



HAL
open science

Étude théorique et numérique de l'endommagement thermo-hydro-mécanique des milieux poreux non saturés

Chloé Arson

► **To cite this version:**

Chloé Arson. Étude théorique et numérique de l'endommagement thermo-hydro-mécanique des milieux poreux non saturés. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2009. Français. NNT: . pastel-00005608

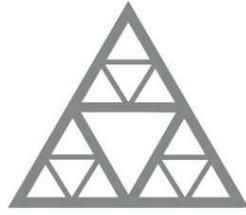
HAL Id: pastel-00005608

<https://pastel.hal.science/pastel-00005608>

Submitted on 4 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École des Ponts

ParisTech

THESE

présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTEUR DE L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité : **Géotechnique**

Présentée par

Chloé ARSON

**Etude théorique et numérique
de l'endommagement thermo-hydro-mécanique
des milieux poreux non saturés**

Soutenue publiquement le **24 septembre 2009** devant le jury composé de

ROBERT CHARLIER	Université de Liège	Rapporteur
ANTONIO GENS	Universitat Politècnica de Catalunya	Rapporteur
FERRI ALIABADI	Imperial College London	Examineur
ROBERT LYTTON	Texas A. and M. University	Examineur
PATRICK SELVADURAI	McGill University, Canada	Examineur
BEHROUZ GATMIRI	U.R. Navier (ENPC), Université Paris-Est	Directeur de thèse

Remerciements		vii
1 Introduction		1
I Problématique théorique		7
2 Comportement thermo-hydro-mécanique des sols non saturés		11
2.1 Des sols saturés aux sols non saturés		13
2.1.1 Comportement : contrainte effective ou variables indépendantes		13
2.1.2 Transfert de l'eau liquide		18
2.2 Hystérésis capillaire		19
2.3 Effets de la température		21
2.3.1 Sols saturés		21
2.3.2 Milieux poreux non saturés		23
3 Endommagement en milieu poreux non saturé		25
3.1 Etude bibliographique de l'endommagement		27
3.1.1 Endommagement en mécanique des milieux continus (secs)		27
3.1.2 Endommagement dans les réseaux de fissuration		43
3.2 Problèmes du couplage THHM-Endommagement		48
3.2.1 Endommagement dans une loi de comportement couplée		49
3.2.2 Prise en compte de la fissuration dans les lois de transfert		51
II Modélisation		55
4 Choix des variables		61
4.1 Une variable d'endommagement tensorielle		63
4.1.1 Homogénéisation du tenseur de densité de fissuration		63
4.1.2 Rotation de la base principale de l'endommagement		65
4.2 Une formulation en variables d'état indépendantes		66
4.2.1 Justification du choix des variables indépendantes		66
4.2.2 Rappels de thermodynamique des milieux poreux		67

4.2.3	Décomposition thermodynamique des déformations	72
5	Loi de comportement	75
5.1	Bases phénoménologiques	77
5.1.1	Concept d'état mécanique équivalent	77
5.1.2	Approche de Lemaître	79
5.1.3	Expression de l'énergie libre de Helmholtz	82
5.1.4	Loi d'évolution de l'endommagement	84
5.1.5	Expressions des déformations inélastiques incrémentales	88
5.2	Aspects micromécaniques	89
5.2.1	Concept de variable d'état endommagée	90
5.2.2	Calcul des rigidités endommagées par le PEEE	92
5.3	Approche numérique	96
5.3.1	Loi de comportement exprimée en température	96
5.3.2	Endommagement en fonction des variables d'état	98
6	Lois de transfert	103
6.1	Transfert de l'eau liquide	105
6.1.1	Un modèle de transfert diffusif	105
6.1.2	Perméabilité relative à succion constante	107
6.1.3	Définition d'une surface d'état pour le degré de saturation	107
6.1.4	Perméabilité relative caractéristique des fluides	109
6.1.5	Perméabilité intrinsèque	109
6.1.6	Résumé du modèle de perméabilité à l'eau liquide	114
6.2	Transfert de la vapeur d'eau	116
6.2.1	Modèle de transfert de la vapeur en milieu intact	116
6.2.2	Extension du modèle de transfert de la vapeur aux milieux fracturés . . .	120
6.3	Transfert de l'air gazeux	122
6.4	Transfert de la chaleur	123
7	Résumé des équations et paramètres du modèle THHMD	125
7.1	Résumé des équations du modèle THHMD	127
7.1.1	Loi de comportement	127
7.1.2	Transfert de l'eau liquide	129
7.1.3	Transfert de la vapeur	130
7.1.4	Transfert de l'air gazeux	131
7.1.5	Transport de la chaleur	131
7.2	Liste des paramètres matériels	131
III	Discrétisation	135
8	Formulation forte du problème	139
8.1	Détermination des équations du problème	141
8.1.1	Equations relatives à la phase solide	141
8.1.2	Equations relatives au constituant eau (eau liquide et vapeur)	141
8.1.3	Equations relatives au constituant air (gazeux et dissout)	146
8.1.4	Equations relatives à la chaleur	147
8.2	Enoncé de la formulation forte	149

8.2.1	Synthèse des équations du problème	149
8.2.2	Conditions aux limites	151
8.2.3	Conditions initiales	153
8.2.4	Résumé de la formulation forte	153
9	Formulation variationnelle - PTV	155
9.1	Equation relative au champ de déplacements	157
9.1.1	Espace des champs de déplacements c.a. à 0	157
9.1.2	PTV pour les déplacements	158
9.2	Equation relative au champ de pressions d'eau	159
9.2.1	Espace des champs de pressions d'eau c.a. à 0	159
9.2.2	PTV pour les pressions d'eau	160
9.3	Equation relative au champ de pressions d'air	162
9.3.1	Espace des champs de pressions d'air c.a. à 0	162
9.3.2	PTV pour les pressions d'air	163
9.4	Equation relative au champ de températures	165
9.4.1	Espace des champs de températures c.a. à 0	165
9.4.2	PTV pour les températures	166
9.5	Résumé de la formulation variationnelle	168
10	Discrétisation dans l'espace - méthode de Galerkin	169
10.1	Equation relative aux déplacements	173
10.2	Equation relative aux températures	174
10.3	Equation relative aux pressions d'eau	176
10.4	Equation relative aux pressions d'air	178
11	Discrétisation dans le temps - θ-méthode	181
IV	Algorithmique et programmation	185
12	Architecture du code Θ-Stock	189
13	Subroutines spécifiques au modèle THHMD	201
14	Algorithme de résolution pour le modèle THHMD	207
15	Principe de calcul du résidu pour le modèle THHMD	217
V	Validation et étude numérique avec Θ-Stock	223
16	Simulations d'essais de laboratoire	229
16.1	Essais mécaniques sur des géomatériaux secs	231
16.1.1	Essais réalisés	231
16.1.2	Choix des paramètres matériels	231
16.1.3	Maillage et conditions aux limites	232
16.1.4	Etude du granite de la Vienne	235
16.1.5	Etude de l'argilite de l'Est	237
16.1.6	Etude du grès des Vosges	240

16.2	Essais de compression triaxiale sur du grès saturé	242
16.2.1	Essais non drainés	242
16.2.2	Essais drainés	247
16.3	Chauffage d'un échantillon de bentonite non saturée et indéformable	252
16.3.1	Validation dans le domaine élastique du modèle THHMD	252
16.3.2	Tendances de l'endommagement - chauffage de la bentonite	262
16.4	Chauffage d'une cuve d'argile non saturée déformable	264
16.4.1	Validation dans le domaine élastique du modèle THHMD	264
16.4.2	Tendances de l'endommagement - chauffage d'une argile déformable	270
17	Simulations de Zones Endommagées par Excavation	279
17.1	Vérification de la théorie unidimensionnelle des tunnels en élasticité	281
17.1.1	Problème traité	281
17.1.2	Maillage, conditions aux limites et paramètres matériels	281
17.1.3	Validation en élasticité	283
17.1.4	Tendances de l'endommagement mécanique	283
17.2	Etude thermo-mécanique d'une galerie creusée dans un massif sec	285
17.2.1	Refroidissement d'un tunnel de section carrée	285
17.2.2	Stockage de déchets radioactifs dans un massif granitique sec	294
17.3	Stockage de déchets radioactifs en milieu non saturé	306
17.3.1	Validation dans le domaine élastique	306
17.3.2	Tendances de l'endommagement dans le massif non saturé	317
17.4	Stockage de déchets dans une BO de bentonite et une BG de granite	331
17.4.1	Problème modélisé	331
17.4.2	Maillage, conditions initiales et conditions aux limites	331
17.4.3	Choix des paramètres matériels	333
17.4.4	Validation dans le domaine élastique	336
17.4.5	Influence de l'EDZ sur le comportement THM de la BO et de la BG	341
17.5	Site de stockage de déchets radioactifs de Kamaishi	350
17.5.1	Site de stockage étudié	350
17.5.2	Maillage, conditions initiales et conditions aux limites	350
17.5.3	Choix des paramètres	352
17.5.4	Résultats obtenus dans le domaine élastique du modèle THHMD	357
17.5.5	Configuration élastique avec EDZ	360
18	Conclusion	369
A	Détail du calcul de la rigidité mécanique endommagée	377
A.1	Inverse de l'opérateur de contraintes endommagées	379
A.2	Coefficients du tenseur de rigidité mécanique intact	379
B	Détail du calcul des dérivées des rigidités endommagées	381
B.1	Calcul de la dérivée de l'inverse de l'opérateur de contraintes endommagées	383
B.2	Dérivée partielle de la rigidité mécanique par rapport à l'endommagement	384
B.3	Dérivées des rigidités relatives à la succion et à la contrainte thermique	384

Remerciements

A...

Toi, le frère que je n'ai jamais eu,
Sais-tu, si tu avais vécu,
Ce que nous aurions fait ensemble ?
Un an après moi tu serais né,
Alors on n'se s'rait plus quittés,
Comme deux amis qui se ressemblent...

Maxime Leforestier

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Behrouz GATMIRI, qui a dirigé mes travaux de recherche depuis mes études de Master. J'ai eu la chance de travailler non seulement aux côtés d'un grand scientifique, mais aussi auprès d'une personne chaleureuse, dont j'aimerais saluer ici les qualités humaines. Merci de m'avoir appris un métier, d'avoir encouragé mes initiatives, et de m'avoir fait confiance.

Je souhaiterais témoigner toute ma reconnaissance à un grand homme de la Géotechnique, Monsieur Roger FRANK, que j'ai eu la chance de côtoyer régulièrement au Centre d'Enseignement et de Recherche en MEcanique des Sols. Merci de m'avoir considérée comme un chercheur dès mon premier jour au laboratoire. Merci de m'avoir déchiffré la géopolitique de la mécanique des sols, le matin, tôt, à l'heure du premier café noir...

J'aimerais également remercier Messieurs Christoph BUTENWEG et Eduardo ALONSO, pour avoir été garants de mes candidatures à des postes de recherche.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Robert CHARLIER, qui m'a soutenue et encouragée à bien des occasions, et qui a accepté de me recommander et d'être rapporteur de ma thèse.

Mes plus vifs remerciements vont également à Monsieur Antonio GENS, qui m'a donné un regard critique sur mes travaux, et qui a aussi accepté d'être rapporteur de ce mémoire.

Je remercie sincèrement Messieurs Ferri ALIABADI, Robert LYTTON et Patrick SELVADURAI, qui ont bien voulu faire partie de mon jury.

Ma thèse a été financée par un contrat de recherche européen, dans le cadre du projet TIMODAZ (*Thermal Impact on the Damaged Zone around a Radioactive Waste Disposal in Clay Host Rocks*). Je tiens à remercier ici tous les chercheurs que j'ai pu rencontrer à l'occasion de réunions de coordination, car j'ai beaucoup appris en travaillant en réseau.

J'aimerais remercier toute l'équipe de géotechnique du laboratoire Navier, le CERMES, pour l'ambiance de travail et pour les moments de convivialité.

Un grand merci à l'équipe de la Direction de la Recherche, en particulier à Madame Marine DANIEL, à Madame Claude TU et à Monsieur Bernard LAPEYRE, pour m'avoir encouragée lorsque j'étais représentante des doctorants, et pour avoir soutenu et reconnu mes initiatives.

Je souhaiterais témoigner ma reconnaissance à toutes les personnes qui m'ont formée, et en particulier, à Madame Sylvie DANCRE, à Monsieur Denis MONASSE et à Monsieur Bruno PARADIS, mes professeurs de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand. J'ai eu la chance d'apprendre auprès de pédagogues chevronnés, qui n'étaient pas avares d'encouragements

en une période si difficile de la scolarité.

Je remercie chaleureusement Monsieur Jean-Michel PEREIRA, qui m'a apporté son aide scientifique, et qui m'a conseillée à des périodes où j'avais des choix difficiles à faire. Merci de m'avoir informée, écoutée et soutenue.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon collègue et ami, An Ninh TA, qui a partagé un bureau avec moi pendant les trois années de doctorat... Ninh, merci pour ta patience et ton soutien quotidien !

Je remercie profondément tous les amis qui m'ont épaulée pendant la longue épreuve qu'est la thèse, notamment Pooneh MAGHOUL, Mahsa MOZAYAN, Alette de BODARD, Marie-Dominique PUJOL et Claude FORSANS.

Enfin je voudrais remercier mes parents, qui m'ont donné l'envie de connaître, la volonté d'apprendre et la rage de chercher. Merci de m'avoir fait sans cesse découvrir de nouveaux pays, de nouveaux livres, de nouvelles questions. Merci de n'avoir jamais douté de moi, merci d'avoir respecté mes choix.

CHAPITRE 1

Introduction

Les milieux poreux multiphasiques sont devenus un objet d'étude d'importance croissante ces dernières années, en particulier en raison de leur rôle dans l'exploitation des ressources énergétiques. L'industrie pétrolière a formulé des besoins forts concernant la modélisation des réservoirs naturels et des puits de forage. Dans le cadre du développement durable, l'étude des milieux poreux multiphasiques s'est avérée essentielle pour développer de nouvelles technologies comme la géothermie, et pour envisager la séquestration de gaz à effets de serre comme le dioxyde de carbone ou le méthane. L'étude des effets de la température en milieu poreux non saturé est d'autre part indispensable pour comprendre les phénomènes de sécheresse, qui peuvent avoir des conséquences dramatiques dans les zones cultivées comme dans les zones habitées. Le réchauffement climatique a des conséquences inattendues. Par exemple, en Alaska, la plaque tectonique, déchargée du poids de la banquise, tend à remonter, ce qui augmente la superficie des terres émergées. Celles-ci sont soumises à des conditions de chargement mécanique, hydraulique et thermique très particulières, et nécessitent une étude approfondie.

Il n'existe quasiment aucun modèle d'endommagement complètement couplé pour étudier les milieux poreux fissurés en conditions non saturées et non isothermes. Pourtant, l'étude de l'endommagement en milieu multiphasique s'avère essentielle pour aborder les problèmes de stockage, comme l'enfouissement de lignes électriques ou de gazoducs, ou la séquestration de gaz polluants. Le travail de recherche effectué dans le cadre de cette thèse s'inscrit plutôt dans la problématique du stockage des déchets radioactifs en couche géologique profonde. La France a clairement fait le choix de l'énergie nucléaire au début des années 70. En 1966, le site de retraitement de la Hague a été mis en service pour séparer les différents éléments radioactifs qui subsistent dans le combustible usé. L'usine traite les combustibles de réacteurs nucléaires appartenant à la France, à l'Allemagne, à la Belgique, à la Suisse, aux Pays-Bas, et au Japon. « À la sortie du réacteur, un combustible nucléaire usé contient environ 96 pour cent de matières énergétiques dites recyclables (95 pour cent d'uranium et 1 pour cent de plutonium), polluées par 4 pour cent d'actinides et de produits hautement dangereux et non réutilisables (déchets ultimes). Ces derniers sont traités et conditionnés, aujourd'hui par vitrification, en vue de leur entreposage en surface et éventuellement de leur stockage en couche géologique profonde. » (wikipedia.org, 2009, *Usine de retraitement de la Hague*). En attendant leur stockage définitif, les paquets vitrifiés sont stockés provisoirement dans des piscines destinées à les refroidir.

Dans ce travail de thèse, un nouveau modèle d'endommagement (appelé "*THHMD*" dans la suite) est proposé, pour modéliser les effets de la fissuration en milieu poreux non saturé non isotherme. Le géomatériau est modélisé comme une matrice solide renfermant trois fluides : de l'eau liquide, de l'air gazeux et de la vapeur d'eau. La formulation proposée vise à fournir un cadre théorique unifié pour représenter les effets de la fissuration sur la loi de comportement du milieu et sur les lois qui régissent les transferts dont le géomatériau est le siège. L'objectif

est notamment de pouvoir représenter la dégradation des modules de rigidité, l'augmentation des conductivités et l'anisotropie induite par l'endommagement. Le modèle est destiné à être utilisé à la fois pour décrire la zone endommagée par l'excavation ("*Excavation Damaged Zone*", *EDZ*), créée lors du creusement du tunnel, et à la fois pour modéliser l'endommagement généré par le chargement thermo-hydro-mécanique exercé après l'entreposage des déchets ultimes, qui se comportent comme une source de chaleur de puissance décroissante. On envisage de faire des simulations réalistes, dans lesquelles l'ensemble du dispositif de stockage est modélisé. Ce dernier comprend une barrière ouvragée, généralement faite d'argile compactée initialement non saturée, qui constitue une zone tampon entre la paquet radioactif et la barrière géologique, généralement constituée de granite ou d'argilite initialement saturé(e).

La première partie de ce mémoire est dédiée à l'étude bibliographique des milieux poreux non saturés non isothermes d'une part, et à l'étude bibliographique de l'endommagement en milieu poreux non saturé d'autre part. On y aborde, entre autres, le problème du choix des variables d'état et la complexité de la modélisation des problèmes couplés impliquant un changement de phase. L'étude de l'endommagement semble montrer que les effets de la fissuration sur la loi de comportement et sur les lois de transfert sont le plus souvent modélisés dans des cadres théoriques séparés. Les lois de comportement sont le plus souvent issues de modèles d'endommagement conçus dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement en Milieu Continu ("*Continuum Damage Mechanics*", *CDM*). Les modèles d'endommagement peuvent être classés en deux catégories : les modèles phénoménologiques et les modèles micromécaniques. Les modèles de réseaux de fissuration permettent quant à eux de représenter l'influence de l'endommagement sur les transferts. On verra qu'il existe deux grandes familles de modèles : les modèles multimodaux et les modèles multi-continua.

La deuxième partie de ce rapport est l'exposé complet de la formulation du modèle THHMD, le nouveau modèle d'endommagement proposé dans le cadre de cette thèse. Le choix des variables d'état et de la variable d'endommagement est tout d'abord justifié. Puis la loi de comportement est établie, sur des principes à la fois phénoménologiques et micromécaniques. A chaque étape de la formulation, les postulats qui fondent le modèle sont critiqués, de manière à mieux situer la modélisation proposée par rapport aux modèles d'endommagement qui existent déjà. Ensuite, les lois de transfert de l'eau liquide, de la vapeur, de l'air gazeux et de la chaleur sont passées en revue. Partant de la modélisation des sols non saturés non isothermes déjà proposée par Gatmiri en milieu intact [70, 71], des modifications sont apportées de façon à tenir compte de l'accélération et de l'orientation des transferts dûs à la croissance de l'endommagement. Un résumé des équations et des paramètres du modèle est fourni.

La troisième volet de ce mémoire concerne la discrétisation des équations d'équilibre qui régissent le milieu multiphasique modélisé, dans lesquelles on a préalablement injecté la loi de comportement et les lois de transfert précédemment développées. Dans un premier temps, on rappelle la formulation forte du problème, puis on applique le Principe des Travaux Virtuels pour obtenir la formulation faible. Les discrétisations dans l'espace et dans le temps sont effectuées par la méthode de Galerkin et la θ -méthode, respectivement. Une fois discrétisées, les équations peuvent être intégrées dans le code d'Eléments Finis Θ -Stock, créé par Gatmiri [72].

La quatrième partie de ce rapport de thèse est ainsi consacré au travail de programmation, effectué en Fortran. L'architecture du code Θ -Stock est présentée, et le mode de stockage des variables est expliqué en détail. Ensuite, les sous-routines spécifiquement créées pour le modèle THHMD, ainsi que les sous-routines très affectées par l'implantation du modèle, sont présentées en détail. Un chapitre entier est consacré à l'algorithme spécifiquement conçu pour le modèle THHMD, qui comporte quelques singularités. Enfin, un chapitre explique, étape par étape, le processus de calcul du résidu utilisé dans la méthode de Newton-Raphson modifiée, car ce calcul comporte quelques spécificités.

Les résultats numériques obtenus avec le modèle THHMD programmé dans Θ -Stock sont présentés dans la cinquième et dernière partie de ce mémoire. Des tests de validation sont pratiqués, au cours desquels les résultats fournis par Θ -Stock sont confrontés à des résultats de référence trouvés dans des articles. Par ailleurs, des études paramétriques sont réalisées afin de vérifier les tendances de l'endommagement dans des problèmes réalistes et complexes, de manière à justifier l'utilisation du modèle THHMD. Une attention particulière a été portée sur le choix des paramètres matériels. Lorsque des paramètres n'étaient pas fournis par les auteurs, on s'est efforcé de trouver des valeurs réalistes dans d'autres articles de référence, ou le cas échéant, de caler les coefficients en étudiant les variations des paramètres en fonction de variables d'état comme la température ou le degré de saturation. Les conditions initiales et les conditions aux limites ont également été choisies avec soin, et ces choix sont exposés en détail. Les résultats ont été commentés et critiqués pour déceler les forces et les faiblesses du modèle. Les études paramétriques variées sont destinées à tester un maximum d'aspects du modèle.

Première partie

Problématique théorique

« Le premier [précepte] était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment comme être telle : c'est-à-dire d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention et de ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.

Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.

Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu comme par degrés jusques à la connaissance des plus composés [...]. Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers et des revues si générales que je fusse assuré de ne rien omettre. »

**R. Descartes, 1637, *Discours de la méthode*,
Maxi-Poche, p.33-34**

CHAPITRE 2

Comportement thermo-hydro-mécanique des sols non saturés

2.1 Des sols saturés aux sols non saturés

Ce travail de thèse a pour objet d'étude les sols non saturés, qui sont des corps multiphasiques constitués d'un squelette solide dont les pores renferment des fluides sous forme liquide et gazeuse (figure 2.1). Dans la plupart des cas étudiés, et dans le travail présenté ici, la phase liquide (dite aussi « mouillante ») sera constituée d'eau, et la phase gazeuse (dite aussi « non mouillante ») sera constituée d'air. En conditions non isothermes, l'air gazeux pourra être remplacé par un mélange gazeux fait d'air et de vapeur d'eau. L'eau liquide existe principalement sous deux formes. D'une part, les pores connectés forment un réseau tubulaire dans lequel l'**eau, dite libre**, circule sous la forme d'une phase continue. D'autre part, l'**eau adsorbée** forme des ménisques qui entourent les grains de la matrice solide. Lorsque le sol est séché, il reste parfois de l'humidité sous forme de ménisques dans le sol. Le sol n'est pas complètement sec ; il existe un degré de saturation résiduel. Le degré de saturation S_w et la teneur en eau θ_w sont définis comme suit :

$$S_w = \frac{V_w}{V_v}, \quad \theta_w = \frac{V_w}{V_{tot}} \quad (2.1)$$

où V_{tot} est le volume total de sol étudié, dont les pores occupent l'espace quantifié par V_v . V_w est le volume occupé par l'eau liquide dans le volume de sol étudié. On définit en outre la porosité n et l'indice des vides e :

$$n = \frac{V_v}{V_{tot}}, \quad e = \frac{V_v}{V_s} \quad (2.2)$$

où V_s est le volume occupé par les grains solides à l'intérieur du volume de sol étudié. Dans la suite, on notera σ''_{ij} la contrainte nette, et s la succion :

$$\sigma''_{ij} = \sigma_{ij} - p_a \delta_{ij}, \quad s = p_a - p_w \quad (2.3)$$

où σ_{ij} est le tenseur de contraintes (totales) de Cauchy, δ_{ij} est le tenseur identité d'ordre 2, p_w est la pression interstitielle de l'eau liquide, et p_a est la pression interstitielle de l'air (gazeux).

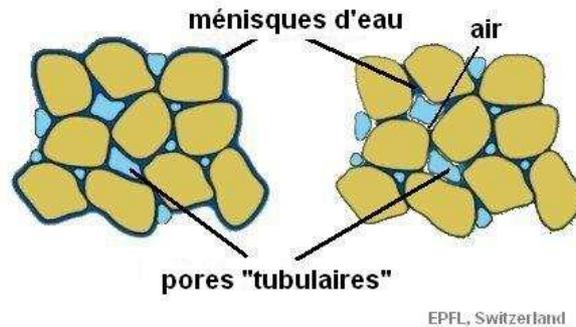


FIGURE 2.1 – Les sols non saturés : des milieux multiphasiques.

2.1.1 Comportement : contrainte effective ou variables indépendantes

Biot [22] a étendu la théorie de la consolidation de Terzaghi aux sols déformables, en définissant un coefficient de couplage hydro-mécanique $\left(1 - \frac{K}{K_s}\right)$, introduit dans l'expression de la contrainte

effective σ'_{ij} :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \left(1 - \frac{K}{K_s}\right) p_w \delta_{ij} \quad (2.4)$$

K et K_s désignent les modules de compression volumique de la matrice solide et de la phase solide (non poreuse), respectivement. La théorie de la consolidation de Terzaghi a ensuite été étendue aux sols quasi-saturés par Vaziri et Christian [200] (entre autres). Leur modèle repose sur l'hypothèse que la compressibilité des fluides interstitiels n'est pas infinie, ce qui limite les études aux cas où la phase gazeuse est discontinue (i.e. aux cas où l'air n'existe que sous forme de bulles à l'intérieur des pores). Kogho et al. [111] ont modifié le modèle élasto-plastique de Cam-Clay, conçu pour les sols saturés et reposant sur le concept de contrainte effective de Terzaghi, pour pouvoir représenter le comportement élastoplastique de sols non saturés. Pour cela, ils ont conservé la contrainte effective de Terzaghi comme variable d'état, mais ils ont introduit la succion dans l'expression de la variable d'écoulement. Pour modéliser le comportement d'un milieu constitué d'une matrice solide renfermant une phase mouillante (de l'eau) et une phase non mouillante (de l'huile), Bear et Pinder [19] ont intégré les équations d'équilibre et les lois de conservation de la masse, établies pour chacun des trois constituants à l'échelle microscopique. Cette approche se distingue des modélisations fondées sur le concept de contrainte effective, qui ne peut être envisagé qu'à une échelle macroscopique.

Bishop a été un des premiers à étendre aux milieux non saturés le concept de contrainte effective initialement défini pour les sols saturés par Terzaghi. La définition a été traduite par Delage et Cui [52] :

« la contrainte effective est une fonction de la contrainte totale et de la pression interstitielle de l'eau, qui contrôle les effets mécaniques dus à une modification de l'état de contrainte auquel est soumis un élément de sol ».

Bishop a proposé d'utiliser une contrainte effective σ'_{ij} qui dépend linéairement de la succion 2.3 :

$$\sigma'_{ij} = (\sigma_{ij} - p_a \delta_{ij}) + \chi_w (p_a - p_w) \delta_{ij} \quad (2.5)$$

Ce choix a souvent été repris par des auteurs (comme Bolzon [23] et Tamagnini [191], entre autres) qui ont considéré que le coefficient de Bishop χ_w pouvait être assimilé au degré de saturation 2.1 : $\chi_w = S_w$. Loret et Khalili [128] ont mis au point un modèle élasto-plastique dérivé du modèle de Cam-Clay initialement conçu pour les sols non saturés, en remplaçant la contrainte de Terzaghi par la contrainte de Bishop 2.5, et en introduisant la succion 2.3 uniquement dans la règle d'écoulement. Dans le modèle de Loret et Khalili, la succion n'est donc pas une variable d'état. Un cadre théorique unifié reposant sur le concept de contrainte effective a été proposé par Nuth et Laloui [149]. Par ailleurs, un cadre de modélisation fondé sur la théorie des mélanges et sur le concept de contrainte effective a été établi par Hutter et al., pour les sols saturés et non saturés [99]. Gray et Schrefler [86] ont défini une contrainte effective qui dépend de l'aire des surfaces de contact entre le squelette solide et les fluides interstitiels. Autrement dit, une grande importance est donnée aux interfaces solide/fluides, qui sont souvent considérées comme des parties intégrantes de la matrice solide dans les autres modèles. Borja [25] a montré que la contrainte effective :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \left(1 - \frac{K}{K_s}\right) (S_w p_w + (1 - S_w) p_a) \delta_{ij} \quad (2.6)$$

définie à l'aide du coefficient de couplage hydro-mécanique de Biot (équation 2.4), était thermo-

dynamiquement conjuguée au taux de déformation du squelette solide. Arezou Modaresi [141] a quant à elle proposé d'utiliser une contrainte dite capillaire σ_{ij}^c dans la définition des contraintes effectives :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p_a \delta_{ij} - \sigma_{ij}^c \quad (2.7)$$

Lassabatère [117] a intégré les variations de la pression capillaire $p_c = p_{atm} - p_w$ avec le degré de saturation dans la définition de la contrainte effective :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p_a \delta_{ij} - \left(S_w p_c + \int_{S_w}^1 p_c(x) dx \right) \delta_{ij} \quad (2.8)$$

Le choix d'une unique variable de contrainte, de type contrainte effective, ne permet pas la représentation des essais d'effondrement qui ont été pratiqués sur certains sols non saturés comme les loess [52]. C'est la limitation la plus souvent invoquée par les partisans des variables indépendantes [63, 96]. En outre, l'utilisation du concept de contrainte effective a également été remis en question pour les sols saturés dont la matrice est frottante [50], ainsi que pour les argiles plastiques denses compactées en conditions saturées [85].

Pour mieux modéliser le comportement des géomatériaux non saturés isothermes, certains chercheurs préconisent l'utilisation de deux variables de contrainte. Fredlund et Morgenstern [63] ont montré qu'il y avait trois choix possibles :

$$\begin{aligned} & (\sigma_{ij} - p_a \delta_{ij}), & (p_a - p_w) \delta_{ij} \\ & (\sigma_{ij} - p_a \delta_{ij}), & (\sigma_{ij} - p_w \delta_{ij}) \\ & (\sigma_{ij} - p_w \delta_{ij}), & (p_a - p_w) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.9)$$

La plupart des modèles formulés en variables indépendantes reposent sur l'utilisation du couple contraintes nettes, succion : $(\sigma_{ij} - p_a \delta_{ij}), (p_a - p_w) \delta_{ij}$. Mais d'autres options sont possibles, comme c'est rappelé dans les travaux de Delage et Cui [52]. En particulier, la combinaison de la contrainte de Bishop 2.5 avec la succion ou le degré de saturation permet de représenter les phénomènes d'hysteresis capillaire (voir la section 2.2 et [23] et [191]).

Comme la définition 2.5 ne suffit pas pour modéliser le phénomène d'effondrement observé lors de l'humidification d'un sol non saturé, ni pour représenter le renforcement du sol avec la succion, Gallipoli et al. [65] ont proposé quant à eux de prendre en compte l'effet stabilisateur de la succion dû au développement d'une tension capillaire au niveau des ménisques. L'effet de joint est modélisé par un paramètre unique, ξ , qui dépend du nombre de ménisques et de l'intensité de la force normale exercée par un unique ménisque au niveau du contact entre deux particules solides. Les auteurs supposent qu'il existe une relation unique entre le nombre de ménisques et le degré de saturation de la phase gazeuse $(1 - S_w)$. La force exercée par un ménisque dépend de la géométrie des grains. Dans le modèle proposé, il s'agit d'une fonction $f(s)$ variant entre 1 et 1,5, dont la courbe est obtenue d'après un modèle de sphères. L'effet capillaire est donc modélisé par :

$$\xi = (1 - S_w) f(s) \quad (2.10)$$

et ξ , qui augmente avec la succion, intervient dans le rapport de l'indice des vides e par l'indice des vides saturé e_s . Gallipoli et al. supposent que ce rapport e/e_s peut être déterminé par une fonction unique de ξ . Dans le modèle de Gallipoli, e/e_s est déterminé empiriquement à partir

des résultats d'essais de compression isotrope à différentes succions :

$$\frac{e}{e_s} = 1 - a[1 - \exp(b\xi)] \quad (2.11)$$

a et b sont des paramètres d'ajustement.

Par ailleurs, Pietruszczak et Pande [159] ont proposé de combiner une contrainte effective étendue $\tilde{\sigma}'_{ij}$ à une pression interstitielle moyenne \tilde{p} :

$$\begin{cases} d\tilde{\sigma}'_{ij} = d \left[(1-n) \left(\sigma_{ij}^s - \tilde{p}\delta_{ij} \right) \right] \\ \tilde{p} = S_w p_w + (1-S_w) p_a - \frac{2}{3} T \frac{\sqrt{1-S_w}}{\rho_V} \end{cases} \quad (2.12)$$

où σ_{ij}^s est le champ de contraintes exercé au sein de la matrice solide, T est la tension de surface exercée au niveau des ménisques, et ρ_V est la taille moyenne des pores.

Le recours aux variables indépendantes a permis de mettre au point des modèles de comportement élastiques fondés sur la définition de surfaces d'état pour l'indice des vides et le degré de saturation. De telles représentations donnent une bonne description de la dépendance des modules vis-à-vis de l'état de contraintes. Comme c'est rappelé par Delage et Cui [52], Fredlund a proposé un couple de surfaces d'état pour l'indice des vides et la teneur en eau :

$$\begin{cases} e = e_0 - C_t \log(p - p_a) - C_m \log(p_a - p_w) \\ \theta_w = \theta_{w0} - D_t \log(p - p_a) - D_m \log(p_a - p_w) \end{cases} \quad (2.13)$$

p désigne la contrainte (totale) moyenne, et e_0 et θ_{w0} sont respectivement l'indice des vides initial et la teneur en eau initiale. Le modèle de Fredlund a été repris par Edgar et al. [58], qui ont simplifié la loi d'évolution du degré de saturation, en optant pour la courbe de rétention de Brooks et Corey [28] :

$$S_w = \left(\frac{s_d}{s} \right)^\beta \quad (2.14)$$

s_d est la succion à partir de laquelle la phase aqueuse n'est plus continue, et β est un paramètre matériel.

Lloret et Alonso [126] ont eux proposé une surface d'état de l'indice des vides qui n'est pas plane dans l'espace logarithmique des variables de contrainte :

$$e = a + b \log(p - p_a) + c \log(p_a - p_w) + d \log(p - p_a) \log(p_a - p_w) \quad (2.15)$$

a, b, c et d sont des paramètres matériels.

Dans les travaux de Gatmiri [76, 70], le concept de surface d'état est étendu à des conditions non isothermes. L'effet de la température est modélisé par une fonction exponentielle, pour l'indice des vides (figure 2.2) comme pour le degré de saturation :

$$\begin{cases} e = (1 + e_0) \exp \left(-\frac{1}{(1-m)K_b} \left[a_e \frac{p''}{p_{atm}} + b_e \left(1 - \frac{p''}{\sigma_c} \cdot \frac{s}{p_{atm}} \right) \right]^{1-m} \right) \exp(-c_e(T - T_0)) - 1 \\ S_w = 1 - [a_s + b_s p''] [1 - \exp(c_s s)] \exp(d_s(T - T_0)) \end{cases} \quad (2.16)$$

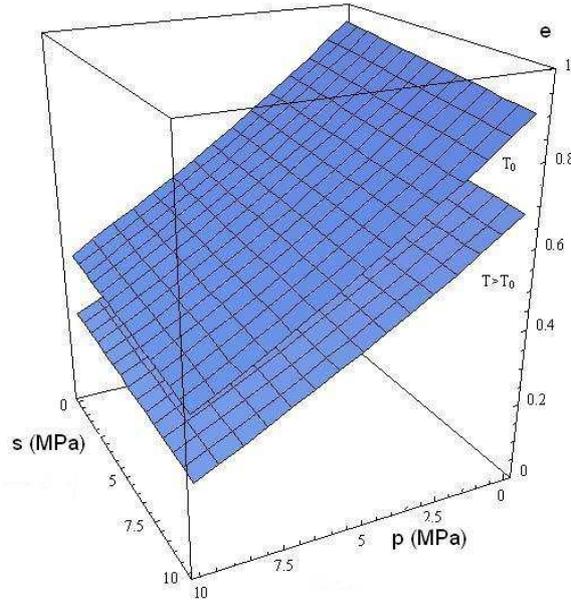


FIGURE 2.2 – Surface d'état thermique de l'indice des vides dans le modèle de Gatmiri [76, 70].
 $a_e = 1.5$, $b_e = 0.15$, $c_e = -3 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $\sigma_c = 800 \text{ kPa}$.

a_e , b_e , c_e , σ_c , a_s , b_s , c_s et d_s sont des paramètres matériels, e_0 et T_0 sont respectivement l'indice des vides initial et la température initiale, p'' est la contrainte nette moyenne et m est l'exposant qui intervient dans l'expression du module de compression volumique B dans un modèle élastique hyperbolique :

$$B = K_b p_{atm} \left(\frac{\sigma_3}{p_{atm}} \right)^m \quad (2.17)$$

σ_3 étant la valeur principale mineure du tenseur de contraintes totales, et p_{atm} étant la pression atmosphérique.

Toll [195] a proposé un modèle de surface d'état pour le volume massique de l'eau (ν_w), fondé sur le concept d'état critique et vérifié au moyen de tests de cisaillement réalisés à partir d'essais triaxiaux :

$$\begin{cases} q = M_a(p - p_a) + M_w(p_a - p_w) \\ \nu_w = \Gamma_{aw} - \lambda_a \ln(p - p_a) - \lambda_w \ln(p_a - p_w) \end{cases} \quad (2.18)$$

q est la contrainte (totale déviatorique), p est la contrainte (totale) moyenne, et M_a , M_w , Γ_{aw} , λ_a et λ_w sont des paramètres matériels. Wheeler [206] a par la suite modifié le modèle d'état critique mis au point par Toll.

Le plus connu des modèles de comportement élasto-plastiques formulés en variables indépendantes pour les sols non saturés a été développé par Alonso et Gens en 1990 [3]. Ce modèle, dit de Barcelone, a été dérivé du modèle de Cam-Clay. Une description complète du modèle est donnée dans [52]. Gatmiri a étendu ce modèle à des conditions non isothermes [69, 75]. La fonction de charge, représentée sur la figure 2.3 dans l'espace des trois variables de contrainte

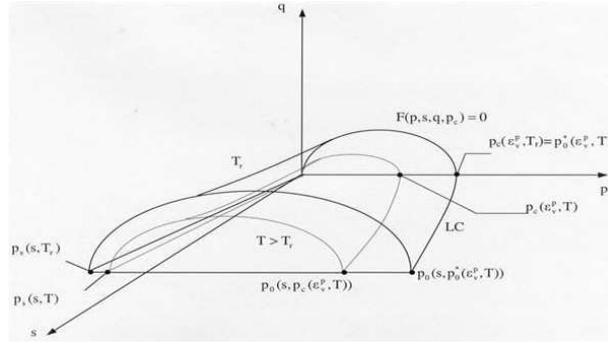


FIGURE 2.3 – Surface de charge du modèle élastoplastique thermo-hydro-mécanique de Gatmiri, pour les sols non saturés [69, 75].

(contrainte nette moyenne p'' , succion s et température T), est du type :

$$f_p(p'', q, e_v^p, T, s) = q^2 - M^2 [p'' + k s] [p_0(e_v^p, T, s) - p''] \quad (2.19)$$

2.1.2 Transfert de l'eau liquide

Pour les milieux non saturés, la succion 2.3 remplace la pression d'eau dans l'expression de la charge hydraulique h utilisée dans la théorie des sols saturés [51] :

$$h = \frac{s}{\gamma_w} + z \quad (2.20)$$

où γ_w est le poids volumique de l'eau, et z , la cote du point matériel considéré. Le concept de perméabilité à l'eau liquide, utilisé dans les sols saturés, est étendu aux sols non saturés, au moyen d'une dépendance vis-à-vis de la teneur en eau 2.2. Le plus souvent, le transfert de l'eau est représenté par un modèle diffusif, formalisé par une loi de Darcy étendue, dépendant de la charge hydraulique 2.20 [51] :

$$\mathbf{V}_w = k_w(\theta_w) \nabla(h) \quad (2.21)$$

où \mathbf{V}_w désigne la vitesse relative de l'eau (les grains solides étant considérés comme immobiles). En combinant la loi de Darcy 2.21 avec l'équation de continuité :

$$\text{div} \mathbf{V}_w = -\frac{\partial \theta_w}{\partial t} \quad (2.22)$$

on obtient l'équation dite de Richards :

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} = \text{div} \left[-k_w(\theta_w) \frac{\partial h}{\partial \theta_w} \nabla(\theta_w) \right] + \frac{\partial k_w(\theta_w)}{\partial z} \quad (2.23)$$

L'équation de Richards est établie en faisant l'hypothèse que la phase gazeuse est continue.

Comme c'est rapporté dans la thèse de Jenab [102], la dépendance de la perméabilité à l'eau liquide vis-à-vis de la teneur en eau ou du degré de saturation a été représentée de façons diverses, mais la quasi-intégralité des formulations met en jeu une perméabilité isotrope. Quelques modèles célèbres sont listés ci-dessous. L'indice 0 se rapportant à un état de référence.

- Modèle de Gens et al. [79] :

$$k_w(S_w) = \frac{k_{w0}}{\mu_w} k_R(S_w) \frac{n^3}{(1-n)^2} \frac{(1-n_0)^2}{n_0^3} \quad (2.24)$$

μ_w est la viscosité dynamique de l'eau, et $k_R(S_w)$ est la perméabilité relative de l'eau, que les auteurs choisissent comme étant de type Van Genuchten [197] (voir le paragraphe 3.1.2).

- Modèle de Gardner [66] :

$$k_w = \frac{k_{w0}}{\left(1 + a \left(\frac{|p_w - p_a|}{\rho_w}\right)^b\right)^b} \quad (2.25)$$

ρ_w est la masse volumique de l'eau. La dépendance vis-à-vis du degré de saturation est prise en compte via la courbe de rétention qui lie la succion au degré de saturation.

- Modèle de Scott [176] :

$$k_w = k_{w0} (1 - n(1 - S_w)) \quad (2.26)$$

- Modèle de Corey [43] , Kovacs [112] et Irmay [100] :

$$k_w = k_{w0} \left(\frac{S_w - S_{w,r}}{1 - S_{w,r}}\right)^d \quad (2.27)$$

$S_{w,r}$ est le degré de saturation résiduel.

- Modèle de Richards et Chan [170] :

$$k_w = E + \frac{D}{A + B(p_a - p_w)^m + C(p_a - p_w)^n} \quad (2.28)$$

2.2 Hystérésis capillaire

Il y a hystérésis capillaire lorsque la courbe de rétention du sol n'est pas la même au séchage et au remouillage. Dans les sols argileux, la réversibilité est conservée à forte succion. En effet, une réhumidification à forte succion ne modifie pas la structure du sol, au sein duquel l'eau est principalement présente sous forme adsorbée [51]. La désaturation par séchage affecte les pores d'une taille d'autant plus grande que la succion est élevée. C'est pourquoi la pente de la courbe de rétention d'un sable est d'autant plus douce que la courbe granulométrique qui le caractérise est étalée. Un sable dont l'espace intergranulaire est quasiment homogène a une tendance à se désaturer brutalement, lorsque le niveau de succion de désaturation est atteint [51].

Pour modéliser les effets d'hystérésis capillaire, Bolzon [23] a combiné l'utilisation de deux variables d'état : la contrainte effective de Bishop (avec $\chi_w = S_w$, voir l'équation 2.5) et la succion. Tamagnini a fait le même choix, en remplaçant la variable d'état de succion par le degré de saturation. La courbe de rétention qu'il a adoptée est dérivée du modèle de Van Genuchten [197].

Si on fait l'hypothèse que le squelette est indéformable, on peut supposer que l'hystérésis capillaire se manifeste essentiellement par l'existence de teneurs en eau résiduelles lors d'un chemin de drainage-imbibition. Dangla et al. [47] ont introduit la variation irréversible de la teneur en

eau dans le jeu de variables d'état. La teneur en eau est ainsi décomposée en une partie élastique et en une partie plastique :

$$\theta_w - \theta_{w0} = \theta_w^e + \theta_w^p \quad (2.29)$$

L'énergie libre est décomposée sous la forme suivante :

$$\Psi_s(\theta_w^e, \theta_w^p) = W(\theta_w^e) + U(\theta_w^p) \quad (2.30)$$

Les droites qui permettent de passer de la courbe de drainage vierge à la courbe d'imbibition vierge (courbes de transition, "scanning curves") ont une équation de la forme :

$$d\theta_w^e = -N(p_c)dp_c \quad (2.31)$$

où p_c est la pression capillaire : $p_c = s = p_a - p_w$. Si on se donne une fonction de charge f , alors une règle d'écoulement associée donne :

$$d\theta_w^p = -d\lambda \frac{\partial f}{\partial p_c} \quad (2.32)$$

Les auteurs [47] font l'hypothèse que les grains ne se déforment pas, et que l'énergie libre du squelette peut donc s'interpréter comme la somme des énergies superficielles des interfaces entre les trois phases :

$$\Psi_s = \gamma_{wa}\Sigma_{wa} + \gamma_{sw}\Sigma_{sw} + \gamma_{sa}\Sigma_{sa} \quad (2.33)$$

où $\Sigma_{\alpha\beta}$ désigne l'aire de la surface de contact entre les phases α et β (avec $\alpha, \beta = s, w, a$). Lors d'un cycle de drainage-imbibition, des interfaces mouillées sont remplacées par des surfaces sèches. La variation d'énergie élastique correspondante est :

$$dU = (\gamma_{sw} - \gamma_{sa})d\Sigma_{sw} \quad (2.34)$$

En conditions isothermes, et avec des grains solides indéformables, on a $d\epsilon = dT = 0$. Compte-tenu de l'Inégalité de Clausius-Duhem (voir le paragraphe 3.1.1.2), de la décomposition 2.29 et de l'expression de la teneur en eau réversible 2.31, on a :

$$-p_c N(p_c) dp_c - p_c d\theta_w^p - d\Psi_s \geq 0 \quad (2.35)$$

Lors d'un cycle, $dW(\theta_w^e) = 0$ (pas d'hystérésis en élasticité) et lors d'un cycle infinitésimal, $dp_c = 0$ par définition. On obtient alors :

$$-p_c d\theta_w^p - dU \geq 0 \quad (2.36)$$

Une partie du travail élémentaire $-p_c d\theta_w^p$ est transmise au squelette (2.34), et l'autre partie est dissipée sous forme de chaleur (2.36). Dangla [46] et Coussy et Dangla [44] ont développé d'autres modèles poro-plastiques pour tenir compte de l'hystérésis capillaire.

Wheeler et al. [207] ont également développé un modèle de comportement élasto-plastique qui tient compte de l'hystérésis capillaire. Les variables d'état utilisées sont la contrainte de Bishop (équation 2.5) et la succion modifiée $s^* = ns$, dont les variables conjuguées sont respectivement le tenseur des déformations ϵ_{ij} et le degré de saturation en eau S_w . Trois surfaces de charge sont combinées : les surfaces LC et SI du modèle de Barcelone [3], et une nouvelle courbe SD (“*Suction Decrease*”). Les auteurs n'utilisent pas les équations des courbes de rétention ($S_w(s)$) comme dans les travaux de Sheng et de ses collaborateurs [181]. Wheeler et al. travaillent avec des courbes SI et SD qui suivent la même évolution : $\frac{ds^*_I}{s^*_I} = \frac{ds^*_D}{s^*_D}$:

$$dS_w^p = -(\lambda_s - \kappa_s) \frac{ds^*_I}{s^*_I} = -(\lambda_s - \kappa_s) \frac{ds^*_D}{s^*_D} \quad (2.37)$$

Dans le modèle de Sheng et de ses collaborateurs [181], les équations des surfaces de charge SI et SD s'expriment en fonction d'un seuil de succion, qui dépend du degré de saturation. Il est nécessaire de modéliser les courbes de drainage et d'imbibition et d'inclure les équations correspondantes dans le système de relations constitutives. Les auteurs introduisent des potentiels plastiques qui dépendent de la dilatation (pour les sols gonflants) ou du retrait (pour les sols à effondrement), et des lois d'écrouissage isotrope. Par rapport au modèle de Barcelone initial, le modèle proposé par les auteurs comporte trois paramètres matériels et une relation constitutive supplémentaires. Les expressions de l'énergie libre et du potentiel de dissipation sont telles que les évolutions plastiques des courbes SI et SD ne contribuent pas à la dissipation plastique, mais seulement au travail plastique. Autrement dit, tout travail plastique associé à un incrément du degré de saturation plastique est stocké et l'évolution thermodynamique correspondante est réversible. Le modèle développé par Sheng et al. [181] comporte quelques limitations :

- si les lois d'écoulement SI et SD sont non associées, alors il devient impossible de dériver des expressions thermodynamiquement compatibles pour l'énergie libre et pour le potentiel de dissipation ;
- comme les surfaces de charge ne sont pas toujours convexes, il est recommandé d'utiliser une méthode d'intégration explicite dans l'algorithme du calcul itératif.

2.3 Effets de la température

2.3.1 Sols saturés

L'étude du réchauffement d'un massif géologique saturé est souvent motivée par des projets d'enfouissement de déchets radioactifs. Comme les galeries de stockage sont conçues pour être à grande profondeur, sous la nappe phréatique, certains auteurs considèrent que l'étude peut être menée en conditions saturées, même si cette hypothèse ne reflète pas toujours l'état initial de la barrière géologique. Globalement, la chaleur dégagée par les déchets entraîne une dilatation du squelette solide et de l'eau interstitielle. Cependant, la dilatation de l'eau étant plus importante que celle de l'espace poreux, l'augmentation de la température provoque une augmentation de la pression interstitielle de l'eau, et une diminution de la contrainte effective, ce qui peut entraîner une consolidation du sol. La diminution de la contrainte effective peut aussi être à l'origine de la rupture du massif, ce qui constitue évidemment un risque majeur de fuite des radionucléides.

2.3.1.1 Etudes expérimentales

Campanella et Mitchell [31] ont étudié les effets de variations de température sur l'état de contraintes de sols saturés, en conditions drainées et non drainées. Les échantillons étaient soumis à une phase de chauffage suivie d'une phase de refroidissement. Les chercheurs ont observé un phénomène d'hystérésis :

- en conditions drainées, la quantité d'eau perdue par chauffage n'est pas entièrement recouvrée lors de la phase de refroidissement ;
- en conditions non drainées, la pression interstitielle de l'eau, qui augmente au cours du chauffage et qui diminue au cours du refroidissement, atteint une valeur finale inférieure à sa valeur initiale, alors que la température imposée à la fin du refroidissement est égale à la température initiale.

A partir des essais réalisés, les auteurs ont en outre établi une relation entre la variation de contrainte effective moyenne de Terzaghi $\Delta p'$ et la variation de température ΔT :

$$\frac{p'}{p} = - \frac{e_0 \left[(\alpha_S - \alpha_w) + \frac{\alpha_{st}}{n} \right]}{0.435 C_R} \Delta T \quad (2.38)$$

où α_S et α_w désignent les coefficients de dilatance thermique de la phase solide et de l'eau liquide, respectivement. e_0 est l'indice des vides initial et n est la porosité du milieu. α_{st} et C_R sont des paramètres matériels. Les auteurs constatent en outre que les pentes de la courbe de chargement - déchargement et de la courbe de consolidation vierge sont insensibles à la variation de la température.

Demars et Charles [53] ont exercé des chargements thermiques cycliques sur divers sols saturés, pour des températures variant entre $25^\circ C$ et $50^\circ C$. A l'issue des cycles de chargement, les auteurs ont constaté une réduction de l'indice des vides. Cette diminution de porosité est indépendante de la contrainte de confinement pour les matériaux normalement consolidés, alors qu'elle dépend du niveau de contrainte et de l'indice de plasticité du sol pour un échantillon surconsolidé.

2.3.1.2 Modélisations

Jusque dans les années 70, le problème de la sécurité des réservoirs était surtout traité à travers les équations de transfert. Schiffman [174] a été un des premiers à tenir compte des déformations d'un milieu poreux saturé soumis à un chargement thermique, en concevant un modèle thermo-hydro-mécanique couplé fondé sur les équations de Biot. Puis, Lippman [122] a couplé l'équation de consolidation de Terzaghi aux équations de transfert de liquide et de chaleur, ainsi qu'à l'équation de conservation de la masse de liquide et à l'équation de conservation de l'énergie, pour étudier les réservoirs géothermiques. Brownell et al. [29] ont construit un modèle thermo-hydro-mécanique complètement couplé, en introduisant une dépendance de la porosité et de la perméabilité vis-à-vis des contraintes subies par le squelette et par le liquide interstitiel.

Giraud [84] a étudié en détail le problème de la modélisation des argilites saturées soumises à des sollicitations thermiques, dans le but de concevoir des galeries de stockage de déchets radioactifs. Il a résolu de manière analytique des problèmes thermo-hydro-mécaniques unidimensionnels, et proposé des solutions numériques pour des problèmes traités en déformations planes ou en configuration axisymétrique.

Gatmiri a établi une surface d'état de pour l'indice des vides en conditions saturées [69, 73, 75] :

$$e = e_0 + C_{Cv} \ln \left(\frac{p'}{p'_g} \right) + (1 + e_0) \alpha (\Delta T, p') \Delta T \quad (2.39)$$

où p'_g est la pression dite géostatique, qui correspond à la fin de la phase de saturation de l'échantillon dans les conditions usuelles de température et de pression atmosphérique. On considère qu'à la pression géostatique, les déformations élastiques sont nulles. e_0 est l'indice des vides initial. C_{Cv} est le module de compressibilité isotherme. Le coefficient de couplage $\alpha (\Delta T, p')$ est celui qui a été proposé par l'équipe de l'ISMES à Bergame (en Italie) [97, 98] :

$$\alpha (\Delta T, p') = \alpha_0 + \alpha_2 \Delta T + (\alpha_1 + \alpha_3 \Delta T) \ln \left(\frac{p'}{p'_g} \right) \quad (2.40)$$

où α_0 , α_1 , α_2 et α_3 sont constantes. La formule empirique 2.40 repose exclusivement sur des résultats expérimentaux obtenus par l'ISMES.

2.3.2 Milieux poreux non saturés

Les travaux de Romero [172], Kanno [107] et Chijimatsu [39] montrent qu'à une succion donnée, le degré de saturation décroît lorsque la température augmente. Romero [172] a en outre montré que la pression de préconsolidation de l'argile de Boom augmentait avec la température.

2.3.2.1 Modélisation des transferts

En conditions isothermes, les transferts d'eau et d'air ont le plus souvent été modélisés comme des flux biphasiques. Cette technique est inspirée du génie pétrolier. Des solutions numériques [88, 137] et semi-analytiques [142] ont été proposées. Cependant, dans la plupart de ces travaux, la surpression d'air n'est généralement pas prise en compte. Au départ, les travaux réalisés en conditions non isothermes étaient fondés sur l'hypothèse que la matrice solide était rigide. Rollins et al. [171] ont ainsi supposé que les transferts de fluide et de chaleur étaient véhiculés par la vapeur. Les résultats n'étant pas en conformité avec l'expérience, Philip et de Vries [158] ont proposé de modéliser les transferts du constituant eau à travers l'influence des gradients de la température et de l'humidité sur les flux de l'eau liquide et de la vapeur. Pour ce faire, il ont mis en évidence l'importance des phénomènes capillaires sur le transfert de l'eau liquide. Le flux de la vapeur est quant à lui considéré comme étant essentiellement diffusif. Les travaux de Philip et De Vries ont été repris par de nombreux auteurs, notamment par Luikov [131], et plus tard par Gatmiri [68, 69, 70, 72]. Geraminezad et Saxena [80] ont proposé un modèle thermo-hydro-mécanique complet, dans lequel le changement de phase de l'air, qui peut aussi exister sous forme dissoute, est pris en compte. Comme chez Philip et de Vries [158], le transfert de l'air est modélisé par une loi de Darcy. Dakshanamurthy et Fredlund [45] ont proposé un modèle unidimensionnel alternatif, dans lequel le transfert de l'air est modélisé par une loi de Fick. Mais le flux de la vapeur et le transfert diffusif de la chaleur ne sont pas pris en compte. De plus, l'équation de transfert de la chaleur est découplée du reste des équations du modèle.

La loi de diffusion de la chaleur, ou loi de Fourier, se déduit des lois de la thermodynamique, en

exprimant le potentiel dissipatif du milieu solide considéré [118]. Dans un milieu multiphasique, l'équation de transfert de la chaleur doit prendre en compte les différents constituants [208] :

$$\mathbf{Q} = -\lambda \nabla(T) + [C_{Pw}\rho_w \mathbf{V}_w + C_{Pv}\rho_v \mathbf{V}_v + C_{Pa}\rho_a \mathbf{V}_a] (T - T_0) + h_{fg} (\rho_w \mathbf{V}_w + \rho_v \mathbf{V}_v) \quad (2.41)$$

\mathbf{V}_w , \mathbf{V}_v et \mathbf{V}_a désignent respectivement les vitesses relatives de l'eau, de la vapeur et de l'air. λ est le coefficient de conductivité thermique, ρ_w , ρ_v et ρ_a sont respectivement les masses volumiques de l'eau, de la vapeur et de l'air. C_{Pw} , C_{Pv} et C_{Pa} sont les capacités calorifiques de l'eau, de la vapeur et de l'air (gazeux) respectivement. T_0 est une température de référence, et h_{fg} est la chaleur latente d'évaporation. On reconnaît le transfert diffusif $-\lambda \nabla(T)$. Farouki [62] a proposé plusieurs expressions possibles pour λ , de manière à représenter les contributions de chaque corps au transfert diffusif. Le terme $+h_{fg} (\rho_w \mathbf{V}_w + \rho_v \mathbf{V}_v)$ quantifie la contribution de la vapeur au transfert de la chaleur. Le terme $+ [C_{Pw}\rho_w \mathbf{V}_w + C_{Pv}\rho_v \mathbf{V}_v + C_{Pa}\rho_a \mathbf{V}_a] (T - T_0)$ modélise le transfert advectif.

2.3.2.2 Prise en compte des déformations du squelette

Narasimhan et Witherspoon [143] ont été parmi les premiers à coupler un modèle de transfert biphasique non isotherme à un modèle de déformation caractérisant le squelette solide, en une dimension. Puis Geraminezad et Saxena [80] ont proposé un modèle thermo-hydro-mécanique complètement couplé pour un milieu poreux non saturé et non isotherme. Cependant, le modèle de Geraminezad et Saxena se limite à la description des déformations volumiques, sous l'effet de variations de la pression du gaz et de la succion, en thermo-élasticité. Les chargements mécaniques extérieurs ne sont pas pris en compte.

Schrefler et al. [175] ont développé un modèle numérique thermo-hydro-mécanique complètement couplé, dans lequel la chaleur est échangée par conduction et convection, et dans lequel la viscosité du fluide interstitiel dépend de la température. Cependant, la vapeur n'est pas prise en compte, ni dans les transferts de fluide, ni dans le transport de la chaleur. L'évaporation et la condensation ont été prises en compte par Gawin et al. [78], pour des gammes de saturation très étendues.

Matyas et Radhakrishna [135] ont montré que dans le cadre d'une formulation en variables indépendantes, il existait une relation unique entre le degré de saturation d'une part, et les variables d'état de contrainte (contrainte nette, succion et température) d'autre part. Le concept de surface d'état a ensuite été repris, notamment par Gatmiri [76, 70] (équations 2.16). Outre le degré de saturation, Gatmiri a proposé une surface d'état thermo-hydro-mécanique complètement couplée pour l'indice des vides d'un sol non saturé, qui est compatible avec le modèle élastique non linéaire hyperbolique de Kondner-Duncan (équations 2.16). Lloret et Alonso [126] ont également proposé une surface d'état pour l'indice des vides, mais sans y inclure les effets de la température (équation 2.15). Lewis et Schrefler [121] ont utilisé le concept de surface d'état de l'indice des vides, notamment pour simuler les différentes étapes de construction de barrages en terre.

CHAPITRE 3

Endommagement en milieu poreux non saturé

Des études bibliographiques critiques sur la modélisation de l'endommagement dans les milieux poreux multi-phasiques ont été publiées dans [6, 5]. Le modèle proposé dans le cadre de cette thèse a initialement été conçu pour les milieux poreux non saturés isothermes [4, 72, 8, 7], puis étendu à des conditions non isothermes [10, 9]. C'est pourquoi les effets thermiques ont surtout été étudiés sur des matériaux poreux non saturés intacts. Dans la revue bibliographique qui suit, le problème de la modélisation de l'endommagement est donc implicitement traité en conditions isothermes. La théorie de l'endommagement a été étudiée en profondeur pour les milieux secs. Les modèles existants pour les écoulements de fluides dans les réseaux de fissures sont décrits en détails. Puis l'étude est problématisée autour de l'enjeu que constitue le couplage d'un modèle d'endommagement et d'un modèle dédié à un milieu poreux non saturé, tant du point de vue de la loi de comportement que du point de vue des lois de transfert.

3.1 Etude bibliographique de l'endommagement

L'endommagement est un phénomène dissipatif à l'origine de la création de micro-vides ou de micro-fissures dans le matériau étudié [119]. Le mécanisme en jeu peut être la nucléation de micro-cavités ou la décohésion de grains constituant la matrice solide. La création de micro-vides réduit la surface effective du matériau considéré, dont les caractéristiques mécaniques sont diminuées. La fissuration peut avoir des origines physiques diverses. Mécaniquement, une fissure fermée s'ouvre toujours sous une sollicitation de type tension. Cette tension peut être provoquée par une variation de contrainte mécanique, de succion ou de température.

Par ailleurs, l'ouverture de fissures augmente le volume de l'espace poreux, ce qui transforme les modalités de transfert des fluides dans le milieu. Les transferts thermiques peuvent également être affectés, par couplage. Les modèles de joint rocheux permettent de décrire les interactions hydro-mécaniques entre une fissure et le continuum qui l'entoure, mais ne sont pas très appropriés pour décrire le comportement hydro-mécanique couplé d'un Volume Élémentaire Représentatif autour de la galerie. Les modèles de réseaux de fissures permettent de prédire les transferts de fluide interstitiel en se basant sur la modélisation des propriétés de rétention et de conductivité des réseaux poreux.

Les modèles de réseaux de fissures sont généralement complètement indépendants des problèmes de mécanique. A l'inverse, les modèles d'endommagement de la Mécanique des Milieux Continus (*Continuum Damage Mechanics, CDM*) ne décrivent généralement que le problème de mécanique, et sont le plus souvent formulés pour des matériaux secs. La plupart des modèles d'endommagement dédiés à des matériaux non saturés reposent sur le concept de contrainte effective de Bishop, ce qui revient à découpler partiellement le problème de mécanique de l'endommagement du problème d'interaction avec les fluides interstitiels [27, 177, 103].

3.1.1 Endommagement en mécanique des milieux continus (secs)

Pour alléger les calculs, la variable d'endommagement micro-mécanique est parfois non-locale. Dans ce cas, les données relatives à la fissuration sont le plus souvent homogénéisées [115]. Cette démarche est souvent adoptée dans les modèles d'endommagement mixtes, combinant des aspects micromécaniques et phénoménologiques [94, 179, 177, 188]. A l'inverse, dans les approches énergétiques, la variable d'endommagement est le plus souvent sans lien avec la réalité physique [64, 162, 146, 210].

La plupart des modèles d'endommagement permettent de représenter un radoucissement des déformations [48, 11, 12, 152]. Les modèles mixtes sont le plus souvent associés à un critère de fracturation [94, 179, 180, 188]. Dans les modèles phénoménologiques, les lois de comportement mécaniques sont dérivées de potentiels thermodynamiques. La formulation du modèle est plus simple que dans les autres approches, mais la représentation de la dégradation mécanique est plus abstraite.

Dans les théories phénoménologiques reposant sur une résolution lagrangienne du problème de maximisation de la dissipation [162], l'inégalité de Clausius-Duhem est intégrée à la formulation du modèle. Dans tous les autres cas, la consistance thermodynamique du modèle doit être vérifiée à chaque itération.

3.1.1.1 Modèles micro-mécaniques

Dans les modèles micromécaniques, la variable d'endommagement a un sens physique, lié à la fraction volumique occupée par des fissures dans le matériau endommagé [48], au taux d'énergie dissipée par fracturation [16] ou à des paramètres de fissuration [18]. La réduction de surface effective du matériau endommagé provoque une redistribution des contraintes, le plus souvent modélisée en employant des contraintes « effectives ». Dans les modèles les plus simples, l'endommagement est un scalaire qui représente une densité de fracturation :

$$\omega = \frac{V_{solide}}{V_{VER}} \quad (3.1)$$

où V_{VER} est le Volume Élémentaire Représentatif (VER) étudié. C'est l'échantillon pour l'expérimentateur, et l'élément fini du numéricien. V_{solide} est le volume *effectivement* occupé par le matériau solide considéré, c'est-à-dire le volume occupé par la matrice, abstraction faite du volume occupé par les fissures. Avec une variable d'endommagement scalaire comme celle qui est définie dans l'équation 3.1, la contrainte (totale) « effective » $\hat{\sigma}_{ij}$ est calculée par la relation suivante :

$$\sigma_{ij} = (1 - \omega) \hat{\sigma}_{ij} \quad (3.2)$$

Le terme « contrainte effective » est propre à la Mécanique de l'Endommagement en Milieux Continus (*Continuum Damage Mechanics, CDM*). Dans la suite, pour ne pas faire de confusion avec le concept de contrainte effective de Bishop, on parlera de « contrainte endommagée ». La contrainte endommagée est la contrainte développée dans la partie solide du VER, fictivement considéré comme un milieu intact continu [48].

Le concept de densité de fissuration peut être élargi. Si on suppose qu'un VER tridimensionnel est parcouru par N plans de fissurations, alors le tenseur de densité de fissuration est défini par [106] :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{V_{VER}} \sum_{K=1}^N (l_K^3 n^K_i n^K_j) \quad (3.3)$$

où l_K est la dimension caractéristique du K^{eme} plan de fissuration, et où \mathbf{n}^K est un vecteur unitaire normal au K^{eme} plan de fissuration. **Si on suppose que les fissures qui endommagent le matériau n'interagissent pas**, la perte d'énergie élastique due à la fissuration peut s'écrire

[106] :

$$\Delta W_e = \frac{1}{2 V_{VER}} \sum_{K=1}^N \left(n^K_i \sigma_{ij} \langle b^K \rangle_j \right) S^K \quad (3.4)$$

où $\langle \mathbf{b}^K \rangle$ est le vecteur déplacement de l'ouverture de la K^{eme} fissure ("crack opening vector") et où S^K est la surface du K^{eme} plan de fissuration. En deux dimensions [106] :

$$\langle b^K \rangle_j = \frac{\Pi l^K}{E_0} n^K_l \sigma_{lj} \quad (3.5)$$

avec $S^K \equiv 2l^K$ (en 2D, la surface d'une fissure vaut deux fois son rayon caractéristique) et $V_{VER} \equiv A_{VER}$. E_0 est le module d'Young du matériau intact. Le tenseur des contraintes étant symétrique, la combinaison des équations 3.4 et 3.5 donne alors :

$$\Delta W_e = \frac{\Pi}{E_0} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \Omega^{2D}_{ki} \quad (3.6)$$

où le tenseur de densité de fissuration bidimensionnel est défini par :

$$\Omega^{2D}_{ij} = \frac{1}{A_{VER}} \sum_{K=1}^N (l^K^2 n^K_i n^K_j) \quad (3.7)$$

En trois dimensions, le vecteur déplacement de l'ouverture d'une fissure dépend de composantes de cisaillement, et la perte d'énergie élastique prend la forme [106] :

$$\Delta W_e = \frac{8(1 - \nu_0^2)}{3(1 - \nu_0/2)E_0} \left[(\sigma_{ij} \sigma_{jl}) \Omega_{li} - \frac{\nu_0}{2} \sigma_{ji} \frac{1}{V_{VER}} \sum_K (l^K^3 n^K_i n^K_j n^K_k n^K_l) \sigma_{lk} \right] \quad (3.8)$$

où ν_0 est le coefficient de Poisson du matériau intact. Le terme relatif aux déformations de cisaillement $\frac{1}{V_{VER}} \sum_K (l^K^3 n^K_i n^K_j n^K_k n^K_l)$ est un tenseur d'ordre 4, qui est indépendant du tenseur de densité de fissuration 3.3. En fait, la déviation par rapport au cas orthotrope est faible, et on peut négliger ce terme [106]. Ainsi, dans l'hypothèse où les fissures n'interagissent pas :

$$\Delta W_e = \frac{8(1 - \nu_0^2)}{3(1 - \nu_0/2)E_0} (\sigma_{ij} \sigma_{jl}) \Omega_{li} \quad (3.9)$$

Si on suppose que les fissures qui endommagent de Volume Élémentaire Représentatif n'interagissent pas, il est alors possible de modéliser l'endommagement en utilisant le tenseur de densité de fissuration 3.3, qui est d'ordre 2.

Dans le cas le plus général, le concept de contrainte effective est défini au moyen d'un opérateur \mathbf{M} d'ordre 4 [92] :

$$\hat{\sigma}_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{lk} \quad (3.10)$$

Un des opérateurs les plus couramment utilisés en CDM est l'opérateur de Cordebois et Sidoroff [42] :

$$\hat{\sigma}_{ij} = M_{ijkl} (\Omega_{pq}) \sigma_{kl} = (\delta - \Omega)^{-1/2}_{ik} \sigma_{kl} (\delta - \Omega)^{-1/2}_{lj} \quad (3.11)$$

Comme c'est rappelé dans l'ouvrage de Lemaître et Desmorat [119] (p.26), l'opérateur de Cordebois et Sidoroff [42, 185] :

1. permet de définir une contrainte endommagée **indépendamment de la loi de comportement** en jeu ;
2. assure la **symétrie de la contrainte endommagée** ;
3. permet d'assurer la **consistance thermodynamique** du modèle : la contrainte endommagée définie par l'opérateur de Cordebois et Sidoroff peut être dérivée d'un potentiel thermodynamique, et on peut appliquer le principe d'équivalence des déformations.

Dans les modèles micro-mécaniques fondés sur le concept de contrainte endommagée (ou contrainte « effective » en CDM), le tenseur de rigidité endommagée $D_{eijkl}(\Omega_{pq})$ est souvent calculé par application du Principe d'Energie Elastique Equivalente (PEEE). Comme c'est rappelé dans les travaux de Hansen et Schreyer [92], ce principe postule que l'énergie de déformation élastique du matériau endommagé dans son état mécanique réel est égale à l'énergie de déformation élastique du même matériau, fictivement intact et soumis à la contrainte endommagée $\hat{\sigma}_{ij}$ définie précédemment :

$$W_e(\sigma_{pq}, \Omega_{pq}) = W(\hat{\sigma}_{pq}, \hat{\Omega}_{pq} = 0) \quad (3.12)$$

L'équation 3.12 peut se transcrire de la manière suivante :

$$\frac{1}{2}\sigma^T : D_e(\Omega_{pq})^{-1} : \sigma = \frac{1}{2}\hat{\sigma}^T : D_e^{0-1} : \hat{\sigma} \quad (3.13)$$

soit :

$$\frac{1}{2}\sigma^T : D_e(\Omega_{pq})^{-1} : \sigma = \frac{1}{2}\sigma^T : M(\Omega_{pq})^T : D_e^{0-1} : M(\Omega_{pq}) : \sigma \quad (3.14)$$

et on en déduit l'expression du tenseur de rigidité dégradée :

$$D_e(\Omega_{pq}) = M(\Omega_{pq})^{-1} : D_e^0 : M(\Omega_{pq})^{-T} \quad (3.15)$$

La combinaison du concept de contrainte effective et du PEEE permet de déterminer facilement la loi de comportement du matériau endommagé, mais l'endommagement reste une notion relativement abstraite. Sa définition est indirecte. L'endommagement se mesure par ses effets sur les modules d'Young et les coefficients de Poisson [119]. Dans certains modèles, une relation plus explicite existe entre le tenseur de densité de fissuration et la géométrie des micro-fissures qui endommagent le VER. Chez Swoboda et Yang [188], qui supposent que les fissures sont des plans circulaires, les longueurs caractéristiques des fissures sont explicitement définies comme leurs rayons :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{V_{VER}} \sum_{K=1}^N (r_K^3 n^K_i n^K_j) \quad (3.16)$$

Homand et al. [94] proposent d'utiliser une densité de fissuration définie par rapport à un état initialement endommagé. Les micro-fissures sont des plans circulaires, dont le rayon est noté r^0 dans l'état initial :

$$\Omega_{ij} = \sum_{K=1}^N \left(\frac{r_K^3 - r_K^0{}^3}{r_K^0{}^3} n^K_i n^K_j \right) \quad (3.17)$$

Dans les définitions de type 3.3, la dimension caractéristique du VER joue le rôle de longueur

matérielle interne. L'échelle à laquelle on observe les fissures conditionne la définition de la densité de fissuration. Chez Homand, la longueur matérielle interne est le rayon des fissures dans l'état initial, ou configuration de référence. Homand utilise une définition de la variable d'endommagement qui est plus adaptée aux travaux expérimentaux. Dans de nombreux modèles [55, 90, 56, 91, 179, 177], les micro-fissures sont rassemblées en groupes de plans approximativement parallèles. Cette démarche permet de travailler dans un plan principal du tenseur de densité de fissuration :

$$\Omega_{ij} = \sum_{k=1}^3 \left(d_k n^k_i n^k_j \right) \quad (3.18)$$

La valeur propre d_k est la densité ou fraction volumique de la k^{eme} famille de méso-fissures, et le vecteur n^k est le vecteur normal au k^{eme} méso-plan de fissuration. Dans les problèmes hydro-mécaniques, une relation encore plus explicite à la géométrie des fissures peut être introduite. Shao et al. [180] ont travaillé sur des matériaux fissurés saturés. Supposant que les fissures sont des plans circulaires rassemblés en familles de $N(\mathbf{n}^{\mathbf{K}})$ micro-fissures caractérisées par un vecteur normal $\mathbf{n}^{\mathbf{K}}$, Shao et al. ont calculé les déformations irréversibles dues à l'endommagement de la manière suivante :

$$\epsilon_{ij}^d = \frac{1}{V_{VER}} \frac{1}{4\Pi} \int_{A_{VER}} N(\mathbf{n}^{\mathbf{K}}) \Pi r(\mathbf{n}^{\mathbf{K}})^2 e(\mathbf{n}^{\mathbf{K}}) n^{\mathbf{K}}_i n^{\mathbf{K}}_j r \quad (3.19)$$

où $r(\mathbf{n}^{\mathbf{K}})$ et $e(\mathbf{n}^{\mathbf{K}})$ sont respectivement le rayon et l'ouverture caractéristiques d'une micro-fissure de la K^{eme} famille, qui comporte $N(\mathbf{n}^{\mathbf{K}})$ « membres ». Le terme $\frac{1}{4\Pi}$ est relatif à l'intervention de l'angle solide 4Π dans le processus d'intégration. Bazant [16] a travaillé sur des réseaux de fissures interactives. L'ouverture e_n de la n^{eme} micro-fissure dépend du taux de libération d'énergie F de toutes les autres micro-fissures qui endommagent le VER. La contribution de la K^{eme} micro-fissure est pondérée par un coefficient d'interaction λ_{nK} qui relie les comportements des fissures n et K :

$$e_n = \sum_{K=1}^N \lambda_{nK} F_K \quad (3.20)$$

3.1.1.2 Modèles phénoménologiques

Les formulations énergétiques reposent sur un postulat sur la forme d'un ou de plusieurs potentiels thermodynamiques. La loi de comportement est dérivée de l'expression de l'énergie libre [186, 94, 179, 138, 177, 180]. Si le principe de la dissipation maximum est appliqué, les lois d'écoulement et d'écrouissage peuvent être déterminées dans un cadre thermodynamiquement consistant. Les modèles d'endommagement phénoménologiques peuvent être utilisés plus facilement que les modèles d'endommagement micro-mécaniques dans des analyses numériques, car les formulations énergétiques ne nécessitent pas la manipulation de grandes quantités de données microscopiques.

Les principes fondamentaux de la thermodynamique des milieux continus sont rappelés dans [92, 41]. En un point d'observation localisé par le vecteur position \mathbf{x} , l'énergie interne $U(\mathbf{x})$ du système thermodynamique étudié dépend de l'entropie $S(\mathbf{x})$, de variables de déformation $E_{ij}(\mathbf{x})$ et de variables scalaires dissipatives $\nu^k(\mathbf{x})$:

$$\dot{U} \left(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}) \right) = \Sigma_{ij}(\mathbf{x}) \dot{E}_{ij}(\mathbf{x}) - \nabla_i q_i(\mathbf{x}) \quad (3.21)$$

où $\Sigma_{ij}(\mathbf{x})$ est le tenseur de contraintes généralisé et où $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ est le vecteur du flux de chaleur. Comme c'est rappelé dans [44], en raison de l'occurrence de processus irréversibles impliquant les variables dissipatives, la production d'entropie dépasse toujours la quantité de chaleur transmise à l'extérieur :

$$T(\mathbf{x}) \dot{S}(\mathbf{x}) \geq -\nabla_i q_i(\mathbf{x}) \quad (3.22)$$

$T(\mathbf{x})$ est la température du milieu. L'**Inégalité de Clausius-Duhem (ICD)** est obtenue en combinant les équations 3.21 et 3.22 :

$$T(\mathbf{x}) \dot{S}(\mathbf{x}) \geq \dot{U}(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x})) - \Sigma_{ij}(\mathbf{x}) \dot{E}_{ij}(\mathbf{x}) \quad (3.23)$$

Or :

$$\begin{aligned} \dot{U}(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x})) = \\ \frac{\partial U(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))}{\partial S(\mathbf{x})} \dot{S}(\mathbf{x}) + \frac{\partial U(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))}{\partial E_{ij}(\mathbf{x})} \dot{E}_{ij}(\mathbf{x}) + \frac{\partial U(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))}{\partial \nu^k(\mathbf{x})} \dot{\nu}^k(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

L'introduction des dérivées partielles de l'énergie interne 3.24 dans l'ICD donne :

$$\begin{aligned} \left(T(\mathbf{x}) - \frac{\partial U(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))}{\partial S(\mathbf{x})} \right) \dot{S}(\mathbf{x}) + \left(\Sigma_{ij}(\mathbf{x}) - \frac{\partial U(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))}{\partial E_{ij}(\mathbf{x})} \right) \dot{E}_{ij}(\mathbf{x}) \\ - \frac{\partial U(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))}{\partial \nu^k(\mathbf{x})} \dot{\nu}^k(\mathbf{x}) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pour les processus réversibles, $\dot{\nu}^k(\mathbf{x}) = 0$ et :

$$\left(T(\mathbf{x}) - \frac{\partial U(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))}{\partial S(\mathbf{x})} \right) \dot{S}(\mathbf{x}) + \left(\Sigma_{ij}(\mathbf{x}) - \frac{\partial U(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))}{\partial E_{ij}(\mathbf{x})} \right) \dot{E}_{ij}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.26)$$

A déformation constante, l'égalité 3.26 devient :

$$\left(T(\mathbf{x}) - \frac{\partial U(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))}{\partial S(\mathbf{x})} \right) \dot{S}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.27)$$

La combinaison des équations 3.26 et 3.27 donne :

$$\left(\Sigma_{ij}(\mathbf{x}) - \frac{\partial U(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))}{\partial E_{ij}(\mathbf{x})} \right) \dot{E}_{ij}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.28)$$

Comme les équations 3.27 et 3.28 sont vraies pour tous $\dot{S}(\mathbf{x})$ et $\dot{E}_{ij}(\mathbf{x})$ respectivement, on peut maintenant déterminer les dérivées partielles de l'énergie interne :

$$\begin{cases} \frac{\partial U(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))}{\partial E_{ij}(\mathbf{x})} = \Sigma_{ij}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial U(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))}{\partial S(\mathbf{x})} = T(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.29)$$

Le tenseur de contraintes généralisé et la température sont respectivement **thermodynamiquement conjugués** au tenseur de déformations généralisé et à l'entropie. L'introduction des formules explicites des dérivées partielles de l'énergie interne 3.29 dans l'ICD donne l'**inégalité de dissipation réduite** :

$$\frac{\partial U(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))}{\partial \nu^k(\mathbf{x})} \dot{\nu}^k(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (3.30)$$

Les modèles de comportement recourent plus souvent à la température qu'à l'entropie. C'est pourquoi il est commode d'introduire la transformée de Legendre partielle de l'énergie interne, relativement à l'entropie. On obtient alors l'énergie libre de Helmholtz $\Psi(T(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))$:

$$\left\{ \begin{array}{l} U(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x})) - \Psi(T(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})S(\mathbf{x}) \\ T(\mathbf{x}) = \frac{\partial U(S(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))}{\partial S(\mathbf{x})} \\ S(\mathbf{x}) = -\frac{\partial \Psi(T(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))}{\partial T(\mathbf{x})} \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Il est parfois utile d'avoir recourt à l'énergie libre de Gibbs $G(T(\mathbf{x}), \Sigma_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))$, qui la transformée de Legendre partielle de l'énergie libre de Helmholtz relativement aux déformations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(T(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x})) + G(T(\mathbf{x}), \Sigma_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x})) = \Sigma_{ij}(\mathbf{x}) E_{ij}(\mathbf{x}) \\ \Sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Psi(T(\mathbf{x}), E_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))}{\partial E_{ij}(\mathbf{x})} \\ E_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial G(T(\mathbf{x}), \Sigma_{ij}(\mathbf{x}), \nu^k(\mathbf{x}))}{\partial \Sigma_{ij}(\mathbf{x})} \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Par conjugaison thermodynamique, il est possible d'obtenir les lois de comportement de type contrainte / déformation par dérivation de l'énergie libre. Par exemple, dans le modèle d'endommagement élasto-plastique proposé par Svedberg et Runesson [186], il est postulé que l'énergie libre dépend du tenseur de déformations élastiques ϵ_{ij}^e , d'une variable d'endommagement scalaire ω , d'une variable d'écrouissage plastique scalaire κ , et du gradient de cette variable d'écrouissage, $\nabla_i \kappa$. Les contributions des variables sont partiellement découplées, comme suit :

$$\Psi(\epsilon_{ij}^e, \omega, \kappa, \nabla_i \kappa) = \Psi^e(\epsilon_{ij}^e, \omega) + \Psi^{p,loc}(\kappa) + \Psi^{p,grad}(\nabla_i \kappa) \quad (3.33)$$

En outre, il est souvent supposé que les variables dissipatives $\nu^k(\mathbf{x})$ sont homogènes à des déformations, et qu'il est possible de leur assigner des variables conjuguées de la dimension d'une contrainte. Dans le modèle de Svedberg et Runesson [186], la variable de contrainte S_i^p est la somme de deux variables de contraintes, respectivement conjuguées à κ et $\nabla_i \kappa$:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_i^p = S^{ploc} e_i + S_i^{pgrad} \\ S^{ploc} = \frac{\partial \Psi(\epsilon_{ij}^e, \omega, \kappa, \nabla_i \kappa)}{\partial \kappa} = \frac{\partial \Psi^{p,loc}(\kappa)}{\partial \kappa} \\ S_i^{pgrad} = \frac{\partial \Psi(\epsilon_{ij}^e, \omega, \kappa, \nabla_i \kappa)}{\partial \nabla_i \kappa} = \frac{\partial \Psi^{p,grad}(\nabla_i \kappa)}{\partial \nabla_i \kappa} \end{array} \right. \quad (3.34)$$

où e_i est un vecteur unitaire.

Les lois d'évolution des variables dissipatives sont dérivées d'un potentiel dissipatif (plastique ou fragile, par exemple [186]), ou obtenues à partir de fonctions de charge f_d , sous réserve de respecter les conditions de Kuhn-Tucker [179, 177]. λ_d étant un multiplicateur plastique (ou fragile), les trois conditions complémentaires sont [92] :

$$\dot{\lambda}_d \geq 0, \quad f_d \leq 0, \quad \dot{\lambda}_d f_d = 0 \quad (3.35)$$

Si la règle d'écoulement est non associée, il est nécessaire de définir un potentiel en plus de la fonction de charge [210]. Le cadre théorique adopté par Frémond [64, 146] est tout à fait particulier, et exclusivement phénoménologique. L'introduction de potentiels de dissipation est rendue nécessaire par le choix des variables qui enrichissent la microstructure du continuum modélisé. Il est postulé que la puissance interne du matériau dépend des déformations ϵ_{ij} , de l'endommagement ω et du gradient de l'endommagement $\nabla_i \omega$. Les variables qui sont thermodynamiquement conjuguées à ces trois variables sont respectivement le tenseur de contraintes σ_{ij} , le travail interne de l'endommagement $-B$ et le flux du travail interne du gradient de l'endommagement, $-H_i$. En supposant que $\omega = 0$ correspond à un matériau intact, et que $\omega = 1$ correspond à un matériau complètement endommagé, on peut écrire l'ICD 3.23 dans des conditions isothermes sous la forme :

$$-\dot{\Psi}(\epsilon_{ij}, \omega, \nabla_i \omega) \geq -\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + B\dot{\omega} + H_i \nabla_i \dot{\omega} \quad (3.36)$$

Il est supposé que le gradient de l'endommagement ne contribue pas au phénomène dissipatif. Le travail interne de l'endommagement est décomposé en une partie réversible et en une partie irréversible, la partie réversible étant thermodynamiquement conjuguée à la variable d'endommagement :

$$B = B^r + B^d, \quad B^r = \frac{\partial \Psi(\epsilon_{ij}, \omega, \nabla_i \omega)}{\partial \omega} \quad (3.37)$$

L'inégalité de dissipation réduite prend donc la forme suivante :

$$B^d \dot{\omega} \leq 0 \quad (3.38)$$

La loi d'évolution de la composante irréversible du travail interne de l'endommagement est déterminée au moyen de l'introduction d'un potentiel dissipatif Φ :

$$B^d = \text{frac} \partial \Phi(\epsilon_{ij}, \dot{\omega}) \partial \dot{\omega} \quad (3.39)$$

L'application du principe de dissipation maximum permet d'éviter d'avoir à faire des hypothèses sur la forme des lois d'évolution. Si on suppose que les conditions sont isothermes et qu'en plus des variables de déformation, l'énergie libre du matériau dépend d'une variable tensorielle d'endommagement Ω et d'une variable tensorielle d'écrouissage fragile Ω_{ij}^h , l'inégalité de dissipation réduite 3.30 s'écrit :

$$Y_{ij} \dot{\Omega}_{ij} + Y_{ij}^h \dot{\Omega}_{ij}^h \geq 0 \quad (3.40)$$

avec les relations de conjugaison suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi(\epsilon_{ij}, \Omega_{ij}, \Omega_{ij}^h)}{\partial \epsilon_{ij}} \\ Y_{ij} = \frac{\partial \Psi(\epsilon_{ij}, \Omega_{ij}, \Omega_{ij}^h)}{\partial \Omega_{ij}} \\ Y_{ij}^h = \frac{\partial \Psi(\epsilon_{ij}, \Omega_{ij}, \Omega_{ij}^h)}{\partial \Omega_{ij}^h} \end{array} \right. \quad (3.41)$$

Le **principe de dissipation maximum, ou principe d'entropie maximum**, stipule que lorsqu'un état d'équilibre est atteint, « la production d'entropie est minimale, tandis que l'entropie atteint un maximum pour un niveau d'énergie totale donné » [92]. Le principe de dissipation maximum revient ainsi à maximiser $Y_{ij}\dot{\Omega}_{ij} + Y_{ij}^h\dot{\Omega}_{ij}^h$. Si on suppose que la variable d'endommagement et la variable d'écroutissage sont contrôlées par une fonction de charge $F_d(\sigma_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^d)$, ce problème de maximisation peut être résolu comme un problème de minimisation sous contrainte, dans lequel la fonction à minimiser est :

$$L(\sigma_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^d) = -Y_{ij}\dot{\Omega}_{ij} - Y_{ij}^h\dot{\Omega}_{ij}^h + \dot{\lambda}_d F_d(\sigma_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^d) \quad (3.42)$$

avec les conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker :

$$\dot{\lambda}_d \geq 0, \quad F_d(\sigma_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^d) \leq 0, \quad \dot{\lambda}_d F_d(\sigma_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^d) = 0 \quad (3.43)$$

Le coefficient lagrangien $\dot{\lambda}_d$ peut être considéré comme un multiplicateur d'endommagement. Parmi tous les états mécaniques admissibles, celui qui minimise la fonction $L(\sigma_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^d)$ est celui qui correspond à l'état d'équilibre. Les dérivées premières de $L(\sigma_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^d)$ sont nulles puisqu'un extremum est atteint. On obtient ainsi les lois d'évolution des variables dissipatives :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Omega}_{ij} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial F_d(\sigma_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^h)}{\partial Y_{ij}} \\ \dot{\Omega}_{ij}^h = \dot{\lambda}_d \frac{\partial F_d(\sigma_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^h)}{\partial Y_{ij}^h} \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Le schéma de résolution lagrangienne conduit donc à des lois d'écoulement associées [92]. Cette technique a été utilisée en élastoplasticité [35] et en « élasto-fragilité » [162, 138]. Il est toujours possible d'introduire de nouveaux potentiels dissipatifs pour modéliser des règles d'écoulement non associées [190, 35]. Le principal avantage de l'application du principe de dissipation maximum est que l'Inégalité de Clausius-Duhem est automatiquement vérifiée, et que par conséquent, le modèle construit est automatiquement thermodynamiquement consistant.

3.1.1.3 Problème de localisation

Comme c'est montré dans [11, 12, 20, 35, 113, 116, 127, 160], le radoucissement des déformations ne peut pas être modélisé avec des théories classiques de la Mécanique de l'Endommagement en milieux Continus. Sous fortes contraintes, les déformations se concentrent dans une zone étroite

dont la largeur caractéristique dépend de la finesse du maillage utilisé. L'énergie dissipée tend vers zéro, ce qui est physiquement absurde. En statique, les équations d'équilibre perdent leur caractère elliptique. En dynamique, les équations ne sont plus hyperboliques. Dans tous les cas, le problème devient mal posé. Il est donc nécessaire de pratiquer une régularisation mathématique du problème, qui fait intervenir au moins une longueur matérielle interne. La longueur matérielle peut avoir un sens physique : parfois, il s'agit de la dimension caractéristiques des grains solides d'une matrice poreuse. Dans les modèles micromécaniques, les chercheurs ont souvent recours à une formulation non-locale, mettant en jeu des variables moyennées ou homogénéisées dans l'espace [115, 16, 49, 105, 18]. Il s'agit de **formulations non locales intégrales**. La longueur matérielle traduit alors une distance d'influence de l'endommagement local, ou la dimension caractéristique d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER). L'introduction du gradient spatial de variables d'état est un procédé utilisé dans les approches micromécaniques [48, 152, 11, 12] et phénoménologiques [113, 186, 101]. La longueur matérielle associée au gradient est un paramètre mathématique émanant le plus souvent du développement en série de Taylor d'une variable d'état donnée. Il s'agit de **formulations non locales différentielles**. Certains auteurs ont également employé le concept de **microstructure** dans une formulation énergétique [64, 162, 146, 210]. La longueur matérielle traduit dans ce cas une distance d'influence de l'endommagement local. Dans tous les modèles régularisés, un terme comportant une échelle d'homogénéisation ou une distance d'influence apparaît dans l'expression de l'énergie libre.

Formulations non locales intégrales

Les formulations intégrales [18, 16, 49, 105] sont fondées sur l'homogénéisation de propriétés matérielles au voisinage du point considéré. La notion de voisinage a un sens topologique. Sa définition revient à définir une longueur matérielle interne. Le principe est le suivant. Considérant une variable d'état locale $f(x)$, la variable non locale $\bar{f}(x)$ correspondante est définie par intégration [17] :

$$\bar{f}(x) = \int_{V_{tot}} \alpha(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (3.45)$$

où V_{tot} est le volume de l'ensemble de la zone étudiée (et pas seulement du Volume Élémentaire Représentatif). L'étendue du « voisinage » est quantifiée par la fonction d'atténuation $\alpha(x, \xi)$, qui modélise la décroissance de la distance d'influence de la variable d'état f avec l'éloignement au point d'observation x . On suppose souvent que la fonction d'atténuation ne varie qu'avec la distance qui sépare le point d'intégration du point d'observation, ce qui n'est vrai en toute rigueur que pour des matériaux isotropes :

$$\alpha(x, \xi) = \alpha_\infty(\|x - \xi\|) \quad (3.46)$$

La fonction d'atténuation doit en outre satisfaire la règle barycentrique suivante :

$$\int_{V_\infty} \alpha_\infty(\|\xi\|) d\xi = 1 \quad (3.47)$$

où V_∞ est le volume de l'espace euclidien dans lequel le problème est posé. Comme c'est précisé dans les travaux de Jirasek [105], la fonction d'atténuation a souvent une expression du type :

$$\alpha(x, \xi) = \frac{\alpha_\infty(\|x - \xi\|)}{\int_{V_{tot}} \alpha_\infty(\|x - \xi\|) d\xi} \quad (3.48)$$

où $\alpha_\infty(\|x - \xi\|)$ est une fonction gaussienne :

$$\alpha_\infty(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) \quad (3.49)$$

ou une fonction dont la courbe est en forme de cloche :

$$\alpha_\infty(r) = \begin{cases} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 & \text{si } 0 \leq r < R \\ 0 & \text{si } r \geq R \end{cases} \quad (3.50)$$

l est appelé « longueur interne » du continuum non-local. R est un paramètre qui peut être relié à la longueur interne, mais qui ne lui est pas nécessairement égal. L'utilisation de fonctions d'atténuation décroissantes permet de calculer l'intégrale d'homogénéisation 3.45 sur le volume entier du système, sans passer par la définition explicite d'un Volume Elementaire Représentatif. Comme on l'a précisé plus haut, le choix de la fonction d'atténuation permet en fait de définir un voisinage, qui est l'équivalent topologique du concept de longueur interne. Pour éviter la génération de contraintes résiduelles dans un modèle radoucissant, Jirasek [105] suggère d'utiliser la variable non locale intégrale du tenseur de déformations, du taux de libération d'énergie ou du tenseur des déformations irréversibles.

Formulations non locales différentielles

Dans la plupart des formulations non locales différentielles, une variable d'état est remplacée par les premiers termes de son expansion en série de Taylor, développée autour du point d'observation. Par exemple, dans les modèles de Zbib et Aifantis [2] ont introduit le Laplacien du tenseur des déformations plastiques pour régulariser un modèle de comportement radoucissant. La contrainte déviatorique s_{ij} dépend des premiers termes de la série de Taylor de la contrainte déviatorique locale $\tilde{s}_{ij}(\epsilon_{ij}^p, \dot{\epsilon}_{ij}^p)$:

$$s_{ij} = \tilde{s}_{ij}(\epsilon_{ij}^p, \dot{\epsilon}_{ij}^p) + C_1 \partial_{kl} \epsilon_{ij}^p + C_2 \partial_{kl} \dot{\epsilon}_{ij}^p + C_3 \partial_{klmn} \epsilon_{ij}^p + C_4 \partial_{klmn} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (3.51)$$

Le plus souvent, les formulations locales différentielles recourent à l'utilisation du gradient d'ordre deux d'une variable d'état [116, 48, 113, 11, 12, 152, 101]. Les coefficients de pondération des termes de la série de Taylor dépendent d'une longueur matérielle, qui peut être reliée à l'extension de la zone d'influence de l'endommagement local. En une dimension, en supposant que la déformation locale $\epsilon(x)$ dépend des déformations observées en tous les points situés dans la région dont la superficie a pour dimension caractéristique l , la déformation moyenne $\bar{\epsilon}$ est définie par :

$$\bar{\epsilon}(x) = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{+l/2} \epsilon(x+s) ds \quad (3.52)$$

Comme c'est rappelé dans les travaux de Lasry et Belytschko [116], le développement en série de Taylor de $\epsilon(x+s)$ autour de sa valeur centrale est :

$$\epsilon(x+s) = \epsilon(x) + s \frac{d\epsilon(x)}{dx} + s^2 \frac{d^2\epsilon(x)}{dx^2} + o(s^2) \quad (3.53)$$

En remplaçant l'expression 3.53 dans l'équation 3.52, on obtient :

$$\bar{\epsilon}(x) = \epsilon(x) + \frac{l^2}{24} \frac{d^2\epsilon(x)}{dx^2} + o(l^2) \quad (3.54)$$

Par ailleurs, le laplacien de la déformation moyenne s'exprime :

$$\frac{d^2\bar{\epsilon}(x)}{dx^2} = \frac{d^2\epsilon(x)}{dx^2} + \frac{l^2}{24} \frac{d^4\epsilon(x)}{dx^4} + o(l^2) \quad (3.55)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\bar{\epsilon}(x) - \frac{l^2}{24} \frac{d^2 \bar{\epsilon}(x)}{dx^2} + o(l^2) = \epsilon(x) \quad (3.56)$$

La formule 3.54 est dite **explicite**, car la variable d'état moyennée dépend de données locales. A l'inverse, une formulation dans laquelle une variable locale est une fonction qui dépend d'une donnée moyennée, comme dans l'équation 3.56, est dite **implicite**. Certains auteurs [11, 12, 152] ont montré que les modèles implicites étaient souvent plus précis que les modèles explicites, et qu'ils donnaient des résultats plus stables.

Enrichissement par microstructure

Dans les formulations énergétiques, un postulat sur la forme de la puissance interne peut être fait avant la construction de l'expression de l'énergie libre. La forme générale du Principe des Puissances Virtuelles peut être affectée, ce qui a des répercussions sur les équations d'équilibre. Le modèle de structure du matériau dépend également de la puissance interne. L'introduction du gradient de variables d'état dans l'expression de la puissance interne est ainsi un enrichissement dans la description de la structure matérielle.

La théorie de la microstructure mise au point par Mindlin [140] est fondée sur des développements du premier ordre.

1. Mindlin fait l'hypothèse que la puissance interne du système dépend du champ de déplacements et du champ de gradients des déplacements.
2. Le matériau comporte une microstructure, ce qui implique que chaque point matériel est modélisé par une particule déformable, dotée de degrés de liberté microscopiques. Les macro-déplacements \mathbf{u} représentent les mouvements de corps rigide d'une particule. Les micro-déplacements \mathbf{u}' sont les déplacements des points de la particule par rapport au centre de gravité de cette particule. D'après (1), la puissance interne du corps modélisé dépend des macro-déplacements \mathbf{u} , du macro-gradient des macro-déplacements (ou macro-déformations) $\nabla \mathbf{u}$, des micro-déplacements \mathbf{u}' et du micro-gradient des micro-déplacements (ou micro-déformations) $\nabla' \mathbf{u}'$.
3. Les micro-déplacements \mathbf{u}' sont développés en série de Taylor par rapport à la position relative \mathbf{x}' :

$$u'_i = u_i + \chi_{ij} x'_j + \chi_{ijk} x'_j x'_k + \dots \quad (3.57)$$

Mindlin ne travaille qu'avec les deux premiers termes de la série 3.57 :

$$u'_i = u_i + \chi_{ij} x'_j \quad (3.58)$$

Comme il existe une dépendance linéaire du micro-déplacement vis-à-vis de la position relative, le milieu est appelé **continuum micromorphique de degré 1**. Le vecteur de macro-déplacements \mathbf{u} ne dépend pas de la position relative \mathbf{x}' , donc le tenseur χ_{ij} est en fait le gradient des micro-déplacements :

$$\chi_{ij} = \partial'_j u'_i \quad (3.59)$$

D'après (1) et (2), la puissance interne du corps modélisé ne dépend donc à présent que de variables macroscopiques : les macro-déplacements u_i , les macro-déformations $\partial_j u_i$, le tenseur χ_{ij} , égal aux micro-déformations, et le gradient du tenseur χ_{ij} : $\partial_k \chi_{ij}$.

La formulation canonique proposée par Mindlin repose sur un choix de variables un peu différent : les macro-déplacements u_i , les macro-déformations $\partial_j u_i$, le gradient relatif des micro-déplacements $\eta_{ij} = \partial_j u_i - \partial'_j u'_i$ et le macro-gradient des micro-déformations $\partial_k \chi_{ij}$. Dans les travaux de Mindlin, l'expression de la puissance interne volumique pour le continuum micromorphique de degré 1 est ainsi [140] :

$$p_{int} = K_i u_i + \sigma_{ij} \partial_j u_i + s_{ij} \eta_{ij} + \nu_{ijk} \partial_k \chi_{ij} \quad (3.60)$$

Comme c'est rappelé dans les travaux de Germain [83], l'application du Principe des Puissances Virtuelles repose sur l'hypothèse selon laquelle le travail virtuel des contraintes internes développées par le système dans ses mouvements de corps rigide est nul. Si le milieu micromorphique est soumis à un champ de degrés de liberté virtuel uniquement constitué de macro-déplacements u_i^* , c'est-à-dire à la composition de translations et de rotations, la puissance interne du corps modélisée sera nulle :

$$P_{int} = - \int_V p_{int} dV = - \int_V K_i u_i^* dV = 0 \quad (3.61)$$

Comme l'égalité 3.61 est vraie pour tout mouvement de corps rigide u_i^* , on peut en déduire que $K_i = 0$. Par conséquent, l'expression de la puissance volumique 3.60 proposée par Mindlin devient :

$$p_{int} = \sigma_{ij} \partial_j u_i + s_{ij} \eta_{ij} + \nu_{ijk} \partial_k \chi_{ij} \quad (3.62)$$

Le tenseur de contraintes de Cauchy est la somme de la partie intrinsèque du tenseur de contraintes σ_{ij} , et du tenseur de micro-contraintes s_{ij} [82] : $\tau_{ij} = \sigma_{ij} + s_{ij} \cdot \nu_{ijk}$ est défini comme le second tenseur de micro-contraintes (d'ordre 3). Deux équations d'équilibre peuvent être déduites du Principe des Puissances Virtuelles :

$$\partial_j \tau_{ij} + f_i = 0 \quad (3.63)$$

$$s_{ij} + \partial_k \nu_{ijk} + \Psi_{ij} = 0 \quad (3.64)$$

L'équation 3.63 est l'équation d'équilibre classiquement établie en mécanique des milieux continus, où f_i est le vecteur des forces volumiques appliquées par l'environnement extérieur. L'équation 3.64 traduit l'équilibre à l'échelle microscopique. Ψ_{ij} est la double force volumique appliquée par l'environnement extérieur. Des termes d'ordre supérieur interviennent également dans les conditions aux limites :

$$T_i = \tau_{ij} n_j \quad (3.65)$$

$$M_{ij} = \nu_{ijk} n_k \quad (3.66)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal à la surface considérée, \mathbf{T} est le vecteur de traction superficielle classique (externe), et où M_{ij} est la double traction superficielle (externe).

Les *modèles du second gradient* sont des continua micromorphiques de degré 1 au sens de Mindlin [140], pour lesquels les micro-déformations $\partial'_j u'_i$ sont égales aux macro-déformations $\partial_j u_i$. La conséquence directe de cette hypothèse supplémentaire est que l'expression de la puissance interne du corps modélisé ne dépend plus que des macro-déformations $\partial_j u_i$ et du macro-gradient

des micro-déformations $\partial_k \chi_{ij} = \partial_k \partial'_j u'_i = \partial_k \partial_j u_i$. Autrement dit, la puissance interne volumique du système ne dépend plus que des premier et second gradients macroscopiques des déplacements macroscopiques :

$$p_{int} = \sigma_{ij} \partial_j u_i + \nu_{ijk} \partial_k \partial_j u_i \quad (3.67)$$

Vardoulakis et Sulem [198, 199] ont utilisé le concept de microstructure pour modéliser le comportement des matériaux granulaires dilatants. Chambon et ses collègues [134, 34, 190, 35] ont proposé des modèles du second gradient pour étudier le développement de la plasticité sous l'influence de plusieurs mécanismes (i.e. plusieurs fonctions de charge) dans les matériaux cohésifs sujets à la friction. Frémond et Nedjar [64] ont également développé un modèle enrichi de microstructure en introduisant le gradient d'une variable d'endommagement scalaire dans l'expression de la puissance interne. Le gradient de l'endommagement joue le même rôle que le gradient des macro-déformations dans un modèle du second gradient classique. Par conséquent, même si la variable d'endommagement est scalaire, il est nécessaire de définir des termes d'ordre supérieur pour appliquer le Principe des Puissances Virtuelles. D'autres chercheurs ont par la suite suivi la même démarche. Pires-Domingues [162] a étudié les matériaux fragiles ayant un comportement élastique non linéaire. Nedjar [146] a couplé le modèle d'endommagement de Frémond à un modèle élastoplastique. Zhao et al. [210] ont développé un modèle élastoplastique avec endommagement dans un cadre original : le gradient des déformations est introduit dans l'expression de la puissance interne, et le gradient de la variable d'écrouissage intervient dans l'expression de l'énergie libre. Dans tous les travaux mentionnés précédemment, la présence de composantes relatives au gradient dans les termes surfaciques de l'expression de la puissance interne impose la définition de conditions aux limites d'ordre supérieur. En général, la dérivation spatiale du vecteur de déplacements virtuels est décomposée à l'aide d'un opérateur normal et d'un opérateur tangentiel.

Formes du paramètre de régularisation dans l'expression de l'énergie libre

Dans les modèles régularisés, c'est-à-dire dans les modèles dans lesquels l'influence des phénomènes microscopiques sur le comportement macroscopique est modulé par une longueur matérielle interne, l'énergie libre comporte un terme de régularisation relatif à la localisation des déformations (ou de l'endommagement). Par exemple, dans la théorie mise au point par Swoboda et Yang [188], qui mixte des aspects phénoménologiques et des aspects micromécaniques, la variable d'endommagement est d'abord définie au moyen de paramètres caractéristiques des micro-fissures considérées individuellement. Plusieurs homogénéisations sont pratiquées successivement, et les auteurs travaillent finalement dans une base principale de l'endommagement, en ne manipulant que trois valeurs propres et trois vecteurs propres. Autrement dit, à l'échelle microscopique, le Volume Élémentaire Représentatif est soumis à des contraintes microscopiques qui sont responsables de l'ouverture de fissures. À l'échelle macroscopique, le VER est soumis à une « méso-contrainte » homogénéisée équivalente τ_{ij} , qui est la moyenne pondérée de toutes les micro-contraintes subies par le VER. Dans cet état mécanique équivalent, qu'on ne peut définir qu'à l'échelle méso- ou macro-scopique, le VER est donc soumis à la contrainte appliquée dans le champ lointain, σ_{ij} , et à une contrainte homogénéisée relative à la fissuration, τ_{ij} . La contrainte totale équivalente $\tilde{\sigma}_{ij}$ est donc définie par :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \tau_{ij} \quad (3.68)$$

Supposant que le tenseur de déformation ϵ_{ij} correspondant à la configuration mécanique équi-

valente est égal au tenseur de déformation définie dans la configuration mécanique réelle, on en déduit que :

$$D_{eijkl}(\Omega_{ij}) \epsilon_{lk} = \sigma_{ij} + \tau_{ij} \quad (3.69)$$

où Ω_{ij} est le tenseur d'endommagement homogénéisé. L'incrément d'énergie libre peut s'écrire :

$$d\Psi(\epsilon_{ij}, \Omega_{ij}) = \sigma_{ij} d\epsilon_{ji} = \epsilon_{ji} D_{eijkl}(\Omega_{ij}) d\epsilon_{lk} - \tau_{ij} d\epsilon_{ji} \quad (3.70)$$

et on peut donc supposer que l'énergie libre a la forme suivante :

$$\Psi(\epsilon_{ij}, \Omega_{ij}) = \frac{1}{2} \epsilon_{ji} D_{eijkl}(\Omega_{ij}) \epsilon_{lk} - \tau_{ij} \epsilon_{ji} \quad (3.71)$$

Les auteurs supposent de plus que τ_{ij} est « parallèle » au tenseur d'endommagement homogénéisé, avec $\tau_{ij} = g\Omega_{ij}$, si bien que l'énergie libre a pour expression finale :

$$\Psi(\epsilon_{ij}, \Omega_{ij}) = \frac{1}{2} \epsilon_{ji} D_{eijkl}(\Omega_{ij}) \epsilon_{lk} - g\Omega_{ij} \epsilon_{ji} \quad (3.72)$$

Le terme $g\Omega_{ij} \epsilon_{ji}$ résulte d'un processus d'homogénéisation, et est physiquement lié à l'existence de déformations résiduelles après le déchargement d'un matériau fissuré. On retrouve un tel terme dans les modèles développés par Halm et Dragon [55, 90, 56, 91] et utilisés par Homand [94] et Shao [177].

De la même manière dans le cadre théorique proposé par Hansen et Schreyer [92] pour la modélisation de l'endommagement, l'énergie libre comporte un terme régularisateur. L'énergie libre est décomposée en un potentiel élastique dégradé, un potentiel relatif à l'endommagement Ω_{ij} et un potentiel relatif à l'érouissage Ω_{ij}^h :

$$\Psi(\epsilon_{ij}, \Omega_{ij}, \Omega_{ij}^h) = \frac{1}{2} \epsilon_{ji} D_{eijkl}(\Omega_{ij}) \epsilon_{lk} + H(\Omega_{ij}^h) + G_D(\Omega_{ij}) \quad (3.73)$$

Le terme $G_D(\Omega_{ij})$ relatif à l'endommagement traduit l'augmentation de l'énergie superficielle du matériau due à l'ouverture de fissures. Hansen et Schreyer proposent :

$$G_D(\Omega_{ij}) = \gamma_D \Omega_{ij} \Omega_{ji} \quad (3.74)$$

où γ_D est un paramètre matériel homogène à une déformation, dont le sens micro-mécanique est relié à la dimension et à l'ouverture des fissures. On voit donc que le terme $G_D(\Omega_{ij})$ utilisé dans l'expression de l'énergie libre par Hansen et Schreyer joue un rôle très similaire au terme $g\Omega_{ij} \epsilon_{ji}$ utilisé par Swoboda et Yang (équation 3.72).

Si maintenant on examine l'expression de l'énergie libre dans le modèle d'endommagement enrichi de Frémond [64], reposant sur l'utilisation d'une variable d'endommagement scalaire ω :

$$\Psi(\epsilon_{ij}, \omega, \nabla_i \omega) = \frac{1}{2} \epsilon_{ji} D_{eijkl}^0 \epsilon_{lk} + W(1 - \omega) - M [\log(|\omega|) - \omega + 1] + \frac{k}{2} (\nabla_i \omega)^2 \quad (3.75)$$

D_{eijkl}^0 est le tenseur de rigidité du matériau intact. W module le seuil à partir duquel le matériau est endommagé. k est homogène à une force, et est introduit pour quantifier la distance

d'influence de l'endommagement local. k joue en fait le rôle de fonction d'atténuation [18, 105], et par conséquent, comme on l'a vu précédemment, k joue le rôle de longueur interne. Le terme d'endommagement du second ordre modulé par une fonction d'atténuation $\frac{k}{2} (\nabla_i \omega)^2$ est donc l'homologue du terme $G_D (\Omega_{ij})$ introduit par Hansen et Schreyer, et vise à régulariser un problème de localisation.

Le carré du gradient de la déformation non locale $\nabla_k \bar{\epsilon}_{ij}$ intervient dans l'expression de l'énergie libre utilisée par Kuhl et Ramm [113] pour développer leur modèle d'endommagement :

$$\Psi^\Omega = \frac{c}{2} (\nabla_k \bar{\epsilon}_{ij})^2 \quad (3.76)$$

c est homogène au carré d'une longueur et, comme k dans le terme $\frac{k}{2} (\nabla_i \omega)^2$ introduit par Frémond, joue le rôle de longueur interne.

Enfin, dans le modèle élasto-plastique du second gradient proposé par Chambon et al. [35], l'énergie libre est décomposée comme suit :

$$\Psi \left(\epsilon_{ij}, \epsilon_{ij}^p, \nabla_k \epsilon_{ij}, \nabla_k \epsilon_{ij}^p, \kappa \right) = W_e \left(\epsilon_{ij}, \epsilon_{ij}^p \right) + W_{grad} \left(\epsilon_{ij}, \nabla_k \epsilon_{ij}, \nabla_k \epsilon_{ij}^p \right) + W_h(\kappa) \quad (3.77)$$

où κ est une variable d'écroissance. $W_e \left(\epsilon_{ij}, \epsilon_{ij}^p \right)$ est l'énergie de déformation élastique classique. Pour les matériaux cohésifs, les auteurs proposent de modéliser l'influence de la microstructure en choisissant :

$$W_{grad} \left(\epsilon_{ij}, \nabla_k \epsilon_{ij}, \nabla_k \epsilon_{ij}^p \right) = \frac{\mu l^2}{2} \left(\nabla_k \epsilon_{ij}^p \right)^2 \quad (3.78)$$

où μ est le module de cisaillement, et où l est une longueur caractéristique. Dans le modèle de Chambon, $\nabla_k \epsilon_{ij}^p$ joue le même rôle que $\nabla_k \omega$ dans le modèle de Frémond. La force μl^2 de Chambon joue donc le même rôle que la force k de Frémond.

Finalement, on constate que si le modèle est régularisé, l'énergie libre comporte un terme relatif à une homogénéisation, impliquant une longueur interne ou une fonction d'atténuation. Les cinq termes rencontrés dans les divers modèles d'endommagement et d'élasto-plasticité présentés précédemment sont :

$$g \Omega_{ij} \epsilon_{ji}, \quad \gamma_D \Omega_{ij} \Omega_{ji}, \quad \frac{k}{2} (\nabla_i \omega)^2, \quad \frac{c}{2} (\nabla_k \bar{\epsilon}_{ij})^2, \quad \frac{\mu l^2}{2} \left(\nabla_k \epsilon_{ij}^p \right)^2 \quad (3.79)$$

3.1.1.4 Modélisation des effets réversibles

Des microfissures ouvertes sous une sollicitation de tension peuvent se refermer par compression, et les propriétés mécaniques dégradées par fissuration peuvent être partiellement recouvrées. C'est le phénomène de cicatrisation mécanique. Par ailleurs, la production de gouge à l'intérieur de fissures créées par cisaillement peut réduire la perméabilité du réseau de fissuration, ce qui ramène la perméabilité d'un milieu poreux fracturé à un niveau plus faible que dans la situation où les fissures sont ouvertes et « vides ». Cependant, l'endommagement est un phénomène dissipatif. Il est impossible de modéliser des effets de cicatrisation mécanique ou hydraulique en ne conservant qu'une fonction de charge. Il est nécessaire de décrire l'endommagement par un tenseur d'ordre supérieur [55, 90] ou par plusieurs variables [27, 64, 136]. Par exemple, Frémond et Nedjar [64] ont modélisé les effets unilatéraux de la compression sur la fissuration du béton. Il est fait l'hypothèse qu'une sollicitation en compression peut produire de l'endommagement relatif à la tension, mais qu'une traction ne peut pas endommager le matériau par effet de compression. En

conséquence, une compression peut compenser un défaut généré par traction, mais pas l'inverse. En introduisant deux variables d'endommagement β_c et β_t , correspondant à l'endommagement de compression et de tension respectivement, la condition d'unilatéralité s'écrit :

$$(\beta_t, \beta_c) \in \{(x, y), x \in [0, 1], y \in [0, 1], y \leq x\} \quad (3.80)$$

$\beta_{t,c} = 0$ correspondant à un matériau intact, et $\beta_{t,c} = 1$ à un état complètement endommagé. Par ailleurs, un modèle phénoménologique, fondé sur l'annulation d'un potentiel de dissipation, a été proposé par Pensée et al. [157] à l'aide d'une unique variable tensorielle. L'endommagement et la cicatrisation provoqués par de la fissuration anisotrope sont représentés à l'échelle microscopique, pour chaque microfissure ouverte ou fermée. Puis les tenseurs mécaniques dégradés du VER sont obtenus par homogénéisation, selon la méthode de Eshelby. Hou a introduit des déformations fragiles et des déformations de cicatrisation dans son modèle, en utilisant deux surfaces de charge [95]. Bargellini a proposé une méthode alternative, fondée sur une approche discrète [13]. Les tenseurs d'ordre 2 « classiques » choisis pour représenter l'endommagement et la cicatrisation sont remplacés par des couples indépendants $(\rho^k, \mathbf{n}^k \otimes \mathbf{n}^k)$, où les vecteurs \mathbf{n}^k sont des directions fixes de l'espace, et où les scalaires ρ^k représentent des densités de fissuration. L'enjeu d'une telle modélisation est de trouver une base exhaustive de tenseurs d'ordre 2 de type $\mathbf{n}^k \otimes \mathbf{n}^k$, qui permette de vérifier toutes les conditions de la théorie de la mécanique (symétries, conservation de l'isotropie et de l'anisotropie transverse...). Bargellini satisfait toutes les conditions requises avec une base de soixante tenseurs, associés à des densités scalaires. Bargellini maintient l'hypothèse de non-interaction des fissures, comme dans la plupart des modélisations ayant recours à une décomposition spectrale. La méthode proposée par Bargellini permet de représenter un changement d'orientation de la fissuration sans actualiser les directions principales de l'endommagement (voir le paragraphe 4.1.2). En effet, dans une décomposition spectrale classique, l'endommagement est un tenseur d'ordre 2 dont les vecteurs propres évoluent avec le chargement. Dans l'approche discrète, la variable d'endommagement est projetée dans un espace tensoriel dont les directions sont fixes, et les contributions de chaque direction de fissuration sont pondérées par des densités scalaires qui sont actualisées avec le chargement.

3.1.2 Endommagement dans les réseaux de fissuration

L'excavation n'a pas que des conséquences mécaniques sur la redistribution des contraintes. L'état hydraulique est également hautement perturbé [196]. Juste après le creusement d'un tunnel, l'eau interstitielle percole vers la galerie par capillarité. Par ailleurs, la paroi du tunnel est en phase de déchargement, et les tractions subies par le massif sont susceptibles de générer de la fissuration. L'ouverture de fissures oriente les flux interstitiels, et tend à accélérer les échanges de fluide. si la galerie est ventilée avant la pose du support, un front de désaturation est créé au voisinage du tunnel [24]. La pose du support met fin aux interactions entre les fluides interstitiels du massif et l'atmosphère de la galerie. Puis l'équilibre du massif peut à nouveau être perturbé par l'entreposage ds déchets radioactifs, qui se comportent comme une source de chaleur. La chaleur dégagée tend à sécher la barrière géologique à proximité du paquet radioactif par évaporation. Dans les zones éloignées où la température est plus faible, la vapeur se condense. L'eau interstitielle tend alors à migrer à nouveau vers la zone désaturée, par capillarité.

Les modèles de réseaux de fissures permettent de décrire les échanges de fluide dans un milieu poreux. Les fissures endommageant le massif géologique sont alors considérées comme un réseau poreux, au même titre que le réseau poreux de la matrice intacte du géomatériau. Si les deux

réseaux poreux sont modélisés comme un unique réseau de pores qui communiquent entre eux, et qui sont caractérisés par les mêmes propriétés de rétention, on parle de **modèle unimodal**. Si les tailles de pore caractéristiques des deux réseaux sont trop différentes, des propriétés de rétention distinctes sont affectées à chaque réseau poreux. Si on peut supposer que le fluide interstitiel circule indifféremment dans les pores préexistants de la matrice intacte et les micro-fissures, on parle de **modèle multimodal à un continuum**. La contribution de chaque réseau est pondérée dans la fonction de rétention globale du milieu étudié, de manière à obtenir les propriétés de rétention équivalentes du VER. La conductivité hydraulique équivalente s'en déduit facilement. Les équations d'équilibre sont faciles à établir, car la hauteur d'eau est en équilibre dans l'ensemble des deux réseaux, et il s'agit donc d'une hauteur d'eau homogénéisée, caractéristique du VER. Si en revanche le fluide s'écoule indépendamment dans les pores de la matrice initialement intacte et dans les microfissures connectées, il faut considérer au moins deux équilibres hydrauliques. Il s'agit d'un **modèle multi-continua**.

Les études existantes traitent essentiellement le problème de transfert de l'eau liquide. Les modèles proposés sont isothermes, ce qui évite de modéliser les interactions complexes avec la vapeur. Dans les milieux non saturés, l'hypothèse la plus répandue consiste à supposer que le gaz se déplace beaucoup plus vite que le liquide, et que la question d'intérêt porte sur le liquide, dont le transfert est peu affecté par la présence du gaz.

3.1.2.1 Modèles multimodaux

Equation d'équilibre

Dans les modèles multimodaux [57], l'espace poreux est constitué de divers sous-réseaux qui communiquent entre eux. Dans le cas des matériaux fissurés, les pores de la matrice solide intacte constituent souvent un premier réseau poreux, et les micro-fissures constituent un second réseau poreux. On considère que les pores de la matrice intacte et les micro-fissures sont connectés, et que le fluide interstitiel circule indifféremment dans les deux types de pores. Il n'y a donc qu'un flux à modéliser, et l'équilibre hydraulique n'implique qu'une hauteur d'eau, qui représente la pression du fluide équivalente, à l'échelle du VER. Autrement dit, la condition d'équilibre hydraulique requiert l'utilisation d'une seule équation de Richard :

$$\frac{\partial \theta_w(h)}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla_i K_{wij} \nabla_j (h + z) \quad (3.81)$$

où h est la hauteur d'eau ("pressure head"), z la cote du point d'observation, θ_w la teneur en eau et \mathbf{K}_w le tenseur de perméabilité à l'eau liquide. θ_w et \mathbf{K}_w sont définies à l'échelle du milieu multimodal équivalent. L'équation d'équilibre est la même que celle qu'on aurait obtenue dans le cas d'un milieu unimodal [197]. Par exemple, on retrouve cette équation dans tous les modèles dans lesquels la contribution des pores de la matrice n'est pas prise en compte et dans lesquels le matériau est endommagé par un unique réseau de fissures connectées [130, 211, 123].

Le recours à une seule variable d'état pour caractériser l'équilibre hydraulique du milieu multimodal passe par la notion de **continuum équivalent** [167]. Autrement dit, les propriétés thermodynamiques du milieu sont homogénéisées pour qu'on puisse travailler avec un unique jeu d'équations d'équilibre valables à l'échelle du Volume Élémentaire Représentatif. Le continuum équivalent est le milieu caractérisé par les mêmes flux, et les mêmes distributions de température,

pression et saturation que le système discrétisé constitué de plusieurs réseaux poreux comme les pores de la matrice intacte et les microfissures, avec les mêmes conditions initiales et les mêmes conditions aux limites. Au sein du VER, les propriétés de rétention de chacun des réseaux poreux sont homogénéisées afin de déterminer les propriétés de rétentions caractéristiques du continuum équivalent. La perméabilité équivalente est le plus souvent calculée par intégration de la teneur en eau équivalente sur l'espace du VER.

Propriétés de rétention

De nombreux modèles de flux dédiés aux milieux fracturés [33, 57, 81, 151, 110, 114, 124, 125, 130, 204] sont fondés sur la théorie de Van Genuchten [197], qui propose une méthode pour déterminer les propriétés de rétention et de conductivité hydraulique d'un milieu non saturé de porosité hétérogène. Van Genuchten a mis au point un modèle unimodal, dans lequel la distribution spatiale des pores peut être représentée par une courbe en forme de cloche (“*bell-shaped function*”). La teneur en eau a pour expression :

$$\theta_w(h) = (\theta_{ws} - \theta_{wr}) [1 + (\alpha |h|)^n]^{-m} + \theta_{wr} \quad (3.82)$$

θ_{wr} est la plus faible teneur en eau qu'on peut rencontrer dans le milieu, lorsqu'il ne reste que quelques gouttes d'eau non connectées. θ_{ws} est la teneur en eau maximale du milieu, « à satiété ». α est la taille de pore la plus représentée dans le matériau. m et n sont des paramètres qui contrôlent l'étendue de la courbe de répartition de la taille de pores vers les pores fins ou les pores grossiers. Pour maintenir θ_w et h à des valeurs constantes lorsque le produit mn augmente, il faut diminuer la taille des pores représentative α . Autrement dit, un fort produit mn correspond à un matériau dont les pores sont majoritairement fins. Le modèle de Van Genuchten le plus utilisé est celui qui est combiné avec un schéma d'intégration de Mualem, qui donne l'expression suivante pour la perméabilité relative du milieu non saturé :

$$k_R(\theta_{we}(h)) = (\theta_{we}(h))^{1/2} \left[\frac{\int_0^{\theta_{we}} 1/h(x) dx}{\int_0^1 1/h(x) dx} \right]^2 \quad (3.83)$$

où la teneur en eau équivalente est définie par :

$$\theta_{we}(h) = \frac{\theta_w - \theta_{wr}}{\theta_{ws} - \theta_{wr}} \quad (3.84)$$

La consistance du schéma d'intégration de Mualem impose que :

$$m = 1 - 1/n, \quad 0 < m < 1 \quad (3.85)$$

L'intégration de l'inverse de l'expression 3.82 dans l'équation 3.83 donne :

$$k_R(\theta_{we}(h)) = (\theta_{we}(h))^{1/2} \left[1 - \left(1 - \theta_{we}(h)^{1/m} \right)^m \right]^2 \quad (3.86)$$

Le modèle de Van Genuchten [197] est valable pour les écoulements relativement complexes. Brooks et Corey ont proposé de considérer que les fissures se comportaient comme des tubes

pour modéliser les flux dans les milieux fracturés [28]. Leur approche est également fréquemment reprise dans les modèles multimodaux. Les variations de la teneur en eau sont modélisées par la fonction de rétention suivante :

$$\theta_w(h) = \left(\frac{h}{h_b} \right)^{-\lambda} \quad (3.87)$$

h_b est la hauteur d'eau mesurée lorsque la phase liquide se déconnecte, c'est-à-dire au moment où des bulles isolées apparaissent dans les pores, au détriment d'une phase liquide continue ("bubbling pressure"). λ est un paramètre matériel. Le procédé d'intégration de Mualem, utilisé pour déterminer la perméabilité relative du milieu, exige que :

$$\lambda = n - 1 \quad (3.88)$$

où n est le paramètre matériel de Van Genuchten [197], défini précédemment. Le modèle de Brooks et Corey [28] est particulièrement adapté pour modéliser les écoulements dans les réseaux de fissures dans lesquels les effets gravitationnels sont prépondérants. L'approche a été reprise par Liu et Bodvarsson [123] pour étudier les réseaux de fracture dans une matrice intacte, et par Cey et al. [33] pour évaluer les flux dans une matrice poreuse perméable endommagée par des fissures.

Dans les modèles multimodaux, on considère que les pores, bien que connectés, sont de tailles et de formes trop différentes pour être modélisés par un seul réseau d'écoulement. La répartition de la taille des pores et les propriétés de rétention sont définis pour chaque type de pore considéré (par exemple les pores de la matrice intacte d'une part, et les microfissures d'autre part). Dans le modèle multimodal de Durner [57], la teneur en eau du continuum équivalent est une moyenne pondérée des teneurs en eau de chacune des N familles de pores en jeu, elles-mêmes calculées par une formule de type Van Genuchten [197] :

$$\theta_{we}^{VER}(h) = \sum_{k=1}^N w_k [1 + (\alpha_k |h|)^{n_k}]^{-m_k} \quad (3.89)$$

Les coefficients de pondération w_k sont obtenus en calant les paramètres matériels sur des résultats expérimentaux. La fonction-objectif à minimiser est du type :

$$Z(h_j, \theta_{wr}, \theta_{ws}, \alpha_i, n_i, m_i, w_i) = \sum_{j=1}^P \mu_j \|\theta_j - \hat{\theta}(h_j, \theta_{wr}, \theta_{ws}, \alpha_i, n_i, m_i, w_i)\|^2 \quad (3.90)$$

L'utilisation des coefficients de pondération μ_j est imposée par le choix de la technique de minimisation des moindres carrés. Les paramètres α , n , m et w des N continua sont calés d'après P mesures expérimentales de la teneur en eau $\hat{\theta}(h_j, \theta_{wr}, \theta_{ws}, \alpha_i, n_i, m_i, w_i)$ pour une hauteur d'eau donnée h_j . Durner calcule ensuite la perméabilité relative du continuum équivalent en utilisant un schéma d'intégration de type Mualem (équation 3.83).

3.1.2.2 Modèles « multi-continua »

Equation d'équilibre

Dans les modèles à plusieurs continua, on suppose que plusieurs réseaux poreux contribuent séparément à l'écoulement des fluides interstitiels. Dans la suite, on s'intéressera à la configuration la plus étudiée : un milieu comprenant deux réseaux poreux : les pores de la matrice intacte et le réseau de microfissures. On suppose que les pores de la matrice sont connectés entre eux, que les micro-fissures sont connectées entre elles. Si des échanges de fluide ont lieu aux interfaces entre la matrice et les microfissures, l'équilibre hydraulique doit s'écrire au moyen de deux équations de Richard couplées, impliquant une variable capillaire pour chaque continuum [81, 89, 151, 204, 212] :

$$\begin{cases} (1 - w_f) \frac{\partial \theta_{w,m}(h_m)}{\partial h_m} \frac{\partial h_m}{\partial t} = (1 - w_f) \nabla_i K_{w,m_{ij}} \nabla_j (h_m + z) - \Gamma_w \\ w_f \frac{\partial \theta_{w,f}(h_f)}{\partial h_f} \frac{\partial h_f}{\partial t} = w_f \nabla_i K_{w,f_{ij}} \nabla_j (h_f + z) + \Gamma_w \end{cases} \quad (3.91)$$

Les indices m et f se rapportent à la matrice poreuse intacte et au réseau de fissures, respectivement. w_f est la fraction volumique du VER occupée par les fissures [81, 167]. Γ_w est un paramètre de transfert inter-continua, souvent modélisé comme un terme d'interaction d'ordre 1 [81, 151, 204]. Dans ce dernier cas, Γ_w est proportionnel à la différence de hauteur d'eau qui existe entre les deux continua. Gerke et al. proposent :

$$\Gamma_w = \frac{c_g}{r_m^2} c_e (h_f - h_m) K_{inter}(\bar{h}) \quad (3.92)$$

c_e est un paramètre d'erreur, de l'ordre de 0.4. c_g est un coefficient géométrique. Les deux continua (matrice et fissures) sont représentés par des éléments distincts. Si ces éléments sont des plans parallèles, alors $c_g = 4$. r_m est la distance qui sépare le centre d'un élément matriciel de l'interface matrice/fissure qui est la plus proche. La perméabilité équivalente $K_{inter}(\bar{h})$, qui dépend de la hauteur d'eau équivalente \bar{h} , est définie par :

$$K_{inter}(\bar{h}) = \frac{1}{2} [K_m^*(h_m) + K_f^*(h_f)] \quad (3.93)$$

K_m^* est un scalaire calculé à partir de la perméabilité de la matrice poreuse intacte, avec une perméabilité intrinsèque 100 fois moins élevée que dans un matériau non fissuré. Un temps de pénétration peut être défini [167, 212] pour déterminer le temps au bout duquel le potentiel capillaire est en équilibre, de manière à pouvoir considérer une seule hauteur d'eau dans tout le VER. Certains auteurs considèrent que l'équilibre thermodynamique est atteint immédiatement aux interfaces matrice / fissures, et établissent directement deux équations de Richard découplées, en utilisant une unique variable d'état pour la hauteur d'eau [33, 110].

Propriétés de rétention

Dans un milieu à plusieurs continua, comme dans un milieu multimodal, des propriétés de rétention doivent être définies pour chaque type de pore envisagé. Il est courant d'adopter un modèle de Van Genuchten [197] pour chacun des réseaux poreux (équations 3.82, 3.83, 3.84, 3.85), avec des paramètres θ_{wr}^k , θ_{ws}^k , α^k , n^k , m^k propres à chaque continuum. Pour de nombreux auteurs, l'écoulement doit être déterminé à l'échelle du VER. Dans les modèles dits à « porosités multiples » (*“multi-porosity models”*), on fait l'hypothèse qu'un continuum est dominant dans le processus d'écoulement. Des propriétés de rétention et des hauteurs d'eau distinctes sont utilisées pour caractériser chacun des continua, mais une seule perméabilité intervient dans les équations

d'équilibre [123, 212]. Cette perméabilité est supposée refléter les propriétés de conduction hydraulique du VER. Le continuum dominant peut être un des continua modélisés dans le problème d'écoulement, ou une entité fictive, traduisant un comportement homogénéisé.

Lorsque plusieurs continua en présence participent fortement à l'écoulement, il est souvent nécessaire de définir des propriétés de conductivité pour chaque réseau poreux. Dans ce cas, il s'agit de modèles « à perméabilités multiples » (“*multi-permeability models*”) [33, 81, 89, 110, 124, 125, 151, 167, 204]. Dans le processus d'homogénéisation destiné à obtenir les propriétés hydrauliques du continuum équivalent (à l'échelle du VER), la principale difficulté réside dans la dépendance des paramètres caractéristiques vis-à-vis du potentiel capillaire. Si l'homogénéisation est pratiquée à l'équilibre thermodynamique, alors on peut considérer que tous les continua sont soumis à la même pression d'eau, ce qui simplifie grandement le problème [81, 110, 167]. Les formules qui suivent correspondent au cas d'une matrice poreuse fissurée, modélisée par deux continua (un pour les pores de la matrice poreuse, et un pour les microfissures). Dans ce qui suit, les deux réseaux ne sont pas juxtaposés, mais superposés. On ne peut donc pas additionner leurs contributions à l'écoulement sans les pondérer. En reprenant les notations précédentes, on peut donc exprimer la teneur en eau équivalente de la manière suivante :

$$\theta_w^{VER}(h) = w_f \theta_{w,f}(h) + (1 - w_f) \theta_{w,m}(h) \quad (3.94)$$

De même, la perméabilité relative du continuum équivalent peut s'exprimer :

$$k_R^{VER}(h) = w_f k_{R,f}(h) + (1 - w_f) k_{R,m}(h) \quad (3.95)$$

Souvent, la perméabilité relative du milieu est assimilée à la perméabilité du réseau de fissures, dont la contribution au flux est supposée majoritaire :

$$k_R^{VER}(h) = k_{R,f}(h) \quad (3.96)$$

Sans l'hypothèse simplificatrice sur l'équilibre thermodynamique, les relations caractéristiques des propriétés de rétention et les équations d'équilibre sont couplées, et font intervenir deux potentiels capillaires distincts [151, 204] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_w^{VER}(h) = w_f \theta_{w,f}(h_f) + (1 - w_f) \theta_{w,m}(h_m) \\ k_R^{VER}(h) = w_f k_{R,f}(h_f) + (1 - w_f) k_{R,m}(h_m) \\ (1 - w_f) \frac{\partial \theta_{w,m}(h_m)}{\partial h_m} \frac{\partial h_m}{\partial t} = (1 - w_f) \nabla_i K_{w,mij} \nabla_j (h_m + z) - \Gamma_w \\ w_f \frac{\partial \theta_{w,f}(h_f)}{\partial h_f} \frac{\partial h_f}{\partial t} = w_f \nabla_i K_{w,fij} \nabla_j (h_f + z) + \Gamma_w \end{array} \right. \quad (3.97)$$

3.2 Modélisation de l'endommagement en milieu poreux non saturé non isotherme

Parce que les modèles de joint rocheux sont souvent conçus à l'échelle d'une imperfection [14,

15, 26, 148, 205], ils sont souvent mal appropriés pour modéliser le comportement d'un matériau fissuré à l'échelle d'un Volume Élémentaire Représentatif endommagé par plusieurs fissures. A l'échelle d'une galerie de stockage de déchets radioactifs comportant une Zone Endommagée par l'Excavation ("*Excavation Damaged Zone*", *EDZ*), un processus d'homogénéisation semble nécessaire pour obtenir une description satisfaisante du comportement thermo-hydro-mécanique de l'ouvrage. Les phénomènes thermo-hydro-mécaniques qui entrent en jeu lors de la construction de la galerie de stockage et juste après l'entreposage des paquets radioactifs ont été étudiés dans plusieurs projets dédiés à la prédiction du comportement de l'EDZ [24, 36, 79, 104, 133, 139, 173, 196]. Les effets du temps sur l'EDZ ont été étudiés de manière approfondie par Pellet et al., qui ont identifié des phénomènes de fluage dans les roches argileuses [154, 61, 153] et qui a mis au point un modèle viscoplastique pour les massifs rocheux susceptibles de stocker des déchets radioactifs [155, 156].

Dans les modèles de réseau de fissuration présentés précédemment, l'approche est purement hydraulique, et les variations du potentiel capillaire ne dépendent pas de variables d'état mécaniques. De nombreux modèles poromécaniques sont fondés sur l'utilisation de surfaces d'état complètement couplées pour caractériser l'état thermo-hydro-mécanique du matériau, comme dans les travaux de Gatmiri [70, 76]. Mais ces modèles de poromécanique ne sont pas dédiés à l'étude de l'endommagement. A l'inverse, les modèles proposés en CDM ("*Continuum Damage Mechanics*") sont pour la plupart destinés à la représentation de matériaux secs. Un des enjeux de ce travail de thèse est donc de proposer un modèle thermo-hydro-mécanique complètement couplé, pour étudier l'endommagement en milieu poreux non saturé. Cette modélisation passe par l'introduction de l'endommagement dans un cadre formel propre au développement de lois de comportement des milieux poreux non saturés et non isothermes, et par la mise au point de lois de transfert couplées pour le milieu poreux fissuré. Comme on l'a précisé dans l'introduction de ce chapitre, la revue bibliographique proposée ici se limite aux milieux poreux isothermes.

3.2.1 Introduction de l'endommagement dans la loi de comportement d'un milieu poreux non saturé

3.2.1.1 Formulations en contrainte effective de Bishop

A l'heure actuelle, la plupart des modèles d'endommagement proposés pour les milieux poreux non saturés reposent sur le concept de contrainte effective de Bishop [63, 96]. Dans les modèles d'endommagement élasto-plastiques de Bourgeois [27], Jia [103] et Shao [178], une pression interstitielle d'eau est introduite dans l'expression de la contrainte plastique :

$$\sigma_{ij}^{pl} = \sigma_{ij} - \beta^{pl} [S_w p_w + (1 - S_w) p_g] \delta_{ij} \quad (3.98)$$

et une variable d'endommagement scalaire ω est introduite dans la loi de comportement :

$$d\sigma_{ij} = d(D_{ijkl}(\omega)\epsilon_{lk}^e) - b [S_w p_w + (1 - S_w) p_g] \delta_{ij} \quad (3.99)$$

δ_{ij} est le tenseur identité d'ordre 2, σ_{ij} est le tenseur de contraintes totales, σ_{ij}^{pl} désigne le tenseur de contraintes plastiques, p_w et p_g sont respectivement les pressions interstitielles du liquide et

du gaz, S_w désigne le degré de saturation du milieu et b est le coefficient de couplage hydro-mécanique de Biot. β^{pl} module l'influence des fluides interstitiels sur la croissance des déformations plastiques. b et β^{pl} sont généralement différents. β^{pl} peut dépendre du degré de saturation. Dans ces modèles couplant l'endommagement et la plasticité, la contrainte totale est rendue « doublement effective » :

- au sens de la mécanique des milieux poreux, une contrainte effective au sens de Bishop est utilisée ;
- au sens de la mécanique de l'endommagement : une rigidité endommagée est introduite dans la composante mécanique de la contrainte de Bishop.

Bien que les effets des fluides interstitiels et les effets de l'endommagement soient tous deux introduits dans la définition de l'incrément de contrainte totale, les deux phénomènes sont pris en compte séparément, et n'interagissent pas entre eux. Il s'agit de la représentation d'une juxtaposition d'effets plus que du développement d'un modèle couplé. Le même type de formulation a été adopté dans des travaux antérieurs de Shao [177], dans lesquels la plasticité n'était pas prise en compte. L'endommagement est un tenseur d'ordre 2, défini micro-mécaniquement à partir de la notion de tenseur de densité de fracturation (voir la partie précédente). La loi de comportement est dérivée de l'énergie libre de Helmholtz Ψ , dont l'expression est postulée :

$$d\sigma_{ij} = d \left(\frac{\partial \Psi(\epsilon_{ij}, \Omega_{ij})}{\partial \epsilon_{ij}} \right) - b [S_w p_w + (1 - S_w) p_g] \delta_{ij} \quad (3.100)$$

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}(\Omega_{ps}) d\epsilon_{lk} + \left(\frac{\partial D_{ijkl}(\Omega_{ps})}{\partial \Omega_{ps}} d\Omega_{sp} \right) d\epsilon_{lk} - b [S_w p_w + (1 - S_w) p_g] \delta_{ij} \quad (3.101)$$

Le modèle de Jia [103] est formulé un peu différemment. Le seuil d'endommagement est plus faible que celui de la plasticité, si bien que lorsque le matériau entre en plasticité, il est déjà fissuré. Il y a donc deux variables d'endommagement. La première est une densité de fissuration, qui influence la loi d'évolution de la contrainte totale. La seconde affecte la contrainte plastique uniquement. Tous les modèles mentionnés dans cette partie sont basés sur le concept de contrainte effective de Bishop. Les effets de l'endommagement et des phénomènes capillaires sont partiellement découplés. Pourtant, la fissuration résulte en une augmentation de l'espace poreux, ce qui tend à réduire les effets capillaires et à accélérer les échanges de fluides. La réduction des effets capillaires peut engendrer une perte de rigidité du matériau non saturé [70, 71]. Le comportement mécanique est également influencé par les variations de la porosité partielle de l'eau, qui, pour un matériau dont les grains solides sont incompressibles, est thermodynamiquement conjuguée à la succion [96].

3.2.1.2 Choix des variables indépendantes

Il existe peu de modèles d'endommagement formulés en variables indépendantes pour les milieux non saturés. Un seul exemple a été trouvé dans la bibliographie actuelle. Lu et al. [129] ont proposé de décomposer le tenseur des contraintes totales σ_{ij}^a en une partie relativement endommagée σ_{ij}^d , et en une partie relativement intacte σ_{ij}^i , en utilisant une variable d'endommagement scalaire ω :

$$\sigma_{ij}^a = (1 - \omega) \sigma_{ij}^i + \omega \sigma_{ij}^d \quad (3.102)$$

Il est supposé que l'endommagement dépend de la succion s , de la déformation volumique totale

ϵ_v , et de la déformation déviatorique totale ϵ_s , selon une loi d'évolution du type :

$$d\omega = L_{1ij}(\epsilon_s, s) d\epsilon_{ji} + L_2(\epsilon_v, s) ds \quad (3.103)$$

Contrairement à un modèle fondé sur le concept de contrainte endommagée (ou « *contrainte effective* » en CDM), les régions endommagées sont toujours soumises à un champ de contraintes non nulles, même si les « contraintes endommagées » σ_{ij}^d ne suivent pas la même loi d'évolution que les « contraintes intactes » σ_{ij}^i . Lu et ses collègues supposent que le seuil d'endommagement est atteint avant le seuil de plasticité. Par conséquent, les contraintes intactes σ_{ij}^i suivent une loi élastique (non linéaire), tandis que les contraintes endommagées σ_{ij}^d suivent une loi élasto-plastique (de type Barcelone [3]) :

$$\begin{cases} d\sigma_{ij}^i = D_{eijkl}d\epsilon_{lk} + D_{seij}ds \\ d\sigma_{ij}^d = D_{epijkl}d\epsilon_{lk} + D_{sep_{ij}}ds \end{cases} \quad (3.104)$$

La loi d'évolution des contraintes totales 3.102 est réécrite, en introduisant la notion de contrainte relative $\sigma_{ij}^r = \sigma_{ij}^d - \sigma_{ij}^i$:

$$d\sigma_{ij}^a = (1 - \omega)d\sigma_{ij}^i + \omega d\sigma_{ij}^d + \sigma_{ij}^r d\omega \quad (3.105)$$

La combinaison des équations 3.103, 3.104 et 3.105 donne :

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij}^a &= (1 - \omega) (D_{eijkl}d\epsilon_{lk}^i + D_{seij}ds^i) + \omega (D_{epijkl}d\epsilon_{lk}^d + D_{sep_{ij}}ds^d) \\ &+ \sigma_{ij}^r (L_{1ij}(\epsilon_s, s) d\epsilon_{ji}^i + L_2(\epsilon_v, s) ds^i) \end{aligned} \quad (3.106)$$

où ϵ_{ij}^i et ϵ_{ij}^d sont les tenseurs du champ de déformations respectivement pour les régions intactes et pour les régions endommagées. De même, s^i et s^d sont la succion dans le domaine intact et la succion dans le domaine endommagé. En supposant que les champs de déformation et de succion suivent la même évolution dans les régions intacte et endommagée ($d\epsilon_{ij}^i = d\epsilon_{ij}^d = d\epsilon_{ij}$ et $ds^i = ds^d = ds$), on peut exprimer la relation constitutive sous la forme :

$$d\sigma_{ij}^a = D_{edijkl}d\epsilon_{lk} + D_{sed_{ij}}ds \quad (3.107)$$

Le modèle de Lu [129] peut aisément être étendu à l'endommagement anisotrope. Cependant, l'approche est purement micro-mécanique, et la consistance thermodynamique du modèle n'est pas vérifiée. De plus, l'originalité de la décomposition zone endommagée / zone intacte est perdue, du fait que les auteurs formulent la loi de comportement en homogénéisant les champs de déformation et de succion.

3.2.2 Prise en compte de la fissuration dans les lois de transfert

Tang, Tham, Yang et al. [192, 209] ont proposé un modèle de perméabilité pour les roches fracturées saturées. Des contraintes effectives σ'_{ij} sont définies, selon la théorie de Bishop :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - b_{SAT}p_w\delta_{ij} = \sigma_{ij} - \left(1 - \frac{K'}{K_s}\right) p_w\delta_{ij} \quad (3.108)$$

b_{SAT} est le coefficient de couplage hydro-mécanique de Biot. K' est le module de compression volumique du massif, et K_s est le module de compression volumique du squelette solide. Une variable d'endommagement scalaire ω est employée. Classiquement, le module d'Young dépend du module d'Young du matériau intact, et varie avec le niveau d'endommagement, selon la loi : $E(\omega) = (1 - \omega)E_0$. La dégradation du module d'Young a des conséquences sur la dégradation du module de compressibilité K' , et donc sur l'évolution de b_{SAT} . Les auteurs supposent que $b_{SAT} = 1$ pour un matériau complètement endommagé. La perméabilité du liquide interstitiel $k(\sigma_{ii}, p_w)$ dépend de l'endommagement à travers une dépendance vis-à-vis du coefficient de Biot :

$$k(\sigma_{ii}, p_w) = \xi k_0 \exp\left(-\beta_K \left(\frac{\sigma_{ii}}{3} - b_{SAT} p_w\right)\right) \quad (3.109)$$

β_K est un coefficient de couplage, qui module l'influence des contraintes sur la perméabilité. ξ donne le taux de croissance de la perméabilité avec l'endommagement. Dans l'équation 3.109, la perméabilité dépend de la contrainte moyenne. On retrouve souvent une dépendance de la perméabilité vis-à-vis de la composante volumique d'une variable d'état en poromécanique [102]. Le modèle élasto-plastique d'endommagement de Jia [103] comporte une représentation des transferts de fluide. Le degré de saturation évolue sur une surface d'état qui dépend de paramètres hydrauliques et de variables d'état hydrauliques, exclusivement. La perméabilité relative dépend du degré de saturation, selon une loi d'évolution purement hydraulique là encore. Les effets mécaniques sont pris en compte à travers l'expression de la perméabilité intrinsèque, qui dépend notamment de la variable d'écrouissage plastique, mais qui ne dépend pas de l'endommagement. Finalement, les effets de la fissuration ne sont donc pas pris en compte dans le modèle de transfert des fluides proposé par Jia.

Au contraire, Shao et al. [180] ont utilisé une variable d'endommagement tensorielle qu'ils ont introduite dans l'expression du tenseur de perméabilité. Pour ce faire, ils ont défini une perméabilité spécifique au réseau de micro-fissures k_{ij}^c qui endommagent le VER. Cette perméabilité s'ajoute à la perméabilité du milieu poreux intact k_{ij}^0 , si bien que la perméabilité totale du milieu poreux fissuré k_{ij} vaut :

$$k_{ij} = k_{ij}^0 + k_{ij}^c \quad (3.110)$$

La définition de l'endommagement est micro-mécanique. On suppose que le Volume Élémentaire Représentatif est endommagé par N microfissures planes et circulaires, de vecteur normal \mathbf{n}^k , et de rayon $r(\mathbf{n}^k)$. L'endommagement est le tenseur de densité de fracturation d'ordre 2 obtenu par intégration des densités de fracturation obtenues dans chaque plan, pour toutes les directions de l'espace (i.e. sur l'angle solide 4Π) :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{4\Pi} \frac{N}{V_{VER}} \int_{S_{VER}} \left(r(\mathbf{n}^k)^3 - r_0^3\right) n_i^k n_j^k dS \quad (3.111)$$

où r_0 est le rayon des microfissures dans la configuration de référence, initialisé à la même valeur pour toutes les microfissures, et donc pour toutes les directions de l'espace. Dans une fissure donnée, il est supposé que le flux est parallèle au plan de fissuration. En supposant de plus que l'écoulement est laminaire, l'équation de Navier-Stokes [203] qui caractérise le flux microscopique entre deux plans parallèles donne, pour une microfissure de vecteur normal \mathbf{n}^k :

$$v_i^c(\mathbf{n}^k) = -\frac{1}{12\mu_w} e(\mathbf{n}^k)^2 \left(\delta_{ij} - n_i^k n_j^k\right) \nabla_j p_w \quad (3.112)$$

où μ_w et p_w sont respectivement la viscosité dynamique et la pression interstitielle du liquide qui sature la roche étudiée. δ_{ij} est le tenseur identité d'ordre 2. $e(\mathbf{n}^k)$ est l'ouverture de la microfissure de vecteur normal \mathbf{n}^k . Les auteurs supposent qu'on peut la déduire du rayon de la microfissure au moyen d'une loi de dilatance linéaire :

$$de(\mathbf{n}^k) = \chi dr(\mathbf{n}^k) \quad (3.113)$$

où $\chi = 0.005$ pour les roches fragiles. Après avoir utilisé une procédure d'homogénéisation, les auteurs déterminent finalement la perméabilité globale relative à la fissuration, définie à l'échelle du VER :

$$k_{ij}^c = \frac{N}{48 V_{VER}} \int_{S_{VER}} R(\mathbf{n}^k) e(\mathbf{n}^k)^3 r(\mathbf{n}^k)^2 (\delta_{ij} - n_i^k n_j^k) dS \quad (3.114)$$

$R(\mathbf{n}^k)$ est un paramètre matériel supplémentaire que les auteurs ont introduit pour quantifier le degré de connectivité des microfissures.

Les rares modèles d'endommagement qui comportent un volet sur les transferts de fluides traduisent tous l'influence de l'endommagement sur les transferts de liquide à travers une dépendance de la perméabilité intrinsèque vis-à-vis de l'endommagement. Pour instaurer un couplage hydro-mécanique incluant les effets de l'endommagement, il faudrait par exemple concevoir une surface d'état dépendant de la succion et de l'endommagement pour le degré de saturation. Ce dernier, une fois introduit dans l'expression de la perméabilité relative, permettrait de coupler totalement les effets de fissuration aux effets capillaires et aux autres effets mécaniques au sein même de la formule de perméabilité globale.

Deuxième partie

Modélisation

« nous ne connaissons *a priori* des choses que ce que nous y mettons nous-mêmes »

E. Kant, traduit par A. Renaut, *Critique de la raison pure*, Préface de la deuxième édition (1787), GF Flammarion, p.79

Afin de donner une bonne description physique de l'endommagement au moyen d'une formulation mathématique efficace, on choisit de développer un modèle d'endommagement *mixte*. L'endommagement est une variable non-locale, issue de l'homogénéisation de paramètres de fissuration locaux, sur un Volume Élémentaire Représentatif. C'est une définition micro-mécanique de l'endommagement. Les lois de comportement des variables d'état sont dérivées d'un potentiel thermodynamique dont l'expression est postulée, ce qui est une démarche typique de la modélisation phénoménologique. L'expression de l'énergie injectée dans le modèle dépend des rigidités endommagées, qui sont déterminées par application du Principe de l'Energie Elastique Equivalente, couramment utilisé en micro-mécanique. L'influence de l'endommagement dans les lois de transferts est analysé physiquement d'un point de vue micro-mécanique, et formalisé par homogénéisation à l'échelle du Volume Élémentaire Représentatif.

CHAPITRE 4

Choix des variables

4.1 Une variable d'endommagement tensorielle

4.1.1 Homogénéisation du tenseur de densité de fissuration

Pour représenter l'anisotropie de l'endommagement, Bazant et Ozbolt [18] sont passés par la définition de microplans. Pour chaque microplan défini au sein du Volume Elementaire Représentatif, une loi de comportement microscopique est exprimée en fonction des composantes de cisaillement, des composantes déviatoriques et des composantes volumiques des différentes variables d'état. La loi de comportement macroscopique est ensuite issue d'une homogénéisation, fondée sur l'égalité des travaux virtuels microscopique et macroscopique. Dans le modèle proposé dans le cadre de cette thèse, on a préféré utiliser une variable tensorielle pour représenter l'anisotropie de l'endommagement. On utilise le tenseur de densité de fracturation d'ordre 2 défini par Kachanov [106], dont on rappelle l'expression (équation 3.3) :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{V_{VER}} \sum_{K=1}^N (l_K^3 n_i^K n_j^K) \quad (4.1)$$

V_{VER} est l'espace occupé par le Volume Élémentaire Représentatif, qui est parcouru par N microfissures planaires (notées K) de dimension caractéristique l_K et de vecteur normal \mathbf{n}^K . On rappelle que le choix de la définition 4.1 est motivé par des raisons énergétiques, et que les hypothèses sont les suivantes :

- les microfissures n'interagissent pas ;
- la contribution énergétique de la composante d'ordre 4 du tenseur de souplesse de chaque microfissure est négligeable devant la contribution des composantes d'ordre 2.

D'un point de vue numérique, il est difficile de traiter un problème dans lequel il faut déterminer les propriétés géométriques de chaque microfissure. C'est pourquoi on choisit de travailler avec une variable d'endommagement homogénéisée, qu'on exprime au moyen du concept de décomposition spectrale d'Ortiz [150]. On suppose en fait que les fissures qui contribuent à la dégradation du matériau peuvent être regroupées en trois familles caractérisées par une direction de fissuration homogénéisée \mathbf{n}^k et une densité de fissuration homogénéisée d_k . \mathbf{n}^i et d_i sont respectivement les vecteurs propres et les valeurs propres du tenseur d'endommagement Ω_{ij} . A l'échelle du Volume Elementaire Représentatif, la variable d'endommagement quantifie donc la taille et l'orientation de trois « méso-fissures » (selon la terminologie adoptée par Halm et Dragon [55, 90]). L'échelle mésoscopique est celle du VER, qui se distingue de l'échelle microscopique des défauts du matériau, et de l'échelle macroscopique des champs de contrainte et de déformation :

$$\Omega_{ij} = \sum_{k=1}^3 (d_k n_i^k n_j^k) \quad (4.2)$$

La figure 4.1 donne une représentation de ce processus d'homogénéisation en deux dimensions. On suppose que le Volume Elementaire Représentatif est endommagé par N_f familles de microfissures exactement parallèles. Chacune des directions de fissuration est caractérisée par un vecteur normal unitaire \mathbf{v}^K , défini au signe près. Les N_K microfissures de la famille K sont caractérisées par une longueur $L_{K,j}$ et une largeur $l_{K,j}$, ce qui permet définir une densité de fissuration D_K :

$$D_K = \frac{1}{S_{VER}} \sum_{j=1}^{N_K} (L_{K,j} l_{K,j}) \quad (4.3)$$

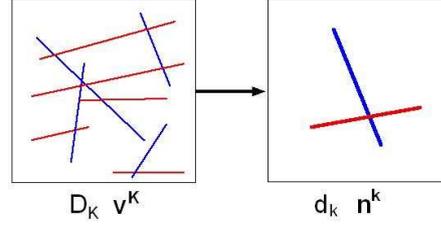


FIGURE 4.1 – Concept de méso-fissure sur un VER bidimensionnel.

où S_{VER} est l'aire du Volume Élémentaire Représentatif bidimensionnel. En deux dimensions, la décomposition spectrale consiste à supposer qu'il existe deux directions de fissuration principales \mathbf{n}^k parmi les N_f directions de fissuration réelles \mathbf{v}^K . Par définition, les vecteurs unitaires \mathbf{n}^k constituent une base pour tous les vecteurs \mathbf{v}^K :

$$\mathbf{v}^K = \alpha_{K,1} \mathbf{n}^1 + \alpha_{K,2} \mathbf{n}^2 \quad (4.4)$$

Les vecteurs \mathbf{v}^K , \mathbf{n}^1 et \mathbf{n}^2 étant unitaires, on a :

$$\forall K = 1, N_f, \quad \alpha_{K,1}^2 + \alpha_{K,2}^2 = 1 \quad (4.5)$$

La densité de méso-fissuration d_k est la somme des densités D_K , pondérée par les coefficients barycentriques $\alpha_{K,i}^2$:

$$d_k = \sum_{K=1}^{N_f} (\alpha_{K,i}^2 D_K) \quad (4.6)$$

En fait, le coefficient $\alpha_{K,i}$ module les longueurs $L_{K,j}$ d'une part, et les largeurs $l_{K,j}$ d'autre part :

$$D_K = \frac{1}{S_{VER}} \sum_{j=1}^{N_K} ([\alpha_{K,1} L_{K,j} \alpha_{K,1} l_{K,j}] + [\alpha_{K,2} L_{K,j} \alpha_{K,2} l_{K,j}]) \quad (4.7)$$

La densité de fracturation totale d_{frac} au sein du VER, qui représente la fraction surfacique occupée par les fissures, peut ainsi s'exprimer comme la somme des N_f densités de micro-fissuration, ou comme la somme des deux densités de méso-fissuration :

$$\begin{aligned} d_{frac} &= \sum_{K=1}^{N_f} D_K \\ d_{frac} &= \sum_{K=1}^{N_f} (\alpha_{K,1}^2 D_K + \alpha_{K,2}^2 D_K) \\ d_{frac} &= \sum_{K=1}^{N_f} (\alpha_{K,1}^2 D_K) + \sum_{K=1}^{N_f} (\alpha_{K,2}^2 D_K) \\ d_{frac} &= d_1 + d_2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

En trois dimensions (voir la figure 4.2), les densités de fissuration correspondent aux fractions de volume occupé par les fissures au sein du VER. Les fissures sont donc tridimensionnelles. On supposera dans la suite que les trois méso-fissures sont des disques de rayon r_i et d'épaisseur e_i , ces deux paramètres étant reliés par une loi de dilatance linéaire, comme dans les travaux de Shao et al. [180] :

$$de_i = \chi dr_i \quad (4.9)$$

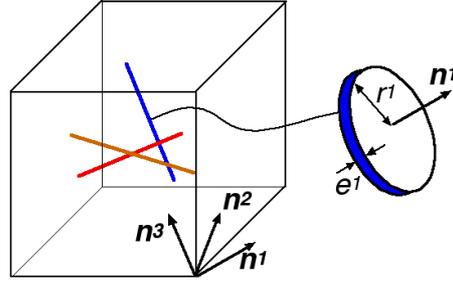


FIGURE 4.2 – VER mésolfissuré en 3D.

Shao et al. supposent que $\chi = 0.005$ pour les roches fragiles. Si on suppose que le Volume Élémentaire Représentatif est un cube de côté b , alors les densités de méso-fissuration peuvent être définies par :

$$d_i = \frac{\pi r_i^2 e_i}{b^3} = \frac{\pi \chi r_i^3}{b^3} \quad (4.10)$$

Il s'ensuit que le tenseur d'endommagement peut s'écrire :

$$\Omega_{pq} = \frac{\pi \chi}{b^3} \sum_{i=1}^3 (r_i^3 n_p^i n_q^i) \quad (4.11)$$

4.1.2 Rotation de la base principale de l'endommagement

La formulation du modèle proposé ici suppose que les directions principales d'endommagement sont connues a priori. La loi de comportement est caractérisée par une orthotropie induite par le chargement, et les directions qui caractérisent cette orthotropie sont les directions principales du tenseur d'endommagement [42]. L'expression de la contrainte thermodynamiquement associée à la variable d'endommagement est déduite du postulat fait sur la forme de l'énergie libre. Cette expression est valable pour un chemin de contraintes parallèles aux directions principales du tenseur d'endommagement [55, 90]. Autrement dit, la définition de la contrainte associée à l'endommagement dépend du chemin de contraintes [1]. La plupart du temps, les modèles d'endommagement anisotropes supposent que les directions principales d'endommagement sont fixes, et le calcul des modules dégradés fait intervenir les trois scalaires qui sont les valeurs propres du tenseur d'endommagement [55, 90, 119]. Les contraintes appliquées sont alors parallèles aux directions principales d'endommagement. En cas de cisaillement dans la base principale de l'endommagement, des bandes de cisaillement sont susceptibles de se créer. L'adoption d'un modèle non local permet alors de régulariser la formulation du modèle, et de représenter la rotation des directions principales d'endommagement [77]. Pour pouvoir représenter la rotation des directions principales d'endommagement, certains auteurs ont exprimé l'énergie libre du matériau endommagé en fonction d'un tenseur de rigidité qui avait été exprimé dans une base spectrale [21, 54], selon le principe de décomposition de Kelvin [193, 147].

Dans le modèle proposé ici, les directions principales du tenseur de densité de fissuration homogénéisé 4.2 sont supposées fixes, et on fait l'hypothèse que l'endommagement croît avec les sollicitations en tension. Cette modélisation permet de représenter les ruptures en mode I, mais pas en mode II. La rupture envisagée peut être provoquée par une traction (“*splitting effects*”

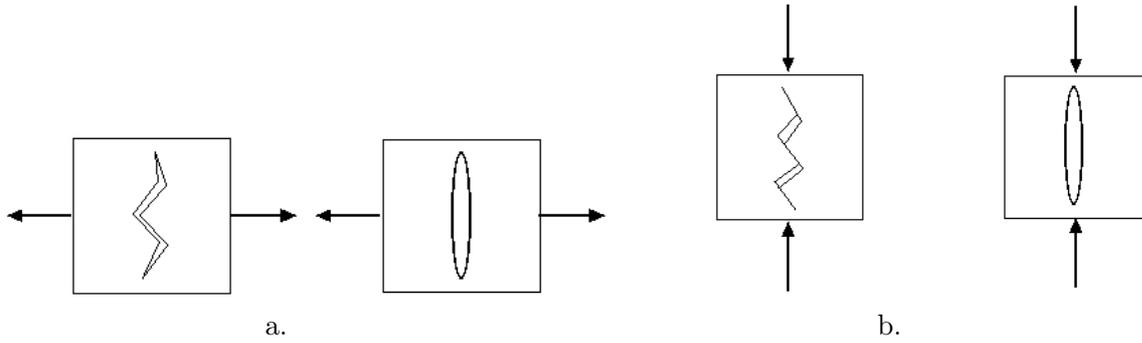


FIGURE 4.3 – Types de ruptures représentées dans le modèle THHMD. a. Traction, “splitting effects” [150]. b. Compression, “crossing effects” [150].

définis par Ortiz [150]) ou par une compression (“crossing effects” définis par Ortiz [150]). Ces phénomènes sont illustrés par la figure 4.3.

4.2 Une formulation en variables d’état indépendantes

4.2.1 Justification du choix des variables indépendantes

Le concept de contrainte effective de Bishop étendu aux milieux poreux non saturés ne suffit pas pour modéliser certains aspects du comportement des sols non saturés, comme l’effondrement par humidification (“wetting collapse”) [63, 96]. En conditions isothermes, Fredlund et Morgenstein préconisent l’utilisation de deux variables d’état de type contrainte au minimum [63]. Trois jeux de variables indépendantes sont envisagés :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\sigma_{ij} - p_g \delta_{ij}), & (p_g \delta_{ij} - p_w \delta_{ij}) \\ (\sigma_{ij} - p_w \delta_{ij}), & (p_g \delta_{ij} - p_w \delta_{ij}) \\ (\sigma_{ij} - p_g \delta_{ij}), & (\sigma_{ij} - p_w \delta_{ij}) \end{array} \right. \quad (4.12)$$

où σ_{ij} est la contrainte totale subie par le Volume Elementaire Représentatif, p_w désigne la pression du liquide interstitiel (dans toute la suite, il s’agira d’eau liquide), et p_g , celle de la phase gazeuse.

Pour autant, l’indépendance des variables n’est pas une condition nécessaire à la formulation d’un modèle de comportement [149]. Le concept de contrainte effective généralisé de Nuth et Laloui [149] rend compte de toute la complexité du comportement couplé d’un matériau poreux non saturé, en reportant la complexité des lois de comportement sur la définition d’une contrainte effective pertinente. La loi de comportement est complétée par la donnée d’une courbe de rétention, ce qui permet entre autres de modéliser les effets d’hysteresis capillaire. Un modèle basé sur le concept de contrainte effective généralisé est facile à implémenter dans un code de calcul numérique. La programmation est du même type que pour le modèle de comportement d’un matériau saturé, dont la formulation dépend de la contrainte effective de Terzaghi. Mais la définition d’une telle contrainte effective généralisée nécessite une bonne connaissance a priori du comportement macroscopique du matériau à modéliser. Sans donnée expérimentale et sans intuition physique, rien ne garantit que tous les aspects du comportement sont représentés par l’unique contrainte dont l’expression est le fondement du modèle.

L’approche phénoménologique, qui consiste à décomposer les énergies et à chercher les lois d’évolution de variables d’état indépendantes [44, 47], présente l’avantage d’assurer la « complétude »

du modèle. Le développement d'un modèle formulé en variables indépendantes permet d'accroître la connaissance du comportement physique du matériau. Il devient alors possible de définir une contrainte effective généralisée pour simplifier les lois de comportement et faciliter l'implémentation numérique du modèle. Le modèle d'endommagement qui suit est formulé en variables d'état indépendantes. En conditions anisothermes, trois variables d'état sont nécessaires, car il faut ajouter les effets de la température à l'un des couples de variables de type contrainte de l'équation 4.12. Parmi ces couples, nous choisissons la contrainte nette $\sigma''_{ij} = \sigma_{ij} - p_g \delta_{ij}$ et la succion $s = p_g - p_w$. Les effets de la température sont rendus par une variable d'état de type contrainte p_T , appelée contrainte thermique dans la suite :

$$\sigma''_{ij} = \sigma_{ij} - p_g \delta_{ij}, \quad s = p_g - p_w, \quad p_T \quad (4.13)$$

Le célèbre modèle élasto-plastique de Barcelone [3] est également formulé en contrainte nette et en succion. La surface de charge peut s'écrouir en pression nette p (courbe LC, pour "Loading Collapse"), et en succion (courbe SI, pour "Suction Increase"). Lu et al. ont fait le même choix de variables indépendantes pour modéliser le comportement des sols gonflants, en couplant l'endommagement à la plasticité [129]. Par ailleurs, les modèles de comportement programmés dans le code aux éléments finis Θ -Stock [72, 75] pour des éléments non saturés reposent sur le choix de variables d'état exposé dans l'équation 4.13 [70, 71, 74, 76]. Le modèle d'endommagement développé dans le cadre de cette thèse a été présenté dans [4, 8, 7, 72] en conditions isothermes. Le modèle non isotherme a été étudié dans plusieurs travaux numériques [9, 10, 109].

4.2.2 Thermodynamique des milieux poreux non saturés non isothermes

L'endommagement, physiquement relié à la croissance de la microfissuration au sein du continuum modélisé, est associé à un phénomène dissipatif, au même titre que les dislocations microscopiques, qui peuvent engendrer des déformations plastiques. L'endommagement n'est donc ni un degré de liberté, ni une variable d'état. On peut d'ailleurs coupler les phénomènes dissipatifs relatifs à l'endommagement et à la plasticité [48, 92, 95, 101, 146, 152, 178, 186, 189, 210]. Le modèle d'endommagement développé dans le cadre de cette thèse n'est pas couplé à un modèle élasto-plastique. Ce choix est motivé par le fait que les matériaux utilisés pour le confinement des déchets radioactifs, comme les granites ou les argilites, sont des matériaux fragiles. Par conséquent, le seuil d'endommagement y est atteint avant le seuil de plasticité, et modéliser un comportement élastique endommagé a du sens. L'endommagement est représenté par le tenseur de densité de fissuration homogénéisé Ω_{ij} défini dans l'équation 4.2.

4.2.2.1 Rappel des premier et second principes de la thermodynamique

Les bases thermodynamiques de la modélisation phénoménologique sont entre autres rappelées dans les articles de Rice [169], Hansen et Schreyer [92] et Collins et Houlsby [41]. Le premier principe de la thermodynamique consiste à supposer que l'énergie interne u du matériau se compose de l'énergie de déformation du système et de la chaleur Q produite dans le milieu considéré :

$$\delta u (\epsilon_{pq}, \eta, \Omega_{pq}) = \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ji} + Q \quad (4.14)$$

σ_{pq} et ϵ_{pq} désignent respectivement les tenseurs de contrainte totale et de déformation totale. η est l'entropie du système. D'après le second principe de la thermodynamique, une partie de l'entropie

produite génère une dissipation irréversible. Autrement dit, l'énergie thermique produite par croissance d'entropie ($T \delta\eta$) n'est pas seulement transformée en chaleur :

$$T \delta\eta \geq Q \quad (4.15)$$

Dans un matériau poreux non saturé, l'énergie de déformation comprend non seulement un terme relatif aux contraintes totales, mais aussi un terme associé à la pression de l'eau liquide (p_w) et un terme relatif à la pression de gaz (p_g). Comme c'est rappelé dans les travaux de Coussy et Dangla [44, 47], les variables de déformation thermodynamiquement conjuguées aux pressions p_w et p_g sont les teneurs en fluide Φ_w et Φ_g respectivement. Φ_w et Φ_g sont définies par :

$$\Phi_w = \frac{V_{v,w}}{V_{tot}}, \quad \Phi_g = \frac{V_{v,g}}{V_{tot}} \quad (4.16)$$

$V_{v,w}$ et $V_{v,g}$ désignent respectivement les volumes occupés par l'eau liquide et par le gaz dans les pores du matériau. V_{tot} est le Volume Élémentaire Représentatif étudié. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit alors :

$$\delta u(\epsilon_{pq}, \Phi_w, \Phi_g, \eta, \Omega_{pq}) = \sigma_{ij} \delta\epsilon_{ji} + p_w \delta(\Phi_w) + p_g \delta(\Phi_g) + Q \quad (4.17)$$

Notant V_v le volume occupé par les pores au sein du VER, on définit la porosité totale :

$$n = \frac{V_v}{V_{tot}} \quad (4.18)$$

et les degrés de saturation :

$$S_w = \frac{V_{v,w}}{V_v}, \quad S_g = \frac{V_{v,g}}{V_v} \quad (4.19)$$

La définition 4.16 s'écrit alors :

$$\Phi_w = nS_w, \quad \Phi_g = nS_g \quad (4.20)$$

On fait l'hypothèse que l'eau et l'air saturent les pores du milieu :

$$S_w + S_g = 1 \quad (4.21)$$

D'après les équations 4.20, les teneurs en fluide s'écrivent donc :

$$\Phi_w = nS_w, \quad \Phi_g = n(1 - S_w) \quad (4.22)$$

Les expressions 4.22 permettent de réécrire le premier principe de la thermodynamique 4.17 sous la forme :

$$\delta u(\epsilon_{pq}, nS_w, n(1 - S_w), \eta, \Omega_{pq}) = \sigma_{ij} \delta\epsilon_{ji} + p_w \delta(nS_w) + p_g \delta(n - nS_w) + Q \quad (4.23)$$

On fait l'hypothèse que les grains solides sont incompressibles. Autrement dit, on suppose qu'une

variation du volume de l'échantillon $|\delta\epsilon_v|$ est égale à une variation du volume occupé par les vides, c'est-à-dire à une variation de la porosité totale δn . Avec la convention de la mécanique des sols (compressions comptées positivement), on a ainsi les égalités suivantes :

$$\delta n = -\delta\epsilon_v = -\delta\epsilon_{ii} = -\delta(\delta_{ij}\epsilon_{ji}) = -\delta_{ij}\delta\epsilon_{ji} \quad (4.24)$$

On peut donc transformer l'équation 4.23 en :

$$\delta u(\epsilon_{pq}, nS_w, \eta, \Omega_{pq}) = (\sigma_{ij} - p_g \delta_{ij}) \delta\epsilon_{ji} - (p_g - p_w) \delta(nS_w) + Q \quad (4.25)$$

L'hypothèse de l'incompressibilité des grains solides introduit une relation de dépendance entre les trois variables d'état de déformation (déformations totales ϵ_{ij} et teneurs en fluide Φ_w et Φ_g). Il n'y a donc que deux degrés de liberté au lieu de trois. Seules deux des trois variables parmi ϵ_{ij} , Φ_w et Φ_g sont nécessaires pour représenter le comportement du milieu. Conformément au choix des variables indépendantes exposé dans l'équation 4.13, on choisit de conserver les variables ϵ_{ij} et $-\Phi_w = -nS_w$, qui sont thermodynamiquement conjuguées à la contrainte nette $\sigma''_{ij} = \sigma_{ij} - p_g \delta_{ij}$ et à la succion $s = p_g - p_w$:

$$\delta u(\epsilon_{pq}, nS_w, \eta, \Omega_{pq}) = \sigma''_{ij} \delta\epsilon_{ji} - s \delta(nS_w) + Q \quad (4.26)$$

4.2.2.2 Inégalité de Clausius-Duhem

L'énergie interne u dépend de variables de déformation, de l'entropie et de l'endommagement. Comme cela apparaît dans l'énoncé du second principe de la thermodynamique 4.15, la variable d'état conjuguée à l'entropie η est la température T . Il est commode d'introduire une fonctionnelle énergétique dont la dépendance en entropie est remplacée par une dépendance en température. A cette fin, on définit l'énergie libre de Helmholtz Ψ_s du système, qui est la transformée de Legendre partielle de l'énergie interne u par rapport à la variable d'entropie η :

$$\begin{aligned} u(\epsilon_{pq}, nS_w, \eta, \Omega_{pq}) - \Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq}) &= \eta T \\ T &= \frac{\partial u(\epsilon_{pq}, nS_w, \eta, \Omega_{pq})}{\partial \eta}, \quad \eta = -\frac{\partial \Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial T} \end{aligned} \quad (4.27)$$

D'après la première équation de la transformation de Legendre partielle 4.27 :

$$\delta u(\epsilon_{pq}, nS_w, \eta, \Omega_{pq}) = \delta \Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq}) + T \delta \eta + \eta \delta T \quad (4.28)$$

La combinaison des relations 4.15 et 4.26 donne :

$$\delta u(\epsilon_{pq}, nS_w, \eta, \Omega_{pq}) - \sigma''_{ij} \delta\epsilon_{ji} + s \delta(nS_w) \leq T \delta \eta \quad (4.29)$$

En introduisant l'équation 4.28 dans l'inégalité 4.29, on obtient :

$$\delta \Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq}) + T \delta \eta + \eta \delta T - \sigma''_{ij} \delta\epsilon_{ji} + s \delta(nS_w) \leq T \delta \eta \quad (4.30)$$

et on trouve l'**Inégalité de Clausius-Duhem (ICD)** :

$$\sigma''_{ij} \delta\epsilon_{ji} + s \delta(-nS_w) - \eta \delta T - \delta \Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq}) \geq 0 \quad (4.31)$$

Pour les processus thermodynamiques réversibles, l'inégalité 4.31 devient une égalité. La dérivation exacte de l'énergie libre de Helmholtz s'écrit :

$$\begin{aligned} d\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq}) &= \frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial\epsilon_{ij}} d\epsilon_{ji} + \frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial(nS_w)} d(nS_w) \\ &+ \frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial T} dT + \frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial\Omega_{ij}} d\Omega_{ji} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Introduisant la relation 4.32 dans l'inégalité de Clausius-Duhem 4.31, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\sigma''_{ij} - \frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial\epsilon_{ij}} \right) d\epsilon_{ji} + \left(s - \frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial(-nS_w)} \right) d(-nS_w) \\ - \left(\eta + \frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial T} \right) dT + \frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial\Omega_{ij}} d\Omega_{ji} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

On suit le même raisonnement que dans le chapitre précédent (équations 3.26 à 3.30). Pour les processus réversibles ($d\Omega_{pq} = 0$) isothermes ($dT=0$) à déformations constantes (échantillon « bloqué » à toutes les frontières, $d\epsilon_{ij} = 0$), l'inégalité 4.33 est une égalité, et on a :

$$s = \frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial(-nS_w)} = -\frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial(nS_w)} \quad (4.34)$$

L'inégalité 4.33 se réduit alors à :

$$\begin{aligned} \left(\sigma''_{ij} - \frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial\epsilon_{ij}} \right) d\epsilon_{ji} - \left(\eta + \frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial T} \right) dT \\ - \frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial\Omega_{ij}} d\Omega_{ji} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Pour un processus réversible ($d\Omega_{pq} = 0$) isotherme ($dT=0$), l'inégalité 4.35 est en fait une égalité, et on trouve :

$$\sigma''_{ij} = \frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial\epsilon_{ij}} \quad (4.36)$$

L'inégalité 4.35 se réduit alors à :

$$- \left(\eta + \frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial T} \right) dT - \frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial\Omega_{ij}} d\Omega_{ji} \geq 0 \quad (4.37)$$

Pour un processus réversible ($d\Omega_{pq} = 0$), l'inégalité 4.37 est en fait une égalité, et on a :

$$\eta = -\frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial T} \quad (4.38)$$

On trouve alors la forme réduite de l'**inégalité de dissipation** :

$$- \frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial\Omega_{ij}} d\Omega_{ji} \geq 0 \quad (4.39)$$

On définit la contrainte thermodynamiquement conjuguée à la variable d'endommagement :

$$Y_{dij} = -\frac{\partial\Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial\Omega_{ij}} \quad (4.40)$$

L'inégalité de dissipation réduite prend alors la forme :

$$Y_{dij} d\Omega_{ji} \geq 0 \quad (4.41)$$

D'après l'exposé qui précède, les contraintes nettes sont donc conjuguées aux déformations totales ϵ_{ij} (équation 4.36), la succion est conjuguée à l'opposé de la teneur en eau $-nS_w$ (équation 4.34), l'entropie est conjuguée à l'opposé de la température $-T$ (équation 4.38), et la contrainte Y_{dij} est conjuguée à l'opposé de la variable d'endommagement $-\Omega_{ij}$ (équation 4.40) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma''_{ij} = \frac{\partial \Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{ij}} \\ s = -\frac{\partial \Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial (nS_w)} \\ \eta = -\frac{\partial \Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial T} \\ Y_{dij} = -\frac{\partial \Psi_s(\epsilon_{pq}, nS_w, T, \Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} \end{array} \right. \quad (4.42)$$

Les relations 4.42 concordent avec les travaux de Houlsby [96]. Houlsby a démontré que l'expression du travail de déformation d'un milieu non saturé isotherme était de la forme :

$$L_s = \sigma''_{ij} \delta \epsilon_{ji} + s(-n\delta S_w + S_w \delta \epsilon_v) + n(1 - S_w) p_g \frac{\delta \rho_g}{\rho_g} - \nabla_i (p_w) v_{wi} - \nabla_i (p_g) v_{gi} \quad (4.43)$$

ρ_g est la masse volumique de l'air gazeux ; c'est une fonction des variables de pression et de température. $-\nabla_i (p_w) v_{wi}$ et $-\nabla_i (p_g) v_{gi}$ désignent les puissances dissipées par les écoulements d'eau liquide et de gaz respectivement, avec \mathbf{v}_w la vitesse de l'eau et \mathbf{v}_g la vitesse du gaz. $n(1 - S_w) p_g \frac{\delta \rho_g}{\rho_g}$ est la puissance développée par la compression de gaz. En négligeant les dissipations provoquées par les écoulements de fluide et par la compression du gaz, l'expression 4.45 se réduit à :

$$L_s = \sigma''_{ij} \delta \epsilon_{ji} + s(-n\delta S_w + S_w \delta \epsilon_v) \quad (4.44)$$

En faisant comme précédemment l'hypothèse que les grains solides sont incompressibles (équation 4.24), on a $\delta \epsilon_v = -\delta n$, et on trouve :

$$L_s = \sigma''_{ij} \delta \epsilon_{ji} - s\delta (nS_w) \quad (4.45)$$

On retrouve les paires de variables conjuguées mentionnées dans les équations 4.42. D'après Houlsby, les contraintes nettes sont conjuguées à l'incrément de déformation totale, et la succion est conjuguée à la quantité $-n\delta S_w + S_w \delta \epsilon_v$, qui est égale à l'incrément de l'opposé de la teneur en eau $\delta(-nS_w)$, si on fait l'hypothèse que les grains solides sont incompressibles. Houlsby précise que ces relations de conjugaison thermodynamiques ne sont valides que sous des hypothèses fortes : les phases solide et liquide sont supposées incompressibles, et la vitesse des ménisques est supposée égale à celle du solide (les ménisques « suivent » le squelette solide).

4.2.3 Décomposition thermodynamique des déformations

Comme dans les précédents modèles thermo-hydro-mécaniques développés par Gatmiri et al. [70, 71, 74, 76], le tenseur des déformations totales ϵ_{ij} est décomposé en variables d'état de déformation, qui sont les variables thermodynamiquement conjuguées aux variables d'état de contrainte indépendantes choisies dans l'équation 4.13 :

$$d\sigma''_{ij} = D_{e_{ijkl}}(\Omega_{pq}) d\epsilon_{M_{lk}}^e = D_{e_{ijkl}}(\Omega_{pq}) \left(d\epsilon_{M_{lk}} - d\epsilon_{M_{lk}}^d \right) \quad (4.46)$$

$\epsilon_{M_{ij}}$ le **tenseur des déformations mécaniques**, qui est thermodynamiquement conjugué aux contraintes nettes. Le tenseur des déformations mécaniques comprend une partie élastique $\epsilon_{M_{ij}}^e$ et une partie inélastique $\epsilon_{M_{ij}}^d$. La même approche est utilisée pour définir le **tenseur des déformations capillaires** $\epsilon_{S_{ij}}$, thermodynamiquement conjugué à la succion, et pour définir le **tenseur des déformations thermiques** $\epsilon_{T_{ij}}$, thermodynamiquement conjugué à la contrainte thermique. On suppose que les effets des pressions interstitielles et de la température sont isotropes [76, 70], si bien qu'il suffit de connaître les composantes scalaires volumiques des déformations capillaires et des déformations thermiques pour pouvoir caractériser complètement le comportement du matériau poreux. Les variables d'état indépendantes utilisées dans le modèle THHMD sont finalement les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma''_{ij} = \sigma_{ij} - p_g \delta_{ij} \quad \leftrightarrow \quad \epsilon_{M_{ij}} \\ s = p_w - p_g \quad \leftrightarrow \quad \epsilon_{S_v} = \epsilon_{S_{ij}} \delta_{ji} \\ p_T \quad \leftrightarrow \quad \epsilon_{T_v} = \epsilon_{T_{ij}} \delta_{ji} \end{array} \right. \quad (4.47)$$

Les déformations capillaires (respectivement thermiques) comportent une partie élastique $\epsilon_{S_v}^e$ (respectivement $\epsilon_{T_v}^e$) et une partie inélastique $\epsilon_{S_v}^d$ (respectivement $\epsilon_{T_v}^d$). Les variables $\epsilon_{M_{ij}}$, ϵ_{S_v} et ϵ_{T_v} étant indépendantes, l'expression du tenseur de déformations totales est finalement :

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{M_{ij}}^e + d\epsilon_{M_{ij}}^d + \frac{1}{3}\epsilon_{S_v}^e \delta_{ij} + \frac{1}{3}\epsilon_{S_v}^d \delta_{ij} + \frac{1}{3}\epsilon_{T_v}^e \delta_{ij} + \frac{1}{3}\epsilon_{T_v}^d \delta_{ij} \quad (4.48)$$

Avec les variables de déformations précédemment introduites, l'Inégalité de Clausius-Duhem 4.31 devient :

$$\sigma_{ij} d\epsilon_{M_{ji}} - p_w d\epsilon_{S_v} + p_a d(n + \epsilon_{S_v}) + p_T d\epsilon_{T_v} - d\Psi_s(\epsilon_{M_{pq}}, \epsilon_{S_v}, n + \epsilon_{S_v}, \epsilon_{T_v}, \Omega_{pq}) \geq 0 \quad (4.49)$$

Dans un formalisme « classique », le tenseur des déformations totales correspond à la composante mécanique des déformations au sens de Gatmiri [76, 70]. Dans la modélisation proposée ici, la condition d'incompressibilité des grains solides s'écrit donc $d\epsilon_{M_v} = -dn$, et l'Inégalité de Clausius-Duhem s'exprime :

$$\sigma''_{ij} d\epsilon_{M_{ji}} + s d\epsilon_{S_v} + p_T d\epsilon_{T_v} - d\Psi_s(\epsilon_{M_{pq}}, \epsilon_{S_v}, \epsilon_{T_v}, \Omega_{pq}) \geq 0 \quad (4.50)$$

Les relations de conjugaison s'expriment maintenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma''_{ij} = \frac{\partial \Psi_s(\epsilon_{Mpq}, \epsilon_{Sv}, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{Mij}} \\ s = \frac{\partial \Psi_s(\epsilon_{Mpq}, \epsilon_{Sv}, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{Sv}} \\ p_T = \frac{\partial \Psi_s(\epsilon_{Mpq}, \epsilon_{Sv}, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{Tv}} \\ Y_{dij} = -\frac{\partial \Psi_s(\epsilon_{Mpq}, \epsilon_{Sv}, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} \end{array} \right. \quad (4.51)$$

En élasticité, la combinaison des équations 4.46 et 4.48 donne :

$$d\sigma''_{ij} = D_{eijkl}(\Omega_{pq}) \left(d\epsilon_{lk}^e - \frac{1}{3}\delta_{lk}d\epsilon_{Sv}^e - \frac{1}{3}\delta_{lk}d\epsilon_{Tv}^e \right) \quad (4.52)$$

Chaque composante élastique du tenseur de déformations est relié à la variable de contrainte qui lui est conjuguée par une rigidité endommagée :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\sigma''_{ij} = D_{eijkl}(\Omega_{pq}) d\epsilon_{Mlk}^e \\ ds = \beta_s(\Omega_{pq}) d\epsilon_{Sv}^e \\ dp_T = \beta_T(\Omega_{pq}) d\epsilon_{Tv}^e \end{array} \right. \quad (4.53)$$

La loi de comportement incrémentale 4.52 peut ainsi s'exprimer :

$$d\sigma''_{ij} = D_{eijkl}(\Omega_{pq}) \left(d\epsilon_{lk}^e - \frac{1}{3\beta_s(\Omega_{pq})}\delta_{lk} ds - \frac{1}{3\beta_T(\Omega_{pq})}\delta_{lk} dp_T \right) \quad (4.54)$$

L'équation 4.54 montre qu'il existe des couplages dans les équations d'état.

CHAPITRE 5

Loi de comportement

5.1 Bases phénoménologiques

Selon une démarche propre aux modèles phénoménologiques, l'expression de l'énergie libre de Helmholtz du VER est postulée. La dérivation de ce potentiel thermodynamique donne les lois de comportement de la contrainte nette, de la succion et de la contrainte thermique, qui dépendent des variables d'état de déformation et de l'endommagement. Les relations incrémentales qui définissent les déformations réversibles en fonction des variables d'état de contrainte permettent ensuite de montrer que la loi d'évolution des déformations irréversibles ne dépend que de celle de la variable d'endommagement. L'incrément d'endommagement $d\underline{\Omega}$ résulte d'une loi d'écoulement associée [169], hypothèse adoptée aussi bien dans des modélisations micromécaniques que phénoménologiques.

5.1.1 Concept d'état mécanique équivalent

Dans ce qui suit, le concept d'état mécanique équivalent est expliqué pour un milieu sec (donc monophasique) isotherme. On se servira de cette notion pour établir l'expression de l'énergie libre à la base du développement du modèle THHMD. Comme on l'a exposé dans l'étude bibliographique de l'endommagement (équations 3.68-3.72), l'**état mécanique équivalent** [187] est l'état mécanique dans lequel les microcontraintes τ_{ij}^K à l'origine de l'ouverture des microfissures qui endommagent le VER peuvent être assimilées à une unique méso-contrainte τ_{ij} , définie à l'échelle du VER (figure 5.1). Si le VER est endommagé par N microfissures :

$$\tau_{ij} = \sum_{K=1}^N \tau_{ij}^K \quad (5.1)$$

La suite de ce paragraphe vise à retrouver la forme de l'énergie libre adoptée par Swoboda et Yang [187] (équations 3.71-3.72), en passant uniquement par des notions de conjugaison thermodynamiques. Comme on l'a expliqué plus haut, la contrainte effectivement subie par le matériau dans l'état mécanique équivalent ($\tilde{\sigma}_{ij}$) est la somme de la contrainte macroscopique réelle (σ_{ij}) et de la méso-contrainte à l'origine de l'ouverture de toutes les fissures qui endommagent le VER (τ_{ij}) :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \tau_{ij} \quad (5.2)$$

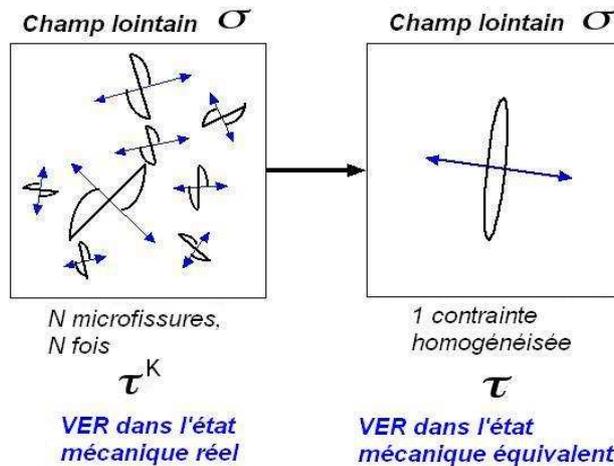


FIGURE 5.1 – Concept d'état mécanique équivalent.

Comme Swoboda et Yang, on suppose que les déformations équivalentes sont égales aux déformations réelles, et que la rigidité équivalente, qui dépend de l'endommagement réel, est en fait égale à la rigidité réelle dépendant de l'endommagement équivalent :

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij} \quad (5.3)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_e(\Omega_{pq}) = \mathbf{D}_e(\tilde{\Omega}_{pq}) \quad (5.4)$$

Comme le modèle développé ici repose sur une variable d'endommagement homogénéisée (équation 4.2), l'endommagement réel est par définition égal à l'endommagement équivalent :

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij} \quad (5.5)$$

Dans un milieu poreux sec et isotherme, la contrainte macroscopique réelle σ_{ij} est thermodynamiquement conjuguée aux déformations totales ϵ_{ij} par l'énergie libre totale du VER (Ψ_s) selon les relations :

$$\begin{cases} \Psi_s^*(\sigma_{pq}, \Omega_{pq}) + \Psi_s(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq}) = \sigma_{ij} \epsilon_{ji} \\ \epsilon_{ij} = \frac{\partial \Psi_s^*(\sigma_{pq}, \Omega_{pq})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi_s(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{ij}} \end{cases} \quad (5.6)$$

Ψ_s^* désigne la transformée de Legendre partielle de l'énergie libre, relativement aux déformations. La contrainte équivalente est conjuguée aux déformations via une énergie élastique endommagée :

$$\begin{cases} \Psi_e^*(\tilde{\sigma}_{pq}, \Omega_{pq}) + \Psi_e(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq}) = \tilde{\sigma}_{ij} \epsilon_{ji} \\ \epsilon_{ij} = \frac{\partial \Psi_e^*(\tilde{\sigma}_{pq}, \Omega_{pq})}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \Psi_e(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{ij}} \end{cases} \quad (5.7)$$

Il en résulte une expression de l'énergie libre de la forme :

$$\Psi_s(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq}) = \Psi_e(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq}) - \tau_{ij} \epsilon_{ji} \quad (5.8)$$

L'équation 5.8 revient à supposer que l'énergie libre d'un VER endommagé peut s'écrire comme la somme d'une énergie élastique dégradée et d'un potentiel thermodynamique associé aux déformations résiduelles générées par la fissuration. On retrouve bien la forme de l'énergie libre de Swoboda et Yang [187].

Dans une modélisation tridimensionnelle, la contrainte τ_{ij} s'exerce perpendiculairement aux trois plans de méso-fissuration (figures 4.1, 4.2 et 5.1). Par conséquent, on suppose comme Swoboda et Yang que la méso-contrainte de fissuration τ_{ij} est proportionnelle à la variable d'endommagement homogénéisée Ω_{ij} :

$$\tau_{ij} = g \Omega_{ij} \quad (5.9)$$

L'expression finale de l'énergie libre du VER est donc de la forme :

$$\Psi_s(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq}) = \Psi_e(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq}) - g \Omega_{ij} \epsilon_{ji} \quad (5.10)$$

Ce type de décomposition de l'énergie libre a été utilisé en milieu sec isotherme par Dragon et Halm [55, 90] et Homand-Etienne et al. [94]. Le potentiel élastique comporte des termes quadratiques en ϵ_{ij} et linéaires en Ω_{ij} :

$$\begin{aligned} \Psi_s(\epsilon_{ij}, \Omega_{ij}) = & \frac{1}{2}\lambda [Tr(\epsilon_{ij})]^2 + \mu Tr(\epsilon_{ik} \epsilon_{kj}) \\ & + \alpha Tr(\epsilon_{ij}) Tr(\epsilon_{ik} \Omega_{kj}) + \beta Tr(\epsilon_{ik} \epsilon_{kl} \Omega_{lj}) + g Tr(\epsilon_{ik} \Omega_{kj}) \end{aligned} \quad (5.11)$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé, et α et β sont des paramètres matériels. g est un scalaire négatif. Shao et al. ont également décomposé l'énergie libre sous la forme 5.10 pour des roches fragiles saturées [180] et non saturées [177], mais en développant un modèle de comportement isotherme fondé sur le concept de contrainte effective de Bishop.

En vertu de la décomposition thermodynamique des déformations 4.48, on peut facilement étendre le concept d'état mécanique équivalent à un milieu poreux non saturé non isotherme (voir le paragraphe 5.1.3).

5.1.2 Comparaison du choix de décomposition de l'énergie libre avec la théorie phénoménologique de Lemaître

Le paragraphe qui suit a pour objectif de montrer que le postulat effectué sur la forme de l'énergie libre 5.10 est cohérent avec l'approche phénoménologique de l'endommagement adoptée dans la théorie de Lemaître [119], développée pour des matériaux secs non isothermes. La démonstration est restreinte aux matériaux secs isothermes, mais peut facilement être étendue aux milieux poreux non saturés non isothermes en vertu de l'indépendance des variables d'état utilisées dans le modèle d'endommagement proposé dans le cadre de cette thèse.

5.1.2.1 Modèle phénoménologique de Lemaître

Dans les travaux de Lemaître et Desmorat [119], le comportement fragile du matériau ne génère que des déformations réversibles élastiques, et les déformations irréversibles proviennent d'un comportement élasto-plastique couplé à la loi d'évolution de l'endommagement :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (5.12)$$

Lemaître et Desmorat s'appuient sur des résultats expérimentaux pour exprimer l'énergie libre de Helmholtz. Leur décomposition a la forme suivante :

$$\Psi_s(\epsilon_{pq}^e, T, \Omega_{pq}, r, \alpha_{pq}) = \Psi_e(\epsilon_{pq}^e, T, \Omega_{pq}) + \Psi_p(r, \alpha_{pq}) + \Psi_T(T) \quad (5.13)$$

Ψ_e traduit les effets de l'endommagement sur le comportement thermo-élastique du matériau. Ψ_p est une composante purement plastique, qui dépend exclusivement des variables d'écrouissage isotrope (r) et cinématique (α_{pq}). Ψ_T est une composante thermique, qui ne dépend que de la température. Pour trouver l'énergie libre de Gibbs $\Psi_s^*(\sigma_{pq}, T, \Omega_{pq}, r, \alpha_{pq})$, une transformation de

Legendre partielle (relative aux déformations totales) est pratiquée :

$$\begin{cases} \Psi_s^*(\sigma_{pq}, T, \Omega_{pq}, r, \alpha_{pq}) + \Psi_s(\epsilon_{pq}^e, T, \Omega_{pq}, r, \alpha_{pq}) = \sigma_{ij} \epsilon_{ji} \\ \epsilon_{ij} = \frac{\partial \Psi_s^*(\sigma_{pq}, T, \Omega_{pq}, r, \alpha_{pq})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi_s(\epsilon_{pq}^e, T, \Omega_{pq}, r, \alpha_{pq})}{\partial \epsilon_{ij}} \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\begin{cases} \Psi_e^*(\sigma_{pq}, T, \Omega_{pq}) + \Psi_e(\epsilon_{pq}^e, T, \Omega_{pq}) = \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^e \\ \epsilon_{ij}^e = \frac{\partial \Psi_e^*(\sigma_{pq}, T, \Omega_{pq})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi_e(\epsilon_{pq}^e, T, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{ij}^e} \end{cases} \quad (5.15)$$

Les équations 5.14 permettent d'écrire :

$$\Psi_s^*(\sigma_{pq}, T, \Omega_{pq}, r, \alpha_{pq}) = \sigma_{ij} \epsilon_{ji} - \Psi_s(\epsilon_{pq}^e, T, \Omega_{pq}, r, \alpha_{pq}) \quad (5.16)$$

En combinant les équations 5.13 et 5.16, on obtient :

$$\Psi_s^*(\sigma_{pq}, T, \Omega_{pq}, r, \alpha_{pq}) = \sigma_{ij} \epsilon_{ji} - \Psi_e(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq}, T) - \Psi_p(r, \alpha_{pq}) - \Psi_T(T) \quad (5.17)$$

En introduisant l'égalité 5.12 et la relation de conjugaison 5.15 dans l'équation 5.17, il vient :

$$\Psi_s^*(\sigma_{pq}, T, \Omega_{pq}, r, \alpha_{pq}) = \sigma_{ij} \epsilon_{ji}^e + \sigma_{ij} \epsilon_{ji}^p - \sigma_{ij} \epsilon_{ji}^e + \Psi_e^*(\sigma_{pq}, T, \Omega_{pq}) - \Psi_p(r, \alpha_{pq}) - \Psi_T(T) \quad (5.18)$$

d'où :

$$\Psi_s^*(\sigma_{pq}, T, \Omega_{pq}, r, \alpha_{pq}) = \Psi_e^*(\sigma_{pq}, T, \Omega_{pq}) + \sigma_{ij} \epsilon_{ji}^p - \Psi_p(r, \alpha_{pq}) - \Psi_T(T) \quad (5.19)$$

Les auteurs en déduisent que les déformations totales dérivent bien d'un potentiel, et qu'elles sont égales à la somme d'une déformation dérivant d'une énergie élastique, et d'une déformation plastique irréversible. En effet, d'après la relation de conjugaison 5.14 :

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial \Psi_s^*(\sigma_{pq}, T, \Omega_{pq}, r, \alpha_{pq})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.20)$$

D'après l'équation 5.19, cela se traduit par :

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial \Psi_e^*(\sigma_{pq}, T, \Omega_{pq})}{\partial \sigma_{ij}} + \epsilon_{ij}^p = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (5.21)$$

5.1.2.2 Décomposition de l'énergie libre du VER endommagé dans le formalisme de Lemaître

Il n'y a pas de plasticité dans le modèle d'endommagement proposé dans le cadre de cette thèse, mais les composantes du tenseur de déformations comprennent toutes une composante élastique et une composante inélastique (équation 4.48). Dans un milieu sec et isotherme, cela se traduit par la décomposition suivante du tenseur de déformations totales :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^d \quad (5.22)$$

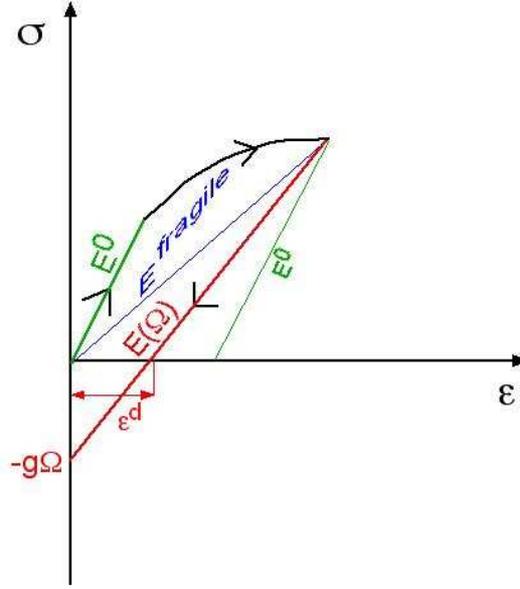


FIGURE 5.2 – Introduction de déformations résiduelles via la rigidité g , liée à la notion d'état mécanique équivalent [55, 90, 187].

Pour un matériau sec et isotherme, la forme de l'énergie libre 5.10 choisie pour le modèle THHMD devient, dans le formalisme de Lemaître (équation 5.13) :

$$\Psi_s(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq}) = \Psi_e(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq}) + \Psi_d(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq}) \quad (5.23)$$

où $\Psi_d(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq})$ est un potentiel thermodynamique associé à la présence de déformations résiduelles dans le matériau endommagé, après un déchargement (figure 5.2) :

$$\Psi_d(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq}) = -\tau_{ij} \epsilon_{ji} = -g \Omega_{ij} \epsilon_{ji} \quad (5.24)$$

On suit la même démarche que précédemment pour obtenir les relations de conjugaison (équations 5.14 et 5.15). On pratique une transformée de Legendre partielle par rapport aux déformations :

$$\begin{cases} \Psi_s^*(\sigma_{pq}, \Omega_{pq}) + \Psi_s(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq}) = \sigma_{ij} \epsilon_{ji} \\ \epsilon_{ij} = \frac{\partial \Psi_s^*(\sigma_{pq}, \Omega_{pq})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi_s(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{ij}} \end{cases} \quad (5.25)$$

$$\begin{cases} \Psi_e^*(\sigma_{pq}, \Omega_{pq}) + \Psi_e(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq}) = \sigma_{ij} \epsilon_{ji}^e \\ \epsilon_{ij}^e = \frac{\partial \Psi_e^*(\sigma_{pq}, \Omega_{pq})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi_e(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{ij}^e} \end{cases} \quad (5.26)$$

$$\begin{cases} \Psi_d^*(\tau_{pq}, \Omega_{pq}) + \Psi_d(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq}) = \tau_{ij} \epsilon_{ji} \\ \epsilon_{ij} = \frac{\partial \Psi_d^*(\tau_{pq}, \Omega_{pq})}{\partial \tau_{ij}}, \quad \tau_{ij} = \frac{\partial \Psi_d(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{ij}} \end{cases} \quad (5.27)$$

Si on combine les trois relations de conjugaison 5.25, 5.26 et 5.27 avec le postulat 5.23, on obtient :

$$\Psi_s^*(\sigma_{pq}, \Omega_{pq}) = \sigma_{ij} \epsilon_{ji} - \sigma_{ij} \epsilon_{ji}^e + \Psi_e^*(\sigma_{pq}, \Omega_{pq}) - \tau_{ij} \epsilon_{ji} + \Psi_d^*(\tau_{pq}, \Omega_{pq}) \quad (5.28)$$

D'après la décomposition 5.22 et l'hypothèse 5.9 :

$$\Psi_s^*(\sigma_{pq}, \Omega_{pq}) = \Psi_e^*(\sigma_{pq}, \Omega_{pq}) + \sigma_{ij} \epsilon_{ji}^d - g \Omega_{ij} \epsilon_{ji} + \Psi_d^*(\Omega_{pq}) \quad (5.29)$$

Comme dans la théorie adoptée par Lemaître et Desmorat (équation 5.21), les déformations totales dérivent bien d'un potentiel, et elles sont égales à la somme d'une déformation dérivant d'une énergie élastique, et d'une déformation inélastique :

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial \Psi_s^*(\sigma_{pq}, \Omega_{pq})}{\partial \sigma_{pq}} = \frac{\partial \Psi_e^*(\sigma_{pq}, \Omega_{pq})}{\partial \sigma_{ij}} + \epsilon_{ij}^d = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^d \quad (5.30)$$

Dans le cas d'un milieu sec et isotherme, les relations de conjugaison thermodynamiques mises en oeuvre dans le développement du modèle d'endommagement proposé dans le présent travail sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \tau_{ij} \\ \sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi_s(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi_e(\epsilon_{pq}^e, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{ij}^e} \\ \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \Psi_e(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{ij}} \\ \tau_{ij} = \frac{\partial \Psi_d(\epsilon_{pq}, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{ij}} \end{array} \right. \quad (5.31)$$

On remarque en particulier que la notion de contrainte équivalente $\tilde{\sigma}_{ij}$ n'est pas transposable à la notion de contrainte effective $\hat{\sigma}_{ij}$ au sens micromécanique (paragraphe 5.2.1.1).

5.1.3 Expression de l'énergie libre de Helmholtz

Le modèle THHMD est fondé sur le concept d'état mécanique équivalent. Pour étendre la décomposition de l'énergie libre 5.10 aux milieux poreux non saturés non isothermes, on utilise l'indépendance thermodynamique des variables d'état. La décomposition des déformations 4.48 amène à exprimer l'énergie libre du VER endommagé non saturé non isotherme sous la forme :

$$\begin{aligned} \Psi_s(\epsilon_{Mpq}, \epsilon_{Sv}, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq}) &= \Psi_e(\epsilon_{Mpq}, \epsilon_{Sv}, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq}) \\ &- g_M \Omega_{ij} \epsilon_{Mji} - \frac{g_S}{3} \Omega_{ij} \delta_{ji} \epsilon_{Sv} - \frac{g_T}{3} \Omega_{ij} \delta_{ji} \epsilon_{Tv} \end{aligned} \quad (5.32)$$

La relation de conjugaison 5.26, qui lie le tenseur de contraintes σ_{ij} au tenseur de déformations élastiques ϵ_{ij}^e par l'intermédiaire de l'énergie élastique endommagée $\Psi_e(\epsilon_{pq}^e, \Omega_{pq})$, est étendue à toutes les variables d'état utilisées dans la formulation du modèle THHMD (relations de conjugaison 4.51) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{Mij}^e} \\ s = \frac{\partial \Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{Sv}^e} \\ p_T = \frac{\partial \Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{Tv}^e} \end{array} \right. \quad (5.33)$$

En écrivant le système 5.33 sous forme incrémentale :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\sigma_{ij} = d\left(\frac{\partial\Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})}{\partial\epsilon_{Mij}^e}\right) \\ ds = d\left(\frac{\partial\Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})}{\partial\epsilon_{Sv}^e}\right) \\ dp_T = d\left(\frac{\partial\Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})}{\partial\epsilon_{Tv}^e}\right) \end{array} \right. \quad (5.34)$$

Par identification, la définition des rigidités endommagées 4.53 permet d'exprimer les dérivées 5.34 dans le domaine réversible :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\left(\frac{\partial\Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})}{\partial\epsilon_{Mij}^e}\right) = D_{eijkl}(\Omega_{pq}) d\epsilon_{Mlk}^e \\ d\left(\frac{\partial\Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})}{\partial\epsilon_{Sv}^e}\right) = \beta_s(\Omega_{pq}) d\epsilon_{Sv}^e \\ d\left(\frac{\partial\Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})}{\partial\epsilon_{Tv}^e}\right) = \beta_T(\Omega_{pq}) d\epsilon_{Tv}^e \end{array} \right. \quad (5.35)$$

Une intégration permet d'obtenir les dérivées partielles de l'énergie élastique endommagée. En supposant que dans son état initial, le matériau n'est pas déformé ($\epsilon_{M0ij}^e = \epsilon_{Sv0}^e = \epsilon_{Tv0}^e = 0$), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})}{\partial\epsilon_{Mij}^e} = D_{eijkl}(\Omega_{pq}) \epsilon_{Mlk}^e \\ \frac{\partial\Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})}{\partial\epsilon_{Sv}^e} = \beta_s(\Omega_{pq}) \epsilon_{Sv}^e \\ \frac{\partial\Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})}{\partial\epsilon_{Tv}^e} = \beta_T(\Omega_{pq}) \epsilon_{Tv}^e \end{array} \right. \quad (5.36)$$

Dans le domaine réversible, $d\Omega_{ij} = 0$. En vertu de l'indépendance des variables d'état de déformation (ϵ_{Mij} , ϵ_{Sv} et ϵ_{Tv}), on en déduit que dans le domaine réversible, l'expression de l'énergie élastique endommagée peut se calculer au moyen de la formule :

$$\begin{aligned} \Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq}) = \\ \frac{\partial\Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})}{\partial\epsilon_{Mij}^e} d\epsilon_{Mji}^e + \frac{\partial\Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})}{\partial\epsilon_{Sv}^e} d\epsilon_{Sv}^e + \frac{\partial\Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})}{\partial\epsilon_{Tv}^e} d\epsilon_{Tv}^e \end{aligned} \quad (5.37)$$

Comme tout potentiel thermodynamique, l'énergie élastique endommagée est définie à une constante près. La combinaison des équations 5.36 et 5.37 permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq}) = \\ \frac{1}{2} \epsilon_{Mji}^e D_{eijkl}(\Omega_{pq}) \epsilon_{Mlk}^e + \frac{1}{2} \epsilon_{Sv}^e \beta_s(\Omega_{pq}) \epsilon_{Sv}^e + \frac{1}{2} \epsilon_{Tv}^e \beta_T(\Omega_{pq}) \epsilon_{Tv}^e \end{aligned} \quad (5.38)$$

L'expression 5.38 amène à choisir l'expression suivante pour l'énergie élastique endommagée :

$$\begin{aligned} \Psi_e(\epsilon_{Mpq}, \epsilon_{Sv}, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq}) = \\ \frac{1}{2} \epsilon_{Mji} D_{eijkl}(\Omega_{pq}) \epsilon_{Mlk} + \frac{1}{2} \epsilon_{Sv} \beta_s(\Omega_{pq}) \epsilon_{Sv} + \frac{1}{2} \epsilon_{Tv} \beta_T(\Omega_{pq}) \epsilon_{Tv} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Dans l'expression de l'énergie libre 5.11 utilisée par Halm et Dragon [55, 90] et Homand-Etienne [94] pour un matériau sec, l'énergie élastique endommagée dépend des coefficients de Lamé et de deux paramètres α et β . Si on adoptait la même convention dans le modèle THHMD, il faudrait définir six paramètres scalaires (deux par variable d'état de déformation), en plus des coefficients de Lamé, pour caractériser complètement le potentiel élastique endommagé du VER. Dans la suite (voir la section 5.2), on suit une démarche différente, qui évite l'introduction de paramètres matériels spécifiques à l'énergie élastique du matériau endommagé. Suivant une approche micro-mécanique, un opérateur de contrainte endommagée est défini. Il est alors possible de calculer les trois rigidités endommagées $\mathbf{D}_e(\Omega_{pq})$, $\beta_s(\Omega_{pq})$ et $\beta_T(\Omega_{pq})$ par application du Principe de l'Energie Elastique Equivalente (PEEE).

Les égalités 5.32 et 5.39 permettent à présent d'exprimer l'énergie libre de Helmholtz du VER endommagé :

$$\begin{aligned} \Psi_s(\epsilon_{Mpq}, \epsilon_{Sv}, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq}) = \\ \frac{1}{2} \epsilon_{Mji} D_{eijkl}(\Omega_{pq}) \epsilon_{Mlk} + \frac{1}{2} \epsilon_{Sv} \beta_s(\Omega_{pq}) \epsilon_{Sv} + \frac{1}{2} \epsilon_{Tv} \beta_T(\Omega_{pq}) \epsilon_{Tv} \\ - g_M \Omega_{ij} \epsilon_{Mji} - \frac{g_S}{3} \Omega_{ij} \delta_{ji} \epsilon_{Sv} - \frac{g_T}{3} \Omega_{ij} \delta_{ji} \epsilon_{Tv} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Les relations de conjugaison 4.51 permettent à présent de déterminer les lois d'évolution des variables d'état de contrainte choisies, à savoir la contrainte nette, la succion et la contrainte thermique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma''_{ij} = D_{eijkl}(\Omega_{pq}) \epsilon_{Mlk} - g_M \Omega_{ij} \\ s = \beta_s(\Omega_{pq}) \epsilon_{Sv} - \frac{g_S}{3} Tr(\Omega_{pq}) \\ p_T = \beta_T(\Omega_{pq}) \epsilon_{Tv} - \frac{g_T}{3} Tr(\Omega_{pq}) \end{array} \right. \quad (5.41)$$

5.1.4 Loi d'évolution de l'endommagement

5.1.4.1 Variable thermo-dynamiquement conjuguée à l'endommagement

D'après les équations 4.51 et 5.40, l'expression de la contrainte thermodynamiquement conjuguée à l'endommagement est :

$$\begin{aligned} Y_{dij} = \\ -\frac{1}{2} \epsilon_{Mlk} \frac{\partial D_{eijkl}(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{mn}} \epsilon_{Mnm} - \frac{1}{2} \epsilon_{Sv} \frac{\partial \beta_s(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} \epsilon_{Sv} - \frac{1}{2} \epsilon_{Tv} \frac{\partial \beta_T(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} \epsilon_{Tv} \\ + g_M \epsilon_{Mij} + \frac{g_S}{3} \epsilon_{Sv} \delta_{ij} + \frac{g_T}{3} \epsilon_{Tv} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Il existe quelques modèles phénoménologiques qui passent exclusivement par la dérivation de l'énergie libre et de potentiels de dissipation pour déterminer les lois de comportement [64, 162]. En-dehors de ces exceptions, toutes les théories de l'endommagement, micromécaniques comme phénoménologiques, nécessitent la définition d'une fonction de charge. L'équation de la fonction

de charge choisie ici dépend de la contrainte thermodynamiquement conjuguée à la variable d'endommagement 5.42. Suivant le même raisonnement que Halm et Dragon [55, 90], la contrainte conjuguée à l'endommagement est décomposée en :

$$Y_{dij} = Y_{d_1ij} + Y_{d_2ij} \quad (5.43)$$

$$Y_{d_1ij} = g_M \epsilon_{Mij} + \frac{g_S}{3} \epsilon_{Sv} \delta_{ij} + \frac{g_T}{3} \epsilon_{Tv} \delta_{ij} \quad (5.44)$$

$$Y_{d_2ij} = -\frac{1}{2} \epsilon_{Mlk} \frac{\partial D_{eklij}(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{mn}} : \epsilon_{Mnm} - \frac{1}{2} \epsilon_{Sv} \frac{\partial \beta_s(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} \epsilon_{Sv} - \frac{1}{2} \epsilon_{Tv} \frac{\partial \beta_T(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} \epsilon_{Tv} \quad (5.45)$$

\mathbf{Y}_{d_2} représente les actions générant une dégradation mécanique partiellement recouvrable, et \mathbf{Y}_{d_1} modélise les actions générant des déformations résiduelles qui persistent après déchargement (effets « bloqués », “*locked effects*” chez Halm et Dragon). L'évolution de l'endommagement (supposé irréversible dans ce modèle) est uniquement contrôlé par la composante \mathbf{Y}_{d_1} . Comme dans les travaux de Mazars [136], Halm et Dragon [55, 90], Homand-Etienne [94] et Shao [177], on suppose que la fissuration est provoquée par des efforts de tension. Pour isoler les effets de tension, la contrainte \mathbf{Y}_{d_1} est décomposée en une contribution positive et en une contribution négative, comme dans les travaux de Halm et Dragon [55, 90] :

$$Y_{d_1ij} = Y_{d_1ij}^+ + Y_{d_1ij}^- \quad (5.46)$$

$$Y_{d_1ij}^+ = g_M \epsilon_{Mij}^+ + \frac{g_S}{3} \epsilon_{Sv}^- \delta_{ij} + \frac{g_T}{3} \epsilon_{Tv}^+ \delta_{ij} \quad (5.47)$$

$$Y_{d_1ij}^- = g_M (\epsilon_{Mij} - \epsilon_{Mij}^+) + \frac{g_S}{3} \delta_{ij} (\epsilon_{Sv} - \epsilon_{Sv}^-) + \frac{g_T}{3} \delta_{ij} (\epsilon_{Tv} - \epsilon_{Tv}^+) \quad (5.48)$$

On suppose que l'endommagement croît en fonction d'une partie de la composante positive de \mathbf{Y}_{d_1} , qui doit traduire les effets de tension mécanique, les effets de dilatation thermique et les effets de rétraction capillaire. C'est pourquoi on fait intervenir ϵ_{Sv}^- et non ϵ_{Sv}^+ dans l'expression de $\mathbf{Y}_{d_1}^+$. Les composantes des déformations qui interviennent dans 5.47 sont définies comme suit :

$$\begin{cases} \epsilon_{Mij}^+ = \sum_{k=1}^3 (H(\epsilon_{Mkk}) \epsilon_{Mkk} \mathbf{e}_{\mathbf{M}_k} \otimes \mathbf{e}_{\mathbf{M}_k}) \\ \epsilon_{Sv}^- = H(-\epsilon_{Sv}) \epsilon_{Sv} \\ \epsilon_{Tv}^+ = H(\epsilon_{Tv}) \epsilon_{Tv} \end{cases} \quad (5.49)$$

où H est la distribution de Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases} \quad (5.50)$$

Les valeurs ϵ_{Mkk} et les vecteurs $\mathbf{e}_{\mathbf{M}_k}$ désignent respectivement les valeurs et les vecteurs propres du tenseur des déformations conjuguées à la contrainte nette (ϵ_{Mij}).

5.1.4.2 Fonction de charge

Les hypothèses formulées et les décompositions effectuées (5.43, 5.46) amènent à chercher une fonction de charge dépendant de $\mathbf{Y}_{\mathbf{d}_1}^+$, c'est-à-dire de la densité d'énergie relative aux déformations résiduelles générées par tension :

$$f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq}) = f_d\left(Y_{dpq} - Y_{d_2pq} - Y_{d_1pq}^-, \Omega_{pq}\right) \quad (5.51)$$

On adopte le critère utilisé dans les travaux de Halm et Dragon [55, 90] :

$$\begin{aligned} f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq}) &= \sqrt{\frac{1}{2} \text{Tr} \left(\left(Y_{dij} - Y_{d_2ij} - Y_{d_1ij}^- \right) \left(Y_{dji} - Y_{d_2ji} - Y_{d_1ji}^- \right) \right)} - C_0 - C_1 \text{Tr}(\Omega_{pq}) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \text{Tr} \left(Y_{d_1ij}^+ Y_{d_1ji}^+ \right)} - C_0 - C_1 \text{Tr}(\Omega_{pq}) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Si l'endommagement initial est nul, la contrainte associée à l'endommagement $\mathbf{Y}_{\mathbf{d}_1}^+$ doit dépasser le seuil C_0 pour qu'il y ait déclenchement de l'endommagement. C_1 contrôle le taux d'évolution de l'endommagement. Pour un sol sec, $Y_{d_1ij}^+ = g \epsilon_{ij}^+$ et on retrouve, à un coefficient multiplicateur près, l'expression de la fonction de charge utilisée par Shao [177] :

$$f_d(\epsilon_{pq}^+, \Omega_{pq}) = |g| \sqrt{\frac{1}{2} \epsilon_{ij}^+ \epsilon_{ji}^+} - C_0 - C_1 \text{Tr}(\Omega_{pq}) \quad (5.53)$$

On reconnaît, dans l'expression 5.53, la déformation équivalente ξ définie par Mazars [136] :

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{2} \epsilon_{ij}^+ \epsilon_{ji}^+} \quad (5.54)$$

En une dimension, la surface de charge correspondant à la fonction 5.52 est un tétraèdre. Les déformations provoquées par tension (ϵ_{Mij}^+ , ϵ_{Sv}^+ et ϵ_{Tv}^+) sont en interaction, et leurs effets sont pondérés par les coefficients g_M , g_S et g_T respectivement. En trois dimensions, la surface de charge est un huitième de sphère dans l'espace des valeurs principales de la contrainte associée à l'endommagement $\mathbf{Y}_{\mathbf{d}_1}^+$ (voir la figure 5.3).

5.1.4.3 Loi d'écoulement

On suppose que l'endommagement s'écoule dans la direction des actions relatives à la tension. Autrement dit, compte-tenu de la forme supposée de la fonction de charge (équations 5.51 et 5.52), on suppose que la loi d'écoulement est associée [169], et qu'il n'est pas nécessaire de définir un potentiel d'endommagement en plus de l'énergie libre pour caractériser le comportement du matériau fragile :

$$d\Omega_{ij} = d\lambda_d \frac{\partial f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq})}{\partial Y_{dij}} \quad (5.55)$$

$d\lambda_d$ est l'incrément de multiplicateur d'endommagement. Le multiplicateur d'endommagement et la fonction de charge doivent vérifier les conditions complémentaires de Kuhn-Tucker [92] :

$$d\lambda_d \geq 0, \quad f_d \leq 0, \quad d\lambda_d f_d = 0 \quad (5.56)$$

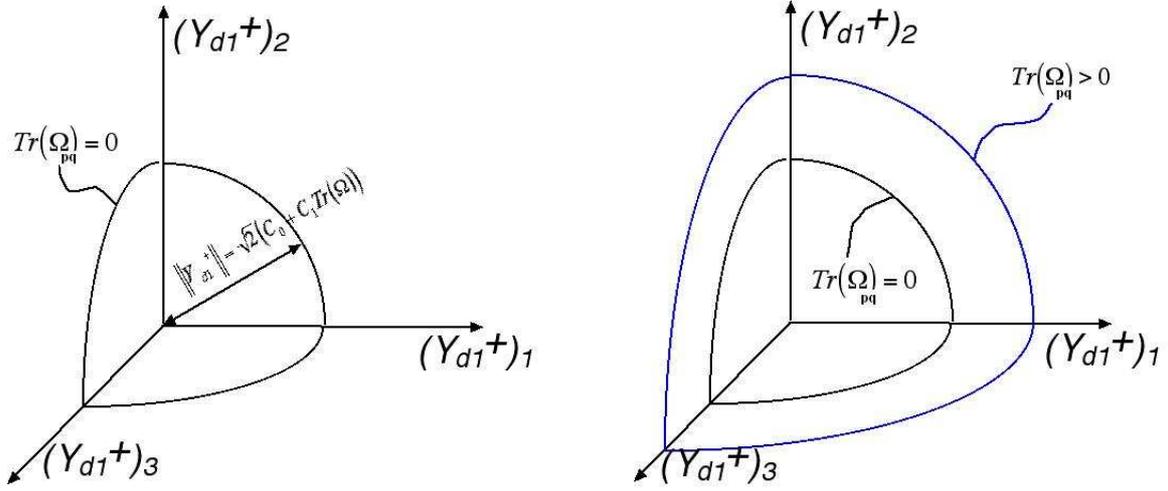


FIGURE 5.3 – Ecrouissage positif pris en compte par la fonction de charge choisie.

On déduit de l'expression de la fonction de charge 5.52 que :

$$\frac{\partial f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq})}{\partial Y_{dij}} = \frac{\partial f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq})}{\partial Y_{d1^+ij}} = \frac{Y_{d1^+ij}}{\sqrt{2 \text{Tr}(Y_{d1^+kl} Y_{d1^+lk})}} \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} = -C_1 \delta_{ij} \quad (5.58)$$

La combinaison des équations 5.55 et 5.57 donne :

$$d\Omega_{ij} = d\lambda_d \frac{Y_{d1^+ij}}{\sqrt{2 \text{Tr}(Y_{d1^+kl} Y_{d1^+lk})}} \quad (5.59)$$

D'après les équations 5.52 et 5.59, la fonction de charge est une fonction homogène de degré 1 (HODO1) par rapport à la variable \mathbf{Y}_{d1^+} . D'après Hansen et Schreyer [92], les modèles de plasticité et d'endommagement sont couramment formalisés à l'aide de surfaces de charge dont les équations sont des fonctions HODO1. De telles fonctions assurent la convexité du domaine réversible [41].

Pour trouver la loi d'évolution de l'endommagement 5.59, il reste à calculer l'incrément de multiplicateur d'endommagement $d\lambda_d$. On utilise pour cela l'équation de consistance, $df_d = 0$:

$$\frac{\partial f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq})}{\partial Y_{dij}} dY_{dji} + \frac{\partial f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} d\Omega_{ji} = 0 \quad (5.60)$$

Tenant compte des équations 5.51 et 5.52, on peut réécrire l'équation 5.60 sous la forme :

$$\frac{\partial f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq})}{\partial Y_{dij}} dY_{d1^+ji} + \frac{\partial f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} d\Omega_{ji} = 0 \quad (5.61)$$

D'après les équations 5.55 et 5.61, on a :

$$\frac{\partial f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq})}{\partial Y_{dij}} dY_{d1^+ji} + d\lambda_d \frac{\partial f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} \frac{\partial f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq})}{\partial Y_{dji}} = 0 \quad (5.62)$$

On déduit de l'équation 5.62 que l'expression de l'incrément du multiplicateur d'endommagement est :

$$d\lambda_d = -\frac{\frac{\partial f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq})}{\partial Y_{dij}}}{\frac{\partial f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq})}{\partial \Omega_{kl}} \frac{\partial f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq})}{\partial Y_{dtk}}} dY_{d_1 ji}^+ = -\frac{\frac{\partial f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq})}{\partial Y_{d_1 ij}^+}}{\frac{\partial f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq})}{\partial \Omega_{kl}} \frac{\partial f_d(Y_{dpq}, \Omega_{pq})}{\partial Y_{d_1 lk}^+}} dY_{d_1 ji}^+ \quad (5.63)$$

La combinaison des équations 5.63, 5.57 et 5.58 permet d'obtenir l'expression explicite du multiplicateur d'endommagement :

$$d\lambda_d = \frac{Y_{d_1 ij}^+ dY_{d_1 ji}^+}{C_1 \delta_{kl} Y_{d_1 lk}^+} \quad (5.64)$$

Par suite, on en déduit l'incrément d'endommagement 5.59 :

$$d\Omega_{ij} = \frac{Y_{d_1 kl}^+ dY_{d_1 lk}^+}{C_1 Tr(Y_{d_1 pq}^+)} \frac{Y_{d_1 ij}^+}{\sqrt{2 Tr(Y_{d_1 mn}^+ Y_{d_1 nm}^+)}} \quad (5.65)$$

5.1.5 Expressions des déformations inélastiques incrémentales

Dans le domaine réversible, les variables d'état de contrainte sont reliées aux variables d'état de déformation par les rigidités endommagées. On rappelle l'équation 4.53 :

$$\begin{cases} d\sigma''_{ij} = D_{eijkl}(\Omega_{pq}) d\epsilon_{Mlk}^e \\ ds = \beta_s(\Omega_{pq}) d\epsilon_{Sv}^e \\ dp_T = \beta_T(\Omega_{pq}) d\epsilon_{Tv}^e \end{cases} \quad (5.66)$$

De plus, les relations de conjugaison 4.51 issues de la dérivation de l'énergie libre 5.40 donnent :

$$\begin{cases} \sigma''_{ij} = D_{eijkl}(\Omega_{pq}) \epsilon_{Mlk} - g_M \Omega_{ij} \\ s = \beta_s(\Omega_{pq}) \epsilon_{Sv} - \frac{g_S}{3} \Omega_{ij} \delta_{ji} \\ p_T = \beta_T(\Omega_{pq}) \epsilon_{Tv} - \frac{g_T}{3} \Omega_{ij} \delta_{ji} \end{cases} \quad (5.67)$$

Par dérivation des relations 5.67, on obtient :

$$\begin{cases} d\sigma''_{ij} = D_{eijkl}(\Omega_{pq}) d\epsilon_{Mlk} + \left(\frac{\partial D_{eijkl}(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{mn}} \epsilon_{Mnm} \right) d\Omega_{lk} - g_M d\Omega_{ij} \\ ds = \beta_s(\Omega_{pq}) d\epsilon_{Sv} + \left(\frac{\partial \beta_s(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} \epsilon_{Sv} \right) d\Omega_{ji} - \frac{g_S}{3} \delta_{ij} d\Omega_{ji} \\ dp_T = \beta_T(\Omega_{pq}) d\epsilon_{Tv} + \left(\frac{\partial \beta_T(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} \epsilon_{Tv} \right) d\Omega_{ji} - \frac{g_T}{3} \delta_{ij} d\Omega_{ji} \end{cases} \quad (5.68)$$

On peut réécrire le système 5.68 sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\sigma''_{ij} = D_{eijkl}(\Omega_{pq}) (d\epsilon_{Mlk}^e + d\epsilon_{Mlk}^d) + \left(\frac{\partial D_{eijkl}(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{mn}} \epsilon_{Mnm} \right) d\Omega_{lk} - g_M d\Omega_{ij} \\ ds = \beta_s(\Omega_{pq}) (d\epsilon_{Sv}^e + d\epsilon_{Sv}^d) + \left(\frac{\partial \beta_s(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} \epsilon_{Sv} \right) d\Omega_{ji} - \frac{g_S}{3} \delta_{ij} d\Omega_{ji} \\ dp_T = \beta_T(\Omega_{pq}) (d\epsilon_{Tv}^e + d\epsilon_{Tv}^d) + \left(\frac{\partial \beta_T(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} \epsilon_{Tv} \right) d\Omega_{ji} - \frac{g_T}{3} \delta_{ij} d\Omega_{ji} \end{array} \right. \quad (5.69)$$

En introduisant les relations 5.66 dans le système 5.69, on obtient les incréments des déformations inélastiques en fonction de l'incrément d'endommagement :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\epsilon_{Mij}^d = - \left(D_{eklhg}(\Omega_{pq})^{-1} \frac{\partial D_{eghij}(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{mn}} \epsilon_{Mnm} \right) d\Omega_{lk} + g_M D_{eijkl}(\Omega_{pq})^{-1} d\Omega_{lk} \\ d\epsilon_{Sv}^d = - \left(\frac{\epsilon_{Sv}}{\beta_s(\Omega_{pq})} \frac{\partial \beta_s(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} \right) d\Omega_{ji} + \frac{g_S}{3\beta_s(\Omega_{pq})} \delta_{ij} d\Omega_{ji} \\ d\epsilon_{Tv}^d = - \left(\frac{\epsilon_{Tv}}{\beta_T(\Omega_{pq})} \frac{\partial \beta_T(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} \right) d\Omega_{ji} + \frac{g_T}{3\beta_T(\Omega_{pq})} \delta_{ij} d\Omega_{ji} \end{array} \right. \quad (5.70)$$

L'équation 5.65 permet ensuite de déterminer complètement les incréments des déformations inélastiques. Par commodité, on note :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\epsilon_{Mij}^d = D_{dMij} d\Omega_{lk} \\ d\epsilon_{Sv}^d = D_{dSij} d\Omega_{ji} \\ d\epsilon_{Tv}^d = D_{dTij} d\Omega_{ji} \end{array} \right. \quad (5.71)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{dMijkl} = -D_{eijhg}(\Omega_{pq})^{-1} \frac{\partial D_{eghkl}(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{mn}} \epsilon_{Mnm} + g_M D_{eijkl}(\Omega_{pq})^{-1} \\ D_{dSij} = -\frac{\epsilon_{Sv}}{\beta_s(\Omega_{pq})} \frac{\partial \beta_s(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} + \frac{g_S}{3\beta_s(\Omega_{pq})} \delta_{ij} \\ D_{dTij} = -\frac{\epsilon_{Tv}}{\beta_T(\Omega_{pq})} \frac{\partial \beta_T(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} + \frac{g_T}{3\beta_T(\Omega_{pq})} \delta_{ij} \end{array} \right. \quad (5.72)$$

Le calcul de la rigidité mécanique endommagée et le calcul des dérivées partielles des rigidités par rapport à l'endommagement sont détaillés dans l'annexe A.

5.2 Aspects micromécaniques

On rappelle la décomposition thermodynamique des déformations adoptée dans le modèle THHMD (équation 4.48) :

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{Mij}^e + d\epsilon_{Mij}^d + \frac{1}{3} \delta_{ij} (d\epsilon_{Sv}^e + d\epsilon_{Sv}^d) + \frac{1}{3} \delta_{ij} (d\epsilon_{Tv}^e + d\epsilon_{Tv}^d) \quad (5.73)$$

En utilisant la définition des rigidités endommagées 4.53, on peut réécrire l'équation 5.73 sous la forme :

$$\begin{aligned} d\epsilon_{ij} &= d\epsilon_{M_{ij}}^d + \frac{1}{3}\delta_{ij} d\epsilon_{S_v}^d + \frac{1}{3}\delta_{ij} d\epsilon_{T_v}^d \\ &+ D_{\epsilon_{ijkl}}(\Omega_{pq})^{-1} d\sigma''_{lk} + \frac{\delta_{ij}}{3\beta_s(\Omega_{pq})} ds + \frac{\delta_{ij}}{3\beta_T(\Omega_{pq})} dp_T \end{aligned} \quad (5.74)$$

Les déformations inélastiques incrémentales ont été déterminées dans le paragraphe précédent (équations 5.70 et 5.65). Pour connaître intégralement la loi de comportement du matériau poreux endommagé en conditions non saturées et non isothermes, il reste donc à déterminer les rigidités endommagées $\mathbf{D}_e(\Omega_{pq})$, $\beta_s(\Omega_{pq})$ et $\beta_T(\Omega_{pq})$. A cette fin, le concept de contrainte effective, couramment utilisé en Mécanique de l'Endommagement en Milieu Continu, est étendu aux trois variables d'état de contrainte du modèle THHMD (contrainte nette, succion et contrainte thermique). Le Principe de l'Energie Elastique Equivalente (PEEE) permet ensuite de déterminer les rigidités endommagées $\mathbf{D}_e(\Omega_{pq})$, $\beta_s(\Omega_{pq})$ et $\beta_T(\Omega_{pq})$.

5.2.1 Concept de variable d'état endommagée

5.2.1.1 Extension de la notion de contrainte effective de la CDM

L'objectif de cette section est de déterminer les rigidités endommagées $\mathbf{D}_e(\Omega_{pq})$, $\beta_s(\Omega_{pq})$ et $\beta_T(\Omega_{pq})$. En Mécanique de l'Endommagement en Milieu Continu ("*Continuum Damage Mechanics*", CDM), la notion de contrainte effective est couramment utilisée pour traduire la réduction de surface mécaniquement efficace du matériau endommagé, et pour modéliser la réorientation des contraintes consécutive à la fracturation. Comme on l'a exposé dans l'étude bibliographique de l'endommagement, la contrainte effective $\widehat{\sigma}_{ij}$ est définie à l'aide d'un opérateur d'ordre 4, dépendant de l'endommagement [92] :

$$\widehat{\sigma}_{ij} = M_{ijkl}(\Omega_{pq}) \sigma_{lk} \quad (5.75)$$

Dans la suite, pour ne pas faire de confusion avec la notion de contrainte effective de Bishop, on appellera $\widehat{\sigma}_{ij}$ « contrainte endommagée », et $\mathbf{M}(\Omega_{pq})$ « opérateur de contrainte endommagée ». La notion de contrainte endommagée est étendue à toutes les variables d'état de contrainte utilisées dans le modèle THHMD. Compte-tenu de l'isotropie de l'influence de la succion et de la contrainte thermique, on définit :

- la contrainte nette endommagée :

$$\widehat{\sigma}''_{ij} = M_{ijkl}(\Omega_{pq}) \sigma''_{lk} \quad (5.76)$$

- la succion endommagée :

$$Tr(\delta_{ij} \widehat{s}) = Tr(M_{ijkl}(\Omega_{pq}) \delta_{lk} s) \quad (5.77)$$

- contrainte thermique endommagée :

$$Tr(\delta_{ij} \widehat{p}_T) = Tr(M_{ijkl}(\Omega_{pq}) \delta_{lk} p_T) \quad (5.78)$$

5.2.1.2 Opérateur de contrainte endommagée

Comme c'est rappelé dans l'ouvrage de Lemaître et Desmorat [119], l'opérateur $\mathbf{M}(\Omega_{pq})$ doit être indépendant de la loi de comportement. Autrement dit, le processus de réduction de surface mécanique efficace par endommagement ne dépend pas du matériau choisi, qui peut être élastique, élasto-plastique, viscoplastique, ou autre. Par exemple, on ne peut pas définir l'opérateur de contrainte endommagée en passant uniquement par le concept de contrainte nominale σ_{ij}^* :

$$D_{eijkl}^0 \sigma_{lk}^* = D_{eijkl}(\Omega_{pq}) \sigma_{lk}, \quad M_{ijkl}^*(\Omega_{pq}) = D_{eijmn}^{0-1} D_{enmkl}(\Omega_{pq}) \quad (5.79)$$

$\mathbf{M}^*(\Omega_{pq})$ ne convient pas.

D'autre part, la contrainte endommagée définie par l'opérateur $\mathbf{M}(\Omega_{pq})$ doit, comme la contrainte réelle, être symétrique. C'est pourquoi la définition :

$$\sigma_{ij}^* = M_{ijkl}^*(\Omega_{pq}) \sigma_{lk} = (\delta - \Omega)_{ik}^{-1} \sigma_{kj} \quad (5.80)$$

ne convient pas non plus.

Enfin, la théorie de l'endommagement doit être compatible avec les règles de la thermodynamique. Un opérateur $\mathbf{M}^*(\Omega_{pq})$ qui définirait la contrainte nette endommagée de la manière suivante :

$$\sigma_{ij}^* = \frac{1}{2} \left[\sigma_{ik} (\delta - \Omega)_{kj}^{-1} + (\delta - \Omega)_{ik}^{-1} \sigma_{kj} \right] \quad (5.81)$$

assurera la symétrie du tenseur de contrainte endommagée σ_{ij}^* , mais ne permettrait pas de définir la contrainte nette endommagée à partir de la dérivation d'un potentiel énergétique.

Dans le modèle proposé ici, on choisit l'opérateur construit par Cordebois et Sidoroff [42, 185] :

$$\hat{\sigma}_{ij} = M_{ijkl}(\Omega_{pq}) \sigma_{lk} = (\delta - \Omega)_{ik}^{-1/2} \sigma_{kl} (\delta - \Omega)_{lj}^{-1/2} \quad (5.82)$$

5.2.1.3 Expressions explicites de \hat{s} et \hat{p}_T

Compte-tenu du choix de l'opérateur $\mathbf{M}(\Omega_{pq})$ (équation 5.82), les définitions 5.77 et 5.78 peuvent être formulées comme suit :

$$\begin{cases} Tr(\delta_{ij} \hat{s}) = Tr \left((\delta - \Omega)_{ik}^{-1/2} \delta_{kl} s (\delta - \Omega)_{lj}^{-1/2} \right) \\ Tr(\delta_{ij} \hat{p}_T) = Tr \left((\delta - \Omega)_{ik}^{-1/2} \delta_{kl} p_T (\delta - \Omega)_{lj}^{-1/2} \right) \end{cases} \quad (5.83)$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \hat{s} \delta_{ij} \delta_{ji} = s \left((\delta - \Omega)^{-1/2} \right)_{ik} \left((\delta - \Omega)^{-1/2} \right)_{kj} \delta_{ji} \\ \hat{p}_T \delta_{ij} \delta_{ji} = p_T \left((\delta - \Omega)^{-1/2} \right)_{ik} \left((\delta - \Omega)^{-1/2} \right)_{kj} \delta_{ji} \end{cases} \quad (5.84)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{s} \delta_{ij} \delta_{ji} = s \left[\left((\delta - \Omega)^{-1/2} \right)^2 \right]_{ij} \delta_{ji} \\ \widehat{p}_T \delta_{ij} \delta_{ji} = p_T \left[\left((\delta - \Omega)^{-1/2} \right)^2 \right]_{ij} \delta_{ji} \end{array} \right. \quad (5.85)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{s} \delta_{ii} = s \left((\delta - \Omega)^{-1} \right)_{ii} \\ \widehat{p}_T \delta_{ii} = p_T \left((\delta - \Omega)^{-1} \right)_{ii} \end{array} \right. \quad (5.86)$$

On en déduit finalement les expressions explicites de la succion et de la contrainte thermique endommagées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{s} = \frac{Tr((\delta - \Omega)_{pq}^{-1})}{3} s \\ \widehat{p}_T = \frac{Tr((\delta - \Omega)_{pq}^{-1})}{3} p_T \end{array} \right. \quad (5.87)$$

5.2.2 Détermination des rigidités endommagées par application du PEEE

5.2.2.1 Energie élastique relative à la contrainte nette

On applique le Principe de l'Energie Elastique Equivalente (PEEE), rappelé dans les travaux de Hansen et Schreyer [92] : « l'énergie élastique de déformation du matériau endommagé a la même forme que celle du matériau intact, mais la contrainte σ_{ij} est remplacée par la contrainte effective [contrainte endommagée dans le formalisme adopté dans le modèle THHMD] $\widehat{\sigma}_{ij}$ ». On peut facilement appliquer le PEEE aux variables d'état choisies. Pour déterminer la rigidité endommagée $\mathbf{D}_e(\Omega_{pq})$, on applique ainsi le PEEE en contraintes nettes. On note $\Psi_e^M(\sigma''_{pq}, \epsilon_{sv}, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq})$ la transformée de Legendre partielle de l'énergie élastique endommagée du VER 5.39, calculée par rapport aux déformations mécaniques totales ϵ_{Mij} . Une petite variation de l'énergie élastique de déformation mécanique s'écrit :

$$\delta \Psi_e^M(\sigma''_{pq}, \epsilon_{sv}, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq}) = (\sigma''_{ij})^T \delta \epsilon_{Mij}^e \quad (5.88)$$

Dans le domaine des déformations mécaniques élastiques, d'après l'équation 4.53, on a :

$$\delta \sigma''_{ij} = D_{eijkl}(\Omega_{pq}) \delta \epsilon_{Mlk}^e \quad (5.89)$$

En introduisant la relation 5.89 dans l'équation 5.88, on obtient :

$$\delta \Psi_e^M(\sigma''_{pq}, \epsilon_{sv}, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq}) = (\sigma''_{ij})^T D_{eijkl}(\Omega_{pq})^{-1} \delta \sigma''_{lk} \quad (5.90)$$

Comme la contrainte nette est une variable d'état, une petite variation de σ''_{ij} peut s'écrire sous la forme d'une différentielle exacte de σ''_{ij} , et il s'ensuit que les deux membres de l'équation 5.90 peuvent s'écrire comme des différentielles exactes :

$$d \Psi_e^M(\sigma''_{pq}, \epsilon_{sv}, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq}) = (\sigma''_{ij})^T D_{eijkl}(\Omega_{pq})^{-1} d \sigma''_{lk} \quad (5.91)$$

L'intégration de la relation 5.91 permet d'exprimer l'énergie élastique de déformation du matériau

endommagé dans le domaine des déformations mécaniques élastiques :

$$\Psi_e^M |_{Mel} (\sigma''_{pq}, \epsilon_{Sv}, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq}) = \frac{1}{2} (\sigma''_{ij})^T D_{eijkl} (\Omega_{pq})^{-1} \sigma''_{lk} \quad (5.92)$$

Le Principe de l'Energie Elastique Equivalente consiste à postuler l'égalité :

$$\Psi_e^M (\sigma''_{pq}, \epsilon_{Sv}, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq}) = \Psi_e^{M0} \left(\widehat{\sigma''_{pq}}, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq} = 0 \right) \quad (5.93)$$

Autrement dit, si on applique le PEEE dans le domaine des déformations mécaniques élastiques, on obtient l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2} (\sigma''_{pq})^T : D_{eijkl} (\Omega_{pq})^{-1} : \sigma''_{pq} = \frac{1}{2} \left(\widehat{\sigma''_{pq}} \right)^T : \underline{\underline{D_e}}^{0-1} : \widehat{\sigma''_{pq}} \quad (5.94)$$

où \mathbf{D}_e^0 est le tenseur d'élasticité de la matrice poreuse intacte. La combinaison des relations 5.76 et 5.94 donne :

$$(\sigma''_{ji})^T D_{eijkl} (\Omega_{pq})^{-1} \sigma''_{lk} = (\sigma''_{ji})^T (M(\Omega_{pq}))_{ijnm}^T D_{emnop}^{0-1} M_{pokl} (\Omega_{pq}) \sigma''_{lk} \quad (5.95)$$

Et finalement on obtient l'expression de la rigidité mécanique endommagée :

$$D_{eijkl} (\Omega_{pq}) = M(\Omega_{pq})_{ijnm}^{-1} D_{emnop}^0 M(\Omega_{pq})_{pokl}^{-T} \quad (5.96)$$

Voir l'annexe B pour le détail du calcul des coefficients du tenseur $\mathbf{D}_e(\Omega_{pq})$.

Le Principe de l'Energie Elastique Equivalente crée une relation de conjugaison thermodynamique entre la contrainte nette endommagée $\widehat{\sigma''_{ij}}$ et la déformation mécanique élastique ϵ_{Mij}^e , via l'énergie élastique qui caractérise l'état intact du VER $\Psi_e^0 (\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e)$. D'après la relation 5.31, la contrainte nette réelle σ''_{ij} est thermodynamiquement conjuguée à la déformation mécanique élastique ϵ_{Mij}^e via l'énergie élastique endommagée définie sur le domaine réversible du VER $\Psi_e (\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})$. Les relations de conjugaison thermodynamiques rappelées dans l'équation 5.31 permettent donc de faire une claire distinction entre la contrainte nette équivalente $\widetilde{\sigma''_{ij}}$ et la contrainte nette endommagée $\widehat{\sigma''_{ij}}$.

- La **contrainte nette équivalente** $\widetilde{\sigma''_{ij}}$ est conjuguée aux déformations mécaniques totales ϵ_{Mij} et dérive de l'énergie élastique endommagée du VER : $\Psi_e (\epsilon_{Mpq}, \epsilon_{Sv}, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq})$:

$$\widetilde{\sigma''_{ij}} = \frac{\partial \Psi_e (\epsilon_{Mpq}, \epsilon_{Sv}, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{Mij}^e} \quad (5.97)$$

- La **contrainte nette endommagée** $\widehat{\sigma''_{ij}}$ est conjuguée aux déformations mécaniques élastiques ϵ_{Mij}^e et dérive de l'énergie élastique du VER dans son état de référence, supposé intact : $\Psi_e^0 (\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e)$:

$$\widehat{\sigma''_{ij}} = \frac{\partial \Psi_e^0 (\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e)}{\partial \epsilon_{Mij}^e} \quad (5.98)$$

- La **contrainte nette réelle** σ''_{ij} est conjuguée aux déformations mécaniques totales ϵ_{Mij} par l'énergie libre du VER $\Psi_s(\epsilon_{Mpq}, \epsilon_{Sv}, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq})$, et aux déformations mécaniques élastiques ϵ_{Mij}^e par l'énergie élastique endommagée du VER définie dans le domaine réversible $\Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})$:

$$\sigma''_{ij} = \frac{\partial \Psi_e(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq})}{\partial \epsilon_{Mij}^e} \quad (5.99)$$

5.2.2.2 Energies élastiques relatives à la succion et à la contrainte thermique

On suit la même démarche que précédemment pour déterminer les rigidités endommagées $\beta_s(\Omega_{pq})$ et $\beta_T(\Omega_{pq})$. On note $\Psi_e^S(\epsilon_{Mpq}, s, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq})$ la transformée de Legendre partielle de l'énergie élastique endommagée du VER 5.39, calculée par rapport aux déformations volumiques relatives à la succion ϵ_{Sv} . On note de même $\Psi_e^T(\epsilon_{Mpq}, \epsilon_{Sv}, p_T, \Omega_{pq})$ la transformée de Legendre partielle de l'énergie élastique endommagée du VER 5.39, calculée par rapport aux déformations volumiques relatives à la contrainte thermique ϵ_{Tv} . Les petites variations de l'énergie élastique de déformation relative à la succion et de l'énergie élastique de déformation thermique s'écrivent :

$$\begin{cases} \delta \Psi_e^S(\epsilon_{Mpq}, s, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq}) = s \delta \epsilon_{Sv}^e \\ \delta \Psi_e^T(\epsilon_{Mpq}, \epsilon_{Sv}, p_T, \Omega_{pq}) = p_T \delta \epsilon_{Tv}^e \end{cases} \quad (5.100)$$

Dans le domaine élastique des déformations relatives à la succion, d'après l'équation 4.53 :

$$\delta s = \beta_s(\Omega_{pq}) \delta \epsilon_{Sv}^e \quad (5.101)$$

Dans le domaine des déformations thermiques réversibles, d'après l'équation 4.53 :

$$\delta p_T = \beta_T(\Omega_{pq}) \delta \epsilon_{Tv}^e \quad (5.102)$$

En introduisant les relations 5.101 et 5.102 dans le système 5.100, on obtient :

$$\begin{cases} \delta \Psi_e^S(\epsilon_{Mpq}, s, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq}) = \frac{1}{\beta_s(\Omega_{pq})} s \delta s \\ \delta \Psi_e^T(\epsilon_{Mpq}, \epsilon_{Sv}, p_T, \Omega_{pq}) = \frac{1}{\beta_T(\Omega_{pq})} p_T \delta p_T \end{cases} \quad (5.103)$$

Comme la succion et la contrainte thermique sont des variables d'état, on peut réécrire le système 5.103 avec des différentielles exactes :

$$\begin{cases} d\Psi_e^S(\epsilon_{Mpq}, s, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq}) = \frac{1}{\beta_s(\Omega_{pq})} s ds \\ d\Psi_e^T(\epsilon_{Mpq}, \epsilon_{Sv}, p_T, \Omega_{pq}) = \frac{1}{\beta_T(\Omega_{pq})} p_T dp_T \end{cases} \quad (5.104)$$

L'intégration des relations 5.104 permet d'exprimer :

- l'énergie élastique de déformation du matériau endommagé dans le domaine élastique des déformations relatives à la succion :

$$\Psi_e^S|_{Sel}(\epsilon_{Mpq}, s, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq}) = \frac{s^2}{2\beta_s(\Omega_{pq})} \quad (5.105)$$

- l'énergie élastique de déformation du matériau endommagé dans le domaine des déformations thermiques élastiques :

$$\Psi_e^T|_{Tel}(\epsilon_{Mpq}, \epsilon_{Sv}, p_T, \Omega_{pq}) = \frac{(p_T)^2}{2\beta_T(\Omega_{pq})} \quad (5.106)$$

Le Principe de l'Energie Elastique Equivalente consiste à postuler :

$$\begin{cases} \Psi_e^S(\epsilon_{Mpq}, s, \epsilon_{Tv}, \Omega_{pq}) = \Psi_e^{S0}(\epsilon_{Mpq}^e, \widehat{s}, \epsilon_{Tv}^e, \Omega_{pq} = 0) \\ \Psi_e^T(\epsilon_{Mpq}, \epsilon_{Sv}, p_T, \Omega_{pq}) = \Psi_e^{T0}(\epsilon_{Mpq}^e, \epsilon_{Sv}^e, \widehat{p}_T, \Omega_{pq} = 0) \end{cases} \quad (5.107)$$

- En appliquant le PEEE dans le domaine élastique des déformations relatives à la succion, on obtient :

$$\frac{s^2}{2\beta_s(\Omega_{pq})} = \frac{\widehat{s}^2}{2\beta_s^0} \quad (5.108)$$

où β_s^0 est le module de rigidité relatif à la succion pour le matériau intact.

- En appliquant le PEEE dans le domaine des déformations thermiques élastiques, on obtient :

$$\frac{(p_T)^2}{2\beta_T(\Omega_{pq})} = \frac{(\widehat{p}_T)^2}{2\beta_T^0} \quad (5.109)$$

où β_T^0 est le module de rigidité thermique pour le matériau intact.

La combinaison des équations 5.87, 5.108 et 5.109 donne :

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta_s(\Omega_{pq})} s^2 = \frac{[Tr((\delta-\Omega)_{pq}^{-1})]^2}{9\beta_s^0} s^2 \\ \frac{1}{\beta_T(\Omega_{pq})} (p_T)^2 = \frac{[Tr((\delta-\Omega)_{pq}^{-1})]^2}{9\beta_T^0} (p_T)^2 \end{cases} \quad (5.110)$$

Et finalement on obtient les expressions de la rigidité endommagée relative à la succion et de la rigidité thermique endommagée :

$$\begin{cases} \beta_s(\Omega_{pq}) = \frac{9}{[Tr((\delta-\Omega)_{pq}^{-1})]^2} \beta_s^0 \\ \beta_T(\Omega_{pq}) = \frac{9}{[Tr((\delta-\Omega)_{pq}^{-1})]^2} \beta_T^0 \end{cases} \quad (5.111)$$

Si on exprime le tenseur d'endommagement Ω_{ij} dans une base principale, on peut facilement obtenir les expressions explicites des modules de rigidité endommagés relatifs à la succion et à la contrainte thermique :

$$\begin{cases} \beta_s(\Omega_{pq}) = \frac{9\beta_s^0}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{1-\Omega_{ii}}\right)^2} \\ \beta_T(\Omega_{pq}) = \frac{9\beta_T^0}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{1-\Omega_{ii}}\right)^2} \end{cases} \quad (5.112)$$

5.3 Approche numérique

A ce stade, toutes les inconnues de la loi de comportement sont déterminées, mais la loi de comportement incrémentale ne peut pas être implémentée telle quelle dans le code d'Eléments Finis Θ -Stock [72]. On a besoin d'exprimer l'incrément de contraintes nettes en fonction des incréments des degrés de liberté nodaux utilisés dans le programme (déplacements, température et pressions interstitielles).

5.3.1 Loi de comportement exprimée en température

5.3.1.1 Loi de comportement incrémentale en contrainte thermique

D'après l'équation 5.74, l'incrément de contraintes nettes peut s'écrire :

$$\begin{aligned} d\sigma''_{ij} = & D_{ijkl}(\Omega_{pq}) d\epsilon_{lk} - \frac{1}{3\beta_s(\Omega_{pq})} D_{ijkl}(\Omega_{pq}) \delta_{lk} ds - \frac{1}{3\beta_T(\Omega_{pq})} D_{ijkl}(\Omega_{pq}) \delta_{lk} dp_T \\ & - D_{ijkl}(\Omega_{pq}) \left[d\epsilon_{M_{lk}}^d + \frac{1}{3} \delta_{lk} d\epsilon_{S_v}^d + \frac{1}{3} \delta_{lk} d\epsilon_{T_v}^d \right] \end{aligned} \quad (5.113)$$

On note :

$$F_{sij}(\Omega_{pq}) = \frac{1}{3\beta_s(\Omega_{pq})} D_{ijkl}(\Omega_{pq}) \delta_{lk} \quad (5.114)$$

$$F_{Tij}(\Omega_{pq}) = \frac{1}{3\beta_T(\Omega_{pq})} D_{ijkl}(\Omega_{pq}) \delta_{lk} \quad (5.115)$$

En utilisant les équations 5.114, 5.115 et 5.71, on peut écrire l'équation 5.113 sous la forme :

$$\begin{aligned} d\sigma''_{ij} = & D_{ijkl}(\Omega_{pq}) d\epsilon_{lk} - F_{sij}(\Omega_{pq}) ds - F_{Tij}(\Omega_{pq}) dp_T \\ & - D_{eijmn}(\Omega_{pq}) \left[D_{dMnmkl} + \frac{1}{3} (\delta_{nm} D_{dSkl}) + \frac{1}{3} (\delta_{nm} D_{dTkl}) \right] d\Omega_{lk} \end{aligned} \quad (5.116)$$

Pour pouvoir intégrer la loi de comportement incrémentale dans Θ -Stock, on cherche à présent à modifier la loi de comportement incrémentale 5.116 pour y faire intervenir l'incrément de température dT au lieu de l'incrément de contrainte thermique dp_T .

5.3.1.2 Relation entre la contrainte thermique et la température

De même que dans les précédents travaux de Gatmiri [68, 69, 70, 71, 74, 75, 76, 102], l'incrément de déformation volumique thermique élastique $d\epsilon_{T_v}^e$ est reliée à l'incrément de température par une rigidité élastique qui dépend de la contrainte moyenne p , de la succion s et de la température T :

$$d\epsilon_{T_v}^e = \frac{1}{\beta_T^*(p, s, T)} dT \quad (5.117)$$

Comme dans le modèle élasto-plastique proposé par Jenab pour les sols non saturés non isothermes [102], on choisit une expression de la rigidité thermique élastique inspirée des travaux de Hueckel [97] :

$$\beta_T^*(p, s, T, \Omega_{pq} = 0) = \beta_T^{*0}(p, T) = \frac{1}{\left[(\alpha_0^* + 2\alpha_2 \Delta T) + (\alpha_1 + 2\alpha_3 \Delta T) \ln \left(\frac{p}{p_{geo}} \right) \right]} \quad (5.118)$$

α_0^* est le coefficient de dilatation thermique du squelette (en $^{\circ}C^{-1}$). α_1 (en $^{\circ}C^{-1}$), α_2 (en $^{\circ}C^{-2}$) et α_3 (en $^{\circ}C^{-2}$) sont des paramètres matériels du modèle. p_{geo} est la pression dite géostatique, qui correspond à la fin de la phase de saturation de l'échantillon dans les conditions de température et de pression de laboratoire.

D'après les équations 5.117 et 5.118 et d'après la définition 4.53, l'incrément de déformation thermique volumique à endommagement nul peut s'écrire de deux manières :

$$\begin{cases} d\epsilon_{Tv}^e(\Omega_{pq} = 0) = \frac{1}{\beta_T^{*0}(p, T)} dT \\ d\epsilon_{Tv}^e(\Omega_{pq} = 0) = \frac{1}{\beta_T^0} dp_T \end{cases} \quad (5.119)$$

On suppose que la fissuration dégrade les rigidités qui relient les variables d'état de déformation aux variables d'état de contrainte, sans affecter la relation phénoménologique qui existe entre la contrainte thermique et la température. Par conséquent, la relation qu'on peut déduire des équations 5.119 est valable quel que soit le niveau d'endommagement, et on peut écrire :

$$dp_T = \frac{\beta_T^0}{\beta_T^{*0}(p, T)} dT \quad (5.120)$$

Par ailleurs, à un niveau d'endommagement quelconque :

$$dp_T = \frac{\beta_T(\Omega_{pq})}{\beta_T^*(p, T, \Omega_{pq})} dT \quad (5.121)$$

La combinaison des équations 5.120 et 5.121 donne :

$$\beta_T^*(p, T, \Omega_{pq}) = \frac{\beta_T(\Omega_{pq})}{\beta_T^0} \beta_T^{*0}(p, T) \quad (5.122)$$

On rappelle que la rigidité thermique dégradée $\beta_T(\Omega_{pq})$ vaut (équation 5.111) :

$$\beta_T(\Omega_{pq}) = \frac{9}{\left[Tr\left((\delta - \Omega)_{pq}^{-1}\right)\right]^2} \beta_T^0 \quad (5.123)$$

On déduit des équations 5.122 et 5.123 que :

$$\beta_T^*(p, T, \Omega_{pq}) = \frac{9}{\left[Tr\left((\delta - \Omega)_{pq}^{-1}\right)\right]^2} \beta_T^{*0}(p, T) \quad (5.124)$$

D'après l'équation 5.121, on a par ailleurs :

$$\frac{dp_T}{3\beta_T(\Omega_{pq})} = \frac{dT}{3\beta_T^*(p, T, \Omega_{pq})} \quad (5.125)$$

D'après les équations 5.116, 5.115 et 5.125 :

$$\begin{aligned} d\sigma''_{ij} &= D_{eijkl}(\Omega_{pq}) d\epsilon_{lk} - F_{sij}(\Omega_{pq}) ds - F_{Tij}^*(\Omega_{pq}) dT \\ &- D_{eijnm}(\Omega_{pq}) \left[D_{dMmnkl} + \frac{1}{3} (\delta_{mn} D_{dSkl}) + \frac{1}{3} (\delta_{mn} D_{dTkl}) \right] d\Omega_{lk} \end{aligned} \quad (5.126)$$

où :

$$F_{Tij}^*(\Omega_{pq}) = \frac{1}{3\beta_T^*(p, T, \Omega_{pq})} D_{eijkl}(\Omega_{pq}) \delta_{lk} \quad (5.127)$$

5.3.2 Endommagement en fonction des variables d'état

Dans la suite, on cherche à exprimer l'incrément d'endommagement en fonction des variables d'état (déformation, succion et température) de manière à pouvoir intégrer la loi de comportement 5.126 dans le code d'Eléments Finis Θ -Stock.

5.3.2.1 Relation incrémentale entre l'endommagement et sa contrainte associée

D'après l'équation 5.65, si $d\lambda_d > 0$:

$$d\Omega_{ij} = \frac{\left[Y_{d_1 ij}^+ Y_{d_1 kl}^+ \right]}{C_1 Y_{d_1 pp}^+ \sqrt{2 Y_{d_1 pq}^+ Y_{d_1 qp}^+}} Y_{d_1 lk}^+ \quad (5.128)$$

On note :

$$d\Omega_{ij} = H_d \left[Y_{d_1 ij}^+ Y_{d_1 kl}^+ \right] dY_{d_1 lk}^+ \quad (5.129)$$

où :

$$H_d = \frac{1}{C_1 Y_{d_1 pp}^+ \sqrt{2 Y_{d_1 pq}^+ Y_{d_1 qp}^+}} \quad (5.130)$$

En injectant l'expression 5.129 dans l'équation 5.126, on obtient :

$$\begin{aligned} d\sigma''_{ij} &= D_{eijkl}(\Omega_{pq}) d\epsilon_{lk} - F_{sij}(\Omega_{pq}) ds - F_{Tij}^*(\Omega_{pq}) dT \\ &- \delta_d H_d D_{eijmn}(\Omega_{pq}) \left[D_{dMnmop} + \frac{1}{3} (\delta_{nm} D_{dSop}) + \frac{1}{3} (\delta_{nm} D_{dT op}) \right] \left[Y_{d_1 po}^+ Y_{d_1 kl}^+ \right] dY_{d_1 lk}^+ \end{aligned} \quad (5.131)$$

$\delta_d = 0$ dans le domaine élastique ($d\lambda_d = 0$), et $\delta_d = 1$ dans le domaine fragile ($d\lambda_d > 0$). On note :

$$d\sigma''_{ij} = D_{eijkl}(\Omega_{pq}) d\epsilon_{lk} - F_{sij}(\Omega_{pq}) ds - F_{Tij}^*(\Omega_{pq}) dT - \delta_d D_{dYijkl} dY_{d_1 lk}^+ \quad (5.132)$$

où :

$$D_{dYijkl} = H_d D_{eijmn}(\Omega_{pq}) \left[D_{dMnmop} + \frac{1}{3} (\delta_{nm} D_{dSop}) + \frac{1}{3} (\delta_{nm} D_{dT op}) \right] \left[Y_{d_1 po}^+ Y_{d_1 kl}^+ \right] \quad (5.133)$$

Pour obtenir une loi de comportement qui peut être programmée dans Θ -Stock, il faut à présent exprimer l'incrément de contrainte associée à l'endommagement $d\mathbf{Y}_{d_1}^+$ en fonction des incréments de déformation, de succion et de température.

5.3.2.2 Calcul de l'incrément de contrainte associée à l'endommagement

Discrétisation du calcul

Par définition (équation 5.47), la contrainte associée à l'endommagement qui intervient dans la fonction de charge est :

$$Y_{d_1 ij}^+ = g_M \epsilon_{M ij}^+ + \frac{g_S}{3} \epsilon_{Sv}^- \delta_{ij} + \frac{g_T}{3} \epsilon_{Tv}^+ \delta_{ij} \quad (5.134)$$

On rappelle que ϵ_{ij}^+ désigne la partie positive du tenseur de déformations exprimé dans sa base propre. On ne peut pas obtenir l'incrément de contrainte $\mathbf{Y}_{d_1}^+$ en remplaçant $\epsilon_{M ij}^+$, ϵ_{Sv}^- et ϵ_{Tv}^+ par leurs incréments. En effet, cette opération reviendrait à considérer que la contrainte associée à l'endommagement ne peut que croître. C'est vrai pour la variable d'endommagement, mais pas pour la contrainte qui lui est associée, qui se « relâche » lorsque l'endommagement croît, et qui peut diminuer si les déformations causées par traction baissent. Pour calculer l'incrément de force associée à l'endommagement, on doit donc procéder par différence. A l'itération i pratiquée pendant l'incrément de chargement k :

$$\left(dY_{d_1 pq}^+ \right)_{k,i} = \left(Y_{d_1 pq}^+ \right)_{k,i} - \left(Y_{d_1 pq}^+ \right)_{k,i-1} \quad (5.135)$$

Pour calculer $\mathbf{Y}_{d_1}^+$ à une itération donnée, on a besoin de calculer $\epsilon_{M ij}^+$, ϵ_{Sv}^- et ϵ_{Tv}^+ au cours de cette itération.

Pour les déformations conjuguées à la contrainte nette, on doit revenir à la définition de $\epsilon_{M ij}^+$:

$$\epsilon_{M ij}^+ = P_{M ijkl}^+ (\epsilon_{M pq}) \epsilon_{M lk} \quad (5.136)$$

où P_M^+ l'opérateur qui permet de projeter un tenseur sur le cône de ses valeurs propres [40] :

$$P_{M ijkl}^+ (\epsilon_{M pq}) = \sum_{p=1}^3 H(\epsilon_{M^p}) n_i^p n_j^p n_k^p n_l^p \quad (5.137)$$

où les ϵ_{M^p} et les \mathbf{n}^p désignent respectivement les valeurs et les vecteurs propres du tenseur de déformations mécaniques, et où H est la distribution de Heaviside.

Les déformations relatives à la succion et à la contrainte thermique sont isotropes. On peut donc se contenter d'évaluer les parties positives et négatives des déformations volumiques ϵ_{Sv} et ϵ_{Tv} . Toute base, et en particulier la base canonique, est une base propre des tenseurs de déformations ϵ_{Sv}^- et ϵ_{Tv}^+ . C'est pourquoi, pour avoir des notations homogènes à l'équation 5.136, on peut adopter le formalisme suivant :

$$\epsilon_{Sv}^- = \frac{1}{3} H^-_{ijkl} (\epsilon_{Sv}) \delta_{lk} \epsilon_{Sv} \quad (5.138)$$

$$\epsilon_{Tv}^+ = \frac{1}{3} H^+_{ijkl} (\epsilon_{Tv}) \delta_{lk} \epsilon_{Tv}$$

avec :

$$H^-_{ijkl} (\epsilon_{Sv}) = H(-\epsilon_{Sv}) \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (5.139)$$

$$H^+_{ijkl} (\epsilon_{Tv}) = H(\epsilon_{Tv}) \delta_{ij} \delta_{kl}$$

Mise en oeuvre matricielle

D'après les équations 5.134, 5.136 et 5.138 :

$$Y_{d_1 mn}^+ = g_M P_{M mnrs}^+ (\epsilon_{Mpq}) \epsilon_{Msr} + \frac{g_S}{3} H^-_{mnrs} (\epsilon_{Sv}) \delta_{sr} \epsilon_{Sv} + \frac{g_T}{3} H^+_{mnrs} (\epsilon_{Tv}) \delta_{sr} \epsilon_{Tv} \quad (5.140)$$

D'après l'équation 5.135, à l'incrément k et à l'itération i , on cherche donc à calculer :

$$\begin{aligned} \left(dY_{d_1 mn}^+ \right)_{k,i} &= g_M P_{M mnrs}^+ \left(\epsilon_{pq M_{k,i}} \right) \epsilon_{sr M_{k,i}} - g_M P_{M mnrs}^+ \left(\epsilon_{pq M_{k,i-1}} \right) \epsilon_{sr M_{k,i-1}} \\ &+ \frac{g_S}{3} H^-_{mnrs} (\epsilon_{Sv_{k,i}}) \delta_{sr} \epsilon_{Sv_{k,i}} - \frac{g_S}{3} H^-_{mnrs} (\epsilon_{Sv_{k,i-1}}) \delta_{sr} \epsilon_{Sv_{k,i-1}} \\ &+ \frac{g_T}{3} H^+_{mnrs} (\epsilon_{Tv_{k,i}}) \delta_{sr} \epsilon_{Tv_{k,i}} - \frac{g_T}{3} H^+_{mnrs} (\epsilon_{Tv_{k,i-1}}) \delta_{sr} \epsilon_{Tv_{k,i-1}} \end{aligned} \quad (5.141)$$

que l'on va chercher à exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} \left(dY_{d_1 mn}^+ \right)_{k,i} &= g_M D_{MY mnrs} d\epsilon_{sr M_{k,i}} + \frac{g_S}{3} D_{SY mnrs} \delta_{sr} d\epsilon_{Sv_{k,i}} + \frac{g_T}{3} D_{TY mnrs} \delta_{sr} d\epsilon_{Tv_{k,i}}, \\ d\epsilon_{mn M_{k,i}} &= \epsilon_{mn M_{k,i}} - \epsilon_{mn M_{k,i-1}}, \quad d\epsilon_{Sv_{k,i}} = \epsilon_{Sv_{k,i}} - \epsilon_{Sv_{k,i-1}}, \quad d\epsilon_{Tv_{k,i}} = \epsilon_{Tv_{k,i}} - \epsilon_{Tv_{k,i-1}} \end{aligned} \quad (5.142)$$

Dans Θ -Stock, les tenseurs d'ordre 2 sont stockés dans des vecteurs, et les tenseurs d'ordre 4, dans des matrices. On suppose que les opérateurs $\mathbf{D}_{\mathbf{XY}}$ sont diagonaux (pour $X=M,S,T$). Par conséquent, on ne change pas la définition de $\mathbf{D}_{\mathbf{XY}}$ en supposant que le I^{eme} coefficient diagonal de la matrice correspondant à $\mathbf{D}_{\mathbf{XY}}$ est nul dans le cas où la I^{eme} composante du vecteur de $d\epsilon_{Xij}$ est nul. En configuration axisymétrique, les opérateurs $\mathbf{D}_{\mathbf{XY}}$ sont calculés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \forall X &= M, S, T \\ \forall I, J &= rr, zz, rz, \theta\theta : \\ \left\{ \begin{array}{l} (D_{XYIJ})_{k,i} = 0 \quad \text{si } I \neq J \\ (D_{XYII})_{k,i} = \frac{(dP\epsilon_{XI})_{k,i}}{(d\epsilon_{XI})_{k,i}} \quad \text{si } (d\epsilon_{XI})_{k,i} \neq 0 \\ (D_{XYII})_{k,i} = 0 \quad \text{sinon} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (5.143)$$

Le principe du calcul est le même en déformations planes.

Maintenant qu'on sait calculer les tenseurs $\mathbf{D}_{\mathbf{MY}}$, $\mathbf{D}_{\mathbf{SY}}$ et $\mathbf{D}_{\mathbf{TY}}$, on peut exprimer $dY_{d_1}^+$ pour une itération quelconque. D'après les équations 5.71, 5.72 et 5.142 :

$$\begin{aligned} dY_{d_1 ij}^+ &= g_M D_{MY ijkl} d\epsilon_{lk} \\ &+ \frac{1}{3} [g_S D_{SY ijkl} - g_M D_{MY ijkl}] \delta_{lk} d\epsilon_{Sv} + \frac{1}{3} [g_T D_{TY ijkl} - g_M D_{MY ijkl}] \delta_{lk} d\epsilon_{Tv} \end{aligned} \quad (5.144)$$

que l'on peut réécrire :

$$\begin{aligned}
dY_{d_1 ij}^+ &= g_M D_{MYijkl} d\epsilon_{lk} \\
&+ \frac{1}{3\beta_s(\Omega_{pq})} [g_S D_{SYijkl} - g_M D_{MYijkl}] \delta_{lk} ds + \frac{1}{3\beta_T^*(p,T,\Omega_{pq})} [g_T D_{TYijkl} - g_M D_{MYijkl}] \delta_{lk} dT \\
&+ \frac{1}{3} [g_S D_{SYijmn} - g_M D_{MYijmn}] [\delta_{nm} D_{dSk}] d\Omega_{lk} \\
&+ \frac{1}{3} [g_T D_{TYijmn} - g_M D_{MYijmn}] [\delta_{nm} D_{dTkl}] d\Omega_{lk}
\end{aligned} \tag{5.145}$$

D'après l'équation 5.129 :

$$\begin{aligned}
dY_{d_1 ij}^+ &= g_M D_{MYijkl} d\epsilon_{lk} \\
&+ \frac{1}{3\beta_s(\Omega_{pq})} [g_S D_{SYijkl} - g_M D_{MYijkl}] \delta_{lk} ds + \frac{1}{3\beta_T^*(p,T,\Omega_{pq})} [g_T D_{TYijkl} - g_M D_{MYijkl}] \delta_{lk} dT \\
&+ \delta_d \frac{H_d}{3} [g_S D_{SYijmn} - g_M D_{MYijmn}] [\delta_{nm} D_{dSop}] [Y_{d_1 po}^+ Y_{d_1 kl}^+] dY_{d_1 lk}^+ \\
&+ \delta_d \frac{H_d}{3} [g_T D_{TYijmn} - g_M D_{MYijmn}] [\delta_{nm} D_{dTOp}] [Y_{d_1 po}^+ Y_{d_1 kl}^+] dY_{d_1 lk}^+
\end{aligned} \tag{5.146}$$

où $\delta_d = 0$ dans le domaine élastique ($d\lambda_d = 0$), et où $\delta_d = 1$ dans le domaine fragile ($d\lambda_d > 0$).

On pose :

$$\begin{aligned}
D_{YYijkl} &= \delta_{ijkl} - \delta_d \frac{H_d}{3} [g_S D_{SYijmn} - g_M D_{MYijmn}] [\delta_{nm} D_{dSop}] [Y_{d_1 po}^+ Y_{d_1 kl}^+] \\
&- \delta_d \frac{H_d}{3} [g_T D_{TYijmn} - g_M D_{MYijmn}] [\delta_{nm} D_{dTOp}] [Y_{d_1 po}^+ Y_{d_1 kl}^+]
\end{aligned} \tag{5.147}$$

D'après l'équation 5.148, l'incrément de contrainte associée à l'endommagement peut alors s'exprimer en fonction des incréments de déformation, de succion et de température :

$$D_{YYijkl} dY_{d_1 lk}^+ = D_{YYMijkl} d\epsilon_{lk} + D_{YYsij} ds + D_{YYTij} dT \tag{5.148}$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l}
D_{YYMijkl} = g_M D_{MYijkl} \\
D_{YYsij} = \frac{1}{3\beta_s(\Omega_{pq})} [g_S D_{SYijkl} - g_M D_{MYijkl}] \delta_{lk} \\
D_{YYTij} = \frac{1}{3\beta_T^*(p,T,\Omega_{pq})} [g_T D_{TYijkl} - g_M D_{MYijkl}] \delta_{lk}
\end{array} \right. \tag{5.149}$$

5.3.2.3 Loi de comportement incrémentale finale

Les équations 5.132 et 5.148 permettent d'exprimer la loi de comportement incrémentale sous la

forme :

$$\begin{aligned}
 d\sigma''_{ij} &= D_{eijkl}(\Omega_{pq}) d\epsilon_{lk} - F_{sij}(\Omega_{pq}) ds - F_{Tij}^*(\Omega_{pq}) dT \\
 &- \delta_d D_{dYijmn} D_{YYnmop}^{-1} [D_{YYMpokl} d\epsilon_{lk} + D_{YYSpO} ds + D_{YYTpo} dT]
 \end{aligned} \tag{5.150}$$

En ordonnant l'équation 5.150, on obtient :

$$d\sigma''_{ij} = D_{edijkl}(\Omega_{pq}) d\epsilon_{lk} - F_s^{ed}{}_{ij}(\Omega_{pq}) ds - F_T^{ed*}{}_{ij}(\Omega_{pq}) dT \tag{5.151}$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 D_{edijkl}(\Omega_{pq}) = D_{eijkl}(\Omega_{pq}) - \delta_d D_{dijkl}(\Omega_{pq}) \\
 D_{dijkl}(\Omega_{pq}) = D_{dYijmn} D_{YYnmop}^{-1} D_{YYMpokl} \\
 F_s^{ed}{}_{ij}(\Omega_{pq}) = F_{sij}(\Omega_{pq}) - \delta_d F_s^d{}_{ij}(\Omega_{pq}) \\
 F_s^d{}_{ij}(\Omega_{pq}) = -D_{dYijmn} D_{YYnmop}^{-1} D_{YYSpO} \\
 F_T^{ed*}{}_{ij}(\Omega_{pq}) = F_{Tij}^*(\Omega_{pq}) - \delta_d F_T^d{}_{ij}(\Omega_{pq}) \\
 F_T^d{}_{ij}(\Omega_{pq}) = -D_{dYijmn} D_{YYnmop}^{-1} D_{YYTpo}
 \end{array} \right. \tag{5.152}$$

CHAPITRE 6

Lois de transfert

En conditions non saturées anisothermes, le VER étudié est le siège de flux d'eau liquide (contenant de l'air dissout), de vapeur d'eau, d'air gazeux et de chaleur. La croissance de l'endommagement provoque le développement d'un réseau de fissuration. Les flux d'eau liquide et de vapeur au sein de ce réseau sont homogénéisés à l'échelle du VER, ce qui permet de définir une conductivité intrinsèque spécifique à la fracturation pour les deux phases de l'eau interstitielle. Le transfert d'air est supposé diffusif, avec une perméabilité à l'air dépendant d'une puissance de l'indice des vides total. L'indice des vides dépend des déformations volumiques totales, qui, d'après la loi de comportement, dépendent de l'endommagement. Le transfert de chaleur comprend un terme diffusif, et la conductivité qui lui correspond est une fonction affine de la porosité, qui, de même que l'indice des vides, dépend de l'endommagement. Les termes relatifs à l'évaporation et à la convection de la chaleur dépendent des masses volumiques des corps en présence dans le VER. Ces dernières dépendent de la porosité, donc tous les termes de l'équation de transfert de la chaleur dépendent de l'endommagement, via la porosité. On considère que dans l'état intact, l'air gazeux et la chaleur sont plus mobiles que l'eau. Par conséquent, on suppose que l'accélération des transferts provoquée par l'ouverture de microfissures est plus perceptible pour l'eau liquide et la vapeur que pour l'air et la chaleur. C'est pourquoi, dans l'état endommagé, on a choisi d'introduire des termes de conductivité supplémentaires dans les équations de transfert de l'eau, alors que l'effet de l'endommagement sur les transferts d'air et de chaleur est pris en compte dans des termes volumiques qui existent déjà dans les formules utilisées dans l'état intact. Ces nouvelles composantes de conductivité ont pour effet d'équilibrer les changements de flux entre l'eau liquide, la vapeur, l'air et la chaleur. Sans leur introduction, l'augmentation de la conductivité à l'eau par endommagement serait sous-estimée, car les formules utilisées dans l'état intact ne sont pas adaptées au changement d'échelle de conductivité engendré par la fissuration. Dans l'état intact, toutes les conductivités sont scalaires. Dans l'état endommagé, la perméabilité à l'eau liquide est tensorielle, et reflète l'influence de la fracturation sur l'orientation du flux de l'eau liquide.

6.1 Transfert de l'eau liquide

6.1.1 Un modèle de transfert diffusif

Comme cela a été fait précédemment dans tous les modèles implémentés dans Θ -Stock [67, 68, 69, 70, 71, 74, 75, 76, 102], on suppose que le transfert de l'eau est diffusif :

$$\mathbf{V}_w = -\mathbf{K}_w \cdot \nabla (\Phi_w) \quad (6.1)$$

où \mathbf{V}_w est la vitesse d'écoulement de l'eau liquide, \mathbf{K}_w est le tenseur de perméabilité à l'eau liquide (d'ordre 2), et Φ_w est le potentiel hydraulique total :

$$\Phi_w = \Psi_w(\theta_w, T) + z \quad (6.2)$$

L'intervention de z , la cote du point considéré, permet de prendre en compte les effets gravitationnels. $\Psi_w(\theta_w, T)$ est un potentiel relatif à la pression capillaire qui règne dans les pores. Suivant la réflexion de Philip et de Vries [158], reprise dans les modèles de Gatmiri [68], on

suppose que $\Psi_w(\theta_w, T)$ peut s'écrire :

$$\Psi_w(\theta_w, T) = \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{ref})} \Psi_R(\theta_w) \quad (6.3)$$

$\Psi_R(\theta_w)$ est la hauteur d'eau interstitielle à la température de référence T_{ref} :

$$\Psi_R(\theta_w) = \frac{p_w - p_g}{\gamma_w} \quad (6.4)$$

où γ_w est le poids volumique de l'eau liquide, p_w est la pression interstitielle de l'eau liquide, et p_g est la pression interstitielle du gaz interstitiel (constitué du mélange d'air et de vapeur d'eau). $\sigma(T)$ est l'énergie surfacique de l'eau interstitielle (en $J.m^{-2}$). $\sigma(T_{ref})$ est la valeur de l'énergie surfacique à la température de référence T_{ref} . Dans le modèle élasto-plastique développé par Jenab [102], en conditions non saturées et anisothermes, la formule empirique de Edlefsen et Anderson [59] est utilisée pour calculer $\sigma(T)$:

$$\sigma(T) = 0,1171 - 0,0001516 T \quad (6.5)$$

Dans la formule 6.5, la température T est exprimée en degré Kelvin ($^{\circ}K$).

La perméabilité à l'eau liquide \mathbf{K}_w est décomposée multiplicativement :

$$\mathbf{K}_w = k_T(T) k_r(S_w) \mathbf{K}_{int}(n, \Omega_{pq}) \quad (6.6)$$

Le tenseur de perméabilité intrinsèque $\mathbf{K}_{int}(n, \Omega_{pq})$ dépend des caractéristiques de la matrice solide endommagée. La dépendance vis-à-vis de la porosité totale et du tenseur d'endommagement permet de traduire l'influence de la fissuration irréversible sur l'orientation de chemins d'écoulement préférentiels. La perméabilité relative $k_T(T) k_r(S_w)$ est une caractéristique des fluides interstitiels et de la chaleur. La perméabilité relative à succion constante $k_T(T)$ traduit l'augmentation de la viscosité de l'eau générée par évaporation. $k_r(S_w)$ est la perméabilité relative qui dépend des caractéristiques des fluides interstitiels. Les formules proposées pour les différents termes de l'expression 6.6 sont exposées dans les paragraphes suivants. $k_T(T)$ et $k_r(S_w)$ sont sans dimension, et tous les coefficients du tenseur $\mathbf{K}_{int}(n, \Omega_{pq})$ sont homogènes à des vitesses ($m.s^{-1}$).

D'après les équations 6.2 et 6.3 :

$$\nabla \Phi_w = \frac{\Psi_R(\theta_w)}{\sigma(T_{ref})} \frac{d\sigma(T)}{dT} \nabla T + \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{ref})} \frac{d\Psi_R(\theta_w)}{d\theta_w} \nabla \theta_w + \nabla z \quad (6.7)$$

En combinant les équations 6.1 et 6.7, on obtient :

$$\mathbf{V}_w = -\frac{\Psi_R(\theta_w)}{\sigma(T_{ref})} \frac{d\sigma(T)}{dT} \mathbf{K}_w \cdot \nabla T - \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{ref})} \frac{d\Psi_R(\theta_w)}{d\theta_w} \mathbf{K}_w \cdot \nabla \theta_w - \mathbf{K}_w \cdot \nabla z \quad (6.8)$$

D'après l'équation 6.4, on a :

$$\frac{d\Psi_R(\theta_w)}{d\theta_w} \nabla \theta_w = -\frac{1}{\gamma_w} \nabla (p_g - p_w) \quad (6.9)$$

En utilisant la définition de la succion 4.13 :

$$\frac{d\Psi_R(\theta_w)}{d\theta_w} \nabla\theta_w = -\frac{1}{\gamma_w} \nabla s \quad (6.10)$$

L'égalité 6.10 permet de réécrire l'équation 6.8 d'une manière plus adaptée à la formulation en variables indépendantes :

$$\mathbf{V}_w = -\frac{\Psi_R(\theta_w)}{\sigma(T_{ref})} \frac{d\sigma(T)}{dT} \mathbf{K}_w \cdot \nabla T + \frac{1}{\gamma_w} \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{ref})} \mathbf{K}_w \cdot \nabla s - \mathbf{K}_w \cdot \nabla z \quad (6.11)$$

On note :

$$\mathbf{V}_w = -\mathbf{D}_{T_w} \cdot \nabla T + \mathbf{D}_{P_w} \cdot \nabla s - \mathbf{K}_w \cdot \nabla z \quad (6.12)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{T_w ij} = \frac{\Psi_R(\theta_w)}{\sigma(T_{ref})} \frac{d\sigma(T)}{dT} K_{w ij} \\ D_{P_w ij} = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{ref})} K_{w ij} \end{array} \right. \quad (6.13)$$

6.1.2 Perméabilité relative à succion constante

La viscosité de l'eau augmente avec la température. On choisit de traduire ce phénomène physique de la même manière que dans le modèle de Jenab [102] :

$$k_T(T) = \frac{\mu_w(T)}{\mu_w(T_{ref})} \quad (6.14)$$

μ_w est la viscosité de l'eau (en Pa.s), qui est exprimée selon le modèle de Kaye et Laby [108] :

$$\mu_w(T) = 0,6612 \cdot 10^{-3} (T - 229)^{-1,562} \quad (6.15)$$

Dans l'équation 6.15, la température est exprimée en degré Kelvin ($^{\circ}K$).

6.1.3 Définition d'une surface d'état pour le degré de saturation

Dans le modèle d'élasticité non linéaire développé par Gatmiri en conditions non saturées anisothermes, le degré de saturation S_w évolue sur une surface d'état totalement couplée [68, 69, 70, 71, 74, 75, 76] :

$$S_w = 1 - [a_s + b_s p^n] [1 - \exp(c_s s)] \exp(d_s (T - T_0)) \quad (6.16)$$

p^n désigne la contrainte nette moyenne (en Pa), s est la succion (en Pa), T est la température (en $^{\circ}C$). T_0 désigne la température initiale choisie dans la simulation (en $^{\circ}C$). a_s , b_s , c_s et d_s sont des paramètres matériels du modèle.

D'autres choix sont possibles. Dans le modèle de Van Genuchten [197], développé en conditions isothermes, on fait l'hypothèse qu'au sein du VER, la distribution spatiale des tailles de pores a une courbe en forme de cloche (voir le chapitre 3) :

$$S_w = (S_{w,s} - S_{w,r}) (1 + (\alpha|s|)^n)^{-m} + S_{w,r} \quad (6.17)$$

On rappelle que $S_{w,s}$ est le degré de saturation à satiété : à saturation maximale, le degré de saturation ne vaut pas 1 si tous les pores ne sont pas connectés, et que des pores isolés contiennent de l'air. Mais en général : $S_{w,s} \simeq 1$. $S_{w,r}$ est le degré de saturation résiduel. Après séchage, le degré de saturation est non nul s'il reste des bulles d'eau liquide formant une phase discontinue dans les pores. α est la taille de pore pour laquelle la densité de pores est la plus élevée ; autrement dit c'est la taille de pore la plus fréquente au sein du VER. n et m sont des paramètres matériels qui représentent l'extension de la distribution vers les sols fins ou les sols grossiers.

Dans le modèle de Brooks et Corey [28] approximé par Liu et Bodvarsson [123], le réseau poreux est assimilé à un réseau tubulaire au sein duquel l'écoulement est dominé par des effets gravitaires :

$$S_w = (S_{w,s} - S_{w,r}) (\alpha|s|)^{1-n} + S_{w,r} \quad (6.18)$$

Dans le modèle 6.18, les écoulements gravitaires sont prépondérants. Ce choix n'est pas pertinent pour modéliser un flux qui est physiquement orienté par la création d'un réseau de micro-fissures. La prise en compte des effets mécaniques dans la formule 6.16 permet de travailler avec une surface d'état du degré de saturation totalement couplée. Mais afin d'avoir une meilleure visibilité de l'effet de l'endommagement sur la création de chemins d'écoulement préférentiels dans la matrice solide, on choisit de définir le degré de saturation indépendamment de la contrainte nette. En effet, d'après la décomposition 6.6, S_w influence la perméabilité relative qui dépend des fluides $k_r(S_w)$, alors que les effets de fissuration sont pris en compte dans la perméabilité intrinsèque anisotrope $\mathbf{K}_{\text{int}}(n, \Omega_{pq})$. La porosité n dépend directement des déformations volumiques, dont l'évolution est contrôlée par la loi de comportement, qui dépend de la contrainte nette. Par ailleurs, les microfissures peuvent être assimilées à des pores de grande taille. Par suite, un matériau poreux endommagé peut être considéré comme un matériau poreux, dont le réseau de pores connectés est constitué de pores de la matrice intacte et de microfissures. Il semble donc judicieux d'adopter une modélisation de type Van Genuchten 6.17, qui permet de calibrer la distribution spatiale des tailles des pores.

Finalement, on choisit d'utiliser une surface d'état dépendant de la succion et de la température. On ajoute le terme thermique de la formule 6.16 à l'équation de la courbe de rétention de Van Genuchten 6.17, et on fixe $S_{w,s} = 1$. On adopte un schéma d'intégration de type Mualem, si bien que $m = 1 - 1/n$ (équation 3.85). Finalement, l'équation de la nouvelle surface d'état du degré de saturation s'écrit :

$$S_w = \left[(1 - S_{w,r}) (1 + (\alpha|s|)^n)^{-1+1/n} + S_{w,r} \right] \exp(d_s (T - T_0)) \quad (6.19)$$

La surface d'état du degré de saturation est tracée pour un jeu de paramètre incluant un degré de saturation résiduel nul (figure 6.1).

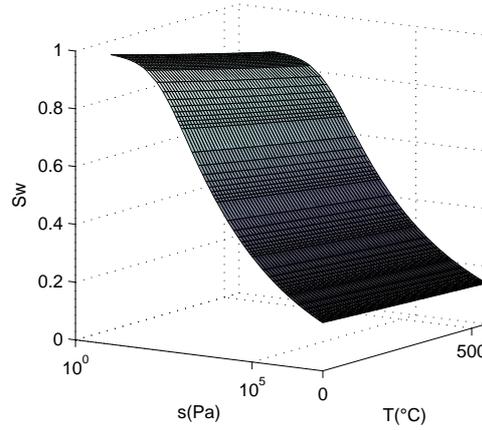


FIGURE 6.1 – Surface d'état adoptée dans le modèle THHMD pour le degré de saturation. $S_{w,r} = 0$, $\alpha = 0.00152 Pa^{-1}$, $n = 1.17$, $d_s = -3 * 10^{-4} °C^{-1}$, $T_0 = 20°C$.

6.1.4 Perméabilité relative caractéristique des fluides

On choisit de suivre le même principe de modélisation que dans les travaux de Jenab [102]. La formule de la perméabilité $k_r(S_w)$ est inspirée des travaux de Irmay [100], Corey [43] et Kovacs [112] :

$$k_r(S_w) = \left(\frac{S_w - S_{w,r}}{1 - S_{w,r}} \right)^d \quad (6.20)$$

d est un paramètre matériel, qui vaut 3 chez Irmay [100], 4 chez Corey [43] et 3,5 chez Kovacs [112]. On fait le même choix que Jenab : $d = 3$:

$$k_r(S_w) = \left(\frac{S_w - S_{w,r}}{1 - S_{w,r}} \right)^3 \quad (6.21)$$

6.1.5 Perméabilité intrinsèque

Dans le modèle de Jenab [102], la perméabilité intrinsèque est isotrope et ne dépend que de la porosité :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{\text{intJenab}} = k_{\text{int}}(n) \delta \\ k_{\text{int}}(n) = k_{w_0} 10^{\alpha_w e} \end{cases} \quad (6.22)$$

δ est le tenseur identité d'ordre 2. e est l'indice des vides, α_w est un paramètre matériel et k_{w_0} est une perméabilité de référence (en $m.s^{-1}$). Lorsque la variation de l'indice des vides est réversible, le niveau d'endommagement est modéré. On peut supposer que les fissures ouvertes ne sont pas connectées entre elles, mais qu'elles sont reliées aux pores de la matrice intacte. Dans ce cas, le matériau a une porosité unimodale : il n'y a qu'un réseau d'écoulement, constitué de pores de tailles variables (incluant les pores de la matrice intacte et les microfissures). Lorsque la variation de l'indice des vides entre dans le domaine irréversible, le niveau d'endommagement est

relativement fort, et les fissures créées par endommagement peuvent être connectées et former un réseau d'écoulement indépendant du réseau poreux de la matrice intacte. L'écoulement est alors dual, et l'anisotropie de l'endommagement génère la formation de chemins d'écoulement préférentiels, ce qui se traduit par une perméabilité anisotrope. Il est donc impossible d'utiliser la formule de Jenab 6.22 dans le domaine irréversible du modèle THHMD.

Shao et al. ont proposé un modèle de perméabilité pour les roches fragiles endommagées [180], dans lequel la perméabilité totale est la somme de la perméabilité de la roche intacte et de la perméabilité générée par l'ouverture de fissures. Le même type de démarche est préconisé par Pruess [166, 167], Chen [37] et leurs collaborateurs. De même, on propose de modéliser les effets irréversibles de l'endommagement sur la perméabilité intrinsèque à l'eau liquide en additionnant l'expression utilisée par Jenab 6.22 et un tenseur de perméabilité anisotrope dépendant de l'endommagement :

$$\mathbf{K}_{\text{int}}(n) = \mathbf{k}_1(n^{rev}, \Omega_{pq}) + \mathbf{k}_2(n^{frac}, \Omega_{pq}) \quad (6.23)$$

La partie anisotrope de la perméabilité intrinsèque, $\mathbf{k}_2(n^{frac}, \Omega_{pq})$, dépend de la porosité générée par fissuration, et de l'endommagement. L'expression utilisée par Jenab est en fait appliquée au matériau fragile endommagé pour le domaine des déformations réversibles (et non pour le seul cas du matériau intact comme dans le modèle de Shao) :

$$\mathbf{k}_1(n^{rev}, \Omega_{pq}) = k_{w0} 10^{\alpha_w e^{rev}} \delta \quad (6.24)$$

La dépendance vis-à-vis de l'endommagement est rendue par la dépendance vis-à-vis de l'indice des vides réversible e^{rev} , qui dépend des déformations volumiques réversibles, qui elles-mêmes dépendent des rigidités endommagées $\mathbf{D}_e(\Omega_{pq})$, $\beta_s(\Omega_{pq})$ et $\beta_T(\Omega_{pq})$.

Dans leur modèle de perméabilité anisotrope, Shao et ses collaborateurs [180] n'ont pas utilisé des variables homogénéisées comme dans le modèle THHMD, mais les données relatives à chacune des microfissures endommageant le VER. Nous cherchons maintenant à adapter les formules de Shao [180] pour obtenir l'expression de $\mathbf{k}_2(n^{frac}, \Omega_{pq})$. Shao et al. supposent que le flux dans le milieu poreux endommagé suit une loi de Darcy du type :

$$\mathbf{V}_w = -\frac{(\mathbf{k}^0 + \mathbf{k}^c)}{\mu_w} \cdot \nabla p_w \quad (6.25)$$

où μ_w est la viscosité dynamique de l'eau liquide. \mathbf{k}^0 est la perméabilité du matériau intact, et \mathbf{k}^c , la perméabilité générée par fracturation. C'est l'expression de \mathbf{k}^c qu'on cherche à adapter pour obtenir $\mathbf{k}_2(n^{frac}, \Omega_{pq})$.

A l'intérieur d'une microfissure dont l'orientation est caractérisée par le vecteur normal \mathbf{n} , Shao fait l'hypothèse que le fluide s'écoule parallèlement au plan de fracturation. Shao suppose qu'on peut appliquer les équations de Navier-Stokes, qui décrivent un écoulement laminaire entre deux plans parallèles. Il s'agit d'une loi cubique du type :

$$\mathbf{V}_w^c(\mathbf{n}) = -\frac{\lambda}{12} \frac{1}{\mu_w} e(\mathbf{n})^2 (\delta - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot (\nabla p_w)^c, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (6.26)$$

En raison de sa rugosité et de sa tortuosité, la fracture n'est pas parfaitement conductrice, et

c'est pourquoi le paramètre λ module la vitesse d'écoulement. $e(\mathbf{n})$ est l'ouverture de la fissure. $(\nabla p_w)^c$ est le gradient de pression interstitielle qui règne dans la fissure considérée. Comme on l'a expliqué plus haut, la composante $\mathbf{k}_2(n^{frac}, \Omega_{pq})$ de la perméabilité intrinsèque modélise un niveau élevé d'endommagement, pour lequel on peut imaginer que les fissures forment un réseau connecté indépendant. C'est pourquoi on suppose que l'ensemble des fissures peut être caractérisé par un gradient de pression interstitielle unique, noté ∇p_w . Shao calcule la vitesse d'écoulement dans l'ensemble du réseau en pratiquant une intégration sur le volume V^c occupé par les microfissures, et en normalisant le résultat par le volume V_{VER} du Volume Élémentaire Représentatif :

$$\mathbf{V}_w = -\frac{\mathbf{k}^0}{\mu_w} \cdot \nabla p_w + \frac{1}{V_{VER}} \int_{V^c} \mathbf{V}_w^c(\mathbf{n}) dV^c \quad (6.27)$$

Il est supposé que toutes les microfissures de vecteur normal \mathbf{n} sont de forme circulaire, de même rayon $r(\mathbf{n})$, et de même ouverture $e(\mathbf{n})$. Le volume occupé par les $N(\mathbf{n})$ microfissures de vecteur normal \mathbf{n} vaut :

$$dV^c(\mathbf{n}) = N(\mathbf{n}) \pi r(\mathbf{n})^2 e(\mathbf{n}) \quad (6.28)$$

Shao suppose que le nombre de microfissures d'une orientation donnée peut être relié au nombre total N de microfissures endommageant le VER par l'intermédiaire d'un facteur $R(\mathbf{n})$, qui quantifie le degré de connectivité des microfissures de vecteur normal \mathbf{n} à l'ensemble du réseau de microfissures développé dans le VER :

$$N(\mathbf{n}) = N R(\mathbf{n}) \quad (6.29)$$

Le volume occupé par l'ensemble des microfissures est donc :

$$V^c = \int_{V^c} dV^c = \sum_{\mathbf{n}} dV^c(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n}} \left[N R(\mathbf{n}) \pi r(\mathbf{n})^2 e(\mathbf{n}) \right] \quad (6.30)$$

Le volume occupé par l'ensemble des microfissures endommageant le VER est obtenu en sommant les volumes des microfissures dans toutes les directions de fracturation. Cette somme peut s'exprimer sous la forme d'une intégrale continue sur l'angle solide $\frac{dS}{4\pi}$:

$$V^c = \frac{1}{4\pi} \int_{S^c} \left[N R(\mathbf{n}) \pi r(\mathbf{n})^2 e(\mathbf{n}) \right] dS \quad (6.31)$$

En combinant les équations 6.26, 6.27 et 6.31, Shao obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_w &= -\frac{\mathbf{k}^0}{\mu_w} \cdot \nabla p_w \\ &- \frac{\lambda}{12\mu_w} \frac{N\pi}{4\pi} \frac{1}{V_{VER}} \left[\int_{S^c} \left[R(\mathbf{n}) e(\mathbf{n})^3 r(\mathbf{n})^2 (\delta - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \right] dS \right] \cdot \nabla p_w \end{aligned} \quad (6.32)$$

La combinaison des équation 6.27 et 6.32 donne ensuite :

$$\mathbf{k}^c = \frac{N\lambda}{48} \frac{1}{V_{VER}} \int_{S^c} \left[R(\mathbf{n}) e(\mathbf{n})^3 r(\mathbf{n})^2 (\delta - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \right] dS \quad (6.33)$$

Nous devons à présent adapter cette formule aux variables homogénéisées qui sont utilisées dans le modèle THHMD :

1. Shao et al. travaillaient en conditions saturées et isothermes. D'après l'équation 6.6, pour passer aux conditions non saturées anisothermes, il faut notamment introduire les perméabilités relatives 10.39 et 6.21 dans la formule 6.33.
2. Shao et al. sont partis de considérations purement micromécaniques, alors que la représentation de l'endommagement choisie ici est fondée sur le concept de mésolfissure homogénéisée.

De même que dans la modélisation de Shao, on suppose que l'écoulement dans la fissure homogénéisée de normale \mathbf{n}_k est parallèle au plan de fracturation et qu'on peut utiliser l'équation de Navier-Stokes établie pour un écoulement laminaire entre deux plans parallèles. Par ailleurs, on suppose que les fissures homogénéisées sont parfaitement conductrices, i.e. $\lambda = 1$. En effet, les fissures homogénéisées sont des objets mathématiques, et non physiques, et il ne paraît pas pertinent de prendre en compte la rugosité ou la tortuosité sur des objets abstraits définis pour quantifier l'endommagement. D'après les équations 6.1 et 6.2, la vitesse d'écoulement dans la fissure homogénéisée de normale \mathbf{n}_k est :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{w}}^k(\mathbf{n}_k) = -k_T(T) k_r(S_w) \frac{1}{12 \mu_w (T_{ref})} e_k(\mathbf{n}_k)^2 (\delta - \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k) \cdot \nabla (\gamma_w (\Psi_w + z)) \quad (6.34)$$

La vitesse d'écoulement de l'eau liquide au sein du réseau de mésolfissures homogénéisées est la somme des trois vitesses 6.34, pondérées par les fractions volumiques caractérisant l'espace occupé par les trois familles de microfissures endommageant le VER. Contrairement à la démarche de Shao (équation 6.27), la sommation est ici discrète, puisque les vitesses d'écoulement sont déjà homogénéisées :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{w}}^{frac} = \frac{1}{V_{VER}} \sum_{k=1}^3 [\mathbf{V}_{\mathbf{w}}^k(\mathbf{n}_k) V^k] \quad (6.35)$$

Le volume V^k occupé par une fissure homogénéisée, de rayon $r_k(\mathbf{n}_k)$ et d'ouverture $e_k(\mathbf{n}_k)$, vaut :

$$V^k = \pi r_k(\mathbf{n}_k)^2 e_k(\mathbf{n}_k) \quad (6.36)$$

Nous avons défini le VER comme un cube de côté b (équation 4.10). D'où :

$$V_{VER} = b^3 \quad (6.37)$$

En supposant que le poids volumique de l'eau γ_w est homogène, la combinaison des équations 6.35, 6.36, 6.37 et 6.34 donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\mathbf{w}}^{frac} = & \\ & -k_T(T) k_r(S_w) \frac{\gamma_w}{12 \mu_w (T_{ref})} \frac{\pi}{b^3} \left[\sum_{k=1}^3 e_k(\mathbf{n}_k)^3 r_k(\mathbf{n}_k)^2 (\delta - \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k) \right] \\ & \cdot \nabla (\Psi_w + z) \end{aligned} \quad (6.38)$$

D'après les équations 6.1, 6.2, 6.6 et 6.23, la vitesse d'écoulement au sein du réseau de fracturation 6.38 est reliée à la perméabilité intrinsèque relative à la fissuration $\mathbf{k}_2(n^{frac}, \Omega_{pq})$ par l'équation :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{w}}^{frac} = -k_T(T) k_r(S_w) \mathbf{k}_2(n^{frac}, \Omega_{pq}) \cdot \nabla (\Psi_w + z) \quad (6.39)$$

Par identification entre les équations 6.38 et 6.39, on obtient l'expression de la perméabilité intrinsèque relative à la fissuration :

$$\mathbf{k}_2 \left(n^{frac}, \Omega_{pq} \right) = \frac{\gamma_w}{12 \mu_w (T_{ref})} \frac{\pi}{b^3} \sum_{k=1}^3 e_k (\mathbf{n}_k)^3 r_k (\mathbf{n}_k)^2 (\delta - \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k) \quad (6.40)$$

Si deux mésolfissures homogénéisées se rejoignent alors qu'elles sont caractérisées par le même vecteur normal \mathbf{n}_k et qu'elles appartiennent à deux VER voisins, alors on ne peut pas utiliser la théorie des continua pour représenter le phénomène d'endommagement dans le matériau, et la modélisation est invalidée. Supposant que dans un VER donné, les trois vecteurs normaux caractérisant les directions de fracturation principales forment une base, une condition suffisante pour assurer la validité du concept de continuum est :

$$r_k < b \quad (6.41)$$

D'après les équations 4.9 et 4.10, on peut transformer l'équation 6.40 pour remplacer les rayons $r_k (\mathbf{n}_k)$ et ouvertures $e_k (\mathbf{n}_k)$ des mésolfissures par leurs fractions volumiques d_k . Sachant que :

$$r_k (\mathbf{n}_k) = b \left(\frac{d_k}{\pi \chi} \right)^{1/3} \quad (6.42)$$

on obtient :

$$\mathbf{k}_2 \left(n^{frac}, \Omega_{pq} \right) = \frac{\pi^{-2/3} \gamma_w}{12 \mu_w (T_{ref})} \chi^{4/3} b^2 \sum_{k=1}^3 d_k^{5/3} (\delta - \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k) \quad (6.43)$$

La formule 6.43 dépend toujours du raffinement du maillage, en raison de l'intervention de la longueur caractéristique du VER, b , dans l'égalité. Cette dépendance, comme on l'a vu dans les études bibliographiques précédentes (chapitre 3), est liée au problème de localisation de l'endommagement, et nécessite une régularisation. A cette fin, on introduit une longueur interne dans le modèle. La longueur interne qui nous intéresse ici est b . Il s'agit de calculer b en fonction de données matérielles propres au problème étudié, et non d'introduire b comme une donnée du modèle. C'est pourquoi pour un seuil d'endommagement donné, on introduit une borne supérieure k_{wdg}^{max} (en $m.s^{-1}$) pour la valeur moyenne de la perméabilité intrinsèque relative à la fissuration $\mathbf{k}_2 (n^{frac}, \Omega_{pq})$. Pour un niveau d'endommagement isotrope élevé, on peut trouver des estimations de la perméabilité maximale k_{wdg}^{max} . On suppose ainsi que pour un endommagement $\Omega_{ij} = 0,95 \delta_{ij}$, la moyenne de la perméabilité $\mathbf{k}_2 (n^{frac}, \Omega_{pq})$ est égale à la valeur maximale k_{wdg}^{max} :

$$\frac{1}{3} Tr \left[\mathbf{k}_2 \left(n^{frac}, \Omega_{ij} = 0,95 \delta_{ij} \right) \right] = k_{wdg}^{max} \quad (6.44)$$

D'après l'équation 6.43, la moyenne de $\mathbf{k}_2 (n^{frac}, \Omega_{ij} = 0,95 \delta_{ij})$ vaut :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} Tr \left[\mathbf{k}_2 \left(n^{frac}, \Omega_{ij} = 0,95 \delta_{ij} \right) \right] &= \frac{1}{3} \frac{\pi^{-2/3} \gamma_w}{12 \mu_w (T_{ref})} \chi^{4/3} b^2 0,95^{5/3} \delta : \\ & \left[(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) + (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) + (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \right] \end{aligned} \quad (6.45)$$

où \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 sont les vecteurs de la base principale de l'endommagement. Comme on a fait l'hypothèse que cette base était fixe, il s'agit des vecteurs de la base canonique.

$$\frac{1}{3} Tr \left[\mathbf{k}_2 \left(n^{frac}, \Omega_{ij} = 0,95 \delta_{ij} \right) \right] = \frac{2}{3} \frac{\pi^{-2/3} \gamma_w}{12 \mu_w (T_{ref})} \chi^{4/3} b^2 0,95^{5/3} \delta : \delta \quad (6.46)$$

$$\frac{1}{3} Tr \left[\mathbf{k}_2 \left(n^{frac}, \Omega_{ij} = 0,95 \delta_{ij} \right) \right] = \frac{\pi^{-2/3} \gamma_w}{6 \mu_w (T_{ref})} \chi^{4/3} b^2 0,95^{5/3} \quad (6.47)$$

La combinaison des équations 6.44 et 6.47 donne :

$$b = \frac{\sqrt{6}}{0,95^{5/6}} \left(\frac{\pi}{\chi^2} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_w (T_{ref})}{\gamma_w} \right)^{1/2} (k_{wdg}^{max})^{1/2} \quad (6.48)$$

Le même type de calcul peut être réalisé en supposant que k_{wdg}^{max} est la perméabilité globale maximale, atteinte pour un niveau d'endommagement donné. Les formules sont un peu plus complexes, car il faut faire abstraction des contributions des perméabilités relatives d'une part, et de la perméabilité intrinsèque « réversible » d'autre part, pour en arriver à l'expression de b .

6.1.6 Résumé du modèle de perméabilité à l'eau liquide

On fait l'hypothèse qu'à l'échelle du VER, le transfert de l'eau liquide peut être décrit par une loi de Darcy. La perméabilité à l'eau est anisotrope, et est décomposée en :

$$\mathbf{K}_w = k_T(T) k_r(S_w) \mathbf{K}_{int}(n, \Omega_{pq}) \quad (6.49)$$

La perméabilité relative à succion constante $k_T(T)$ est sans dimension et quantifie l'augmentation de la viscosité de l'eau avec la température :

$$k_T(T) = \frac{\mu_w(T)}{\mu_w(T_{ref})} \quad (6.50)$$

La perméabilité relative caractéristique des fluides interstitiels $k_r(S_w)$ est également sans dimension, et prend en compte les effets capillaires induits par les variations du degré de saturation de l'eau liquide S_w :

$$k_r(S_w) = \left(\frac{S_w - S_{w,r}}{1 - S_{w,r}} \right)^3 \quad (6.51)$$

Le degré de saturation évolue sur une surface d'état qui dépend des pressions interstitielles et de la température, mais qui est découplée des effets mécaniques associés à la contrainte nette :

$$S_w = \left[(1 - S_{w,r}) (1 + (\alpha|s|)^n)^{-(1-1/n)} + S_{w,r} \right] \exp(d_s (T - T_0)) \quad (6.52)$$

Les coefficients du tenseur de la perméabilité intrinsèque $\mathbf{K}_{int}(n, \Omega_{pq})$ sont homogènes à des vitesses. La perméabilité intrinsèque reflète l'influence des déformations du réseau poreux de la matrice solide sur le flux d'eau liquide. Elle est décomposée en une partie isotrope, relative à

l'écoulement d'eau dans le domaine des déformations réversibles, et une partie anisotrope, qui traduit la création de chemins d'écoulement préférentiels par fissuration :

$$\mathbf{K}_{\text{int}}(n, \Omega_{pq}) = \mathbf{k}_1(n^{rev}, \Omega_{pq}) + \mathbf{k}_2(n^{frac}, \Omega_{pq}) \quad (6.53)$$

La définition de la perméabilité intrinsèque isotrope $\mathbf{k}_1(n^{rev}, \Omega_{pq})$ est inspirée des modèles de perméabilité en milieu non saturé anisotherme non fragile :

$$\mathbf{k}_1(n^{rev}, \Omega_{pq}) = k_{w_0} 10^{\alpha_w} e^{rev} \delta \quad (6.54)$$

On suppose que l'écoulement d'eau liquide à l'intérieur du réseau de fissuration est **laminaire à l'échelle microscopique** des micro-fissures, et que la loi de transfert peut s'écrire sous la forme d'une **loi de Darcy à l'échelle mésoscopique** du VER. Les deux hypothèses sont combinées et l'expression finale de la perméabilité intrinsèque anisotrope $\mathbf{k}_2(n^{frac}, \Omega_{pq})$ est obtenue par homogénéisation :

$$\mathbf{k}_2(n^{frac}, \Omega_{pq}) = \frac{\pi^{-2/3} \gamma_w}{12 \mu_w (T_{ref})} \chi^{4/3} b^2 \sum_{k=1}^3 d_k^{5/3} (\delta - \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k) \quad (6.55)$$

b est la longueur caractéristique du VER, et joue le rôle de longueur interne pour le modèle de flux d'eau liquide. b est calculé en introduisant un maximum k_{wdg}^{max} pour la perméabilité intrinsèque anisotrope à un seuil d'endommagement donné. Par exemple, si la perméabilité intrinsèque relative à la fracturation est connue pour un endommagement isotrope de 95 pour cent :

$$b = \frac{\sqrt{6}}{0,95^{5/6}} \left(\frac{\pi}{\chi^2} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_w (T_{ref})}{\gamma_w} \right)^{1/2} (k_{wdg}^{max})^{1/2} \quad (6.56)$$

Le modèle de transfert de l'eau liquide en milieu endommagé nécessite l'utilisation des paramètres matériels suivants :

1. le degré de saturation résiduel $S_{w,r}$ (sans dimension) ;
2. la taille de pore la plus représentée au sein du réseau constitué par les pores de la matrice intacte et par les microfissures qui endommagent le VER : paramètre de Van Genuchten α (en Pa^{-1}) ;
3. le paramètre de Van Genuchten qui calibre l'extension de la distribution spatiale des tailles de pores vers les pores fins ou grossiers, n (sans dimension, avec $n > 1$) ;
4. le paramètre qui module l'influence de la température dans l'équation de la surface d'état du degré de saturation, d_s (en $^{\circ}C^{-1}$) ;
5. la perméabilité intrinsèque de référence k_{w_0} (en $m.s^{-1}$) ;
6. le paramètre qui module l'exponentielle de l'indice des vides réversible dans la définition de la perméabilité intrinsèque isotrope, α_w (sans dimension) ;
7. le paramètre de dilatace qui relie l'ouverture des mésosfissures à leur rayon, χ (sans dimension) ;
8. le maximum de la moyenne de la perméabilité intrinsèque anisotrope à seuil d'endommagement fixé, k_{wdg}^{max} (en $m.s^{-1}$).

Si l'endommagement croît dans la direction r , la perméabilité anisotrope endommagée croît dans les directions z et θ (voir figure 6.2) :

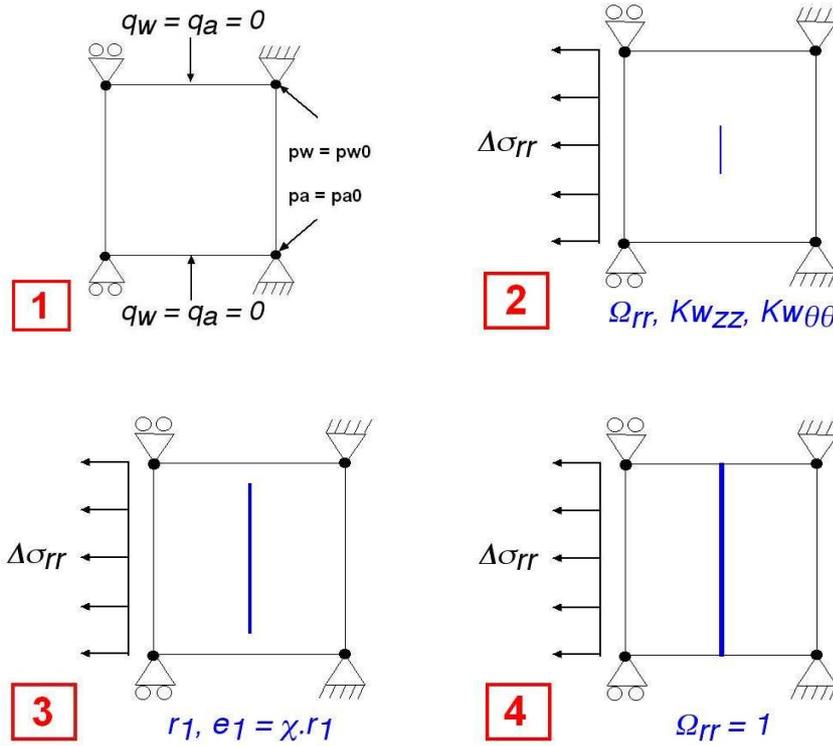


FIGURE 6.2 – Effet d’une fissuration irréversible due à une traction radiale sur le tenseur de perméabilité à l’eau liquide.

6.2 Transfert de la vapeur d’eau

6.2.1 Modèle de transfert de la vapeur en milieu intact

La vitesse d’écoulement de la vapeur dans le réseau poreux est définie par [158] :

$$\mathbf{V}_{\text{vap}} = \frac{1}{\rho_{\text{vap}}} \mathbf{Q}_{\text{vap}} \quad (6.57)$$

où \mathbf{Q}_{vap} est le débit de vapeur au sein du VER. Dans le modèle original de Philip et de Vries [158] :

$$\mathbf{Q}_{\text{vap}} = -D_0 \nu_{\text{vap}} \alpha_{\text{vap}} n(1 - S_w) \nabla \rho_{\text{vap}} \quad (6.58)$$

- n est la porosité du VER, et S_w est le degré de saturation de l’eau liquide. On suppose que l’air et la vapeur sont parfaitement mélangés, et que la fraction volumique occupée par la vapeur est la même que l’air (cette fraction volumique vaut $n(1 - S_w)$).
- D_0 est la diffusivité moléculaire de la vapeur d’eau dans l’air. On reprend les travaux de Jenab [102], qui s’est inspirée des travaux de Geraminezad et Saxena [80] pour évaluer la dépendance de la diffusivité moléculaire de la vapeur vis-à-vis de la température :

$$D_0 = \frac{229 \cdot 10^{-2}}{p_g + p_{\text{atm}}} \left(\frac{T + 273,15}{273} \right)^{1,75} = 1,24 \cdot 10^{-4} \frac{(T + 273,15)^{1,75}}{p_g + p_{\text{atm}}} \quad (6.59)$$

T est la température, exprimée en $^{\circ}\text{C}$. p_g est la pression interstitielle de la phase gazeuse et p_{atm} est la pression atmosphérique (en Pa). D_0 est exprimée en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

- ν_{vap} est le « facteur de flux massique » :

$$\nu_{vap} = \frac{p_g}{p_g - p_{vap}} \quad (6.60)$$

où p_g est la pression interstitielle du mélange d'air et de vapeur, et où p_{vap} est la pression partielle de la vapeur. Dans les conditions usuelles de température, ν_{vap} est très proche de 1. Dans les modèles développés par Gatmiri [68, 69, 70, 71, 74, 76] et programmés dans Θ -Stock [75, 102], on considère que la pression partielle de l'air est égale à la pression interstitielle du mélange gazeux, et que le facteur ν_{vap} vaut 1,024 :

$$\begin{cases} \nu_{vap} = 1,024 \\ p_g \simeq p_a \end{cases} \quad (6.61)$$

- α_{vap} est un facteur de tortuosité, adimensionnel.
- ρ_{vap} est la masse volumique de la vapeur. D'après Philip et de Vries [158] :

$$\rho_{vap} = h(\theta_w, T) \rho_{vap}^0(\theta_w, T) \quad (6.62)$$

où h est l'humidité relative, sans dimension :

$$h(\theta_w, T) = \exp\left(\frac{\Psi_w g}{R_{vap} T}\right) \quad (6.63)$$

Ψ_w est le potentiel capillaire, défini en 6.3 et exprimé en mètres. g est l'accélération de la pesanteur (en $m.s^{-2}$). T est la température, en $^{\circ}C$. R_{vap} est la constante des gaz pour la vapeur d'eau :

$$R_{vap} = 461,5 m^2.s^{-2}.^{\circ}C^{-1} \quad (6.64)$$

Dans Θ -Stock, les dérivées de l'humidité relative sont calculées à partir de la formule 6.63, mais l'humidité relative elle-même est évaluée au moyen d'une expression donnée par Geraminezad et Saxena [80] :

$$h(\theta_w, T) = \left[1 + \left[\frac{\theta_w}{0,04 \rho_{vap}^0(\theta_w, T)}\right]^{-4,27}\right]^{-0,42} \quad (6.65)$$

Philip et de Vries font l'hypothèse que la masse volumique de la vapeur en conditions saturées ρ_{vap}^0 ne dépend que de la température. De même, chez Jenab [102], qui s'inspire des travaux de Geraminezad et Saxena [80], ρ_{vap}^0 ne varie qu'avec la température :

$$\rho_{vap}^0(T) = 10^{-3} \exp\left(19,819 - \frac{4975,9}{T + 273,15}\right) \quad (6.66)$$

Dans la formule 6.66, la masse volumique ρ_{vap}^0 est exprimée en $kg.m^{-3}$, et la température T est exprimée en $^{\circ}C$.

La dérivation spatiale de l'équations 6.62 donne :

$$\nabla \rho_{vap} = h(\theta_w, T) \nabla \rho_{vap}^0(T) + \rho_{vap}^0(T) \nabla h(\theta_w, T) \quad (6.67)$$

D'après Philip et de Vries [158], les variations de l'humidité relative avec la température peuvent être négligées :

$$\frac{\partial h(\theta_w, T)}{\partial T} \simeq 0 \quad (6.68)$$

D'après les équations 6.67, 6.66 et 6.68, on a donc :

$$\nabla \rho_{vap} = h(\theta_w, T) \frac{d\rho_{vap}^0(T)}{dT} \nabla T + \rho_{vap}^0(T) \frac{\partial h(\theta_w, T)}{\partial \theta_w} \nabla \theta_w \quad (6.69)$$

En introduisant la définition de l'humidité relative 6.63 et en utilisant la définition du potentiel capillaire 6.3 dans l'égalité 6.69, il vient :

$$\nabla \rho_{vap} = h(\theta_w, T) \frac{d\rho_{vap}^0(T)}{dT} \nabla T + h(\theta_w, T) \rho_{vap}^0(T) \frac{g}{R_{vap} T} \frac{\partial \Psi_w(\theta_w, T)}{\partial \theta_w} \nabla \theta_w \quad (6.70)$$

La combinaison des équations 6.57, 6.58 et 6.70 donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{vap} &= -\frac{1}{\rho_{vap}} D_0 \nu_{vap} \alpha_{vap} n(1 - S_w) \\ &\times \left[h(\theta_w, T) \frac{d\rho_{vap}^0(T)}{dT} \nabla T + h(\theta_w, T) \rho_{vap}^0(T) \frac{g}{R_{vap} T} \frac{\partial \Psi_w(\theta_w, T)}{\partial \theta_w} \nabla \theta_w \right] \end{aligned} \quad (6.71)$$

Dans les modèles de Gatzmiri [68], repris par Jenab [102], la forme de l'équation 6.71 est modifiée pour tenir compte du rapport du gradient de température microscopique (à l'échelle des pores) par le gradient de température mésoscopique (à l'échelle du VER), $(\nabla T)_a / \nabla T$. Le coefficient $(\nabla T)_a / \nabla T$ traduit la prépondérance des flux thermiques à l'échelle des petits espaces existant entre la matrice solide et le liquide interstitiel par rapport aux flux thermiques évalués à l'échelle du VER. En considérant que la fraction volumique active des flux de vapeur valait n et non $n(1 - S_w)$, Preece [164] de Ewen et Thomas [60] ont trouvé une nouvelle expression pour la vitesse mésoscopique de la vapeur d'eau :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{vap} &= -\frac{1}{\rho_{vap}} D_0 \nu_{vap} n \\ &\times \left[\frac{(\nabla T)_a}{\nabla T} h(\theta_w, T) \frac{d\rho_{vap}^0(T)}{dT} \nabla T + h(\theta_w, T) \rho_{vap}^0(T) \frac{g}{R_{vap} T} \frac{\partial \Psi_w(\theta_w, T)}{\partial \theta_w} \nabla \theta_w \right] \end{aligned} \quad (6.72)$$

D'après les travaux de Ewen et Thomas [60] :

$$\frac{(\nabla T)_a}{\nabla T} = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{1 + B_T G_T} + \frac{1}{1 + B_T (1 - 2G_T)} \right] \quad (6.73)$$

où :

$$G_T = \begin{cases} 0,3333 - 0,325 \frac{n - \theta_w}{n} & \text{si } 0,09 < \theta_w (< n) \\ 0,0033 + 11,11 \left(0,33 - 0,325 \frac{n - 0,09}{n} \right) \theta_w & \text{si } (0 <) \theta_w < 0,09 \end{cases} \quad (6.74)$$

$$B_T = \frac{\lambda_a + \lambda_{vap}}{\lambda_w} - 1 \quad (6.75)$$

λ_a et λ_w sont respectivement les conductivités thermiques de l'air gazeux et de l'eau liquide :

$$\begin{cases} \lambda_a = 0,0258 \text{ J.s}^{-1}.\text{m}^{-1}.\text{°K}^{-1} \\ \lambda_w = 0,6 \text{ J.s}^{-1}.\text{m}^{-1}.\text{°K}^{-1} \end{cases} \quad (6.76)$$

λ_{vap} est la conductivité thermique de la vapeur d'eau, qui vaut , d'après Ewen et Thomas [60] :

$$\lambda_{vap} = D_0 \nu_{vap} h(\theta_w, T) \frac{d\rho_{vap}^0(T)}{dT} h_{fg} \quad (6.77)$$

h_{fg} est la chaleur latente d'évaporation de l'eau interstitielle :

$$h_{fg} = 2,4.10^6 \text{ J.kg}^{-1} \quad (6.78)$$

D'après la définition du potentiel capillaire $\Psi_w(\theta_w, T)$ (équation 6.3) :

$$\frac{\partial \Psi_w(\theta_w, T)}{\partial \theta_w} \nabla \theta_w = \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{ref})} \frac{d\Psi_R(\theta_w)}{d\theta_w} \nabla \theta_w \quad (6.79)$$

En combinant les équations 6.79 et 6.9 :

$$\frac{\partial \Psi_w(\theta_w, T)}{\partial \theta_w} \nabla \theta_w = -\frac{1}{\gamma_w} \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{ref})} \nabla (p_g - p_w) \quad (6.80)$$

Tenant compte de l'expression de la masse volumique de la vapeur 6.62 et de la définition de la succion 4.13, on introduit l'égalité 6.80 dans l'équation 6.72 :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{vap}} &= -\frac{1}{\rho_{vap}} D_0 \nu_{vap} n \\ &\times \left[\frac{(\nabla T)_a}{\nabla T} h(\theta_w, T) \frac{d\rho_{vap}^0(T)}{dT} \nabla T - \rho_{vap}(\theta_w, T) \frac{g}{R_{vap} T} \frac{1}{\gamma_w} \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{ref})} \nabla s \right] \end{aligned} \quad (6.81)$$

On note :

$$\mathbf{V}_{\text{vap}}^* = \frac{\rho_{vap}}{\rho_w} \mathbf{V}_{\text{vap}} = -D_{T_{vap}} \nabla T + D_{P_{vap}} \nabla s \quad (6.82)$$

$$D_{int, vap} = D_0 \nu_{vap} n \quad (6.83)$$

avec :

$$\begin{cases} D_{T_{vap}} = \frac{1}{\rho_w} D_{int, vap} \frac{(\nabla T)_a}{\nabla T} h(\theta_w, T) \frac{d\rho_{vap}^0(T)}{dT} \\ D_{P_{vap}} = \frac{1}{\rho_w} D_{int, vap} \rho_{vap}(\theta_w, T) \frac{g}{R_{vap} T} \frac{1}{\gamma_w} \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{ref})} \end{cases} \quad (6.84)$$

6.2.2 Extension du modèle de transfert de la vapeur aux milieux fracturés

On suit une démarche proche de celle adoptée dans la modélisation du transfert de l'eau liquide. On suppose que la fissuration induite par endommagement accélère le flux de vapeur, et que cette accélération ne peut pas être rendue par l'extension des formules appliquées au milieu intact aux configurations endommagées. On considère qu'en milieu endommagé, la conductivité intrinsèque de la vapeur $D_{int,vap}$ comporte une partie relative au flux de vapeur dans les pores de la matrice solide (domaine réversible des déformations), et une partie relative au flux de vapeur dans le réseau de microfissures :

$$D_{int,vap} = D_{int,vap_1}(n^{rev}, s, T, \Omega_{pq}) + D_{int,vap_2}(n^{frac}, \Omega_{pq}) \quad (6.85)$$

La conductivité relative au flux dans les pores de la matrice solide, $D_{int,vap_1}(n^{rev}, s, T, \Omega_{pq})$, est exprimée de la même manière que pour un matériau intact, en restreignant la définition au domaine des porosités réversibles. D'après l'équation 6.83, on a donc :

$$D_{int,vap_1}(n^{rev}, s, T, \Omega_{pq}) = D_0 \nu_{vap} n^{rev} \quad (6.86)$$

Dans le réseau de microfissures, la perméabilité à la vapeur est choisie comme étant la moyenne de la perméabilité intrinsèque anisotrope $\mathbf{k}_2(n^{frac}, \Omega_{pq})$ introduite dans le modèle de transfert de l'eau liquide. L'intervention de la moyenne se traduit par une définition scalaire de la conductivité de la vapeur au sein du réseau de microfissures. Autrement dit, on suppose que la vapeur est si mobile que son flux n'est pas orienté par la fracturation. A l'échelle du VER, on suppose que la fissuration influence le transfert de vapeur de façon isotrope, c'est-à-dire que c'est l'endommagement moyen du VER qui accélère le flux de vapeur dans toutes les directions. La vapeur étant plus mobile que l'eau liquide, le temps caractéristique du transfert de vapeur est inférieur à celui du transfert de l'eau liquide. Par conséquent, la longueur matérielle b^* qui caractérise le transfert de vapeur est supérieure à la longueur interne b qui caractérise le transfert de l'eau liquide. On considère ainsi que la perméabilité à la vapeur $k_{vap}^{frac}(n^{frac}, \Omega_{pq})$ est la moyenne de $\mathbf{k}_2^*(n^{frac}, \Omega_{pq})$, calculée avec b^* , et non la moyenne de $\mathbf{k}_2(n^{frac}, \Omega_{pq})$, calculée avec b :

$$k_{vap}^{frac}(n^{frac}, \Omega_{pq}) = \frac{1}{3} Tr \left(\mathbf{k}_2^*(n^{frac}, \Omega_{pq}) \right) \quad (6.87)$$

La perméabilité à la vapeur $k_{vap}^{frac}(n^{frac}, \Omega_{pq})$ est homogène à une vitesse, et on a besoin d'exprimer la conductivité $D_{int,vap_2}(n^{frac}, \Omega_{pq})$, qui est homogène à une diffusivité moléculaire (exprimée en $m^2.s^{-1}$). On relie les deux paramètres de conductivité de la vapeur dans le réseau de fissuration par une relation de proportionnalité faisant intervenir la longueur interne du modèle de flux de la vapeur, b^* :

$$D_{int,vap_2}(n^{frac}, \Omega_{pq}) = b^* k_{vap}^{frac}(n^{frac}, \Omega_{pq}) \quad (6.88)$$

La combinaison des équations 6.88 et 6.87 donne finalement :

$$D_{int,vap_2}(n^{frac}, \Omega_{pq}) = \frac{b^*}{3} Tr \left(\mathbf{k}_2^*(n^{frac}, \Omega_{pq}) \right) \quad (6.89)$$

De même que dans la modélisation du transfert de l'eau liquide, la longueur interne b^* est calculée

au moyen de l'introduction d'un maximum pour la conductivité $D_{int,vap2}(n^{frac}, \Omega_{pq})$, évalué à un niveau d'endommagement fixé :

$$D_{dg}^{max} = \frac{b^*}{3} Tr \left(\mathbf{k}_2^* \left(n^{frac}, \Omega_{pq} = 0,95 \delta \right) \right) \quad (6.90)$$

En déroulant les calculs de la même manière que dans les équations 6.45, 6.46, 6.47 et 6.48, on trouve :

$$(b^*)^3 = \frac{6}{0,95^{5/3}} \frac{\mu_w(T_{ref})}{\gamma_w} \left(\frac{\pi}{\chi^2} \right)^{2/3} D_{dg}^{max} \quad (6.91)$$

On rappelle que l'expression de la longueur interne propre au transfert de l'eau liquide (équation 6.56) :

$$b^2 = \frac{6}{0,95^{5/3}} \frac{\mu_w(T_{ref})}{\gamma_w} \left(\frac{\pi}{\chi^2} \right)^{2/3} k_{wdg}^{max} \quad (6.92)$$

La combinaison des équations 6.91 et 6.92 donne :

$$b^* = \left(\frac{D_{dg}^{max}}{k_{wdg}^{max}} \right)^{1/3} b^{2/3} \quad (6.93)$$

Supposons que la perméabilité intrinsèque à l'eau liquide du matériau intact soit de l'ordre de $10^{-8} m.s^{-1}$, et qu'on choisisse $k_{wdg}^{max} = 10^{-6} m.s^{-1}$. Supposons que la conductivité moléculaire D_0 soit de l'ordre de $10^{-5} m^2.s^{-1}$. C'est un ordre de grandeur raisonnable dans la gamme de température et de pression qui nous intéresse, compte-tenu de la formule 6.59. D_0 est du même ordre de grandeur que $D_{int,vap1}(n^{rev}, s, T, \Omega_{pq})$ (équation 6.86). Si on choisit $D_{dg}^{max} = 10^{-3} m^2.s^{-1}$, alors, d'après l'équation 6.93, on a :

$$b^* = 10 b^{2/3} \quad (6.94)$$

D'après la définition 6.87 et d'après l'équation 6.94, les ordres de grandeur de la perméabilité à la vapeur et de la perméabilité à l'eau liquide pour le milieu fracturé sont liés par l'égalité :

$$k_{vap}^{frac} \left(n^{frac}, \Omega_{pq} \right) = \frac{100 b^{-2/3}}{3} Tr \left(\mathbf{k}_2 \left(n^{frac}, \Omega_{pq} \right) \right) \quad (6.95)$$

D'après la formule 6.92, la longueur interne b est toujours inférieure à 1 dans les problèmes mécaniques qui nous intéressent. Par conséquent, la perméabilité à la vapeur $k_{vap}^{frac} \left(n^{frac}, \Omega_{pq} \right)$ du VER endommagé est toujours au moins 100 fois supérieure à l'ordre de grandeur de la perméabilité à l'eau liquide dans le milieu fracturé. D'autre part, d'après les équations 6.55, 6.88 et 6.95 :

$$D_{int,vap2} \left(n^{frac}, \Omega_{pq} \right) = \frac{1000}{3} Tr \left(\mathbf{k}_2 \left(n^{frac}, \Omega_{pq} \right) \right) \quad (6.96)$$

La perméabilité intrinsèque à l'eau liquide étant de l'ordre de $10^{-8} m.s^{-1}$ pour le matériau intact, et le maximum k_{wdg}^{max} ayant été fixé à $10^{-6} m.s^{-1}$, on peut supposer que dans la formule 6.96, la moyenne de $\mathbf{k}_2 \left(n^{frac}, \Omega_{pq} \right)$ varie entre $10^{-8} m.s^{-1}$ et $10^{-6} m.s^{-1}$. $D_{int,vap2} \left(n^{frac}, \Omega_{pq} \right)$ varie alors entre $10^{-5} m^2.s^{-1}$ et $10^{-3} m^2.s^{-1}$, et peut donc traduire une accélération du flux de vapeur par fissuration, puisque $D_{int,vap1} \left(n^{rev}, \Omega_{pq} \right)$ est du même ordre de grandeur que D_0 , soit

$10^{-5} m^2.s^{-1}$.

En résumé, les équations qui gouvernent le transfert de vapeur à l'échelle du VER endommagé sont :

$$\mathbf{V}_{\text{vap}}^* = \frac{\rho_{\text{vap}}}{\rho_w} \mathbf{V}_{\text{vap}} = -D_{T_{\text{vap}}} \nabla T + D_{P_{\text{vap}}} \nabla s \quad (6.97)$$

$$\begin{cases} D_{T_{\text{vap}}} = \frac{1}{\rho_w} D_{\text{int}, \text{vap}} \frac{(\nabla T)_a}{\nabla T} h(\theta_w, T) \frac{d\rho_{\text{vap}}^0(T)}{dT} \\ D_{P_{\text{vap}}} = \frac{1}{\rho_w} D_{\text{int}, \text{vap}} \rho_{\text{vap}}(\theta_w, T) \frac{g}{R_{\text{vap}} T} \frac{1}{\gamma_w} \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{\text{ref}})} \end{cases} \quad (6.98)$$

$$D_{\text{int}, \text{vap}} = D_{\text{int}, \text{vap}1}(n^{\text{rev}}, s, T, \Omega_{pq}) + D_{\text{int}, \text{vap}2}(n^{\text{frac}}, \Omega_{pq}) \quad (6.99)$$

$$D_{\text{int}, \text{vap}1}(n^{\text{rev}}, s, T, \Omega_{pq}) = D_0 \nu_{\text{vap}} n^{\text{rev}} \quad (6.100)$$

$$D_{\text{int}, \text{vap}2}(n^{\text{frac}}, \Omega_{pq}) = \frac{b^*}{3} \text{Tr}(\mathbf{k}_2^*(n^{\text{frac}}, \Omega_{pq})) \quad (6.101)$$

$$\mathbf{k}_2^*(n^{\text{frac}}, \Omega_{pq}) = \frac{\pi^{-2/3} \gamma_w}{12 \mu_w(T_{\text{ref}})} \chi^{4/3} (b^*)^2 \sum_{k=1}^3 d_k^{5/3} (\delta - \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k) \quad (6.102)$$

$$b^* = \left(\frac{D_{\text{dg}}^{\text{max}}}{k_{\text{ws}}^{\text{max}}} \right)^{1/3} b^{2/3} \quad (6.103)$$

$$b = \frac{\sqrt{6}}{0,95^{5/6}} \left(\frac{\pi}{\chi^2} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_w(T_{\text{ref}})}{\gamma_w} \right)^{1/2} (k_{\text{wdg}}^{\text{max}})^{1/2} \quad (6.104)$$

6.3 Transfert de l'air gazeux

Comme dans les précédents travaux de Gatmiri [68, 69, 70, 71, 74, 75, 76, 102], on suppose que les transferts d'air sont diffusifs, et qu'on peut calculer la vitesse d'écoulement de l'air dans le matériau poreux endommagé par la loi de Darcy :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{a}} = -\mathbf{K}_{\mathbf{a}} \cdot \nabla \left(\frac{p_a}{\gamma_a} + z \right) \quad (6.105)$$

γ_a est le poids volumique de l'air, et z , la cote du point considéré. $\mathbf{K}_{\mathbf{a}}$ désigne la perméabilité à l'air du matériau étudié. Comme dans les précédents travaux de Gatmiri [68, 69], on suppose que la pression interstitielle de l'air dépend de la température. Par conséquent :

$$\nabla \left(\frac{p_a(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}))}{\gamma_a} \right) = \nabla \left(\frac{p_a(\mathbf{x})}{\gamma_a} \right) + \frac{1}{\gamma_a} \frac{\partial p_a(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}))}{\partial T(\mathbf{x})} \nabla T(\mathbf{x}) \quad (6.106)$$

La combinaison des équations 6.105 et 6.106 donne :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{a}} = -\frac{1}{\gamma_a} \frac{\partial p_a(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}))}{\partial T(\mathbf{x})} \mathbf{K}_{\mathbf{a}} \cdot \nabla T(\mathbf{x}) - \mathbf{K}_{\mathbf{a}} \cdot \nabla \left(\frac{p_a}{\gamma_a} \right) - \mathbf{K}_{\mathbf{a}} \cdot \nabla z \quad (6.107)$$

On suppose que l'air est un gaz parfait. Par conséquent :

$$p_a + p_{\text{atm}} = \rho_a \frac{R}{m_m} (T + 273,15) \quad (6.108)$$

où T est la température exprimée en $^{\circ}C$, et où p_{atm} est la pression atmosphérique, exprimée en Pa. R est la constante des gaz parfaits : $R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}$. m_m est la masse molaire de l'air (voir le chapitre 8 sur la formulation forte du problème pour avoir l'expression détaillée de m_m).

Comme pour la vapeur, on suppose que la création de chemins d'écoulement préférentiels par fissuration a peu d'influence sur l'orientation du flux de l'air gazeux par rapport à l'orientation du flux de l'eau liquide. L'influence de l'endommagement sur le transfert de l'air peut donc être prise en compte au moyen d'une perméabilité à l'air isotrope. Contrairement aux choix de modélisation adoptés pour des transferts de l'eau liquide et de la vapeur, on n'introduit pas de composante spécifique à la fracturation dans la définition de la perméabilité à l'air. On adopte la même formule de perméabilité que dans les précédents travaux de Gatmiri [68, 69, 70, 71, 74, 75, 76, 102] :

$$\mathbf{K}_a = c_a \frac{\gamma_a}{\mu_a} [e(1 - S_w)]^{\alpha_a} \delta \quad (6.109)$$

L'indice des vides total e dépend des déformations volumiques, qui dépendent de l'endommagement via la loi de comportement choisie dans le modèle THHMD. La perméabilité à l'air est donc proportionnelle à une puissance des déformations volumiques, ce qui traduit une dépendance isotrope de la perméabilité vis-à-vis de l'endommagement. c_a et α_a sont des paramètres matériels. μ_a est la viscosité dynamique de l'air. Dans les conditions normales de température et de pression, $\mu_a = 1,846.10^{-5} N.S.m^{-2}$. On conserve la formule programmée dans Θ -Stock, qui relie la viscosité dynamique de l'air à la température :

$$\mu_a = 2,2152.10^{-7} (T + 273,15)^{0,775} \quad (6.110)$$

6.4 Transfert de la chaleur

La fissuration génère une nouvelle répartition volumique des phases matérielles qui constituent le VER. L'ouverture d'une méso-fissure provoque la diminution du volume relatif occupé par les grains solides, tandis que le volume relatif occupé par les phases fluides augmente. La nouvelle « répartition spatiale » des fluides dans les fractures dépend des lois de transfert précédemment décrites. La conductivité thermique du milieu poreux non saturé non isotherme endommagé doit en conséquence être pondérée par la nouvelle distribution des volumes des phases pour refléter l'influence de l'endommagement sur le transfert de chaleur.

On adopte un modèle de transfert de chaleur communément utilisé en mécanique. On utilise la notation $\mathbf{V}_{vap}^* = \frac{\rho_{vap}}{\rho_w} \mathbf{V}_{vap}$ (équation 6.82). Comme dans les précédents travaux de Gatmiri [68, 69, 70, 71, 74, 75, 76, 102], on suppose que le flux de chaleur peut être défini comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_T = & -\lambda_T \nabla T + h_{fg} (\rho_w \mathbf{V}_{vap}^* + \rho_{vap} \mathbf{V}_a) \\ & + [\rho_w C_{Pw} \mathbf{V}_w + \rho_w C_{Pvap} \mathbf{V}_{vap}^* + \rho_a C_{Pa} \mathbf{V}_a] (T - T_0) \end{aligned} \quad (6.111)$$

- $-\lambda_T \nabla T$ est un terme de transfert diffusif. λ_T est la conductivité thermique de Fourier. On considère que les différentes phases constituant le VER sont des matériaux montés en parallèle. En milieu intact, la conductivité thermique peut ainsi être définie comme suit [62] :

$$\lambda_T = (1 - n(\Omega_{pq})) \lambda_s + n(\Omega_{pq}) S_w \lambda_w + n(\Omega_{pq}) (1 - S_w) \lambda_{vap} \quad (6.112)$$

La conductivité de la vapeur ne fait pas partie des paramètres du modèle THHMD. Dans Θ -Stock, comme c'est rappelé dans l'équation 6.77, λ_{vap} est calculée selon une formule qui dépend de la température :

$$\lambda_{vap} = D_0 \nu_{vap} h(\theta_w, T) \frac{d\rho_{vap}^0(T)}{dT} h_{fg} \quad (6.113)$$

- Le terme $h_{fg} (\rho_w \mathbf{V}_{vap}^* + \rho_{vap} \mathbf{V}_a)$ permet de quantifier l'influence de l'évaporation sur le transfert de chaleur. h_{fg} est la chaleur latente d'évaporation. Dans les conditions usuelles de température et de pression, $h_{fg} = 2,5.10^6 J.kg^{-1}$.
- $[\rho_w C_{Pw} \mathbf{V}_w + \rho_w C_{Pvap} \mathbf{V}_{vap}^* + \rho_a C_{Pa} \mathbf{V}_a] (T - T_0)$ est un terme de transport convectif. C_{Pw} , C_{Pvap} et C_{Pa} désignent les capacités calorifiques de l'eau liquide, de la vapeur et de l'air gazeux respectivement (en $J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$).

Comme pour le transfert de l'air gazeux, on suppose que la fissuration n'oriente pas le flux de chaleur. Par conséquent, on n'ajoute pas de terme diffusif propre à la fracturation dans la définition du flux de chaleur 6.111. On étend les formules 6.111 et 6.112 au milieu endommagé. Comme on suppose que les différentes phases constituant le VER sont montées en parallèle (équation 6.112), la conductivité thermique du matériau homogénéisé à l'échelle du VER est la somme des conductivités des constituants, pondérée par les fractions volumiques de ces constituants. Cette pondération permet de tenir compte des changements de répartition des phases dus à la fissuration au sein du VER. Le terme diffusif est une fonction affine de la porosité $n(\Omega_{pq})$, qui dépend des déformations volumiques, qui elles-mêmes dépendent de l'endommagement, compte-tenu de la loi de comportement choisie. Le transfert de chaleur est donc affecté de façon isotrope par la croissance de l'endommagement, à travers des termes de déformation volumique. On suppose que la fissuration n'influence que le terme de transfert diffusif de la chaleur. Le terme d'évaporation ne dépend en effet que des caractéristiques des gaz (air et vapeur) présents dans le VER. D'autre part, le terme convectif quantifie un transfert principalement contrôlé par les phases fluides du milieu, et non par la matrice solide endommagée.

CHAPITRE 7

Résumé des équations et paramètres du modèle THMD

7.1 Résumé des équations du modèle THHMD

7.1.1 Loi de comportement

Les déformations sont décomposées en fonction du choix des variables indépendantes de type contrainte (contrainte nette, succion, contrainte thermique). Chaque composante de déformation incrémentale comporte une partie élastique, proportionnelle à une rigidité endommagée, et une partie inélastique, proportionnelle à l'incrément d'endommagement :

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{Mij}^e + d\epsilon_{Mij}^d + \frac{1}{3} \delta_{ij} \left(d\epsilon_{Sv}^e + d\epsilon_{Sv}^d \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \left(d\epsilon_{Tv}^e + d\epsilon_{Tv}^d \right) \quad (7.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\epsilon_{Mij}^e = D_{eijkl} (\Omega_{pq})^{-1} d\sigma_{lk} \\ d\epsilon_{Sv}^e = \frac{1}{\beta_s(\Omega_{pq})} ds \\ d\epsilon_{Tv}^e = \frac{1}{\beta_T(\Omega_{pq})} dp_T \end{array} \right. \quad (7.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\epsilon_{Mij}^d = D_{dMijkl} d\Omega_{lk} \\ d\epsilon_{Sv}^d = D_{dSij} d\Omega_{ji} \\ d\epsilon_{Tv}^d = D_{dTij} d\Omega_{ji} \end{array} \right. \quad (7.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{dMijkl} = -D_e (\Omega_{pq})^{-1} {}_{ijmn} \frac{\partial D_{enmkl}(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{rs}} \epsilon_{Msr} + g_M D_e (\Omega_{pq})^{-1} {}_{ijkl} \\ D_{dSij} = -\frac{\epsilon_{Sv}}{\beta_s(\Omega_{pq})} \frac{\partial \beta_s(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} + \frac{g_S}{3\beta_s(\Omega_{pq})} \delta_{ij} \\ D_{dTij} = -\frac{\epsilon_{Tv}}{\beta_T(\Omega_{pq})} \frac{\partial \beta_T(\Omega_{pq})}{\partial \Omega_{ij}} + \frac{g_T}{3\beta_T(\Omega_{pq})} \delta_{ij} \end{array} \right. \quad (7.4)$$

La loi d'évolution de l'endommagement est déterminée par une règle d'écoulement associative, et dépend d'une contrainte associée aux déformations de tension qui génèrent de la fissuration ($\mathbf{Y}_{d_1}^+$).

$$d\Omega_{ij} = \frac{Y_{d_1 pq}^+ dY_{d_1 qp}^+}{C_1 Y_{d_1 pp}^+} \frac{Y_{d_1 ij}^+}{\sqrt{2 Y_{d_1 pq}^+ Y_{d_1 qp}^+}} \quad (7.5)$$

Les rigidités endommagées sont calculées par application du Principe de l'Energie Equivalente. Les formules dépendent d'un opérateur de contrainte endommagée ($\mathbf{M}(\Omega_{pq})$).

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{eijkl}(\Omega_{pq}) = M(\Omega_{pq})^{-1} {}_{ijmn} D_{enmop}^0 M(\Omega_{pq})^{-T} {}_{pokl} \\ \beta_s(\Omega_{pq}) = \frac{9}{[(\delta - \Omega)^{-1}]_{ii}^2} \beta_s^0 \\ \beta_T(\Omega_{pq}) = \frac{9}{[(\delta - \Omega_{pq})^{-1}]_{ii}^2} \beta_T^0 \end{array} \right. \quad (7.6)$$

On suppose que la contrainte thermique dépend de la température selon une loi indépendante de l'endommagement :

$$dp_T = \frac{\beta_T(\Omega_{pq})}{\beta_T^*(p, T, \Omega_{pq})} dT = \frac{\beta_T^0}{\beta_T^{*0}(p, T)} dT \quad (7.7)$$

L'expression de la rigidité intacte $\beta_T^{*0}(p, T)$ (en $^{\circ}C$), qui relie la déformation thermique à la température, est inspirée des travaux de Hueckel [97] :

$$\beta_T^*(p, s, T, \Omega_{pq} = 0) = \beta_T^{*0}(p, T) = \frac{1}{\left[(\alpha_0^* + 2\alpha_2 \Delta T) + (\alpha_1 + 2\alpha_3 \Delta T) \ln\left(\frac{p}{p_{geo}}\right) \right]} \quad (7.8)$$

On définit :

$$F_{Tij}^*(\Omega_{pq}) = \frac{1}{3\beta_T^*(p, T, \Omega_{pq})} D_{eijkl}(\Omega_{pq}) \delta_{lk} \quad (7.9)$$

Les équations 7.7 et 7.9 permettent d'exprimer la loi de comportement incrémentale qu'on peut déduire des équations 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 et 7.5 uniquement en fonction des incréments de déformation, de succion et de température :

$$d\sigma''_{ij} = D_{edijkl}(\Omega_{pq}) d\epsilon_{lk} - F_{sij}^{ed}(\Omega_{pq}) ds - F_{Tij}^{ed*}(\Omega_{pq}) dT \quad (7.10)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{edijkl}(\Omega_{pq}) = D_{eijkl}(\Omega_{pq}) - \delta_d D_{dijkl}(\Omega_{pq}) \\ D_{dijkl}(\Omega_{pq}) = D_{dYijmn} D_{YYnmop}^{-1} D_{YYMpokl} \\ \\ F_{sij}^{ed}(\Omega_{pq}) = F_{sij}(\Omega_{pq}) - \delta_d F_{sij}^d(\Omega_{pq}) \\ F_{sij}^d(\Omega_{pq}) = -D_{dYijmn} D_{YYnmop}^{-1} D_{YYSpO} \\ \\ F_{Tij}^{ed*}(\Omega_{pq}) = F_{Tij}^*(\Omega_{pq}) - \delta_d F_{Tij}^{d*}(\Omega_{pq}) \\ F_{Tij}^{d*}(\Omega_{pq}) = -D_{dYijmn} D_{YYnmop}^{-1} D_{YYTpo} \end{array} \right. \quad (7.11)$$

où $\delta_d = 0$ dans le domaine élastique ($\lambda_d = 0$), et $\delta_d = 1$ dans le domaine inélastique ($\lambda_d > 0$).
On définit :

$$D_{dYijkl} = H_d D_{eijmn}(\Omega_{pq}) \left[D_{dMnmop} + \frac{1}{3} (\delta_{nm} D_{dSop}) + \frac{1}{3} (\delta_{nm} D_{dTop}) \right] \left[Y_{d_1 po}^+ Y_{d_1 kl}^+ \right] \quad (7.12)$$

où :

$$H_d = \frac{1}{C_1 Y_{d_1 ii}^+ \sqrt{2 Y_{d_1 ij}^+ Y_{d_1 ji}^+}} \quad (7.13)$$

Par ailleurs on définit :

$$\begin{aligned} D_{YYijkl} &= \Delta_{ijkl} - \delta_d \frac{H_d}{3} [g_S D_{SYijmn} - g_M D_{MYijmn}] [\delta_{nm} D_{dSop}] \left[Y_{d_1 po}^+ Y_{d_1 kl}^+ \right] \\ &- \delta_d \frac{H_d}{3} [g_T D_{TYijmn} - g_M D_{MYijmn}] [\delta_{nm} D_{dTop}] \left[Y_{d_1 po}^+ Y_{d_1 kl}^+ \right] \end{aligned} \quad (7.14)$$

où Δ_{ijkl} est le tenseur identité d'ordre 4 et :

$$\begin{aligned} \left(dY_{d_1 pq}^+ \right)_{k,i} &= g_M D_{MYpqrs} d\epsilon_{sr M_{k,i}} + \frac{g_S}{3} D_{SYpqrs} \delta_{sr} d\epsilon_{Sv_{k,i}} + \frac{g_T}{3} D_{TYpqrs} \delta_{sr} d\epsilon_{Tv_{k,i}}, \\ d\epsilon_{ij M_{k,i}} &= \epsilon_{ij M_{k,i}} - \epsilon_{ij M_{k,i-1}}, \quad d\epsilon_{Sv_{k,i}} = \epsilon_{Sv_{k,i}} - \epsilon_{Sv_{k,i-1}}, \quad d\epsilon_{Tv_{k,i}} = \epsilon_{Tv_{k,i}} - \epsilon_{Tv_{k,i-1}}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

$\mathbf{D}_{\mathbf{MY}}$, $\mathbf{D}_{\mathbf{SY}}$ et $\mathbf{D}_{\mathbf{TY}}$ sont des opérateurs diagonaux. Enfin, on définit :

$$\begin{cases} D_{YYMijkl} = g_M D_{MYijkl} \\ D_{YYSij} = \frac{1}{3\beta_s(\Omega_{pq})} [g_S D_{SYijkl} - g_M D_{MYijkl}] \delta_{lk} \\ D_{YYTij} = \frac{1}{3\beta_T^*(\Omega_{pq})} [g_T D_{TYijkl} - g_M D_{MYijkl}] \delta_{lk} \end{cases} \quad (7.16)$$

7.1.2 Transfert de l'eau liquide

On fait l'hypothèse qu'à l'échelle du VER, le transfert de l'eau liquide peut être décrit par une loi de Darcy. Le potentiel de l'eau liquide interstitielle comporte un terme gravitationnel et un terme capillaire, qui dépend de la température.

$$\mathbf{V}_w = -\mathbf{K}_w \cdot \nabla \Phi_w \quad (7.17)$$

$$\begin{cases} \Phi_w = \Psi_w(\theta_w, T) + z \\ \Psi_w(\theta_w, T) = \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{ref})} \Psi_R(\theta_w) \\ \Psi_R(\theta_w) = \frac{p_w - p_g}{\gamma_w} \end{cases} \quad (7.18)$$

La perméabilité à l'eau est anisotrope, et est décomposée en :

$$\mathbf{K}_w = k_T(T) k_r(S_w) \mathbf{K}_{\mathbf{int}}(n, \Omega_{pq}) \quad (7.19)$$

La perméabilité relative à succion constante $k_T(T)$ est sans dimension et quantifie l'augmentation de la viscosité de l'eau avec la température. La perméabilité relative caractéristique des fluides interstitiels $k_r(S_w)$ est également sans dimension, et prend en compte les effets capillaires induits par les variations du degré de saturation de l'eau liquide S_w . Le degré de saturation évolue sur une surface d'état qui dépend des pressions interstitielles et de la température, mais qui est découplée des effets mécaniques associés à la contrainte nette.

$$\begin{cases} k_T(T) = \frac{\mu_w(T)}{\mu_w(T_{ref})} \\ k_r(S_w) = \left(\frac{S_w - S_{w,r}}{1 - S_{w,r}} \right)^3 \\ S_w = \left[(1 - S_{w,r}) (1 + (\alpha|s|)^n)^{-(1-1/n)} + S_{w,r} \right] \exp(d_s(T - T_0)) \end{cases} \quad (7.20)$$

Les coefficients du tenseur de la perméabilité intrinsèque $\mathbf{K}_{\mathbf{int}}(n, \Omega_{pq})$ sont homogènes à des vitesses. La perméabilité intrinsèque reflète l'influence des déformations du réseau poreux de la matrice solide sur le flux d'eau liquide. Elle est décomposée en une partie isotrope, relative à l'écoulement d'eau dans le domaine des déformations élastiques, et une partie anisotrope, qui traduit la création de chemins d'écoulement préférentiels par fissuration. La définition de la perméabilité intrinsèque isotrope $\mathbf{k}_1(n^e, \Omega_{pq})$ est inspirée des modèles de perméabilité en milieu non saturé anisotherme non fragile. L'écoulement d'eau liquide dans les fissures est supposé

laminaire à l'échelle microscopique. La loi de transfert mésoscopique est une loi de Darcy dont les paramètres sont issus d'une homogénéisation à l'échelle du VER.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_{int}(n, \Omega_{pq}) = \mathbf{k}_1(n^e, \Omega_{pq}) + \mathbf{k}_2(n^{frac}, \Omega_{pq}) \\ \mathbf{k}_1(n^e, \Omega_{pq}) = k_{w0} 10^{\alpha_w} e^e \delta \\ \mathbf{k}_2(n^{frac}, \Omega_{pq}) = \frac{\pi^{-2/3} \gamma_w}{12 \mu_w(T_{ref})} \chi^{4/3} b^2 \sum_{k=1}^3 d_k^{5/3} (\delta - \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k) \end{array} \right. \quad (7.21)$$

b est une longueur matérielle interne, qui caractérise le flux de l'eau liquide dans le matériau endommagé. Un critère de maximisation de la perméabilité intrinsèque propre à la fissuration est utilisé pour calculer b .

$$b = \frac{\sqrt{6}}{0,95^{5/6}} \left(\frac{\pi}{\chi^2} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_w(T_{ref})}{\gamma_w} \right)^{1/2} (k_{wdg}^{max})^{1/2} \quad (7.22)$$

7.1.3 Transfert de la vapeur

Le transfert de vapeur est modélisé selon une théorie inspirée des travaux de Philip et de Vries [158]. La vitesse d'écoulement de la vapeur dépend des gradients de la température et de la succion. Les deux termes de conductivité correspondants dépendent d'une conductivité interne $D_{int,vap}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_{vap}^* = \frac{\rho_{vap}}{\rho_w} \mathbf{V}_{vap} = -D_{T_{vap}} \nabla T + D_{P_{vap}} \nabla s \\ D_{T_{vap}} = \frac{1}{\rho_w} D_{int,vap} \frac{(\nabla T)_a}{\nabla T} h(\theta_w, T) \frac{d\rho_{vap}^0(T)}{dT} \\ D_{P_{vap}} = \frac{1}{\rho_w} D_{int,vap} \rho_{vap}(\theta_w, T) \frac{g}{R_{vap} T} \frac{1}{\gamma_w} \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{ref})} \end{array} \right. \quad (7.23)$$

De même que dans la modélisation du transfert de l'eau liquide, $D_{int,vap}$ est décomposée en une partie relative aux déformations élastiques et une partie propre à la fracturation. La formule de la composante relative aux déformations élastiques est inspirée de modèles valables dans un milieu poreux intact. Celle de la composante propre à la fracturation est obtenue en faisant la moyenne d'une perméabilité caractéristique du transfert de la vapeur dans le réseau de microfissures. Cette perméabilité est déterminée par homogénéisation de flux laminaires, de la même manière que dans le modèle du transfert de l'eau liquide en milieu endommagé. La formule obtenue fait intervenir une longueur interne spécifique au flux de la vapeur dans le réseau de microfissures, b^* . La longueur matérielle b^* peut être liée à la longueur caractéristique du transfert de l'eau liquide dans le réseau de fractures, b .

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{int,vap} = D_{int,vap1}(n^e, s, T, \Omega_{pq}) + D_{int,vap2}(n^{frac}, \Omega_{pq}) \\ D_{int,vap1}(n^e, s, T, \Omega_{pq}) = D_0 \nu_{vap} n^e \\ D_{int,vap2}(n^{frac}, \Omega_{pq}) = \frac{b^*}{3} Tr(\mathbf{k}_2^*(n^{frac}, \Omega_{pq})) \\ \mathbf{k}_2^*(n^{frac}, \Omega_{pq}) = \frac{\pi^{-2/3} \gamma_w}{12 \mu_w(T_{ref})} \chi^{4/3} (b^*)^2 \sum_{k=1}^3 d_k^{5/3} (\delta - \underline{n}_k \otimes \underline{n}_k) \\ b^* = \left(\frac{D_{dg}^{max}}{k_{wsg}^{max}} \right)^{1/3} b^{2/3} \end{array} \right. \quad (7.24)$$

7.1.4 Transfert de l'air gazeux

Le transfert de l'air gazeux dans le matériau poreux endommagé obéit à une loi de Darcy. Comme on suppose que la pression interstielle de l'air dépend de la température, l'équation de transfert dépend d'un gradient de température.

$$\mathbf{V}_a = -\frac{1}{\gamma_a} \frac{\partial p_a(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}))}{\partial T(\mathbf{x})} \mathbf{K}_a \cdot \nabla T(\mathbf{x}) - \mathbf{K}_a \cdot \nabla \left(\frac{p_a}{\gamma_a} \right) - \mathbf{K}_a \cdot \nabla z \quad (7.25)$$

La perméabilité à l'air est supposée isotrope, et est calculée au moyen d'une formule conçue pour les milieux poreux intacts, et étendue aux milieux poreux fracturés. L'effet de l'endommagement sur l'accélération du flux d'air est décrit de manière isotrope, par la contribution des déformations volumiques totales.

$$\mathbf{K}_a = c_a \frac{\gamma_a}{\mu_a} [e(1 - S_w)]^{\alpha_a} \delta \quad (7.26)$$

7.1.5 Transport de la chaleur

La loi de transfert de la chaleur comprend un terme de diffusion, un terme de convection et un terme d'évaporation. L'effet de l'endommagement sur le transport de la chaleur dans le milieu poreux fracturé est modélisé dans le terme diffusif uniquement. L'influence de la fissuration sur le flux de chaleur est supposée isotrope, et est traduite par une pondération des flux diffusifs par les fractions volumiques des différentes phases constituant le VER.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}_T = -\lambda_T \nabla T + h_{fg} (\rho_w \mathbf{V}_{vap}^* + \rho_{vap} \mathbf{V}_a) \\ \quad + [\rho_w C_{Pw} \mathbf{V}_w + \rho_w C_{Pvap} \mathbf{V}_{vap}^* + \rho_a C_{Pa} \mathbf{V}_a] (T - T_0) \\ \lambda_T = (1 - n(\Omega_{pq})) \lambda_s + n(\Omega_{pq}) S_w \lambda_w + n(\Omega_{pq}) (1 - S_w) \lambda_{vap} \end{array} \right. \quad (7.27)$$

7.2 Liste des paramètres matériels

Les paramètres matériels utilisés dans le modèle THHMD sont résumés dans les tableaux 7.1, 7.2 et 7.3. Les paramètres β_s^0 et β_T^0 peuvent être déterminés au moyen d'essais oedométriques à succion imposée [30]. Une procédure d'identification des paramètres C_0 , C_1 , et g_M à partir d'essais triaxiaux est donnée dans [91]. Shao et al. [180] ont mis au point une procédure expérimentale pour quantifier la dilatace des fissures (paramètre χ). Le paramètre de type longueur interne k_{wdg}^{max} est calculé à partir d'une mesure de perméabilité à l'eau, pour un niveau d'endommagement donné. De même, le paramètre D_{dg}^{max} est déterminé à l'aide d'une mesure de la conductivité à la vapeur. Les paramètres g_S et g_T sont des nouveautés du modèle THHMD. Des essais spécifiques sont nécessaires, pour suivre la dégradation des rigidités capillaire et thermique au cours d'un programme de chargement et déchargement.

Les figures 7.1, 7.2 et 7.3 illustrent le choix des signes des rigidités intactes et des rigidités d'endommagement (g_M , g_S et g_T), compte-tenu du critère d'endommagement utilisé dans le modèle THHMD. Les graphes sont tracés pour la convention de la Mécanique des Milieux Continus (figures 7.1.a, 7.2.a et 7.3.a) et pour la convention de la mécanique des sols, qui consiste à compter les compressions positivement (figures 7.1.b, 7.2.b et 7.3.b).

TABLE 7.1 – Paramètres mécaniques du modèle THHMD.

Modèle élastique hyperbolique						
K_b	K_L	n	R_f	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$	K_U	m
adim.	adim.	adim.	adim.	Pa	adim.	adim.
Rigidités de référence						
β_s^0	β_T^0					
Pa	Pa					
Paramètres d'endommagement						
χ	g_M	g_S	g_T	C_0	C_1	
adim.	Pa	Pa	Pa	Pa	Pa	
Conditions initiales						
e_0	S_{w0}	T_0				
adim.	adim.	$^{\circ}C$				

TABLE 7.2 – Paramètres THHMD relatifs aux fluides.

Courbe de rétention			
$S_{w,r}$	α_{VG}	n_{VG}	d_s
adim.	Pa^{-1}	adim.	$^{\circ}C^{-1}$
Perméabilité à l'eau liquide			
k_{w0}	α_w	k_w^{0max}	k_{wdg}^{max}
$m.s^{-1}$	adim.	$m.s^{-1}$	$m.s^{-1}$
Transfert des gaz			
c_a	α_a	k_a^{max}	D_{dg}^{max}
m^2	adim.	$m.s^{-1}$	$m^2.s^{-1}$

TABLE 7.3 – Paramètres thermiques du modèle THHMD.

Rigidité thermique intacte				
α_0^*	α_1	α_2	α_3	p_{geo}
$^{\circ}C^{-1}$	$^{\circ}C^{-1}$	$^{\circ}C^{-2}$	$^{\circ}C^{-2}$	Pa
Diffusion et évaporation				
λ_s	λ_w	λ_a	h_{fg}	
$J.m^{-1}.s^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$J.m^{-1}.s^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$J.m^{-1}.s^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$J.kg^{-1}$	
Convection				
C_{Ps}	C_{Pw}	C_{Pvap}	C_{Pa}	
	$J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	

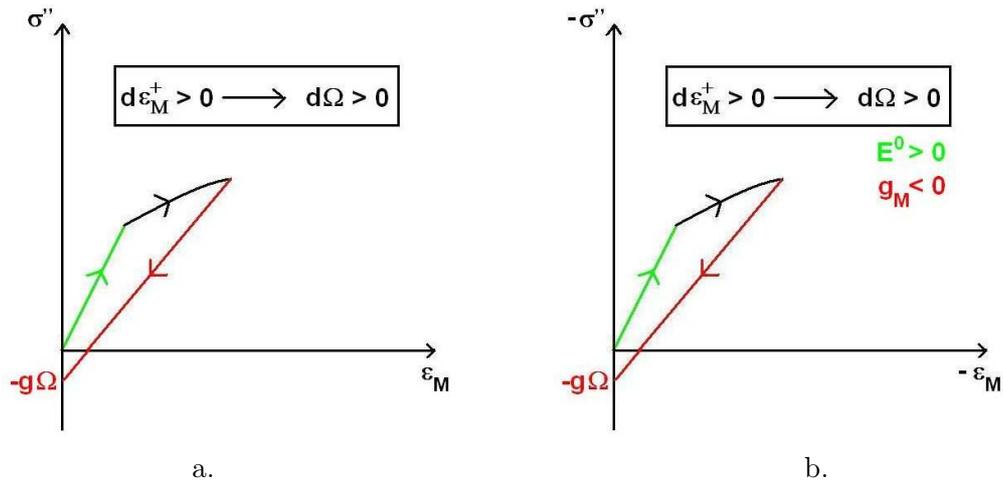


FIGURE 7.1 – Degré de rigidité mécanique dans un problème unidimensionnel. a. MMC. b. Mécanique des sols.

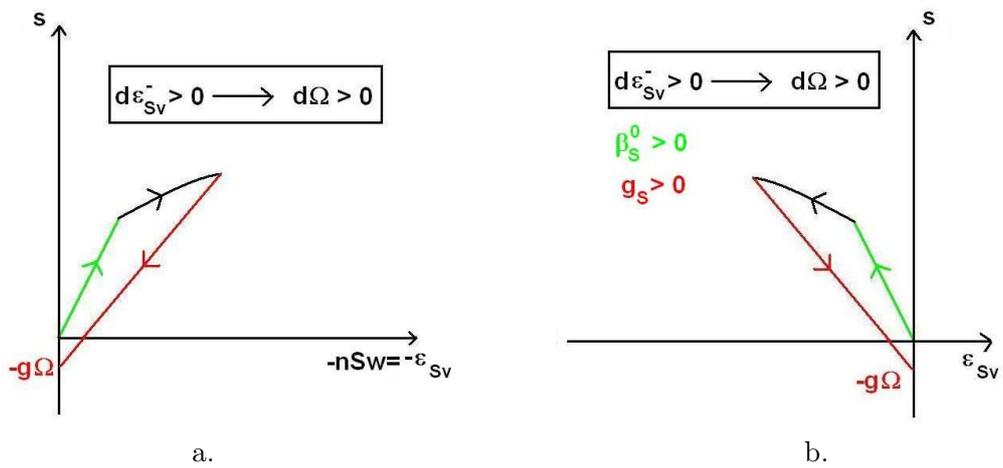


FIGURE 7.2 – Degré de rigidité capillaire. a. MMC. b. Mécanique des sols.

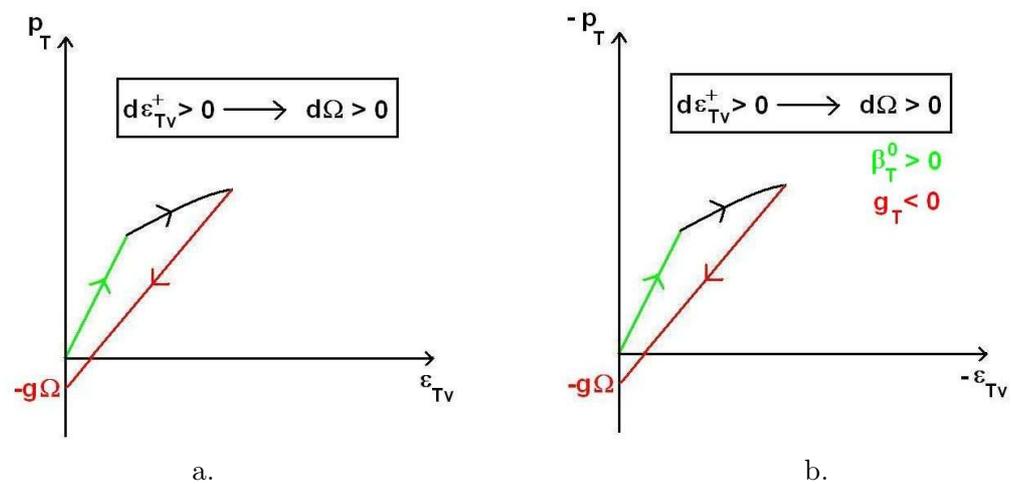


FIGURE 7.3 – Degré de rigidité thermique. a. MMC. b. Mécanique des sols.

Troisième partie

Discretisation

« L'infini n'est pas une chose, une sphère dont le centre serait partout et la circonférence nulle part ; c'est quelque chose dont le centre, lui est aussi, n'est nulle part, quelque chose qui n'a ni limites ni centre et au sujet de quoi la question « où ? » ne peut se poser, car en ce qui le concerne, partout signifie nulle part, *nullibi*. »

A. Koyré, 1957, *Du monde clos à l'univers infini*, VIII, Gallimard, p.240-241

CHAPITRE 8

Formulation forte du problème

8.1 Détermination des équations du problème

8.1.1 Equations relatives à la phase solide

On rappelle que la loi de comportement incrémentale est de la forme :

$$d\sigma''_{ij} = D_{edijkl}(\Omega_{pq}) d\epsilon_{lk} - F_s^{ed}{}_{ij}(\Omega_{pq}) ds - F_T^{ed*}{}_{ij}(\Omega_{pq}) dT \quad (8.1)$$

Les expressions des tenseurs qui interviennent dans la relation 8.1 sont rappelées dans les équations 7.11 à 7.16.

L'équation d'équilibre est :

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (8.2)$$

où \mathbf{f} est une force volumique exercée à distance par l'extérieur du système. Supposant que le système est soumis à un incrément de force extérieure $\delta\mathbf{f}$, l'équation d'équilibre 8.2 prend la forme :

$$\nabla \cdot \delta\sigma + \delta\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (8.3)$$

On fait l'hypothèse que l'incrément physique δ est équivalent à l'incrément mathématique d :

$$\nabla \cdot d\sigma + d\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (8.4)$$

On suppose que l'incrément mathématique dx d'une variable d'état x est égal à la dérivée de x par rapport au temps :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t} dt \quad (8.5)$$

On note $dx = \dot{x}dt$. L'équation d'équilibre 8.4 s'écrit alors :

$$\nabla \cdot \dot{\sigma} + \dot{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \quad (8.6)$$

Par ailleurs, sous l'hypothèse 8.5, la loi de comportement incrémentale 8.1 prend la forme :

$$\dot{\sigma}''_{ij} = D_{edijkl}(\Omega_{pq}) \dot{\epsilon}_{lk} + F_s^{ed}{}_{ij}(\Omega_{pq}) \dot{p}_w - F_s^{ed}{}_{ij}(\Omega_{pq}) \dot{p}_a - F_T^{ed*}{}_{ij}(\Omega_{pq}) \dot{T} \quad (8.7)$$

D'après la définition de la contrainte nette 4.13, on peut réécrire l'équation 8.7 sous la forme :

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{edijkl}(\Omega_{pq}) \dot{\epsilon}_{lk} + F_s^{ed}{}_{ij}(\Omega_{pq}) \dot{p}_w + \left[\delta_{ij} - F_s^{ed}{}_{ij}(\Omega_{pq}) \right] \dot{p}_a - F_T^{ed*}{}_{ij}(\Omega_{pq}) \dot{T} \quad (8.8)$$

8.1.2 Equations relatives au constituant eau (eau liquide et vapeur)

D'après l'équation 6.12, la loi de transfert de l'eau liquide peut être exprimée sous la forme synthétique suivante :

$$\mathbf{V}_w = -\mathbf{D}_{T_w} \cdot \nabla T + \mathbf{D}_{P_w} \cdot \nabla s - \mathbf{K}_w \cdot \nabla z \quad (8.9)$$

D'après l'équation 7.23, la loi de transfert de la vapeur d'eau peut s'écrire :

$$\mathbf{V}_{vap}^* = \frac{\rho_{vap}}{\rho_w} \mathbf{V}_{vap} = -D_{T_{vap}} \nabla T + D_{P_{vap}} \nabla s \quad (8.10)$$

Les expressions des tenseurs $\mathbf{D}_{\mathbf{T}_w}$ et $\mathbf{D}_{\mathbf{P}_w}$ sont rappelées dans les équations 6.13. La décomposition de la perméabilité à l'eau liquide \mathbf{K}_w est résumée dans les équations 7.19 à 7.22. Les expressions des conductivités $D_{T_{vap}}$ et $D_{P_{vap}}$ sont explicitées dans les équations 7.23 et 7.24. Le flux du constituant eau au sein du VER endommagé (\mathbf{Q}_{wtot}) est défini par :

$$\mathbf{Q}_{wtot} = \mathbf{Q}_w + \mathbf{Q}_{vap} = \rho_w \mathbf{V}_w + \rho_{vap} \mathbf{V}_{vap} = \rho_w (\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_{vap}^*) \quad (8.11)$$

On peut exprimer le flux du constituant eau en fonction des gradients du déplacement vertical, de la succion et de la température :

$$\mathbf{Q}_{wtot} = \mathbf{Q}_w + \mathbf{Q}_{vap} = \rho_w (-\mathbf{D}_{\mathbf{T}} \cdot \nabla T + \mathbf{D}_{\mathbf{P}} \cdot \nabla s - \mathbf{K}_w \cdot \nabla z) \quad (8.12)$$

où :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{\mathbf{T}} = \mathbf{D}_{\mathbf{T}_w} + D_{T_{vap}} \delta \\ \mathbf{D}_{\mathbf{P}} = \mathbf{D}_{\mathbf{P}_w} + D_{P_{vap}} \delta \end{cases} \quad (8.13)$$

Comme c'est rappelé dans les travaux de Gatmiri et Jenab [68, 69, 102], l'équation de conservation de la masse totale du constituant eau (sous ses formes liquide et gazeuse) s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho_w (\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_{vap}^*)] = 0 \quad (8.14)$$

ρ_m est la masse volumique du constituant eau présent dans le VER, sous toutes ses formes (eau liquide et vapeur). ρ_m est aussi appelée « masse volumique de l'humidité » présente dans le VER (« *moisture mass density* »). Sous l'hypothèse 8.5, on peut réécrire l'équation de transfert 8.14 sous la forme :

$$\dot{\rho}_m + \nabla \cdot [\rho_w (\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_{vap}^*)] = 0 \quad (8.15)$$

Par définition :

$$\rho_m = \frac{\rho_w V_w + \rho_{vap} V_{vap}}{V_{VER}} = \rho_w \theta_w + \rho_{vap} \theta_{vap} \quad (8.16)$$

où θ_w et θ_{vap} sont les teneurs en eau liquide et en vapeur, respectivement. On suppose que la vapeur et l'air constituent un mélange gazeux parfait, si bien que le volume occupé par la vapeur dans les pores est le même que celui de l'air. Par suite :

$$\theta_{vap} = \theta_a = \frac{V_{vide} - V_w}{V_{VER}} = \frac{V_{vide}}{V_{VER}} \left(1 - \frac{V_w}{V_{vide}}\right) = n(1 - S_w) \quad (8.17)$$

Par ailleurs :

$$\theta_w = \frac{V_w}{V_{VER}} = \frac{V_{vide}}{V_{VER}} \frac{V_w}{V_{vide}} = n S_w \quad (8.18)$$

L'injection des équations 8.16, 8.17 et 8.18 dans l'équation de transfert 8.15 donne :

$$(\rho_w S_w + \rho_{vap}(1 - S_w)) \dot{n} + n (\rho_w - \rho_{vap}) \dot{S}_w + n S_w \dot{\rho}_w + n (1 - S_w) \dot{\rho}_{vap} + \nabla \cdot [\rho_w (\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_{vap}^*)] = 0 \quad (8.19)$$

La suite de l'exposé vise à exprimer \dot{n} , \dot{S}_w , $\dot{\rho}_w$ et $\dot{\rho}_{vap}$ en fonction des incréments de déformation, de succion et de température.

On rappelle que conformément à l'hypothèse d'incompressibilité des grains solides, et avec la convention de signe de la mécanique des sols, on a :

$$\dot{n} = -\dot{\epsilon}_v = -\delta_{ij} \epsilon_{ji} \quad (8.20)$$

Comme c'est écrit dans l'équation 7.20, la fonction de la surface d'état choisie pour le degré de saturation est :

$$S_w = \left[(1 - S_{w,r}) (1 + (\alpha|s|)^n)^{-(1-1/n)} + S_{w,r} \right] \exp(d_s (T - T_0)) \quad (8.21)$$

Par conséquent :

$$\dot{S}_w = g_2 \dot{s} + g_3 \dot{T} \quad (8.22)$$

où :

$$\begin{cases} g_2 = \frac{\partial S_w}{\partial s} = \text{sgn}(s) (1 - n) \alpha^n (1 - S_{w,r}) |s|^{n-1} (1 + (\alpha|s|)^n)^{-(2-1/n)} \exp(d_s (T - T_0)) \\ g_3 = \frac{\partial S_w}{\partial T} = d_s S_w = d_s \left[(1 - S_{w,r}) (1 + (\alpha|s|)^n)^{-(1-1/n)} + S_{w,r} \right] \exp(d_s (T - T_0)) \end{cases} \quad (8.23)$$

avec :

$$\begin{cases} \text{sgn}(s) = -1 & \text{si } s < 0 \\ \text{sgn}(s) = 0 & \text{si } s = 0 \\ \text{sgn}(s) = 1 & \text{si } s > 0 \end{cases} \quad (8.24)$$

Comme dans les précédents travaux de Gatmiri [68, 69, 102], on suppose que la masse volumique de l'eau liquide dépend de la pression interstitielle de l'eau liquide, et de la température. Ainsi :

$$\dot{\rho}_w = \beta_P \dot{p}_w + \beta_T \dot{T} \quad (8.25)$$

où :

$$\begin{cases} \beta_P = \frac{\partial \rho_w}{\partial p_w} \\ \beta_T = \frac{\partial \rho_w}{\partial T} \end{cases} \quad (8.26)$$

D'après les équations 6.62, 6.63 et 6.66 :

$$\rho_{vap} = \rho_{vap}^0(T) h(\theta_w, T) = \rho_{vap}^0(T) \exp\left(\frac{\Psi_w g}{R_{vap} T}\right) \quad (8.27)$$

On rappelle que selon la démonstration effectuée par Philip et de Vries [158] :

$$\frac{\partial h(\theta_w, T)}{\partial T} \simeq 0 \quad (8.28)$$

Par conséquent :

$$\dot{\rho}_{vap} = h(\theta_w, T) \frac{d\rho_{vap}^0(T)}{dT} \dot{T} + \rho_{vap}^0(T) \frac{\partial h(\theta_w, T)}{\partial \theta_w} \dot{\theta}_w \quad (8.29)$$

Comme $\theta_w = n S_w$, on peut réécrire l'équation 8.29 sous la forme :

$$\dot{\rho}_{vap} = \frac{\rho_{vap}}{\rho_{vap}^0(T)} \frac{d\rho_{vap}^0(T)}{dT} \dot{T} + \rho_{vap}^0(T) \frac{\partial h(\theta_w, T)}{\partial n} \dot{n} + \rho_{vap}^0(T) \frac{\partial h(\theta_w, T)}{\partial S_w} \dot{S}_w \quad (8.30)$$

En utilisant l'équation 6.3, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial h(\theta_w, T)}{\partial n} = \frac{g}{R_{vap} T} \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{ref})} \frac{d\Psi_R(\theta_w)}{d\theta_w} S_w h(\theta_w, T) \\ \frac{\partial h(\theta_w, T)}{\partial S_w} = \frac{g}{R_{vap} T} \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{ref})} \frac{d\Psi_R(\theta_w)}{d\theta_w} n h(\theta_w, T) \end{cases} \quad (8.31)$$

On déduit de l'équation 8.31 que :

$$\frac{1}{S_w} \frac{\partial h(\theta_w, T)}{\partial n} = \frac{1}{n} \frac{\partial h(\theta_w, T)}{\partial S_w} \quad (8.32)$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_w} \frac{\partial \rho_{vap}(\theta_w, T)}{\partial n} &= \frac{1}{S_w} \frac{\partial \rho_{vap}^0(T) h(\theta_w, T)}{\partial n} = \rho_{vap}^0(T) \frac{1}{S_w} \frac{\partial h(\theta_w, T)}{\partial n} \\ &= \rho_{vap}^0(T) \frac{1}{n} \frac{\partial h(\theta_w, T)}{\partial S_w} = \frac{1}{n} \frac{\partial \rho_{vap}^0(T) h(\theta_w, T)}{\partial S_w} = \frac{1}{n} \frac{\partial \rho_{vap}(\theta_w, T)}{\partial S_w} \end{aligned} \quad (8.33)$$

On pose :

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{S_w} \frac{\partial \rho_{vap}(\theta_w, T)}{\partial n} = \frac{1}{n} \frac{\partial \rho_{vap}(\theta_w, T)}{\partial S_w} \\ A_{\rho_0} = \frac{1}{\rho_{vap}^0(T)} \frac{d\rho_{vap}^0(T)}{dT} \end{cases} \quad (8.34)$$

D'après la définition 8.27, L'équation 8.30 peut s'écrire :

$$\dot{\rho}_{vap} = \frac{\rho_{vap}}{\rho_{vap}^0(T)} \frac{d\rho_{vap}^0(T)}{dT} \dot{T} + \frac{\partial \rho_{vap}(\theta_w, T)}{\partial n} \dot{n} + \frac{\partial \rho_{vap}(\theta_w, T)}{\partial S_w} \dot{S}_w \quad (8.35)$$

L'introduction des coefficients 8.34 dans l'équation 8.35 donne :

$$\dot{\rho}_{vap} = A_{\rho_0} \rho_{vap}(\theta_w, T) \dot{T} + A_n S_w \dot{n} + A_n n \dot{S}_w \quad (8.36)$$

D'après les équations 8.20 et 8.22 :

$$\dot{\rho}_{vap} = -A_n S_w \delta_{ij} \epsilon_{ji} + A_n n g_2 \dot{s} + (A_{\rho_0} \rho_{vap}(\theta_w, T) + A_n n g_3) \dot{T} \quad (8.37)$$

Il reste à trouver les expressions des coefficients A_{ρ_0} et A_n . D'après l'équation 6.66 :

$$\frac{d\rho_{vap}^0(T)}{dT} = \frac{4,9759}{(T + 273,15)^2} \exp\left(19,819 - \frac{4975,9}{T + 273,15}\right) = \frac{4975,9}{(T + 273,15)^2} \rho_{vap}^0(T) \quad (8.38)$$

D'après la définition 8.34 :

$$A_{\rho_0} = \frac{4975,9}{(T + 273,15)^2} \quad (8.39)$$

Par ailleurs, les équations 8.31, 8.33 et 8.34 permettent d'exprimer le coefficient A_n sous la forme :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n} \frac{\partial \rho_{vap}(\theta_w, T)}{\partial S_w} = \frac{1}{n} \rho_{vap}^0(T) \frac{\partial h(\theta_w, T)}{\partial S_w} = \rho_{vap}^0(T) \frac{g}{R_{vap} T} \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{ref})} \frac{\partial \Psi_R(\theta_w, T)}{\partial \theta_w} h(\theta_w, T) \\ &= \rho_{vap}(\theta_w, T) \frac{g}{R_{vap} T} \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{ref})} \frac{\partial \Psi_R(\theta_w)}{\partial \theta_w} \end{aligned} \quad (8.40)$$

D'après la définition 6.4 :

$$\Psi_R(\theta_w) = -\frac{1}{\gamma_w} s \quad (8.41)$$

La définition de la surface d'état du degré de saturation 7.20 permet de connaître les variations de la succion en fonction de la température et du degré de saturation :

$$|s| = \frac{1}{\alpha^{1/n}} \left[\left(\frac{S_w \exp(-d_s(T - T_0)) - S_{w,r}}{1 - S_{w,r}} \right)^{-\frac{n}{n-1}} - 1 \right]^{1/n} \quad (8.42)$$

Connaissant la relation 8.42, la combinaison des équations 8.40 et 8.41 donne :

$$A_n = -\frac{1}{n} \rho_{vap}(\theta_w, T) \frac{g}{\gamma_w R_{vap} T} \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{ref})} \frac{\partial s(S_w, T)}{\partial S_w} \quad (8.43)$$

La relation 8.42 permet de connaître la dérivée partielle de la succion par rapport au degré de saturation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial s(S_w, T)}{\partial S_w} &= \frac{sgn(s)}{(1-n)\alpha^{1/n}} \frac{\exp(-d_s(T - T_0))}{1 - S_{w,r}} \left(\frac{S_w \exp(-d_s(T - T_0)) - S_{w,r}}{1 - S_{w,r}} \right)^{-\frac{1}{n-1}} \\ &\times \left[\left(\frac{S_w \exp(-d_s(T - T_0)) - S_{w,r}}{1 - S_{w,r}} \right)^{-\frac{n}{n-1}} - 1 \right]^{\frac{1-n}{n}} \end{aligned} \quad (8.44)$$

La fonction sgn est définie dans l'équation 8.15. La combinaison des équations 8.43 et 8.44 permet de déduire l'expression finale du coefficient A_n :

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{1}{n} \rho_{vap}(\theta_w, T) \frac{g}{\gamma_w R_{vap} T} \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_{ref})} \frac{sgn(s)}{(1-n)\alpha^{1/n}} \frac{\exp(-d_s(T - T_0))}{1 - S_{w,r}} \\ &\times \left(\frac{S_w \exp(-d_s(T - T_0)) - S_{w,r}}{1 - S_{w,r}} \right)^{-\frac{1}{n-1}} \left[\left(\frac{S_w \exp(-d_s(T - T_0)) - S_{w,r}}{1 - S_{w,r}} \right)^{-\frac{n}{n-1}} - 1 \right]^{\frac{1-n}{n}} \end{aligned} \quad (8.45)$$

La combinaison des équations 8.19, 8.20, 8.22, 8.25 et 8.36 permet d'exprimer l'équation de conservation de la masse du constituant eau en fonction des incréments des déformations, des pressions interstitielles et de la température :

$$\begin{aligned}
& - [\rho_w S_w + \rho_{vap} (1 - S_w) + n A_n S_w (1 - S_w)] \delta_{ij} \epsilon_{ji} \\
& + [-n (\rho_w - \rho_{vap}) g_2 + n S_w \beta_P - n^2 A_n (1 - S_w) g_2] \dot{p}_w \\
& + [n (\rho_w - \rho_{vap}) g_2 + n^2 A_n (1 - S_w) g_2] \dot{p}_a \\
& + [n (\rho_w - \rho_{vap}) g_3 + n S_w \beta_T + n^2 A_n (1 - S_w) g_3 + n \rho_{vap} A_{\rho_0} (1 - S_w)] \dot{T} \\
& + \nabla \cdot [\rho_w (\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_{vap}^*)] = 0
\end{aligned} \tag{8.46}$$

8.1.3 Equations relatives au constituant air (gazeux et dissout)

On rappelle la loi de transfert diffusif adoptée pour calculer le flux d'air gazeux (équation 7.25) :

$$\mathbf{V}_a = -\frac{1}{\gamma_a} \frac{\partial p_a(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}))}{\partial T(\mathbf{x})} \mathbf{K}_a \cdot \nabla T(\mathbf{x}) - \mathbf{K}_a \cdot \nabla \left(\frac{p_a}{\gamma_a} \right) - \mathbf{K}_a \cdot \nabla z \tag{8.47}$$

En utilisant la notation $\mathbf{V}_{vap}^* = \frac{\rho_{vap}}{\rho_w} \mathbf{V}_{vap}$ (équation 6.82), l'équation de conservation de la masse du constituant air peut s'écrire [68] :

$$\frac{\partial}{\partial t} [n \rho_a (1 - S_w + H S_w)] + \nabla \cdot [\rho_a \mathbf{V}_a] + \nabla \cdot [\rho_a H \mathbf{V}_w] - \nabla \cdot [\rho_w \mathbf{V}_{vap}^*] = 0 \tag{8.48}$$

H est la constante de Henry et vaut 0,02. L'apparition de H dans l'équation 8.48 traduit la présence d'air dissout dans l'eau interstitielle. Dans l'espace poreux occupé par le mélange gazeux constitué d'air et de la vapeur, le flux de vapeur freine le flux d'air gazeux. C'est pourquoi la vitesse de la vapeur (\mathbf{V}_{vap}^*) intervient dans l'équation 8.48. En adoptant la convention 8.5, on peut réécrire l'équation 8.48 sous la forme :

$$\begin{aligned}
& (1 - S_w + H S_w) \rho_a \dot{n} + (H - 1) n \rho_a \dot{S}_w + n (1 - S_w + H S_w) \dot{\rho}_a \\
& + \nabla \cdot [\rho_a \mathbf{V}_a] + \nabla \cdot [\rho_a H \mathbf{V}_w] - \nabla \cdot [\rho_w \mathbf{V}_{vap}^*] = 0
\end{aligned} \tag{8.49}$$

\dot{n} et \dot{S}_w ont été exprimés en fonction des incréments de déformation, de succion et de température dans les équations 8.20 et 8.22 respectivement. On cherche à présent à développer l'expression de $\dot{\rho}_a$.

On fait l'hypothèse que l'air gazeux se comporte comme un gaz parfait. L'équation d'état correspondante est la suivante [87] :

$$(p_a + p_{atm}) V_a = n R (T + 273,15) \tag{8.50}$$

T désigne la température du milieu (en °C), p_{atm} est la pression atmosphérique (en Pa), V_a désigne le volume occupé par l'air gazeux, n est le nombre de moles d'air gazeux présentes dans les pores du VER, et R est la constante des gaz parfaits :

$$R = k_B N_A, \quad N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}, \quad R = 8,314 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \tag{8.51}$$

N_A est la constante d'Avogadro, qui correspond au nombre de molécules contenues dans une mole. Soit m_m la masse molaire de l'air. En masse, l'air est constitué à 80 pour cent d'azote, et à 20 pour cent d'oxygène. Ainsi :

$$m_m = 0,8 m_N + 0,2 m_O \quad (8.52)$$

D'après la classification périodique des éléments de Mendeleïv, $m_N = 7 g.mol^{-1}$ et $m_O = 16 g.mol^{-1}$, donc $m_m = 8,8.10^{-3} kg.mol^{-1}$. Si on écrit l'équation d'état 8.50 pour une mole d'air gazeux, on obtient :

$$(p_a + p_{atm}) \frac{m_m}{\rho_a} = R(T + 273,15) \quad (8.53)$$

D'où la relation :

$$\rho_a = \frac{p_a + p_{atm}}{R_a(T + 273,15)}, \quad R_a = \frac{R}{m_m}, \quad R_a = 9,448.10^2 J.K^{-1}.kg^{-1} \quad (8.54)$$

On déduit de l'équation 8.54 que :

$$\dot{\rho}_a = \alpha_P \dot{p}_a + \alpha_T \dot{T} \quad (8.55)$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha_P = \frac{1}{R_a T} \\ \alpha_T = -\frac{p_a + p_{atm}}{R_a (T + 273,15)^2} \end{cases} \quad (8.56)$$

La combinaison des équations 8.49, 8.20, 8.22 et 8.55 permet d'exprimer l'équation de conservation de la masse du constituant air en fonction des incréments des déformations, des pressions interstitielles et de la température :

$$\begin{aligned} & - (1 - S_w + HS_w) \rho_a \delta_{ij} \epsilon_{ji} \\ & - (H - 1) n \rho_a g_2 \dot{p}_w \\ & + [(H - 1) n \rho_a g_2 + n(1 - S_w + HS_w) \alpha_P] \dot{p}_a \\ & + [(H - 1) n \rho_a g_3 + n(1 - S_w + HS_w) \alpha_T] \dot{T} \\ & + \nabla \cdot [\rho_a \mathbf{V}_a] + \nabla \cdot [\rho_a H \mathbf{V}_w] - \nabla \cdot [\rho_w \mathbf{V}_{vap}^*] = 0 \end{aligned} \quad (8.57)$$

8.1.4 Equations relatives à la chaleur

On rappelle l'équation de transport de la chaleur dans le VER endommagé (équation 7.27) :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_T = -\lambda_T \nabla T + h_{fg} (\rho_w \mathbf{V}_{vap}^* + \rho_{vap} \mathbf{V}_a) \\ \quad + [\rho_w C_{Pw} \mathbf{V}_w + \rho_w C_{Pvap} \mathbf{V}_{vap}^* + \rho_a C_{Pa} \mathbf{V}_a] (T - T_0) \\ \lambda_T = (1 - n(\Omega_{pq})) \lambda_s + n(\Omega_{pq}) S_w \lambda_w + n(\Omega_{pq}) (1 - S_w) \lambda_{vap} \end{cases} \quad (8.58)$$

Comme c'est rappelé dans les travaux de Gatzmiri et Jenab [68, 69, 102], l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{Q}_T = 0 \quad (8.59)$$

où ϕ est l'énergie volumique reçue sous forme de chaleur par le VER, considéré comme un système ouvert. L'énergie calorifique du VER peut s'exprimer [68, 69, 102] :

$$\phi = C_T (T - T_0) + n (1 - S_w) \rho_{vap} h_{fg} \quad (8.60)$$

où la capacité thermique du milieu C_T peut être obtenue en pondérant les capacités thermiques des différents constituants du VER par les fractions massiques des phases correspondantes :

$$C_T = (1 - n) \rho_s C_{Ps} + n S_w \rho_w C_{Pw} + n (1 - S_w) \rho_{vap} C_{Pvap} + n (1 - S_w) \rho_a C_{Pa} \quad (8.61)$$

On adopte la convention 8.5. En injectant l'équation de transport de la chaleur 8.58 dans l'équation de conservation de l'énergie 8.59, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \dot{\phi} - \nabla \cdot [\lambda_T \nabla T] + h_{fg} \nabla \cdot [\rho_w \mathbf{V}_{vap}^* + \rho_{vap} \mathbf{V}_a] \\ + \nabla \cdot [(\rho_w C_{Pw} \mathbf{V}_w + \rho_w C_{Pvap} \mathbf{V}_{vap}^* + \rho_a C_{Pa} \mathbf{V}_a) (T - T_0)] = 0 \end{aligned} \quad (8.62)$$

Sachant que la masse volumique du squelette solide est supposée constante ($\dot{\rho}_s = 0$), l'injection des relations 8.60 et 8.61 dans l'équation 8.62 donne :

$$\begin{aligned} [\delta_n (T - T_0) + h_{fg} \rho_{vap} (1 - S_w) + h_{fg} n S_w (1 - S_w) A_n] \dot{n} \\ + [\delta_{S_w} (T - T_0) - h_{fg} \rho_{vap} n + h_{fg} n^2 (1 - S_w) A_n] \dot{S}_w \\ + [\delta_T (T - T_0) + C_T + h_{fg} \rho_{vap} n (1 - S_w) A_{\rho_0}] \dot{T} \\ + n S_w C_{Pw} (T - T_0) \dot{\rho}_w + n (1 - S_w) C_{Pa} (T - T_0) \dot{\rho}_a \\ - \nabla \cdot [\lambda_T \nabla T] + h_{fg} \nabla \cdot [\rho_w \mathbf{V}_{vap}^* + \rho_{vap} \mathbf{V}_a] \\ + \nabla \cdot [(\rho_w C_{Pw} \mathbf{V}_w + \rho_w C_{Pvap} \mathbf{V}_{vap}^* + \rho_a C_{Pa} \mathbf{V}_a) (T - T_0)] = 0 \end{aligned} \quad (8.63)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_n = -\rho_s C_{Ps} + \rho_a (1 - S_w) C_{Pa} \\ \quad + \rho_w S_w C_{Pw} + \rho_{vap} (1 - S_w) C_{Pvap} + n S_w (1 - S_w) C_{Pvap} A_n \\ \delta_{S_w} = n \rho_w C_{Pw} - n \rho_{vap} C_{Pvap} + n^2 (1 - S_w) C_{Pvap} A_n - n \rho_a C_{Pa} \\ \delta_T = n \rho_{vap} (1 - S_w) C_{Pvap} A_{\rho_0} \end{array} \right. \quad (8.64)$$

L'équation de conservation de l'énergie 8.63 s'écrit :

$$\begin{aligned} \chi_{\epsilon_v} \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{ji} + \chi_w \dot{p}_w + \chi_a \dot{p}_a + \chi_T \dot{T} \\ - \nabla \cdot [\lambda_T \nabla T] + h_{fg} \nabla \cdot [\rho_w \mathbf{V}_{vap}^* + \rho_{vap} \mathbf{V}_a] \\ + \nabla \cdot [(\rho_w C_{Pw} \mathbf{V}_w + \rho_w C_{Pvap} \mathbf{V}_{vap}^* + \rho_a C_{Pa} \mathbf{V}_a) (T - T_0)] = 0 \end{aligned} \quad (8.65)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{\epsilon_v} = -[\delta_n (T - T_0) + h_{fg} \rho_{vap} (1 - S_w) + h_{fg} n S_w (1 - S_w) A_n] \\ \chi_w = -[\delta_{S_w} (T - T_0) - h_{fg} \rho_{vap} n + h_{fg} n^2 (1 - S_w) A_n] g_2 \\ \quad + n S_w C_{Pw} (T - T_0) \beta_P \\ \chi_a = [\delta_{S_w} (T - T_0) - h_{fg} \rho_{vap} n + h_{fg} n^2 (1 - S_w) A_n] g_2 \\ \quad + n (1 - S_w) C_{Pa} (T - T_0) \alpha_P \\ \chi_T = [\delta_{S_w} (T - T_0) - h_{fg} \rho_{vap} n + h_{fg} n^2 (1 - S_w) A_n] g_3 \\ \quad + \delta_T (T - T_0) + C_T + h_{fg} \rho_{vap} n (1 - S_w) A_{\rho_0} \\ \quad + n S_w C_{Pw} (T - T_0) \beta_T + n (1 - S_w) C_{Pa} (T - T_0) \alpha_T \end{array} \right. \quad (8.66)$$

8.2 Enoncé de la formulation forte

8.2.1 Synthèse des équations du problème

8.2.1.1 Squelette solide

La combinaison de l'équation d'équilibre 8.6 et de la loi de comportement incrémentale 8.8 donne :

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_{ed}(\Omega) : \dot{\epsilon} + \nabla \cdot \mathbf{F}_s^{ed}(\Omega) \dot{p}_w + \nabla \cdot [\delta - \mathbf{F}_s^{ed}(\Omega)] \dot{p}_a - \nabla \cdot \mathbf{F}_T^{ed*}(\Omega) \dot{T} + \dot{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \quad (8.67)$$

Les tenseurs $\mathbf{D}_{ed}(\Omega)$, $\mathbf{F}_s^{ed}(\Omega)$ et $\mathbf{F}_T^{ed}(\Omega)$ sont explicités dans les équations 7.11 à 7.16. On rappelle que \mathbf{f} est le champ de forces volumiques extérieures au système qui s'exerce sur le VER.

8.2.1.2 Eau (liquide et gazeuse)

D'après l'équation de conservation de la masse d'eau 8.46, la définition du flux du constituant eau 8.11 et la loi de transfert généralisée 8.12 :

$$\begin{aligned} & -[\rho_w S_w + \rho_{vap} (1 - S_w) + n A_n S_w (1 - S_w)] \delta_{ij} \epsilon_{ji} \\ & + [-n (\rho_w - \rho_{vap}) g_2 + n S_w \beta_P - n^2 A_n (1 - S_w) g_2] \dot{p}_w \\ & + [n (\rho_w - \rho_{vap}) g_2 + n^2 A_n (1 - S_w) g_2] \dot{p}_a \\ & + [n (\rho_w - \rho_{vap}) g_3 + n S_w \beta_T + n^2 A_n (1 - S_w) g_3 + n \rho_{vap} A_{\rho_0} (1 - S_w)] \dot{T} \\ & - \nabla \cdot [\rho_w \mathbf{K}_w \cdot \nabla z] \\ & - \nabla \cdot [\rho_w \mathbf{D}_P \cdot \nabla p_w] \\ & + \nabla \cdot [\rho_w \mathbf{D}_P \cdot \nabla p_a] \\ & - \nabla \cdot [\rho_w \mathbf{D}_T \cdot \nabla T] = 0 \end{aligned} \quad (8.68)$$

La décomposition de la perméabilité à l'eau liquide \mathbf{K}_w est résumée dans les équations 7.19 à 7.22. Les expressions des conductivités \mathbf{D}_P et \mathbf{D}_T sont données par les équations 8.13, 6.13, 7.23 et 7.24.

On rappelle que la dérivée du degré de saturation est exprimée (équation 8.22) :

$$\dot{S}_w = g_2 \dot{s} + g_3 \dot{T} \quad (8.69)$$

Les résultats des calculs des coefficients g_2 et g_3 sont donnés dans les équations 8.23.

On rappelle que d'après l'équation 8.25, la dérivée de la masse volumique de l'eau liquide s'écrit :

$$\dot{\rho}_w = \beta_P \dot{p}_w + \beta_T \dot{T} \quad (8.70)$$

Les expressions des coefficients β_P et β_T sont données dans les équations 8.26.

On rappelle enfin que la dérivée de la masse volumique de la vapeur est notée (équation 8.36) :

$$\dot{\rho}_{vap} = A_{\rho_0} \rho_{vap}(\theta_w, T) \dot{T} + A_n S_w \dot{n} + A_n n \dot{S}_w \quad (8.71)$$

Les coefficients A_{ρ_0} et A_n sont explicités dans les équations 8.39 et 8.45 respectivement.

8.2.1.3 Air (gazeux et dissout)

La combinaison de l'équation de conservation de la masse d'air 8.57 et des lois de transfert 8.9, 8.10 et 8.47 donne :

$$\begin{aligned} & - (1 - S_w + H S_w) \rho_a \delta_{ij} \epsilon'_{ji} \\ & - (H - 1) n \rho_a g_2 \dot{p}_w \\ & + [(H - 1) n \rho_a g_2 + n (1 - S_w + H S_w) \alpha_P] \dot{p}_a \\ & + [(H - 1) n \rho_a g_3 + n (1 - S_w + H S_w) \alpha_T] \dot{T} \\ & - \nabla \cdot [\rho_a (\mathbf{K}_a + H \mathbf{K}_w) \cdot \nabla z] \\ & - \nabla \cdot [\rho_a H \mathbf{D}_{Pw} \cdot \nabla p_w] + \rho_w \nabla \cdot [D_{Pvap} \nabla p_w] \\ & - \nabla \cdot \left[\rho_a \left(\mathbf{K}_a \cdot \nabla \left(\frac{1}{\gamma_a} p_a \right) - H \mathbf{D}_{Pw} \cdot \nabla p_a \right) \right] - \rho_w \nabla \cdot [D_{Pvap} \nabla p_a] \\ & - \nabla \cdot \left[\left(g \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a + H \rho_a \mathbf{D}_{Tw} \right) \cdot \nabla T \right] + \rho_w \nabla \cdot [D_{Tvap} \nabla T] = 0 \end{aligned} \quad (8.72)$$

La décomposition de la perméabilité à l'eau liquide \mathbf{K}_w est résumée dans les équations 7.19 à 7.22. L'expression de la perméabilité à l'air \mathbf{K}_a est rappelée dans l'équation 7.26. Les expressions des conductivités \mathbf{D}_{Pw} et \mathbf{D}_{Tw} sont données par les équations 6.13. Les conductivités D_{Pvap} et D_{Tvap} sont exprimées dans les équations 7.23 et 7.24. La dérivée partielle $\frac{\partial p_a}{\partial T}$ est calculée en supposant que l'air est un gaz parfait. Les coefficients g_2 et g_3 sont issus de la dérivation du degré de saturation (équations 8.22 et 8.23).

On rappelle que la dérivée de la masse volumique de l'air gazeux est exprimée (équation 8.55) :

$$\dot{\rho}_a = \alpha_P \dot{p}_a + \alpha_T \dot{T} \quad (8.73)$$

Les expressions des coefficients α_P et α_T sont données dans les équations 8.56.

8.2.1.4 Chaleur

En combinant le développement le plus général de l'équation de conservation de l'énergie (équation 8.65) avec les lois de transfert 8.9, 8.10 et 8.47, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \chi_{\epsilon_v} \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{ji} + \chi_w \dot{p}_w + \chi_a \dot{p}_a + \chi_T \dot{T} \\
& - \nabla \cdot [(T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{K}_w + \rho_a C_{Pa} \mathbf{K}_a) \cdot \nabla z] \\
& - h_{fg} \nabla \cdot [\rho_{vap} \mathbf{K}_a \cdot \nabla z] \\
& - \nabla \cdot [(T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{Pw} + \rho_w C_{Pvap} D_{Pvap} \delta) \cdot \nabla p_w] \\
& - h_{fg} \nabla \cdot [\rho_w D_{Pvap} \nabla p_w] \\
& + \nabla [(T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{Pw} + \rho_w C_{Pvap} D_{Pvap} \delta) \cdot \nabla p_a] \\
& - \nabla \cdot \left[(T - T_0) \rho_a C_{Pa} \mathbf{K}_a \cdot \nabla \left(\frac{1}{\gamma_a} p_a \right) \right] \\
& + h_{fg} \nabla \cdot [\rho_w D_{Pvap} \nabla p_a] - h_{fg} \nabla \cdot \left[\rho_{vap} \mathbf{K}_a \cdot \nabla \left(\frac{1}{\gamma_a} p_a \right) \right] \\
& - \nabla \cdot [(T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{Tw} + \rho_w C_{Pvap} D_{Tvap} \delta) \cdot \nabla T] \\
& - \nabla \cdot \left[(T - T_0) g C_{Pa} \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a \cdot \nabla T \right] - \nabla \cdot [\lambda_T \nabla T] \\
& - h_{fg} \nabla \cdot \left[\left(\rho_w D_{Tvap} \delta + \frac{\rho_{vap}}{\gamma_a} \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a \right) \cdot \nabla T \right] = 0
\end{aligned} \tag{8.74}$$

Les coefficients χ_{ϵ_v} , χ_w , χ_a et χ_T sont donnés dans les équations 8.66. On rappelle que les coefficients β_P et β_T qui apparaissent dans les expressions des coefficients χ_{ϵ_v} , χ_w , χ_a et χ_T sont issus de la dérivation de la masse volumique de l'eau liquide (équations 8.25 et 8.26). De même, les coefficients A_{ρ_0} et A_n sont issus de la dérivation de la masse volumique de la vapeur (équations 8.36, 8.39 et 8.45), et les coefficients α_P et α_T proviennent de la dérivation de la masse volumique de l'air gazeux (équations 8.55 et 8.56). On rappelle en outre que les coefficients g_2 et g_3 sont issus de la dérivation du degré de saturation (équations 8.22 et 8.23). La décomposition de la perméabilité à l'eau liquide \mathbf{K}_w est résumée dans les équations 7.19 à 7.22. L'expression de la perméabilité à l'air \mathbf{K}_a est rappelée dans l'équation 7.26. Les expressions des conductivités \mathbf{D}_{Pw} et \mathbf{D}_{Tw} sont données par les équations 6.13. Les conductivités D_{Pvap} et D_{Tvap} sont exprimées dans les équations 7.23 et 7.24. La dérivée partielle $\frac{\partial p_a}{\partial T}$ est calculée en supposant que l'air est un gaz parfait.

8.2.2 Conditions aux limites

Le domaine modélisé est noté Ω . C'est le domaine d'étude qui couvre le volume occupé par le VER. Contrairement à la variable d'endommagement, la notation est non tensorielle. La frontière du domaine est notée Γ . Pour chaque constituant du VER (respectivement le squelette solide, l'eau liquide et gazeuse, l'air gazeux et dissout, la chaleur), les conditions aux limites qui s'exercent sur Γ portent soit sur les variables d'état (respectivement les déplacements, la pression d'eau, la pression d'air et la température), soit sur les flux de ces variables (respectivement les contraintes (en Pa), le débit massique d'eau (en $kg.m^{-2}.s^{-1}$), le débit massique d'air (en $kg.m^{-2}.s^{-1}$) et le flux surfacique de chaleur (en $J.m^{-2}.s^{-1}$)). Dans le premier cas, il s'agit de conditions aux limites dites **essentiels** ou de **Dirichlet**, et dans le second, de conditions

aux limites dites *naturelles* ou de **Neumann**. Pour chaque constituant, la frontière soumise à des conditions aux limites essentielles Γ_x et la frontière soumise à des conditions aux limites naturelles Γ_{Q_x} forment une partition de Γ [102] :

$$\Gamma = \Gamma_x \cup \Gamma_{Q_x}, \quad \Gamma_x \cap \Gamma_{Q_x} = \emptyset \quad (8.75)$$

Dans ce qui suit, \mathbf{n} désigne le vecteur normal à la frontière étudiée.

• **Conditions aux limites pour le squelette solide :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \\ \forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \\ \Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma, \quad \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset \end{array} \right. \quad (8.76)$$

• **Conditions aux limites pour le constituant eau (eau liquide et vapeur) :** les débits imposés dépendent à la fois des flux d'eau liquide et de vapeur. Or la pression partielle de vapeur n'est pas un degré de liberté. Pour simplifier le problème, on suppose que la pression totale du fluide « eau » peut être approximée par la pression interstitielle de l'eau liquide : $p'_{w,tot} = p'_w + p'_{vap} \simeq p_w$. On a ainsi $\mathbf{Q}_{w,tot} \simeq \mathbf{Q}_w$. On peut alors travailler avec les mêmes partitions de Γ pour l'eau liquide et la vapeur, et imposer une unique condition de Dirichlet en pression d'eau liquide, et une unique condition de Neumann en débit d'eau (liquide et gazeuse) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{p_w}, \quad p'_w(\mathbf{x}, t) = \tilde{p}_w(\mathbf{x}, t) \\ \forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{Q_w}, \quad \rho_w (\mathbf{V}_w(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}_{vap}^*(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n} = \tilde{q}_w(\mathbf{x}, t) \\ \Gamma = \Gamma_{p_w} \cup \Gamma_{Q_w}, \quad \Gamma_{p_w} \cap \Gamma_{Q_w} = \emptyset \end{array} \right. \quad (8.77)$$

• **Conditions aux limites pour le constituant air (gazeux et dissout) :** les débits imposés dépendent non seulement du flux d'air gazeux, mais aussi du flux d'air dissout et du flux de vapeur d'eau. Les pressions partielles de l'air dissout dans l'eau liquide et de la vapeur dans l'air gazeux ne sont pas des degrés de liberté. De la même manière que pour le constituant eau, on simplifie le problème en supposant que la pression totale du constituant air est approximativement égale à la pression interstitielle du mélange gazeux (air et vapeur), elle-même approximativement égale à la pression partielle de l'air gazeux : $p'_{a,tot} = p'_g - p'_{vap} + p'_{a,dissout} \simeq p'_a + p'_{a,dissout} \simeq p'_a$. On peut ainsi considérer que $\mathbf{Q}_g \simeq \mathbf{Q}_a$. On peut alors travailler avec une unique partition de la frontière Γ , en imposant une condition de Dirichlet en pression d'air gazeux, et en imposant une condition de Neumann en débit d'air (gazeux et dissout) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{p_a}, \quad p'_a(\mathbf{x}, t) = \tilde{p}_a(\mathbf{x}, t) \\ \forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{Q_a}, \quad [\rho_a \mathbf{V}_a(\mathbf{x}, t) + \rho_a H \mathbf{V}_w(\mathbf{x}, t) - \rho_w \mathbf{V}_{vap}^*(\mathbf{x}, t)] \cdot \mathbf{n} = \tilde{q}_a(\mathbf{x}, t) \\ \Gamma = \Gamma_{p_a} \cup \Gamma_{Q_a}, \quad \Gamma_{p_a} \cap \Gamma_{Q_a} = \emptyset \end{array} \right. \quad (8.78)$$

• **Conditions aux limites pour la chaleur :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_T, \quad T'(\mathbf{x}, t) = \tilde{T}(\mathbf{x}, t) \\ \forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{Q_T}, \quad \mathbf{Q}_T(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \tilde{q}_h(\mathbf{x}, t) \\ \Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_{Q_T}, \quad \Gamma_T \cap \Gamma_{Q_T} = \emptyset \end{array} \right. \quad (8.79)$$

8.2.3 Conditions initiales

Comme c'est rappelé dans la thèse de Jenab [102], les conditions initiales doivent être déterminées expérimentalement. Dans Θ -Stock, on peut choisir un type de conditions initiales pour la simulation. Pour le degré de liberté mécanique, une option consiste à faire le calcul des contraintes à l'équilibre géostatique (*init=2*). Une deuxième possibilité consiste à supposer que le champ de contraintes initiales est égal aux contraintes liées au poids des couches de sol sus-jacentes, considérées comme des strates horizontales (*init=3*). Enfin, on peut imposer un champ de contraintes initial, en choisissant les valeurs des composantes du tenseur σ en chaque point de Gauss (*init=4*). Pour les pressions interstitielles, on choisit d'imposer des valeurs pour p'_w et p'_a aux noeuds souhaités. Si aucune valeur n'est entrée par l'utilisateur, les valeurs initiales de p'_w et p'_a sont calculées par inversion de la fonction d'état du degré de saturation (au besoin, la pression p'_a est initialisée à 0). La température initiale T'_0 fait partie des données matérielles que l'utilisateur doit entrer pour utiliser le programme Θ -Stock.

Sachant que le champ de température initial est supposé homogène, on adopte les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{u}'_0(\mathbf{x}) \\ \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad p'_w(\mathbf{x}, t = 0) = p'_{w_0}(\mathbf{x}) \\ \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad p'_a(\mathbf{x}, t = 0) = p'_{a_0}(\mathbf{x}) \\ \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad T'(\mathbf{x}, t = 0) = T'_0(\mathbf{x}) = T'_0 \end{array} \right. \quad (8.80)$$

8.2.4 Résumé de la formulation forte

La résolution du problème couplé THHMD consiste à trouver :

- les champs de déplacements $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ qui vérifient l'équation d'équilibre 8.6 et la loi de comportement incrémentale 8.8, sous les conditions aux limites 8.76 et les conditions initiales 8.80 ;
- les champs de pression d'eau liquide $p'_w(\mathbf{x}, t)$ qui vérifient l'équation de conservation de la masse du constituant eau 8.46 et la loi de transfert généralisée 8.12 sous les conditions aux limites 8.77 et les conditions initiales 8.80 ;
- les champs de pression d'air gazeux $p'_a(\mathbf{x}, t)$ qui vérifient l'équation de conservation de la masse du constituant air 8.57 et les lois de transfert 8.9, 8.10 et 8.47, sous les conditions aux limites 8.78 et les conditions initiales 8.80 ;

- les champs de température $T'(\mathbf{x}, t)$ qui vérifient l'équation de conservation de l'énergie 8.65 et les lois de transfert 8.9, 8.10 et 8.47, sous les conditions aux limites 8.79 et les conditions initiales 8.80.

CHAPITRE 9

Formulation variationnelle - PTV

On se ramène à la recherche des champs $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $p_w(\mathbf{x}, t)$, $p_a(\mathbf{x}, t)$ et $T(\mathbf{x}, t)$, correspondant aux champs $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$, $p'_w(\mathbf{x}, t)$, $p'_a(\mathbf{x}, t)$ et $T'(\mathbf{x}, t)$ de la partie précédente, dans un problème où toutes les conditions aux limites essentielles sont nulles. En utilisant le Principe des Puissances Virtuelles, on écrit ensuite la formulation variationnelle du problème.

En plus des équations du problème, des conditions aux limites et des conditions initiales, les champs $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $p_w(\mathbf{x}, t)$, $p_a(\mathbf{x}, t)$ et $T(\mathbf{x}, t)$ doivent satisfaire à des conditions de régularité suffisantes pour que la formulation variationnelle soit légitime. On rappelle que l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de carré intégrable dont les dérivées spatiales sont de carré intégrable [194]. Dans un espace à trois dimensions :

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega), \quad \forall i = 1, 3 \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (9.1)$$

avec $L^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable. Pour définir le carré d'une fonction, il est nécessaire de rappeler les définitions du produit scalaire et de la norme utilisés dans l'espace $H^1(\Omega)$. Soient deux fonctions scalaires f et g . Le produit scalaire dans $H^1(\Omega)$ est défini par :

$$((f, g))_{1,\Omega} = \int_{\Omega} fg \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla(f) \cdot \nabla(g) \, d\Omega \quad (9.2)$$

La norme sur $H^1(\Omega)$ est définie par :

$$\|f, g\|_{1,\Omega} = \sqrt{((f, g))_{1,\Omega}} \quad (9.3)$$

Les notions 9.2 et 9.3 peuvent ensuite être appliquées aux fonctions scalaires $p_w(\mathbf{x}, t)$, $p_a(\mathbf{x}, t)$ et $T(\mathbf{x}, t)$, ainsi qu'à chacune des composantes de la fonction tensorielle $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

9.1 Equation relative au champ de déplacements

9.1.1 Espace des champs de déplacements cinématiquement admissibles à zéro

On définit le champ de déplacements $\mathbf{u}^L(\mathbf{x}, t)$, qui vaut $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ sur la frontière Γ_u , et qui est nul sur le domaine $\Omega \setminus \Gamma_u$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t, \quad \mathbf{u}^L(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_u} = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \\ \forall t, \quad \mathbf{u}^L(\mathbf{x}, t)|_{\Omega \setminus \Gamma_u} = \mathbf{0} \\ (\Omega \setminus \Gamma_u) \cup \Gamma_u = \Omega, \quad (\Omega \setminus \Gamma_u) \cap \Gamma_u = \emptyset \end{array} \right. \quad (9.4)$$

On définit à présent le champ de déplacements $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ tel que :

$$\forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^L(\mathbf{x}, t) \quad (9.5)$$

Le champ $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ vérifie les conditions aux limites 8.76, si et seulement si le champ $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ vérifie les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u, & \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \\ \forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, & \sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \\ \Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma, & \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset \end{cases} \quad (9.6)$$

Le champ $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ vérifie les conditions initiales mentionnées dans l'équation 8.80, si et seulement si le champ $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ vérifie les conditions initiales suivantes :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{u}'_0(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^L(\mathbf{x}, t = 0) \quad (9.7)$$

Chercher le champ de déplacements $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ qui vérifie les équations 8.6 et 8.8 et qui satisfait aux conditions aux limites 8.76, avec les conditions initiales énoncées dans l'équation 8.80, revient à chercher le champ de déplacements $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, qui vérifie les équations 8.6 et 8.8 sous les conditions aux limites 9.6 et sous la condition initiale 9.7.

Dans un espace à trois dimensions, l'espace des déplacements cinématiquement admissibles à zéro est [194] :

$$V_u(\Omega) = \left\{ \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^3, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0} \right\} \quad (9.8)$$

9.1.2 PTV pour les déplacements

Pour obtenir la formulation faible de l'équation relative au constituant solide, on applique le Principe des Travaux Virtuels. On multiplie l'équation d'équilibre 8.6 par un champ de déplacements virtuel \mathbf{u}^* cinématiquement admissible, appartenant à $V_u(\Omega)$. Puis on intègre l'équation sur l'ensemble du domaine modélisé Ω :

$$\forall \mathbf{u}^* \in V_u(\Omega), \quad \int_{\Omega} (\nabla \cdot \dot{\sigma}) \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = 0 \quad (9.9)$$

On intègre par parties l'équation 9.9. Après application de la formule de Green-Stockes, on obtient :

$$\forall \mathbf{u}^* \in V_u(\Omega), \quad \int_{\Gamma} (\mathbf{n}^T \cdot \dot{\sigma}) \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma - \int_{\Omega} \dot{\sigma} : \nabla(\mathbf{u}^*) d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = 0 \quad (9.10)$$

On note ϵ^* la partie symétrique du gradient des déplacements virtuels $\nabla(\mathbf{u}^*)$. Le tenseur des contraintes σ étant symétrique, et les déplacements virtuels étant nuls sur la frontière Γ_u , l'équation 9.10 s'écrit :

$$\forall \mathbf{u}^* \in V_u(\Omega), \quad \int_{\Gamma_\sigma} (\dot{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma - \int_{\Omega} \dot{\sigma} : \epsilon^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = 0 \quad (9.11)$$

En prenant en compte les conditions aux limites 9.6 sur la frontière Γ_σ :

$$\forall \mathbf{u}^* \in V_u(\Omega), \quad \int_{\Omega} \dot{\sigma} : \epsilon^* d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (9.12)$$

On introduit à présent la loi de comportement incrémentale 8.8 dans l'équation 9.12 :

$$\begin{aligned}
& \forall \mathbf{u}^* \in V_u(\Omega), \quad \int_{\Omega} [\mathbf{D}_{\text{ed}}(\boldsymbol{\Omega}) : \dot{\epsilon}] : \epsilon^* d\Omega + \int_{\Omega} [\mathbf{F}_{\text{s}}^{\text{ed}}(\boldsymbol{\Omega}) \dot{p}_w] : \epsilon^* d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [(\delta - \mathbf{F}_{\text{s}}^{\text{ed}}(\boldsymbol{\Omega})) \dot{p}_a] : \epsilon^* d\Omega - \int_{\Omega} [\mathbf{F}_{\text{T}}^{\text{ed}*}(\boldsymbol{\Omega}) \dot{T}] : \epsilon^* d\Omega \\
& = \int_{\Omega} \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{9.13}$$

On peut transformer l'équation 9.13 en :

$$\begin{aligned}
& \forall \mathbf{u}^* \in V_u(\Omega), \quad \int_{\Omega} (\epsilon^*)^T : \mathbf{D}_{\text{ed}}(\boldsymbol{\Omega}) : \dot{\epsilon} d\Omega + \int_{\Omega} (\epsilon^*)^T : \mathbf{F}_{\text{s}}^{\text{ed}}(\boldsymbol{\Omega}) \dot{p}_w d\Omega \\
& + \int_{\Omega} (\epsilon^*)^T : (\delta - \mathbf{F}_{\text{s}}^{\text{ed}}(\boldsymbol{\Omega})) \dot{p}_a d\Omega - \int_{\Omega} (\epsilon^*)^T : \mathbf{F}_{\text{T}}^{\text{ed}*}(\boldsymbol{\Omega}) \dot{T} d\Omega \\
& = \int_{\Omega} (\mathbf{u}^*)^T \cdot \dot{\mathbf{f}} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\mathbf{u}^*)^T \cdot \dot{\mathbf{T}} d\Gamma
\end{aligned} \tag{9.14}$$

9.2 Equation relative au champ de pressions d'eau

9.2.1 Espace des champs de pressions d'eau cinématiquement admissibles à zéro

On définit le champ de pressions d'eau $p_w^L(\mathbf{x}, t)$, qui vaut $\tilde{p}_w(\mathbf{x}, t)$ sur la frontière Γ_{p_w} , et zéro sur le domaine $\Omega \setminus \Gamma_{p_w}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t, \quad p_w^L(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_{p_w}} = \tilde{p}_w(\mathbf{x}, t) \\ \forall t, \quad p_w^L(\mathbf{x}, t)|_{\Omega \setminus \Gamma_{p_w}} = 0 \\ (\Omega \setminus \Gamma_{p_w}) \cup \Gamma_{p_w} = \Omega, \quad (\Omega \setminus \Gamma_{p_w}) \cap \Gamma_{p_w} = \emptyset \end{array} \right. \tag{9.15}$$

On définit à présent le champ de pressions d'eau $p_w(\mathbf{x}, t)$ tel que :

$$\forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad p_w(\mathbf{x}, t) = p'_w(\mathbf{x}, t) - p_w^L(\mathbf{x}, t) \tag{9.16}$$

Le champ $p'_w(\mathbf{x}, t)$ vérifie les conditions aux limites 8.77, si et seulement si le champ $p_w(\mathbf{x}, t)$ vérifie les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{p_w}, \quad p_w(\mathbf{x}, t) = 0 \\ \forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{Q_w}, \quad \rho_w (\mathbf{V}_w(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}_{vap}^*(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n} = \tilde{q}_w(\mathbf{x}, t) \\ \Gamma = \Gamma_{p_w} \cup \Gamma_{Q_w}, \quad \Gamma_{p_w} \cap \Gamma_{Q_w} = \emptyset \end{array} \right. \tag{9.17}$$

Le champ $p'_w(\mathbf{x}, t)$ vérifie les conditions initiales mentionnées dans l'équation 8.80, si et seulement si le champ $p_w(\mathbf{x}, t)$ vérifie les conditions initiales suivantes :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad p_w(\mathbf{x}, t=0) = p'_{w0}(\mathbf{x}) - p_w^L(\mathbf{x}, t=0) \tag{9.18}$$

Chercher le champ de pressions d'eau $p'_w(\mathbf{x}, t)$ qui vérifie les équations 8.11 et 8.46 et qui satisfait aux conditions aux limites 8.77, avec les conditions initiales énoncées dans l'équation 8.80, revient à chercher le champ de pressions d'eau $p_w(\mathbf{x}, t)$, qui vérifie les équations 8.11 et 8.46 sous les conditions aux limites 9.17 et sous la condition initiale 9.18.

De même que pour les déplacements, on définit l'ensemble des champs de pressions d'eau cinématiquement admissibles à zéro :

$$V_w(\Omega) = \left\{ p_w, \quad p_w \in H^1(\Omega), \quad p_w|_{\Gamma_{p_w}} = 0 \right\} \quad (9.19)$$

9.2.2 PTV pour les pressions d'eau

Pour obtenir la formulation faible de l'équation relative au constituant eau, on applique le Principe des Travaux Virtuels. On multiplie l'équation de conservation de la masse d'eau 8.46 par un champ de pressions d'eau virtuel p_w^* cinématiquement admissible, appartenant à $V_w(\Omega)$. Puis on intègre l'équation sur l'ensemble du domaine modélisé Ω :

$$\begin{aligned} & \forall p_w^* \in V_w(\Omega), \\ & - \int_{\Omega} [\rho_w S_w + \rho_{vap}(1 - S_w) + n A_n S_w (1 - S_w)] \delta : \dot{\epsilon} p_w^* d\Omega \\ & + \int_{\Omega} [-n(\rho_w - \rho_{vap}) g_2 + n S_w \beta_P - n^2 A_n (1 - S_w) g_2] \dot{p}_w p_w^* d\Omega \\ & + \int_{\Omega} [n(\rho_w - \rho_{vap}) g_2 + n^2 A_n (1 - S_w) g_2] \dot{p}_a p_w^* d\Omega \\ & + \int_{\Omega} [n(\rho_w - \rho_{vap}) g_3 + n S_w \beta_T + n^2 A_n (1 - S_w) g_3 + n \rho_{vap} A_{\rho_0} (1 - S_w)] \dot{T} p_w^* d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \nabla \cdot [\rho_w (\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_{vap}^*)] p_w^* d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (9.20)$$

On intègre par parties le dernier terme de l'équation 9.20. Après application de la formule de Green-Stockes, on obtient :

$$\begin{aligned} & \forall p_w^* \in V_w(\Omega), \\ & - \int_{\Omega} [\rho_w S_w + \rho_{vap}(1 - S_w) + n A_n S_w (1 - S_w)] \delta : \dot{\epsilon} p_w^* d\Omega \\ & + \int_{\Omega} [-n(\rho_w - \rho_{vap}) g_2 + n S_w \beta_P - n^2 A_n (1 - S_w) g_2] \dot{p}_w p_w^* d\Omega \\ & + \int_{\Omega} [n(\rho_w - \rho_{vap}) g_2 + n^2 A_n (1 - S_w) g_2] \dot{p}_a p_w^* d\Omega \\ & + \int_{\Omega} [n(\rho_w - \rho_{vap}) g_3 + n S_w \beta_T + n^2 A_n (1 - S_w) g_3 + n \rho_{vap} A_{\rho_0} (1 - S_w)] \dot{T} p_w^* d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} \mathbf{n}^T \cdot [\rho_w (\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_{vap}^*)] p_w^* d\Gamma - \int_{\Omega} \rho_w (\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_{vap}^*) \cdot \nabla p_w^* d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (9.21)$$

D'après les conditions aux limites 9.17, les pressions d'eau virtuelles sont nulles sur la frontière

Γ_{p_w} , et le débit massique d'eau vaut \tilde{q}_w sur la frontière Γ_{Q_w} . Par conséquent, l'équation 9.21 devient :

$$\begin{aligned}
& \forall p_w^* \in V_w(\Omega), \\
& - \int_{\Omega} [\rho_w S_w + \rho_{vap}(1 - S_w) + n A_n S_w (1 - S_w)] \delta : \dot{\epsilon} p_w^* d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [-n(\rho_w - \rho_{vap}) g_2 + n S_w \beta_P - n^2 A_n (1 - S_w) g_2] \dot{p}_w p_w^* d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [n(\rho_w - \rho_{vap}) g_2 + n^2 A_n (1 - S_w) g_2] \dot{p}_a p_w^* d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [n(\rho_w - \rho_{vap}) g_3 + n S_w \beta_T + n^2 A_n (1 - S_w) g_3 + n \rho_{vap} A_{\rho_0} (1 - S_w)] \dot{T} p_w^* d\Omega \\
& = - \int_{\Gamma_{Q_w}} \tilde{q}_w p_w^* d\Gamma + \int_{\Omega} \rho_w (\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_{vap}^*) \cdot \nabla p_w^* d\Omega
\end{aligned} \tag{9.22}$$

On introduit à présent la loi de transfert généralisée 8.12 dans l'équation 9.22 :

$$\begin{aligned}
& \forall p_w^* \in V_w(\Omega), \\
& - \int_{\Omega} [\rho_w S_w + \rho_{vap}(1 - S_w) + n A_n S_w (1 - S_w)] \delta : \dot{\epsilon} p_w^* d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [-n(\rho_w - \rho_{vap}) g_2 + n S_w \beta_P - n^2 A_n (1 - S_w) g_2] \dot{p}_w p_w^* d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [n(\rho_w - \rho_{vap}) g_2 + n^2 A_n (1 - S_w) g_2] \dot{p}_a p_w^* d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [n(\rho_w - \rho_{vap}) g_3 + n S_w \beta_T + n^2 A_n (1 - S_w) g_3 + n \rho_{vap} A_{\rho_0} (1 - S_w)] \dot{T} p_w^* d\Omega \\
& = - \int_{\Omega} \rho_w (\mathbf{K}_w \cdot \nabla z) \cdot \nabla p_w^* d\Omega - \int_{\Omega} \rho_w (\mathbf{D}_P \cdot \nabla p_w) \cdot \nabla p_w^* d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \rho_w (\mathbf{D}_P \cdot \nabla p_a) \cdot \nabla p_w^* d\Omega - \int_{\Omega} \rho_w (\mathbf{D}_T \cdot \nabla T) \cdot \nabla p_w^* d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_{Q_w}} \tilde{q}_w p_w^* d\Gamma
\end{aligned} \tag{9.23}$$

On peut transformer l'équation 9.23 en :

$$\begin{aligned}
& \forall p_w^* \in V_w(\Omega), \\
& - \int_{\Omega} p_w^* [\rho_w S_w + \rho_{vap}(1 - S_w) + n A_n S_w (1 - S_w)] \delta : \dot{\epsilon} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} p_w^* [-n(\rho_w - \rho_{vap}) g_2 + n S_w \beta_P - n^2 A_n (1 - S_w) g_2] \dot{p}_w d\Omega \\
& + \int_{\Omega} p_w^* [n(\rho_w - \rho_{vap}) g_2 + n^2 A_n (1 - S_w) g_2] \dot{p}_a d\Omega \\
& + \int_{\Omega} p_w^* [n(\rho_w - \rho_{vap}) g_3 + n S_w \beta_T + n^2 A_n (1 - S_w) g_3 + n \rho_{vap} A_{\rho_0} (1 - S_w)] \dot{T} d\Omega \\
& = - \int_{\Omega} \rho_w (\nabla p_w^*)^T \cdot \mathbf{K}_w \cdot \nabla z d\Omega - \int_{\Omega} \rho_w (\nabla p_w^*)^T \cdot \mathbf{D}_P \cdot \nabla p_w d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \rho_w (\nabla p_w^*)^T \cdot \mathbf{D}_P \cdot \nabla p_a d\Omega - \int_{\Omega} \rho_w (\nabla p_w^*)^T \cdot \mathbf{D}_T \cdot \nabla T d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_{Q_w}} p_w^* \tilde{q}_w d\Gamma
\end{aligned} \tag{9.24}$$

9.3 Equation relative au champ de pressions d'air

9.3.1 Espace des champs de pressions d'air cinématiquement admissibles à zéro

On définit le champ de pressions d'air $p_a^L(\mathbf{x}, t)$, qui vaut $\tilde{p}_a(\mathbf{x}, t)$ sur la frontière Γ_{p_a} , et zéro sur le domaine $\Omega \setminus \Gamma_{p_a}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t, \quad p_a^L(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_{p_a}} = \tilde{p}_a(\mathbf{x}, t) \\ \forall t, \quad p_a^L(\mathbf{x}, t)|_{\Omega \setminus \Gamma_{p_a}} = 0 \\ (\Omega \setminus \Gamma_{p_a}) \cup \Gamma_{p_a} = \Omega, \quad (\Omega \setminus \Gamma_{p_a}) \cap \Gamma_{p_a} = \emptyset \end{array} \right. \tag{9.25}$$

On définit à présent le champ de pressions d'air $p_a(\mathbf{x}, t)$ tel que :

$$\forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad p_a(\mathbf{x}, t) = p_a'(\mathbf{x}, t) - p_a^L(\mathbf{x}, t) \tag{9.26}$$

Le champ $p_a'(\mathbf{x}, t)$ vérifie les conditions aux limites 8.78, si et seulement si le champ $p_a(\mathbf{x}, t)$ vérifie les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{p_a}, \quad p_a(\mathbf{x}, t) = 0 \\ \forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{Q_a}, \quad [\rho_a \mathbf{V}_a(\mathbf{x}, t) + \rho_a H \mathbf{V}_w(\mathbf{x}, t) - \rho_w \mathbf{V}_{vap}^*(\mathbf{x}, t)] \cdot \mathbf{n} = \tilde{q}_a(\mathbf{x}, t) \\ \Gamma = \Gamma_{p_a} \cup \Gamma_{Q_a}, \quad \Gamma_{p_a} \cap \Gamma_{Q_a} = \emptyset \end{array} \right. \tag{9.27}$$

Le champ $p_a'(\mathbf{x}, t)$ vérifie les conditions initiales mentionnées dans l'équation 8.80, si et seulement

si le champ $p_a(\mathbf{x}, t)$ vérifie les conditions initiales suivantes :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad p_a(\mathbf{x}, t = 0) = p'_{a0}(\mathbf{x}) - p_a^L(\mathbf{x}, t = 0) \quad (9.28)$$

Chercher le champ de pressions d'air $p'_a(\mathbf{x}, t)$ qui vérifie les équations 8.9, 8.10, 8.47 et 8.57, et qui satisfait aux conditions aux limites 8.78, avec les conditions initiales énoncées dans l'équation 8.80, revient à chercher le champ de pressions d'air $p_a(\mathbf{x}, t)$, qui vérifie les équations 8.9, 8.10, 8.47 et 8.57 sous les conditions aux limites 9.27 et sous la condition initiale 9.28.

On définit l'ensemble des champs de pression d'air cinématiquement admissibles à zéro :

$$V_a(\Omega) = \left\{ p_a, \quad p_a \in H^1(\Omega), \quad p_a|_{\Gamma_{p_a}} = 0 \right\} \quad (9.29)$$

9.3.2 PTV pour les pressions d'air

Pour obtenir la formulation faible de l'équation relative au constituant air, on applique le Principe des Travaux Virtuels. On multiplie l'équation de conservation de la masse d'air 8.57 par un champ de pressions d'air virtuel p_a^* cinématiquement admissible, appartenant à $V_a(\Omega)$. Puis on intègre l'équation sur l'ensemble du domaine modélisé Ω :

$$\begin{aligned} & \forall p_a^* \in V_a(\Omega), \\ & - \int_{\Omega} (1 - S_w + HS_w)\rho_a \delta : \dot{\epsilon} p_a^* d\Omega \\ & - \int_{\Omega} (H - 1)n\rho_a g_2 \dot{p}_w p_a^* d\Omega \\ & + \int_{\Omega} [(H - 1)n\rho_a g_2 + n(1 - S_w + HS_w)\alpha_P] \dot{p}_a p_a^* d\Omega \\ & + \int_{\Omega} [(H - 1)n\rho_a g_3 + n(1 - S_w + HS_w)\alpha_T] \dot{T} p_a^* d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \nabla \cdot [\rho_a \mathbf{V}_a] p_a^* d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot [H\rho_a \mathbf{V}_w] p_a^* d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot [\rho_w \mathbf{V}_{vap}^*] p_a^* d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (9.30)$$

On intègre par parties les trois derniers termes de l'équation 9.30. Après application de la formule de Green-Stockes, on obtient :

$$\begin{aligned} & \forall p_a^* \in V_a(\Omega), \\ & - \int_{\Omega} (1 - S_w + HS_w)\rho_a \delta : \dot{\epsilon} p_a^* d\Omega \\ & - \int_{\Omega} (H - 1)n\rho_a g_2 \dot{p}_w p_a^* d\Omega \\ & + \int_{\Omega} [(H - 1)n\rho_a g_2 + n(1 - S_w + HS_w)\alpha_P] \dot{p}_a p_a^* d\Omega \\ & + \int_{\Omega} [(H - 1)n\rho_a g_3 + n(1 - S_w + HS_w)\alpha_T] \dot{T} p_a^* d\Omega \\ & = - \int_{\Gamma} \mathbf{n}^T \cdot [\rho_a \mathbf{V}_a + H\rho_a \mathbf{V}_w - \rho_w \mathbf{V}_{vap}^*] p_a^* d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} [\rho_a \mathbf{V}_a + H\rho_a \mathbf{V}_w - \rho_w \mathbf{V}_{vap}^*] \cdot \nabla p_a^* d\Omega \end{aligned} \quad (9.31)$$

D'après les conditions aux limites 9.27, les pressions d'air virtuelles sont nulles sur la frontière Γ_{p_a} , et le débit massique d'air vaut \tilde{q}_a sur la frontière Γ_{Q_a} . Par conséquent, l'équation 9.31 devient :

$$\begin{aligned}
& \forall p_a^* \in V_a(\Omega), \\
& - \int_{\Omega} (1 - S_w + HS_w) \rho_a \delta : \dot{\epsilon} p_a^* d\Omega \\
& - \int_{\Omega} (H - 1) n \rho_a g_2 \dot{p}_w p_a^* d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [(H - 1) n \rho_a g_2 + n(1 - S_w + HS_w) \alpha_P] \dot{p}_a p_a^* d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [(H - 1) n \rho_a g_3 + n(1 - S_w + HS_w) \alpha_T] \dot{T} p_a^* d\Omega \\
& = - \int_{\Gamma_{Q_a}} \tilde{q}_a p_a^* d\Gamma \\
& + \int_{\Omega} [\rho_a \mathbf{V}_a + H \rho_a \mathbf{V}_w - \rho_w \mathbf{V}_{vap}^*] \cdot \nabla p_a^* d\Omega
\end{aligned} \tag{9.32}$$

On injecte à présent les lois de transfert 8.9, 8.10 et 8.47 dans l'équation 9.32 :

$$\begin{aligned}
& \forall p_a^* \in V_a(\Omega), \\
& - \int_{\Omega} (1 - S_w + HS_w) \rho_a \delta : \dot{\epsilon} p_a^* d\Omega \\
& - \int_{\Omega} (H - 1) n \rho_a g_2 \dot{p}_w p_a^* d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [(H - 1) n \rho_a g_2 + n(1 - S_w + HS_w) \alpha_P] \dot{p}_a p_a^* d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [(H - 1) n \rho_a g_3 + n(1 - S_w + HS_w) \alpha_T] \dot{T} p_a^* d\Omega \\
& = - \int_{\Gamma_{Q_a}} \tilde{q}_a p_a^* d\Gamma \\
& - \int_{\Omega} [\rho_a (\mathbf{K}_a + H \mathbf{K}_w) \cdot \nabla z] \cdot \nabla p_a^* d\Omega \\
& - \int_{\Omega} [(H \rho_a \mathbf{D}_{Pw} - \rho_w D_{Pvap} \delta) \cdot \nabla p_w] \cdot \nabla p_a^* d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [(-g \mathbf{K}_a + H \rho_a \mathbf{D}_{Pw} - \rho_w D_{Pvap} \delta) \cdot \nabla p_a] \cdot \nabla p_a^* d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[\left(g \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a + H \rho_a \mathbf{D}_{Tw} - \rho_w D_{Tvap} \delta \right) \cdot \nabla T \right] \cdot \nabla p_a^* d\Omega
\end{aligned} \tag{9.33}$$

En supposant que le poids volumique de l'air est homogène, on peut réécrire l'équation 9.33 sous

la forme :

$$\begin{aligned}
& \forall p_a^* \in V_a(\Omega), \\
& - \int_{\Omega} p_a^* (1 - S_w + HS_w) \rho_a \delta : \dot{\epsilon} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} p_a^* (H - 1) n \rho_a g_2 \dot{p}_w d\Omega \\
& + \int_{\Omega} p_a^* [(H - 1) n \rho_a g_2 + n(1 - S_w + HS_w) \alpha_P] \dot{p}_a d\Omega \\
& + \int_{\Omega} p_a^* [(H - 1) n \rho_a g_3 + n(1 - S_w + HS_w) \alpha_T] \dot{T} d\Omega \\
& = - \int_{\Omega} \rho_a (\nabla p_a^*)^T \cdot (\mathbf{K}_a + H \mathbf{K}_w) \cdot \nabla z d\Omega \\
& - \int_{\Omega} (\nabla p_a^*)^T \cdot (H \rho_a \mathbf{D}_{Pw} - \rho_w D_{Pvap} \delta) \cdot \nabla p_w d\Omega \\
& + \int_{\Omega} (\nabla p_a^*)^T \cdot (-g \mathbf{K}_a + H \rho_a \mathbf{D}_{Pw} - \rho_w D_{Pvap} \delta) \cdot \nabla p_a d\Omega \\
& - \int_{\Omega} (\nabla p_a^*)^T \cdot \left(g \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a + H \rho_a \mathbf{D}_{Tw} - \rho_w D_{Tvap} \delta \right) \cdot \nabla T d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_{Q_a}} p_a^* \tilde{q}_a d\Gamma
\end{aligned} \tag{9.34}$$

9.4 Equation relative au champ de températures

9.4.1 Espace des champs de températures cinématiquement admissibles à zéro

On définit le champ de températures $T^L(\mathbf{x}, t)$, qui vaut $\tilde{T}(\mathbf{x}, t)$ sur la frontière Γ_T , et zéro sur le domaine $\Omega \setminus \Gamma_T$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t, \quad T^L(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_T} = \tilde{T}(\mathbf{x}, t) \\ \forall t, \quad T^L(\mathbf{x}, t)|_{\Omega \setminus \Gamma_T} = 0 \\ (\Omega \setminus \Gamma_T) \cup \Gamma_T = \Omega, \quad (\Omega \setminus \Gamma_T) \cap \Gamma_T = \emptyset \end{array} \right. \tag{9.35}$$

On définit à présent le champ de températures $T(\mathbf{x}, t)$ tel que :

$$\forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad T(\mathbf{x}, t) = T'(\mathbf{x}, t) - T^L(\mathbf{x}, t) \tag{9.36}$$

Le champ $T'(\mathbf{x}, t)$ vérifie les conditions aux limites 8.79, si et seulement si le champ $T(\mathbf{x}, t)$ vérifie les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_T, \quad T(\mathbf{x}, t) = 0 \\ \forall t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{Q_T}, \quad \mathbf{Q}_T(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \tilde{q}_h(\mathbf{x}, t) \\ \Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_{Q_T}, \quad \Gamma_T \cap \Gamma_{Q_T} = \emptyset \end{array} \right. \tag{9.37}$$

Le champ $T'(\mathbf{x}, t)$ vérifie les conditions initiales mentionnées dans l'équation 8.80, si et seulement

si le champ $T(\mathbf{x}, t)$ vérifie les conditions initiales suivantes :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad T(\mathbf{x}, t = 0) = T_0' - T^L(\mathbf{x}, t = 0) \quad (9.38)$$

Chercher le champ de températures $T'(\mathbf{x}, t)$ qui vérifie les équations 8.65, 8.9, 8.10 et 8.47 et qui satisfait aux conditions aux limites 8.79, avec les conditions initiales énoncées dans l'équation 8.80, revient à chercher le champ de températures $T(\mathbf{x}, t)$, qui vérifie les équations 8.65, 8.9, 8.10 et 8.47 sous les conditions aux limites 9.37 et sous la condition initiale 9.38.

On définit l'ensemble des champs de températures cinématiquement admissibles à zéro :

$$V_T(\Omega) = \{T, \quad T \in H^1(\Omega), \quad T|_{\Gamma_T} = 0\} \quad (9.39)$$

9.4.2 PTV pour les températures

Pour obtenir la formulation faible de l'équation relative à la chaleur, on applique le Principe des Travaux Virtuels. On multiplie l'équation de conservation de l'énergie 8.65 par un champ de températures virtuel T^* cinématiquement admissible, appartenant à $V_T(\Omega)$. On utilise l'équation de transport du flux de chaleur 8.58 et on intègre l'équation sur l'ensemble du domaine modélisé Ω :

$$\begin{aligned} \forall T^* \in V_T(\Omega), \\ \int_{\Omega} \left(\chi_{\epsilon_v} \delta : \dot{\epsilon} + \chi_w \dot{p}_w + \chi_a \dot{p}_a + \chi_T \dot{T} \right) T^* d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{Q}_T T^* d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (9.40)$$

On intègre par parties le dernier terme de l'équation 9.40. Après application de la formule de Green-Stockes, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall T^* \in V_T(\Omega), \\ \int_{\Omega} \left(\chi_{\epsilon_v} \delta : \dot{\epsilon} + \chi_w \dot{p}_w + \chi_a \dot{p}_a + \chi_T \dot{T} \right) T^* d\Omega \\ = - \int_{\Gamma} \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{Q}_T T^* d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{Q}_T \cdot \nabla T^* d\Omega \end{aligned} \quad (9.41)$$

D'après les conditions aux limites 9.37, les températures virtuelles sont nulles sur la frontière Γ_T , et le flux surfacique de chaleur vaut \tilde{q}_h sur la frontière Γ_{Q_T} . Par conséquent, l'équation 9.41 devient :

$$\begin{aligned} \forall T^* \in V_T(\Omega), \\ \int_{\Omega} \left(\chi_{\epsilon_v} \delta : \dot{\epsilon} + \chi_w \dot{p}_w + \chi_a \dot{p}_a + \chi_T \dot{T} \right) T^* d\Omega \\ = - \int_{\Gamma_{Q_T}} \tilde{q}_h T^* d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{Q}_T \cdot \nabla T^* d\Omega \end{aligned} \quad (9.42)$$

On injecte à présent l'expression du flux surfacique de chaleur 8.58 dans l'équation 9.42 :

$$\begin{aligned}
& \forall T^* \in V_T(\Omega), \\
& \int_{\Omega} \left(\chi_{\epsilon_v} \delta : \dot{\epsilon} + \chi_w \dot{p}_w + \chi_a \dot{p}_a + \chi_T \dot{T} \right) T^* d\Omega \\
& = - \int_{\Gamma_{Q_T}} \tilde{q}_h T^* d\Gamma \\
& + \int_{\Omega} (T - T_0) \left[\rho_w C_{Pw} \mathbf{V}_w + \rho_w C_{Pvap} \mathbf{V}_{vap}^* + \rho_a C_{Pa} \mathbf{V}_a \right] \cdot \nabla T^* d\Omega \\
& + \int_{\Omega} h_{fg} \left(\rho_w \mathbf{V}_{vap}^* + \rho_{vap} \mathbf{V}_a \right) \cdot \nabla T^* d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_T \nabla T \cdot \nabla T^* d\Omega
\end{aligned} \tag{9.43}$$

On injecte maintenant les lois de transfert 8.9, 8.10 et 8.47 dans l'équation 9.43 :

$$\begin{aligned}
& \forall T^* \in V_T(\Omega), \\
& \int_{\Omega} \left(\chi_{\epsilon_v} \delta : \dot{\epsilon} + \chi_w \dot{p}_w + \chi_a \dot{p}_a + \chi_T \dot{T} \right) T^* d\Omega \\
& = - \int_{\Gamma_{Q_T}} \tilde{q}_h T^* d\Gamma \\
& - \int_{\Omega} \left[((T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{K}_w + \rho_a C_{Pa} \mathbf{K}_a) + h_{fg} \rho_{vap} \mathbf{K}_a) \cdot \nabla z \right] \cdot \nabla T^* d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[((T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{Pw} + \rho_w C_{Pvap} D_{Pvap} \delta) + h_{fg} \rho_w D_{Pvap} \delta) \cdot \nabla p_w \right] \cdot \nabla T^* d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[(T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{Pw} + \rho_w C_{Pvap} D_{Pvap} \delta - g C_{Pa} \mathbf{K}_a) \cdot \nabla p_a \right] \cdot \nabla T^* d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[h_{fg} \left(\rho_w D_{Pvap} \delta - \frac{\rho_{vap}}{\gamma_a} \mathbf{K}_a \right) \cdot \nabla p_a \right] \cdot \nabla T^* d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[(T - T_0) \left(\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{Tw} + \rho_w C_{Pvap} D_{Tvap} \delta + g C_{Pa} \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a \right) \cdot \nabla T \right] \cdot \nabla T^* d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[\left(h_{fg} \left(\rho_w D_{Tvap} \delta + \frac{\rho_{vap}}{\gamma_a} \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a \right) + \lambda_T \delta \right) \cdot \nabla T \right] \cdot \nabla T^* d\Omega
\end{aligned} \tag{9.44}$$

En supposant que le poids volumique de l'air est homogène, on peut réécrire l'équation 9.44 sous

la forme :

$$\begin{aligned}
& \forall T^* \in V_T(\Omega), \\
& \int_{\Omega} T^* \left(\chi_{\epsilon_v} \delta : \dot{\epsilon} + \chi_w \dot{p}_w + \chi_a \dot{p}_a + \chi_T \dot{T} \right) d\Omega = \\
& - \int_{\Omega} (\nabla T^*)^T \cdot ((T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{K}_w + \rho_a C_{Pa} \mathbf{K}_a) + h_{fg} \rho_{vap} \mathbf{K}_a) \cdot \nabla z d\Omega \\
& - \int_{\Omega} (\nabla T^*)^T \cdot ((T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{Pw} + \rho_w C_{Pvap} D_{Pvap} \delta) + h_{fg} \rho_w D_{Pvap} \delta) \cdot \nabla p_w d\Omega \\
& + \int_{\Omega} (T - T_0) (\nabla T^*)^T \cdot (\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{Pw} + \rho_w C_{Pvap} D_{Pvap} \delta - g C_{Pa} \mathbf{K}_a) \cdot \nabla p_a d\Omega \\
& + \int_{\Omega} h_{fg} (\nabla T^*)^T \cdot \left(\rho_w D_{Pvap} \delta - \frac{\rho_{vap}}{\gamma_a} \mathbf{K}_a \right) \cdot \nabla p_a d\Omega \\
& - \int_{\Omega} (T - T_0) (\nabla T^*)^T \cdot \left(\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{Tw} + \rho_w C_{Pvap} D_{Tvap} \delta + g C_{Pa} \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a \right) \cdot \nabla T d\Omega \\
& - \int_{\Omega} (\nabla T^*)^T \cdot \left(h_{fg} \left(\rho_w D_{Tvap} \delta + \frac{\rho_{vap}}{\gamma_a} \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a \right) + \lambda_T \delta \right) \cdot \nabla T d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_{Q_T}} T^* \tilde{q}_h d\Gamma
\end{aligned} \tag{9.45}$$

9.5 Résumé de la formulation variationnelle

Dans sa formulation forte, le problème couplé traité avec le modèle THHMD revient à la recherche :

- des champs de déplacements $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in V_u(\Omega)$ qui vérifient l'équation intégrale 9.14 sous la condition initiale 9.7;
- les champs de pression d'eau liquide $p_w(\mathbf{x}, t) \in V_w(\Omega)$ qui vérifient l'équation intégrale 9.24 sous la condition initiale 9.18;
- les champs de pression d'air gazeux $p_a(\mathbf{x}, t) \in V_a(\Omega)$ qui vérifient l'équation intégrale 9.34 sous la condition initiale 9.28;
- les champs de température $T(\mathbf{x}, t) \in V_T(\Omega)$ qui vérifient l'équation intégrale 9.45 sous la condition initiale 9.38.

CHAPITRE 10

Discrétisation dans l'espace - méthode de Galerkin

Les équations d'équilibre qui interviennent dans un problème traité avec le modèle THHMD sont discrétisées dans l'espace à l'aide de la méthode de Galerkin, et dans le temps par la θ -méthode [120, 168].

Les éléments utilisés dans Θ -Stock comportent 4 noeuds et un Point d'Intégration. On suit la **méthode de Galerkin**, qui consiste à choisir les mêmes fonctions d'interpolation dans l'espace pour tous les degrés de liberté [102, 194]. En notant $\{N\}$ le vecteur des fonctions de forme en configuration axisymétrique (le principe est le même en déformations planes) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r(\mathbf{x}, t) = \{N\} \cdot \{u_r(t)\} \\ u_z(\mathbf{x}, t) = \{N\} \cdot \{u_z(t)\} \\ T(\mathbf{x}, t) = \{N\} \cdot \{T(t)\} \\ p_w(\mathbf{x}, t) = \{N\} \cdot \{p_w(t)\} \\ p_a(\mathbf{x}, t) = \{N\} \cdot \{p_a(t)\} \end{array} \right. \quad (10.1)$$

Pour des éléments à 4 noeuds :

$$\{ddl(t)\} = \left\{ \begin{array}{l} ddl_{nd1}(t) \\ ddl_{nd2}(t) \\ ddl_{nd3}(t) \\ ddl_{nd4}(t) \end{array} \right\}, \quad ddl(t) = u_r(t), u_z(t), T(t), p_w(t), p_a(t) \quad (10.2)$$

Comme il n'y a qu'un Point de Gauss, les fonctions d'interpolation spatiales sont linéaires. Dans l'espace bidimensionnel (s,t) :

$$\{N\} = \left\{ \begin{array}{l} (1-s)(1-t)/4 \\ (1+s)(1-t)/4 \\ (1+s)(1+t)/4 \\ (1-s)(1+t)/4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{array} \right\} \quad (10.3)$$

Dans le cadre des petites perturbations, le tenseur des déformations est défini comme la partie symétrique du gradient spatial des déplacements. Conformément à la représentation adoptée dans Θ -Stock, on note les tenseurs d'ordre 2 sous la forme de vecteurs. En configuration axisymétrique, ces vecteurs sont de longueur 4 et les composantes tensorielles stockées sont rr, zz, rz, $\theta\theta$ (dans cet ordre). En déformations planes, le principe est le même, avec des vecteurs de longueur 3, dont les composantes sont xx, yy et xy (dans cet ordre).

$$\{\epsilon(\mathbf{x}, t)\} = [\mathbf{B}] \cdot \{\mathbf{u}(t)\} \quad (10.4)$$

En configuration axisymétrique, pour des éléments à 4 noeuds :

$$\{\mathbf{u}(t)\} = \begin{Bmatrix} u_{r, nd1}(t) \\ u_{z, nd1}(t) \\ u_{r, nd2}(t) \\ u_{z, nd2}(t) \\ u_{r, nd3}(t) \\ u_{z, nd3}(t) \\ u_{r, nd4}(t) \\ u_{z, nd4}(t) \end{Bmatrix} \quad (10.5)$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial r} \\ \frac{N_1}{r^*} & 0 & \frac{N_2}{r^*} & 0 & \frac{N_3}{r^*} & 0 & \frac{N_4}{r^*} & 0 \end{bmatrix} \quad (10.6)$$

où r^* est le rayon de l'élément.

En déformations planes, pour des éléments à 4 noeuds :

$$\{\mathbf{u}(t)\} = \begin{Bmatrix} u_{x, nd1}(t) \\ u_{y, nd1}(t) \\ u_{x, nd2}(t) \\ u_{y, nd2}(t) \\ u_{x, nd3}(t) \\ u_{y, nd3}(t) \\ u_{x, nd4}(t) \\ u_{y, nd4}(t) \end{Bmatrix} \quad (10.7)$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (10.8)$$

Par ailleurs, on note :

$$\begin{cases} \{\nabla(T(\mathbf{x}, t))\} = [\nabla N] \{T(t)\} \\ \{\nabla(p_w(\mathbf{x}, t))\} = [\nabla N] \{p_w(t)\} \\ \{\nabla(p_a(\mathbf{x}, t))\} = [\nabla N] \{p_a(t)\} \end{cases} \quad (10.9)$$

Pour des éléments à 4 noeuds représentés en configuration axisymétrique :

$$[\nabla N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

En déformations planes :

$$[\nabla N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (10.11)$$

Par commodité, on note par la suite :

$$\{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\} = [\tilde{\mathbf{N}}] \{\mathbf{u}(t)\}, \quad (10.12)$$

$$[\tilde{\mathbf{N}}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

10.1 Equation relative aux déplacements

Considérons le domaine occupé par un élément du maillage : $\Omega_e \subset \Omega$. L'équation 9.14 est vraie pour tout champ de déplacements virtuel $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) \in V_u(\Omega)$, et en particulier pour un champ $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ qui prend des valeurs quelconques sur Ω_e et qui est nul sur $\Omega \setminus \Omega_e$. La suite de l'exposé vise à discrétiser dans l'espace la forme élémentaire de l'équation 9.14. On adoptera des notations matricielles. En particulier, les définitions 10.1, 10.4, 10.9 et 10.12 seront utilisées.

$$\forall \mathbf{u}^* \in V_u(\Omega),$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \{\mathbf{u}^*(t)\}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}_{\text{ed}}(\Omega_{pq})] [\mathbf{B}] \{\dot{\mathbf{u}}(t)\} d\Omega \\ & - \int_{\Omega_e} \{\mathbf{u}^*(t)\}^T [\mathbf{B}]^T \left[\left\{ \mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{\text{ed}*}(\Omega_{pq}) \right\} \otimes \{N\} \right] \{\dot{T}(t)\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} \{\mathbf{u}^*(t)\}^T [\mathbf{B}]^T \left[\left\{ \mathbf{F}_{\mathbf{s}}^{\text{ed}}(\Omega_{pq}) \right\} \otimes \{N\} \right] \{\dot{p}_w(t)\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} \{\mathbf{u}^*(t)\}^T [\mathbf{B}]^T \left[\left\{ \delta - \mathbf{F}_{\mathbf{s}}^{\text{ed}}(\Omega_{pq}) \right\} \otimes \{N\} \right] \{\dot{p}_a(t)\} d\Omega \\ & = \int_{\Omega_e} \{\mathbf{u}^*(t)\}^T [\tilde{\mathbf{N}}]^T \{\dot{\mathbf{f}}\} d\Omega + \int_{\Gamma_{e,\sigma}} \{\mathbf{u}^*(t)\}^T [\tilde{\mathbf{N}}]^T \{\dot{\mathbf{T}}\} d\Gamma \end{aligned} \quad (10.13)$$

L'égalité 10.13 étant vraie pour tout champ de déplacements virtuel $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) \in V_u(\Omega)$, l'équation intégrale élémentaire relative au champ de déplacements est donc discrétisée dans l'espace comme suit :

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}_{\text{ed}}(\Omega_{pq})] [\mathbf{B}] d\Omega \right] \{\dot{\mathbf{u}}(t)\} \\ & + \left[- \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T \left[\left\{ \mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{\text{ed}*}(\Omega_{pq}) \right\} \otimes \{N\} \right] d\Omega \right] \{\dot{T}(t)\} \\ & + \left[\int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T \left[\left\{ \mathbf{F}_{\mathbf{s}}^{\text{ed}}(\Omega_{pq}) \right\} \otimes \{N\} \right] d\Omega \right] \{\dot{p}_w(t)\} \\ & + \left[\int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T \left[\left\{ \delta - \mathbf{F}_{\mathbf{s}}^{\text{ed}}(\Omega_{pq}) \right\} \otimes \{N\} \right] d\Omega \right] \{\dot{p}_a(t)\} \\ & = \int_{\Omega_e} [\tilde{\mathbf{N}}]^T \{\dot{\mathbf{f}}\} d\Omega + \int_{\Gamma_{e,\sigma}} [\tilde{\mathbf{N}}]^T \{\dot{\mathbf{T}}\} d\Gamma \end{aligned} \quad (10.14)$$

On peut écrire l'équation 10.14 sous forme matricielle :

$$[R_{uu}] \{\dot{\mathbf{u}}(t)\} + [R_{uT}] \{\dot{T}(t)\} + [R_{uw}] \{\dot{p}_w(t)\} + [R_{ua}] \{\dot{p}_a(t)\} = \{\dot{\mathbf{F}}_\sigma(t)\} \quad (10.15)$$

où :

$$[R_{uu}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}_{ed}(\Omega_{pq})] [\mathbf{B}] d\Omega \quad (10.16)$$

$$[R_{uT}] = - \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T \left[\left\{ \mathbf{F}_T^{\text{ed}*}(\Omega_{pq}) \right\} \otimes \{N\} \right] d\Omega \quad (10.17)$$

$$[R_{uw}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T \left[\left\{ \mathbf{F}_s^{\text{ed}}(\Omega_{pq}) \right\} \otimes \{N\} \right] d\Omega \quad (10.18)$$

$$[R_{ua}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T \left[\left\{ \delta - \mathbf{F}_s^{\text{ed}}(\Omega_{pq}) \right\} \otimes \{N\} \right] d\Omega \quad (10.19)$$

$$\{\dot{\mathbf{F}}_\sigma(t)\} = \int_{\Omega_e} [\tilde{\mathbf{N}}]^T \{\dot{\mathbf{f}}\} d\Omega + \int_{\Gamma_{e,\sigma}} [\tilde{\mathbf{N}}]^T \{\dot{\mathbf{T}}\} d\Gamma \quad (10.20)$$

10.2 Equation relative aux températures

L'équation 9.45 est vraie pour tout champ de températures virtuel $T^*(\mathbf{x}, t) \in V_T(\Omega)$, et en particulier pour un champ $T^*(\mathbf{x}, t)$ qui prend des valeurs quelconques sur Ω_e et qui est nul sur $\Omega \setminus \Omega_e$. De même que pour l'équation intégrale relative aux déplacements, on cherche à discrétiser dans l'espace la forme élémentaire de l'équation 9.45. On adoptera les mêmes conventions que précédemment pour les notations matricielles.

$$\forall T^* \in V_T(\Omega),$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \chi_{\epsilon_v} \{T^*(t)\}^T [\{N\}^T \otimes \{\delta\}] [\mathbf{B}] \{\dot{\mathbf{u}}(t)\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} \chi_T \{T^*(t)\}^T [\{N\}^T \otimes \{N\}] \{\dot{T}(t)\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} \chi_w \{T^*(t)\}^T [\{N\}^T \otimes \{N\}] \{\dot{p}_w(t)\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} \chi_a \{T^*(t)\}^T [\{N\}^T \otimes \{N\}] \{\dot{p}_a(t)\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} \{T^*(t)\}^T [\nabla N]^T \left[(T - T_0) \left(\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{Tw} + \rho_w C_{Pvap} D_{Tvap} \delta + g C_{Pa} \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a \right) \right] [\nabla N] \{T(t)\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} \{T^*(t)\}^T [\nabla N]^T \left[h_{fg} \left(\rho_w D_{Tvap} \delta + \frac{\rho_{vap}}{\gamma_a} \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a \right) + \lambda_T \delta \right] [\nabla N] \{T(t)\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} \{T^*(t)\}^T [\nabla N]^T \left[(T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{Pw} + \rho_w C_{Pvap} D_{Pvap} \delta) + h_{fg} \rho_w D_{Pvap} \delta \right] [\nabla N] \{p_w(t)\} d\Omega \\ & - \int_{\Omega_e} \{T^*(t)\}^T [\nabla N]^T \left[(T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{Pw} + \rho_w C_{Pvap} D_{Pvap} \delta - g C_{Pa} \mathbf{K}_a) \right] [\nabla N] \{p_a(t)\} d\Omega \\ & - \int_{\Omega_e} \{T^*(t)\}^T [\nabla N]^T \left[h_{fg} \left(\rho_w D_{Pvap} \delta - \frac{\rho_{vap}}{\gamma_a} \mathbf{K}_a \right) \right] [\nabla N] \{p_a(t)\} d\Omega \\ & = - \int_{\Omega_e} \{T^*(t)\}^T [\nabla N]^T \left[(T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{K}_w + \rho_a C_{Pa} \mathbf{K}_a) + h_{fg} \rho_{vap} \mathbf{K}_a \right] [\nabla N] \{e_z \cdot \mathbf{u}(t)\} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{e,\sigma_T}} \{T^*(t)\}^T \{N\}^T \tilde{q}_h d\Gamma \end{aligned} \quad (10.21)$$

L'égalité 10.21 étant vraie pour tout champ de températures virtuel $T^*(\mathbf{x}, t) \in V_T(\Omega)$, l'équation intégrale élémentaire relative au champ de températures est donc discrétisée dans l'espace comme suit :

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{\Omega_e} \chi_{\epsilon_v} [\{N\}^T \otimes \{\delta\}] [\mathbf{B}] d\Omega \right] \{\dot{\mathbf{u}}(t)\} \\
& + \left[\int_{\Omega_e} \chi_T [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \right] \{\dot{T}(t)\} \\
& + \left[\int_{\Omega_e} \chi_w [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \right] \{\dot{p}_w(t)\} \\
& + \left[\int_{\Omega_e} \chi_a [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \right] \{\dot{p}_a(t)\} \\
& + \left[\int_{\Omega_e} [\nabla N]^T \left[(T - T_0) \left(\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{\mathbf{T}w} + \rho_w C_{Pvap} D_{Tvap} \delta + g C_{Pa} \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a \right) \right] [\nabla N] d\Omega \right] \{T(t)\} \\
& + \left[\int_{\Omega_e} [\nabla N]^T \left[h_{fg} \left(\rho_w D_{Tvap} \delta + \frac{\rho_{vap}}{\gamma_a} \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a \right) + \lambda_T \delta \right] [\nabla N] d\Omega \right] \{T(t)\} \\
& + \left[\int_{\Omega_e} [\nabla N]^T \left[(T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{\mathbf{P}w} + \rho_w C_{Pvap} D_{Pvap} \delta) + h_{fg} \rho_w D_{Pvap} \delta \right] [\nabla N] d\Omega \right] \{p_w(t)\} \\
& + \left[- \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T \left[(T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{\mathbf{P}w} + \rho_w C_{Pvap} D_{Pvap} \delta - g C_{Pa} \mathbf{K}_a) \right] [\nabla N] d\Omega \right] \{p_a(t)\} \\
& + \left[- \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T \left[h_{fg} \left(\rho_w D_{Pvap} \delta - \frac{\rho_{vap}}{\gamma_a} \mathbf{K}_a \right) \right] [\nabla N] d\Omega \right] \{p_a(t)\} \\
& = - \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T \left[(T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{K}_w + \rho_a C_{Pa} \mathbf{K}_a) + h_{fg} \rho_{vap} \mathbf{K}_a \right] [\nabla N] \{e_z \cdot \mathbf{u}(t)\} d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_{e,QT}} \{N\}^T \tilde{q}_h d\Gamma
\end{aligned} \tag{10.22}$$

On peut écrire l'équation 10.22 sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}
& [C_{Tu}] \{\dot{\mathbf{u}}(t)\} + [C_{TT}] \{\dot{T}(t)\} + [C_{Tw}] \{\dot{p}_w(t)\} + [C_{Ta}] \{\dot{p}_a(t)\} \\
& + [K_{TT}] \{T(t)\} + [K_{Tw}] \{p_w(t)\} + [K_{Ta}] \{p_a(t)\} = \{F_T(t)\}
\end{aligned} \tag{10.23}$$

où :

$$[C_{Tu}] = \int_{\Omega_e} \chi_{\epsilon_v} [\{N\}^T \otimes \{\delta\}] [\mathbf{B}] d\Omega \tag{10.24}$$

$$[C_{TT}] = \int_{\Omega_e} \chi_T [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \tag{10.25}$$

$$[C_{Tw}] = \int_{\Omega_e} \chi_w [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \tag{10.26}$$

$$[C_{Ta}] = \int_{\Omega_e} \chi_a [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \tag{10.27}$$

$$\begin{aligned}
& [K_{TT}] = \\
& \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T \left[(T - T_0) \left(\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{\mathbf{T}w} + \rho_w C_{Pvap} D_{Tvap} \delta + g C_{Pa} \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a \right) \right] [\nabla N] d\Omega \\
& + \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T \left[h_{fg} \left(\rho_w D_{Tvap} \delta + \frac{\rho_{vap}}{\gamma_a} \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a \right) + \lambda_T \delta \right] [\nabla N] d\Omega
\end{aligned} \tag{10.28}$$

$$[K_{Tw}] = \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T [(T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{Pw} + \rho_w C_{Pvap} D_{Pvap} \delta) + h_{fg} \rho_w D_{Pvap} \delta] [\nabla N] d\Omega \quad (10.29)$$

$$\begin{aligned} [K_{Ta}] = & \\ & - \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T [(T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{D}_{Pw} + \rho_w C_{Pvap} D_{Pvap} \delta - g C_{Pa} \mathbf{K}_a)] [\nabla N] d\Omega \\ & - \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T \left[h_{fg} \left(\rho_w D_{Pvap} \delta - \frac{\rho_{vap}}{\gamma_a} \mathbf{K}_a \right) \right] [\nabla N] d\Omega \end{aligned} \quad (10.30)$$

$$\begin{aligned} \{F_T(t)\} = & \\ & - \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T [(T - T_0) (\rho_w C_{Pw} \mathbf{K}_w + \rho_a C_{Pa} \mathbf{K}_a) + h_{fg} \rho_{vap} \mathbf{K}_a] [\nabla N] \{e_z \cdot \mathbf{u}(t)\} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{e, Q_T}} \{N\}^T \tilde{q}_h d\Gamma \end{aligned} \quad (10.31)$$

10.3 Equation relative aux pressions d'eau

L'équation 9.24 est vraie pour tout champ de pressions d'eau virtuel $p_w^*(\mathbf{x}, t) \in V_w(\Omega)$, et en particulier pour un champ $p_w^*(\mathbf{x}, t)$ qui prend des valeurs quelconques sur Ω_e et qui est nul sur $\Omega \setminus \Omega_e$. Pour discrétiser dans l'espace la forme élémentaire de l'équation 9.24, on adoptera les mêmes conventions que précédemment pour les notations matricielles.

$$\begin{aligned} \forall p_w^* \in V_w(\Omega), & \\ & - \int_{\Omega_e} (\rho_w S_w + \rho_{vap} (1 - S_w) + n A_n S_w (1 - S_w)) \{p_w^*(t)\}^T [\{N\}^T \otimes \{\delta\}] [\mathbf{B}] \{\dot{\mathbf{u}}(t)\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} (n(\rho_w - \rho_{vap})g_3 + n S_w \beta_T + n^2 A_n (1 - S_w)g_3 + n \rho_{vap} A_{\rho_0} (1 - S_w)) \{p_w^*(t)\}^T [\{N\}^T \otimes \{N\}] \{\dot{T}(t)\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} (-n(\rho_w - \rho_{vap})g_2 + n S_w \beta_P - n^2 A_n (1 - S_w)g_2) \{p_w^*(t)\}^T [\{N\}^T \otimes \{N\}] \{\dot{p}_w(t)\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} (n(\rho_w - \rho_{vap})g_2 + n^2 A_n (1 - S_w)g_2) \{p_w^*(t)\}^T [\{N\}^T \otimes \{N\}] \{\dot{p}_a(t)\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} \{p_w^*(t)\}^T [\nabla N]^T [\rho_w \mathbf{D}_T] [\nabla N] \{T(t)\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} \{p_w^*(t)\}^T [\nabla N]^T [\rho_w \mathbf{D}_P] [\nabla N] \{p_w(t)\} d\Omega \\ & - \int_{\Omega_e} \{p_w^*(t)\}^T [\nabla N]^T [\rho_w \mathbf{D}_P] [\nabla N] \{p_a(t)\} d\Omega \\ & = - \int_{\Omega_e} \{p_w^*(t)\}^T [\nabla N]^T [\rho_w \mathbf{K}_w], [\nabla N] \{e_z \cdot \mathbf{u}(t)\} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{e, Q_w}} \{p_w^*(t)\}^T \{N\}^T \tilde{q}_w d\Gamma \end{aligned} \quad (10.32)$$

L'égalité 10.32 étant vraie pour tout champ de pressions d'eau virtuel $p_w^*(\mathbf{x}, t) \in V_w(\Omega)$, l'équation intégrale élémentaire relative au champ de pressions d'eau est donc discrétisée dans l'espace

comme suit :

$$\begin{aligned}
& \left[- \int_{\Omega_e} (\rho_w S_w + \rho_{vap} (1 - S_w) + n A_n S_w (1 - S_w)) [\{N\}^T \otimes \{\delta\}] [\mathbf{B}] d\Omega \right] \{\dot{\mathbf{u}}(t)\} \\
& + \left[\int_{\Omega_e} (n(\rho_w - \rho_{vap})g_3 + n S_w \beta_T + n^2 A_n (1 - S_w)g_3 + n \rho_{vap} A_{\rho_0} (1 - S_w)) [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \right] \{\dot{T}(t)\} \\
& + \left[\int_{\Omega_e} (-n(\rho_w - \rho_{vap})g_2 + n S_w \beta_P - n^2 A_n (1 - S_w)g_2) [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \right] \{\dot{p}_w(t)\} \\
& + \left[\int_{\Omega_e} (n(\rho_w - \rho_{vap})g_2 + n^2 A_n (1 - S_w)g_2) [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \right] \{\dot{p}_a(t)\} \\
& + \left[\int_{\Omega_e} [\nabla N]^T [\rho_w \mathbf{D}_T] [\nabla N] d\Omega \right] \{T(t)\} \\
& + \left[\int_{\Omega_e} [\nabla N]^T [\rho_w \mathbf{D}_P] [\nabla N] d\Omega \right] \{p_w(t)\} \\
& + \left[- \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T [\rho_w \mathbf{D}_P] [\nabla N] d\Omega \right] \{p_a(t)\} \\
& = - \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T [\rho_w \mathbf{K}_w], [\nabla N] \{e_z \cdot \mathbf{u}(t)\} d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_{e, Q_w}} \{N\}^T \tilde{q}_w d\Gamma
\end{aligned} \tag{10.33}$$

On peut écrire l'équation 10.33 sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}
& [C_{wu}] \{\dot{\mathbf{u}}(t)\} + [C_{wT}] \{\dot{T}(t)\} + [C_{ww}] \{\dot{p}_w(t)\} + [C_{wa}] \{\dot{p}_a(t)\} \\
& + [K_{wT}] \{T(t)\} + [K_{ww}] \{p_w(t)\} + [K_{wa}] \{p_a(t)\} = \{F_w(t)\}
\end{aligned} \tag{10.34}$$

où :

$$[C_{wu}] = - \int_{\Omega_e} (\rho_w S_w + \rho_{vap} (1 - S_w) + n A_n S_w (1 - S_w)) [\{N\}^T \otimes \{\delta\}] [\mathbf{B}] d\Omega \tag{10.35}$$

$$[C_{wT}] = \int_{\Omega_e} (n(\rho_w - \rho_{vap})g_3 + n S_w \beta_T + n^2 A_n (1 - S_w)g_3 + n \rho_{vap} A_{\rho_0} (1 - S_w)) [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \tag{10.36}$$

$$[C_{ww}] = \int_{\Omega_e} (-n(\rho_w - \rho_{vap})g_2 + n S_w \beta_P - n^2 A_n (1 - S_w)g_2) [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \tag{10.37}$$

$$[C_{wa}] = \int_{\Omega_e} (n(\rho_w - \rho_{vap})g_2 + n^2 A_n (1 - S_w)g_2) [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \tag{10.38}$$

$$[K_{wT}] = \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T [\rho_w \mathbf{D}_T] [\nabla N] d\Omega \tag{10.39}$$

$$[K_{ww}] = \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T [\rho_w \mathbf{D}_P] [\nabla N] d\Omega \tag{10.40}$$

$$[K_{wa}] = - \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T [\rho_w \mathbf{D}_P] [\nabla N] d\Omega \tag{10.41}$$

$$\{F_w(t)\} = - \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T [\rho_w \mathbf{K}_w] [\nabla N] \{e_z \cdot \mathbf{u}(t)\} d\Omega - \int_{\Gamma_{e, Q_w}} \{N\}^T \tilde{q}_w d\Gamma \tag{10.42}$$

10.4 Equation relative aux pressions d'air

L'équation 9.34 est vraie pour tout champ de pressions d'air virtuel $p_a^*(\mathbf{x}, t) \in V_a(\Omega)$, et en particulier pour un champ $p_a^*(\mathbf{x}, t)$ qui prend des valeurs quelconques sur Ω_e et qui est nul sur $\Omega \setminus \Omega_e$. Pour discrétiser dans l'espace la forme élémentaire de l'équation 9.34, on adoptera les mêmes conventions que précédemment pour les notations matricielles.

$$\begin{aligned}
& \forall p_a^* \in V_a(\Omega), \\
& - \int_{\Omega_e} (1 - S_w + HS_w) \rho_a \{p_a^*(t)\}^T [\{N\}^T \otimes \{\delta\}] [\mathbf{B}] \{\dot{\mathbf{u}}(t)\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega_e} [(H - 1)n\rho_a g_3 + n(1 - S_w + HS_w)\alpha_T] \{p_a^*(t)\}^T [\{N\}^T \otimes \{N\}] \{\dot{T}(t)\} d\Omega \\
& - \int_{\Omega_e} (H - 1)n\rho_a g_2 \{p_a^*(t)\}^T [\{N\}^T \otimes \{N\}] \{\dot{p}_w(t)\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega_e} [(H - 1)n\rho_a g_2 + n(1 - S_w + HS_w)\alpha_P] \{p_a^*(t)\}^T [\{N\}^T \otimes \{N\}] \{\dot{p}_a(t)\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega_e} \{p_a^*(t)\}^T [\nabla N]^T \left[g \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a + H \rho_a \mathbf{D}_{\mathbf{T}w} - \rho_w D_{Tvap} \delta \right] [\nabla N] \{T(t)\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega_e} \{p_a^*(t)\}^T [\nabla N]^T [H \rho_a \mathbf{D}_{\mathbf{P}w} - \rho_w D_{Pvap} \delta] [\nabla N] \{p_w(t)\} d\Omega \\
& - \int_{\Omega_e} \{p_a^*(t)\}^T [\nabla N]^T [-g \mathbf{K}_a + H \rho_a \mathbf{D}_{\mathbf{P}w} - \rho_w D_{Pvap} \delta] [\nabla N] \{p_a(t)\} d\Omega \\
& = - \int_{\Omega_e} \{p_a^*(t)\}^T [\nabla N]^T [\rho_a (\mathbf{K}_a + H\mathbf{K}_w)] [\nabla N] \{e_z \cdot \mathbf{u}(t)\} d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_{e,Q_a}} \{p_a^*(t)\}^T \{N\}^T \tilde{q}_a d\Gamma
\end{aligned} \tag{10.43}$$

L'égalité 10.43 étant vraie pour tout champ de pressions d'air virtuel $p_a^*(\mathbf{x}, t) \in V_a(\Omega)$, l'équation intégrale élémentaire relative au champ de pressions d'air est donc discrétisée dans l'espace comme

suit :

$$\begin{aligned}
& \left[- \int_{\Omega_e} (1 - S_w + HS_w) \rho_a [\{N\}^T \otimes \{\delta\}] [\mathbf{B}] d\Omega \right] \{\dot{\mathbf{u}}(t)\} \\
& + \left[\int_{\Omega_e} [(H - 1)n\rho_a g_3 + n(1 - S_w + HS_w)\alpha_T] [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \right] \{\dot{T}(t)\} \\
& + \left[- \int_{\Omega_e} (H - 1)n\rho_a g_2 [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \right] \{\dot{p}_w(t)\} \\
& + \left[\int_{\Omega_e} [(H - 1)n\rho_a g_2 + n(1 - S_w + HS_w)\alpha_P] [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \right] \{\dot{p}_a(t)\} \\
& + \left[\int_{\Omega_e} [\nabla N]^T \left[g \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a + H \rho_a \mathbf{D}_{T\mathbf{w}} - \rho_w D_{T\text{vap}} \delta \right] [\nabla N] d\Omega \right] \{T(t)\} \\
& + \left[\int_{\Omega_e} [\nabla N]^T [H \rho_a \mathbf{D}_{P\mathbf{w}} - \rho_w D_{P\text{vap}} \delta] [\nabla N] d\Omega \right] \{p_w(t)\} \\
& + \left[- \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T [-g \mathbf{K}_a + H \rho_a \mathbf{D}_{P\mathbf{w}} - \rho_w D_{P\text{vap}} \delta] [\nabla N] d\Omega \right] \{p_a(t)\} \\
& = - \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T [\rho_a (\mathbf{K}_a + H\mathbf{K}_w)] [\nabla N] \{e_z \cdot \mathbf{u}(t)\} d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_e, Q_a} \{N\}^T \tilde{q}_a d\Gamma
\end{aligned} \tag{10.44}$$

On peut écrire l'équation 10.44 sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}
& [C_{au}] \{\dot{\mathbf{u}}(t)\} + [C_{aT}] \{\dot{T}(t)\} + [C_{aw}] \{\dot{p}_w(t)\} + [C_{aa}] \{\dot{p}_a(t)\} \\
& + [K_{aT}] \{T(t)\} + [K_{aw}] \{p_w(t)\} + [K_{aa}] \{p_a(t)\} = \{F_a(t)\}
\end{aligned} \tag{10.45}$$

où :

$$[C_{au}] = - \int_{\Omega_e} (1 - S_w + HS_w) \rho_a [\{N\}^T \otimes \{\delta\}] [\mathbf{B}] d\Omega \tag{10.46}$$

$$[C_{aT}] = \int_{\Omega_e} [(H - 1)n\rho_a g_3 + n(1 - S_w + HS_w)\alpha_T] [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \tag{10.47}$$

$$[C_{aw}] = - \int_{\Omega_e} (H - 1)n\rho_a g_2 [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \tag{10.48}$$

$$[C_{aa}] = \int_{\Omega_e} [(H - 1)n\rho_a g_2 + n(1 - S_w + HS_w)\alpha_P] [\{N\}^T \otimes \{N\}] d\Omega \tag{10.49}$$

$$[K_{aT}] = \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T \left[g \frac{\partial p_a}{\partial T} \mathbf{K}_a + H \rho_a \mathbf{D}_{T\mathbf{w}} - \rho_w D_{T\text{vap}} \delta \right] [\nabla N] d\Omega \tag{10.50}$$

$$[K_{aw}] = \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T [H \rho_a \mathbf{D}_{P\mathbf{w}} - \rho_w D_{P\text{vap}} \delta] [\nabla N] d\Omega \tag{10.51}$$

$$[K_{aa}] = - \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T [-g \mathbf{K}_a + H \rho_a \mathbf{D}_{P\mathbf{w}} - \rho_w D_{P\text{vap}} \delta] [\nabla N] d\Omega \tag{10.52}$$

$$\begin{aligned}
\{F_a(t)\} = & - \int_{\Omega_e} [\nabla N]^T [\rho_a (\mathbf{K}_a + H\mathbf{K}_w)] [\nabla N] \{e_z \cdot \mathbf{u}(t)\} d\Omega - \int_{\Gamma_e, Q_a} \{N\}^T \tilde{q}_a d\Gamma \\
& \tag{10.53}
\end{aligned}$$

CHAPITRE 11

Discrétisation dans le temps - θ -méthode

On suppose que la variation temporelle des inconnues est linéaire sur un pas de temps. Autrement dit, pour $t' \in [t_n; t_{n+1}]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{u}(t')\} = \{\mathbf{u}(t_n)\} + \frac{t'-t_n}{t_{n+1}-t_n} (\{\mathbf{u}(t'_{n+1})\} - \{\mathbf{u}(t_n)\}) \\ \{T(t')\} = \{T(t_n)\} + \frac{t'-t_n}{t_{n+1}-t_n} (\{T(t'_{n+1})\} - \{T(t_n)\}) \\ \{p_w(t')\} = \{p_w(t_n)\} + \frac{t'-t_n}{t_{n+1}-t_n} (\{p_w(t_{n+1})\} - \{p_w(t_n)\}) \\ \{p_a(t')\} = \{p_a(t_n)\} + \frac{t'-t_n}{t_{n+1}-t_n} (\{p_a(t_{n+1})\} - \{p_a(t_n)\}) \end{array} \right. \quad (11.1)$$

On pose :

$$\theta = \frac{t' - t_n}{t_{n+1} - t_n}, \quad \theta \in [0; 1] \quad (11.2)$$

La dérivation de θ par rapport au temps donne :

$$\frac{d\theta}{dt'} = \dot{\theta} = \frac{1}{\Delta_n t} \quad (11.3)$$

où $\Delta_n t = t_{n+1} - t_n$. En utilisant la définition 11.2, on peut réécrire les équations 11.1 sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{u}(t')\} = \{\mathbf{u}(t_n)\} + \theta (\{\mathbf{u}(t'_{n+1})\} - \{\mathbf{u}(t_n)\}) = \{\mathbf{u}(t_n)\} + \theta \Delta_n \{\mathbf{u}\} \\ \{T(t')\} = \{T(t_n)\} + \theta (\{T(t'_{n+1})\} - \{T(t_n)\}) = \{T(t_n)\} + \theta \Delta_n \{T\} \\ \{p_w(t')\} = \{p_w(t_n)\} + \theta (\{p_w(t_{n+1})\} - \{p_w(t_n)\}) = \{p_w(t_n)\} + \theta \Delta_n \{p_w\} \\ \{p_a(t')\} = \{p_a(t_n)\} + \theta (\{p_a(t_{n+1})\} - \{p_a(t_n)\}) = \{p_a(t_n)\} + \theta \Delta_n \{p_a\} \end{array} \right. \quad (11.4)$$

On applique la θ -méthode pour discrétiser les équations 10.15, 10.23, 10.34 et 10.45 dans le temps. Cette technique consiste à supposer que la variable θ définie dans l'équation 11.2 est constante sur un pas de temps. Cette technique d'interpolation linéaire, basée sur la théorie des différences finies, donne un schéma d'intégration inconditionnellement stable si $\theta \geq 1/2$ [67, 68, 69, 72, 75, 73]. Dans Θ -Stock, on choisit $\theta = 2/3$.

Anisi, si on intègre les variables d'état 11.4 sur un pas de temps, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{\mathbf{u}(t')\} dt' = (\{\mathbf{u}(t_n)\} + \theta \Delta_n \{\mathbf{u}\}) \Delta_n t \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{T(t')\} dt' = (\{T(t_n)\} + \theta \Delta_n \{T\}) \Delta_n t \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{p_w(t')\} dt' = (\{p_w(t_n)\} + \theta \Delta_n \{p_w\}) \Delta_n t \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{p_a(t')\} dt' = (\{p_a(t_n)\} + \theta \Delta_n \{p_a\}) \Delta_n t \end{array} \right. \quad (11.5)$$

Par ailleurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{\dot{\mathbf{u}}(t')\} dt' = \Delta_n \{\mathbf{u}\} \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{\dot{T}(t')\} dt' = \Delta_n \{T\} \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{\dot{p}_w(t')\} dt' = \Delta_n \{p_w\} \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{\dot{p}_a(t')\} dt' = \Delta_n \{p_a\} \end{array} \right. \quad (11.6)$$

On intègre les équations semi-discrétisées dans l'espace 10.15, 10.23, 10.34 et 10.45 sur un pas de temps $\Delta_n t$. Pour pouvoir discrétiser les équations dans le temps, on suppose que les coefficients matriciels sont constants sur un pas de temps. Les seuls termes à intégrer sont donc les variables d'état. Pour ce faire, on utilise les équations 11.5 et 11.6.

$$[R_{uu}] \Delta_n \{\mathbf{u}\} + [R_{uT}] \Delta_n \{T\} + [R_{uw}] \Delta_n \{p_w\} + [R_{ua}] \Delta_n \{p_a\} = \Delta_n \{\mathbf{F}_\sigma\} \quad (11.7)$$

$$\begin{aligned} & [C_{Tu}] \Delta_n \{\mathbf{u}\} + ([C_{TT}] + \theta \Delta_n t [K_{TT}]) \Delta_n \{T\} + ([C_{Tw}] + \theta \Delta_n t [K_{Tw}]) \Delta_n \{p_w\} \\ & + ([C_{Ta}] + \theta \Delta_n t [K_{Ta}]) \Delta_n \{p_a\} = \{\theta \Delta_n t \Delta_n F_T\} \end{aligned} \quad (11.8)$$

$$\begin{aligned} & + \Delta_n t (\{F_T(t_n)\} - [K_{TT}] \{T(t_n)\} - [K_{Tw}] \{p_w(t_n)\} - [K_{Ta}] \{p_a(t_n)\}) \\ & [C_{wu}] \Delta_n \{\mathbf{u}\} + ([C_{wT}] + \theta \Delta_n t [K_{wT}]) \Delta_n \{T\} + ([C_{ww}] + \theta \Delta_n t [K_{ww}]) \Delta_n \{p_w\} \\ & + ([C_{wa}] + \theta \Delta_n t [K_{wa}]) \Delta_n \{p_a\} = \{\theta \Delta_n t \Delta_n F_w\} \end{aligned} \quad (11.9)$$

$$\begin{aligned} & + \Delta_n t (\{F_w(t_n)\} - [K_{wT}] \{T(t_n)\} - [K_{ww}] \{p_w(t_n)\} - [K_{wa}] \{p_a(t_n)\}) \\ & [C_{au}] \Delta_n \{\mathbf{u}\} + ([C_{aT}] + \theta \Delta_n t [K_{aT}]) \Delta_n \{T\} + ([C_{aw}] + \theta \Delta_n t [K_{aw}]) \Delta_n \{p_w\} \\ & + ([C_{aa}] + \theta \Delta_n t [K_{aa}]) \Delta_n \{p_a\} = \{\theta \Delta_n t \Delta_n F_a\} \end{aligned} \quad (11.10)$$

$$+ \Delta_n t (\{F_a(t_n)\} - [K_{aT}] \{T(t_n)\} - [K_{aw}] \{p_w(t_n)\} - [K_{aa}] \{p_a(t_n)\})$$

On peut à présent rassembler les équations 11.7, 11.8, 11.9 et 11.10, discrétisées dans l'espace et dans le temps. Pendant l'incrément de chargement (loadstep) qui se déroule entre les instants t_n et t_{n+1} , l'équation d'équilibre matricielle prend la forme :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc} [R_{uu}] & [R_{uT}] & [R_{uw}] & [R_{ua}] \\ [C_{Tu}] & [C_{TT}] + \theta \Delta_n t [K_{TT}] & [C_{Tw}] + \theta \Delta_n t [K_{Tw}] & [C_{Ta}] + \theta \Delta_n t [K_{Ta}] \\ [C_{wu}] & [C_{wT}] + \theta \Delta_n t [K_{wT}] & [C_{ww}] + \theta \Delta_n t [K_{ww}] & [C_{wa}] + \theta \Delta_n t [K_{wa}] \\ [C_{au}] & [C_{aT}] + \theta \Delta_n t [K_{aT}] & [C_{aw}] + \theta \Delta_n t [K_{aw}] & [C_{aa}] + \theta \Delta_n t [K_{aa}] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \Delta_n \{\mathbf{u}\} \\ \Delta_n \{T\} \\ \Delta_n \{p_w\} \\ \Delta_n \{p_a\} \end{array} \right\} = \\ & \left\{ \begin{array}{l} \Delta_n \{\mathbf{F}_\sigma\} \\ \theta \Delta_n t \Delta_n \{F_T\} \\ \theta \Delta_n t \Delta_n \{F_w\} \\ \theta \Delta_n t \Delta_n \{F_a\} \end{array} \right\} + \Delta_n t \left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{0}\} \\ \{F_T(t_n)\} \\ \{F_w(t_n)\} \\ \{F_a(t_n)\} \end{array} \right\} - \Delta_n t \left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{0}\} \\ [K_{TT}] \{T(t_n)\} + [K_{Tw}] \{p_w(t_n)\} + [K_{Ta}] \{p_a(t_n)\} \\ [K_{wT}] \{T(t_n)\} + [K_{ww}] \{p_w(t_n)\} + [K_{wa}] \{p_a(t_n)\} \\ [K_{aT}] \{T(t_n)\} + [K_{aw}] \{p_w(t_n)\} + [K_{aa}] \{p_a(t_n)\} \end{array} \right\} \quad (11.11) \end{aligned}$$

Quatrième partie

Algorithmique et programmation

« Nous concevons tous que les choses dont nous avons la science ne peuvent être autrement qu'elles ne sont ; pour les choses qui peuvent être autrement, dès qu'elles sont sorties du champ de notre connaissance, nous ne voyons plus si elles existent ou non. »

**Aristote (384-322), *Ethique à Nicomaque*, VI, 3,
Vrin, p.280-281**

CHAPITRE 12

Architecture du code Θ -Stock

Le code d'Eléments Finis Θ -Stock [72] est piloté par un programme central, **markaz**, depuis lequel toutes les sous-routines actives sont appelées. L'exécution d'une simulation comporte 5 étapes, schématisées sur la figure 12.1 :

1. acquisition des données et dimensionnement des variables de stockage dynamique ;
2. initialisation des variables ;
3. constitution du vecteur des forces nodales exercées par l'environnement extérieur ;
4. résolution itérative des équations d'équilibre pour chaque incrément de chargement ;
5. impression des résultats.

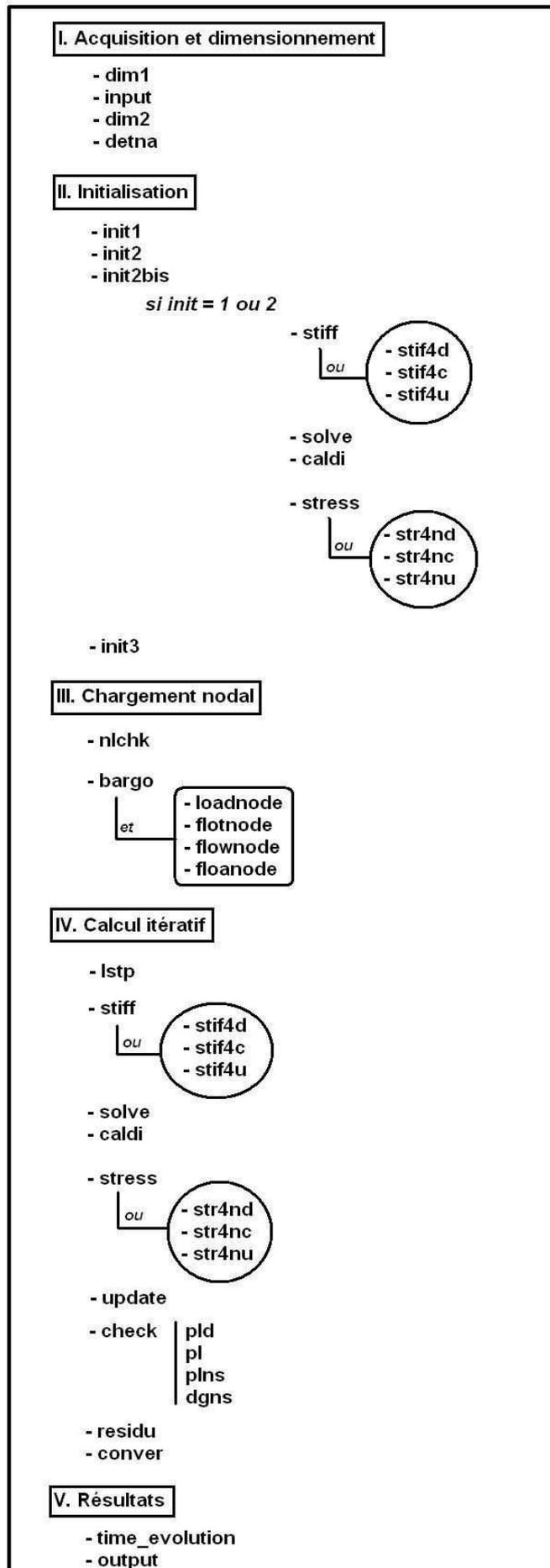
Les modèles de comportement programmés dans Θ -Stock sont donnés dans le tableau 12.1. On peut contrôler le nombre de degrés de liberté (ddl) des noeuds de chaque élément, en choisissant d'affecter à chaque élément un comportement de type :

- sec (module D, comme “*drained*”), avec des ddl en déplacements et température,
- saturé (module C, comme “*consolidated*”), avec des ddl en déplacements, température et pression d'eau,
- ou non saturé (module U, comme “*unsaturated*”) avec des ddl en déplacements, pression d'eau et pression d'air.

Il est possible de combiner des éléments ayant le même nombre de ddl nodaux mais pas le même comportement, et même des éléments n'ayant pas le même nombre de ddl (par exemple, des éléments saturés et des éléments non saturés).

TABLE 12.1 – Modèles de comportement programmés dans Θ -Stock (au 1^{er} juillet 2009).

Module	Déformations planes	Axisymétrie
D (sec)	- élastoplastique (Van Misès thermique)	- élasticité linéaire - élasticité hyperbolique
C (saturé)	- élastoplastique [73, 69]	- élasticité linéaire - élasticité hyperbolique
U (non saturé)	- élastoplastique [102]	- élasticité linéaire - élasticité hyperbolique - élastofragile (THHMD)

FIGURE 12.1 – Principales subroutines du programme Θ -Stock.

1. Acquisition des données et dimensionnement des variables de stockage dynamique

Les données et les variables du problèmes sont stockées dans un unique vecteur $\{a\}$, dont la longueur est ajustée en fonction des caractéristiques du problème, comme le nombre d'éléments, les types de comportement choisis ou les conditions aux limites. Le vecteur $\{a\}$ est fractionné en sous vecteurs de longueur L_k . Chaque sous-vecteur $\{a\}(L_k)$ stocke une variable ou un série de données, à l'échelle de l'ensemble du modèle. Comme les longueurs L_k ne sont pas fixées par l'utilisateur, on parle de **variables de stockage dynamique**. Les sous-routines **dim1** et **dim2** calculent le numéro du coefficient de $\{a\}$ qui correspond au premier coefficient de chaque sous-vecteur stocké. Le sous-vecteur $\{a\}(L_k)$ est ainsi stocké entre les coefficients $a(l_k)$ et $a(l_{k+1})$. La localisation l_k donne donc la position du premier coefficient du sous-vecteur $\{a\}(L_k)$ dans le vecteur de stockage global $\{a\}$. Un aperçu des variables de stockage dynamique intervenant dans Θ -Stock est donné dans les tableaux 12.2, 12.3 et 12.4. Les variables qui ont été ajoutées pour implanter le modèle THHMD dans le code sont répertoriées dans le tableau 13.1, au chapitre 13. La sous-routine **dim1** dimensionne l'espace de stockage des données entrées par l'utilisateur (notamment les paramètres matériels et les conditions aux limites), qui sont lues et stockées à partir de la sous-routine **input**. La sous-routine **dim2** dimensionne principalement l'espace de stockage nécessaire pour l'actualisation des variables du problème.

La sous-routine **detna** permet d'identifier les ddl effectifs du maillage, et de réduire ainsi la taille de la matrice de rigidité globale. Si le maillage comporte nnp noeuds, il y a au maximum $5*nnp$ degrés de liberté dans le problème (les deux composantes de déplacement, la température, la pression d'eau, la pression d'air). La variable [id] est un tableau qui affecte un code pour chacun des $5*nnp$ degrés de liberté envisageables.

- Pour les déplacements dans la direction 1 (x en déformations planes, r en axisymétrie) : le code est $mdof+nbx$ si une condition de type Dirichlet nulle est imposée, et 0 sinon.
- Pour les déplacements dans la direction 2 (y en déformations planes, z en axisymétrie) : le code est $mdof+nbx+nbcy$ si une condition de type Dirichlet nulle est imposée, et 0 sinon.
- Pour les températures : le code est $mdof+nbx+nbcy+nbct$ si une condition de type Dirichlet nulle est imposée, et 0 sinon.
- Pour les pressions d'eau :
 - si l'élément est sec, le code est $5*nnp+1$;
 - sinon, le code est $mdof+nbx+nbcy+nbct+nbw$ si une condition de type Dirichlet nulle est imposée, et 0 sinon.
- Pour les pressions d'air :
 - si l'élément est sec ou saturé, le code est $5*nnp+1$;
 - sinon, le code est $mdof+nbx+nbcy+nbct+nbw+nbca$ si une condition de type Dirichlet nulle est imposée, et 0 sinon.

Seuls les degrés de liberté effectifs, dont le code est 0 dans la matrice [id], influencent la matrice de rigidité globale. En conséquence, seuls les couples de ddl effectifs sont stockés. La partie triangulaire supérieure de la matrice de rigidité est stockée dans le vecteur dynamique $\{s1\}$, et la partie inférieure, dans le vecteur dynamique $\{s2\}$ (voir le tableau 13.1). Chaque couple de ddl effectifs a un numéro de positionnement dans $\{s1\}$ ou $\{s2\}$. Le vecteur dynamique $\{na\}$, déterminé dans la sous-routine **detna**, donne le numéro de positionnement des coefficients diagonaux de la matrice de rigidité pour chaque ddl effectif. Le positionnement des autres couples de ddl effectifs n'a pas besoin d'être stocké : il suffit de lire le tableau [id] dans un ordre déterminé, et

d'incrémenter la numérotation lorsque les codes des ddl concernés sont nuls.

2. Initialisation des variables

La subroutine **init1** (re)met à 0 les vecteurs de stockage des déformations et des contraintes. La subroutine **init2** (re)met à 0 les vecteurs de stockage du résidu ($\{r\}$) et des forces extérieures ($\{rr\}$), et stocke les conditions initiales imposées sur les températures et les pressions interstitielles dans les vecteurs qui stockent les ddl incrémentaux et cumulés ($\{di\}$ et $\{dt\}$ respectivement). La subroutine **init2bis** permet de tenir compte de charges de consolidation initiales imposées par l'utilisateur sur des éléments saturés. Ces charges affectent le champ de contrainte initial calculé sur les éléments.

La subroutine **init3** permet d'initialiser le champ de contrainte σ de 4 manières différentes :

- prise en compte du poids des couches de sol susjacentes (init=1) ;
- considération d'un état d'équilibre géostatique (init=2) ;
- prise en compte du poids des couches susjacentes, en considérant que la géométrie du modèle est rectangulaire (init=3) ;
- imposition d'un champ de contraintes initial sur tout ou partie des éléments (init=4).

Si l'utilisateur choisit d'initialiser le champ de contraintes en considérant le poids des couches susjacentes réelles ou en considérant l'équilibre géostatique, alors il faut connaître la matrice de rigidité initiale pour initialiser le vecteur des ddl $\{di\} = \{\Delta\mathbf{U}\}$. C'est pourquoi interviennent (figure 12.1) :

- la subroutine **stiff**, qui permet de calculer la matrice de rigidité globale ;
- la subroutine **solve**, qui permet d'inverser la matrice de rigidité ;
- la subroutine **caldi**, qui permet d'injecter la solution du système d'équations d'équilibre dans le vecteur $\{di\}$;
- la subroutine **stress**, qui permet de déterminer les valeurs des variables de contrainte à partir des valeurs des ddl nodaux.

En outre, comme le champ de déformations initiales est choisi nul, la contrainte thermodynamiquement associée à l'endommagement, \mathbf{Y}_{d1}^+ , est initialisée à 0. Comme on l'a vu avec la subroutine **init2**, l'utilisateur peut contrôler la succion initiale des éléments en imposant des pressions interstitielles initiales sur les noeuds. On peut aussi contrôler la succion initiale d'un élément en choisissant un degré de saturation initial :

- si aucune pression interstitielle nodale n'est imposée sur l'élément, la succion initiale élémentaire est calculée en inversant la formule de la surface d'état du degré de saturation, en considérant que la pression d'air initiale est nulle ;
- si une seule des deux pressions interstitielles est imposée en chaque noeud de l'élément, la succion initiale est obtenue par inversion de la fonction d'état du degré de saturation, sans hypothèse supplémentaire ;
- si la pression d'eau et la pression d'air sont imposées, alors la succion élémentaire nodale est obtenue en faisant la moyenne des succions nodales (en effet, il n'y a qu'un point d'intégration par élément dans Θ -Stock).

3. Constitution du vecteur de forces nodales

Les conditions aux limites de Dirichlet qui sont choisies nulles pour toute la simulation sont prises en compte dans la phase d'acquisition des données (variables dynamiques kodex, kodely,

kodea). Cette prise en compte permet notamment de réduire la taille de la matrice de rigidité globale (voir le paragraphe sur l'acquisition des données). Les conditions temporaires, valables pour un incrément de chargement seulement, sont traitées dans la sous-routine **bargo**. Les conditions imposées sur les ddl nodaux sont stockées dans des vecteurs spécifiques. Les conditions imposées sur des flux appliqués sur des surfaces sont traduites sous la forme d'un vecteur de forces nodales $\{rr\}$. Ces forces traduisent l'action de l'environnement extérieur sur le système imposé au début de l'incrément de chargement. Le vecteur $\{rr\}$ est bien entendu recalculé au début de chaque incrément de chargement. La sous-routine **nlchk** contrôle l'occurrence d'un changement d'incrément de chargement. Les conditions de Dirichlet temporaires sont prises en compte lors de la constitution de la matrice de rigidité globale. Les ddl sur lesquels des conditions sont imposées sont en fait neutralisés (voir le paragraphe sur le processus de résolution itératif).

Dans la sous-routine **loadnode**, une intégration spatiale pondérée permet de traduire les conditions imposées en contraintes ($\Delta\tilde{\sigma}$) sur des surfaces en conditions imposées en force sur les noeuds de la surface. D'après les équations 10.20 et 15.1 :

$$\Delta_n \{\mathbf{F}_\sigma\} = \int_{\Gamma_{e,\sigma}} [\tilde{\mathbf{N}}]^T \{\Delta_n \tilde{\sigma}\} d\Gamma \quad (12.1)$$

Pour les conditions imposées sur les flux de chaleur, d'eau et d'air, les vecteurs de force doivent être modifiés comme suit (équations 10.31, 10.42, 10.53 et 15.1) :

$$\begin{aligned} \{F_X(t_n)\} + \theta \Delta_n \{F_X\} &= \{N\}^T \tilde{q}_X(t_n) d\Gamma + \theta \{N\}^T \Delta_n \tilde{q}_X d\Gamma \\ \{F_X(t_n)\} + \theta \Delta_n \{F_X\} &= (1 - \theta) \{N\}^T \tilde{q}_X(t_n) d\Gamma + \theta \{N\}^T \tilde{q}_X(t_{n+1}) d\Gamma \end{aligned} \quad (12.2)$$

où X est l'indice T pour la chaleur, W pour l'eau et A pour l'air. Les contributions gravitationnelles qui interviennent dans les équations 10.31, 10.42 et 10.53 sont indépendantes des conditions de type Neumann, et n'apparaissent pas dans l'équation 12.2. Le calcul 12.2 est pondéré de manière à traduire les conditions de chargement linéiques en chargements nodaux. Les chargements en flux de chaleur, en flux d'eau et en flux d'air sont traités par les sous-routines **fltnode**, **flwnode** et **flonode** respectivement.

4. Résolution itérative du système d'équations d'équilibre

La sous-routine **stiff** permet d'assembler les matrices de rigidité élémentaires construites avec les sous-routines **stif4d** (pour les éléments secs), **stif4c** (pour les éléments saturés) et **stif4u** (pour les éléments non saturés). La méthode de calcul du résidu oblige à appeler la sous-routine **stiff** à chaque itération, même si on utilise une méthode de Newton-Raphson modifiée (voir le chapitre 15). De même, la sous-routine **lstp** n'intervient que pour calculer le résidu (voir le chapitre 15). Comme on l'a évoqué dans le paragraphe sur la constitution du vecteur des forces nodales, la sous-routine **stiff** permet également de modifier la matrice de rigidité globale et le vecteur résidu si des conditions nodales sont imposées sur les températures ou les pressions interstitielles. Supposons que lors de l'incrément de chargement k, la valeur $vn p_d$ soit imposée au ddl n°d. Alors

l'opération suivante est réalisée :

$$\begin{aligned}
[K_{globale}]\{\Delta\mathbf{U}\} = \{\Psi\} &\Rightarrow [\widehat{K}_{globale}]\{\Delta\mathbf{U}\} = \{\widehat{\Psi}\} \\
[\widehat{K}_{globale}]\{\Delta\mathbf{U}\} = \{\widehat{\Psi}\} &\Leftrightarrow \\
\left[\begin{array}{cccccc} K_{ij} & \dots & \dots & \dots & K_{ij} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & K_{dd} = 1 & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ K_{ij} & \dots & \dots & \dots & K_{ij} & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta\mathbf{U} \\ \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} r_i - K_{id}(vnpd_d - dt(d)_{k-1}) \\ \dots \\ vnpd_d - dt(d)_{k-1} \\ \dots \\ r_i - K_{id}(vnpd_d - dt(d)_{k-1}) \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{12.3}$$

Les ddl qui ne sont pas libres pendant l'incrément de chargement k sont ainsi neutralisés. On vérifie que l'équilibre est bien vérifié :

- la d^{eme} équation d'équilibre s'écrit :

$$K_{dd} \Delta_{k-1} U_d = vnpd_d - dt(d)_{k-1} \Rightarrow \Delta_{k-1} U_d = vnpd_d - dt(d)_{k-1} \tag{12.4}$$

- les autres équations d'équilibre sont de la forme :

$$\begin{aligned}
\sum_j K_{ij} \Delta_{k-1} U_j &= r_i \\
\Rightarrow \sum_{j \neq d} K_{ij} \Delta_{k-1} U_j + K_{id} \Delta_{k-1} U_d &= r_i \\
\Rightarrow \sum_j \widehat{K}_{ij} \Delta_{k-1} U_j + &= r_i - K_{id}(vnpd_d - dt(d)_{k-1})
\end{aligned} \tag{12.5}$$

La subroutine **solve** permet de résoudre le système d'équations d'équilibre par un processus d'inversion de la matrice de rigidité globale. La solution $\{\Delta\mathbf{U}\}$ est directement substituée au vecteur qui stocke le résidu $\{\Psi_{k,i}\} = \{r\}$. Il s'agit d'un processus de résolution destructif, au terme duquel les vecteurs qui stockent les coefficients de la matrice de rigidité ($\{s1\}$ et $\{s2\}$) sont modifiés. Cela justifie le recours à un double stockage des coefficients de la matrice de rigidité (également stockés dans $\{s3\}$ et $\{s4\}$, voir le tableau 13.1), comme c'est expliqué dans le chapitre 15. La solution du problème, provisoirement stockée dans le vecteur $\{r\}$, est transférée dans le vecteur $\{di\}$ au moyen de la subroutine **caldi**.

La subroutine **stress** permet d'actualiser les variables de contrainte (y compris \mathbf{Y}_{d1}^+ dans le modèle THHMD) à l'aide des valeurs des degrés de liberté nodaux incrémentaux précédemment obtenus et stockés dans $\{di\}$. Le programme fait appel à la subroutine **str4nd** pour calculer les contraintes élémentaires en milieu sec, à la subroutine **str4nc** en milieu saturé, et à la subroutine **str4nu** en milieu non saturé. Plus de détails sur le fonctionnement de la subroutine **str4nu** sont donnés dans le chapitre 14, dédié à l'algorithme implanté pour l'utilisation du modèle THHMD.

La subroutine **update** actualise l'ensemble des variables à l'échelle du modèle entier, à partir des résultats obtenus dans **stress**. Plus de détails sont donnés dans le chapitre 14. Une subroutine permet de détecter l'occurrence de l'irréversibilité. Si un élément sec a plastifié, la subroutine **checkpld** oriente le calcul vers la subroutine **residu**. Les subroutines **checkpl**, **checkplns** et **checkdgn** jouent le même rôle pour les comportements élastoplastique saturé, élastoplastique non saturé et élastofragile non saturé, respectivement. Si un processus irréversible s'est déclenché, le résidu est calculé dans la subroutine **residu** (voir le chapitre 15). Un double test de

convergence est pratiqué dans la subroutine **conver**. Les deux critères utilisés sont les suivants :

$$\frac{\|\Psi\|_{k,i}}{\|\Psi\|_{k,0}} = \frac{\|r\|}{\|rr\|}, \quad \frac{\|\Delta\mathbf{U}\|_{k,i}}{\|\mathbf{U}\|_{k,i-1}} = \frac{\|di\|}{\|dt - di\|} \quad (12.6)$$

5. Impression des résultats

Les valeurs des variables nodales et élémentaires sont imprimées à chaque pas de temps dans des fichiers de type texte pour les noeuds et éléments sélectionnés par l'utilisateur, au moyen de la subroutine **time evolution**. La subroutine **output** permet d'imprimer le fichier de résultats principal, qui comporte également la quasi-intégralité des données du problème entrées par l'utilisateur. Alors que la subroutine **time evolution** permet de suivre certains noeuds et certains éléments à tous les instants, la subroutine **output** permet de suivre tous les noeuds et tous les éléments pour des instants définis par l'utilisateur.

TABLE 12.2 – Variables de stockage dynamique (1/3) utilisées dans le code Θ -Stock avant l'intégration du modèle THHMD. Pour les variables localisées aux emplacements 1 à 9, la dimension du vecteur de stockage est divisée par 2 car on utilise des réels à 8 bits et non 16 bits.

localisation l_k	variable	dimensions	description
a(101)	ie4d	$(ne4d1*5+1)/2$	numérotation des ddl pour les ne4d1 éléments secs
a(102)	ie4c	$(ne4c1*5+1)/2$	numérotation des ddl pour les ne4c1 éléments saturés
a(103)	ie4u	$(ne4u1*5+1)/2$	numérotation des ddl pour les ne4u1 éléments non saturés
a(104)	id	$(nnp*5+1)/2$	identification des ddl des nnp noeuds du maillage (déclarés actifs, bloqués ou avec condition imposée)
a(105)	iconst	$(nload1*3+1)/2$	caractéristiques des nload1 incréments de chargement
a(106)	kodex	$(nbcx1+1)/2$	identification des nbcx1 ddl avec CL à 0 imposées sur les déplacements u_x (ou u_r)
a(107)	kodey	$(nbcy1+1)/2$	identification des nbcy1 ddl avec CL à 0 imposées sur les déplacements u_y (ou u_z)
a(108)	kodew	$(nbcw1+1)/2$	identification des nbcw1 ddl avec CL à 0 imposées sur les pressions d'eau
a(109)	koedea	$(nbca1+1)/2$	identification des nbca1 ddl avec CL à 0 imposées sur les pressions d'air
a(110)	x	nnp*2	déplacements
a(111)	sm4d	m4d1*20	paramètres des modèles de comportement des m4d1 types d'éléments secs choisis
a(112)	sm4c	m4c1*33	paramètres des modèles de comportement des m4c1 types d'éléments secs choisis
a(113)	sm4u	m4u1*62	paramètres des modèles de comportement des m4u1 types d'éléments secs choisis
a(114)	sig4d	ne4d1*7	valeurs des variables de contrainte cumulées pour les éléments secs $\{\sigma_{defoplans}\}(4), T, e, \sigma_{\theta\theta}$
a(115)	sig4c	ne4c1*9	valeurs des variables de contrainte cumulées pour les éléments saturés $\{\sigma_{defoplans}\}(4), T, p_w, \epsilon_v, p_{sc}, \sigma_{\theta\theta}$
a(116)	sig4u	ne4u1*8	valeurs des variables de contrainte cumulées pour les éléments non saturés $\{\sigma\}(4), T, s, p_a, e$

TABLE 12.3 – Variables de stockage dynamique (2/3) utilisées dans le code Θ -Stock avant l'intégration du modèle THHMD. Pour les variables localisées aux emplacements 20, 25, 26 et 30 à 32, la dimension du vecteur de stockage est divisée par 2 car on utilise des réels à 8 bits et non 16 bits.

localisation l_k	variable	dimensions	description
a(117)	dsig4d	ne4d1*7	valeurs des variables de contrainte incrémentales pour les éléments secs
a(118)	dsig4c	ne4c1*9	valeurs des variables de contrainte incrémentales pour les éléments saturés
a(119)	dsig4u	ne4u1*8	valeurs des variables de contrainte incrémentales pour les éléments non saturés
a(120)	kodet	(nbct1+1)/2	identification des ddl avec CL à 0 imposées sur les températures
a(121)	r	mdof	vecteur résidu $\Psi_{k,i}$, calculé pour chacun des mdof ddl
a(122)	rr	mdof	vecteur des forces extérieures appliquées au début de l'incrément de chargement $\Psi_{k,0}$
a(123)	di	mdofn	valeurs des mdof ddl incrémentaux et stockage de mdofn-mdof CL à 0
a(124)	dt	mdofn	valeurs des mdof ddl cumulés et stockage de mdofn-mdof CL à 0
a(125)	na	(mdof+1)/2	identification des ddl non bloqués
a(126)	iact	(nnp+1)/2	identification des noeuds actifs (0 si dans un élément fictif, 1 si dans un élément matériel - utile pour le phasage des construction)
a(127)	pinv0d	ne4d1	une contrainte moyenne pour les ne4d1 éléments secs
a(128)	pinv0c	ne4c1	une contrainte moyenne pour les ne4c1 éléments saturés
a(129)	pinv0u	ne4u1	une contrainte moyenne pour les ne4u1 éléments non saturés
a(130)	mcs	(ne4c1+1)/2	caractéristiques du comportement élastoplastique des ne4c1 éléments saturés
a(131)	mngp	(ne4c1+1)/2	caractéristiques du comportement élastoplastique des ne4c1 éléments saturés
a(132)	nelcam	(ne4c1+1)/2	indicateur de plasticité pour les ne4c1 éléments saturés (0 si élastique, 1 si plastifié)

TABLE 12.4 – Variables de stockage dynamique (3/3) utilisées dans le code Θ -Stock avant l'intégration du modèle THHMD. Pour les variables localisées aux emplacements 33, 38 et 44, la dimension du vecteur de stockage est divisée par 2 car on utilise des réels à 8 bits et non 16 bits.

localisation l_k	variable	dimensions	description
a(133)	ncode	$(ne4c1+1)/2$	caractéristiques du comportement élastoplastique des ne4c1 éléments saturés
a(134)	varpmc	ne4c1*10	stockage de variables plastiques pour les ne4c1 éléments saturés
a(135)	depsv4c	ne4c1*6	stockage de variables de déformation incrémentales pour les ne4c1 éléments saturés
a(136)	epsv4c	ne4c1*6	stockage de variables de déformation cumulées pour les ne4c1 éléments saturés
a(137)	varpmd	ne4d1*10	stockage de variables plastiques pour les ne4d1 éléments secs
a(138)	neldvm	$(ne4d1+1)/2$	indicateur de plasticité pour les ne4d1 éléments secs (0 si élastique, 1 si plastifié)
a(139)	epsv4d	ne4d1*4	déformations cumulées pour les ne4d1 éléments secs $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{vol}$ en déformations planes $\epsilon_{rr}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{rz}, \epsilon_{\theta\theta}$ en axisymétrie
a(140)	depsv4d	ne4d1*4	déformations incrémentales pour les ne4d1 éléments secs
a(141)	epsv4dp	ne4d1*4	déformations plastiques cumulées pour les ne4d1 éléments secs
a(142)	qeq	ne4d1*8	vecteur des puissances mécaniques intérieures ($\int \mathbf{B}^T : d\sigma dV$) développées dans les ne4d1 éléments secs
a(143)	varpmu	ne4u1*15	stockage de variables plastiques pour les ne4u1 éléments non saturés
a(144)	nelns	$(ne4u1+1)/2$	indicateur de plasticité pour les ne4u1 éléments non saturés (0 si élastique, 1 si plastifié)
a(145)	epsv4u	ne4u1*5	déformations cumulées pour les ne4u1 éléments non saturés $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{vol}$ en déformations planes $\epsilon_{rr}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{rz}, \epsilon_{\theta\theta}, \epsilon_{vol}$ en axisymétrie
a(146)	depsv4u	ne4u1*5	déformations incrémentales pour les ne4u1 éléments non saturés
a(147)	epsv4up	ne4u1*5	déformations plastiques cumulées pour les ne4u1 éléments non saturés
a(148)	qeqns	ne4u1*8	vecteur des puissances mécaniques intérieures ($\int \mathbf{B}^T : d\sigma dV$) développées dans les ne4u1 éléments non saturés

CHAPITRE 13

Subroutines spécifiques au modèle THMD

Les variables de stockage dynamique spécifiques au modèle THHMD sont répertoriées dans le tableau 13.1 (voir le chapitre 12 pour plus de précisions sur le formalisme adopté dans Θ -Stock). La programmation du modèle THHMD affecte le coeur du code Θ -Stock, principalement dans la partie qui contrôle la résolution itérative du problème (parie 4 du code). Lors du calcul itératif, Θ -Stock lit succesivement les sousroutines mentionnées sur le schéma 13.1.

TABLE 13.1 – Variables de stockage dynamique utilisées dans le modèle THHMD. $ne4u1$ est le nombre d’éléments non saturés, et $mdof$ est le nombre de degrés de liberté effectifs (sans condition imposée).

localisation l_k	variable	dimensions	fonction
a(149)	nelnsd	ne4u1	identification des éléments endommagés
a(150)	varpmud	(11,ne4u1)	stockage de paramètres relatifs au développement de l’endommagement ($f_{d0}, f_{d1}, d\lambda_d, H_d, r_d, \epsilon^d$)
a(151)	ddam4u	(4,ne4u1)	endommagement incrémental
a(152)	dam4u	(4,ne4u1)	endommagement cumulé
a(153)	dyd14u	(4,ne4u1)	incrément de contrainte associée à l’endommagement
a(154)	yd14u	(4,ne4u1)	contrainte cumulée associée à l’endommagement
a(155)	depsx4u	(6,ne4u1)	déformations incrémentales ($d\epsilon_M, d\epsilon_{Sv}, d\epsilon_{Tv}$)
a(156)	epsx4u	(6,ne4u1)	déformations cumulées ($\epsilon_M, \epsilon_{Sv}, \epsilon_{Tv}$)
a(157)	resid	mdof	sauvegarde du vecteur résidu
a(158)	rig4u	(34,ne4u1)	coefficients de la matrice $[K_{TWA}]_{k,i}$
a(159)	s1	ls	triangle supérieur de la matrice de rigidité initiale
a(160)	s2	ls1	triangle inférieur de la matrice de rigidité initiale
a(161)	s3	ls	sauvegarde du triangle supérieur de la matrice de rigidité initiale
a(162)	s4	ls1	sauvegarde du triangle inférieur de la matrice de rigidité initiale

Les sousroutines **dmatued**, **dmatuedrev**, **swvg**, **perwdg**, **condtdg** et **checkdgn** sont spécifiques à la loi de comportement et aux lois de transfert, et n’interviennent que lors de simulations effectuées avec le modèle THHMD :

- **dmatued** permet de calculer les matrices de rigidité endommagées dans le cas général ;
- **dmatuedrev** permet de calculer les matrices de rigidité endommagées sans prendre en compte les parties inélastiques des rigidités, ce qui revient à faire un calcul dans le domaine élastique pour un niveau d’endommagement donné ;
- **swvg** est appelé dans **dmatued** et **dmatuedrev**, et donne le degré de saturation, qui est supposé évoluer sur une surface d’état combinant l’approche de Van Genuchten [197] à une modélisation exponentielle des effets thermiques (équation 6.19) ;
- **perwdg** est appelé dans **dmatued** et **dmatuedrev**, et calcule le tenseur de perméabilité

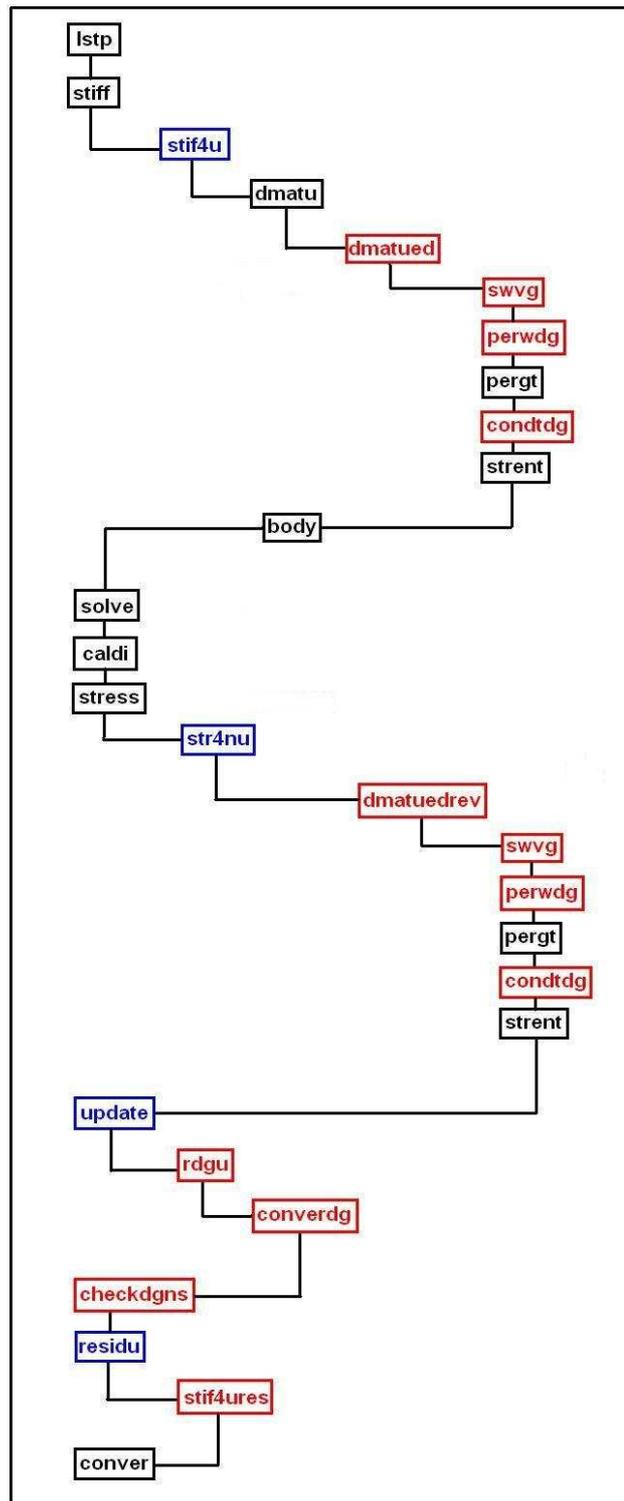


FIGURE 13.1 – Subroutines intervenant lors d’une simulation effectuée avec le modèle THHMD dans Θ -Stock, pendant le calcul itératif. Un décalage vers la droite correspond à une servitude (les subroutines appelées sont plus à droite que leur subroutine mère). En rouge : les subroutines spécifiques au modèle THHMD. En bleu : les subroutines préexistantes fortement affectées par l’implantation du modèle THHMD. En noir : les subroutines peu ou pas affectées par l’intégration du modèle d’endommagement dans Θ -Stock.

à l'eau, qui témoigne de l'anisotropie induite par l'endommagement dans les transferts (équations 6.23, 6.24 et 6.43) ;

- **condtdg** est appelé dans **dmatued** et **dmatuedrev**, et calcule les diffusivités endommagées (équations 6.85, 6.86 et 6.101, 6.102 et 6.103) ;
- **checkdgn** signale l'occurrence de l'endommagement dans la zone modélisée : si au moins un élément s'est endommagé, le programme exécute le calcul du résidu et pratique un test de convergence, qui est intégré dans le processus général de résolution itérative basée sur la méthode de Newton-Raphson modifiée.

Les sous-routines **rdgu** et **converdg** interviennent spécifiquement dans l'algorithme programmé pour le modèle THHMD, en raison de l'imbrication d'une boucle itérative supplémentaire dans le calcul. Les sous-routines **str4nu** et **update** en sont largement affectées. Plus de détails sont donnés dans le chapitre 14, dédié à l'algorithme propre au modèle THHMD.

Le calcul du résidu utilisé dans la méthode de Newton-Raphson pour résoudre le système d'équations d'équilibre nécessite de doubler le stockage de certains coefficients de la matrice de rigidité, d'où la création de la sous-routine **stif4ures**, spécifique au modèle THHMD, qui est appelée dans la sous-routine **residu**. La sous-routine **stif4u** est également fortement affectée. Plus de détails sont donnés dans le chapitre 15, dédié au calcul du résidu.

En-dehors de la partie 4 du code Θ -Stock (chapitre 12), qui contrôle la résolution itérative du problème, l'intégration du modèle THHMD a nécessité des modifications liées au stockage de nouvelles variables.

- Dans la partie 1, relative à l'acquisition des données et au dimensionnement des variables de stockage dynamique, il a fallu prendre en compte de nouveaux paramètres matériels (sous-routine **input**) et de nouvelles variables de stockage dynamique (sous-routine **dim2**).
- Dans la partie 2, relative à l'initialisation des variables, il a fallu ajouter l'initialisation de Ω et de \mathbf{Y}_{d1}^+ , et calculer l'état de succion initial par inversion de la fonction d'état du degré de saturation spécifiquement utilisée dans le modèle THHMD (sous-routine **init3**).
- Dans la partie 5, relative à l'impression des résultats, les sous-routines **time evolution** et **output** ont été complétées pour pouvoir suivre dans le temps et dans l'espace toutes les variables actives dans le modèle THHMD, ainsi que tous les coefficients des matrices de rigidité endommagées. Il est fait appel à une nouvelle sous-routine, **vfluidu axi**, qui permet de calculer les flux d'eau, d'air et de vapeur à travers des surfaces élémentaires choisies par l'utilisateur, et ce pour tous les comportements programmés dans Θ -Stock en configuration axisymétrique.

CHAPITRE 14

Algorithme de résolution pour le modèle THMD

Pour construire l'algorithme de résolution qui permet de traiter des problèmes avec le modèle THHMD, les principes de résolution de problèmes non linéaires et indépendants du temps ont été étudiés [145, 182]. Des techniques de programmation inspirées des travaux de Press et al. [165] ont été utilisées. Le calcul du facteur de retour à la surface de charge (“*scaling back factor*”) et la correction de contraintes effectuée à la fin du processus itératif ont été mis en oeuvre selon la méthode de Nayak et Zienkiewicz [144].

La fonction de charge utilisée dans le modèle THHMD dépend de la variable d'écrouissage Ω_{ij} et de sa contrainte conjuguée Y_{dij} . Le test d'irréversibilité, qui permet de savoir si le matériau s'endommage pendant l'incrément de chargement courant, porte donc sur Y_{dij} . Contrairement aux algorithmes couramment utilisés en élasto-plasticité, il faut donc calculer une contrainte d'essai (“*trial stress*”) associée à l'endommagement (Y_{dij}^e) pour pratiquer le test d'irréversibilité, et non une contrainte d'essai de Cauchy (σ_{ij}^e). Cependant, Y_{dij} n'est pas une variable d'état. La résolution des équations d'équilibre passe par la détermination d'un vecteur de degrés de liberté qui correspondent soit aux variables d'état de contrainte (suction, température), soit à leurs variables conjuguées (déplacements pour les contraintes de Cauchy). Par conséquent, la détermination de la contrainte associée à l'endommagement dans le domaine fragile (Y_{dij}^{ed}) passe par un calcul itératif qui vient s'imbriquer dans l'algorithme de résolution général utilisé pour traiter le problème non linéaire. Comme on l'a expliqué dans les chapitres 12 et 13, le schéma de résolution adopté dans Θ -Stock est basé sur la méthode de Newton-Raphson modifiée, c'est-à-dire que la matrice de rigidité est constante pendant chaque incrément de chargement, et qu'elle n'est pas actualisée au cours des itérations. A l'intérieur de ce processus itératif, une nouvelle boucle itérative est introduite, de façon à déterminer l'incrément de contrainte associée à l'endommagement, dont l'incrément dépend non linéairement des variables d'état (équations 5.147 et 5.148). Le principe du calcul du résidu est exposé en détail dans le chapitre 15.

Les étapes du calcul sont données dans ce qui suit pour le cas où l'élément courant est dans le domaine fragile. On se place à l'incrément de chargement k , à l'itération i du processus de calcul de Newton-Raphson. Les équations qui suivent sont celles qui sont utilisées à l'échelle élémentaire.

1. Calcul des contraintes d'essai (“*trial stresses*”).

Subroutine `str4nu`.

- Calcul des déformations totales obtenues à partir des déplacements calculés en inversant la matrice de rigidité :

$$d\epsilon_{k,i} = \mathbf{B} : d\mathbf{u}_{k,i} \quad (14.1)$$

\mathbf{B} est la matrice qui permet de calculer la partie symétrique du gradient des déplacements (équations 10.6 et 10.8).

- Calcul de l'incrément de contrainte élastique, au moyen de l'incrément de déformations totales et des incréments de suction et de température obtenus par inversion de la matrice de rigidité :

$$d\sigma_{k,i}^e = \mathbf{D}_{e_{k,i}} : d\epsilon_{k,i} - \mathbf{F}_{s_{k,i}} ds_{k,i} - \mathbf{F}_{T_{k,i}}^* dT_{k,i} \quad (14.2)$$

- Calcul des incréments des différentes composantes élastiques du tenseur de déformations :

$$\begin{aligned} d\epsilon_{\mathbf{M}k,i}^e &= \mathbf{D}_e^{-1}{}_{k,i} : d\sigma^e{}_{k,i} \\ d\epsilon_{Sv}^e &= \frac{1}{\beta_{Sv,k,i}} ds_{k,i} \\ d\epsilon_{Tv}^e &= \frac{1}{\beta_{Tv,k,i}^*} dT_{k,i} \end{aligned} \quad (14.3)$$

- Actualisation des composantes élastiques du tenseur de déformations et calcul des déformations susceptibles d'endommager le matériau : $\epsilon_{\mathbf{M}k,i}^{e+}$, $\epsilon_{Svk,i}^{e-}$ et $\epsilon_{Tv,k,i}^{e+}$.
- Détermination de l'incrément de contrainte élastique associée à l'endommagement :

$$d\mathbf{Y}_{\mathbf{d}1k,i}^{+e} = g_M \left(\epsilon_{\mathbf{M}k,i}^{e+} - \epsilon_{\mathbf{M}k,i-1}^{e+} \right) + g_S \left(\epsilon_{Svk,i}^{e-} - \epsilon_{Svk,i-1}^{e-} \right) + g_T \left(\epsilon_{Tv,k,i}^{e+} - \epsilon_{Tv,k,i-1}^{e+} \right) \quad (14.4)$$

2. Test de réversibilité.

Subroutine rdgu.

- Calcul de $f_d^{(1)}{}_{k,i} = f_d \left(\mathbf{Y}_{\mathbf{d}1k,i-1}^{+e} + d\mathbf{Y}_{\mathbf{d}1k,i}^{+e}, \boldsymbol{\Omega}_{k,i-1} \right)$.
- Test :
 - Si le matériau est déjà endommagé ($\text{nelnsd}(\text{elt})=1$) ou si $f_d^{(1)}{}_{k,i} \geq 0$, on passe à l'étape suivante, qui permet de faire les calculs dans le domaine fragile.
 - Sinon, l'élément est élastique, et les variables de déformation et de contrainte sont actualisées au moyen des incréments calculés dans la subroutine str4nu à l'étape 1. On passe ensuite directement à l'étape 7, qui permet de faire les actualisations à l'échelle de l'ensemble de la zone maillée.

3. Calcul du facteur de retour à la surface de charge (“*scaling back factor*”).

Subroutine rdgu.

On cherche à calculer l'incrément de contrainte associée à l'endommagement, qui peut comporter une partie élastique si l'élément entre dans le domaine fragile au cours de l'itération étudiée. On pratique une interpolation d'ordre 2, à l'aide d'un facteur de retour à la surface de charge (“*scaling back factor*”), pour calculer $d\mathbf{Y}_{\mathbf{d}1k,i}^{+e}$:

$$d\mathbf{Y}_{\mathbf{d}1k,i}^{+e} = r_{dk,i} d\mathbf{Y}_{\mathbf{d}1k,i}^{+e} + d\mathbf{Y}_{\mathbf{d}1k,i}^{+ed} \quad (14.5)$$

$r_{dk,i}$ est calculé en deux fois, selon la méthode de Nayak et Zienkiewicz [144]. $d\mathbf{Y}_{\mathbf{d}1k,i}^{+ed}$ est calculé itérativement en raison de la relation non linéaire qui contrôle sa dépendance vis-à-vis des variables d'état (équations 5.147 et 5.148).

- Si $f_{dk,i}^0 = f_d \left(\mathbf{Y}_{\mathbf{d}1k,i-1}^{+e}, \boldsymbol{\Omega}_{k,i-1} \right) \geq 0$, l'élément était déjà dans le domaine fragile à l'itération précédente et $r_{dk,i}^{(1)} = 0$.
- Sinon, l'élément s'endommage pour la première fois pendant l'itération courante et :

$$r_{dk,i}^{(1)} = - \frac{f_{dk,i}^0}{f_{dk,i}^{(1)} - f_{dk,i}^0} \quad (14.6)$$

La surface de charge est actualisée : $f_d^{(2)}{}_{k,i} = f_d \left(\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i-1}^+ + r_d^{(1)}{}_{k,i} d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+e}, \boldsymbol{\Omega}_{k,i-1} \right)$.

Si $r_d^{(1)}{}_{k,i} \neq 0$, autrement dit si on a besoin de faire une interpolation, le facteur de retour à la surface de charge d'ordre 2 est calculé comme suit :

$$r_d^{(2)}{}_{k,i} = r_d^{(1)}{}_{k,i} - \frac{\partial f_d^{(2)}{}_{k,i}}{\partial \mathbf{Y}_{\mathbf{d1}}^+} \cdot d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+e} \quad (14.7)$$

On actualise alors la contrainte associée à l'endommagement :

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^+ = \mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i-1}^+ + r_d^{(2)}{}_{k,i} d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+e} \quad (14.8)$$

4. Détermination de l'incrément de contrainte associée à l'endommagement $d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^+$ par un calcul itératif.

Subroutine rdgu.

Pour calculer l'incrément de contrainte non élastique associée à l'endommagement $d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+ed}$ (équation 14.5), on applique la méthode de Newton-Raphson modifiée à la formule itérative suivante (équations 5.147 et 5.148) :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}{}_{k,i} : \Delta \left(d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}}^{+ed} \right)_{k,i,j} = \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{d}k,i,j-1} \quad (14.9)$$

(a) Pour initialiser le résidu, on suppose que

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^+ = \mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+e} = \mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i-1}^+ + d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+e} \quad (14.10)$$

Si bien que, d'après l'équation 14.5 :

$$d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+ed} = \left(1 - r_d^{(2)}{}_{k,i} \right) d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+e} \quad (14.11)$$

Donc on initialise le résidu comme suit :

$$\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{d}k,i,0} = \left(1 - r_d^{(2)}{}_{k,i} \right) d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+e} \quad (14.12)$$

avec :

$$\Delta \left(d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}}^{+ed} \right)_{k,i,j} = \mathbf{0} \quad (14.13)$$

(b) Les calculs suivants sont réalisés à chaque itération (k,i,j) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \left(d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}}^{+ed} \right)_{k,i,j} = \mathbf{D}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}{}_{k,i}^{-1} : \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{d}k,i,j-1} \\ \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{d}k,i,j} = \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{d}k,i,j-1} - \Delta \left(d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}}^{+ed} \right)_{k,i,j} \\ d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i,j}^{+ed} = d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i,j-1}^{+ed} + \Delta \left(d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}}^{+ed} \right)_{k,i,j} \end{array} \right. \quad (14.14)$$

- (c) Un double test de convergence est pratiqué. Les deux rapports qui servent de critère sont les suivants (**subroutine converdg**) :

$$\frac{\| \Psi_{\mathbf{d}k,i,j} \|}{\| \Psi_{\mathbf{d}k,i,0} \|}, \quad \frac{\| \Delta \left(d\mathbf{Y}_{\mathbf{d}\mathbf{1}}^{+ ed} \right)_{k,i,j} \|}{\| d\mathbf{Y}_{\mathbf{d}\mathbf{1}k,i,j-1}^{+ ed} \|} \quad (14.15)$$

Si les critères de convergence 14.15 sont satisfaits, on passe à l'étape de calcul 5. Sinon, on refait les calculs 14.14.

5. Mise à jour des déformations, avec l'endommagement actualisé.

Subroutine rdgu.

- Actualisation de la contrainte associée à l'endommagement :

$$\begin{cases} d\mathbf{Y}_{\mathbf{d}\mathbf{1}k,i}^{+} = r_{d\ k,i}^{(2)} d\mathbf{Y}_{\mathbf{d}\mathbf{1}k,i}^{+ e} + d\mathbf{Y}_{\mathbf{d}\mathbf{1}k,i}^{+ ed} \\ \mathbf{Y}_{\mathbf{d}\mathbf{1}k,i}^{+} = \mathbf{Y}_{\mathbf{d}\mathbf{1}k,i-1}^{+} + d\mathbf{Y}_{\mathbf{d}\mathbf{1}k,i}^{+} \end{cases} \quad (14.16)$$

où $d\mathbf{Y}_{\mathbf{d}\mathbf{1}k,i}^{+ ed}$ est la solution convergée du calcul itératif précédent.

- Le multiplicateur fragile et l'incrément d'endommagement sont calculés par application de la règle d'écoulement associée (équations 5.64 et 5.65). Le multiplicateur fragile est stocké dynamiquement à cette étape du calcul. L'endommagement total et les rigidités dégradées sont actualisés.
- Calcul des déformations inélastiques incrémentales (équations 5.71), actualisation et stockage des déformations inélastiques cumulées :

$$\begin{cases} d\epsilon_{\mathbf{M}k,i}^d = \mathbf{D}_{\mathbf{dM}k,i} : d\Omega_{k,i} \\ d\epsilon_{Svk,i}^d = \mathbf{D}_{\mathbf{dS}k,i} : d\Omega_{k,i} \\ d\epsilon_{Tvk,i}^d = \mathbf{D}_{\mathbf{dT}k,i} : d\Omega_{k,i} \end{cases} \quad (14.17)$$

- Calcul des incréments des composantes élastiques du tenseur de déformations (équations 4.53) :

$$\begin{cases} d\epsilon_{Svk,i}^e = \frac{1}{\beta_s(\mathbf{d}\Omega_{k,i})} ds_{k,i} \\ d\epsilon_{Tvk,i}^e = \frac{1}{\beta_T(\mathbf{d}\Omega_{k,i})} dT_{k,i} \\ d\epsilon_{\mathbf{M}k,i}^e = d\epsilon_{k,i} - d\epsilon_{\mathbf{M}k,i}^d - \frac{1}{3}d\epsilon_{Svk,i}^d - \frac{1}{3}d\epsilon_{Tvk,i}^d - \frac{1}{3}d\epsilon_{Svk,i}^e - \frac{1}{3}d\epsilon_{Tvk,i}^e \end{cases} \quad (14.18)$$

- Calcul des composantes incrémentales du tenseur de déformations :

$$\begin{cases} d\epsilon_{\mathbf{M}k,i} = d\epsilon_{\mathbf{M}k,i}^e + d\epsilon_{\mathbf{M}k,i}^d \\ d\epsilon_{Svk,i} = d\epsilon_{Svk,i}^e + d\epsilon_{Svk,i}^d \\ d\epsilon_{Tvk,i} = d\epsilon_{Tvk,i}^e + d\epsilon_{Tvk,i}^d \end{cases} \quad (14.19)$$

- Actualisation du tenseur de déformations cumulées ($\epsilon_{k,i}$) et de ses composantes $\epsilon_{\mathbf{M}k,i}$, $\epsilon_{Svk,i}$ et $\epsilon_{Tvk,i}$.

6. Mise à jour des contraintes, avec l'endommagement et les déformations actualisées.

Subroutine rdgu.

Après actualisation des rigidités endommagées, qui dépendent des déformations cumulées, l'incrément de contrainte nettes est calculé :

$$d\sigma''_{k,i} = \mathbf{D}_{edk,i} : d\epsilon_{k,i} - \mathbf{F}_{\mathbf{s}}^{\text{ed}}{}_{k,i} ds_{k,i} - \mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{\text{ed}*}{}_{k,i} dT_{k,i} \quad (14.20)$$

L'incrément de contrainte totale $d\sigma_{k,i}$ est ensuite mis à jour, puis la contrainte totale $\sigma_{k,i}$ est actualisée et stockée.

7. Correction de contrainte $d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+c}$.

Subroutine rdgu.

A ce stade, la fonction de charge actualisée avec la contrainte associée à l'endommagement obtenue après convergence $f_d^{(3)}{}_{k,i}(\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^+, \boldsymbol{\Omega}_{k,i})$ ne vaut pas toujours exactement zéro. Pour réduire cette erreur numérique, on pratique une correction de contraintes, en suivant la méthode mise au point par Nayak et Zienkiewicz [144]. Les auteurs annulent l'erreur du premier ordre en ajoutant un terme correctif à la contrainte actualisée à la fin de la boucle itérative. Avec le modèle THHMD, ce terme correctif prend la forme suivante :

$$d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+c} = - \frac{\partial f_d^{(3)}{}_{k,i}}{\partial \mathbf{Y}_{\mathbf{d1}}^+} \frac{f_d^{(3)}{}_{k,i}}{\left(\frac{\partial f_d^{(3)}{}_{k,i}}{\partial \mathbf{Y}_{\mathbf{d1}}^+} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial f_d^{(3)}{}_{k,i}}{\partial \mathbf{Y}_{\mathbf{d1}}^+} \right)} \quad (14.21)$$

La contrainte associée à l'endommagement est finalement actualisée :

$$\begin{cases} d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^+ = d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^+ + d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+c} \\ \mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^+ = \mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^+ + d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+c} \end{cases} \quad (14.22)$$

La fonction de charge et le module fragile $H_{dk,i}$ sont actualisés en conséquence, et stockés dynamiquement.

8. Actualisation de toutes les variables stockées dynamiquement.

Subroutine update.

Les valeurs des variables de contrainte et de déformation calculées pour chaque élément sont actualisées à l'échelle du modèle maillé :

- contraintes totales $\sigma_{k,i}$, température $T_{k,i}$, succion $s_{k,i}$ et pression d'air $p_{ak,i}$ élémentaires dans [sig4u] ;
- déformations totales $\epsilon_{k,i}$ et composantes des déformations $\epsilon_{\mathbf{M}k,i}$, $\epsilon_{Svk,i}$ et $\epsilon_{Tvk,i}$ dans [epsv4u] et [epsx4u] respectivement ;
- contrainte associée à l'endommagement $\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^+$ dans [yd14u] ;
- endommagement $\boldsymbol{\Omega}_{k,i}$ dans [dam4u].

9. **Calcul du résidu $\Psi_{k,i}$ utilisé dans la méthode de Newton-Raphson modifiée.**

Subroutine residu.

Voir le chapitre 15 pour les détails du calcul du résidu $\Psi_{k,i}$.

10. **Test de convergence.**

Subroutine conver.

Un double test de convergence est pratiqué. Les deux quotients qui servent de critère sont les suivants :

$$\frac{\|\Psi_{k,i}\|}{\|\Psi_{k,0}\|}, \quad \frac{\|d\mathbf{U}_{k,i}\|}{\|\mathbf{U}_{k,i-1}\|} \quad (14.23)$$

où le résidu initial $\Psi_{k,0}$ désigne le vecteur des forces nodales appliquées par l'environnement extérieur au système, et où $\mathbf{U}_{k,i}$ désigne le vecteur des degrés de liberté (déplacements, pressions interstitielles et température). Si les critères de convergence 14.23 sont satisfaits, sort de la boucle itérative, et on passe à l'incrément de chargement $k+1$. Sinon, le vecteur résidu est actualisé dans l'équation d'équilibre, un nouveau vecteur de degrés de liberté est obtenu par inversion de la matrice de rigidité, et on revient à l'étape 1.

Les principales différences entre un algorithme typique des modèles élasto-plastiques et l'algorithme adopté pour le modèle THHMD sont résumées dans le tableau 14.1. Les trois dernières étapes du processus itératif sont similaires pour les deux schémas comparés, et ne figurent pas dans le tableau.

TABLE 14.1 – Comparaison de l’algorithme de résolution du modèle THHMD avec un algorithme « classique » typique d’un modèle élasto-plastique. Incrément de chargement k , itération i .

Etape de l’algorithme	Elastoplasticité	THHMD
1. “Trial stresses”	$\sigma_{k,i} = \sigma_{k,i-1} + d\sigma_{k,i}^e$	$\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^+ = \mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i-1}^+ + d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+e}$
2. Test de réversibilité	$f_p^{(1)}{}_{k,i} = f_p(\sigma_{k,i}, \epsilon_{k,i}^{\mathbf{P}})$	$f_d^{(1)}{}_{k,i} = f_d(\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^+, \Omega_{k,i-1})$
3. “Scaling back”	$d\sigma_{k,i} = r_{pk,i} d\sigma_{k,i}^e$	$d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^+ = r_{dk,i} d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+e}$
4. Incrément de contrainte inélastique	$d\sigma_{k,i}^{\mathbf{ep}} = (r_{pk,i}) \mathbf{D}^{\mathbf{ep}}{}_{k,i} : d\epsilon_{k,i}$	$d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+ed}$ est la solution convergée de : $\Delta \left(d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}}^{+ed} \right)_{k,i,j} = \mathbf{D}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}k,i}^{-1} : \Psi_{\mathbf{d}k,i,j-1}$ $\Psi_{\mathbf{d}k,i,j} = \Psi_{\mathbf{d}k,i,j-1} - \Delta \left(d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}}^{+ed} \right)_{k,i,j}$ $d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i,j}^{+ed} = d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i,j-1}^{+ed} + \Delta \left(d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}}^{+ed} \right)_{k,i,j}$
5. Actualisation des déformations	$d\epsilon_{k,i}^{\mathbf{P}}$ est calculé avec $\sigma_{k,i} = \sigma_{k,i-1} + r_{pk,i} d\sigma_{k,i}^e + d\sigma_{k,i}^{\mathbf{ep}}$	$d\Omega_{k,i}$ est calculé avec $\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^+ = \mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i-1}^+ + r_{dk,i} d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+e} + d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+ed}$ $d\epsilon_{\mathbf{M}k,i}^{\mathbf{d}} = \mathbf{D}_{\mathbf{dM}k,i} : d\Omega_{k,i}$ $d\epsilon_{\mathbf{S}vk,i}^{\mathbf{d}} = \mathbf{D}_{\mathbf{dS}k,i} : d\Omega_{k,i}$ $d\epsilon_{\mathbf{T}vk,i}^{\mathbf{d}} = \mathbf{D}_{\mathbf{dT}k,i} : d\Omega_{k,i}$
6. Actualisation des contraintes	déjà fait	$d\sigma_{k,i}^{\mathbf{ed}} = \mathbf{D}_{\mathbf{ed}}(\Omega_{k,i}, \epsilon_{\mathbf{M}k,i}, \epsilon_{\mathbf{S}vk,i}, \epsilon_{\mathbf{T}vk,i}) : d\epsilon_{k,i}$ $- \mathbf{F}_{\mathbf{S}}^{\mathbf{ed}}(\Omega_{k,i}, \epsilon_{\mathbf{M}k,i}, \epsilon_{\mathbf{S}vk,i}, \epsilon_{\mathbf{T}vk,i}) ds_{k,i}$ $- \mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{*\mathbf{ed}}(\Omega_{k,i}, \epsilon_{\mathbf{M}k,i}, \epsilon_{\mathbf{S}vk,i}, \epsilon_{\mathbf{T}vk,i}) dT_{k,i}$
7. Correction de contraintes	$\sigma_{k,i} = \sigma_{k,i} + d\sigma_{k,i}^c$	$\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^+ = \mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^+ + d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}k,i}^{+c}$

CHAPITRE 15

Principe de calcul du résidu pour le modèle THMD

Pendant un incrément de chargement (loadstep), entre les instants t_k et t_{k+1} , l'équation d'équilibre matricielle prend la forme (équation 15.1) :

$$\begin{bmatrix} R_{uu} & R_{uT} & R_{uw} & R_{ua} \\ C_{Tu} & C_{TT} + \theta\Delta t K_{TT} & C_{Tw} + \theta\Delta t K_{Tw} & C_{Ta} + \theta\Delta t K_{Ta} \\ C_{wu} & C_{wT} + \theta\Delta t K_{wT} & C_{ww} + \theta\Delta t K_{ww} & C_{wa} + \theta\Delta t K_{wa} \\ C_{au} & C_{aT} + \theta\Delta t K_{aT} & C_{aw} + \theta\Delta t K_{aw} & C_{aa} + \theta\Delta t K_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \Delta T \\ \Delta p_w \\ \Delta p_a \end{Bmatrix}_{k \rightarrow k+1} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F}_\sigma \\ \theta\Delta t \Delta F_T \\ \theta\Delta t \Delta F_w \\ \theta\Delta t \Delta F_a \end{Bmatrix}_{k \rightarrow k+1} + \Delta t \begin{Bmatrix} 0 \\ F_T \\ F_w \\ F_a \end{Bmatrix}_k - \Delta t \begin{Bmatrix} 0 \\ [K_{TT}]\{T\}_k + [K_{Tw}]\{p_w\}_k + [K_{Ta}]\{p_a\}_k \\ [K_{wT}]\{T\}_k + [K_{ww}]\{p_w\}_k + [K_{wa}]\{p_a\}_k \\ [K_{aT}]\{T\}_k + [K_{aw}]\{p_w\}_k + [K_{aa}]\{p_a\}_k \end{Bmatrix} \quad (15.1)$$

Si le comportement est non linéaire, on calcule le membre de gauche de l'équation 15.1 par un processus itératif. Le membre de droite de l'équation 15.1 n'est pas affecté. A l'itération i de l'incrément courant (entre t_k et t_{k+1}), l'équation d'équilibre s'écrit donc :

$$\sum_{j=2}^i \left(\begin{bmatrix} R_{uu} & R_{uT} & R_{uw} & R_{ua} \\ C_{Tu} & C_{TT} + \theta\Delta t K_{TT} & C_{Tw} + \theta\Delta t K_{Tw} & C_{Ta} + \theta\Delta t K_{Ta} \\ C_{wu} & C_{wT} + \theta\Delta t K_{wT} & C_{ww} + \theta\Delta t K_{ww} & C_{wa} + \theta\Delta t K_{wa} \\ C_{au} & C_{aT} + \theta\Delta t K_{aT} & C_{aw} + \theta\Delta t K_{aw} & C_{aa} + \theta\Delta t K_{aa} \end{bmatrix}_{k,j} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \Delta T \\ \Delta p_w \\ \Delta p_a \end{Bmatrix}_{k,j-1 \rightarrow j} \right) = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F}_\sigma \\ \theta\Delta t \Delta F_T \\ \theta\Delta t \Delta F_w \\ \theta\Delta t \Delta F_a \end{Bmatrix}_{k \rightarrow k+1} + \Delta t \begin{Bmatrix} 0 \\ F_T \\ F_w \\ F_a \end{Bmatrix}_k - \Delta t \begin{Bmatrix} 0 \\ [K_{TT}]\{T\}_k + [K_{Tw}]\{p_w\}_k + [K_{Ta}]\{p_a\}_k \\ [K_{wT}]\{T\}_k + [K_{ww}]\{p_w\}_k + [K_{wa}]\{p_a\}_k \\ [K_{aT}]\{T\}_k + [K_{aw}]\{p_w\}_k + [K_{aa}]\{p_a\}_k \end{Bmatrix} \quad (15.2)$$

Le calcul itératif effectué dans l'équation 15.2 n'est pas exact. Le résidu mesure la différence entre la solution exacte et la solution obtenue par itérations successives. A l'itération i , le résidu $\{\Psi\}_{k,i}$ est donc par définition :

$$\begin{aligned} \{\Psi\}_{k,i} = & \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F}_\sigma \\ \theta\Delta t \Delta F_T \\ \theta\Delta t \Delta F_w \\ \theta\Delta t \Delta F_a \end{Bmatrix}_{k \rightarrow k+1} + \Delta t \begin{Bmatrix} 0 \\ F_T \\ F_w \\ F_a \end{Bmatrix}_k - \Delta t \begin{Bmatrix} 0 \\ [K_{TT}]\{T\}_k + [K_{Tw}]\{p_w\}_k + [K_{Ta}]\{p_a\}_k \\ [K_{wT}]\{T\}_k + [K_{ww}]\{p_w\}_k + [K_{wa}]\{p_a\}_k \\ [K_{aT}]\{T\}_k + [K_{aw}]\{p_w\}_k + [K_{aa}]\{p_a\}_k \end{Bmatrix} \\ & - \sum_{j=2}^i \left(\begin{bmatrix} R_{uu} & R_{uT} & R_{uw} & R_{ua} \\ C_{Tu} & C_{TT} + \theta\Delta t K_{TT} & C_{Tw} + \theta\Delta t K_{Tw} & C_{Ta} + \theta\Delta t K_{Ta} \\ C_{wu} & C_{wT} + \theta\Delta t K_{wT} & C_{ww} + \theta\Delta t K_{ww} & C_{wa} + \theta\Delta t K_{wa} \\ C_{au} & C_{aT} + \theta\Delta t K_{aT} & C_{aw} + \theta\Delta t K_{aw} & C_{aa} + \theta\Delta t K_{aa} \end{bmatrix}_{k,j} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \Delta T \\ \Delta p_w \\ \Delta p_a \end{Bmatrix}_{k,j-1 \rightarrow j} \right) \end{aligned} \quad (15.3)$$

Dans Θ -Stock, on utilise la méthode de Newton-Raphson modifiée (avec matrice de rigidité initiale) :

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \Delta T \\ \Delta p_w \\ \Delta p_a \end{Bmatrix}_{k,i \rightarrow i+1} = \begin{bmatrix} R_{uu} & R_{uT} & R_{uw} & R_{ua} \\ C_{Tu} & C_{TT} + \theta\Delta t K_{TT} & C_{Tw} + \theta\Delta t K_{Tw} & C_{Ta} + \theta\Delta t K_{Ta} \\ C_{wu} & C_{wT} + \theta\Delta t K_{wT} & C_{ww} + \theta\Delta t K_{ww} & C_{wa} + \theta\Delta t K_{wa} \\ C_{au} & C_{aT} + \theta\Delta t K_{aT} & C_{aw} + \theta\Delta t K_{aw} & C_{aa} + \theta\Delta t K_{aa} \end{bmatrix}_{k,1}^{-1} \{\Psi\}_{k,i} \quad (15.4)$$

Dans la suite, on adopte les notations suivantes :

$$[Krigi]_{k,i} = \begin{bmatrix} R_{uu} & R_{uT} & R_{uw} & R_{ua} \\ C_{Tu} & C_{TT} + \theta\Delta t K_{TT} & C_{Tw} + \theta\Delta t K_{Tw} & C_{Ta} + \theta\Delta t K_{Ta} \\ C_{wu} & C_{wT} + \theta\Delta t K_{wT} & C_{ww} + \theta\Delta t K_{ww} & C_{wa} + \theta\Delta t K_{wa} \\ C_{au} & C_{aT} + \theta\Delta t K_{aT} & C_{aw} + \theta\Delta t K_{aw} & C_{aa} + \theta\Delta t K_{aa} \end{bmatrix}_{k,i} \quad (15.5)$$

$$[K_TWA]_{k,i} = \begin{bmatrix} C_{Tu} & C_{TT} + \theta\Delta t K_{TT} & C_{Tw} + \theta\Delta t K_{Tw} & C_{Ta} + \theta\Delta t K_{Ta} \\ C_{wu} & C_{wT} + \theta\Delta t K_{wT} & C_{ww} + \theta\Delta t K_{ww} & C_{wa} + \theta\Delta t K_{wa} \\ C_{au} & C_{aT} + \theta\Delta t K_{aT} & C_{aw} + \theta\Delta t K_{aw} & C_{aa} + \theta\Delta t K_{aa} \end{bmatrix}_{k,i} \quad (15.6)$$

$$\{\Delta d d l\}_{k,i} = \begin{Bmatrix} \Delta U \\ \Delta T \\ \Delta p_w \\ \Delta p_a \end{Bmatrix}_{k,i-1 \rightarrow i} \quad (15.7)$$

$$\{\Delta \Psi\}_{k,i} = -[K r i g i]_{k,i} \{\Delta d d l\}_{k,i} \quad (15.8)$$

$$\{F_{ext}\}_k = \begin{Bmatrix} \Delta F_\sigma \\ \theta \Delta t \Delta F_T \\ \theta \Delta t \Delta F_w \\ \theta \Delta t \Delta F_a \end{Bmatrix}_{k \rightarrow k+1} + \Delta t \begin{Bmatrix} 0 \\ F_T \\ F_w \\ F_a \end{Bmatrix}_k \quad (15.9)$$

$\{F_{ext}\}_k$ comporte un terme relatif aux forces extérieures imposées ($\{rr\}_k$) et un terme relatif aux contributions des flux gravitationnels d'eau liquide, de vapeur et d'air gazeux ($\sum_{elt} \{q_e\}_k$) :

$$\{F_{ext}\}_k = \{rr\}_k + \sum_{elt} \{q_e\}_k \quad (15.10)$$

La contribution des perméabilités est notée :

$$\{F_{cond}\}_k = -\Delta t \begin{Bmatrix} 0 \\ [K_{TT}]\{T\}_k + [K_{Tw}]\{p_w\}_k + [K_{Ta}]\{p_a\}_k \\ [K_{wT}]\{T\}_k + [K_{ww}]\{p_w\}_k + [K_{wa}]\{p_a\}_k \\ [K_{aT}]\{T\}_k + [K_{aw}]\{p_w\}_k + [K_{aa}]\{p_a\}_k \end{Bmatrix} \quad (15.11)$$

L'algorithme programmé dans Θ -Stock pour le comportement THHMD est le suivant :

1. **subroutine lstp** : si $iter = 1$, calcul des forces extérieures imposées, et stockage dans le vecteur résidu ($\{r\}_{k,i}$) :

$$\{r\}_{k,1} = \{rr\}_k \quad (15.12)$$

2. **subroutine stiff** :

– si $iter = 1$:

- Calcul de la matrice de rigidité. Triple stockage. Les coefficients de la matrice $[K_{TWA}]_{k,1}$ sont stockés dans $[rig4u](34, ne4u1)$. $[K r i g i]_{k,1}$ est stockée dans $\{s1\}(ls)$ et $\{s2\}(ls1)$; $\{s1\}(ls)$ et $\{s2\}(ls1)$ sont sauvegardés dans $\{s3\}(ls)$ et $\{s4\}(ls1)$ respectivement :

$$\{s3\}_{k,1} = \{s1\}_{k,1}, \quad \{s4\}_{k,1} = \{s2\}_{k,1} \quad (15.13)$$

- Calcul des contributions des flux gravitationnels et des perméabilités au vecteur force :

$$\{r\}_{k,1} = \{r\}_{k,1} + \sum_{elt} \{q_e\}_k + \{q_{cond}\}_k \quad (15.14)$$

Double stockage du résidu :

$$\{residu\}_{k,1} = \{r\}_{k,1} \quad (15.15)$$

- si $iter > 1$: Actualisation des coefficients de $[K_{TWA}]_{k,i}$ et stockage dans $[rig4u](34, ne4u1)$. Par mesure de sécurité, restockage des coefficients de la matrice de rigidité initiale dans $\{s1\}(ls)$ et $\{s2\}(ls1)$, avant l'inversion :

$$\{s1\}_{k,i} = \{s3\}_{k,1}, \quad \{s2\}_{k,i} = \{s4\}_{k,1} \quad (15.16)$$

3. **subroutine solve** : l'équation 15.4 est résolue avec $\{r\}_{k,i-1}$, $\{s1\}(ls)$ et $\{s2\}(ls1)$. $\{s1\}(ls)$ et $\{s2\}(ls1)$ sont altérées (processus de calcul destructif). La solution est stockée dans $\{r\}_{k,i}$ (méthode de substitution) :

$$\{r\}_{k,i} = \{\Delta d d l\}_{k,i} \quad (15.17)$$

4. **subroutine caldi** : la solution de l'équation 15.4 est stockée dans $\{di\}_{k,i}$, $\{r\}_{k,i}$ est mis à 0 et $\{s1\}(ls)$ et $\{s2\}(ls1)$ sont restaurées :

$$\{di\}_{k,i} = \{r\}_{k,i} \quad (15.18)$$

$$\{r\}_{k,i} = \{0\} \quad (15.19)$$

$$\{s1\}_{k,i} = \{s3\}_{k,1}, \quad \{s2\}_{k,i} = \{s4\}_{k,1} \quad (15.20)$$

5. **subroutine residu** : calcul de l'incrément du vecteur résidu, et actualisation du résidu :

$$\{\Psi\}_{k,i} = \{\Psi\}_{k,i-1} + \{\Delta\Psi\}_{k,i}, \quad \{\Delta\Psi\}_{k,i} = -[Krigi]_{k,i} \{\Delta ddl\}_{k,i} \quad (15.21)$$

A l'itération 1, $\{\Delta\Psi\}_{k,i-1} = \{\Delta\Psi\}_{k,1}$ (calculé dans **stiff**). Dans l'algorithme, l'équation 15.21 prend la forme :

$$\{residu\}_{k,i} = \{residu\}_{k,i-1} + \sum_{elt} \{ra\}_{k,i}^e \quad (15.22)$$

où :

$$\{ra\}_{k,i}^e = \left\{ \begin{array}{l} \int_{V_e} [B]^T \{\Delta\sigma\} dV \\ [K_{TWA}]^e \{\Delta ddl\}^e \end{array} \right\}_{k,i} \quad (15.23)$$

$\int_{V_e} [B]^T \{\Delta\sigma\} dV$ est calculé grâce à l'incrément de contrainte actualisé stocké dans $[dsig4u](8, ne4u1)$. Les coefficients de $\{\Delta ddl\}_{k,i}^e$ sont extraits de $\{di\}_{k,i}$ (calculé dans **caldi**). A ce stade, les coefficients de la matrice de rigidité partielle $[K_{TWA}]_{k,i}^e$ sont connus, car ils ont été calculés dans la subroutine **stiff**, et stockés dans $[rig4u](34, ne4u1)$. Mais l'emplacement de ces coefficients n'est pas conservé. La subroutine **stif4ures** permet de reconstituer la matrice $[K_{TWA}]_{k,i}^e$ et de calculer le produit $\{[K_{TWA}]^e \{\Delta ddl\}^e\}_{k,i}$.

Le résidu est stocké dans $\{r\}$ avant d'effectuer de nouveaux calculs :

$$\{r\}_{k,i} = \{residu\}_{k,i} \quad (15.24)$$

Cinquième partie

Validation et étude numérique avec Θ -Stock

« Que l'homme étant revenu à soi considère ce qu'il est au prix de ce qui est, qu'il se regarde comme égaré dans ce canton détourné de la nature, et que de ce petit cachot où il se trouve logé, j'entends l'univers, il apprenne à estimer la terre, les royaumes, les villes et soi-même, son juste prix. »

B. Pascal, 1656, *Pensées*, Le Livre de Poche, p.162

L'utilisation de Θ -Stock pour faire des simulations avec le modèle THHMD nécessite de considérer des modèles numériques comportant cinq degrés de liberté nodaux. Dans Θ -Stock, il est possible de déclarer certains degrés de liberté (*ddl*) comme des ddl bloqués, ce qui réduit d'emblée la taille de la matrice de rigidité. Cette option permet également de faire des simulations plus réalistes, notamment lorsque le problème qu'on cherche à reproduire numériquement n'engage pas tous les ddl. On a ainsi choisi de neutraliser :

- les ddl de pression interstitielle lorsque le milieu poreux considéré était sec ;
- les ddl de température lorsque les conditions étaient isothermes ;
- les ddl de déplacements lorsque la matrice solide était considérée comme indéformable.

La plupart des paramètres matériels sont caractéristiques d'un constituant (squelette solide, eau liquide, vapeur ou air gazeux). C'est pourquoi dans certains problèmes, l'utilisateur est amené à entrer des paramètres qui n'ont pas de sens physique mais qui sont exigés pour les besoins de la simulation numérique. C'est le cas notamment pour les simulations effectuées sur des matériaux secs ou saturés, pour lesquels il faut entrer des paramètres relatifs à la succion. Pour chaque étude numérique présentée dans la suite, l'intégralité des paramètres matériels requis est donnée sous forme de tableaux. Mais seul le choix des paramètres « physiques » a été justifié.

CHAPITRE 16

Simulations d'essais de laboratoire

16.1 Essais mécaniques sur des géomatériaux secs [93, 91, 38, 56]

16.1.1 Essais réalisés

On cherche à simuler des essais de laboratoire effectués en conditions isothermes sur des échantillons secs de granite de la Vienne [93, 91], d'argilite de l'Est [93, 38] et de grès des Vosges [56] (voir le tableau 16.1). Il s'agit de tests purement mécaniques. On a donc bloqué les degrés de liberté nodaux relatifs à la température, à la pression d'eau et à la pression d'air.

TABLE 16.1 – Essais mécaniques simulés sur des géomatériaux secs.

granite de la Vienne	compressions triaxiales : $p_c = 0MPa, p_c = 5MPa, p_c = 20MPa$ extension latérale : $p_c^{init} = 60MPa$
argilite de l'Est	compressions triaxiales : $p_c = 0MPa, p_c = 5MPa, p_c = 10MPa, p_c = 20MPa$ extension latérale : $p_c^{init} = 60MPa$ compressions triaxiales proportionnelles : $k = 2, k = 5, k = 10$
grès des Vosges	compression triaxiale, $p_c = 15MPa$

16.1.2 Choix des paramètres matériels

Les poids volumiques des grains solides sont du même ordre de grandeur pour le granite et le grès : $\gamma_s = 2.65 * 10^4 N.m^{-3}$. On affecte la masse volumique de l'argile de Boom à l'argilite de l'Est, soit $\rho_s = 2.026 * 10^3 kg.m^{-3}$, ce qui donne $\gamma_s = 1.95 * 10^4 N.m^{-3}$. Les principales caractéristiques mécaniques du granite de la Vienne ont été identifiées par Halm et Dragon [91] à partir des essais réalisés par Homand et al. [93]. Halm et Dragon assimilent le granite à un matériau fragile. La partie mécanique du modèle THHMD est proche du modèle d'endommagement proposé par Halm et Dragon, dont on reprend ici les principaux paramètres mécaniques. Les principales caractéristiques mécaniques de l'argilite de l'Est ont été identifiées par Chiarelli et Shao [91] à partir des essais réalisés par Homand et al. [93]. Chiarelli et Shao [38] ont introduit le modèle d'endommagement de Halm et Dragon [91] dans une loi de comportement élasto-plastique pour décrire l'argilite. On reprend ici les principaux paramètres mécaniques de la partie du modèle qui est relative à l'endommagement. Les principales caractéristiques mécaniques du grès des Vosges sont données par Dragon et al. [56]. La partie mécanique du modèle THHMD étant similaire au modèle d'endommagement proposé par Dragon et al., on reprend ici les principaux paramètres mécaniques fournis par les auteurs. Pour tous les géomatériaux étudiés, le paramètre de dilatance χ est choisi selon les recommandations de Shao et al. [180] : $\chi \simeq 0.005$ (pour les roches fragiles). On rappelle les formules donnant les modules mécaniques en fonction des coefficients de Lamé :

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\lambda + \mu}, \quad B = \frac{2\mu + 3\lambda}{3} \quad (16.1)$$

Pour le granite et l'argilite, l'indice des vides initial est calculé à l'aide de la porosité fournie par Homand et al. [93] : $e_0 = \frac{n}{1-n}$ avec $n \simeq 0.0035$ pour le granite, et $n \simeq 0.1184$ pour l'argilite. L'indice des vides initial du grès des Vosges est calculé de la même manière, à partir d'une

TABLE 16.2 – Paramètres mécaniques du granite de la Vienne.

Modèle élastique hyperbolique						
K_b	K_L	n	R_f	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$	K_U	m
$6.07 * 10^5$	$8.01 * 10^5$	0	0	$2 * 10^{10} Pa$	$8.01 * 10^5$	0
Paramètres d'endommagement						
χ	C_0	C_1	g_M	g_S	g_T	
0.005	$1.1 * 10^5 Pa$	$2.2 * 10^6 Pa$	$-3.3 * 10^8 Pa$	0	0	
Etat mécanique de référence						
β_s^0	β_T^0	e_0	T_0			
$6.07 * 10^{11} Pa$	$6.07 * 10^{11} Pa$	3.5110^{-3}	0			

TABLE 16.3 – Paramètres mécaniques de l'argilite de l'Est.

Modèle élastique hyperbolique						
K_b	K_L	n	R_f	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$	K_U	m
$5.98 * 10^4$	$1.22 * 10^5$	0	0	$2 * 10^{10} Pa$	$1.22 * 10^5$	0
Paramètres d'endommagement						
χ	C_0	C_1	g_M	g_S	g_T	
0.005	$2.3 * 10^{-4} Pa$	$5.2 * 10^{-3} Pa$	$-1.414 Pa$	0	0	
Etat mécanique de référence						
β_s^0	β_T^0	e_0	T_0			
$5.98 * 10^{10} Pa$	$5.98 * 10^{10} Pa$	0.1343	0			

porosité usuelle de 0.21 [184]. Les paramètres mécaniques du granite, de l'argilite et du grès sont donnés dans les tableaux 16.2, 16.3 et 16.4 respectivement. Les autres paramètres matériels utilisés pour faire les simulations avec Θ -Stock sont donnés dans les tableaux 16.5, 16.6, 16.7 et 16.8.

16.1.3 Maillage et conditions aux limites

Les échantillons utilisés pour les essais mécaniques simulés sont cylindriques (40mm de diamètre, 40mm de hauteur). Compte-tenu de la géométrie et du chargement dans les problèmes étudiés, on se place dans une configuration axisymétrique. On modélise la moitié de l'échantillon testé, à l'aide d'un maillage comportant 8 éléments et 15 noeuds (figure 16.1). Les degrés de liberté nodaux relatifs aux températures et aux pressions interstitielles sont bloqués, donc il n'y a que les conditions aux limites mécaniques à déterminer. Pour tous les essais simulés, les déplacements radiaux sont bloqués sur l'axe et les déplacements verticaux sont bloqués à la base (bord inférieur). Sur les autres frontières du modèle, les conditions aux limites dépendent de l'essai modélisé :

- *essais de compression triaxiale* : pendant la phase de confinement, une compression ($\Delta\sigma < 0$) est exercée sur les bords supérieur et latéral ; pendant la phase de compression, le confinement est maintenu sur la frontière latérale ($\Delta\sigma = 0$), et une compression est exercée en tête de l'échantillon ;

TABLE 16.4 – Paramètres mécaniques du grès des Vosges.

Modèle élastique hyperbolique						
K_b	K_L	n	R_f	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$	K_U	m
$6.5 * 10^4$	$1.17 * 10^5$	0	0	$2 * 10^{10} Pa$	$1.17 * 10^5$	0
Paramètres d'endommagement						
χ	C_0	C_1	g_M	g_S	g_T	
0.005	$2 * 10^4 Pa$	$2.7 * 10^5 Pa$	$-3.2 * 10^7 Pa$	0	0	
Etat mécanique de référence						
β_s^0	β_T^0	e_0	T_0			
$6.5 * 10^{10} Pa$	$6.5 * 10^{10} Pa$	0.2658	0			

TABLE 16.5 – Paramètres relatifs aux fluides choisis pour le granite de la Vienne.

Courbe de rétention				
S_{w0}	$S_{w,r}$	α_{VG}	n_{VG}	d_s
1	0	$1.52 * 10^{-3} Pa^{-1}$	1.17	0
Perméabilité à l'eau liquide				
k_{w0}	α_w	k_w^{0max}	k_{wdg}^{max}	
$10^{-11} m.s^{-1}$	0	$10^{-10} m.s^{-1}$	$10^{-9} m.s^{-1}$	
Transfert des gaz				
c_a	α_a	k_a^{max}	D_{dg}^{max}	
$10^{-6} m^2$	0	$10^{-5} m.s^{-1}$	$10^{-7} m^2.s^{-1}$	

TABLE 16.6 – Paramètres relatifs aux fluides choisis pour l'argilite de l'Est.

Courbe de rétention				
S_{w0}	$S_{w,r}$	α_{VG}	n_{VG}	d_s
1	0	$1.52 * 10^{-3} Pa^{-1}$	1.17	0
Perméabilité à l'eau liquide				
k_{w0}	α_w	k_w^{0max}	k_{wdg}^{max}	
$10^{-13} m.s^{-1}$	0	$10^{-12} m.s^{-1}$	$10^{-11} m.s^{-1}$	
Transfert des gaz				
c_a	α_a	k_a^{max}	D_{dg}^{max}	
$10^{-6} m^2$	0	$10^{-5} m.s^{-1}$	$10^{-9} m^2.s^{-1}$	

TABLE 16.7 – Paramètres relatifs aux fluides pour le grès des Vosges.

Courbe de rétention				
S_{w0}	$S_{w,r}$	α_{VG}	n_{VG}	d_s
1	0	$7.9 * 10^{-3} Pa^{-1}$	10.4	0
Perméabilité à l'eau liquide				
k_{w0}	α_w	k_w^{0max}	k_{wdg}^{max}	
$3.33 * 10^{-5} m.s^{-1}$	0	$3.33 * 10^{-4} m.s^{-1}$	$3.33 * 10^{-3} m.s^{-1}$	
Transfert des gaz				
c_a	α_a	k_a^{max}	D_{dg}^{max}	
$10^{-6} m^2$	0	$10^{-5} m.s^{-1}$	$3.33 * 10^{-1} m^2.s^{-1}$	

TABLE 16.8 – Paramètres thermiques utilisés pour les essais mécaniques effectués sur des géomatériaux secs et isothermes.

Rigidité thermique intacte				
α_0^*	α_1	α_2	α_3	p_{geo}
$-10^{-5} °C^{-1}$	0	0	0	$10^{10} Pa$
Diffusion et évaporation				
λ_s	λ_w	λ_a	h_{fg}	
$1.35 W.m^{-1}.°C^{-1}$	$0.6 W.m^{-1}.°C^{-1}$	$0.0258 W.m^{-1}.°C^{-1}$	$2.5 * 10^6 J.kg^{-1}$	
Convection				
C_{Ps}	C_{Pw}	C_{Pvap}	C_{Pa}	
$800 J.kg^{-1}.°C^{-1}$	$4180 J.kg^{-1}.°C^{-1}$	$1870 J.kg^{-1}.°C^{-1}$	$1000 J.kg^{-1}.°C^{-1}$	

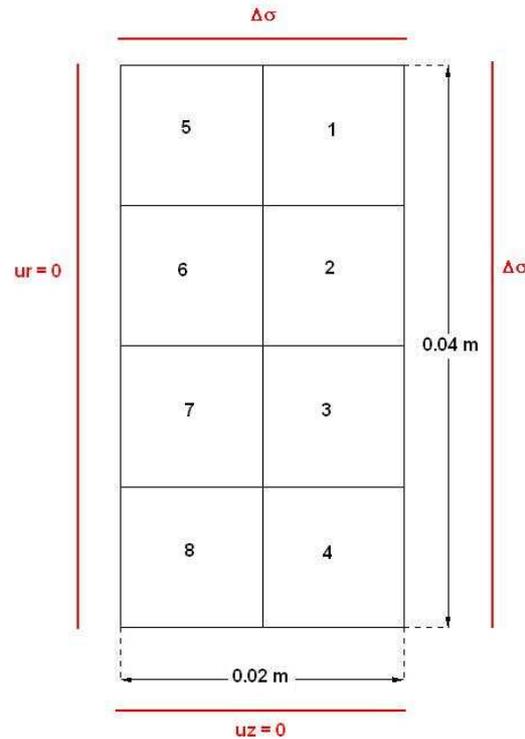


FIGURE 16.1 – Maillage et conditions aux limites adoptés pour les essais mécaniques simulés sur des géomatériaux secs.

- *essais d'extension latérale* : pendant la phase de confinement, une compression ($\Delta\sigma < 0$) est exercée sur les bords supérieur et latéral ; pendant la phase de relaxation, la pression est maintenue en tête ($\Delta\sigma = 0$), et le confinement est progressivement annulé à la frontière latérale ($\Delta\sigma > 0$) ; pour le granite, les deux phases précédentes sont séparées d'une phase de compression, pendant laquelle le confinement est maintenu sur la frontière latérale ($\Delta\sigma = 0$), et une compression est exercée en tête de l'échantillon pour atteindre le niveau de compression limite souhaité ;
- *essais de compression proportionnelle* : une pression de confinement p_c est appliquée latéralement ($\Delta\sigma < 0$), et un chargement compressif $\Delta\sigma < 0$ tel que $\Delta\sigma = k p_c$ est appliqué en tête de l'échantillon (il n'y a qu'une phase de chargement).

16.1.4 Etude du granite de la Vienne [91, 93]

Un examen rapide des résultats montre que l'échantillon de granite se déforme et s'endommage de manière homogène. Dans la suite, on représentera les résultats calculés sur l'élément 1, en haut à droite du maillage (figure 16.1). La confrontation des résultats numériques aux mesures expérimentales sur quatre essais mécaniques montre que le modèle THHMD reproduit bien le comportement mécanique du granite de la Vienne (figure 16.2). Dans les essais de compression triaxiale, l'endommagement se déclenche pour une contrainte déviatorique de 127 MPa, ce qui correspond exactement à la limite de compression mesurée expérimentalement [93]. A faible confinement, les déformations radiales inélastiques semblent légèrement surestimées dans le cas des compressions triaxiales, et légèrement sous-estimées dans le cas de l'essai d'extension latérale.

Dans le test d'extension latérale, le déconfinement met l'échantillon en traction. Des déformations

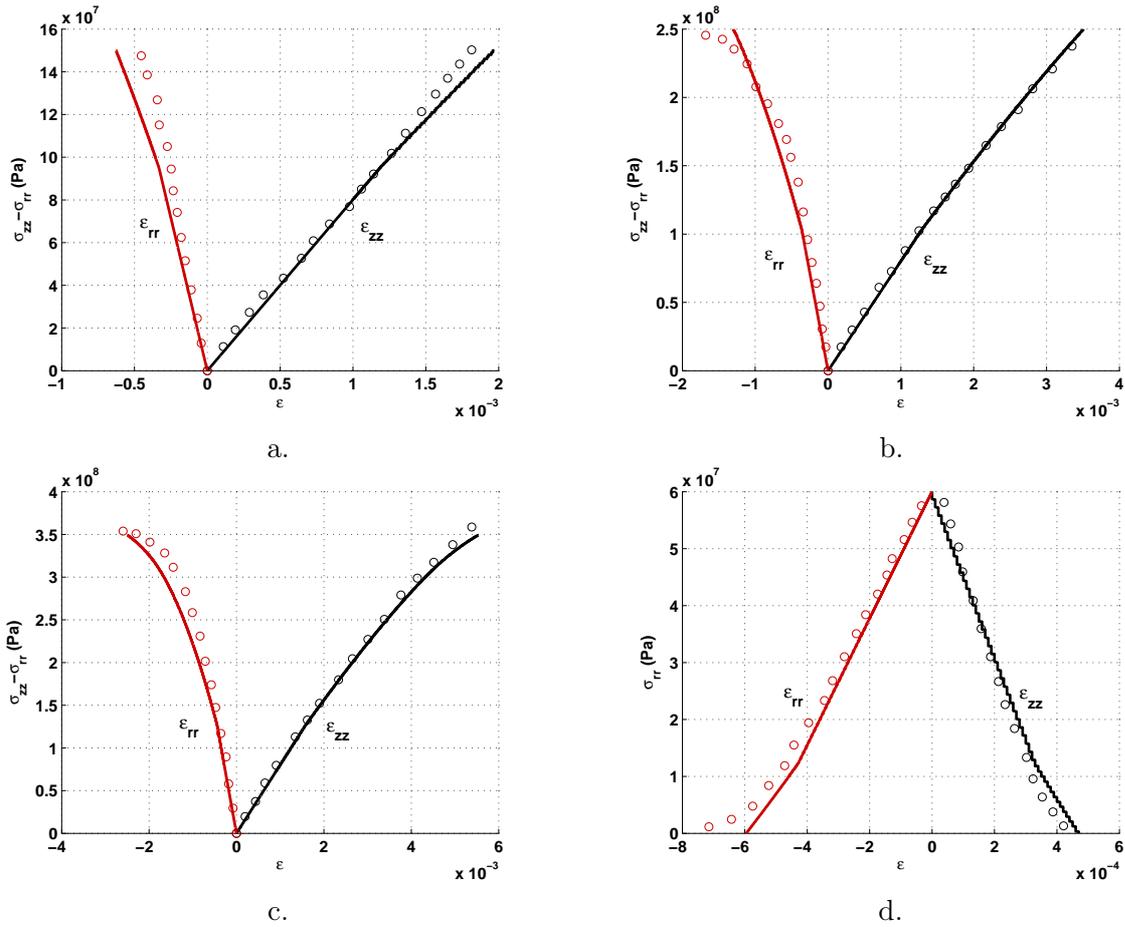


FIGURE 16.2 – Essais mécaniques sur le granite de la Vienne : comparaison des résultats numériques (lignes continues) aux mesures expérimentales (points) [93]. a. Compression triaxiale, $p_c = 0 \text{ MPa}$. b. Compression triaxiale, $p_c = 5 \text{ MPa}$. c. Compression triaxiale, $p_c = 20 \text{ MPa}$. d. Extension latérale, $p_c^{init} = 60 \text{ MPa}$.

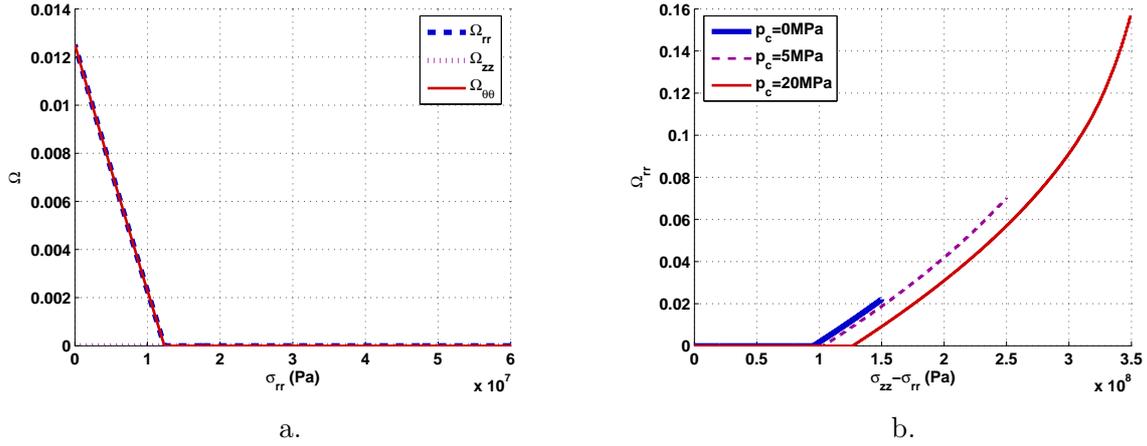


FIGURE 16.3 – Endommagement généré pendant les essais mécaniques simulés sur le granite de la Vienne. a. Essai d’extension latérale. b. Essai de compression triaxiale.

liées à la tension (ϵ^+) s’exercent dans les deux directions latérales (ϵ_{rr}^+ et $\epsilon_{\theta\theta}^+$). Dans les tests de compression triaxiale, le matériau subit des déformations liées à la tension dans les directions orthogonales à la compression subie, c’est-à-dire dans les deux directions latérales. Dans tous les cas, la composante axiale de l’endommagement reste nulle ($\Omega_{zz} = 0$), et un endommagement non nul se développe de manière identique dans les deux directions latérales ($\Omega_{rr} = \Omega_{\theta\theta} > 0$). L’évolution des trois composantes de l’endommagement pendant l’essai d’extension latérale est donné sur la figure 16.3.a. Comme $\Omega_{zz} = 0$ et $\Omega_{\theta\theta} = \Omega_{rr}$, on n’a représenté que la composante radiale de l’endommagement pour les essais de compression triaxiale (figure 16.3.b).

On étudie à présent les effets de l’endommagement sur la rigidité mécanique du granite lors de l’essai de compression triaxiale effectué avec une pression de confinement de 20 MPa. C’est l’essai pendant lequel le plus fort niveau d’endommagement a été observé (figure 16.3.a). La distribution spatiale finale des contraintes et déformations radiales, ainsi que de l’endommagement radial, est donnée sur la figure 16.4. Comme l’endommagement ne se développe pas dans la direction axiale, les coefficients de la rigidité mécanique qui sont les plus endommagés pendant l’essai de compression triaxiale sont ceux qui traduisent le comportement du matériau dans les directions latérales. Les composantes (rr,rr) , $(rr,\theta\theta)$, $(\theta\theta,\theta\theta)$ et $(\theta\theta,rr)$ sont les plus dégradées. Les coefficients mixtes (zz,rr) , $(zz,\theta\theta)$, $(\theta\theta,zz)$ et (rr,zz) sont également touchés par la croissance de l’endommagement (figure 16.5). Le tenseur de rigidité élasto-fragile (\mathbf{D}_{ed}) comporte un terme de dégradation supplémentaire par rapport au tenseur de rigidité élastique endommagé ($\mathbf{D}_e(\boldsymbol{\Omega})$), ce qui explique le saut observé dans l’évolution des composantes les plus dégradées de \mathbf{D}_{ed} (figure 16.5.b). La dégradation additionnelle est à peine perceptible sur les termes mixtes, pour lesquels $D_e(\boldsymbol{\Omega})_{ijkl} \simeq D_{edijkl}$.

16.1.5 Etude de l’argilite de l’Est [38, 93]

Comme pour le granite étudié précédemment, on choisit de présenter les résultats numériques obtenus sur l’élément 1 (figure 16.1). Dans les compressions triaxiales, les déformations sont sous-estimées par le modèle THHMD (figure 16.6). Comme dans les essais triaxiaux réalisés sur le granite, le tenseur d’endommagement comporte deux composantes latérales égales et non nulles : $\Omega_{rr} = \Omega_{\theta\theta} > 0$. La composante radiale est représentée sur la figure 16.7 pour chacun des quatre

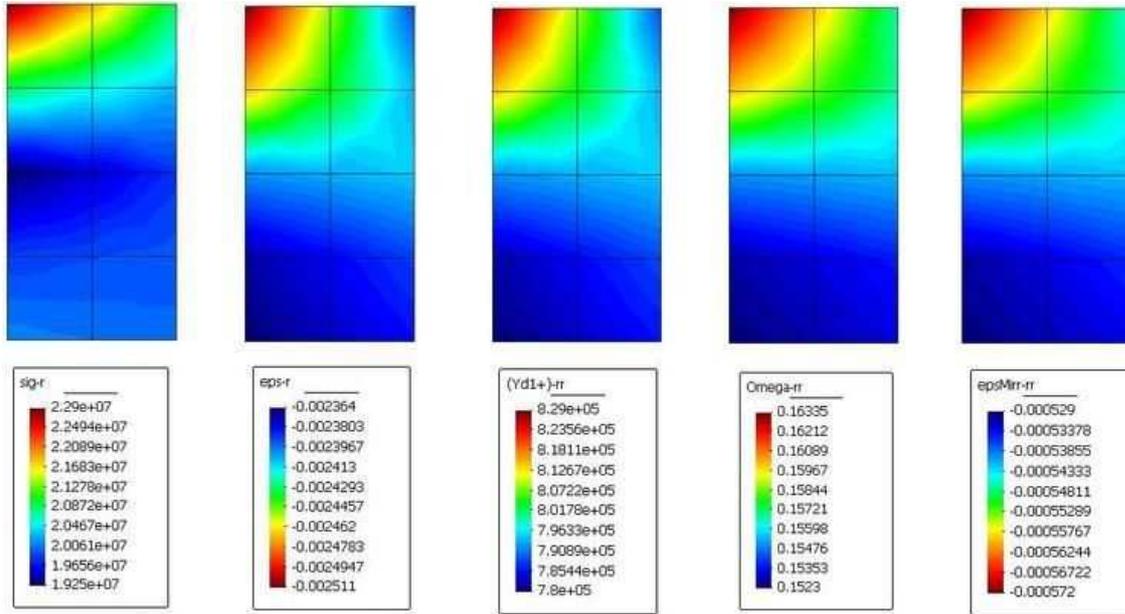


FIGURE 16.4 – Caractérisation de l'état mécanique de l'échantillon de granite de la Vienne à la fin de l'essai de compression triaxiale ($p_c = 20MPa$).

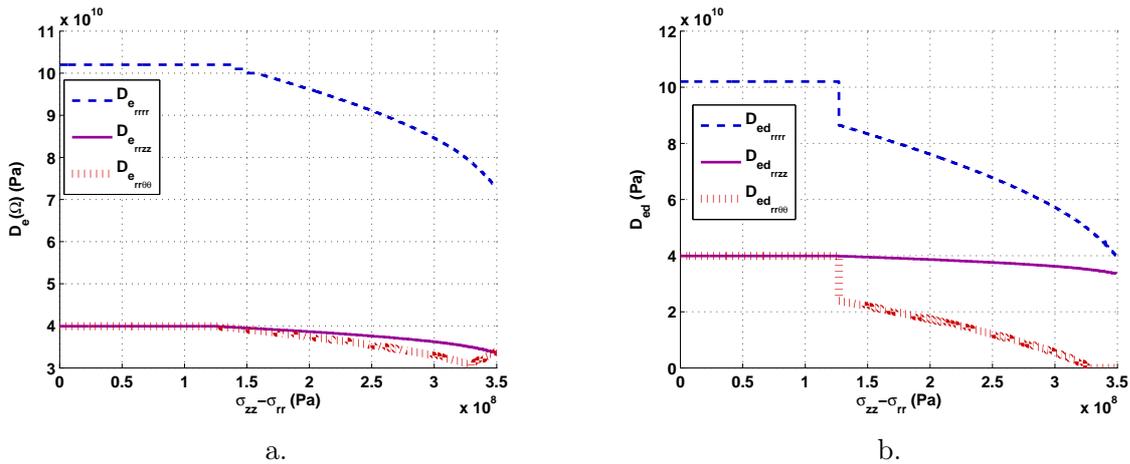


FIGURE 16.5 – Dégradation de quelques coefficients des rigidités mécaniques du granite de la Vienne pendant l'essai de compression triaxiale ($p_c = 20MPa$). a. Rigidité élastique ($D_e(\Omega)$). b. Rigidité élasto-fragile (D_{ed}).

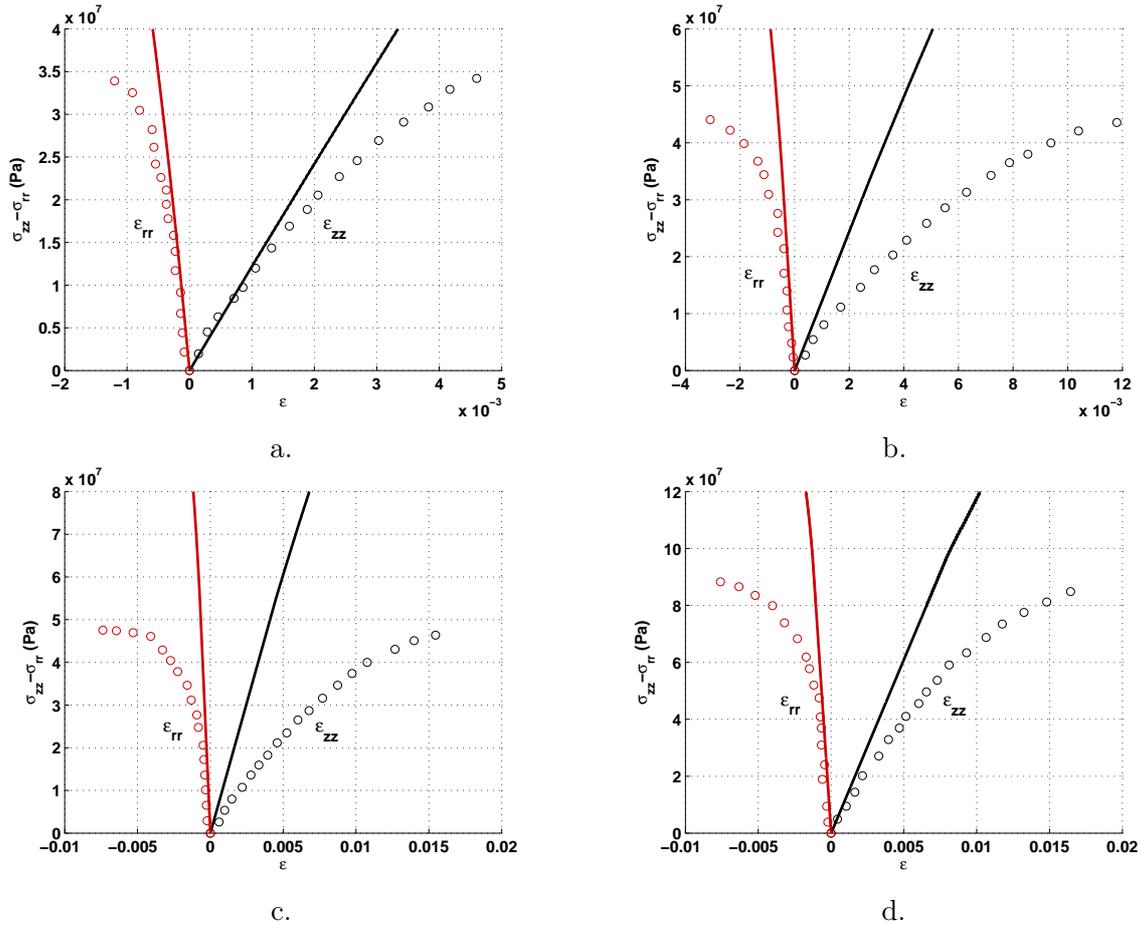


FIGURE 16.6 – Evolution des déformations lors des essais de compression triaxiale effectués sur l'argilite de l'Est (points : résultats expérimentaux ; lignes continues : résultats numériques). a. $p_c = 0 \text{ MPa}$. b. $p_c = 5 \text{ MPa}$. c. $p_c = 10 \text{ MPa}$. d. $p_c = 20 \text{ MPa}$.

essais triaxiaux. Dans les prédictions du modèle THHMD, l'endommagement se développe sous l'effet de déformations liées à la tension, et c'est pourquoi la composante axiale de l'endommagement reste nulle pendant les essais triaxiaux. Par conséquent, la déformation axiale est quasiment élastique : $\epsilon_{Mz}^d = 0$ (équation 5.70). Dans les essais, la déformation axiale mesurée semble être de l'ordre du double de la déformation axiale calculée numériquement. La déformation axiale mesurée semble donc comporter une composante dissipative qui n'est pas prise en compte dans le modèle THHMD. Cette différence systématique entre les valeurs expérimentales et numériques justifie l'utilisation d'un modèle élasto-plastique couplé au modèle d'endommagement, comme cela a été fait par Chiarelli et Shao [38]. La différence entre les déformations radiales expérimentales et numériques est moins marquée, ce qui peut s'expliquer par le fait que le modèle THHMD tient compte de phénomènes dissipatifs dans les directions latérales. Le modèle THHMD prédit mieux le comportement de l'argilite comprimée à faible confinement (fig. 16.6.a et 16.6.b). L'adéquation du modèle est indépendante du niveau d'endommagement, qui est de l'ordre de 0.06 pour la composante radiale lors des quatre essais de compression triaxiale (fig. 16.7).

Lors des tests de compression proportionnelle, le modèle THHMD prédit un comportement élastique pour $k = 2$ et $k = 5$ (fig. 16.8), ce qui explique pourquoi la différence entre les résultats numériques et les mesures expérimentales sont plus faibles dans le cas où le confinement est proportionnellement faible devant la charge axiale ($k = 10$, fig. 16.8.c). L'interprétation des ré-

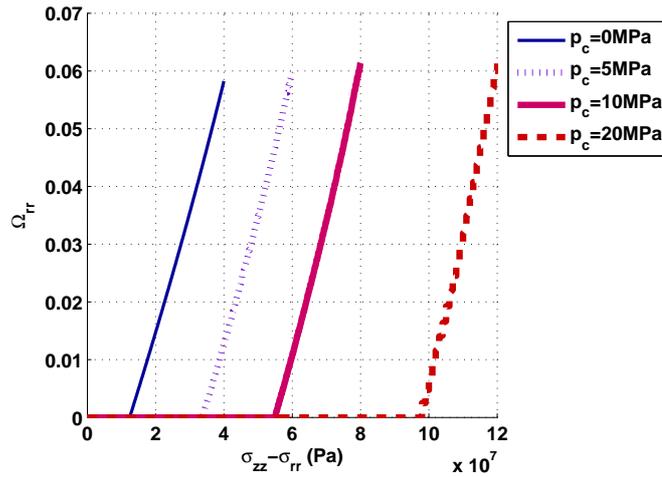


FIGURE 16.7 – Evolution de l'endommagement radial lors des essais de compression triaxiale réalisés sur l'argilite de l'Est.

sultats est la même que pour les essais de compression triaxiale : un phénomène dissipatif autre que l'endommagement développé par tension semble générer des déformations inélastiques dans toutes les directions.

Dans le test d'extension latérale, le niveau d'endommagement prédit par le modèle THHMD est élevé (de l'ordre de 0.12 pour les composantes latérales du tenseur d'endommagement), mais les déformations calculées à faibles confinement sont trop faibles (fig. 16.9.b). Les déformations observées expérimentalement sont supérieures aux déformations calculées numériquement avant même l'initiation de la fissuration (à $\sigma_{rr} \simeq 9\text{MPa}$), ce qui confirme la nécessité d'introduire un seuil dissipatif autre que celui de l'endommagement développé par tension (fig. 16.9). D'après la comparaison des résultats numériques aux mesures expérimentales sur le test d'extension latérale, il semble que ce seuil additionnel devrait être prioritaire par rapport au seuil d'endommagement.

Même si le comportement de l'argilite de l'Est n'est pas parfaitement rendu par le modèle d'endommagement proposé dans le cadre de cette thèse, le jeu de paramètres mécaniques déterminé par Chiarelli et Shao [38] sera utilisé dans la suite pour étudier les tendances du modèle THHMD. En effet, en l'absence de données exhaustives sur les matériaux en jeu dans des études de galeries réelles, il peut être utile de comparer les résultats obtenus avec des matériaux de différentes rigidités (le module d'Young de l'argilite de l'Est est inférieur à celui du granite de presque un ordre de grandeur).

16.1.6 Etude du grès des Vosges [56]

Comme pour les simulations précédentes, on choisit de présenter les résultats des calculs numériques effectués sur l'élément 1 (figure 16.1). Les déformations calculées par Θ -Stock dans la simulation de l'essai de compression triaxiale du grès des Vosges sont en accord avec les mesures expérimentales rapportées par Dragon et al. [56] (figure 16.10.a). Comme on pouvait s'y attendre, la composante axiale de l'endommagement reste nulle ($\Omega_{zz} = 0$), tandis que les deux composantes latérales de l'endommagement sont égales et non nulles (figure 16.10.b). A la fin de l'essai, on atteint des niveaux d'endommagement élevés : $\Omega_{rr} = \Omega_{\theta\theta} > 0.18$.

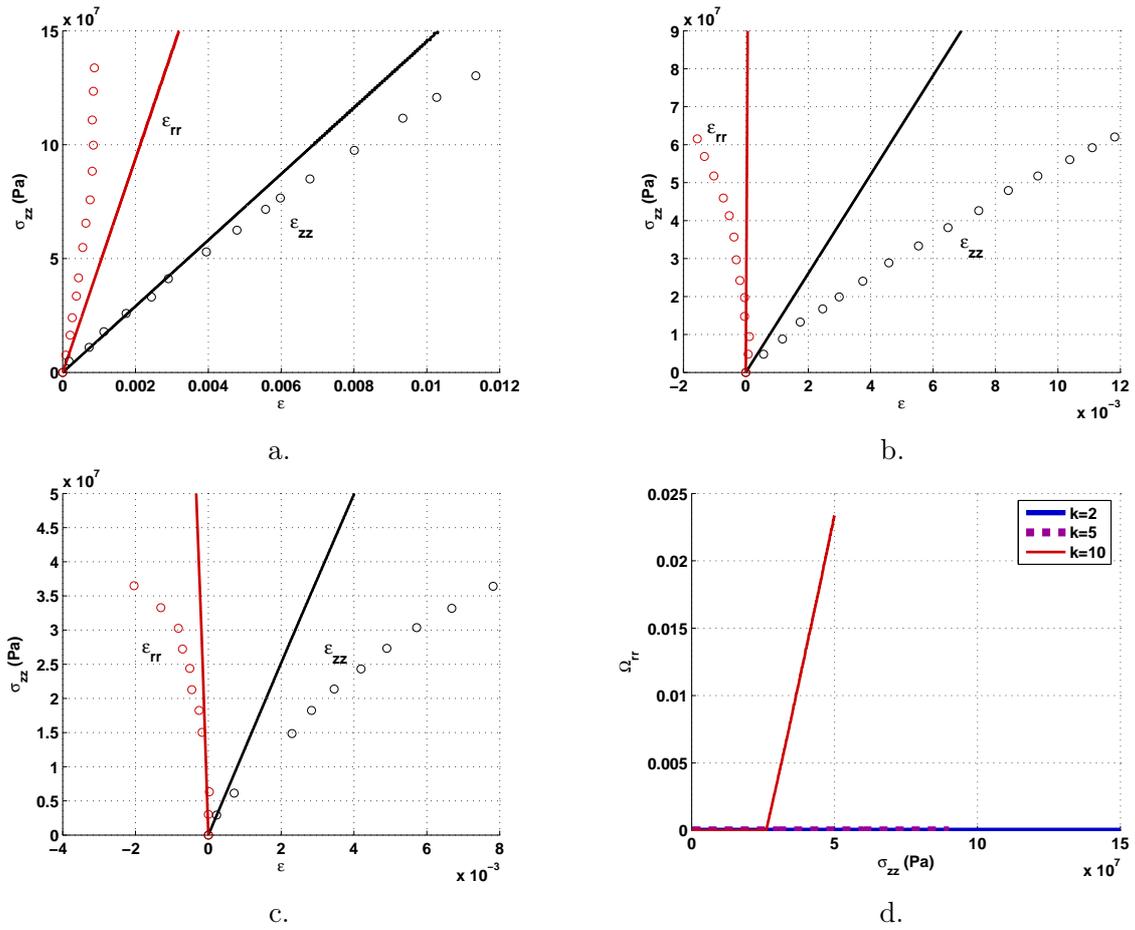


FIGURE 16.8 – Evolution des déformations lors des essais de compression proportionnelle effectués sur l’argilite de l’Est (points : résultats expérimentaux ; lignes continues : résultats numériques). a. $k = 2$. b. $k = 5$. c. $k = 10$. d. Endommagement radial développé pendant les essais de compression proportionnelle.

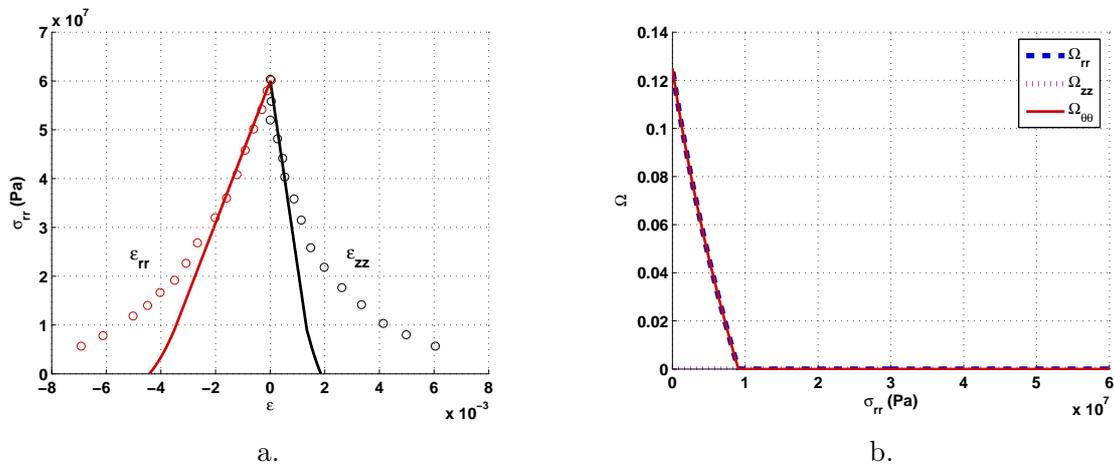


FIGURE 16.9 – Essai d’extension latérale effectué sur l’argilite de l’Est ($p_c^{init} = 60 MPa$). a. Evolution des déformations (points : résultats expérimentaux ; lignes continues : résultats numériques). b. Evolution de l’endommagement.

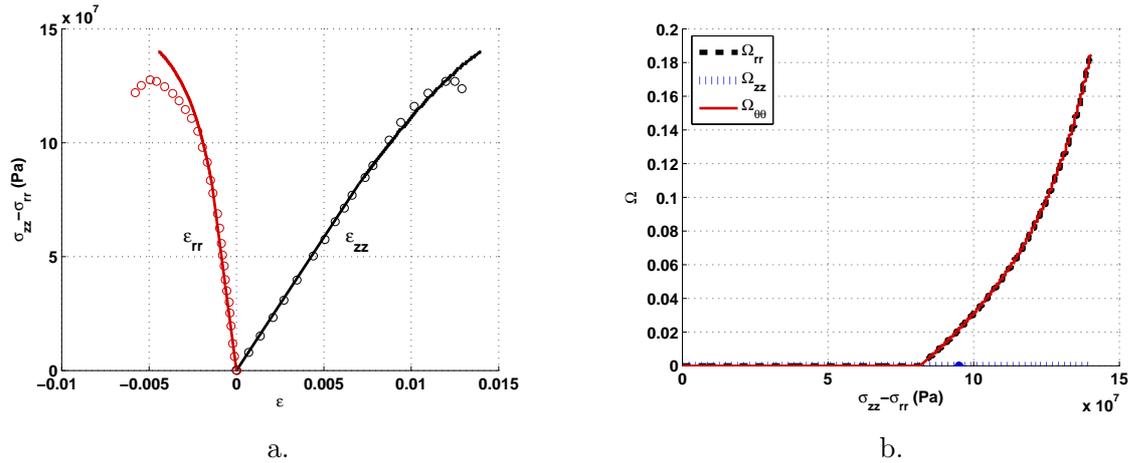


FIGURE 16.10 – Essai de compression triaxiale sur du grès des Vosges ($p_c = 15\text{MPa}$). a. Evolution des déformations (points : résultats expérimentaux ; lignes continues : résultats numériques). b. Evolution du tenseur d'endommagement.

16.2 Essais de compression triaxiale sur du grès saturé [184]

16.2.1 Essais non drainés

16.2.1.1 Principe des essais

On simule dans la suite les essais de compression triaxiale non drainés effectués sur du grès de Fontainebleau saturé par Sulem et et Ouffroukh [184]. Les échantillons sont des cylindres de 77mm de hauteur et de 37.5mm de diamètre. La symétrie axiale de la géométrie et du chargement nous permet d'adopter une analyse axisymétrique, dans laquelle une seule moitié de l'échantillon est modélisée. Le maillage comporte 8 éléments et 15 noeuds (figure 16.11). Comme les essais sont réalisés en conditions isothermes, tous les degrés de liberté nodaux thermiques sont neutralisés. En raison des couplages complexes qui caractérisent le modèle THHMD, on ne peut pas se contenter de neutraliser les pressions interstitielles de l'air pour se ramener à des échantillons saturés en eau. C'est pourquoi la perméabilité à l'air est artificiellement fixée à 0, de manière à ce que les seuls transferts de fluides possibles soient les transferts d'eau liquide.

On n'impose pas de condition initiale sur les pressions interstitielles, qui sont initialisées aux points de Gauss par inversion de l'équation de la surface d'état du degré de saturation, qui vaut 1. Après une phase de confinement drainée, l'échantillon subit une compression axiale non drainée. Les conditions aux limites sont les suivantes (figure 16.11) :

1. Phase de confinement :
 - déplacements radiaux bloqués sur l'axe de symétrie, déplacements verticaux bloqués à la base de l'échantillon ; compression ($\Delta\sigma = p_c < 0$) isotrope exercée sur les frontières extérieures supérieure et latérale de l'échantillon ;
 - pression interstitielle de l'eau nulle sur toutes les frontières extérieures du modèle (mais pas sur l'axe).
2. Phase de compression :
 - déplacements radiaux bloqués sur l'axe de symétrie, déplacements verticaux bloqués à la base de l'échantillon ; maintien du confinement ($\Delta\sigma = 0$) sur la frontière extérieure latérale, application d'une compression en tête de l'échantillon ($\Delta\sigma < 0$) ;

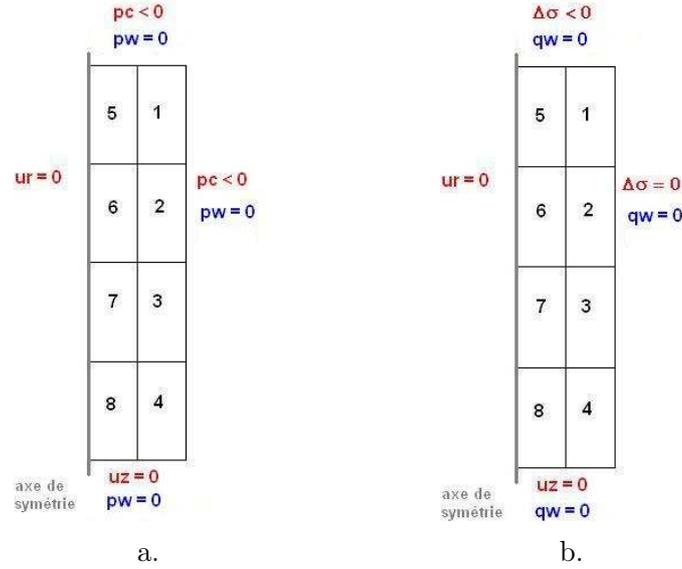


FIGURE 16.11 – Maillage et conditions aux limites adoptés pour simuler des essais de compression triaxiale non drainés sur du grès de Fontainebleau saturé. a. Phase de confinement. b. Phase de compression.

- flux d'eau bloqués sur toutes les frontières extérieures du modèle (pas de condition aux limites sur l'axe).

Dans les simulations numériques, l'échantillon est chargé moins rapidement que dans l'expérience (déformations radiales de l'ordre de $2 * 10^{-6} .s^{-1}$, contre $10^{-5} .s^{-1}$ dans l'expérience).

16.2.1.2 Modélisation et paramètres matériels

Le poids volumique choisi pour le squelette solide du grès de Fontainebleau est égal à celui qui a été choisi précédemment pour la matrice solide du grès des Vosges : $\gamma_s = 2.65 * 10^4 N.m^{-3}$. Les principales caractéristiques mécaniques du grès de Fontainebleau ont été identifiées par Dragon et al. [56]. Dragon assimile le grès à un matériau fragile. La partie mécanique du modèle THHMD est proche du modèle d'endommagement proposé par Dragon, dont on reprend ici les principaux paramètres mécaniques. Le paramètre de dilatance χ est choisi selon les recommandations de Shao et al. [180] : $\chi \simeq 0.005$ (pour les roches fragiles). L'indice des vides initial est calculé à partir d'une porosité de référence (de 0.21) préconisée par Sulem et Ouffroukh [184] : $e_0 = \frac{n}{1-n} \simeq 0.2658$.

On rappelle que dans des conditions isothermes, la loi de comportement incrémentale élastique du modèle THHMD s'écrit :

$$d\sigma''_{ij} = D_{ijkl}(\Omega_{pq}) d\epsilon_{lk} - \frac{1}{3\beta_s(\Omega_{pq})} D_{ijkl}(\Omega_{pq}) \delta_{lk} ds \quad (16.2)$$

où σ''_{ij} est la contrainte nette et où δ_{ij} désigne le tenseur identité d'ordre 2. Comme l'échantillon est saturé, la variation de la pression interstitielle de l'air reste théoriquement nulle pendant la simulation de l'essai de compression non drainé, et on peut réécrire l'équation 16.2 sous la forme :

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}(\Omega_{pq}) d\epsilon_{lk} + \frac{1}{3\beta_s(\Omega_{pq})} D_{ijkl}(\Omega_{pq}) \delta_{lk} dp_w \quad (16.3)$$

Dans le modèle de sol saturé mis au point par Gatmiri [73], la loi de comportement incrémentale prend la forme suivante en élasticité isotherme :

$$d\sigma'_{ij} = D_{eijkl} d\epsilon_{lk} - \alpha \delta_{ij} dp_w \quad (16.4)$$

où σ'_{ij} est une contrainte de type contrainte de Biot, avec un coefficient de Biot α défini comme suit :

$$\alpha = 1 - \frac{K'}{K_s} \quad (16.5)$$

où K' est le module de compression volumique effectif du milieu saturé (i.e. le module de compression volumique de la matrice solide), et où K_s est le module de compression volumique des grains solides (considérés comme un milieu non poreux). En identifiant les seconds membres des équations 16.3 et 16.4 dans l'état intact du matériau considéré, on obtient :

$$D_{eijkl}^0 d\epsilon_{lk} + \frac{1}{3\beta_s^0} D_{eijkl}^0 \delta_{lk} dp_w = D_{eijkl}^0 d\epsilon_{lk} - \alpha \delta_{ij} dp_w \quad (16.6)$$

d'où l'on déduit :

$$9\beta_s^0 \alpha = -\delta_{ji} D_{eijkl}^0 \delta_{lk} = -9B \quad (16.7)$$

où B est le module de compression volumique du squelette solide. On obtient ainsi l'expression de β_s^0 en fonction du coefficient de Biot pour une simulation en milieu saturé :

$$\beta_s^0 = -\frac{B}{\alpha} = -\frac{B}{1 - \frac{K'}{K_s}} \quad (16.8)$$

Les essais non drainés présentés par Sulem et Ouffroukh [184] n'étant pas isochores, on n'assimile pas K' à B . On calcule K' et K_s à l'aide des compressibilités fournies par Sulem et Ouffroukh [184]. La compressibilité des grains solides est de $2.75 \cdot 10^{-11} Pa^{-1}$, donc on prend $K_s = (1/2.75) \cdot 10^{11} \simeq 3.67 \cdot 10^{10} Pa$. La compressibilité du grès saturé est de $10^{-10} Pa^{-1}$, donc on prend $K' = 10^{10} Pa$. Avec le module de compression volumique déterminé par Dragon et al. [56] pour le grès de Fontainebleau ($B = 3.79 \cdot 10^{10} Pa$), on obtient $\beta_s^0 \simeq -5.23 \cdot 10^{10} Pa$. La rigidité capillaire est négative, ce qui n'a pas de sens physique. Mais d'un point de vue numérique, ce choix permet de se ramener artificiellement à un milieu saturé. La rigidité capillaire est inversement proportionnelle au coefficient de Biot utilisé dans un modèle de sol saturé (équation 16.7), ce qui donne des surpressions interstitielles d'eau du même ordre de grandeur que dans les expériences réalisées. Si on avait choisi une rigidité capillaire intacte positive, la succion générée numériquement aurait été positive et du même ordre de grandeur que les contraintes nettes, ce qui aurait influencé le degré de saturation et les perméabilités, et l'état mécanique s'en serait trouvé perturbé. Il serait alors devenu impossible de simuler l'état saturé du milieu poreux. Avec le modèle THHMD, l'étude de matériaux saturés passe nécessairement par une neutralisation des effets de la succion. Les paramètres mécaniques utilisés dans les simulations des essais de compression triaxiale non drainés sont donnés dans le tableau 16.9.

Par souci de simplicité, on neutralise les couplages hydro-mécaniques dans les expressions des perméabilités ($\alpha_w = \alpha_a = 0$). On utilise la perméabilité à l'eau liquide mesurée par Sulem et

TABLE 16.9 – Paramètres mécaniques du grès de Fontainebleau pour les essais de compression triaxiale non drainés.

Modèle élastique hyperbolique						
K_b	K_L	n	R_f	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$	K_U	m
$3.79 * 10^5$	$4.55 * 10^5$	0	0	$2 * 10^{10} Pa$	$4.55 * 10^5$	0
Paramètres d'endommagement						
χ	C_0	C_1	g_M	g_S	g_T	
0.005	$1 * 10^3 Pa$	$5.5 * 10^5 Pa$	$-1.1 * 10^8 Pa$	0	0	
Etat mécanique de référence						
β_s^0	β_T^0	e_0	T_0			
$-5.23 * 10^{10} Pa$	$3.79 * 10^{11} Pa$	0.2658	0			

TABLE 16.10 – Paramètres relatifs aux fluides du grès de Fontainebleau pour les essais de compression triaxiale non drainés.

Courbe de rétention					
S_{w0}	$S_{w,r}$	α_{VG}	n_{VG}	d_s	
1	0	$7.9 * 10^{-3} Pa^{-1}$	10.4	0	
Perméabilité à l'eau liquide					
k_{w0}	α_w	$k_w^{0 max}$	k_{wdg}^{max}		
$3.33 * 10^{-5} m.s^{-1}$	0	$3.33 * 10^{-4} m.s^{-1}$	$3.33 * 10^{-3} m.s^{-1}$		
Transfert des gaz					
c_a	α_a	k_a^{max}	D_{dg}^{max}		
0	0	$3.33 * 10^{-4} m.s^{-1}$	$3.33 * 10^{-1} m^2 .s^{-1}$		

Ouffroukh [184] sur un grès saturé ayant une porosité de 0.21 [184], soit $3.33 * 10^{-5} m.s^{-1}$. On suppose que la perméabilité à l'eau liquide du matériau endommagé ne peut pas dépasser 100 fois celle du matériau intact (d'où $k_{wdg}^{max} = 3.33 * 10^{-3} m.s^{-1}$). Comme le matériau reste saturé au cours de l'essai, on choisit une perméabilité à l'air égale à 0, ce qui correspond à un état dans lequel l'air ne peut pas circuler. Par conséquent, comme on l'a mentionné plus haut, on modélise une situation dans laquelle les seuls transferts de fluides possibles sont les transferts d'eau liquide. L'ensemble des paramètres relatifs aux fluides qui sont utilisés pour les simulations d'essais de compression triaxiale non drainés sont donnés dans le tableau 16.10. On utilise les mêmes paramètres que dans les essais mécaniques effectués précédemment sur le granite, l'argilite et le grès des Vosges. Ces paramètres sont rappelés dans le tableau 16.11.

16.2.1.3 Comparaison des résultats numériques aux observations expérimentales

Un premier examen des résultats montre que la distribution spatiale des contraintes et déformations totales est quasiment homogène pendant l'essai. En revanche, la pression interstitielle de l'eau est plus forte en tête de l'échantillon, en raison du temps nécessaire pour dissiper les surpressions de fluides. Par conséquent, en conditions non drainées, le matériau subit de plus

TABLE 16.11 – Paramètres thermiques utilisés pour les essais de compression triaxiale non drainés sur du grès de Fontainebleau

Rigidité thermique intacte				
α_0^*	α_1	α_2	α_3	p_{geo}
$-10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	0	0	0	10^{10} Pa
Diffusion et évaporation				
λ_s	λ_w	λ_a	h_{fg}	
$1.35 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$0.6 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$0.0258 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$2.5 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$	
Convection				
C_{Ps}	C_{Pw}	C_{Pvap}	C_{Pa}	
$800 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$4180 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$1870 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$1000 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	

fortes compressions en tête de l'échantillon, où les niveaux d'endommagement doivent théoriquement être les plus élevés, ce qui est confirmé par l'examen de l'état mécanique de l'échantillon confiné à 28 Mpa soumis à $\sigma_{zz} - \sigma_{rr} = 127.5 \text{ MPa}$ en tête (figure 16.12). La rupture totale du matériau arrive en premier lieu en tête de l'échantillon. L'arrêt d'une simulation par rupture totale est donc conditionné par le comportement des éléments en tête. C'est pourquoi on choisit dans la suite de présenter les résultats numériques obtenus sur l'élément 1 (figure 16.11), qui est en tête de l'échantillon. C'est l'élément où le plus haut niveau d'endommagement est atteint. Par ailleurs, comme la répartition des déformations et des contraintes est quasiment homogène, le choix de cet élément n'influence pas la vérification du comportement contrainte/déformation du matériau.

Les résultats numériques correspondent bien aux observations expérimentales (fig. 16.13), tant du point de vue des déformations que des pressions interstitielles, pour les confinements moyens et élevés ($p_c = 28 \text{ MPa}$, $p_c = 40 \text{ MPa}$ et $p_c = 50 \text{ MPa}$). Le modèle THHMD sous-estime les déformations et surestime les pressions interstitielles pour les faibles confinements ($p_c = 7 \text{ MPa}$ et $p_c = 14 \text{ MPa}$). On rappelle que les résultats sont présentés pour l'élément où les surpressions calculées numériquement sont les plus fortes. Cela peut expliquer les différences observées sur les pressions interstitielles. Mécaniquement, les surpressions interstitielles générées par la compression axiale jouent le rôle de pression de confinement. L'absence de drainage ne modifie donc pas le scénario d'endommagement qu'on obtiendrait sur un échantillon sec ou sur un échantillon saturé drainé. En effet, le matériau subit toujours des déformations liées à la tension dans les deux directions latérales : $\epsilon_{Mrr}^+ \simeq \epsilon_{M\theta\theta}^+ < 0$ avec la convention de la mécanique des sols. Comme dans les essais de compression triaxiale sur échantillons secs étudiés précédemment, on pouvait donc s'attendre à ce que l'endommagement se développe latéralement, mais pas axialement. Cette prédiction théorique est confirmée par les résultats numériques obtenus (fig. 16.13.(c,f,i,l,o)).

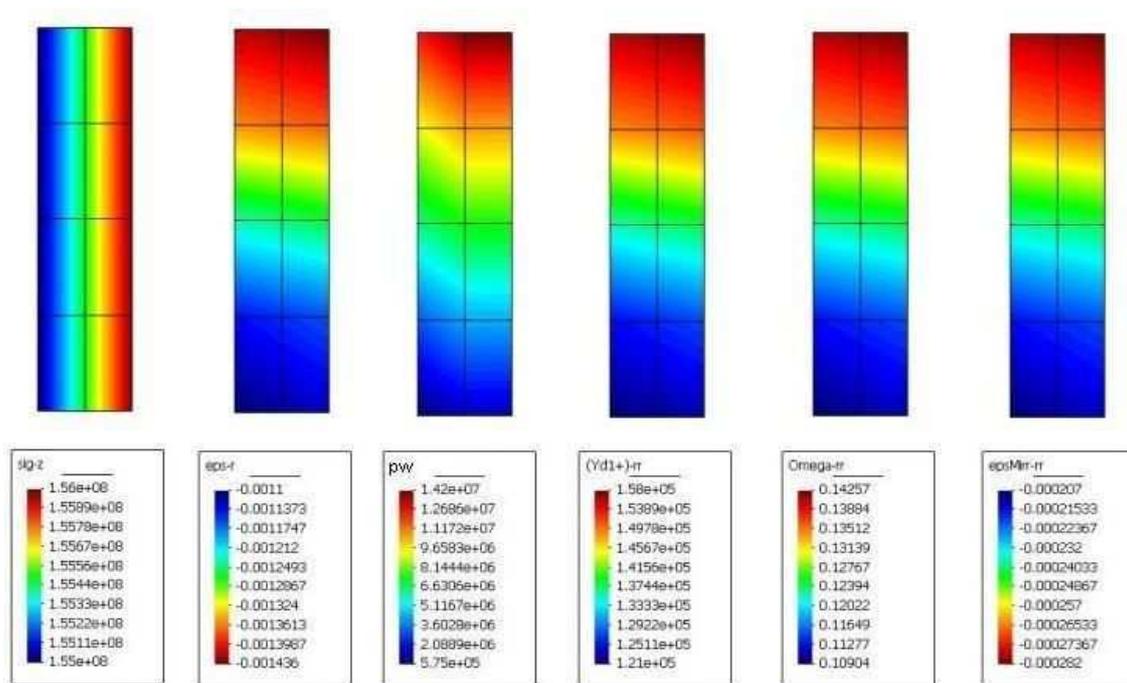


FIGURE 16.12 – Etat mécanique de l'échantillon de grès saturé non drainé confiné à 28 MPa et soumis à $\sigma_{zz} - \sigma_{rr} = 127.5 \text{ MPa}$ en tête.

16.2.2 Essais drainés

On simule à présent les essais de compression triaxiale effectués sur du grès de Fontainebleau saturé par Sulem et Ouffroukh [184] en conditions drainées. Les échantillons sont des cylindres de 77mm de hauteur et de 37.5mm de diamètre. Le maillage adopté est le même que pour les essais non drainés. Les essais étant isothermes, donc les degrés de liberté nodaux relatifs à la température sont bloqués. Bien que les pressions interstitielles de l'eau et de l'air doivent théoriquement rester faibles pendant les essais drainés, les degrés de libertés nodaux relatifs aux pressions ne sont pas bloqués, ce qui constitue une différence numérique par rapport à la simulation d'essais de compression triaxiale sur des matériaux secs. Comme pour les essais non drainés, la pression interstitielle de l'air est libre, mais la perméabilité à l'air est fixée à 0 pour que les seuls transferts possibles soient ceux de l'eau liquide. On adopte les mêmes conditions initiales que dans les essais non drainés. Les conditions aux limites sont les suivantes (figure 16.14) :

1. Phase de confinement :
 - déplacements radiaux bloqués sur l'axe, déplacements verticaux bloqués à la base, application d'une pression de confinement sur les frontières extérieures supérieure et latérale ($\Delta\sigma = p_c < 0$);
 - pressions interstitielles de l'eau égales à 0 sur toutes les frontières extérieures (mais pas sur l'axe).
2. Phase de compression :
 - déplacements radiaux bloqués sur l'axe, déplacements verticaux bloqués à la base, maintien de la pression de confinement sur la frontière extérieure latérale ($\Delta\sigma = 0$), application d'une compression en tête de l'échantillon ($\Delta\sigma < 0$);
 - pressions interstitielles de l'eau égales à 0 sur toutes les frontières extérieures (mais pas

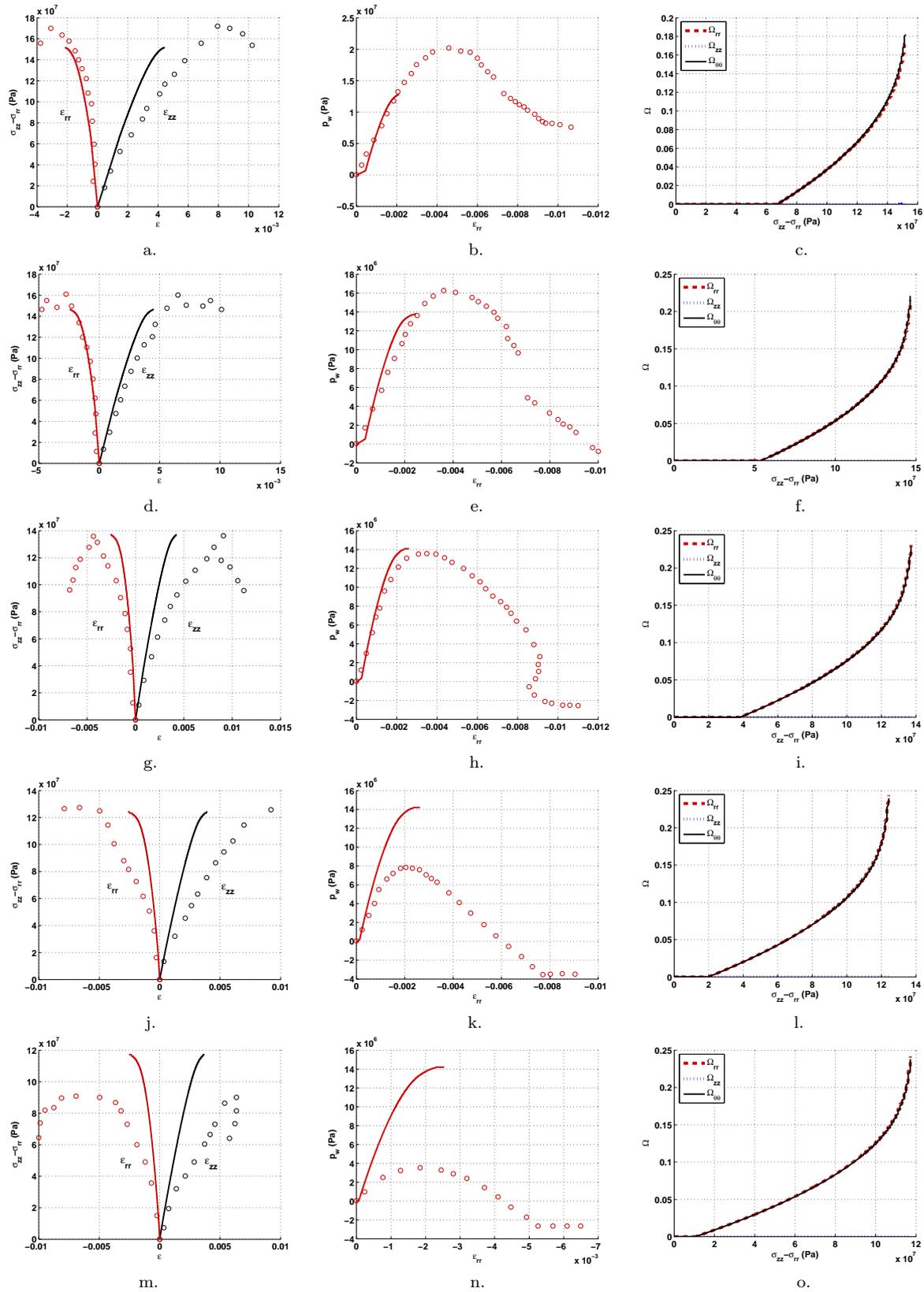


FIGURE 16.13 – Essais de compression triaxiale non drainés sur du grès de Fontainebleau saturé (points : mesures expérimentales [184]; lignes continues : résultats numériques). (a,b,c) $p_c = 50 \text{ MPa}$. (d,e,f) $p_c = 40 \text{ MPa}$. (g,h,i) $p_c = 28 \text{ MPa}$. (j,k,l) $p_c = 14 \text{ MPa}$. (m,n,o) $p_c = 7 \text{ MPa}$.

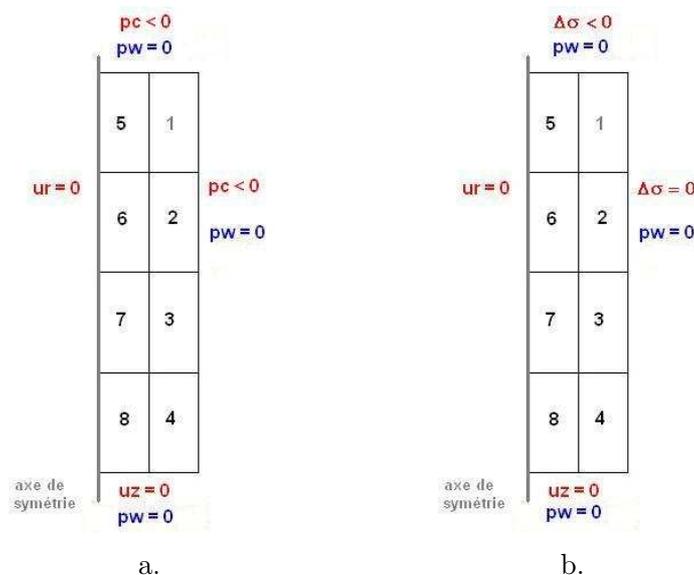


FIGURE 16.14 – Maillage et conditions aux limites adoptés pour simuler des essais de compression triaxiale drainés sur du grès de Fontainebleau saturé. a. Phase de confinement. b. Phase de compression.

sur l'axe).

On choisit la même cinétique de chargement que pour les simulations d'essais non drainés (le chargement est donc appliqué plus lentement que dans l'expérience). On choisit les mêmes paramètres matériels que pour les essais non drainés (tableaux 16.9, 16.10 et 16.11).

Pour les mêmes raisons que précédemment, on présente les résultats numériques obtenus sur l'élément 1 (figure 16.14). Les déformations calculées numériquement sont conformes à l'expérience pour les confinements supérieurs à 28 MPa (figures 16.15.a, 16.15.c et 16.15.e). A faible confinement, les déformations semblent sous-estimées, même si l'endommagement ne reste pas nul (figures 16.15.i et 16.15.j). La simulation est interrompue sous un faible chargement pour $p_c = 14 \text{ MPa}$ (figures 16.15.g et 16.15.h), alors que le niveau d'endommagement atteint est faible. Du point de vue du développement des déformations liées à la tension, les essais de compression triaxiale drainés sont mécaniquement équivalents à des essais de compression triaxiale sur des matériaux secs. C'est pourquoi, de même que dans les essais de compression triaxiale simulés précédemment sur le granite, l'argilite et le grès des Vosges (figures 16.3, 16.7 et 16.10), on observe de l'endommagement dans les directions latérales, mais pas dans la direction axiale. La figure 16.16 donne un aperçu de l'état mécanique de l'échantillon de grès saturé lors de l'essai de compression triaxiale confiné à 28 MPa, sous une contrainte différentielle de 120 MPa. Alors que la répartition spatiale des contraintes, des déformations et de l'endommagement est quasiment homogène, on observe deux foyers qui concentrent de fortes pressions interstitielles d'eau.

On étudie à présent les effets de l'endommagement sur la perméabilité à l'eau du grès de Fontainebleau saturé, lors de l'essai de compression triaxiale drainé pratiqué sous un confinement de 28 MPa. D'après la formulation théorique du modèle THHMD, les directions du tenseur de perméabilité à l'eau liquide qui sont les plus affectées par l'endommagement sont celles qui appartiennent aux plans principaux de fissuration. Autrement dit, le tenseur de perméabilité se dégrade dans les directions orthogonales aux vecteurs propres \mathbf{n}^k du tenseur d'endommagement. Dans l'essai de compression triaxiale drainé pratiqué sur le grès de Fontainebleau, la compo-

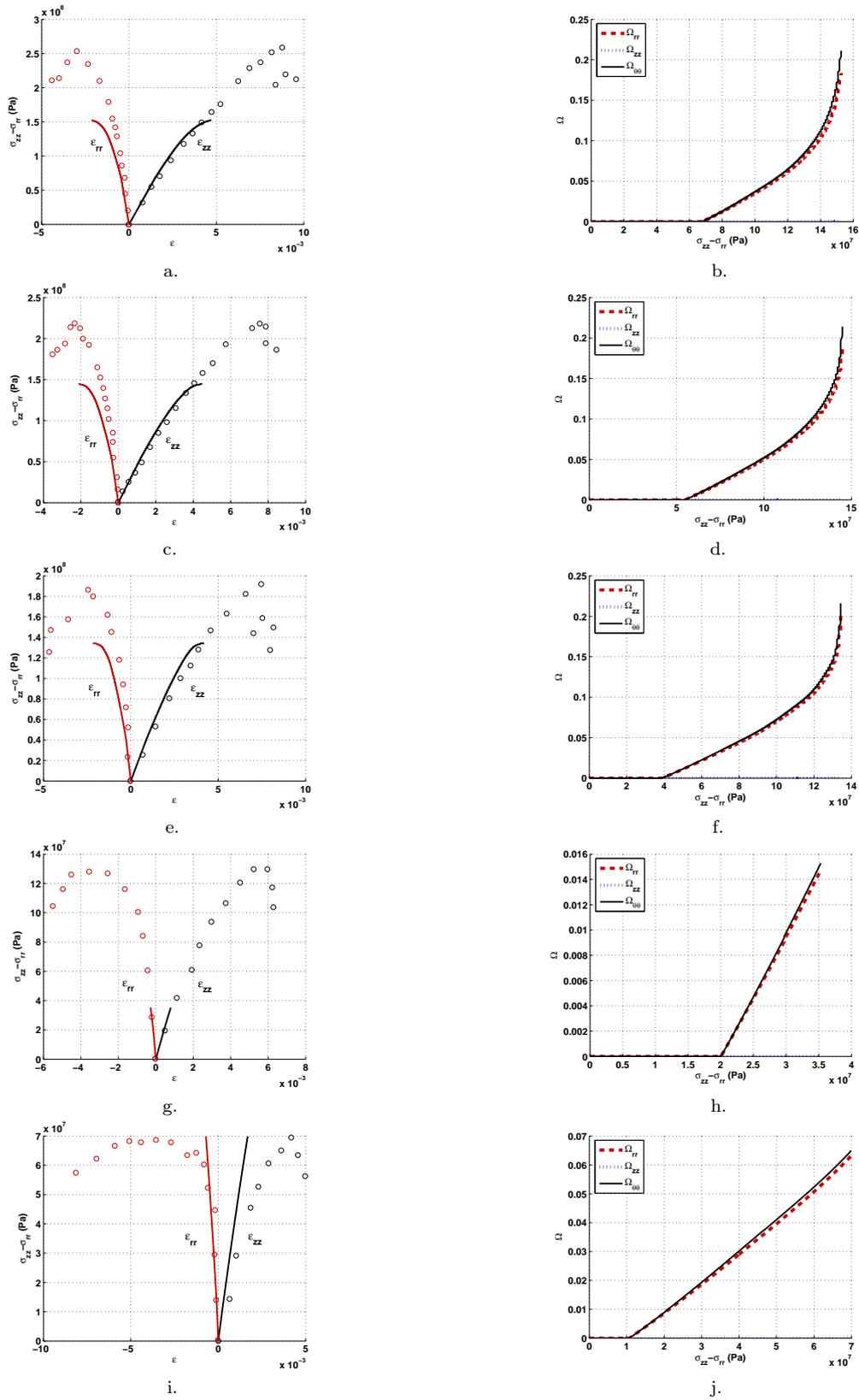


FIGURE 16.15 – Essais de compression triaxiale drainés sur du grès de Fontainebleau saturé (points : résultats expérimentaux [184]; lignes continues : résultats numériques). (a,b) $p_c = 50 \text{ MPa}$. (c,d) $p_c = 40 \text{ MPa}$. (e,f) $p_c = 28 \text{ MPa}$. (g,h) $p_c = 14 \text{ MPa}$. (i,j) $p_c = 7 \text{ MPa}$.

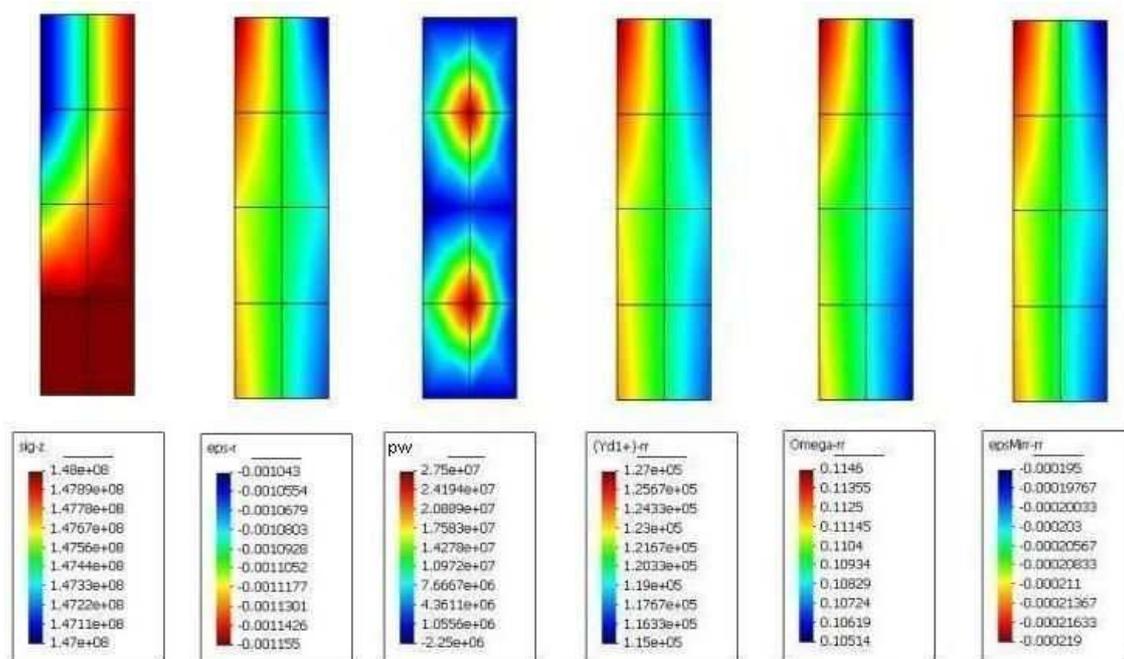


FIGURE 16.16 – Etat mécanique de l'échantillon de grès saturé drainé confiné à 28 MPa et soumis à $\sigma_{zz} - \sigma_{rr} = 120 \text{ MPa}$ en tête.

sante axiale du tenseur d'endommagement reste nulle ($\Omega_{zz} = 0$) alors que les deux composantes latérales de l'endommagement sont non nulles ($\Omega_{rr} = \Omega_{\theta\theta} > 0$) (figures 16.15.b,d,f,h,j). Par conséquent, K_{wzz} croît avec Ω_{rr} et $\Omega_{\theta\theta}$, alors que K_{wrr} et $K_{w\theta\theta}$ augmentent sous l'influence d'une seule composante du tenseur d'endommagement ($\Omega_{\theta\theta}$ et Ω_{rr} respectivement). Comme on pouvait s'y attendre, on observe donc que toutes les directions du tenseur de perméabilité sont affectées par l'endommagement (i.e. que la perméabilité à l'eau liquide augmente dans toutes les directions), mais que la perméabilité axiale est celle qui augmente le plus lors de l'essai de compression triaxiale : $K_{wrr} = K_{w\theta\theta} < K_{wzz}$ (figure 16.17).

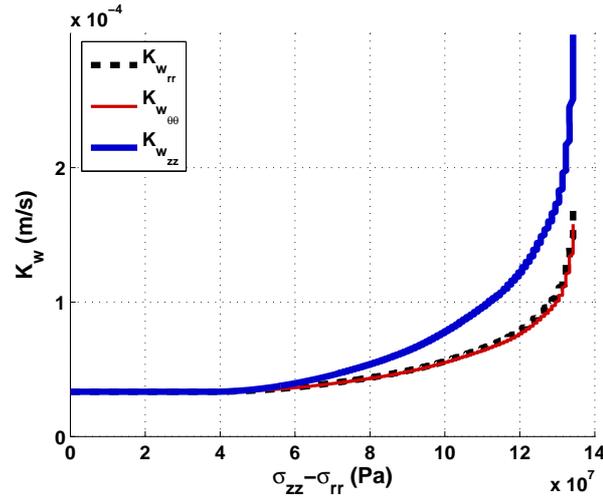


FIGURE 16.17 – Evolution des composantes de la perméabilité à l'eau liquide du grès de Fontainebleau pendant un essai de compression triaxiale drainé ($p_c = 28MPa$).

16.3 Essai de chauffage d'un échantillon de bentonite non saturée et indéformable [161]

16.3.1 Validation dans le domaine élastique du modèle THHMD

16.3.1.1 Principe de l'essai

L'essai de Pintado et al. [161] consiste à étudier le comportement thermo-hydraulique de la bentonite qui sert au confinement des déchets radioactifs (barrière ouvragée). Une source de chaleur est placée entre deux échantillons cylindriques de bentonite de 38 mm de diamètre et de 76 mm de haut. L'ensemble est positionné verticalement dans une mousse isolante (fig. 16.18). Dans la simulation proposée, on modélise un seul des deux échantillons de bentonite, celui qui est en-dessous de la source de chaleur. Comme la géométrie et le chargement présentent une symétrie cylindrique, on fait un calcul axisymétrique. Seulement la moitié de l'échantillon inférieur est étudiée. Le maillage comporte 66 noeuds et 50 éléments (fig. 16.19). La source de chaleur est modélisée comme une condition aux limites de type Neumann sur les degrés de liberté thermiques de la frontière extérieure supérieure de l'échantillon. Pour prendre en compte les effets de la mousse isolante, on impose un flux de chaleur nul sur la frontière latérale extérieure du modèle.

16.3.1.2 Choix des paramètres matériels

Pintado et al. [161] proposent un modèle théorique qui ne comporte pas d'aspect mécanique. C'est pourquoi dans la simulation effectuée avec Θ -Stock, tous les degrés de liberté en déplacements sont bloqués. Pour autant, il est nécessaire d'entrer des paramètres mécaniques, notamment pour étudier les tendances de l'endommagement avec un jeu de paramètres calibrés. On utilise les valeurs caractéristiques de l'argilite de l'Est [38, 93] pour les modules mécaniques et les paramètres de la fonction de charge. Le paramètre de dilatance χ est choisi selon les recommandations de Shao et ses collaborateurs [180] : $\chi \simeq 0.005$ pour les roches fragiles. L'indice des vides initial

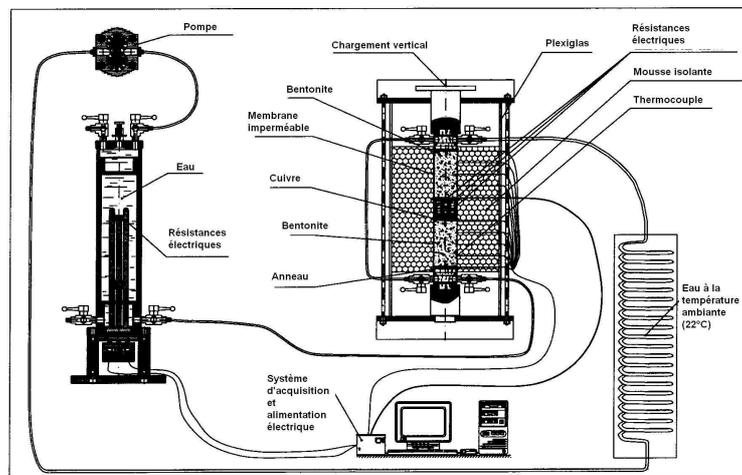


FIGURE 16.18 – Protocole expérimental adopté par Pintado et al. pour l'essai de chauffage de la bentonite [161].

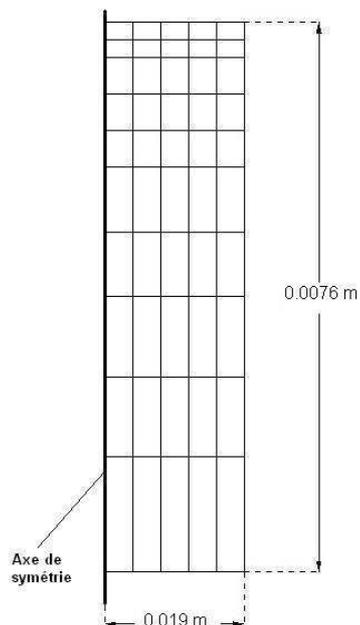


FIGURE 16.19 – Maillage adopté pour le test de chauffage de la bentonite de Pintado et al. [161]

TABLE 16.12 – Paramètres mécaniques utilisés dans le test élastique de Pintado

Modèle élastique hyperbolique						
K_b	K_L	n	R_f	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$	K_U	m
$5.98 * 10^4$	$1.22 * 10^5$	0	0	$2 * 10^{10} Pa$	$1.22 * 10^5$	0
Rigidités de référence						
β_s^0	β_T^0					
$5.98 * 10^{10} Pa$	$5.98 * 10^{10} Pa$					
Paramètres d'endommagement						
χ	C_0	C_1	g_M	g_S	g_T	
0.005	$2.3 * 10^{-4} Pa$	$5.2 * 10^{-3} Pa$	0	0	0	
Conditions initiales						
e_0	S_{w0}	T_0				
0.322	0.63	$22 ^\circ C$				

est calculé d'après les valeurs initiales du degré de saturation et de la teneur en eau :

$$e_0 = \frac{\theta_{w0}}{S_{w0} - \theta_{w0}} \quad (16.9)$$

Avec $\theta_{w0} = 0.1533$ et $S_{w0} = 0.63$, on trouve $e_0 \simeq 0.322$. La rigidité thermique est choisie comme étant égale à la rigidité capillaire, elle-même fixée à 10 fois la valeur du module de compression volumique (d'après la modélisation adoptée par Gens et al. [79]). L'ensemble des paramètres mécaniques choisis pour la simulation dans le domaine élastique du modèle THHMD est donné dans le tableau 16.12.

La courbe de rétention adoptée par Pintado et al. [161] est de type Van Genuchten [197]. On projette la surface d'état du degré de saturation dans le plan caractéristique des conditions isothermes ($d_s = 0$), et on reprend les paramètres de Van Genuchten utilisés par Pintado et al. La formule adoptée par Pintado pour la perméabilité relative aux fluides est la même que dans le modèle THHMD. Pintado et al. n'introduisent pas de perméabilité relative à la température, mais ce terme influence peu la perméabilité à l'eau totale dans le modèle THHMD. En choisissant de ne pas faire varier la perméabilité intrinsèque intacte du matériau avec l'indice des vides ($\alpha_w = 0$), on se ramène donc à une formule très proche de celle de Pintado et al.

Dans l'expérience de Pintado et al., la pression interstitielle de l'air est constamment maintenue à la valeur de la pression atmosphérique. Dans la simulation, les valeurs des pressions interstitielles de l'air sont initialisées à la valeur de la pression atmosphérique en tous les noeuds du maillage. Pour avoir des pressions d'air nodales constantes tout en gardant la pression interstitielle de l'air comme un degré de liberté, on choisit une perméabilité à l'air très élevée. Ainsi, les pressions d'air nodales n'évoluent quasiment pas par rapport à leur valeur initiale. En choisissant les paramètres tels que $k_a = k_a^{max} = 10^{-5} m.s^{-1}$, la perméabilité à l'air reste de l'ordre de 10^{10} fois plus élevée que la perméabilité à l'eau liquide, et les pressions d'air nodales ne dépassent pas 130 kPa. Les paramètres relatifs aux fluides choisis pour la simulation sont donnés dans le tableau 16.13.

On choisit une valeur usuelle pour la dilatance thermique ($10^{-5} ^\circ C^{-1}$), qu'on considère indépendante de la température et des contraintes mécaniques ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$). Les valeurs des

TABLE 16.13 – Paramètres relatifs aux fluides pour le test élastique de Pintado

Courbe de rétention			
$S_{w,r}$	α_{VG}	n_{VG}	d_s
0.01	$2.857 * 10^{-8} Pa^{-1}$	1.429	0
Perméabilité à l'eau liquide			
k_{w0}	α_w	k_w^{0max}	k_{wdg}^{max}
$2.77 * 10^{-14} m.s^{-1}$	0	$2.77 * 10^{-12} m.s^{-1}$	$2.77 * 10^{-12} m.s^{-1}$
Transfert des gaz			
c_a	α_a	k_a^{max}	D_{dg}^{max}
$10^{-6} m^2$	0	$10^{-5} m.s^{-1}$	$2.77 * 10^{-10} m^2.s^{-1}$

capacités calorifiques de l'eau liquide, de l'air gazeux et de la vapeur sont également usuelles, de même que les valeurs de la chaleur latente d'évaporation et les valeurs des conductivités thermiques de l'eau liquide et de l'air gazeux. Pour Pintado et al., la capacité calorifique du squelette solide dépend de la température :

$$C_{Ps} = 1.38 T + 732.52 \quad (16.10)$$

où la température T est exprimée en $^{\circ}C$. Dans le modèle THHMD, C_{Ps} est fixé une fois pour toutes dans la simulation. Lors de l'essai, la température de l'échantillon s'échelonne entre $22^{\circ}C$ (température initiale dans l'expérience proposée) et environ $75^{\circ}C$ (après une semaine de chauffage). On choisit la valeur de C_{Ps} obtenue pour une valeur médiane, à $49^{\circ}C$. On obtient $C_{Ps} = 800 J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$. Comme Pintado et al. utilisent un modèle purement thermo-hydraulique, la formule qu'il utilise pour la conductivité thermique du milieu s'applique uniquement à l'espace poreux. Comme on suppose le matériau indéformable, le modèle de conductivité thermique adopté par Pintado et al. peut être adapté à une représentation thermo-hydro-mécanique en multipliant la formule par la porosité :

$$\lambda_T = n \left(\lambda_{sat}^{S_w} \lambda_{dry}^{1-S_w} \right) \quad (16.11)$$

avec $\lambda_{sat} = 1.15 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$ et $\lambda_{dry} = 0.47 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$. On rappelle que dans le modèle THHMD :

$$\lambda_T = (1 - n) \lambda_s + n S_w \lambda_w + n (1 - S_w) \lambda_{vap} \quad (16.12)$$

avec $n = 0.402$ et $\lambda_w = 0.6 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$. Pour comparer les modèles de conductivité thermique dans cet exemple, on considère que la conductivité thermique de la vapeur est proche de celle de l'air : $\lambda_{vap} \simeq \lambda_a = 0.0258 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$. Dans les équations 16.10 et 16.11, on utilise la porosité utilisée dans le modèle thermique de Pintado et al., à savoir $n = 0.402$. On ajuste la valeur de la conductivité thermique du squelette (λ_s) pour que la courbe d'évolution 16.12 de la conductivité thermique du milieu poreux non saturé (λ_T) avec le degré de saturation soit la plus proche possible de celle qui décrit par l'équation 16.11. Avec $\lambda_s = 0.3 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$, les deux modèles coïncident presque parfaitement (fig. 16.20). Les paramètres thermiques retenus pour simuler l'essai de chauffage de la bentonite sont résumés dans le tableau 16.14.

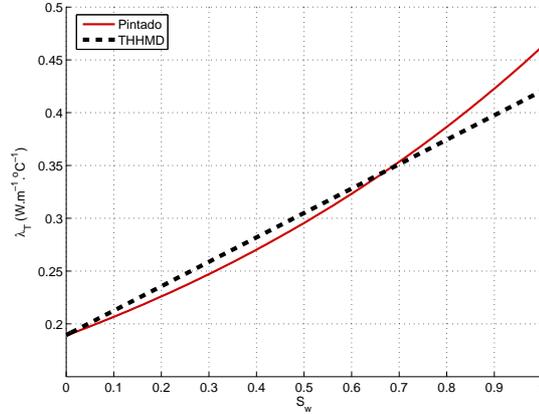


FIGURE 16.20 – Comparaison des modèles de conductivité thermique. $\lambda_s = 0.3 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$ dans le modèle THHMD.

TABLE 16.14 – Paramètres thermiques utilisés dans le test élastique de Pintado

Rigidité thermique intacte				
α_0^*	α_1	α_2	α_3	p_{geo}
$-10^{-5} .^{\circ}C^{-1}$	0	0	0	$10^{10} Pa$
Diffusion et évaporation				
λ_s	λ_w	λ_a	h_{fg}	
$0.3 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$0.6 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$0.0258 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$2.5 \cdot 10^6 J.kg^{-1}$	
Convection				
C_{Ps}	C_{Pw}	C_{Pvap}	C_{Pa}	
$800 J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$4180 J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$1900 J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$1000 J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	

16.3.1.3 Chargement

Conditions initiales :

- température à $22^\circ C$ sur tous les noeuds ;
- pression d'air égale à la pression atmosphérique ($p_{a0} = p_{atm} = 10^5 Pa$) en tous les noeuds du maillage.

Conditions aux limites :

Sur l'axe de symétrie, les degrés de liberté sont libres, il n'y a pas de condition aux limites.

1. Phase de chauffage (une semaine) :

- température : flux de chaleur constant en tête de l'échantillon, maintien d'une température de $30^\circ C$ sur la frontière inférieure, conditions adiabatiques sur la frontière latérale extérieure (pour simuler l'effet de la couche isolante utilisée par Pintado et al.) ;
- fluides : frontières extérieures imperméables à l'eau et à l'air.

2. Phase de relaxation (sept semaines), arrêt de la source de chaleur :

- températures : flux de chaleur nul sur le bord supérieur ; maintien d'une température de $30^\circ C$ sur la frontière inférieure, conditions adiabatiques sur la frontière latérale extérieure ;
- fluides : frontières extérieures imperméables à l'eau et à l'air.

Pintado et al. [161] chauffent l'échantillon à l'aide d'une source de $2.17 W$ pendant 1 semaine. La source dégage de la chaleur par ses frontières inférieure et supérieure. On peut raisonnablement supposer que le problème revient à modéliser les effets de deux sources de chaleur d'une puissance de $1.085 W$. La moitié d'échantillon modélisé est donc soumis à une puissance de chauffe de $1.085 W$ sur son bord supérieur. Les éléments utilisés dans la simulation ont tous une largeur de $3.8 mm$, et on pratique une étude en configuration axisymétrique. L'échantillon tridimensionnel est donc représenté par un maillage bidimensionnel. Ainsi, il faut imposer $\tilde{q}_h = \frac{1.085}{0.0038} \simeq 285.5 W.m^{-2}$ pendant une semaine. Les conditions aux limites adoptées pendant les deux phases de chargement sont schématisées sur la figure 16.21.

16.3.1.4 Comparaison des résultats numériques aux mesures expérimentales

Les isochrones de la température sont représentés sur la figure 16.22. L'observation des résultats numériques montre que les températures n'évoluent plus après 100 heures. Les températures à l'équilibre thermique calculées par Θ -Stock sont quasiment les mêmes que celles qui sont mesurées dans l'expérience de Pintado. L'état transitoire dure plus longtemps dans la simulation numérique. Avant l'équilibre, les températures calculées à un instant donné sont plus faibles que dans l'expérience. On peut expliquer cette différence par le choix de modélisation de la capacité calorifique du squelette solide. C_{P_s} est constante dans le modèle THHMD, et sa valeur est celle qui est atteinte à $49^\circ C$ dans le modèle de Pintado. Pour les températures inférieures à $49^\circ C$, la capacité calorifique du solide est donc plus élevée que dans l'expérience, ce qui induit une plus forte inertie thermique, et retarde donc la transmission de la chaleur. C'est pourquoi les différences sont plus marquées au début de l'essai, lorsque la différence entre les capacités calorifiques numérique et expérimentale est la plus grande. On peut faire le même constat en observant l'évolution temporelle des températures nodales (fig. 16.23) : plus le noeud où la température est calculée est proche de la source, et plus le phénomène d'inertie thermique est manifeste. En

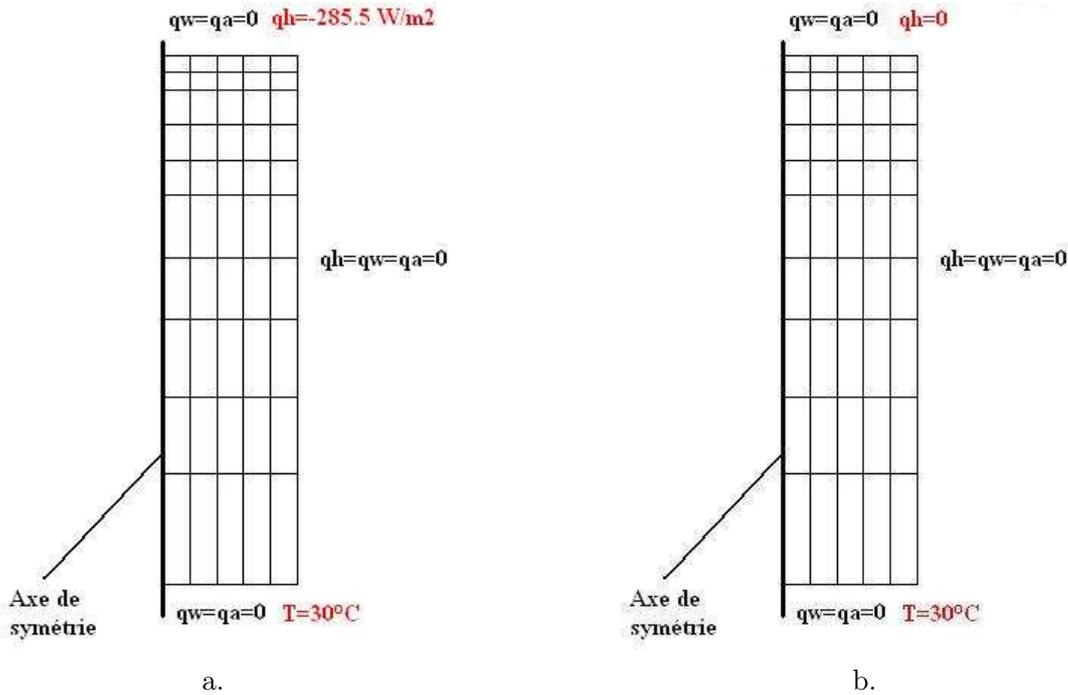


FIGURE 16.21 – Conditions aux limites pour l’essai de Pintado et al. [161] a. Phase de chauffage (une semaine). b. Phase de relaxation (sept semaines).

conséquence, à l’équilibre, les températures des points les plus proches de la source sont légèrement inférieures à celles qui sont mesurées expérimentalement.

On peut aussi expliquer le retard dans la transmission de la chaleur par la façon dont on a modélisé la couche isolante dans la simulation numérique. Dans l’expérience, la mousse transmet une partie de l’énergie thermique dégagée par les bords latéraux de la source. Cette énergie vient s’ajouter à l’énergie thermique transmise en tête de l’échantillon de bentonite. Dans la simulation numérique, des conditions adiabatiques ont été imposées sur la frontière latérale de l’échantillon, qui est donc soumis à un flux de chaleur légèrement inférieur à celui de l’expérience de Pintado et al. [161].

Dans la simulation numérique, l’équilibre hydrique s’établit une semaine après l’extinction de la source de chaleur (soit deux semaines après le début de l’essai), comme le montre la figure 16.24. Pour obtenir la teneur en eau à partir des degrés de saturation calculés par Θ -Stock, on a utilisé la porosité initiale qu’on peut calculer d’après l’état hydrique initial, soit $n_0 \simeq 0.244$. L’équilibre atteint correspond bien aux observations expérimentales. L’évolution spatio-temporelle de la température, de la succion et du degré de saturation sont données dans les figures 16.25 à 16.30, pour l’ensemble de la zone modélisée.

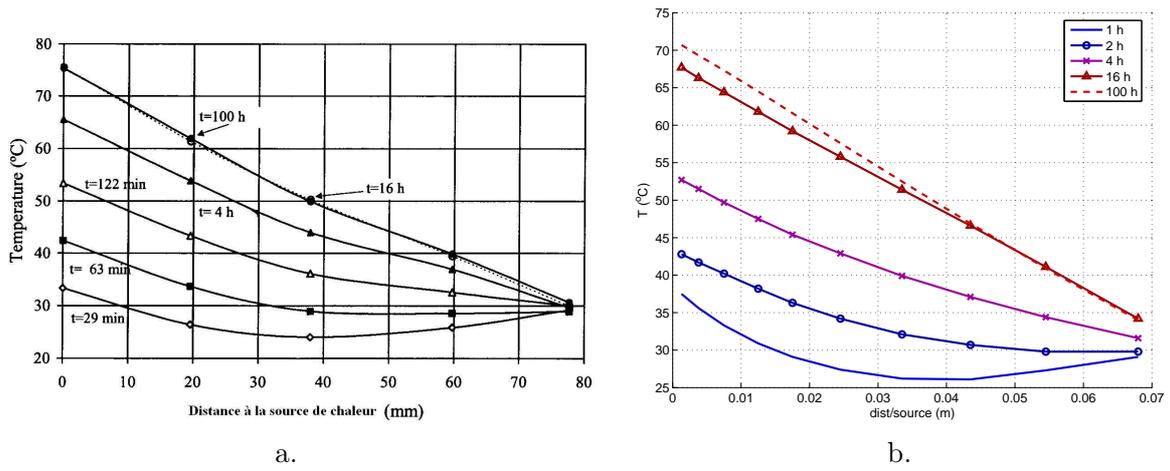


FIGURE 16.22 – Isochrones de température lors de l'essai de Pintado et al. a. Mesures expérimentales [161]. b. Résultats numériques.

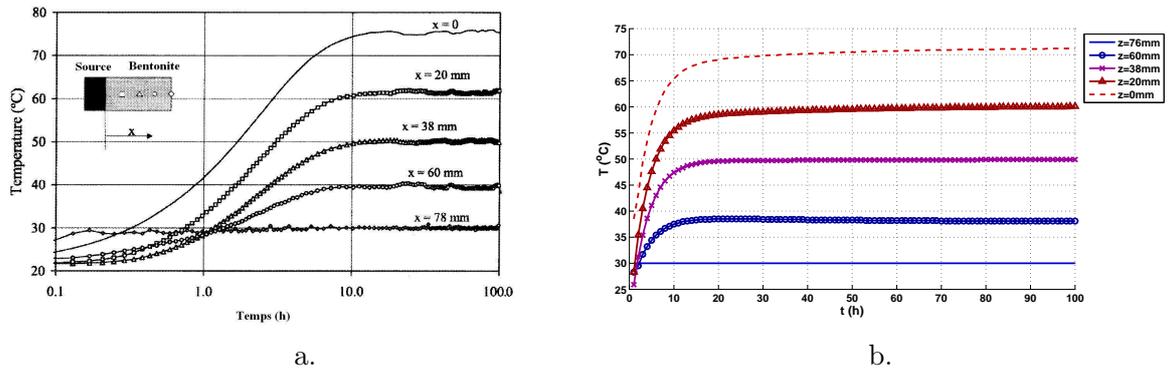


FIGURE 16.23 – Evolutions temporelles de quelques températures nodales lors de l'essai de Pintado et al. a. Mesures expérimentales [161]. b. Résultats numériques.

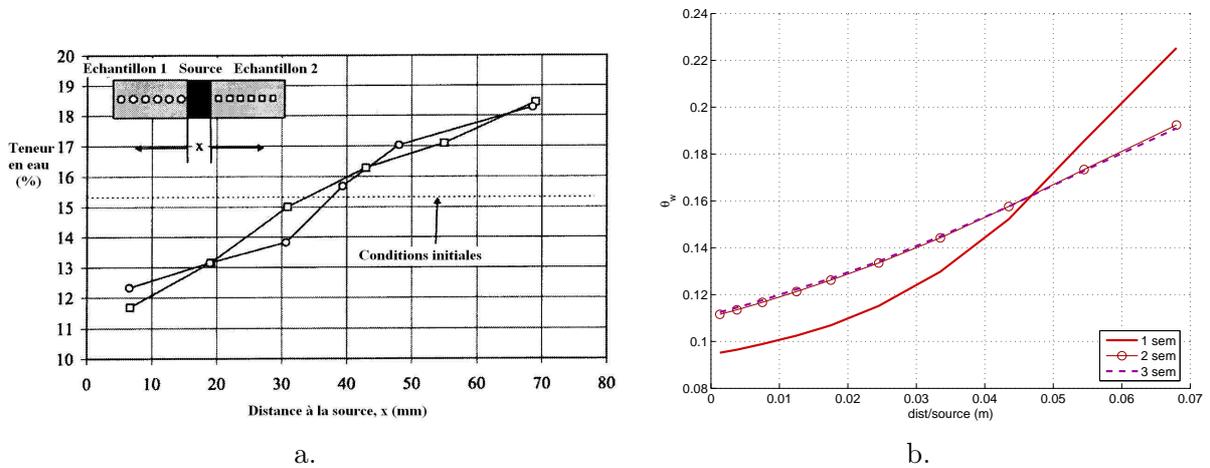


FIGURE 16.24 – Teneurs en eau volumiques après une semaine de chauffage pour l'essai de Pintado et al. a. Mesures expérimentales [161]. b. Résultats numériques.

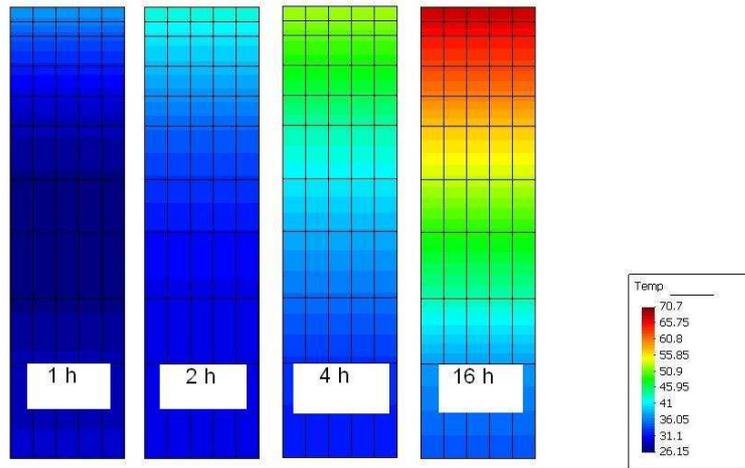


FIGURE 16.25 – Evolution de la température au début de l'essai de Pintado et al. [161]

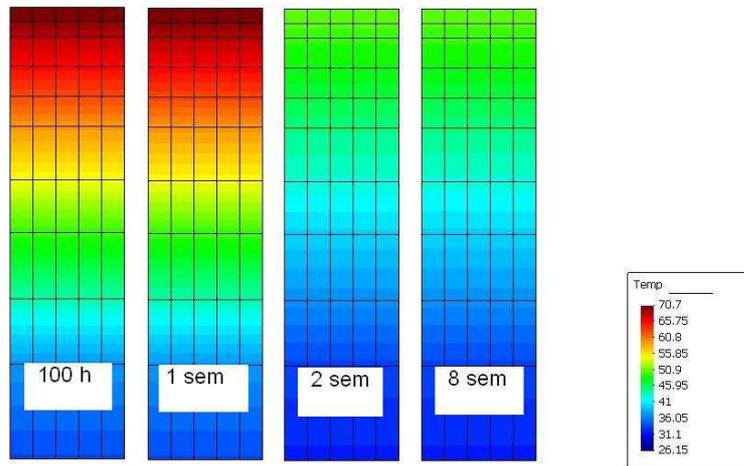


FIGURE 16.26 – Evolution de la température à la fin de l'essai de Pintado et al. [161]

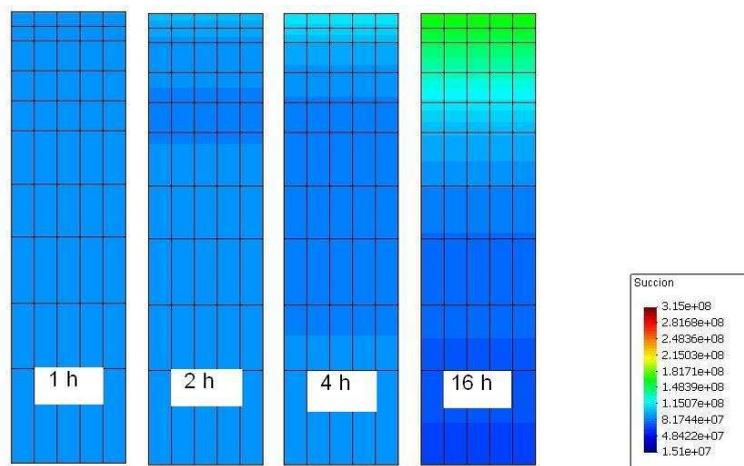


FIGURE 16.27 – Evolution de la succion au début de l'essai de Pintado et al. [161]

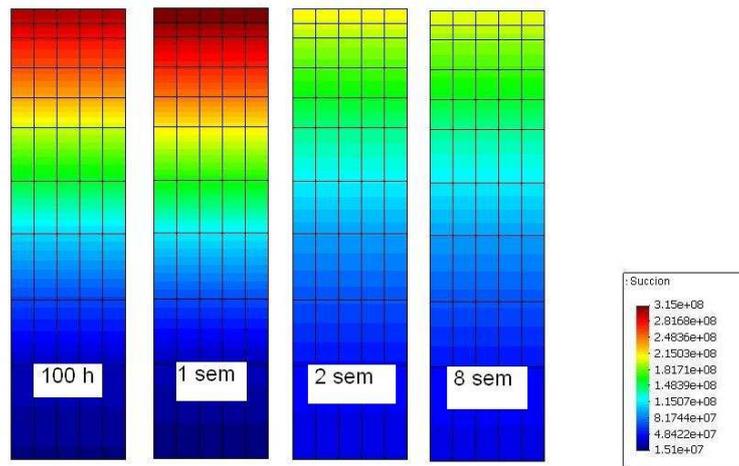


FIGURE 16.28 – Evolution de la succion à la fin de l'essai de Pintado et al. [161]

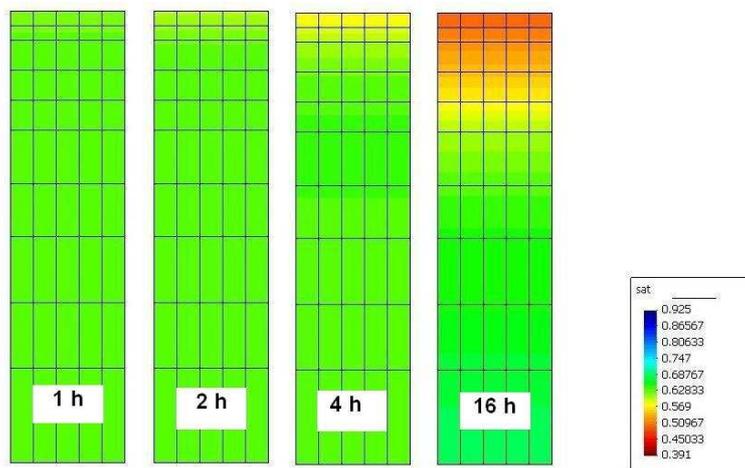


FIGURE 16.29 – Evolution du degré de saturation au début de l'essai de Pintado et al. [161]

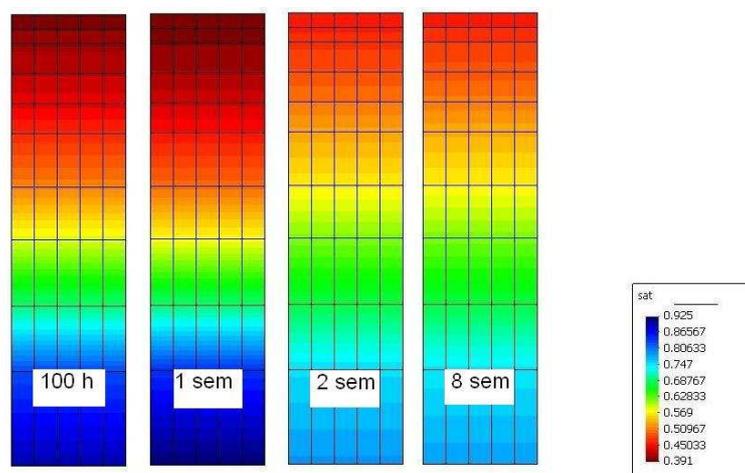


FIGURE 16.30 – Evolution du degré de saturation à la fin de l'essai de Pintado et al. [161]

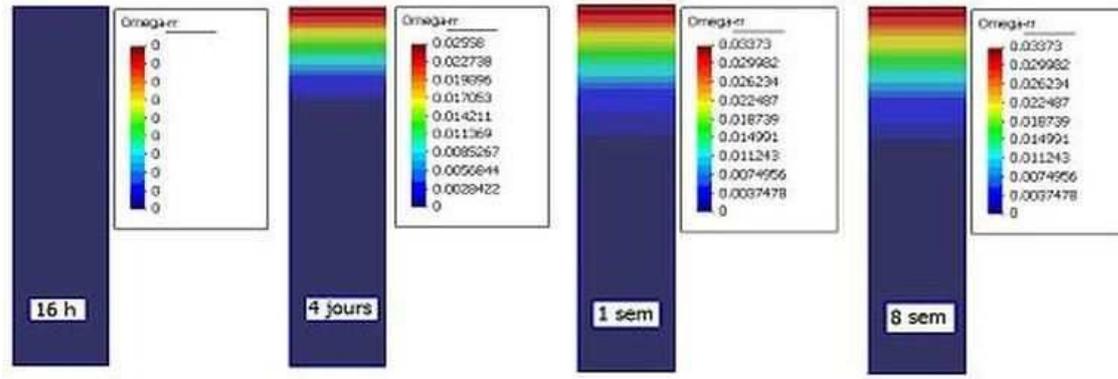


FIGURE 16.31 – Evolution spatio-temporelle de l'endommagement radial dans l'échantillon de bentonite pour $g_M = g_{Mref} = -1.414 Pa$ et $q_h = 116.9 W.m^{-2}$.

16.3.2 Tendances du modèle d'endommagement pour l'essai de chauffage de la bentonite

On étudie à présent les tendances de l'endommagement dans la bentonite non saturée, en faisant varier successivement :

- la rigidité g_M à chargement thermique constant, avec $q_h = 116.9 W.m^{-2}$;
- le chargement thermique q_h , à rigidité $g_M = g_{Mref}$ constante.

En-dehors de g_M , tous les paramètres matériels de la bentonite sont les mêmes que dans l'étude réalisée dans le domaine élastique du modèle THHMD (tableaux 16.12, 16.13 et 16.14). La valeur de référence pour la rigidité g_M est caractéristique de l'argilite de l'Est [38] :

$$g_{Mref} = -1.414 Pa \quad (16.13)$$

Les études paramétriques dont on présente les résultats ici ont été réalisées par Mahsa Mozayan, dans le cadre d'un stage de master [109].

Bien que l'endommagement développé soit généré par des déformations mécaniques qui peuvent être anisotropes, le transfert essentiellement diffusif de la chaleur provoque une dilatation isotrope du matériau à proximité de la source de chaleur. C'est pourquoi l'endommagement est isotrope dans toutes les simulations réalisées dans le cadre de cette étude paramétrique :

$$\Omega_{rr} = \Omega_{\theta\theta} = \Omega_{zz} \quad (16.14)$$

A titre d'exemple, l'évolution de l'endommagement radial est présenté sur la figure 16.31 pour $g_M = g_{Mref} = -1.414 Pa$ et $q_h = 116.9 W.m^{-2}$. Comme on pouvait s'y attendre, le niveau d'endommagement est d'autant plus élevé que la rigidité g_M est grande (figure 16.32) ou que la sollicitation thermique est importante (figure 16.33). L'endommagement croît pendant la phase de chauffage (la première semaine), et n'évolue plus lorsque la source de chaleur est éteinte (phase de relaxation de 7 semaines), ce qui se traduit par l'apparition d'un plateau à la valeur maximale de l'endommagement.

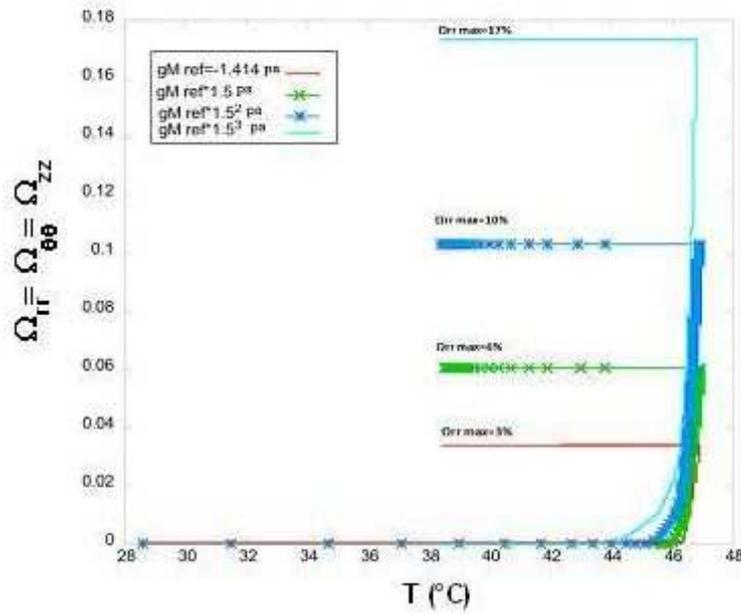


FIGURE 16.32 – Variations de l'endommagement avec la rigidité g_M , sous le même chargement thermique $q_h = 116.9 \text{ W.m}^{-2}$. Résultats pour un élément en tête de l'échantillon.

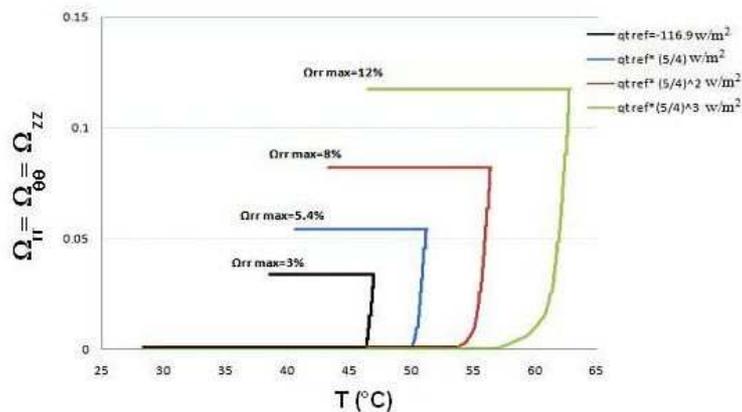


FIGURE 16.33 – Variations de l'endommagement avec le chargement thermique q_h , avec la même rigidité $g_M = g_{Mref} = -1.414 \text{ Pa}$. Résultats pour un élément en tête de l'échantillon.

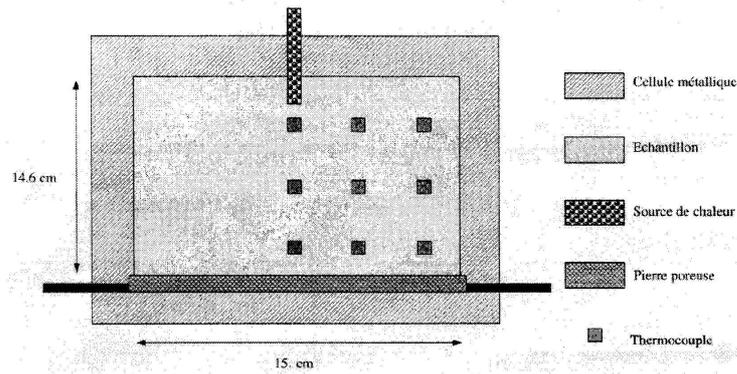


FIGURE 16.34 – Dispositif expérimental de Villar et al. [102, 201].

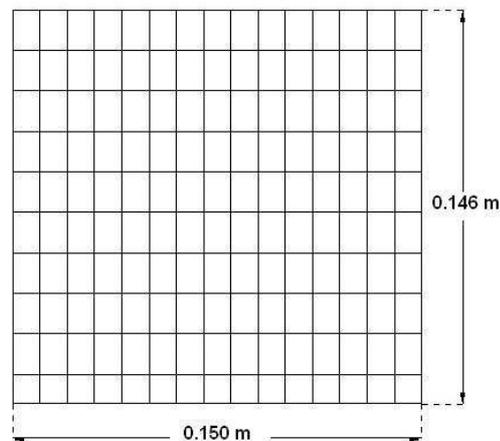


FIGURE 16.35 – Maillage adopté pour reproduire l'essai de Villar et al. [201]

16.4 Essai de chauffage dans une cuve d'argile compactée non saturée déformable [102, 201, 202]

16.4.1 Validation dans le domaine élastique du modèle THHMD

16.4.1.1 Principe de l'essai

L'essai réalisé par Villar et al. [201] consiste à chauffer une argile compactée non saturée afin d'en étudier la réponse thermo-hydro-mécanique. Le sol est placé dans une cuve de 15 cm de large et de 14,6 cm de haut. Le dispositif de chauffage est placé en surface, au centre de la cuve. Une température de 100°C est imposée pendant deux heures. Par ailleurs, toutes les frontières extérieures de la cuve sont douchées en permanence, de manière à maintenir une température constante de 28°C sur les bords. La température initiale du sol est de 20°C . La cuve est instrumentée de manière à suivre les évolutions de la température, du degré de saturation et de l'indice des vides dans le temps et dans l'espace (fig. 16.34). Compte-tenu de la géométrie de la cuve et du chargement imposé, on choisit de reproduire l'essai numériquement à l'aide d'une configuration en déformations planes. Le maillage comporte 176 noeuds et 150 éléments (fig. 16.35).

TABLE 16.15 – Paramètres mécaniques utilisés dans le test élastique de Villar et al.

Modèle élastique hyperbolique						
K_b	K_L	n	R_f	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$	K_U	m
$5.98 * 10^4$	$1.22 * 10^5$	0	0	$2 * 10^{10} Pa$	$1.22 * 10^5$	0
Rigidités de référence						
β_s^0	β_T^0					
$5.98 * 10^8 Pa$	$5.98 * 10^{10} Pa$					
Paramètres d'endommagement						
χ	C_0	C_1	g_M	g_S	g_T	
0.005	$2.3 * 10^{-4} Pa$	$5.2 * 10^{-3} Pa$	0	0	0	
Conditions initiales						
e_0	S_{w0}	T_0				
0.71	0.5	$20^\circ C$				

16.4.1.2 Choix des paramètres matériels

Dans la suite, on compare les prédictions de la partie élastique du modèle THHMD aux mesures expérimentales de Villar et al. [201] et aux prédictions du modèle élastique avec surface d'état de l'indice des vides de Gatmiri [76], données dans la thèse de Jenab [102]. Le sol étudié est une argile compactée, dont on suppose que les caractéristiques mécaniques sont proches de celles d'une argilite. En utilisant le jeu de paramètres relatifs à l'endommagement mécanique pour l'argilite de l'Est [94, 38], on pourra ainsi étudier les tendances du comportement endommagé du sol au moyen de paramètres bien proportionnés. Le paramètre de dilatance χ est choisi selon les recommandations de Shao et al. [180] : $\chi \simeq 0.005$ pour les roches fragiles. Comme dans l'essai de chauffage de la bentonite présenté précédemment [161], on suppose que la rigidité thermique est environ 10 fois plus grande que le module de compression volumique. La rigidité capillaire a été calée après plusieurs simulations, pour que les variations de l'indice des vides soient du même ordre de grandeur que dans les simulations effectuées avec le modèle élastique à surfaces d'état [76]. Par ailleurs, comme c'est rappelé dans la thèse de Jenab [102], dans les conditions initiales, l'indice des vides vaut 0.71 et le degré de saturation est de 0.5. Les paramètres mécaniques adoptés pour cette simulation sont donnés dans le tableau 16.15.

On rappelle l'équation de la surface d'état du degré de saturation :

- dans le modèle THHMD :

$$S_w = \left[(1 - S_{w,r}) (1 + (\alpha_{VG} s)^{n_{VG}})^{-1 + \frac{1}{n_{VG}}} + S_{w,r} \right] \exp(d_s (T - T_0)) \quad (16.15)$$

où s est la succion et T est la température (en $^\circ C$). $S_{w,r}$ est le degré de saturation résiduel. α_{VG} et n_{VG} sont les paramètres de rétention de Van Genuchten [197] ;

- dans le modèle élastique à surfaces d'état de Gatmiri [76] :

$$S_w = 1 - (a_s + b_s \sigma_{yy}'') (1 - \exp(c_s s)) \exp(d_s (T - T_0)) \quad (16.16)$$

où σ_{yy}'' est la contrainte nette « verticale », s est la succion et T est la température (en $^\circ C$).

La contribution exponentielle de la température est équivalente dans les deux modèles, si bien qu'on prendra la même valeur de d_s que dans l'étude numérique de Jenab [102], au signe près : $d_s = -10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. On considère que pendant l'essai de Villar et al. [201], la surface d'état du degré de saturation est principalement influencée par les effets de la succion. On cherche donc à caler la courbe de rétention isotherme du modèle THHMD sur celle de Gatmiri (Jenab utilise $c_s = -2.08855 \text{ Pa}^{-1}$, et pour la comparaison, on considère que $a_s = 1$ et $b_s = 0$). On obtient une très bonne concordance pour le jeu de paramètres $S_{w,r} = 0$, $\alpha_{VG} = 5 * 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}$, $n_{VG} = 2.3$ (fig. 16.36).

On rappelle la formule de la perméabilité à l'eau liquide dans l'état intact du matériau :

$$K_w^{intact}{}_{ij} = k_{w_0} 10^{\alpha_w e} \left(\frac{S_w - S_{w,r}}{1 - S_{w,r}} \right)^3 \frac{\mu_w(T)}{\mu_w(T_{ref})} \delta_{ij} \quad (16.17)$$

où e est l'indice des vides et où δ_{ij} désigne le tenseur identité d'ordre deux. La formule 16.17 est utilisée dans les deux modèles comparés (domaine élastique du modèle THHMD et modèle élastique à surfaces d'état de Gatmiri). Dans la simulation avec le modèle THHMD, on considère que les effets mécaniques sur la perméabilité à l'eau liquide sont négligeables, et on fixe $\alpha_w = 0$. Cette hypothèse est acceptable puisque l'indice des vides varie peu pendant l'expérience [102, 201]. On rappelle qu'on a choisi un degré de saturation résiduel nul pour caler la courbe de rétention isotherme sur celle de Jenab. Jenab a choisi $\alpha_w = 5$ et $S_{w,r} = 0.05$, donc un calage de k_{w_0} est nécessaire pour que les deux modèles comparés donnent des résultats proches sur l'évolution de la perméabilité à l'eau avec le degré de saturation. Pour le calage, on suppose que l'indice des vides ne varie pas dans la formule 16.17. Jenab utilise $k_{w_0} = 1.2 * 10^{-9} \text{ m.s}^{-1}$. Si on choisit $k_{w_0} = 1.2 * 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$ dans le modèle THHMD, l'évolution de la perméabilité à l'eau du matériau intact est proche de celle du matériau élastique modélisé par Jenab (fig. 16.37).

Le module de rigidité capillaire choisi dans le modèle THHMD est 100 fois plus grand que dans la simulation de Jenab. Pour compenser, on choisit une conductivité à l'air 100 fois moindre, de manière à ce que les variations de succion soient bien rendues : $c_a = 3 * 10^{-10} \text{ m}^2$ chez Jenab [102], $c_a = 3 * 10^{-12} \text{ m}^2$ dans la modélisation THHMD. On conserve le paramètre de conductivité à l'air α_a utilisé par Jenab ($\alpha_a = 4$) pour que les variations de la perméabilité à l'air avec le degré de saturation soient comparables. Dans le domaine élastique, le choix des maxima envisagés pour la perméabilité intrinsèque endommagée K_{wdg}^{max} et pour la conductivité intrinsèque endommagée $D_{vap,dg}^{max}$ n'a aucune incidence sur les résultats numériques. Dans la simulation effectuée, on considère que K_{wdg}^{max} est du même ordre de grandeur que la perméabilité (globale) maximale du milieu intact, et que $D_{vap,dg}^{max}$ est du même ordre de grandeur que la perméabilité à l'air maximale. Les paramètres relatifs aux fluides qui sont utilisés dans cette simulation avec le modèle THHMD sont donnés dans le tableau 16.16.

On choisit une valeur usuelle pour la dilatance thermique, qui donne le même module de rigidité thermique que dans la simulation de Jenab [102] ($7.5 * 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$). On considère par ailleurs que la rigidité thermique est indépendante de la température et des contraintes mécaniques ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$). Les valeurs des capacités calorifiques de l'eau liquide, de l'air gazeux et de la vapeur sont des valeurs usuelles, de même que les valeurs de la chaleur latente d'évaporation et les valeurs des conductivités thermiques de l'eau liquide et de l'air gazeux. On utilise les mêmes propriétés thermiques que pour les alluvions modélisées par Pollock [163] pour le squelette solide : $C_{Ps} = 837 \text{ J.kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $\lambda_s = 1.05 \text{ W.m}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ (voir le chapitre suivant). Les paramètres thermiques utilisés dans cette simulation sont donnés dans le tableau 16.17.

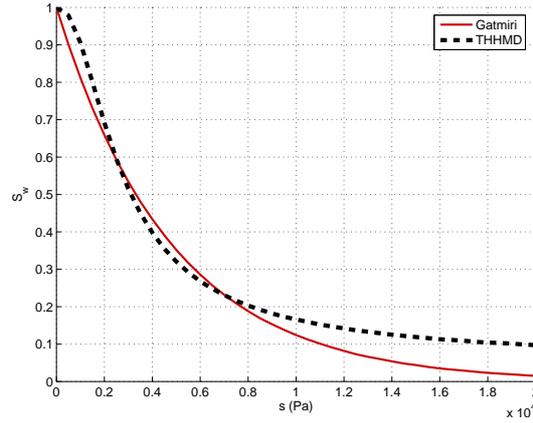


FIGURE 16.36 – Calage de la courbe de rétention du modèle THHMD ($S_{w,r} = 0$, $\alpha_{VG} = 5 * 10^{-4} Pa^{-1}$, $n_{VG} = 2.3$) sur celle du modèle élastique à surfaces d'état de Gatmiri ($a_s = 1$, $b_s = 0$ et $c_s = -2.08855 Pa^{-1}$).

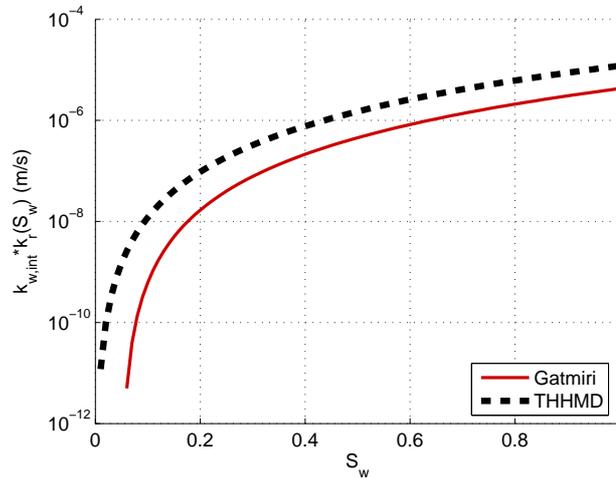


FIGURE 16.37 – Calage de la perméabilité intacte isotherme du modèle THHMD ($k_{w0} = 1.2 * 10^{-5} m.s^{-1}$, $\alpha_w = 0$, $S_{w,r} = 0$) sur celle du modèle élastique à surfaces d'état de Gatmiri ($k_{w0} = 1.2 * 10^{-9} m.s^{-1}$, $\alpha_w = 5$, $e = e_0$ et $S_{w,r} = 0.05$).

TABLE 16.16 – Paramètres relatifs aux fluides pour le test élastique de Villar et al.

Courbe de rétention			
$S_{w,r}$	α_{VG}	n_{VG}	d_s
0	$5 * 10^{-4} Pa^{-1}$	2.3	-10^{-5}
Perméabilité à l'eau liquide			
k_{w0}	α_w	$k_w^{0,max}$	k_{wdg}^{max}
$1.2 * 10^{-5} m.s^{-1}$	0	$10^{-9} m.s^{-1}$	$10^{-9} m.s^{-1}$
Transfert des gaz			
c_a	α_a	k_a^{max}	D_{dg}^{max}
$3 * 10^{-12} m^2$	4	$10^{-4} m.s^{-1}$	$10^{-4} m^2.s^{-1}$

TABLE 16.17 – Paramètres thermiques utilisés dans le test élastique de Villar et al.

Rigidité thermique intacte				
α_0^*	α_1	α_2	α_3	p_{geo}
$-7.5 * 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	0	0	0	10^5 Pa
Diffusion et évaporation				
λ_s	λ_w	λ_a	h_{fg}	
$1.05 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$0.6 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$0.0258 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$2.5 * 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$	
Convection				
C_{Ps}	C_{Pw}	C_{Pvap}	C_{Pa}	
$837 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$4184 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$1900 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$1000 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	

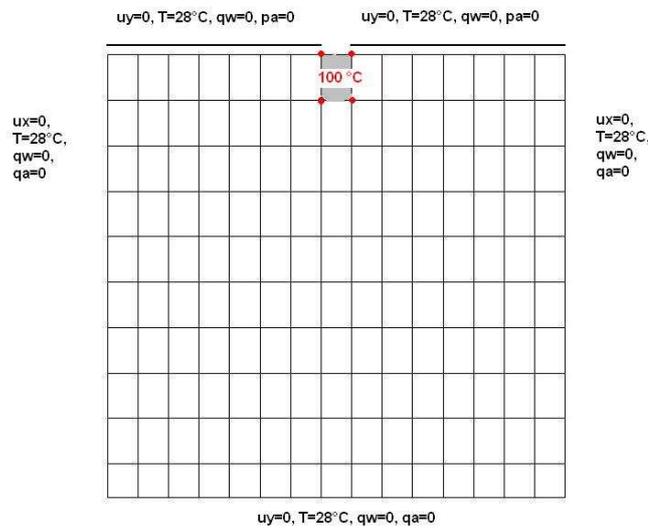


FIGURE 16.38 – Conditions aux limites adoptées pour reproduire l'essai de Villar et al. [201]

16.4.1.3 Chargement

La température initiale est fixée à 20°C en tous les noeuds du maillage. La succion est initialisée sur chaque élément en inversant la formule de la surface d'état du degré de saturation ($S_{w0} = 0.5$, $T_0 = 20^\circ\text{C}$).

Les conditions aux limites adoptées sont les suivantes :

- déplacements horizontaux : bloqués sur les deux frontières latérales ;
- déplacements verticaux : bloqués sur les frontières inférieure et supérieure ;
- température : température nodale de 100°C sur les quatre noeuds de l'élément qui représente la source de chaleur, température nodale de 28°C sur toutes les frontières extérieures (autres que la source de chaleur) ;
- flux d'eau liquide bloqués sur toutes les frontières (en raison de l'utilisation d'une membrane imperméable) ;
- flux d'air bloqués sur les frontières latérales et sur la frontière inférieure ; pression interstitielle de l'air bloquée sur la frontière supérieure (pour reproduire le contact à l'air libre).

La figure 16.38 illustre les conditions aux limites adoptées dans cette simulation.

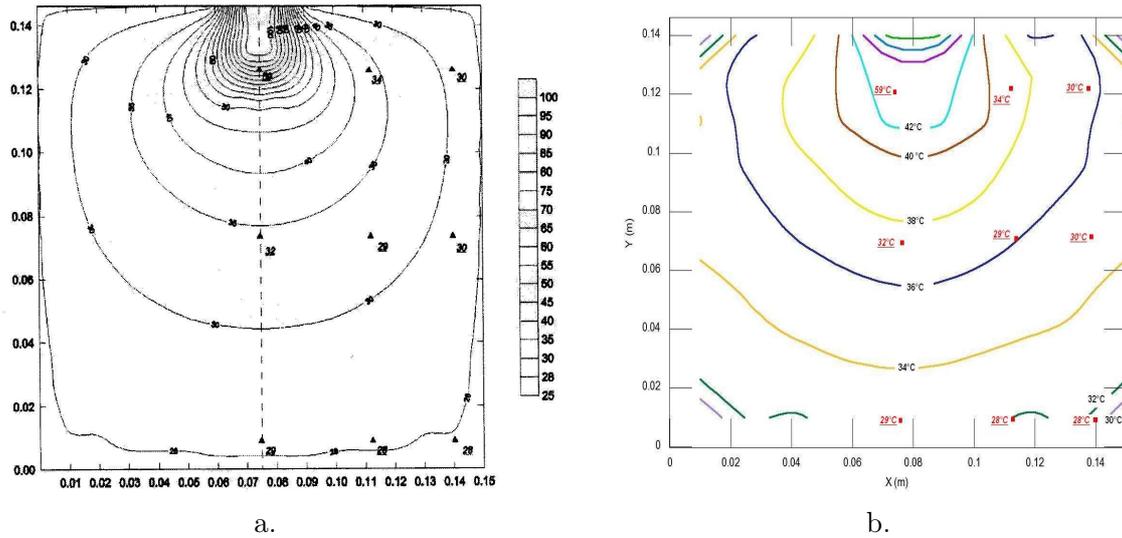


FIGURE 16.39 – Distribution spatiale de la température après 2h de chauffage (isochrones pour les résultats numériques, points pour les mesures expérimentales [201]). a. Modèle à surfaces d'état [102]. b. Modèle THHMD.

16.4.1.4 Etude des résultats numériques obtenus dans le domaine élastique du modèle THHMD

Près des bords de la cuve, les températures calculées après deux heures de chauffage sont en accord avec l'expérience. Près de la source, les températures calculées par le modèle THHMD en fin d'essai sont globalement plus faibles que dans l'expérience [201], et plus faibles que dans la simulation effectuée par Jenab [102] avec le modèle élastique à surfaces d'état (fig. 16.39). On peut expliquer cette différence par le choix de la conductivité thermique du squelette solide : on a choisi $\lambda_s = 1.05 \text{ W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$, et Jenab a travaillé avec $\lambda_s = 0.9 \text{ W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$. La chaleur est diffusée plus rapidement dans l'échantillon, et la température tend plus rapidement vers un état homogène dans le cas de la modélisation THHMD. Cette explication est confortée par l'observation de la cinétique d'évolution de la température dans l'échantillon modélisé (fig. 16.40) et par l'observation de la cinétique d'évolution de l'indice des vides (fig. 16.41). En effet, les effets de la dilatation thermique sur l'indice des vides final sont moins prononcés dans les prédictions du modèle THHMD que dans l'expérience et dans le calcul effectué avec le modèle à surfaces d'état (fig. 16.42). Mais on atteint la même valeur de déformation volumique maximale que dans l'expérience entre 30 et 60 minutes (fig. 16.41).

Comme on l'a expliqué dans les paragraphes précédents, on a choisi un jeu de paramètres mécaniques dont les données sur l'endommagement étaient connues. Ce choix nous a conduits à utiliser un module de compression volumique 100 fois plus élevé que Jenab [102]. On a ensuite choisi la rigidité capillaire intacte de manière à conserver le même rapport K_b/β_s que dans la simulation de Jenab, ce qui nous a amenés à prendre une perméabilité à l'air 100 fois plus élevée que dans la modélisation de Jenab. Ce choix peut expliquer les différences observées sur l'ordre de grandeur de la succion (fig. 16.43). Pour autant, la distribution spatiale du degré de saturation à la fin de l'essai est satisfaisante au regard des résultats obtenus dans l'expérience de Villar et al. [201] et dans la simulation de Jenab [102] (fig. 16.44). La cinétique d'évolution du degré de saturation montre que l'échantillon se désature à proximité de la source de chaleur, et qu'un processus de

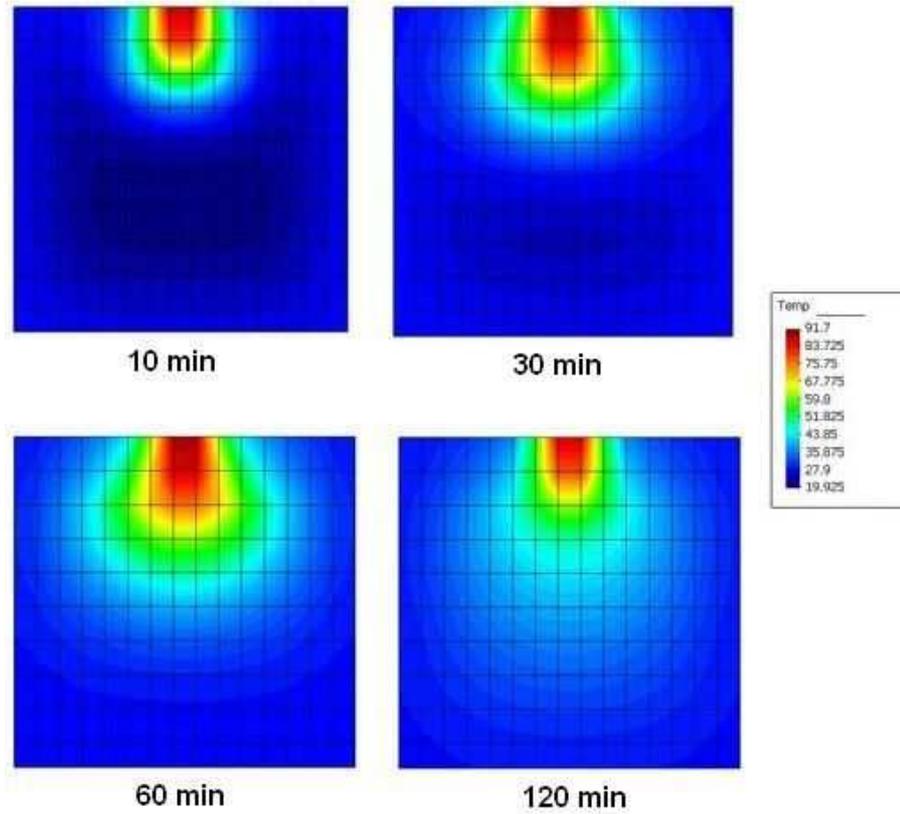


FIGURE 16.40 – Evolution spatio-temporelle de la température (en $^{\circ}C$) pendant la simulation de l'essai de chauffage de Villar et al. [201], dans le domaine élastique du modèle THHMD.

resaturation par condensation a lieu autour de cette zone de désaturation (fig. 16.45).

16.4.2 Tendances du modèle d'endommagement pour l'essai de chauffage de l'argile déformable

On étudie à présent les tendances de l'endommagement thermique et de l'endommagement capillaire. Pour ce faire, on fait trois études paramétriques :

- étude de l'influence de g_T sur le développement de l'endommagement thermique ($g_T \neq 0$, $g_S = 0$ et $g_M = 0$) ;
- étude de l'influence de g_S sur le développement de l'endommagement capillaire ($g_S \neq 0$, $g_T = 0$ et $g_M = 0$) ;
- étude des influences combinées de g_T et g_S sur le développement de l'endommagement « thermo-capillaire » ($g_T \neq 0$, $g_S \neq 0$ et $g_M = 0$).

Les concepts de rigidité d'endommagement capillaire (g_S) et thermique (g_T) sont des nouveautés du modèle THHMD. Il n'y a donc pas de valeur caractéristique pour ces paramètres dans les publications actuelles. On choisit des ordres de grandeurs proches de la valeur trouvée pour la rigidité g_M de l'argilite de l'Est [93, 38], pour être en conformité avec le reste des paramètres mécaniques utilisés :

$$g_{Mref} = -1.414 Pa \quad (16.18)$$

En-dehors des rigidités d'endommagement g_T et g_S , tous les paramètres mécaniques choisis dans l'étude effectuée dans le domaine élastique sont conservés (tableau 16.15). De même, on conserve

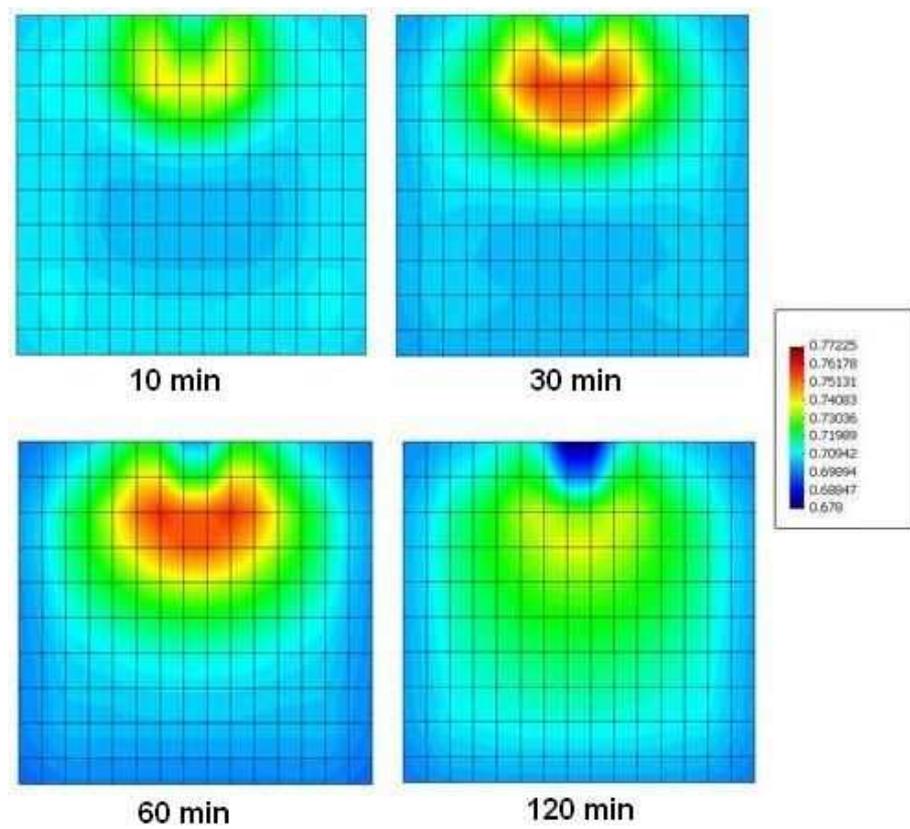


FIGURE 16.41 – Evolution spatio-temporelle de l'indice des vides pendant la simulation de l'essai de chauffage de Villar et al. [201], dans le domaine élastique du modèle THHMD.

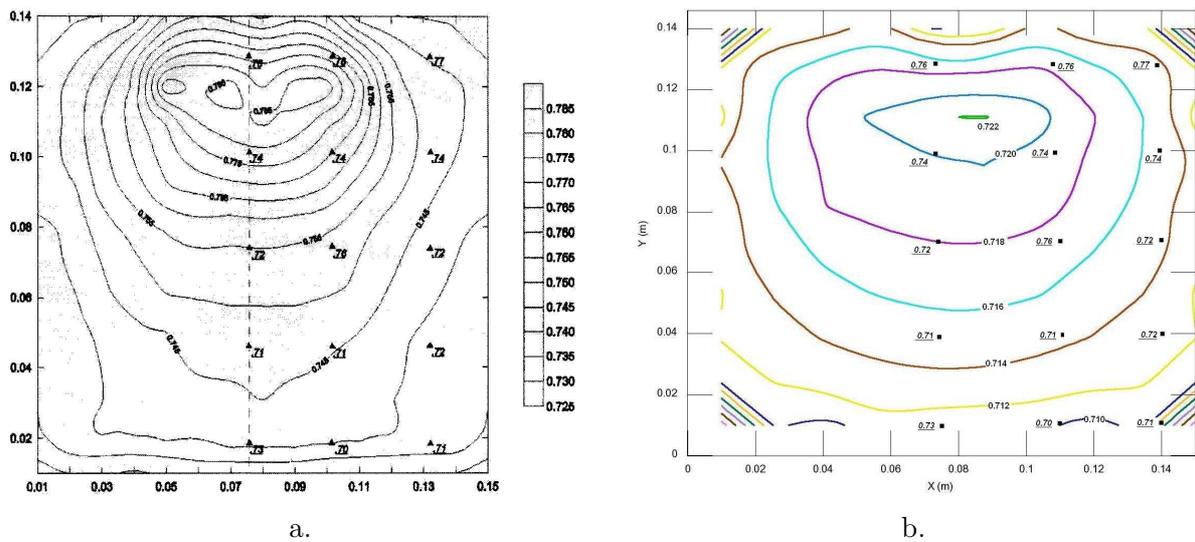


FIGURE 16.42 – Distribution spatiale de l'indice des vides après 2h de chauffage (isochrones pour les résultats numériques, points pour les mesures expérimentales [201]). a. Modèle à surfaces d'état [102]. b. Modèle THHMD.

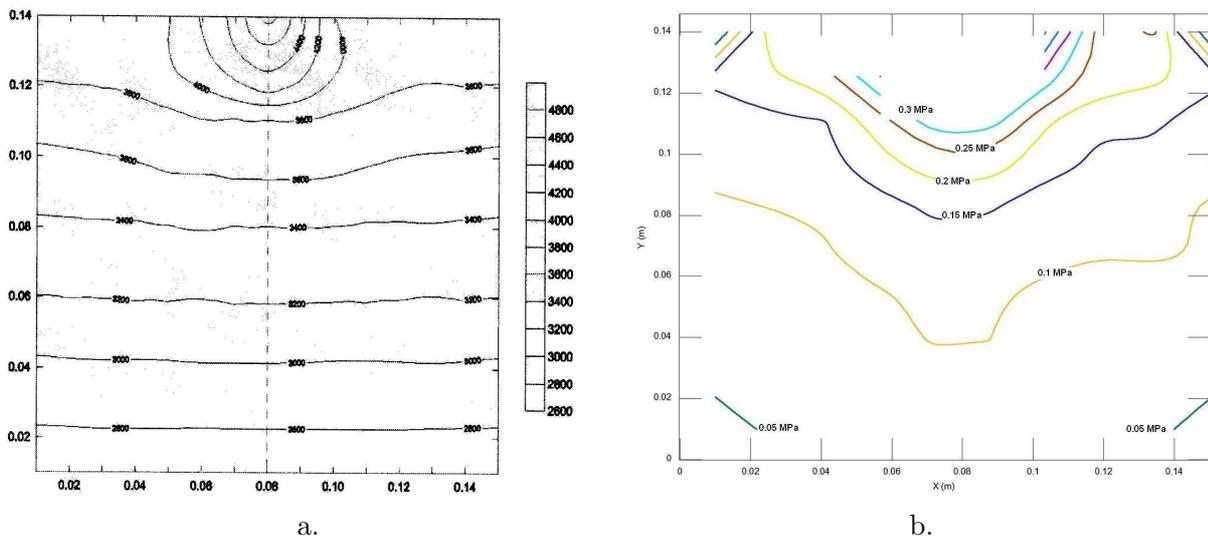


FIGURE 16.43 – Distribution spatiale de la succion après 2h de chauffage. a. Modèle à surfaces d'état [102]. b. Modèle THHMD.

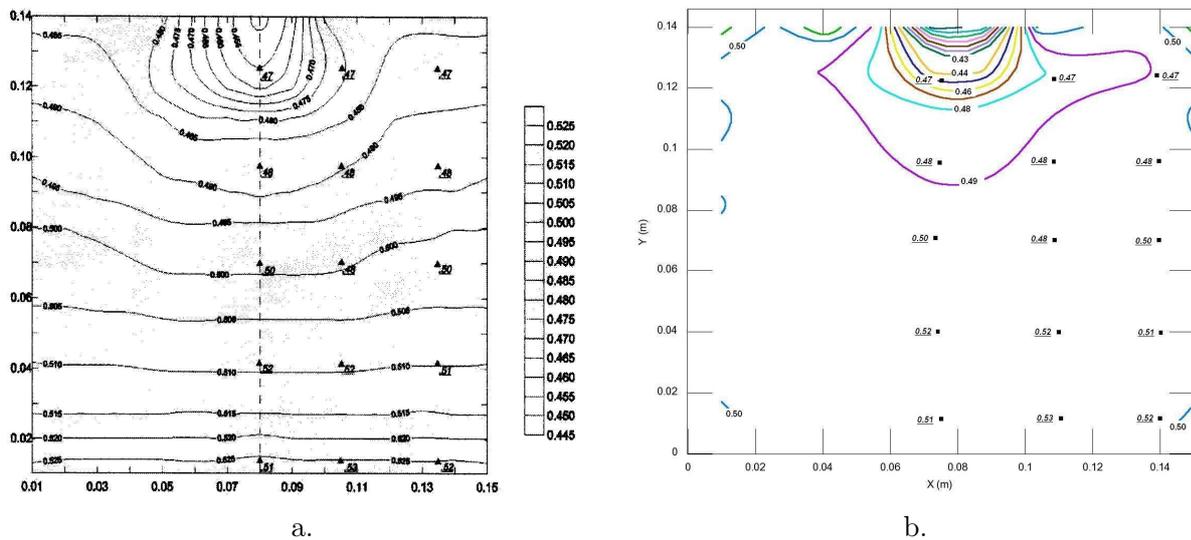


FIGURE 16.44 – Distribution spatiale du degré de saturation après 2h de chauffage (isochrones pour les résultats numériques, points pour les mesures expérimentales [201]). a. Modèle à surfaces d'état [102]. b. Modèle THHMD.

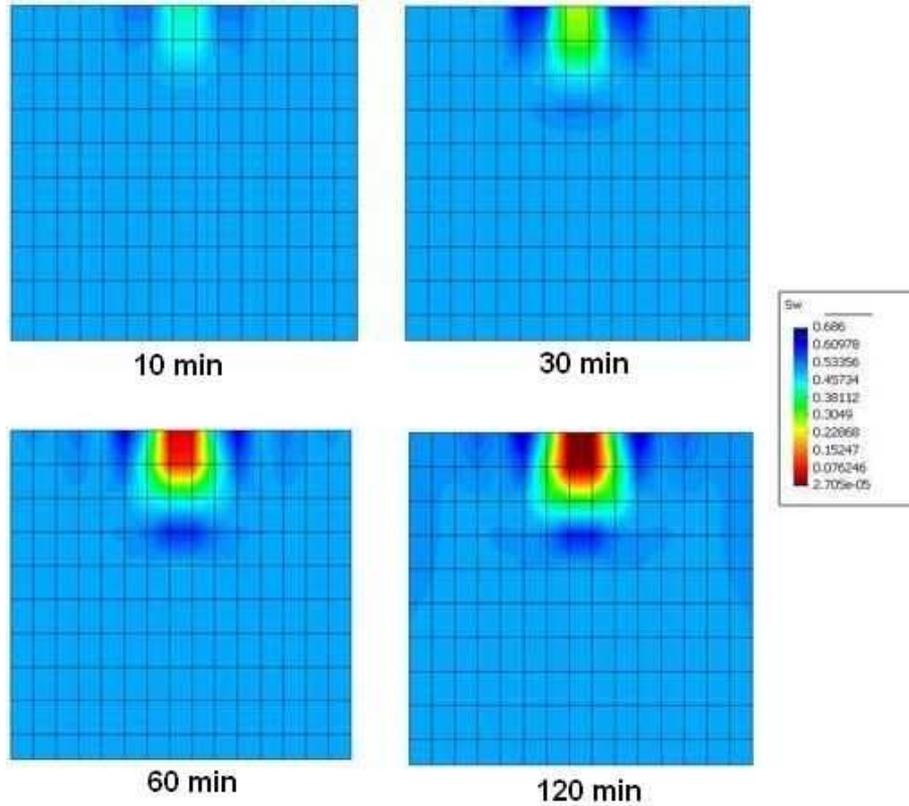


FIGURE 16.45 – Evolution spatio-temporelle du degré de saturation pendant la simulation de l'essai de chauffage de Villar et al. [201], dans le domaine élastique du modèle THHMD.

les paramètres thermiques utilisés dans la simulation effectuée dans le domaine élastique du modèle THHMD (tableau 16.17). Pour mieux refléter les effets de la fissuration sur le tenseur de perméabilité à l'eau, on augmente les valeurs des paramètres qui jouent le rôle de longueurs internes. Ainsi, on choisit :

$$K_{w,dg}^{max} = 100 k_{w0} = 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}, \quad D_{vap,dg}^{max} = 1.2 \cdot 10^{-1} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad (16.19)$$

En-dehors de $K_{w,dg}^{max}$ et $D_{vap,dg}^{max}$, tous les paramètres relatifs aux fluides qui ont été utilisés pour valider le modèle dans le domaine élastique sont conservés (tableau 16.16). Dans toutes les simulations effectuées, l'endommagement se développe proportionnellement à des déformations volumiques ($\epsilon_{T_v}^+$ et/ou $\epsilon_{S_v}^+$). L'endommagement calculé est donc isotrope. C'est pourquoi dans la suite, on ne présentera que les distributions spatiales obtenues pour Ω_{xx} .

Conformément au modèle théorique, l'endommagement généré est d'autant plus important que la rigidité d'endommagement utilisée est grande (figures 16.46.a,c,e,g et 16.47.a,c,e,g). L'endommagement thermique se développe principalement au voisinage de la source de chaleur et vers le milieu de l'échantillon, c'est-à-dire loin des frontières tempérées par la douche tiède (figures 16.46.a,c,e,g). L'endommagement capillaire se concentre autour de la source de chaleur, là où les niveaux de succion sont les plus importants (figures 16.43 et 16.47.a,c,e,g). A rigidité d'endommagement égale, l'endommagement thermique dû à g_T atteint des valeurs maximales environ trois fois plus élevées que l'endommagement capillaire dû à g_S . La localisation et la relative faiblesse de l'endommagement capillaire expliquent pourquoi la fissuration liée à l'augmentation de succion influence peu la distribution du degré de saturation (figures 16.47.b,d,f,h). Au contraire,

l'endommagement thermique contribue à désaturer l'ensemble de l'échantillon. La présence de fissuration isotrope dans une zone relativement étendue de l'échantillon favorise les échanges de fluides, ce qui tend à homogénéiser la distribution spatiale du degré de saturation. Plus la rigidité thermique est importante, et plus la distribution finale du degré de saturation s'homogénéise rapidement (figures 16.46.b,d,f,h). D'autre part, pour les niveaux importants d'endommagement thermique, on remarque que la zone la plus désaturée n'est pas concentrée autour de la source de chaleur, mais qu'elle se situe au contraire dans la partie de la cuve la plus éloignée de la source.

Comme on l'a vu précédemment, l'endommagement capillaire modifie peu la distribution spatiale du degré de saturation dans la gamme de rigidités d'endommagement g_S étudiée (figures 16.47.b,d,f,h). Il n'est donc pas étonnant de constater que la distribution spatiale du degré de saturation n'est quasiment pas modifiée par la prise en compte de l'endommagement capillaire dans un modèle de comportement comprenant de l'endommagement thermique (figures 16.48.b,d,f,h et 16.49.b,d,f,h). Les valeurs maximales atteintes par l'endommagement capillaire dans le cas ($g_S \neq 0, g_T = 0$) sont très inférieures aux maxima atteints par l'endommagement thermique dans le cas ($g_S \neq 0, g_T = 0$). Cela peut expliquer pourquoi la distribution spatiale de l'endommagement thermique est peu affectée par l'adjonction d'endommagement capillaire dans le modèle. La prise en compte de l'endommagement capillaire étend la zone endommagée à proximité de la source de chaleur, sur les éléments où l'endommagement capillaire atteint ses valeurs maximales en l'absence d'endommagement thermique (figures 16.48.a,c,e,g). Pour des niveaux d'endommagement thermique vraiment élevés, la prise en compte de l'endommagement capillaire devient imperceptible (figures 16.46.g et 16.49.a,c,e,g). Il s'agit de cas où les maxima atteints par l'endommagement capillaire sont du même ordre de grandeur que les valeurs prises par l'endommagement thermique au voisinage de la source. L'étude paramétrique montre donc que les effets des déformations thermiques de tension et des déformations capillaires de compression ne s'additionnent pas. Dans la simulation de l'essai de Villar et al. [201], le phénomène de fissuration thermique semble dominer le phénomène de fissuration capillaire.

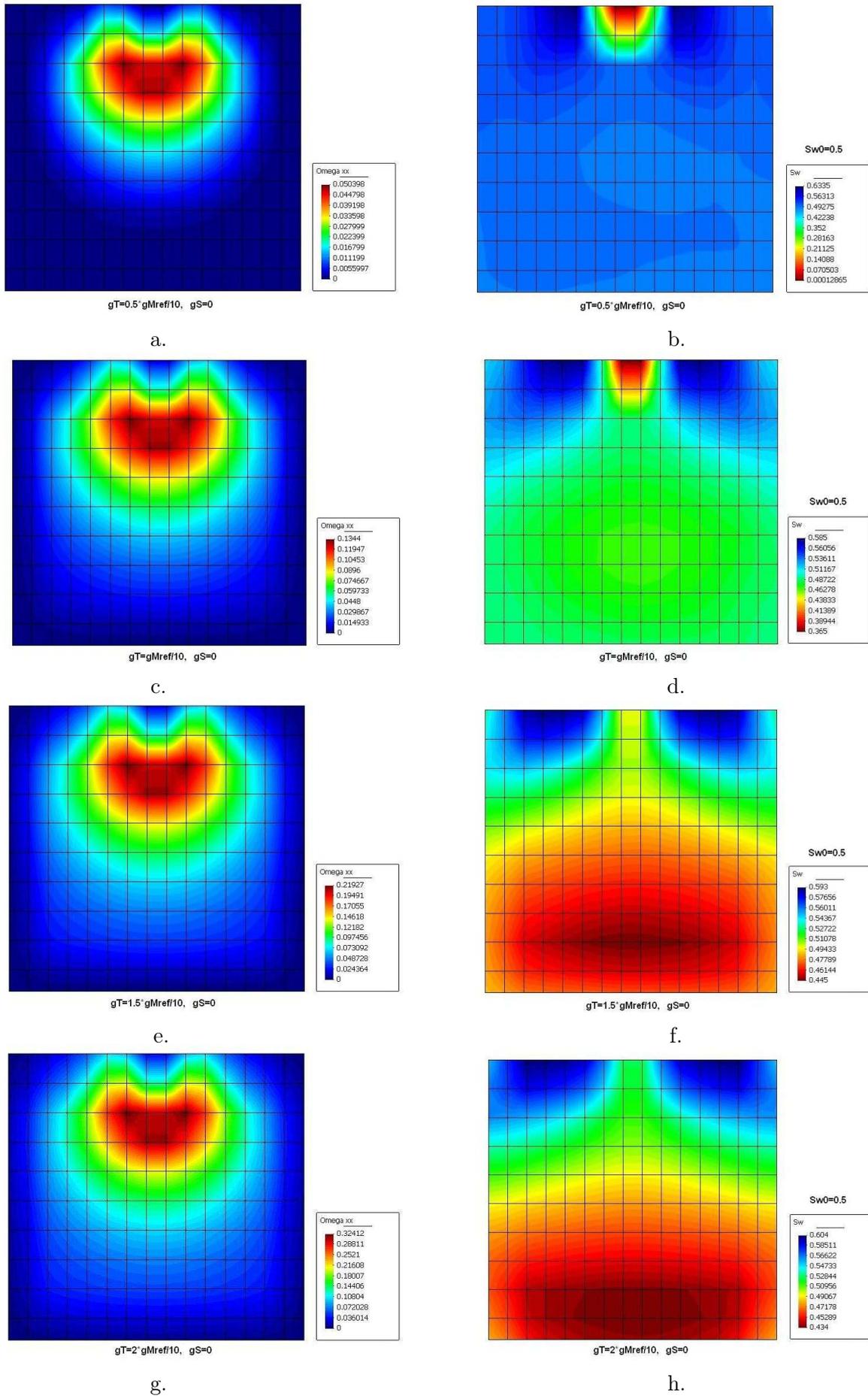


FIGURE 16.46 – Influence de g_T sur l'endommagement ($\Omega_{xx} = \Omega_{yy}$) et sur le degré de saturation, après 2h de chauffage. Fissuration thermique ($g_S = 0$).

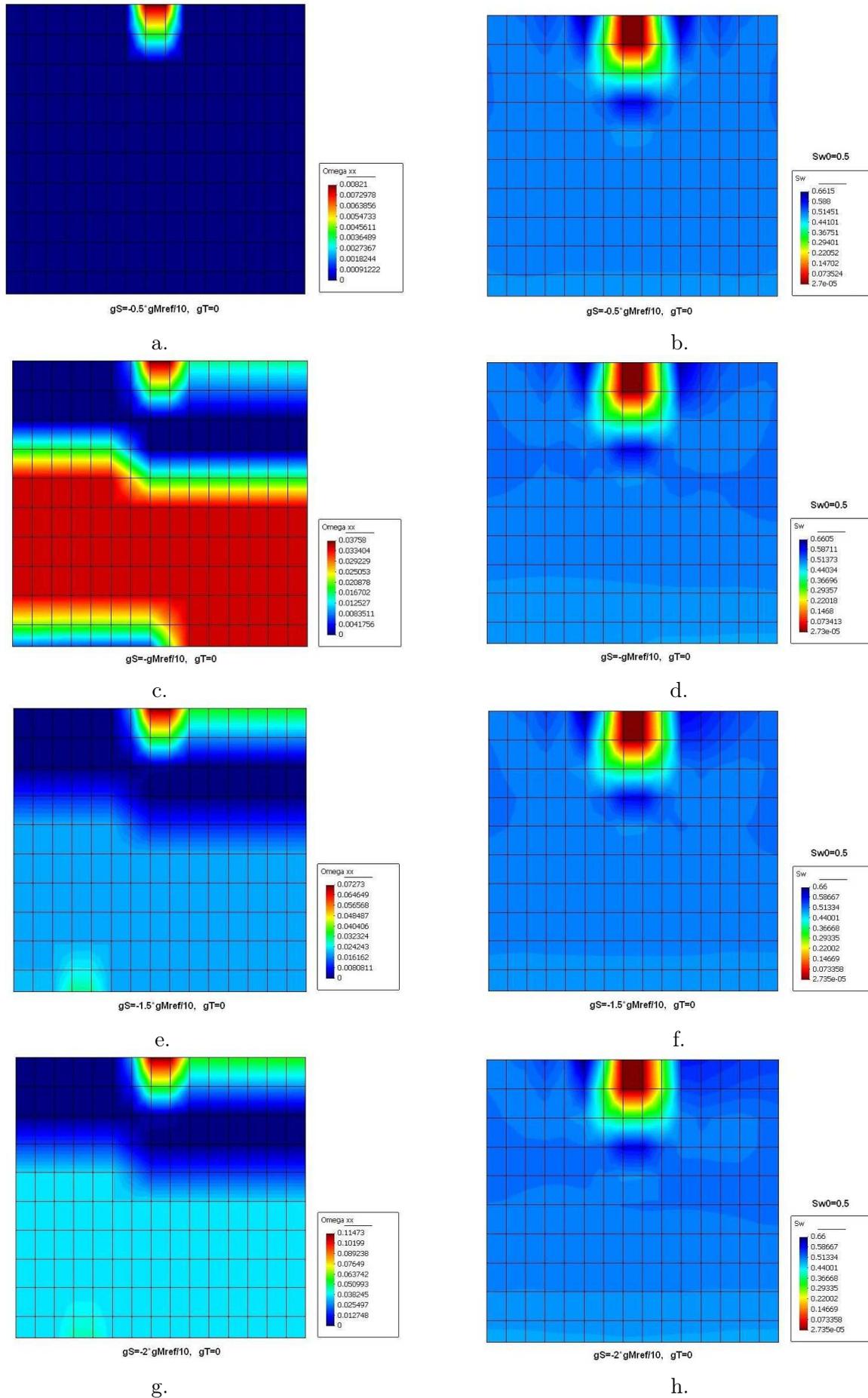


FIGURE 16.47 – Influence de g_S sur l'endommagement ($\Omega_{xx} = \Omega_{yy}$) et sur le degré de saturation, après 2h de chauffage. Fissuration capillaire ($g_T = 0$).

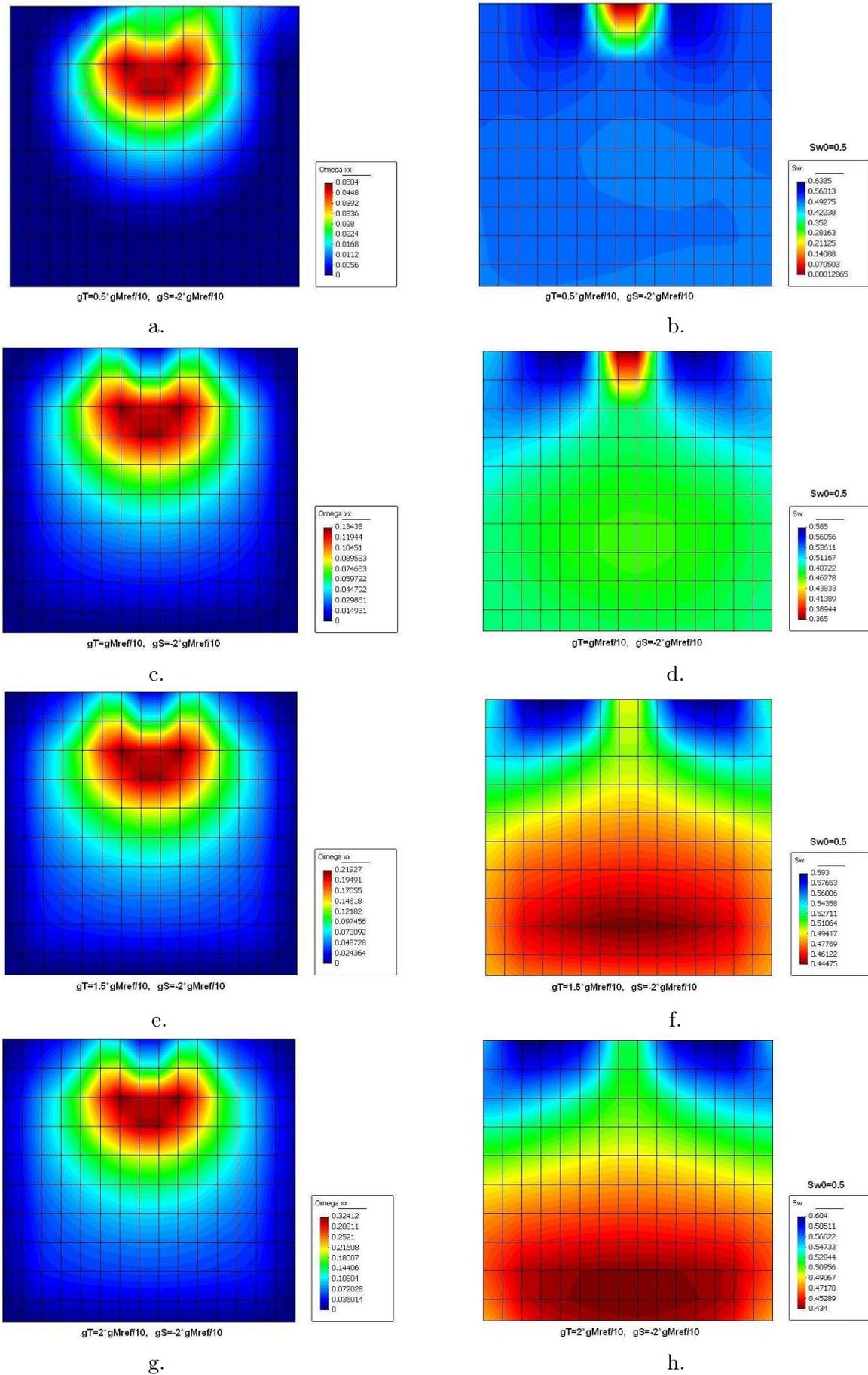


FIGURE 16.48 – Influence de g_T sur l'endommagement ($\Omega_{xx} = \Omega_{yy}$) et sur le degré de saturation, après 2h de chauffage. Fissuration thermo-capillaire ($g_S \neq 0$).

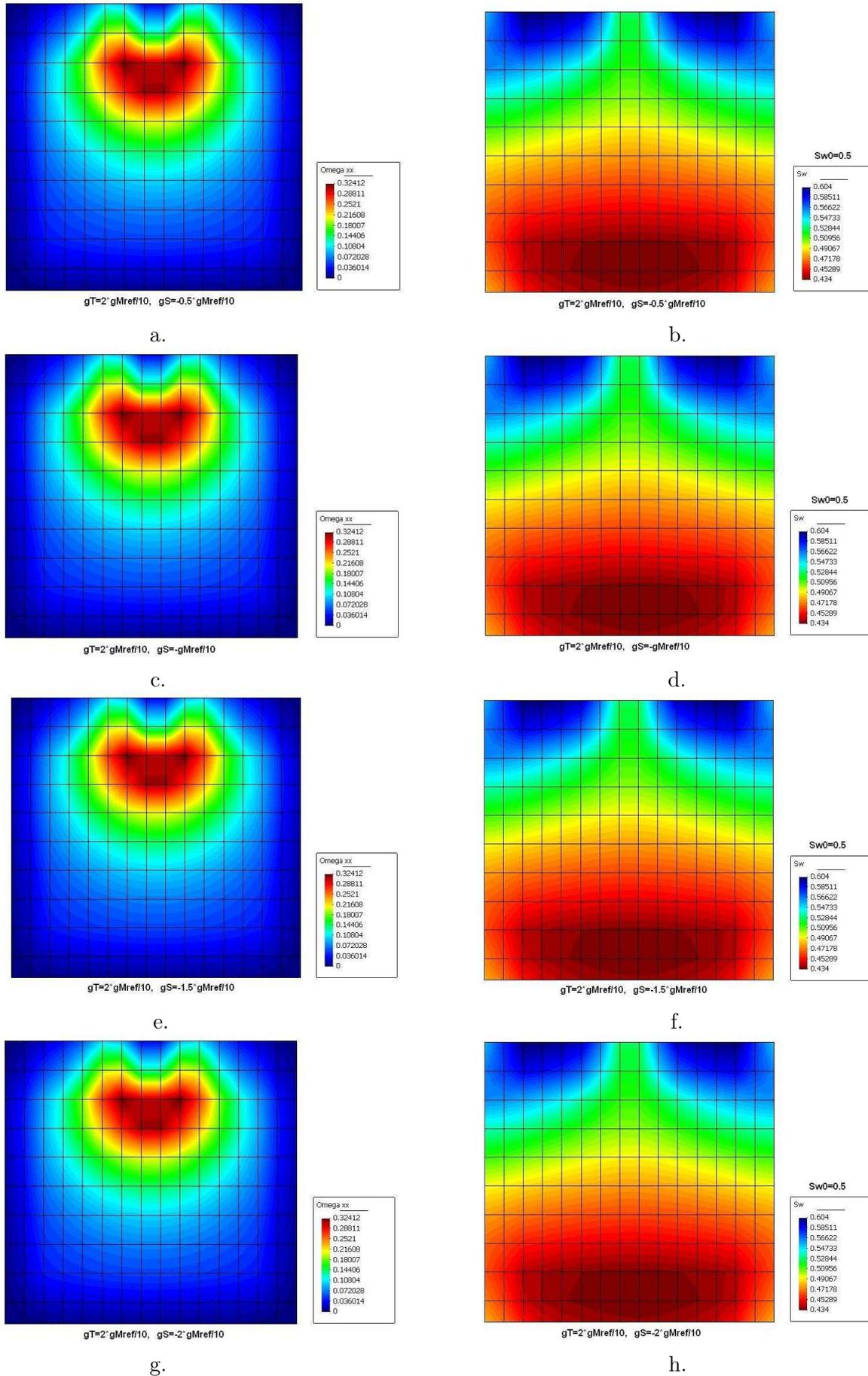


FIGURE 16.49 – Influence de g_S sur l'endommagement ($\Omega_{xx} = \Omega_{yy}$) et sur le degré de saturation, après 2h de chauffage. Fissuration thermo-capillaire ($g_T \neq 0$).

CHAPITRE 17

Simulations de Zones Endommagées par Excavation

17.1 Etude préliminaire : vérification de la théorie unidimensionnelle des tunnels en élasticité

17.1.1 Problème traité

L'EDZ (*Excavation Damaged Zone*, Zone Endommagée par Excavation) est formée avant l'entreposage des déchets, c'est-à-dire avant toute sollicitation thermique. En ingénierie, le problème mécanique du creusement d'un tunnel est traité comme un problème de déchargement à la paroi de la galerie excavée. La plupart des sites de stockage de déchets radioactifs sont construits dans des massifs géologiques initialement saturés [79, 173] ou non saturés [163]. Le déchargement est donc un problème hydro-mécanique couplé. Le liquide interstitiel migre vers la paroi, et le massif se désature dans une zone proche du tunnel. La pose du soutènement arrête le processus, et l'eau interstitielle commence par stagner à proximité de la paroi, avant de migrer à nouveau vers les zones désaturées, par capillarité. Dans cette partie, on se propose de traiter le problème sur un massif sec. On choisit la modélisation la plus simple qui soit : on étudie une tranche unidimensionnelle de massif granitique autour d'une galerie isotherme (figure 17.1). On commence par vérifier que les résultats numériques obtenus en élasticité avec le modèle THHMD programmé dans Θ -Stock correspondent bien aux solutions analytiques de la théorie des tunnels. Puis une étude paramétrique de l'endommagement est réalisée, pour vérifier que les tendances du comportement fragile de la barrière géologique sont correctes. Les simulations dont on présente les résultats ont été réalisées par Mahsa Mozayan, dans le cadre d'un stage de master [109].



FIGURE 17.1 – Tranche de massif granitique modélisée autour du tunnel étudié.

17.1.2 Maillage, conditions aux limites et paramètres matériels

Le maillage est réalisé en configuration axisymétrique. On étudie une tranche de massif granitique de 10 cm d'épaisseur et de 10 m de rayon. On suppose que la galerie fait un mètre de diamètre. Le maillage adopté comporte 63 noeuds et 40 éléments (figure 17.2). Comme le problème traité est purement mécanique, tous les degrés de liberté en température et pressions interstitielles sont bloqués (pour l'eau comme pour l'air). Une contrainte initiale isotrope σ_0 de 60 MPa est appliquée sur tous les éléments. Les conditions aux limites adoptées sont les suivantes :

- sur les frontières inférieure et supérieure, les déplacements verticaux sont bloqués ($u_z = 0$), puisqu'on considère que le modèle est unidimensionnel ;
- sur la frontière latérale extérieure, les contraintes radiales sont maintenues à leur niveau initial ($\sigma_{rr} = \sigma_0$), car on considère qu'à un rayon de 10 mètres, le massif ne subit plus l'influence du déchargement de la paroi, de rayon 50 cm ;
- à la paroi, on applique un déchargement de $\Delta\sigma_{rr} = -\sigma_0$.

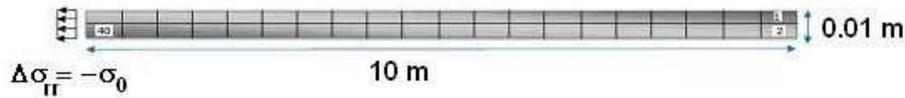


FIGURE 17.2 – Maillage et conditions aux limites adoptés pour la modélisation unidimensionnelle du tunnel.

Le poids volumique affecté aux grains solides de la roche est usuel : $\gamma_s = 2.65 \cdot 10^4 \text{ N.m}^{-3}$. L'indice des vides, le module d'Young et le module de compression volumique sont ceux du granite testé par Gens et al. dans le cadre de l'essai FEBEX [79]. Les paramètres d'endommagement C_0 et C_1 ont les valeurs caractéristiques du granite de la Vienne [91]. Dans un premier temps, le problème est traité en élasticité, donc $g_M = g_S = g_T = 0$. On suit les recommandations de Shao et al. [180] pour choisir le paramètre de dilatance χ . Les paramètres mécaniques utilisés sont résumés dans le tableau 17.1. Les autres paramètres, entrés pour les besoins de la simulation numérique, sont donnés dans les tableaux 17.2 et 17.3.

TABLE 17.1 – Paramètres mécaniques utilisés dans la simulation de l'excavation d'un tunnel.

Modèle élastique hyperbolique						
K_b	K_L	n	R_f	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$	K_U	m
$2.92 \cdot 10^5$	$3.51 \cdot 10^5$	0	0	$2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$3.51 \cdot 10^5$	0
Rigidités de référence						
β_s^0	β_T^0					
$2.92 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$2.92 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$					
Paramètres d'endommagement						
χ	C_0	C_1	g_M	g_S	g_T	
0.005	$1.1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	$2.2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$	0	0	0	
Conditions initiales						
e_0	S_{w0}	T_0				
0.0101	0.999	0				

TABLE 17.2 – Paramètres relatifs aux fluides dans la simulation de l'excavation d'un tunnel.

Courbe de rétention			
$S_{w,r}$	α_{VG}	n_{VG}	d_s
0	10^{-5} Pa^{-1}	1.5	0
Perméabilité à l'eau liquide			
k_{w0}	α_w	k_w^{0max}	k_{wdg}^{max}
$10^{-11} \text{ m.s}^{-1}$	0	$10^{-10} \text{ m.s}^{-1}$	10^{-9} m.s^{-1}
Transfert des gaz			
c_a	α_a	k_a^{max}	D_{dg}^{max}
10^{-15} m^2	0	10^{-9} m.s^{-1}	$10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

TABLE 17.3 – Paramètres thermiques dans la simulation de l’excavation d’un tunnel.

Rigidité thermique intacte				
α_0^*	α_1	α_2	α_3	p_{geo}
$-7.8 * 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	0	0	0	10^{10} Pa
Diffusion et évaporation				
λ_s	λ_w	λ_a	h_{fg}	
$3.6 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$0.6 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$0.0258 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$2.4 * 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$	
Convection				
C_{Ps}	C_{Pw}	C_{Pvap}	C_{Pa}	
$793 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$4180 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$1870 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$1000 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	

17.1.3 Validation en élasticité

En élasticité linéaire, le déchargement d’un tunnel modélisé en 1D provoque la redistribution de contraintes suivante [132] :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \sigma_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \end{cases} \quad (17.1)$$

où R est le rayon de la galerie, et r est le rayon courant. La figure 17.3 montre que les résultats numériques obtenus avec Θ -Stock coïncident parfaitement avec la solution analytique 17.1. Ce calcul préliminaire valide l’algorithme utilisé pour les simulations réalisées dans le domaine élastique du modèle THHMD dans des configurations axisymétriques et pour des problèmes purement mécaniques.

17.1.4 Tendances de l’endommagement mécanique

A présent on fait varier la valeur de la rigidité g_M afin d’étudier les tendances de l’endommagement mécanique dans le problème de l’excavation d’un tunnel. Il ne s’agit pas d’un test de validation, puisqu’il n’existe pas de résultat comparable dans les publications actuelles. Il s’agit d’un test de justification du modèle THHMD. Tous les paramètres matériels utilisés pour la validation dans le domaine élastique sont conservés, à l’exception de g_M (tableaux 17.1, 17.2 et 17.3). On fait varier g_M autour d’une valeur proche de la rigidité caractéristique du granite de la Vienne [91] :

$$g_{Mref} = -180 \text{ MPa} \quad (17.2)$$

Le déchargement de la paroi génère des tractions radiales. Dans les autres directions, le matériau est en compression. C’est pourquoi l’endommagement ne se développe que dans la direction radiale :

$$\Omega_{rr} \neq 0, \quad \Omega_{\theta\theta} = \Omega_{zz} = 0 \quad (17.3)$$

Comme on pouvait s’y attendre, l’endommagement obtenu à la fin de la simulation du déchargement est d’autant plus grand que la rigidité g_M choisie est grande (figure 17.4). Cependant,

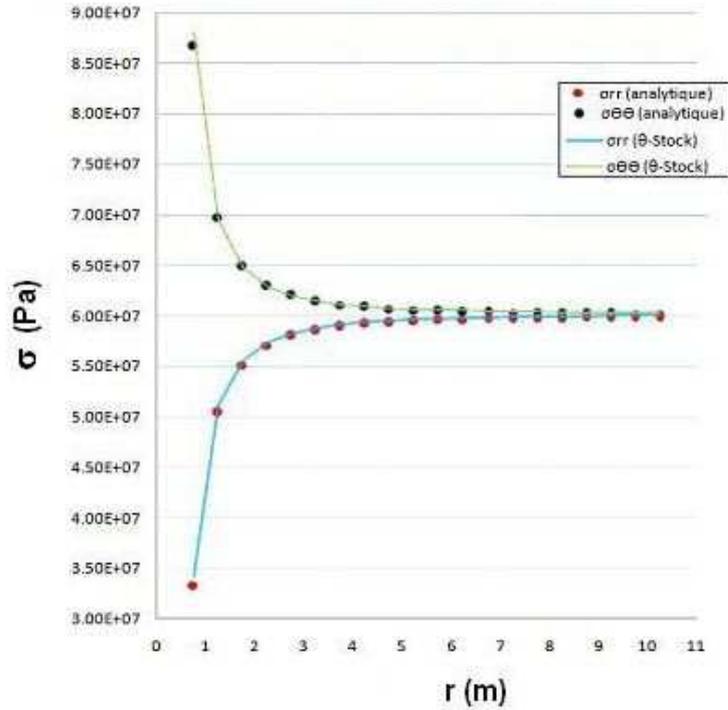


FIGURE 17.3 – Contraintes radiales et orthoradiales développées autour d'un tunnel en élasticité.

pour une valeur trop élevée de g_M , la simulation n'arrive pas à terme, et certains éléments sont trop endommagés pour pouvoir supporter tout le déchargement programmé (valeur la plus élevée choisie pour g_M dans cette étude paramétrique, voir la figure 17.4).

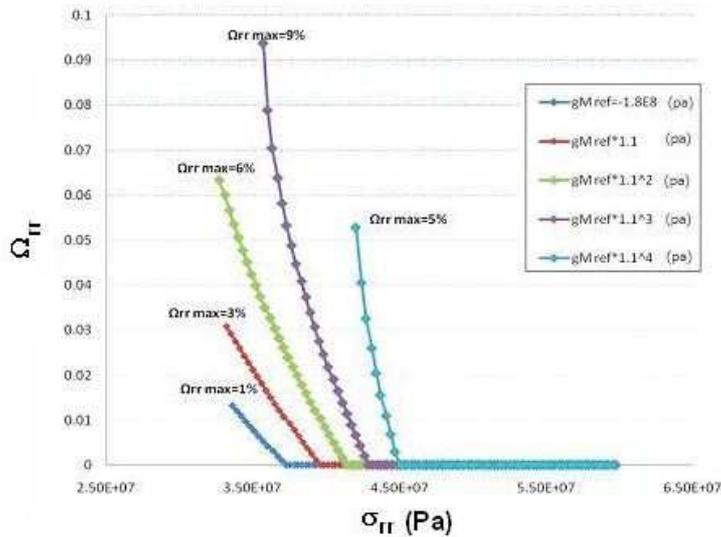


FIGURE 17.4 – Tendances de l'endommagement lors du déchargement mécanique de la paroi d'un tunnel creusé dans du granite sec.

17.2 Etude thermo-mécanique d'une galerie creusée dans un massif granitique sec [32]

17.2.1 Refroidissement d'un tunnel de section carrée [32]

17.2.1.1 Maillage et conditions aux limites

On s'intéresse ici au problème de refroidissement d'une mine creusée dans un massif rocheux à grande profondeur, abordé par Carter et Booker [32]. En raison du gradient géothermique, le tunnel est naturellement soumis à de fortes températures. Pour que les hommes et les machines puissent travailler dans la galerie, il est nécessaire de la refroidir. On traite le problème avec les mêmes conditions géométriques que les auteurs [32], et on considère dans la suite un tunnel de section carrée (de 3.5 m de côté), creusé dans un massif granitique sec. La température initiale du massif est de $50^\circ C$, et une température de $20^\circ C$ est appliquée à la paroi pour refroidir la galerie. On suppose que le tunnel est suffisamment long pour que les déformations dans la direction de l'axe du tunnel puissent être négligées. On se place donc dans une configuration en déformations planes, et on représente un quart de la section de la galerie. L'étendue du maillage est de l'ordre de 10 fois la moitié de la longueur du côté de l'excavation (18m x 18m). Le maillage comporte 252 noeuds et 221 éléments (figure 17.5.a). Le massif étant sec, tous les degrés de liberté nodaux en pression interstitielle sont bloqués (pour l'eau comme pour l'air). Les conditions aux limites adoptées sont les suivantes (figure 17.5.b) :

- déplacements horizontaux bloqués sur les deux bords latéraux du modèle (mais pas à la paroi), déplacements verticaux bloqués sur les bords inférieur et supérieur du modèle (mais pas à la paroi) ;
- température de $20^\circ C$ à la paroi de la galerie, température de $50^\circ C$ sur les deux frontières extérieures du modèle.

Ne pas imposer de conditions aux limites sur une frontière revient numériquement à supposer que la condition aux limites de Neumann correspondante impose une valeur de flux nulle. Ainsi, la non-imposition de condition aux limites mécanique à la paroi revient numériquement à supposer

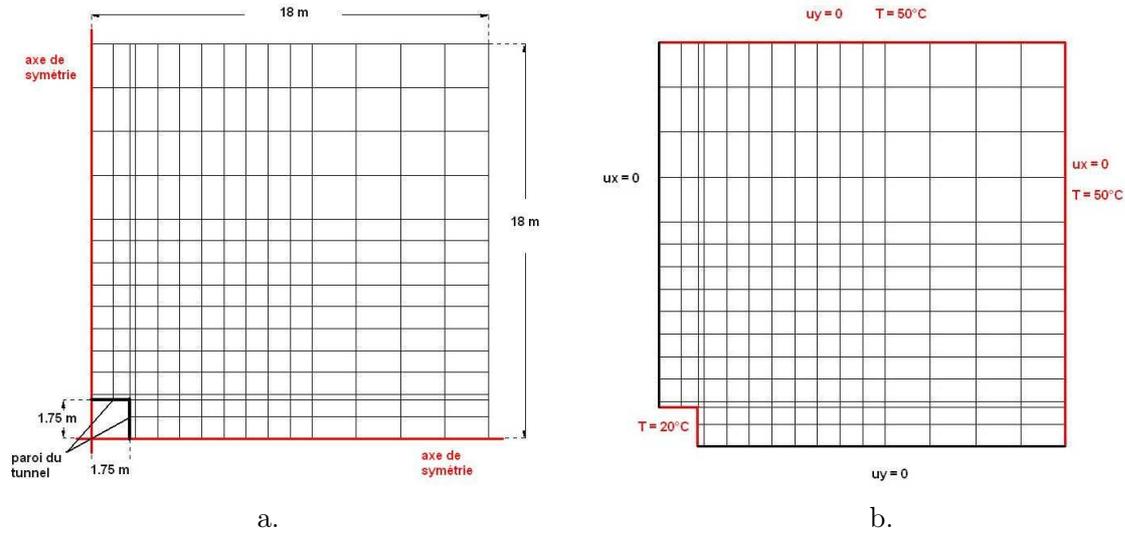


FIGURE 17.5 – Discretisation du problème de refroidissement d’une galerie profonde de section carrée [32]. a. Maillage. b. Conditions aux limites.

qu’il n’y a pas de variation de contrainte ($\Delta\sigma_{ij} = 0$, paroi libre). De même, la non-imposition de condition aux limites thermique sur les deux axes de symétrie revient à supposer qu’il n’y a pas de flux de chaleur entre deux parties symétriques du modèle ($\tilde{q}_h = 0$).

17.2.1.2 Choix des paramètres matériels

Le matériau étudié ici est une roche dure, dont le module d’Young (E) et le coefficient de Poisson (ν) sont donnés par Carter et Booker [32]. Il est facile d’en déduire les modules de chargement et de compression volumique :

$$K_L = \frac{E}{p_{atm}}, \quad K_b = \frac{E}{3p_{atm}(1-2\nu)} \quad (17.4)$$

p_{atm} est la pression atmosphérique. Les autres paramètres mécaniques ne sont pas fournis dans l’article [32]. En l’absence de référence bibliographique sur le sujet, on choisit une rigidité thermique de référence égale à 10 fois le module de compression volumique. Pour les autres caractéristiques mécaniques, on utilise les paramètres du granite étudié précédemment (tableau 16.2). On choisit cependant une température de référence égale à $50^\circ C$, ce qui correspond à l’état initial du matériau dans ce problème anisotherme. Le poids volumique affecté à la matrice solide de la roche est usuel : $\gamma_s = 2.65 * 10^4 N.m^{-3}$. Les paramètres mécaniques utilisés en élasticité sont résumés dans le tableau 17.4. L’ensemble des paramètres relatifs aux fluides, qui sont sans incidence pour cette simulation thermo-mécanique, sont donnés dans le tableau 17.5.

On utilise des valeurs typiques d’une roche pour la conductivité thermique (λ_s) et la capacité calorifique (C_{P_s}) de la matrice solide. Les valeurs choisies pour les conductivités thermiques et les capacités calorifiques des fluides sont usuelles. La valeur de la chaleur latente d’évaporation est également une valeur usuelle. La loi de comportement incrémentale en thermoélasticité proposée par Carter et Booker [32] est la suivante :

$$d\sigma_{ij} = D_{eijkl} d\epsilon_{lk} - \frac{E\alpha}{(1-2\nu)} \delta_{ij} dT \quad (17.5)$$

TABLE 17.4 – Paramètres mécaniques élastiques utilisés dans la simulation du problème de refroidissement d'un tunnel de section carrée [32].

Modèle élastique hyperbolique						
K_b	K_L	n	R_f	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$	K_U	m
$6.67 * 10^5$	$8 * 10^5$	0	0	$2 * 10^{10} Pa$	$8 * 10^5$	0
Rigidités de référence						
β_s^0	β_T^0					
$6.67 * 10^{11} Pa$	$6.67 * 10^{11} Pa$					
Paramètres d'endommagement						
χ	C_0	C_1	g_M	g_S	g_T	
0.005	$1.1 * 10^5 Pa$	$2.2 * 10^6 Pa$	0	0	0	
Conditions initiales						
e_0	S_{w0}	T_0				
$3.51 * 10^{-3}$	1	$50^\circ C$				

TABLE 17.5 – Paramètres relatifs aux fluides pour le problème de refroidissement d'un tunnel de section carrée [32].

Courbe de rétention			
$S_{w,r}$	α_{VG}	n_{VG}	d_s
0	$0.00152 Pa^{-1}$	1.17	0
Perméabilité à l'eau liquide			
k_{w0}	α_w	k_w^{0max}	k_{wdg}^{max}
$10^{-11} m.s^{-1}$	0	$10^{-10} m.s^{-1}$	$10^{-9} m.s^{-1}$
Transfert des gaz			
c_a	α_a	k_a^{max}	D_{dg}^{max}
$10^{-6} m^2$	0	$10^{-5} m.s^{-1}$	$10^{-7} m^2.s^{-1}$

TABLE 17.6 – Paramètres thermiques utilisés dans le problème de refroidissement d'un tunnel de section carrée [32].

Rigidité thermique intacte				
α_0^*	α_1	α_2	α_3	p_{geo}
$-2 * 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	0	0	0	10^{10} Pa
Diffusion et évaporation				
λ_s	λ_w	λ_a	h_{fg}	
$1.35 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$0.6 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$0.0258 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$2.5 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$	
Convection				
C_{Ps}	C_{Pw}	C_{Pvap}	C_{Pa}	
$800 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$4180 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$1870 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$1000 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	

où α est la dilatance thermique du massif rocheux et où δ_{ij} désigne le tenseur identité d'ordre 2. Dans le modèle THHMD, en l'absence de fluide interstitiel, on peut écrire la loi de comportement incrémentale comme suit :

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\epsilon_{lk} - \frac{1}{3\beta_T^*} D_{ijkl} \delta_{lk} dT \quad (17.6)$$

En faisant le produit contracté des expressions 17.5 et 17.6 avec le tenseur identité, et en combinant les résultats obtenus, on arrive à :

$$-9 B \alpha = -\frac{3 B}{\beta_T^*} \quad (17.7)$$

En supprimant les couplages thermo-mécaniques dans l'expression de la rigidité thermique intacte ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$), on obtient finalement :

$$\alpha_0^* = 3 \alpha \quad (17.8)$$

En réalité, on modélise le problème de refroidissement dans une configuration en déformations planes, donc $\epsilon_v = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}$ avec l'hypothèse que $\epsilon_{zz} = 0$. Numériquement, on doit donc calculer $\epsilon_{Svij} = \frac{1}{2}\epsilon_{Sv}\delta_{ij}$ et non $\epsilon_{Svij} = \frac{1}{3}\epsilon_{Sv}\delta_{ij}$ comme ce serait le cas dans un problème tridimensionnel étudié dans sa généralité. Dans la loi de comportement incrémentale 17.6, il serait donc plus juste numériquement de remplacer $1/(3\beta_T^*)$ par $1/(2\beta_T^*)$. D'un point de vue numérique, il est donc plus satisfaisant de prendre :

$$\alpha_0^* = 2 \alpha \quad (17.9)$$

soit $\alpha_0^* = -2 * 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}$, en tenant compte de la convention de signe de la mécanique des sols. L'ensemble des paramètres thermiques retenus pour la simulation du refroidissement d'un tunnel à section carrée sont donnés dans le tableau 17.6.

17.2.1.3 Validation dans le domaine élastique

Comme dans l'étude de Carter et Booker [32], on étudie l'évolution spatio-temporelle de la

température. Une étude approfondie du problème nous a conduits à modifier la formule proposée dans l'article pour le temps adimensionnel. On utilise :

$$\tau = \frac{\lambda_s}{\rho_s C_{Ps}} \frac{t}{(a/2)^2} \quad (17.10)$$

où λ_s est la conductivité thermique du massif (en $W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$), ρ_s est la masse volumique du squelette solide (en $kg.m^{-3}$), C_{Ps} est la capacité calorifique du massif rocheux sec (en $J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$), t est le temps écoulé depuis le début du refroidissement (en s), et a est la longueur du côté de la section carrée du tunnel (en m). La formule rapportée par Carter et Booker [32] prend en compte a et non $a/2$ au dénominateur de l'expression 17.10. Les résultats obtenus avec la formule originale du temps adimensionnel n'étaient pas tout à fait satisfaisants, mais on a réussi à se ramener aux résultats obtenus par Carter et Booker [32] en utilisant une longueur caractéristique plus communément employée : l'équivalent du rayon de la galerie. D'où l'utilisation de la formule 17.10 pour définir le temps adimensionnel.

Dans la présente étude, $\lambda_s = 1.35 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$, $\rho_s = 2700 kg.m^{-3}$, $C_{Ps} = 800 J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$ et $a = 3.5m$. Donc pour comparer les résultats de Carter et Booker [32] et les résultats obtenus dans le domaine élastique du modèle THHMD programmé dans Θ -Stock pour $\tau = 0.5$, $\tau = 2$, $\tau = 8$ et $\tau = 22$, il faut fournir la distribution spatiale de la température aux instants suivants : $t = 2.45 * 10^6 s \simeq 1 mois$, $t = 9.8 * 10^6 s \simeq 3.5 mois$, $t = 3.92 * 10^7 s \simeq 1 an 3 mois$ et $t = 1.078 * 10^8 s \simeq 3 ans 5 mois$. Au début du refroidissement ($\tau = 0.5$), l'évolution de la température est plus rapide dans le calcul effectué avec Θ -Stock que dans le calcul effectué par Carter et Booker [32] (figure 17.6). Après un laps de temps suffisant ($\tau \geq 2$), la dissipation des hautes températures dans le temps est bien rendue par le modèle THHMD. En outre, l'évolution temporelle des températures nodales en 2D met en évidence le phénomène de diffusion thermique isotrope (figure 17.7).

17.2.1.4 Etude des tendances de l'endommagement

On cherche à présent à étudier les tendances du comportement fragile du matériau étudié précédemment dans le domaine élastique. On traite le même problème thermo-mécanique, mais on introduit des paramètres d'endommagement différents. Comme le matériau est sec et que tous les degrés de liberté nodaux relatifs aux pressions interstitielles sont bloqués, on ne peut pas générer d'endommagement par effet de succion, donc il n'est pas pertinent de prendre $g_S \neq 0$. On refroidit le matériau, ce qui va globalement engendrer des déformations volumiques thermiques positives (ce qui correspond à des rétractions avec la convention de signe de la mécanique des sols). Le critère d'endommagement adopté met en jeu $\epsilon_{T_v}^+$. Donc choisir $g_T \neq 0$ en gardant tous les autres paramètres identiques à ceux adoptés dans l'étude du comportement élastique ne suffit pas à engendrer de l'endommagement. En revanche, la baisse de température qui s'étend progressivement au voisinage du tunnel va localement générer des contraintes de tension, ce qui donne des déformations mécaniques de tension ($\epsilon_{M_{ij}}^+$). Ces dernières peuvent générer de l'endommagement si le coefficient g_M est suffisamment élevé compte-tenu des autres paramètres mécaniques utilisés (tableau 17.4). On a choisi des paramètres caractéristiques d'un granite. Pour un tel matériau, la valeur identifiée par Homand et al. [93] et par Halm et Dragon [91] pour le coefficient g_M est de :

$$g_M^{ref} = -3.3 * 10^8 Pa \quad (17.11)$$

Au cours de la simulation numérique effectuée avec cette valeur, le massif est resté intact. On

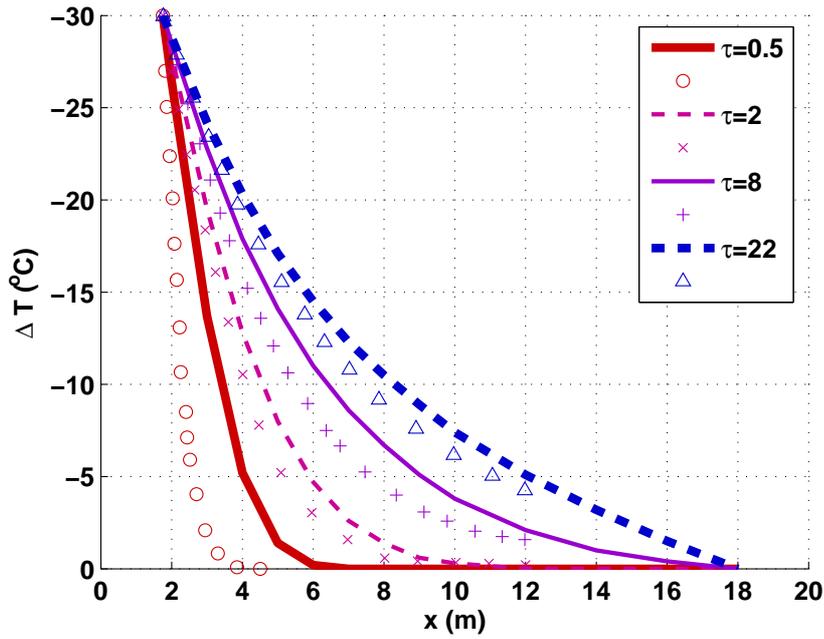


FIGURE 17.6 – Baisse de température observée dans le massif dans le problème de refroidissement d’une galerie profonde de section carrée (de côté $a = 3.5\text{m}$). $\tau = \frac{\lambda_s}{\rho_s C_{Ps}} \frac{t}{(a/2)^2}$. Points : résultats obtenus numériquement par Carter et Booker [32]. Lignes continues : températures calculées aux noeuds situés sur le bord inférieur du maillage, dans le domaine élastique du modèle THHMD programmé dans Θ -Stock.

a donc réalisé une étude paramétrique pour évaluer l’influence du paramètre g_M sur l’initiation et l’évolution de l’endommagement. L’endommagement est resté très faible pour $g_M = 2g_M^{ref}$. Un endommagement significatif s’est développé pour $3g_M^{ref} \leq g_M \leq 4g_M^{ref}$. Dans la suite, on présente les résultats obtenus pour $g_M = 3g_M^{ref}$; $g_M = 3.25g_M^{ref}$; $g_M = 3.5g_M^{ref}$; $g_M = 3.75g_M^{ref}$; $g_M = 4g_M^{ref}$. Tous les autres paramètres du modèle THHMD sont identiques à ceux qui ont été utilisés pour la simulation effectuée dans le domaine élastique (tableaux 17.4, 17.5 et 17.6).

La figure 17.8 présente la distribution spatio-temporelle des deux composantes de l’endommagement pour $g_M = 3.5g_M^{ref}$. La simulation s’est arrêtée avant la fin du programme de chargement, ce qui indique qu’une zone du massif s’est rompue par fissuration. On présente donc l’évolution de l’endommagement jusqu’à 1 an et 3 mois après la mise en route du processus de refroidissement ($\tau = 8$). Comme on pouvait s’y attendre, l’endommagement développé se concentre autour de la galerie. Le segment qui relie le coin supérieur droit de la galerie au coin supérieur droit du modèle est un axe de symétrie, tant du point de vue de la géométrie que du point de vue du chargement. Il n’est donc pas étonnant de constater que la valeur de la composante horizontale de l’endommagement (Ω_{xx}) au droit de la paroi supérieure de la galerie est égale à la composante verticale de l’endommagement (Ω_{yy}) au droit de la paroi verticale du tunnel. Par ailleurs, la figure 17.7 indique que la zone refroidie est encore de faible étendue pour $\tau \leq 2$. Cette observation peut expliquer pourquoi l’endommagement ne se développe significativement qu’à des instants ultérieurs ($\tau \geq 8$).

L’élément qui jouxte le tunnel, au coin (figure 17.9.a) est traversé par l’axe de symétrie du modèle, et présente ainsi une fissuration isotrope. Le niveau d’endommagement atteint augmente avec g_M (figure 17.9.e). Alors que l’endommagement est quasi-nul pour $g_M = 3g_M^{ref}$, il explose pour $g_M = 4g_M^{ref}$ (figure 17.9.f). De même que le tenseur d’endommagement, les tenseurs de déforma-

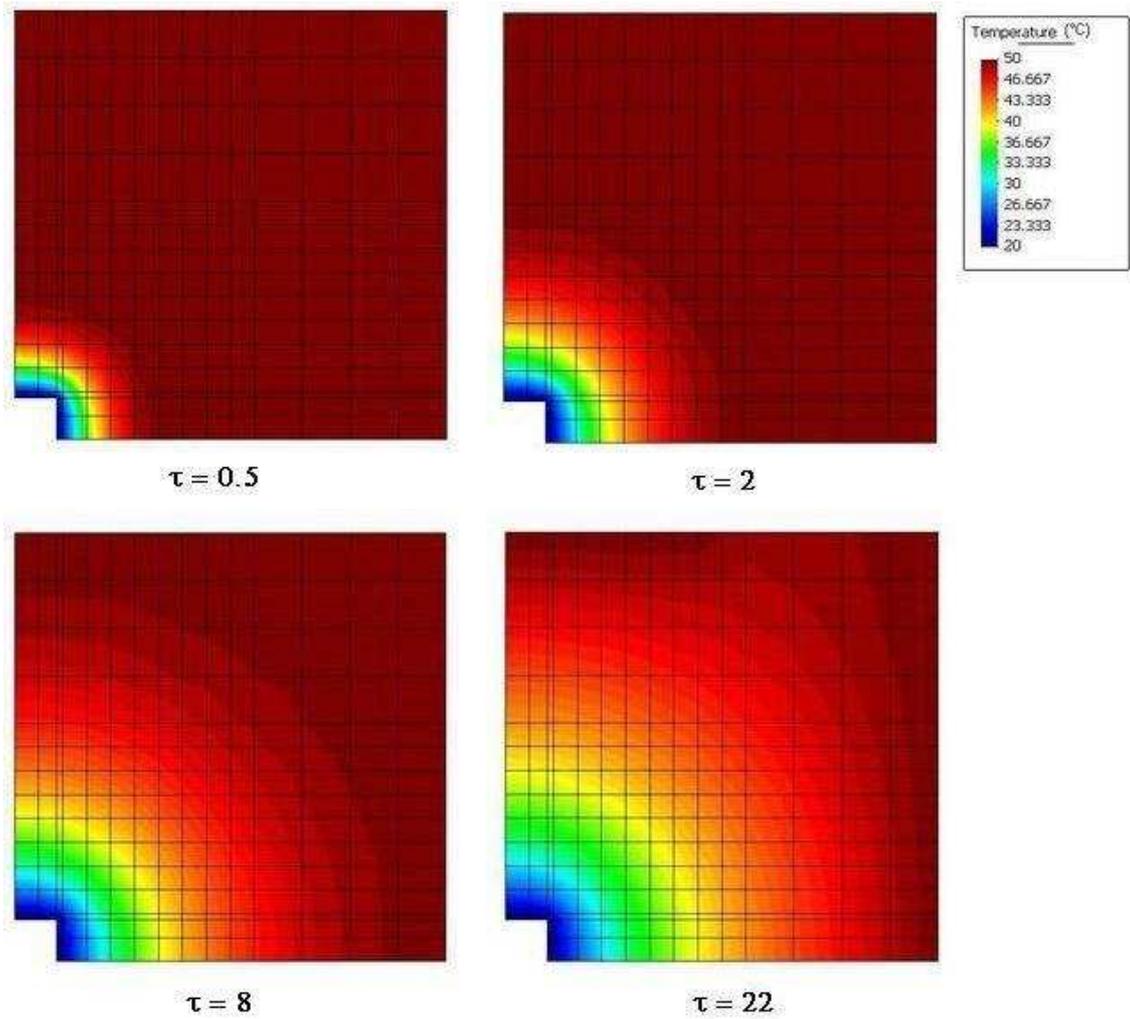


FIGURE 17.7 – Evolution spatio-temporelle des températures nodales calculées avec Θ -Stock dans problème de refroidissement d'une galerie profonde de section carrée [32]. $\tau = \frac{\lambda_s}{\rho_s C_{Ps}} \frac{t}{(a/2)^2}$.

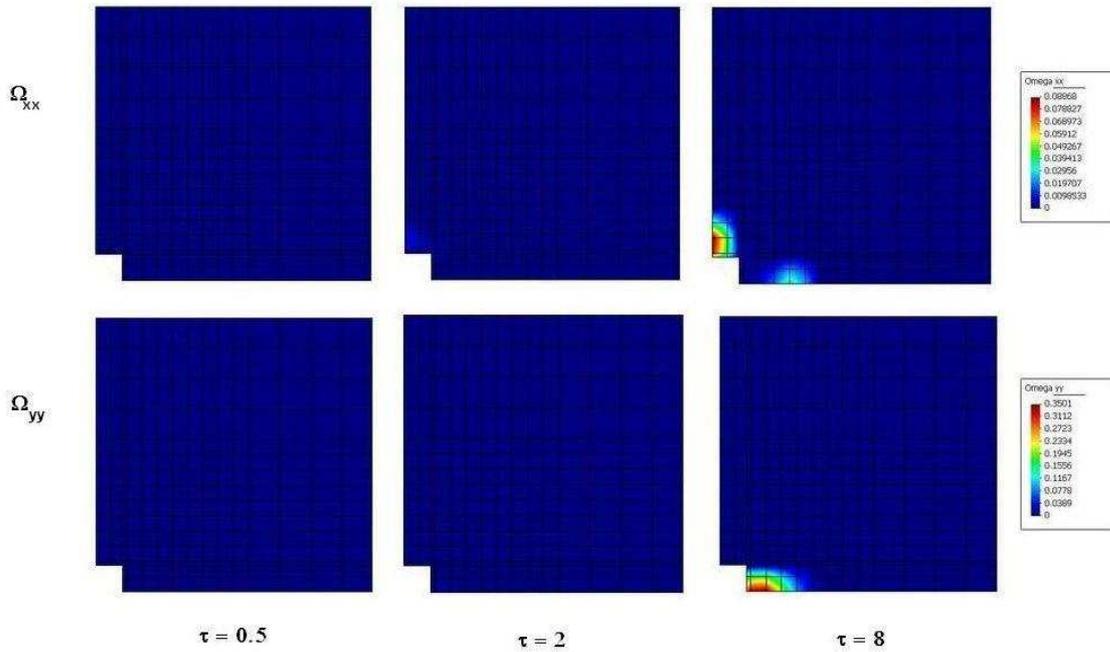


FIGURE 17.8 – Endommagement du massif dans le problème de refroidissement d’un tunnel de section carrée [32], avec $g_M = 3.5 g_M^{ref}$.

tion sont isotropes (figures 17.9.b, 17.9.c et 17.9.d). Les déformations totales sont compressives, mais les déformations mécaniques engendrées par couplage thermomécaniques sont des déformations de tension, ce qui explique le développement de l’endommagement. Le niveau de tension augmente avec g_M , ce qui est cohérent avec l’augmentation d’endommagement observé et avec les prédictions du modèle théorique. Pour $g_M = 4 g_M^{ref}$, le niveau de tension thermo-mécanique est tel que les déformations totales deviennent des dilatations (figure 17.9.b). Cependant, il faut manier ce résultat avec précaution, car on observe une discontinuité sur la courbe des déformations à environ $\tau = 0.5$. Il est possible que les calculs numériques ne reflètent pas la réalité physique pour les instants ultérieurs, et que le programme calcule de l’endommagement alors que des zones du massifs sont déjà complètement altérées.

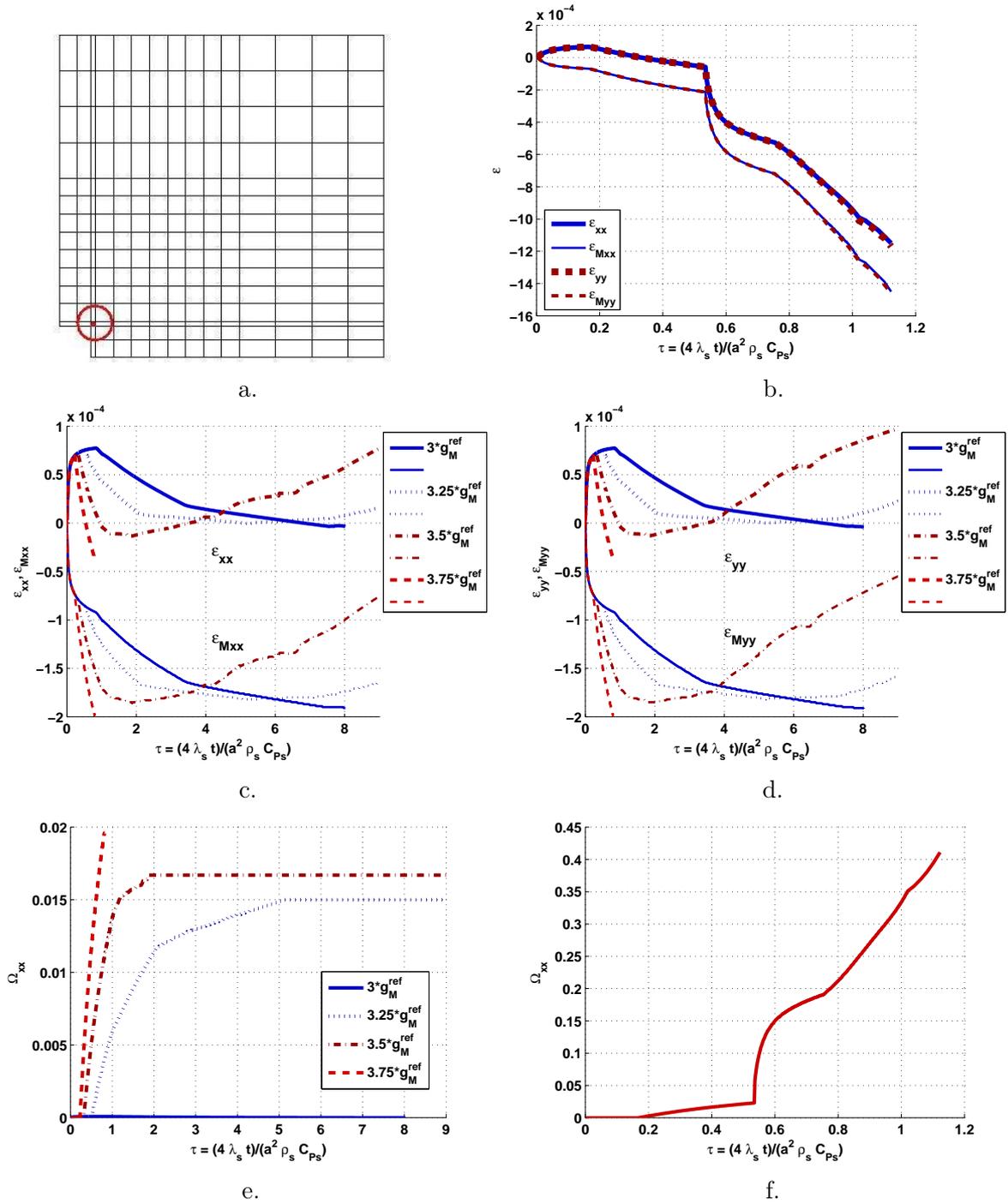


FIGURE 17.9 – Comportement fragile du massif dans le problème de refroidissement d'un tunnel de section carrée [32]. a. Elément choisi pour l'étude paramétrique. b. Déformations pour $g_M = 4 g_M^{ref}$. c. Déformations « horizontales » pour $3 g_M^{ref} \leq g_M \leq 3.75 g_M^{ref}$. d. Déformations « verticales » pour $3 g_M^{ref} \leq g_M \leq 3.75 g_M^{ref}$. e. Endommagement « horizontal » pour $3 g_M^{ref} \leq g_M \leq 3.75 g_M^{ref}$. f. Endommagement « horizontal » pour $g_M = 4 g_M^{ref}$.

17.2.2 Stockage de déchets radioactifs dans un massif granitique sec [32]

17.2.2.1 Maillage et conditions aux limites en configuration axisymétrique pseudo-unidimensionnelle

On étudie à présent le problème de stockage de déchets radioactifs dans un massif rocheux sec, tel qu'il est présenté par Carter et Booker [32]. On fait l'hypothèse que le paquet radioactif est stocké en profondeur dans un puits cylindrique vertical. La géométrie et la symétrie du chargement permettent d'effectuer une analyse axisymétrique (i.e. les variables élémentaires ne varient pas avec l'angle θ). Par ailleurs, les auteurs précisent que l'intervalle laissé entre deux paquets radioactifs dans le puits est suffisamment grand pour qu'une analyse en déformations planes puisse être effectuée, ce qui revient à supposer que les variables élémentaires ne varient pas avec z . On peut donc traiter le problème à l'aide d'un modèle quasi-unidimensionnel, en adoptant une analyse axisymétrique. On s'attend à ce que les variables en jeu ne varient qu'avec la distance radiale r . On s'appuie sur les travaux de Giraud [84] pour avoir une notion des dimensions réelles d'un paquet radioactif, et on choisit de modéliser un paquet de 25cm de rayon. L'étendue radiale du modèle couvre 20 fois ce rayon (i.e. on observe les résultats jusqu'à $r = 20R = 5m$). Comme le modèle utilisé doit être quasi-unidimensionnel, on choisit de travailler sur une barre dont l'épaisseur est 100 fois moindre que la longueur de la zone modélisée, soit 5cm. On empile deux éléments dans l'épaisseur de la barre modélisée. Le maillage comporte finalement 57 noeuds et 36 éléments (figure 17.10).

Comme dans l'étude de Carter et Booker [32], on suppose que le paquet radioactif se comporte comme une source de chaleur. La température du paquet augmente linéairement pendant 20 ans, puis décroît exponentiellement. On suppose que la température initiale du massif est de $0^\circ C$, et on étudie les variations de température engendrées par l'entreposage des déchets. La température à la surface du paquet suit la loi d'évolution suivante :

$$\begin{cases} \tilde{T}(t) = 25t & \text{si } t \leq 2 \text{ ans} \\ \tilde{T}(t) = 50 \exp(0.0288 - 0.0144t) & \text{si } t \geq 2 \text{ ans} \end{cases} \quad (17.12)$$

Comme le massif rocheux étudié est supposé sec, tous les degrés de liberté nodaux relatifs aux pressions interstitielles sont bloqués, pour l'eau comme pour l'air. Il s'agit d'un problème purement thermo-mécanique. Pour simuler le stockage des déchets radioactifs, on adopte les conditions aux limites suivantes (figure 17.10) :

- déplacements radiaux bloqués sur la frontière latérale extérieure (dans le champ lointain), déplacements verticaux bloqués sur tous les bords du modèle sauf sur la frontière entre le paquet radioactif et le massif (le modèle est quasi-unidimensionnel), variation de contrainte nulle à la frontière entre le paquet et le massif (le paquet n'est pas supposé être rigide au point d'exercer des sollicitations autres que thermiques sur le massif) ;
- température bloquée sur la frontière latérale extérieure (i.e. $T = T_0 = 0$ dans le champ lointain), température égale à celle des déchets radioactifs ($T = \tilde{T}(t)$) à la frontière entre le paquet et le massif.

17.2.2.2 Maillage et conditions aux limites en déformations planes

Pour avoir un meilleur aperçu du problème, on effectue également une simulation en déformations

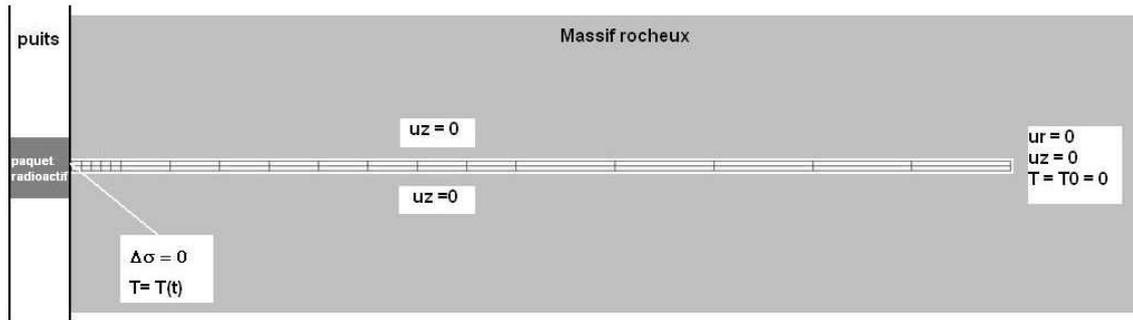


FIGURE 17.10 – Maillage et conditions aux limites pour le problème de stockage de déchets radioactifs dans un massif rocheux sec [32]. Analyse axisymétrique pseudo-unidimensionnelle.

planes, sans supposer que les variables varient exclusivement avec la distance radiale qui les sépare du paquet radioactif. Comme Carter et Booker [32] analysent leurs résultats en considérant des longueurs adimensionnelles, on peut étudier un paquet radioactif de n'importe quelles dimensions, du moment que la forme du paquet est cylindrique. Carter et Booker ne précisent pas qu'ils travaillent avec un cylindre de base circulaire. On réutilise donc le maillage déjà mis à profit pour l'étude du refroidissement d'un tunnel de section carrée (figure 17.5.a). Comme précédemment, les degrés de liberté nodaux en pression interstitielle sont bloqués. La température initiale est nulle, et on étudie les variations de température engendrées par l'entreposage d'un paquet radioactif. On adapte les conditions aux limites au problème de stockage (17.11) :

- déplacements horizontaux bloqués sur la frontière latérale intérieure hors paroi et déplacements verticaux bloqués sur la frontière inférieure hors paroi (axes de symétrie), déplacements horizontaux bloqués sur la frontière latérale extérieure et déplacements verticaux bloqués sur la frontière supérieure (champ lointain), variation de contrainte nulle à la paroi (paroi libre) ;
- température bloquée sur les deux frontières extérieures du modèle ($T = T_0 = 0$ dans le champ lointain), température égale à la température du paquet radioactif à la paroi, pas de condition aux limites thermique sur les axes de symétrie du modèle (équivalent numériquement à un flux de chaleur nul).

Il est à préciser que les calculs de contrainte ne sont pas équivalents à ceux qui sont donnés par une analyse axisymétrique. On peut comparer les résultats fournis par Carter et Booker [32] à ceux donnés par Θ -Stock pour étudier la température (dont la diffusion est isotrope) et la contrainte radiale ($\sigma_{xx}(x)$ au droit de la paroi verticale, et $\sigma_{yy}(y)$ au droit de la paroi horizontale). Mais le calcul réalisé en déformations planes ne permet pas d'analyser l'évolution de la contrainte circonférentielle (la composante $\sigma_{\theta\theta}$ de l'analyse axisymétrique).

17.2.2.3 Choix des paramètres matériels

On travaille sur le même matériau que dans l'étude du refroidissement d'un tunnel de section carrée, présentée dans la sous-partie précédente. Les paramètres matériels choisis sont donc les mêmes (tableaux 17.4, 17.5 et 17.6), à l'exception de la conductivité thermique du massif (λ_s). En effet, Carter et Booker [32] imposent que :

$$\kappa = \frac{\lambda_s}{\rho_s C_{Ps}} = 0.02 \text{ m}^2 \cdot \text{an}^{-1} \quad (17.13)$$

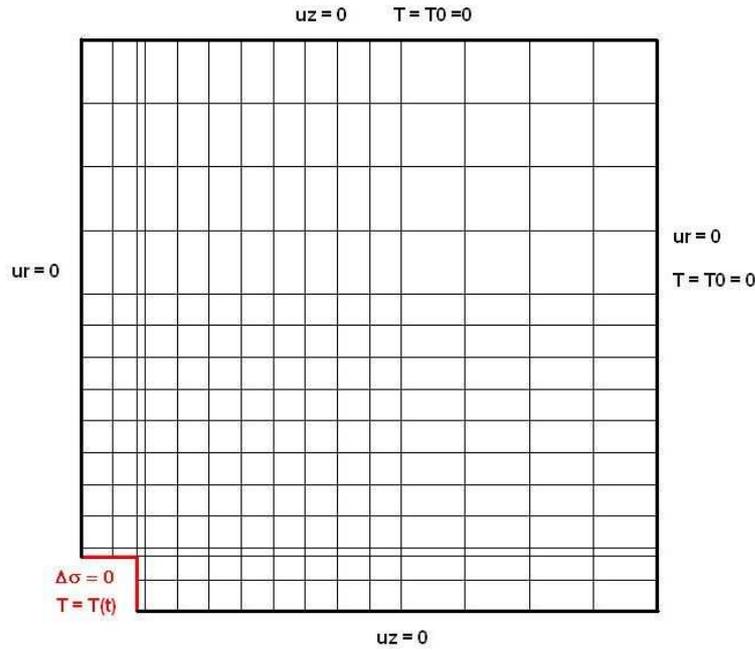


FIGURE 17.11 – Maillage et conditions aux limites pour le problème de stockage de déchets radioactifs dans un massif rocheux sec [32]. Analyse en déformations planes.

Si on conserve les valeurs de la masse volumique et de la capacité calorifique utilisées précédemment (valeurs usuelles), le choix de κ (équation 17.13) impose que :

$$\lambda_s \simeq 1.37 * 10^{-3} W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1} \quad (17.14)$$

17.2.2.4 Validation dans le domaine élastique

Les allures et les ordres de grandeur des courbes d'évolution de la température et des contraintes en 1D sont corrects (figures 17.12 et 17.13). Mais dans les simulations effectuées avec Θ -Stock, les courbes caractéristiques du comportement du massif au bout de 2 ans se superposent presque avec celles obtenues par Carter et Booker [32] au bout de 22 ans. Ces observations font supposer que la cinétique de diffusion de la température est trop rapide dans les calculs numériques effectués dans le domaine élastique du domaine THHMD. Pourtant, la conductivité thermique choisie pour le massif est très faible, de l'ordre de $10^{-3} W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$ (équation 17.14). L'utilisation de cette valeur a été complètement dictée par le choix de κ dans l'étude de Carter et Booker [32] (équation 17.13). Malgré la différence de cinétique dans le comportement thermique dans les premières années du stockage des déchets, on observe que les distributions de la température et des contraintes obtenues avec Θ -Stock convergent vers celles obtenues par Carter et Booker sur le long terme. Le pseudo-équilibre thermo-mécanique atteint au bout de 222 ans est donc similaire dans les deux études. Par ailleurs, les ordres de grandeur des contraintes calculées avec Θ -Stock correspondent bien à ceux donnés par Carter et Booker, ce qui indique que le choix de α_0^* dans les simulations effectuées dans le domaine élastique du modèle THHMD (équation 17.9) est pertinent.

L'analyse en déformations planes donne de très bons résultats sur la cinétique d'évolution de la température (figure 17.14.a). La contrainte horizontale calculée sur les éléments voisins du

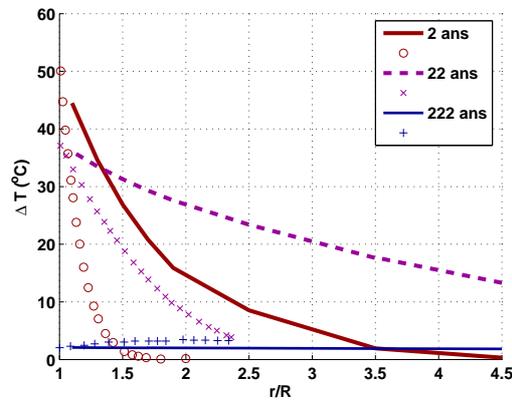


FIGURE 17.12 – Evolution de la température dans le massif à proximité du paquet radioactif. Etude axisymétrique pseudo-unidimensionnelle. Points : résultats obtenus par Carter et Booker [32]. Lignes continues : résultats numériques obtenus avec Θ -Stock dans le domaine élastique du modèle THHMD.

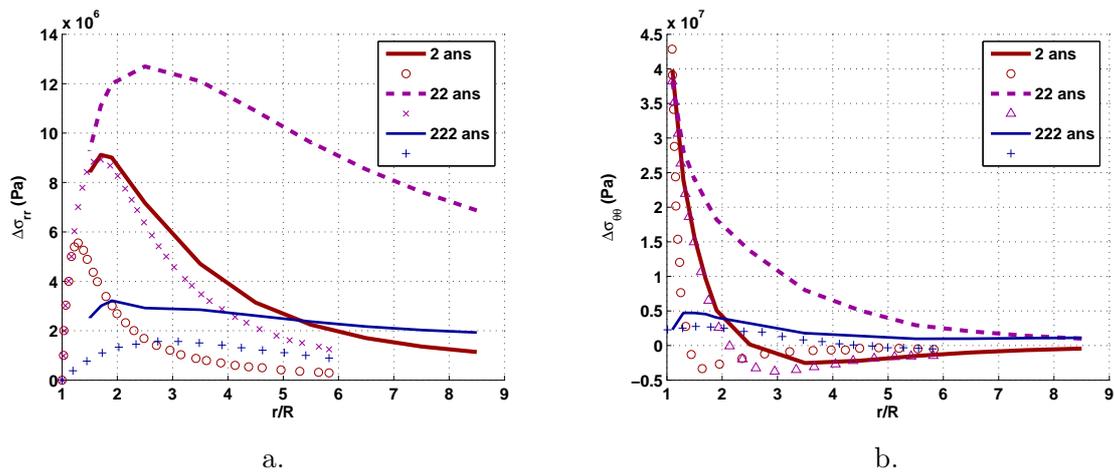


FIGURE 17.13 – Evolution des contraintes dans le massif à proximité du paquet radioactif. Etude axisymétrique pseudo-unidimensionnelle. a. Variation de contrainte radiale. b. Variation de contrainte circonférentielle. Points : résultats obtenus par Carter et Booker [32]. Lignes continues : résultats numériques obtenus avec Θ -Stock dans le domaine élastique du modèle THHMD.

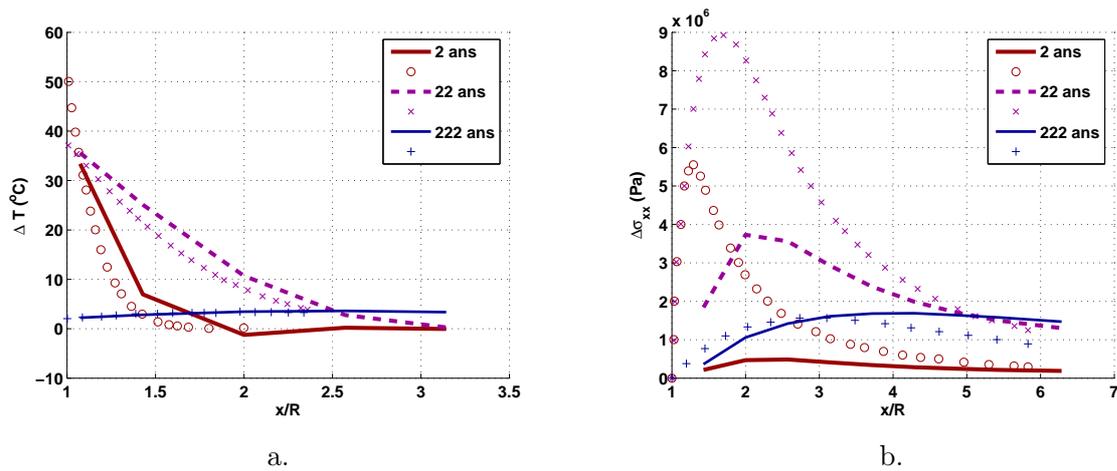


FIGURE 17.14 – Etat thermo-mécanique du massif à proximité du paquet radioactif. Etude en déformations planes. a. Evolution de la température. b. Variation de contrainte « radiale ». Points : résultats obtenus par Carter et Booker [32]. Lignes continues : résultats numériques obtenus avec Θ -Stock dans le domaine élastique du modèle THHMD sur les éléments situés à la base du modèle.

bord inférieur du modèle (voir le maillage sur la figure 17.11) atteint le même équilibre que la contrainte radiale calculée par Carter et Booker [32] après 222 ans de stockage (figure 17.14.b). A court terme ($t=2$ ans et $t=22$ ans), l'allure des courbes d'évolution de σ_{xx} avec la distance x au paquet radioactif est bonne :

- un pic de contrainte est atteint à une distance environ égale à deux fois le rayon du puits (1.5 R pour Carter et Booker et 2.5 R avec Θ -Stock) ;
- la contrainte se stabilise à une distance d'environ 5 fois le rayon du puits (autour de 1.3 MPa au bout de 2 ans, et autour de 1.8 MPa au bout de 22 ans) ;
- le pic de contrainte atteint au bout de 22 ans est d'une amplitude supérieure à celle du pic atteint au bout de 2 ans.

Cependant l'amplitude du pic n'est pas du bon ordre de grandeur : la contrainte maximale est 3 à 4 fois plus faible dans les calculs effectués avec Θ -Stock que dans l'étude de Carter et Booker [32]. Si on considère les résultats de Carter et Booker [32] comme des références, l'analyse unidimensionnelle laissait déjà supposer qu'il existait un décalage entre les équilibres en température et en contraintes calculés par Θ -Stock. Carter et Booker [32] modélisent un solide (plein) soumis à des sollicitations thermo-mécaniques. Avec Θ -Stock, on considère que le milieu est poreux, et que les fluides qui occupent l'espace poreux ont des conductivités thermiques et des capacités calorifiques différentes de celles du squelette solide. Cette différence de conception pourrait expliquer les décalages observés dans les résultats, qui semblent liés à un problème de cinétique.

La figure 17.15, qui représente l'évolution spatio-temporelle de la température en déformations planes, illustre le transfert majoritairement diffusif et isotrope de la température. Cette observation justifie la comparaison des températures calculées avec Θ -Stock en déformations planes avec celles qui ont été calculées par Carter et Booker [32] en configuration axisymétrique. La contrainte horizontale au droit de la paroi latérale du paquet radioactif suit la même évolution que la contrainte verticale au droit de la paroi supérieure du paquet (figure 17.16). Le même constat peut être fait sur les déformations (figure 17.17). De manière générale, on peut reproduire la carte d'évolution d'une variable exprimée dans la direction xx en prenant la carte symétrique

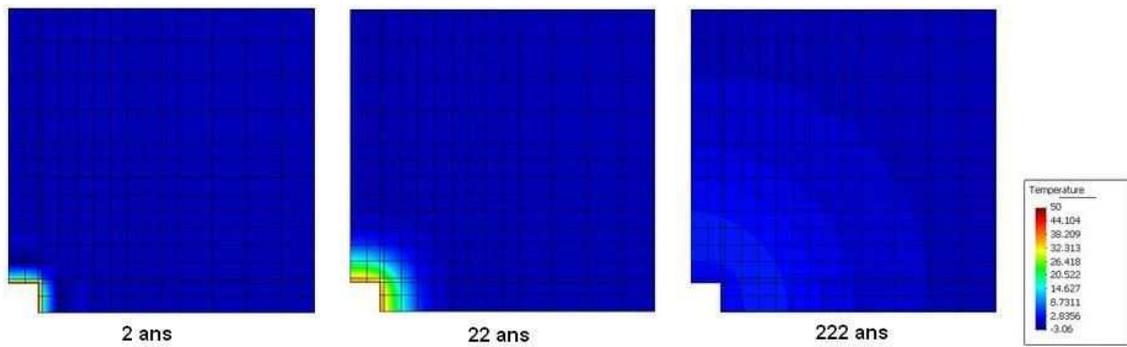


FIGURE 17.15 – Evolution spatio-temporelle de la température dans le problème de stockage des déchets radioactifs [32] traité en déformations planes.

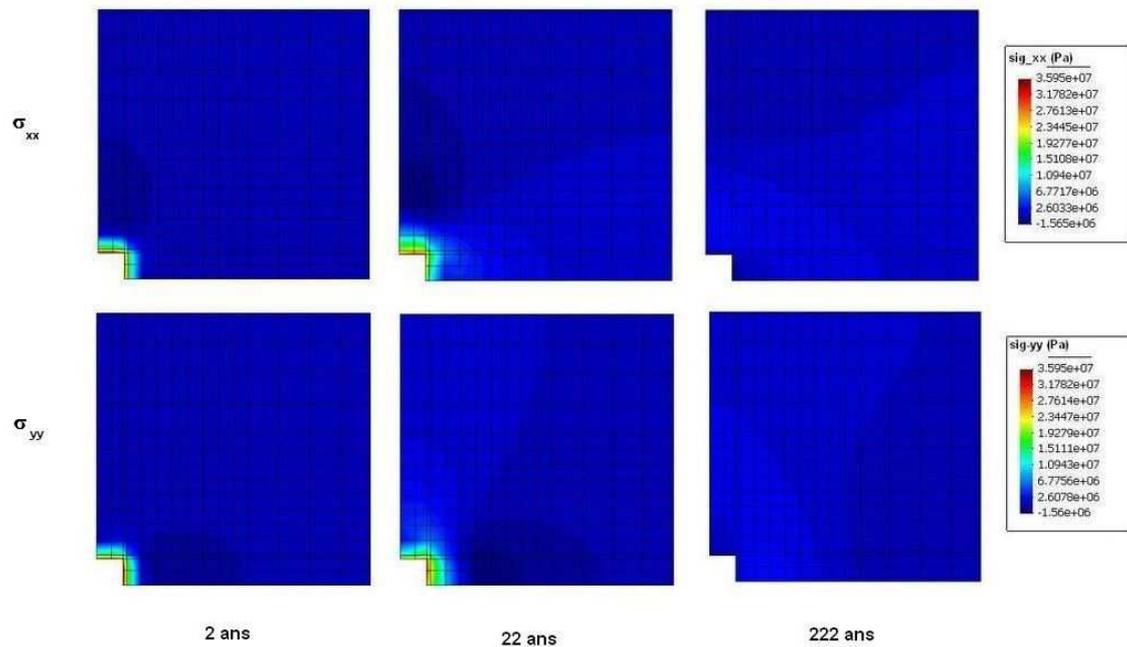


FIGURE 17.16 – Evolution spatio-temporelle des contraintes dans le problème de stockage des déchets radioactifs [32] traité en déformations planes.

de la composante σ_{yy} par rapport à la diagonale qui relie le coin supérieur droit du tunnel (ou du puits) au coin supérieur droit de la zone modélisée. Cette observation justifie l'assimilation de $\sigma_{xx}(x)$ au droit de la paroi latérale de la galerie à la contrainte radiale $\sigma_{rr}(r)$ calculée par Carter et Booker [32] dans leur analyse axisymétrique. Cependant, comme les hypothèses de calcul en élasticité ne sont pas les mêmes, on pouvait s'attendre à observer des différences dans les ordres de grandeur. En plus du problème de cinétique évoqué précédemment, ce constat théorique peut expliquer les différences observées sur les pics de contrainte radiale (figure 17.14.b). De manière générale, on constate que l'augmentation de température provoquée par le dégagement de chaleur des déchets va générer de fortes contraintes compressives au voisinage de la zone de stockage (ces contraintes sont comptées positivement avec la convention de signe de la mécanique des sols).

17.2.2.5 Etude des tendances de l'endommagement

On cherche à présent à étudier les tendances du comportement fragile du matériau étudié précé-

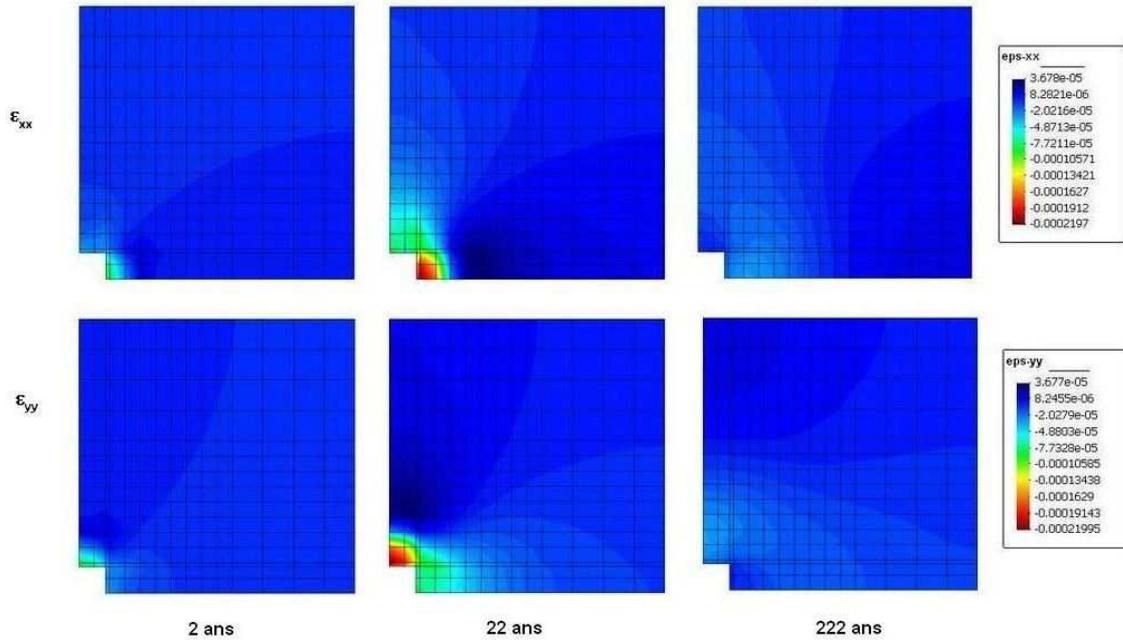


FIGURE 17.17 – Evolution spatio-temporelle des déformations dans le problème de stockage des déchets radioactifs [32] traité en déformations planes.

demment dans le domaine élastique. Comme dans le problème de refroidissement du tunnel de section carrée, on étudie le même problème thermo-mécanique, en introduisant des paramètres d'endommagement différents. Le matériau est sec et les degrés de liberté nodaux relatifs aux pressions interstitielles sont bloqués, donc il est inutile de faire varier g_S pour tenter de générer de l'endommagement. Le matériau subit un fort afflux de chaleur à proximité du paquet radioactif, ce qui va globalement engendrer des déformations volumiques thermiques négatives (ce qui correspond à des dilatations avec la convention de signe de la mécanique des sols) : $\epsilon_{T_v}^+ \neq 0$. Si $g_T \neq 0$, de la fissuration peut être générée suite au chauffage. On présente donc dans la suite une étude paramétrique réalisée sur le coefficient g_T pour le problème de stockage de déchets radioactifs dans un massif granitique sec. L'introduction de la rigidité g_T dans un modèle d'endommagement est une nouveauté du modèle THHMD. Il n'y a donc pas de référence bibliographique qui permette d'en estimer la valeur. On s'appuie donc sur les valeurs trouvées pour la rigidité g_M . On rappelle que la valeur identifiée par Homand et al. [93] et par Halm et Dragon [91] pour le coefficient g_M est de $-3.3 \cdot 10^8 Pa$ pour le granite (équation 17.11). En-dehors de la rigidité g_T , tous les paramètres du modèle THHMD utilisés dans cette étude paramétrique sont identiques à ceux qui ont été employés pour les simulations effectuées dans le domaine élastique (tableaux 17.4, 17.5 et 17.6, équation 17.14). De nombreuses simulations numériques ont été effectuées, en configuration axisymétrique pseudo-unidimensionnelle comme en déformations planes. On a choisi de ne présenter que les résultats les plus intéressants à commenter, obtenus pour des valeurs de g_T comprises entre 2 et 5 fois la valeur g_M^{ref} : $2 * g_M^{ref} \leq g_T \leq 5 * g_M^{ref}$.

En configuration axisymétrique comme en déformations planes, l'endommagement obtenu est isotrope (figure 17.20). C'est tout à fait logique, puisque le critère de fissuration en jeu n'implique que les déformations thermiques, qui sont isotropes. Dans la modélisation axisymétrique pseudo-unidimensionnelle, le choix de g_T influence peu le niveau d'endommagement maximal atteint et l'étendue de la zone endommagée (figure 17.18). Mais il est à noter que la longueur de l'intervalle dans lequel g_T varie est faible : $4 * g_M^{ref} \leq g_T \leq 4.3 * g_M^{ref}$. L'endommagement

maximal à la frontière avec le paquet radioactif est déjà quasiment atteint après la période de chauffage de 2 ans (figures 17.18.a,c,e). La zone endommagée continue cependant à s'étendre pendant les premières années pendant lesquelles la température décroît (figure 17.18.c). On peut faire les mêmes observations sur les déformations (figure 17.19) : dans l'intervalle de valeurs choisi, g_T influence peu les déformations ; les niveaux maximum de tension sont atteints peu de temps après l'application de la température maximum, au bout d'environ 2 ans. Les déformations thermiques inélastiques n'évoluent plus après cette période, puisque l'endommagement ne se développe plus. En revanche, le refroidissement progressif du paquet radioactif provoque une baisse quasi-exponentielle des dilatations volumiques thermiques, ce qui engendre une baisse des déformations totales en tension.

Comme on peut le constater sur la figure 17.20 en déformations planes, un des éléments les plus endommagés par le chargement thermique de la paroi de la galerie est l'élément qui jouxte le tunnel, au droit de la paroi verticale (figure 17.21). On présente les résultats obtenus sur cet élément pour $g_T = 2 * g_M^{ref}$, $g_T = 3 * g_M^{ref}$, $g_T = 4 * g_M^{ref}$ et $g_T = 5 * g_M^{ref}$. Comme l'endommagement produit est isotrope, on n'a tracé que la composante horizontale de l'endommagement Ω_{xx} (figure 17.22). Comme l'endommagement se stabilise au bout de 6 ans environ (il y a plus d'inertie thermique que dans le modèle quasi-unidimensionnel étudié précédemment), on n'a tracé les déformations que sur le court terme, ce qui permet de visualiser la valeur de pic des déformations (figure 17.23). Sur le long terme, les résultats numériques montrent la même tendance que dans l'étude axisymétrique quasi-unidimensionnelle : les déformations totales et la déformation volumique thermique décroissent exponentiellement lorsque le paquet se refroidit, et la déformation volumique thermique inélastique se stabilise, car l'endommagement ne se développe plus. Cette fois-ci, le niveau d'endommagement augmente significativement avec g_T , ce qui s'explique par l'augmentation de la dilatation volumique thermique engendrée, qui croît avec g_T .

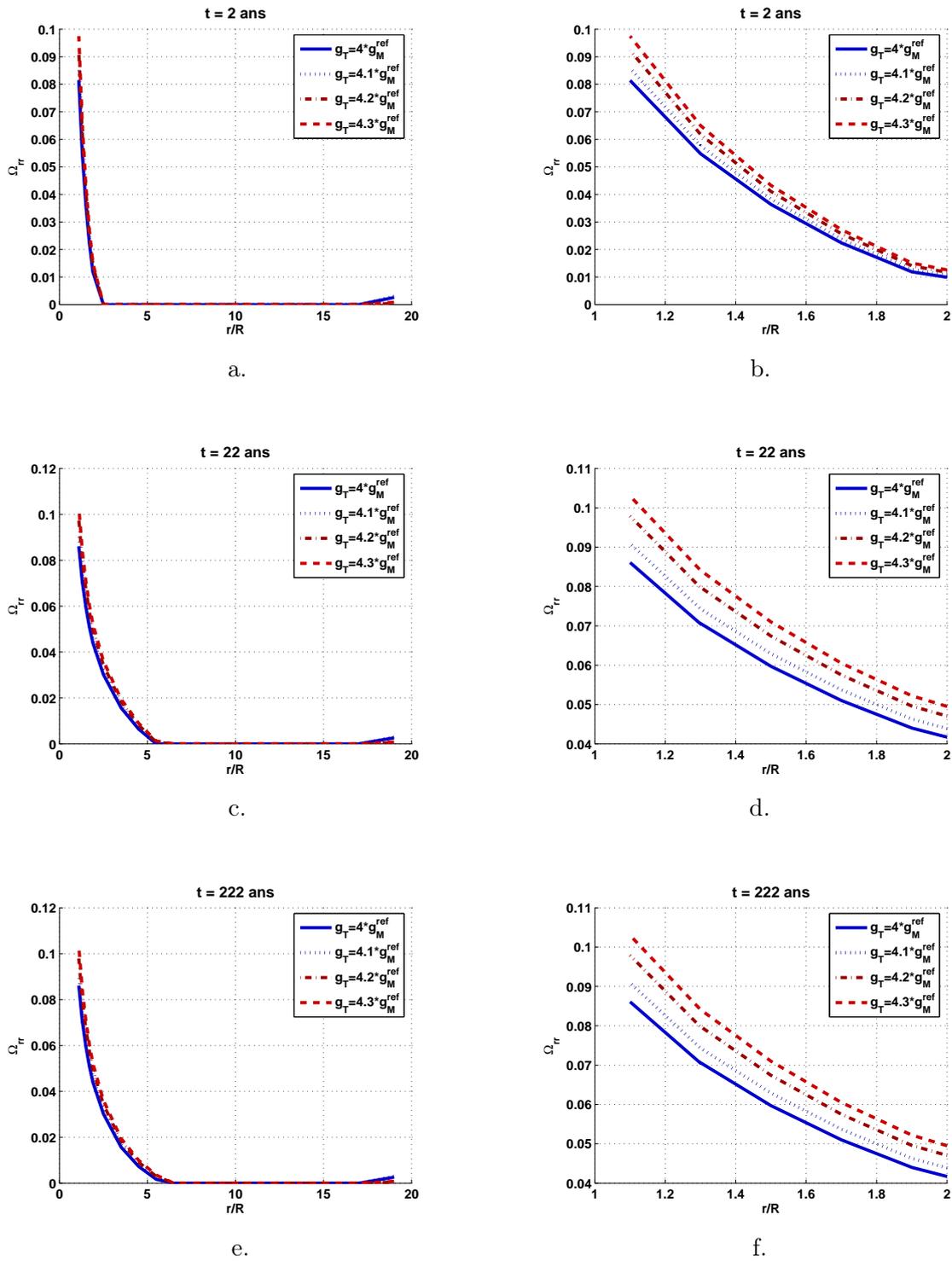


FIGURE 17.18 – Evolution spatiale de l'endommagement radial ($\Omega_{rr} = \Omega_{zz} = \Omega_{\theta\theta}$) dans le problème axisymétrique de stockage des déchets radioactifs, au bout de 2 ans (a,b), 22 ans (c,d) et 222 ans (e,f).

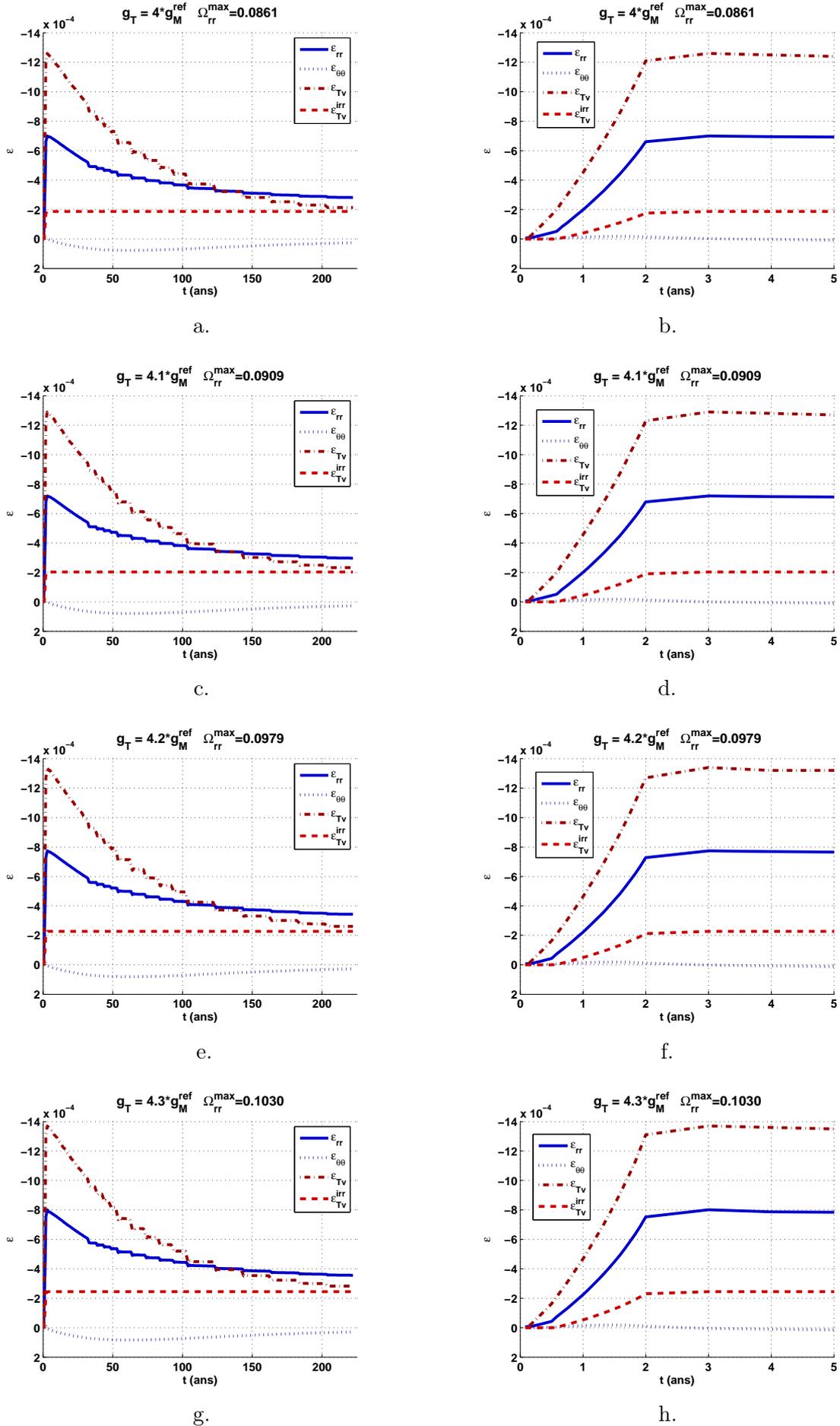


FIGURE 17.19 – Etude axisymétrique du comportement thermo-mécanique fragile d'un massif granitique. Evolution temporelle des déformations calculées sur un élément jouxtant le paquet radioactif, pour $g_T = 4 * g_M^{ref}$ (a,b), $g_T = 4.1 * g_M^{ref}$ (c,d), $g_T = 4.2 * g_M^{ref}$ (e,f) et $g_T = 4.3 * g_M^{ref}$ (g,h).

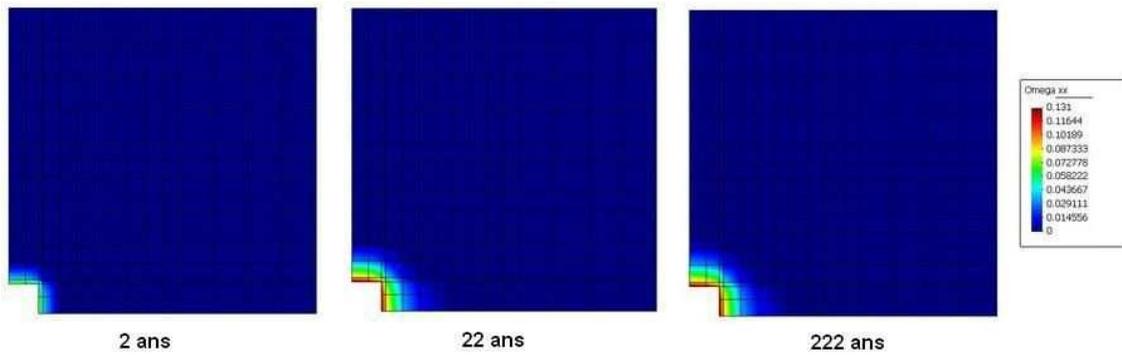


FIGURE 17.20 – Étude du comportement thermo-mécanique fragile d’un massif granitique en déformations planes. Evolution spatio-temporelle de la composante horizontale de l’endommagement ($\Omega_{xx} = \Omega_{yy}$) dans le problème de stockage des déchets radioactifs, avec $g_T = 5 * g_M^{ref}$.

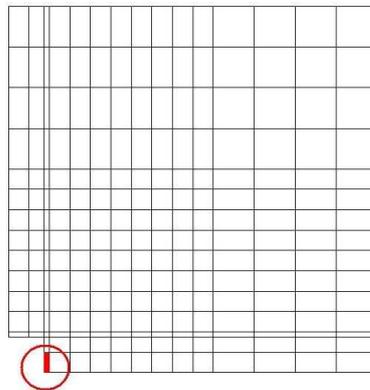


FIGURE 17.21 – Élément choisi pour représenter les résultats de l’étude paramétrique sur le comportement fragile d’un massif géologique sec avoisinant une zone de stockage de déchets radioactifs.

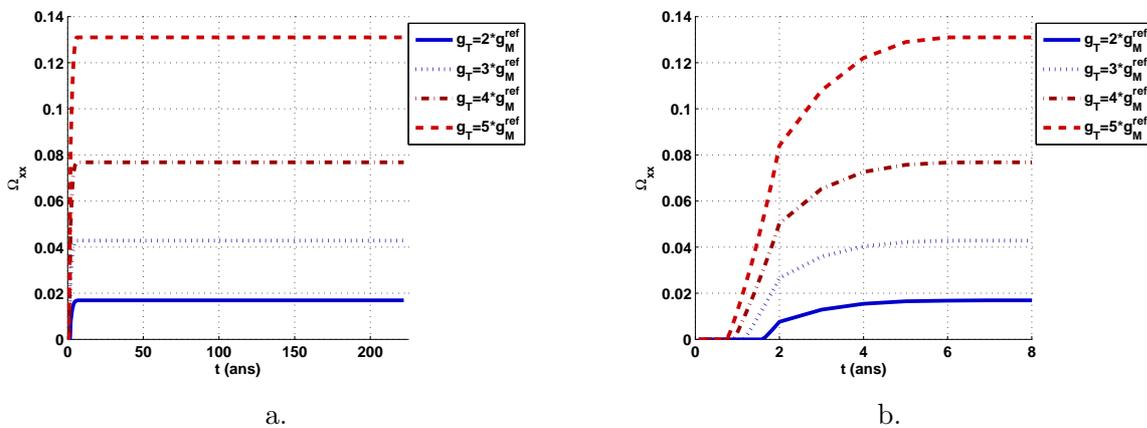


FIGURE 17.22 – Evolution temporelle de la composante horizontale de l’endommagement ($\Omega_{xx} = \Omega_{yy}$) dans le problème de stockage des déchets radioactifs en déformations planes. Élément jouxtant la paroi latérale de l’excavation.

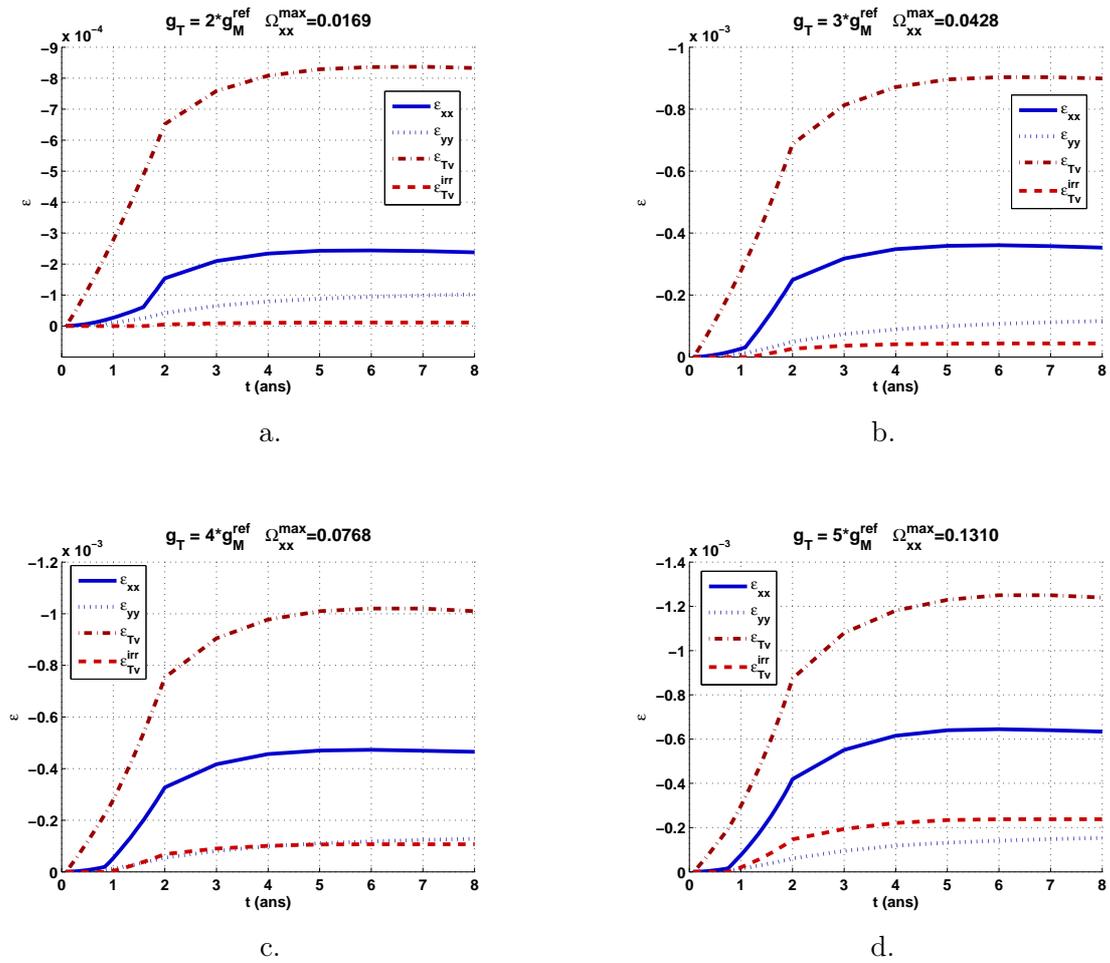


FIGURE 17.23 – Evolution temporelle des déformations dans le problème de stockage des déchets radioactifs en déformations planes. Elément endommagé juxtant la paroi latérale de l'excavation.

17.3 Etude du stockage de déchets radioactifs en milieu non saturé [163]

17.3.1 Validation dans le domaine élastique

17.3.1.1 Problème modélisé

On reprend ici les travaux de Pollock [163] sur le stockage de déchets radioactifs dans un massif poreux non saturé. On suppose que les colis sont entreposés dans une galerie horizontale à une profondeur de 100 mètres environ, et que la nappe phréatique se situe à 500 mètres de profondeur (fig. 17.24). Le tunnel est supposé suffisamment long pour qu'une analyse en déformations planes soit possible. On modélise donc une tranche du massif, jusqu'à une profondeur de 475 mètres. La colonne de sol modélisée fait 20 mètres de large. Le paquet radioactif a une hauteur de 4 mètres, et est stocké entre 98 et 102 mètres de profondeur. Le maillage comporte 141 noeuds et 92 éléments (fig. 17.25). Les deux éléments qui représentent déchets atomiques jouent le rôle d'une source de chaleur : des flux calorifiques sont imposés sur leurs frontières horizontales. Les conditions aux limites imposées permettent de considérer que l'étude est unidimensionnelle.

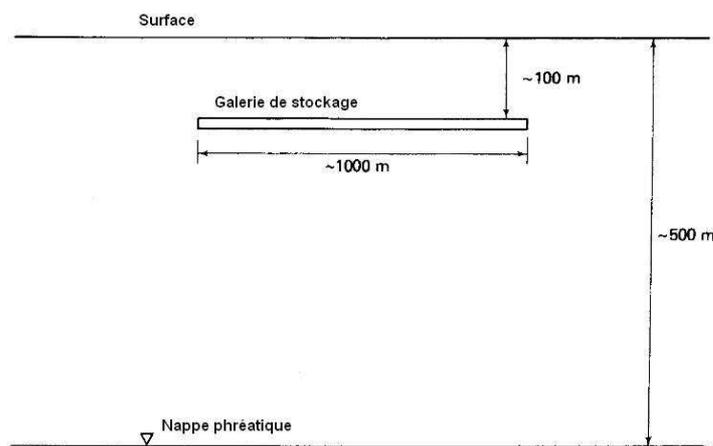


FIGURE 17.24 – Problème du stockage des déchets radioactifs étudié par Pollock [163].

17.3.1.2 Choix des paramètres

Pollock [163] s'intéresse à un problème exclusivement thermo-hydraulique, et ne fournit donc pas de paramètres mécaniques. Dans le but de faire une étude paramétrique sur le modèle d'endommagement par la suite, on choisit des rigidités typiques d'une argilite de l'Est, dont les paramètres d'endommagement ont été déterminés expérimentalement par Homand et al. [93] et Chiarelli et Shao [38]. La simulation présentée ici a également été effectuée avec les paramètres caractéristiques du granite de la Vienne, déterminés expérimentalement par Homand et al. [93] et Halm et Dragon [91]. Les résultats étant quasi-identiques à ceux obtenus avec les paramètres mécaniques de l'argilite, on ne présentera dans la suite que les résultats relatifs à l'argilite. Comme dans la modélisation de l'essai de chauffage in situ effectué par Gens et al. [79], on suppose que la rigidité capillaire est environ 10 fois plus élevée que le module de compression volumique. En l'absence de référence bibliographique sur le sujet, on suppose que $\beta_s^0 = \beta_T^0$. Le paramètre de dilatance χ est choisi selon les recommandations de Shao et al. [180] : $\chi \simeq 0.005$ pour les roches fragiles. L'indice

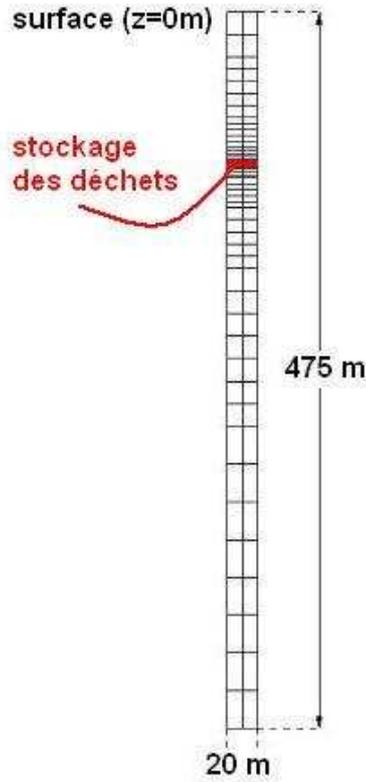


FIGURE 17.25 – Maillage adopté pour traiter le problème de stockage des déchets radioactifs étudié par Pollock [163].

des vides initial est calculé à l'aide de la porosité fournie par Pollock [163] : $e_0 = \frac{n}{1-n}$. Pollock distingue la température de référence de la température initiale, en raison du gradient géothermique qui opère à grande profondeur. Pour la modélisation des échanges thermiques, on choisit donc la même température de référence (T_0) que Pollock, soit $0^\circ C$. On utilise la distribution spatiale du degré de saturation obtenue par Pollock pour initialiser le degré de saturation. En réalité, S_{w0} n'est pas utilisé dans la simulation, car la distribution spatiale du degré de saturation est initialisée en inversant la formule de la surface d'état du degré de saturation. Pour faire ce calcul, on entre une valeur initiale pour toutes les pressions interstitielles nodales de l'eau liquide et de l'air gazeux. Comme dans la simulation effectuée par Pollock [163], ces valeurs initiales correspondent à l'état hydrostatique (voir le paragraphe suivant, sur le chargement). L'ensemble des paramètres mécaniques adoptés dans la simulation du problème de Pollock sont donnés dans le tableau 17.7.

Pollock [163] utilise une courbe de rétention indépendante de la température. C'est pourquoi dans la suite, on travaillera avec la projection de la surface d'état du degré de saturation dans le plan isotherme : $d_s = 0$. On rappelle que dans le modèle THHMD, l'inversion de la courbe de rétention (isotherme) donne la formule suivante pour la succion :

$$s = \frac{1}{\alpha_{VG}} \left[\left(\frac{S_w - S_{w,r}}{1 - S_{w,r}} \right)^{n_{VG}/(1-n_{VG})} - 1 \right]^{1/n_{VG}} \quad (17.15)$$

Pollock [163] utilise une courbe de rétention qui marque une accélération forte de la désaturation

TABLE 17.7 – Paramètres mécaniques élastiques utilisés dans la simulation du problème de Pollock [163].

Modèle élastique hyperbolique						
K_b	K_L	n	R_f	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$	K_U	m
$5.98 * 10^4$	$1.22 * 10^5$	0	0	$2 * 10^{10} Pa$	$1.22 * 10^5$	0
Rigidités de référence						
β_s^0	β_T^0					
$5.98 * 10^{10} Pa$	$5.98 * 10^{10} Pa$					
Paramètres d'endommagement						
χ	C_0	C_1	g_M	g_S	g_T	
0.005	$2.3 * 10^{-4} Pa$	$5.2 * 10^{-3} Pa$	0	0	0	
Conditions initiales						
e_0	S_{w0}	$T_0 (reference)$				
0.5385	0.15	$0^\circ C$				

à forte succion :

$$\begin{cases} s = 10^5 \exp(-15.27 S_w + 6.062) & si \quad 0.1 \leq S_w \leq 1 \\ s = 10^5 \exp(314.84 S_w^2 - 78.24 S_w + 9.21) & si \quad 0 \leq S_w \leq 0.1 \end{cases} \quad (17.16)$$

En supposant que le degré de saturation résiduel est nul ($S_{w,r} = 0$), on cale les paramètres de Van Genuchten α_{VG} et n_{VG} [197] pour que les courbes de rétention déterminées par les équations 17.15 et 17.16 coïncident le mieux possible dans le domaine de saturation qui nous intéresse dans cette étude, c'est à dire pour des degrés de saturation faibles ($0 \leq S_w \leq 0.25$). Avec $\alpha_{VG} = 10^{-4} Pa^{-1}$ et $n_{VG} = 1.361$, on obtient une bonne concordance entre les deux modèles de rétention (fig. 17.26).

On rappelle la formule de la perméabilité à l'eau liquide dans l'état intact du matériau :

$$K_w^{intact}{}_{ij} = k_{w0} 10^{\alpha_w} e \left(\frac{S_w - S_{w,r}}{1 - S_{w,r}} \right)^3 \frac{\mu_w(T)}{\mu_w(T_{ref})} \delta_{ij} \simeq k_{w0} 10^{\alpha_w} e \left(\frac{S_w - S_{w,r}}{1 - S_{w,r}} \right)^3 \delta_{ij} \quad (17.17)$$

Chez Pollock [163], les variations de la perméabilité à l'eau liquide avec le degré de saturation sont modélisées de la façon suivante :

$$\begin{cases} K_w^{intact}{}_{ij} = \frac{\gamma_w k}{\mu_w(T_{ref})} \left(\frac{S_w - 0.1}{0.9} \right)^7 \delta_{ij} & si \quad 0.1 \leq S_w \leq 1 \\ K_w^{intact}{}_{ij} = 0 & si \quad 0 \leq S_w \leq 0.1 \end{cases} \quad (17.18)$$

avec $\mu_w(T_{ref}) = 1.795 \cdot 10^{-6} Pa \cdot s$ à $T_{ref} = 0^\circ C$ et avec $k = 5 \cdot 10^{-12} m^2$. Le problème est purement thermo-hydraulique, donc on peut supposer qu'il n'y a pas de couplage entre la perméabilité à l'eau liquide et l'indice des vides dans le modèle THHMD : $\alpha_w = 0$. Par ailleurs, on a déjà fixé le degré de saturation résiduel à zéro pour caler la courbe de rétention sur celle de Pollock [163] : $S_{w,r} = 0$. Il s'agit donc de caler la perméabilité de référence k_{w0} pour avoir une fonction de perméabilité proche de celle de Pollock. En prenant $k_{w0} = 5 \cdot 10^{-10} m \cdot s^{-1}$, on obtient une bonne

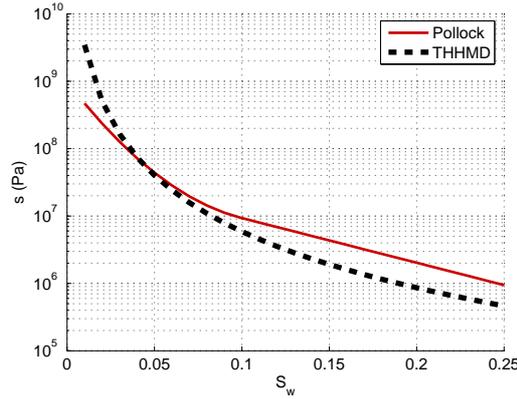


FIGURE 17.26 – Comparaison des courbes de rétention du modèle de Pollock [163] et du modèle THHMD ($S_{w,r} = 0$, $\alpha_{VG} = 10^{-4} Pa^{-1}$, $n_{VG} = 1.361$).

concordance des deux modèles pour les valeurs attendues du degré de saturation (fig. 17.27).

Pollock modélise la perméabilité à l'air comme suit :

$$k_a = \frac{\gamma_a k}{\mu_a} \quad (17.19)$$

où $k = 5 * 10^{-12} m^2$ est une conductivité qui joue exactement le même rôle que le paramètre c_a dans le modèle THHMD :

$$k_a = \frac{\gamma_a c_a}{\mu_a} (e(1 - S_w))^{\alpha_a} \quad (17.20)$$

C'est pourquoi on choisit $c_a = 5 * 10^{-12} m^2$. Pour instaurer une dépendance vis-à-vis du degré de saturation tout en maintenant le même ordre de grandeur pour la perméabilité à l'air, on choisit $\alpha_a = 2$. S_w reste inférieur à 0.3 [163], et e reste constant : $e = e_0 = 0.5385$. Ainsi, le terme relatif au degré de saturation dans la formule de la perméabilité à l'air ne change pas la perméabilité à l'air de plus d'un ordre de grandeur. La concordance entre les perméabilités à l'air des deux modèles comparés est excellente (fig. 17.28). On fait une étude dans le domaine élastique, donc le choix des maxima envisagés pour la perméabilité intrinsèque endommagée K_{wdg}^{max} et pour la conductivité intrinsèque endommagée $D_{vap,dg}^{max}$ n'a pas d'incidence sur les résultats. Dans la simulation effectuée, on considère que K_{wdg}^{max} est du même ordre de grandeur que la perméabilité (globale) maximale du milieu intact, et que $D_{vap,dg}^{max}$ est du même ordre de grandeur que la perméabilité à l'air maximale. L'ensemble des paramètres matériels relatifs aux fluides utilisés dans cette étude sont récapitulés dans le tableau 17.8.

On choisit une valeur usuelle pour la dilatance thermique ($7.5 * 10^{-4} ^\circ C^{-1}$). On considère par ailleurs que la rigidité thermique est indépendante de la température et des contraintes mécaniques ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$). Les valeurs des conductivités thermiques de l'eau liquide et de l'air gazeux sont usuelles. On reprend les valeurs utilisées par Pollock [163] pour la chaleur latente d'évaporation ainsi que pour les capacités calorifiques du squelette solide, de l'eau liquide, de la vapeur et de l'air gazeux. La seule inconnue à ce stade est la conductivité thermique du squelette solide. On choisit λ_s de manière à ce que la conductivité thermique du milieu poreux homogénéisé (λ_T) soit comparable dans les deux modèles confrontés. Pollock [163] adopte la formule suivante :

$$\lambda_T = S_w \lambda_{sat} + (1 - S_w) \lambda_{dry} \quad (17.21)$$

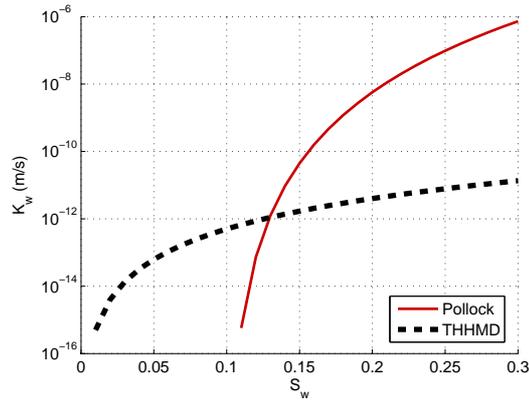


FIGURE 17.27 – Comparaison des perméabilités à l'eau du modèle de Pollock [163] et du modèle THHMD ($S_{w,r} = 0$, $\alpha_w = 0$, $k_{w0} = 5 * 10^{-10} m.s^{-1}$).

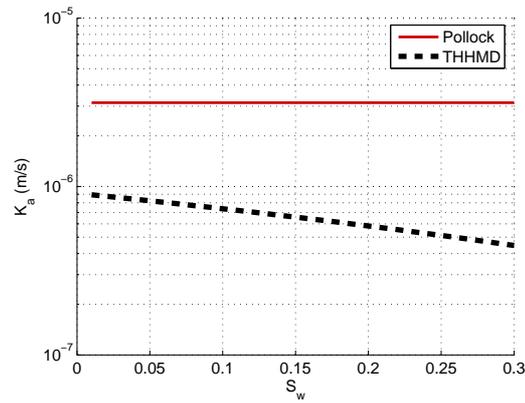


FIGURE 17.28 – Comparaison des perméabilités à l'air du modèle de Pollock [163] et du modèle THHMD ($c_a = 5 * 10^{-12} m^2$, $\alpha_a = 2$).

TABLE 17.8 – Paramètres élastiques relatifs aux fluides pour le problème de Pollock [163].

Courbe de rétention			
$S_{w,r}$	α_{VG}	n_{VG}	d_s
0	$10^{-4} Pa^{-1}$	1.361	0
Perméabilité à l'eau liquide			
k_{w0}	α_w	$k_w^{0,max}$	k_{wdg}^{max}
$5 * 10^{-10} m.s^{-1}$	0	$10^{-9} m.s^{-1}$	$10^{-9} m.s^{-1}$
Transfert des gaz			
c_a	α_a	k_a^{max}	D_{dg}^{max}
$5 * 10^{-12} m^2$	2	$10^{-4} m.s^{-1}$	$10^{-4} m^2.s^{-1}$

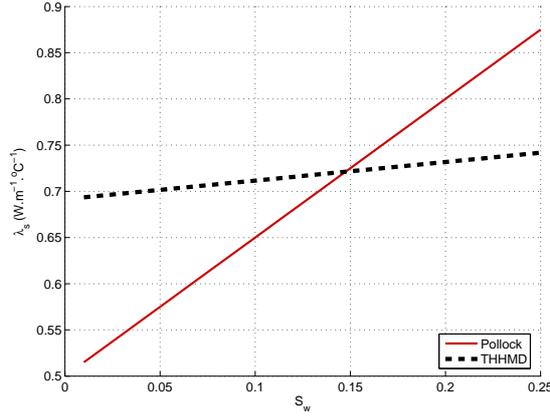


FIGURE 17.29 – Comparaison des conductivités thermiques du modèle de Pollock [163] et du modèle THHMD ($\lambda_s = 1.05 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$).

TABLE 17.9 – Paramètres thermiques élastiques utilisés dans le problème de Pollock [163].

Rigidité thermique intacte				
α_0^*	α_1	α_2	α_3	p_{geo}
$-7.5 * 10^{-4} .^{\circ}C^{-1}$	0	0	0	$10^5 Pa$
Diffusion et évaporation				
λ_s	λ_w	λ_a	h_{fg}	
$1.05 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$0.6 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$0.0258 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$2.5 * 10^6 J.kg^{-1}$	
Convection				
C_{Ps}	C_{Pw}	C_{Pvap}	C_{Pa}	
$837 J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$4184 J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$1900 J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$1000 J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	

avec $\lambda_{sat} = 2 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$ et $\lambda_{dry} = 0.5 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$. On rappelle que dans le modèle THHMD :

$$\lambda_T = (1 - n) \lambda_s + n S_w \lambda_w + n (1 - S_w) \lambda_{vap} \quad (17.22)$$

avec $n = 0.35$ et $\lambda_w = 0.6 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$. Pour comparer les modèles de conductivité thermique dans cet exemple, on considère que la conductivité thermique de la vapeur est proche de celle de l'air : $\lambda_{vap} \simeq \lambda_a = 0.0258 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$. En prenant $\lambda_s = 1.05 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$, les conductivités thermiques globales données par le modèle de Pollock [163] et par le modèle THHMD sont proches dans le domaine de saturation qui nous intéresse (fig. 17.29). Les paramètres thermiques utilisés dans cette simulation sont donnés dans le tableau 17.9.

17.3.1.3 Conditions initiales, conditions aux limites et chargement

Pollock [163] réalise une étude thermo-hydraulique, qui ne comporte pas d'aspect mécanique. Pour reproduire le problème traité par Pollock le plus fidèlement possible, on a ainsi bloqué tous les degrés de liberté en déplacements dans les simulations effectuées avec Θ -Stock.

Conditions initiales

- Les températures sont calculées en chaque noeud à l'aide de la formule suivante pour le gradient géothermique :

$$T(z) = 20 - 0.03 z, \quad z < 0 \quad (17.23)$$

où z est la cote du point considéré (en m), et où la température T est exprimée en $^{\circ}C$. La formule 17.23 prend en compte une température en surface de $20^{\circ}C$.

- Les pressions interstitielles de l'air gazeux sont initialisées conformément à l'état hydrostatique. Compte-tenu du fait que la p_a vaut la pression atmosphérique en surface :

$$p_{a0}(z) = p_{atm} - \gamma_a z, \quad z < 0 \quad (17.24)$$

où p_{atm} est la pression atmosphérique, et où γ_a est le poids volumique de l'air.

- Les pressions interstitielles de l'eau liquide sont initialisées en supposant que le potentiel capillaire Ψ (qui est égal à l'opposé de la succion chez Pollock [163]) est dans un état hydrostatique. Sachant que la nappe phréatique est à 500 mètres de profondeur :

$$-s_0(z) = \Psi_0(z) = p_{w_{ref}} + \gamma_w (z_{ref} - z), \quad z_{ref} < z < 0, \quad z_{ref} = -500m, \quad p_{w_{ref}} = 0 \quad (17.25)$$

où s_0 est la succion initiale et où Ψ_0 est le potentiel capillaire initial. On initialise donc les pressions interstitielles de l'eau liquide en combinant les équations 17.26 et 17.25 :

$$p_{w0}(z) = p_{a0}(z) - s_0(z) \quad (17.26)$$

Conditions aux limites

- Températures : fixées aux conditions géothermiques : $20^{\circ}C$ en surface, $34.25^{\circ}C$ à $z = -475m$.
- Pressions d'eau : frontière imperméable en surface, pression d'eau correspondant à l'équilibre hydrostatique à $z = -475m$: $p_w(-475m) = -1.3974 * 10^5 Pa$.
- Pressions d'air : fixées aux valeurs de l'équilibre hydrostatique en surface et à $z = -475m$: $p_a(0m) = 10^5 Pa$, $p_a(-475m) = 1.055 * 10^5 Pa$.

Chargement thermique

Comme c'est indiqué dans l'article de Pollock [163], les déchets dégagent initialement une puissance surfacique de $10 W.m^{-2}$, ce qui donne une puissance de $5 W.m^{-2}$ sur chacune des deux surfaces qui délimitent la zone de stockage dans le modèle. La puissance de la source de chaleur décroît exponentiellement avec le temps [163]. Dans le tableau 17.10, la puissance de chauffe relative désigne le quotient de la puissance de chauffe courante sur la puissance de chauffe initiale. Les puissances absolues correspondantes sont indiquées.

TABLE 17.10 – Puissance dégagée par chacune des deux surfaces émettrices de chaleur dans la simulation du problème de Pollock.

Période de stockage	Puissance de chauffe relative	Puissance surfacique dégagée ($W.m^{-2}$)
0-5 ans	1	5
5-10 ans	0.841	4.205
10-15 ans	0.75	3.75
15-20 ans	0.683	3.415
20-30 ans	0.625	3.125
30-50 ans	0.524	2.62
50-70 ans	0.389	1.945
70-100 ans	0.301	1.515
100-300 ans	0.24	1.2
300-500 ans	0.10	0.5
500-1000 ans	0.05	0.25

17.3.1.4 Comparaison des résultats de Θ -Stock à ceux de Pollock [163]

Les résultats obtenus dans le domaine élastique du modèle THHMD sont comparés aux résultats obtenus par Pollock [163] pour la température (fig. 17.30) et pour le degré de saturation (fig. 17.31). Les prédictions de Θ -Stock sur la température sont excellentes, à court terme comme à long terme. Pour le degré de saturation, une translation de quelques dixièmes dans le sens des saturations croissantes semble nécessaire pour que le modèle THHMD reproduise le même état initial que le modèle de Pollock. L'allure des courbes donnant l'évolution de S_w avec la profondeur est bonne jusqu'à $t = 100 \text{ ans}$. Après 100 ans de stockage, on observe les mêmes tendances que Pollock [163] pour les profondeurs supérieures ou égales à 90 mètres. Mais entre 20 et 90 mètres de profondeur, on obtient une forte désaturation, qui s'étend sur une zone plus étendue que Pollock. Près de la surface (à moins de 20 mètres de profondeur), le sol se resature, ce qui témoigne d'effets de condensation. La resaturation est plus marquée que chez Pollock [163] : le degré de saturation en surface est presque deux fois plus élevé que dans les calculs de Pollock. Un calage plus fin des paramètres de rétention et de perméabilité permettrait sans doute d'améliorer les résultats. La figure 17.32 donne un aperçu de l'évolution de la succion pendant la simulation du problème de Pollock [163] dans le domaine élastique du modèle THHMD. Les succions maximales sont atteintes à peu près en même temps que les températures maximales, entre 50 et 100 ans. Après 200 ans, la succion dans le voisinage immédiat de la source de chaleur s'atténue, et la zone de désaturation s'étend, ce qui est en accord avec les résultats observés sur le degré de saturation 17.31.

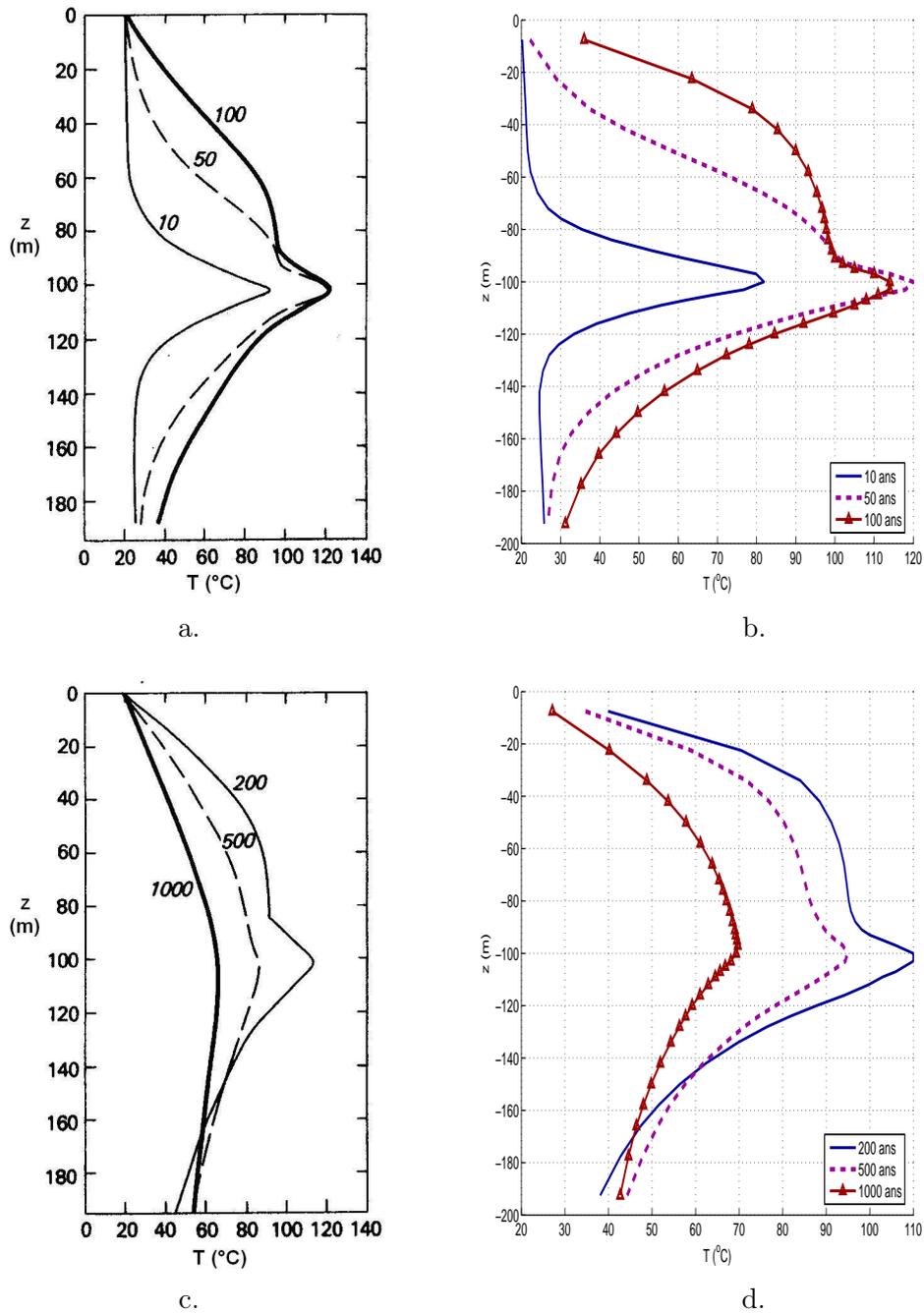


FIGURE 17.30 – Evolution spatio-temporelle de la température. a,c. Résultats de Pollock [163]. b,d. Résultats obtenus dans le domaine élastique du modèle THHMD.

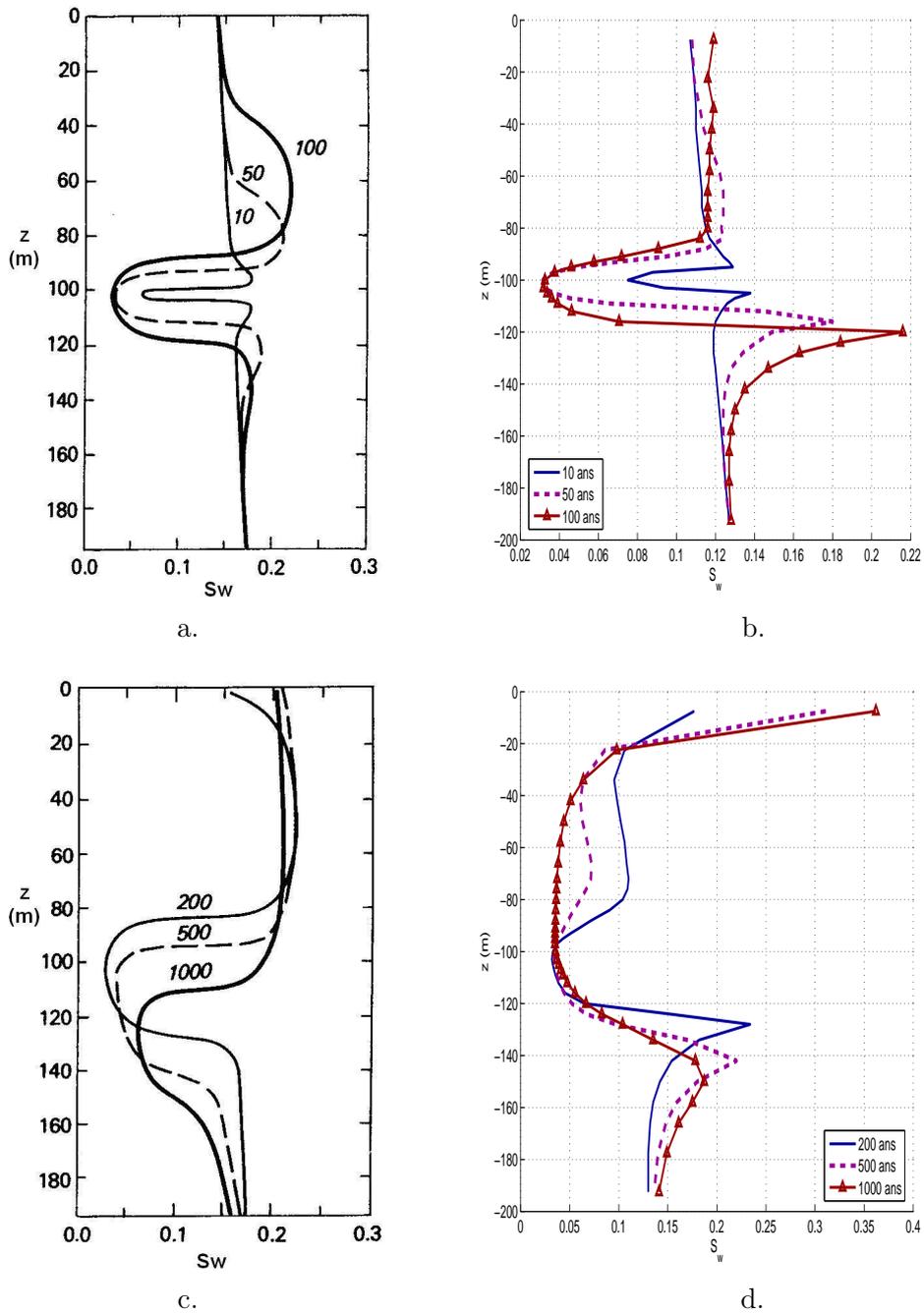


FIGURE 17.31 – Evolution spatio-temporelle du degré de saturation. a,c. Résultats de Pollock [163]. b,d. Résultats obtenus dans le domaine élastique du modèle THHMD.

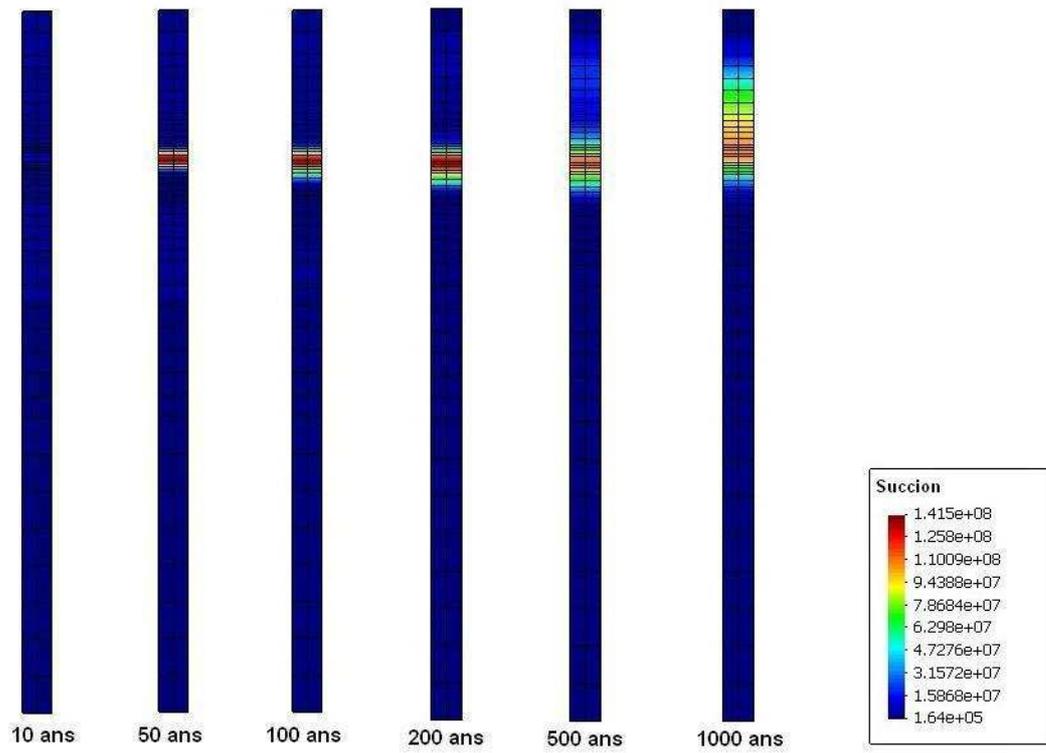


FIGURE 17.32 – Evolution spatio-temporelle de la succion avec le modèle THHMD dans le problème de Pollock [163].

17.3.2 Tendances de l'endommagement dans le massif non saturé

On reprend le problème de stockage des déchets radioactifs traité par Pollock [163] pour étudier les tendances du comportement fragile du massif. On conserve le même maillage et le même programme de chargement. Comme tous les degrés de liberté en déplacements ont été bloqués, on ne peut pas générer d'endommagement en introduisant une rigidité g_M non nulle. On va donc étudier l'influence de la fissuration sous le contrôle des paramètres g_S et g_T .

17.3.2.1 Influence de la perméabilité endommagée maximale

On commence par s'intéresser à K_{wdg}^{max} , la valeur qu'on suppose être un maximum pour la perméabilité intrinsèque endommagée. On rappelle que ce paramètre joue le rôle de longueur interne. Plus le maximum envisagé est grand, et plus la perméabilité à l'eau est affectée par l'ouverture et l'orientation des fissures. On va étudier la dépendance entre l'endommagement et la perméabilité au moyen de deux types de simulations :

- étude de l'influence de K_{wdg}^{max} à rigidité d'endommagement fixée (i.e. à g_S ou g_T fixé) ;
- étude de l'influence de la rigidité d'endommagement (g_S ou g_T) à K_{wdg}^{max} fixée.

Pour simplifier l'étude, on supposera que la valeur de la conductivité intrinsèque maximale pour la vapeur dépasse toujours celle de la perméabilité intrinsèque maximale de l'eau liquide de deux ordres de grandeur. En-dehors des paramètres d'endommagement g_S , g_T , K_{wdg}^{max} et $D_{vap,dg}^{max}$, on conserve tous les paramètres utilisés dans l'étude réalisée précédemment dans le domaine élastique (tableaux 17.7, 17.8 et 17.9). On rappelle qu'on a assimilé le massif géologique à un matériau de type argilite, dont les caractéristiques fragiles ont été déterminées par Chiarelli et al. [38], d'après des essais réalisés par Homand et al. [93]. Comme les paramètres relatifs à l'endommagement capillaire et à l'endommagement thermique sont des nouveautés du modèle THHMD, on compare les valeurs choisies pour g_S et g_T à la valeur fournie dans les articles précédemment cités pour le paramètre g_M . Dans le cas de l'argilite, avec les paramètres mécaniques choisis (tableau 17.7) :

$$g_M^{ref} = -1.414 Pa \quad (17.27)$$

L'endommagement « capillaire » (contrôlé par g_S) et l'endommagement « thermique » (contrôlé par g_T) dépendent de déformations de tension volumiques (ϵ_{Sv}^+ et ϵ_{Tv}^+ respectivement). Par conséquent, il faut s'attendre à ce que l'utilisation de paramètres g_S et g_T non nuls provoque l'initiation et la propagation d'un endommagement isotrope. Un premier examen des résultats montre qu'en effet, les deux composantes du tenseur d'endommagement sont égales sur tous les éléments endommagés ($\Omega_{xx} = \Omega_{yy}$). De même, on observe que le tenseur de perméabilité à l'eau liquide reste isotrope, même si ses composantes sont affectées par la fissuration sur les éléments endommagés : $K_{wxx} = K_{wyy}$. Dans la suite, on ne présentera donc que les composantes horizontales des variables tensorielles : Ω_{xx} et K_{wxx} .

La figure 17.33 permet de vérifier que l'augmentation de la valeur d'une rigidité d'endommagement (g_S ou g_T) provoque l'extension de la zone fissurée, et fait croître l'endommagement sur les éléments affectés par la fracturation. Pour $g_T = 0.004 g_M^{ref}$, le massif est endommagé jusqu'à 200 mètres de profondeur au bout de 1000 ans de stockage. Le réchauffement induit par le stockage de déchets radioactifs est susceptible de générer de l'endommagement thermique ou capillaire (par effets de couplage). Les plus grandes valeurs d'endommagement sont observées au voisinage de

la source de chaleur. La valeur maximale de l'endommagement est atteinte à court terme : le pic atteint à 100 mètres de profondeur n'évolue pas entre 50 et 1000 ans de stockage. En revanche, à long terme, la zone endommagée s'étend. Au bout de 200 ans, la zone endommagée s'étend entre des profondeurs de 90 et 110 mètres pour $g_S \neq 0$ et entre des profondeurs de 40 et 140 mètres pour $g_T \neq 0$. Au bout de 1000 ans, ces zones s'étendent respectivement entre des profondeurs de 40 et 120 mètres et de 20 et 200 mètres. La propagation de l'endommagement à long terme témoigne de l'aspect diffusif du transfert de chaleur. Le choix de la longueur interne (c'est-à-dire le choix de K_{wdg}^{max}) affecte peu le développement de la fissuration dans le massif, comme en témoigne la figure 17.34. A long terme, on observe un endommagement légèrement plus élevé avec les faibles longueurs internes pour $g_S \neq 0$ (avec $K_{wdg}^{max} = 10 k_{w0}$ et $K_{wdg}^{max} = 100 k_{w0}$, on peut obtenir jusqu'à 4 pour cent d'endommagement de plus qu'avec $K_{wdg}^{max} = 1000$, k_{w0} et $K_{wdg}^{max} = 10000 k_{w0}$).

Si on choisit une perméabilité intrinsèque endommagée maximale significativement différente de la perméabilité intrinsèque du matériau intact ($K_{wdg}^{max} = 10000 k_{w0}$), on constate que la perméabilité du matériau fissuré augmente avec l'endommagement, et par conséquent avec la rigidité g_S ou g_T (figure 17.35). Pour les plus fortes valeurs utilisées pour g_S et g_T , on a un endommagement maximal de 12 pour cent (figure 17.33) autour de la source de chaleur, et la perméabilité augmente alors d'un ordre de grandeur. La zone d'influence de la fissuration sur la perméabilité est étendue dans le cas d'un endommagement thermique, jusqu'à 200 mètres de profondeur (figures 17.35.b et 17.35.d). En revanche, l'augmentation de perméabilité générée par de l'endommagement capillaire (figures 17.35.a et 17.35.c) est surtout visible autour de la source (entre 90 et 130 mètres de profondeur à long terme). Par ailleurs, il est très clair que pour une rigidité d'endommagement fixée (g_S ou g_T), une augmentation de la longueur interne (i.e. de K_{wdg}^{max}) génère une forte dépendance de la perméabilité vis-à-vis de l'endommagement. Ainsi, on augmente la perméabilité de un à deux ordres de grandeur dans les zones les plus endommagées si $K_{wdg}^{max} = 1000 k_{w0}$ ou $K_{wdg}^{max} = 10000 k_{w0}$. Au contraire, choisir une faible longueur interne ($K_{wdg}^{max} = 100 k_{w0}$ ou $K_{wdg}^{max} = 10 k_{w0}$) revient à neutraliser les effets de l'endommagement sur la perméabilité. La composante additionnelle de perméabilité due à la fracturation devient négligeable devant la composante de perméabilité du matériau considéré comme intact. On a alors $K_w(\Omega_{ij}) \simeq k_{w0} k_R(S_w, T)$. Le choix de la longueur interne est donc d'une importance cruciale dans la modélisation des transferts de fluides dans le milieu poreux fissuré.

Dans les zones les plus endommagées, on observe une légère resaturation du matériau, particulièrement pour les fortes rigidités (g_S ou g_T) (figure 17.37) et les grandes longueurs internes (figure 17.38). En effet, l'endommagement est synonyme d'ouverture de fissures. Lorsque l'endommagement affecte la perméabilité (en l'augmentant), la succion tend à diminuer, ce qui explique l'augmentation du degré de saturation. Il n'est donc pas étonnant de voir que l'étendue de la zone d'influence de l'endommagement sur le degré de saturation est sensiblement la même que celle de la zone d'influence de la fissuration sur la perméabilité (figures 17.33 et 17.34). Dans l'exemple de l'endommagement thermique, l'introduction d'une grande longueur interne permet quasiment de retrouver le degré de saturation initial du massif sur le long terme (figure 17.38.d). De manière générale, la fissuration tend à homogénéiser plus rapidement l'état de saturation du massif.

La distribution spatiale de la température du massif fissuré est proche de celle du massif intact. Les légères différences observées (figures 17.39 et 17.40) sont localisées autour de la source de chaleur (jamais en-dehors de la zone située entre 10 et 120 mètres de profondeur).

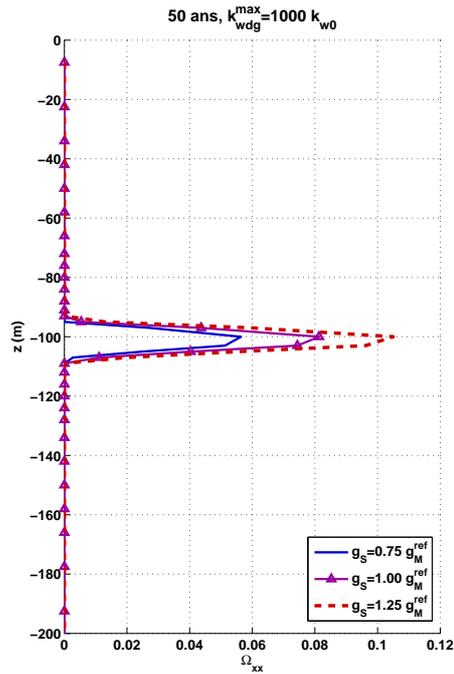
1. L'augmentation de température au voisinage de la source provoque deux phénomènes qui ont des influences contraires sur les transferts de fluides : l'évaporation et le séchage. On ne peut pas connaître a priori le phénomène physique dominant.
2. *Transfert d'humidité vers la source de chaleur par effets capillaires.* Dans la présente étude, la légère augmentation du degré de saturation au voisinage de la source du massif fissuré témoigne de l'augmentation de la perméabilité, qui provoque une accélération des transferts de l'eau liquide vers les zones les moins saturées. Le massif fissuré est ainsi plus saturé en eau autour de la source que le massif intact. Le constituant eau occupe donc un volume plus important dans les pores. Comme la chaleur circule plus vite dans l'eau que dans l'air, on peut comprendre qu'augmenter la proportion d'eau par rapport à l'air va accélérer le processus de refroidissement (on rappelle que la température du paquet radioactif décroît exponentiellement dans le temps).
3. *Transfert d'humidité de la source vers le champ lointain par effets thermiques.* La sollicitation thermique imposée aboutit au séchage du géomatériau. L'air prend la place de l'eau dans les pores. La capacité calorifique de l'air étant plus faible que celle de l'eau, la réponse du massif à la sollicitation thermique sera d'autant plus rapide que le massif sera désaturé.

Deux phénomènes physiques entrent en compétition, ce qui rend difficile l'interprétation des variations de température :

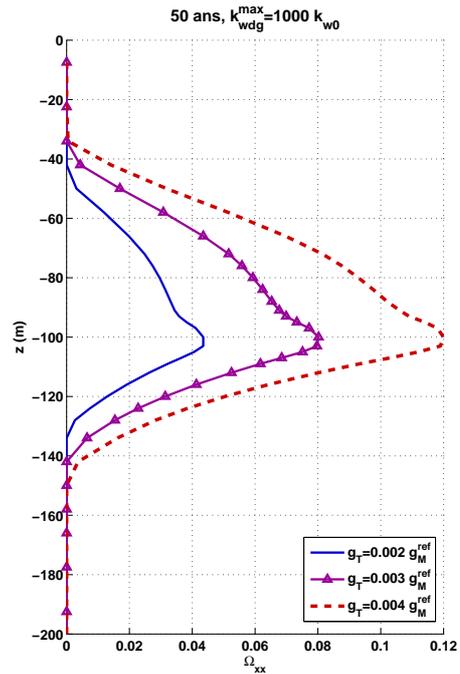
- globalement, le phénomène de séchage fait diminuer la capacité calorifique globale du matériau, mais diminue aussi la conductivité thermique globale du milieu ;
- l'accélération des transferts d'eau liquide vers la source de chaleur fait augmenter la conductivité thermique globale, mais augmente aussi l'inertie thermique du matériau.

Il donc difficile de savoir a priori si les transferts thermiques sont accélérés ou ralentis par la fissuration. Dans la présente étude, ils semblent plutôt accélérés, car les températures calculées dans le massif endommagé sont légèrement plus basses que celles qui sont calculées dans le massif intact aux mêmes dates (au maximum 8°C de différence pour une longueur interne élevée, de $K_{wdg}^{max} = 1000 k_{w0}$; voir la figure 17.40.b).

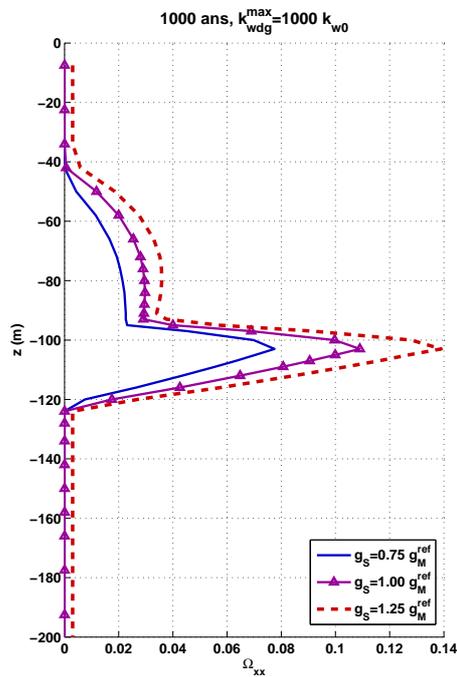
L'étude croisée des influences de K_{wdg}^{max} d'une part et de g_S et g_T permet de vérifier la dépendance de la perméabilité vis-à-vis de l'endommagement. Cette double procédure permet également de déceler une éventuelle dépendance de la propagation de la fissuration vis-à-vis des variations spatio-temporelles du tenseur de perméabilité. La faible dépendance de l'endommagement vis-à-vis de la longueur interne (figure 17.34) amène à conclure que si la fissuration peut affecter énormément les transferts de fluide, les changements de perméabilité quant à eux n'influencent guère le développement de l'endommagement dans le massif.



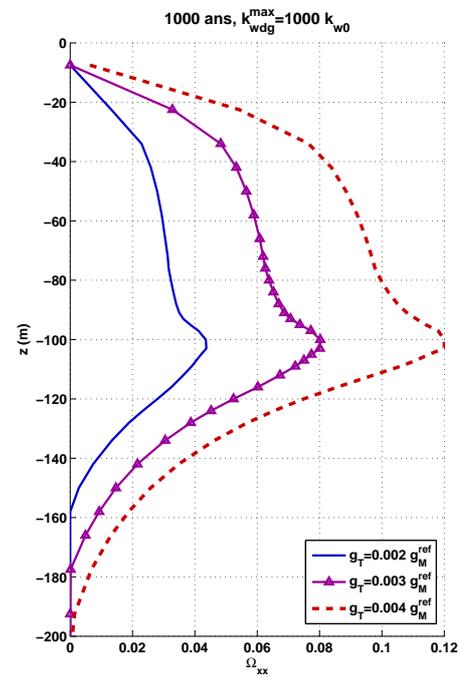
a.



b.



c.



d.

FIGURE 17.33 – Influence des rigidités d'endommagement sur la fissuration dans le problème de stockage de déchets radioactifs de Pollock [163]. $K_{wdg}^{max} = 1000 k_{w0}$. a,c. Influence de g_S . b,d. Influence de g_T .

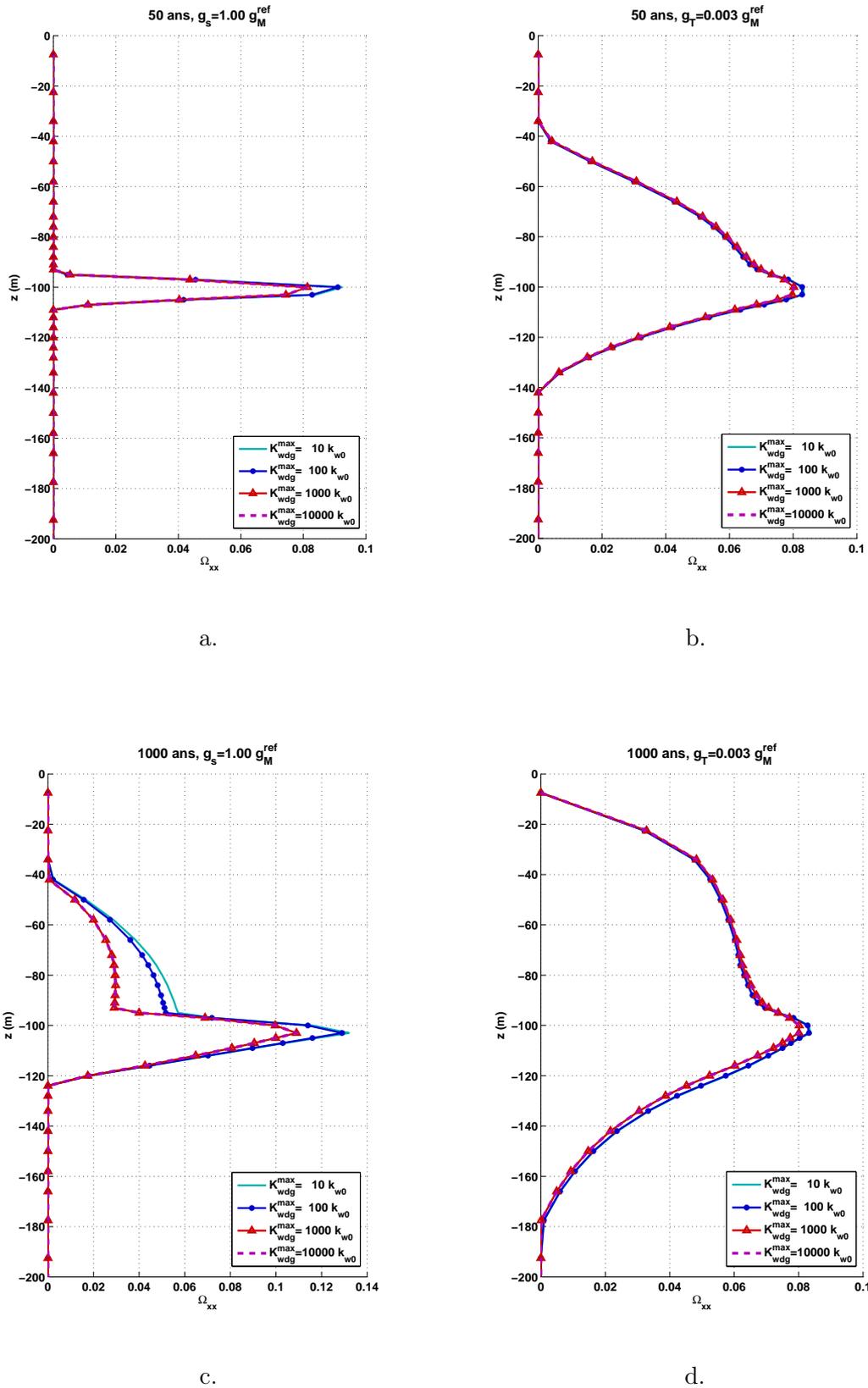
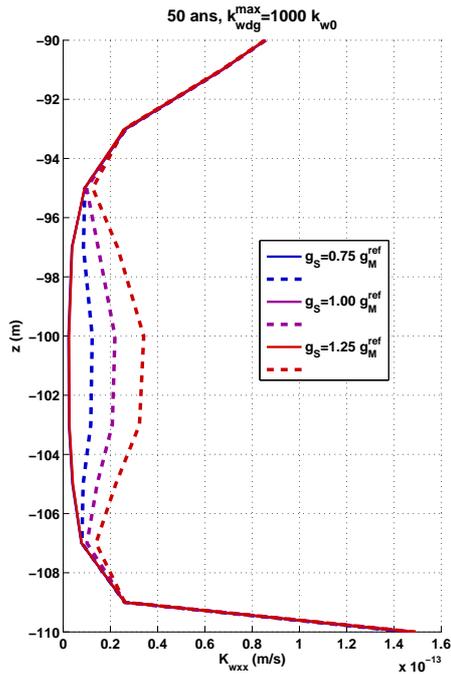
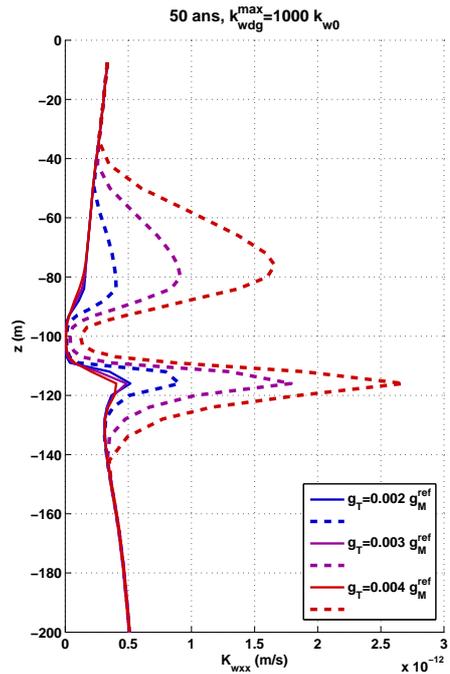


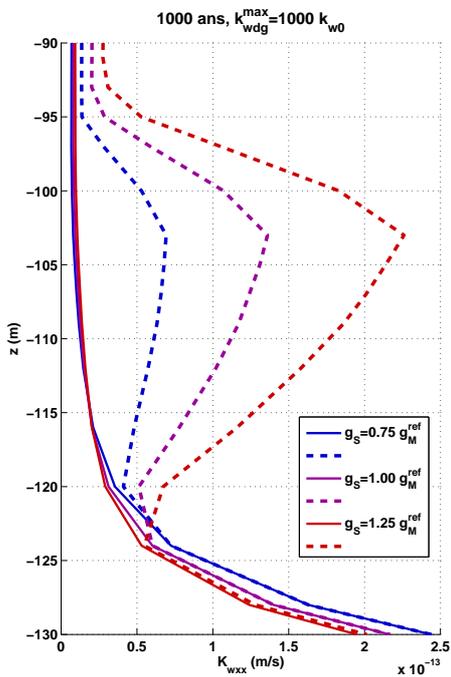
FIGURE 17.34 – Influence de la perméabilité intrinsèque endommagée maximale sur la fissuration dans le problème de stockage de déchets radioactifs de Pollock [163]. a,c. $g_s = g_M^{ref}$, $g_T = 0$. b,d. $g_T = 0.003 g_M^{ref}$, $g_s = 0$.



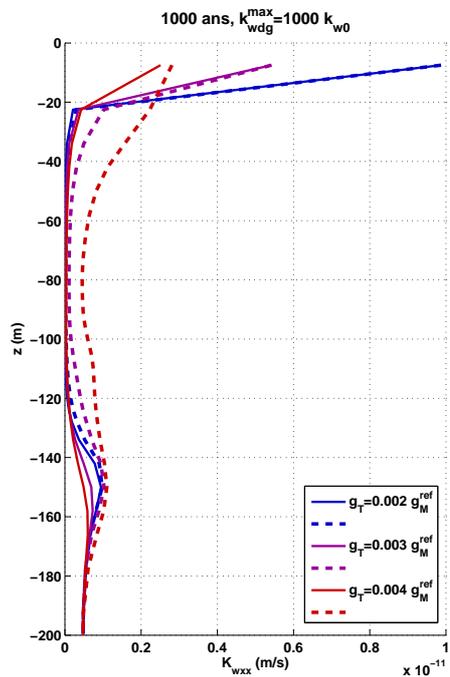
a.



b.



c.



d.

FIGURE 17.35 – Influence des rigidités d'endommagement sur la perméabilité à l'eau liquide dans le problème de stockage de déchets radioactifs de Pollock [163]. $K_{wdg}^{max} = 1000 k_{w0}$. Traits continus : perméabilité du matériau considéré intact. Tirets : perméabilité du matériau endommagé ($K_{wxx} = K_{wyy}$). a,c. Influence de g_s . b,d. Influence de g_T .

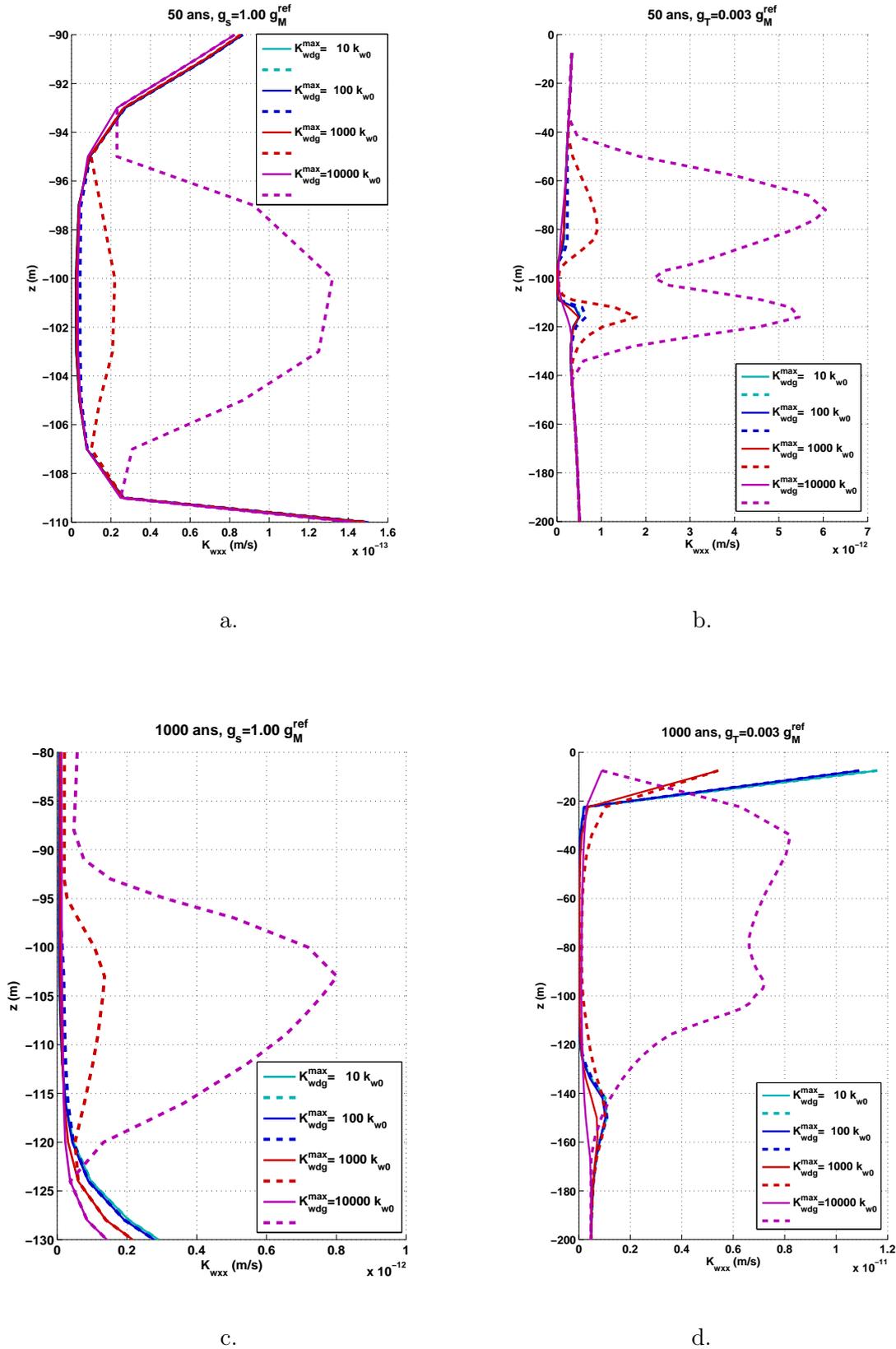


FIGURE 17.36 – Influence de la perméabilité intrinsèque endommagée maximale sur la perméabilité à l'eau liquide dans le problème de stockage de déchets radioactifs de Pollock [163]. Traits continus : perméabilité du matériau considéré intact. Tirets : perméabilité du matériau endommagé ($K_{wxx} = K_{wyy}$). a,c. $g_s = g_M^{ref}$, $g_T = 0$. b,d. $g_T = 0.003 g_M^{ref}$, $g_s = 0$.

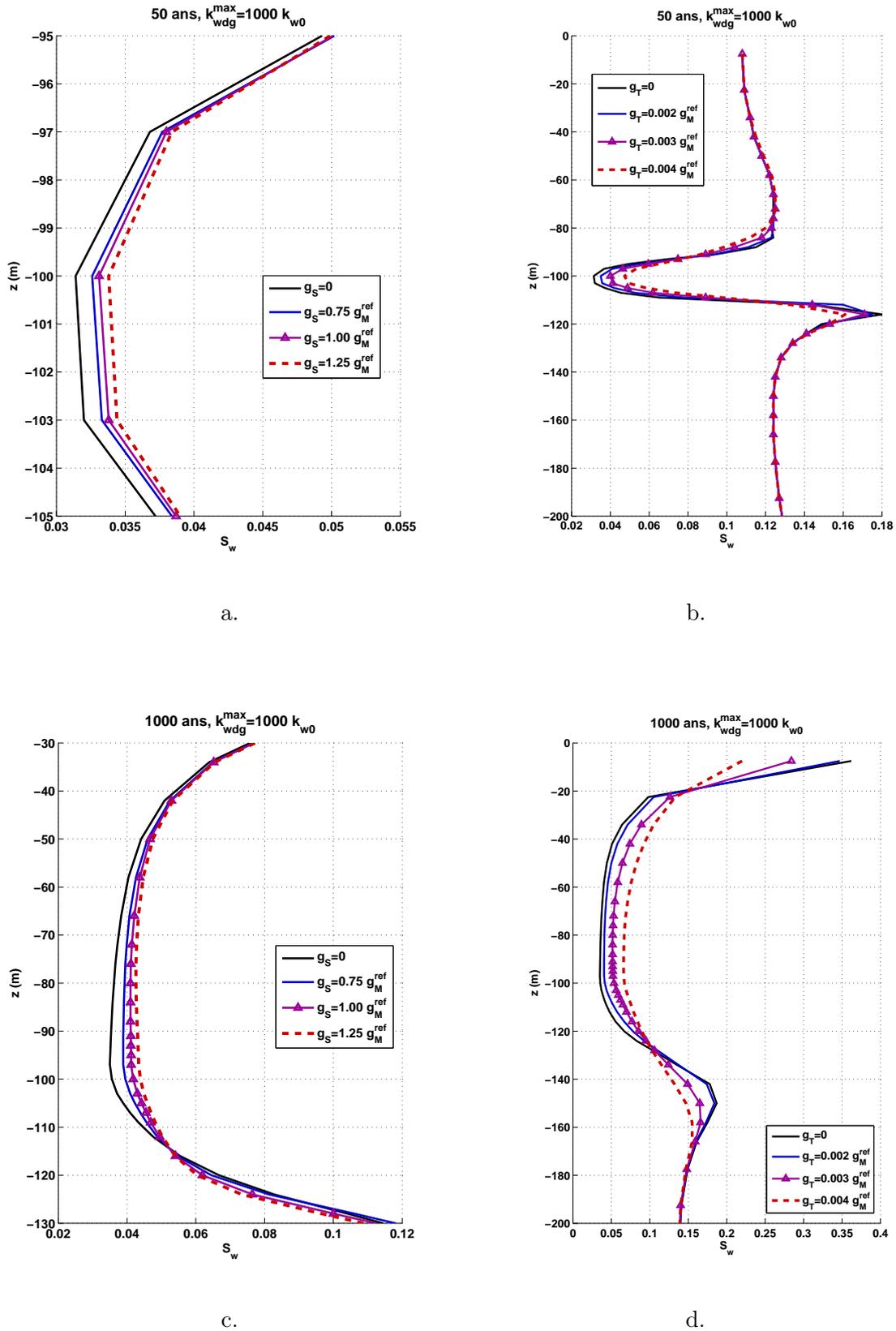


FIGURE 17.37 – Influence des rigidités d'endommagement sur le degré de saturation dans le problème de stockage de déchets radioactifs de Pollock [163]. $K_{wdg}^{max} = 1000 k_{w0}$. a,c. Influence de g_s . b,d. Influence de g_T .

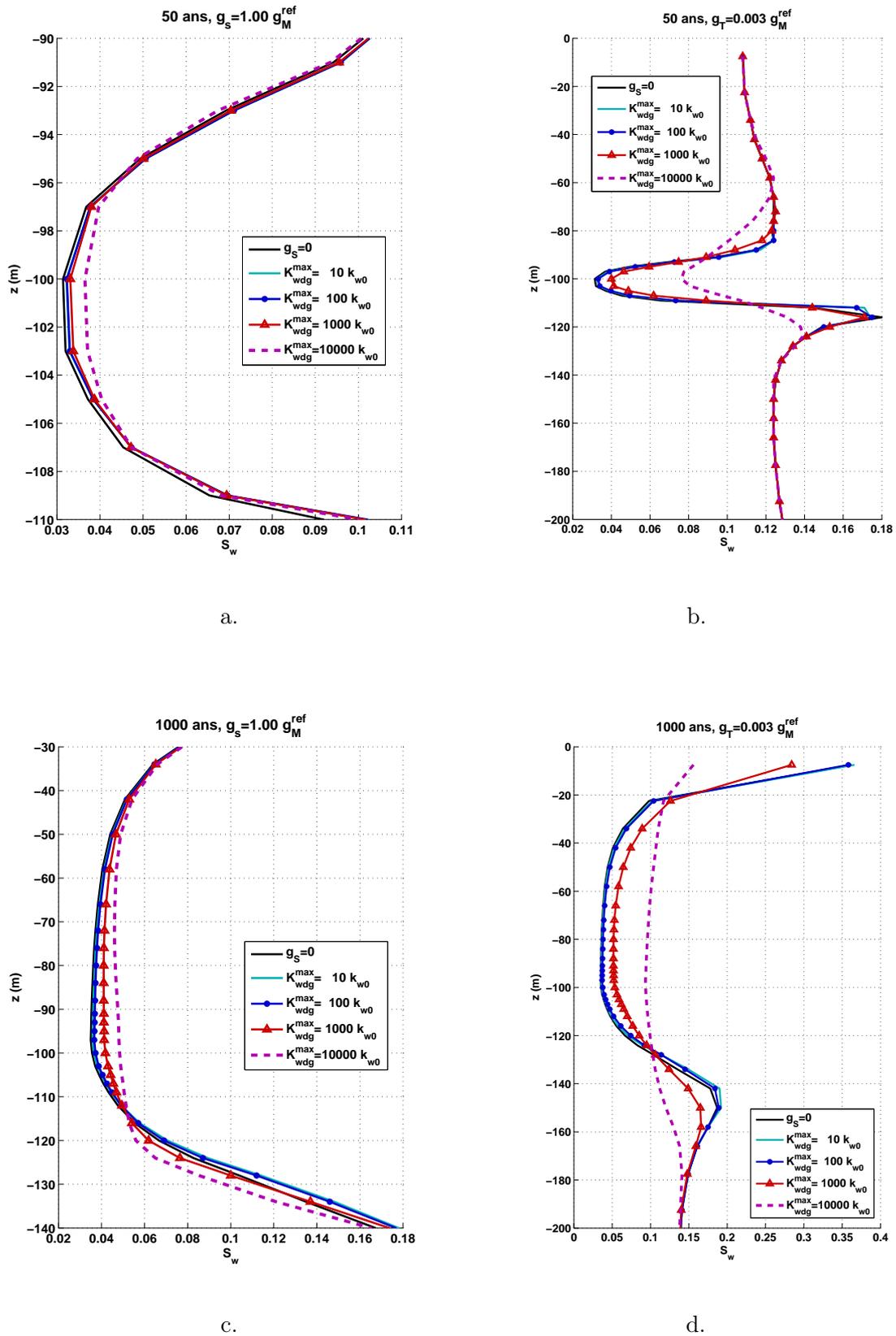


FIGURE 17.38 – Influence de la perméabilité intrinsèque endommagée maximale sur le degré de saturation dans le problème de stockage de déchets radioactifs de Pollock [163]. a,c. $g_s = g_M^{ref}$, $g_T = 0$. b,d. $g_T = 0.003 g_M^{ref}$, $g_s = 0$.

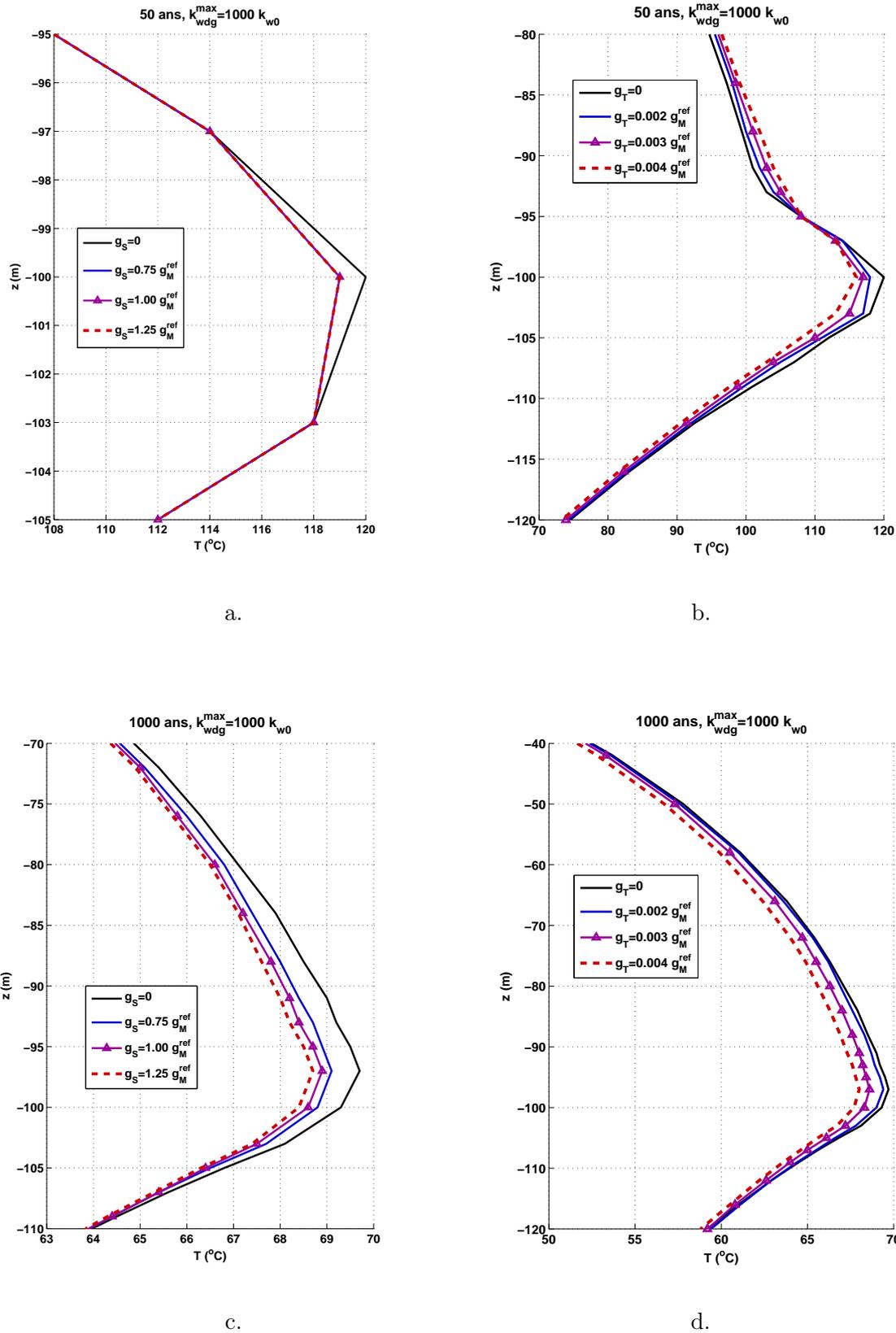


FIGURE 17.39 – Influence des rigidités d’endommagement sur la température dans le problème de stockage de déchets radioactifs de Pollock [163]. $K_{wdg}^{max} = 1000 k_{w0}$. a,c. Influence de g_s . b,d. Influence de g_T .

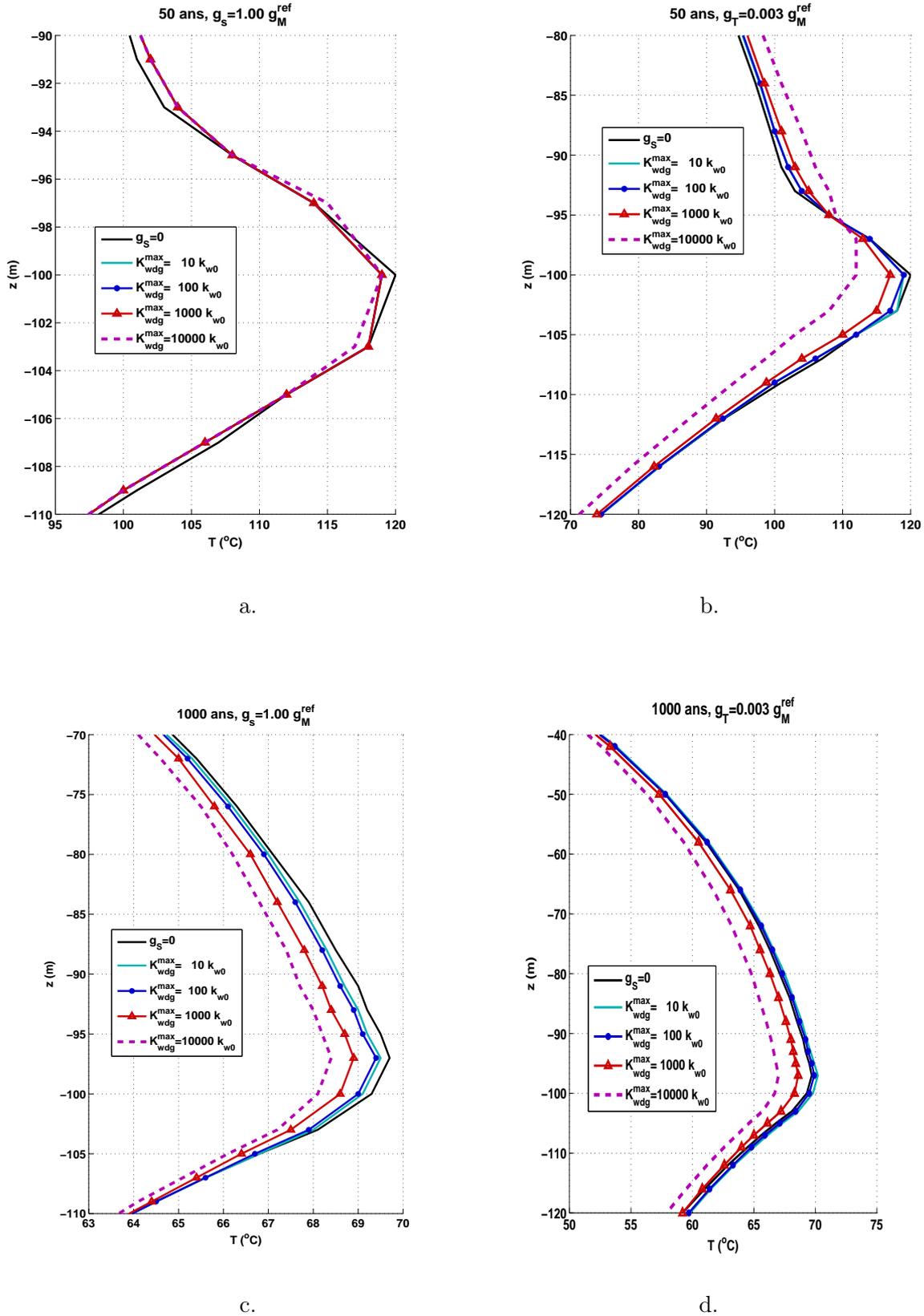


FIGURE 17.40 – Influence de la perméabilité intrinsèque endommagée maximale sur la température dans le problème de stockage de déchets radioactifs de Pollock [163]. a,c. $g_S = g_M^{ref}$, $g_T = 0$. b,d. $g_T = 0.003 g_M^{ref}$, $g_S = 0$.

17.3.2.2 Combinaison de plusieurs phénomènes d'endommagement

On étudie le développement de l'endommagement sous le contrôle d'une ou deux rigidités d'endommagement. On fait trois types de simulation :

- étude de la fissuration sous le contrôle d'une rigidité capillaire d'endommagement variable, sans rigidité thermique d'endommagement : $g_S \neq 0, g_T = 0$;
- étude de la fissuration sous le contrôle d'une rigidité thermique d'endommagement variable, sans rigidité capillaire d'endommagement : $g_T \neq 0, g_S = 0$;
- étude de la fissuration sous le contrôle de deux rigidités d'endommagement : $g_S \neq 0, g_T \neq 0$.

On choisit $K_{wdg}^{max} = 2k_{w0}$, comme dans l'étude réalisée dans le domaine élastique. D'après l'étude paramétrique précédente, un tel choix revient à assimiler la perméabilité endommagée à la perméabilité intacte (figure 17.36). De fait, le terme de perméabilité relatif à la fracturation qu'il faut ajouter à la perméabilité du matériau considéré intact est de l'ordre de $10^{-17} m.s^{-1}$, ce qui est négligeable devant la perméabilité du matériau considéré intact ($10^{-14} m.s^{-1} \leq k_w \leq 10^{-12} m.s^{-1}$ dans cet exemple). En neutralisant les effets de la fissuration sur la perméabilité à l'eau liquide, on étudie les effets des rigidités g_S et g_T de manière totalement découplée des problèmes de transfert. Dans les simulations réalisées dans le cadre de cette étude paramétrique, on a repris sous les paramètres matériels utilisés dans l'étude effectuée dans le domaine élastique, à l'exception des paramètres g_S et g_T (tableaux 17.7, 17.8 et 17.9). On rappelle que la valeur de référence pour la rigidité d'endommagement mécanique est $g_M^{ref} = -1.414 Pa$ (équation 17.27).

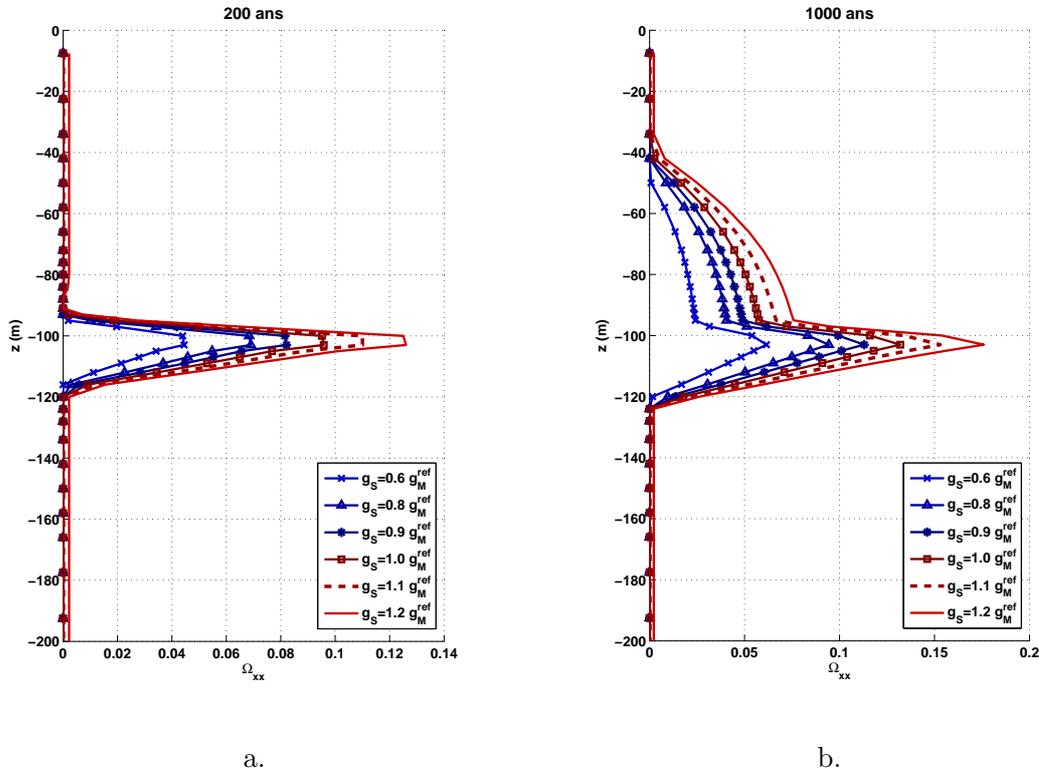


FIGURE 17.41 – Influence de la rigidité g_S sur le développement de l'endommagement dans le problème de stockage des déchets radioactifs traité par Pollock [163]. $g_T = 0$. a. Endommagement généré au bout de 200 ans de stockage ($\Omega_{xx} = \omega yy$). b. Endommagement généré au bout de 1000 ans de stockage ($\Omega_{xx} = \omega yy$).

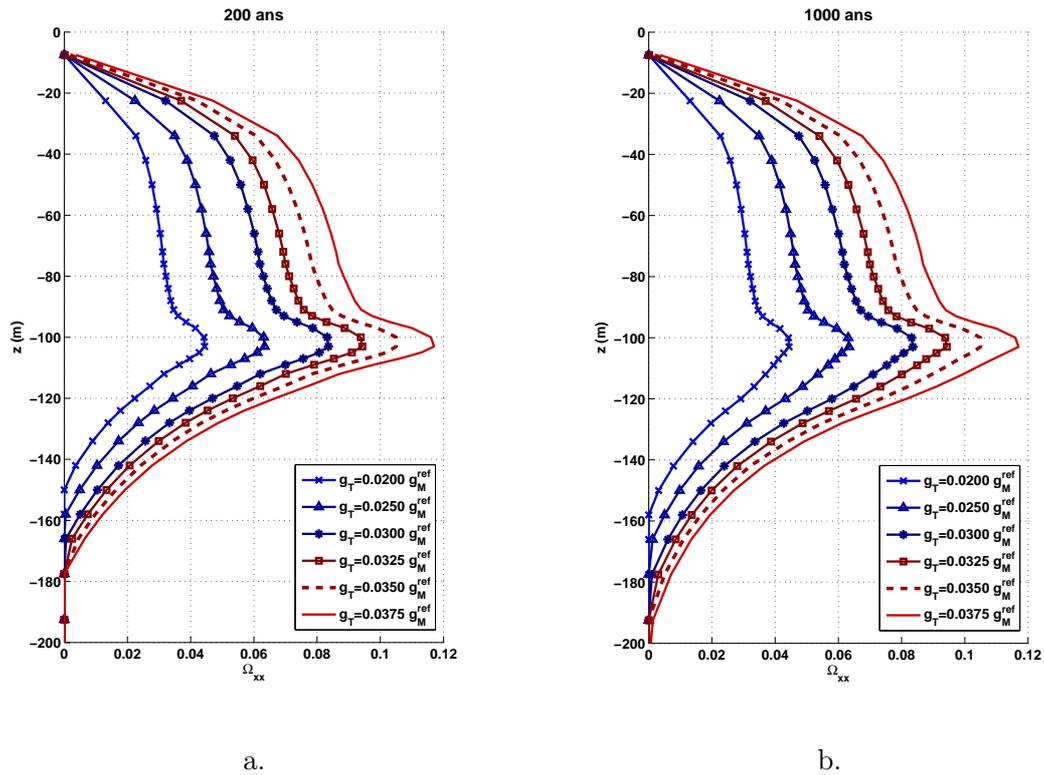


FIGURE 17.42 – Influence de la rigidité g_T sur le développement de l'endommagement dans le problème de stockage des déchets radioactifs traité par Pollock [163]. $g_S = 0$. a. Endommagement généré au bout de 200 ans de stockage ($\Omega_{xx} = \omega yy$). b. Endommagement généré au bout de 1000 ans de stockage ($\Omega_{xx} = \omega yy$).

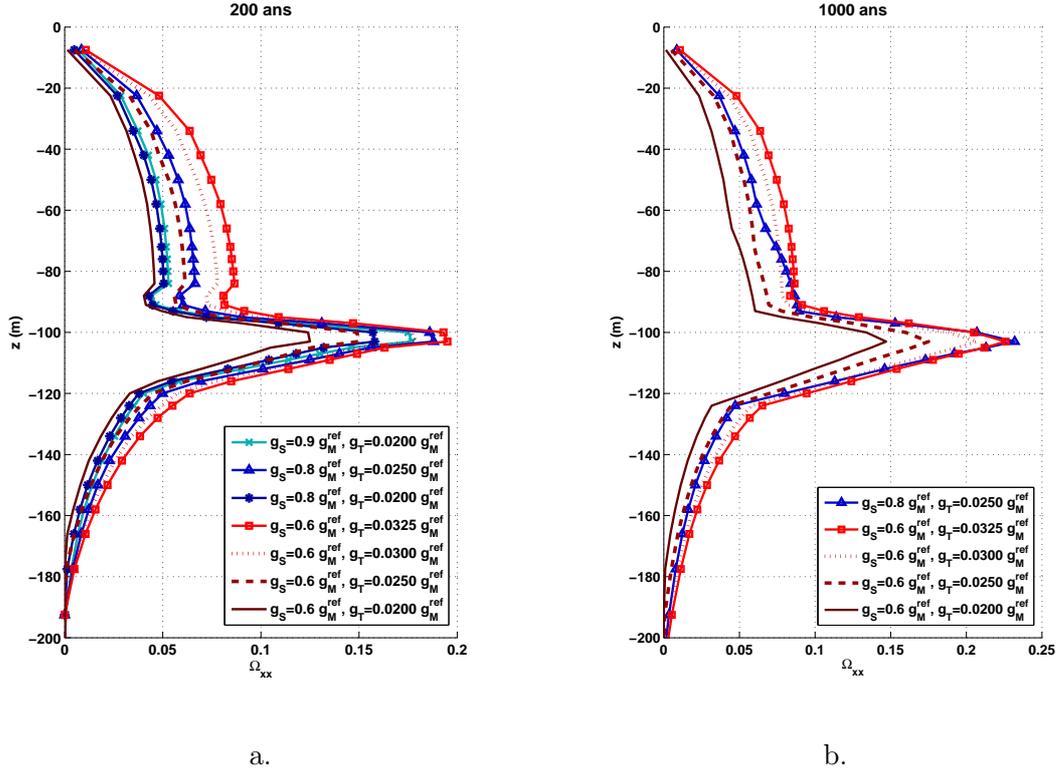


FIGURE 17.43 – Influence conjointe des rigidités g_S et g_T sur le développement de l'endommagement dans le problème de stockage des déchets radioactifs traité par Pollock [163]. a. Endommagement généré au bout de 200 ans de stockage ($\Omega_{xx} = \omega yy$). b. Endommagement généré au bout de 1000 ans de stockage ($\Omega_{xx} = \omega yy$).

Comme dans l'étude paramétrique précédente, le tenseur d'endommagement est isotrope, et on ne présente que sa composante horizontale. Comme précédemment, on constate que l'endommagement croît avec g_S d'une part (figure 17.41), et avec g_T d'autre part (figure 17.42). On a choisi de représenter les résultats à long terme (au bout de 200 et 1000 ans de stockage). On ne voit donc pas aussi nettement l'extension progressive de la zone endommagée que dans l'étude paramétrique précédente. On n'observe ce phénomène que dans le cas de l'endommagement capillaire, sur la figure 17.41. Comme on s'y attendait, la combinaison de deux phénomènes d'endommagement augmente l'endommagement produit (figure 17.43), si bien que de nombreuses simulations sont avortées en raison d'une rupture totale dans une zone du massif. Dans les exemples présentés, le phénomène d'endommagement thermique semble dominer le phénomène d'endommagement capillaire. On atteint par exemple un endommagement plus élevé avec $g_S = 0.6 g_M^{ref}$ et $g_T = 0.0325 g_M^{ref}$ qu'avec $g_S = 0.9 g_M^{ref}$ et $g_T = 0.0200 g_M^{ref}$. Ce constat peut s'expliquer par le fait que l'origine de la sollicitation est thermique. L'endommagement capillaire n'est généré que par couplage thermo-hydraulique.

17.4 Etude unidimensionnelle du confinement de déchets radioactifs dans de la bentonite stockée dans un massif granitique (test FEBEX) [79]

17.4.1 Problème modélisé

On s'appuie sur une étude numérique menée par Gens et al. [79] pour simuler le test de chauffage in situ FEBEX, organisé par l'agence espagnole de gestion des déchets radioactifs (l'ENRESA) à la fin des années 90. Des sources de chaleur de 90 cm de diamètre et de 4.54 m de long sont placées dans des galeries profondes de 2.4 mètres de diamètre creusées dans un massif granitique. L'interstice entre le dispositif de chauffage (qui joue le rôle de déchet radioactif) et la barrière géologique est comblé par de la bentonite, principalement constituée d'argile compactée. Les sources de chaleur sont supposées être suffisamment espacées pour que les phénomènes d'interaction soient négligés. La puissance de chauffe envisagée est de 1200 W. Il s'agit d'amener les sources de chaleur à une température de 100°C , et de maintenir cette température pendant 3 ans. Les sources sont ensuite éteintes. Les mesures effectuées dans la galerie et dans le massif sont poursuivies 6 mois après l'extinction des sources. La géométrie de l'ouvrage et les chargements imposés permettent de traiter le problème en configuration axisymétrique. Comme Gens et al. [79], on propose de faire une analyse unidimensionnelle, si bien qu'on modélise une « tranche radiale » de l'environnement poreux qui entoure la source de chaleur. Dans le champ proche, le matériau poreux est de la bentonite. Au-delà de la barrière ouvragée, le matériau d'accueil est un massif granitique.

17.4.2 Maillage, conditions initiales et conditions aux limites

Pour modéliser le stockage des paquets radioactifs, on considère une galerie de 0.465m de rayon, dont la paroi est soumise à des sollicitations thermiques. Entre $r = 0.465\text{ m}$ et $r = 1.135\text{ m}$, le milieu considéré est de la bentonite. On modélise le massif granitique entre $r = 1.135\text{ m}$ et $r = 70\text{ m}$. Comme dans les simulations effectuées avec CODE BRIGHT par Gens et al. [79], on suppose que le problème peut être traité en configuration unidimensionnelle. L'épaisseur choisie pour la zone modélisée est 100 fois inférieure à sa longueur, soit 70cm. Pour augmenter la fiabilité des calculs, on introduit deux éléments dans le sens de l'épaisseur. Le maillage utilisé comporte 216 noeuds et 142 éléments. La barrière ouvragée en bentonite est modélisée par 40 éléments, et la barrière géologique est représentée par 102 éléments (figure 17.44).

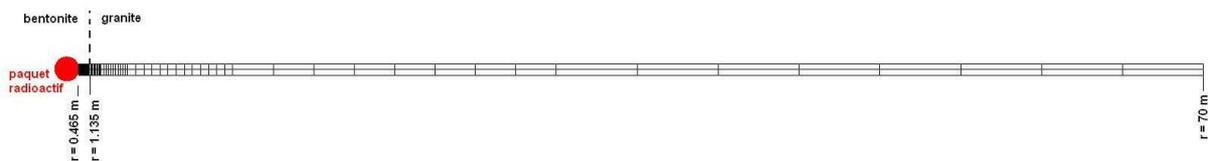


FIGURE 17.44 – Géométrie et maillage adoptés pour la simulation du test in situ FEBEX [79].

Contrairement à Gens et al. [79], on ne simule pas la phase d'excavation pour déterminer l'état initial du test de chauffage. Ça ne change rien pour l'initialisation des degrés de liberté en pression et en température, dont les valeurs au début du test de chauffage sont indiquées par Gens et al.

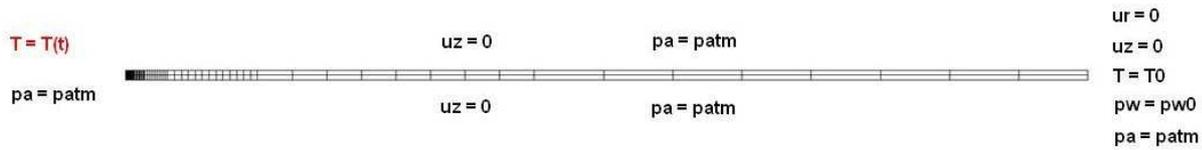


FIGURE 17.45 – Conditions aux limites imposées dans la simulation du test in situ FEBEX [79].

[79] :

- température initiale de $12^{\circ}C$ dans les deux matériaux ;
- pression interstitielle de l'air initialisée à la pression atmosphérique dans les deux matériaux ;
- granite initialement saturé, avec $p_{w0}^g = 0.5 MPa$;
- bentonite initialement non saturée, avec une succion de $97.3 MPa$, d'où $p_{w0}^g = -97.2 MPa$.

Dans la bentonite, on applique une contrainte initiale de $0.5 MPa$, conformément aux indications de Gens et al. [79]. Pour simuler l'excavation du massif granitique, Gens et al. choisissent un état de contrainte initial isotrope, avec $\sigma_0 = 28 MPa$. Mais on n'a pas l'état de contrainte du massif géologique juste après la phase d'excavation. Dans la simulation réalisée avec Θ -Stock, on initialise la contrainte régnant dans le granite à 0. Dans la suite, on s'intéressera aux variations de contrainte $\Delta\sigma$ plutôt qu'aux contraintes totales pour caractériser l'état mécanique de la barrière géologique.

Le problème est traité en configuration axisymétrique. La durée de test simulée est de 1278 jours, soit environ trois ans et demi. Le test comporte une phase de chauffage de trois ans, suivie d'une phase de relaxation pendant laquelle la source de chaleur cesse d'émettre. Les conditions aux limites sont les suivantes (figure 17.45) :

- *Degrés de liberté mécaniques* : les déplacements verticaux sont bloqués sur les frontières inférieure et supérieure du modèle (problème unidimensionnel) ; les deux composantes du vecteur de déplacement sont bloquées sur la frontière latérale externe (champ lointain, qu'on suppose peu affecté par le chargement).
- *Degrés de liberté thermiques* : la température initiale est maintenue sur la frontière latérale externe (champ lointain, peu affecté par le chargement), et une température variable est appliquée sur la frontière latérale interne, c'est-à-dire à la paroi (figures 5 et 7 dans l'article de Gens et al. [79]) :
 1. phase d'accroissement linéaire de la température, de $12^{\circ}C$ à $100^{\circ}C$, pendant 21 jours ;
 2. plateau de température de 1074 jours, ce qui porte la phase de chauffage à $1074+21=1095$ jours, soit 3 ans ;
 3. phase de refroidissement, avec une décroissance pseudo-exponentielle de la température (figure 7 dans l'article de Gens et al. [79]), étudiée pendant 183 jours, soit environ 6 mois après l'extinction de la source de chaleur dans le test in situ FEBEX.
- *Degrés de liberté en pression d'air* : l'air étant supposé « déconfiné », et soumis à la pression atmosphérique, une pression nodale d'air de $100 kPa$ est imposée sur toutes les frontières du modèle.
- *Degrés de liberté en pression d'eau* : la pression d'eau initiale est maintenue sur la frontière latérale externe (champ lointain, peu affecté par le chargement).

TABLE 17.11 – Paramètres mécaniques du granite dans la simulation du test FEBEX [79].

Modèle élastique hyperbolique						
K_b	K_L	n	R_f	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$	K_U	m
$2.92 * 10^5$	$3.51 * 10^5$	0	0	$2 * 10^{10} Pa$	$3.51 * 10^5$	0
Rigidités de référence						
β_s^0	β_T^0					
$2.92 * 10^{11} Pa$	$2.92 * 10^{11} Pa$					
Paramètres d'endommagement						
χ	C_0	C_1	g_M	g_S	g_T	
0.005	$1.1 * 10^5 Pa$	$2.2 * 10^6 Pa$	0	0	0	
Conditions initiales						
e_0	S_{w0}	T_0				
0.0101	1	$12^\circ C$				

17.4.3 Choix des paramètres matériels

Le module de cisaillement est fourni pour le granite et pour la bentonite [79]. Le module de compression volumique est donné pour le granite, mais pas pour la bentonite, dont le comportement est modélisé par une surface d'état pour l'indice des vides. On suppose que le coefficient de Poisson de la bentonite vaut 0.3. On déduit ainsi les valeurs de K_L et K_b des valeurs de G et B pour le granite, et des valeurs de G et ν pour la bentonite. Les deux matériaux sont initialement à une température de $12^\circ C$. Dans les conditions initiales, la bentonite a un degré de saturation de 0.46 et une porosité de 0.4064 (ce qui correspond à un indice des vides de 0.6846). Le granite est initialement saturé avec une porosité initiale de 0.01 (ce qui correspond à un indice des vides initial de 0.0101). Le paramètre de dilatance χ est choisi selon les recommandations de Shao et al. [180] : $\chi \simeq 0.005$ pour les roches fragiles. Les paramètres d'endommagement C_0 et C_1 choisis pour le granite sont ceux qui ont été déterminés par Halm et Dragon pour le granite de la Vienne [91]. Pour la bentonite, on utilise les valeurs de C_0 et C_1 qui caractérisent l'argilite de l'Est [38], dont la rigidité est proche de celle de la bentonite. Comme on pratique un test de validation en élasticité, toutes les rigidités d'endommagement sont fixées à zéro : $g_M = g_S = g_T = 0$. On choisit une rigidité capillaire intacte 10 fois plus grande que le module de compression volumique pour le granite. On choisit $\beta_S^0 = 100 B$ pour la bentonite, en raison de sa faible rigidité. En l'absence de référence bibliographique sur le sujet, on choisit une rigidité thermique de référence dix fois supérieure au module de compression volumique pour les deux matériaux. Le poids volumique affecté aux grains solides des deux matériaux est usuel : $\gamma_s = 2.65 * 10^4 N.m^{-3}$. Les paramètres mécaniques utilisés sont résumés dans les tableaux 17.11 et 17.12.

Conformément au modèle adopté par Gens et al. [79], on choisit de neutraliser les effets de la température sur l'évolution du degré de saturation : dans les deux matériaux, $d_s = 0$. On se ramène à des courbes de rétention de type Van Genuchten [197]. Dans les deux milieux, le degré de saturation résiduel est nul : $S_{w,r} = 0$. Les paramètres α_{VG} et n_{VG} sont donnés dans l'article de Gens et al. [79] pour les deux matériaux. Pour le granite, l'expression de la perméabilité relative $k_R(S_w)$ utilisée par Gens et al. correspond exactement à celle qui est utilisée dans Θ -Stock : avec un degré de saturation résiduel nul : $k_R(S_w) = S_w^3$. Gens et al. utilisent

TABLE 17.12 – Paramètres mécaniques de la bentonite dans la simulation du test FEBEX [79].

Modèle élastique hyperbolique						
K_b	K_L	n	R_f	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$	K_U	m
$2.17 * 10^2$	$2.60 * 10^2$	0	0	$2 * 10^{10} Pa$	$2.60 * 10^2$	0
Rigidités de référence						
β_s^0	β_T^0					
$2.17 * 10^9 Pa$	$2.17 * 10^8 Pa$					
Paramètres d'endommagement						
χ	C_0	C_1	g_M	g_S	g_T	
0.005	$2.3 * 10^{-4} Pa$	$5.2 * 10^{-3} Pa$	0	0	0	
Conditions initiales						
e_0	S_{w0}	T_0				
0.6846	0.46	$12^\circ C$				

une intégration de type Mualem pour déterminer la perméabilité relative de la bentonite. On neutralise les couplages hydro-mécaniques dans les expressions des perméabilités intrinsèques des deux matériaux : $\alpha_w = 0$. On choisit la même perméabilité de référence que Gens et al. pour le granite $10^{-18} m^2$, soit $10^{-11} m.s^{-1}$. Pour compenser la différence dans la modélisation de la perméabilité relative de la bentonite, on choisit une perméabilité intrinsèque de référence deux fois moins élevée que Gens et al. pour la bentonite : $10^{-20} m^2$, soit $10^{-13} m.s^{-1}$. L'approximation obtenue est meilleure que si on prend la perméabilité intrinsèque de référence préconisée par les auteurs (figure 17.46). On suppose que les perméabilités intrinsèques à l'eau liquide des matériaux endommagés ne peuvent pas dépasser 10000 fois celles des matériaux intacts correspondants (d'où $k_{wdg}^{max} = 10^{-7} m.s^{-1}$ pour le granite, et $k_{wdg}^{max} = 10^{-9} m.s^{-1}$ pour la bentonite), et que la conductivité à la vapeur d'un matériau endommagé ne peut pas excéder 100 fois la perméabilité à l'eau liquide du milieu (d'où $D_{dg}^{max} = 10^{-5} m^2.s^{-1}$ pour le granite, et $D_{dg}^{max} = 10^{-7} m^2.s^{-1}$ pour la bentonite). Dans les simulations effectuées par Gens et al. [79], il est supposé que la phase gazeuse n'est jamais confinée, et que le gaz est toujours soumis à la pression atmosphérique. Dans Θ -Stock, il est impossible d'imposer une pression atmosphérique sur tous les degrés de liberté nodaux de pression d'air sans influencer les calculs de succion. Pour simuler l'état « déconfiné » de la phase gazeuse, on suppose que la conductivité à l'air est très grande dans les deux milieux poreux : avec $c_a = 10^{-10} m^2$ et $\alpha_a = 0$, on arrive à une perméabilité à l'air de l'ordre de $10^{-4} m.s^{-1}$. La borne supérieure choisie pour k_a est du même ordre de grandeur que la perméabilité intrinsèque du granite. Comme les effets du degré de saturation sur les perméabilités à l'eau liquide sont pris en compte, on travaille avec une perméabilité à l'air supérieure à la perméabilité de la phase liquide, et ce dans les deux milieux poreux. L'ensemble des paramètres relatifs aux fluides sont donnés dans les tableaux 17.13 et 17.14.

Les dilatances thermiques, les capacités calorifiques des deux solides, de l'eau liquide, de la vapeur et de l'air, ainsi que la chaleur latente d'évaporation, sont données par les auteurs. On rappelle la formule de conductivité thermique utilisée par Gens et al. [79] pour les deux milieux poreux non saturés :

$$\lambda_T = \lambda_{sat}^{S_w} \lambda_{dry}^{1-S_w} \quad (17.28)$$

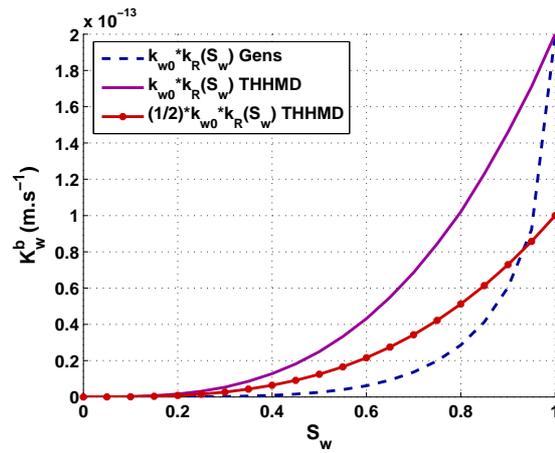


FIGURE 17.46 – Approximation du modèle de perméabilité de Gens [79] par le modèle THHMD pour la bentonite.

TABLE 17.13 – Paramètres relatifs aux fluides pour le granite dans la simulation du test FEBEX [79].

Courbe de rétention			
$S_{w,r}$	α_{VG}	n_{VG}	d_s
0	$10^{-5} Pa^{-1}$	1.5	0
Perméabilité à l'eau liquide			
k_{w0}	α_w	k_w^{0max}	k_{wdg}^{max}
$10^{-11} m.s^{-1}$	0	$10^{-10} m.s^{-1}$	$10^{-7} m.s^{-1}$
Transfert des gaz			
c_a	α_a	k_a^{max}	D_{dg}^{max}
$10^{-10} m^2$	0	$10^{-9} m.s^{-1}$	$10^{-5} m^2.s^{-1}$

TABLE 17.14 – Paramètres relatifs aux fluides pour la bentonite dans la simulation du test FEBEX [79].

Courbe de rétention			
$S_{w,r}$	α_{VG}	n_{VG}	d_s
0	$2 * 10^{-8} Pa^{-1}$	2	0
Perméabilité à l'eau liquide			
k_{w0}	α_w	k_w^{0max}	k_{wdg}^{max}
$10^{-13} m.s^{-1}$	0	$10^{-12} m.s^{-1}$	$10^{-9} m.s^{-1}$
Transfert des gaz			
c_a	α_a	k_a^{max}	D_{dg}^{max}
$10^{-10} m^2$	0	$10^{-9} m.s^{-1}$	$10^{-7} m^2.s^{-1}$

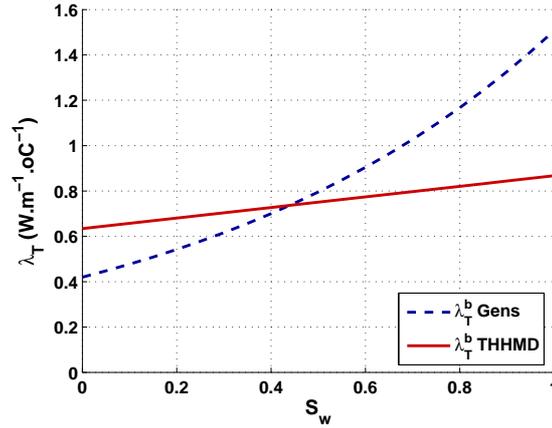


FIGURE 17.47 – Approximation du modèle de conductivité thermique de Gens [79] par le modèle THHMD pour la bentonite.

TABLE 17.15 – Paramètres thermiques du granite dans la simulation du test FEBEX [79].

Rigidité thermique intacte				
α_0^*	α_1	α_2	α_3	p_{geo}
$-7.8 * 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	0	0	0	10^{10} Pa
Diffusion et évaporation				
λ_s	λ_w	λ_a	h_{fg}	
$3.6 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$0.6 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$0.0258 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$2.5 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$	
Convection				
C_{Ps}	C_{Pw}	C_{Pvap}	C_{Pa}	
$793 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$4180 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$1900 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$1006 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	

On rappelle que dans le modèle THHMD :

$$\lambda_T = (1 - n) \lambda_s + n S_w \lambda_w + n (1 - S_w) \lambda_{vap} \quad (17.29)$$

Pour adapter le modèle THHMD à la formulation de Gens et al. [79], on choisit des valeurs usuelles pour les conductivités thermiques de l'eau liquide et de l'air : $\lambda_w = 0.6 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ et $\lambda_a = 0.0258 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ respectivement. Les auteurs utilisent la même conductivité thermique pour le granite sec et pour le granite saturé. On affecte donc cette valeur à la conductivité thermique du squelette solide dans le massif granitique : $\lambda_s^g = \lambda_{dry}^g = \lambda_{sat}^g = 3.6 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. On cale la valeur de la conductivité thermique du squelette de la bentonite pour trouver une courbe de variation de la conductivité thermique globale proche de celle de Gens et al. [79] (figure 17.47). Les paramètres sont choisis de façon à ce que les conductivités thermiques des deux modèles coïncident pour le degré de saturation initial de la bentonite ($S_{w0} = 0.46$). Pour comparer les modèles de conductivité thermique dans cet exemple, on a considéré que la conductivité thermique de la vapeur était proche de celle de l'air : $\lambda_{vap} \simeq \lambda_a = 0.0258 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. L'ensemble des paramètres thermiques choisis sont fournis dans les tableaux 17.15 et 17.16.

17.4.4 Validation dans le domaine élastique

L'observation des figures 17.48 et 17.49 montre que la simulation effectuée avec Θ -Stock dans le

TABLE 17.16 – Paramètres thermiques de la bentonite dans la simulation du test FEBEX [79].

Rigidité thermique intacte				
α_0^*	α_1	α_2	α_3	p_{geo}
$-10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	0	0	0	10^{10} Pa
Diffusion et évaporation				
λ_s	λ_w	λ_a	h_{fg}	
$1.05 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$0.6 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$0.0258 \text{ W.m}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$2.5 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$	
Convection				
C_{Ps}	C_{Pw}	C_{Pvap}	C_{Pa}	
$1091 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$4180 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$1900 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$1006 \text{ J.kg}^{-1}.\text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	

domaine élastique du modèle THHMD reproduit bien les variations de températures calculées par Gens et al. [79] dans les barrières ouvragée et géologique. Les variations du degré de saturation à la frontière entre les deux milieux suivent de bonnes tendances, et les ordres de grandeur sont tout à fait satisfaisants. Néanmoins, il est difficile d'interpréter les résultats pendant les phases transitoires ($t=1$ jour, $t=21$ jours, et, dans une moindre mesure, $t=1278$ jours), en raison des oscillations calculées avec Θ -Stock (figure 17.50). Il semble qu'il y ait un effet retard sur la désaturation de la barrière géologique à proximité de la frontière entre les deux milieux poreux. Avec le modèle THHMD, le degré de saturation du granite a quasiment le même profil au bout de 3 ans (1095 jours) qu'au bout d'un an (365 jours). Chez Gens et al. [79], le degré de saturation calculé au bout de 3 ans dans le granite suit déjà la courbe d'évolution obtenue après 6 mois de refroidissement (1278 jours). Malgré les oscillations calculées avec Θ -Stock, la prédiction de la pression d'eau interstitielle à la frontière entre les deux milieux coïncide bien avec les résultats obtenus par Gens (figure 17.51) :

- au bout d'une journée, la pression d'eau suit une courbe d'évolution en escalier : il y a un palier à -100 kPa dans la bentonite, et un palier à 0 Pa dans le granite ;
- au bout de 21 jours, la succion diminue au coeur de la barrière ouvragée, ce qui aboutit à une augmentation de la pression d'eau de -100 MPa à -50 MPa entre $r = 0.5m$ et $r = 0.7m$, et la succion commence à augmenter près de la paroi, avec une pression d'eau inférieure à -150 MPa ;
- la situation n'évolue pas sensiblement entre 1 an et 3 ans : la pression d'eau évolue quasiment linéairement dans la barrière ouvragée, entre une valeur de -350 MPa à la paroi et une valeur de 0 Pa à la frontière avec la barrière géologique ;
- après 6 mois de refroidissement (1278 jours), l'évolution de la succion dans le container de bentonite est plus douce : entre -150 MPa à la paroi et 0 Pa à la frontière avec la massif granitique.

Comme le montre la figure 17.52, l'allure des courbes d'évolution spatiale de la porosité dans la bentonite est correcte à chaque étape du test. Cependant, les variations de porosité envisagées dans le domaine élastique du modèle THHMD sont plus élevées que dans la modélisation adoptée par Gens et al. [79]. Gens et al. utilisent un modèle fondé sur la définition d'une surface d'état pour l'indice des vides pour la bentonite. Au contraire, un modèle mécanique élastique linéaire a été utilisé dans la simulation effectuée avec Θ -Stock. On a choisi un coefficient de Poisson moyen, de 0.3. Cette approche était approximative, et il était donc prévisible d'observer des différences dans la prédiction des variations de la porosité de la bentonite. En l'occurrence, le matériau étudié avec

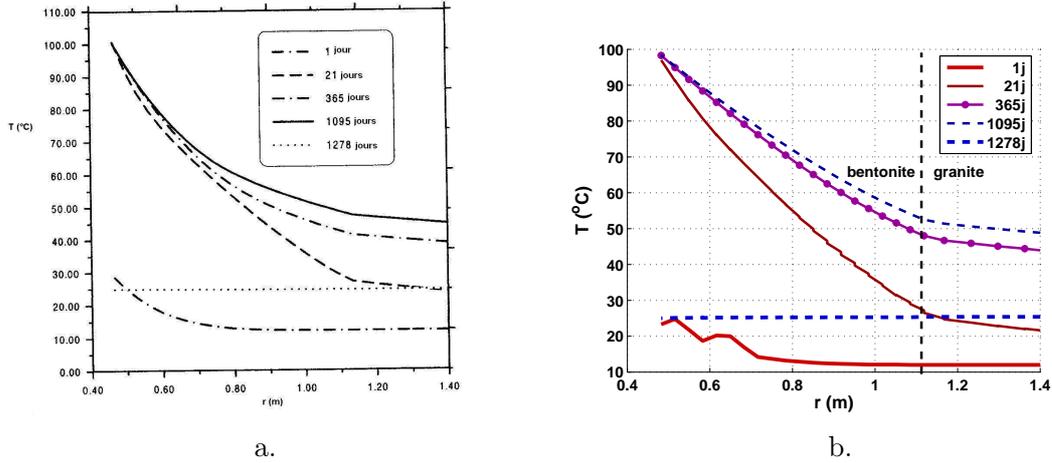


FIGURE 17.48 – Test in situ FEBEX. Evolution de la température dans la barrière ouvragée de bentonite. a. Résultats obtenus avec CODE BRIGHT par Gens et al. [79]. b. Résultats obtenus dans le domaine élastique du modèle THHMD avec Θ -Stock.

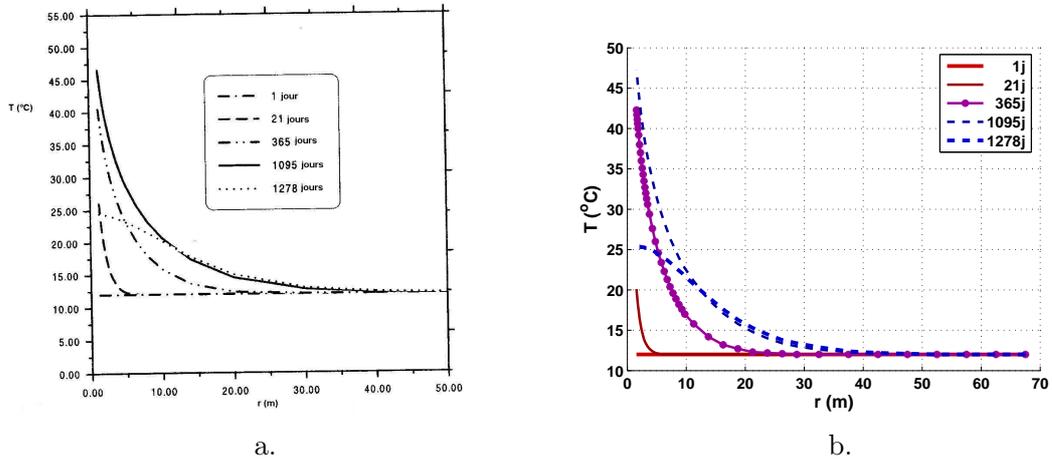


FIGURE 17.49 – Test in situ FEBEX. Evolution de la température dans la barrière géologique de granite. a. Résultats obtenus avec CODE BRIGHT par Gens et al. [79]. b. Résultats obtenus dans le domaine élastique du modèle THHMD avec Θ -Stock.

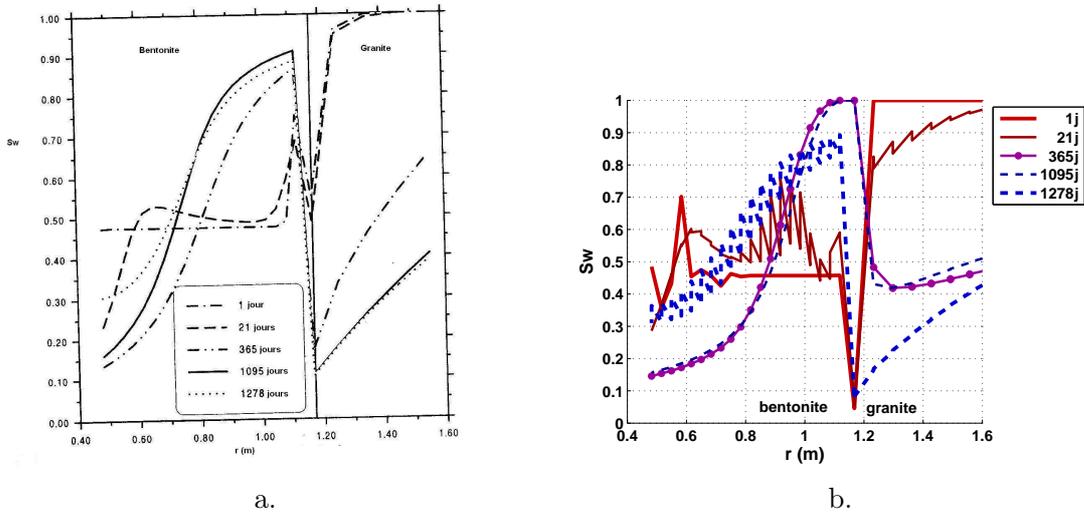


FIGURE 17.50 – Test in situ FEBEX. Evolution du degré de saturation dans la barrière ouvragée de bentonite. a. Résultats obtenus avec CODE BRIGHT par Gens et al. [79]. b. Résultats obtenus dans le domaine élastique du modèle THHMD avec Θ -Stock.

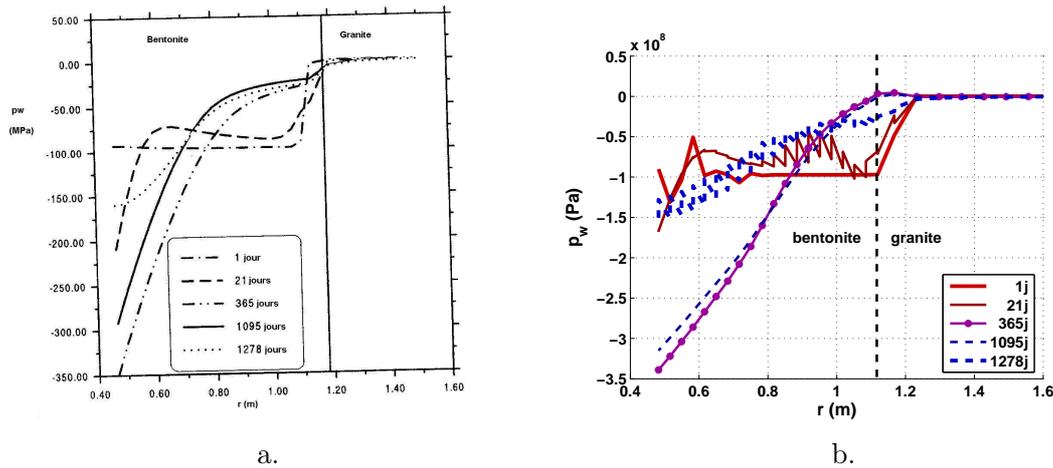


FIGURE 17.51 – Test in situ FEBEX. Evolution de la pression d'eau interstitielle dans la barrière ouvragée de bentonite. a. Résultats obtenus avec CODE BRIGHT par Gens et al. [79]. b. Résultats obtenus dans le domaine élastique du modèle THHMD avec Θ -Stock.

le modèle THHMD semble être plus mou que le matériau modélisé par Gens et al. [79]. On peut à nouveau constater cette « mollesse » sur la figure représentant les variations du déplacement radial à la frontière entre les deux milieux (figure 17.53). Les tendances suivies par les courbes sont satisfaisantes à chaque étape de chargement : on observe notamment une dilatation au coeur de la barrière ouvragée. Cette dilatation croît pendant toute la phase de chauffage (jusqu'à $t=1095$ jours), et s'atténue pendant la phase de refroidissement. Le déplacement minimum calculé par Gens et al. est obtenu à $r = 0.8m$, et est de l'ordre de -5 mm (au bout de 1095 jours). Dans la simulation effectuée avec Θ -Stock, le déplacement minimum est également obtenu à $r = 0.8m$, et vaut -8 mm (à $t=365$ jours). Les tendances suivies par les courbes d'évolution du déplacement radial dans le massif granitique sont excellentes (figure 17.54), mais une fois encore, les ordres de grandeur ne sont pas tout à fait respectés. La barrière géologique tend à se contracter. Le déplacement radial maximum est obtenu à une distance variant entre 10 et 20 mètres du centre de la galerie. Avec le temps, le pic se décale vers le champ lointain. Les déplacements radiaux augmentent dans le massif pendant toute la phase de chauffage, atteignent un maximum à $t=1095$ jours, puis décroissent pendant la phase de refroidissement. L'amplitude des déplacements est environ 2.5 fois moins élevée dans la simulation effectuée avec Θ -Stock que dans la simulation effectuée par Gens et al. [79] avec CODE BRIGHT. On rappelle que Gens et al. ont simulé les travaux d'excavation avant de simuler le test de chauffage, alors que dans la simulation proposée avec Θ -Stock, on s'est contenté de partir d'un état thermo-hydro-mécanique réaliste pour simuler le test FEBEX. L'état mécanique initial envisagé est quasiment conforme au résultat du calcul de Gens et al. [79] pour la bentonite, mais il est différent pour le granite, puisqu'avec Θ -Stock, on est parti d'un état initial où les contraintes étaient nulles dans le massif géologique. Cela peut expliquer les différences observées sur les déplacements radiaux dans le granite. En raison de la trop grande différence de conception numérique, on a choisi de ne pas comparer les distributions de contrainte calculées avec Θ -Stock avec les résultats obtenus par Gens et al. [79].

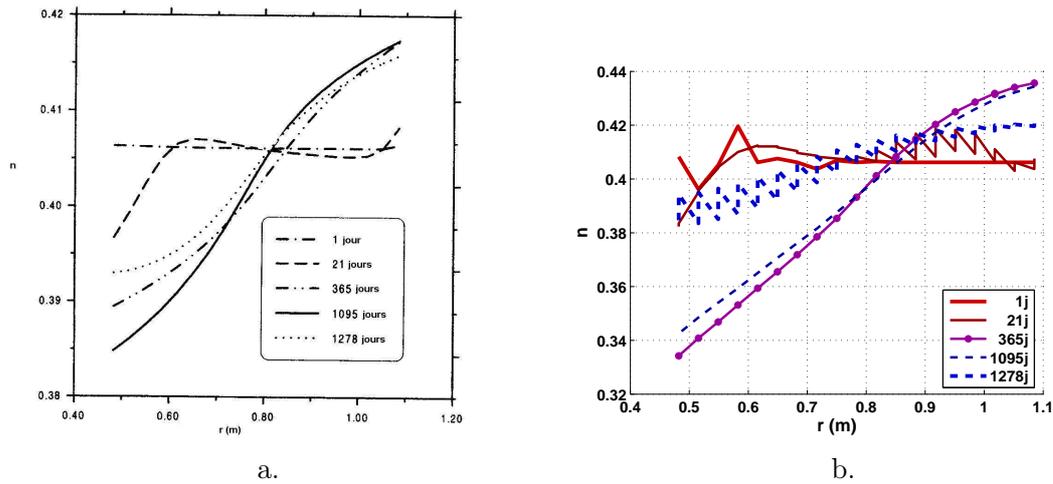


FIGURE 17.52 – Test in situ FEBEX. Evolution de la porosité dans la barrière ouvragée de bentonite. a. Résultats obtenus avec CODE BRIGHT par Gens et al. [79]. b. Résultats obtenus dans le domaine élastique du modèle THHMD avec Θ -Stock.

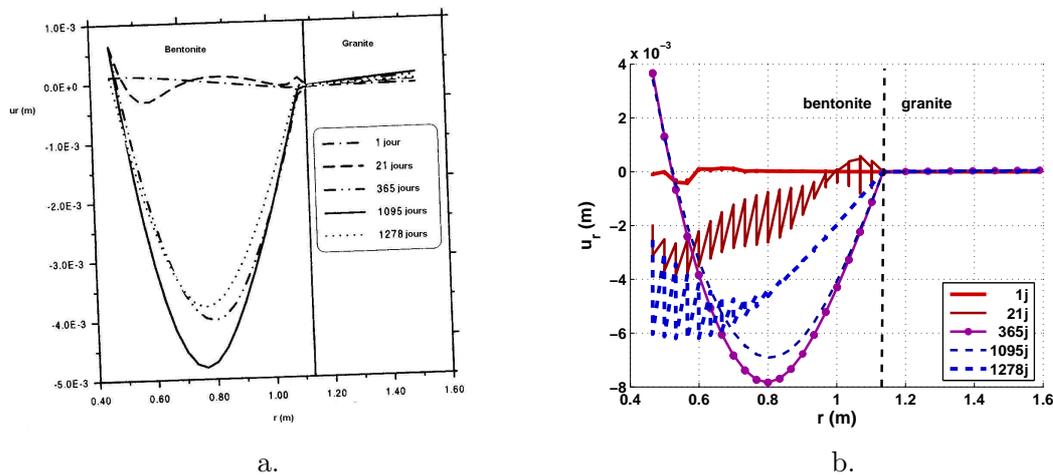


FIGURE 17.53 – Test in situ FEBEX. Evolution du déplacement radial dans la barrière ouvragée de bentonite. a. Résultats obtenus avec CODE BRIGHT par Gens et al. [79]. b. Résultats obtenus dans le domaine élastique du modèle THHMD avec Θ -Stock.

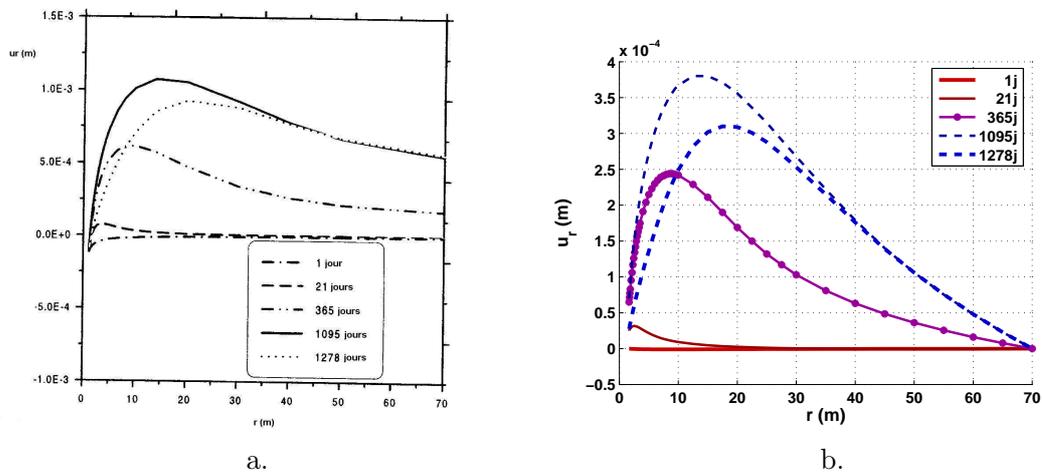


FIGURE 17.54 – Test in situ FEBEX. Evolution du déplacement radial dans la barrière géologique de granite. a. Résultats obtenus avec CODE BRIGHT par Gens et al. [79]. b. Résultats obtenus dans le domaine élastique du modèle THHMD avec Θ -Stock.

17.4.5 Etude de l'influence de l'EDZ sur le comportement thermo-hydro-mécanique des barrières ouvragée et géologique

On étudie l'influence de la présence d'une Zone Endommagée par l'Excavation ("Excavation Damaged Zone", EDZ) sur le comportement des barrières ouvragée et géologique. Il s'agit de prendre en compte l'endommagement produit pendant le creusement du massif granitique, avant l'entreposage des déchets radioactifs confinés dans la bentonite. Autrement dit, on observe les effets induits par la présence de fissures dans le massif granitique dans la configuration initiale du test de chauffage.

17.4.5.1 Endommagement initial isotrope dans le massif granitique

Dans un premier temps, on étudie l'influence de la présence d'éléments initialement dégradés par un endommagement isotrope dans une zone plus ou moins étendue du massif granitique. On s'intéresse à la fin de la phase d'accroissement de la température (au bout de 21 jours), à la fin de la phase de maintien de la température (au bout de trois ans, soit 1095 jours), et à la fin de la phase de refroidissement observée par Gens et al. [79] (au bout de 1278 jours). Au voisinage de la frontière entre la barrière de bentonite et le massif granitique, les interactions sont complexes. Au bout de 21 jours, l'état thermo-hydro-mécanique des matériaux est toujours en transition. C'est pourquoi on ne présente pas les résultats des calculs obtenus à $t=21$ jours au voisinage de la frontière entre les deux milieux poreux. Au bout de trois ans, l'équilibre est atteint pour les déplacements et la pression d'eau interstitielle. Au voisinage de la frontière, on a ainsi choisi de ne présenter les déplacements radiaux qu'à $t=1095$ jours, et de ne présenter la pression d'eau qu'à $t=1278$ jours. Trois études paramétriques sont effectuées :

- étude de l'influence de l'intensité d'endommagement sur une zone d'extension fixe dans le massif granitique (figures 17.55, 17.56, 17.57, 17.58 et 17.59) ;
- étude de l'influence d'une zone endommagée d'extension fixe, comportant deux sous-régions caractérisées par leur niveau d'endommagement : une zone très endommagée entre la frontière avec la bentonite ($r = Rb$) et un rayon deux fois plus grand que celui du container d'argile compactée ($r = 2 Rb$), et une zone moins endommagée entre $r = 2 Rb$ et $r = 3 Rb$ (figures 17.60, 17.61, 17.62, 17.63 et 17.64) ;
- étude de l'influence de l'extension de la zone endommagée dans le massif géologique, à niveau d'endommagement isotrope donné (figures 17.65, 17.66, 17.67, 17.68 et 17.69).

Les déplacements radiaux sont peu affectés par l'existence d'une zone endommagée par excavation (figures 17.55, 17.58, 17.60, 17.63, 17.65 et 17.68). La plus grande perturbation est observée dans le massif granitique, à proximité de la barrière ouvragée, juste après la phase d'accroissement de température (au bout de 21 jours). Le massif se dilate localement. Cette dilatation augmente avec le niveau d'endommagement imposé (figures 17.55 et 17.60). La dilatation du granite diminue lorsque l'extension de la zone endommagée augmente (figure 17.65). L'existence d'une zone initialement endommagée dans le granite n'influence pas les évolutions de la pression d'eau interstitielle et du degré de saturation dans la barrière ouvragée (figures 17.58, 17.59, 17.63, 17.64, 17.68 et 17.69). En revanche, la présence de fissures ouvertes dans le granite aboutit à une désaturation de la quasi-intégralité du massif géologique. La chute de pression interstitielle, l'augmentation de succion et la désaturation sont d'autant plus fortes que le niveau initial d'endommagement est élevé (figures 17.56, 17.57, 17.61 et 17.62). En revanche, l'extension de la zone

endommagée semble avoir peu d'influence sur le comportement hydraulique du massif granitique pendant le test de chauffage (figures 17.66 et 17.67).

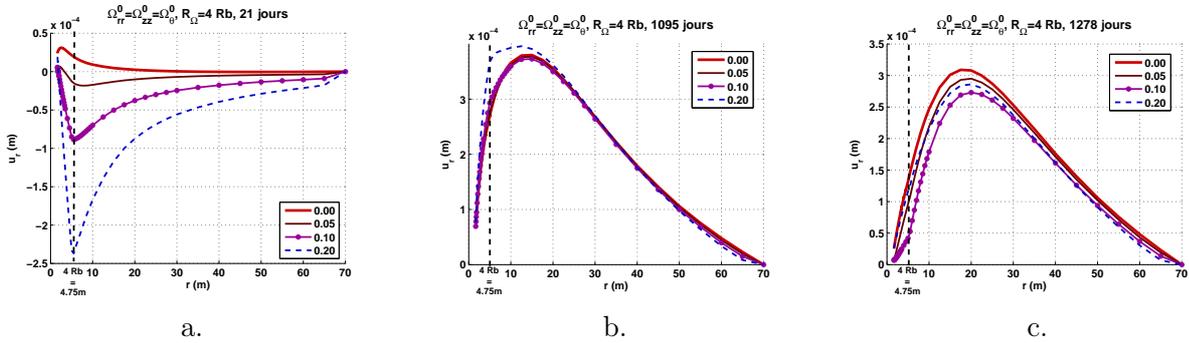


FIGURE 17.55 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d'endommagement initial isotrope dans la zone $Rb \leq r \leq 4Rb$. Evolution du déplacement radial dans le massif granitique. a. Fin de l'accroissement de température (21 jours). b. Après le plateau de température (1095 jours). c. Après refroidissement (1278 jours).

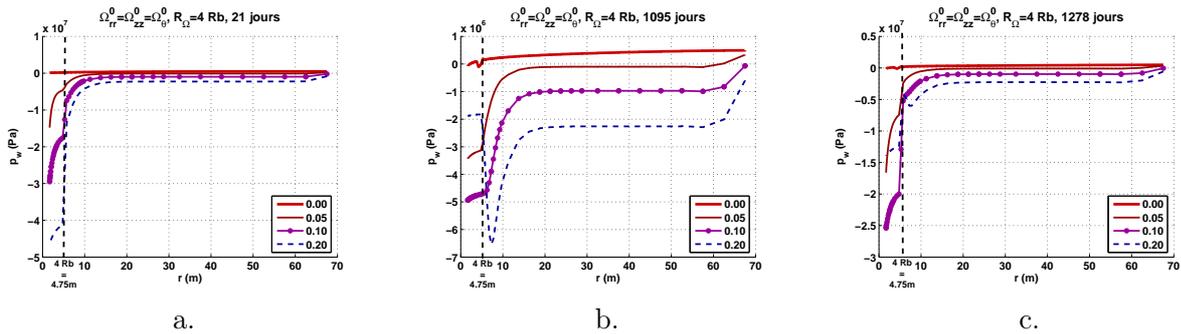


FIGURE 17.56 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d'endommagement initial isotrope dans la zone $Rb \leq r \leq 4Rb$. Evolution de la pression d'eau interstitielle dans le massif granitique. a. Fin de l'accroissement de température (21 jours). b. Après le plateau de température (1095 jours). c. Après refroidissement (1278 jours).

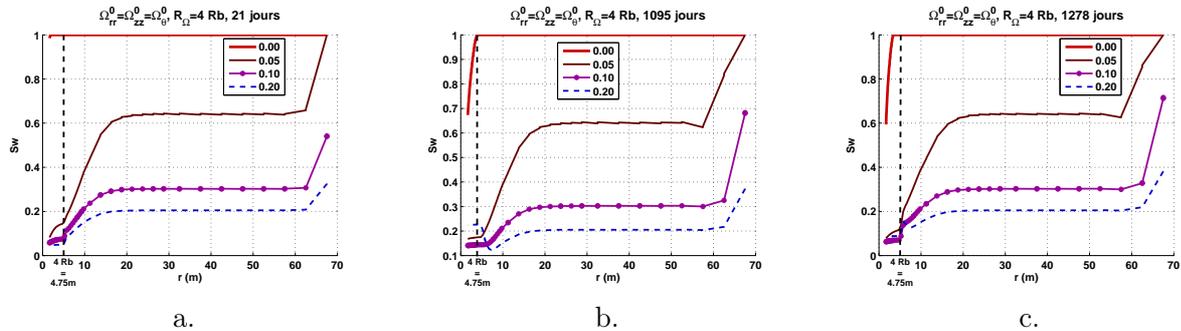


FIGURE 17.57 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d'endommagement initial isotrope dans la zone $Rb \leq r \leq 4Rb$. Evolution du degré de saturation dans le massif granitique. a. Fin de l'accroissement de température (21 jours). b. Après le plateau de température (1095 jours). c. Après refroidissement (1278 jours).

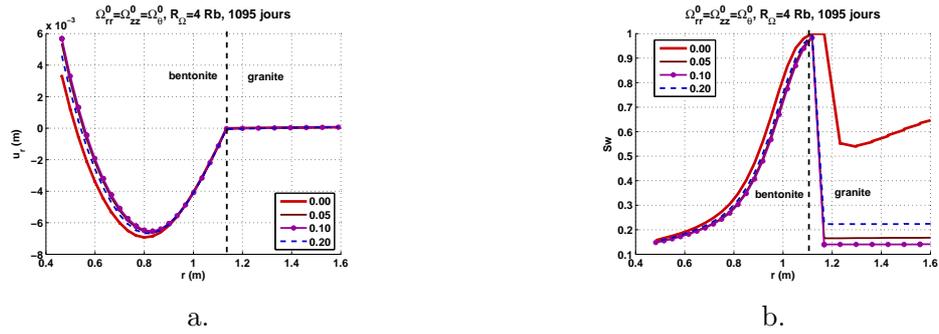


FIGURE 17.58 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d’endommagement initial isotrope dans la zone $Rb \leq r \leq 4 Rb$. Observations au voisinage de la frontière entre les barrières ouvragée (en bentonite) et géologique (en granite) après le plateau de température (1095 jours). a. Déplacement radial. b. Degré de saturation.

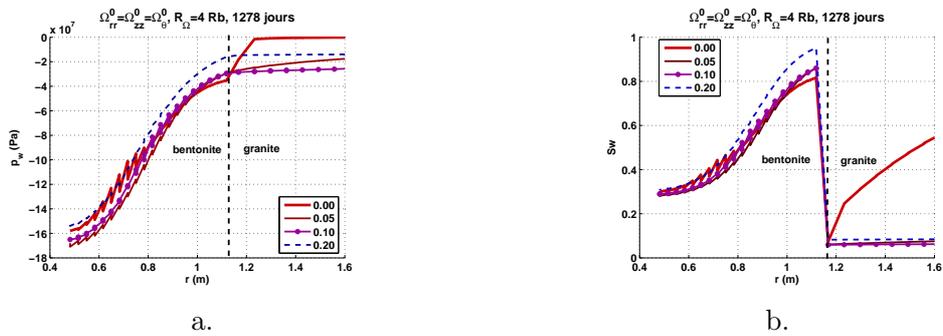


FIGURE 17.59 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d’endommagement initial isotrope dans la zone $Rb \leq r \leq 4 Rb$. Observations au voisinage de la frontière entre les barrières ouvragée (en bentonite) et géologique (en granite) après une phase de refroidissement (1278 jours). a. Pression d’eau interstitielle. b. Degré de saturation.

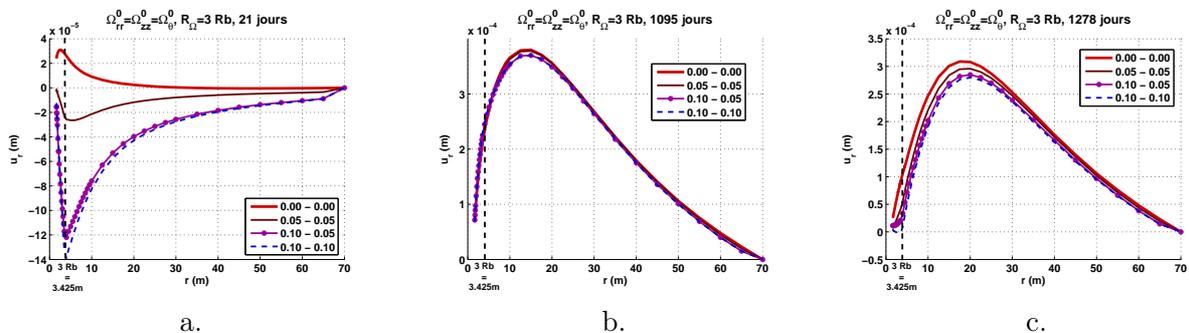


FIGURE 17.60 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d’endommagement initial isotrope dans la zone $Rb \leq r \leq 3 Rb$, avec deux zones d’endommagement : $Rb \leq r \leq 2 Rb$ et $2 Rb \leq r \leq 3 Rb$. Evolution du déplacement radial dans le massif granitique. a. Fin de l’accroissement de température (21 jours). b. Après le plateau de température (1095 jours). c. Après refroidissement (1278 jours).

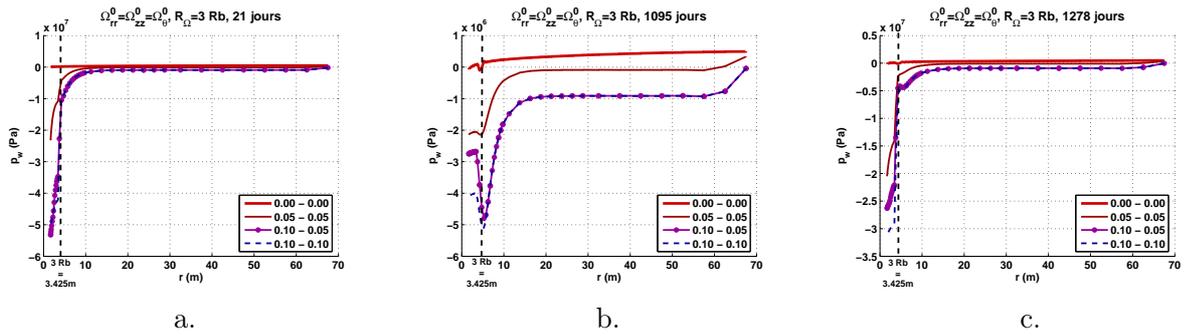


FIGURE 17.61 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d’endommagement initial isotrope dans la zone $Rb \leq r \leq 3Rb$, avec deux zones d’endommagement : $Rb \leq r \leq 2Rb$ et $2Rb \leq r \leq 3Rb$. Evolution de la pression d’eau interstitielle dans le massif granitique. a. Fin de l’accroissement de température (21 jours). b. Après le plateau de température (1095 jours). c. Après refroidissement (1278 jours).

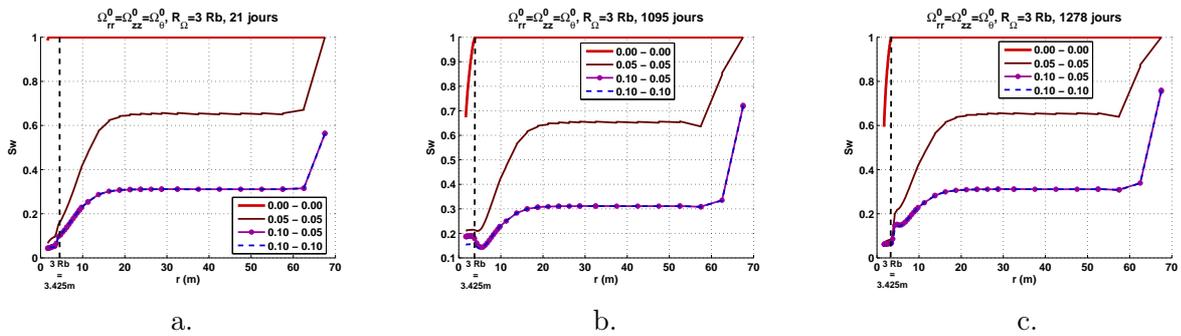


FIGURE 17.62 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d’endommagement initial isotrope dans la zone $Rb \leq r \leq 3Rb$, avec deux zones d’endommagement : $Rb \leq r \leq 2Rb$ et $2Rb \leq r \leq 3Rb$. Evolution du degré de saturation dans le massif granitique. a. Fin de l’accroissement de température (21 jours). b. Après le plateau de température (1095 jours). c. Après refroidissement (1278 jours).

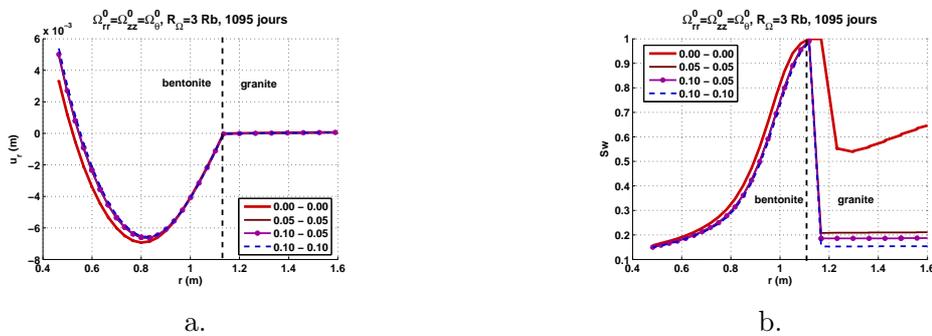


FIGURE 17.63 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d’endommagement initial isotrope dans la zone $Rb \leq r \leq 3Rb$, avec deux zones d’endommagement : $Rb \leq r \leq 2Rb$ et $2Rb \leq r \leq 3Rb$. Observations au voisinage de la frontière entre les barrières ouvragée (en bentonite) et géologique (en granite) après le plateau de température (1095 jours). a. Déplacement radial. b. Degré de saturation.

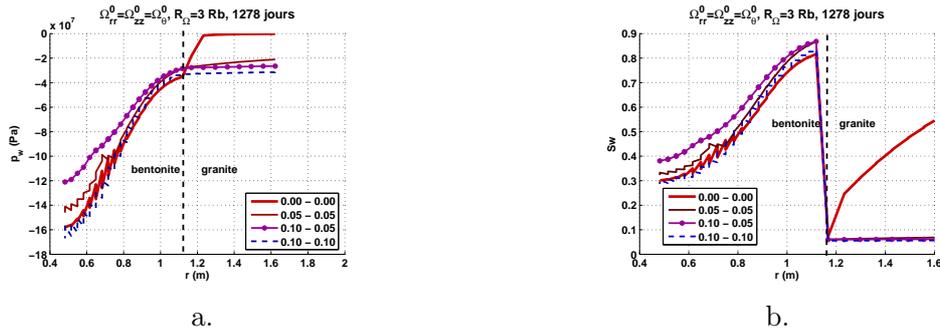


FIGURE 17.64 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d’endommagement initial isotrope dans la zone $Rb \leq r \leq 3Rb$, avec deux zones d’endommagement : $Rb \leq r \leq 2Rb$ et $2Rb \leq r \leq 3Rb$. Observations au voisinage de la frontière entre les barrières ouvragée (en bentonite) et géologique (en granite) après une phase de refroidissement (1278 jours). a. Pression d’eau interstitielle. b. Degré de saturation.

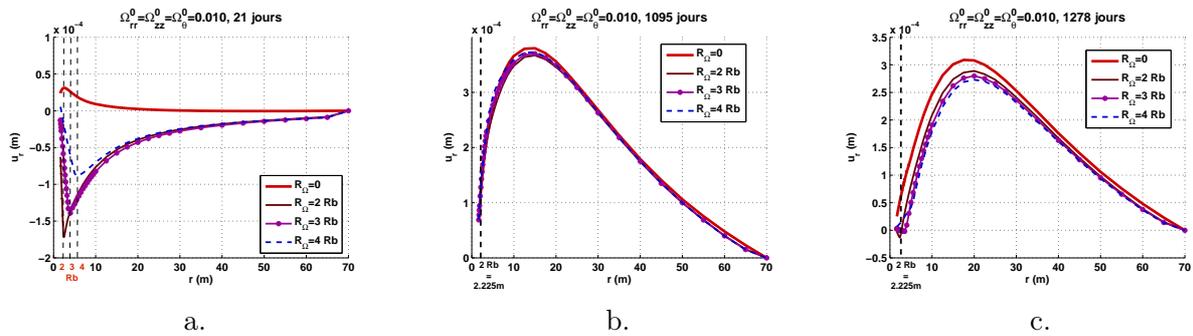


FIGURE 17.65 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d’un endommagement initial isotrope de 10 pour cent dans une zone d’étendue variable. Evolution du déplacement radial dans le massif granitique. a. Fin de l’accroissement de température (21 jours). b. Après le plateau de température (1095 jours). c. Après refroidissement (1278 jours).

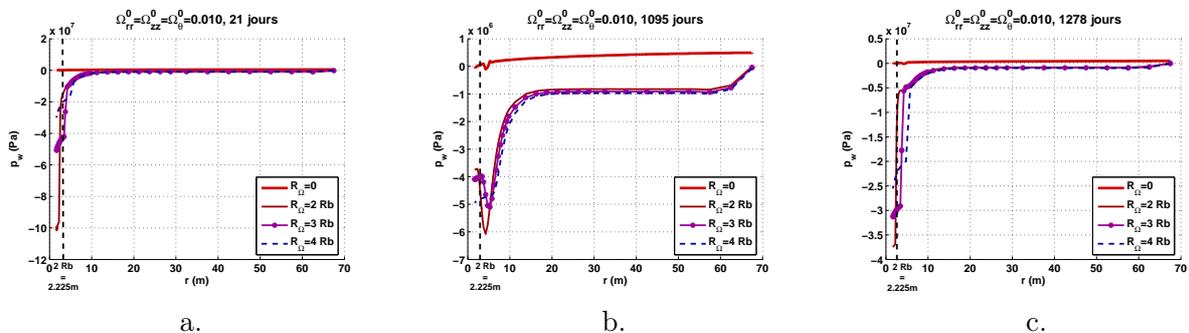


FIGURE 17.66 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d’un endommagement initial isotrope de 10 pour cent dans une zone d’étendue variable. Evolution de la pression d’eau interstitielle dans le massif granitique. a. Fin de l’accroissement de température (21 jours). b. Après le plateau de température (1095 jours). c. Après refroidissement (1278 jours).

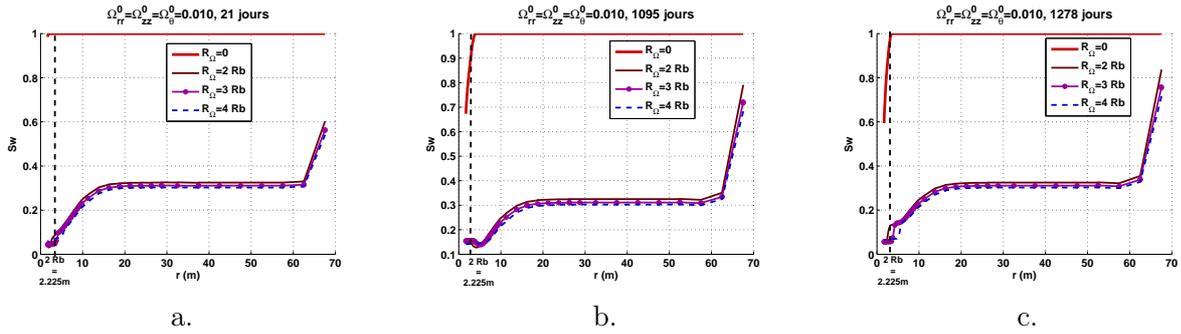


FIGURE 17.67 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d’un endommagement initial isotrope de 10 pour cent dans une zone d’étendue variable. Evolution du degré de saturation dans le massif granitique. a. Fin de l’accroissement de température (21 jours). b. Après le plateau de température (1095 jours). c. Après refroidissement (1278 jours).

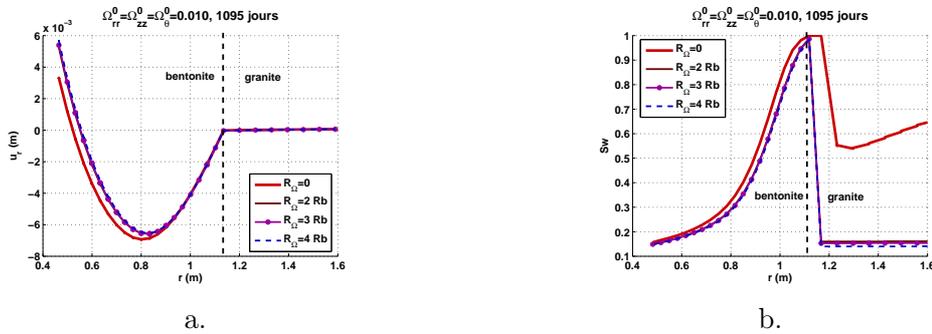


FIGURE 17.68 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d’un endommagement initial isotrope de 10 pour cent dans une zone d’étendue variable. Observations au voisinage de la frontière entre les barrières ouvragée (en bentonite) et géologique (en granite) après le plateau de température (1095 jours). a. Déplacement radial. b. Degré de saturation.

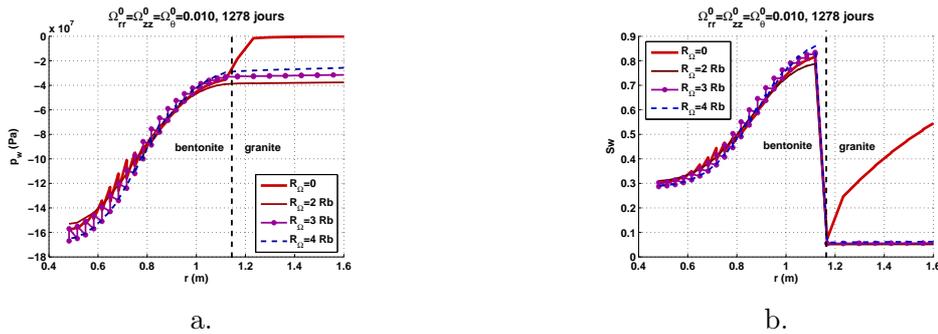


FIGURE 17.69 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d’un endommagement initial isotrope de 10 pour cent dans une zone d’étendue variable. Observations au voisinage de la frontière entre les barrières ouvragée (en bentonite) et géologique (en granite) après une phase de refroidissement (1278 jours). a. Pression d’eau interstitielle. b. Degré de saturation.

17.4.5.2 Endommagement initial radial dans le massif granitique

On travaille maintenant dans une configuration dans laquelle le massif granitique comporte des éléments initialement dégradés par de l’endommagement radial : $\Omega_{rr}^0 \neq 0$, $\Omega_{zz}^0 = \Omega_{\theta\theta}^0 = 0$. Deux études paramétriques sont effectuées :

- étude de l'influence de l'intensité de Ω_{rr}^0 sur une zone endommagée d'extension fixe (de $r = Rb$, à la frontière entre les deux barrières, à $r = 2 Rb$) : figures 17.70, 17.71 et 17.72 ;
- étude de l'influence de l'extension de la zone initialement endommagée dans le granite pour un niveau d'endommagement radial donné (de 5 pour cent) : figures 17.73, 17.74 et 17.75.

Les résultats obtenus diffèrent très peu des résultats obtenus dans une configuration dans laquelle la barrière géologique est initialement intacte. Cette observation est importante, car l'endommagement susceptible d'être généré par l'excavation est radial : le déchargement de type $-\Delta\sigma_{rr}$ exercé à la paroi ne peut ouvrir des fissures que dans des plans orthogonaux à la direction radiale. On peut en conclure que la fissuration susceptible d'affecter le comportement thermo-hydro-mécanique des barrières ouvragée et géologique n'est pas liée au creusement du tunnel. Autrement dit, le risque de fuite est lié à l'existence de fissures préexistantes (matériau comprenant des micro-fissures ou des micro-vides avant même l'excavation), ou à des fissures créées par une sollicitation thermique, après l'entreposage des déchets. On ne peut pas conclure pour autant que l'endommagement est de nature exclusivement thermique, c'est-à-dire qu'il n'est généré que par l'existence de déformations volumiques thermiques de tension (ϵ_{Tv}^+). Comme les comportements des barrières ouvragée et géologique sont complètement couplés, l'origine de l'endommagement peut également être capillaire (ϵ_{Sv}^-) ou mécanique (ϵ_{Mij}^+). Autrement dit, il reste nécessaire d'introduire trois rigidités d'endommagement distinctes (g_M , g_S et g_T) dans le modèle d'endommagement proposé, qui est formulé en variables d'état indépendantes. Seul le degré de saturation au voisinage de la frontière entre la bentonite et le granite est visiblement affecté par l'endommagement radial imposé dans l'état initial. Dans la zone avoisinant la frontière entre les deux matériaux, les résultats obtenus à $t=21$ jours sont encore dans une phase transitoire, donc on ne présente le degré de saturation obtenu aux instants $t=1095$ jours et $t=1278$ jours. On observe notamment que lorsqu'un endommagement radial initial est imposé, le degré de saturation du granite à proximité de la frontière avec la barrière ouvragée suit une évolution intermédiaire entre le cas où l'endommagement initial est nul et le cas où l'endommagement initial est isotrope (figures 17.72 et 17.75). Les autres variables (u_r et p_w) sont données pour $t=1278$ jours uniquement, i.e. dans l'état final, après la phase de refroidissement.

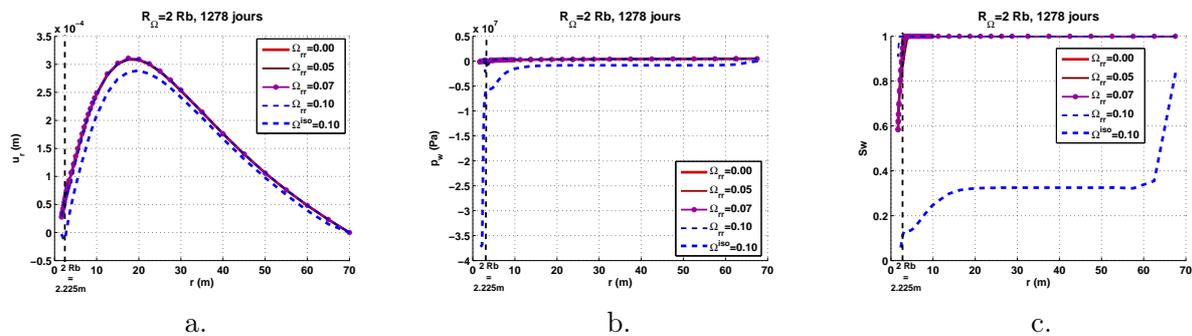


FIGURE 17.70 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d'un endommagement initial radial entre $r = Rb$ et $r = 2 Rb$ sur le comportement du massif granitique. Etat de la barrière géologique après la phase de refroidissement (1278 jours). a. Déplacement radial. b. Pression d'eau interstitielle. c. Degré de saturation.

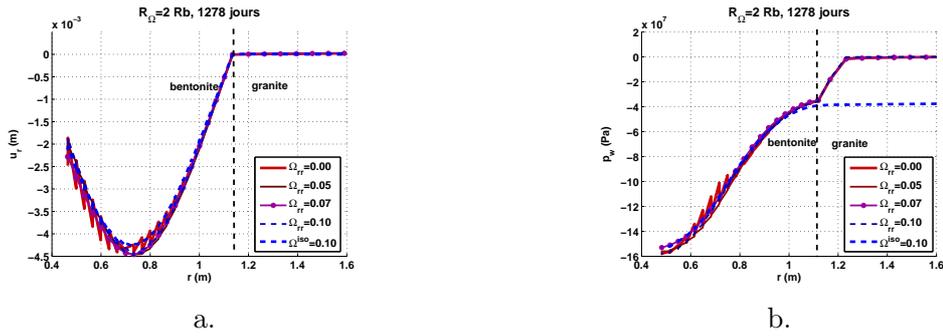


FIGURE 17.71 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d’un endommagement initial radial entre $r = R_b$ et $r = 2 R_b$ sur le comportement de la bentonite. Etat de la barrière ouvragée après la phase de refroidissement (1278 jours). a. Déplacement radial. b. Pression d’eau interstitielle.

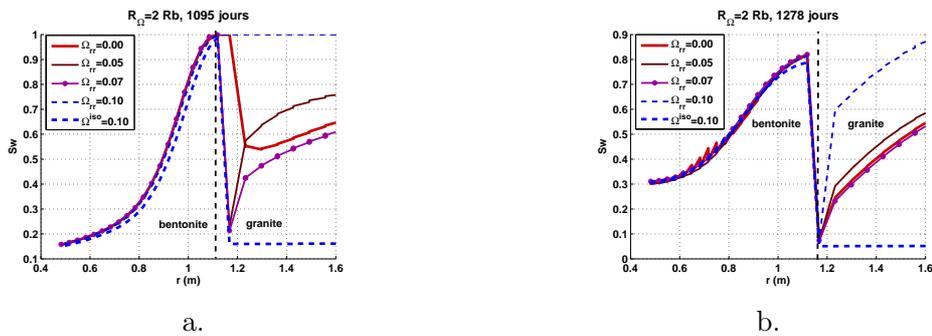


FIGURE 17.72 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d’un endommagement initial radial entre $r = R_b$ et $r = 2 R_b$ sur le degré de saturation de la barrière ouvragée en bentonite. a. Après le plateau de température (1095 jours). b. Après refroidissement (1278 jours).

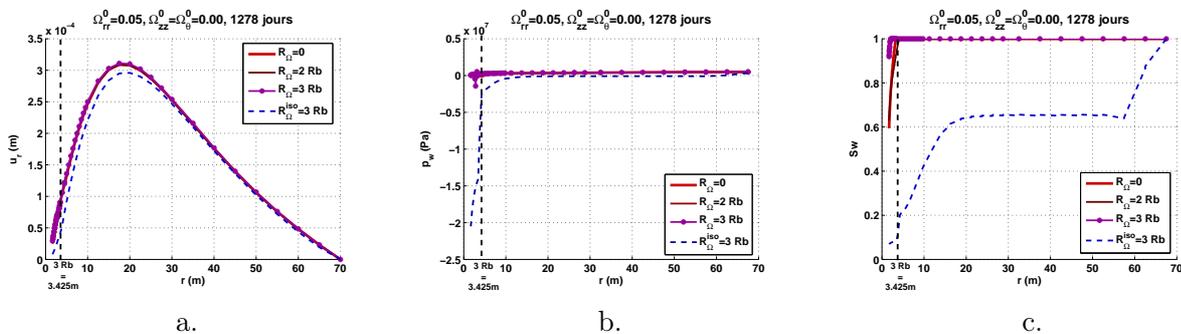


FIGURE 17.73 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d’un endommagement initial radial de 5 pour cent dans une zone d’étendue variable sur le comportement du massif granitique. Etat de la barrière géologique après la phase de refroidissement (1278 jours). a. Déplacement radial. b. Pression d’eau interstitielle. c. Degré de saturation.

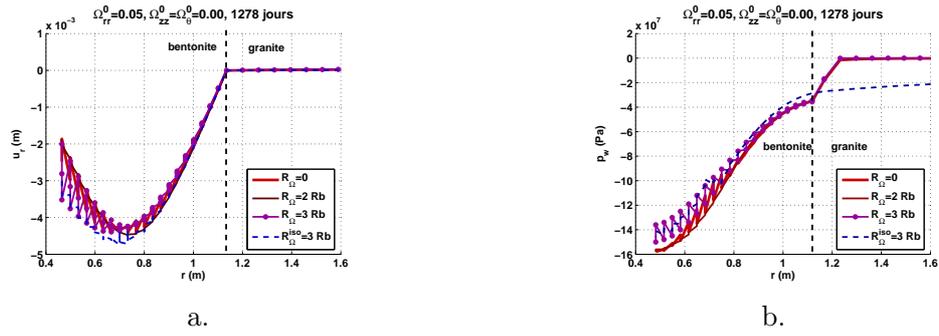


FIGURE 17.74 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d’un endommagement initial radial de 5 pour cent dans une zone d’étendue variable sur le comportement de la bentonite. Etat de la barrière ouvragée après la phase de refroidissement (1278 jours). a. Déplacement radial. b. Pression d’eau interstitielle.

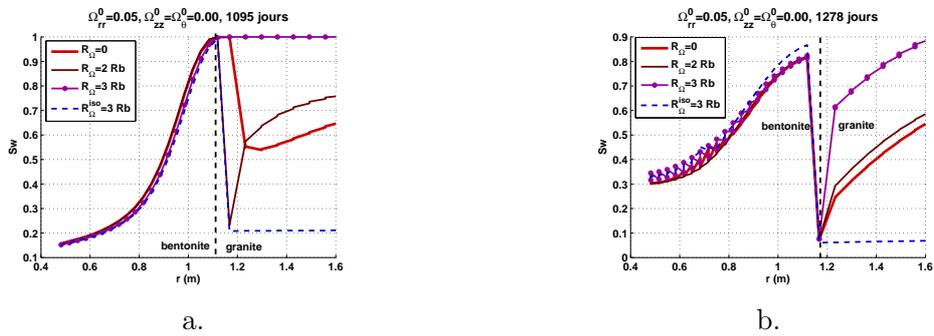


FIGURE 17.75 – Test in situ FEBEX. Influence de la présence d’un endommagement initial radial de 5 pour cent dans une zone d’étendue variable sur le degré de saturation de la barrière ouvragée en bentonite. a. Après le plateau de température (1095 jours). b. Après refroidissement (1278 jours).

17.5 Etude du site de stockage de déchets radioactifs de Kamaishi en vraie grandeur (projet DECOVALEX) [173]

17.5.1 Site de stockage étudié

On s'appuie sur une étude réalisée dans le cadre du projet international DECOVALEX [173], destiné à concevoir des galeries de stockage des déchets radioactifs. Il s'agit de simuler le test de chauffage réalisé sur le site minier de Kamaishi, au Japon. Les auteurs de l'article pris comme référence bibliographique [173] comparent les résultats expérimentaux aux résultats numériques obtenus par quatre équipes de recherche, ayant travaillé avec des modèles et des programmes d'Eléments Finis différents. Un dispositif permettant de dégager de la chaleur est stocké verticalement dans un massif granitique initialement saturé, à une profondeur de 250 mètres. Une zone tampon en bentonite comble l'espace qui sépare la source de chaleur du massif rocheux. La bentonite est composée d'argile compactée, initialement non saturée. La source de chaleur est réglée pour que la zone de contact entre la source et le tampon de bentonite soit maintenue à 100°C pendant 8 mois et demi. Puis la source est éteinte, et le comportement thermo-hydro-mécanique des barrières ouvragée et géologique est étudié pendant une phase de relaxation de 6 mois.

17.5.2 Maillage, conditions initiales et conditions aux limites

La géométrie et le chargement permettent de faire une étude numérique en configuration axisymétrique pour traiter le problème. Le tampon de bentonite a la forme d'un cylindre de 5 mètres de haut et de 85 centimètres de rayon. Il renferme une source de chaleur de 2 mètres de haut et de 52 centimètres de rayon. La source est un dispositif cylindrique en métal qui n'est pas maillé dans cette étude. La source de chaleur est prise en compte dans les conditions aux limites. On modélise le massif granitique sur une zone de 20 mètres de haut et de 20 mètres de rayon, conformément à la plupart des études numériques présentées dans l'article de référence [173]. Le modèle réalisé dans Θ -Stock comprend 797 noeuds et 738 éléments. Le tampon de bentonite est représenté par 38 éléments, et le massif granitique par 700 éléments (figure 17.76).

Conditions initiales

- Conformément aux études présentées dans l'article [173], on fait l'hypothèse que l'état de contraintes initial est nul dans les deux matériaux.
- De même, on suppose que les deux barrières sont initialement soumises à une température de 12.3°C .
- Les auteurs [173] considèrent que la phase gazeuse est statique, et que l'air est constamment soumis à la pression atmosphérique. Il est impossible de rendre cette condition dans Θ -Stock sans perturber le calcul élémentaire des succions. On considère donc que dans l'état initial, la pression d'air est nulle en chaque noeud, et que pendant le test de chauffage, les frontières à l'air libre sont soumises à la condition de Dirichlet $p_a = 0$. L'état capillaire des matériaux sera déterminé par le choix des pressions d'eau interstitielles.
- Dans l'état initial, le massif granitique est saturé, et soumis à une pression d'eau hydrostatique, avec $p_w = 0$ sur la frontière supérieure du modèle, qui représente une zone de contact avec une piscine de faible profondeur, destinée à tempérer le massif depuis la galerie d'accès. On impose donc $p_{w0}^j = \gamma_w z$ en tous les noeuds du massif géologique.
- Le degré de saturation initial de la bentonite est évalué à 0.635. Après avoir calé les para-

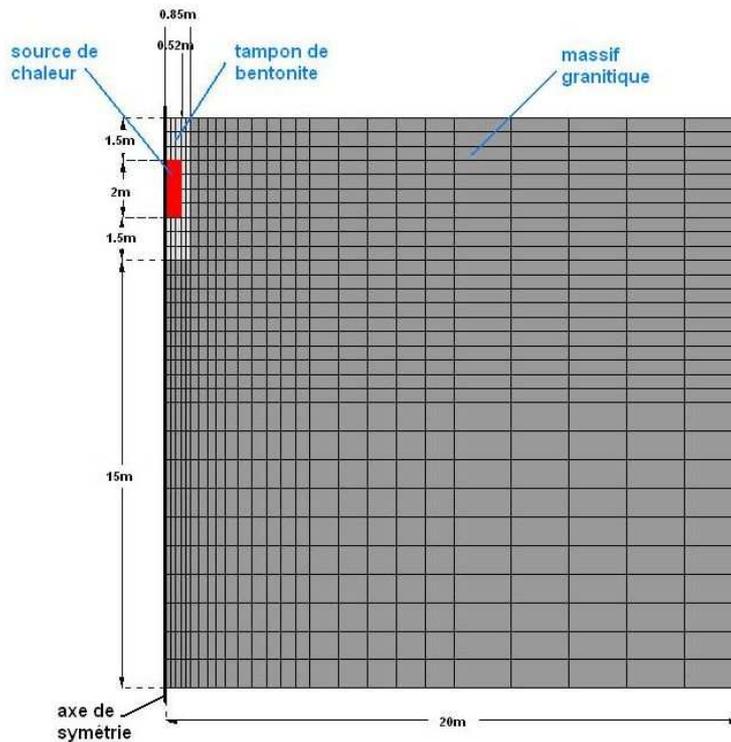


FIGURE 17.76 – Maillage utilisé pour la simulation de l'essai de chauffage réalisé à Kamaishi [173].

mètres de Van Genuchten [197] pour avoir une courbe de rétention (isotherme) proche de celle qui est proposée dans l'article [173] (figure 17.77), on a choisi d'imposer une pression d'eau interstitielle permettant d'obtenir la succion correspondant au degré de saturation initial sur tous les éléments de bentonite. Dans le cas présent, imposer $p_{w0}^b = -s_0^b = -6.1 \text{ MPa}$ donne une bonne approximation de l'état capillaire initial de la zone tampon.

Conditions aux limites (figure 17.78)

- Degrés de liberté mécaniques
 - Sur l'axe de symétrie (frontière gauche à l'exception de l'alcôve qui représente la zone de contact entre le dispositif de chauffage et le tampon de bentonite), les déplacements radiaux sont bloqués.
 - Sur la frontière latérale extérieure (à droite), les déplacements radiaux sont bloqués (champ lointain).
 - Sur la frontière inférieure, les déplacements verticaux sont bloqués (champ lointain).
- Degrés de liberté thermiques
 - Sur l'axe de symétrie (frontière gauche à l'exception de l'alcôve qui représente la zone de contact entre le dispositif de chauffage et le tampon de bentonite), des conditions adiabatiques sont imposées ($q_h = 0$).
 - Sur la frontière en alcôve qui sépare le dispositif de chauffage du tampon de bentonite, un chargement thermique est imposé :
 1. pendant la phase de chauffage de 8 mois et demi (soit 259 jours), une température de 100°C est imposée en tous les noeuds ;
 2. pendant la phase de relaxation de 6 mois (soit 183 jours), le flux de chaleur est bloqué sur toute la surface de contact.
 - Sur la frontière latérale extérieure (à droite), les noeuds sont maintenus à la température

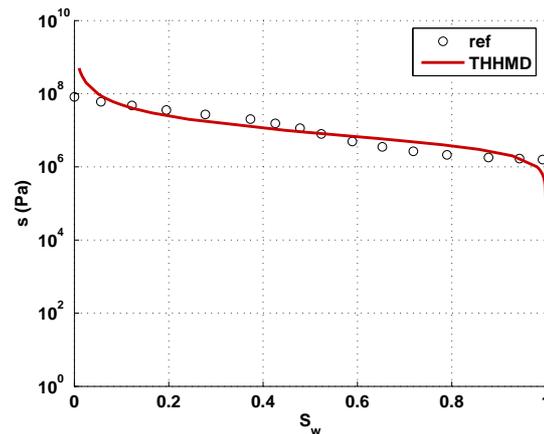


FIGURE 17.77 – Courbe de rétention adoptée dans la simulation du test de chauffage de Kamaishi. Calage des paramètres de Van Genuchten d’après les données expérimentales [173] : $\alpha_{VG} = 2 \cdot 10^{-7} Pa^{-1}$, $n_{VG} = 2$.

initiale (champ lointain).

- Sur la frontière supérieure de la zone modélisée par du granite, la température est maintenue à sa valeur initiale (en raison de la présence d’une piscine régulatrice).
- *Degrés de liberté relatifs à l’air*
 - Sur l’axe de symétrie (frontière gauche à l’exception de l’alcôve qui représente la zone de contact entre le dispositif de chauffage et le tampon de bentonite), le flux d’air est bloqué.
 - Sur la frontière supérieure de la zone modélisée par de la bentonite, le flux d’air est bloqué (en raison de la présence d’un chapeau métallique étanche).
 - Sur le reste du bord supérieur, une pression d’air nulle est imposée (avec les hypothèses formulées précédemment, cela revient à imposer une pression atmosphérique).
 - De même, une pression d’air nulle est imposée dans le champ lointain, c’est-à-dire sur la frontière latérale extérieure (à droite) et sur la frontière inférieure.
- *Degrés de liberté relatifs à l’eau*
 - Sur l’axe de symétrie (frontière gauche à l’exception de l’alcôve qui représente la zone de contact entre le dispositif de chauffage et le tampon de bentonite), le flux d’eau est bloqué.
 - Sur la frontière supérieure de la zone modélisée par de la bentonite, le flux d’eau est bloqué (en raison de la présence d’un chapeau métallique étanche).
 - Sur le reste du bord supérieur, une pression d’eau nulle est imposée, en raison de la présence d’une piscine de faible profondeur au-dessus du massif granitique.
 - Dans le champ lointain, c’est-à-dire sur la frontière latérale extérieure (à droite) et sur la frontière inférieure, la pression d’eau interstitielle initiale est maintenue (conditions hydrostatiques).

17.5.3 Choix des paramètres

On calcule les paramètres K_L et K_b à partir du module d’Young et du coefficient de Poisson, qui sont fournis dans l’article [173] pour les deux matériaux. Les deux matériaux sont initialement à une température de $12.3^\circ C$. Le granite est initialement saturé, tandis que la bentonite a un

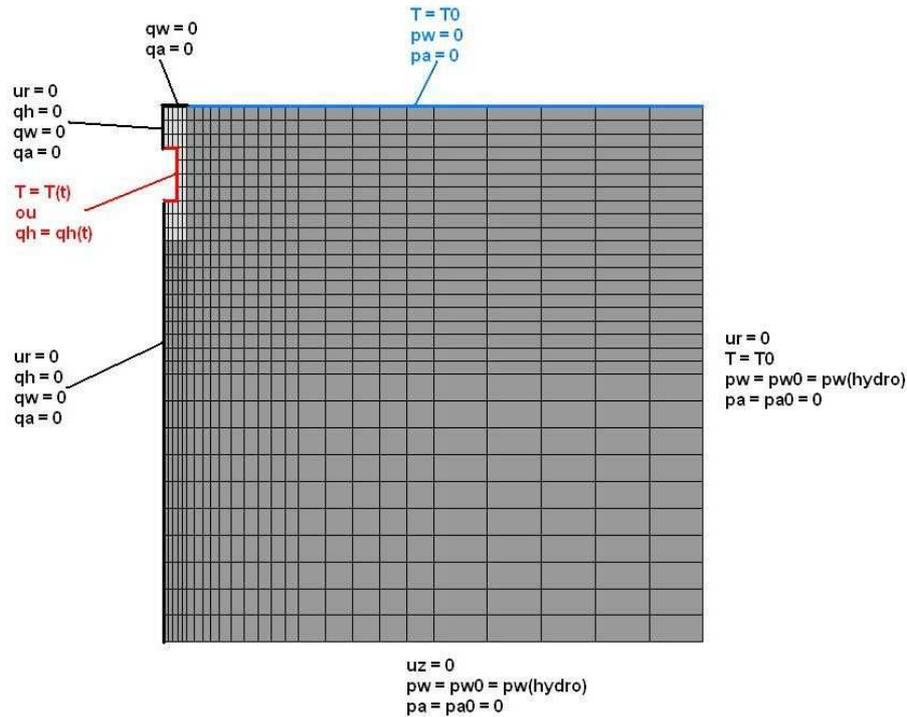


FIGURE 17.78 – Conditions aux limites adoptées dans la simulation de l’essai de chauffage réalisé à Kamaishi [173].

degré de saturation initial de 0.635. L’indice des vides initial de la bentonite est calculé à partir de sa porosité initiale. L’indice des vides du granite n’est pas fourni. On utilise l’indice des vides du granite de la Vienne [93]. Le paramètre de dilatance χ est choisi selon les recommandations de Shao et al. [180] : $\chi \simeq 0.005$ pour les roches fragiles. Les paramètres d’endommagement C_0 et C_1 choisis pour le granite sont ceux qui ont été déterminés par Halm et Dragon pour le granite de la Vienne [91]. Pour la bentonite, on utilise les valeurs de C_0 et C_1 qui caractérisent l’argilite de l’Est [38], dont la rigidité est plus proche de celle de la bentonite. Comme on pratique un test de validation en élasticité, toutes les rigidités d’endommagement sont fixées à zéro : $g_M = g_S = g_T = 0$. Pour le granite, on choisit une rigidité capillaire intacte 10 fois plus grande que le module de compression volumique [79]. En l’absence de référence bibliographique sur le sujet, on choisit la même valeur pour la rigidité thermique intacte. On affecte les rigidités capillaire et thermique intactes du granite à la bentonite. Compte-tenu du module d’Young et du coefficient de Poisson de la bentonite, le matériau qui constitue la zone tampon aura ainsi une réponse très raide aux sollicitations en succion et en température. Ce choix permet d’atténuer certaines déformations liées aux forts couplages thermo-hydro-mécaniques, ce qui réduit les artefacts numériques. Le poids volumique de la matrice solide du granite n’étant pas précisé, on affecte le poids volumique du squelette de la bentonite, indiqué dans l’article [173], aux deux matériaux : $\gamma_s = 1.57 * 10^4 \text{ N.m}^{-3}$. En pratique, la distinction entre les deux poids volumiques a peu d’importance dans cette simulation, puisqu’on fait l’hypothèse que l’ensemble de la zone modélisée est initialement dans un état de contraintes nul. Les paramètres mécaniques utilisés sont résumés dans les tableaux 17.17 et 17.18.

Pour simplifier, on se ramène à des courbes de rétention de type Van Genuchten [197] pour les deux milieux, en neutralisant les effets de la température sur l’évolution du degré de saturation ($d_s = 0$). Dans les deux matériaux, le degré de saturation résiduel est nul : $S_{w,r} = 0$. N’ayant

TABLE 17.17 – Paramètres mécaniques du granite dans l'essai de chauffage de Kamaishi [173].

Modèle élastique hyperbolique						
K_b	K_L	n	R_f	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$	K_U	m
$3.729 * 10^5$	$4.475 * 10^5$	0	0	$2 * 10^{10} Pa$	$4.475 * 10^5$	0
Rigidités de référence						
β_s^0	β_T^0					
$3.729 * 10^{11} Pa$	$3.729 * 10^{11} Pa$					
Paramètres d'endommagement						
χ	C_0	C_1	g_M	g_S	g_T	
0.005	$1.1 * 10^5 Pa$	$2.2 * 10^6 Pa$	0	0	0	
Conditions initiales						
e_0	S_{w0}	T_0				
0.00351	1	$12.3 ^\circ C$				

TABLE 17.18 – Paramètres mécaniques de la bentonite dans l'essai de chauffage de Kamaishi [173].

Modèle élastique hyperbolique						
K_b	K_L	n	R_f	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$	K_U	m
$1.306 * 10^3$	$1.175 * 10^3$	0	0	$2 * 10^{10} Pa$	$1.175 * 10^3$	0
Rigidités de référence						
β_s^0	β_T^0					
$3.729 * 10^{11} Pa$	$3.729 * 10^{11} Pa$					
Paramètres d'endommagement						
χ	C_0	C_1	g_M	g_S	g_T	
0.005	$2.3 * 10^{-4} Pa$	$5.2 * 10^{-3} Pa$	0	0	0	
Conditions initiales						
e_0	S_{w0}	T_0				
0.637	0.635	$12.3 ^\circ C$				

TABLE 17.19 – Paramètres relatifs aux fluides pour le granite dans l’essai de chauffage de Kamaishi [173].

Courbe de rétention			
$S_{w,r}$	α_{VG}	n_{VG}	d_s
0	$10^{-5} Pa^{-1}$	1.5	0
Perméabilité à l’eau liquide			
k_{w0}	α_w	k_w^{0max}	k_{wdg}^{max}
$10^{-11} m.s^{-1}$	0	$10^{-10} m.s^{-1}$	$10^{-7} m.s^{-1}$
Transfert des gaz			
c_a	α_a	k_a^{max}	D_{dg}^{max}
$10^{-10} m^2$	0	$10^{-9} m.s^{-1}$	$10^{-5} m^2.s^{-1}$

aucune information sur la courbe de rétention du granite, on reprend les paramètres du granite fournis par Gens et al. dans l’étude précédente [79]. La courbe de rétention expérimentale de la bentonite est fournie dans l’article [173]. Les paramètres α_{VG} et n_{VG} sont calés pour obtenir une courbe de rétention proche dans la simulation effectuée avec Θ -Stock (figure 17.77). Le modèle de transfert d’humidité proposé dans l’article [173] est fondé sur la modélisation de Philip et de Vries [158], comme dans le modèle THHMD. Comme les paramètres de conductivité hydraulique ne sont pas tous clairement définis, on reprend les valeurs de perméabilité intrinsèque de référence proposées par Gens et al. dans la simulation du test FEBEX [79]. Par ailleurs, les couplages hydro-mécaniques sont neutralisés dans l’expression de la perméabilité intrinsèque, pour les deux matériaux ($\alpha_w = 0$). On suppose que les perméabilités intrinsèques à l’eau liquide des matériaux endommagés ne peuvent pas dépasser 10000 fois celles des matériaux intacts correspondants (d’où $k_{wdg}^{max} = 10^{-7} m.s^{-1}$ pour le granite, et $k_w^{max} = 2 * 10^{-9} m.s^{-1}$ pour la bentonite), et que la conductivité à la vapeur d’un matériau endommagé ne peut pas excéder 100 fois la perméabilité à l’eau liquide du milieu (d’où $D_{dg}^{max} = 10^{-5} m^2.s^{-1}$ pour le granite, et $D_{dg}^{max} = 2 * 10^{-7} m^2.s^{-1}$ pour la bentonite). Les auteurs [173] ont supposé que la phase gazeuse était statique et que l’air était constamment soumis à la pression atmosphérique. Une hypothèse très similaire a été faite dans la simulation du test FEBEX présenté précédemment [79]. Comme les ordres de grandeur des conductivités hydrauliques sont les mêmes que dans le test FEBEX, on utilise la même modélisation que dans la simulation du test FEBEX pour le transfert de la phase gazeuse : $c_a = 10^{-10} m^2$, $\alpha_a = 0$ et $k_a^{max} = 10^{-9} m.s^{-1}$ pour les deux matériaux. L’ensemble des paramètres relatifs aux fluides sont donnés dans les tableaux 17.19 et 17.20.

Les dilatances thermiques des deux matériaux sont donnés dans l’article [173]. On choisit des valeurs usuelles pour les capacités calorifiques et les conductivités thermiques des constituants eau et air, ainsi que pour la chaleur latente d’évaporation (les mêmes que dans la simulation du test FEBEX - tableaux 17.15 et 17.16). La capacité calorifique et la conductivité thermique de la matrice solide du granite sont fournies par les auteurs [173]. La capacité calorifique et la conductivité thermique de la matrice solide de la bentonite sont des valeurs moyennes, déterminées d’après les courbes de caractérisation expérimentales fournies dans l’article [173]. L’ensemble des paramètres thermiques choisis sont fournis dans les tableaux 17.21 et 17.22.

TABLE 17.20 – Paramètres relatifs aux fluides pour la bentonite dans l'essai de chauffage de Kamaishi [173].

Courbe de rétention			
$S_{w,r}$	α_{VG}	n_{VG}	d_s
0	$2 * 10^{-7} Pa^{-1}$	2	0
Perméabilité à l'eau liquide			
k_{w0}	α_w	k_w^{0max}	k_{wdg}^{max}
$2 * 10^{-13} m.s^{-1}$	0	$2 * 10^{-12} m.s^{-1}$	$2 * 10^{-9} m.s^{-1}$
Transfert des gaz			
c_a	α_a	k_a^{max}	D_{dg}^{max}
$10^{-10} m^2$	0	$10^{-9} m.s^{-1}$	$2 * 10^{-7} m^2.s^{-1}$

TABLE 17.21 – Paramètres thermiques du granite dans la simulation de l'essai de chauffage de Kamaishi [173].

Rigidité thermique intacte				
α_0^*	α_1	α_2	α_3	p_{geo}
$-2.55 * 10^{-6} °C^{-1}$	0	0	0	$10^{10} Pa$
Diffusion et évaporation				
λ_s	λ_w	λ_a	h_{fg}	
$3 W.m^{-1}.°C^{-1}$	$0.6 W.m^{-1}.°C^{-1}$	$0.0258 W.m^{-1}.°C^{-1}$	$2.5 * 10^6 J.kg^{-1}$	
Convection				
C_{Ps}	C_{Pw}	C_{Pvap}	C_{Pa}	
$805 J.kg^{-1}.°C^{-1}$	$4180 J.kg^{-1}.°C^{-1}$	$1900 J.kg^{-1}.°C^{-1}$	$1006 J.kg^{-1}.°C^{-1}$	

TABLE 17.22 – Paramètres thermiques de la bentonite dans la simulation de l'essai de chauffage de Kamaishi [173].

Rigidité thermique intacte				
α_0^*	α_1	α_2	α_3	p_{geo}
$-2.55 * 10^{-5} °C^{-1}$	0	0	0	$10^{10} Pa$
Diffusion et évaporation				
λ_s	λ_w	λ_a	h_{fg}	
$1.15 W.m^{-1}.°C^{-1}$	$0.6 W.m^{-1}.°C^{-1}$	$0.0258 W.m^{-1}.°C^{-1}$	$2.5 * 10^6 J.kg^{-1}$	
Convection				
C_{Ps}	C_{Pw}	C_{Pvap}	C_{Pa}	
$1250 J.kg^{-1}.°C^{-1}$	$4180 J.kg^{-1}.°C^{-1}$	$1900 J.kg^{-1}.°C^{-1}$	$1006 J.kg^{-1}.°C^{-1}$	

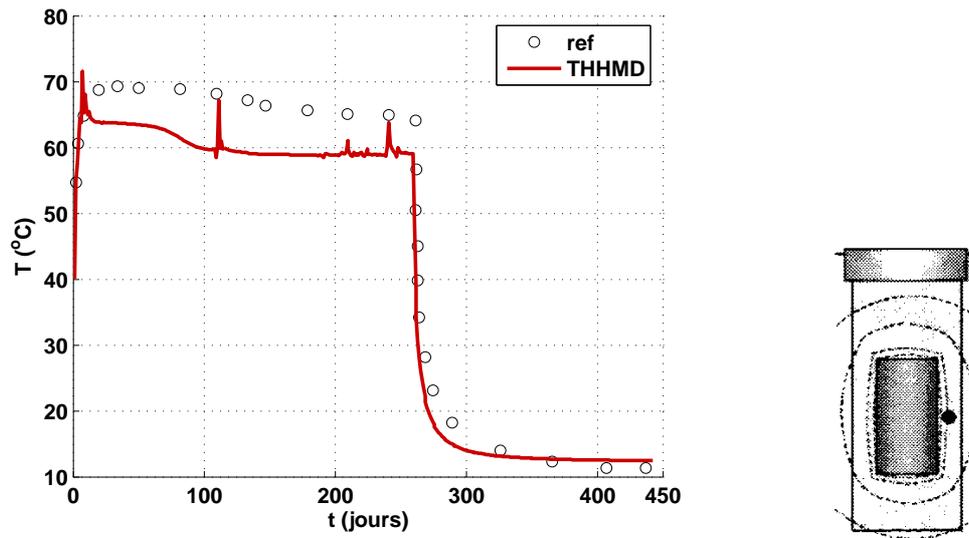


FIGURE 17.79 – Evolution de la température au point situé dans la bentonite, à mi-distance entre la source de chaleur et le massif granitique, à mi-hauteur du dispositif de chauffage.

17.5.4 Analyse des résultats obtenus dans le domaine élastique du modèle THHMD

Les auteurs rapportent les mesures expérimentales et les résultats de quatre simulations numériques [173]. Une moyenne des valeurs fournies est prise comme référence pour évaluer la validité des résultats obtenus dans le domaine élastique du modèle THHMD avec Θ -Stock.

L'évolution de la température est bien rendue dans la barrière ouvragée (figure 17.79) comme dans la barrière géologique (figure 17.80). La température de la bentonite est un peu plus faible dans la simulation numérique effectuée avec Θ -Stock que dans les simulations de référence. Cette différence vient probablement du fait que les auteurs [173] ont choisi de faire varier la capacité calorifique C_{P_s} et la conductivité thermique λ_s avec le degré de saturation, alors que dans le modèle THHMD, ces valeurs sont fixes, et ce sont les caractéristiques globales C_{PT} et λ_T qui varient.

L'évolution du degré de saturation calculé avec Θ -stock dans la barrière ouvragée est satisfaisante. Dans une zone frontalière entre les deux barrières plus éloignée de la source de chaleur, le degré de saturation calculé avec Θ -Stock correspond tout à fait aux résultats attendus (figure 17.81) : la barrière ouvragée se sature à environ 95 pour cent en une centaine de jours, et l'état de quasi-saturation est stable jusqu'à la fin de la période de relaxation. Dans la zone de contact entre la source de chaleur et le tampon de bentonite, à mi-hauteur du dispositif de chauffage, on observe une forte désaturation, comme dans les résultats de référence [173] (figure 17.82). Cependant, le degré de saturation calculé avec Θ -Stock se stabilise à une valeur plus faible que dans l'étude de référence (0.01 au lieu de 0.1), et la zone reste quasiment sèche pendant toute la simulation, alors que les auteurs [173] prévoient une resaturation après 259 jours, c'est-à-dire après l'extinction de la source de chaleur. Une fois encore, on peut expliquer cette différence par le choix de modélisation pour C_{PT} et λ_T dans la bentonite, qui n'est pas le même dans la simulation réalisée avec θ -Stock et dans les simulations de référence.

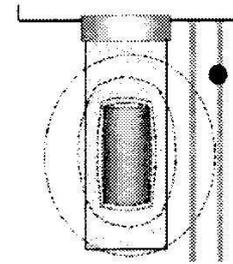
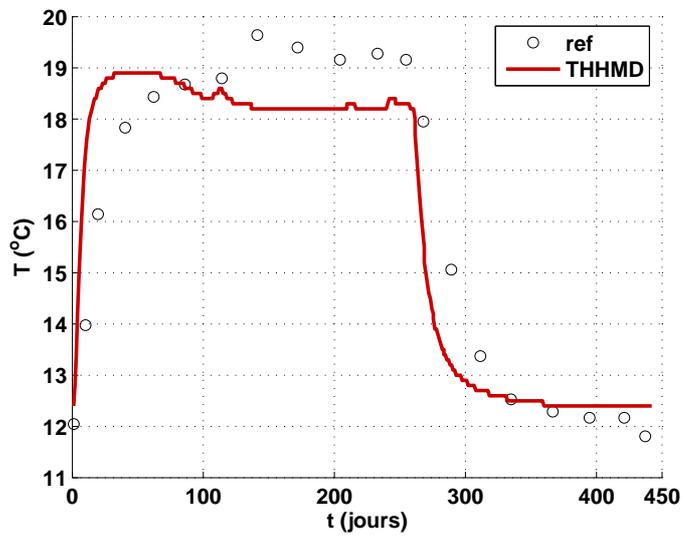


FIGURE 17.80 – Evolution de la température en un point situé dans le massif granitique, à proximité de la barrière ouvragée.

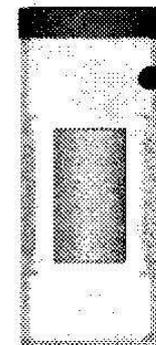
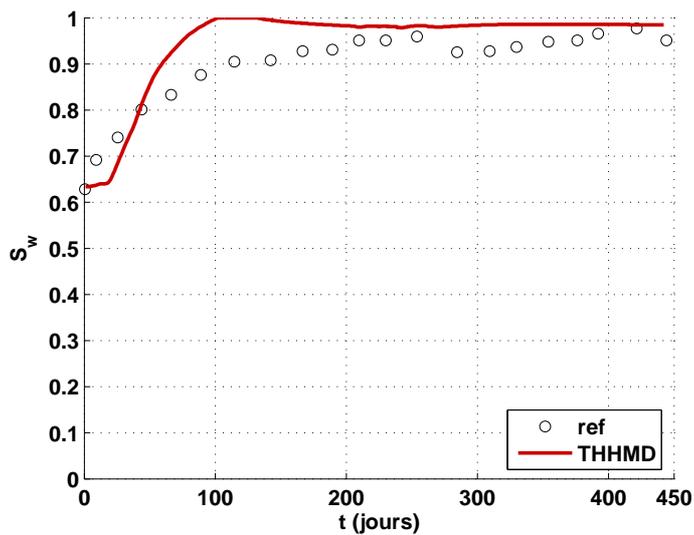


FIGURE 17.81 – Evolution du degré de saturation en un point situé dans la barrière ouvragée en bentonite, à environ un centimètre du massif géologique, au-dessus du dispositif de chauffage.

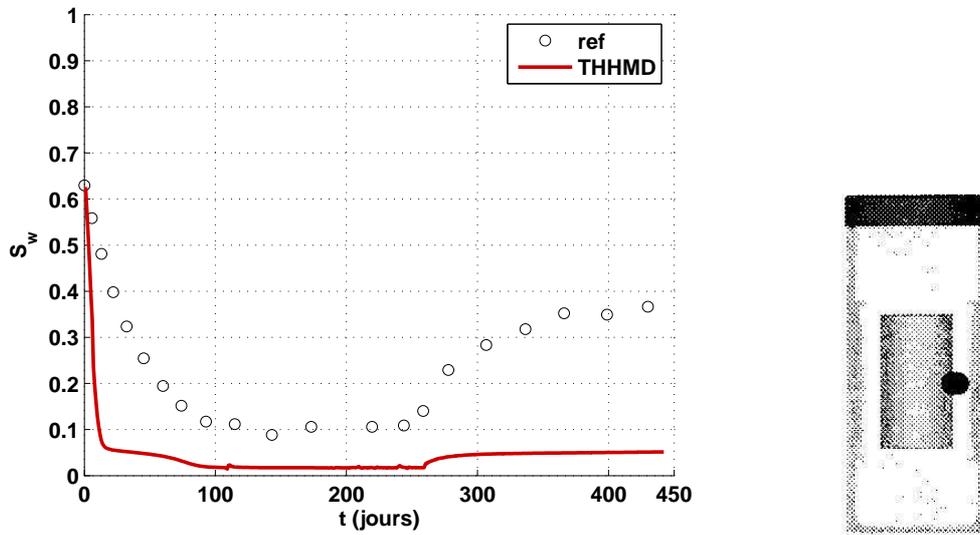


FIGURE 17.82 – Evolution du degré de saturation au point situé dans la zone de contact entre la source de chaleur et la barrière ouvragée, à mi-hauteur du dispositif de chauffage.

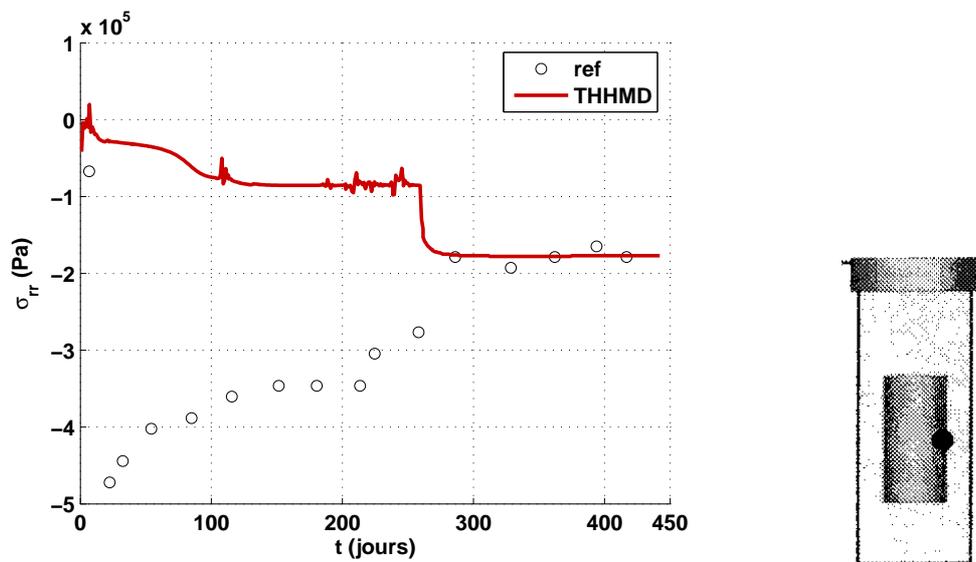


FIGURE 17.83 – Evolution de la contrainte radiale totale au point situé dans la zone de contact entre la source de chaleur et la barrière ouvragée, à mi-hauteur du dispositif de chauffage.

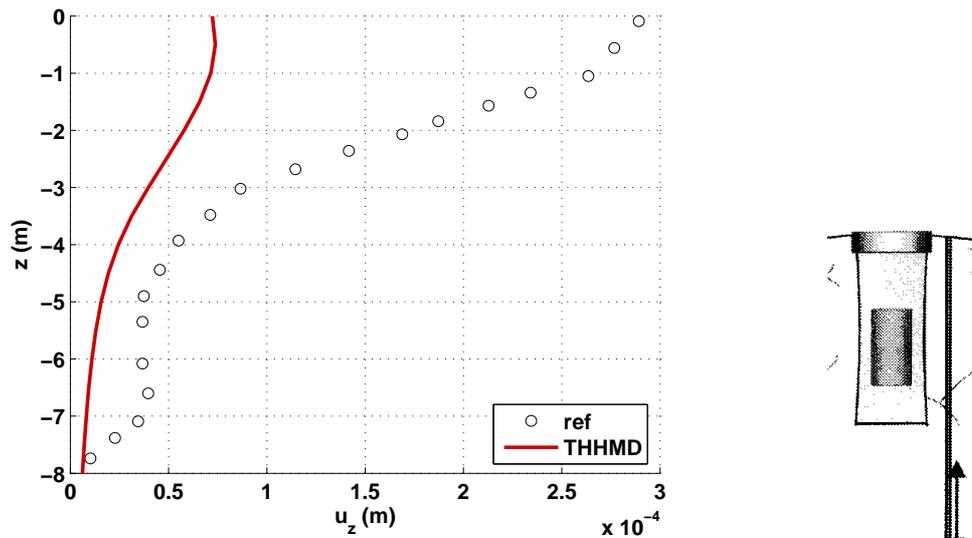


FIGURE 17.84 – Déplacements verticaux dans le massif granitique, à proximité de la barrière ouvragée, après la phase de chauffage (au bout de 8 mois et demi).

La contrainte radiale calculée avec Θ -Stock dans la zone de contact entre la source de chaleur et la bentonite à mi-hauteur du dispositif de chauffage se stabilise à la valeur prévue par les auteurs [173] après l'extinction de la source de chaleur, au bout de 259 jours (figure 17.83). Cependant, la traction subie par la barrière ouvragée pendant la phase de chauffage est en moyenne 4 fois plus faible dans les prédictions de Θ -Stock que dans les résultats de référence. Comme tous les paramètres mécaniques choisis pour effectuer la simulation sont ceux qui ont été proposés par les auteurs [173], on peut supposer que cette différence vient du choix des conditions aux limites. Les contraintes développées étant plus faibles, il est logique d'observer des déplacements verticaux plus faibles que les résultats attendus à proximité de la source juste après la phase de chauffage (figure 17.84). Pour éviter certains blocages numériques, la valeur qui a été choisie pour le paramètre β_s^0 de la bentonite est élevée. Cette hypothèse de travail rend inexploitable les prédictions de Θ -Stock sur la pression d'eau interstitielle calculée dans la barrière ouvragée. Ces résultats ne sont donc pas présentés.

17.5.5 Etude d'une configuration élastique avec un massif granitique initialement fracturé

On étudie à présent le même problème, avec un massif granitique initialement endommagé. Dans l'article de référence [173], une seule équipe de chercheurs a pris en compte la fissuration préexistante de la barrière géologique. On étudie des configurations de fracturation proches de celle qui est présentée dans l'article (figures 17.85, 17.86 et 17.87).

La présence de plans de fissuration dans le massif granitique avant le test de chauffage a peu d'influence sur le degré de saturation aux points dont les évolutions sont rapportées dans l'article de référence (figures 17.88 et 17.89).

Si on considère l'ensemble de la zone modélisée, on s'aperçoit que la fracturation du massif gra-

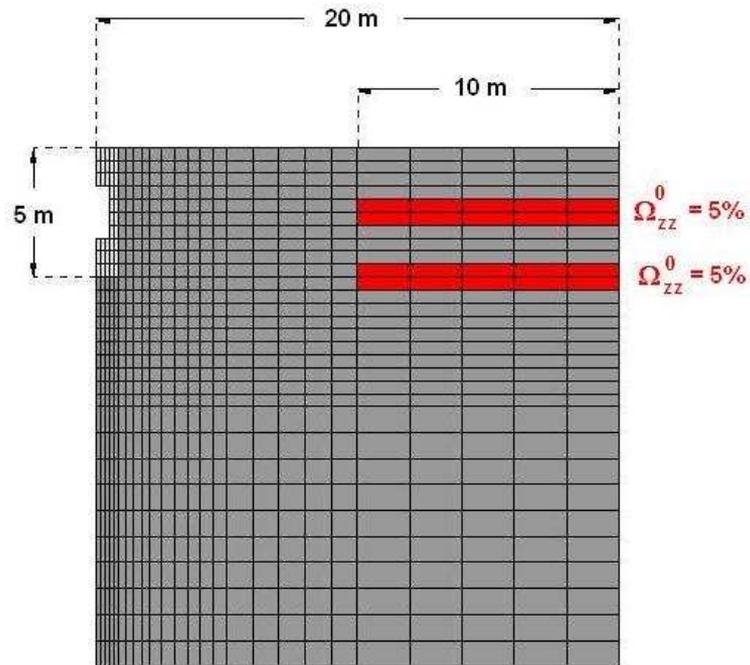


FIGURE 17.85 – Etude du problème de stockage de Kamaishi avec un massif granitique initialement endommagé. Cas n^o 1 : deux plans de fissuration horizontaux d’une étendue de 10 mètres.

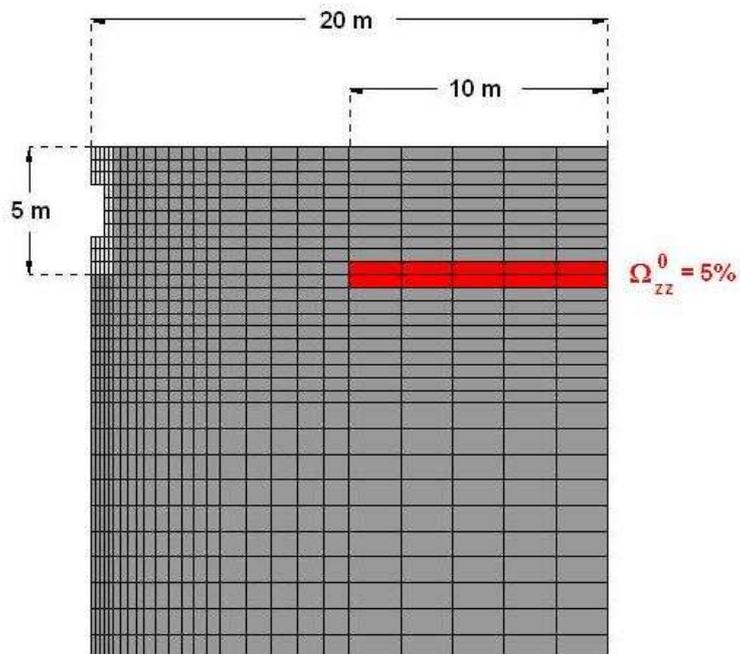


FIGURE 17.86 – Etude du problème de stockage de Kamaishi avec un massif granitique initialement endommagé. Cas n^o 2 : un plan de fissuration horizontal d’une étendue de 10 mètres.

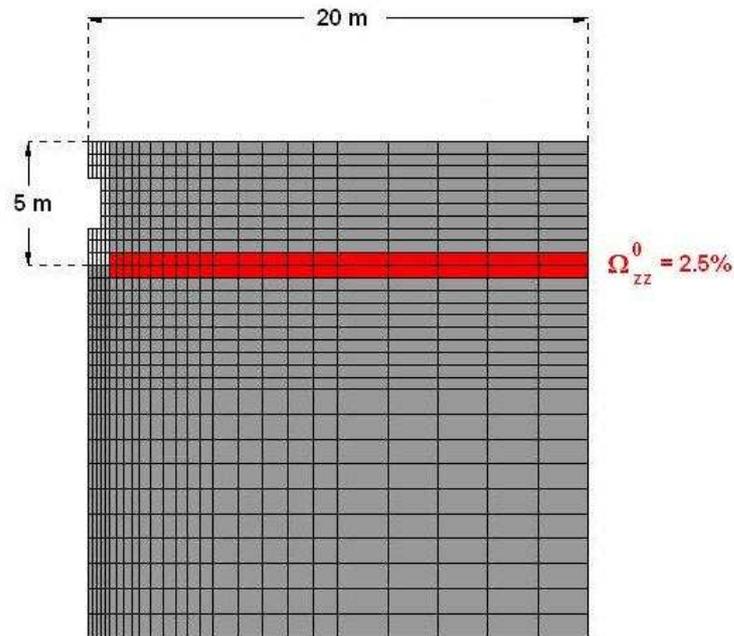


FIGURE 17.87 – Etude du problème de stockage de Kamaishi avec un massif granitique initialement endommagé. Cas $n^{\circ} 3$: un plan de fissuration horizontal d’une étendue de 20 mètres.

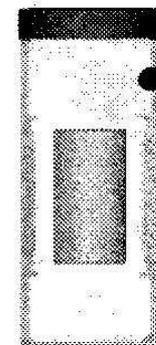
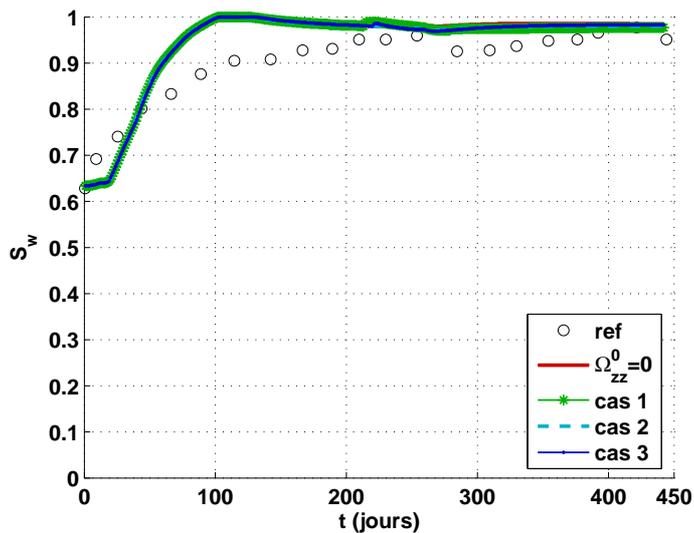


FIGURE 17.88 – Etude du problème de stockage de Kamaishi avec un massif granitique initialement endommagé. Evolution du degré de saturation en un point situé dans la barrière ouvragée en bentonite, à environ un centimètre du massif géologique, au-dessus du dispositif de chauffage.

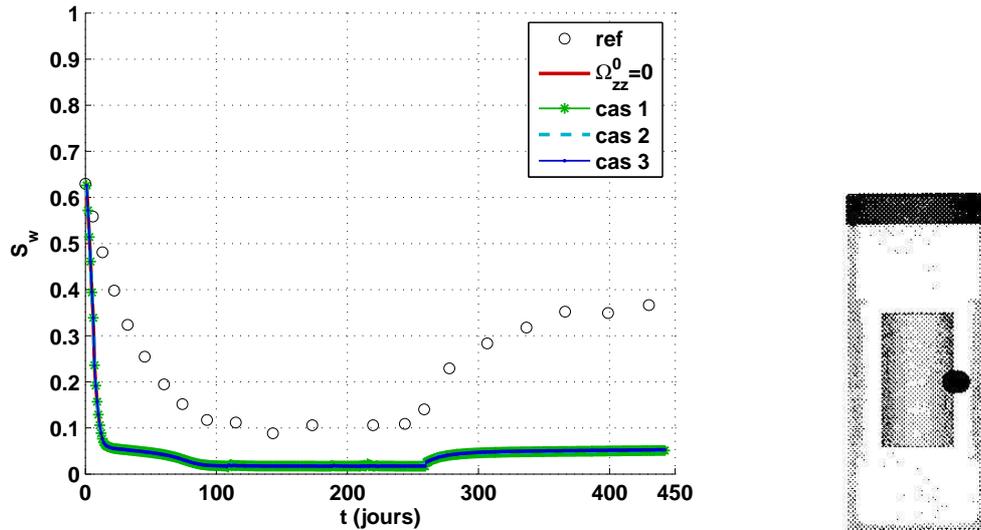


FIGURE 17.89 – Etude du problème de stockage de Kamaishi avec un massif granitique initialement endommagé. Evolution du degré de saturation au point situé dans la zone de contact entre la source de chaleur et la barrière ouvragée, à mi-hauteur du dispositif de chauffage.

nitique a une influence sur l'ensemble du processus de désaturation et resaturation des barrières géologique et ouvragée (figures 17.90, 17.91, 17.92 et 17.93). C'est particulièrement visible dans les cas où le massif granitique ne comporte qu'un plan de fissuration. La fracture constitue un espace poreux supplémentaire qui accélère les transferts de fluide. Si la fracture ne va pas jusqu'à la barrière ouvragée (cas n^o 2), la barrière géologique subit une forte désaturation au début de la période de chauffage, et comporte une zone désaturée de grande étendue (3 mètres au moins) à l'issue de la phase de relaxation (figure 17.92). Si la fracture est de plus faible ouverture mais qu'elle parcourt tout le massif, le massif granitique passe par une phase de désaturation pendant la période de chauffage, mais après la phase de relaxation, l'état de saturation final de l'ensemble des deux barrières se stabilise autour du même état que dans le cas où le massif géologique est initialement intact (figures 17.90 et 17.93). Lorsque deux fractures ne rejoignant pas la barrière ouvragée parcourent le massif granitique, l'évolution du degré de saturation est quasiment la même que dans le cas où le massif est initialement intact (figures 17.90 et 17.91). Les échanges favorisés par la première fissure semblent compensés par l'ouverture d'un second plan de fracturation.

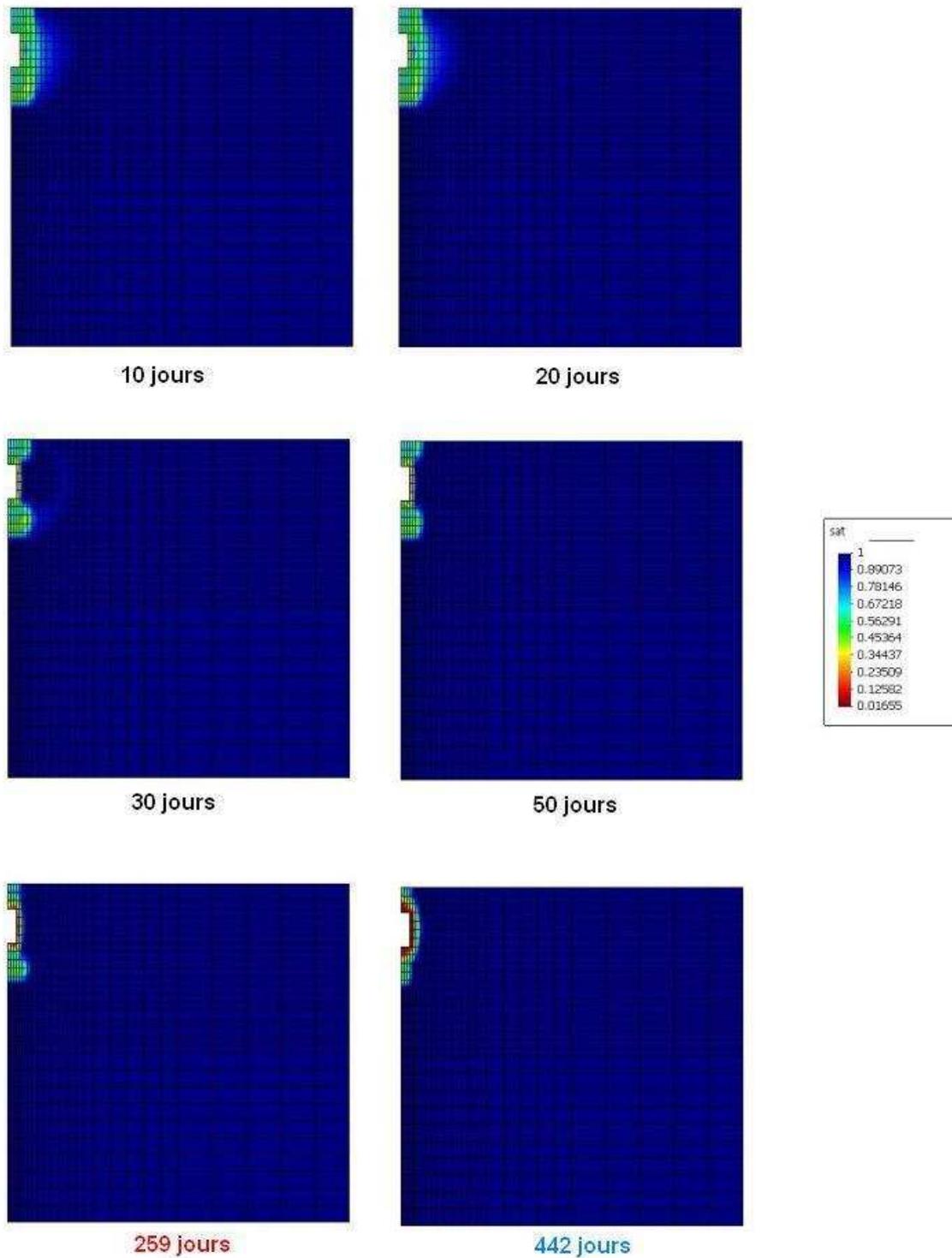


FIGURE 17.90 – Evolution spatio-temporelle du degré de saturation dans la simulation du test de Kamaishi. Cas de référence (massif granitique initialement intact).

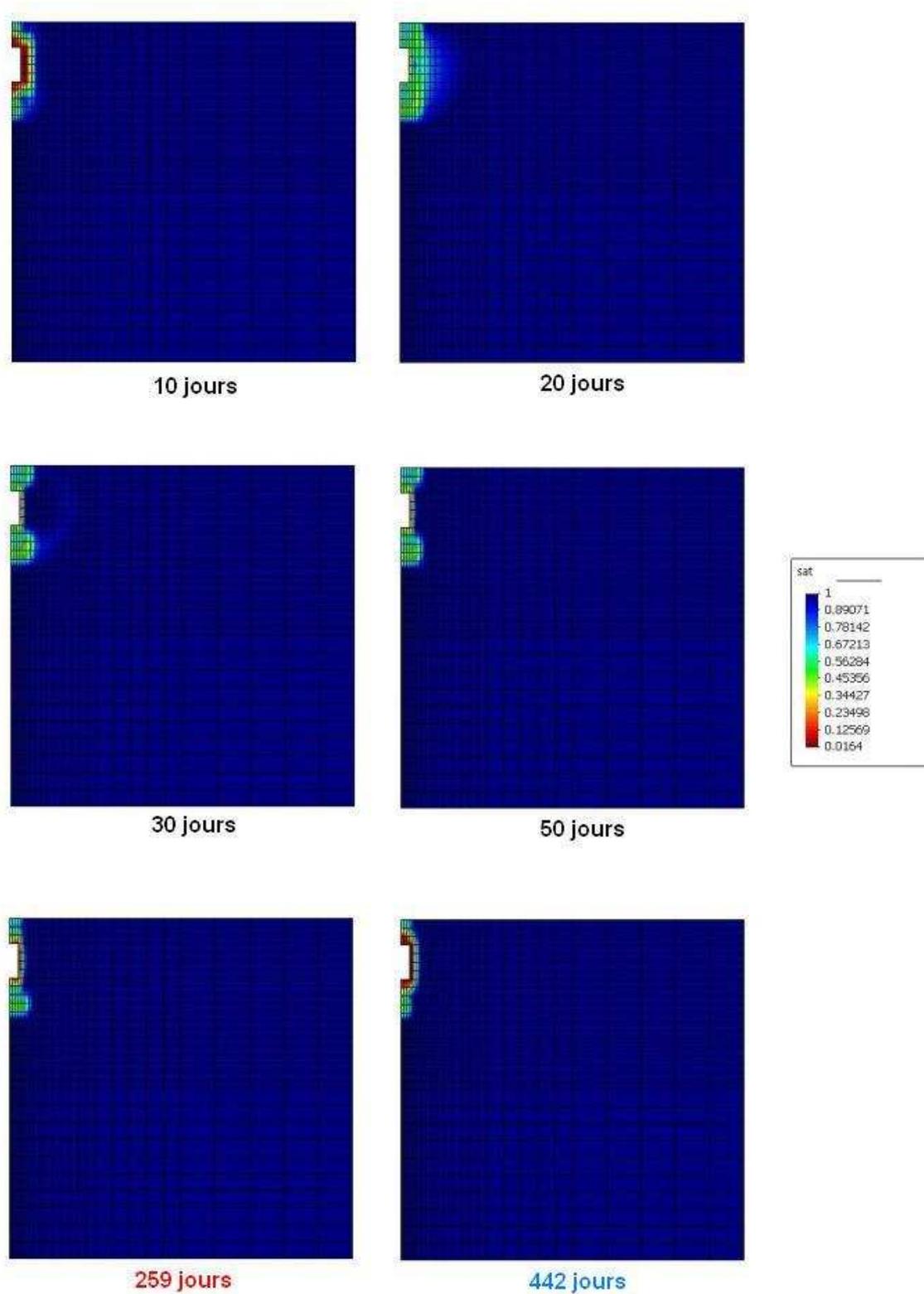


FIGURE 17.91 – Evolution spatio-temporelle du degré de saturation dans la simulation du test de Kamaishi. Cas $n^{\circ} 1$ (deux plans de fissuration horizontaux d’une étendue de 10 mètres).

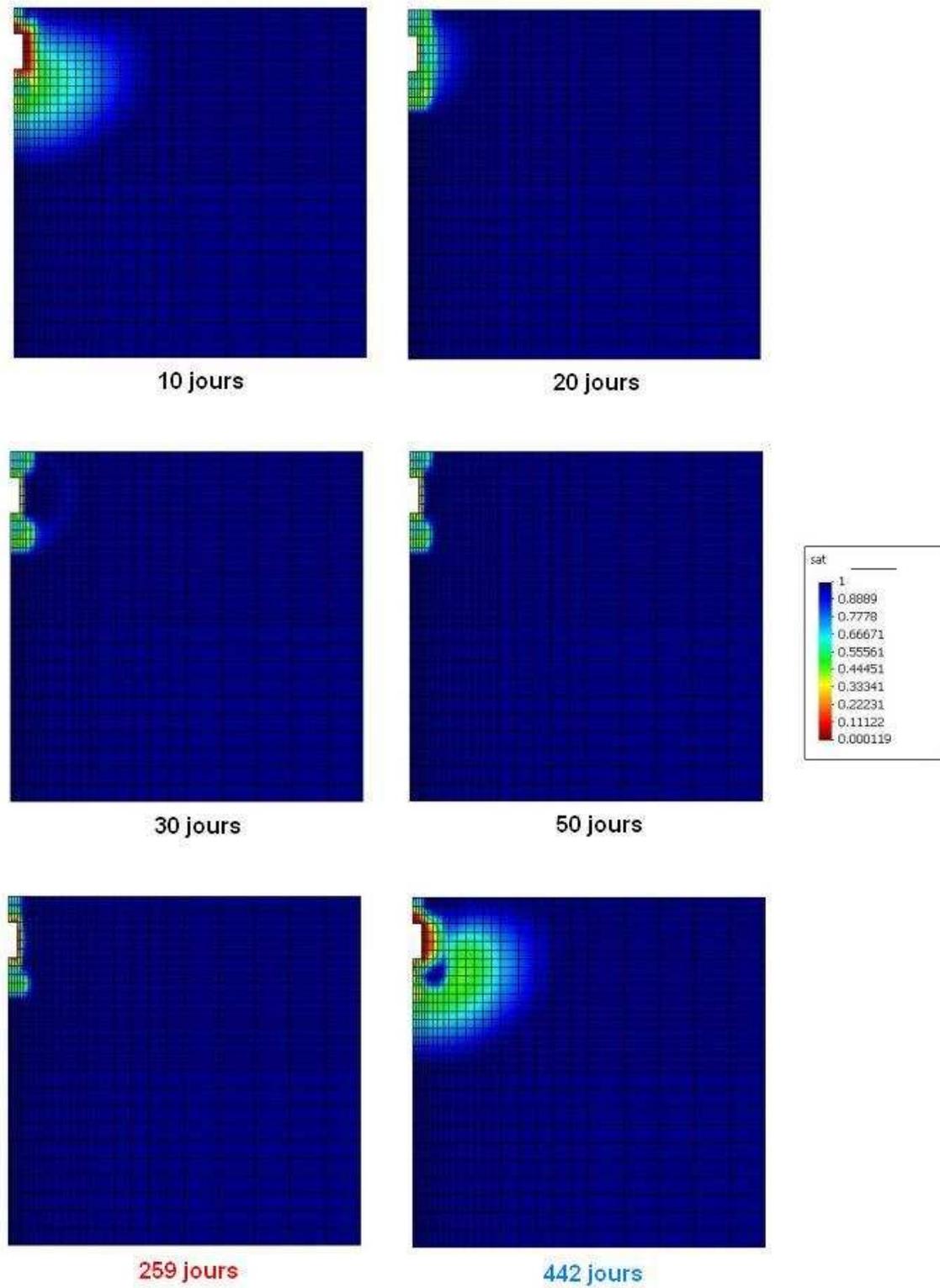


FIGURE 17.92 – Evolution spatio-temporelle du degré de saturation dans la simulation du test de Kamaishi. Cas $n^{\circ} 2$ (un plan de fissuration horizontal d’une étendue de 10 mètres).

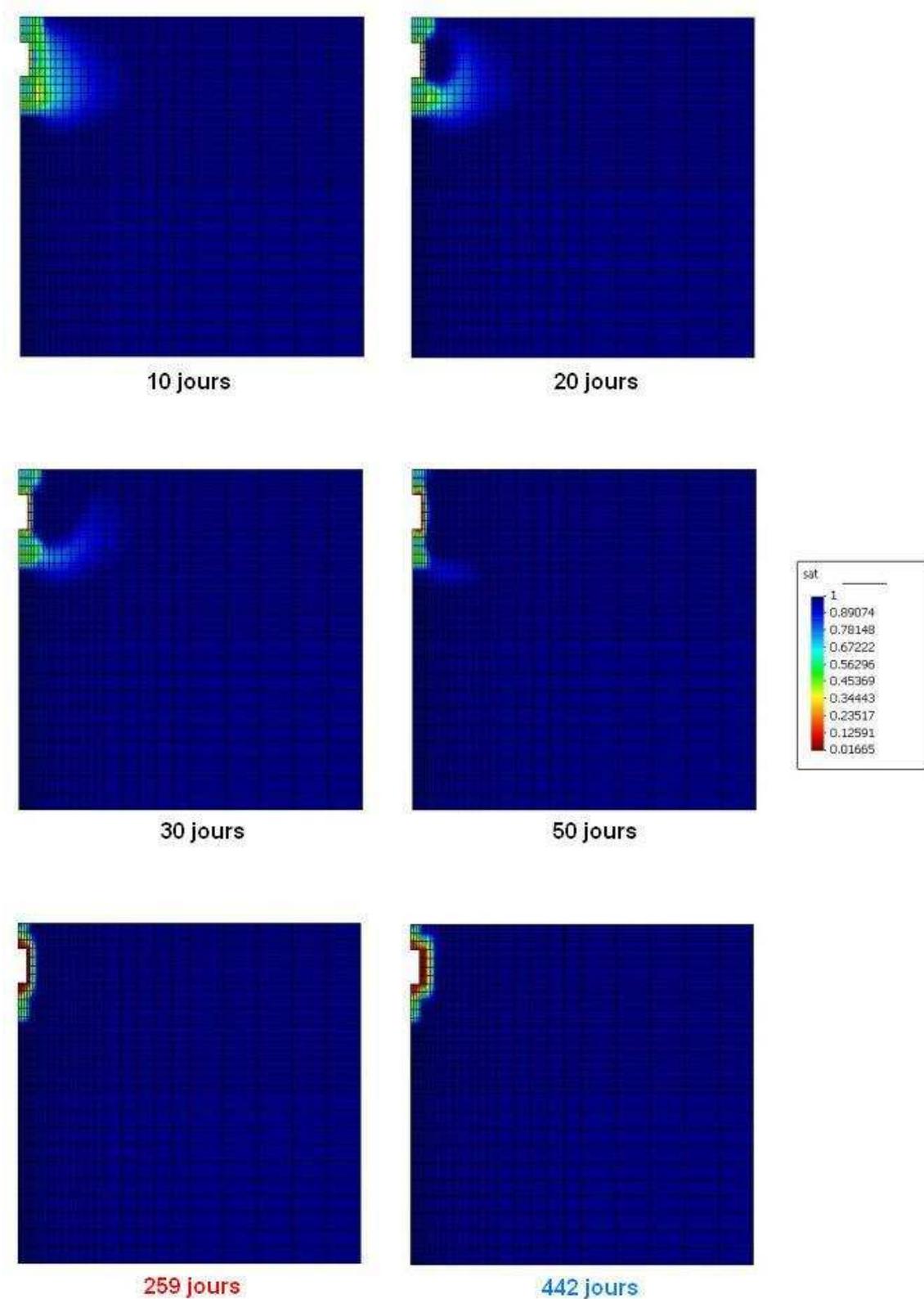


FIGURE 17.93 – Evolution spatio-temporelle du degré de saturation dans la simulation du test de Kamaishi. Cas $n^{\circ} 3$ (un plan de fissuration horizontal d'une étendue de 20 mètres).

CHAPITRE 18

Conclusion

Ce travail s'inscrit dans un projet de recherche européen, TIMODAZ (*Thermal Impact on the Damaged Zone around a Radioactive Waste Disposal in Clay Host Rocks*), dont l'objectif est de prévoir le comportement de la zone endommagée par l'excavation de galeries destinées à stocker des déchets radioactifs. Les phénomènes physiques en jeu sont complexes, car les barrières de confinement sont des milieux poreux dont la saturation est couplée aux sollicitations thermo-mécaniques. La barrière ouvragée, généralement faite de bentonite (qu'on peut assimiler à de l'argile compactée), est partiellement saturée au moment du dépôt des paquets radioactifs, alors que la barrière géologique envisagée, faite de granite ou d'argilite, est naturellement saturée. Les prédictions sont d'autant plus difficiles à faire que l'état initial des différents milieux est souvent mal connu. La plupart des études expérimentales ou numériques qui ont été pratiquées jusqu'à présent portent généralement soit sur la phase d'excavation précédant l'entreposage des déchets, soit sur la sollicitation thermique liée au stockage des paquets radioactifs. Dans le second cas, la perturbation du massif générée par l'excavation est le plus souvent modélisée de façon simplifiée.

À l'heure actuelle, peu de modèles d'endommagement ont été proposés pour les milieux poreux non saturés. Une approche consiste à faire abstraction de la partie mécanique du problème d'endommagement, et à étudier l'influence d'un réseau de fissures au travers des répercussions qui existent au niveau des transferts. Les *modèles multimodaux* permettent d'étudier un réseau de pores aux tailles hétérogènes tout en considérant une unique équation d'équilibre hydraulique à l'échelle du Volume Élémentaire Représentatif, tandis que les *modèles multi-continua* sont fondés sur l'hypothèse que les flux sont régis par plusieurs réseaux poreux indépendants, qui ne sont pas nécessairement en équilibre, et qui peuvent interagir entre eux. Les modèles de réseaux sont formulés en conditions isothermes, et sont pour la plupart exclusivement consacrés à la description de l'écoulement de l'eau liquide. La seconde méthode couramment adoptée est fondée sur la Mécanique des Milieux Continus Endommagés ("*Continuum Damaged Mechanics*", *CDM*). Une loi de comportement endommagée est exprimée en contrainte totale, et la contrainte totale est le plus souvent injectée dans la définition d'une contrainte effective au sens de Bishop. L'endommagement modélisé est alors exclusivement d'origine mécanique, et le phénomène de fissuration est partiellement découplé des phénomènes capillaires. À l'heure où ce mémoire est écrit, un seul modèle d'endommagement formulé en variables indépendantes a été trouvé dans les ressources bibliographiques.

Le modèle d'endommagement développé pendant cette thèse, appelé *modèle "THHMD"*, est destiné à étudier la fissuration de géomatériaux quasi-fragiles non saturés en conditions non isothermes. Le cadre théorique présenté dans cette thèse permet d'étudier les milieux poreux impliqués dans la conception de galeries de stockage de déchets radioactifs, à la fois pendant la phase d'excavation et à la fois pendant la phase d'exploitation, durant laquelle le système

consitué par la barrière ouvragée et par la barrière géologique est soumis à une sollicitation thermique décroissante. Le modèle THHMD est formulé en variables d'état indépendantes : contraintes nettes, succion et contrainte thermique. Selon un principe de décomposition déjà adopté par Gatmiri [70, 71, 72], le tenseur des déformations totales est décomposé en trois tenseurs de déformation thermodynamiquement indépendants, chacun étant conjugué à l'une des variables d'état de contrainte précédemment choisie [8]. Ainsi, le tenseur des déformations mécaniques ϵ_M est thermodynamiquement conjugué au tenseur des contraintes nettes σ , les déformations capillaires volumiques ϵ_{Sv} sont thermodynamiquement conjuguées à la succion s , et les déformations thermiques volumiques ϵ_{Tv} sont thermodynamiquement conjuguées à la contrainte thermique p_T . Pour les besoins de l'implantation numérique du modèle dans le code d'Eléments Finis Θ -Stock [72], créé par Gatmiri, la loi de comportement incrémentale a par la suite été traduite en fonction des variations des déformations totales, de la succion et de la température. Le modèle est formulé à l'échelle d'un **Volume Élémentaire Représentatif (VER)**, potentiellement endommagé par des microfissures qui, par hypothèse, n'interagissent pas. Les microfissures sont fictivement regroupées en familles de fissures d'orientation similaire, si bien que l'endommagement est en fait représenté par trois méso-fissures virtuelles, correspondant aux trois plans de fissuration principaux qui endommagent le VER. La variable d'endommagement est ainsi le tenseur de densité de fissuration d'ordre 2 tel qu'il a été défini par Kachanov [106], exprimé dans une base principale, qui est considérée comme étant fixe. L'endommagement est donc une variable homogénéisée.

La formulation du modèle est **mixte**, c'est-à-dire qu'elle combine des fondements **phénoménologiques** et des aspects **micromécaniques**. La loi de comportement est dérivée de l'expression de l'énergie libre de Helmholtz. On fait le postulat que cette dernière s'écrit sous la forme de trois potentiels élastiques dégradés et de trois potentiels relatifs à l'existence de déformations résiduelles après déchargement [55]. L'introduction de trois composantes énergétiques est motivée par le choix de trois variables d'état indépendantes. L'intervention de potentiels qui décrivent les déformations qui subsistent après le déchargement permet de représenter des effets résiduels sans passer par l'introduction d'un potentiel plastique supplémentaire. Les expressions de ces potentiels liés aux effets résiduels découlent de l'homogénéisation des micro-contraintes responsables de l'ouverture des microfissures au sein du VER. Le processus d'homogénéisation passe par la considération d'un **état mécanique équivalent**, dans lequel le VER est soumis non seulement aux contraintes mécaniques exercées dans le champ lointain, mais aussi à la méso-contrainte homogénéisée qui est à l'origine de l'ouverture de microfissures au sein du VER. Chaque potentiel relatif à des déformations résiduelles dépend d'une rigidité d'endommagement scalaire. Etant issus d'un processus d'homogénéisation, ces potentiels sont non locaux. On peut les comparer aux termes énergétiques régularisateurs qui interviennent dans d'autres modèles « traités » contre les problèmes de **localisation**.

On suppose que l'endommagement croît avec des sollicitations mécaniques ou thermiques engendrant des déformations de tension [150] d'une part, et avec des sollicitations capillaires générant une rétraction des pores d'autre part. Par conséquent, seule une composante de la contrainte thermodynamiquement conjuguée à l'endommagement intervient dans la fonction de charge. Cette dernière s'exprime en fonction des déformations résiduelles de tension mécanique, de rétraction capillaire et de tension thermique. La fonction de charge est quadratique, et ne comprend que deux valeurs de seuil. La loi d'écoulement est pseudo-normale (elle serait normale si la fonction de charge dépendait de l'intégralité de la contrainte thermodynamiquement conjuguée à l'endommagement).

Les rigidités endommagées mécanique, capillaire et thermique sont calculées par une méthode micromécanique. Une *variable d'état dite endommagée (effective en CDM)* est définie pour chaque variable de contrainte (contraintes nettes, succion et contrainte thermique), au moyen de l'opérateur de Cordebois et Sidoroff [42, 185]. L'application du *Principe de l'Energie Elastique Equivalente (PEEE)* permet ensuite d'en déduire les expressions des rigidités endommagées en fonction des rigidités intactes et de l'endommagement.

Contrairement à tous les modèles d'endommagement proposés jusqu'à présent pour les milieux poreux non saturés, les effets de la fissuration ne sont pas seulement pris en compte dans la loi de comportement, mais aussi dans les lois de transfert. Les transferts des fluides sont supposés être diffusifs [70]. Le flux thermique comporte quant à lui un terme diffusif, un terme advectif et un terme relatif à l'évaporation. L'advection et l'évaporation étant des phénomènes ne faisant pas intervenir la matrice solide, susceptible d'être fissurée, l'endommagement ne peut influencer que des paramètres de conductivité diffusifs.

La perméabilité à l'eau liquide du matériau endommagé comporte une composante isotrope, relative à la contribution à l'écoulement du réseau de pores réversiblement déformé. L'expression de cette perméabilité « réversible » est la même que celle de la perméabilité du matériau intact [70]. Une composante tensorielle (d'ordre 2) est introduite pour refléter les effets de l'anisotropie induite par l'endommagement sur le transfert de l'eau liquide. Cette perméabilité, spécifique au réseau de fracturation, est calculée en adaptant la méthode de Shao et al. [180] à un réseau de méso-fissures homogénéisées. Le flux à l'intérieur des fissures est supposé laminaire, si bien que la vitesse d'écoulement de l'eau au sein des méso-fissures peut s'écrire au moyen d'une loi cubique. La formule obtenue dépend d'un paramètre de *longueur interne*, qu'on peut déterminer si la perméabilité peut être mesurée à un niveau d'endommagement connu. La même démarche est adoptée pour modéliser le transfert de la vapeur au sein du VER endommagé, à ceci près que la diffusivité du matériau fissuré est supposée être un scalaire. Autrement dit, l'endommagement module l'écoulement de la vapeur, mais ne l'oriente pas. Une seconde longueur interne est introduite. Cette dernière peut être exprimée en fonction du paramètre introduit pour l'eau liquide si la diffusivité endommagée est connue pour le même niveau d'endommagement que la perméabilité endommagée.

Les expressions de la perméabilité à l'air et de la conductivité thermique de Fourier du matériau intact sont conservées pour caractériser l'état endommagé. Pour autant, cela ne signifie pas que les transferts de l'air et de la chaleur ne subissent pas l'influence de la fissuration, puisque les conductivités impliquées dépendent soit de l'indice des vides, soit de la porosité [70]. Cette dépendance vis-à-vis des déformations volumiques traduit une dépendance isotrope vis-à-vis du tenseur de déformations totales, qui comporte une composante inélastique, et qui dépend donc de l'endommagement. Autrement dit, dans le modèle THHMD, les transferts de l'air et de la chaleur dépendent indirectement de l'intensité de l'endommagement, et ne sont pas orientés par la fissuration.

Le modèle THHMD a été programmé dans le code d'Elements Finis Θ -Stock, pour réaliser des études en déformations planes ou en configuration axisymétrique. Des variables de stockage dynamique ont été ajoutées non seulement pour les besoins du modèle, mais aussi pour les besoins de l'algorithme de résolution. Ce dernier comporte trois boucles de calcul imbriquées : pour chaque incrément de chargement k , un calcul itératif classique est réalisé. Pour chaque itération

(k,i), le résidu est calculé selon la méthode de Newton-Raphson modifiée, au terme d'un calcul itératif destiné à déterminer l'incrément de contrainte associée à l'endommagement $d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}}^+$, dont l'expression est non linéaire. A chaque itération (k,i,j) du calcul de $d\mathbf{Y}_{\mathbf{d1}}^+$, un double test de convergence est pratiqué. Puis un double test de convergence est réalisé pour évaluer le vecteur résidu global et le vecteur de degrés de liberté global à partir de cette solution provisoirement convergée à l'itération (k,i). Le calcul du résidu est complexe, car il met en jeu des lois de transfert complètement couplées par cinq degrés de liberté nodaux. Un chapitre de ce mémoire est consacré au calcul du résidu dans l'algorithme propre au modèle THHMD.

Comme il existe peu de modèles d'endommagement dédiés à l'étude des milieux non saturés, il existe peu d'études numériques de l'endommagement dont on puisse comparer les résultats à ceux donnés par le modèle THHMD. De même, comme c'est un nouveau modèle, qui comporte quelques paramètres spécifiques, il est très difficile de comparer des résultats expérimentaux aux résultats fournis par le programme Θ -Stock. En effet, le calage des paramètres est très délicat, et un programme expérimental adapté au modèle THHMD serait nécessaire pour valider le modèle rigoureusement. En outre, si on trouve quelques exemples d'essais mécaniques réalisés sur des matériaux fragiles, les effets capillaires et thermiques ont essentiellement été modélisés en élasticité ou en élastoplasticité. C'est pourquoi les études numériques rapportées dans ce mémoire sont le plus souvent des tests de justification du modèle THHMD, plutôt que des tests de validation. On a suivi la démarche suivante :

- **tests de validation** : lorsque des résultats exploitables étaient fournis pour des essais réalisés sur des géomatériaux fragiles, on a tenté de reproduire les expériences numériquement, en choisissant les mêmes paramètres matériels que les auteurs, ou, à défaut, des valeurs raisonnables trouvées dans d'autres articles ;
- **tests de justification** : lorsque des études expérimentales et/ou numériques étaient proposées pour étudier les effets du chauffage d'un matériau poreux non saturé élastique, on a tenté de reproduire la géométrie, les conditions initiales, les conditions aux limites et le programme de chargement choisis par les auteurs, avec des paramètres matériels reflétant le comportement le plus proche possible de celui qui était modélisé par les auteurs. On a ainsi essayé de vérifier les résultats donnés par le programme Θ -Stock dans le domaine élastique du modèle THHMD. Puis on a réalisé diverses études paramétriques sur l'endommagement (rigidité d'endommagement, intensité de chargement, chargements multiples, longueurs internes, endommagement initial) pour étudier les tendances données par le modèle THHMD dans le domaine fragile, dans le cadre de problèmes réalistes.

Les tests de validation réalisés d'après des essais de compression triaxiale sur des matériaux secs [38, 91, 56] et d'après des essais de compression triaxiale drainés et non drainés [184] sur des matériaux saturés donnent de très bons résultats, notamment pour le granite et le grès. Par ailleurs, on vérifie parfaitement la théorie unidimensionnelle des tunnels pour un chargement mécanique élastique. La modélisation thermo-mécanique de galeries profondes creusées dans un massif granitique sec [32] permet de bien reproduire le phénomène de diffusion de la température, en déformations planes comme en configuration axisymétrique, lors d'un réchauffement comme lors d'un refroidissement. Par ailleurs, les tendances de l'endommagement thermique sont bonnes. Le calage des paramètres pour les tests réalisés en conditions non saturées est très délicat. Cependant, on arrive à obtenir d'excellents résultats en élasticité pour des problèmes dans

lesquels la matrice solide est considérée rigide, que ce soit pour un test de chauffage pratiqué en laboratoire [161], ou pour la simulation du comportement d'une galerie réelle [163]. L'adéquation parfaite entre les résultats de référence et les résultats donnés par Θ -Stock est plus difficile à obtenir lorsque le problème est complètement couplé (problème THHM). Cependant, on obtient de bons ordres de grandeur et de bonnes tendances pour les déformations volumiques, le degré de saturation et la température, pour des tests de laboratoire [202], comme pour la simulation d'essais de chauffage réalisés in situ (à échelle réelle), avec une barrière ouvragée non saturée et une barrière géologique initialement saturée [79, 173]. Dans tous les tests de justification, même les plus complexes, les tendances observées pour l'endommagement sont conformes à la théorie proposée. Globalement, on constate que :

- l'endommagement augmente avec la rigidité d'endommagement (g_M ou g_S ou g_T) ;
- l'endommagement croît avec l'intensité du chargement, de quelque nature qu'il soit ;
- la combinaison de plusieurs types d'endommagement (i.e. de plusieurs rigidités d'endommagement non nulles) accélère l'occurrence de la rupture totale du matériau, et généralement, un type d'endommagement est prépondérant (endommagement mécanique ou capillaire ou thermique), selon le type de chargement envisagé ;
- l'influence de l'endommagement sur la perméabilité à l'eau est d'autant plus forte que le paramètre de longueur interne correspondant est grand, et le choix d'une longueur matérielle trop faible neutralise les effets de la fissuration sur la perméabilité à l'eau ;
- l'état d'endommagement initial du massif géologique peut grandement influencer le processus de désaturation par séchage et de resaturation par condensation au sein de la barrière géologique.

Le modèle proposé donne satisfaction pour décrire l'évolution des objets envisagés dans sa formulation... mais comporte de nombreuses limitations, car des simplifications ont été effectuées et des phénomènes physiques ont été ignorés. Par exemple, l'hypothèse de non-interaction des fissures soulève quelques questions. L'endommagement ne serait-il pas mieux modélisé par plusieurs potentiels dissipatifs ? Si oui, comment garantir l'indépendance de ces potentiels ? Concernant les phénomènes physiques à explorer, il serait intéressant de coupler le modèle THHMD avec un modèle viscoplastique, pour mieux représenter les effets du temps sur des galeries destinées à être exploitées pendant des dizaines d'années. Le problème de la rotation du plan principal de l'endommagement n'a pas encore été vraiment traité à l'heure actuelle. L'approche discrète adoptée par Bargellini [13] est très mathématique, et difficile à mettre en oeuvre numériquement. La décomposition spectrale du tenseur de souplesse proposée par Desmorat [54] ne semble pas avoir été transcrite dans un programme numérique. Par ailleurs, l'anisotropie de l'endommagement ramène au problème du choix du nombre de paramètres de type longueur interne. En toute rigueur, ne faudrait-il pas associer un tenseur de longueurs internes à toute variable tensorielle d'endommagement, comme c'est suggéré par Bargellini [13] ? En outre, une étude de l'enrichissement par microstructure serait intéressante pour décrire les phénomènes de bifurcation [199]. Enfin, la modélisation des phénomènes de cicatrisation est très complexe. Il semble qu'on ne puisse pas se passer d'une variable tensorielle d'ordre 4 pour faire ce travail rigoureusement [90]. Dans le cadre de cette thèse, le modèle THHMD n'a été utilisé que pour étudier des problèmes géotechniques liés à l'EDZ. De nombreuses applications de la modélisation de l'endommagement semblent également possibles en biomécanique [183].

ANNEXE A

Détail du calcul de la rigidité mécanique endommagée

A.1 Inverse de l'opérateur de contraintes endommagées

On exprime le tenseur $\delta_{ij} - \Omega_{ij}$ dans une base principale. Il devient alors facile d'exprimer le tenseur $A_{ij} = (\delta - \Omega)^{1/2}_{ij}$ dans une base principale. On a :

$$\forall \sigma''_{kl}, \quad M (\Omega_{pq})^{-1}_{ijkl} \sigma''_{lk} = A_{ik} \sigma''_{kl} A_{lj} \quad (\text{A.1})$$

En configuration axisymétrique, σ''_{ij} est décomposé dans la base $(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta)$, et les couples d'indices (i,j) et (k,l) du coefficient tensoriel $\left[M (\Omega_{pq})^{-1} \right]_{ijkl}$ prennent leurs valeurs dans l'espace $((r,r), (z,z), (r,z), (\theta, \theta))$:

$$\begin{aligned} & \text{si } (i,j) \neq (r,r) \text{ ou } (z,z) \text{ ou } (r,z) \text{ ou } (\theta,\theta) \\ & \text{ou si } (k,l) \neq (r,r) \text{ ou } (z,z) \text{ ou } (r,z) \text{ ou } (\theta,\theta) \\ & \text{alors } \left[M (\Omega_{pq})^{-1} \right]_{ijkl} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Le principe de décomposition est le même en déformations planes, avec une projection dans l'espace $((x,x), (y,y), (x,y))$. Comme l'égalité A.1 est vraie pour tout tenseur σ''_{kl} , on peut écrire l'égalité A.1 pour toutes les composantes de base $\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z$ et $\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta$. On obtient ainsi les coefficients $\left[M (\Omega_{pq})^{-1} \right]_{ijrr}, \left[M (\Omega_{pq})^{-1} \right]_{ijzz}, \left[M (\Omega_{pq})^{-1} \right]_{ijrz}$ et $\left[M (\Omega_{pq})^{-1} \right]_{ij\theta\theta}$, pour tout couple (i,j) de l'espace $((r,r), (z,z), (r,z), (\theta, \theta))$.

Le tenseur A_{ij} est exprimé dans la base canonique : en configuration axisymétrique, les indices i et j prennent alors leurs valeurs dans l'espace (r, z, θ) . Les coefficients $\left[M (\Omega_{pq})^{-1} \right]_{ijrr}, \left[M (\Omega_{pq})^{-1} \right]_{ijzz}, \left[M (\Omega_{pq})^{-1} \right]_{ijrz}$ et $\left[M (\Omega_{pq})^{-1} \right]_{ij\theta\theta}$ s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[M (\Omega_{pq})^{-1} \right]_{ijrr} = A_{ir} A_{rj} \\ \left[M (\Omega_{pq})^{-1} \right]_{ijzz} = A_{iz} A_{zj} \\ \left[M (\Omega_{pq})^{-1} \right]_{ijrz} = A_{ir} A_{zj} \\ \left[M (\Omega_{pq})^{-1} \right]_{ij\theta\theta} = A_{i\theta} A_{\theta j} \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

A.2 Coefficients du tenseur de rigidité mécanique intact

En configuration axisymétrique, les couples d'indices (i,j) et (k,l) du coefficient tensoriel $[D_e^0]_{ijkl}$ prennent leurs valeurs dans l'espace $((r,r), (z,z), (r,z), (\theta, \theta))$, et on peut écrire le tenseur d'ordre 4 D_e^0 sous la forme d'un tenseur d'ordre 2 D_{eIJ}^0 , dont les indices I,J prennent leurs valeurs dans l'espace $(rr, zz, rz, \theta\theta)$. Le principe de décomposition est le même en déformations planes, mais les directions sont (xx, yy, xy) . Dans un tel espace, le tenseur \mathbf{D}_e^0 peut s'écrire :

$$[\mathbf{D}_e^0] = \frac{3B^0}{9B^0 - E^0} \begin{bmatrix} 3B^0 + E^0 & 3B^0 - E^0 & 0 & 3B^0 - E^0 \\ 3B^0 - E^0 & 3B^0 + E^0 & 0 & 3B^0 - E^0 \\ 0 & 0 & E^0 & 0 \\ 3B^0 - E^0 & 3B^0 - E^0 & 0 & 3B^0 + E^0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Le domaine réversible du modèle THHMD est modélisé par une loi élastique non-linéaire de type hyperbolique :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_L = K_L p_{atm} (1 - R_f S_L)^2 \left(\frac{\sigma_3}{p_{atm}} \right)^n, \quad S_L = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \\ E_U = K_U p_{atm} \left(\frac{\sigma_3}{p_{atm}} \right)^n \\ B = K_b p_{atm} \left(\frac{\sigma_3}{p_{atm}} \right)^m = K' = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{2\mu + 3\lambda}{3} \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

avec les coefficients de Lamé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$

ANNEXE B

Détail du calcul des dérivées des rigidités endommagées

B.1 Calcul de la dérivée de l'inverse de l'opérateur de contraintes endommagées

On utilise la relation A.3, qui permet de calculer les coefficients du tenseur $M(\Omega_{pq})^{-1}_{ijkl}$ en fonction des coefficients du tenseur Ω_{pq} . Si on travaille dans une configuration axisymétrique, on peut exprimer la dérivée de $M(\Omega_{pq})^{-1}_{ijkl}$ par rapport à l'endommagement de la manière suivante :

$$\frac{\partial[M(\Omega_{pq})^{-1}]_{ijkl}}{\partial\Omega_{pq}} = \sum_{i,j,p,q} \left(\frac{\partial[M(\Omega_{pq})^{-1}]_{ijrr}}{\partial\Omega_{pq}} + \frac{\partial[M(\Omega_{pq})^{-1}]_{ijzz}}{\partial\Omega_{pq}} + \frac{\partial[M(\Omega_{pq})^{-1}]_{ijrz}}{\partial\Omega_{pq}} + \frac{\partial[M(\Omega_{pq})^{-1}]_{ij\theta\theta}}{\partial\Omega_{pq}} \right) \quad (\text{B.1})$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\frac{\partial[M(\Omega_{pq})^{-1}]_{ijkl}}{\partial\Omega_{pq}} = \sum_{i,j,p,q} \left(\frac{\partial A_{ir} A_{rj}}{\partial\Omega_{pq}} + \frac{\partial A_{iz} A_{zj}}{\partial\Omega_{pq}} + \frac{\partial A_{ir} A_{zj}}{\partial\Omega_{pq}} + \frac{\partial A_{i\theta} A_{\theta j}}{\partial\Omega_{pq}} \right) \quad (\text{B.2})$$

Le principe est le même en déformations planes. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial[M(\Omega_{pq})^{-1}]_{ijkl}}{\partial\Omega_{pq}} = & \sum_{i,j,p,q} \left(\left(\frac{\partial A_{ir}}{\partial\Omega_{pq}} A_{rj} + A_{ir} \frac{\partial A_{rj}}{\partial\Omega_{pq}} \right) + \left(\frac{\partial A_{iz}}{\partial\Omega_{pq}} A_{zj} + A_{iz} \frac{\partial A_{zj}}{\partial\Omega_{pq}} \right) \right) \\ & + \sum_{i,j,p,q} \left(\left(\frac{\partial A_{ir}}{\partial\Omega_{pq}} A_{zj} + A_{ir} \frac{\partial A_{zj}}{\partial\Omega_{pq}} \right) + \left(\frac{\partial A_{i\theta}}{\partial\Omega_{pq}} A_{\theta j} + A_{i\theta} \frac{\partial A_{\theta j}}{\partial\Omega_{pq}} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Il s'agit à présent de calculer la dérivée partielle du tenseur $A_{ij} = (\delta - \Omega)^{1/2}_{ij}$ par rapport à l'endommagement :

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial\Omega_{pq}} = \frac{\partial(\delta - \Omega)^{1/2}_{ij}}{\partial\Omega_{pq}} = \frac{1}{2} (\delta - \Omega)^{1/2}_{ik} \left(-\frac{\partial\Omega_{kj}}{\partial\Omega_{pq}} \right) = -\frac{1}{2} A^{-1}_{ik} \Delta_{kj pq} \quad (\text{B.4})$$

où Δ est le tenseur identité d'ordre 4. On rappelle que :

$$\Delta_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (\text{B.5})$$

où δ_{ij} est le tenseur identité d'ordre 2. Les équations B.3, B.4 et B.5 permettent de calculer les coefficients $\left(\frac{\partial[M(\Omega_{pq})^{-1}]_{ijkl}}{\partial\Omega_{pq}} \right)_{ijmnpq} = \frac{\partial[M(\Omega_{pq})^{-1}]_{ijmnpq}}{\partial\Omega_{pq}}$. Comme $[M(\Omega_{pq})^{-T}]_{ijmnpq} = [M(\Omega_{pq})^{-1}]_{mnpqij}$, on en déduit que $\left(\frac{\partial[M(\Omega_{pq})^{-T}]_{ijkl}}{\partial\Omega_{pq}} \right)_{ijmnpq} = \left(\frac{\partial[M(\Omega_{pq})^{-1}]_{ijkl}}{\partial\Omega_{pq}} \right)_{mnpqij}$. Les tenseurs $\frac{\partial[M(\Omega_{pq})^{-1}]_{ijkl}}{\partial\Omega_{pq}}$ et $\frac{\partial[M(\Omega_{pq})^{-T}]_{ijkl}}{\partial\Omega_{pq}}$ sont d'ordre 6. Leur dimension est $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$. Pour pouvoir effectuer des opérations avec d'autres tenseurs exprimés dans la base (rr, zz, rz, $\theta\theta$) (base (xx, yy, xy) en déformations planes), on convertit ces tenseurs en des tenseurs d'ordre 3, de dimensions $4 \times 4 \times 4$ ($3 \times 3 \times 3$ en déformations planes).

B.2 Dérivée partielle de la rigidité mécanique par rapport à l'endommagement

D'après l'équation 5.96 :

$$\mathbf{D}_e(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{M}(\boldsymbol{\Omega})^{-1} : \mathbf{D}_e^0 : \mathbf{M}(\boldsymbol{\Omega})^{-T} \quad (\text{B.6})$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial \mathbf{D}_e(\boldsymbol{\Omega})}{\partial \boldsymbol{\Omega}} = \frac{\partial (\mathbf{M}(\boldsymbol{\Omega})^{-1})}{\partial \boldsymbol{\Omega}} : \mathbf{D}_e^0 : \mathbf{M}(\boldsymbol{\Omega})^{-T} + \mathbf{M}(\boldsymbol{\Omega})^{-1} : \mathbf{D}_e^0 : \frac{\partial (\mathbf{M}(\boldsymbol{\Omega})^{-T})}{\partial \boldsymbol{\Omega}} \quad (\text{B.7})$$

L'équation A.3 permet de déterminer les tenseurs $\mathbf{M}(\boldsymbol{\Omega})^{-1}$ et $\mathbf{M}(\boldsymbol{\Omega})^{-T}$. Les équations B.3, B.4 et B.5 donnent les expressions des tenseurs $\frac{\partial (\mathbf{M}(\boldsymbol{\Omega})^{-1})}{\partial \boldsymbol{\Omega}}$ et $\frac{\partial (\mathbf{M}(\boldsymbol{\Omega})^{-T})}{\partial \boldsymbol{\Omega}}$.

B.3 Dérivées des rigidités relatives à la succion et à la contrainte thermique

D'après l'équation 5.111 :

$$\begin{cases} \beta_s(\boldsymbol{\Omega}) = \frac{9}{[(\delta - \Omega)^{-1}]_{ii}^2} \beta_s^0 \\ \beta_T(\boldsymbol{\Omega}) = \frac{9}{[(\delta - \Omega)^{-1}]_{ii}^2} \beta_T^0 \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Pour calculer $\frac{\partial \beta_s(\boldsymbol{\Omega})}{\partial \boldsymbol{\Omega}}$ et $\frac{\partial \beta_T(\boldsymbol{\Omega})}{\partial \boldsymbol{\Omega}}$, on doit calculer $\mathbf{C}_\Omega = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Omega}} \left(\frac{1}{[(\delta - \Omega)^{-1}]_{ii}^2} \right)$:

$$C_{\Omega pq} = \frac{-2}{[(\delta - \Omega)^{-1}]_{ii}^3} \frac{\partial [(\delta - \Omega)^{-1}]_{ii}}{\partial \Omega_{pq}} \quad (\text{B.9})$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial [(\delta - \Omega)^{-1}]_{ii}}{\partial \Omega_{pq}} &= \frac{\partial [(\delta - \Omega)^{-1}]_{ij} \delta_{ji}}{\partial \Omega_{pq}} \\ &= (\delta - \Omega)^{-2}_{ik} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} \right)_{kjpq} \delta_{ji} = (\delta - \Omega)^{-2}_{ik} \Delta_{kjpq} \delta_{ji} \\ &= (\delta - \Omega)^{-2}_{ik} \delta_{kp} \delta_{jq} \delta_{ji} = (\delta - \Omega)^{-2}_{ik} \delta_{kp} \delta_{iq} = (\delta - \Omega)^{-2}_{ik} \Delta_{kipq} = (\delta - \Omega)^{-2}_{pq} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Les équations B.8, B.9 et B.10 permettent de calculer $\frac{\partial \beta_s(\boldsymbol{\Omega})}{\partial \boldsymbol{\Omega}}$ et $\frac{\partial \beta_T(\boldsymbol{\Omega})}{\partial \boldsymbol{\Omega}}$.

- [1] R.K. ABUALRUB et G.Z. VOYIADJIS : On the coupling of anisotropic damage and plasticity models for ductile materials. *Int. J. Solids A/ Struct.*, 40:2611–2643, 2003.
- [2] S. ALHOLOALRADI : *Etude numérique de la localisation à l'aide de modèles de second gradient : perte d'unicité et évolution de la taille de la zone localisée*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2005.
- [3] A.A. ALONSO, A. GENS et A. JOSA : A constitutive model for partially saturated soils. *Géotechnique*, 40(3):405–430, 1990.
- [4] C. ARSON et B. GATMIRI : Excavation damage in unsaturated porous media. *Key Engineering Materials, Advances in Fracture and Damage Mechanics VII.*, 385-387:137–140, 2008.
- [5] C. ARSON et B. GATMIRI : On damage modelling in unsaturated clay rocks. *Physics and Chemistry of the Earth*, 33:S407–S415, 2008.
- [6] C. ARSON et B. GATMIRI : Outline of the modelling of the excavation damaged zone in geological barriers. *In Proc. First European Conference on Unsaturated Soils, Durham, Royaume-Uni, 2-4 juillet 2008, CRC Press, eds : D.G. Toll, C.E. Augarde, D. Gallipoli, S.J. Wheeler*, pages 695–701, 2008.
- [7] C. ARSON et B. GATMIRI : Damage in unsaturated porous media : theory, algorithm and numerical application. *In Poromechanics IV, Proceedings of the 4th Biot Conference on Poromechanics, Columbia University, New-York, Etats-Unis, 8-10 juin 2009, Ling, Smyth and Betti eds, DESTech Publications*, pages 214–219, 2009.
- [8] C. ARSON et B. GATMIRI : A mixed damage model for unsaturated porous media. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, section Mécanique*, 337:68–74, 2009.
- [9] C. ARSON et B. GATMIRI : Numerical study of a new thm damage model for unsaturated geomaterials. *In Proc. 4th Asia-Pacific Conference on Unsaturated Soils, New-Castle, Australie, 23-25 novembre 2009*, page 6 p., 2009.
- [10] C. ARSON et B. GATMIRI : Parametric study on the performance of a thm damage model for unsaturated porous media. *In Proc. 1st International Symposium on Computational Geomechanics, Juan-les-Pins, France, 29 april - 1er mai 2009*, pages 53–562, 2009.
- [11] H. ASKES, J. PAMIN et R. de BORST : Dispersion analysis and element-free galerkin solutions of second- and fourth-order gradient-enhanced damage models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49, 2000.

- [12] H. ASKES et L.J. SLUYS : Explicit and implicit gradient series in damage mechanics. *European Journal of Mechanics and Solids*, 21, 2002.
- [13] R. BARGELLINI : *Contribution d'une approche discrète à la modélisation de l'endommagement de matériaux microfissurés*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers et Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique, Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées, 2006.
- [14] M. BART, J.F. SHAO, D. LYDZBA et M. HAJI-SOTOUDEH : Coupled hydromechanical modeling of rock fractures under normal stress. *Canadian Geotechnical Journal*, 41, 2004.
- [15] N. BARTON et E.F. DEQUADROS : Joint aperture and roughness in the prediction of flow and groutability of rock masses. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences (special issue, paper 252)*, 34, 1997.
- [16] Z. BAZANT : Why continuum damage is nonlocal : micromechanics arguments. *Journal of Engineering mechanics, ASCE*, 117, 1991.
- [17] Z. BAZANT et M. JIRASEK : Nonlocal integral formulations of plasticity and damage : survey of progress. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 128, 2002.
- [18] Z. BAZANT et J. OZBOLT : Nonlocal microplane model for fracture, damage, and size effect in structures. *Journal of Engineering mechanics, ASCE*, 116, 1990.
- [19] J. BEAR et G.F. PINDER : Porous medium deformation in multiphase flow. *Journal of The Engineering Mechanics Division, ASCE*, 104(EM4):881–894, 1978.
- [20] T. BELYTSCHKO et M. KULKARNI : *On imperfections and spatial gradient regularization in strain softening viscoplasticity*, chapitre 107, pages 1–5. American Society of Mechanical Engineers, 1990.
- [21] M.W. BIEGLER et M.M. MEHRABADI : An energy-based constitutive model for anisotropic solids subject to damage. *Mechanics of Materials*, 19, 1995.
- [22] M. BIOT : General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, 12, 1941.
- [23] G. BOLZON, B.A. SCHREFLER et O.C. ZIENKIEWICZ : Elastoplastic soil constitutive laws generalized to partially saturated states. *Géotechnique*, 46(2):279–289, 1996.
- [24] B. BONIN : Deep geological disposal in argillaceous formations : studies at the tournemire test site. *J. of Contaminant Hydrology*, 35, 1998.
- [25] R.I. BORJA : On the mechanical energy and effective stress in saturated and unsaturated porous continua. *International Journal of Solids and Structures*, 43:1764–1786, 2006.
- [26] M.J. BOULON, A.P.S. SELVADURAI, H. BENJELLOUN et B. FEUGA : Influence of rock joint degradation on hydraulic conductivity. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr.*, 30:1311–1317, 1993.
- [27] F. BOURGEOIS, N. BURLION et J.F. SHAO : Modelling of elastoplastic damage in concrete due to desiccation shrinkage. *Int. J. for Num. and Anal. Meth. in Geomech.*, 26, 2002.
- [28] R.H. BROOKS et A.T. COREY : Properties of porous media affecting fluid flow. *J. irrig. Drain. Div., Am. Soc. Civil. Eng.*, 92:61–88, 1966.
- [29] Jr.D.H. BROWNELL, S.K. GRAG et J.W. PRITCHETT : Governing equations for geothermal reservoirs. *Water Resource Research*, 13:929–934, 1977.
- [30] C. BRUNET, J.J. FRY et J. BOULET : Lois de comportement de sol intégrés dans le code aster. domaine d'application et description des paramètres dans le cadre d'une modélisation thermo-hydro-mécanique. *rapport d'activité EDF, ref. IH.AVCY.BUT.002*, page 15p., 2000.

-
- [31] R.G. CAMPANELLA et J.K. MITCHELL : Influence of temperature variations on soil behaviour. *Journal of the Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 94(SM3):709–734, 1968.
- [32] J.P. CARTER et J.R. BOOKER : Finite element analysis of coupled thermoelasticity. *Computers and Structures*, 31(1):75–80, 1989.
- [33] E. CEY, D. RUDOLPH et R. THERRIEN : Simulation of ground water recharge dynamics in partially saturated fractured soils incorporating spatially variable fracture aperture. *Water Resources Research*, 42, 2006.
- [34] R. CHAMBON, D. CAILLERIE et C. TAMAGNINI : A finite deformation second gradient theory of plasticity. *CR. Acad. Sci. Paris, T.329, série IIb*, pages 797–802, 2001.
- [35] R. CHAMBON, D. CAILLERIE et C. TAMAGNINI : A strain space gradient plasticity theory for finite strain. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193:2797–2828, 2004.
- [36] C. CHAVANT, S. GRANET et R. FERNANDES : Thermo-hydro-mechanical numerical modelling : application to a geological nuclear waste disposal. In *Proc. GeoDenver 2007, GSP 157 Computer Applications in Geotechnical Engineering*, page 10p., 2007.
- [37] D. CHEN et S. MAHADEVAN : Cracking analysis of plain concrete under coupled heat transfer and moisture transport processes. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 33: 400–410, 2007.
- [38] A.S. CHIARELLI et J.F. SHAO : Modélisation élastoplastique couplée à l'endommagement anisotrope induit pour les argilites. *Revue Française de Génie Civil*, 6(1):115–130, 2002.
- [39] M. CHIJIMATSU, T. FUJITA, A. KOBAYASHI et M. NAKANO : Experiment and validation of numerical simulation of coupled thermal, hydraulic and mechanical behaviour in the engineered buffer materials. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 24:403–424, 2000.
- [40] U. CICEKLI, G.Z. VOYIADJIS et R.K. ABUALRUBUB : A plasticity and anisotropic damage model for plain concrete. *International Journal of plasticity*, 23:1874–1900, 2007.
- [41] I.F. COLLINS et G.T. HOULSBY : Application of thermomechanical principles to the modelling of geotechnical materials. *Proceedings Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 453(1964):1975–2001, 1997.
- [42] J.P. CORDEBOIS et F. SIDOROFF : Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité. *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, (n° spécial):45–60, 1982.
- [43] A.T. COREY : Measurement of water and air permeability in unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, 21:7–10, 1957.
- [44] O. COUSSY et P. DANGLA : *Approche énergétique du comportement des sols non saturés*, chapitre 4, pages 137–174. Hermès, 2002.
- [45] V. DAKSHANAMURTHY et D.G. FREDLUND : A mathematical model predicting moisture flow in an unsaturated soil under hydraulic and temperature gradients. *Water Resources Research*, 17:714–722, 1981.
- [46] P. DANGLA : *Plasticité et hystérésis*, chapitre 6, pages 231–273. Hermès, 2002.
- [47] P. DANGLA, L. MALINSKY et O. COUSSY : Plasticity and imbibition-drainage curves for unsaturated soils : a unified approach. In *Proc. Numerical Models in Geomechanics, Pietruszczak and Pande (eds)*, Balkema, Rotterdam, pages 141–146, 1997.
- [48] R. de BORST, J. PAMIN et M.G.D. GEERS : On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis. *Eur. J. Mech. A/ Solids*, 18:939–962, 1999.

- [49] J.H.P. de VREE, W.A.M. BRECKELMANS et M.A.J. van GILS : Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers and Structures*, 55(4):581–588, 1995.
- [50] P. DEBUHAN et L. DORMIEUX : On the validity of the effective stress concept for assessing the strength of saturated porous materials : a homogenization approach. *J. Mech. Phys. Solids*, 44:1649–1667, 1996.
- [51] P. DELAGE et Y.J. CUI : L'eau dans les sols non saturés. *Techniques de l'ingénieur*, 1:1–20, 2000.
- [52] P. DELAGE et Y.J. CUI : Comportement mécanique des sols non saturés. *Techniques de l'ingénieur*, 1:1–19, 2001.
- [53] K.R. DEMARS et R.D. CHARLES : Soil volume changes induced by temperature cycling. *Canadian Geotechnical Journal*, 19:188–194, 1982.
- [54] R. DESMORAT : Dissymétrie de comportement élastique anisotrope couplé ou non à l'endommagement. *C.R. Acad. Sci. Paris, T.328, Série Iib*, pages 445–450, 2000.
- [55] A. DRAGON et D. HALM : Modélisation de l'endommagement par méso-fissuration : comportement unilatéral et anisotropie induite. *C.R. Acad. Sci. Paris, T. 322(Série Iib)*:275–282, 1996.
- [56] A. DRAGON, D. HALM et T. DÉSOYER : Anisotropic damage in quasi-brittle solids : modelling, computational issues and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 183:331–352, 2000.
- [57] W. DURNER : Hydraulic conductivity estimation for soils with heterogeneous pore structure. *Water Resources Research*, 30(2):211–223, 1994.
- [58] T.V. EDGAR, J.D. NELSON et D.B. MACWHORTER : Nonisothermal consolidation in unsaturated soil. *Journal of Geotechnical Engineering*, 115:1351–1372, 1989.
- [59] N.E. EDLEFSEN et A.B.C. ANDERSEN : Thermodynamics of soil moisture. *Hilgardia*, 15:31–298, 1943.
- [60] J. EWEN et H.R. THOMAS : Heating unsaturated medium sand. *Géotechnique*, 39(3):455–470, 1989.
- [61] G. FABRE et F. PELLET : Creep and time-dependent damage in argillaceous rocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 43:950–960, 2006.
- [62] O.T. FAROUKI : Thermal properties of soils. *Trans Tech Publications, series on Rock and Soil Mechanics*, 11:20–55, 102–119, 1986.
- [63] D.G. FREDLUND et N.R. MORGENSTERN : Stress state variables for unsaturated soils. *J. of the Soil Mechanics and Foundations Division*, pages 447–466, 1977.
- [64] M. FRÉMOND et B. NEDJAR : Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International Journal of Solids and Structures*, 33, 1996.
- [65] D. GALLIPOLI, A. GENS, R. SHARMA et J. VAUNAT : An elasto-plastic model for unsaturated soil including the effects of suction and degree of saturation on mechanical behaviour. *Géotechnique*, 53(1):123–135, 2003.
- [66] W.R. GARDNER : Some steady state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water-table. *J. Soil Sci.*, 85:228–232, 1958.
- [67] B. GATMIRI : Modification de u-dam. *Rapport du CERMES*, page 62 p., 1992.
- [68] B. GATMIRI : Analysis of fully coupled behaviour of unsaturated porous media under stress, suction and temperature gradient. *Rapport du CERMES*, page 58 p., 1997.

- [69] B. GATMIRI : Thermo-hydro-mécanique des sols saturés et non saturés dans le code aster. *Rapport du CERMES*, page 81 p., 2000.
- [70] B. GATMIRI : Framework of a non linear fully coupled thermo-hydro-mechanical behaviour of unsaturated porous media. *Keynote lecture of the 3rd Iranian International Conference on Geotechnical Engineering and Soil Mechanics, Téhéran, Iran, 9-11 décembre 2002*, 2002.
- [71] B. GATMIRI : Non linear behaviour of a multiphase engineering barrier in nuclear waste disposal. *Actes de la conférence 16th ICSMGE, Osaka, Japon, septembre 2005*, pages 2261–2264, 2005.
- [72] B. GATMIRI et C. ARSON : θ -stock, a powerful tool for thermohydrromechanical behaviour and damage modelling of unsaturated porous media. *Computers and Geotechnics*, 2008.
- [73] B. GATMIRI et P. DELAGE : A formulation of fully coupled thermal-hydraulic-mechanical behaviour of saturated porous media - numerical approach. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 21, 1997.
- [74] B. GATMIRI et A. HOOR : Excavation effect on the thermo-hydro-mechanical behaviour of a geological barrier. *Physics and Chemistry of the Earth*, 32(8-14):947–956, 2007.
- [75] B. GATMIRI, B. JENAB-VOSSOUGHFI et P. DELAGE : Validation of θ -stock, finite element software for the analysis of thermo-hydro-mechanical behaviour of engineered clay barriers. *Actes du NAFEMS WORLD CONGRESS 99 on Effective Engineering Analysis*, 1:645–656, 1999.
- [76] B. GATMIRI, M. SEYEDI, P. DELAGE et J.-J. FRY : A new suction-based mathematical model for thermo-hydro-mechanical behavior of unsaturated porous media. *Actes de la conférence NUMOG VI, Quebec, Canada, 2-4 juillet 1997*, pages 291–296, 1997.
- [77] F. GATUINGT, F. RAGUENEAU et R. DESMORAT : Implantation numérique d'un modèle d'endommagement anisotrope non local. *Revue Européenne de Génie Civil*, 10:391–404, 2006.
- [78] D. GAWIN, P. BAGGIO et B.A. SCHREFLER : Coupled heat, water and gas flow in deformable porous media. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 20:969–987, 1995.
- [79] A. GENS, A.J. GARCIA-MOLINA, S. OLIVELLA, E.E. ALONSO et F. HUERTAS : Analysis of a full scale in situ test simulating repository conditions. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 22:515–548, 1998.
- [80] M. GERAMINEZAD et S.K. SAXENA : A coupled thermoelastic model for saturated-unsaturated- porous media. *Géotechnique*, 36(4):539–550, 1986.
- [81] H.H. GERKE et M.T. VANGENUCHTEN : A dual-porosity model for simulating the preferential movement of water and solutes in structured porous media. *Water Resources Research*, 29(2):305–319, 1993.
- [82] P. GERMAIN : The method of virtual power in continuum mechanics. part 2 : Microstructure. *J. Appl. Math.*, 25(3):556–575, 1973.
- [83] P. GERMAIN : La methode des puissances virtuelles en mecanique des milieux continus. premiere partie : theorie du second gradient. *J. de Mecanique*, 12(2):235–274, 1973.
- [84] A. GIRAUD : *Couplages thermo-hydro-mécaniques dans les milieux poreux peu perméables : application aux argiles profondes*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1993.
- [85] J. GRAHAM, J.M. OSWELL et M.N. GRAY : The effective stress concept in saturated sand-clay buffer. *Canadian Geotechnical Journal*, 29:1033–1043, 1992.

- [86] W.G. GRAY et A. SCHREFLER : Thermodynamic approach to effective stress in partially saturated porous media. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 20:521–538, 2001.
- [87] P. GRECIAS et J.P. MIGEON : Tec et Doc), chapter = 25, pages = 523-534,, 1999.
- [88] D.W. GREEN, H. DABIRI et C.F. WEINAUG : Numerical modeling of unsaturated groundwater flow and comparison of the model to a field experiment. *Water Resources Research*, 6:862–873, 1970.
- [89] J.P. GWO, P.M. JARDINE, G.V. WILSON et G.T. YEH : A multiple-pore-region concept to modeling mass transfer in subsurface media. *J. Hydrol.*, 164:217–237, 1995.
- [90] D. HALM et A. DRAGON : An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials. *Eur. J. Mech. A/ Solids*, 17(3):439–460, 1998.
- [91] D. HALM et A. DRAGON : Modélisation de l'endommagement par mésofissuration du granite. *Revue Française de Génie Civil*, 17:21–33, 2002.
- [92] N.R. HANSEN et H.L. SCHREYER : A thermodynamically consistent framework for theories of elastoplasticity coupled with damage. *Int. J. Solids and Structures*, 31(3):359–389, 1994.
- [93] F. HOMAND, A.S. CHIARELLI et D. HOXHA : Caractéristiques physiques et mécaniques du granite de la vienne et de l'argilite de l'est. *Revue Française de Génie Civil*, 6, 2002.
- [94] F. HOMAND-ETIENNE, D. HOXHA et J.F. SHAO : A continuum damage constitutive law for brittle rocks. *Computers and Geotechnics*, 22, 1998.
- [95] Z. HOU : Mechanical and hydraulic behavior of rock salt in the excavation disturbed zone around underground facilities. *Int. J. Rock Mech. and Min. Sci.*, 40:725–738, 2003.
- [96] G.T. HOULSBY : The work input to an unsaturated granular material. *Géotechnique*, 47(1):193–196, 1997.
- [97] T. HUECKEL et M. BORSETTO : Thermoplasticity of saturated soils and shales : Constitutive equations. *Journal of Geotechnical Engineering (ASCE)*, 116(12):1765–1777, 1990.
- [98] T. HUECKEL et R. PELLEGRINI : *Modeling of thermal failure of saturated clays*, pages 91–90. Elsevier, New-York, 1989.
- [99] K. HUTTER, L. LALOUI et L. VUILLET : Thermodynamically based mixture models of saturated and unsaturated soils. *Mechanics of cohesive-frictional materials*, 4:295–338, 1999.
- [100] S. IRMAY : On the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Trans. Amer. Geophys. Uni.*, 35:463–468, 1954.
- [101] P. ISAKSSON et R. HAGGLUND : Analysis of the strain field in the vicinity of a crack-tip in an in-plane isotropic paper material. *Int. J. Solids and Min. Struct.*, 44:659–671, 2007.
- [102] B. JENAB-VOSSOUGH : Etude numérique de la modélisation thermo-élasto-plastique des sols non saturés. *Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*, page 253 p., 2000.
- [103] Y. JIA, X.C. SONG, G. DUVEAU, K. SU et J.F. SHAO : Elastoplastic damage modelling of argillite in partially saturated condition and application. *Physics and Chemistry of the Earth*, 32, 2007.
- [104] Y. JIA, Y. WILEVEAU, K. SU, G. DUVEAU et J.F. SHAO : Thermo-hydro-mechanical modelling of an in situ heating experiment. *Géotechnique*, 57:845–855, 2007.
- [105] M. JIRASEK : Nonlocal models for damage and fracture : comparison of approaches. *Int. J. Solids and Struct.*, 35, 1998.

-
- [106] M. KACHANOV : Effective elastic properties of cracked solids : critical review of some basic concepts. *Appl. Mech. Rev.*, 45, 1992.
- [107] T. KANNO, T. FUJITA, S. TAKEUCHI, H. ISHIKAWA, K. HARA et M. NAKANO : Coupled thermo-hydro-mechanical modelling of bentonite buffer material. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 23:1281–1307, 1999.
- [108] G.W.C. KAYE et T.H. LABY : Tables of physical and chemical constants. *Longman*, 14e édition, 1973.
- [109] M. Mozayan KHAZARI : Etude théorique et numérique de l'endommagement en milieu poreux non saturé non isotherme. Mémoire de D.E.A., Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, juin 2009.
- [110] J.M. KÖHNE, S. KÖHNE et H.H. GERKE : Estimating the hydraulic functions of dual permeability models from bulk soil data. *Water Resources Research*, 38:26/1–26/11, 2002.
- [111] Y. KOGHO, M. NAKANO et T. MIYAZAKI : Theoretical aspects of constitutive modelling for unsaturated soils. *Soils and Foundations*, (33):49–63, 1993.
- [112] G. KOVACS : Seepage hydraulics. *Elsevier*, 1981.
- [113] E. KUHL et E. RAMM : Simulation of strain localization with gradient enhanced damage models. *Computational Materials Science*, 16, 1999.
- [114] E.M. KWICKLIS et R.W. HEALY : Numerical investigation of steady liquid water flow in a variably saturated fracture network. *Water Resources Research*, 29, 1993.
- [115] T.E. LACY, D.L. MACDOWEL et R. TALREJA : Gradient concepts for evolution of damage. *Mechanics of Materials*, 31, 1999.
- [116] D. LASRY et T. BELYTSCHKO : Localization limiters in transient problems. *Int. J. Solids and Struct.*, 24(6), 1988.
- [117] T. LASSABATÈRE : *Barrières ouvragées de stockage des déchets nucléaires*, chapitre 8, pages 349–385. Hermès, 2002.
- [118] J. LEMAÎTRE et J.L. CHABOCHE : *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, France, 1985.
- [119] J. LEMAÎTRE et R. DESMORAT : *Engineering Damage Mechanics. Ductile, creep, fatigue and brittle failure*. Springer - Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.
- [120] R.W. LEWIS, P. BETTESS et E. HINTON : *Numerical Methods in Coupled Systems*. J. Wiley and sons, 1984.
- [121] R.W. LEWIS et B.A. SCHREFLER : *The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media*. J. Wiley and sons, New-York, second edition, 1998.
- [122] M.J. LIPPMAN, T.N. NARASIMHAN et P.A. WHITHERSPOON : Numerical simulation of reservoir compaction in liquid-dominated geothermal systems. *In Proc. of the 2nd Int. Symp. of Land Subsidence, Association of Hydrological Sciences, Anaheim, CA, USA*, pages 179–189, 1976.
- [123] H.H. LIU et G.S. BODVARSSON : Constitutive relations for unsaturated flow in a fracture network. *Journal of Hydrology*, 252:116–125, 2001.
- [124] H.H. LIU, C. DOUGHTY et G.S. BODVARSSON : An active fracture model for unsaturated transport in fractured rocks. *Water Resources Research*, 34:2633–2646, 1998.

- [125] H.H. LIU, R. SALVE, J.S. WANG, G.S. BODVARSSON et D. HUDSON : Field investigation into unsaturated flow transport in a fault : model analyses. *Journal of Contaminant Hydrology*, 74:39–59, 2004.
- [126] A. LLORET et E.E. ALONSO : State surfaces for partially saturated soils. In *11th Inter. Conf. on soil Mech. and Found. Eng., San Francisco*, volume 2, pages 557–562, 1985.
- [127] E. LORENTZ et S. ANDRIEUX : A variational formulation for nonlocal damage models. *Int. J. of Plasticity*, 15, 1999.
- [128] B. LORET et N. KHALILI : An effective stress elastic-plastic model for unsaturated porous media. *Mechanics of Materials*, 34:97–116, 2002.
- [129] Z.H. LU, Z.H. CHEN, X.W. FANG, J.F. GUO et H.Q. ZHOU : Structural damage model of unsaturated expansive soil and its application in multi-field couple analysis on expansive soil slope. *Applied Mathematics and Mechanics, English edition*, 27(7):891–900, 2006.
- [130] L. LUCKNER et D.R. Nielsen M.T. VANGENUCHTEN : A consistent set of parametric models for the two-phase flow of immiscible fluids in the subsurface. *Water Resources Research*, 25(10):2187–2193, 1989.
- [131] A.V. LUIKOV : *Heat and mass transfer in capillary porous bodies*. Pergamon, Oxford, Royaume-Uni, 1966.
- [132] F. MARTIN et A. SAÏTTA : *Cours de mécanique des roches et travaux souterrains. Concepts de base*. Centre d’Etude des Tunnels, 2005.
- [133] J.B. MARTINO et N.A. CHANDLER : Excavation-induced damage studies at the underground research laboratory. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 41:1413–1426, 2004.
- [134] T. MATSUSHIMA, R. CHAMBON et D. CAILLERIE : Second gradient models as a particular case of microstructured models : a large strain finite element analysis. *C.R. Acad. Sci. Paris, T.328, série IIb*, pages 179–186, 2000.
- [135] E.L. MATYAS et A.S. RADHAKRISHNA : Volume change characteristics of partially saturated soils. *Géotechnique*, 18:432–448, 1968.
- [136] J. MAZARS : *Application de la mécanique de l’endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris, 1984.
- [137] D. MEIRI : Two-phase flow simulation of air storage in an aquifer. *Water Resources Research*, 10:795–800, 1981.
- [138] A. MENZEL et P. STEINMANN : A theoretical and computational framework for anisotropic continuum damage mechanics at large strains. *International Journal of Solids and Structures*, 38:9505–9523, 2001.
- [139] J. MERTENS, W. BASTIAENS et B. DEHANDSCHUTTER : Characterisation of induced discontinuities in the boom clay around the underground excavations (urf, mol, belgium). *Applied clay Science*, 26:413–428, 2004.
- [140] R.D. MINDLIN : Micro-structure in linear elasticity. *Archiv Rational Mech. Anal.*, 16:51–78, 1964.
- [141] A. MODARESSI et J.J. FRY : *Barrages et remblais*, chapitre 7, pages 275–348. Hermès, 2002.
- [142] H.J. MOREL-SEYTOUX : Analytical results for prediction of variable rainfall infiltration. *Journal of Hydrology*, 59:209–230, 1982.

-
- [143] T.N. NARASIMHAN et P.A. WITHERSPOON : Numerical model for saturated-unsaturated flow in deformable porous media, part iii : Applications. *Water Resources Research*, 14: 1017–1034, 1978.
- [144] G.C. NAYAK et O.C. ZIENKIEWICZ : Elasto-plastic stress analysis. a generalization for various constitutive relations including strain softening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5:113–135, 1972.
- [145] G.C. NAYAK et O.C. ZIENKIEWICZ : Note on the "alpha"-constant stiffness method for the analysis of non-linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 4:579–582, 1972.
- [146] B. NEDJAR : Elastoplastic-damage modelling including the gradient of damage : formulation and computational aspects. *Int. J. Solids and Struct.*, 38:5421–5451, 2001.
- [147] S. NEMAT-NASSER et M. HORI : *Geometric Foundations*, chapitre 15, pages 543–569. North-Holland, 1993.
- [148] T.S. NGUYEN et A.P.S. SELVADURAI : A model for coupled mechanical and hydraulic behaviour of a rock joint. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 22:29–48, 1998.
- [149] M. NUTH et L. LALOUI : Effective stress concept in unsaturated soils : Clarification and validation of a unified framework. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, sous presse:31p., 2008.
- [150] M. ORTIZ : A constitutive theory for the inelastic behaviour of concrete. *Mech. Mater.*, 4:67–93, 1985.
- [151] H. OTHMER, B. DIEKKRÜGER et M. KUTILEK : Bimodal porosity and unsaturated hydraulic conductivity. *Soil Sci.*, 152:139–150, 1991.
- [152] J. PAMIN : Gradient plasticity and damage models : a short comparison. *Computational Materials Science*, 32:472–479, 2005.
- [153] F. PELLET et G. FABRE : Damage evaluation with p-wave velocity measurements during uniaxial compression tests on argillaceous rocks. *International Journal of Geomechanics*, 7:431–436, 2007.
- [154] F. PELLET, A. HAJDU, F. DELERUYELLE et F. BESNUS : A viscoplastic model including anisotropic damage for the time dependent behaviour of rock. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29:941–970, 2005.
- [155] F.L. PELLET : Time dependent evolution of the excavation damaged zone around underground openings for radioactive wastes repositories. *In Proc. 41st US Rock Mechanics Symposium (ARMA), Golden, Colorado*, page 9p., 2006.
- [156] F.L. PELLET et M. ROSEFID : Time dependent behavior of rock and practical implications to tunnel design. *In Proc. 11th International Congress on Rock Mechanics, Lisboa, Portugal*, pages 1079–1082, 2007.
- [157] V. PENSÉE, D. KONDO et L. DORMIEUX : Micromechanical analysis of anisotropic damage in brittle materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 128, 2002.
- [158] J.R. PHILIP et D.A. de VRIES : Moisture movement in porous materials under temperature gradients. *Transactions, American Geophysical Union*, 38, 1957.
- [159] S. PIETRUSZCZAK et G.N. PANDE : On the mechanics of partially saturated soils. *Computers and Geotechnics*, 12:55–71, 1991.

- [160] G. PIJAUDIER-CABOT et L. JASON : Continuum damage modelling and some computational issues. *Revue Française de Génie Civil*, 6:991–1017, 2002.
- [161] X. PINTADO, A. LEDESMA et A. LLORET : Backanalysis of thermohydraulic bentonite properties from laboratory tests. *Engineering Geology*, 64:91–115, 2002.
- [162] S.M. PIRES-DOMINGUES, H. COSTA-MATTOS et F.A. ROCHINHA : Modelling of nonlinear damage on elastic brittle materials. *Mechanics Research Communications*, 25, 1998.
- [163] D.W. POLLOCK : Simulation of fluid flow and energy transport processes associated with high-level radioactive waste disposal in unsaturated alluvium. *Water Resources Research*, 22, 1986.
- [164] R.J. PREECE : The measurement and calculation of physical properties of cable bedding sands. part 2 : Specific thermal capacity, thermal conductivity, and temperature ratio across "air" filled pores. *Technical Report Laboratory note, Central Electricity Generating Board, Londres, Royaume-Uni, (RD/L/N 231/74)*, 1975.
- [165] W.H. PRESS, B.P. FLANNERY, S.A. TEUKOLSKY et W.T. VETTERLING : *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1986.
- [166] K. PRUESS, J.S.Y. WANG et Y.W. TSANG : On thermohydrologic conditions near high-level nuclear wastes emplaced in partially saturated tuff. 1. simulation studies with explicit consideration of fracture effects. *Water Resources Research*, 26:1235–1248, 1990.
- [167] K. PRUESS, J.S.Y. WANG et Y.W. TSANG : On thermohydrologic conditions near high-level nuclear wastes emplaced in partially saturated tuff. 2. effective continuum approximation. *Water Resources Research*, 26:1249–1261, 1990.
- [168] J.N. REDDY : *An introduction to nonlinear finite element analysis*. Oxford University Press, 2004.
- [169] J.R. RICE : Inelastic constitutive relations for solids : an internal-variable theory and its application to metal plasticity. *Journal of the Mechanics and the Physics of Solids*, 19:433–455, 1971.
- [170] B.G. RICHARDS et C.Y. CHAN : Predictions of pore pressures in earth dams. *In Proc. of the 7th ICSMFE*, pages 355–362, 1969.
- [171] R.L. ROLLINS, M.G. SPANGLER et D. KIRKHAM : Movement of soil moisture under a thermal gradient. *Highw. Res. Bd. Bull.*, 33:492–508, 1954.
- [172] M.E. ROMERO : Thèse de doctorat.
- [173] J. RUTQVIST, L. BORGESSION, M. CHIJIMATSU, T.S. NGUYEN, L. JING, J. NOORISHAD et C.F. TSANG : Coupled thermo-hydro-mechanical analysis of a heater test in fractured rock and bentonite at kamaishi mine - comparison of field results to predictions of four finite element codes. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 38:129–142, 2001.
- [174] R.L. SCHIFFMAN : A thermoelastic theory of consolidation. environmental and geophysical heat transfer. *Heat Transfer Division (ASCE)*, 1:78–84, 1971.
- [175] B.A. SCHREFLER, X.Y. ZHAN et L. SIMONI : A coupled model for water flow, air flow and heat flow in deformable porous media. *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow*, 5:531–547, 1995.
- [176] R.F. SCOTT : *Principles of Soil Mechanics*. Addison-Wesley, Massachusetts, USA, 1963.
- [177] J.F. SHAO, N. ATA et O. OZANAM : Study of desaturation and resaturation in brittle rock with anisotropic damage. *Engineering geology*, 81:341–352, 2005.

- [178] J.F. SHAO, G. DUVEAU, F. BOURGEOIS et W.Z. CHEN : Elastoplastic damage modeling in unsaturated rocks and applications. *International Journal of Geomechanics*, 6(2):119–130, 2006.
- [179] J.F. SHAO et J.W. RUDNICKI : A microcrack-based continuous damage model for brittle geomaterials. *Mechanics of Materials*, 32:607–619, 2000.
- [180] J.F. SHAO, H. ZHOU et K.T. CHAU : Coupling between anisotropic damage and permeability variation in brittle rocks. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29:1231–1247, 2005.
- [181] D. SHENG, S.W. SLOAN et A. GENS : A constitutive model for unsaturated soils : thermomechanical and computational aspects. *Computational Mechanics*, 33:453–465, 2004.
- [182] J.C. SIMO et T.J.R. HUGHES : *General return mapping algorithms for rate-independent plasticity*, pages 221–231. Elsevier Science Publications, 1987.
- [183] D. SUBIT, P. CHABRAND et C. MASSON : A micromechanical model to predict damage and failure in biological tissues. application to the ligament-to-bone attachment in the human knee joint. *Journal of Biomechanics*, 42:261–265, 2009.
- [184] J. SULEM et H. OUFFROUKH : Shear banding in drained and undrained triaxial tests on a saturated sandstone : porosity and permeability evolution. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 43:292–310, 2006.
- [185] F. SUPARTONO et F. SIDOROFF : Anisotropic damage modelling for brittle elastic materials. *Archives of Mechanics*, 37:521–534, 1985.
- [186] T. SVEDBERG et K. RUNESSON : A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage. *International Journal of Plasticity*, 13(6-7):669–696, 1997.
- [187] G. SWOBODA et Q. YANG : An energy-based damage model of geomaterials 1. formulation and numerical results. *Int. J. Solids and Struct.*, 36:1719–1734, 1999a.
- [188] G. SWOBODA et Q. YANG : An energy-based damage model of geomaterials 2. deduction of damage evolution laws. *Int. J. Solids and Struct.*, 36:1735–1755, 1999b.
- [189] W.H. TAI : Computer simulation of plastic damage evolution in cracked body of low-carbon steel. *Engineering Fracture Mechanics*, 54:141–146, 1996.
- [190] C. TAMAGNINI, R. CHAMBON et D. CAILLERIE : A second-gradient elastoplastic cohesive-frictional model for geomaterials. *C.R. Acad. Sci. Paris, T.329, série IIb*, pages 735–739, 2001.
- [191] R. TAMAGNINI : An extended cam-clay model for unsaturated soils with hydraulic hysteresis. *Géotechnique*, 54(3):223–228, 2004.
- [192] C.A. TANG, L.G. THAM, L.G. LEE, P.K.K. YANG et L.C. LI : Coupled analysis of flow, stress and damage (fsd) in rock failure. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 39:477–489, 2002.
- [193] W. Kelvin (W. THOMSON) : Elements of a mathematical theory of elasticity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 146:481–498, 1856.
- [194] B. TIE : Eléments finis en élasticité linéaire. *Cours de Master, Ecole Centrale de Paris*, page 61 p., 2004.
- [195] D.G. TOLL : A framework for unsaturated soil behaviour. *Géotechnique*, 40:31–44, 1990.

- [196] C.F. TSANG, F. BERNIER et C. DAVIES : Geohydromechanical processes in the excavation damaged zone in crystalline rock, rock salt, and indurated and plastic clays - in the context of radioactive waste disposal. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 42:109–125, 2005.
- [197] M.Th. VANGENUCHTEN : A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44:892–898, 1980.
- [198] I. VARDOULAKIS : Higher order constitutive models. *Revue Française de Génie Civil*, 4:187–206, 2000.
- [199] I. VARDOULAKIS et J. SULEM : *Second-grade plasticity theory for geomaterials*. Blackie Academic and Professional), chapter = 10, pages = 282-425,, 1995.
- [200] H.H. VAZIRI et H.A. CHRISTIAN : Application of terzaghi's consolidation theory to nearly saturated soils. *Canadian Geotechnical Journal*, 31:311–317, 1994.
- [201] M.V. VILLAR, J. CUEVAS, A.M. FERNANDEZ et P.L. MARTIN : Effects of the interaction of heat and water flow in compacted bentonite. *Proc. of the Int. workshop on thermomechanics of clays and clay barriers (ISMES), Bergamo, Italy, 1993*.
- [202] M.V. VILLAR, J. CUEVAS et P.L. MARTIN : Effects of heat/water flow interaction on compacted bentonite : preliminary results. *Engineering Geology*, 41:257–267, 1996.
- [203] P.L. VIOLLET, J.P. CHABARD, P. ESPOSITO et D. LAURENCE : *Mécanique des fluides appliquée*. Presses des Ponts et Chaussées, 2002.
- [204] T. VOGEL, H.H. GERKE, R. ZHANG et M.T. VANGENUCHTEN : Modeling flow and transport in a two-dimensional dual-permeability system with spatially variable hydraulic properties. *J. Hydrol.*, 238:78–89, 2000.
- [205] Z.Q. WEI, P. EGGER et F. DESCOUEDRES : Permeability predictions for jointed rock masses. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr.*, 32:251–261, 1995.
- [206] S.J. WHEELER : An alternative framework for unsaturated soil behaviour. *Géotechnique*, 41:257–261, 1990.
- [207] S.J. WHEELER, R.S. SHARMA et S.R. BUISSON : Coupling of hydraulic hysteresis and stress-strain behaviour in unsaturated soils. *Géotechnique*, 53(1):41–54, 2003.
- [208] G.W. WILSON : *Soil evaporative fluxes for geotechnical engineering problems*. Thèse de doctorat, University of Saskatchewan, Saskatoon Sask., Canada, 1990.
- [209] T.H. YANG, J. LIU, W.C. ZHU, D. ELSWORTH, L.G. THAM et C.A. TANG : A coupled flow-stress-damage model for groundwater outbursts from and underlying aquifer into mining excavations. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 44:87–97, 2007.
- [210] J. ZHAO et X. ZHANG : On the process zone of a quasi-static growing tensile crack with power-law elastic-plastic damage. *International Journal of Fracture*, 108:383–393, 2001.
- [211] R.W. ZIMMERMAN et G.S. BODVARSSON : Effective transmissivity of two dimensional fracture networks. *International Journal of rock Mechanics and Mining Sciences, Abstracts*, 33:433–438, 1996.
- [212] R.W. ZIMMERMAN, T. HAGDU et G.S. BODVARSSON : A new lumped-parameter model for flow in unsaturated dual-porosity media. *Adv. Water Resour.*, 19:317–327, 1996.

- équation de consistance, 87
- équations du modèle THHMD, 127
- état mécanique équivalent, 77

- algorithme, 207
- anisotropie, 63

- cicatrisation, 42
- contrainte effective, 90
- contrainte endommagée, 90
- courbe de rétention, 107
- crossing effects, 65

- décomposition spectrale, 63
- déformations capillaires, 72
- déformations mécaniques, 72
- déformations thermiques, 72

- effets unilatéraux, 42

- fonction de charge, 86

- Galerkin, 169

- Inégalité de Clausius-Duhem, 32, 69
- inégalité de dissipation réduite, 69

- localisation, 35
- loi d'écoulement, 86
- longueur interne, 35

- microstructure, 38
- modèles d'endommagement micro-mécaniques, 28
- modèles d'endommagement phénoménologiques, 31

- perméabilité à l'eau liquide, 106, 107, 109
- perméabilité à la vapeur, 116

- Principe de l'Energie Elastique Equivalente, 92
- principes thermodynamiques, 67

- régularisation, 35
- réseaux de fissures multi-continua, 46
- réseaux de fissures multimodaux, 44
- résidu, 217
- réversibilité, 42
- relations de conjugaison, 69
- relations de Kuhn-Tucker, 86
- rigidités endommagées, 72, 92
- rotation des directions de fissuration, 65

- splitting effects, 65

- Theta-méthode, 181

- variables indépendantes, 66

