difficile à mettre en oeuvre et il n'existe pas à notre connaissance de justification rigoureuse d'une telle décomposition modale. Enfin, elle ne donne pas la solution exacte mais seulement une projection sur certains modes. En particulier, elle ne prend pas en compte tous les modes évanescents.

La méthode décrite dans cette annexe ne présente pas ces limitations car nous déterminons la solution exacte sans aucune approximation quant à la forme de la solution. Aucune hypothèse sur les conditions aux bords n'est non plus effectuée, nous avons juste supposé le principe d'absorption limite possible. Enfin, seule une approximation dûe à la discrétisation de la variable physique et duale intervient. Du point de vue de la mise en oeuvre, tous les calculs sont effectués sur une cellule de périodicité, il peut y en avoir un certain nombre mais les matrices EF à inverser sont toujours très petites. La seule limitation mais qui n'est que provisoire en attendant de futurs développements de la méthode est que seules des structures bidimensionnelles peuvent être considérées et seule l'équation des ondes scalaires est étudiée pour l'instant. Les problèmes étudiés correspondent donc à des structures bidimensionnelles avec

- soit un champ électrique incident normal à cette structure (mode TE), dans ce cas la composante du champ électrique est solution d'une équation de Helmholtz

$$-\triangle E(\mathbf{x}) - \varepsilon(\mathbf{x})\ \omega^2\ E(\mathbf{x}) = 0, \tag{A.50}$$

- soit un champ magnétique incident normal à cette structure (mode TM), dans ce cas la composante du champ magnétique est solution d'une équation de la forme

$$-\operatorname{div}\big(\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{x})}\ \nabla H(\mathbf{x})\big) -\ \omega^2\ H(\mathbf{x}) = 0, \tag{A.51}$$

où $\varepsilon(\mathbf{x})$ est la permittivité diélectrique relative et la perméabilité magnétique est supposée constante égale à 1 dans tout le milieu.

Nous considérerons les deux équations en rappelant que d'après la Remarque 0.0.2, la méthode présentée dans tout ce mémoire et en particulier celle de cette annexe s'étend au cas d'opérateurs elliptiques plus généraux.

La structure étudiée est présentée Figure A.16. Le milieu à gauche de l'interface possède un indice $\varepsilon^-(\mathbf{x}) = 1$ et le milieu de droite est un réseau périodique carré de période $L = 440nm$, le rayon des inclusions circulaires est de $r = 136nm$, l'indice dans les inclusions étant de 3.065 alors que l'indice à l'extérieur des inclusions est de 1. Dans un premier temps, nous considérons la fréquence fixée telle que la longueur d'onde $\lambda = 1545nm$ et nous faisons varier l'angle

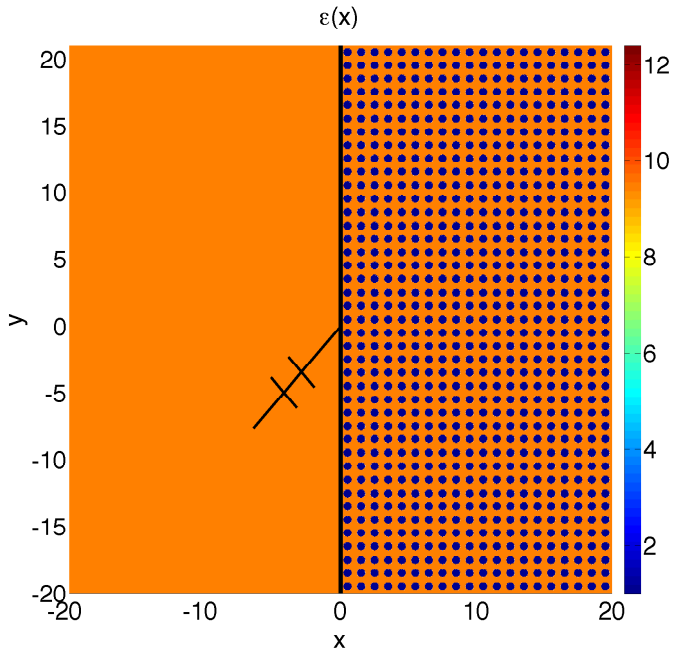


FIG. A.16: Permittivité diélectrique relative $\varepsilon(x)$.

d'incidence du champ électrique incident (c'est donc l'équation (A.50) qui est résolue). Dans les résultats numériques suivants tous ces paramètres ont été adimensionnées en considérant que $L = 1$. Le champ électrique total est représenté pour différents angles d'incidence $\theta^- = -10^o, -20^o, -30^o, -40^o, -50^o, -55^o, -60^o, -70^o$ et -80^o Figure A.17. Nous remarquons dans ces résultats numériques que pour une fréquence fixée, il existe des angles d'incidence pour lesquels il y a réflexion totale. Ces résultats exhibent les propriétés spectrales de l'opérateur périodique correspondant au milieu périodique Ω^+. En effet, si on calcule le spectre de l'opérateur périodique (voir Section 4.4.1), on obtient des surfaces de dispersion. En prenant leurs intersections avec le plan ω^2 où ω est la fréquence fixée considérée, on obtient des courbes de dispersion dépendant de (k_x, k_y) correspondant à tous les modes de Floquet de la forme

$$u_{(k_x,k_y)}(\mathbf{x}) = u_p(\mathbf{x})e^{\imath(k_x,k_y)\cdot\mathbf{x}}, \quad \text{avec } u_p \ \ 1-\text{périodique}$$

qui peuvent se propager dans le milieu périodique pour une fréquence ω. Du fait du champ d'incident et des relations de continuité pour le champ total, seuls les modes de Floquet $u_{(k_x,k_y)}$ tels que $k_y = k_y^- = \sqrt{\rho^-\omega^2}\sin(\theta^-)[2\pi/L]$ [3] peuvent se propager dans le milieu Ω^+. Pour savoir si il y a des modes propagatifs pour une incidence θ^-, il suffit donc de prendre l'intersection de ses courbes avec la droite $k_y = \sqrt{\rho^-\omega^2}\sin(\theta^-)[2\pi/L]$. On obtient alors un ou plusieurs points k_x correspondant aux modes de floquet $u_{(k_x,k_y)}$ pouvant se propager dans le milieu pour cette incidence. En utilisant le logiciel MPB du MIT [Joannopoulos *et al.* (1995)] qui permet de calculer le spectre d'opérateurs périodiques 2D ou 3D et en effectuant les intersections évoquées ci-dessus, on obtient la courbe représentant $\theta^+ = \arctan(k_x/k_y)$ (où k_x sont les points d'intersection des courbes de dispersion avec la droite $k_y = \sqrt{\rho^-\omega^2}\sin(\theta^-)[2\pi/L]$ en fonction de l'angle d'incidence θ^-. Cette courbe apparaît Figure A.18. On retrouve alors l'existence des intervalles

[3] on rappelle que L est supposée égale à 1 ici

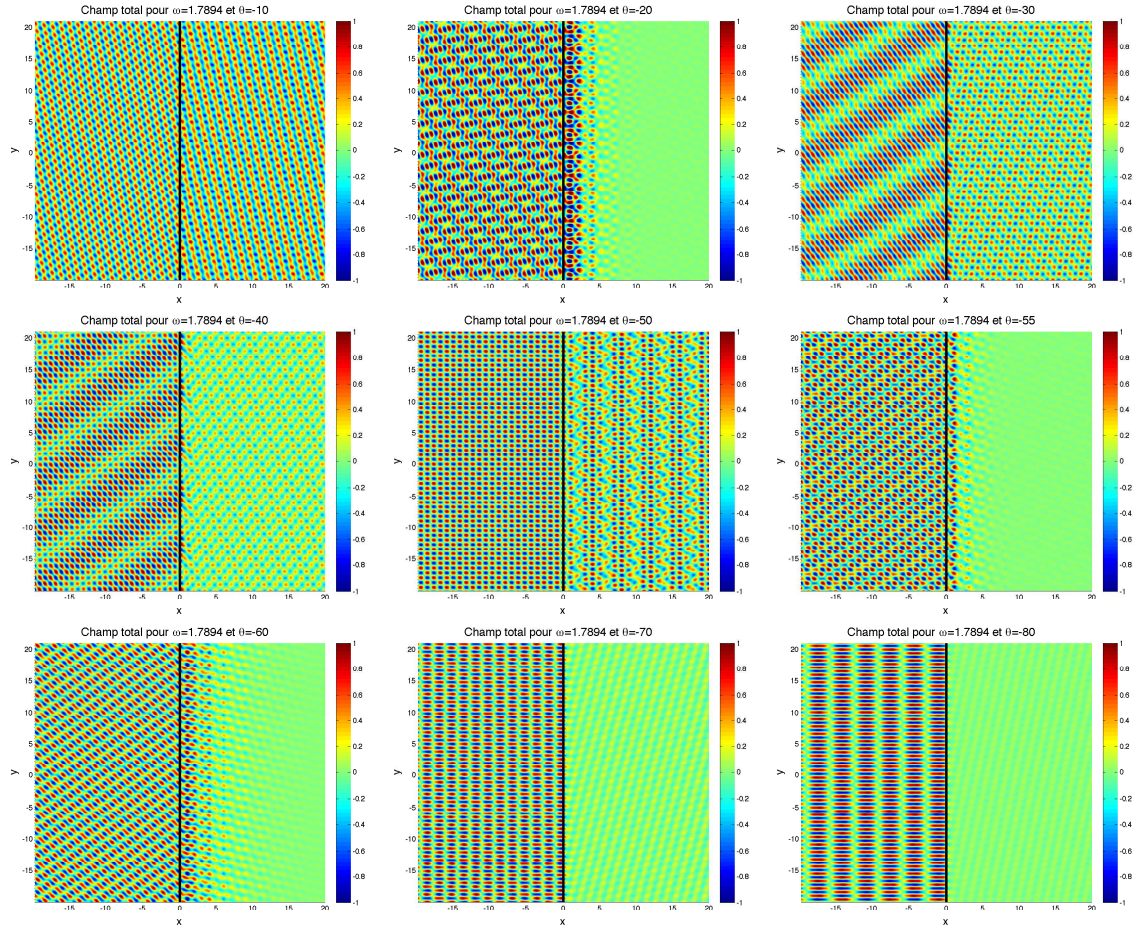


FIG. A.17: Champ total pour différents angles d'incidence $\theta^- = -10^o, -20^o, -30^o, -40^o, -50^o, -55^o, -60^o, -70^o$ **et** -80^o

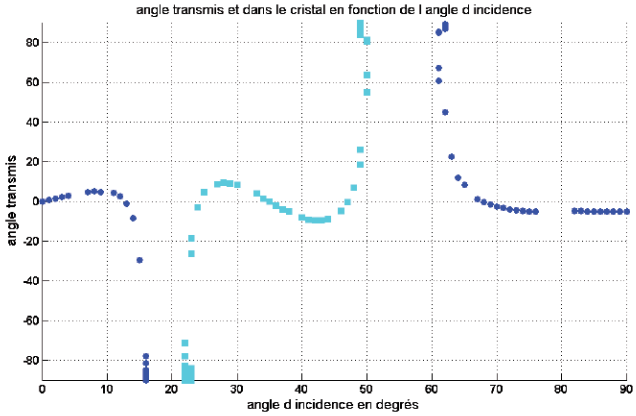


FIG. A.18: angle transmis dans le milieu périodique en fonction de l'angle d'incidence (obtenue par E. Cassan de l'IEF en utilisant le logiciel MPB du MIT).

d'angles d'incidence pour lesquelles aucun mode de Floquet ne peut se propager. Il y a donc seulement des modes évanescents.

Dans un second temps, nous fixons l'angle d'incidence du champ électrique incident $\theta^- = -10^o$ et faisons varier la fréquence ω de telle façon que la longueur d'onde « dimensionnée » prenne les valeurs $\lambda = 1250$ nm, 1300 nm, 1350 nm, 1400 nm, 1450 nm, 1500 nm, 1550 nm, 1600 nm et 1650 nm. On observe que pour cette incidence fixée, il existe des fréquences pour lesquelles il y a réflexion totale. Comme précédemment, ces résultats correspondent à certaines propriétés spectrales de l'opérateur périodique. En effet, cette fois-ci il faut prendre l'intersection entre les surfaces de dispersion et le plan $k_y = \sqrt{\rho^-\omega^2}\sin(\theta^-)[2\pi/L]$. On obtient des courbes dont il faut prendre l'intersection avec les droites ω^2 pour les différentes valeurs de ω considérées. S'il existe des points d'intersection k_x, on représente les angles $\theta^+ = \arctan(k_x/k_y)$ en fonction de la longueur d'onde. Mais dans ce cas il existe un intervalle de fréquences pour lequel l'intersection entre les courbes et la droite ω^2 est vide. Cela correspond aux fréquences pour lesquelles il y a réflexion totale.

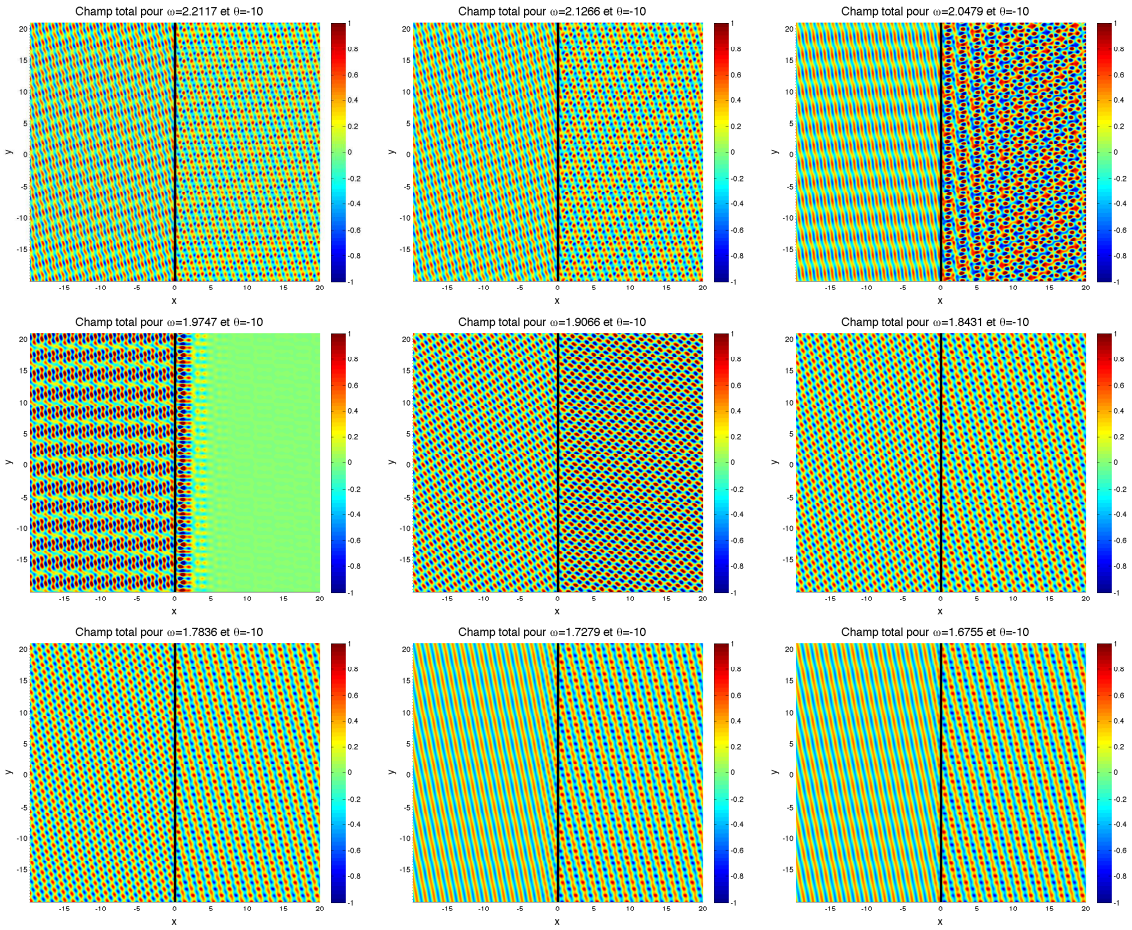


FIG. A.19: Champ total pour une incidence fixée $\theta^- = -10^o$ et différentes fréquences ω qui correspondent (dans de la gauche vers la droite, de haut en bas) aux longueurs d'onde « dimensionnées » $\lambda = 1250nm$, $1300nm$, $1350nm$, $1400nm$, $1450nm$, $1500nm$, $1550nm$, $1600nm$ et $1650nm$

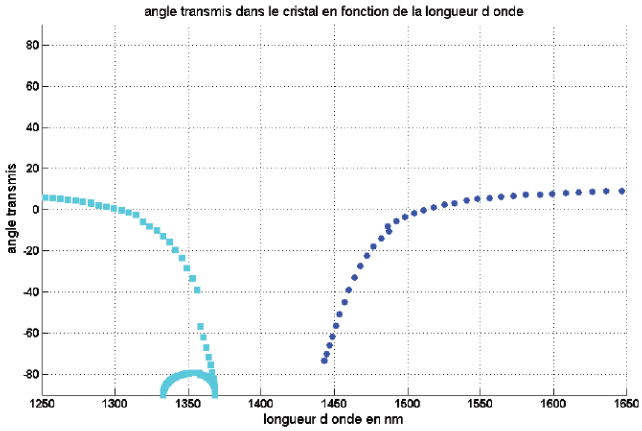


FIG. A.20: Angle transmis dans le milieu périodique en fonction de la fréquence (obtenue par E. Cassan de l'IEF en utilisant le logiciel MPB du MIT).

Cette concordance entre nos résultats numériques et les propriétés spectrales de l'opérateur périodique valide une fois de plus notre méthode. Cette dernière permet donc également, pour un coût de calcul réduit, d'obtenir des informations sur le spectre de l'opérateur pour une fréquence donnée.

Il faut noter que la méthode développée s'affranchit des limitations inhérentes à la méthode FDTD pour décrire une excitation par ondes planes, c'est-à-dire ayant un front d'onde non borné spatialement. Incluant naturellement tous les modes du milieu périodique sans néanmoins s'appuyer sur une approche modale, elle permet de prédire la direction des ondes électromagnétiques réfractées dans le milieu périodique ainsi que les phénomènes de bande interdite photonique [Kuchment (1993, 2001) ; Lourtioz (2008)] pour lesquels une pénétration partielle des ondes électromagnétiques au sein de la région du milieu périodique est possible avant réflexion totale.

♢ *D'un milieu homogène à un autre milieu homogène - cas d'un faisceau gaussien*

L'avantage des ondes incidentes planes est donc qu'elles réduisent les calculs de solutions de problèmes de demi-espace à celles d'un seul problème de demi-guide. Notre méthode s'applique néanmoins à des ondes incidentes quelconques, par exemple les faisceaux gaussiens dans le cas où le milieu Ω^- est homogène, ce que nous allons considérer ici. Nous rappelons que la connaissance des ondes incidentes et plus particulièrement de la TFB de leurs traces sur $\widetilde{\Sigma}$ peut permettre un choix judicieux de la discrétisation pour la variable de floquet.

Considérons donc ici et dans la section qui suit une onde incidente qui est un faisceau gaussien. Pour la définition du faisceau gaussien, considérons dans un premier temps que le faisceau est normal à l'interface $\widetilde{\Sigma}$ et qu'il a une largeur au col de L à la distance x_0 de l'interface, il vaut donc sur la droite $x = x_0$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad u_{\text{inc}}(x_0, y) = \sqrt{L} e^{-\frac{|y|}{2L^2}} \tag{A.52}$$

Nous rappelons que l'onde incidente doit être une solution de l'équation de Helmholtz à coefficients constants. Cependant, nous ne connaissons pas de formule explicite pour une telle solution satisfaisant la condition (A.52). Pour des questions de simplicité, nous aimerions avoir une approximation de l'onde incidente qui ait une expression analytique. Pour cela, il suffit d'utiliser l'approximation parabolique de l'équation de Helmholtz pour trouver une approximation de l'onde incidente qui s'écrivent sous la forme

$$\forall x,\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad \tilde{u}_{\text{inc}}(x,y) = A(k^-; x-x_0, y) e^{\Phi(k^-; x-x_0, y)}$$

où l'amplitude $A(k^-;x,y)$ et la phase $\Phi(k^-;x,y)$ sont données par

$$\left| \begin{array}{l} A(k^-;x,y) = E(k^-;x) e^{-\frac{|y|^2}{2L(k;x)}}, \\ \Phi(k^-;x,y) = z\big((1 + \dfrac{1}{(k^-)^2 L^2} \dfrac{x^2}{2L^2}\big) \end{array} \right.$$

avec

$$E(k^-;x) = (1 + \imath \frac{k^- x}{(k^-)^2 L^2})^{-1/2} \quad \text{et} \quad L(k;x) = L(1 + \frac{(k^-)^2 x^2}{(k^-)^4 L^4})^{1/2}$$

Pour décrire de façon imagée la solution, remarquons que la solution est « contenue » dans le domaine géométrique

$$\mathcal{S}_{k^-,L} = \big\{(x,y),\ |y| \leq L(k^-;x)\big\}.$$

Ce domaine est donc borné dans la direction y et symétrique par rapport à l'axe des x et le diamètre de chaque section est minimum en $x = x_0$ où elle vaut L et s'élargit comme $L(k^-; x-x_0)$ fonction croissante de x. On génère donc un faisceau divergent.

On pourrait montrer l'estimation suivante

$$\forall x, \quad \|\tilde{u}_{\text{inc}}(x,\cdot) - u_{\text{inc}}(x,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C|k^- x|(k^-)^4 L^4 \|\triangle u_{\text{inc}}\|_{L^2}$$

L'approximation est donc meilleure quand le rapport x/λ (avec λ la longueur d'onde) est petit et quand le rapport L/λ est grand. Nous utiliserons dans la suite cette approximation et la notons u_{inc}.

Pour utiliser la méthode présentée dans cette annexe, il faut choisir une discrétisation pour la variable duale k. Ici, avec l'expression de l'onde incidente, on remarque que sa trace sur $\widetilde{\Sigma}$ est dans tous les espaces $L^{2,s}$ avec $s > 0$, donc sa TFB est dans tous les espaces H^s pour la variable duale. On peut donc approcher l'espace $L^2([-\pi/L, \pi/L], H^{-1/2}(\Sigma^0))$ par

$$W_{h,N_k} = \big\{w \in L^2([-\pi/L,\pi/L], \mathcal{T}_h), \quad \forall j \in [\![0, N_k]\!],\ \forall k,\ w(\cdot,k)\big|_{[k_j,k_{j+1}]} = w_j \in \mathcal{T}_h\big\}$$

où $(k_j)_j$ est un ensemble de points de l'intervalle $[-\pi/L, \pi/L]$. Cet espace est exactement le produit tensoriel de l'espace des fonctions constantes par morceaux pour la variable k et l'espace des fonctions appartenant à $\mathcal{T}_h$.

La discrétisation est donc ramenée au choix des points k_i. Nous les choisissons en fonction de l'onde incidente : il suffit d'utiliser la relation (A.47). En effet, on calcule la TFB de la trace de l'onde incidente sur l'interface. Si l'onde incidente est un faisceau gaussien normal à l'interface

alors sa trace sur $\widetilde{Sigma}$ est une gaussienne de largeur $\widetilde{L}$ que nous pouvons calculer. On peut alors montrer que la TFB d'une gaussienne de largeur $\widetilde{L}$ est pour la variable k également une gaussienne de largeur $1/\widetilde{L}$. On choisit donc les points k_j disposés régulièrement sur l'intervalle $[-N_0/\widetilde{L}, N_0/\widetilde{L}]$, N_0 étant un nombre, typiquement 5, qui dépend de l'intervalle en dehors duquel la gaussienne est considérée nulle à une erreur d'approximation globale près

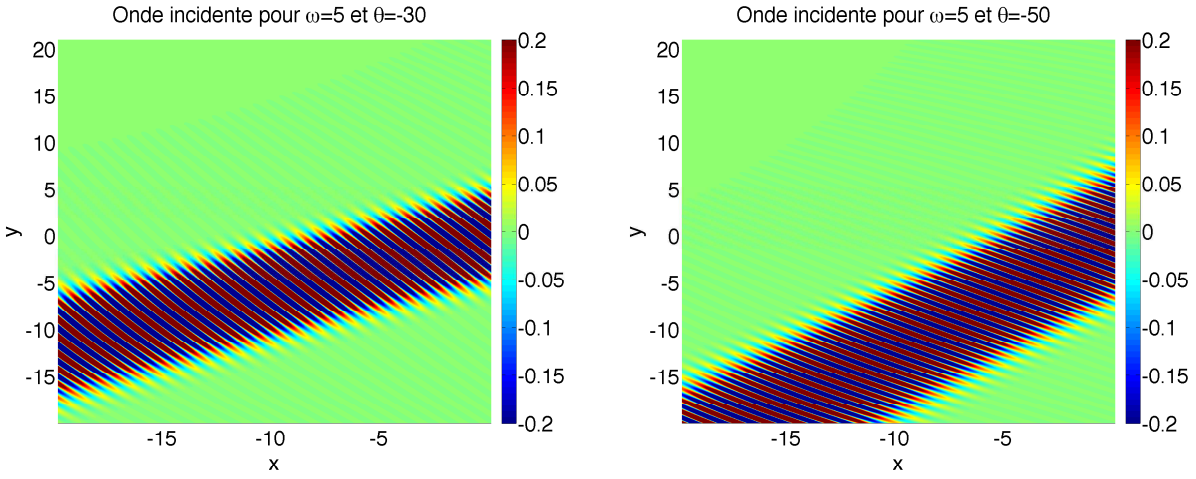
$$\mathcal{F}_y(u_{\text{inc}}\big|_{\widetilde{\Sigma}})(\cdot;k)\Big|_{[-\pi/L,\pi/L]\subset[-N_0/\widetilde{L},N_0/\widetilde{L}]} \approx 0.$$

De même, on montre que si le faisceau gaussien arrive sur l'interface avec un angle $\theta^-_,$ alors les points k_j sont choisis disposés régulièrement sur l'intervalle

$$[k_y^- - N_0/\widetilde{L}, k_y^- + N_0/\widetilde{L}]$$

où $k_y^- = \sqrt{\rho^-\omega^2}\sin(\theta^-)[2\pi/L]$ avec ρ^- l'indice du milieu homogène Ω^-.

Considérons dans cette section, le milieu composé de deux demi-espaces homogènes tels que $\rho^- = 1$ et $\rho^+ = 2$, la fréquence est fixée ici à $\omega = 5$ (se reporter à la figure A.10). La discrétisation en espace est de 35 points par longueur d'onde dans le milieu Ω^- et de 50 points par longueur d'onde dans le milieu Ω^+. Dans un premier temps, nous considérons un faisceau gaussien qui arrive avec une incidence de $\theta^- = -30^o$ par rapport à la normale à $\widetilde{\Sigma}$ (la direction est représentée en noir Figure A.10 et le faisceau apparaît figure A.21(a)), de largeur au col de $L = 2$ au point distant de 5 de l'interface. Pour décider de la discrétisation de la variable duale, on

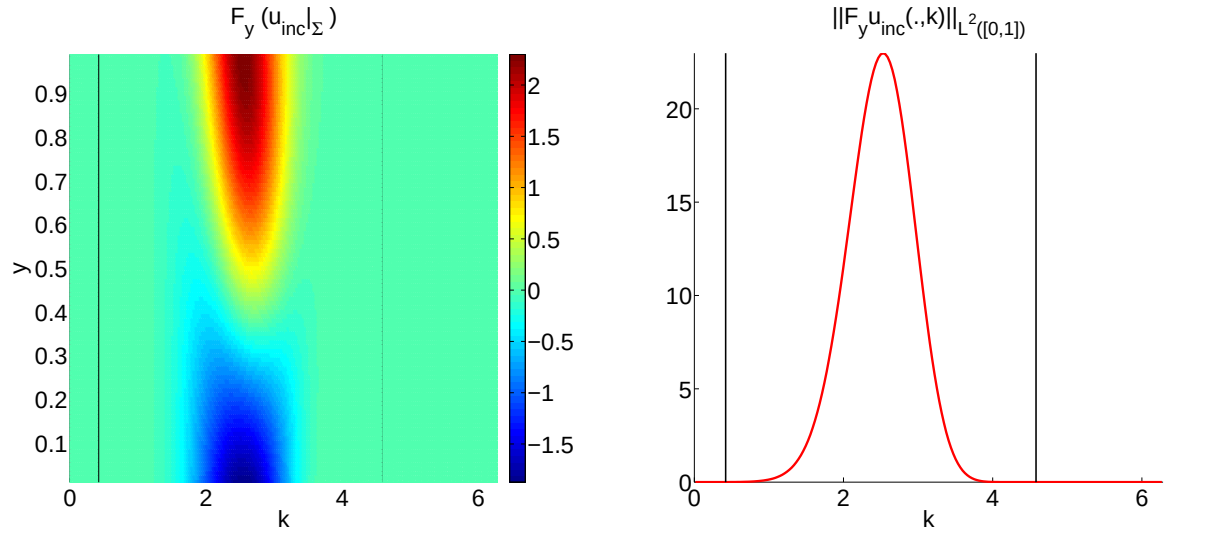


(a) Faisceau gaussien, $\theta^- = -30^o$

(b) Faisceau gaussien, $\theta^- = -50^o$

FIG. A.21: Dans le cas où le milieu est celui de la Figure A.13, $\omega = 5$, représentation des deux faisceaux gaussiens étudiés, ils sont tous les 2 de largeur au col de $L = 2$ au point distant de 5 de l'interface mais le faisceau de gauche arrive à une incidence de $\theta^- = -30^o$ et celui de droite une incidence de $\theta^- = -50^o$.

calcule la TFB de la trace de l'onde incidente sur $\widetilde{\Sigma}$ (représentée figure A.22(a)) et également sa norme (représentée figure A.22(b)). On remarque que les supports en k des fonctions calculées sont bien centrées autour de $k_y^- = \sqrt{\rho^-\omega^2}\sin(-30^o)[2\pi/L]$. On dispose donc des points k_j régulièrement sur l'intervalle $[k_y^- - 5/\widetilde{L}, k_y^- + 5/\widetilde{L}]$ représenté par deux lignes noires sur les figures

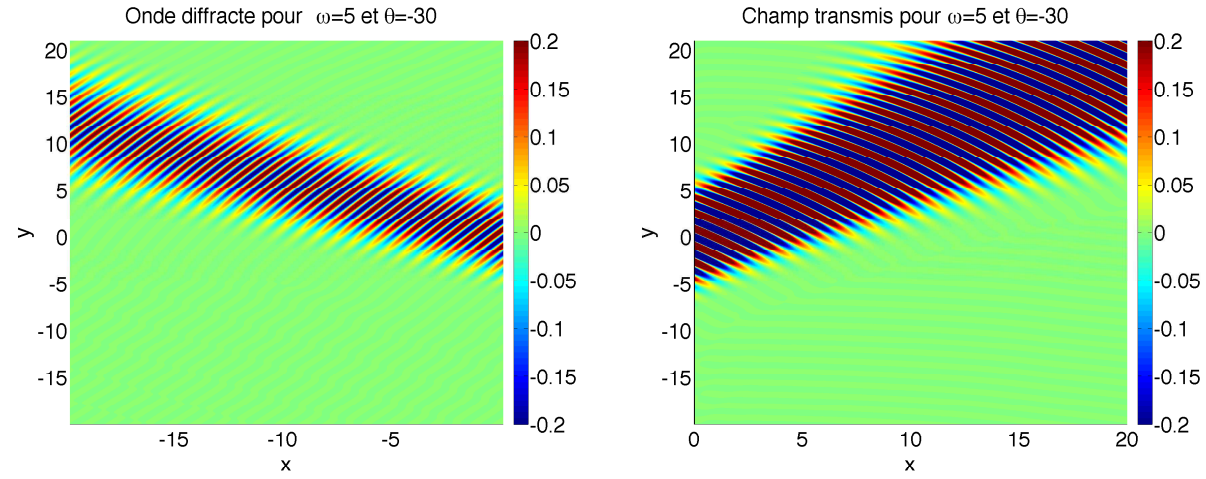


(a) La TFB de $u_{\text{inc}}|_{\widetilde{\Sigma}}$ en fonction de y et k

(b) la norme $\|\mathcal{F}_y(u_{\text{inc}}|_{\widetilde{\Sigma}})(\cdot;k)\|_{L^2(\Sigma^0)}$ en fonction de k

FIG. A.22: La TFB de la trace de l'onde incidente sur $\widetilde{\Sigma}$ en fonction de k et y (à gauche) et également sa norme par rapport à la variable y en fonction de k (à droite).

A.22(a) et A.22(b). On remarque alors qu'en dehors de cet intervalle, la transformée de Floquet Bloch peut être considérée comme nulle. Pour résoudre le problème de demi-espace, il suffit donc de résoudre des problèmes de demi-guide avec conditions k_y-quasi périodiques pour k_y égal à l'ensemble des points k_j choisis. On reconstruit ensuite la solution de demi-espace par TFB inverse en considérant qu'en dehors de ses points les TFB sont nulles et en considérant que les TFB sont des fonctions constantes par morceaux pour la variable k. Pour déterminer les



(a) Champ diffracté dans Ω^-

(b) Champ total dans Ω^+

FIG. A.23: Champs diffractés et transmis dans le cas où le milieu est celui de la Figure A.10, la fréquence $\omega = 5$ et l'onde incidente est celle de la figure A.21(a).

champs diffractés et transmis, il faut résoudre le problème de demi-espace pour une trace normale particulière. En particulier pour le champ diffracté et contrairement au champ incident déterminé par l'approximation paraxiale, il est déterminé numériquement. Il est donc solution de l'équation de Helmholtz à coefficients constants à l'erreur d'approximation près. Les champs diffracté et transmis sont représentés respectivement Figures A.23(a) et A.23(b), quant au champ total il apparaît Figure A.24. Nous considérons ensuite le faisceau gaussien ayant une incidence

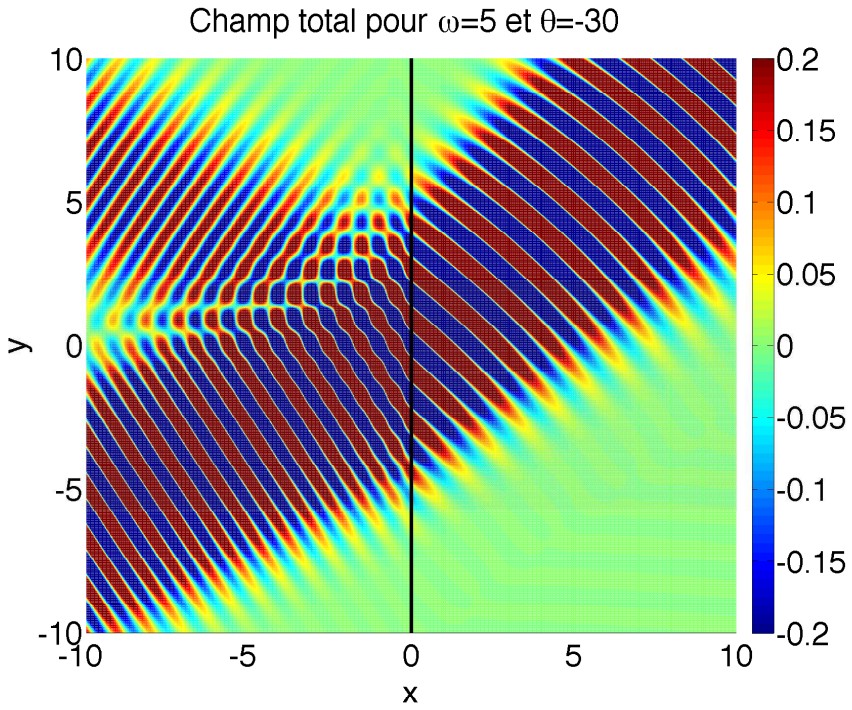
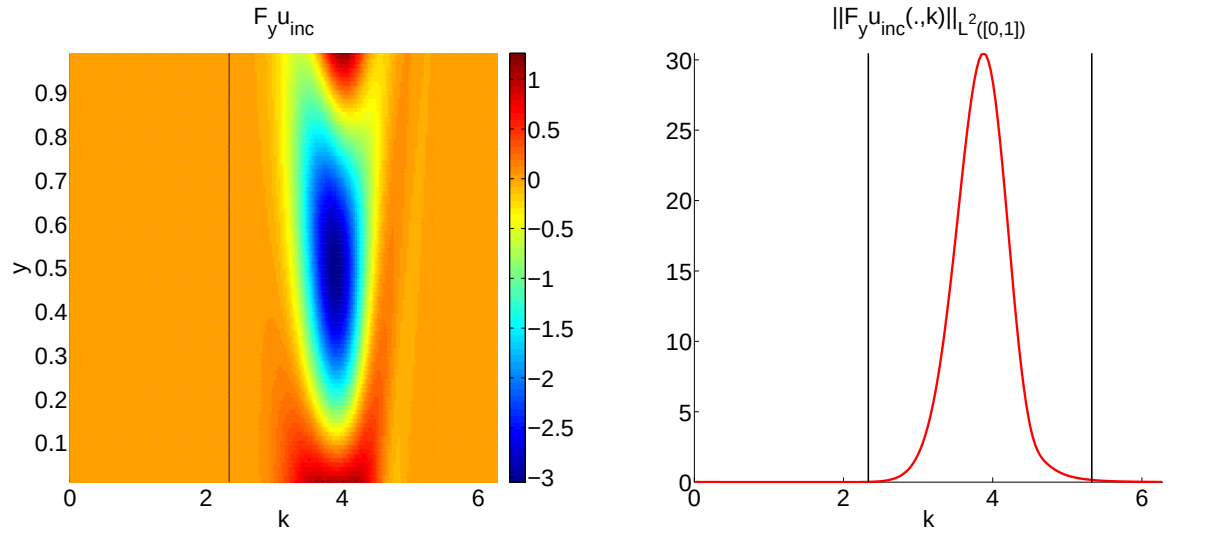


FIG. A.24: Champ total dans le cas où le milieu est celui de la Figure A.10, la fréquence $\omega = 5$ et l'onde incidente est celle de la figure A.21(a).

de $\theta^- = -50^o$ par rapport à la normale à $\widetilde{\Sigma}$ (la direction représentée en blanc Figure A.10 et le faisceau apparaît figure A.21(b)). On calcule ensuite la TFB de la trace de l'onde incidente sur $\widetilde{\Sigma}$ (représentée figure A.25(a)) et également sa norme (représentée figure A.25(b)) pour fixer la discrétisation pour la variable duale. Les supports en k des fonctions calculées sont centrées autour de $k_y^- = \sqrt{\rho^-\omega^2}\sin(-50^o)[2\pi/L]$. On dispose donc des points k_j régulièrement sur l'intervalle $[k_y^- - 5/\widetilde{L}, k_y^- + 5/\widetilde{L}]$ représenté par des lignes noires sur les figures A.25(a) et A.25(b). Cet intervalle est plus petit que dans le premier cas car même si les faisceaux ont les mêmes propriétés, arrivant avec des incidences différentes, la largeur de la trace du faisceau est plus grande dans le second cas, soit un support plus petit pour la variable k de la TFB. Le cas limite où la largeur du faisceau tend vers l'infini, le faisceau devient une onde plane et le support en k de la TFB est restreint à un point comme expliqué au début de la section A.4.2.2. La discrétisation pour la variable k que nous adaptons en fonction de l'onde incidente devient encore plus importante pour des faisceaux très larges au niveau de l'interface. De cette façon, nous discrétisons sur des intervalles en k sur lesquelles les fonctions peuvent beaucoup varier. Les champs diffracté et transmis sont représentés respectivement Figures A.26(a) et A.26(b), quant au champ total il apparaît Fi-

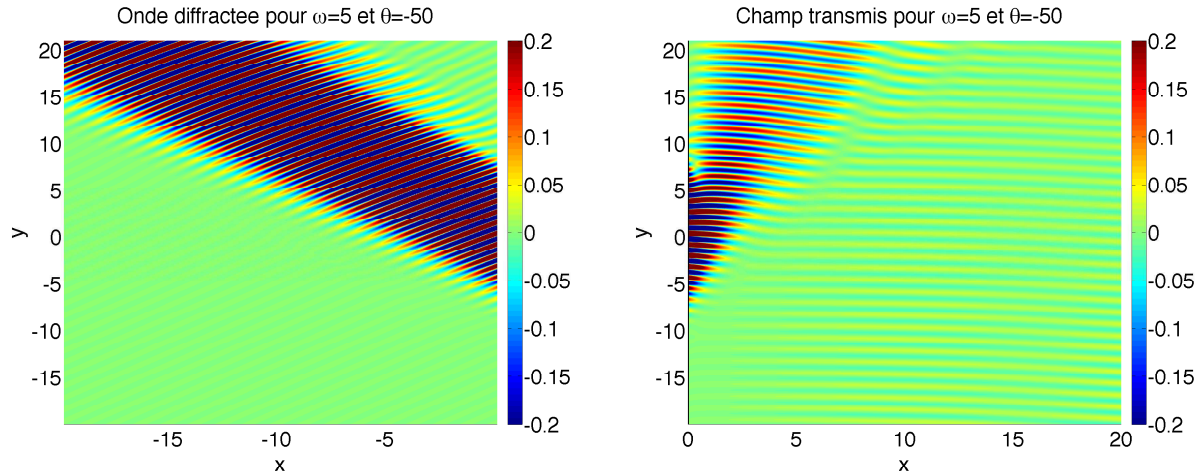


(a) La TFB de $u_{\text{inc}}|_{\widetilde{\Sigma}}$ en fonction de y et k

(b) la norme $\|\mathcal{F}_y(u_{\text{inc}}|_{\widetilde{\Sigma}})(\cdot;k)\|_{L^2(\Sigma^0)}$ en fonction de k

FIG. A.25: La TFB de la trace de l'onde incidente sur $\widetilde{\Sigma}$ en fonction de k et y (à gauche) et également sa norme par rapport à la variable y en fonction de k (à droite).

gure A.27. On retrouve la réflexion attendue pour des ondes dont l'angle d'incidence est en valeur absolue supérieur à 45^o. La réflexion n'est néanmoins que partielle. En effet, le faisceau gaussien est en quelque sorte une combinaison d'ondes planes dont les angles d'incidence sont dans un intervalle centré autour de -50^o. Etant donnée la largeur du faisceau, cet intervalle contient des angles inférieur à 45^o pour lesquels les ondes planes passent dans l'autre milieu.



(a) Champ diffracté dans Ω^-

(b) champ total dans Ω^+

FIG. A.26: Champs diffracté et transmis dans le cas où le milieu est celui de la Figure A.10, la fréquence $\omega = 5$ et l'onde incidente est celle de la figure A.21(b).

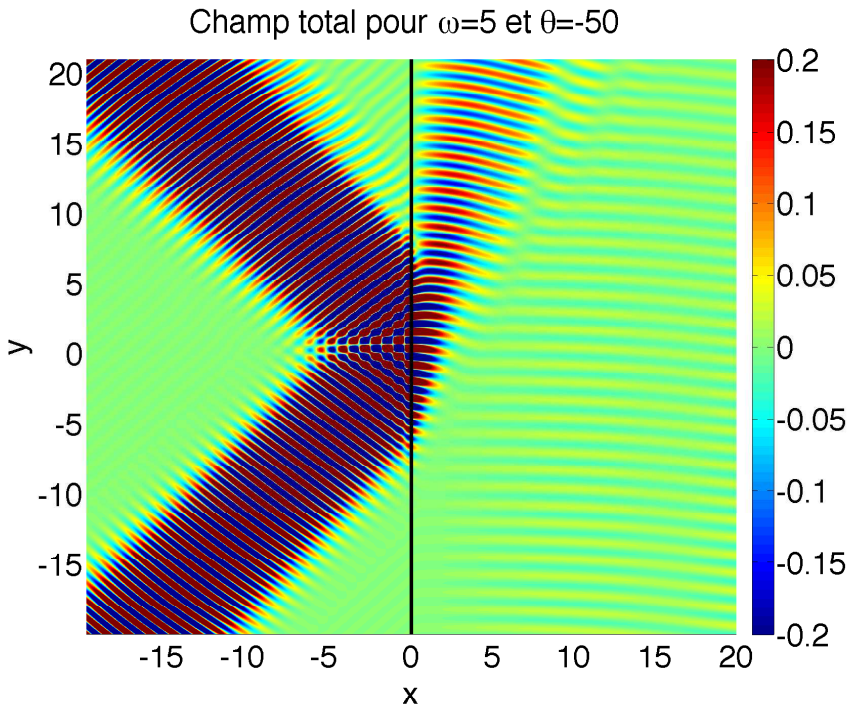


FIG. A.27: Champ total dans le cas où le milieu est celui de la Figure A.10, la fréquence $\omega = 5$ et l'onde incidente est celle de la figure A.21(b).

♢ ***D'un milieu homogène à un milieu périodique - cas d'un faisceau gaussien***

En utilisant, l'approximation des faisceaux gaussiens de la section précédente et en imposant la discrétisation de la variable k en fonction de la TFB de la trace sur l'interface du faisceau gaussien, on étudie la transmission (et la réflexion) d'un faisceau gaussien d'un milieu homogène dans un milieu périodique.

Nous reprenons le milieu issu d'un exemple physique et étudié lors de notre collaboration avec l'IEF, présenté Figure A.16. La fréquence est fixée pour que la longueur d'onde $\lambda = 1545$ nm (on rappelle que tout est adimensionné en considérant que la taille de la cellule $L = 440$ nm est considérée égale à 1). Dans un premier temps, nous considérons un champ électrique incident représenté figure A.28 arrivant sur l'interface avec une incidence de $\theta^- = -10^o$ (dans ce cas c'est l'équation (A.50) qui est résolue). Les champs diffracté et transmis qui en découlent sont représentés respectivement Figure A.29(a) et Figure A.29(b). Une des spécificités des milieux périodiques apparaît dans le champ diffracté ici : il a un angle de diffraction inattendu. Le champ total est donné Figure A.30.

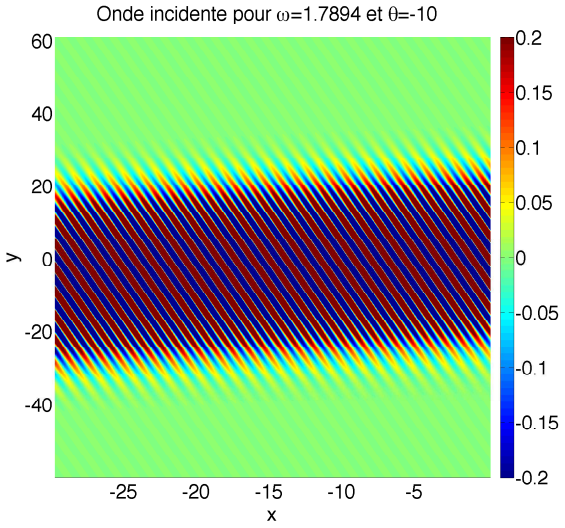
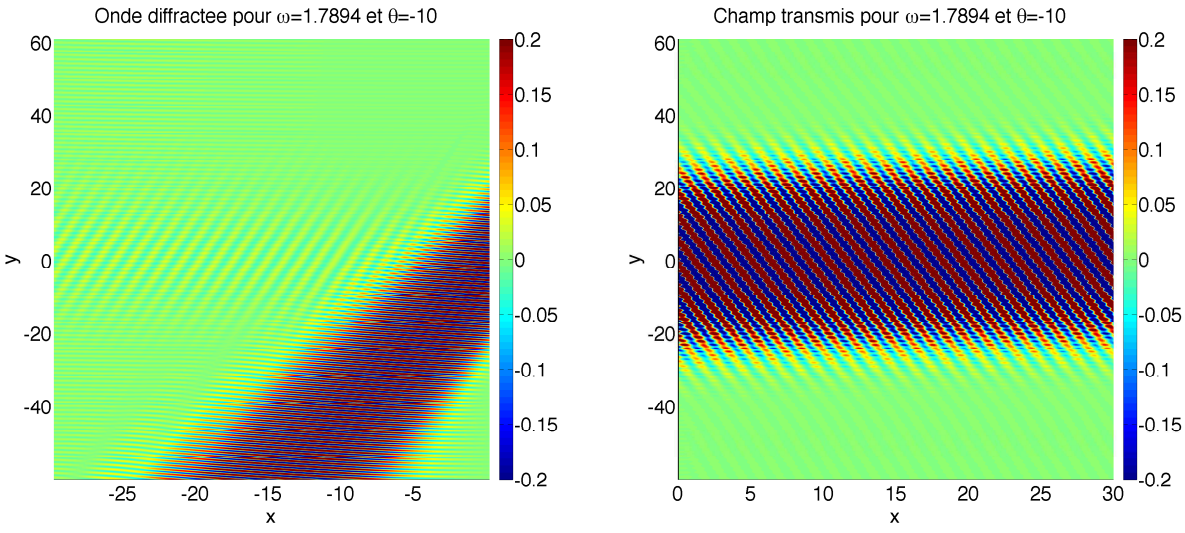


FIG. A.28: Dans le cas où le milieu est celui de la Figure A.16, représentation du champ électrique incident arrivant sur l'interface avec une incidence de $\theta^- = -10^o$ par rapport à sa normale.



(a) Champ diffracté dans Ω^-

(b) champ total dans Ω^+

FIG. A.29: Champs diffracté et transmis dans le cas où le milieu est celui de la Figure A.16 et l'onde incidente est celle de la figure A.28.

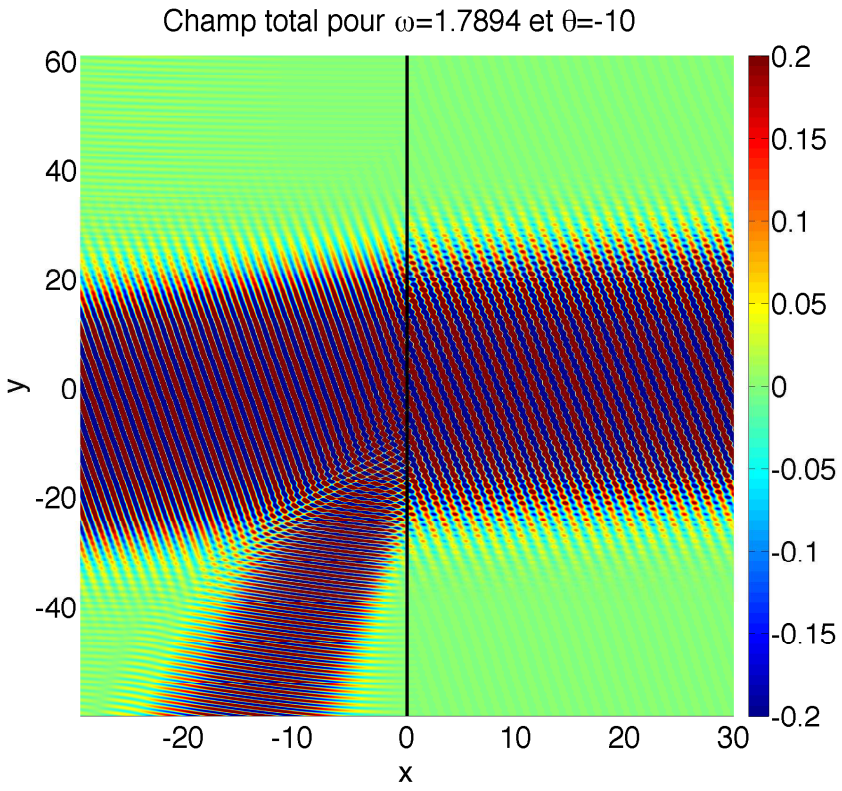


FIG. A.30: Champ total dans le cas où le milieu est celui de la Figure A.16 et l'onde incidente est celle de la figure A.28.

Considérons maintenant le même problème mais c'est ici le champ magnétique (orthogonal au milieu 2D) qui est incident. Il est représenté Figure A.31 et arrive sur l'interface avec une incidence de $\theta^- = -20^o$ (maintenant c'est l'équation (A.51) qui est résolue). Les champs diffracté et transmis qui en découlent sont représentés respectivement Figure A.32(a) et Figure A.32(b). Des spécificités des milieux périodiques apparaissent dans cet exemple. Pour le champ transmis tout d'abord, on observe un phénomène de réfraction négative. Ce sont les angles de transmission qu'on observerait si l'indice du milieu Ω^+ était constant mais négatif. Les matériaux complexes qui reproduisent ce comportement sont appelés **méta-matériaux** (voir [Smith *et al.* (2000) ; Pendry *et al.* (1999)] pour des exmeples de méta-matériaux et [Pendry (2000) ; Engheta (2002) ; Maystre & Enoch (2004)] pour des applications). Ainsi les milieux périodiques peuvent jouer le rôle de méta-matériaux pour certain régime de fréquence et d'incidence. Le champ diffracté quant à lui, semble être composé de deux faisceaux d'angle différents. Le champ total est donné finalement Figure A.33

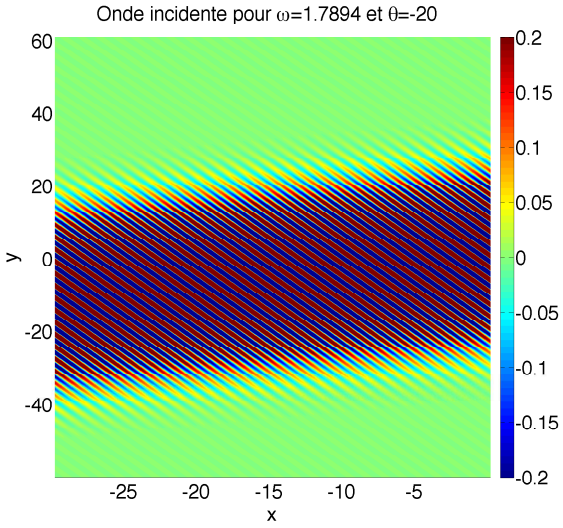
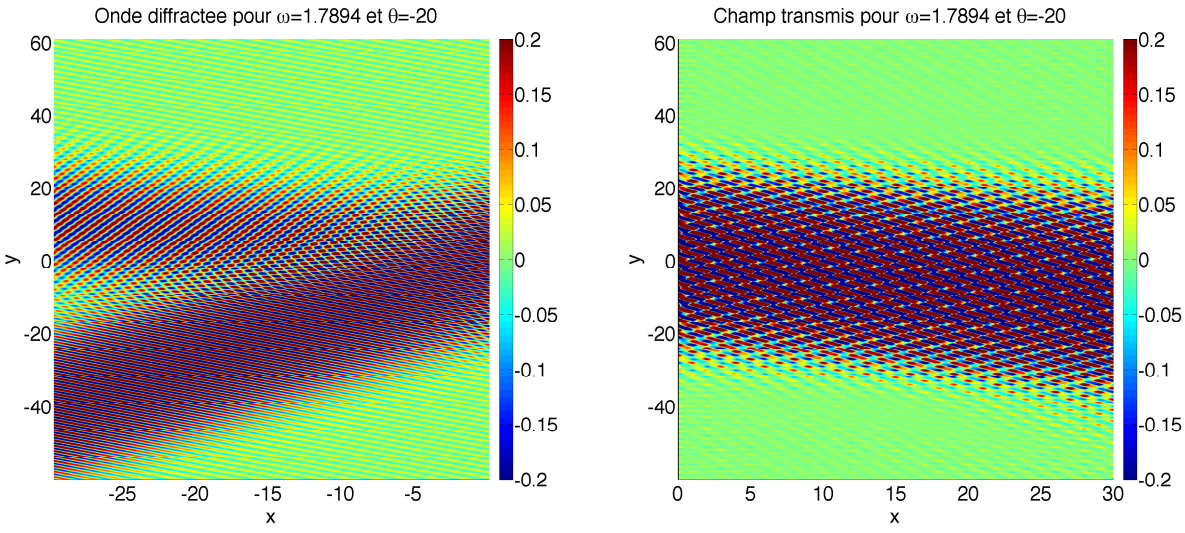


FIG. A.31: Dans le cas où le milieu est celui de la Figure A.16, représentation du champ magnétique incident arrivant sur l'interface avec une incidence de $\theta^- = -20^o$ par rapport à sa normale.



(a) Champ diffracté dans Ω^-

(b) champ total dans Ω^+

FIG. A.32: Champs diffracté et transmis dans le cas où le milieu est celui de la Figure A.16 et l'onde incidente est celle de la figure A.31.

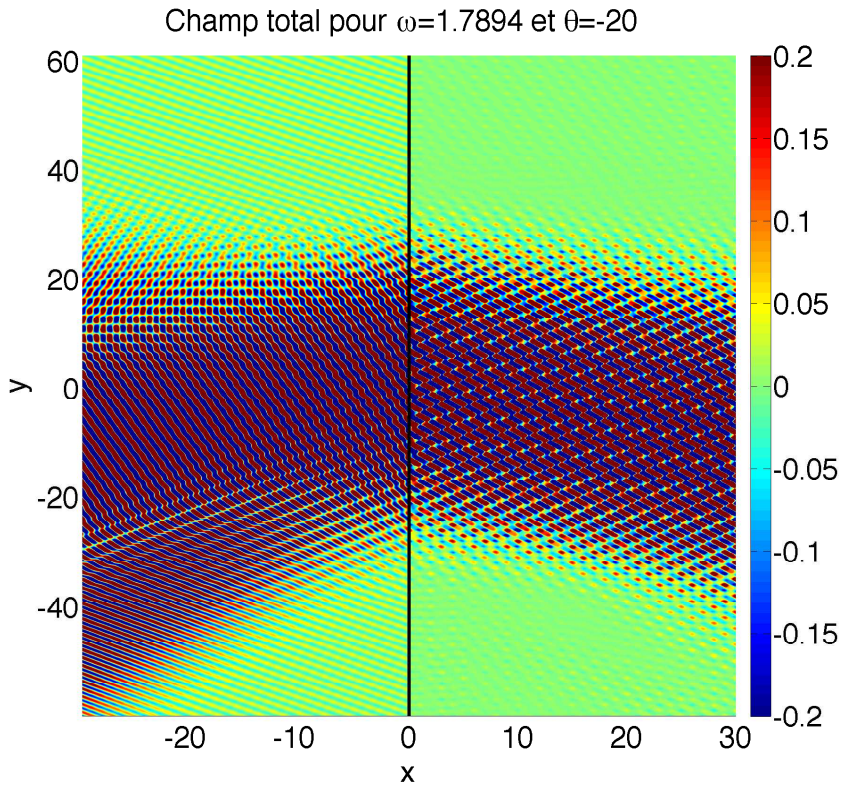


FIG. A.33: Champ total dans le cas où le milieu est celui de la Figure A.16 et l'onde incidente est celle de la figure A.31.

A.4.3 Conclusions

La discrétisation pour la variable k doit être effectuée avec précaution comme indiqué Section 4.3. Cependant, contrairement au problème du milieu périodique 2D perturbé, l'onde incidente impose la discrétisation pour la variable de Floquet.

Un article commun POEMS/IEF est actuellement en fin de préparation sur l'ensemble de ces aspects. Les prochains développements permettront d' envisager l'introduction de plusieurs milieux structurés périodiquement, permettant de traiter des cas plus complexes de réfraction pour la mise en forme de faisceaux optiques en optique guidée ou le démultiplexage en longueurs d'ondes [Lupu (2004)].

ANNEXE

B

OUTILS MATHÉMATIQUES

B.1 Transformée de Floquet Bloch

La transformation de Floquet (ou Floquet-Bloch) est une transformation fonctionnelle qui intervient comme outil d'analyse d'équations aux dérivées partielles à coefficients périodiques.

Nous allons noter dans toute la suite :

$$\mathcal{C} = \left]-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right[\qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}^* = \left]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\right[$$

où L est la pèriode des coefficients et du milieu. Nous présentons ici la transformation de Floquet 1D et les démonstrations seront faites dans ce cas mais mais l'extension aux dimensions supérieures est assez naturelle et dans ce cas :

$$\mathcal{C} = \left]-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right[^n \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}^* = \left]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}\right[^n$$

B.1.1 Définitions

La transformation de Floquet sur $\mathbb{R}$ est associée à une période de référence $L > 0$. La transformation associée, notée $\mathcal{F}_L$, transforme une fonction d'une variable x définie sur $\mathbb{R}$ en une fonction de deux variables (x,k) définie sur un rectangle, en l'occurence le rectangle $\mathbb{K} = \mathcal{C} \times \mathcal{C}^*$. Nous la définissons tout d'abord sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact :

DÉFINITION B.1.1
La transformée de Floquet Bloch (TFB) de période L est définie par (voir [Kuchment (1993)])

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_L : \ \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) &\to L^2(\mathbb{K}) \\ f(x) &\to (\mathcal{F}_L u)(x;k) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nL)e^{-inkL} \ . \end{aligned}$$

REMARQUE B.1.2
x étant fixé, $k \to \mathcal{F}_L f(x,k)$ est la somme de la série de Fourier associée à la suite

$$\big(f(x+nL)\big)_{n\in\mathbb{N}}.$$

La somme étant finie parce que f est à support compact.

REMARQUE B.1.3
De manière très formelle, puisqu'il manquerait une normalisation, on peut considérer que la "limite" de $\mathcal{F}_L f$ quand $L \to 0$ est la transformation de Fourier usuelle alors que sa limite quand $L \to +\infty$ est l'opérateur identité .

Nous allons maintenant utiliser la densité de l'espace $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ pour étendre la définition de la transformée de Floquet à $L^2(\mathbb{R})$.

PROPOSITION B.1.4
La TFB se prolonge en une isométrie entre $L^2(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{K})$:

$$\forall f,\ g \in L^2(\mathbb{R}), \quad \Big(\mathcal{F}_L f, \mathcal{F}_L g\Big)_{L^2(\mathbb{K})} = \Big(f, g\Big)_{L^2(\mathbb{R})}$$

■ **PREUVE:** pour x fixé, $k \to \mathcal{F}_L f(x,k)$ est la somme de la série de Fourier associée à la suite $x \to f(x+nL)$. Le théorème de Plancherel nous assure alors que :

$$\int_{\mathcal{C}^*} |\mathcal{F}_L f(x,k)|^2 dk = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x+nL)|^2$$

Par conséquent après intégration sur $x \in \mathcal{C}$ nous obtenons :

$$\int_{\mathcal{C}}\int_{\mathcal{C}^*} |\mathcal{F}_L f(x,k)|^2\ dk\, dx\ =\ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\ dx$$

Cette identité permet, par densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, de prolonger de manière unique l'opérateur $\mathcal{F}_L$ en une isométrie bijective de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{K})$ (les fonctions étant à valeurs complexes)

$$\forall f,\ g \in L^2(\mathbb{R}), \quad \Big(\mathcal{F}_L f, \mathcal{F}_L g\Big)_{L^2(\mathbb{K})} = \Big(f, g\Big)_{L^2(\mathbb{R})}$$

■

Grâce à la remarque B.1.2, on montre en utilisant les résultats classiques des séries de Fourier, la formule d'inversion suivante :

PROPOSITION B.1.5 (FORMULE D'INVERSION)
Nous avons la formule d'inversion suivante :

$$\forall \hat{f} \in L^2(\mathbb{K}), \quad \textbf{\textit{p.p.}}\ x \in \Big[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\Big], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (\mathcal{F}_L^{-1}\hat{f})\,(x+nL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \hat{f}(x,k) e^{inkL}\ dk.$$

B.1.2 Quelques propriétés

Nous donnons dans la suite les propriétés les plus importantes de la TFB qui en font un outil privilégié pour l'analyse des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients périodiques.

Nous ne développerons pas les démonstrations qui sont immédiates.

PROPOSITION B.1.6 (PROPRIÉTÉS IMPORTANTES)
La TFB présente les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{F}_L$ *commute avec les opérateurs différentiels en* x *:*

$$\mathcal{F}_L(\frac{d^n f}{dx^n}) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\Big(\mathcal{F}_L f\Big).$$

2. $\mathcal{F}_L$ *"diagonalise" les opérateurs de translation (de translation proportionnelle à* L*) :*

$$(\tau_q f)(x) = f(x+qL) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_L(\tau_q f)(x,k) = e^{-iqkL}\mathcal{F}_L f(x,k).$$

3. $\mathcal{F}_L$ *"commute" avec les multiplications avec les transformations périodiques au sens où, si* $a(x)$ *est une fonction périodique de période* 1*,*

$$\mathcal{F}_L(af)(x,k) = a(x)\mathcal{F}_L f(x,k), \quad x \in \Big]-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\Big[.$$

Nous donnons dans la suite des propriétés de la transformée que nous serons amenées à utiliser dans notre étude :

PROPOSITION B.1.7 (TRANSFORMÉE DE FONCTIONS PAIRES ET IMPAIRES)

1. *Transformation d'une fonction paire. Soit* $f \in L^2(\mathbb{R})$*.*

$$\textbf{p.p. } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(-x) \quad \Rightarrow \quad \textbf{p.p. } (x,k) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{F}_L f(x,k) = \mathcal{F}_L f(-x,-k) \tag{B.1}$$

Réciproquement, soit $\hat{f} \in L^2(\mathbb{K})$

$$\textbf{p.p. } (x,k) \in \mathbb{R}^2, \quad \hat{f}(x,k) = \hat{f}(-x,-k) \quad \Rightarrow \quad \textbf{p.p. } x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}_L^{-1}\hat{f}(x) = \mathcal{F}_L^{-1}\hat{f}(-x) \tag{B.2}$$

2. *Transformation d'une fonction impaire. Soit* $f \in L^2(\mathbb{R})$*.*

$$\textbf{p.p. } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -f(-x) \quad \Rightarrow \quad \textbf{p.p. } (x,k) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{F}_L f(x,k) = -\mathcal{F}_L f(-x,-k) \tag{B.3}$$

Réciproquement, soit $\hat{f} \in L^2(\mathbb{K})$

$$\textbf{p.p. } (x,k) \in \mathbb{R}^2, \quad \hat{f}(x,k) = -\hat{f}(-x,-k) \quad \Rightarrow \quad \textbf{p.p. } x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}_L^{-1}\hat{f}(x) = -\mathcal{F}_L^{-1}\hat{f}(-x) \tag{B.4}$$

■ **PREUVE:** Soit une fonction f paire. Notons que

$$\mathcal{F}_L f(-x,k) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-x+nL)e^{-inkL}$$

Si on applique le changement de variable $n \to -n$, il vient :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_L f(-x,k) &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-x-nL)e^{inkL} \\ &= \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nL)e^{inkL} \\ &= \mathcal{F}_L f(x,-k)\end{aligned}$$

En conséquence si f est paire, on a également :

$$\mathcal{F}_L f(x,k) = \mathcal{F}_L f(-x,-k)$$

Il apparaît que la relation de parité ci-dessus caratérise les fonctions qui sont des transformées de Floquet de fonctions paires. En effet, soit $\hat{f}(x,k)$ une fonction vérifiant :

$$\hat{f}(-x,k) = \hat{f}(x,-k)$$

sa transformée de Floquet inverse est donnée par :

$$\forall x \in \Big]-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\Big[,\ \forall n \in \mathbb{Z} \qquad \mathcal{F}_L^{-1}\hat{f}(x+nL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \hat{f}(x,k)e^{inkL}\,dk$$

et donc :

$$\forall x \in \Big]-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\Big[,\ \forall n \in \mathbb{Z} \qquad \mathcal{F}_L^{-1}\hat{f}(-x-nL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \hat{f}(-x,k)e^{-inkL}\,dk$$

en appliquant le changement de variable $k \to -k$:

$$\forall x \in \Big]-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\Big[,\ \forall n \in \mathbb{Z} \qquad \mathcal{F}_L^{-1}\hat{f}(-x-nL) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \hat{f}(-x,-k)e^{inkL}\,dk = \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \hat{f}(x,k)e^{inkL}\,dk$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \Big]-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\Big[,\ \forall n \in \mathbb{Z} \qquad \mathcal{F}_L^{-1}\hat{f}(x+nL) = \mathcal{F}_L^{-1}\hat{f}(-x-nL)$$

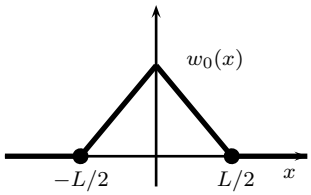
■

Une autre propriété est donnée dans le théorème suivant. Il est à peu près évident qu'on a une sorte d'équivalent "Floquet" du théorème de Riemann-Lebesgue pour la transformée de Fourier :

THÉORÈME B.1.8 (RÉGULARITÉ DE LA TRANSFORMÉE DE FLOQUET)
Soit $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, alors les résultats d'injection des espaces de Sobolev [Lions & Magenes (1968) ; Brezis (1983)] nous donnent que $f \in L^2(\mathbb{R})$ et on a :

$$\mathcal{F}_L f \in C^0(\overline{\mathbb{K}})$$

■ **PREUVE:** On désigne par $w_0(x)$ la fonction chapeau :



$$\begin{cases} w_0(x) = \begin{cases} 1-2x/L & \text{si } x \in \Big[0, L/2\Big] \\ 1+2x/L & \text{si } x \in \Big[-L/2, 0\Big] \end{cases} \\ w_0(x) = 0 \qquad\qquad \text{si } |x| > L/2 \end{cases}$$

On remarque que, si $x \in \Big]-L/2, 0\Big[$

$$\begin{aligned} f(x+nL) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{d}{dy}\Big[w_0(y)f(y+nL)\Big]dy \\ &= \int_{-\infty}^{x} \Big[w_0(y)f'(y+nL) + w_0'(y)f(y+nL)\Big] \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}|f(x+nL)| &\leq \int_{-L/2}^{x}|f'(y+nL)|dy+\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{x}|f(y+nL)|dy\\ &\leq \int_{-L/2}^{0}|f'(y+nL)|dy+\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{0}|f(y+nL)|dy\\ &\leq \int_{nL-L/2}^{nL}|f'(\xi)|d\xi+\frac{2}{L}\int_{nL-L/2}^{nL}|f(\xi)|d\xi\end{aligned}$$

Après sommation,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|f(x+nL)|\leq \max(1,\frac{2}{L})\ \|f\|_{W^{1,1}}$$

Cette égalité reste vraie, évidemment, pour $x\in\left]0,L/2\right[$, par conséquent :

$$|\mathcal{F}_Lf(y;k)|\leq\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|f(x+nL)|\leq\max(1,\frac{2}{L})\ \|f\|_{W^{1,1}}$$

Pour la continuité, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}_Lf(y;k)-\mathcal{F}_Lf(x;k)| &\leq\sum_n|f(x+n)-f(y+n)|\\ &\leq\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(x,y;\xi)|f'(\xi)|d\xi\end{aligned}$$

Où $\chi(x,y;\xi)$ est la fonction définie par (supposons $y>x$) :

$$\chi(x,y;\cdot)=\sum_n\chi_{]x+n,y+n[}$$

où $\chi_{]a,b[}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $]a,b[$. Il suffit alors d'utiliser le théorème de Lebesgue pour conclure que $\mathcal{F}_Lf(y;k)\to\mathcal{F}_Lf(x;k)$ quand y tend vers x.
On peut procéder de facon analogue pour montrer que $|\mathcal{F}_Lf(y;k)-\mathcal{F}_Lf(x;k')|$ tend vers 0 lorsque $|x-y|+|k-k'|$ tend vers 0. ■

B.1.3 Image des espaces $H^r(\mathbb{R})$ par la TFB

Nous allons voir dans cette section que la transformée de Floquet Bloch transforme une fonction plus ou moins régulière en la variable d'espace en une fonction qui est autant régulière pour la variable d'espace, qui, pour chaque k, est $k-$quasi-périodique mais qui ne gagne pas en régularité pour la variable duale k.

Avant d'énoncer les résultats les plus importants de cette section (voir le théorème B.1.20 et la définition B.1.21), nous commençons par définir les sous espaces de fonctions quasi-périodiques des espaces H^m pour m entier positif.

Pour tout $k\in\mathcal{C}^*$ on appelle $\mathcal{C}_k^\infty(\mathcal{C})$ l'espace des fonctions C^∞ $k-$ quasi-périodique.

$$\mathcal{C}_k^\infty(\mathcal{C})=\left\{f\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{C}),\quad f(\frac{L}{2})=e^{\imath kL}f(-\frac{L}{2})\right\}.$$

DÉFINITION B.1.9 (LES FONCTIONS "QUASI-PÉRIODIQUES" DE H^m)
Pour tout m entier et tout $k \in \mathcal{C}^*$, on appelle $H_k^m(\mathcal{C})$ l'adhérence de l'espace $\mathcal{C}_k^\infty(\mathcal{C})$ dans $H^m(\mathcal{C})$. C'est donc un espace fermé de $H^m(\mathcal{C})$ que l'on munit de la norme de $H^m(\mathcal{C})$.

REMARQUE B.1.10
$H_k^m(\mathcal{C})$ peut aussi être caractérisée de la façon suivante :

$$H_k^m(\mathcal{C}) = \left\{ f \in H^m(\mathcal{C}), \quad \tilde{f} \in H^m_{loc}(\mathbb{R}) \right\}$$

où $\tilde{f}$ est le prolongement quasi-périodique de f dans $\mathbb{R}$:

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathcal{C}, \quad \tilde{f}(x + mL) = e^{imkL} f(x). \tag{B.5}$$

On définit ensuite les espaces H_k^r pour r réel par la caractérisation précédente.

DÉFINITION B.1.11 (LES FONCTIONS "QUASI-PÉRIODIQUES" DE H^r)
Si on appelle $\hat{\tilde{f}}$ la transformée de Fourier de $\tilde{f}$, alors

$$H_k^r(\mathcal{C}) = \left\{ f \in H^r(\mathcal{C}), \quad (1 + |\xi|^2)^{r/2} \hat{\tilde{f}} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

On a de la même façon :

$$\forall m \text{ entier}, \quad \forall 0 < \theta < 1, \quad H_k^{(1-\theta)m}(\mathcal{C}) = \left[H_k^m(\mathcal{C}), L^2(\mathcal{C}) \right]_\theta$$

On les munit de la norme de l'interpolation.

Les espaces H_k^r sont donc définis **par interpolation** contrairement à ce qui est fait pour les espaces $H_0^s(\mathcal{C})$ dans [Lions & Magenes (1968), Chapitre 1, Section 11] qui sont définis comme l'adhérence des fonctions C^∞ à support compact de $\mathcal{C}$. Nous avons cependant l'équivalence (à l'image du théorème 11.6 du Chapitre 11 de [Lions & Magenes (1968)]) suivante.

THÉORÈME B.1.12 (AUTRE CARACTÉRISATION)
Pour tout $r > 0$, $r \neq$ entier $+ 1/2$, $H_k^r(\mathcal{C})$ est l'adhérence de l'espace $\mathcal{C}_k^\infty(\mathcal{C})$ dans $H^{1/2}(\mathcal{C})$. C'est donc un espace fermé de $H^r(\mathcal{C})$, on le munit donc de sa norme de $H^r(\mathcal{C})$.

REMARQUE B.1.13
En s'inspirant de la preuve du théorème 11.1 du Chapitre 1 de [Lions & Magenes (1968)][1], on montre que :

$$\forall r \in [0, \frac{1}{2}[, \quad H_k^r(\mathcal{C}) = H^r(\mathcal{C}).$$

On pourrait également montrer que $\mathcal{C}_k^\infty(\mathcal{C})$ est dense dans $H^{1/2}(\mathcal{C})$.

Notons que l'espace $H_k^{1/2}(\mathcal{C})$ (ainsi que tous les espaces $H_k^s(\mathcal{C})$ avec $s =$ entier$+1/2$) n'a pas été défini comme l'adhérence de $\mathcal{C}_k^\infty(\mathcal{C})$ dans $H^{1/2}(\mathcal{C})$ mais à partir d'une interpolation[2]. C'est avant tout car les résultats que nous démontrons dans la suite utilise principalement la caractérisation à partir des prolongements quasi-périodiques que nous décrivons dans la suite (la démonstration est la même que celle du théorème 11.4 du Chapitre 1 de [Lions & Magenes (1968)]).

[1] qui traite du prolongement par 0 hors de Ω des fonctions $H^s(\Omega)$ pour $s \leq 1/2$

[2] Cet espace est un peu l'équivalent de l'espace de fonction $H_{00}^{1/2}(\mathcal{C})$

THÉORÈME B.1.14 (CARACTÉRISATION À PARTIR DES PROLONGEMENTS QUASI-PÉRIODIQUES)
La définition B.1.11 est équivalente à

$$H_k^r(\mathcal{C}) = \Big\{ f \in H^r(\mathcal{C}), \quad \tilde{f} \in H^r_{loc}(\mathbb{R}) \Big\}$$

où $\tilde{f}$ est le prolongement de f défini par (B.5).

REMARQUE B.1.15
Dans R^n, si $r > n/2$, alors on a $H^r(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}^0(\bar{\mathcal{C}})$ avec injection continue. On a donc la caractérisation plus simple suivante :

$$\text{Pour } n = 1, \quad \forall r > 1/2, \quad H_k^r(\mathcal{C}) = \Big\{ f \in H^r(\mathcal{C}), \quad f(\frac{L}{2}) = e^{\imath kL} f(-\frac{L}{2}) \Big\}$$

PROPOSITION B.1.16 (ETUDE DE $H_k^{1/2}(\mathcal{C})$)
De manière générale, l'espace $H_k^{1/2}(\mathcal{C})$ est un espace de Hilbert, il est dense dans $H^{1/2}(\mathcal{C})$. De plus, l'espace $H_k^{1/2}(\mathcal{C})$ s'injecte de façon continue dans $H^{1/2}(\mathcal{C})$

$$\forall \varphi \in H^{1/2}(\mathcal{C}), \quad \exists C > 0, \quad \|\varphi\|_{H^{1/2}(\mathcal{C})} \leq C \|\varphi\|_{H_k^{1/2}(\mathcal{C})}.$$

REMARQUE B.1.17 (CAS PARTICULIER DE LA DIMENSION $n = 1$)
Pour $n = 1$, (en utilisant les mêmes idées que dans le théorème 11.7, Chap. 1 de [Lions & Magenes (1968)], on montre qu'une autre caractérisation de l'espace $H_k^{1/2}(\mathcal{C})$ est la suivante

$$H_{k_y}^{1/2}(\mathcal{C}) = \Big\{ \varphi \in H^{1/2}(\mathcal{C}), \quad \int_{\mathcal{C}} \frac{|\varphi(y) - e^{\imath k_y L} \varphi(-y)|^2}{|y - L/2|} \, dy < +\infty \Big\}$$

Dans ce cas, on peut munir $H_{k_y}^{1/2}(\mathcal{C})$ de la norme

$$\|u\|_{H_{k_y}^{1/2}(\mathcal{C})} = \|u\|_{H^{1/2}(\mathcal{C})} + \int_{\mathcal{C}} \frac{|\varphi(y) - e^{\imath k_y L} \varphi(-y)|^2}{|y - L/2|} \, dy.$$

Donnons maintenant une caractérisation des espaces $H_k^{-r}(\mathcal{C})$ pour $r > 0$ (en utilisant la démonstration du Théorème 12.2 du Chapitre 1 de [Lions & Magenes (1968)][3].).

PROPOSITION B.1.18 (ESPACES DUAUX)
L'espace $L^2(\mathcal{C})$ étant identifié à son dual, on a pour tout $r > 0$:

$$\big(H_k^r(\mathcal{C})\big)' = H_k^{-r}(\mathcal{C})$$

Pour $r > 0$, on munit $H_k^{-r}(\mathcal{C})$ de la norme induite par le produit de dualité :

$$\|f\|_{H_k^{-r}(\mathcal{C}} = \sup_{g \in H_k^r(\mathcal{C})} \frac{\Big\langle f, g \Big\rangle}{\|g\|_{H_k^r(\mathcal{C})}}$$

où $< \cdot, \cdot >$ est le crochet de dualité entre $H_k^r(\mathcal{C})$ et $H_k^{-r}(\mathcal{C})$.

[3] Dans [Lions & Magenes (1968)], les espaces pour s négatifs sont définis dans un premier temps comme les espaces duaux des espaces $H_0^s(\mathcal{C})$. Il est montré au Théorème 12.2 du Chapitre 1 que cette définition coïncide avec la définition par interpolation. Rappelons qu'ici les espaces $H_k^r(\mathcal{C})$ pour $r > 0$ et $\neq$ entier$+1/2$ « jouent » le rôle de $H_0^r(\mathcal{C})$ alors que si $r =$ entier$+1/2$ les espaces $H_k^r(\mathcal{C})$ « jouent » le rôle de $H_{00}^r(\mathcal{C})$

■ **IDÉE DE LA PREUVE:** Il suffit pour cela d'utiliser la définition des espaces H_k^r issue du théorème d'interpolation et d'utiliser la propriété des espaces d'interpolation (voir théorème 6.2 de [Lions & Magenes (1968)]) :

$$\forall \theta \in]0,1[, \quad \Big[X,Y\Big]_\theta' = \Big[Y',X'\Big]_{1-\theta}$$

avec équivalence des normes. ■

REMARQUE B.1.19 (CAS PARTICULIER DE $r = 1/2$ ET $n = 1$)
Pour $n = 1$, $H^{-1/2}(\mathcal{C})$ est strictement inclus dans $H_k^{-1/2}(\mathcal{C})$.

A l'aide de tout ce qui précède, nous pouvons énoncer les théorèmes suivants :

THÉORÈME B.1.20 (LA TRANSFORMÉE DE FLOQUET BLOCH DANS H^r POUR $r > 0$)
Pour $r \geq 0$, la transformée de Floquet Bloch $\mathcal{F}$ est un isomorphisme entre $H^r(\mathbb{R})$ et l'espace $\mathcal{F}H^r\big(\mathcal{C}\times\mathcal{C}^*\big)$ défini par :

$$\mathcal{F}H^r\big(\mathcal{C}\times\mathcal{C}^*\big) = \{\ \hat{f} \in L^2\big(\mathcal{C}\times\mathcal{C}^*\big)\ /\ p.p.\ k,\ \hat{f}(\cdot,k) \in H_k^r(\mathcal{C})\ \}$$

On notera souvent cet espace $L^2(\mathcal{C}^*, H_k^r(\mathcal{C}))$, même si la notation n'est pas très rigoureuse. Pour $r \neq$ entier$+1/2$, c'est un espace fermé de $L^2(\mathcal{C}^*, H^r(\mathcal{C}))$, on le munit donc de la norme :

$$\|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathcal{C}^*,H_k^r(\mathcal{C}))} = \int_{\mathcal{C}^*} \|\hat{f}(\cdot,k)\|^2_{H^r(\mathcal{C})}\ dk$$

Si $r =$ entier$+1/2$, cet espace est muni de la norme

$$\|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathcal{C}^*,H_k^r(\mathcal{C}))} = \int_{\mathcal{C}^*} \|\hat{f}(\cdot,k)\|^2_{H_k^r(\mathcal{C})}\ dk$$

On étend enfin la définition de la Transformée de Floquet Bloch aux espaces H^r avec r négatif :

DÉFINITION B.1.21 (LA TRANSFORMÉE DE FLOQUET BLOCH DANS H^r POUR $r < 0$)
Nous allons définir la transformée de Floquet Bloch des fonctions de $H^{-r}(\mathbb{R})$ avec $r > 0$ par dualité. Soit $f \in H^{-r}(\mathbb{R})$ alors l'application suivante ($< \cdot,\cdot >$ est le crochet de dualité entre $H^r(\mathbb{R})$ et $H^{-r}(\mathbb{R})$) :

$$\hat{g} \mapsto \Big\langle f, \mathcal{F}^{-1}\hat{g} \Big\rangle$$

est une application linéaire continue de $L^2(\mathcal{C}^*, H_k^r(\mathcal{C}))$ puisque $\mathcal{F}^{-1}\hat{g} \in H^r(\mathbb{R})$ d'après le théorème B.1.20. D'après le théorème de Riesz, il existe un élément $\hat{f} \in L^2(\mathcal{C}^*, H_k^{-r}(\mathcal{C}))$ tel que :

$$\forall \hat{g} \in L^2(\mathcal{C}^*, H_k^r(\mathcal{C})), \quad \big\langle \hat{f}, \hat{g} \big\rangle = \big\langle f, \mathcal{F}^{-1}\hat{g} \big\rangle$$

où le premier crochet $< \cdot,\cdot >$ est le crochet de dualité entre $L^2(\mathcal{C}^*, H_k^r(\mathcal{C}))$ et $L^2(\mathcal{C}^*, H_k^{-r}(\mathcal{C}))$ et le second est le crochet de dualité entre $H^r(\mathbb{R})$ et $H^{-r}(\mathbb{R})$. On définit alors la transformée de Floquet Bloch dans $H^{-r}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall f \in H^{-r}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}f = \hat{f} \quad \in L^2(\mathcal{C}^*, H_k^{-r}(\mathcal{C}))$$

qui coïncide avec la définition classique dans $L^2(\mathbb{R})$*. Réciproquement, pour toute fonction* $\hat{f} \in L^2(\mathcal{C}^*, H_k^{-r}(\mathcal{C}))$*, on définit de la même façon et par dualité* $\mathcal{F}^{-1}\hat{f}$ *dans* $H^{-r}(\mathbb{R})$*.*

On montre par dualité le prolongement du théorème B.1.20 pour les r négatifs :

THÉORÈME B.1.22 (LA TRANSFORMÉE DE FLOQUET BLOCH DANS H^r POUR $r < 0$)
Soit $r \in \mathbb{R}$*, la transformée de Floquet Bloch* $\mathcal{F}$ *est un isomorphisme entre* $H^r(\mathbb{R})$ *et l'espace* $L^2(\mathcal{C}^*, H_k^r(\mathcal{C}))$*.*

Finalement, ce qu'il faut retenir de cette section, c'est que la transformée de Floquet Bloch transforme une fonction plus ou moins régulière en la variable d'espace en une fonction qui est autant régulière pour la variable d'espace mais qui n'a pas gagné en régularité pour la variable duale k. Nous allons voir dans la section suivante que c'est la décroissance à l'infini de la fonction qui rend sa transformée de Floquet Bloch plus régulière en k.

B.1.4 Images des espaces $L^{2,s}(\mathbb{R})$ par la TFB

La transformée de Floquet Bloch est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathcal{C} \times \mathcal{C}^*$. L'espace $L^2(\mathbb{K})$ est confondu de façon évidente avec l'espace $L^2(\mathcal{C}^*, L^2(\mathcal{C}))$.

Nous voulons étudier ici la transformée de Floquet Bloch d'une fonction qui décroit vite à l'infini et montrer notamment qu'elle gagne en régularité pour la variable duale k. Nous développons d'ailleurs un résultat énoncé dans Levendorskiĭ (1998), qui est démontré succintement en utilisant des opérateurs pseudo-différentiels. Il nous a semblé intéressant de donner dans cette thèse une démonstration élémentaire de ce résultat.

Introduisons tout d'abord l'espace $L^{2,s}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad L^{2,s}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}), \quad f(x)(1+x^2)^{s/2} \in L^2(\mathbb{R}) \right\} \tag{B.6}$$

muni de la norme :

$$\|f\|^2_{L^{2,s}} = \int_{\mathbb{R}} f(x)(1+x^2)^s \, dx$$

Nous cherchons l'image par la TFB de cet espace. Nous allons commencer par énoncer des résultats pour les espaces tels que $s = m$ est un entier. Le résultat est donné dans le théorème B.1.33, mais un certain nombre de définitions sont nécessaires avant tout. Puis, de manière très classique, nous élargirons au cas général s réel. Nous ne présenterons que le cas s positif puisque c'est ce cas là que nous utiliserons dans la suite.

B.1.4.1 Les espaces $H^m(\mathcal{C}^*, X)$, avec m entier

Soit X un espace de Banach. Typiquement, X est un espace de Sobolev H^r.

DÉFINITION B.1.23
On définit l'espace $H^m(\mathcal{C}^*, X)$ *par :*

$$H^m(\mathcal{C}^*, X) = \{\hat{f}, \quad \int_{\mathcal{C}^*} \|\partial_k^\alpha \hat{f}(\cdot;k)\|^2_X \, dk < \infty, \quad \forall \alpha \leq m\}$$

muni de la norme :

$$\|\hat{f}\|^2_{H^m(\mathcal{C}^*,X)} = \sum_{\alpha\leq m}\int_{\mathcal{C}^*}\|\partial_k^\alpha \hat{f}(\cdot;k)\|^2_X\, dk.$$

Un cas particulier intéressant est le cas $X = L^2(\mathcal{C})$:

DÉFINITION B.1.24
On définit l'espace $H^m(\mathcal{C}^*, L^2(\mathcal{C}))$ par :

$$H^m(\mathcal{C}^*, L^2(\mathcal{C})) = \{\hat{f}, \quad \partial_k^\alpha \hat{f} \in L^2(\mathcal{C}^*, L^2(\mathcal{C})), \quad \forall \alpha \leq m\}, \tag{B.7}$$

muni de la norme :

$$\|\hat{f}\|^2_{H^m(\mathcal{C}^*,L^2(\mathcal{C}))} = \sum_{\alpha\leq m}\|\partial_k^\alpha \hat{f}\|^2. \tag{B.8}$$

C'est un espace de Hilbert, le produit scalaire de deux éléments f et g de $H^m(\mathcal{C}^*, L^2(\mathcal{C}))$ étant donné par :

$$(\hat{f},\hat{g})_{H^m(\mathcal{C}^*,L^2(\mathcal{C}))} = \sum_{\alpha\leq m}(\partial_k^\alpha \hat{f}, \partial_k^\alpha \hat{f}).$$

REMARQUE B.1.25
Pour m entier et par définition, on montre facilement que :

$$H^m(\mathcal{C}^*, L^2(\mathcal{C})) \equiv L^2(\mathcal{C}, H^m(\mathcal{C}^*))$$

Nous allons donner une caractérisation de $H^m(\mathcal{C}^*, X)$ équivalente à (B.7) en utilisant un développement en "séries de Fourier".

Commençons par L^2.

PROPOSITION B.1.26
Soit $\hat{f} \in L^2(\mathcal{C}^*, X)$ alors il existe une unique suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\ell^2(X)$ telle que :

$$\hat{f}(\cdot;k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}_n e^{-\imath nk} \quad \textit{avec} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f_n \in X$$

On a :

$$\|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathcal{C}^*,X)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\|\hat{f}_n\|^2_X$$

■ **PREUVE:** La famille de fonctions $(k \mapsto \exp(\imath nk))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale complète dans $L^2(\mathcal{C}^*)$ (c'est une famille de vecteurs propres du laplacien défini dans $H^2(\mathcal{C}^*)$, opérateur autoadjoint à résolvante compacte). On notera $< \cdot, \cdot >$ le crochet de dualité entre X et son dual noté X'. Si $\hat{f} \in L^2(\mathcal{C}^*, X)$ alors pour tout élément g de X', l'application :

$$k \mapsto \left\langle \hat{f}(\cdot;k), g \right\rangle$$

est une fonction $L^2(\mathcal{C}^*)$ qui se développe à l'aide d'une série de Fourier :

$$\text{p.p. } k, \quad \left\langle \hat{f}(\cdot;k), g \right\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}_n(g)e^{-\imath nk}$$

où $\hat{f}_n(g)$ est défini par :

$$\hat{f}_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}^*} \langle \hat{f}(\cdot;k), g\rangle e^{\imath nk}\, dk.$$

et telle que :

$$\|\langle \hat{f}(\cdot;k), g\rangle\|^2_{L^2(\mathcal{C}^*)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n(g)|^2$$

On remarque que $g \mapsto \hat{f}_n(g)$ est une application linéaire continue. Grâce au théorème de Riesz, il existe un élément de X que nous noterons par convention :

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}^*} \hat{f}(\cdot;k) e^{\imath nk}\, dk.$$

telle que

$$\hat{f}_n(g) = \langle \hat{f}_n, g\rangle$$

La suite $(\hat{f}_n)_n \in \mathbb{Z}$ est une suite de $\ell^2(X)$. En effet, par définition :

$$\|\hat{f}_n\|^2_X = \sup_{g\in X', \|g\|=1} \langle \hat{f}_n, g\rangle = \sup_{g\in X', \|g\|=1} \hat{f}_n(g)$$

de plus pour tout g, la suite $(\hat{f}_n(g))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de $\ell^2(\mathbb{R})$. On peut donc intervertir l'intégrale par rapport à k et la série en n :

$$\forall g \in X', \quad \langle \hat{f}(\cdot;k), g\rangle = \langle \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n, g\rangle$$

On a donc l'égalité. On a enfin

$$\|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathcal{C}^*,X)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\hat{f}_n\|^2_X$$

toujours parce que la suite $(\hat{f}_n)_n \in \mathbb{Z}$ étant dans $\ell^2(X)$, on peut intervertir l'intégrale par rapport à k et la série. ■

REMARQUE B.1.27
Si $X = L^2(\mathcal{C})$ alors tout élément $\hat{f}$ de $L^2(\mathcal{C}^*, X)$ est la transformée de Floquet d'une fonction f et par définition, on peut expliciter les $\hat{f}_n$:

$$\forall x \in \mathcal{C}, \quad \hat{f}_n(x) = \sqrt{2\pi}\, f(x+n).$$

PROPOSITION B.1.28
Soit m un entier. On peut définir $H^m(\mathcal{C}^*, X)$ par (B.7) *ou par :*

$$H^m(\mathcal{C}^*, X) = \{\hat{f} \in L^2(\mathcal{C}^*, X), \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^m \|\hat{f}_n\|^2_X < \infty\}, \tag{B.9}$$

la norme :

$$|||\hat{f}|||^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^m \|\hat{f}_n\|^2_X \tag{B.10}$$

étant équivalente à la norme (B.8).

■ **PREUVE:** Soit $\hat{f}$ une fonction de $H^m(\mathcal{C}^*, X)$, on voit facilement en utilisant la proposition B.1.26 que :

$$\forall \alpha \le m, \quad \partial_k^\alpha \hat{f} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-\imath n)^\alpha \hat{f}_n e^{-\imath nk}$$

et donc que :

$$\forall \alpha \leq m, \quad \|\partial_k^\alpha \hat{f}\|^2_{L^2(\mathcal{C}^*,X)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (n)^{2\alpha} \|\hat{f}_n\|^2_X$$

La norme (B.8) donne donc :

$$\|\hat{f}\|_{H^m(\mathcal{C}^*,X)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{\alpha\leq m} (n)^{2\alpha} \|\hat{f}_n\|^2_X$$

mais comme il existe une constante C telle que :

$$(1+n^2)^{2m} \leq \sum_{\alpha\leq m} (n)^{2\alpha} \leq C(1+n^2)^{2m}.$$

Les deux expressions précédentes jointes à (B.10) donne

$$|||\hat{f}|||^2 \leq \|\hat{f}\|_{H^m(\mathcal{C}^*,X)} \leq C|||\hat{f}|||^2$$

■

Dans la sous-section suivante et de manière très classique, nous élargissons ces définitions au cas s réel positif.

B.1.4.2 Les espaces $H^s(\mathcal{C}^*, X)$, avec s réel

Définissons les espaces ($s \in \mathbb{R}^+$) d'ordre fractionnaire :

DÉFINITION B.1.29

$$H^s(\mathcal{C}^*, X) = \{\hat{f} \in L^2(\mathcal{C}^*, X), \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^s \|\hat{f}_n\|^2_X < \infty\}, \tag{B.11}$$

que l'on munit de la norme :

$$\|\hat{f}\|^2_{H^s(\mathcal{C}^*,X)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^s \|\hat{f}_n\|^2_X \tag{B.12}$$

ce qui en fait un espace de Hilbert.

PROPOSITION B.1.30
Soit m entier alors on a :

$$\forall \theta, \quad 0<\theta<1, \quad \Big[H^m(\mathcal{C}^*, X), L^2(\mathcal{C}^*, X)\Big]_\theta = H^{(1-\theta)m}(\mathcal{C}^*, X)$$

avec normes équivalentes.

■ **PREUVE:** En utilisant les propriétés classiques de la série de Fourier, la Proposition B.1.28, et sa preuve, on montre facilement que $L^2(\mathcal{C}^*, X)$ est isomorphe à $\ell^2(X)$ dont on rappelle la définition :

$$\ell^2(X) = \{(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ suite d'éléments de } X, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\hat{f}_n\|^2_X < \infty\}$$

et que $H^m(\mathcal{C}^*, X)$ est isomorphe à l'espace suivant

$$h^m(X) = \{(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(X), \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)^m \ \|\hat{f}_n\|^2_X < \infty\}$$

Il suffit alors de prendre comme opérateur d'interpolation :

$$\begin{array}{rccc} \Lambda: & h^m(X) & \rightarrow & \ell^2(X) \\ & (\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & ((1+n^2)^{m/2}\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

On obtient facilement que :

$$\Lambda^\theta\,(\hat{f}_n)_n = ((1+n^2)^{\theta m/2}\hat{f}_n)_n$$

et donc

$$\Big[h^m(X),\ell^2(X)\Big]_\theta = D(\Lambda^{1-\theta}) = h^{m(1-\theta)}(X).$$

■

Enfin pour $s<0$, il faut introduire $\mathcal{S}'(\mathcal{C}*,X)$ l'espace des distributions de L. Schwartz et montrer que la Proposition s'étend à $\mathcal{S}'$, en utilisant les mêmes idées que pour la Transformée de Fourier.

DÉFINITION B.1.31
Soit $s\in\mathbb{R}$.

$$H^s(\mathcal{C}^*,X) = \{\hat{f}\in\mathcal{S}'(\mathcal{C}^*,X), \sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^s\|\hat{f}_n\|_X^2<\infty\}, \tag{B.13}$$

que l'on munit de la norme :

$$\|\hat{f}\|^2_{H^s(\mathcal{C}^*,X)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^s\|\hat{f}_n\|_X^2 \tag{B.14}$$

ce qui en fait un espace de Hilbert.

Enfin, en utilisant les mêmes arguments que dans [Lions & Magenes (1968)] (Th. 7.2, Chap1), on montre le théorème suivant

THÉORÈME B.1.32
Pour $X=L^2(\mathcal{C})$, l'espace $L^2(\mathcal{C}^*,X)$ étant identifié à son dual, on a pour tout $s>0$

$$H^{-s}(\mathcal{C}^*,X) = \big[H^s(\mathcal{C}^*,X)\big]'.$$

B.1.4.3 Image par la TFB des espaces $L^{2,s}(\mathbb{R})$

La caractérisation des espaces $H^s(\mathcal{C}^*,L^2(\mathcal{C}))$ dans la Définition B.1.29 nous donne le théorème suivant. C'est le théorème important de cette section.

THÉORÈME B.1.33
Soit $s\in\mathbb{R}$. La transformée de Floquet Bloch est un isomorphisme topologique de $L^{2,s}(\mathbb{R})$ dans $H^s(\mathcal{C}^*,L^2(\mathcal{C}))$.

■ **PREUVE:** Soit f une fonction C^∞ à support compact. On appelle $\hat{f}$ sa transformée de Floquet Bloch. Par définition :

$$\forall x\in\mathcal{C},\ \forall k\in\mathcal{C}^*,\quad \hat{f}(x;k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)e^{-\imath nk}$$

par définition

$$\|\hat{f}\|^2_{H^s(\mathcal{C}^*,L^2(\mathcal{C}))} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^s\|\hat{f}_n\|^2_{L^2(\mathcal{C})} = 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^s\int_{\mathcal{C}}|f(x+n)|^2\,dx$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\|\hat{f}\|^2_{H^s(\mathcal{C}^*,L^2(\mathcal{C}))} &= 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^s\int_{x=0}^{1}|f(x+n)|^2\,dx\\ &= 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^s\int_{x=n}^{n+1}|f(x)|^2\,dx\\ &\leq 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{x=n}^{n+1}(1+x^2)^m|f(x)|^2\,dx\\ &\leq 2\pi\int_{\mathbb{R}}(1+x^2)^m|f(x)|^2\,dx = \|f\|^2_{L^{2,m}}\end{aligned}$$

■

Nous allons maintenant combiner les résultats des sections précédentes : les sections B.1.3 et B.1.4.

B.1.4.4 Extension aux espaces $H^{r,s}(\mathbb{R})$ avec $r \in \mathbb{R}$

Dans cette section, nous allons un peu plus loin que les résultats présentés dans [Levendorskiĭ (1998)]. Introduisons les espaces $H^{m,s}(\mathbb{R})$ avec m entier, défini par :

$$\forall s\in\mathbb{R},\quad H^{m,s}(\mathbb{R}) = \left\{f\in H^m_{loc}(\mathbb{R}),\quad \forall\alpha\leq m,\quad (1+x^2)^{s/2}\,\partial^\alpha_x f(x)\in L^2\right\} \tag{B.15}$$

muni de la norme :

$$\|f\|^2_{H^{m,s}} = \sum_{\alpha\leq m}\|\partial^\alpha_x f\|^2_{L^{2,s}} \tag{B.16}$$

REMARQUE B.1.34
Soit $f\in L^2(\mathbb{R})$, on appelle $\hat{\hat{f}}$ (pour ne pas confondre avec sa transformée de Floquet Bloch) sa transformée de Fourier, on remarque alors que :

$$\begin{aligned}f\in H^r(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \hat{\hat{f}}\in L^{2,r}(\mathbb{R})\\ f\in L^{2,s}(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \hat{\hat{f}}\in H^s(\mathbb{R})\\ f\in H^{m,s}(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow (1+\xi^2)^{m/2}\hat{\hat{f}}\in H^s(\mathbb{R})\end{aligned}$$

Les espaces $H^{r,s}(\mathbb{R})$ pour $r>0$ réel sont définis par interpolation (voir la remarque précédente) :

$$\forall s\in\mathbb{R},\quad \forall m\in\mathbb{N},\quad \forall\theta,\ 0\leq\theta\leq 1,\quad H^{(1-\theta)m,s}(\mathbb{R}) = \left[H^{m,s}(\mathbb{R}),L^{2,s}(\mathbb{R})\right]_\theta$$

Et enfin l'espace $L^2(\mathbb{R})$ étant identifié à son dual, les espaces $H^{r,s}(\mathbb{R})$ pour $r<0$ réel sont définis par dualité :

$$\forall s\in\mathbb{R},\forall r>0,\quad H^{-r,s}(\mathbb{R}) = \left(H^{r,-s}(\mathbb{R})\right)'.$$

Nous cherchons l'image par la TFB de cet espace. En utilisant la caractérisation des espaces $H^s(\mathcal{C}^*,X)$ pour $X = H^m_k(\mathcal{C})$ et les définitions et résultats de la section B.1.3, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME B.1.35
Soit $s \in \mathbb{R}$ et r réel. La transformée de Floquet Bloch est un isomorphisme topologique de $H^r_s(\mathbb{R})$ dans l'espace que nous noterons $H^s(\mathcal{C}^*, H^r_k(\mathcal{C}))$.

■ **PREUVE:** Il est facile de voir que pour $r > 0$, $H^{r,s}(\mathbb{R}) \subset L^{2,s}(\mathbb{R})$ donc si $f \in H^{r,s}(\mathbb{R})$ alors sa transformée de Floquet Bloch $\hat{f} \in H^s(\mathcal{C}^*, L^2(\mathcal{C}))$. De plus, comme $H^{r,s}(\mathbb{R}) \subset H^r(\mathbb{R})$ alors si $f \in H^{r,s}(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in L^2(\mathcal{C}^*, H^r_k(\mathcal{C}))$.
Supposons tout d'abord que $r = m$ est un entier. Prenons comme dans la preuve du théorème B.1.33 f une fonction C^∞ à support compact. Soit $\hat{f}$ sa transformée de Floquet Bloch. Par définition :

$$\forall x \in \mathcal{C},\ \forall k \in \mathcal{C}^*, \quad \hat{f}(x;k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)e^{-\imath nk}$$

et

$$\|\hat{f}\|^2_{H^s(\mathcal{C}^*,H^m_k(\mathcal{C}))} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^s\|\hat{f}_n\|^2_{H^m(\mathcal{C})} = 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^s\sum_{\alpha\le m}\int_{\mathcal{C}}|\partial^\alpha_x f(x+n)|^2\,dx$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\|\hat{f}\|^2_{H^s(\mathcal{C}^*,H^m_k(\mathcal{C}))} &= 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^s\sum_{\alpha\le m}\int_{x=0}^{1}|\partial^\alpha_x f(x+n)|^2\,dx\\
&= 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^s\sum_{\alpha\le m}\int_{x=n}^{n+1}|\partial^\alpha_x f(x)|^2\,dx\\
&\le 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{\alpha\le m}\int_{x=n}^{n+1}(1+x^2)^m|\partial^\alpha_x f(x)|^2\,dx\\
&\le 2\pi\sum_{\alpha\le m}\int_{\mathbb{R}}(1+x^2)^m|\partial^\alpha_x f(x)|^2\,dx \le 2\pi\|f\|^2_{H^{m,s}}
\end{aligned}$$

Pour r réel positif, on utilise le théorème d'interpolation. En effet $\mathcal{F}$ est un isomorphisme topologique de $L^{2,s}(\mathbb{R})$ dans $H^s(\mathcal{C}^*, L^2(\mathcal{C}))$ et, comme nous venons de le voir de $H^{m,s}(\mathbb{R})$ dans $H^s(\mathcal{C}^*, H^m_k(\mathcal{C}))$. On a donc, d'après Lions & Magenes (1968)

$$\mathcal{F} \in \mathcal{L}\Big(\Big[H^{m,s}(\mathbb{R}), L^{2,s}(\mathbb{R})\Big]_\theta, \Big[H^s(\mathcal{C}^*, H^m_k(\mathcal{C})), H^s(\mathcal{C}^*, L^2(\mathcal{C}))\Big]_\theta\Big)$$

On remarque enfin que :

$$\Big[H^s(\mathcal{C}^*, H^m_k(\mathcal{C})), H^s(\mathcal{C}^*, L^2(\mathcal{C}))\Big]_\theta = H^s(\mathcal{C}^*, [H^m_k(\mathcal{C}), L^2(\mathcal{C})]_\theta)$$

Enfin pour les r réels négatifs, la Transformée de Floquet Bloch d'un élément de $H^{r,s}(\mathbb{R})$ pour $r < 0$ et $s \in \mathbb{R}$ est définie par dualité :

$$\forall \hat{g} \in H^{-s}(\mathcal{C}^*, H^{-r}_k(\mathcal{C})), \quad \Big\langle \mathcal{F}f, \hat{g}\Big\rangle_{L^2(\mathcal{C}^*,L^2(\mathcal{C}))} = \Big\langle f, \mathcal{F}^{-1}\hat{g}\Big\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

où $<\cdot,\cdot>_{L^2(\mathcal{C}^*,L^2(\mathcal{C}))}$ est le crochet de dualité entre $H^s(\mathcal{C}^*, H^r_k(\mathcal{C}))$ et $H^{-s}(\mathcal{C}^*, H^{-r}_k(\mathcal{C}))$ et $<\cdot,\cdot>_{L^2(\mathbb{R})}$ est le crochet de dualité entre $H^{r,s}(\mathbb{R})$ et $H^{-r,-s}(\mathbb{R})$.

la démonstration du théorème pour r négatif découle donc de cette définition. ■

REMARQUE B.1.36 (CAS DES FONCTIONS QUASI-PÉRIODIQUES)
Un exemple important de ce théorème est le cas des fonctions quasi-périodiques. Soit $f_0 \in H^r_{-1}(\mathbb{R})$ définie par

$$f_0(x) = u_0(x)\,e^{\imath k_0 xL}, \quad \textit{avec } u_0 \in H^r_{loc}(\mathbb{R})\ L-\textit{périodique et } k_0 \in]-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}]$$

On montre grâce à ce théorème que

$$\mathcal{F}_L\, f_0 = u_0|_{]-\frac{L}{2};\frac{L}{2}]}\, \delta_{k=k_0} \quad \in H^{-1}(]-\frac{\pi}{L},\frac{\pi}{L}],H^r(]-\frac{L}{2};\frac{L}{2}]))$$

B.2 Quelques éléments de théorie spectrale des opérateurs non autoadjoints

Tous les résultats que nous donnons ici ne sont pas démontrés, on se reportera à [Gohberg & Kreĭn (1969) ; Intissar (1997) ; Aimar *et al.* (1996)] par exemple, pour plus de précisions sur ces résultats et leurs démonstrations.

B.2.1 Spectre d'un opérateur linéaire

NOTATION B.2.1
Soient E un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E)$ (ensemble des opérateurs bornés d'un espace E), on peut décomposer le spectre de T de la façon suivante :

- *Spectre ponctuel : $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\quad \lambda I - T$ est non injectif$\}$: ensemble des valeurs propres.*
- *Spectre continu : $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\quad \lambda I - T$ est injectif, $\mathrm{Im}(\lambda I - T)$ dense dans $E\}$*
- *Spectre résiduel : $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\quad \lambda I - T$ est injectif, $\mathrm{Im}(\lambda I - T)$ non dense dans $E\}$*

Rappelons que pour un opérateur linéaire borné T sur un espace de Hilbert E, l'adjoint est défini comme suit : pour tout y dans E, la forme linéaire $\mathcal{T}_y(x) =< Tx, y >$ est bornée sur E, et d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $z \in E$ tel que $< Tx, y >= \mathcal{T}_y(x) =< x, z >,\ x \in E$. On définit $T^*y = z$, T^* est alors un opérateur linéaire borné de E dans lui même et $< Tx, y >=< x, T^*y >$ pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$.

Supposons maintenant que T est de domaine (noté $D(T)$) dense mais non borné, alors pour tout y dans E, la forme $\mathcal{T}_y$ définie sur $D(T)$ comme précédemment peut ne pas être bornée et le théorème de Riesz peut ne plus être appliqué. On doit donc modifier la définition ci-dessus pour définir T^*.

DÉFINITION B.2.2 (ADJOINT D'UN OPÉRATEUR)
On suppose $D(T)$ dense dans E, on appelle l'adjoint de T, l'opérateur T^* défini par

$$D(T^*) = \left\{\psi \in E;\ \exists c(\psi) > 0,\quad |\langle T\varphi, \psi\rangle| \leq c(\psi)\, \|\varphi\|_E,\ \forall \varphi \in D(T)\right\}$$

et T^* est une application linéaire de $D(T^*)$ dans E telle que

$$\forall \varphi \in D(T),\quad \langle T\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, T^*\psi\rangle$$

PROPOSITION B.2.3
Soient E un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E)$ alors :

$$Sp(T^*) = \{\overline{\lambda},\quad \lambda \in Sp(T)\}.$$

De plus,

$$\sigma_c(T^*) = \overline{\sigma_c(T)}$$

$$\sigma_r(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T^*), \quad \overline{\lambda} \in \sigma_p(T)\}$$

En particulier, si λ est valeur propre de T, alors $\overline{\lambda}$ est soit valeur propre de T^*, soit dans son spectre résiduel.

On finit par énoncer un théorème d'importance fondamentale pour les opérateurs auto-adjoints bornés.

THÉORÈME B.2.4
Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint, alors

$$\|T\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle T\varphi, \varphi \rangle|.$$

B.2.2 Opérateurs compacts et Propriétés

B.2.2.1 Définition d'un opérateur compact

DÉFINITION B.2.5 (OPÉRATEUR COMPACT)
Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, on dit que T est un opérateur est un opérateur compact si l'image de la boule unité de E est relativement compacte pour la topologie forte.

On note par $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble des opérateurs compacts.

B.2.2.2 Quelques propriétés classiques des opérateurs compacts

- $\mathcal{K}(E)$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E)$ et un idéal bilatère de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.
- Soit $T \in \mathcal{L}E$ alors T est compact et si et seulement si T^* est compact.

Soit $T \in \mathcal{K}(E)$.

- Si $\lambda \in \sigma_p(T)$ avec $\lambda \neq 0$ alors l'espace propre associée à λ est de dimension finie.
- $\forall \eta > 0$ il ne reste dans le plan complexe en dehors d'un disque $\lambda < \eta$ qu'un nombre fini de valeurs propres de T.
- Si $\lambda \neq 0$ n'est valeur propre ni de T ni de son adjoint, alors λ n'est pas dans le spectre de T.
- Le spectre d'un opérateur compact est à zéro près, identique à l'ensemble des valeurs propres de T et des conjugués des valeurs propres de T^*. Il possède uniquement 0 comme point d'accumulation.

DÉFINITION B.2.6
Soient T_1 et T_2 deux opérateurs sur un espace de Hilbert E, tels que $D(T_1) \subset D(T_2)$.

T_2 est T_1-compact si, pour toute suite $(\varphi_k)_k$ dans $D(T_1)$ telle que les suites $(\varphi_k)_k$ et $(T_1\varphi_k)_k$ soient bornées, on peut extraire de la suite $(T_2\varphi_k)_k$ une sous-suite convergente.

B.2.2.3 Diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints

On pourra consulter [Dunford & Schwartz (1963) ; Kato (1995)] pour une étude spectrale complète des opérateurs auto adjoints (compacts ou non). Enonçons néanmoins le résultat classique obtenu en utilisant les propriétés générales des opérateurs auto-adjoints.

THÉORÈME B.2.7 (VALEURS PROPRES D'UN OPÉRATEUR AUTOADJOINT)
Toutes les valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint compact T sont réelles et sont situées dans $[m, M]$ où

$$m = \inf_{\|\varphi\|=1} \langle T\varphi, \varphi \rangle \quad \textit{et} \quad M = \sup_{\|\varphi\|=1} \langle T\varphi, \varphi \rangle$$

Donnons enfin le résultat classique concernant les opérateurs auto-adjoints compacts

THÉORÈME B.2.8 (DE HILBERT-SCHMIDT)
Soit T un opérateur compact et autoadjoint sur un espace de Hilbert E. Alors la famille de vecteurs propres forment une famille complète orthonormale de E.

B.2.2.4 Opérateurs à résolvante compacte

Lorsqu'un opérateur non borné n'est ni autoadjoint ni normal, on étudie souvent ses propriétés spectrales par l'intermédiaire de sa résolvante.

DÉFINITION B.2.9 (OPÉRATEURS À RÉSOLVANTE COMPACTE)
Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ de domaine dense dans E est dit à résolvante compacte si
- *son ensemble résolvant est non vide ;*
- *sa résolvante $R(\lambda)$ est compacte pour tout $\lambda \in \rho(T)$.*

Il existe deux caractérisations des opérateurs à résolvante compacte importantes

PROPOSITION B.2.10
Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\rho(T) \neq \emptyset$ alors $R(\lambda)$ est compacte si et seulement si l'injection de $D(T)$ dans E est compacte.

PROPOSITION B.2.11
Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_0 \in \rho(T)$ tel que $R(\lambda_0)$ soit compacte, alors l'opérateur T est à résolvante compacte.

B.2.2.5 Valeurs singulières d'un opérateur compact

Une difficulté essentielle dans l'étude des opérateurs compacts non auto-adjoints est qu'il en existe ne possédant pas de valeurs propres.

Exemple : Soit T un opérateur linéaire continu de $L^2([0,1])$ tel que :

$$T : u \mapsto \int_0^x u(t)\, dt.$$

T est compact, injectif, non inversible. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de T, alors si u est un des vecteurs propres associés alors :

$$Tu(x) = e^{x/\lambda} Tu(0) = 0$$

Soit $\lambda = 0$ est la seule valeur propre possible. On montre de la même façon que le spectre de T est réduit à 0.

Les valeurs singulières jouent un rôle important dans l'édification de la théorie générale des opérateurs $\mathcal{L}_p$ de classe de Carleman ainsi que dans l'étude des propriétés asymptotiques du spectre.

DÉFINITION B.2.12
Les valeurs singulières d'un opérateur compact T sont par définition les valeurs propres de $\sqrt{T^*T}$. On les note $(s_j(T))_j$.

REMARQUE B.2.13
Notons que T^*T est compact positif et autoadjoint sur E. Soit $\lambda_1(T^*T) \geq \lambda_2(T^*T) \geq \ldots$ la suite des valeurs propres non nulle de T^*T où chaque valeur propre est répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité. On note $s_j(T) = \sqrt{\lambda_j(T^*T)}$.

DÉFINITION B.2.14
Soit $p > 0$, on appelle classe des opérateurs de Carleman d'ordre p l'ensemble :

$$\mathcal{L}_p = \{T \in \mathcal{L}_\infty;\ \sum_{n=1}^{\infty} [s_n(T)]^p < \infty\}.$$

$\mathcal{L}_1$ est aussi appelée classe des opérateurs à trace (nucléaire) et $\mathcal{L}_2$ classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

B.2.3 Théorème de complétude des vecteurs propres généralisés d'une classe d'opérateurs compacts non auto-adjoints

Soit T un opérateur linéaire, fermé, de domaine $D(T)$ dense dans un espace de Hilbert E muni d'un produit scalaire noté $< \cdot, \cdot >$. On suppose que T est un opérateur à résolvante compacte et on désigne par $\rho(T)$ son ensemble résolvant, alors son spectre $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ est discret, formé uniquement de valeurs propres et composé d'une suite de nombres complexes $\{\lambda_i\}_i$ qu'on ordonne de façon croissante tels que $\lim|\lambda_i| = +\infty$ lorsque $i \to +\infty$.

DÉFINITION B.2.15 (VECTEURS PROPRES GÉNÉRALISÉS)
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout k, les sous espaces $Ker(\lambda I - T)^k$ (de dimension finie) et $Im(\lambda I - T)^k$ (fermé) sont invariants par rapport à T. La suite des sous-espaces $(Ker(\lambda I - T)^k)_k$ est croissante, celle des sous-espaces $(Im(\lambda I - T)^k)_k$ est décroissante. Les deux suites sont stationnaires à partir du même rang m et on a :

$$E = Ker(\lambda I - T)^m \oplus Im(\lambda I - T)^m$$

$$(\lambda I - T)^m|_{D(T^m) \cap Im(\lambda I - T)^m} \text{ est inversible.}$$

m est appelé l'indice de λ, la dimension de $Ker(\lambda I - T)$ est la multiplicité géométrique de λ et la dimension de $Ker(\lambda I - T)^m$ est la multiplicité algébrique de λ.

Les éléments de Ker$(\lambda I - T)^m$ sont appelés les vecteurs propres généralisés de T associés à λ.

DÉFINITION B.2.16 (OPÉRATEUR « JORDANISABLE »)
On dit que le système des vecteurs propres généralisés de T est dense dans E ou encore que T est « jordanisable » si l'ensemble :

$$\bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} Ker(\lambda I - T)^{m(\lambda)}$$

est dense dans E.

REMARQUE B.2.17
C'est en quelque sorte la généralisation de la décomposition de Jordan en dimension infinie.

THÉORÈME B.2.18 (KELDYS (1))
Soit E un espace de Hilbert.
Soit H un opérateur autoadjoint de $\mathcal{L}_p$, K un opérateur compact. Soit T :

$$T = H(I + K)$$

Si T est injectif alors le système de vecteurs propres généralisés de T est complet.

De plus, pour tout $\eta > 0$, toutes les valeurs propres de T sauf un nombre fini d'entre elles sont dans les secteurs :

$$-\eta < arg(\lambda) < \eta \quad \textit{et} \quad \pi - \eta < arg(\lambda) < \pi + \eta$$

Si H a un nombre fini de valeurs propres négatives alors T en a également un nombre fini dans le secteur :

$$\pi - \eta < arg(\lambda) < \pi + \eta$$

COROLLAIRE B.2.19
Si T a un système de vecteurs propres généralisés complet, il en est de même de tous les opérateurs semblables à T.

Le théorème précédent peut être généralisé à T de la forme $(I + K_1)H(I + K_2)$ où les K_i sont compacts et les opérateurs $(I + K_i)$ inversibles.

THÉORÈME B.2.20 (KELDYS (2))
Soit E un espace de Hilbert.

Soit $A = L + T$, où L est un opérateur autoadjoint à spectre discret, c'est-à-dire dont le spectre est formé de valeurs propres isolées de multiplicité finie avec un seul point d'accumulation à l'infini, et T un opérateur L-compact. On suppose qu'il existe $\lambda_0 \in \rho(L)$ (ensemble résolvant de L) tel que l'opérateur $(L - \lambda_0 Id)^{-1} T (L - \lambda_0 Id)^{-1}$ soit de classe $\mathcal{L}_p$ de Carleman. Alors le système des vecteurs propres généralisés de l'opérateur A est dense dans E.

BIBLIOGRAPHIE

ABBOUD T. (1993). Electromagnetic waves in periodic media. In *Second International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (Newark, DE, 1993)*, p. 1–9, SIAM, Philadelphia, PA. 5, 394

ABOUDI J. (1991). *Mechanics of composite materials*, vol. 29 de *Studies in applied mechanics*. Esevier, Amsterdam. 1

AGMON S. (1982). *Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations : bounds on eigenfunctions of N-body Schrödinger operators*, vol. 29 de *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ. 7, 153, 169

AIMAR M.T., INTISSAR A. & PAOLI J.M. (1996). Critères de complétude des vecteurs propres généralisés d'une classe d'opérateurs non auto-adjoints compacts ou à résolvante compacte et applications. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 32(2) :191–205. 436

ALLAIRE G. (1992). Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(6) :1482–1518. 3, 403

ALLAIRE G. (2002). *Shape optimization by the homogenization method*, vol. 146 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York. 3, 403

ANDERSON J. (1973). On normal derivations. *Proc. Am. Math. Soc.*, 38(135-140). 133

ARENS T., CHANDLER-WILDE S.N. & DESANTO J.A. (2006). On integral equation and least squares methods for scaterring by diffraction gratings. *Commun. Comput. Phys.*, 1(6) :1010–1042. 394

BALABANE M. & TIREL V. (1997). Décomposition de domaine pour un calcul hybride de l'équation de Helmholtz. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 324(3) :281–286. 360

BAMBERGER A., GUILLOT J.C. & JOLY P. (1988). Numerical diffraction by a uniform grid. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25(4) :753–783. 328, 343, 345

BAO G. (1997). Variational approximation of Maxwell's equations in biperiodic structures. *SIAM J. Appl. Math.*, 57(2) :364–381. 394

BAYLISS A. & TURKEL E. (1980). Radiation boundary conditions for wave-like equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33(6) :707–725. 4

BEN HASSEN F., LIU J. & POTTHAST R. (2007). On source analysis by wave splitting with applications in inverse scattering of multiple obstacles. *J. Comput. Math.*, 25(3) :266–281. 360

BENSOUSSAN A., LIONS J.L. & PAPANICOLAOU G. (1978). *Asymptotic analysis for periodic structures*, vol. 5 de *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam. 3, 403

BERENGER J.P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 114(2) :185–200. 4

BIRMAN M.S. & YAFAEV D.R. (1994). The scattering matrix for a perturbation of a periodic Schrödinger operator by decreasing potential. *Algebra i Analiz*, 6(3) :17–39. 169

BONNET-BEN DHIA A.S. & TILLEQUIN A. (2000). A generalized mode matching method for the junction of open waveguides. In *Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Santiago de Compostela, 2000)*, p. 399–403, SIAM, Philadelphia, PA. 394, 396

BONNET-BENDHIA A.S. & TILLEQUIN A. (2001*a*). A generalized mode matching method for scattering problems with unbounded obstacles. *J. Comput. Acoust.*, 9(4) :1611–1631. 394, 396

BONNET-BENDHIA A.S. & TILLEQUIN A. (2001*b*). A limiting absorption principle for scattering problems with unbounded obstacles. *Math. Methods Appl. Sci.*, 24(14) :1089–1111. 394, 396

BORG G. (1946). Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte. *Acta Math.*, 78 :1–96. 2, 35

BOTTEN L., DOSSOU K., S. W., MCPHEDRAN R., DE STERKE C., NICOROVICI N. & ASATRYAN A. (2006). Highly accurate modelling of generalized defect modes in photonic crystals using the fictitious sources superposition method. *Int. J. of Microwave and Optical Technology*, p. 133–145. 5, 361

BOTTEN L.C., NICOROVICI N.A., MCPHEDRAN R.C., STERKE C.M.D. & ASATRYAN A.A. (2001). Photonic band structure calculations using scattering matrices. *Phys. Rev. E*, 64(4) :046603. 361

BOURGEOIS L. & LUNÉVILLE E. (2008). The linear sampling method in a waveguide : a modal formulation. *Inverse Problems*, 24. 361

BRAGA A. M. B. H.G. (1992). Floquet waves in anisotropic periodically layered composites. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91 :1211–1227. 18

BREZIS H. (1983). *Analyse fonctionnelle*, vol. Théorie et applications. [Theory and applications] de *Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]*. Masson, Paris. 178, 424

BREZZI F. & FORTIN M. (1991). *Mixed and hybrid finite element methods*, vol. 15 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New York. 117

CHENG H., CRUTCHFIELD W.Y., GIMBUTAS Z., GREENGARD L.F., ETHRIDGE J.F., HUANG J., ROKHLIN V., YARVIN N. & ZHAO J. (2006). A wideband fast multipole method for the Helmholtz equation in three dimensions. *J. Comput. Phys.*, 216(1) :300–325. 357

CHRISTENSEN R. (1979). *Mechanics of composite materials*. John Wiley & Sons Inc., New York. 1

CHU K.W.E. (1987). The solution of the matrix equations $AXB - CXD = E$ and $(YA - DZ, YC - BZ) = (E, F)$. *Linear Algebra Appl.*, 93 :93–105. 133, 135

COIFMAN R., ROKHLIN V. & GREENGARD S. (1993). The fast multipole method for the wave equation : The fast multipole method for the wave equation :a pedestrian prescription. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 35(3) :7–12. 357

COLTON D.L. & KRESS R. (1983). *Integral equation methods in scattering theory*. Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, a Wiley-Interscience Publication. 304, 359

COLTON D.L. & KRESS R. (1998). *Inverse Acoustic ans electromagnetic scattering theory*. Springer-Verlag, 2^{e}édition. 93, 361

DAHLBERG B.E.J. & TRUBOWITZ E. (1982). A remark on two-dimensional periodic potentials. *Comment. Math. Helv.*, 57(1) :130–134. 171

DARVE E. (2000). The fast multipole method. I. Error analysis and asymptotic complexity. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(1) :98–128 (electronic). 357

DAUTRAY R. & LIONS J.L. (1988). *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 2*. Springer-Verlag, Berlin, functional and variational methods, With the collaboration of Michel Artola, Marc Authier, Philippe Bénilan, Michel Cessenat, Jean Michel Combes, Hélène Lanchon, Bertrand Mercier, Claude Wild and Claude Zuily, Translated from the French by Ian N. Sneddon. 272

DUNFORD N. & SCHWARTZ J.T. (1963). *Linear operators. Part II : Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space*. With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Interscience Publishers John Wiley & Sons New York-London. 438

EASTHAM M.S.P. (1973). *The spectral theory of periodic differential equations*. Edinburgh : Scottish Academic Press, Edinburgh-London, distributed by chatto windus édition. 23, 36, 37, 39, 47, 57

EHRHARDT M., HAN H. & ZHENG C. (2008). Numerical simulation of waves in periodic structures. *Communications in Computational Physics*, (to appear). 3, 42, 363

EHRHARDT M. & ZHENG C. (2008). Exact artificial boundary conditions for problems with periodic structures. *J. Comput. Phys.*, 227(14) :6877–6894. 3

ÈĬDUS D.M. (1969). The principle of limiting amplitude. *Uspehi Mat. Nauk*, 24(3(147)) :91–156. 76

ENGHETA N. (2002). An idea for thin subwavelength cavity resonator using metamaterials with negative permittivity and permeability. *IEEE Antennas Wireless Propag.Lett.*, 1 :10–13. 418

ENGQUIST B. & MAJDA A. (1979). Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32(3) :314–358. 4

FIGOTIN A. & GODIN Y.A. (1997). The computation of spectra of some 2D photonic crystals. *J. Comput. Phys.*, 136(2) :585–598. 2, 3

FIGOTIN A. & GORENTSVEIG V. (1998). Localized electromagnetic waves in a periodic-layered dielectric medium with a defect. *Phys. Rev. B*, 58(1) :180–188. 23, 36

FIGOTIN A. & KLEIN A. (1997). Localized classical waves created by defects. *J. Statist. Phys.*, 86(1-2) :165–177. 3

FIGOTIN A. & KLEIN A. (1998). Midgap defect modes in dielectric and acoustic media. *SIAM J. Appl. Math.*, 58(6) :1748–1773 (electronic). 3

FIGOTIN A. & KUCHMENT P. (1996*a*). Band-gap structure of spectra of periodic dielectric and acoustic media. I. Scalar model. *SIAM J. Appl. Math.*, 56(1) :68–88. 2

FIGOTIN A. & KUCHMENT P. (1996*b*). Band-gap structure of spectra of periodic dielectric and acoustic media. II. Two-dimensional photonic crystals. *SIAM J. Appl. Math.*, 56(6) :1561–1620. 2

FLISS S. & JOLY P. (2008). Exact boundary conditions for time-harmonic wave propagation in locally perturbed periodic media. *Applied Numerical Mathematics*, doi :10.1016/j.apnum.2008.12.013. 5

GARDINER J.D., LAUB A.J., AMATO J.J. & MOLER C.B. (1992). Solution of the Sylvester matrix equation $AXB^T + CXD^T = E$. *ACM Trans. Math. Softw.*, 18(2) :223–231. 135, 234

GÉRARD C. & NIER F. (1998). The Mourre theory for analytically fibered operators. *J. Funct. Anal.*, 152(1) :202–219. 169

GIRAULT V. & GLOWINSKI R. (1995). Error analysis of a fictitious domain method applied to a Dirichlet problem. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 12(3) :487–514. 121

GOHBERG I.C. & KREĬN M.G. (1969). *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*. Translated from the Russian by A. Feinstein. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18, American Mathematical Society, Providence, R.I. 108, 436

GRIFFITHS D.J. & STEINKE C.A. (2001). Waves in locally periodic media. *American Journal of Physics*, 69(2) :137–154. 23, 36

GROTE M.J. & KIRSCH C. (2004). Dirichlet-to-Neumann boundary conditions for multiple scattering problems. *J. Comput. Phys.*, 201(2) :630–650. 360

HAGSTROM T. (1999). Radiation boundary conditions for the numerical simulation of waves. In *Acta numerica, 1999*, vol. 8 de *Acta Numer.*, p. 47–106, Cambridge Univ. Press, Cambridge. 88, 156

HARARI I., PATLASHENKO I. & GIVOLI D. (1998). Dirichlet-to-Neumann maps for unbounded wave guides. *J. Comput. Phys.*, 143(1) :200–223. 88, 156

HAZARD C. & LENOIR M. (1996). On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell's equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 27(6) :1597–1630. 4

HOHAGE T., SCHMIDT F. & ZSCHIEDRICH L. (2003*a*). Solving time-harmonic scattering problems based on the pole condition. I. Theory. *SIAM J. Math. Anal.*, 35(1) :183–210 (electronic). 4

HOHAGE T., SCHMIDT F. & ZSCHIEDRICH L. (2003*b*). Solving time-harmonic scattering problems based on the pole condition. II. Convergence of the PML method. *SIAM J. Math. Anal.*, 35(3) :547–560 (electronic). 4

INTISSAR A. (1997). *Analyse fonctionnelle et Théorie spectrale pour les opérateurs compacts non autoadjoints*. Toulouse. 436

JAMI A. & LENOIR M. (1977). Formulation variationnelle pour le couplage entre une méthode d'éléments finis et une représentation intégrale. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 285(4) :A269–A272. 4

JOANNOPOULOS J.D., MEADE R.D. & WINN N. J. (1995). *Photonic Crystal - Molding the Flow of Light*. Princeton Univeristy Press. 1, 407

JOHNSON C. & NÉDÉLEC J.C. (1980). On the coupling of boundary integral and finite element methods. *Math. Comp.*, 35(152) :1063–1079. 4

JOHNSON S. & JOANNOPOULOS J.D. (2002). *Photonic Crystal - The road from theory to practice*. Kluwer Acad. Publ. 1

JOLY P., LI J.R. & FLISS S. (2006). Exact boundary conditions for periodic waveguides containing a local perturbation. *Commun. Comput. Phys.*, 1(6) :945–973. 5

JOLY P. & POIRIER C. (1999). A numerical method for the computation of electromagnetic modes in optical fibres. *Math. Methods Appl. Sci.*, 22(5) :389–447. 361

KARPESHINA Y.E. (1997). *Perturbation theory for the Schrödinger operator with a periodic potential*, vol. 1663 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin. 169

KATO T. (1995). *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, reprint of the 1980 edition. 39, 60, 172, 195, 205, 206, 209, 340, 438

KAW A. (2005). *Mechanics of composite materials*. C R C Press, Incorporated. 1

KECKIC D. (2000). Orthogonality of the range and the kernel of some elementary operators. *Proc. Am. Math. Soc.*, (128) :3369–3377. 133

KRESS R. (1999). *Linear integral equations*, vol. 82 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2^{e}édition. 247, 304, 359

KUCHMENT P. (1993). *Floquet theory for partial differential equations*, vol. 60 de *Operator Theory : Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel. 9, 34, 36, 57, 170, 329, 410, 421

KUCHMENT P. (2001). The mathematics of photonic crystals (chapter 7). In *Mathematical modeling in optical science*, vol. 22 de *Frontiers in applied mathematics*, SIAM, Philadelphia. 1, 2, 9, 410

KUCHMENT P. (2004). On some spectral problems of mathematical physics. In *Partial differential equations and inverse problems*, vol. 362 de *Contemp. Math.*, p. 241–276, Amer. Math. Soc., Providence, RI. 2, 9, 35, 171

LANGTRY T.N., ASATRYAN A.A., BOTTEN L.C., DE STERKE C.M., MCPHEDRAN R.C. & ROBINSON P.A. (2003). Effects of disorder in two-dimensional photonic crystal waveguides. *Phys. Rev. E*, 68(2) :026611. 361

LENOIR M. & TOUNSI A. (1988). The localized finite element method and its application to the two-dimensional sea-keeping problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25(4) :729–752. 88, 156

LEVENDORSKIĬ S.Z. (1998). Acoustic waves in perturbed periodic layer : a limiting absorption principle. *Asymptot. Anal.*, 16(1) :15–24. 160, 169, 173, 188, 429, 434

LEVILLAIN V. (1990). Coupling integral equation methods and finite volume elements for the resolution of time harmonic maxwell's equations in three dimensional heterogeneous medium. *Technical report 222, Centre de Mathematiques appliquees, Ecole Polytechnique*. 4

LIONS J.L. & MAGENES E. (1968). *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17, Dunod, Paris. 110, 170, 172, 261, 269, 424, 426, 427, 428, 433, 435

LOURTIOZ J.M. (2008). *Photonic Crystals - Towards Nanoscale Photonic Devices*. Springer, 2^{e}édition. 410

LUPU A. ;CASSAN E.S.M.L.L.P.J. (2004). Experimental evidence for superprism phenomena in soi photonic crystals. *Optics Express*, 12 :5690–5695. 420

LYFORD W.C. (1978). Spectral analysis of the Laplacian in distorted periodic waveguides. *Math. Ann.*, 236(3) :255–284. 173

MAYSTRE D. & ENOCH S. (2004). Perfect lenses made with left handed materials : Alise's mirror ? *J.Opt.Soc.Amer*, A(21) :122–131. 418

MECERI S. (2003). On the range and the kernel of elementary operators $\sum_i a_i x b_i - x$. *Acta Math. Univ. Comenianae*, LXXII, 2 :191–196. 133

MEIER A., ARENS T., CHANDLER-WILDE S.N. & KIRSCH A. (2000). A Nyström method for a class of integral equations on the real line with applications to scattering by diffraction gratings and rough surfaces. *J. Integral Equations Appl.*, 12(3) :281–321. 394

MONK P. (2003). *Finite element methods for Maxwell's equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, New York. 360

MORGENRÖTHER K. & WERNER P. (1988). On the principles of limiting absorption and limit amplitude for a class of locally perturbed waveguides. I. Time-independent theory. *Math. Methods Appl. Sci.*, 10(2) :125–144. 76

MURATA M. & TSUCHIDA T. (2006). Asymptotics of Green functions and the limiting absorption principle for elliptic operators with periodic coefficients. *J. Math. Kyoto Univ.*, 46(4) :713–754. 36, 328, 341, 345

PARNOVSKI L. (2008). Bethe-Sommerfeld conjecture. *Ann. Henri Poincaré*, 9(3) :457–508. 171

PEDREIRA D.G. & JOLY P. (2001). A method for computing guided waves in integrated optics. I. Mathematical analysis. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(2) :596–623 (electronic). 361

PEDREIRA D.G. & JOLY P. (2001/02). A method for computing guided waves in integrated optics. II. Numerical approximation and error analysis. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(5) :1684–1711 (electronic). 361

PENDRY J. (2000). Negative refraction makes a perfect lens. *Physical Review Letters*, 85 :3966–3969. 418

PENDRY J., HOLDEN A., ROBBINS D. & STEWART W. (1999). Magnetism from conductors, and enhanced non-linear phenomena. *IEEE T. Microw. Theory*, 47 :2075–2084. 418

PETIT R. (ed.) (1980). *Electromagnetic theory of gratings*, vol. 22 de *Topics in Current Physics*. Springer-Verlag, Berlin. 394

POPOV V.N. & SKRIGANOV M.M. (1981). Remark on the structure of the spectrum of a two-dimensional Schrödinger operator with periodic potential. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 109 :131–133, 181, 183–184. 171

POTEL C. & DE BELLEVAL J. (1993*a*). Acoustic propagation in anistropic periodically multilayered media ; a method to solve numerical instabilities. *J. of Applied Physics*, 74(4) :2208–2215. 3

POTEL C. & DE BELLEVAL J. (1993*b*). Propagation in a periodically anisotropic multilayered media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 93(5) :2669–2677. 3

POTEL C., GATIGNOL P. & DE BELLEVAL J. (2001). Energetic criterion for the radiation of floquet waves in infinite anisotropic periodically multilayered media. *Acustica-Acta Acustica*, 87(3) :340–351. 3, 18, 56, 211

RAVIART P.A. & THOMAS J.M. (1977). A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems. In *Mathematical aspects of finite element methods (Proc. Conf., Consiglio Naz. delle Ricerche (C.N.R.), Rome, 1975)*, vol. 606 de *Lecture Notes in Math.*, p. 292–315, Springer, Berlin. 118, 121

REED M. & SIMON B. (1972-1978). *Methods of modern mathematical physics v. I-IV*. Academic Press, New York. 23, 36, 174

SAKODA K. (2001). *Optical Properties of Photonic Crystals*. Springer Verlag Berlin. 1

SKRIGANOV M.M. (1979). Proof of the Bethe-Sommerfeld conjecture in dimension 2. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 248(1) :39–42. 36, 171

SKRIGANOV M.M. (1983). Multidimensional Schrödinger operator with periodic potential. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 47(3) :659–687. 171

SKRIGANOV M.M. (1985). The spectrum band structure of the three-dimensional Schrödinger operator with periodic potential. *Invent. Math.*, 80(1) :107–121. 171

SKRIGANOV M.M. (1987). Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators. *Proc. Steklov Inst. Math.*, (2(171)). 36, 171

SMITH D., PADILLA W., VIER D., NEMAT-NASSER S. & SCHULTZ S. (2000). Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Physical Review Letters*, 84 :4184–4187. 418

SOBOLEV A.V. & WALTHOE J. (2002). Absolute continuity in periodic waveguides. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 85(3) :717–741. 173

SOMMERFELD A. & BETHE M. (1933). *Electron Theory of metals*, vol. 24 de *Handbook of Physics*. Berlin. 171

SOUSSI S. (2005). Convergence of the supercell method for defect modes calculations in photonic crystals. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(3) :1175–1201 (electronic). 5, 361

TAUSCH J. & BUTLER J. (2000). Floquet multipliers of periodic waveguides via Dirichlet-to-Neumann maps. *J. Comput. Phys.*, 159(1) :90–102. 5

TURNSEK A. (2000). Elementary operators and orthogonality. *Linear Algebra and its Applications*, 317 :207–216. 133

WEIDMANN J. (1980). *Linear operators in Hilbert spaces*, vol. 68 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, translated from the German by Joseph Szücs. 100, 281

WEIDMANN J. (1987). *Spectral theory of ordinary differential operators*, vol. 1258 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin. 23, 36

WILCOX C.H. (1967). Steady-state wave propagation in homogeneous anisotropic media. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 25(1967) :201–242. 328, 343

WILCOX C.H. (1978). Asymptotic wave functions and energy distributions in strongly propagative anisotropic media. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 57(3) :275–321. 328, 343

YUAN L. & LU Y.Y. (2006). An efficient bidirectional propagation method based on dirichlet-to-neumann maps. *IEEE Photonics Techn. Lett*, 18 :1967–1969. 3, 5, 42, 363

YUAN L. & LU Y.Y. (2007). A recursive-doubling dirichlet-to-neumann-map method for periodic waveguides. *Journal of Lightwave Technology*, 25(11) :3649–3656. 3, 5, 42, 363