



**HAL**  
open science

## Morphodynamique des rivières: Sélection de la largeur, rides et dunes.

Antoine Fourrière

► **To cite this version:**

Antoine Fourrière. Morphodynamique des rivières: Sélection de la largeur, rides et dunes.. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2009. Français. NNT: . pastel-00005562

**HAL Id: pastel-00005562**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00005562>**

Submitted on 7 Dec 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT  
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (Paris 7)

Spécialité  
PHYSIQUE DES LIQUIDES

ÉCOLE DOCTORALE : de Physique de la Région Parisienne (E.D. 107)

Présentée par  
**Antoine FOURRIÈRE**

**Morphodynamique des rivières**  
**Sélection de largeur, rides et dunes.**  
*River morphodynamics : Width selection, ripples and dunes.*

Soutenue le **lundi 2 mars 2009** à 14h à l'ESPCI.

Composition du jury :

Bruno ANDREOTTI	<i>Co-directeur de thèse</i>
François CHARRU	<i>Rapporteur</i>
Jean-Marc CHOMAZ	<i>Président du jury</i>
Philippe CLAUDIN	<i>Co-directeur de thèse</i>
François MÉTIVIER	<i>Examineur</i>
Antonello PROVENZALE	<i>Examineur</i>
Alexandre VALANCE	<i>Rapporteur</i>

Cette thèse a été effectuée au sein du laboratoire de



Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes  
(UMR 7636, CNRS, ESPCI, P6 y P7) de l'ESPCI à Paris.

---

---

## Résumé

La morphologie des rivières met en jeu deux composantes physiques aujourd'hui encore mal comprises : l'hydrodynamique au-dessus d'un fond érodable et la dynamique du transport sédimentaire. Nous avons mis à jour deux problèmes touchant aux rivières et éclairant chacun de ces aspects.

Nous avons abordé le problème de la sélection de la largeur des rivières de manière expérimentale, en confrontant mesures de terrain et résultats de laboratoire. Nous avons montré que la loi de puissance reliant largeur et débit résulte d'une dynamique locale et non de l'auto-organisation des bassins versants. Nous avons analysé les champs de vitesse moyenne et montré que la diffusion transverse de quantité de mouvement, habituellement négligée, doit être prise en compte pour reproduire les mesures expérimentales.

Pour étudier la formation de rides et de dunes sur le lit des rivières, nous avons effectué l'analyse de stabilité linéaire d'un lit sableux cisailé par un écoulement turbulent. Pour ce faire, nous avons calculé l'écoulement turbulent au dessus d'un relief et caractérisé l'effet des différents mécanismes physiques (inertie, rugosité hydrodynamique, fluctuations turbulentes, surface libre). Nous avons montré que les rides se forment par instabilité linéaire et que la longueur d'onde à laquelle elles apparaissent est contrôlée par la longueur de relaxation du transport de sédiments. A l'inverse, les dunes se forment par coalescence progressive de structures, cette évolution non-linéaire étant limitée par l'effet stabilisant de la surface libre. Enfin, le formalisme général que nous avons adopté nous a permis de transposer cette étude théorique à la formation des dunes géantes dans les déserts.

**MOTS CLÉS :** géomorphologie, turbulence, transport sédimentaire, instabilités.

---

## Summary

The river morphology results from the interplay between the turbulent flow over an erodible bed and the sediment transport dynamics. This PhD thesis investigates two river related problems, shedding some light on both aspects.

We have investigated experimentally the river width selection problem, comparing measurements performed in the field and on laboratory micro-rivers. We have show, that the power-law relating width and water discharge results form the local river dynamics, and not from the self-organization of river basins. We have analyzed the mean velocity fields and shown that transverse diffusion of momentum should be taken into account to reproduce experimental measurements.

In order to investigate the formation of ripples and dunes on a river bed, we have performed the linear stability analysis of a sand bed sheared by a turbulent flow. We have computed the turbulent flow over a relief and characterized the effect of the various dynamical mechanisms (inertia, hydrodynamic roughness, turbulent fluctuations, free surface). We have shown that ripples form by a primary linear instability and that their initial wavelength is governed by the sediment transport relaxation length. On the contrary, dunes form by progressive merging of bedforms. This non-linear pattern coarsening is limited by the stabilizing effect of the free surface. Moreover, the same general framework has allowed to address the formation of Aeolian giant dunes.

**KEY WORDS :** geomorphology, turbulence, sediment transport, instabilities.

---

## Remerciements

Je souhaite en premier lieu remercier Jean-Marc Chomaz, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je tiens également à remercier François Charru et Alexandre Valance pour avoir accepté aussi gentiment de lire et juger de mon travail. Enfin, je suis très reconnaissant envers Antonello Provenzale qui a pu faire parti de mon jury de thèse.

Je souhaitais remercier également François Métivier d'avoir participer au jury de thèse, mais ces remerciements vont un peu plus loin que sa seule présence à l'ESPCI le 03 mars 2009, car il m'a accueilli (ou héberger) dans son "jardin" de Saint Maur. En effet, le PMMH à Paris, victime de son succès, était trop petit pour que je puisse y installer une micro-rivière, j'ai pu m'adonner aux joies de l'expérimentation dans les locaux de l'Institut de Physique du Glope de Paris ... à Saint-Maur-des-Fossés dans le Val-de-Marne... A l'instar des louanges que je pourrais faire pour cet accueil et la liberté d'action dont je pouvais jouir, je tiens aussi à associer tout le groupe de François Métivier de l'IPGP à ces remerciements. Que ce soit les permanents : Éric Lajeunesse et Clément Narteau, les thésards : Luce Malverti et Pierre Lancien, les post-docs : Michal Tal et Olivier Devauchelle, ils ont tous été formidables. Mais je voudrais décerner une mention particulière à Yves Gamblin et Antonio Vieira e Silva qui ont su m'apporter des solutions techniques adaptées, élégantes et imparables à l'ensemble des problèmes expérimentaux qu'une expérience qui mixe eau et électricité peut générer... Ceci est d'autant plus appréciable que je n'ai pas passé tant de temps que ça dans les locaux de Saint-Maur.

Enfin, je tiens à remercier les deux dernières personnes présentes dans le jury de ma soutenance de thèse qui sont Philippe Claudin et Bruno Andreotti. Plus que deux encadrants de thèse, je crois que Bruno et Philippe forment un duo assez phénoménal que ce soit au PMMH ou dans le microcosme de la physique. En effet, ils ont d'une part, de très grandes qualités scientifiques. D'autre part, ils s'investissent énormément dans ce qu'ils font et dans ce qu'ils croient (actions de défense de la recherche publique, participations à des manifestations diverses de vulgarisation scientifique, animation et gestion de Groupe de Recherche, organisation de colloques, etc...). Et enfin, ils ont vraiment d'énormes qualités humaines et ça, j'en ai surtout profité lors des missions qui n'étaient pas si reposantes que l'on veut bien le croire. Pour finir, j'espère hériter d'eux leur enthousiasme scientifique et la confiance dans leurs travaux, qui a permis si souvent de soulever des montagnes (et pas que des montagnes de sables, hein...). Choucrane à vous deux et à Paul Dubuc également.

---

Je tiens à remercier le Parc Naturel des Landes de Gascogne pour nous avoir accueilli lors des différentes missions effectuées dans le bassin versant de la Leyre et plus particulièrement pour la logistique et l'accueil chaleureux de Catherine Navrot et Laurent qui nous a montré les coins à méandres et les autres endroits intéressants aux alentours de Belin-Beliet.

Il est temps d'exprimer en peu de phrase la satisfaction d'avoir travaillé au sein du groupe granulaire du laboratoire d'Edouardo Wesfreid : le PMMH, situé à l'ESPCI à Paris. Durant ces quelques années, j'ai pu y cotoyer non seulement des scientifiques aguerris, de jeunes chercheurs motivés, mais aussi Fred, Cloclo, Laurent ainsi que l'ensemble des personnes de l'atelier, qui sont essentiels au bon fonctionnement du laboratoire et de l'ambiance de travail agréable. Bien sûr, j'ai passé plus de temps avec les collègues-doctorants du PMMH dont je voudrais essayer de dresser une liste quasi exhaustive. Comment ne pas commencer par mes collocataires de bureau : le géant Medhi et son vocabulaire anglais si développé "so I go", son remplaçant Kévin, que j'ai converti sans difficultés aux pauses bananes et l'innerrable Pierre Six-sous, qui détient toujours le record du nombre de jours passés à faire sécher ses baskets (et ses fringues) puantes sur la fenêtre du bureau (pourtant j'ai essayé de le concurrencer...). Parmi les personnes qui passaient régulièrement dans le bureau afin de vérifier à quel point il était facile de nous déconcentrer, le plus assidu était, de loin, "Docteur Bonneau/Mister Bonnard" avec qui j'ai passé pas mal de temps au Maroc (auteur du mémorable "Pffffff, c'est trop dune"). Je vais poursuivre la liste par les glorieux anciens : Nolwenn, Manue et Giles (du bureau d'à côté), Florent et Christophe (membre du groupe granulaire), Hicham le saharouiste, Julien, Harunori, Joachim et Thomas (l'homme qui murmurait à l'oreille du Président), mais je n'oublie pas non plus mes "contemporains" : Avin, Julia, Rim, Claire, Naïs, Claire, Catherine, Antonin, Olivier, Romain, Pablo, Nicolas, le "gang des Quéré", les "polonais" de passage, ni les derniers arrivés : Hélène, Miguel, Nicolas, Tristan, Gastón... Je rajoute à cette déjà longue liste les post-doctorants qui sont, malheureusement, restés moins longtemps entre ces murs : Caroline et Valérie, Jacco, Élie, Orencio, Angélique et sa soeur Stéphanie. Enfin, cela serait dommage de ne pas citer le nom des professeurs invités avec qui j'ai eu la chance de travailler : Fouzzia Ould-Kaddour et Brad Murray.

Pour clore ces remerciements, il serait temps d'évoquer la famille et les amis (de Lorraine et d'ailleurs), que je n'ai pas toujours pu voir aussi souvent qu'ils l'auraient souhaité durant ces années d'étude. Ils ne m'en ont jamais tenu rigueur et je leur en suis très reconnaissant. Muchas gracias.

---

The last but not the least, je tenais particulièrement à ne pas remercier le professeur Roland Combescot de l'ENS. Enfin, pour ne pas être trop radical, je voulais tout de même le remercier pour m'avoir montré à quel point le précédent directeur de mon École Doctorale était compétent et humain. . . Donc merci à vous, M. Combescot pour m'avoir, en si peu de temps, pratiquement dégoûté de la recherche publique. La façon dont vous traitez les étudiants de votre ED est assez révélatrice du mandarinat qui s'exerce encore dans certains établissements et qui sclérose la recherche publique française.

---

*How can the banks of a river meet?  
Sitting on her bed staring at her feet  
She thinks life is water  
And love, love is a river*  
Éric Serra

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Avant propos</b>	<b>1</b>
1.1	En partant de Navier-Stokes . . . . .	3
1.2	La description du transport de sédiments . . . . .	6
1.2.1	Le seuil de transport . . . . .	7
1.2.2	Le flux saturé . . . . .	9
1.2.3	La longueur de saturation . . . . .	10
1.3	Une rivière est-elle à l'équilibre? . . . . .	11
1.4	Rides et dunes . . . . .	13
1.5	Plan du manuscrit . . . . .	15
	<b>Bibliographie introductive</b>	<b>17</b>
<b>I</b>	<b>Sélection de la largeur</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>La géométrie hydraulique</b>	<b>21</b>
2.1	Qu'appelle-t-on "géométrie hydraulique" ? . . . . .	21
2.2	Notion de rivières à l'équilibre . . . . .	24
2.3	Passer de l'échelle 1/1 au laboratoire . . . . .	25
2.4	Les différentes questions abordées . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Le dispositif expérimental</b>	<b>29</b>
3.1	Le montage expérimental . . . . .	29
3.2	Déroulement d'une expérience typique . . . . .	32
3.3	Les paramètres accessibles . . . . .	36
3.4	Les grandeurs mesurées . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Une rivière naturelle : la Leyre</b>	<b>43</b>
4.1	Pourquoi la Leyre . . . . .	43
4.2	Les spécificités du terrain . . . . .	45
4.3	Les méthodes de mesures . . . . .	46

<b>5</b>	<b>Analyse des profils de vitesse</b>	<b>51</b>
5.1	Profils turbulents . . . . .	51
5.2	Profils expérimentaux . . . . .	54
<b>6</b>	<b>La sélection de la largeur</b>	<b>59</b>
6.1	Les largesses de la Leyre . . . . .	59
6.2	Applications à la rivière expérimentale . . . . .	61
6.2.1	Évolution temporelle . . . . .	61
6.2.2	Utilisation des données expérimentales à faible pente . . . . .	66
6.2.3	Parlons d'équilibre . . . . .	68
6.3	Conclusion . . . . .	70
	<b>Bibliographie Sélection de la largeur</b>	<b>71</b>
<b>II</b>	<b>Rides et Dunes</b>	<b>73</b>
<b>7</b>	<b>Contexte</b>	<b>75</b>
7.1	Problèmes sémantiques et morphologiques . . . . .	75
7.2	Principe de l'instabilité d'un lit plat . . . . .	80
7.3	Analyse de stabilité linéaire . . . . .	84
7.4	Plan de la partie Ride et Dune . . . . .	87
<b>8</b>	<b>Modélisation de l'écoulement turbulent</b>	<b>89</b>
8.1	Relation de fermeture turbulente . . . . .	89
8.1.1	Décomposition de Reynolds . . . . .	89
8.1.2	Expression de la longueur de mélange . . . . .	91
8.1.3	Les équations linéarisées . . . . .	92
8.1.4	Les conditions limites et la méthode d'intégration . . . . .	95
8.1.5	Résultats à l'ordre linéaire en $k\zeta$ . . . . .	96
8.2	Un modèle minimal mais robuste . . . . .	106
8.2.1	Analyse asymptotique . . . . .	107
8.2.2	Robustesse vis-à-vis des mécanismes de la couche de surface . . . . .	109
8.2.3	Robustesse vis-à-vis de la fermeture turbulente . . . . .	113
8.2.4	Et pourquoi pas un modèle anisotrope . . . . .	116
8.2.5	Évolution temporelle du fond . . . . .	118
8.3	Une extension faiblement non-linéaire . . . . .	121
8.3.1	Extension en amplitude à l'ordre trois . . . . .	121
8.3.2	Les conditions limites . . . . .	124
8.3.3	Résultats . . . . .	125

8.4	Les effets de surface libre . . . . .	132
8.4.1	Description hydrodynamique de la rivière . . . . .	132
8.4.2	Perturbations . . . . .	133
8.4.3	Résolution des équations linéarisées . . . . .	134
8.4.4	Résultats . . . . .	135
<b>9</b>	<b>Formation des rides</b>	<b>143</b>
9.1	Le transport . . . . .	143
9.1.1	Un exemple d'un mécanisme de transport . . . . .	144
9.1.2	Transport limité par la quantité de mouvement . . . . .	145
9.1.3	Effets de la pente sur le transport . . . . .	147
9.1.4	La longueur de saturation $L_{\text{sat}}$ . . . . .	147
9.2	Les rides . . . . .	148
9.2.1	La relation de dispersion . . . . .	149
9.2.2	Sélection de la longueur d'onde . . . . .	152
9.2.3	Des rides dans L'Eyre . . . . .	152
9.2.4	Les rides pour comprendre le transport . . . . .	154
9.2.5	Sélection non linéaire de l'amplitude . . . . .	156
<b>10</b>	<b>Formation des dunes</b>	<b>159</b>
10.1	Effets de la surface libre sur la relation de dispersion . . . . .	159
10.2	Formation des dunes . . . . .	162
10.3	Observation de dunes dans la Leyre . . . . .	164
<b>11</b>	<b>Conclusion</b>	<b>169</b>
11.1	Hydrodynamique sur un fond ondulé . . . . .	169
11.2	Transport, rides et dunes . . . . .	171
11.3	Une nouvelle classification . . . . .	174
11.4	Sortons la tête de l'eau . . . . .	175
	<b>Bibliographie rides et dunes</b>	<b>177</b>
	<b>Annexes</b>	<b>185</b>
	Bedforms in a turbulent stream. Part 1 . . . . .	189
	Bedforms in a turbulent stream. Part 2 . . . . .	241
	Giant aeolian dune size . . . . .	283

## Table des matières

---

# Chapitre 1

## Avant propos

Ce manuscrit est dédié à la morphologie des rivières alluviales. La première partie, expérimentale, traite de la sélection de la largeur d'un cours d'eau. La seconde partie est consacrée à l'étude de la formation de motifs périodiques sur leur fond. Avant de passer à chacune de ces deux parties, prenons le temps de préciser en quoi une rivière représente un système dynamique intéressant du point de vue de la physique.

La Moselle est une rivière qui prend sa source à Bussang dans le massif des Vosges à 731m d'altitude et se jette dans le Rhin à Coblenche aux Pays-Bas. Entre sa source et son embouchure, la rivière traverse 3 pays et parcourt 560km. À Uckange, en Moselle, le débit moyen de la rivière  $Q$  est d'environ  $150\text{m}^3.\text{s}^{-1}$ , sa largeur  $W$  atteint 170m et la hauteur d'eau moyenne  $H$  est de l'ordre du mètre. De par ses proportions, la Moselle est souvent qualifiée, à tort, de fleuve. En comparaison, le torrent de Saint Pierre, situé dans le parc national des Écrins, est un cours d'eau beaucoup plus modeste. Sur le site du pré de Madame Carle, son débit moyen est de  $3\text{m}^3.\text{s}^{-1}$ , sa largeur et sa hauteur moyennes font respectivement 10m et 0.5m.

La comparaison des deux photos de la figure 1.1 renforce le contraste saisissant des échelles de longueurs entre la Moselle et le torrent de Saint-Pierre. De plus les sédiments qui tapissent le lit de ces deux cours d'eau sont remarquablement différents. Le lit du torrent de Saint Pierre est constitué principalement de galets, alors que celui de la Moselle de sédiments calcaires de tailles sub-millimétriques appelés "fines". Néanmoins ces cours d'eaux sont des systèmes physiques très dynamiques. Ainsi le lit principal<sup>1</sup> du torrent de Saint-Pierre est sujet à de nombreux changements occasionnés principalement pendant les périodes de crues. Tous les ans, au printemps, la fonte

---

<sup>1</sup>ou "lit mineur".



FIG. 1.1 – Photos de la rivière "Moselle" à Pont-à-Mousson, Meurthe-et-Moselle (a) et du "torrent de Saint-Pierre" au Pré de Mme Carle, Hautes Alpes (b).

des glaciers, qui alimente principalement ce cours d'eau, est si importante que l'eau envahit le haut de ses berges habituelles pour occuper un chenal plus important, appelé "lit majeur" et remobilise les galets qui composent habituellement ses berges. Lors du retour à la normale, il n'est pas rare de constater que son lit principal s'est déplacé de plusieurs mètres. La Moselle aussi rend compte de changements conséquents. Des traces montrent qu'autrefois, la rivière se jetait dans le fleuve Meuse à Pagny-sur-Meuse (55). Son cours fut dévié lors de sa capture par un autre cours d'eau, la Meurthe. Depuis cet événement, son lit s'est reconstitué à une vingtaine de kilomètres plus à l'est, à Toul (54).

Ces changements s'effectuent sur des échelles de temps très différentes. Alors que le torrent de Saint Pierre peut connaître des variations annuelles, les échelles de temps impliquées dans les changements dynamiques notables de la Moselle sont beaucoup plus longs. Néanmoins, ces deux cours d'eau s'écoulent tous les deux sur un lit composé de leurs propres sédiments. Ce lit est facilement remobilisable ce qui permet à ces cours d'eau d'être très dynamiques. Ce n'est manifestement pas le cas d'une rivière telle que le Gard, dont le fond rocheux contraint fortement l'écoulement. Nous garderons en tête les caractéristiques du torrent de Saint Pierre lorsque nous utiliserons le terme de "rivières torrentielles". La Moselle sera un bon exemple de "rivière alluviale".

La dynamique des rivières torrentielles et alluviales peut être expliquée par une interaction fluide-structure. Le fluide en écoulement érode et transporte les grains des couches superficielles du lit. En retour, les grains trans-

## 1.1. En partant de Navier-Stokes

---

portés exercent une rétro-action sur l'écoulement. Conceptuellement, pour étudier les interactions de l'écoulement avec une frontière déformable responsable de la morphologie du chenal, il est plus facile de décomposer le problème en différentes parties : une partie hydrodynamique et une autre consacrée à la dynamique du transport sédimentaire. La partie hydrodynamique permet de décrire la manière dont la vitesse de l'écoulement  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  s'adapte à la topographie  $Z(x, y, t)$  du chenal (courbure du chenal, asymétrie des berges, ondulations du lit, *etc.*...). Une quantité clef à laquelle donne accès cette description hydrodynamique est la contrainte de cisaillement exercée par l'écoulement sur le fond du chenal (lit et berges)  $\tau_b$ . En effet, c'est la valeur de cette contrainte qui gouverne l'érosion et le transport de particules. Le transport de sédiments façonne la morphologie du chenal de la rivière.

L'écoulement en rivière s'adapte en quelques secondes à un obstacle. En comparaison, la morphologie du chenal évolue beaucoup plus lentement. Pour ces raisons, nous allons détailler séparément la partie hydrodynamique et la partie dédiée au transport de sédiments, en présentant à chaque fois les hypothèses faites et les grandeurs associées.

### 1.1 En partant de Navier-Stokes

La partie hydrodynamique s'attache à décrire l'évolution de l'écoulement  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  contraint par une topographie  $Z(x, y, t)$  donnée. La dynamique de l'écoulement dans une rivière est bien décrite par l'équation de conservation de la masse et les équations de Navier-Stokes. Pour l'écoulement d'un fluide incompressible de masse volumique  $\rho$ , elles s'expriment :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \eta \Delta \mathbf{u}. \quad (1.2)$$

$\mathbf{g}$  représente le vecteur pesanteur,  $p$  est la pression du fluide et  $\eta = \rho \nu$  la viscosité dynamique du fluide ( $\nu$  étant la viscosité cinématique). En comparant les termes inertiels de l'écoulement ( $Du/Dt \sim U^2/L$ ) aux forces visqueuses intrinsèques au fluide ( $\nu \Delta u \sim \nu U/L^2$ ), on peut définir un nombre sans dimension. C'est le nombre de Reynolds :

$$\mathcal{R}e = \frac{U L}{\nu}, \quad (1.3)$$

où  $U$  et  $L$  représentent une vitesse et une longueur caractéristique de l'écoulement. La viscosité cinématique de l'eau  $\nu$  vaut  $\approx 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . De petites valeurs du nombre de Reynolds  $\mathcal{R}e < 1$  correspondent à des écoulements où

## 1.1. En partant de Navier-Stokes

---

les effets de la viscosité l'emportent sur les effets inertiels. Ces écoulements sont appelés laminaires. À l'inverse, lorsque  $\mathcal{R}e \gg 1$ , les termes visqueux peuvent être négligés devant les termes d'advection. L'écoulement est turbulent.

Pour les rivières alluviales, nous choisissons comme vitesse caractéristique  $U$  la vitesse moyenne de l'écoulement et la hauteur d'eau  $H$  comme la longueur caractéristique du problème. Le débit liquide instantané  $Q$  est une grandeur intégrale qui relie l'écoulement à la géométrie du lit :

$$Q \sim U H W . \quad (1.4)$$

On peut donc réécrire le nombre de Reynolds de deux façons possibles :

$$\mathcal{R}e \sim \frac{U H}{\nu} \sim \frac{Q}{W \nu} . \quad (1.5)$$

À mesure que nous nous éloignons de sa source, le cours d'eau collecte de plus en plus d'eau et son débit augmente. Plus le débit du cours d'eau augmente et plus la largeur de son lit augmente. Or les effets de  $Q$  et  $W$  sur  $\mathcal{R}e$  sont antagonistes. Sans rentrer dans les détails des variations de ces deux grandeurs, nous pouvons supposer que le nombre de Reynolds ne varie que faiblement autour d'une valeur moyenne représentative. Estimons cette valeur pour la Moselle en utilisant les données issues de la station hydrographique d'Uckange ( $W \sim 80\text{m}$  et  $Q \sim 150\text{m}^3/\text{s}$ ). En ce point, le nombre de Reynolds vaut environ  $\mathcal{R}e \sim 2.10^6$ . Dans le cas du torrent de Saint Pierre au Pré de madame Carle, on obtient des valeurs du nombre de Reynolds de l'ordre de  $\mathcal{R}e \sim 3.10^5$ . Ces valeurs très élevées justifient le recours à un régime turbulent lors de l'étude de l'hydrodynamique des rivières naturelles.

Pour les écoulements turbulents, la composante  $u_i$  de la vitesse instantanée sur l'axe ( $Ox_i$ ) peut être décomposée en une valeur moyenne  $U_i = \langle u_i \rangle$  et une fluctuation turbulente  $u'_i$  telle que  $\langle u'_i \rangle = 0$ , c'est la décomposition de Reynolds :

$$u_i = U_i + u'_i . \quad (1.6)$$

La pression  $p$  se décompose de la même façon en une valeur moyenne et une valeur fluctuante :  $p = P + p'$ . À partir de l'équation de continuité, nous obtenons que les écoulements moyen et fluctuant sont à divergence nulle :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 , \quad (1.7)$$

tandis que la moyenne de l'équation de Navier-Stokes projetée sur l'axe ( $Ox_i$ ) s'écrit :

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \rho \langle u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \rangle = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + \eta \Delta U_i . \quad (1.8)$$

## 1.1. En partant de Navier-Stokes

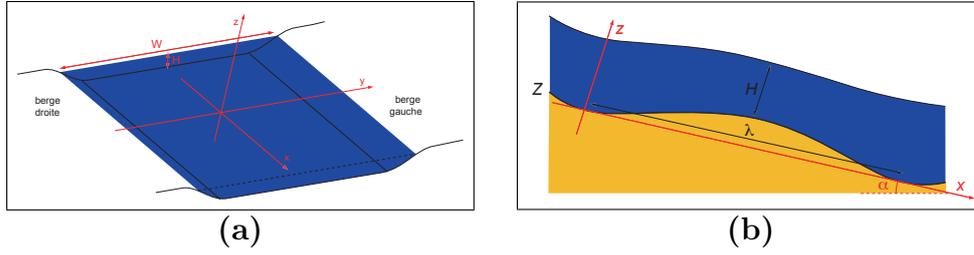


FIG. 1.2 – Schéma d’une section de rivière et notations. La largeur  $W$  est génériquement grande devant la hauteur d’eau  $H$ . Les variations longitudinales  $\lambda$  du fond et de la surface libre sont très petites devant les variations verticales :  $Z/\lambda \sim H/\lambda \ll 1$ .

Le troisième terme du membre de gauche se réécrit :

$$\langle u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \rangle = \frac{\partial \langle u'_k u'_i \rangle}{\partial x_k} - \langle u'_i \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \rangle . \quad (1.9)$$

Le second terme est nul car l’écoulement fluctuant est à divergence nulle. L’écoulement moyen est donc décrit par les équations de Reynolds :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} &= 0, \quad (1.10) \\ \rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \eta \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \rho \langle u'_k u'_i \rangle \right) \quad (1.11) \end{aligned}$$

Les termes  $-\rho \langle u'_k u'_i \rangle$  rendent compte de l’influence des fluctuations turbulentes sur l’écoulement moyen. Ils forment un tenseur  $\overline{\tau}$ , appelé tenseur de Reynolds. Si nous étudions un cas à 3 dimensions, les relations (1.10)-(1.11) forment un système de 4 équations, dont les inconnues sont les 3 composantes du vecteur de vitesse moyenne, le terme de pression du fluide et le tenseur de Reynolds. Ne connaissant pas l’évolution des fluctuations de vitesse au sein de la rivière, le système possède plus d’inconnues qu’il n’a d’équations : il ne constitue pas un système fermé. Pour fermer ce système, il est nécessaire de spécifier une relation qui lie le tenseur de Reynolds à l’écoulement moyen :

$$\overline{\tau} = f(\mathbf{U}) . \quad (1.12)$$

Cette relation est appelée fermeture turbulente. Il existe un grand nombre de fermetures possibles et le meilleur choix dépend du système étudié. Nous reviendrons plus en détail sur ce choix pour des écoulements à surface libres en 8.1.2.

## 1.2. La description du transport de sédiments

---

Nous considérons maintenant, le cas simple d'un écoulement à surface libre sur un fond  $Z$  incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontal (cf. la figure 1.2). L'écoulement est supposé stationnaire et invariant dans la direction transverse de l'écoulement  $\mathbf{u}(x, z)$ .  $\lambda$  est l'échelle typique des variations  $Z(x)$  du lit, alors que la longueur caractéristique de l'écoulement suivant la verticale reste la hauteur d'eau  $H$ . L'hypothèse d'eau peu profonde est couramment utilisée pour l'étude hydraulique des rivières. Elle se traduit ici par la relation :  $H \ll \lambda$  et conduit à  $\partial Z/\partial x \sim \partial H/\partial x \ll 1$ . L'équation de conservation de la masse (1.1) permet d'écrire :

$$\frac{\delta u_x}{\delta u_z} \sim \frac{\delta x}{\delta z} \sim \frac{\lambda}{H} \gg 1. \quad (1.13)$$

En première approximation, la vitesse de l'écoulement ne possède qu'une composante suivant l'axe  $(Ox)$ . La pression se déduit rapidement de la projection de l'équation de Navier-Stokes (1.2) sur l'axe vertical :

$$p = p_{atm} + \rho g (H - z) \cos \alpha. \quad (1.14)$$

Et la projection de la relation (1.2) sur l'axe  $(Ox)$  ne fait intervenir plus que deux termes qui s'opposent : une force motrice due à la gravité et une force de frottement  $-\partial\tau_{xz}/\partial z$ , ce qui donne l'expression du cisaillement basal :

$$\tau_b \sim -\rho g H \mathcal{S}, \quad (1.15)$$

où  $\mathcal{S} = \tan \alpha$  est la pente du lit. La force de gravité qui fait s'écouler le fluide vers des niveaux d'énergies potentiels plus faibles<sup>2</sup> est opposée à la force de frottement sur le lit. En géomorphologie, le frottement turbulent est souvent exprimé simplement en fonction de la vitesse moyenne par la relation :

$$\tau_b \sim -\rho C_z |U| U. \quad (1.16)$$

La constante de Chezy  $C_z$  est une constante phénoménologique qui peut être reliée à la relation de fermeture turbulente choisie.

## 1.2 La description du transport de sédiments

Afin de décrire l'interaction entre les grains et l'écoulement, il faut identifier les mécanismes physiques qui gouvernent l'érosion et le transport de ces sédiments. Sans entrer dans le détail des différents processus impliqués, on peut en fait abstraire l'essentiel de ces mécanismes, souvent compliqués et encore mal compris, dans trois quantités bien définies : le seuil de transport, le flux saturé et la longueur de saturation.

---

<sup>2</sup>i.e. vers les océans...

## 1.2. La description du transport de sédiments

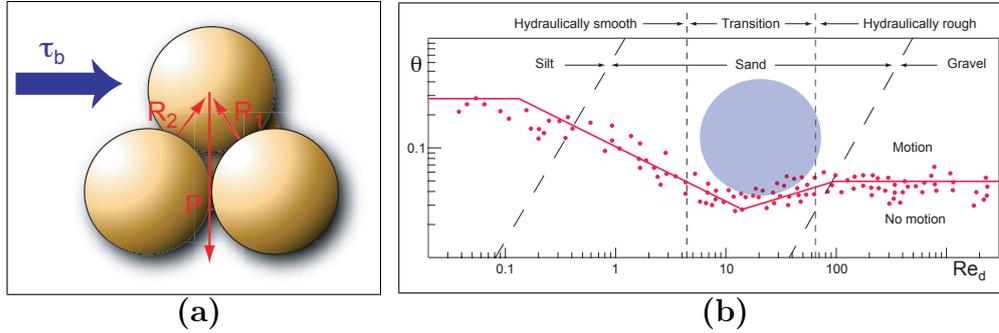


FIG. 1.3 – (a) Schéma des forces sur un empilement de 4 sphères identiques. (b) La courbe de [Shields 1936],  $\theta$  vs  $Re_d$ , permet de définir deux zones. Une région sans transport est séparée par la courbe continue d'une zone où l'écoulement cisaille le lit de sédiment suffisamment fort pour en arracher les grains. Les points expérimentaux ont été obtenus par [Shields 1936] dans un canal hydraulique avec une granulométrie homogène et mono-disperse.

### 1.2.1 Le seuil de transport

Conceptuellement, le seuil de mise en mouvement traduit la compétition entre deux forces opposées : la force  $\sim \tau_b d^2$  exercée par le cisaillement de l'écoulement sur les grains de taille  $d$  joue le rôle de force motrice. Elle s'oppose à une force de résistance, qui dans les cas les plus simples, est le poids déjaugée d'une particule  $\sim (\rho_s - \rho_f)gd^3$ . Ces deux forces sont représentées sur la figure 1.3a. En comparant ces deux forces, [Shields 1936] a introduit un nombre sans dimension, le nombre de Shields :

$$\theta = \frac{\tau_b}{(\rho_s - \rho)gd}. \quad (1.17)$$

La figure 1.3a représente le cas idéalisé d'un empilement de quatre sphères identiques soumises à une force de cisaillement extérieure. En négligeant la force de cohésion entre les grains, la contrainte seuil de cisaillement dépend du diamètre des sphères  $d$  et de l'inclinaison de l'empilement  $\mathcal{S}$  selon la loi :  $\tau_{th} \sim (\rho_s - \rho)gd(1 - \mathcal{S}/\mu)$ , où  $\mu$  représente l'angle de repos de cet empilement granulaire. Avec ce raisonnement on s'attend à ce que l'ordre de grandeur du nombre de Shields seuil  $\theta_{th}$  soit de l'ordre de l'unité. Dans un canal hydraulique, [Shields 1936] a mesuré la valeur critique du cisaillement au-dessus de laquelle il observait une mobilisation des grains d'un lit plat en utilisant divers matériaux granulaires. Ses résultats expérimentaux sont représentés sur le graphe de la figure 1.3b. Le nombre de Shields critique  $\theta_{th}$

## 1.2. La description du transport de sédiments

---

est représenté en fonction du nombre de Reynolds particulaire :

$$\mathcal{R}e_d = \frac{u_* d}{\nu}. \quad (1.18)$$

Le premier coup d'oeil à la figure 1.3b montre qu'on a plutôt  $\theta_{th} \lesssim 0.1$ . En fait, la forme des grains et des facteurs géométriques sont à prendre en considération pour faire le calcul proprement. D'autre part, pour des grains de très petite taille, les effets de cohésion deviennent importants, ce qui explique la remontée de  $\theta_{th}$  sur la gauche du graphe.

Une des difficultés pour le calcul de  $\theta_{th}$  réside dans la description de l'écoulement au niveau d'une particule du lit. En particulier, la force de traînée et le poids de la particule ne s'expriment pas suivant la même direction. [Bagnold 1941] propose de comparer les moments de ces deux forces. Il exprime alors la vitesse  $u_{th}$  au seuil de mise en mouvement, ce qui lui permet de retrouver la variation de cette vitesse seuil avec la racine carrée de la taille des grains pour les plus nombre de Reynolds particulaires, variation qu'il a observée expérimentalement.

[Bagnold 1941] a également montré que le seuil de mise en mouvement des grains dépend du fluide étudié. En effet, pour un transport éolien, les grains peuvent aussi bien être arrachés par l'écoulement que dépiégés par l'impact d'autres grains qui retombent sur le lit. Dans ce second cas, l'écoulement ne sert qu'à accélérer les particules, une fois que celles-ci ont été éjectées du lit. À l'inverse, dans le cas d'un transport aquatique, c'est essentiellement le fluide qui déloge les grains piégés dans les couches superficielles. Cette différence est essentielle dans la définition du seuil de mise en mouvement : par exemple [Bagnold 1941] a montré expérimentalement l'existence d'un second seuil dû aux impacts des grains transportés.

Le seuil est également sensible à la préparation du lit dans les expériences de laboratoire : un lit lâche est plus facile à éroder qu'un lit préparé de manière compacte. Au fur et à mesure du mouvement des grains, les grains érodés s'installent dans des puits potentiels de plus en plus profonds, ce qui se traduit par un tassement progressif du lit [Charru 2006]. Ce processus est responsable de la consolidation du lit. Le cisaillement minimal pour mettre les grains en mouvement est alors nécessairement plus grand. Ce phénomène explique en partie la grande dispersion des mesures expérimentales de la figure 1.3b.

Cette notion de seuil est importante pour la dynamique des rivières. Ainsi, les rivières "calmes" sont les cours d'eau pour lesquels la valeur de la contrainte de cisaillement basale  $\tau_b$  est inférieure à cette valeur de seuil de cisaillement :  $\tau_b < \tau_{th}$ . C'est le cas par exemple pendant les périodes d'étiage caractérisées par des débits instantanés beaucoup plus faibles qu'en

moyenne ou lorsque le fond et les berges des rivières sont tapissées de galets trop difficilement mobilisables par l'écoulement. Un autre paramètre important est la cohésion du matériel qui constitue le lit et/ou les berges. La présence de petites particules, par exemple d'argile, renforce cette cohésion. Elle peut être également augmentée par la présence de végétaux.

### 1.2.2 Le flux saturé

On peut schématiquement distinguer plusieurs modes de transport dans les rivières alluviales :

**Transport par charriage** Les sédiments restent confinés dans une couche proche du fond. Ils se déplacent en roulant ou en glissant sur les autres grains du lit et effectuent parfois de petits sauts, de sorte que la hauteur de la couche de transport est équivalente à quelques diamètres de grains. Les termes de transport de fond ou transport par charge de fond sont aussi utilisés. C'est le mécanisme de transport prédominant quand le nombre de Shields n'est pas trop grand ( $0.1 < \theta < 1$ ).

**Transport en suspension** Pour les grandes valeurs du nombre de Shields ( $\theta > 1$ ), la force du courant est suffisante pour transporter les sédiments sur de très grandes distances. Les sédiments sont mis en suspension sur toute la hauteur de l'écoulement. Ce mode de transport prédomine pendant les périodes de crues où une grande partie des couches superficielles qui composent le fond est remobilisé par l'écoulement, si bien qu'il est même difficile de définir correctement la position du fond.

Il existe évidemment une situation intermédiaire où la couche de transport, bien que localisée sur le fond, devient d'épaisseur conséquente (on parle de 'sheet flow' en anglais). Même si les notions de flux saturé  $q_{\text{sat}}$  et de longueur de stauration  $L_{\text{sat}}$  dont on va discuter ici sont indépendantes du mode de transport (on les définit également dans le cas éolien par exemple), dans tout ce qui suit seul le transport par charriage sera considéré dans cette étude, pour des raisons qui seront explicitées par la suite.

Pendant la mise en mouvement ou lors du transport, le fluide transfère de l'énergie aux grains. En retour, les particules en mouvement exercent une rétro-action sur le fluide qui les transporte et ont tendance à ralentir l'écoulement. L'écoulement ne peut donc pas transporter un nombre infini de grains. Pour chaque valeur de cisaillement, le nombre de grains que l'écoulement est capable de transporter à l'équilibre permet de définir un flux 'saturé'  $q_{\text{sat}}$ . Ce flux de sédiments transportés dépend de la valeur de la contrainte cisailante  $\tau_b$  et du seuil de mis en mouvement  $\tau_{\text{th}}$ . La relation :

$$q_{\text{sat}} = f(\theta, \theta_{\text{th}}), \quad (1.19)$$

## 1.2. La description du transport de sédiments

---

est appelée loi de transport. Une loi de transport couramment utilisée est celle proposée empiriquement par [Meyer-Peter & Müller 1948] qui ont réalisé de nombreuses mesures en variant non seulement la taille  $d$  et la masse volumique  $\rho_s$  des grains, mais aussi la longueur et la pente du canal hydraulique :

$$q_{\text{sat}}(\theta, \theta_{\text{th}}) = 8 \sqrt{\frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f}} g d^3 (\theta - \theta_{\text{th}})^{3/2}. \quad (1.20)$$

La fonction  $f(\theta, \theta_{\text{th}})$  peut être également déterminée théoriquement sous des hypothèses particulières. En équilibrant les puissances de transfert entre le fluide et les grains en mouvement, [Bagnold 1956] propose :

$$q_{\text{sat}}(\theta, \theta_{\text{th}}) \propto \theta^{1/2} (\theta - \theta_{\text{th}}). \quad (1.21)$$

Le facteur de proportionnalité prend notamment en compte le frottement des grains sur le lit, le coefficient de traînée et le nombre de Reynolds particulaire  $\mathcal{R}e_d$ . Dans le chapitre 9.1, nous proposerons également des lois associées à différentes situations : un régime proche du seuil où le transport est limité par l'érosion, et un régime pour des valeurs de  $\theta$  plus élevées où c'est la quantité de mouvement disponible qui détermine le nombre de particules transportées.

### 1.2.3 La longueur de saturation

Le fond d'une rivière est rarement homogène : des dunes ou des rides périodiques se forment génériquement sur le lit de sable. Par conséquent, la contrainte de cisaillement locale varie le long du lit et au cours du temps. Or, le flux de sédiments instantané  $q$  ne s'équilibre pas instantanément à la valeur locale de  $\tau_b$ . Ce retard entre flux saturé  $q_{\text{sat}}$  et flux instantané  $q$  à des causes multiples. L'éjection des grains hors des pièges potentiels, l'inertie des grains qui mettent du temps à s'adapter à la vitesse de l'écoulement, et l'inertie du fluide ralenti par la présence des grains font partie des processus qui causent la relaxation du flux vers l'équilibre. Nous adoptons la même description de la saturation que [Andreotti & al. 2002] introduite dans le contexte de l'étude du transport éolien. La relaxation est modélisée par une loi du premier ordre :

$$T_{\text{sat}} \frac{\partial q}{\partial t} + L_{\text{sat}} \frac{\partial q}{\partial x} = q_{\text{sat}} - q. \quad (1.22)$$

Cette relation fait intervenir un temps et une longueur caractéristiques. Le temps  $T_{\text{sat}}$  représente le temps nécessaire au flux de sédiments  $q$  pour retourner à sa valeur d'équilibre  $q_{\text{sat}}$  si la force du courant change subitement dans

### 1.3. Une rivière est-elle à l'équilibre ?

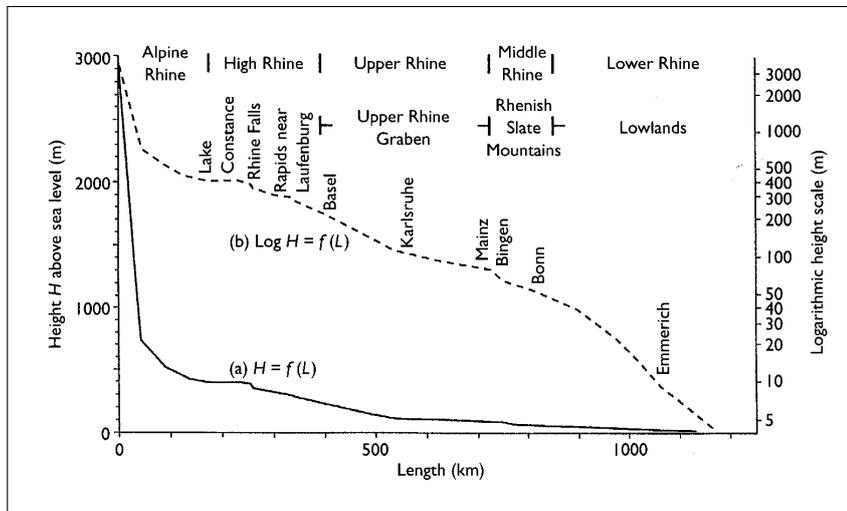


FIG. 1.4 – Profil longitudinal du Rhin tirés de l'ouvrage *Introduction to Geomorphology* de Ahnert (1998). L'altitude du lit est représenté en représentation linéaire (l'échelle de gauche correspond à la courbe en traits pleins) et logarithmique (l'échelle de droite est associée à la courbe en pointillés).

le cas d'un écoulement homogène. De la même façon, dans un écoulement stationnaire,  $L_{\text{sat}}$  représente la longueur nécessaire au flux pour adapter sa valeur à sa valeur d'équilibre  $q_{\text{sat}}$ , c'est à dire pour se saturer – d'où son nom. Comme le temps  $T_{\text{sat}}$  est habituellement beaucoup plus petit que les temps d'évolution du lit, nous le négligerons dans la suite de cette étude. L'expression de la longueur  $L_{\text{sat}}$  dépend du processus dominant qui limite le transport – c'est le plus lent d'entre tous. Nous l'expliciterons pour les deux régimes de transport mentionnés précédemment.

### 1.3 Une rivière est-elle à l'équilibre ?

Le profil longitudinal  $Z(x)$  du lit d'un cours d'eau est le résultat d'un équilibre très lent. Cet équilibre résulte des mouvements tectoniques des plaques, qui surélèvent les montagnes où se situent principalement les sources des cours d'eau, et de l'érosion du lit dû à l'écoulement de l'eau par gravité. De ces processus à longs termes, la rivière exhibe un profil longitudinal concave. La courbe de la figure 1.4 montre le profil du fleuve Rhin, de sa source dans les Alpes suisses jusqu'à la Mer du Nord où il se jette dans un grand delta. Ce profil typique est séparé en deux régions distinctes. Dans le massif des Alpes, le long des premiers kilomètres, la pente du lit,  $\mathcal{S} = \partial Z / \partial x$ , est très

### 1.3. Une rivière est-elle à l'équilibre ?

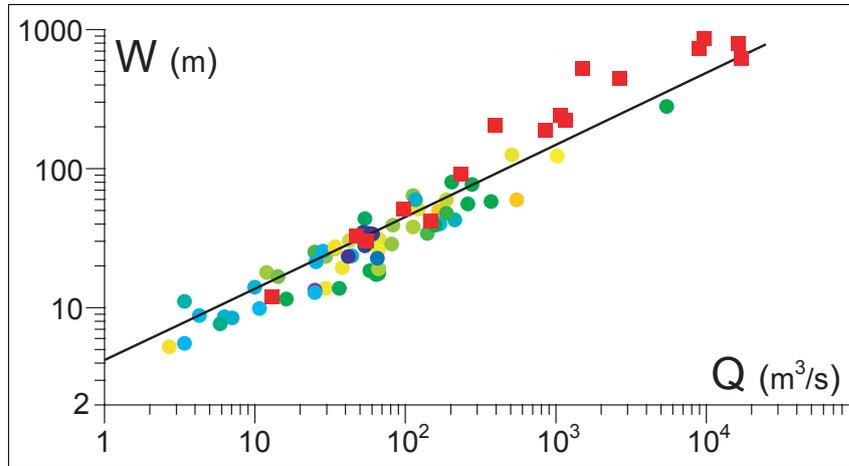


FIG. 1.5 – Largeur  $W$  en fonction du débit  $Q$  mesurés sur des rivières Nord-Américaines (données collectées par Gary Parker). Les ronds correspondent aux données obtenues sur rivières dont le fond est recouvert de galets et les carrés rouges aux rivières sableuses. La droite représente la loi de puissance  $W \sim Q^{0.5}$ .

abrupte : le fleuve perd rapidement de l'altitude. Puis quand le fleuve atteint les plaines germaniques, la pente du lit diminue et atteint des valeurs très faibles de l'ordre de  $\sim 5 \cdot 10^{-4}$ . Ces variations monotones de la pente le long du bassin versant s'accompagnent également de variations de la taille  $d$  des sédiments qui composent le lit des rivières. Dans les zones montagneuses, ce sont principalement des galets qui pavent le fond du cours d'eau. Les sédiments de tailles plus petites sont transportés et redéposés dans les plaines ou jusqu'à l'estuaire. À l'inverse des variations de  $S$  et de  $d$ , le débit  $Q$  augmente tout au long du cours d'eau. D'un faible filet d'eau à la source, le fleuve collecte le long de son bassin versant les eaux de pluie, des glaciers ou des nappes par l'intermédiaire des cours d'eau qui lui sont tributaires.

La communauté des géomorphologues s'accorde à considérer que le profil concave ainsi que la constitution du lit de la rivière est adaptée aux conditions hydrauliques. Ce faisant, la géométrie des chenaux est elle-aussi adaptée au débit liquide. [Leopold & Maddock 1953] ont regroupé un grand nombre de mesures sur différentes rivières du continent Nord-Américain. Ils mettent en évidence des corrélations entre les paramètres géométriques de la section d'une rivière (largeur, hauteur) ou de la vitesse moyenne avec le débit moyen :

$$W \sim Q^b \quad H \sim Q^f \quad U \sim Q^m. \quad (1.23)$$

Les valeurs typiques de ces exposants sont  $b \simeq 0.5$ ,  $f \simeq 0.4$  et  $m \simeq 0.1$ . Ces

valeurs sont des moyennes qui ne prétendent pas être universelles. Cependant, malgré les différents systèmes étudiés, les valeurs de  $b$ ,  $f$  et  $m$  varient remarquablement peu. Cet ensemble de loi d'échelle est connu sous le terme de "géométrie hydraulique". Les auteurs notent également que la corrélation entre la largeur et le débit est la plus robuste. La figure 1.5 représente les largeurs  $W$  mesurées en fonction de débits moyens obtenus sur les rivières Nord-Américaines. Ces grandeurs ont été regroupées au sein d'une même base de donnée par Gary Parker (accessible sur <http://cee.uiuc.edu/people/parkerg/>). Avec ce jeu de données, nous trouvons aussi une loi de puissance dont l'exposant est cohérent avec les résultats de [Leopold & Maddock 1953].

Toutes les théories qui visent à expliquer ces lois d'échelle se basent sur le fait que la rivière est dans un état d'équilibre vis à vis des conditions auxquelles elle est soumise. Beaucoup de ces théories utilisent une description thermodynamique et caractérisent cet état d'équilibre en optimisant un des paramètres du problème. Dans sa revue, [Singh 2003] liste par exemple des théories se basant sur la maximisation du taux de sédiment, du coefficient de friction, de l'efficacité du courant, de l'entropie ou sur la minimisation de la mobilité du chenal, du nombre de Froude  $Fr$ , de l'énergie de dissipation. Notre approche est plutôt d'identifier les différents mécanismes responsables de cet équilibre. En particulier, un critère d'équilibre particulièrement intéressant à tester est que la contrainte de cisaillement sur le fond tombe à la valeur du seuil.

$$\tau_b = \tau_{th} \approx (\rho_s - \rho_f) g d \sim \text{cste}. \quad (1.24)$$

Une expérience de laboratoire a été mise en place pour répondre à la question de la sélection de la largeur des rivières. Contrairement à une rivière naturelle, les principaux paramètres de cette expérience (le débit moyen  $Q$ , la pente longitudinale  $S$  et la taille des grains  $d$ ) peuvent être variés de manière contrôlée et indépendante. Parallèlement à cette expérience, nous avons réalisé des mesures sur le bassin versant d'une rivière sableuse du sud-ouest de la France : la Leyre. Cette rivière naturelle à fond sableux a été choisie car la taille des grains varie peu sur l'ensemble du bassin versant ( $d \approx 330\mu\text{m}$ ).

## 1.4 Rides et dunes

Le lit des rivières est génériquement instable. Des motifs, dûs au cisaillement que l'écoulement impose sur le fond, sont générés. Ces motifs sont à peu près transverses au courant et se présentent sous la forme de rides ou de dunes (voir photos de la figure 1.6). Depuis [Kennedy 1963] qui a, en premier, utilisé les outils de l'hydrodynamique pour prédire la formation de dunes et

## 1.4. Rides et dunes



FIG. 1.6 – (a) Photo de motifs transverses se formant sur le lit de la Leyre à Mios (33). (b) Photo de motifs se formant sur le lit d’une micro-rivière.

d’antidunes<sup>3</sup> en rivière, de nombreuses études ont traité de la question de l’instabilité d’un lit plat cisailé par un écoulement turbulent. Bien que des progrès aient été réalisés, notamment dans la description hydrodynamique de l’écoulement, la description fine des mécanismes nécessaires à la croissance de structures fait encore débat, comme en témoigne la récente contribution de [Colombini 2004].

Nous considérons la stabilité linéaire d’un fond périodique sinusoïdal  $Z(x) = \zeta \cos(kx)$  de faible amplitude  $\zeta$ . Le flux de sédiments transportés par l’écoulement  $q$  est lui aussi modulé à la longueur d’onde  $\lambda = 2\pi/k$  et a priori déphasé par rapport au fond (voir figure 1.7). Le maximum de  $q$  se situe dans une région proche du sommet. La position de ce maximum délimite une zone d’érosion en amont et une zone dans laquelle les grains se redéposent en aval. Si la crête de la bosse se trouve dans la région d’érosion, les grains du sommet de la bosse se font arrachés par l’écoulement et le motif est stabilisé par l’écoulement. À l’inverse, si la crête est dans la zone de déposition, le sommet croît puisqu’il reçoit des grains, dans ce cas nous dirons que le motif est instable à la longueur d’onde  $\lambda$ . Le déphasage entre le fond et le flux de sédiment est la somme de trois mécanismes principaux.

Le premier déphasage est d’origine hydrodynamique. L’étude de la réaction de l’écoulement turbulent à une perturbation du lit a été notamment étudiée par [Jackson & Hunt 1975]. Il en ressort que le déphasage entre l’écoulement et le lit est tel que le maximum de la contrainte de cisaillement basal  $\tau_b$  est génériquement décalé vers l’amont<sup>4</sup>. Ce déphasage a un effet déstabilis-

<sup>3</sup>Les antidunes sont des motifs périodiques qui se déplacent dans le sens contraire de l’écoulement

<sup>4</sup>Sur la figure 1.7, ce maximum correspond à l’endroit de resserrement des lignes de

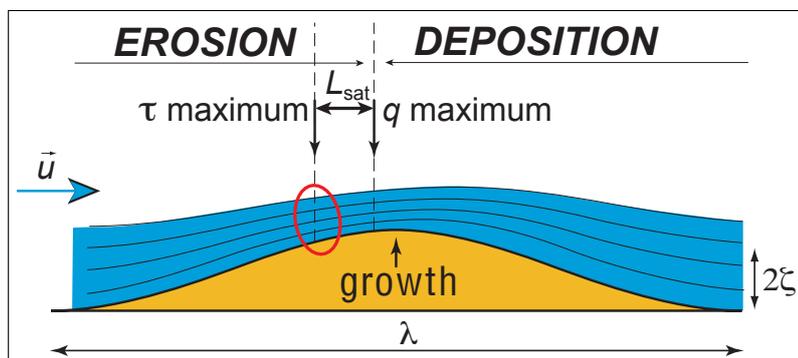


FIG. 1.7 – Schéma résumant les principaux ingrédients qui permettent la croissance d’une bosse périodique soumise au cisaillement d’un fluide en écoulement. L’hydrodynamique, qui est responsable d’un pincement des lignes de courant en amont de la bosse, a un effet déstabilisant. Parce qu’ils décalent le maximum du flux de sédiment en aval du maximum de contrainte basale, le transport de sédiment et la gravité ont un effet stabilisant sur le fond.

sant sur les structures. Le second déphasage est lié au transport : l’équilibre entre l’écoulement et le flux saturé de sédiment introduit un retard, encodé dans la longueur de saturation  $L_{\text{sat}}$ . Ce mécanisme stabilise les structures, puisqu’il translate le maximum de  $q$  vers l’aval. Enfin, le rôle de la pesanteur est clairement stabilisant puisqu’elle tend à étaler les structures.

L’article de référence pour l’étude des rides et des dunes sous-marines est celui de [Richards 1980]. Dans ce travail, rides et dunes sont présentées comme deux modes d’une même instabilité d’origine purement hydrodynamique : la longueur d’onde des rides est contrôlée par la rugosité du fond  $z_0$ , tandis que la longueur d’onde des dunes est contrôlée par la hauteur d’eau  $H$ . Le fait que la surface libre de l’écoulement a un rôle déstabilisant est d’ailleurs repris par toute la littérature dans le domaine, cf. l’article récent de [Colombini 2004]. Nous reviendrons sur cette vision et montrerons que les dunes ne peuvent résulter d’une instabilité linéaire.

## 1.5 Déroulement du manuscrit

Les deux questions auxquelles nous nous sommes intéressés et qui sont détaillées dans la suite de ce manuscrit sont la sélection de la largeur des rivières et la formation des rides et des dunes sur le lit des rivières. Le mémoire

---

courant.

## 1.5. Plan du manuscrit

---

est structuré en 11 chapitres<sup>5</sup>.

À travers la question de la sélection de la largeur, nous aborderons la question de l'équilibre d'une section rectiligne. Le contexte de cette étude est détaillé dans le chapitre 2. Un travail expérimental ainsi que des mesures sur une rivière sableuse, "la Leyre", ont été utilisés pour traiter cette question. Le dispositif expérimental qui permet de recréer des "micro-rivières" est présenté dans le chapitre 3 ainsi que le mode opératoire et les grandeurs mesurées. Le chapitre 4 présente le bassin versant de la Leyre et décrit les techniques de mesure adaptées au terrain. Le chapitre 5 analyse les profils de vitesse obtenus. Finalement, le chapitre 6 est consacré à la sélection de la largeur.

Les 5 derniers chapitres sont consacrés à l'étude théorique de la formation de rides et de dunes. Comme pour la première partie, le chapitre introductif 7 présente l'état de l'art relatif aux études théoriques et expérimentales de la formation de motifs sur le lit des rivières. Cette question nécessite une analyse précise de l'hydrodynamique au dessus d'un fond ondulé. Ce sera le rôle du chapitre 8. Nous aborderons ensuite au chapitre 9 la description du transport et montrerons qu'il gouverne la formation des rides. La formation des dunes est abordée au chapitre 10. Un résumé de l'ensemble de tous ces résultats est donné en 11.

---

<sup>5</sup>dont celui-ci

## Quelques références essentielles

- [Andreotti & al. 2002] Andreotti, B., Claudin, C. & Douady, S. 2002 Selection of dune shapes and velocities. Part 2 : A two-dimensional model. *Eur. Phys. J. B*, **28** 341-352.
- [Bagnold 1941] Bagnold, R. A. 1941 The Physics of blown sand and desert dunes. *Dover Publications*.
- [Bagnold 1956] Bagnold, R. A. 1941 The flow of cohesionless grains in fluids. *Proc. Royal Soc. Lond.*, **249** 235-297.
- [Charru 2006] Charru, F. 2006 Selection of the ripple length on a granular bed sheared by a liquid flow. *Physics of Fluids*, **18**.
- [Colombini 2004] Colombini, M. 2004 Revisiting the linear theory of sand dune formation. *J. Fluid Mech.* **502**, 1-16.
- [Jackson & Hunt 1975] Jackson, P.S. & Hunt, J.C.R. 1975 Turbulent wind flow over a low hill. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **101**, 929.
- [Kennedy 1963] Kennedy, J.F. 1963 The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels. *J. Fluid Mech.* **16**, 521-544.

- [Leopold & Maddock 1953] Leopold, L. B. & Maddock, T. J. 1953 The Hydraulic Geometry of Stream Channels and Some Physiographic Implications. *U. S. Geol. Survey. Professional Paper*, **252**.
- [Meyer-Peter & Müller 1948] Meyer-Peter, E. & Müller, R. 1948 Formulas for bed load transport. *Report on the 2nd Meeting of International Association for Hydraulic Research*, 39-64.
- [Richards 1980] Richards, K.J. 1980 The formation of ripples and dunes on an erodible bed. *J. Fluid Mech.* **99**, 597-618.
- [Singh 2003] Singh, V. P. 2003 On the Theories oh Hydraulic Geometry. *International Journal of Sediment Research*, **18**, 196-218.
- [Shields 1936] Shields, A. 1936 Anwendung der Aenlichkeitsmechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung. *Mitteilungen der Preussischen Versuchsanstalt fur Wasserbau und Schiffbau, Berlin, Germany*. Translated to English (Application of Similitude Mechanics and the Research on Turbulence to Bed-load Movement.) by W. P. Ott and J. C. van Uchelen, California Institute of Technology, Pasadena, California.

Première partie

Sélection de la largeur des  
rivières.

Une étude expérimentale



# Chapitre 2

## La géométrie hydraulique

### 2.1 Qu'appelle-t-on "géométrie hydraulique" ?

L'étude de la stabilité d'une rivière uniformément rectiligne semble constituer le préalable à toute étude sur la morphologie des rivières. Dans cette partie, nous allons nous intéresser au cas des rivières rectilignes en abordant la question de la sélection de la largeur qui fait partie du problème dit de la "géométrie hydraulique".

De nombreux cours d'eau, qu'ils soient naturels ou canalisés ont été instrumentés dans le but de décrire, prédire et contrôler les variations des principales caractéristiques physico-chimiques d'une rivière, à savoir son débit  $Q$ , sa hauteur d'eau  $H$  mais aussi sa température ou la concentration de certains solutés. Les géomorphologues ont notamment intensivement mesuré les débits de rivières naturelles, qu'elles soient torrentielles alluviales, dans le but d'en expliquer les formes. Parmi les nombreuses études publiées qui relient les variations des autres paramètres caractéristiques d'un cours d'eau en fonction de l'évolution du débit, la contribution de [Leopold & Maddock 1953] fait figure de référence. Dans ce rapport, les auteurs explicitent les lois d'évolution de la largeur  $W$ , de la hauteur  $H$  et de la vitesse  $U$  en fonction du débit  $Q$  à l'aide de lois d'échelle :

$$W = a Q^b \quad H = c Q^f \quad U = k Q^m . \quad (2.1)$$

En étudiant une section particulière soumise à des variations de débit quotidiennes, [Leopold & Maddock 1953] ont trouvé en moyenne des exposants  $b = 0.3$ ,  $f = 0.4$  et  $m = 0.3$ . En considérant une rivière unique depuis sa source jusqu'à sa fin, et en prenant pour  $Q$  le débit moyen annuel, les valeurs moyennes obtenues sont plutôt  $b = 0.5$ ,  $f = 0.4$  et  $m = 0.1$ . Bien que les valeurs de ces exposants obtenus par ces deux protocoles ne soient pas les

2.1. Qu'appelle-t-on "géométrie hydraulique" ?

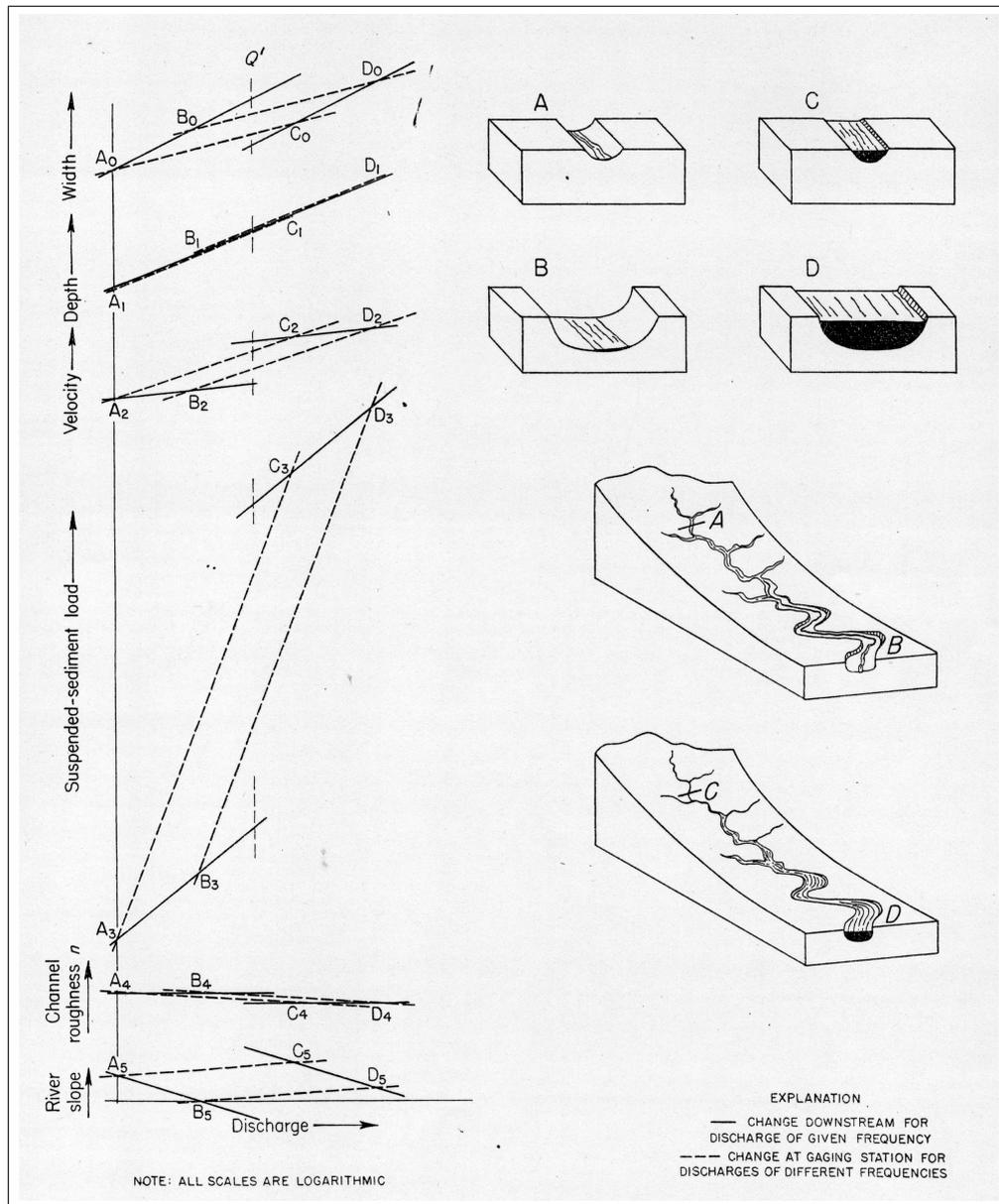


FIG. 2.1 – Schéma issu de [Leopold & Maddock 1953] des relations entre la largeur, la hauteur, la vitesse, le flux de sédiment, la rugosité de Manning et la pente de la rivière en fonction du débit  $Q$ . Les pointillés (les droites A-C et B-D) représentent les variations de ces paramètres en une section et les traits pleins (les droites A-B et C-D) correspondent au suivi sur le bassin versant, comme indiqué sur la partie droite du schéma.

## 2.1. Qu'appelle-t-on "géométrie hydraulique" ?

---

mêmes, ces résultats sont en accord avec la définition du débit :

$$Q \equiv W H U, \quad (2.2)$$

qui impose  $b + f + m = 1$ .

Ces résultats sont schématisés sur la figure 2.1, où la courbe  $A_0-C_0$  montre l'augmentation de la largeur avec le débit pour une section de la rivière choisie près de la source. La courbe  $B_0-D_0$  représente les mêmes dépendances de  $W$  en fonction de  $Q$  mais pour une section beaucoup plus éloignée de la source (ce qui explique le débit plus important en  $B$  que en  $A$ ). La courbe  $A_0-B_0$  représente les variations de la largeur avec le débit lorsqu'on descend la rivière. Les courbes en pointillés et en traits pleins n'ont pas la même pente et correspondent à deux valeurs de l'exposant  $b$ .

Ainsi, les caractéristiques des sections des rivières naturelles peuvent être décrites à l'aide d'une série de graphes présentant des formes géométriques simples (des droites en représentation Log-Log). Le terme "géométrie hydraulique" provient de ces formes géométriques. Même si ces schémas et les données des pentes  $b$ ,  $m$  et  $f$  n'apportent pas de compréhension physique des mécanismes associés, leurs comparaisons présentent des aspects utiles.

Après le milieu du XX<sup>me</sup> siècle, les lois d'échelle ont beaucoup fascinés les physiciens et les géomorphologues. Beaucoup d'énergie a été dépensée à tenter de corroborer ou de mettre en défaut ces lois d'échelles sur les rivières, notamment en étudiant les variations des exposants en fonction de nombreux paramètres. Par exemple, [Heede 1972] traite de l'influence des zones forestières sur la géométrie hydraulique de deux cours d'eaux de montagnes et [Chitale 1973] explore l'idée de l'utilisation de la valeur des exposants en tant que paramètre discriminant pour reconnaître une rivière à méandres d'une rivière rectiligne. Cette diversité des études met en avant deux constatations. Primo, dans la mesure où les mécanismes physiques qui conduisent à ces résultats n'ont toujours pas été clairement identifiés, le problème est toujours d'actualité. Secundo, les valeurs des coefficients obtenues par [Leopold & Maddock 1953] sont des valeurs moyennes, qui ne reflètent pas la particularité de chaque bassin versant (même si [Betson 1979] a montré que ces lois utilisées dans un modèle numérique permettent de meilleures prédictions que celles obtenues par des mesures de terrain spécifiques). Cependant, les auteurs notent que la valeur de l'exposant  $b$  dans le cas d'un suivi le long du bassin versant (la pente de la droite  $A_0 - B_0$  sur la figure 2.1) est la plus robuste. Cette robustesse laisse à penser que la rivière a adapté sa section pour atteindre un état d'équilibre ou de quasi-équilibre.

## 2.2 Notion de rivières à l'équilibre

La situation d'équilibre est atteinte lorsque, sur une section, la quantité de grains érodés est exactement compensée par la quantité de grains redéposés de sorte que les berges n'évoluent plus. De nombreuses théories ont été développées pour retrouver ces lois d'échelle. Leur point commun est de supposer que l'écoulement est permanent et uniforme et que la rivière a atteint un état de quasi-équilibre (ne serait-ce que localement). Dans sa revue, [Singh 2003] décrit une vingtaine d'approches théoriques différentes. Ces diverses contributions peuvent être regroupées en deux catégories distinctes.

La première repose sur le paradigme de la contrainte seuil. Cette théorie stipule que la géométrie de la section s'est adaptée au débit  $Q$  de sorte que la contrainte de cisaillement basale,  $\tau_b$ , se trouve à la valeur de la contrainte seuil sur toute la section. [Parker 1979] a montré comment cette supposition menait à un paradoxe : une section pour laquelle le transport a lieu sur le fond, ne peut pas avoir des berges stables, car les berges étant reliée de manière continue au lit, il existe forcément un endroit (près du centre) où  $\tau_b$  dépasse la valeur de mise en mouvement. Cet endroit des berges est donc érodé, ce qui provoque l'éboulement progressif des berges et un élargissement infini de la rivière. Ce résultat a notamment été obtenu à l'aide d'un modèle numérique par [Devauchelle 2007]. Un autre ingrédient stabilisateur doit être invoqué pour obtenir des berges stables. Pour une rivière sableuse, [Parker 1978 a] identifie la diffusion latérale de quantité de mouvement, car elle redistribue équitablement le sable en suspension sur les berges. Pour une rivière à galets, [Parker 1978 b] postule que la géométrie d'une section à l'équilibre est telle qu'elle conduit à une redistribution du cisaillement adéquate.

La seconde classe de théorie est basée sur une optimisation d'une grandeur caractéristique du problème. Le choix des grandeurs à optimiser peut être tout aussi bien hydrodynamique (comme la minimisation du taux d'énergie de dissipation) que thermodynamique (comme la maximisation de l'entropie). Ces théories s'accompagnent souvent d'un argument d'auto-organisation du bassin versant.

La plupart de ces théories ont été testées sur des sites particuliers et n'ont jamais été comparées. Dans sa revue [Singh 2003] conclut que malgré les efforts et les théories avancées, il est regrettable de constater que le travail de [Leopold & Maddock 1953] fait toujours office de référence dans la question de la géométrie hydraulique. En parallèle de ces mesures *in situ*, des expériences ont été menées pour reproduire les conditions naturelles dans l'espoir d'en dégager les principaux ingrédients responsables de ces lois d'échelles.

### 2.3 Passer de l'échelle 1/1 au laboratoire

Pour introduire la question de la sélection de la largeur, [Julien 1994] cite les travaux d'ingénierie menés en Inde et au Pakistan au XIX<sup>me</sup> siècle dont le but était d'optimiser la géométrie de canaux d'irrigation. En ce sens, la construction de ces canaux représente la première étude expérimentale dédiée au problème de la géométrie hydraulique.

L'utilisation de "rivières expérimentales" en géomorphologie permet de simplifier les systèmes d'étude. [Ikeda 1981, Diplas 1990, Macky 1999] ont notamment développé des dispositifs pour traiter de la question de la sélection de la largeur des rivières. Ces expériences contrôlées ont permis d'accéder à de larges gammes de paramètres et de reproduire notamment des conditions hydrauliques loin du seuil de mise en mouvement des sédiments. Cependant, sous le prétexte de reproduire aussi fidèlement que possible une rivière naturelle, ces canaux ont des mensurations souvent volumineuses : par exemple, [Macky 1999] a utilisé un flume de 34m de long et 2.4m de large. Les inconvénients de si grands systèmes d'étude sont multiples. Parmi ceux-ci, nous pouvons citer la durée des expériences qui limite fortement le nombre d'expériences pouvant être réalisées : par exemple [Ikeda 1981] en utilisant un flume de 15m de long obtient des temps de réponses de l'ordre de la demi-journée. De plus, il est souvent difficile de contrôler les différents paramètres dans les dispositifs expérimentaux, dont les dimensions sont très grandes. Enfin, de sérieux doutes peuvent être émis sur la représentativité des mesures (mesures ponctuelles de sédiments dans le temps par exemple). Ces inconvénients peuvent poser de plus gros problèmes quant à la compréhension du phénomène étudié.

Pour palier à ce genre de problèmes, une expérience dite "de laboratoire" a récemment été mise en place à l'Institut de Physique du Globe dans les locaux de Saint-Maur des Fossés (94). Le dispositif expérimental n'est pas plus long que 2m. Il a servi pour recréer une "micro-rivière" et étudier sa réponse à un décalage horizontal de son chenal [Armstrong 2003]. Le cadre de cette étude était principalement de discuter des hypothèses faites en tectonique sur le dynamique d'érosion des berges, néanmoins, ce travail a permis également de valider la "mise à l'échelle" d'un tel dispositif. Le tableau 2.1 récapitule les différents ordres de grandeurs rencontrés sur une rivière naturelle, sur une expérience dont le but est de reproduire fidèlement un cours d'eau et une micro-rivière. À l'aide du dispositif expérimental de Saint-Maur des Fossés, les temps caractéristiques d'évolution ont été considérablement réduits par rapport aux expériences précédentes, les dimensions de l'expérience sont à taille humaine et la simplicité de mise en œuvre permet de réduire la complexité du système étudié et d'envisager une meilleure compréhension des

## 2.4. Les différentes questions abordées

	rivières naturelles	rivières expérimentales	micro-rivières en labo
Longueur	$\gg 1\text{km}$	$\sim 10\text{m}$	$\sim 1\text{m}$
Pente	$\sim 10^{-4}$	quelques degrés	quelques degrés
Granulométrie	très polydisperse $10\mu\text{m} < d < 10\text{cm}$	monodisperse $\sim 1\text{mm}$	monodisperse $\sim 100\mu\text{m}$
Largeur	$1 < W < 100\text{m}$	$\sim 1\text{m}$	$\sim 10\text{cm}$
Hauteur	$0.1 < H < 10\text{m}$	$\sim 5\text{cm}$	$\sim 2\text{mm}$
Débit	$\gg 1000 \ell/\text{min}$	$\sim 100 \ell/\text{min}$	$\sim 1 \ell/\text{min}$
$\mathcal{R}e$	$\gg 10000$	$\sim 5000$	$\sim 500$
Échelles de temps	des années	$\sim 10\text{h}$	$\sim 1\text{h}$

TAB. 2.1 – Comparaison des différences entre une rivière naturelle et une micro-rivière de laboratoire

phénomènes physiques impliqués dans la sélection de la largeur des rivières.

## 2.4 Les différentes questions abordées

Le montage expérimental qui sert à étudier la sélection de la largeur est détaillé au chapitre 3. Le déroulement d'une expérience typique y est décrit : il permet de comprendre les possibilités de l'expérience. Les techniques de mesures de la vitesse de surface et de la topographie du chenal sont développées. Lorsque nous nous référerons à la rivière créée par ce dispositif expérimental, nous utiliserons le terme de "micro-rivière", en comparaison aux rivières générées dans des dispositifs plus importants.

En parallèle à cette expérience de laboratoire, nous avons également réalisé des missions de terrain sur le bassin versant de la Leyre. Situé dans la région des Landes, cette rivière a été choisie parce qu'elle présente une granulométrie quasiment uniforme et relativement homogène sur toute l'étendue de son bassin versant. Les méthodes de mesures spécifiquement développées pour la Leyre sont également présentées dans le chapitre 4.

La connaissance de l'hydrodynamique permet de se faire une idée précise de la valeur et des variations du cisaillement engendré par l'écoulement. Par exemple, la contrainte de cisaillement basale ne s'exprime pas de la même façon en régime turbulent ou en régime laminaire. Dans ce but, le chapitre 5 est consacré à l'analyse de l'écoulement dans une section homogène. Les différents profils de vitesse mesurés dans la Leyre sont analysés. Dans le cas de la micro-rivière, les échelles de longueurs sont telles que le régime hydrody-

## 2.4. Les différentes questions abordées

---

namique se situe dans la zone intermédiaire entre les écoulements purement laminaires et les écoulements résolument turbulents. Enfin, la question de la sélection de la largeur est abordée au chapitre 6. Les mesures de terrain et l'étude en laboratoire sont cohérente avec les lois d'échelle de la littérature, montrant que la loi  $W \sim Q^{0.5}$  résulte d'une dynamique locale. L'analyse de l'équilibre de la micro-rivière n'a cependant pu être menée qu'aux pentes les plus faibles, en raison de l'apparition rapides d'instabilités.

## 2.4. Les différentes questions abordées

---

# Chapitre 3

## Le dispositif expérimental

### 3.1 Le montage expérimental

Le dispositif expérimental est constitué d'une cuve à lit mobile qui repose sur un bati Norcan inclinable à l'aide d'un vérin (voir figure 3.1). Cette cuve se compose d'une plaque de Plexiglas qui fait office de fond. Cette planche est limitée sur le haut et les côtés par des rails Norcan et en bas par une lamelle de Plexiglas et a été rendue étanche. Elle est longue de 2m, large de 70cm et haute de 7.5cm et est recouverte de billes de verre de granulométrie contrôlée et homogène. Les billes de verre sont fournies par l'entreprise "Marteau et Lemarié". Elles ont un diamètre compris entre 70 et 110 $\mu$ m. Les schémas du dispositif et de la cuve à lit mobile ont été représentés sur la figure 3.2. L'arrivée d'eau se fait par le haut de la cuve et le débit est contrôlé par un robinet suivi d'un débit-mètre placés sur le côté de l'expérience. Contrairement à la plupart des expériences de ce type, l'entrée de la micro-rivière n'est pas continûment approvisionnée en sédiments par l'opérateur. L'eau s'écoule vers le bas de la cuve à l'intérieur d'un chenal de quelques centimètres de large, creusé au centre du lit de billes de verre et qui constitue la micro-rivière. Le bas de la cuve ne mesure que 5cm de haut pour permettre aux billes et à l'eau de s'évacuer (d'où son nom de "cuve à lit mobile"). Ce dispositif expérimental est similaire à celui utilisé par [Armstrong 2003].

Pour étudier les processus d'érosion/déposition, deux nappes laser interceptent la surface du lit au même endroit. La topographie de la rivière (i.e. la largeur du lit et la profondeur d'eau) est mesurée en ce point du plan incliné, grâce à des photos prises à intervalles de temps réguliers. L'appareil photo utilisé est un réflexe de chez Canon, l'EOS 20-D. Il est placé à environ 80cm au-dessus du point de mesure. La focale de l'objectif utilisé est de 20mm.

### 3.1. Le montage expérimental

---



FIG. 3.1 – Photos du dispositif expérimental vu de côté en l'absence de billes de verres. À l'extrémité du plan incliné, un dévidoir est posé sur une balance, qui relie à un ordinateur. Le côté "rive droite" de l'expérience est équipé de l'électricité (on y branche les lampes, la balance, l'ordinateur ainsi que l'alimentation de l'appareil photo). L'autre côté du dispositif étant dédiée à l'arrivée d'eau, cela permet de réduire les risques liés à la présence d'eau et d'électricité. Pendant les expériences, l'appareil photo se trouve au-dessus du plan incliné de façon à prendre en photo le milieu de la micro-rivière. Les deux lasers sont fixés sur la barre Norcan qui est placée au-dessus de l'extrémité du plan incliné.

### 3.1. Le montage expérimental

---

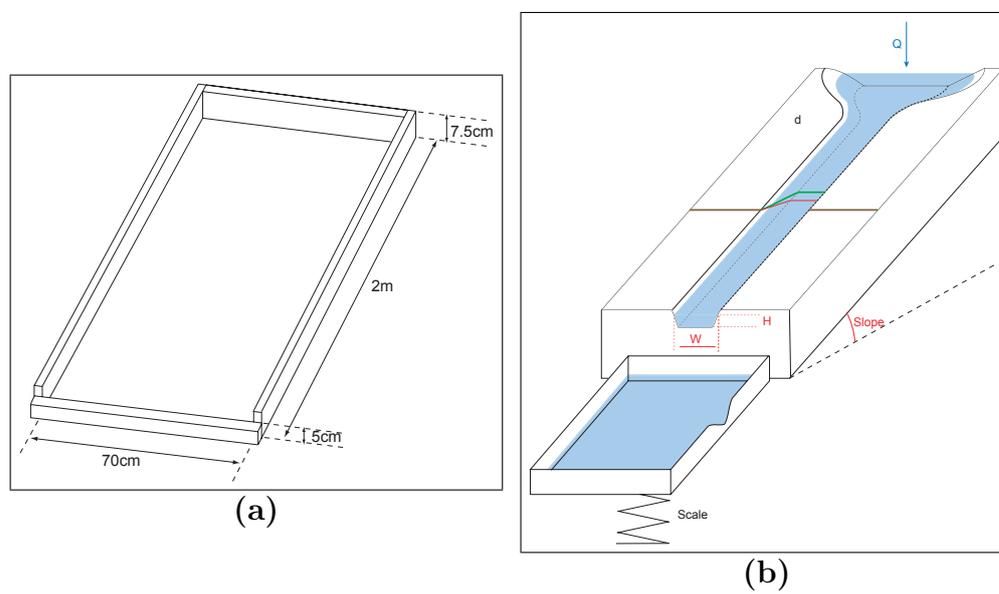


FIG. 3.2 – Schémas de la cuve mobile (a) et du dispositif expérimental (b). La largeur de la rivière est notée  $W$  et la hauteur d'eau  $H$ . Les paramètres ajustables sont le débit d'eau en entrée  $Q$ , la pente du plan incliné  $S$  et la taille des grains  $d$ .

### 3.2. Déroulement d'une expérience typique

---

La résolution spatiale des photos prises,  $\Delta x = \Delta y = 2.5\text{pixels/mm}$ , a été mesurée en utilisant la photo d'une feuille de papier millimétrée posée sur la surface du matériau granulaire. L'appareil photo est également utilisé pour repérer le déplacement d'une poudre colorée emportée par le courant et ainsi mesurer le profil transverse de vitesse de surface.

À l'exutoire, l'eau et les billes de verre transportées se déversent dans un dévidoire posé sur une balance. Lorsque ce bac se remplit, le débit massique total  $Q_{\text{tot}}(t) = Q_{\text{liq}}(t) + Q_{\text{sol}}(t)$  est mesuré en enregistrant la masse de l'apport de matière en sortie (eau+sédiments) au cours du temps. Lorsque le dévidoire est à débordement, le niveau d'eau est maintenu constant et la masse mesurée par la balance correspond à la masse déjàugée des billes de verre qui se déversent et restent piégées dans le dévidoire. De ce fait, l'évolution du débit solide  $Q_{\text{sol}}$  pendant l'expérience est donné par :

$$m_{\text{sol}}(t) = \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho} m_{\text{bal}}(t), \quad (3.1)$$

où  $\rho$  et  $\rho_s$  représentent les masses volumiques de l'eau et des billes de verre et  $m_{\text{bal}}(t)$  correspond à la masse enregistrée par la balance à la date  $t$ .

Avec un tel dispositif, les nombres de Reynolds caractéristiques de ces micro-rivières sont :

$$Re \approx \frac{1\text{mm} \cdot 0.5\text{m/s}}{1.1 \cdot 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}} \approx 500.$$

Cet ordre de grandeur signifie que le régime de l'écoulement se situe principalement dans la région où aucun des effets des forces d'inertie et de viscosité ne peuvent être négligés. Le fait que l'expérience fonctionne dans le régime hydraulique intermédiaire entre le régime laminaire et le régime turbulent peut être également observé sur le graphe  $\theta$  vs  $Re_d$  de la figure 1.3b, où la partie colorée représente les valeurs des paramètres explorés lors des expériences sur la micro-rivière. Sur cette figure, nous notons également que les valeurs typiques du nombre de Shields sont proches du seuil de mise en mouvement. Nous supposons donc que le transport se fait par charriage des grains le long du lit et non par la mise en suspension des grains dans la couche entière de liquide.

## 3.2 Déroulement d'une expérience typique

Avant chaque expérience, le lit de billes de verre est méthodiquement préparé en l'arrosant de façon à obtenir un milieu dont la fraction volumique d'eau est qualitativement comparable à celle correspondant à la fin d'une expérience. Puis à l'aide d'une barre Norcan, la surface du lit granulaire

### 3.2. Déroulement d'une expérience typique

---



FIG. 3.3 – Photos de l'entrée (b) et de la sortie (a) de la micro-rivière. Les piscines et les plaques déviateuses placées en entrée et en sortie du dispositif préviennent la formation d'ondes parasites, qui brisent l'homogénéité des berges.

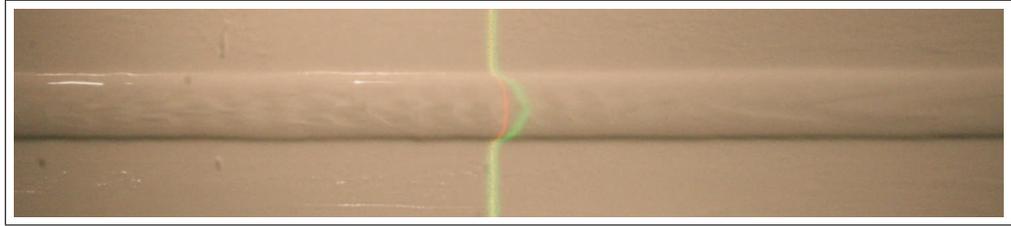
est arasée et égalisée. Ce faisant, un lit plat d'environ 7.5cm d'épaisseur et de cohésion homogène est obtenu. La barre Norcan est également équipée d'un soc. De sorte que l'opération d'aplanissement de la surface permet aussi de creuser un sillon initial, dont la géométrie dépend de celle du soc. Ce sillon constitue le chenal de la future micro-rivière. Pour obtenir des rives rectilignes, la barre Norcan est guidée, grâce à des équerres Norcan, le long des rainures des deux barres parallèles qui constituent le bord de la cuve mobile. Il est nécessaire de réitérer cette opération plusieurs fois avant l'expérience afin d'obtenir des berges bien délimitées, les plus rigoureusement droites et homogènes sur toute la longueur du plan. Des piscines sont creusées en haut et en bas de la cuve et des plaques déviateuses sont également placées en entrée et en sortie de la micro-rivière. Ces précautions permettent de canaliser le débit d'eau et retardent la formation d'ondes parasites qui peuvent se propager depuis la sortie et l'entrée et briser l'homogénéité des berges ou du lit. De telles astuces de préparation (visibles sur la figure 3.3) sont d'autant plus nécessaires que l'expérience dure longtemps et que les débits d'eau en entrée sont importants.

Ces préparatifs sont cruciaux car ils déterminent, dans une grande mesure, le bon déroulement et la reproductibilité des expériences. Une grande partie des expériences (parfois 50% du temps) est d'ailleurs consacrée à la préparation du lit.

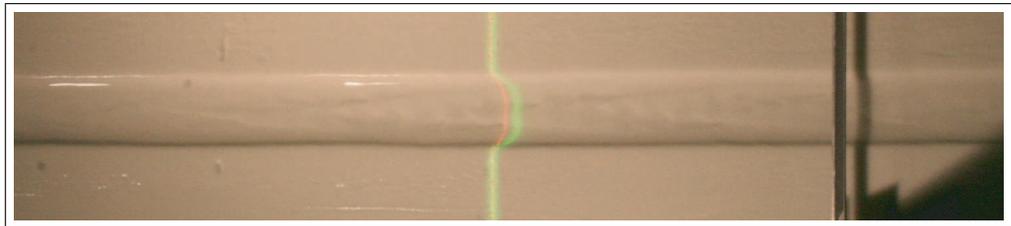
L'expérience est alors prête à commencer : l'eau, dont le débit constant a été contrôlé à l'aide du débit-mètre, s'écoule dans le canal initial. Dans les premiers moments de l'expérience, l'arrivée de l'eau provoque l'effondrement des berges, entraînant un élargissement rapide de la rivière. L'analyse de la prise de photos automatiques pendant l'expérience permet de mesurer *a pos-*

### 3.2. Déroulement d'une expérience typique

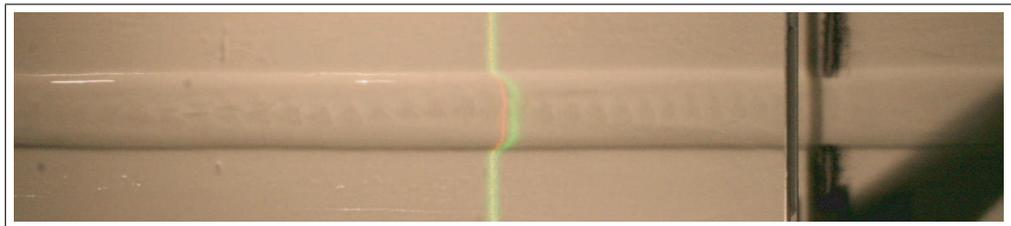
---



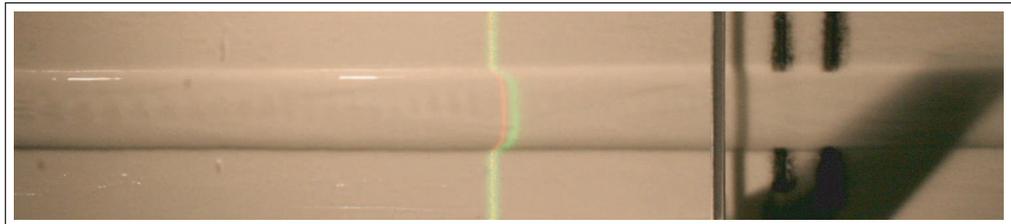
$t \sim 300\text{sec}$



$t \sim 600\text{sec}$



$t \sim 1200\text{sec}$



$t \sim 2400\text{sec}$

FIG. 3.4 – Photos des motifs qui se créent successivement sur le fond du lit de la micro-rivière. Sur la première photo, les rides sont en train de disparaître au profit de barres alternées. Sur les photos suivantes les deux motifs se superposent.

### 3.2. Déroulement d'une expérience typique

---

*teriori* cet élargissement. Puis le taux d'élargissement diminue et des motifs sont générés sur le fond du lit. Ce sont tout d'abord des rides périodiques qui apparaissent. Elles descendent le courant à une vitesse moins rapide que l'écoulement qui les meut. Fréquemment, ces rides laissent place à des barres alternées dont la longueur d'onde augmente au fil du courant. Rapidement, ces barres alternées occupent tout le lit de la micro-rivière<sup>1</sup>. Ces motifs sont visibles sur la figure 3.4 qui présente quatre photos de la micro-rivière au cours de la même expérience. Nous considérons qu'un état d'équilibre est atteint lorsque les berges restent suffisamment droites et homogènes et n'évoluent quasiment plus. Parfois, la réapparition de rides accompagne cet état d'équilibre. Dans ce cas, les rides paraissent immobiles.

Des profils de vitesse de surface peuvent être mesurés à tout moment de l'expérience en détectant, à intervalles de temps réguliers, l'évolution d'une ligne d'une fine poudre de plastique colorée (Rilsan) emportée par le courant. Cette poudre est choisie pour sa capacité à flotter sans s'agglomérer ni perturber l'écoulement. Différents types de poudre, notamment de couleur différente, ont été testés en vue d'améliorer la détection. L'appareil photo, réglé en mode rafale, prend 5 images par secondes, ce qui au vues des vitesses de surfaces ( $\approx 0.5\text{m/s}$ ) est suffisant. Les réglages de lumière et de l'appareil photo ne sont pas les mêmes que lors des prises qui permettent d'étudier la topographie d'une section, de sorte que la mesure de profils de vitesse ne peut pas se faire simultanément avec la mesure de la topographie.

L'expérience est arrêtée si les berges ne sont plus suffisamment homogènes dans la zone de mesure ou si l'évolution des berges ne semble plus significative. Dans ce cas, l'écoulement est coupé et le lit re-préparé pour l'expérience suivante. Un écoulement dure environ une heure. Ce temps est suffisamment court pour négliger d'éventuels réarrangements de la pente du lit. Ces réarrangements ont lieu à l'entrée et à la sortie du dispositif, car ils sont dus à la différence de niveau entre le lit de la micro-rivière et le fond des piscines de tranquillisation.

Il est à noter que l'apparition de tels défauts est d'autant plus critique que les valeurs du débit d'entrée ou de la pente du plan incliné sont importantes. À ces fortes valeurs, il est également très facile de créer des instabilités du lit de type cascade-piscine. Celles-ci sont nucléées par la moindre inhomogénéité du lit, qui génère une érosion rapide et ponctuelle. Ce creusement accélère localement le flux. En aval de ce creux (la cascade), une large région de restabilisation se forme (la piscine). Ainsi, les berges se rétrécissent au niveau de la "cascade" avant de s'élargir considérablement au niveau de la

---

<sup>1</sup>Il va sans dire que de tels motifs perturbent la surface libre et les mesures de la topographie du chenal...

"piscine". Cette instabilité du lit se développe très rapidement et de manière fréquente puisque les structures périodiques présentes sur le lit jouent le rôle d'excellents nucléateurs. Nous n'avons pas trouvé de réelles solutions pour entraver la création de ce type d'instabilité. L'expérience est arrêtée peu de temps après le constat de son développement...

## 3.3 Les paramètres accessibles

Les cinq paramètres de contrôle de l'expérience sont : la pente de la surface libre  $\mathcal{S}$ , le débit liquide en entrée  $Q$ , la taille des grains  $d$  qui composent les berges et le lit, la géométrie du sillon initial et la fraction volumique d'eau à l'intérieur du matériau granulaire. Seuls les deux derniers sont intrinsèques au dispositif et ne sont pas facilement comparables aux situations naturelles. A priori, les gammes accessibles de ces paramètres sont très étendues. Ci-dessous, nous détaillons comment nous avons fait varier chacun de ces cinq paramètres.

**La pente :** Il y a trois pentes différentes dans l'expérience : la pente du plan incliné  $\alpha$  (qui est également la pente initiale du lit de la micro-rivière), la pente du lit qui peut varier localement et temporellement et la pente de la surface libre  $\mathcal{S}$ . Le dispositif est conçu pour étudier une rivière homogène. Les échelles de temps des expériences sont telles que nous pouvons négliger d'éventuelles évolutions locales de la pente et considérer que la pente du lit reste constante au cours des expériences. De plus, nous supposons que  $\mathcal{S}$  reste constante et que sa valeur est fixée par l'inclinaison de la cuve :  $\mathcal{S} = \tan \alpha$ . Nous avons fait varier la pente du plan incliné entre  $0.5^\circ$  et  $3^\circ$ . Lorsque  $\tan \alpha > 3^\circ$ , le lit de la rivière devient très instable et le fond se déstabilise rapidement et forme des motifs "cascades-piscines". Dans de telles conditions, une expérience, où le but est d'étudier des berges homogènes et droites, est stoppée au bout de quelques secondes, c'est à dire le temps que la première cascade se forme et destabilise l'ensemble du chenal.

**Le débit liquide :** En dessous d'un certain débit, la force du courant n'est pas suffisante pour mobiliser les grains du lit. Ce seuil de mise en mouvement dépend aussi de  $d$  et  $\mathcal{S}$ . Il est donc inutile d'explorer des gammes de débits trop faibles. Pour les plus grands débits, la limite est surtout expérimentale : même en utilisant une pompe qui permet d'accéder à de forts débits (i.e.  $\sim 10 \ell/\text{min}$ ), les expériences sont rendues délicates par l'apparition de perturbations du lit (les instabilités cascade-piscine) qui brisent l'homogénéité de la rivière. De ce fait, lors des expériences, nous avons fait varier le débit

### 3.3. Les paramètres accessibles

---

entre  $0.2 \ell/\text{min}$  et  $5 \ell/\text{min}$ . Les valeurs du débit liquide indiquées par le débit-mètre placé en amont de la micro-rivière sont cohérentes avec la mesure du volume d'eau rejeté par la rivière en fonction du temps. Nous avons constaté que cette mesure du débit liquide à l'exutoire du dispositif (la balance est en mode "remplissage") est plus précise que l'affichage du débit-mètre.

**La taille des sédiments :** Le choix de la taille des billes de verre est contraint par la cohésion. Avec des billes de très petites tailles, les berges deviennent très cohésives et leur évolution deviendrait très lente. À l'inverse, avec de très grandes tailles de grain, un sillon se déstabilise facilement et se divise en plusieurs branches : il se forme alors des tresses. Nous avons travaillé avec des billes de diamètre intermédiaire  $d = 90 \pm 20 \mu\text{m}$ . Nous n'avons pas eu le temps de faire varier ce paramètre. Changer la taille des billes est une perspective qui permettrait, notamment, d'étudier le rôle de la cohésion sur l'évolution des berges.

**La fraction volumique d'eau du lit granulaire :** Le degré d'humidité du matériau granulaire est, avec la taille des grains, le second facteur responsable de la cohésion du lit. Lorsque la fraction volumique d'eau dans le lit granulaire augmente faiblement, des ponts capillaires entre les billes se créent et augmentent la cohésion du matériau granulaire. En revanche, si le degré d'imbibition du lit est trop important, l'eau envahit tous les interstices entre les billes et l'action des ponts capillaires s'estompe : la cohésion du matériau granulaire décroît. De ce fait, la fraction volumique d'eau dans le lit granulaire est importante car elle détermine la cohésion et donc la stabilité des berges. Le dispositif expérimental ne permet pas de mesurer la fraction volumique d'eau à l'intérieur du lit granulaire, néanmoins le protocole expérimental a été adapté de façon à effectuer des expériences présentant des degrés d'imbibition comparables.

**La géométrie du sillon initial** Parmi les géométries possibles, nous avons essayé deux formes de soc : un soc rectangulaire et un soc en forme de "V". Avec une forme rectangulaire, le sillon initial est caractérisé par deux paramètres, sa largeur  $W_0$  et sa hauteur  $H_0$ . Le bon déroulement d'une expérience est surtout sensible à la largeur initiale du sillon. En effet, si nous creusons un sillon trop large (i.e. bien supérieur à la largeur asymptotique), la force de l'écoulement n'est pas suffisante pour perturber les berges. La dynamique d'évolution des berges est très compliquée : elle se caractérise notamment par une re-chenalisation de la micro-rivière. En revanche, si le sillon initial est trop étroit, la rivière s'élargit très rapidement. Cette dynamique très rapide

### 3.4. Les grandeurs mesurées

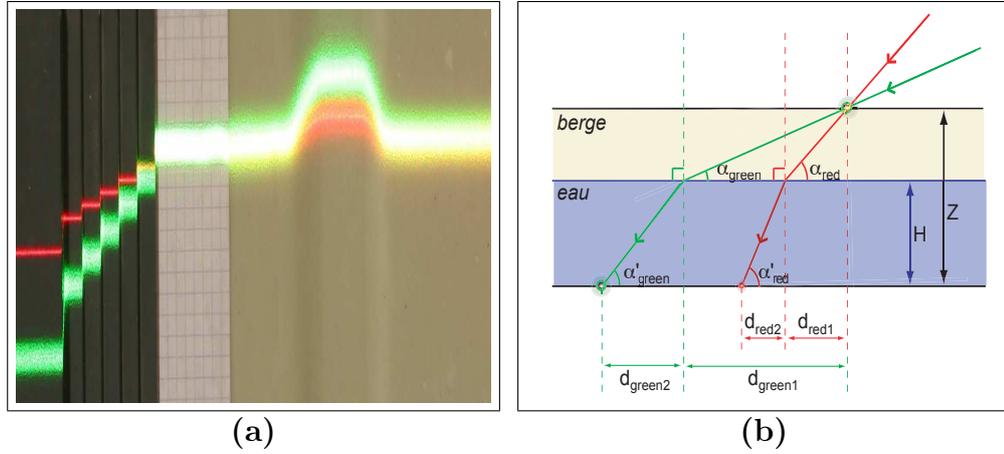


FIG. 3.5 – (a) Photo (vue du dessus) des 2 lignes Laser interceptant la rivière avant le début d'une expérience. (b) Schéma en coupe de la rivière et des trajets optiques des deux nappes Lasers.

entraîne l'apparition d'hétérogénéités qui nécessitent l'arrêt de l'expérience. Il est souvent nécessaire de réaliser plusieurs essais avant de trouver le bon compromis sur la largeur  $W_0$ . Lorsque le soc en forme de "V" a été utilisé, les résultats furent semblables aux essais pour lesquels le sillon initial était trop large, c'est pourquoi nous avons surtout utilisé un soc rectangulaire.

### 3.4 Les grandeurs mesurées

Pour cette expérience, nous voulons suivre l'évolution des berges rectilignes et du fond de la micro-rivière. Nous mesurons la topographie  $Z(y, t)$  de la section à l'aide de deux lasers. En outre, afin de connaître de manière assez précise les caractéristiques hydrodynamiques de la micro-rivière, nous mesurons des profils de vitesse transverses à l'aide de traceurs colorés.

**De l'utilisation de 2 Lasers** Il est parfois commode d'utiliser une technique de Moiré pour mesurer précisément des topographies en trois dimensions. Pour ce système, il n'y a pas eu besoin de mettre en place cette technique car la micro-rivière est supposée être invariante suivant l'axe  $(Ox)$ . Lors des expériences, nous vérifions, à l'oeil cette hypothèse d'homogénéité des berges. De ce fait, nous nous sommes contentés d'une mesure en un seul point. Ce point de mesure se situe au milieu de la cuve à lit mobile, c'est à dire loin de l'entrée et de la sortie du dispositif où se nucléent les instabilités

### 3.4. Les grandeurs mesurées

---

des berges.

En ce point, deux nappes lasers<sup>2</sup> viennent intercepter le haut du lit granulaire (voir photo (a) de la figure 3.5). Ces deux lasers ont une inclinaison différente et leur fréquence d'émission a été choisie de façon à faciliter la détection des nappes. La trace rouge est obtenue par un "crayon" laser émettant à la longueur d'onde de 635nm surmonté d'une tête optique, qui génère la nappe. Le milieu granulaire humide diffuse énormément la lumière. Ainsi, malgré tous les soins apportés aux réglages de l'optique, le pinceau fin du laser rouge apparaît légèrement épais sur la photo 3.5a. La ligne verte est générée par un module laser compact vendu par Apinex. Le module génère en continu un signal à 532nm d'une puissance inférieure à 5mW. Ce pointeur est vendu "prêt à utiliser", c'est pourquoi il n'est pas possible de régler la distance de focalisation du laser. Ainsi, la trace du laser vert sur le matériau granulaire apparaît plus large que celle du laser rouge. Cela ne constitue pas une limitation à la précision de l'expérience. En effet, nous adaptons les paramètres de l'appareil photo de façon à ce que la lumière rétro-diffusée ne sature pas les capteurs, lors de la prise de vues. Il est possible de détecter avec la même précision ( $\sim$  le dixième de pixel), la position du maximum d'intensité du profil gaussien de chacun des deux Lasers : les intensités lumineuses de ces rayons sont représentés sur la figure 3.6a. La détection du maximum des deux composantes rouge et verte sur toute l'image génère les deux lignes représentées sur les figure 3.6b et c.

Théoriquement voici comment il est possible de mesurer le profil transverse  $Z(y)$  et la hauteur d'eau  $H$  de la micro-rivière en utilisant les déviations lumineuses représentées à la figure 3.6b et exprimées en pixels. Considérons l'interface air/eau où les rayons des lasers sont réfractés et raisonnons uniquement sur le Laser rouge. En appliquant la seconde loi de Snell-Descartes, il vient, en utilisant les notations du schéma 3.5b :

$$\cos \alpha_{\text{red}} = n_1 \cos \alpha'_{\text{red}}. \quad (3.2)$$

Où  $n_1$ , l'indice de réfraction de l'eau est pris égal à 1.33. Les deux longueurs  $d_{\text{red1}}$  et  $d_{\text{red2}}$  s'expriment ensuite :

$$d_{\text{red2}} = \frac{H}{\tan \alpha'_{\text{red}}} \quad \text{et} \quad d_{\text{red1}} = \frac{Z - H}{\tan \alpha_{\text{red}}}. \quad (3.3)$$

En notant  $d_{\text{red}} = d_{\text{red1}} + d_{\text{red2}}$ , et en appliquant le même raisonnement pour le Laser vert, les deux valeurs  $H$  et  $Z$  peuvent être obtenus en fonction de la

---

<sup>2</sup>Nous utilisons deux lasers, car nous voulons *in fine* accéder à deux informations : la topographie du chenal  $Z(y)$  ainsi que la hauteur d'eau  $H$  en ce point.

### 3.4. Les grandeurs mesurées

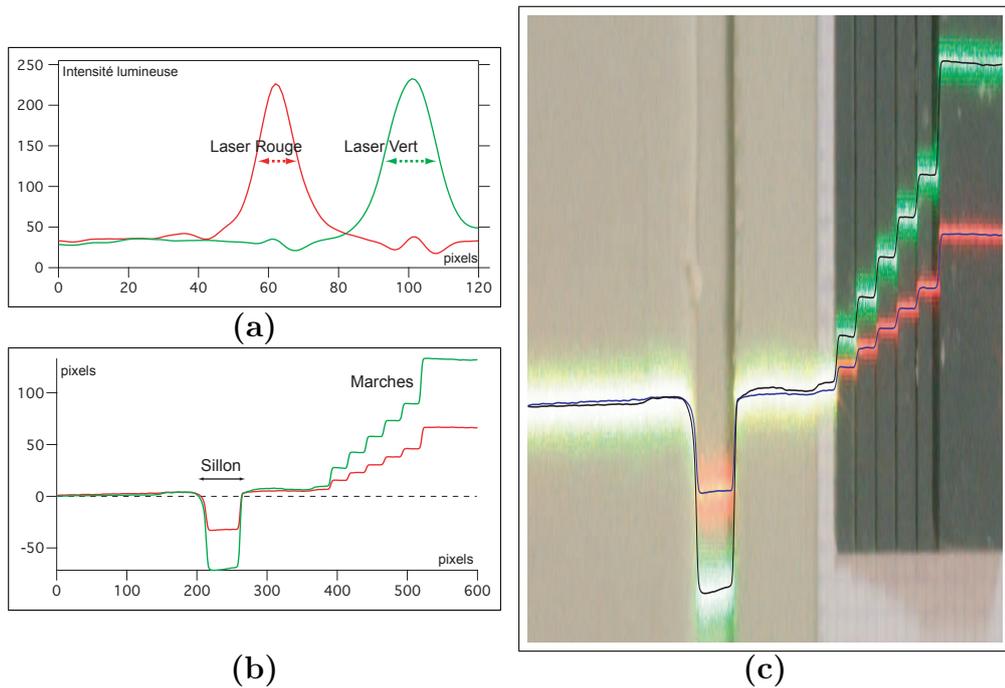


FIG. 3.6 – (a) Intensité lumineuse des composantes Rouge et Verte issu d'une ligne d'une photo d'une expérience typique : les 2 pics correspondent aux 2 lignes Laser. (b) Lignes Lasers obtenues par détection de l'intensité des 2 nappes Lasers. (c) Photo de la micro-rivière avant le début d'une expérience. Les traces des lasers de (b) y ont été superposées.

### 3.4. Les grandeurs mesurées

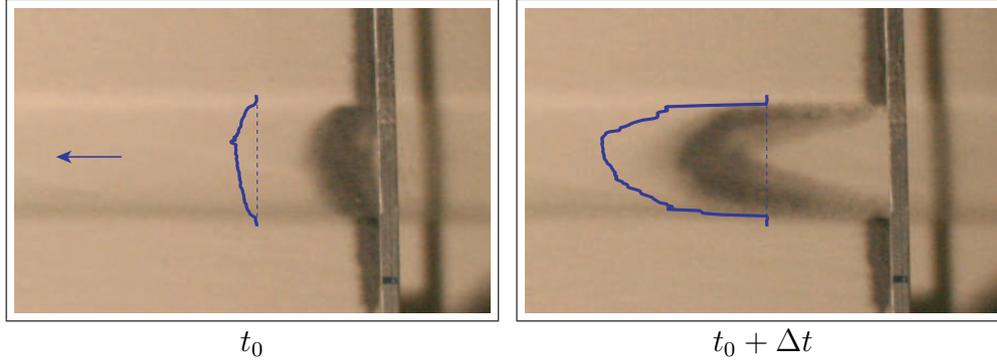


FIG. 3.7 – 2 photos consécutives des particules de poudre déposées transversalement à la micro-rivière. En suivant leur advection, on accède au profil de vitesses en surface : le profil représenté en bleu sur les photos correspond au maximum d'intensité de la trace de poudre.

déviations des deux lasers par une relation linéaire :

$$H = \frac{\tan \alpha'_{\text{red}} \tan \alpha'_{\text{green}}}{\tan \alpha'_{\text{red}} \tan \alpha_{\text{green}} - \tan \alpha_{\text{red}} \tan \alpha'_{\text{green}}} (\tan \alpha_{\text{green}} d_{\text{green}} - \tan \alpha_{\text{red}} d_{\text{red}}),$$

$$Z = \tan \alpha_{\text{red}} d_{\text{red}} + \left(1 - \frac{\tan \alpha_{\text{red}}}{\tan \alpha'_{\text{red}}}\right) H.$$

En pratique, nous obtenons les relations de conversions entre les déplacements horizontaux des lasers en pixels et les hauteurs en millimètres en utilisant des obstacles de hauteur connue et en remplissant un récipient dont la hauteur d'eau peut être mesurée à l'aide d'une autre méthode. Cette calibration est nécessaire dès que l'angle des Lasers est modifié. Avec le dispositif expérimental, nous obtenons :

$$H = 1.27 d_{\text{red}} - 0.61 d_{\text{green}}, \quad (3.4)$$

$$Z = 0.81 d_{\text{red}} - 0.27 d_{\text{green}}. \quad (3.5)$$

Si l'erreur faite sur la détection de la trace des lasers ( $d_{\text{green}}$  et  $d_{\text{red}}$ ) est d'environ 0.2pixel, alors l'erreur faite sur la mesure de ces hauteurs est de l'ordre du demi-millimètre.

**Mesure de vitesses** Le matériau granulaire est opaque et diffuse la lumière. De plus les dimensions de la micro-rivière et du dispositif ne permettent pas la mise en oeuvre de techniques de mesure de vitesse (telle que la PIV) développées habituellement dans des canaux à bords transparents.

### 3.4. Les grandeurs mesurées

---

Pour mesurer des profils transverses de vitesse de surface, nous avons ensencé l'écoulement par une ligne homogène de poudre. Il suffit de suivre le traceur advecté par l'écoulement en prenant des photos fréquemment. Les réglages de l'appareil sont adaptés à la prise de vue rapide (le mode rafale de l'appareil photo utilisé est de 5 images/sec.). Les particules doivent être déposées en même temps à la surface de l'eau. Dans ce but, une petite tige métallique est placée au-dessus de la rivière à la manière d'un tourne-broche afin de déverser rapidement une ligne de poudre. Cette tige est visible sur les photos de la figure 3.7. La poudre utilisée a été sélectionnée pour ses nombreuses qualités : sa flottabilité, sa légèreté (qui permettent à la poudre d'être advectée à la vitesse de l'écoulement), sa faible mouillabilité (qui l'empêche de s'agglomérer en grumeaux) et sa capacité à être détectée. Une poudre Rilsan de couleur noire a été beaucoup employée (voir figure 3.7). Pour améliorer la détection des particules advectées par l'écoulement, le dispositif est éclairé par deux lampes qui émettent une lumière diffuse.

# Chapitre 4

## Une rivière naturelle : la Leyre

### 4.1 Pourquoi étudier le bassin versant de "la Leyre"

En introduction de ce manuscrit, nous avons présenté la Moselle et le torrent de Saint Pierre comme étant de bons exemples des cours d'eau dynamiques. Toutefois, pour permettre la navigation, la Moselle a été canalisée par la main de l'homme. De plus, la granulométrie du torrent de Saint Pierre ainsi que sa déclivité varient énormément sur l'ensemble de son bassin versant. C'est pourquoi, plutôt que d'étudier ou d'utiliser les études portant sur ces deux rivières, nous avons jeté notre dévolu sur une rivière du sud-ouest de la France, "la Leyre".

La Leyre est une rivière, qui se jette dans l'océan Atlantique au niveau du bassin d'Arcachon<sup>1</sup>. Elle se constitue réellement en aval de Pissos où la Petite Leyre et la Grande Leyre se rejoignent. Cette rivière est une des rares rivières sableuses de France. Le sable provient de la région des Landes. Elle représente un excellent système d'étude car la granulométrie de son lit ne varie pas beaucoup sur l'ensemble du bassin versant. En effet, à l'inverse de cours d'eau qui prennent leur source en haute altitude et dont le lit est constitué de gros galets près de la source et de constituants beaucoup plus fins près de l'embouchure, le lit de la Leyre et de ses affluents reste assez homogène (la granulométrie de la Leyre est détaillée en 4.3). Enfin, même si cette rivière est très appréciée des kayakistes, qui peuvent descendre presque l'intégralité de la Grande Leyre puis de la Leyre, les cours d'eau n'ont été que relativement peu anthropisée, ce qui n'est pas le cas de l'Argens. L'Argens est une rivière sableuse du sud-est de la France qui est principalement constituée de portions

---

<sup>1</sup>Techniquement, la Leyre se jetant dans l'océan, on peut considérer que c'est un fleuve (en tous cas, les autoctones le font allègrement)...

## 4.1. Pourquoi la Leyre



FIG. 4.1 – La Leyre est une rivière du sud-ouest de la France située dans le Parc Naturel Régional des Landes de Gascogne. Elle est formée de la réunion de la petite Leyre et de la Grande Leyre après Mios. Sa confluence se situe dans le bassin d’Arcachon à la Teste de Bush.

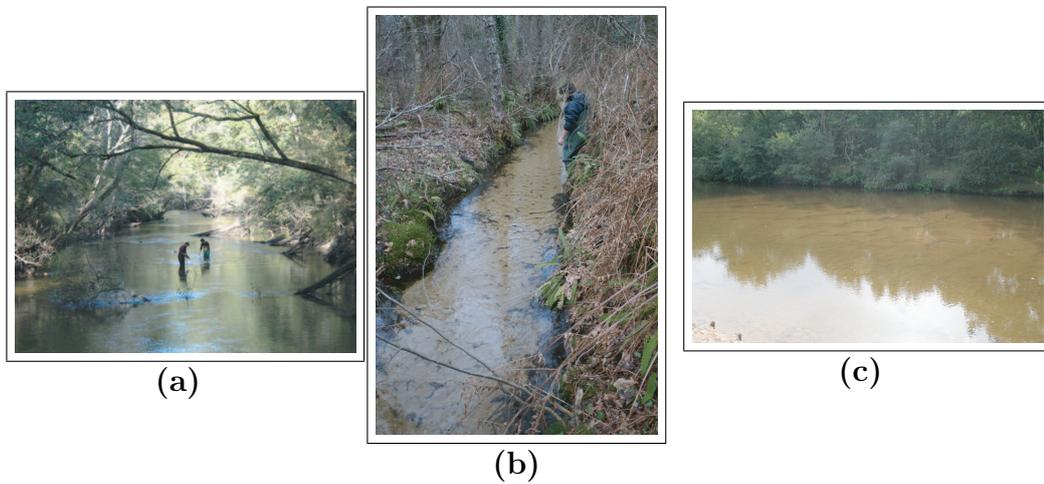


FIG. 4.2 – La Leyre dans tous ses états : (a) la Leyre juste après la confluence de la petite et de la grande Leyre (b) un de ses nombreux petit tributaire dont le lit est couvert de petites structures périodiques (c) la Leyre au camping de Mios ( $W \sim 25m$ ).

séparées par des barrages (souvent constitués par des gros rochers) de sorte que la vitesse d'écoulement dans chacune de ces portions est nulle.

Nous avons donc conclu un partenariat avec le Parc Naturel des Landes de Gascogne et ainsi pu y mener plusieurs campagnes de mesures. Lors de ces diverses missions, nous avons principalement mesuré des profils de vitesse sur différentes sections de la rivière. Chaque profil de vitesse est systématiquement accompagné d'un relevé de la topographie de la section. Ces deux informations nous permettent ensuite de définir la hauteur et la largeur puis le débit de chaque section. Des échantillons du matériel granulaire qui compose le lit ou les berges du cours d'eau ont également été rapportés au laboratoire. Un effort a été spécialement mis en œuvre pour permettre la mesure de la pente de la surface libre de la rivière en différents endroits du cours d'eau. Enfin, au cours de la dernière campagne de mesures, nous avons focalisé notre attention sur la formation et le suivi des motifs sur le fond sableux de la Leyre.

## 4.2 Les spécificité des expériences de terrain

Les campagnes de mesures ont été menées sur la Leyre dans le but de comparer les résultats expérimentaux à des conditions naturelles. Les photos de la figure 4.2 présentent quelques variétés de paysages de la région du Parc Naturel des Landes de Gascogne. Sur la photo 4.2a, la présence de nombreux embâcles, qui recouvrent les berges de la Leyre et de ses confluent, est frappante. Il semble difficile d'imaginer une analogie entre la micro-rivière et ce bassin versant et ce d'autant plus que le lit de la rivière est assez sinueux.

Contrairement aux expériences de micro-rivières, son régime turbulent est clairement établi :

$$Re \sim \frac{Q}{W\nu} \sim \frac{1\text{m}^3/\text{s}}{10\text{m } 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}} \sim 10^5.$$

De plus la superficie de l'ensemble du bassin versant étant relativement petite ( $\sim 1500\text{km}^2$  à comparer à la superficie du bassin versant de la Moselle qui est d'environ  $28000\text{km}^2$ ), il est possible d'accéder en quelques jours à l'ensemble des rivières tributaires de la Leyre. Nous avons donc pu placer nos dispositifs de mesure sur différentes sections et dans différentes rivières du bassin versant. Les largeurs des sections que nous avons pu mesurer sont comprises entre 80cm et 22m (pour la Leyre à Mios).

Cependant, la relative inaccessibilité des eaux capricieuses (la rivière serpente dans de nombreuses parcelles privées), les conditions climatiques et

### 4.3. Les méthodes de mesures

---



FIG. 4.3 – Les deux appareils de mesures de vitesse utilisés sur le terrain, sont un moulinet mécanique (a) et un vélocimètre à effet Doppler (b).

hydraugraphiques nous ont obligé à énormément prévoir et cibler les objectifs de chacune de nos missions. Dans chacun des endroits où nous avons pu accéder, nous avons choisi une section d'étude. Les critères de choix sont :

- une hauteur d'eau inférieure à  $\sim 1\text{m}25$  pour pouvoir pénétrer en bottes dans la rivière, s'y déplacer sans risques et y rester le temps des mesures,
- une section située en aval d'une partie relativement homogène et droite, que nous avons "nettoyé" au besoin (en enlevant les embâcles par exemple),

Afin d'optimiser chacun de nos déplacements dans la région du bassin d'Arcachon, nous avons conçu ou testé le matériel et des méthodes de mesures au laboratoire à Paris. Le matériel et les méthodes de mesure particulières aux conditions de terrain sont maintenant décrites.

### 4.3 Les méthodes de mesures

**Mesures de vitesses** Lors des différentes campagnes de mesures, pour mesurer les profils de vitesse sur différentes sections, nous avons utilisé deux types d'appareil : un moulinet mécanique, puis un vélocimètre à effet Doppler

(ADV).

Le premier vélocimètre utilisé est un moulinet mécanique C31 de chez OTT, prévu pour la mesure des vitesses comprises entre  $2.5\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  adapté aux rivières. L'appareil se compose principalement d'une hélice dont la vitesse de rotation dans l'eau est corrélée à la vitesse de l'écoulement selon une courbe de calibration affine par morceaux. Cet appareil donne une mesure intégrée sur toute la surface de l'hélice. Le diamètre de l'hélice étant de  $\sim 10\text{cm}$ , cet appareil ne peut être utilisé dans les plus petits canaux. De plus, la méthode d'acquisition impulsionnelle (le moulinet est associé à un compte-tours) oblige à intégrer la mesure sur un intervalle de temps assez long (au moins une minute pour la plupart des vitesses mesurées). Enfin, l'hélice doit être exactement dirigée dans la direction principale de l'écoulement. En conclusion, le moulinet mécanique s'est montré assez utile pour mesurer des vitesses moyennes dans des chenaux suffisamment profonds.

Le vélocimètre à effet Doppler permet de palier la plupart des petits défauts de la moulinette. Le dispositif de mesure de l'appareil est constitué de trois têtes qui émettent des ondes à la fréquence de 1Hz dans une zone de l'espace située à une dizaine de centimètres de ces têtes. Les têtes fonctionnent aussi en mode récepteur. Elles reçoivent des ondes dont le décalage en fréquence est fonction de la vitesse relative du milieu de propagation par rapport à l'émetteur-récepteur. Les trois têtes permettent de mesurer le champ de vitesse suivant les trois composantes de l'espace. De plus, le point de mesure étant situé à distance respectable de l'appareil, la mesure de vitesse n'est que peu intrusive. Pour obtenir une vitesse stabilisée, il est nécessaire de moyenniser les signaux reçus. Nous avons toutefois accès aux données brutes obtenues lors de l'acquisition, ce qui nous permet d'obtenir les valeurs de vitesse instantanée relevées toutes les secondes.

Ces deux appareils nous ont permis de réaliser un bon nombre de profils de vitesses transverses ou verticaux en différentes sections du bassin versant. À chaque point de mesure, nous avons noté la hauteur d'eau. Ce faisant nous avons pu obtenir la topographie de chaque section mesurée. Ces deux mesures nous ont permis d'accéder au débit moyen de la section étudiée.

**Mesures de pentes** La région des Landes étant assez fortement boisée et les rivières y sont très sinueuses. Pour ces deux raisons principales, l'utilisation d'un théodolithe pour mesurer la pente de la rivière n'est pas adaptée au bassin versant. En remplacement, nous avons conçu un "niveau à eau" maison ou "pentomètre". Le principe de fonctionnement de cet appareil est basé sur un relevé de hauteur d'eau différentiel. Comme le montre la photo 4.4a, le pentomètre est constitué de deux bacs rectangulaires identiques étanches.

### 4.3. Les méthodes de mesures

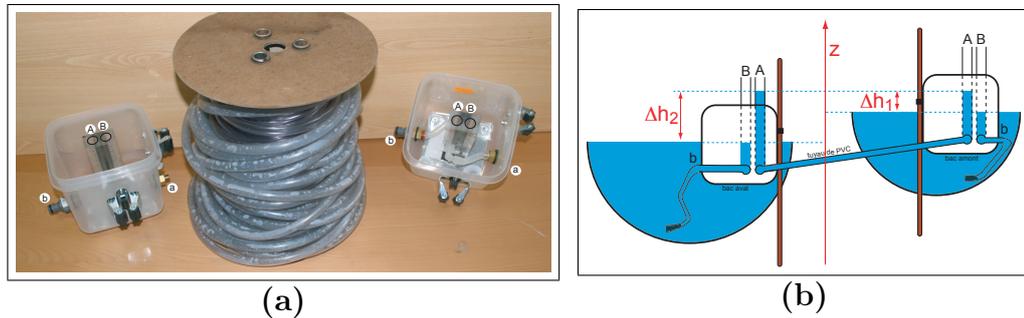


FIG. 4.4 – Photo (a) et schéma de fonctionnement (b) du dispositif conçu pour mesurer les pentes d'une rivière alluviale.

Leurs dimensions (15x15x12cm) sont raisonnablement faibles pour pouvoir immerger les deux bacs dans des cours d'eau de toutes tailles. Deux tubes transparents et rigides sont fixés verticalement au centre de ces bacs. Nous utiliserons le terme de "tube" mais en réalité, les tubes sont plutôt deux trous, percés dans un même bloc de plastique transparent. Des graduations ont été ajoutées sur le bloc transparent. Ces graduations sont visibles sur le bac de gauche de la photo 4.4a. Ces deux tubes (notés "A" et "B") sont reliés de manière indépendantes avec deux points de sorties à l'extérieur du bac (notées respectivement "a" et "b"). Sur les parois extérieurs des deux bacs, des arceaux de fixation permettent d'agripper les bacs à des guides verticaux plantés dans le sol. Ces guides assurent la stabilité et l'immobilité des bacs.

En fonctionnement, les bacs sont partiellement immergés dans le cours d'eau de part et d'autres de la section de mesure. Ces deux bacs sont reliés entre eux par un tuyau transparent en PVC long de 20m de 12mm de diamètre. Au préalable, ce tuyau a été entièrement rempli d'eau. Ses deux bouts sont raccordés aux deux sorties "a" de chaque bacs, comme le montre le schéma de fonctionnement 4.4b. Les deux tubes "A" se trouvent par conséquent connectés. Après un faible temps d'ajustement, le niveau d'eau dans les tubes "A" est le même. Un faible volume d'eau est ajouté de façon à améliorer la lecture du niveau d'eau. Notons qu'un grand soin doit être porté sur le remplissage du tuyau intermédiaire de telle sorte qu'aucune bulle d'eau ne perturbe la transmission de pression le long du tuyau. Le tuyau est posé sur le lit de la rivière et sa flexibilité lui permet de faire des mesures de pentes même dans des régions très sinueuses et accidentées. Les deux bacs, quant à eux, sont suffisamment immergés pour que l'eau de la rivière pénètre par les extrémités "b" et remplisse les tubes "B". Le niveau des deux tubes "B" coïncident avec le niveau de la surface du cours d'eau. L'ajout d'un peu de mousse aux extrémités "b" permet de limiter les fluctuations du niveau

d'eau dans ces tubes. Les fluctuations sont dues à la présence de remous de la surface libre ou à la turbulence de la rivière. En ajoutant la mousse à l'extrémités des tuyaux, nous effectuons une mesure de pression statique (liée à la hauteur d'eau) plutôt qu'une mesure de pression dynamique (liée à la vitesse de l'écoulement).

En mesurant la différence de niveau d'eau  $\Delta h = |\Delta h_1 - \Delta h_2|$ , on a donc accès à la différence de hauteur de la surface libre de la rivière entre les deux points de mesure. Il suffit alors de connaître la distance curviligne  $s$  qui relie ces deux points pour connaître la valeur de la pente  $\mathcal{S}$  de la rivière :

$$\mathcal{S} = \frac{\Delta h}{s}. \quad (4.1)$$

Pour avoir une précision suffisante, il est cependant nécessaire que la différence de hauteur  $\Delta h$  soit d'au moins quelques millimètres sur la vingtaine de mètres permise par le tuyau transparent. Ces conditions fixent la limite inférieure de mesure de  $\mathcal{S}$ . La borne supérieure de l'appareil n'est généralement pas atteinte. Nous supposons qu'il est encore possible d'utiliser le pentomètre lorsque la hauteur de la surface libre perd quelques centimètres en un mètre. Les pentes accessibles à l'instrument de mesure que nous avons conçu sont donc comprises entre :  $10^{-4} < \mathcal{S} < 2.10^{-2}$ .

**Granulométrie** Dans chaque section mesurée, nous avons prélevé un échantillon du matériau granulaire qui compose le lit. Lorsqu'il nous a semblé que les berges présentaient une granulométrie différente de celle du lit, nous avons également recueilli un échantillon pour les berges. Ces échantillons ont été séchés, puis passés à travers une série de tamis de maille décroissante. Le diamètre moyen des grains est globalement constant. Nous prenons comme valeur moyenne :  $d = 320 \pm 70 \mu\text{m}$ .

**Evolution de structures** La dernière campagne de mesures a été dédiée à la visualisation de la formation et de l'évolution des structures transverses qui se créent sur le lit de la Leyre. Afin de suivre l'évolution de ces instabilités de fond, nous avons disposé deux barres métalliques sur le fond sableux de la rivière dans l'axe de l'écoulement en des endroits où la présence de tels motifs était avérée. Une troisième barre métallique est utilisée pour arraser le fond. Les deux barres parallèles servent donc de guide sur laquelle, nous déplaçons la troisième barre. De cette façon, sur quelques mètres, nous formons rapidement un lit aussi plat que possible. Un appareil photo situé sur le côté de la zone de mesure prend ensuite des photos de l'évolution du lit. Les barres placées au fond de la rivière servent de repère de longueur.

### 4.3. Les méthodes de mesures

---

Une nappe laser a été utilisée pour repérer une section longitudinale. Pour fixer cette nappe, nous avons isolé le laser dans un tube étanche immergé dans la rivière. Le tube est maintenu hors du champ de mesure par un pied de chimie de manière à obtenir une inclinaison très faible du faisceau laser. En utilisant un angle rasant, les déformations verticales sont amplifiées. Nous avons également utilisé une caisse à fond transparent qui permet des prises de vues verticales (comme c'est le cas pour l'expérience de Saint-Maur) sans risquer de mouiller l'appareil photo.

# Chapitre 5

## Analyse des profils de vitesse

### 5.1 Profils turbulents

Nom du cours d'eau	$W$ (m)	$H$ (m)	$U_{\text{surf}}$ (m/s)	Pente mesurée	$d$ ( $\mu\text{m}$ )	$z_0$ (mm)	$u_*$ (m/s)	Pente estimée	$Q$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ )
Barouille	3	0.2	0.35	$6 \cdot 10^{-4}$	330	1.1	0.028	$4.8 \cdot 10^{-4}$	0.091
Grande Leyre	10	0.8	0.8		300	3.4	0.058	$4.2 \cdot 10^{-4}$	2.94
Lagarabosse	1.75	0.25	0.14	$3 \cdot 10^{-4}$	330	1.6	0.017	$1.2 \cdot 10^{-4}$	0.023
Leyre			0.67	$1.8 \cdot 10^{-4}$	300	3.4	0.05	$3.3 \cdot 10^{-4}$	
Lugad	7	0.4	0.3	$3 \cdot 10^{-4}$	330	1.7	0.022	$1.3 \cdot 10^{-4}$	0.48
Petite Leyre	11	0.6	0.65	$1.8 \cdot 10^{-4}$	300	4.8	0.046	$4.3 \cdot 10^{-4}$	2.02
Syndicat	3.6	0.2	0.16		330	9.2	0.023	$3.1 \cdot 10^{-4}$	0.043

TAB. 5.1 – Récapitulatif des grandeurs mesurées sur le bassin versant de la Leyre entre les 20 et 24 octobre 2006.

Dans les rivières du bassin versant de la Leyre, nous avons principalement relevé des profils de vitesses verticaux  $u(z)$  et transverses  $u(y)$  en différentes sections du bassin versant. La figure 5.1 présente deux profils  $u(z)$ . Ces deux profils se distinguent par le choix de la section d'étude. Le premier profil a été réalisé au milieu du ruisseau du Barouille, dont une section typique est représentée à la figure 5.2a. Le second profil (figure 5.1b) a été mesuré au centre d'une section plus large et plus profonde. Malgré les différences de taille entre les deux cours d'eau (le jour des mesures, le Barouille s'écoulait sur  $\sim 16\text{cm}$  de haut tandis que la profondeur de la grande Leyre valait  $\sim 85\text{cm}$ ), qui se traduisent par des différences de vitesse, les deux profils sont

## 5.1. Profils turbulents

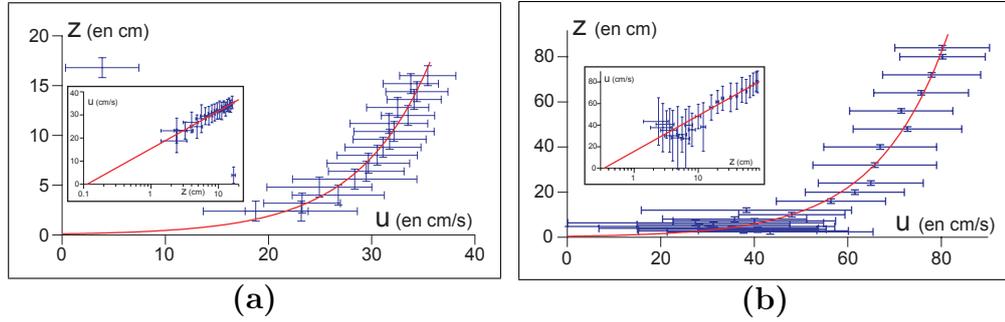


FIG. 5.1 – Profils verticaux de vitesse mesurés au centre deux rivières de la région d’Arcachon fin novembre 2006 : (a) section du ruisseau du Barouille ( $W = 3\text{m}$  et  $H = 20\text{cm}$ ) et (b) section de la Grande Leyre près de la confluence ( $W = 10\text{m}$  et  $H = 80\text{cm}$ ). Le profil logarithmique de la relation (5.1) est représenté en rouge et les valeurs des deux constantes sont ajustées à  $z_0 = 1.1\text{mm}$  et  $u_* = 2.8\text{cm/s}$  pour le Barouille et  $z_0 = 3.4\text{mm}$  et  $u_* = 5.8\text{cm/s}$  pour la grande Leyre.

assez comparables. La courbe rouge représente le profil vertical turbulent :

$$u_x = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left( \frac{z}{z_0} \right). \quad (5.1)$$

Le choix de la modélisation de l’écoulement qui permet d’obtenir ce profil théorique est détaillé dans le chapitre 8.1.  $z_0$  représente la rugosité hydrodynamique. Les valeurs de  $z_0$  et de la vitesse de frottement  $u_*$  ont été déterminées à l’aide d’un ajustement de la relation (5.1) sur les données de terrain. Lors de cette mission, pour chaque profil vertical mesuré, nous avons réalisé au moins un profil transverse de vitesse. Les deux profils  $u(y)$  correspondant aux profils verticaux de la figure 5.1 sont également représentés sur la figure 5.2.

Le tableau 5.1 récapitule l’ensemble des valeurs mesurées sur l’ensemble des sections lors de la même campagne de mesure, en février 2006.  $W$  correspond à la largeur de la section mesurée et  $H$  est la profondeur moyenne de cette section. L’erreur relative faite sur ces données est inférieure à 10%. Pour fixer les idées, l’ordre de grandeur de la vitesse de surface maximale est également récapitulée. La pente mesurée à l’aide du dispositif présenté en 4.3 et le diamètre moyen obtenu en effectuant la granulométrie des grains du lit sont également mentionnés. Les valeurs de  $z_0$  et de  $u_*$  sont obtenus par un ajustement sur les profils verticaux comme présenté à la figure 5.1. La pente est ensuite estimée en utilisant la loi d’échelle habituelle sur la contrainte de

## 5.1. Profils turbulents

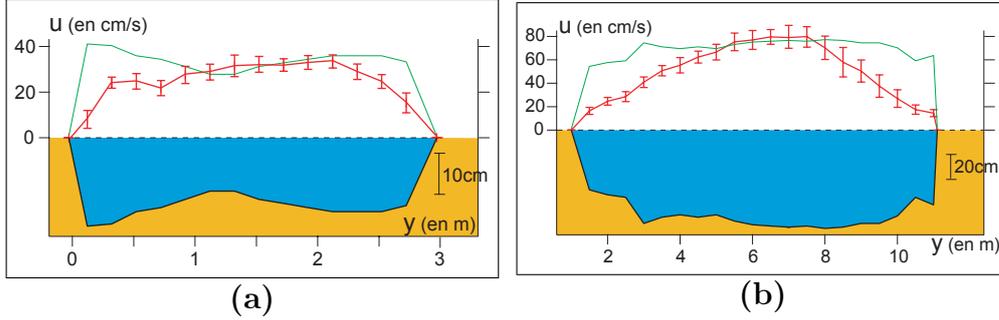


FIG. 5.2 – Profils transverses de vitesse mesurés sur les deux rivières précédente le même jour : (a) section du ruisseau du Barouille et (b) section de la Grande Leyre près de la confluence. La prédiction théorique issue d’une description 2-D turbulente est représentée en vert.

cisaillement basale  $\tau_b$  rappelée en (1.15) :

$$u_*^2 = g(H - Z) \mathcal{S}. \quad (5.2)$$

Enfin, le débit  $Q$  est estimé en mettant à profit la mesure du profil transverse et en supposant que la forme logarithmique du profil vertical  $u(z)$  mesuré au centre de la section reste inchangé ( $z_0$  et  $u_*$  sont gardés constants, seule change la hauteur d’eau) sur l’ensemble de la section ( $Q = \int \int u(y, z) dz dy$ ).

Sur la figure 5.2, les profils transverses de vitesse de surface  $u_{\text{surf}}(y)$  sont représentés en regard des profils  $Z(y)$  des sections du ruisseau du Barouille et de la Grande Leyre. En plus des valeurs expérimentales, l’estimation de la vitesse de surface, obtenue à l’aide de :

$$u_x(z = H) = \frac{\sqrt{g(H - Z) \mathcal{S}}}{\kappa} \ln \left( \frac{H - Z}{z_0} \right), \quad (5.3)$$

est représentée en vert. Les valeurs de  $z_0$  et de  $\mathcal{S}$  utilisées ont été déduits des profils verticaux mesurés au centre de la section. Il est donc normal que l’estimation de la vitesse soit quantitativement excellente au centre du cours d’eau. Par contre, plus on se rapproche des bords et plus l’écart entre la vitesse estimée et les mesures augmente. Dans tous les cas, les prédictions données par (5.3) sur-estiment la valeur de la vitesse de surface.

La prédiction théorique utilisée ici est basée sur une description 2-D de la rivière. Dans cette description, chaque tranche de la rivière est indépendante et la vitesse peut être calculée par la seule connaissance de la hauteur d’eau locale  $H(y)$ . Les mesures obtenues sur le bassin de la Leyre révèlent cette faiblesse de la modélisation. Pour décrire systématiquement et quantitativement l’hydrodynamique d’une rivière turbulente telle que la Leyre, il est

nécessaire d'introduire un mécanisme supplémentaire. Précisons que ce mécanisme doit être capable de rendre compte de l'importance de la direction transverse et notamment du fait que l'influence des bords se fait sentir sur une distance comparable à  $W/3$ .

## 5.2 Profils expérimentaux

Nous avons mesuré des profils transverses de vitesse de surface sur la micro-rivière à l'aide de la technique de mesure détaillée en 3.4. Sur la figure 5.3a, nous avons superposé les images de la micro-rivière pris à intervalles de temps réguliers ( $\Delta t = 1/5$ s) lors d'un lâcher de poudre avec les positions du front et du maximum de signal repérés (respectivement en rouge et en bleu). Le maximum de signal correspond au maximum d'intensité lumineuse (principalement la composante rouge) de la photo à l'instant  $t$  dont nous avons soustrait l'image correspondant à la situation sans poudre. Ces positions permettent d'accéder au profil de vitesse tracés dans le même système de couleur sur la figure 5.3c. L'incertitude est que la vitesse de la poudre corresponde bien à la vitesse de l'écoulement – les particules colorées diffusent aussi transversalement. Pour minimiser ce phénomène de diffusion, nous avons repéré la position du front de poudre au centre de la micro-rivière. Ce déplacement en fonction du temps est représenté sur la figure 5.3b. Nous obtenons une droite (dont la pente est la vitesse au centre) et l'extrapolation de cette droite en  $y = 0$  permet de retrouver précisément l'instant initial du lâcher de poudre (ici  $t_0 = -0.07$ s). Connaissant ainsi le moment du lâcher, nous n'utilisons que la mesure du déplacement du front obtenu pour la première photo afin d'accéder à la mesure du profil de vitesse. Cette procédure permet d'obtenir le profil de vitesse représenté en noir sur la figure 5.3c. C'est cette technique que nous avons utilisé pour mesurer les différents profils transverses  $U_{\text{surf}}(y)$ .

Deux profils typiques sont représentés en rouge sur la figure 5.4. Ils correspondent à deux expériences distinctes et les axes n'ont pas les mêmes échelles. Les courbes  $W(t)$  ont été rajoutées en insert dans le seul but de préciser le moment de ces mesures (cf. chapitre suivant). Les profils moyens  $Z(y)$  et  $H(y)$  de la section de la micro-rivière au moment de la mesure de vitesse ont été placés sur la figure. Ces profils sont obtenus en moyennant une vingtaine de profils mesurés avant et après le lâcher de poudre. La connaissance des profils  $Z(y)$  et  $H(y)$  nous permet, de nouveau, de calculer des profils de vitesses de surface théoriques. Pour les expériences, les nombres de Reynolds correspondent à un régime intermédiaire, où ni les effets visqueux, ni les effets d'inertie ne dominent véritablement. Nous avons, à chaque fois, représenté deux profils obtenus par deux prédictions théoriques totalement différentes.

## 5.2. Profils expérimentaux

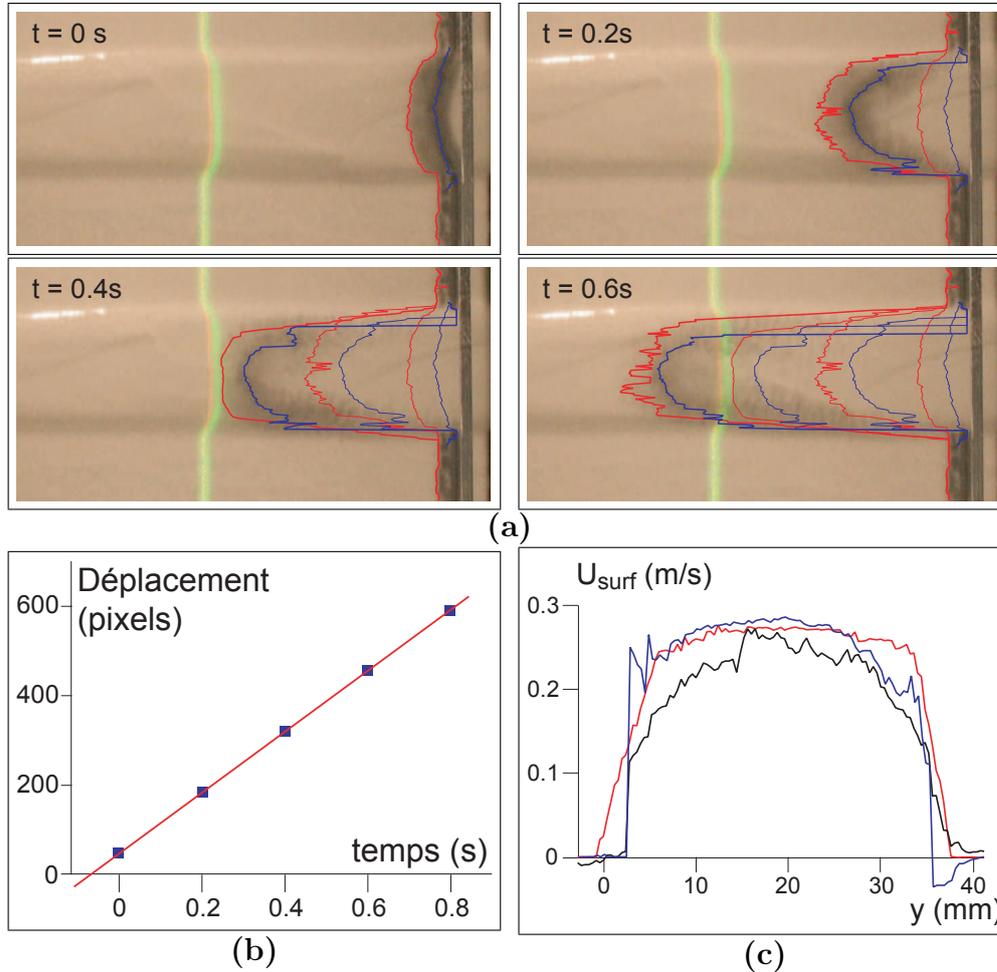


FIG. 5.3 – (a) 4 photos successives de lâcher de poudre. Les traces rouges correspondent à la détection du front et les traces bleues marquent l'emplacement du maximum de signal. (b) Position du centre du front de poudre en fonction du temps. (c) 3 profils transverses de vitesse obtenus soit à l'aide des 5 positions du front de la poudre, soit avec les 4 positions du maximum de signal, soit en utilisant uniquement la première photo.  $Q = 0.49 \ell/\text{min}$ ,  $S = 1^\circ$ ,  $H_0 = 12\text{mm}$  et  $W_0 = 11\text{mm}$ .

## 5.2. Profils expérimentaux

---

En pointillés verts, le profil est obtenu en faisant l'hypothèse d'un écoulement purement turbulent exactement comme pour les rivières : la vitesse de surface se déduit de la forme du profil  $H - Z$  par la relation (5.3), pour laquelle nous avons choisi  $z_0 = 0.1 d$ . La courbe en tirets violets décrit l'écoulement à surface libre dans une section uniforme pour un régime purement visqueux. Rappelons que le profil vertical de vitesse en régime visqueux est :

$$u_x(z) = \frac{g\mathcal{S}}{2\nu} (z - Z) (2H - (z + Z)) . \quad (5.4)$$

Il s'obtient en comparant les termes dus aux forces visqueuses,  $\nu \partial^2 u_x / (\partial z)^2$ , aux forces de pesanteur,  $g\mathcal{S}$ . Dans le cas d'un écoulement permanent et uniforme à surface libre le long d'un plan incliné, ce sont les deux seules forces à prendre en compte dans la relation de Navier-Stokes (1.2). Le profil de vitesse qui permet donc de générer la courbe violette est donc :

$$u_x(z = H) = \frac{g (H - Z)^2 \mathcal{S}}{2\nu} . \quad (5.5)$$

Sur les deux cas présentés à la figure 5.4, les profils théoriques de vitesse sont plus arrondis que ne le sont les profils expérimentaux. En se référant uniquement à la valeur de la vitesse au centre, les prédictions théoriques sont en assez bon accord avec l'expérience sur la figure 5.4a, ce qui n'est plus le cas sur l'exemple présenté à la figure 5.4b. En effet, alors que la prédiction théorique en régime visqueux était quantitativement bonne sur le graphe de gauche, elle sur-évalue la vitesse d'un facteur deux pour le cas du second exemple. Ce constat est d'autant plus troublant que la mesure de vitesse de la figure 5.4b a été réalisée vers la fin de l'expérience, quand la largeur de la rivière évolue faiblement (cf. les inserts des deux figures). En revanche, la prédiction théorique obtenue à l'aide d'un modèle turbulente en choisissant  $z_0 = d/10$  sous-évalue systématiquement la vitesse. Il est possible d'ajuster cette prédiction en diminuant la valeur de la rugosité hydrodynamique  $z_0$ . Toutefois, nous pensons que cet ajustement ne serait pas physiquement pertinent pour deux raisons. Une valeur plus faible de  $z_0$  qui permettrait d'ajuster les vitesses théoriques et expérimentales au centre de la micro-rivière (il faudrait fixer au moins  $z_0 \approx d/100$ ) n'est physiquement pas cohérente avec les valeurs de la littérature. En fait, étant donné les valeurs typiques du nombre de Reynolds, nous ne nous attendons pas à ce qu'une prédiction purement turbulente décrive l'hydrodynamique de la micro-rivière et il faudrait utiliser pour la description hydrodynamique un modèle intermédiaire qui prendrait en compte les forces de viscosité et les fluctuations turbulentes. Pour finir, notons que l'échec des prédictions théoriques dans la région très proche des

## 5.2. Profils expérimentaux

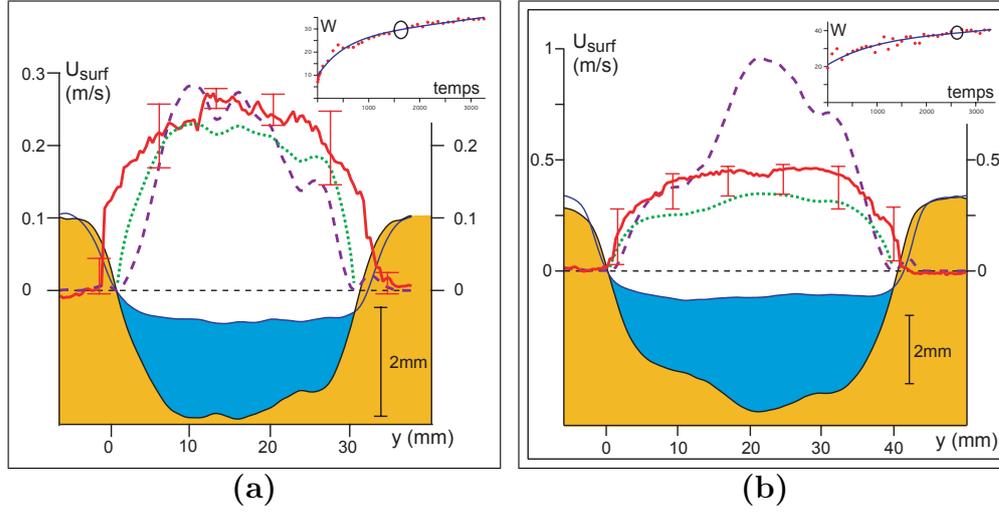


FIG. 5.4 – Deux exemples de profils transverses de vitesse de surface  $U_x(y)$  mesurés sur la micro-rivière pour (a)  $Q = 0.49 \ell/\text{min}$ ,  $\mathcal{S} = 1^\circ$ ,  $H_0 = 12\text{mm}$  et  $W_0 = 11\text{mm}$  et (b)  $Q = 1.02 \ell/\text{min}$ ,  $\mathcal{S} = 1^\circ$ ,  $H_0 = 10\text{mm}$  et  $W_0 = 25\text{mm}$ . La courbe en pointillés verts (respectivement en tirets violets) correspond aux prédictions théoriques dans le cas d'un écoulement purement turbulent (resp. visqueux) donnée par la relation (5.3) avec  $z_0 = 0.1d$  (resp. la relation (5.5)).

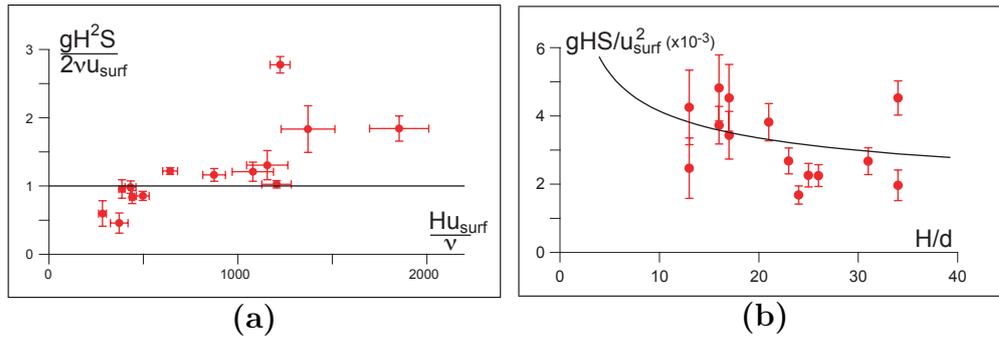


FIG. 5.5 – Les courbes (a)  $gH^2\mathcal{S}/(2\nu U)$  vs  $\mathcal{R}e$  et (b)  $gHS/U^2$  vs  $H/d$  ont été obtenues en moyennant chaque profil de vitesse sur le centre de la micro-rivière. Sur le graphe (a), la droite noire ( $y = 1$ ) correspond à une prédiction théorique dans un cas purement visqueux :  $\mathcal{R}e \ll 1$ . Sur le graphe (b), la courbe en traits pleins correspond à  $y = (\kappa/\ln(H/z_0))^2$  avec  $z_0 = d/40$ .

## 5.2. Profils expérimentaux

---

bords de la micro-rivière est attribuée à la difficulté de repérer avec précision les berges.

La valeur de la contrainte  $gHS$  adimensionnée par sa valeur en régime visqueux  $2\nu U_{\text{surf}}/H$  est représentée en fonction du nombre de Reynolds. Dans un régime purement visqueux (i.e.  $Re < 1$ ), cette contrainte adimensionnée prend la valeur 1. Conceptuellement, le chenal est divisé en trois parties de même largeur : le bord droit, le bord gauche et le centre. Ces valeurs sont obtenues en moyennant les mesures expérimentales de vitesse et de la topographie du chenal sur l'ensemble des points de la partie centrale. Cette partie correspond aux plus grands nombre de Reynolds. Plus le nombre de Reynolds augmente, plus la valeur de la contrainte adimensionnée augmente, ce qui est cohérent avec le fait que le régime visqueux est inadapté pour décrire les effets hydrodynamiques dans cette limite. Nous constatons également, que, malgré l'utilisation de valeurs moyennes, la dispersion des données est assez importantes. De plus, pour les plus faibles nombre de Reynolds, les valeurs expérimentales de la contrainte sont même inférieures aux prédictions théoriques. Ces résultats signifieraient que les frottements sur le fond sont moins importants que des frottements purement visqueux, ce qui est difficilement concevable. Ces valeurs ne peuvent pas être attribuées uniquement à des incertitudes de mesures, car même si l'incertitude commise sur la hauteur d'eau est grande (le dispositif mesure des profondeurs de quelques millimètres), une erreur de 20% sur la mesure de  $H$  entraîne une erreur de 40% de la valeur de la contrainte adimensionnée, ce qui est insuffisant pour expliquer les résultats obtenus pour  $Re < 500$ . Toutefois, nous ne voyons pas d'autres raisons qui expliqueraient de tels résultats. La principale conclusion de ce graphe rejoint les conclusions obtenues des observations des profils transverses expérimentaux : une description purement visqueuse ne peut pas rendre compte des effets hydrodynamiques du dispositif expérimental.

# Chapitre 6

## La sélection de la largeur

### 6.1 Les largesses de la Leyre

Les données obtenues sur la Leyre proviennent de trois missions différentes. Lors de ces trois missions, nous avons mesuré les largeurs de rivières et le plus souvent possible des profils transverses de vitesse. Le débit  $Q$  est défini par :

$$Q = \int_0^W \int_z^H u(y, z) dz dy. \quad (6.1)$$

Pour l'estimer, la rivière a été discrétisée en  $N$  tranches verticales, qui correspondent aux  $N$  points de mesure. Sur chacune de ces tranches de largeur  $W_i$ , l'intégration verticale se fait en utilisant le profil logarithmique de la relation (5.1). La valeur de la rugosité hydrodynamique  $z_0$  est ajusté grâce au profil vertical  $u(z)$  mesuré au centre de la section et la valeur de la vitesse de cisaillement  $u_*$  est obtenue à l'aide de la vitesse de surface sur cette tranche :  $u_* = \frac{\kappa u_{\text{surf}}(y_i)}{\ln(H_i/z_0)}$ . Nous faisons également l'hypothèse que sur chaque tranche la vitesse est indépendante de  $y$ , sa valeur vaut la valeur au centre de la tranche  $u(y_i, z)$ .

$$Q = \sum_{i=1}^N q_i = \sum_i \left[ \Delta y_i H_i u_{\text{surf}}(y_i) \left( 1 - \frac{1}{\ln(H_i/z_0)} \right) \right]. \quad (6.2)$$

Lorsque nous n'avons pas mesuré de profil de vitesse vertical dans la rivière étudiée nous avons choisi  $z_0 = 5\text{mm}$ . Cette valeur est assez bien représentative de la rugosité hydrodynamique du bassin versant de la Leyre. Pour pouvoir ensuite comparer les résultats des différentes missions, nous avons divisé ces débits par la valeur du débit de la Leyre relevé le même jour à la station hydrographique de Salles. Ces données journalières sont accessibles à tous

## 6.1. Les largesses de la Leyre

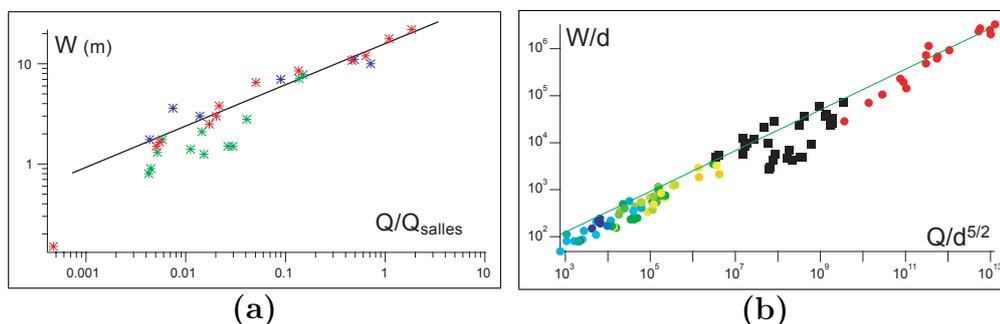


FIG. 6.1 –  $W$  vs  $Q$  obtenue sur le bassin versant de la Leyre. En (a)  $W$  est en m et le débit a été adimensionné par la mesure systématique du débit de la Leyre à Salles. En (b), la taille des grains est utilisée pour adimensionner  $W$  et  $Q$  et les données de terrain sont ajoutées aux données de terrain collectées par Parker. La courbe verte a pour équation  $y = 6.3x^{0.43}$ .

via une banque HYDRO (<http://www.hydro.eaufrance.fr/>). À l'inverse du débit, les mesures des largeurs n'ont pas été modifiées car les sections des rivières du bassin versant sont telles que des modifications de débit ou de hauteur d'eau ne modifient que très faiblement la valeur de la largeur.

Tout comme pour la partie expérimentale, nous avons regroupé l'ensemble des résultats sur le graphe  $W$  vs  $Q$  de la figure 6.1a les différentes couleurs correspondent aux trois missions différentes. Nous n'avons cessé d'améliorer petit à petit le protocole de mesure suite à nos diverses expériences. Les résultats issus de la première campagne de mesure, représentée en rouge sur le graphe, sont moins précis que les résultats des missions suivantes. La loi de puissance qui représente le mieux ces données est également représentée en noire. La valeur de l'exposant  $\alpha = 0.5$  est parfaitement en accord avec les résultats de [Leopold & Maddock 1953].

Nous avons adimensionné la largeur et le débit en vue de comparer ces résultats avec une autre base de données. Sur la figure 6.1b les données collectées par Gary Parker sur des rivières nord-américaines sont représentées à l'aide de symboles circulaires. La largeur et le débit sont adimensionnés par la taille des grains  $d$ . Avec un tel adimensionnement, les données de Gary Parker se regroupent en deux nuages de points : ceux pour les rivières à fond sableux (les points rouges) et ceux pour les rivières graveleuses (les points correspondant aux plus faibles valeurs de  $W/d$ ). Ce faisant, le débit varie sur une dizaine de décade et l'on pouvait émettre des doutes sur la validité d'une loi de puissance pour décrire ces données. L'ajout des données obtenues dans la Leyre et ses tributaires se situe entre ces deux nuages de point. Malgré la

dispersion de ces données, il semble clair que la loi de puissance fait sens.

## 6.2 Applications à la rivière expérimentale

### 6.2.1 Évolution temporelle

Afin de déterminer la largeur finale de la micro-rivière, nous avons mesuré la topographie de la section au cours du temps. La figure 6.2 présente l'évolution temporelle de la section au cours d'une expérience. Remarquons que l'échelle temporelle verticale n'est pas homogène : les six premiers profils sont espacés de  $\Delta t = 10\text{s}$ , puis l'espacement entre chaque profil est de  $\Delta t = 100\text{s}$ . Les endroits identifiés comme étant la position de la rencontre de la surface libre avec les berges ont été représentés en bleu. Ils permettent de constater plus facilement l'élargissement progressif du chenal. Le graphe qui rend compte de l'évolution précise de la largeur de la section a été ajouté dans le coin inférieur gauche. Dans le coin inférieur droit, a été inséré le graphe montrant l'évolution temporelle du fond. Cet insert permet de remarquer que, au cours d'une expérience, le chenal s'élargit en même temps que son lit s'élève.

Ce spatio-temporel met en évidence également l'aspect accidenté du lit. Les asymétries observées sont dues à la présence de petites structures périodiques qui se déplacent sur le fond. Ces motifs sont principalement, des rides ou des barres alternées (voir les photos de la figure 3.4). La présence de tels structures perturbent notablement la reconstruction des profils à l'aide des deux traces lasers. De plus, du fait des rapports d'aspects  $W/H$  très grands des micro-rivières ( $W/H > 10$ ), ces motifs influencent clairement l'écoulement : ils déforment la surface libre (notamment les plus grosses rides), ils peuvent créer une asymétrie dans le chenal et générer des instabilités non-souhaitées comme des cascades-piscines voire des mini-méandres.

Les deux graphes de la figure 6.3 présentent également l'évolution temporelle de la largeur et de la position du fond d'une expérience autre que celle présentée sur le spatio-temporel de la figure 6.2. Les courbes en traits pleins correspondent à un ajustement des données par une fonction exponentiellement décroissante. Il apparaît que les temps d'évolution du fond peuvent être très différents de ceux d'évolution des berges (dans cet exemple, il sont deux fois plus courts).

Nous avons également mesuré l'évolution temporelle de l'aire évidée de la section d'étude pour la même expérience que la figure précédente. Cette évolution est représentée sur la figure 6.4. Nous avons défini cette section évidée, comme l'aire du lit granulaire dont les matériaux granulaires ont été enlevés. Cela correspond à la surface grisée du profil de la figure 6.4. En

## 6.2. Applications à la rivière expérimentale

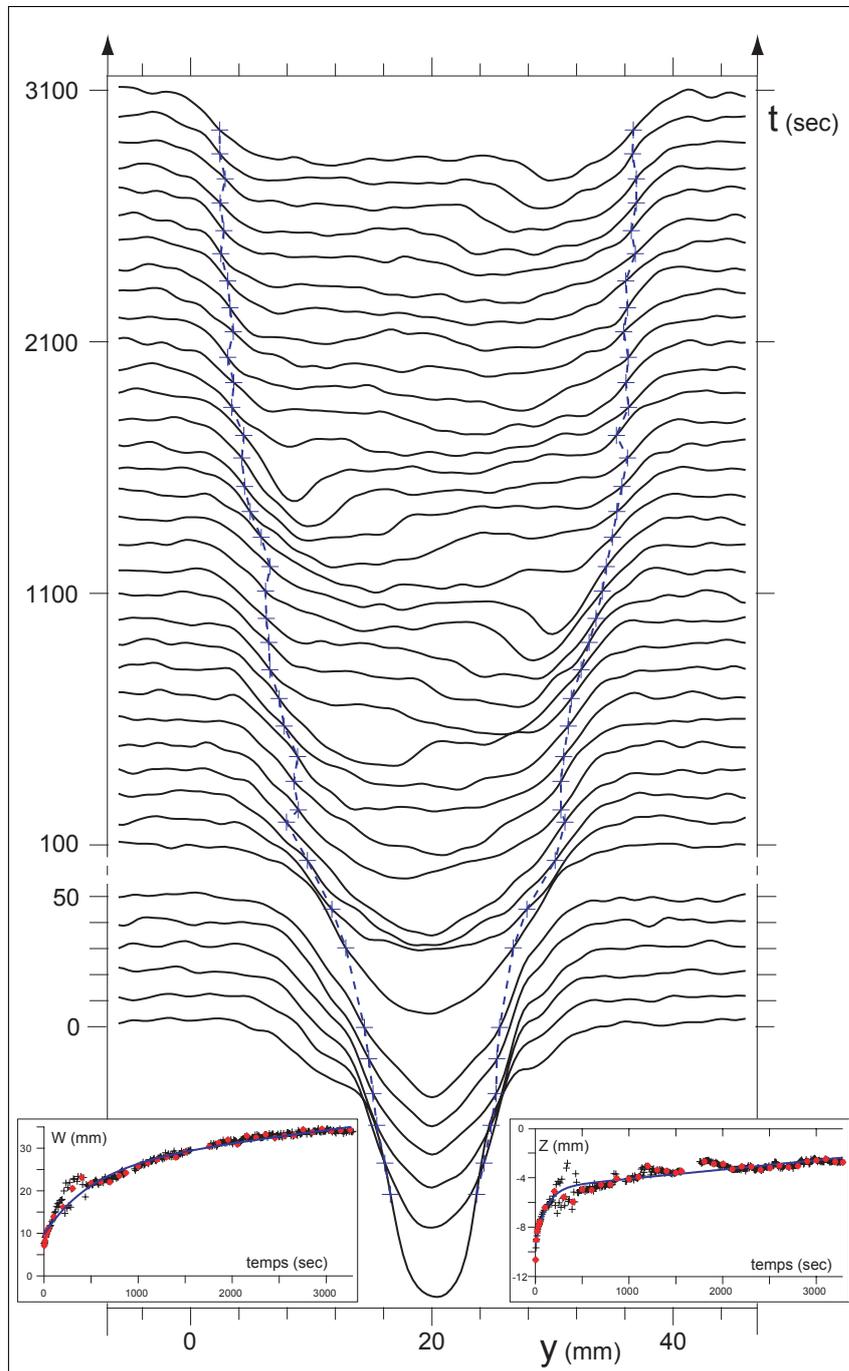


FIG. 6.2 – Évolution spatio-temporelle de la topographie de la section de la micro-rivière ( $Q = 0.5 \ell/\text{min}$ ,  $S = 1^\circ$ ,  $W_0 = 11\text{mm}$  et  $H_0 = 12\text{mm}$ ). En insert, ont été représentées l'évolution de la largeur  $W(t)$  (à gauche) et de la position du fond  $Z(t)$  (à droite) au cours de cette même expérience.

## 6.2. Applications à la rivière expérimentale

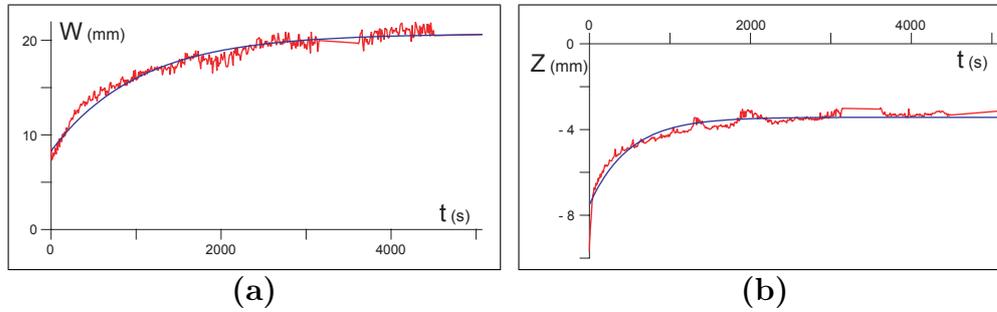


FIG. 6.3 – (a) Évolution temporelle de la largeur  $W$  et (b) de la position du fond  $Z$  de la micro-rivière au cours d'une expérience de référence ( $Q = 0.23 \ell/\text{min}$ ,  $\mathcal{S} = 1^\circ$ ,  $H_0 = 10\text{mm}$  et  $W_0 = 11\text{mm}$ ).

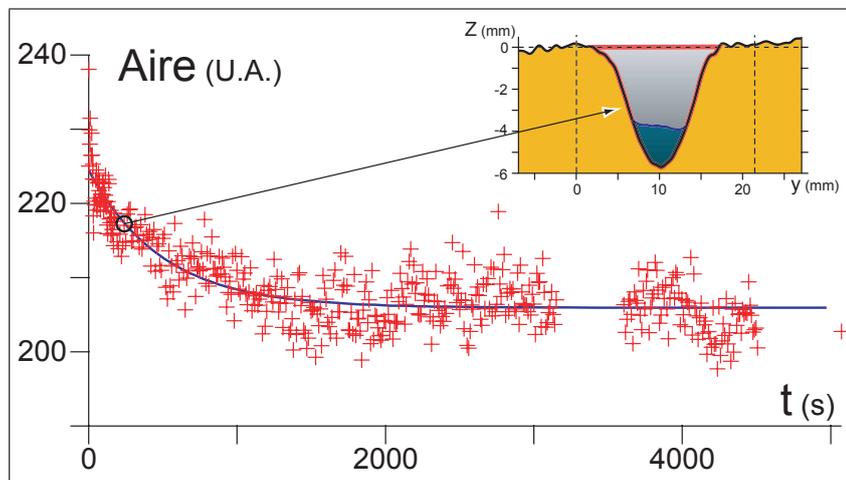


FIG. 6.4 – Évolution de l'aire de la section de la micro-rivière au cours d'une expérience de référence ( $Q = 0.23 \ell/\text{min}$ ,  $\mathcal{S} = 1^\circ$ ,  $W_0 = 11\text{mm}$  et  $H_0 = 10\text{mm}$ ). L'aire est ici reportée en unité arbitraire.

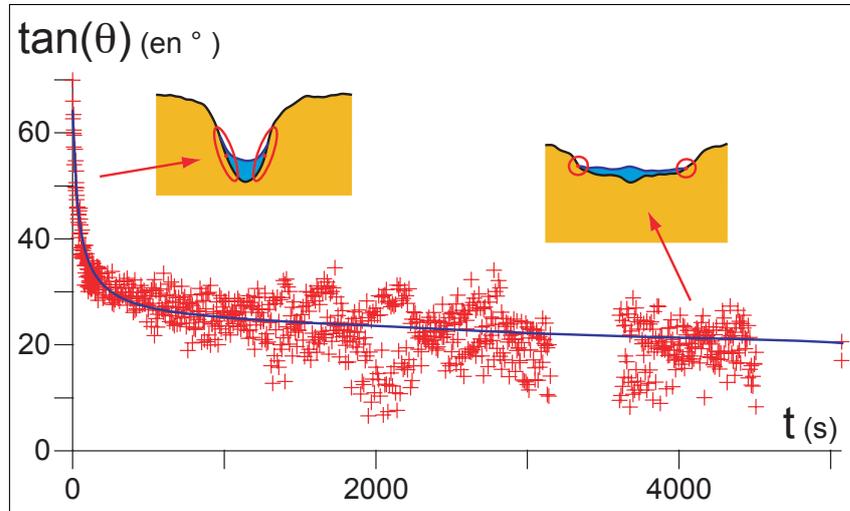


FIG. 6.5 – Évolution de l'angle des berges au niveau de la ligne triple eau-air-billes de verre au cours d'une expérience de référence :  $Q = 0.23 \ell/\text{min}$ ,  $S = 1^\circ$ ,  $W_0 = 11\text{mm}$  et  $H_0 = 10\text{mm}$ .

pratique, cette grandeur est calculée entre mesurant l'aire sous la courbe  $Z(y)$  entre deux points d'abscisses fixes représentés par des pointillés sur l'encart de la figure. Avant le début de l'expérience, cette aire correspond à l'aire du sillon initial. Au cours de l'expérience, cette surface diminue. Même si la section s'élargit, la redépôtion des billes de verre sur le lit est plus importante. Au bout d'un certain temps (ici environ 2000s), l'aire semble atteindre un plateau et ne varie plus. À ce stade, l'élévation du fond de la rivière semble complètement compensée par le faible élargissement de la rivière. Cette observation peut servir de critère pour l'obtention d'un état d'équilibre de la section étudiée. Toutefois, il existe encore un doute quant à la pertinence de critère, puisque l'observation attentive de la courbe  $W(t)$  de la figure 6.3a montre que même après  $t = 2000\text{s}$ , la rivière continue de s'élargir et son rapport d'aspect  $W/H$  continue à augmenter.

La pente des berges a également été mesurée au cours de cette même expérience. Cette mesure est présentée à la figure 6.5 qui correspond à la même expérience que les deux graphes précédents. Au commencement d'une expérience, cette valeur de pente est légèrement inférieure à  $90^\circ$ . Cette valeur est due au protocole expérimental : en itérant l'opération d'arrasement et de création du sillon initial lors de la préparation de la micro-rivière, nous drainons l'eau contenue dans le lit granulaire et pouvons former des berges bien délimitées et de pente très forte. Rapidement, la pente des berges dé-

## 6.2. Applications à la rivière expérimentale

---

croît puis fluctue autour d'une valeur comprise entre 20 et 35°. Cette valeur est proche de la pente d'avalanche d'un lit infini composé d'un matériau granulaire. Cette courbe traduit donc l'adaptation des berges dû à la présence de l'eau. La dynamique rapide observée dans les premiers moments sur la courbe de la figure 6.5 correspond à l'affaissement des berges.

$Q$ $\ell/\text{min}$	$H_0$ mm	$W_0$ mm	$W_{\text{inf}}$ mm	$\Delta W$ mm	$\mu$ degrés
0.77	12	12	23	2	26
0.5	10	12	21	1	28
0.22	13	13	16.5	0.5	35
0.72	9	24	32	2	32
1.05	8	24	31	1	32
0.53	11	12	22	1	20
0.55	18	11	21	1	33
0.52	7	10	19	1	20
0.8	19	11	26.5	1.5	33
1	16	13	30	2	32
1.08	10	20	27	2	30
1.55	10	22	29.5	0.5	24
2	15	23	42	2	29
4.6	17	31	62	5	25
2.07	14	21	42	2	32

TAB. 6.1 – Données des expériences pour une taille de grain  $d \approx 90\mu\text{m}$  et une pente  $\mathcal{S} = 0.5^\circ$ , réalisées à différents débits  $Q$ .  $H_0$  et  $W_0$  représentent la hauteur et la largeur du soc rectangulaire qui a permis de tracer le sillon initial.  $W_{\text{inf}}$  et  $\mu$  correspondent respectivement à la valeur asymptotique de la largeur et de la pente des berges,  $\Delta W$  est l'erreur faite sur la mesure de  $W_{\text{inf}}$ .

Les quatre figures précédentes représentent l'évolution temporelle d'une grandeur mesurée. À chaque fois, ces courbes expérimentales tendent vers une valeur asymptotique. Ces résultats, obtenus pour de faibles valeurs de pente et de débit, sont en accord avec l'idée que la rivière atteint un état d'équilibre, pour lequel nous pouvons alors définir une largeur asymptotique notée  $W_{\text{inf}}$ . Ce sont de tels résultats expérimentaux qui justifient que nous traitions de la sélection de la largeur des rivières.

## 6.2. Applications à la rivière expérimentale

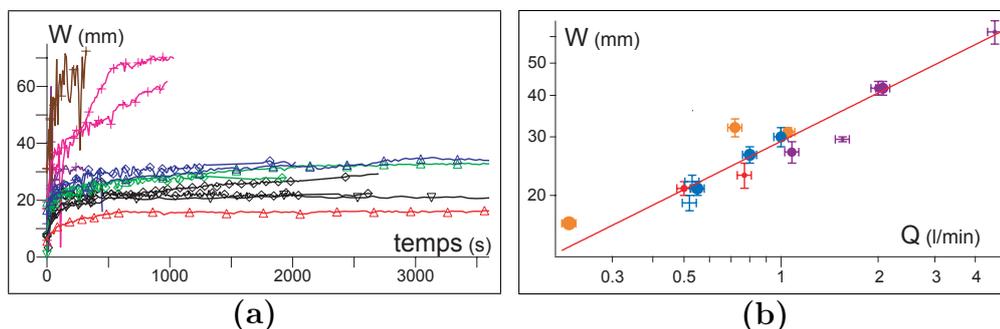


FIG. 6.6 – (a)  $W$  en fonction de  $t$  pour différentes valeurs de débit  $Q$  obtenue sur une micro-rivière pour de faibles valeurs de pente :  $\mathcal{S} = 0.5^\circ$ . (b) La largeur d'équilibre est représentée en fonction de  $Q$ . La droite rouge a pour équation  $y = 30x^{0.5}$ . Elle représente le meilleur ajustement des données par une loi de puissance.

### 6.2.2 Utilisation des données expérimentales à faible pente

Dans un premier temps, nous présentons les résultats obtenus pour la plus faible valeur de la pente :  $\mathcal{S} = 0.5^\circ$ . Ces conditions sont particulièrement propices à un bon déroulement des expériences et nous avons pu augmenter les débits d'entrée sans connaître de problèmes expérimentaux récurrents (tels qu'une destabilisation spontanée du lit ou des berges dans les premiers moments de l'expérience). La mesure de la largeur d'équilibre  $W_{\text{inf}}$  a été obtenue en utilisant chacune des courbes expérimentales  $W(t)$  représentées en 6.6a. Les différentes valeurs de  $W_{\text{inf}}$  sont représentées en fonction du débit liquide  $Q$  sur la figure 6.6b. Le tableau 6.1 récapitule les conditions expérimentales ainsi que les grandeurs mesurées pour cet état d'équilibre. Les données expérimentales sont assez dispersées, toutefois, nous retrouvons une tendance principale : à pente fixée, la largeur augmente quand le débit liquide augmente. De plus, l'ajustement des données par une loi de puissance permet d'obtenir la relation expérimentale :

$$W \sim Q^{0.5}. \quad (6.3)$$

Cette relation et les données expérimentales ont été ajoutées au graphe  $W$  vs  $Q$  obtenu avec les données expérimentales de [Ikeda 1981] sur la figure 6.7. Nous obtenons donc un graphe qui présente trois groupes de points. Les données obtenues avec la micro-rivière expérimentale se situe entre les deux groupes de points des données d'Ikeda. Attention, contrairement au

## 6.2. Applications à la rivière expérimentale

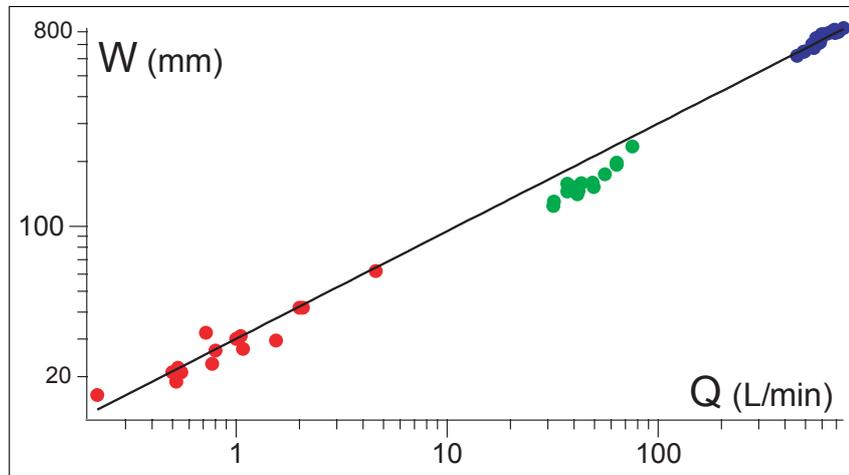


FIG. 6.7 –  $W$  vs  $Q$  obtenue sur une micro-rivière (données rouges) et la rivière expérimentale de [Ikeda 1981]. Les données vertes correspondent à des tailles de grains de 0.85mm et les données vertes ont été produits avec  $d_{50} = 1.3\text{mm}$ . La droite noire représente l'ajustement obtenu sur nos données expérimentales  $W = 30 Q^{0.5}$ .

précédent graphe  $W$  vs  $Q$  de la figure 6.6b, ce graphe est tracé pour différentes valeurs de pente  $\mathcal{S}$  et différentes valeurs de grains : les trois groupes de points correspondent aux trois tailles de grains différentes. Les trois groupes de points se rangeant dans l'ordre croissants des tailles de grains : les plus petits débits correspondant aux plus petites tailles de grains ( $d \sim 90\mu\text{m}$ ) et les plus forts débits aux expériences réalisées avec des grains d'environ 1.3mm de diamètre. Malgré le fait que les effets de pente et de taille des grains s'ajoutent aux effets du débit, la représentation en Log-Log des données confirme une tendance en loi de puissance.

La robustesse de la relation (2.1) avec  $b \sim 0.5$  n'est pas une surprise totale. Ce résultat avait été obtenu et retrouvé pour des rivières naturelles dont les effets du bassin versant sont assez compliqués à estimer en 6.1. En revanche, cette fois-ci la loi de puissance est retrouvée pour des expériences qui ne font intervenir qu'un seul chenal. L'auto-organisation du bassin versant n'est donc pas nécessaire pour expliquer les relations de la largeur des rivières avec le débit. Aux vues de ces conclusions, l'explication qui paraît la plus capable d'expliquer la sélection de la largeur est celle qui stipule que la section de la rivière s'est adaptée de sorte que la contrainte de cisaillement basale  $\tau_b$  a atteint la valeur seuil de mise en mouvement.

Nous aimerions donc reprendre le concept introduit par [Parker 1978 a]

## 6.2. Applications à la rivière expérimentale

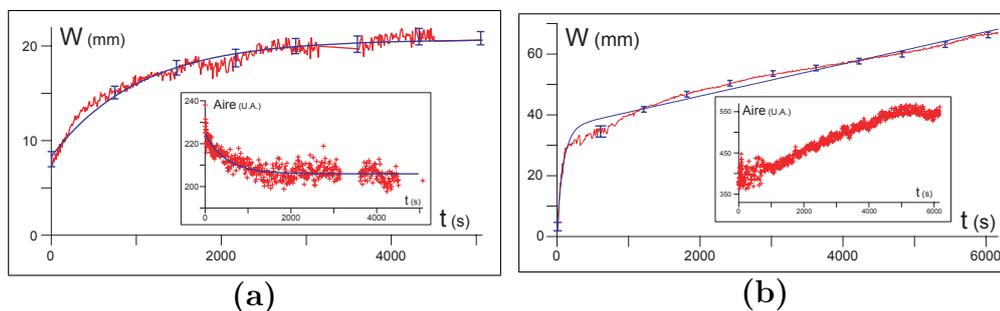


FIG. 6.8 – Évolution temporelle de la largeur de la micro-rivière. (a)  $Q = 0.23 \ell/\text{min}$ ,  $S = 1^\circ$ ,  $H_0 = 10\text{mm}$  et  $W_0 = 11\text{mm}$ . (b)  $Q = 0.75 \ell/\text{min}$ ,  $S = 2^\circ$ ,  $H_0 = 18\text{mm}$  et  $W_0 = 22\text{mm}$ .

qui explique la stabilité des rivières en intégrant le concept de diffusion transverse de la quantité de mouvement. Ce choix est justifié par l'observation des profils de vitesse transverses de la Leyre, qui indiquent qu'une description turbulente 2-D sous-estime les frottement sur les bords. Nous pensons ainsi qu'un mécanisme important est la diffusion transverse de quantité de mouvement. Cependant, nous n'avons pas pour le moment de description quantitative satisfaisante de l'hydrodynamique pour les rivières naturelles. C'est principalement le problème qu'il reste à résoudre pour accéder à modélisation de la contrainte basale et vérifier l'argument de Parker dans le cas de la Leyre celui des résultats expérimentaux.

De plus, la comparaison des résultats expérimentaux avec une possible théorie semble plus compliquée que pour l'exploitation des données issues de la Leyre. En effet, la sélection de la largeur implique que les rivières atteignent un état de quasi-équilibre. Or l'analyse de données à de plus fortes pentes montre que  $W$  s'élargit sans signe de convergence.

### 6.2.3 Parlons d'équilibre

La figure 6.8 présente deux évolutions temporelles de la largeur d'une micro-rivière expérimentale. Ces deux graphes correspondent à deux expériences assez différentes. La première est réalisée pour des conditions expérimentales "douces", à savoir : une faible pente ( $1^\circ$ ) et un faible débit liquide ( $Q = 0.23 \ell/\text{min}$ ). Au bout d'un certain temps, la largeur de la rivière semble atteindre une valeur asymptotique. Ce plateau définit l'état d'équilibre de la micro-rivière et la largeur asymptotique  $W_{\text{inf}}$  peut être facilement obtenue par ajustement des données expérimentales avec une évolution exponentielle :

$$W(t) = W_0 + (W_{\text{inf}} - W_0)(1 - e^{-t/\tau}). \quad (6.4)$$

## 6.2. Applications à la rivière expérimentale

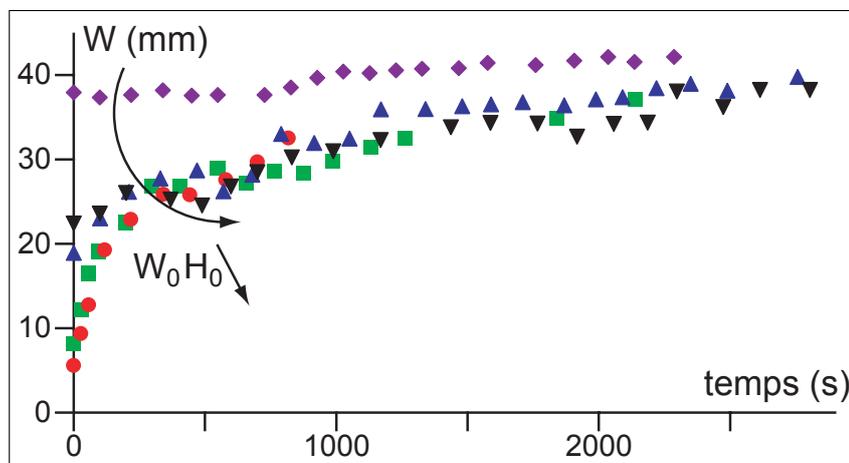


FIG. 6.9 – Évolution temporelle de la largeur de la micro-rivière pour un même débit  $Q \approx 1 \ell/\text{min}$ , une même pente  $\mathcal{S} = 1^\circ$ , et des sections initiales de surface différentes.

La seconde expérience présentée a été sélectionnée car les valeurs des paramètres de contrôle sont plus audacieux : le lit granulaire est deux fois plus incliné ( $\mathcal{S} = 2^\circ$ ) et le débit trois fois plus important ( $Q = 0.75 \ell/\text{min}$ ). Contrairement à l'expérience précédente, nous observons une dérive constante non négligeable de la largeur de la micro-rivière. Sur chacune des figures, nous avons également inséré l'évolution temporelle de l'aire évidée correspondant aux deux expériences. L'observation de l'évolution temporelle de l'aire évidée corrobore cette information : contrairement à la figure 6.8a, l'aire augmente constamment, indiquant qu'il y a plus de grains arrachés aux berges que de grains déposés sur le lit. Cette dérive soulève la question de la définition de l'équilibre de la micro-rivière.

En constatant une telle dérive, nous nous sommes demandé si ce résultat ne révélait pas l'effet d'un paramètre supplémentaire, par exemple la géométrie du sillon initial. En effet, il est possible, que dans l'expérience, il n'y ait pas un seul état d'équilibre mais plusieurs. La surface du sillon initial  $W_0 H_0$  pourrait sélectionner alors l'état d'équilibre vers lequel la micro-rivière évoluerait. Pour tester cette idée, nous avons représenté l'évolution temporelle de la largeur pour différents valeurs de  $W_0 H_0$  sur la figure 6.9. L'observation de ces données ne montrent pas de dépendance particulière. Si le sillon est initialement trop large, l'évolution de la largeur est non significative. Si le sillon initial est trop fin, le chenal ne reste pas uniforme assez longtemps : par exemple, les données représentés en ronds rouges et obtenues pour la plus petite surface correspondent à une expérience qui n'a duré que  $\sim 900$  secondes,

### 6.3. Conclusion

---

toutefois, son évolution avant que l'expérience ne soit arrêtée semble cohérente avec les évolutions obtenues pour les plus grandes valeurs de  $W_0H_0$ . La géométrie du sillon initial ne semble donc pas responsable de la dérive observée pour les plus fortes pentes ou les plus fortes valeurs de débits. En revanche, il est probable qu'avec des grains plus cohésifs (par exemple plus petits), une largeur d'équilibre puisse être atteinte même au fortes pentes. De nouvelles expériences dans cette direction sont à faire pour préciser ce point.

## 6.3 Conclusion

Quatre conclusions principales peuvent être tirées de ce travail :

- Les mesures de terrain que nous avons effectuées sur le bassin versant de la Leyre confirment la loi d'échelle  $W \sim Q^{0.5}$  en apportant des points intermédiaires aux deux jeux de données regroupés par Parker.
- Les profils transverses de vitesse de surface montre que le mélange transverse de quantité de mouvement est un mécanisme important à prendre en compte dans une description de l'hydrodynamique des rivières.
- Les résultats des expériences sur la micro-rivière donnent également, pour des pentes suffisamment faibles, une sélection de la largeur du chenal en accord avec cette loi d'échelle. Ils prouvent que les arguments liés à l'existence d'un bassin versant – et en particulier les argument d'optimisation – ne sont pas nécessaires pour arriver à cette relation entre  $W$  et  $Q$ .
- La dérive de  $W$  dans les expériences réalisées aux plus fortes pentes indique que la notion d'équilibre de la portion de chenal porte sur un critère mécanique où les forces de cohésion peuvent jouer un rôle.

# Bibliographie Sélection de la largeur

- [Armstrong 2003] Armstrong, L. 2003 Étude de l'érosion des berges et du transport de sédiments d'une micro-rivière à chenal droit. *Thèse de doctorat de l'Université Paris 7 - Denis Diderot*.
- [Betson 1979] Betson, R. P., 1979 A geomorphic model for use in streamflow routing. *Water Resour. Res.*, **15**, 95-101.
- [Chitale 1973] Chitale, S. V., 1973 Theories and relationships of river channel patterns. *Journal of Hydrology*, **19**, 285-308.
- [Colombini 2004] Colombini, M. 2004 Revisiting the linear theory of sand dune formation. *J. Fluid Mech.* **502**, 1-16.
- [Devauchelle 2007] Devauchelle, O. 2007 Écoulements de surface et érosion. *Thèse de doctorat de l'Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie*.
- [Diplas 1990] Diplas, P., 1990 Characteristics of Self-Formed Straight Channels. *J. Hydraul. Eng.*, ASCE, **116**, 707-728.
- [Heede 1972] Heede, B. D., 1972 Influences of a forest on the hydraulic geometry of two mountain streams. *Water Resour. Bul.*, **8**, 523-530.
- [Ikeda 1981] Ikeda, S. 1981 Self-Formed Straight Channels in Sandy Beds. *J. Hydraul. Div.*, ASCE, **107**, 389-406.

- [Julien 1994] Julien, P. Y. 1994 Erosion and Sedimentation. *Cambridge University Press*.
- [Leopold & Maddock 1953] Leopold, L. B. & Maddock, T. J. 1953 The hydrolic geometry of stream channels and some physiographic implications. *U. S. Geol. Survey. Professional Paper*, **252**.
- [Macky 1999] Macky, G. H. 1999 Large flume experiments on the stable straight gravel bed channel. *Water. Resour. Res.*, **35**, 2601-2603
- [Parker 1978 a] Parker, G. 1978 Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. Part 1. The sand-silt river. *J. Fluid Mech.* **89**, 109-125.
- [Parker 1978 b] Parker, G. 1978 Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. Part 2. The gravel river. *J. Fluid Mech.* **89**, 127-146.
- [Parker 1979] Parker, G. 1979 Hydraulic Geometry of Active Gravel Rivers. *J. Hydraul. Div. ASCE*, **105**, 1185-1201.
- [Singh 2003] Singh, V. P. 2003 On the Theories oh Hydraulic Geometry. *International Journal of Sediment Research*, **18**, 196-218.

Deuxième partie

Rides et Dunes



# Chapitre 7

## Introduction

Au cours du chapitre 3, nous avons vu que des structures apparaissent systématiquement sur le lit des micro-rivières, créés par le charriage de grains sur le fond. La plupart du temps, ces motifs sont soit des petites bosses périodiques se propageant dans le sens du courant, soit des barres alternées dont la taille augmente au cours de l'expérience (voir figure 3.4). Nous abordons dans cette partie la formation de rides et de dunes sur un fond sableux. Nous considérerons la situation, générique en rivière, où l'écoulement est turbulent.

### 7.1 Problèmes sémantiques et morphologiques

La définition des rides et des dunes varie d'un auteur à l'autre, allant de la subjectivité phénoménologique à la définition fondée sur des lois d'échelles. Ainsi, [Guy et al. 1966] utilise un critère de taille absolue : ce qu'il considère comme étant une "ride" est un motif de moins de 2 pieds de long et de moins de 0.2 pied d'amplitude ; au delà, on a affaire à des dunes. [Ashley 1990] et [Richards 1980] définissent ces mêmes "rides" comme des structures périodiques transverses à l'écoulement et dont la longueur d'onde initiale est contrôlée par la taille des grains  $d$ . Par opposition, ces mêmes auteurs réservent le terme "dunes" aux objets périodiques qui possèdent une longueur d'onde comparable à la hauteur d'eau (voir figure 7.1). À la lueur de ces définitions, la distinction entre "ride" et "dune" semble ténue dans des systèmes où la séparation d'échelles entre la hauteur d'eau  $H$  et la longueur d'onde initiale des rides,  $\lambda_{\max}$  (qui dépend de la taille des grains  $d$ ) n'est pas suffisante. C'est le cas des expériences en canal, où pour des raisons techniques d'alimentation en eau, les hauteurs d'eau sont de l'ordre de la dizaine de centimètres, ou moins.

Il existe une seconde ambiguïté sémantique dans la littérature lorsqu'il

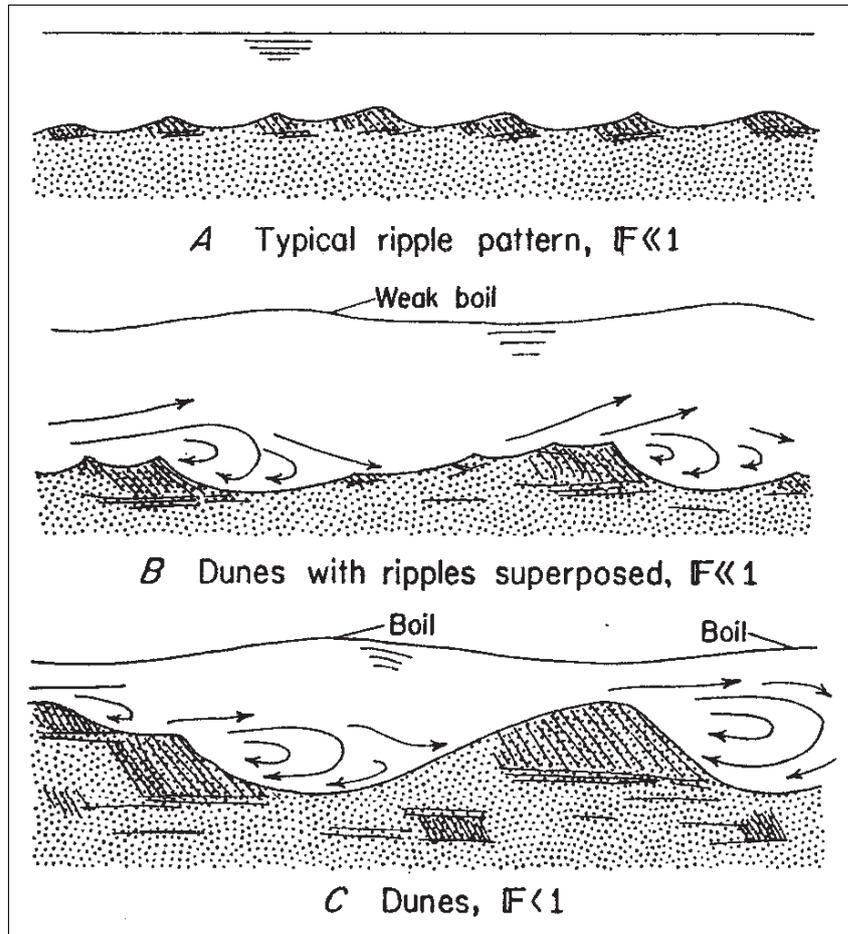


FIG. 7.1 – Schéma issu de [Simons & Richardson 1962] décrivant les différentes instabilités du lit des rivières pour des nombres de Froude  $Fr$  inférieurs à l'unité. La première structure représentée correspond à des rides dont le présence ne modifie pas la surface libre. Les dunes se développent et forment petit à petit des structures plus grosses qui déstabilisent et l'écoulement et la surface libre.

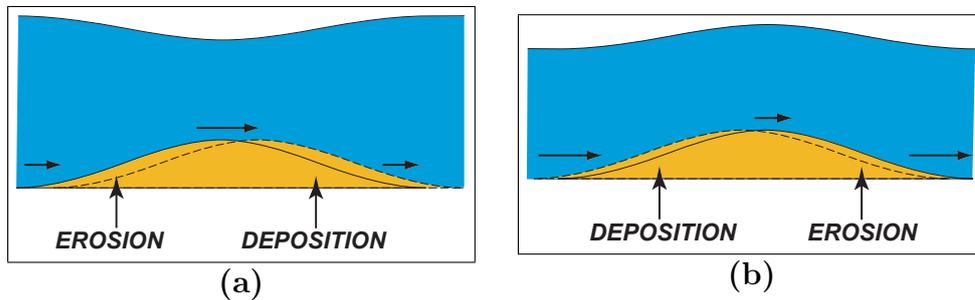


FIG. 7.2 – Schéma explicatif pour comprendre la vitesse de propagation d'une "dune" en régime fluvial sous-critique (a) et d'une "anti-dune" en régime torrentiel super-critique (b).

s'agit de différencier les rides initiales (que [Coleman & Melville 1994] appelle "wavelets") des rides matures. Dans les premiers temps de leur formation, les rides présentent un profil relativement symétrique. Puis on observe un mûrissement du motif correspondant à une augmentation de la longueur d'onde [Raudkivi 2006]. À l'instar des dunes, les rides développées que l'on observe pendant cette lente évolution présentent une asymétrie entre la face amont qui est peu pentue et la face aval qui est à l'angle d'avalanche. La majorité des articles expérimentaux [Mantz 1978, Gyr & Schmid 1989, Coleman & Melville 1994, Robert & Uhlman 2001, Coleman et al. 2003, Venditti et al. 2005b, Valance & Langlois 2008, Rauen et al. 2008] sont consacrés à l'étude de structures pleinement développées, qui ont atteint un régime statistiquement stationnaire et regroupées sous la dénomination de "rides" ou de "dunes" en fonction de critères de taille ou de l'observation d'une déformation "significative" de la surface libre. **Pour éviter les confusions, nous réserverons l'appellation "rides" aux structures dont la dynamique est la même en présence d'une surface libre ou dans un milieu semi-infini et l'appellation "dunes" aux structures qui interagissent directement avec la surface libre. De plus, nous ferons référence aux structures développées sous le terme de "rides développées" ou "rides matures" et nous consacrerons le terme "ride" exclusivement aux motifs initiaux.** [Langlois & Valance 2007] ont étudié expérimentalement la formation de rides à partir d'un lit plat, composé de billes de verre de 100, 250 et 500 $\mu\text{m}$ , et le mûrissement du motif qui en résulte. [Baas 1994, Coleman & Melville 1996, Baas 1999, Coleman & Eling 2000] ont également mesuré l'évolution temporelle de la longueur d'onde des rides, mais cette fois pour un lit de sable naturel monodisperse et en présence d'une surface libre. Dans le chapitre consacré à l'étude théorique de la

sélection de la longueur d'onde initiale des rides, nous utiliserons les données de ces cinq articles.

Au delà de l'interaction ou non avec la surface libre, un second critère d'ordre morphologique est nécessaire pour caractériser complètement rides et dunes, qui permet de différencier les motifs simples de ceux présentant des sous-structures. Ainsi, [Parsons et al. 2005] a observé sur le lit du Rio Paraná, sous  $\sim 8\text{m}$  d'eau, des dunes de  $\sim 10\text{m}$  de long superposées sur le dos de "méga-dunes" de longueurs d'onde comprises entre 45 et 85m (voir la photo de la figure 7.3b). De la même façon, des rides peuvent croître sur la face amont de dunes ou de rides développées suffisamment grandes. Cette situation, représentée sur le second schéma de la figure 7.1 est couramment observée dans les rivières naturelles.

Rides et dunes se propagent dans le sens du courant. En effet, la vitesse d'écoulement croît le long de la face amont des rides et des dunes, ce qui provoque l'érosion de cette face. Elle décroît sur la face avale, ce qui provoque une déposition de grains (cf figure 7.2a). Toutefois, lorsque l'écoulement est super-critique ( $\mathcal{F}r \geq 1$ ), la surface libre n'est plus pincée au sommet des dunes, mais défléchie (cf figure 7.2b). La vitesse devient donc supérieure dans le creux que sa valeur à la crête. Les grains transportés se redéposent donc majoritairement sur la face amont de la bosse, ce qui correspond à une propagation des structures à contre-courant. On parle alors d'"antidunes". Dans ce manuscrit, nous n'étudierons pas ces antidunes dans le détail, faute d'en avoir observé sur le terrain et d'avoir pu s'en faire une idée physique.

Une dernière ambiguïté de la littérature concerne les mécanismes de formation des dunes. D'une part, aucun article expérimental ne rapporte de description détaillée de la manière dont les dunes se forment. Tout au plus est-il question de temps longs (de plusieurs heures à plusieurs jours) avant que ne soit atteint un motif statistiquement stationnaire, alors même que les rides se forment en une fraction de minute. D'autre part, tous les articles théoriques depuis [Kennedy 1963] qui, le premier, a utilisé les outils de la mécanique des fluides pour prédire la longueur d'onde des motifs sableux, postulent que la formation des dunes est associée à l'instabilité linéaire d'un lit granulaire plat. En particulier, [Richards 1980] associe les rides et les dunes aux deux modes les plus instables d'une seule et même instabilité linéaire. Cela signifie que les perturbation résiduelles d'un lit plat entraînent aussi bien la formation de rides que celle de dunes. Bien que [Richards 1980] discute des lois d'échelles suivies par les deux maxima locaux du taux de croissance, il ne présente pas de relation de dispersion complète qui permettrait de rendre compte de leur importance relative. Tout au plus, il représente indépendamment les deux

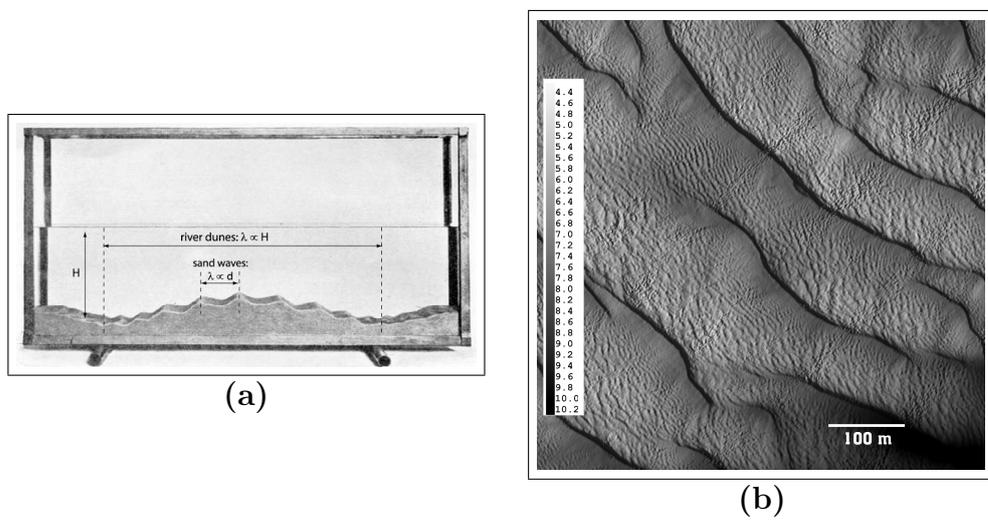


FIG. 7.3 – (a) Photo purement illustrative tirée de Ayrton (page 29) qui montre deux motifs périodiques joliment superposés. Nous appellerons "rides" les structures dont la formation n'est pas sensible à la présence de la surface libre, contrairement aux "unes" dont la longueur d'onde est contrôlée par la taille  $H$  de cette surface libre. (b) Champ de mega-dunes au fond du Rio Parana ; par définition, les méga-dunes présentent des dunes sur leur dos, qui elles-mêmes présentent des rides sur leur dos.

## 7.2. Principe de l'instabilité d'un lit plat

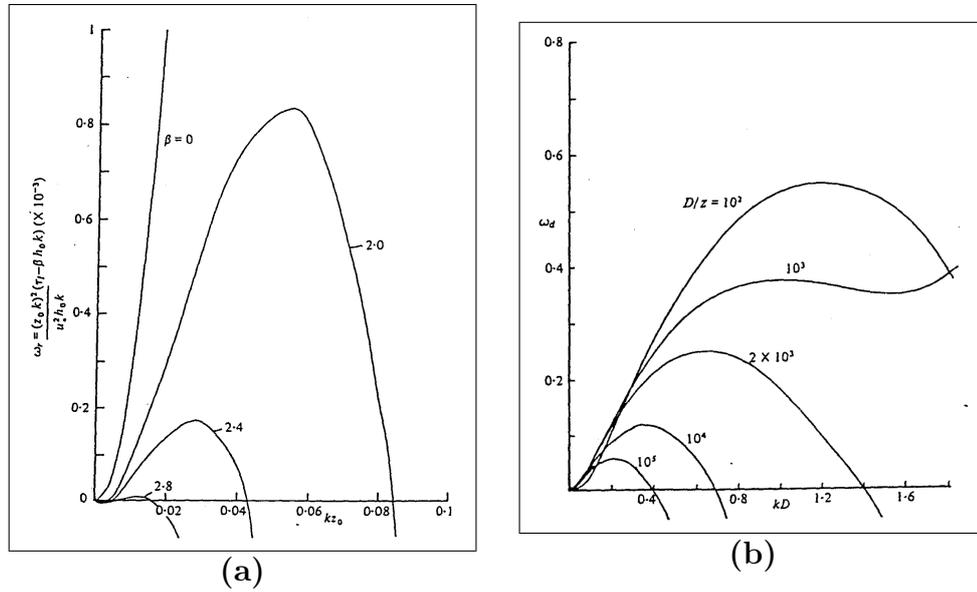


FIG. 7.4 – Taux de croissance des rides  $\omega_r$  (a) et des dunes  $\omega_d$  (b) obtenues par [Richards 1980] en fonction du nombre d'onde respectivement adimensionné par la rugosité hydrodynamique  $z_0$  et la hauteur d'eau  $D$ .  $\omega_r = \frac{(kz_0)^2}{u_*^2 kh_0} (\tau_i - \beta kh_0)$  et  $\omega_d = \frac{(kD)^2}{u_*^2 kh_0} (\tau_i - \beta kh_0)$  avec  $h_0$  l'amplitude de modulation du fond sinusoïdal  $Z$ ,  $\tau_i$  la partie imaginaire du taux de cisaillement et  $\beta$  un coefficient qui rend compte des effets stabilisant de la pesanteur.

parties du taux de croissance associées aux rides puis aux dunes. Ces deux graphes sont représentés sur la figure 7.4. Le taux de croissance est divisé par  $k$  de sorte qu'il ne montre pas l'importance relative des deux maxima. Dans le chapitre 10.1, la relation de dispersion complète est représentée. Nous allons montrer que la surface libre a en réalité un effet stabilisant et, en comparant les valeurs respectives de ces deux maxima, que le maximum secondaire de taux de croissance ne peut être associé à la formation de dunes. Pour ce faire, nous avons repris complètement le problème de la formation de structures au fond des rivières en se focalisant sur les mécanismes dynamiques à l'œuvre.

## 7.2 Principe de l'instabilité d'un lit plat

Comme nos prédécesseurs, le cœur du raisonnement que nous allons suivre tient dans l'analyse de stabilité linéaire d'un lit plat soumis à un écoulement turbulent. Déterminons tout d'abord l'origine de l'instabilité d'un fond plat vis-à-vis d'une perturbation. Une bosse croît lorsque des grains se déposent

## 7.2. Principe de l'instabilité d'un lit plat

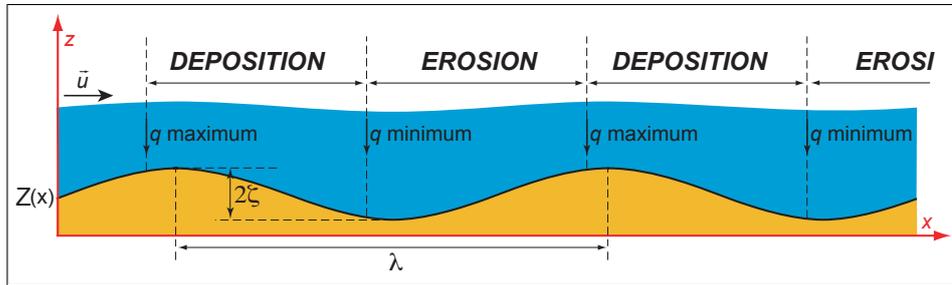


FIG. 7.5 – Une perturbation sinusoïdale,  $Z(x) = \zeta \cos(2\pi x/\lambda)$ , est instable si sa crête se trouve dans la zone de déposition des grains. La zone de déposition correspond à une décroissance spatiale du flux de sédiments transportés par l'écoulement ( $\partial q/\partial x < 0$ ).

sur sa crête. La quantité de sédiments transporté par l'écoulement est caractérisée par le flux  $q$  qui est le volume de grains passant par unité de temps au travers d'une section de l'écoulement de largeur unité. Dans le cas d'une petite perturbation périodique du lit, de longueur d'onde  $\lambda$  et d'amplitude  $2\zeta$ , soumise au cisaillement d'un fluide en écoulement (les notations se trouvent également sur la figure 7.5),  $q(x)$  est modulé par le motif périodique  $Z(x)$ . Le flux de sédiments est donc une fonction périodique de  $x$  : lorsque  $q$  croît, il y a plus de grains mis en mouvement qu'il ne s'en dépose. Ces grains proviennent du lit, c'est pourquoi les zones où  $\partial q/\partial x > 0$  définissent les zones d'érosion. Lorsque le flux  $q$  diminue, il y a déposition de particules : le nombre de grains qui retombent sur le lit est plus grand que le nombre de grains qui en sont arrachés par le fluide. Dans le cas de la figure 7.5, on observe une alternance de zones d'érosion et de déposition. Le flux sédimentaire  $q$  présente un maximum et un minimum par longueur d'onde. Si le sommet de la structure considérée se situe dans une région de déposition, le lit plat est instable vis-à-vis de la longueur d'onde  $\lambda$ . À l'inverse, si les crêtes se situent dans une zone d'érosion, le lit plat est stable vis-à-vis de cette longueur d'onde. En conclusion, pour étudier la formation de motifs à partir d'un lit plat, la quantité centrale à étudier est le déphasage du flux de sédiments  $q$  par rapport à la perturbation  $Z$  du lit arasé.

Le déphasage total entre la topographie  $Z(x, t)$  et le flux de sédiments  $q(x, t)$  se décompose en plusieurs déphasages élémentaires induits par des mécanismes différents et résumés sur le schéma 7.6a. Un premier déphasage d'origine hydrodynamique provient de la position du maximum de la contrainte de cisaillement basale  $\tau_b(x, t)$  par rapport au sommet de  $Z(x, t)$ . Ce déphasage est dû à l'action conjuguée de l'inertie du fluide et des forces

## 7.2. Principe de l'instabilité d'un lit plat

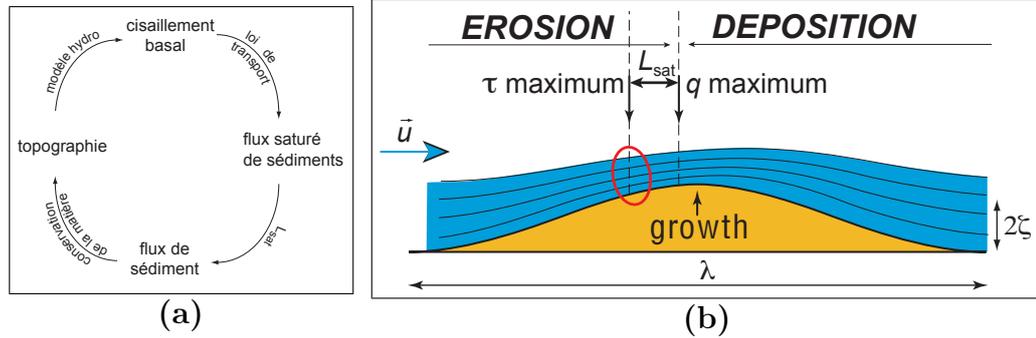


FIG. 7.6 – Schéma résumant les principaux ingrédients qui permettent la croissance d'une bosse périodique soumise au cisaillement d'un fluide en écoulement.

de dissipation turbulente. Le flux de sédiments à l'équilibre  $q_{sat}$  dépend de la contrainte basale et de la pente. L'effet de la gravité peut donc induire un retard de  $q_{sat}$  sur  $\tau_b$ . Enfin, le flux de sédiment  $q$  relaxe vers sa valeur à l'équilibre  $q_{sat}$  avec un retard spatial  $L_{sat}$  et un retard temporel  $T_{sat}$ .  $q$  présente donc un retard sur  $q_{sat}$  contrôlé par le transport. Au final, la topographie perturbe l'écoulement, ce qui modifie le transport de sédiment et agit in fine sur le relief via le processus d'érosion/déposition

Comme nous l'avons spécifié en introduction de ce manuscrit, l'analyse de la formation des rides et des dunes en termes de mécanismes dynamiques doit être décomposée en deux parties : la description de l'écoulement hydrodynamique et celle du transport. Le premier de ces problèmes consiste à étudier la réponse d'un écoulement turbulent à un fond quelconque. En allant au plus simple, [Kennedy 1963] utilise un écoulement potentiel ( $u = \nabla\phi$ ) pour tenter, vainement, d'expliquer la formation de motifs périodiques. Pour ce type de description irrotationnelle, le potentiel satisfait l'équation d'incompressibilité  $\Delta\phi = 0$  de sorte que la solution est de la forme :

$$\phi = \phi_0 e^{-kz} \cos(kx)$$

Il n'y a donc pas de déphasage de l'écoulement par rapport à la topographie – et les contraintes de cisaillement ne sont pas définies. Pour palier à ce défaut, il ajoute un retard constant entre le flux de sédiment  $q$  et le flux saturé  $q_{sat}$ , supposé fonction de la vitesse :

$$q(x) = q_{sat}(x - L_{sat}). \quad (7.1)$$

Pour un motif périodique de longueur d'onde  $\lambda$ , le déphasage qui en résulte vaut simplement  $-2\pi L_{sat}/\lambda$ . Lorsque  $\lambda > 2L_{sat}$  ce déphasage correspond à

## 7.2. Principe de l'instabilité d'un lit plat

---

un retard alors que pour  $L_{\text{sat}} < \lambda < 2L_{\text{sat}}$ ,  $q_{\text{sat}}$  est en avance sur  $q$ . Alors même qu'au niveau phénoménologique, c'est un retard du flux sur la vitesse, et donc la topographie, que les auteurs ont voulu introduire, ils l'utilisent comme source d'avance et donc d'instabilité. Ceci est uniquement dû à la formulation non physique du retard qui, comme l'a montré [Parker 1975], n'est associé chez [Kennedy 1963] et [Reynolds 1965] à aucun mécanisme physique. L'introduction d'une longueur de relaxation dans la description du système doit se faire, a minima, via un système linéaire du premier ordre :

$$L_{\text{sat}} \frac{\partial q}{\partial x} = q_{\text{sat}} - q, \quad (7.2)$$

Cette équation traduit la façon dont le flux de sédiments  $q$  relaxe vers sa valeur à l'équilibre  $q_{\text{sat}}$ . La relation entre  $q$  et  $q_{\text{sat}}$  constitue un passe-bas en espace du premier ordre de sorte qu'il ne peut induire, au maximum qu'un retard correspondant à un déphasage de  $\pi/2$ .

De la même façon que pour le calcul d'écoulement potentiel, une description en eau peu profonde, utilisée notamment par [Gradowczyk 1970], ne rend pas compte de l'asymétrie de l'écoulement : en utilisant des équations du type Saint-Venant, il n'est pas possible de capturer les effets destabilisants d'origine purement hydrodynamique. [Engelund 1970, Smith 1970, Fredsøe 1974] ont introduit une fermeture turbulente basée sur une viscosité turbulente constante. Dans la mesure où l'instabilité existe pour un liquide newtonien, cette modélisation permet de rendre compte d'une asymétrie de l'écoulement autour d'une bosse symétrique. [Richards 1980] a affiné la description hydrodynamique en présentant une modélisation de type  $k - \epsilon$  ayant recours à une équation supplémentaire sur l'énergie turbulente et une relation de fermeture basée sur l'existence d'une longueur de mélange  $L$ . La description la plus fine en termes de mécanismes physique est due à [Jackson & Hunt 1975] qui ont proposé un calcul analytique approché de la contrainte sur un fond ondulé dans le cas d'un écoulement semi-infini. Plus précisément, il s'agit d'un calcul par raccordement asymptotique entre trois couches :

- la couche externe au sein de laquelle les effets inertiels du fluide sont équilibrés par les forces de pression,
- la couche interne, d'épaisseur  $\ell$ , au sein de laquelle les contraintes de cisaillement sont équilibrées par les forces de pression dues à la présence de bosses,
- la couche de surface d'épaisseur  $h_0$ , située près du sol, qui contrôle la rugosité hydrodynamique  $z_0$ .

Cette analyse est valable dans la limite de longueurs d'onde  $\lambda$  exponentiellement grandes devant la rugosité hydrodynamique :  $\ln(\lambda/z_0) \gg 1$ . Ces résultats ont été reformulés par [Kroy et al. 2002] pour en tirer une formulation

### 7.3. Analyse de stabilité linéaire

---

suffisamment simple pour être utilisée dans un modèle numérique de dunes éoliennes. L'influence de la fermeture turbulente utilisée sur une description hydrodynamique à la [Jackson & Hunt 1975] a été testée par [Ayotte & al. 1994]. Nous reviendrons sur la structure en couches de l'écoulement lors de la discussion des résultats linéaires en 8.1.5.

Cette approche a également été reprise par [Colombini 2004, Colombini & Stocchino 2005] mais de manière numérique, pour reprendre le problème de la formation des dunes et des antidunes sur le lit des rivières. Seule nuance, ces auteurs évaluent la contrainte de cisaillement à une hauteur  $\eta_B$  au dessus du lit interprétée comme le sommet de la couche de particules transportées par l'écoulement. Nous soulignerons que ce calcul n'est pas cohérent avec le fait que ces auteurs fixent les conditions aux limites en-dessous de la couche de transport, sur le fond  $Z$ .

Par la suite, nous allons utiliser ce même type de modélisation hydrodynamique pour décrire l'écoulement turbulent au-dessus d'un fond faiblement perturbé. Nous pourrons ainsi séparer et interpréter les différents effets, qu'ils soient dus à l'hydrodynamique ou au transport. Bien que nous utilisions une description hydrodynamique très comparable, nos conclusions seront opposées à celles faites par ces différents auteurs, qui associent la présence de dunes en rivières à une instabilité linéaire du lit.

## 7.3 Analyse de stabilité linéaire

Pour aborder la formation des rides et des dunes sur le fond des rivières, nous commençons par effectuer l'analyse de stabilité linéaire d'un fond plat. Afin d'en comprendre les tenants et les aboutissants, nous allons tout d'abord présenter les principales composantes du cadre très général qui sera utilisé dans les chapitres suivants.

Nous considérons un fond  $Z$  érodable, cisailé par un écoulement turbulent. L'état de base étant homogène, on peut décomposer toute perturbation sur les modes de Fourier en espace et en temps. Sans perte de généralité, on considère donc un fond périodique, de nombre d'onde  $k = 2\pi/\lambda$  :

$$Z(x, t) = \zeta e^{\sigma t} e^{ik(x-ct)}. \quad (7.3)$$

$\sigma$  représente le taux de croissance temporel et  $c$  la vitesse de propagation de la perturbation. Une valeur positive du taux de croissance signifie une croissance de l'amplitude initiale  $\zeta$  : le motif est instable vis-à-vis de la longueur d'onde  $\lambda$ . À l'inverse, si  $\sigma \leq 0$ , le fond ondulé est stable vis-à-vis de la perturbation considérée.

### 7.3. Analyse de stabilité linéaire

---

La description hydrodynamique permet de relier la contrainte de cisaillement basale à la topographie :

$$\tau_b = \tau_0 (A + i B) kZ . \quad (7.4)$$

$A$  et  $B$  sont les composantes de la contrainte en phase et en quadrature avec le fond. En particulier, le déphasage entre la contrainte et le fond est donné par  $\arctan(B/A)$ ,

L'hydrodynamique et le transport sont reliés par l'intermédiaire du flux saturé de sédiment  $q_{\text{sat}}$ . Il représente le flux maximum de sédiments pouvant être transporté, à l'équilibre, pour un écoulement caractérisé par un cisaillement  $\tau_b$ . La relation entre  $q_{\text{sat}}$  et  $\tau_b$  est explicitée via une loi de transport. Dans le but de garder un formalisme général, nous écrivons :

$$q_{\text{sat}} = Q (a + i b) kZ . \quad (7.5)$$

Le flux  $Q$  correspond à l'état de référence du flux saturé. Il est calculé en considérant l'écoulement sur un fond plat.  $a$  représente la composante de  $q_{\text{sat}}$  en phase avec le fond et  $b$  la composante en quadrature. Pour chaque loi de transport, il est possible d'exprimer les trois coefficients  $Q$ ,  $a$  et  $b$ . Notons que  $a$  et  $b$  jouent le même rôle pour  $q_{\text{sat}}$  que les coefficients  $A$  et  $B$  pour  $\tau_b$  : en particulier le déphasage entre le flux saturé et la topographie vaut  $\arctan(b/a)$ .

Enfin, il existe un retard spatial entre le flux de sédiment  $q$  et cette valeur du flux saturé  $q_{\text{sat}}$ , encodé dans la longueur de saturation  $L_{\text{sat}}$ . La relation (7.2) se réécrit :

$$q = \frac{q_{\text{sat}}}{1 + i k L_{\text{sat}}} . \quad (7.6)$$

En injectant (7.5) dans (7.6), on relie la modulation du flux de sédiment  $q$  à la topographie  $Z$  :

$$q = \frac{Q (a + i b)}{1 + i k L_{\text{sat}}} kZ . \quad (7.7)$$

Cette relation constitue la première équation importante de l'analyse. Pour accéder aux valeurs du taux de croissance et de la vitesse de propagation des perturbations, il est nécessaire de spécifier une seconde équation. Celle-ci est obtenue en écrivant la conservation de la matière au niveau du fond :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 . \quad (7.8)$$

En résolvant le système formé par l'équation (7.7) et la linéarisation de (7.8), on obtient la relation de dispersion, qui donne le taux de croissance  $\sigma$

### 7.3. Analyse de stabilité linéaire

---

et la vitesse de propagation  $c$  des structures en fonction du nombre d'onde  $k$  :

$$\frac{L_{\text{sat}}^2 \sigma}{Q} = \frac{(kL_{\text{sat}})^2 (b - a kL_{\text{sat}})}{1 + (kL_{\text{sat}})^2}, \quad (7.9)$$

$$\frac{L_{\text{sat}} c}{Q} = \frac{(kL_{\text{sat}}) (a + b kL_{\text{sat}})}{1 + (kL_{\text{sat}})^2}. \quad (7.10)$$

Dans le cas le plus simple d'un écoulement turbulent infini et d'un modèle linéaire, les paramètres du problème sont la longueur d'onde du motif  $\lambda = 2\pi/k$ , la rugosité hydrodynamique  $\eta_0 = k z_0$  et la longueur de saturation  $L_{\text{sat}}$ .

Les coefficients  $a$  et  $b$  varient peu avec le nombre d'onde  $k$ . Pour  $\lambda \ll L_{\text{sat}}$ , le taux de croissance augmente comme  $b (kL_{\text{sat}})^2$ . Pour de grandes valeurs de  $k$ , le taux de croissance varie comme  $-a kL_{\text{sat}} < 0$ . La longueur de saturation introduit une longueur de coupure  $k_c$ . Pour toutes valeurs  $k > k_c$ , la structure est stabilisée. L'introduction d'une longueur de saturation  $L_{\text{sat}}$  est un processus stabilisant les plus petites longueurs d'ondes. De plus, la courbe  $\sigma(k)$  possède au moins un maximum  $\lambda_{\text{max}}$ . Ce maximum correspond aux structures les plus instables : quand on étudie expérimentalement la déformation d'un lit plat, ce sont ces structures qui émergent le plus rapidement et qui sont mesurées. Nous associerons la formation de rides à la présence de ce maximum principal. Pour les rides, le paramètre contrôlant la longueur d'onde d'apparition des rides  $\lambda_{\text{max}}$  n'est pas clairement déterminé. L'interprétation de l'analyse de stabilité linéaire de [Richards 1980] montre que  $\lambda_{\text{max}}$  est contrôlée par l'écoulement turbulent par l'intermédiaire de la rugosité hydrodynamique  $z_0$ . Dans le cas d'un écoulement sur fond rugueux, c'est la taille des grains qui contrôle  $z_0$ , alors que dans le cas d'un fond lisse, c'est la hauteur de la couche visqueuse  $\nu/u_*$ , et donc la nature du fluide, qui détermine  $\lambda_{\text{max}}$  [Sumer & Bakioglu 1984]. Or, ces raisonnements sous-estiment la longueur d'onde initiale des rides de deux ordres de grandeur. En utilisant le maximum du taux de croissance, nous montrerons que la formation des rides n'est pas due à l'hydrodynamique mais qu'elle est liée au transport via la longueur de saturation  $L_{\text{sat}}$ . Nous pensons, en outre, que ce concept, qui permet de décrire la façon dont le flux de sédiments relaxe vers sa valeur d'équilibre, doit être nécessairement présent dans tout modèle qui ambitionne d'étudier la formation des rides en rivières.

## 7.4 Plan de la partie Ride et Dune

Cette partie du manuscrit est consacrée à l'étude théorique de l'instabilité de dunes et de rides sur le lit d'une rivière. Comme le temps de réponse de l'hydrodynamique à une perturbation du lit est beaucoup plus court que les temps caractéristiques d'évolution du lit ( $\sim 1\text{min}$ ), ces deux aspects sont traités dans des chapitres distincts.

Le chapitre 8 présente la description détaillée de l'écoulement turbulent. L'écoulement infini au-dessus d'un fond périodique est modélisé par une description 2-D rotationnel quasi-permanent complété à l'aide d'une fermeture turbulente du premier ordre. La fermeture turbulente prend en compte une longueur de mélange, qui varie comme la distance au sol. Cette modélisation permet de rendre compte d'un déphasage de l'écoulement sur la topographie. Nous avons étudié les variations des coefficients  $A$  et  $B$ , qui encodent le déphasage de la contrainte de cisaillement basale  $\tau_b$  par rapport au fond  $Z$ , introduits par la relation (7.4). L'effet déstabilisant de l'écoulement turbulent est ensuite étudié en testant séparément les effets de la prise en compte de l'anisotropie des contraintes ou de l'évolution temporelle de la topographie. Les calculs sont ensuite étendus à un développement faiblement non-linéaire dans le sous-chapitre 8.3. Finalement, la surface libre est introduite dans le modèle. Un effet de profondeur finie et la résonance de la surface libre sont les deux principaux effets mis en évidence par cet ajout. Dans ces deux cas, la surface libre a un rôle stabilisant sur l'écoulement : elle diminue la valeur du déphasage entre  $\tau_b$  et  $Z$ , en diminuant le rapport  $B/A$ .

La partie 9 est d'abord dédiée à la description du transport. Celui-ci se fait principalement par l'intermédiaire des trois quantités : le flux saturé  $q_{\text{sat}}$ , la longueur de saturation  $L_{\text{sat}}$  et le seuil de transport  $u_{\text{th}}$ . L'introduction d'une longueur de saturation a un effet stabilisant sur les plus petites longueurs d'onde et génère un maximum de la courbe  $\sigma(k)$ . En se donnant une loi de transport  $q_{\text{sat}}(\tau_b, u_{\text{th}})$ , il est possible d'étudier les valeurs des coefficients  $a$  et  $b$  et d'utiliser quantitativement l'analyse de stabilité linéaire. Le maximum principal du taux de croissance  $\sigma(k)$  est associé à la formation des rides en rivières. Nous avons utilisé les observations expérimentales sur les rides pour obtenir des conclusions quantitatives sur la longueur de saturation  $L_{\text{sat}}$ . Finalement, le développement non-linéaire de l'écoulement est utilisé pour rendre compte du suivi expérimental de l'évolution des rides au fond de la Leyre.

Nous verrons au chapitre 10, que l'application de l'analyse de stabilité linéaire conduit à une conclusion très différente quand on étudie la formation des rides ou des dunes en rivières. L'effet stabilisant de la surface libre, décrit au chapitre 8.4, est introduit. Il permet d'interpréter la relation de dispersion complète. Le principal effet de  $H$  sur le taux de croissance est une stabilisation des longueurs d'onde proches de la hauteur d'eau :  $kH \sim 1/\mathcal{F}r^2$ . Nous concluons que la formation des dunes n'est pas due à une instabilité linéaire du lit, mais à des processus fondamentalement non-linéaires. Cette conclusion est corroborée par des observations sur la Leyre, dont le lit présente également des motifs à plus grandes échelles, les "méga-dunes". Ces processus non-linéaires se développent sans limites de sorte que la question n'est pas de déterminer le processus déstabilisant mais bien l'ingrédient physique qui limite ces processus non-linéaires et explique la présence de dunes en rivières pour des longueurs d'onde proches de  $H$ .

Après avoir rappelé les principales conclusions de ces travaux en 11.1, nous proposons une nouvelle classification entre "rides" et "dunes" basée sur les mécanismes physiques responsables de leur formation. Finalement nous donnons brièvement les principales clés qui permettent de transposer ce modèle aquatique à l'étude du cas éolien : En utilisant le même cadre général, nos conclusions sur la formation des structures éoliennes restent les mêmes que celles présentées dans ce manuscrit, à condition de définir l'analogie de la surface libre des rivières au cas atmosphérique.

# Chapitre 8

## Modélisation de l'écoulement turbulent au-dessus d'un fond rugueux

L'objectif de cette partie est de décrire quantitativement l'écoulement d'une rivière au-dessus d'un relief immobile. Pour simplifier le problème, nous considérons un écoulement incompressible turbulent 2D : la rivière est supposée invariante suivant l'axe transverse. Même si nous savons que les effets 3D jouent un rôle important dans l'évolution des structures, notamment lors de la croissance non-linéaire des rides, la description à deux dimensions est suffisante pour rendre compte des mécanismes liés à la déstabilisation d'un lit plat cisailé par un écoulement turbulent.

### 8.1 Relation de fermeture turbulente

#### 8.1.1 Décomposition de Reynolds

Nous utilisons la décomposition de Reynolds, qui sépare l'écoulement moyen de ses fluctuations :  $\vec{u} = \vec{U} + \vec{u}'$ . La description de l'écoulement incompressible via le champ de vitesse moyen  $\vec{U} = (u_x, u_z)$  se fait grâce à l'équation de conservation de la masse et l'équation de Navier-Stokes :

$$\partial_i u_i = 0, \quad (8.1)$$

$$\rho D_t u_i = \partial_j T_{ij}. \quad (8.2)$$

Précisons que  $\partial_i$  remplace la dérivée partielle par rapport à la variable spatiale  $i$  :  $\partial/\partial i$  ; l'indice  $i$  désignant soit la variable horizontale  $x$  soit la variable verticale  $z$ . Nous adoptons aussi la notation d'Einstein, qui sous-entend une

## 8.1. Relation de fermeture turbulente

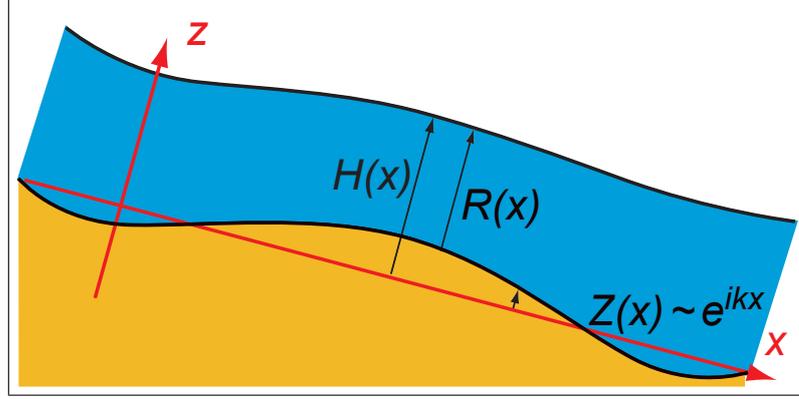


FIG. 8.1 – Schéma et notations de la rivière turbulente 2-D.

sommation implicite lorsqu'un indice est répété.  $D_t$  représente la dérivé particulaire :  $D_t = \partial_t + u_j \partial_j$  et  $\mathbf{T}$  un tenseur de tension généralisé :

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \nu \dot{\gamma}_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j}. \quad (8.3)$$

$p$  représente les termes de pression et  $\delta$  est le symbole de Kronecker. La viscosité dynamique du fluide est notée  $\nu$  et  $\dot{\gamma}_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i$  représente une composante du tenseur des déformation<sup>1</sup>. L'influence des fluctuations du champ des vitesses sur l'écoulement moyen est exprimée via le terme non-linéaire  $\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ .  $\tau$  est le tenseur de Reynolds.

Pour un écoulement caractérisé par un nombre de Reynolds modéré, les termes  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  sont négligeables devant les termes visqueux. Dans ce cas, malgré les non-linéarités de l'équation de Navier-Stokes (8.2), connaissant la viscosité d'un fluide, on "peut" résoudre le système sans hypothèse supplémentaire. Dans le chapitre 1.1, nous avons vu que les valeurs typiques du nombre de Reynolds en rivières ( $Re \gg 1000$ ) conduisent à envisager un écoulement purement turbulent. Dans toute la suite de cette étude, les termes visqueux sont négligés devant les termes traduisant l'influence de la turbulence sur le mouvement moyen. Les équations du mouvement se réécrivent donc :

$$\partial_x u_x + \partial_z u_z = 0, \quad (8.4)$$

$$\rho (u_x \partial_x u_x + u_z \partial_z u_x) = -\partial_x p - \partial_x \tau_{xx} - \partial_z \tau_{xz}, \quad (8.5)$$

$$\rho (u_x \partial_x u_z + u_z \partial_z u_z) = -\partial_z p - \partial_x \tau_{zx} - \partial_z \tau_{zz}. \quad (8.6)$$

<sup>1</sup>Le tenseur des déformations est parfois défini avec un facteur 1/2 :  $\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \dots$

## 8.1. Relation de fermeture turbulente

---

Dans les équations (8.5)-(8.6), les composantes du tenseur de Reynolds apparaissent comme des inconnues supplémentaires, qui font que le système (8.4)-(8.6) est ouvert. À l'inverse du régime visqueux, à grand nombre de Reynolds, ces équations ne suffisent pas à calculer l'écoulement moyen. Les techniques qui permettent de résoudre ce problème font appel à des hypothèses de fermeture turbulente, qui comme leur nom l'indique, sont destinées à obtenir un système comportant autant d'équations que d'inconnues.

Ce choix de fermeture peut être plus ou moins compliqué en fonction du système étudié. Ici, nous voulons relier les contraintes  $\tau$  aux gradients de vitesse par une fermeture turbulente du premier ordre. Cette fermeture est basée sur un schéma de longueur de mélange de Prandtl :

$$\tau_{ij} = \rho \kappa^2 L^2 |\dot{\gamma}| \left( \frac{1}{3} \chi^2 |\dot{\gamma}| \delta_{ij} - \dot{\gamma}_{ij} \right). \quad (8.7)$$

$\kappa$  et  $\chi$  sont deux constantes phénoménologiques.  $\kappa \approx 0.4$  représente la constante de Van Kármán.  $\chi$  décrit la composante isotrope du tenseur de Reynolds,  $2.5 \leq \chi \leq 3$ . Cette composante pouvant être absorbée dans les termes de pressions, cette constante n'a pas d'influence sur les résultats. De plus, ce formalisme introduit une longueur de mélange  $L$  qu'il reste encore à expliciter. Dès à présent, remarquons que le terme  $\kappa^2 L^2 |\dot{\gamma}|$ , produit d'une vitesse par une longueur, représente un coefficient de diffusion turbulente de la quantité de mouvement.

La description de l'écoulement incompressible, stationnaire au dessus d'un fond plat va nous permettre d'explicitier cette longueur de mélange  $L$  et nous garderons ce formalisme lors de la description de l'écoulement turbulent au-dessus d'un fond quelconque.

### 8.1.2 Expression de la longueur de mélange

Considérons le cas simple d'un écoulement homogène et stationnaire au-dessus d'un fond plat soumis à un cisaillement constant  $\tau_{xz} = -\rho u_*^2$ . De par les symétries du système ( $\mathbf{u} = (u_x, 0)$  et  $\partial_x \equiv 0$ ), la seule composante non-nulle du tenseur des contraintes s'écrit :

$$\tau_{xz} = -\rho \kappa^2 L^2 |d_z u_x| d_z u_x. \quad (8.8)$$

Il reste à expliciter  $L$  dans ce cas très simple. Le régime turbulent se caractérise, entre autre, par l'absence de longueur caractéristique intrinsèque<sup>2</sup>, par conséquent la seule longueur dimensionnante restante est la distance  $z$  par

---

<sup>2</sup>En régime visqueux, la longueur caractéristique intrinsèque est construite sur la viscosité et la vitesse du fluide :  $\nu/|\mathbf{u}|$

## 8.1. Relation de fermeture turbulente

---

rapport au fond. Dans le cas d'un fond hydrodynamique rugueux, on peut supposer que le mélange de la quantité de mouvement par les fluctuations turbulentes se fait a minima sur une taille  $z_0$  caractéristique de la rugosité. L'expression la plus simple satisfaisant ces deux exigences s'écrit :

$$L = z + z_0 . \quad (8.9)$$

Loin du sol, quand  $z \gg z_0$ ,  $L$  peut être vu comme la longueur permettant un mélange entre les particules du fluide les moins mobiles car proches du fond et les particules du fluide situées à l'altitude  $z$ . Sur le sol, l'introduction de  $z_0$  assure un mélange de la quantité de mouvement sur une taille  $z_0$ . Nous discuterons en 8.2 des valeurs possibles de  $z_0$  en fonction de la modélisation physique de la couche de surface.

Les équations issues de la projection de l'équation de Navier-Stokes se trouvent réduites à  $\partial_z \tau_{xz} = 0$ , pour (8.5), et  $\partial_z p = 0$ , pour (8.6). En utilisant la condition de non-glissement sur le fond cohérente avec l'hypothèse d'un fond rugueux, l'intégration de ces deux équations permet d'obtenir un profil vertical logarithmique, en accord avec les mesures expérimentales :

$$u_x = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left( 1 + \frac{z}{z_0} \right) . \quad (8.10)$$

A une distance  $z$  grande devant  $z_0$ , l'expression se simplifie en :

$$u_x = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) . \quad (8.11)$$

Dans cette expression,  $z_0$  est la hauteur à laquelle le profil de vitesse semble s'annuler si l'on extrapole à 0 le profil logarithmique. Cette longueur extrapolée est appelée la rugosité hydrodynamique. Dans cette modélisation de la longueur de mélange, l'échelle  $z_0$  apparaît donc directement comme étant la rugosité hydrodynamique.

### 8.1.3 Les équations linéarisées

Considérons maintenant un écoulement turbulent de hauteur infinie au-dessus d'un fond périodiquement bosselé. Dans le cas des rivières, cette limite correspond à l'étude des rides où la hauteur d'eau  $H$  est grande devant la longueur d'onde  $\lambda$  du motif. La solution est calculée comme une perturbation linéaire de l'écoulement au-dessus d'un fond uniformément plat.

L'état de base étant homogène, on peut considérer génériquement une perturbation sinusoïdale de la forme :  $Z(x) = \zeta \cos(kx)$ .  $k = 2\pi/\lambda$  est le nombre d'onde du motif et  $\zeta$  son amplitude (voir figure 8.1). L'étude d'un

## 8.1. Relation de fermeture turbulente

---

obstacle de forme arbitraire peut ainsi se déduire dans la limite de la réponse linéaire, par une décomposition sur ces modes de Fourier. Introduisons la variable sans dimension  $\eta = kz$ , la rugosité adimensionnée  $\eta_0 = kz_0$  et la fonction :

$$\mu(\eta) = \frac{1}{\kappa} \ln \left( 1 + \frac{\eta}{\eta_0} \right). \quad (8.12)$$

La longueur de mélange  $L$  étant définie comme la distance par rapport au fond, dans ce cas, elle s'écrit :  $L = z - Z + z_0$ . De plus, nous allons utiliser la notation complexe, l'expression réelle étant la partie réelle de celle-ci. Par exemple, le fond est ainsi défini par la relation suivante :  $Z(x) = \zeta e^{ikx}$ .

Les fonctions  $U(\eta)$  et  $W(\eta)$  représentent les perturbations à l'ordre linéaire en  $k\zeta$  de la vitesse et sont définies par :

$$u_x = u_* [\mu + k\zeta e^{ikx} U], \quad (8.13)$$

$$u_z = u_* k\zeta e^{ikx} W. \quad (8.14)$$

De même, nous définissons les fonctions  $S_t(\eta)$  et  $S_n(\eta)$ ,  $S_{xx}(\eta)$  et  $S_{zz}(\eta)$ , qui représentent les perturbations au premier ordre en  $k\zeta$  des contraintes tangentielles, normales et des composantes du tenseur de Reynolds :

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\rho u_*^2 [1 + k\zeta e^{ikx} S_t], \quad (8.15)$$

$$p + \tau_{zz} = p_0 + \rho u_*^2 \left[ \frac{1}{3} \chi^2 + k\zeta e^{ikx} S_n \right], \quad (8.16)$$

$$\tau_{xx} = \rho u_*^2 \left[ \frac{1}{3} \chi^2 + k\zeta e^{ikx} S_{xx} \right], \quad (8.17)$$

$$\tau_{zz} = \rho u_*^2 \left[ \frac{1}{3} \chi^2 + k\zeta e^{ikx} S_{zz} \right]. \quad (8.18)$$

Ce faisant, les équations linéarisées issues de (8.4)-(8.6) s'écrivent alors :

$$W' = -iU, \quad (8.19)$$

$$S_t' = \mu iU + \mu' W + iS_n + iS_{xx} - iS_{zz}, \quad (8.20)$$

$$S_n' = -\mu iW + iS_t. \quad (8.21)$$

Obtenant un système de trois équations à six inconnues, nous retrouvons la nécessité d'introduire une relation de fermeture turbulente pour résoudre le problème. Les trois composantes du tenseur de Reynolds  $\tau$  apportent les trois relations supplémentaires.  $\tau$  est défini en fonction du tenseur des déformations, nous en donnons la définition de ses composantes et de son module au

## 8.1. Relation de fermeture turbulente

---

carré :

$$\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{zx} = \partial_z u_x + \partial_x u_z = k u_* \mu' + u_* k^2 \zeta e^{ikx} (U' + iW), \quad (8.22)$$

$$\dot{\gamma}_{xx} = 2\partial_x u_x = 2i u_* k^2 \zeta e^{ikx} U, \quad (8.23)$$

$$\dot{\gamma}_{zz} = 2\partial_z u_z = 2u_* k^2 \zeta e^{ikx} W', \quad (8.24)$$

$$|\dot{\gamma}|^2 = 2(\partial_x u_x)^2 + 2(\partial_z u_z)^2 + (\partial_z u_x + \partial_x u_z)^2 = |\dot{\gamma}_{xz}|^2. \quad (8.25)$$

La linéarisation de la relation (8.7) permet d'obtenir les trois équations suivantes :

$$\mu' S_t = 2(U' + iW) - 2\kappa^2(\eta + \eta_0)\mu'^3, \quad (8.26)$$

$$\mu' S_{xx} = -2iU + \frac{2}{3}\chi^2(U' + iW) - \frac{2}{3}\chi^2\kappa\mu'^2, \quad (8.27)$$

$$\mu' S_{zz} = -2W' + \frac{2}{3}\chi^2(U' + iW) - \frac{2}{3}\chi^2\kappa\mu'^2. \quad (8.28)$$

En prenant la différence de (8.27) et (8.28) et en y incorporant (8.19), il vient :

$$S_{xx} - S_{zz} = -4i\frac{U}{\mu'}. \quad (8.29)$$

Cette relation permet de faire disparaître les fonctions  $S_{xx}$  et  $S_{zz}$  de l'équation (8.20). Nous avons ainsi réduit le système à quatre équations à quatre inconnues, correspondant aux relations (8.19)-(8.21) en plus de l'équation (8.26) donnant la dépendance de  $U'(\eta)$  en fonction des autres variables. Parce que nous nous intéressons plus particulièrement aux quatre fonctions  $U$ ,  $W$ ,  $S_t$  et  $S_n$ , la valeur de la constante  $\chi$  n'a pas d'influence sur la suite des résultats. L'introduction du vecteur  $\vec{X} = (U, W, S_t, S_n)$  permet de présenter l'équation différentielle finale à résoudre sous une forme plus compacte :

$$\frac{d}{d\eta}\vec{X} - \mathcal{P}\vec{X} = \vec{S}, \quad (8.30)$$

avec

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & -i & \mu'/2 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ (i\mu + 4/\mu') & \mu' & 0 & i \\ 0 & -\mu i & i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} \kappa\mu'^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.31)$$

Cette équations différentielles du premier ordre à second membre non nul a été obtenue en linéarisant les équation par rapport au petit paramètre  $k\zeta$ . La résolution de ce système nécessite la connaissance des conditions limites.

### 8.1.4 Les conditions limites et la méthode d'intégration

Pour résoudre l'équation différentielle (8.30), quatre conditions limites doivent être spécifiées. Les deux premières sont déterminées sur le sol et les deux autres "à l'infini". La description de la méthode d'intégration est également détaillée.

Sur le sol, en  $z = Z$ , la condition de non-glissement impose un vitesse nulle :  $\vec{u}(x, z = Z) = \vec{0}$ . À l'ordre linéaire, cette condition se réécrit :

$$U(0) = -\mu'(0) \quad \text{et} \quad W(0) = 0. \quad (8.32)$$

Pour les deux dernières conditions limites, nous imposons une vitesse verticale nulle et un cisaillement constant et égal à  $-\rho u_*^2$  quand  $\eta \rightarrow \infty$  :

$$W(\infty) = 0 \quad \text{et} \quad S_t(\infty) = 0. \quad (8.33)$$

La méthode de résolution est analogue à celle utilisée dans [Colombini 2004]. En commençant l'intégration à  $\eta = 0$ , nous résolvons successivement les trois équations différentielles suivantes<sup>3</sup> accompagnées de leurs propres conditions initiales :

$$\frac{d}{d\eta} \vec{X}_s - \mathcal{P} \vec{X}_s = \vec{S} \quad \text{avec} \quad \vec{X}_s(0) = \begin{pmatrix} -1/(\kappa\eta_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.34)$$

$$\frac{d}{d\eta} \vec{X}_t - \mathcal{P} \vec{X}_t = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{X}_t(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.35)$$

$$\frac{d}{d\eta} \vec{X}_n - \mathcal{P} \vec{X}_n = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{X}_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.36)$$

Ces équations différentielles sont résolues numériquement en utilisant un algorithme basé sur la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre. Le principe est de superposer une solution particulière  $\vec{X}_s$  de (8.30) et deux solutions  $\vec{X}_t$  et  $\vec{X}_n$  de l'équation homogène associée :

$$\vec{X} = \vec{X}_s + a_t \vec{X}_t + a_n \vec{X}_n. \quad (8.37)$$

<sup>3</sup>En réalité, ayant découpé partie réelle et partie imaginaire, nous résolvons à chaque fois des systèmes de 8 équations à 8 inconnues.

## 8.1. Relation de fermeture turbulente

---

Les solutions  $\vec{X}_t$  et  $\vec{X}_n$  sont associées à des conditions initiales indépendantes sur  $S_t$  et  $S_n$ . Les deux conditions limites sur le sol spécifiées par l'équation (8.32) sont alors automatiquement vérifiées par  $\vec{X}$ . Les valeurs de  $a_t$  et  $a_n$  sont ensuite adaptées pour que la solution vérifie aussi les conditions limites établies pour  $\eta \rightarrow \infty$ .

Il va de soi que, techniquement, le code numérique ne résout pas les équations jusqu'à "l'infini". En pratique, nous imposons les deux conditions limites (8.33) à une hauteur  $\eta_H = kH$  finie. Ainsi, le système qu'on résout est celui d'un fluide s'écoulant au-dessus d'un fond ondulé périodiquement et maintenu sous un plateau à l'altitude  $z = H$  qui se déplace horizontalement à la même vitesse que le fluide en imposant un cisaillement constant (le plateau étant une barrière physique rigide et indéformable, la vitesse verticale  $y$  est nulle). Faisant varier la hauteur  $H$  du plateau, nous obtenons des solutions qui deviennent indépendantes de  $H$  pour des hauteurs suffisamment grandes devant les autres longueurs caractéristiques du problème (à savoir  $\lambda$  et  $z_0$ ) : le régime asymptotique en eau profonde est atteint (voir la figure 8.3b).

Il est à noter également que, pour être capable de bien décrire l'évolution de  $\vec{X}$  pour de faibles valeurs de  $\eta = kz$ , il est nécessaire de choisir un pas d'intégration bien plus petit que la rugosité hydrodynamique  $\eta_0$ . Nous avons donc choisi un pas d'intégration suffisamment petit pour résoudre la région où  $\eta \leq \eta_0$ , en vérifiant que les résultats du calcul sont bien indépendants de ce choix (voir la figure 8.3a). Cependant, ce pas ne peut pas être arbitrairement petit pour des raisons évidentes de temps de calculs et de perte de précisions sur les résultats<sup>4</sup>, notamment lorsque  $\lambda \gg z_0$ . Nous verrons dans la partie 8.2.1 que ce choix du pas d'intégration peut-être contourné en commençant l'intégration à l'intérieur de la couche interne, où une solution asymptotique peut être explicitée.

### 8.1.5 Résultats à l'ordre linéaire en $k\zeta$

Les corrections linéaires à la vitesse et aux contraintes obtenues suite à l'intégration de l'équation (8.30) sont représentées sur la figure 8.2. Les asymptotes verticales des encarts (c) et (d) révèlent l'existence d'une zone à contraintes constantes dans une région proche du fond ( $\eta - kZ \leq kl \simeq 10^{-2}$  dans ce cas). Dans cette région, au dessus de la couche de surface d'épaisseur  $z_0$ , la vitesse varie logarithmiquement. Ces plateaux correspondent à une couche interne dans laquelle l'écoulement est décrit par l'équilibre entre le

---

<sup>4</sup>Même si les erreurs de calculs sont ridiculement faibles, celles-ci s'accumulent à chaque pas d'intégration, elles ne peuvent plus être négligées, lorsque le nombre d'intégration devient très grand...

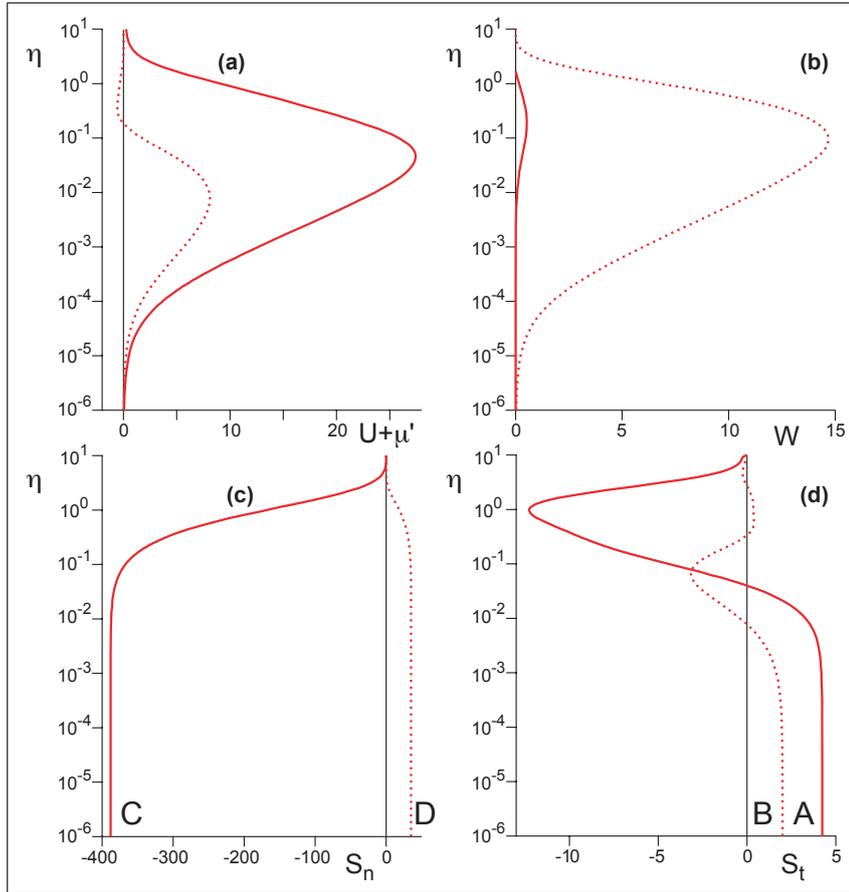


FIG. 8.2 – Profils verticaux des corrections linéaires à la vitesse et aux contraintes. Les parties réelles sont en traits pleins, à l'inverse des parties imaginaires, représentées en pointillés. Les paramètres pour l'intégration ont été fixés à  $\eta_0 = 10^{-4}$ ,  $\eta_H = 10$ , le pas d'intégration vaut  $10^{-6}$  et  $\xi$  représente l'écart par rapport au fond :  $\eta - kZ$ . Rappelons que les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont définis par les relations (8.38) et (8.39).

## 8.1. Relation de fermeture turbulente

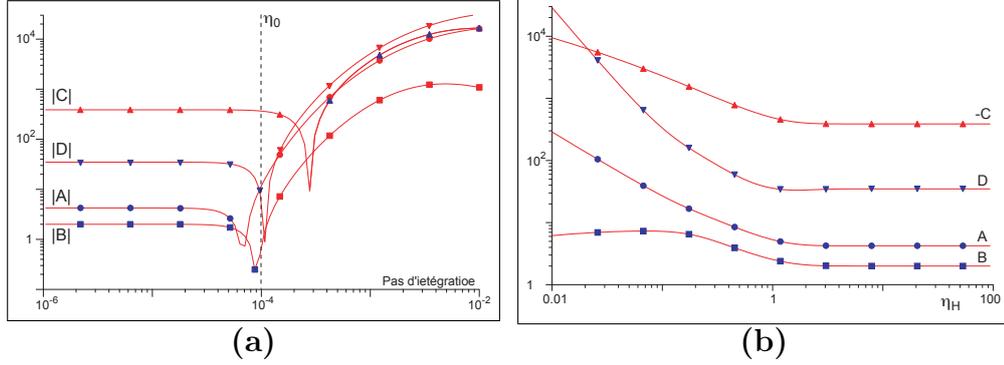


FIG. 8.3 – Évolution de  $|A|$ ,  $|B|$ ,  $|C|$  et  $|D|$  en fonction du pas d'intégration (a) ou de la hauteur du plateau  $\eta_H$  (b). Les symboles colorés de bleu correspondent aux parties où les coefficients sont positifs. Dans les deux cas  $\eta_0 = 10^{-4}$ . Pour (a),  $\eta_H = 10$  et pour (b), le pas d'intégration vaut  $10^{-6}$ .

gradient longitudinal de pression et le gradient vertical de contrainte de cisaillement turbulente. Nous verrons que la taille  $\ell$  de cette couche interne est cruciale quand on doit, par exemple, traiter du transport de sédiments par le fluide. Loin du sol, les profils tendent vers zéro, et on retrouve l'écoulement non-perturbé de la relation (8.11).

Nous reviendrons sur la description précise du profil de  $U$  en commentant notamment la figure 8.5. Toutefois, notons que les plateaux de contraintes permettent de définir sans ambiguïté les valeurs des contraintes de cisaillement et de pression sur le fond. Dans la toute la suite, le cisaillement basal et la pression au fond seront encodés dans quatre coefficients réels notés  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  et définis par :

$$\tau_{xz}(kZ) = \tau_b = -\rho u_*^2 [1 + (A + iB)k\zeta e^{ikx}] , \quad (8.38)$$

$$p(kZ) + \tau_{zz}(kZ) = p_0 + \rho u_*^2 \left[ \frac{1}{3}\chi^2 + (C + iD)k\zeta e^{ikx} \right] , \quad (8.39)$$

$A$  représente la partie du cisaillement basale en phase avec le fond périodiquement ondulé et  $B$ , la partie en quadrature. Rappelons que la croissance ou non d'une perturbation dépend principalement de la position du maximum de cisaillement  $\tau_b$  par rapport à la topographie. Or la tangente de ce déphasage est donné par le rapport  $B/A$ . Nous allons donc plus particulièrement nous intéresser à l'étude quantitative des dépendances des coefficients  $A$  et  $B$  vis-à-vis des paramètres du problème, en particulier la longueur d'onde des motifs  $\lambda$ , la rugosité hydrodynamique  $z_0$  (et, en 8.4, la hauteur d'eau  $H$ ).

## 8.1. Relation de fermeture turbulente

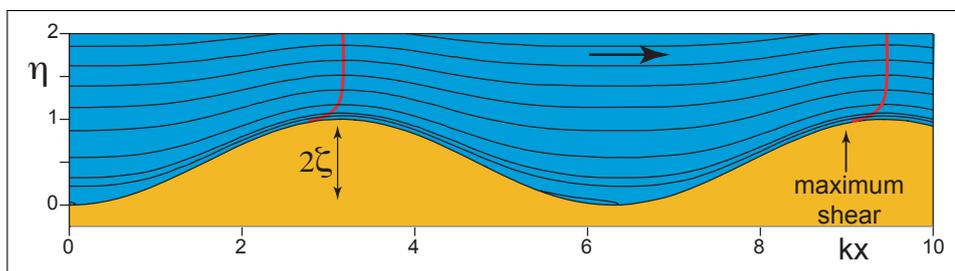


FIG. 8.4 – Lignes de courant d’un écoulement turbulent au-dessus d’un fond ondulé calculées à partir des profils verticaux de la figure 8.2 et de l’équation (8.41) pour  $k\zeta = 0.5$ . La position du maximum de vitesse le long d’une ligne de courant est tracé en rouge.

Pour vérifier si les solutions obtenues par intégration numérique de l’équation (8.30) sont correctes, les variations de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont représentées sur la figure 8.3a en fonction du pas d’intégration et sur la figure 8.3b en fonction de la hauteur à laquelle sont calculées les conditions limites supérieures. Toutes ces variables convergent vers des valeurs asymptotiques qui deviennent indépendantes de la taille du pas d’intégration et de la hauteur de plafond. Ce test a notamment permis de fixer les bonnes valeurs de paramètres : le pas d’intégration vaut  $0.01\eta_0$  et  $\eta_H = 10$ . Tous les résultats présentés en hypothèse d’écoulement infini ont été obtenu en prenant ces précautions particulièrement en compte.

À l’aide des profils verticaux de la figure 8.2, il nous est possible de représenter les lignes de courant de l’écoulement. Pour ce faire, nous introduisons la fonction de courant  $\Psi(x, z)$ , définies par  $\partial\Psi/\partial x = -u_z$  et  $\partial\Psi/\partial z = u_x$ . Par construction, cette fonction vérifie  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\Psi = 0$ , ce qui signifie que  $\Psi$  ne varie pas dans la direction de la vitesse. Les iso- $\psi$  sont donc les lignes de courant de l’écoulement. Une expression explicite de la fonction de courant est :

$$\Psi = \int_{Z(x)}^z u_x dz. \quad (8.40)$$

En utilisant la relation entre  $U$  et  $W'$  de la relation (8.19), il vient :

$$\Psi = \frac{u_*}{k} \left\{ (\eta + \eta_0 - kZ) \mu(\eta - kZ) - \frac{\eta - kZ}{\kappa} + k\zeta e^{ikx} [iW(\eta - kZ) + \mu(\eta - kZ)] \right\}. \quad (8.41)$$

Les lignes de courant sont tracées sur la figure 8.4. Nous remarquons tout d’abord que les lignes de courant sont plus proches les unes des autres au

## 8.1. Relation de fermeture turbulente

---

sommet des bosses que dans les creux : c'est sur les crêtes que le gradient vertical de vitesse est le plus intense. Les perturbations du fond sur l'écoulement se font principalement ressentir sur une distance verticale comparable à la longueur d'onde  $\lambda$  des motifs. Au-delà de cette distance (pour  $z \geq \lambda$ ), l'écoulement est quantitativement bien décrit par la relation (8.11). La position du maximum de vitesse le long d'une ligne de courant a également été ajoutée à la figure 8.4 (la courbe en rouge). Loin du fond, cette position est à la verticale du sommet des bosses. Près du sol, cette position se trouve déplacée en amont de la crête. Cela signifie que la vitesse du fluide est en phase avec le fond périodique loin de celui-ci, ce qui n'est pas le cas dans la couche interne : le cisaillement basal est maximum là où les lignes de courant sont le plus pincées, en amont de la bosse. Enfin, nous constatons l'apparition de bulles de recirculation qui se forment dans les creux du motif. Notons que ces bulles de recirculation sont des effets non-linéaires, dont l'apparition sur la figure 8.4 n'est due qu'à la valeur élevée du rapport d'aspect des motifs. Cette valeur de  $\lambda/\zeta \approx 12$  a été choisie suffisamment grande pour amplifier et observer les principaux effets d'une perturbation sur l'écoulement (le traitement non-linéaire de l'écoulement est repoussé au chapitre 8.3).

Sur la figure 8.5, les profils verticaux des corrections linéaires à la vitesse horizontale ont été représentés de trois manières différentes. Ces profils ont été calculés avec le même pas d'intégration et la même valeur pour  $\eta_0$  que les profils obtenus à la figure 8.2. Seule la valeur de la hauteur à laquelle sont calculées les conditions limites supérieures a été augmentée :  $\eta_H = 26$ . Nous avons vu sur la figure 8.3 que le critère de convergence de l'intégration est basé sur les valeurs basales du cisaillement. Nous avons conclu que la valeur de  $\eta_H$  qui conditionne de bons résultats (i.e. des résultats indépendants de  $\eta_H$ ) pouvait être choisie aussi grande que l'on veut (voir la figure 8.3b). Cependant, l'observation du profil vertical de la figure 8.5a permet de constater que la correction linéaire à la vitesse  $u_x$  tend à diverger pour des altitudes proches de  $\eta_H$ . De plus, le profil du graphe 8.5b montre une décroissance exponentielle de  $U$  pour  $\eta \leq 10$ .

Pour vérifier ces deux observations, nous avons effectué une analyse asymptotique de l'équation différentielle (8.30) à grand  $\eta$ . En utilisant comme fonction test  $\vec{X} \propto e^{-\sigma\eta}$ , l'équation différentielle se simplifie en :

$$\sigma \vec{X} + \mathcal{P} \vec{X} = 0 \quad \text{pour} \quad \eta \gg \eta_0. \quad (8.42)$$

Cette nouvelle équation admet des solutions non triviales quand  $\det(\mathcal{P} + \sigma\mathcal{I}) = 0$ . Pour les grandes valeurs de  $\eta$ , où  $\mu \sim 1/\kappa \ln(\eta/\eta_0)$  et  $\mu' \sim 1/(\kappa\eta)$ , la solution de cette équation aux deux ordres dominants en  $\eta$  est donnée par :

$$2i \kappa (\sigma^4 + 1) \eta + (\sigma^2 - 1) \ln(\eta/\eta_0) = 0. \quad (8.43)$$

## 8.1. Relation de fermeture turbulente

---

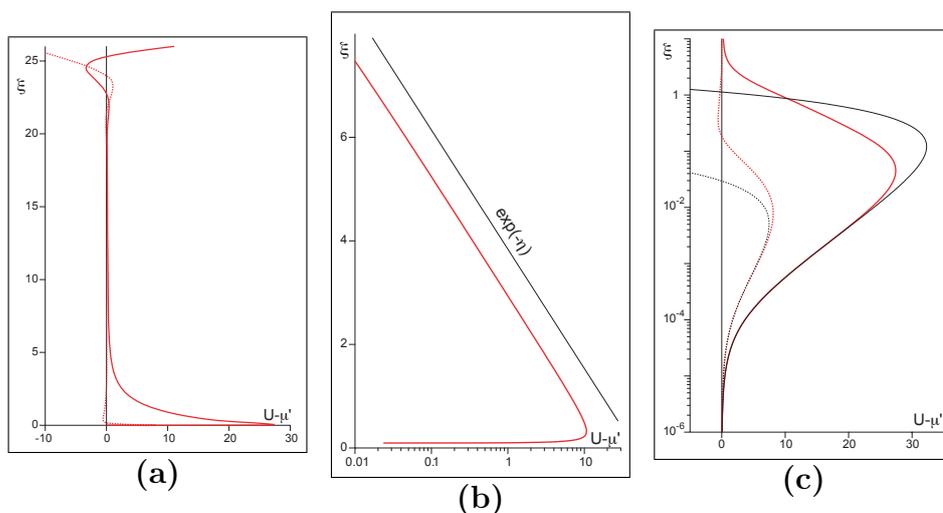


FIG. 8.5 – Profils verticaux (en rouge) de la correction linéaire de la vitesse horizontale  $U(\eta)$  pour  $\eta_0 = 10^{-4}$  et  $\eta_H = 26$ . Le pas d'intégration choisi vaut  $0.01\eta_0$ . Les parties imaginaires sont en pointillés pour les différencier des parties réelles représentées en traits pleins. Les trois graphes diffèrent de par leur représentation : Lin-Lin pour (a), Lin-Log pour (b) et Log-Lin pour (c). Les courbes noires représentées sur les graphes (b) et (c) proviennent de deux analyses asymptotiques différentes de l'équation (8.30) qui aboutissent respectivement aux deux relations (8.44) et (8.45).

## 8.1. Relation de fermeture turbulente

---

L'ordre dominant (en  $\sigma^4 + 1 = 0$ ) conduit inévitablement à une solution oscillatoire divergente ( $\sigma = (1 \pm i)/\sqrt{2}$ ). C'est ce comportement qu'on observe sur le graphe 8.5a, quand  $\eta \geq 20$ . Ce mode oscillant est d'autant plus marqué que la valeur de  $\eta_H$  augmente. Ainsi, pour un choix de  $\eta_H$  trop important, ces comportements divergents perturbent la résolution numérique de l'équation différentielle : dans des cas extrêmes (i.e.  $\eta_H \gg 10$ ), les solutions divergent tellement qu'il n'est plus possible d'ajuster les valeurs de  $a_t$  et  $a_n$  de la relation (8.37) pour annuler  $W$  et  $S_t$  en  $\eta = \eta_H$ . En conclusion,  $\eta_H = 10$  est une bonne valeur<sup>5</sup> pour assurer des résultats indépendants de  $\eta_H$  et éviter les comportements divergents de  $\vec{X}$ .

Pour des valeurs intermédiaires de  $\eta$ , les termes en  $\ln(\eta/\eta_0)$  dominent l'équation (8.43). La solution correspondant à ces termes est alors  $\sigma = 1$ . Ce comportement en  $e^{-\eta}$  est caractéristique d'un écoulement potentiel. La figure 8.5b sur laquelle a été représentée la partie réelle de  $U(\eta)$  en "Lin-Log" pour  $\eta \leq 8$  permet de rendre compte de cette relaxation : la courbe en trait fin noir, également représentée sur la figure, correspondant à une droite d'équation :

$$U \sim e^{-\eta}. \quad (8.44)$$

Cette partie de l'écoulement correspond à la couche externe décrite par [Jackson & Hunt 1975], où les mécanismes antagonistes dominants sont l'inertie du fluide et le gradient de pression. La perturbation étant symétrique, les lignes de courant sont également symétriques et le maximum de vitesse se situe précisément au-dessus de la crête. De plus, les effets de la bosse se font ressentir de moins en moins quand  $\eta$  augmente. Cette analyse corrobore les remarques qualitatives faites sur la figure 8.4.

À contrario, la représentation "Log-Lin" du graphe 8.5c permet de caractériser le comportement de la vitesse près du sol. Pour les plus faibles valeurs de  $\eta$ , l'analyse asymptotique obtenue en prenant  $\vec{X} \propto e^{-\sigma\eta}$  n'est plus valable. Nous avons donc effectué une seconde analyse asymptotique de l'équation (8.30), valable, cette fois, dans la limite  $\eta_0 \ll \eta \ll 1$ , alors que l'analyse asymptotique a été effectuée dans les conditions  $\eta \sim 1$  ou  $\eta \gg 1$ . Le calcul est présenté dans le sous-chapitre 8.2.1. Sans rentrer ici dans les détails, il en ressort que les corrections linéaires à la vitesse près du sol varient principalement comme :

$$U \sim -\frac{1}{\kappa\eta} + \frac{A + iB}{2\kappa} \ln\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right) + i\eta\frac{C + iD}{2\kappa} + \mathcal{O}(\eta \ln^2 \eta). \quad (8.45)$$

---

<sup>5</sup>Remarquons toutefois que le graphe 8.3b a été tracé pour des valeurs de  $\eta_H$  bien plus grande que  $\eta \geq 20$ . Le comportement oscillant observé pour les grandes valeurs de  $\eta_H$  ne perturbe pas la qualité des résultats sur le fond, ce qui explique les belles asymptotes horizontales...

## 8.1. Relation de fermeture turbulente

---

Ces variations sont représentées en trait noir fin sur la figure 8.5c. Cette région proche du fond correspond à la couche interne introduite par [Jackson & Hunt 1975]. Dans cette couche, le gradient horizontal de pression induit par la présence des motifs est équilibré par le gradient vertical des contraintes de cisaillement ( $\partial_x p \sim \partial_z \tau_{xz}$ ). C'est cette région qui est responsable de l'asymétrie gauche-droite de l'écoulement par rapport aux sommets des bosses et du déphasage du maximum de vitesse. La transition entre la couche interne, d'épaisseur  $\ell$ , et la couche externe a lieu quand les gradients verticaux de  $\tau_{xz}$  sont de l'ordre de grandeur des termes inertiels, qui équilibrent les termes de pression dans la couche externe :  $u_x \partial_x u_x \sim \partial_z \tau_{xz}$ . La vitesse  $u_x \simeq u_*/\kappa \ln(z/z_0)$  est évaluée à la transition entre les deux couches interne et externe, en  $z = \ell$ . Les variations horizontales sont de l'ordre de la longueur d'onde :  $\partial_x \sim 1/\lambda$ , les variations verticales vont comme la hauteur de la couche interne :  $\partial_z \sim 1/\ell$  et  $\tau_{xz} \sim u_*^2$ . Ce raisonnement sur les ordres de grandeur, formulé par [Taylor et al. 1987], permet de montrer que l'épaisseur  $\ell$  de la couche interne va comme :

$$\frac{1}{\kappa^2} \frac{\ell}{\lambda} \ln^2 \frac{\ell}{z_0} = \mathcal{O}(1). \quad (8.46)$$

L'analyse de la figure 8.5 permet de décrire l'écoulement par deux couches principales : une couche externe où l'écoulement potentiel suffit à décrire les mouvements du fluide et une couche interne. Cette dernière couche est caractérisée entre autre par un plateau de contraintes (voir la figure 8.2c et d). Cette description est en accord avec les travaux de [Jackson & Hunt 1975]. Dans la zone de raccordement entre ces deux couches, la vitesse est héritée de la couche externe comme condition limite et présente donc un déphasage nul par rapport à la topographie. Par ailleurs, la couche interne correspond à un ralentissement du fluide dû aux contraintes turbulentes. Or, du fait de l'inertie du fluide, la vitesse s'adapte à la contrainte avec du retard. La contrainte basale est donc en avance sur la topographie.

Dans le contexte de formation de motifs sur le fond des rivières, le résultat le plus important de la description hydrodynamique de l'écoulement tient dans la dépendance des contraintes adimensionnées  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  vis-à-vis des différents paramètres du problème. Sur la figure 8.6, les coefficients définis par les deux relations (8.38) et (8.39), sont représentés en fonction de  $\eta_0 = kz_0$ . Leur dépendance globale vis-à-vis de  $\eta_0$  reste assez faible, notamment pour  $A$  et  $B$  qui ne varient que de quelques unités quand les valeurs de  $\eta_0$  balayent 10 décades. Ces résultats sont à comparer aux calculs analytiques exécutés par [Jackson & Hunt 1975] et explicités dans [Kroy et al. 2002]. Ces calculs

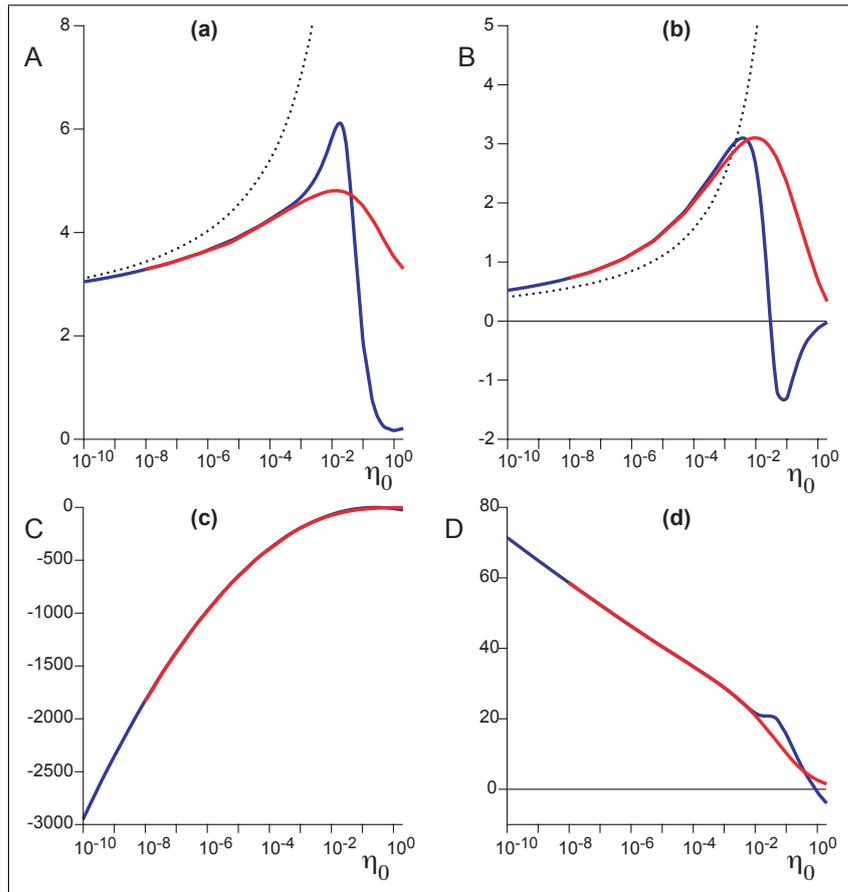


FIG. 8.6 – Évolution des coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  en fonction de  $\eta_0$  sous hypothèse d'écoulement turbulent infini au-dessus d'un fond ondulé. Les lignes pointillées en (a) et (b) correspondent aux résultats analytiques du travail de [Jackson & Hunt 1975].

## 8.1. Relation de fermeture turbulente

---

effectués sous l'hypothèse de faibles valeurs de  $\eta_0$  prédisent des dépendances logarithmiques en  $\eta_0$  pour  $A$  et  $B$  :

$$A = \frac{\ln^2(\Phi^2/\ln\Phi)}{2\ln^3\phi} \left(1 + \ln\phi + 2\ln\frac{\pi}{2} + 4\gamma_E\right) \quad \text{et} \quad B = \pi \frac{\ln^2(\Phi^2/\ln\Phi)}{2\ln^3\phi}, \quad (8.47)$$

avec  $\gamma_E \simeq 0.577$ , la constante d'Euler.  $\phi$  est défini par l'équation  $\phi \ln \phi = 2\kappa^2\Phi$  faisant intervenir  $\Phi = \pi/(2\eta_0)$ . Ces expressions ont été ajoutées sur les graphes 8.6a et b en pointillés. Notons que quand  $\eta_0 \rightarrow 0$ ,  $A$  tend vers 2. Ce résultat correspond à l'approximation où la hauteur  $\ell$  de la couche interne est négligeable. Dans ce cas, la contrainte de cisaillement basale  $\tau_b$  est directement proportionnel au carré de la vitesse de l'écoulement dans la couche externe, où l'écoulement est potentiel. Sans surprises, les prédictions analytiques (8.47) s'accordent bien avec nos résultats pour les plus faibles valeurs de  $\eta_0$ . Cependant, les calculs analytiques divergent quand  $\eta_0$  augmente. Or les valeurs réalistes de  $\eta_0$  (e.g.  $10^{-5} \leq \eta_0 \leq 10^{-1}$ ) se situent précisément dans la gamme où les relations analytiques de [Jackson & Hunt 1975] ne peuvent plus être utilisées. La description détaillée de la réponse d'un écoulement turbulent de hauteur infini à une perturbation sinusoïdale du fond nous sert de référence pour l'étude de la formation de structures en rivières. Nous voulons par exemple exploiter ces résultats pour l'étude des rides, dont les mécanismes de formation sont indépendants de la présence de la surface libre. Dans ce but, nous avons obtenu une expression analytique de  $A$  et de  $B$  valable pour toutes les valeurs de  $\eta_0$  :

$$A = 2 + \frac{a1 + a2R + a3R^2 + a4R^3}{1 + a5R^2 + a6R^4} \quad \text{et} \quad B = \frac{b1 + b2R + b3R^2 + b4R^3}{1 + b5R^2 + b6R^4}, \quad (8.48)$$

avec  $\{a1, a2, a3, a4, a5, a6\} = \{1.0702, 0.093069, 0.10838, 0.024835, 0.041603, 0.0010625\}$ ,  
 $\{b1, b2, b3, b4, b5, b6\} = \{0.036989, 0.15765, 0.11518, 0.0020249, 0.0028725, 0.00053483\}$

et  $R = \ln\left(\frac{2\pi}{\eta_0}\right)$ . Notons finalement, que la différence entre la courbe rouge et la courbe bleue provient de détails techniques d'intégration. Ces détails seront explicités au chapitre 8.2.1.

L'étude des coefficients  $C$  et  $D$  se révèle elle-aussi d'un grand intérêt pour des problèmes où la pression doit être correctement décrite sur le fond. Nous pensons par exemple que ces calculs linéaires pourraient être appliqués avec succès au mouvement d'un écoulement au dessus de plaques élastiques minces, dont la déformation est très sensible à la pression de l'écoulement. C'est le rapport  $D/C$  qui détermine le déphasage entre les contraintes de pression et la topographie. Ce rapport est essentiellement négatif et la valeur de  $D$  reste positive. Tout comme  $\tau_b$ , les contraintes normales sont elles-aussi

en avance sur la topographie, cependant la valeur du déphasage est compris entre  $\pi/2$  et  $\pi$  (alors que le déphasage entre  $\tau_b$  et  $Z$  varie entre 0 et  $\pi/2$ ). De plus, le profil parabolique du coefficient  $C$  peut être obtenu en considérant un écoulement parfait sur toute la hauteur d'eau. Dans la couche externe, l'équation de conservation de Bernouilli nous indique que la pression évolue comme le carré de la vitesse. L'épaisseur de la couche interne, qui permet d'introduire les contraintes  $\tau_{ij}$  et donc les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ , est négligée de sorte que la valeur de la pression sur le sol va comme  $\mu^2$ . La fonction  $C(\eta_0)$  (figure 8.6c) est bien approximée par la forme  $(1/\kappa \ln(\eta_C/\eta_0))^2$ , avec  $\eta_C = 0.25$ . Cependant, l'étude complète des coefficients  $C$  et  $D$  n'est pas une priorité car nous nous intéressons à la destabilisation d'un lit plat cisailé par un écoulement turbulent.

## 8.2 Un modèle minimal mais robuste

Le choix du modèle, même s'il s'accompagne de calculs qui peuvent paraître fastidieux, a été réduit à l'essentiel. Cette simplicité est volontaire et permet une analyse des différents effets du modèle. Toutefois, il peut nous être reproché qu'un tel modèle ne permet pas de prendre en compte l'ensemble de tous les effets responsables d'un déphasage de la contrainte et donc conclure que ce modèle n'est pas adapté à l'étude de la formation de motifs sur le lit des rivières.

Le but de cette partie est de répertorier les améliorations potentielles du modèle et de vérifier que les effets engendrés par l'ajout de nouveaux ingrédients physiques ne changent en rien les conclusions générales obtenues avec le modèle ci-dessus. Ces effets sont testés en utilisant le cadre théorique précédent, à savoir l'écoulement infini d'un fluide incompressible au-dessus d'un fond ondulé. L'introduction de la surface libre est traitée à part au chapitre 8.4.

Rappelons que la méthode détaillée ci-dessus fait le choix d'une longueur de mélange en  $L = z - Z + z_0$ . En supposant que le mélange vertical de quantité de mouvement se fait au moins sur une longueur  $z_0$  depuis le fond  $Z$ , nous résolvons le système d'équations différentielles (8.30) régissant le mouvement du fluide, en partant de  $\eta = 0$  pour atteindre  $\eta = kH \rightarrow \infty$ . Le pas d'intégration est choisi de manière à résoudre l'écoulement dans la couche proche du fond d'épaisseur  $z_0$ . Le paragraphe ci-dessous revient en détail sur l'existence et la prise en compte d'une couche de surface.

### La couche de surface

Nous n'avons pour l'instant pas détaillé la cause de l'échelle de rugosité  $z_0$ . Pour le moment,  $z_0$  est défini par l'extrapolation à 0 du profil de vitesse logarithmique obtenu dans la couche interne. Il convient maintenant d'introduire une nouvelle échelle de longueur : l'épaisseur de la couche de surface  $h_0$ . Utilisée notamment par [Jackson & Hunt 1975], la couche de surface est une couche près du sol qui contient la physique proche du sol. Ainsi, la valeur de la rugosité hydrodynamique peut être limitée soit par la taille de la couche visqueuse  $\nu/u_*$  dans le cas d'un écoulement sur fond lisse, soit par la rugosité géométrique  $\sqrt{Z^2}$  dans le cas d'un écoulement sur fond rugueux ou par la taille de la couche de transport.

Dans le modèle décrit précédemment, nous n'avons pas eu à préciser le processus physique contrôlant la valeur de  $z_0$ , car nous avons supposé que la description hydrodynamique (et le profil logarithmique de vitesse) restait valable à l'intérieur de la couche de surface. Nous présentons deux méthodes alternatives à cette dernière. La première consiste à commencer l'intégration des équations du mouvement à l'intérieur de la couche interne, c'est-à-dire loin de la couche de surface. La seule grandeur héritée de la présence d'une couche de surface près du sol est la rugosité hydrodynamique  $z_0$ . Dans la seconde modélisation, la résolution des équations différentielles obtenues en 8.1.3 débute en  $\eta = kh_0$ , c'est à dire précisément à l'interface entre la couche de surface et la couche interne. La valeur de  $h_0$  et celle de  $z_0$  dépendent alors explicitement du processus physique qui domine la couche de surface.

#### 8.2.1 Analyse asymptotique

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans la limite où l'épaisseur de la couche de surface  $h_0$  est très petite devant celle de la couche interne  $\ell$ . Quand  $h_0 \ll \ell$ , l'écoulement dans la couche interne est indépendant de la nature des mécanismes qui dominent la physique dans la couche de surface. Nous avons effectué une analyse asymptotique de l'équation linéaire dans la limite  $\eta \rightarrow 0$  tout en utilisant l'hypothèse  $\eta_\ell \gg \eta_0$ . Nous avons identifié les 4 modes dominants de la solution générale  $\vec{X}$  des équations du mouvement (8.30), sous les hypothèses précédentes :

$$\vec{X} \underset{\eta \rightarrow 0}{\sim} a_1 \begin{pmatrix} \mu^2/4 \\ 1 \\ \mu \\ -\eta^2 \mu^3/4 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} \mu/2 \\ -i \eta \mu/2 \\ 1 \\ i \eta \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \eta \\ i \eta \mu(\eta) \\ -\eta^2 \mu(\eta) \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} i\eta/(2\kappa) \\ \eta^2/(4\kappa) \\ i \eta \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{X}_s, \quad (8.49)$$

## 8.2. Un modèle minimal mais robuste

---

avec

$$\mu(\eta) \sim \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\eta}{\eta_0} \quad \text{et} \quad \mu'(\eta) \sim \frac{1}{\kappa\eta}.$$

$\vec{X}_s$  représente la solution particulière de l'équation (8.34). Sous ces hypothèses, les comportements dominants de  $\vec{X}$  s'écrivent en puissance de  $\eta$  et  $\ln \frac{\eta}{\eta_0}$ . Rappelons que cette description est valable uniquement dans la couche interne, lorsque l'épaisseur de la couche de surface est négligeable devant  $\ell$ . Le fait que les premiers termes négligés soient d'ordre  $\mathcal{O}(\eta \ln^2 \frac{\eta}{\eta_0})$  est donc parfaitement cohérent avec l'ordre de grandeur de l'épaisseur  $\ell$  de la couche interne donnée par la relation (8.46).

La formulation asymptotique est basée sur la connaissance de ces comportements dominants lorsque  $\eta \ll 1$ . Dans la résolution numérique, la condition limite n'est plus fixée au sol, mais à une hauteur  $\eta_{\text{init}}$  ajustable par un raccordement asymptotique. Le premier mode correspond à une modulation de la vitesse verticale  $u_z$ . Notons également que ce mode entraîne une divergence de la vitesse  $u_x$ . Le second correspond à la modulation de l'écoulement par la contrainte de cisaillement basal. Le vecteur  $(1, -i\eta, i\eta\mu(\eta), -\eta^2\mu(\eta))$  est un terme sous-dominant par rapport au mode précédent et correspond à la modulation de la rugosité hydrodynamique. Enfin, le dernier de ces modes correspond à la correction de l'écoulement par les termes de pression. Les valeurs des quatre préfacteurs  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  sont sélectionnées par un raccordement asymptotique avec la couche de surface. Comme nous ne considérons ni le cas d'un écoulement perturbé par une vitesse verticale sur le fond ou une modulation de rugosité, les deux coefficients  $a_1$  et  $a_3$  sont fixés à 0. À l'inverse, nous souhaitons décrire une situation où l'effet des contraintes sur le fond induit une perturbation de l'écoulement, c'est pourquoi les deux coefficients  $a_2$  et  $a_4$  doivent être non nuls. De plus,  $a_2 = S_t(\eta \rightarrow 0)$  et  $a_4 = S_n(\eta \rightarrow 0)$ .

Le principal avantage de cette méthode réside dans le fait qu'il n'est nullement nécessaire de résoudre précisément l'écoulement dans la couche de surface (i.e. pour  $\eta \leq kh_0$ ), dans laquelle il est bien souvent difficile d'appliquer une description physique adéquate. Dans la limite  $\eta_0 \rightarrow 0$ , l'intégration peut commencer à une valeur initiale  $\eta_{\text{init}}$  bien plus grande que  $\eta_0$ , puisque la solution de l'équation (8.49) reste valable tant que  $\eta < k\ell$ . Cette technique permet alors de diminuer considérablement le temps de calcul de l'algorithme de Runge Kutta.

Sur la figure 8.6, la première méthode a été utilisée pour obtenir les valeurs des coefficients pour les plus faibles valeurs de  $\lambda/z_0$  (courbes rouges). À l'inverse, la méthode décrite dans cette partie a été utilisée pour les plus grandes valeurs du paramètre  $\lambda/z_0$  (courbes bleues). Dans la région où les résultats obtenus par les deux méthodes sont indiscernables ( $\eta_0 \leq 10^{-3}$ ), le processus

## 8.2. Un modèle minimal mais robuste

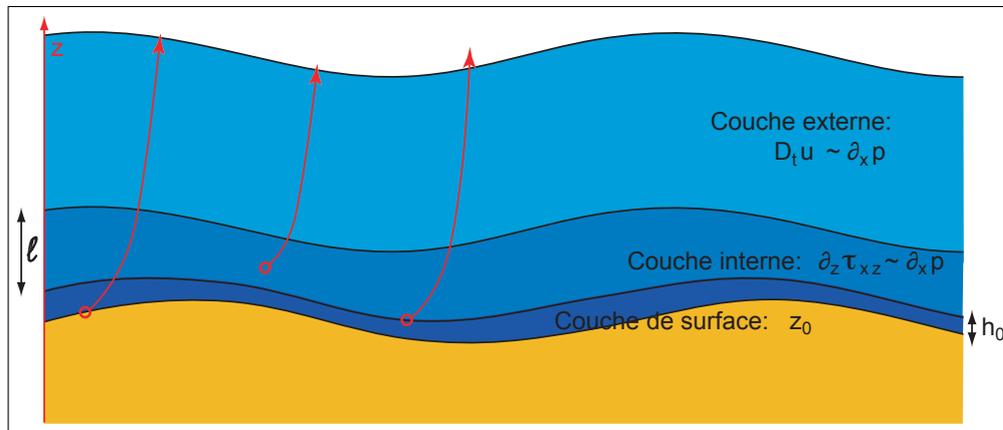


FIG. 8.7 – Schéma de l'écoulement turbulent composé de trois couches successives : près du fond  $Z$  une couche de surface d'épaisseur  $h_0$ , surmontée par une couche interne d'épaisseur  $\ell$  dans laquelle se crée l'asymétrie de l'écoulement et une couche externe qui correspond à un écoulement potentiel. Sont également schématisées les trois façons d'intégrer les équations (8.30) ainsi que les différents choix de conditions limites associées.

physique qui contrôle la valeur de  $z_0$  peut être ignoré. À l'inverse, pour les grandes valeurs de la rugosité hydrodynamique, le choix du modèle conduit à des résultats très différents. Dans cette région ( $\eta_0 \geq 10^{-3}$ ), le modèle, qui fait l'hypothèse que la hauteur de la couche de surface est négligeable devant l'épaisseur de la couche interne (i.e. le modèle présenté présentement), n'est pas adapté à la description précise de tout l'écoulement.

### 8.2.2 Robustesse vis-à-vis des mécanismes de la couche de surface

Tant que l'on se place dans la limite où  $h_0 \ll \ell$ , l'écoulement dans les couches interne et externe est indépendant de la physique à l'œuvre dans la couche de surface : seule importe la valeur de la rugosité hydrodynamique  $z_0$ . Cette quantité est contrôlée par les mécanismes mélangeant la quantité de mouvement très près de la surface. Toutefois, lorsque l'épaisseur de la couche de surface devient comparable à la taille de la couche interne, on s'attend à ce que l'ensemble de l'écoulement soit influencé par ces mécanismes. L'objectif de ce paragraphe est donc de résoudre le problème de la réponse de l'écoulement turbulent au-dessus d'une perturbation du fond, en prenant en compte la physique associée à la couche de surface. Nous traiterons deux exemples :

## 8.2. Un modèle minimal mais robuste

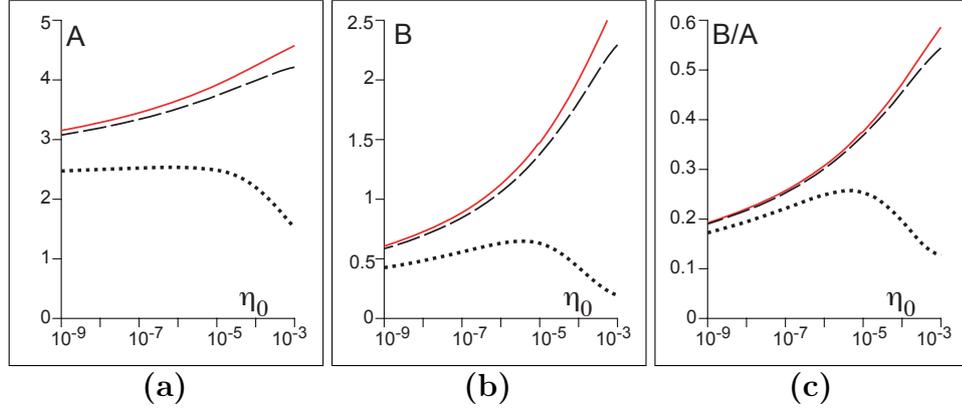


FIG. 8.8 – Variations des coefficients  $A$ ,  $B$  et  $B/A$  en fonction de  $\eta_0$  dans le cas d'une couche de surface visqueuse pour deux valeurs du nombre de Reynolds de transition :  $\mathcal{R}e_t = 125$  est représenté en pointillés et  $\mathcal{R}e_t = 1$  correspond à la courbe en tiret. La courbe en traits pleins correspond au cas de référence de la figure 8.6.

(i) le cas d'un fond hydrodynamiquement lisse, où le mélange de quantité de mouvement dans la couche de surface est dominé par la diffusion visqueuse et (ii) le cas d'une couche de transport limitée par la quantité de mouvement. Du point de vue technique, nous allons essentiellement changer les conditions limites de manière à évaluer la vitesse au raccord entre la couche surface et la couche interne, i.e. en  $z = h_0 + Z$ . Les trois façon d'intégrer les équations (8.30) sont schématisées sur la figure 8.7 qui représente également les trois couches de l'écoulement que nous avons pu distinguer.

Dans le cas où une couche limite visqueuse se développe sur le fond, on peut supposer que celle-ci est à l'équilibre. Le profil de vitesse s'écrit alors simplement en fonction de la contrainte locale  $-\rho u_*^2$  :

$$u(z) = \frac{u_*^2 z}{\nu}, \quad (8.50)$$

sur toute l'épaisseur  $h_0$  de la couche de surface. La transition entre les régimes visqueux et turbulent est caractérisée par un nombre de Reynolds seuil  $\mathcal{R}e_t \approx 125$ . On peut donc exprimer la relation entre  $h_0$ , distance au sol à laquelle cette transition se produit, et  $\mathcal{R}e_t$  :

$$\frac{u(h_0) h_0}{\nu} = \mathcal{R}e_t. \quad (8.51)$$

En écrivant la continuité de la vitesse en  $z = h_0$ , on obtient l'expression de la rugosité hydrodynamique  $z_0$  vue de la couche interne, dans le cas d'un

## 8.2. Un modèle minimal mais robuste

---

écoulement homogène :

$$z_0 = \frac{\nu}{u_*} \sqrt{\mathcal{R}e_t} e^{-\kappa \sqrt{\mathcal{R}e_t}}. \quad (8.52)$$

Les résultats obtenus par cette modélisation de la couche de surface sont représentés sur la figure 8.8 par l'intermédiaire des variations des coefficients  $A$ ,  $B$  et du rapport  $B/A$  en fonction de  $\eta_0$ . Les résultats sont comparés au cas de référence de la figure 8.6. Ces coefficients sont plus faibles quand  $\mathcal{R}e_t$  augmente et les différentes courbes se confondent quand  $\eta_0 \rightarrow 0$ . Le mélange de quantité de mouvement dû aux forces visqueuses est moins efficace que celui induit par les fluctuations turbulentes. De plus, dans une description purement visqueuse (i.e.  $\mathcal{R}e \ll 1$ ), l'écoulement est en phase avec la topographie, ce qui explique la baisse du rapport  $B/A$  par la prise en compte d'une couche visqueuse sur la figure 8.6c. Nous verrons dans la suite que ceci explique que la longueur d'onde à laquelle les rides se forment augmente quand le nombre de Reynolds diminue.

[Abrams & Hanratty 1985] ont réalisé des expériences d'écoulement au-dessus d'un fond lisse, en mesurant la mobilité ionique entre deux électrodes. Il est fait l'hypothèse que ce courant est relié directement à la contrainte de cisaillement basale, sans retard ni temporel, ni spatial. L'avance de phase mesurée entre le signal et la topographie peut atteindre des valeurs aussi élevées que  $80^\circ$ . Avec le modèle présenté ci-dessus, aucun retard de phase plus important que  $40^\circ$  n'a pu être mis en évidence, ce qui est loin de la valeur mesurée. Cette valeur anormale du déphasage a été interprétée par [Abrams & Hanratty 1985] comme la signature d'un retard à la transition laminaire-turbulent : lorsque le nombre de Reynolds atteint sa valeur transitionnelle ( $\mathcal{R}e = \mathcal{R}e_t$ ), la transition a lieu, mais avec un retard spatial. Une autre possibilité serait l'existence d'un problème expérimental lié au déphasage entre la mesure de mobilité ionique et le cisaillement.

La description d'une couche de transport limitée par la quantité de mouvement disponible s'inspire de la situation éolienne. Chaque fois qu'un grain est accéléré par l'écoulement, celui-ci, en retour, est freiné. L'équilibre s'établit lorsque la vitesse dans la couche de transport a décru jusqu'à sa valeur seuil. [Bagnold 1941] a observé que le profil de vitesse dans la couche de transport et l'épaisseur  $h_0$  de celle-ci sont indépendants de  $u_*$ . Au dessus de la couche de transport, il reste peu de particules transportées et leur effet sur l'écoulement est négligeable : on retrouve alors la situation hydrodynamique de base. Pour traduire la présence de cette couche de surface, nous écrivons

## 8.2. Un modèle minimal mais robuste

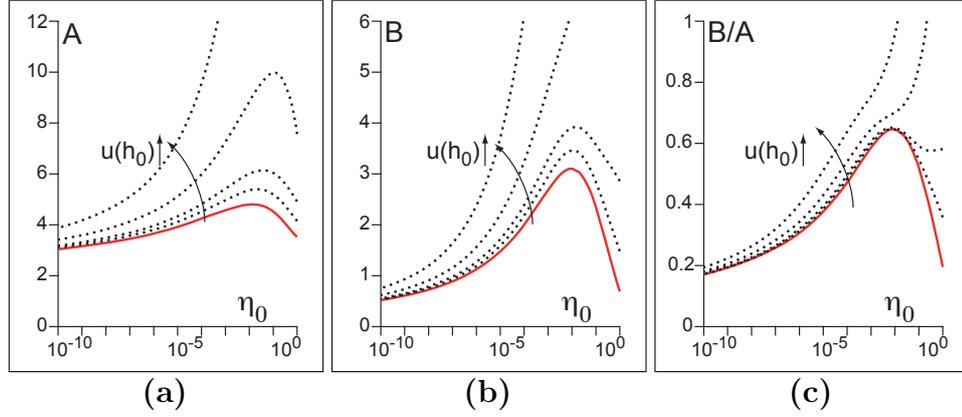


FIG. 8.9 – Variations des coefficients  $A$ ,  $B$  et  $B/A$  en fonction de  $\eta_0$  dans le cas d'une couche de transport pour différentes valeurs du paramètre  $u(h_0)/u_*$  : (1, 2, 5 et 10). La courbe en traits pleins correspond, de nouveau, au cas de référence de la figure 8.6.

que la vitesse de l'écoulement garde toujours la même valeur  $u(h_0)$  en  $h_0$  :

$$\frac{u(h_0)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( 1 + \frac{h_0}{z_0} \right). \quad (8.53)$$

De ce fait, les profils de vitesse obtenus pour différents  $u_*$  convergent en un même "point de focalisation" (focus point). La rugosité hydrodynamique dépend de ces deux caractéristiques :

$$z_0 = h_0 e^{-\kappa u(h_0)/u_*}. \quad (8.54)$$

Dans le cas d'un sol ondulé, nous supposons que ces points de focalisation forment une ligne de courant. À l'ordre linéaire, cette condition se traduit par :

$$U(kh_0) = -\mu'(kh_0) \quad \text{et} \quad W(kh_0) = i u(h_0)/u_* = i \mu(kh_0). \quad (8.55)$$

Dans le cas d'une couche de surface visqueuse, il y a un seul paramètre : le nombre de Reynolds transitionnel  $\mathcal{R}e_t$ . La donnée de  $z_0$  est suffisante pour caractériser la couche de surface. Ce n'est plus le cas pour une description incluant la couche de transport : l'épaisseur et la vitesse de cette couche de transport sont deux paramètres du problème. Il est alors possible de les faire varier indépendamment. Sur la figure 8.9, nous avons de nouveau comparé les variations des deux coefficients  $A(\eta_0)$  et  $B(\eta_0)$ , obtenues à l'aide de cette description de la couche de transport, au cas de référence de la figure 8.6. En

faisant varier la valeur de  $u(h_0)/u_*$ , nous constatons que les valeurs de ces coefficients augmentent quand la vitesse au point de focalisation augmente. Comme attendu, le modèle devient indépendant de la description de la couche de surface quand  $\eta_0 \rightarrow 0$  : cette limite correspond à une épaisseur de la couche interne très grande devant la couche de surface ( $h_0 \ll \ell$ ).

En guise de conclusion, notons que les modèles de couche de surface discutés ci-dessus diffèrent fondamentalement de l'approche développée récemment par [Colombini 2004]. Dans cet article, les conditions limites sont imposées sur le fond (condition de non-glissement en  $z = Z$ ), alors que la contrainte est évaluée au-dessus de la couche de transport, à l'altitude  $z = Z + h_0$ . Ce choix n'est pas auto-cohérent puisque (i) le calcul hydrodynamique est fait sans prendre en compte la couche de transport, ce qui suppose que la rétroaction du transport sur l'écoulement est négligeable et (ii) le flux de sédiments est supposé être une fonction de la contrainte au dessus de la couche de transport (et non du profil de vitesse dans cette couche), comme si les grains freinaient le fluide. Cette hypothèse permet d'introduire un déphasage arbitraire dans la mesure où le choix d'une hauteur  $h_0$  suffisamment importante conduit à estimer la contrainte de cisaillement à la transition entre couche interne et externe, où elle varie très vite.

### 8.2.3 Robustesse vis-à-vis de la fermeture turbulente

Le choix d'une fermeture turbulente du premier ordre fait l'hypothèse qu'il n'y a aucun retard entre l'énergie turbulente et le tenseur des contraintes. Pour prendre en compte les échanges d'énergie entre le mouvement moyen et le mouvement fluctuant, nous devons écrire les équations dynamiques du tenseur de Reynolds :

$$D_t \tau_{ij} = \partial_t \tau_{ij} + u_k \partial_k \tau_{ij} = -\tau_{ij} \partial_k u_j - \tau_{jk} \partial_k u_i + \pi_{ij} - \epsilon_{ijk} + \partial_k \phi_{ijk}. \quad (8.56)$$

Les deux termes  $-\tau_{ij} \partial_k u_j - \tau_{jk} \partial_k u_i$  sont des termes de production.  $\epsilon_{ijk} = \nu (\overline{\dot{\gamma}_{ik} \partial_k u'_j} + \overline{\dot{\gamma}_{jk} \partial_k u'_i})$  représente un terme de destruction dû à la viscosité du fluide.  $\pi_{ij} = \overline{p' \dot{\gamma}'_{ij}}$  est un terme de redistribution responsable de l'isotropisation des fluctuations. Enfin, c'est dans le dernier terme que les transports par diffusion dus à la turbulence, à la viscosité et à la pression sont pris en compte. Ce terme est nul si l'écoulement est homogène ( $\partial_k \equiv 0$ ). Toutefois, dans ce terme est inclus le flux d'énergie turbulente :  $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ . De nouveau, il faut introduire une nouvelle relation pour décrire l'évolution de ce moment d'ordre trois. Si on réitère le procédé ayant conduit aux équations du tenseur de Reynolds à un ordre supérieur, nous obtiendrions (avec de plus en plus de peine) une relation reliant la dérivée particulière du moment d'ordre trois

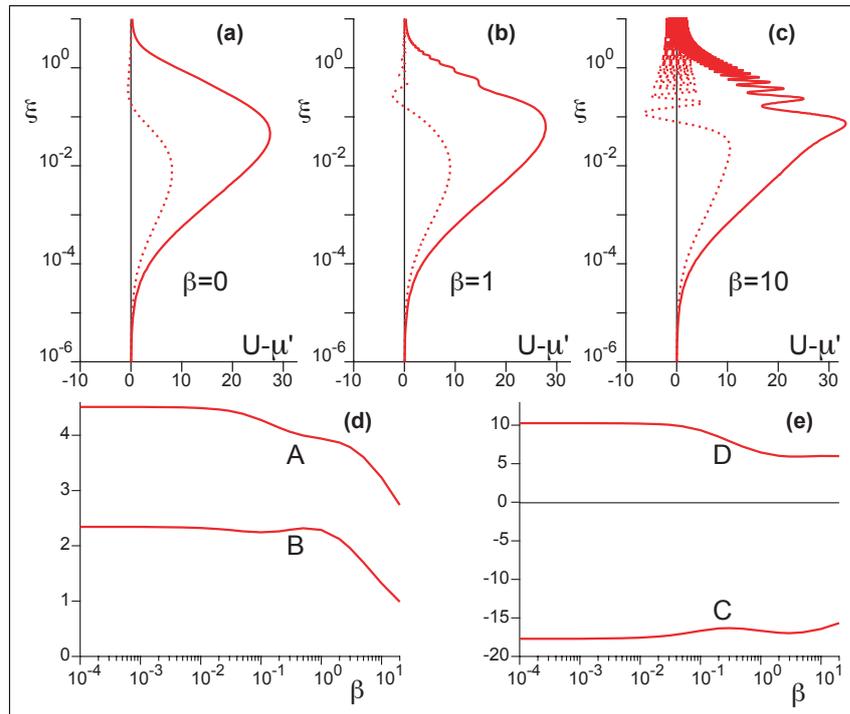


FIG. 8.10 – Effets du paramètre  $\beta$  sur les profils verticaux :  $U(\eta)$  est représenté pour (a)  $\beta = 0$ , (b)  $\beta = 1$  et (c)  $\beta = 10$ . Les variations des coefficients  $A$ ,  $B$  (graphe (d)),  $C$  et  $D$  (graphe (e)) sont représentées en fonction de  $\beta$ .  $\eta_0 = 10^{-4}$  et  $\eta_H = 10$ .

## 8.2. Un modèle minimal mais robuste

---

$D_t \overline{u'_i u'_j u'_k}$  au moment d'ordre quatre des fluctuations de la vitesse :  $\overline{u'_i u'_j u'_k u'_l}$  et ainsi de suite... C'est le paradoxe de la fermeture turbulente qui ne se ferme jamais !

Nous proposons ici de nous limiter à une fermeture turbulente du second ordre qui permet de prendre en compte un déphasage entre les contraintes et les déformations :

$$D_t \tau_{ik} = \partial_t \tau_{ik} + u_j \partial_j \tau_{ik} = \frac{|\dot{\gamma}|}{\beta} \left[ \rho \kappa^2 L^2 \left( \delta_{ij} \frac{1}{3} \chi^2 |\dot{\gamma}|^2 - |\dot{\gamma}| \dot{\gamma}_{ij} \right) - \tau_{ij} \right]. \quad (8.57)$$

Cette fermeture est construite en écrivant que l'évolution dynamique du tenseur des contraintes relaxe vers son état d'équilibre donné par la relation (8.7). Le temps caractéristique de retour à l'équilibre de  $\tau$  dépend du tenseur des déformations. C'est le paramètre  $\beta$  qui encode ce temps d'adaptation des contraintes turbulentes. Dans la partie précédente, la valeur de  $\beta$  était prise égale à zéro. Nous supposons que l'ordre de grandeur typique de ce paramètre est proche de l'unité :  $\beta \sim 1$ .

Dans le cadre d'un écoulement stationnaire turbulent 2D, la linéarisation de la relation (8.57) décrivant l'évolution de la contrainte de cisaillement  $\tau_{xz}$  constitue la quatrième équation linéaire donnant  $U'$  en fonction de  $W$ ,  $S_t$  et  $\mu$  :

$$(\mu' + i\beta\mu)S_t = 2(U' + iW) - 2\kappa^2(\eta + \eta_0)\mu'^3. \quad (8.58)$$

Comme précédemment, cette équation permet de boucler le système. Notons que la différence de la linéarisation des équations sur  $\tau_{xx}$  et  $\tau_{zz}$  permet d'obtenir une relation entre  $S_{xx}$  et  $S_{zz}$  :

$$S_{xx} - S_{zz} = \frac{-4iU}{\mu' + i\beta\mu}. \quad (8.59)$$

Cette relation permet à nouveau d'éliminer ces deux fonctions de l'équation (8.20). Il reste alors à résoudre un système d'équations différentielles présenté sous une forme compacte à la relation (8.30) en changeant  $\mathcal{P}$  en  $\mathcal{P}_\beta$ .

$$\mathcal{P}_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0.5(\mu' + i\beta\mu) & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ \left(i\mu + \frac{4}{\mu' + i\beta\mu}\right) & \mu' & 0 & i \\ 0 & -\mu i & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.60)$$

Le cadre théorique utilisé dans la partie précédente est bien retrouvé en prenant  $\beta = 0$ .

## 8.2. Un modèle minimal mais robuste

---

Les méthodes d'intégration de l'équation différentielle et ses conditions limites restent inchangées. Les résultats prenant en compte les effets de la nouvelle fermeture turbulente sont représentés sur la figure 8.10. L'introduction d'effets inertiels présents dans la relation de relaxation génère des oscillations sur les profils verticaux pour des valeurs non nulles du paramètre  $\beta$ . Ces oscillations sont représentées sur les graphes 8.10a-c en prenant comme exemple la correction linéaire de la vitesse horizontale. Le profil de référence (graphe 8.10a) a été obtenu avec les paramètres utilisés à la figure 8.2 :  $\eta_0 = 10^{-4}$  et  $\eta_H = 10$ . Pour les deux graphes suivants, seule change la valeur de  $\beta$ . L'amplitude et la fréquence des oscillations augmentent avec  $\beta$ . Les valeurs des coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  varient peu quand  $\beta$  augmente (voir les figures 8.10d et e). Par exemple, même si les valeurs de  $A$  et  $B$  diminuent quand  $\beta$  augmente, une valeur exagérément importante ne permet pas encore de modifier significativement le déphasage entre le sol et la contrainte de cisaillement basale (la valeur  $\beta = 10$  n'entraîne qu'une variation de 20% du rapport  $B/A$ ).

En conclusion, ces oscillations ne perturbent presque pas les caractéristiques des profils de contrainte près du sol. Vis-à-vis du problème de la formation de motifs, le paramètre  $\beta$  a donc un effet négligeable. Dans toute la suite de l'étude, le modèle hydrodynamique sera fermé par une fermeture turbulente simple (celle de la partie précédente), i.e. nous garderons  $\beta = 0$ .

### 8.2.4 Et pourquoi pas un modèle anisotrope

Expérimentalement, on observe qu'au sein d'un écoulement turbulent sur un fond rugueux, le tenseur de Reynolds n'est pas isotrope. Contrairement à ce qui avait été postulé dans la partie précédente, la valeur du module de  $\tau_{xx}$  est significativement plus importante que celles des autres composantes [Raupach & al. 1991, Shafi & Antonia 1995]. Il est facile de prendre en compte une telle anisotropie dans la fermeture turbulente qui définit les composantes du tenseur de Reynolds :

$$\tau_{ij} = \rho \kappa^2 L^2 |\dot{\gamma}| \left( \frac{1}{3} \chi_i^2 |\dot{\gamma}| \delta_{ij} - \dot{\gamma}_{ij} \right), \quad (8.61)$$

en assignant des valeurs différentes à  $\chi_x$  et  $\chi_z$ . Le rapport  $\chi_x^2/\chi_z^2$  peut être estimée d'après la littérature autour de 1.3–1.5. La modification de la définition de  $\tau$  entraîne également la modification de la définition des fonctions

## 8.2. Un modèle minimal mais robuste

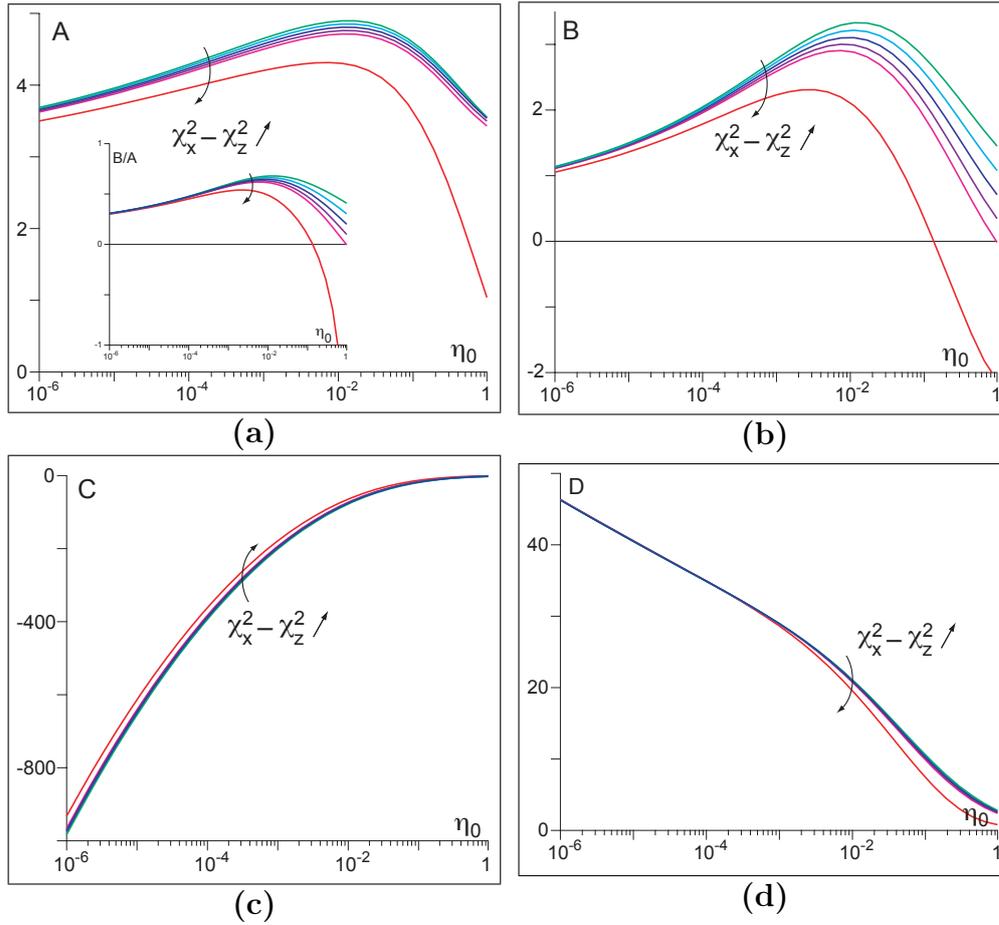


FIG. 8.11 – Effets du paramètre  $\chi_x^2 - \chi_z^2$  sur les variations des coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  représentées en fonction de  $\eta_0$  avec  $\eta_H = 10$  pour 6 valeurs de  $\chi_x^2 - \chi_z^2 = -2; -1; 0; 1; 2; 10$ .

## 8.2. Un modèle minimal mais robuste

---

$S_{xx}$  et  $S_{zz}$ . Les relations (8.17) et (8.18) sont maintenant remplacées par :

$$\tau_{xx} = \rho u_*^2 \left[ \frac{1}{3} \chi_x^2 + k \zeta e^{ikx} S_{xx} \right], \quad (8.62)$$

$$\tau_{zz} = \rho u_*^2 \left[ \frac{1}{3} \chi_z^2 + k \zeta e^{ikx} S_{zz} \right]. \quad (8.63)$$

En linéarisant ces équations puis en faisant la différence, il vient :

$$S_{xx} - S_{zz} = \frac{-4iU}{\mu'} + \frac{2}{3} \frac{\chi_x^2 - \chi_z^2}{\mu'} (U' + iW - \kappa \mu'^2). \quad (8.64)$$

Ce changement n'affecte que la relation sur  $S'_t$ . Ce test est implémenté sans changer les conditions limites et la méthode d'intégration. Seul le détail du système d'équations différentielles doit être modifié. Ce système est présenté sous forme compacte par la relation (8.30) où  $\mathcal{P}$  est remplacée par  $\mathcal{P}_\chi$ . L'inspection de la nouvelle matrice,

$$\mathcal{P}_\chi = \begin{pmatrix} 0 & -i & \frac{1}{2}\mu' & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ \left(i\mu + \frac{4}{\mu'}\right) & \mu' & \frac{i}{3}(\chi_x^2 - \chi_z^2) & i \\ 0 & -\mu i & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.65)$$

montre que le paramètre pertinent pour caractériser l'anisotropie est  $\chi_x^2 - \chi_z^2$ , dont les valeurs typiques sont proches de l'unité. Notons qu'en prenant  $\chi_x^2 = \chi_z^2$ , la matrice  $\mathcal{P}$  ainsi que la relation (8.29) sont immédiatement réobtenues.

Même si des valeurs négatives de ce paramètre ne sont physiquement pas pertinentes, nous avons fait varier la valeur du paramètre  $\chi_x^2 - \chi_z^2$  de  $-2$  à  $10$ . A part un léger changement des valeurs près du sol, l'anisotropie ne modifie pas la forme des profils verticaux de la figure 8.2. La figure 8.11 représente les variations des coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  en fonction de  $\eta_0$  pour ces différentes valeurs du paramètre  $\chi_x^2 - \chi_z^2 \neq 0$ . Ces coefficients varient peu en fonction de l'anisotropie. C'est particulièrement vrai pour le rapport  $B/A$  tant que  $\eta_0 < 10^{-2}$ .

Nous en concluons que, dans le cadre de l'étude de la formation des rides et dunes, l'anisotropie des contraintes normales n'a qu'un effet négligeable. Dans la suite, nous garderons :  $\chi_x^2 = \chi_z^2$ .

### 8.2.5 Évolution temporelle du fond

Dans le cadre de cette thèse, l'hydrodynamique au-dessus d'un fond périodique est analysée dans le but d'étudier la formation de rides et de dunes

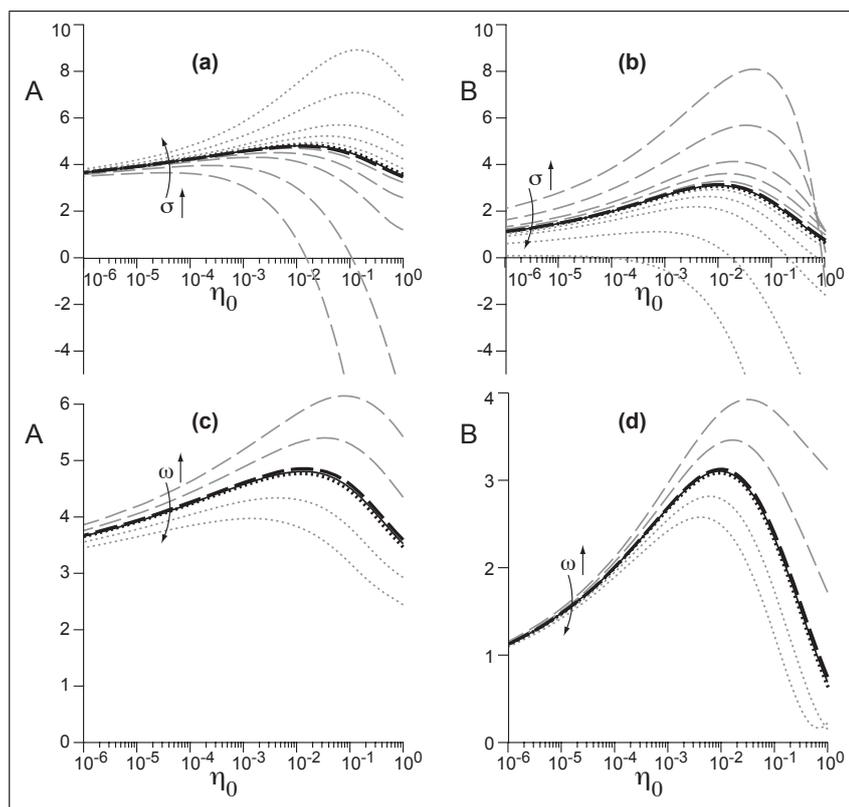


FIG. 8.12 – Effets de  $\sigma$  et  $\omega$  sur les variations des deux coefficients  $A$  et  $B$  en fonction de  $\eta_0$ . Les courbes en traits pleins représentent le cas de référence ( $\sigma = 0$  et  $\omega = 0$ ). Les courbes en pointillées représentent des valeurs positives des paramètres alors que les tirets codent pour des valeurs négatives de  $\sigma$  et  $\omega$ . En (a) et (b),  $\sigma/(ku_*)$  a exploré les valeurs successives :  $-10, -5, -2, -1, -0.5, -0.1, 0, 0.1, 0.5, 1, 2, 5$  et  $10$ . En (c) et (d), les différentes courbes correspondent aux valeurs de  $\omega/(ku_*)$  suivantes :  $-2, -1, -0.1, 0, 0.1, 1$  et  $2$ .

## 8.2. Un modèle minimal mais robuste

---

sur le fond d'une rivière. Or, ces motifs ne sont pas immobiles : ils peuvent croître, mais aussi se propager le long du lit. Il est donc nécessaire de vérifier à quel point nos conclusions concernant l'étude de l'écoulement turbulent au-dessus d'un fond fixe peuvent être transposées au cas d'un fond mobile (cf. [Colombini & Stocchino 2005]). Pour prendre en compte cette évolution du fond, nous gardons le même formalisme général et nous continuons à linéariser les équations du mouvement. Le fond est décrit par :

$$Z(x, t) = \zeta e^{\sigma t} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (8.66)$$

$\sigma$  représente le taux de croissance du profil  $Z$  et  $\omega/k$  sa vitesse de propagation. Dans le cas où  $\omega = 0$  et  $\sigma > 0$ , par exemple, le fond croît indéfiniment sans se propager. À l'inverse, si le taux de croissance est nul et que  $\omega > 0$ , le profil se translate dans le sens des  $x$  croissants.

Les fonctions  $U$ ,  $W$ ,  $S_t$  et  $S_n$  sont alors définies par :

$$\begin{aligned} u_x &= u_* [\mu + k\zeta e^{\sigma t} e^{i(kx - \omega t)} U], \\ u_z &= u_* k\zeta e^{\sigma t} e^{i(kx - \omega t)} W, \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= -\rho u_*^2 [1 + k\zeta e^{\sigma t} e^{i(kx - \omega t)} S_t], \\ p + \tau_{zz} &= p_0 + \rho u_*^2 [\chi^2/3 + k\zeta e^{\sigma t} e^{i(kx - \omega t)} S_n], \\ \tau_{xx} &= \rho u_*^2 [\chi^2/3 + k\zeta e^{\sigma t} e^{i(kx - \omega t)} S_{xx}], \\ \tau_{zz} &= \rho u_*^2 [\chi^2/3 + k\zeta e^{\sigma t} e^{i(kx - \omega t)} S_{zz}]. \end{aligned}$$

Pour simplifier l'analyse des résultats, nous utilisons la fermeture turbulente simple du premier ordre de la relation (8.7). Les deux équations (8.20)-(8.21) sont les seules relations modifiées par la prise en compte de l'évolution temporelle du fond :

$$S'_t = (\sigma/(ku_*) - i\omega/(ku_*) + i\mu)U + \mu'W + iS_n + iS_{xx} - iS_{zz} \quad (8.67)$$

$$S'_n = -(\sigma/(ku_*) - i\omega/(ku_*) + i\mu)W + iS_t. \quad (8.68)$$

Le système d'équations différentielles à résoudre est le même qu'en (8.30) en changeant  $\mathcal{P}$  en  $\mathcal{P}_t$ .

$$\mathcal{P}_t = \begin{pmatrix} 0 & -i & \frac{\mu'}{2} & 0 \\ \left(\frac{4}{\mu'} + \frac{\sigma}{ku_*} + i\left(\mu - \frac{\omega}{ku_*}\right)\right) & \mu' & 0 & i \\ 0 & -\frac{\sigma}{ku_*} - i\left(\mu - \frac{\omega}{ku_*}\right) & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.69)$$

### 8.3. Une extension faiblement non-linéaire

---

La condition à imposer sur le fond  $Z(x, t)$  est toujours une condition de non-glissement. La relation (8.32) se réécrit maintenant :

$$U(0) = -\mu'(0) \quad \text{et} \quad W(0) = \sigma/(ku_*) - i\omega/(ku_*). \quad (8.70)$$

Sur la figure 8.12, l'influence du taux de croissance et de la vitesse de propagation sur les coefficients  $A$  et  $B$  ont été testées séparément. Les différences notables par rapport au cas de référence apparaissent pour des valeurs de  $\sigma/(ku_*)$  et  $\omega/(ku_*)$  supérieures à 1. L'effet d'une croissance pure est assez difficile à interpréter car il est opposé pour  $A$  et pour  $B$  : une augmentation de  $\sigma$  entraîne des valeurs plus importantes pour  $A$  alors que  $B$  diminue jusqu'à changer de signe. À l'inverse, l'effet de la vitesse de propagation sur les coefficients  $A$  et  $B$  peut être expliqué à l'aide d'un argument assez simple. Admettons que le motif se déplace sans croître dans le sens du courant (i.e.  $\omega > 0$  et  $\sigma = 0$ ), la vitesse de l'écoulement est plus grande que la vitesse relative de l'écoulement par rapport au fond. Comme c'est la vitesse ressentie par le fond qui fixe la valeur de la contrainte de cisaillement basale  $\tau_b$ , et donc de ses corrections linéaires, les coefficients  $A$  et  $B$  obtenus sont plus faibles que dans le cas de référence. À l'inverse, dans le cas où le fond se propage vers l'amont, la vitesse de cisaillement ressentie par le fond est plus importante que la valeur  $u_*$  adimensionnant la contrainte de cisaillement sur le fond  $\tau_b$ . Les coefficients  $A$  et  $B$  sont effectivement plus grands quand  $\omega < 0$ .

Comme nous le verrons lors de l'étude de la formation des rides en 9.2.3, les valeurs réalistes des coefficients  $\sigma/(ku_*)$  et  $\omega/(ku_*)$  sont respectivement de l'ordre de  $10^{-3}$  et  $10^{-2}$ . Ces valeurs sont encore plus faibles pour des motifs de plus grandes longueurs d'onde. Par conséquent, l'hypothèse d'un lit immobile est bien valable pour décrire l'écoulement turbulent au-dessus de rides ou de dunes en formation.

## 8.3 Une extension faiblement non-linéaire

Dans cette partie, l'analyse linéaire précédente est étendue aux premières corrections non-linéaires. Une telle extension est intéressante, non seulement pour améliorer quantitativement la prédiction des champs de vitesse et de contrainte autour de motifs d'amplitude finie, mais également pour discuter de la hauteur d'équilibre des rides.

### 8.3.1 Extension en amplitude à l'ordre trois

L'état de référence reste le même que dans celui décrit dans la partie 8.1.2. Un développement au troisième ordre en  $k\zeta$  est présenté ici. Les corrections

### 8.3. Une extension faiblement non-linéaire

---

à la vitesse sont alors décrites par 2 fois 4 fonctions  $U_i(\eta)$  et  $W_i(\eta)$ , l'indice  $i$  variant de 0 à 3. Ces fonctions sont définies par :

$$\begin{aligned} u_x &= u_* [\mu + (k\zeta)^2 U_0 + (k\zeta)e^{ikx} (U_1 + (k\zeta)^2 U_3) + (k\zeta)^2 e^{2ikx} U_2] , \\ u_z &= u_* [(k\zeta)e^{ikx} (W_1 + (k\zeta)^2 W_3) + (k\zeta)^2 e^{2ikx} W_2] . \end{aligned} \quad (8.71)$$

Les deux fonctions  $U_1(\eta)$  et  $W_1(\eta)$  sont respectivement les fonctions  $U(\eta)$  et  $W(\eta)$  introduites par les relations (8.13) et (8.14) lors du développement de l'écoulement à l'ordre linéaire. La fonction réelle  $U_0(\eta)$  décrit les premières corrections non-linéaires de l'état de référence  $\mu(\eta)$ . Les termes correctifs de même nombre d'onde que les termes linéaires proviennent des termes en  $(k\zeta)^3$  et sont caractérisés par les deux fonctions  $U_3(\eta)$  et  $W_3(\eta)$ . Enfin, les fonctions  $U_2(\eta)$  et  $W_2(\eta)$  sont les corrections non-linéaires du premier harmonique. Ces fonctions ne seront pas analysées dans le détail – elles sont surtout nécessaires au calcul des fonctions  $U_3(\eta)$  et  $W_3(\eta)$ . Dans ce développement, nous avons négligé les termes en  $(k\zeta)^3 e^{3ikx}$ , qui représentent les corrections non-linéaires du second harmonique. De la même façon que pour le champ de vitesse, de nouvelles fonctions sont introduites pour décrire les corrections non-linéaires des contraintes :

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -\rho u_*^2 [1 + (k\zeta)^2 S_{t0} + (k\zeta)e^{ikx} (S_{t1} + (k\zeta)^2 S_{t3}) + (k\zeta)^2 e^{2ikx} S_{t2}] , \\ p + \tau_{zz} &= p_0 + \rho u_*^2 [\chi^2/3 + (k\zeta)^2 S_{n0} + (k\zeta)e^{ikx} (S_{n1} + (k\zeta)^2 S_{n3}) \\ &\quad + (k\zeta)^2 e^{2ikx} S_{n2}] , \\ \tau_{zz} - \tau_{xx} &= \rho u_*^2 [(k\zeta)^2 S_{d0} + (k\zeta)e^{ikx} (S_{d1} + (k\zeta)^2 S_{d3}) + (k\zeta)^2 e^{2ikx} S_{d2}] . \end{aligned} \quad (8.72)$$

Toutes ces fonctions sont complexes, décomposées en une partie réelle et une partie imaginaire (excepté les fonctions réelles qui décrivent l'état de référence : i.e. les fonctions  $X_0(\eta)$  et la fonction  $\mu(\eta)$  dont la définition par la relation (8.12) reste inchangée). Bien que le principe du développement reste simple, les calculs associés sont assez pénibles, car le produit de deux termes non-linéaires génère rapidement de nombreux nouveaux termes. Ainsi, le carré de  $u_x$  s'écrit :

$$\begin{aligned} u_x^2 &= u_*^2 \left[ \mu^2 + (k\zeta)^2 \left( 2\mu U_0 + \frac{U_1 U_1^*}{2} \right) + (k\zeta)e^{ikx} (2\mu U_1 + (k\zeta)^2 (2\mu U_3 \right. \\ &\quad \left. + 2U_0 U_1 + U_1^* U_2)) + (k\zeta)^2 e^{2ikx} \left( 2\mu U_2 + \frac{U_1^2}{2} \right) \right] . \end{aligned} \quad (8.73)$$

$U_1^*$  représente la fonction conjuguée de la fonction complexe  $U_1$ . Notons que les termes du fondamental en  $(k\zeta)^2$  sont bien tous réels car produits de fonctions réelles ou d'une fonction complexe par sa fonction complexe conjuguée.

### 8.3. Une extension faiblement non-linéaire

Le module du tenseur des déformations est également développé à l'ordre 3 en  $k\zeta$  :

$$|\dot{\gamma}| = \mu' + (k\zeta)^2 \left[ U'_0 + \frac{U_1 U_1^*}{\mu'} \right] + (k\zeta) e^{ikx} (U'_1 + iW_1) + (k\zeta)^2 e^{2ikx} \left[ U'_2 + 2iW_2 - \frac{U_1^2}{\mu'} \right] \\ + (k\zeta)^3 e^{ikx} \left[ U'_3 + iW_3 - \frac{U_1 U_1^*}{\mu'^2} (U'_1 + iW_1) + \frac{U_1^2}{2\mu'^2} (U_1^* - iW_1^*) + \frac{4U_1^* U_2}{\mu'} \right]. \quad (8.74)$$

Utilisant la fermeture turbulente (8.7), la combinaison  $\dot{\gamma}$  avec la longueur de mélange  $L$ , elle-même développée à l'ordre 2 donne :

$$\kappa^2 (kL)^2 = \frac{1}{\mu'^2} + \frac{\kappa^2}{2} (k\zeta)^2 - \frac{2\kappa}{\mu'} (k\zeta) e^{ikx} + \frac{\kappa^2}{2} (k\zeta)^2 e^{2ikx}. \quad (8.75)$$

Ceci permet de développer les différentes composantes du tenseur des contraintes. Ainsi chacune des équations linéaires (8.19)-(8.21) et (8.26)-(8.28) possède son alter-égo aux ordres supérieurs (les indices 0, 2 et 3). On obtient finalement une hiérarchie linéaire d'équations différentielles du premier ordre, à second membre non nul :

$$\frac{d}{d\eta} \vec{X}_\alpha - \mathcal{P}_\alpha \vec{X}_\alpha = \vec{S}_\alpha, \quad (8.76)$$

avec  $\vec{X}_\alpha = (U_\alpha, W_\alpha, S_{t\alpha}, S_{n\alpha})$ . L'indice  $\alpha$  prenant les valeurs entières entre 0 et 3. Naturellement,  $\mathcal{P}_1$  et  $\vec{S}_1$  sont exactement la matrice et le vecteur obtenus à la partie précédente dans l'expression (8.31). De plus  $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1$  alors que la matrice  $\mathcal{P}_2$  est sensiblement différente et que  $\mathcal{P}_0$  s'exprime très simplement :

$$\mathcal{P}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5\mu' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0.5\mu' & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ \left(i\mu + \frac{4}{\mu'}\right) & \mu' & 0 & i \\ 0 & -i\mu & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0.5\mu' & 0 \\ -2i & 0 & 0 & 0 \\ 2\left(i\mu + \frac{8}{\mu'}\right) & \mu' & 0 & 2i \\ 0 & -2i\mu & 2i & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.77)$$

Excepté le vecteur  $\vec{S}_1$ , les expressions des différents  $\vec{S}_\alpha$  sont assez lourdes. Elles sont exprimées dans l'annexe E du premier article mis en annexe. Notons tout de même que les deux vecteurs  $\vec{S}_0$  et  $\vec{S}_2$  s'expriment en fonction de  $\mu$ , de  $\vec{X}_1$  et de ses dérivées. Le vecteur  $\vec{S}_3$  fait intervenir les fonctions  $\mu$ ,  $\vec{X}_0$ ,  $\vec{X}_1$ ,  $\vec{X}_2$  et leurs dérivées. Par conséquent, pour résoudre les ordres 0 et 2, il est nécessaire d'avoir déjà résolu entièrement l'ordre linéaire et l'obtention de  $\vec{S}_3$  s'effectue forcément en dernier.

### 8.3.2 Les conditions limites

Comme précédemment, pour résoudre les quatre équations différentielles (8.76), il est nécessaire d'indiquer pour chacune quatre conditions limites. Deux sont imposées au sol en  $z = Z$  et les deux autres à l'infini quand  $z \rightarrow \infty$ .

La physique du problème n'étant pas changée, les conditions limites restent les mêmes. À savoir, une condition de non-glissement sur le sol implique  $u_x(z = Z) = 0$  et  $u_z(z = Z) = 0$ . Les conditions initiales aux différents ordres s'expriment par :

$$\begin{aligned}
 U_1(0) &= -\mu'(0), \\
 U_0(0) &= -\frac{1}{4}\mu''(0) - \frac{1}{2}\kappa\mu'^2(0) - \frac{1}{8}\mu'(0) [S_{t1}(0) + S_{t1}^*(0)], \\
 U_2(0) &= -\frac{1}{4}\mu''(0) - \frac{1}{2}\kappa\mu'^2(0) - \frac{1}{4}\mu'(0)S_{t1}(0), \\
 U_3(0) &= -\frac{1}{8}\mu'''(0) + \frac{9}{8}\mu'(0) - \frac{3}{4}\kappa^2\mu'^3(0) - \frac{1}{16} [\mu''(0) + 2\kappa\mu'^2(0)] [2S_{t1}(0) + S_{t1}^*(0)] \\
 &\quad + \frac{1}{32}\mu'(0)S_{t1}(0) [S_{t1}(0) + 2S_{t1}^*(0)] - \frac{i}{16}\mu'(0) [2S_{n1}(0) + S_{n1}^*(0)] \\
 &\quad - \frac{1}{4}\mu'(0) [2S_{t0}(0) + S_{t2}(0)], \\
 W_1(0) &= 0, \\
 W_0(0) &= 0, \\
 W_2(0) &= -\frac{i}{2}\mu'(0), \\
 W_3(0) &= -\frac{i}{4}\mu''(0) - \frac{3i}{8}\kappa\mu'^2(0) - \frac{i}{16}\mu'(0) [2S_{t1}(0) + S_{t1}^*(0)]. \tag{8.78}
 \end{aligned}$$

Les conditions limites en l'infini sont elles aussi inchangées :  $u_z(\infty) = 0$  et  $\tau_{xz}(\infty) = 0$ . Ces conditions sont de nouveau imposées à une hauteur  $H$  finie et choisie suffisamment grande pour que les résultats obtenus soient indépendants de  $\eta_H$ .

Pour chacun de ces ordres, la solution  $\vec{X}_\alpha$  est une superposition de deux solutions générales de l'équation homogène associée et d'une solution particulière :

$$\vec{X}_\alpha = \vec{X}_{s\alpha} + a_{t\alpha}\vec{X}_{t\alpha} + a_{n\alpha}\vec{X}_{n\alpha}. \tag{8.79}$$

Les conditions limites sont en fait différentes pour les 3 solutions. La première solution est la seule qui satisfasse les conditions limites sur le fond décrites par les relations (8.78) :  $\vec{X}_{s\alpha}(0) = (U_\alpha(0), W_\alpha(0), 0, 0)$ . Les conditions initiales des deux autres solutions sont construites de telle sorte que :  $\vec{X}_{t\alpha}(0) = (0, 0, 1, 0)$

### 8.3. Une extension faiblement non-linéaire

---

et  $X_{n\alpha}(0) = (0, 0, 0, 1)$ . Ces conditions limites assurent à la solution  $\vec{X}_\alpha$  de vérifier les conditions limites au sol. Les coefficients  $a_{t\alpha}$  et  $a_{n\alpha}$  sont ajustés en  $\eta = kH$  de façon à ce que  $\vec{X}_\alpha$  vérifiassent également les conditions limites en  $\eta \rightarrow \infty$ . Notons finalement que  $a_{t\alpha} = S_{t\alpha}(0)$  et  $a_{n\alpha} = S_{n\alpha}(0)$ .

Avant de passer à l'exploitation des résultats, il convient de revenir un court instant sur l'obtention des conditions limites au sol. Nous avons écrit un peu plus haut, que nous utilisons une condition de non-glissement sur le sol, puis nous avons donné les conditions limites pour chacune des fonctions  $U_\alpha$  et  $W_\alpha$ . Ces conditions limites ne s'expriment pas facilement, alors qu'il est pourtant rapide d'écrire que  $u_x(z = Z) = 0$  et  $u_z(z = Z) = 0$ . La difficulté vient du fait que ces conditions limites s'expriment plus facilement dans un référentiel lié au fond ondulé. Nous définissons par la même occasion la variable  $\xi$  liée à ce second référentiel :  $\xi = \eta - kZ$ . Par la suite, nous utiliserons une notation tildée lorsqu'il sera fait mention de la fonction dans le référentiel lié au fond  $Z(x)$ . par exemple,  $\tilde{X}_\alpha$  est une fonction de  $\xi$  et  $X_\alpha$  une fonction de  $\eta$ . Le passage de l'une à l'autre de ces notations n'est pas compliqué, mais il reste un peu technique à expliquer. Il se trouve détaillé en annexe C du premier des articles mis en annexe.

Notons que ce changement de référentiel n'est pas particulièrement caractéristique du développement non-linéaire. Nous aurions pu tout aussi bien l'introduire dès la partie linéaire. Cependant, nous pouvons constater<sup>6</sup> que la seule différence réside entre les fonctions  $\tilde{U}_1$  et  $U_1$ , définies à  $\mu'$  près. Nous n'utilisons la notation "tildée" que dans le cas non-linéaire, où les expressions deviennent rapidement pénibles à exprimer. Suivant les cas, nous choisirons la notation la plus pratique et la plus lisible parmi ces deux référentiels pour présenter les différents résultats issus du calcul non-linéaire.

#### 8.3.3 Résultats

Comme nous l'avons fait précédemment, nous allons tout d'abord caractériser l'état de référence avant de discuter des corrections en  $e^{ikx}$ . Précédemment, la fonction  $\mu(\eta)$  définissait l'état de référence de la composante horizontale de la vitesse. Cette fonction logarithmique fait intervenir la rugosité hydrodynamique  $z_0$ . Dans cette approche faiblement non-linéaire, l'état de référence est corrigé par une fonction dépendant de l'amplitude du profil (cette correction varie comme le carré de l'amplitude  $\zeta$ ). La fonction  $\tilde{U}_0$  est représentée sur la figure 8.13a. Près de fond,  $\tilde{U}_0 = 0$ , puis la fonction augmente logarithmiquement en valeur absolue entre  $z \sim z_0$  et  $z \sim \lambda$  pour

---

<sup>6</sup>Ce sont les formules (C6) ou (C10) du premier article mis en annexe.

### 8.3. Une extension faiblement non-linéaire

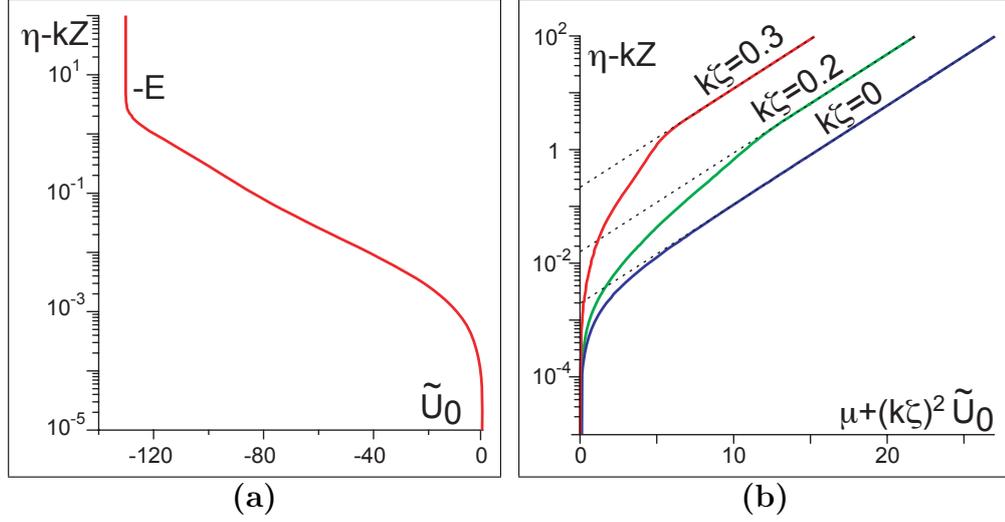


FIG. 8.13 – (a) Profil vertical de  $\tilde{U}_0$  obtenu pour  $\eta_0 = 2 \cdot 10^{-3}$  et  $\eta_H = 100$ . (b) Profil vertical de  $\mu + (k\zeta)^2 \tilde{U}_0$  pour différentes valeurs d'amplitude  $\zeta$

atteindre, loin du fond, une valeur constante. Cette asymptote verticale permet de définir une constante  $E$  définie positivement par :

$$\lim_{z \gg Z} \tilde{U}_0 = -E. \quad (8.80)$$

Le profil vertical de la fonction " $\mu + (k\zeta)^2 \tilde{U}_0$ " est représenté sur la figure 8.13b pour différentes valeurs d'amplitude  $\zeta$ . Loin du fond (i.e.  $\eta \gg \eta_0$  quand  $k\zeta = 0$  ou  $\eta > 1$  quand  $k\zeta = 0.2$ , par exemple), ces profils croissent logarithmiquement. Par extrapolation de ce comportement purement logarithmique vers les faibles vitesses, nous pouvons définir une rugosité géométrique  $z_g$ . En identifiant la fonction " $\mu + (k\zeta)^2 \tilde{U}_0$ " avec l'expression de vitesse logarithmique  $u_*/\kappa \ln(z/z_g)$  pour  $z \gg Z$ , il est ainsi possible d'expliciter les dépendances de cette rugosité géométrique avec la rugosité hydrodynamique et la taille du motif :

$$\ln z_g = \ln z_0 + \kappa (k\zeta)^2 E. \quad (8.81)$$

Nous constatons que  $z_g$  ne s'exprime pas uniquement en fonction de l'amplitude  $2\zeta$  des motifs. Nous trouvons également une dépendance en  $z_0$ , à la fois de façon explicite, mais aussi de manière indirecte par le biais du coefficient  $E$ . La dépendance de  $E$  avec  $\eta_0$  est montrée sur la figure 8.14a.  $E$  diminue quand  $\eta_0$  augmente de sorte que les deux termes  $\ln z_0$  et  $\kappa (k\zeta)^2 E$  de la relation (8.81) ont des effets opposés sur  $z_g$ . La figure 8.14b est construite pour

### 8.3. Une extension faiblement non-linéaire

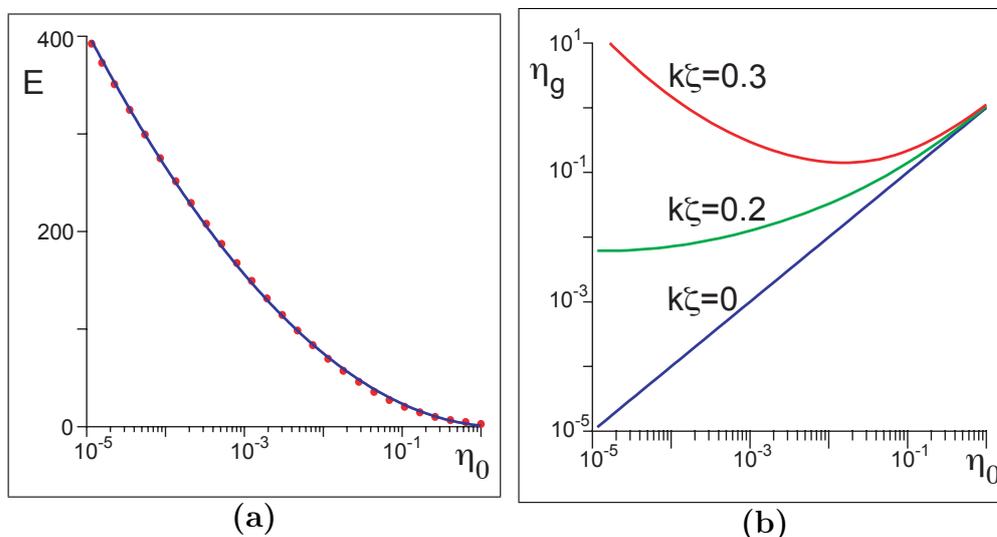


FIG. 8.14 – (a) Coefficient  $E$  représenté en fonction de  $\eta_0$ . La courbe noire a pour équation :  $E = 2.75(\ln \eta_0 - 0.62)^2$ . (b) la rugosité géométrique  $z_g$  est représentée en fonction de la rugosité hydrodynamique  $z_0$  pour différentes valeurs d'amplitude  $\zeta$ .

représenter ces effets opposés. Pour les plus grandes valeurs d'amplitudes (i.e.  $k\zeta = 0.3$ ), la rugosité géométrique présente un minimum marqué.

Enfin, la figure 8.14a est compatible avec les prédictions numériques de [Taylor & al. 1989] et [Jacobs 1989] qui rapportent respectivement des variations linéaires et quadratiques du coefficient  $E$  avec  $\ln \eta_0$ . La première contribution s'est attachée à étudier les corrections au champ des vitesses pour  $10^{-8} < \eta_0 < 10^{-3}$ . L'ajustement de la fonction  $E(\ln \eta_0)$  avec un polynôme du second degré permet d'obtenir :  $E = 2.75(\ln \eta_0 - 0.62)^2$ .

Les premières corrections au terme harmonique  $\vec{X}_1$  sont les termes  $(k\zeta)^2 \vec{X}_3$ . Les profils verticaux des corrections non-linéaires aux contraintes,  $\tilde{S}t_3$  et  $\tilde{S}n_3$ , ont été représentées sur la figure 8.15. Rappelons que les corrections linéaires des contraintes restaient constantes dans une région proche du sol : la couche interne. Cela nous a permis de définir quatre coefficients réels  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ . Nous constatons que c'est encore le cas, pour les corrections non-linéaires : ces corrections restent constantes dans la couche interne. Elles tendent vers 0 loin du sol, comme l'impose les conditions limites<sup>7</sup>. Les asymptotes verticales

<sup>7</sup>Notons que les profils de  $\tilde{S}t_0$  et  $\tilde{S}n_0$  présentent les mêmes variations : un plateau de contrainte dans une région proche du sol, puis ils tendent vers 0 quand  $\eta \gg 1$

### 8.3. Une extension faiblement non-linéaire

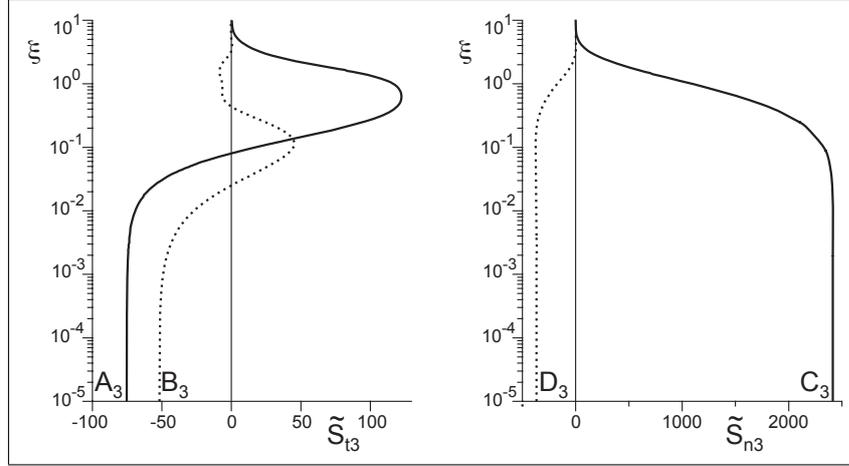


FIG. 8.15 – Profils verticaux des corrections d’ordre 3 aux contraintes ( $\tilde{S}_{t3}$  (a) et  $\tilde{S}_{n3}$  (b)) pour  $\eta_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ . Les parties réelles de ces fonctions sont représentées en traits pleins, et les parties imaginaires en pointillées.

permettent de définir de façon analogue à la partie linéaire, les coefficients  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$ , et  $D_3$  :

$$\tilde{S}_{t3}(0) = A_3 + i B_3, \quad (8.82)$$

$$\tilde{S}_{n3}(0) = C_3 + i D_3. \quad (8.83)$$

Les variations de ces coefficients en fonction de la rugosité hydrodynamique  $\eta_0$  sont représentés à la figure 8.16. Cette figure doit être analysée en regard de la figure 8.6 qui présente les variations des coefficients linéaires avec  $\eta_0$ . Nous notons que les coefficients de ces corrections non-linéaires sont de signe contraire aux coefficients linéaires. Les premières corrections non-linéaires s’opposent aux effets linéaires de l’écoulement. Nous verrons dans la partie 9.2 que cet antagonisme permet de définir une amplitude d’équilibre des rides.

Ces calculs permettent d’accéder à l’ensemble de l’écoulement au-dessus d’un motif périodique d’amplitude  $\zeta$ . Les lignes de courant ont été représentées sur la figure 8.17 pour trois valeurs  $k\zeta$  croissantes. Contrairement à la figure 8.4, qui présente les lignes de courant au-dessus d’un motif périodique dans le cas d’un calcul linéaire, l’asymétrie du champ des vitesses de part et d’autre d’une bosse est moins visible sur les deux premières représentations. Cela est dû au choix des valeurs de  $k\zeta$ . Ces valeurs sont plus réalistes et permettent de rendre compte de la présence d’une bulle de recirculation dans les creux du motif. Les bulles de recirculation apparaissent pour des rapports

### 8.3. Une extension faiblement non-linéaire

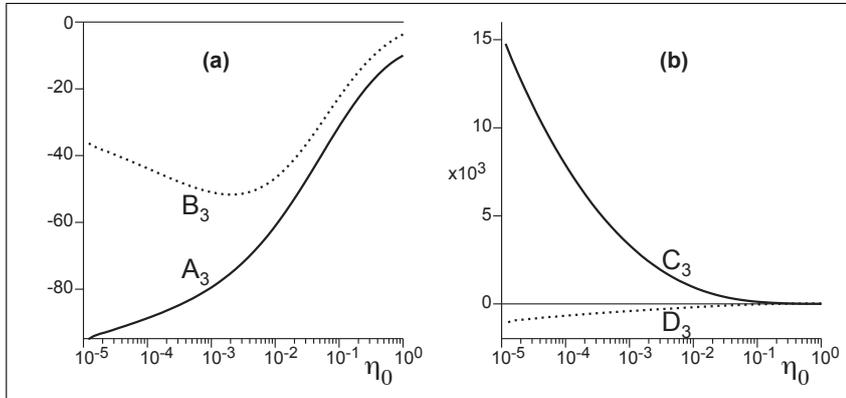


FIG. 8.16 – Évolution des coefficients  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$  et  $D_3$  en fonction de  $\eta_0$  sous hypothèse d'écoulement turbulent infini au-dessus d'un fond ondulé. Ces coefficients sont issus de calculs faiblement non-linéaires.

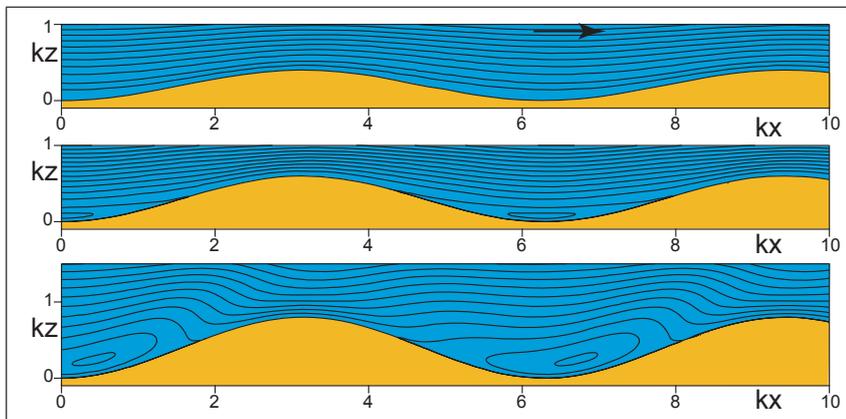


FIG. 8.17 – Lignes de courant d'un écoulement turbulent au-dessus d'un fond ondulé calculées à partir des profils verticaux de corrections non-linéaires de la figure 8.15 pour 3 valeurs du rapport d'aspect des motifs sinusoidaux  $k\zeta = 0.2$ ,  $0.3$  et  $0.4$ .

### 8.3. Une extension faiblement non-linéaire

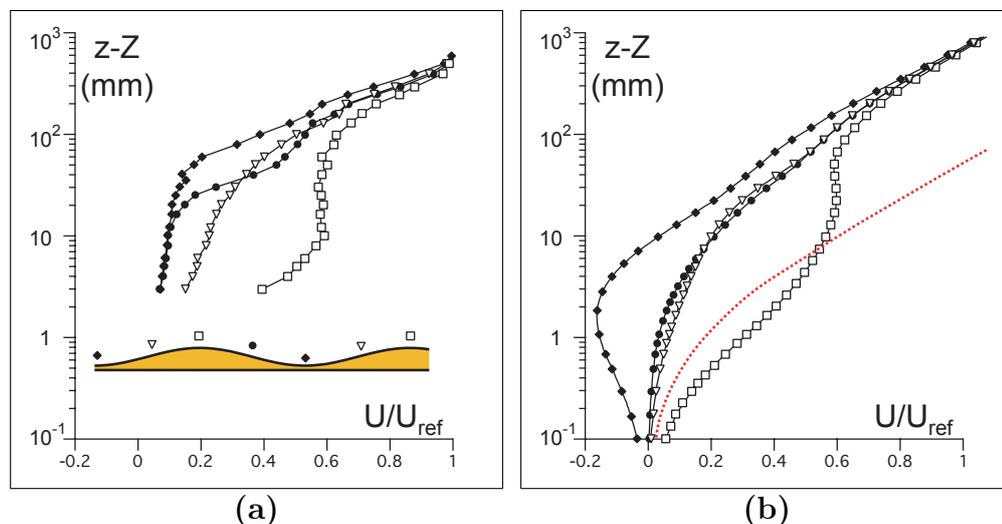


FIG. 8.18 – Profil verticaux de vitesse dans le cas d’un écoulement turbulent au dessus d’un fond sinusoïdal rugueux en différents endroits de ce profil ( $\square$  : crête,  $\blacklozenge$  : fond,  $\bullet$  et  $\nabla$  : points d’inflexions). (a) Résultats expérimentaux de [Gong et al. 1996] où  $U_{ref}$  est mesuré loin du fond. (b) Prédications théoriques obtenues par le modèle non-linéaire ( $2\zeta/\lambda = 0.3$ ) où  $U_{ref}$  a été ajusté de manière idoine. Le profil de référence est tracé en pointillé.

d’aspects supérieurs à  $\sim 1/12$ . Par comparaison, les calculs linéaires rendent compte d’une apparition de bulles de recirculation à partir de  $2\zeta/\lambda \sim 1/6$  ce qui correspond à une valeur pour laquelle les calculs linéaires ne sont plus pertinents. La valeur du rapport d’aspect d’apparition des bulles de recirculation est quantitativement proche des observations expérimentales.

Sur la figure 8.4, la plus grande valeur du rapport d’aspect  $2\zeta/\lambda \sim 1/8$  crée une bulle de recirculation très distordue. Cette distortion n’est sans doute pas très réaliste et montre les limites de validité d’un tel développement faiblement non-linéaire. Heureusement, les rapports d’aspect typiques des rides et des dunes en rivière sont plus petits que  $1/10$ , ce qui permet d’utiliser ces calculs de manière quantitative.

De nombreuses contributions présentent des mesures précises de profils de vitesse ou de contraintes turbulentes au-dessus d’un fond fixe. Parmi l’ensemble de ces travaux, nous avons sélectionné les résultats expérimentaux de [Gong et al. 1996]. Leur dispositif expérimental est constitué d’une soufflerie équipée d’un fond sinusoïdal de longueur d’onde  $\lambda = 609.6\text{mm}$  et d’amplitude  $2\zeta = 96.5\text{mm}$ . Un tapis recouvre l’ensemble des 16 bosses pour créer une rugosité contrôlée. Le rapport d’aspect, proche de  $1/6$ , est sensiblement

### 8.3. Une extension faiblement non-linéaire

---

hors de la zone de validité du modèle présenté. Malgré ce rapport d'aspect élevé, ce sont les résultats qui permettent les meilleures comparaisons avec nos calculs.

La figure 8.18a présente les profils verticaux de vitesse de l'écoulement mesurés en différents points du motif. Les vitesses sont toutes divisées par une vitesse mesurée en amont du profil sinusoïdal dans la partie supérieure de la soufflerie, notée  $U_{\text{ref}}$ . Les auteurs n'ayant mesuré que  $|\langle \vec{u} \rangle|$ , ces données ne rendent pas compte de la présence de recirculations, pourtant observées et mentionnées pendant les expériences. Nous retrouvons le fait que l'écoulement est accéléré sur les crêtes des motifs (les carrés évidés sur la figure) et décéléré dans les creux (les losanges pleins). Les profils mesurés au-dessus des points d'inflexion du motif (les triangles évidés et les ronds pleins) sont très proches l'un de l'autre, indiquant le rôle des non-linéarités qui s'oppose aux effets linéaires qui tendent à asymétriser l'écoulement. Dans la région proche du sol, le dispositif expérimental ne permet pas de mesurer les champs de vitesse précisément. Par contre, loin du fond, l'ensemble des profils s'aligne sur une même courbe. L'extrapolation de cette asymptote en  $u = 0$  détermine la valeur de la rugosité géométrique  $z_g \approx 20\text{mm}$ . Plus proche du sol (pour  $z - Z < 10\text{mm}$ ), le comportement de la vitesse mesurée au-dessus de la crête est également logarithmique, mais avec une rugosité qui est celle du tapis qui recouvre les bosses, et qui est plus petite de presque deux ordres de grandeur. La figure 8.18b présente les résultats des calculs non-linéaires. Ces résultats ont été obtenus dans le domaine de validité de l'expansion non-linéaire (i.e. pour  $k\zeta = 0.3$ ). La valeur de la constante  $U_{\text{ref}}$  a été ajustée manuellement. L'accord entre ces mesures et nos prédictions est qualitativement très bon. Par exemple, les comportements subtils des deux profils mesurés au dessus des points d'inflexions du motif sont assez fidèlement reproduits par le modèle.

En résumé, grâce à ce développement non-linéaire, nous pouvons décrire quantitativement un écoulement turbulent de hauteur infini au dessus d'un fond quelconque. L'analyse est limitée à des rapports d'aspects de l'ordre de  $\sim 1/10$ , une limite suffisamment haute en pratique pour le cas qui nous intéresse. De plus, l'intérêt de cette étude non-linéaire de l'écoulement turbulent au-dessus d'un fond ondulé ne se restreint pas à la morphogénèse des rivières. Il est par exemple possible d'adapter une telle modélisation à un écoulement atmosphérique pour traiter le cas des dunes éoliennes (cf. chapitre 11.4). Il est également possible d'utiliser un tel formalisme pour l'étude de l'écoulement autour d'un obstacle mobile, dont on chercherait, entre autre, à réduire la traînée turbulente...

## 8.4 Les effets de surface libre

Les résultats précédemment évoqués ont tous été obtenus dans l'hypothèse d'un écoulement de hauteur infinie. Afin de caractériser les effets de la surface libre, on va garder le même formalisme et le modèle en prenant maintenant en compte la hauteur finie  $H$  de l'écoulement. Nous garderons le même plan que les parties précédentes : nous allons d'abord rappeler les équations adaptées à la description d'un écoulement turbulent 2-D en rivière, en préciser les conditions aux limites pour finalement décrire les principaux effets apportés par l'introduction de la surface libre à la hauteur  $H$ .

### 8.4.1 Description hydrodynamique de la rivière

Pour la description d'un écoulement turbulent à surface libre, la contrainte ne peut plus être considérée uniforme sur toute la hauteur d'eau, comme c'était le cas précédemment. Dans le cas d'une rivière inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontal, le cisaillement s'équilibre avec les effets de la gravité et est maximum sur le lit. Le long de l'axe ( $Oz$ ), il décroît linéairement et s'annule à la surface :  $\tau_{xz} = \rho g(H - z) \sin \theta$ . Par définition de la vitesse  $u_*$ , la contrainte de cisaillement peut se réécrire :

$$\tau_{xz} = \rho g (H - z) \sin \theta = \rho u_*^2 (1 - z/H). \quad (8.84)$$

Pour utiliser une fermeture turbulente du premier ordre du type de la relation (8.8), nous constatons que la distance par rapport à la surface libre  $H - z$  doit également servir à la construction de la longueur de mélange  $L$ . Dans le cas d'un écoulement 2D stationnaire à surface libre sur un fond plat, le choix :

$$L = (z + z_0) \sqrt{1 - z/H}, \quad (8.85)$$

permet de retrouver, via  $d_z \tau_{xz} = 0$ , le profil de vitesse logarithmique du cas infini :  $u_x = u_*/\kappa \ln(1 + z/z_0)$ . Ce profil est compatible avec les mesures expérimentales et de terrain. L'équation de Navier-Stokes selon l'axe vertical permet d'exprimer la pression :

$$p + \tau_{zz} = p_0 + \rho g(H - z) \cos \theta = p_0 + \frac{\rho u_*^2}{\tan \theta} \left(1 - \frac{z}{H}\right). \quad (8.86)$$

Nous définissons le nombre de Froude, dans le cas d'un fond plat, comme le rapport de la vitesse de surface sur la vitesse des ondes gravitaires de surface (en régime d'eau profonde) :

$$\mathcal{Fr} \equiv \frac{1}{\sqrt{gH}} \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{H}{z_0}\right) = \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + \frac{H}{z_0}\right) \sqrt{\sin \theta}. \quad (8.87)$$

### 8.4.2 Perturbations

Considérons maintenant l'écoulement turbulent à surface libre au-dessus d'un fond périodiquement bosselé  $Z(x) = \zeta e^{ikx}$ . Rappelons que l'on a défini  $\eta = kz$  et  $\eta_H = kH$ . Le développement à l'ordre linéaire pour les deux composantes de la vitesse s'écrivent de la même façon que précédemment :

$$\begin{aligned} u_x &= u_* [\mu + k\zeta e^{ikx} U] , \\ u_z &= u_* k\zeta e^{ikx} W , \end{aligned}$$

où la fonction  $\mu$  est toujours définie par la relation (8.12). À l'inverse, les définitions des fonctions  $S_t$  et  $S_n$  changent sensiblement :

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\rho u_*^2 \left[ 1 - \frac{\eta}{\eta_H} + k\zeta e^{ikx} S_t \right] , \quad (8.88)$$

$$p + \tau_{zz} = p_0 + \rho u_*^2 \left[ \frac{1}{\tan \theta} \left( 1 - \frac{\eta}{\eta_H} \right) + k\zeta e^{ikx} S_n \right] . \quad (8.89)$$

La surface libre pouvant se déformer, nous notons  $H + \Delta(x)$  la hauteur d'eau à la position  $x$ . La distance par rapport au fond et par rapport à la surface libre pouvant évoluer, la longueur de mélange s'en trouve elle aussi modifiée :

$$L = (z_0 + z - Z) \sqrt{\frac{H + \Delta - z}{H + \Delta - Z}} . \quad (8.90)$$

Le profil de la surface libre est également linéarisé :  $\Delta(x) = \delta \zeta e^{ikx}$ . À l'ordre linéaire,  $L$  s'exprime comme :

$$kL = (\eta + \eta_0) \sqrt{1 - \frac{\eta}{\eta_H}} \left\{ 1 - k\zeta e^{ikx} \left[ \frac{1}{\eta + \eta_0} - \frac{1}{2\eta_H} - \delta \frac{\eta}{2\eta_H^2 \left( 1 - \frac{\eta}{\eta_H} \right)} \right] \right\} . \quad (8.91)$$

Le traitement linéaire des équations de Navier-Stokes et du tenseur des contraintes est semblable à celui effectué dans la partie précédente. De nouveau, il conduit à un système d'équations différentielles du premier ordre qui peut s'écrire sous la forme compacte :

$$\frac{d}{d\eta} \vec{X} - \mathcal{P}_H \vec{X} = \vec{S}_H + \delta \vec{S}_\delta , \quad (8.92)$$

avec

$$\vec{S}_H = \begin{pmatrix} \kappa\mu'^2 - \frac{\mu'}{2\eta_H} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{S}_\delta = \begin{pmatrix} -\frac{\eta\mu'}{2\eta_H^2\left(1-\frac{\eta}{\eta_H}\right)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\mathcal{P}_H = \begin{pmatrix} 0 & -i & \frac{\mu'}{2\left(1-\frac{\eta}{\eta_H}\right)} & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4\left(1-\frac{\eta}{\eta_H}\right)}{\mu'} + i\mu & \mu' & 0 & i \\ 0 & -\mu i & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.93)$$

Dans la limite  $\eta_H \rightarrow \infty$  et en prenant  $\delta = 0$ , l'équation (8.30) de la partie précédente est bien retrouvée ainsi que  $\mathcal{P}_H = \mathcal{P}$  et  $\vec{S}_H = \vec{S}$ .

### 8.4.3 Résolution des équations linéarisées

La condition de non-glissement imposée sur le sol s'exprime de la même manière que dans les parties précédentes. En revanche, les conditions limites en  $\eta_H$  sont modifiées. La surface libre étant un ligne de courant, la vitesse est tangente à la surface en tous points de celle-ci. Comme la densité de l'air est très petite devant celle de l'eau, nous considérons que les contraintes s'annulent à l'interface air/eau. Les conditions aux limites à la surface libre s'écrivent donc, à l'ordre linéaire :

$$\frac{u_z(kH)}{u_x(kH)} = \partial_x \Delta, \quad p(kH) + \tau_{zz}(kH) = 0 \quad \text{et} \quad \tau_{xz}(kH) = 0 \quad (8.94)$$

La résolution des équations linéarisées (8.92) se fait en superposant quatre solutions :

$$\vec{X} = \vec{X}_0 + a_t \vec{X}_t + a_n \vec{X}_n + \delta \vec{X}_\delta. \quad (8.95)$$

Les trois vecteurs  $\vec{X}_0$ ,  $\vec{X}_t$  et  $\vec{X}_n$  sont les solutions des équations différentielles définies par les équations (8.34)-(8.36) en remplaçant la matrice  $\mathcal{P}$  par  $\mathcal{P}_H$  et le vecteur  $\vec{S}$  par  $\vec{S}_H$ . Le vecteur  $\vec{X}_\delta$  est solution de l'équation :

$$\frac{d}{d\eta} \vec{X}_\delta - \mathcal{P}_H \vec{X}_\delta = \vec{S}_\delta \quad \text{avec} \quad \vec{X}_\delta(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.96)$$

De ce fait, les conditions limites  $U(0) = -\mu'(0)$  et  $W(0) = 0$  sont automatiquement vérifiées. À la surface libre, les trois conditions limites  $W(\eta_H) =$

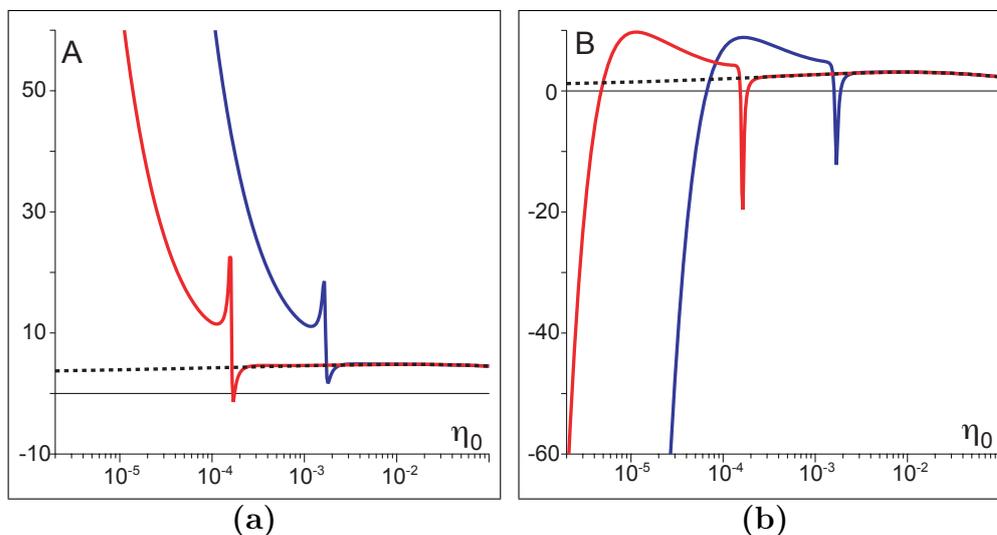


FIG. 8.19 –  $A$  et  $B$  en fonction de  $\eta_0 = kz_0$  à  $\mathcal{F}r = 0.8$  pour deux valeurs de  $H/z_0$  : en rouge,  $H/z_0 = 10^4$  et en bleu  $H/z_0 = 10^3$ . Les courbes en pointillés sont issues de la figure 8.6

$i\mu(\eta_H)\delta$ ,  $S_t(\eta_H) = \delta/\eta_H$  et  $S_n(\eta_H) = \delta/(\eta_H \tan\theta)$  sélectionnent les coefficients  $a_t$  et  $a_n$  ainsi que la valeur de  $\delta$ .

#### 8.4.4 Résultats

Les variations des coefficients  $A$  et  $B$  avec  $\eta_0$  sont représentées sur la figure 8.19. Ces courbes ont été obtenues pour deux valeurs du paramètre  $H/z_0$ . Pour les plus grandes valeurs du nombre d'onde ( $\eta_0 > 10^{-2}$ ), les résultats sont indépendants de la valeur de  $H/z_0$ . En effet, la hauteur d'eau est tellement grande devant la longueur d'onde des motifs que la limite où la hauteur de l'écoulement est considérée infini est atteinte. On retrouve alors les résultats de la partie précédente : les courbes en pointillés sont issues de la figure 8.6 et sont obtenues sous cette hypothèse de hauteur d'eau infinie. Dans le cas où la longueur d'onde est très petite devant la hauteur de l'écoulement (nous verrons que c'est le cas des rides où  $\lambda_{\max} \ll H$ ), la surface libre a un rôle négligeable dans l'écoulement.

En revanche, pour les plus faibles valeurs de  $\eta_0$ , les deux courbes s'éloignent des résultats valables sous hypothèse d'eau infinie. Les courbes présentent chacune un pic bien isolé et un comportement divergeant quand  $\eta_0 \rightarrow 0$ . La position de ces pics sur l'axe des abscisses ( $kz_0$ ) dépend de la valeur du rapport  $H/z_0$ . Les deux courbes obtenues pour  $H/z_0 = 10^3$  et  $H/z_0 = 10^4$  semblent

être translatées l'une par rapport à l'autre d'une décade. Ce décalage nous montre que, pour ces écoulements, l'échelle de longueur caractéristique n'est plus la rugosité hydrodynamique  $z_0$  comme c'était le cas précédemment, mais la hauteur d'eau  $H$ . Dans la suite, quand il s'agira d'écoulement à surface libre, la longueur utilisée pour l'adimensionnement sera  $H$ . Pour une rivière alluviale à fond sableux (où  $d \approx 300\mu\text{m}$ ), les valeurs typiques du rapport  $H/z_0$  sont comprises entre 100 et  $10^5$ .

Les pics observés sur les courbes  $A(\eta_0)$  et  $B(\eta_0)$  traduisent un phénomène de résonance de la surface libre. Cette résonance sera explicitée par la suite (notamment sur la figure 8.20). Nous pouvons toutefois formuler deux premières remarques concernant cette résonance. D'une part, la position de ces pics se trouve aux alentours de  $kH \sim 1/\mathcal{F}r^2$ ; d'autre part, les amplitudes des pics sont telles que le coefficient  $B$  prend des valeurs négatives pour les plus grandes valeurs du nombre de Froude  $\mathcal{F}r$ . Ces valeurs négatives correspondent à un retard du cisaillement basal par rapport à la topographie. Les comportements divergeants de  $A$  et  $B$  quand  $\eta_0 \rightarrow 0$  sont aussi très caractéristiques de la présence de la surface libre. De nouveau, le coefficient  $B/A$  prend des valeurs négatives. Ainsi, la surface libre joue un rôle sur l'écoulement en deux régions distinctes :  $kH \sim 1/\mathcal{F}r^2$  et  $kH \rightarrow 0$ . Nous verrons par la suite que dans ces deux cas distincts, l'effet de la surface libre sur les dunes est comparable.

La phase  $\varphi$  et l'amplitude  $|\delta|$  de la surface libre sont représentés en fonction de  $\eta_H$  sur la figure 8.20b et c pour un nombre de Froude  $\mathcal{F}r = 0.8$ . Concernant la courbe  $\delta(kH)$ , l'effet le plus saisissant est la présence d'un pic très marqué aux alentours de  $kH \sim 1.8$ . Cette augmentation rapide de l'amplitude s'accompagne d'un brusque déphasage de  $\pi$  (graphe 8.20c). Ces deux variations sont la signature claire d'une résonance de la surface libre. Pour des valeurs de  $kH$  plus importantes, la surface libre est en phase avec le fond et son amplitude tend vers 0. Aux plus petites longueurs d'ondes ( $\lambda \ll H$ ), la surface libre est plate. Elle n'a pas d'effets sur l'écoulement, c'est pourquoi les résultats obtenus dans le cas d'une hauteur d'eau infinie sont retrouvés. Pour des valeurs plus petites de  $kH$ , la surface libre et le fond sont en opposition de phase. La modulation de la surface libre est de même amplitude que le fond ( $|\delta| \approx 1$ ), la surface libre n'a que peu d'effets sur l'écoulements sauf dans le cas extrême où l'écart entre le fond et la surface libre est très faible. Dans ce cas d'écoulement en eau peu profonde,  $H \ll \lambda$ , l'écoulement est comme canalisé entre le fond  $Z$  et la surface libre  $H$ .

Sur la figure 8.20a, les lignes de courant ont été représentées dans le cas précis de la résonance, défini par un déphasage  $\varphi$  valant  $\pi/2$ . La fonction de courant utilisée pour tracer ce graphe n'est pas celle de la relation (8.41) car elle a été adaptée à la présence de la surface libre. Il apparait clairement

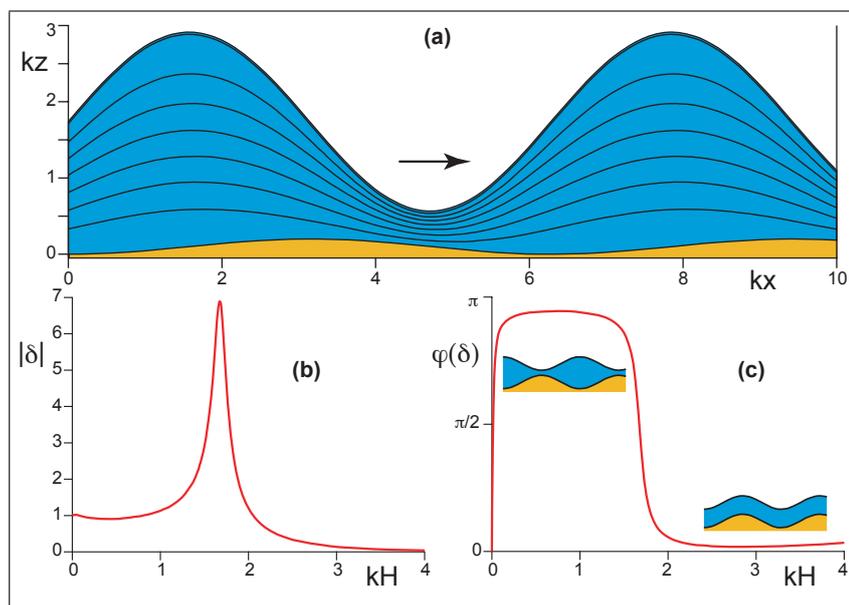


FIG. 8.20 – (a) Lignes de courant dans le cas d'un écoulement à surface libre, tracé pour le cas précis de la résonance de la surface libre. (b) Amplitude et (c) phase de la surface libre par rapport au fond ondulé en fonction de  $kH$  pour  $H/z_0 = 10^4$  et  $\mathcal{F}r = 0.8$ .

que les lignes de courant se trouvent pincées en aval du sommet des bosses. Ce pincement correspond à l'endroit où le cisaillement est maximum. Le fait qu'il soit situé à l'aval du sommet correspond à une valeur négative de  $B$ . Cette figure est à comparer à la figures 8.4 où les lignes de courant se pincent en amont du sommet, correspondant à un  $B$  positif. Nous constatons donc que la résonance de la surface libre décale la position du maximum de  $\tau_b$  vers l'aval par rapport au cas de référence d'un écoulement turbulent de hauteur infinie.

Cet effet est indépendant du choix du modèle, car il provient d'un mécanisme physique très robuste. Lorsqu'un fluide est en écoulement au-dessus d'un fond ondulé, des ondes de surfaces<sup>8</sup> sont excitées par le fond périodique à la fréquence  $u_{\text{surf}}/\lambda$ .  $u_{\text{surf}}$  représente la vitesse de surface. Dans l'approximation d'eau profonde, ces ondes se propagent à la vitesse  $\sqrt{g/k}$  par rapport à l'écoulement. Lorsque leur vitesse de propagation égale la vitesse de l'écoulement, l'énergie de ces ondes s'accumule au même endroit et la surface entre en résonance. La condition de résonance s'écrit alors :

$$u_{\text{surf}} = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad \text{ou encore} \quad kH = \frac{1}{\mathcal{F}r^2}. \quad (8.97)$$

Dans le cas d'un écoulement en eau peu profonde, la vitesse de résonance est corrigée par le terme  $\tanh(kH)$ , de sorte que la condition de résonance devient  $\mathcal{F}r^2 = \tanh(kH)/kH \approx 1$ .

$|\delta|$  et  $\varphi$  sont représentés sur la figure 8.21 pour différentes valeurs du nombre de Froude  $\mathcal{F}r$ . La résonance est d'autant plus marquée que le nombre de Froude est proche de 1. De même la position de la résonance diminue quand  $\mathcal{F}r^2$  augmente. Pour les plus faibles valeurs de  $\mathcal{F}r$ , les profils sont plus compliqués à analyser que celui présenté sur la figure 8.20, cependant, il est facile de remarquer que le pic de résonance disparaît. Quelque soit la valeur de  $\mathcal{F}r$ , pour les plus faibles valeurs de  $kH$ , l'amplitude  $|\delta|$  de la surface libre tend vers 1 tandis que le déphasage décroît lentement vers 0. La surface libre suit gentiment le fond dans le cas de motifs de grandes longueurs d'onde ( $H \ll \lambda$ ).

Sur la figure 8.21, les corrections au cisaillement et à la pression sur le fond sont représentés à travers les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  en fonction de  $\eta_H$  pour différentes valeurs de  $\mathcal{F}r$ . La présence de la surface libre modifie leurs comportements aux plus faibles valeurs de  $kH$  ( $\eta_H \leq 1$ ). La signature de la résonance de la surface libre est d'autant plus visible que le nombre de Froude est proche de l'unité. Lorsque la résonance est suffisamment marquée, le coefficient  $B$  devient négatif. Ces valeurs négatives sont bien cohérentes

---

<sup>8</sup>appelées "ondes de gravité"

8.4. Les effets de surface libre

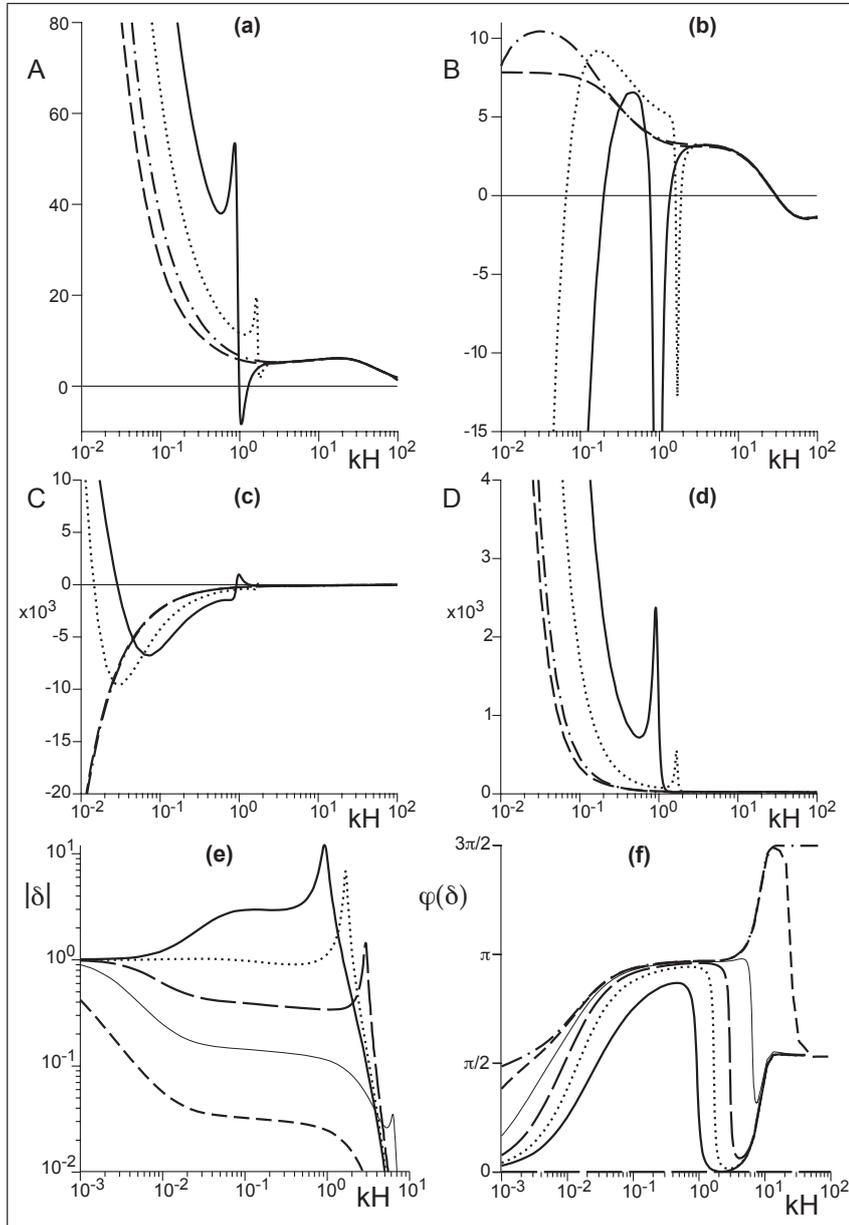


FIG. 8.21 –  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $\delta$  en fonction de  $kH$  pour  $H/z_0 = 10^3$  et différentes valeurs de  $Fr$ .

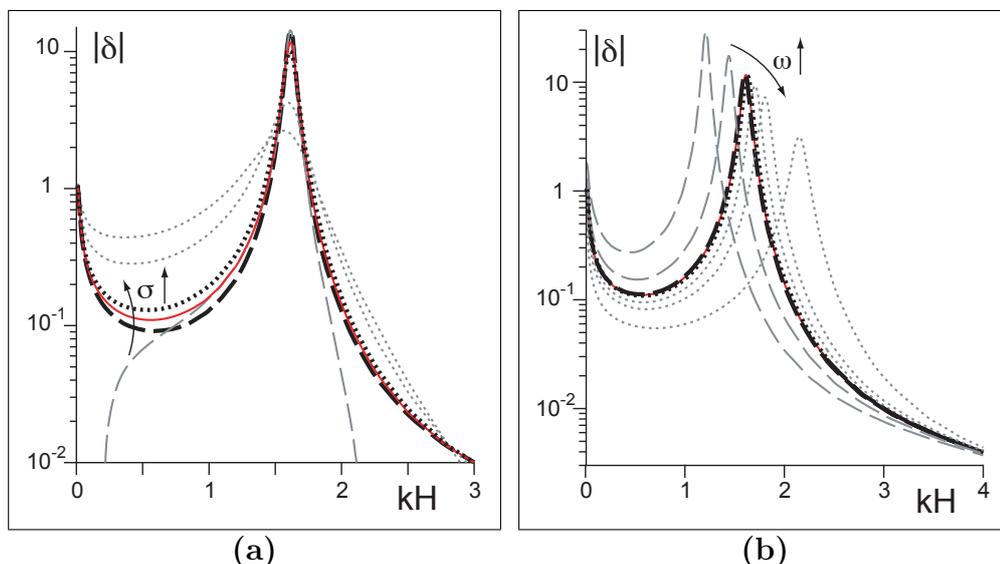


FIG. 8.22 –  $|\delta|$  vs  $kH$  en fonction de différentes valeurs de  $\sigma$  (a) et de  $\omega$  (b) pour  $\mathcal{Fr} = 0.8$ . La courbe rouge en traits pleins correspond au cas de référence  $\sigma = \omega = 0$ . Les courbes en pointillés représentent les valeurs positives des paramètres et les courbes en tirets codent pour les valeurs négatives. Ces valeurs sont : (a)  $\sigma/(ku_*) = -0.1, 0, 0.1, 1$  et  $2$ ; (b)  $\omega/(ku_*) = -5, -2, -1, -0.1, 0, 0.1, 1, 2$  et  $5$ .

avec la figure 8.20a pour laquelle les lignes de courant sont pincées en aval du sommet de la bosse, ce qui correspond effectivement à un retard de  $\tau_b$  sur la topographie  $Z$ . Pour les plus faibles valeurs de  $kH$ , le coefficient  $B$  possède un comportement divergeant et  $B \rightarrow -\infty$  quand  $\eta_H \rightarrow 0$ . Ce dernier comportement est un effet de profondeur finie. Dans cette limite d'écoulement en eau peu profonde, la surface libre se trouve très près du sol, si bien que la couche interne se développe sur toute la hauteur d'eau. Dans cette limite, les deux frontières, le fond et la surface libre, sont en phase

En 8.2.5, nous avons étudié l'influence d'un fond mouvant sur les propriétés de l'écoulement turbulent. Nous allons brièvement revenir sur les effets d'un fond mobile sur l'écoulement à surface libre en regardant principalement ses effets sur la résonance. Le mouvement du fond est de nouveau décrit par un taux de croissance  $\sigma$  et une vitesse de propagation  $\omega/k$ . Une valeur positive de  $\sigma$  rend compte d'une croissance verticale du fond. Quand  $\omega > 0$ , le fond se translate dans le sens du courant. La figure 8.22 représente les variations de l'amplitude de la surface libre  $|\delta|$  en fonction de  $kH$ . Comme

dans le cas d'un écoulement de hauteur infinie, les effets de  $\sigma$  sont difficiles à interpréter. Nous constatons simplement que lorsque le taux de croissance augmente, la résonance est moins marquée : le pic s'élargit et son amplitude diminue. De nouveau l'effet de  $\omega$  sur la résonance peut être expliqué en considérant la vitesse relative de l'écoulement par rapport au fond. Dans le cas où le motif se déplace vers l'aval, le fond ressent une vitesse plus faible que la vitesse absolue de l'écoulement. La résonance a lieu pour un nombre de Froude effectif plus petit que le nombre de Froude  $\mathcal{F}r$ , dont la définition ne tient compte que de la vitesse absolue du fluide. Finalement, les nombres d'onde résonants sont donnés par  $kH \sim 1/\mathcal{F}r^2$ , ce qui explique un décalage de la résonance vers de plus grand nombre d'onde quand  $\omega > 0$ . Inversement, quand le motif remonte l'écoulement, le fond perçoit une vitesse relative plus forte, entraînant une augmentation du nombre de Froude effectif et donc un décalage de la résonance vers de plus petits nombres d'onde.

Toutefois, les effets décrits ci-dessus ne sont significatifs que pour des valeurs de  $\sigma/(ku_*)$  et de  $\omega/(ku_*)$  de l'ordre de l'unité. En réalité, les valeurs caractéristiques du taux de croissance et de la vitesse de propagation sont suffisamment faibles pour négliger ces effets de fond mouvant lors des calculs hydrodynamiques.  $\sigma$  et  $\omega$  n'ayant pas d'effets, la résonance de la surface libre peut donc être invoquée pour interpréter la présence de pics sur les fonctions  $A$  et  $B$ .

En conclusion, la présence de la surface libre à une profondeur finie a deux effets principaux. Le premier est dû à la résonance des ondes de surface pour  $kH \sim 1/\mathcal{F}r^2$ . Le second est lié au fait que la couche interne se développe sur toute la hauteur d'eau quand  $kH \ll 1$ . Ces deux effets ont la même conséquence : ils déphasent le cisaillement basal vers l'aval. Nous verrons que pour ce qui concerne la formation des rides et des dunes, ces effets sont tous deux stabilisants.

#### 8.4. Les effets de surface libre

---

# Chapitre 9

## Formation des rides

### 9.1 Le transport

En 1.2, nous avons introduit les concepts liés au transport de sédiments par un écoulement. La conclusion de cette brève présentation tient dans le fait que seuls trois paramètres sont nécessaires pour parvenir à une description correcte et complète du transport du point de vue des rides et des dunes : le seuil de transport  $u_{\text{th}}$ , le flux saturé  $q_{\text{sat}}$  et la longueur de saturation  $L_{\text{sat}}$ . Ils permettent de placer le transport sédimentaire dans un cadre de description très général. Dans la perspective d'une analyse quantitative, il s'avère nécessaire de choisir un modèle de transport qui tient compte du ou des mécanisme(s) impliqué(s) dans le transport et permet, *in fine*, de fixer les dépendances de ces paramètres.

Pour cela, il faut procéder en deux étapes. La première consiste à se donner une loi de transport  $q_{\text{sat}}(u_*, u_{\text{th}})$  fondée soit sur des mesures expérimentales soit sur un modèle théorique. La détermination des dépendances de  $L_{\text{sat}}$  en fonction des différents paramètres du problème constitue la seconde étape.

Nous n'avons pas pour ambition de décrire la formation de motifs pour des écoulements à grands nombre de Froude, pour lesquels les forces hydrodynamiques engendrées par les fluctuations turbulentes sur les grains sont grandes devant la gravité. Les grains sont alors mis en mouvement en suspension sur toute la hauteur d'eau  $H$ . Nous limitons donc notre étude aux seuls modes de transport par charriage. Nous faisons donc l'hypothèse que l'essentiel du transport reste confiné au sein de la région où les contraintes sont indépendantes de la distance au sol  $z$ .

Notre démarche n'est pas ici de choisir ou de justifier une formule pour la loi de transport à utiliser pour prédire la formation des rides et des dunes.

## 9.1. Le transport

---

L'idée est plutôt de garder une formulation générale qui puisse à la fois s'adapter à des formules phénoménologiques comme la loi de [Meyer-Peter & Müller 1948] (cf. relation (1.20)) et à de véritables modèles. Nous adopterons la loi de transport suivante :

$$q_{\text{sat}} \propto u_*^2{}^\gamma (u_*^2 - u_{\text{th}}^2) , \quad (9.1)$$

dont la valeur de l'exposant  $\gamma$  peut être variée à loisir. Par exemple, la relation de Peter & Müller peut être retrouvée en prenant  $\gamma = 0.5$ . Nous voulons mettre l'accent sur le fait qu'étant donnée la difficulté des mesures, le choix d'une loi de transport adaptée est encore sujet à controverses. Le flux dimensionnant  $Q$  introduit à la relation (7.5) se réécrit :

$$Q \propto (\gamma + 1) u_*^{2(\gamma+1)} . \quad (9.2)$$

Ce que nous voulons maintenant préciser, ce sont les mécanismes dynamiques limitant le transport sédimentaire, indépendamment de la formule qui en résulte pour le flux saturé. Nous étudions ici deux mécanismes distincts limitant le transport : l'un limité par le temps d'érosion et l'autre par la quantité de mouvement disponible dans le fluide.

### 9.1.1 Transport limité par l'érosion

Nous décrivons ici succinctement un modèle de transport limité par l'érosion, inspiré par [Charru 2006]. Les calculs techniques sont détaillés dans le second article placé en annexe.

L'idée de départ est de considérer le cas d'un écoulement proche du seuil. Dans ce cas, les fluctuations turbulentes sont peu efficaces pour arracher les grains piégés à la surface du lit. On peut alors penser que, les grains se re-déposant, le flux de grains transporté est limité par le nombre de grains arrachés au sol par unité de surface. On considère qu'un grain en mouvement empêche les grains statiques sous lui d'être mûs par l'écoulement. Par conséquent, le flux de grains est très sensible au désordre du lit granulaire, car celui-ci conditionne la difficulté à arracher les grains de surface et la facilité à les repiégés. Sous ces hypothèses, le flux saturé  $q_{\text{sat}}$  est égal au taux d'érosion  $\varphi_{\uparrow}$  multiplié par la distance caractéristique  $\mathcal{L}$  entre deux arrêts d'un grain à la surface du lit. Ce taux d'érosion représente le volume de grains qui quitte le sol  $V_{\uparrow}$  par unité de temps et de surface :

$$\varphi_{\uparrow} = \frac{V_{\uparrow}}{d^2 \mathcal{T}} = \int_0^\theta \frac{\pi d^3 \mathcal{N}'(\theta_{\text{th}})}{6 \phi d^2 \mathcal{T}(\theta, \theta_{\text{th}})} d\theta_{\text{th}} . \quad (9.3)$$

$\mathcal{N}(\theta)$  représente la fraction de grains posés à la surface du lit susceptibles d'être entraînés par l'écoulement caractérisé par un nombre de Shields  $\theta$ , et  $\phi$ , la fraction volumique du lit. En un sens, la fonction  $\mathcal{N}$  représente le paysage potentiel constitué par l'ensemble des pièges à la surface du lit de la rivière. On s'attend à ce que, en-dessous du seuil de transport  $\theta_m$ ,  $\mathcal{N}$  soit nul et qu'il augmente ensuite pour tendre vers 1 au dessus d'un nombre de Shields  $\theta_M$ . Notons que cette grandeur ne peut pas être mesurée expérimentalement et qu'on est réduit à prendre une forme fonctionnelle raisonnable pour  $\mathcal{N}$ , caractérisée par  $\theta_m$  et  $\theta_M$ . Le rapport  $\theta_M/\theta_m$  caractérise donc le niveau de désordre du lit, le contraste entre les pièges les plus et les moins profonds. Les observations montrent que partant d'un lit préparé par sédimentation ces seuils diminuent au cours du temps au fil des réarrangements de surface [Charru 2006]. Bien sûr, dans les conditions naturelles, la distribution de pièges à la surface est statistiquement stationnaire dans la mesure où le lit a eu des temps longs pour se réarranger.

$\mathcal{T}(\theta, \theta_{th})$  est le temps mis par un grain pour parcourir sa propre taille. En vertu de l'hypothèse ci-dessus,  $\mathcal{T}(\theta, \theta_{th})$  est aussi le temps caractéristique d'érosion. Dans l'article mis en annexe, nous montrons comment la loi d'échelle suivie par le temps  $\mathcal{T}$  peut se construire en considérant un unique grain sur lequel agissent deux forces : les forces motrices exercées par le fluide et la gravité qui tend à le ramener sur le fond.

La distance  $\mathcal{L}$  parcourue par un grain avant de s'arrêter est indépendante du piège dans lequel se trouvait initialement la particule entraînée. Par définition, il y a dans la surface  $d\mathcal{L}$  balayée exactement un piège suffisamment profond pour arrêter le grain. En considérant que la surface d'un piège vaut  $d^2$ , on obtient :

$$\mathcal{L} = \frac{d}{1 - \mathcal{N}(\theta)}. \quad (9.4)$$

Ainsi, pour une situation proche du seuil,  $\mathcal{N} \rightarrow 0$ , un grain parcourt une faible distance : typiquement, il s'arrête dans le piège adjacent et franchit une distance  $d$ . La distance  $\mathcal{L}$  diverge en  $\theta_M$ .

### 9.1.2 Transport limité par la quantité de mouvement

Un second mécanisme peut prendre le dessus à grande vitesse : la rétroaction des grains sur le fluide qui les transporte. On considère que la vitesse de cisaillement dans la couche de transport, notée  $u_f$  est plus petite que  $u_*$ . En utilisant le calcul de trajectoire de grain détaillé en annexe, et les idées développées ci-dessus pour déterminer le taux d'érosion, le flux saturé

## 9.1. Le transport

---

s'exprime alors :

$$q_{\text{sat}} \propto \frac{(u_{\text{f}}^2 - u_{\text{th}}^2)}{(u_{\text{M}}^2 - u_{\text{f}}^2) \left[ c_m + \ln \left( \frac{u_{\text{f}}^2}{u_{\text{f}}^2 - u_{\text{th}}^2} \right) \right]} . \quad (9.5)$$

En effet, lorsque la force de l'écoulement est suffisamment importante pour transporter des grains, l'adaptation de la vitesse du grain arraché à celle de l'écoulement constitue l'un des mécanismes qui limite le transport. Lors de cette adaptation, le grain et le fluide qui le transporte échangent de la quantité de mouvement, de sorte que le grain est accéléré et l'écoulement ralenti. Plus il y a de grains transportés, plus la vitesse de l'écoulement dans la couche de transport chute et donc le taux d'érosion. La contrainte totale  $\rho_f u_*^2$  est constante au travers de la couche interne et de la couche de surface. Elle se décompose en une contrainte d'origine fluide et une contrainte d'origine granulaire :

$$\rho_f u_*^2 = \rho_f u_{\text{f}}^2 + \rho_s \phi \frac{(v_{\downarrow} - v_{\uparrow})}{\mathcal{L}} q . \quad (9.6)$$

On obtient ainsi une condition d'équilibre de la couche de transport dans laquelle (i) c'est toujours le temps d'érosion qui est limitant mais (ii) la vitesse est réduite par le transport de grains. Juste au dessus du seuil  $\theta_m$ , le flux de grains est trop faible pour pouvoir significativement affecter l'écoulement. On retrouve alors un flux saturé limité par l'érosion, de la forme :

$$q_{\text{sat}} \propto \frac{(u_*^2 - u_{\text{th}}^2)}{(u_{\text{M}}^2 - u_*^2) \left[ c_m + \ln \left( \frac{u_*^2}{u_*^2 - u_{\text{th}}^2} \right) \right]} . \quad (9.7)$$

Loin du seuil  $\theta_M$ , la vitesse de cisaillement dans la couche de transport devient constante et égale à  $u_M$  mais ce résultat est obtenu pour une densité de grains transportés de plus en plus grande. On obtient alors :

$$q_{\text{sat}} \propto \frac{\rho_f}{\rho_s} \sqrt{\frac{\rho_f d}{(\rho_s - \rho_f)g}} (u_*^2 - u_{\text{M}}^2) . \quad (9.8)$$

Cette expression se différencie de la loi en  $u_*^3$  de [Bagnold 1956] ou de [Meyer-Peter & Müller 1948] par une dépendance asymptotique en  $u_*^2$ . Ces relations correspondent au choix  $\gamma = 0$  dans la relation générale (9.1). Notons en conclusion que l'existence d'une rétro-action du transport sur l'écoulement n'a jamais été mise en évidence expérimentalement. La mise en oeuvre d'une expérience exclusivement dédiée à la mesure de la rugosité hydrodynamique en présence de particules transportées par l'écoulement turbulent permettrait une avancée certaine sur ce point.

### 9.1.3 Effets de la pente sur le transport

À cause des effets de la gravité, il est plus facile de déloger un grain se trouvant à la surface de la face d'avalanche d'une dune qu'un grain placé sur la face à vent. Cet effet peut-être encodé naturellement dans le seuil de mise en mouvement, qui est alors corrigé par un facteur  $u_{\text{th}} (1 + \mu^{-1} \partial Z / \partial x) = u_{\text{th}} (1 + i \mu^{-1} kZ)$ .  $\mu$  représente la pente d'avalanche caractéristique du matériau granulaire. La valeur  $\mu = \tan 32^\circ$  est compatible avec les expériences réalisées avec du sable.

En prenant en compte la correction linéaire apportée par la prise en compte des effets de pente, la relation (7.5) peut être ré-interprétée comme :

$$q_{\text{sat}} = \frac{\partial q_{\text{sat}}}{2 \partial u_*} u_* (A + i B) kZ + \frac{\partial q_{\text{sat}}}{2 \partial u_{\text{th}}} \frac{u_{\text{th}}}{\mu} i kZ. \quad (9.9)$$

L'effet de la gravité étant proportionnel à la pente, il s'agit d'un mécanisme de diffusion de la hauteur de grains. Cet effet est donc stabilisant.

Ainsi, avec la paramétrisation générale (9.1), les coefficients  $a$  et  $b$  s'expriment en fonction des coefficients  $A$  et  $B$ , mais aussi en fonction du paramètre  $\gamma$  et de la force du courant par rapport à la gravité,  $u_*/u_{\text{th}}$  :

$$\begin{aligned} a &= A - \frac{\gamma A}{1 + \gamma} \frac{u_{\text{th}}^2}{u_*^2}, \\ b &= B - \frac{\gamma B + \mu^{-1}}{1 + \gamma} \frac{u_{\text{th}}^2}{u_*^2}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

On observe que le rapport  $b/a$  et donc le déphasage augmente avec la force du courant puisque près du seuil ( $u_* \approx u_{\text{th}}$ ),  $b/a$  vaut environ  $(B - \mu^{-1})/A$  alors que pour de grandes valeurs du cisaillement, ce rapport  $b/a$  tend vers  $B/A$ .

### 9.1.4 La longueur de saturation $L_{\text{sat}}$

À l'instar de  $q_{\text{sat}}$ , la longueur de saturation peut, selon le régime étudié, être déterminée par des mécanismes dynamiques différents. Proche du seuil de mise en mouvement, dans le régime limité par l'érosion, la longueur de relaxation est égale à la longueur  $\mathcal{L}$  parcourue par un grain :

$$L_{\text{sat}} = \mathcal{L} = \frac{d}{1 - \mathcal{N}(\theta)}. \quad (9.11)$$

Dans le cas d'un modèle de transport contrôlé par l'échange de quantité de mouvement entre les grains et le fluide qui les transporte. La longueur

## 9.2. Les rides

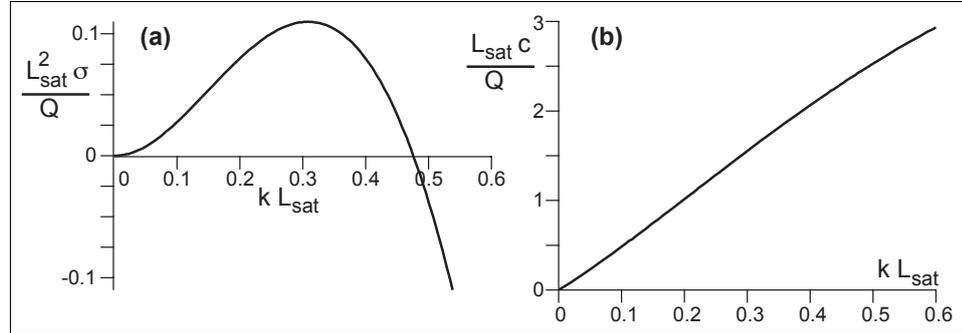


FIG. 9.1 – La relation de dispersion est tracée en fonction  $k$  adimensionnée par  $L_{\text{sat}}$ . (a) Le taux de croissance  $\sigma$  est adimensionné par  $L_{\text{sat}}^2/Q$  et (b) la vitesse de propagation  $c$  par  $L_{\text{sat}}/Q$ .

de saturation correspond à la distance nécessaires à un grain de taille  $d$  de passer d'une vitesse nulle à la vitesse du fluide. Elle se calcule en considérant que la force d'entraînement hydrodynamique est compensée par l'inertie :

$$\frac{\pi}{6} \rho_s \frac{du}{dt} = \rho_f C_\infty \frac{\pi}{8} d^2 (u_\infty - u)^2 \quad (9.12)$$

qui peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{4}{3} \frac{\rho_s}{C_\infty \rho_f} d \frac{du}{dt} = (u_\infty - u)^2. \quad (9.13)$$

La longueur de saturation se déduit par intégration et approximation par une relaxation exponentielle. On obtient alors :

$$L_{\text{sat}} \simeq \frac{2}{C_\infty} \frac{\rho_s}{\rho_f} d. \quad (9.14)$$

Cette longueur est indépendante de la vitesse du fluide et dépendant de la taille des grain : plus les grains sont gros, plus cette longueur est importante. Enfin, le rapport des masses volumiques du grain et du fluide permet de transposer ce mécanisme à d'autres fluides. Nous utiliserons des mesures éoliennes pour vérifier cette hypothèse.

## 9.2 Les rides

On s'intéresse maintenant aux mécanismes de formation des rides. Comme ce sont, par définition, les motifs qui ne sentent pas les effets de la surface libre, seuls les résultats obtenus sous hypothèse d'écoulement de hauteur infinie sont présentés dans ce chapitre.

### 9.2.1 La relation de dispersion

Les deux relations (7.9) et (7.10) constituent la relation de dispersion de l'instabilité linéaire. Les valeurs des coefficients  $A$  et  $B$  et le choix de la loi de transport permettent de tracer cette relation de dispersion. Nous avons fait le choix d'une description où le transport est limité par l'inertie des grains :  $q_{\text{sat}}$  est ainsi défini par la relation (9.1) avec  $\gamma = 0$  et nous avons représenté ces relations ( $\sigma(k), c(k)$ ) sur la figure 9.1 en fonction du nombre d'onde  $k$  adimensionné par la longueur de saturation  $L_{\text{sat}}$ . Il est à noter que les résultats auraient été qualitativement les mêmes en utilisant une autre loi de transport, comme celle de la relation (9.5) valable près du seuil de mise en mouvement.

La courbe  $\sigma(k)$  définit deux régions distinctes : un lit plat est instable vis-à-vis de motifs périodiques de grande longueur d'onde. Pour  $k \geq k_c$ , le taux de croissance devient négatif, les plus petites longueurs d'onde sont stabilisées. La solution non nulle de l'équation  $\sigma(k_c) = 0$  permet de définir le nombre d'onde de coupure de l'instabilité :  $k_c L_{\text{sat}} = b/a$ . Nous retrouvons l'effet de l'introduction d'une longueur de relaxation, qui stabilise les plus petites longueurs d'ondes  $k > k_c$ . Cette relation permet aussi d'insister sur l'importance du rapport  $b/a$ , qui dépend, lui, des deux sous-parties du problème : hydrodynamique et transport.

Les coefficients  $b$  et  $a$  dépendent faiblement de  $kz_0$ . En première approximation, nous allons les considérer constants. Cette approximation permet d'exprimer analytiquement le nombre d'onde  $k_{\text{max}}$  pour lequel le taux de croissance est maximum par :

$$k_{\text{max}} L_{\text{sat}} = X^{1/3} - X^{-1/3} \quad \text{avec} \quad X = \frac{b}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (9.15)$$

Dans le cadre de l'étude de la croissance d'un motif par instabilité linéaire, la longueur d'onde initiale est associée à la longueur d'onde la plus instable ( $\lambda_{\text{max}}$ ), car celle-ci croît plus vite que les autres. Cela suppose que le lit plat soit perturbé initialement par un bruit de large bande spectrale. Le maximum de la courbe de la figure 9.1a correspond par conséquent à la longueur d'onde d'apparition des rides.

Sur le graphe 9.1b, la vitesse de propagation du motif est positive et croît quand  $kL_{\text{sat}}$  augmente. Cette croissance est linéaire pour les plus grands nombres d'onde. Un raisonnement en loi d'échelle permet de retrouver cette proportionnalité entre  $c$  et  $k$ . La conservation de la matière au niveau du sol (7.8) implique que la vitesse du fond érodable  $c$  est proportionnelle à la différence de flux de sédiments  $\delta q$  entre une crête et un creux et inversement

## 9.2. Les rides

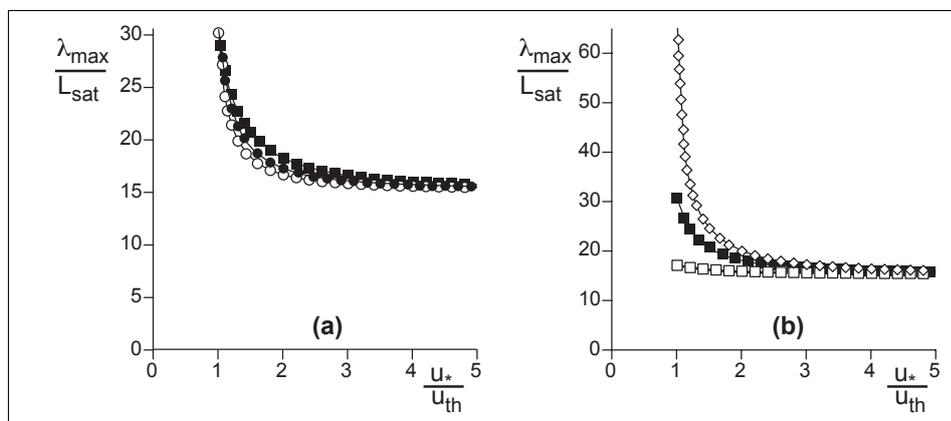


FIG. 9.2 –  $\lambda_{\max}/L_{\text{sat}}$  vs  $u_*/u_{\text{th}}$ . (a) différentes lois de transport sont utilisées :  $q_{\text{sat}}(u_*, u_{\text{th}})$  de la relation (9.1) est utilisé avec ( $\circ$ )  $\gamma = 0$  ou ( $\bullet$ )  $\gamma = 0.5$  et ( $\blacksquare$ ) utilisation de la relation (9.7) obtenue à l'aide d'un modèle valable proche du seuil de mise en mouvement quand l'érosion limite le transport de sédiments. (b) Différentes valeurs de pente d'avalanche  $\mu$  sont testées :  $\tan 24^\circ$  ( $\diamond$ ),  $\tan 32^\circ$  ( $\blacksquare$ ),  $\tan 70^\circ$  ( $\square$ ).

proportionnel à l'amplitude de la perturbation  $2\zeta$ . En première approximation,  $\delta q \sim Qk\zeta$ , ce qui conduit à  $c \propto Q/\lambda$ . A noter que dans le régime non-linéaire, quand une face d'avalanche s'est formée, on s'attend plutôt à une loi  $c \propto Q/\zeta$  où  $\zeta$  est la hauteur de la ride.

Pour obtenir l'expression de  $\lambda_{\max}$  en (9.15), nous avons fait l'approximation que les deux coefficients  $a$  et  $b$  étaient constants. Dans le chapitre 9.1.3, nous avons vu qu'il est possible d'exprimer  $a$  et  $b$  en fonction de  $A$  et  $B$  (cf. relation (9.10)) et donc en fonction de  $\eta_0$ . La loi de transport utilisée en (9.1) montre une augmentation de  $b/a$  avec  $u_*$ . Ce résultat est indépendant du choix de  $q_{\text{sat}}(u_*, u_{\text{th}})$  et traduit simplement le fait que le mécanisme de destabilisation devient de plus en plus efficace lorsque la force du courant augmente. Il en résulte une diminution de la longueur d'onde d'apparition des rides  $\lambda_{\max}$  quand la force du courant augmente. Nous retrouvons cette variation sur la figure 9.2a, où  $\lambda_{\max}$  est représenté en fonction de  $u_*/u_{\text{th}}$ , les différents symboles correspondant à différents choix de loi de transport. Nous remarquons que, quantitativement, le choix du modèle de transport influence très peu les résultats. Associé à  $L_{\text{sat}}$  et  $u_{\text{th}}$ ,  $q_{\text{sat}}$  permet de d'encoder tous les effets du transport sur la dynamique des rides. Comme on peut le voir, les conclusions sont indépendantes du modèle utilisé pour décrire le transport des sédiments sur le fond de la rivière. Nous utiliserons pour la suite, la loi

## 9.2. Les rides

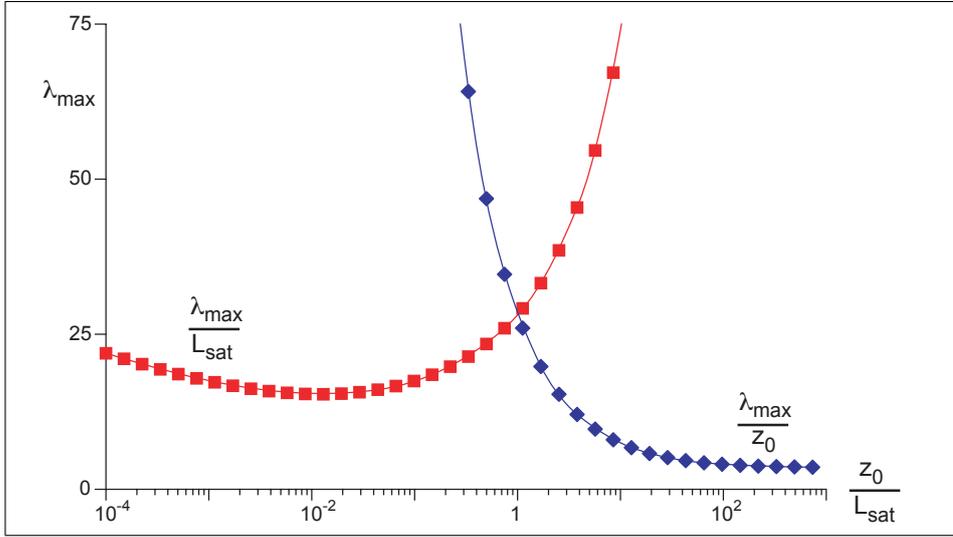


FIG. 9.3 – Longueur d’onde  $\lambda_{\max}$  qui maximise le taux de croissance en fonction de deux rapports de longueurs : le rapport  $\lambda_{\max}/L_{\text{sat}}$  fait intervenir la longueur caractéristique du transport (carrés rouges) alors que le rapport  $\lambda_{\max}/z_0$  implique la rugosité hydrodynamique (losanges bleus).

de transport très générale (9.1) en prenant  $\gamma = 0$ .

Les effets stabilisants de la gravité sont représentés sur le graphe  $\lambda_{\max}/L_{\text{sat}}$  vs  $u_*/u_{\text{th}}$  de la figure 9.2b. Les différents symboles correspondent à différentes valeurs de l’angle d’avalanche  $\mu$ . Les effets stabilisants se font ressentir à l’approche du seuil de mise en mouvement des grains et sont très sensibles à la valeur de  $\mu$ . Quand l’angle d’avalanche diminue, la diffusion de hauteur liée à la gravité augmente de sorte que le nombre d’onde de coupure  $k_c$  diminue et que la longueur d’onde de déstabilisation augmente. C’est pourquoi la courbe obtenue pour des billes de verres ( $\mu = \tan 24^\circ$ ) est toujours au-dessus de la courbe tracée pour des billes de sables, dont l’angle d’avalanche mesuré est nettement supérieur :  $\mu = \tan 32^\circ$ . Dans le cas des expériences de [Loiseleux et al. 2005] effectués avec des billes de verre qui rendent compte d’une pente d’avalanche très supérieure aux valeurs typiques, les effets de la gravité sont négligeables et  $\lambda_{\max}$  est indépendant de  $u_*$ . Par la suite, nous garderons la valeur,  $\mu = \tan 32^\circ$ , cohérente avec les expériences, pour lesquelles  $\lambda_{\max}$  décroît de  $\sim 30 L_{\text{sat}}$  à  $\sim 20 L_{\text{sat}}$  quand  $u_*$  augmente.

### 9.2.2 Sélection de la longueur d'onde

Ayant constaté que le choix d'une forme fonctionnelle ou une autre pour  $q_{\text{sat}}$  ne change que peu le résultat, la véritable question est de déterminer le mécanisme qui détermine la loi d'échelle suivie par la longueur d'onde,  $\lambda_{\text{max}}$ . Or, dans l'hypothèse utilisée de hauteur d'eau infinie, il n'y a que deux longueurs caractéristiques possibles. La première vient de l'hydrodynamique, c'est la rugosité  $z_0$  et la seconde provient du modèle de transport, c'est la longueur de saturation  $L_{\text{sat}}$ . La figure 9.3 montre que la longueur de saturation contrôle la loi d'échelle de  $\lambda_{\text{max}}$  dans le cas où  $L_{\text{sat}} > z_0$ , quelque soit le choix du modèle de transport. À l'inverse, c'est l'hydrodynamique qui gouverne la loi d'échelle de  $\lambda_{\text{max}}$  lorsque  $z_0 > 10L_{\text{sat}}$ . Pour des rides, la longueur d'onde initiale mesurée est fréquemment plus grande que  $\sim 100d$ , alors que  $z_0$  est comparable à la taille des grains  $d$ . Dans l'hypothèse d'une loi d'échelle contrôlée par l'hydrodynamique, la longueur d'onde mesurée serait sous-estimée de deux ordres de grandeur. C'est donc la longueur de saturation du flux  $L_{\text{sat}}$  qui gouverne l'instabilité linéaire d'un lit plat en écoulement infini. En conséquence, nous affirmons que les modèles de transport, qui ne prennent pas en compte un retard explicite entre le flux de sédiments  $q$  et le cisaillement ne peuvent pas rendre correctement compte de l'instabilité des rides.

Nous verrons également que les dunes éoliennes se forment par la même instabilité linéaire d'un lit plat (voir chapitre 11.4). Bien que différents modes de transport de sédiments soient mis en jeu (saltation, reptation, charriage, etc) dans différentes conditions (régime turbulent sur fond rugueux, régime visqueux, etc) les instabilités qui en résultent peuvent être d'une seule et même nature.

### 9.2.3 Une mesure de la croissance de rides aquatiques

Nous avons effectué des observations sur le bassin versant de la Leyre. La figure 9.4 montre la croissance initiale de motifs au fond de la Leyre à Sauniac. Ces mesures ont été faites en aplissant le lit sur une zone d'observation d'une dizaine de mètres de long, dans une portion homogène de la rivière. La croissance de perturbations générées par l'écoulement a été suivie à l'aide d'une ligne laser. Cette ligne intercepte une section longitudinale du lit de la rivière et donne accès aux profils longitudinaux  $Z(x, t)$ . Trois de ces profils montrant l'évolution d'une ride ont été représentés sur la figure 9.4b. Dans les premiers temps de l'évolution, le motif reste assez symétrique. Puis assez rapidement, il devient asymétrique : sur le profil pris au bout de 150s, il est possible de distinguer clairement la face d'avalanche plus raide que la face

## 9.2. Les rides

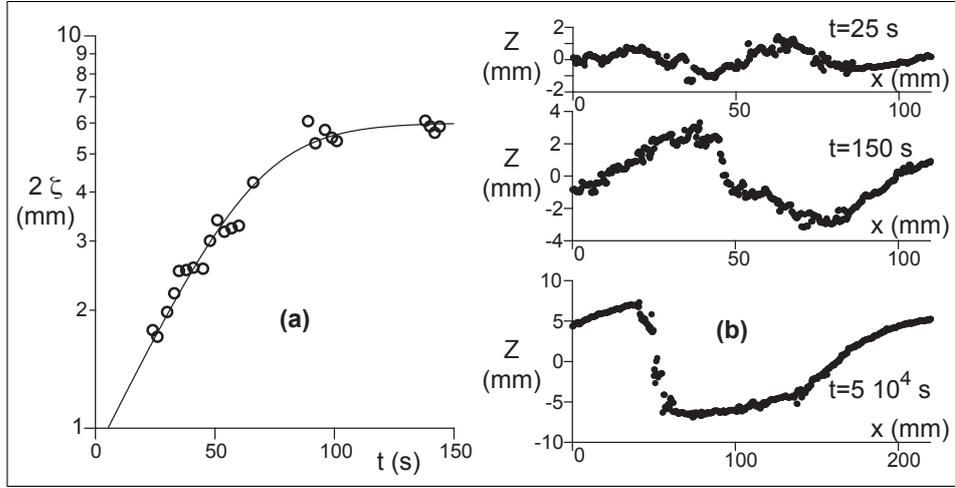


FIG. 9.4 – Formation de rides sur le lit de la Leyre. Mesures réalisées à Sauniac le 16/09/08 pour  $H = 52$  cm,  $Fr = 0.21$  et  $u_* = 3$  cm/s. (a) Amplitude  $\zeta$  des perturbations du lit en fonction du temps. La ligne continue représente l'ajustement des données par la fonction exponentielle (9.16), dont on tire le taux de croissance  $\sigma = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ . (b) Relevé du profil longitudinal du lit  $Z(x, t)$  pour trois temps d'évolution différents :  $t = 25$ , 150 et 50000s.

amont. À la fin des mesures ( $t > 50000\text{sec}$ ), le paysage sous-marin retrouve un état statistiquement stationnaire, similaire à celui observé avant les mesures.

Ces profils nous permettent de déterminer l'amplitude  $2\zeta$  et la longueur d'onde  $\lambda$  du motif pour chacun de ces profils. Pour ce faire, nous avons calculé la fonction d'auto-corrélation  $C(\delta) = \langle Z(x)Z(x + \delta) \rangle$ . Pour ce run, la fonction d'auto-corrélation,  $C(\delta)$  présente un second maximum pour  $\delta \neq 0$  pour des temps supérieurs à  $t > 25\text{s}$ . La position de ce maximum secondaire donne la longueur d'onde et son amplitude permet d'accéder à  $\zeta$ . Pendant les 150 premières secondes de cet enregistrement, la longueur d'onde n'évolue que très peu ( $\lambda_{\max} \approx 100$  mm). Sur la figure 9.4a, nous avons représenté l'évolution temporelle de l'amplitude du profil à cette longueur d'onde initiale pour ces 150 premières secondes. Bien que la variation d'amplitude ne soit pas très importante sur toute la durée de l'évolution (elle passe de 2mm à 6mm), ces mesures montrent une croissance puis une saturation de l'amplitude des motifs. La courbe superposée représente la fonction :

$$\zeta = \frac{\zeta_{\infty}}{\sqrt{1 + \exp(-2\sigma t)}}, \quad (9.16)$$

qui est la solution de l'équation d'amplitude d'un système faiblement non

## 9.2. Les rides

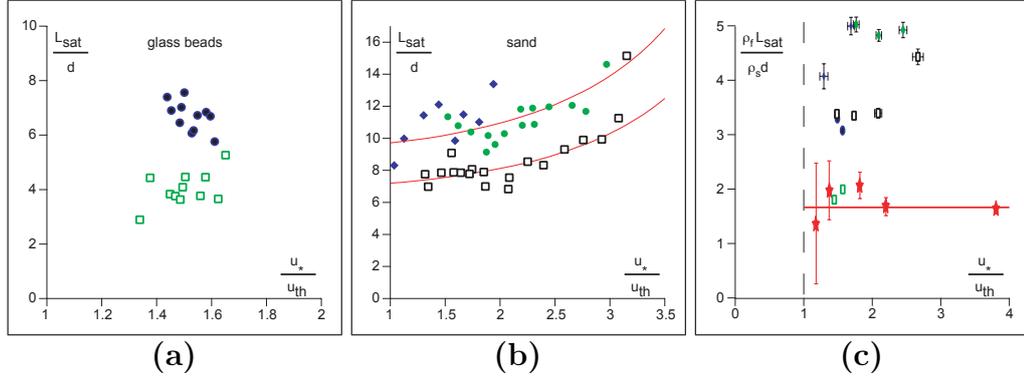


FIG. 9.5 –  $L_{\text{sat}}$  déterminé à partir de mesures expérimentales de la longueur d’onde initiale de croissance de rides en fonction de  $u_*$  pour différents types de particules : (a) des billes de verres de diamètre  $d = 250 \mu\text{m}$  ( $\bullet$ ),  $d = 500 \mu\text{m}$  ( $\square$ ) et (b) des grains de sables de tailles  $d = 210 \mu\text{m}$  ( $\bullet$ ),  $240 \mu\text{m}$  ( $\blacklozenge$ ),  $d = 830 \mu\text{m}$  ( $\square$ ). Le meilleur ajustement de la relation (??) a également été représenté ; il diverge en  $u_* = u_M \simeq 5.2u_{\text{th}}$ . (c) les données du graphe (b) ont été moyennées et comparées à des données éoliennes.

linéaire (les termes en  $\zeta/\zeta_\infty$  de l’expression suivante proviennent de termes non-linéaires) :

$$\frac{d\zeta}{dt} = \sigma\zeta \left[ 1 - \left( \frac{\zeta}{\zeta_\infty} \right)^2 \right] \quad (9.17)$$

L’ajustement de la fonction (9.16) avec les données présentées permet d’obtenir des valeurs pour  $\sigma$  et  $\omega$ . Nous obtenons,  $\sigma/(k u_*) \sim 10^{-3}$  et  $\omega/(k u_*) \sim 10^{-2}$ . Nous avons discuté en 8.2.5 des effets d’un fond mobile sur l’écoulement et nous avons conclu que ces effets sont pertinents lorsque les valeurs de ces deux paramètres sont proches de l’unité. Ces valeurs expérimentales, faibles devant 1 justifient, *a posteriori*, l’hypothèse qui consiste à étudier l’écoulement turbulent au-dessus d’un fond fixe.

### 9.2.4 Les rides pour comprendre le transport

En 9.1.4, nous avons discuté deux mécanismes limitant la longueur de relaxation  $L_{\text{sat}}$ . La relation (9.11) qui décrit la longueur de saturation près du seuil et qui fait intervenir la fonction de répartition des puits potentiels à la surface du lit  $\mathcal{N}$  est pratiquement impossible à mesurer expérimentalement. Cependant, cette loi prédit une divergence de la longueur de relaxation pour un Shields critique  $\theta_M$ . À l’inverse, la relation obtenue pour un trans-

port contrôlé par l’inertie, prédit une invariance de la longueur de relaxation avec la vitesse de l’écoulement. Pour vérifier ces deux prédictions, nous avons exploité les données expérimentales de [Coleman & Melville 1996, Baas 1999, Langlois & Valance 2007]. Ces expériences, qu’elles soient faites avec des billes de verre [Langlois & Valance 2007] ou des grains de sable, ont toutes la particularité de rapporter des mesures de rides dans les premiers moments du développement, là où la longueur d’onde des motifs ne varie que faiblement (c’est la partie linéaire sur la courbe de la figure 9.4a par exemple). Connaissant la longueur d’onde expérimentale  $\lambda_{\max}$ , nous avons inversé les relations de dispersion pour accéder à une estimation de  $L_{\text{sat}}$  (dans la loi de transport, nous avons choisi  $\gamma = 0$  et fixé la valeur de  $\mu$  en fonction du matériau utilisé :  $\mu = 24^\circ$  pour les billes de verre et  $\mu = 32^\circ$  pour les grains de sable).

Les valeurs de la longueur de saturation estimées à partir d’expériences avec des billes de verre de deux diamètres différents sont représentées en fonction de  $u_*/u_{\text{th}}$  sur la figure 9.5a. Les données obtenues avec des grains de sable sont sur le graphique adjacent, pour lequel seules les données correspondant aux plus gros grains ont été reportées ( $d \simeq 200\mu\text{m}$  correspond à un écoulement sur fond rugueux). Ces deux graphes ont été présentés pour tester la robustesse de la longueur de relaxation vis à vis du modèle proche du seuil de mise en mouvement. La figure 9.5c reprend les données du graphe 9.5b en les moyennant afin de comparer les données sub-aquatiques à des données éoliennes de [Andreotti et al. 2008]. Cette fois-ci, ce n’est plus  $L_{\text{sat}}/d$  qui est représenté en fonction de  $u_*/u_{\text{th}}$ , mais plutôt  $(\rho_f L_{\text{sat}})/(\rho_s d)$ , qui correspond à la longueur de relaxation pour un modèle de transport limité par l’inertie des grains. Ces trois graphes exhibent des tendances assez cohérentes (ce qui n’est pas le cas des mesures réalisées avec de plus petits grains).

Plaçons-nous dans le cas d’un modèle de transport qui serait limité par l’érosion des grains et commentons les graphes 9.5a et 9.5b. Ce modèle prédit une longueur de relaxation de quelques tailles de grains. Les valeurs obtenues sur les billes de verre sont invariablement plus faibles que celles obtenues avec du sable. Les prédictions correspondant aux données près du seuil sont très sensibles aux valeurs prises pour  $\mu$  et  $u_{\text{th}}$ . Quoique basée sur quelques points, l’augmentation de  $L_{\text{sat}}$  avec la vitesse de l’écoulement  $u_*$  est un plus robuste. Cet effet est inclus dans la relation (9.11) qui présente une divergence quand  $\mathcal{N}(u_*) \rightarrow 1$ . Enfin, il apparaît clairement que  $L_{\text{sat}}/d$  dépend de  $d$  : ce rapport augmente quand  $d$  diminue. Cet effet n’est pas prévu par la relation (9.11). Près du seuil, cette relation prédit que  $L_{\text{sat}}$  varie comme la taille des grains, puis augmente quand  $u_*$  augmente. L’ajustement des données par la courbe donne une divergence pour  $u_* = u_M \approx 5.2u_{\text{th}}$ . Cette valeur élevée n’est pas en accord avec les résultats obtenus par [Charru 2006], qui prédit une

augmentation plus rapide de la longueur de saturation (il trouve un rapport  $u_M/u_{th}$  proche de l'unité). Nous en concluons que l'érosion ne peut-être le mécanisme qui contrôle la longueur de saturation que très près du seuil. Nous allons donc maintenant tester la seconde hypothèse, à savoir une longueur de relaxation contrôlée par l'inertie des grains mis en mouvement par le fluide.

La figure 9.11c montre la dépendance de cette longueur de saturation en fonction de la vitesse de l'écoulement. Les points provenant des mesures éoliennes montrent une remarquable invariance de  $L_{sat}$  en fonction de  $u_*$ . Ces mesures confirment les conclusions de [Hersen et al. 2002, Andreotti 2004, Claudin & Andreotti 2006, Andreotti & Claudin 2007], à savoir :  $L_{sat} \approx 2 (\rho_s/\rho_f) d$ . Les données provenant des expériences subaquatiques de la figure 9.5b ont été moyennées sur six points. Les longueurs de saturation adimensionnées par  $(\rho_s/\rho_f) d$  sont du même ordre de grandeur. Les meilleurs accords de mesures sub-aquatiques avec les données éoliennes sont obtenues pour les billes de verre de plus gros diamètre (les carrés évidés). Les données les plus éloignées des résultats éoliens correspondent aux plus petits grains de sable. Nous pouvons comprendre que le calcul effectué ci-dessus est plus adapté pour des billes de verre sphériques et lisses que pour des grains de sable anguleux. De plus, nous avons négligé les effets liés à la viscosité du fluide, ce qui est cohérent avec le fait que la prédiction marche mieux pour les gros grains.

### 9.2.5 Sélection non linéaire de l'amplitude

Les conclusions précédentes ont été obtenues à l'aide de l'analyse de stabilité linéaire d'un lit plat, cisailé par un écoulement turbulent de hauteur infinie. Nous avons vu que lors de la formation des rides sur le fond, l'amplitude de celles-ci augmente linéairement avec le temps alors que la longueur d'onde évolue peu. Cette croissance permet de repérer la longueur d'onde initiale,  $\lambda_{max}$  et d'en déduire des informations sur le transport et  $L_{sat}$ . Rapidement, l'amplitude de ces rides n'évolue plus que lentement, ce qui correspond au moment où la longueur d'onde moyenne augmente remarquablement. En effet, le motif se développe par coalescence lente de nombreuses petites structures. Durant tout ce murissement, chacune des rides peut être considérée comme une entité stationnaire dont l'amplitude  $2\zeta$  n'est fonction que de la longueur d'onde  $\lambda$ .

Dans la partie 8.3, les calculs de l'écoulement au-dessus d'un fond ondulé ont été étendus à l'ordre trois en amplitude. Le nombre d'onde du motif périodique  $k$  multiplié par son amplitude  $\zeta$  est supposé être un petit paramètre et l'extension reste valable pour des rapports d'aspects  $2\zeta/\lambda$  allant jusqu'à  $\sim 1/10$ . Un des résultats principaux de cette extension faiblement

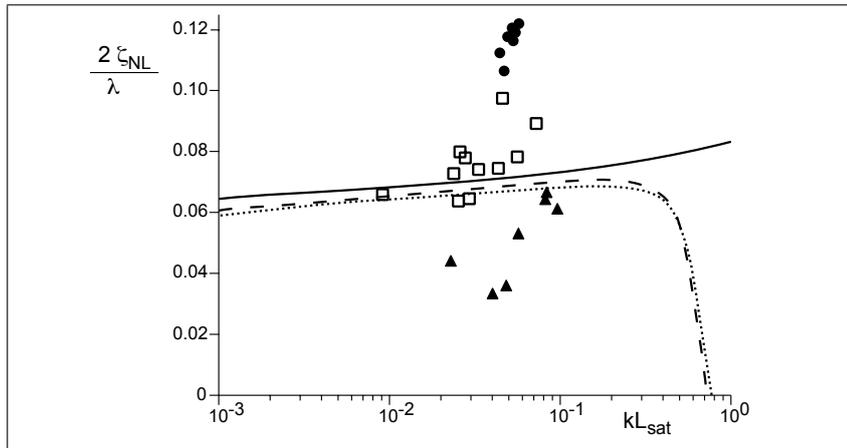


FIG. 9.6 – Le rapport d’aspect des rides  $2\zeta_{NL}/\lambda$  obtenu par des calculs faiblement non-linéaires est représenté en fonction du nombre d’onde  $k$  adimensionné par  $L_{sat}$ . La courbe en tiret a été obtenue avec les valeurs suivantes des paramètres :  $L_{sat}/z_0 = 80$ ,  $u_*/u_{th} = 3.8$ ,  $\mu = \tan 32^\circ$  and  $\gamma = 0.5$ . La ligne en pointillé a été adapté à un calcul éolien en prenant  $L_{sat}/z_0 = 350$ . La ligne continue correspond à un calcul non-linéaire sans les effets de stabilisants de  $L_{sat}$ . Les symboles correspondent à des mesures expérimentales réalisées par [Baas 1999] ( $\bullet$ ) et [Guy et al. 1966] ( $\blacktriangle$ ) pour des rides sub-aquatiques alors que les symboles  $\square$  correspondent à des mesures éoliennes mesurées par [Baddock et al. 2007]

non-linéaire montre que le déphasage entre le cisaillement sur le fond et la topographie diminue quand l'amplitude  $\zeta$  augmente. Cet effet d'amplitude stabilise les motifs. Cherchant à obtenir les premières corrections aux résultats linéaires, nous notons  $A = A_1 + A_3 (k\zeta)^2$  et  $B = B_1 + B_3 (k\zeta)^2$ . Nous définissons également l'amplitude  $\zeta_{\text{NL}}$  pour laquelle, le déphasage entre la topographie  $Z$  et la modulation de la contrainte de cisaillement sur le fond  $\tau_b$  s'annule. À cette amplitude, la topographie se propage sur le fond à la vitesse  $c$  sans que son amplitude ne croisse ni ne diminue :  $\partial Z/\partial t = -c \partial Z/\partial x$ . Cette amplitude particulière est donc définie par un taux de croissance nul, ce qui conduit à la condition :  $b = akL_{\text{sat}}$ .

Sur la figure 9.6, le rapport d'aspect  $2\zeta_{\text{NL}}/\lambda$  est représenté en fonction de  $kL_{\text{sat}}$ . La courbe continue représente les variations de ce rapport d'aspect en fonction du nombre d'onde dans le cas où la longueur de saturation  $L_{\text{sat}}$  n'est pas introduite dans le modèle de transport. Pour les plus faibles valeurs du nombre d'onde,  $\zeta_{\text{NL}}/\lambda$  augmente très faiblement (de manière logarithmique) quand  $k$  augmente. Ce résultat prédit, qu'une fois les rides développées, elles gardent un rapport d'aspect à peu près constant valant  $\approx 1/15$ .

Les courbes en pointillés et en tirets ont été tracées à l'aide de deux jeux de paramètres différents. Le premier représente les résultats non-linéaires dans le cas d'un écoulement en rivière de hauteur infinie, le second est adapté à un écoulement éolien discuté brièvement en 11.4. De fait, nous avons ajouté les résultats d'expériences en canal correspondant à l'observation de rides matures par [Guy et al. 1966, Baas 1999] ainsi que les mesures sur des dunes éoliennes de [Baddock et al. 2007]. L'ajout d'une longueur de saturation au problème crée un rapport d'aspect maximum. Ce maximum est généré par la décroissance rapide de  $\zeta_{\text{NL}}/\lambda$  pour une valeur proche de  $k_c$ . Les observations expérimentales représentées ici sont assez regroupées autour d'une valeur médiane de  $kL_{\text{sat}} \approx 0.05$  mais présentent une grande dispersion de rapport d'aspect. Les observations éoliennes  $2\zeta_{\text{NL}}/\lambda \simeq 1/13$  sont quantitativement comparables à ces prédictions théoriques. Les données obtenues par [Allen 1985] et [Coleman & Melville 1994] rendent compte de rapport d'aspect plus faible ( $\simeq 1/20$ ) contrairement aux mesures de [Baas 1999] qui obtient des rides dont le rapport d'aspect est regroupé autour de  $1/8$ . Ces valeurs mettent particulièrement en lumière la difficulté de comparer les résultats expérimentaux entre eux.

# Chapitre 10

## Formation des dunes

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à la formation des rides dans le cas d'un écoulement de hauteur infinie. Nous allons dans ce chapitre prendre en compte l'existence d'une surface libre, et donc d'une nouvelle échelle caractéristique – la hauteur d'eau  $H$  – et étudier son rôle dans le mécanisme de formation des dunes.

### 10.1 Effets de la surface libre sur la relation de dispersion

Dans la partie hydrodynamique 8.4.4, nous avons étudié l'influence de la surface libre sur les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ . Nous avons vu que, pour un fond ondulé à une longueur d'onde petite devant la hauteur d'eau  $H$ , les contraintes basales sont les mêmes que celles obtenues sous hypothèse d'écoulement infini. En revanche, en analysant plus particulièrement le comportement des coefficients  $A$  et  $B$ , nous avons recensé deux situations pour lesquelles le rôle de la surface libre est important : ils correspondent aux nombres d'ondes  $kH \sim 1/\mathcal{F}r^2$  et  $kH \rightarrow 0$ . Lorsque  $kH \sim 1/\mathcal{F}r^2$ , nous avons vu que la surface libre entre en résonance avec le fond ondulé qui joue le rôle d'excitateur et que cet effet est d'autant plus marqué que la valeur du nombre de Froude est élevée. Pour  $kH \rightarrow 0$ , nous avons trouvé des comportements divergents de  $A$  et  $B$  que nous avons analysés comme étant liés au fait que la couche interne de l'écoulement envahit toute l'épaisseur.

La relation de dispersion qui donne le taux de croissance  $\sigma$  d'un motif de nombre d'onde  $k$  se calcule à partir des coefficients  $a$  et  $b$ , qui dépendent de  $A$  et  $B$  (cf. relations (7.9) et (7.9)). L'examen du taux de croissance et de la vitesse de propagation sur la figure 10.1 mettent également en évidence les deux régions où l'action de la surface libre domine les autres effets hydro-

## 10.1. Effets de la surface libre sur la relation de dispersion

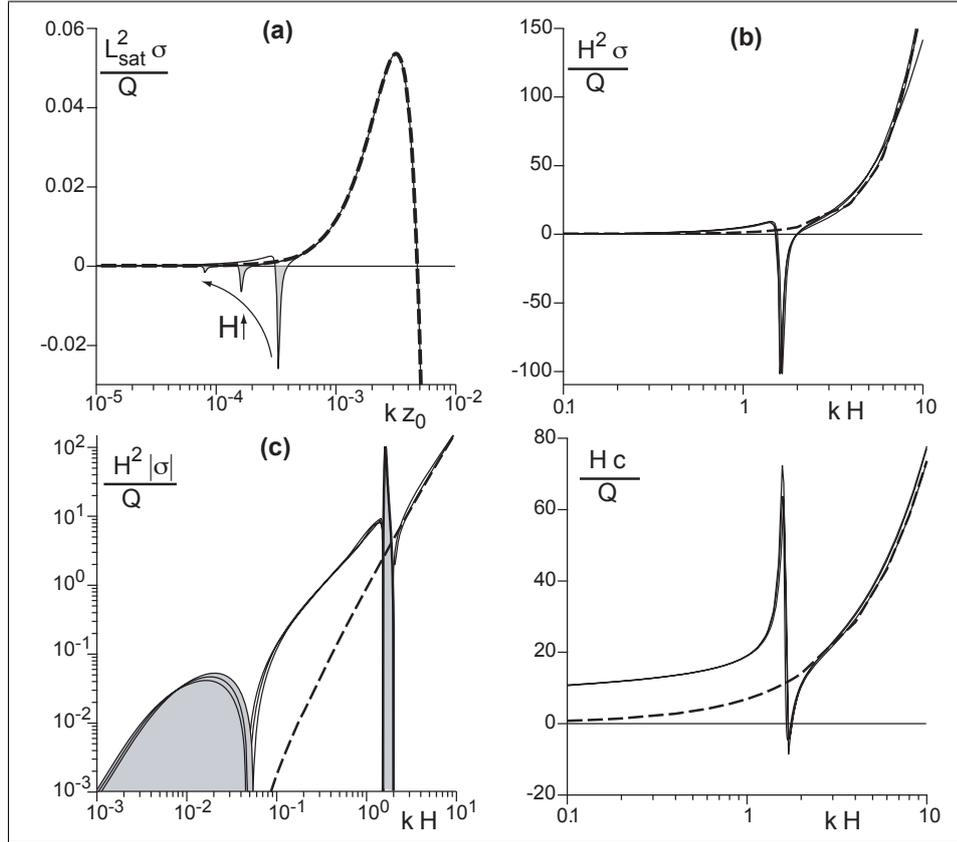


FIG. 10.1 – Le taux de croissance  $\sigma$  et la vitesse de propagation  $c$  des motifs sont représentés en fonction du nombre d'onde  $k$  pour différentes valeurs de  $H/z_0$  ( $H/z_0 = 5000 - 10000 - 20000$ ) et  $\mathcal{F}r = 0.8$ ,  $\mu = \tan 32^\circ$ ,  $u_{\text{th}}/u_* = 0.8$ ,  $L_{\text{sat}}/z_0 = 80$ . La principale différence entre les graphes (a) à (c) réside dans le mode de représentation. La ligne pointillée représente les résultats de la figure 9.1 obtenus sous l'hypothèse d'un écoulement infini.

dynamiques. La figure 10.1a a été tracée dans le même esprit que la figure 8.19 en choisissant différentes valeurs du rapport  $H/z_0$  : l'objectif d'une telle représentation est de montrer que la longueur caractéristique est dorénavant la hauteur d'eau  $H$ . Alors que toutes les courbes se superposent pour les plus grandes valeurs de  $k$ , la position et l'amplitude du pic associé à la résonance de la surface libre dépendent, elles, du rapport  $H/z_0$ . Notons que cette représentation (Lin-Log) ne permet pas d'apprécier d'éventuelles modifications dans la forme de la relation de dispersion pour  $k \rightarrow 0$ . La position et l'amplitude du maximum du taux de croissance sont très robustes et ne sont pas modifiées par l'introduction de la surface libre. Dans le chapitre précédent, nous avons vu que ce maximum est associé aux rides qui croissent par instabilité linéaire du lit à la longueur d'onde  $\lambda_{\max}$ . Tant que la longueur caractéristique du transport  $L_{\text{sat}}$  qui gouverne la formation des rides est suffisamment séparée d'échelle avec la hauteur d'eau (i.e.  $H \gg L_{\text{sat}}$ ), la formation des rides n'est pas perturbée par la présence de la surface libre. Les résultats du chapitre précédent restent valables avec ou sans surface libre.

Sur le graphe  $\sigma(k)$  de la figure 10.1b, la hauteur d'eau est utilisée comme longueur adimensionnante. Les trois pics distincts de la figure 10.1a se regroupent tous pour des valeurs de  $kH$  proches de l'unité. Sa largeur et son amplitude dépendent du nombre de Froude (cf. figure 10.2). Lorsque  $\mathcal{Fr}$  est suffisamment grand, ce pic franchit l'axe  $\sigma = 0$ . Cela signifie que toute une bande de longueurs d'onde devient stable. Cet effet stabilisant de la surface libre se comprend en termes hydrodynamiques par le pincement, à la résonance, des lignes de courant à l'aval du sommet des bosses.

Sur la figure 10.1c, la représentation Log-Log met en valeur les effets de la surface libre aux plus grandes longueurs d'ondes. La courbe en tiret représente le taux de croissance en absence de surface libre. Les zones correspondant à des taux de croissance négatifs ont été colorées : ce sont la zone correspondant à la résonance discutée ci-dessus, ainsi que la région  $kH \rightarrow 0$ . Entre ces deux régions stables,  $\sigma$  est sensiblement plus important qu'en absence de surface libre.

Enfin, la vitesse de propagation est représentée en fonction de  $kH$  sur le graphe 10.1d. À l'instar du taux de croissance,  $c$  n'est pas modifié pour les plus petites longueurs d'onde ( $\lambda \ll H$ ). Les trois courbes correspondant à différentes valeurs de  $H/z_0$  se regroupent sur la même courbe. Un pic bien visible apparaît pour  $kH \sim 1/\mathcal{Fr}^2$  et la vitesse de propagation devient plus grande en présence de surface libre par rapport au cas infini quand  $kH \rightarrow 0$ . La figure 10.2b est plus compliquée à analyser : pour les faibles valeurs du nombre de Froude, le pic n'est que peu marqué et la vitesse reste positive pour toutes les longueurs d'onde. Quand le nombre de Froude augmente, la vitesse de propagation devient négative sur une gamme restreinte de lon-

## 10.2. Formation des dunes

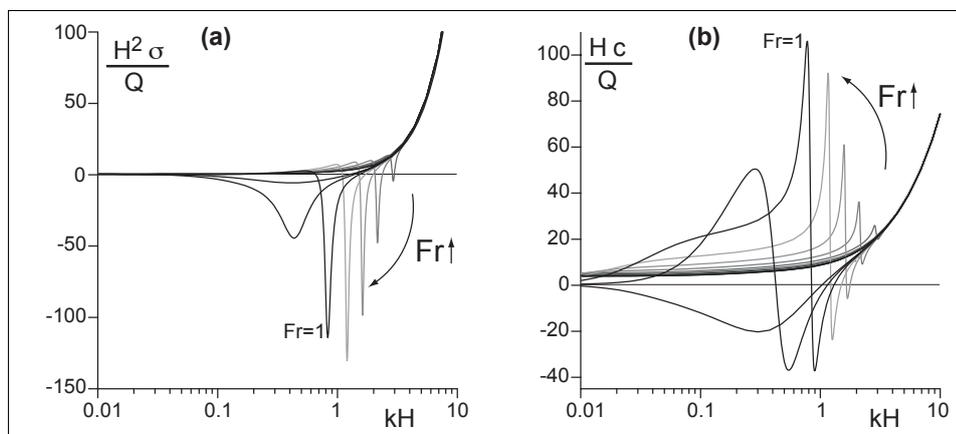


FIG. 10.2 – La dispersion de relation  $\sigma(k)$  (a) et  $c(k)$  (b) a été obtenue pour  $H/z_0 = 10000$ ,  $\mu = \tan 32^\circ$ ,  $u_{th}/u_* = 0.8$  et  $L_{sat}/z_0 = 80$  et différentes valeurs du nombre de Froude :  $\mathcal{Fr} = 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 1; 1.1; 1.2$ .

guez d'onde, centrée autour de  $kH \sim 1/\mathcal{Fr}^2$ . Au-dessus d'une certaine valeur de  $\mathcal{Fr}$ , la vitesse de propagation associée aux longueurs d'onde les plus grandes est toujours négative.

## 10.2 Formation des dunes

Nous avons regroupé les différentes relations de dispersion sur le diagramme de stabilité  $(\mathcal{Fr}, kH)$  de la figure 10.3. La région centrale correspond à la zone des longueurs d'ondes instables ( $\sigma > 0$ ). Elle est délimitée par deux courbes de stabilité marginale. La région stable des petites longueurs d'ondes (à droite du diagramme) est contrôlée par la longueur de saturation  $L_{sat}$ , ce qui explique l'indépendance de la courbe  $\sigma = 0$  avec le  $\mathcal{Fr}$ . Sur ce diagramme, les maxima du taux de croissance  $\sigma$  sont représentés en pointillés. Le maximum principal de  $\sigma$  correspond à une droite verticale sur le diagramme. Ce mode le plus instable est associé à la croissance des rides dont la longueur d'onde initiale ( $\lambda_{max} \ll H$ ) est gouvernée par la longueur caractéristique du transport  $L_{sat}$ . C'est le résultat principal du chapitre 9.2.

La présence du pic de résonance fait automatiquement apparaître un second maximum, à la gauche de celui-ci, sur la relation de dispersion. Peut-on pour autant l'associer aux dunes? C'est clairement la conclusion du travail de [Richards 1980]. Dans son modèle, les petites longueurs d'ondes ne sont pas restabilisées par le mécanisme de saturation du flux, mais par l'effet de la gravité (qui modifie la valeur du seuil de transport), de telle sorte que la longueur

## 10.2. Formation des dunes

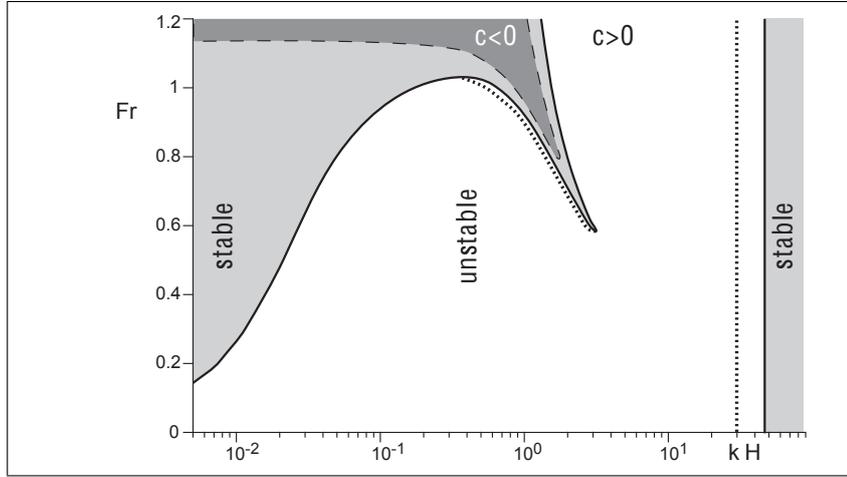


FIG. 10.3 – Diagramme de stabilité ( $\mathcal{F}r, kH$ ) pour  $H/z_0 = 10000$ ,  $\mu = \tan 32^\circ$ ,  $u_{th}/u_* = 0.8$  et  $L_{sat}/z_0 = 80$ .

d'onde associée aux rides est contrôlée par la rugosité  $z_0$ . Le parallèle entre rides et dunes chez [Richards 1980] est souligné par le fait qu'il trace, non pas  $\sigma(k)$ , mais  $\sigma(k)/k$ , ce qui amplifie les effets aux grandes longueurs d'ondes. Dans des travaux plus anciens [Kennedy 1963, Reynolds 1965], l'hydrodynamique est décrite par un écoulement potentiel et l'instabilité 'de dune' est paradoxalement obtenue en introduisant (comme un paramètre arbitraire) un déphasage entre cisaillement et flux de sédiment. Ici, le retard à la saturation du flux est toujours stabilisant. Enfin, dans d'autres travaux qui traitent l'hydrodynamique de manière plus réaliste et n'ont ainsi pas besoin d'un tel paramètre de déphasage pour obtenir une zone instable [Engelund 1970, Fredsøe 1974, Colombini 2004], le pic associé aux rides n'est pas présent pour diverses raisons (e.g. non-prise en compte de la saturation du flux, cisaillement 'basal' calculé au-dessus du lit), et la formation de ces rides explicitement exclue de leurs modèles. En conséquence, ce qui est pour nous un maximum secondaire de la relation de dispersion est pour eux le maximum principal, et donc interprété comme la signature de l'instabilité de dune.

Reprécisons pour un instant ce qu'est une instabilité linéaire. Considérons un lit érodable et plat auquel on ajoute un bruit blanc. Ce lit est soumis à un écoulement turbulent et la structure qui croît le plus vite correspond au mode le plus instable. Or, ce sont les rides qui sont associées au mode le plus instable, si bien que la longueur d'onde  $\lambda_{max}$  domine le motif qui se développe. Cependant, tous les modes situés entre la résonance et le mode le plus instable ont également un taux de croissance positif, Ainsi, si une instabilité linéaire

### 10.3. Observation de dunes dans la Leyre

---

du lit devait être formulée pour rendre compte de la croissance de dunes, tous ces modes intermédiaires croîtraient plus rapidement que celui associé à ce maximum secondaire. Enfin, le rapport formé par les valeurs des deux maxima du taux de croissance associé est de l'ordre de  $\sim (H/L_{\text{sat}})^2$ . Ce rapport vaut environ  $\sim 10^4$  pour des expériences en canal ou bien dans la Leyre (où  $d \approx 400\mu\text{m}$  et  $H \approx 40\text{cm}$ ) et  $\sim 10^6$  dans les grandes rivières (où  $d \approx 400\mu\text{m}$  et  $H \approx 4\text{m}$ ). Si nous considérons que le temps d'apparition d'une ride est de l'ordre de 1 minute (cf. figure 9.4), le temps caractéristique associé à la croissance linéaire d'une dune serait de plusieurs jours. Ce résultat n'est pas cohérent avec les valeurs mesurées dans la Leyre (cf. figure 10.4, où le temps typique d'apparition d'une dune est d'une ou de quelques heures).

Pour ces raisons, à l'inverse des travaux cités ci-dessus, la formation de dunes en rivière ne peut donc pas s'expliquer simplement par un mécanisme d'instabilité linéaire. Il semble au contraire que les dunes se forment progressivement par la fusion et l'interaction de plus petites structures. Le fait qu'expérimentalement il soit systématiquement observé une maturation des motifs (i.e. une croissance progressive de la longueur d'onde avec le temps) renforce cette position. Ainsi un mécanisme non-linéaire paraît plus adapté pour décrire la formation des dunes.

## 10.3 Observation de dunes dans la Leyre

Pour vérifier nos conclusions, nous avons observé l'évolution de structures au fond de la Leyre. Nous avons manuellement arasé le lit de la rivière sur une surface d'environ  $\simeq 6$  m par  $\simeq 1$  m. Après environ 2 heures, un état d'équilibre statistique est atteint. Il correspond à l'état dans lequel se trouvait le lit avant le début des mesures (voir photo 10.4c). La figure 10.4a présente les mesures de la longueur d'onde moyenne des structures en fonction du temps. Les premiers instants de l'expérience sont rapportés sur l'encart 10.4b. Durant les 150 premières secondes, la longueur d'onde de cette instabilité n'évolue que très peu ( $\lambda_{\text{max}} \approx 100$  mm). Cette évolution correspond à la formation de rides sur le fond de la rivière : ces observations ont été commentées au chapitre 9.2.3. Passé cette étape de formation des rides, nous observons une croissance progressive de la longueur d'onde du motif. Cette croissance s'arrête lorsque la longueur d'onde atteint des valeurs ( $\lambda \rightarrow 400$  mm), i.e. de l'ordre de la hauteur d'eau (ici  $H \approx 50$  cm). Ce même type d'observation a été mesuré expérimentalement dans des canaux expérimentaux par [Raudkivi & Witte 1990, Raudkivi 2006, Guy et al. 1966]. Nous n'avons pas observé la formation par instabilité linéaire du lit de structures pour des longueurs

### 10.3. Observation de dunes dans la Leyre

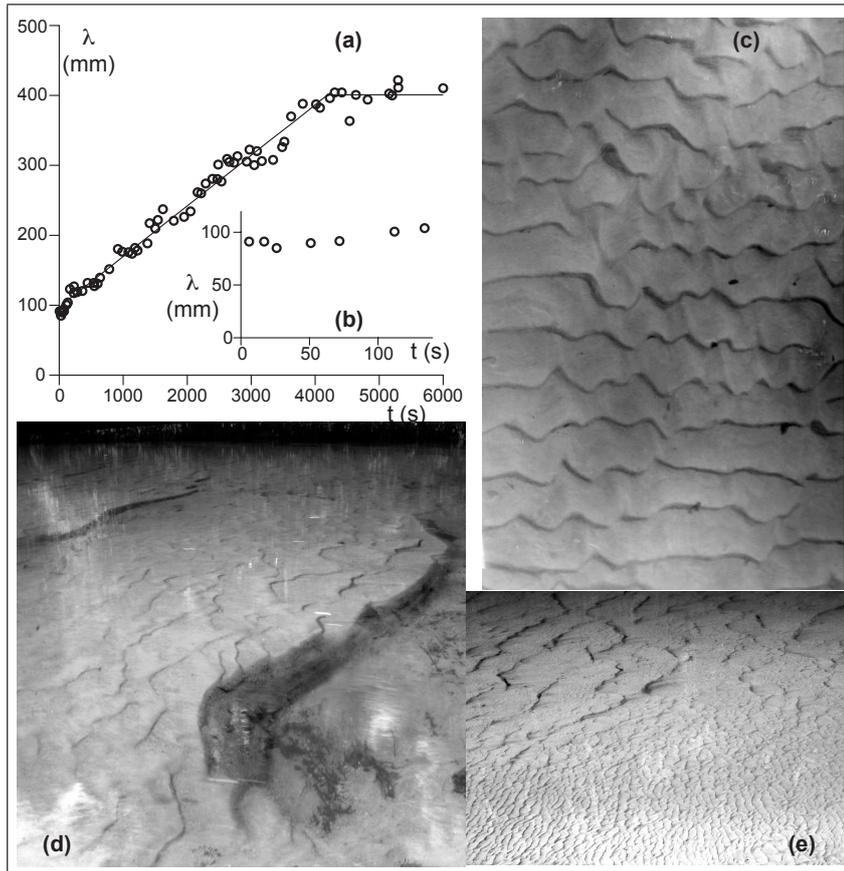


FIG. 10.4 – Formation de dunes sur le lit de la Leyre à Mios le 17/09/08 pour  $H = 50$  cm,  $\mathcal{F}r = 0.28$  et  $u_* = 4$  cm/s. (a)-(b) Evolution temporelle de la longueur d'onde  $\lambda$  des motifs. (c) Photo des dunes sous-marines prise à  $t \sim 6000$ s. (d) Photographie de plus grands motifs dans la partie centrale de la rivière où la granulométrie est plus polydisperse. (e) Photo de la transition entre la zone du lit près du bord recouverte de dunes et de la zone centrale de la rivière où des structures plus grandes se sont développées.

d'onde proches de  $H$ . Ces observations sont cohérentes avec nos principales conclusions. La formation de dunes en rivière résulte de la superposition et de l'interaction de structures d'échelles plus petites. Ce processus est non-linéaire. Notons que dans le cas d'un écoulement infini, cette coalescence de motifs ne se serait jamais arrêtée. Ainsi, plutôt que de chercher un mécanisme déstabilisant dont la signature serait un pic dans la relation de dispersion, la sélection d'une longueur d'onde de l'ordre de la hauteur d'eau doit être associée à un mécanisme stabilisant.

Une photo de la section de la rivière où ont été réalisées ces mesures est représentée sur la figure 10.4e. La différence des échelles de longueur d'onde entre le centre et les bords de la rivière est frappante. La mesure de  $\lambda(t)$  représentée sur la figure 10.4a a été faite dans le premier tiers de la section, là où les structures développées atteignent des longueurs d'onde de l'ordre de  $H$ , i.e. compatibles avec la condition de résonance (ce sont des dunes). Au centre, les structures sont plus larges. Des dunes sont également présentes sur la face amont de ces structures que nous nommons "méga-dunes" (voir photo 10.4d). Les conditions de vitesse de l'écoulement et de pente sont sensiblement les mêmes que sur les bords. La principale différence réside dans la granulométrie du fond, qui est plus homogène sur les bords. Au centre de la section, des plus gros grains sont présents et protègent le fond. Nous avons également observés la croissance de ces méga-dunes en arasant le fond sur une aire de 4 mètres de large et 12 mètres de long. Comme précédemment, des rides croissent rapidement, puis murissent pour former des dunes. Pendant cette phase de coalescence des structures, les plus gros grains se déposent dans la zone inter-dunes, ce qui défavorise la propagation de la structure. Très progressivement, les dunes coalescent elles-même pour former des structures de longueur d'onde beaucoup plus grande (figure 10.5a). Ces méga-dunes se propagent beaucoup plus lentement que les dunes, si bien que les dunes s'accumulent sur leur crête. L'apparition de ces structures durent quelques heures. Sans avoir fait d'analyse quantitative multi-échelle de la topographie, on observe que la longueur d'onde finale de ces méga-dunes est de l'ordre de 10 à  $20H$ .

Nous avons regroupé sur la figure 10.5 différentes mesures issues de la littérature. Ces mesures correspondent à des longueurs d'ondes finales, en canal ou bien en rivières naturelles. La base de données la plus impressionnante est certainement celle des expériences de [Guy et al. 1966]. Dans leur article, ces auteurs font une distinction entre rides et dunes sur un critère absolu de taille – une ride est un motif de moins de deux pieds de longueur d'onde. Nous n'avons pas reporté ici ces précisions et présentons les données 'en bloc'. La dispersion de ces données est grande, probablement en partie due au fait que l'état initial du lit granulaire n'est pas bien contrôlé (l'état final de l'expé-

### 10.3. Observation de dunes dans la Leyre

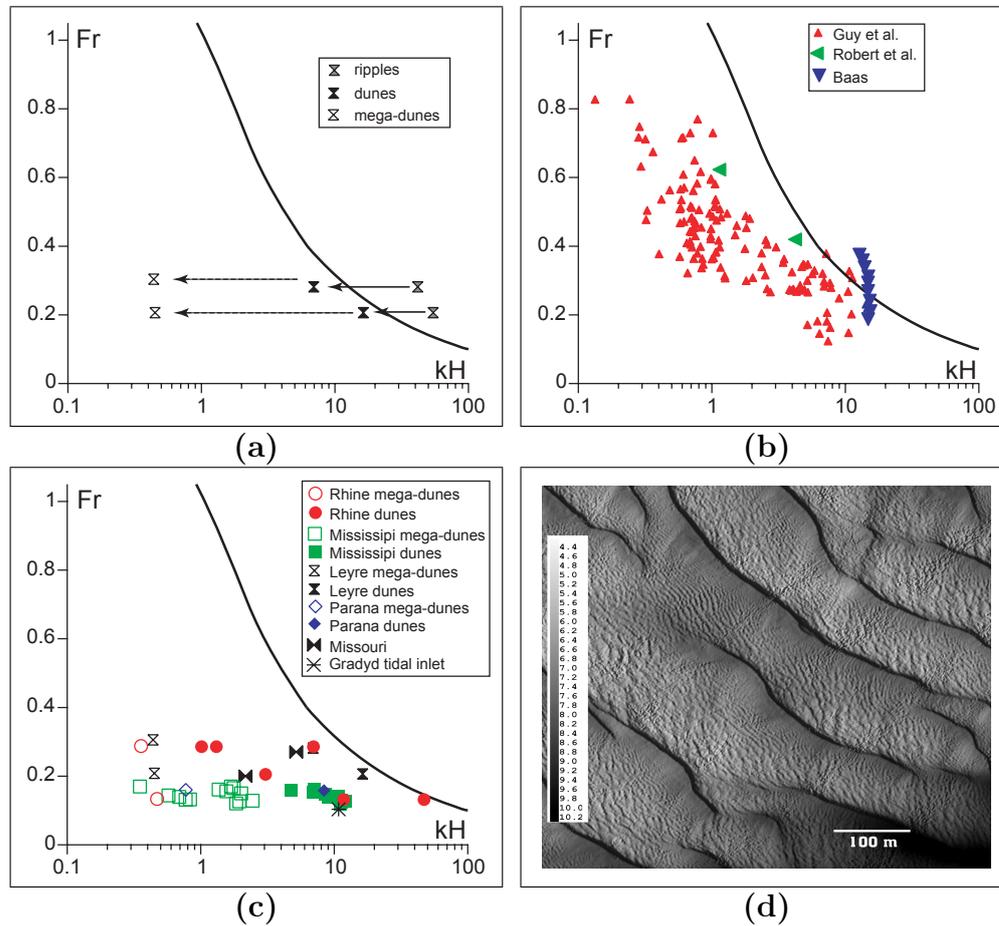


FIG. 10.5 –  $Fr$  vs  $kH$ . La ligne continue représente la condition de résonance. (a) Résultats expérimentaux obtenus dans la Leyre en arasant le lit. En particulier, les points libellés ‘rides’ correspondent au motif initial. (b) Expériences en flume : seules les longueurs d’onde de motifs développés sont représentés. Ces données sont issues de [Guy et al. 1966, Robert & Uhlman 2001, Baas 1999]. (c) Structures observées dans diverses rivières. Ces données sont issues de [Annambhotla 1972, Harbor 1998, Carling et al. 2000, Wilbers & Ten Brinke 2003, Bartholdy & al. 2005, Parsons et al. 2005]. (d) Image du fond du Rio Paraná ( $H \approx 8\text{m}$ ,  $d \approx 300\mu\text{m}$ ,  $Fr = 0.16$ ) obtenues par [Parsons et al. 2005]. Des dunes de longueur d’onde  $\lambda \approx 6\text{m}$  sont présentes au-dessus de motifs plus larges de longueur d’onde  $\lambda \approx 125\text{m}$ .

### 10.3. Observation de dunes dans la Leyre

---

rience  $n$  a souvent servi de point de départ à l'expérience  $n + 1$ ) ou bien qu'en cours d'expérience, les paramètres de contrôle (pente, débit) sont variés pour maintenir constant d'autres quantités comme le nombre de Froude. En revanche, les expériences de [Baas 1999] sont très propres : cet auteur a en fait suivi avec soin toute l'évolution du motif, depuis la phase initiale des rides jusqu'à la saturation de la longueur d'onde. Malgré la dispersion, toutes ces mesures se mettent, dans le plan  $\mathcal{F}r$  vs  $kH$ , raisonnablement le long de la courbe de résonance, du côté du régime sous-critique (panel b). Les données de terrain sont issues de mesures faites sur le canal du Grådyd [Bartholdy & al. 2005], sur le Mississippi [Harbor 1998], sur le Missouri [Annambhotla 1972], sur le Rhin [Carling et al. 2000, Wilbers & Ten Brinke 2003] et sur le Paraná [Parsons et al. 2005]. On observe que dunes et méga-dunes sont dans la même région du diagramme de stabilité, ces dernières étant plus à gauche (panel c). Ces différentes mesures correspondent à des situations et des hauteurs d'eau très différentes – cf. photo des dunes de la Leyre sur la figure 10.4, et celles du Paraná sur la figure 10.5d. Cela signifie que la longueur de saturation, qui détermine la longueur d'apparition des rides, n'est pas pertinente pour rendre compte de la formation des dunes et des méga-dunes.

Nous constatons donc que la distinction entre rides et dunes ne peut être basée sur un critère de taille absolue, ni pour la longueur d'onde ni pour l'amplitude. Au contraire, il faut distinguer ces différents objets en fonction des mécanismes qui conduisent à leur formation. Après avoir rappelé les principaux résultats de cette partie qui traite de l'hydrodynamique au-dessus d'un lit ondulé, du transport, des rides et des dunes, nous proposons en conclusion une nouvelle classification entre rides et dunes qui fait du sens d'un point de vue physique.

# Chapitre 11

## Conclusion

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la formation des motifs engendrés par un écoulement turbulent sur un lit granulaire érodable. Afin de comprendre les différents mécanismes qui contrôlent l'apparition, le développement et la taille de ces motifs, nous avons tout d'abord étudié dans le détail les caractéristiques d'un tel écoulement sur un fond sinusoïdal fixe de longueur d'onde  $\lambda$ . Nous nous sommes ensuite penchés sur les principaux ingrédients du transport sédimentaire, ce qui nous a ensuite permis d'aborder la formation des rides et des dunes, d'un point de vue théorique mais également à l'aide d'expériences de terrain. Voici comment se résument nos principaux résultats.

### 11.1 Hydrodynamique sur un fond ondulé

Dans l'article fondateur de [Jackson & Hunt 1975], on peut distinguer trois régions au sein d'un écoulement turbulent sur un fond fixe ondulé :

- Une couche externe, loin du fond, où le fluide peut être considéré comme parfait, et l'écoulement est bien décrit par des équations potentielles. Dans cette couche, les lignes de courant sont en phase avec la topographie.
- Une couche interne où les termes inertiels de l'équation de Navier-Stokes sont négligeables. Dans cette couche, le gradient vertical de pression équilibre le mélange longitudinal de quantité de mouvement, i.e. le gradient horizontal de la composante de cisaillement du tenseur de Reynolds. L'épaisseur  $\ell$  de cette couche est reliée à  $\lambda$  par  $\lambda \sim \ell \ln^2(\ell/z_0)$ . À la transition entre les couches externe et interne, l'écoulement est ralenti par le mélange turbulent. À cause de l'inertie, la vitesse du fluide s'ajuste toujours avec du retard par rapport au cisaillement. Ainsi, puisque la vitesse est héritée de la couche externe, le cisaillement est en avance sur la topographie.

## 11.1. Hydrodynamique sur un fond ondulé

---

- Une mince couche de surface, d'épaisseur  $h_0$ , qui est responsable de la rugosité hydrodynamique vue de la couche interne. La physique à l'œuvre au sein de cette couche peut être de différentes natures. Par exemple,  $z_0$  peut être le résultat du mélange par des éléments géométriques, de la viscosité ou bien du transport de particules. Chacun de ces cas possède un  $z_0$  et un  $h_0$  spécifiques.

La relation linéaire entre les contraintes basales et le profil du fond peut être encodé par deux coefficients complexes  $A+iB$  et  $C+iD$ . La tangente de la phase entre ces contraintes et la topographie est donnée par les rapports  $B/A$  et  $D/C$ , respectivement. Ces coefficients sont des quantités importantes pour la description du transport, et pour le calcul de la relation de dispersion des motifs. Leur dépendance avec différents paramètres tels que les rapports de longueur  $z_0/\lambda$  ou  $H/\lambda$  a été déterminé. Nous avons également étudié leur sensibilité aux différentes manières de modéliser la turbulence. Nous trouvons que :

- $A$ ,  $B$  et  $C$  sont génériquement positifs, alors que  $D$  est négatif. Ceci signifie que le cisaillement atteint son maximum (la zone de pincement des lignes de courant) en amont du sommet des bosses, alors que c'est le contraire pour la pression – elle est génériquement en retard. La pression est en fait pratiquement constante au sein de la couche interne, de sorte que le déphasage de la pression est plus faible d'un ordre de grandeur par rapport à celui du cisaillement.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ont des dépendances faibles (logarithmiques) avec le rapport  $z_0/\lambda$ . Le déphasage  $B/A$  tend vers zéro dans la limite  $kz_0 \rightarrow 0$ . Lorsque la séparation d'échelle entre  $\ell$  et  $h_0$  s'estompe, ce déphasage diminue.
- Ces propriétés sont robustes vis-à-vis de (i) l'ordre de la fermeture turbulente, (ii) l'existence d'une anisotropie dans le tenseur de Reynolds, (iii) le mouvement (croissance ou propagation) du fond.
- La surface libre a un rôle très important lorsque  $\lambda$  est d'ordre  $H$ . Les onduations du fond excitent des ondes gravitaires à la surface libre. Une résonance se produit lorsque la vitesse de ces ondes est égale à la vitesse de l'écoulement, i.e. lorsque  $\mathcal{Fr}^2 \simeq \tanh(kH)/(kH)$ . À la résonance, la surface libre est en quadrature avec le profil du fond et les lignes de courant sont pincées en aval du sommet des bosses. Lorsque le nombre de Froude est assez grand, la déformation de la surface est suffisamment grande pour que le cisaillement basal soit en retard sur la topographie ( $B < 0$ ).
- Un autre effet important de la surface libre se manifeste pour  $kH \rightarrow 0$ . Dans cette limite, l'épaisseur d'eau devient faible devant la longueur d'onde, et la couche interne envahit tout l'écoulement ( $\ell \simeq H$ ). Le cisaillement et le fond tendent alors à être en phase et  $B/A \rightarrow 0$ . Plus précisément ce rapport s'annule par valeurs négatives et  $B$  est en fait négatif en-dessous d'une cer-

taine valeur de  $kH$  qui est d'autant plus grande que  $\mathcal{F}r$  est grand.

- Le profil de cisaillement n'est pas sensible aux mécanismes qui régulent la couche de surface dès que  $h_0$  est petit devant  $\ell$  : la valeur de la rugosité  $z_0$  est alors la seule quantité héritée de la couche de surface. Les calculs analytiques de [Jackson & Hunt 1975] sont retrouvés dans la limite des (très) petites valeurs de  $\ln(kz_0)$ , ce qui ne correspond pas aux valeurs de rugosité et de longueur d'ondes généralement mesurées. Lorsque  $h_0$  et  $\ell$  sont comparables, les coefficients  $A$  et  $B$  sont plus petits dans le cas hydrodynamiquement lisse où la rugosité est contrôlée par la viscosité que dans le cas rugueux. Dans ce dernier cas, le mélange de quantité de mouvement dans la couche de surface est dominé par les fluctuations turbulentes induites par les irrégularités géométriques à toute petite échelle. Dans le contexte des rides et des dunes, ces résultats s'appliquent directement si le transport a une rétroaction négligeable sur l'écoulement (régime limité par l'érosion). Quand cette rétroaction est significative (régime limité par la quantité de mouvement), nous prédisons que  $A$  et  $B$  augmentent, mais que le rapport  $B/A$  reste quasiment inchangé.
- Le profil de la contrainte normale est à peu près indépendant du modèle de couche de surface.

Au-delà du cas linéaire, nous avons développé nos calculs hydrodynamiques au troisième ordre en  $k\zeta$ . Contrairement aux calculs linéaires, la séparation des lignes de courant qui apparaît lorsque le cisaillement et le gradient de pression sont antagonistes, ainsi que la formation d'une bulle de recirculation, sont obtenus pour des valeurs réalistes du rapport d'aspect des bosses. À l'ordre quadratique, on obtient une correction au profil de vitesse moyen, ce qui correspond à un changement de rugosité hydrodynamique  $z_g$  à grande échelle, dû à la géométrie du fond. Cette rugosité d'origine géométrique dépend de la rugosité 'microscopique' issue de la couche de surface  $z_0$ , et n'est pas simplement proportionnelle à l'amplitude  $\zeta$  des ondulations du fond. Nous avons obtenu la loi d'échelle suivante :  $z_g = z_0 \exp(\kappa (k\zeta)^2 E)$ , où le facteur  $E$  dépend faiblement du rapport  $\lambda/z_0$ . Enfin, nous avons montré que le déphasage entre le cisaillement et la topographie est réduit par les corrections non-linéaires et change de signe pour une valeur de  $k\zeta$  suffisamment grande. Ce résultat est important pour la compréhension de la sélection du rapport d'aspect des rides développées.

## 11.2 Transport, rides et dunes

L'analyse de stabilité linéaire d'un fond plat érodable peut être réalisée si l'on se donne quatre quantités bien définies. Outre les coefficients  $A$  et  $B$  qui décrivent le cisaillement que l'écoulement exerce sur le lit, il s'agit de :

- La relation entre le flux de sédiment à saturation  $q_{\text{sat}}$ , le cisaillement basal  $\tau_b$  et sa valeur seuil  $\tau_{\text{th}}$ . Ce flux saturé intervient dans la détermination de l'échelle de temps de l'instabilité, mais n'influence pas la longueur d'onde initiale des rides.
- La longueur de saturation  $L_{\text{sat}}$ , i.e. la longueur de relaxation du flux vers sa valeur saturée. Cette longueur, pour l'essentiel, détermine l'échelle de longueur de l'instabilité de rides.
- La relation entre le cisaillement seuil et la pente du lit, qui encode l'effet stabilisant de la gravité.

Le cadre théorique qui regroupe ces différents éléments est très général et englobe un spectre assez large de modèles plus spécifiques. Par exemple, le détail de la physique à l'œuvre au sein de la couche de surface, ou bien la manière dont les différentes échelles hydrodynamiques s'emboîtent peuvent affecter les valeurs des fonctions  $A$  et  $B$ , mais ces coefficients gardent leur sens sans changement de nature. De même, la valeur du flux saturé ainsi que l'expression de la longueur de saturation s'obtiennent à partir d'un modèle de transport spécifique. Enfin, l'expression du seuil de transport en fonction de la taille des grains, de la pente, et d'autres paramètres éventuels (e.g. la cohésion entre grains) provient d'un modèle mécanique indépendant. Avec un tel formalisme, nous pouvons tester isolément l'effet de chacun des mécanismes dynamiques présent dans ce problème sur la formation des rides et des dunes.

Deux régimes de transport sédimentaire ont été étudiés :

- Un régime limité par l'érosion, où la rétroaction du transport sur l'écoulement est négligeable. La saturation du flux est limitée par le temps nécessaire pour entraîner un grain de la surface du lit [Charru 2006]. La longueur de saturation associée est déterminée par la distribution de puits potentiels dans lesquels peuvent venir se piéger les grains en mouvement. Elle est proportionnelle au diamètre des grains et diverge lorsque le cisaillement basal est suffisant pour faire bouger tous les grains de la surface.
- Un régime limité par la quantité de mouvement, où le flux sature à cause de la contrainte qu'exercent les grains en mouvement sur le fluide [Bagnold 1956]. Tant que l'on reste dans le cadre d'un transport par charriage (bed-load), la saturation du flux est dominée par l'inertie des grains. La longueur de saturation est alors proportionnelle à la taille des grains et au rapport de la densité des grains sur celle du fluide.

Nous avons développé un modèle de transport qui englobe ces deux régimes, et qui est capable de reproduire les résultats expérimentaux de [Julien 1998] et de [Fernandez Luque & van Beek 1976]. Le modèle prend également en compte l'effet de pente (ou de gravité) et reproduit le fait que le seuil décroît à la transition entre les régimes visqueux et turbulents. Le transport

sédimentaire sur une épaisseur importante (sheet flows), ou bien la suspension sont au-delà du domaine de validité de ce modèle car ils demandent un traitement hydrodynamique différent – l’écoulement du fluide doit être modélisé à l’intérieur de la couche de transport.

Nous avons réalisé l’analyse de stabilité linéaire d’un lit plat. Le mécanisme déstabilisant est de nature hydrodynamique et est relié à l’avance de phase du cisaillement sur la topographie. Deux mécanismes stabilisants ont été identifiés : la saturation du flux sur une longueur  $L_{\text{sat}}$  et l’effet de pente sur le seuil, qui dépend de  $u_*/u_{\text{th}}$ . Comme  $L_{\text{sat}}$  est génériquement plus grand que  $z_0$ , la longueur d’onde du mode le plus instable  $\lambda_{\text{max}}$  est essentiellement contrôlée par la longueur de saturation. Ce mode est associé aux rides, qui se forment donc par instabilité linéaire. Dans le cas d’un écoulement sur fond lisse, la rugosité vue de la couche interne est gouvernée par la longueur visqueuse  $\nu/u_*$ , et peut contrôler  $\lambda_{\text{max}}$  si elle est plus grande que  $L_{\text{sat}}$  [Sumer & Bakioglu 1984].

À cause de l’effet de pente, le rapport  $\lambda_{\text{max}}/L_{\text{sat}}$  est une fonction décroissante de  $u_*/u_{\text{th}}$ . Nous avons analysé différents jeux de données de la littérature qui donnent la longueur initiale des rides (i.e.  $\lambda_{\text{max}}$ ) et nous en avons déduit la longueur de saturation correspondante, en supposant que le modèle hydrodynamique est correct. On trouve que  $L_{\text{sat}}$  est à peu près indépendant de  $u_*$ , et sa valeur est entre comprise 5 et 15 diamètres de grain. Ces valeurs sont cohérentes avec une longueur de saturation limitée par l’inertie des grains ( $L_{\text{sat}} \simeq 2(\rho_s/\rho_f)d$ ). Cette prédiction est particulièrement bonne pour les grains les plus gros ( $d \gtrsim 1\text{mm}$ ) pour lesquels les effets visqueux sont complètement négligeables. Cependant, ces données montrent des effets systématiques qui ne sont pas pris en compte par notre modèle : la longueur d’onde des rides est toujours plus grande qu’attendue pour des grains plus petits ou plus rugueux.

Nous avons effectué des expériences de terrain sur la Leyre, une rivière sableuse des Landes de Gascogne, et dont les résultats montrent que, partant d’un lit plat, l’évolution à temps court de l’amplitude  $\zeta$  et de la longueur d’onde  $\lambda$  des rides sont cohérentes avec les prédictions d’une instabilité linéaire (croissance exponentielle de l’amplitude et longueur d’onde constante). Nous avons également observé que la longueur d’onde de ces rides augmente sur des temps plus longs, puis sature juste après que la condition de résonance des ondes de surface est atteinte. Lors de cette évolution non-linéaire, les rides sont en quasi-équilibre vis-à-vis de l’érosion en amont du sommet et de la déposition en aval. Nous avons montré que la prédiction du rapport d’aspect des rides dans cette situation en utilisant les calculs hydrodynamiques non-linéaires est quantitative.

L’influence de la surface libre de la rivière est globalement stabilisante.

Ceci provient également de l'hydrodynamique : la résonance des ondes de surface pour  $kH \sim 1/\mathcal{F}r^2$ , d'une part, et le fait que la couche interne domine l'écoulement à très grand  $\lambda/H$  d'autre part, déphasent le cisaillement basal vers l'aval. Puisque qu'aucun mécanisme déstabilisant n'est associé à la présence de la surface libre, les dunes ne peuvent résulter d'une instabilité linéaire. Cette conclusion est confirmée par nos observations de terrain qui montrent que les dunes se forment en fait par évolution progressive de rides, comme suggéré par [Raudkivi & Witte 1990] et [Raudkivi 2006]. Finalement, nos observations montrent que la sélection non-linéaire de la longueur d'onde finale est très sensible à de petits changements des conditions expérimentales, et en particulier à la présence de gros grains.

## 11.3 Une nouvelle classification

Ces résultats suggèrent une nouvelle classification des structures que l'on trouve au fond des rivières, basée sur les mécanismes responsables de leur formation. Le critère le plus évident à prendre en considération est la sensibilité à la présence de la surface libre. On définit donc les rides comme les motifs dont la longueur d'onde  $\lambda$  est suffisamment petite devant la profondeur d'eau  $H$  pour ne pas ressentir la valeur finie de cette dernière. Dans le diagramme  $\mathcal{F}r$  vs  $kH$ , elles sont situées dans la région super-critique, i.e. leur longueur d'onde est plus petite que la valeur de résonance. Lorsque la séparation d'échelle entre la profondeur d'eau et la longueur de saturation est suffisante, les structures qui se forment par instabilité linéaire d'un lit plat sont des rides. Au-delà de ce régime linéaire, ces structures se développent, leur longueur d'onde grandit et atteint la condition de résonance. Une fois situées dans la région sous-critique du diagramme (à gauche de la courbe de résonance), ces structures sont soumises à un écoulement qui est affecté – et parfois dominé – par la présence de la surface libre. Elles doivent alors être appelées dunes. Nos expériences de terrain ont montré que l'évolution non-linéaire des dunes peut s'arrêter sur des états finaux assez variables en fonction des conditions (par exemple de la distribution granulométrique). La sélection de cet état final est un problème ouvert (cf. [Politi & Misbah 2004, Andreotti & al. 2006]) qui demande des études spécifiques. Nos observations suggèrent d'appeler méga-dunes des structures suffisamment grandes pour présenter des dunes superposées sur leur dos. Avec cette définition, ce qui est parfois appelé "barre" dans la littérature est une méga-dune. De même, le terme "wavelet" introduit par [Coleman & Melville 1994, Coleman & Melville 1996] désigne des rides dans leur état initial. Il faut également noter que les dunes peuvent présenter des rides superposées sur leur dos si la

séparation d'échelle entre  $H$  et  $L_{\text{sat}}$  le permet. Le critère pour distinguer les dunes des méga-dunes est donc la position des structures superposées dans le diagramme  $\mathcal{F}r$  vs  $kH$ . Cette distinction est importante car, en eau très profonde, le développement des rides peut être suffisant pour permettre la présence de rides plus petites superposées. Dans ce cas, on doit parler de méga-rides. En résumé, le nom de telle ou telle structure au fond de l'eau doit être choisi en fonction de sa position par rapport à la courbe de résonance dans le diagramme  $\mathcal{F}r$  vs  $kH$ , avec le suffixe "méga", pour indiquer l'éventuelle présence de sous-structures du même type.

## 11.4 Sortons la tête de l'eau

Les termes "rides" et "dunes" désignent également des structures éoliennes. Ces rides résultent d'une instabilité d'écrantage [Bagnold 1941, Anderson 1987, Anderson 1990], et la détermination des paramètres qui contrôlent la longueur d'onde initiale de ces motifs est toujours un problème ouvert [Andreotti & al. 2006]. La formation des dunes en revanche est maintenant bien connue : tout comme les rides sous-marines, elles se développent par instabilité linéaire à partir d'un lit plat, à une longueur d'onde essentiellement contrôlée par la longueur de saturation du flux de sable [Andreotti & al. 2002]. En fait, la loi d'échelle  $\lambda \propto (\rho_s/\rho_f) d$  est valable pour les rides sous-marines, les dunes éoliennes, et également les dunes martiennes [Claudin & Andreotti 2006]. Si les dunes éoliennes sont ainsi les équivalents des rides sous-marines, on peut se demander s'il existe l'analogue des dunes aquatiques dans l'air. Effectivement, nous avons aussi observé des dunes "géantes" qui portent sur leur dos des dunes plus petites.

Nous avons montré, dans un article mis en annexe, qu'une analogie (non stricte) entre une rivière et l'atmosphère est possible. Cette dernière possède en effet une structure verticale, avec une région stratifiée de manière stable en altitude, et caractérisée par une fréquence de Brunt-Väisälä, et une couche convective dite "bien mélangée" en-dessous. Il existe entre les deux, une interface plus ténue que la surface libre d'une rivière, mais qui permet la propagation d'onde de surface. Nous avons mené une étude hydrodynamique similaire à ce qui a été décrit dans les chapitres précédents. On montre en particulier que l'on s'attend à une sélection de dunes géantes (ou "méga-dunes") dont la longueur d'onde est de l'ordre de  $H$ , qui représente l'épaisseur de cette couche convective. La valeur moyenne de  $H$  est difficile à mesurer directement, mais nous pouvons la relier aux variations saisonnières de température au sol. Ainsi nous trouvons, en accord avec les observations, que les dunes géantes des déserts côtiers sont plus petites (de l'ordre du demi-kilomètre)

#### 11.4. Sortons la tête de l'eau

---

que celles des déserts continentaux (2 ou 3km).

# Bibliographie rides et dunes

- [Abrams & Hanratty 1985] Abrams J. & Hanratty, T. 1985 Relaxation effects observed for turbulent flow over a wavy surface, *J. Fluid Mech.* **151**, 443.
- [Allen 1985] Allen, J.R.L. 1985 Principles of Physical Sedimentology, The Blackburn Press, Caldwell USA.
- [Anderson 1987] Anderson, R. 1987 A theoretical model for aeolian impact ripples. *Sedimentology* **34**, 943-956.
- [Anderson 1990] Anderson, R. 1990 Eolian ripples as examples of self-organization in geomorphological systems. *Earth-Science Rev.* **29**, 77-96.
- [Andreotti & al. 2002] Andreotti, B., Claudin, P. & Douady, S. 2002 Selection of dune shapes and velocities. Part 2 : A two-dimensional modelling. *Eur. Phys. J. B* **28**, 341-352.
- [Andreotti 2004] Andreotti B. 2004 A two species model of aeolian sand transport. *J. Fluid Mech.* **510**, 47-50.
- [Andreotti & al. 2006] Andreotti, B., Claudin, P. & Pouliquen, O. 2006 Aeolian sand ripples : experimental evidence of coarsening and saturation, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 028001.
- [Andreotti & Claudin 2007] Andreotti, B. & Claudin, C. 2007 Comment on 'Minimal size of a barchan dune'. *Phys. Rev. E* **76**, 063301.
- [Andreotti et al. 2008] Andreotti, B., Claudin, C. & Pouliquen, O. 2008 Measurements of the aeolian sand transport saturation length, submitted to *Geomorphology*.

- [Annambhotla 1972] Annambhotla, V.S.S., Sayre, W.W. & Livesey, R.H. 1972 Statistical properties of Missouri River bed forms. *J. Waterways Harbors Coastal Eng. Div.* **98**, 489-510.
- [Ashley 1990] Ashley, G.M. 1990 Classification of large scale subaqueous bedforms : a new look at an old problem. *J. Sedim. Res.* **60**, 161-172.
- [Ayotte & al. 1994] Ayotte, K.W., Xu, D. & Taylor, P.A. 1994 The impact of turbulence closure schemes on predictions of the mixed spectral finite-difference model for flow over topography. *Boundary-Layer Meteo* **68**, 1-33.
- [Baas 1994] Baas, J.H. 1994 A flume study on the development and equilibrium morphology of current ripples in very fine sand. *Sedimentology* **41**, 185-209.
- [Baas 1999] Baas, J.H. 1999 An empirical model for the development and the equilibrium morphology of current ripples in fine sand. *Sedimentology* **46**, 123-138.
- [Baddock et al. 2007] Baddock, M.C., Livingstone, I. & Wiggs, G.F.S. 2007 The geomorphological significance of airflow patterns in transverse dune interdunes. *Geomorphology* **87**, 322-336.
- [Bagnold 1941] Bagnold, R. A. 1941 The Physics of blown sand and desert dunes. *Dover Publications*.
- [Bagnold 1956] Bagnold, R.A. 1956 The flow of cohesionless grains in fluids. *Phi. Trans. R. Soc. London A* **249**, 235-297.
- [Bartholdy & al. 2005] Bartholdy, J., Flemming, B. W., Bartholomä, A. & Ernstsen, V. B. 2005 Flow and grain size control of depth-independent simple subaqueous dunes, *J. Geophys. Res.* **110**, F04S16.
- [Carling et al. 2000] Carling, P.A., Gölz, E., Orr, H.G. & Radecki-Pawlik, A. 2000 The morphodynamics of fluvial sand dunes in the River Rhine, near Mainz, Germany. I. Sedimentology and morphology. *Sedimentology* **47**, 227-252.

- [Charru 2006] Charru, F. 2006 Selection of the ripple length on a granular bed. *Phys. Fluids* **18**, 121508.
- [Claudin & Andreotti 2006] Claudin, P. & Andreotti, B. 2006 A scaling law for aeolian dunes on Mars, Venus, Earth, and for sub-aqueous ripples. *Earth Pla. Sci. Lett.* **252**, 30-44.
- [Coleman & Melville 1994] Coleman, S.E. & Melville, B.W. 1994 Bed-form development. *J. Hyd. Eng.* **120**, 544-560.
- [Coleman & Melville 1996] Coleman, S.E. & Melville, B.W. 1996 Initiation of bed forms on a flat sand bed. *J. Hydraul. Eng.* **122**, 301-310.
- [Coleman & Eling 2000] Coleman, S.E. & Eling, B. 2000 Sand wavelets in laminar open-channel flows. *J. Hydraul. Res.* **38**, 331-338.
- [Coleman et al. 2003] Coleman, S.E., Fedele, J.J. & Garcia, M.H. 2003 Closed-conduit bed-form initiation and development. *J. Hydraul. Eng.* **129**, 956-965.
- [Colombini 2004] Colombini, M. 2004 Revisiting the linear theory of sand dune formation. *J. Fluid Mech.* **502**, 1-16.
- [Colombini & Stocchino 2005] Colombini, M. & Stocchino, A. 2005 Coupling or decoupling bed and flow dynamics : Fast and slow sediment waves at high Froude numbers. *Phys. Fluids* *17*, 036602.
- [Engelund 1970] Engelund, F. 1970 Instability of erodible beds. *J. Fluid Mech.* **42**, 225-244.
- [Fernandez Luque & van Beek 1976] Fernandez Luque, R. & van Beek, R. 1976 Erosion and transport of bed-load sediment. *J. Hydraul. Res.* **14**, 127-144.
- [Fredsoe 1974] Fredsoe, J. 1974 On the development of dunes in erodible channels *J. Fluid Mech.* **64**, 1-16.
- [Gong et al. 1996] Gong, W., Taylor, P.A. & Dörnbrack, A. 1996 Turbulent boundary-layer flow over fixed aerodynamically rough two-dimensional sinusoidal waves. *J. Fluid Mech.* **312**, 1-37.
- [Gradowczyk 1970] Gradowczyk, M.H. 1970 Wave propagation and boundary instability in erodible-bed channels. *J. Fluid Mech.* **33**, 93-112.

- [Guy et al. 1966] Guy, H., Simons, D. & Richardson, E. 1966 Summary of alluvial channel data from flume experiments, 1956-61. *U.S. Geol. Survey Prof. Paper* **462-I**, 1-96.
- [Gyr & Schmid 1989] Gyr, A. & Schmid, A. 1989 The different ripple formation mechanism *J. Hydraul. Res.* **27**, 61-74.
- [Harbor 1998] Harbor, D.J. 1998 Dynamics of bedforms in the lower Mississippi River. *J. Sedim. Res.* **68**, 750-762.
- [Hersen et al. 2002] Hersen, P., Douady, S. & Andreotti, B. 2002 Relevant lengthscale of barchan dunes. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 264301.
- [Jacobs 1989] Jacobs, S.J. 1989 Effective roughness length for turbulent flow over a wavy surface. *J. Phys. Oceanography* **19**, 998-1010.
- [Jackson & Hunt 1975] Jackson, P.S. & Hunt, J.C.R. 1975 Turbulent wind flow over a low hill. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **101**, 929.
- [Julien 1998] Julien P.Y. 1998 Erosion and sedimentation. *Cambridge University Press*.
- [Kennedy 1963] Kennedy, J.F. 1963 The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels. *J. Fluid Mech.* **16**, 521-544.
- [Kroy et al. 2002] Kroy, K., Sauermann, G. & Herrmann, H.J. 2002 Minimal model for aeolian sand dunes. *Phys. Rev. E* **66**, 031302.
- [Langlois & Valance 2007] Langlois, V. & Valance, A. 2007 Initiation and evolution of current ripples on a sand bed under turbulent water flow. *Eur. Phys. J E* **22**, 201-208.
- [Loiseleux et al. 2005] Loiseleux, T., Gondret, P., Rabaud, M. & Doppler, D. 2005 Onset of erosion and avalanche for an inclined granular bed sheared by a continuous laminar flow. *Phys. Fluids* **17**, 103304.
- [Mantz 1978] Mantz, P.A. 1978 Bedforms produced by fine, cohesionless, granular and flakey sediments

- under subcritical water flows. *Sedimentology* **25**, 83-103.
- [Meyer-Peter & Müller 1948] Meyer-Peter, E. & Müller, R. 1948 Formulas for bed load transport. *Report on the 2nd Meeting of International Association for Hydraulic Research*, 39-64.
- [Parker 1975] Parker, G. 1975 Sediment inertia as cause of river antidunes. *J. Hydraul. Div. ASCE* **101**, 211-221.
- [Parsons et al. 2005] Parsons, D.R., Best, J.L., Orfeo, O., Hardy, R.J., Kostaschuk, R. & Lane, S.N. 2005 Morphology and flow fields of three-dimensional dunes, Rio Paraná, Argentina : Results from simultaneous multibeam echo sounding and acoustic Doppler current profiling. *J. Geophys. Res.* **110**, F04S03.
- [Politi & Misbah 2004] Politi, P. & Misbah, C. 2004 When Does Coarsening Occur in the Dynamics of One-Dimensional Fronts, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 090601.
- [Raudkivi & Witte 1990] Raudkivi, A.J. & Witte, H.H. 1990 Development of bed features. *J. Hydraul. Eng.* **116**, 1063-1079.
- [Raudkivi 2006] Raudkivi, A.J. 2006 Transition from Ripples to Dunes. *J. Hydr. Engrg.* **132**, 1316-1320.
- [Rauen et al. 2008] Rauen, W.B., Lin, B. & Falconer, R.A. 2008 Transition from wavelets to ripples in a laboratory flume with a diverging channel. *Int. J. Sedim. Res.* **23**, 1-12.
- [Raupach & al. 1991] Raupach, M. R., Antonia, R. A. & Rajagopalan, S. 1991 Rough-wall turbulent boundary layers. *Appl. Mech. Rev.* **44**, 1-25.
- [Reynolds 1965] Reynolds, A.J. 1965 Waves on the erodible bed of an open channel. *J. Fluid Mech.* **22**, 113-133.
- [Richards 1980] Richards, K.J. 1980 The formation of ripples and dunes on an erodible bed. *J. Fluid Mech.* **99**, 597-618.

- [Robert & Uhlman 2001] Robert, A. & Uhlman, W. 2001 An experimental study of the ripple-dune transition. *Earth Surf. Process. Landforms* **26**, 615-629.
- [Shafi & Antonia 1995] Shafi, H. S. & Antonia, R. A. 1995 Anisotropy of the Reynolds stresses in a turbulent boundary layer on a rough wall. *Exp. in Fluids* **18**, 213-215.
- [Simons & Richardson 1962] Simons, D. B. & Richardson, E. V. 1962 The effect of bed roughness on depth-discharge relations in alluvial channels. *US Geological Survey Water-Supply Paper*, **1498-E**.
- [Smith 1970] Smith, J.D. 1970 Stability of a sand bed subjected to a shear flow at low Froude number. *J. Geophys. Res.* **75**, 5928-5940.
- [Sumer & Bakioglu 1984] Sumer, B.M. & Bakioglu, M. 1984 On the formation of ripples on an erodible bed. *J. Fluid Mech.* **144**, 177-190.
- [Taylor et al. 1987] Taylor, P.A., Mason, P.J. & Bradley, E.F. 1987 Boundary-layer flow over low hills. *Boundary-Layer Met.* **39**, 107-132.
- [Taylor & al. 1989] Taylor, P.A., Sykes, R.I. & Mason, P.J. 1989 On the parametrization of drag over small-scale topography in neutrally-stratified boundary-layer flow. *Boundary-Layer Met.* **48**, 409-422.
- [Valance & Langlois 2008] Valance, A. & Langlois, V. 2007 Initiation and evolution of current ripples on a flat sand bed under turbulent water flow. *Eur. Phys. J. E* **22**, 201-208.
- [Venditti et al. 2005b] Venditti, J.G., Church, M.A. & Bennett, S.J. 2005 Bed form initiation from a flat sand bed. *J. Geophys. Res.* **110**, F01009.
- [Wilbers & Ten Brinke 2003] Wilbers A.W.E. & Ten Brinke W.B.M. 2003 The response of subaqueous dunes to floods in sand and gravel bed reaches of the Dutch Rhine. *Sedimentology* **50**, 1013-1034.

# Annexes



Les Annexes comprennent 3 articles tels qu'ils avaient été écrits et mis en page au moment de la fin de la rédaction de la thèse, c'est-à-dire au 10 décembre 2008. Les deux premiers articles reprennent l'ensemble des chapitres consacrés aux instabilités du lit des rivières (chapitres 7 à 11). Ils ont, par la suite, été fusionnés en un seul et même article qui a été accepté pour publication à *Journal of Fluids Mechanics*. Le dernier article développe la question évoquée à la conclusion du chapitre 11 sur la taille des dunes éoliennes dans les déserts. Cet article a été publié dans la revue *Nature* de Février 2009.



Bedforms in a turbulent stream.  
Part 1 : Turbulent flow over  
topography.



# Bedforms in a turbulent stream.

## Part 1: Turbulent flow over topography

By ANTOINE FOURRIÈRE, PHILIPPE CLAUDIN  
AND BRUNO ANDREOTTI

Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes  
PMMH UMR 7636 CNRS-ESPCI-P6-P7,  
10 rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France.

(Received 10 December 2008)

In the context of subaqueous ripple and dune formation, we present here a Reynolds averaged calculation of the turbulent flow over a topography. Using a Fourier decomposition of the bottom elevation profile, we perform a weakly non-linear expansion of the velocity field, sufficiently accurate to recover the separation of streamlines and the formation of a recirculation bubble above the some aspect ratio. The normal and tangential basal stresses are investigated in details; in particular, we show that the phase shift of the shear stress with respect to the topography, responsible for the formation of bedforms, appears in an inner boundary layer where shear stress and pressure gradients balance. We study the sensitivity of the calculation with respect to (i) the choice of the turbulence closure, (ii) the motion of the bottom (growth or propagation), (iii) the physics at work in the surface layer, responsible for the hydrodynamic roughness of the bottom, (iv) the aspect ratio of the bedform and (v) the effect of the free surface, which can be interpreted in terms of standing gravity waves excited by topography. The most important effects are those of points (iii) to (v), in relation to the intermixing of the different length scales of the problem. We show that the dynamical mechanisms controlling the hydrodynamical roughness (mixing due to roughness elements, viscosity, sediment transport, etc) have an influence on the basal shear stress when the thickness of the surface layer is comparable to that of the inner layer. We evidence that non-linear effects tend to oppose linear ones and are of the same order for bedform aspect ratios of the order of 1/10. We show that the influence of the free surface on the basal shear stress is dominant in two ranges of wavelength: when the wavelength is large compared to the flow depth, so that the inner layer extends throughout the flow and in the resonant conditions, when the downstream material velocity balances the upstream wave propagation.

---

### 1. Introduction

The formation of ripples and dunes at the surface of an erodible sand bed results from the interplay between the relief, the flow and the sediment transport. The aim of these two companion papers is to propose a coherent and detailed picture of this phenomenon in the generic and important case of a unidirectional turbulent stream. This first part is devoted to the study of the stationary flow over a wavy rough bottom. In the second part we propose a common theoretical framework for the description of the different modes of sediment transport. Hydrodynamics and transport issues at hand, we then revisit the linear instability of a flat sand bed submitted to a water shear flow and show that, in contrast to ripples, subaqueous dunes cannot form by a primary linear instability.

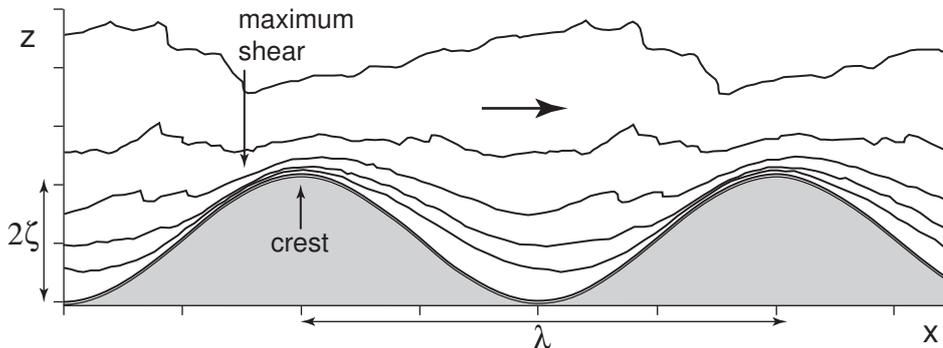


FIGURE 1. Iso-velocity lines over a wavy bottom (data after Poggi et al. 2007). The fluid is flowing from left to right along the  $x$ -axis.  $z$  is perpendicular. The bottom profile is  $z = Z(x) = \zeta \cos(kx)$ . In that experiment, the wavelength and amplitude of the bumps are  $\lambda = 2\pi/k = 3.2$  m and  $\zeta = 0.08$  m, for a water depth  $H = 0.6$  m). The point of maximum shear on the bump (where the lines are squeezed) is located upstream the crest.

It has long been recognised that the mechanism responsible for the formation and growth of bedforms is related to the phase-lag between sediment transport and bed elevation (Kennedy 1963, Reynolds 1965, Kennedy 1969, Smith 1970, Hayashi 1970, Parker 1975, Engelund & Fredsøe 1982, McLean 1990). It has been shown in the context of aeolian dunes that this lag comes from two contributions, which can be considered as independent as the time scale involved in the bed evolution is much slower than the hydrodynamics relaxation (Andreotti et al. 2002, Kroy et al. 2002, Valance 2005). First there is a shift between the bed and the basal shear stress profiles. This shift purely results from the hydrodynamics and its sign is not obvious *a priori*, i.e. the stress maximum can be either upstream or downstream the bed crest depending on the topography or the proximity of the free surface. The second contribution comes from the sediment transport: the sediment flux needs some time/length to adapt to some imposed shearing. This relaxation mechanism induces a downstream lag of the flux with respect to the shear. When the sum of these two contributions results in a maximum flux upstream the bed crest, sediment deposition occurs on the bump, leading to an unstable situation and thus to the amplification of the disturbance. In part 1, we shall focus on the first of these contributions, the second one being treated in part 2.

We consider here the generic case of a flow over a fixed sinusoidal bottom of wavelength  $\lambda$  (see figure 1 for an illustration of the geometry and some notations). In order to obtain the basal shear stress and in particular its phase shift with respect to the topography, the equations of hydrodynamics must be solved in this geometry. The case of viscous flows has been investigated by Benjamin 1959, Bordner 1978, Caponi et al. 1982, Charru & Hinch 2000, Lagr e 2003, Valance & Langlois 2005. The first attempts to model the high Reynolds number regime in the context of ripples and dunes in rivers have dealt with potential flows (Kennedy 1963, Reynolds 1965, Coleman & Fenton 2000), for which the velocity field does not present any lag with respect to the bottom. The shallow-water approximation (Gradowczyk 1970) implies that the bedforms spread their influence on the whole depth of the flow. However, patterns only have a significant influence within a vertical distance on the order of their wavelength. It is then crucial to compute explicitly the vertical flow structure, taking into account the turbulent fluctuations.

In order to overcome the flaws of the perfect flow, constant eddy viscosity closures have been tried to improve Kennedy's original model (Engelund 1970, Smith 1970, Fredsøe 1974). Further progress has been made by Richards 1980, who used a more sophisticated mod-

elling with an additional equation on the turbulent energy and a closure which involves a Prandtl mixing length in the expression of the eddy viscosity. Sumer & Bakioglu 1984 made use of the same turbulent modelling, but in the case of an infinite water depth. A mixing length approach was also used by Kobayashi & Madsen 1985 to improve Benjamin's laminar description.

In the meteorological context of atmospheric flows over low hills, a deep and fundamental understanding of the physics of turbulent flows over a relief has been developed from the 70's (see the review by Belcher & Hunt 1998). Starting with the seminal work of Jackson & Hunt 1975, further refined by Sykes 1980 and Hunt et al. 1988, the gross emerging picture is that the flow can be thought of as composed of two (or more) layers, associated with different physical mechanisms and different length scales. Jackson & Hunt 1975 have been able to compute analytically the basal shear stress for asymptotically large patterns, under an infinite flow depth assumption. Their ideas have been discussed in a rather vast literature. The predictions of these calculations, and in particular this layered structure of the flow, has been compared with experiments (see e.g. Britter et al. 1981, Gong & Ibbetson 1989, Finnigan et al. 1990), or field measurements on large scale hills (see e.g. the review paper by Taylor et al. 1987), with a good degree of success, especially on the upstream side of the bumps. Moreover, they have been tested against the results of the numerical integration, in various configurations, of Navier-Stokes equations closed with different turbulent closures (Taylor 1977a, Taylor 1977b, Richards & Taylor 1981, Ayotte et al. 1994). The relevance of this approach for the description of the flow and the stresses around aeolian sand dunes has also been investigated (see e.g. Weng et al. 1991), and is amongst the current directions of research in that community (Wiggs 2001).

Because the prediction of the stable or unstable character of a flat sand bed submitted to a turbulent shear flow is very sensitive to the way both hydrodynamics and transport issues are described and intermixed, we find it useful to discuss at length, in the two parts of this paper, the different mechanisms and scales involved at the different steps of the modelling. It is indeed particularly revealing that, despite the fact that the approach presented here is very close to those of Richards 1980 and Colombini 2004 and has been motivated by these works, we basically disagree with their conclusions, especially that river dunes are initiated by the linear instability of a flat bed. The detail discussion we provide here gives also the opportunity to revisit the still debated question of the subaqueous ripple size selection (see Charru 2006 and references therein), as well as the important issue of the classification of bedforms (Ashley 1990).

This article is structured as follows. In the next section, we briefly recall the equations for the base flow over a uniform bottom. We then study the linear solution in the case of wavelengths much smaller than the flow depth. Importantly, the sensitivity of these linear results with respect to various changes in the modelling is tested in sections 4 and 5. Section 6 is devoted to the derivation of the first non-linear corrections. In section 7, we investigate the effect of the free surface in the case of wavelengths comparable or larger than the flow depth and interpret it in terms of topography induced standing gravity waves. Finally, we provide in section 8 a qualitative summary of the main results of the paper. The most technical considerations are gathered in appendices.

## 2. Turbulent flow over a uniform bottom

### 2.1. The logarithmic law

We consider a turbulent flow over a relief. Following Reynolds' decomposition between average and fluctuating (denoted with a prime) quantities, the equations governing the mean velocity field  $u_i$  can be written as:

$$\partial_i u_i = 0, \quad (2.1)$$

$$D_t u_i = \partial_t u_i + u_j \partial_j u_i = -\partial_j \tau_{ij} - \partial_i p, \quad (2.2)$$

where  $\tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$  is the Reynolds stress tensor (Reynolds 1874). For the sake of simplicity, we omit the density factor  $\rho$  in front of the pressure  $p$  and the stress tensor. The aim of this paper is to describe quantitatively the average flow over a fixed corrugated boundary within this framework. The reference state is the homogeneous and steady flow over a flat bottom, submitted to an imposed constant shear stress  $\tau_{xz} = -u_*^2$ . The turbulent regime is characterised by the absence of any intrinsic length and time scales. At a sufficiently large distance  $z$  from the ground, the only length-scale limiting the size of turbulent eddies – the so-called mixing length  $L$  – is precisely  $z$ ; the only mixing time-scale is given by the velocity gradient  $|\partial_z u_x|$ . As originally shown by Prandtl 1925, it results from this dimensional analysis that the only way to construct a diffusive flux is a turbulent closure of the form:

$$\tau_{xz} = -\kappa^2 L^2 |\partial_z u_x| \partial_z u_x, \quad (2.3)$$

where the mixing length is  $L = z$  and  $\kappa \simeq 0.4$  is the (phenomenological) von Kármán constant. After integration, one obtains that the velocity has a single non zero component along the  $x$ -axis, which increases logarithmically with  $z$  (Tritton 1988):

$$u_x = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left( \frac{z}{z_0} \right). \quad (2.4)$$

where  $z_0$  is a constant of integration called the hydrodynamical roughness. This expression does not apply for  $z \rightarrow 0$ . There should be layer of thickness  $h_0$  close to the bottom, called the surface layer, matching the logarithmic profile to a null velocity on the ground.

### 2.2. Hydrodynamical roughness

The hydrodynamical roughness  $z_0$  should be distinguished from the geometrical (or physical) roughness of the ground, usually defined as the root mean square of the height profile variations.  $z_0$  is defined as the height at which the velocity would vanish, when extrapolating the logarithmic profile to small  $z$ . The physical mechanism controlling  $z_0$  can be of different natures. If the ground is smooth enough, a viscous sub-layer of typical size  $\mathcal{O}(\nu/u_*)$  must exist, whose matching with the logarithmic profile determines the value of  $z_0$ . On the contrary, if the geometrical roughness is larger than the viscous sub-layer, turbulent mixing dominates at small  $z$  with a mixing length controlled by the ground topography. In the case of a static granular bed composed of grains of size  $d$ , reported values of the hydrodynamical roughness are reasonably consistent ( $z_0 \simeq d/30$  in Bagnold 1941,  $z_0 \simeq d/24$  in Schlichting & Gersten 2000 and  $z_0 \simeq d/10$  (Kamphuis 1974, Andreotti 2004). In section 6, we will justify the connection between geometrical and hydrodynamical roughness on a rigorous basis and show that they are not simply proportional.

The situation is of course different in the presence of sediment transport, which may (or not) induce some negative feedback on the flow. In this case, the hydrodynamical roughness  $z_0$  may directly be controlled by the transport characteristics (e.g. mass flux

and grain trajectories). Nature presents many other physical processes controlling the roughness: for instance, the flexible stems of wetland plants in low marshes or, for the wind, the canopy or the waves over the ocean. In all these cases, it can be assumed that the logarithmic law is a good approximation of the velocity profile above the surface layer, with a single known parameter  $z_0$ .

We will first consider the asymptotic limit in which the typical relief length – say, the dune wavelength  $\lambda$  – is much larger than the surface layer thickness  $h_0$ . The relief is locally flat at the scale  $h_0$ , so that there must be a region close to the ground where the velocity profile shows a logarithmic vertical profile. We will then discuss the case of moderate values of the ratio  $\lambda/h_0$ , for which the flow becomes sensitive to the details of the mechanisms controlling the roughness.

### 2.3. A turbulent closure

In the logarithmic boundary layer, the normal stresses can be written as:

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = \frac{1}{3}\tau_{ll} \quad \text{with} \quad \tau_{ll} = \kappa^2 \chi^2 L^2 |\partial_z u_x|^2, \quad (2.5)$$

where  $\chi$  is a second phenomenological constant estimated in the range 2.5 – 3. Note that  $\chi$  does not have any influence on the results as it describes the isotropic component of the Reynolds stress tensor, which can be absorbed into the pressure terms. Normal stress anisotropy is considered in section 5 and appendix A. Introducing the strain rate tensor  $\dot{\gamma}_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i$  and its squared modulus  $|\dot{\gamma}|^2 = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}$ , we can write both expressions (2.3) and (2.5) in a general tensorial form:

$$\tau_{ij} = \kappa^2 L^2 |\dot{\gamma}| \left( \frac{1}{3} \chi^2 |\dot{\gamma}| \delta_{ij} - \dot{\gamma}_{ij} \right). \quad (2.6)$$

In this paper, we focus on 2D steady situations, i.e. on geometries invariant along the transverse  $y$ -direction, see figure 1. As they are of permanent use for the rest of the paper, we express the components of the velocity and stress equations in the  $x$ - and  $z$ -directions. The Navier-Stokes equations read:

$$\partial_x u_x + \partial_z u_z = 0, \quad (2.7)$$

$$u_x \partial_x u_x + u_z \partial_z u_x = -\partial_x p - \partial_z \tau_{xz} - \partial_x \tau_{xx}, \quad (2.8)$$

$$u_x \partial_x u_z + u_z \partial_z u_z = -\partial_z p - \partial_z \tau_{zz} - \partial_x \tau_{zx}. \quad (2.9)$$

The stress expressions are the following:

$$\tau_{xz} = -\kappa^2 L^2 |\dot{\gamma}| \dot{\gamma}_{xz}, \quad (2.10)$$

$$\tau_{xx} = -\kappa^2 L^2 |\dot{\gamma}| \dot{\gamma}_{xx} + \frac{1}{3} \kappa^2 \chi^2 L^2 |\dot{\gamma}|^2, \quad (2.11)$$

$$\tau_{zz} = -\kappa^2 L^2 |\dot{\gamma}| \dot{\gamma}_{zz} + \frac{1}{3} \kappa^2 \chi^2 L^2 |\dot{\gamma}|^2. \quad (2.12)$$

In these expressions, the strain tensor components are given by

$$\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{zx} = \partial_z u_x + \partial_x u_z, \quad \dot{\gamma}_{xx} = 2\partial_x u_x \quad \text{and} \quad \dot{\gamma}_{zz} = 2\partial_z u_z = -\dot{\gamma}_{xx}, \quad (2.13)$$

and the strain modulus by:

$$|\dot{\gamma}|^2 = 2(\partial_x u_x)^2 + 2(\partial_z u_z)^2 + (\partial_z u_x + \partial_x u_z)^2 = 4(\partial_x u_x)^2 + (\partial_z u_x + \partial_x u_z)^2. \quad (2.14)$$

### 3. Unbounded turbulent boundary layer over a wavy bottom

We now consider the turbulent flow over a wavy bottom constituting the floor of an unbounded boundary layer. In rivers, this corresponds to the limit of a flow depth  $H$  much larger than the bed-form wavelength  $\lambda$ . The solution is computed as a first order linear correction to the flow over a uniform bottom, using the first order turbulent closure previously introduced.

#### 3.1. Linearised equations

For small enough amplitudes, we can consider a bottom profile of the form

$$Z(x) = \zeta \cos(kx) \quad (3.1)$$

without loss of generality.  $\lambda = 2\pi/k$  is the wavelength of the bottom and  $\zeta$  the amplitude of the corrugation, see figure 1. The case of an arbitrary relief can be deduced by a simple superposition of Fourier modes. We introduce the dimensionless variable  $\eta = kz$ , the dimensionless roughness  $\eta_0 = kz_0$  and the function:

$$\mu(\eta) = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right). \quad (3.2)$$

We also switch to the standard complex number notation:  $Z(x) = \zeta e^{ikx}$  (real parts of expressions are understood).

We wish to perform the linear expansion of equations (2.7)-(2.14) with respect to the small parameter  $k\zeta$ . The mixing length is still defined as the geometrical distance to the bottom:  $L = z - Z$ . We introduce the following notations for the two first orders:

$$u_x = u_* [\mu + k\zeta e^{ikx} U], \quad (3.3)$$

$$u_z = u_* k\zeta e^{ikx} W, \quad (3.4)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -u_*^2 [1 + k\zeta e^{ikx} S_t], \quad (3.5)$$

$$p + \tau_{zz} = p_0 + u_*^2 \left[ \frac{1}{3} \chi^2 + k\zeta e^{ikx} S_n \right], \quad (3.6)$$

$$\tau_{zz} = u_*^2 \left[ \frac{1}{3} \chi^2 + k\zeta e^{ikx} S_{zz} \right], \quad (3.7)$$

$$\tau_{xx} = u_*^2 \left[ \frac{1}{3} \chi^2 + k\zeta e^{ikx} S_{xx} \right]. \quad (3.8)$$

The quantities  $U$ ,  $W$ , etc, are implicitly considered as functions of  $\eta$ . An alternative choice is to consider functions of the coordinate  $\xi = \eta - kZ$ . Such alternative functions are denoted with a tilde to make the distinction. This important – but somehow technical – issue of the choice of a representation is discussed in appendix C. Although the curvilinear and Cartesian systems of coordinates are equivalent, the distinction between the two is of importance when it comes to the expression of the boundary conditions, and for the range of amplitudes  $\zeta$  for which the linear analysis is no more valid (see section 6). In particular, vertical profiles in the forthcoming figures will be mostly plotted as a function of the shifted variable  $\xi$ .

The linearised strain rate tensor reads

$$\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{zx} = ku_* \mu' + u_* k^2 \zeta e^{ikx} (U' + iW), \quad (3.9)$$

$$\dot{\gamma}_{xx} = 2iu_* k^2 \zeta e^{ikx} U, \quad (3.10)$$

$$\dot{\gamma}_{zz} = 2u_* k^2 \zeta e^{ikx} W', \quad (3.11)$$

$$|\dot{\gamma}| = |\dot{\gamma}_{xz}|, \quad (3.12)$$

and the stress equations can be simplified into

$$\mu' S_t = 2(U' + iW) - 2\kappa^2 \eta \mu'^3, \quad (3.13)$$

$$\mu' S_{xx} = -2iU + \frac{2}{3}\chi^2(U' + iW) - \frac{2}{3}\chi^2 \kappa \mu'^2, \quad (3.14)$$

$$\mu' S_{zz} = -2W' + \frac{2}{3}\chi^2(U' + iW) - \frac{2}{3}\chi^2 \kappa \mu'^2. \quad (3.15)$$

Finally the Navier-Stokes equations lead to

$$W' = -iU, \quad (3.16)$$

$$S'_t = \mu iU + \mu' W + iS_n + iS_{xx} - iS_{zz}, \quad (3.17)$$

$$S'_n = -\mu iW + iS_t. \quad (3.18)$$

Taking the difference of equations (3.14) and (3.15), one can compute

$$S_{xx} - S_{zz} = \frac{-4iU}{\mu'} \quad (3.19)$$

to obtain four closed equations:

$$U' = -iW + \frac{1}{2}\mu' S_t + \kappa \mu'^2, \quad (3.20)$$

$$W' = -iU, \quad (3.21)$$

$$S'_t = \left(i\mu + \frac{4}{\mu'}\right)U + \mu' W + iS_n, \quad (3.22)$$

$$S'_n = -i\mu W + iS_t. \quad (3.23)$$

Introducing the vector  $\vec{X} = (U, W, S_t, S_n)$ , we finally get at the first order in  $k\zeta$  the following compact form of the equation to integrate:

$$\frac{d}{d\eta} \vec{X} = \mathcal{P} \vec{X} + \vec{S}, \quad \text{with } \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & -i & \frac{1}{2}\mu' & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ \left(i\mu + \frac{4}{\mu'}\right) & \mu' & 0 & i \\ 0 & -\mu i & i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and } \vec{S} = \begin{pmatrix} \kappa \mu'^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

The general solution of this equation is the linear superposition of all solutions of the homogeneous system (i.e. with  $\vec{S} = \vec{0}$ ), and a particular solution  $\vec{X}_s$ .

### 3.2. Boundary conditions

Four boundary conditions must be specified to solve the above equation (3.24). The upper boundary corresponds to the limit  $\eta \rightarrow \infty$ , for which we ask that the vertical fluxes of matter and momentum vanish asymptotically. This means that the first order corrections to the shear stress and to the vertical velocity must tend to zero:  $W(\infty) = 0$  and  $S_t(\infty) = 0$ . In practice, a boundary at finite height  $H$  (at  $\eta_H = kH$ ) is introduced, at which we impose a null vertical velocity  $W(\eta_H) = 0$  and a constant tangential stress  $\rho u_*^2$  so that  $S_t(\eta_H) = 0$ . This corresponds to a physical situation where the fluid is entrained by a moving upper plate, for instance a stress-controlled Couette annular cell. Then, we consider the limit  $H \rightarrow +\infty$ , i.e. when the results become independent of  $H$ .

The lower boundary condition must be specified on the floor ( $\eta \rightarrow kZ$ ). We consider here the limit in which the surface layer thickness  $h_0$  is much smaller than the wavelength  $\lambda$ . This allows to perform an asymptotic matching between the solution and the surface layer, whatever the dynamical mechanisms responsible for the hydrodynamical roughness

$z_0$  are. Indeed, focusing on the surface layer, we know that in the limit  $z \gg h_0$ , the asymptotic behaviour of the local tangential velocity  $u$  should be a logarithmic profile controlled by the local shear stress  $\tau$  and the roughness  $z_0$ . The solution of (3.24) should thus match this asymptotic behaviour as  $\eta \rightarrow kZ$ . Thus,  $z_0$  is the only parameter inherited from the surface layer in the limit  $h_0 \ll \lambda$ . We will investigate the situation where this approximation is not valid anymore in section 4.

In the limit  $z - Z \ll \lambda$ , the homogeneous solution of (3.24) can be expanded in powers of  $\eta$  and  $\ln \frac{\eta}{\eta_0}$  and expressed as the sum over four modes. Adding the asymptotic behaviour of the particular solution  $\vec{X}_s = (-\frac{1}{\kappa\eta}, \frac{i}{\kappa} \ln \frac{\eta}{\eta_0}, 0, 0)$ , the full solution writes:

$$\vec{X} \underset{\eta \rightarrow 0}{\sim} a_1 \begin{pmatrix} \mu^2/4 \\ 1 \\ \mu \\ -\eta^2 \mu^3/4 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} \mu/2 \\ -i\eta \mu/2 \\ 1 \\ i\eta \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -i\eta \\ i\eta \mu(\eta) \\ -\eta^2 \mu(\eta) \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} i\eta/(2\kappa) \\ \eta^2/(4\kappa) \\ i\eta \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{X}_s. \quad (3.25)$$

The next terms in this expansion are  $\mathcal{O}(\eta \ln^2 \frac{\eta}{\eta_0})$ .

The values of the four coefficients  $a_1, \dots, a_4$  are selected by the matching with the surface layer.  $a_1$  would correspond to a non vanishing normal velocity through the surface layer and should thus be null.  $a_2$  precisely corresponds to the logarithmic profile with a roughness  $z_0$  and a basal shear stress modulation  $a_2$ . This gives  $a_2 = S_t(0)$ .  $a_3$  would correspond to a modulation of the local roughness – more precisely of its logarithm. We do not consider such a modulation so that  $a_3 = 0$ .  $a_4$  corresponds to a sub-dominant behaviour associated to the basal pressure modulation ( $a_4 = S_n(0)$ ). In summary, the functions  $U, W, S_t$  and  $S_n$  should follow the following asymptotic behaviour:

$$U(\eta) = \frac{S_t(0)}{2\kappa} \ln \frac{\eta}{\eta_0} + \frac{iS_n(0)}{2\kappa} \eta - \frac{1}{\kappa\eta}, \quad (3.26)$$

$$W(\eta) = -\frac{iS_t(0)}{2\kappa} \eta \left( \ln \frac{\eta}{\eta_0} - 1 \right) + \frac{S_n(0)}{4\kappa} \eta^2 + \frac{i}{\kappa} \ln \frac{\eta}{\eta_0}, \quad (3.27)$$

$$S_t(\eta) = S_t(0) + iS_n(0)\eta, \quad (3.28)$$

$$S_n(\eta) = S_n(0). \quad (3.29)$$

The region of thickness  $\ell$  in which this asymptotic behaviour constitutes a good approximation of the flow field is called the inner layer. Equation (3.29) means that the total pressure  $\varphi = p + \tau_l/3$  is constant across this boundary layer:

$$\partial_z \varphi = 0 \quad (3.30)$$

and equation (3.28) that the shear stress decreases linearly with height according to:

$$\partial_x \varphi + \partial_z \tau_{xz} = 0, \quad (3.31)$$

The tangential pressure gradient is balanced by the normal shear stress, which means that inertial terms are negligible or equivalently that the fluid is in local equilibrium. In terms of energy, the space variation of the internal energy (pressure) is dissipated in turbulent "friction". These two equations correspond to the standard lubrication approximation for quasi-parallel flows.

### 3.3. Equations solving

In practice, we solve the equations using a fourth order Runge-Kutta scheme with a logarithmic step. The integration is started at an initial value of  $\eta$  inside the inner layer i.e. which verifies  $\eta \ln^2 \frac{\eta}{\eta_0} \ll 1$ . We write the solution as a linear superposition of the

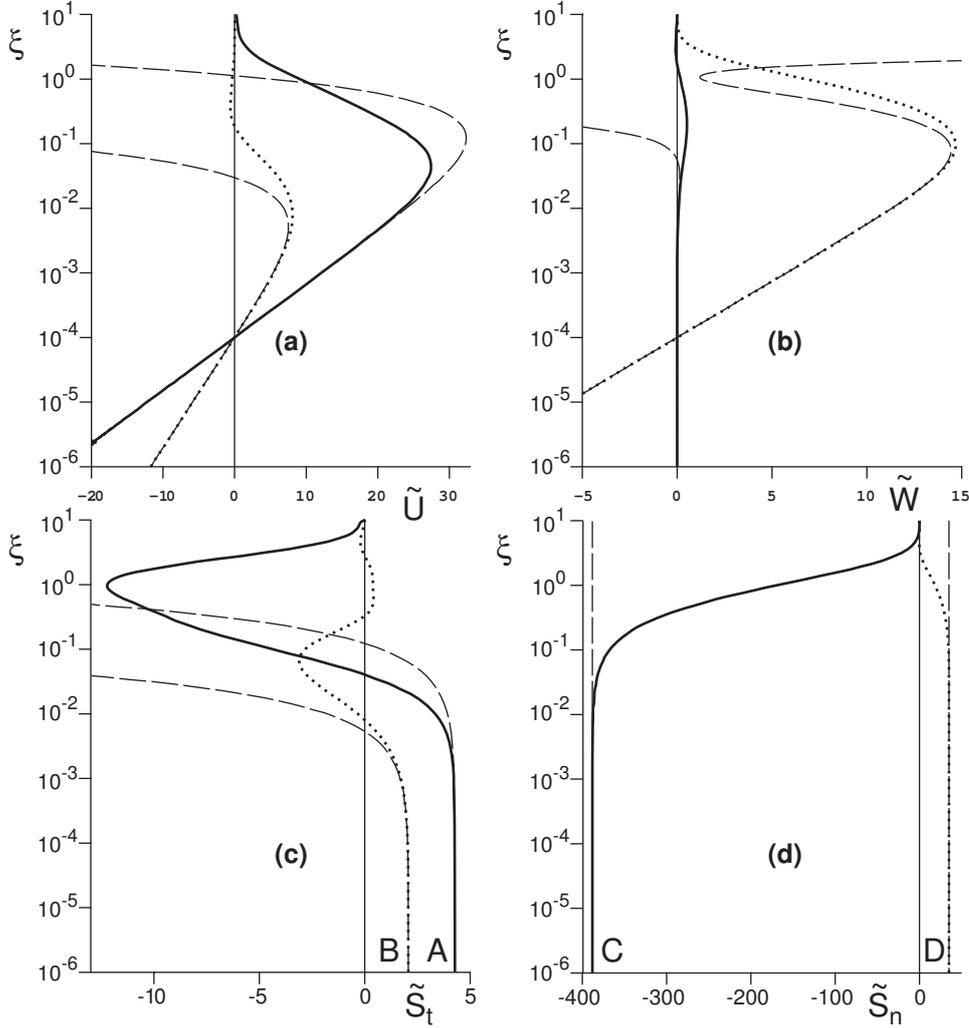


FIGURE 2. Vertical profiles of the first order corrections to velocities and stresses for  $\eta_0 = 10^{-4}$ .  $\xi = \eta - kZ$  is the distance to the bottom, rescaled by the wavenumber. In all panels, the solid lines represent the real parts of the functions, whereas the dotted lines represent the imaginary ones. Dashed lines show the asymptotic behaviours (3.26-3.29) used as boundary conditions. They match the solutions in the inner layer, which extends up to  $\eta \simeq k\ell \simeq 10^{-2}$  here. We note  $\tilde{S}_t(0) = A + iB$  and  $\tilde{S}_n(0) = C + iD$ . Close to the boundary, a plateau of constant shear stress can be observed, which corresponds to the logarithmic zone. It is embedded into a slightly larger zone of constant pressure in which the shear stress varies linearly.

form  $\vec{X} = \vec{X}_s + S_t(0)\vec{X}_t + S_n(0)\vec{X}_n$ , where the different terms verify:

$$\frac{d}{d\eta}\vec{X}_s = \mathcal{P}\vec{X}_s + \vec{S} \quad \text{starting from} \quad \vec{X}_s(\eta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\kappa\eta} \\ \frac{i}{\kappa} \ln \frac{\eta}{\eta_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

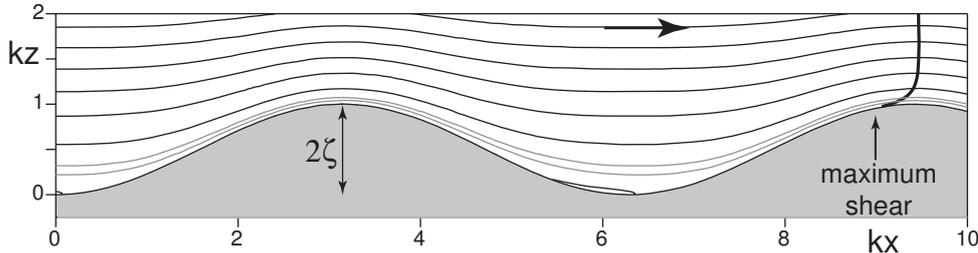


FIGURE 3. Flow streamlines above a wavy bottom of rescaled amplitude  $k\zeta = 0.5$  (aspect ratio  $\sim 1/6$ ), computed from the linearised equations ( $\eta_0 = 10^{-4}$ ). The flow direction is from left to right. Note the left-right asymmetry of the streamlines around the bump in the inner layer (grey lines). Note also the onset of emergence of a recirculation bubble in the troughs. The thick line in the top right corner shows the positions that maximises the velocity along a streamline.

$$\frac{d}{d\eta} \vec{X}_t = \mathcal{P} \vec{X}_t \quad \text{starting from} \quad \vec{X}_t(\eta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{\eta}{\eta_0} \\ -\frac{i\eta}{2\kappa} \left( \ln \frac{\eta}{\eta_0} - 1 \right) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

$$\frac{d}{d\eta} \vec{X}_n = \mathcal{P} \vec{X}_n \quad \text{starting from} \quad \vec{X}_n(\eta) = \begin{pmatrix} \frac{i\eta}{2\kappa} \\ \frac{\eta^2}{4\kappa} \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

The boundary conditions on the bottom are then automatically satisfied, and the top ones give algebraic equations on the real and imaginary parts of  $S_t(0)$  and  $S_n(0)$ , which can be solved easily. We have checked that the result is independent of the initial value of  $\eta$ , as long as it remains in the announced range.

### 3.4. Results

The velocity and stress profiles resulting from the integration of equation (3.24) are displayed in figure 2. Looking at panel (c), one can clearly see the region close to the bottom where the shear stress is constant, while the horizontal velocity component (panel a) exhibits a logarithmic behaviour. This plateau almost coincides with the inner layer, which is the zone where the solution is well approximated by the asymptotic behaviour derived above. The inner layer is embedded in a wider region characterised by a constant pressure (panel d). The estimate of the thickness  $\ell$  is of crucial importance for the transport issue (see next section and Part 2).  $\ell$  is the scale at which inertial terms are of the same order as stress ones in the Reynolds averaged Navier-Stokes equations. The original estimation of  $\ell$  given by Jackson & Hunt 1975 was further discussed in several later papers (see e.g. Taylor et al. 1987, Claussen 1988, Beljaars & Taylor 1989, Finnigan et al. 1990). Our data are in good agreement with the scaling proposed by Taylor et al. 1987

$$\frac{\ell}{\lambda} \frac{1}{\kappa^2} \ln^2 \frac{\ell}{z_0} = \mathcal{O}(1). \quad (3.35)$$

Consistently, this scaling relationship is precisely that of the first neglected terms in the asymptotic expansion (3.25). Away from the bottom, all profiles tend to zero, so that one recovers the undisturbed flow field (2.4) at large  $\eta$ . The shape of these profiles are very consistent with the work of Ayotte et al. 1994, who have compared the influence of

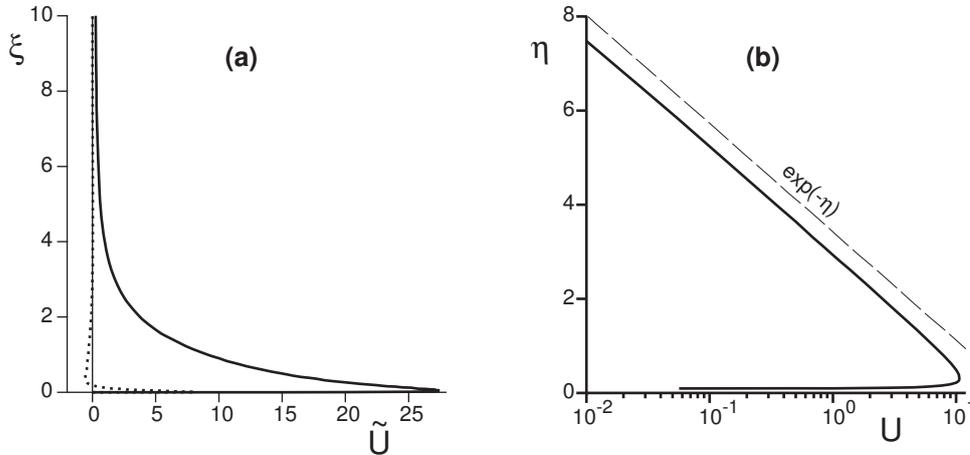


FIGURE 4. Vertical profiles of the first order correction to the horizontal velocity for  $\eta_0 = 10^{-4}$ . (a) Lin-lin plot in the shifted representation. (b) Lin-Log plot in the non-shifted representation. The solid lines correspond to the real part and the dotted line to the imaginary one. The velocity disturbance decreases exponentially over one wavelength (dashed line). In this outer region, the Reynolds stress can be neglected.

the closure scheme on the linear flow over a relief, which means that the precise choice of the turbulent closure does not affect significantly the results.

In order to visualise the effect of the bottom corrugation on the flow, the flow streamlines are displayed in figure 3 (see appendix D for explanations about their computation). It can be observed that the velocity gradient is larger on the crest than in the troughs as the streamlines are closer to each other. The flow is disturbed over a vertical distance comparable to the wavelength. A subtler piece of information concerns the position along each streamline at which the velocity is maximum. These points are displayed in the right corner of figure 3. Away from the bottom, they are aligned above the crest of the bump. Very close to it, however, they are shifted upstream. In other words, the fluid velocity is in phase with the topography in the upper part of the flow, but is phase advanced in the inner boundary layer where the shear stress tends to its basal value. In this inner layer, the profile is well approximated by its asymptotic expression (3.26).

An inspection of the velocity profile evidences two distinct regions (see figures 2 and 4), in which we recognise those at the basic partitioning of the flow in Jackson & Hunt work (1975), and subsequent papers. There is an outer region ( $\eta \gg k\ell$ ), where  $U$  decreases exponentially with  $\eta$  (figure 4(b)). Seeking for asymptotic solutions decreasing as  $e^{-\sigma\eta}$ , one has to solve the eigenvalue problem  $\mathcal{P}\vec{X} = -\sigma\vec{X}$  for asymptotically large values of  $\eta$ . At the two leading orders, the decrease rate  $\sigma$  is given by:

$$2i(\sigma^4 + 1)\kappa^2\eta + (\sigma^2 - 1)\ln\frac{\eta}{\eta_0} = 0. \quad (3.36)$$

The asymptotic behaviour is an oscillatory relaxation corresponding to  $\sigma = (1 \pm i)/\sqrt{2}$ . However, the observed decrease corresponds to the intermediate asymptotic regime  $\eta < \ln\frac{\eta}{\eta_0}$  for which the solution is  $\sigma = 1$ . This behaviour is reminiscent from that of an inviscid potential flow. In other words, the effect of the turbulent shear stress on the flow disturbance can be neglected.

The intermediate region between the inner and the outer layers is responsible for the asymmetry of the flow as well as the upstream shift of the maximum velocity discussed

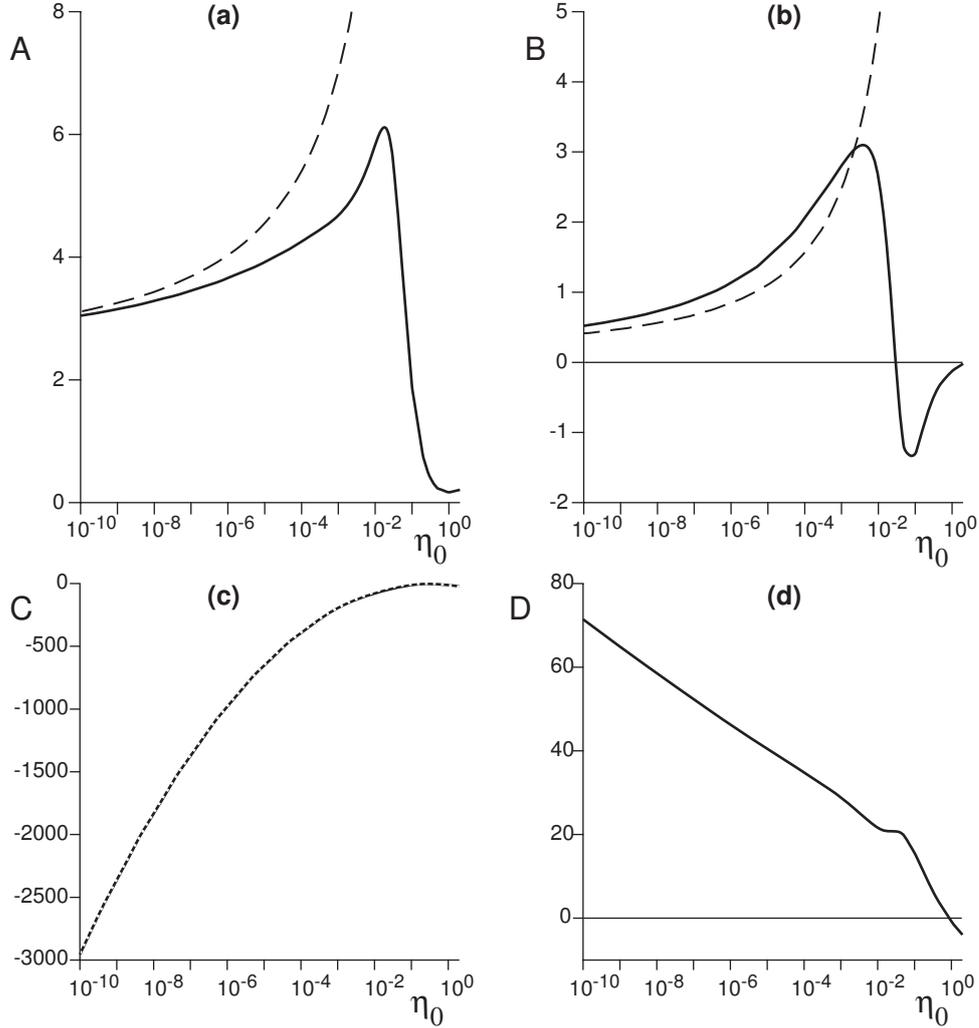


FIGURE 5. Coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  as a function of  $\eta_0 = kz_0$ . These plots show the dependence of the basal shear and normal stresses with the number of decades separating the wavelength  $\lambda$  from the soil roughness  $z_0$ , for a given bump aspect ratio. The solid line corresponds to the results of the model, using the asymptotic matching with the surface layer. The dashed lines represent the analytical formula deduced from Jackson & Hunt 1975 by Kroy et al. 2002. They agree well at very small  $\eta_0$ .

above. Let us emphasise again that this is the physical key point for the formation of bedforms. One can understand the reason of the phase shift with the following argument. The external layer can be described as a perfect irrotational flow. Since the elevation profile is symmetric, the streamlines are symmetric too, as the flow is solely controlled by the balance between inertia and the pressure gradient induced by the presence of the bump. As a consequence, the velocity is maximum at the vertical of the crest. Now, inside the inner layer, this flow is slowed down by turbulent diffusion of momentum. Focusing on the region of matching between these outer and inner regions, the velocity needs some time to re-adapt to a change of shear stress, due to inertia. Thus, the shear

stress is always phase-advanced with respect to the velocity. One concludes that the basal shear stress is phase-advanced with respect to the bump.

As mentioned in the introduction, we are especially interested in the shear stress and pressure distributions on the bottom. We note  $\tilde{S}_t(0) = A + iB$  and  $\tilde{S}_n(0) = C + iD$ . The ratio  $B/A$  is the tangent of the phase shift between the shear stress and the topography. It is positive as the shear stress is phase advanced. The four coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  are displayed as a function of  $\eta_0$  in figure 5. Their overall dependence with  $\eta_0$  is weak, meaning that the turbulent flow around an obstacle is mostly scale invariant. More precisely, following Jackson & Hunt's work (Jackson & Hunt 1975, Kroy et al. 2002), it has been shown that, for asymptotically small  $\eta_0$ , one expects logarithmic dependencies:

$$A = \frac{\ln^2(\Phi^2/\ln\Phi)}{2\ln^3\phi} \left(1 + \ln\phi + 2\ln\frac{\pi}{2} + 4\gamma_E\right) \quad \text{and} \quad B = \pi \frac{\ln^2(\Phi^2/\ln\Phi)}{2\ln^3\phi}, \quad (3.37)$$

where Euler's constant is  $\gamma_E \simeq 0.577$ ,  $\phi$  is defined by the equation  $\phi \ln\phi = 2\kappa^2\Phi$  and with  $\Phi = \pi/(2\eta_0)$ . Note that  $A$  tends to 2 and  $B$  to 0 as  $\eta_0 \rightarrow 0$ , as expected when the inner layer thickness  $\ell$  vanishes. In this limit, the basal shear stress is directly proportional to the square of the velocity inherited from the outer layer, which is solution of the potential flow problem.

These expressions agree well with our numerical results for very small  $\eta_0$ . However, for realistic values of  $\eta_0$ , e.g.  $10^{-4} < \eta_0 < 10^{-2}$ , this approximation cannot be accurately used as it leads to errors of order one – note that Jackson & Hunt's expressions tend to diverge at larger  $\eta_0$ . In comparison to  $A$  and  $B$ , we observe that the normal stress coefficients  $C$  and  $D$  are more robust with respect to the details of the model. In the limit of a perfect flow, the pressure varies as the square of the velocity. Here, one needs to consider the velocity at the scale  $\lambda$  of the perturbation, say  $u_*\mu$ , where the logarithmic factor  $\mu$  should be evaluated for  $\eta$  of order unity. From this argument, we predict that the pressure coefficient  $C$  should scale as the square of  $\ln\eta_0$  (a parabola in figure 5), which is very accurately verified. More precisely,  $C = [\mu(1/4)]^2$  is an almost perfect approximation. Finally, it can be observed that the normal stress is also in phase advance with respect to the bottom profile. The coefficient  $D$  is positive and shows a linear variation with  $\ln\eta_0$ .

#### 4. Effect of the mechanisms controlling the hydrodynamical roughness

So far, the computation of the velocity and stress fields has been obtained without any specification of the physics at the scale of  $z_0$ , as the integration of equation (3.24) was started in the inner layer rather than on the bottom. This is of course possible only if this layer is sufficiently thick, i.e. if  $\ell$  (or  $\lambda$ ) is much larger than the thickness of the surface layer  $h_0$  introduced in section 2. We now discuss several ways to describe the flow inside the surface layer, and investigate the subsequent effect on the shape of the stress coefficients as functions of  $\eta_0$ . These coefficients should be independent of the physics at work in this surface layer when  $\eta_0$  is small enough, but we expect larger differences for larger values of  $\eta_0$ .

We first present a convenient phenomenological model of geometrically induced roughness, which does not involve additional parameters. Because of its simplicity, it will be used in the next sections, as well as in the second part of the paper. The results will be compared to a rigorous treatment resulting from the weakly non-linear hydrodynamical calculation in section 6. We then consider the case of a viscous surface layer. Inspired

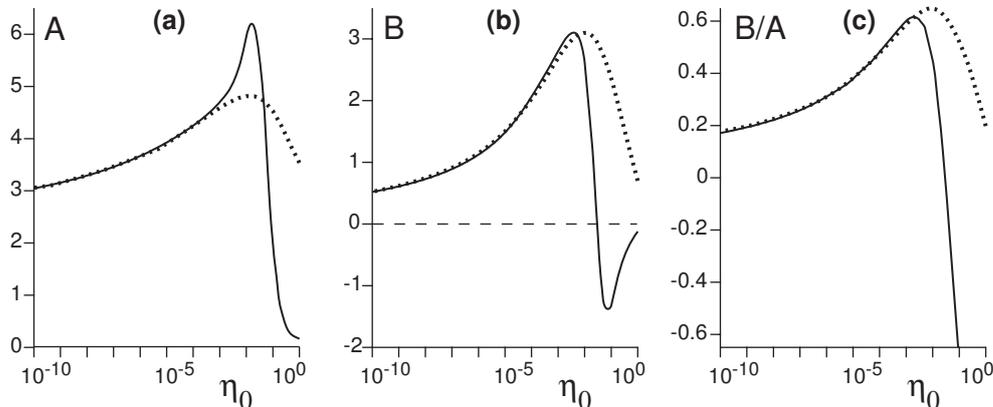


FIGURE 6. Shear stress coefficients  $A$  and  $B$  (dashed lines) computed with the phenomenological model of geometrically induced roughness (4.1). For comparison, the solid lines display the reference case shown in figure 5.

from the aeolian transport properties, we finally discuss the focus point assumption as a possible way to describe the situation in which the surface layer is governed by the presence of sediment transport.

#### 4.1. Geometrically induced roughness

For an hydrodynamically rough bottom, the "small scale" roughness elements are larger than the viscous sub-layer. They are submitted to a turbulent drag from the fluid and reciprocally, their presence slows down the flow. The exchanges of momentum in the surface layer are thus dominated by the turbulent fluctuations. Following Richards 1980 and others, a convenient phenomenological model is to define the mixing length involved in the turbulent closure (2.6) as  $L = z_0 + z - Z$ . In this way,  $L$  is still essentially the geometrical distance to the bottom, except that it cannot be smaller than the roughness length. This choice reflects in a intuitive manner the physical picture one can infer from experiments or simulations where square-shaped roughness elements are glued on a flat wall (see e.g. Perry et al. 1969). We will show in section (6) that this picture must be refined when dealing with blunt roughness elements of moderate aspect ratio – for instance the surface of a sand bed.

With this expression for the mixing length, the integration of starting equations in the uniform and steady case gives

$$u_x = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left( 1 + \frac{z}{z_0} \right), \quad (4.1)$$

where the lower boundary condition  $u_x = 0$  can now be taken in  $z = 0$ . This expression is well approximated by the pure logarithmic profile (eq. 2.4) as soon as  $z$  is larger than, say, few  $z_0$ . In other words, for this model,  $h_0 \sim z_0$ .

The above description of the linear analysis, and in particular the expression of the matrix  $\mathcal{P}$  and the vector  $\mathcal{S}$  involved in (3.24), in the case of a wavy bottom is still valid, but now with the following expression for the function

$$\mu(\eta) = \frac{1}{\kappa} \ln \left( 1 + \frac{\eta}{\eta_0} \right). \quad (4.2)$$

The solution of (3.24) can again be written as a linear superposition  $\vec{X} = \vec{X}_s + S_t(0)\vec{X}_t +$

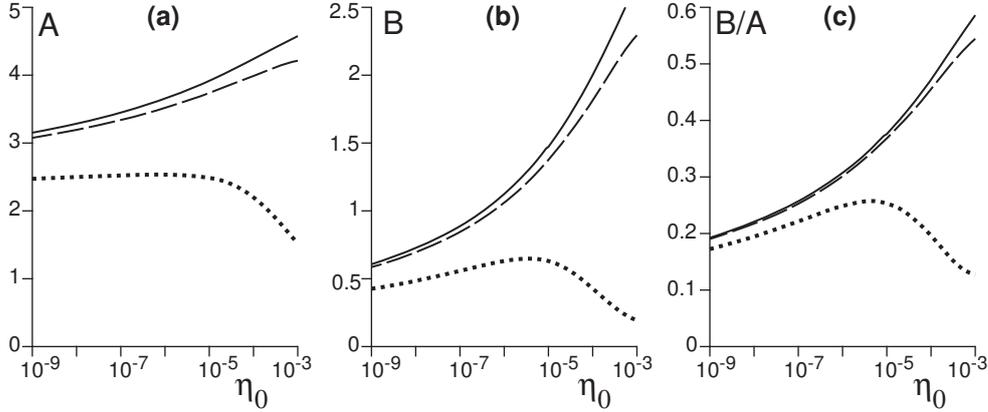


FIGURE 7. Shear stress coefficients  $A$  and  $B$  computed with a viscous surface layer. Dotted line:  $\mathcal{R}_t = 125$ ; Dashed line:  $\mathcal{R}_t = 1$ . As in figure 6, the solid lines display the reference case of figure 5.

$S_n(0)\vec{X}_n$ , where these three vectors are solutions of

$$\frac{d}{d\eta}\vec{X}_s = \mathcal{P}\vec{X}_s + \vec{S} \quad \text{with} \quad \vec{X}_s(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\kappa\eta_0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\frac{d}{d\eta}\vec{X}_t = \mathcal{P}\vec{X}_t \quad \text{with} \quad \vec{X}_t(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\frac{d}{d\eta}\vec{X}_n = \mathcal{P}\vec{X}_n \quad \text{with} \quad \vec{X}_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

This decomposition ensures the requirement that both components of the velocity vanish on the bottom, leading to  $W(0) = 0$  and  $U(0) = -\mu'(0) = -1/(\kappa\eta_0)$ . As in the previous section, the coefficients  $S_t(0)$  and  $S_n(0)$  are found by the upper boundary conditions.

The coefficients  $A$  and  $B$  resulting from this integration are displayed in figure 6. One can see that, for  $\eta_0 < 10^{-3}$ , they are not very much different from those obtained in the previous section. However, one can notice significant differences for  $\eta_0 > 10^{-2}$ . As the mixing length in the surface layer is larger in this case ( $L \sim z_0$ ) than in the asymptotic case ( $L \sim z - Z$ ), the turbulent ‘diffusion’ is more efficient. This results into a larger phase advance for the shear stress (Fig. 6 c). For practical purposes and for later use in the second part of this paper, a very good empirical fit of the coefficients  $A$  and  $B$  is obtained with

$$A = 2 + \frac{a_1 + a_2R + a_3R^2 + a_4R^3}{1 + a_5R^2 + a_6R^4} \quad \text{and} \quad B = \frac{b_1 + b_2R + b_3R^2 + b_4R^3}{1 + b_5R^2 + b_6R^4} \quad (4.6)$$

with  $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} = \{1.0702, 0.093069, 0.10838, 0.024835, 0.041603, 0.0010625\}$ ,  $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\} = \{0.036989, 0.15765, 0.11518, 0.0020249, 0.0028725, 0.00053483\}$  and  $R = \ln \frac{2\pi}{\eta_0}$ .

## 4.2. A viscous surface layer

In hydraulically smooth situations, it is natural to expect that, very close to the bottom, the flow must be laminar and thus described by the equation

$$\tau = \nu \frac{du_x}{dz} = u_*^2, \quad (4.7)$$

whose solution is

$$u_x(z) = \frac{u_*^2}{\nu} z. \quad (4.8)$$

We thus neglect here the possibility of a phase shift across the viscous surface layer. The transition from viscous to turbulent regime is governed by the Reynolds number and occurs at a typical value  $\mathcal{R}_t \simeq 125$ . The surface layer thickness can then be easily computed as  $h_0 = \frac{\nu}{u_*} \sqrt{\mathcal{R}_t}$ . At  $z = h_0$ , both viscous and turbulent expressions for the velocity must coincide:

$$u_h \equiv u_* \sqrt{\mathcal{R}_t} = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{h_0}{z_0}. \quad (4.9)$$

From this equality, we can deduce the hydrodynamical roughness seen from the inner layer, due to this viscous surface layer:

$$z_0 = \frac{\nu}{u_*} \sqrt{\mathcal{R}_t} e^{-\kappa \sqrt{\mathcal{R}_t}}. \quad (4.10)$$

In the case of a sand bed, the transition between the hydrodynamically smooth and rough regimes occurs when the viscosity induced roughness (eq. 4.10) is of the order of the geometrically induced roughness ( $z_0 \sim d/10$ ).

With the corresponding value for  $\eta_0 = kz_0$ , we solve equation (3.24) in the usual manner, writing the solution in the form of the linear superposition as described above, except that the integration is started at the initial value  $\eta = kh_0$ , in which we impose that the velocity is parallel to the bed and equal to  $u_h$ . At linear order, this leads to

$$U(kh_0) = -\mu'(kh_0), \quad (4.11)$$

$$W(kh_0) = iu_h/u_* = i\mu(kh_0). \quad (4.12)$$

The resulting shear stress coefficients  $A$  and  $B$  are displayed in figure 7. As one can expect, in comparison to the reference case, they are smaller for larger values of  $\mathcal{R}_t$ , and all different curves collapse as  $\eta_0 \rightarrow 0$ . The viscous diffusion of momentum is less efficient than that induced by turbulent fluctuations. Moreover, in the Stokes regime, for Reynolds numbers much smaller than 1, the kinematic reversibility leads to a shear stress in phase with the topography. Consistently, it can be observed in figure 7(c) that the phase advance is reduced in the hydrodynamically smooth regime. We will show in the second part of this article that this explains the fact that the wavelength at which ripples appear is larger as the Reynolds number decreases.

Experiments in the hydraulically smooth regime have been performed by Zilker et al. 1977, Zilker & Hanratty 1977, Abrams & Hanratty 1985, who measured the ionic mobility between two nearby electrodes. This current is assumed to be related, without any spatial or temporal lag, to the basal shear stress. The measured phase shift between the signal and the bottom topography could reach values as high as  $80^\circ$ . This would correspond to  $B/A = \tan(80\pi/180) \simeq 5.67$ . Within the present model, the phase shift remains much lower than the measured  $80^\circ$ . This unexpected value has been interpreted as the signature of a lag of the laminar-turbulent transition with respect to the Reynolds number criterion  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_t$ . Further experiments based on a different measure principle are needed to understand this discrepancy.

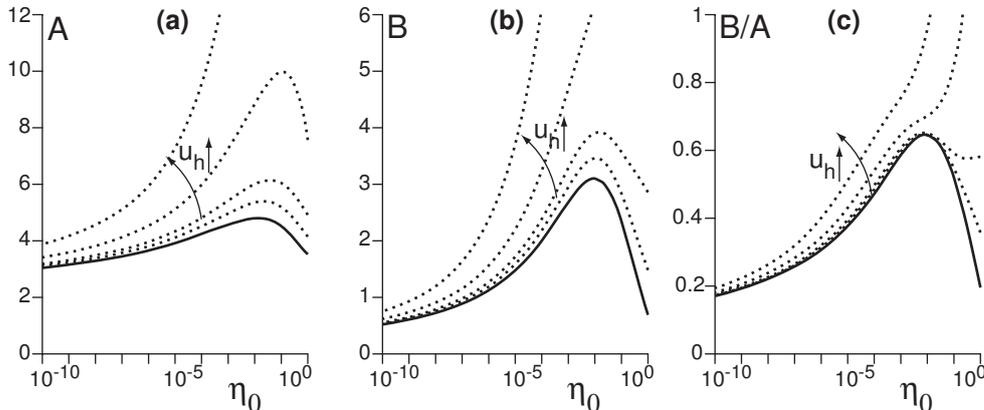


FIGURE 8. (a) Shear stress coefficients  $A$  and  $B$  computed in the presence of a ‘focus point’ at height  $h_0$ , where the velocity is  $u_h$ , as a function of  $\eta_0$ .  $A$  and  $B$  are larger for larger values of  $u_h/u_*$  (1, 2, 5 and 10). However, the ratio  $B/A$  is less sensitive to this parameter, up to  $\eta_0 \simeq 10^{-3}$ . Again, the solid lines display the reference case of figure 5.

This viscous surface layer model is an effective way to take bedload transport into account. As a matter of fact, anticipating on the part 2 of this paper where the dynamical mechanisms governing the sediment transport are discussed, transported particles are not passive and exert a stress on the fluid. Close to the transport threshold, their influence on the flow is negligible. However, as their density increases, transport induces a negative feedback on the flow, which should be taken into consideration in the hydrodynamics description. The simplest model of multi-layer sheet flow would be a Newtonian fluid whose viscosity increases with the concentration of moving sediments. In this large shear velocity regime, one thus expects a decrease of the phase-lag responsible for the ripples instability and possibly, a restabilisation of the bed.

#### 4.3. The focus point assumption

An alternative manner to take the feedback of the transport on the flow into account can be achieved in analogy with the aeolian case, which provides the archetype of such a situation. In this case, it has been shown that the moving grains slow down the flow in the transport layer, whose thickness  $h_0$  is independent of the shear velocity  $u_*$ . Note that in the subaqueous case, the transport layer thickness is observed to gently increase with the shear stress (Abbott & Francis 1977, Fernandez Luque & van Beek 1976) close to the threshold, in the erosion limited regime (see part 2). Above  $h_0$ , the effect of the particles on the flow is negligible and one recovers the undisturbed logarithmic velocity profile, but with a roughness larger than that without transport. Below  $h_0$ , the flow velocity is reduced and is independent of  $u_*$  (Ungar & Haff 1987, Andreotti 2004). As shown experimentally by Bagnold 1941, the velocity vertical profiles measured for different shear velocities thus cross at the ‘focus point’  $z = h_0$  and  $u_x = u_h$ . At this point we have

$$\frac{u_h}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{h_0}{z_0}, \quad (4.13)$$

which means that the effective roughness in the logarithmic region, due to this transport layer, is

$$z_0 = h_0 e^{-\kappa u_h/u_*} \quad (4.14)$$

To determine the flow field in such a situation, the crucial point is to compare  $h_0$

with the thickness of the inner layer  $\ell$ , i.e. the size of the constant stress plateau (see figure 2). If  $h_0$  is larger than  $\ell$ , it means that one cannot reduce the transport issue to a relationship between the sediment flux and the basal shear stress only. In that case, the whole vertical velocity profile, which depends on the entire bottom elevation, is involved. Conversely, for  $h_0 < \ell$ , one can account for transport by modifying the bottom boundary conditions as follows. Following what we have done in the previous sub-section, we can impose that the fluid velocity at  $z = Z + h_0$  is parallel to the bed and equal to  $u_h$ . At the linear order, we then get:

$$U(kh_0) = -\mu'(kh_0) \quad (4.15)$$

$$W(kh_0) = iu_h/u_* = i\mu(kh_0). \quad (4.16)$$

The result of this choice is shown for the stress coefficients in figure 8 for various values of  $u_h/u_*$ .  $A$  and  $B$  are larger for increasing focus velocities, or equivalently larger focus altitude. As in the viscous surface layer case, all curves collapse for  $\eta_0 \rightarrow 0$  because  $\ell$  gets larger in this limit (see equation (3.35)). Interestingly, as far as bedforms are concerned (see Part 2), the ratio  $B/A$  is much less sensitive to variations of  $u_h/u_*$ , at least in the region  $\eta_0 < 10^{-3}$ .

Finally, it should be noted that the focus point model only applies to the momentum limited transport regime (see part 2). Close to the transport threshold, in the erosion limited regime, the feedback of the particle transport on the flow is negligible and the transport should not to be taken into account in the hydrodynamical calculation. This approach should be distinguished from that used by Colombini 2004, Colombini & Stocchino 2005, Colombini & Stocchino 2008. In those articles, the flow boundary conditions are taken on the bottom, below the transport layer (vanishing velocities), meaning that the feedback of the transport on hydrodynamics is neglected. However, the stresses are evaluated in  $h_0$ , above the transport layer. This does not constitute a self-consistent choice. Moreover, this introduces a free parameter in the model which can be tuned to choose the phase shift at will. We will present in the second part experimental evidences that this choice is not correct.

#### 4.4. Concluding remarks

For these three dynamical mechanisms controlling the hydrodynamical roughness  $z_0$ , we have seen that the asymptotic regime is recovered when the surface layer thickness  $h_0$  is smaller than the inner layer thickness  $\ell$ . As  $\ell$  is much smaller than the wavelength  $\lambda$  (for standard bedforms,  $\ell/\lambda = \mathcal{O}(10^{-3})$ ), this constitutes a rather restrictive condition. Whenever  $h_0$  is larger than  $\ell$ , specific hydrodynamic models should be derived to determine the relations between stresses and topography.

The phase shift between the basal shear stress and the topography originates from the interplay between inertia and shear stress. The different models of surface layer correspond to different ways of mixing momentum in the direction normal to the wall. Although the argument is general, one sees that the precise value of the phase shift is rather sensitive to the physical origin of the momentum fluxes. In particular, viscous diffusion leads to a much smaller phase advance than turbulent mixing.

## 5. Robustness of the results

In the same spirit as the previous section, where we have investigated the effect of different ways to treat the surface layer on the stress coefficients  $A$  and  $B$ , we would like now to show the robustness of the results when considering a second order turbulent closure, Reynolds stress anisotropy or a moving bottom.

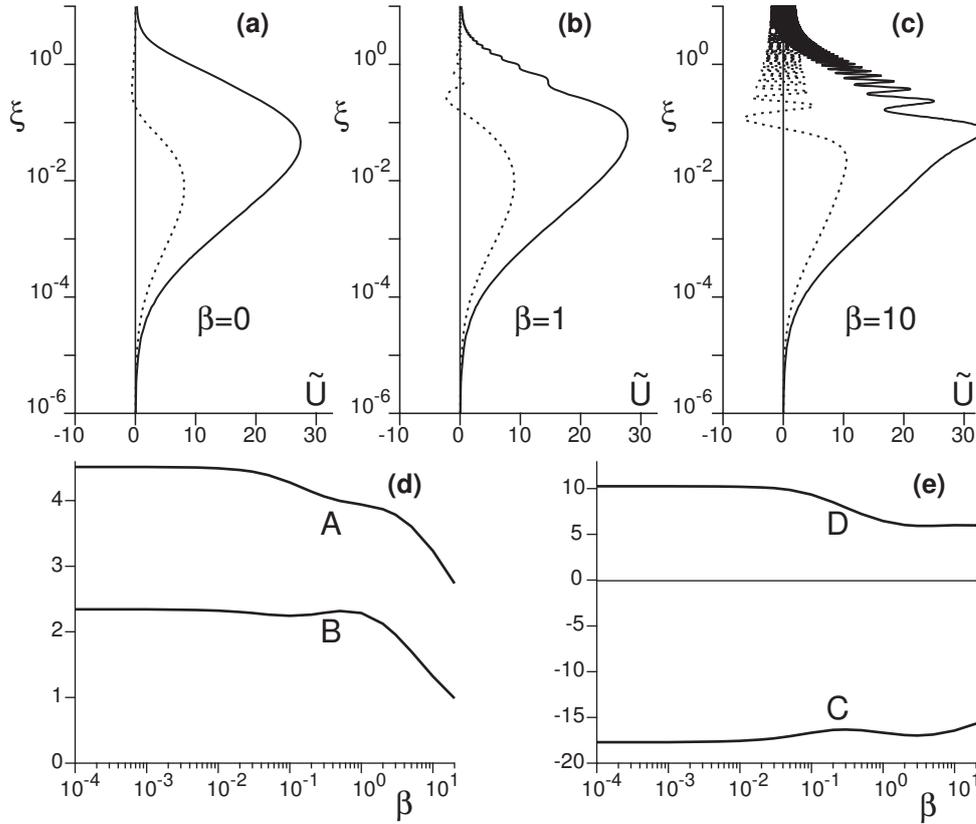


FIGURE 9. Effect of the parameter  $\beta$ , which is a non dimensional parameter encoding the time lag between a change in the strain rate and that of the Reynolds stress. (a-c) Vertical profiles of the horizontal component of the velocity  $\tilde{U} = U + \mu'$  for  $\eta_0 = 10^{-4}$  for (a)  $\beta = 0$ , (b)  $\beta = 1$  and (c)  $\beta = 10$  respectively. One can see that the profiles develop oscillations as  $\beta$  increases, but that the behaviour close to the bottom (in log scale) remains the same. In panels (d) and (e), we plot the coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  vs  $\beta$  (still for  $\eta_0 = 10^{-4}$ ). They are weakly affected, meaning again that the behaviour close to the bottom is almost unchanged.

### 5.1. A second order turbulent closure

As already stated, to solve quantitatively the ‘dune problem’, we need to take correctly into account the effects inducing a phase shift between the stresses and the relief. As a matter of fact, a first order closure assumes that the turbulent energy adapts instantaneously to the mean strain tensor. To take into account the lag between the stress and the strain tensors, one needs to formulate a second order turbulent closure. This can be achieved by deriving dynamical equations for  $\tau_{ik}$ , which relax the stresses towards their steady state expression prescribed by equation (2.6) (see Appendix B).

$$D_t \tau_{ik} = \partial_t \tau_{ik} + u_j \partial_j \tau_{ik} = \frac{|\dot{\gamma}|}{\beta} \left[ \kappa^2 L^2 \left( \delta_{ij} \frac{1}{3} \chi^2 |\dot{\gamma}|^2 - |\dot{\gamma}| \dot{\gamma}_{ij} \right) - \tau_{ij} \right]. \quad (5.1)$$

In this relation, the parameter  $\beta$  encodes the time lag between an increase of the mean shear strain rate and the corresponding re-adjustment of the fluctuations of the shear stress. We expect  $\beta$  to be on the order of unity.

In figure 9, we show the effect of this new parameter. As expected for inertial effects in a relaxation process, finite values of  $\beta$  generate oscillations in the vertical profiles of the

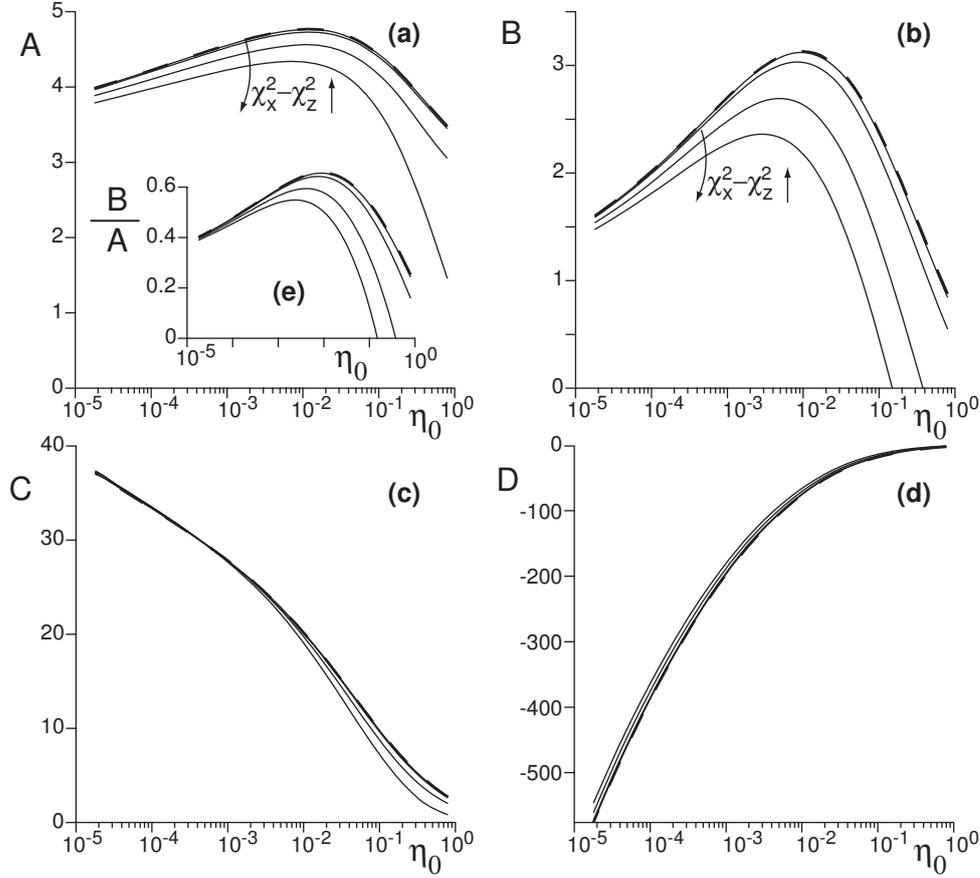


FIGURE 10. Effect of the normal stress anisotropy. (a-d) Coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  as a function of  $\eta_0$  for different values of  $\chi_x^2 - \chi_z^2$  (0.1, 1, 5 and 10). The dashed lines correspond to the isotropic case. Inset (e): ratio  $B/A$ . Arrows indicate increasing normal stress anisotropy.

velocities and stresses. The example of the horizontal velocity is displayed in the panels (a), (b) and (c). The amplitude and the frequency of these oscillations increase with  $\beta$ . Interestingly, these oscillations do not affect much the behaviour of the modes close to the bottom. As a consequence, the coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  are weakly affected by  $\beta$ , see panels (d) and (e). Interestingly, both  $A$  and  $B$  decrease as  $\beta$  increases and their ratio remains roughly constant.  $\beta$  has thus a negligible effect on the emergence of bedform, and we shall keep it to zero in the rest of the paper, as well as in part 2.

### 5.2. Reynolds stress anisotropy

It is an experimental fact that, in a turbulent boundary layer close to a rough wall, the Reynolds stress tensor is *not* isotropic:  $\tau_{xx}$  is significantly larger than the other components (Raupach et al. 1991, Shafi & Antonia 1995). Besides, anisotropy seems less pronounced for a larger bottom roughness (Krogstad & Antonia 1994, Keirsbulck et al. 2002), an issue which is however still matter of debate (Krogstad et al. 2005).

To account for this Reynolds stress anisotropy, it is easy to generalise the Prandtl-like

first order turbulent closure (2.6) with the following expression:

$$\tau_{ij} = \kappa^2 L^2 |\dot{\gamma}| \left( \frac{1}{3} \chi_i^2 |\dot{\gamma}| \delta_{ij} - \dot{\gamma}_{ij} \right), \quad (5.2)$$

where the value of  $\chi_x$  now differs from that of  $\chi_z$ . Following the above-cited literature, we expect  $\chi_x^2/\chi_z^2$  to be around 1.3–1.5. The modification of the matrix  $\mathcal{P}$  due to this new closure is detailed in Appendix A. It is shown that the relevant anisotropic parameter entering the equations is  $\chi_x^2 - \chi_z^2$ , for which a realistic value is on the order of unity. As evidenced in figure 10, the corresponding values of the functions  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  are not much affected by this anisotropy in the relevant range of  $\eta_0$ . This is particularly true for the coefficients  $C$  and  $D$ , as well as for the ratio  $B/A$  as soon as  $\eta_0 < 10^{-2}$ . The normal stress anisotropy has thus a negligible influence on ripple and dune formation, and we will not take it into account in the rest of the paper, as well as in part 2.

### 5.3. A moving bottom

In order to investigate the effect of a moving bottom on the stress coefficients, we consider a bottom profile of wavevector  $k$  like in (3.1), but which is now function of both position  $x$  and time  $t$ :

$$Z(x, t) = \zeta e^{\sigma t} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (5.3)$$

In this expression,  $\sigma$  represents the growth rate of the profile, and  $\omega/k$  its phase velocity. As discussed in Colombini & Stocchino 2005, this investigation is important as we wish to use the present hydrodynamical study in the context of the formation and development of bedforms, which do have a (small) growth rate and a (small) velocity. Following expression (5.3), we modify those for the functions  $U$ ,  $W$ ,  $S_t$  and  $S_n$  by inserting the extra-factor  $e^{(\sigma - i\omega)t}$ , along the lines of (3.3-3.6).

In this new case, the linearised equations (3.17) and (3.18) of section 3 must then be modified in the following manner:

$$S'_t = \left( \frac{\sigma}{ku_*} - i \frac{\omega}{ku_*} + i\mu \right) U + \mu' W + iS_n + iS_{xx} - iS_{zz}, \quad (5.4)$$

$$S'_n = - \left( \frac{\sigma}{ku_*} - i \frac{\omega}{ku_*} + i\mu \right) W + iS_t. \quad (5.5)$$

The linear equation (3.24) is then the same, but now with the modified matrix

$$\mathcal{P}_i = \begin{pmatrix} 0 & -i & \frac{1}{2}\mu' & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{\mu'} + \frac{\sigma}{ku_*} + i \left( \mu - \frac{\omega}{ku_*} \right) & \mu' & 0 & i \\ 0 & -\frac{\sigma}{ku_*} - i \left( \mu - \frac{\omega}{ku_*} \right) & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

With the surface layer model described in section 4.1, the non-slip boundary conditions on the bottom can be written as

$$U(0) = -\mu'(0) \quad \text{et} \quad W(0) = \frac{\sigma}{ku_*} - i \frac{\omega}{ku_*}. \quad (5.7)$$

The result of the integration of this new system is shown in figure 11 for the shear coefficients  $A$  and  $B$ . One can see that departure from the static case  $\sigma = 0$  and  $\omega = 0$  is noticeable only for values of  $\frac{\sigma}{ku_*}$  and  $\frac{\omega}{ku_*}$  of order one. The effect of the wave propagation of the bedform can be understood by a simple argument. When the bedforms propagate upstream ( $\omega < 0$ ) the relative flow velocity seen by the structure is larger so that it induces a larger shear stress modulation. As  $A + iB$  is by definition the basal shear stress

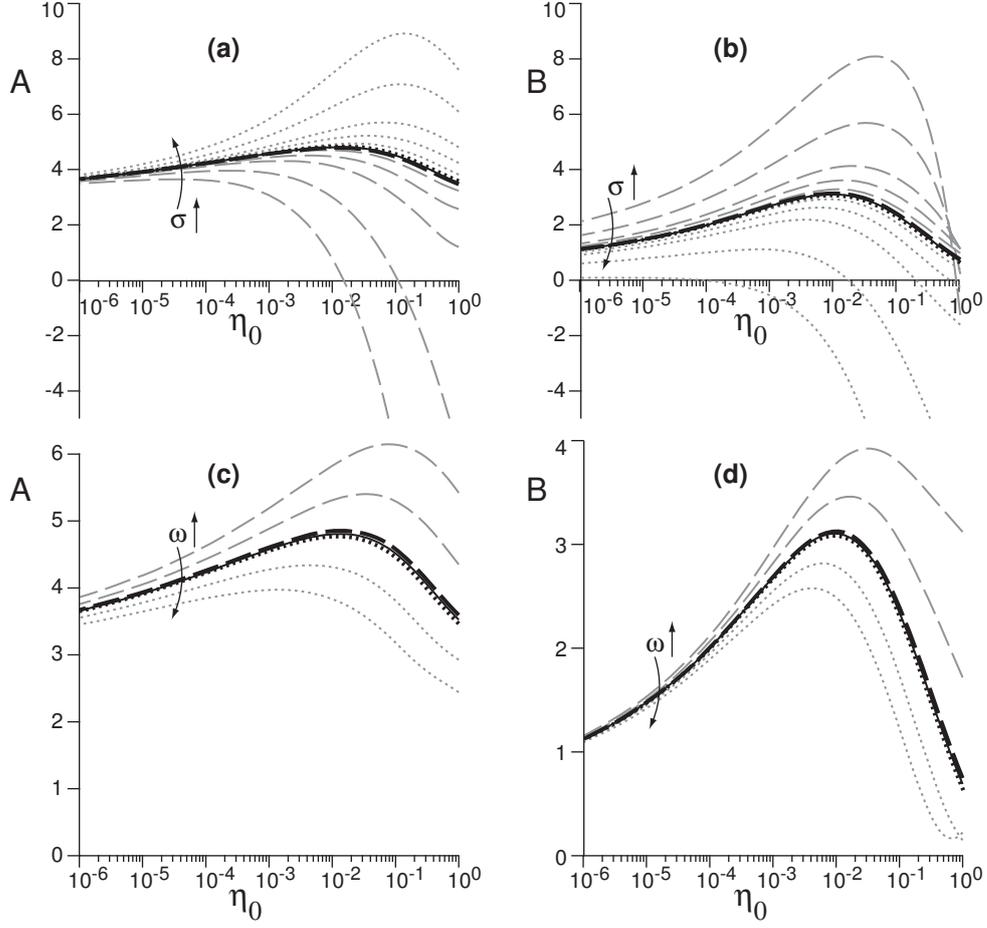


FIGURE 11. Effect of the motion of the bottom. Stress coefficients  $A$  and  $B$  as a function of  $\eta_0$  for different values of the bottom growth rate  $\sigma$  (panels (a) and (b)), and different values of the bottom pulsation  $\omega$  (panels (c) and (d)). Arrows indicate increasing values of  $\sigma$  and  $\omega$ . In panels (a) and (b), grey dotted lines correspond to  $\frac{\sigma}{ku_*} = 10, 5, 2, 1$  and  $0.5$ , the black dotted line being for  $\frac{\sigma}{ku_*} = 0.1$ . The black dashed line corresponds to  $\frac{\sigma}{ku_*} = -0.1$ , the grey dashed lines being for  $\frac{\sigma}{ku_*} = -0.5, -1, -2, -5$  and  $-10$ . In panels (c) and (d) grey dotted lines correspond to  $\frac{\omega}{ku_*} = 2$  and  $1$ , the black dotted line being for  $\frac{\omega}{ku_*} = 0.1$ . The black dashed line correspond to  $\frac{\omega}{ku_*} = -0.1$ , the grey dashed line being for  $\frac{\omega}{ku_*} = -1$  and  $-2$ . For comparison, in all panels the solid lines correspond to the static case  $\sigma = 0, \omega = 0$ .

rescaled by  $u_*^2$ , both  $A$  and  $B$  get larger. Reciprocally, when the bedforms propagate downstream ( $\omega > 0$ ), these coefficients are reduced. Consistently with this argument, the ratio  $B/A$  is only weakly affected by  $\omega$  (not shown). The growth rate  $\sigma$  affects  $A$  and  $B$  in opposite ways and thus changes the phase shift between the shear stress and the topography. For  $\sigma > 0$ ,  $A$  is increased while  $B$  is reduced. We have not been able to interpret this behaviour in a simple way.

As discussed in part 2, for ripples in water flows these dimensionless numbers are respectively on the order of  $10^{-3}$  and  $10^{-2}$ . They would be even smaller for bedforms of larger wavelength. As a consequence, the assumption that the bottom can be treated as

fixed for the study of bedforms is definitively valid (see also the discussion of figure 22 below).

## 6. Weakly non-linear expansion

In this section, we investigate the non-linear effects at finite values of the rescaled bottom corrugation amplitude  $k\zeta$ . In particular, we wish to address two issues: we wish to relate the hydrodynamic roughness to geometrical quantities; we aim also to describe the first non-linear corrections to the basal stress coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$ . These results will be used in the second part of this work, to determine the equilibrium height of ripples. In this context, few authors have studied the influence the non-linear terms from hydrodynamics on the shape (Fredsoe 1974) or the stability (Ji & Mendoza 1997) of the bedforms. In contrast to the present paper, however, both of these works describe the turbulent closure with a constant eddy viscosity. In a very empirical manner, McLean & Smith 1986 computed the flow over two-dimensional bedforms of arbitrary amplitude by the use of a wake function, as described in Schlichting & Gersten 2000, coupled with a potential flow modified to take into account the velocity logarithmic law. Finally, the linear results of Colombini 2004 have also recently been extended to the weakly non-linear situation (Colombini & Stocchino 2008).

### 6.1. Expansion in amplitude

For this purpose, we perform an expansion with respect to the bottom corrugation amplitude, and introduce non-dimensional the following functions for the different orders:

$$u_x = u_* [\mu + (k\zeta)e^{ikx}U_1 + (k\zeta)^2U_0 + (k\zeta)^2e^{2ikx}U_2 + (k\zeta)^3e^{ikx}U_3], \quad (6.1)$$

$$u_z = u_* [(k\zeta)e^{ikx}W_1 + (k\zeta)^2W_0 + (k\zeta)^2e^{2ikx}W_2 + (k\zeta)^3e^{ikx}W_3], \quad (6.2)$$

$$\tau_{xz} = -u_*^2 [1 + (k\zeta)e^{ikx}S_{t1} + (k\zeta)^2S_{t0} + (k\zeta)^2e^{2ikx}S_{t2} + (k\zeta)^3e^{ikx}S_{t3}], \quad (6.3)$$

$$p + \tau_{zz} = p_0 + u_*^2 [(k\zeta)e^{ikx}S_{n1} + (k\zeta)^2S_{n0} + (k\zeta)^2e^{2ikx}S_{n2} + (k\zeta)^3e^{ikx}S_{n3}], \quad (6.4)$$

$$\tau_{zz} - \tau_{xx} = u_*^2 [(k\zeta)e^{ikx}S_{d1} + (k\zeta)^2S_{d0} + (k\zeta)^2e^{2ikx}S_{d2} + (k\zeta)^3e^{ikx}S_{d3}]. \quad (6.5)$$

Terms in  $(k\zeta)^3e^{3ikx}$ , which do not contribute to the harmonic response (i.e. to the stress coefficients), as well as terms of higher order than  $(k\zeta)^3$  are neglected. Although the principle of the expansion in amplitude is simple, the actual calculations are painful, and the technical details have been gathered in appendix E. In summary, the non-linear effects result from the expansion of the mixing length (terms in  $(k\zeta)^2$ ) and from the self-interaction of the linear perturbations: in particular, the combination of terms  $(k\zeta)e^{ikx}$  generates second order terms in  $(k\zeta)^2$ . All involved functions are complex, except  $\mu$  and those related to the second order homogeneous corrections (index 0). To avoid the determination of the asymptotic behaviours in this case, we have chosen to treat the surface layer by the simple phenomenological model of section 4. Plugging the above expressions into the Navier-Stokes and turbulent closure equations, one eventually obtains a linear hierarchy of linear differential equations:

$$\frac{d}{d\eta}\vec{X}_\alpha = \mathcal{P}_\alpha\vec{X}_\alpha + \vec{S}_\alpha, \quad (6.6)$$

where  $\vec{X}_\alpha = (U_\alpha, W_\alpha, S_{t\alpha}, S_{n\alpha})$ . Of course,  $\mathcal{P}_1$  and  $\vec{S}_1$  are the matrix and vector of expression (3.24). We find that  $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1$ , whereas  $\mathcal{P}_2$  is slightly different and  $\mathcal{P}_0$  is very

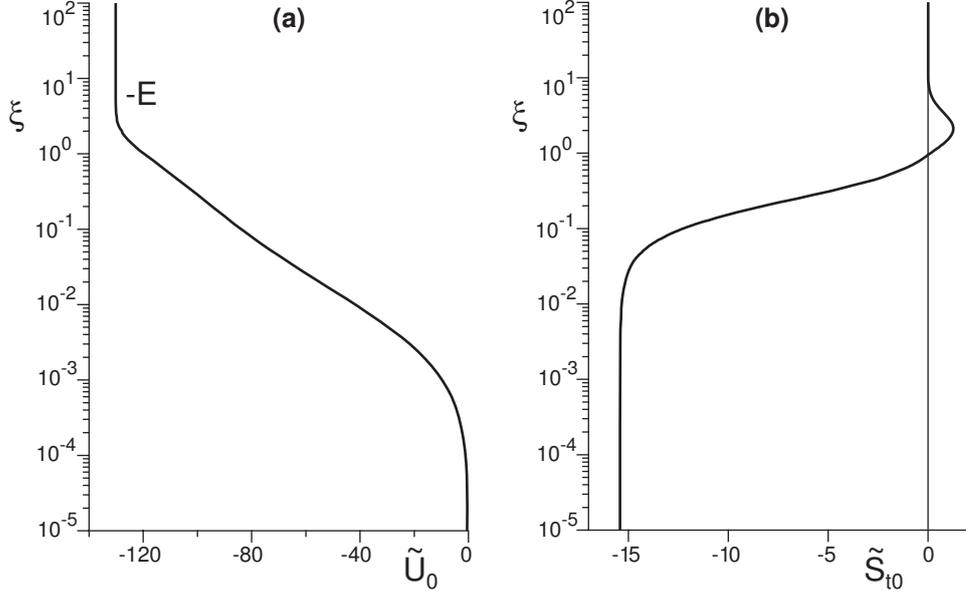


FIGURE 12. Vertical profiles of the homogeneous second order corrections  $\tilde{U}_0$  (a) and  $\tilde{S}_{t0}$  (b). These curves have been computed with  $\eta_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ .  $\tilde{U}_0$  tends towards a negative constant value  $-E$  at large  $\xi$ , which corresponds to an increased roughness at large distance from the wall. Notice also that, close to the bottom,  $\tilde{S}_{t0}$  has a constant value, reminiscent of the inner layer.

simple:

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & \frac{1}{2}\mu' & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ \left(i\mu + \frac{4}{\mu'}\right) & \mu' & 0 & i \\ 0 & -\mu i & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2i & \frac{1}{2}\mu' & 0 \\ -2i & 0 & 0 & 0 \\ 2\left(i\mu + \frac{8}{\mu'}\right) & \mu' & 0 & 2i \\ 0 & -2\mu i & 2i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathcal{P}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\mu' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

All the heaviness of the method is encoded in the expressions of the right hand terms  $\vec{S}_\alpha$ : the components of such vectors at a given order depend on the lower order functions  $\vec{X}_\alpha$  and their derivatives. The integration has thus to follow the hierarchy of the equations, one order after the other.

### 6.2. Boundary conditions

The boundary conditions must be specified in order to perform the integration. Following the geometrically induced roughness model (section 4), we require that both components of the velocity should vanish on the bottom. These conditions express easily in the shifted representation, i.e. written in terms of the curvilinear coordinates (see appendix C): they simply read  $\tilde{U}_\alpha(0) = 0$  and  $\tilde{W}_\alpha(0) = 0$ . In terms of the Cartesian functions, we get:

$$U_1(0) = -\mu'(0), \quad (6.9)$$

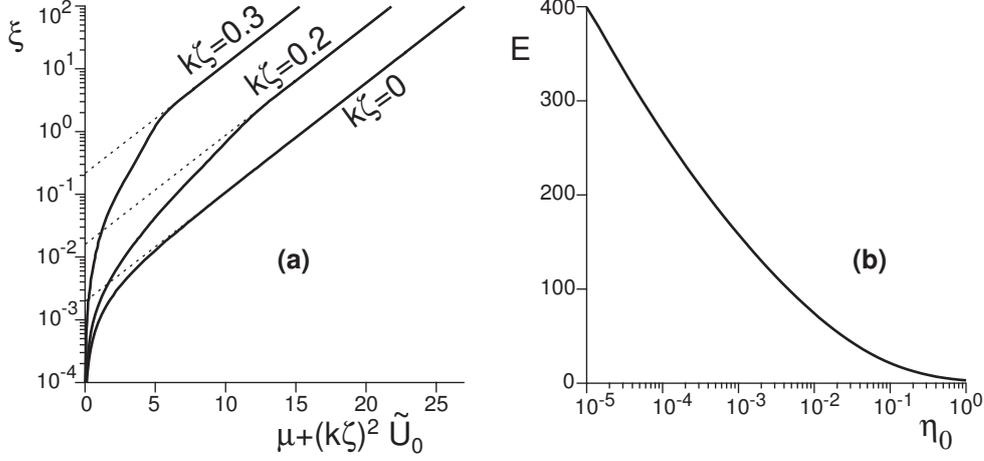


FIGURE 13. (a) Vertical profiles of the homogeneous component of the velocity  $\mu + (k\zeta)^2 \tilde{U}_0$  for  $k\zeta = 0$ ,  $k\zeta = 0.2$  and  $k\zeta = 0.3$ . The extrapolation to 0 of the upper part of the curves gives the value of the hydrodynamical roughness seen at a distance from the bottom. (b) Coefficient  $E$  as a function of  $\eta_0$ . A good fit of this function is given by  $E = 2.75 (\ln \eta_0 - 0.62)^2$ .

$$U_0(0) = -\frac{1}{4}\mu''(0) - \frac{1}{2}\kappa\mu'^2(0) - \frac{1}{8}\mu'(0) [S_{t1}(0) + S_{t1}^*(0)], \quad (6.10)$$

$$U_2(0) = -\frac{1}{4}\mu''(0) - \frac{1}{2}\kappa\mu'^2(0) - \frac{1}{4}\mu'(0)S_{t1}(0), \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} U_3(0) = & -\frac{1}{8}\mu'''(0) + \frac{9}{8}\mu'(0) - \frac{3}{4}\kappa^2\mu'^3(0) - \frac{1}{16} [\mu''(0) + 2\kappa\mu'^2(0)] [2S_{t1}(0) + S_{t1}^*(0)] \\ & + \frac{1}{32}\mu'(0)S_{t1}(0) [S_{t1}(0) + 2S_{t1}^*(0)] - \frac{i}{16}\mu'(0) [2S_{n1}(0) + S_{n1}^*(0)] \\ & - \frac{1}{4}\mu'(0) [2S_{t0}(0) + S_{t2}(0)], \end{aligned} \quad (6.12)$$

and

$$W_1(0) = 0, \quad (6.13)$$

$$W_0(0) = 0, \quad (6.14)$$

$$W_2(0) = -\frac{i}{2}\mu'(0), \quad (6.15)$$

$$W_3(0) = -\frac{i}{4}\mu''(0) - \frac{3i}{8}\kappa\mu'^2(0) - \frac{i}{16}\mu'(0) [2S_{t1}(0) + S_{t1}^*(0)]. \quad (6.16)$$

As in previous sections, for each order, the solution is expressed as a linear superposition of the form:  $\vec{X}_\alpha = \vec{X}_{s\alpha} + a_{t\alpha}\vec{X}_{t\alpha} + a_{n\alpha}\vec{X}_{n\alpha}$ , where the different vectors are solutions of the following equations:

$$\frac{d}{d\eta}\vec{X}_{s\alpha} = \mathcal{P}_\alpha\vec{X}_{s\alpha} + \vec{S}_\alpha \quad \text{with} \quad \vec{X}_{s\alpha}(0) = \begin{pmatrix} U_\alpha(0) \\ W_\alpha(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.17)$$

$$\frac{d}{d\eta}\vec{X}_{t\alpha} = \mathcal{P}_\alpha\vec{X}_{t\alpha} \quad \text{with} \quad \vec{X}_{t\alpha}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.18)$$

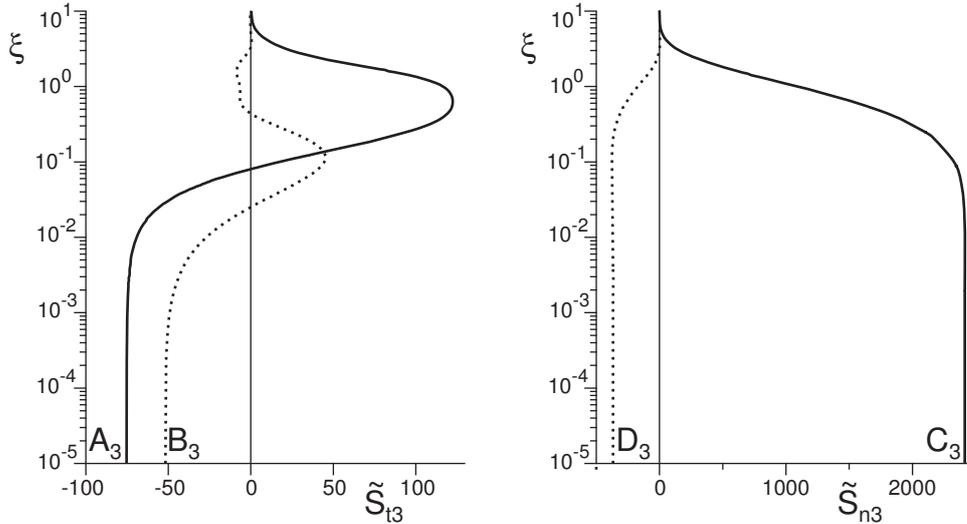


FIGURE 14. Vertical profiles of the third order corrections to the stresses:  $\tilde{S}_{t3}$  (a) and  $\tilde{S}_{n3}$  (b). The solid lines represent the real parts of the functions, whereas the dashed lines represent the imaginary ones. These curves have been computed with  $\eta_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ . Notice again the inner layer where the stresses are constant. We write  $\tilde{S}_{t3}(0) = A_3 + iB_3$  and  $\tilde{S}_{n3}(0) = C_3 + iD_3$ . Note that both  $A_3$  and  $B_3$  are negative.

$$\frac{d}{d\eta} \vec{X}_{n\alpha} = \mathcal{P}_\alpha \vec{X}_{n\alpha} \quad \text{with} \quad \vec{X}_{n\alpha}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.19)$$

Again, for the top boundary conditions, we introduce a lid at finite height  $H$ , impose  $S_{t\alpha}(\eta_H) = 0$  and  $W_\alpha(\eta_H) = 0$ , and look at the limit  $H \rightarrow +\infty$ , i.e. when the results become independent of  $H$ . These conditions lead to two equations on  $a_{t\alpha}$  and  $a_{n\alpha}$ , whose solutions give  $S_{t\alpha}(0)$  and  $S_{n\alpha}(0)$  respectively.

### 6.3. Results

We first consider the corrections to the homogeneous base solution (index 0). The corresponding velocity profile  $\tilde{U}_0$  and shear stress profile  $\tilde{S}_{t0}$  are displayed in figure 12. The term in  $(k\zeta)^2$  of the velocity decreases continuously from  $z \sim z_0$  to  $z \sim \lambda$  and tends towards a negative constant  $-E$  far from the bottom. Correspondingly, the shear stress decreases and tends to 0 far from the ground, as requested. The calculation thus predicts an increase of the turbulent drag (i.e. of the basal shear stress) with the corrugation amplitude, due to the non-linearities. In terms of the velocity profile, this translates into a hydrodynamic roughness  $z_g$  of geometrical origin. Identifying the expression of the velocity profile far from the bottom with  $\frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_g}$ , we simply get:

$$\ln z_g = \ln z_0 + \kappa(k\zeta)^2 E, \quad (6.20)$$

As a consequence,  $z_g$  increases with  $E$  and with the aspect ratio  $k\zeta$ . For the seek of illustration, several vertical profiles of the homogeneous part of the velocity  $\mu + (k\zeta)^2 \tilde{U}_0$  are plotted in figure 13(a) for different values of  $k\zeta$ . By definition,  $z_g$  is the extrapolation of the asymptotic part of the curves to vanishing velocities.

Interestingly, the large scale roughness  $z_g$  cannot be related to a single geometrical length, namely to the corrugation amplitude  $\zeta$  (Schlichting & Gersten 2000, van Rijn 1983,

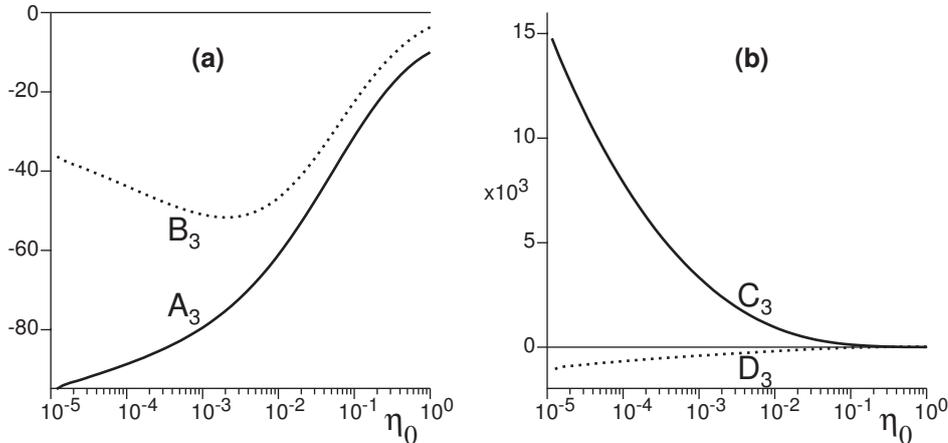


FIGURE 15. Third order stress coefficients  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$  and  $D_3$  as a function  $\eta_0$ . Comparing the signs with those of  $A = A_1$ ,  $B = B_1$ ,  $C = C_1$  and  $D = D_1$ , it can be inferred that the non-linearities oppose the linear effects. In particular, as the amplitude increases, the point of maximum shear stress drifts downstream, i.e.  $B_1 + B_3 (k\zeta)^2$  decreases.

Raupach et al. 1991, Wiberg & Nelson 1992). In particular, we predict that the macroscopic roughness  $z_g$  associated to a wavy surface still depends on the microscopic roughness  $z_0$ : as shown in figure 13(b), for a given aspect ratio, the apparent roughness  $z_g$  is larger for smaller  $\eta_0$ . Furthermore, expression (6.20) is consistent with numerical observations of Taylor et al. 1989 and computations of Jacobs 1989, who respectively report linear (in the range  $10^{-8} < \eta_0 < 10^{-3}$ ) and quadratic variations for the coefficient  $E$  as a function of  $\ln \eta_0$ . Here, the best fit of this function gives  $E \simeq 2.75 (\ln \eta_0 - 0.62)^2$ .

The first non-linear corrections to the harmonic terms scale on  $(k\zeta)^3$ . In figure 14, we show the corresponding profiles for the stresses. As in the first order case, there exists a layer close to the bottom where the stresses are almost constant (inner layer). As requested, both components vanish far from the ground. We note  $\hat{S}_{t3}(0) = A_3 + iB_3$  and  $\hat{S}_{n3}(0) = C_3 + iD_3$  the shear and normal stresses acting on the boundary. These coefficients are plotted as a function of  $\eta_0$  in figure 15. Both  $A_3$  and  $B_3$  are negative while  $A = A_1$  and  $B = B_1$  are positive, which means that the first non-linearities oppose the linear effects. We will show in part 2 that this is responsible for the selection of the height of current ripples.

The calculation of the non-linear corrections allows to determine the range of amplitude  $\zeta$  for which the linear approximation is valid. The representation of the linear solution with the fixed system of coordinates  $(x, z)$  is valid only when  $\zeta$  is much smaller than  $z_0$ . However, the representation of the same linear solution in the curvilinear coordinates  $(x, z - Z(x))$  is valid up to  $\zeta$  of the order of the inner layer thickness  $\ell$ . It is important to recall that all the descriptions of the flow equivalent at the linear order (including the real solution of the fully non-linear problem) can have very different domains of validity.

This weakly non-linear computation is illustrated in figure 16, which shows the streamlines for different aspect ratios. It can be seen that the separation of streamlines and the subsequent formation a recirculation bubble occurs above an aspect ratio of  $\sim 1/13$ , in agreement with observations. By comparison, the linear calculation, shown in figure 3, leads to the emergence of a recirculation bubble for an aspect ratio of  $1/6$  i.e. twice larger. The non-linear corrections are thus essentials to capture quantitatively the flow features. Panel 16c), computed for an aspect ratio of  $1/8$  shows a well-developed recircu-

lation bubble. The distortion of the separation streamline is not realistic, indicating the upper limit of validity of the model. Fortunately, the aspect ratio of ripples and dunes is typically smaller than 1/10, which falls into the domain of validity of the calculation.

Several experiments in flumes or wind tunnels have been performed to measure velocity and Reynolds stress profiles over two-dimensional fixed symmetric or asymmetric bed-forms (Wiberg & Nelson 1992, Nelson et al. 1993, McLean et al. 1994, Bennet & Best 1995, Coleman et al. 2006, Venditti 2007). Closer to our calculations, several experiments with a sinusoidal bottom are also reported in the literature (e.g. Zilker et al. 1977, Zilker & Hanratty 1977, Abrams & Hanratty 1985, Buckles et al. 1984, Nakagawa & Hanratty 2001, Poggi et al. 2007). Direct or large eddy numerical simulations of Navier-Stokes equations have also been performed in this geometry (e.g. de Angelis et al. 1997, Henn & Sykes 1999, Salvetti et al. 2001). For comparison with our model, data from Gong et al. 1996 have been chosen. They have been performed in a wind tunnel over sixteen waves with a wavelength  $\lambda = 609.6$  mm and a trough-to-crest amplitude  $2\zeta = 96.5$  mm, covered with a carpet to make them aerodynamically rough. This corresponds to an aspect ratio of 1/6 much too large to be in the domain where the model is quantitative. Unfortunately, we have not found any better data-set for the seek of comparison. The vertical profiles of the velocity measured at different locations are shown in figure 17(a). More precisely, these authors have measured the average of the instantaneous velocity modulus i.e. a quantity that is always positive and that mixes the average velocity and the fluctuations. Although a recirculation bubble is present, these data cannot show it. We compare these profiles to those computed at the upper limit of validity of the non-linear calculation ( $k\zeta = 0.3$ ). Yet, the agreement with our computation is fair; in particular, the way the flow is accelerated over crests and decelerated in troughs is qualitatively well reproduced. The profiles at  $\lambda/4$  and  $-\lambda/4$  from the crest are close to each other, indicating a re-symmetrisation of the flow by non-linearities. Note that the slight difference between these profiles is qualitatively reproduced by the model. Looking at the upper part of the experimental profiles, one sees that they would extrapolate to 0 around 10 mm while the ground roughness is slightly smaller than 1 mm. These two roughness' are particularly visible on the profile measured on the crest. The model is particularly successful in reproducing this feature.

The non-linear effects on the flow over obstacles are often described in terms of boundary layer separation. It has been proposed by Jensen & Zeman 1985 (see also Finnigan et al. 1990) that one could still use the linear flow calculation in that case, introducing a fictive surface enveloping the obstacle and the recirculation bubble downstream of it. As such an envelope creates a fictive bump maximum displaced downstream, it artificially moves the point of maximum shear stress on the bump in the same direction (Kroy et al. 2002, Andreotti et al. 2002). Although this trick is of practical use to simulate dunes, this envelope technique is not based on any firm theoretical ground. The weakly non-linear calculation performed here is thus of extreme interest to incorporate non-linear turbulent effects in dune numerical models in a more controlled way. More generally, it can be used in any problem in which a good approximation of the mean flow is needed at low calculation cost, including separation. For instance, it may find direct applications in the control of turbulence around vehicles. An important limit of such Reynolds averaged calculation is that they do not take vortex shedding into account.

## 7. Effect of a free surface

In this section, we investigate the effect of the additional presence of a free surface at a finite distance  $H$  to the bottom. This situation is relevant to the flow above river dunes

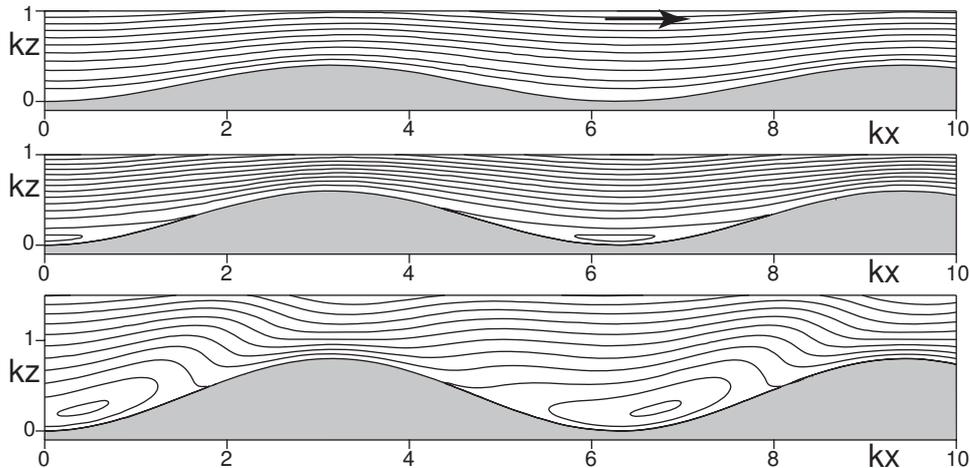


FIGURE 16. Streamlines computed with all non-linear corrections considered here on bumps such that  $k\zeta = 0.2, 0.3$  and  $0.4$  from top to bottom. The fluid flows from left to right. Note the progressive development of a recirculation bubble for larger aspect ratios.

(see part 2). We follow the outline of the section 3, but staying for easiness with linear calculations in two-dimensional situations.

### 7.1. River equilibrium

In the case of a river inclined at an angle  $\theta$  on the horizontal, the shear stress must balance gravity. It thus varies linearly as  $\tau_{xz} = g(z - H) \sin \theta$  and vanishes at the free surface. By definition of the shear velocity  $u_*$ , we also write  $\tau_{xz} \equiv u_*^2(z/H - 1)$ . In the context of a mixing length approach to describe turbulence, this length should vanish at the free surface. For the sake of simplicity, following the discussion of section 4, we take  $L = (z + z_0)\sqrt{1 - z/H}$ . This choice results in a base flow that is logarithmic as in the unbounded situation:

$$u_x = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left( 1 + \frac{z}{z_0} \right), \quad (7.1)$$

which is consistent with field and experimental observations. The stress balance equation along the  $z$ -axis allows to get the pressure, which reads:

$$p + \tau_{zz} = p_0 + g(H - z) \cos \theta = p_0 + \frac{u_*^2}{\tan \theta} \left( 1 - \frac{z}{H} \right). \quad (7.2)$$

We define the Froude number as the ratio of the surface velocity  $u_{\text{surface}}$  to the velocity of gravity surface waves in the shallow water approximation:

$$\mathcal{F} \equiv \frac{u_{\text{surface}}}{\sqrt{gH}} \equiv \frac{1}{\sqrt{gH}} \frac{u_*}{\kappa} \ln \left( 1 + \frac{H}{z_0} \right) = \frac{1}{\kappa} \ln \left( 1 + \frac{H}{z_0} \right) \sqrt{\sin \theta}. \quad (7.3)$$

In the literature, the Froude number is sometime defined as the ratio of the mean velocity to the velocity of gravity waves. We will justify this choice in the next paragraph. The Froude number of natural sandy rivers lies in general between 0.1 and 0.3 as they flow on very small slopes. Larger Froude numbers are reached in flume experiments.

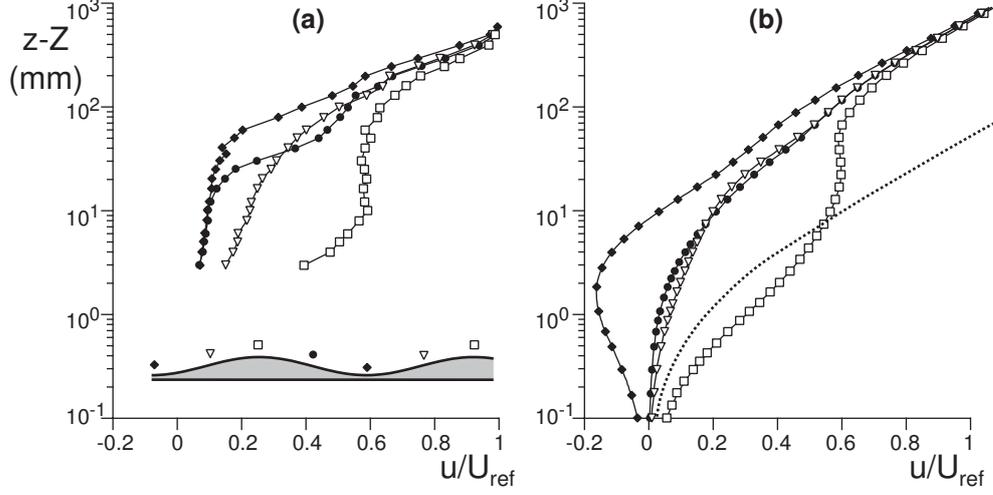


FIGURE 17. (a) Rescaled profiles of the mean velocity modulus, measured by Gong et al. 1996 in the case of a rough wavy bottom of aspect ratio  $\sim 1/6$  ( $k\zeta = 0.5$ ).  $U_{\text{ref}}$  is the free stream reference velocity. The symbols correspond different longitudinal locations, as shown in the schematics below the data (crests  $\square$ , troughs  $\blacklozenge$  and half ways up-  $\nabla$  and down-  $\bullet$ ). (b) Velocity profile predicted by the present model with a sinusoidal bottom of aspect ratio  $1/10$  ( $k\zeta = 0.31$ ), plotted with the same symbol code. Dotted line: base velocity profile.

## 7.2. Disturbances

In the same manner as in section 3, we consider now a wavy bottom  $Z = \zeta e^{ikx}$ . We note again  $\eta = kz$  and  $\eta_H = kH$ . We write the first order corrections to the base flow as

$$u_x = u_* [\mu + k\zeta e^{ikx} U], \quad (7.4)$$

$$u_z = u_* k\zeta e^{ikx} W, \quad (7.5)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -u_*^2 \left[ 1 - \frac{\eta}{\eta_H} + k\zeta e^{ikx} S_t \right], \quad (7.6)$$

$$p + \tau_{zz} = p_0 + u_*^2 \left[ \frac{1}{\tan \theta} \left( 1 - \frac{\eta}{\eta_H} \right) + k\zeta e^{ikx} S_n \right], \quad (7.7)$$

where, in accordance with equation (7.1), the function  $\mu$  is defined by the relation (4.2). The free surface is also disturbed by the presence of the non-uniform bottom, and we denote  $H + \Delta(x)$  the flow depth at the position  $x$ . The modified expression for the mixing length then reads

$$L = (z_0 + z - Z) \sqrt{\frac{H + \Delta - z}{H + \Delta - Z}}. \quad (7.8)$$

Linearising the free surface profile as  $\Delta(x) = \delta \zeta e^{ikx}$ , one can expand  $L$  to the first order as

$$kL = (\eta + \eta_0) \sqrt{1 - \frac{\eta}{\eta_H}} \left\{ 1 - k\zeta e^{ikx} \left[ \frac{1}{\eta + \eta_0} - \frac{1}{2\eta_H} - \delta \frac{\eta}{2\eta_H^2 \left( 1 - \frac{\eta}{\eta_H} \right)} \right] \right\}. \quad (7.9)$$

The shear stress closure as well as the Reynolds averaged Navier-Stokes equations can be linearised in the same way as before, and we finally get at the first order in  $k\zeta$  a

system of differential equations which can be written under the following form:

$$\frac{d}{d\eta}\vec{X} = \mathcal{P}\vec{X} + \vec{S} + \delta\vec{S}_\delta, \quad (7.10)$$

with

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & -i & \frac{\mu'}{2\left(1-\frac{\eta}{\eta_H}\right)} & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{\mu'}\left(1-\frac{\eta}{\eta_H}\right) + i\mu & \mu' & 0 & i \\ 0 & -\mu i & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.11)$$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} \kappa\mu'^2 - \frac{\mu'}{2\eta_H} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \vec{S}_\delta = \begin{pmatrix} -\frac{\eta\mu'}{2\eta_H^2\left(1-\frac{\eta}{\eta_H}\right)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.12)$$

### 7.3. Resolution of the linearised equations

Again, making use of the linearity of the equations, we seek the solution under the form  $\vec{X} = \vec{X}_0 + a_t\vec{X}_t + a_n\vec{X}_n + \delta\vec{X}_\delta$ , where the vector  $\vec{X}_\delta$  is solution of equation:

$$\frac{d}{d\eta}\vec{X}_\delta = \mathcal{P}\vec{X}_\delta + \vec{S}_\delta \quad \text{with} \quad \vec{X}_\delta(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.13)$$

while  $\vec{X}_0$ ,  $\vec{X}_t$  and  $\vec{X}_n$  are still solutions of equations (4.3)-(4.5). The bottom boundary conditions  $U(0) = -1/(\kappa\eta_0)$  and  $W(0) = 0$  are then automatically satisfied. At the free surface, we impose the material nature of the surface,  $W(\eta_H) = i\mu(\eta_H)\delta$ , and vanishing stresses:  $S_t(\eta_H) = \delta/\eta_H$  and  $S_n(\eta_H) = \delta/(\eta_H \tan\theta)$ . These last three conditions select the coefficients  $a_t$  and  $a_n$  as well as the value of  $\delta$ . Finally note that the analytical approximation of the solution close to the bottom in the limit  $\eta_0 \rightarrow 0$  is the same as in the unbounded case – it does not depend on the position of the upper boundary – and expressions (3.26)-(3.29) are thus still correct in the limit  $H \gg z_0$ .

### 7.4. Results

In order to evidence the role of the free surface, we have plotted the stress coefficients  $A$  and  $B$  as functions of  $\eta_0$  in figure 18, for different values of  $H/z_0$ . For a large enough wave-number  $k$  (a small enough wavelength  $\lambda$ ), one recovers the plots of the panels (a) and (b) of figure 6, independently of  $H/z_0$ . This means that for a bottom wavelength much smaller than the flow depth  $H$  (i.e. for subaqueous ripples), the free surface has a marginal effect and the results of section 3 apply. For smaller  $\eta_0$ , however, the curves exhibit a peak, whose position depends on the value of  $H/z_0$ , followed by a diverging behaviour when  $\eta_0 \rightarrow 0$ . As discussed below, this peak can be ascribed to a resonance of standing waves at the free surface, excited by the bottom topography, meaning that the proper scale is now  $H$  and not  $z_0$ . As the ratio  $\lambda/H$  is the key parameter separating ripples from dunes, we shall turn extensively in part 2 to this point.

The analysis of velocity profiles for different values of  $kH$  gives the following physical picture. For  $kH > 1$ , as for the unbounded case the flow can be thought of as being divided into two regions: an inner layer close to the bottom where it can be described by the equilibrium approximation and an outer layer behaving like an inviscid potential

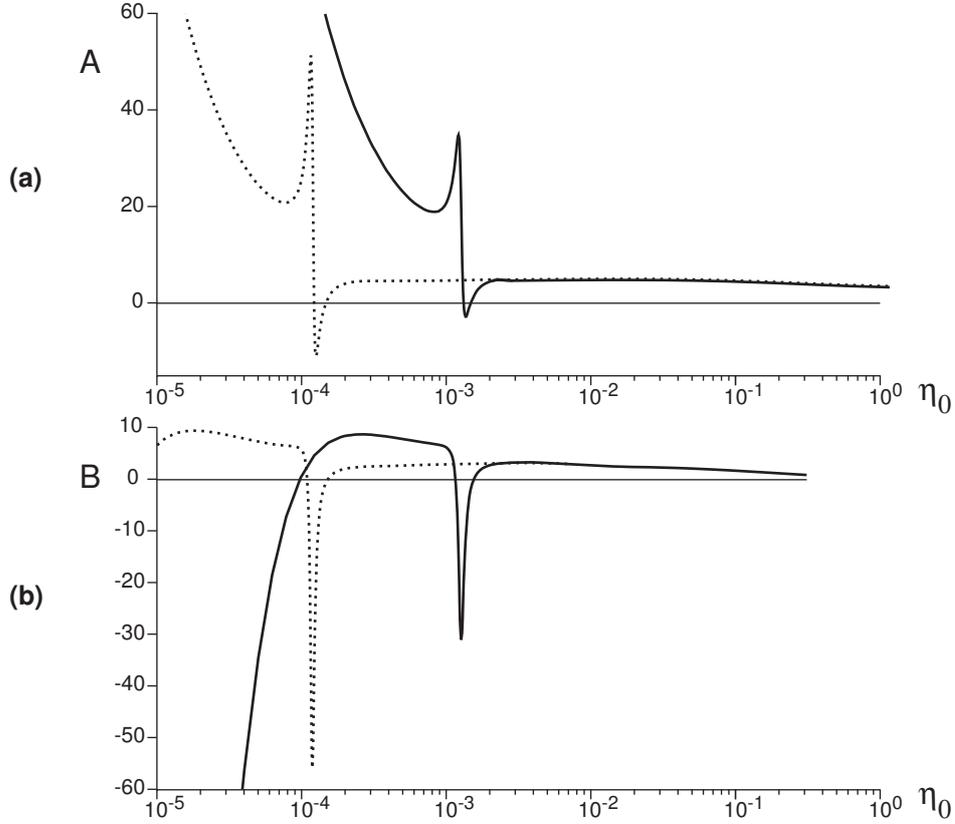


FIGURE 18.  $A$  and  $B$  as functions of  $\eta_0$  for  $\mathcal{F} = 0.9$  and  $H/z_0 = 10^3$  (solid line) or  $H/z_0 = 10^4$  (dotted line). In the right part of the plots, the curves collapse on the shape displayed in panels (a) and (b) of figure 6. They differ at smaller  $\eta_0$ , showing a resonance peak and a divergence at  $\eta_0 \rightarrow 0$ .

flow, where the profiles can be decomposed into the sum of decreasing and increasing exponentials  $e^{\pm\eta}$ . For smaller values of  $kH$ , this outer region progressively vanishes and the whole flow is controlled by the inner layer.

We display the phase and amplitude of the free surface as a function of  $kH$  in figure 20(b-c). The peak in amplitude accompanied by the phase shift of  $\pi$  are the signature of a surface wave resonance. The source of disturbances is of course the corrugation of the bed. For  $kH$  larger than its resonant value, the bottom and the free surface are in phase; conversely, for  $kH$  below the resonance, they are in antiphase. In between, at the resonance, the phase shift is  $\varphi = \pi/2$  (figure 20(a)) so that the streamlines are squeezed downstream to the crest. This resonance is model-independent as it comes from a very robust physical mechanism. As the fluid flows over the periodic bottom, gravity surface waves are excited at the wavelength  $\lambda$ . The latter propagate at the velocity:

$$c \simeq u_{\text{surface}} \pm \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kH)} = \mathcal{F} \sqrt{gH} \pm \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kH)} \quad (7.14)$$

with respect to the bottom (see the friction force model derived in Appendix F). As in the sound barrier phenomenon, the wave energy induced by the bottom disturbances

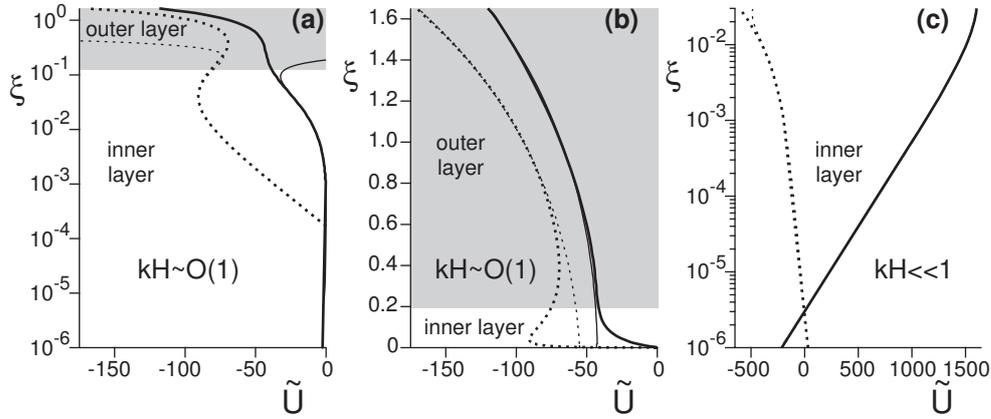


FIGURE 19. Relative importance of the inner (white) and outer (grey) layers for  $kH = 1.65$  (a)-(b), and  $kH = 0.03$  (c), with  $H/z_0 = 10^4$ . The velocity profiles (bold lines) are compared to their asymptotic behaviour in the inner and outer layers (thin lines). The solid lines represent the real part of the functions, and the dotted lines the imaginary ones. (a) and (b) show the very same profile, but with a logarithmic scale in (a) to emphasize the inner region. The thin lines in (a) and (c) represent the asymptotic behaviour in the inner layer. Those in (b) correspond to a sum of an increasing and a decreasing exponential of the form  $\exp(\pm\eta)$ , as for an inviscid potential flow.

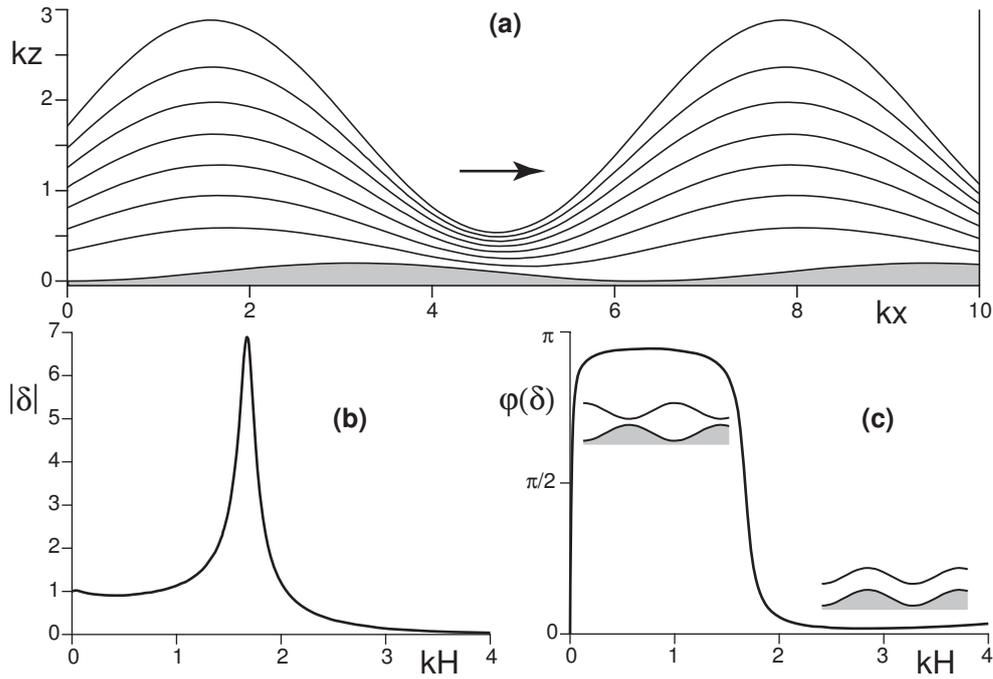


FIGURE 20. (a) Streamlines of a flow over a sinusoidal bottom close to the free surface resonance conditions ( $\varphi = \pi/2$ ). The flow is from left to right. Note the squeezing of the lines *downstream* the crest of the bump. Amplitude  $|\delta|$  (b) and phase  $\varphi(\delta)$  (c) of the free surface as a function of  $kH$  for  $\mathcal{F} = 0.8$ . The peak in amplitude and the phase shift from 0 to  $\pi$  correspond to the resonance. The two schematics illustrate the situations in phase or in antiphase.

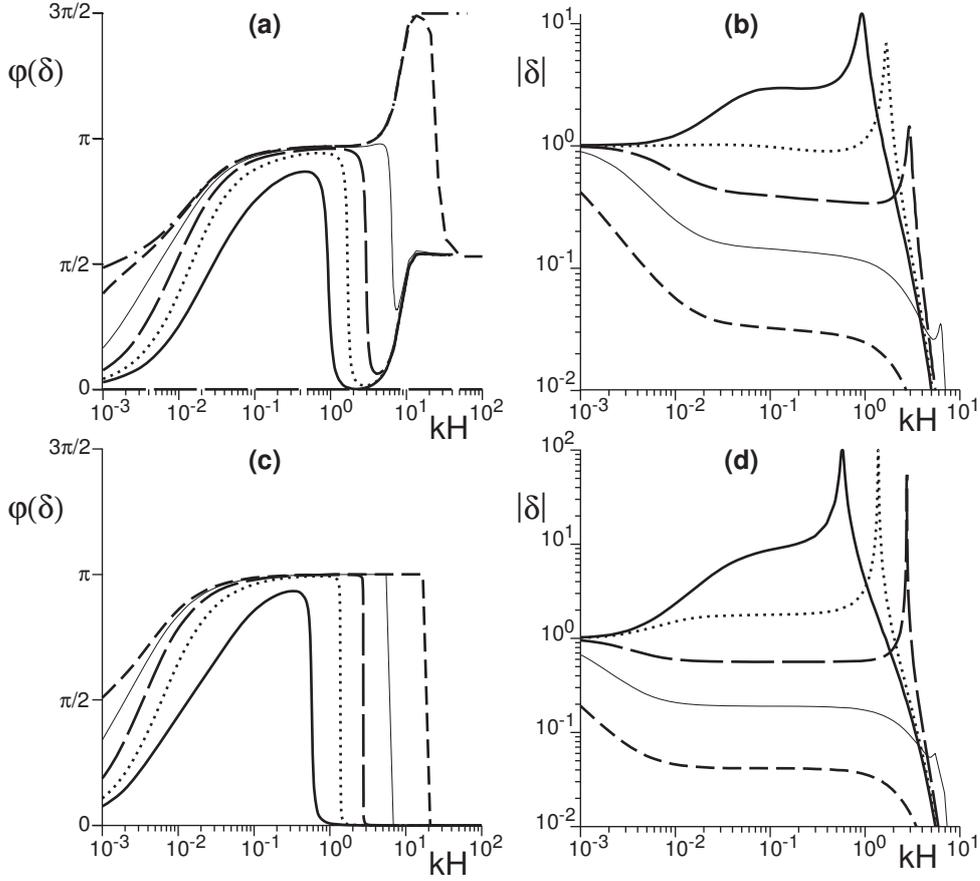


FIGURE 21. The phase (a) and amplitude (b) of the rescaled free surface deformation  $\delta = \Delta/\zeta$  as a function of  $kH$  for  $\mathcal{F} \rightarrow 0$  (dotted dashed line),  $\mathcal{F} = 0.2$  (dashed line),  $\mathcal{F} = 0.4$  (thin solid line),  $\mathcal{F} = 0.6$  (long dashed line),  $\mathcal{F} = 0.8$  (dotted line) and  $\mathcal{F} = 1$  (solid line), and  $H/z_0 = 10^3$ . Crossing the resonance, the phase shifts from 0 to  $\pi$ . (c) and (d), same for the friction force analytical model.

accumulate when this velocity vanishes i.e. for:

$$\mathcal{F} = \sqrt{\frac{\tanh(kH)}{kH}} \quad (7.15)$$

In the shallow water approximation ( $kH \ll 1$ ), this resonant condition gives  $\mathcal{F} = 1$  as standardly obtained in hydraulics. In the deep water approximation, it gives  $\mathcal{F} = 1/\sqrt{kH}$  or equivalently  $kH = 1/\mathcal{F}^2$  (Kennedy 1963). So, for a bottom of wavelength  $\lambda$ , the flow is subcritical at low  $\mathcal{F}$  and low  $kH$  and supercritical at large  $\mathcal{F}$  and  $kH$ . Ignoring dissipation, the Bernoulli relation states that the sum of the gravitational potential energy  $\rho g \Delta$  and the kinetic energy  $\frac{1}{2} \rho u_{\text{surface}}^2$  is constant along the free surface. The subcritical regime corresponds to deep slow flows dominated by gravity: as the velocity increases over a bump, the corresponding increase of kinetic energy must be balanced by a loss of gravitational potential energy. As a consequence, the free surface is pinched over the bump ( $\varphi = \pi$ , see figure 20c). The supercritical regime corresponds to thin rapid flows dominated by kinetic energy. By conservation of the flow rate, a pinch of the free surface would lead to an increased velocity. As the bump pushes up the free surface, the

corresponding gain of potential energy should be balanced by a decrease of kinetic energy which is achieved by a deformation of the free surface in phase with the bump ( $\varphi = 0$ , see figure 20c). In summary, the free surface responds in phase with the excitation at small wavelength and becomes delayed as  $\lambda/H$  increases. As in a standard second order linear system, the disturbance and the system response are in quadrature at the resonance.

The phase  $\varphi$  and the rescaled amplitude  $|\delta|$  of the free surface are displayed in figure 21(a)-(b) for different values of  $\mathcal{F}$ . In panels 21(c)-(d), they are compared to the analytical predictions obtained using a much simpler closure (Appendix F). One can see that the amplitude of the resonance increases with the Froude number. For very small  $\mathcal{F}$ , the phase curve is more complicated to interpret, but note that this corresponds to a vanishing amplitude  $\delta$ : the resonance essentially disappears. For  $kH \rightarrow 0$ , the free surface amplitude seems to converge to some finite value, but the phase slowly goes back to 0. This gentle crossover is indeed expected at very large wavelength, a situation for which the free surface must follow the bottom topography.

It is interesting to investigate how the resonance is affected by the fact that the bottom moves i.e. can grow or propagate. Following the notations introduced in 5.3, we display in figure 22 the amplitude of the free surface  $|\delta|$  as a function of  $kH$  for different values of the growth rate  $\sigma$  and the pulsation  $\omega$ . For positive growth rates  $\sigma$ , the Q-factor of the resonance gets smaller but the resonant wavenumber is not affected. A bottom propagating at the velocity  $\omega/k$  moves the resonant peak along the  $kH$ -axis. For a positive propagation velocity  $\omega/k$  the surface velocity with respect to the bottom and thus the effective Froude number get reduced. As a consequence, the resonant wavelength gets smaller – and  $kH$  larger. Conversely, the peak moves to smaller wavenumber for an upstream moving bottom. As in sub-section 5.3, these effects are noticeable for values of  $\frac{\sigma}{ku_*}$  and  $\frac{\omega}{ku_*}$  of order one, while realistic values are respectively on the order of  $10^{-2}$  and  $10^{-3}$ . For the ripples and dunes problem (part 2), the bedform motion can thus be safely ignored in the hydrodynamical calculation and the effect of free surface interpreted in terms of surface standing waves.

The basal shear stress and pressure and subsequently the coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  are modified by the presence of the free surface when  $kH$  is of order one and below. In figure 23, the coefficients are plotted as functions of  $kH$  for different values of the Froude number. One can see that the resonance peak is more pronounced for larger  $\mathcal{F}$  – they are actually not visible when  $\mathcal{F}$  is too small. In agreement with the streamlines of figure 20(a), which shows a squeezing downstream the bump crest, the peak of  $B$  is negative, corresponding to a phase delay of the stress with respect to the bottom. Furthermore, the curves corresponding to the presence of a rigid lid at the same height  $H$  do not exhibit these peaks. Finally, the diverging behaviour of  $B$  as  $kH \rightarrow 0$  is also a free surface effect as, in the same limit,  $B$  reaches a plateau in the case of a rigid top boundary. The behaviours of  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  at small  $kH$  (below the resonant condition) can be determined analytically using the simple closure proposed in the Appendix F. For small  $kH$ , we get  $A \propto 1/(kH)$ ,  $B \propto -1/(kH)^2$ ,  $C \propto 1/(kH)^3$  and  $D \propto 1/(kH)^2$ . These scalings fit fairly well the solutions of the full equations.

As a conclusion, there are two situations in which the excitation of standing waves by the topography affects significantly the characteristics of the inner layer: (i) around the resonance, since the surface wave amplitude is very large and (ii) for vanishing  $kH$ , when the distance  $H$  between the topography and the free surface becomes so small that the inner layer invades the whole flow.

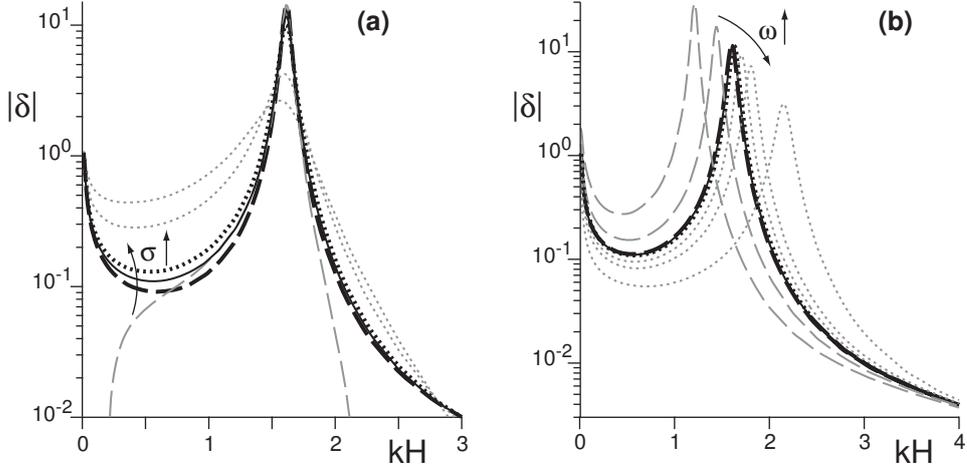


FIGURE 22. Amplitude of the free surface  $|\delta|$  as a function of  $kH$  for different values of the growth rate  $\sigma$  (a) and the pulsation  $\omega$  (b) of the bottom boundary. Arrows indicate increasing values of  $\sigma$  and  $\omega$ . These graphs have been computed with  $H/z_0 = 10^4$  and  $\mathcal{F} = 0.8$ . In panel (a), the grey dashed line is for  $\frac{\sigma}{ku_*} = -1$ , the back dashed line for  $-0.1$ , the black dotted line for  $0.1$  and the two grey dotted lines for  $1$  and  $2$ . In panel (b), the two grey dashed lines is for  $\frac{\omega}{ku_*} = -5$  and  $-2$ , the black dashed line for  $-0.1$ , the black dotted line for  $0.1$  and the three grey dotted lines for  $1$ ,  $2$  and  $5$ . For comparison, in all panels the solid lines correspond to the fixed case  $\sigma = 0$ ,  $\omega = 0$ .

## 8. A qualitative summary of the results

As this article is based on a rather technical ground, it is useful to sum up, in a qualitative manner, our key results and to put them in perspective with respect to the second part of the paper. In the context of the formation of ripples and dunes from a flat sand bed submitted to a turbulent flow, a central issue is the description of the basal shear stress, which controls bed load transport. Due to the scale separation between the typical evolution time of the bedforms and that of the flow, the bottom can be considered as quasi-static. The hydrodynamics can be investigated independently of the transport issue.

In the traces of the seminal work of Jackson & Hunt 1975, three main regions can be evidenced in the turbulent flow over a wavy bottom.

- An outer layer, away from the bottom, in which the flow is well described by inviscid potential equations, i.e. where the perfect flow approximation is valid. The streamlines follow the topography so that the velocity is in phase with the bottom.
- An inner layer, which corresponds to the region where the inertial terms of the Navier-Stokes equation are negligible, and thus where the longitudinal pressure gradient is balanced by the transverse mixing of momentum due to turbulent fluctuations i.e. by the Reynolds shear stress transverse gradient. The thickness  $\ell$  of the inner layer is related to wavelength by  $\lambda \sim \ell \ln^2(\ell/z_0)$ . At the transition between the inner and outer layers, the fluid velocity is slowed down by the shear stress. Due to inertia, the velocity is always phase delayed with respect to the shear stress. As the velocity is inherited from the outer layer, the shear stress is phase-advanced with respect to the topography.
- A thin surface layer of thickness  $h_0$ , which is responsible for the hydrodynamical roughness  $z_0$  seen from the inner layer. The dominant physical mechanism at work in this surface layer can be of different nature. For instance,  $z_0$  can result from the mixing due to roughness elements, the predominance of viscous dissipation, or the presence of

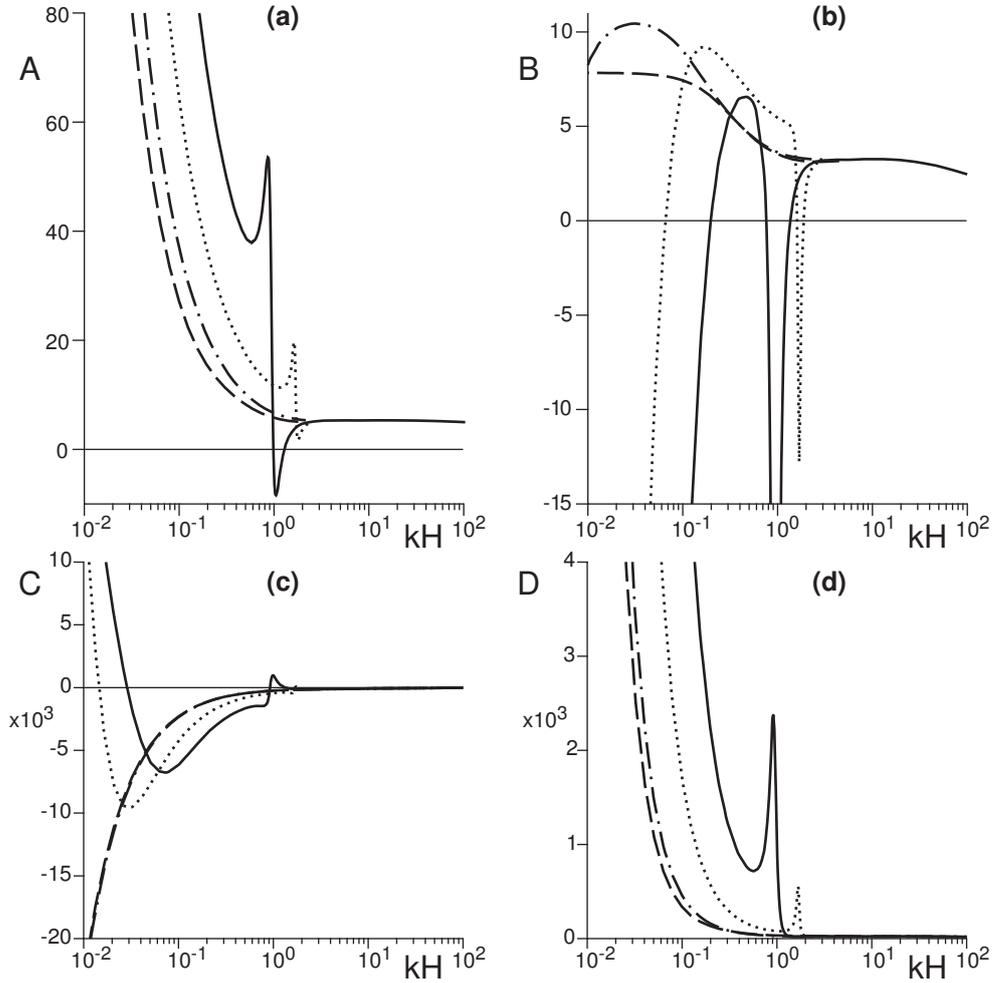


FIGURE 23.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  as functions of  $kH$ , for  $\mathcal{F} = 0.1$  (dotted dashed line),  $\mathcal{F} = 0.8$  (dotted line) and  $\mathcal{F} = 1$  (solid line). The dashed lines correspond to a rigid boundary at the same height  $H$ . The plots have been computed for  $H/z_0 = 10^3$ . Comparing a free surface to a rigid boundary condition (or to the case  $H \ll \lambda$ ), it can be inferred that the hydrodynamics is controlled by the surface waves. In particular, the resonance leads to a drop of the shear stress component  $B$  i.e. to a downstream shift of the point of maximum shear stress.)

bed-load transport. Specific scaling laws for  $z_0$  and  $h_0$  are obtained for each of these cases.

The linear relationship between the stresses and the bottom profile can be encoded into two complex coefficients  $A + iB$  and  $C + iD$ . The tangent of the phase between the stresses and the bottom is given by the ratios  $B/A$  and  $D/C$  respectively. These coefficients are key inputs for the sediment transport issue (see part 2), and are needed to compute the dispersion relation of the bedforms, i.e. the growth rate as a function of the bedform wavenumber, which tells whether a given wavelength is stable or unstable. Their dependencies with respect to several important parameters such as the length scale ratios  $z_0/\lambda$  or  $H/\lambda$  have been determined. Their sensitivity to different ways of modelling turbulence or of imposing the bottom boundary conditions have also been discussed. Our conclusions regarding these functions can be summed up as follows:

- $A$  and  $B$  are generically positive, whereas  $C$  is positive and  $D$  negative. This means that the shear stress profile reaches its maximum before the crests of the bumps. This effect can be visualised on the streamlines, which are squeezed at this point of maximum shear. For the normal stresses, the situation is opposite: the pressure maximum is slightly delayed after the crests. As the pressure is almost constant across the inner boundary layer, this phase shift  $D/C$  is less pronounced by an order of magnitude.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  have weak dependencies on the ratio  $\lambda/z_0$ . The shear stress phase shift  $B/A$  vanishes for asymptotically small  $kz_0$  and gently increases with  $\ln(kz_0)$ . As the inner layer thickness  $\ell$  becomes of the order of the surface layer thickness  $h_0$ , the phase shift drops.

- These features are robust to (i) the turbulent closure, (ii) the existence of a Reynolds stress anisotropy, (iii) the motion (growth or propagation) of the bottom.

- Much more important is the role of the free surface in the case of a water depth  $H$  on the order of the bottom wavelength  $\lambda$ . The undulations of the bottom excite standing gravity waves at the free surface. Resonant conditions are reached when these waves precisely propagate at a velocity equal to that of the flow, i.e. when  $\mathcal{F}^2 \simeq \tanh(kH)/(kH)$ . At the resonance, the response of the free surface is in quadrature with the disturbance. When the Froude number is large enough, the deformation  $|\delta|$  of the free surface at the resonance is so large that it has a strong effect on the flow close to the bottom. In particular, the streamlines are squeezed downstream the crests of the bump, so that the shear stress becomes phase-delayed with respect to the topography ( $B < 0$ ).

- Another effect due to the presence of a free surface is found for  $kH \rightarrow 0$ . In this limit, the water depth becomes very thin in comparison to the wavelength, and the inner layer invades the whole flow (i.e.  $\ell \simeq H$ ). In this situation, the shear stress and the bottom profiles tend to be in phase so that  $B/A \rightarrow 0$ . Moreover, the shear stress becomes phase delayed ( $B < 0$ ) below a threshold value of  $kH$  that increases with the Froude number.

- The shear stress profile is insensitive to the mechanisms at work in the surface layer provided that its thickness  $h_0$  is smaller than the inner layer thickness  $\ell$ : the hydrodynamical roughness  $z_0$  is the single quantity inherited from the surface layer. The asymptotic calculation performed by Jackson & Hunt 1975 is recovered but only for asymptotically large  $\ln(\lambda/z_0)$ , a limit hardly reached in real problems. When  $h_0$  is comparable or larger than  $\ell$ , the shear stress coefficients  $A$  and  $B$  are smaller in the hydraulically smooth regime where the roughness is due to viscosity than in the hydraulically rough regime. In the later case, the mixing of momentum in the surface layer is dominated by the turbulent fluctuations induced by the roughness elements. In the ripples and dunes problem, these results directly apply to the case where sediments are transported with negligible feedback on the flow (erosion limited transport, see part 2). When the extra-stress due to bedload transport is significant (momentum limited transport), we predict that  $A$  and  $B$  become larger. but with an almost identical phase shift  $B/A$ .

- The normal stress profile is almost independent of the surface layer model.

Beyond the linear case, we have expended the hydrodynamical calculation to the third order in  $k\zeta$ . In contrast to the linear calculation, the separation of streamlines, when the shear stress and the pressure gradient are antagonist, and the associated formation of a recirculation bubble are obtained for realistic values of the aspect ratio. At the quadratic order, we get a correction to the mean velocity profile which corresponds to a roughness  $z_g$  at large scale due to bottom corrugation. This roughness of geometrical origin depends on the ‘microscopic’ roughness  $z_0$  inherited from the surface layer and is not simply proportional to the amplitude of the bottom profile. We get the scaling law:  $z_g = z_0 \exp(\kappa(k\zeta)^2 E)$ , where the factor  $E$  weakly depends on  $\lambda/z_0$ . Looking at the shear stress modulation, we have shown that the phase shift between the shear stress

and the bottom profile is reduced by non-linear corrections and change sign at some particular aspect ratio. In the second part of this paper, this non-linear analysis is used to predict the selection of the aspect ratio of mature ripples and dunes.

---

The understanding of the qualitative reason for the upstream shift of the maximum shear stress on a bump has been meditated with A.B. Murray. This work has benefited from the financial support of the french minister of research. We thank l'Éouvé for hospitality, where part of this paper was written.

### Appendix A. An anisotropic turbulent closure

The calculations of section 3 can be generalised in the case of the following anisotropic stress-strain relationship:

$$\tau_{ij} = \kappa^2 L^2 |\dot{\gamma}| \left( \frac{1}{3} \chi_i^2 |\dot{\gamma}| \delta_{ij} - \dot{\gamma}_{ij} \right). \quad (\text{A } 1)$$

At the linear order, the velocity, pressure and stress fields read:

$$u_x = u_* [\mu + k\zeta e^{ikx} U], \quad (\text{A } 2)$$

$$u_z = u_* k\zeta e^{ikx} W, \quad (\text{A } 3)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -u_*^2 [1 + k\zeta e^{ikx} S_t], \quad (\text{A } 4)$$

$$p + \tau_{zz} = p_0 + u_*^2 \left[ \frac{1}{3} \chi_z^2 + k\zeta e^{ikx} S_n \right], \quad (\text{A } 5)$$

$$\tau_{zz} = u_*^2 \left[ \frac{1}{3} \chi_z^2 + k\zeta e^{ikx} S_{zz} \right], \quad (\text{A } 6)$$

$$\tau_{xx} = u_*^2 \left[ \frac{1}{3} \chi_x^2 + k\zeta e^{ikx} S_{xx} \right], \quad (\text{A } 7)$$

and the stress equations can be simplified into

$$\mu' S_t = 2(U' + iW) - 2\kappa^2(\eta + \eta_0)\mu'^3, \quad (\text{A } 8)$$

$$\mu' S_{xx} = -2iU + \frac{2}{3}\chi_x^2(U' + iW) - \frac{2}{3}\chi_x^2\kappa\mu'^2, \quad (\text{A } 9)$$

$$\mu' S_{zz} = -2W' + \frac{2}{3}\chi_z^2(U' + iW) - \frac{2}{3}\chi_z^2\kappa\mu'^2. \quad (\text{A } 10)$$

The normal stress difference is this time:

$$S_{xx} - S_{zz} = \frac{-4iU}{\mu'} + \frac{2}{3} \frac{\chi_x^2 - \chi_z^2}{\mu'} (U' + iW - \kappa\mu'^2), \quad (\text{A } 11)$$

so that on gets the following four closed equations:

$$U' = -iW + \frac{1}{2}\mu' S_t + \kappa\mu'^2, \quad (\text{A } 12)$$

$$W' = -iU, \quad (\text{A } 13)$$

$$S_t' = \left( i\mu + \frac{4}{\mu'} \right) U + \mu' W + \frac{i}{3}(\chi_x^2 - \chi_z^2) S_t + iS_n, \quad (\text{A } 14)$$

$$S_n' = -i\mu W + iS_t. \quad (\text{A } 15)$$

As before, they can be written in the usual compact matrix form (3.24), now with

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & -i & \frac{1}{2}\mu' & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ \left(i\mu + \frac{4}{\mu'}\right) & \mu' & \frac{i}{3}(\chi_x^2 - \chi_z^2) & i \\ 0 & -\mu i & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A } 16)$$

## Appendix B. A second order turbulent closure

### B.1. Relaxation equation

The dynamical equations governing the second-order moments  $\tau_{ik}$  can be derived rigorously. Under the assumption of turbulence isotropy at the dissipative scale, it can be written under the form:

$$D_t \tau_{ik} = \partial_t \tau_{ik} + u_j \partial_j \tau_{ik} = -\tau_{kj} \partial_j u_i - \tau_{ij} \partial_j u_k - \partial_j \phi_{ik} - \pi_{ik} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \varepsilon. \quad (\text{B } 1)$$

$\varepsilon$  is the dissipation rate;  $\phi_{ik} = \overline{u'_i u'_j u'_k}$  is the spatial flux of turbulent energy induced by fluctuations; the pressure term  $\pi_{ik} = \overline{u'_k \partial_i p'} + \overline{u'_i \partial_k p'}$  conserves energy and is usually responsible for the isotropisation of fluctuations.

We wish to get a stress tensor that relaxes towards its steady state expression prescribed by equation (2.6). For dimensional reasons, we write the relaxation rate under the form  $|\dot{\gamma}|/\beta$ , where  $\beta$  is a phenomenological constant, and keep the mixing length  $L$  fixed by the geometrical distance to the wall. The second moment equation then takes the form of a first order relaxation equation:

$$D_t \tau_{ik} = \partial_t \tau_{ik} + u_j \partial_j \tau_{ik} = \frac{|\dot{\gamma}|}{\beta} \left[ \kappa^2 L^2 \left( \delta_{ij} \frac{1}{3} \chi^2 |\dot{\gamma}|^2 - |\dot{\gamma}| \dot{\gamma}_{ij} \right) - \tau_{ij} \right]. \quad (\text{B } 2)$$

Setting  $\beta = 0$ , one recovers the stationary solutions (2.6). A finite value of  $\beta$  introduces a lag between a change of the flow velocity field and the point/time at which the Reynolds stress readapts to this change.

### B.2. Equations for 2D steady flows

For 2D steady situations, the stress relaxation equations are the following:

$$u_x \partial_x \tau_{xz} + u_z \partial_z \tau_{xz} = \frac{|\dot{\gamma}|}{\beta} \left[ -\kappa^2 L^2 |\dot{\gamma}| \dot{\gamma}_{xz} - \tau_{xz} \right], \quad (\text{B } 3)$$

$$u_x \partial_x \tau_{xx} + u_z \partial_z \tau_{xx} = \frac{|\dot{\gamma}|}{\beta} \left[ -\kappa^2 L^2 |\dot{\gamma}| \dot{\gamma}_{xx} + \frac{1}{3} \kappa^2 \chi^2 L^2 |\dot{\gamma}|^2 - \tau_{xx} \right], \quad (\text{B } 4)$$

$$u_x \partial_x \tau_{zz} + u_z \partial_z \tau_{zz} = \frac{|\dot{\gamma}|}{\beta} \left[ -\kappa^2 L^2 |\dot{\gamma}| \dot{\gamma}_{zz} + \frac{1}{3} \kappa^2 \chi^2 L^2 |\dot{\gamma}|^2 - \tau_{zz} \right]. \quad (\text{B } 5)$$

At linear order, they simplify into:

$$(\mu' + i\beta\mu) S_t = 2(U' + iW) - 2\kappa^2(\eta + \eta_0)\mu'^3, \quad (\text{B } 6)$$

$$(\mu' + i\beta\mu) S_{xx} = -2iU + \frac{2}{3}\chi^2(U' + iW) - \frac{2}{3}\chi^2\kappa\mu'^2, \quad (\text{B } 7)$$

$$(\mu' + i\beta\mu) S_{zz} = -2W' + \frac{2}{3}\chi^2(U' + iW) - \frac{2}{3}\chi^2\kappa\mu'^2. \quad (\text{B } 8)$$

Taking the difference of equations (B 7) and (B 8), one can compute

$$S_{xx} - S_{zz} = \frac{-4iU}{\mu' + i\beta\mu} \quad (\text{B } 9)$$

to obtain four closed equations:

$$U' = -iW + \frac{\mu' + i\beta\mu}{2}S_t + \kappa\mu'^2, \quad (\text{B } 10)$$

$$W' = -iU, \quad (\text{B } 11)$$

$$S_t' = \left( i\mu + \frac{4}{\mu' + i\beta\mu} \right) U + \mu'W + iS_n, \quad (\text{B } 12)$$

$$S_n' = -i\mu W + iS_t. \quad (\text{B } 13)$$

As before, they can be written in the usual compact matrix form (3.24), now with

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & -i & \frac{\mu' + i\beta\mu}{2} & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ \left( i\mu + \frac{4}{\mu' + i\beta\mu} \right) & \mu' & 0 & i \\ 0 & -\mu i & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B } 14)$$

## Appendix C. Representation of the disturbances

### C.1. Linear order

Recall that  $Z(x) = \zeta e^{ikx}$  is the bottom profile whose wavelength is  $\lambda = 2\pi/k$ , and  $\eta = kz$  the dimensionless vertical coordinate. At the linear order, we write all the relevant quantities under the form:

$$f = \bar{f}(\eta) + k\zeta e^{ikx} f_1(\eta). \quad (\text{C } 1)$$

An alternative is to use the curvilinear coordinates  $\xi = \eta - kZ$  and write the field  $f$  as:

$$f = \bar{f}(\xi) + k\zeta e^{ikx} \tilde{f}_1(\xi). \quad (\text{C } 2)$$

We call these expressions respectively the ‘non-shifted’ and ‘shifted’ representations of  $f$ . They lead to the same linearised equations as they are related to each other at the linear order by

$$\tilde{f}_1 = f_1 + \bar{f}'. \quad (\text{C } 3)$$

In practice, this is especially relevant for  $U$ , for which  $\bar{f} = \mu$  is not constant:  $\tilde{U} = U + \mu'$  is the shifted representation of the first order correction to the horizontal velocity. However,  $\tilde{W} = W$ ,  $\tilde{S}_t = S_t$  and  $\tilde{S}_n = S_n$ . Importantly, note that the range in  $\eta$  for which these two representations are valid is not the same *a priori*.

### C.2. Representations for the non-linear expansion

All fields are expanded up to the third order in  $k\zeta$ , neglecting also non-harmonic terms in  $(k\zeta)^3 e^{\pm i3kx}$ . Non-shifted representation of the streamwise velocity:

$$\frac{u_x}{u_*} = \mu(\eta) + (k\zeta)e^{ikx}U_1(\eta) + (k\zeta)^2U_0(\eta) + (k\zeta)^2e^{2ikx}U_2(\eta) + (k\zeta)^3e^{ikx}U_3(\eta). \quad (\text{C } 4)$$

Shifted representation of the same quantity:

$$\frac{u_x}{u_*} = \mu(\xi) + (k\zeta)e^{ikx}\tilde{U}_1(\xi) + (k\zeta)^2\tilde{U}_0(\xi) + (k\zeta)^2e^{2ikx}\tilde{U}_2(\xi) + (k\zeta)^3e^{ikx}\tilde{U}_3(\xi). \quad (\text{C } 5)$$

Expanding the functions  $\tilde{f}_\alpha(\eta - k\zeta e^{ikx})$  with respect to  $k\zeta$ , one can relate a representation to the other as:

$$U_1 = \tilde{U}_1 - \mu', \quad (\text{C } 6)$$

A. Fourrière, P. Claudin and B. Andreotti

$$U_0 = \tilde{U}_0 + \frac{1}{4}\mu'' - \frac{1}{4}(\tilde{U}'_1 + \tilde{U}'_1{}^*), \quad (\text{C } 7)$$

$$U_2 = \tilde{U}_2 + \frac{1}{4}\mu'' - \frac{1}{2}\tilde{U}'_1, \quad (\text{C } 8)$$

$$U_3 = \tilde{U}_3 - \frac{1}{8}\mu''' - \tilde{U}'_0 - \frac{1}{2}\tilde{U}'_2 + \frac{1}{4}\tilde{U}''_1 + \frac{1}{8}\tilde{U}''_1{}^*. \quad (\text{C } 9)$$

Conversely:

$$\tilde{U}_1 = U_1 + \mu', \quad (\text{C } 10)$$

$$\tilde{U}_0 = U_0 + \frac{1}{4}\mu'' + \frac{1}{4}(U'_1 + U'_1{}^*), \quad (\text{C } 11)$$

$$\tilde{U}_2 = U_2 + \frac{1}{4}\mu'' + \frac{1}{2}U'_1, \quad (\text{C } 12)$$

$$\tilde{U}_3 = U_3 + \frac{1}{8}\mu''' + \frac{1}{4}U''_1 + \frac{1}{8}U''_1{}^* + U'_0 + \frac{1}{2}U'_2. \quad (\text{C } 13)$$

The passage from a representation to the other for the other fields works the same, except that there is no zeroth order (function  $\mu$ ) in the expressions.

## Appendix D. Stream function

To compute the streamlines, we introduce the so-called stream function  $\Psi(x, z)$ , defined by  $\partial\Psi/\partial x = -u_z$  and  $\partial\Psi/\partial z = u_x$ . This function is such that  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\Psi = 0$ , so that the isocontours  $\Psi = \text{Cst}$  precisely show the streamlines. Using the continuity equation (2.7), it is easy to show that a solution is  $\Psi = \int d\tilde{z} u_x$ . This integral is computed between  $\tilde{z} = Z$  (the bottom) and  $\tilde{z} = z$ . We note  $\xi = \eta - kZ$  the rescaled distance to the bottom. Restricting to the linear order, with the relation  $U_1 = iW'_1$  (equation (3.21)), we end up with

$$\Psi = \frac{u_*}{k} \left\{ (\xi + \eta_0)\mu(\xi) - \frac{1}{\kappa}\xi + k\zeta e^{ikx} [iW_1(\xi) + \mu(\xi)] \right\}, \quad (\text{D } 1)$$

where the function  $\mu$  is given by expression (4.2).

In the situation with a free surface, one can use the following representation for the field  $f$ :

$$f = \bar{f}(\xi) + k\zeta e^{ikx} \tilde{f}_1(\xi), \quad \text{with} \quad \xi = \eta_H \frac{z - Z}{H + \Delta - Z}. \quad (\text{D } 2)$$

This curvilinear variable  $\xi$  vanishes on the bottom  $z = Z$ , and  $\xi = \eta_H$  at the surface  $z = H + \Delta$ . The new function  $\tilde{f}_1$  is related to those of the non-shifted representation  $\bar{f}$  and  $f_1$  as:

$$\tilde{f}_1(\xi) = f_1(\xi) + \left( 1 + (\delta - 1) \frac{\xi}{\eta_H} \right) \bar{f}'(\xi). \quad (\text{D } 3)$$

For  $f = u_x$ , we have  $\bar{f} = \mu$  and  $f_1 = U_1 = iW'_1$ . Consequently, the new stream function is

$$\Psi_{FS} = \frac{u_*}{k} \left\{ (\xi + \eta_0)\mu(\xi) - \frac{1}{\kappa}\xi + k\zeta e^{ikx} \left[ iW(\xi) + \mu(\xi) + (\delta - 1) \frac{\xi\mu(\xi)}{\eta_H} \right] \right\}. \quad (\text{D } 4)$$

One can check that the free surface is indeed a streamline itself, as one of the top boundary conditions is  $W_1(\eta_H) = i\mu(\eta_H)\delta$ .

In the non-linear (and unbounded) case, we get:

$$\Psi_{NL} = \frac{u_*}{k} \left\{ (\xi + \eta_0)\mu - \frac{1}{\kappa}\xi + (k\zeta) e^{ikx} (iW_1 + \mu) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + (k\zeta)^2 \left( \int_0^\xi U_0(\xi) d\xi + \frac{1}{4}\mu' + \frac{1}{4}(U_1 + U_1^*) \right) \\
& + (k\zeta)^2 e^{2ikx} \left( \frac{i}{2} W_2 + \frac{1}{4}\mu' + \frac{1}{2}U_1 \right) \\
& + (k\zeta)^3 e^{ikx} \left( iW_3 + \frac{1}{8}\mu'' + \frac{1}{4}U_1' + \frac{1}{8}U_1'^* + U_0 + \frac{1}{2}U_2 \right) \} \quad (D 5)
\end{aligned}$$

## Appendix E. Weakly non-linear calculations

Definition of the different functions involved in the expansion:

$$u_x = u_* \left[ \mu + (k\zeta)e^{ikx}U_1 + (k\zeta)^2U_0 + (k\zeta)^2e^{2ikx}U_2 + (k\zeta)^3e^{ikx}U_3 \right], \quad (E 1)$$

$$u_z = u_* \left[ (k\zeta)e^{ikx}W_1 + (k\zeta)^2e^{2ikx}W_2 + (k\zeta)^3e^{ikx}W_3 \right], \quad (E 2)$$

$$\tau_{xz} = -u_*^2 \left[ 1 + (k\zeta)e^{ikx}S_{t1} + (k\zeta)^2S_{t0} + (k\zeta)^2e^{2ikx}S_{t2} + (k\zeta)^3e^{ikx}S_{t3} \right], \quad (E 3)$$

$$p + \tau_{zz} = p_0 + u_*^2 \left[ (k\zeta)e^{ikx}S_{n1} + (k\zeta)^2S_{n0} + (k\zeta)^2e^{2ikx}S_{n2} + (k\zeta)^3e^{ikx}S_{n3} \right], \quad (E 4)$$

$$\tau_{zz} - \tau_{xx} = u_*^2 \left[ (k\zeta)e^{ikx}S_{d1} + (k\zeta)^2S_{d0} + (k\zeta)^2e^{2ikx}S_{d2} + (k\zeta)^3e^{ikx}S_{d3} \right]. \quad (E 5)$$

Expansion of the mixing length:

$$\kappa^2(kL)^2 = \frac{1}{\mu'^2} - \frac{2\kappa}{\mu'}(k\zeta)e^{ikx} + \frac{\kappa^2}{2}(k\zeta)^2 + \frac{\kappa^2}{2}(k\zeta)^2e^{2ikx}. \quad (E 6)$$

Expansion of the strain tensor components:

$$\dot{\gamma}_{xx} = 2 \left( (k\zeta)e^{ikx}iU_1 + (k\zeta)^2e^{2ikx}2iU_2 + (k\zeta)^3e^{ikx}iU_3 \right), \quad (E 7)$$

$$\dot{\gamma}_{zz} = -\dot{\gamma}_{xx}, \quad (E 8)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_{xz} = & \mu' + (k\zeta)e^{ikx}(U_1' + iW_1) + (k\zeta)^2U_0' + (k\zeta)^2e^{2ikx}(U_2' + 2iW_2) \\
& + (k\zeta)^3e^{ikx}(U_3' + iW_3), \quad (E 9)
\end{aligned}$$

which gives for the strain modulus:

$$\begin{aligned}
|\dot{\gamma}| = & \mu' + (k\zeta)e^{ikx}(U_1' + iW_1) + (k\zeta)^2 \left[ U_0' + \frac{U_1U_1^*}{\mu'} \right] + (k\zeta)^2e^{2ikx} \left[ U_2' + 2iW_2 - \frac{U_1^2}{\mu'} \right] \\
& + (k\zeta)^3e^{ikx} \left[ U_3' + iW_3 - \frac{U_1U_1^*}{\mu'^2}(U_1' + iW_1) + \frac{U_1^2}{2\mu'^2}(U_1'^* - iW_1^*) + \frac{4U_1^*U_2}{\mu'} \right], \quad (E 10)
\end{aligned}$$

and then

$$\begin{aligned}
\kappa^2(kL)^2|\dot{\gamma}| = & \frac{1}{\mu'} + (k\zeta)e^{ikx} \left[ \frac{1}{\mu'^2}(U_1' + iW_1) - 2\kappa \right] \\
& + (k\zeta)^2 \left[ \frac{\kappa^2\mu'}{2} - \frac{\kappa}{2\mu'}(U_1' + U_1'^* + iW_1 - iW_1^*) + \frac{1}{\mu'^2} \left( U_0' + \frac{U_1U_1^*}{\mu'} \right) \right] \\
& + (k\zeta)^2e^{2ikx} \left[ \frac{\kappa^2\mu'}{2} - \frac{\kappa}{\mu'}(U_1' + iW_1) + \frac{1}{\mu'^2} \left( U_2' + 2iW_2 - \frac{U_1^2}{\mu'} \right) \right] \\
& + (k\zeta)^3e^{ikx} \left[ \frac{\kappa^2}{4}(2U_1' + U_1'^* + 2iW_1 - iW_1^*) - \frac{\kappa}{\mu'} \left( 2U_0' + \frac{U_1(2U_1^* - U_1)}{\mu'} + U_2' + 2iW_2 \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{\mu'^2} \left( U_3' + iW_3 - \frac{U_1U_1^*}{\mu'^2}(U_1' + iW_1) + \frac{U_1^2}{2\mu'^2}(U_1'^* - iW_1^*) + \frac{4U_1^*U_2}{\mu'} \right) \right]. \quad (E 11)
\end{aligned}$$

Expressions of the different functions corresponding to the normal stresses  $\tau_{zz} - \tau_{xx}$ :

$$S_{d1} = \frac{4i}{\mu'} U_1, \quad (\text{E } 12)$$

$$S_{d0} = \frac{i}{\mu'^2} (U_1(U_1^* - iW_1^*) - U_1^*(U_1 + iW_1)) + 2i\kappa(U_1^* - U_1), \quad (\text{E } 13)$$

$$S_{d2} = \frac{8i}{\mu'} U_2 + \frac{2i}{\mu'^2} U_1(U_1' + iW_1) - 4i\kappa U_1, \quad (\text{E } 14)$$

$$S_{d3} = \frac{4i}{\mu'} U_3 + \frac{4i}{\mu'^2} U_2(U_1^* - iW_1^*) - 8i\kappa U_2 + i\kappa^2 \mu' (2U_1 - U_1^*) + \frac{6i}{\mu'^3} U_1^2 U_1^* \quad (\text{E } 15)$$

$$+ \frac{2i\kappa}{\mu'} (U_1 + iW_1)(U_1^* - U_1) - \frac{2i\kappa}{\mu'} U_1(U_1^* - iW_1^*) + \frac{4i}{\mu'^2} U_1 U_0' - \frac{2i}{\mu'^2} U_1^*(U_2' + 2iW_2).$$

Expressions of the different  $\vec{S}_\alpha$ :

$$\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} \kappa\mu'^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{E } 16)$$

$$\vec{S}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa^2\mu'^3}{4} - \frac{1}{4\mu'}(U_1' + iW_1)(U_1^* - iW_1^*) \\ \quad + \frac{\kappa\mu'}{2}(U_1' + U_1^* + iW_1 - iW_1^*) - \frac{1}{2\mu'} U_1 U_1^* \\ 0 \\ \frac{1}{4}(W_1 U_1^* + W_1^* U_1') \\ \frac{1}{2}(U_1 W_1^* - U_1^* W_1) \end{pmatrix}, \quad (\text{E } 17)$$

$$\vec{S}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa^2\mu'^3}{4} - \frac{1}{4\mu'}(U_1' + iW_1)^2 + \kappa\mu'(U_1' + iW_1) + \frac{1}{2\mu'} U_1^2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} W_1 U_1' + \frac{i}{2} U_1^2 + \frac{4}{\mu'^2} U_1(U_1' + iW_1) - 8\kappa U_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{E } 18)$$

$$\vec{S}_3 = \begin{pmatrix} 2\kappa\mu' U_0 + \frac{\kappa}{2} U_1(2U_1^* - U_1) + \kappa\mu'(U_2' + 2iW_2) - \frac{2}{\mu'} U_1^* U_2 \\ \quad - \frac{\mu'}{2}(U_1' + iW_1) \left[ \kappa^2\mu' - \frac{\kappa}{2\mu'}(U_1' + 2U_1^* + iW_1 - 2iW_1^*) + \frac{2}{\mu'^2} U_0' \right] \\ \quad - \frac{\mu'}{4}(U_1^* - iW_1^*) \left[ \kappa^2\mu' + \frac{2}{\mu'^2}(U_2' + 2iW_2) \right] \\ 0 \\ iU_0 U_1 + \frac{i}{2} U_2 U_1^* + U_0' W_1 + \frac{1}{2} W_1^* U_2' + \frac{1}{2} W_2 U_1^* \\ \quad + \frac{4}{\mu'^2} U_2(U_1^* - iW_1^*) - 8\kappa U_2 + \kappa^2\mu'(2U_1 - U_1^*) + \frac{6}{\mu'^3} U_1^2 U_1^* \\ \quad + \frac{2\kappa}{\mu'} (U_1' + iW_1)(U_1^* - U_1) - \frac{2\kappa}{\mu'} U_1(U_1^* - iW_1^*) + \frac{4}{\mu'^2} U_1 U_0' \\ \quad - \frac{2}{\mu'^2} U_1^*(U_2' + 2iW_2) \\ -iU_0 W_1 - \frac{3i}{2} W_2 U_1^* + \frac{3i}{2} U_2 W_1^* \end{pmatrix} \quad (\text{E } 19)$$

## Appendix F. A friction force closure

Several of the free surface effects can be recovered within a simple friction force model, for which analytical expressions of the linear solution of the flow can be derived. In particular, the resonance condition as well as the behaviour of the basal stress coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  for  $kH \rightarrow 0$  can be found and interpreted.

### F.1. Reference state

We start from the Navier-Stokes equations for a perfect flow, with a crude additional turbulent friction term as an approximation of the stress derivatives:

$$\partial_x u_x + \partial_z u_z = 0, \quad (\text{F } 1)$$

$$u_x \partial_x u_x + u_z \partial_z u_x = -\partial_x p + g \sin \theta - \Omega \frac{u_x}{H} u_x, \quad (\text{F } 2)$$

$$u_x \partial_x u_z + u_z \partial_z u_z = -\partial_z p - g \cos \theta - \Omega \frac{2u_x}{H} u_z, \quad (\text{F } 3)$$

Physically, the force applied to a fluid particle is directly related to the relative velocity with respect to the ground. At an angle  $\theta$ , the following plug flow is an homogeneous solution of the above equations:

$$u_x = \bar{u} = \sqrt{\frac{gH \sin \theta}{\Omega}}, \quad (\text{F } 4)$$

$$u_z = 0, \quad (\text{F } 5)$$

$$p = g \cos \theta (H - z). \quad (\text{F } 6)$$

In order to estimate the value of the friction coefficient, one can make use of the fact that typical turbulent velocity vertical profiles are logarithmic. However, as the logarithm varies slowly when  $z$  is much larger than  $z_0$ , we write  $\bar{u} \sim \frac{1}{H} \int_0^H dz u_x(z) \sim \frac{u_*}{\kappa} \left( \ln \frac{H}{z_0} - 1 \right)$ . Identifying the shear stress on the bottom as  $u_*^2 = gH \sin \theta$ , we finally get with the relation (F 4)

$$\Omega \sim \left( \frac{\kappa}{\ln \frac{H}{z_0} - 1} \right)^2. \quad (\text{F } 7)$$

For  $H/z_0$  in the range  $10^3$ - $10^4$ , we get a typical value for  $\Omega$  on the order of few  $10^{-3}$ . We now normalize quantities by  $\bar{u}$  and  $H$  and get a single non-dimensional (Froude) number:

$$\mathcal{F} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gH \cos \theta}}. \quad (\text{F } 8)$$

### F.2. Disturbance

The starting equations can be linearised around the above reference state. Looking at the flow over a corrugated bottom  $Z(x) = \zeta e^{ikx}$ , it is easy to show that the solution is of the following form

$$u_x = \bar{u} + \bar{u} k \zeta e^{ikx} [-a_+ e^{kz} + a_- e^{-kz}], \quad (\text{F } 9)$$

$$u_z = \bar{u} i k \zeta e^{ikx} [a_+ e^{kz} + a_- e^{-kz}], \quad (\text{F } 10)$$

$$p = g \cos \theta (H - z) + \bar{u}^2 (kH - i2\Omega) \frac{\zeta e^{ikx}}{H} [a_+ e^{kz} - a_- e^{-kz}], \quad (\text{F } 11)$$

where  $a_+$  and  $a_-$  must be determined by the boundary conditions. This exponential form is characteristic of potential flows.

### F.3. Boundary conditions

We require that the velocity normal to the bottom vanish. Following the notations of the main part of the paper, we define  $\Delta$  such that the free surface is at the altitude  $H + \Delta$ . It is a material line where the pressure vanishes. The three boundary conditions are then:

$$u_z(z=0) = i\bar{u}k\zeta e^{ikx}, \quad (\text{F } 12)$$

$$u_z(z = H) = i\bar{u}\delta k\zeta e^{ikx}, \quad (\text{F } 13)$$

$$p(z = H) = \frac{\bar{u}^2}{H\mathcal{F}^2} \delta\zeta e^{ikx}, \quad (\text{F } 14)$$

where, as before,  $\delta$  is defined as  $\Delta(x) = \delta\zeta e^{ikx}$ . The constants  $a_+$  and  $a_-$ , as well as  $\delta$  are thus solutions of

$$a_+ + a_- = 1, \quad (\text{F } 15)$$

$$a_+ e^{kH} + a_- e^{-kH} = \delta, \quad (\text{F } 16)$$

$$a_+ e^{kH} - a_- e^{-kH} = \frac{\delta}{(kH - i2\Omega)\mathcal{F}^2}, \quad (\text{F } 17)$$

from which we get:

$$a_+ = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{(kH - i2\Omega) \tanh kH - \frac{1}{\mathcal{F}^2}}{(kH - i2\Omega) - \frac{1}{\mathcal{F}^2} \tanh kH} \right], \quad (\text{F } 18)$$

$$a_- = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{(kH - i2\Omega) \tanh kH - \frac{1}{\mathcal{F}^2}}{(kH - i2\Omega) - \frac{1}{\mathcal{F}^2} \tanh kH} \right]. \quad (\text{F } 19)$$

#### F.4. Basal shear stress and pressure

The shear stress is not part of the variables of this model, but we can consistently define it as  $\tau = -\Omega u_x^2$ . Looking at the shear stress  $\tau_b$  and normal stress  $p_b$  on the bottom, in accordance with the notations of the previous sections of the paper, we introduce the coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  as

$$\tau_b = -\Omega \bar{u}^2 [1 + (A + iB)k\zeta e^{ikx}], \quad (\text{F } 20)$$

$$p_b = gH \cos \theta + \Omega \bar{u}^2 (C + iD)k\zeta e^{ikx}, \quad (\text{F } 21)$$

which gives

$$A = 2 \frac{[(kH)^2 + 4\Omega^2 + \frac{1}{\mathcal{F}^4}] \tanh kH - \frac{1}{\mathcal{F}^2} kH [\tanh^2 kH + 1]}{(kH - \frac{1}{\mathcal{F}^2} \tanh kH)^2 + 4\Omega^2}, \quad (\text{F } 22)$$

$$B = \frac{2\Omega}{\mathcal{F}^2} \frac{[\tanh^2 kH - 1]}{(kH - \frac{1}{\mathcal{F}^2} \tanh kH)^2 + 4\Omega^2}, \quad (\text{F } 23)$$

$$C = \frac{1}{2\Omega} \left( -A - \frac{2\Omega B}{kH} \right), \quad (\text{F } 24)$$

$$D = \frac{1}{2\Omega} \left( -B + \frac{2\Omega A}{kH} \right). \quad (\text{F } 25)$$

It is worth noting that the friction force model predicts negative values of  $B$  for any  $kH$ . This means that there is always a phase delay of the shear stress with respect to the bottom, which is a clear disagreement with the full solution. In order to fix this flaw, one would need to empirically introduce an imaginary part to  $\Omega$ . Finally, this discrepancy shows that a precise description of the phase between the basal friction and the relief is a subtle and difficult issue that fully justify the use of a rigorous but heavy formalism.

#### REFERENCES

- Abbott, J.E. & Francis, J.R.D. 1977 Saltation and suspension trajectories of solid grains in a water stream. *Phil. Trans. R. Soc. London* **284**, 225-254.

- Abrams J. & Hanratty, T.J. 1985 Relaxation effects observed for turbulent flow over a wavy surface. *J. Fluid Mech.* **151**, 443-455.
- Andreotti B. 2004 A two species model of aeolian sand transport. *J. Fluid Mech.* **510**, 47-50.
- Andreotti, B., Claudin, P. & Douady, S. 2002 Selection of dune shapes and velocities. Part 2: A two-dimensional modelling. *Eur. Phys. J. B* **28**, 341-352.
- Ashley, G.M. 1990 Classification of large scale subaqueous bedforms: a new look at an old problem. *J. Sedim. Res.* **60**, 161-172.
- Ayotte, K.W., Xu, D. & Taylor, P.A. 1994 The impact of turbulence closure schemes on predictions of the mixed spectral finite-difference model for flow over topography. *Boundary-Layer Met.* **68**, 1-33.
- Bagnold, R.A. 1941 The physics of blown sand and desert dunes. Methuen, London.
- Beljaars, A.C.M. & Taylor, P.A. 1989 On the inner-layer scale height of boundary-layer flow over low hills. *Boundary-Layer Met.* **49**, 433-438.
- Benjamin, T.B. 1959 Shearing flow over a wavy boundary. *J. Fluid Mech.* **6**, 161-205.
- Belcher, S.E. & Hunt, J.C.R. 1998 Turbulent flow over hills and waves. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **30**, 507-538.
- Bennet, S.J. & Best, J.L. 1995 Mean flow and turbulence structure over fixed, two-dimensional dunes: implication for sediment transport and bedform stability. *Sedimentology* **42**, 491-513.
- Bordner, G.L. 1978 Nonlinear analysis of laminar boundary layer flow over a periodic wavy surface. *Phys. Fluids* **21**, 1471-1464.
- Britter, R.E., Hunt, J.C.R. & Richards, K.J. 1981 Air flow over a two-dimensional hill: studies of velocity speed-up, roughness effects and turbulence. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **107**, 91-110.
- Buckles, J., Hanratty, T.J. & Adrian, R.J. 1984 Turbulent flow over large-amplitude wavy surfaces. *J. Fluid Mech.* **140**, 27-44.
- Caponi, E.A., Fornberg, B., Khigh, D.D., McLean, J.W., Saffman, P.G. & Yuen, H.C. 1982 Calculations of laminar viscous flow over a moving wavy surface. *J. Fluid Mech.* **124**, 247-262.
- Charru, F. 2006 Selection of the ripple length on a granular bed. *Phys. Fluids* **18**, 121508.
- Charru, F. & Hinch, E.J. 2000 'Phase diagram' of interfacial instabilities in a two-layer Couette flow and mechanism for the long-wave instability. *J. Fluid Mech.*, **414**, 195-223.
- Claussen, M. 1988 On the inner-layer scale height of boundary-layer flow over low hills. *Boundary-Layer Met.* **44**, 411-413.
- Coleman, S.E. & Fenton, J.D. 2000 Potential-flow instability theory and alluvial stream bed forms. *J. Fluid Mech.* **418**, 101-117.
- Coleman, S.E., Nikora, V.I., McLean, S.R., Clunie, T.M., Schlicke, T. & Melville B.W. 2006 Equilibrium hydrodynamics concept for developing dunes, *Phys. Fluids* **18**, 105104.
- Colombini, M. 2004 Revisiting the linear theory of sand dune formation. *J. Fluid Mech.* **502**, 1-16.
- Colombini, M. & Stocchino, A. 2005 Coupling or decoupling bed and flow dynamics: Fast and slow sediment waves at high Froude numbers. *Phys. Fluids* **17**, 036602.
- Colombini, M. & Stocchino, A. 2008 Finite-amplitude river dunes. *J. Fluid Mech.* **611**, 283-306.
- de Angelis, V., Lombardi, P. & Banerjee, S. 1997 Direct numerical simulation of turbulent flow over a wavy wall. *Phys. Fluids* **9**, 2429-2442.
- Engelund, F. 1970 Instability of erodible beds. *J. Fluid Mech.* **42**, 225-244.
- Engelund, F. & Fredsøe, J. 1982 Sediment ripples and dunes. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **14**, 13-37.
- Fernandez Luque, R. & van Beek, R. 1976 Erosion and transport of bed-load sediment. *J. Hydraul. Res.* **14**, 127-144.
- Finnigan, J.J., Raupach, M.R., Bradley, E.F. & Aldis G.K. 1990 A wind tunnel study of turbulent flow over a two-dimensional ridge. *Boundary-Layer Met.* **50**, 277-317.
- Fredsøe, J. 1974 On the development of dunes in erodible channels *J. Fluid Mech.* **64**, 1-16.
- Gong, W. & Ibbetson, A. 1989 A wind tunnel study of turbulent flow over model hills. *Boundary-Layer Met.* **49**, 113-148.
- Gong, W., Taylor, P.A. & Dörnbrack, A. 1996 Turbulent boundary-layer flow over fixed aerodynamically rough two-dimensional sinusoidal waves. *J. Fluid Mech.* **312**, 1-37.
- Gradowczyk, M.H. 1970 Wave propagation and boundary instability in erodible-bed channels.

- J. Fluid Mech.* **33**, 93-112.
- Hayashi, T. 1970 Formation of dunes and antidunes in open channels. *J. Hydraul. Div.* **96**, 357-366.
- Henn, D.S. & Sykes, R.I. 1999 Large-eddy simulation of slow over wavy surfaces. *J. Fluid Mech.* **383**, 75-112.
- Hunt, J.C.R., Leibovich, S. & Richards, K.J. 1988 Turbulent shear flows over low hills. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **114**, 1435-1470.
- Jacobs, S.J. 1989 Effective roughness length for turbulent flow over a wavy surface. *J. Phys. Oceanography* **19**, 998-1010.
- Jackson, P.S. & Hunt, J.C.R. 1975 Turbulent wind flow over a low hill. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **101**, 929-955.
- Jensen, N.-O. & Zeman O. 1985 in International workshop on the physics of blown sand, edited by O.E. Barndor-Nielsen, K. Moller, K.R. Rasmussen, B.B. Willets (University of Aarhus), 351-368.
- Ji, Z.-G. & Mendoza, C. 1997 Weakly nonlinear stability analysis for dune formation. *J. Hydraul. Eng.* **123**, 979-985.
- Kamphuis, J.W. 1974 Determination of Sand Roughness for Fixed Beds. *J. Hydraul. Res.* **12**, 193-207.
- Keirsbulck, L., Labraga, L., Mazouz, A. & Tournier, C. 2002 Influence of surface roughness on anisotropy in a turbulent boundary layer flow. *Exp. Fluids* **33**, 497-499.
- Kennedy, J.F. 1963 The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels. *J. Fluid Mech.* **16**, 521-544.
- Kennedy, J.F. 1969 The formation of sediment ripples, dunes and antidunes. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **1**, 147-168.
- Kobayashi, N. & Madsen, O.S. 1985 Turbulent flows over a wavy bed. *J. Geophys. Res.* **90**, 7323-7331.
- Krogstad, P.-Å., Andersson, H.I., Bakken, O.M. & Ashraffian, A. 2005 An experimental and numerical study of channel flow with rough walls. *J. Fluid Mech.* **530**, 327-252.
- Krogstad, P.-Å. & Antonia, R.A. 1994 Structure of turbulent boundary layers on smooth and rough walls. *J. Fluid Mech.* **277**, 1-21.
- Kroy, K., Sauermaun, G. & Herrmann, H.J. 2002 Minimal model for aeolian sand dunes. *Phys. Rev. E* **66**, 031302.
- Lagrée, P.-Y. 2003 A triple deck model of ripple formation and evolution. *Phys. Fluids* **15**, 2355-2368.
- McLean, S.R. 1990 The stability of ripples and dunes. *Earth-Science Rev.* **29**, 131-144.
- McLean, S.R., Nelson, J.M. & Wolfe, S.R. 1994 Turbulence structure over two-dimensional bed forms: implications for sediment transport. *J. Geophys. Res.* **99**, 12729-12747.
- McLean, S.R. & Smith, J.D. 1986 A model for flow over two-dimensional bed forms *J. Hydraul. Eng.* **112**, 300-317.
- Nakagawa, S. & Hanratty, T.J. 2001 Particle image velocimetry measurements of flow over a wavy wall. *Phys. Fluids* **13**, 3504.
- Nelson, J.M., McLean, S.R. & Wolfe, S.R. 1993 Mean flow and turbulence fields over two-dimensional bed forms. *Water Resources Res.* **29**, 3935-3953.
- Parker, G. 1975 Sediment inertia as cause of river antidunes. *J. Hydraul. Div.* **101**, 211-221.
- Perry, A.E., Schofield, W.H. & Joubert, P.N. 1969 Rough wall turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* **37**, 383-413.
- Poggi, D., Katul, G.G., Albertson, J.D. & Ridolfi, L. 2007 An experimental investigation of turbulent flows over a hilly surface. *Phys. Fluids* **19**, 036601.
- Prandtl, L. 1925 Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. *Z. Ang. Math. Mech.* **3**, 136-139. After, Bradshaw, P. 1974 Possible origin of Prandtl's mixing-length theory, *Nature* **249**, 135-136.
- Raupach, M. R., Antonia, R. A. & Rajagopalan, S. 1991 Rough-wall turbulent boundary layers. *Appl. Mech. Rev.* **44**, 1-25.
- Reynolds, A.J. 1965 Waves on the erodible bed of an open channel. *J. Fluid Mech.* **22**, 113-133.
- Reynolds, O. 1874 On the extent and action of the heating surface of steam boilers. *Proc. Manchester Lit. Phil. Soc.* **8**.

- Richards, K.J. 1980 The formation of ripples and dunes on an erodible bed. *J. Fluid Mech.* **99**, 597-618.
- Richards, K.J. & Taylor, P.A. 1981 A numerical model of flow over sand waves in water of finite depth. *Geophys. J. R. astr. Soc.* **65**, 103-128.
- Salveti, M.V., Damiani, R. & Beux, F. 2001 Three-dimensional coarse large-eddy simulations of the flow above two-dimensional sinusoidal waves. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **35**, 617-642.
- Schlichting, H. & Gersten, K. 2000 Boundary layer theory. 8<sup>th</sup> edition. Springer-Verlag, Berlin.
- Shafi, H. S. & Antonia, R. A. 1995 Anisotropy of the Reynolds stresses in a turbulent boundary layer on a rough wall. *Exp. Fluids* **18**, 213-215.
- Smith, J.D. 1970 Stability of a sand bed subjected to a shear flow at low Froude number. *J. Geophys. Res.* **75**, 5928-5940.
- Sumer, B.M. & Bakioglu, M. 1984 On the formation of ripples on an erodible bed. *J. Fluid Mech.* **144**, 177-190.
- Sykes, R.I. 1980 An asymptotic theory of incompressible turbulent boundary-layer flow over a small bump. *J. Fluid Mech.* **101**, 647-670.
- Taylor, P.A. 1977 Some numerical studies of surface boundary-layer flow above gentle topography. *Boundary-Layer Met.* **11**, 439-465.
- Taylor, P.A. 1977 Numerical studies of neutrally stratified planetary boundary-layer flow above gentle topography. *Boundary-Layer Met.* **12**, 37-60.
- Taylor, P.A., Mason, P.J. & Bradley, E.F. 1987 Boundary-layer flow over low hills. *Boundary-Layer Met.* **39**, 107-132.
- Taylor, P.A., Sykes, R.I. & Mason, P.J. 1989 On the parametrization of drag over small-scale topography in neutrally-stratified boundary-layer flow. *Boundary-Layer Met.* **48**, 409-422.
- Tritton, D.J. 1988 Physical fluid dynamics. *Oxford University Press*.
- Ungar, J.E. & Haff, P.K. 1987 Steady-state saltation in air. *Sedimentology* **34**, 289-300.
- Valance, A. 2005 Formation of ripples over a sand bed submitted to a turbulent shear flow. *Eur. Phys. J. B* **45**, 433-442.
- Valance, A. & Langlois, V. 2005 Ripple formation over a sand bed submitted to a laminar shear flow. *Eur. Phys. J. B* **43**, 283-294.
- van Rijn, L.C. 1983 Equivalent roughness of alluvial bed. *J. Hydraul. Div.* **108**, 1215-1218.
- Venditti, J.G. 2007 Turbulent flow and drag over fixed two- and three-dimensional dunes. *J. Geophys. Res.* **112**, F04008.
- Weng, W.S., Hunt, J.C.R., Carruthers, D.J., Warren, A., Wiggs, G.F.S., Livingstone, I. & Castro, I. 1991 Air flow and sand transport over sand dunes. *Acta Mechanica* **2**, 1-22.
- Wiberg, P.L. & Nelson, J.M. 1992 Unidirectional flow over asymmetric and symmetric ripples. *J. Geophys. Res.* **97**, 12745-12761.
- Wiggs, G.F.S. 2001 Desert dune processes and dynamics. *Progress in physical geography* **25**, 53-79.
- Zilker, D.P., Cook, G.W. & Hanratty, T.J. 1977 Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part 1. Non-separated flows. *J. Fluid Mech.* **82**, 29-51.
- Zilker, D.P. & Hanratty, T.J. 1979 Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part 2. Separated flows. *J. Fluid Mech.* **90**, 257-271.



Bedforms in a turbulent stream.  
Part 2 : Formation of ripples by  
primary linear instability and of  
dunes by non-linear pattern  
coarsening.



# Bedforms in a turbulent stream.

## Part 2: Formation of ripples by primary linear instability and of dunes by non-linear pattern coarsening

By ANTOINE FOURRIERE, PHILIPPE CLAUDIN  
AND BRUNO ANDREOTTI

Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes  
PMMH UMR 7636 CNRS-ESPCI-P6-P7,  
10 rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France.

(Received 10 December 2008)

It is widely accepted that both ripples and dunes form in rivers by primary linear instability, the wavelength of the former scaling on the grain size, that of the latter being controlled by the water depth. We revisit here this problem, using the computation of the turbulent flow over a wavy bottom performed in Part 1. A multi-scale description of the problem is proposed, in which the details of the different mechanisms controlling sediment transport are encoded into three quantities: the saturated flux, the saturation length and the threshold shear stress. These quantities are modelled in the case of erosion and momentum limited bed loads. This framework allows to give a clear picture of the instability in terms of dynamical mechanisms. The relation between the wavelength at which ripples form and the flux saturation length is quantitatively derived. This solves the discrepancy between measured initial wavelengths and predictions that do not take this lag between flow velocity and sediment transport into account. Inverting the problem, experimental data is used to determine the saturation length as a function of grain size and shear velocity. Finally, using the systematic expansion of the flow field with respect to the corrugation amplitude performed in part 1, we discuss the non-linear selection of ripple aspect ratio. Investigating the effect of a free surface on the linear instability, we show that the excitation of standing waves at the surface has a stabilising effect, independently of the details of the flow and sediment transport models. Consequently, the shape of the dispersion relation obtained from the linear stability analysis of a flat sand bed is such that dunes can not result from a primary linear instability. We present the results of field experiments performed in the natural sandy Leyre river, which evidence the formation of ripples by a linear instability and the formation of dunes by a non-linear pattern coarsening limited by the free surface. Finally, we show that mega-dunes form when the sand bed presents heterogeneities such as a wide distribution of grain sizes.

---

### 1. Introduction

Since Richards 1980, and followed by others (Sumer & Bakioglu 1984, McLean 1990), ripples and dunes observed on the bed of sandy rivers have been interpreted as the two most unstable modes of the same linear instability. Although the classification of river bedform types is a difficult task (Ashley 1990), subaqueous ripples and dunes are

standardly defined by their typical size: ripples are the small scale bedforms whose wavelength  $\lambda$  scales on the grain size and dunes are those whose wavelength is comparable to or larger than the flow depth  $H$  (Kennedy 1963, Richards 1980, Engelund 1970, Fredsøe 1974, Engelund & Fredsøe 1982, Allen 1985). A variant of this definition was used by Guy et al. 1966: dunes are the bed features larger than ripples that distort significantly the free surface and are out of phase with the standing waves they generate; ripples are the triangular shaped bed-forms that have “lengths of less than about 2 feet and heights of less than about 0.2 foot”. In some other articles (Hill et al. 1969, Yalin 1977), the classification of bedforms is rather based on the ratio of the grain diameter  $d$  to the viscous sub-layer depth, i.e. on the particle Reynolds number  $u_*d/\nu$  ( $u_*$  is the shear velocity and  $\nu$  the kinematic viscosity of the fluid). These criterions are questionable, especially when there is no clear separation of length-scale between the spacing of ripple crests and the flow depth, and also in the case of bedforms superimposed on larger structures (Venditti et al. 2005a). In this paper, willing to refer to the dynamical mechanisms involved in the formation of these bedforms, we shall call ripples those whose characteristics are independent of the flow depth; in contrast, dunes are directly related to the presence of a free surface. In particular, we shall not use the terms ‘sand wavelets’, as suggested by Coleman et al. (Coleman & Melville 1994, Coleman & Melville 1996, Coleman & Eling 2000, Coleman et al. 2003) to designate the initial stage of ripples when they emerge from a flat sand bed.

Experimental measurements on subaqueous ripples are numerous and exhibit large data dispersion. One of the reasons for such a dispersion is that ripples exhibit pattern coarsening, i.e. present a progressive increase of their typical length-scale as time goes by (Mantz 1978, Gyr & Schmid 1989, Baas 1994, Coleman & Melville 1994, Coleman & Melville 1996, Baas 1999, Robert & Uhlman 2001, Coleman et al. 2003, Venditti et al. 2005b, Valance & Langlois 2008, Rauen et al. 2008). Many authors have only measured fully-developed wavelengths, whose relation with the initial wavelength  $\lambda$  is still an open issue that will be discussed here. A reference data base of final wavelengths in inclined flumes has been completed by Yalin 1985. Although not directly comparable to the predictions of a linear stability analysis, these data show distinct scaling laws for hydraulically smooth and rough granular beds. For a particle Reynolds number  $u_*d/\nu$  smaller than few unities, the viscous sub-layer is larger than the grain size  $d$  and the fully-developed ripple wavelength turns out to scale on  $\nu/u_*$ , with a large – yet unexplained – prefactor ( $\sim 10^3$ ). On the other hand, when the grain diameter  $d$  is larger than the viscous sub-layer, the wavelength was found to slowly increase with  $u_*$ . Here we will focus on this hydraulically rough regime, in which the flow is turbulent at all scales down to the grain size. This corresponds to the domain of validity of the calculations performed in part I. In several experimental articles (Baas 1994, Coleman & Melville 1994, Coleman & Melville 1996, Coleman & Eling 2000, Coleman et al. 2003, Valance & Langlois 2005), the initial wavelength  $\lambda$  has been carefully determined, showing scaling laws independent of the flow depth  $H$ . At large particle Reynolds number,  $\lambda$  is found to be almost independent of the shear velocity  $u_*$  and to increase with the grain diameter  $d$  (for instance Coleman et al. 2003 propose  $\lambda \propto d^{0.75}$ ). These measurements will serve as a benchmark for the theory developed in the present paper.

Concerning dunes, most of the measurements have been performed in natural rivers, for which the Froude number  $\mathcal{F}$  is low (see Best 2005 for a recent review). In the Mississippi river (Harbor 1998), in the Missouri river (Annambhotla 1972), in the Rhine (Carling et al. 2000, Wilbers & Ten Brinke 2003) and in the Rio Paraná (Parsons et al. 2005), the observed wavelengths range from  $0.5H$  to  $20H$  for Froude numbers around 0.2. The suggestion by Kennedy 1963, Allen 1985 or Colombini 2004 that mature dunes should

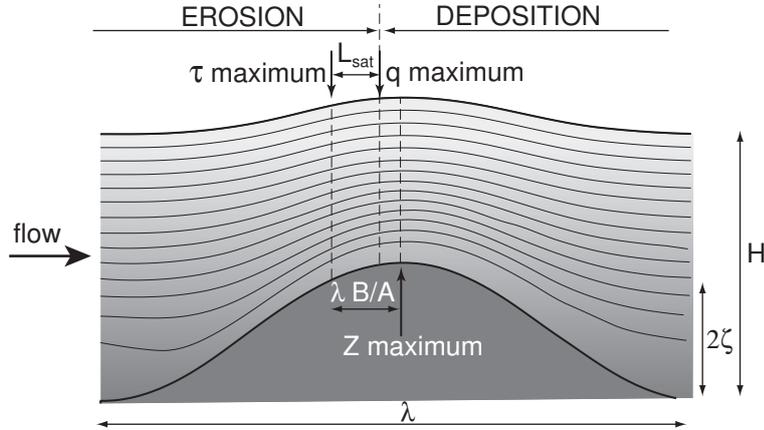


FIGURE 1. Schematic of the instability mechanism showing the streamlines around a bump. The fluid is flowing from left to right. A bump grows when the point at which the sand flux is maximum is shifted upwind the crest. The upwind shift of the maximum shear stress with respect to the crest scales on the size of the bump. The spatial lag between the shear and flux maxima is the saturation length  $L_{\text{sat}}$ .

present a well selected wavelength scaling on  $H/\mathcal{F}^2$  is thus far from reflecting the natural dispersion of field data. Flume experiments (see Guy et al. 1966, Robert & Uhlman 2001 and the data collected by Kennedy 1963) have been performed in a much larger range of Froude numbers (from 0.1 to 1) and also show well-developed bedform wavelengths between  $H$  and  $30H$ . The extensive data published by Guy et al. 1966 are particularly impressive, and the interested reader should refer to the original article rather to the truncated data-set plotted by Fredsøe 1974. We will discuss these data in detail in the last section of the present article.

It is widely accepted that ripples result from a linear instability, whose key mechanism is the phase difference between sediment transport and bed topography (Kennedy 1963, Reynolds 1965, Kennedy 1969, Smith 1970, Hayashi 1970, Parker 1975, Engelund & Fredsøe 1982, McLean 1990). This spatial shift can be conceptually splitted into two contributions. As seen in Part 1, there is a lag between the bed elevation profile and the basal shear stress, encoded in the ratio  $B/A$ , which results from the simultaneous effects of inertia and dissipation i.e. from hydrodynamics only (Fig. 1). In addition, sediment transport needs some time/length to adapt to some imposed shearing. Kennedy 1963 and his followers (Engelund 1970, Hayashi 1970, Smith 1970, Fredsøe 1974) have introduced a phenomenological spatial lag  $L_{\text{sat}}$  (this lag is called  $\delta$  in these papers) in a phase shift equation:

$$q(x) = q_{\text{sat}}(x - L_{\text{sat}}), \quad (1.1)$$

where  $q_{\text{sat}}$  is the saturated (or equilibrium) flux, which is a function of the basal shear stress. With such relation between  $q$  and  $q_{\text{sat}}$ , the phase shift between the sediment flux and the shear stress over a relief of wavelength  $\lambda$  is then simply  $-2\pi L_{\text{sat}}/\lambda$ , which corresponds to a phase delay for  $\lambda > 2L_{\text{sat}}$ , but to a phase advance for  $L_{\text{sat}} < \lambda < 2L_{\text{sat}}$ . As shown by Parker 1975, such a constant phase lag is not physically founded and should be replaced by a first order relaxation equation of the form

$$L_{\text{sat}} \partial_x q = q_{\text{sat}} - q. \quad (1.2)$$

This linear equation reflects the fact that the sand flux reaches its saturated value over a characteristic length  $L_{\text{sat}}$  (Parker 1975, Sauermann et al. 2001, Andreotti et al. 2002a,

Andreotti et al. 2002b, Kroy et al. 2002, Valance & Langlois 2005, Charru 2006). As for any other first order system, the phase delay between the flux and the shear stress increases here from 0 for large wavelengths to  $\pi/2$  for wavelengths much smaller than  $L_{\text{sat}}$ . When the sum of the phase lags coming from hydrodynamics and transport results into a maximum flux upstream the bed crest, sediment deposition occurs on the bump, leading to an unstable situation, i.e. to the amplification of the bedform (Fig. 1). Conversely, when the maximum flux is located downstream the crest, the bump is eroded and the disturbance decay. With the flux equation (1.1), even a potential description of the flow (Kennedy 1963, Reynolds 1965) for which the basal shear stress is in phase with the topography (see part 1), can then find an unstable – but unphysical – region. However, sediment transport has a definite stabilising role, and the destabilising mechanism must result from hydrodynamics.

The description of a turbulent flow over a sinusoidal bottom has been, in this context, progressively improved by Engelund 1970, Fredsøe 1974, Richards 1980 and Sumer & Bakioglu 1984. None of these articles take into account a saturation length. As discussed in Part 1, the basal shear stress is generically found to be in phase advance with respect to the bottom profile. This means that, without any stabilising mechanism, all wavelengths are found unstable. A key mechanism introduced by Fredsøe 1974 and kept in the following models is the stabilisation of short wavelengths by slope effects. In these models, the preferred wavelength results from hydrodynamics and is proportional to the hydrodynamical roughness  $z_0$  (or to  $\nu/u_*$  in the case of a viscous surface layer treated by Sumer & Bakioglu 1984). As shown by Charru 2006, the predicted wavelengths are smaller than all experimental findings by several orders of magnitude.

The concept of flux saturation was correctly introduced in a linear stability analysis by Parker 1975, the flow being modelled by depth averaged equations standardly used in hydraulics. However, these equations cannot describe the layered structure of the turbulent flow above bumps (see Jackson & Hunt 1975 and Part 1), and in particular the so-called inner layer which is responsible for the phase shift between shear and topography. As a consequence, this author missed the explanation of the ripple instability. The idea that  $L_{\text{sat}}$  is the relevant lengthscale for the problem of dune formation was introduced in the aeolian context by Sauermann et al. 2001, Andreotti et al. 2002b, Kroy et al. 2002. Linear stability analysis developed in this context (Elbelrhiti et al. 2005, Claudin & Andreotti 2006, Andreotti & Claudin 2007) suggest that the initial wavelength actually scales on  $L_{\text{sat}}$ , and not on  $z_0$ . This line of thinking has been applied since then to subaqueous ripples (Valance 2005, Valance & Langlois 2005, Charru 2006). Although  $L_{\text{sat}}$  and  $z_0$  are both ultimately related to the grain size  $d$ , they correspond to very different mechanisms associated to sand transport and hydrodynamics respectively.

Although Richards 1980 suggested that dunes could form by the same linear instability as ripples, no article has ever exhibited a proper and complete dispersion relation showing, in the same graph, the growth rate  $\sigma$  for a range of wave-numbers  $k$  that includes both ripples and dunes. In the figures provided by Richards 1980,  $\sigma$  is rescaled by  $k^2$ , which artificially enhances the small  $k$  (dunes) region. More recently, Colombini (Colombini 2004, Colombini & Stocchino 2005) revisited this problem, introducing the thickness of the transport layer has a key parameter. This empirical refinement gives in practice an adjustable phase shift between relief and sand transport and allows to get a single well-defined peak in the dispersion relation, associated to dunes, at a wavelength on the order of the flow depth. However, this model does not predict the existence of a small-scale (ripple) instability anymore.

In this paper, we wish to discuss afresh this ripple and dune formation problem, and in particular to get such a complete relation dispersion, where the peak associated to ripples

is present. To reach this goal, we must first discuss the sediment transport issue, before mixing it with the hydrodynamics presented in Part 1. In contrast to Richards 1980 and Colombini 2004, we eventually show that dunes cannot form by a linear instability mechanism, and must rather result from the interaction and non-linear pattern coarsening of ripples, limited by the free surface, as suggested by Raudkivi & Witte 1990 and Raudkivi 2006.

This paper is structured as follows. In the next section devoted to the sediment transport issue, we show how to abstract the details of the transport mechanisms into a general framework for the description of the different modes of transport and thus valid in the subaqueous and aeolian cases. A quantitative model of the transport threshold that includes the slope effects is proposed. We then show that the sediment transport can be limited either by the erosion rate or by the momentum available in the flow. With these ingredients, we propose a self-consistent model that unifies these two mechanisms and discuss the scaling law of the saturation length  $L_{\text{sat}}$ . In section 3, we revisit the formation of current ripples (and aeolian dunes) by linear instability, using the quantitative hydrodynamic calculation performed in part 1. It confirms that the most unstable wavelength is determined by the saturation length, and not by the hydrodynamical roughness. Inverting the problem, this allows to determine the saturation length from experimental measurements of the initial wavelength and to discuss its dependence on the grain size and the shear velocity. Finally, using the systematic expansion of the flow field with respect to the corrugation amplitude performed in part 1, we discuss the non-linear selection of ripple aspect ratio. In section 4, we investigate the effect of a free surface on the linear instability. We show that the excitation of standing waves at the surface has a stabilising effect, independently of the details of the flow and sediment transport models, which is by no means consistent with the formation of river dunes by a primary instability. In the last section, we present field experiments performed in the Leyre river, in France, that directly evidence the formation of ripples by a linear instability and the formation of dunes by a non-linear pattern coarsening limited by the free surface. Further observations suggest that mega-dunes form when the sand bed presents heterogeneities such as a wide distribution of grain sizes. Finally, we review and discuss the data available in the literature in the light of these theoretical and experimental results.

## 2. The saturation length paradigm

### 2.1. Saturation transient

We present here a general framework to describe, with only few key variables, the sediment transport properties. This framework can accommodate various situations associated to different modes of transport (bed load, saltation, reptation, etc) and different dynamical mechanisms controlling this transport (hydrodynamical erosion of the bed, splash, mixing by turbulent fluctuations, etc).

The reference situation is a uniform turbulent boundary layer of constant shear velocity  $u_*$  over a flat sand bed characterised by a threshold shear velocity  $u_{\text{th}}$ . In this situation, one observes a steady uniform transport characterised by a flux  $q_{\text{sat}}$  called the saturated flux, which corresponds to an equilibrium state between flow and transport.  $q_{\text{sat}}$  is a function of  $u_*$  and  $u_{\text{th}}$ . It is important to emphasise the precise meaning of  $u_*$  in this context. On the one hand,  $u_*$  is defined from the Reynolds shear stress, i.e. from the averaged correlation of velocity fluctuations  $\overline{u'w'}$ . On the other hand, the transport is mostly determined by the velocity field inside the transport layer of thickness  $h_0$  (few grain diameters in the case of bed-load and typically 1 cm in the aeolian case). If the

latter is embedded in the inner layer, then the average velocity is locally logarithmic and can be related to the basal shear stress.  $u_*$  should thus be determined from velocity measurements performed inside this inner layer – i.e. typically at a distance of  $\ell \simeq 10^{-2} \lambda$  from the bed, see part 1. The time-scale over which the momentum is exchanged increases linearly with the distance  $z$  from the surface (it scales as  $z/u_*$ ). Thus, the velocity fluctuations at time-scales smaller than  $z/u_*$  should be associated to the turbulent shear stress and those slower than  $z/u_*$ , to variations of  $u_*(t)$ . The shear velocity  $u_*(t)$  relevant for sediment transport should thus be averaged over the time-scale  $h_0/u_*$ .

Considering an inhomogeneous situation – for instance a spatial variation of the shear stress – the sand flux is not instantaneously in equilibrium with the local shear stress. In most of the situations, the transient toward equilibrium can be described by a first order relaxation law, with a single time and length scales:

$$T_{\text{sat}} \partial_t q + L_{\text{sat}} \partial_x q = q_{\text{sat}} - q, \quad (2.1)$$

where the flow goes in the increasing  $x$ -direction. In a situation homogeneous in space,  $T_{\text{sat}}$  is the time needed for the flux to reach again the saturation if the flow speed suddenly changes. Conversely, in a steady situation where there is no sediment flux at the entrance of a volume of control,  $L_{\text{sat}}$  is the length needed for the flux to reach  $q_{\text{sat}}$ .

As the relaxation time is usually much smaller than the time-scale of evolution of the bedform, we are left with a description of the transport by three variables: the saturated flux  $q_{\text{sat}}$ , the threshold shear velocity  $u_{\text{th}}$  and the saturation length  $L_{\text{sat}}$ . Note in particular that gravity effects are included into the transport threshold. This multi-scale approach allows to separate clearly the dynamical mechanisms that govern the emergence of bedforms from those governing sediment transport. In other words, subaqueous ripples and aeolian dunes are of the very same nature: a primary instability that is not sensitive at all to the mode of transport (e.g. bed-load *vs* saltation, see Hersen et al. 2002, Claudin & Andreotti 2006). This framework lies on two important assumptions. First, the depth of the inner layer in which the shear stress is vertically homogeneous should always remain larger than the depth of the transport layer – see part 1. Second, there is in general more than one relaxation mode and consequently a whole spectrum of relaxation times and lengths. The description by a first order relaxation implies that one of these modes is significantly slower than (and thus dominant in front of) the others. Otherwise, two or more saturation lengths have to be taken into account in a higher order relaxation equation.

An important such case is the suspended load, which must be described by a field (the sediment concentration) and not by a scalar (the integrated flux). Of course, a saturated flux  $q_{\text{sat}}$  exists in that case (the only particularity is the explicit dependence of  $q_{\text{sat}}$  on the flow depth) but, there is an infinite number of modes describing the behavior around saturation. We will thus restrict the discussion to the case of grains sufficiently heavy to prevent suspension. This is realized in practice for ripples and dunes in rivers, at moderate Froude numbers. It has been observed by Guy et al. 1966 that antidunes, which form in above  $\mathcal{F} = 1$ , produce so much turbulent kinetic energy that suspended load could be dominant. This situation, probably highly non-linear, and which requires a specific treatment (see Parker 1975, Colombini 2004, Colombini & Stocchino 2005)), is beyond the scope of the present article.

We aim here to discuss the origin of the existence of a transport saturated state and to propose a self-consistent model, predicting the main characteristics of transport: the static threshold, the saturation length and the saturated flux.

## 2.2. Static threshold

The bed load threshold is directly related to the fact that the grains are trapped in the potential wells created between neighbouring grains at the sand bed surface. To obtain the scaling law of the threshold shear stress, the simplest geometry to consider is a single spherical grain jammed between the two fixed grains below it (see figure 18 in the Appendix A). We consider the situation in which the cohesive forces between the grains are negligible and the friction at the contacts is sufficient to prevent sliding. The loss of equilibrium occurs for a value of the driving force  $F$  proportional to the submerged weight of the grain:  $F \propto (\rho_s - \rho_f)gd^3$ , where  $\rho_s$  is the mass density of the sand grain, and  $\rho_f$  is that of the fluid. As  $F$  is proportional to the shear force  $\tau d^2$  exerted by the fluid, the non-dimensional parameter controlling the onset of motion is the Shields number  $\Theta$ , which characterises the ratio of the driving shear stress to the normal stress:

$$\Theta = \frac{\rho_f u_*^2}{(\rho_s - \rho_f)gd}. \quad (2.2)$$

The threshold value can be estimated from a force balance. In the viscous regime, the grain drag coefficient  $C_d$  is inversely proportional to the grain Reynolds number  $\mathcal{R} = Ud/\nu$ :  $C_d = s^2\mathcal{R}^{-1}$ ; it is constant ( $C_d = C_\infty$ ) in the turbulent regime. Note that the turbulent drag is not only due to the fluctuations induced by the grain itself, as in the case of a grain falling in a fluid at rest, but also to those present in the turbulent flow. This situation has never been studied properly so far. Note also that the drag force is *a priori* different in the vicinity of the ground and that the lift force could be non-negligible when the grain is trapped at the surface of the sand bed. In order to avoid introducing too many parameters, we will not consider these effects here.

Typical values found in sedimentation experiments performed with natural sand grains are  $C_\infty \simeq 1$  and  $s \simeq 5$ . The generic situation is a uniform shear stress  $\rho_f u_*^2$ , for which the velocity profile is linear in the viscous regime:

$$u_x = \frac{u_*^2 z}{\nu} \quad (2.3)$$

and logarithmic in the turbulent regime:

$$u_x = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(1 + \frac{z}{rd}\right), \quad (2.4)$$

where  $\kappa$  is the von Kármán constant and  $r$  the ratio of the aero or hydrodynamic roughness to the grain diameter. The threshold Shields number is constant (see Appendix A), both in the viscous

$$\Theta_{\text{th}} = \frac{8\mu}{3s^2} \quad (2.5)$$

and in the turbulent regimes:

$$\Theta_{\text{th}} = \frac{4\mu\kappa^2}{3C_\infty \ln^2(1 + 1/2r)}, \quad (2.6)$$

where  $\mu$  is the avalanche slope. The laminar-turbulent transition, indicated by the grey zone in figure 2c, is determined by the Reynolds number and thus depends on the grain diameter  $d$ . In most of the situations relevant in geophysics,  $d$  lies in the cross-over between these two regimes. Figure 2 shows the comparison between experimental data for natural sand grains and the full model, whose derivation is provided in appendix A. There is no adjustable parameter in the model as one can independently measure the avalanche slope  $\mu = \tan 32^\circ$ , the drag coefficients and the sand bed roughness  $r = 0.1$ .

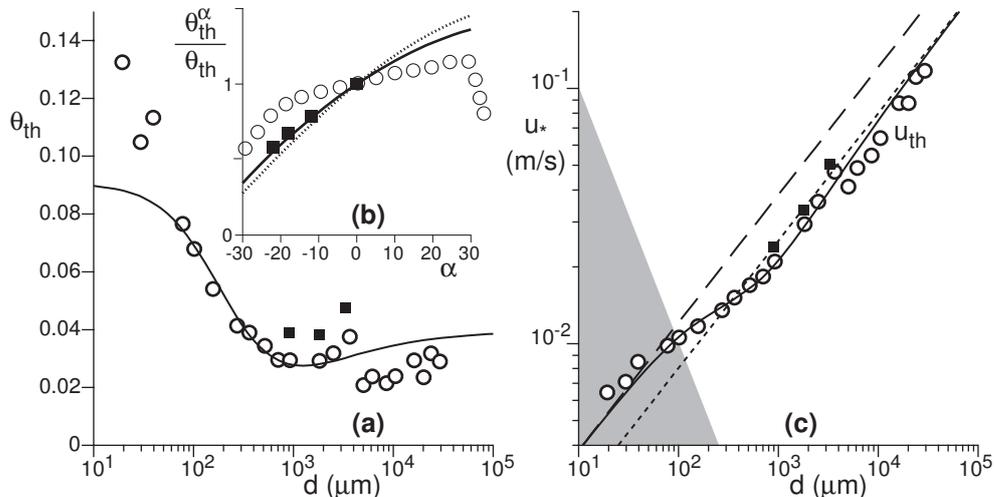


FIGURE 2. (a) Threshold Shields number  $\Theta$  as a function of the grain size  $d$ , for natural sand grains in water. Symbols: measurement by Yalin & Karahan 1979 ( $\circ$ ) and by Fernandez Luque & van Beek 1976 ( $\blacksquare$ ). Solid line: Comparison with the model (equations A 7 and A 8). (b) Dependence of the threshold Shields number  $\Theta_{th}^\alpha$  on the bed inclination  $\alpha$ . Symbols: measurements by Fernandez Luque & van Beek 1976 for natural sand grains ( $\blacksquare$ ) and by Loiseleux et al. 2005 using glass beads ( $\circ$ ) in a narrow channel. Solid line: expectation of the model (equations A 7 and A 8), for natural sand grains. Dotted line: approximation by  $\cos \alpha + \sin \alpha / \mu$ , with  $\mu = \tan 32^\circ$ . (c) Threshold shear velocity  $u_{th}$  as a function of the grain size  $d$ , for natural sand grains. Symbols: measurement by Yalin & Karahan 1979 ( $\circ$ ) and by Fernandez Luque & van Beek 1976 ( $\blacksquare$ ). Solid line: Comparison with the model. Dotted line: asymptotic behaviour in the turbulent regime. Dashed line: asymptotic behaviour in the viscous regime. Grey zone: zone in which the viscous sub-layer is larger than the bed roughness: for grains smaller than  $d = 100 \mu\text{m}$ , the bed is hydraulically smooth for any shear stress  $u_*$  above the threshold  $u_{th}$ .

It is worth noting that continuum mechanics cannot predict correctly this threshold. Assuming that the granular pressure  $P$  and the shear stress  $\tau$  are continuous at the fluid/grain interface, the standard Coulomb criterion  $\tau/P = \mu$  leads to a null threshold shear stress. Part of the problem comes from the fact that the pressure  $P$  felt by the first layer of grains is due to its own weight:  $\simeq (\rho_s - \rho_f)gd$ . Introducing such a pressure discontinuity, one finds a threshold Shields number  $\Theta_{th} \simeq \mu$ , which is independent of the flow regime and much too large, compared to measurements. This means that there is no continuity between the fluid and the granular shear stresses, making continuum descriptions of sediment transport inherently problematic.

### 2.3. Gravity or slope effect

Due to gravity, it is much easier to transport sediments along the lee side of a sand bump than on the stoss slope. This effect is directly encoded into the dependence of the saturated flux on the transport threshold, which depends on the slope. Let us note  $\alpha$  the bed angle at the scale of the saturation length. The force balance now reads:

$$\frac{\pi}{6}(\rho_s - \rho_f)gd^3 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = \frac{\pi}{8}C_d\rho_f (U_{th}^\alpha d)^2. \quad (2.7)$$

and  $U_{th}^\alpha$  is the fluid velocity around the grain at the threshold (see Appendix A). We keep the notations  $u_{th}$  and  $\Theta_{th}$  for the threshold shear stress and the threshold Shields

number for an horizontal bed ( $\alpha = 0$ ) and denote by  $u_{\text{th}}^\alpha$  and  $\Theta_{\text{th}}^\alpha$  the thresholds in the case of an inclined bed.

The dependence of the threshold on the slope has been measured experimentally by Fernandez Luque & van Beek 1976 for sand grains, in the turbulent regime. The model matches quantitatively the results, without any adjustable parameter (solid line on figure 2b). Neglecting the fact that  $C_d$  is a function of the grain Reynolds number, the threshold shear stress can be written as:  $\rho_f (u_{\text{th}}^\alpha)^2 = \rho_f u_{\text{th}}^2 (\cos \alpha + \sin \alpha / \mu)$ . Inserting this expression into the saturated flux formula, one can see that gravity leads to a down-slope component of the flux, i.e. to a diffusion mechanism. This approximation still gives a reasonable fit of the data (dotted line in figure 2b).

The slope dependence of the threshold shear stress has also been measured in the case of aeolian transport, for rough sand grains (Rasmussen et al. 1996) and is again perfectly fitted by the model. However, there exists an unexplained discrepancy in the case of spherical glass beads in a viscous liquid (Fig. 2b), as one would need a very low effective friction  $\mu \sim \tan 70^\circ$  much lower than the avalanche slope ( $\mu \sim \tan 24^\circ$ ) to fit the data (Loiseleux et al. 2005). With such a value, the gravity effect becomes completely negligible.

Importantly, the whole gravity effect on sand transport can be encoded into the threshold slope dependence, at the linear order in  $\alpha$ . This was directly proved experimentally by Fernandez Luque & van Beek 1976 in the sub-aqueous case and by Rasmussen et al. 1996 in the aeolian case. In different articles (Richards 1980 and followers),  $\mu$  was considered as a parameter that can be adjusted to fit the initial ripple wavelength. As they were missing the correct stabilising mechanism, aberrantly low values of the repose angle were found. In section 3.4 (see also Fig. 5), where the wavelength selection issue is discussed, we shall keep for  $\mu$  the avalanche slope determined experimentally.

#### 2.4. Erosion limited transport

When a sand bed is submitted to a flow, only a small fraction of the grains at the surface are entrained and this erosion process takes some time to occur. We first model the erosion rate, and in particular the role played by the disorder of the surface. We define  $\mathcal{N}(\Theta)$  the fraction of grains at the surface susceptible to be entrained at a Shields number  $\Theta$ . In the absence of flow, for  $\Theta = 0$ ,  $\mathcal{N}$  is null. It increases very quickly around the mean threshold Shields number  $\Theta_{\text{th}}$  and reaches 1 for large velocities.  $\mathcal{N}(\Theta)$  reflects and encodes the distribution of potential wells at the sand bed surface. Whatever the functional form chosen for this quantity, there are two important parameters: the Shields number around which  $\mathcal{N}$  switches from 0 to 1, which reflects the overall transport threshold, and the typical slope  $\mathcal{N}'$  in the same zone. A simple choice is:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= 0 & \text{if } \Theta < \Theta_m, \\ \mathcal{N} &= \frac{\Theta - \Theta_m}{\Theta_M - \Theta_m} & \text{if } \Theta_m < \Theta < \Theta_M, \\ \mathcal{N} &= 1 & \text{if } \Theta > \Theta_M. \end{aligned} \tag{2.8}$$

For the sake of simplicity, we consider that one grain at the surface occupies an area  $d^2$ . We start from a very simple assumption: when one grain is entrained, we hypothesise that there can be no further erosion in the surrounding area until the grain has moved by a distance comparable to its own diameter  $d$ . The description of the elementary jump by one grain diameter is derived in appendix B. The erosion time  $\mathcal{T}$  is the time needed

to move over a distance  $d$ . It behaves as:

$$\mathcal{T} \propto \ln \left[ \frac{\sqrt{\Theta} + \sqrt{\Theta_{\text{th}}}}{\sqrt{\Theta} - \sqrt{\Theta_{\text{th}}}} \right] \sqrt{\frac{\rho_f d}{(\rho_s - \rho_f)g}} \quad (2.9)$$

in the turbulent regime and

$$\mathcal{T} \propto \ln \left[ \frac{\Theta + \Theta_{\text{th}}}{\Theta - \Theta_{\text{th}}} \right] \left( \frac{d_\nu}{d} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{\rho_f d}{(\rho_s - \rho_f)g}} \quad (2.10)$$

in the viscous regime. This means that the mean velocity goes to 0 at the threshold like  $1/\ln[\Theta - \Theta_{\text{th}}]$ , which corresponds to a bifurcation much sharper than the standard saddle node bifurcation in  $\sqrt{\Theta - \Theta_{\text{th}}}$ . The experimental observation (Abbott & Francis 1977, Fernandez Luque & van Beek 1976, Charru et al. 2004) that the grain velocity – i.e. the mean velocity conditioned by the fact that the grain moves significantly at the time resolution of the instrument – is non zero just above the threshold is thus fully consistent with this expression. Far from threshold, the grain velocity is just proportional to the flow velocity (Abbott & Francis 1977, Fernandez Luque & van Beek 1976, Charru et al. 2004).

The erosion flux  $\varphi_\uparrow$  is the volume of grains eroded per unit time and unit surface. It can be expressed as an integral over all possible local configurations:

$$\varphi_\uparrow = \frac{\pi d^3}{6\phi} \int_0^\Theta \frac{\mathcal{N}'(\Theta_{\text{th}})}{d^2 T(\Theta_{\text{th}}, \Theta)} d\Theta_{\text{th}}, \quad (2.11)$$

where  $\phi$  is the bed volume fraction. A good approximation of this integral is given by:

$$\varphi_\uparrow \propto \frac{(\Theta - \Theta_m)}{\phi (\Theta_M - \Theta_m) \left[ c_m + \ln \left( \frac{\Theta + \Theta_m}{\Theta - \Theta_m} \right) \right]} \sqrt{\left( \frac{\rho_s}{\rho_f} - 1 \right) gd} \quad \text{for } \Theta_m < \Theta < \Theta_M, \quad (2.12)$$

where  $c_m \simeq 1.41$  in the turbulent regime and  $c_m \simeq 0.605$  in the viscous regime. In particular one can recover from this expression the expected asymptotic behaviours. Close to the threshold, there is a regime in which the density of mobile grains is not sufficient to induce a significant reduction of the flow strength in the transport layer, and the grains can be considered as isolated, which corresponds to a dilute transport layer. The saturation of the flux is then controlled by the erosion rate and the disorder of the sand bed. This idea is due to Charru et al. 2004, who proposed a semi-phenomenological model that uses extensively experimental results. In the present model, the length of a trajectory is independent of the trap in which the grain was initially at rest and fluctuates around a well defined average value  $\mathcal{L}$ . The mean area explored by the grain is  $\mathcal{L}d$  and contains, by definition of  $\mathcal{L}$ , a mean number of potential wells sufficiently deep to trap the grain equal to 1. We then obtain the expression:

$$\mathcal{L} = \frac{d}{1 - \mathcal{N}(\Theta)}. \quad (2.13)$$

At small  $\Theta$ ,  $\mathcal{L}$  is simply one grain diameter  $d$ ; at large  $\Theta$ ,  $\mathcal{N}$  tends to 1 so that  $\mathcal{L}$  diverges. This divergence has been directly evidenced experimentally in the viscous case, by Charru et al. 2008. In that case, the measured value of  $\Theta_M$  is around  $2\Theta_m$ .  $\mathcal{L}$  is the length needed for the transport to adapt to a change of shear stress. It thus gives the saturation length  $L_{\text{sat}}$ .

This behaviour constrains the domain of validity of this regime: the shear velocity should be around the threshold, the transport should be intermittent and diluted and the distribution of potential wells should be very large. As suggested by the experiments of

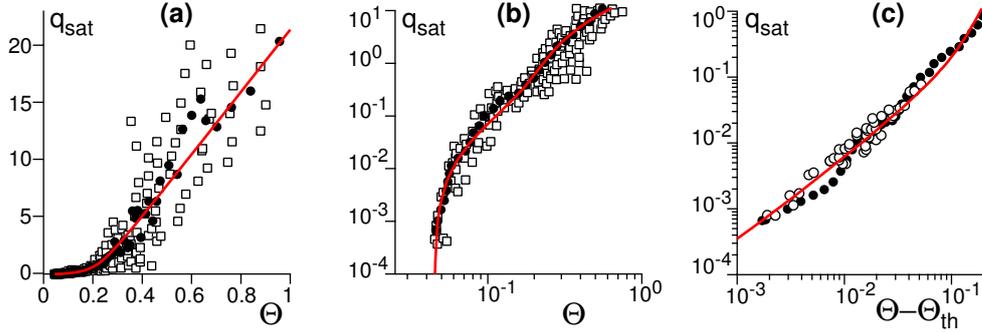


FIGURE 3. Saturated flux  $q_{\text{sat}}$  rescaled by  $\sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho_f} - 1\right)gd^3}$  as a function of the Shields number  $\Theta$ : raw data ( $\square$ ) gathered by Julien 1998; same after local averaging ( $\bullet$ ); raw data ( $\circ$ ) obtained by Fernandez Luque & van Beek 1976. The solid line is the best fit by the model described here (equations 2.17 and 2.18), which gives:  $\Theta_{\text{th}} = 0.045$  and  $\Theta_M = 5\Theta_{\text{th}}$ . (a) Lin-lin plot; (b) Log-log plot; (c) Log-log plot as a function of  $\Theta - \Theta_{\text{th}}$ .

Charru et al. 2004, a granular bed prepared by sedimentation is initially very disordered and consequently presents a wide range of potential wells. It then takes a very long time for the surface to re-arrange, leading to a drift of the distribution  $\mathcal{N}$  toward larger and larger threshold shear stresses. This long transient is probably not relevant to geophysical situations in which the time and length scales of the systems are always sufficiently large to ensure that an equilibrium state for the geometrical arrangement of surface grains has been reached. The saturated flux is simply the erosion rate times the hop length  $\mathcal{L}$ :

$$q_{\text{sat}} \propto \frac{(\Theta - \Theta_m)}{\phi(\Theta_M - \Theta) \left[ c_m + \ln\left(\frac{\Theta + \Theta_m}{\Theta - \Theta_m}\right) \right]} \sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho_f} - 1\right)gd^3} \quad \text{for } \Theta_m < \Theta < \Theta_M. \quad (2.14)$$

By construction, it vanishes at the Shields number  $\Theta_m$  and diverges at  $\Theta_M$ . The transport is thus limited by the erosion rate only close to the threshold  $\Theta_m$ , in the presence of a disordered bed. As the density of transported grains becomes important, the transport becomes limited by the available momentum.

### 2.5. From erosion limited to momentum limited transport

One can extend the previous model by including the negative feedback of the transport on the flow (Bagnold 1956). Each time the flow entrains a grain from the bed and accelerates it, the grain exerts in return a stress on the fluid. The balance between erosion and deposition is the same as in the previous paragraph (Eq. 2.14) except that the shear stress in the transport layer is reduced to some value  $u_f$ , compared to that in a particle-free flow:

$$q_{\text{sat}} \propto \frac{(u_f^2 - u_{\text{th}}^2)}{\phi(u_M^2 - u_f^2) \left[ c_m + \ln\left(\frac{u_f^2}{u_f^2 - u_{\text{th}}^2}\right) \right]} \sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho_f} - 1\right)gd^3}. \quad (2.15)$$

We consider the regime in which the grains are transported at the surface of the bed i.e. do not form a surface sheet flow. They leave the bed with a velocity  $v_\uparrow$  and collide back the sand bed with a velocity  $v_\downarrow$ . The sand-borne shear stress is proportional to the sand flux and to the difference  $(v_\downarrow - v_\uparrow)$ . The fluid in the transport layer is assumed to be in equilibrium between the driving shear stress  $\rho_f u_*^2$ , the fluid-borne basal shear stress

$\rho_f u_f^2$  and the sand-borne shear stress:

$$\rho_f u_*^2 = \rho_f u_f^2 + \rho_s \phi \frac{(v_\downarrow - v_\uparrow)}{\mathcal{L}} q. \quad (2.16)$$

This relation is nonetheless valid in the saturated state ( $q = q_{\text{sat}}$ ) but also during the transient of saturation. It is very important to understand that the particles are entrained by the flow at a velocity reduced by the presence of other particles. The grain trajectory is encoded into a single quantity,  $(v_\downarrow - v_\uparrow)/\mathcal{L}$ , which is a function of the reduced shear velocity  $u_f$  and *not* of  $u_*$ . For the sake of simplicity, we limit the discussion to the turbulent case. The transposition to the viscous case is straightforward. Assuming that  $v_\downarrow - v_\uparrow$  scales on the grain mean velocity, the ratio  $(v_\downarrow - v_\uparrow)/\mathcal{L}$  is proportional to the hop time  $\mathcal{T}$ , which is also the erosion time. Equation (2.16) can be solved to get the flux:

$$q_{\text{sat}} \propto \frac{\rho_f}{\rho_s} (u_*^2 - u_f^2) T(u_f) \propto \frac{\rho_f}{\rho_s} \sqrt{\frac{\rho_f d}{(\rho_s - \rho_f)g}} \ln \left[ \frac{u_f + u_{\text{th}}}{u_f - u_{\text{th}}} \right] (u_*^2 - u_f^2). \quad (2.17)$$

Eliminating the flux between the equations (2.17) and (2.15), one obtains a relation between  $u_f$  and  $u_*$ .

$$(u_*^2 - u_{\text{th}}^2) \propto (u_f^2 - u_{\text{th}}^2) \left[ 1 + \frac{\frac{\rho_s}{\rho_f} \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} - 1 \right) g d}{\phi (u_M^2 - u_f^2) \left[ c_m + \ln \left( \frac{u_f^2}{u_f^2 - u_{\text{th}}^2} \right) \right] \ln \left[ \frac{u_f + u_{\text{th}}}{u_f - u_{\text{th}}} \right]} \right]. \quad (2.18)$$

Just above the threshold, the flow in the transport layer is undisturbed:  $u_f \sim u_*$ . The erosion limited regime is recovered and the flux can be approximated by:

$$q_{\text{sat}} \propto \frac{(u_*^2 - u_{\text{th}}^2)}{\phi \left[ c_m + \ln \left( \frac{u_*^2}{u_*^2 - u_{\text{th}}^2} \right) \right]} \sqrt{\left( \frac{\rho_s}{\rho_f} - 1 \right) g d^3} \quad (2.19)$$

Far above the threshold, for large values of  $u_*$ , the shear velocity  $u_f$  inside the transport layer tends to  $u_M$  i.e. to a value independent of  $u_*$ . The flux then scales as:

$$q_{\text{sat}} \propto \frac{\rho_f}{\rho_s} \sqrt{\frac{\rho_f d}{(\rho_s - \rho_f)g}} (u_*^2 - u_M^2) \quad (2.20)$$

Thus, in the momentum limited regime,  $q$  scales at large velocities as  $u_*^2$  and not  $u_*^3$  as usually obtained. The same result is valid for aeolian transport, for which the negative feedback of particles on the flow has been directly evidenced experimentally. Although many authors have followed Bagnolds, the scaling law in  $u_*^2$  is, in that case, the best description of existing data (Andreotti 2004). In figure 3, we have re-plotted the measurements of the saturated flux collected by Julien 1998 for the subaqueous case. It exhibits a large dispersion due to several factors. First, data coming from systems with different grain size distributions have been plotted together without any distinction of symbols. Second, the reproducibility of experiments is made difficult by the problem of granular bed preparation: we emphasise again that sedimentation leads to an out of equilibrium situation that can last for days. Third, it is difficult to estimate the basal shear stress in flume experiments due to lateral boundaries. We have also plotted the measurements performed by Fernandez Luque & van Beek 1976, which are much less scattered. Given these reservations, the fit by the model derived here provides a good description of existing data. In particular, the asymptotic behaviors close to the threshold and for large shear velocities are well captured.

As many other formulas would provide an equally good fit (i.e. Meyer-Peter & Müller 1948,

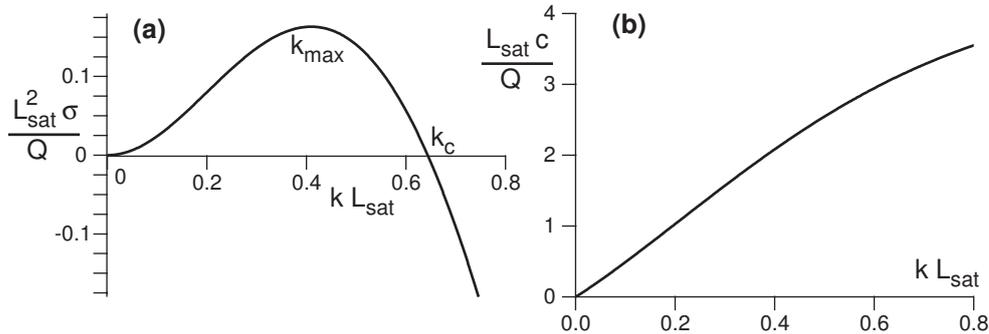


FIGURE 4. Dispersion relation obtained in the erosion limited regime, for  $\mu = \tan 32^\circ$  and  $u_{th} \ll u_*$ . (a) Growth rate  $\sigma$  as a function of the wave-number rescaled by the saturation length:  $kL_{sat}$ . (b) Propagation speed  $c$ .  $Q$  is the reference flux (Eq. 3.12).

Einstein 1950, Bagnold 1956 or Yalin 1963), forthcoming sediment transport dedicated experiments should be designed to test directly the ingredients of the models. For instance, the measurement of the hydrodynamic roughness in presence of transport can provide a direct evidence of the negative feedback of particles on the flow (see Andreotti 2004 for the aeolian case). One expects this roughness to be larger than in the transport-free case as a consequence of the increase of the dissipation rate – the fact that the particles are moving does not lead to a drag reduction.

The last key issue is the saturation length. The sand flux is the product of the grain velocity by the density of mobilised grains. Two important mechanisms can thus control the saturation length: the length needed by the grain to reach its asymptotic velocity – the so-called drag length – and the length needed for erosion to take place i.e. the trajectory length  $\mathcal{L}$ . The modelling of the drag length is a difficult problem as the trajectory takes place in a turbulent flow whose fluctuations are *not* due to the motion of the grain itself. The problem is thus very different from that of a sphere moving in a fluid at rest, a problem for which the drag law is calibrated. To the best of our knowledge, the motion of a sphere whose diameter lies in the inertial range of the turbulent flow is still an open problem. We are thus left with the standard drag force formula  $\frac{\pi}{8}C_d\rho_f U^2 d^2$ , with a drag coefficient of order one. Then, solving the equation of motion, one obtains a drag length  $L_{drag}$  around  $2(\rho_s/\rho_f)d$ . In summary, we consider here that  $L_{sat}$  can be either limited by erosion, in which case it is expected to scale as:

$$L_{sat} \simeq \frac{\Theta_M - \Theta_m}{\Theta_M - \Theta} d \quad (2.21)$$

or by grain inertia, in which case it should scale as:

$$L_{sat} \simeq 2 \frac{\rho_s}{\rho_f} d \quad (2.22)$$

One can see that these two predictions are difficult to test and discriminate. The erosion length gently increases with the shear velocity while the drag length is independent of it; the drag length increases with the density ratio  $\rho_s/\rho_f$  but, experimentally, this parameter cannot be easily varied by a large factor. We shall see below that the study of subaqueous ripples can shed some light on this issue.

### 3. Subaqueous ripples

#### 3.1. Linear stability analysis

Given that the details of the sand transport only affect the saturated flux, the saturation length and the threshold shear stress, we can perform the linear stability analysis of a flat sand bed in a very general framework. We consider a periodic disturbance of the bed profile  $Z$ . As the base state is homogeneous, we can seek for modes of the form  $\exp(\sigma t + ik(x - ct))$ . The shear stress  $\sigma_{xz}$  induced by the wavy sand bed is written in the Fourier space as

$$\hat{\sigma}_{xz} = u_*^2(A + iB)k\hat{Z}, \quad (3.1)$$

where  $u_*$  is the shear velocity in the reference state and  $k = 2\pi/\lambda$  the wave number associated to the spatial coordinate  $x$ . We refer the reader to the part 1 of this article for the derivation of the components of the shear stress  $A$  and  $B$  respectively in phase and out of phase with respect to the bottom profile. The lag between the maximum shear stress and the ripple crest is given by  $\lambda B/(2\pi A)$ . The computation of the coefficients  $A$  and  $B$  has been performed under the assumption that the sand bed can be considered as static. As a matter of fact, the growth rate  $\sigma$  is related to the sediment transport and on the order of  $q_{\text{sat}}/L_{\text{sat}}^2$ . Experimentally,  $\sigma$  is usually found to be four orders of magnitude smaller than the typical flow shear rate: the time-scale of formation of subaqueous ripples is typically ten seconds to be compared to few tens of microseconds for the period at which the flow is excited by the dune relief,  $\lambda/U$ . Therefore, in contrast to what is suggested by Colombini & Stocchino 2005, the normal velocity of the grain-fluid interface does significantly change the flow in this problem.

The threshold shear stress is a function of the slope:

$$\hat{u}_{\text{th}}^\alpha = u_{\text{th}} \frac{ik\hat{Z}}{2\mu}, \quad (3.2)$$

where  $\mu$  is the avalanche slope. At linear order, we can write the saturated flux  $q_{\text{sat}}(u_*, u_{\text{th}})$  as:

$$\hat{q}_{\text{sat}} = \frac{\partial q_{\text{sat}}}{\partial u_*} \frac{u_*}{2} (A + iB)k\hat{Z} + \frac{\partial q_{\text{sat}}}{\partial u_{\text{th}}} \frac{u_{\text{th}}}{2\mu} ik\hat{Z} \quad (3.3)$$

Introducing a reference flux  $Q$ , we rewrite this expression under the form:

$$\hat{q}_{\text{sat}} = Q(a + ib)k\hat{Z} \quad (3.4)$$

where  $a$  and  $b$  are the components of the saturated flux in and out of phase with the topography. Now the flux relaxes to its saturated value with a spatial lag  $L_{\text{sat}}$ :

$$ikL_{\text{sat}}\hat{q} = \hat{q}_{\text{sat}} - \hat{q} \quad (3.5)$$

Using the conservation of matter  $\partial_t Z + \partial_x q = 0$ , one obtains the dispersion relation:

$$\sigma - ikc = -ik \frac{\hat{q}}{\hat{Z}} = -\frac{ik}{1 + ikL_{\text{sat}}} \frac{\hat{q}_{\text{sat}}}{\hat{Z}} = -\frac{iQ(a + ib)k^2}{1 + ikL_{\text{sat}}} \quad (3.6)$$

Splitting the equation into its real and imaginary parts, one obtains the growth rate  $\sigma$  and the propagation speed  $c$ :

$$\frac{L_{\text{sat}}^2 \sigma}{Q} = \frac{(kL_{\text{sat}})^2 (b - akL_{\text{sat}})}{1 + (kL_{\text{sat}})^2} \quad (3.7)$$

$$\frac{L_{\text{sat}} c}{Q} = \frac{(kL_{\text{sat}})(a + bkL_{\text{sat}})}{1 + (kL_{\text{sat}})^2} \quad (3.8)$$

This corresponds to a standard convective instability at large wavelengths (Fig. 4). The cut-off wave-number  $k_c$  above which modes are stabilised by the saturation length is given by:

$$k_c L_{\text{sat}} = \frac{b}{a}. \quad (3.9)$$

Note that the instability can present a different threshold than that for the transport if  $b$  vanishes at some value of  $u_*$  larger than  $u_{\text{th}}$ . In first approximation,  $a$  and  $b$  are weak functions of  $kz_0$ . Then, one can approximate the maximum growth rate wave-number  $k_{\text{max}}$  as:

$$k_{\text{max}} L_{\text{sat}} \simeq X^{-1/3} - X^{1/3} \quad \text{with} \quad X = -\frac{b}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (3.10)$$

As the instability is convective, we have also computed the spatial growth rate. Its maximum nicely coincides with that of the time growth rate.

It can be inferred from the conservation of matter that the propagation velocity  $c$  is proportional to the difference of flux  $\delta q$  between trough and crest and inversely proportional to the ripple height  $2\zeta$  – this is the so-called Bagnold relation. At large wavelength  $\lambda$ ,  $\delta q$  is proportional to the reference flux  $Q$  and to the height so that the propagation speed varies as:  $c \propto Q/\lambda$ . This is confirmed by figure 4b, which shows a roughly linear relation between  $c$  and  $k$ .

### 3.2. Erosion limited transport

We can make the previous general results more precise by making explicit the expressions for the length  $L_{\text{sat}}$  and time  $L_{\text{sat}}^2/Q$  scales, and for a particular relation between sediment flux and shear stress. In the case of the erosion limited transport, the saturated flux reads:

$$q_{\text{sat}} = \chi \frac{(u_*^2 - u_{\text{th}}^2)}{c_m - \ln\left(1 - \frac{u_{\text{th}}^2}{u_*^2}\right)}. \quad (3.11)$$

Defining the reference flux as

$$Q = \chi \frac{u_*^2}{c_m - \ln\left(1 - \frac{u_{\text{th}}^2}{u_*^2}\right)}, \quad (3.12)$$

we get:

$$\begin{aligned} a &= A \left[ 1 + \frac{(u_{\text{th}}/u_*)^2}{c_m - \ln(1 - (u_{\text{th}}/u_*)^2)} \right], \\ b &= B \left[ 1 + \frac{(u_{\text{th}}/u_*)^2}{c_m - \ln(1 - (u_{\text{th}}/u_*)^2)} \right] - \frac{(u_{\text{th}}/u_*)^2}{\mu} \left[ 1 + \frac{1}{c_m - \ln(1 - (u_{\text{th}}/u_*)^2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Close to the threshold, (for  $u_* \simeq u_{\text{th}}$ ),  $a$  tends to  $A$  and  $b$  to  $B - \mu^{-1}$ . For asymptotically large shear stresses i.e.  $u_* \gg u_{\text{th}}$ ,  $a$  tends to  $A$  and  $b$  to  $B$ . Thus, the ratio  $b/a$  increases with the flow strength. This means that the destabilising mechanism becomes more efficient as  $u_*$  increases so that the maximum growth rate wavelength  $\lambda_{\text{max}}$  decreases with  $u_*$  (Fig. 6).

If  $B$  is below  $\mu^{-1}$  then  $b$  vanishes for a value of  $u_*$  larger than  $u_{\text{th}}$ . The instability threshold is then distinct from the transport threshold, as observed in the viscous regime. As expected for such an instability, the most unstable wavelength then diverges at the instability threshold (Fig. 6b) – in practice, it would be limited by the geometrical size of the experiment. In the turbulent regime, however,  $B$  is sufficiently large to ensure that

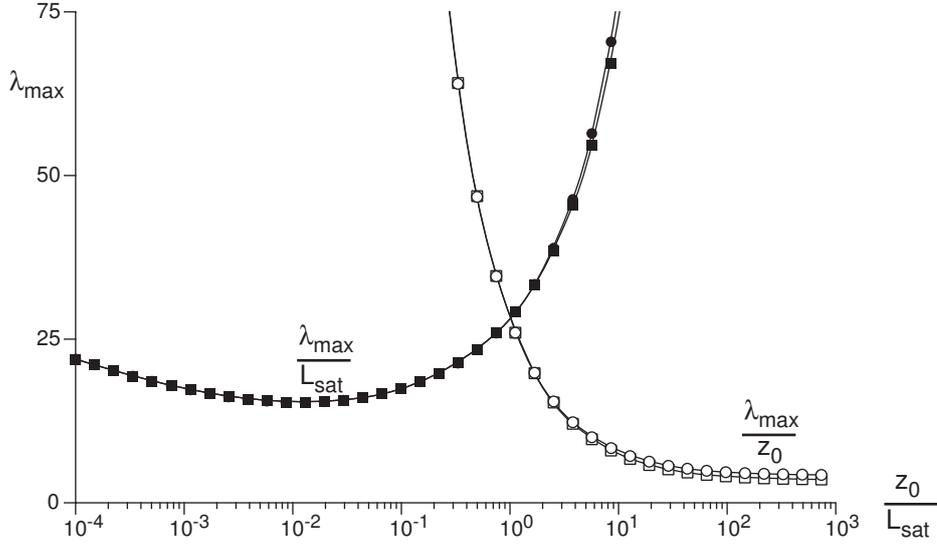


FIGURE 5. Wavelength  $\lambda_{\max}$  of maximum growth rate as a function of the ratio of the two characteristic lengthscales  $z_0/L_{\text{sat}}$ , in the limit  $u_* \gg u_{\text{th}}$ , for  $\mu = \tan 32^\circ$ . Black symbols: ratio  $\lambda_{\max}/L_{\text{sat}}$ . Open symbols: ratio  $\lambda_{\max}/z_0$ . Squares: erosion limited model. Circles: momentum limited model (One can hardly see differences between the two transport models).

flat beds are unstable as soon as transport takes place. Correspondingly,  $\lambda_{\max}$  remains finite at  $u_* = u_{\text{th}}$ .

### 3.3. Momentum limited transport

When the transport is limited by momentum, we can write the saturated flux under the generic form:

$$q_{\text{sat}} = \chi u_*^{2\gamma} (u_*^2 - u_{\text{th}}^2). \quad (3.14)$$

The self-consistent model derived above gives  $\gamma = 0$ , while the Bagnold 1956 formula involves an exponent  $\gamma = 1/2$ . Other empirical models such as Meyer-Peter & Müller 1948, Einstein 1950 or Yalin 1963 can also be approximated in this way. We now define the reference flux  $Q$  by:

$$Q = (\gamma + 1)\chi u_*^{2(\gamma+1)}, \quad (3.15)$$

so that  $a$  and  $b$  read:

$$\begin{aligned} a &= A - \frac{\gamma A}{1 + \gamma} \frac{u_{\text{th}}^2}{u_*^2}, \\ b &= B - \frac{\gamma B + \mu^{-1}}{1 + \gamma} \frac{u_{\text{th}}^2}{u_*^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

For asymptotically large shear stresses i.e.  $u_* \gg u_{\text{th}}$ ,  $a$  tends to  $A$  and  $b$  to  $B$ , independently of  $\gamma$  and  $\mu$ . Close to the threshold, (for  $u_* \simeq u_{\text{th}}$ ),  $a$  tends to  $A/(1 + \gamma)$  and  $b$  to  $(B - \mu^{-1})/(1 + \gamma)$ . So, again, the instability threshold is above the transport threshold when  $B$  is smaller than  $\mu^{-1}$ .

### 3.4. Ripples wavelength selection

Using the results of part 1, the fastest growing wavelength  $\lambda_{\max}$  can be computed, taking into account the dependencies of  $A$  and  $B$  on  $kz_0$ . The most important question is the

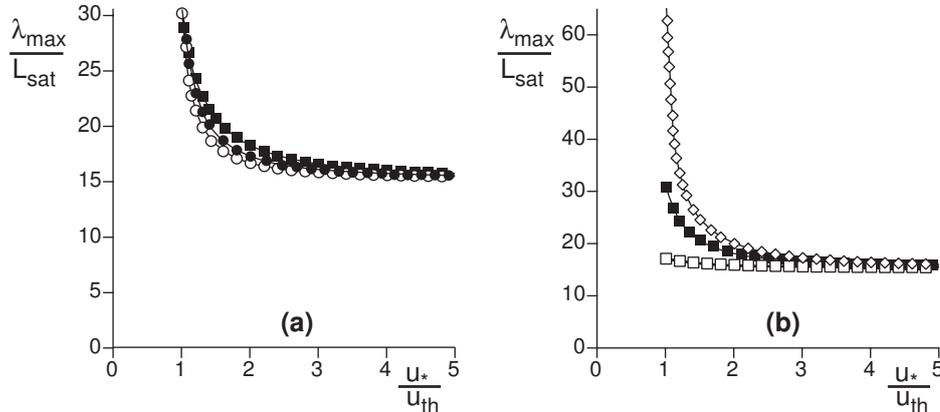


FIGURE 6. Wavelength  $\lambda_{\max}$  rescaled by  $L_{\text{sat}}$  as a function of the rescaled shear velocity  $u_*/u_{\text{th}}$ , for  $\mu = \tan 32^\circ$  and  $L_{\text{sat}}/z_0 = 80$  (typical subaqueous case with sand grains). Erosion limited model ( $\blacksquare$ ), momentum limited model ( $\gamma = 0$ ,  $\circ$ ) and Bagnold 1956 model ( $\gamma = 1/2$ ,  $\bullet$ ). (b) Same plot, computed with the erosion limited model for different values of  $\mu$ :  $\tan 24^\circ$  ( $\diamond$ ),  $\tan 32^\circ$  ( $\blacksquare$ ),  $\tan 70^\circ$  ( $\square$ ).

scaling law followed by this wavelength. There are two length-scales in the problem:  $z_0$  which is an hydrodynamical quantity and  $L_{\text{sat}}$  which is related to the sand transport. Figure 5 shows that the saturation length controls the scaling of  $\lambda_{\max}$  if  $L_{\text{sat}}$  is larger than  $z_0$ , whatever the transport model. Conversely,  $z_0$  controls the scaling of  $\lambda_{\max}$  if it is larger than  $10 L_{\text{sat}}$ . This could be the case in the hydraulically smooth regime for which  $z_0$  scales on  $\nu/u_*$  (Sumer & Bakioglu 1984). For subaqueous ripples, the measurements of initial wavelength are usually larger than  $100 d$  (see Fig. 10), while  $z_0$  is on the order of  $0.1 d$ . If the scaling was controlled by  $z_0$ , one would underestimate the most unstable wavelength by two orders of magnitude. As a consequence, the wavelength is controlled by the transport saturation length  $L_{\text{sat}}$ . This means that models in which a univoque relation between the actual flux and the shear stress is used cannot capture correctly the physics of ripple instability. The second conclusion is that, although the saturation length may be determined by different dynamical mechanisms, aeolian dunes are of the same nature as subaqueous ripples. It means that different modes of sediment transport (saltation, reptation bed-load, etc) in different situations (viscous, turbulent, etc) can lead to bedforms instabilities of same nature<sup>†</sup>.

Figure 6a shows that the transport model as a negligible influence on the selected wavelength. This evidences that  $L_{\text{sat}}$  and  $q_{\text{sat}}$  are the single two relevant quantities encoding the sediment transport details. Due to the stabilising role of gravity encoded in the slope dependence of the threshold,  $\lambda_{\max}$  increases close to the threshold shear stress. Of course, this effect is very sensitive to the value of  $\mu$ , as shown in figure 6b. For natural sand grains ( $\mu = \tan 32^\circ$ ), the wavelength  $\lambda_{\max}$  decreases from  $30 L_{\text{sat}}$  at the threshold to  $20 L_{\text{sat}}$  far from it. For glass beads, the prediction is very different depending whether one takes the avalanche slope ( $\mu = \tan 24^\circ$ ) or the experimental data of Loiseleux et al. 2005 (equivalent to a fictitious  $\mu = \tan 70^\circ$ ) for the slope effect. In the later case,  $\lambda_{\max}$  is almost independent of  $u_*$  whereas it diverges at the threshold in the former case as  $B$  is then of the order of  $1/\mu$ .

<sup>†</sup> Of course, the aeolian ripples do not belong to the same class of bedforms as they result from a screening instability (Bagnold 1941, Anderson 1987, Anderson 1990, Andreotti & al. 2006), not from a hydrodynamical instability.

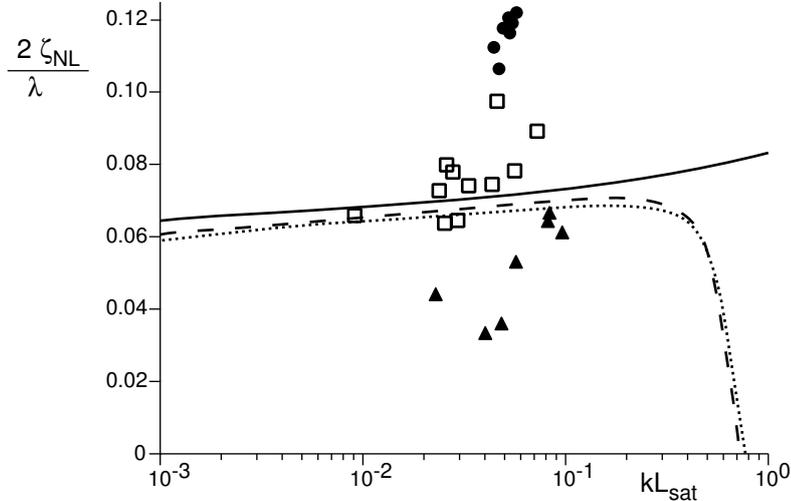


FIGURE 7. Ripples aspect ratio  $2\zeta_{\text{NL}}/\lambda$  selected by hydrodynamical non-linear effects as a function of the wave-number  $k$  rescaled by  $L_{\text{sat}}$ . The dotted line corresponds to a calculation based on the momentum limited transport model with  $L_{\text{sat}}/z_0 = 350$  (typical aeolian case),  $u_*/u_{\text{th}} = 3.8$ ,  $\mu = \tan 32^\circ$  and  $\gamma = 0$ . The dashed line corresponds to the erosion limited transport model with the same parameters except  $L_{\text{sat}}/z_0 = 80$  (typical subaqueous case). The solid line does not take any saturation length into account and serves as a reference: the sharp decrease of the two other curves are associated with the stabilisation of small wavelength by the saturation length. The symbols correspond to subaqueous measurements performed by Baas 1999 (●) and Guy et al. 1966 (▲) in flume experiments and to aeolian field measurements performed by Parteli et al. 2006, Baddock et al. 2007 (□).

### 3.5. Ripple amplitude selection

After the linear stage during which the ripples emerge, they exhibit pattern coarsening by progressive merging of bedforms. During this slow process, each of these ripples may be considered as purely propagative structures that do not grow nor shrink. In the course of their evolution, they should thus present an amplitude  $2\zeta$  which is only function of their wavelength  $\lambda$ .

In part 1, we have performed a weakly non-linear expansion of the hydrodynamics above a topography up to the third order in  $k\zeta$ , which is the small parameter of the problem. As a main output of these non-linear calculations, the phase shift between the elevation profile and the basal shear stress decreases as the amplitude  $\zeta$  is larger, which stabilises the bedform. Considering a sinusoidal profile, the Taylor expansion of the basal shear stress components takes the form  $A = A_1 + A_3(k\zeta)^2$  and  $B = B_1 + B_3(k\zeta)^2$ . We denote  $\zeta_{\text{NL}}$ , the particular amplitude for which a purely propagative solution is selected, i.e. which does not grow nor decay:  $\partial_t Z = -c\partial_x Z$ . This gives the condition:  $b = akL_{\text{sat}}$ .

Figure 7 shows the prediction of the bedform aspect ratio  $2\zeta_{\text{NL}}/\lambda$  as a function of  $kL_{\text{sat}}$  for two sets of parameters, which corresponds to typical aeolian and subaqueous situations. At small wave-number, the aspect ratio increases logarithmically with  $k$ . It then decreases abruptly and vanishes at the cut-off wave-number  $k_c$ . For the aeolian conditions, the predicted dune aspect ratio is around 1/15 which quantitatively matches field measurements ( $\simeq 1/13$ ). For current ripples, the measured aspect ratio are much more dispersed: Allen 1985 and Coleman & Melville 1994 report values around 1/20 whereas Baas 1999 found larger values around 1/8. These discrepancies may be due to

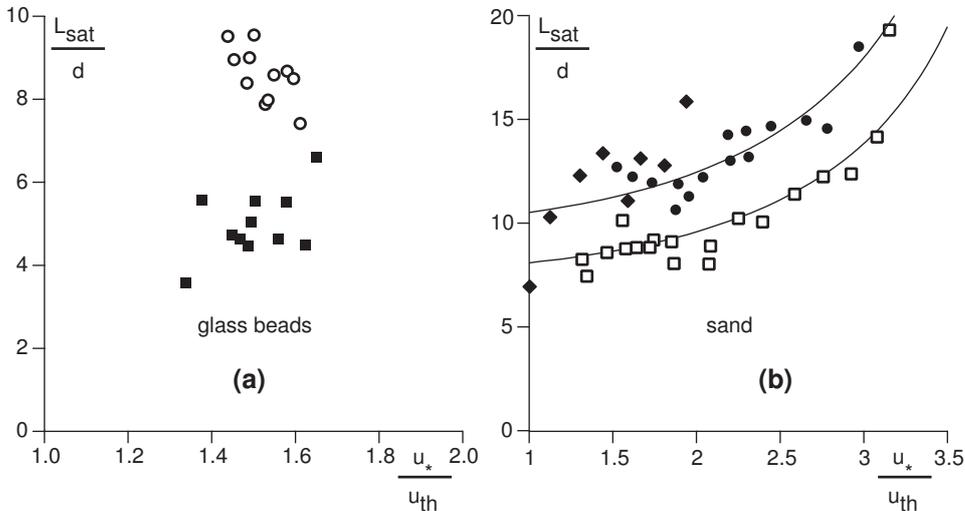


FIGURE 8. Saturation length in water determined from experimental measurements of the initial wavelength as a function of the shear velocity for different types of particles. (a) Glass beads (Valance & Langlois 2005):  $d = 250 \mu\text{m}$  ( $\bullet$ ) and  $d = 500 \mu\text{m}$  ( $\square$ ). (b) Natural sand grains (Coleman & Melville 1996 and Baas 1999):  $d = 210 \mu\text{m}$  ( $\bullet$ ),  $240 \mu\text{m}$  ( $\blacklozenge$ ),  $d = 830 \mu\text{m}$  ( $\square$ ). The solid lines correspond to the best fit of equation (2.13). These curves tend to diverge for  $u_* = u_M \simeq 4.5 u_{\text{th}}$  or equivalently for  $\Theta = \Theta_M \simeq 20 \Theta_{\text{th}}$ . In (a) and (b), the small factor between small and large grains could be due to a subdominant dependence of  $L_{\text{sat}}$  on viscosity.

the measurement techniques related to the small amplitude of subaqueous bedforms (few tens of grain diameters).

### 3.6. Comparison with experiments

Rather than predicting the wavelength and comparing it with experimental data, we can invert the process and determine the value of the saturation length that would give the observed wavelength. To play this game, we have chosen the erosion limited transport model and checked that other choices do not change the conclusions reached here.  $\mu$  has been chosen equal to the avalanche slope. Most of the experimental data available in the literature correspond to well developed ripples. As these bedforms exhibit pattern coarsening, it is very important to focus on papers reporting the initial wavelength (linear regime), measured for grain sizes larger than  $200 \mu\text{m}$  (hydraulically rough sand bed). We have selected five such data sets: Coleman & Melville 1996, Baas 1999, Valance & Langlois 2005.

As shown in figure 8, they present consistent trends, which is not the case for the data obtained with smaller grains ( $d \sim 100 \mu\text{m}$ ). The saturation length is found to be on the order of several grain diameters. It is slightly smaller for the glass bead experiment than for the natural sand grain ones. The data points around the threshold are very sensitive to the values taken for  $\mu$  and  $u_{\text{th}}$  in the model and should not be over-interpreted. The slight increase of  $L_{\text{sat}}$  with  $u_*$  is more robust, although it is based on the last few data points. More significant is the decrease of the ratio  $L_{\text{sat}}/d$  when  $d$  increases, a feature present for both glass beads and sand grains. It could be related to a subdominant dependence on viscosity.

In the section devoted to the description of sand transport, we have discussed the two simplest possibilities for the dynamical mechanisms limiting the transport saturation: erosion and inertia. Concerning erosion, the prediction  $L_{\text{sat}} = \mathcal{L} \propto d/(1 - \mathcal{N}(\Theta))$  is

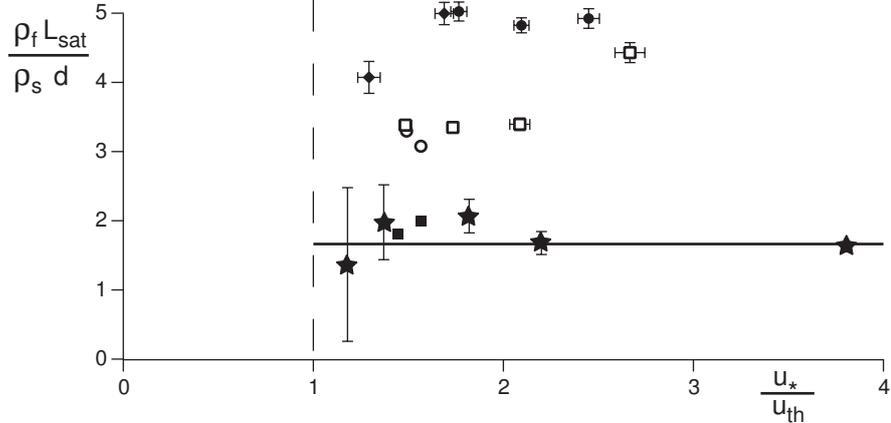


FIGURE 9. Comparison between the saturation length, rescaled by the drag length, in the aeolian (★) and subaqueous (other symbols, see Fig. 8) cases. For aeolian dunes,  $L_{\text{sat}}$  is determined from the most unstable wavelength under well characterised winds Andreotti et al. 2008. For subaqueous ripples, each point of this graph corresponds to the very same data as in figure 8, but averaged over 6 measurements. The dashed line corresponds to the entrainment threshold. The solid line is the average over the different points measured in the aeolian case:  $L_{\text{sat}} \simeq 1.66 (\rho_s/\rho_f) d$ .

almost impossible to verify as the distribution of potential wells at the surface of the bed is not known. Still, with the simple parametrisation chosen above, one expects the saturation length to scale on the grain size and to gently increase with  $u_*$ . The solid line in figure 8b is the best fit by such a form. One obtains the estimate:  $\Theta_M/\Theta_{\text{th}} \sim 20$ . This is far above the value found in figure 3, around 5, and that found experimentally by Charru et al. 2008, around 2. It means that the erosion length is probably not the mechanism limiting saturation. Otherwise, one would expect a much more rapid increase of the saturation length. Instead, one can observe that it is almost constant, with a subdominant, slow increase with  $u_*$ .

Figure 9 aims to test the second simple possibility: an inertia limited saturation length. In this case, one expects a scaling law of the form  $L_{\text{sat}} \propto (\rho_s/\rho_f) d$  similar to that observed for aeolian sand transport (Hersen et al. 2002, Andreotti 2004, Claudin & Andreotti 2006, Andreotti & Claudin 2007). We have used the measurements of the wavelength at which aeolian dunes form reported in Andreotti et al. 2008, obtained either in the field or using aerial photographs. Using the inversion method proposed here, the saturation length  $L_{\text{sat}}$  has been obtained for different values of the wind shear velocity (Fig. 9) and is mostly independent of it. Once rescaled by  $\rho_s/\rho_f d$ ,  $L_{\text{sat}}$  is of the same order of magnitude for both aeolian dunes and subaqueous ripples. In first approximation, all series of data, considered separately, are independent of  $u_*$ . A better agreement with aeolian data is observed for glass beads and for large grains. A discrepancy by a factor of two is observed for small natural sand grains. As a possible interpretation, the grains roll on the ground during their phase of acceleration, which may lead to underestimate the length needed to reach the fluid velocity. One expects rough sand grains to be more sensitive to this effect.

For a given type of grain, the extra-dependence of the initial wavelength on the grain diameter may be attributed to viscous effects, either on the saturation length or on hydrodynamics. To test this, we have plotted in figure 10 the measurements of the initial wavelength together with different hydrodynamical calculations, assuming that

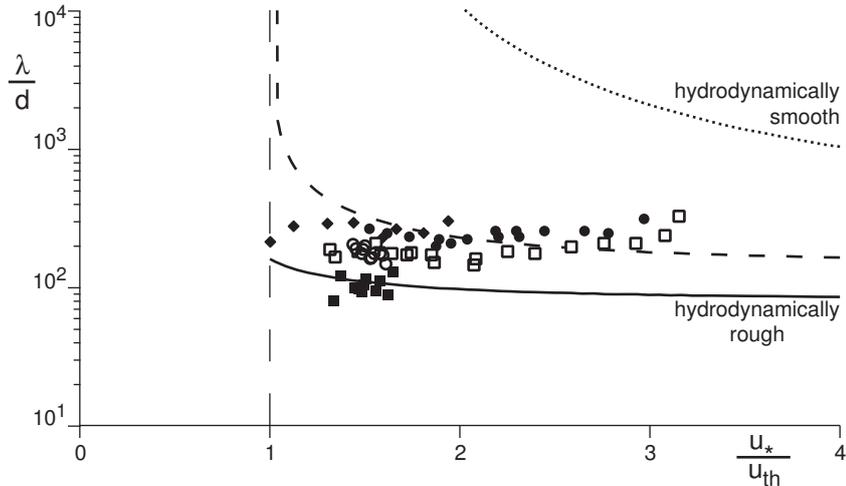


FIGURE 10. Initial wavelength  $\lambda$  in water as a function of the shear velocity for different types of particles: glass beads (Valance & Langlois 2005):  $d = 250 \mu\text{m}$  ( $\bullet$ ) and  $d = 500 \mu\text{m}$  ( $\blacksquare$ ); natural sand grains (Coleman & Melville 1996 and Baas 1999):  $d = 210 \mu\text{m}$  ( $\bullet$ ),  $240 \mu\text{m}$  ( $\blacklozenge$ ),  $d = 830 \mu\text{m}$  ( $\square$ ). The lines show the prediction of the model, assuming that the saturation length is given by the drag length, with an hydrodynamically rough sand bed (solid line), with a viscous surface layer (dotted line,  $\mathcal{R}_t = 125$ ), and in an intermediate regime (dashed line,  $\mathcal{R}_t = 10$ ).

the saturation length is limited by inertia:  $L_{\text{sat}}$  is kept fixed and equal to  $2(\rho_s/\rho_f)d$ . As the shift between the shear stress and the topography gets reduced for a viscous surface layer (see part 1), the predicted wavelength is larger by more than one order of magnitude. Moreover, the coefficient  $B$  becomes smaller than  $1/\mu$  so that the instability threshold, at which the initial wavelength diverges, is above the entrainment threshold. This applies to grain sizes much smaller than  $100 \mu\text{m}$  (or to more viscous liquids), in the hydrodynamically smooth regime. Still, it should give the trend for the data analysed here: as the grains size decreases, the influence of viscosity increases and so does the initial wavelength. Note that this trend is in the same direction as the empirical observation of Coleman et al. 2003 that  $\lambda/d \propto d^{-0.25}$

## 4. Effect of the free surface

### 4.1. Dispersion relation

In the previous section, both hydrodynamic and erosion aspects have been gathered to study bedforms (ripples) under an infinite depth assumption. However, rivers have a free surface and the water depth  $H$  is finite. We expect these two additional ingredients to significantly change the shape of the dispersion relation.

Our goal is to relate the formation of ripples and dunes to the two relevant length scales  $H$  and  $L_{\text{sat}}$ . In part 1, we have precisely computed the basal shear stress coefficients ( $A$  and  $B$ ) in the case of a turbulent flow over a wavy bottom. The large wavenumbers are insensitive to the free surface (Fig. 14 in part 1). By contrast,  $A$  and  $B$  display a resonance peak around  $kH \simeq 1/\mathcal{F}^2$  and have a divergent behavior as  $k \rightarrow 0$ . As  $\sigma$  and  $c$  are directly related to  $A$  and  $B$  through equations (3.7) and (3.8), they both present the same features. In figure 11a, the growth rate is represented as a function of  $kz_0$  for three different values of  $H/z_0$ . All curves collapse in the large- $k$  region on the dispersion relation

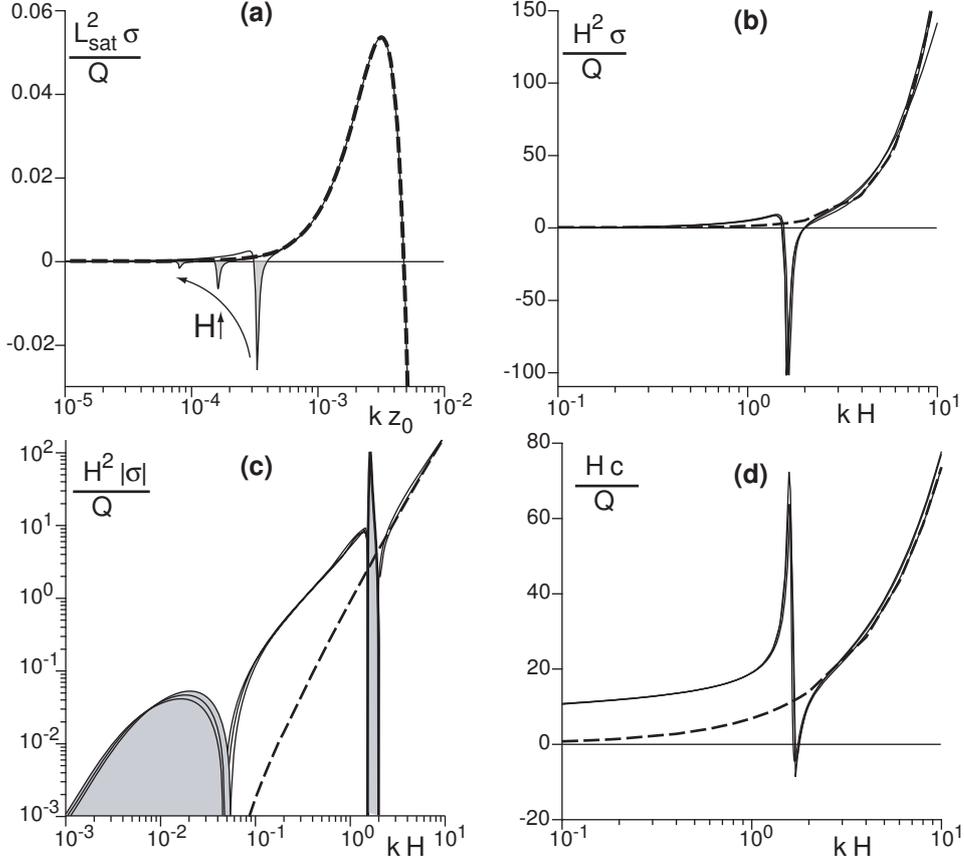


FIGURE 11. Growth rate  $\sigma$  and propagation velocity  $c$  as functions of the wave-number  $k$  for different values of  $H/z_0$  ( $H/z_0 = 5000, 10000, 20000$ ) and the typical values of parameter  $\mathcal{F} = 0.8$ ,  $\mu = \tan 32^\circ$ ,  $u_{th}/u_* = 0.8$  and  $L_{sat}/z_0 = 80$ . In (a),  $\sigma$  is rescaled by  $L_{sat}$  and  $k$  by  $z_0$ , whereas in (b), (c) and (d) all lengths are rescaled by the relevant length-scale  $H$ , so that all curves collapse in region where  $kH \simeq 1$ . The dashed line represents the reference unbounded case presented in the previous section. In panel (c), due to the log-scale, the absolute value of  $\sigma$  is displayed and the grey areas encode for negative values of the growth rate.

computed in the reference unbounded case. In particular they exhibit a maximum for the same wave-number, which corresponds to the initial ripple wavelength. This means that the presence of the free surface does not influence the formation of ripples as long as  $H$  and  $L_{sat}$  are well-separated length-scales. In a zone around  $kH \simeq 1/\mathcal{F}^2$  (see Fig. 11b), the function  $\sigma(k)$  presents, in comparison to the reference case, a sharp dip which can be attributed to a resonance of gravity surface waves, independently of the transport issue (see part 1). As shown in figure 12a, the width and the amplitude of this dip is very sensitive to the value of the Froude number. For small  $\mathcal{F}$ , the effect of the free surface is marginal and the dip is very small. As the Froude number increases, the dip becomes more pronounced so that the growth rate  $\sigma$  becomes negative in an enlarging range of wave-numbers: the free surface stabilises wavelengths commensurable with the flow depth. Last, the semi-logarithmic plot of figure 11c reveals the behavior of the growth rate in the small- $kH$  limit:  $\sigma(k)$  tends to 0 from below. This indicates that the very large wavelengths are also stabilised. In the intermediate range of wavelengths, a slight increase of the growth rate is observed.

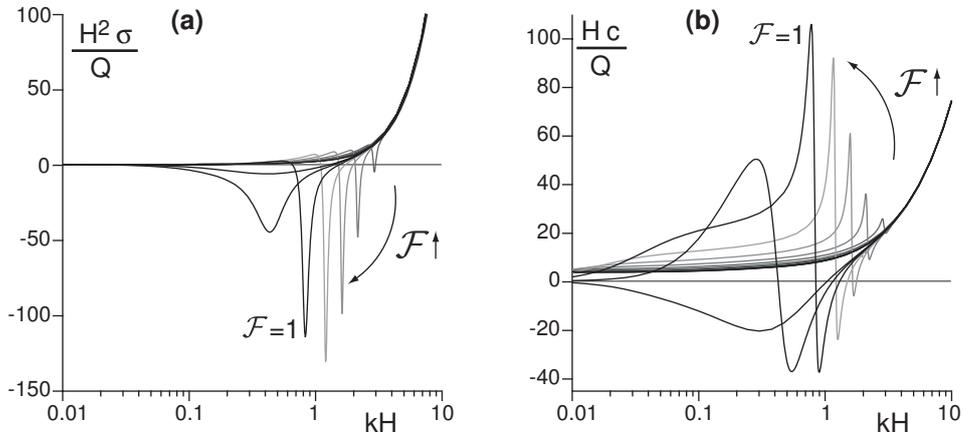


FIGURE 12. Dispersion relation obtained for a ratio  $H/z_0 = 10000$ ,  $\mu = \tan 32^\circ$ ,  $u_{\text{th}}/u_* = 0.8$  and  $L_{\text{sat}}/z_0 = 80$ . (a) Growth rate  $\sigma$  as a function of the wave-number for different values of the Froude number. (b) Propagation speed  $c$ . In both panels, the Froude number  $\mathcal{F}$  is varied from 0.5 to 1.2 by increment of 0.1.

The other output of the linear stability analysis is the propagation velocity of the pattern  $c(k)$  (Fig. 11d), which is also very sensitive to the resonance at  $kH \simeq 1/\mathcal{F}^2$ . It presents a sharp maximum on the left of the resonance followed by a dip on the right of it. At this dip,  $c$  can become negative for sufficiently large Froude numbers ( $\mathcal{F} \gtrsim 0.7$ ).

#### 4.2. Dune formation

Gathering the different dispersion relations in the  $(\mathcal{F}, kH)$  space, one produces the stability diagram (Fig. 13). The central region delimited by the two marginal stability curves corresponds to the zone of unstable wavelengths ( $\sigma > 0$ ). Large  $k$  are stabilised by the saturation length, which explains the lack of dependence on the Froude number in this zone: both the marginal stability and the maximum growth rate curves are vertical lines in the diagram. This simply reflects the fact that ripples do not feel the free surface: they disturb the flow over a thickness of the order of the wavelength  $\lambda$  i.e. much smaller than  $H$ . As already mentioned, the most unstable mode always corresponds to ripples (dotted vertical line in the large- $k$  zone of figure 13).

A second zone of stable modes is located at much smaller  $kH$  and is associated to the influence of the free surface. The bedforms excite gravity surface waves that propagate at a speed  $\sqrt{(g/k) \tanh(kH)}$  in the frame of reference moving with the surface particles at the velocity  $u_{\text{surface}}$ . When the upstream wave velocity balances the downstream surface velocity, for

$$\mathcal{F} \sim \sqrt{\frac{\tanh(kH)}{kH}}, \quad (4.1)$$

the disturbances induced by the bottom topography accumulate. In these resonant conditions, the wave amplitude reaches a maximum (Fig. 20b in part 1). The waves are in phase for wave-numbers above the resonance and in antiphase below it (Fig. 20c in part 1). At the resonance, the free surface is in quadrature with the bottom, which tends to move downstream the point of maximum shear stress i.e. to stabilise the bedform. Of course, as the influence of the free surface on the flow is localised over a typical distance  $\lambda$ , its effect is more important as  $kH$  becomes smaller. In summary, there are two conditions under which the free surface can overcome the inertial destabilising effect: (i) around the resonance, since the standing wave amplitude is very large and

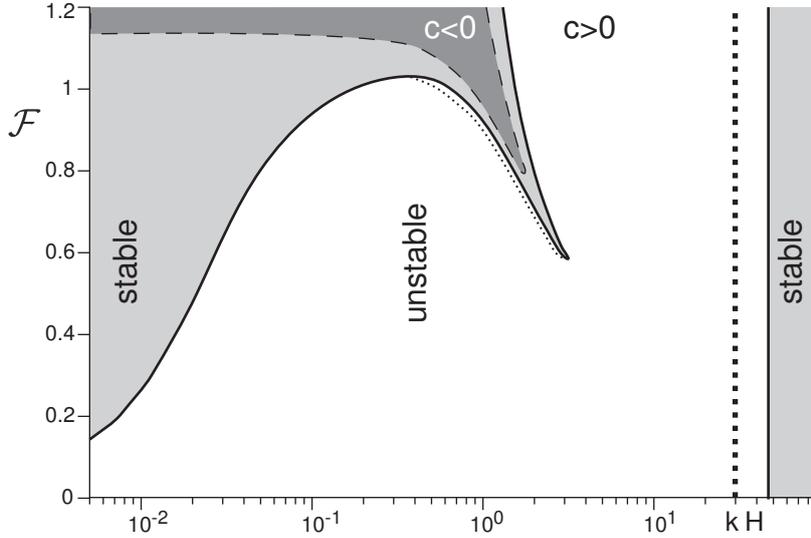


FIGURE 13. Stability diagram parametrised by the Froude number  $\mathcal{F}$  and the rescaled wave-number  $kH$ . The marginal stability curves ( $\sigma = 0$ ), shown in solid lines, separates the unstable zone (white) from the stable ones (grey). The overall maximum growth rate (bold dotted line) is always reached for ripples. The local maximum of the growth rate resulting from the resonance of standing surface waves is shown in thin dotted line. The dashed line ( $c = 0$ ) separates upstream ( $c < 0$ , dark grey) from downstream propagating bedforms. The other parameters are set to:  $H/z_0 = 10000$ ,  $\mu = \tan 32^\circ$ ,  $u_{th}/u_* = 0.8$  and  $L_{sat}/z_0 = 80$ .

(ii) in the limit of small wavenumbers, as  $H$  becomes much smaller than wavelength  $\lambda$ . This is precisely what can be observed in figure 13, the sharp stable zone surrounding the resonant curve. For obvious reasons, this new minimum of the growth rate associated to the surface wave resonance comes with a local maximum of  $\sigma$  (thin dotted line along the restabilised zone). In the work of Richards 1980, the latter has been associated to the formation of dunes by a linear instability. In many other linear analysis (Kennedy 1963, Reynolds 1965, Engelund 1970, Fredsøe 1974, Coleman & Fenton 2000, Colombini 2004, Colombini & Stocchino 2005), the prediction of ripples is missed for the reasons detailed above (the sediment transport relaxation is not correctly taken into account), i.e. the corresponding maximum in the dispersion relation is absent. As a consequence, they are left with a unique peak in the region of  $kH$  around unity, which is found here to be a secondary maximum. As explained below, we fundamentally disagree with the conclusion reached in all these papers that subaqueous dunes result from the linear instability of a flat bed.

Let us briefly recall the basic reasons for which one usually associates the appearance of a pattern to a maximum of the growth rate. One considers that the initial condition  $Z(t = 0)$  is essentially flat, with some wide-band noise. Its Fourier transform  $\hat{Z}(k, t = 0)$  then contains some energy in a wide range of wavenumbers  $k$ . In the linear regime, the surface profile reads:

$$\hat{Z}(k, t) = \hat{Z}(k, t = 0)e^{\sigma(k)t} \quad (4.2)$$

If the distribution of initial amplitude is initially sufficiently flat and if the growth rate  $\sigma(k)$  presents a sharp *absolute* maximum in  $k_{max}$ , then a pattern dominated by the corresponding wavelength  $\lambda_{max}$  emerges, as this mode grows the fastest. In the present case, the amplitude of this secondary maximum close to the resonance is almost the same

as the value of  $\sigma$  at the same wavenumber in the unbounded case. Moreover, most of the modes between the resonance and the ripple peak are in fact much more unstable: if a linear instability could be invoked, the amplitude of all these intermediate modes would eventually be larger than that of this local maximum. Furthermore, the ratio of the primary and the secondary maxima of the growth rate is on the order of  $(H/L_{\text{sat}})^2$  which is a large number: it is typically on the order of  $10^4$  for flume or small river experiments ( $d \simeq 400 \mu\text{m}$  and  $H \simeq 40 \text{ cm}$ ) and  $10^6$  for a large river ( $d \simeq 400 \mu\text{m}$  and  $H \simeq 4 \text{ m}$ ). For example, taking half a minute for the characteristic ripple apparition time (see Fig. 14a), it would give  $\sim 3$  days for the dune linear growth time-scale, i.e. much too large in comparison to observations (see Fig. 15). For these reasons, this secondary peak in the dispersion relation cannot be associated to dunes.

Let us contrast this subaqueous situation to that of aeolian ripples superimposed on aeolian dunes. As already mentioned, the instability mechanism of these dunes is of the same hydrodynamics nature as that of subaqueous ripples, i.e. comes from the upwind shift of the basal shear stress with respect to relief. Aeolian ripples, however, are generated by a screening instability: the upwind face of ripples receives more impacts of saltating grains than the downwind face (Bagnold 1941, Anderson 1987, Anderson 1990). Rapidly, non-linearities makes the ripple pattern saturate to a wavelength much smaller than that at which dunes emerge, and this saturation is faster than the dune time formation. One can then consider that dunes results from the linear instability of a flat bed which presents saturated aeolian ripples. Moreover, the growth rate at the wavelength of ripples in the dune instability is negative, because ripples are smaller than the aeolian saturation length. Conversely, the growth rate at the wavelength of dunes in the ripple instability is much smaller than the growth rate at the same wavelength in the dune instability. In conclusion, aeolian ripples and aeolian dunes can truly be associated to two different linear instabilities. In the case of subaqueous ripples and dunes, none of these criterions (different destabilizing mechanisms, saturation of ripples wavelength, separation of the modes by several decades of almost non-growing wavelengths) is full-filled.

## 5. Field experiments

In this last section, we present direct experimental evidences that river dunes do not form by a linear instability. We will discuss our field measurements in the light of the model proposed here and show reciprocally that all existing observations are consistent with this model. We will finally propose a new definition of the different subaqueous bedforms, based on the physical mechanisms which control their formation.

### 5.1. Formation of ripples

We have studied the formation of ripples, dunes and mega-dunes in the Leyre river. This river is located in the south west of France, in a region called ‘les Landes de Gascogne’ ( $44^\circ 32' \text{N}$ ,  $0^\circ 52' \text{W}$ ). It flows in a particularly homogeneous basin, both in terms of the nature of the ground (rather sorted sand grains) and of the vegetation. Except during flooding events, bed-load is the dominant mode of transport. The size of the grains on the river bed is around  $d = 330 \mu\text{m}$ . The experiments have been performed at the end of summer (low water period), in two straight and flat portions of the river.

The experiments were conducted as follows. Using long parallel metallic bars, the surface of the sand bed was carefully leveled at time  $t = 0$ , and the formation of bedforms was directly observed. In order to measure the emergence of ripples, we used a (water proof) laser sheet inclined at a low angle to the horizontal. Taking pictures through a

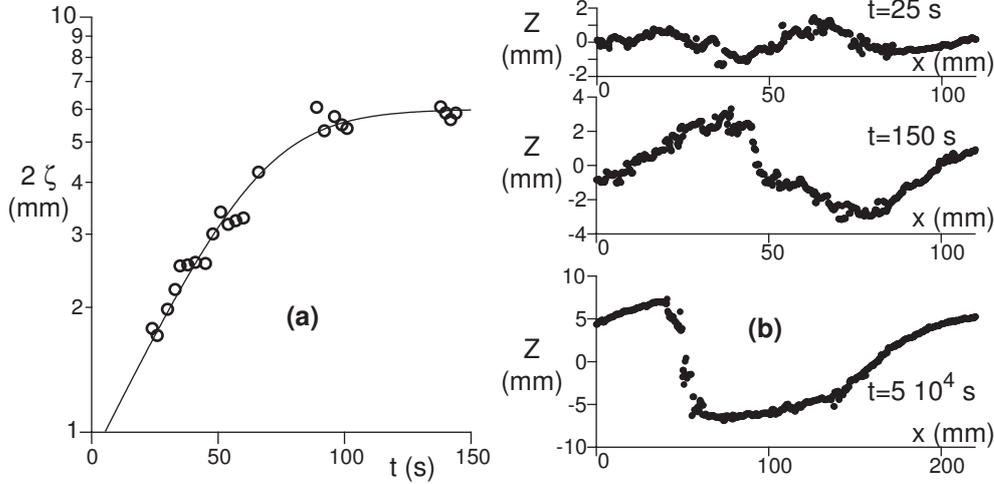


FIGURE 14. Formation of ripples in a natural river, starting at  $t = 0$  from a flat sand bed. The experiment was performed in the Leyre river, at Sauniac bridge, on September 16<sup>th</sup> 2008, for  $H = 52$  cm,  $\mathcal{F} = 0.21$  and  $u_* = 3$  cm/s. The sediment is well sorted with a mean grain size  $d = 320 \pm 70$   $\mu\text{m}$  (a) Amplitude  $2\zeta$  of the bed disturbances as function of time  $t$ .  $\zeta$  is determined from the auto-correlation of the bed profile  $Z(x, t)$ . The solid line is the best fit by equation (5.2) and gives  $\sigma = 3 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  or equivalently  $\sigma^{-1} = 35$  s. (b) Bed elevation profile measured by taking a picture of the bed enlightened by an inclined laser sheet. Low amplitude ripples can be detected from  $t = 25$  s after flattening the sand bed. Non-linear effects make the amplitude saturate around  $t = 100$  s and a clear avalanche slip face can be observed at  $t = 150$  s. During this linear stage, the wavelength  $\lambda \sim 90$  mm does not evolve significantly (see Fig. 15b). Beyond this initial phase, a pattern coarsening toward dunes is observed which saturates at  $\lambda \simeq 20$  cm and  $\zeta = 4.5$  mm after typically one hour: tracking the pattern during further  $\sim 14$  hours, we did not observe any significant change of these characteristics.

glass plate from the top, we have determined the height profile  $Z(x, t)$  along this line as a function of time. Figure 14b shows the evolution of one such a ripple from the initial stage where it is symmetric to the time at which an avalanche slip face develops. To determine the wavelength  $\lambda$  and the amplitude  $2\zeta$  of the ripple, we computed the auto-correlation of the profile  $C(\delta) = \langle Z(x)Z(x + \delta) \rangle$ . Typically 25 s after the beginning of the experiment,  $C$  shows a secondary maximum whose position gives  $\lambda$  and whose amplitude gives  $\zeta$ . During the first 150 s, the wavelength does not evolve much whereas the amplitude grows and saturates (Fig. 15b). As the final amplitude is not very large compared to the grain size  $d$  (and thus the initial noise level), it is difficult to get a convincing evidence of an exponential growth. Still, the curves we obtained are consistent with a linear regime over a factor of two in amplitude (Fig. 14). From our non-linear analysis, we expect an amplitude equation of the form:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \sigma\zeta \left[ 1 - \left( \frac{\zeta}{\zeta_\infty} \right)^2 \right], \quad (5.1)$$

whose solution is:

$$\zeta = \frac{\zeta_\infty}{\sqrt{1 + \exp(-2\sigma t)}}. \quad (5.2)$$

One can see in figure 14 that the fit of this relation to the data is very good, so that observations are consistent with a formation of ripples by a linear instability saturated by non-linear hydrodynamical effects. Importantly, the rescaled growth rate  $\sigma/(ku_*)$  is

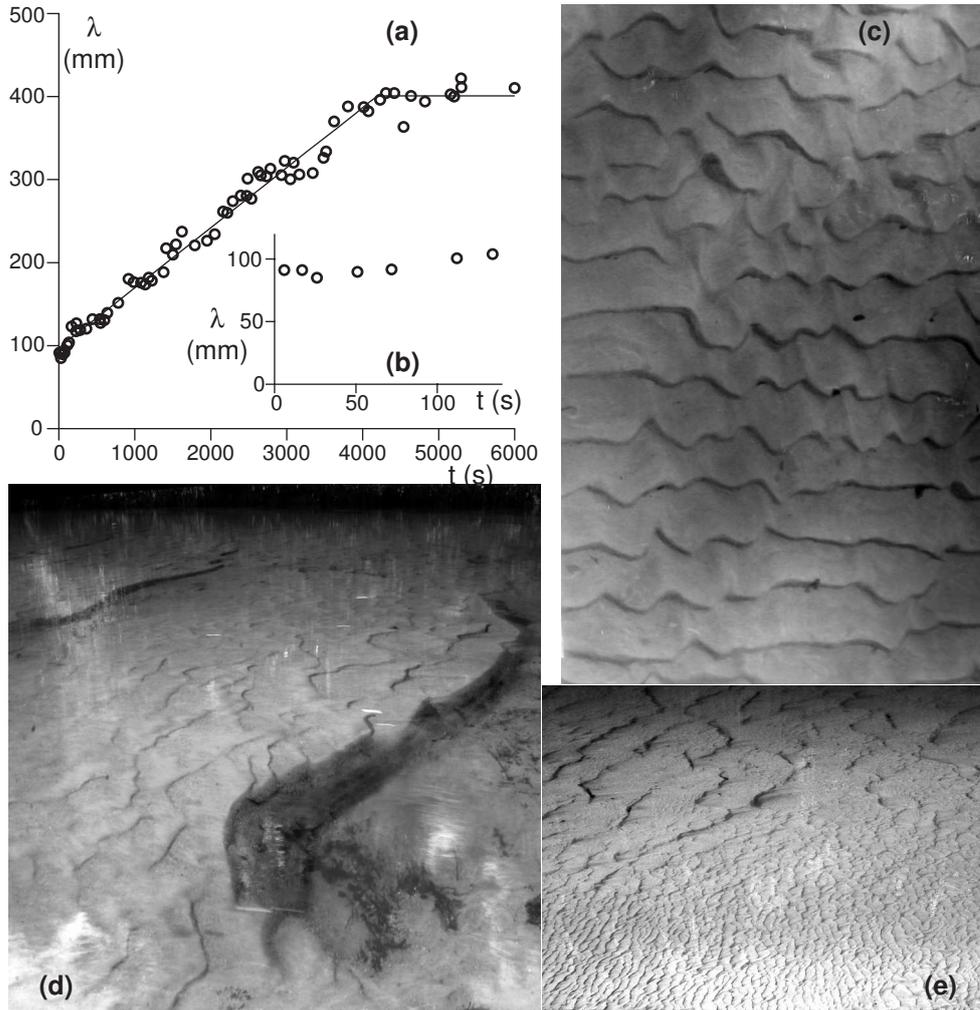


FIGURE 15. (a-c) Formation of dunes in a natural river, starting at  $t = 0$  from a flat sand bed. The experiment was performed in the Leyre river, at Mios bridge, on September 17<sup>th</sup> 2008, for  $H = 50$  cm,  $\mathcal{F} = 0.28$  and  $u_* = 4$  cm/s. The grain size is  $d = 330 \pm 70$   $\mu\text{m}$ . (a) Time evolution of the wavelength  $\lambda$ . The pattern coarsening starts after 150 s and stops after  $\sim 4000$  s. (b) Same graph, but restricted to the linear regime (between  $t = 0$  and  $t = 150$  s). (c) The photograph shows the dunes of wavelength 40 cm formed after 6000 s. (d) Formation of mega-dunes, starting from a flat sand bed. The experiment was performed in the Leyre river, at Mios bridge, for  $H = 44$  cm,  $\mathcal{F} = 0.30$  and  $u_* = 4$  cm/s. The sand is polydisperse: it a mixture of sand grains of size  $\sim 330 \pm 70$   $\mu\text{m}$ , which cover 60% of the surface, and of coarse grains larger than 600  $\mu\text{m}$ , which represent 40% of the surface – but 9% of the grains and 60% of the mass. The photograph shows 3 m long mega-dunes with  $\sim 40$  cm superimposed dunes. (e) Photograph of the Leyre river at Mios bridge showing the sharp transition between dunes (zone of medium sand) and mega-dunes (zone of medium and coarse sand mixed).

around  $10^{-3}$  and the rescaled propagation speed  $\omega/(ku_*)$  around  $10^{-2}$ . As shown in Part 1, with such small dimensionless numbers, the motion of the bed can be ignored in the hydrodynamical treatment.

5.2. *Formation of dunes and mega-dunes*

We have observed the evolution of the patterns for typically two hours after flattening the sand bed (Fig. 15a). A statistically stationary state is eventually reached, which corresponds to what was observed in the natural conditions, i.e. before the experiment (Fig. 15c). As in flume experiments (Venditti et al. 2005a, Venditti et al. 2005b, Valance & Langlois 2005), we have observed a coarsening of the ripple pattern, i.e. a progressive growth of the wavelength by merging of bedforms (Raudkivi & Witte 1990, Raudkivi 2006). Figure 14a shows that this growth is linear in time and stops when the wavelength  $\lambda$  becomes on the order of the flow depth  $H$ . Both these processes and the time-scales over which they take place are consistent with the observations of Guy et al. 1966 for flume experiments at larger Froude numbers. Again, with a bed motion at the scale of hours, the approximation of a flow over a steady relief is almost perfect. Consistently with the theory, we did not observe the emergence of wavelengths directly at the scale of the flow depth<sup>†</sup>. We thus reach the conclusion that the formation of dunes should not be associated to a linear instability but to a non-linear pattern evolution. In the unbounded case (an infinite flow depth), it is probable that this pattern coarsening would have no limit as it is driven by hydrodynamics, which is mostly self-similar. The observation that this coarsening stops at some final wavelength should therefore be associated to a stabilising mechanism, namely the presence of the free surface.

The places selected for the experiments were of particular interest as different final wavelengths were observed across the river (Fig. 15c-e). The experiments just described above have been performed in of the side of the river (say, at a distance less than the third of the river width from the bank). In this ‘external’ region, the sand is well sorted and the dune wavelength is observed to saturate for a rescaled wave-number  $kH$  just below the resonant conditions (Fig. 16a). By contrast, in the central part of the river, much larger bedforms are present (Fig. 15d-e). They display superimposed dunes on their stoss side, and we call mega-dunes here-after. The river slope and the flow velocity were not significantly different in the dune and mega-dune regions. The major difference was the presence of coarse grains causing bed armouring in the central part of the river. As shown in figure 15e, the transition between the two regions is rather sharp. We have flattened the bed over a zone of 12 m in length and 4 m in width to observe the formation of mega-dunes. The initial stage is the formation of ripples composed of small sand grains that merge, leading to the same dunes as described on the side of the river. However, in the course of this pattern coarsening, the inter-dune zone becomes richer in coarse grains so that the dunes eventually propagate on a bed which is more difficult to erode. They progressively amalgamate into mega-dunes of wavelength ten times larger than the dunes, covered with superimposed ripples and dunes. Even in the asymptotic state, superimposed bedforms are continuously generated. As they propagate faster than the mega-dune, they accumulate at its crest. During the transient of formation of mega-dunes (typically 5 hours in our experiments), the pattern is disordered and is not composed by a unique Fourier mode. As far as one can say without having explicitly performed a multi-scale analysis of the topography, structures of growing size were progressively formed, which become ordered as they reach the final mega-dune wavelength (between  $10H$  and  $20H$ ).

In summary, a small difference in the experimental conditions (here, most probably, the presence of coarse grains or not) can significantly affect the pattern coarsening dynamics.

<sup>†</sup> In the flume experiments of Carling et al. 2005, the large grain size (5 mm) and the moderate water depth (0.375 m) are such that the typical size of the first emerging bedforms (few decimeters) are comparable.

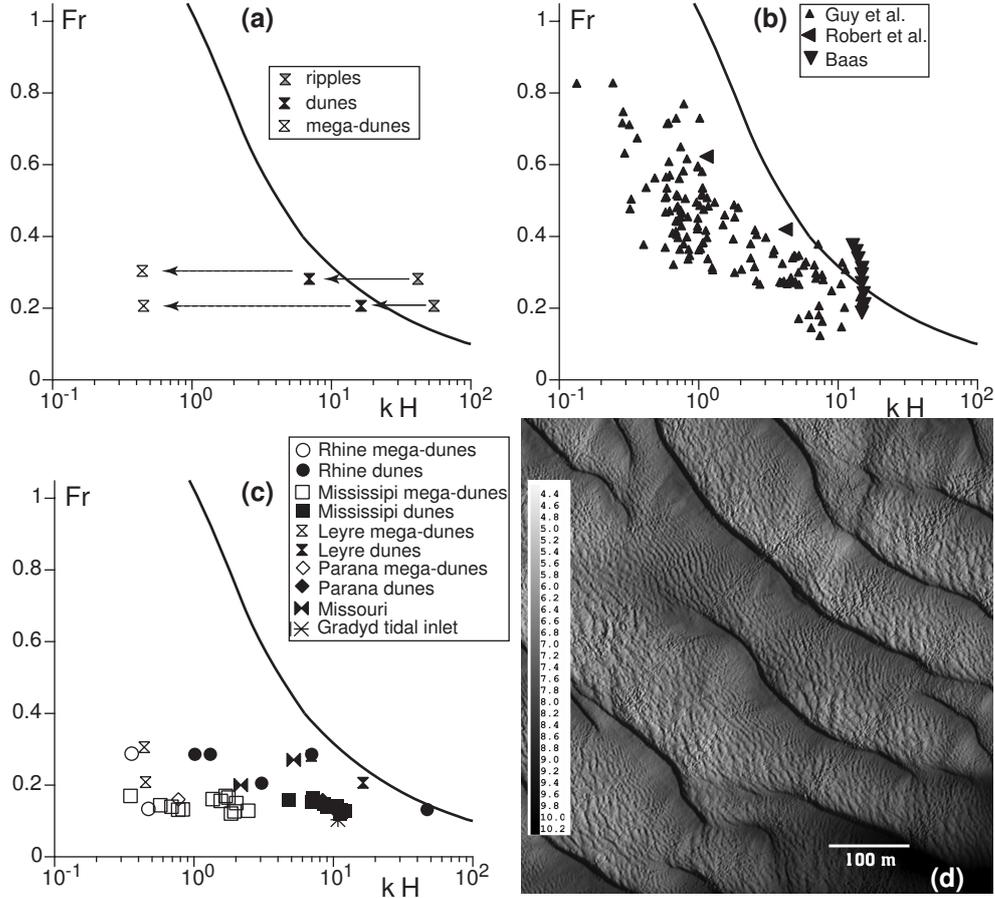


FIGURE 16. Representation in the  $\mathcal{F}$  vs  $kH$  diagram of different data set. (a) Experiments performed in the Leyre river, starting from a flat sand bed. (b) Flume experiments: wavelength of the stationary bedforms obtained at long time. (c) Bedforms in natural rivers. The mega-dunes are represented by white symbols whereas dunes are displayed with black symbols. (d) Water depth in rio Paraná ( $H \sim 8$  m,  $d \sim 300 \mu\text{m}$ ,  $\mathcal{F} = 0.16$ ) measured by multibeam echo sounding (this photograph is from Parsons et al. 2005). Mega-dunes of wavelength  $\lambda \sim 125$  m  $\sim 15H$  can be observed, with superimposed dunes of wavelength 6 m and probably superimposed ripples too (not visible).

The wavelength of mega-dunes can be larger than those of dunes by one to two orders of magnitude (Fig. 16a). With this observation, the question is not anymore to find a new destabilising mechanism to explain the dune formation. Rather, as larger and larger bedforms are produced by non-linear processes, one needs to identify a stabilising mechanism limiting this coarsening. As evidenced here, this is exactly the role played by the free surface.

### 5.3. Conclusion

Figure 16 presents several series of measurements of the final bedform wavelength collected in the literature for flume experiments (panel b) and natural rivers (panel c). The most impressive data-set is certainly that reported by Guy et al. 1966. As these authors separated their data into ripples and dunes on the basis of a definition that we do not agree with (see introduction), we have ignored here their annotations. Importantly,

Guy et al. 1966 have not looked at the transient of formation of bedforms but have focused on the long time regime. For example, they have often started a new experiment with a bed in the state reached at the end of the previous run. Moreover, the control parameters (slope and flow rate) were varied in the course of the experiment to maintain constant secondary quantities such as the flow depth or the Froude number. This methodology is probably responsible for the lack of reproducibility and the huge dispersion of data (one decade horizontally) one can see in figure 16b. By contrast, the series of experiments performed by Baas 1999 are much more controlled and reproducible. In particular, the wavelength is measured as a function of time starting from a flat sand bed and fitted to obtain its asymptotic value. These flume experiments clearly evidence the difference between the initial wavelength at which ripples form, their evolution by pattern coarsening to form dunes and the non-linear selection of the final wavelength due to the free surface. Note that we have not taken into account the correction of raw measurements performed by Baas 1999 to take into account the temperature dependence of the viscosity, as it is a non-sense in the hydraulically rough regime. The last points in figure 16b have been obtained by Robert & Uhlman 2001. As for Guy et al. 1966, we have not taken into account the denomination of the bedforms (ripple or dunes) used in this article. The points obtained by Baas 1999 and Robert & Uhlman 2001 are very close to the resonant conditions; the whole data set of Guy et al. 1966 is clearly in the subcritical regime – at low  $\mathcal{F}$  and/or low wavenumber  $kH$  – and globally follows the resonance curve. We have gathered in figure 16c the points measured in the Leyre river, in the Grådyd tidal channel (Bartholdy & al. 2005), in the Mississippi river (Harbor 1998), in the Missouri river (Annambhotla 1972), in the Rhine (Carling et al. 2000, Wilbers & Ten Brinke 2003) and in the Rio Paraná (Parsons et al. 2005). One can observe that the dunes propagating on the stoss slope of mega-dunes lie in the same region of the diagram as the simple dunes – roughly between  $kH = 0.1/\mathcal{F}^2$  and  $kH = 1/\mathcal{F}^2$ . The mega-dunes lie between  $kH = 0.3$  and  $kH = 0.1/\mathcal{F}^2$ . It should be emphasised that the different points in this graph correspond to very different flow depth  $H$  (compare e.g. the megadunes in the Leyre river shown in figure 14d and those in the rio Paraná shown in figure 16d). It means that the saturation length, which determines the wavelength at which ripples form, is not a relevant length for the formation of dunes and mega-dunes.

We then see why a distinction between ripples and dunes based on some absolute dimension considerations are misleading from the physical point of view: depending on the value of the water depth, bedforms ‘of less than about 2 feet’ (Guy et al. 1966), or ‘less than 0.6 m’ (Ashley 1990), can feel or not the free surface. Nor a criterion based on the amplitude  $|\delta|\zeta$  of distortion of the free surface can be satisfying to define dunes. Figure 17 shows the value of  $|\delta|$  in the parameter space  $(\mathcal{F}, kH)$ , computed using the hydrodynamical model detailed in part 1. One observes that the free surface is distorted by less than 10% of the bedform amplitude for  $\mathcal{F} < 0.35$  or for  $kH > 3$ . With a definition based on the amplitude of distortion of the free surface such as that proposed by Guy et al. 1966, there would be no dune at all in natural rivers! At low Froude numbers, dunes do not distort significantly the free surface. Approaching  $\mathcal{F} = 1$  from below, the distortion of the free surface, in antiphase with the topography, becomes more and more pronounced (Fig. 17b). Above  $\mathcal{F} \simeq 0.6$ , this effect becomes sufficient to create a zone of stable wavelengths around the resonance (Fig. 13) and thus a gap to cross during the pattern coarsening.

These results then suggest a new classification of river bedforms based on the dynamical mechanisms responsible for their formation. The most obvious criterion is the sensitivity to the presence of the free surface. We thus define ripples as the bedforms whose wavelength  $\lambda$  is sufficiently small compared to the flow depth  $H$  not to feel the

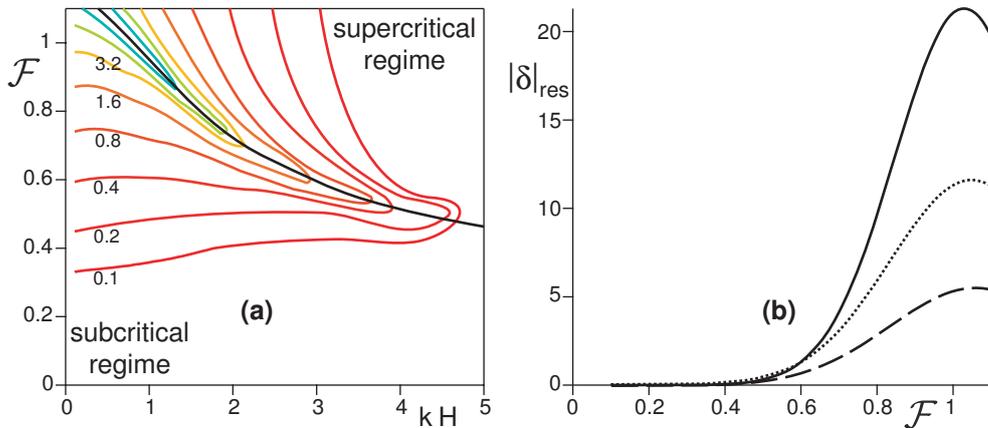


FIGURE 17. Amplitude  $|\delta|$  of the distortion of the free surface related to that of the bedform. (a) Isocontours of  $|\delta|$  in the plane  $\mathcal{F}$  vs  $kH$  (color online). (b) Distortion  $|\delta|$  computed along the resonance curve (black solid line in panel a) for  $H/z_0 = 10^2$  (dashed line),  $H/z_0 = 10^3$  (dotted line) and  $H/z_0 = 10^4$  (solid line) as a function of the Froude number  $\mathcal{F}$ . The amplitude in the resonant conditions is maximum at  $\mathcal{F} \simeq 1$ .

finiteness of the flow depth. In the diagram  $\mathcal{F}$  vs  $kH$ , they are located in the supercritical region, i.e. their wavenumber is larger than the resonant value. When the scale separation between the flow depth and the saturation length is sufficient, the structures that form by linear instability of a flat sand bed are ripples. Beyond the linear regime the pattern coarsening leads to growing wavelengths that reach the resonance curve. Once in the subcritical region on the left of this curve (see Fig. 16) hydrodynamics becomes affected and in some case dominated by the presence of the free surface and the bedforms can be called dunes. As evidenced by our field experiments, the pattern coarsening can end with very different bedforms depending on the conditions (e.g. the grain size distribution). The associated non-linear selection of pattern wavelength is an open problem (see Politi & Misbah 2004, Andreotti & al. 2006) that will require specific investigations. Our observations suggest to define mega-dunes as bedforms sufficiently large to present superimposed dunes. With this definition, what is usually called ‘river bars’ in the literature falls into our category of mega-dunes. Similarly, the term ‘sand-wavelet’ introduced by Coleman (see e.g. Coleman & Melville 1994, Coleman & Melville 1996) are ripples in their initial stage. It is furthermore worth noting that dunes can present superimposed ripples when the scale separation between the flow depth  $H$  and the saturation length  $L_{\text{sat}}$  is sufficient. The criterion to separate dunes from mega-dunes is then based on the location of the superimposed bedforms with respect to the resonance curve in the plane  $\mathcal{F}$  vs  $kH$ . This distinction is important as in very deep water, the pattern coarsening would lead to ripples large enough to accommodate superimposed ripples on their stoss side. In this case, one should talk about mega-ripples. In summary, the appellation of given subaqueous bedforms should be chosen in function of their location in the diagram  $\mathcal{F}$  vs  $kH$ , with a suffix ‘mega-’ to point out the presence or not of superimposed structures.

## 6. Summary of the results

As the present paper aims both to present novel results and to discuss the state of the art of the physics of ripples and dunes, we wish to sum up in this section, in a qualitative manner, our methodology and key results.

We have shown that the linear instability of a flat sand bed can be abstracted in terms of four well-defined quantities:

- the component of the basal shear stress in phase and in quadrature with the bottom (the parameters  $A$  and  $B$ , see part 1),
- the relation between the sediment flux, the shear stress and its threshold value, which determines the time-scale of the instability but does not influence the initial wavelength,
- the saturation length, i.e. the relaxation length between the sediment flux and the shear stress, which essentially determines the length-scale of the instability,
- the relation between the threshold shear stress and the slope, which encodes the stabilising effect of gravity.

The framework resulting from these ingredients is very general and can encompass a wide spectrum of specific models without any profound difference of nature. As discussed in the first part of these twin papers, the details of the hydrodynamical description can affect  $A$  and  $B$  to various degrees, depending for instance on the physics at work in the surface layer or on the way the different length-scales of the problem intermix with each other – see the summary section of part 1. From the choice of a particular transport model, one can compute the steady (or saturated) value of the sediment flux, as well as the characteristic length over which the actual flux relaxes to equilibrium. Finally, the expression of the threshold shear stress as a function of the grain size, the bed slope and other possible parameters (e.g. the cohesion between the grains) comes from a separate mechanical model. Doing so, one can then independently investigate the effect of each dynamical mechanism on the formation of ripples and dunes.

We have devoted a large fraction of this part 2 to the study of two sediment transport regimes. They differ by the nature of the mechanisms that make the flux saturate:

- an erosion limited regime, in which the negative feedback of the particle transport on the flow is negligible. The saturation of the flux is limited by the time needed to entrain one grain at the surface of the sand bed (Charru 2006). The associated saturation length is determined by the distribution of the traps at the surface of the bed. It is proportional to the grain size and it should diverge when the shear velocity reaches the value for which the flow is sufficient to entrain all the grains at the surface.
- a momentum limited regime, in which the flux saturates due to the extra-shear stress exerted by the moving grains on the fluid (Bagnold 1956). If the shear velocity is not too large so that bed load is the dominant mode of transport, the saturation length is dominated by the grain inertia thus proportional to the density ratio between the grain and the fluid times the grain size.

We have derived a detailed model of bed load describing both the erosion limited and the momentum limited regimes that is able to fit the data of Julien 1998 and Fernandez Luque & van Beek 1976. We have also derived a quantitative model for the threshold Shields number, which takes into account the bed slope effect and is able to reproduce the observed decrease at the transition between the viscous and the turbulent regimes. Sheet flows, in which the grains flow over a significant number of grain diameters, and suspended load are outside the validity of the model because they require a different hydrodynamical treatment where the flow inside the transport layer must be modelled.

These different ingredients at hand, we have performed the linear stability analysis of a flat sand bed. The destabilising mechanism is of hydrodynamical nature and is related to the phase advance of the basal shear stress with respect to the topography. Two stabilising mechanisms are identified: the sediment transport saturation length  $L_{\text{sat}}$  and the slope effect, which depends on the ratio  $u_*/u_{\text{th}}$ . As  $L_{\text{sat}}$  is generically larger than  $z_0$ , it dominates and essentially determines the scaling law followed by the most growing wavelength  $\lambda_{\text{max}}$ . This most unstable mode is associated to ripples, which thus form by

a linear instability. In the case of a smooth bottom, the roughness seen from the inner layer is governed by the viscous length  $\nu/u_*$ , which may dominate the scaling of  $\lambda_{\max}$  if  $\nu/u_*$  is larger than  $L_{\text{sat}}$  (Sumer & Bakioglu 1984).

Due to the slope effect, the ratio  $\lambda_{\max}/L_{\text{sat}}$  is a decreasing function of  $u_*/u_{\text{th}}$ . We have analysed different sets of measurements of initial ripple wavelengths  $\lambda_{\max}$  available in the literature and deduced the corresponding saturation length, assuming that the hydrodynamical model is correct.  $L_{\text{sat}}$  is found roughly independent of  $u_*$  and between  $5d$  and  $15d$ . These values are consistent with a saturation length limited by the grain inertia ( $L_{\text{sat}} \simeq 2(\rho_s/\rho_f)d$ ) as previously stated by the authors (Claudin & Andreotti 2006, Andreotti & Claudin 2007). This prediction is especially good for large grains ( $d \gtrsim 1$  mm), for which viscous effects are completely negligible. However, the data show systematic dependencies that are not captured by the present model: the wavelength at which ripples form is systematically larger for smaller or rougher grains.

We have performed field experiments in the Leyre river, whose results show that the evolution of the ripple wavelength  $\lambda$  and amplitude  $\zeta$  at short time are consistent with a linear instability. We also observed that these ripples present a pattern coarsening: their wavelength grows and saturate just after crossing the resonance condition of surface waves. In the course of this pattern coarsening, the bedforms are in quasi-equilibrium between erosion and deposition, a situation for which we have shown that the aspect ratio of ripples can be predicted quantitatively using the weakly non-linear description of hydrodynamics derived in part 1.

The influence of the river free surface on the bed is stabilising. As shown in part 1 and in agreement with standard hydraulics, the gravity waves excited at the free surface by the bedforms are in phase at small  $\lambda/H$  (supercritical regime) and in antiphase at large  $\lambda/H$  (subcritical regime). In between, the free surface is phase-advanced with respect to the bottom, so that it tends to induce a phase-delay of the shear stress on the ground. Bedforms of wavelength around the resonance conditions are thus stabilised. Moreover, at very large  $\lambda/H$ , the inner layer invades the whole flow and the free surface again has a strong stabilising effect. As no destabilising mechanism is associated to the presence of the free surface, dunes do not form by a linear instability. This result is directly confirmed by our field experiments showing that they form by non-linear pattern coarsening, as suggested by Raudkivi & Witte 1990 and Raudkivi 2006. Finally, our experiments show that the non-linear selection of the final wavelength is very sensitive to small changes in the experimental conditions, and in particular to the presence of coarse grains.

Finally, our results suggest to classify subaqueous bedforms according to the dynamical mechanisms that control their formation. We thus propose the following bedform definitions and characteristics:

- Ripples are bedforms whose wavelength  $\lambda$  is sufficiently small compared to the flow depth  $H$  not to feel the presence of the free surface. In the diagram  $\mathcal{F}$  vs  $kH$ , they are located on the right of the resonance curve (supercritical regime). They form by linear instability and their initial wavelength essentially scales on the saturation length  $L_{\text{sat}}$ . They exhibit pattern coarsening and remain ripples until they cross the condition of resonance of the surface waves.
- Dunes are bedforms whose wavelength  $\lambda$  is sufficiently large compared to the flow depth  $H$  to be stabilised by the presence of the free surface. The ripple pattern coarsening generically leads to the formation of dunes. In the diagram  $\mathcal{F}$  vs  $kH$ , they are located along the resonance curve on the subcritical side. If the flow depth  $H$  is much larger than the wavelength at which ripples form, dunes may present superimposed ripples.
- Like dunes, mega-dunes are under the influence of the free surface and on the left side of the resonance curve but they present superimposed dunes. They typically result

from the coarsening of a dune pattern pushed to very large wavelength by heterogeneities (in particular a polydispersed sediment).

Further studies are needed to investigate this non-linear wavelength selection in details. In the purpose of describing the interactions between bedforms, future models will have to incorporate hydrodynamical non-linearities and in particular flow separation, for which the systematic expansion with respect to the amplitude performed in part 1 may serve as a well-controlled starting point.

---

The field work has been carried out in agreement with the Parc Naturel Régional des Landes de Gascogne. This work has benefited from the financial support of the french minister of research.

## Appendix A. Static threshold

In this appendix, we derive an explicit expression of the transport threshold, valid both in the viscous and turbulent regimes. We introduce the effective velocity  $U$  of the flow around the sand grains and define for convenience its normalised counterpart:

$$\mathcal{U} = \frac{U}{\sqrt{(\rho_s/\rho_f - 1)gd}}. \quad (\text{A } 1)$$

For the sake of simplicity, we will take for  $U$  the fluid velocity at the altitude  $z = d/2$ . A good approximation of the relation between the shear velocity  $u_*$  and the typical velocity around the grain  $U$  is given by

$$u_*^2 = \frac{2\nu}{d}U + \frac{\kappa^2}{\ln^2(1 + 1/2r)}U^2. \quad (\text{A } 2)$$

where  $\nu$  is the kinematic viscosity of the fluid,  $\kappa$  the von Kármán constant and  $r$  the aerodynamic roughness rescaled by the grain diameter  $d$ . The rescaled bed roughness  $r$  is on the order of  $r = 1/10$ .

At the threshold, the horizontal force balance on a grain of the bed reads

$$\frac{\pi}{6}\mu(\rho_s - \rho_f)gd^3 = \frac{\pi}{8}C_d\rho_fU_{\text{th}}^2d^2, \quad (\text{A } 3)$$

where  $\mu$  is the avalanche slope for sand grains, i.e.  $\tan 32^\circ$ .  $C_d$  is the drag coefficient, which is a function of the grain Reynolds number  $\mathcal{R}$ . With a good accuracy, the drag law for natural grains can be put under the form:

$$C_d = \left(C_\infty^{1/2} + s\mathcal{R}^{-1/2}\right)^2 \quad \text{with} \quad \mathcal{R} = \frac{Ud}{\nu}. \quad (\text{A } 4)$$

At this stage, we introduce the viscous size  $d_\nu$ , defined as the diameter of grains whose free fall Reynolds number  $u_{\text{fall}}d/\nu$  is unity:

$$d_\nu = (\rho_s/\rho_f - 1)^{-1/3} \nu^{2/3} g^{-1/3}. \quad (\text{A } 5)$$

It corresponds to a grain size at which viscous and gravity effects are of the same order of magnitude. From the three previous relations, we get the equation for  $\mathcal{U}_{\text{th}}$ :

$$C_\infty^{1/2}\mathcal{U}_{\text{th}} + s \left(\frac{d_\nu}{d}\right)^{3/4} \mathcal{U}_{\text{th}}^{1/2} = \left(\frac{4\mu}{3}\right)^{1/2}, \quad (\text{A } 6)$$

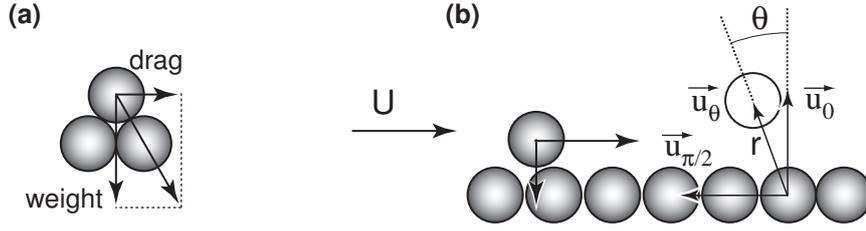


FIGURE 18. Geometry of the trajectory calculation.

which solves into

$$\mathcal{U}_{\text{th}} = \frac{1}{4C_\infty} \left[ \left( s^2 \left( \frac{d_\nu}{d} \right)^{3/2} + 8 \left( \frac{\mu C_\infty}{3} \right)^{1/2} \right)^{1/2} - s \left( \frac{d_\nu}{d} \right)^{3/4} \right]^2. \quad (\text{A } 7)$$

The corresponding expression of the static threshold Shields number is finally:

$$\Theta_{\text{th}} = 2 \left( \frac{d_\nu}{d} \right)^{3/2} \mathcal{U}_{\text{th}} + \frac{\kappa^2}{\ln^2(1 + 1/2r)} \mathcal{U}_{\text{th}}^2. \quad (\text{A } 8)$$

In the viscous regime, the above relations simplify into:

$$\mathcal{U}_{\text{th}} = \left( \frac{4\mu}{3s^2} \right) \left( \frac{d}{d_\nu} \right)^{3/2} \quad \text{and} \quad \Theta_{\text{th}} = \frac{8\mu}{3s^2}. \quad (\text{A } 9)$$

In the turbulent regime, we get:

$$\mathcal{U}_{\text{th}} = \sqrt{\frac{4\mu}{3C_\infty}} \quad \text{and} \quad \Theta_{\text{th}} = \frac{4\mu\kappa^2}{3C_\infty \ln^2(1 + 1/2r)}. \quad (\text{A } 10)$$

As can be seen in figure 2, the most interesting range of grain diameters, between 100  $\mu\text{m}$  and 1 mm, is precisely the zone of transition between the two regimes. The crossover grain diameter  $d_{co}$  scales as:

$$d_{co} = \frac{s^{4/3}}{(\mu C_\infty)^{1/3}} d_\nu, \quad (\text{A } 11)$$

which is around 200  $\mu\text{m}$ .

## Appendix B. Motion of a single grain

To describe the elementary jump by one grain diameter, we write the equation of motion of one grain dragged by a flow of effective velocity  $U$  and submitted to gravity. We assume that it loses completely its energy during collisions, due to the thin layer of fluid between the grains. Contrarily to Bagnold 1956 and Charru et al. 2008, we do not introduce any ‘effective friction’: instead, we take into account the geometry of the trapping grains (Fig. 18), which is the physical effect responsible for this friction, as for the transport threshold.

Starting from the position of the grain  $d\vec{u}_\theta$ , we get its velocity  $\vec{V} = d\dot{\theta}\vec{u}_{\theta+\pi/2}$  and its tangential acceleration  $d\ddot{\theta}\vec{u}_{\theta+\pi/2}$ . We assume that the reaction of the substrate is normal to it. Using, as in the appendix A,  $d$  as a unit size and  $[(\rho_s/\rho_f - 1)gd]^{1/2}$  as a

unit velocity (see Eq. A 1), the dynamical equation reads:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{3}{4} \left[ C_\infty^{1/2} \left( \dot{\theta}^2 - 2 \cos \theta \mathcal{U} \dot{\theta} + \mathcal{U}^2 \right)^{1/4} + s \left( \frac{d_\nu}{d} \right)^{3/4} \right]^2 \left( \cos \theta \mathcal{U} - \dot{\theta} \right) + \sin \theta \quad (\text{B 1}) \\ &= \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} C_\infty^{1/2} \left[ \left( \dot{\theta}^2 - 2 \cos \theta \mathcal{U} \dot{\theta} + \mathcal{U}^2 \right)^{1/4} - \mathcal{U}_{\text{th}}^{1/2} \right] + 3^{-1/4} \mathcal{U}_{\text{th}}^{-1/2} \right]^2 \left( \cos \theta \mathcal{U} - \dot{\theta} \right) + \sin \theta,\end{aligned}$$

where  $\mu$  has been taken equal to  $\tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$ . As in the appendix A, the rescaled velocity  $\mathcal{U}$  is related to the Shields number by:

$$\Theta = 2 \left( \frac{d_\nu}{d} \right)^{3/2} \mathcal{U} + \frac{\kappa^2}{\ln^2(1 + 1/2r)} \mathcal{U}^2. \quad (\text{B 2})$$

This equation can be integrated numerically between  $\theta = -\pi/6$  and  $\theta = \pi/6$ , starting from  $\dot{\theta} = 0$ . Note that there is no adjustable parameter in this description.

In order to get the asymptotic behavior analytically, we perform an expansion with respect to  $\theta$  around  $-\pi/6$  and with respect to  $\mathcal{U}$  around  $\mathcal{U}_{\text{th}}$ . We get a linear equation of the form:

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{1}{\sqrt{3}\mathcal{U}_{\text{th}}} + \frac{3^{5/4}}{8} C_\infty^{1/2} \right) \dot{\theta} - \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi(\mathcal{U} - \mathcal{U}_{\text{th}})}{3^{3/2}\alpha\mathcal{U}_{\text{th}}}, \quad (\text{B 3})$$

with

$$\alpha = \frac{8\pi}{3^{3/2} \left( 2 + 3^{3/4} C_\infty^{1/2} \mathcal{U}_{\text{th}} \right)}.$$

The solution of this linear equation is:

$$\theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi(\mathcal{U}_{\text{th}} - \mathcal{U})}{3\alpha\mathcal{U}_{\text{th}}} \left[ 1 + \frac{r_- \exp(r_+ t) - r_+ \exp(r_- t)}{r_+ - r_-} \right], \quad (\text{B 4})$$

where  $r_-$  and  $r_+$  are the solutions of the equation:

$$r^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{3}\mathcal{U}_{\text{th}}} + \frac{3^{5/4}}{8} C_\infty^{1/2} \right) r - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0. \quad (\text{B 5})$$

The time  $T$  needed to pass over  $d$  thus scales around the threshold as:

$$T \sim \frac{1}{r_+} \ln \left[ \left( 1 - \frac{r_+}{r_-} \right) \left( 1 + \frac{\alpha\mathcal{U}_{\text{th}}}{\mathcal{U} - \mathcal{U}_{\text{th}}} \right) \right] \sqrt{\frac{\rho_f d}{(\rho_s - \rho_f)g}}. \quad (\text{B 6})$$

Making use of equation (A 2), one sees that this erosion time diverges at the threshold as:

$$T \propto -\ln[\Theta - \Theta_{\text{th}}]. \quad (\text{B 7})$$

On the other hand,  $T$  should resume to  $d/U$  far from the threshold. Integrating numerically equation (B 1), we have found convenient approximations that follow the correct asymptotic behaviors just above the threshold and far from it. In the turbulent regime, it reads:

$$T \propto \ln \left[ \frac{\sqrt{\Theta} + \sqrt{\Theta_{\text{th}}}}{\sqrt{\Theta} - \sqrt{\Theta_{\text{th}}}} \right] \sqrt{\frac{\rho_f d}{(\rho_s - \rho_f)g}}, \quad (\text{B 8})$$

where the prefactor is around 1.5. In the viscous regime, it reads

$$T \propto \ln \left[ \frac{\Theta + \Theta_{\text{th}}}{\Theta - \Theta_{\text{th}}} \right] \left( \frac{d_\nu}{d} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{\rho_f d}{(\rho_s - \rho_f)g}}, \quad (\text{B } 9)$$

with a prefactor around 17.

### Appendix C. Saturation length in a continuum description of momentum limited bed load

We start from the momentum balance equation, as written by Parker 1975:

$$\rho_s \left( \partial_t q + \frac{q}{h_0} \partial_x q \right) = \rho_f u_*^2 - \tau_{\text{sand}}(q). \quad (\text{C } 1)$$

By definition, the flux  $q$  saturates to  $q_{\text{sat}}$  when the shear stress is equal at the top of the transport layer and below it, on the bottom:

$$\tau_{\text{sand}}(q_{\text{sat}}(u_*)) = \rho_f u_*^2. \quad (\text{C } 2)$$

Linearising the dynamical equation, we get:

$$\rho_s \left( \partial_t q + \frac{q_{\text{sat}}}{h_0} \partial_x q \right) = \left. \frac{d\tau_{\text{sand}}}{dq} \right|_{q=q_{\text{sat}}} (q_{\text{sat}} - q). \quad (\text{C } 3)$$

Identifying this equation with the definition of the saturation length  $L_{\text{sat}}$  and the saturation time  $T_{\text{sat}}$ ,

$$T_{\text{sat}} \partial_t q + L_{\text{sat}} \partial_x q = q_{\text{sat}} - q, \quad (\text{C } 4)$$

we get:

$$L_{\text{sat}} = \rho_s \frac{q_{\text{sat}}}{h_0} \frac{dq_{\text{sat}}}{d\tau} = \frac{\rho_s}{\rho_f} \frac{q_{\text{sat}}}{2 h_0 u_*} \frac{dq_{\text{sat}}}{du_*}. \quad (\text{C } 5)$$

One readily see that  $L_{\text{sat}}$ , as predicted by this expression, vanishes at the transport threshold as  $q_{\text{sat}}$  and increases very fast with  $u_*$ . None of these behaviors is correct, whatever the shape of the bed load equation  $q_{\text{sat}}(u_*)$  – Einstein-Brown, Bagnold or those derived in the text. There are two simple reasons for this failure. First, the continuum approach ignores the process by which the momentum is transferred from the fluid to the grains (namely the drag of the grains). Second, the flux  $q$  evolves both because the number of moving particles evolves and because their velocity changes. A valid description should thus both present an equation for the erosion and a description of the trajectories, as done in the text.

#### REFERENCES

- Abbott, J.E. & Francis, J.R.D. 1977 Saltation and suspension trajectories of solid grains in a water stream. *Phil. Trans. R. Soc. London* **284**, 225-254.
- Allen, J.R.L. 1985 Principles of Physical Sedimentology, The Blackburn Press, Caldwell USA.
- Anderson, R. 1987 A theoretical model for aeolian impact ripples. *Sedimentology* **34**, 943-956.
- Anderson, R. 1990 Eolian ripples as examples of self-organization in geomorphological systems. *Earth-Science Rev.* **29**, 77-96.
- Andreotti, B., Claudin, P. & Douady, S. 2002 Selection of dune shapes and velocities – Part 1: Dynamics of sand, wind and barchans. *Eur. Phys. J. B* **28**, 321.
- Andreotti, B., Claudin, P. & Douady, S. 2002 Selection of dune shapes and velocities – Part 2: A two-dimensional modelling. *Eur. Phys. J. B* **28**, 341.

- Andreotti B. 2004 A two species model of aeolian sand transport. *J. Fluid Mech.* **510**, 47-50.
- Andreotti, B., Claudin, P. & Pouliquen, O. 2006 Aeolian sand ripples : experimental evidence of coarsening and saturation, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 028001.
- Andreotti, B. & Claudin, C. 2007 Comment on ‘Minimal size of a barchan dune’. *Phys. Rev. E* **76**, 063301.
- Andreotti, B., Claudin, C. & Pouliquen, O. 2008 Measurements of the aeolian sand transport saturation length, submitted to *Geomorphology*.
- Annambhotla, V.S.S., Sayre, W.W. & Livesey, R.H. 1972 Statistical properties of Missouri River bed forms. *J. Waterways Harbors Coastal Eng. Div.* **98**, 489-510.
- Ashley, G.M. 1990 Classification of large scale subaqueous bedforms: a new look at an old problem. *J. Sedim. Res.* **60**, 161-172.
- Baas, J.H. 1994 A flume study on the development and equilibrium morphology of current ripples in very fine sand. *Sedimentology* **41**, 185-209.
- Baas, J.H. 1999 An empirical model for the development and the equilibrium morphology of current ripples in fine sand. *Sedimentology* **46**, 123-138.
- Baddock, M.C., Livingstone, I. & Wiggs, G.F.S. 2007 The geomorphological significance of airflow patterns in transverse dune interdunes. *Geomorphology* **87**, 322-336.
- Bagnold, R.A. 1941 *The physics of blown sand and desert dunes*, Chapman and Hall, Methuen, London.
- Bagnold, R.A. 1956 The flow of cohesionless grains in fluids. *Phi. Trans. R. Soc. London A* **249**, 235-297.
- Bartholdy, J., Flemming, B. W., Bartholomä, A. & Ernstsens, V. B. 2005 Flow and grain size control of depth-independent simple subaqueous dunes, *J. Geophys. Res.* **110**, F04S16.
- Best, J. 2005 The fluid dynamics of river dunes: a review and some future research directions. *J. Geophys. Res.* **110**, F04S02.
- Carling, P.A., Götz, E., Orr, H.G. & Radecki-Pawlik, A. 2000 The morphodynamics of fluvial sand dunes in the River Rhine, near Mainz, Germany. I. Sedimentology and morphology. *Sedimentology* **47**, 227-252.
- Carling, P.A., Richardson, K. & Ikeda, H. 2005 A flume experiment on the development of subaqueous fine-gravel dunes from a lower-stage plane bed. *J. Geophys. Res.* **110**, F04S05.
- Charru, F. 2006 Selection of the ripple length on a granular bed. *Phys. Fluids* **18**, 121508.
- Charru, F., Larrieu, E., Dupont, J.-B. & Zenith, R. 2008 Motion of a particle near a rough wall in a viscous shear flow. *J. Fluid Mech.* **570**, 431-453.
- Charru, F., Mouilleron-Arnould, H. & Eiff O. 2004 Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow. *J. Fluid Mech.* **519**, 55-80.
- Claudin, P. & Andreotti, B. 2006 A scaling law for aeolian dunes on Mars, Venus, Earth, and for sub-aqueous ripples. *Earth Pla. Sci. Lett.* **252**, 30-44.
- Coleman, S.E. & Fenton, J.D. 2000 Potential-flow instability theory and alluvial stream bed forms. *J. Fluid Mech.* **418**, 101-117.
- Coleman, S.E. & Melville, B.W. 1994 Bed-form development. *J. Hyd. Eng.* **120**, 544-560.
- Coleman, S.E. & Melville, B.W. 1996 Initiation of bed forms on a flat sand bed. *J. Hydraul. Eng.* **122**, 301-310.
- Coleman, S.E. & Eling, B. 2000 Sand wavelets in laminar open-channel flows. *J. Hydraul. Res.* **38**, 331-338.
- Coleman, S.E., Fedele, J.J. & Garcia, M.H. 2003 Closed-conduit bed-form initiation and development. *J. Hydraul. Eng.* **129**, 956-965.
- Colombini, M. 2004 Revisiting the linear theory of sand dune formation. *J. Fluid Mech.* **502**, 1-16.
- Colombini, M. & Stocchino, A. 2005 Coupling or decoupling bed and flow dynamics: Fast and slow sediment waves at high Froude numbers. *Phys. Fluids* **17**, 036602.
- Einstein, H.A. 1950 The bed load function for sedimentation in open channel flows. *Technical Report*, **1026**, 1-69.
- Elbelrhiti, H., Claudin, C. & Andreotti, B. 2005 Field evidence for surface wave induced instability of sand dunes. *Nature* **437**, 720-723.
- Engelund, F. 1970 Instability of erodible beds. *J. Fluid Mech.* **42**, 225-244.
- Engelund, F. & Fredsøe, J. 1982 Sediment ripples and dunes. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **14**,

- 13-37.
- Fernandez Luque, R. & van Beek, R. 1976 Erosion and transport of bed-load sediment. *J. Hydraul. Res.* **14**, 127-144.
- Fredsøe, J. 1974 On the development of dunes in erodible channels. *J. Fluid Mech.* **64**, 1-16.
- Guy, H., Simons, D. & Richardson, E. 1966 Summary of alluvial channel data from flume experiments, 1956-61. *U.S. Geol. Survey Prof. Paper* **462-I**, 1-96.
- Gyr, A. & Schmid, A. 1989 The different ripple formation mechanism *J. Hydraul. Res.* **27**, 61-74.
- Harbor, D.J. 1998 Dynamics of bedforms in the lower Mississippi River. *J. Sedim. Res.* **68**, 750-762.
- Hayashi, T. 1970 Formation of dunes and antidunes in open channels. *J. Hydraul. Div.* **96**, 357-366.
- Hersen, P., Douady, S. & Andreotti, B. 2002 Relevant lengthscale of barchan dunes. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 264301.
- Hill, H. M., Srinivasan, V. S. & Unny, T. E. 1969 Instability of flat bed in alluvial channels. *J. Hydraul. Div.* **95**, 1545-1558.
- Jackson, P.S. & Hunt, J.C.R. 1975 Turbulent wind flow over a low hill. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **101**, 929-955.
- Julien P.Y. 1998 Erosion and sedimentation. *Cambridge University Press*.
- Kennedy, J.F. 1963 The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels. *J. Fluid Mech.* **16**, 521-544.
- Kennedy, J.F. 1969 The formation of sediment ripples, dunes and antidunes. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **1**, 147-168.
- Kroy, K., Sauer mann, G. & Herrmann H.J. 2002 Minimal Model for Sand Dunes. *Phys. Rev. E* **66**, 031302.
- Loiseleux, T., Gondret, P., Rabaud, M. & Doppler, D. 2005 Onset of erosion and avalanche for an inclined granular bed sheared by a continuous laminar flow. *Phys. Fluids* **17**, 103304.
- Mantz, P.A. 1978 Bedforms produced by fine, cohesionless, granular and flakey sediments under subcritical water flows. *Sedimentology* **25**, 83-103.
- McLean, S.R. 1990 The stability of ripples and dunes. *Earth-Science Rev.* **29**, 131-144.
- Meyer-Peter, E. & Müller, R. 1948 Formulas for bed load transport. *Report on the 2nd meeting international association*, 39-64.
- Parker, G. 1975 Sediment inertia as cause of river antidunes. *J. Hydraul. Div.* **101**, 211-221.
- Parsons, D.R., Best, J.L., Orfeo, O., Hardy, R.J., Kostaschuk, R. & Lane, S.N. 2005 Morphology and flow fields of three-dimensional dunes, Rio Paraná, Argentina: Results from simultaneous multibeam echo sounding and acoustic Doppler current profiling. *J. Geophys. Res.* **110**, F04S03.
- Parteli, E J.R., Schwämmle, V., Herrmann, H.J., Monteiro, L.H.U. & Maia L.P. 2006 Profile measurement and simulation of a transverse dune field in the Lençóis Maranhenses. *Geomorphology* **81**, 29-42.
- Politi, P. & Misbah, C. 2004 When Does Coarsening Occur in the Dynamics of One-Dimensional Fronts, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 090601.
- Rasmussen, K.R., Iversen J.D. & Rautahaimo P. 1996 Saltation and wind flow interaction in a variable slope wind tunnel. *Geomorphology* **17**, 19-28.
- Raudkivi, A.J. 2006 Transition from ripples to dunes. *J. Hydraul. Eng.* **132**, 1316-1320.
- Raudkivi, A.J. & Witte, H.H. 1990 Development of bed features. *J. Hydraul. Eng.* **116**, 1063-1079.
- Rauen, W.B., Lin, B. & Falconer, R.A. 2008 Transition from wavelets to ripples in a laboratory flume with a diverging channel. *Int. J. Sedim. Res.* **23**, 1-12.
- Reynolds, A.J. 1965 Waves on the erodible bed of an open channel. *J. Fluid Mech.* **22**, 113-133.
- Richards, K.J. 1980 The formation of ripples and dunes on an erodible bed. *J. Fluid Mech.* **99**, 597-618.
- Robert, A. & Uhlman, W. 2001 An experimental study of the ripple-dune transition. *Earth Surf. Process. Landforms* **26**, 615-629.
- Sauer mann, G., Kroy, K. & Herrmann, H.J. 2001 Continuum saltation model for sand dunes. *Phys. Rev. E* **64**, 031305.
- Smith, J.D. 1970 Stability of a sand bed subjected to a shear flow at low Froude number. *J.*

- Geophys. Res.* **75**, 5928-5940.
- Sumer, B.M. & Bakioglu, M. 1984 On the formation of ripples on an erodible bed. *J. Fluid Mech.* **144**, 177-190.
- Valance, A. 2005 Formation of ripples over a sand bed submitted to a turbulent shear flow. *Eur. Phys. J. B* **45**, 433-442.
- Valance, A. & Langlois, V. 2005 Ripple formation over a sand bed submitted to a laminar shear flow. *Eur. Phys. J. B* **43**, 283-294.
- Valance, A. & Langlois, V. 2007 Initiation and evolution of current ripples on a flat sand bed under turbulent water flow. *Eur. Phys. J. E* **22**, 201-208.
- Venditti, J.G., Church, M.A. & Bennett, S.J. 2005 Morphodynamics of small-scale superimposed sand waves over migrating dune bed forms. *Water Resour. Res.* **41**, W10423.
- Venditti, J.G., Church, M.A. & Bennett, S.J. 2005 Bed form initiation from a flat sand bed. *J. Geophys. Res.* **110**, F01009.
- Wilbers A.W.E. & Ten Brinke W.B.M. 2003 The response of subaqueous dunes to floods in sand and gravel bed reaches of the Dutch Rhine. *Sedimentology* **50**, 1013-1034.
- Yalin, M.S. 1963 An expression for bed-load transportation. *J. Hydraul. Div.* **132**, 1159-1168.
- Yalin, M.S. 1977 On the determination of ripple length. *J. Hydraul. Div.* **103**, 439-442.
- Yalin, M.S. & Karahan E.J. 1979 Inception of sediment transport. *J. Hydraul. Div.* **105**, 1433-1443.
- Yalin, M.S. 1985 On the determination of ripple geometry. *J. Hydraul. Eng.* **111**, 1148-1155.

Giant aeolian dune size  
determined by the average depth  
of the atmospheric boundary  
layer.



# Size of giant aeolian dunes limited by the depth of the atmospheric boundary layer

Bruno Andreotti<sup>1</sup>, Antoine Fourrière<sup>1</sup>, Fouzia Ould-Kaddour<sup>2</sup>, Brad Murray<sup>3</sup> and Philippe Claudin<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> *Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes (PMMH UMR 7636 CNRS-ESPCI-P6-P7), 10 rue Vauquelin, 75005 Paris France.*

<sup>2</sup> *Laboratoire de Physique Théorique, Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen, Algérie.*

<sup>3</sup> *Nicholas School of the Environment and Earth Sciences, Center for Nonlinear and Complex Systems, Duke University, Box 90230, Durham, NC 27708-0230, USA.*

Depending on the wind regime<sup>1-2</sup>, sand dunes exhibit linear<sup>3-4</sup>, crescentic or star-like forms<sup>5</sup> resulting from the interaction between dune morphology and sand transport<sup>6-8</sup>. Small-scale dunes form by destabilisation of the sand bed<sup>9-11</sup> with a wavelength (a few tens of meters) determined by the sand transport saturation length<sup>11-13</sup>. However, the mechanisms controlling the formation of giant dunes — in particular their typical time and length scales — have remained unknown. Based on a combination of field measurements and aerodynamic calculations, we show here that the growth of aeolian giant dunes, ascribed to the non-linear interaction between small-scale superimposed dunes<sup>4,10,14,15</sup>, is limited by the confinement of the flow over the depth of the atmospheric boundary layer<sup>16,17</sup>. Aeolian giant dunes and river dunes form by similar processes, with a thermal inversion layer capping the convective boundary layer in the atmosphere<sup>18</sup> playing a role analogous to the water surface in rivers. In both cases, the bed topography

**excites surface waves on the interface that modify in turn the near-bed flow velocity. This mechanism constitutes a stabilizing process that prevents the scale of the pattern from coarsening beyond the resonant condition. Our results explain the mean spacing of aeolian giant dunes ranging from 300 m in coastal deserts to 3.5 km under terrestrial conditions. These conclusions may serve as a starting point for the modelling of long term evolution of desert landscapes under specific wind regimes.**

Aeolian dune fields generically present two well-separated length-scales<sup>15,19,20</sup> (Fig. 1). The smallest superimposed bed-forms have been explained by a linear aerodynamic instability whose initial wavelength  $\lambda_s$  is related to the length needed for sand transport to reach equilibrium with the wind strength<sup>11-13</sup> and are called hereafter 'elementary dunes' for this reason. Tentative explanations for the formation of giant dunes have proposed specific dynamics associated with the different types of dunes, thought of as isolated objects<sup>4-5</sup>. In contrast, we hypothesise that the emergence of giant transverse, longitudinal and star dunes results from collective processes, the symmetries of the different patterns resulting from those of the wind rose. Indeed, both small- and large-scale dunes share the same symmetries under a common wind regime (Fig. 1). Furthermore, the different types of giant dunes exhibit the same characteristic wavelength  $\lambda_g$ , on the order of a kilometre (Fig. 1), and feature superimposed structures whose avalanche slip faces show separations on the same scale  $\lambda_s$ . These commonalities suggest that the key dynamical processes forming giant dunes are not to be looked for in the shape of the pattern but in the understanding of the characteristic time and length scales resulting from their formation. We propose a novel collective mechanism in which the structure of the atmosphere determines the giant scale.

The dryness of deserts results primarily from the overall stability of the atmosphere in anticyclonic regions. The stable stratification of the free atmosphere,

characterized by the Brunt-Väisälä frequency  $N = \sqrt{\frac{g}{\theta} \frac{d\theta}{dz}}$  ( $g$  is the gravity and  $\theta$  the virtual potential temperature) for restoring vertically displaced air parcels, prevents the development of turbulence. The temperature gradient  $\gamma = \frac{d\theta}{dz} \approx 4K/km$  is largely independent of the location and the season (Supplementary 1). In winter, the heat flux from the surface is insufficient to produce convection so that the atmospheric boundary layer is stably stratified almost down to the ground (Fig. 2b). In warmer seasons, however, a convective (or ‘well-mixed’) boundary layer forms, in which the temperature and the horizontal wind velocity are roughly homogeneous. A thermal inversion (or capping) layer, characterized by a jump in air density  $\Delta\rho$  separates stable and unstable layers. The shear stress  $\tau$  decreases linearly with height in the well-mixed layer, vanishes at the capping altitude  $H$  and remains null in the free atmosphere<sup>18</sup>. The base flow is thus similar to that in a river. Furthermore, gravity waves can propagate at a speed  $c$  on this atmospheric interface, as they do along the free surface of a river<sup>21</sup>. Introducing the wave-number  $k = 2\pi/\lambda$ , the surface-wave dispersion relation can be approximated by:

$$c^2 + \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right) c \sqrt{c^2 - \frac{N^2}{k^2}} = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \frac{g}{k} \quad (1)$$

in the limit of large  $kH$ . The river case is recovered for  $\Delta\rho \approx \rho_0$  and  $N = 0$ . Consequently, aeolian giant dune relief can excite standing surface waves that in turn modify the wind speed and thus the sand transport.

As the temperature profile  $\theta(z)$  in the free atmosphere does not depend much on the season, the typical height of the capping layer  $H$  increases linearly with the ground temperature annual variations:  $H \approx \delta\theta/\gamma$  (Fig. 2b). The ground temperature is controlled by thermal transfers at the synoptic scale and varies annually from a few degrees in temperate environments close to the seashore to a few tens of degrees in more

continental regions (Supplementary 1). We expect modern temperature measurements to be relevant over the current Holocene interglacial. We have measured the giant dune wavelength  $\lambda$  in all homogeneous desert regions of the world (Supplementary 2) and shown that it is linearly correlated with  $\delta\theta/\gamma$ , independent of the dune symmetry (Fig. 2a). These data then strongly support the idea that the size of giant dunes scales with the depth of the atmospheric boundary layer.

To understand the origin of this relation, we have computed the two-dimensional turbulent flow confined between a capping stratified fluid and a wavy bottom (Supplementary 7). Navier-Stokes equations are closed by the means of a Prandtl mixing length approach, and are expanded with respect to the bottom corrugation aspect ratio  $a/\lambda$ , which is a small parameter. A key output of these calculations is the phase shift between the bottom topography and the basal shear stress  $\tau_b$ , which controls the linear growth of dunes<sup>9-11</sup>. Figure 3 shows that the fastest growing wavelength always corresponds to elementary dunes  $\lambda_s$ . Furthermore, the presence of the capping layer has an overall stabilizing effect, which is particularly pronounced at the scale  $H$ . When the fluid flows at the velocity  $U$  over a relief of wavelength  $\lambda$ , waves on the capping layer are generated at this wavelength. The system is resonant when  $U$  equals the wave propagation speed  $c$  at the wave-number  $k$ . This situation corresponds to a shift of the maximum basal shear stress to downwind of the crest (Fig. 3), and thus to a stable situation in which bed perturbations decay<sup>9-11</sup>. With a free surface, the growth rate  $\sigma$  for wavelengths on the order of  $H$  is lower than it would be without a free surface (Fig. 3). Thus, the formation of giant dunes cannot be explained by a primary linear instability, i.e. by a new growth-rate peak caused by the free surface.

To go beyond linear aerodynamics, we have extended the expansion of the flow field up to the third order in the aspect ratio  $a/\lambda$ , to get the first non-linear corrections to the basal shear stress (Supplementary 7). The phase shift with respect to the bed eventually vanishes for some amplitude, which can be interpreted as the equilibrium height of a mature dune of a certain wavelength. For small  $\lambda$ , the selected aspect ratio is roughly constant ( $a/\lambda \approx 1/12$ ) and matches quantitative observations<sup>22,23</sup> (Fig. 4c). For larger wavelengths, the presence of the capping layer causes dunes to stabilize at smaller aspect ratios (Fig. 4c). The resulting relation between the steady amplitude  $a$  and the wavelength  $\lambda$  presents a pronounced maximum, not very sensitive to variations in parameters (Fig. 4c), and which corresponds to giant dunes commensurate with  $H$ .

As supported by GPR studies of Pleistocene giant dunes<sup>14</sup>, giant dunes are likely to result from amalgamation<sup>15</sup> of superimposed dunes. Such a progressive growth, ultimately limited by the depth of the atmospheric boundary layer, sounds paradoxical in view of the separation between the scales of elementary dunes and giant dunes. Here we perform a wavelet analysis of field measured giant dune profiles (Fig. 4a,b), which allows a determination of the length-scales of the structures that compose these dunes, taking into account the whole relief and not only the horizontal succession of slip-faces. This analysis shows the large-scale modulation of the relief at the wavelength  $\lambda_g$  as well as the covering of elementary dunes at  $\lambda_s$ . It also reveals the presence of superimposed structures at all scales in between. This confirms that superimposed dunes grow progressively by merging, which is possible because the propagation velocity of superimposed bed-forms decreases with their size<sup>10</sup>. Elementary dunes are continuously regenerated as any sufficiently long flat sand area destabilises linearly at the scale  $\lambda_s$ <sup>10</sup>. Amalgamation results in a global pattern coarsening that follows the amplitude-

wavelength curve of Figure 4c. As the wavelength becomes comparable to the atmospheric boundary layer depth, dune height is maximized, and the corresponding structures dominate the atmospheric dynamics as well as the emergence of the pattern. The non-linear selection of the maximum of the curve  $a(\lambda)$  is a generic result of systems whose pattern coarsening results from a screening interaction between neighbouring objects<sup>23</sup> or from a phase negative diffusion instability<sup>25</sup>.

So far, the dynamical mechanisms involved — turbulence, resonant surface waves and dune interaction — are valid for subaqueous dunes<sup>26-27</sup> as well as aeolian ones. In the aeolian case, however, an additional stabilizing mechanism becomes important at small  $k$  that is not present in rivers (Fig. 3). It is related to the possibility of radiating internal waves into the atmosphere when the exciting frequency  $Uk$  is lower than  $N$ . In the subaqueous case this mechanism is not relevant, opening up the possibility for dunes with wavelengths much greater than the flow depth to grow. As a matter of fact, very long river dunes, with wavelengths up to several tens of times the water depth, have been observed in large rivers<sup>28</sup>. We expect their formation mechanism to be of the same nature as for aeolian giant dunes, except that the curve  $a(\lambda)$  shows two maxima (Supplementary 6).

In this exploratory model, we have intentionally omitted several aspects needed to reproduce natural giant dunes in detail: three-dimensional shapes, Coriolis effect, daily and seasonal atmospheric cycles, erratic winds. The good agreement with wavelength measurements indicates that the stabilising influence of the free atmosphere constitutes an essential component to understand the emergence of all giant dune types.

1. Fryberger, S. G. and Dean, G. Dune forms and wind regime. in *A study of global sand seas*. McKee, E. D. ed., (Geological Survey Professional Paper 1052, Washington), 137-169 (1979).
2. B. T. Werner, Eolian dunes; computer simulations and attractor interpretation, *Geology* 23, 1107 (1995)
3. Tsoar, H. Dynamic processes acting on a longitudinal (seif) sand dune. *Sedimentology* 30, 567 (1983).
4. Bristow, C. S., Bailey, S. D. and Lancaster, N. The sedimentary structure of linear sand dunes. *Nature* 406, 56 (2000).
5. Lancaster, N., The dynamics of star dunes: an example from Gran Desierto, Mexico, *Sedimentology* 36, 273 (1989).
6. Andreotti, B., Claudin, P. and Douady, S. Selection of dune shapes and velocities - Part 1: Dynamics of sand, wind and barchans. *Eur. Phys. J. B* 28, 321 (2002)
7. Wiggs, G. F. S., Livingstone, I. and Warren, A. The role of streamline curvature in sand dune dynamics: evidence from field and wind tunnel measurements. *Geomorphol.* 17, 29-46 (1996).
8. Lancaster, N., Nickling, W. G., McKenna-Neuman, C. K. and Wyatt, V. E. Sediment flux and airflow on the stoss slope of a barchan dune. *Geomorphol.* 17, 55-62 (1996).
9. Andreotti, B., Claudin, P. and Douady, S. Selection of dune shapes and velocities - Part 2: *Eur. Phys. J. B* 28, 341 (2002)
10. Elbelrhiti, H., Claudin, P. and Andreotti, B., Field evidence for surface-wave-induced instability of sand dunes, *Nature* 437, 720 (2005).
11. Claudin, P. and Andreotti, B. A scaling law for aeolian dunes on Mars, Venus, Earth, and for subaqueous ripples, *Earth. Plannet. Sc. Lett.* 252, 30 (2006).

12. Kroy, K., Sauermann, G. and Herrmann, H. Minimal model for sand dunes. *Phys. Rev. Lett.* 88, 054301 (2002)
13. Hersen, P., Douady, S. and Andreotti, B. Relevant length scale of barchan dunes. *Phys. Rev. Lett.* 89, 264301 (2002).
14. Bristow, C.S., Duller, G.A.T. and Lancaster, N., Age and dynamics of linear dunes in the Namib desert, *Geology* 35, 555 (2007).
15. Kocureck, G., Havholm, K.G., Deynoux, M. and Blakey, R.C., Amalgamated accumulations resulting from climatic and eustatic changes, Akchar Erg, Mauritania, *Sedimentology* 38, 751 (1991).
16. Wilson, I.G., Aeolian bedforms – their development and origins, *Sedimentology* 19, 173 (1972).
17. S.R. Hanna, S.R., The formation of longitudinal sand dunes by large helical eddies in the atmosphere, *J. Appl. Meteo.* 8, 874 (1969).
18. Stull, R.B., An introduction to boundary layer meteorology, Kluwer Acad. Publishers (1988).
19. Lancaster, N., The development of large aeolian bedforms, *Sedim. Geol.* 55, 69 (1988).
20. Ewing R.C., Kocurek, G. and Lake, L.W., Pattern analysis of dune-field parameters, *Earth Surf. Proc. Landforms* 31, 1176 (2006)
21. Wurtele, M.G., Sharman, R.D. and Datta, A., Atmospheric lee waves, *Ann. Rev. Fluid. Mech.* 28, 429-476 (1996).
22. Badock, M.C., Livingstone, I. and Wiggs, G.F.S., The geomorphological significance of airflow patterns in transverse dune interdunes, *Geomorphology* 87, 322 (2007).

23. Parteli, E.J.R., Schwämmle, V., Herrmann, H.J., Monteiro, L.H.U. and Maia L.P., Profile measurement and simulation of a transverse dune field in the Lençóis Maranhenses, *Geomorphology* 81, 29 (2006).
24. Andersen K.H., Chabanol M.-L., van Hecke M., Dynamical models for sand ripples beneath surface waves, *Phys. Rev. E* 63, 066308 (2001).
25. Politi, P. and Misbah, C., When does coarsening occur in the dynamics of one-dimensional fronts, *Phys. Rev. Lett.* 92, 090601 (2004).
26. Best, J., The fluid dynamics of river dunes: a review and some future directions, *J. Geophys. Res.* 100, F04S02 (2005).
27. Raudkivi, A.J., Transition from ripples to dunes, *J. Hydraul. Eng.* 132, 1316 (2006).
28. Parsons, D.R., Best, J.L., Orfeo, O. Hardy, R.J., Kostaschuk, R., and Lane, S.N., Morphology and flow fields of three-dimensional dunes, Rio Parana, Argentina: Results from simultaneous multibeam echo sounding and acoustic Doppler current profiling, *J. Geophys. Res.* 110, F04S03 (2005).

**Acknowledgements.** We thank R. Littlewood for discussions and assistance with the field work. This study was supported by an ANR grant.

**Supplementary Information** accompanies the paper on *Nature's* website (<http://www.nature.com>).

Correspondence and requests for materials should be addressed to P.C. (e-mail: [claudin@pmmh.espci.fr](mailto:claudin@pmmh.espci.fr)).

**Additional sentences at the end of the penultimate paragraph:**

Like on Earth, the atmospheric boundary layers on Mars and Titan<sup>29,30</sup> have kilometre-scale depths. However, the elementary wavelength on Mars is already around 600 m<sup>11</sup>

while that expected on Titan is of the order of few meters; although aeolian structures on Mars and Titan are comparable in size<sup>31</sup>, only the later are giant dunes.

**With the references:**

29. Tokano, T., Ferri, F., Colombatti, G., Mäkinen, T. and Fulchignoni, M., Titan's planetary boundary layer structure at the Huygens landing site, *J. Geophys. Res.* 111, E08007 (2006).
30. Savijärvi, H., Määttänen, A., Kauhanen, J. and Harri, A.M., Mars pathfinder: New data and new model simulations *Quart. Jour. Roy. Met. Soc.* 130, 669 (2004).
31. Lorenz R.D. et al., The Sand Seas of Titan: Cassini RADAR Observations of Longitudinal Dunes, *Science* 312, 724 (2006).

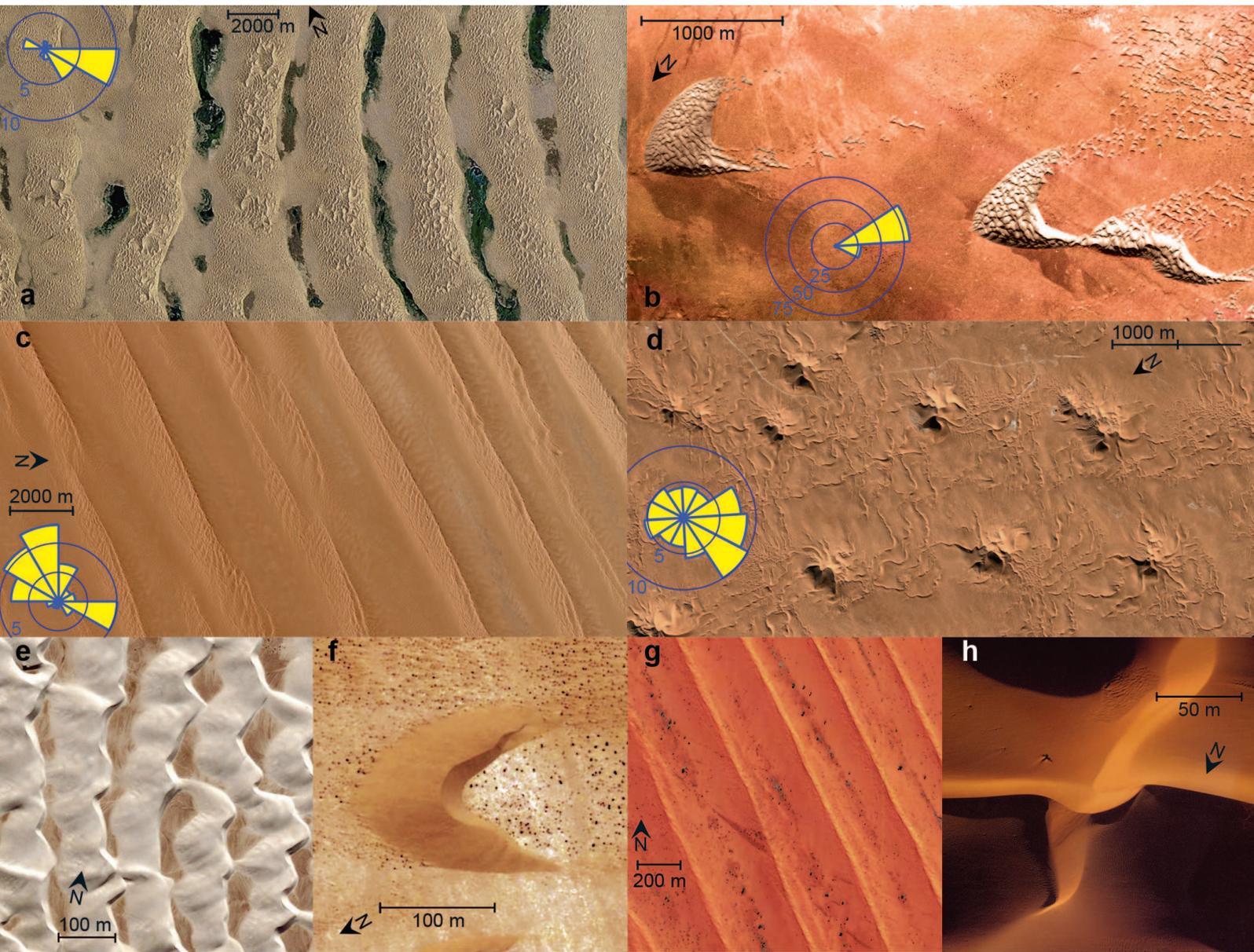
Figure 1. Separation of length-scales between small (e-h) and giant (a-d) dunes for the different wind regimes. **a** Transverse dunes, Badain Jaran (China, 38°38'N/104°59'E); **b** Barchan, Atlantic Sahara (Morocco, ( 28°02'N/12°11'W); **c** Longitudinal dunes, RubAlKhali, (S. Arabia 18°11'N/47°21'E) **d** Star dunes, Grand Erg Oriental (Algeria, 31°27'N/07°45'E) **e** White sands (USA, 32°49'N/106°16'W) **f** Atlantic Sahara (Morocco, 27°11'N/13°13'W) **g** Australia (23°51'S/136°33'E) **h** Mauritania (18°09'N/15°29'W). These aerial photographs (credits: Digital Globe) show that giant dunes are not isolated objects but involve a composite spatial organisation. The wind regimes are characterized by the averaged sand flux roses (1999-2007), whose yellow arrows indicate the direction the dominant wind moves toward. The symmetries of these roses are consistent with those of the giant dune pattern (Supplementary 5).

Figure 2. Selection of the wavelength of giant dunes by the depth of the atmospheric boundary layer. **a** Measured giant dune wavelength  $\lambda$  as a function of the characteristic mixing height, computed from the annual ground temperature variations  $\delta\theta$  (Supplementary table). The solid line is the identity:  $\lambda = \delta\theta/\gamma$ .  $\lambda$  in some cases is the average dune spacing and in others is the peak wavelength in a Fourier spectrum (Supplementary 2). As the dune patterns present dislocation defects, the distribution of dune spacing must have a width of order  $\lambda$ .  $\delta\theta$  is averaged over the period 2000-2007 (Supplementary 1).  $\delta\theta$  mostly reflects the distance to the ocean, and is therefore likely to remain approximately constant at any location over the time-scale of formation of giant dunes. **b** Virtual potential temperature profiles  $\theta(z)$ , measured by sounding balloons at noon, in Sulayel (S. Arabia, 20°47'N/45°67'E), at different seasons (blue circles: 07/27/1978, squares: 10/22/1978, diamonds: 12/01/1977, triangles: 02/12/1978). The free atmosphere preserves an almost steady linear profile (red dashed line) of slope  $\gamma = 4\text{K/km}$ . The summer profile shows a 6 km

deep mixed layer. The winter profile is stably stratified nearly down to the soil. The residual mixing height (<100m) is the altitude at which the mechanically produced turbulence is in balance with the dissipative effect of negative buoyancy.

Figure 3. Linear stability analysis of the dune formation process. Growth rate modulus  $|\sigma|$  rescaled by the timescale  $H^2/Q$  ( $Q$  is the reference saturated sand flux<sup>10</sup>;  $H^2/Q$  ranges from 2500 years in the Atlantic Sahara to 250,000 years in RubAlKhali) as a function of the rescaled wave-number  $kH$ . Stable wavelengths ( $\sigma < 0$ ) are shown by a dotted red line and unstable ones ( $\sigma > 0$ ) by a solid blue line. The curve obtained in the absence of a capping layer (in the limit of infinite  $H$ ) is shown in green. Insets: Streamlines over sinusoidal dunes (orange) computed at the linear order. The stratification of the free atmosphere (purple) is characterised by the non-dimensional number  $B = U/HN = 2$ , and the density discontinuity across the capping layer (bold line) that separates the well-mixed layer (blue) from the free atmosphere by  $S = \rho_0 U^2 / \Delta \rho g H = 0.7$ . The Reynolds number is  $Re = U\lambda/\nu = 10^8$ . The wind blows from left to right (shown by arrows). The area where near-bed streamlines are most dense corresponds to the maximum shear stress, which separates an erosion zone upstream from a zone of accretion. Thus, if the maximum occurs upstream of the crest of a bed perturbation, the bump grows, and vice versa. The growth rate of small wavelength ( $\lambda \ll H$ ) scales as  $Qk^2$  and is maximum at  $\lambda_s$ . Accordingly, the streamlines are squeezed upstream of the dune crest (top inset, computed for  $kH = 20$ ). At the surface wave resonance, for  $U = c(k)$ , the capping layer deforms such that the streamlines are squeezed downstream of the relief crest (bottom inset, computed for  $kH = 0.7$ ). Beyond the radiative threshold, for  $Uk < N$ , standing internal waves are generated in the free atmosphere, which leads to the same stabilising effect (left inset, computed for  $kH = 0.1$ ).

Figure 4. **a** Profile of transverse giant dunes in the Atlantic Sahara ( $28^{\circ}03'N/12^{\circ}12'W$ ). The combination of GPS data and direct geometrical measurements (lengths, heights and angles) ensures an excellent relative and absolute accuracy. Nascent superimposed dunes are detected down to centimetre-scale amplitudes. **b** Wavelet transform maxima represented in a scale-space diagram. In this multi-scale decomposition, each vertical line indicates the presence of a triangle-like sub-structure (e.g. orange ones), whose length and position are given by the upper tip coordinates. **c** Amplitude  $a$  of steady dunes as a function of their wavelength  $\lambda$  (both rescaled by  $H$ ), predicted by the non-linear aerodynamic model with a capping layer (black line,  $B = U/HN = 0.7$ ,  $S = \rho_0 U^2 / \Delta \rho g H = 0.7$  and  $Re = U\lambda/\nu = 10^8$ ) and without a capping layer (green line). Circles correspond to field data<sup>21,22</sup>. Confining the flow below the capping layer tends to compress streamlines over dune crests, reducing the steady amplitude (compared to the case without the capping layer) as wavelength increases from small values. Free-surface-wave effects then cause steady amplitudes to approach 0 as wavelengths increase further.



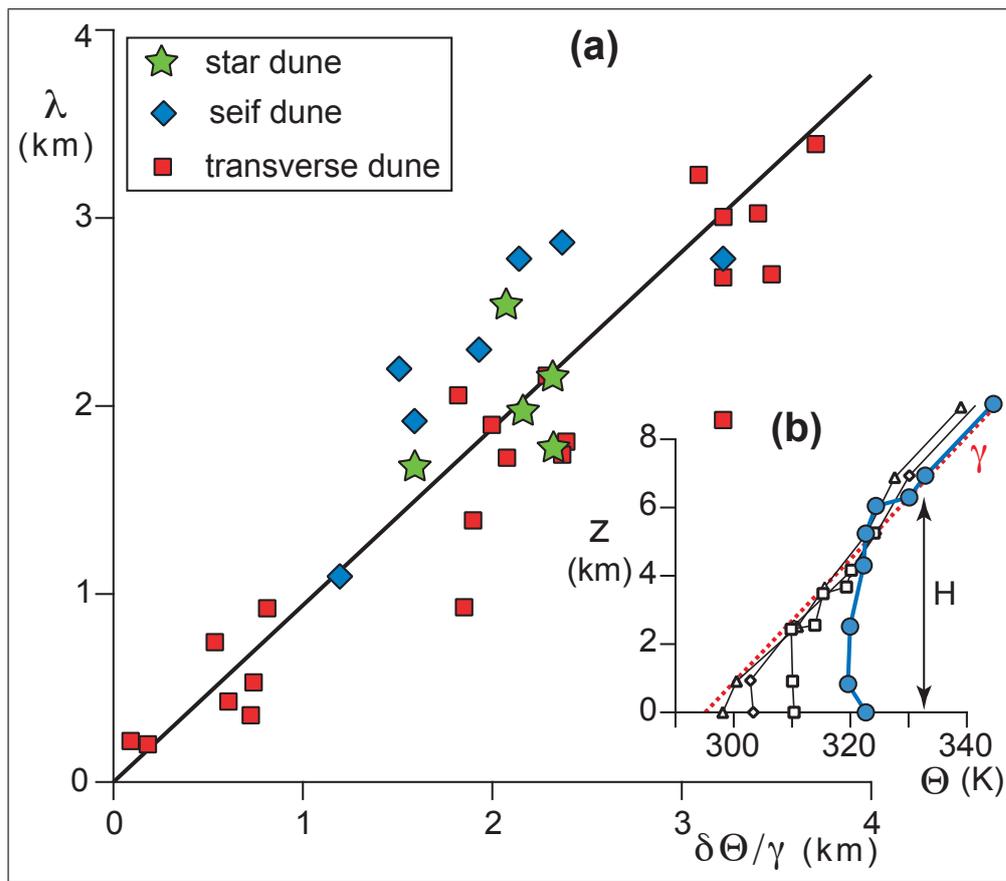


FIG. 2 –

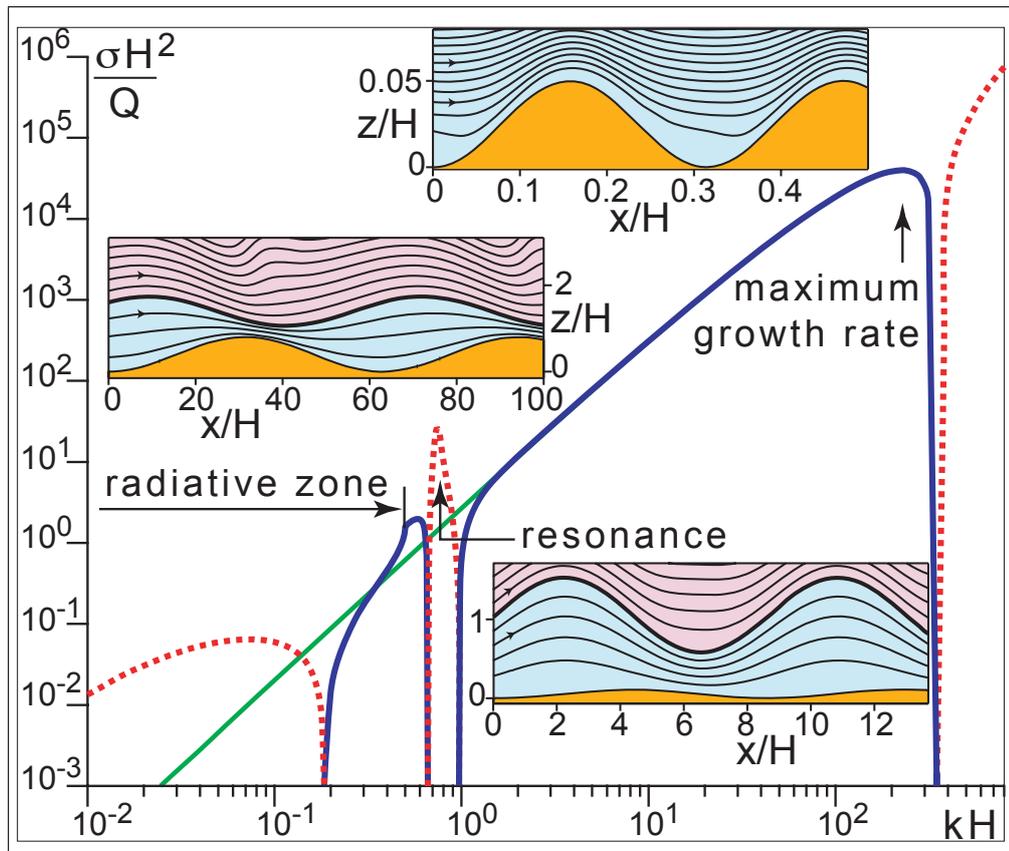


FIG. 3 -

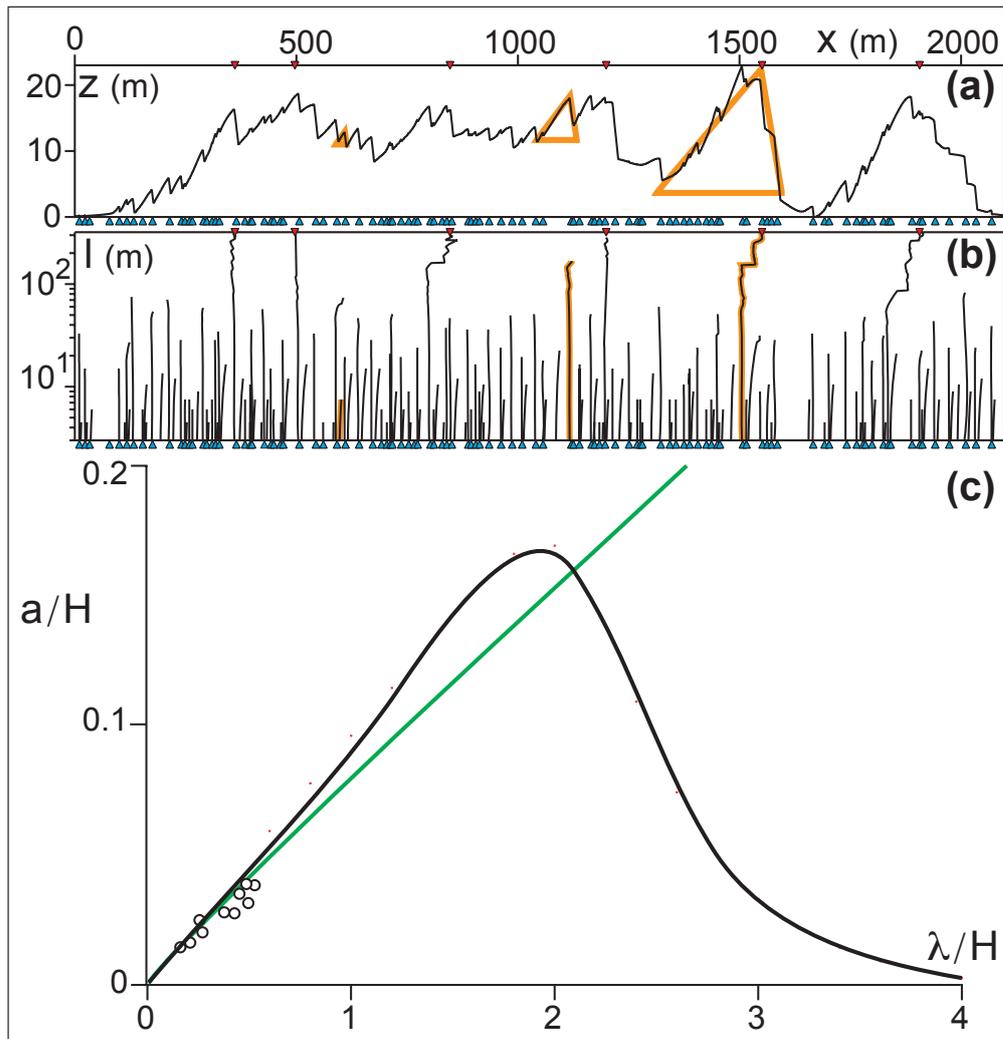


FIG. 4 –